

# 游戏数学建模：统一在微分方程之下

你最好学学微积分，它是神的语言——理查德·费曼

我们身处的物理世界是一个不断变化的系统，牛顿、莱布尼兹窥见到了这一点，因此在前人的工作基础上系统性的提出了微积分。微积分是一种对变化做定量描述的语言，从微积分里得到的微分方程不同于初等代数方程，它强调对事物从变化（一阶导）以及变化的推力（二阶导）的角度揣摩与端详。这个角度对游戏数学建模，或说数值策划的工作大有裨益。我预备在本文里展示不论战斗或经济，其工程数学的方法论主要是微分方程的，而且对任意游戏类型有效。就不同游戏类型而言，微分方程的形式不一定相同，但它告诉我们从变化和变化的推力角度看待问题是多么的简洁、有效、统一。为达到这个目的，我对自己提出了如下要求：

- 1) 风格方面的，延续《游戏数学建模工程手册》的工程数学阐释方式，从而免去不专业的争论。
  - 2) 实践方面的，用微分方程假想建模两个截然不同的游戏类型：魔兽世界 (WOW) 和皇室战争 (CR)。
- 这两张模拟建模表可以在巴比伦人的数值策划 Q 群下载：813299364。

我之所以选择这两个游戏类型是因为：

- 1) 对 WOW 的，微分方程告诉我们，武器、技能本质上是同一个东西。忽略公共 CD 时，瞬发技能和双持武器完全等价，一个职业的瞬发技能数量越多相当于持有和同时可发起攻击的武器数量变多。
- 2) 对 WOW 的，任意俩俩职业平衡在微分方程角度不过是改变了积分区域，这个积分区域是时间。
- 3) 对 CR 的，圣水费用是离散的，即便对离散建模，微分方程仍然有效。
- 4) 对 CR 的，卡牌克制、赚费（指比对手节约的圣水费用）是不平衡的另一种称呼，微分方程告诉了我们如何平衡，那么我们就可以量化和控制不平衡的程度，或说如何互相克制。
- 5) 对 CR 的，累积伤害量是时间和圣水费用的二元函数，微分方程角度将自然而然导出偏微分方程和高阶导数的现实意义。
- 6) WOW 和 CR 是 2 个截然不同的游戏类型，微分方程的视角建模仍然畅通无阻，体现了不论怎样的游戏类型都不会妨碍使用微分方程。

## 基础推导

传统或说前微分方程的游戏数学建模往往思考的是：“我该在这个系统模块投放多少属性、产出值？对某个系统的数学模型，我如何拼凑出初等代数方程？”现在，我们要放弃这种思考方式，而是问：“我该在这个系统模块投放多少属性、产出的一阶导？当转化为属性值时，一阶导对谁积分？对某个系统的规则进行数学建模时，各个影响来源如何用变化的推力（一阶导的导数）、推力的贡献（二阶导的导数）来看待？”

改变后的思考方式让我们立即回忆起一个广为人知的一阶导：每秒伤害。每秒伤害显然是累积伤害量或总伤害量关于时间的一阶导。接下来，必须有一个单位承受这个每秒伤害，否则它毫无意义。这个单位承受时付出的代价是生命，生命损失既然来自每秒伤害，于是损失也和时间有关，即：

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{dD}{dt}$$

H 为剩余生命值，dH 是生命的每秒损失，D 为总伤害量，dD 即每秒伤害。整理为：

$$dH dt = - dD dt$$

$$dH dt + dD dt = 0$$

这便给出了本文的第一个微分方程模型，它告诉我们，战斗如果是平衡的，那么我的剩余生命流逝速度要等于你总伤害的累积速度，用积分形式表达就是：

$$\int_0^t dH dt + \int_0^t dD dt = 0$$

t 为战斗时间。战斗平衡的积分形式给了我们一个提示：如果战斗平衡，则必然双方的积分区域 t 是相同的。t 的取值范围显然大于 0 小于无穷，这说明你再去和另一个角色战斗，这个角色有着不同的剩余生命和每秒伤害，只要改变 t 的取值且相等，那么仍然是平衡的。也就是满足如下微分方程：

$$\int_0^{t \cdot \alpha^{-1}/\beta} dH dt + \int_0^{t \cdot \alpha^{-1}/\beta} dD dt = 0$$

