

고등학교

수학 1

수악중독

고등학교 수학1

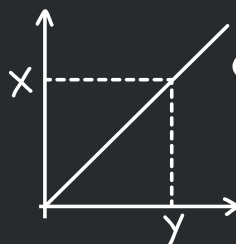
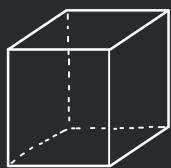
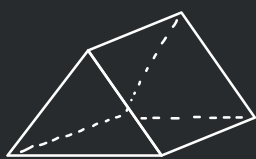
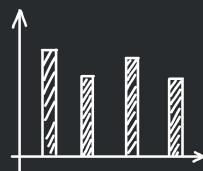
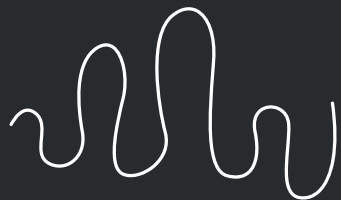
지수함수와 로그함수

1

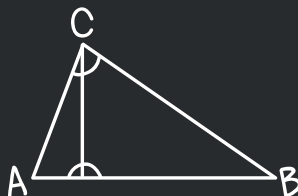
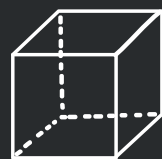
-
1. 지수와 로그
 2. 지수함수와 로그함수

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

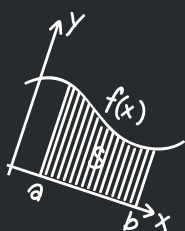
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



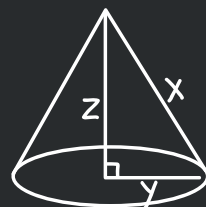
$$a^2 + b^2 = c^2$$



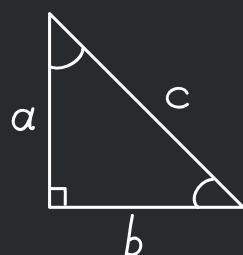
1. 지수와 로그



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



1

거듭제곱과 거듭제곱근

1 지수와 로그

거듭제곱

a 를 n 번 곱한 a^n 을 a 의 n 제곱이라 하고, $a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ 를 통틀어 a 의 거듭제곱이라고 한다. 이때, a^n 에서 a 를 거듭제곱의 밑, n 을 지수라고 부른다.

a^n → 지수
↙ 밑

▶ 중학교 때 배운 지수법칙을 정리하면 다음과 같다.

a, b 가 임의의 실수이고, m, n 이 자연수일 때,

$$(1) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(3) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{단, } b \neq 0)$$

$$(5) a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases} \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

예제 1

$ab^2 \times (a^3b^2)^2 \div \frac{b^3}{a^2}$ 을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

$$\begin{aligned} ab^2 \times (a^3b^2)^2 \div \frac{b^3}{a^2} &= ab^2 \times a^6b^4 \times \frac{a^2}{b^3} \\ &= a^{1+6+2} \times b^{2+4-3} \\ &= a^9b^3 \end{aligned}$$

★ 지수법칙의 증명

$$(1) a^n \times a^m = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n\text{개}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m\text{개}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n\text{개}} = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = \underbrace{\overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{a\text{가 } m\text{개}}} \times \underbrace{\overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{a\text{가 } m\text{개}}} \times \cdots \times \underbrace{\overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{a\text{가 } m\text{개}}}_{\text{괄호가 } n\text{개}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{mn\text{개}} = a^{mn}$$

$$(3) (ab)^n = \underbrace{(ab \times ab \times \cdots \times ab)}_{ab\text{가 } n\text{개}} = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{a\text{가 } n\text{개}} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{b\text{가 } n\text{개}} = a^n b^n$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}\right)}_{\frac{a}{b} \text{가 } n\text{개}} = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } n\text{개}}}{\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{b\text{가 } n\text{개}}} = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{단, } b \neq 0)$$

$$(5) a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } n\text{개}} \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m-n\text{개}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } n\text{개}}} = \frac{\cancel{a \times \cdots \times a} \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m-n\text{개}}}{\cancel{a \times \cdots \times a}} = a^{m-n} \quad (m > n)$$

$$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m\text{개}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } m\text{개}}} = \frac{\cancel{a \times \cdots \times a}}{\cancel{a \times \cdots \times a}} = 1 \quad (m = n)$$

$$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{a\text{가 } m\text{개}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } m\text{개}} \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } n-m\text{개}}} = \frac{\cancel{a \times \cdots \times a}}{\cancel{a \times \cdots \times a} \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{a\text{가 } n-m\text{개}}} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (m < n)$$

(단, $a \neq 0$)

거듭제곱근

n 을 $n \geq 2$ 인 정수라 할 때, 실수 a 에 대하여 방정식 $x^n = a$ 의 근을 a 의 n 제곱근이라 하고, a 의 제곱근, a 의 세제곱근, a 의 네제곱근, ...를 통틀어 a 의 거듭제곱근이라고 한다.

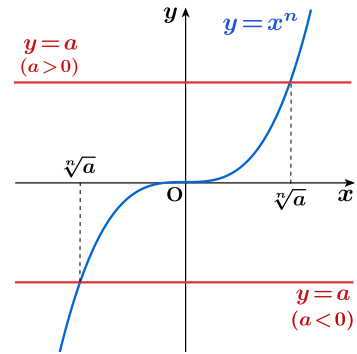
$$x^n = a$$

\uparrow x 의 n 제곱
 \downarrow a 의 n 제곱근

- ▶ $x^n = a$ 는 n 차 방정식이 되고, n 차 방정식의 근은 복소수 범위에서 n 개 존재함이 알려져 있다. 이 중에는 실근도 존재하고, 허근도 존재한다. 하지만 여기서는 실수 a 의 거듭제곱근을 실수 범위에서만 생각하기로 한다.
- ▶ a 가 실수일 때, 방정식 $x^n = a$ 의 실근은 $y = x^n$ 의 그래프와 $y = a$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다. $y = x^n$ 의 그래프는 n 이 홀수인지 짝수인지에 따라 모양이 달라지므로, n 이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각하면 다음과 같다.

(1) n 이 홀수일 때

$f(x) = x^n$ 이라고 하면 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 홀함수가 되고, $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대칭이다. 따라서 $y = x^n$ 과 $y = a$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 한 점에서 만난다. 즉, a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 오직 하나이고, 이것을 $\sqrt[n]{a}$ 로 나타낸다. 이때, $a > 0$ 이면 $\sqrt[n]{a}$ 도 양수, $a < 0$ 이면 $\sqrt[n]{a}$ 도 음수, $a = 0$ 이면 $\sqrt[n]{a}$ 도 0이 된다.



(2) n 이 짝수일 때

$f(x) = x^n$ 이라고 하면 $f(-x) = f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 짝함수가 되고, $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대칭이다. 따라서 $y = x^n$ 과 $y = a$ 의 그래프의 교점은 다음과 같이 a 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

① $a > 0$ 일 때

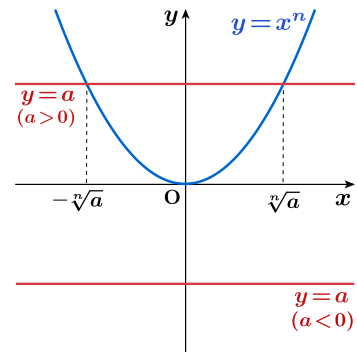
교점은 두 개이다. 또한, 이 두 점은 y 축에 대칭이므로, 이 두 점의 x 좌표는 절댓값은 같고 부호는 다른 두 실수라는 것을 알 수 있다. 따라서 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 양수인 것과 음수인 것이 하나씩 존재하며, 이것을 각각 기호 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ 로 나타낸다.

② $a = 0$ 일 때

교점은 하나이고 교점의 x 좌표가 0이므로 a 의 n 제곱근도 0이 된다.

③ $a < 0$ 일 때

교점은 존재하지 않는다. 따라서 음수의 n 제곱근은 실수 범위에서 존재하지 않는다.



▶ 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것 (n 은 2이상의 정수)

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

이때, $\sqrt[n]{a}$ 를 n 제곱근 a 라고 한다.

- ▶ 고등학교 수학의 지수와 로그 단원에서는 거듭제곱근 중 실수만을 다루게 된다. $a > 0$ 인 경우 방정식 $x^n = a$ 의 n 이 홀수든 짝수든 관계없이 항상 실근이 존재하므로 앞으로 배우게 될 거듭제곱근의 성질에서는 $a > 0$ 인 경우에 대해서만 생각한다.
- ▶ $a = 0$ 인 경우에도 방정식 $x^n = a$ 는 실근 $x = 0$ 을 갖지만, 이 경우 거듭제곱근에 큰 의미를 부여하기 힘들기 때문에 거듭제곱근의 성질에서는 $a = 0$ 인 경우도 생각하지 않는다.

예제2

27의 세제곱근을 구하시오.

27의 세제곱근은 방정식 $x^3 = 27$ 의 세 근 $x = 3$ 또는 $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 와 같다.

이 중 실수인 $x = 3$ 을 $\sqrt[3]{27}$ 로 나타내고 “세제곱근 27”이라고 한다.

예제3

-27의 세제곱근을 구하시오.

-27의 세제곱근은 방정식 $x^3 = -27$ 의 세 근 $x = -3$ 또는 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 와 같다.

이 중 실수인 $x = -3$ 을 $\sqrt[3]{-27}$ 로 나타내고 “세제곱근 -27”이라고 한다.

예제4

81의 네제곱근을 구하시오.

81의 네제곱근은 방정식 $x^4 = 81$ 의 네 근 $x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$ 와 같다.

이 중 실수인 3과 -3을 각각 $\sqrt[4]{81}$, $-\sqrt[4]{81}$ 로 나타내고, $\sqrt[4]{81}$ 을 “네제곱근 81”이라고 한다.

거듭제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 2 이상의 자연수일 때,

$$(1) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(2) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$(5) \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (\text{단, } p \text{는 자연수})$$

(1) $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = x$ 라고 하면 $x^n = (\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$ 이므로 x 는 n 제곱근 ab 가 된다. 따라서 $x = \sqrt[n]{ab}$ 이다.

(2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x$ 라고 하면 $x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$ 이므로 x 는 n 제곱근 $\frac{a}{b}$ 가 된다. 따라서 $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 이다.

(3) $(\sqrt[n]{a})^m = x$ 라고 하면 $x^n = \{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = (\sqrt[n]{a})^{nm} = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$ 이므로 x 는 n 제곱근 a^m 이 된다. 따라서 $x = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$ 라고 하면 $x^{mn} = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$ 이므로 x 는 mn 제곱근 a 가 된다. 따라서 $x = \sqrt[mn]{a}$ 이다.

(5) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = x$ 라고 하면 $x^{np} = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}})^{np} = \left\{(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}})^n\right\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$ 이므로 x 는 np 제곱근 a^{mp} 이 된다. 따라서 $x = \sqrt[np]{a^{mp}}$ 이다.

예제 5

다음 식의 값을 구하시오.

$$(1) \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$$

$$(2) \frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$$

$$(3) (\sqrt{4})^3$$

$$(4) \sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$$

$$(5) \sqrt[15]{27^{10}}$$

$$(1) \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$(2) \frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$(3) (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$(4) \sqrt[5]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[3]{2}$$

$$(5) \sqrt[15]{27^{10}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$$

정수 지수로의 확장

$a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때,

(1) 지수가 0인 경우 : $a^0 = 1$

(2) 지수가 음의 정수인 경우 : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(1) 지수가 자연수일 때의 지수법칙 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 이 지수가 0일 때도 성립하도록 하려면

$$a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$$

이 되어야 하므로 $a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$ 이 된다.

(2) 지수가 음의 정수일 때도 지수법칙 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 가 성립하도록 하려면

$$a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$

이 되어야 하므로 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 이 된다.

지수가 정수인 경우의 지수법칙

$a \neq 0, b \neq 0$ 이고 m, n 이 정수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

예제 6

$a \neq 0, b \neq 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $2^5 \times 2^3 \times 2^{-6}$

(2) $a^{-3} \times a^4 \div a^{-2}$

(3) $(a^{-2}b^3)^{-3}$

(4) $(a + a^{-1})^2$

(1) $2^5 \times 2^3 \times 2^{-6} = 2^{5+3-6} = 2^2$

(2) $a^{-3} \times a^4 \div a^{-2} = a^{-3+4-(-2)} = a^3$

(3) $(a^{-2}b^3)^{-3} = a^{(-2) \times (-3)} b^{3 \times (-3)} = a^6 b^{-9}$

(4) $(a + a^{-1})^2 = a^2 + 2 \times a \times a^{-1} + (a^{-1})^2$
 $= a^2 + 2 \times a^{1+(-1)} + a^{-2}$
 $= a^2 + 2a^0 + \frac{1}{a^2}$
 $= a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$

3

유리수 지수로의 확장

1 지수와 로그

유리수 지수로의 확장

 $a > 0$ 이고 m 은 정수, n 은 2 이상의 자연수일 때,

(1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

(2) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(1) 지수가 자연수일 때의 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$ 이 지수가 유리수일 때도 성립하도록 하려면

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

이 되어야 하므로 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 n 제곱근 a^m 으로 정의한다. 따라서 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.(2) (1)에 의하여 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 이다.

지수가 유리수인 경우의 지수법칙

 $a > 0$, $b > 0$ 이고 m, n 이 유리수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

예제 7

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

(2) $81^{0.25}$

(3) $\sqrt{3} \times 3^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[6]{3}$

(4) $(\sqrt[3]{2}\sqrt{3})^6$

(1) $\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

(2) $81^{0.25} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(3) $\sqrt{3} \times 3^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$

(4) $(\sqrt[3]{2}\sqrt{3})^6 = \left(2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{\frac{1}{3} \times 6} \times 3^{\frac{1}{2} \times 6} = 2^2 \times 3^3$

4

실수 지수로의 확장

1 지수와 로그

지수가 무리수인 경우

무리수 $\sqrt{2}$ 는 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ 와 같다. 이때, $3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, \dots$ 을 계속 계산하면 일정한 수에 한없이 가까워지는 것을 알 수 있다. 이 수를 $3^{\sqrt{2}}$ 로 정의한다.

이와 같은 방법을 이용하면 $a > 0$ 일 때, 임의의 실수 x 에 대해서도 a^x 을 정의할 수 있다.

지수가 실수인 경우의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 실수일 때,

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(3) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(4) a^m \div a^n = a^{m-n}$$

예제 8

다음 식을 간단히 하시오.

$$(1) (5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}}$$

$$(2) 3^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{18}} \div 3^{\sqrt{8}}$$

$$(1) (5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}} = 5^{\sqrt{3} \times \sqrt{12}} = 5^{\sqrt{36}} = 5^6$$

$$(2) 3^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{18}} \div 3^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$$

5

로그의 뜻과 성질

1 지수와 로그

로그

일반적으로 $a > 0$, $a \neq 1$ 일 때, 양수 b 에 대하여 $a^x = b$ 를 만족시키는 실수 x 는 오직 하나 존재한다. 이때, x 를 $x = \log_a b$ 와 같이 나타내고, a 를 밑으로 하는 b 의 로그라고 한다. 또한 a 와 b 를 각각 $\log_a b$ 의 밑과 진수라고 한다.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \rightarrow \begin{array}{l} \text{진수} \\ \text{밑} \end{array}$$

예제9

다음 등식을 로그를 이용하여 나타내시오.

