# 线性代数 B 期末试题 A 卷答案

## 一、填空题

1、$\underline{\dfrac{27}{2}}$ ；　2、$\underline{0}$ ；　3、$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ ；　4、$\underline{2^{98}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$ ；

5、$\begin{pmatrix} & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 2 & -3 \\ & & 0 & -1 & 2 \\ 3/2 & -5/2 & & & \\ -1/2 & 1 & & & \end{pmatrix}$

## 二、解：在 $AXA^* = 2XA^* + I$ 等式两边同时右乘 $A$，则有

$$AXA^*A = 2XA^*A + A$$

由 $A^*A = AA^* = |A|I$，可得

$$|A|AX = 2|A|X + A \qquad \text{……………（1）…3 分}$$

由已知条件可求得　$|A| = 3$　………………5 分

则(1)式变为　$3AX - 6X = A$

整理可得　$(A-2I)X = \dfrac{1}{3}A$

因为 $A-2I$ 可逆，可得　$X = \dfrac{1}{3}(A-2I)^{-1}A$　………………7 分

计算可知

$$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{………..10 分}$$

三、解：（1）设由基$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$到基$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$的过渡矩阵为$A$，则有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A$$ ……….2 分

因此 $$A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$ ……….3 分

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$ ………5 分

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

………6 分

（2）因为向量$\gamma$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,1,1)^T$，设$\gamma$在$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标为$(y_1,y_2,y_3)^T$，所以有：

$$\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$ ………8 分

由坐标变换公式可得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

即所求为$(2,0,1)^T$。 ……….10 分

四、解：（1）因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的任意一个极大无关组都可以作为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一个基，故求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&0\\1&0&1&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ………..3 分

可得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一个基； ………..4 分

（2）把$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$正交化、单位化

正交化： $$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$ ………..6 分

$$\beta_3=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\alpha_4-\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{2}\beta_2=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$ ………..8 分

单位化：

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

则$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组标准正交基。 ………..10 分

五、解：（1）由于相似矩阵具有相同的特征值，进而具有相同的迹和行列式，故有

$$\begin{cases} 3+x=2+y, & tr(A)=tr(B) \\ 2x-3=y, & |A|=|B| \end{cases}$$

可得$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ ………..4 分

（2）由题意

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$$

因此矩阵 $A$ 的特征值为$\lambda_1$=1(二重根)和$\lambda_2$=5。 ………..7 分

考虑$\lambda_1$=1的几何重数，即方程组$(I-A)X=0$的基础解系中包含向量的个数。由于

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ………..9 分

所以$\lambda_1$=1的几何重数等于代数重数，矩阵 $A$ 可以对角化。 ………..10 分

六、解：由题意，化方程组的增广矩阵为阶梯形：

$$\bar{A}=(A,\beta)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

………..3 分

(1) 当$\lambda=-2$时，$r(A)=2<r(\bar{A})=r(A,\beta)=3$，方程组无解； ………..5 分

(2) 当$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时，$r(A)=r(\bar{A})=r(A,\beta)=3$，方程组有唯一解； ……….7 分

(3) 当$\lambda$=1时，$r(A)=r(\bar{A})=r(A,\beta)=2$，方程组有无穷多解，此时

$$\bar{A}=(A,\beta)\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的方程组为 $x_1+x_2+x_3=-2$。令 $x_2=x_3=0$，得

$$X_0=\left(-2,0,0\right)^T$$ ……..10 分

为方程组的一个特解；

导出方程组的同解方程组为 $x_1+x_2+x_3=0$

可得 $X_1=\left(-1,1,0\right)^T,X_2=\left(-1,0,1\right)^T$ 为导出方程组的基础解系 ……..13 分

故原方程组的通解为 $X=X_0+k_1X_1+k_2X_2=\left(-2,0,0\right)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$，其中 $k_1,k_2$ 为任意常数。 ……….15 分

七、解：（1）实二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{………2 分}$$

由题意， $\left|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 3\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 **1,4,-2**。 ……….5 分

当 $\lambda_1=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$X=0：

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{X}_1=(-2,-1,2)^T$； ……….6 分

当 $\lambda_2=4$ 时，解方程组 $(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$X=0：

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得 $\lambda_2=4$ 的特征向量 $\boldsymbol{X}_2=(2,-2,1)^T$； ………7 分

当 $\lambda_3=-2$ 时，解方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$X=0：

$$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得 $\lambda_3=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{X}_3=\left(\frac{1}{2},1,1\right)^T$ ……8 分

因为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于不同特征值的特征向量，它们两两正交，只需对它们单位化，分别为

$$\eta_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\frac{1}{3}(-2,-1,2)^T,\ \eta_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T,\quad \eta_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{3}(1,2,2)^T \quad \text{……11 分}$$

故所求正交矩阵为

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

此二次型的标准形为 $f=y_1{}^2+4y_2{}^2-2y_3{}^2$ ………13 分

（2）由于 $A$ 的特征值不全大于 0，由正定性的等价命题可知 $f$ 不正定。………15 分

八、证明：（方法一）设 $n$ 阶方阵 $A$ 两两互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，由于属于不同特征值的特征向量线性无关，所以 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，因此 $A$ 可以对角化。

………2 分

若记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$，则 $P$ 可逆，为相似变换矩阵，满足

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad （1）………3 分$$

由于 $B$ 的特征向量恒等于 $A$ 的特征向量，所以 $B$ 也有 $n$ 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，故 $B$ 也可以对角化。 ………5 分

设 $B$ 的 $n$ 个线性无关的特征向量分别对应于 $n$ 个特征值为 $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$，则有

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} \qquad （2）………6 分$$

由（1）式可得

$$A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

由（2）式可得

$$B=P\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}P^{-1} \qquad ………8 分$$

则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & & & \\ & \lambda_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\mu_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$

且

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & & & \\ & \lambda_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\mu_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，证毕。 ………10 分

（方法二）设 $\boldsymbol{A}$ 的两两互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$，则 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}$ ……2 分

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，故 $\boldsymbol{B\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}$，其中 $\mu_i$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值……4 分

从而有

$$\boldsymbol{AB\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i,(\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}),\boldsymbol{BA\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{B\alpha}_i=\lambda_i\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i,(\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}).$$ …6 分

从而 $(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0},\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}$，于是

$$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{0}, \qquad (1)$$ ……. 8 分

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可逆，于是(1)式两边同时右乘 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}$，得

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$$ ….. 10 分

故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 得证。

（方法三）设 $\boldsymbol{A}$ 的两两互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$，则有 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}$，又因为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，故有 $\boldsymbol{B\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}$，其中 $\mu_i$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，从而有

$$\boldsymbol{AB\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i,(\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}),\boldsymbol{BA\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{B\alpha}_i=\lambda_i\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i,(\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},...,\boldsymbol{n}).$$

则有 $$\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，由上式可知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。