$\alpha$  表示角色 a 的伤害偏移系数，它线性的缩放 dD， $\beta$  表示 b 单位的伤害偏移系数。也就是说只需要知道 a 和 b 角色的伤害偏移，就知道双方的战斗时间缩放到了没有任何偏移时的 t 的多少倍。原因是：

$$\frac{dD \cdot H}{dD \cdot H} = 1$$

$$\frac{\alpha \cdot dD \cdot \alpha^{-1} \cdot H}{\beta \cdot dD \cdot \beta^{-1} \cdot H} = 1$$

我们有：

$$\frac{H}{dD} = t$$

于是：

$$\frac{\alpha^{-1} \cdot H}{\beta \cdot dD} = \frac{\alpha^{-1}}{\beta} \cdot t$$

上述推导过程隐含了一个假设：

$$\frac{dD}{dt} = C$$

即总伤害量的一阶导是一个常数。这是个不过分的假设，它满足工程师原则，也就是面对复杂系统时优先选择线性。



	A	B	C	D	E	F	G	
1	最小容忍秒	12	伤害微元	1	最低付费门槛¥	100	付费对标游戏天数	
2	最大容忍	80	数量级	0.6	最大生命周期	90	平均每日属性倍率	
3	标准战斗时长	25	经数量级缩放	0.6	付费可接受感受阈值	0.7	每单位属性倍率¥	12
4								
5								
6	职业平衡							
7	职业	容忍时长	容忍目标?	伤害偏移	生存偏移	最小秒	最大	
8	德鲁伊_熊形态	45		0.55555556	1.8	15.21	81	
9	武器战士	25	1	1	1			
10	盗贼	19.5		1.282051282	0.78			
11	猎人	21		1.19047619	0.84			
12	术士	28		0.892857143	1.12			
13	圣骑士	32		0.78125	1.28			
14	牧师	23		1.086956522	0.92			
15								
16								
17	模块权重>>							
18	职业	不用武器?	携带随从?	权重和	权重和	共用?	dD	
19	德鲁伊_熊形态			31	26		1	0.1

上图为 WOW 的模拟建模，我已将需要注意的单元格加粗标红。最小最大容忍秒是说，既然俩俩职业任意平衡改变的不过是积分区域，那么职业之间的战斗时间不要太小也不要太大，太小了玩家没操作几下、没打出几次技能就结束，太大了枯燥乏味。伤害微元即隐含的那个假设，每秒伤害是一个常数。

但是，职业们的伤害能力和生命来源自多个模块，如自身等级、武器与装备。在 WOW 里，武器和装备并不是每个职业单独有的，如皮甲是猎人、盗贼与德鲁伊共同使用，所以皮甲提供的伤害能力、生命应该取这 3 个职业的哪一个偏移值？不论取哪一个，另 2 个职业必然没有得到职业平衡要求的正确偏移。很容易想到，这 2 个职业的实际偏移是每个模块的偏移与模块占总值的比例，即加权平均：

