Snarks Fluxo-críticos

Breno L. Freitas

2013

Histórico

Teorema das 4 cores

Todo grafo planar sem arestas de corte admite uma 4-coloração de suas faces.

Histórico

Teorema das 4 cores

Todo grafo planar sem arestas de corte admite uma 4-coloração de suas faces.

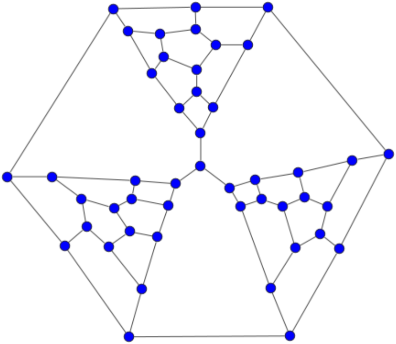
- Em 1880, Tait acreditou ter provado o Teorema das 4 cores por ter provado sua equivalência com: *Todo grafo planar cúbico e 3-aresta-conexo tem 3-coloração de arestas*.

Histórico

- Tait acreditava que todo grafo planar cúbico 3-aresta-conexo era hamiltoniano e assim ter provado o Teorema das 4 Cores.

Histórico

- Tait acreditava que todo grafo planar cúbico 3-aresta-conexo era hamiltoniano e assim ter provado o Teorema das 4 Cores.
- Contra-exemplo:



Grafo de Tutte: cúbico planar 3-conexo e não-hamiltoniano

Definição

- Com isso começa o estudo de uma classe interessante de grafos: os snarks.

Definição

- Com isso começa o estudo de uma classe interessante de grafos: os snarks.
- Um snark é um grafo cúbico, sem arestas de corte e sem 3-coloração de arestas.

Definição

- Com isso começa o estudo de uma classe interessante de grafos: os snarks.
- Um snark é um grafo cúbico, sem arestas de corte e sem 3-coloração de arestas.
- Para evitar casos triviais, os snarks são usualmente restritos a terem cintura no mínimo 5, serem conexos e ciclicamente 4-aresta-conexos (A. Cavicchioli et al., 1998).

Definição

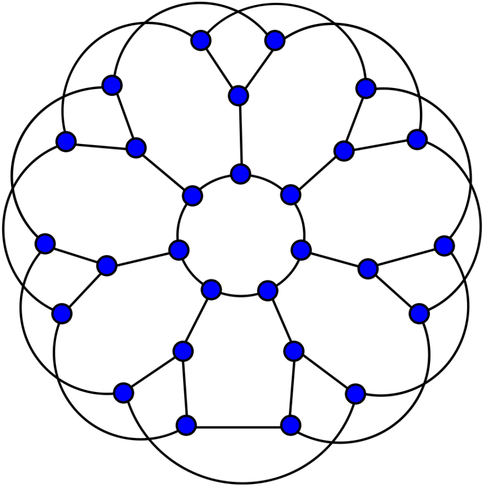
- Com isso começa o estudo de uma classe interessante de grafos: os snarks.
- Um snark é um grafo cúbico, sem arestas de corte e sem 3-coloração de arestas.
- Para evitar casos triviais, os snarks são usualmente restritos a terem cintura no mínimo 5, serem conexos e ciclicamente 4-aresta-conexos (A. Cavicchioli et al., 1998).
- Grafo de Petersen foi o primeiro snark descoberto:

Snarks

- O nome, proposto por Martin Gardner, referencia o poema de Lewis Carroll *A Caçada do Snark*.
- Na obra, o Snark era uma criatura muito rara e também desconhecida, daí o nome para tais grafos: a grande dificuldade de encontrá-los.

- O nome, proposto por Martin Gardner, referencia o poema de Lewis Carroll *A Caçada do Snark*.
- Na obra, o Snark era uma criatura muito rara e também desconhecida, daí o nome para tais grafos: a grande dificuldade de encontrá-los.
- Descobertas:
  - 1898 - Petersen – $|V(G)| = 10$
  - 1946 - Blanuša – $|V(G)| = 18$
  - 1948 - Descartes – $|V(G)| = 210$
  - 1948 - Szekeres – $|V(G)| = 50$
  - 1973 - Watkins – $|V(G)| = 50$
  - 1975 - Flower-Snarks (Uma família infinita descoberta por Isaacs)

Flower-Snark J_7



Snarks

- A importância dos snarks vem em parte de que provar certas conjecturas para estes grafos é suficiente, algumas são:
  - Cobertura dupla por ciclos
  - Conjectura dos 5-fluxos de Tutte

Conjecturas de Tutte

- Todo grafo sem aresta de corte e sem 3-cortes tem 3-fluxo
- Todo grafo sem aresta de corte e sem *minor* de Petersen tem 4-fluxo
- Todo grafo sem aresta de corte tem 5-fluxo

Definições

k-fluxo balanceado (k $\geq$ 2)

É uma 2-tupla $\langle D, \varphi \rangle$, onde D é um direcionamento das arestas de um grafo G e $\varphi := E(G) \rightarrow \{1, \cdots, k-1\}$ uma função de peso para as arestas de G, tal que o fluxo líquido $\varphi(v) = 0, v \in V(G)$.

