Mathias Mosca Spatz
Louisa Jakobs
Übungsgruppe 7

Aufgaben zu
Algorithmische Mathematik 1

Dozent: Prof. Dr. J. Dölz

Wintersemester 2021/2022

— Übungsblatt 5 —

Aufgabe 1

(a) Sei $x_n := (1+\varepsilon)^{-n}$ für ein $\varepsilon > 0$. Dies ist die geometrische Reihe und diese Konvergiert für $n \longrightarrow \infty$ gegen null. Damit haben wir

$$|x_{n+1} - x_*| = \left|\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon}\right| \leq C|x_n - x_*|$$

Wobei wir $C := \frac{1}{1+\varepsilon} + 1$ gesetzt haben. Damit ist die Konvergenzordnung linear.

(b) Sei $x_n = \frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}}}}$. Dann haben wir

$$\frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}}}} \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \longrightarrow 0$$

Damit haben wir

$$|x_{n+1} - x_*| = \left|\frac{1}{2^{2^{\frac{n+1}{2}}}}\right| = \left|\frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}}\right| = \left|\frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}}\right| = \left(\frac{1}{2^{2^{\frac{n}{2}}}}\right)^{\sqrt{2}} = |x_n - x_*|^{\sqrt{2}}$$

Also hat x_n die Konvergenzordnung $\sqrt{2}$

(c) Sei $x_n = \frac{1}{n^2}$. Dann konvergiert die Folge gegen null, und wir erhalten:

$$|x_{n+1} - x_*| = \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right| = |x_n - x_*|$$

(d) Sei $\varphi(x) = \frac{x}{\ln(\frac{1}{x})}$, und sei $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Wir zeigen zunächst, dass die folge monoton fallend ist, also $x_{n+1} \leq x_n$ und dies tun wir per Induktion. Wir haben $x_0 = \frac{1}{3} \geq 0.30 = x_1$.
Nun zum Induktionsschritt
$A(n) \to A(n+1)$:

Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, also $x_n \geq x_{n+1}$. Damit erhalten wir: $x_{n+1} = \varphi(x_n) \geq \varphi(x_{n+1}) = x_{n+2}$ und die Behauptung folgt.

Die Folge konvergiert gegen null, und wir erhalten

$$|x_{n+1} - x_*| = |\varphi(x_n) - x_*| = \left|\frac{x_n}{\ln(\frac{1}{x_n})}\right|$$

Da $x_n \longrightarrow 0$, konvergiert $\ln(\frac{1}{x_n}) \longrightarrow \infty$, und damit können wir $c_n := \ln(\frac{1}{x_n})$. Und erhalten damit

$$\ln\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq c_n|x_n - x_*|$$

Damit haben wir eine superlineare Konvergenz.

(e)

Aufgabe 2

(a)

Aufgabe 3

(a)