Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2021
Prof. Dr. Jürgen Dölz
David Ebert

UNIVERSITÄT BONN

Blatt 2

Abgabe **Montag, 01.11.21, 10:00**.

Aufgabe 1. (Festkommadarstellung)

Die Festkommadarstellung einer Zahl $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zur Basis $b \geq 2$ ist gegeben durch Ziffern $\{z_i | z_i \in \mathbb{N}, 0 \leq z_i \leq b-1, i \in \mathbb{Z}\}$, sodass

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i \, b^i = (\ldots z_1 z_0 . z_{-1} z_{-2} \ldots)_b \ .$$

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$(0.\overline{(b-1)})_b := (0.(b-1)(b-1)\ldots)_b = 1 \ .$$

b) Zeigen sie, dass die Zahl $1/10$ keine endliche Festkommadarstellung zur Basis $b = 2$ besitzt.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. (Maschinenzahlen in Gleitkommadarstellung)

Gegeben sei ein Zwei-Byte-Rechner (1 Byte = 8 Bit) mit Gleitkomma-Arithmetik und interner Zahldarstellung

$$|s|m_1 m_2 m_3 \ldots m_9|e_1 e_2 e_3 \ldots e_6| \ ,$$

mit einem Vorzeichen-Bit s, 9 Bits m_i für die Mantisse, sowie 6 Bits e_j für den Exponenten (in dieser Reihenfolge).

Die Zahldarstellung ist *normalisiert* und arbeitet mit einem *hidden bit*, d.h. die 1 vor dem Komma wird nicht gespeichert. Der Exponent soll im Bereich $-31 \leq e \leq 31$ darstellbar sein, der gespeicherte Exponent ist stets positiv und wird dafür mit einem Bias von 32 versehen.

Die Rechner-Bits repräsentieren also die Zahl

$$z = (-1)^s \cdot (1.m_1 m_2 \ldots m_9)_2 \cdot 2^{\tilde{e}-32} \quad \text{mit} \quad \tilde{e} = \sum_{j=1}^{6} e_j \cdot 2^{6-j} \ .$$

Für die Zahl 0 wird das Bitmuster $|0|0\ldots0|0\ldots0|$ verwendet, außerdem wird noch die Exponentenbitfolge 000000 zur Kennzeichnung von Sonderfällen verwendet – sie steht also nicht für die Zahldarstellung zur Verfügung.

a) Welche Darstellung haben die Zahlen 13, 42.125 und 1/10? Für den Fall, dass eine Zahl nicht exakt darstellbar ist, werden die überzähligen Stellen einfach abgeschnitten. Ermitteln Sie außerdem die zu der Bitfolge

$$|1|011010111|001101|$$

gehörige Dezimalzahl.

b) Wie viele Zahlen können in diesem Gleitkomma-Format dargestellt werden? Die Bitkombinationen für Sonderfälle seien zu vernachlässigen.

c) Geben Sie die größte darstellbare Zahl $z_{\max}$ und die betragsmäßig kleinste Zahl $\bar{z} > 0$ an. Geben Sie jeweils auch die zugehörigen Bitfolgen an.

d) Definieren Sie den Begriff „Maschinengenauigkeit" und geben Sie die Maschinengenauigkeit des Rechners an.

(1+0,5+0,5+2 Punkte)

Aufgabe 3. (Rundung)

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke mathematisch äquivalent sind:

- $((a+b)(a-b))^2$
- $(a^2+b^2)^2 - 4(ab)^2$
- $(a^2-b^2)^2$

b) Seien nun $a = 10^6+1$ und $b = 10^6-2$. Multiplizieren Sie damit obige Ausdrücke aus. *Jedes* Zwischenergebnis, das nicht mit 10 gültigen Stellen dargestellt werden kann, soll auf 10 Stellen (kaufmännisch) gerundet werden.

c) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Resultate (2 gültige Ziffern genügen). Was ist der Grund für dieses Verhalten.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 4. (Maschinengenauigkeit)

a) Schreiben Sie in Python je eine Funktion, welche Ihnen die Maschinengenauigkeit `eps`, die kleinste darstellbare positive Zahl $x_{\min}$ und die größte darstellbare positive Zahl $x_{\max}$ ausgibt. Für die Funktion

`[x]=geteps`,

setzen Sie $y = 1$ und halbieren y solange bis $1+y = 1$ gilt. Ist diese Bedingung erfüllt so ist `eps` $= 2y$. Zur Bestimmung von $x_{\min}$ schreiben Sie eine Funktion

`[x]=getmin`,

die den Startwert $y = 1$ solange halbiert, bis $y = 0$ ist. Wiederum ist $2y = x_{\min}$. Versuchen Sie den Wert $x_{\max}$ abzuschätzen mit der Funktion

`[x]=getmax`.

Starten Sie hierfür mit $y = 1$ und verdoppeln Sie y, solange $y <$ +`inf` ist. Warum ist dies nicht notwendigerweise die größte darstellbare Zahl?

b) Verwenden Sie die zentrale Differenz

$$\frac{\cos(x_0+h) - \cos(x_0-h)}{2h}$$

um die erste Ableitung von $\cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ mit den Schrittweiten $h_i = 2^{-i},\ i \in \{0, 1, \cdots, 30\}$, zu approximieren. Plotten Sie anschliessend den absoluten und den relativen Fehler bezüglich h_i in einer log-log-Skala. Was beobachten Sie?

(2+2 Punkte)

Veranstaltungshinweis der Gleichstellungs-AG

'Tea time with women in mathematics' zum Thema 'Studieren in Bonn' am 30. Oktober, 15-18 Uhr. Eingeladen sind alle weiblichen, nicht-binären, intersexuellen und trans* Mathematiker*innen, insbesondere Studienanfängerinnen! Nähere Infos und Anmeldung: `https://www.hcm.uni-bonn.de/events/eventpages/2021/studieren-in-bonn/`