(1) $5^2 = 25$

(2) $10^{-2} = 0.01$

(3) $16^{\frac{1}{2}} = 4$

(1) $5^2 = 25 \Leftrightarrow 2 = \log_5 25$

(2) $10^{-2} = 0.01 \Leftrightarrow -2 = \log_{10} 0.01$

(3) $16^{\frac{1}{2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \log_{16} 4$

로그의 밑조건과 진수조건

$\log_a b$ 가 정의되기 위해서는 다음의 두 가지 조건을 만족시켜야 한다.

(1) $a > 0, a \neq 1$

(2) $b > 0$

이 두 조건을 각각 밑조건, 진수조건이라고 한다.

(1) $a > 0$ 인 조건이 필요한 이유

거듭제곱근과 지수에서 배운 것처럼 a^x 에서 지수 x 가 실수 범위까지 확장되면 밑 a 는 양수여야 한다. $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ 이므로 x 를 실수범위에서 생각하기 위해서는 로그의 밑 a 역시 양수여야 한다.

(2) $a \neq 1$ 조건이 필요한 이유

만약에 로그의 밑이 1이라고 하면,

$$\log_1 1 = 1, \log_1 1 = 2, \log_1 1 = 3, \dots$$

이 되는데, 이 경우 $1 = 2 = 3 = \dots$ 라는 모순이 생긴다.

(3) $b > 0$ 조건이 필요한 이유

$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$ 에서 밑 a 가 양수라면 실수 x 의 값에 관계없이 $a^x > 0$ 이 되어 $b > 0$ 이 되어야 한다.

예제10

$\log_{(x-2)}(-x+7)$ 이 정의되도록 하는 모든 자연수 x 의 합을 구하시오.

로그의 밑조건에서 $x > 2, x \neq 3$

로그의 진수조건에서 $-x+7 > 0 \quad \therefore x < 7$

두 조건을 만족하는 자연수 x 는 4, 5, 6이다.

$$\therefore 4 + 5 + 6 = 15$$

로그의 성질

$a \neq 1, a > 0, x > 0, y > 0$ 이고 t 가 실수일 때,

$$(1) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$(2) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$(3) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$(4) \log_a x^t = t \log_a x$$

$$(1) a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0, \quad a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

(2) $\log_a x = m, \log_a y = n$ 이라 하면, 로그의 정의로부터

$$a^m = x, a^n = y \quad \therefore xy = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

이 되고, 다시 한 번 로그의 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$$

(3) $\log_a x = m, \log_a y = n$ 이라 하면 로그의 정의로부터

$$a^m = x, a^n = y \quad \therefore \frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

이 되고, 다시 한 번 로그의 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\log_a \frac{x}{y} = m - n = \log_a x - \log_a y$$

(4) $\log_a x = n$ 이라 하면 $a^n = x, (a^n)^t = x^t, a^{tn} = x^t$ 이고, 로그의 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\log_a x^t = tn = t \log_a x$$

예제 11

$$(1) \log_{10} 2 + \log_{10} 5$$

$$(2) \log_{10} 16 - \log_{10} 2$$

$$(1) \log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$$

$$(2) \log_{10} 16 - \log_{10} 2 = \log_{10} 2^4 - \log_{10} 2 = 4 \log_{10} 2 - \log_{10} 2 = 3 \log_{10} 2$$

★ 로그의 성질을 올바르게 사용하지 않게 사용하는 경우

$$(1) \log_1 1 = 0, \log_1 1 = 1$$

$$(2) \log_a(x + y) = (\log_a x)(\log_a y)$$

$$(3) \log_a(x - y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

$$(4) (\log_a x)^n = n \log_a x$$

로그의 밑의 변환

$a \neq 1, a > 0, b > 0$ 일 때,

$$(1) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{단, } c \neq 1, c > 0) \quad (2) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (\text{단, } b \neq 1)$$

(1) $\log_a b = x$ 라 하면 $a^x = b$

양변에 c ($c \neq 1, c > 0$)를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_c a^x = \log_c b, \quad x \log_c a = \log_c b, \quad \therefore x = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$$

(2) $\log_a b = x$ 라 하면 $a^x = b$

양변에 b ($b \neq 1, b > 0$)를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b a^x = \log_b b, \quad x \log_b a = 1, \quad \therefore x = \frac{1}{\log_b a} = \log_a b$$

예제 12

등식 $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$ 가 성립함을 증명하시오.

$$\log_{a^m} b^n = \frac{\log_c b^n}{\log_c a^m} = \frac{n \log_c b}{m \log_c a} = \frac{n}{m} \times \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{n}{m} \log_a b$$

예제 13

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\log_4 128$

(2) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a$

$$(1) \log_4 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^2} = \frac{7}{2} \times \frac{\log_2 2}{\log_2 2} = \frac{7}{2}$$

$$(2) \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \times \frac{\log_{10} c}{\log_{10} b} \times \frac{\log_{10} a}{\log_{10} c} = 1$$

지수에 로그가 등장하는 경우

$a \neq 1, a > 0, b > 0, c \neq 1, c > 0$ 일 때,

$$(1) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$(2) a^{\log_a b} = b$$

(1) $a^{\log_c b} = x$ 라 놓고, 양변에 밑을 c 로 하는 로그를 취하면

$$\log_c a^{\log_c b} = \log_c x$$

여기서 좌변은 $\log_c b \times \log_c a = \log_c a \times \log_c b = \log_c b^{\log_c a}$ 가 되므로

$$\log_c b^{\log_c a} = \log_c x, \quad x = b^{\log_c a}, \quad a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

(2) (1)에서 $c = a$ 인 경우를 생각하면 $a^{\log_a b} = b$

예제 14

다음 식의 값을 구하시오.

$$(1) 9^{\log_3 7}$$

$$(2) 3^{\log_3 7}$$

$$(1) 9^{\log_3 7} = 7^{\log_3 9} = 7^{\log_3 3^2} = 7^{2 \log_3 3} = 7^2 = 49$$

$$(2) 3^{\log_3 7} = 7^{\log_3 3} = 7$$

6

상용로그

1 지수와 로그

상용로그

밑이 10인 로그를 상용로그라 한다. (보통 밑을 생략하여 나타낸다.)

$$\log_{10} x = \log x$$

예제 15

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\log 1000$

(2) $\log 0.001$

(3) $\log 10\sqrt{10}$

(1) $\log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3$

(2) $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \log 10 = -3$

(3) $\log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log 10 = \frac{3}{2}$

- ▶ 상용로그의 값은 계산기를 이용하거나 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다. 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다.
- ▶ 상용로그표를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그 값을 구할 수 있다. 이를테면 오른쪽 상용로그표에서 $\log 2.26$ 의 값을 구하려면 2.2의 행과 6의 열이 만나는 곳의 수 0.3541을 찾으면 된다. 즉, $\log 2.26 = 0.3541$ 이다.

	0	1	...	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	...	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	...	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.3010	0.3032	...	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	...	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	...	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	...	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮

예제 16

상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\log 50$

(2) $\log 239$

$$(1) \log 50 = \log \frac{100}{2} = \log 10^2 - \log 2 = 2 - \log 2 = 2 - 0.3010 = 1.699$$

$$(2) \log 239 = \log(2.39 \times 100) = \log 2.39 + \log 10^2 = \log 2.39 + 2 = 0.3784 + 2 = 2.3784$$

예제 17

어느 해상에서 태풍의 최대 풍속은 중심 기압에 따라 변한다. 태풍의 중심 기압이 $P(\text{hPa})$ 일 때, 최대 풍속 $V(\text{m/초})$ 는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$V = 4.86(1010 - P)^{0.5}$$

이 해상에서 태풍의 중심 기압이 $900(\text{hPa})$ 과 $960(\text{hPa})$ 일 때, 최대 풍속이 각각 $V_A(\text{m/초})$, $V_B(\text{m/초})$ 이었다. $\frac{V_A}{V_B}$ 의 값을 구하시오.

(단, $\log 1.1 = 0.0414$, $\log 1.483 = 0.1712$, $\log 2 = 0.3010$)

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{4.86(1010 - 900)^{0.5}}{4.86(1010 - 960)^{0.5}} = \left(\frac{110}{50}\right)^{0.5} = \left(\frac{11}{5}\right)^{0.5}$$

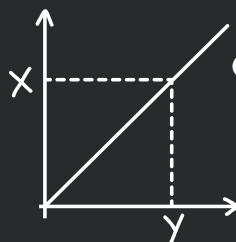
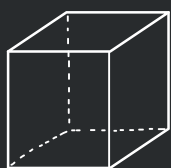
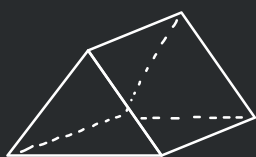
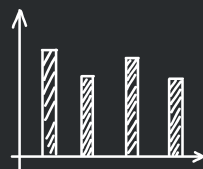
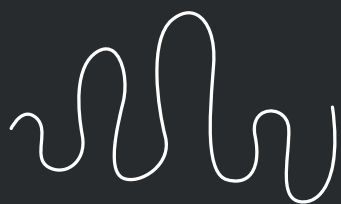
양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log \frac{V_A}{V_B} &= \log \left(\frac{11}{5}\right)^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} (\log 11 - \log 5) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \log(1.1 \times 10) - \log \frac{10}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\log 1.1 + 1 - 1 + \log 2) \\ &= \frac{1}{2} (0.0414 + 0.3010) \\ &= \frac{1}{2} \times 0.3424 \\ &= 0.1712 \end{aligned}$$

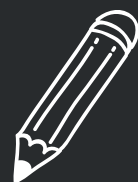
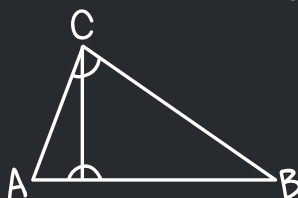
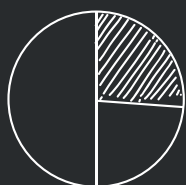
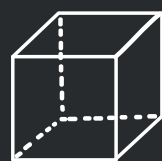
$\log 1.483 = 0.1712$ 이므로 $\frac{V_A}{V_B} = 1.483$ 이다.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

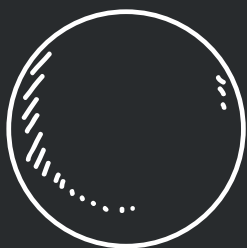
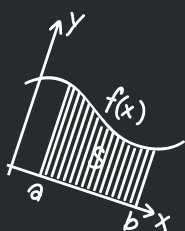
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



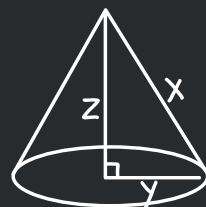
$$a^2 + b^2 = c^2$$



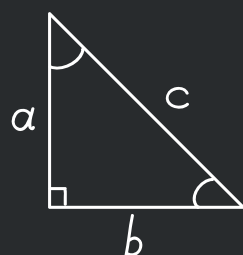
2. 지수함수와 로그함수



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



1

지수함수의 뜻과 그래프

2 지수함수와 로그함수

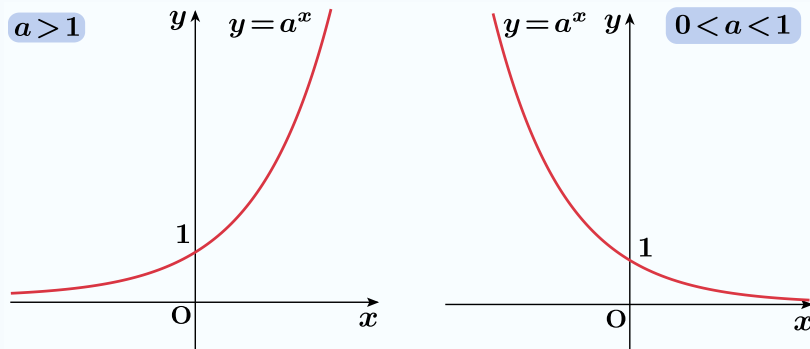
지수함수

임의의 실수 x 에 대하여 x 를 a^x ($a > 0, a \neq 1$)로 대응시키는 함수 $y = a^x$ 을 a 를 밑으로 하는 x 의 지수함수라 한다.

지수함수의 그래프

지수함수 $y = a^x$ 의 그래프

- (1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.
- (2) 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
- (3) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값도 증가한다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- (4) 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.
- (5) 점근선은 x 축 ($y = 0$)이다.
- (6) $y = a^x$ 의 그래프와 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.



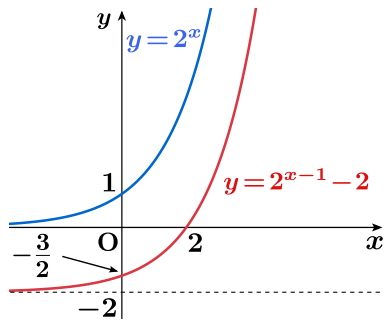
예제 18

다음 함수의 그래프를 그리시오. 또한, 정의역, 치역, 점근선을 구하시오.

(1) $y = 2^{x-1} - 2$

(2) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(1)

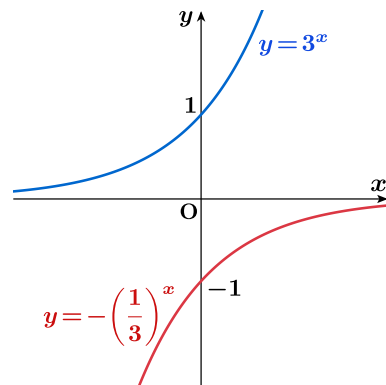


정의역 : $-\infty < x < \infty$

치역 : $y > -2$

점근선 : $y = -2$

(2)



정의역 : $-\infty < x < \infty$

치역 : $y < 0$

점근선 : $y = 0$

예제 19

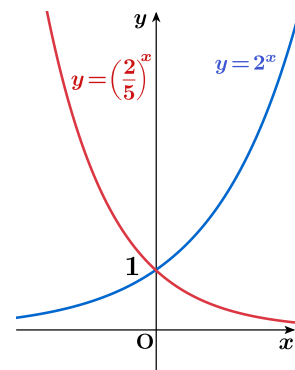
지수함수의 그래프를 이용하여 다음 수들의 대소 관계를 구하시오.