$$\alpha_i = \vec{a} \cdot \vec{w}$$

i 表示一个具体职业，向量 a 的每个分量表示某个模块的伤害或生命偏移值，向量 w 的每个分量表示某个模块给的伤害或生命占总模块的比例。

模块权重>>		dH	角色升级		武器伤害		装备	
职业	携带随从?	权重和	%	%	%	%	%	%
德鲁伊_熊形态		26	0.032258065	0.0384615	0.483871	0	0.483871	0.961538
武器战士		26	0.032258065	0.0384615	0.483871	0	0.483871	0.961538
盗贼		26	0.032258065	0.0384615	0.483871	0	0.483871	0.961538
猎人	0.16	26	0.032258065	0.0384615	0.483871	0	0.483871	0.961538
术士	0.12	26	0.032258065	0.0384615	0.483871	0	0.483871	0.961538
圣骑士		26	0.032258065	0.0384615	0.483871	0	0.483871	0.961538
牧师		26	0.032258065	0.0384615	0.483871	0	0.483871	0.961538
模块中职业偏移		角色升级	武器伤害		装备			
职业	dD	dH	dD	dH	dD	dH	dD	dH
德鲁伊_熊形态	0.55555556	1.8	0.892857143	1.12	1.190476	0.84	0.555556	1.8
武器战士	1	1	0.890625	1.14	0.890625	1.14	1	1
盗贼	1.282051282	0.78	1.282051282	0.78	1.190476	0.84	1.282051	0.78
猎人	1.19047619	0.84	1.19047619	0.84	1.190476	0.84	1.190476	0.84
术士	0.892857143	1.12	0.892857143	1.12	0.989907	1.02	0.892857	1.12
圣骑士	0.78125	1.28	0.890625	1.14	0.890625	1.14	0.78125	1.28
牧师	1.086956522	0.92	0.892857143	1.12	0.989907	1.02	1.086957	0.92

在武器上，德鲁伊、术士、牧师都使用法杖，武器战士与圣骑士均使用双手剑；在装备上，德鲁伊、猎人、盗贼都穿戴皮甲，武器战士与圣骑士则穿戴锁甲。为最小化偏移误差，武器与装备的偏移模块可取这些职业偏移值的中位数，中位数在统计建模里是稳健的，均值容易受离群值影响是不稳健的。

武器与技能

一个职业为让每秒伤害打出去必须具备攻击行为。在 WOW 里，这些行为有：赤手空拳、武器、技能。有这么多次攻击行为且与每秒伤害有关，自然引出了一个问题：这些攻击行为是在同一时间发生的吗？如果同一时间发生，则每秒伤害显然的线性叠加，否则只生效其中一个。对武器而言，攻速影响它何时生效，但对技能而言分为若干情况：

1) 这个技能需要施法时间（术士的暗影箭）、引导时间（法师的奥术飞弹），则每秒伤害唯一的来自该技能，因为施法与引导时不可使用武器或其他技能。

2) 这个技能生效时机是下一次普通攻击时（德鲁伊的重殴），即将产生的每秒伤害唯一的来自该技能，武器的普通攻击行为与伤害被阻止。

3) 这个技能有 CD 且瞬发伤害（萨满的烈焰震击），该技能的施法时间趋近于 0，在极限上可视为不影响武器或其他技能。

4) 这个技能没有 CD 且瞬发，但伤害是延迟的（牧师的暗言术：痛），则该技能相当于自动按时间间隔伤害敌人，与武器的自动攻击等价。但是这个技能擅长对付多个敌人，因为它凭空创造出多把自动攻击的武器。

