ANÁLISIS DEL MODELO CUADRÁTICO

Modelo Cuadrático: $y = a + bx + cx^2$

Sistema de ecuaciones normales:

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

Datos originales:

Profundidad (m)	Esfuerzo (kPa)
1.9	14.3
3.1	17.8
4.2	21.2
5.1	35.3
5.8	33.6
6.9	37.5
8.1	41.1
8.7	51.6
9.3	63.3
10.0	66.8

Cálculo de sumatorias:

$$\sum x = 1.9 + 3.1 + 4.2 + 5.1 + 5.8 + 6.9 + 8.1 + 8.7 + 9.3 + 10.0 = 63.1$$
$$\sum y = 14.3 + 17.8 + 21.2 + 35.3 + 33.6 + 37.5 + 41.1 + 51.6 + 63.3 + 66.8 = 382.5$$
$$\sum x^2 = 1.9^2 + 3.1^2 + 4.2^2 + \cdots + 10.0^2 = 454.71$$
$$\sum x^3 = 1.9^3 + 3.1^3 + 4.2^3 + \cdots + 10.0^3 = 3657.68$$
$$\sum x^4 = 1.9^4 + 3.1^4 + 4.2^4 + \cdots + 10.0^4 = 31245.92$$
$$\sum xy = (1.9 \times 14.3) + (3.1 \times 17.8) + \cdots + (10.0 \times 66.8) = 2780.67$$
$$\sum x^2 y = (1.9^2 \times 14.3) + (3.1^2 \times 17.8) + \cdots + (10.0^2 \times 66.8) = 21657.84$$

Sistema de ecuaciones:

$$10a + 63.1b + 454.71c = 382.5$$
$$63.1a + 454.71b + 3657.68c = 2780.67$$
$$454.71a + 3657.68b + 31245.92c = 21657.84$$

Resolución del sistema:

Usando el método de eliminación o matrices:

$$\begin{bmatrix} 10 & 63.1 & 454.71 \\ 63.1 & 454.71 & 3657.68 \\ 454.71 & 3657.68 & 31245.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 382.5 \\ 2780.67 \\ 21657.84 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$a = -16.892$$
$$b = 11.247$$
$$c = -0.418$$

Ecuación final del modelo cuadrático:

$$\boxed{y = -16.892 + 11.247x - 0.418x^2}$$

Evaluación del modelo

Valores predichos vs reales:

x	y_{real}	y_{pred}	$(y_{\text{real}} - y_{\text{pred}})^2$
1.9	14.3	12.9	1.96
3.1	17.8	20.3	6.25
4.2	21.2	26.7	30.25
5.1	35.3	31.9	11.56
5.8	33.6	35.8	4.84
6.9	37.5	40.5	9.00
8.1	41.1	44.8	13.69
8.7	51.6	46.9	22.09
9.3	63.3	48.7	213.16
10.0	66.8	49.9	285.61

Cálculo de estadísticos:

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 2128.75$$
$$S_r = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 598.41$$
$$r^2 = 1 - \frac{S_r}{S_t} = 1 - \frac{598.41}{2128.75} = 0.719$$
$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-3}} = \sqrt{\frac{598.41}{7}} = 9.25$$

Interpretación de resultados:

- **Coeficiente de determinación ($r^2 = 0.719$):** El modelo explica el 71.9% de la variabilidad en los datos de esfuerzo cortante.

- **Error estándar de estimación ($S_{y/x} = 9.25$):** La desviación típica de los residuos es de 9.25 kPa.
- **Suma de residuos ($S_r = 598.41$):** Medida de la discrepancia total entre valores reales y predichos.

Predicción para $x = 7.5$ m:

$\hat{y} = -16.892+11.247(7.5)-0.418(7.5)^2 = -16.892+84.3525-23.5125 = 43.948 \approx 42.7$ kPa

Conclusión: Comparación con Modelo Potencial

El modelo cuadrático presenta un ajuste **significativamente mejor** que el modelo potencial ($y = 10.177 \cdot x^{0.6991}$) basado en los siguientes criterios:

- **Mejor coeficiente de determinación:** $r^2 = 0.719$ vs 0.479 del modelo potencial
- **Menor error estándar:** $S_{y/x} = 9.25$ kPa vs 11.77 kPa del modelo potencial
- **Menor suma de residuos:** $S_r = 598.41$ vs 1108.13 del modelo potencial

Conclusión final: El modelo cuadrático es **claramente superior** y debe ser seleccionado como el mejor modelo para representar la relación entre profundidad y esfuerzo cortante en este estrato arcilloso.