北京理工大学 2017-2018 学年第一学期

线性代数 B 试题 (A 卷)

座号____________班级_____________学号____________姓名____________

（试卷共 7 页, 八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一、　填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3),\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, 则 $\boldsymbol{A}^4=$ ____________

2、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是 ______________

3、矩阵乘积 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&2&3\\1&5&4\\1&8&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^4=$ ______________________

4、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=3$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的 2 个不同的解，则它的通解为_______________________

5、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$. 则有，

$a=$ _________, $b=$ ____________

二、（10 分）讨论a取何值时，下列线性方程组

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

三、（10 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{I}$ ，

（1）证明 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵；

（2）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 。

四、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，试求行列式 $|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*+(4\boldsymbol{A})^{-1}|$。

五、（10 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)^T$,

$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,3,-1)^T$,

（1） 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余的向量。

六、（14 分）设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是向量空间$\boldsymbol{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，

（1）证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是$\boldsymbol{R}^3$的一个基;

（2）求基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵;

（3）设向量$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$，求$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$分别关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标。

七、（15 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$，

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 成对角矩阵；

(3) 求 $|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$ 的值。

八、（6 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为相应的特征向量，又 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，试证：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。