

고등학교

수학 2

수악중독

고등학교 수학 2

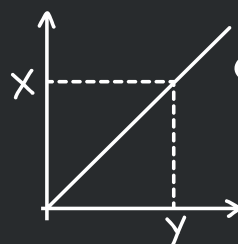
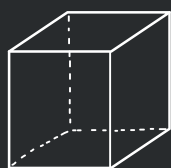
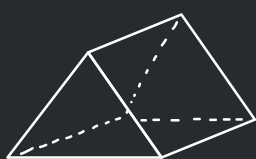
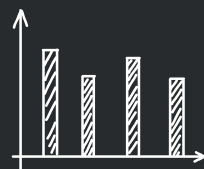
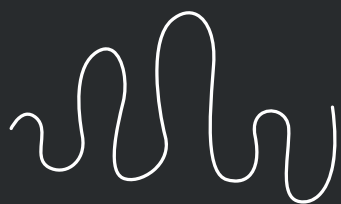
함수의 극한과 연속

1

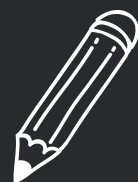
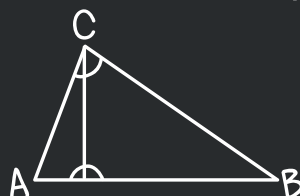
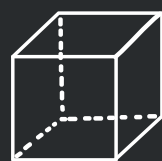
-
1. 함수의 극한
 2. 함수의 연속

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

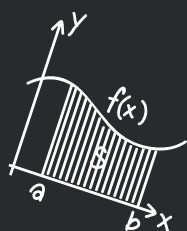
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



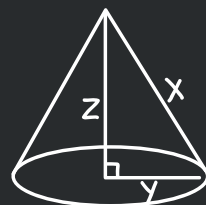
$$a^2 + b^2 = c^2$$



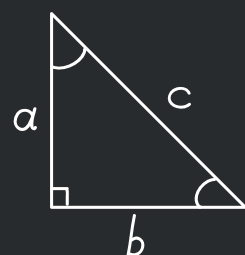
1. 함수의 극한



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



1

함수의 극한

1 함수의 극한

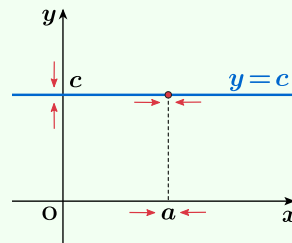
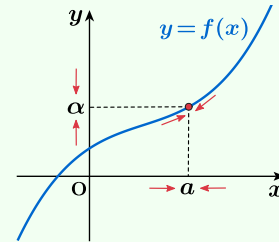
함수의 극한

함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 와 다른 값을 취하면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 α 에 수렴한다고 하고, α 를 $x \rightarrow a$ 일 때의 함수 $f(x)$ 의 극한값 또는 극한이라고 한다. 이것을 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$x \rightarrow a \text{일 때, } f(x) \rightarrow \alpha \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

특히, 함수 $f(x) = c$ (c 는 상수)일 때에는 임의의 실수 a 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

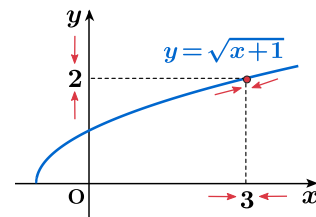


예제 1

$x \rightarrow 3$ 일 때, 함수 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 의 극한을 구하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $x \rightarrow 3$ 일 때, $\sqrt{x+1} \rightarrow 2$ 이므로 극한은 2가 된다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$



예제 2

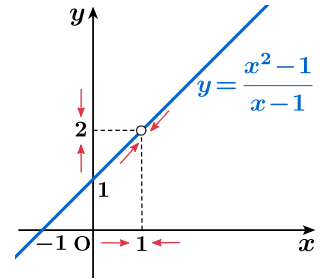
$x \rightarrow 1$ 일 때, 함수 $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 의 극한을 구하시오.

함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 분모가 0이 되어 함숫값이 정의되지 않는다. 하지만 $x \neq 1$ 이면

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 x 의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$



$x \rightarrow \infty$ 또는 $x \rightarrow -\infty$ 일 때의 함수의 극한

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$$

또한 x 가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$$

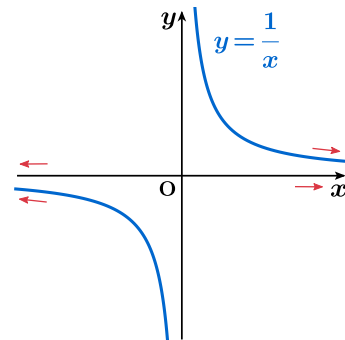
예제 3

함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 에 대하여 $x \rightarrow \infty$ 일 때와 $x \rightarrow -\infty$ 일 때의 극한을 구하시오.

오른쪽 그래프에서 극한은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

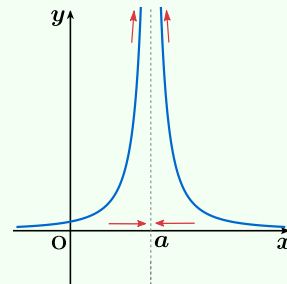


함수의 극한

양의 무한대로 발산

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 한없이 커지면 $f(x)$ 는 양의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

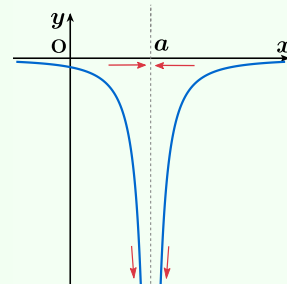
$$x \rightarrow a \text{ 일 때, } f(x) \rightarrow \infty \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$



음의 무한대로 발산

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$ 는 음의 무한대로 발산한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$x \rightarrow a \text{ 일 때, } f(x) \rightarrow -\infty \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



- ▶ $x \rightarrow \infty$ 또는 $x \rightarrow -\infty$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 값이 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하는 경우에도 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

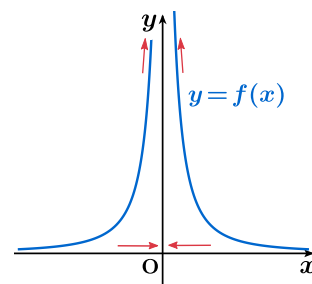
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

예제 4

함수 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 에 대하여 $x \rightarrow 0$ 일 때의 극한을 조사하시오.

함수 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 의 그래프에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

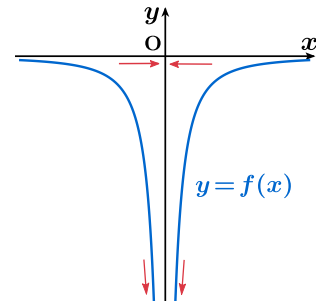


예제 5

함수 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ 에 대하여 $x \rightarrow 0$ 일 때의 극한을 조사하시오.

함수 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ 의 그래프에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$



예제 6

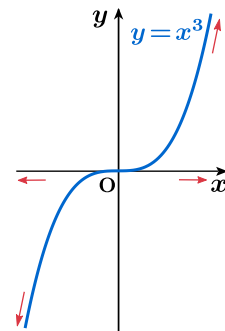
함수 $f(x) = x^3$ 에 대하여 $x \rightarrow \infty$ 일 때와 $x \rightarrow -\infty$ 일 때의 극한을 조사하시오.

함수 오른쪽 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

임을 알 수 있다.



함수의 좌극한과 우극한

(1) 좌극한

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 작은 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면, α 를 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 좌극한이라고 하고, 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \alpha$$

(2) 우극한

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 큰 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 β 에 한없이 가까워지면, β 를 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 우극한이라고 하고, 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \beta$$

(3) 함수의 극한, 좌극한, 우극한의 관계

함수 $f(x)$ 에 대하여 좌극한 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 와 우극한 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 가 모두 존재하고, 그 값이 같은 경우에만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad (\text{극한값 존재})$$

예제 7

함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 에 대하여 $x \rightarrow 0$ 일 때, 극한의 존재 여부를 확인하시오.

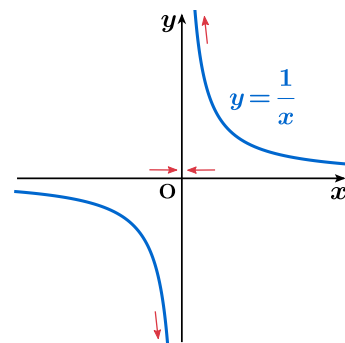
함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x = 0$ 에서의 우극한, 좌극한을 그래프를 통해 확인하면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

이므로 우극한과 좌극한이 모두 존재하지 않기 때문에

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 는 존재하지 않는다.



예제 8

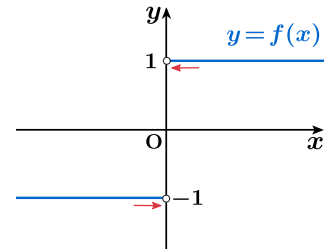
함수 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ 에 대하여 $x \rightarrow 0$ 일 때, 극한의 존재 여부를 확인하시오.

함수 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ 의 그래프는 오른쪽과 같다.

$x = 0$ 에서 우극한, 좌극한을 그래프를 통해 확인하면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = -1$$

이므로 우극한과 좌극한이 모두 존재하지만, 서로 같지 않기 때문에 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 는 존재하지 않는다.



2

함수의 극한의 성질

1 함수의 극한

함수의 극한의 성질

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β 는 상수)일 때,

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k\alpha$ (k 는 상수)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \pm \beta$ (복부호동순)
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \times g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha\beta$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$)

- ▶ 함수의 극한의 성질에 대한 증명은 고등학교 수학 범위를 벗어나므로 생략한다.
- ▶ 함수의 그래프를 그리지 않고도 극한값을 구할 수 있다.

예제 9

함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 1 \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) + \lim_{x \rightarrow 2} 1 \\
 &= 2 \times 2 + 1 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

예제 10

함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 2}{5x + 3}$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 2}{5x + 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (5x + 3)} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x \times \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} 2}{5 \times \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 3} \\&= \frac{0 + 0 - 2}{0 + 3} \\&= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

함수의 극한값의 계산

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값

① 유리함수의 경우

분모, 분자를 인수분해하고 약분한다.

② 무리함수의 경우

분모 또는 분자 중 근호($\sqrt{\quad}$)가 있는 쪽을 유리화한 후 약분한다.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

분모, 분자를 각각 분모의 최고차항으로 나눈다.

(3) $\infty - \infty$ 꼴의 극한값

근호가 없는 다항식은 최고차항으로 묶고, 근호가 있을 때는 유리화한다.

(4) $\infty \times 0$ 꼴의 극한값

통분 또는 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty \times c$, $\frac{c}{\infty}$ (c 는 유한확정값)으로 변형하여 극한값을 구한다.

예제 11

다음 극한값을 구하시오.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \times \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

예제 12

다음 극한값을 구하시오.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - 3}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}} = \frac{-3}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}$$

예제 13

다음 극한을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하시오.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left(3 - \frac{1}{x} \right) \right\} = \infty$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - x)(\sqrt{x^2 + 4x} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

예제 14

다음 극한값을 구하시오.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{(x+1)^2} - 1 \right\}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{(x+1)^2} - 1 \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x-2}{(x+1)^2} = -2$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}} \right) \times \left(\frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} (\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

미정계수의 결정

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 의 꼴

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ 인 상수)이면 다음이 성립한다.

① $f(x)$ 의 최고차항의 차수 = $g(x)$ 의 최고차항의 차수

② $\alpha = f(x), g(x)$ 의 최고차항의 계수의 비율

(2) $\frac{0}{0}$ 의 꼴

① $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α 는 상수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이다.

② $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α 는 0이 아닌 상수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이다.

➤ $f(x)$ 가 x 에 대한 다항식이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 2$ 라는 사실로부터 다항식 $f(x)$ 가 x 에 대한 이차식이고, 이차항의 계수가 2라는 것을 알 수 있다.

➤ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α 는 상수)이고 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 함수의 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \times 0 = 0$$

➤ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α 는 0이 아닌 상수)이고, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이면 함수의 극한의 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0$$

예제 15

두 실수 a, b 가 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$ 를 만족시킬 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 2} = 5$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4) + a(x - 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2 + a)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2 + a) = 4 + a = 5$$

$$\therefore a = 1, b = -6 \quad \therefore a + b = -5$$

예제 16

두 실수 a, b 가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} = 6$ 을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} = 6$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a}-b) = 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a}-b) = \sqrt{1+a}-b = 0 \quad \therefore b = \sqrt{a+1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} \times \frac{\sqrt{x+a}+b}{\sqrt{x+a}+b} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1})}{x+a-(\sqrt{a+1})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1})}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a}+\sqrt{a+1}) \\ &= 2\sqrt{a+1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 8, b = 3 \quad \therefore a+b = 11$$

예제 17

다항함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2} = 1$ 로부터 $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ 임을 알 수 있다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x^2 + ax + b) = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + x + a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + a) = a = 2$$

$$\therefore f(x) = x^3 + x^2 + 2x$$

$$\therefore f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$$

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β 는 상수)일 때, a 에 가까운 모든 실수 x 에 대하여

(1) $f(x) \leq g(x)$ 이면 $\alpha \leq \beta$ 이다.

(2) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$ 이다.

▶ 증명은 고등학교 수학 범위를 벗어나므로 생략한다.

▶ $f(x) < g(x)$ 이더라도 $\alpha \leq \beta$ 일 수 있다.

예를 들어, $x > 0$ 일 때 $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 이다.

