线性代数 B 期末试题

（试题共 2 页，八道大题。**解答题必须有解题过程。**）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|2\boldsymbol{A}|=-24$，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$，则 $\lambda=$______.

2、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&3&4\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$，则 $\begin{vmatrix}0&A^*\\B&0\end{vmatrix}=$______.

3、已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 个线性无关的 3 元列向量，方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为____________.

4、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&k&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 可以通过初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&k\\1&3&0\\2&7&-k\end{pmatrix}$，则 $k=$______.

5、已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-1\\5&3&k\\1&2&0\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 $k=$______.

二(10 分)、设 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$AX=A+2X$，求 X.

三(10 分)、已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量空间 R^3 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 R^3 的一个基;

(2) 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 关于基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标。

四(10 分)、已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix}$$

（1）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用（1）中所求的极大无关组线性表出向量组的其余向量。

五(10 分)、已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \ 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - k_1 x_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2 \end{cases}$$

讨论k_1, k_2取何值时，方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时，用导出方程组的基础解系表示通解。

六(15 分)、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & x & 2 \\ 5 & y & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 有特征值± 1。问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若 $\boldsymbol{A}$ 能对角化，请求出相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化，请说明理由。

七(15 分)、

已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

(1) 求实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ ；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QY}$，将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(3) 判断实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

八(10 分)、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$ ；

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ ；

(3) 对于(1)中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和(2)中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。