Aufgaben für Algorithmische Mathematik 1

(a) $f_1(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$, $|x| < \pi$

Zwecks Definiertheit wird $x \neq 0$ vorausgesetzt, da sonst $\frac{1-\cos(0)}{\sin(0)}$ ↯

$$\overset{|x|<\pi \Rightarrow -1<\cos(x)}{=} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{\sin(x)(1+\cos(x))} = \frac{1^2-\cos^2(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{\sin^2(x) + \cancel{\cos^2(x)} - \cancel{\cos^2(x)}}{\sin(x)(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))} \overset{0<x<\pi \Rightarrow \sin(x)\neq 0}{=} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

- Die Auslöschung tritt für $\lim_{x\to 0} |1-\cos(x)| = |1-\cos(\lim_{x\to 0} x)| = |1-\cos(0)| = |1-1|$

- $$K_{abs} = |f'(x)| \overset{|x|<\pi \Rightarrow 1+\cos(x)\neq 0}{=} \left|\frac{\cos(x)\cdot(1+\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}\right| = \left|\frac{\cos(x)+\cos^2(x)+\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2}\right|$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \left|\frac{\cancel{\cos(x)+1}}{(\cos(x)+1)^{\cancel{2}}}\right| \overset{|x|<\pi \Rightarrow 1+\cos(x)\neq 0}{=} \left|\frac{1}{\cos(x)+1}\right|$$

- $$K_{rel} = \left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right| \overset{\text{s.o.}}{=} \left|\frac{\left(\frac{x}{\cos(x)+1}\right)}{\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)}\right| = \left|\frac{x}{\cos(x)+1} \cdot \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right| = \left|\frac{x\cdot\sin(x)}{1^2-\cos^2(x)}\right|$$

K_{abs} wird groß, wenn $|1+\cos(x)| \ll 1$: für $\lim_{x\to\pm\pi} \left|\frac{1}{\cos(x)+1}\right| = \infty$

K_{abs} wird klein, wenn $1 \ll |1+\cos(x)|$: für $\lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{\cos(x)+1}\right| = 1$

K_{rel} wird groß, wenn $|1-\cos^2(x)| \ll |x\cdot\sin(x)|$: für $\lim_{x\to\pm\pi} \left|\frac{1}{\cos(x)+1}\right| = \infty$

K_{rel} wird klein, wenn $|x\cdot\sin(x)| \ll |1-\cos^2(x)|$: für $\lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{\cos(x)+1}\right| = 1$

$\Rightarrow$ Die Funktionsauswertung ist für x nahe 0 gut und x nahe π schlecht konditioniert.

(b) $f_2(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$, $x \neq 1$

$$= \left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right]}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1}$$

$$= \frac{\left(\cancel{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{3}+\cancel{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2}+\cancel{\sqrt[3]{1+x}}-\cancel{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2}-\cancel{\sqrt[3]{1+x}}-1}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{1+x-1}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{x}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1}$$

- Die Auslöschung tritt für $\lim\limits_{x\to 0} |\sqrt[3]{1+x}-1| = |1-1|$

- $\kappa_{abs} = |f'(x)| = \left|\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right|$

- $\kappa_{rel} = \left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right| \overset{s.o.}{=} \left|\frac{\left(\frac{x}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)}{\left(\frac{x}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1}\right)}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{x}{x-\sqrt[3]{(x+1)^2}+1}\right|$

κ_{abs} wird groß, wenn $|3\sqrt[3]{(x+1)^2}| \ll |1|$: für $\lim\limits_{x\to -1} \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right| = \infty$

κ_{abs} wird klein, wenn $|1| \ll |3\sqrt[3]{(x+1)^2}|$: für $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{1}{\cos(x)+1}\right| = 0$

κ_{rel} wird groß, wenn $3|x-\sqrt[3]{(x+1)^2}+1| \ll |x|$: für $\lim\limits_{x\to -1} \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x-\sqrt[3]{(x+1)^2}+1}\right| = \infty$

κ_{rel} wird klein, wenn $|x| \ll 3|x-\sqrt[3]{(x+1)^2}+1|$: für $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x-\sqrt[3]{(x+1)^2}+1}\right| = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Die Funktionsauswertung ist für x nahe -1 schlecht und sonst gut konditioniert.

(c) $f_3(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\cdot\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x^2-x^2+1} = \sqrt{x^2-1}+x$$

$$= x+\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = x+\frac{\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Dies könnte man fortführen, um die Gefahr zur Auslöschung zu veringern.

- Die Auslöschung tritt für $\lim\limits_{x\to 1} |\sqrt{x^4-1}| = |\sqrt{1-1}|$

- $\kappa_{abs} = |f'(x)| = \left|1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right|$

- $\kappa_{rel} = \left|\frac{x\cdot f'(x)}{f(x)}\right| = \left|x\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right|$

κ_{abs} wird groß, wenn $|\sqrt{x^2-1}| \ll |x|$: für $\lim\limits_{x\to\pm 1} \left|1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right| = \infty$

κ_{abs} wird klein, wenn $|x| \ll |\sqrt{x^2-1}|$: für $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left|1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right| = 2$

κ_{rel} wird groß, wenn $|\sqrt{x^2+1}| \ll |x|$: für $\lim\limits_{x\to\pm 1} \left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right| = \infty$

κ_{rel} wird klein, wenn $|x| \ll |\sqrt{x^2+1}|$: für $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right| = 1$

$\Rightarrow$ Die Funktionsauswertung ist für $|x|$ nahe 1 schlecht und $|x|\to\infty$ gut.

Aufgabe 2.)

