CHAMPION PUBLICATION

CHAMPION PUBLICATION

Bilingual

MATHS

Concept King

All Formulas and Theorems | Smart Tricks

Arithmetic & Advance Maths

Useful For

CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS
and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

CamScanner

INDEX

Title Name	Page No.
Table of Symbols (प्रतीकों की तालिका) Conversion of Units (इकाइयों का रूपांतरण)	1-2
Geometry	
Line and Angle (रेखा और कोण	3-04
Types of Triangles (त्रिभुज के प्रकार)	5-09
Area side properties (त्रिभुज का क्षेत्रफल)	10-11
Similarity of triangles (त्रिभुज की समरूपता)	12-14
Congruency of triangle (त्रिभुज की सर्वांगसमता)	15-16
Centre of Triangle (त्रिभुज के केन्द्र)	17-19
Circumcentre and Orthocentre (परिकेंद्र और लम्बकेंद्र)	20-23
Centroid (केन्द्रक)	24-27
Equilateral triangle (समबाहु त्रिभुज)	28-29
Right angle triangle (समकोण श्रभुज)	30-32
Square and Rectangle (वर्ग और आयत)	33-34
Parallelogram/ Rhombus/ Trapezium (समांतर चतुर्भुज/समचतुर्भुज/समलंब)	35-37
Circle (वृत्त)	38-43
Co-ordinate Geometry (निर्देशांक ज्यामिति)	44-47
2 Dimension Mensuration (2 आयामी क्षेत्रमिति)	48-54
Polygon (बहुभुज)	55-56
3 Dimension Mensuration (3 आयामी क्षेत्रमिति)	57-66
Number system (संख्या प्रणाली)	67-68
Divisibility Rules (विभाज्यता के नियम)	69
Remainder Theorem (शेषफल प्रमेय)	70-71
Number of Factors (गुणनखंडों की संख्या)	72-73
Sequences and Series (अनुक्रम और श्रृंखला)	74-79
LCM & HCF (एलसीएम और एचसीएफ)	80-81

CamScanner

Title Name	Page No.
Calculation & simplification (गणना और सरलीकरण)	82-86
Surds & Indices (घातांक और करणी)	87-89
Algebra (बीजगणित)	90-94
Theory of Equations and Inequations (समीकरणों और असमानताओं का सिद्धांत)	95-97
Trigonometry (त्रिकोणमिति)	98-105
Maxima & Minima (अधिकतम और न्यूनतम)	106
Height & Distance (लंबाई और दूरी)	107-108

Arithmetic (अंकगणित)

Percentage (प्रतिशत)	109-115
Profit & Loss (लाभ और हानि)	116-118
Discount (बट्टा/छूट)	119-120
Simple interest (साधारण ब्याज)	121-122
Compound interest (चक्रवृद्धि ब्याज)	123-124
Ratio & Proportion (अनुपात तथा समनुपात)	125-128
Mixture & Alligation (मिश्रण तथा एलिगेशन)	129-32
Partnership (साझेदारी)	133
Average (औसत)	134-138
Time & Work (समय और कार्य)	139-141
Pipe & Cistern (नल व टंकी)	142
Time, Speed & Distance (समय, दूरी और चाल)	143-146
Boat & Stream (नाव व धारा)	147
Race (दौड़)	148
Permutation & Combinations (क्रमचय और संचय)	149-151
Probability (संभावना)	152-153
Statistics (सांख्यिकी)	154-155
Clock (घड़ी)	156-157
Calendar (कलेंडर)	158-160

CamScanner

Table of Symbols (प्रतीकों की तालिका)

Appendix

Symbol	Reference
$=$	equal to
$\neq$	not equal to
$\equiv$	identity
$\simeq$	approximately equal to
$\cong$	congruent to
$\rightarrow$	approaches, ray
$\propto$	proportional to
$<$	less than
$\nless$	not less than
$>$	greater than
$\ngtr$	not greater than
$\leq$	less than or equal to
$\geq$	greater than or equal to
$<<$	much less than
$>>$	much greater than
∞	infinity
σ or Σ	sigma
%	percentage
$+$	plus, positive
$-$	minus, negative
$\pm$	plus or minus
$a \times b$, $a \cdot b$	multiplication
$a \div b$, a / b	division
$\therefore$	therefore
$\because$	since
—	line segment
$\angle$	acute angle
$\perp$	perpendicular
$\parallel$	parallel
Δ	triangle
$\square$	rectangle
$\square$	square
$\log_b a$	logarithm (to base b)
$\log_{10} a$	common logarithm
$\log^e a$ or $\ln a$	natural logarithm
$\wedge$	conjunction (and)
$\vee$	disjunction (or)
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	implication
$\sim$	negation, equivalence, relation
$\exists, \forall$	quantifier
$\{\}$	set
ϕ	empty set, void set, null set

Conversion of Units

Conversion of Length

10 millimetres (mms)	= 1 centimetre (cm)
10 centimetres	= 1 decimetre (dm)
10 decimetres	= 1 metre (m)
10 metres	= 1 decametre (dam)
10 decametres	= 1 hectometre (hm)
10 hectometres	= 1 kilometre (km)

Conversion of Area

100 square millimetres	= 1 square centimetre
100 square centimetres	= 1 square decimetre
100 square decimetres	= 1 square metre
100 square metres	= 1 square decametre
100 square decametres	= 1 square hectometre
100 square hectometres	= 1 square kilometre
1 hectare	= 10000 square metres

Conversion of Volume

1000 cubic millimetres	= 1 cubic centimetre
1000 cubic centimetres	= 1 cubic decimetre
1000 cubic decimetres	= 1 cubic metre
1000 cubic metres	= 1 cubic decametre
1000 cubic decametres	= 1 cubic hectometre
1000 cubic hectometres	= 1 cubic kilometre

Conversion of Capacity

10 millilitres	= 1 centilitre
10 centilitres	= 1 decilitre
10 decilitres	= 1 litre
10 litres	= 1 decalitre
10 decalitres	= 1 hectolitre
10 hectolitres	= 1 kilolitre

Conversion of Weight

10 milligrams	= 1 centigram
10 centigrams	= 1 decigram
10 decigrams	= 1 gram (g)
10 grams	= 1 decagram
10 decagrams	= 1 hectogram
10 hectograms	= 1 kilogram (kg)
100 kilograms	= 1 quintal
10 quintals or 1000 kg	= 1 metric tonne

CamScanner

Conversion of Time

60 seconds	= 1 minute
60 minutes	= 1 hour
24 hours	= 1 day
7 days	= 1 week
15 days	= 1 fortnight
28, 29, 30 or 31 days	= 1 month
12 months	= 1 year
365 days	= 1 year
366 days	= 1 leap year
10 years	= decade
25 years	= silver jubilee
50 years	= golden jubilee
60 years	= diamond jubilee
75 years	= radium jubilee or platinum jubilee
100 years	= century
1000 years	= 10 centuries or 1 millennium

Equivalents of Units

Symbol

Units of Lengths

12 inches	= 1 feet (ft) = 0.348 metres
3 feet	= 1 yard (d)
1 yard	= 0.9144 metres
22 yards	= 1 chain
1 kilometre	= 0.621 mile or 10^3 metres
1 mile	= 1.6093 kilometres or 1760 yards
1 inch	= 2.54 centimetres
1 hectare	= 2.471 acres

Units of Area

1 square feet	= 144 square inches
	= 0.0929 square metres
1 square metre	= 1.196 square yards
1 square yard	= 0.836 square metres
1 square kilometre	= 0.3861 square miles
	= 1000 hectares
1 square mile	= 2.59 square kilometres
	= 640 acres
1 acre	= 4840 square yards
	= 4046.86 square metres
100 square metres	= 1 acre
100 acres	= 1 hectare
	= 1000 square metres

CamScanner

Geometry (Line & Angle) (रेखा और कोण)

Line and Angle (रेखा और कोण)

❖ **Point**: Zero dimension figure or a circle with zero radius.

बिंदु : शून्य आयामी आकृति या शून्य त्रिज्या वाला एक वृत्त।

❖ **Line:** One dimension figure line is a set of points having only length with no ends. _____

रेखा : एक आयामी आकृति। रेखा बिंदुओं का एक समूह है जिसमें केवल लंबाई होती है जिसका कोई अंत नहीं होता है। _____

❖ **Line segment:** A line with a fixed length.

रेखा खंड : एक निश्चित लंबाई वाली रेखा।

P•———•Q

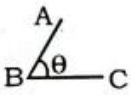
❖ **Ray**: A line with uni-direction length. A———•→ B

किरण : एक दिशा लंबाई वाली रेखा।

❖ **Angle**: inclination between two sides is called angle.

कोण: दो भुजाओं के बीच के झुकाव को कोण कहते हैं।

$\angle ABC = \theta$



❖ **Complementary Angle :** If sum of two angles is 90° then they are Complementary to each other.

पूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 90° हो तो वे एक दूसरे के पूरक होते हैं।

❖ Complementary Angle/ पूरक कोण

$\alpha+\beta = 90°$

Supplementary Angle : If sum of two angles is 180° then they are supplementary to each other.

संपूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 180° हो तो वे एक दूसरे के पूरक होते हैं।

Supplementary Angles/संपूरक कोण

$\alpha+\beta = 180°$

❖

Angle कोण	Complementary पूरक	Supplementary संपूरक
43°	47° $\xrightarrow{+90}$	137°
12°	88° $\xrightarrow{+90}$	178°
θ	90 – θ $\xrightarrow{+90}$	180 – θ

Supplementary angle of an angle is 90° more than complementary angle.

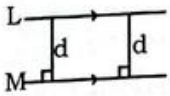
एक कोण का संपूरक कोण पूरक कोण से 90° अधिक होता है।

❖ **Transversal Line :** A line which interests two or more lines at distinct point is called transversal lines of the given lines.

तिर्यक रेखा : वह रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग-अलग बिंदु पर काटती है, दी गई रेखा की तिर्यक रेखा कहलाती है।

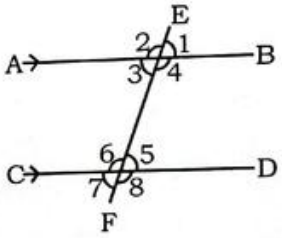
❖ **Parallel lines:** two or more line that never intersects L || M

समानांतर रेखाएँ : दो या अधिक रेखाएँ जो एक दूसरे को कभी नहीं काटती हैं। L || M



AB || CD and EF is transversal line

AB || CD और EF एक तिर्यक रेखा है

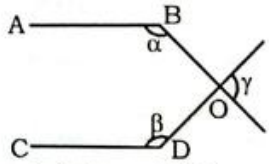


Corresponding angles / संगत कोण ⇒ $\angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8$
$\angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$

Alternate Angles / एकांतर कोण ⇒ $\angle 3 = \angle 5, \angle 4 = \angle 6$
$\angle 4 + \angle 5 = 180°$
$\angle 3 + \angle 6 = 180°$

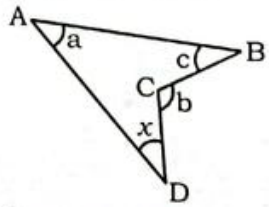
❖ If AB || CD then find the value of $\alpha+\beta+\gamma$?

अगर AB || CD तो $\alpha+\beta+\gamma$ का मान ज्ञात करें?



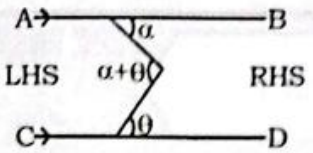
$\alpha + \beta + \gamma = 360°$

❖



$b = a + c + x$

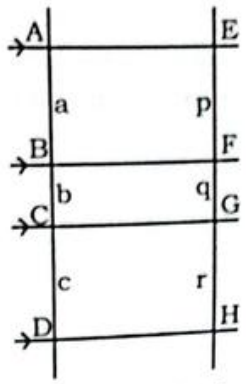
CamScanner

❖ 

Sum of angle on RHS = LHS

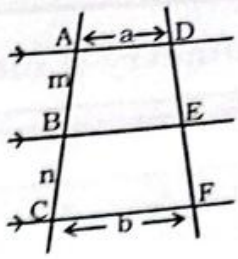
(RHS = LHS पर कोणों का योग)

$\alpha+\theta = \alpha+\theta$

❖ 

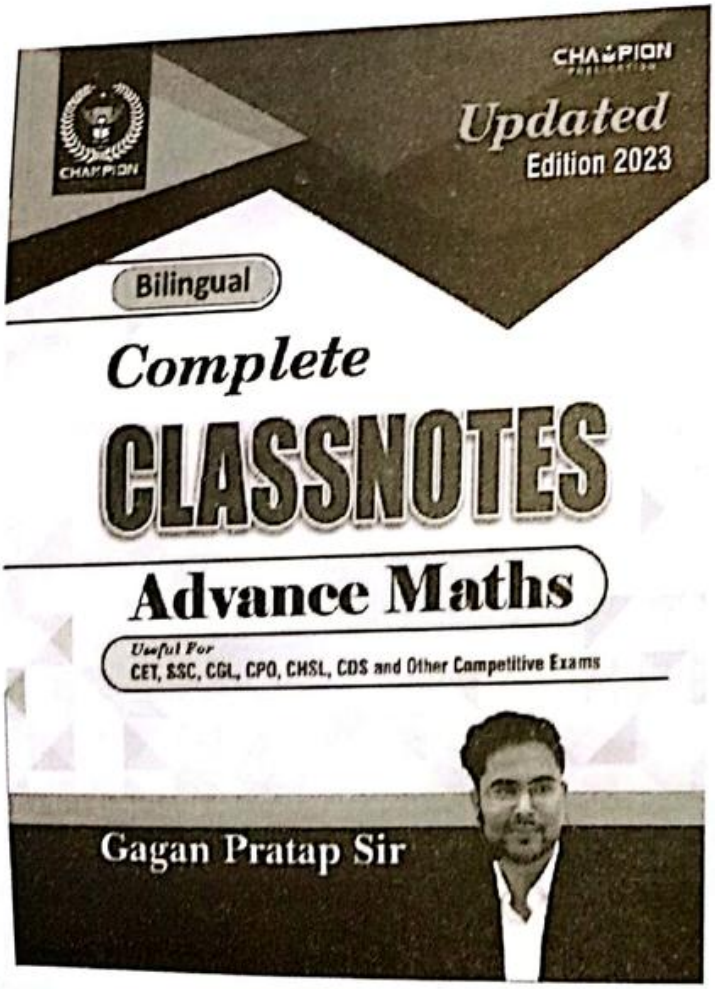
$a : b : c = p : q : r$

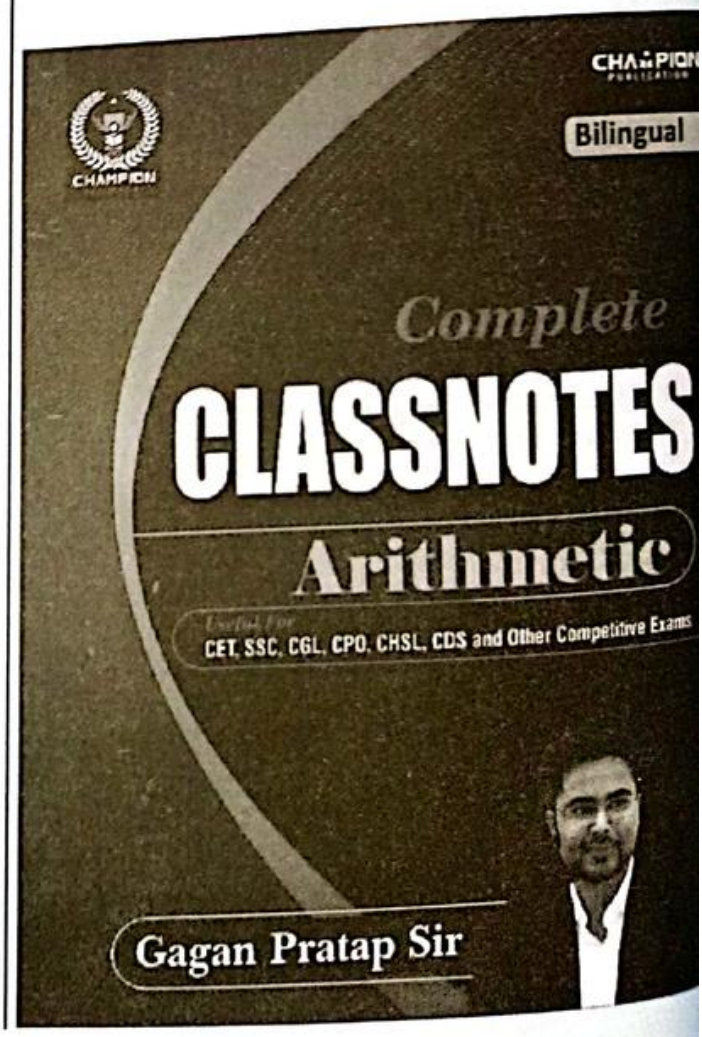
$$\frac{a}{a+b+c} = \frac{p}{p+q+r}$$

❖ 

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{m}{n}$$

$$BE = \frac{an+bm}{m+n}$$





Types of Triangles (त्रिभुज के प्रकार)

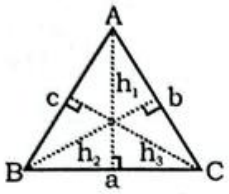
Triangle (त्रिभुज)

- A triangle is a 3-sides polygon that consists of three edges and three vertices.

  एक त्रिभुज एक 3 भुजाओं वाला बहुभुज है जिसमें तीन किनारे और तीन शीर्ष होते हैं।

- 3 sides, 3 vertices, 3 altitudes, 3 angles

  3 भुजाएँ, 3 शीर्ष, 3 ऊँचाई, 3 कोण



$\angle A+\angle B+\angle C=180°$

Area $\Rightarrow \frac{1}{2}\times a\times h_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3 = \frac{1}{2}$ × Base × Corresponding height.

$\Rightarrow ah_1 = bh_2 = ch_3$ = constant

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

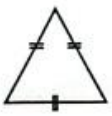
Type of Triangle (त्रिभुज के प्रकार)

By side — भुजा के आधार पर

By Angle — कोण के आधार पर

By side (भुजाओं के आधार पर)

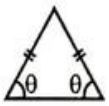
- **Equilateral Triangle** / समबाहु त्रिभुज



Equilateral triangle has 3 equal sides, each angle 60°

समभुज त्रिभुज में प्रत्येक कोण 60° व 3 समान भुजाएँ होती हैं।

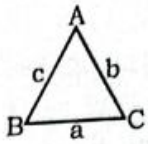
- **Isosceles Triangle** / समद्विबाहु त्रिभुज



two equal sides / दो समान भुजाएँ

two angle same / दो कोण समान

- **Scalene Triangle** / विषमबाहु त्रिभुज



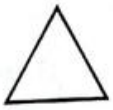
three unequal sides / तीन असमान भुजाएँ

three unequal angles / तीन असमान कोण

$\angle A\neq\angle B\neq\angle C$ & $a\neq b\neq c$

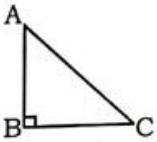
By Angle (कोणों के आधार पर)

- **Acute Angle Triangle** / न्यून कोण त्रिभुज



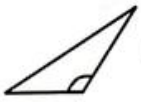
All three angles < 90° / तीनों कोण < 90°

- **Right Angle Triangle** / समकोण त्रिभुज



One angle is 90°. $\angle B = 90°$ and $\angle A + \angle C = 90°$

- **Obtuse Angle Triangle** / अधिक कोण त्रिभुज

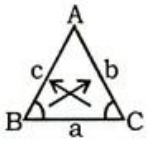


One angle > 90° / एक कोण > 90°

- Let $\angle B$ = largest angle / माना $\angle B$ = सबसे बड़ा कोण

  ∴ side AC = b = largest side

  भुजा AC = b = सबसे बड़ी भुजा



Let $\angle C$ = smallest angle (माना $\angle C$ = सबसे छोटा कोण)

∴ side AB = c = smallest side

भुजा AB = c = सबसे छोटी भुजा

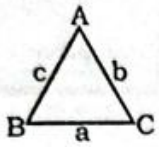
- **Inequality of triangle** (त्रिभुज की असमिकाएं)

  The triangle inequality states that for any triangle the sum of the lengths of any two sides must be greater than the length of the remaining side.

  त्रिभुज असमानता बताती है कि किसी भी त्रिभुज के लिए किसी भी दो भुजाओं की लंबाई का योग शेष भुजा की लंबाई से अधिक होना चाहिए।

CamScanner

❖ $|b-c| < a < b+c$



$|a-c| < b < a+c$

$|a-b| < c < a+b$

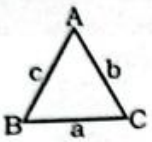
❖ **Inequality of Triangle** / त्रिभुज की असमानता

eg→ 4, 9, 15 Δ not possible / त्रिभुज संभव नहीं ∵ $4+9<15$

5, 10, 15 Δ not possible / त्रिभुज संभव नहीं ∵ $5+10=15$

7, 12, 15 Δ is possible / त्रिभुज संभव है ∵ $7+12>15$

OR $7+15>12$ OR $12+15>7$



Sum of any two sides is always greater than 3rd side.

किन्हीं भी दो भुजाओं का योग हमेशा तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

$a+b>c \Rightarrow b>c-a$

$b+c>a \Rightarrow b>a-c$

$c+a>b \Rightarrow \therefore |c-a|<b<c+a$

Difference of any two sides is always less than 3rd side.

किन्हीं दो भुजाओं का अंतर सदैव तीसरी भुजा से कम होता है।

❖ If 10, 17, x are sides of a Δ, $x \rightarrow$ integer

Then $7<x<27$

$\therefore x \rightarrow \{8, 9, 10, ... 26\}$

$x_{min} = 8$, $x_{max} = 26$

$x_{total} = 19$ values possible / 19 मान संभव

∴ 19 Δ's possible / 19 त्रिभुज संभव है।

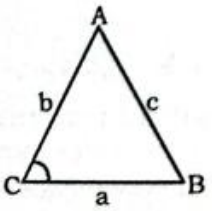
Possible values of $x = 2\times$small side -1

$\Rightarrow 2\times10-1 = 19$

x के संभावित मान = 2×छोटी भुजा −1 ⇒ 2×10−1 = 19

Relation between 3 sides of Triangle (त्रिभुज की 3 भुजाओं के बीच संबंध)

I. Acute Angle Triangle / न्यून कोण त्रिभुज

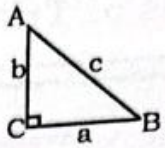


∠C = largest / ∠C = सबसे बड़ा कोण

side c = largest / भुजा c = सबसे बड़ा

$c^2 < a^2+b^2$

II. Right Angle Triangle / समकोण त्रिभुज

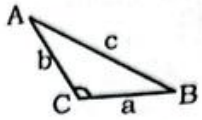


∠C = largest / ∠C = सबसे बड़ा कोण

side c = largest / भुजा c = सबसे बड़ा

$c^2 = a^2+b^2$

III. Obtuse Angle Triangle / अधिक कोण त्रिभुज



∠C = largest / ∠C = सबसे बड़ा कोण

side c = largest / भुजा c = सबसे बड़ा

$c^2 > a^2+b^2$

❖ sides of triangle : 11.7, 16.9, 23.4. which type of Δ it is?

त्रिभुज की भुजाएँ : 11.7, 16.9, 23.4. यह किस प्रकार का Δ है?

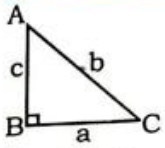
Take ratio of sides 11.7 : 16.9 : 23.4

9 : 13 : 18

$18^2 > 9^2 + 13^2 \therefore \Delta$ is obtuse angle triangle.

Triplets (त्रिक)

❖



$b^2 = c^2 + a^2$

(3,4,5),	(5,12,13),	(7,24,25),
(8,15,17),	(9,40,41),	(11,60,61),
(12,35,37),	(16,63,65),	(13,84,85),
(20,21,29),	(28,45,53),	(33,56,65),
(39,80,89),	(36,77,85),	(65, 72, 97),
(20, 99, 101)		

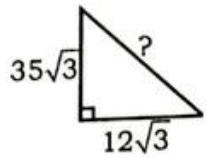
multiplication and division on these triplets will also result in triplets.

इन त्रिक पर गुणा और भाग का परिणाम भी त्रिक होगा।

$(5,12,13) \xrightarrow{\times 2} (10,24,26)$

$(3,4,5) \rightarrow (6,8,10), (9,12,15), (12,16,20), (15,20,25)$

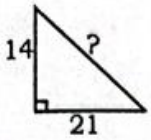
Ex: 1→



7	24	25
↓÷2	↓÷2	↓÷2
3.5	12	$12.5 \Rightarrow 3.5\sqrt{3}, 12\sqrt{3}, 12.5\sqrt{3}$

CamScanner

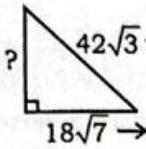
Ex: 2→



$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

⑦×2 ⑦×3 ⑦× $\sqrt{13}$ = 7 $\sqrt{13}$

Ex: 3→

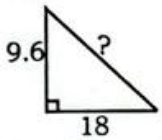


$42\sqrt{3} \rightarrow 6\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{3} = 6\sqrt{7}\times\sqrt{21}$

$18\sqrt{7} \rightarrow 6\sqrt{7}\times 3$

3rd side = $6\sqrt{7}\times\sqrt{21-9} = 6\sqrt{7}\times\sqrt{12}$ = **$12\sqrt{21}$**

Ex: 4→



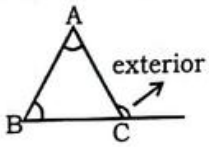
×1.2 9.6 : 18
8 : 15 : 17 $\xrightarrow{\times 1.2}$ 20.4

❖ Exterior angle is equal to sum of opposite interior angles.

