北京理工大学 2008- 2009 学年第一学期

2007 级概率与数理统计期末试题（A 卷）答案及评分标准

一、解: 设 $A_i=\{$先从第一盒子中任取2只球中有i只白球$\}$， $i=0,1,2;$

$B=\{$然后从第二个盒子中任取一只球是白球$\}$. 由题知

$$P(A_0)=\frac{C_4^0C_5^2}{C_9^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18},\quad P(A_1)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9},$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^2C_5^0}{C_9^2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$ ………3□

$$P(B\mid A_0)=\frac{C_5^1}{C_{11}^1}=\frac{5}{11},\quad P(B\mid A_1)=\frac{C_6^1}{C_{11}^1}=\frac{6}{11},$$

$$P(B\mid A_2)=\frac{C_7^1}{C_{11}^1}=\frac{7}{11}.$$ ………3□

则由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)\\&=\frac{5}{18}\times\frac{5}{11}+\frac{5}{9}\times\frac{6}{11}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{11}\\&=\frac{53}{99}=0.5354.\end{aligned}$$ ………6□

二、(14 分)

解: (1) X 的概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & □\ □\end{cases}$$

因为 $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$

$$P(Y=1)=P(X\geq 0)=\frac{2}{3}$$ ………4 分

所以，Y 的分布列为

Y	-1	1
P	$1/3$	$2/3$

………2 分

（2）Y 的可能取值区间为$(-3,3)$

由 $y=3x$，且$y'=3>0$可知，

y 在区间$(-1,1)$上是严格单调增函数，

其反函数为$x=h(y)=\dfrac{y}{3}$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{3}$ ………4 分

故，Y 的概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(\dfrac{y}{3}\right)\left|\dfrac{1}{3}\right| & , \quad -3<y<3 \\ 0 & , \quad \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{3}\right)^2\dfrac{1}{3} & , \quad -3<y<3 \\ 0 & , \quad \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{y^2}{18} & , \quad -3<y<3 \\ 0 & , \quad \text{其他} \end{cases}$$ ………4 分

三、（18 分）

解：

1.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

$$\text{当}x>0\text{时，}f_X(x)=\int_0^2 e^{-2x}\,dy=2e^{-2x}$$

$$\text{当}x\le 0\text{时，}f_X(x)=0$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, x>0 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

当$0 < y < 2$时，$f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}$

当$y \le 0$或$y \ge 2$时，$f_Y(y) = 0$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, 0 < y < 2 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

……………………..（+8）

2. X 与 Y 相互独立. 因为 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$几乎处处成立..

……………………..（+2）

3.
$$P(X + Y \le 2) = \iint\limits_{x+y\le 2} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^{2-y} e^{-2x} dxdy = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4}$$

……………………..（+4）

4.
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, x \ge 0 \\ 0, \quad x \le 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ \frac{y}{2}, 0 \le y < 2 \\ 1, y \ge 2 \end{cases}$$

X与Y相互独立

$$F_Z(z) = P(\max(X,Y) \le z) = P(X \le z, Y \le z) = P(X \le z)P(Y \le z)$$

$$= F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ (1 - e^{-2z})\frac{z}{2}, & 0 \le z < 2 \\ (1 - e^{-2z}), & z \ge 2 \end{cases}$$

……………………..（+4）

四、解：由已知：X∽N（0,1），Y∽E（1），且 X 与 Y 相互独立。

因此，EX＝0， EY＝1，D(X)＝1，D(Y)＝1，EX^2＝1，EY^2＝2。

（1）E（2X-Y）＝2E(X)－E(Y)＝－1，

D（2X-Y）＝4D(X)＋D(Y)＝5。（6 分）

（2）E（XY）＝EXEY=0，

D(XY)＝$E(XY)^2 - E^2(XY) = EX^2EY^2$＝2。（6 分）

（3）$\rho_{UV} = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}} = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)D(X-Y)}} = \frac{D(X) - D(Y)}{D(X) + D(Y)} = 0.$ （6 分）

五、解: 设 X_i 为第 i 只元件的寿命，i＝1,...16， $X_1 \cdots X_{16}$ 相互独立同分布 ，X＝ $\sum_{i=1}^{16} X_i$ 为 16 只元件的寿命总和，已知 $\mu=100, \sigma^2=100^2$. 那么由中心极限定理 $\frac{X-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 近似服从 N（0,1）． 所以，（4 分）

P（X>1920）$\approx 1-\Phi(\frac{1920-16\times 100}{100\sqrt{16}})=1-\Phi(0.8)=0.2119$.（4 分）

六（18 分）

解：（1）$\boldsymbol{EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\alpha(1-x)^{\alpha-1}dx}$

$$\overset{t=(1-x)}{=}\int_0^1 (1-t)\alpha t^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha+1}$$ ……………………..4 分

解得 $\boldsymbol{\alpha=\frac{1-E(X)}{E(X)}}$，用 $\bar{X}$ 代替 $\boldsymbol{EX}$ 即得 $\boldsymbol{\alpha}$ 的矩估计 为 $\boldsymbol{\alpha=\frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}}$。…………3 分

（2）似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\prod_{i=1}^n \alpha(1-x_i)^{\alpha-1}=\alpha^n\prod_{i=1}^n (1-x_i)^{\alpha-1}$$ ……………………..2 分

两边取对数得对数似然函数为

$$\ln L(\alpha)=n\ln\alpha+(\alpha-1)\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i)$$ ……………………..2 分

关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 求导数并令其为 0 得：$\boldsymbol{\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i)=0}$。……………………..2 分

解方程得 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最大似然估计为 $\boldsymbol{\hat{\alpha}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i)}}$。……………………..1 分

（3）$\because$ $\boldsymbol{X_{2i}-X_{2i-1}\sim N(0,2\sigma^2)}$，

$\therefore$ $\boldsymbol{E(X_{2i}-X_{2i-1})^2=D(X_{2i}-X_{2i-1})+[E(X_{2i}-X_{2i-1})]^2=2\sigma^2}$，$\boldsymbol{i=1,\cdots,n}$

……………………..2 分

$\boldsymbol{EY=E(c\sum_{i=1}^n (X_{2i}-X_{2i-1})^2)=c\sum_{i=1}^n E(X_{2i}-X_{2i-1})^2=cn2\sigma^2=\sigma^2}$，…………..1 分

解得 $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2\boldsymbol{n}}$ 。

即当 $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2\boldsymbol{n}}$ 时。$\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 的无偏估计。 ……………………..1 分

七、（12 分）

解：设 $H_0:\sigma^2=0.048^2$ $H_1:\sigma^2\neq 0.048^2$ ……………………..3 分

检验统计量为 $\dfrac{(n-1)S^2}{0.048^2}$ ……………………..3 分

拒绝域为 $\dfrac{(n-1)s^2}{0.048^2}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{0.048^2}>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ ……..3 分

查表得：$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(4)=0.711$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(4)=9.488$

计算得 $s^2=\dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2)=0.03112$

$$\frac{(n-1)s^2}{0.048^2}=\frac{4\times 0.03112}{0.048^2}=1$$

不满足拒绝域的条件，认为这批纤维纤度得方差没有显著变化。

……………………..3 分