Aufgaben für Algorithmische Mathematik 1

Aufgabe 1.)

(a) $x_n := (1+\varepsilon)^{-n} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$, $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} (1+\varepsilon)^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$|x_{n+1} - x_*| = \left|\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\varepsilon)}}_{\geq 0}\right| = \underbrace{\frac{1}{1+\varepsilon}}_{<1} \cdot \left|\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right| \leq c \cdot |x_n - x_*|$$

Für jedes $c \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$.

Damit hat x_n für $\frac{1}{1+\varepsilon} \leq c < 1$ lineare Konvegentordnung.

(b) $x_n := 2^{-2^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}}}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}}}} = 0$

$$|x_{n+1} - x_*| = \left|\frac{1}{2^{2^{\frac{n+1}{2}}}}\right| = \left|\frac{1}{2^{\underbrace{2^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}_{\sqrt{2}}}}\right| = \left|\left(\frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}\right| = |x_n - x_*|^{\sqrt{2}}$$

Somit hat x_n Konvegentordnung $\sqrt{2}$

(c) $x_n := \frac{1}{n^2}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$|x_{n+1} - x_*| = \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| = \left|\frac{1}{n^2 + \underbrace{2n+1}_{>0}}\right| \leq \frac{1}{2n+1} \cdot \left|\frac{1}{n^2}\right|$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

Somit hat x_n eine superlineare Konvegentordnung.

(d) $\phi(x) = \frac{x}{\ln(\frac{1}{x})}$ $\qquad x_0 = \frac{1}{3}$ $\qquad x_{n+1} = \phi(x_n)$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

IA: $i = 1$: $\quad x_n = \phi(x_0) = \phi(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{3}}{\ln(\frac{1}{\frac{1}{3}})} = \frac{\frac{1}{3}}{\ln(3)} = \frac{1}{3\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3^3)} = \frac{1}{\ln(27)} < \frac{1}{3}$

IV: Für ein bel. aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $x_n < x_{n-1}$

IS: $n \curvearrowright n+1$:

$x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{x_n}{\ln(\frac{1}{x_n})}$

mit IV: $x_n < x_{n-1} \overset{\text{monotonie } \frac{1}{x}}{\Rightarrow} \frac{1}{x_{n-1}} < \frac{1}{x_n} \overset{\text{monotonie } \ln}{\Rightarrow} \ln(\frac{1}{x_{n-1}}) < \ln(\frac{1}{x_n})$

$\Rightarrow \frac{x_{n-1}}{\ln(\frac{1}{x_n})} < \frac{x_{n-1}}{\ln(\frac{1}{x_{n-1}})} \overset{x_n < x_{n-1}}{\Rightarrow} \frac{x_n}{\ln(\frac{1}{x_n})} < \frac{x_{n-1}}{\ln(\frac{1}{x_{n-1}})}$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = \phi(x_n) < \phi(x_{n-1}) = x_n$

x_n ist beschränkt durch das Infimum 0 und streng monoton fallend $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$|x_{n+1}-x_*| = |\Phi(x_n)| = \left|\frac{x_n}{\ln(\frac{1}{x_n})}\right| = \left|\frac{1}{\ln(\frac{1}{x_n})}\cdot x_n\right| = \left|\frac{1}{\ln(\frac{1}{x_n})}\right|\cdot|x_n|$ mit

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\ln\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\ln(\frac{1}{x_n})}\right| = 0$

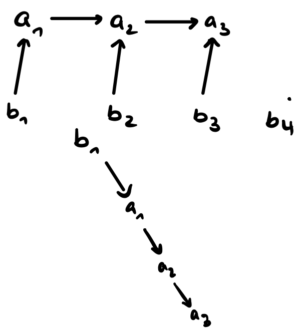
Somit hat x_n eine superlineare Konvergenzordnung.