5) 这个技能没有 CD、瞬发、需引导但伤害是延迟的（法师的暴风雪），则等同于第 1 种情况。

所以，针对上述不同情况，我们只需要将技能的每秒伤害加上被阻止的攻击行为的每秒伤害，对瞬发技能则减去不被阻止的攻击行为的每秒伤害，然后除以瞬发伤害技能的总数。

R	F	G	H	T	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
技能信息		技能名称		不用施法?	引导时间	公共CD	施法时间	CD	持续时间	生效间隔	%>>>	文本描述										
德鲁伊_熊形态	重殴	0	1	1	0.5	3					309.4	重殴目标，造成309.4%武器伤害										
德鲁伊_熊形态	熊击	0	1	3	0.5	6					137.5	熊击敌方所有敌人，造成137.5%攻击强度的伤害										
德鲁伊_熊形态	痛性流血	0	1	3	0.5	6	4	1	34.4	137.5	熊击敌方所有敌人使其流血，而痛性的造成34.4%攻击强度的流血伤害											
萨满战士	闪电箭	0	1	3	0.5	2					45.8	闪电箭敌方所有敌人（最多5个），造成45.8%武器伤害										
萨满战士	猛击	0	1	1	0.5	4					412.5	猛击对手，对其造成412.5%武器伤害										
萨满战士	旋风斩	0	1	6	0.5	15					171.9	旋风斩周围敌人，攻击8码以内的所有敌人，造成171.9%武器伤害										
法师	奥术飞弹	0	1	1	0.5	8					550	发射奥术飞弹，对其造成550%武器伤害。当你在目标附近时伤害提高20%										
法师	奥术飞弹	0	1	1	0.5	15	18	2	115	1031.3	对敌人施放奥术飞弹，在18秒内每隔6秒对其造成114.6%攻击强度的流血伤害											
法师	奥术飞弹	0	1	1	0.5	1					68.8	立即攻击，对其造成68.8%武器伤害										
牧师	圣言术：痛	0	1	3	0.5	6					177.8	发射圣言术，对你的当前目标及8码范围内的所有敌人造成177.8%武器伤害										
牧师	圣言术：痛	0	0	0	0.5	2					600	一次强力的圣言术打击，造成600%武器伤害。如果目标尚未受到过你的打击，则伤害提高50%										
牧师	圣言术：痛	0	1	2	0.5	15					666.7	一次双发圣言术打击，攻击主要目标和附近的另一个目标，对其中一个造成666.7%伤害，对另一个造成【计算伤害·自由分配】										
术士	暗影箭	1	1	1	1				14	2	450	施放暗影箭，在14秒内每隔6秒对其造成450%法术强度的伤害										
术士	暗影箭	1	0	1	2.5						750	向敌人发射一束暗影箭，对其造成750%法术强度的伤害										
术士	火焰之墙	1	0	6	1	8		8	1	50	400	点燃之火以圆形落下，在8秒内对范围内的敌人造成50%法术强度的火焰伤害										
圣骑士	圣言术：痛	0	1	1	0.5	3					206.3	圣言术打击，造成206.3%法术强度的伤害										
圣骑士	圣言术：痛	0	1	6	0.5	9	0.5	5.7			103.1	将圣言术的能量注入你脚下的土地，在9秒内对进入该区域的敌人造成5.7%攻击强度的伤害										
圣骑士	十字军打击	0	1	2	0.5	6					206.3	攻击目标，造成206.3%武器伤害，可以使用2次										
牧师	圣言术：痛	1	0	1	1	1					300	攻击一名敌人，造成300%法术强度的伤害，并有20%几率重置圣言术之火的冷却时间										
牧师	圣言术：火	1	1	1	1	10					1666.7	神圣的烈焰灼烧敌人，对其造成1666.7%法术强度的伤害										
牧师	神圣之火_神印降临	1	1	1	1	10	7	1	238	1666.7	神圣的烈焰灼烧敌人，在7秒内间隔性的造成238.1%法术强度的伤害											

公共 CD 影响打出下一个技能的间隔，如果技能提前取消，公共 CD 会立即取消。公共 CD 的存在避免了玩家几乎同一时间连续打出多个瞬发伤害技能，这会影响到瞬发技能的每秒伤害，瞬发技能的实际每秒伤害将是：

$$\frac{dD}{dt} = C \cdot \left( 1 - \frac{CD \cdot (n-1)}{n + CD \cdot (n-1)} \right)$$

因为 n 个瞬发技能，有 n-1 次公共 CD 将这些技能隔开，于是这些技能的每秒伤害有 n-1 次公共 CD 的时间损失。

皇室战争的偏微分方程模型

现在我们进入皇室战争的模拟建模讨论，很快发现我们面临如下问题：

1) 圣水费用越高，卡牌必须越强，但不能等价。意思是 2 个 1 费的不能和 1 个 2 费的一样强，而是



必须比 2 个 1 费的强，否则谁还使用高费卡呢？

2) 卡牌之间有克制关系、赚费概念。

谨记微分方程的思考范式：“从变化、变化与更多的变化考虑问题”。先清晰我们的目标：圣水费用越多，卡牌的什么越强？一个合理的答案是：每秒伤害越强。那么，什么叫越强？是圣水费用对每秒伤害这个一阶导存在着正向推力，数学描述为：