बाहरी कोण विपरीत आंतरिक कोणों के योग के बराबर है।

A+B+C = 180°

A+B = 180° – C



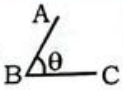
exterior angle at vertex C

sum of all exterior angles = 360°

सभी बाहरी कोणों का योग = 360°

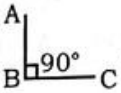
Types of Angles (कोणों के प्रकार)

❖ Acute Angle / न्यून कोण →



0° < θ < 90°

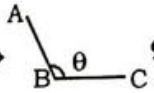
❖ Right Angle / समकोण →



AB ⊥ BC **θ=90°**

❖ Obtuse Angle / अधिक कोण

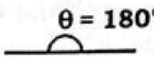
→



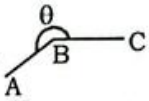
90°<θ<180°

❖ Straight or line angle / सीधा या रेखा कोण →

θ = 180°

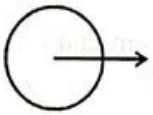


❖ Reflex Angle / वृहतकोण →



180°<θ<360°

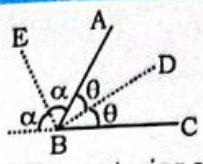
❖ Complete Angle / पूर्ण कोण →



θ = 360°

Angle Bisector (कोण द्विभाजक)

❖



BE → exterior angle bisector of ∠ABC

BE → ∠ABC का बाह्य कोण समद्विभाजक

2α + 2θ = 180°

α+θ = 90°

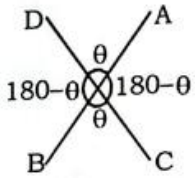
∴ Angle between internal angle bisector and external angle bisector of an angle is 90°.

किसी कोण के आंतरिक कोण समद्विभाजक और बाह्य कोण समद्विभाजक के बीच का कोण 90° होता है।

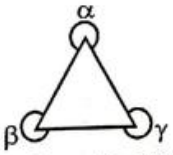
BD is interior angle bisector of ∠ABC

BD, ∠ABC का आंतरिक कोण समद्विभाजक है

❖ **Vertically Opposite Angle / लंबवत विपरीत कोण**

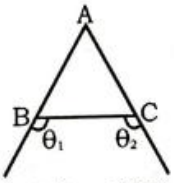


❖ **Some other properties / कुछ अन्य गुण**



α+β+γ = 3×360° – 180° = 900°

❖



$\theta_1 + \theta_2$ = 180° + ∠A

❖ If angles of a Δ are in A.P., middle angle is always 60° (यदि Δ के कोण A.P. में हैं, तो मध्य कोण हमेशा 60° होता है)

(a–d), a, (a+d)

∴ a–d+a+a+d = 180°

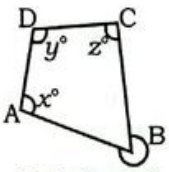
3a = 180°

a = 60°

∴ A + C = 120° & B = 60°

∠A	∠B	∠C
	↓	
60°–	60°	60°+

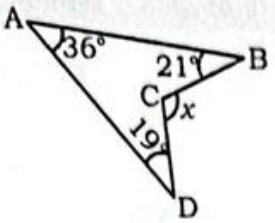
❖



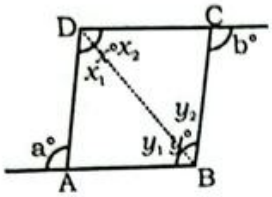
∠B (internal / आंतरिक) = 360° – (x+y+z)

∠B (external / बाहरी) = x°+y°+z°

CamScanner

❖ 

$x° = 36° + 21° + 19° = 76°$

❖ 

$a+b = x+y$

$x_1 + y_1 = a°$

$x_2 + y_2 = b°$

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = a+b$

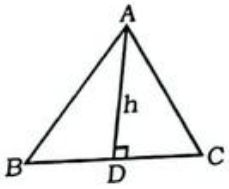
$x+y = a+b$

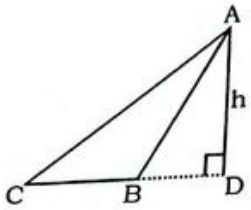
❖ **Altitude / Height / Perpendicular**

शीर्ष-लंब / ऊंचाई / लंबवत

The perpendicular drawn from the vertex of the triangle to the opposite side.

त्रिभुज के शीर्ष से विपरीत दिशा में खींचा गया लंब।

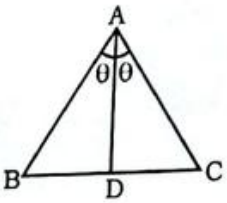




❖ **Angle bisector / कोण द्विभाजक :**

A line that splits an angle into two equal angles.

एक रेखा जो एक कोण को दो बराबर कोणों में विभाजित करती है।



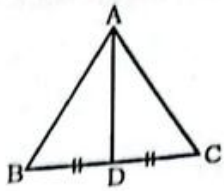
AD is the angle bisector of ∠BAC, BD and DC need not be equal

AD, ∠BAC का कोण समद्विभाजक है और BD, DC का बराबर होना आवश्यक नहीं है

Median (माध्यिक)

❖ Line drawn from a vertex to opposite side which divides the opposite side into equal parts.

किसी शीर्ष से विपरीत दिशा में खींची गई रेखा जो विपरीत भुजा को समान भागों में विभाजित करती है।



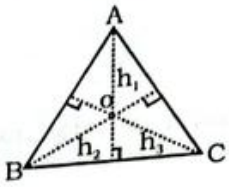
AD is the median of side BC / AD भुजा BC की माध्यिका है

BD = DC

Perpendicular bisector (लंब द्विभाजक)

❖ The line segment that is drawn from a vertex to the opposite side bisecting it at right angle.

वह रेखाखंड जो किसी शीर्ष से विपरीत दिशा में उसे समकोण पर समद्विभाजित करते हुए खींचा जाता है।

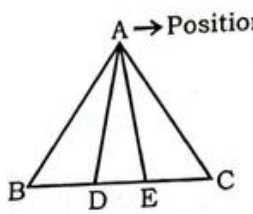


O = circumcentre / परिकेन्द्र

Cevian (केवियन)

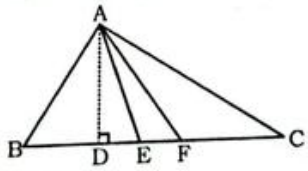
❖ Cevian → Any random line which joins vertex to opposite side

केवियन → कोई भी यादृच्छिक रेखा जो शीर्ष को विपरीत भुजा से जोड़ती है



AD, AE are cevians / AD, AE केवियन हैं

❖ Δ ABC is scalene Δ / Δ ABC विषमबाहु Δ है



AC > AB

∴ ∠B > ∠C

⊥ AD will be near to largest among B and C i.e. angle ∠B and far from small angle ∠C.

⊥ AD, ∠B और ∠C कोण में से सबसे बड़े ∠B के निकट होगा और छोटे कोण ∠C से दूर होगा।

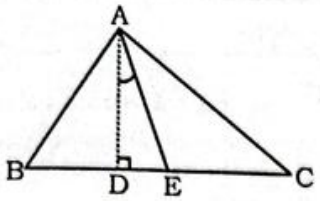
AE → Angle bisector of ∠A

AE → ∠A का कोण द्विभाजक

AF → median i.e. BF = FC

AF → माध्यिका यानी BF = FC

❖ AD → Altitude / AD → ऊंचाई
AE → Angle bisector of ∠A
AE → ∠A का कोण द्विभाजक



$$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

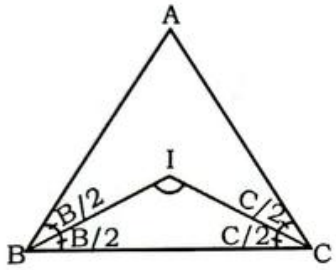
$$\angle DAE = \frac{\angle A}{2} - 90° + \angle B$$

$$= \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} + \angle B$$

$$\because \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90°$$

$$= \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

❖ A+B+C = 180°



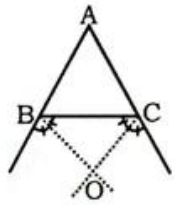
$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) \Rightarrow \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{180° - \angle A}{2}$$

$$\angle BIC = 180° - \left(\frac{\angle B + \angle C}{2}\right)$$

$$= 180° - \left(\frac{180° - \angle A}{2}\right) = 90° + \frac{\angle A}{2}$$

$$\therefore \angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$$

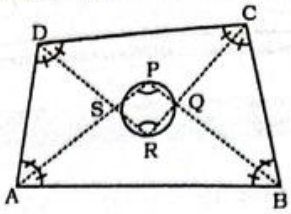
❖



$$\angle BOC = 90° - \frac{\angle A}{2}$$

∠A = 2(90°−∠BOC)

❖ In any quadrilateral bisector of ∠A & ∠B meet at P.
किसी चतुर्भुज में ∠A व ∠B के समद्विभाजक P पर मिलते है।



$$\angle APB = \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

$$\angle APB = 180° - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$$

$$\angle APB = \frac{C}{2} + \frac{D}{2}$$

∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle D}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

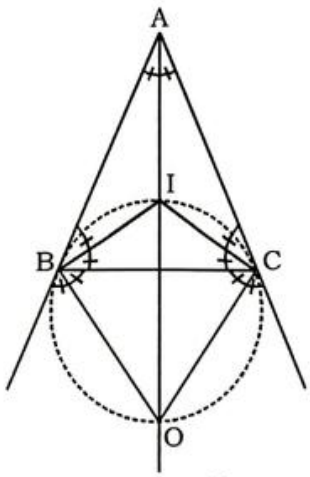
$$180° - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) = \frac{C}{2} + \frac{D}{2}$$

Bisector of ∠C and ∠D meet at R

$$\therefore \angle DRC = \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

∠P + ∠R = 180°
∠S + ∠Q = 180°
∴ □ PQRS will be a cyclic quadrilateral.
□ PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज होगा।

❖



$$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle BOC = 90° - \frac{\angle A}{2}$$

AIO will be a straight line and bisect angle A.
AIO एक सीधी रेखा और कोण A द्विभाजित होगा।

∠BIC + ∠BOC = 180°

BICO will be a cyclic quadrilateral.
BICO एक चक्रीय चतुर्भुज होगा

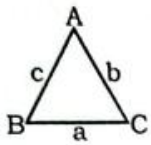
CamScanner

Area side properties (त्रिभुज का क्षेत्रफल)

Area of triangle (त्रिभुज का क्षेत्रफल)

❖ Area of $\Delta = \frac{1}{2} \times$ base $\times$ height

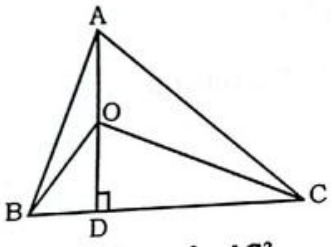
Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई



$s = \frac{a+b+c}{2}$

Area of $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

❖ In any ΔABC, $AD \perp BC$

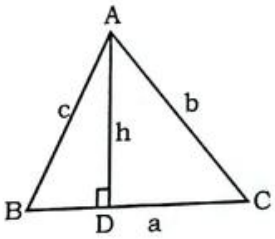


$\mathbf{AB^2 + OC^2 = OB^2 + AC^2}$

O is any point on altitude / O ऊंचाई पर कोई बिंदु है

Sine Rule (ज्या नियम)

❖



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K$ (constant)

a:b:c = KsinA : KsinB : KsinC

a:b:c = sinA : sinB : sinC

Area of $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ base $\times$ height

Area of $\Delta = \frac{1}{2} \times a \times h$

$= \frac{1}{2} \times a \times c \sin B$

$\sin B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = C\sin B$

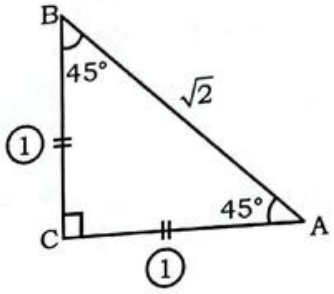
$\sin C = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\sin C$

$C\sin B = b\sin C \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

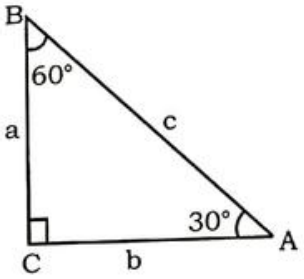
$\therefore \Delta = \frac{1}{2} ac\sin B = \frac{1}{2} ab\sin C = \frac{1}{2} bc\sin A$

Side-Angle ratio of some triangles (कुछ त्रिभुजों का भुजा-कोण अनुपात)

❖



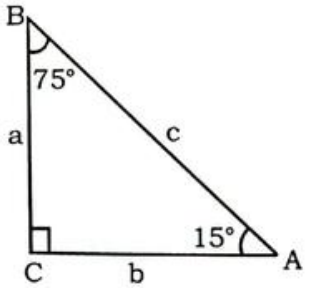
	45°	45°	90°
	↓	↓	↓
sides ⇒	**1 :**	**1 :**	**$\sqrt{2}$**



a:b:c = sin30° : sin60° : sin90°

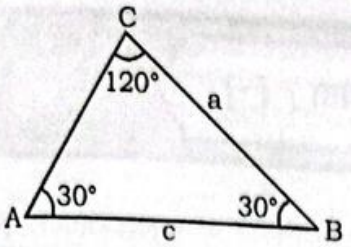
$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

a : b : c = 1 : $\sqrt{3}$: 2



$\Rightarrow$ **a : b : c = $\sqrt{3}-1 : \sqrt{3}+1 : 2\sqrt{2}$**

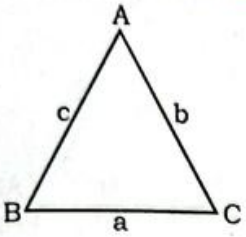
CamScanner



$\Rightarrow$ **a : b : c = 1 : 1 : $\sqrt{3}$**

Cosine Rule (कोज्या नियम)

❖



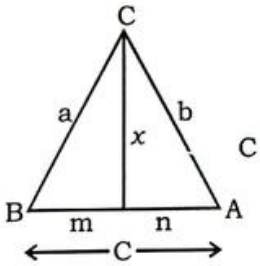
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Stewarts Theorem (स्टीवर्ट की प्रमेय)

❖



C = m + n

$a^2n+b^2m=x^2c+mnc$

In isosceles triangle a = b

$a^2n+a^2m = x^2c + mnc$

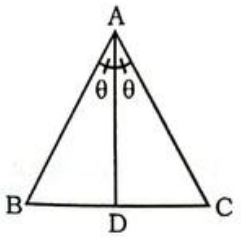
$a^2(m+n) = c(x^2+mn)$

$a^2 = x^2+mn$

$x^2=a^2-mn$

Interior Angle bisector theorem (आंतरिक कोण द्विभाजक प्रमेय)

❖

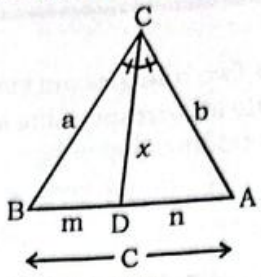


$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

Length of Angle bisector (कोण द्विभाजक की लंबाई)

❖ CD is angle bisector of ∠BCA

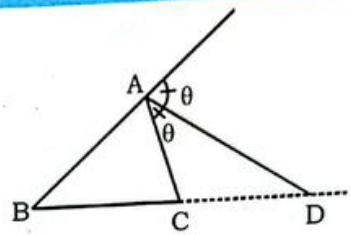
CD, ∠BCA का कोण समद्विभाजक है



$x^2 = ab - mn$

Exterior Angle bisector theorem (बाहरी कोण द्विभाजक प्रमेय)

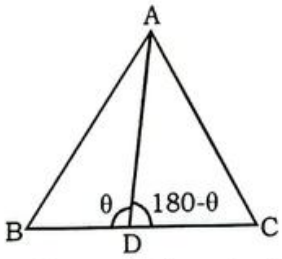
❖



$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

❖ $$\frac{Ar\Delta ADB}{Ar\Delta ADC} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times BD \times \sin\theta}{\frac{1}{2} \times AD \times DC \times \sin(180-\theta)} = \frac{BD}{DC}$$

❖

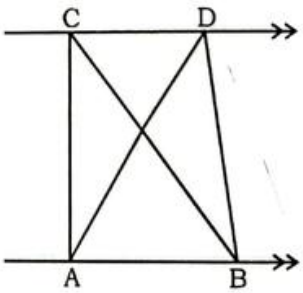


∴ जिस ratio में cevian base को divide करेगी, Area भी उसी ratio में divide होगा।

If AD is median BD = DC

∴ Ar ΔADB = Ar ΔADC

❖



Ar ΔABC = Ar ΔABD

If AB ∥ CD, same parallel line के बीच same base पर बने Δ का Area बराबर होता है।

CamScanner

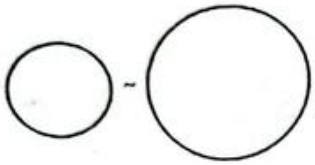
Similarity of triangles (त्रिभुज की समरूपता) (~)

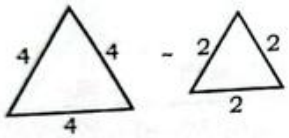
❖ **Similarity of triangles :** Two triangles are similar if they have the same ratio of corresponding sides and equal pair of corresponding angles.

त्रिभुजों की समरूपता : दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान हो और संगत कोणों का युग्म समान हो।

❖ **Similarity of triangles : size may be different but shape should be same.**

त्रिभुजों की समरूपता : आकार भिन्न हो सकते हैं लेकिन आकृति समान होना चाहिए।

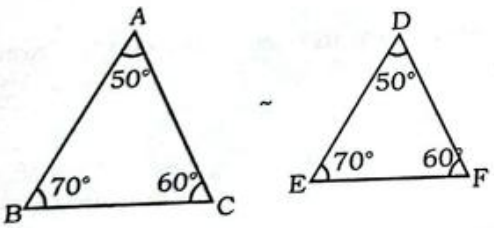




❖ If two angle is same in a triangle then third angle will be similar.

यदि एक त्रिभुज में दो कोण समान हैं तो तीसरा कोण भी समान होगा।

$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle F\end{array}\right]$ corresponding Angles



sides opposite to corresponding angles is called corresponding sides.

संगत कोणों की सम्मुख भुजाएँ संगत भुजाएँ कहलाती हैं।

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ (Property)

❖ In similar triangle ratio of each corresponding length is (equal)

समरूप त्रिभुज में प्रत्येक संगत लंबाई का अनुपात (बराबर) होता है

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\text{Angle bisector1}}{\text{Angle bisector2}} = \frac{\text{median1}}{\text{median2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\text{perimeter of } \Delta ABC}{\text{perimeter of } \Delta DEF}$$

$$\frac{\text{Area of } \Delta ABC}{\text{Area of } \Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times h_1}{\frac{1}{2} \times EF \times h_2} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$$

= Ratio of square of corresponding length.

संगत लंबाई के वर्ग का अनुपात।

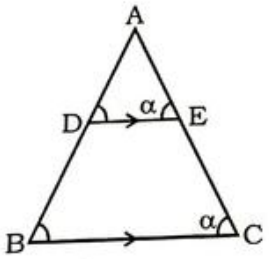
Thales Theorem (थेल्स प्रमेय)

❖ If a line (DE) is drawn parallel to one side of triangle (BC) then it will divide other two sides in the same ratio. Hence AD : DB = AE : EC

यदि त्रिभुज की एक भुजा (DE) के समांतर एक रेखा (BC) खींची जाए तो वह अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करेगी। अतः

AD : DB = AE : EC

DE ∥ BC



$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

If AD : DB = 8:5

$\frac{Ar\Delta ADE}{Ar\square DECB} = \frac{64}{169-64} = \frac{64}{105}$

Convergence of thales theorem

थेल्स प्रमेय का अभिसरण

If D & E two points on AB and AC such that

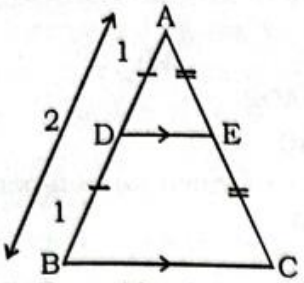
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ then DE ∥ BC

CamScanner

Mid point theorem (मध्य बिंदु प्रमेय)

❖ The line segment in a triangle joining the mid points of two sides of triangle will be parallel to its third side and is also half of the length of third side.

त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उसकी तीसरी भुजा के समांतर होगा और तीसरी भुजा की लंबाई का आधा भी होगा।



D, E → mid points, AD = DB & AE = EC

DE ∥ BC

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$, $\quad DE = \frac{BC}{2}$

Ar ΔADE : Ar ΔABC = 1 : 4

Ar ΔADE : Ar □DECB = 1 : 3

❖ **Convergence of mid point theorem**

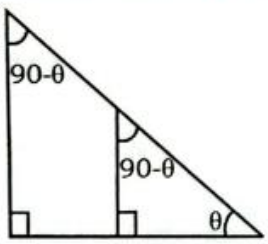
मध्य बिंदु प्रमेय का अभिसरण

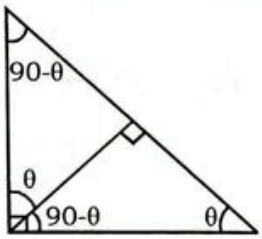
If D is mid point of AB and DE ∥ BC then E will be mid point of AC.

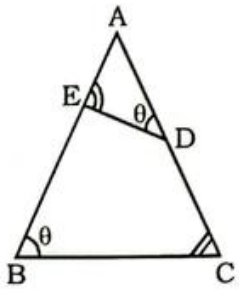
यदि D, AB का मध्य बिंदु है और DE ∥ BC है तो E, AC का मध्य बिंदु होगा।

Similar figures (समरूप आकृतियां)

❖







A = common

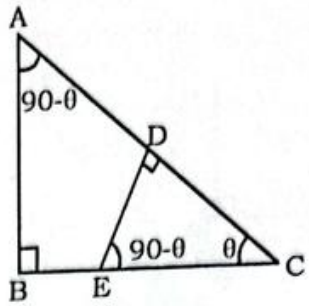
ABC = ADE = θ (given)

∴ 3rd angle will also be equal / तीसरा कोण भी बराबर होगा

∴ **ΔABC ~ ΔADE**

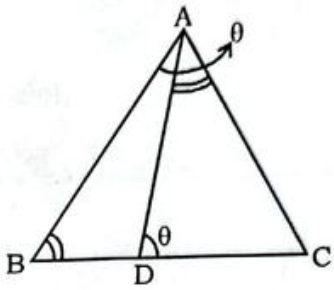
❖ If we make a right angle triangle in an right angle triangle then big and small right triangle are always similar.

यदि हम एक समकोण त्रिभुज में एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं तो बड़ा और छोटा समकोण त्रिभुज हमेशा समरूप होते हैं।



ΔABC ~ ΔEDC

❖



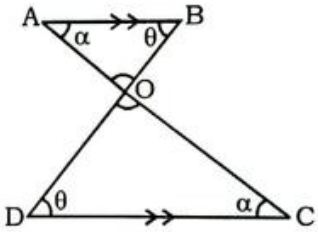
∠C = common

∠A = ∠ADC = θ (given)

∴ 3rd angle will be equal ∠ABC = ∠DAC

∴ **ΔABC ~ ΔDAC**

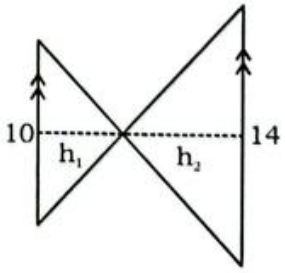
❖



AB ∥ CD

ΔAOB ~ ΔCOD

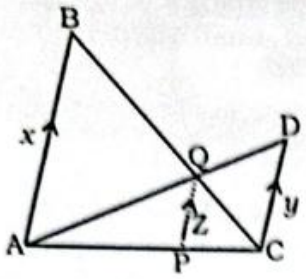
❖



$\frac{h_1}{h_2} = \frac{10}{14}$

$h_1 : h_2 \Rightarrow 5 : 7$

CamScanner



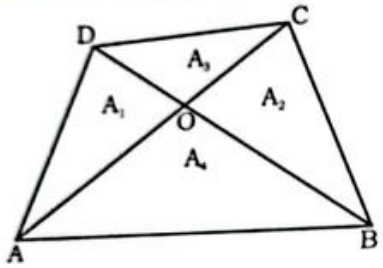
$$Z = \frac{xy}{x+y}$$

$$\frac{z}{x} = \frac{CP}{CA} \ \& \ \frac{z}{y} = \frac{AP}{AC}$$

$$\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{CP + AP}{AC} \Rightarrow \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{AC}{AC} = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$ (Result)

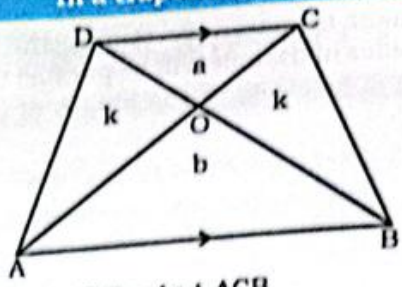
In any quadrilateral (किसी चतुर्भुज में)



$A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$

$$\frac{A1}{A3} = \frac{A4}{A2}$$

In a trapezium (एक समलंब चतुर्भुज में)



Ar Δ ADB = Ar Δ ACB

Common Area = Δ AOB

∴ **Ar Δ AOD = Ar Δ BOC**

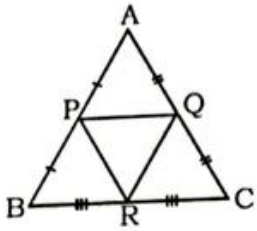
(In a trapezium triangle formed on non-parallel sides have equal area)

(एक समलंब में असमानांतर भुजाओं पर बने त्रिभुज में समान क्षेत्रफल होता है)

$K \times K = a \times b$

$K = \sqrt{ab}$

Medial Triangle (मध्य का त्रिभुज)



P, Q, R are mid points / P, Q, R मध्य बिंदु हैं

Perimeter of Δ PQR = $\frac{1}{2}$ × perimeter of ΔABC

Area of Δ PQR = $\frac{1}{4}$ × Area of ΔABC

Congruency of triangle (त्रिभुज की सर्वांगसमता)

Congruency of triangle (त्रिभुज की सर्वांगसमता)

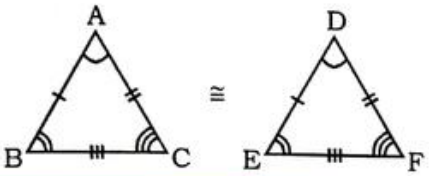
❖ Two triangles are said to be congruent if all three corresponding sides are equal and all the three corresponding angles are equal.

