

2019 级概率与数理统计试题 (A 卷)

一、填空题

1. $\frac{21}{64}$; 2. $2-2\Phi(1)$; 3. 2; 4. 一定; 5. 0.8; 6. $\pm\sqrt{2}$; 7. $\frac{2}{3}$; 8. 不一定

二、

解: 设 A 表示“目标被击落”, B_1, B_2, B_3 分别表示“甲、乙、丙击中目标”, C_i 表示“有 i 个人击中目标”, $i = 1, 2, 3$

则由已知得

$$P(B_1) = 0.4, \quad P(B_2) = 0.5, \quad P(B_3) = 0.8$$

$$C_1 = B_1\bar{B}_2\bar{B}_3 \cup \bar{B}_1B_2\bar{B}_3 \cup \bar{B}_1\bar{B}_2B_3,$$

$$P(C_1) = P(B_1\bar{B}_2\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1B_2\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3) = 0.34$$

$$C_2 = B_1B_2\bar{B}_3 \cup B_1\bar{B}_2B_3 \cup \bar{B}_1B_2B_3$$

$$P(C_2) = P(B_1B_2\bar{B}_3) + P(B_1\bar{B}_2B_3) + P(\bar{B}_1B_2B_3) = 0.44$$

$$C_3 = B_1B_2B_3$$

$$P(C_3) = P(B_1B_2B_3) = 0.16$$

$$\text{由全概率公式得 } P(A) = \sum_{i=1}^3 P(C_i)P(A|C_i) = 0.526$$

三、

1. (1) 当 $x \leq 100$ 时, $F(x) = 0$

$$\text{当 } x > 100 \text{ 时, } F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{100}^x \frac{100}{x^2} = 1 - \frac{100}{x}$$

因此, X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{100}{x}, & x > 100 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) \quad P\{X \leq 200\} = F(200) = \frac{1}{2}, \quad P\{X > 300\} = 1 - F(300) = \frac{1}{3}$$

3. 易知 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$Y = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}X}$ 的可取值范围为(0,1),

由 $y' = \frac{1}{\lambda} 3e^{-\frac{1}{\lambda}x} > 0$, 可知 y 是严格单调递增函数

$$\text{其反函数为 } x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y), \quad x' = \frac{1}{\lambda(1-y)}$$

故 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \left[-\frac{1}{\lambda} \ln(1-y) \right]} \left| \frac{1}{\lambda(1-y)} \right|, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

四、

解: 1 由 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ 得到

$$\int_0^1 \int_0^{\infty} c e^{-x} y dx dy = \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2.$$

2、 X 的边缘概率密度函数为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

当 $x > 0$ 时, $f_X(x) = \int_0^1 e^{-x} y dy = e^{-x}$. 当 $x \leq 0$ 时, $f_X(x) = 0$.

$$\text{因此 } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Y 的边缘概率密度函数为 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$

$$\text{由于 } f_Y(y) = \int_0^{\infty} 2e^{-x} y dx = 2y, 0 < y < 1.$$

$$\text{因此 } f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 相互独立.

$$3、\text{由于 } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(z-x) = \begin{cases} 2(z-x), & 0 \leq z-x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此 $Z = X + Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \begin{cases} \int_0^z e^{-x} 2(z-x)dx, & 0 \leq z < 1 \\ \int_{z-1}^z e^{-x} 2(z-x)dx, & 1 \leq z \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2z+2e^{-z}-2, & 0 \leq z < 1 \\ 2e^{-z}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

五、

解：设 X 表示一只蛋糕的价格。

$$\text{易求得 } EX = 10 \times 0.3 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.3 = 15$$

$$EX^2 = 10^2 \times 0.3 + 15^2 \times 0.4 + 20^2 \times 0.3 = 240$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 15$$

令 X_i 表示售出的第 i 只蛋糕的价格，则 $EX_i = 15, DX_i = 15$ 。

由中心极限定理得

$$\frac{\sum_{i=1}^{375} X_i - 375 \times 15}{\sqrt{375 \times 15}} = \frac{\sum_{i=1}^{375} X_i - 5625}{75} \sim N(0,1)$$

所以有

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{375} X_i > 5775\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{375} X_i - 375 \times 15}{\sqrt{375 \times 15}} > \frac{5775 - 375 \times 15}{\sqrt{375 \times 15}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 0.0228 \end{aligned}$$

六、

1 随机变量 X 和 Y 独立：指对任意的实数 x, y ，有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

随机变量 X 和 Y 不相关： X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 。

独立与不相关之间的关系：

若 X 和 Y 独立，则 X 和 Y 不相关；若 X 和 Y 不相关，则 X 和 Y 不一定独立。

解：1 由于 $E(X)=1, D(X)=1, E(Y)=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1+1^2=2$ 。

$$E(Y^2) = E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x} dx = 24,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 24 - 2^2 = 20.$$

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x} dx = 6,$$

因此 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 6 - 1 \times 2 = 4.$

$$D(X+Y) = DX + DY + 2Cov(X, Y) = 29$$

七、

$$\text{解: } 1. \quad \mu_1 = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_e^{+\infty} x\theta e^{\theta} x^{-(\theta+1)} dx = \frac{e\theta}{\theta-1}$$

$$\text{解方程得 } \theta = \frac{\mu_1}{e - \mu_1}$$

$$\text{用 } \bar{X} \text{ 代替 } \mu_1 \text{ 得 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{e - \bar{X}}.$$

2. 似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \Rightarrow \prod_{i=1}^n \theta e^{\theta} x_i^{-(\theta+1)} = \theta^n e^{n\theta} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + n\theta - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

似然方程为

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L = \frac{n}{\theta} + n - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

$$\text{解方程得 } \hat{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - 1} \quad \text{即最大似然估计量为 } \hat{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - 1}$$

$$3. \text{ 由于 } EX = \frac{e\theta}{\theta-1}, \text{ 所以其最大似然估计为 } EX = \frac{e}{2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i}$$

八、

1、(1) 第一类错误 (2) 第二类错误

2、解：提出假设 $H_0: \mu \leq 40, \quad H_1: \mu > 40.$

$$\text{选取检验统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{H_0 \text{真}}{\sim} N(0,1)$$

$$\text{拒绝域 } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha}$$

查表 $z_{\alpha} = z_{0.05} = 1.64$,

$$\text{计算 } z = \frac{41-40}{2/\sqrt{16}} = 2 > 1.64$$

拒绝 H_0 , 即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为平均钢板厚度有显著提高.