

为什么微分方程是数值策划工作的主要方法论？

在发布《微分方程在游戏经济建模中的应用》和《游戏数学建模：统一在微分方程之下》后不久，我接触了许多数值策划并与之沟通交流。通过这些沟通交流以及回顾这 2 篇微分方程建模的文章，我意识到自己没有充分、通俗的说清楚微分方程在游戏数学建模里的价值。在收集反馈与分析后，有以下原因导致了部分数值策划工作者对此的不理解：

- 1) 不知道游戏的哪些地方能运用微积分思维、微分方程建模。有的人认为也就 SLG 这样的战斗环境用得上，整体而言微分方程用的很少。
- 2) 不知道微分方程怎样提高游戏数学建模的精度，与实际游戏的体验与感受挂钩。
- 3) 认为有某种非微积分的方法，不需要用复杂的微积分。
- 4) 认为许多成功和长久的商业游戏、流水千万与亿单位的某某数值策划没有用微分方程，于是认为微分方程没用。

认为微分方程用的很少这种言论，与认为做数值策划高中数学甚至四则运算就够了，同属反智的、无知的自信。微分方程不仅从微积分建立就开始使用，至今在人类的许多领域如计算机三维成像（医学扫描人体组织与器官、3D 视觉）、精密军事（火控雷达锁定目标、导弹精确制导）、电子信号转化为声音和视觉（麦克斯韦微分方程组提出后 10 多年，人类建立了远程通讯技术用来发电报打电话），工程制造（材料、建筑受力预测）等仍然在使用。游戏的数值策划岗位用不上或很少用，不会是微积分和微分方程的问题，只能是这个领域的人，其认知牢笼、思维监狱有多小的问题。

然而批评与斥责一般不具有正面作用，不能改善与改变游戏行业的数值策划群体对微积分的“若存若亡”乃至“大笑之”的心态。我决定对上述 4 个点逐一解答，更清楚的阐明微分方程在游戏里的建模作用，我认为这才可能影响不那么冥顽不灵的数值策划。当这些数值策划开始体会乃至在工作中践行时，他们自身或大或小的影响力会改变周围的人，最终改变整个数值策划与游戏开发领域的认知环境，所以我对这篇文章的定位是：“正人心，靖浮言”。

对原因 1 的回答——不知道游戏的哪些地方能运用微积分思维、微分方程建模。

搜索网页内容或微分方程课程，我们会看到微分方程的应用举例，如油漆从墙面滑落、琴弦和水波行进方式。这些例子很难让一般人提神，原因是一般人缺乏对这些问题的相关背景知识，难以产生对物理与机械的兴趣（人类更多对人际交往、攫取资源与权力而非机械事物感兴趣）。所以我从日常生活与游戏业务本身展示微积分思维和微分方程建模，帮助建立对微积分思维和微分方程价值的体会。

微积分出现前，数学只能处理静态的东西或很艰难的处理变化的东西。微积分出现后，人们才得心应手的处理变化，因此微积分的核心思维与应用表现之一是对变化做定量的描述。变化指上一时间点的某事物和下一时间点的某事物之间的差异（如 1 岁的人与 18 岁的人在认知和身体上的不同），亦或是上一个位置的某事物与下一个位置的某事物之间的差异（如在中国的人和澳大利亚的人感受到的季节不同）。抓住这一点我们便能发现日常生活里存在许多变化量或说导数：

1) 谈恋爱时，女生看到男生在自己的生日或七夕节精心准备礼物，女生就会觉得男生是爱与在乎自己的。这是该时间点男生的行为和别的时间点行为的不同，这个不同在女生眼中是正面的，一阶导是正数，于是提升了对男生的好感。

2) 因游戏项目组的裁撤而失业，进而灰心丧气、自我否定，这是一个人在该时间点于事业上的失败，相比起有工作时的变化，从而影响对自我的认识，这个一阶导是负数，降低了对自身命运的积极预期。

3) 视频的播放与完播在每天的量、游戏项目的日流水月流水、游戏项目的各日留存情况、商品的每月销售额，我们关心这些是在下降还是上升，然后判断视频、游戏项目与商品销售情况的好坏。显然这些是对时间的变化，对时间的一阶导，这些变化刺激我们对视频制作、游戏项目、商品采取相应措施。