(1) $\sqrt[5]{2}, \sqrt[4]{4}$

(2) $\sqrt{0.4}, \sqrt[3]{0.16}$

(1) $\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}, \sqrt[4]{4} = 2^{\frac{1}{2}}$ 이므로 두 점 $\left(\frac{1}{5}, \sqrt[5]{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \sqrt[4]{4}\right)$ 는 모두 함수 $y = 2^x$ 위의 점이다. 또한, 함수 $y = 2^x$ 이 증가함수이고, $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ 이므로 $\sqrt[5]{2} < \sqrt[4]{4}$ 가 된다.

(2) $\sqrt{0.4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{0.16} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ 이므로 두 점 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{0.4}\right), \left(\frac{2}{3}, \sqrt[3]{0.16}\right)$ 은 모두 함수 $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ 위의 점이다. 또한, 함수 $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ 가 감소함수이고, $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ 이므로 $\sqrt{0.4} > \sqrt[3]{0.16}$ 이 된다.

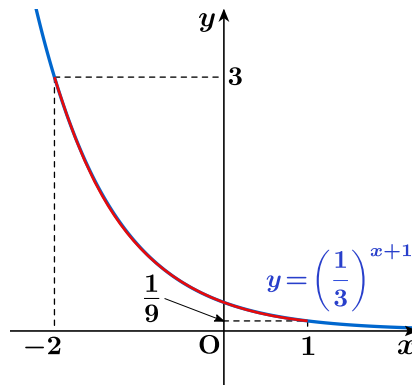


예제 20

정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ 인 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

아래 그림과 같이 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 은 감소함수이다.

따라서 $x = -2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$, $x = 1$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1+1} = \frac{1}{9}$ 을
 갖는다.



2

로그함수의 뜻과 그래프

2 지수함수와 로그함수

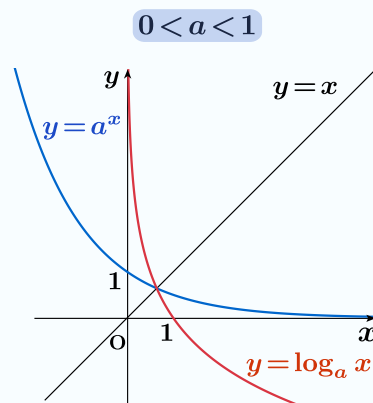
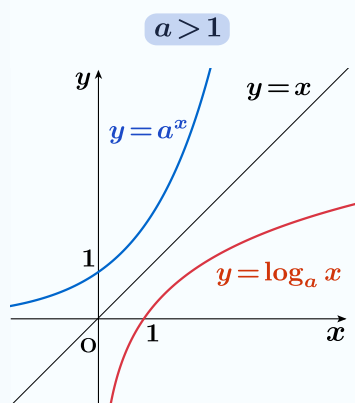
로그함수

지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)은 로그의 정의에 의하여 $x = \log_a y$ 로 나타낼 수 있고, 여기서 x 와 y 를 바꾸면 $y = a^x$ 의 역함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)를 얻는다. 이 함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)를 a 를 밑으로 하는 x 의 로그함수라 한다.

로그함수

로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프

- (1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.
- (2) 치역은 실수 전체의 집합이다.
- (3) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값도 증가하다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값은 감소한다.
- (4) 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선은 y 축이다.
- (5) $y = a^x$ 과 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



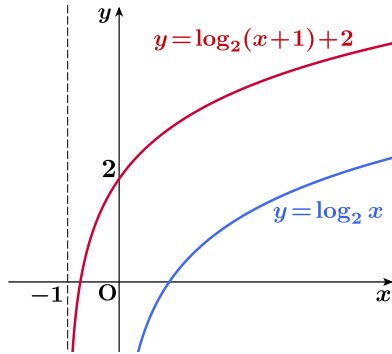
예제 21

다음 함수의 그래프를 그리시오. 또한, 정의역, 치역, 점근선을 구하시오.

(1) $y = \log_2(x+1) + 2$

(2) $y = -\log_2 x + 1$

(1)

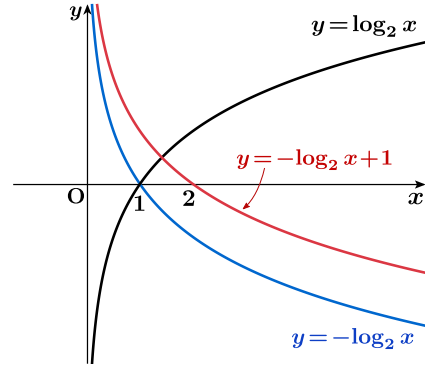


정의역 : $x > -1$

치역 : $-\infty < y < \infty$

점근선 : $x = -1$

(2)



정의역 : $x > 0$

치역 : $-\infty < y < \infty$

점근선 : $x = 0$

예제 22

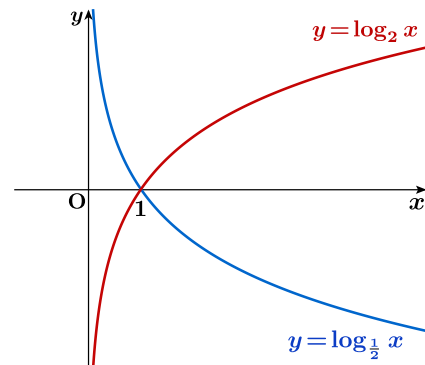
로그함수의 그래프를 이용하여 다음 수들의 대소 관계를 구하시오.

(1) $\log_2 3, \log_2 5$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}, \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{7}$

(1) 두 점 $(3, \log_2 3), (5, \log_2 5)$ 는 모두 함수 $y = \log_2 x$ 위의 점이고, 함수 $y = \log_2 x$ 가 증가함수이므로 $\log_2 3 < \log_2 5$ 가 된다.

(2) 두 점 $(\sqrt{5}, \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}), (\sqrt{7}, \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{7})$ 은 모두 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 위의 점이고, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 가 감소함수이므로 $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5} > \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{7}$ 이 된다.

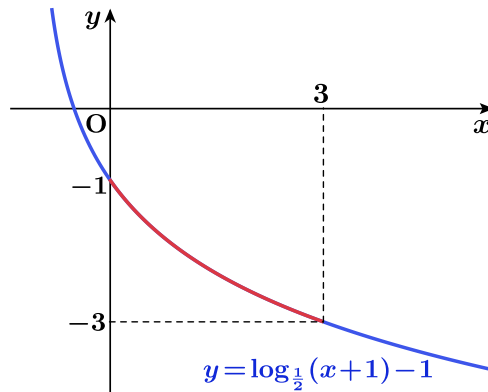


예제 23

정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$ 인 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

아래 그림과 같이 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1$ 은 감소함수이다.

따라서 $x = 0$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 1 - 1 = -1$, $x = 3$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 4 - 1 = -3$ 을 갖는다.



지수방정식

지수에 미지수를 포함한 방정식을 지수방정식이라고 한다.

지수방정식의 해법

지수 또는 밑에 미지수가 있는 방정식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$a > 0, a \neq 1 \text{ 일 때, } a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(1) \text{ 밑이 같을 때 : } a^{f(x)} = a^{g(x)} \text{ 꼴 } \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (\text{단, } a > 0, a \neq 1)$$

$$(2) \text{ 밑이 다를 때 : 밑을 통일하거나 혹은 양변에 로그를 취한다.}$$

$$(3) a^x \text{ 을 포함할 때 : } a^x = t \text{ 로 치환한다. (단, } t > 0)$$

$$(4) \text{ 밑에도 미지수가 있을 때}$$

$$\textcircled{1} f(x)^{g(x)} = a^{g(x)} \quad (f(x) > 0, a > 0, a \neq 1) \Leftrightarrow f(x) = a \text{ 또는 } g(x) = 0$$

$$\textcircled{2} f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)} \quad (f(x) > 0, g(x) > 0) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ 또는 } h(x) = 0$$

$$\textcircled{3} f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \quad (f(x) > 0) \Leftrightarrow g(x) = h(x) \text{ 또는 } f(x) = 1$$

예제 24

다음 지수방정식을 푸시오.

$$(1) 2^{x^2} = 2^{x+6}$$

$$(2) 9^x = 27$$

$$(3) 2^{2x-1} = 3^x$$

$$(1) x^2 = x + 6, \quad (x-3)(x+2) = 0, \quad \therefore x = 3 \text{ 또는 } x = -2$$

$$(2) 3^{2x} = 3^3, \quad 2x = 3, \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

$$(3) \text{ 양변에 상용로그를 취하면 } (2x-1)\log 2 = x\log 3, \quad (2\log 2 - \log 3)x = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{2\log 2 - \log 3} = \frac{\log 2}{\log \frac{4}{3}} = \log_{\frac{4}{3}} 2$$

예제 25

지수방정식 $5^{2x} - 5^x - 2 = 0$ 을 푸시오.

$5^x = t$ ($t > 0$)로 치환하면

$$t^2 - t - 2 = 0, \quad (t - 2)(t + 1) = 0, \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = -1$$

이 중 $t = -1$ 은 근이 될 수 없다. ($\because t > 0$)

따라서 $t = 5^x = 2$ 이고, 양변에 밑이 5인 로그를 취하면 방정식의 해는 $x = \log_5 2$ 가 된다.

예제 26

다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x + 1)^{2x} = 5^{2x} \quad (x > -1)$

(2) $(3x - 2)^{x-2} = (2x + 1)^{x-2} \quad \left(x > \frac{2}{3}\right)$

(3) $x^{3x+4} = x^{-x+2} \quad (x > 0)$

(1) 양변의 지수가 같기 때문에 ① 밑이 같거나, ② 지수가 0이면 된다.

① $x + 1 = 5$ 에서 $x = 4$

② $2x = 0$ 에서 $x = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 4$

(2) 양변의 지수가 같기 때문에 ① 밑이 같거나, ② 지수가 0이면 된다.

① $3x - 2 = 2x + 1$ 에서 $x = 3$

② $x - 2 = 0$ 에서 $x = 2$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

(3) 양변의 밑이 같기 때문에 ① 지수가 같거나, ② 밑이 1이면 된다.

① $3x + 4 = -x + 2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

하지만 $x > 0$ 이므로 해가 될 수 없다.

② $x = 1$

$\therefore x = 1$

지수부등식

지수에 미지수를 포함한 부등식을 지수부등식이라고 한다.

지수부등식의 해법

지수 또는 밑에 미지수가 있는 부등식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$\begin{cases} a > 1 \text{ 일 때,} & a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ 0 < a < 1 \text{ 일 때,} & a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 \end{cases}$$

(1) 밑이 같을 때 : $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ 꼴

① $a > 1$ 일 때, $f(x) < g(x)$

② $0 < a < 1$ 일 때, $f(x) > g(x)$

(2) 밑이 다를 때 : 밑을 통일하거나 혹은 양변에 로그를 취한다.

(3) a^x 을 포함할 때 : $a^x = t$ 로 치환한다. (단, $t > 0$)

(4) 밑에도 미지수가 있을 때 : 밑의 범위를 다음과 같이 나누어 푼다.

① $0 < \text{밑} < 1$

② 밑 = 1

③ 밑 > 1

예제 27

다음 지수부등식을 푸시오.

$$(1) 3^{x^2} < 3^{2x+3} \quad (2) \left(\frac{1}{8}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \quad (3) 2^{2x-1} > 3^x$$

(1) $3^{x^2} < 3^{2x+3}$ 에서 밑이 3으로 같고, $3 > 1$ 이므로 $x^2 < 2x + 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0, \quad (x-3)(x+1) < 0, \quad \therefore -1 < x < 3$$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 로 같고, $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $3x < x + 2 \quad \therefore x < 1$

(3) 양변에 상용로그를 취하면 $(2x-1)\log 2 > x\log 3, \quad (2\log 2 - \log 3)x > \log 2$

$$x > \frac{\log 2}{\log 4 - \log 3} = \frac{\log 2}{\log \frac{4}{3}} = \log_{\frac{4}{3}} 2 \quad \therefore x > \log_{\frac{4}{3}} 2$$

예제 28

지수부등식 $3^{2x} - 3^x - 6 > 0$ 을 푸시오.

$3^x = t$ ($t > 0$)로 치환하면

$$t^2 - t - 6 > 0, \quad (t-3)(t+2) > 0, \quad \therefore t > 3 \text{ 또는 } t < -2$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t > 3$ 만 해가 될 수 있다.

결국 $3^x > 3^1$ 에서 부등식의 해는 $x > 1$ 이 됨을 알 수 있다.

예제 29

부등식 $x^{3x+1} > x^{x+5}$ ($x > 0$)을 푸시오.

① $0 < x < 1$ 이면 $3x+1 < x+5$ 에서 $x < 2 \quad \therefore 0 < x < 1$

② $x > 1$ 이면 $3x+1 > x+5$ 에서 $x > 2 \quad \therefore x > 2$

③ $x = 1$ 이면 $1 > 1$ 이 되어 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 주어진 부등식의 해는 $0 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이다.

4

로그함수의 활용

2 지수함수와 로그함수

로그방정식

로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 로그방정식이라고 한다.

로그방정식의 해법

로그의 진수 또는 밑에 미지수가 있는 방정식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$a > 0, a \neq 1, x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ 일 때, } \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(1) \log_a f(x) = b \text{ (단, } a > 0, a \neq 1 \text{ 이고 } f(x) > 0) : f(x) = a^b$$

$$(2) \text{ 밑이 같을 때 : } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \\ \text{(단, } a > 0, a \neq 1 \text{ 이고 } f(x) > 0, g(x) > 0)$$

$$(3) \text{ 밑이 다를 때 : 밑변환을 이용하여 밑부터 통일한다.}$$

$$(4) \log_a x \text{ 를 포함할 때 : } \log_a x = t \text{ 로 치환한다.}$$

$$(5) \text{ 지수에 로그가 있을 때 : 양변에 로그를 취한다.}$$

$$(6) \text{ 진수가 같을 때 : } \log_{f(x)} h(x) = \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ 또는 } h(x) = 1 \\ \text{(단, } f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0, g(x) \neq 1, h(x) > 0)$$

예제 30

로그방정식 $\log_2(2x - 1) = 3$ 을 푸시오.

$$\log_2(2x - 1) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 2x - 1$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

예제 31

로그방정식 $\log_2(3x+1) = \log_4(x+5)$ 를 푸시오.

$$\log_2(3x+1) = \log_4(x+5), \quad \log_2(3x+1) = \log_{2^2}(x+5)$$

$$\log_2(3x+1) = \frac{1}{2} \log_2(x+5), \quad 2 \log_2(3x+1) = \log_2(x+5)$$

$$\log_2(3x+1)^2 = \log_2(x+5)$$

$$(3x+1)^2 = (x+5), \quad 9x^2 + 5x - 4 = 0, \quad (9x-4)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{4}{9} \text{ 또는 } x = -1$$

진수조건에서 $x > -\frac{1}{3}$ 이어야 하므로 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{4}{9}$ 이다.

