Санкт-Петербургский Государственный Университет

Факультет математики и механики

Теория вероятностей

Лектор: Зайцев А. Ю.

5 семестр

Содержание

1 Лекция 02.09.25

В средние века довольно популярной была игра в кости. На гранях кубика изображены числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Если предположить, что кубик идеален (т.е. симметричен и однороден), и подбрасывается в идеальных условиях без посторонних воздействий, то у нас нет объективных причин считать одну грань более предпочтительной, чем другую. Такие элементарные исходы являются равновозможными.

В таком случае, вероятность выпадения любой конкретной грани, например, шестёрки, определяется как отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу всех возможных равновероятных исходов: $\mathbb{P}(\text{“выпала шестёрка”}) = \frac{1}{6}$.

Аналогично, вероятность события “выпало чётное число” (исходы: $2, 4, 6$) будет равна: $\mathbb{P}(\text{“чётное число”}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Это классическое определение вероятности, которое эффективно, когда пространство исходов конечно и исходы равновозможны. Однако для более сложных задач (бесконечные пространства, неравновозможные исходы) потребуется более общий аксиоматический подход.

Напоминание. Комбинаторика предоставляет инструменты для подсчёта числа исходов, что часто помогает в вычислении вероятностей по классическому определению:

- Число перестановок из n различных элементов:
$$n!$$
- Размещения: Число способов выбрать k элементов из n (порядок важен):
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- Сочетания: Число способов выбрать k элементов из n (порядок не важен):
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Определение 1.1 (Колмогоровская модель)**.** *Вероятностное пространство* – тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где

- Ω – множество элементарных исходов;
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω (σ-алгебра событий);
- $\mathbb{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{F}$, то есть функция $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ такая, что
  1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (неотрицательность);
  2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (нормированность);
  3. $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, тогда $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (счетная аддитивность).

Замечание. Дискретная модель вкладывается в колмогоровскую, если взять в качестве σ-алгебры все подмножества Ω.

Определение 1.2. Событие единичной вероятности называется *достоверным*.

Определение 1.3. Событие нулевой вероятности называется *невозможным*.

Пример 1.1. *Если мы бросаем шарик в квадратную область, то вероятность попасть в какую-то конкретную точку равна нулю, потому что мера Лебега точки равна нулю.*

Определение 1.4. *Геометрическая вероятность* — модель, где вероятностное пространство Ω является измеримым подмножеством $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега mes, причём $0 < \mathrm{mes}(\Omega) < \infty$. Вероятность определяется как нормированная мера Лебега:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{mes}\, A}{\mathrm{mes}\, \Omega}, \qquad A \subset \Omega,\ A \in \mathcal{B}.$$

В этом случае часто рассматривают борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$ (наименьшау σ-алгебру, которая содержит все открытые множества Ω).

Пример 1.2. *На плоскости задан прямоугольник со сторонами $a, b > 0$. С какой вероятностью случайно выбранная в нем точка будет ближе к центру прямоугольника, чем к любому из его углов?*

Решение: Множество искомых точек в общем случае образует неправильный шестиугольник (см. Рис. 1).

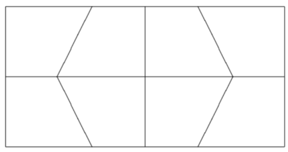

Рис. 1: Множество искомых точек

Определение 1.5. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, тогда A, B называют *совместными*, если $A \cap B \neq \varnothing$.

Пример 1.3. *При подбрасывании игрального кубика:*

- *Событие A: "выпало четное число" $\{2, 4, 6\}$;*
- *Событие B: "выпало число, меньшее 3" $\{1, 2\}$;*

Они совместные, так как $A \cap B = \{2\}$ (исход "2" благоприятствует обоим событиям).

Определение 1.6. *Условная вероятность* события A при условии наступления события B определяется формулой:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad \text{если } \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

2 Лекция 09.09.25

Формулу для условной вероятности можно переписать в виде:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A);$$

Используя это же можно по индукции доказать, что:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1});$$