线性代数 B 期末试题 A 卷答案

一、填空题

1、$\underline{\frac{1}{5}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}$；　2、$\underline{5}$；　3、$\underline{108}$；　4、$\underline{-18}$；　5、$\underline{\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

二、解：由已知条件可求得

$$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{56}$$ …………2 分

因此，$\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。在 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BA}$ 等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$、右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，则有

$$\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB}$$

整理可得

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}$$ ……………5 分

因此

$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}$$ ……………7 分

计算可知

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&\frac{4}{5}&0\\0&0&\frac{7}{8}\end{pmatrix}$$ ……………9 分

所以

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{6}{5}&0\\0&0&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$ ………..10 分

三、解：（1）设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，所以

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$$ ………..2 分

因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

………..5 分

（2）设向量 γ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，则有

$$
\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

………..6 分

解齐次线性方程组

$$
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

………..8 分

可得所求向量在两个基下的坐标均为 $k(-1,0,2)^T$，k 为任意常数。因此所求向量为

$$
\gamma = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

其中 k 为常任意常数。 ………..10 分

四、解：由题意

$$\bar{A}=(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\2&-1&3&-1&4\\0&1&-1&a&a\\1&-3&4&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&1&-1&a&a\\0&-2&2&0&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&0&a+1&a-2\\0&0&0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&a+1&a-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&\frac{a}{2}-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

………..3 分

(1) 当 $a\neq 5$ 时，$r(A)=3<r(\bar{A})=4$，方程组无解；………..4 分

(2) 当 $a=5$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=3$，方程组有无穷多解；此时 ………..6 分

方程组的特解为 $X_0=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T$ ………..8 分

可得导出组的基础解系为 $X_1=(-1,1,1,0)^T$ ………..9 分

故原方程组的通解为 $X=X_0+kX_1=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T+k(-1,1,1,0)^T$，其中 k 为任意常数。

………..10 分

五、解：（1）对矩阵 A 进行初等行变换，化成行简化阶梯形：

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2&1&4\\1&1&0&-1&2\\2&1&1&0&3\\5&2&3&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&-1&-2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ ………..3 分

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，因为阶梯形的主元位于第 1，2 列，所以 α_1,α_2 是矩阵 A 列向量组的一个极大无关组。………..6 分

（2）由简化阶梯形可以看出

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$$

………..10 分

六、解：（1）因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，故

$$\boldsymbol{B}^T=\left(\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}\right)^T=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}$$

可得 $\boldsymbol{B}$ 仍是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵。 ………..3 分

先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量。

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

故 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$（二重根）。 ………..6 分

当 $\lambda_1=-1$ 时，由 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 可得特征值 $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 可得特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$。

………..9 分

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=f(\lambda)\boldsymbol{\alpha}$，其中 $f(x)=x^3-2x+5$，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $f(\lambda_i)$：

$$f(\lambda_1)=f(-1)=6,\quad f(\lambda_2)=f(\lambda_3)=f(2)=9$$ ………..12 分

即 $\boldsymbol{B}$ 的特征值分别为 6, 9, 9, 对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$ ………..15 分

七、解：（1）实二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}s&0&t\\0&2&0\\t&0&-2\end{pmatrix}$$ ……….2 分

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则由题设条件得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=s+2+(-2)=1$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-4s-2t^2=-12$$

解得 $s=1,t=\pm 2$，由已知 $t>0$，故 t=2，即 $s=1,t=2$。 ……….4 分

（2）由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

设 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$。 ……….7 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(2I-A)$X=0，可得 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为

$$X_1=(0,1,0)^T\ X_2=(2,0,1)^T$$

当 $\lambda_3=-3$ 时，解方程组 $(-3I-A)$X=0，可得 $\lambda_3=-3$ 的特征向量 $X_3=(1,0,-2)^T$ …….10 分

因为 X_1,X_2,X_3 已两两正交，故只需对它们单位化，分别为

$$\eta_1=\frac{X_1}{|X_1|}=(0,1,0)^T,\ \eta_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\frac{1}{\sqrt5}(2,0,1)^T,\ \eta_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{\sqrt5}(1,0,-2)^T$$

故所求正交矩阵为

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$ ……….13 分

（2）由于 A 的特征值不全大于 0，由正定性的等价命题可知 f 不正定。………15 分

八、证明：由题意可知

$$A(\eta_i-\eta_j)=\beta-\beta=0,\ i=2,3,\dots,n-r+1;$$

因此 $\eta_i-\eta_j$ 是 Ax=$\mathbf{0}$ 的解，$i=2,3,\dots,n-r+1$。 ……….3 分

设
$$\sum_{i=2}^{n-r+1}k_i(\eta_i-\eta_j)=0$$

即

$$k_2\eta_2+k_3\eta_3+\dots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}-(k_2+k_3+\dots+k_{n-r+1})\eta_1=0$$

由$\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n-r+1}$线性无关可知，$k_2=k_3=...=k_{n-r+1}=0$，所以$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1,...,\eta_{n-r+1}-\eta_1$线性无关。因此，$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1,...,\eta_{n-r+1}-\eta_1$是方程组$Ax=0$的$n-r$个线性无关的解。

……….5 分

由$r(A)=r$可知$Ax=0$的基础解系中恰好含有$n-r$个解，所以$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1,...,\eta_{n-r+1}-\eta_1$是$Ax=0$的基础解系。 ……….7 分

则$Ax=\beta$的通解为

$$\begin{aligned}x&=\eta_1+a_2(\eta_2-\eta_1)+a_3(\eta_3-\eta_1)+...+a_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)\\&=(1-a_2-a_3-...-a_{n-r+1})\eta_1+a_2\eta_2+a_3\eta_3+...+a_{n-r+1}\eta_{n-r+1}\end{aligned}$$

……….9 分

令$k_1=1-a_2-a_3-a_4-...-a_{n-r+1},k_2=a_2,k_3=a_3,...,k_{n-r+1}=a_{n-r+1}$，于是通解为

$$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+...+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

且$k_1+k_2+...+k_{n-r+1}=1$。 ……….10 分