예제 32

다음 로그방정식을 푸시오.

$$(1) (\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x = \log_2 x^2 - 4$$

$$(2) x^{\log x} = 1000x^2$$

(1) $\log_2 x = t$ (t 는 실수)로 치환하면

$$t^2 - 3t = 2t - 4, \quad t^2 - 5t + 4 = 0, \quad (t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 4$$

$$\log_2 x = 1 \text{ 또는 } \log_2 x = 4$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 16$$

(2) $x^{\log x} = 1000x^2$ 의 양변에 밑이 10인 로그를 취하면

$$\log x^{\log x} = \log (1000x^2), \quad (\log x)(\log x) = \log 1000 + \log x^2$$

$$(\log x)^2 = 3 + 2 \log x$$

$\log x = t$ (t 는 실수)로 치환하면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, \quad (t-3)(t+1) = 0, \quad \therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$\log x = 3 \text{ 또는 } \log x = -1$$

$$\therefore x = 10^3 \text{ 또는 } x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

예제 33

로그방정식 $\log_{x^2+2x+2}(x-5) = \log_{x+4}(x-5)$ 를 푸시오.

로그의 진수가 같으므로 ① 밑이 같거나, ② 진수가 1이면 된다.

$$\textcircled{1} \quad x^2 + 2x + 2 = x + 4, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad (x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

진수조건과 밑조건으로부터 $x > 5$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족하는 x 는 존재하지 않는다.

$$\textcircled{2} \quad x - 5 = 1, \quad \therefore x = 6$$

$$\therefore x = 6$$

로그부등식

로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식을 로그부등식이라고 한다.

로그부등식의 해법

로그의 진수 또는 밑에 미지수가 있는 부등식은 다음의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$x_1 > 0, x_2 > 0$ 에 대하여

$$\begin{cases} a > 1 \text{ 일 때,} & \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ 0 < a < 1 \text{ 일 때,} & \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \end{cases}$$

(1) 밑이 같을 때 : $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ 꼴

① $a > 1$ 이면 해집합은 $f(x) < g(x), f(x) > 0, g(x) > 0$ 의 공통범위이다.

② $0 < a < 1$ 이면 해집합은 $f(x) > g(x), f(x) > 0, g(x) > 0$ 의 공통범위이다.

(2) $\log_a x$ 를 포함할 때 : $\log_a x = t$ 로 치환한다.

(3) 지수에 로그가 있을 때 : 양변에 로그를 취한다.

예제 34

다음 로그부등식을 푸시오.

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} (2-x)$

(2) $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 \leq 0$

(1) 밑이 $\frac{1}{2}$ 로 같고, $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $x \leq 2-x$, $\therefore x \leq 1$

진수조건에서 $0 < x < 2$ 이므로, 공통범위를 구하면 $0 < x \leq 1$ 이다.

(2) $\log_2 x = t$ (t 는 실수)로 치환하면 $t^2 + t - 2 \leq 0$

$$(t+2)(t-1) \leq 0, \quad -2 \leq t \leq 1, \quad -2 \leq \log_2 x \leq 1, \quad \log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$$

밑이 2로 같고, $2 > 1$ 이므로 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$ 이다.

예제 35

부등식 $x^{\log_3 x} \geq 3$ 을 푸시오.

$x^{\log_3 x} \geq 3$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 3, \quad (\log_3 x)(\log_3 x) \geq 1$$

$$(\log_3 x)^2 - 1 \geq 0, \quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1) \geq 0$$

$$\log_3 x \geq 1 \text{ 또는 } \log_3 x \leq -1$$

진수조건에서 $x > 0$ 이므로 공통범위를 구하면 $0 < x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 3$ 이다.

고등학교 수학1

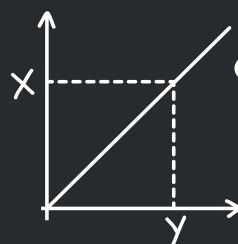
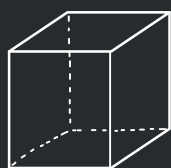
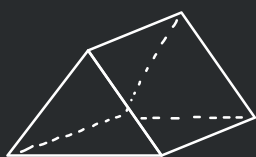
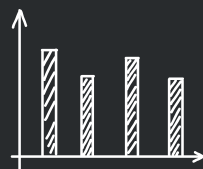
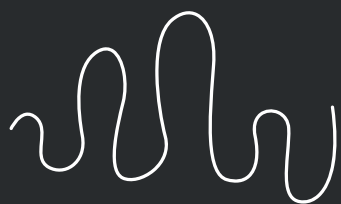
삼각함수

2

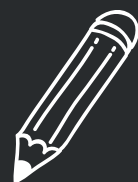
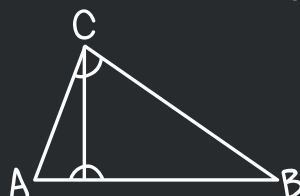
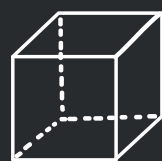
-
1. 삼각함수의 뜻과 그래프
 2. 사인법칙과 코사인법칙

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

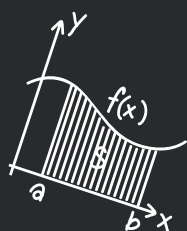
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



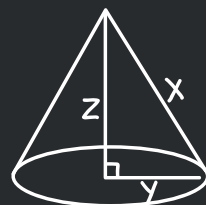
$$a^2 + b^2 = c^2$$



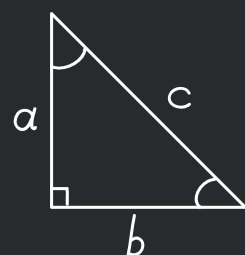
1. 삼각함수의 뜻과 그래프



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



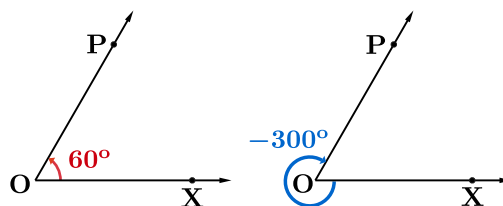
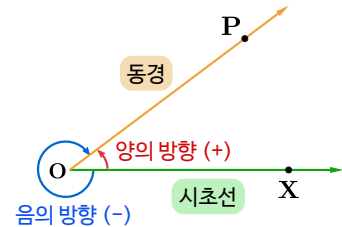
일반각

시초선 \vec{OX} 과 동경 \vec{OP} 가 나타내는 양의 최소각을 α° 라 할 때, $\angle XOP$ 의 크기를 나타내는

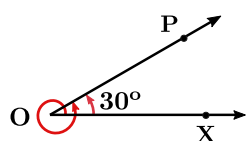
$$360^\circ \times n + \alpha^\circ \quad (n \text{은 정수}, 0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ)$$

를 동경 \vec{OP} 가 나타내는 일반각이라고 한다.

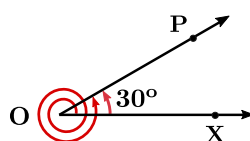
- ▶ 일반각은 지금까지 0° 에서 360° 까지의 범위로 나타냈던 각의 크기를 더 넓은 범위로 확장하는 개념이다.
- ▶ 오른쪽 그림에서 $\angle XOP$ 의 크기는 반직선 \vec{OP} 가 고정된 반직선 \vec{OX} 의 위치에서 점 O 를 중심으로 회전한 양으로 정한다.
- ▶ 이때, 반직선 \vec{OX} 를 시초선, 반직선 \vec{OP} 를 동경이라고 한다.
- ▶ 동경 \vec{OP} 가 점 O 를 중심으로 회전할 때, 시계의 바늘이 도는 방향과 반대인 방향을 양의 방향이라 하고, 시계의 바늘이 도는 방향과 같은 방향을 음의 방향이라고 한다.
- ▶ 아래 그림과 같이 60° 와 -300° 가 나타내는 동경은 같지만, 회전 방향에 따라서 양의 각과 음의 각으로 표현할 수 있다.



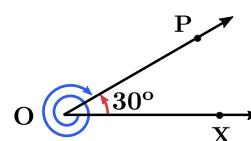
- ▶ 이와 같이 $\angle XOP$ 의 크기가 주어지면 동경 \vec{OP} 의 위치는 하나로 정해지지만, 동경 \vec{OP} 의 위치가 정해졌을 때, 동경 \vec{OP} 가 나타내는 각의 크기는 하나로 결정되지 않는다. 아래 그림은 시초선 \vec{OX} 와 30° 를 이루는 위치에 있는 동경 \vec{OP} 가 나타내는 여러 가지 각의 크기를 보여준다.



$$390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$$



$$750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$$



$$-690^\circ = 360^\circ \times (-2) + 30^\circ$$

- ▶ 일반적으로 $\angle XOP$ 의 크기 중 하나를 α° ($0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$)라고 할 때, 동경 \overrightarrow{OP} 가 나타내는 각의 크기는 일반적으로 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n 은 정수)로 나타낼 수 있다. 이것을 동경 \overrightarrow{OP} 가 나타내는 일반각이라고 한다.
- ▶ 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 시초선 \overrightarrow{OX} 를 x 축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 \overrightarrow{OP} 가 제 몇 사분면에 있는지에 따라 그 각을 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면의 각이라고 한다. 예를 들어, 45° 는 제1사분면의 각이고, 120° 는 제2사분면의 각이다. (보통 좌표평면에서는 x 축의 양의 방향을 시초선 \overrightarrow{OX} 로 정한다.)
- ▶ 좌표축은 어느 사분면에도 속하지 않으므로, 동경이 좌표축 위에 놓이는 경우 동경이 나타내는 각은 어느 사분면에도 속하지 않는다고 한다.



예제 1

시초선 \overrightarrow{OX} 와 동경 \overrightarrow{OP} 가 나타내는 각의 크기가 60° 일 때, $\angle XOP$ 의 크기를 동경 \overrightarrow{OP} 가 나타내는 일반각으로 나타내시오.

$$360^\circ \times n + 60^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

예제 2

다음 각은 몇 사분면의 각인지 말하시오.

(1) 760°

(2) 1320°

(3) -240°

(1) $760^\circ = 360^\circ \times 2 + 40^\circ$ 이므로 제1사분면의 각

(2) $1320^\circ = 360^\circ \times 3 + 240^\circ$ 이므로 제3사분면의 각

(3) $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$ 이므로 제2사분면의 각

호도법

반지름의 길이와 호 \widehat{AB} 의 길이가 같을 때의 중심각의 크기를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 각을 나타내는 것을 호도법이라고 한다.

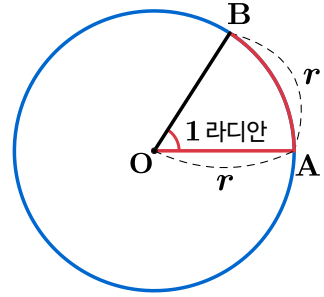
- ▶ 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원에서 길이가 r 인 호 \widehat{AB} 에 대한 중심각의 크기를 α° 라고 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$$r : 2\pi r = \alpha^\circ : 360^\circ$$

이다. 따라서 $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$ 이다.

여기에서 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 는 반지름의 길이 r 에 관계없이 항상 일정

하다. 이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 를 1라디안(radian)이라고 한다.



육십분법과 호도법 사이의 관계

$$1\text{라디안} = \frac{180^\circ}{\pi},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\text{라디안}$$

- ▶ 육십분법과 호도법

육십분법	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
호도법	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

예제 3

210° 는 호도법으로, $\frac{7}{4}\pi$ 는 육십분법으로 나타내시오.

$$210^\circ = \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi = 315^\circ$$

- ▶ 일반적으로 동경 \overrightarrow{OP} 가 나타내는 각의 크기 중 하나를 θ (라디안)이라고 할 때, 동경 \overrightarrow{OP} 가 나타내는 일반각은 호도법으로 $2n\pi + \theta$ (n 은 정수, $0 \leq \theta < 2\pi$)와 같이 나타낼 수 있다.

부채꼴 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이 l 과, 넓이 S 는 다음과 같다.

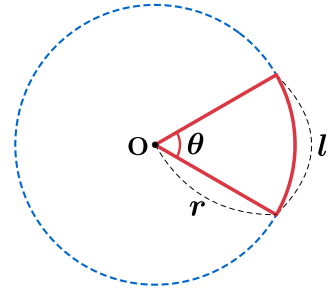
$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

- ▶ 부채꼴 호의 길이는 원주의 길이에 2π 에 대한 중심각의 크기의 비율 $\frac{\theta}{2\pi}$ 를 곱하여 구할 수 있다.

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$$

- ▶ 부채꼴의 넓이 역시 원의 넓이에 2π 에 대한 중심각의 크기의 비율 $\frac{\theta}{2\pi}$ 를 곱하여 구할 수 있다.

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r \times r\theta = \frac{1}{2}rl$$



예제 4

반지름의 길이가 6 (cm), 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴의 호의 길이를 l (cm), 넓이를 S (cm²)라 할 때, $l + S$ 의 값을 구하시오.

① 호의 길이 $l = r\theta = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi$ (cm)

② 부채꼴의 넓이 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$ (cm²)

$\therefore l + S = 4\pi + 12\pi = 16\pi$

2

삼각함수의 뜻

1 삼각함수의 뜻과 그래프

삼각함수

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 일반각 θ 를 나타내는 동경이 원점 O 를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r 인 원과 만나는 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$ 의 값은 r 의 값에 관계없이 θ 의 값에 따라 각각 하나로 결정된다. 이때, 대응 $\theta \rightarrow \frac{y}{r}$ 을 나타내는 함수를 사인함수, 대응 $\theta \rightarrow \frac{x}{r}$ 을 나타내는 함수를 코사인함수라고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

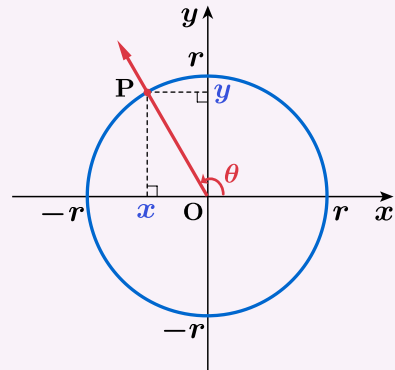
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

또한, $\frac{y}{x}$ (단, $x \neq 0$)의 값도 r 의 값에 관계없이 θ 의 값에 따라 각각 하나로 결정된다.

이때, 대응 $\theta \rightarrow \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)을 나타내는 함수를 탄젠트함수라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수를 θ 에 대한 삼각함수라고 부른다.



