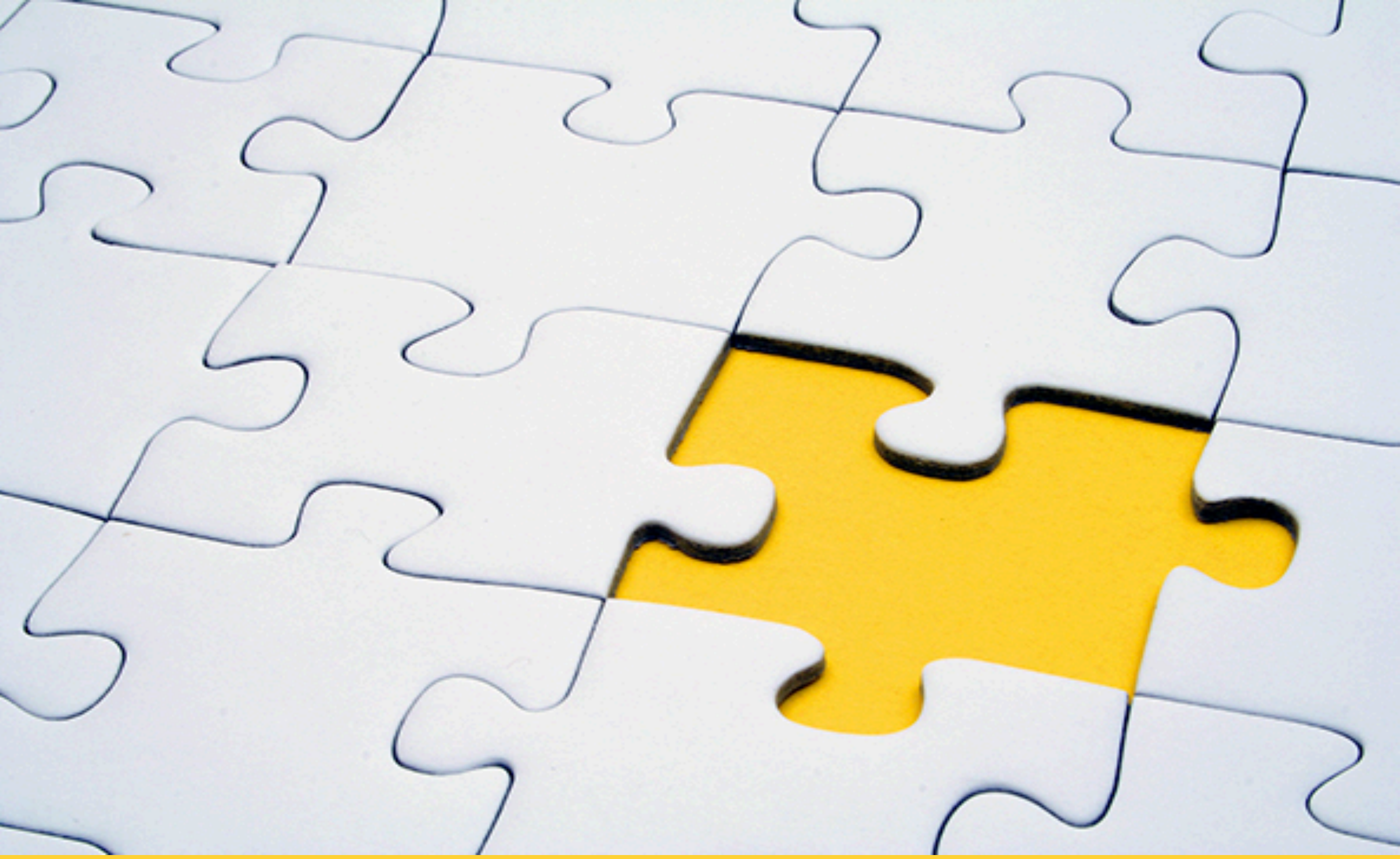


고등학교

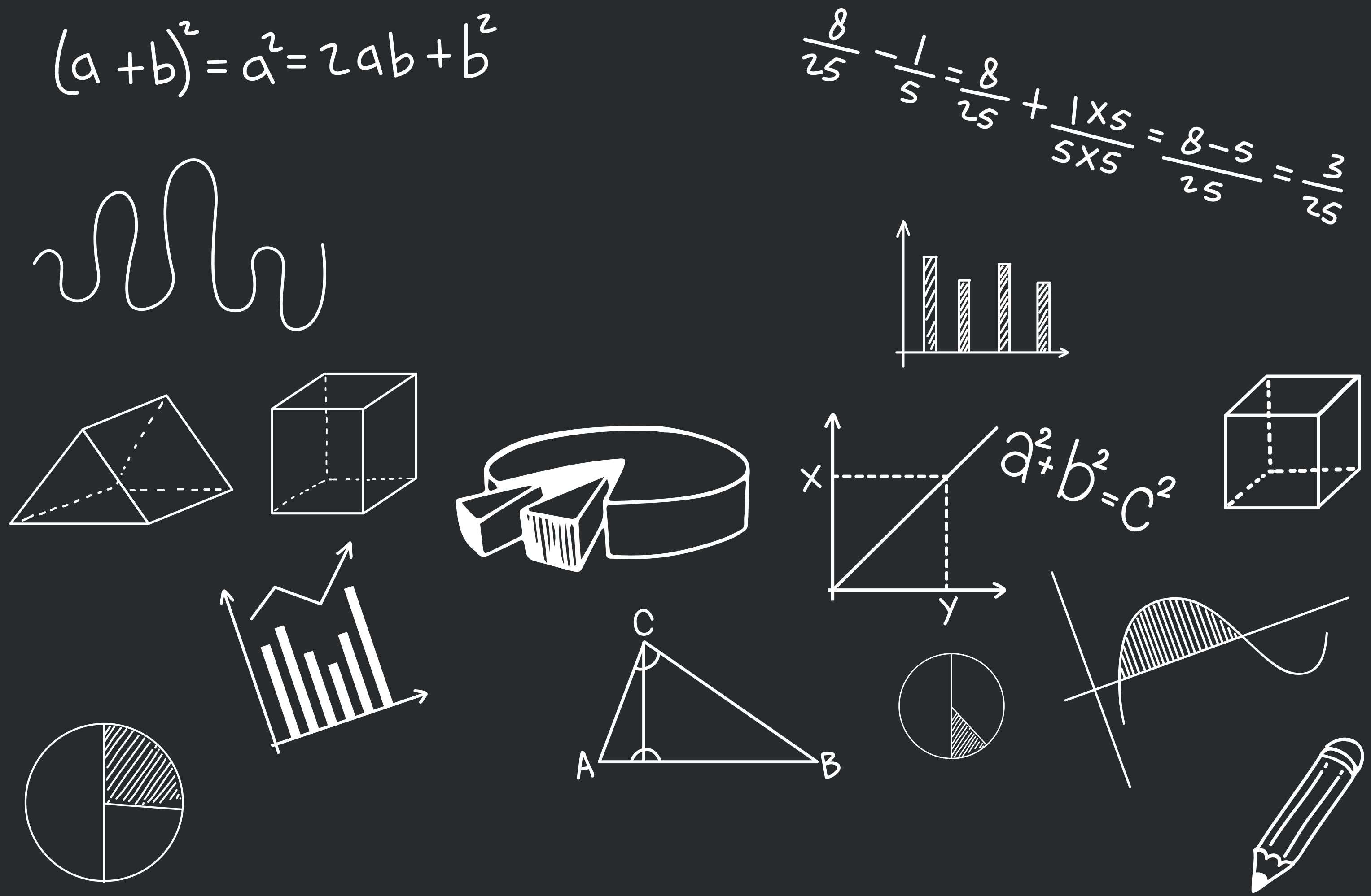
수학1

수악중독

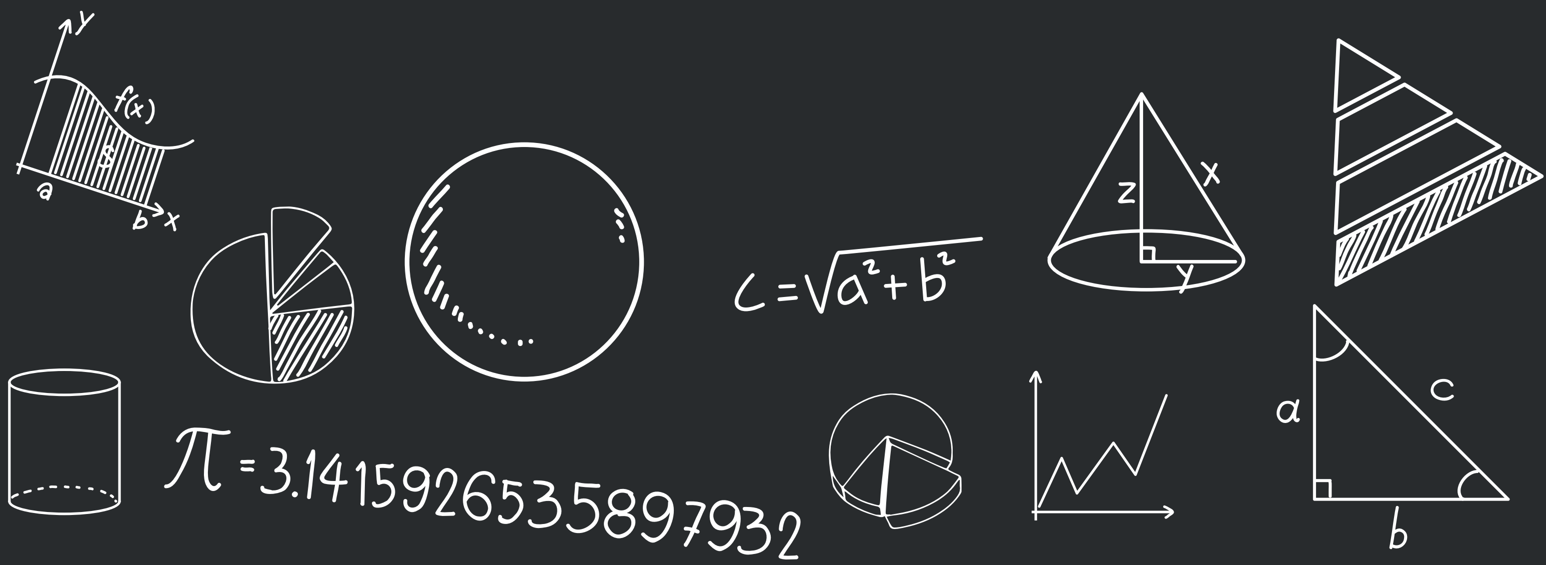
고등학교 수학1

지수함수와 로그함수

1


(a+b)² = a² = 2ab + b²
8/25 − 1/5 = 8/25 + 1×5/5×5 = 8−5/25 = 3/25
x
y
a²+b²=c²
C
A
B

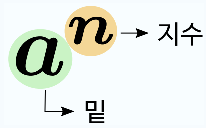
1. 지수와 로그


y
f(x)
S
a
b
x
c=√(a²+b²)
z
x
y
π=3.14159265358979 32
a
c
b

1 거듭제곱과 거듭제곱근

거듭제곱

a를 n번 곱한 a^n을 a의 n제곱이라 하고, $a^2,\ a^3,\ \cdots,\ a^n,\ \cdots$를 통틀어 a의 거듭제곱이라고 한다. 이때, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 지수라고 부른다.



➤ 중학교 때 배운 지수법칙을 정리하면 다음과 같다.

$a,\ b$가 임의의 실수이고, m, n이 자연수일 때,

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

(5) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

예제1

$ab^2 \times \left(a^3b^2\right)^2 \div \dfrac{b^3}{a^2}$을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0,\ b \neq 0$)

$$\begin{aligned} ab^2 \times \left(a^3b^2\right)^2 \div \frac{b^3}{a^2} &= ab^2 \times a^6b^4 \times \frac{a^2}{b^3} \\ &= a^{1+6+2} \times b^{2+4-3} \\ &= a^9b^3 \end{aligned}$$

★ 지수법칙의 증명

(1) $a^n \times a^m = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n\text{개}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m\text{개}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n\text{개}} = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = \underbrace{\overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{a\text{가 } m\text{개}} \times \overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{a\text{가 } m\text{개}} \times \cdots \times \overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{a\text{가 } m\text{개}}}_{\text{괄호가 } n\text{개}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{mn\text{개}} = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = \underbrace{(ab \times ab \times \cdots \times ab)}_{ab\text{가 } n\text{개}} = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{a\text{가 } n\text{개}} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{b\text{가 } n\text{개}} = a^n b^n$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \cdots \times \dfrac{a}{b}\right)}_{\frac{a}{b}\text{ 가 } n\text{개}} = \dfrac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } n\text{개}}}{\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{b\text{가 } n\text{개}}} = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

(5) $a^m \div a^n = \dfrac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } n\text{개}} \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m-n\text{개}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } n\text{개}}} = \dfrac{\cancel{a \times \cdots \times a} \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m-n\text{개}}}{\cancel{a \times \cdots \times a}} = a^{m-n} \quad (m > n)$

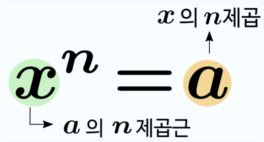
$a^m \div a^n = \dfrac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m\text{개}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } m\text{개}}} = \dfrac{\cancel{a \times \cdots \times a}}{\cancel{a \times \cdots \times a}} = 1 \quad (m = n)$

$a^m \div a^n = \dfrac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m\text{개}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } m\text{개}} \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } n-m\text{개}}} = \dfrac{\cancel{a \times \cdots \times a}}{\cancel{a \times \cdots \times a} \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } n-m\text{개}}} = \dfrac{1}{a^{n-m}} \quad (m < n)$

(단, $a \neq 0$)

거듭제곱근

n을 $n \geq 2$인 정수라 할 때, 실수 a에 대하여 방정식 $x^n = a$의 근을 a의 n제곱근이라 하고, a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, $\cdots$ 를 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

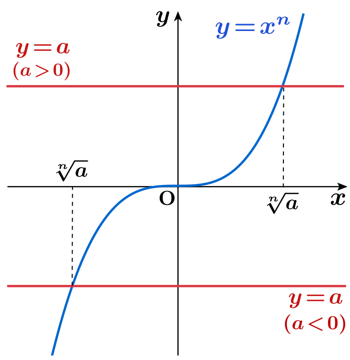


- $x^n = a$는 n차 방정식이 되고, n차 방정식의 근은 복소수 범위에서 n개 존재함이 알려져 있다. 이 중에는 실근도 존재하고, 허근도 존재한다. 하지만 여기서는 실수 a의 거듭제곱근을 실수 범위에서만 생각하기로 한다.

- a가 실수일 때, 방정식 $x^n = a$의 실근은 $y = x^n$의 그래프와 $y = a$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. $y = x^n$의 그래프는 n이 홀수인지 짝수인지에 따라 모양이 달라지므로, n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각하면 다음과 같다.

(1) n이 홀수일 때

$f(x) = x^n$이라고 하면 $f(-x) = -f(x)$이므로 $f(x)$는 홀함수가 되고, $y = f(x)$의 그래프는 원점에 대칭이다. 따라서 $y = x^n$과 $y = a$의 그래프는 a의 값에 관계없이 한 점에서 만난다. 즉, a의 n제곱근 중 실수인 것은 오직 하나이고, 이것을 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다. 이때, $a > 0$이면 $\sqrt[n]{a}$도 양수, $a < 0$이면 $\sqrt[n]{a}$도 음수, $a = 0$이면 $\sqrt[n]{a}$도 0이 된다.



(2) n이 짝수일 때

$f(x) = x^n$이라고 하면 $f(-x) = f(x)$이므로 $f(x)$는 짝함수가 되고, $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대칭이다. 따라서 $y = x^n$과 $y = a$의 그래프의 교점은 다음과 같이 a값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

① $a > 0$일 때

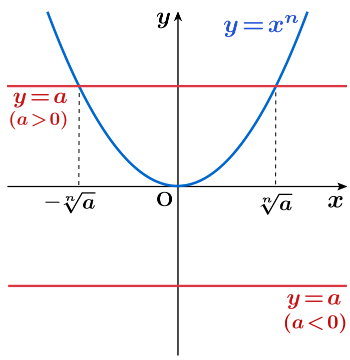
교점은 두 개이다. 또한, 이 두 점은 y축에 대칭이므로, 이 두 점의 x좌표는 절댓값은 같고 부호는 다른 두 실수라는 것을 알 수 있다. 따라서 a의 n제곱근 중 실수인 것은 양수인 것과 음수인 것이 하나씩 존재하며, 이것을 각각 기호 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

② $a = 0$일 때

교점은 하나이고 교점의 x좌표가 0이므로 a의 n제곱근도 0이 된다.

③ $a < 0$일 때

교점은 존재하지 않는다. 따라서 음수의 n제곱근은 실수 범위에서 존재하지 않는다.



➤ 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것 (n은 2이상의 정수)

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

이때, $\sqrt[n]{a}$를 n제곱근 a라고 한다.

➤ 고등학교 수학의 지수와 로그 단원에서는 거듭제곱근 중 실수만을 다루게 된다. $a>0$인 경우 방정식 $x^n=a$의 n이 홀수든 짝수든 관계없이 항상 실근이 존재하므로 앞으로 배우게 될 거듭제곱근의 성질에서는 $a>0$인 경우에 대해서만 생각한다.