दो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते हैं यदि तीनों संगत भुजाएँ बराबर हों और तीनों संगत कोण बराबर हों।

❖ Congruency of triangle → size and shape is same $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

त्रिभुज की सर्वांगसमता → आकार व आकृति समान होती है।

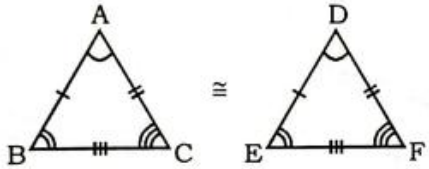
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



Condition of congruency (सर्वांगसमता की शर्त)

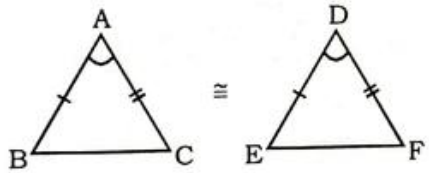
(i) SSS (side-side-side) → Corresponding sides are equal.

SSS (भुजा-भुजा-भुजा) → संगत भुजाएं बराबर हो।



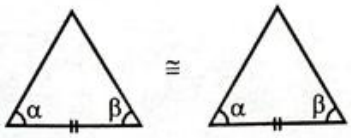
(ii) SAS (side-angel-side) → Two side and angle between them is equal.

SAS (भुजा-कोण-भुजा) → दो भुजाएं और उनके बीच का कोण बराबर होता है।



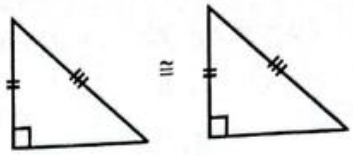
(iii) ASA (Angle-side-angle) → Two angle and side between them is equal.

ASA (कोण-भुजा-कोण) → दो कोण और उनके बीच की भुजा बराबर होती है।



(iv) RHS (Right angle-hypotenuse-side) →

RHS (समकोण-कर्ण भुजा) →



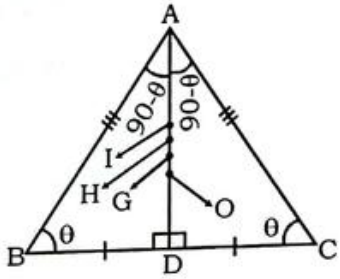
$\Delta ADB \cong \Delta ADC$

AD → ⊥ angle bisector of ∠A / AD → कोण का ⊥ द्विभाजक

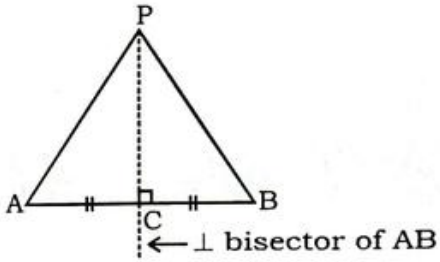
AD → Median (माध्यिका)

AD → ⊥ bisector of BC

AD → All 4 centres lie on AD.



❖



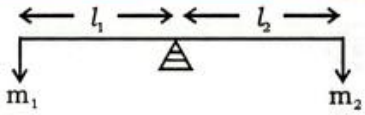
$\Delta PCA \cong \Delta PCB$

PA = PB

P is any point

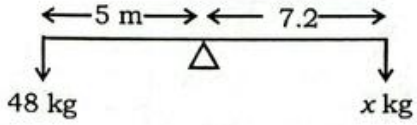
Mass point geometry (द्रव्यमान बिंदु ज्यामिति)

❖



$m_1 l_1 = m_2 l_2$

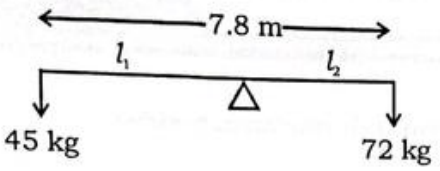
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$$



Find x = ?

CamScanner

$$\frac{5}{7.2} = \frac{x}{48} \Rightarrow x = \frac{100}{3} \text{ kg} = \mathbf{33.3\ kg}$$



Find l_1 = ?

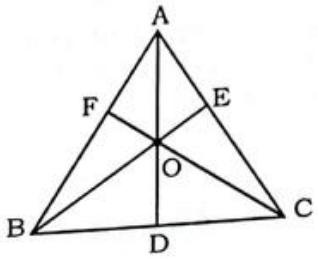
m →	45	:	72
	5	:	8
l →	8	:	5
	↓×0.6		
	4.8 m		

$\therefore 13 \xrightarrow{\times 0.6} 7.8$

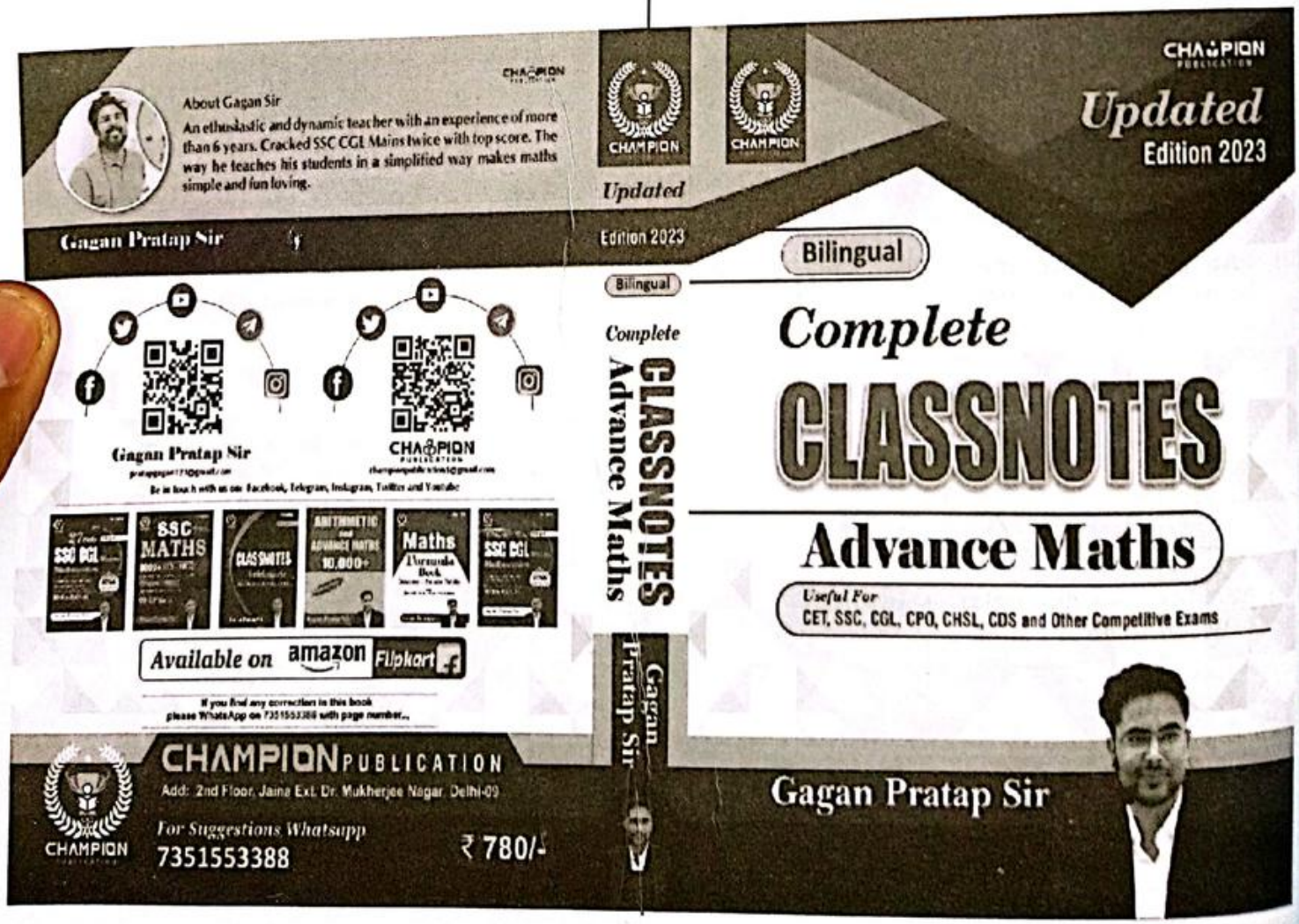
Ceva's Theorem (सेवा की प्रमेय)

❖ In ΔABC, AD, BE and CF are the cevians i.e. any line from vertex to opposite side.

त्रिभुज ABC में, AD, BE और CF केवियन हैं यानी शीर्ष से विपरीत भुजा पर कोई रेखा।

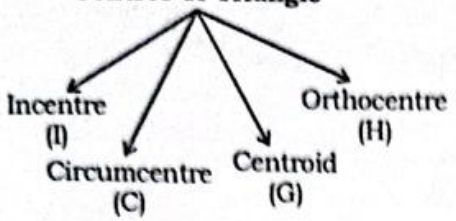


$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$



Centre of Triangle (त्रिभुज के केन्द्र)

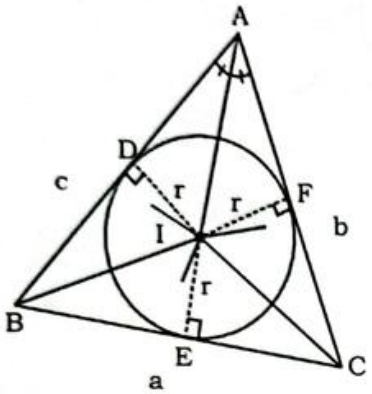
❖ **Centres of Triangle**



Incentre (I) (अन्तःकेन्द्र)

❖ Incentre is the intersection point of all three internal angle bisectors of ΔABC.

अन्तःकेंद्र ΔABC के सभी तीन आंतरिक कोण समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिन्दु है।



Centre of incircle is called incentre and its radius is called inradius (r)

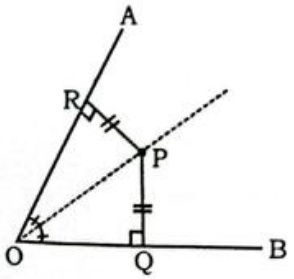
अंतःवृत्त के केंद्र को अंतःकेंद्र और इसकी त्रिज्या को अंतःत्रिज्या (r) कहा जाता है

❖ Incentre always lies inside the triangle.

अंतःकेंद्र हमेशा त्रिभुज के अंदर स्थित होता है।

❖ Incentre is equidistant from all three sides of triangle.

अंतःकेन्द्र त्रिभुज के तीनों ओर से समदूरस्थ है।



P is any point on angle bisector of $\angle AOB$

P, $\angle AOB$ के कोण द्विभाजक पर कोई बिंदु है

$PR = PQ$

❖ $ID = IE = IF = r$, $\Delta ADI \cong \Delta AFI$

❖ $\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$

$\angle AIC = 90° + \frac{\angle B}{2}$

$\angle AIB = 90° + \frac{\angle C}{2}$

❖ In $\Delta ABC \rightarrow \frac{a+b+c}{2}$ = Semi-perimeter (s)

$\therefore$ Area $\Delta ABC = \Delta = r \times s$

$r = \frac{\Delta}{s}$

Inradius = $\frac{\text{Area}}{\text{Semiperimeter}}$

$\Delta ABC = \Delta BIC + \Delta AIC + \Delta AIB$ (Area)

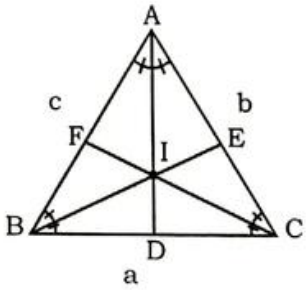
$\Delta = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = r \times s$

❖ If altitudes h_1, h_2, h_3 are given then

यदि ऊँचाई h_1, h_2, h_3 दी गई हो तो

$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$ (Result)

❖



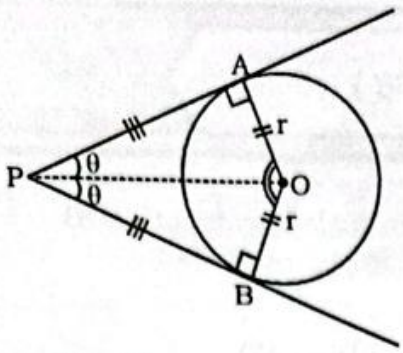
$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$

$\frac{BI}{IE} = \frac{c+a}{b}$

$\frac{CI}{IF} = \frac{a+b}{c}$

CamScanner

❖

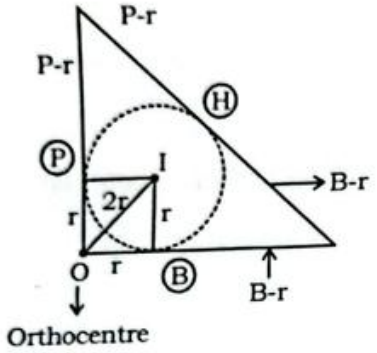


PA = PB

$\Delta AOP \cong \Delta BOP$

In right angle triangle (समकोण त्रिभुज में)

❖



$$r = \frac{P+B-H}{2}$$

$P - r + B - r = H$

$P + B - 2r = H$

$\frac{P+B-H}{2} = r$

Distance between orthocentre and incentre = OI

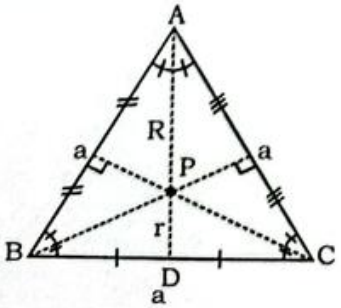
$= \sqrt{2}r$

लंबकेंद्र और अंत:केंद्र के बीच की दूरी = OI = $\sqrt{2}r$

Sides (triplet)	Radius (r)
भुजाएं (ट्रिपलेट)	त्रिज्या (r)
(3, 4, 5)	r = 1
(3k, 4k, 5k)	r = k
(39, 52, 65)	r = 13

For equilateral Triangle (समबाहु त्रिभुज के लिए)

❖



Point (बिंदु) = I, O, G, H (lie at same place P)

AP = R, PD = r

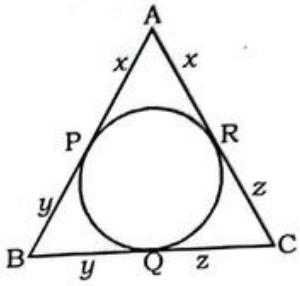
$h = AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, r = \frac{h}{3}$$

$$R = \frac{2h}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$\left|\frac{R}{r} = \frac{2}{1}\right|$, $\frac{\text{Area of circumcircle}}{\text{Area of incircle}} = \frac{4}{1}$

❖



$S = x + y + z$

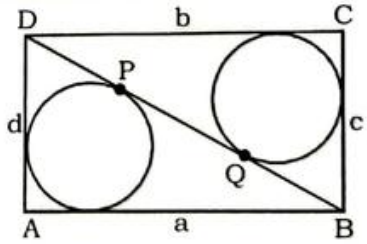
Area of (Δ) $\Delta ABC = \sqrt{(x+y+z)\cdot xyz}$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \sqrt{\frac{xyz(x+y+z)}{x+y+z}}$$

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

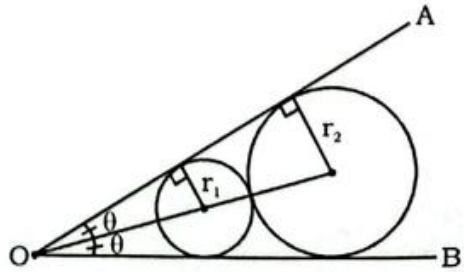
In any quadrilateral (किसी चतुर्भुज में)

❖



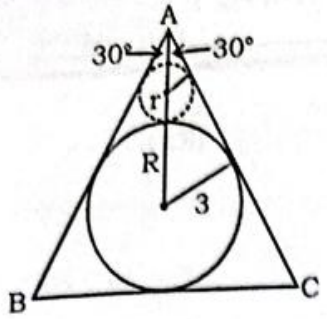
$$PQ = \frac{(a+b)-(c+d)}{2}$$

❖



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

In an Equilateral Triangle (समबाहु त्रिभुज में)

❖ 

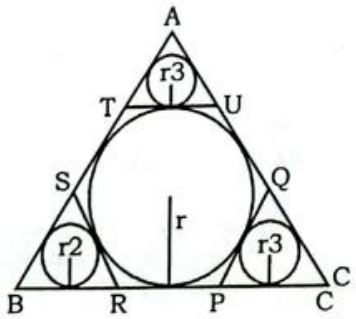
$$\frac{r}{R} = \frac{1-\sin 30^\circ}{1+\sin 30^\circ} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{r}{R} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{Area small circle}}{\text{Area large circle}} = \frac{1}{9}$$

❖ A circle is inscribed in ΔABC. Three tangents PQ, RS and TU are drawn of this circle PQ ∥ AB, RS ∥ AC and TU ∥ BC. Three others incircle are also drawn as shown in figure find correct relation?

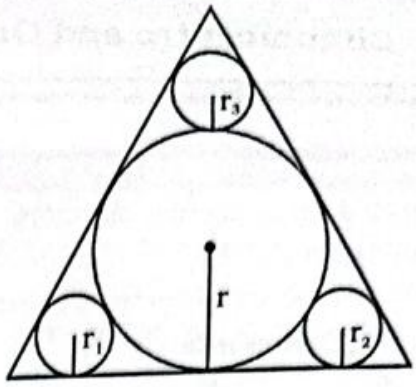
एक वृत त्रिभुज ABC के अंदर बनाया गया है। इस वृत की तीन स्पर्श रेखाएं PQ, RS, और TU इस प्रकार खींची जाती है कि PQ ∥ AB, RS ∥ AC और TU ∥ BC है। तीन अतिरिक्त अन्त: वृत खींचें जाते है जो चित्र में दर्शाए गए है। सही संबंध है:



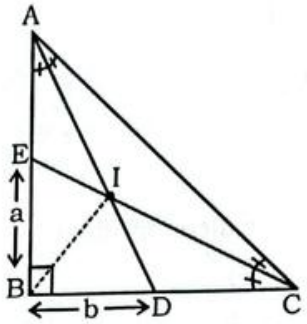
$\mathbf{r = r_1 + r_2 + r_3}$

❖ Find relation between r, r_1, r_2, r_3?

r, r_1, r_2, r_3 के बीच संबंध ज्ञात कीजिए?



$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

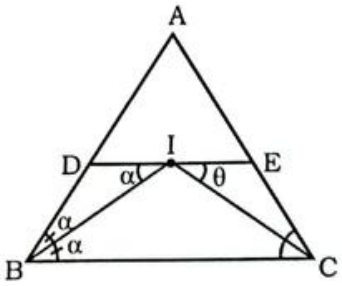
❖ 

$BI = \sqrt{ab} = \sqrt{2r}$

r = radius of ΔABC

$$r = \frac{BI}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}}$$

In Any Triangle (किसी त्रिकोण में)

❖ 

DE ∥ BC

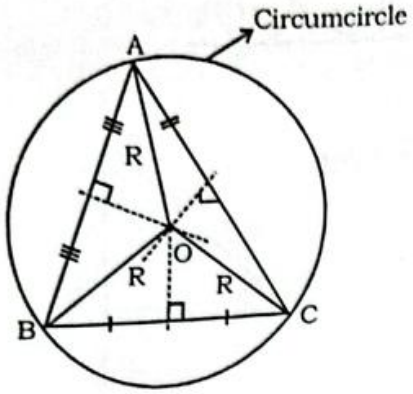
I = Incentre (I)

DE = BD + EC

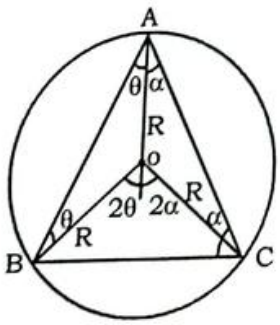
Circumcentre and Orthocentre (परिकेंद्र और लम्बकेंद्र)

Circumcentre (परिकेन्द्र)

- Intersection of all 3 perpendicular bisectors.
  सभी 3 लम्ब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन।

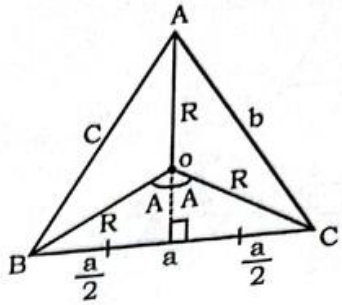


- Centre of circumcircle is called circumcentre (O)
  परिवृत्त के केंद्र को परिकेन्द्र (O) कहा जाता है
- Radius of circumcircle is called circumradius (R)
  परिवृत्त की त्रिज्या को परित्रिज्या (R) कहा जाता है।
- O is equidistant from all 3 vertex of ΔABC
  O, ΔABC के सभी 3 शीर्षों से समदूरस्थ है
- **OA = OB = OC = R**
- Circumcentre may lie inside, outside or on the Δ.
  परिकेन्द्र अंदर, बाहर या त्रिभुज पर स्थित हो सकता है।
- O is the intersection of all 3 $\perp$ bisectors of sides
  O सभी 3 $\perp$ भुजाओं के समद्विभाजक का प्रतिच्छेदन है
- $\angle BOC = 2\angle A$; $\angle AOB = 2\angle C$; $\angle AOC = 2\angle B$

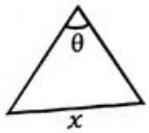


$\angle BOC = 2\theta + 2\alpha = 2(\theta + \alpha) = 2\angle A$

- **Circumradius (R)** / परित्रिज्या **(R)**



$\sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \mathbf{R = \frac{a}{2\sin A}}$



$R = \frac{x}{2\sin\theta}$

$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$

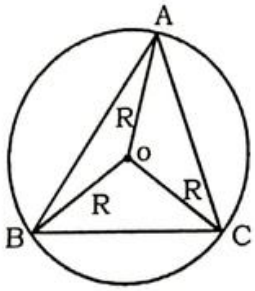
$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Area of triangle $(\Delta) = \frac{1}{2}$ bc sin A $\Rightarrow \sin A = \frac{2\Delta}{bc}$

$\therefore R = \frac{a}{2 \times \frac{2\Delta}{bc}} \Rightarrow R = \frac{abc}{4\Delta}$ or $\Delta = \mathbf{\frac{abc}{4R}}$

Position of circumcentre (परिकेंद्र की स्थिति)

A. Acute angle triangle (Inside the Δ) :
न्यून कोण त्रिभुज (Δ के अंदर) :

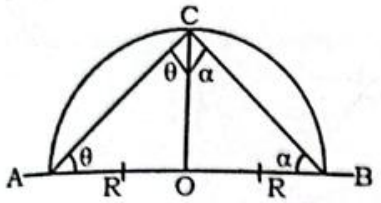


OA = OB = OC = R

O = Circumcentre / परिकेन्द्र

CamScanner

B. Right angle triangle (Mid point of hypotenuse):-
समकोण त्रिभुज (कर्ण का मध्य बिंदु)



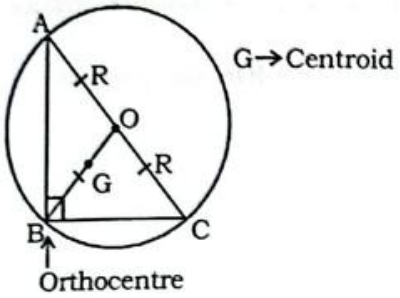
OA = OB = OC = R

AB = Hypotenuse / कर्ण, $\mathbf{R = \frac{AB}{2}}$

$2\theta + 2\alpha = 180°$

$\theta + \alpha = 180°$

$R = \frac{\text{Hypotenuse}}{2} = \frac{H}{2}$



BO = R = distance between orthocentre and circumcentre = median of hypotenuse = shortest median = $\frac{H}{2}$

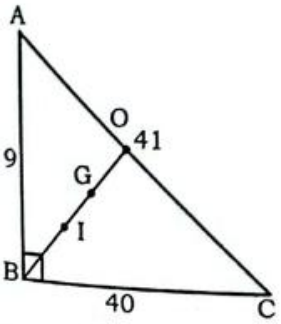
BO = R = लम्बकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी = कर्ण की माध्यिका = सबसे छोटी माध्यिका = $\frac{H}{2}$

BG : GO = 2 : 1

GO → distance between centroid and circumcentre = $\frac{R}{3} = \frac{H}{6}$

GO → केन्द्रक और परिकेन्द्र के बीच की दूरी = $\frac{R}{3} = \frac{H}{6}$

Example (उदाहरण) :



$R = \frac{41}{2} = 20.5$ cm

$r = \frac{9 + 40 - 41}{2} = 4$ cm

BI (Distance between orthcentre and incentre)

$= r\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm

BI (लम्बकेन्द्र और अन्त:केन्द्र के बीच की दूरी) = $r\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Distance between orthocentre and circumcentre

$\Rightarrow$ BO = R = 20.5

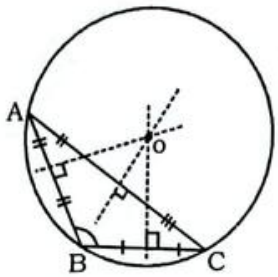
लंबकेंद्र और परिकेंद्र के बीच की दूरी $\Rightarrow$ BO = R = 20.5

BG (Distance between orthocentre and centroid)

$= \frac{h}{3} = \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$ cm

BG (लंबकेन्द्र और केन्द्रक के बीच की दूरी) = $\frac{h}{3} = \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$ सेमी

C. Obtuse angle triangle (Outside triangle)
अधिक कोण त्रिभुज (त्रिभुज के बाहर)



❖ For any triangle distance between incentre and circumcentre (d)
किसी भी प्रकार के त्रिभुज में अंत:केंद्र और परिकेंद्र के बीच दूरी (d)

$\mathbf{d = \sqrt{R^2 - 2R \cdot r}}$

Where / यहां

R → Circumradius / परित्रिज्या

r → Inradius / अंत:त्रिज्या

$d \geq$ zero

$\therefore R^2 - 2Rr \geq O \Rightarrow R^2 \geq 2Rr \Rightarrow R \geq 2r$

$\therefore \frac{R}{r} \geq 2$

$\left(\frac{R}{r}\right)_{min} = 2$

Ex. → r = 6, R = 11.2 cm, find area of Δ

$\frac{R}{r} \geq 2$ Here $\frac{11.2}{6} < 2$; No Δ is possible.