예제 18

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음을 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 를 구하시오.

$$2x - 2 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 2$$

$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 2) = 2, \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 2) = 2$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ 이다.

예제 19

함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 의 값을 구하시오.

$$3 - \frac{1}{x} < f(x) < 3 + \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right) = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ 이다.

예제 20

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$ 의 값을 구하시오.

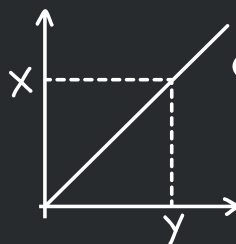
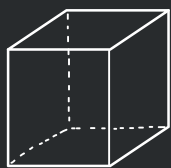
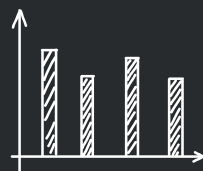
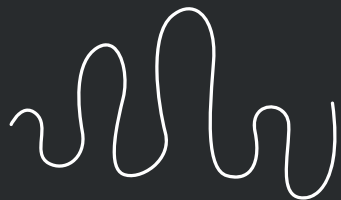
모든 실수 x 에 대하여 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (\because x \rightarrow \infty \text{일 때, } x > 0)$$

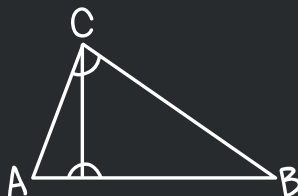
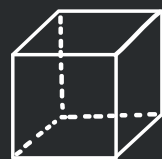
이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ 이다.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

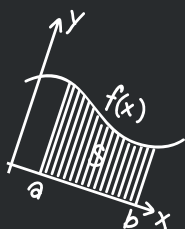
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



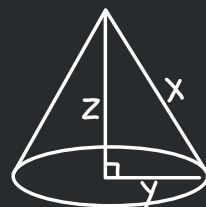
$$a^2 + b^2 = c^2$$



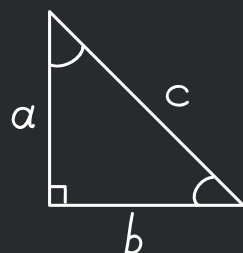
2. 함수의 연속



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



구간

두 실수 a, b ($a < b$)에 대하여 다음 실수의 집합

$$\{x \mid a \leq x \leq b\}, \quad \{x \mid a < x < b\}$$

$$\{x \mid a \leq x < b\}, \quad \{x \mid a < x \leq b\}$$

를 각각 구간이라 하며, 이들을 차례로 기호

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$$

로 나타낸다. 이때, $[a, b]$ 를 닫힌구간, (a, b) 를 열린구간이라 하고, $[a, b)$, $(a, b]$ 를 각각 반열린 구간 또는 반닫힌 구간이라고 한다.

또, 실수의 집합

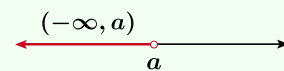
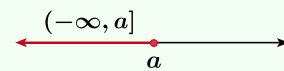
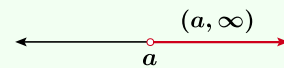
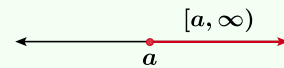
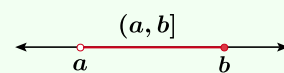
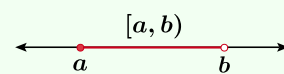
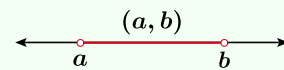
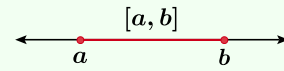
$$\{x \mid x \geq a\}, \quad \{x \mid x > a\}$$

$$\{x \mid x \leq a\}, \quad \{x \mid x < a\}$$

도 각각 구간이라고 하며, 이들을 차례로 기호

$$[a, \infty), (a, \infty), (-\infty, a], (-\infty, a)$$

로 나타낸다. 특히, 실수 전체의 집합도 하나의 구간이며, 기호로 $(-\infty, \infty)$ 와 같이 나타낸다.

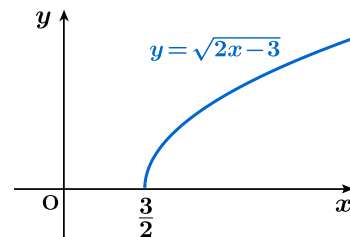


예제 21

함수 $f(x) = \sqrt{2x-3}$ 의 정의역과 치역을 구간으로 나타내시오.

정의역 : $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$,

치역 : $[0, \infty)$

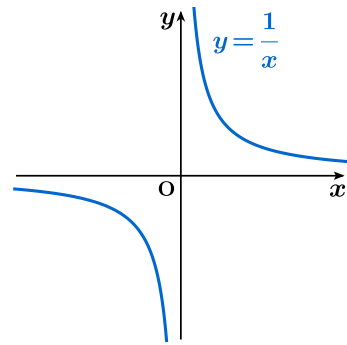


예제 22

함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 의 정의역과 치역을 구간으로 나타내시오.

정의역 : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,

치역 : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



함수의 연속과 불연속

(1) $x = a$ 에서 연속

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 세 조건을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

① $x = a$ 에서 함수 $f(x)$ 가 정의되어 있다. $\Rightarrow f(a)$ 값이 존재한다.

② 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$

③ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

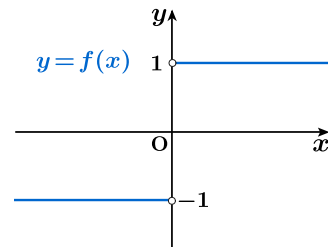
(2) $x = a$ 에서 불연속

함수 $f(x)$ 가 위의 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 불연속이라고 한다.

예제 23

함수 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ 의 $x = 0$ 에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $x = 0$ 에서 함숫값이 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.



예제 24

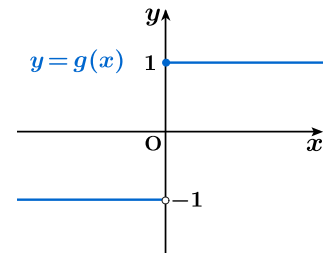
함수 $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$ 의 $x = 0$ 에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $g(0) = 1$ 로

$x = 0$ 에서 함숫값이 존재하지만

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

로 좌극한과 우극한이 같지 않기 때문에 $x = 0$ 에서 극한값이 존재하지 않는다. 따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.



예제 25

함수 $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 의 $x = 0$ 에서의 연속 또는 불연속을 조사하시오.

오른쪽 그래프에서 보는 바와 같이 $h(0) = 0$ 으로

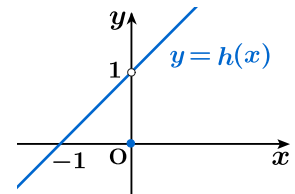
$x = 0$ 에서 함숫값이 존재하고,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$$

로 $x = 0$ 에서 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 가 존재하지만

$$h(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

이기 때문에 함수 $h(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.



연속함수

함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$ 는 그 열린구간에서 연속이라고 한다. 또, 어떤 열린구간에서 연속인 함수를 그 열린구간에서의 연속함수라고 한다.

한편, 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이라고 하며, $f(x)$ 를 닫힌구간에서의 연속함수라고 한다.

- ▶ 함수 $f(x) = x$ 는 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.
- ▶ 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 는 열린구간 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 에서 연속이다.
- ▶ 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 연속이고, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$ 이므로 구간 $[0, \infty)$ 에서 연속이다.

예제 26

함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$ 가 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이 되도록 상수 a, b 의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이 되려면 일단 $x = 2$ 에서 연속이 되어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{x - 2} = b$$

이때, $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - a) = 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - a) = 4 - a = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 = b \quad \therefore b = 4$$

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이면, 다음 각 함수도 $x = a$ 에서 연속이다.

- (1) $kf(x)$ (k 는 상수)
- (2) $f(x) \pm g(x)$
- (3) $f(x) \times g(x)$
- (4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

▶ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

이때, 함수의 극한의 성질을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} \{kf(x)\} = k \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kf(a)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \pm g(a)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \times g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \times g(a)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

▶ 일차함수 $y = x$ 는 실수 전체에서 연속이므로 이 함수의 곱으로 이루어진 함수

$$y = x^2, y = x^3, y = x^4, \dots$$

은 모두 실수 전체에서 연속이다. 또한, 다항함수는 위 함수들의 실수배와 상수함수의 합으로 구성되기 때문에 실수 전체에서 연속이 된다.

▶ 유리함수는 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 의 형태로 나타나므로 $g(x) \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 연속이다.

예제 27

삼차함수 $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 가 실수 전체에서 연속임을 보이시오.

연속함수의 기본 성질을 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다.

- ① 상수함수 $y = 4$ 와 일차함수 $y = x$ 는 모든 실수에서 연속임을 알고 있다.
- ② 연속함수의 성질 (3)에 의하여 $y = x^n$ (n 은 자연수) 역시 모든 실수에서 연속이다.
- ③ 연속함수의 성질 (1)에 의하여 $y = k \times x^n$ (n 은 자연수)도 모든 실수에서 연속이다.
- ④ 연속함수의 성질 (2)에 의하여 다항함수가 모든 실수에서 연속임을 알 수 있다.

예제 28

두 함수 $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$ 에 대하여 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 연속인 구간을 구하시오.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x - 2}{(x - 1)(x - 3)}$$

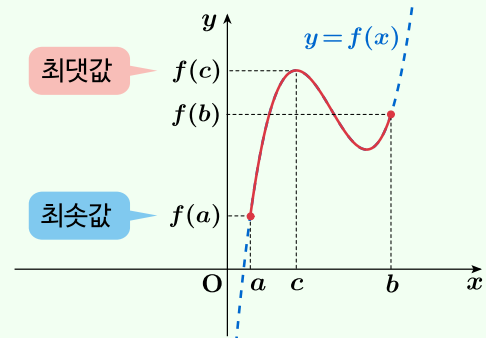
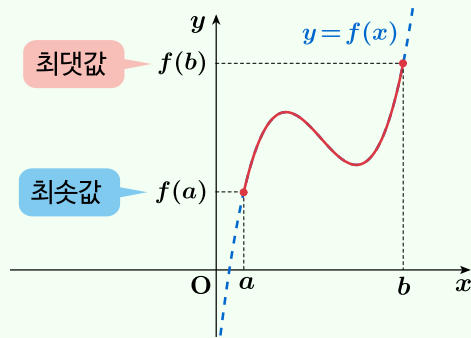
이때, 연속함수의 성질에 의하여 유리함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $g(x) \neq 0$ 인 모든 실수에서 연속이다. 즉, $x \neq 1$, $x \neq 3$ 인 모든 실수에서 연속이다. 따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 연속이 되는 구간은

$$(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$$

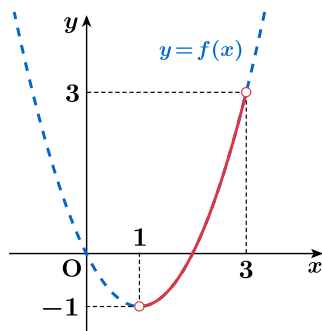
이다.

최대·최소 정리

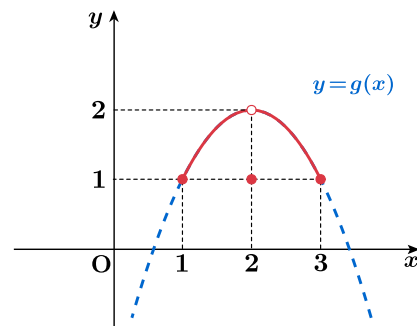
함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.



▶ 닫힌구간이 아니거나 혹은 연속이 아닌 경우는 아래 그림과 같이 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.



(1, 3)
최댓값 : 없음
최솟값 : 없음



[1, 3]
최댓값 : 없음
최솟값 : 1

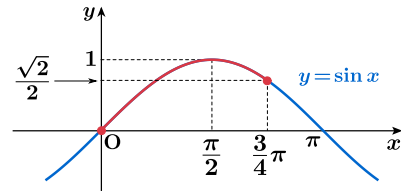
예제 29

함수 $f(x) = \sin x$ 는 다음 구간에서 최대·최소 정리를 적용할 수 있는지 설명하고, 적용할 수 있다면 그 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

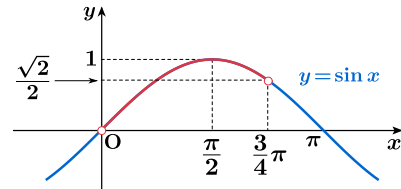
(1) $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$

(2) $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$

- (1) 닫힌구간 $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 연속이므로
 최대·최소의 정리를 적용할 수 있고, 오른쪽 그래프에서 보듯이 최댓값과 최솟값은 각각 1과 0이다.



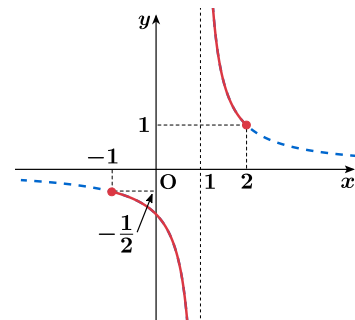
- (2) 열린구간 $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ 에서는 최대·최소의 정리를
 적용할 수 없다. 이 경우는 그래프에서 보듯이 최
 대값 1만 갖는다.



예제 30

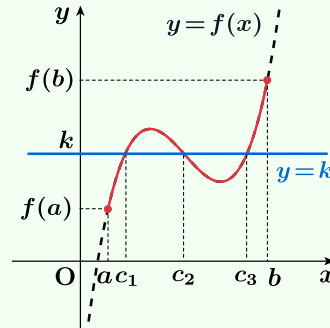
함수 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 가 구간 $[-1, 2]$ 에서 최댓값 혹은 최솟값을 갖는지 조사하시오.

