

ANÁLISIS DEL MODELO CUADRÁTICO

Modelo Cuadrático: $y = a + bx + cx^2$

Sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}\sum y &= na + b \sum x + c \sum x^2 \\ \sum xy &= a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 \\ \sum x^2y &= a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4\end{aligned}$$

Datos originales:

Profundidad (m)	Esfuerzo (kPa)
1.9	14.3
3.1	17.8
4.2	21.2
5.1	35.3
5.8	33.6
6.9	37.5
8.1	41.1
8.7	51.6
9.3	63.3
10.0	66.8

Cálculo de sumatorias:

$$\begin{aligned}\sum x &= 1.9 + 3.1 + 4.2 + 5.1 + 5.8 + 6.9 + 8.1 + 8.7 + 9.3 + 10.0 = 63.1 \\ \sum y &= 14.3 + 17.8 + 21.2 + 35.3 + 33.6 + 37.5 + 41.1 + 51.6 + 63.3 + 66.8 = 382.5 \\ \sum x^2 &= 1.9^2 + 3.1^2 + 4.2^2 + \dots + 10.0^2 = 454.71 \\ \sum x^3 &= 1.9^3 + 3.1^3 + 4.2^3 + \dots + 10.0^3 = 3657.68 \\ \sum x^4 &= 1.9^4 + 3.1^4 + 4.2^4 + \dots + 10.0^4 = 31245.92 \\ \sum xy &= (1.9 \times 14.3) + (3.1 \times 17.8) + \dots + (10.0 \times 66.8) = 2780.67 \\ \sum x^2y &= (1.9^2 \times 14.3) + (3.1^2 \times 17.8) + \dots + (10.0^2 \times 66.8) = 21657.84\end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}10a + 63.1b + 454.71c &= 382.5 \\ 63.1a + 454.71b + 3657.68c &= 2780.67 \\ 454.71a + 3657.68b + 31245.92c &= 21657.84\end{aligned}$$

Resolución del sistema:

Usando el método de eliminación o matrices:

$$\begin{bmatrix} 10 & 63.1 & 454.71 \\ 63.1 & 454.71 & 3657.68 \\ 454.71 & 3657.68 & 31245.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 382.5 \\ 2780.67 \\ 21657.84 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$a = -16.892$$

$$b = 11.247$$

$$c = -0.418$$

Ecuación final del modelo cuadrático:

$$y = -16.892 + 11.247x - 0.418x^2$$

Evaluación del modelo

Valores predichos vs reales:

x	y_{real}	y_{pred}	$(y_{\text{real}} - y_{\text{pred}})^2$
1.9	14.3	12.9	1.96
3.1	17.8	20.3	6.25
4.2	21.2	26.7	30.25
5.1	35.3	31.9	11.56
5.8	33.6	35.8	4.84
6.9	37.5	40.5	9.00
8.1	41.1	44.8	13.69
8.7	51.6	46.9	22.09
9.3	63.3	48.7	213.16
10.0	66.8	49.9	285.61

Cálculo de estadísticos:

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 2128.75$$

$$S_r = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 598.41$$

$$r^2 = 1 - \frac{S_r}{S_t} = 1 - \frac{598.41}{2128.75} = 0.719$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-3}} = \sqrt{\frac{598.41}{7}} = 9.25$$

Interpretación de resultados:

- **Coefficiente de determinación** ($r^2 = 0.719$): El modelo explica el 71.9% de la variabilidad en los datos de esfuerzo cortante.

- **Error estándar de estimación** ($S_{y/x} = 9.25$): La desviación típica de los residuos es de 9.25 kPa.
- **Suma de residuos** ($S_r = 598.41$): Medida de la discrepancia total entre valores reales y predichos.

Predicción para $x = 7.5$ m:

$$\hat{y} = -16.892 + 11.247(7.5) - 0.418(7.5)^2 = -16.892 + 84.3525 - 23.5125 = 43.948 \approx 42.7 \text{ kPa}$$