➤ $a=0$인 경우에도 방정식 $x^n=a$는 실근 $x=0$을 갖지만, 이 경우 거듭제곱근에 큰 의미를 부여하기 힘들기 때문에 거듭제곱근의 성질에서는 $a=0$인 경우도 생각하지 않는다.

예제2

27의 세제곱근을 구하시오.

27의 세제곱근은 방정식 $x^3=27$의 세 근 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$와 같다.
이 중 실수인 $x=3$을 $\sqrt[3]{27}$로 나타내고 "세제곱근 27"이라고 한다.

예제3

-27의 세제곱근을 구하시오.

-27의 세제곱근은 방정식 $x^3=-27$의 세 근 $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$와 같다.
이 중 실수인 $x=-3$을 $\sqrt[3]{-27}$로 나타내고 "세제곱근 -27"이라고 한다.

예제4

81의 네제곱근을 구하시오.

81의 네제곱근은 방정식 $x^4=81$의 네 근 $x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$와 같다.
이 중 실수인 3과 -3을 각각 $\sqrt[4]{81}$, $-\sqrt[4]{81}$로 나타내고, $\sqrt[4]{81}$을 "네제곱근 81"이라고 한다.

거듭제곱근의 성질

$a>0,\ b>0$이고 $m,\ n$이 2 이상의 자연수일 때,

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(5) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=x$라고 하면 $x^n=\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$이므로 x는 n제곱근 ab가 된다. 따라서 $x=\sqrt[n]{ab}$이다.

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=x$라고 하면 $x^n=\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$이므로 x는 n제곱근 $\dfrac{a}{b}$가 된다.
따라서 $x=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$이다.

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=x$라고 하면 $x^n=\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=(\sqrt[n]{a})^{nm}=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$이므로 x는 n제곱근 a^m이 된다. 따라서 $x=\sqrt[n]{a^m}$이다.

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=x$라고 하면 $x^{mn}=\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n=(\sqrt[n]{a})^n=a$이므로 x는 mn제곱근 a가 된다. 따라서 $x=\sqrt[mn]{a}$이다.

(5) $\sqrt[n]{a^m}=x$라고 하면 $x^{np}=(\sqrt[n]{a^m})^{np}=\left\{(\sqrt[n]{a^m})^n\right\}^p=(a^m)^p=a^{mp}$이므로 x는 np제곱근 a^{mp}이 된다. 따라서 $x=\sqrt[np]{a^{mp}}$이다.

예제5

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$ (2) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$ (3) $\left(\sqrt{4}\right)^3$

(4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$ (5) $\sqrt[15]{27^{10}}$

(1) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\dfrac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$

(3) $\left(\sqrt{4}\right)^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

(4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[3]{2}$

(5) $\sqrt[15]{27^{10}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

2 정수 지수로의 확장

정수 지수로의 확장

$a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때,

(1) 지수가 0인 경우 : $a^0 = 1$

(2) 지수가 음의 정수인 경우 : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(1) 지수가 자연수일 때의 지수법칙 $a^m \times a^n = a^{m+n}$이 지수가 0일 때도 성립하도록 하려면

$$a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$$

이 되어야 하므로 $a^0 = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$이 된다.

(2) 지수가 음의 정수일 때도 지수법칙 $a^m \times a^n = a^{m+n}$가 성립하도록 하려면

$$a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$

이 되어야 하므로 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$이 된다.

지수가 정수인 경우의 지수법칙

$a \neq 0,\ b \neq 0$이고 $m,\ n$이 정수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

예제6

$a \neq 0,\ b \neq 0$일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $2^5 \times 2^3 \times 2^{-6}$

(2) $a^{-3} \times a^4 \div a^{-2}$

(3) $\left(a^{-2}b^3\right)^{-3}$

(4) $\left(a + a^{-1}\right)^2$

(1) $2^5 \times 2^3 \times 2^{-6} = 2^{5+3-6} = 2^2$

(2) $a^{-3} \times a^4 \div a^{-2} = a^{-3+4-(-2)} = a^3$

(3) $\left(a^{-2}b^3\right)^{-3} = a^{(-2)\times(-3)}b^{3\times(-3)} = a^6b^{-9}$

(4) $$\begin{aligned}\left(a + a^{-1}\right)^2 &= a^2 + 2 \times a \times a^{-1} + \left(a^{-1}\right)^2 \\ &= a^2 + 2 \times a^{1+(-1)} + a^{-2} \\ &= a^2 + 2a^0 + \frac{1}{a^2} \\ &= a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\end{aligned}$$

3 유리수 지수로의 확장

유리수 지수로의 확장

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때,

(1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (2) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(1) 지수가 자연수일 때의 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$이 지수가 유리수일 때도 성립하도록 하려면

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$$

이 되어야 하므로 $a^{\frac{m}{n}}$을 n제곱근 a^m으로 정의한다. 따라서 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$이다.

(2) (1)에 의하여 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$이다.

지수가 유리수인 경우의 지수법칙

$a>0,\ b>0$이고 $m,\ n$이 유리수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$ (4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

예제7

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$ (2) $81^{0.25}$

(3) $\sqrt{3}\times 3^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[6]{3}$ (4) $\left(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\right)^6$

(1) $\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

(2) $81^{0.25} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(3) $\sqrt{3}\times 3^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$

(4) $\left(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{\frac{1}{3}\times 6} \times 3^{\frac{1}{2}\times 6} = 2^2 \times 3^3$

4 실수 지수로의 확장

지수가 무리수인 경우

무리수 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{2}=1.414\cdots$와 같다. 이때, 3^1, $3^{1.4}$, $3^{1.41}$, $3^{1.414}$, $\cdots$을 계속 계산하면 일정한 수에 한없이 가까워지는 것을 알 수 있다. 이 수를 $3^{\sqrt{2}}$로 정의한다.
이와 같은 방법을 이용하면 $a>0$일 때, 임의의 실수 x에 대해서도 a^x을 정의할 수 있다.

지수가 실수인 경우의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 실수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

예제8

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{12}}$

(2) $3^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{18}} \div 3^{\sqrt{8}}$

(1) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{12}} = 5^{\sqrt{3}\times\sqrt{12}} = 5^{\sqrt{36}} = 5^6$

(2) $3^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{18}} \div 3^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$

5 로그의 뜻과 성질

로그

일반적으로 $a>0,\ a\neq 1$일 때, 양수 b에 대하여 $a^x=b$를 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다. 이때, x를 $x=\log_a b$와 같이 나타내고, a를 밑으로 하는 b의 로그라고 한다. 또한 a와 b를 각각 $\log_a b$의 밑과 진수라고 한다.

$$a^x=b \iff x=\log_{\underset{\text{밑}}{a}} \overset{\text{진수}}{b}$$

로그 a의 b

예제9

다음 등식을 로그를 이용하여 나타내시오.

(1) $5^2=25$ (2) $10^{-2}=0.01$ (3) $16^{\frac{1}{2}}=4$

(1) $5^2=25 \quad\Leftrightarrow\quad 2=\log_5 25$

(2) $10^{-2}=0.01 \quad\Leftrightarrow\quad -2=\log_{10} 0.01$

(3) $16^{\frac{1}{2}}=4 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{2}=\log_{16} 4$

로그의 밑조건과 진수조건

$\log_a b$가 정의되기 위해서는 다음의 두 가지 조건을 만족시켜야 한다.

(1) $a > 0,\ a \neq 1$

(2) $b > 0$

이 두 조건을 각각 밑조건, 진수조건이라고 한다.

(1) $a > 0$인 조건이 필요한 이유
거듭제곱근과 지수에서 배운 것처럼 a^x에서 지수 x가 실수 범위까지 확장되면 밑 a는 양수여야 한다. $a^x = b \ \Leftrightarrow\ x = \log_a b$이므로 x를 실수범위에서 생각하기 위해서는 로그의 밑 a 역시 양수여야 한다.

(2) $a \neq 1$ 조건이 필요한 이유
만약에 로그의 밑이 1이라고 하면,

$$\log_1 1 = 1,\ \log_1 1 = 2,\ \log_1 1 = 3,\ \cdots$$

이 되는데, 이 경우 $1 = 2 = 3 = \cdots$ 라는 모순이 생긴다.

(3) $b > 0$ 조건이 필요한 이유
$x = \log_a b \ \Leftrightarrow\ a^x = b$에서 밑 a가 양수라면 실수 x의 값에 관계없이 $a^x > 0$이 되어 $b > 0$이 되어야 한다.

예제10

$\log_{(x-2)}(-x+7)$이 정의되도록 하는 모든 자연수 x의 합을 구하시오.

로그의 밑조건에서 $x > 2,\ x \neq 3$
로그의 진수조건에서 $-x + 7 > 0 \quad \therefore x < 7$
두 조건을 만족하는 자연수 x는 $4,\ 5,\ 6$이다.
$\therefore 4 + 5 + 6 = 15$

로그의 성질

$a \neq 1,\ a > 0,\ x > 0,\ y > 0$이고 t가 실수일 때,

(1) $\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$

(2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a x^t = t \log_a x$

(1) $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0, \quad a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$

(2) $\log_a x = m,\ \log_a y = n$이라 하면, 로그의 정의로부터

$$a^m = x,\ a^n = y \quad \therefore xy = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

이 되고, 다시 한 번 로그의 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$$

(3) $\log_a x = m,\ \log_a y = n$이라 하면 로그의 정의로부터

$$a^m = x,\ a^n = y \quad \therefore \frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

이 되고, 다시 한 번 로그의 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\log_a \frac{x}{y} = m - n = \log_a x - \log_a y$$

(4) $\log_a x = n$이라 하면 $a^n = x,\ (a^n)^t = x^t,\ a^{tn} = x^t$이고, 로그의 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\log_a x^t = tn = t \log_a x$$

예제11

(1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$

(2) $\log_{10} 16 - \log_{10} 2$

(1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$

(2) $\log_{10} 16 - \log_{10} 2 = \log_{10} 2^4 - \log_{10} 2 = 4\log_{10} 2 - \log_{10} 2 = 3\log_{10} 2$

★ 로그의 성질을 올바르지 않게 사용하는 경우

(1) $\log_1 1 = 0,\ \log_1 1 = 1$

(2) $\log_a (x+y) = (\log_a x)(\log_a y)$

(3) $\log_a (x-y) = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

(4) $(\log_a x)^n = n \log_a x$

로그의 밑의 변환

$a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$일 때,

(1) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c \neq 1,\ c > 0$)

(2) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$)

(1) $\log_a b = x$라 하면 $a^x = b$

양변에 $c\ (c \neq 1,\ c > 0)$를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_c a^x = \log_c b, \quad x \log_c a = \log_c b, \quad \therefore x = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$$

(2) $\log_a b = x$라 하면 $a^x = b$

양변에 $b\ (b \neq 1,\ b > 0)$를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b a^x = \log_b b, \quad x \log_b a = 1, \quad \therefore x = \frac{1}{\log_b a} = \log_a b$$

예제12

등식 $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$가 성립함을 증명하시오.

$$\log_{a^m} b^n = \frac{\log_c b^n}{\log_c a^m} = \frac{n \log_c b}{m \log_c a} = \frac{n}{m} \times \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{n}{m} \log_a b$$

예제13

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\log_4 128$

(2) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a$

(1) $\log_4 128 = \dfrac{\log_2 128}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^7}{\log_2^2} = \dfrac{7}{2} \times \dfrac{\log_2 2}{\log_2 2} = \dfrac{7}{2}$

(2) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = \dfrac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \times \dfrac{\log_{10} c}{\log_{10} b} \times \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} c} = 1$

지수에 로그가 등장하는 경우

$a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c \neq 1, c > 0$일 때,

(1) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (2) $a^{\log_a b} = b$

(1) $a^{\log_c b} = x$라 놓고, 양변에 밑을 c로 하는 로그를 취하면

$$\log_c a^{\log_c b} = \log_c x$$

여기서 좌변은 $\log_c b \times \log_c a = \log_c a \times \log_c b = \log_c b^{\log_c a}$가 되므로

$$\log_c b^{\log_c a} = \log_c x, \quad x = b^{\log_c a}, \quad a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

(2) (1)에서 $c = a$인 경우를 생각하면 $a^{\log_a b} = b$

예제14

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $9^{\log_3 7}$ (2) $3^{\log_3 7}$

(1) $9^{\log_3 7} = 7^{\log_3 9} = 7^{\log_3 3^2} = 7^{2 \log_3 3} = 7^2 = 49$

(2) $3^{\log_3 7} = 7^{\log_3 3} = 7$

6 상용로그

상용로그

밑이 10인 로그를 상용로그라 한다. (보통 밑을 생략하여 나타낸다.)

$$\log_{10} x = \log x$$

예제15

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\log 1000$ (2) $\log 0.001$ (3) $\log 10\sqrt{10}$

(1) $\log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$

(2) $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3\log 10 = -3$

(3) $\log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}\log 10 = \dfrac{3}{2}$

➤ 상용로그의 값은 계산기를 이용하거나 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다. 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올리하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

➤ 상용로그표를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그 값을 구할 수 있다. 이를테면 오른쪽 상용로그표에서 $\log 2.26$의 값을 구하려면 2.2의 행과 6의 열이 만나는 곳의 수 0.3541을 찾으면 된다. 즉, $\log 2.26 = 0.3541$이다.

	0	1	⋯	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	⋯	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	⋯	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.3010	0.3032	⋯	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	⋯	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	⋯	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	⋯	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮

예제16

상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\log 50$ (2) $\log 239$

(1) $\log 50 = \log \dfrac{100}{2} = \log 10^2 - \log 2 = 2 - \log 2 = 2 - 0.3010 = 1.699$

(2) $\log 239 = \log(2.39 \times 100) = \log 2.39 + \log 10^2 = \log 2.39 + 2 = 0.3784 + 2 = 2.3784$

예제17

어느 해상에서 태풍의 최대 풍속은 중심 기압에 따라 변한다. 태풍의 중심 기압이 $P(\mathrm{hPa})$일 때, 최대 풍속 $V(\mathrm{m}/초)$는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$V = 4.86(1010 - P)^{0.5}$$

이 해상에서 태풍의 중심 기압이 $900(\mathrm{hPa})$과 $960(\mathrm{hPa})$일 때, 최대 풍속이 각각 $V_A(\mathrm{m}/초)$, $V_B(\mathrm{m}/초)$이었다. $\dfrac{V_A}{V_B}$의 값을 구하시오.

(단, $\log 1.1 = 0.0414,\ \log 1.483 = 0.1712,\ \log 2 = 0.3010$)

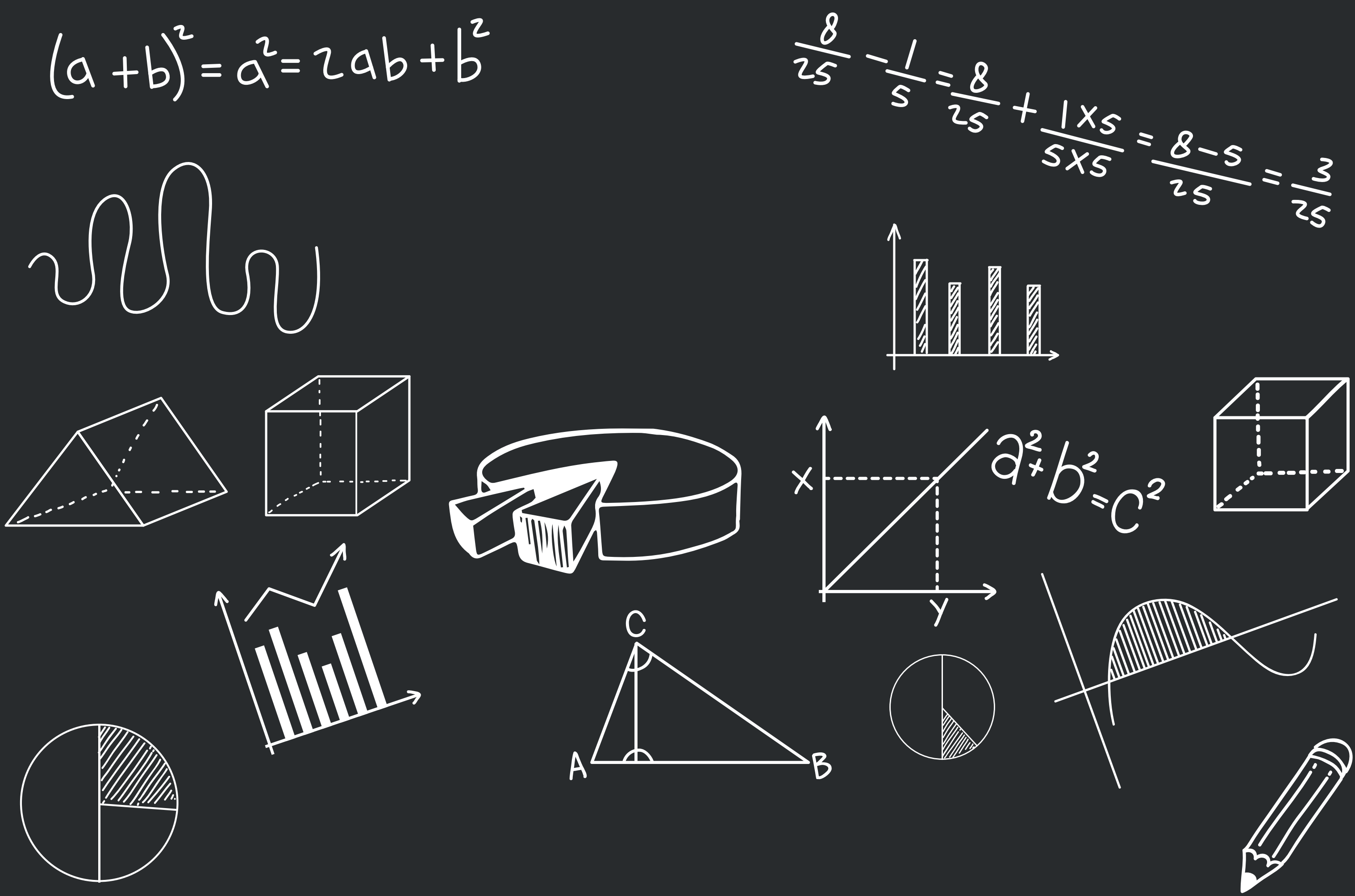
$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{4.86(1010-900)^{0.5}}{4.86(1010-960)^{0.5}} = \left(\frac{110}{50}\right)^{0.5} = \left(\frac{11}{5}\right)^{0.5}$$