함수 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 은 오른쪽 그래프에서 보듯이 $x = 1$
 에서 불연속이므로 최대·최소의 정리를 적용할 수 없다. 따
 라서 닫힌구간 $[-1, 2]$ 이라고 할지라도 최댓값과 최솟값이
 존재하지 않는다.

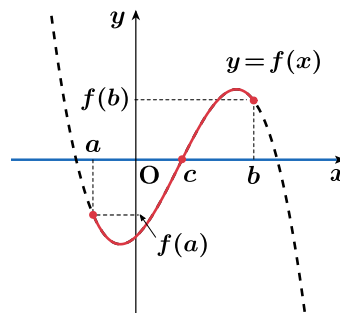


사잇값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c) = k$ 를 만족하는 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.



- ▶ 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 서로 다르면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 0이 있으므로 $f(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x) = 0$ 이 a 와 b 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



- ▶ 사잇값 정리를 통하여 방정식의 실근의 존재 여부만을 판단할 수 있을 뿐, 근이 몇 개인지 혹은 근이 무엇인지 알아낼 수 없다.

예제 31

삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + 2x + 5 = 0$ 의 실근이 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$ 라고 하면 $f(x)$ 는 다항함수이므로 실수 전체에서 연속이다. 따라서 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서도 연속이고, $f(1) = 3$, $f(2) = -3$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 구간 $(1, 2)$ 사이에 $f(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

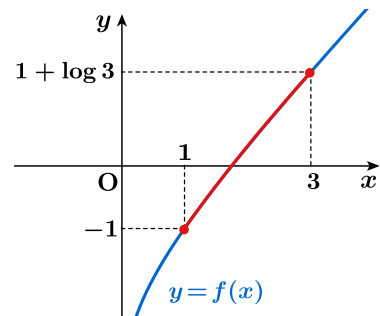
예제 32

$f(x) = x + \log x - 2$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

① $y = x$, $y = \log x$, $y = 2$ 가 모두 구간 $[1, 3]$ 에서 연속이므로 $f(x)$ 도 구간 $[1, 3]$ 에서 연속이다.

② $f(1) = 1 + \log 1 - 2 = -1$
 $f(3) = 3 + \log 3 - 2 = 1 + \log 3$
 $\therefore f(1) \times f(3) < 0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 구간 $(1, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



고등학교 수학 2

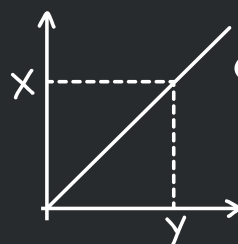
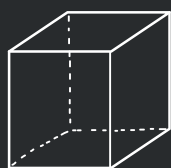
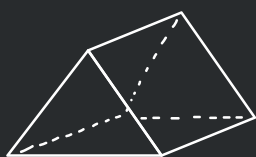
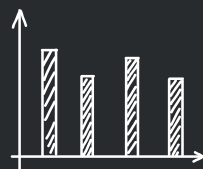
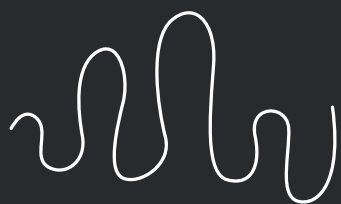
미분

2

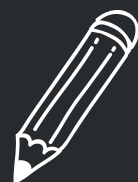
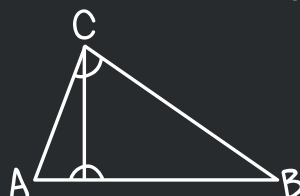
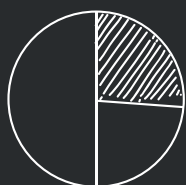
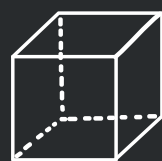
-
1. 미분계수와 도함수
 2. 도함수의 활용

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

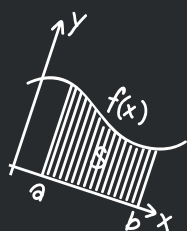
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



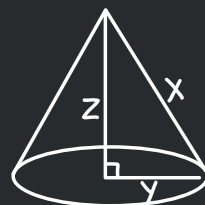
$$a^2 + b^2 = c^2$$



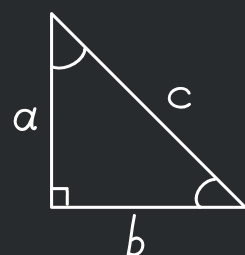
1. 미분계수와 도함수



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



평균변화율

(1) 평균변화율

오른쪽 그림에서와 같이 함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변하게 되면, y 의 값은 $f(a)$ 에서 $f(b)$ 까지 변하게 된다. 이때, x 값의 변화량 $b - a$ 를 x 의 증분, y 값의 변화량 $f(b) - f(a)$ 를 y 의 증분이라 하고, 이것들을 각각 Δx , Δy 로 나타낸다.

$$\Delta x = b - a, \quad \Delta y = f(b) - f(a)$$

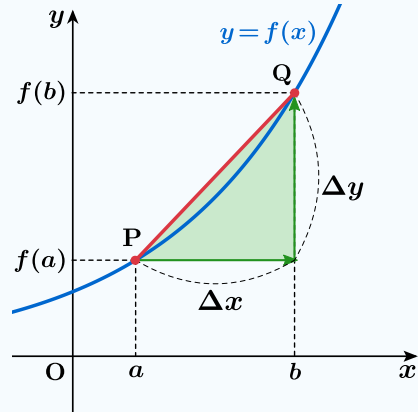
함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 증분 Δx 에 대한 y 의 증분 Δy 의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

를 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $y = f(x)$ 의 평균변화율이라고 한다.

(2) 평균변화율의 기하학적 의미

$y = f(x)$ 의 평균변화율은 그림에서 두 점 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ 를 연결하는 직선의 기울기와 같다.



예제 1

x 의 값이 다음과 같이 변할 때, 함수 $f(x) = 4.9x^2$ 의 평균변화율을 구하시오.

(1) $x = 1$ 에서 $x = 2$ 까지

(2) $x = 2$ 에서 $x = 2 + \Delta x$ 까지

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.9 \times 2^2 - 4.9 \times 1^2}{2 - 1} = 4.9 \times 3 = 14.7$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.9 \times (2 + \Delta x)^2 - 4.9 \times 2^2}{2 + \Delta x - 2} = 4.9 \times (4 + \Delta x) = 19.6 + 4.9 \times \Delta x$$

미분계수

함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a + \Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다. 이 평균변화율에서 Δx 가 0에 한없이 가까워질 때의 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면, 이를 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고, 기호로

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

와 같이 나타낸다. 한편, $a + \Delta x = x$ 라고 하면 $\Delta x = x - a$ 이고, $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, $x \rightarrow a$ 이므로

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

와 같이 나타낼 수도 있다.

- ▶ $x = a$ 에서의 미분계수를 나타낼 때, Δx 대신, 간단히 h 를 사용하여

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

로 나타내기도 한다.

- ▶ 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 극한값 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ 가 존재하면, 함수 $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 한다.
- ▶ 함수 $y = f(x)$ 가 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 미분가능하다고 하고, 함수 $y = f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 x 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수라고 한다.

예제 2

함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 $x = 1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 을 구하시오.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 + 2(1 + h) - 1^2 - (2 \times 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

예제3

어떤 물체가 자유 낙하할 때, 낙하 시간 t 초와 낙하한 거리 $f(t)$ (m) 사이에는 $f(t) = 4.9t^2$ 인 관계가 있다고 한다. 물체가 낙하하기 시작한 후, 2초부터 $2 + \Delta t$ 초까지의 평균속력을 v 라 할 때, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v$ 를 구하시오.

v 는 t 가 2에서 $2 + \Delta t$ 까지 변할 때의 $f(t)$ 의 평균변화율과 같으므로

$$v = \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t}$$

가 된다. 따라서 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v = f'(2)$ 와 같다.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4.9 \times (2 + \Delta t)^2 - 4.9 \times 2^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4.9 \times 4 \times \Delta t + 4.9 \times (\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4.9 \times 4 + 4.9 \times \Delta t) \\ &= 19.6 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

미분계수의 기하학적 의미

함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 곡선에 접하는 접선의 기울기와 같다.

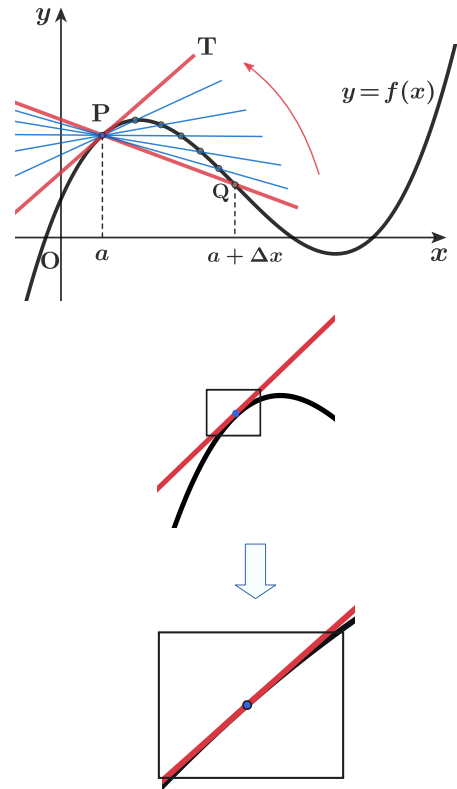
- ▶ 함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a + \Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

의 기하학적 의미는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, f(a))$, $Q(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ 를 지나 는 직선의 기울기라는 것을 이미 알고 있다. 이때, $\Delta x \rightarrow 0$ 이면 점 Q 는 오른쪽 그림에서 보는 바와 같이 곡선 $y = f(x)$ 를 따라 점 P 에 한없이 가까워지게 되고, 직선 PQ 는 점 P 를 지나는 일정한 직선 PT 에 한없이 가까워진다. 이 직선 PT 를 점 P 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 접선이라 하고, 점 P 를 접점이라고 한다. 따라서 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서 이 곡선에 접하는 접선의 기울기임을 알 수 있다.



예제4

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서 곡선에 접하는 접선의 기울기를 구하시오.

$f(x) = -x^2 + 2x$ 라고 하면, 주어진 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$ 과 같다.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) + 1^2 - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1 - (2 \times \Delta x) - (\Delta x)^2 + 2 + (2 \times \Delta x) - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

예제5

곡선 $y = x^2 + 3x - 1$ 위의 점 $P(a, a^2 + 3a - 1)$ 에서의 접선의 기울기가 2일 때, 점 P 의 좌표를 구하시오.

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ 라고 하면, 점 P 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 와 같다.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x)^2 + 3(a + \Delta x) - 1 - a^2 - 3a + 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + (2a + 3)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2a + 3) \\ &= 2a + 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

미분가능성과 연속성

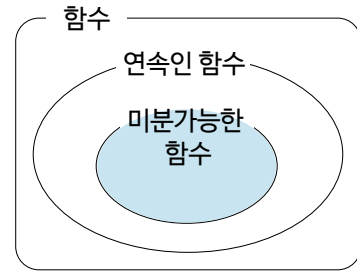
함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.
그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

▶ 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면 미분계수

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재하고, 이를 이용하여 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\}$ 를 구해보면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= 0 \times f'(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$



이 된다. 따라서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 가 성립하고, 이는 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속임을 나타낸다.

예제 6

함수 $f(x) = |x|$ 의 $x = 0$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

(1) $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0-} |x| = 0$ 이므로

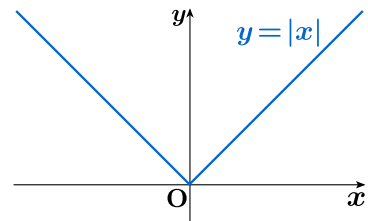
함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

(2) $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|0+h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1$,

$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|0+h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1$

즉, $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ 가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이지만 미분불가능하다.



예제 7

함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 $x = 1$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

(1) $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+} |x^2 - 1| = \lim_{x \rightarrow 1-} |x^2 - 1| = 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다.

(2) $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|(1+h)^2 - 1| - |1^2 - 1|}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h^2 + 2h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

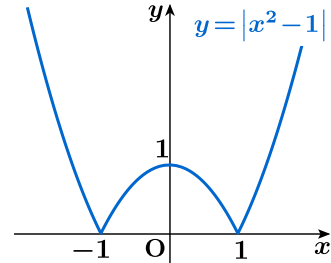
$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h + 2) = 2,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|(1+h)^2 - 1| - |1^2 - 1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h^2 + 2h|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-h - 2) = -2$$

즉, $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이지만 미분불가능하다.



예제 8

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 의 $x = 0$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

(1) $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0$ 이므로

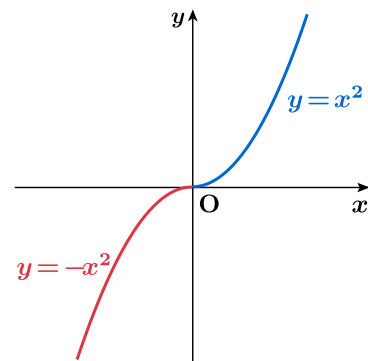
함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

(2) $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} h = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-(0+h)^2 + 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-h) = 0,$$

즉, $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이고 미분가능하다.



