Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2021
Prof. Dr. Jürgen Dölz
David Ebert

UNIVERSITÄT BONN

Blatt 1

Abgabe **Montag, 25.10.21, 10:00**.

Aufgabe 1. (Zahlensysteme)

a) Stellen Sie die Zahl $(947)_{10}$ als Binärzahl, Oktalzahl und als 11-adische Zahl dar. Geben Sie die Dezimaldarstellung von $(11001011)_2$ an.

b) Schreiben Sie folgende Zahlen in Hexadezimaldarstellung: $(10001101)_2$, $(01100111)_2$, $(01011110)_2$ (Eine Binärzahl mit 8 Bits nennt man auch ein „Byte“).

c) Welcher arithmetischen Operation entspricht im b-adischen Zahlensystem das Verschieben der Ziffern einer Zahl nach links, also

$$(z_{n-1}\dots z_1 z_0)_b \mapsto (z_{n-2}\dots z_1 z_0 0)_b\,?$$

Welcher entspricht die Verschiebung nach rechts, also zu $(0z_{n-1}\dots z_2 z_1)_b$?

d) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a_1, a_2 bezüglich unterschiedlicher Basen $b_1 > 1$ und $b_2 > 1$, aber mit der *identischer* Ziffernfolge, also

$$a_1 = (z_{n-1}z_{n-2}\dots z_0)_{b_1} \quad \text{und} \quad a_2 = (z_{n-1}z_{n-2}\dots z_0)_{b_2}\,.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $b_1 > b_2$, so ist $a_1 > a_2$.
2) Falls $a_1 > a_2$, so ist $b_1 > b_2$.

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2. (Vorzeichen-Betrag-Darstellung mit fester Länge)

Gegeben sei eine ganze Zahl a in Dezimaldarstellung. Weiterhin wird ein Zahlenformat vorgegeben, bestehend aus einer Basis b, einer Anzahl n an zur Verfügung stehender Stellen und der Angabe `signed` oder `unsigned`. Bei `signed` Formaten wird die führende Stelle zur Codierung des Vorzeichens verwendet ($z_{n-1} = 0$ positiv, $z_{n-1} > 0$ negativ), die restlichen für den Betrag. Geben Sie jeweils den gültigen Zahlenbereich sowie, falls a in diesem Bereich liegt, die Darstellung von a im gegebenen Format an.

a) $a = -385$ $\quad b = 2$, $n = 10$, `signed`.

b) $a = 436$ $\quad b = 3$, $n = 8$, `unsigned`.

c) $a = 192$ $\quad b = 4$, $n = 4$, `unsigned`.

d) $a = 192$ $\quad b = 2$, $n = 8$, `signed`.

e) $a = -0$ $\quad b = 6$, $n = 3$, `signed`.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Zweierkomplementdarstellung)

a) Gegeben seien die Zahlen $a = (96)_{10}$ und $b = (-73)_{10}$. Schreiben Sie beide Zahlen in Zweierkomplementdarstellung mit $n = 8$ Stellen.

b) Berechnen Sie sowohl die Summe $a + b$ als auch die Differenz $a - b$ in der Zweierkomplementdarstellung (benutzen Sie dafür nur das Zweierkomplement und schriftliche Addition). Als welche Dezimalzahl würde das Ergebnis jeweils interpretiert werden?

c) Gegeben sei eine Zahl $(z_{n-1}z_{n-2}\dots z_1z_0)_{K_2}$ in Zweierkomplementdarstellung mit n Stellen. Wie sieht dieselbe Zahl aus, wenn $(n+1)$ Stellen für das Zweierkomplement zur Verfügung stehen? Unterscheiden Sie zwischen positiven und negativen Zahlen und beweisen Sie Ihre Antwort.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 4. (Modulo-Operator)

a) Implementieren Sie eine Funktion, die zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ als Parameter erhält, und die ganzen Zahlen q und r aus der Division mit Rest, das heißt $m = q\,n + r$ mit $r < n$, ausgibt. Nutzen Sie dafür nur Kontrollausdrücke, sowie Addition und Subtraktion (nicht den nativen mod-Operator). Stellen Sie durch eine entsprechende Logik sicher, dass nur positive Zahlen verarbeitet werden. Schreiben Sie weiterhin ein Programm, das zwei Zahlen einliest und der implementierten Funktion als Argument übergibt.

b) Implementieren Sie die gleiche Funktion auf eine zweite Art, bei der Sie nun (Ganzzahl-)Division und Multiplikation verwenden.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 1.)

a.) $(947)_{10}$ Binär: 1101 0011 11

		Rest
$\frac{947}{2}$	$= 423$	1
$423 : 2$	$= 211$	1
$211 : 2$	$= 105$	1
$105 : 2$	$= 52$	1
$52 : 2$	$= 26$	0
$26 : 2$	$= 13$	0
$13 : 2$	$= 6$	1
$6 : 2$	$= 3$	0
$3 : 2$	$= 1$	1
$1 : 2$	$= 0$	1

Oktal: 1663

		R
$947 : 8$	$= 118$	3
$118 : 8$	$= 14$	6
$14 : 8$	$= 1$	6
$1 : 8$	$= 0$	1

11-adisch: 791

		R
$947 : 11$	$= 86$	1
$86 : 11$	$= 7$	9
$7 : 11$	$= 0$	7

$\Rightarrow (791)_{11} = (947)_{10} = (1663)_8 = (11\ 0100\ 1111)_2$

$(1100\ 1011)_2 \Rightarrow \begin{matrix} 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 203$

(b) Fasse $(\underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{1101}_{(13 = D)})_2$ zusammen: $(8D)_{16}$

$(\underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{0111}_{7})_2 = (67)_{16}$

$(\underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1110}_{(14 = E)})_2 = (5E)_{16}$

(c) Das Verschieben einer Zahl nach links, entspricht der Multiplikation mit b

Bsp.: $(231)_{10} \cdot 10 = (2310)_{10}$ || $(011)_2 \cdot 2 = (0110)_2$

nach rechts der Division durch b.