양변에 상용로그를 취하면

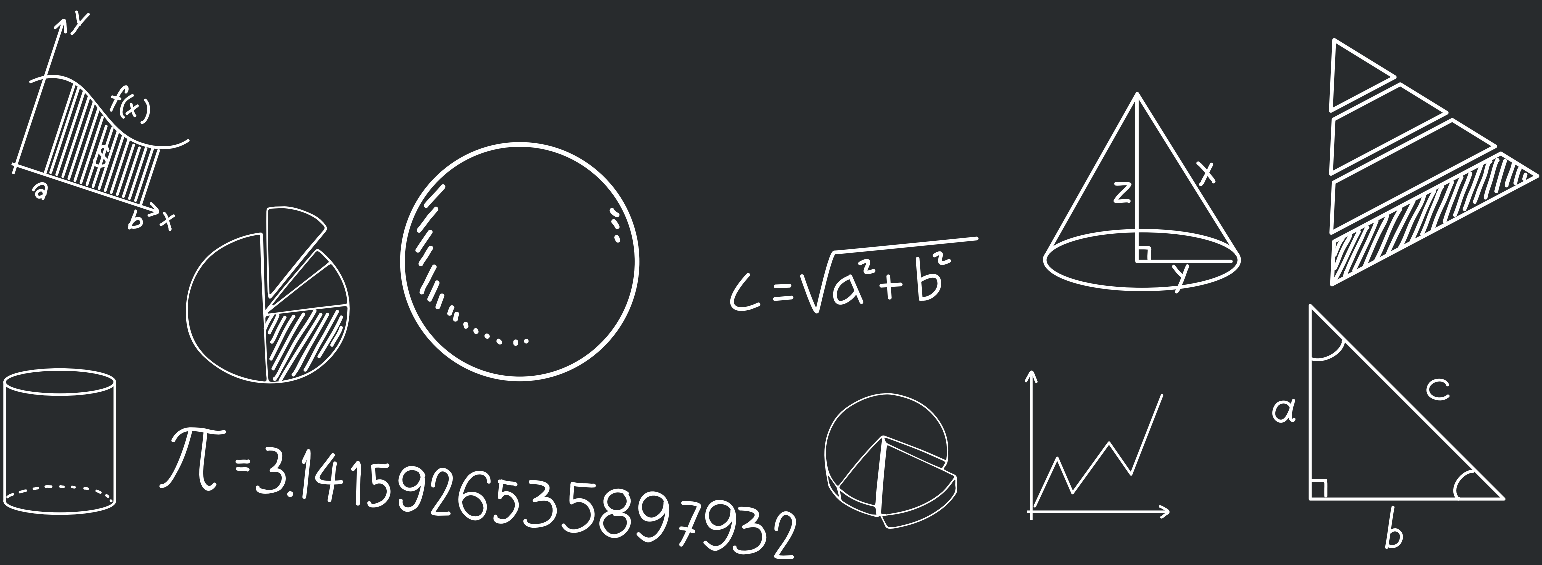
$$\begin{aligned}
\log \frac{V_A}{V_B} &= \log \left(\frac{11}{5}\right)^{0.5} \\
&= \frac{1}{2}(\log 11 - \log 5) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\log(1.1 \times 10) - \log \frac{10}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}(\log 1.1 + 1 - 1 + \log 2) \\
&= \frac{1}{2}(0.0414 + 0.3010) \\
&= \frac{1}{2} \times 0.3424 \\
&= 0.1712
\end{aligned}$$

$\log 1.483 = 0.1712$이므로 $\dfrac{V_A}{V_B} = 1.483$이다.

$\rfloor$ 34



2. 지수함수와 로그함수



1 지수함수의 뜻과 그래프

지수함수

임의의 실수 x에 대하여 x를 a^x $(a>0,\ a\neq 1)$로 대응시키는 함수 $y=a^x$을 a를 밑으로 하는 x의 지수함수라 한다.

지수함수의 그래프

지수함수 $y=a^x$의 그래프

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

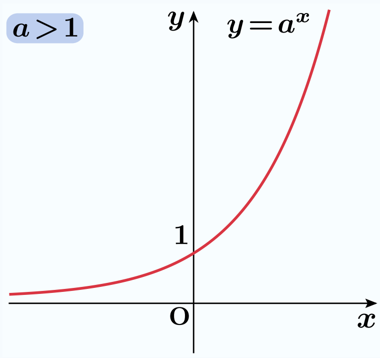
(2) 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

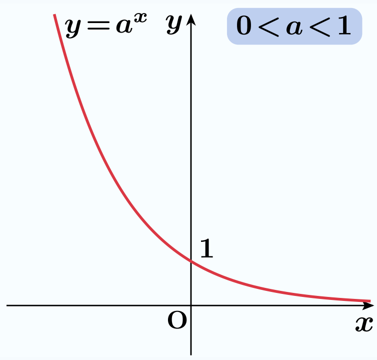
(3) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(4) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(5) 점근선은 x축 $(y=0)$이다.

(6) $y=a^x$의 그래프와 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.





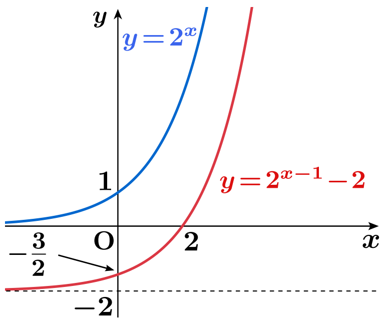
예제18

다음 함수의 그래프를 그리시오. 또한, 정의역, 치역, 점근선을 구하시오.

(1) $y = 2^{x-1} - 2$

(2) $y = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

(1)

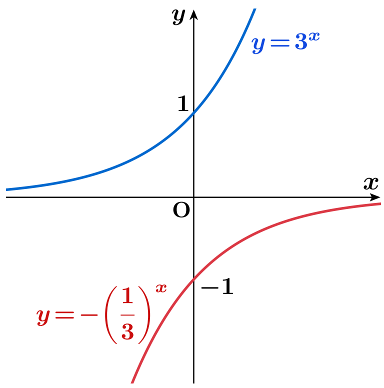


정의역 : $-\infty < x < \infty$

치역 : $y > -2$

점근선 : $y = -2$

(2)



정의역 : $-\infty < x < \infty$

치역 : $y < 0$

점근선 : $y = 0$

예제19

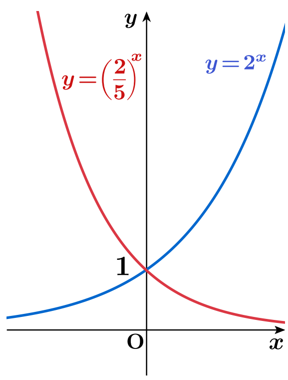
지수함수의 그래프를 이용하여 다음 수들의 대소 관계를 구하시오.

(1) $\sqrt[5]{2},\ \sqrt[4]{4}$

(2) $\sqrt{0.4},\ \sqrt[3]{0.16}$

(1) $\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}},\ \sqrt[4]{4} = 2^{\frac{1}{2}}$ 이므로 두 점 $\left(\dfrac{1}{5},\ \sqrt[5]{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \sqrt[4]{4}\right)$ 는 모두 함수 $y = 2^x$ 위의 점이다. 또한, 함수 $y = 2^x$ 이 증가함수이고, $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{2}$ 이므로 $\sqrt[5]{2} < \sqrt[4]{4}$가 된다.

(2) $\sqrt{0.4} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{0.16} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ 이므로 두 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{0.4}\right),\ \left(\dfrac{2}{3},\ \sqrt[3]{0.16}\right)$ 은 모두 함수 $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ 위의 점이다. 또한, 함수 $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$ 가 감소함수이고, $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$ 이므로 $\sqrt{0.4} > \sqrt[3]{0.16}$ 이 된다.

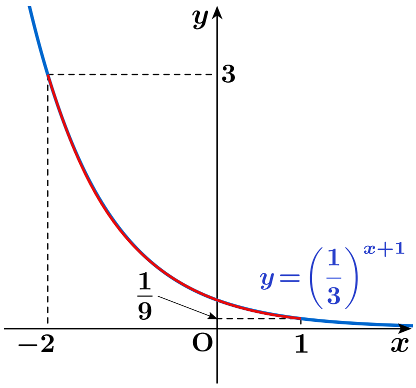


예제20

정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$인 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

아래 그림과 같이 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$은 감소함수이다.

따라서 $x = -2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$, $x = 1$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1+1} = \frac{1}{9}$을 갖는다.



2 로그함수의 뜻과 그래프

로그함수

지수함수 $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$은 로그의 정의에 의하여 $x = \log_a y$로 나타낼 수 있고, 여기서 x와 y를 바꾸면 $y = a^x$의 역함수 $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$를 얻는다.
이 함수 $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$를 a를 밑으로 하는 x의 로그함수라 한다.

로그함수

로그함수 $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$의 그래프

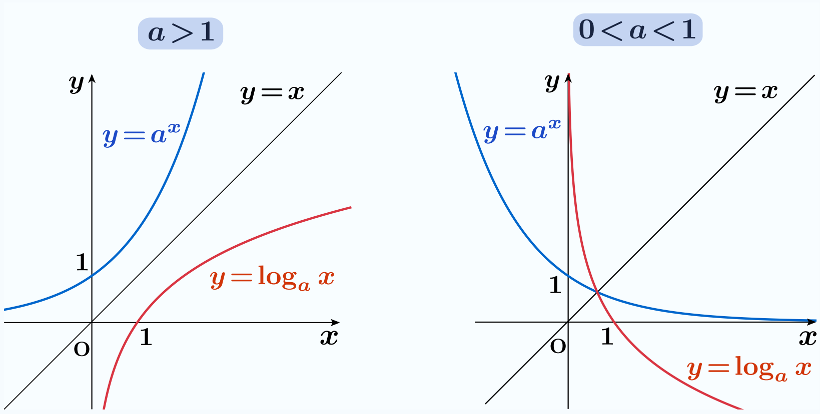
(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) 치역은 실수 전체의 집합이다.

(3) $a > 1$일 때, x의 값이 증가하면 y값도 증가한다.
$0 < a < 1$일 때, x의 값이 증가하면 y값은 감소한다.

(4) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 y축이다.

(5) $y = a^x$과 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

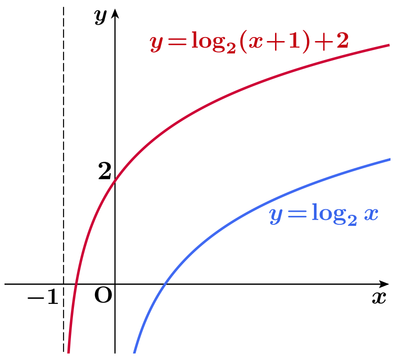


예제21

다음 함수의 그래프를 그리시오. 또한, 정의역, 치역, 점근선을 구하시오.

(1) $y=\log_2(x+1)+2$ (2) $y=-\log_2 x+1$

(1)

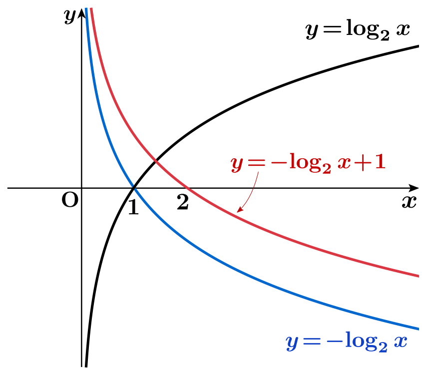


정의역 : $x>-1$

치역 : $-\infty<y<\infty$

점근선 : $x=-1$

(2)



정의역 : $x>0$

치역 : $-\infty<y<\infty$

점근선 : $x=0$

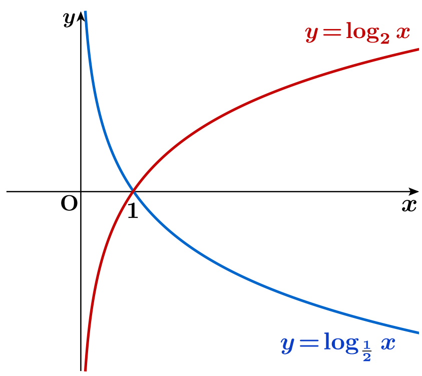
예제22

로그함수의 그래프를 이용하여 다음 수들의 대소 관계를 구하시오.

(1) $\log_2 3,\ \log_2 5$ (2) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5},\ \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{7}$

(1) 두 점 $(3,\ \log_2 3), (5,\ \log_2 5)$는 모두 함수 $y=\log_2 x$ 위의 점이고, 함수 $y=\log_2 x$가 증가함수이므로 $\log_2 3<\log_2 5$가 된다.

(2) 두 점 $\left(\sqrt{5},\ \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}\right)$, $\left(\sqrt{7},\ \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\right)$은 모두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 위의 점이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$가 감소함수이므로 $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}>\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{7}$이 된다.

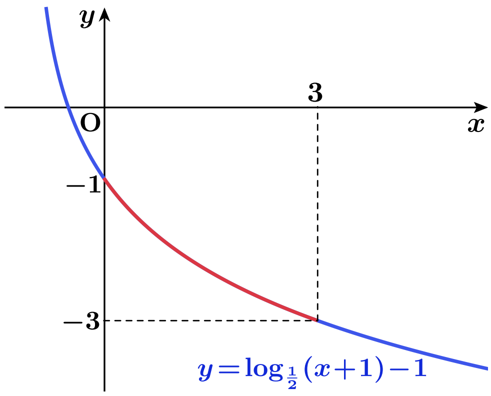


예제23

정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$인 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

아래 그림과 같이 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1$은 감소함수이다.

따라서 $x = 0$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 1 - 1 = -1$, $x = 3$에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 4 - 1 = -3$을 갖는다.



2 지수함수의 활용

지수방정식

지수에 미지수를 포함한 방정식을 지수방정식이라고 한다.

지수방정식의 해법

지수 또는 밑에 미지수가 있는 방정식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$a>0,\ a\neq 1\text{일 때}, a^{x_1}=a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_2$$

(1) 밑이 같을 때 : $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 꼴 $\quad \Leftrightarrow \quad f(x)=g(x) \quad$ (단, $a>0,\ a\neq 1$)

(2) 밑이 다를 때 : 밑을 통일하거나 혹은 양변에 로그를 취한다.

(3) a^x을 포함할 때 : $a^x=t$로 치환한다. (단, $t>0$)

(4) 밑에도 미지수가 있을 때

① $f(x)^{g(x)}=a^{g(x)}\ (f(x)>0,\ a>0,\ a\neq 1) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=a$ 또는 $g(x)=0$

② $f(x)^{h(x)}=g(x)^{h(x)}\ (f(x)>0, g(x)>0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=g(x)$ 또는 $h(x)=0$

③ $f(x)^{g(x)}=f(x)^{h(x)}\ (f(x)>0) \quad \Leftrightarrow \quad g(x)=h(x)$ 또는 $f(x)=1$

예제24

다음 지수방정식을 푸시오.

(1) $2^{x^2}=2^{x+6}$ (2) $9^x=27$ (3) $2^{2x-1}=3^x$

(1) $x^2=x+6, \quad (x-3)(x+2)=0, \quad \therefore x=3$ 또는 $x=-2$

(2) $3^{2x}=3^3, \quad 2x=3, \quad \therefore x=\dfrac{3}{2}$

(3) 양변에 상용로그를 취하면 $(2x-1)\log 2=x\log 3, \quad (2\log 2-\log 3)x=\log 2$

$$x=\frac{\log 2}{2\log 2-\log 3}=\frac{\log 2}{\log \frac{4}{3}}=\log_{\frac{4}{3}} 2$$

예제25

지수방정식 $5^{2x}-5^x-2=0$을 푸시오.

