北京理工大学 2020-2021 学年第二学期

线性代数 B 期末试题 A 卷

座号____________班级__________学号__________姓名____________

（试卷共 6 页，八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

得分	

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 已知n阶矩阵A满足$A^m=0$（其中$n\geq 2,m\geq 2$），则$A-I$的逆矩阵为__________。

2、 设已知$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T$，且$A=\alpha\alpha^T$, 则$A^{2021}=$____________。

3、 已知$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵。若$|A|=\dfrac{1}{3}$，则$\left|(3A)^{-1}-3A^*\right|=$____________。

4、 设$\boldsymbol{A}$是一个$\boldsymbol{4\times 3}$矩阵，若$\boldsymbol{\eta_1,\eta_2}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX=0}$的基础解系，则$\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\right)=$______ 。

5、设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$的三个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$______；

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$_________ 。

得分	

二(10 分)、已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BA}-2\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}$.

得分	

三(10 分)、设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的两个基.

(1) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+5\boldsymbol{\beta}_3$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标;

得分	

四(10 分)、已知

$$\alpha_1=(1,1,-1,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1,1)^T,\alpha_3=(2,1,0,0)^T,\alpha_4=(-1,1,-3,1)^T,$$

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$的秩和一个极大无关组；

(2) 用所求的极大无关组线性表出向量组中剩余向量。

得分	

五(10 分)、已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b. \end{cases}$$

讨论参数a,b取何值时，方程组有解，无解；当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

得分	

六(15 分)、设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为-2，1，1，矩阵 A 的属于特征值 1 对应的特征向量为:

$$X_1=(1,1,0)^T, X_2=(1,0,-1)^T$$

（1） 求 A 的特征值-2 对应的特征向量；

（2） 求 A 。

得分	

七(15 分)、已知二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断方程二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定.

得分	

八(10 分)、设 A 为 n 阶矩阵，α 为 n 元列向量。证明：如果对正整数 m，有 $A^m\alpha=0, A^{m-1}\alpha\neq 0$，则 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关。