许多事物不能一眼看到它的全貌，我们是随时间一点一滴看到，男生在女生眼中的形象是随时间和行为的变化逐步建立起来的，打工人的失业不能永恒的决定 ta 的全部人生。这正是微分方程给予我们的有关生活的真理：变化才是易获取和感知的，导数更准确描述了我们正经历什么、影响我们什么。所以微分方程才那么常见，所以我们从一阶导和二阶导的角度对世间万物建模才如此自然。那么游戏本身又有哪些地方是变化与导数呢？

1) 玩家拥有的角色与宠物是成长的，或等级或攻击力，它们随时间产生变化，是对时间的一阶导。这些值随时间变化是因为我们设计了游戏规则，在这个等级开放了某系统，而这个等级被操控在第 2 天才达到，之所以第 2 天才达到又是因为我们用体力或经验产出源头每天只能打 3 次来限制。

2) 在模拟经营游戏里，玩家购买种子、雇佣员工需付出成本，种子成熟后出售，员工可以提高出售产品的价格。玩家获得的收入是出售价格与成本的差额，而成熟需要时间，于是这个差额是收入对时间的一阶导，也叫利润。其中员工提高出售产品的价格是让利润变大，利润变化是差额的差额，微积分叫二阶导。

3) 在付费型游戏里，玩家支付法币直接获得角色属性的成长，这是角色属性随付费金额的变化，是角色属性对付费的一阶导。在游戏 VIP 用户的权益中，每天额外的在某某系统里打 3 次、领取更多体力，是改变了每天资源产出的值，与普通用户的每天产出有一个差额，于是 VIP 的资源获取存在二阶导为正数，普通用户资源获取的二阶导是 0。

有的数值策划说微分方程用的很少，看看兰彻斯特也就用在 SLG 这样的大兵团作战游戏上。这样的看

法没有抓住微积分的核心思路，未做到透过不同现象看到它们的相同处。另一个可能的原因是国内的数学教育问题，使得一部分人只能在上大学时选修诸如人工智能、材料力学方向的专业，且经过多年的学习，如研究生和博士才能掌握在实验分析与实操中如何运用数学知识。然而，这些专业的人才既然已经在他们的道路上走了很久，何必转行到数值策划岗位呢？如此造就了游戏行业数值策划普遍水平低、认识不到微积分价值，看不到游戏里的大量内容与变化有关，进而联系到研究变化的数学工具微积分。

对原因 2 的回答——不知道微分方程怎样提高游戏数学建模的精度，与实际游戏的体验与感受挂钩。

既然变化出现在游戏系统的方方面面，那么描述变化的微积分便能很好的“模拟”这样的系统，这就是微分方程建模精度更高的根本原因。《微分方程在游戏经济建模里的应用》比对了其他方法，在残差平方和的指标评价下均不如微分方程的结果，而微分方程的边界与初始条件的罗列，也比一次二次代数方程更全面的定量描述了游戏系统的现实特点。

有的数值策划对我说，微积分顶多用来验算模型，实际要看体验。事实远非如此，微积分和它的微分方程恰恰可以量化、描述体验，进而在数学角度控制体验的良好程度。正如前面的举例，人们在现实中（包括在游戏里）更容易感受到的是变化，人们根据当前的变化引发自身的情绪和决策的变化。付费后成长比起之前强了多少影响玩家认为付费的额度值不值、第一天成长得有多强影响第二天的再玩意愿（次日留存率）、购买这个 VIP 权益比起其他 VIP 和免费玩家得到了多大的资源增速（经验获取速度、某资源每日额外产出量）、某个提供属性的模块能不能较大幅度增加玩家的强度，这些全都涉及这个时候的结果比起上个小时的结果正面变化得多强烈。当我们假设这个正面的强烈感刻画了体验的良好程度时，微积分就描述了体验。