$5^x=t\ (t>0)$로 치환하면

$$t^2-t-2=0,\quad (t-2)(t+1)=0,\quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=-1$$

이 중 $t=-1$은 근이 될 수 없다. $(\because t>0)$

따라서 $t=5^x=2$이고, 양변에 밑이 5인 로그를 취하면 방정식의 해는 $x=\log_5 2$가 된다.

예제26

다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x+1)^{2x}=5^{2x}\ (x>-1)$

(2) $(3x-2)^{x-2}=(2x+1)^{x-2}\ \left(x>\dfrac{2}{3}\right)$

(3) $x^{3x+4}=x^{-x+2}\ (x>0)$

(1) 양변의 지수가 같기 때문에 ① 밑이 같거나, ② 지수가 0이면 된다.

① $x+1=5$에서 $x=4$

② $2x=0$에서 $x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

(2) 양변의 지수가 같기 때문에 ① 밑이 같거나, ② 지수가 0이면 된다.

① $3x-2=2x+1$에서 $x=3$

② $x-2=0$에서 $x=2$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

(3) 양변의 밑이 같기 때문에 ① 지수가 같거나, ② 밑이 1이면 된다.

① $3x+4=-x+2$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$

하지만 $x>0$이므로 해가 될 수 없다.

② $x=1$

$\therefore x=1$

지수부등식

지수에 미지수를 포함한 부등식을 지수부등식이라고 한다.

지수부등식의 해법

지수 또는 밑에 미지수가 있는 부등식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$\begin{cases} a>1\text{일 때}, & a^{x_1}<a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1<x_2 \\ 0<a<1\text{일 때}, & a^{x_1}<a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1>x_2 \end{cases}$$

(1) 밑이 같을 때 : $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ 꼴

① $a>1$일 때, $f(x)<g(x)$

② $0<a<1$일 때, $f(x)>g(x)$

(2) 밑이 다를 때 : 밑을 통일하거나 혹은 양변에 로그를 취한다.

(3) a^x을 포함할 때 : $a^x=t$로 치환한다. (단, $t>0$)

(4) 밑에도 미지수가 있을 때 : 밑의 범위를 다음과 같이 나누어 푼다.

① $0<$ 밑 <1 ② 밑 $=1$ ③ 밑 >1

예제27

다음 지수부등식을 푸시오.

(1) $3^{x^2}<3^{2x+3}$ (2) $\left(\frac{1}{8}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ (3) $2^{2x-1}>3^x$

(1) $3^{x^2}<3^{2x+3}$에서 밑이 3으로 같고, $3>1$ 이므로 $x^2<2x+3$

$x^2-2x-3<0, \quad (x-3)(x+1)<0, \quad \therefore -1<x<3$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고, $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $3x<x+2 \quad \therefore x<1$

(3) 양변에 상용로그를 취하면 $(2x-1)\log 2>x\log 3, \quad (2\log 2-\log 3)x>\log 2$

$x>\dfrac{\log 2}{\log 4-\log 3}=\dfrac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}=\log_{\frac{4}{3}}2 \quad \therefore x>\log_{\frac{4}{3}}2$

예제28

지수부등식 $3^{2x} - 3^x - 6 > 0$을 푸시오.

$3^x = t\ (t > 0)$로 치환하면

$$t^2 - t - 6 > 0, \quad (t-3)(t+2) > 0, \quad \therefore t > 3 \text{ 또는 } t < -2$$

그런데 $t > 0$이므로 $t > 3$만 해가 될 수 있다.
결국 $3^x > 3^1$에서 부등식의 해는 $x > 1$이 됨을 알 수 있다.

예제29

부등식 $x^{3x+1} > x^{x+5}\ (x > 0)$을 푸시오.

① $0 < x < 1$이면 $3x + 1 < x + 5$에서 $x < 2$ $\quad \therefore 0 < x < 1$

② $x > 1$이면 $3x + 1 > x + 5$에서 $x > 2$ $\quad \therefore x > 2$

③ $x = 1$이면 $1 > 1$이 되어 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 주어진 부등식의 해는 $0 < x < 1$ 또는 $x > 2$이다.

4 로그함수의 활용

로그방정식

로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 로그방정식이라고 한다.

로그방정식의 해법

로그의 진수 또는 밑에 미지수가 있는 방정식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$a > 0,\ a \neq 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\text{일 때},\ \log_a x_1 = \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

(1) $\log_a f(x) = b$ (단, $a > 0,\ a \neq 1$이고 $f(x) > 0$) : $f(x) = a^b$

(2) 밑이 같을 때 : $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$
(단, $a > 0,\ a \neq 1$이고 $f(x) > 0,\ g(x) > 0$)

(3) 밑이 다를 때 : 밑변환을 이용하여 밑부터 통일한다.

(4) $\log_a x$를 포함할 때 : $\log_a x = t$로 치환한다.

(5) 지수에 로그가 있을 때 : 양변에 로그를 취한다.

(6) 진수가 같을 때 : $\log_{f(x)} h(x) = \log_{g(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$ 또는 $h(x) = 1$
(단, $f(x) > 0,\ f(x) \neq 1,\ g(x) > 0,\ g(x) \neq 1, h(x) > 0$)

예제30

로그방정식 $\log_2(2x-1) = 3$을 푸시오.

$\log_2(2x-1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 2x - 1$

$\therefore x = \dfrac{9}{2}$

예제31

로그방정식 $\log_2(3x+1)=\log_4(x+5)$를 푸시오.

$\log_2(3x+1)=\log_4(x+5)$, $\quad \log_2(3x+1)=\log_{2^2}(x+5)$

$\log_2(3x+1)=\dfrac{1}{2}\log_2(x+5)$, $\quad 2\log_2(3x+1)=\log_2(x+5)$

$\log_2(3x+1)^2=\log_2(x+5)$

$(3x+1)^2=(x+5)$, $\quad 9x^2+5x-4=0$, $\quad (9x-4)(x+1)=0$

$\therefore x=\dfrac{4}{9}$ 또는 $x=-1$

진수조건에서 $x>-\dfrac{1}{3}$ 이어야 하므로 주어진 방정식의 해는 $x=\dfrac{4}{9}$ 이다.

예제32

다음 로그방정식을 푸시오.

(1) $(\log_2 x)^2-3\log_2 x=\log_2 x^2-4$ (2) $x^{\log x}=1000x^2$

(1) $\log_2 x=t$ (t는 실수)로 치환하면

$t^2-3t=2t-4$, $\quad t^2-5t+4=0$, $\quad (t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

$\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=4$

$\therefore x=2$ 또는 $x=16$

(2) $x^{\log x}=1000x^2$ 의 양변에 밑이 10인 로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\left(1000x^2\right)$, $\quad (\log x)(\log x)=\log 1000+\log x^2$

$(\log x)^2=3+2\log x$

$\log x=t$ (t는 실수)로 치환하면

$t^2-2t-3=0$, $\quad (t-3)(t+1)=0$, $\quad \therefore t=3$ 또는 $t=-1$

$\log x=3$ 또는 $\log x=-1$

$\therefore x=10^3$ 또는 $x=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

예제33

로그방정식 $\log_{x^2+2x+2}(x-5)=\log_{x+4}(x-5)$를 푸시오.

로그의 진수가 같으므로 ① 밑이 같거나, ② 진수가 1이면 된다.

① $x^2+2x+2=x+4, \quad x^2+x-2=0, \quad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

진수조건과 밑조건으로부터 $x>5$이어야 한다.

따라서 조건을 만족하는 x는 존재하지 않는다.

② $x-5=1, \quad \therefore x=6$

$\therefore x=6$

로그부등식

로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식을 로그부등식이라고 한다.

로그부등식의 해법

로그의 진수 또는 밑에 미지수가 있는 부등식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.
$x_1 > 0,\ x_2 > 0$에 대하여

$$\begin{cases} a > 1\text{일 때,} & \log_a x_1 < \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \\ 0 < a < 1\text{일 때,} & \log_a x_1 < \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > x_2 \end{cases}$$

(1) 밑이 같을 때 : $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ 꼴

① $a > 1$이면 해집합은 $f(x) < g(x),\ f(x) > 0,\ g(x) > 0$의 공통범위이다.

② $0 < a < 1$이면 해집합은 $f(x) > g(x),\ f(x) > 0,\ g(x) > 0$의 공통범위이다.

(2) $\log_a x$를 포함할 때 : $\log_a x = t$로 치환한다.

(3) 지수에 로그가 있을 때 : 양변에 로그를 취한다.

예제34

다음 로그부등식을 푸시오.

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x \ge \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

(2) $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 \le 0$

(1) 밑이 $\frac{1}{2}$로 같고, $0 < \frac{1}{2} < 1$이므로 $x \le 2 - x, \quad \therefore x \le 1$
진수조건에서 $0 < x < 2$이므로, 공통범위를 구하면 $0 < x \le 1$ 이다.

(2) $\log_2 x = t$ (t는 실수)로 치환하면 $t^2 + t - 2 \le 0$
$(t+2)(t-1) \le 0, \quad -2 \le t \le 1, \quad -2 \le \log_2 x \le 1, \quad \log_2 \frac{1}{4} \le \log_2 x \le \log_2 2$
밑이 2로 같고, $2 > 1$이므로 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{4} \le x \le 2$ 이다.

예제35

부등식 $x^{\log_3 x} \geq 3$을 푸시오.

$x^{\log_3 x} \geq 3$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 3, \quad (\log_3 x)(\log_3 x) \geq 1$
$(\log_3 x)^2 - 1 \geq 0, \quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1) \geq 0$
$\log_3 x \geq 1$ 또는 $\log_3 x \leq -1$

진수조건에서 $x > 0$이므로 공통범위를 구하면 $0 < x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 3$이다.

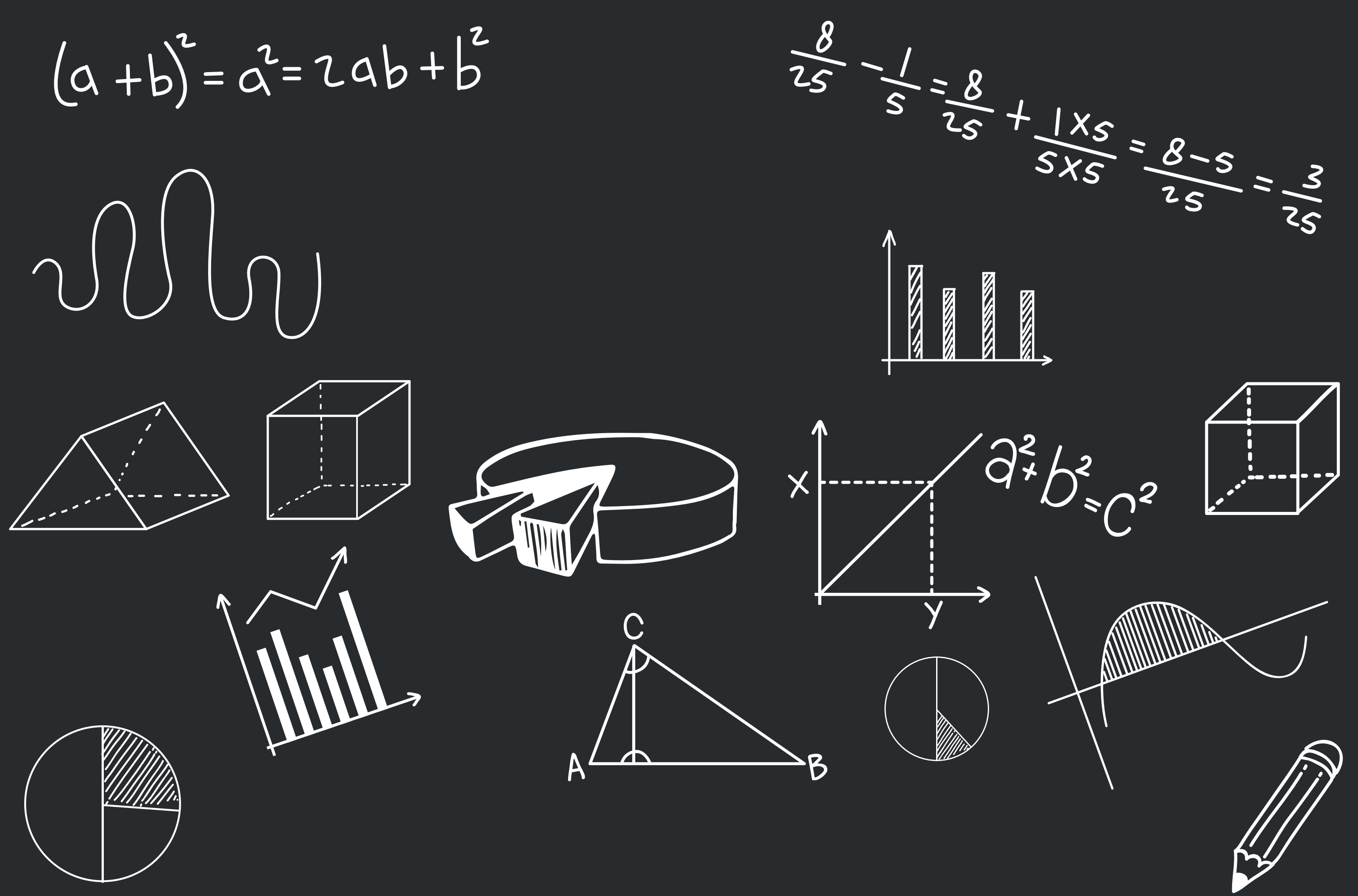
3/5

고등학교 수학 1

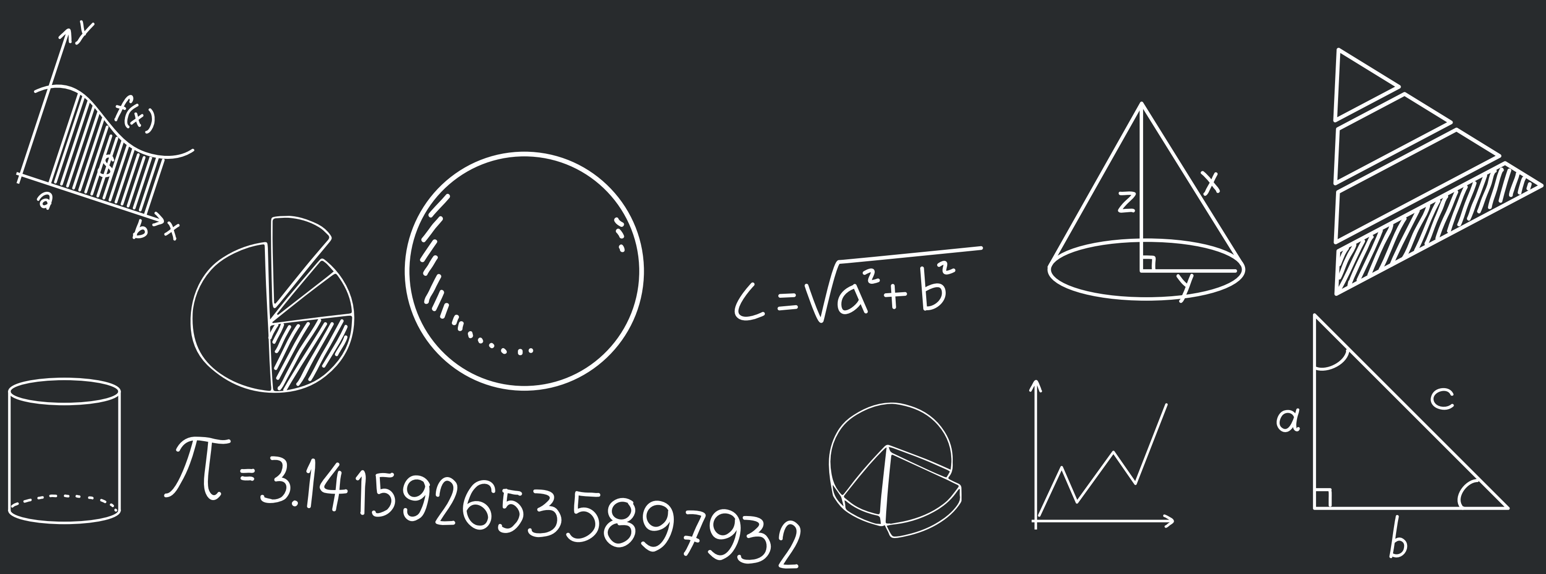
삼각함수

2

1. 삼각함수의 뜻과 그래프
2. 사인법칙과 코사인법칙



1. 삼각함수의 뜻과 그래프



1 일반각과 호도법

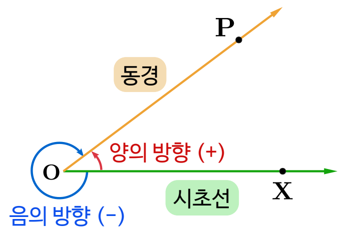
일반각

시초선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$와 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 양의 최소각을 α°라 할 때, $\angle\mathrm{XOP}$의 크기를 나타내는

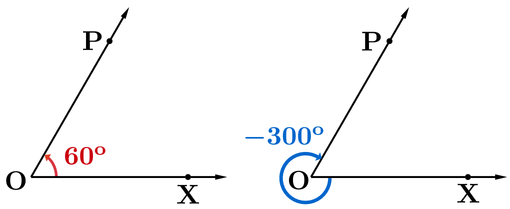
$$360^\circ \times n + \alpha^\circ \quad (n\text{은 정수, } 0^\circ \le \alpha^\circ < 360^\circ)$$

를 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 일반각이라고 한다.

