Aufgabe 1.)

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i b^i = (\ldots z_1 z_0 z_{-1} \ldots)_b$$

(a) Zz.: $(0.\overline{(b-1)})_b := (0.(b-1)(b-1)\ldots)_b = 1$

Dann gilt: $z_0 = 0$, $z_i = (b-1)$ für $i \in \mathbb{Z}_{<0}$

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} (b-1)\cdot b^i = \sum_{i=-\infty}^{-1} b^{i+1} - b^i \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \lim_{n\to\infty} b^0 - b^{-n} = b^0 \overset{\text{Für } b\neq 0}{=} 1$$

(b) $\left(\frac{1}{10}\right)$: folglich wäre die Darstellung $\frac{1}{10} = 0.0\overline{0011}$

$0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2$ 0
$\boxed{0{,}2} \cdot 2 = 0{,}4$ 0
$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$ 0
$0{,}8 \cdot 2 = 0{,}6$ 1
$0{,}6 \cdot 2 = \boxed{0{,}2}$ 1

Aufgabe 2.)

Ein 2-Byte-Rechner mit Gleitkomma-Arithmetik und

interne Zahlendarstellung: $|\overset{\text{Vorzeichen}}{s}|\overbrace{m_1 \ldots m_9}^{\text{Mantisse}}|\underbrace{e_1 \ldots e_6}_{\text{Exponenten}}|$

normalisiert: $1 \le m_1 < b = 2$ $\quad -31 \le e \le 31 \overset{\text{bias}}{\Rightarrow} 1 \le e \le |e_{min}| + e_{max} + 1$

hidden-bit: $(b=2)$

Rechner-Bits: $(-1)^s \cdot (1.m_1 \ldots m_9) \cdot 2^e$: $s \in \{0,1\}$, $1 \le e \le 63$

(a) $(13)_{10} = (1101)_{2,4} \cdot 2^0 \overset{\text{Normalisieren}}{\Longrightarrow} (.1101)_{2,4} \cdot 2^4 \overset{\text{hidden-bit}}{\Longrightarrow} (.1010)_{2,4} \cdot 2^4$

$\Rightarrow$ wahre Exponent $= 4 = \underbrace{36}_{\text{Charakteristik}} - \underbrace{32}_{\text{bias}} \Rightarrow \tilde{e} = \underbrace{(100\,100)_{2,6}}_{\text{Charakteristik}}$

$\Rightarrow$ Mantisse $= (1\,0100\,\,0000)_{2,9}$

$(13)_{10} = |\underbrace{0}_{+}|1\,0100\,0000|100\,100|$

$(42.125)_{10} = (40)_{10} + (0.125)_{10} = (101010.001)_{2,9} \cdot 2^0$

$\overset{\text{norm.}}{\Rightarrow} (.101010001)_{2,9} \cdot 2^6 \overset{\text{Hidden-Bit}}{\Rightarrow} (.010100010)_{2,9}$

$\Rightarrow$ Charakteristik $= (38)_{10} = (100\,110)_{2,6}$

$\Rightarrow$ Mantisse $= (.010100010)_{2,9}$

$(42.125)_{10} = |0|010100010|100110|$

$\left(\frac{1}{10}\right)_{10} = (.0\overline{0011})_2 \cdot 2^0 = (000110011)_{2,9} \cdot 2^0 \overset{\text{norm.}}{\Longrightarrow} (.110011000)_{2,9} \cdot 2^{-3}$

$\overset{\text{hidden-Bit}}{\Rightarrow} (.100110000)_{2,9} \cdot 2^{-3}$

$\Rightarrow$ Charakteristik $= (29)_{10} = (011101)_{2,6}$

$\Rightarrow$ Mantisse: $(.100\,11\,0000)_{2,9}$

$\left(\frac{1}{10}\right)_{10} = |0|100\,11\,0000|011\,101|$

$|\underbrace{1}_{-}|\underbrace{\overset{1}{}0110\,\,10111}_{(727)_{10}}|\underbrace{001101}_{13-32=-19}| = -(727) \cdot 2^{-19} = 0{,}001386642456$

b.) Es stehen 16-Bit zur Darstellung zur Verfügung

↳ 1-Bit = VZ $\Rightarrow (2^7)$
↳ 9-Bit für Mantisse (2^9)
↳ 6-Bit für Exponenten (2^6)

$\left\{ 2^7 \cdot 2^9 \cdot 2^6 = 2^{16} \right.$ Möglichkeiten c.) $z_{max} = |0|\overset{1}{\underbrace{1111111111}_{2047}}|\underbrace{1111111}_{63-32}| = (2047)_{10} \cdot 2^{31} =$

$= 4292870144$

$|z|_{min} = |0|\overset{1}{\underbrace{0000000000}}|\underbrace{0000001}_{1-32=-31}| = 2^{-31}$

d.) Def. Maschinengenauigkeit:

- Bezeichnet den Rundungsfehler beim Rechnen mit Gleitkommazahlen (floats)
- Für die Darstellung einer Zahl stehen nur endlich viele Bits für den Exponenten und die Mantisse zur Verfügung.

Deshalb können bestimmte Zahlen nicht beliebig genau dargestellt werden.

Somit ist die Maschinengenauigkeit der größte relative Rundungsfehler.

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot b^{1-t}$, für t-stellige Mantissen

In unserem Beispiel mit 9-stelliger Mantisse und Basis 2 ergibt sich:

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 2^{1-9} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-8} = 2^{-1} \cdot 2^{-8} = 2^{-9}$