线性代数 B 期末试题答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\lambda = $ __$-\frac{1}{2}$____.

2、$\begin{vmatrix} 0 & A^* \\ B & 0 \end{vmatrix} = $ ____4___.

3、秩为_______2_____.

4、$k = $ _2_____.

5、$k = $ _3_____.

二(10 分)、解：由 $AX = A + 2X$

得
$$X = (A-2I)^{-1}A$$

因为

$$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

所以
$$X = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

三(10 分)、

解：（1）（解法一）证明：由题意可知

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的行列式为 1，所以矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$为可逆矩阵；又因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为$R^3$的一个基，所以$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的秩为 3，则有$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的秩也为 3，即$\beta_1, \beta_2, \beta_3$为$R^3$的一个基。

（解法二）利用定义。略。

（2）由（1）可得，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3)设γ关于β_1,β_2,β_3的坐标为$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则有$\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，

所求为$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

四(10 分)、解：（1）将所给出的向量以列向量放入矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，即所求向量组的秩为 3，一个极大无关组为$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$.

（2）剩余向量由极大无关组线性表出的关系为：$\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_5=\alpha_1+\alpha_2$.

五(10 分)、 解：$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k_1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & k_2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-k_1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{pmatrix}$

分情况讨论：

（1）当$k_1\neq 2$时，增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩=4，方程组有唯一解；

（2）当$k_1=2$时，将增广矩阵继续进行初等行变换

$$\bar{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-1 \end{pmatrix}$$

则当$k_1=2,k_2\neq 1$时，增广矩阵的秩=4>系数矩阵的秩=3，此时方程组无解；

则当$k_1=2$,且$k_2=1$时，增广矩阵的秩=3=系数矩阵的秩=3，此时方程组有无穷多解，令$\boldsymbol{x_3}$为自由未知量，则可得特解

$$\boldsymbol{X_0}=(-8,1,1,2)^T$$

导出方程组的基础解系　　　　　　　　$\boldsymbol{X_1}=(0,-2,1,0)^T$

所以方程组的通解为$\boldsymbol{X_0}+k\boldsymbol{X_1}$，其中$k$为任意常数。

六(15 分)、

解：由题意$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1 & -x & -2\\ -5 & 1-y & -3\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-7x-7=0$，可得$x=-1$；　　………3 分

又由$|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & -1-y & -3\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-2y-6=0$，可得$y=-3$；　　………6 分

因此$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

设$\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值为$\boldsymbol{\lambda_3}$，则由已知$tr(\boldsymbol{A})=2-3-1=1+(-1)+\lambda_3$，可得$\lambda_3=-2$；

综上，3 阶方阵$\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，$\boldsymbol{A}$ 可以对角化。　　……9 分

当$\lambda_1=1$时，$I-A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ -5 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

相应的特征向量为$\alpha_1=(5,7,1)$；　　……11 分

当$\lambda_2=-1$时，$-I-A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

相应的特征向量为$\alpha_2=(-1,-1,1)$；　　…….13 分

当$\lambda_3=-2$时，$-2I-A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -2\\ -5 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

相应的特征向量为$\alpha_3=(-1,-2,1)$;

因此所求矩阵$P=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 7 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.　　………15 分

七、解:（1）二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. ………2 分

（2）$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$

特征值为$\lambda_1=-1$(二重)，$\lambda_2=5$. ………5 分

当$\lambda_1=-1$时，$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

相应的特征向量为$\alpha_1=(-1,1,0)$, $\alpha_2=(-1,0,1)$ ………7 分

正交化得$\beta_1=(-1,1,0),\beta_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ ………9 分

单位化$\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$， $\gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$… ……11 分

当$\lambda_3=5$时，$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

特征向量为$\alpha_3=(1,1,1)$，单位化为$\gamma_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ……13 分

所以取$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

令$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，二次型化为$f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

（3）因为二次型的正惯性指数为 1，小于 3（或者$\boldsymbol{A}$ 的特征值不全为正数），所以二次型不是正定的。 ……15 分

八、解：（1）

$$\left(A,\alpha_1\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

令自由未知数 $x_3=1$，得方程组的特解为 $X_0=\left(0,0,1\right)^T$；

令自由未知数 $x_3=2$，得导出方程组的基础解系为 $X=\left(1,-1,2\right)^T$；所以 $A\alpha_2=\alpha_1$ 的通解为

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\alpha_1,k_1\in R$$

$$\left(A^2,\alpha_1\right)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

令自由未知数 $x_2=0,x_3=0$，得方程组的特解为 $X_0=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^T$；

令自由未知数 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得导出方程组的基础解系为 $X_1=\left(1,-1,0\right)^T,X_2=\left(0,0,1\right)^T$；

所以 $A^2\alpha_3=\alpha_1$ 的通解为

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},k_2,k_3\in R$$

（3）证明 （解法一）易知

$$\boldsymbol{A}\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^2\alpha_2=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}\alpha_2\right)=\boldsymbol{A}\alpha_1=0$$

设存在常数 k_1,k_2,k_3，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (1)$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘等式（1）两端，得

$$k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0 \qquad (2)$$

再用 $\boldsymbol{A}$ 左乘等式（2）两端，得 $k_3A^2\alpha_3=0$，即 $k_3\alpha_1=0$ 。由 $\alpha_1\neq 0$，得 $k_3=0$ 。代入等式（2)，则有

$k_2=0$，于是 $k_1=0$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

（解法二）

$$\left|\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\right|=\begin{vmatrix}-1 & k_1 & -k_2-\frac{1}{2}\\ 1 & -k_1 & k_2\\ -2 & 2k_1+1 & k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0$$

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。