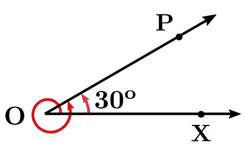
- 일반각은 지금까지 0°에서 360°까지의 범위로 나타냈던 각의 크기를 더 넓은 범위로 확장하는 개념이다.
- 오른쪽 그림에서 $\angle\mathrm{XOP}$의 크기는 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 고정된 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 위치에서 점 O를 중심으로 회전한 양으로 정한다.
- 이때, 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$를 시초선, 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 동경이라고 한다.



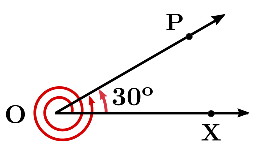
- 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시계의 바늘이 도는 방향과 반대인 방향을 양의 방향이라 하고, 시계의 바늘이 도는 방향과 같은 방향을 음의 방향이라고 한다.
- 아래 그림과 같이 60°와 -300°가 나타내는 동경은 같지만, 회전 방향에 따라서 양의 각과 음의 각으로 표현할 수 있다.



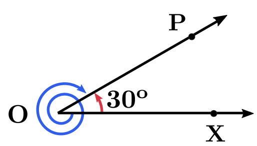
- 이와 같이 $\angle\mathrm{XOP}$의 크기가 주어지면 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 위치는 하나로 정해지지만, 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 위치가 정해졌을 때, 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 각의 크기는 하나로 결정되지 않는다. 아래 그림은 시초선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$와 30°를 이루는 위치에 있는 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 여러 가지 각의 크기를 보여준다.



$390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$



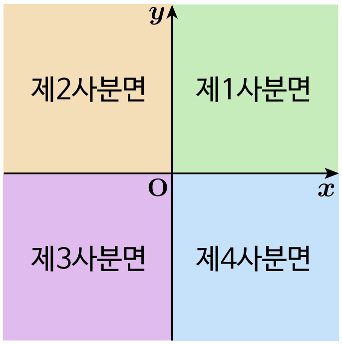
$750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$



$-690^\circ = 360^\circ \times (-2) + 30^\circ$

➤ 일반적으로 $\angle$XOP의 크기 중 하나를 α° $(0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ)$라고 할 때, 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 각의 크기는 일반적으로 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)로 나타낼 수 있다. 이것을 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 일반각이라고 한다.

➤ 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 시초선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 제 몇 사분면에 있는지에 따라 그 각을 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면의 각이라고 한다. 예를 들어, 45°는 제1사분면의 각이고, 120°는 제2사분면의 각이다. (보통 좌표평면에서는 x축의 양의 방향을 시초선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$로 정한다.)



➤ 좌표축은 어느 사분면에도 속하지 않으므로, 동경이 좌표축 위에 놓이는 경우 동경이 나타내는 각은 어느 사분면에도 속하지 않는다고 한다.

예제1

시초선 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$와 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 각의 크기가 60°일 때, $\angle$XOP의 크기를 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 일반각으로 나타내시오.

$360^\circ \times n + 60^\circ$ (단, n은 정수)

예제2

다음 각은 몇 사분면의 각인지 말하시오.

(1) 760°　　(2) 1320°　　(3) -240°

(1) $760^\circ = 360^\circ \times 2 + 40^\circ$이므로 제1사분면의 각

(2) $1320^\circ = 360^\circ \times 3 + 240^\circ$이므로 제3사분면의 각

(3) $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$이므로 제2사분면의 각

호도법

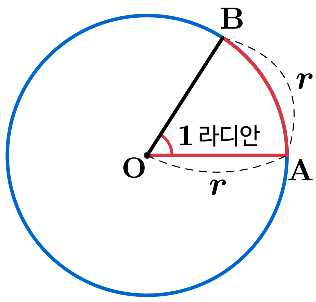
반지름의 길이와 호 $\overset{\frown}{AB}$의 길이가 같을 때의 중심각의 크기를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 각을 나타내는 것을 호도법이라고 한다.

➤ 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각의 크기를 α^o라고 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$$r : 2\pi r = \alpha^o : 360^o$$

이다. 따라서 $\alpha^o = \dfrac{180^o}{\pi}$이다.

여기에서 $\dfrac{180^o}{\pi}$는 반지름의 길이 r에 관계없이 항상 일정하다. 이 일정한 각의 크기 $\dfrac{180^o}{\pi}$를 1라디안(radian)이라고 한다.



육십분법과 호도법 사이의 관계

$$1\text{라디안} = \frac{180^o}{\pi}, \qquad 1^o = \frac{\pi}{180^o}\text{라디안}$$

➤ 육십분법과 호도법

육십분법	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
호도법	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

예제3

210^o는 호도법으로, $\dfrac{7}{4}\pi$는 육십분법으로 나타내시오.

$210^o = \dfrac{7}{6}\pi$, $\qquad \dfrac{7}{4}\pi = 315^o$

➤ 일반적으로 동경 $\overrightarrow{OP}$가 나타내는 각의 크기 중 하나를 θ(라디안)이라고 할 때, 동경 $\overrightarrow{OP}$가 나타내는 일반각은 호도법으로 $2n\pi + \theta$ (n은 정수, $0 \le \theta < 2\pi$)와 같이 나타낼 수 있다.

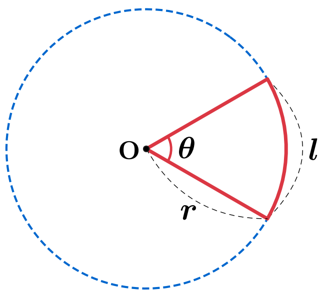
부채꼴 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이 l과, 넓이 S는 다음과 같다.

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

➤ 부채꼴 호의 길이는 원주의 길이에 2π에 대한 중심각의 크기의 비율 $\dfrac{\theta}{2\pi}$를 곱하여 구할 수 있다.

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$$



➤ 부채꼴의 넓이 역시 원의 넓이에 2π에 대한 중심각의 크기의 비율 $\dfrac{\theta}{2\pi}$를 곱하여 구할 수 있다.

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r \times r\theta = \frac{1}{2}rl$$

예제4

반지름의 길이가 6 (cm), 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이를 l(cm), 넓이를 S (cm^2)라 할 때, $l+S$의 값을 구하시오.

① 호의 길이 $l = r\theta = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi(\text{cm})$

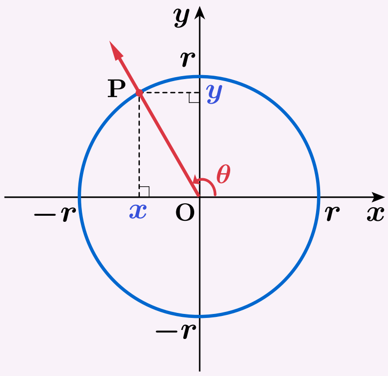
② 부채꼴의 넓이 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi\ (\text{cm}^2)$

$\therefore l + S = 4\pi + 12\pi = 16\pi$

2 삼각함수의 뜻

삼각함수

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 일반각 θ를 나타내는 동경이 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원과 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$의 값은 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나로 결정된다. 이때, 대응 $\theta \to \frac{y}{r}$을 나타내는 함수를 사인함수, 대응 $\theta \to \frac{x}{r}$을 나타내는 함수를 코사인함수라고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.



$$\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

또한, $\frac{y}{x}$ (단, $x \neq 0$)의 값도 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나로 결정된다. 이때, 대응 $\theta \to \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$을 나타내는 함수를 탄젠트함수라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0)$$

사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수를 θ에 대한 삼각함수라고 부른다.

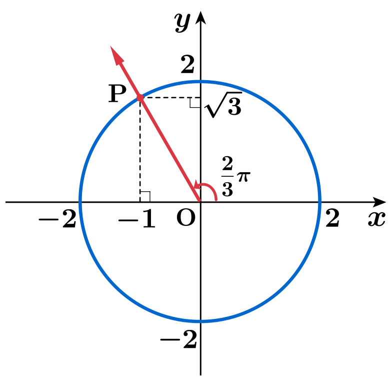
예제5

$\theta = \frac{2}{3}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

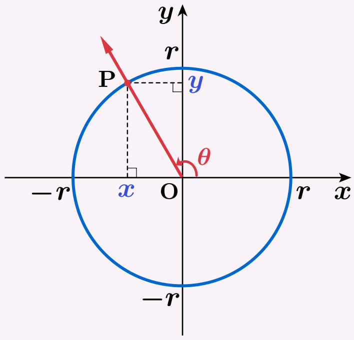
$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

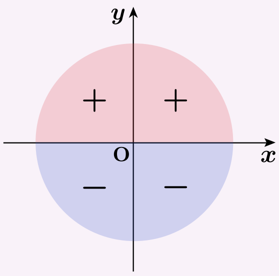


삼각함수 값의 부호

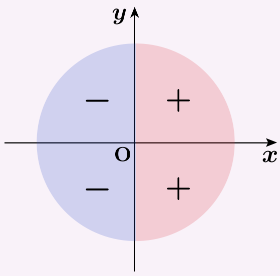
일반각 θ를 나타내는 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에 대하여 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 x좌표와 y좌표의 부호는 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 몇 사분면에 놓이는지에 따라 달라진다. 따라서 일반각 θ에 대한 삼각함수의 값의 부호도 θ가 몇 사분면의 각인지에 따라 아래와 같이 정해진다.



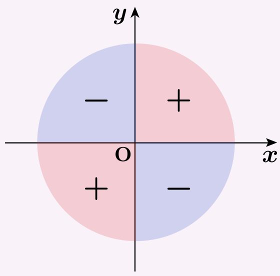
$\sin\theta$ 의 부호



$\cos\theta$ 의 부호



$\tan\theta$ 의 부호



➤ 사분면에 따른 삼각함수 값의 부호를 표로 정리하면 다음과 같다.

사분면 / 삼각함수	1	2	3	4
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

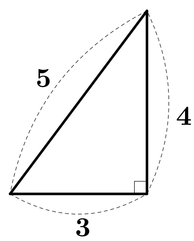
예제6

제4사분면의 각 θ에 대하여 $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값을 구하시오.

제4사부면의 각에 대해서는 코사인함수만 양의 부호를 갖는다. 따라서 오른쪽 직각삼각형에서 삼각비를 찾은 후에, 부호만 결정해주면 된다.

$\sin\theta = -\dfrac{4}{5}, \quad \cos\theta = \dfrac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\dfrac{1}{5}$



삼각함수 사이의 관계

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

➤ 오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경이 반지름의 길이가 1인 단위원과 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$$\sin\theta = y,\ \ \cos\theta = x,\ \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

이므로

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

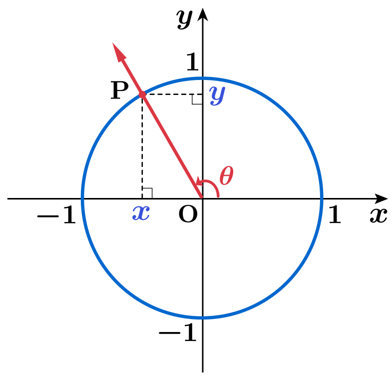
이다. 한편, 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 단위원 위의 점이므로

$$x^2 + y^2 = 1$$

이다. 따라서

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

임을 알 수 있다.



예제7

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{3}$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$

이때, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로 $2\sin\theta\cos\theta = -\frac{8}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{9}$

(2)
$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)\left(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9}\right)\\ &= \frac{13}{27}\end{aligned}$$

3 삼각함수의 그래프

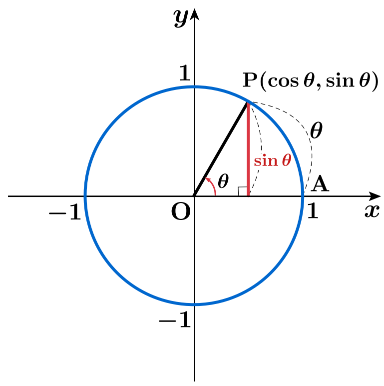
함수 $y = \sin\theta$의 그래프의 특징

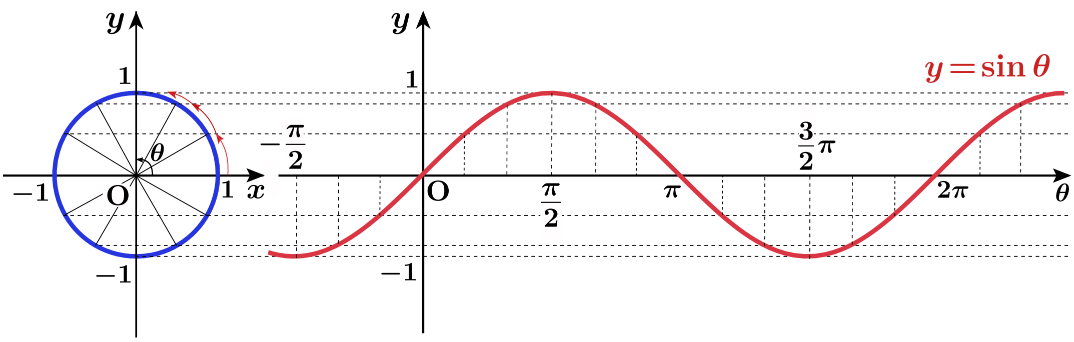
(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

(2) $y = \sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(3) 주기가 2π인 주기함수이다.

➤ 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 단위원 위를 움직이는 점 P가 점 $\mathrm{A}(1,0)$을 출발하여 시계 반대 방향으로 θ만큼 움직였을 때, 점 P의 y좌표가 $\sin\theta$가 된다. 따라서 θ의 값을 가로축에 나타내고, 이에 대응하는 $\sin\theta$의 값을 세로축에 나타내어 사인함수 $y = \sin\theta$의 그래프를 그린다.





➤ $\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$이다. 따라서 $y = \sin\theta$는 홀함수이다.

➤ 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 등식 $f(x+p) = f(x)$를 만족하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, $f(x)$를 주기함수라 하고, 이 등식을 성립시키는 최소의 양수 p를 $f(x)$의 주기라 한다. θ가 임의의 실수 일 때, $\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$가 성립하므로 $y = \sin\theta$는 주기가 2π인 주기함수이다.

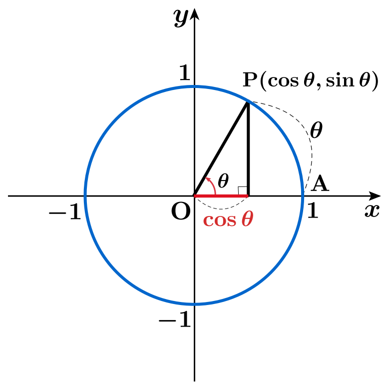
함수 $y = \cos\theta$의 그래프의 특징

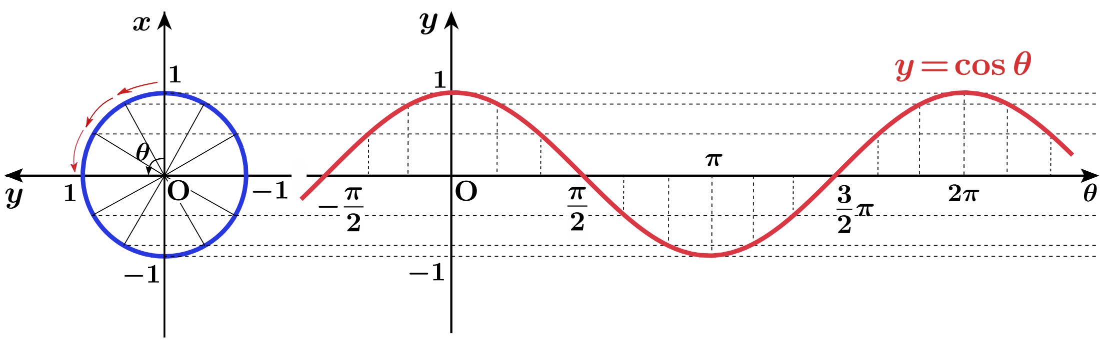
(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

(2) $y = \cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(3) 주기가 2π인 주기함수이다.

➤ 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 단위원 위를 움직이는 점 P가 점 A$(1, 0)$을 출발하여 시계 반대 방향으로 θ만큼 움직였을 때, 점 P의 x좌표가 $\cos\theta$가 된다. 따라서 θ의 값을 가로축에 나타내고, 이에 대응하는 $\cos\theta$의 값을 세로축에 나타내어 코사인함수 $y = \cos\theta$의 그래프를 그린다.





➤ $\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\cos(-\theta) = \cos\theta$이다. 따라서 $y = \cos\theta$는 짝함수이다.

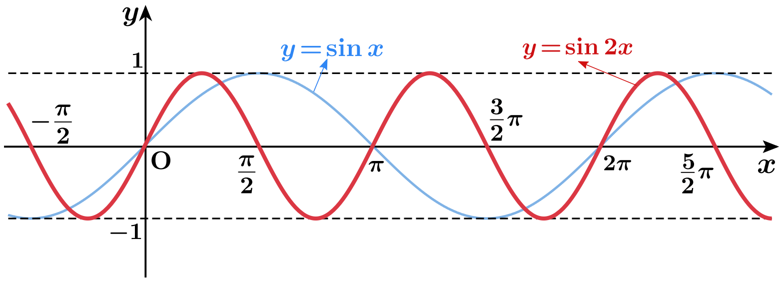
➤ 임의의 실수 θ에 대하여 $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$가 성립하므로 $y = \cos\theta$는 주기가 2π인 주기함수이다.