纵观谈及“做数值就是做体验”、“游戏的体验如何”的人和文章，细看之下均没有后文，没有对游戏体验的定性理解再转化为数学模型的讨论。一个没有落实的名词不过是空谈而已，寻找变化，看到变化，然后书写出变化的微分方程是一名真正落实了做体验型游戏数值的操作员，正如老话说的“绝知此事要躬行”，这样的操作员才对体验有确切的理解，纸上谈兵没有实际的数学模型让“做数值就是做体验”这个说法退化到唱高调、讲空话的水平。

对原因 3 的回答——认为有某种非微积分的方法，不需要用复杂的微积分。

现实中的数学应用当然没有局限于微积分，其他数学分支的方法在应用和洞开视野上同样有诸多贡献。但据我所知，其他数学分支往往依赖于微积分的掌握，微积分是它们的基础。不以微积分为基础的概率与统计、线性代数这两门数学通识课里，多元分布需要积分学的知识，雅克比矩阵和海森矩阵里的符号分

别是一阶导和二阶导，微分方程组的系数也用矩阵表达。所以高等数学很难和微积分撇清关系，如泛函分析的变分法是对变化这个概念在函数本身上的延展。

所以持这种观点的数值策划，他们的实际表现是退化到前微积分时代的数学方法，而不是使用数学的现代发展成果（微积分属于近代数学）。不错，一些不等式和无穷级数在某些情况下能够替代拉格朗日乘子法和微分方程。然而不等式的适用范围更窄且特殊化，以柯西-斯密茨不等式为例，它要求目标函数是平方和，于是需要查看目标函数是什么样子，揣摩是用什么不等式，凑出符合不等式要求的模样再求解，这个过程明显不如拉格朗日乘子法和 KKT 条件的系统化、一般化和可编程化。类似的，无穷级数里的公比数列、公差数列，它们是差分方程的简单形式，差分方程则是微分方程的离散表达，差分方程与微分方程一致地关注变化，如前向差分是本时刻和下一时刻的差，只是时刻的步长恒为 1 罢了。还有，无穷级数里广泛应用的级数恰恰与微积分有关，它们是泰勒级数、傅里叶级数、拉普拉斯变换，用于求微分方程级数解的幂级数。

即使用前微积分的数学方法，在古希腊和古中国数学家里寻找巧思与妙想，但这些数学家事实上使用到了穷竭、无穷的概念去解决变化这个难题，牛顿和莱布尼兹在建立微积分之前也频繁使用无穷级数，他们的微积分思想延续自他们解决面积与函数问题时无穷概念的琢磨，微积分是对这种概念的系统化。不使用和掌握微积分，难道这些数值策划准备用割圆法吗？恐怕只能祝他们好运，无视微积分和微积分之后的人类成果发明新的数学方法。

对原因 4 的回答——认为许多成功和长久的商业游戏、流水千万与亿单位的某某数值策划没有用微分方程，于是认为微分方程没用。

普京曾这样评价瑞典环保少女：“没有人向她解释，现代这个世界是复杂而多样的”。持有这种观点的数值策划就像这个瑞典环保少女一样天真、思维极化。一个深谙相关与因果逻辑的人可以用 100 种方法反驳，但在这里顺着这些数值策划的想法可以推出截然相反的结论：商业游戏一般需要数值策划的参与，然而商业游戏的上线失败率、胎死腹中率、长期运营时衰竭速率的程度之高是一个业界共识。按照这些数值策划的想法，可以认为正是没有用微积分和微分方程建模，所以他们项目“火箭发射”频频失败？如此推论，不用微积分导致失败，这个结论有力程度要更高才对。

事实上完全可以说，缺乏强有力的、系统性的、标准化的高等数学方法的应用，正是这些商业游戏项目表现不稳定的源头之一，许多项目在来回测试和调整数值中疲于奔命，在游戏项目开发周期和成本高昂的环境下，依赖于上线后多次调整、检验游戏数学建模的稳健性，幸运时调调改改勉强可用，这难道不是一件令人心惊胆战、寤寐不安的事吗？在军事、房屋建造、电力工程的领域，谁还在涉及到大量金钱损失、

人命的经验教训之后继续使用这种做法？游戏的数值策划停留在这种蛮荒方案上，还为此沾沾自喜，这种观念是可悲的。

巴比伦派数值策划813299364