도함수

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여
미분계수 $f'(x)$ 를 대응시키면 새로운 함수

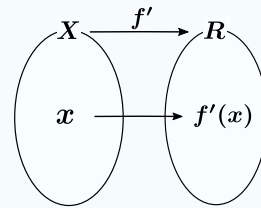
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

를 얻는데, 이 함수 $f'(x)$ 를 함수 $f(x)$ 의 도함수라 한다.
도함수를 기호로는

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

또, 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 구하는 것을 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분한다고 하며,
그 계산법을 미분법이라 한다.



▶ 도함수의 기하학적 의미

도함수 $f'(x)$ 는 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 를 그 점에서의 접선의 기울기에
대응시키는 함수이다.

▶ 도함수 정의를 x 의 증분 Δx 대신 h 를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

또한, 위 식에서 $x + h = t$ 로 놓으면 $h \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow x$ 이므로 $f'(x)$ 를 다음과 같이 나타낼
수도 있다.

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

예제9

함수 $f(x) = x^2 + 3x + 2$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 구하시오.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) + 2 - x^2 - 3x - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + 3 + h) \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

함수 $f(x) = x^n$ 의 도함수

- (1) 함수 $f(x) = x^n$ (n 은 2이상의 자연수)의 도함수는 $f'(x) = nx^{n-1}$ 이다.
- (2) 함수 $f(x) = x$ 의 도함수는 $f'(x) = 1$ 이다.
- (3) 함수 $f(x) = c$ (c 는 상수)의 도함수는 $f'(x) = 0$ 이다.

▶ $f(x) = x^n$ (n 은 2 이상의 자연수)에 대하여

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h) - x\} \{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\} \\
 &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}}_{n \text{개}} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

▶ $f(x) = x$ 에 대하여

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

▶ $f(x) = c$ (c 는 상수)에 대하여

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

예제 10

다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $f(x) = x^{100}$

(2) $f(x) = \log 2$

(1) $f'(x) = 100x^{99}$

(2) $f'(x) = 0$

3

함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

1 미분계수와 도함수

함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때

$$(1) \{cf(x)\}' = cf'(x) \quad (c \text{는 상수})$$

$$(2) \{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$(3) \{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

▶ 함수 $f(x)$ 가 미분가능할 때, 함수 $y = cf(x)$ (c 는 상수)의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$$

▶ 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때, 함수 $f(x) + g(x)$ 의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} + \{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

▶ $\{f(x) - g(x)\}' = \{f(x) + (-1) \times g(x)\}' = f'(x) + (-1) \times g'(x) = f'(x) - g'(x)$

예제 11

다음 함수를 미분하시오.

$$(1) y = 3x^3 + 2x^2 + x$$

$$(2) y = (x - 2)(x^3 - x)$$

$$(1) y' = (3 \times 3x^2) + (2 \times 2x) + 1 = 9x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{aligned} (2) y &= (x - 2)(x^3 - x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \text{ 이므로} \\ y' &= 4x^3 - (2 \times 3x^2) - 2x + 2 \\ &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

▶ $y = f(x)g(x)$ 이면

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)\{f(x+h) - f(x)\} + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

▶ 함수 $y = f(x)g(x)h(x)$ 이면

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)g(x)h(x)\}' \\ &= [\{f(x)g(x)\}h(x)]' \\ &= \{f(x)g(x)\}'h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

예제 12

다음 함수를 미분하시오.

$$(1) y = (x-2)(x^3-x) \quad (2) y = (x^2-x+1)^2 \quad (3) y = x(x+1)(x+2)$$

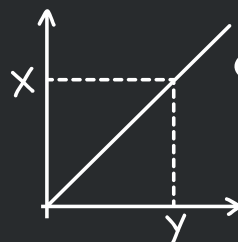
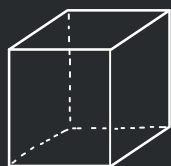
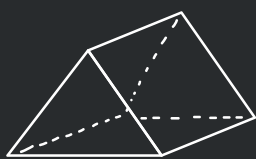
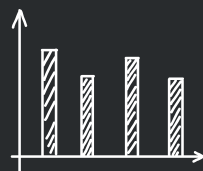
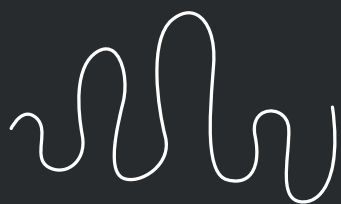
$$\begin{aligned} (1) y' &= 1 \times (x^3-x) + (x-2)(3x^2-1) \\ &= (x^3-x) + (3x^3-x-6x^2+2) \\ &= 4x^3-6x^2-2x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) y &= (x^2-x+1)(x^2-x+1) \text{ 이므로} \\ y' &= (2x-1)(x^2-x+1) + (x^2-x+1)(2x-1) \\ &= 2(2x-1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

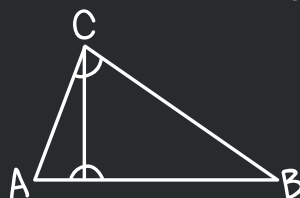
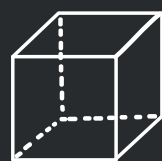
$$(3) y' = (x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1) = 3x^2+6x+2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

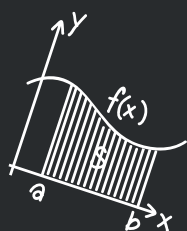
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



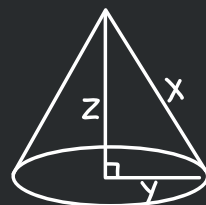
$$a^2 + b^2 = c^2$$



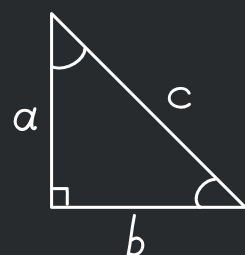
2. 도함수의 활용



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



접선의 방정식

미분가능한 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 곡선에 접하는 접선의 기울기를 의미한다. 이것을 토대로 접선의 방정식은 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) 접점이 주어지는 경우

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 기울기가 $f'(a)$ 이고, 한 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 방정식과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

(2) 기울기가 주어지는 경우

곡선 $y = f(x)$ 의 접선 중 기울기가 m 인 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(t) = m(x - t) \quad (\text{단, } f'(t) = m)$$

(3) 곡선 밖의 한 점이 주어지는 경우

곡선 $y = f(x)$ 밖의 한 점 (p, q) 에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad (\text{단, } q - f(t) = f'(t)(p - t) \text{가 성립})$$

예제 13

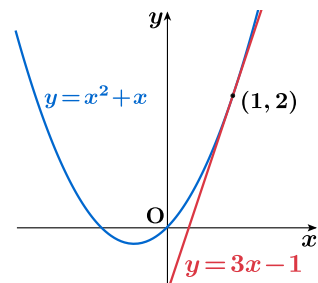
$f(x) = x^2 + x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.

$f'(x) = 2x + 1$ 이므로 구하는 접선의 기울기는 $f'(1) = 3$ 이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y - 2 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 1$$

이다.



예제 14

곡선 $y = -x^3 + 5x$ 에 접하고, 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하시오.

$y' = -3x^2 + 5$ 이므로 기울기가 2인 접선의 접점을 $(t, -t^3 + 5t)$ 라고 하면

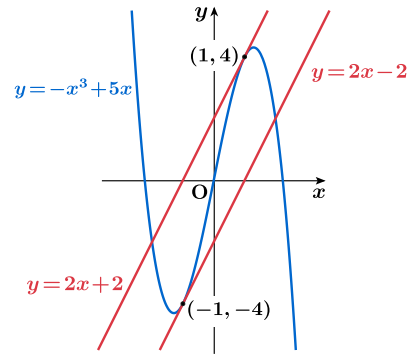
$$-3t^2 + 5 = 2 \quad \therefore t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1$$

가 되어야 한다. 즉, 접점의 좌표가 $(1, 4)$ 또는 $(-1, -4)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2(x - 1) + 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 2, \quad \text{또는}$$

$$y = 2(x + 1) - 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 2$$

이다.



예제 15

점 $(0, -1)$ 에서 곡선 $y = x^2 + 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

곡선 $y = x^2 + 1$ 위의 임의의 점을 $(t, t^2 + 1)$ 라고 하고, 이 점에서의 접선이 점 $(0, -1)$ 을 지나는 것으로 생각하면 된다.

$y' = 2x$ 이므로 점 $(t, t^2 + 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $2t$ 가 된다. 따라서 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - t^2 - 1 = 2t(x - t)$$

이고, 이 직선이 점 $(0, -1)$ 을 지나야 하므로

$$-1 - t^2 - 1 = 2t(-t)$$

$$\therefore t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}$$

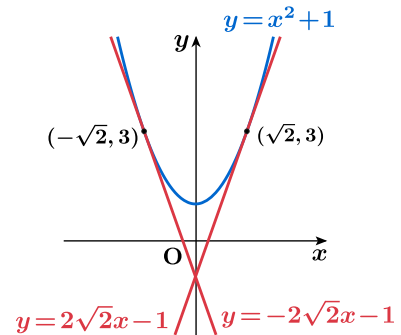
임을 알 수 있다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - (\sqrt{2})^2 - 1 = 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad y = 2\sqrt{2}x - 1, \quad \text{또는}$$

$$y - (-\sqrt{2})^2 - 1 = 2(-\sqrt{2})(x - (-\sqrt{2})) \quad \Rightarrow \quad y = -2\sqrt{2}x - 1$$

이다.



롤의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, $f(a) = f(b)$ 이면 $f'(c) = 0$ 를 만족하는 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

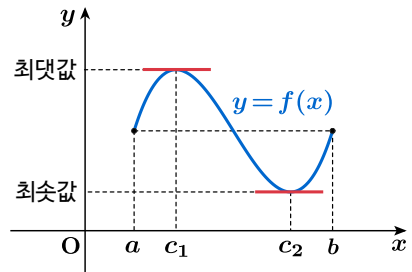
▶ 함수 $f(x)$ 가 상수함수인 경우

열린구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이므로 $f'(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 열린구간 (a, b) 에 무수히 많이 존재한다.

▶ 함수 $f(x)$ 가 상수함수가 아닌 경우

최대·최소의 정리에 의하여 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

그런데 $f(a) = f(b)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, b) 에서 최댓값 또는 최솟값을 적어도 하나 이상 갖게 된다.



- (1) 함수 $f(x)$ 가 $x = c$ ($a < c < b$)에서 최댓값을 가질 때,
 $a < t < b$ 인 임의의 t 에 대하여 $f(t) \leq f(c)$ 이다.

- ① $t < c$ 일 때, x 가 t 에서 c 까지 변할 때의 평균변화율과 $t \rightarrow c-$ 일 때의 평균변화율의 극한에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow c-} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0$$

- ② $t > c$ 일 때, x 가 t 에서 c 까지 변할 때의 평균변화율과 $t \rightarrow c+$ 일 때의 평균변화율의 극한에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq 0, \quad \lim_{t \rightarrow c+} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq 0$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하므로 $x = c$ 에서도 미분가능해야 하고, 이는 곧 평균변화율의 좌극한과 우극한이 서로 같아야 함을 의미한다.

$$\therefore f'(c) = \lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = 0$$

- (2) 함수 $f(x)$ 가 $x = c$ ($a < c < b$)에서 최솟값을 가질 때,
 (1)에서와 같은 방법으로 $f'(c) = 0$ 이 됨을 알 수 있다.

예제 16

함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 에 대하여 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 롤의 정리를 만족하는 상수 c 의 값을 구하시오.

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ 이라고 하면 $f(x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 미분가능하다. 이때, $f(-1) = f(3) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 열린구간 $(-1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.
 $f'(c) = 2c - 2 = 0$ 이므로 구하는 상수는 $c = 1$ 이 된다.

평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때,

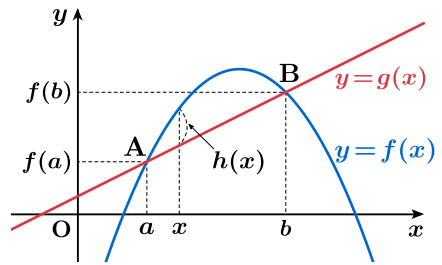
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

를 만족하는 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

- ▶ 두 점 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y = g(x)$ 라고 하면

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

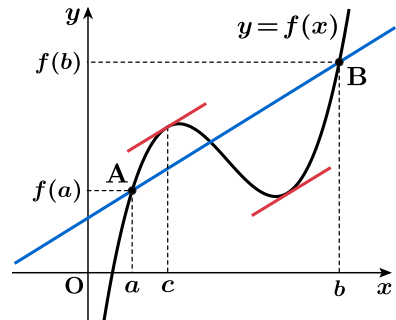
이다. 이때, 함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라고 하면 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $h(a) = h(b) = 0$ 이다. 따라서 롤의 정리에 의하여 $h'(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다. 즉,



$$h'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

- ▶ 평균변화율 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기를 나타내고, $f'(c)$ 는 $x = c$ 에서 이 곡선에 접하는 접선의 기울기를 나타낸다. 따라서 평균값 정리는 열린구간 (a, b) 에서 이 곡선에 접하는 접선들 중 적어도 하나 이상이 직선 AB와 평행하다는 것을 뜻한다.