Bsp.: $(231)_{10} : 10 = (023)_{10}$ || $(011)_2 : 2 = (001)_2$

d.) $b_1 > b_2 \Rightarrow a_1 > a_2$:

Bem. $(947)_{10} = (791)_{11}$ wir sehen also um die gleiche Zahl darzustellen benötigen wir eine geringere Ziffernfolge.

Außerdem gilt für eine Basis > 1: dass die Potenzfunktion monoton wachsend ist.

Folglich ist für $a \in \mathbb{N}_+$ mit $b_1 > b_2 \Rightarrow b_1^a > b_2^a$

Zumindest, falls die Zahlenfolge nicht trivial 0 ist.

Auch die Rückrichtung gilt:

$$a_1 > a_2 \Rightarrow (z_n z_{n-1} \dots z_0)_{b_1} > (z_n z_{n-1} \dots z_0)_{b_2} \Leftrightarrow b_1 > b_2$$

Aufgabe 2.)

(a) $a = -385 \quad b = 2 \quad n = 10$ signed

$[-2^8-1, 2^8-1] = [-256, 255] = I_1 \Rightarrow a \notin I_1$

(b) $a = 436 \quad b = 3 \quad n = 8$ unsigned

$[0, 3^8-1] = [0, 6560] = I_2, \; a \in I_2 \Rightarrow (436)_{10} = (01021011)_3$

				R
436	: 3	=	145	1
145	: 3	=	48	1
48	: 3	=	16	0
16	: 3	=	5	1
5	: 3	=	1	2
3	: 3	=	1	0
1	: 3	=	0	1

(c) $a = 192 \quad b = 4 \quad n = 4$ unsigned

$[0, 4^4-1] = [0, 255] = I_3 \Rightarrow (192)_{10} = (3000)_4$

				R
192	: 4	=	48	0
48	: 4	=	12	0
12	: 4	=	3	0
3	: 4	=	0	3

d.) $a = 192 \quad b = 2 \quad n = 8$ signed

$[-2^6-1, 2^6-1] = [-63, 63] = I_5 \Rightarrow a \notin I_5$

e.) $a = -0 \quad b = 6 \quad n = 3$ signed

$[-6^1-1, 6^1-1] = [-5, 5] = I_6 \Rightarrow a \in I_6 \quad -0 = (100)_6$

Aufgabe 3.)

(a) $a = (96)_{10} = (0110\ 0000)_{K_2}$

$b = (-73)_{10} = (1011\ 0111)_{K_2}$

$x - 128 = -78 \Leftrightarrow x = 55 \qquad (55)_{10} = (00110111)_2$

(b) $a + b = \begin{array}{l} (z_{n-1}\ z_{n-2} \dots z_1\ z_0)_{K_2} \\ + (\tilde{z}_{n-1}\ \tilde{z}_{n-2} \dots \tilde{z}_1\ \tilde{z}_0)_{K_2} \\ \hline = \end{array}$ wobei das „carry"-Bit an $z_{n-1} + \tilde{z}_{n-1}$ auf z_n ignoriert werden muss.

$a - b = a + (-b)$

$$(96)_{10} + (-73)_{10} = \begin{array}{r} (0110\ 0000)_{K_2} \\ + (1011\ 0111)_{K_2} \\ \hline (0001\ 0111)_{K_2} \end{array} = (23)_{10}$$

$(96)_{10} - (-73)_{10}$

$$= (96)_{10} + (73)_{10} = \begin{array}{r} (0110\ 0000)_{K_2} \\ + (0100\ 1001)_{K_2} \\ \hline (1010\ 1001)_{K_2} \end{array} = (-87)_{10}$$

Hier wird das falsche Ergebnis berechnet, weil $(96)_{10} + (73)_{10} = (169)_{10}$

und $169 \notin [-2^7, 2^7 - 1]$

c.) Für $(z_{n-1} \dots z_0) \geq 0 \Leftrightarrow z_{n-1} = 0$ ist $(z_n z_{n-1} \dots z_0) = (0\ \overbrace{z_{n-1}}^{0} \dots z_0)$

Trivial, da die Zahl nicht verändert wird, wenn $0 \cdot 2^n$ dazu addiert wird.

Für $(z_{n-1} \dots z_0) < 0 \Leftrightarrow z_{n-1} = 1$ ist $(z_n z_{n-1} \dots z_0) = (1\ \overbrace{z_{n-1}}^{1} \dots z_0)$

$$= -1 \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} z_i \cdot 2^i = 2^{n-1}(-2+1) + \sum_{i=0}^{n-2} z_i \cdot 2^i$$

$$= -1 \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} z_i \cdot 2^i = (1\ z_{n-2} \dots z_0) = (z_{n-1} \dots z_0)$$

$\square$