2021219113 2021213595 沈尉林

题目一

问题描述

自学相关知识，给定收益矩阵$A=(a_{ij})_{m*n}$推导二人零和博弈的混合策略均衡等价于一个线性规划问题以及对应对偶问题的意义，并基于以上结论和课上所学，求解以下问题，并写出求解过程。

- （1）求解以下纯策略纳什均衡问题，其中收益矩阵P为：

$$P=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 1 & 19\\ 6 & 4 & 4 & 8\\ 5 & 4 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

- （2）求解以下混合策略纳什均衡问题，其中收益矩阵M为:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 6 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

问题求解

- 推导
  设$p_{1\times m}$是玩家一的混合策略，$q_{1\times n}$是玩家二的混合策略。
  那么，对于玩家一，其混合策略应该是如下线性规划问题的解：

$$\begin{aligned} v_1 &= max\ v \\ \text{s.t.}\quad p_{1\times m} &\geq 0 \\ p\cdot\mathbf{1} &= 1 \\ pA &\geq v\cdot\mathbf{1} \end{aligned}$$

  这里**1**表示一个全为1的列向量。
  对于玩家二，其混合策略应该是如下线性规划问题的解：

$$\begin{aligned} v_2 &= max\ v \\ \text{s.t.}\quad q_{1\times n} &\geq 0 \\ q\cdot\mathbf{1} &= 1 \\ -qA^T &\geq v\cdot\mathbf{1} \end{aligned}$$

  记$w=-v$，上面这个问题就可以写作：

$$\begin{aligned} -v_2 &= min\ w \\ \text{s.t.}\quad q_{1\times n} &\geq 0 \\ q\cdot\mathbf{1} &= 1 \\ qA^T &\leq w\cdot\mathbf{1} \end{aligned}$$

  则玩家一和玩家二的混合策略互为线性规划的对偶问题，且它们具有相同的最优解。

- （1）
  对于玩家一：
  $$v_1 = max_i min_j \ a_{ij}$$
  由收益矩阵P可得
  $$v_1 = 4$$
  对于玩家二：
  $$v_2 = min_j max_i \ a_{ij}$$
  由收益矩阵P可得
  $$v_2 = 4$$
  由$v_1 = v_2$，则此矩阵博弈存在纯策略解，值为4。
- （2）由上面的推导，该问题可转化为以下的线性规划问题：
  对于玩家一：
  $$\begin{aligned} & \quad min \quad -v \\ \text{s.t.} & \quad v - pM \le 0 \\ & \quad p_1 + p_2 = 1 \\ & \quad p_1, p_2 \ge 0 \end{aligned}$$

代码实现如下：

```
C=[0 0 -1];
A=[-1 -6 1;-2 -4 1;-4 -3 1];
b=[0;0;0];
Aeq=[1 1 0];
beq=1;
LB=[0 0 0];
UB=[];
[x,fval]=linprog(C,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
x=x'
```

运行结果如下：

```
x = 0.3333 0.6667 3.3333
```

对于玩家二：
代码实现如下：

```
C=[0 0 0 1];
A=[1 2 4 -1;6 4 3 -1];
b=[0;0];
Aeq=[1 1 1 0];
```

```
beq=1;
LB=[0 0 0 0];
UB=[];
[x,fval]=linprog(C,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
x=x'
```

运行结果如下:

```
x = 0     0.3333     0.6667     3.3333
```

则该混合策略为

$$
\begin{aligned}
&p_1=\frac{1}{3},\quad p_2=\frac{2}{3}\\
&q_1=0,\quad q_2=\frac{1}{3},\quad q_3=\frac{2}{3}\\
&v_1=\frac{10}{3},\quad v_2=-\frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

题目二

问题描述

以x_t表示时刻 t 的人口，下面是阻滞增长（Logistic）模型:

$$
\begin{cases}\frac{dx}{dt}=r(1-\frac{x}{x_m})x\\ x(0)=x_0\end{cases}
$$

试解释模型中涉及的所有变量、参数，并用尽可能简洁的语言表述清楚该模型的建模思想。

问题求解

建模思想

阻滞增长模型是在指数增长模型的基本假设下进行修改，考虑到自然资源、环境条件等因素对人口增长的阻滞作用所得到。阻滞作用体现在人口增长率r上，并且随着人口数x的增加，阻滞作用会越来越大。即，若将r表示为x的函数$r(x)$，则$r(x)$为减函数。若假设$r(x)$为x的线性函数，则有

$$
r(x)=r-r^*x(r>0,r^*>0)
$$

其中，r称为人口固有增长率。若假设x_m为自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量，即当$x=x_m$时，$r(x_m)=0$，则可得

$$
r^*=\frac{r}{x_m}
$$

则

$$r(x)=r(1-\frac{x}{x_m})$$

于是，基于人口指数增长模型，有

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=r(x)x\\x(0)=x_0\end{cases}$$

代入$r(x)$，有

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=r(1-\frac{x}{x_m})x\\x(0)=x_0\end{cases}$$

变量、参数解释：

- $\frac{dx}{dt}$： t时刻人口增长速率
- r： 人口固有增长率
- x_m：自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量
- x_0：初始时刻人口数量
- x：t时刻人口数量