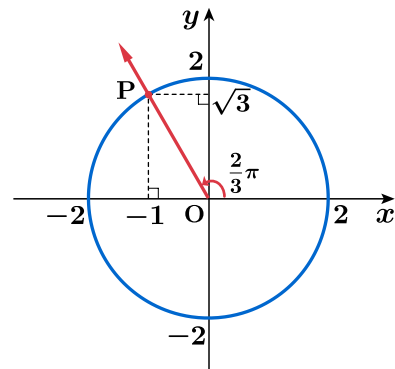
예제 5

$\theta = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 의 값을 구하시오.

$$\sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

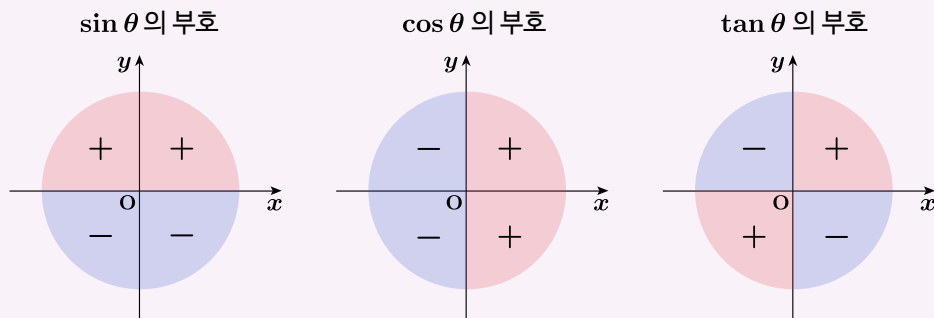
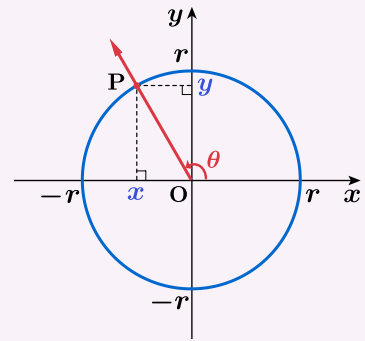
$$\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \left(\frac{2}{3}\pi \right) = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$



삼각함수 값의 부호

일반각 θ 를 나타내는 동경 \overrightarrow{OP} 에 대하여 점 $P(x, y)$ 의 x 좌표와 y 좌표의 부호는 동경 \overrightarrow{OP} 가 몇 사분면에 놓이는지에 따라 달라진다. 따라서 일반각 θ 에 대한 삼각함수의 값의 부호도 θ 가 몇 사분면의 각인지에 따라 아래와 같이 정해진다.



▶ 사분면에 따른 삼각함수 값의 부호를 표로 정리하면 다음과 같다.

삼각함수 \ 사분면	1	2	3	4
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-

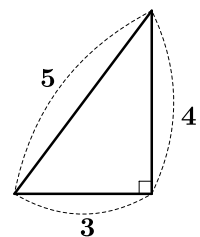
예제 6

제4사분면의 각 θ 에 대하여 $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ 일 때, $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값을 구하시오.

제4사분면의 각에 대해서는 코사인함수만 양의 부호를 갖는다. 따라서 오른쪽 직각삼각형에서 삼각비를 찾은 후에, 부호만 결정해주면 된다.

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}, \quad \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$$



삼각함수 사이의 관계

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

- ▶ 오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경이 반지름의 길이가 1인 단위원과 만나는 점을 $P(x, y)$ 라고 하면

$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

이므로

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

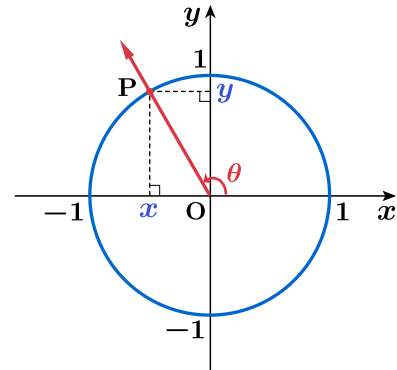
이다. 한편, 점 $P(x, y)$ 는 단위원 위의 점이므로

$$x^2 + y^2 = 1$$

이다. 따라서

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

임을 알 수 있다.



예제 7

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면 $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$

이때, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로 $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$

$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta) (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} \right)$$

$$= \frac{13}{27}$$

3

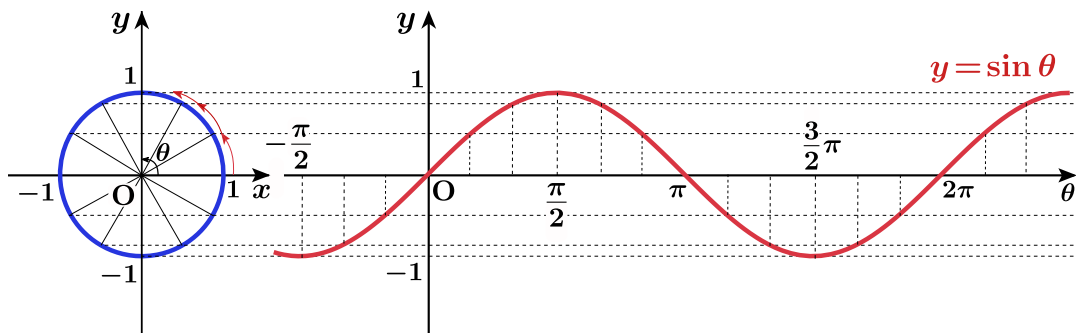
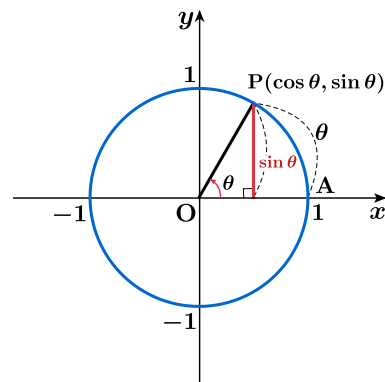
삼각함수의 그래프

1 삼각함수의 뜻과 그래프

함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프의 특징

- (1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
- (2) $y = \sin \theta$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
- (3) 주기가 2π 인 주기함수이다.

- ▶ 오른쪽 그림과 같이 원점 O 를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 단위원 위의 움직이는 점 P 가 점 $A(1, 0)$ 을 출발하여 시계 반대 방향으로 θ 만큼 움직였을 때, 점 P 의 y 좌표가 $\sin \theta$ 가 된다. 따라서 θ 의 값을 가로축에 나타내고, 이에 대응하는 $\sin \theta$ 의 값을 세로축에 나타내어 사인함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프를 그린다.

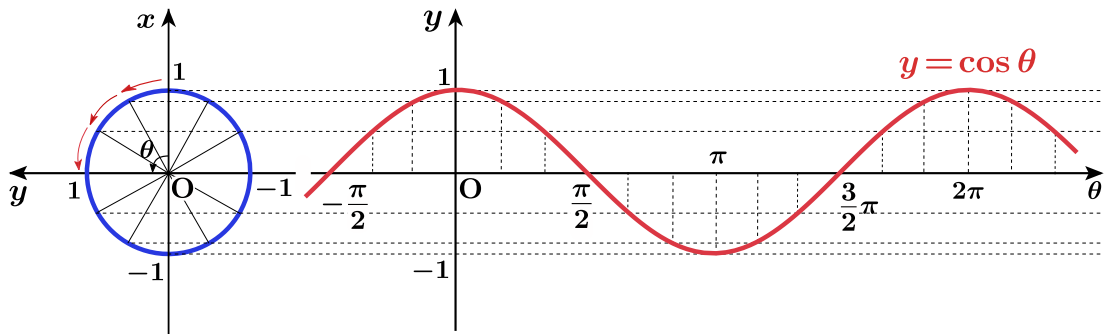
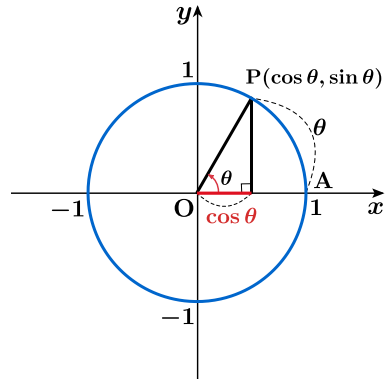


- ▶ $\sin \theta$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ 이다. 따라서 $y = \sin \theta$ 는 홀함수이다.
- ▶ 함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 등식 $f(x+p) = f(x)$ 를 만족하는 0이 아닌 상수 p 가 존재할 때, $f(x)$ 를 주기함수라 하고, 이 등식을 성립시키는 최소의 양수 p 를 $f(x)$ 의 주기라 한다. θ 가 임의의 실수 일 때, $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ 가 성립하므로 $y = \sin \theta$ 는 주기가 2π 인 주기함수이다.

함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프의 특징

- (1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
- (2) $y = \cos \theta$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
- (3) 주기가 2π 인 주기함수이다.

- 오른쪽 그림과 같이 원점 O 를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 단위원 위의 움직이는 점 P 가 점 $A(1, 0)$ 을 출발하여 시계 반대 방향으로 θ 만큼 움직였을 때, 점 P 의 x 좌표가 $\cos \theta$ 가 된다. 따라서 θ 의 값을 가로축에 나타내고, 이에 대응하는 $\cos \theta$ 의 값을 세로축에 나타내어 코사인함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프를 그린다.

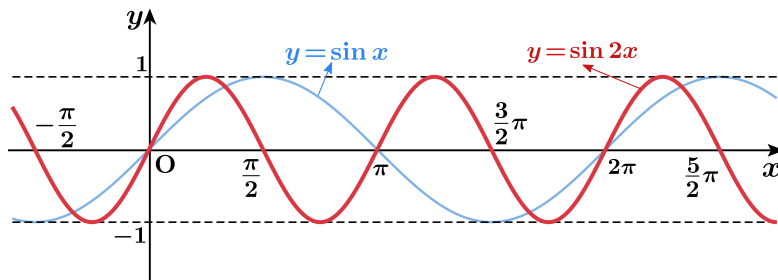


- $\cos \theta$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 이다. 따라서 $y = \cos \theta$ 는 짝함수이다.
- 임의의 실수 θ 에 대하여 $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$ 가 성립하므로 $y = \cos \theta$ 는 주기가 2π 인 주기함수이다.
- $\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 $y = \cos \theta$ 의 그래프는 $y = \sin \theta$ 의 그래프를 θ 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

예제 8

$y = \sin 2x$ 의 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

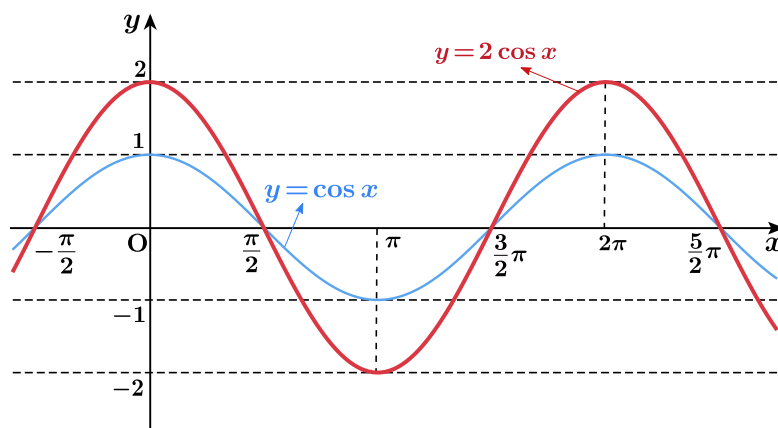
$\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi)$ 이므로 $y = \sin 2x$ 의 주기는 π 가 되고, 그래프는 아래 그림과 같다.



- $y = \sin ax$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{|a|}$ 배 확대 혹은 축소한 것과 같다. 따라서 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$ 가 된다.

예제 9

$y = 2 \cos x$ 의 그래프를 그리시오.



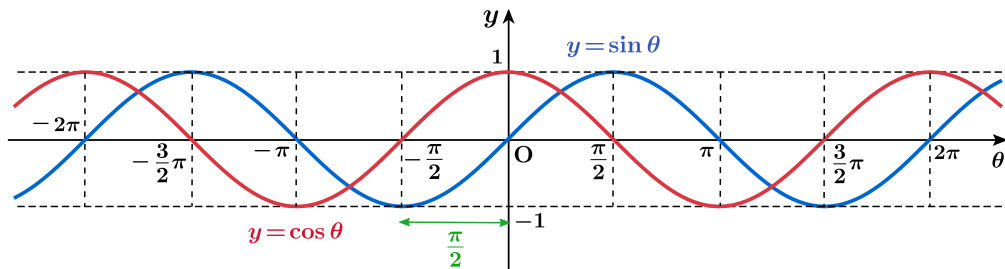
- $y = a \cos x$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $|a|$ 배 확대 혹은 축소한 것과 같다. 따라서 최댓값과 최솟값은 각각 $|a|$, $-|a|$ 가 된다.

각 $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ 의 사인함수와 코사인함수

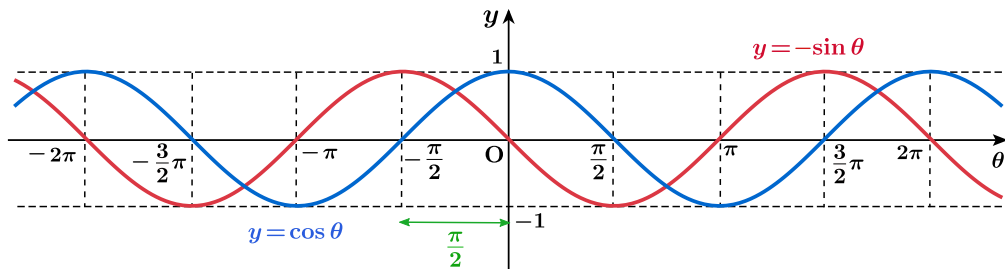
θ 가 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos \theta, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin \theta, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta\end{aligned}$$

- ▶ 다음 그림과 같이 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프를 θ 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 함수 $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 일치하므로 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$ 임을 알 수 있다.



- ▶ 다음 그림과 같이 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프를 θ 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 함수 $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = -\sin \theta$ 의 그래프와 일치하므로 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ 임을 알 수 있다.



- ▶ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 이므로 위의 내용을 종합하여보면 다음이 성립함을 알 수 있다.

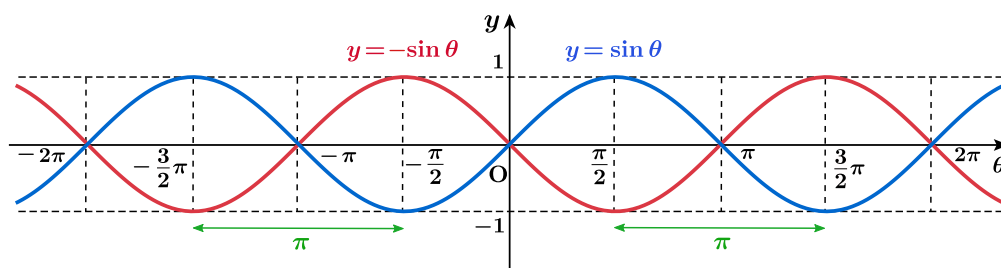
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\left\{\frac{\pi}{2} + (-\theta)\right\} = \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} + (-\theta)\right\} = -\sin(-\theta) = \sin \theta\end{aligned}$$

각 $\pi \pm \theta$ 의 사인함수와 코사인함수

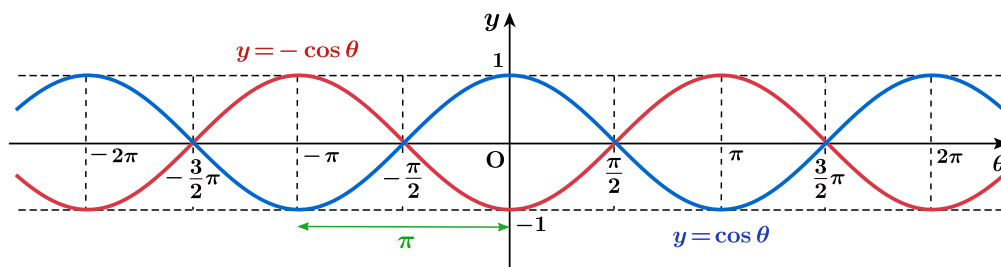
θ 가 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta, & \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta, & \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

- ▶ 다음 그림과 같이 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프를 θ 축의 방향으로 $-\pi$ 만큼 평행이동한 함수 $y = \sin(\theta + \pi)$ 의 그래프는 함수 $y = -\sin \theta$ 의 그래프와 일치하므로 $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ 임을 알 수 있다.



