Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2021
Prof. Dr. Jürgen Dölz
David Ebert

UNIVERSITÄT BONN

Blatt 4

Abgabe **Montag, 15.11.21, 10:00**.

Aufgabe 1. (Landau-Symbole)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $f = \mathcal{O}(g)$ genau dann wenn $g = \Omega(f)$.

b) Für alle Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $f = \mathcal{O}(g)$ oder $f = \Omega(g)$.

Achtung: Nutzen Sie für Ω die Definition aus der Komplexitätstheorie!

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. (Landau-Symbole 2)

Beweisen Sie:

a) $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

b) $\big(\log(n)\big)^k = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{\ell}})$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\sum_{i=1}^n \log(i) \geq \int_1^n \log x \,\mathrm{d}x$, und $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^k}{x} = 0$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3. (Bubblesort)

Gegeben sei eine Liste von natürlichen Zahlen $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, d.h. $s_i \in \mathbb{N}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir möchten die Elemente von S sortieren, d.h. eine Permutation $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ der Indizes $1, \ldots, n$ bestimmen, sodass gilt

$$\forall 1 \leq i < j \leq n\colon s_{\sigma(i)} \leq s_{\sigma(j)}.$$

Betrachten Sie dazu den folgenden Algorithmus 1.

a) Zeigen Sie: In der Iteration i ist die Liste

$$\big\{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, \ldots, s_{\sigma(i)}\big\}$$

sortiert und jedes Element aus der Liste

$$\big\{s_{\sigma(i+1)}, s_{\sigma(i+2)}, \ldots, s_{\sigma(n)}\big\}$$

ist größer oder gleich als ein beliebiges Element aus

$$\big\{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, \ldots, s_{\sigma(i)}\big\}.$$

b) Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 terminiert.

c) Bestimmen Sie die Komplexität von Algorithmus 1.

Algorithm 1 (Bubblesort-Implementierung)

Input: Menge $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, $s_i \in \mathbb{N}$ für alle $i = 1, \dots, n$
Output: Permutation $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ mit

$$\forall 1 \leq i < j \leq n\colon s_{\sigma(i)} \leq s_{\sigma(j)}.$$

```
for i ← 1 to n do
    σ(i) ← i
end for
for i ← 1 to n − 1 do
    for j ← i + 1 to n do
        if s_σ(j) < s_σ(i) then
            tmp ← σ(i)
            σ(i) ← σ(j)
            σ(j) ← tmp
        end if
    end for
end for
return σ
```

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 4. (Bubblesort Implementierung)

Implementieren Sie Bubblesort in Python um ein Array zu sortieren. Sparen Sie dabei Speicherplatz, indem Sie nur einen kleinen Zwischenspeicher zum Vertauschen benutzen. Erzeugen Sie zufällige Arrays (`numpy.random.rand`) der Länge $n = 1, 10, .., 10^8$ mit Einträgen aus $\{0, 1, ..., 99\}$. Hier kann eine kurze Internetrecherche helfen. Verfizieren Sie die asymptotische Laufzeit aus der Vorlesung, indem Sie die Laufzeit ihrer Implementierung für die Arrays messen und graphisch darstellen.

(4 Punkte)