Aufgaben für Algorithmische Mathematik 1

Aufgabe 1.)

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i b^i = (\dots z_1 z_0 z_{-1} \dots)_b$$

(a) Zz.: $(0.\overline{(b-1)})_b := (0.(b-1)(b-1)\dots)_b = 1$

Dann gilt: $z_0 = 0$, $z_i = (b-1)$ für $i \in \mathbb{Z}_{<0}$

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} (b-1) \cdot b^i = \sum_{i=-\infty}^{-1} b^{i+1} - b^i \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \lim_{n \to \infty} b^0 - b^{-n} = b^0 \overset{\text{Für } b \neq 0}{=} 1$$

(b) $\left(\frac{1}{10}\right)$: folglich wäre die Darstellung $\frac{1}{10} = 0.0\overline{0011}$

$0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2 \quad 0$
$\boxed{0{,}2} \cdot 2 = 0{,}4 \quad 0$
$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \quad 0$
$0 \cdot 8 \cdot 2 = 0{,}6 \quad 1$
$0 \cdot 6 \cdot 2 = \boxed{0{,}2} \quad 1$

Aufgabe 2.)

Ein 2-Byte-Rechner mit Gleitkomma-Arithmetik und

interne Zahlendarstellung: $|\overset{\text{Vorzeichen}}{s}|\overbrace{m_1 \dots m_9}^{\text{Mantisse}}|\underbrace{e_1 \dots e_6}_{\text{Exponenten}}|$

normalisiert: $1 \le m_1 < b = 2$ $\quad -31 \le e \le 31 \overset{\text{bias}}{\Rightarrow} 1 \le e \le |e_{min}| + e_{max} + 1$

hidden-bit: $(b=2)$

Rechner-Bits: $(-1)^s \cdot (1.m_1 \dots m_9) \cdot 2^e$: $s \in \{0,1\}$, $1 \le e \le 63$

(a) $(13)_{10} = (1101)_{2,4} \cdot 2^0 \xRightarrow{\text{Normalisieren}} (.1101)_{2,4} \cdot 2^4 \xRightarrow{\text{hidden-bit}} (.1010)_{2,4} \cdot 2^4$

$\Rightarrow$ wahre Exponent $= 4 = \underbrace{36}_{\text{Charakteristik}} - \underbrace{32}_{\text{bias}} \Rightarrow \tilde{e} = \underbrace{(100\,100)_{2,6}}_{\text{Charakteristik}}$

$\Rightarrow$ Mantisse $= (1\,0100\,\,0000)_{2,9}$

$(13)_{10} = |\underbrace{0}_{+}|1\,0100\,0000|100\,100|$

$(42.125)_{10} = (40)_{10} + (0.125)_{10} = (101010.001)_{2,9} \cdot 2^0$

$\xRightarrow{\text{norm.}} (.101010001)_{2,9} \cdot 2^6 \xRightarrow{\text{Hidden-Bit}} (.010100010)_{2,9}$

$\Rightarrow$ Charakteristik $= (38)_{10} = (100\,110)_{2,6}$

$\Rightarrow$ Mantisse $= (.010100010)_{2,9}$

$(42.125)_{10} = |0|010100010|100110|$

$(\frac{1}{10})_{10} = (.0\overline{0011})_2 \cdot 2^0 = (000110011)_{2,9} \cdot 2^0 \xRightarrow{\text{norm.}} (.110011000)_{2,9} \cdot 2^{-3}$

$\xRightarrow{\text{hidden-Bit}} (.100110000)_{2,9} \cdot 2^{-3}$

$\Rightarrow$ Charakteristik $= (29)_{10} = (011101)_{2,6}$

$\Rightarrow$ Mantisse: $(.100\,11\,0000)_{2,9}$

$(\frac{1}{10})_{10} = |0|100\,11\,0000|011\,101|$

$|\underbrace{1}_{-}|\underbrace{\overset{1}{}0110\,10111}_{(727)_{10}}|\underbrace{001101}_{13-32=-19}| = -(727) \cdot 2^{-19} = 0{,}0013866424\,56$

b.) Es stehen 16-Bit zur Darstellung zur Verfügung

↳ 1-Bit = Vz $\Rightarrow (2^1)$
↳ 9-Bit für Mantisse (2^9)
↳ 6-Bit für Exponenten (2^6)