- ▶ 다음 그림과 같이 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프를 θ 축의 방향으로 $-\pi$ 만큼 평행이동한 함수 $y = \cos(\theta + \pi)$ 의 그래프는 함수 $y = -\cos \theta$ 의 그래프와 일치하므로 $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ 임을 알 수 있다.



- ▶ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 이므로 위의 내용을 종합하여보면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin\{\pi + (-\theta)\} = -\sin(-\theta) = \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= \cos\{\pi + (-\theta)\} = -\cos(-\theta) = -\cos \theta\end{aligned}$$

예제 10

다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin \frac{2}{3}\pi$

(2) $\cos \frac{5}{6}\pi$

(3) $\cos \left(-\frac{5}{4}\pi\right)$

(1) $\sin \frac{2}{3}\pi = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \frac{5}{6}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos \left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \cos \left(\frac{5}{4}\pi\right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

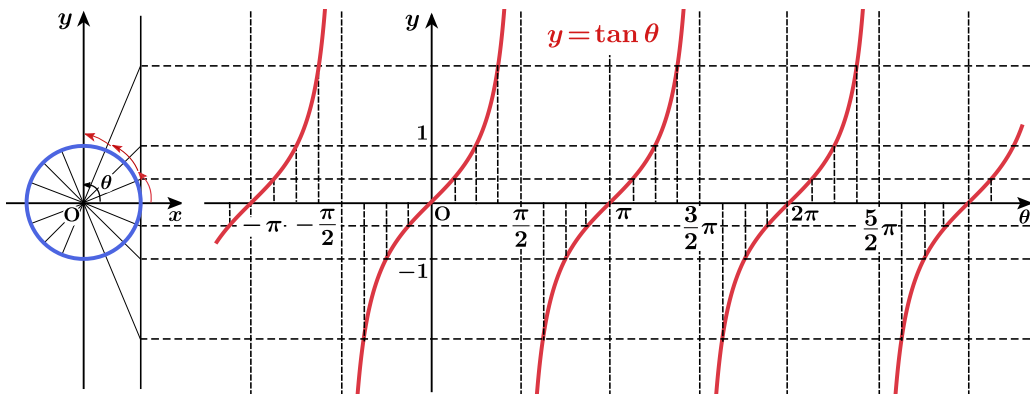
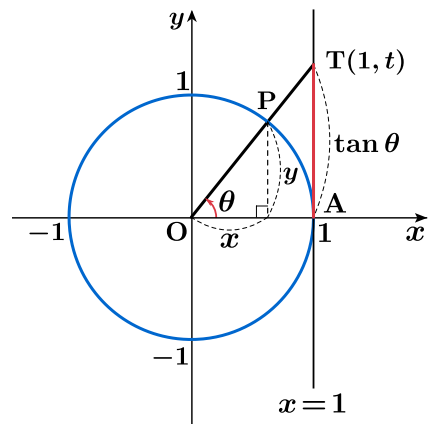
함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프의 특징

- (1) 정의역은 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
- (2) $y = \tan \theta$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
- (3) 주기가 π 인 주기함수이다.
- (4) 그래프의 점근선은 직선 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.

- ▶ 오른쪽 그림과 같이 원점 O 를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 단위원 위의 움직이는 점 P 가 점 $A(1, 0)$ 을 출발하여 시계 반대 방향으로 θ 만큼 움직였을 때, 동경 \overrightarrow{OP} 의 연장선과 $A(1, 0)$ 에서 원에 접하는 접선이 만나는 점을 $T(1, t)$ 라고 하면

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

이다. 즉, 점 P 가 원 위를 움직일 때 $\tan \theta$ 의 값은 점 T 의 y 좌표가 된다. 따라서 θ 의 값을 가로축에 나타내고, 이에 대응하는 $\tan \theta$ 의 값을 세로축에 나타내어 탄젠트함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프를 그린다.



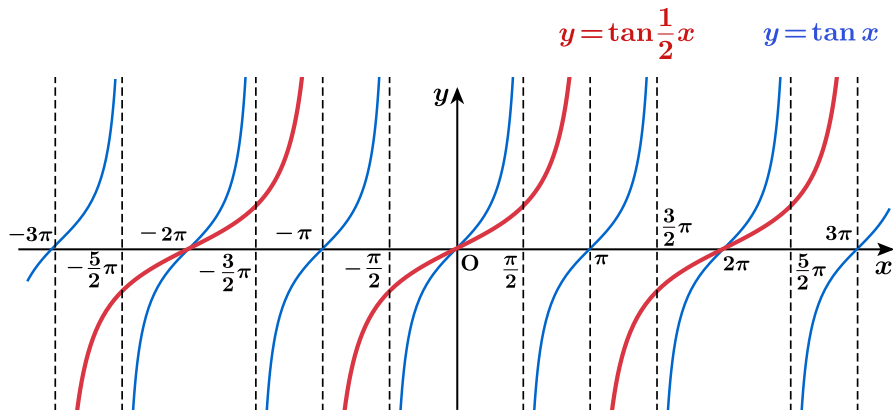
- ▶ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 나타내는 동경은 y 축 위에 있으므로 직선 $x = 1$ 과는 만나지 않는다. 따라서 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)일 때, $\tan \theta$ 는 정의되지 않는다.
- ▶ $y = \tan \theta$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ 이다. 따라서 $y = \tan \theta$ 는 홀함수이다.
- ▶ 임의의 실수 θ 에 대하여 $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ 가 성립하므로 $y = \tan \theta$ 는 주기가 π 인 주기함수이다.

예제 11

$y = \tan \frac{1}{2}x$ 의 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

$$\tan \frac{1}{2}x = \tan \left(\frac{1}{2}x + \pi \right) = \tan \frac{1}{2}(x + 2\pi)$$

따라서 $y = \tan \frac{1}{2}x$ 의 주기는 2π 이다.



- $y = \tan ax$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{|a|}$ 배 확대 혹은 축소 한 것과 같다. 따라서 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$ 가 된다.

각 $\frac{\pi}{2} \pm \theta, \pi \pm \theta$ 의 탄젠트함수

θ 가 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\frac{1}{\tan\theta}, & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{\tan\theta} \\ \tan(\pi + \theta) &= \tan\theta, & \tan(\pi - \theta) &= -\tan\theta\end{aligned}$$

▶ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ 이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\left\{\frac{\pi}{2} + (-\theta)\right\} = -\frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{\tan\theta}$$

▶ 함수 $y = \tan\theta$ 의 주기가 π 이므로 $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$ 이고,
이를 이용하면 $\tan(\pi - \theta) = \tan\{\pi + (-\theta)\} = \tan(-\theta) = -\tan\theta$ 임을 알 수 있다.

예제 12

다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\tan\frac{5}{4}\pi$

(2) $\tan\frac{5}{6}\pi$

(1) $\tan\frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

(2) $\tan\frac{5}{6}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4

삼각방정식과 삼각부등식

1 삼각함수의 뜻과 그래프

삼각방정식과 삼각부등식

삼각함수의 각의 크기를 미지수로 하는 방정식과 부등식을 각각 삼각방정식, 삼각부등식이라고 한다.

- ▶ 예를 들어, $\sin x = \frac{1}{2}$ 은 삼각방정식, $2\cos x - \sqrt{2} > 0$ 은 삼각부등식이다.
- ▶ 삼각방정식의 풀이법에는 다음의 두 가지가 있다.
 - (1) 그래프 이용법
 - ① 주어진 방정식을 $\sin x = a$ (또는 $\cos x = a$, $\tan x = a$)의 꼴로 고친다.
 - ② $y = \sin x$ ($y = \cos x$, $y = \tan x$)와 $y = a$ 의 그래프를 그려서 두 그래프의 교점의 x 좌표를 구한다.
 - (2) 동경 이용법

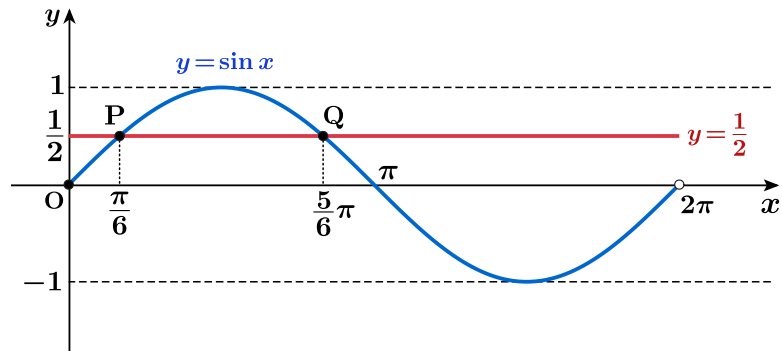
문제의 조건에 맞게 사분면 위에 동경을 그리고 해를 구한다.

예제 13

방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 을 푸시오. (단, $0 \leq x < 2\pi$)

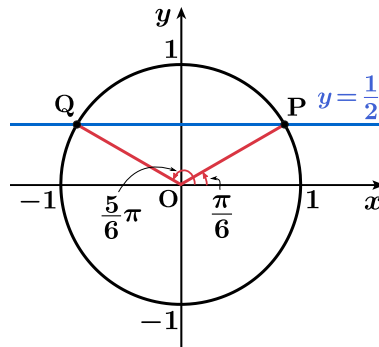
(1) 그래프 이용법

$y = \sin x$ 의 그래프와 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프를 그려서 교점의 x 좌표를 찾는다. 오른쪽 그래프에서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ 이므로 구하는 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 가 된다.



(2) 동경 이용법

혹은 오른쪽 그림에서처럼 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 단위원과 교점을 P, Q라 할 때, 동경 \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} 가 나타내는 각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ 가 방정식의 해가 된다.

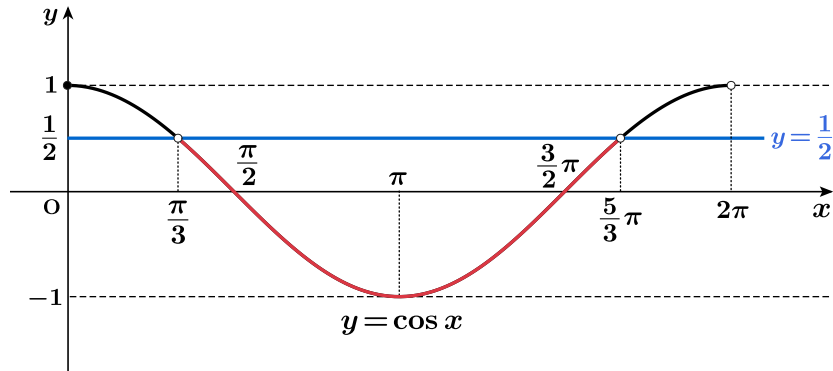


예제 14

부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$ 을 푸시오. (단, $0 \leq x < 2\pi$)

(1) 그래프 이용법

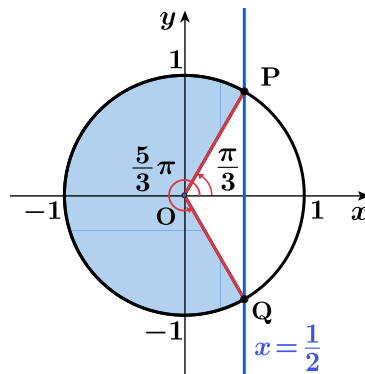
$y = \cos x$ 의 그래프와 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프를 그려 $y = \cos x$ 이 그래프가 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위를 구한다.



위의 그래프를 보면 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ 에서 $y = \cos x$ 의 그래프가 $y = \frac{1}{2}$ 이 그래프보다 아래쪽에 있으므로, 구하는 부등식의 해는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ 가 된다.

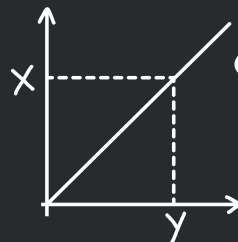
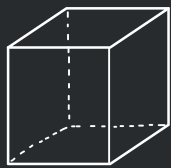
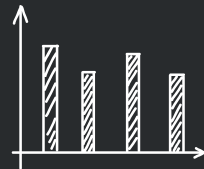
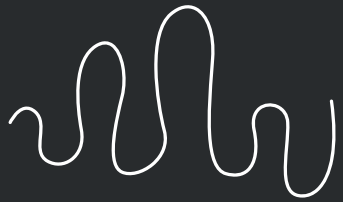
(2) 동경 이용법

혹은 오른쪽 그림에서처럼 직선 $x = \frac{1}{2}$ 과 단위원과의 교점을 P, Q라 할 때, 동경 \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} 가 나타내는 각이 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ 이므로, 구하는 부등식의 해는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ 가 된다.

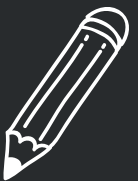
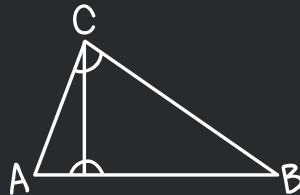
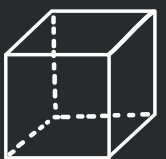


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

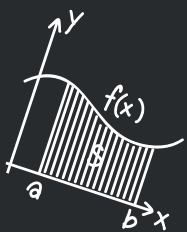
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



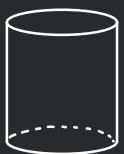
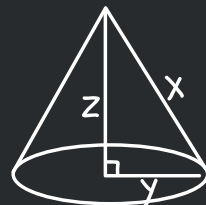
$$a^2 + b^2 = c^2$$



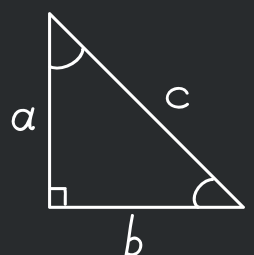
2. 사인법칙과 코사인법칙



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



1

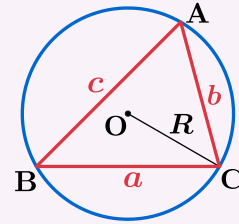
사인법칙

2 사인법칙과 코사인법칙

사인법칙

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 의 크기를 A , B , C 로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a , b , c 로 나타내기로 한다. 이때, $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



▶ 사인법칙의 증명은 다음과 같다.