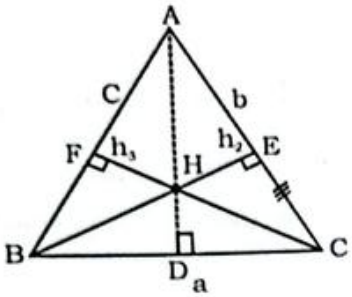
∴ Area cannot be determined.

(क्षेत्रफल निर्धारित नहीं किया जा सकता है)

Orthocentre (लम्बकेन्द्र)

❖ Orthocentre (H) is intersection of all there altitude of a Δ and may lie inside, upon outside the Δ.

लम्बकेन्द्र (H) Δ की सभी ऊंचाई का मिलन बिंदु है और Δ के अंदर या बाहर स्थित हो सकता है।



$\text{Area} = \frac{1}{2} ah_1 = \frac{1}{2} bh_2 = \frac{1}{2} ch_3$

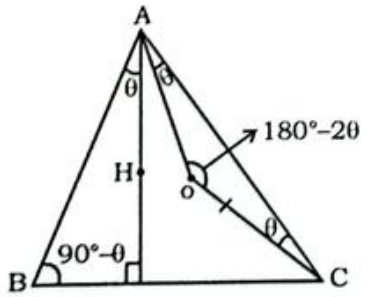
$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2 \times \text{Area}$

$\mathbf{h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}}$

❖ AB + BC + CA > AD + BE + CF;
AB > AD, BC > BE, AC > CF
AB + BC + AC > AD + BE + CF

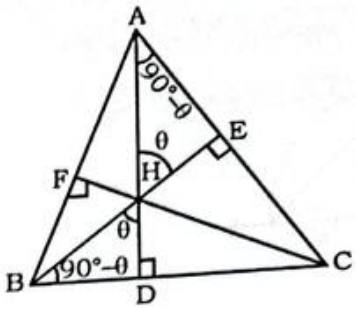
❖ $\angle BHC = 180° - \angle A$
$\angle AHC = 180° - \angle B$
$\angle AHB = 180° - \angle C$
In Quad AFHE
$\angle F = \angle E = 90°$ each
$\angle A + \angle H = 180°$
$\angle H = 180° - \angle A$
$\therefore \mathbf{\angle BHC = 180° - \angle A}$ (V . opp. Angles)

❖ **H → Orthocentre** / लम्बकेन्द्र
O → Circumcentre / परिकेन्द्र



$\angle AOC = (90 - \theta) \times 2 = 180 - 2\theta$
$\angle OAC = \angle OCA = \theta$
$\therefore \mathbf{\angle BAH = \angle OAC}$

❖



AH × HD = BH × HE = CH × HF
ΔAHE ~ ΔBHD

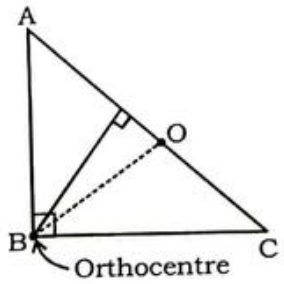
$\frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD}$

⇒ AH × HD = BH × HE

❖ **Position of orthocentre** (लम्बकेन्द्र की स्थिति)

A. Acute angle triangle:- Always inside the triangle

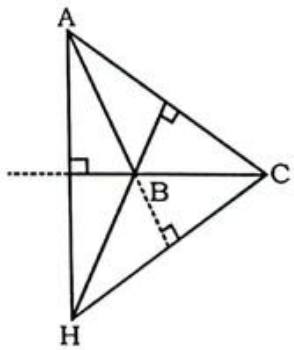
B. Right angle triangle (On 90° vertex):



OB = Distance between orthocentre and circumcentre = R = $\frac{H}{2}$

OB = लम्बकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी = R = $\frac{H}{2}$

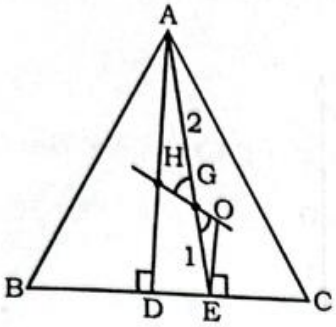
C. Obtuse angle triangle (Outside triangle):-



Euler's line (यूलर की रेखा)

❖ In any triangle H, G, O always in a straight line

किसी भी त्रिभुज में H, G, O हमेशा एक सीधी रेखा में होंगे



$$\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$$

$\Delta AHG \sim \Delta EOG$

$$\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1} = \frac{AH}{OE}$$

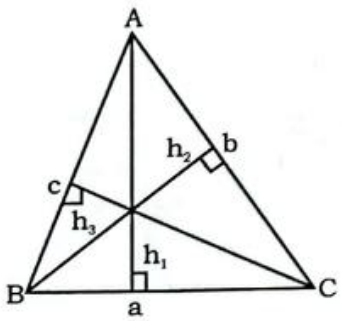
❖ If h_1, h_2, h_3 are 3 altitudes of a triangle

यदि h_1, h_2, h_3 एक त्रिभुज के 3 शीर्षलंब हैं

Then $\frac{h_1h_2}{h_1+h_2} < h_3 < \frac{h_1h_2}{h_1-h_2}$

$$\Delta = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3$$

$$a = \frac{2\Delta}{h_1}, b = \frac{2\Delta}{h_2}, c = \frac{2\Delta}{h_3}$$



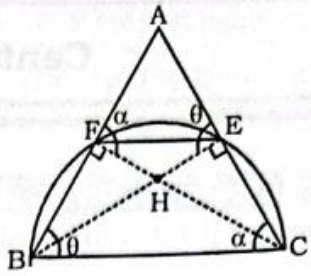
$|a-b| < C < |a+b|$

$$\left|\frac{2\Delta}{h_1} - \frac{2\Delta}{h_2}\right| < \left|\frac{2\Delta}{h_3}\right| < \left|\frac{2\Delta}{h_1} + \frac{2\Delta}{h_2}\right|$$

$$\frac{h_2-h_1}{h_1h_2} < \frac{1}{h_3} < \frac{h_2+h_1}{h_1h_2}$$

$$\frac{h_1h_2}{h_1-h_2} > h_3 > \frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$$

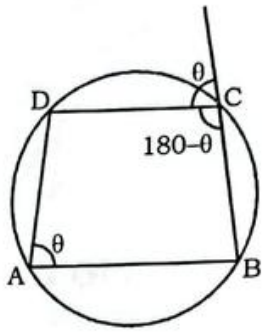
❖



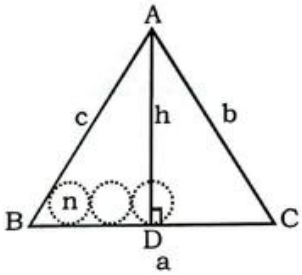
$\Delta AEF \sim \Delta ABC$

❖ Interior angle of a cyclic quadrilateral is equal to the opposite exterior angle.

चक्रीय चतुर्भुज का आंतरिक कोण विपरीत बाहरी कोण के बराबर होता है।



❖



n circle of equal radii r are made on side 'BC'.

समान त्रिज्या r वाले n वृत्त 'BC' भुजा पर बनाए गए हैं।

$$r = \frac{\text{Area } \Delta ABC}{s + (n-1)\cdot h}$$

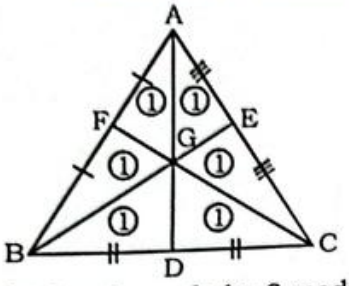
s = semi-perimeter

CamScanner

Centroid (केन्द्रक)

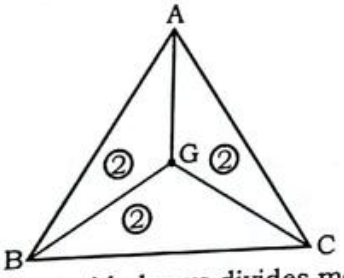
Centroid (केन्द्रक)

- Centroid is the intersection point of all 3 medians of triangle.
  केन्द्रक, त्रिभुज की सभी 3 माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन है।
- Median divides the triangle into two equal areas.
  माध्यिका त्रिभुज को दो समान क्षेत्रों में विभाजित करती है।
- Centroid always lies inside the triangle.
  केंद्रक हमेशा त्रिभुज के अंदर स्थित होता है।

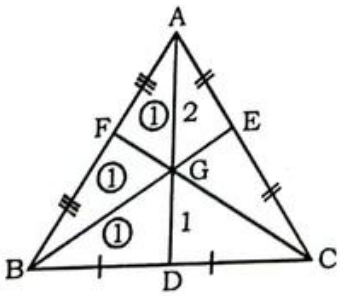


- 6 triangle made by 3 medians have equal area.
  3 माध्यिकाओं द्वारा बनाए गए 6 त्रिभुज का क्षेत्रफल बराबर होता है।
- Area of each triangle = $\frac{1}{6}$ Area of ΔABC

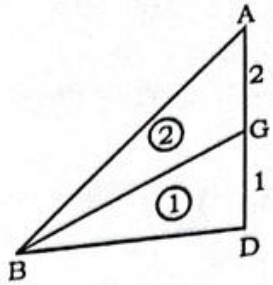
  Area ΔAGC = Area ΔAGB = Area Δ BGC = $\frac{1}{3}$ Area ΔABC



- Centroid always divides median in the ratio 2 : 1.
  केंद्रक हमेशा माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।



$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

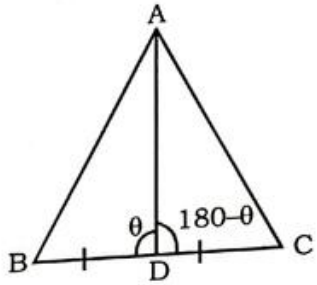


$$AG = \frac{2}{3} AD$$

$$GD = \frac{1}{3} AD$$

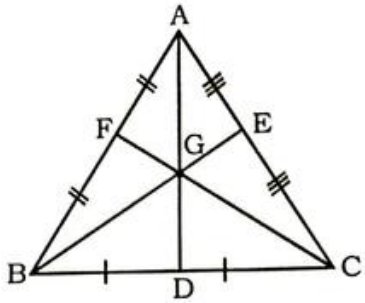
Apollonius theorem (अपोलोनियस प्रमेय)

- To find length of median.
  माध्यिका की लम्बाई ज्ञात करने के लिए



$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

$$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2\left(AD^2 + \frac{BC^2}{4}\right)}$$

- 

$$AB^2 + AC^2 = 2\left(AD^2 + \frac{BC^2}{4}\right)$$

$$AB^2 + BC^2 = 2\left(BE^2 + \frac{AC^2}{4}\right).$$

CamScanner

$$AC^2 + BC^2 = 2\left(CF^2 + \frac{AB^2}{4}\right)$$

$$2(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 2AD^2 + \frac{BC^2}{2} + 2BE^2 + \frac{AC^2}{2} + 2CF^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\mathbf{3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)}$$

$$\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} = \frac{4}{3}$$

$$\mathbf{1 < \frac{AB + BC + CA}{AD + BE + CF} < \frac{4}{3}}$$

❖ $GB + GC > BC$
$GA + GC > AC$
$AG + BG > AB$

$$AG = \frac{2}{3}AD$$

$$BG = \frac{2}{3}BE$$

$$CG = \frac{2}{3}CF$$

$$2(AG + BG + CG) > AB + BC + CA$$

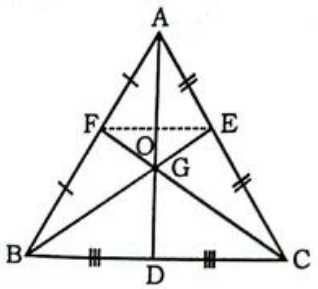
$$2 \times \frac{2}{3}(AD + BE + CF) > AB + BC + CA$$

$$\mathbf{4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)}$$

❖ $AB + AC > 2AD$
$AB + BC > 2BE$
$AC + BC > 2CF$
$2(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)$
$\therefore$ **AB + BC + AC > AD + BE + CF**

$$\therefore \mathbf{\frac{AB + BC + AC}{AD + BE + CF} > 1}$$

❖

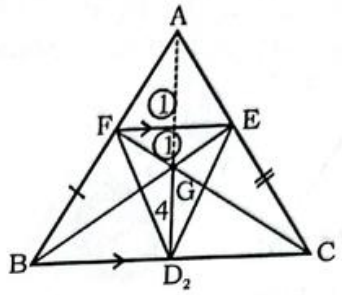


AO : OG : GD = 3 : 1 : 2
$\Delta AFE \sim \Delta ABC$
Let AD = 6 unit
$\therefore AG : GD = 2 : 1$
$\therefore AG = 4$ unit and $GD = 2$ unit

F, E are mid points $\Rightarrow AO = OD = \frac{6}{2} = 3$ unit
$OG = AG - AO = 4 - 3 = 1$ unit
$\therefore AO : OG : GD = 3 : 1 : 2$

Area of Δ GEF = $\frac{1}{12}$ Area Δ of ABC

❖



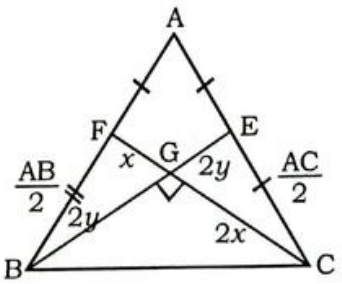
$\Delta EFG \sim \Delta BCG$
Side $\rightarrow 1 : 2$
Area $\rightarrow 1 : 4$
Area ΔABC = Ar $\Delta BGC \times 3 = 4 \times 3 = 12$

$$\therefore \mathbf{\frac{\Delta GEF}{\Delta ABC} = \frac{1}{12}}$$

Area ΔEFG = Area ΔDFG = Area $\Delta DEG = 1$
$\therefore$ Area $\Delta DEF = 1 + 1 + 1 = 3$ unit

$$\therefore \mathbf{\frac{Area\ \Delta\ DEF}{Area\ \Delta\ ABC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$$

❖ If two medians of a Δ intersect each other at 90°
यदि Δ की दो माध्यिकाएँ एक दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करती हैं



$$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 5BC^2}$$

$$x^2 + 4y^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$y^2 + 4x^2 = \frac{AC^2}{4}$$

$$5(x^2 + y^2) = \frac{AB^2 + AC^2}{4}$$

$$5(4x^2 + 4y^2) = AB^2 + AC^2$$

$\Rightarrow 5BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Property)

❖ **Special case in isosceles Δ**

समद्विबाहु Δ में विशेष मामला

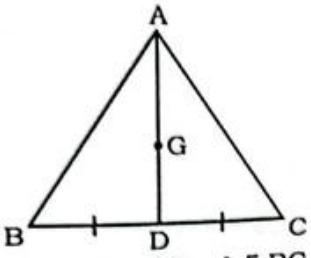
$AB = AC \Rightarrow BE = CF$

$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

$\mathbf{2AB^2 = 5BC^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

❖

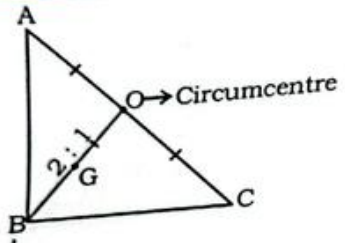


If AG = BC or AD = 1.5 BC

$\Rightarrow \angle BGC = 90°$

Right Angle Triangle (समकोण त्रिभुज)

❖



↓ Orthocentre

$AO = OC = OB = R$

BO = Hypotenuse median = Shortest median

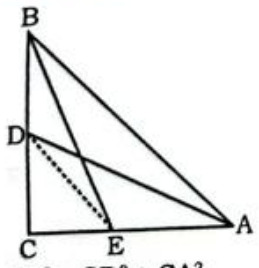
BO = कर्ण की माध्यिका = सबसे छोटी माध्यिका

$= R = \frac{H}{2}$

$BG = \frac{H}{3}, GO = \frac{H}{6}$

❖ If D, E are two points on BC and AC.

यदि D, E, BC और AC पर स्थित दो बिंदु हैं।



$AD^2 = CD^2 + CA^2$

$BE^2 = CE^2 + BC^2$

$$AD^2 + BE^2 = \underbrace{CD^2 + CE^2}_{DE^2} + \underbrace{CA^2 + BC^2}_{AB^2}$$

$\therefore \mathbf{AD^2 + BE^2 = DE^2 + AB^2}$

If D, E are mid points, AD and BE are medians,

then $DE = \frac{AB}{2} = R$

यदि D, E मध्य बिंदु हैं, AD और BE माध्यिकाएँ हैं, तो $DE = \frac{AB}{2} = R$

$AD^2 + BE^2 = DE^2 + AB^2$

$AD^2 + BE^2 = \frac{AB^2}{4} + AB^2$

$AD^2 + BE^2 = \frac{5AB^2}{4}$

$\Rightarrow \mathbf{4(AD^2 + BE^2) = 5AB^2}$

$\Rightarrow CB = 2R$

$\frac{AD^2 + BE^2}{AB^2} = \frac{5}{4}$

$\therefore 4(AD^2 + BE^2) = 5 \times R^2$

$AD^2 + BE^2 = 5 \times 4R^2$

$\mathbf{AD^2 + BE^2 = 5R^2}$

❖ Area of $\Delta ABC = \frac{4}{3} \times$ Area of triangle made by using length of all 3 medians.

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{4}{3}$ × सभी 3 माध्यिकाओं की लंबाई का उपयोग करके बनाया गया त्रिभुज का क्षेत्रफल।

Example (उदाहरण) :

Length of 3 medians 15, 36, 39. Then find the area of triangle ABC.

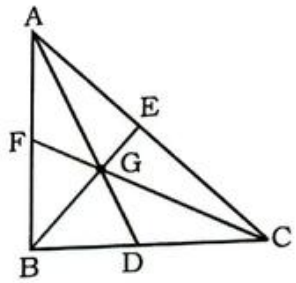
3 माध्यिकाओं की लंबाई 15, 36, 39 है तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Area of triangle made by 15, 36, 39 (triplets)

$= \frac{1}{2} \times 15 \times 36 = 270$

Area of ΔABC (main Δ) $= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 15 \times 36\right) = 360\ cm^2$

❖

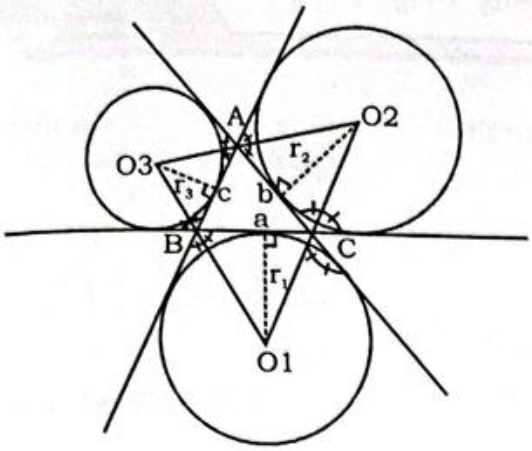


$BE = R = \frac{AC}{2}$

$AD^2 + CF^2 = 5.R^2$

$AG^2 + CG^2 = 5BG^2$

Exocentre (एक्सोसेंटर)



$$r_1 = \frac{\Delta}{S-a}$$

$$r_2 = \frac{\Delta}{S-b}$$

$$r_3 = \frac{\Delta}{S-c}$$

If we make incircle in Δ ABC with radius. r then r

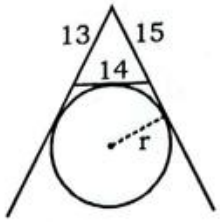
$$= \frac{\Delta}{S}$$

यदि हम त्रिज्या r के साथ Δ ABC में वृत बनाते हैं। तो $r = \frac{\Delta}{S}$

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{\Delta}{S} \cdot \frac{\Delta}{S-a} \cdot \frac{\Delta}{S-b} \cdot \frac{\Delta}{Sc} = \frac{\Delta^4}{\Delta^2}$$

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \Delta^2$$

Example / उदाहरण :



Find r = ?

$\Delta = 84\ cm^2$, S = 21

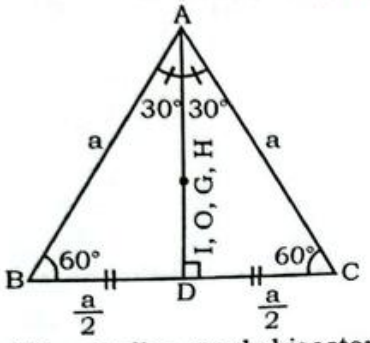
$$r = \frac{84}{21-14} = 12\ cm$$

CamScanner

Equilateral triangle (समबाहु त्रिभुज)

Equilateral Triangle (समबाहु त्रिकोण)

❖ All sides are equal. / सभी भुजाएँ समान हैं।



AD → median, angle bisector, altitude, ⊥ bisector of BC = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

AD → माध्यिका, कोण द्विभाजक, ऊँचाई, BC का ⊥ द्विभाजक

$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Delta ADB \cong \Delta ADC$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ Area $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

All centre lies at same point.

सभी केंद्र एक ही बिंदु पर स्थित हैं

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}, r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, R = \frac{2}{3}h, r = \frac{1}{3}h$

$\frac{R}{r} = \frac{2}{1} \left| \frac{\text{Area circumcircle}}{\text{Area incircle}} = \frac{4}{1} \right.$

❖ All 3 medians / सभी 3 माध्यिकाएँ $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$ = Height

❖

Side / भुजा ↓	Height / ऊंचाई ↓	Area / क्षेत्र ↓
a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
2 cm	$\sqrt{3}$ cm	$\sqrt{3}$ cm^2
2 k	$\sqrt{3}$ k	$\sqrt{3}$ k^2
28 cm	$14\sqrt{3}$	$196\sqrt{3}$
$6\sqrt{6}$	$\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{6} = 9\sqrt{2}$	$\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{6})^2 = 54\sqrt{3}$

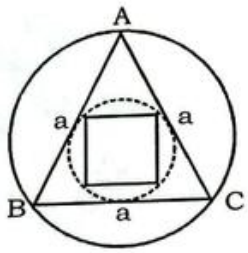
❖

Circumcircle radius ↓		Side of equilqteral Δ ↓		In radius ↓
R	:	a	:	r
2	:	$2\sqrt{3}$	:	1
Area → 4π	:	$3\sqrt{3}$	:	π

❖ Circum circle : area : incircle : square

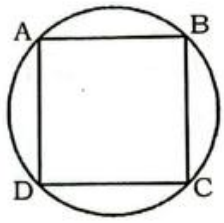
परिवृत्त : क्षेत्रफल : अंतःवृत्त : वर्ग

Area → 4π : $3\sqrt{3}$: π : 2



❖ Circle : Square

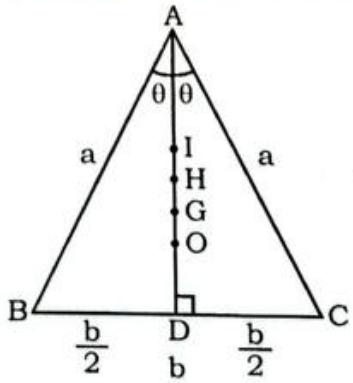
A → π : 2 or 11 : 7



Isosceles Triangle (समद्विबाहु त्रिकोण)

❖ Triangle in which any two sides are equal.

वह त्रिभुज जिसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर हों।



AB = AC

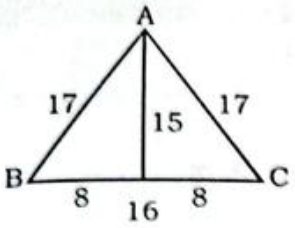
All 4 centre lies on line AD.

