

工科数学分析(上) 期末试题(A 卷)

座号 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(试卷共 6 页, 十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | | | |

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

一、填空(每小题4分, 共20分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ _____.

2. 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

3. 已知函数 $f(x) = e^{-x} \ln(ax)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得极值, 则 $a =$ _____.

4. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx =$ _____.

5. 设 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$, 则微分方程的通解为 _____.

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

二、计算题(每小题5分, 共20分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 3x + 2} = 6$, 求实数 a 和 b 的值.

2. 设 $y = \sqrt{x} \arctan \sqrt{x-1}$, 其中 $x > 1$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

3. 计算不定积分 $\int \ln(1+x^2) dx$.

4. 求微分方程 $y'' - \frac{2}{x} y' = x^2$ 的通解.

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

三、(8分) 求曲线 $y = x + \frac{\ln x}{x}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线.

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

四、(8分) 求函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x}, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x^2 - 1}, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点, 并判定它们的类型.

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

五、(6 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-1 < x_0 < 0$,
 $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

六、(8 分) 求曲线 $y = 2x^2$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围平面图形绕
 直线 $x = 3$ 旋转所得的旋转体的体积.

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

七、(8 分) 设有边长为 a 的等边三角形平板，将其竖直放入水中，使三角形的一边与水面重合，设水的密度为 ρ ，求平板所受到的水压力。

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

八、(8分) 设 $f(x) = x^2 \ln(1+x^2)$ ，利用Taylor公式求 $f^{(8)}(0)$ 。

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

九、(8 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足方程

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^x - f(x), \text{ 求 } f(x).$$

| | |
|----|--|
| 得分 | |
|----|--|

十、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内有二阶导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{x})}{\sin x} = 3, \quad \int_1^2 f(x)dx = 0.$$

(1) 求 $f'(0)$;

(2) 证明 $\exists \xi \in (0,2)$, 使 $f'(\xi) + f''(\xi) = 0$.