➤ $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$이므로 $y = \cos\theta$의 그래프는 $y = \sin\theta$의 그래프를 θ축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

예제8

$y = \sin 2x$의 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

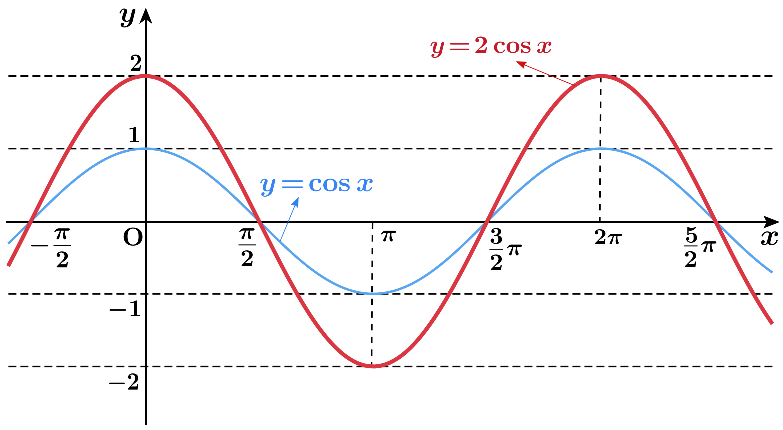
$\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi)$이므로 $y = \sin 2x$의 주기는 π가 되고, 그래프는 아래 그림과 같다.



➤ $y = \sin ax$의 그래프는 $y = \sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{|a|}$배 확대 혹은 축소한 것과 같다. 따라서 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$가 된다.

예제9

$y = 2\cos x$의 그래프를 그리시오.



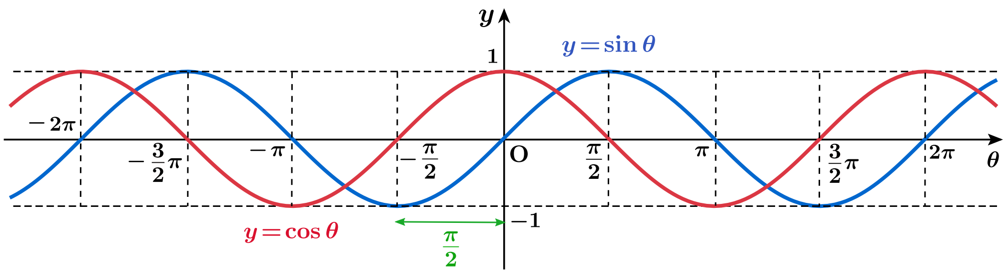
➤ $y = a\cos x$의 그래프는 $y = \cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $|a|$배 확대 혹은 축소한 것과 같다. 따라서 최댓값과 최솟값은 각각 $|a|$, $-|a|$가 된다.

각 $\frac{\pi}{2} \pm \theta$의 사인함수와 코사인함수

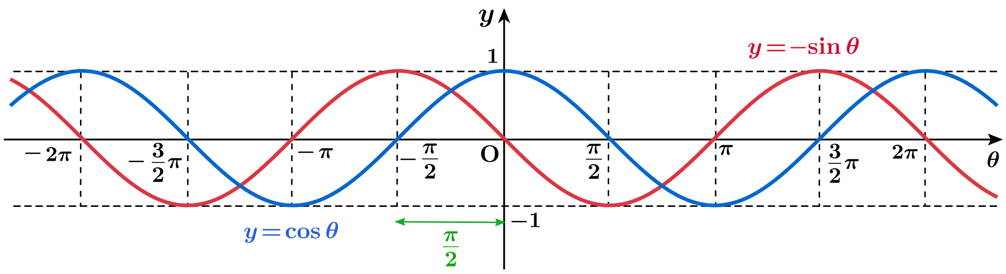
θ가 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

➤ 다음 그림과 같이 함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 θ축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 함수 $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\cos\theta$의 그래프와 일치하므로 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$임을 알 수 있다.



➤ 다음 그림과 같이 함수 $y=\cos\theta$의 그래프를 θ축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 함수 $y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=-\sin\theta$의 그래프와 일치하므로 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$임을 알 수 있다.



➤ $\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta$이므로 위의 내용을 종합하여보면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}=\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right\}=-\sin(-\theta)=\sin\theta$$

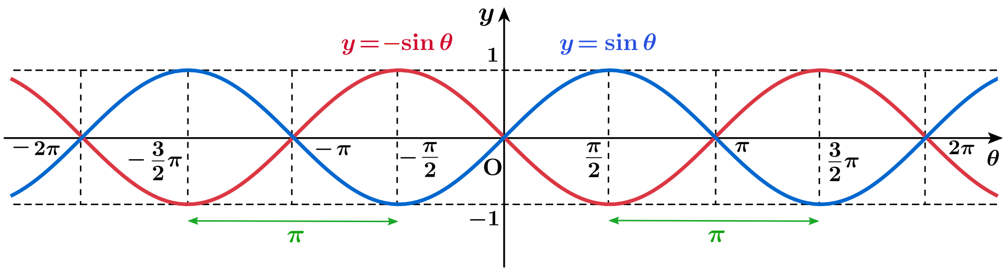
각 $\pi \pm \theta$의 사인함수와 코사인함수

θ가 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.

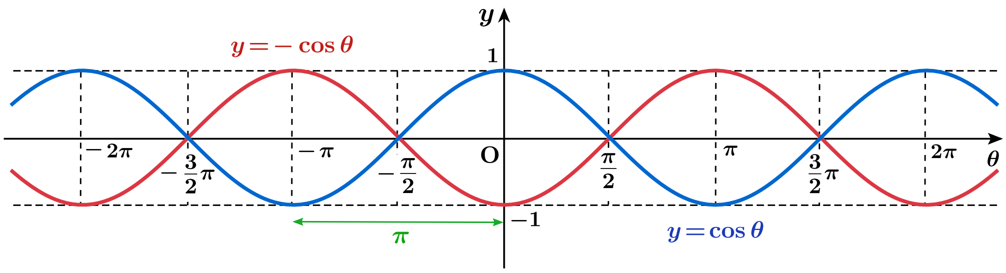
$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta, \qquad \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \qquad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

➤ 다음 그림과 같이 함수 $y = \sin\theta$의 그래프를 θ축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 함수 $y = \sin(\theta+\pi)$의 그래프는 함수 $y = -\sin\theta$의 그래프와 일치하므로 $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$임을 알 수 있다.



➤ 다음 그림과 같이 함수 $y = \cos\theta$의 그래프를 θ축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 함수 $y = \cos(\theta+\pi)$의 그래프는 함수 $y = -\cos\theta$의 그래프와 일치하므로 $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$임을 알 수 있다.



➤ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$이므로 위의 내용을 종합하여보면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\{\pi+(-\theta)\} = -\sin(-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = \cos\{\pi+(-\theta)\} = -\cos(-\theta) = -\cos\theta$$

예제10

다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin\frac{2}{3}\pi$ (2) $\cos\frac{5}{6}\pi$ (3) $\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$

(1) $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $y = \tan\theta$의 그래프의 특징

(1) 정의역은 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $y = \tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

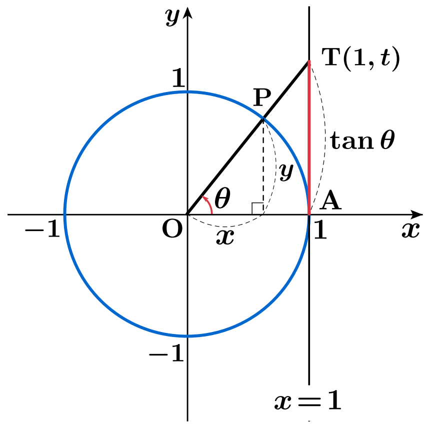
(3) 주기가 π인 주기함수이다.

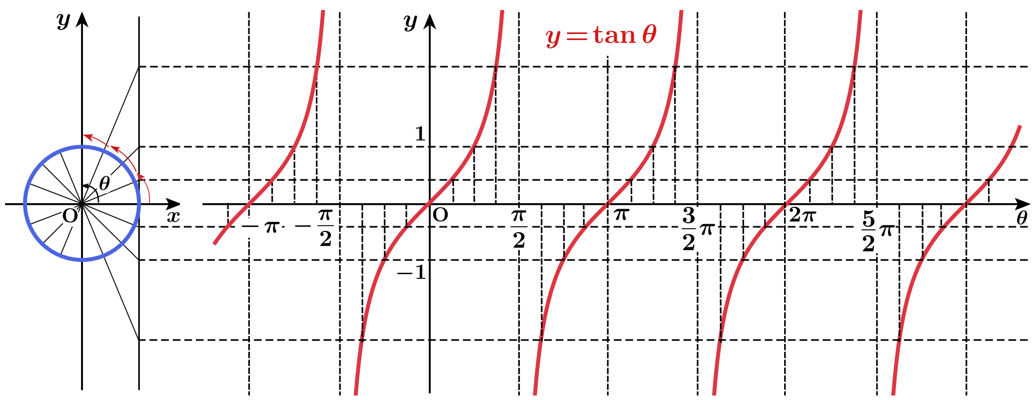
(4) 그래프의 점근선은 직선 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

➤ 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 단위원 위를 움직이는 점 P가 점 A$(1, 0)$을 출발하여 시계 반대 방향으로 θ만큼 움직였을 때, 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 연장선과 A$(1, 0)$에서 원에 접하는 접선이 만나는 점을 T$(1, t)$라고 하면

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

이다. 즉, 점 P가 원 위를 움직일 때 $\tan\theta$의 값은 점 T의 y좌표가 된다. 따라서 θ의 값을 가로축에 나타내고, 이에 대응하는 $\tan\theta$의 값을 세로축에 나타내어 탄젠트함수 $y = \tan\theta$의 그래프를 그린다.





➤ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 나타내는 동경은 y축 위에 있으므로 직선 $x = 1$과는 만나지 않는다. 따라서 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)일 때, $\tan\theta$는 정의되지 않는다.

➤ $y = \tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\tan(-\theta) = -\tan$이다. 따라서 $y = \tan\theta$는 홀함수이다.

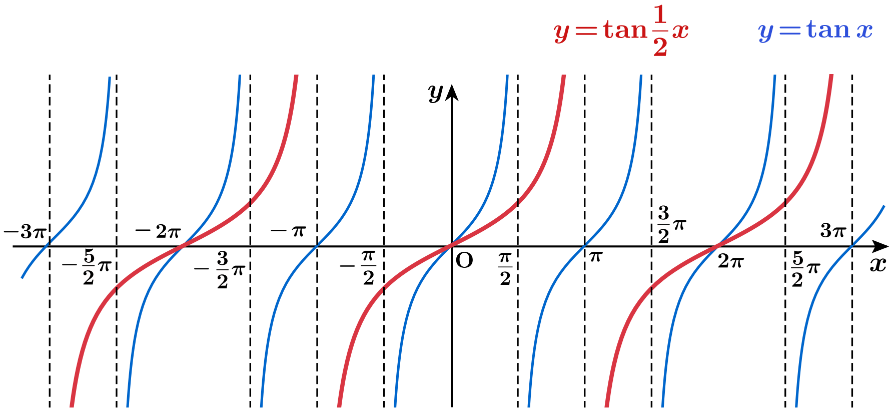
➤ 임의의 실수 θ에 대하여 $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$가 성립하므로 $y = \tan\theta$는 주기가 π인 주기함수이다.

예제11

$y=\tan\frac{1}{2}x$의 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

$\tan\frac{1}{2}x=\tan\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)=\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)$

따라서 $y=\tan\frac{1}{2}x$의 주기는 2π이다.



➤ $y=\tan ax$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{|a|}$배 확대 혹은 축소한 것과 같다. 따라서 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$가 된다.

각 $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, $\pi \pm \theta$의 탄젠트함수

θ가 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta, \qquad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

➤ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\left\{\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right\} = -\frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{\tan\theta}$$

➤ 함수 $y = \tan\theta$의 주기가 π이므로 $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$이고,
이를 이용하면 $\tan(\pi-\theta) = \tan\{\pi+(-\theta)\} = \tan(-\theta) = -\tan\theta$임을 알 수 있다.

예제12

다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\tan\frac{5}{4}\pi$ (2) $\tan\frac{5}{6}\pi$

(1) $\tan\frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

(2) $\tan\frac{5}{6}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 삼각방정식과 삼각부등식

삼각방정식과 삼각부등식

삼각함수의 각의 크기를 미지수로 하는 방정식과 부등식을 각각 삼각방정식, 삼각부등식이라고 한다.

- 예를 들어, $\sin x = \dfrac{1}{2}$은 삼각방정식, $2\cos x - \sqrt{2} > 0$은 삼각부등식이다.
- 삼각방정식의 풀이법에는 다음의 두 가지가 있다.

(1) 그래프 이용법

① 주어진 방정식을 $\sin x = a$ (또는 $\cos x = a,\ \ \tan x = a$)의 꼴로 고친다.

② $y = \sin x$ $(y = \cos x,\ y = \tan x)$와 $y = a$의 그래프를 그려서 두 그래프의 교점의 x 좌표를 구한다.

(2) 동경 이용법

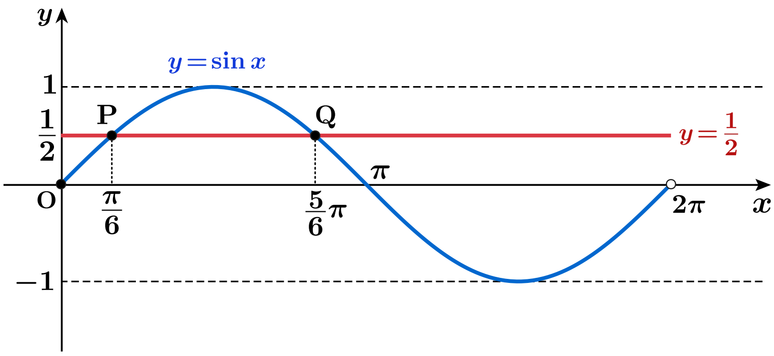
문제의 조건에 맞게 사분면 위에 동경을 그리고 해를 구한다.

예제13

방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$을 푸시오. (단, $0 \le x < 2\pi$)

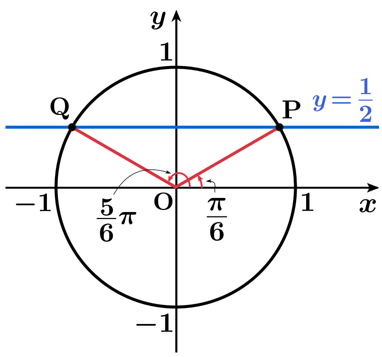
(1) 그래프 이용법

$y = \sin x$의 그래프와 $y = \frac{1}{2}$의 그래프를 그려서 교점의 x좌표를 찾는다. 오른쪽 그래프에서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로 구하는 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$가 된다.



(2) 동경 이용법

혹은 오른쪽 그림에서처럼 직선 $y = \frac{1}{2}$과 단위원과의 교점을 P, Q라 할 때, 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 나타내는 각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$가 방정식의 해가 된다.

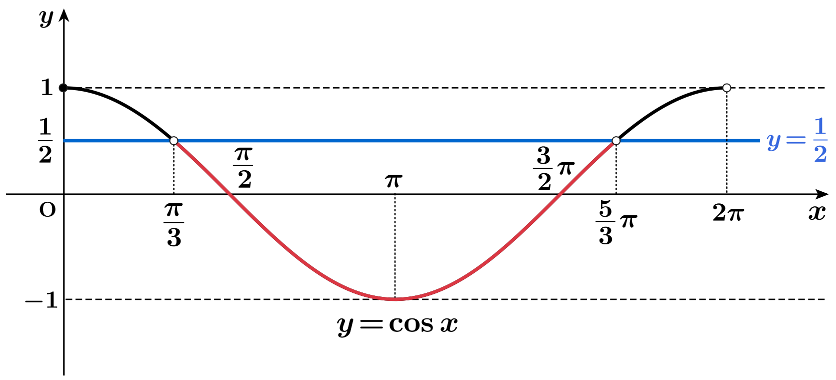


예제14

부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$을 푸시오. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) 그래프 이용법

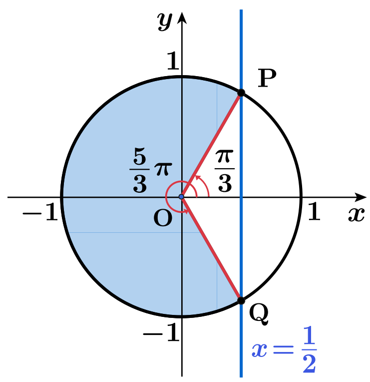
$y=\cos x$의 그래프와 $y=\frac{1}{2}$의 그래프를 그려 $y=\cos x$이 그래프가 $y=\frac{1}{2}$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구한다.



