北京理工大学 2021-2022 学年第一学期

线性代数 B 期末试题 A 卷

座号____________班级__________学号__________姓名____________

（试卷共 2 页，八道大题；请按要求在答题卡上作答，解答题必须有解题过程）

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 1, −2, 则 $\left|2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\right|$=________。

2、设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 4 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。若齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 2 个向量，则 $\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{A}^*\right)=$______。

3、已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的 1, 2 两行互换得到 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 3 列的−2 倍加到第 1 列得到 3 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{A}=$_________。

4、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,-1)^T$，则 $\boldsymbol{A}^{99}$=__________。

5、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix}0&2A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}$=_________。

二(10 分)、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}^*=2\boldsymbol{XA}^*+\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

三(10 分)、设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的两个基。

(1) 求由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 $\gamma=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 关于基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标。

四(10 分)、已知向量组：$\alpha_1=(1,0,1,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,1)^T,\alpha_3=(1,2,1,2)^T,\alpha_4=(1,0,0,1)^T$，求生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一个标准正交基。

五(10 分)、已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 相似。

（1）求 x,y 的值；

（2）问 A 可否对角化？并说明原因。

六(15 分)、已知线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$$

讨论参数 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？ 当方程组有无穷多解时，用其导出组的基础解系表示通解。

七(15 分)、将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 用正交替换 $X=QY$ 化为标准形并判断此二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

八(10 分)、设 A,B 为两个 n 阶方阵，且 A 的 n 个特征值两两互异，如果 A 的特征向量恒为 B 的特征向量，证明 $AB=BA$。