



Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2021
Prof. Dr. Jürgen Dölz
David Ebert



Blatt 8

Abgabe **Montag, 13.12.21, 10:00.**

Aufgabe 1. (Kreise in Graphen)

Sei $G = (V, E, \psi)$ ein ungerichteter Graph mit $n := |V|$ und $m := |E|$. $\delta(v)$ ist die Menge der Nachbarknoten von v .

- Sei $|\delta(v)| \geq 3$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass dann $m \geq \frac{3}{2}n$.
- Sei $n \leq 9$ und $|\delta(v)| \geq 3$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass dann ein Kreis mit Länge höchstens 4 existiert.
- Zeigen Sie, dass für $m \geq n + 4$ der Graph G zwei kantendisjunkte Kreise enthält und dass die Aussage nicht mehr stimmt für $m < n + 4$.

Hinweis: Führen Sie Induktion über n und nutzen Sie a) und b).

(0,5+1+2,5 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $k > 1$ und $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|\delta(v)| \geq k$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass G dann einen Kreis der Länge $k + 1$ oder größer enthält.

Hinweis: Betrachten Sie einen Weg maximaler Länge.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Zusammenhangskomponenten)

Betrachten Sie den Graphen aus Abbildung 1. Bestimmen Sie seine Zusammenhangskomponenten, indem Sie einmal die Breitensuche (BFS) und einmal die Tiefensuche (DFS) anwenden. Markieren Sie für jede Suche den gewählten Startknoten und die Reihenfolge, in der darauffolgende Knoten besucht werden (analog zu dem Beispiel aus der Vorlesung). Geben Sie für jeden Schritt den Zustand von Q an.

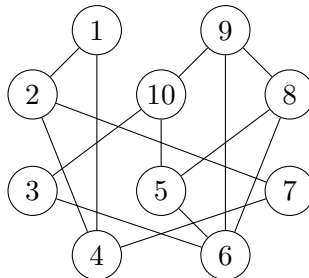


Abbildung 1: Ein ungerichteter Graph.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4. (Programmieraufgabe)

Im Anhang befinden sich 3 Dateien mit den Geodaten von Poppelsdorf. Die Datei `xcoord` enthält die x-Koordinaten, `ycoord` entsprechend die y-Koordinaten und die Datei `edges`

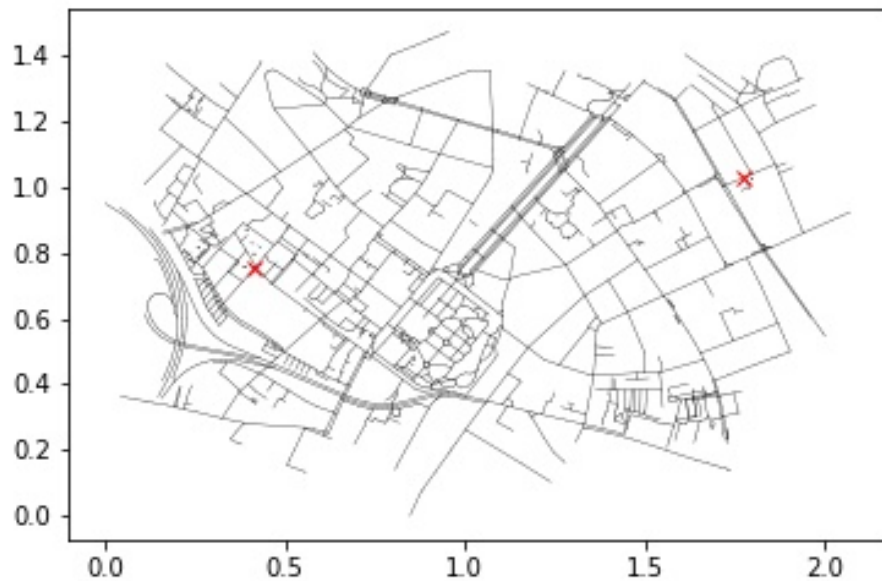


Abbildung 2: Kartenausschnitt

enthält pro Zeile jeweils eine Kante, getrennt durch ein Komma. Die Dateien können von jedem Texteditor (Windows: Editor) geöffnet werden. Dies ist für die Bearbeitung aber nicht notwendig. Ziel ist es die mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra den kürzesten Weg von Knoten mit Index 1758 (Eingang zum Hörsaalzentrum Poppelsdorf) zu Knoten 584 (Mensa Nassestraße) zu finden.

- a) Schreiben Sie ein Algorithmus, der die Geodaten ausliest und als Karte darstellt. Dafür kann das Python-Paket `csv` genutzt werden. Kennzeichnen sie den Start- und Endpunkt des gesuchten Wegs. Das Zwischenergebnis solle aussehen wie Abbildung 2.
- b) Bilden Sie Gewichte für die Kanten, indem Sie die euklidische Norm des Vektors, der die Kante repräsentiert, berechnen.
- c) Implementieren Sie den Algorithmus von Dijkstra und berechnen Sie damit die kürzesten Wege ausgehend vom Startpunkt. Werten Sie p aus ausgehend vom Endpunkt, um den gesuchten Weg zu finden und zeichnen Sie diesen in die Karte ein.

(4 Punkte)