सभी 4 केंद्र रेखा AD पर स्थित हैं

CamScanner

$$AD = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{2}} = \text{Height}$$

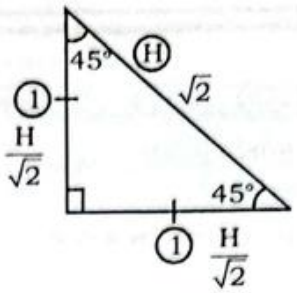
$$\text{Area} = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$$



Area of Δ ABC = 15 × 8 = 120 cm²

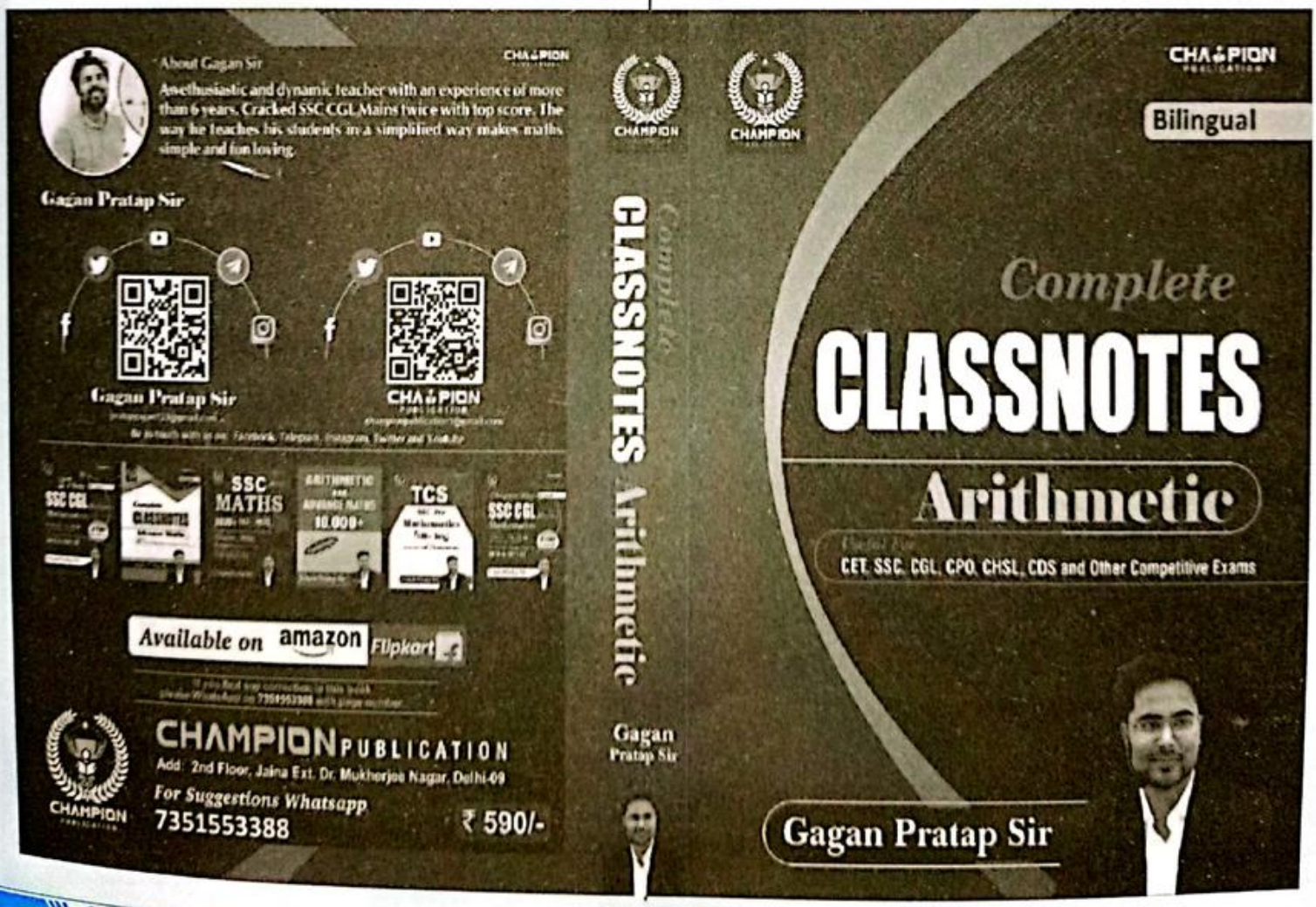
Isosceles Right Angle Triangle
(समद्विबाहु समकोण त्रिभुज)

❖



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times \frac{H}{\sqrt{2}} \times \frac{H}{\sqrt{2}} = \frac{H^2}{4}$$

Perimeter / परिमाप $= H(\sqrt{2}+1)$

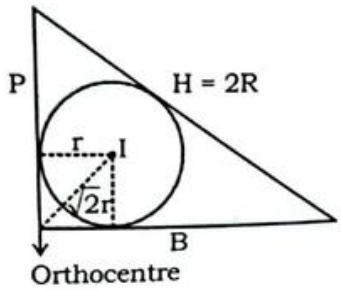


CamScanner

Right angle Triangle (समकोण त्रिभुज)

Right Angle Triangle (समकोण त्रिभुज)

- Triangle in which one angle is 90°.
  त्रिभुज जिसमें एक कोण 90° का होता है।
- Right angle triangle is inscribed in a semi-circle.
  समकोण त्रिभुज एक अर्धवृत्त में बना हुआ होता है।



$$r = \frac{P + B - H}{2}$$

$2r = P + B - H$

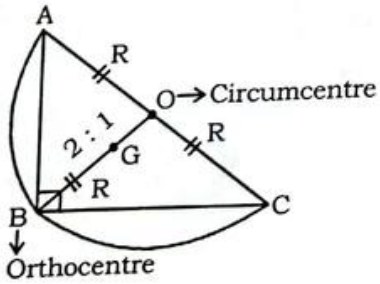
$2r + H = P + B$

$2r + 2R = P + B$

$2r + 2R = P + B$

$$\mathbf{r + R = \frac{P + B}{2}}$$

$$R = BO = \text{Shortest median} = \frac{H}{2}$$



$$BG = \frac{2}{3}R = \frac{H}{3}$$

$$GO = \frac{R}{3} = \frac{H}{6}$$

How to Find Triplet? (त्रिक कैसे खोजें?)

- **Odd number** / विषम संख्या

$3 \rightarrow 3^2 = 9 \rightarrow 4, 5$ (3, 4, 5)

no. $(\text{no.})^2$

Make two factors at a diff. of 1.

$5 \rightarrow 5^2 = 25 \rightarrow 12, 13$ | $13 \rightarrow 169 \rightarrow 84, 85$

- **Even number** / सम संख्या

$8 \rightarrow \frac{8^2}{2} = 32 \rightarrow 15, 17$ (8, 15, 17)

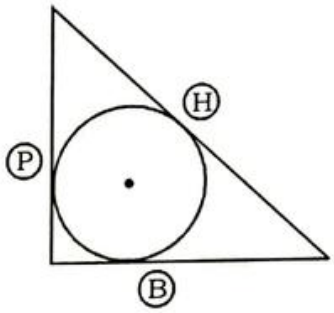
no. $\frac{(\text{no.})^2}{2}$

Break in two parts at the diff. of 2.

$6 \rightarrow \frac{36}{2} = 18 \rightarrow 8, 10$ (6, 8, 10)

- $r = \frac{P + B - H}{2} = \frac{(P + B + H)}{2} - H$

$r = S - H = S - 2R \quad \Rightarrow S = r + 2R$



$\Delta = r \cdot S$

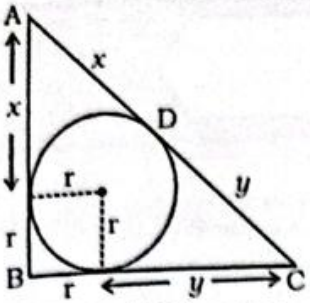
$\Delta = S\,(S - 2R)$

$\Delta = r \cdot S = r\,(r + 2R) \Rightarrow \Delta = r^2 + 2rR$

$\therefore$ Area of right angle triangle $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}PB = r \times S = (S - 2R) = r^2 + 2rR.$

CamScanner



Area of Δ ABC = $x \times y$

$s = r + x + y$

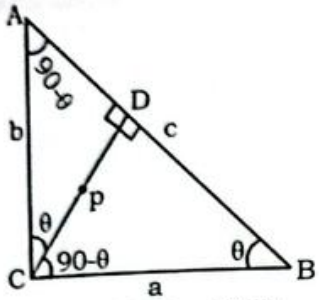
$\Delta = r \cdot (r + x + y) = xy$

$(x + r)^2 + (y + r)^2 = (x + y)^2$

$x^2 + r^2 + 2rx + y^2 + r^2 + 2yr = x^2 + y^2 + 2xy$

$2r(r + x + y) = 2xy \Rightarrow r(r + x + y) = xy$

❖



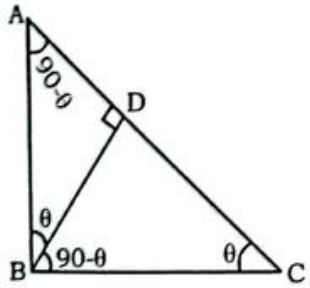
$\Delta ACB \sim \Delta CDB \sim \Delta ADC$

$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c.p \Rightarrow \mathbf{p = \frac{ab}{c}}$

$\frac{1}{p} = \frac{c}{ab} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}$

$\therefore \mathbf{\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$

❖



$\Delta ADB \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$\mathbf{AB^2 = AD \times AC}$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}$

$\mathbf{BC^2 = CD \times AC}$

$\mathbf{\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD}{CD}}$

$\Delta ABD \sim \Delta BDC$

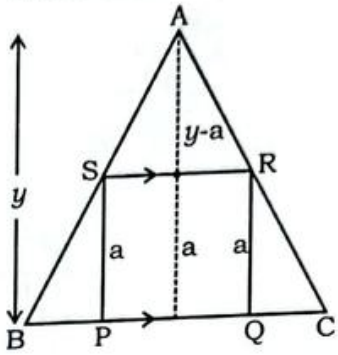
$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \mathbf{BD^2 = AD \times CD}$

$\mathbf{BD = \frac{AB \times BC}{AC}}$

Maximum Area of a Square Inscribed in a Triangle
(एक त्रिभुज में अंकित एक वर्ग का अधिकतम क्षेत्रफल)

❖ **Side of square (a) = $\frac{xy}{x+y}$**

$\Delta ABC \sim \Delta ASR$

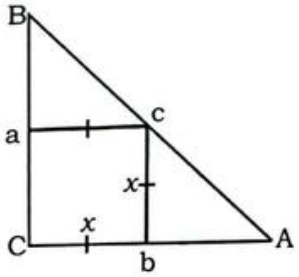


$\frac{a}{x} = \frac{y-a}{y}$

$ay = xy - ax$

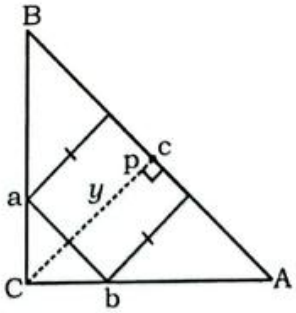
$a(x + y) = xy$

❖



Side of square (x) = $\frac{ab}{a+b}$

❖



$y = \frac{cp}{c+p} = \frac{c \times \frac{ab}{c}}{c + \frac{ab}{c}} = \frac{abc}{c^2 + ab}$

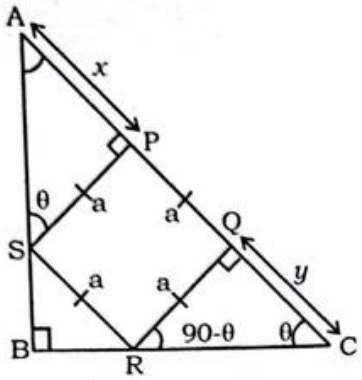
Side of square (y) = $\frac{abc}{a^2 + b^2 + ab}$, $x > y$

❖ AP = x and QC = y

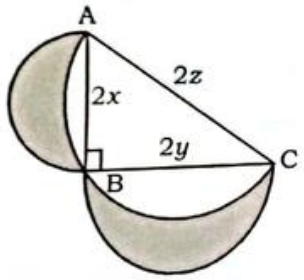
Side of square / वर्ग का किनारा = a = $\sqrt{xy}$

$\Delta ASP \sim \Delta RCQ$

$\frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Rightarrow a = \sqrt{xy}$



❖

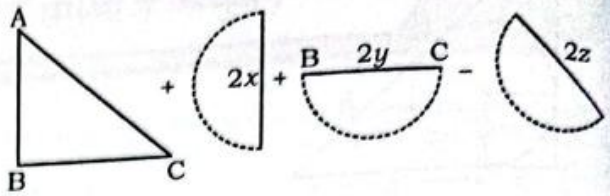


Area of shaded part = Area of Δ ABC

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = Δ ABC का क्षेत्रफल

$x^2 + y^2 = z^2$

Shaded part / छायांकित भाग ⇒



$= \Delta ABC + \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} - \frac{\pi z^2}{2}$

$= \Delta ABC + \frac{\pi}{2}z^2 - \frac{\pi}{2}z^2 = \Delta ABC$

∴ **Area of shaded part = Area of ΔABC**

Scalene Triangle (विषमबाहु त्रिकोण)

❖ All 3 side are unequal. / तीनों भुजाएँ असमान हैं।

Perimeter / परिमाप (P) = a + b + c

Semi-perimeter / अर्द्ध परिधि = $\frac{a+b+c}{2}$

Area of $\Delta ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

Area of $\Delta ABC = r \times S$

Area of $\Delta ABC = \frac{abc}{4R}$

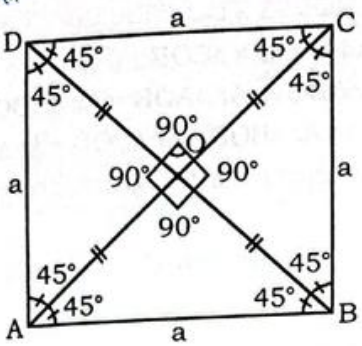
CamScanner

Square and Rectangle (वर्ग और आयत)

Square (वर्ग)

❖ A closed figure with all 4 sides equal and all angles 90°.

एक बंद आकृति जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों और सभी कोण 90° हों



➢ Area / क्षेत्र = $a^2 = \frac{d^2}{2}$

➢ Perimeter / परिमाप = 4a

➢ Diagonal bisect the vertex angle.

विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित करता है

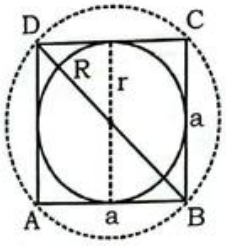
➢ $AC = a\sqrt{2} = BD$

➢ $AO = BO = CO = DO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$

➢ Diagonal bisect each other at 90°

विकर्ण एक दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते हैं

➢ $\Delta DOC \cong \Delta AOB \cong \Delta AOD \cong BOC$



• Radius of incircle / अंत:वृत्त की त्रिज्या = $r = \frac{a}{2}$

• Radius of circum-circle = $R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

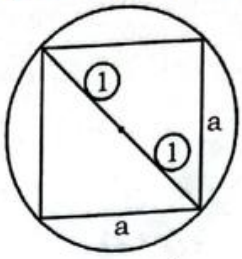
परिवृत्त की त्रिज्या = $R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$\frac{\text{Area of circumcricle}}{\text{Area of incircle}} = \frac{2}{1}$

❖ **Area of circle : Area of square**

वृत्त का क्षेत्रफल : वर्ग का क्षेत्रफल



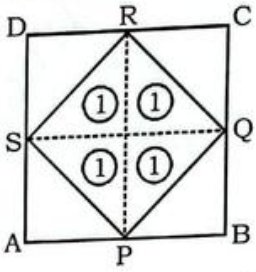
$\pi(1)^2 : \frac{(2)^2}{2}$

$\pi : 2$

$11 : 7$

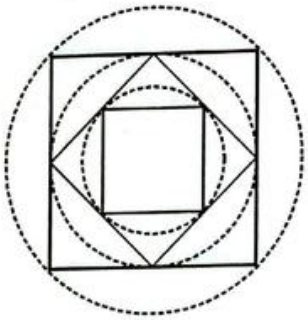
❖ P, Q, R, S are mid points of sides of square. PQRS is also a square.

P, Q, R, S वर्ग ABCD की भुजाओं के मध्य बिंदु हैं. PQRS भी एक वर्ग होगा।



Area of □ PQRS = $\frac{\text{Area of □ ABCD}}{2}$

❖



Bigger : Outer : Medium : Medium : Small : Small

circle square circle square circle square

(बड़ा वृत्त):(बाहरी वर्ग):(मध्यम वृत्त):(मध्यम वर्ग):(छोटा वृत्त):(छोटा वर्ग)

Area→ $8\pi : 16 : 4\pi : 8 : 2\pi : 4...$

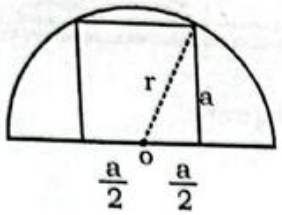
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

or

88 : 56 : 44 : 28 : 22 : 14 .....

CamScanner

❖ Largest square inscribed in semi-circle →
अर्धवृत्त में बना हुआ सबसे बड़ा वर्ग →

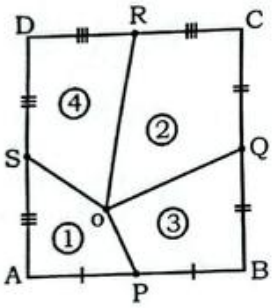


$$a^2 + \frac{a^2}{4} = r^2$$

$$\frac{5}{4}a^2 = r^2 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{5}r^2$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{5}}r$$

❖ P, Q, R, S are mid points of respective sides.
P, Q, R, S संबंधित भुजाओं के मध्य बिंदु हैं।

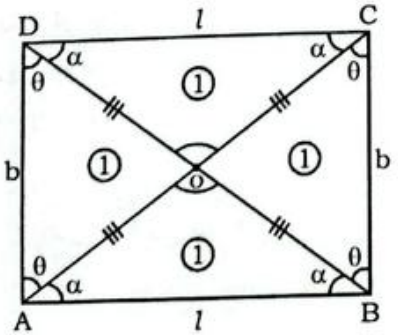


ABCD → Square/Rectangle

Area (1 + 2) = Area (3 + 4) = $\frac{1}{2}$ Area □ ABCD

Rectangle (आयत)

❖ A type of quadrilateral that has its parallel sides equal to each other and all the four vertex angles are equal to 90°.
एक प्रकार का चतुर्भुज जिसकी समानांतर भुजाएँ एक दूसरे के बराबर होती हैं और चारों शीर्ष 90° के बराबर होते हैं।



Area = Length × breadth = $l \times b$
Perimeter = 2 (l + b)
Diagonal do not bisect vertex angle.
विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित नहीं करता है।

$AC = BD = \sqrt{l^2 + b^2}$

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

$AO = OC = BO = DO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$

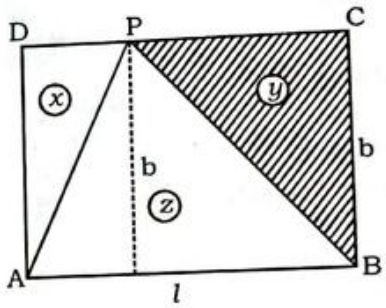
❖ Diagonals bisect each other but not at 90°
विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं लेकिन 90° पर नहीं

❖ $\Delta DOC \cong \Delta BOA$ and $\Delta AOD \cong \Delta COB$

❖ BO is median of $\Delta ABC \Rightarrow$ Ar ΔAOB = Ar ΔBOC

❖ Similarly Ar ΔAOB = Ar ΔBOC = Ar ΔCOD = Ar ΔAOD

❖ In square/rectangle/parallelogram/rhombus ABCD→
वर्ग/आयत/समांतर चतुर्भुज/समचतुर्भुज ABCD में →

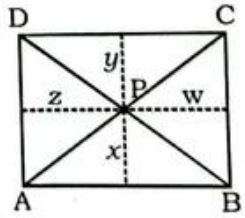


$$\frac{\text{Area } \Delta \text{ APB}}{\text{Area } \Delta \text{ ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times l \times b}{l \times b} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{Shaded Area}}{\text{Area ABCD}} = \frac{1}{2} \therefore \text{Area } (x + y) = \text{Area } z$$

British Flag Theorem (For Square/Rectnagle)
(ब्रिटिश ध्वज प्रमेय (वर्ग/आयत के लिए)

❖



Note → AC and BD are not diagonals.
नोट → AC और BD विकर्ण नहीं है।

❖ P is any point inside / P अंदर कोई बिंदु है

$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

$x^2 + z^2 + w^2 + y^2 = x^2 + w^2 + y^2 + z^2$

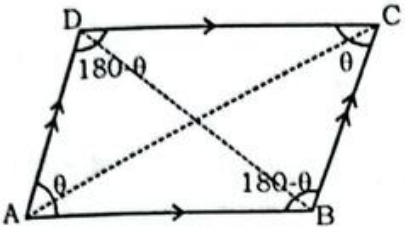
CamScanner

Parallelogram/Rhombus/Trapezium
(समांतर चतुर्भुज/समचतुर्भुज /समलंब)

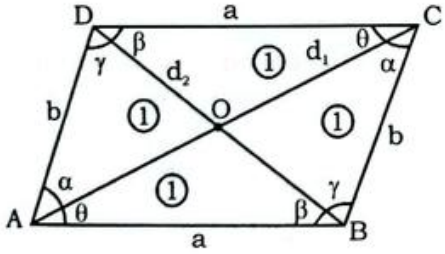
Parallelogram (समांतर चतुर्भुज)

❖ It is a quadrilateral with opposite sides equal and parallel.

यह एक चतुर्भुज है जिसकी विपरीत भुजाएँ बराबर और समान्तर हैं।



- AB ∥ CD and BC ∥ AD
- ∠A = ∠C, ∠B = ∠D
- Angle ratio / कोण अनुपात → $x : y : x : y$
- Opposite angles are equal
  सम्मुख कोण बराबर होते हैं
- Sum of two adjacent angles is 180°
  दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है
- AB = CD and BC = AD
- ΔABC ≅ ΔCDA
- Diagonal / विकर्ण AC ≠ BD
- α ≠ θ, β ≠ r
- Opposite Δ's are congruent
  विपरीत Δ सर्वांगसम हैं



ΔCOD ≅ ΔAOB
ΔAOD ≅ ΔCOB

$\therefore BO = DO = \frac{BD}{2}$

$AO = CO = \frac{AC}{2}$

- Diagonal bisect each other but not at 90°.
  विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं लेकिन 90° पर नहीं।
- Area of all 4 triangle is same.
  सभी 4 त्रिभुज का क्षेत्रफल समान है।

i.e., Ar ΔAOB = Ar ΔBOC = Ar ΔCOD = Ar ΔDOA = $\frac{1}{4}$

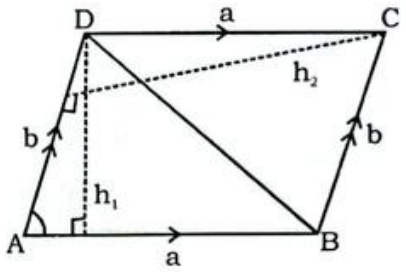
Ar ▱ ABCD

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$

$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ $\quad\therefore d_1 > d_2$

$\mathbf{d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)}$

❖ **Area of Parallelogram** / समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल :



Area of Parallelogram = ab sin θ

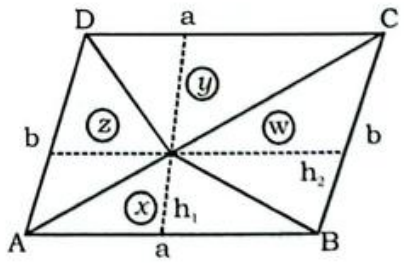
Ar of ΔABD = $\frac{1}{2}$ ab sin θ = Ar ΔBDC

∴ Ar of Parallelogram = 2 × $\frac{1}{2}$ ab sin θ = **ab sin θ**

Ar of Parallelogram = Base × Height ⇒ $ah_1 = bh_2$

$\therefore \mathbf{\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1}}$

❖ **P is any point** / P कोई बिंदु है

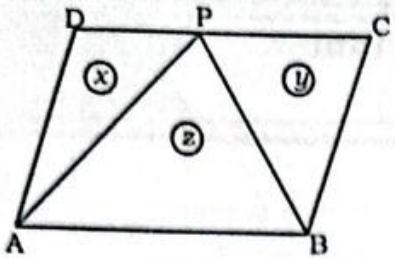


Area $(x + y)$ = Area $(z + w)$ = $\frac{1}{2}$ Area of Parallelogram ABCD

$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2$

CamScanner

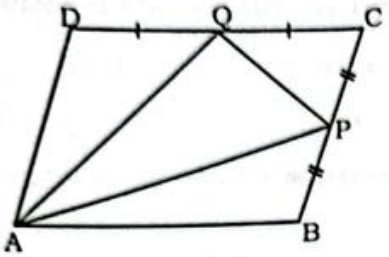
❖



$Ar\ \Delta APB = \frac{1}{2}$ Area Δ ABCD

$Ar\ (x + y) = Ar(z) = \frac{1}{2}$ Area Δ ABCD

❖

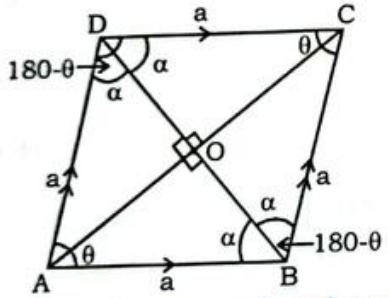


$$\frac{Ar\ \Delta\ APQ}{Ar\ \Delta\ ABCD} = \frac{3}{8}$$

Rhombus (समचतुर्भुज)

❖ Rhombus is a type of parallelogram with all sides equal and diagonals bisect each other at 90°

समचतुर्भुज एक प्रकार का समांतर चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ समान होती है और विकर्ण एक दूसरे को 90° पर काटते है।



➢ All sides are equal / सभी भुजाएँ समान हैं

➢ $\angle A = \angle C$ and $\angle B = \angle D$

➢ Diagonal bisect vertex angle.

विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित करते है।

➢ Diagonal bisect rhombus into two equal areas.

विकर्ण समचतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफलों में विभाजित करता है।

➢ $AC \neq BD$

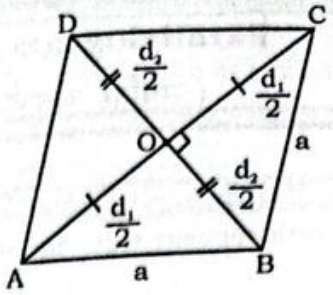
➢ All 4Δ made by two diagonals are congruent.

दो विकर्णों द्वारा बनाए गए सभी 4Δ सर्वांगसम होते हैं।

➢ $AO = OC = \frac{AC}{2}$ and $BO = OD = \frac{BD}{2}$

➢ Diagonal bisect each other at 90°.

विकर्ण परस्पर 90° पर समद्विभाजित करते हैं।



$$\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} = a^2$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$

Area $\Delta BOC = \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$

Area of rhombus $= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$

Perimeter = 4a

Figure Made After Joining Mid Points
(मध्य बिन्दुओं को जोड़ने के बाद बनाई गई आकृति)

❖ Scalene quadrilateral → Parallelogram
विषमबाहु चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज

Square / वर्ग → Square / वर्ग

Rectangle / आयत → Rhombus / समचतुर्भुज

Rhombus / समचतुर्भुज → Rectangle / आयत

Trapezium (समलंब चतुर्भुज)

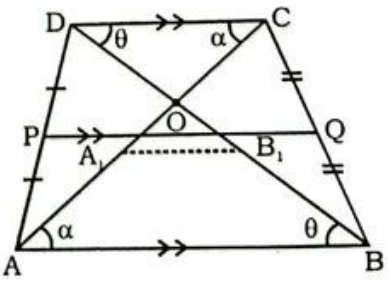
❖ It is a quadrilateral with one pair of parallel opposite sides. The parallel sides of a trapezium is called bases and non-parallel sides are called legs.

