Tutorium vom 05.11.2021

Samstag, 6. November 2021 15:55

"Musterlösung" zum Übungsblatt 02:

Aufgabe 1: a) $(0,\underbrace{(\overline{b-1})}_{\text{unendliche Darstellung von } 1}) * \frac{b-1}{b-1} = \frac{((b-1)(\overline{b-1}))-(0.(\overline{b-1}))_b}{b-1} = \frac{(b-1)_b}{b-1} = \underbrace{1}_{\text{endliche Darstellung von } 1}$

b) Angenommen es gibt eine endliche Festkommadarstellung zur Basis $b=2$ von $\frac{1}{10}$.

$\Rightarrow \exists\, 1 < E_1 < E_2 < \ldots < E_n,\ n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{10} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{E_j}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{E_n - E_j}}{2^{E_n}}$

$\Leftrightarrow \frac{2^{E_n}}{10} = \sum_{j=1}^{n} 2^{E_n - E_j} \in \mathbb{N}$ → immer nicht negativ

aber $\frac{2^{E_n}}{10} \notin \mathbb{N}$ wegen der Primfaktorzerlegung $\frac{2 * \ldots * 2}{2 * 5} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \lightning$

! Wenn eine unendliche Darstellung existiert, ist das kein Beweis dafür, dass keine endliche Darstellung existiert, da wir in Aufgabe 1 a) gesehen haben, dass beide Darstellung für eine Zahl existieren können.

Aufgabe 2: a) $(13)_{10} = (1101)_2 = (1.101) * 2^{35-32}$

$\Rightarrow 10110100000001100011 1$

$(42.125)_{10} = (101010.001)_2 = (1.01010001) * 2^{37-32}$

$\Rightarrow 101010100010110001011$

$(0.1)_{10} = (0.000\overline{1100})_2 \approx (1.10011001 1)_2 * 2^{28-32}$

$\Rightarrow 1011001100110 1 1001$

$1110\ 11010111100 11011$

$\Rightarrow -(1.01101011 1) * 2^{13-32}$

$\Rightarrow -(2.708286046981810)_{10} * 10^{-6}$

b) 2 Stellen für das Vorzeichen, 2^6-1 für die Exponenten, 2^9 für die Mantisse & 1 Stelle für die 0: $N_2 = 2 * 2^9 * (2^6-1)+1 = 64513$

c) $z_{max} = (1.111\ 111\ 111)_2 * 2^{65-32} = 490772992$

$\bar{z} = z_{min} = (1.0\ldots0)_2 * 2^{1-32} = 4{,}65601287307739 * 10^{-10}$

> Supremum: Sei $X \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $c := \sup(x) \Leftrightarrow \forall x \in X\ c \geq x$ & c ist die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft
>
> → Supremum kann in einer unendlichen Menge auch außerhalb dieser liegen, bei endlichen Mengen liegt es immer in der Menge.
>
> Bsp.: $\sup((0,1)) = 1$

d) Definition Maschinengenauigkeit:

Die Maschinengenauigkeit ist der maximal auftretende relative Rundungsfehler (Supremum) für $\bar{z} \leq z \leq z_{max}$, wobei die Rundung durch Abschneiden geschieht:

$$eps = \sup_{\bar{z} \leq z \leq z_{max}} \left| \frac{z - rd(z)}{z} \right|$$

$$rd(z) = \begin{cases} \max\{z^* \in \text{Maschinenzahl} \mid z^* \leq z\} & \text{für } z \geq 0 \\ \min\{z^* \in \text{Maschinenzahl} \mid z^* \geq z\} & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

$eps = \frac{1}{2} b^{1-t}$ → man muss erstmal zeigen/beweisen, dass dies das Supremum ist.

Betrachte $z = (1.\underbrace{0\ldots0}_{\text{Mantisse}}\overline{1})_2 * 2^x$ → wissen wir jetzt noch nicht für $x \in \{-31, \ldots, 31\}$

$\Rightarrow rd(z) = (1.0)_2 * 2^x$

$\Rightarrow eps = \left| \frac{(0.\overline{1})_2 * 2^{x-9}}{\underbrace{(1.0\ldots0\overline{1})_2}_{\text{ist 1, wegen 1a)}} 2^x} \right| \overset{1a)}{=} \frac{2^{x-9}}{2^x + 2^{x-9}} = 2^{-9} * \frac{1}{1+2^{-9}} < 2^{-9}$

Aufgabe 3: c) bessere Begründung:

Rundung findet meist beim quadrieren bzw. multiplizieren statt, weil dies die Anzahl an gültigen Stellen verdoppelt & sie daher meist 10 Stellen übersteigt.

Beim Subtrahieren zweier betragsmäßig ähnlicher Zahlen kommt weil dies die Anzahl an gültigen Stellen verdoppelt & sie daher meist 10 Stellen übersteigt.

Beim Subtrahieren zweier betragsmäßig ähnlicher Zahlen kommt es zur Auslöschung.

Bei 1) werden erst im letzten Schritt die hinteren Stellen weggerundet. Es ergibt sich ein kleiner Fehler.

Bei 2) wird mehrfach multipliziert & quadriert, so dass beide Subtrahenten nach Rundung gleich sind. => sehr großer Fehler

3) ist ein Mittelweg, durch Rundung im ersten & Auslöschung im zweiten Schritt hat das Endergebnis nur 2 signifikante Stellen. Der relative Fehler bleibt trotzdem klein.