$A < 90^\circ$ 일 때	$A = 90^\circ$ 일 때	$A > 90^\circ$ 일 때
$A = A'$ 이고 $\angle A'CB = 90^\circ$ 이므로 $\sin A = \sin A'$ $= \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{a}{2R}$	$\sin A = 1$ 이고 $a = 2R$ 이므로 $\sin A = 1 = \frac{a}{2R}$	$\sin A = \sin(180^\circ - A')$ $\angle A'CB = 90^\circ$ 이므로 $\sin A = \sin(180^\circ - A')$ $= \sin A' = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{a}{2R}$
같은 방법으로 $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$		

$\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

▶ $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$

▶ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

예제 15

$\triangle ABC$ 에서 $a = 2\sqrt{6}$, $A = 45^\circ$, $C = 75^\circ$ 일 때, b 와 R 의 값을 구하시오.
(단, b 는 $\angle B$ 의 대변의 길이, R 은 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름이다.)

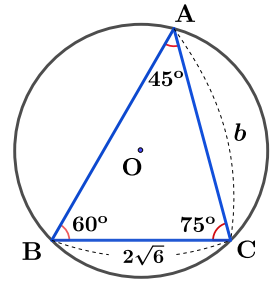
삼각형 내각의 합은 180° 이므로 $B = 60^\circ$ 이다.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 에서

$$\begin{aligned} b &= \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{2\sqrt{6} \times \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \\ &= \frac{2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6 \end{aligned}$$

또한 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 에서

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{2\sqrt{6}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3}$$



2

코사인법칙

2 사인법칙과 코사인법칙

코사인법칙

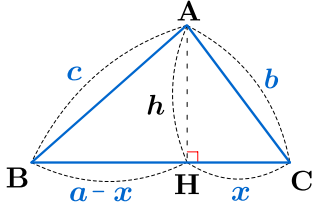
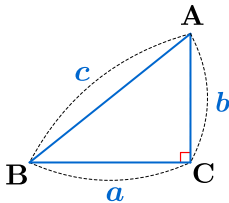
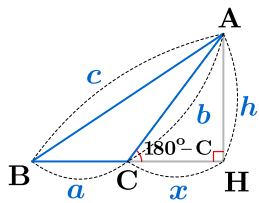
$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 의 크기를 A , B , C 로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a , b , c 로 나타내기로 할 때, 다음 등식이 성립한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad \Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \Leftrightarrow \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

▶ 코사인법칙의 증명은 다음과 같다.

$C < 90^\circ$ 일 때	$C = 90^\circ$ 일 때	$C > 90^\circ$ 일 때
		
$ \begin{aligned} h^2 &= b^2 - x^2 \\ h^2 &= c^2 - (a-x)^2 \\ b^2 - x^2 &= c^2 - (a-x)^2 \\ c^2 &= b^2 + c^2 - 2ax \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} $	$ \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ (\because \cos C &= 0) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} h^2 &= b^2 - x^2 \\ h^2 &= c^2 - (a+x)^2 \\ b^2 - x^2 &= c^2 - (a+x)^2 \\ c^2 &= b^2 + a^2 + 2ax \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ \left(\because x &= b \cos (180^\circ - C) \right) \\ &= -b \cos C \end{aligned} $
<p>같은 방법으로 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$</p>		

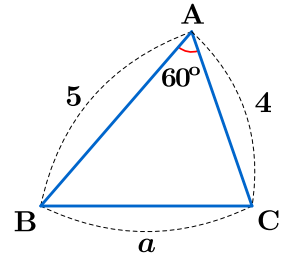
예제 16

$\triangle ABC$ 에서 $A = 60^\circ$, $b = 4$, $c = 5$ 일 때, a 의 값을 구하시오.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 16 - 20 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \sqrt{21} \quad (\because a > 0)$$



3

삼각형의 넓이

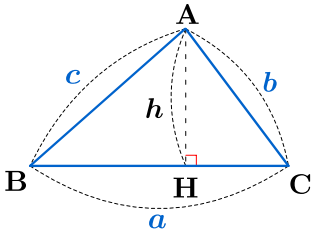
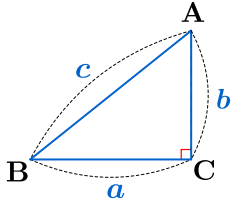
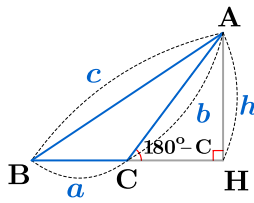
2 사인법칙과 코사인법칙

삼각형의 넓이

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 의 크기를 A , B , C 로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a , b , c 로 나타내기로 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이 S 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

▶ 삼각형의 넓이 공식의 증명은 다음과 같다.

$C < 90^\circ$ 일 때	$C = 90^\circ$ 일 때	$C > 90^\circ$ 일 때
		
$h = b \times \sin C$ $S = \frac{1}{2} \times a \times h$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$	$C = 90^\circ \text{ 이므로}$ $\sin C = \sin 90^\circ = 1$ $S = \frac{1}{2} \times a \times b$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times 1$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$	$h = b \times \sin (180^\circ - C)$ $= b \times \sin C$ $S = \frac{1}{2} \times a \times h$ $= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$
같은 방법으로 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$		

예제 17

두 변의 길이가 각각 4, 7이고, 그 사잇각이 30° 인 삼각형의 넓이 S 를 구하시오.

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \sin 30^\circ = 7$$

예제 18

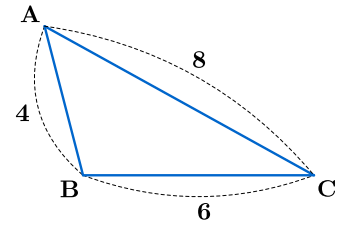
세 변의 길이가 각각 4, 6, 8인 삼각형의 넓이 S 를 구하시오.

오른쪽 그림에서

$$\cos B = \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \times 4 \times 6} = -\frac{1}{4}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$



고등학교 수학1

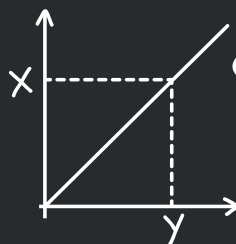
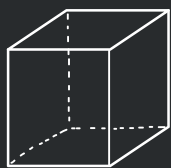
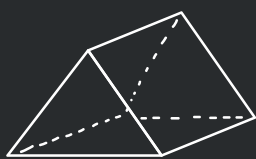
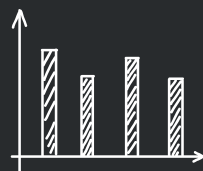
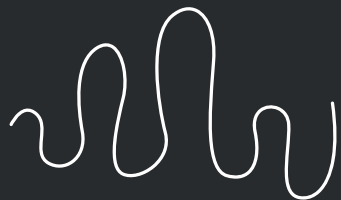
수열

3

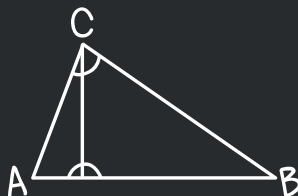
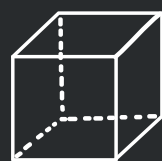
-
1. 등차수열과 등비수열
 2. 수열의 합
 3. 수학적 귀납법

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

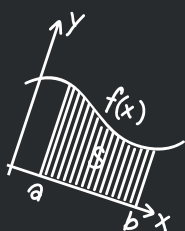
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



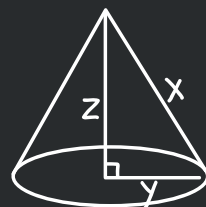
$$a^2 + b^2 = c^2$$



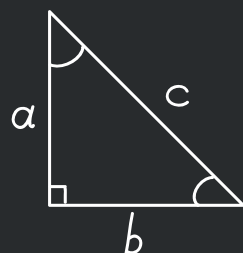
1. 등차수열과 등비수열



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



수열

어떤 규칙에 따라 차례대로 나열된 수의 열을 수열이라 하고, 그 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.

이때, 수열의 각 항을 앞에서부터 차례대로

첫째 항, 둘째 항, 셋째 항, \dots , n 번째 항, \dots

또는

제1항, 제2항, 제3항, \dots , 제 n 항, \dots

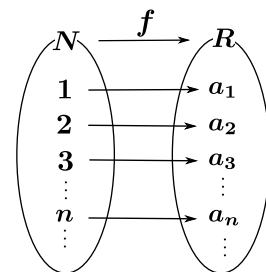
이라고 한다.

일반적으로 수열을 나타낼 때는 항의 번호가 붙은 문자의 열을 사용하여

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

과 같이 나타낸다. 이때, 제 n 번째 항 a_n 을 수열의 일반항이라고 하고, 일반항이 a_n 인 수열을 간단히 $\{a_n\}$ 으로 나타낸다.

- ▶ 일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 은 $n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 에 이 수열의 각 항 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 을 차례대로 대응시킨 것이므로, 수열 $\{a_n\}$ 을 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수로 볼 수 있다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항 a_n 을 $a_n = f(n)$ 과 같이 생각할 수 있고, $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 대입하여 수열의 각항을 정할 수 있으므로, a_n 을 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이라고 한다.



예제 1

수열 1, 3, 7, 15, 31, \dots 을 $\{a_n\}$ 이라고 하자. a_7 을 구하시오.

나열된 수들에는 다음과 같은 규칙이 있다.

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2, & a_3 - a_2 &= 4, & a_4 - a_3 &= 8, \\ a_5 - a_4 &= 16, & a_6 - a_5 &= 32, & a_7 - a_6 &= 64, & \dots \end{aligned}$$

이런 규칙을 이용하면 $a_6 = a_5 + 32 = 63$, $a_7 = a_6 + 64 = 127$ 임을 알 수 있다.

예제 2

수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 주어질 때, 수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

(1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

(2) $9, 99, 999, 9999, \dots$

(1) 분자의 규칙과 분모의 규칙을 따로 생각하여 일반항을 구하면 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이 됨을 알 수 있다.

(2) $a_1 = 10 - 1, a_2 = 100 - 1, a_3 = 1000 - 1, \dots$ 의 규칙이 있으므로 일반항은 $a_n = 10^n - 1$ 이 된다.

2

등차수열

1 등차수열과 등비수열

등차수열

이웃하는 두 항 사이의 차가 일정한 수열 $\{a_n\}$ 을 등차수열이라 한다.

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$$

이때, 두 항 사이의 일정한 차를 공차라고 하며 d 로 표기한다.

- ▶ 수열 1, 5, 9, 13, ... 은 첫째 항 1에서 시작하여 각 항에 일정한 수 4를 더하여 얻어진 수열이다.

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 5, & 9, & 13, & \dots \\ & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ & +4 & +4 & +4 & \end{array}$$

예제3

다음 등차수열의 공차를 구하시오.

(1) 3, 6, 9, 12, ...

(2) 10, 8, 6, 4, ...

(1) 주어진 등차수열은 3씩 증가하므로 공차는 3이다.

(2) 주어진 등차수열은 -2씩 증가하므로 공차는 -2이다.

등차수열

첫째 항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = a + (n - 1)d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(제 1 항)	(제 2 항)	(제 3 항)	(제 4 항)	...	(제 n 항)	...
a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n	...
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow		\Downarrow	
a	$a + d$	$a + 2d$	$a + 3d$...	$a + (n - 1)d$...

- ▶ 등차수열의 일반항은 n 에 대한 일차식이며 n 의 계수가 공차 d 가 된다. 따라서 일반항이 $a_n = pn + q$ 로 주어지는 수열은 첫째 항이 $p + q$, 공차가 p 인 등차수열이 된다.

예제 4

다음 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하시오.

(1) 17, 12, 7, 2, ...

(2) 제3항이 12, 제6항이 18인 등차수열

(1) 주어진 등차수열의 첫째 항이 17, 공차가 -5이므로 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = 17 + (n - 1) \times (-5) = -5n + 22$$

(2) 첫째 항을 a_1 , 공차를 d 라고 하면 연립방정식
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ a_1 + 5d = 18 \end{cases}$$
로부터 $a_1 = 8, d = 2$ 를

얻을 수 있다. 따라서 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = 8 + (n - 1) \times 2 = 2n + 6$$

등차중항

세 수 a, b, c 가 순서대로 등차수열을 이루면, 아래의 등식이 성립한다. 이때, b 를 a 와 c 의 등차중항이라 한다.

$$2b = a + c \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2} \quad (b \text{는 } a, c \text{의 산술평균})$$

▶ 세 수 a, b, c 가 순서대로 공차가 d 인 등차수열을 이루면 a, b, c 각각을 $a, a + d, a + 2d$ 로

생각할 수 있다. 이때,
$$\begin{cases} 2b = 2(a + d) = 2a + 2d \\ a + c = a + (a + 2d) = 2a + 2d \end{cases}$$
가 되어 $2b = a + c$ 가 성립함을 알 수 있다.

예제 5

다음 나열된 수들이 순서대로 등차수열을 이루도록 x, y 의 값을 구하시오.

(1) 2, x , 5

(2) 4, $x, y, 16$

$$(1) x = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$(2) x = \frac{4 + y}{2}, y = \frac{x + 16}{2} \Rightarrow x = 8, y = 12$$

등차수열의 합

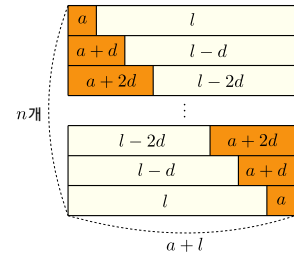
첫째 항이 a , 공차가 d 인 등차수열에서 제1항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$(1) S_n = \frac{n}{2}(a + l) \quad (l \text{은 제}n\text{항})$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

▶ 첫째 항이 a , 공차가 d , 제 n 항이 l 인 등차수열에서 첫째 항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-2d) + (l-d) + l \\ +) S_n &= l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a \\ \hline 2S_n &= (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l) + (a+l) \\ &= n \times (a+l) \\ \therefore S_n &= \frac{n(a+l)}{2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$



여기서, l 은 제 n 항이므로 $l = a + (n-1)d$ 이고

l 을 ①에 대입하면 $S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$ 를 얻을 수 있다.

예제 6

첫째 항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 제 n 항까지의 합 S_n 을 구하시오.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \times 1 + (n-1) \times 2\} = n^2$$

예제 7

세 자리 자연수 중에서 9의 배수의 합을 구하시오.