समानांतर विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी के साथ एक चतुर्भुज है। एक समलंब की समानांतर भुजाओं को आधार कहा जाता है और गैर-समानांतर भुजाओं को पैर कहा जाता है।

AB ∥ CD

If AD = BC then it is called isosceles trapezium.

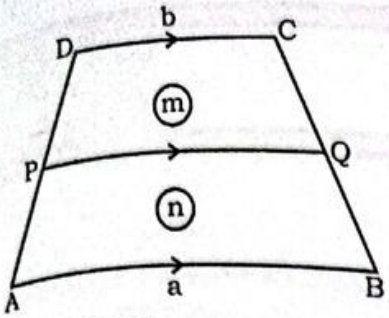
यदि AD = BC हो तो उसे समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज कहते हैं।



$AC \neq BD$

$\Delta AOB \sim \Delta COD$

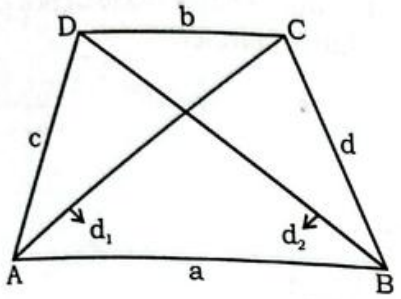
$$PQ = \frac{AB + CD}{2}$$



$$\frac{\text{Area } \Delta \text{ DCQP}}{\text{Area } \Delta \text{ PQBA}} = \frac{m}{n}$$

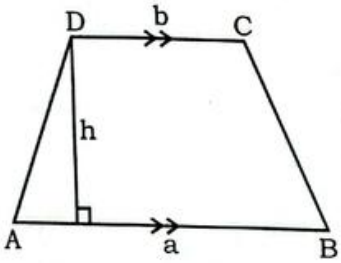
$$PQ = \sqrt{\frac{ma^2 + nb^2}{m+n}}$$

If m : n = 1 : 1 Then / $PQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$



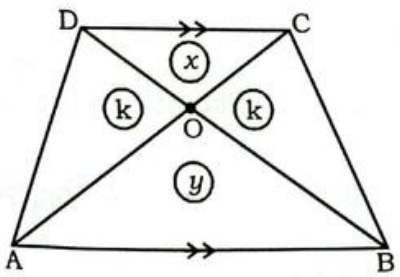
$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$$

❖ Area of trapezium / ABCD = $\frac{1}{2} \times (a + b) \times h$



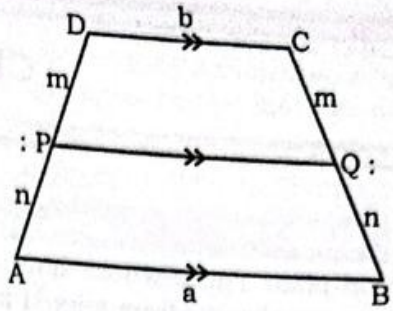
$\Delta AOB \sim \Delta COD$

Area / ΔAOD = Ar ΔBOC



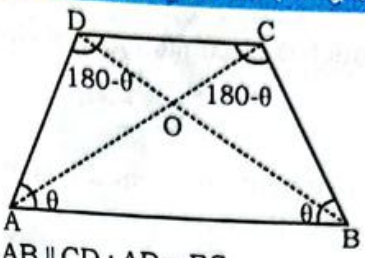
$k \times k = x \times y$

$\mathbf{k} = \sqrt{xy}$



$$PQ = \frac{ma + nb}{m + n}$$

Isosceles Trapezium (समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज)



AB ∥ CD ; AD = BC

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

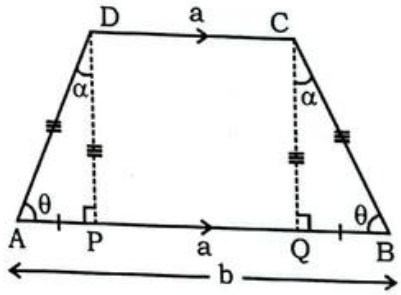
∴ Each isosceles trapezium is a cyclic quadrilateral.

∴ प्रत्येक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।

or if a trapezium is inscribed in a circle it must be a isosceles trapezium.

या यदि एक समलंब एक वृत में बना हुआ है तो यह एक समद्विबाहु समलंब होना चाहिए।

AC = BD

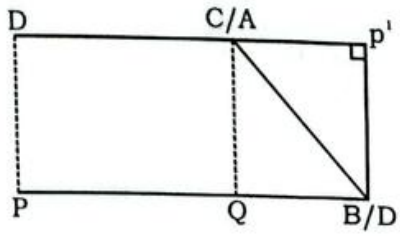


$$AP = QB = \frac{b-a}{2}$$

$\Delta APD \cong \Delta BQC$

Shift Δ ADP near ΔBQC ⇒ trapezium converted to rectangle.

Δ ADP को ΔBQC के पास शिफ्ट करने पर ⇒ समलम्ब आयत में परिवर्तित हो जाता है।



Circle (वृत्त)

Circle (वृत्त)

❖ Circle → A round plane figure whose boundary consists of points equidistant from a fixed point (the centre).

वृत्त → किसी एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिन्दु वृत्त का केंद्र कहलाता है।

Chord → line touches circumference of circle at two points.

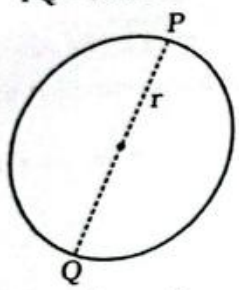
जीवा → जो रेखा वृत्त की परिधि को दो बिन्दुओं पर स्पर्श करती है।

Radius → It is a straight line from the centre to the circumference of the circle.

त्रिज्या → केंद्र और वृत्त की परिधि के किसी भी बिंदु के बीच की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

PQ = radius of circle / वृत्त की त्रिज्या = r

❖

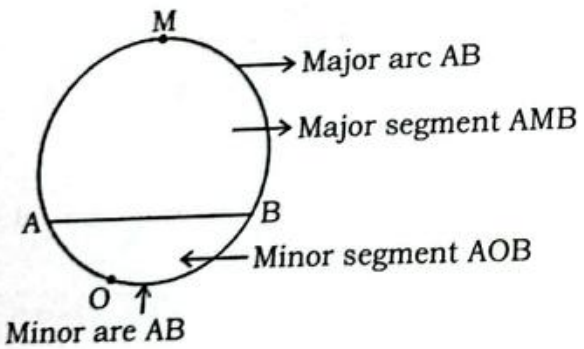


Area / क्षेत्र = πr^2

Circumference / परिधि = $2\pi r$

PQ = diameter = biggest chord of circle.

PQ = व्यास = वृत्त की सबसे बड़ी जीवा।

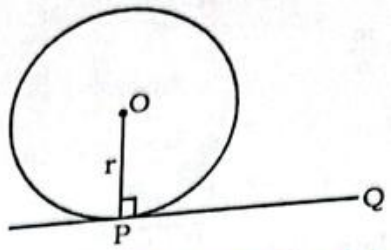


Tangent Line (स्पर्शरेखा)

❖ A line that touches the circle at only one point is known as tangent of the circle.

एक रेखा जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है, वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है।

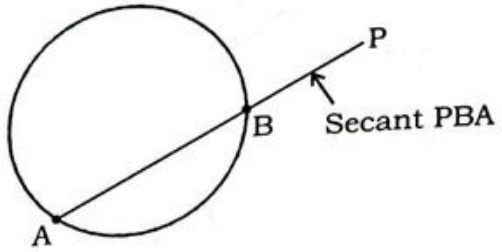
$\angle OPQ = 90°$



Secant Line (छेदक रेखा)

❖ A straight line that intersects a circle in two points is called secant line of circle.

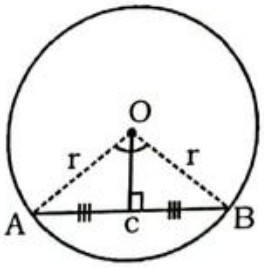
एक सीधी रेखा जो एक वृत्त को दो बिंदुओं पर काटती है, वृत्त की छेदक रेखा कहलाती है।



❖ A perpendicular drawn from the centre of a circle to a chord bisects the chord. / एक वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$OC \perp AB \Rightarrow AC = BC$

or If AC = BC then $OC \perp AB$



❖ 1. Equal chords are equidistant from the centre.

समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

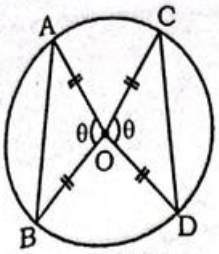
2. Equal chords make equal angle at the centre.

समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं।

If AB = CD then $\angle AOB = \angle COD$

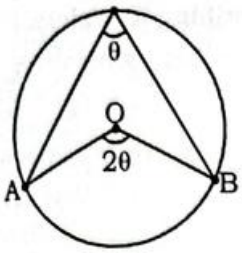
or if $\angle AOB = \angle COD$ then AB = CD

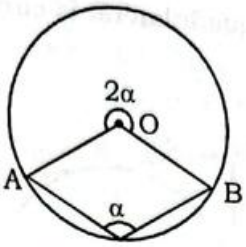
CamScanner



❖ Angle made by an arc on centre is double the angle made by the same arc on the circumference of centre.

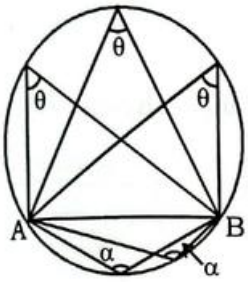
किसी चाप द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण उसी चाप द्वारा केंद्र की परिधि पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।





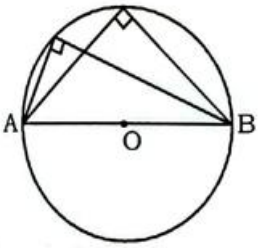
❖ Angle made by an arc on same side of circle are equal.

एक चाप द्वारा वृत्त के एक ही ओर बने कोण बराबर होते हैं।



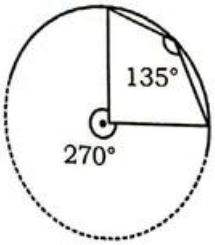
❖ Angle made in semi-circle is right angle.

अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।



❖ Angle made in quarter circle is 135°.

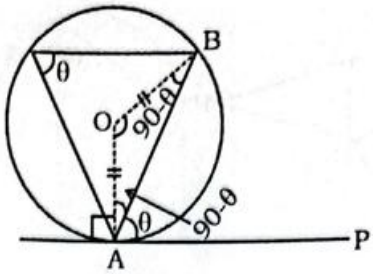
चौथाई वृत्त में बना कोण 135° का होता है।

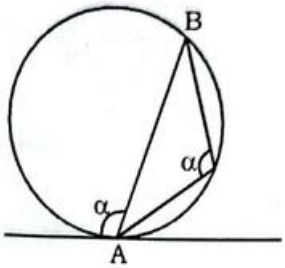


Alternate Segment Theorem (एकांतर वृत्तखंड प्रमेय)

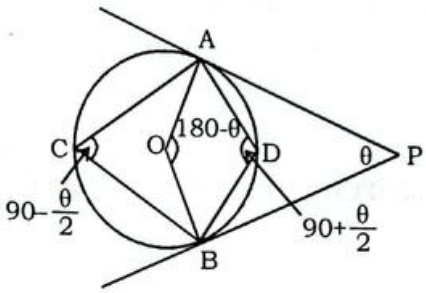
❖ Angle made by a chord and tangent is equal to the angle made by the chord in other segment of the circle.

एक जीवा और स्पर्शरेखा द्वारा बनाया गया कोण जीवा द्वारा वृत्त के दूसरे खंड में बनाए गए कोण के बराबर होता है।





❖



$\angle ADB = 90° + \frac{\theta}{2}$

$\angle ACB = 90° - \frac{\theta}{2}$

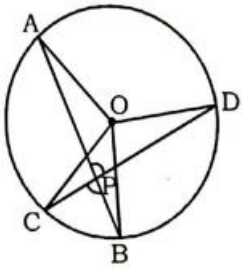
$\angle APB = \theta$

❖ AB and CD two chords cuts each other internally at point P. Then →

AB और CD दो जीवाएं आंतरिक रूप से बिंदु P पर काटती हैं। फिर→

$\angle APD = \angle BPC = \frac{\angle AOD + \angle BOC}{2}$

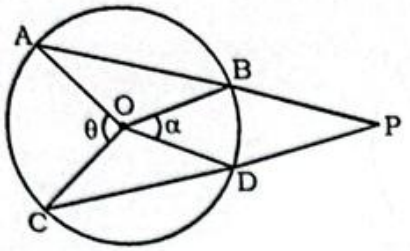
$\angle APC = 180° - \angle APD$



❖ AB and CD two chords cuts each other externally at point P. Then →

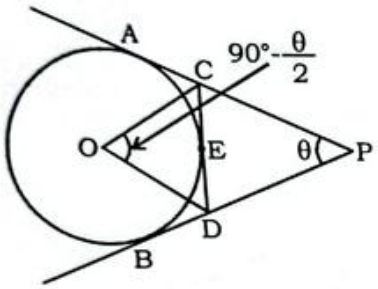
AB और CD दो जीवाएं आंतरिक रूप से बिंदु P पर काटती हैं। फिर→

$\angle APC = \angle BPD = \frac{\theta - \alpha}{2}$

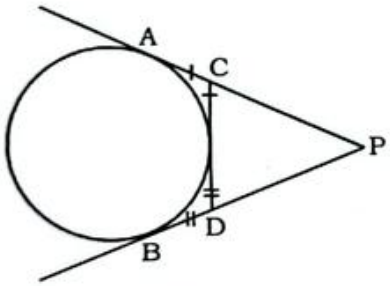


❖ $\angle COD = 90° - \frac{\theta}{2}$

$\angle COD = \frac{\angle AOB}{2}$



❖ **Perimeter of ΔPCD / ΔPCD की परिमाप = 2PA = 2PB**



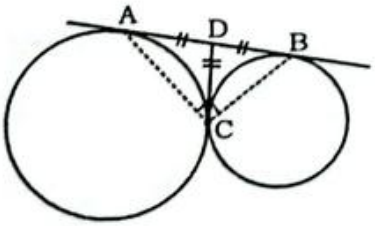
⇒ PC + CE + ED + PD

⇒ PC + CA + BD + PD

⇒ PA + PB

⇒ 2PA or 2PB (∵ PA = PB)

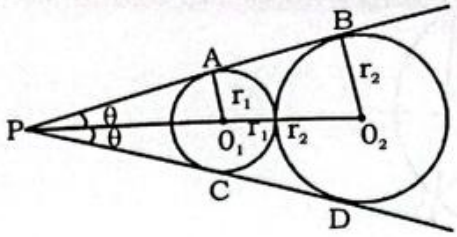
❖



AD = BD = CD

∠ACB = 90°

❖

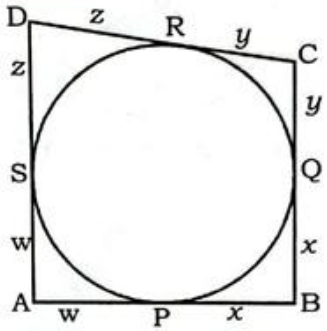


$O_1O_2 = r_1 + r_2$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$

❖ If a circle is inscribed in a quadrilateral or a quadrilateral is circumscribing a circle.

यदि एक वृत्त एक चतुर्भुज में बना हुआ है या एक चतुर्भुज एक वृत्त के परिगत है।



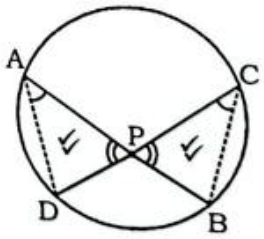
AB + CD = BC + AD

❖ Two chords AB and CD cuts each other at point P internally.

दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु P पर आंतरिक रूप से काटती हैं

PA × PB = PC × PD

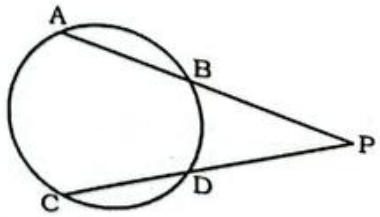
$\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$



❖ Two chords AB and CD cuts each other at point P.

दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु P पर काटती हैं।

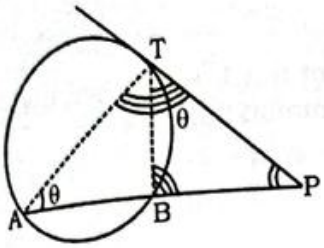
PB×PA = PD×PC



- From an external point a secant and tangent is drawn. Then →

एक बाहरी बिंदु से एक छेदक और स्पर्शरेखा खींची जाती है। फिर →

$PT^2 = PB \times PA$



$\Delta TPB \sim \Delta APT$

$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA}$

- When a circle is drawn between two parallel lines and a tangent is given intersecting these two parallel lines.

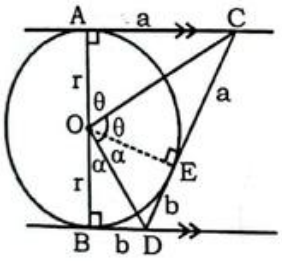
जब दो समानांतर रेखाओं के बीच एक वृत्त खींचा जाता है और इन दो समानांतर रेखाओं को काटती हुई एक स्पर्श रेखा दी जाती है।

$\angle COD = 90°$

$2\theta + 2\alpha = 180°$

$\theta + \alpha = 90°$

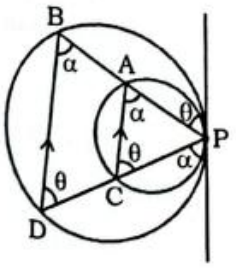
$r = \sqrt{ab}$



- When two circle touch each other internally and common tangent is given →

जब दो वृत्त एक दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं और उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा दी जाती है →

$\Delta PAC \sim \Delta PBD$

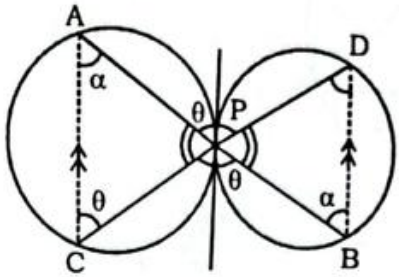


$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$

- When two circles touch each other externally and common tangent is given →

जब दो वृत्त एक दूसरे को बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं और उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दी जाती है →

$\Delta PAC \sim \Delta PBD$

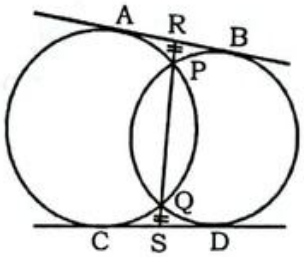


$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$

- Two circles intersect each other at two distinct points and two common tangents are given then →

दो वृत्त एक दूसरे को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं और तब दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ दी गई हैं

$AB = CD$



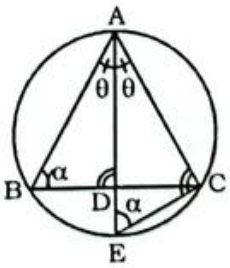
$RS^2 = AB^2 + PQ^2$

- **$AB \times AC + AE \times DE = AE^2$**

$\Delta ABD \sim \Delta AEC$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$

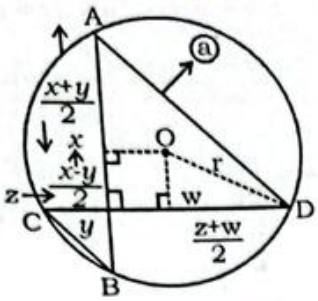
$\Rightarrow AB \times AC = AD \times AE$



CamScanner

❖ If two chords intersect each other at 90°.

यदि दो जीवाएँ एक दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करती हैं।



$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}}{2}$$

$$x \times y = z \times w$$

$$r^2 = \left(\frac{z+w}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

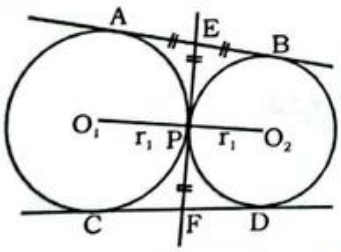
$$r^2 = \frac{z^2 + w^2 + 2zw + x^2 + y^2 - 2xy}{4}$$

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Extrenally Touch (बाह्य स्पर्श)

❖ When two circles touch each other externally. Then distance between their centres is sum of their radii.

जब दो वृत्त एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते है तो उनके केंद्रों की बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं का योग होती है।



O_1PO_2 → straight line / सीधी रेखा

Maximum common tangent = 3 / अधिकतम आम स्पर्शरेखा

AB = CD = EF

Internally touch (आंतरिक रूप से स्पर्श करें)

❖ When two circles touch each other internally then distance between their centres is difference of their radii.

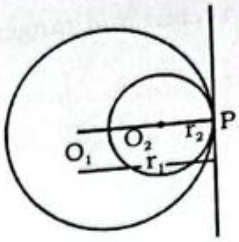
जब दो वृत्त एक दूसरे को अन्त: स्पर्श करते है तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं का अंतर होती है।

O_1O_2P → straight line / सीधी रेखा

$O_1O_2 = d = r_1 - r_2$

Maximum common tangent = 1

अधिकतम उभयनिष्ट स्पर्शरेखा = 1

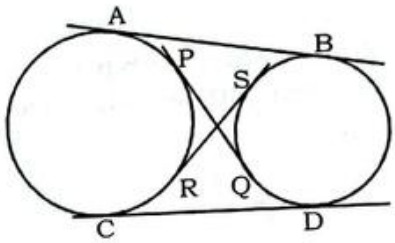


❖ If two circles do not touch each other, there can be maximum 4 common tangents.

Direct common tangent = 2

Transverse common tangent = 2.

जब दो वृत्त आपस में स्पर्श नहीं करते तो उनकी अधिकतम 4 स्पर्श रेखाएं हो सकती है।



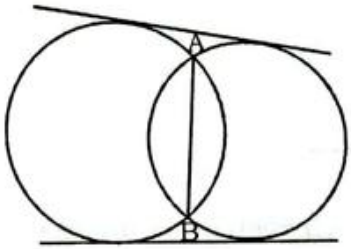
DCT = AB & CD

TCT = PQ & RS

Maximum common tangent = 4

अधिकतम सामान्य स्पर्शरेखा = 4

❖ **Intersecting circles** / अन्तर्विभाजक वृत्त



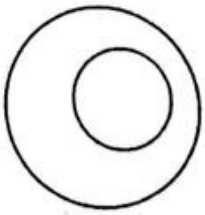
AB → common chord / सामान्य राग

Maximum common tangent = 2

अधिकतम सामान्य स्पर्शरेखा = 2

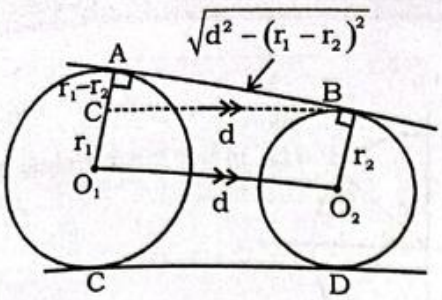
❖ If one circle is made inside other circle and they do not touch each other then no common tangent is possible.

