课程编号：100172002　　　北京理工大学 2020-2021 学年第一学期

线性代数 B 期末试题 A 卷

座号_____________班级___________学号___________姓名_____________

（试卷共 6 页，八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

得分	

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I})^{-1}=$______________。

2、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&5\\2&a&7\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{AB})=2$，则 $a=$_____________ 。

3、已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。若 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{4}$，则 $\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-4\boldsymbol{A}^*\right|=$________________。

4、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{D}=$_______________。

5、已知行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&4\\-1&2&3\\1&5&5\end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}-2A_{33}=$__________，其中 $A_{3j}\ (j=1,2,3)$ 为代数余子式。

得分	

二(10分)、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $A^{-1}BA=6A-BA$，求 B 。

得分	

三(10分)、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 是 R^3 的两个基：

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\ \alpha_2=(0,1,1)^T,\ \alpha_3=(\ \ 0,0)^T;$$

$$\beta_1=(1,-1,1)^T,\ \beta_2=(1,1,0)^T,\ \beta_3=(\ \ 0,-1)^T.$$

（1） 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P；

（2） 求在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量 γ 。

得分	

四(10 分)、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩和一个极大无关组，并将不在极大无关组中的向量用极大无关组线性表出。

得分	

五(10 分)、设有非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + ax_4 = a \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$，试讨论 a 的取值与该方程组解的关系；并在有解时，求其通解。

得分	

六(15 分)、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$。问 $\boldsymbol{B}$ 能否相似于对角矩阵？若能相似于对角矩阵，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\Lambda$。

得分	

七(15 分)、二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=sx_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2tx_1x_3 \quad (t>0)$，已知二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

(1)求 s,t 的值；

(2)写出利用正交替换 $X=QY$ 化一般形为标准形所用的正交矩阵 Q；

(3)判断此二次型是否正定。

得分	

八(10分)、

设 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r+1}$是$n$元非齐次线性方程组$Ax=\beta$的$n-r+1$个线性无关的解，且$r(A)=r$。

证明：$Ax=\beta$的任意一个解均可表示为

$$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

其中常数$k_1,k_2,\ldots,k_{n-r+1}$满足$k_1+k_2+\ldots+k_{n-r+1}=1$。