예제 17

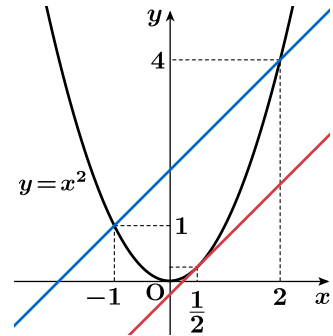
함수 $f(x) = x^2$ 에 대하여 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 평균값 정리를 만족하는 상수 c 의 값을 구하시오.

$f(x) = x^2$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하다. $f'(c) = 2c$ 이므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{2^2 - (-1)^2}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1 = 2c$$

를 만족하는 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$



예제 18

함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 상수함수임을 보이시오.

- (1) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이다.
- (2) 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하다.
- (3) 열린구간 (a, b) 의 모든 x 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이다.

열린구간 (a, b) 에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)에 대하여 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고, 열린구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

를 만족하는 c 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다. 그런데 열린구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이므로 $f'(c) = 0$ 이다. 즉,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

가 성립하고, 이를 통하여 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 상수함수임을 알 수 있다.

3

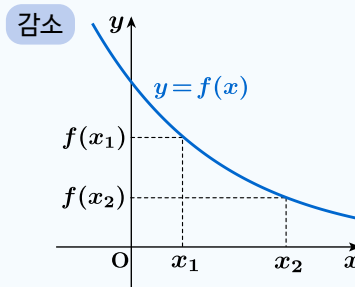
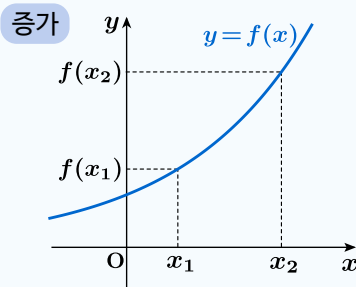
함수의 증가와 감소, 극대와 극소

2 도함수의 활용

함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

- (1) $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다.
- (2) $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 한다.



예제 19

구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 함수 $y = x^3$ 의 증가와 감소를 판단하시오.

$f(x) = x^3$ 이라고 하자. 구간 $(-\infty, \infty)$ 의 임의의 두 수 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)에 대하여

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

이다. 이때, $x_1 - x_2 < 0$ 이고

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$$

이므로 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 즉 $f(x_1) < f(x_2)$ 가 성립한다.

따라서 함수 $f(x) = x^3$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.

도함수를 이용한 함수의 증가·감소 판정

함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 열린구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 열린구간에서 감소한다.

- ▶ 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하고, 이 열린구간에 속하는 모든 x 에 대해서 $f'(x) > 0$ 이라고 하자. 열린구간 (a, b) 에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)에 대하여 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

를 만족하는 c 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다. 이때,

$$x_2 - x_1 > 0, \quad f'(c) > 0$$

이므로

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, b) 에서 증가한다.

- ▶ 위와 같은 방법으로 함수 $f(x)$ 가 열린구간에 (a, b) 에서 미분가능하고, 이 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, b) 에서 감소함을 보일 수 있다.
- ▶ 일반적으로 위 판정법의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어, $f(x) = x^3$ 은 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하지만 $f'(0) = 0$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때,

- ① 함수 $f(x)$ 가 이 구간에서 증가하면 구간 안의 모든 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.
- ② 함수 $f(x)$ 가 이 구간에서 감소하면 구간 안의 모든 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이다.

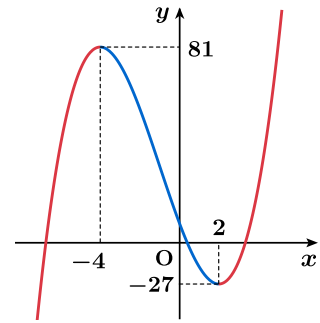
예제 20

함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$ 의 증가와 감소를 조사하시오.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$ 이고, 이를 토대로 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	\cdots	-4	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	81	\searrow	-27	\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-4, 2]$ 에서 감소한다.



예제 21

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3ax$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가할 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하시오.

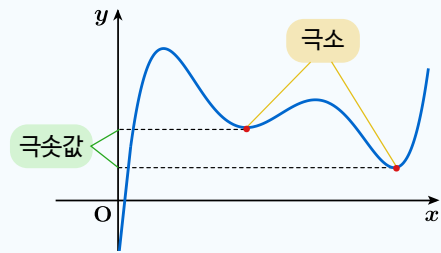
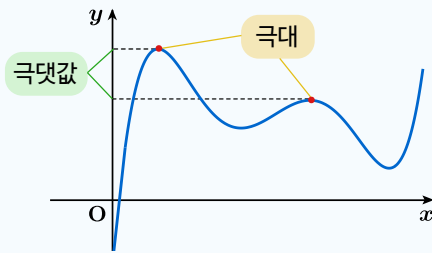
$f'(x) = x^2 - 2ax + 3a$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이 되어야 한다.

따라서 방정식 $x^2 - 2ax + 3a = 0$ 에서 판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0$ 이어야 하므로, 상수 a 값의 범위는 $0 \leq a \leq 3$ 이다.

함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$ 에서 $x = a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

- (1) $f(x) \leq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대가 된다고 하고, 그때의 함수값 $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다.
- (2) $f(x) \geq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소가 된다고 하고, 그때의 함수값 $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다.



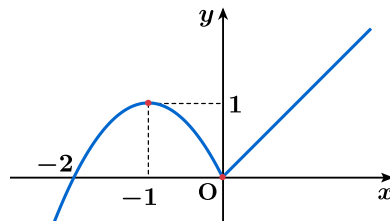
➤ 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

예제 22

함수 $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 극대 혹은 극소가 되는 x 의 값과

그때의 극댓값, 극솟값을 구하시오.

아래 그래프에서 보는 바와 같이 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 1을 갖고, $x = 0$ 에서 극솟값 0을 갖는다.



극값과 미분계수

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$ 이다.

- ▶ 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가질 때, 절댓값이 충분히 작은 h ($h \neq 0$)에 대하여 $f(a+h) \leq f(a)$ 이므로

$$h > 0 \text{ 이면 } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

이다. 이때, 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하므로

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \quad \dots\dots ①$$

이 성립한다. 마찬가지로

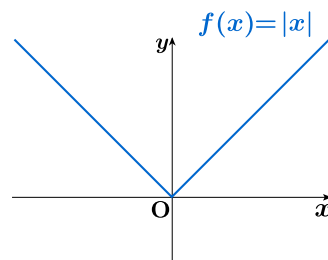
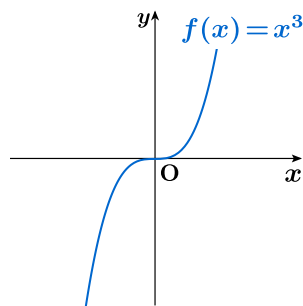
$$h < 0 \text{ 이면 } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

이므로

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \quad \dots\dots ②$$

가 성립한다. 따라서 ①, ②에 의하여 $f'(a) = 0$ 이다.

- ▶ 같은 방법으로 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극솟값을 갖는 경우에도 $f'(a) = 0$ 임을 알 수 있다.
- ▶ 일반적으로 위의 역은 성립하지 않는다. 즉, 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a) = 0$ 이라고 해서 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 반드시 극값을 갖는 것은 아니다. 예를 들어, 함수 $f(x) = x^3$ 에서 $f'(0) = 0$ 이지만 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값을 갖지 않는다.
- ▶ 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 갖더라도 그 점에서 미분이 불가능하여 $f'(a) = 0$ 이 성립하지 않을 수도 있다. 예를 들어, 함수 $f(x) = |x|$ 는 $x = 0$ 에서 극소가 되지만 $x = 0$ 에서 미분이 불가능하여 $f'(0) = 0$ 이 성립하지 않는다.



예제 23

함수 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 극솟값 4를 갖고, $x = 0$ 에서 극댓값을 가질 때, 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ 이고 함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 과 $x = 1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(0) = b = 0, \quad f'(1) = 6 + 2a + b = 0$$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 0$ 을 얻는다.

또한 $x = 1$ 에서 극솟값 4를 가지므로

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \times 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 + c \\ &= 2 - 3 + 0 + c \\ &= c - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

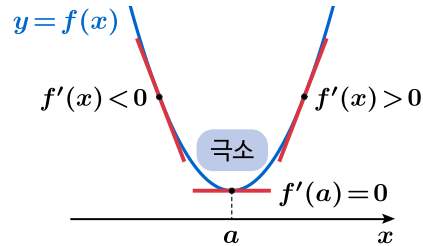
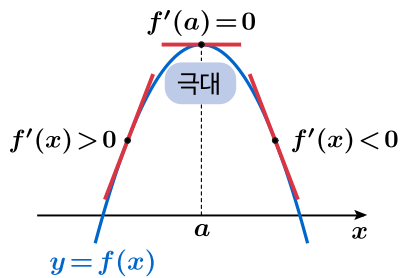
$$\therefore a = -3, b = 0, c = 5$$

극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a) = 0$ 일 때, $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

- (1) 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.
- (2) 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

- ▶ 아래 그림에서와 같이 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극대를 갖는 경우 $x = a$ 의 왼쪽에서는 접선의 기울기가 양(+)이지만, $x = a$ 에서는 접선의 기울기가 0이 되고, $x = a$ 의 오른쪽에서는 접선의 기울기가 음(-)이 된다. 즉, $f'(x)$ 의 부호가 $x = a$ 의 좌우에서 양(+)에서 음(-)으로 바뀌는 것을 볼 수 있다.
- ▶ 마찬가지로 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극소를 갖는 경우는 $f'(x)$ 의 부호가 $x = a$ 의 좌우에서 음(-)에서 양(+)으로 바뀌는 것을 볼 수 있다.

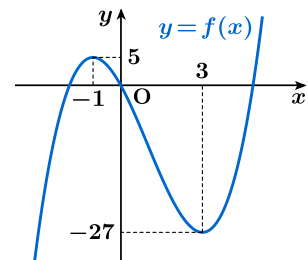


예제 24

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 의 극값을 구하시오.

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 실수 전체의 구간에서 미분가능하다. 또한 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$ 이므로 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = -1$ 또는 $x = 3$ 이다. 이 값들을 토대로 증감표를 작성해 보면 다음과 같다.

x	\cdots	-1	\cdots	3	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	5	\searrow	-27	\nearrow



$f'(-1) = 0$ 이고 $x = -1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌었으므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이고, 극댓값 5를 갖는다.

$f'(3) = 0$ 이고 $x = 3$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌었으므로 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극소이고, 극솟값 -27 을 갖는다.

함수의 그래프

다음의 단계를 따르게 되면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 얻을 수 있다.

- (1) 도함수 $f'(x)$ 를 구한다.
- (2) 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해를 구한다.
- (3) (2)의 결과로 얻은 x 값들을 경계로 하여 증감표를 작성하고 극값을 판정한다.
- (4) (3)의 결과를 이용하여 그래프의 개형을 그린다.

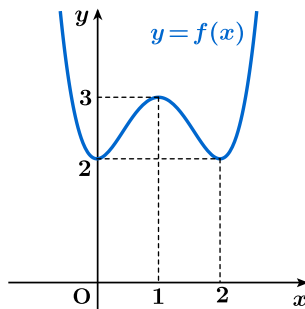
예제 25

함수 $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ 의 그래프의 개형을 그리시오.

- (1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ 라고 하면 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$
- (2) 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이다.
- (3) $x = 0, x = 1, x = 2$ 를 경계로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	2	\nearrow	3	\searrow	2	\nearrow

- (4) (3)의 결과로부터 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



예제 26

함수 $y = 3x^4 + 4x^3 - 1$ 의 그래프의 개형을 그리시오.

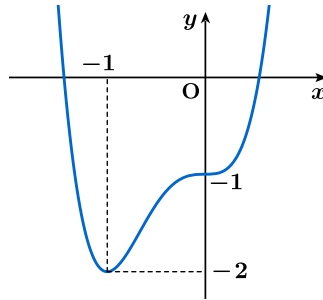
(1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1$ 이라고 하면 $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1)$

(2) 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 이다.

(3) $x = -1, x = 0$ 을 경계로 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	\cdots	-1	\cdots	0	\cdots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	-2	\nearrow	-1	\nearrow

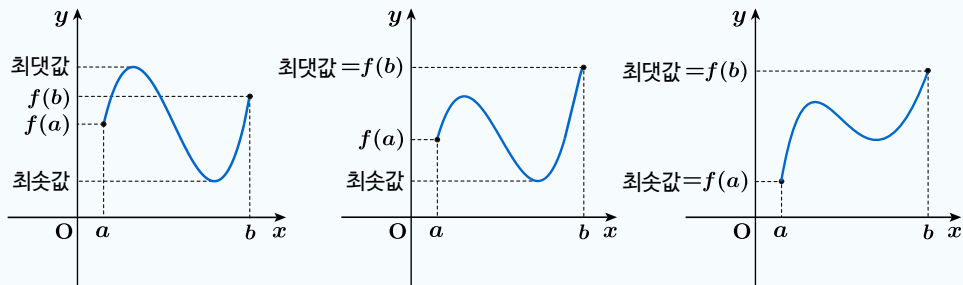
(4) (3)의 결과로부터 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



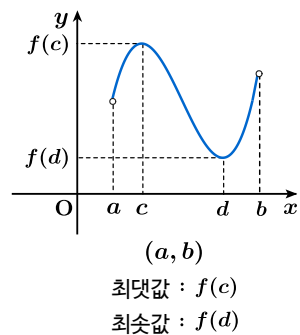
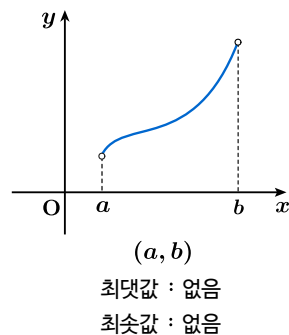
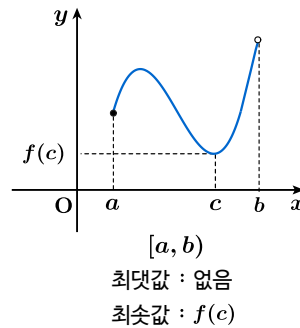
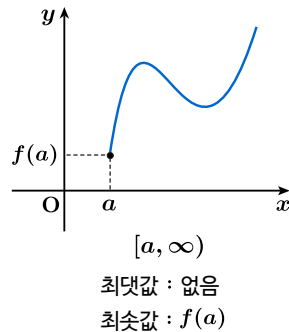
함수의 최대와 최소

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 최대·최소의 정리에 의해서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 최댓값과 최솟값을 반드시 갖는다. 이때, 함수 $f(x)$ 가 이 닫힌구간에서 극값을 가지면 다음이 성립한다.