$$\frac{d\left(\frac{dD}{dt}\right)}{dW} = f(W)$$

也就是每秒伤害关于圣水费用  $W$  的变化率。这自然的引入了变量  $W$ ，自然的导出了一个偏微分方程，其正式书写格式为：

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t \partial W} = f(W)$$

这称二阶混合偏导数，这个表达式很符合我们的定性描述：“圣水费用越多，卡牌的每秒伤害越强”。因为二阶混合偏导数其几何意义是  $t$  不再继续变动，仅考察  $W$  方向上的  $t$  对总伤害量的贡献情况。从另一个角度也可以明白为什么必须是一个二阶混合偏导数，我们已经假设每秒伤害是常数，于是每秒伤害关于  $t$  不再高阶导存在，或说高阶导为 0，所以我们想要影响每秒伤害只能引入其他变量，这必然使得总伤害量是一个与时间  $t$ 、圣水费用  $W$  有关的二元函数  $D(t, W)$ 。

“圣水费用越多，卡牌的每秒伤害越强”这个定性描述不够精细，确切的说：

- 1) 圣水费用增多，总是增多每秒伤害，不会逆转也不会在一个阈值后恒为 0。
- 2) 但增多的量不能太剧烈，哪怕与牛顿的加速度公式一样是个与时间有关的线性微分方程都不可取，因为肯定导致指数级增长。在物理世界里，速度有光速做上限，在游戏里可没有。

所以什么叫“不能太剧烈”？对微积分而言不就是在说这个吗？

$$\frac{\partial^3 D}{\partial t \partial^2 W} \rightarrow 0$$

结合不能是线性增长，立刻想到函数表达式为：

$$\frac{\partial^3 D}{\partial t \partial^2 W} = \frac{1}{W}$$

$W$  越大，在极限上趋于 0。一次积分：

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t \partial W} = \ln W + f(t)$$

已知  $t$  的高阶导都是 0，所以  $f(t)$  为 0。再次积分：

$$\frac{\partial D}{\partial t} = W \cdot \ln W - W + C$$

$C$  为积分常数。不过我们最好有个用于正比的参数：

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t \partial W} = \alpha \cdot \ln W$$

即每秒伤害的变化与圣水费用的对数值成正比。最终，每秒伤害在不同费用时的计算公式为：

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \alpha \cdot (W \cdot \ln W - W) + C$$





4) 在某些文章里，让生命乘以伤害能力，计算所谓的能力函数、战斗力时。

上述一切操作都隐含了一阶导为常数的假设。然而这个假设是有适用范围的，如果武器攻速、技能 CD、施法时间、持续掉血的持续时间对于标准战斗时间（尤其是最小容忍秒）占比不算高时，它是没有问题的，当占比较高时，则会一次性造成对方 50%-80% 的生命损失。想象下，标准战斗时间也就 5 秒，可却有 3 秒攻速的双手斧，当双手斧砍下去，岂不是第一次就造成  $3/5=60\%$  对方的生命损失？技能 CD、施法时间同理。这对每秒伤害的改进提出了如下要求：

1) 攻速、CD、持续掉血技能的持续时间占战斗时间比例较低时，每秒伤害是一个常数。

2) 当占比较高时，分情况讨论：

——如果是武器和瞬发技能，那么占比越高，则每秒伤害下降。因为瞬发更有优势，提前享受到打出去的伤害进而立即获益。

——如果技能需要施法时间、引导时间，那么占比越高，每秒伤害上升。因为它可能被打断，目标超出距离而被浪费掉，对人性来说，也希望延后越久才造成的伤害，给予更多的“利息”。

——如果是瞬发技能但按时间间隔造成伤害（暗言术：痛），那么占比越高，则每秒伤害下降。因为它凭空创造出多个自动攻击的武器，让多个敌人承受这些伤害，角色的其他攻击行为几乎不被影响。

微分方程的思维再次帮助我们，时间越长，每秒伤害越高/越低，说明对  $t$  的二阶导存在：

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = f(t)C \cdot \operatorname{sech}^2(\gamma \cdot t)$$