Definições

k-fluxo balanceado (k $\geq$ 2)

É uma 2-tupla $\langle D, \varphi \rangle$, onde D é um direcionamento das arestas de um grafo G e $\varphi := E(G) \rightarrow \{1, \cdots, k-1\}$ uma função de peso para as arestas de G, tal que o fluxo líquido $\varphi(v) = 0, v \in V(G)$.

Índice cromático

O índice cromático de um grafo G, $\chi'(G)$ é o número mínimo de cores necessárias para colorir $E(G)$ tal que arestas incidentes em um dado vértice tenham cores distintas.

Definições

k-fluxo balanceado (k $\geq$ 2)

É uma 2-tupla $\langle D, \varphi \rangle$, onde D é um direcionamento das arestas de um grafo G e $\varphi := E(G) \rightarrow \{1, \cdots, k-1\}$ uma função de peso para as arestas de G, tal que o fluxo líquido $\varphi(v) = 0, v \in V(G)$.

Índice cromático

O índice cromático de um grafo G, $\chi'(G)$ é o número mínimo de cores necessárias para colorir $E(G)$ tal que arestas incidentes em um dado vértice tenham cores distintas.

Teorema de Tutte

Todo grafo cúbico tem 3-coloração de arestas se e somente se tem 4-fluxo.

Definições

k-fluxo-crítico (k $\geq$ 2)

Um grafo G é dito **k-fluxo-crítico**, se G não admite k-fluxo, mas $G \setminus e, e \in E(G)$ admite. Além, se G é k-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ adimite k-fluxo.

k-fluxo-crítico ($k \geq 2$)

Um grafo G é dito **k-fluxo-crítico**, se G não admite k-fluxo, mas $G \setminus e, e \in E(G)$ admite. Além, se G é k-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ adimite k-fluxo.

- Todo contra-exemplo mínimo para a conjectura dos 5-fluxos é um snark não-4-fluxo-crítico.

Definições

k-fluxo-crítico (k $\geq$ 2)

Um grafo G é dito **k-fluxo-crítico**, se G não admite k-fluxo, mas $G \setminus e, e \in E(G)$ admite. Além, se G é k-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ adimite k-fluxo.

- Todo contra-exemplo mínimo para a conjectura dos 5-fluxos é um snark não-4-fluxo-crítico.
- Além: com cintura no mínimo 11 e ciclicamente 6-aresta conexo. (Kochol, 2010)

Definições

k-fluxo-crítico (k $\geq$ 2)

Um grafo G é dito **k-fluxo-crítico**, se G não admite k-fluxo, mas $G \setminus e, e \in E(G)$ admite. Além, se G é k-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ adimite k-fluxo.

- Todo contra-exemplo mínimo para a conjectura dos 5-fluxos é um snark não-4-fluxo-crítico.
- Além: com cintura no mínimo 11 e ciclicamente 6-aresta conexo. (Kochol, 2010)
- Todo Flower-Snark é 4-fluxo-crítico (C. N. da Silva et al., 2012)

Definições

k-fluxo-crítico ($k \geq 2$)

Um grafo G é dito **k-fluxo-crítico**, se G não admite k-fluxo, mas $G \setminus e, e \in E(G)$ admite. Além, se G é k-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ adimite k-fluxo.

- Todo contra-exemplo mínimo para a conjectura dos 5-fluxos é um snark não-4-fluxo-crítico.
- Além: com cintura no mínimo 11 e ciclicamente 6-aresta conexo. (Kochol, 2010)
- Todo Flower-Snark é 4-fluxo-crítico (C. N. da Silva et al., 2012)
- Snarks hipohamiltonianos são 4-fluxo-críticos?

Definições

Hipohamiltonicidade

Um grafo G é dito **hipohamiltoniano** se G não é hamiltoniano, mas $G - v, v \in V(G)$ é.

Definições

Hipohamiltonicidade

Um grafo G é dito **hipohamiltoniano** se G não é hamiltoniano, mas $G - v, v \in V(G)$ é.

Grafos bicríticos

Um grafo G é dito **bicrítico** se $\chi'(G) = 4$, mas $\chi'(G - \{v, u\}) = 3, \{v, u\} \in V(G)$.

Definições

Hipohamiltonicidade

Um grafo G é dito **hipohamiltoniano** se G não é hamiltoniano, mas $G - v, v \in V(G)$ é.

Grafos bicríticos

Um grafo G é dito **bicrítico** se $\chi'(G) = 4$, mas $\chi'(G - \{v, u\}) = 3, \{v, u\} \in V(G)$.