9의 배수는 공차가 9인 등차수열이 된다. 9의 배수 중 가장 작은 세 자리 자연수는 108이므로 이 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면 $a_n = 9n + 99$ 가 된다. 9의 배수 중 가장 큰 세 자리 자연수는 999이고, 이는 수열 $\{a_n\}$ 의 100번째 항이므로, 수열 $\{a_n\}$ 의 제1항부터 제100항까지의 합 S_{100} 을 구하면 된다.

$$\therefore S_{100} = \frac{100}{2}(108 + 999) = 55350$$

3

등비수열

1 등차수열과 등비수열

등비수열

이웃하는 두 항 사이의 비가 일정한 수열 $\{a_n\}$ 을 등비수열이라 한다.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = r a_n$$

이때, 일정한 비를 공비라고 하며 r 로 표기한다.

- ▶ 수열 1, 3, 9, 27, ... 은 첫째 항 1에서 시작하여 각 항에 일정한 수 3을 곱하여 얻어진 수열이다.

$$1, 3, 9, 27, \dots$$

$\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$
 $\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

예제 8

다음 등비수열의 공비를 구하시오.

(1) 64, 32, 16, 8, ...

(2) 1, -2, 4, -8, ...

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ 로 일정하므로 공비는 $\frac{1}{2}$ 이다.

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$ 로 일정하므로 공비는 -2 이다.

등비수열의 일반항

첫째 항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(제 1 항)	(제 2 항)	(제 3 항)	(제 4 항)	...	(제 n 항)	...
a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n	...
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow		\Downarrow	
a	ar	ar^2	ar^3	...	ar^{n-1}	...

예제 9

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째 항이 2이고 공비가 3인 등비수열이라고 할 때, 1458은 이 수열의 제 n 항이다. 자연수 n 의 값을 구하시오.

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ 이므로 $1458 = 2 \times 3^{n-1}$ 에서 $n = 7$ 이 된다.

등비중항

세 수 a, b, c 가 차례로 등비수열을 이루면, 아래의 등식이 성립한다. 이때, b 를 a 와 c 의 등비중항이라 한다.

$$b^2 = ac$$

▶ 세 수 a, b, c 가 순서대로 등비수열을 이루면 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 이므로 $b^2 = ac$ 가 성립한다.

예제 10

$a, b, 12$ 가 차례대로 등차수열을 이루고 $a, b, 16$ 이 차례대로 등비수열을 이룰 때, 상수 a, b 의 값을 구하시오.

등차중항으로부터 $2b = a + 12 \dots\dots\dots ①$

등비중항으로부터 $b^2 = 16a \dots\dots\dots ②$

①에서 $a = 2b - 12$ 를 ②에 대입하면

$$b^2 - 32b + 192 = 0, \quad (b - 24)(b - 8) = 0$$

따라서 $\begin{cases} a = 36 \\ b = 24 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$ 의 두 쌍의 해를 얻을 수 있다.

등비수열의 합

첫째 항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 제1항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$(1) \ r = 1 \text{ 이면 } S_n = na$$

$$(2) \ r \neq 1 \text{ 이면 } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

▶ $r = 1$ 이면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

에서 $S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{개}} = na$ 가 됨을 알 수 있다.

▶ $r \neq 1$ 이면 ①의 양변에 r 를 곱하여

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서 ②를 변변 빼면

$$\begin{array}{r} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ - \quad rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n = a - ar^n \\ \therefore (1-r)S_n = a(1-r^n) \end{array}$$

따라서 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 이 됨을 알 수 있다.

예제 11

공비 r 이 실수인 등비수열의 제2항이 -9 이고 제5항이 243 일 때, 이 수열의 첫째 항부터 제10항까지의 합을 구하시오.

첫째 항을 a , 공비를 r 이라고 하면, 이 등비수열의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$ 이다.

여기에 $n = 2$, $n = 5$ 를 대입하면

$$\begin{cases} a_2 = ar = -9 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_5 = ar^4 = 243 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

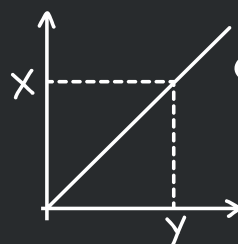
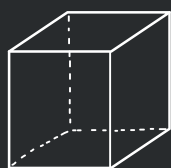
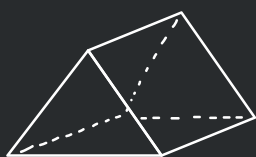
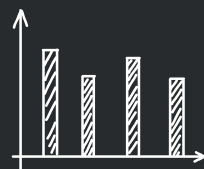
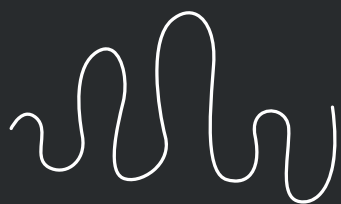
② \div ①을 하면 $r^3 = -27$ 이고, 공비 r 은 실수이므로 $r = -3$ 이 된다.

이것을 ①에 대입하면 $a = 3$ 임을 알 수 있다.

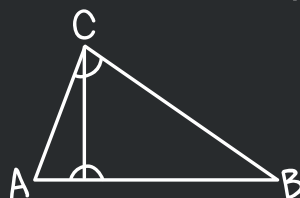
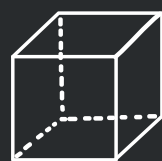
$$\therefore S_{10} = \frac{3 \times \{1 - (-3)^{10}\}}{1 - (-3)} = \frac{3}{4} \{1 - (-3)^{10}\} = -\frac{3}{4} (3^{10} - 1)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

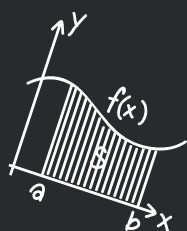
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



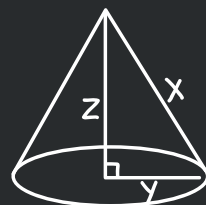
$$a^2 + b^2 = c^2$$



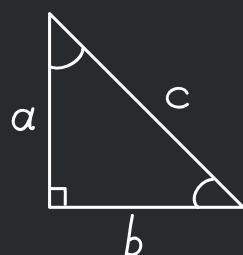
2. 수열의 합



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



합의 기호

합의 기호 Σ : 수열의 합을 간단하게 나타내기 위한 기호로 다음과 같이 약속한다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \Leftrightarrow \quad \text{좌변의 } k \text{ 번째 항 (일반항)}$$

\uparrow 좌변의 끝항의 번호 (제 n 항까지)
 \downarrow 좌변의 시작항의 번호 (제 1 항부터)

예제 12

다음 수열의 합을 Σ 기호를 사용하여 나타내시오.

(1) $1 + 3 + 5 + \cdots + 19$

(2) $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$

(1) $1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = \sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$

(2) $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

Σ의 성질

$$(1) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$(3) \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

$$(4) \sum_{k=1}^n c = cn \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \end{aligned}$$

(2) (1)과 같은 방법으로 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^n ca_k &= ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= c \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

$$(4) \sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n\text{개}} = cn$$

예제 13

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 15$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 8$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3b_k + 2)$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3b_k + 2) &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - 3 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= (2 \times 15) - (3 \times 8) + (2 \times 10) \\ &= 30 - 24 + 20 \\ &= 26 \end{aligned}$$

자연수 거듭제곱의 합

$$(1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \left\{ \sum_{k=1}^n k \right\}^2$$

(1) 첫째 항 1, 공차 1인 등차수열의 제1항부터 제 n 항까지의 합과 같다.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n\{2 + (n-1) \times 1\}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 항등식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ 을 사용하여 아래와 같이 유도한다.

$$k=1 \text{ 일 때, } (1+1)^3 - 1^3 = (3 \times 1^2) + (3 \times 1) + 1$$

$$k=2 \text{ 일 때, } (2+1)^3 - 2^3 = (3 \times 2^2) + (3 \times 2) + 1$$

$$k=3 \text{ 일 때, } (3+1)^3 - 3^3 = (3 \times 3^2) + (3 \times 3) + 1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$k=n \text{ 일 때, } +) (n+1)^3 - n^3 = (3 \times n^2) + (3 \times n) + 1$$

$$(\text{변끼리 더하면}) \quad (n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

$$n^3 + 3n^3 + 3n + 1 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) 항등식 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ 을 사용하여 (2)와 같은 방법으로 유도한다.

예제 14

$\sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k-2)$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k-2) &= \sum_{k=1}^{10} (k^3 - 3k^2 + 2k) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} k^3 - 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k \\
 &= \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - 3 \times \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} \right) + 2 \times \left(\frac{10 \times 11}{2} \right) \\
 &= 55^2 - (3 \times 55 \times 7) + (2 \times 55) \\
 &= 55(55 - 21 + 2) \\
 &= 55 \times 36 \\
 &= 1980
 \end{aligned}$$

분수로 표시된 수열의 합

$$(1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \quad \leftarrow \text{분자, 분모에 모두 } \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{ 를 곱하면} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

예제 15

다음 수열의 합을 구하시오.

$$(1) \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$(1) \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{100+1} = \frac{100}{101}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{81} - 1 = 8$$

수열의 합과 일반항과의 관계

수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 할 때,

$$\begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \\ a_1 = S_1 \end{cases}$$

▶ 수열의 제1항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서 ②를 뺀다

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

이 되고, 첫째 항 a_1 은 S_1 과 같아야 하므로

$$a_1 = S_1$$

이 된다.

예제 16

수열의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음과 같이 주어진 경우의 수열의 일반항을 구하시오.

$$(1) S_n = 2n^2 + 4n$$

$$(2) S_n = 2n^2 + 4n + 1$$

$$\begin{aligned} (1) \quad a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + 4n) - \{2(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\ &= (2n^2 + 4n) - (2n^2 - 4n + 2 + 4n - 4) \\ &= 4n + 2 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 6$$

$$\therefore a_n = 4n + 2$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a_n &= 4n + 2 \quad (n \geq 2) \\ a_1 &= S_1 = 7 \\ \therefore a_1 &= 7, \quad a_n = 4n + 2 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

예제 17

수열의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음과 같이 주어진 경우의 수열의 일반항을 구하시오.

$$(1) S_n = 2^{n+1} - 2$$

$$(2) S_n = 3^n + 1$$

$$(1) a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2)$$

$$= 2^n(2 - 1)$$

$$= 2^n \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 2$$

$$\therefore a_n = 2^n$$

$$(2) a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3^n + 1) - (3^{n-1} + 1)$$

$$= 3^{n-1}(3 - 1)$$

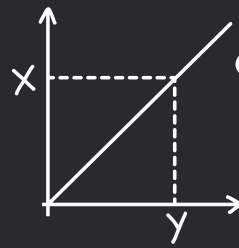
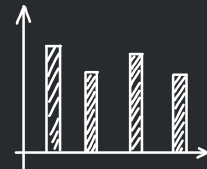
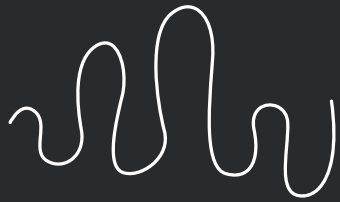
$$= 2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 4$$

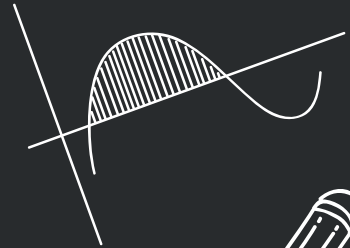
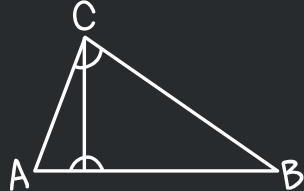
$$\therefore a_1 = 4, a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

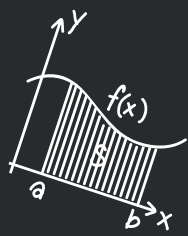
$$\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{8}{25} + \frac{1 \times 5}{5 \times 5} = \frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$$



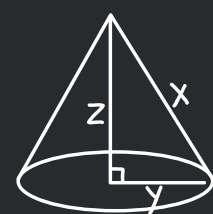
$$a^2 + b^2 = c^2$$



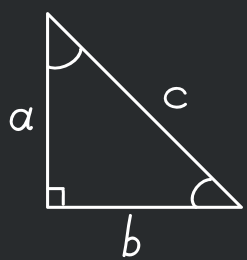
3. 수학적 귀납법



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\pi = 3.1415926535897932$$



수열의 귀납적 정의

다음과 같이 첫째 항 그리고 이웃하는 항들 사이의 관계식이 주어진다면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항들을 구할 수 있다. 이와 같이 첫째 항과 이웃하는 두 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 한다.

$$\begin{cases} \text{첫째 항 } a_1 \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n \text{과 } a_{n+1} \text{ 사이의 관계식 } (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

- ▶ 다음은 첫째 항이 1이고, 공차가 3인 등차수열을 귀납적으로 정의한 것이다.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

- ▶ 다음은 첫째 항이 2이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열을 귀납적으로 정의한 것이다.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times a_n \end{cases}$$

- ▶ 경우에 따라서는 다음과 같이 이웃한 세 항 사이의 관계식이 주어지기도 한다.

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \Rightarrow \text{등차수열}$$

$$(a_{n+1})^2 = a_n \times a_{n+2} \Rightarrow \text{등비수열}$$

이런 경우에는 첫째 항 이외에 둘째 항 혹은 셋째 항이 추가로 주어져야 한다.

예제 18

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 를 구하시오. (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$(1) a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n$$

$$(2) a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n + 3$$

이웃한 항들 사이의 관계식에 $n = 1$ 부터 차례대로 대입하여 a_5 를 구한다.

$$(1) a_2 = a_1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 2^3 = 7 + 8 = 15$$

$$a_5 = a_4 + 2^4 = 15 + 16 = 31$$

$$(2) a_2 = 4 \times a_1 + 3 = 4 \times 1 + 3 = 7$$

$$a_3 = 4 \times a_2 + 3 = 4 \times 7 + 3 = 31$$

$$a_4 = 4 \times a_3 + 3 = 4 \times 31 + 3 = 127$$

$$a_5 = 4 \times a_4 + 3 = 4 \times 127 + 3 = 511$$

수학적 귀납법

명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 다음과 같이 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

자연수 n 에 관한 어떤 명제 $p(n)$ 에 대하여

- (1) $n = 1$ 일 때, $p(1)$ 이 성립함을 증명한다.
- (2) $n = k$ 일 때, $p(k)$ 가 성립함을 가정한 후,
 $n = k + 1$ 일 때, $p(k + 1)$ 이 성립함을 증명한다.

예제 19

수학적 귀납법을 사용하여 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$ (우변) 이므로 등식이 성립한다.

(2) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하고 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

따라서 $n = k + 1$ 일 때도 등식이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

예제 20

$h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$(1+h)^n > 1+nh$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

(1) $n = 2$ 일 때, (좌변) $= (1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h =$ (우변) 이므로 부등식이 성립한다.

(2) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > 1+kh \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$1+h > 0$ 이므로 부등식 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $1+h$ 를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h)$$

이때, (우변) $= (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h$ 이므로

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) > 1+(k+1)h$$

가 성립한다. 즉, $n = k+1$ 일 때도 부등식이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.