위의 그래프를 보면 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프가 $y=\frac{1}{2}$이 그래프보다 아래쪽에 있으므로, 구하는 부등식의 해는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$가 된다.

(2) 동경 이용법

혹은 오른쪽 그림에서처럼 직선 $x=\frac{1}{2}$과 단위원과의 교점을 P, Q라 할 때, 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 나타내는 각이 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로, 구하는 부등식의 해는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$가 된다.



3/6
수

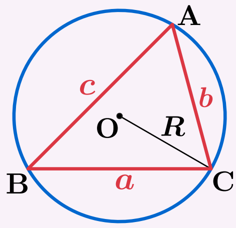
~~2. 사인법칙과 코사인법칙~~

1 사인법칙

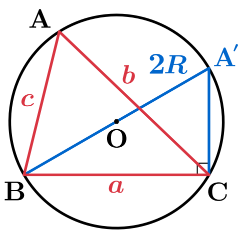
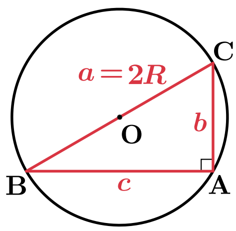
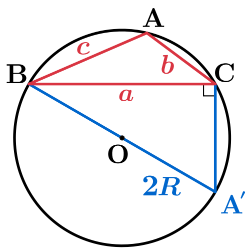
사인법칙

$\triangle$ABC에서 $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C의 크기를 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 한다. 이때, $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



➤ 사인법칙의 증명은 다음과 같다.

$\mathbf{A < 90^\circ}$ 일 때	$\mathbf{A = 90^\circ}$ 일 때	$\mathbf{A > 90^\circ}$ 일 때
		
A $=$ A$'$ 이고 $\angle$A$'$CB $= 90^\circ$ 이므로 $\sin A = \sin A'$ $= \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \dfrac{a}{2R}$	$\sin A = 1$ 이고 $a = 2R$ 이므로 $\sin A = 1 = \dfrac{a}{2R}$	$\sin A = 180^\circ - A'$ $\angle$A$'$CB $= 90^\circ$ 이므로 $\sin A = \sin(180^\circ - A')$ $= \sin A' = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \dfrac{a}{2R}$
같은 방법으로 $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$		

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ 이므로 다음이 성립한다.

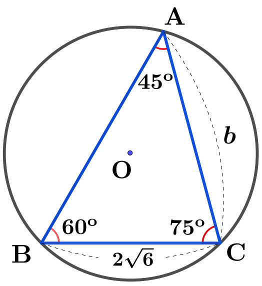
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

➤ $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

➤ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

예제15

$\triangle$ABC에서 $a = 2\sqrt{6}$, $\mathrm{A} = 45^\circ$, $\mathrm{C} = 75^\circ$ 일 때, b와 R의 값을 구하시오.
(단, b는 $\angle$B의 대변의 길이, R은 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름이다.)



삼각형 내각의 합은 180° 이므로 $\mathrm{B} = 60^\circ$ 이다.

$\dfrac{a}{\sin \mathrm{A}} = \dfrac{b}{\sin \mathrm{B}}$ 에서

$$b = \frac{a \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}} = \frac{2\sqrt{6} \times \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$= \frac{2\sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 6$$

또한 $\dfrac{a}{\sin \mathrm{A}} = 2R$에서

$$R = \frac{a}{2 \sin \mathrm{A}} = \frac{2\sqrt{6}}{2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

2 코사인법칙

코사인법칙

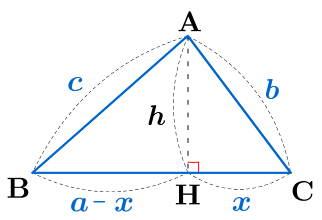
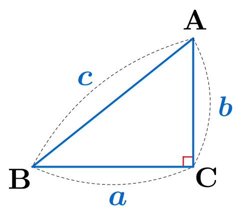
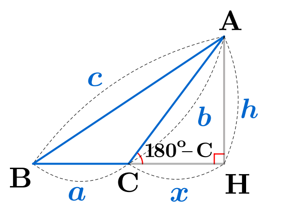
$\triangle$ABC에서 $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C의 크기를 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 할 때, 다음 등식이 성립한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos \mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \mathrm{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

➤ 코사인법칙의 증명은 다음과 같다.

$C < 90^\circ$ 일 때	$C = 90^\circ$ 일 때	$C > 90^\circ$ 일 때
		
$h^2 = b^2 - x^2$ $h^2 = c^2 - (a-x)^2$ $b^2 - x^2 = c^2 - (a-x)^2$ $c^2 = b^2 + c^2 - 2ax$ $\quad = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C}$	$c^2 = a^2 + b^2$ $\quad = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C}$ $(\because \cos \mathrm{C} = 0)$	$h^2 = b^2 - x^2$ $h^2 = c^2 - (a+x)^2$ $b^2 - x^2 = c^2 - (a+x)^2$ $c^2 = b^2 + a^2 + 2ax$ $\quad = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C}$ $\left(\because x = b\cos(180^\circ - \mathrm{C}) = -b\cos \mathrm{C}\right)$
같은 방법으로 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos \mathrm{B}$		

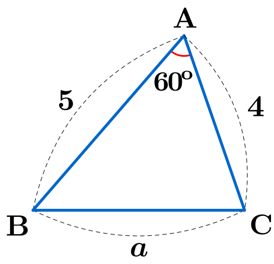
예제16

$\triangle$ABC에서 $\mathrm{A} = 60^{\circ}$, $b = 4$, $c = 5$일 때, a의 값을 구하시오.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A} \\ &= 5^2 + 4^2 - 2\times5\times4\times\cos60^{\circ} \\ &= 25 + 16 - 20 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$\therefore a = \sqrt{21}$ ($\because a > 0$)



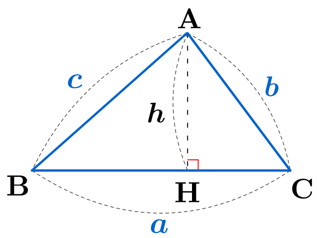
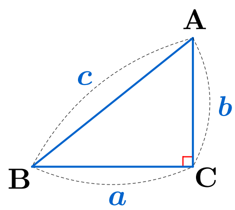
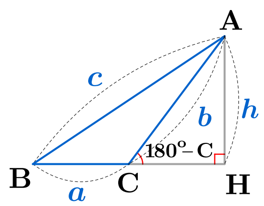
3 삼각형의 넓이

삼각형의 넓이

$\triangle$ABC에서 $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C의 크기를 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 할 때, $\triangle$ABC의 넓이 S는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin \mathrm{C} = \frac{1}{2}bc\sin \mathrm{A} = \frac{1}{2}ca\sin \mathrm{B}$$

➤ 삼각형의 넓이 공식의 증명은 다음과 같다.

$C < 90°$ 일 때	$C = 90°$ 일 때	$C > 90°$ 일 때
		
$h = b \times \sin \mathrm{C}$ $S = \frac{1}{2} \times a \times h$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \mathrm{C}$	$\mathrm{C} = 90°$ 이므로 $\sin \mathrm{C} = \sin 90° = 1$ $S = \frac{1}{2} \times a \times b$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times 1$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \mathrm{C}$	$h = b \times \sin(180° - \mathrm{C})$ $= b \times \sin \mathrm{C}$ $S = \frac{1}{2} \times a \times h$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \mathrm{C}$
같은 방법으로 $S = \frac{1}{2}bc\sin \mathrm{A} = \frac{1}{2}ca\sin \mathrm{B}$		

예제17

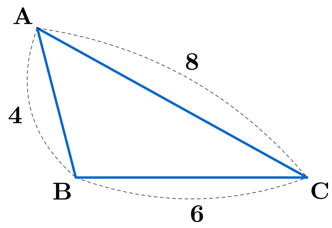
두 변의 길이가 각각 4, 7이고, 그 사잇각이 30°인 삼각형의 넓이 S를 구하시오.

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \sin 30° = 7$$

예제18

세 변의 길이가 각각 $4,\ 6,\ 8$인 삼각형의 넓이 S를 구하시오.

오른쪽 그림에서



$$\cos \mathrm{B} = \frac{4^2+6^2-8^2}{2\times4\times6} = -\frac{1}{4}$$

$$\sin \mathrm{B} = \sqrt{1-\cos^2 \mathrm{B}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$

고등학교 수학1

수열

3

1. 등차수열과 등비수열
2. 수열의 합
3. 수학적 귀납법

1. 등차수열과 등비수열

1 수열의 뜻

수열

어떤 규칙에 따라 차례대로 나열된 수의 열을 수열이라 하고, 그 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.
이때, 수열의 각 항을 앞에서부터 차례대로

첫째 항, 둘째 항, 셋째 항, $\cdots$, n번째 항, $\cdots$

또는

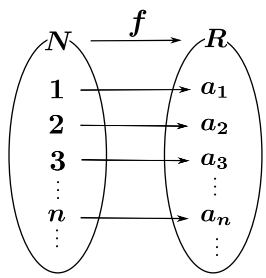
제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$

이라고 한다.
일반적으로 수열을 나타낼 때는 항의 번호가 붙은 문자의 열을 사용하여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

과 같이 나타낸다. 이때, 제n번째 항 a_n을 수열의 일반항이라고 하고, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

➤ 일반적으로 수열 $\{a_n\}$은 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$에 이 수열의 각 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$을 차례대로 대응시킨 것이므로, 수열 $\{a_n\}$을 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수로 볼 수 있다. 따라서 수열 $\{a_n\}$의 제n항 a_n을 $a_n = f(n)$과 같이 생각할 수 있고, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 수열의 각항을 정할 수 있으므로, a_n을 수열 $\{a_n\}$의 일반항이라고 한다.



예제1

수열 $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$을 $\{a_n\}$이라고 하자. a_7을 구하시오.

나열된 수들에는 다음과 같은 규칙이 있다.

$$a_2 - a_1 = 2,\quad a_3 - a_2 = 4,\quad a_4 - a_3 = 8,$$
$$a_5 - a_4 = 16,\quad a_6 - a_5 = 32,\quad a_7 - a_6 = 64,\quad \cdots$$

이런 규칙을 이용하면 $a_6 = a_5 + 32 = 63$, $a_7 = a_6 + 64 = 127$임을 알 수 있다.

예제2

수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 주어질 때, 수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

(1) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

(2) $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots$

(1) 분자의 규칙과 분모의 규칙을 따로 생각하여 일반항을 구하면 $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ 이 됨을 알 수 있다.

(2) $a_1 = 10-1$, $a_2 = 100-1$, $a_3 = 1000-1$, $\cdots$ 의 규칙이 있으므로 일반항은 $a_n = 10^n - 1$ 이 된다.

2 등차수열

등차수열

이웃하는 두 항 사이의 차가 일정한 수열 $\{a_n\}$을 등차수열이라 한다.

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = a_n + d$$

이때, 두 항 사이의 일정한 차를 공차라고 하며 d로 표기한다.

➤ 수열 $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \cdots$은 첫째 항 1에서 시작하여 각 항에 일정한 수 4를 더하여 얻어진 수열이다.

$$\mathbf{1,}\ \underset{+4}{\frown}\ \mathbf{5,}\ \underset{+4}{\frown}\ \mathbf{9,}\ \underset{+4}{\frown}\ \mathbf{13,}\ \cdots$$

예제3

다음 등차수열의 공차를 구하시오.

(1) $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots$

(2) $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ \cdots$

(1) 주어진 등차수열은 3씩 증가하므로 공차는 3이다.

(2) 주어진 등차수열은 -2씩 증가하므로 공차는 -2이다.

등차수열

첫째 항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(제 1 항)	(제 2 항)	(제 3 항)	(제 4 항)	$\cdots$	(제 n 항)	$\cdots$
a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n	$\cdots$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$	
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$\cdots$	$a+(n-1)d$	$\cdots$

➤ 등차수열의 일반항은 n에 대한 일차식이며 n의 계수가 공차 d가 된다. 따라서 일반항이 $a_n = pn + q$로 주어지는 수열은 첫째 항이 $p+q$, 공차가 p인 등차수열이 된다.

예제4

다음 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

(1) $17,\ 12,\ 7,\ 2,\ \cdots$

(2) 제3항이 12, 제6항이 18인 등차수열

(1) 주어진 등차수열의 첫째 항이 17, 공차가 -5이므로 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = 17 + (n-1) \times (-5) = -5n + 22$$

(2) 첫째 항을 a_1, 공차를 d라고 하면 연립방정식 $\begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ a_1 + 5d = 18 \end{cases}$ 로부터 $a_1 = 8,\ d = 2$를 얻을 수 있다. 따라서 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = 8 + (n-1) \times 2 = 2n + 6$$

등차중항

세 수 $a,\ b,\ c$가 순서대로 등차수열을 이루면, 아래의 등식이 성립한다. 이때, b를 a와 c의 등차중항이라 한다.

$$2b = a + c \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a+c}{2} \ \ (b\text{는 } a,\ c\text{의 산술평균})$$

➤ 세 수 $a,\ b,\ c$가 순서대로 공차가 d인 등차수열을 이루면 $a,\ b,\ c$ 각각을 $a,\ a+d,\ a+2d$로 생각할 수 있다. 이때, $\begin{cases} 2b = 2(a+d) = 2a + 2d \\ a + c = a + (a+2d) = 2a + 2d \end{cases}$ 가 되어 $2b = a + c$가 성립함을 알 수 있다.

예제5

다음 나열된 수들이 순서대로 등차수열을 이루도록 $x,\ y$의 값을 구하시오.

(1) $2,\ x,\ 5$

(2) $4,\ x,\ y,\ 16$

(1) $x = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$

(2) $x = \dfrac{4+y}{2},\ y = \dfrac{x+16}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 8,\ y = 12$

등차수열의 합

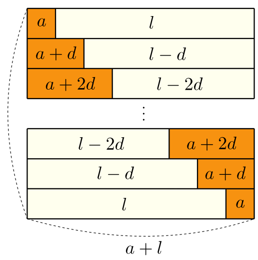
첫째 항이 a, 공차가 d인 등차수열에서 제1항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ (l은 제n항) (2) $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

➤ 첫째 항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열에서 첫째 항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$
\begin{array}{rl}
 & S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-2d) + (l-d) + l \\
+) & S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a \\
\hline
 & 2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l) + (a+l) \\
 & \quad = n \times (a+l)
\end{array}
$$

$$\therefore S_n = \frac{n(a+l)}{2} \quad \cdots ①$$



여기서, l은 제n항이므로 $l = a+(n-1)d$ 이고

l을 ①에 대입하면 $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ 를 얻을 수 있다.

예제6

첫째 항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 제n항까지의 합 S_n을 구하시오.

$S_n = \frac{n}{2}\{2 \times 1 + (n-1) \times 2\} = n^2$

예제7

세 자리 자연수 중에서 9의 배수의 합을 구하시오.

9의 배수는 공차가 9인 등차수열이 된다. 9의 배수 중 가장 작은 세 자리 자연수는 108이므로 이 등차수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 $a_n = 9n+99$가 된다. 9의 배수 중 가장 큰 세 자리 자연수는 999이고, 이는 수열 $\{a_n\}$의 100번 째 항이므로, 수열 $\{a_n\}$의 제1항부터 제100항까지의 합 S_{100}을 구하면 된다.

$\therefore S_{100} = \frac{100}{2}(108+999) = 55350$

3 등비수열

등비수열

이웃하는 두 항 사이의 비가 일정한 수열 $\{a_n\}$을 등비수열이라 한다.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = ra_n$$

이때, 일정한 비를 공비라고 하며 r로 표기한다.

➤ 수열 $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots$은 첫째 항 1에서 시작하여 각 항에 일정한 수 3을 곱하여 얻어진 수열이다.

$$\mathbf{1},\ \underbrace{}_{\times 3}\ \mathbf{3},\ \underbrace{}_{\times 3}\ \mathbf{9},\ \underbrace{}_{\times 3}\ \mathbf{27},\ \cdots$$

예제8

다음 등비수열의 공비를 구하시오.

(1) $64,\ 32,\ 16,\ 8,\ \cdots$

(2) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots$

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$로 일정하므로 공비는 $\dfrac{1}{2}$이다.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -2$로 일정하므로 공비는 -2이다.

등비수열의 일반항

첫째 항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(제 1 항)	(제 2 항)	(제 3 항)	(제 4 항)	$\cdots$	(제 n 항)	$\cdots$
a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n	$\cdots$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$	
a	ar	ar^2	ar^3	$\cdots$	ar^{n-1}	$\cdots$

예제9

수열 $\{a_n\}$이 첫째 항이 2이고 공비가 3인 등비수열이라고 할 때, 1458은 이 수열의 제n항이다. 자연수 n의 값을 구하시오.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$이므로 $1458 = 2 \times 3^{n-1}$에서 $n = 7$이 된다.

등비중항

세 수 $a,\ b,\ c$가 차례로 등비수열을 이루면, 아래의 등식이 성립한다. 이때, b를 a와 c의 등비중항이라 한다.

$$b^2 = ac$$

➤ 세 수 $a,\ b,\ c$가 순서대로 등비수열을 이루면 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$이므로 $b^2 = ac$가 성립한다.