- (1) 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 이 구간에서의 극댓값들과 $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.
- (2) 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 이 구간에서의 극솟값들과 $f(a), f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.



▶ 닫힌구간이 아닌 구간에서는 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.



▶ 함수가 주어진 구간에서 연속이고 그 구간에서 극값이 하나만 존재할 때

- (1) 그 극값이 극소이면 극솟값이 곧 최솟값이다.
- (2) 그 극값이 극대이면 극댓값이 곧 최댓값이다.

예제 27

$-1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ 의 최댓값을 구하시오.

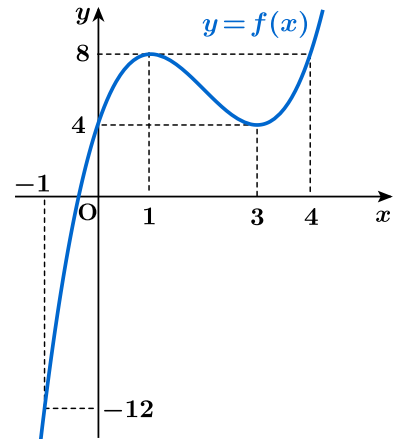
(1) 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 극값을 구해보면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0$$

으로부터 $x = 1$ 또는 $x = 3$ 에서 극값을 갖는 것을 알 수 있고, $f(1) = 8$, $f(3) = 4$ 임을 알 수 있다.

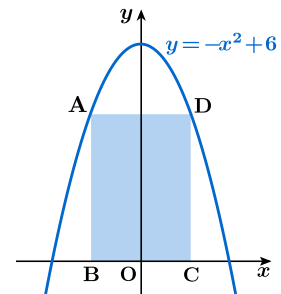
(2) 구간의 양 끝점 $x = -1$ 과 $x = 4$ 에서의 함수값은 $f(-1) = -12$, $f(4) = 8$ 이다.

(3) 최댓값은 (1), (2)의 결과 중 가장 큰 값이므로 8이 된다는 것을 알 수 있다.



예제 28

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD가 곡선 $y = -x^2 + 6$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 있을 때, 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하시오.



점 C의 좌표를 $C(t, 0)$ (단, $0 < t < \sqrt{6}$)이라고 하고, 직사각형 ABCD의 넓이를 $f(t)$ 라고 하면

$$f(t) = 2t(-t^2 + 6) = -2t^3 + 12t$$

가 된다. 따라서 이 문제는 열린구간 $(0, \sqrt{6})$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값을 구하는 문제가 된다. $f'(t) = -6t^2 + 12 = 0$ 으로부터 $t = \pm\sqrt{2}$ 에서 함수 $f(t)$ 가 극값을 갖는 것을 알 수 있고, $t = \sqrt{2}$ 의 좌우에서 $f'(t)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ 가 극댓값이 된다. 주어진 구간에서 극값이 극댓값 하나만 존재하므로 $8\sqrt{2}$ 가 극댓값이자 최댓값이 된다. 따라서 직사각형 ABCD 넓이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$ 이다.

함수의 그래프와 방정식의 실근

- (1) 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = 0$ 의 그래프, 즉 x 축이 만나는 교점의 개수와 같다.
- (2) 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 교점의 개수와 같다.

예제 29

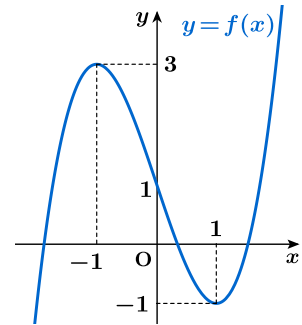
방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

이다. 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 이고, 이 값들을 경계로 증감표를 작성하고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

x	\cdots	-1	\cdots	1	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	3	\searrow	-1	\nearrow



함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근은 3개다.

예제30

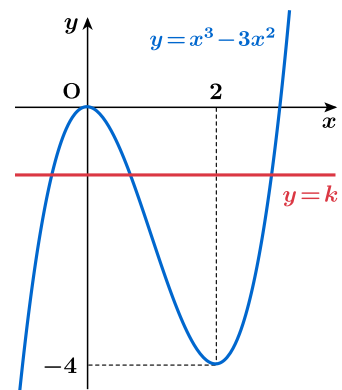
방정식 $x^3 - 3x^2 - k = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 k 의 값의 범위를 구하시오.

$f(x) = x^3 - 3x^2$ 이라고 하면 방정식의 실근의 개수는 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = k$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ 이고, 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해가 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 이므로 이 값들을 토대로 증감표를 작성하고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	\cdots	0	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	0	\searrow	-4	\nearrow

그래프에서 볼 수 있듯이 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값 0, $x = 2$ 에서 극솟값 -4를 갖는 것을 알 수 있다. 이때, k 가 $-4 < k < 0$ 의 범위에 있으면 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = k$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만난다는 것을 확인할 수 있다.



함수의 그래프와 부등식의 증명

- (1) 어떤 구간에서 함수 $f(x)$ 가 최솟값을 가질 때, 그 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립함을 보이려면 그 구간에서

$$f(x) \text{의 최솟값} \geq 0$$

임을 보이면 된다.

- (2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립함을 보이려면 $h(x) = f(x) - g(x)$ 로 두고, 그 구간에서

$$h(x) \text{의 최솟값} \geq 0$$

임을 보이면 된다.

예제 31

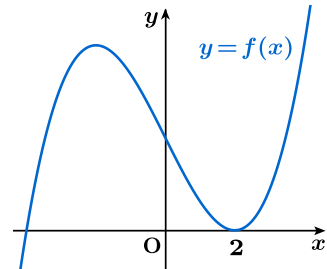
$x \geq 0$ 일 때, $x^3 - 12x + 16 \geq 0$ 이 성립함을 보이시오.

$f(x) = x^3 - 12x + 16$ 이라고 하면, $x \geq 0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$ 이고 $f'(x) = 0$ 의 해가 $x = \pm 2$ 이므로, 이 값들을 토대로 증감표를 작성하고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	\cdots	-2	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	32	\searrow	0	\nearrow

그래프에서 볼 수 있듯이, 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 0$ 인 구간에서 극솟값을 하나만 갖기 때문에 $f(2) = 0$ 이 이 구간에서의 최솟값임을 알 수 있다. 따라서 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립한다.



예제32

모든 실수 x 에 대하여 $x^4 + 8x^2 + 4 \geq 4x^3 + 8x$ 가 성립함을 보이시오.

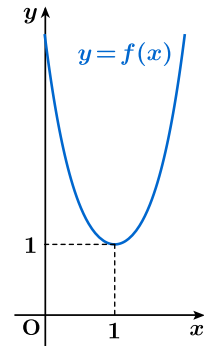
부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면 $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 \geq 0$ 이 된다.

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$ 라고 하면, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8 = 4(x-1)(x^2 - 2x + 2)$ 이므로 방정식 $f'(x) = 0$ 의 실근은 $x = 1$ 이다. 이것을 토대로 증감표 작성하고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	\cdots	1	\cdots
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	1	\nearrow

그래프에서 볼 수 있듯이, 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값 하나만 갖기 때문에, $f(1) = 1$ 이 함수 $f(x)$ 의 최솟값임을 알 수 있다. 따라서 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) \geq 0$ 이 성립한다.



예제32

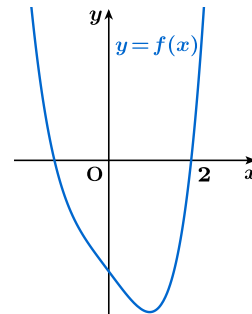
$x > 2$ 에서 $x^4 - 4x - 8 > 0$ 이 성립함을 보이시오.

$f(x) = x^4 - 4x - 8$ 라고 하면

$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$ 이다.

이때, $x > 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x - 1 > 0$, $x^2 + x + 1 > 0$ 이므로 $f'(x) > 0$ 이 성립한다. 즉, $x > 2$ 인 구간에서는 $f(x)$ 가 증가함수가 된다. 따라서 $x = 2$ 에서의 함수값이 $f(2) \geq 0$ 을 만족시키면 주어진 부등식은 성립한다.

오른쪽 그래프에서 볼 수 있듯이 $f(2) = 0$ 이므로 $x > 2$ 에서 부등식 $x^4 - 4x - 8 > 0$ 이 성립함을 알 수 있다.



속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치를 $x = f(t)$ 라고 할 때, 점 P의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 와 가속도 $a(t)$ 는 다음과 같다.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad a(t) = v'(t) = f''(t)$$

- ▶ 시각 t 에서 $t + \Delta t$ 까지의 $f(t)$ 의 평균변화율

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

를 시각 t 에서 $t + \Delta t$ 까지의 점 P의 평균속도라고 한다.

- ▶ $\Delta t \rightarrow 0$ 일 때의 평균속도의 극한을 $v(t)$ 라고 하면

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

이다. 이때, $v(t)$ 를 점 P의 시각 t 에서의 순간속도 또는 속도라고 한다.

- ▶ 시간 t 에 대한 함수 $v(t)$ 의 순간변화율을 $a(t)$ 라고 하면

$$a(t) = v'(t) = f''(t)$$

이다. 이때, $a(t)$ 를 점 P의 시각 t 에서의 가속도라고 한다.

- ▶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 운동방향

- ① $f'(t) > 0$ 인 구간에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.
- ② $f'(t) < 0$ 인 구간에서 점 P는 음의 방향으로 움직인다.
- ③ $f'(a) = 0$ 이고 $t = a$ 의 좌우에서 $f'(t)$ 의 부호가 바뀌면 $t = a$ 에서 점 P의 운동방향이 바뀐다.

- ▶ 속도의 절댓값 $|v(t)|$ 를 시각 t 에서의 점 P의 속력이라고 한다.

위치

↓ 미분

속도

↓ 미분

가속도

예제 33

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가 $x = -t^3 + 4t^2 + 3t$ 일 때, 다음을 구하시오.

- (1) 점 P의 시각 $t = 2$ 에서의 속도와 가속도
- (2) 점 P가 출발한 후, 운동방향을 바꾸는 시각

(1) $f(t) = -t^3 + 4t^2 + 3t$ 라고 하면

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t) = -3t^2 + 8t + 3 \text{ 이므로 } v(2) = -12 + 16 + 3 = 7 \text{ 이 되고,}$$

$$a(t) = v'(t) = f''(t) = -6t + 8 \text{ 이므로 } a(2) = -12 + 8 = 4 \text{ 가 된다.}$$

(2) $v(t) = f'(t) = -(3t+1)(t-3)$ 이므로 $v(3) = f'(3) = 0$ 이 된다. 또한, $t = 3$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 시각 $t = 3$ 에서 점 P의 운동방향이 양의 방향에서 음의 방향으로 바뀐다.

예제 34

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치는 각각

$$P(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t - \frac{2}{3}, \quad Q(t) = 2t^2 - 10$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도는 각각 $P'(t) = t^2 + 4$, $Q'(t) = 4t$ 이다.

$$P'(t) - Q'(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 = 0$$

으로부터 $t = 2$ 에서 두 점의 속도가 같아지는 것을 알 수 있다.

시각 $t = 2$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$P(2) = \frac{8}{3} + 8 - \frac{2}{3} = 10, \quad Q(2) = 8 - 10 = -2$$

이므로 두 점 사이의 거리는 $P(2) - Q(2) = 10 - (-2) = 12$ 임을 알 수 있다.