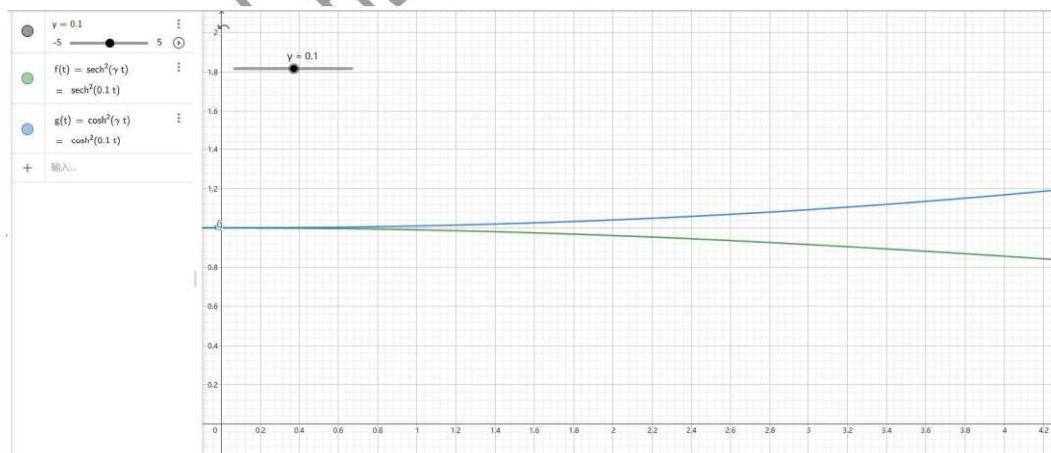
对于占比低时为常数，高时每秒伤害下降的规律，我给出的二阶微分方程为：

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = C \cdot \operatorname{sech}^2(\gamma \cdot t)$$

对于占比高时每秒伤害上升的规律：

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = C \cdot \cosh^2(\gamma \cdot t)$$

其中  $C$  是常数下的每秒伤害， $\gamma$  为速率调节参数，它们的图像如下：



即一开始非常贴近 1 之后下降或上升。双曲函数的优良性质、图像如此的符合游戏数学建模的需要是多么让人惊讶的事情，我在《微分方程在游戏经济建模的应用》里也使用到了双曲正切函数。

应用该模型需先定量定义什么叫时间占比太高、太低，我对此的定义是：希望攻速、CD、施法时间在 3.5 秒时几乎等于每秒常数，3.5 秒之后变化。理论计算如下图。

[illegible]

可以看到 4 秒开始，双曲正割只有 98%的每秒伤害，时间很大时，如满打满算 25 秒，只有 59%的每秒伤害，也就是一个 25 秒 CD 的瞬发技能或武器，它一次性造成对方 59%生命的损失。比对最开始的 WOW 模拟建模里的技能计算结果到底有多好，如下图所示。