题目三

问题描述

若以x,y分别表示处于敌视状态下甲、乙两国的核弹头数量，在某种安全概念下，我们得到核武竞赛中甲、乙两国的安全曲线分别是：

$$f(y)=x_0*(\frac{1}{p})^y$$

$$g(x)=y_0*(\frac{1}{p})^x$$

请问这个模型是在怎样的国家安全概念下得到的？模型参数x_0,y_0,p_1,p_2的实际意义是什么？影响这些参数取值的主要因素有哪些？

问题求解

这个模型是在这样的国家安全概念下得到的：

- 认为对方一旦发起所谓第一次核打击，即倾其全部核导弹攻击己方的核导弹基地；
- 一方在经受第一次核打击后，应保存足够的核导弹，给对方重要目标以毁灭性的打击。

y_0：甲方实行第一次打击后已经没有导弹，乙方为毁灭甲方工业、交通中心等目标所需最少导弹数
x_0：乙方实行第一次打击后已经没有导弹，甲方为毁灭甲方工业、交通中心等目标所需最少

导弹数
p_2：甲方一枚导弹攻击乙方一个基地，基地未被摧毁的概率
p_1：乙方一枚导弹攻击甲方一个基地，基地未被摧毁的概率

在这个模型中，主要影响这些参数取值的因素可能包括甲、乙两国的军事实力、政治局势、国际关系等。除此之外，还可能受到各种军事战略、外交政策、武器控制条约等因素的影响。

题目四

问题描述

自学牛顿法以及最速下降法。已知

$$f(u,v)=u^2+4v^2-4u$$

请计算f在点$(1,1)$处的梯度和海塞矩阵。以$(1,1)$为当前迭代点，分别以牛顿法和最速下降法计算新的迭代点。

问题求解

先求$f(u,v)$的偏导数。令$f_u(u,v)$表示$f(u,v)$对u的偏导数，$f_v(u,v)$表示$f(u,v)$对v的偏导数。则有：

$$f_u(u,v)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}=2u-4$$

$$f_v(u,v)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=8v$$

则f在点$(1,1)$处的梯度为

$$\nabla f(1,1)=(-2,8)$$

，海森矩阵为

$$H=\begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

下面用牛顿法计算新的迭代点。
牛顿法的迭代公式为：

$$(u_{n+1},v_{n+1})=(u_n,v_n)-H^{-1}\nabla f(u_n,v_n)$$

其中H^{-1}是函数$f(u,v)$的海森矩阵的逆矩阵，它可以用函数$f(u,v)$的偏导数来求出：

$$H^{-1}=\frac{1}{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}f_{vu}}\begin{bmatrix} f_{vv} & -f_{uv} \\ -f_{vu} & f_{uu} \end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

又当前迭代点是$(1,1)$，则新的迭代点：

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

故

$$(u_{n+1},v_{n+1})=(2,0)$$

下面用最速下降法计算新迭代点。
最速下降法的迭代公式为:

$$(u_{n+1},v_{n+1})=(u_n,v_n)-\alpha\nabla f(u_n,v_n)$$

其中α是步长，$\alpha=argmin_{\alpha}(u_{n+1},v_{n+1})$
当前迭代点是$(1,1)$，则新的迭代点

$$(u_{n+1},v_{n+1})=(1,1)-\alpha\nabla f(1,1)=(1+2\alpha,1-8\alpha)$$

将$(u,v)=(1+2\alpha,1-8\alpha)$代入$f(u,v)=u^2+4v^2-4u$有

$$\phi(\alpha)=260\alpha^2-68\alpha+1$$

令$\phi(\alpha)'=520\alpha-68=0$解得$\alpha\approx 0.13$
则

$$(u_{n+1},v_{n+1})=(1.26,-0.04)$$

题目五

问题描述

通过将近半年的学习，你对本课程从整体上有何体会或认识，你认为你对本课程的投入值不值得，它对你有何帮助，可能期间你思考了一些相关的问题你愿意与人分享讨论，也可能你对本课程的教学有好的建议，一并作文以记之。

问题求解

经过一学期的学习，数学建模让我收获颇丰，我不仅培养逻辑思维和抽象思维能力，同时我还学会了如何用数学方法来分析和解决实际问题。通过学习数学建模，我可以更好地了解自己所处的环境，并利用数学方法来提高自己的决策能力和解决问题的能力，还提高了自己的数学水平，为进一步深入学习数学打下良好的基础。
同时，数学建模与我的专业人工智能密切相关。在人工智能研究中，常常需要用数学方法来分析和解决问题，并且数学建模方法可以为人工智能研究中的一些问题提供重要的理论基础。同时，人工智能技术也可以为数学建模提供有力的工具和支持，帮助人们更快速、更准确地找到解决方案。因此，数学建模和人工智能之间是一种互为补充的关系，它们可以相互促进和支持，为各自的发展做出重要贡献。
此外，在金融方面，数学建模也是一个能手。金融行业中，经常需要用到数学建模的方法和技术，来分析和解决各种问题，比如金融风险评估、资产定价、投资决策等。数学建模方法

可以为金融行业提供科学的理论依据和有效的工具，帮助金融机构更好地管理风险、优化决策、提高效率。