고등학교 수학 2

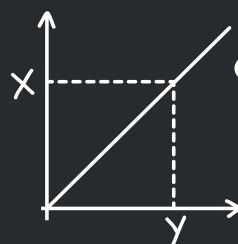
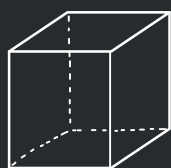
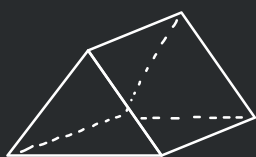
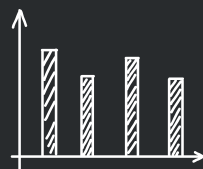
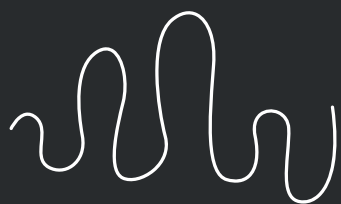
적분

3

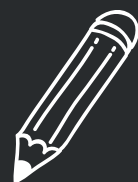
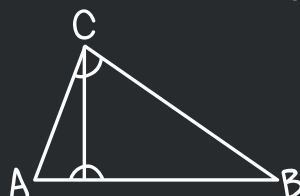
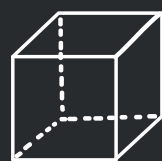
-
1. 부정적분과 정적분
 2. 정적분의 활용

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

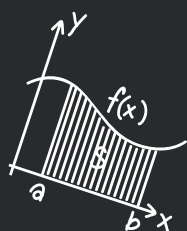
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



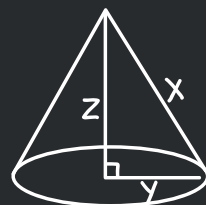
$$a^2 + b^2 = c^2$$



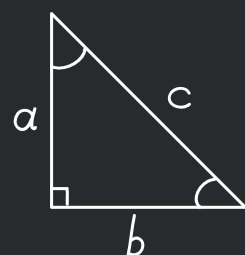
1. 부정적분과 정적분



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



부정적분

함수 $F(x)$ 의 도함수가 $f(x)$ 일 때, 즉

$$F'(x) = f(x)$$

를 만족시키는 임의의 $F(x)$ 를 함수 $f(x)$ 의 부정적분이라고 한다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라고 하면 함수 $f(x)$ 의 부정적분은 $F(x) + C$ (C 는 상수)로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

와 같이 나타낸다. 함수 $f(x)$ 의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$ 를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{미분}} dx = \underbrace{F(x) + C}_{\text{적분}}$$

- ▶ 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나가 $F(x)$ 이고, $G(x)$ 가 $f(x)$ 의 또 다른 부정적분이면 $F'(x) = G'(x) = f(x)$ 가 성립하므로

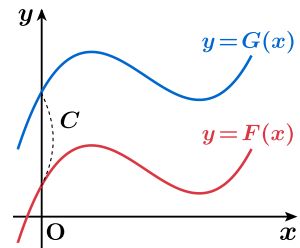
$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

이 된다. 이때, 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$$G(x) - F(x) = C$$

$$G(x) = F(x) + C \quad (C \text{는 상수})$$

가 된다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라고 하면 함수 $f(x)$ 의 부정적분은 $F(x) + C$ (C 는 상수)의 형태로 나타낼 수 있다.



예제 1

등식 $\int f(x) dx = 3x^2 + C$ (C 는 상수)를 만족하는 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

$(3x^2 + C)' = f(x)$ 가 되어야 하므로 $f(x) = 6x$ 이다.

부정적분과 미분의 관계

$$(1) \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x)$$

$$(2) \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

- ▶ $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라고 하면 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 가 된다. 양변을 x 에 대해서 미분하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = \frac{d}{dx} \{F(x) + C\} = \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

- ▶ $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = \int f'(x) dx = f(x) + C$$

예제 2

함수 $f(x) = x^3 + 3x$ 에 대하여 $F(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int xf(x) dx \right\}$ 일 때, $F(1)$ 의 값을 구하시오.

$$F(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int xf(x) dx \right\} = xf(x) = x^4 + 3x^2$$

$$\therefore F(1) = 1 + 3 = 4$$

예제 3

다음 두 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 - x + 1) \right\} dx, \quad f(0) = 1$$

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 - x + 1) \right\} dx = x^2 - x + 1 + C \quad (C \text{는 상수})$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 0$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 1$$

함수 $y = x^n$ (n 은 자연수)의 부정적분

n 이 자연수일 때,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

➤ $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \right) = \frac{1}{n+1} \times (n+1)x^n = x^n$

예제 4

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int x^5 dx$

(2) $\int 1 dx$

(1) $\int x^5 dx = \frac{1}{5+1} \times x^{5+1} + C = \frac{1}{6}x^6 + C$ (C 는 상수)

(2) $\int 1 dx = x + C$ (C 는 상수)

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 부정적분이 각각 존재할 때,

$$(1) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

$$(2) \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(3) \int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

▶ 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 부정적분을 각각

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1 \quad (C_1 \text{은 상수}),$$

$$\int g(x) dx = G(x) + C_2 \quad (C_2 \text{는 상수})$$

라고 하면 $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ 이므로

(1) 실수 k ($k \neq 0$)에 대하여 $\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$ 이므로

$$\int k f(x) dx = kF(x) + C \quad (C \text{는 상수}) \quad \dots \textcircled{1}$$

가 된다. 이때,

$$k \int f(x) dx = k\{F(x) + C_1\} = kF(x) + kC_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

이고, kC_1 과 C 가 모두 임의의 상수이므로 $kC_1 = C$ 라고 하면 ①과 ②는 같은 형태가 되어 다음이 성립한다.

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

(2) $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ 이므로

$$\int \{f(x) + g(x)\} dx = F(x) + G(x) + C_3 \quad (C_3 \text{는 상수}) \quad \dots \textcircled{3}$$

이다. 이때,

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 \quad \dots \textcircled{4}$$

이고, $C_1 + C_2$ 와 C_3 가 모두 임의의 상수이므로 $C_1 + C_2 = C_3$ 라고 하면 ③과 ④는 같은 형태가 되어 다음이 성립한다.

$$\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

(3) (2)와 같은 방법으로 보일 수 있다.

- ▶ x^n 의 부정적분, 1의 부정적분, 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 이용하면 다항함수의 부정적분을 구해낼 수 있다.
- ▶ 부정적분 함수를 구하는 과정에서 적분상수가 여러 개 나올 때는 모든 적분상수의 합을 하나의 적분상수로 나타낸다.

$$\int 3x^2 dx + \int x dx = (x^3 + C_1) + \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

예제 5

부정적분 $\int (2x^2 + 3x - 4) dx$ 를 구하시오.

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + 3x - 4) &= \int 2x^2 dx + \int 3x dx - \int 4 dx \\ &= 2 \int x^2 dx + 3 \int x dx - 4 \int 1 dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right) + 3 \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2 \right) - 4(x + C_3) \\ &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + (2C_1 + 3C_2 - 4C_3) \end{aligned}$$

여기서 $(2C_1 + 3C_2 - 4C_3) = C$ 라고하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int (2x^2 + 3x - 4) dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$$

예제 6

다음 조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 5, \quad f(0) = -1$$

$f(x)$ 는 $f'(x)$ 의 부정적분이므로

$$f(x) = \int (6x^2 - 2x + 5) dx = 2x^3 - x^2 + 5x + C$$

이고, $f(0) = -1$ 에서 $C = -1$ 이므로 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ 이 된다.

정적분의 정의

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $f(x)$ 의 부정적분 중 하나인 $F(x)$ 에 대하여 $F(b) - F(a)$ 를 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

이때, 정적분 $\int_a^b f(x) dx$ 의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$ 를 a 에서 b 까지 적분한다고 한다.

- ▶ 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라고 할 때, $F(b) - F(a)$ 는 적분상수 C 와는 관계없이 항상 일정한 값이 나온다. 따라서 정적분에서는 적분상수 C 를 생략한다.

$$\left[F(x) + C \right]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$$

- ▶ 정적분 $\int_a^b f(x) dx$ 에서 a 를 아래끝, b 를 위끝이라고 한다.
- ▶ 정적분은 a, b 의 대소에 관계없이 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ 로 정의한다.
- ▶ 정적분 $\int_a^b f(x) dx$ 의 값은 함수 $f(x)$ 와 아래끝 a , 위끝 b 만으로 결정되는 상수이므로 적분변수와는 관계가 없다.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

- ▶ 부정적분 $\int f(x) dx$ 의 결과는 함수이므로 적분변수가 다르면 서로 다른 함수가 된다.

$$\int f(x) dx \neq \int f(y) dy \neq \int f(t) dt \neq \int f(u) du \neq \dots$$

예제 7

정적분 $\int_{-1}^2 (3x^2 + 6x - 1) dx$ 의 값을 구하시오.

$$\int_{-1}^2 (3x^2 + 6x - 1) dx = \left[x^3 + 3x^2 - x \right]_{-1}^2 = (8 + 12 - 2) - (-1 + 3 + 1) = 15$$

예제 8

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0 \qquad (2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라고 하면

$$(1) \int_a^a f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$\begin{aligned} (2) \int_a^b f(x) dx &= \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \\ &= - \left\{ F(a) - F(b) \right\} = - \left[F(x) \right]_b^a \\ &= - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

예제 9

다음 정적분의 값을 구하시오.

$$(1) \int_4^4 (x^2 + 2x - 5) dx \qquad (2) \int_2^0 (2x + 3) dx$$

$$(1) \int_4^4 (x^2 + 2x - 5) dx = 0$$

$$(2) \int_2^0 (2x + 3) dx = - \int_0^2 (2x + 3) dx = - \left[x^2 + 3x \right]_0^2 = - \{ (4 + 6) - 0 \} = -10$$

정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$ 가 a 를 포함하는 닫힌구간에서 연속이고, x 가 그 닫힌구간에 속하는 임의의 실수이면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

▶ 함수 $f(t)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(t)$ 라고 하면 정적분의 정의에 의하여

$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ 이다. 이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

예제 10

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $\int_a^x f(t) dt = x^3 - x^2 - x - 2$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값과 함수 $f(x)$ 를 각각 구하시오. (단, a 는 실수)

주어진 등식의 양변에 $x = a$ 를 대입하면 $\int_a^a f(t) dt = a^3 - a^2 - a - 2 = 0$ 이다.

$$a^3 - a^2 - a - 2 = (a - 2)(a^2 + a + 1) = 0 \quad \therefore a = 2$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (x^3 - x^2 - x - 2)$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

이다.

정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$(1) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{는 상수})$$

$$(2) \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(3) \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

▶ 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 부정적분 중 하나를 각각 $F(x)$, $G(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} (1) \int_a^b k f(x) dx &= \left[k F(x) \right]_a^b = k F(b) - k F(a) = k \{F(b) - F(a)\} = k \left[F(x) \right]_a^b \\ &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \left[F(x) + G(x) \right]_a^b = \{F(b) + G(b)\} - \{F(a) + G(a)\} \\ &= \{F(b) - F(a)\} + \{G(b) - G(a)\} = \left[F(x) \right]_a^b + \left[G(x) \right]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

(3) (2)와 같은 방법으로 보일 수 있다.

예제 11

정적분 $\int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + 3x + 1) dx + \int_1^2 (x^3 + x^2 - 3x - 3) dx$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} &\int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + 3x + 1) dx + \int_1^2 (x^3 + x^2 - 3x - 3) dx \\ &= \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + 3x + 1 + x^3 + x^2 - 3x - 3) dx \\ &= \int_1^2 (3x^2 - 2) dx = 3 \int_1^2 x^2 dx - 2 \int_1^2 1 dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 - 2 \left[x \right]_1^2 = 3 \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) - 2(2 - 1) \\ &= 7 - 2 = 5 \end{aligned}$$

정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$ 가 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

▶ 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \left[F(x) \right]_a^c + \left[F(x) \right]_c^b \\ &= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} \\ &= F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

예제 12

정적분 $\int_1^2 (2x^2 + 4) dx + \int_2^3 (2x^2 + 4) dx$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x^2 + 4) dx + \int_2^3 (2x^2 + 4) dx &= \int_1^3 (2x^2 + 4) dx \\ &= 2 \int_1^3 x^2 dx + 4 \int_1^3 1 dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 + 4 \left[x \right]_1^3 \\ &= 2 \left(9 - \frac{1}{3} \right) + 4(3 - 1) \\ &= \frac{76}{3} \end{aligned}$$

예제 13

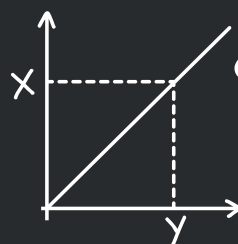
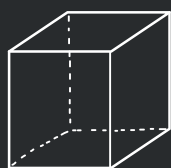
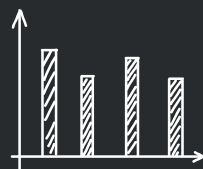
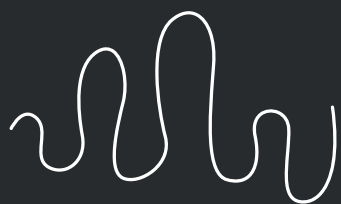
정적분 $\int_0^3 |x^2 - 6x + 8| \, dx$ 의 값을 구하시오.

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $|x^2 - 6x + 8| = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & (0 \leq x \leq 2) \\ -x^2 + 6x - 8 & (2 < x \leq 3) \end{cases}$ 이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

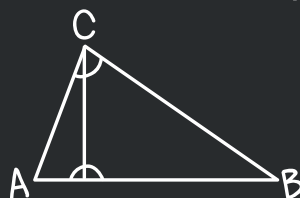
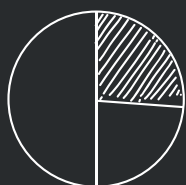
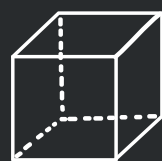
$$\begin{aligned} \int_0^3 |x^2 - 6x + 8| \, dx &= \int_0^2 |x^2 - 6x + 8| \, dx + \int_2^3 |x^2 - 6x + 8| \, dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) \, dx + \int_2^3 (-x^2 + 6x - 8) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 12 + 16 \right) + \left(-9 + 27 - 24 + \frac{8}{3} - 12 + 16 \right) \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

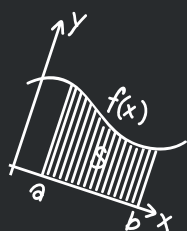
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



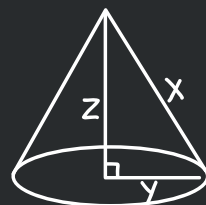
$$a^2 + b^2 = c^2$$



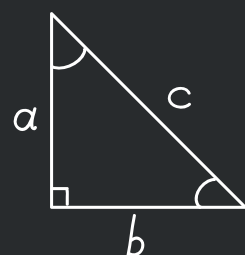
2. 정적분의 활용



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



곡선과 x 축 사이의 넓이

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

- ▶ 함수 $f(t)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 이 구간에서 $f(t) \geq 0$ 이라고 할 때, 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a, b]$ 에 속하는 임의의 x 에 대하여 곡선 $y = f(t)$ 와 t 축 및 두 직선 $t = a$, $t = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$ 라고 하자. 이때, x 의 증분 Δx 에 대한 $S(x)$ 의 증분을 ΔS 라고 하면

$$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$$

이다.