攻击前数据		攻击后数据	
攻击次数	3	攻击次数	3
攻击上限	2,992,333	攻击上限	2,992,333
攻击成本	3,007,073	攻击成本	3,007,073
职业	公共CD	未改进 常规模型	改进后 双曲截肢模型
	%	%	%
文本描述		文本描述	
德皇伊尔志	0.5	309.4 轰毁目标, 造成309.4%武器伤害	302.4 轰毁目标, 造成302.4%武器伤害
武器战士	0.5	137.5 城市内所有敌人, 造成137.5%攻击强度的伤害	125.9 城市内所有敌人, 造成125.9%攻击强度的伤害
盗贼	0.5	137.5 城市内所有敌人使用流血, 周期性的造成34.4%攻击强度的流血伤害	125.9 城市内所有敌人使用流血, 周期性的造成31.5%攻击强度的流血伤害
骑士	0.5	45.8 横扫目标所有敌人 (至少5个), 造成45.8%武器伤害	45.4 横扫目标所有敌人 (至少5个), 造成45.4%武器伤害
术士	1	412.5 狙击对手, 对其造成412.5%武器伤害	396.3 狙击对手, 对其造成396.3%武器伤害
圣骑士	0.5	171.9 释放出腐蚀性攻击, 攻击8秒以内所有敌人, 造成171.9%武器伤害	111.1 释放出血腥攻击, 攻击8秒以内所有敌人, 造成111%武器伤害
牧师	1	50% 突刺目标, 对其造成50%武器伤害, 当你在目标附近时伤害提高20%	47.3 突刺目标, 对其造成47.3%武器伤害, 当你在目标附近时伤害提高20%
		67.6 对敌人造成砍伤, 在18秒内每周期对其造成114.6%攻击强度的流血伤害	66.2 对敌人造成砍伤, 在18秒内每周期对其造成114.6%攻击强度的流血伤害
		178.8 立即攻击, 对目标造成68.8%武器伤害	168.6 立即攻击, 对目标造成68.8%武器伤害
		66.2 发射多枚火箭, 对你的当前目标及8秒范围内的所有敌人造成177.8%武器伤害	62.8 发射多枚火箭, 对你的当前目标及8秒范围内的所有敌人造成162.8%武器伤害
		600 一次毁灭性火焰喷射, 造成600%武器伤害, 如果目标和尚未受到过伤害, 则伤害提高50%	606.2 一次毁灭性火焰喷射, 造成606.2%武器伤害, 如果目标和尚未受到过伤害, 则伤害提高50%
		666.7 一次毁灭性火焰喷射, 造成666.7%武器伤害, 攻击主要目标和次要目标各一个目标, 对每个目标造成666.7%伤害, 对次要目标造成333.3%伤害	616.1 一次毁灭性火焰喷射, 造成616.1%武器伤害, 攻击主要目标和次要目标各一个目标, 对每个目标造成616.1%伤害, 对次要目标造成307.5%伤害, 对次要目标造成153.8%伤害
		315.0 轰毁目标, 在1.4秒内每周期对其造成45%攻击强度的伤害	292.4 轰毁目标, 在1.4秒内每周期对其造成42.7%攻击强度的伤害
		750 向敌人发射一次火箭箭, 对其造成750%法术强度的伤害	762.2 向敌人发射一次火箭箭, 对其造成762.2%法术强度的伤害
		400 地狱之火如雨倾盆而下, 在8秒内对范围内的敌人每周期的造成50%法术强度的火焰灼伤	404.4 地狱之火如雨倾盆而下, 在8秒内对范围内的敌人每周期的造成59.3%法术强度的火焰灼伤
		309.4 审判目标, 造成309.4%法术强度的伤害	302.4 审判目标, 造成302.4%法术强度的伤害
		103.1 将圣光的能量融入你脚下的土地, 在9秒内对进入该区域的敌人每周期的造成5.7%攻击强度的灼伤	85.6 将圣光的能量融入你脚下的土地, 在9秒内对进入该区域的敌人每周期的造成4.8%攻击强度的灼伤
		206.3 攻击目标, 造成206.3%武器伤害, 可以使用2次	188.9 攻击目标, 造成188.9%武器伤害, 可以使用2次
		300 击溃一名敌人, 造成300%法术强度的伤害, 并有20%几率重置神圣之光的冷却时间	300.0 击溃一名敌人, 造成300.8%法术强度的伤害, 并有20%几率重置神圣之光的冷却时间
		1666.7 神圣的烈焰吞噬敌人, 对其造成1666.7%法术强度的伤害	1331.5 神圣的烈焰吞噬敌人, 对其造成1331.5%法术强度的伤害
		1666.7 神圣的烈焰吞噬敌人, 在7秒内每周期的造成238.1%法术强度的伤害	1331.5 神圣的烈焰吞噬敌人, 在7秒内每周期的造成190.2%法术强度的伤害

改进后的长 CD 的神圣烈焰被明显削弱，比之更长持续时间掉血的锁喉则压缩得更加厉害，施法时间太长的暗影箭则被补偿了伤害，改进后微分方程模型计算结果显然比改进前更为合理。

## 结语

正如《微积分的力量》一书里所说：“微积分扩展了我们描述这个世界的能力”。微积分赋予了我们从事物的变化、推动力看待问题的角度及描述它的方法，然后用微分方程的形式写出它们，再积分逆运算找到描述事物的函数表达式。许多人未能领会微积分的威力与强大，因为他们很少主动的从变化的角度看待问题，更不用说从更高阶的变化看待问题了，希望本文能够为游戏数学建模的系统性工程数学方法做出微不足道的贡献，给予许许多多数值策划工作者一丝萤火虫的光亮。s