北京理工大学 2019-2020 学年第一学期《工科数学分析》（上）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准

2020年1月8日

一、填空（每小题4分，共20分）

1．e^{-2};　　　2．$-\dfrac{1}{2(1+t)^4}$;

3．$2e^2$;　　　4．$2\ln 2-1$;　　　5．$x=-y-1+Ce^{y}$或$y=\ln|1+x+y|+C$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1．解：因 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$,

所以，$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$,　　………… 1分

令 $x^2+ax+b=(x-2)(x+k)$, 则

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+k)}{(x-2)(x-1)}=2+k=6,$$　　………… 3分

所以，$k=4$, 从而 $a=2, b=-8$.　　………… 5分

2．解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arctan\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{1+x-1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$　　………… 3分

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\arctan\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}})$.　　………… 5分

3. 解：$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int\dfrac{2x^2}{1+x^2}dx$　　………… 3分

$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x$　　………… 5 分

4.

解：令 $y'=p=p(x)$, 则原方程化为

$$p'-\frac{2}{x}p=x^2$$　　…………2分

利用一阶线性微分方程的求解公式得：

$$p=Cx^2+\ \ x^3$$　　…………4分

由 $y'=Cx^2+\ \ x^3$ 得原方程的通解为

$$y=C_1x^3+C_2+\frac{x^4}{4}$$　　…………5分

三 、解：$y'=1+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$,

令　$y''=0$,　得　$x=e^{\frac{3}{2}}$,　　………… 3 分

又函数的定义域为：$x>0$，当 $x\in(0,e^{\frac{3}{2}})$ 时，$y''<0$，函数的图形为上凸的；

当 $x\in(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 时，$y''>0$，函数的图形为下凸的。

有拐点$(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$. …………6 分

$\lim\limits_{x\to 0+} y=\lim\limits_{x\to 0+}(x+\frac{\ln x}{x})=\infty$，所以$x=0$为此曲线的垂直渐近线，又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\ln x}{x^2})=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=1=k$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0=b$$

所以此曲线有斜渐近线： $y=x$ …………8 分

四、解：对于分段点$x=0$,因

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x^2-1}=-\sin 1,$$

故$x=0$是第一类跳跃型间断点； …………2分

当$x>0$时，考虑$x=1$，极限

$\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x^2-1}$不存在,

故$x=1$是第二类震荡型间断点； …………4分

当$x<0$时，函数在点列$x_k=-k\pi-\frac{\pi}{2},k=0,1,2\cdots$处没有定义 ，

$x_0=-\frac{\pi}{2}$时，有$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}F(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=-\frac{\pi}{2}$,

故$x=-\frac{\pi}{2}$是第一类可去型间断点； …………6分

$x_k=-k\pi-\frac{\pi}{2},k=1,2\cdots$时，$\lim\limits_{x\to x_k}F(x)=\lim\limits_{x\to x_x}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=\infty$,

故$x_k=-k\pi-\frac{\pi}{2},k=1,2\cdots$是第二类无穷型间断点； …………8分

五、解：$x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1$，因$-1<x_0<0$，所以$-1<x_1<0$

设$-1<x_n<0$， 由 $x_{n+1}=(x_n+1)^2-1$， 得$-1<x_{n+1}<0$

故对$\forall n$，有 $-1<x_n<0$ …………2分

又由$x_{n+1}=x_n^2+2x_n$，及$-1<x_n<0$，得$\frac{x_{n+1}}{x_n}=x_n+2>1$

故$x_{n+1}<x_n$，即x_n单调减少有下界，所以$\{x_n\}$收敛 …………4分

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$， 得 $A=A^2+2A$

解得 $A=-1$，$A=0$(舍去)

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$. …………6分

六、解法一：取x为积分变量

$$V=\int_0^1 2\pi(3-x)\cdot 2x^2\,\mathrm{d}\,x$$ …………5分

$$=4\pi[\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}\,x-\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}\,x]$$

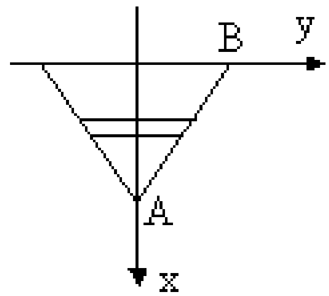
$$=3\pi$$ …………8 分

解法二：取 y 为积分变量

$$V=\int_0^2 \pi(3-\sqrt{y/2})^2\,\mathrm{d}\,y-\pi\cdot 2^2\cdot 2.$$ …………5分

$$=3\pi.$$ …………8分

七、解：建立如图所示坐标系，



直线 AB 的方程为：

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x).$$ …………4分

取 x 为积分变量：$x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}a]$. 选取 $[x,x+dx]$，则压力微元为：

$$dP=\rho gx\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)dx$$

水压力：$P=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\rho gx\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)dx$ …………6分

$$=\frac{2\sqrt{3}\rho g}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}(\frac{\sqrt{3}}{2}ax-x^2)dx$$

$$=\frac{\rho g a^3}{8}$$ …………8分

八、解： $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式为：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\therefore \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6),$$ …………4分

$$f(x)=x^2\ln(1+x^2)=x^4-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{3}+o(x^8)$$ …………6分

由$Taylor$公式中系数的唯一性,有

$$a_8=\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{1}{3} \qquad \therefore f^{(8)}(0)=\frac{8!}{3}=13440 \ .$$ …………8分

九、（8 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足方程

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^x - f(x)，求 f(x).$$

解：
$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt = xe^x - f(x)$$

$$\int_0^x f(t)dt = e^x + xe^x - f'(x)$$

$$f(x)=e^x+e^x+xe^x-f''(x)$$

$$f''(x)+f(x)=(2+x)e^x$$ …………2分

$$f(0)=0 \qquad f'(0)=1$$

$$r^2+1=0 \qquad r=\pm i$$ …………4分

$$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

设 $f^*(x)=(Ax+B)e^x$

代入微分方程得 $A=\frac{1}{2} \quad B=\frac{1}{2}$

$$f^*(x)=\frac{1}{2}(x+1)e^x$$

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x+1)e^x$ …………6 分

由初始条件得 $C_1=-\frac{1}{2} \quad C_2=0$

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}(x+1)e^x$$ …………8分

十、 解：(1) 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{x})}{\sin x}=3$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$，

故 $f(0)=0$， $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$； …………2 分

(2) 令 $F(x)=f'(x)e^x$，

根据积分中值定理，$\exists c\in[1,2]$，使

$$f(c)=\int_1^2 f(x)dx$$ …………4 分

由罗尔定理，$\exists c_1\in(0,c)$，使 $f'(c_1)=0$，

$$\therefore F(0)=F(c_1),$$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,c_1)\subset(0,2)$，使 $F'(\xi)=0$，

即 $$f''(\xi)e^\xi+f'(\xi)e^\xi=0,$$

$$f'(\xi)+f''(\xi)=0.$$ …………6 分