Teorema de Steffen*

Todo snark hipohamiltoniano é bicrítico

Snarks Hipohamiltonianos

- Existem vários snarks hipohamiltonianos conhecidos.

Snarks Hipohamiltonianos

- Existem vários snarks hipohamiltonianos conhecidos.
- A maioria dos snarks nomeados mais famosos são hipohamiltonianos:
  - Grafo de Petersen
  - Primeiro e segundo Blanuša
  - Flower-snarks
  - Primeiro e segundo Loupekine
  - Primeiro e segundo Celmins-Swart
  - Double-star
  - Szekeres

- Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico?

Snarks Hipohamiltonianos e 4-fluxo-críticos

- Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico?
- Sim!

- Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico?
- Sim!

Definições

- Sejam S um snark hipohamiltoniano e v e u dois vértices de S adjacentes pela aresta e.
- Sejam u_1 e u_2 os vértices adjacentes a u diferentes de v e similarmente v_1 e v_2 os vértices adjacentes a v diferentes de u.
- Seja $H := S - \{v, u\}$.

Teorema de Steffen* para vértices adjacentes

- $S - v$ claramente possui 3 vértices de grau 2 (um dos quais é u) e é hamiltoniano.

Teorema de Steffen* para vértices adjacentes

- $S - v$ claramente possui 3 vértices de grau 2 (um dos quais é u) e é hamiltoniano.
- Por sua vez em H, temos um caminho hamiltoniano ímpar P, com extremos em u_1 e u_2.

- $S - v$ claramente possui 3 vértices de grau 2 (um dos quais é u) e é hamiltoniano.
- Por sua vez em H, temos um caminho hamiltoniano ímpar P, com extremos em u_1 e u_2.
- Pelo Teorema de Steffen*, S é bicrítico, e a 3-coloração é dada 2-colorindo P alternando as cores e colorindo $E(H) - E(P)$ (que formam um emparelhamento) com a terceira cor.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (I/IV)

- Suponhamos um grafo qualquer G.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (I/IV)

- Suponhamos um grafo qualquer G.
- Sabemos que se G é 4-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ admite 4-fluxo.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (I/IV)

- Suponhamos um grafo qualquer G.
- Sabemos que se G é 4-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ admite 4-fluxo.
- Além, sabemos que $G - e$ admite k-fluxo se e somente se $(G - e) \setminus \{v_1, v_2\}$ com $\{v_1, v_2\} \in V(G)$ admite k-fluxo.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (I/IV)

- Suponhamos um grafo qualquer G.
- Sabemos que se G é 4-fluxo-crítico, então $G - e, e \in E(G)$ admite 4-fluxo.
- Além, sabemos que $G - e$ admite k-fluxo se e somente se $(G - e) \setminus \{v_1, v_2\}$ com $\{v_1, v_2\} \in V(G)$ admite k-fluxo.
- Provaremos então, que para qualquer snark hipohamiltoniano a remoção de uma aresta implica na obtenção de um grafo que admite 4-fluxo.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (II/IV)

Definições

- Sejam S um snark hipohamiltoniano e v e u dois vértices de S adjacentes pela aresta e.
- Sejam u_1 e u_2 os vértices adjacentes a u diferentes de v e similarmente v_1 e v_2 os vértices adjacentes a v diferentes de u.
- Sejam $G := (S - e) \setminus \{v, u\}$ e $H := S - \{v, u\}$.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (III/IV)

- Notemos que G é $H + u_1 u_2 + v_1 v_2$.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (III/IV)

- Notemos que G é $H + u_1u_2 + v_1v_2$.
- Sabemos que H tem 3-colaração, como vimos anteriormente, pelo Teorema de Steffen*: "a 3-coloração é dada 2-colorindo P *(caminho hamiltoniano ímpar)* alternando as cores e colorindo $E(H) - E(P)$ (que formam um emparelhamento) com a terceira cor".

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (III/IV)

- Notemos que G é $H + u_1u_2 + v_1v_2$.
- Sabemos que H tem 3-colaração, como vimos anteriormente, pelo Teorema de Steffen*: "a 3-coloração é dada 2-colorindo P *(caminho hamiltoniano ímpar)* alternando as cores e colorindo $E(H) - E(P)$ (que formam um emparelhamento) com a terceira cor".
- Logo, a 3-coloração de G é a mesma de H mais a coloração das arestas u_1u_2 e v_1v_2.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (III/IV)