$\Big\}\ 2^1 \cdot 2^9 \cdot 2^6 = 2^{16}$ Möglichkeiten c.) $z_{max} = 10|\overset{1}{}\underbrace{11111111111}_{2047}|\underbrace{111111}_{63-32}| = (2047)_{10} \cdot 2^{31} =$

$= 4292870144$

$|z|_{min} = 10|\overset{1}{}\underbrace{0000000000}|\underbrace{000001}_{1-32=-31}| = 2^{-31}$

d.) Def. Maschinengenauigkeit:

- Bezeichnet den Rundungsfehler beim Rechnen mit Gleitkommazahlen (floats)
- Für die Darstellung einer Zahl stehen nur endlich viele Bits für den Exponenten und die Mantisse zur Verfügung.

Deshalb können bestimmte Zahlen nicht beliebig genau dargestellt werden.

Somit ist die Maschinengenauigkeit der größte relative Rundungsfehler.

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot b^{1-t}$, für t-stellige Mantissen

In unserem Beispiel mit 9-stelliger Mantisse und Basis 2 ergibt sich:

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 2^{1-9} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-8} = 2^{-1} \cdot 2^{-8} = 2^{-9}$

Aufgabe 03:

a) $((a+b)(a-b))^2 = (a+b)^2 * (a-b)^2$

$= (a^2+2ab+b^2) * (a^2-2ab+b^2)$

$= (a^2+b^2)^2 - 4(ab)^2$

$(a^2+b^2)^2 - 4(ab)^2 = a^4 + 2(ab)^2 + b^4 - 4(ab)^2$

$= a^4 - 2(ab^2) + b^4$

$= (a^2-b^2)^2$

$(a^2-b^2)^2 = (a^2 - ab + ab + b^2)^2$

$= ((a+b)(a-b))^2$

b) $a = 10^6 + 1 = 1.000.000 + 1 = 1.000.001$

$b = 10^6 - 2 = 1.000.000 - 2 = 999.998$

I: $((a+b)(a-b))^2 = ((1.000.001 + 999.998)(1.000.001 - 999.998))^2$

$= (1.999.999 * 3)^2$

$= 5.999.997^2 = 35.999.964.000.009$

kaufmännische Rundung

$\approx 35.999.964.000.000 \approx 3{,}5999964 * 10^{12}$

II: $(a^2+b^2)^2 - 4(ab)^2 = (1.000.001^2 + 999.998^2)^2 - 4 * (1.000.001 * 999.998)^2$

$\approx (1.000.002.000.000 + 999.996.000.000)^2 - 4(999.999.000.000)^2$

$\approx 3.999.992.000.000.000.000.000.000 - 4 * 999.998.000.000.000.000.000.000$

$\approx 3.999.992.000.000.000.000.000.000 - 3.999.992.000.000.000.000.000.000$

≈ 0

III: $(a^2-b^2)^2 = (1.000.001^2 - 999.998^2)^2$

$\approx (1.000.002.000.000 - 999.996.000.000)^2$

$\approx (6.000\,000)^2 \approx 36.000.000.000 \approx 3{,}6 * 10^{10}$

c) relativer Fehler: $\left| \frac{z - rd(z)}{z} \right|$

$z = 35.999.964.000.009$

I: $\left| \frac{35.999.964.000.009 - 35.999.964.000.000}{35.999.964.000.009} \right| = 0{,}000\,000\,000\,000\,25$

II: $\left| \frac{35.999.964.000.009 - 0}{35.999.964.000.009} \right| = 1$

III: $\left| \frac{35.999.964.000.009 - 3{,}6 * 10^{10}}{35.999.964.000.009} \right| = 0{,}998999998999992$

Der relative Fehler ist bei II & III so groß, weil in der Rechnung selber stark gerundet wurde, was I nicht der Fall war & dementsprechend ist der relative Fehler klein.