Sei $c \in \mathbb{R}$ $\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \; a_0 := c-1 \;,\; a_n := n a_{n-1} - 1$

(a) Zz.: $a_n = cn! - \int_1^\infty x^n \cdot e^{1-x}\,dx$

IA: $n = 1$:

$$a_1 = 1\cdot a_0 - 1 = (c-1)-1 = c-2 = c\cdot 1! - \int_1^\infty x^1 e^{1-x}\,dx = c - \int_1^\infty x\cdot e^1\cdot e^{-x}$$

$$= c - e\int_1^\infty x\cdot e^{-x}\,dx = c - e\cdot \lim_{a\to\infty}\int_1^a x\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= c - e\cdot \lim_{a\to\infty}\int_1^a x\cdot e^{-x}\,dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} c - e\cdot \lim_{a\to\infty}\left[-e^{-x}\cdot x \Big|_1^a + \int_1^a e^{-x}\,dx\right]$$

$$= c - e\cdot \lim_{a\to\infty}\left[(-e^{-a}\cdot a + e^{-1}) - e^{-x}\Big|_1^a\right]$$

$$= c - e\cdot \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{a}{e^a} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^a} + \frac{1}{e}\right]$$

$$= c - e\cdot \lim_{a\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{a+1}{e^a}}_{\to 0} + \frac{2}{e}\right] = c - e\cdot\frac{2}{e} = c-2$$

IV: Für ein bel. aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $a_n = cn! - \int_1^\infty x^n\cdot e^{1-x}\,dx$

IS: $n \curvearrowright n+1$: $a_{n+1} = (n+1)a_n - 1 \overset{\text{IV}}{=} (n+1)\left(cn! - \int_1^\infty x^n e^{1-x}\,dx\right) - 1$

$$= c(n+1)! - (n+1)\cdot\int_1^\infty x^n e^{1-x}\,dx - 1$$

$$= c(n+1)! - (n+1)\cdot e\cdot\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx - 1$$

$$= c(n+1)! - (n+1)\cdot e\cdot\left(\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx\right) - 1$$

$$= c(n+1)! - \underbrace{(n+1)\,e n!}_{(n+1)!\cdot e} - (n+1)\cdot e\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx - 1$$

$$= c\cdot(n+1)! - \int_0^\infty x^{n+1} e^{1-x}\,dx - \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\,dx$$

$$= c(n+1)! - \int_1^\infty x^{n+1} e^{1-x}\,dx \qquad \square$$

(b)

Zz.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & , c < e \\ 0 & , c = e \\ \infty & , c > e \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} c\cdot n! - \int_1^\infty x^n \cdot e^{1-x}\, dx = \lim_{n\to\infty} cn! - en! - e\int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} (c-e)n! - e\cdot \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \cdot e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} (c-e)n! - \underbrace{e\cdot \int_0^1 \lim_{n\to\infty} x^n \cdot e^{-x}}_{\to 0}\, dx$$

Fall $c < e$: $\lim\limits_{n\to\infty} (c-e)\cdot n! = -\lim\limits_{n\to\infty} n! = -\infty$

Fall $c = e$: $\lim\limits_{n\to\infty} (c-e)n! = \lim\limits_{n\to\infty} 0\cdot n! = 0$

Fall $c > e$: $\lim\limits_{n\to\infty} (c-e)n! = \lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$

Aufgabe 3.)

$p_0^2 + p_1^2 = 1 \quad$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = 0 \quad$ mit $q_0^2 + q_1^2 = 1$

a) IA: $k=2$

$\Rightarrow \hat{p}_2 = \alpha \cdot p_2 + \beta \cdot q_2 \quad$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\left| \begin{matrix} \alpha \cdot p_0 + \beta q_0 = \hat{p}_0 \\ \alpha \cdot p_1 + \beta q_1 = \hat{p}_1 \end{matrix} \right| \qquad \begin{matrix} \alpha + \beta = p_0 \\ \alpha A_1 + \beta A_2 = p_1 \end{matrix}$$

IA: $k=2$

$$\hat{p}_2 = \alpha \hat{p}_1 + \beta \hat{p}_0 = \alpha(\alpha p_1 + \beta q_1) + \beta(\alpha p_0 + \beta q_0)$$

$$= \alpha \cdot \alpha \cdot p_1 + \alpha\beta q_1 + \alpha\beta p_0 + \beta\beta q_0$$

$$= \alpha \underbrace{(\alpha p_1 + \beta p_0)}_{p_1} + \beta \underbrace{(\alpha q_1 + \beta q_0)}_{q_1}$$

$$= \alpha p_1 + \beta q_2$$

IV: Für alle $k \in \mathbb{N}: k \leq k+1$ gelte: $\hat{p}_k = \alpha p_k + \beta q_k$

IS: $k \rightsquigarrow k+1$

$$\hat{p}_{k+1} = \alpha \hat{p}_k + \beta \hat{p}_{k-1}$$

$$\overset{IV}{=} \alpha(\alpha p_k + \beta q_k) + \beta(\alpha p_{k-1} + \beta q_{k-1})$$

$$= \alpha(\alpha p_k + \beta p_{k-1}) + \beta(\alpha q_k + \beta q_{k-1})$$

$$= \alpha \cdot p_{k+1} + \beta q_{k+1}$$

b)
$$\left| \begin{matrix} \alpha p_n + \beta q_n = 0 \\ \alpha p_{n-1} + \beta q_{n-1} = 1 \end{matrix} \right| \Rightarrow \alpha = -\frac{\beta q_n}{p_n}$$

$$\Rightarrow -\frac{\beta q_n}{p_n} \cdot p_{n-1} + \beta q_{n-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(-\frac{q_n}{p_n} \cdot p_{n-1} + q_{n-1}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{-\frac{q_n}{p_n} p_{n-1} + q_{n-1}}$$