线性代数 B 期末试题 A 卷答案

一、填空题

1、$\frac{1}{2}(A+I)$；　2、2；　3、$n-m$；　4、84；　5、$2^{2018}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

二、解：在 $A^*BA=2BA-8I$ 等式两边同时左乘 A、右乘 A^{-1}，则有

$$|A|B=2AB-8I \quad \text{…………(1)…………………3 分}$$

由已知条件可求得　$|A|=-2$　………………5 分

则(1)式变为　$-2B=2AB-8$

整理可得　$(A+I)B=4I$

因此　$B=4(A+I)^{-1}$　………………7 分

计算可知
$$(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所以
$$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$
………..10 分

三、解：（1）因为由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为 P，所以

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P$$
………..3 分

因此　$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&6\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&5\\-1&2&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}$$ ………..7 分

$$=\begin{pmatrix}-3&4&7\\-2&1&6\\-3&5&6\end{pmatrix}$$

（2）因为向量γ在α_1，α_2，α_3下的坐标为$(1,2,1)^T$，所以由坐标变换公式，γ在β_1，β_2，β_3下的坐标为

$$\begin{pmatrix}2&1&6\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}$$

即所求为$(10,3,3)^T$。 ………..10 分

四、解：由题意

$$\bar{A}=(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&t&4\\1&-1&2&-4\\-1&t&1&t^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&t&4\\0&-2&2-t&-8\\0&t+1&t+1&t^2+4\end{pmatrix}$$ ………..2 分

$$\to\begin{pmatrix}1&1&t&4\\0&1&\frac{t-2}{2}&-8\\0&t+1&t+1&t^2+4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&t&4\\0&1&\frac{t-2}{2}&4\\0&0&-\frac{(t+1)(t-4)}{2}&t(t-4)\end{pmatrix}$$

(1) 当$t=-1$时，$r(A)=2<r(\bar{A})=3$，方程组无解； ………..3 分

(2) 当$t\neq-1$且$t\neq4$时，$r(A)=r(\bar{A})=3$，方程组有唯一解； ………..5 分

(3) 当$t=4$时，$r(A)=r(\bar{A})=2$，方程组有无穷多解，此时 ……….6 分

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&4&4\\1&-1&2&-4\\-1&4&1&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组的特解为 $X_0=(0,4,0)^T$ ………..8 分

导出方程组的阶梯形为

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

可得导出组的基础解系为 $X_1=(-3,-1,1)^T$ ………..9 分

故原方程组的通解为 $X=X_0+kX_1=(0,4,0)^T+k(-3,-1,1)^T$，其中 k 为任意常数。

………..10 分

五、解：（1）因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的任意一个极大无关组都可以作为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数，故求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和它的一个极大无关组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ………..2 分

可得 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 2，而 α_1,α_3 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基； ………..4 分

（2）把 α_1,α_3 正交化、单位化

正交化： $$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}-\frac{14}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ ………..6 分

单位化： $$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ ………..10 分

则 η_1,η_2 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组标准正交基。

六、解：（1）已知的三个等式 $A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3, A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3$ 可以用一个表达式给出：

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的向量组，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ，则 P 为可逆矩阵，再令 $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$，那么上式可以写成

$$AP=PB$$

即 $$P^{-1}AP=B$$ ………..3 分

所以 A 与 B 相似。由矩阵相似的性质可知，A 与 B 有相同的特征值。

由特征多项式 $|\lambda I-B|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$，可得 B 的特征值为 1，2，3，从而 A 的特征值为 1，2，3。 ……….5 分

（2）设 $\alpha\neq 0$ 是 B 属于特征值 λ 的特征向量，则有 $B\alpha=\lambda\alpha$。将 $B=P^{-1}AP$ 代入此式，可得

$$P^{-1}AP\alpha=\lambda\alpha$$

即 $$A(P\alpha)=\lambda(P\alpha)$$ ……….7 分

易知 $P\alpha\neq 0$，因此 $P\alpha$ 为 A 属于特征值 λ 的特征向量。

当 $\lambda=1$ 时，齐次方程组 $(I-B)X=0$ 的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 ξ_1 为 B 的特征值 $\lambda=1$ 的特征向量，由此 $\eta_1=P\xi_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 为 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量………9 分

当 $\lambda=2$ 时，齐次方程组 $(2I-B)X=0$ 的基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$，则 ξ_2 为 B 的特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，由此 $\eta_2=P\xi_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}=2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$ 为 A 属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量；

……….11 分

当λ=3时，齐次方程组$(3I-B)X=0$的基础解系为$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$，则$\xi_3$为$B$的特征值$\lambda$=3的特征向量，由此$\eta_3=P\xi_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$为$A$属于特征值$\lambda$=3的特征向量；

……….13 分

综上，矩阵A的全部特征向量为：

$$k_1\eta_1=k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

$$k_2\eta_2=k_2(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)$$

$$k_3\eta_3=k_3(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)$$

其中$k_1k_2k_3\neq 0$。 ……….15 分

七、解：（1）实二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$$ ……….3 分

由题意，正交替换化为标准形$y_1^2+6y_2^2+qy_3^2$的平方项系数 1, 6, q为A的特征值，则有

$$tr(A)=0+4-3=1+$$

可得$q=-6$，即A的特征值为 1,6,-6。 ……….5 分

当λ=1时，解方程组$(I-A)$X=0，可得λ=1的特征向量$X_1=(-2,0,1)^T$； ……….6 分

当λ=6时，解方程组$(6I-A)$X=0，可得λ=6的特征向量$X_2=(1,5,2)^T$； ……….7 分

当λ=-6时，解方程组$(-6I-A)$X=0，可得λ=-6的特征向量$X_3=(1,-1,2)^T$ …….8 分

因为X_1,X_2,X_3为实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量，它们两两正交，只需对它们单位化，分别为

$$\eta_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\frac{1}{5}(-2,0,1)^T,\ \eta_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\frac{1}{\sqrt{30}}(1,5,2)^T,\ \eta_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$$ …11 分

故所求正交矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$ ……….13 分

（2）由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不全大于 0，由正定性的等价命题可知 f 不正定。………15 分

八、证明：由题意可知

$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3\text{；}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1^{\,2}\alpha_1+\lambda_2^{\,2}\alpha_2+\lambda_3^{\,2}\alpha_3$$

因此

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\lambda_1^{\,2}\alpha_1+\lambda_2^{\,2}\alpha_2+\lambda_3^{\,2}\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^{\,2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^{\,2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^{\,2} \end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 属于不同的特征值，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\boldsymbol{3}$，又由范德蒙德行列式可知

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^{\,2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^{\,2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^{\,2} \end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0$$

即 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^{\,2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^{\,2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^{\,2} \end{pmatrix}$ 满秩，因此 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。证毕。