예제10

$a,\ b,\ 12$가 차례대로 등차수열을 이루고 $a,\ b,\ 16$이 차례대로 등비수열을 이룰 때, 상수 $a,\ b$의 값을 구하시오.

등차중항으로부터 $2b = a + 12 \quad \cdots\cdots$ ①
등비중항으로부터 $b^2 = 16a \quad \cdots\cdots$ ②
①에서 $a = 2b - 12$를 ②에 대입하면

$$b^2 - 32b + 192 = 0, \quad (b-24)(b-8) = 0$$

따라서 $\begin{cases} a = 36 \\ b = 24 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$ 의 두 쌍의 해를 얻을 수 있다.

등비수열의 합

첫째 항이 a, 공비가 r인 등비수열의 제1항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) $r=1$이면 $S_n=na$

(2) $r\neq 1$이면 $S_n=\dfrac{a\left(1-r^2\right)}{1-r}=\dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$

➤ $r=1$이면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

에서 $S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$가 됨을 알 수 있다.

➤ $r\neq 1$이면 ①의 양변에 r를 곱하여

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n\quad\cdots\cdots②$$

①에서 ②를 변변 빼면

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\ -\big) & rS_n = & \phantom{a+{}}ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline & S_n-rS_n = & a-ar^n \end{array}$$

$$\therefore (1-r)S_n=a\left(1-r^n\right)$$

따라서 $S_n=\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}=\dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$이 됨을 알 수 있다.

예제11

공비 r이 실수인 등비수열의 제2항이 -9이고 제5항이 243일 때, 이 수열의 첫째 항부터 제10항까지의 합을 구하시오.

첫째 항을 a, 공비를 r이라고 하면, 이 등비수열의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이다.
여기에 $n=2,\ n=5$를 대입하면

$$\begin{cases} a_2=ar=-9 & \cdots\cdots① \\ a_5=ar^4=243 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② ÷ ①을 하면 $r^3=-27$이고, 공비 r은 실수이므로 $r=-3$이 된다.
이것을 ①에 대입하면 $a=3$임을 알 수 있다.

$$\therefore S_{10}=\frac{3\times\left\{1-(-3)^{10}\right\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\left\{1-(-3)^{10}\right\}=-\frac{3}{4}\left(3^{10}-1\right)$$

2. 수열의 합

1 $\sum$의 뜻과 성질

합의 기호

합의 기호 $\sum$: 수열의 합을 간단하게 나타내기 위한 기호로 다음과 같이 약속한다.

좌변의 끝항의 번호 (제 n 항까지)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

⇨ 좌변의 k 번 째 항 (일반항)

좌변의 시작항의 번호 (제 1 항부터)

예제12

다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 사용하여 나타내시오.

(1) $1+3+5+\cdots+19$ (2) $2+4+8+\cdots+2^{n-1}$

(1) $1+3+5+\cdots+19=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$

(2) $2+4+8+\cdots+2^{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$\sum$의 성질

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$ (단, c는 상수)

(1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)\\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

(2) (1)과 같은 방법으로 보일 수 있다.

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ca_k &= ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n\\ &= c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\\ &= c\sum_{k=1}^{n} a_k\end{aligned}$$

(4)
$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n\text{개}} = cn$$

예제13

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = 15$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k = 8$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k - 3b_k + 2)$의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2a_k - 3b_k + 2) &= 2\sum_{k=1}^{10} a_k - 3\sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 2\\ &= (2 \times 15) - (3 \times 8) + (2 \times 10)\\ &= 30 - 24 + 20\\ &= 26\end{aligned}$$

2 여러 가지 수열의 합

자연수 거듭제곱의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}^2$

(1) 첫째 항 1, 공차 1인 등차수열의 제1항부터 제n항까지의 합과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\{2+(n-1)\times 1\}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 항등식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$을 사용하여 아래와 같이 유도한다.

$$\begin{array}{lrl}
k=1\text{일 때,} & & (1+1)^3 - 1^3 = (3\times 1^2) + (3\times 1) + 1 \\
k=2\text{일 때,} & & (2+1)^3 - 2^3 = (3\times 2^2) + (3\times 2) + 1 \\
k=3\text{일 때,} & & (3+1)^3 - 3^3 = (3\times 3^2) + (3\times 3) + 1 \\
 & & \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
k=n\text{일 때,} & +) & (n+1)^3 - n^3 = (3\times n^2) + (3\times n) + 1 \\
\hline
\text{(변끼리 더하면)} & & (n+1)^3 - 1 = 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n
\end{array}$$

$$n^3 + 3n^3 + 3n + 1 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\times\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) 항등식 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$을 사용하여 (2)와 같은 방법으로 유도한다.

예제14

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k-2)$의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k-2) &= \sum_{k=1}^{10}\left(k^3-3k^2+2k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{10} k^3 - 3\sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k\\ &= \left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2 - 3\times\left(\frac{10\times 11\times 21}{6}\right) + 2\times\left(\frac{10\times 11}{2}\right)\\ &= 55^2-(3\times 55\times 7)+(2\times 55)\\ &= 55(55-21+2)\\ &= 55\times 36\\ &= 1980\end{aligned}$$

분수로 표시된 수열의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} - 1$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ $\leftarrow$ 분자, 분모에 모두 $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ 를 곱하면

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \sqrt{n+1} - 1$$

예제15

다음 수열의 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{100+1} = \frac{100}{101}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{80} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{81} - 1 = 8$

수열의 합과 일반항과의 관계

수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 할 때,

$$\begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ a_1 = S_1 \end{cases}$$

➤ 수열의 제1항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_n \qquad \cdots\cdots ①$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \qquad = S_{n-1} \qquad \cdots\cdots ②$$

①에서 ②를 변변 빼면

$$a_n = S_n - S_{n-1} \ (n \geq 2)$$

이 되고, 첫째 항 a_1은 S_1과 같아야 하므로

$$a_1 = S_1$$

이 된다.

예제16

수열의 첫째 항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음과 같이 주어진 경우의 수열의 일반항을 구하시오.

(1) $S_n = 2n^2 + 4n$ (2) $S_n = 2n^2 + 4n + 1$

(1) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2n^2 + 4n) - \{2(n-1)^2 + 4(n-1)\}$

$= (2n^2 + 4n) - (2n^2 - 4n + 2 + 4n - 4)$

$= 4n + 2 \ (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 6$

$\therefore a_n = 4n + 2$

(2) $a_n = 4n + 2 \ (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 7$

$\therefore a_1 = 7, \ a_n = 4n + 2 \ (n \geq 2)$

예제17

수열의 첫째 항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음과 같이 주어진 경우의 수열의 일반항을 구하시오.

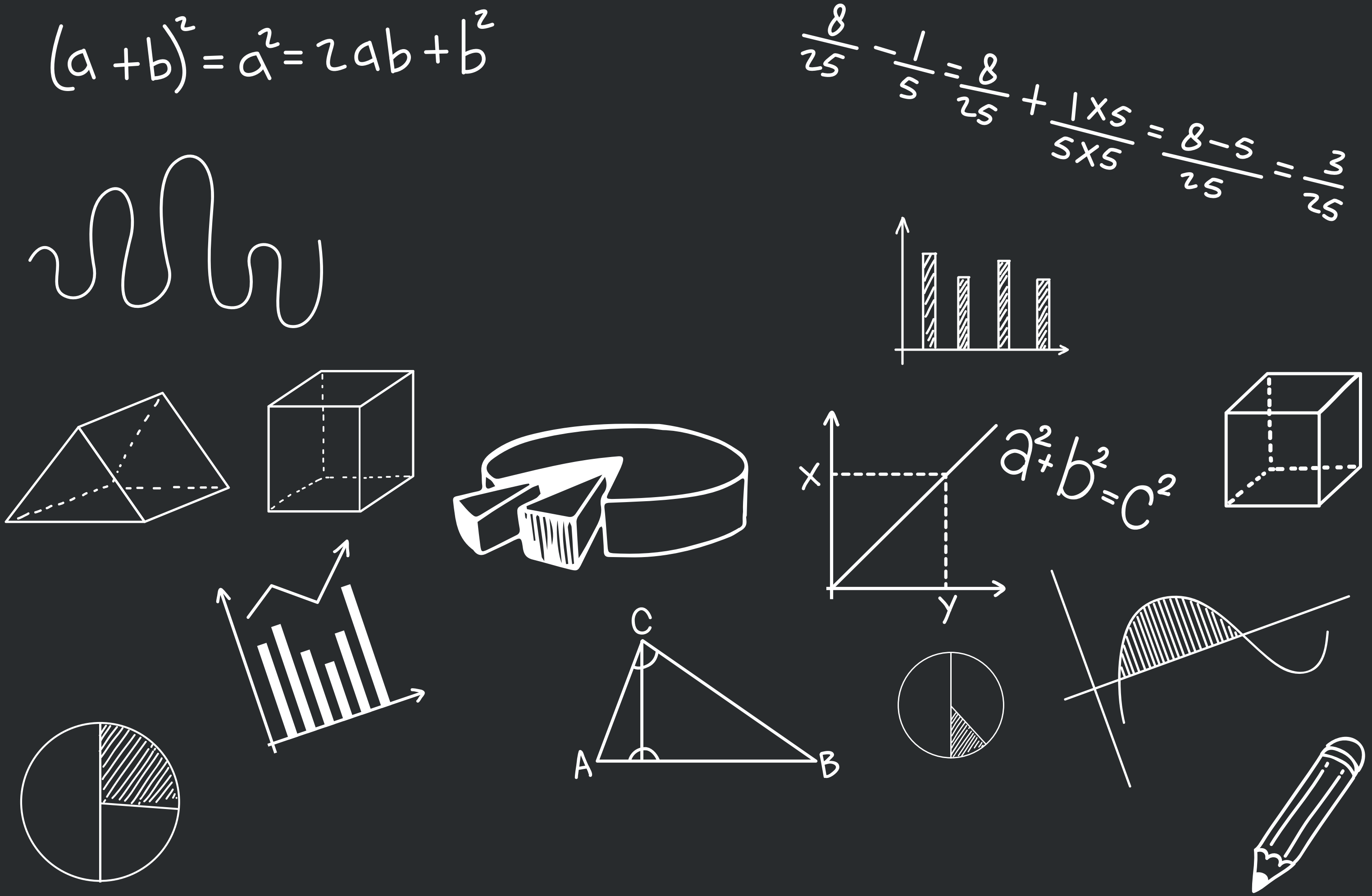
(1) $S_n = 2^{n+1} - 2$

(2) $S_n = 3^n + 1$

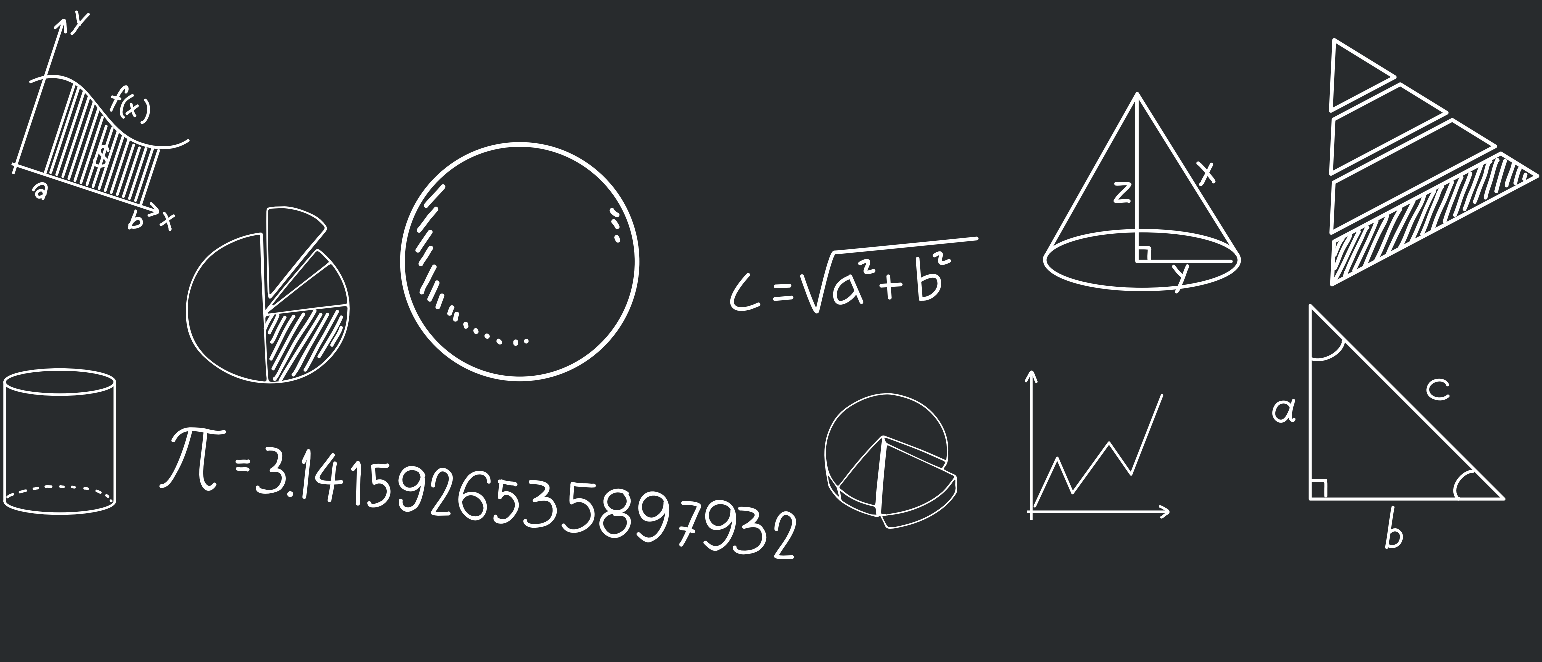
(1)
$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(2^{n+1} - 2\right) - \left(2^n - 2\right) \\ &= 2^n(2-1) \\ &= 2^n \ (n \ge 2) \end{aligned}$$
$$a_1 = S_1 = 2$$
$$\therefore a_n = 2^n$$

(2)
$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(3^n + 1\right) - \left(3^{n-1} + 1\right) \\ &= 3^{n-1}(3-1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \ (n \ge 2) \end{aligned}$$
$$a_1 = S_1 = 4$$
$$\therefore a_1 = 4,\ a_n = 2 \times 3^{n-1} \ (n \ge 2)$$

목
오후


(a+b)² = a² = 2ab + b²
a² + b² = c²
X
Y
C
A
B

3. 수학적 귀납법


Y
f(x)
S
a
b
X
c = √a² + b²
Z
X
Y
π = 3.14159265358979 32
a
c
b

1 수열의 귀납적 정의

수열의 귀납적 정의

다음과 같이 첫째 항 그리고 이웃하는 항들 사이의 관계식이 주어지면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항들을 구할 수 있다. 이와 같이 첫째 항과 이웃하는 두 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 한다.

$$\begin{cases} \text{첫째 항 } a_1 \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n \text{과 } a_{n+1} \text{ 사이의 관계식 } (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

➤ 다음은 첫째 항이 1이고, 공차가 3인 등차수열을 귀납적으로 정의한 것이다.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

➤ 다음은 첫째 항이 2이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열을 귀납적으로 정의한 것이다.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times a_n \end{cases}$$

➤ 경우에 따라서는 다음과 같이 이웃한 세 항 사이의 관계식이 주어지기도 한다.

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \quad \Rightarrow \text{ 등차수열}$$
$$(a_{n+1})^2 = a_n \times a_{n+2} \quad \Rightarrow \text{ 등비수열}$$

이런 경우에는 첫째 항 이외에 둘째 항 혹은 셋째 항이 추가로 주어져야 한다.

예제18

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5를 구하시오. (단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 4a_n + 3$

이웃한 항들 사이의 관계식에 $n = 1$부터 차례대로 대입하여 a_5를 구한다.

(1) $a_2 = a_1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = a_2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$

$a_4 = a_3 + 2^3 = 7 + 8 = 15$

$a_5 = a_4 + 2^4 = 15 + 16 = 31$

(2) $a_2 = 4 \times a_1 + 3 = 4 \times 1 + 3 = 7$

$a_3 = 4 \times a_2 + 3 = 4 \times 7 + 3 = 31$

$a_4 = 4 \times a_3 + 3 = 4 \times 31 + 3 = 127$

$a_5 = 4 \times a_4 + 3 = 4 \times 127 + 3 = 511$

2 수학적 귀납법

수학적 귀납법

명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 다음과 같이 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

자연수 n에 관한 어떤 명제 $p(n)$에 대히여

(1) $n=1$일 때, $p(1)$이 성립함을 증명한다.

(2) $n=k$일 때, $p(k)$가 성립함을 가정한 후,
$n=k+1$일 때, $p(k+1)$이 성립함을 증명한다.

예제19

수학적 귀납법을 사용하여 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}=$(우변) 이므로 등식이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하고 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

예제20

$h>0$일 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$(1+h)^n > 1+nh$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

(1) $n=2$일 때, (좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=$(우변) 이므로 부등식이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > 1+kh \quad \cdots\cdots ①$$

$1+h>0$이므로 부등식 ①의 양변에 $1+h$를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h)$$

이때, (우변)$=(1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$이므로

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) > 1+(k+1)h$$

가 성립한다. 즉, $n=k+1$일 때도 부등식이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

금