यदि एक वृत्त दूसरे वृत्त के अंदर बनाया जाता है और वे एक दूसरे को स्पर्श नहीं करते हैं तो कोई उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा संभव नहीं है।



Direct Common Tangent (उभयनिष्ट अनुस्पर्श रेखा)

❖ Length of DCT / DCT की लंबाई

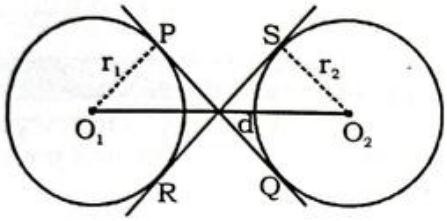


$CB \parallel O_1O_2$

DCT = AB = CD = $\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$

Transverse Common Tangent (तिर्यक उभयनिष्ट अनुस्पर्श रेखा)

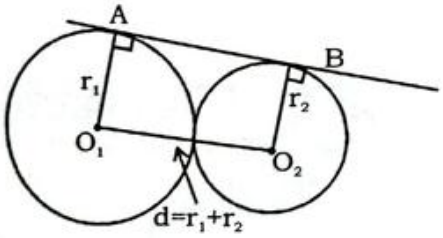
❖ Length of TCT / TCT की लंबाई



TCT = PQ = RS = $\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$

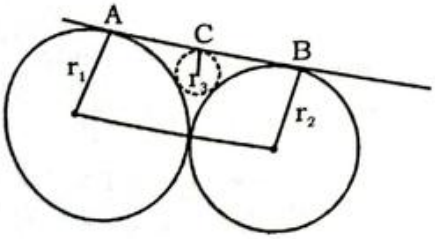
DCT > TCT

❖ AB = DCT = $2\sqrt{r_1r_2}$



DCT = $\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

❖ AB = AC + BC



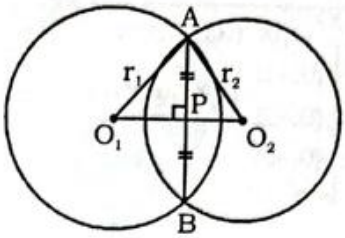
$2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3}$

Divide by $\sqrt{r_1r_2r_3}$

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$ (Result)

❖ When two circles intersect each other at two distinct points then length of their common chord AB is → Common chord

जब दो वृत्त एक-दूसरे को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काटते हैं तो उनकी उभयनिष्ठ जीवा AB की लंबाई → उभयनिष्ठ जीवा होती है



⇒ AB = 2AP = 2PB

AP = PB

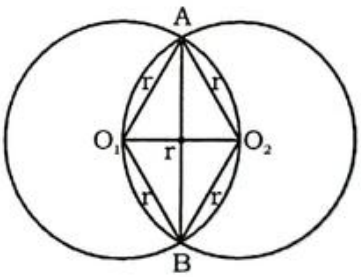
Ar $\Delta O_1AO_2 = \frac{1}{2} \times O_1O_2 \times AP$

❖ If two circles pass through each others centre. / यदि दो वृत्त एक दूसरे के केंद्र से गुजरते हैं।

Length of common chord AB is →

उभयनिष्ठ जीवा AB की लम्बाई है→

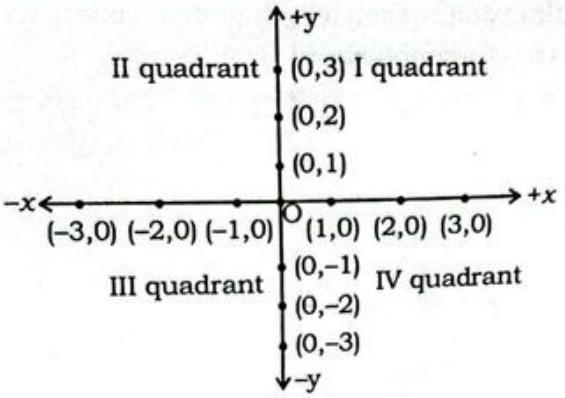
$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} r \times 2 = \sqrt{3}r$



CamScanner

Co-ordinate Geometry (निर्देशांक ज्यामिति)

❖



O (origin) ≡ (O, O)

P ≡ (x, y) → Ordinate

↓ abscissa

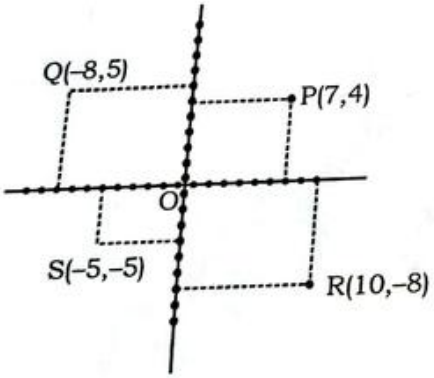
Equation of x-axis ⇒ $y = 0$

x-अक्ष का समीकरण ⇒ $y = 0$

Equation of y-axis ⇒ $x = 0$

y-अक्ष का समीकरण ⇒ $x = 0$

❖ Representation of points / बिंदुओं का प्रतिनिधित्व

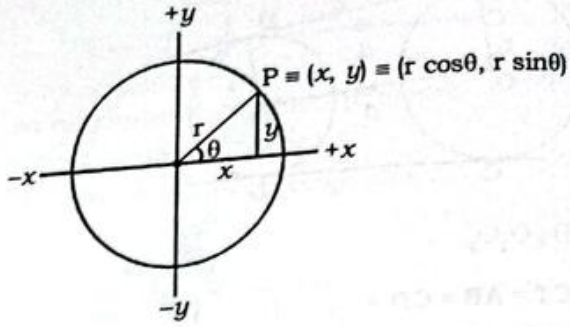


❖ Pole → Reference point in polar co-ordinate system the co-ordinates is called a pole.

Polar co-ordiantes of a point (एक बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांक)

❖ When each point on a plane of a 2D co-ordinate system is decided by a distance from a reference point and an angle is taken from a reference direction. It is known as the polar co-ordinate system.

जब एक 2D समन्वय प्रणाली के तल पर प्रत्येक बिंदु को एक संदर्भ बिंदु से दूरी द्वारा तय किया जाता है और एक संदर्भ दिशा से एक कोण लिया जाता है। इसे ध्रुवीय समन्वय प्रणाली के रूप में जाना जाता है।



$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$x^2 + y^2 = r^2$

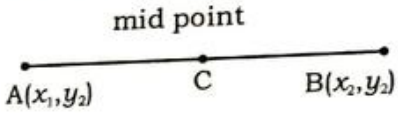
$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Mid Point Formula (मध्य बिंदु सूत्र)

❖ A mid point is the middle point of a line segment which is equidistant from both the end points.

Mid point

एक मध्य बिंदु एक रेखा खंड का मध्य बिंदु होता है जो दोनों अंत बिंदुओं से समान दूरी पर होता है।



Mid point / C = $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Distance formula (दूरी सूत्र)

❖ Distance between two points is the length of the line segment that connects the two points in a plane.

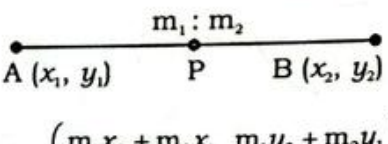
दो बिंदुओं के बीच की दूरी उस रेखाखंड की लंबाई है जो एक समतल में दो बिंदुओं को जोड़ती है।

A ≡ (x_1, y_1) ∴ AB = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

B ≡ (x_2, y_2)

❖ **Intersection formula** / प्रतिच्छेद बिंदु का सूत्र

(A) Internal division / आंतरिक विभाजन →

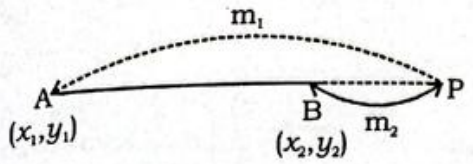


$P \equiv \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

CamScanner

(B) External division / बाहरी विभाजन →

$AP : PB = m_1 : m_2$



$$P \equiv \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$

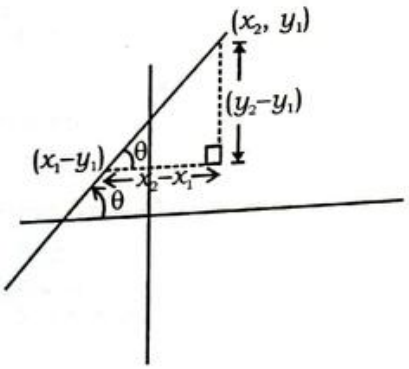
Slope of a Line (रेखा की ढलान)

❖ The slope of a line is a measure of its steepness. It is the change in y co-ordinate with respect to the change in x co-ordinate.

किसी रेखा का ढाल उसकी ढाल का माप होता है। यह y निर्देशांक में परिवर्तन के संबंध में x निर्देशांक में परिवर्तन है।

Slope of a line/रेखा की ढलान (m) = tan θ (slope)

$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



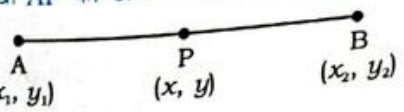
❖ Standard equation of a line / एक रेखा का मानक समीकरण
→ $ax + by + c = 0$

$$\text{slope} = \frac{-a}{b}$$

❖ **Point from of a line** / एक रेखा से बिंदु

Slope of line AP = slope of line AB.

रेखा AP का ढाल = रेखा AB का ढाल



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

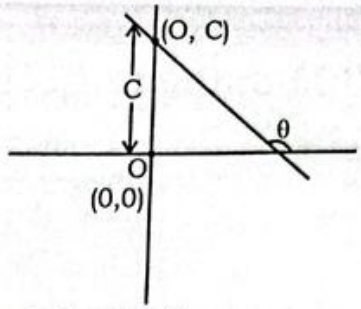
$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

❖ Slope / ढलान = m

Intercept on y-axis / y-अक्ष पर अवरोधन = c

$y - c = m\,(x - 0)$

$\mathbf{y = mx + c}$



❖ $ax + by + c = 0$

$by = -ax - c$

$$y = \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}$$

$y = mx + c$

compare / तुलना करना $\mathbf{m = \frac{-a}{b} = \frac{-x\ of\ coff.}{y\ of\ coff.}}$

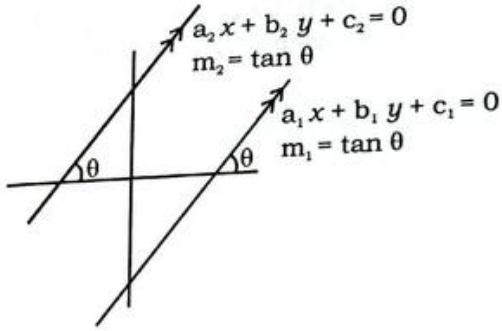
❖ If two lines are parallel to each other their slope will be equal ⇒ $m_1 = m_2$

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे के समांतर हों तो उनकी प्रवणता बराबर होगी

$\Rightarrow m_1 = m_2$

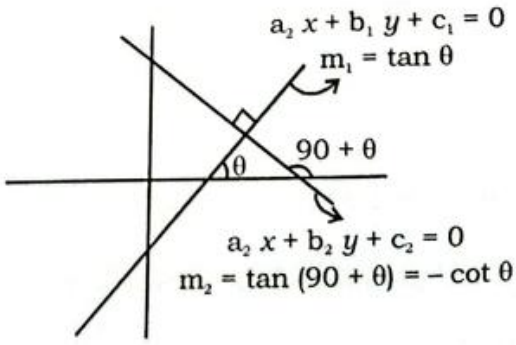
$$\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



❖ **If two lines are perpendicular to each other →**

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे के लंबवत हों →



$\therefore m_1m_2 = \tan\theta\,(-\cot\theta)$

$\therefore \mathbf{m_1m_2 = -1}$

CamScanner

Intercept form of a line (एक रेखा का अवरोधन रूप)

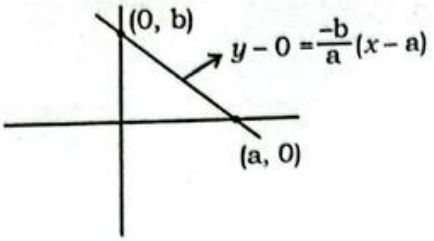
❖ Intercept at x-axis = a

x-अक्ष पर अवरोधन = a

Intercept at y-axis = b

y-अक्ष पर अवरोधन = b

$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$



$\frac{-y}{b}=\frac{x}{a}-1$

$1=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$

❖ Equation of line parallel to line $ax+by+c=0$ is $ax+by=k$.

रेखा $ax+by+c=0$ के समांतर रेखा का समीकरण $ax+by=k$ है।

Equation of line perpendicular to line $ax+by+c=0$ is $bx-ay=k$.

रेखा $ax+by+c=0$ पर लंबवत रेखा का समीकरण $bx-ay=k$ है।

(A) If two lines are $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$ are parallel to each other then $m_1=m_2$ and

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

यदि दो रेखाएँ $a_1x+b_1y+c_1=0$ और $a_2x+b_2y+c_2=0$ एक दूसरे के समानांतर हैं तो $m_1=m_2$ और $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

No intersecting point / कोई प्रतिच्छेदन बिंदु नहीं

$\therefore$ **No solution possible** / कोई हल संभव नहीं

(B) If two line are co-incidents on each other then $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ and infinite solutions

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे पर संपाती हैं तो $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, अनंत हल संभव है।

(C) If two lines intersect at single point then $m_1\neq m_2$

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, unique solution possible

यदि दो रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो $m_1\neq m_2$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ अद्वितीय हल संभव है

Concurrent Lines (समवर्ती रेखाएँ)

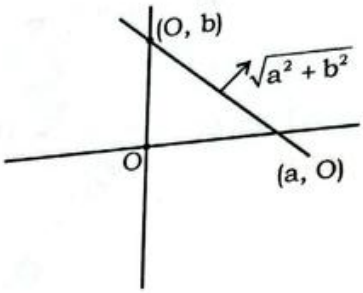
❖ Lines passing through a single point

एक बिंदु से गुजरने वाली रेखाएँ

❖ Intercept by line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ between both axis

दोनों अक्षों के बीच $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ रेखा द्वारा अवरोधन

$=\sqrt{a^2+b^2}$



❖ Line $ax+by=0$ always passes through origin.

रेखा $ax+by=0$ हमेशा मूल बिंदु से होकर गुजरती है।

Angle Between Two Lines (दो रेखाओं के बीच का कोण)

❖ $\theta\rightarrow$ acute angle / न्यून कोण

Let angle between two lines = θ and their slopes are m_1 and m_2 then

मान लीजिए कि दो रेखाओं के बीच का कोण = θ और उनकी प्रवणता m_1 और m_2 हैं, तब

$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

$\theta=\tan^{-1}\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

❖ Distance of line $ax+by+c=0$ from a point (x_1, y_1)

एक बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax+by+c=0$ की दूरी

$\Rightarrow\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

❖ Distance of line $ax+by+c=0$ from origin

मूल बिन्दु से रेखा $ax+by+c=0$ की दूरी

$=\left|\frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

CamScanner

Distance between two parallel lines:-

दो समानांतर रेखाओं के बीच की दूरी :

$ax + by + c_1 = 0$

$ax + by + c_2 = 0$

distance /दूरी = $\left|\frac{C_1 - C_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

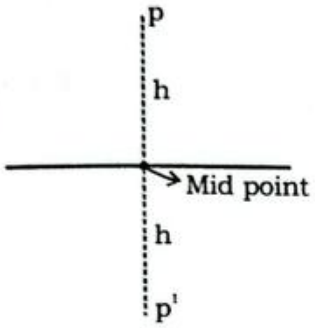
Reflection (प्रतिबिंब)

A reflection is the mirror image of the shape.

एक प्रतिबिंब आकार की दर्पण छवि है।

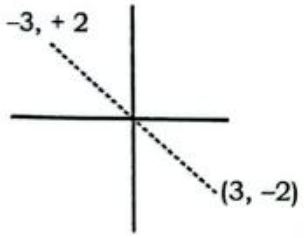
Types of reflection in co-ordinate system

समन्वय प्रणाली में प्रतिबिंब के प्रकार



1. If reflection is asked about origin change only signs

यदि प्रतिबिंब मूल बिन्दु से पूछा जाए तो केवल संकेत बदलते हैं



2. **Reflection over x-axis** → x-co-ordinate remains same but y co-ordinate changes its signs.

x-अक्ष पर परावर्तन → x-निर्देशांक समान रहता है लेकिन y -निर्देशांक अपने चिह्न बदल देता है।

3. **Reflection over y-axis** → y co-ordinate remains same but x co-ordinate changes its signs.

y-अक्ष पर परावर्तन → y निर्देशांक पर परावर्तन समान रहता है लेकिन x निर्देशांक अपना चिह्न बदल लेता है।

4. **Reflection over $y = x$** → When a point is reflected across the line $y = x$, the x-co-ordinates and y co-ordinates change their places.

$y = x$ → पर परावर्तन जब एक बिंदु रेखा $y = x$, x-निर्देशांक और y के पार परिलक्षित होता है निर्देशांक अपना स्थान बदलते हैं।

∴ Reflection of point (x, y) across the line $y = x$ is (y, x).

बिन्दु (x, y) का रेखा $y = x$ पर परावर्तन है (y, x)।

5. **Reflection over $y = -x$** → Both co-ordinates change their place and sign as well.

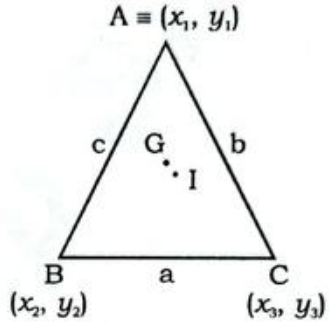
y पर प्रतिबिंब $y = -x$ → पर परावर्तन दोनों निर्देशांक अपना स्थान और चिह्न भी बदलते हैं।

∴ Reflection of point (x, y) across the line $y = -x$ is $(-y, -x)$

बिन्दु (x, y) का रेखा $y = -x$ से परावर्तन होता है $(-y, -x)$

Centroid and Incentre (केन्द्रक और अन्तःकेंद्र)

❖



G → Centroid / केन्द्रक

I → Incentre / अन्तःकेंद्र

$$G \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$I \equiv \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$$

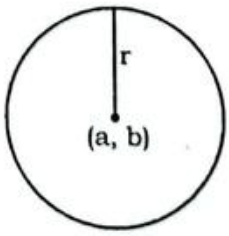
Equation of Circle (वृत्त का समीकरण)

❖ Where (a, b) are co-ordinates of center of circle and r is the radius.

जहाँ (a, b) वृत्त के केंद्र के निर्देशांक हैं और r त्रिज्या है।

Equation of circle / वृत्त का समीकरण →

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



if centre is origin / अगर केंद्र मूल है

$x^2 + y^2 = r^2$

❖ Area enclosed by $|x|+|y| = a \Rightarrow 2a^2$

$|x|+|y| = a$ से घिरा क्षेत्र $\Rightarrow 2a^2$

CamScanner

2 Dimension Mensuration (2 आयामी क्षेत्रमिति)

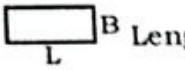
❖ **Zero-Dimensional figure** → • (point)

शून्य-आयामी आकृति → • (बिंदु)

One-Dimensional figure → ⟷ only length.

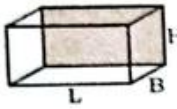
एक आयामी आकृति → ⟷ केवल लंबाई।

Two-Dimensional figure (दो आयामी आकृति) →



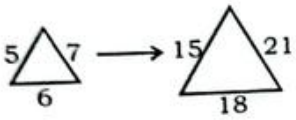
Length and Breadth (लंबाई और चौड़ाई)

Three-Dimensional figure (त्रि-आयामी आकृति) →



Length, Breadth & Height
लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई

❖ For Any 2D figure (किसी भी दो आयामी आकृति के लिए) →



❖ If each corresponding length of any 2D figure = K times.

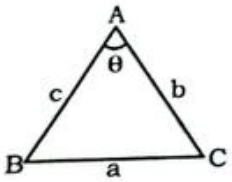
यदि किसी भी दो आयामी आकृति की प्रत्येक संगत लंबाई = K गुना

Then, perimeter = K times / तब परिमाप = K गुना

Area = K^2 times / क्षेत्रफल = K^2 गुना

Triangle (त्रिभुज)

1. Scalene triangle / विषमबाहु त्रिभुज



Perimeter / परिमाप = a + b + c

Semi-Perimeter (s) = $\frac{a+b+c}{2}$

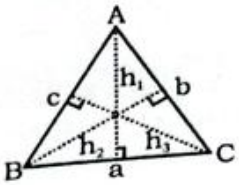
Area(Δ) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Area (Δ) = $\frac{1}{2}$ bcsinA = $\frac{1}{2}$ absinC = $\frac{1}{2}$ acsinB

Inradius (r) = $\frac{\text{Area}}{S}$

Circumradius (R) = $\frac{abc}{4 \times \text{Area}}$

❖



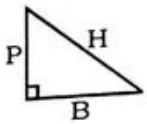
Area (Δ) = $\frac{1}{2}$ ×Base×Height = $\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3$

$\therefore ah_1 = bh_2 = ch_3$ = (constant)

$\therefore a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}$ (Result)

2. Right angle triangle (समकोण त्रिभुज)

❖



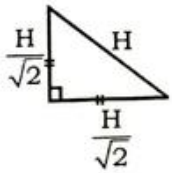
Area(Δ) = $\frac{1}{2}$ × PB

Perimeter = P+B+H

Inradius (r) = $\frac{P+B-H}{2}$

Circumradius (R) = $\frac{\text{Hypotenuse}}{2} = \frac{H}{2}$

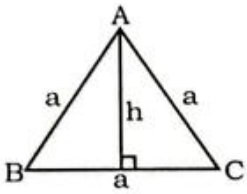
3. Isosceles right angle triangle (समद्विबाहु समकोण त्रिभुज)



Area(Δ) = $\frac{H^2}{4}$

Perimeter = 2H+ $\sqrt{2}$H

4. Equilateral triangle (समबाहु त्रिभुज)



Side/भुजा = a

Inradius / अन्त: त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ or $\frac{h}{3}$

CamScanner

Circumradius / बाह्य त्रिज्या (R) = $\frac{a}{\sqrt{3}}$ or $\frac{2h}{3}$

Perimeter / परिमाप = 3a

Height / ऊंचाई (H) = $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

Area / क्षेत्रफल (Δ) = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

a(side)	height	Area
2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
↓×k	↓×k	↓×k^2
2K	$\sqrt{3}$ K	$\sqrt{3}$ K^2 (Result)

❖ **Heronian Triangle:** All sides and area is integer.
हेरोनियन त्रिभुज : सभी भुजाएँ और क्षेत्रफल पूर्णांक हैं।

Find the Area of Δ with side→

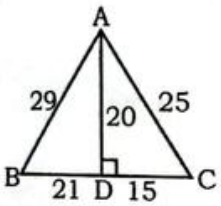
36, 29, 25

29, 20, 21

15, 20, 25 (use the common triplet)

15 + 21 = 36 (Acute Δ)

ऐसे 2 साइड देखो जो 90° के सामने हों और triplet में 1 length common हो



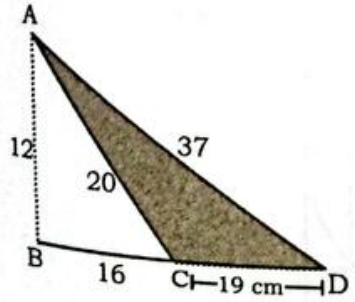
Area of triangle / त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ×36×20 = **360 cm²**

❖ 57, 60, 111 → Find Area / क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Simplify by 3 / 3 से सरल कीजिए ⇒ 19, 20, 37

12 16 12 35

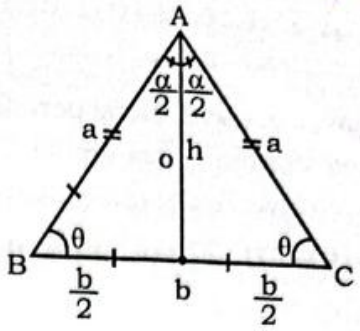
35–16 = 19 (obtuseΔ)



Area / क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ×19×12 = 114

∴ Area of original (मूल का क्षेत्रफल) Δ ⇒
114 × $(3)^2$ ⇒ 114 × 9 ⇒ 1026 cm²

5. Isosceles triangle (समद्विबाहु त्रिभुज):→ 2 D



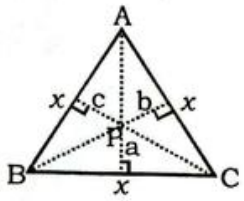
Height / ऊंचाई = $\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

Area / क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

Area / क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}a^2 \cdot \sin\alpha$

Perimeter / परिमाप = 2a + b

❖



ABC → Equilateral Δ with side x and height H.

ABC → भुजा x और ऊँचाई H के साथ समबाहु त्रिभुज।

P → Any point inside triangle./त्रिकोण के अंदर कोई बिंदु

a,b,c → ⊥(Perpendicular) from point P on each side

a,b,c → प्रत्येक भुजा से P पर ⊥ (लम्ब)

H = a+b+c

Area ΔABC = ΔBPC + ΔAPC + ΔAPB

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{1}{2}xa + \frac{1}{2}xb + \frac{1}{2}xc$$

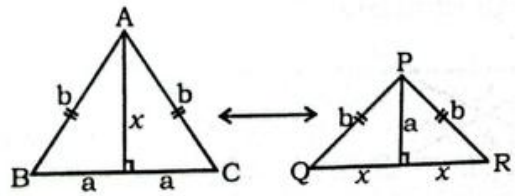
$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{x}{2}(a+b+c) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = a+b+c$$

∴ H = a+b+c

$$\mathbf{x = \frac{2}{\sqrt{3}}(a+b+c)}$$ (Result)

Area of ΔABC = $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)^2}$

❖



Area of ΔABC = ax = Area of ΔPQR

❖ If regular polygon have same perimeter then figure with more number of sides have greater area.

यदि नियमित बहुभुज का परिमाप समान हो तो अधिक भुजाओं वाली आकृति का क्षेत्रफल अधिक होता है।

∴ Area of square > Area of Δ with same perimeter.

∴ वर्ग का क्षेत्रफल > समान परिमाप वाले Δ का क्षेत्रफल।

∴ Infinite sides / अनंत भुजाएं → circle / वृत्त

∴ circle has more area then any other closed figure.

∴ वृत्त का क्षेत्रफल किसी अन्य बंद आकृति से अधिक होता है।

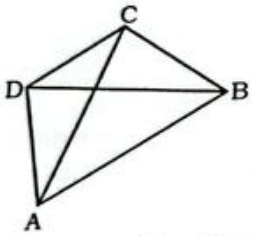
Quadilateral (चतुर्भुज)

Quadrilateral

Square Rectangle Parallelogram Rhombus Trapezium

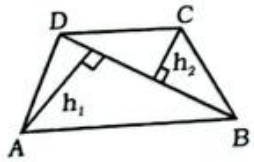
Quadrilateral : A closed shape and a type of polygon that has 4 sides, 4 vertices and 4 angles.

चतुर्भुज : एक बंद आकृति और एक प्रकार का बहुभुज जिसमें 4 भुजाएँ, 4 शीर्ष और 4 कोण होते हैं।



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

❖ **Area of Quadrilateral / चतुर्भुज का क्षेत्रफल**

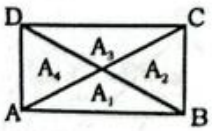


Area = $\frac{1}{2} \times BD \times (h_1 + h_2)$

= $\frac{1}{2}$ × diagonal × (Sum of perpendiculars drawn on this diagonal)

= $\frac{1}{2}$ × विकर्ण × (इस विकर्ण पर खींचे गए लंबों का योग)

❖ In any Quadrilateral / किसी भी चतुर्भुज में



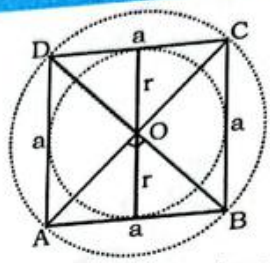
$A_1 \times A_3 = A_2 \times A_4$

❖ Area of quadrilateral made by joining the mid points of all sides of given quadrilateral is half of the original quadrilateral.

दिए गए चतुर्भुज की सभी भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाकर बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल मूल चतुर्भुज का आधा होता है।

Square (वर्ग)

❖



Area of ΔAOB = Area of ΔBOC = Area of ΔCOD =

Area of ΔAOD = $\frac{a^2}{4}$

Perimeter / परिधि = 4a

Area / क्षेत्रफल = $a^2 = \frac{d^2}{2}$

diameter / व्यास = $a\sqrt{2}$

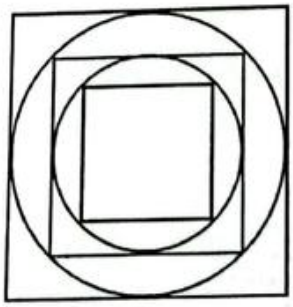
Inradius / अंतःत्रिज्या (r) = $\frac{a}{2}$

Circumradius / बाह्य त्रिज्या (R) = $\frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$R : r = \sqrt{2} : 1$, $\frac{\text{Area of circumcircle}}{\text{Area of incircle}} = \frac{2}{1}$

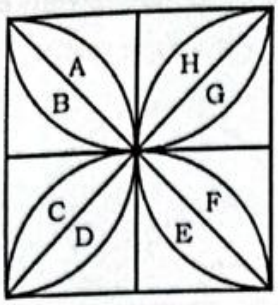
❖ If we make circle inside a square and again make a square inside the circle and so on... the area will becomes half and so on.