- Notemos que G é $H + u_1u_2 + v_1v_2$.
- Sabemos que H tem 3-colaração, como vimos anteriormente, pelo Teorema de Steffen*: "a 3-coloração é dada 2-colorindo P *(caminho hamiltoniano ímpar)* alternando as cores e colorindo $E(H) - E(P)$ (que formam um emparelhamento) com a terceira cor".
- Logo, a 3-coloração de G é a mesma de H mais a coloração das arestas u_1u_2 e v_1v_2.
- Notemos que u_1 e u_2 em H tem duas arestas incidentes, uma com a primeira cor de P (por ser ímpar) e a outra com a terceira cor do emparelhamento.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (IV/IV)

- Já que u_1 e u_2 são extremos de P em H, a aresta $u_1 u_2$ torna P um ciclo hamiltoniano, logo basta colorí-la com a segunda cor de P.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (IV/IV)

- Já que u_1 e u_2 são extremos de P em H, a aresta u_1u_2 torna P um ciclo hamiltoniano, logo basta colorí-la com a segunda cor de P.
- A aresta v_1v_2 por sua vez, é incidente em vértices de grau 2 em H que fazem parte de P. Logo, como tanto v_1 quanto v_2 tem arestas incidentes das duas cores de P, basta que coloramos esta com a terceira cor, finalizando a 3-coloração de G.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (IV/IV)

- Já que u_1 e u_2 são extremos de P em H, a aresta u_1u_2 torna P um ciclo hamiltoniano, logo basta colorí-la com a segunda cor de P.
- A aresta v_1v_2 por sua vez, é incidente em vértices de grau 2 em H que fazem parte de P. Logo, como tanto v_1 quanto v_2 tem arestas incidentes das duas cores de P, basta que coloramos esta com a terceira cor, finalizando a 3-coloração de G.
- Como G tem 3-coloração de arestas, G admite 4-fluxo, logo, $S - e$ também admite.

Todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico (IV/IV)

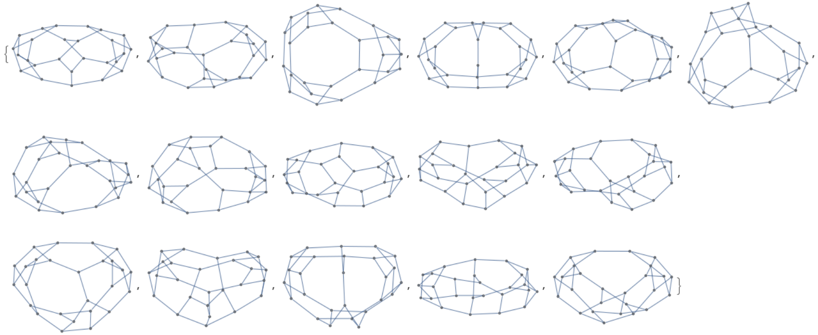
- Já que u_1 e u_2 são extremos de P em H, a aresta $u_1 u_2$ torna P um ciclo hamiltoniano, logo basta colorí-la com a segunda cor de P.
- A aresta $v_1 v_2$ por sua vez, é incidente em vértices de grau 2 em H que fazem parte de P. Logo, como tanto v_1 quanto v_2 tem arestas incidentes das duas cores de P, basta que coloramos esta com a terceira cor, finalizando a 3-coloração de G.
- Como G tem 3-coloração de arestas, G admite 4-fluxo, logo, $S - e$ também admite.
- E como, $S - e, e \in E(S)$ admite 4-fluxo, e por definição, S não admite, todo snark hipohamiltoniano é 4-fluxo-crítico. ∎

Snarks Hipohamiltonianos e 4-fluxo-críticos

- Todo snark 4-fluxo-crítico é hipohamiltoniano?

Snarks Hipohamiltonianos e 4-fluxo-críticos

- Todo snark 4-fluxo-crítico é hipohamiltoniano?
- Não! Contra-exemplos em 26 vértices de cintura ≥ 5:



Estatísticas

n	cintura	snarks 4-fluxo-críticos	snarks hipohamiltonianos
10	≥ 4	1	1
18	≥ 4	2	2
20	≥ 4	1	1
22	≥ 4	2	2
24	≥ 4	0	0
26	≥ 5	111	95
28	≥ 6	1	1

Observações finais

- O teorema apresentado mostra que nenhum snark que seja hipohamiltoniano é contra-exemplo para a Conjectura dos 5-fluxos.

Observações finais

- O teorema apresentado mostra que nenhum snark que seja hipohamiltoniano é contra-exemplo para a Conjectura dos 5-fluxos.
- É possível estender as estatísticas para todas as cintura ≥ 4, por curiosidades estatísticas.

Observações finais

- O teorema apresentado mostra que nenhum snark que seja hipohamiltoniano é contra-exemplo para a Conjectura dos 5-fluxos.
- É possível estender as estatísticas para todas as cintura ≥ 4, por curiosidades estatísticas.
- O estudo mais aprofundado das estruturas de certos snarks, aliado com outras descobertas, pode ajudar a compreender melhor os contra-exemplos mínimos para a Conjectura dos 5-fluxos.