만약 $\Delta x > 0$ 이라면 함수 $f(t)$ 는 닫힌구간 $[x, x + \Delta x]$ 에서 연속이므로 최대·최소의 정리에 의해 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 그 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 이라고 하면

$$m\Delta x \leq \Delta S \leq M\Delta x$$

이고, 양변을 Δx 로 나누면 $m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M$ 이 된다. 여기서 $\Delta x \rightarrow 0+$ 이면

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} m \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} M$$

이 성립한다. 함수 $f(t)$ 는 $[a, b]$ 에서 연속함수이므로 $\Delta x \rightarrow 0+$ 이면 $m \rightarrow f(x)$, $M \rightarrow f(x)$ 이 되고 다음을 얻을 수 있다.

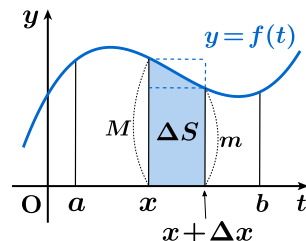
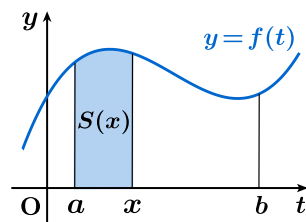
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$$

마찬가지 방법으로 $\Delta x < 0$ 일 때도 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ 가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $S'(x) = \frac{d}{dx} S(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ 가 되어 $S(x)$ 가 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나가 됨을 알 수 있다. 따라서

$$S(x) - S(a) = \int_a^x f(t) dt$$

이다.



위 식에 $x = b$ 를 대입하면

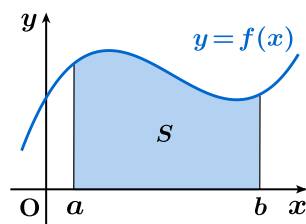
$$S(b) - S(a) = \int_a^b f(t) dt$$

가 된다. 이때, $S(b) = S$, $S(a) = 0$ 이고

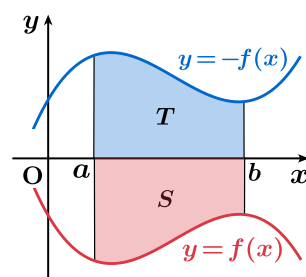
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx \text{이므로}$$

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

가 된다.



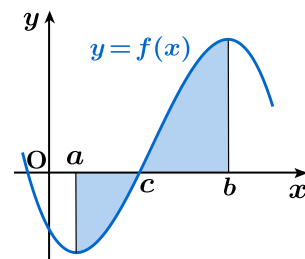
- ▶ 함수 $y = f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 이 구간에서 $f(x) \leq 0$ 이면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = -f(x)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축에 대하여 대칭이고 $-f(x) \geq 0$ 이 된다. 따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 와 곡선 $y = -f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 T 는 서로 같다. 따라서 다음이 성립한다.



$$S = T = \int_a^b \{-f(x)\} dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

- ▶ 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 닫힌구간 $[a, c]$ 에서는 $f(x) \leq 0$, 닫힌구간 $[c, b]$ 에서는 $f(x) \geq 0$ 이면, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{-f(x)\} dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$



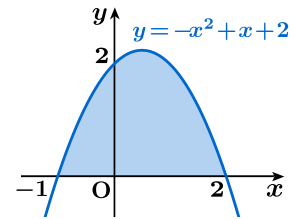
예제 14

곡선 $y = -x^2 + x + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

주어진 곡선과 x 축과의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + x + 2 = 0$ 으로부터 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 임을 알 수 있다. 또한 구간 $[-1, 2]$ 에서 $-x^2 + x + 2 \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

이다.



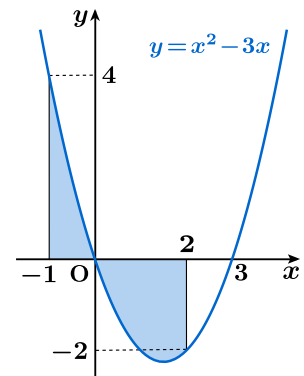
예제 15

곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 x 축 및 두 직선 $x = -1$, $x = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

주어진 곡선과 x 축과의 교점의 x 좌표는 $x^2 - 3x = 0$ 으로부터 $x = 0$ 또는 $x = 3$ 임을 알 수 있다. 또한 구간 $[-1, 0]$ 에서는 $x^2 - 3x \geq 0$ 이고, 구간 $[0, 2]$ 에서는 $x^2 - 3x \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) \, dx + \int_0^2 (-x^2 + 3x) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{31}{6} \end{aligned}$$

이다.



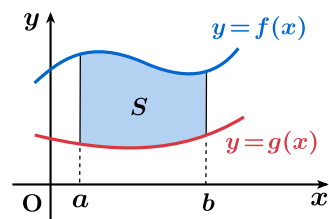
두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

▶ 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $0 \leq g(x) \leq f(x)$ 일 때

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$



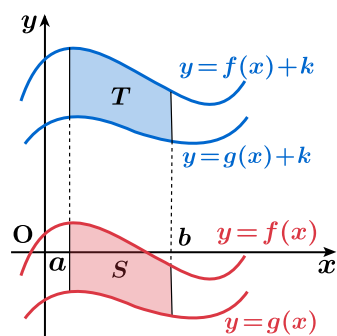
▶ 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $g(x) \leq f(x)$ 이고, $f(x)$ 또는 $g(x)$ 가 음의 값을 가질 때

두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 를 y 축의 방향으로 실수 k 만큼 평행이동하여

$$0 \leq g(x) + k \leq f(x) + k$$

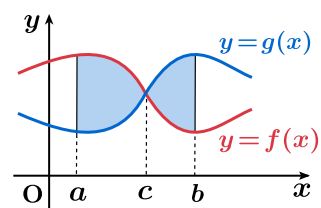
가 성립되도록 한다. 이때, 평행이동한 도형의 넓이 T 가 원래 도형의 넓이 S 와 같으므로 넓이 S 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S &= T = \int_a^b \{f(x) + k\} dx - \int_a^b \{g(x) + k\} dx \\ &= \int_a^b \{f(x) + k - g(x) - k\} dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$



▶ 닫힌구간 $[a, c]$ 에서는 $f(x) \geq g(x)$ 이고, 닫힌구간 $[c, b]$ 에서는 $f(x) \leq g(x)$ 일 때

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{f(x) - g(x)\} dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$



예제 16

두 곡선 $y = x^2 - 2x + 1$, $y = -x^2 + 4x + 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

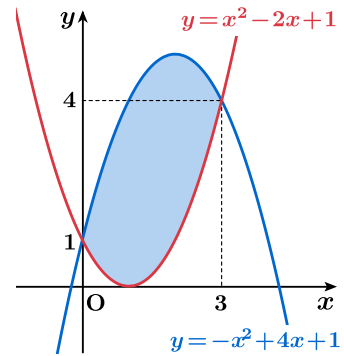
두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0$$

으로부터 $x = 0$ 또는 $x = 3$ 임을 알 수 있다. 또한 구간 $[0, 3]$ 에서 $-x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 2x + 1$ 이므로 구하는 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{(-x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\} dx \\ &= \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

이다.



예제 17

$0 \leq x \leq 2$ 일 때, 곡선 $y = -x^2 + 2x + 2$ 와 직선 $y = 2x + 1$ 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

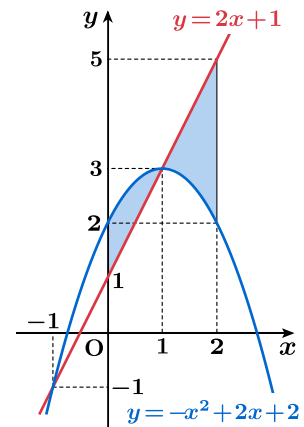
주어진 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 2x + 2 = 2x + 1 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) = 0$$

으로부터 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 임을 알 수 있다. 또한 구간 $[0, 1]$ 에서는 $-x^2 + 2x + 2 \geq 2x + 1$ 이고, 구간 $[1, 2]$ 에서는 $-x^2 + 2x + 2 \leq 2x + 1$ 이므로 구하는 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-x^2 + 2x + 2) - (2x + 1)\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{(2x + 1) - (-x^2 + 2x + 2)\} dx \\ &= \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

이다.



수직선 위를 움직이는 점의 위치

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라고 하면

(1) 시각 $t = a$ 에서 $t = b$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.

$$\int_a^b v(t) dt$$

(2) 시각 $t = a$ 에서의 점 P의 위치를 x_0 , 시각 $t = b$ 에서의 점 P의 위치를 x 라고 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$x = x_0 + \int_a^b v(t) dt$$

- ▶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치가 $f(t)$ 라고 하면, 시각 $t = a$ 에서 시각 $t = b$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 $f(b) - f(a)$ 가 된다. 또한 $v(t) = f'(t)$ 이므로 $f(t)$ 는 $v(t)$ 의 부정적분 중 하나이다. 따라서

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t) dt$$

임을 알 수 있다.

- ▶ $t = b$ 에서의 위치 $f(b)$ 는 $f(b) = f(a) + \int_a^b v(t) dt$ 로 구할 수 있고, $x_0 = f(a)$, $x = f(b)$ 이므로

$$x = x_0 + \int_a^b v(t) dt$$

임을 알 수 있다.

예제 18

좌표가 1인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 2t^2 + t + 3$$

과 같을 때, 다음을 구하시오.

- (1) 시각 $t = 0$ 에서 $t = 3$ 까지 점 P의 위치의 변화량
- (2) 시각 $t = 3$ 에서의 점 P의 위치

- (1) 시각 $t = 0$ 에서 $t = 3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.

$$\int_0^3 (2t^2 + t + 3) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3t \right]_0^3 = 18 + \frac{9}{2} + 9 = \frac{63}{2}$$

- (2) 시각 $t = 3$ 에서 점 P의 위치는 다음과 같다.

$$1 + \int_0^3 (2t^2 + t + 3) dt = 1 + \frac{63}{2} = \frac{65}{2}$$

수직선 위를 움직이는 점의 이동 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라고 하면, 시각 $t = a$ 에서 $t = b$ 까지 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_a^b |v(t)| dt$$

▶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치를 $f(t)$ 라고 하면

(1) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $v(t) \geq 0$ 일 때

속도 $v(t) \geq 0$ 이므로 점 P는 양의 방향으로 이동한다. 따라서 점 P가 움직인 거리는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b |v(t)| dt$$

(2) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $v(t) \leq 0$ 일 때

속도 $v(t) \leq 0$ 이므로 점 P는 음의 방향으로 이동한다. 따라서 점 P가 움직인 거리는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(a) - f(b) = - \int_a^b v(t) dt = \int_a^b -v(t) dt = \int_a^b |v(t)| dt$$

(3) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $v(t)$ 가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때

속도 $v(t)$ 가 양, 음인 구간을 나누어 (1), (2)에서와 같이 움직인 거리를 구하면 되므로 점 P가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_a^b |v(t)| dt$$

예제 19

지상으로부터 10m의 높이에서 49 m/s의 속도로 지면에 수직으로 쏘아 올린 로켓의 t 초 후의 속도가 $v(t) = 49 - 9.8t$ (m/s)라고 할 때, 다음을 구하시오.

- (1) 로켓이 도달할 수 있는 최고 높이
- (2) 로켓을 쏘아 올린 후, 10초 동안 로켓이 실제로 움직인 거리

- (1) 로켓이 최고 높이에 도달하는 것은 속도가 0이 될 때이므로 $t = 5$ 일 때 최고 높이에 도달하게 된다. 따라서 $t = 5$ 일 때의 로켓의 위치를 구하면 된다.

$$\begin{aligned} 10 + \int_0^5 (49 - 9.8t) dt &= 10 + \left[49t - 4.9t^2 \right]_0^5 \\ &= 10 + 245 - 122.5 = 132.5 \text{ (m)} \end{aligned}$$

- (2) 구간 $[0, 5]$ 에서는 $v(t) \geq 0$ 이고, 구간 $[5, \infty)$ 에서는 $v(t) \leq 0$ 이므로 10초 동안 로켓이 실제로 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^{10} |49 - 9.8t| dt &= \int_0^5 (49 - 9.8t) dt + \int_5^{10} (9.8t - 49) dt \\ &= \left[49t - 4.9t^2 \right]_0^5 + \left[4.9t^2 - 49t \right]_5^{10} \\ &= 245 \text{ (m)} \end{aligned}$$