

问题描述

市场上有 n 种资产 S_i ($i=1,2,\dots,n$) 可以选择作为投资项目, 现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资。这 n 种资产在这一时期内购买的 S_i 平均收益率为 r_i , 风险损失率为 q_i 。投资越分散, 总的风险越小, 总体风险可用投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。购买 S_i 要付交易费(费率 p_i), 当购买额不超过给定值 u_i 时, 交易费按购买 u_i 计算。另外, 假定同期银行存款利率是 r_0 ($r_0=5\%$), 既无交易费又无风险费。

已知 $n=4$ 时相关数据如下:

S_i	收益 r_i (%)	风险 q_i (%)	费率 p_i (%)	u_i (元)
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

请给该公司设计一种投资组合方案, 即用给定的资金 M , 有选择地购买若干种资产或存银行生息, 使净收益尽可能大, 且总体风险尽可能小。

模型建立

1、建模假设

- 投资数额 M 相当大, 为了便于计算, 假设 $M=1$ 。
- 投资越分散, 总的风险越小。
- 总体风险用投资风险中 S_i 最大的一个风险来度量。
- N 种资产 S_i 之间是相互独立的。
- 在投资的这一时期内, r_i, q_i, p_i, r_0 为定值, 不受意外因素的影响。
- 净收益和总体风险只受 r_i, q_i, p_i 影响, 不受其他因素干扰。

2、模型符号

- S_i 第 i 种投资项目, 如股票, 债券等
- r_i 第 i 种投资项目的平均收益率
- q_i 第 i 种投资项目的风险损失率
- p_i 第 i 种投资项目的交易费率
- u_i 第 i 种投资项目的交易定额
- x_i 第 i 种投资项目的投资金额
- r_0 同期银行利率

- a 投资风险度
- Q 总体收益
- ΔQ 总体收益的增量

3、模型构建

要使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，这是一个多目标的规划模型：

$$\max \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i$$

$s. t.$

$$\begin{cases} \min\{\max\{q_i x_i : i = 0, 1, \dots, n\}\} \\ \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

4、模型简化

投资者希望总盈利至少达到水平 k 以上，在风险最小的情况下可找到相应的投资方案。这样就

把多目标变成一个目标的线性规划。

$$\min R = \max\{q_i x_i, i = 0, 1, \dots, n\}$$

$s. t.$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i \geq k \\ \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

模型求解

设 $x_5 = \max\{q_i x_i\}$ ，则

$$\min R = x_5$$

$s. t.$

$$\begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 & = 1 \\ -0.05x_0 - 0.27x_1 - 0.19x_2 - 0.185x_3 - 0.185x_4 & \leq -k \\ \dots\dots\dots 0.025x_1 \dots\dots\dots -x_5 & \leq 0 \\ \dots\dots\dots 0.015x_2 \dots\dots\dots -x_5 & \leq 0 \\ \dots\dots\dots 0.055x_3 \dots\dots\dots -x_5 & \leq 0 \\ \dots\dots\dots 0.026x_4 \dots\dots\dots -x_5 & \leq 0 \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, 2, 3, 4 & \end{cases}$$

