北京理工大学 2017-2018 学年第一学期

线性代数 B 试题 (A 卷)

座号____________班级_____________学号____________姓名____________

（试卷共 7 页, 八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一、 填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1、 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3),\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则

$$\boldsymbol{A}^4=3^3\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & \frac{27}{2} & 9\\ 54 & 27 & 18\\ 81 & \frac{81}{2} & 27\end{pmatrix}$$

2、 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是 _________ $t>\frac{3}{5}$ _____

3、 矩阵乘积 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 4\\ 1 & 8 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^4=$ $\underline{\begin{bmatrix}1 & 5 & 8\\ 1 & 2 & 7\\ 1 & 8 & 9\end{bmatrix}}$

4、 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=3$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的 2 个不同的解，则它的通解为 $\underline{\boldsymbol{\alpha}_1+k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\quad or \quad \boldsymbol{\alpha}_2+k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)}$ $\underline{k}$ <u>为任意常数（$k\in\boldsymbol{R}$ 为正确答案，没有标注 k 的任意性扣 1 分）</u>

5、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$. 则有，

$a=$ _1________, $b=$ _0____________

二、(10 分) 讨论a取何值时，下列线性方程组

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

解：此线性方程组的增广矩阵为$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 & 3(a-1) \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3(a-1) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 3(a-1) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & 3(a-1) \end{bmatrix}$$ ------------4 分

（1）所以$a \neq 1$且$a \neq -2$时，有惟一解。 --------5 分

（2）当$a=-2, a \neq 1$时，无解。 ------ 6 分

（3）当$a=1$时方程组的增广矩阵可化为：

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，故方程组有无穷多组解：通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ -----------------10 分

三、（10 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{I}$，

（1）证明 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵；

（2）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$。

证明（1）由 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{I}$ 可得，

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\mathrm{B}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$$

故 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵…………………………4 分

（2）由（1）可知，

$$(\mathrm{B}-2\boldsymbol{I})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}$$

$$\mathrm{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}+2\boldsymbol{I}$$ ………………………………5 分

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-2\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}+2\boldsymbol{I}$$

由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\vdots\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&-2&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 可得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ …………9 分

所以 $\mathrm{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}3&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ …………………………10 分

四、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，试求行列式 $|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*+(4\boldsymbol{A})^{-1}|$。

解： 由已知可得

$|\boldsymbol{A}|=3$……………………………………………………………（2 分）

$$|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*+(4\boldsymbol{A})^{-1}|=|\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^*+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}|$$

$$=|\frac{1}{4}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}|$$ ……………………………………………………（7 分）

$$=|\frac{1}{4}\times 3\times \boldsymbol{A}^{-1}+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{3}$$ ……………………………………（10 分）

五、（10 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)^T$,

$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,3,-1)^T$,

（1） 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余的向量。

解： $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ …….（5 分）

（1） 所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$， a_1,a_2,a_3 为原向量组的一个极大无关组 …….（6 分）

（2） $a_4=a_1+3a_2-a_3$， …….（8 分）

$a_5=-a_2+a_3$ …….（10 分）

六、（14 分）设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是向量空间$\boldsymbol{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，

（1）证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是$\boldsymbol{R}^3$的一个基;

（2）求基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵;

（3）设向量$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$，求$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$分别关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标。

解：(1) 因为$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}0&0&3\\2&1&0\\3&2&0\end{pmatrix}$，并且，所以

秩$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=$秩$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，因此$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$为$\boldsymbol{R}^3$的一个基。…………（4 分）

(2) 基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}0&0&3\\2&1&0\\3&2&0\end{pmatrix}$. ……………………(7 分)

(3) $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-3&2\\1/3&0&0\end{pmatrix}$……………………………………………（8 分）

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}0&0&3\\2&1&0\\3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix}$$

所以$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$分别关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的坐标为$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}$………………………（11 分）

所以$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$分别关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标$P^{-1}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-3&2\\1/3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\8\\-5/3\end{pmatrix}$

…………………………（14 分）

七、（15 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$，

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$ 成对角矩阵；

(3) 求 $|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$ 的值。

解：（1）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$…..2 分

（2）由 $|\lambda\boldsymbol{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(7+\lambda)$，

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$ ………………………5 分

当特征值 $\lambda=2$(二重)，解方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得属于 $\lambda=2$ 的特征向量为

$\boldsymbol{X}_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ (*or* $\boldsymbol{X}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$)，

将其正交化有 $\xi_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=\frac{1}{5}(-2,5,4)^{\mathrm{T}}$ (*or* $\xi_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=\frac{1}{5}(2,4,5)^{\mathrm{T}}$)，

单位化

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt5}(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=\frac{1}{3\sqrt5}(-2,5,4)^{\mathrm{T}}$ (*or* $\eta_1=\frac{1}{\sqrt5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=\frac{1}{3\sqrt5}(2,4,5)^{\mathrm{T}}$) …9 分

当特征值 $\lambda=-7$，解方程组 $(-7\boldsymbol{I}-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得属于 $\lambda=-7$ 的特征向量为

$\boldsymbol{X}_3=(-1,-2,2)^T$，单位化 $\eta_3=\frac{1}{3}(-1,-2,2)^T$，…..11 分

取 $\boldsymbol{Q}=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=\begin{pmatrix}2/\sqrt5&-2/3\sqrt5&-1/3\\0&5/3\sqrt5&-2/3\\1/\sqrt5&4/3\sqrt5&2/3\end{pmatrix}$ (or $=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5&2/3\sqrt5&-1/3\\1/\sqrt5&4/3\sqrt5&-2/3\\0&5/3\sqrt5&2/3\end{pmatrix}$),作正

交变换 $X=QY$,则有，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-7\end{pmatrix}$……………………………………12 分

(3) 由特征值的性质，可知 $|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$ 的特征值为 $\mu_1=\mu_2=-2,\mu_3=61$，故

$|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=61\times4=244$…………………………15 分。

八、（6 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为相应的特征向量，又 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，试证：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。

证明：由已知可得：

$$\begin{aligned} A\beta &= A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3 \\ A^2\beta &= A^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3 \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 1\text{ 分}$$

所以，

$$(\beta,A\beta,A^2\beta)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 属于不同的特征值，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关……………………3 分

又因为

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)\neq 0$$

故 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关…………………………………………………6 分