(e) $x_{n+1} := 2 + (x_n-1)^{\frac{1}{2x_n-4}}\cdot(x_n-2)^2$ mit $x_0 = \frac{5}{2}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$

$|x_{n+1}-x_*| = |\cancel{2} + (x_n-1)^{\frac{1}{2x_n-4}}\cdot(x_n-2)^2 \cancel{- 2}| = |(x_n-1)^{\frac{1}{2x_n-4}}\cdot(x_n-2)^2|$

$|x_{n+1}-x_*| = |(x_n-1)^{\frac{1}{2x_n-4}}\cdot(x_n-2)^2| \overset{\text{monoton}}{\leq} |(x_{n-1}-1)^{\frac{1}{2x_{n-1}-4}}\cdot(x_{n-1}-2)^2| = |x_n - x_*|$

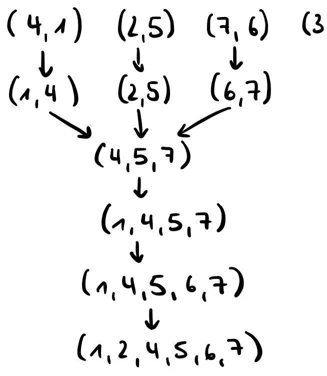
Aufgabe 2.)



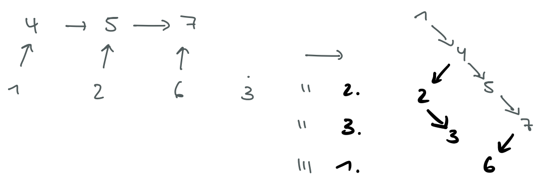
Betrachte den Hauptteil: b_1, a_1, a_2, a_3 als Binärbaum.

Füge b_3, b_2, b_4 durch binäres Einfügen hinten beginnend bei b_1 bis exclusiv a_i.

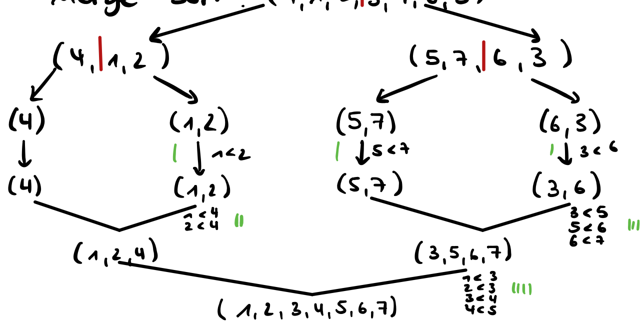
(b) Merge-Insertion
(4, 1, 2, 5, 7, 6, 3)



$\Rightarrow$ 13 Vergleiche



Merge-Sort: (4, 1, 2 | 5, 7, 6, 3)



$\Rightarrow$ 12 Vergleiche

Algorithm 1 (Minimum)

```
1: min := A[1]
2: for i ← 1 to n do
3:    if min > A[i] then
4:       min := A[i]
5:    end if
6: end for
7: return min
```

(a)

Best-Case = Aveage-Case = Worst-Case = n Aufrufe = $O(n)$

Zeile 3 wird in jedem Schleifenaufruf ausgeführt und die Schleife wird immer genau n mal ausgeführt.

Nein, weil ich in einem unsortierten Array jedes Element mindestens 1x betrachten muss.

Einzige Ausnahme: Die Schleife muss offensichtlich erst bei $i=2$ anfangen, da für $i=1$: $m = A[1] > A[i] = A[1]$ trivialerweise falsch ist.

(b)

Best-Case : $A[1] = \min(A[1,\dots,n])$, dann wird die Zeile kein mal ausgeführt.

Worst-Case : $A[1,\dots,n]$ ist in umgekehrter Reihenfolge sortiert, dann wird Zeile 4 $(n-1)$-mal ausgeführt.

Aveage-Case: In jedem Durchlauf wird die Anweisung ausgeführt, wenn $A[k] = \min(A[1],\dots,A[k])$. Für $k=1 : 1$, $k=2 : \frac{1}{2}$, ..., $k=n : \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i}{n} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{\cancel{n}(n-1)}{2\cancel{n}} = \frac{n-1}{2}$$

$\Rightarrow$ Im Aveage-Case wird die Zeile $\frac{n-1}{2}$ mal wird dies ausgeführt.