Aufgaben für Algorithmische Mathematik 1

Aufgabe 1.)

Sei $G=(V,E,\psi)$ ein ungerichteter Graph mit $n:=|V|$ und $m=|E|$.

(a) Zz.: Sei $|\delta(v)| \geq 3$ für alle $v \in V$. $\Rightarrow m \geq \frac{3}{2}n$

$$\sum_{v\in V} |d(v)| = 2|E| \qquad (1)$$

$$m = |E| \overset{(1)}{=} \frac{\sum_{v \in V} |d(v)|}{2} \geq \frac{\sum_{v\in V} 3}{2} = \frac{3 \cdot |V|}{2} = \frac{3}{2}n$$

(b) Zz.: Sei $n \leq 9$ und $|\delta(v)| \geq 3$ für alle $v \in V$. $\Rightarrow$ Es ex. ein Kreis mit Länge höch. 4

Damit es einen nicht trivialen Graphen gibt, bei dem alle Knoten min. 3-Grad haben, muss es 3 Knoten geben.

Beweis:

Wähle einen bel. Knoten $v_1 \in V$ und füge ihn C hinzu. Dann gilt: $|V \setminus C| \leq 8$.

Da $\deg(v_1) \geq 3$ füge drei Nachbarknoten v_2, v_3, v_4 zu C hinzu. $\Rightarrow |V\setminus C| \leq 5$

Wenn C nun einen Kreis enthält, so hat dieser max. Länge 4.

Falls C keinen Kreis enthält, so müssen alle Knoten $v_i \in C \setminus v_1$ zwei Nachbarn in $V \setminus C$ besitzen, da sonst ein Kreis in C vorhanden wäre. Dazu müsste es $v_5, \dots, v_{10} \in V$ geben, womit $n > 9$ ↯.

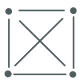
Also muss es einen Kreis in C geben, welcher max. die Länge 4 hat, weil $C = \{v_1, \dots, v_4\}$.

□

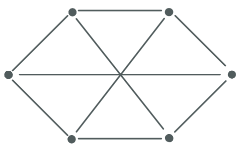
(c) Zz.: Für $m \geq n+4$ enthält die Graph G zwei Kantendisjunkte Kreise und für $m < n+4$ gilt diese Aussage nicht.

Beweis:

1. Sei $m < n+4$: Gegenbeispiel $m = 6$, $n = 4$ oder $m = 9$, $n = 6$

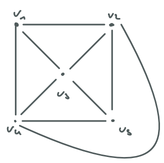


Diese Graphen besitzen keine zwei Kantendisjunkte Kreise.



2. Sei $m \geq n+4$.

IA: $n = 5$, da G sonst nicht die Mindestanzahl an Kanten enthalten kann.



Es muss mind 3 Knoten Knoten mit $|deg(v)| = 4$ geben.

Damit hat G zwei Kantendisjunkte Kreise.

IV: Für ein bel. aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: Für $m \geq n+4$ hat G zwei Kantendisjunkte Kreise.

IS: $n \curvearrowright n+1$: $m \geq (n+1)+4 = n+5 \geq n+4 \overset{IV}{\Rightarrow}$ G enthält zwei Kantendisjunkte Kreise.

$\square$

Aufgabe 2.)

Sei $k > 1$ und $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|deg(v)| \geq k$ für alle $v \in V$.

Z.z.: G enthält einen Kreis C der Länge $k+1$ oder größer.

Beweis:

Angenommen der längste Weg W wäre $\ell < k$ lang. Dann gibt es mind. einen Nachbarn vom Endknoten, der noch nicht im Weg enthalten ist. Somit gibt es einen neuen längsten Weg, der Länge $\ell + 1$ über den vorherigen Endknoten zu diesem Nachbarknoten.

=> Es ex. ein Weg der Länge k im Graphen G.

Sei e der Endknoten dieses max. Weges W in G. Dann liegen alle Adjazenzknoten von e ebenfalls in W. Für den Weg s-e gilt somit, dass er Länge k hat und alle Nachbarknoten von e enthält somit auch s ein Nachbar von e ist.

Geht man also den Weg s-e der Länge k und von e-s mit Länge 1 so erhält man einen Kreis der Länge $k+1$.

$\square$

Aufgabe 3.)

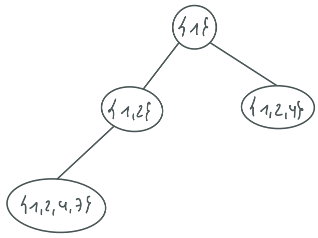
(i) Breitensuche ($S=1$):

$Q = \{1\}$

$Q = \{1,2\}$

$Q = \{1,2,4\}$

$Q = \{1,2,4,7\}$



Erste Zusammenhangskomponente mit $S=1$. Weil $G \setminus Q \neq \emptyset$ wähle neuen Startknoten.

$S = 3$

$Q = \{1,2,4,7,3\}$

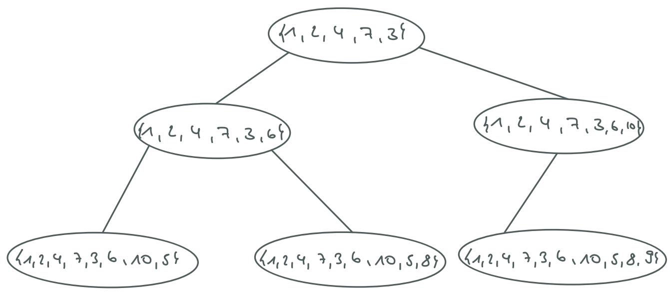
$Q = \{1,2,4,7,3,6\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,10\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,10,5\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,10,5,8\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,10,5,8,9\}$



$V \setminus Q = \emptyset \Rightarrow$ Fertig! ✓

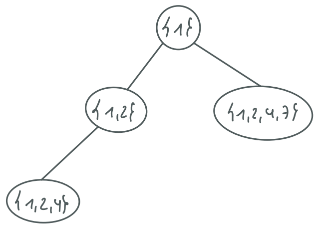
(ii) Tiefensuche $(S=1)$:

$Q = \{1\}$

$Q = \{1,2\}$

$Q = \{1,2,4\}$

$Q = \{1,2,4,7\}$



Erste Zusammenhangskomponente mit $S=1$. Weil $G \setminus Q \neq \emptyset$ wähle neuen Startknoten.

$S = 3$

$Q = \{1,2,4,7,3\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,5\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,5,8\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,5,8,10\}$

$Q = \{1,2,4,7,3,6,5,8,10,9\}$

$V \setminus Q = \emptyset \Rightarrow$ Fertig!