Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2021
Prof. Dr. Jürgen Dölz
David Ebert

UNIVERSITÄT BONN

Blatt 3

Abgabe **Montag, 08.11.21, 10:00**.

Aufgabe 1. (Stabilität, Kondition)

Schreiben Sie folgende Ausdrücke so um, dass Auslöschung bei der Subtraktion betragsmäßig ähnlicher Zahlen vermieden wird. Für Argumente in welchem Bereich tritt dies jeweils auf? Berechnen Sie außerdem die absoluten und relativen Konditionszahlen und geben Sie an, wo die Funktionsauswertung qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist. Machen Sie sich so noch einmal den Unterschied zwischen Stabilität und Kondition klar.

a) $f_1(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad |x| < \pi$

b) $f_2(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1, \quad x \neq -1$

c) $f_3(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

Hinweis: Durch geschickte Erweiterung können Differenzen wegfallen. Nutzen Sie außerdem die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Zur Berechnung der Konditionszahlen dürfen Sie vorraussetzen, dass die Funktionen differenzierbar sind. Verwenden Sie die bekannten Ableitungsregeln.

(1,5+1+1,5 Punkte)

Aufgabe 2. (Instabilität)

In dieser Aufgabe sehen wir ein Beispiel für ein Berechnungsproblem, das instabil ist und bei einer unbedarften Implementierung mit Fließkomma-Arithmetik zu katastrophalen Fehlern führt.
Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge a_n rekursiv durch

$$a_0 := c - 1, \quad a_n := n a_{n-1} - 1. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt $a_n = c\, n! - \int_1^\infty x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{wenn } c < e, \\ 0 & \text{wenn } c = e, \\ \infty & \text{wenn } c > e. \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Instabilität: Betrachtet man den Fall $c = e$ so führt eine kleine Änderung von c zu einer großen Änderung von $\lim_{n\to\infty} a_n$. Die Abbildung $c \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$ ist also instabil um $c = e$ (sie ist auch unstetig).

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3. (Dreitermrekursion)

Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Minimallösung einer homogenen Dreitermrekursion einer homogenen Dreitermrekursion

$$\hat{p}_k = a\hat{p}_{k-1} + b\hat{p}_{k-2}, \qquad k = 2, 3, ...$$

zu normierten Startwerten $p_0^2 + p_1^2 = 1$ und sei $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine dominante Lösung dieser Rekursion mit $q_0^2 + q_1^2 = 1$.

a) Zeigen Sie, dass sich jede Lösung $\{\hat{p}_k\}$ der homogenen Dreitermrekursion schreiben lässt gemäß $\hat{p}_k = \alpha p_k + \beta q_k$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Es gelte $\hat{p}_n = 0$ und $\hat{p}_{n-1} = 1$. Bestimmen Sie die Koeffizienten α, β durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha p_n + \beta q_n &= 0, \\ \alpha p_{n-1} + \beta q_{n-1} &= 1. \end{aligned}$$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4. (Dreitermrekursion-Algorithmen)

Implementieren Sie die Algorithmen aus Kapitel 3:

a) (naive) Dreitermrekursion

b) geschlossene Lösung

c) Miller-Algorithmus

und nutzen Sie die Startwerte aus dem Beispiel, um die Abbildungen des Kapitels zu replizieren.

Hinweis: Falls Sie das Skript aus eCampus nutzen, beachten Sie bitte, dass es im Algorithmus zur geschlossenen Lösung Vorzeichenfehler in den Input-Variablen `a` *und* `b` *gibt, der Zähler im letzten Schritt des Miller-Algorithmus $\hat{p}_k$ lauten muss und die Startwerte des Beispiels nicht normiert sind.*

(4 Punkte)