$k \in [0, 0.27], \Delta k = 0.001$

模型代码

```

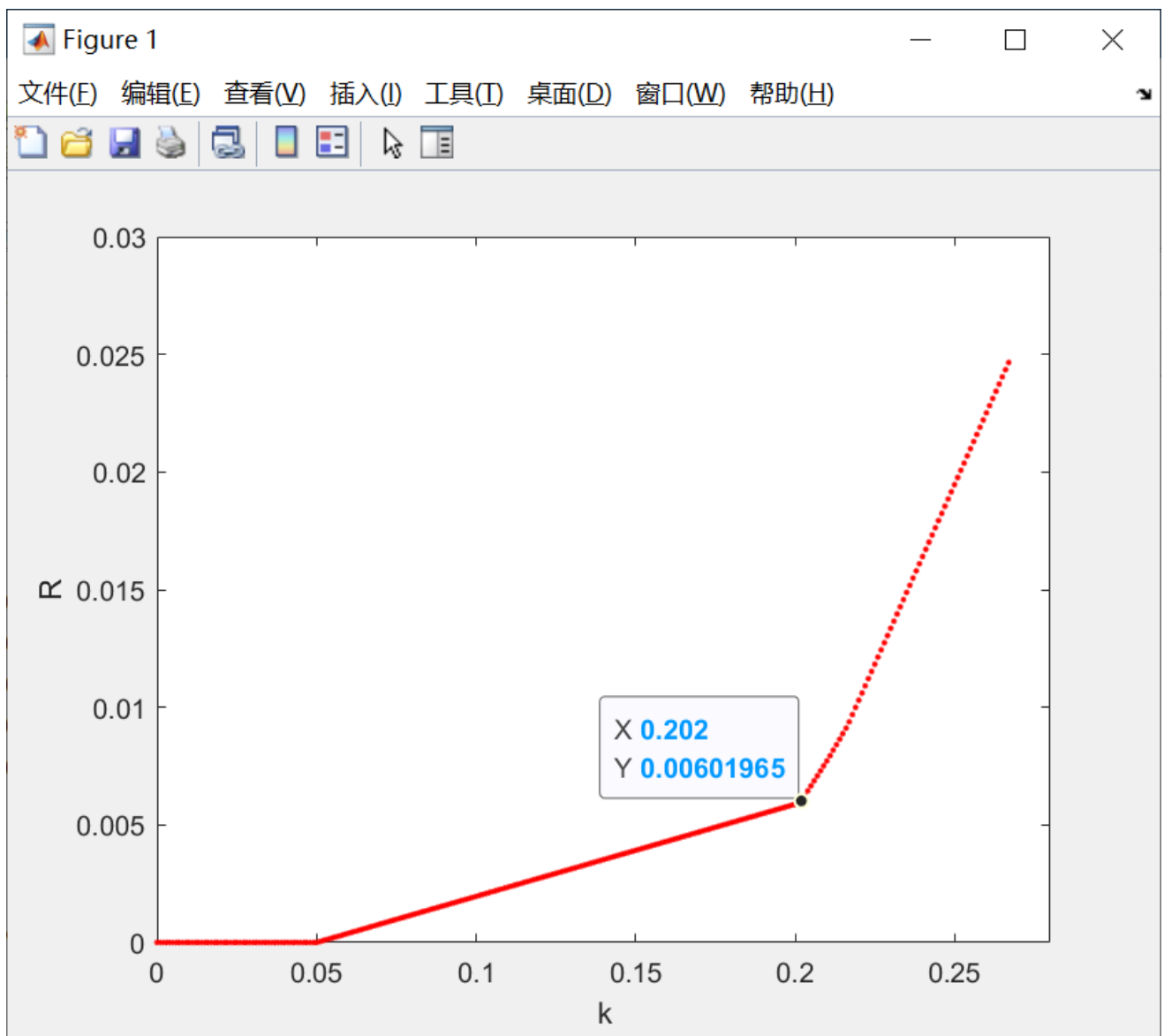
k=0
while k<0.271
    c=[0 0 0 0 0 1];
    Aeq=[1 1.01 1.02 1.045 1.065 0];
    beq=[1];
    A=[-0.05 -0.27 -0.19 -0.185 -0.185 0;
        0 0.025 0 0 0 -1;
        0 0 0.015 0 0 -1;
        0 0 0 0.055 0 -1;
        0 0 0 0 0.026 -1];
    b=[-k;0;0;0;0];
    lb=[0,0,0,0,0,0];
    ub=[];
    [x,val]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
    k
    x=x'
    R=val
    plot(k,R,'r.')
    axis([0 0.28 0 0.03])
    hold on
    k=k+0.001;
end
xlabel('k'),ylabel('R');

```

部分结果

收益	风险度	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.0560	0.0002	0.9604	0.0094	0.0157	0.0043	0.0090
0.1000	0.0020	0.6702	0.0783	0.1306	0.0356	0.0753
0.1950	0.0057	0.0437	0.2272	0.3787	0.1033	0.2185
0.2020	0.0060	0	0.2408	0.4013	0.1094	0.2189
0.2220	0.0109	0	0.4364	0.5483	0	0
0.2510	0.0198	0	0.7907	0.1975	0	0
0.2670	0.0247	0	0.9861	0.0040	0	0

结果图形



结果分析

由实验结果和图可得：

1. 收益越大，风险越大。
2. 当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题意一致。即：冒险的投资者会出现集中投资的情况，而保守的投资者则尽量分散投资。
3. 上图曲线上的任一点都表示该投资下的最小风险，选择该投资下的最优组合。
4. 在 $k = 0.202$ 附近有一个转折点，在这一点左边时，投资增加很大时，风险增长的很慢；在这一点右边时，投资增加很小时，风险增长的很快。所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说，应该选择曲线的拐点作为最优投资组合，大约为 $k = 0.202, R = 0.0060$ 。所对应的投资方案为：

收益	风险度	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.2020	0.0060	0	0.2408	0.4013	0.1094	0.2189