यदि हम एक वर्ग के भीतर एक वृत्त बना दें और फिर से वृत्त के भीतर एक वर्ग बना लें और इसी तरह से बनाते रहे तो क्षेत्र आधा होता जाता है।

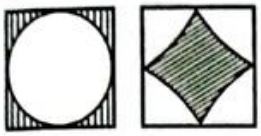


Area of largest square	:	middle	:	smallest
सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल	:	मध्य	:	सबसे छोटा
4	:	2	:	1

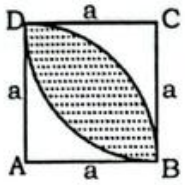
∴ Largest : smallest / सबसे बड़ा : सबसे छोटा ⇒ 4 : 1

❖ 

Area of A, B, C, D, E, F, G, H is equal

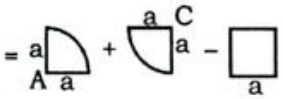
❖ 

Shaded Area / छायांकित क्षेत्र = $\frac{3a^2}{14}$



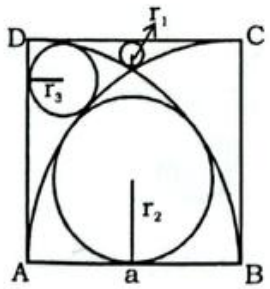
Area of leaf / पत्ती का क्षेत्रफल = $\frac{4}{7}a^2$

Area of leaf / पत्ती का क्षेत्रफल



$\frac{\pi}{2}a^2 - a^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2 = \frac{4}{7}a^2$

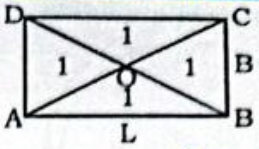
❖ If side of square / यदि वर्ग की भुजा = a



$r_1 = \frac{a}{16}$, $r_2 = \frac{3a}{8}$, $r_3 = \frac{a}{6}$

$r_1 : r_2 : r_3 = \left[\frac{a}{16} : \frac{3a}{8} : \frac{a}{6}\right] \times 48 =$ **3 : 18 : 8**

Rectangle (आयत)

❖ 

Perimeter / परिमाप (P) = 2(L + B)

Area /क्षेत्र (A) = L×B

Diagonal / विकर्ण = AC = BD = $\sqrt{L^2 + B^2}$

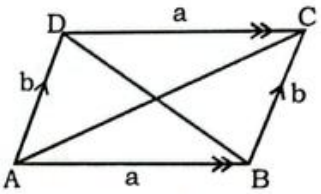
Area of ΔAOB = Area of ΔBOC = Area of ΔCOD

= Area of ΔAOD = $\frac{LB}{4}$

❖ Radius of maximum size circle that can be put inside rectangle = $\frac{\text{Breadth}}{2}$

अधिकतम आकार के वृत्त की त्रिज्या जिसे आयत के अंदर रखा जा सकता है = $\frac{\text{Breadth}}{2}$

Parallelogram (समानान्तर चतुर्भुज)

❖ 

Perimeter / परिमाप = 2 (a + b)

$AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$

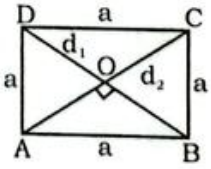
Area / क्षेत्रफल = Base / आधार × Height / ऊंचाई

If length of one diagonal is d / यदि एक विकर्ण की लंबाई d है

Then Area / क्षेत्रफल = $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

Where / जहां s = $\frac{a+b+d}{2}$

Rhombus (समचतुर्भुज)

❖ 

Perimeter / परिमाप = 4a

$4a^2 = d_1^2 + d_2^2$ (Property)

area / क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

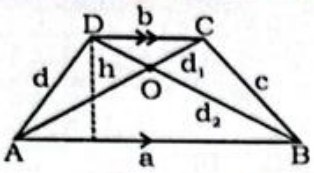
Area / क्षेत्रफल = Base / आधार × Height / ऊंचाई

Area of Δ AOB = Δ Area of Δ BOC = Area of COD = Area of ΔAOD

CamScanner

Trapezium (समलंब चतुर्भुज)

❖



Perimeter / परिमाप = a + b + c + d

Area / क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (Sum of parallel sides / समानांतर भुजाओं का योग) × distance between them / उनके बीच की दूरी

Area / क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (a + b) × h

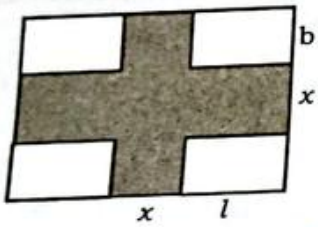
$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$ (Property)

Path Around or Inside a Rectangle (एक आयत के चारों ओर या अंदर पथ)

1. Crossing road inside rectnagle

आयत के अंदर क्रोसिंग सड़क

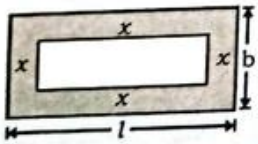
❖



Area of crossing road (क्रॉसिंग रोड का क्षेत्र) = $lx + bx - x^2$
$= x(l+b-x)$

Perimeter of path / पथ की परिमाप = $2(l + b - 2x)$

2. Path inside a rectangle / एक आयत के अंदर पथ



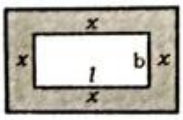
Area of path / पथ का क्षेत्र = $2x(l + b - 2x)$

Perimeter of path / पथ की परिमाप = $4(l + b - 2x)$

Where x is the width of the path. / जहाँ x पथ की चौड़ाई है

3. Path Outside a rectangular field

एक आयताकार मैदान के बाहर पथ



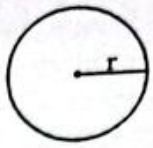
Area of path / पथ का क्षेत्रफल = $2x(l + b + 2x)$

Perimeter of path / पथ की परिधि = $4(l + b + 2x)$

Where is x is the width of path / जहाँ x पथ की चौड़ाई है

Circle (वृत्त)

❖



$\frac{\text{circumference}}{\text{diameter}}$ = constant = π

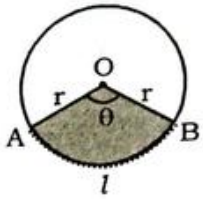
$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow$ Circumference / परिधि = $2\pi r$

Area / क्षेत्रफल = πr^2

radius	$c=2\pi r$	$A=\pi r^2$	
7	44	154	
7K	44K	$54K^2$	
24.5	44×3.5	$154\times(3.5)^2$	∵ 24.5=7×3.5
28	44×4	154×16	

Sector of a circle (एक वृत्त का खंड)

❖



θ = central angle = $\frac{\theta}{360°}$ (sector is what part of circle)

θ = केंद्रीय कोण = $\frac{\theta}{360°}$ (वृत्तखंड वृत्त का कौन सा भाग है)

Area of sector / वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल OAB =

$\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2 = \frac{lr}{2}$

Length of $\overline{AB} = l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

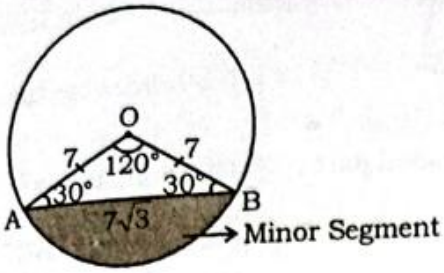
$\theta° = \theta \times \frac{\pi^c}{180}$

$l = r \times \frac{\pi\theta}{180}$

$l = r\theta^c$ or $\theta^c = \frac{l}{r}$

Segment (वृत्तखंड)

❖ **Minor segment** / छोटे वृत्तखंड



Area of minor segment = Area of sector – Area of ΔOAB

छोटे वृत्तखंड का क्षेत्रफल = वृत्तखंड का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

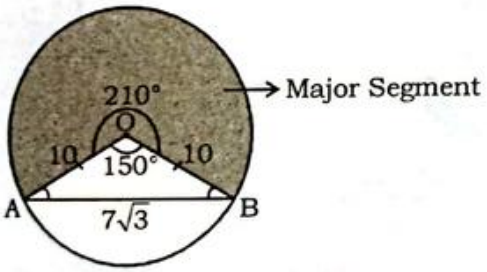
$$\Rightarrow \frac{120°}{360°} \times 154 - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120°$$

$$\Rightarrow \frac{154}{3} - \frac{49}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{154}{3} - \frac{49\sqrt{3}}{4}\right) cm^2$$

❖ **Major segment** / बड़ा वृत्तखंड

Area of major segment (बड़े वृत्तखंड का क्षेत्रफल) ⇒



Area of sector (210°) + Area of ΔOAB

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल (210°) + ΔOAB का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \frac{210°}{360°} \times 100\pi + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 150°$$

$$\Rightarrow \frac{7}{12} \times 100\pi + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{1}{2}$$

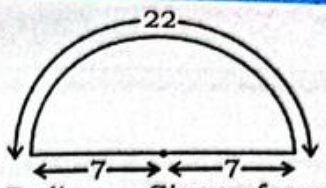
$$\Rightarrow \left(\frac{175\pi}{3} + 25\right) cm^2$$

Perimeter of segment

खंड की परिधि $= 2r\left[\frac{\pi\theta}{360°} + \sin\frac{\theta}{2}\right]$

For semi-circle (अर्धवृत्त के लिए)

❖



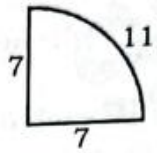
Radius	Circumference	Area
7	36	77

Perimeter / परिधि $= \pi r$ + diameter

Area $= \frac{\pi r^2}{2}$

For a quadrant (एक चतुर्थांश के लिए)

❖

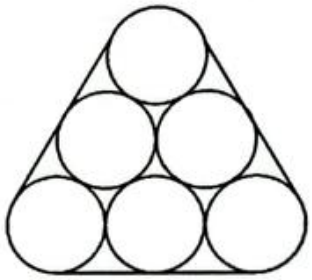


Radius	Circumference	Area
त्रिज्या	परिधि	क्षेत्रफल
7	25	$\frac{77}{2} = 38.5$

Perimeter / परिधि $= r + r + \frac{2\pi r}{4} = 2r + \frac{\pi r}{4}$

Area / क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{4}$

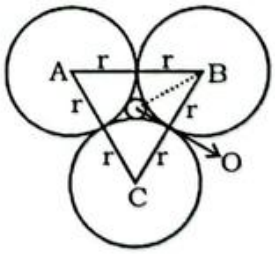
❖



Length of string = $2\pi r + 2 \times$ number of circles

डोरी की लंबाई = $2\pi r + 2 \times$ वृत्तों की संख्या

❖



ΔABC = equilateral Δ

OB = circumradius

Let radius of small circle = x

माना छोटे वृत्त की त्रिज्या = x

$$OB = \frac{\text{side of equilateral}\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

CamScanner

$\therefore x = \frac{2r}{\sqrt{3}} - r$

$x = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) \times r$

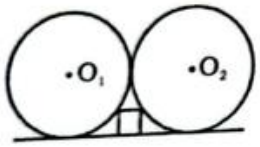
If we draw a big circle around these 3 circles, then radius of that big circle $\Rightarrow y = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r$

यदि हम इन 3 वृत्तों के चारों ओर एक बड़ा वृत्त बनाते हैं, तो उस बड़े वृत्त की त्रिज्या $\Rightarrow y = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r$

$y = r \times \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ (Result)

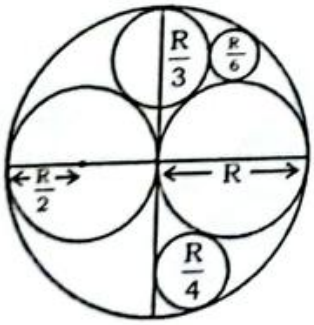
❖ Two circles of equal radius are touch each other as shown in figure, a square of side 'a' is placed between two circles. One side of square is on direct common tangent of both circles, find r/a?

समान त्रिज्या r वाले दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते है। a भुजा वाला एक वर्ग इस प्रकार स्थित है कि वर्ग की एक भुजा दोनों वृत्तों के उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा पर स्थित है। तब r/a का मान होगा?

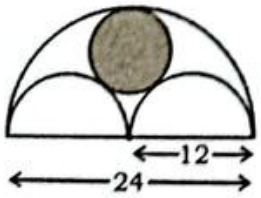


$\frac{r}{a} = \frac{5}{2}$

❖

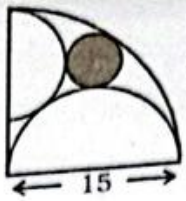


Base Figure



Derived Figure

radius of shaded part (छायांकित भाग की त्रिज्या) $= \frac{R}{3} = \frac{12}{3} = 4$



Derived Figure

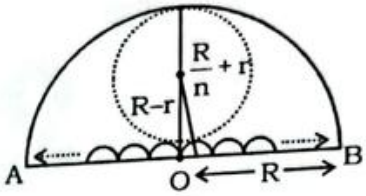
radius of shaded part (छायांकित भाग की त्रिज्या) $= \frac{R}{6} = \frac{15}{6}$

❖ n semi-circle (even) drawn on diameter AB

n अर्द्धवृत्त (सम) व्यास AB पर खींचे गए हैं।

Radius of each small semi-circle $= \frac{R}{n}$

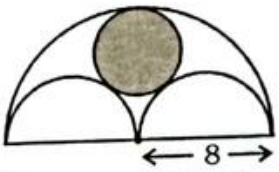
प्रत्येक छोटे अर्धवृत्त की त्रिज्या $= \frac{R}{n}$



$\left(\frac{R}{n}+r\right)^2 = \left(\frac{R}{n}\right)^2 + (R-r)^2$

After solving this (इसे हल करने के बाद)

radius of small circle (छोटे वृत्त की त्रिज्या) $r = \frac{nR}{2(n+1)}$

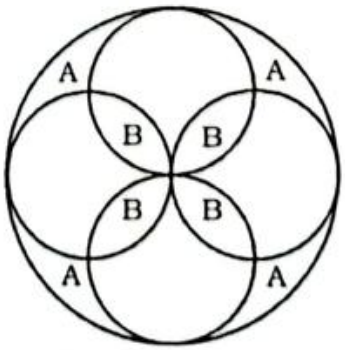


Here, n = 2, R = 8

∴ radius of shaded part (छायांकित भाग की त्रिज्या)

$= \frac{2\times8}{2\times3} = \frac{8}{3}$

❖ Find A/B = ?



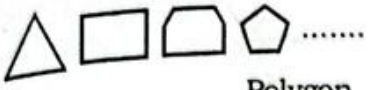
A = B (Property)

$\frac{A}{B} = 1 : 1$

Polygon (बहुभुज)

❖ **Polygon:** closed figure of 3 or more sides.

बहुभुज : 3 या अधिक भुजाओं की बंद आकृति।



Polygon

convex/उत्तल	concave/अवतल
* each interior angle is less than 180°	any one angle is more than 180°
All diagonals lins inside	Any one diagonal or more will be outside.
* प्रत्येक आंतरिक कोण 180° से कम होता है	कोई भी एक कोण 180° से अधिक होता हैं।
* सभी विकर्ण अंदर होते हैं	कोई एक या अधिक विकर्ण बाहर होगा।

Ex:

Regular polygon (नियमित बहुभुज)

❖ **Always a convex polygon** / हमेशा एक उत्तल बहुभुज

* each side is equal (प्रत्येक भुजा बराबर है)
* each interior and exterior angle is equal

प्रत्येक आंतरिक और बाहरी कोण बराबर होते है।

Regular Hexagon: 6 sides/भुजाएँ

6 vertices/शीर्ष

6 integior angles/आंतरिक कोण

6 exterior angles/बाह्य कोण

∴ n sides polygon have: n vertices, n interior angles, n exterior angles.

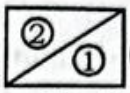
∴ n भुजाओं वाले बहुभुज में: n शीर्ष, n आंतरिक कोण और n बाह्य कोण होते हैं।

❖ Sum of all interior angles of a polygon with n sides

n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग

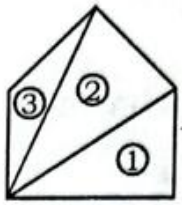
⇒ (n–2) × 180°

→ (3–2)×180° = 180°



(4–2) × 180° = 360°

or 2Δ = 2 × 180° = 360°



→ (5–2) × 180° = 540°

or 3Δ = 3×180 = 540°

→ Each interior angle of a regular polygon ⇒ $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$

→ एक नियमित बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण ⇒ $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$

❖ Sum of all exterior angles of a 'n' sided polygon ⇒ 360°

'n' भुजा वाले बहुभुज के सभी बाह्य कोणों का योग ⇒ 360°

❖ $\Sigma I + \Sigma E = 180° \times n$

$(n-2)180° + \Sigma E = 180° \times n$

$180°n - 360° + \Sigma E = 180° n$

$\Sigma E = 360°$

$I + E = 180°$

Internal angle + External angle = 180°

∴ Each exterior angle of a regular polygon = $\frac{360°}{n}$

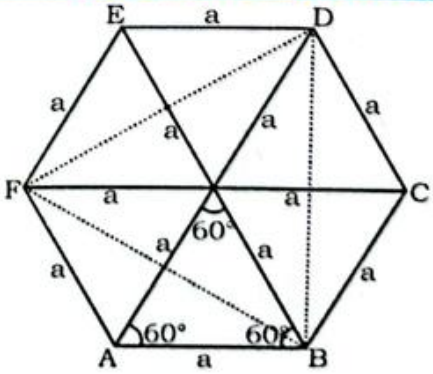
एक नियमित बहुभुज का प्रत्येक बाहरी कोण = $\frac{360°}{n}$

No. of sides (भुजाओं की संख्या) = $\frac{360°}{n}$

❖ No. of diagonals in a polygon = $\frac{n(n-3)}{2}$

एक बहुभुज में विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$

Regular Hexagon (नियमित षट्भुज)



Each Interior angle / प्रत्येक आंतरिक कोण = 60°

Each exterior angle / प्रत्येक बाहरी कोण = 120°

Total diagonals / कुल विकर्ण = 9

Large diagonal (बड़ा विकर्ण) = FC = AD = BE = 2a

Perimeter / परिमाप = 6a

Regular Hexagon = 6 equilateral Δ = 3 Rhombus

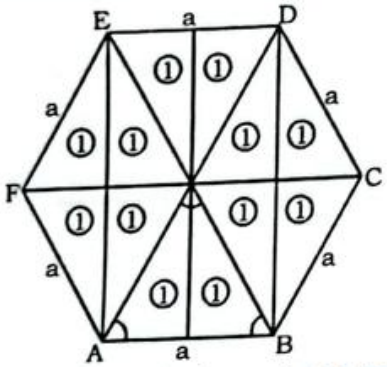
नियमित षट्भुज = 6 समबाहु Δ = 3 समचतुर्भुज

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

r = Short diagonal (लघु विकर्ण) = FD = DB = BF = $\sqrt{3}$ a

Circumradius / परिधि (R) = a (side)

❖

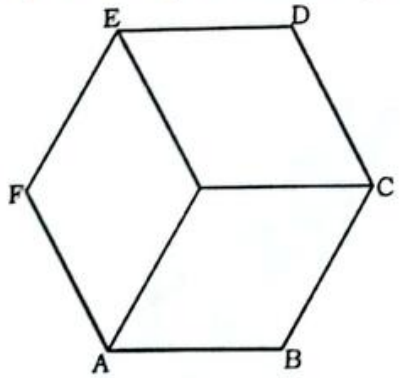


12 equilateral Δ formed. (12 समबाहु Δ का गठन हुआ।)

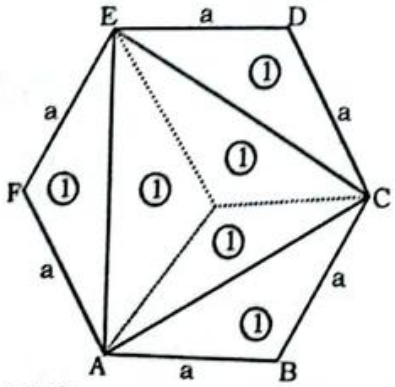
Area of each Δ is same. (प्रत्येक Δ का क्षेत्रफल समान है।)

❖ 3 Rhombus of equal area in a regular hexagon.

एक नियमित षट्भुज में समान क्षेत्रफल के 3 समचतुर्भुज।



❖

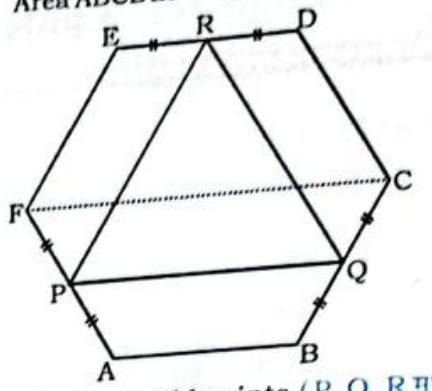


Δ EAC = equilateral Δ of side $\sqrt{3}$ a

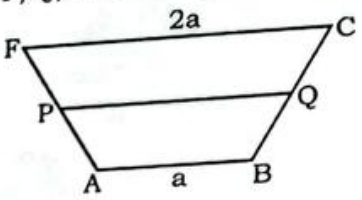
Δ EAC = $\sqrt{3}$ a भुजा का समबाहु Δ

$$\frac{\text{Area } \Delta EAC}{\text{Area } ABCDEF} = \frac{1}{2}$$

❖



P, Q, R are mid points (P, Q, R मध्य बिंदु हैं)



$$PQ = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2}$$

ΔPQR = equilateral Δ with side $\frac{3a}{2}$

$$\therefore \frac{\text{Area } \Delta PQR}{\text{Area } ABCDEF} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{9}{4}a^2}{6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{3}{8}$$

Octagon (अष्टभुज)

❖ Regular figure with 8 sides

8 भुजाओं वाली नियमित आकृति

Let side of octagon = a

मान लीजिए अष्टभुज की भुजा = a

Area / क्षेत्र = $2(\sqrt{2}+1)a^2$

Perimeter / परिमाप = 8a

$$\text{Inradius (r)} / \text{त्रिज्या (r)} = \frac{a}{2\sqrt{2}-2}$$

$$\text{Circumradius (R)} / \text{परिधि (R)} = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}a$$

Each interior angle = 135°

प्रत्येक आंतरिक कोण = 135°

Each exterior angle = 45°

प्रत्येक बाहरी कोण = 45°

Number of diaonal = 20

विकर्ण की संख्या = 20

3 Dimension Mensuration (3 आयामी क्षेत्रमिति)

❖ 3 Dimension: Length, breadth, height

3 आयाम : लंबाई, चौड़ाई, ऊंचाई

Lateral surface Area / पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (LSA):

ऊपर व नीचे के क्षेत्रफल को छोड़कर बाकी सारा क्षेत्रफल

surrounding area except (of figures having flat surface) top and bottom

ऊपर व नीचे को छोड़कर आसपास का क्षेत्र (चपटी सतह वाले आकृति)

Total surface area / कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) :

Area of all surfaces of a figure (LSA) + area of bases (top/bottom)

एक आकृति की सभी सतहों का क्षेत्रफल (LSA) + आधारों का क्षेत्रफल (ऊपर/नीचे)

Curved surface area (CSA) :

of figures having curved surfaces like cylinder, cone etc.

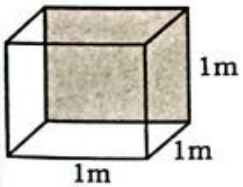
घुमावदार सतह क्षेत्र (CSA) :

बेलन, शंकु आदि जैसी घुमावदार सतहों वाली आकृतियों का।

CSA : Area of only curved surfaces except top and bottom.

CSA : ऊपर और नीचे को छोड़कर केवल घुमावदार सतहों का क्षेत्रफल।

Volume capacity (मात्रा क्षमता) :



volume = $1\times1\times1 = 1\ m^3$

1 km = 1000 m

1 m = 100 cm

$1m^3 = 1000$ Liter

$\Rightarrow 1m^3 = 10^3 L$

$\Rightarrow 1L = 10^{-3}\ m^3$

$1L = 10^{-3} \times 10^6\ cm^3$

$\Rightarrow 1L = 10^3\ cm^3$

❖ 1m = 100 cm

1m = 1000 mm

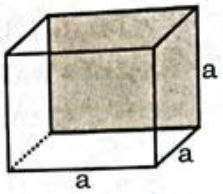
1 decimetre = 10 cm

1 km = 100 decametre

Cube (घन)

❖ A Solid figure in which length, Breadth and height are equal.

एक ठोस आकृति जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई बराबर होती है।

❖ 

6 faces / चेहरे

8 vertices / शिखर

12 edges / किनारे

LSA = $4a^2$

Volume = a^3

TSA = $6a^2$

Diagonal = $\sqrt{3}\,a$

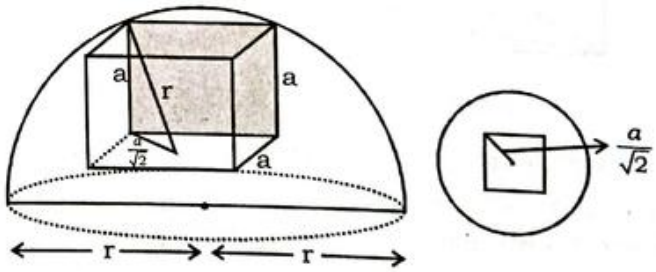
Euler's Theorem: for any 3D flat surface figure

यूलर प्रमेय: किसी भी 3 आयामी सपाट सतह आकृति के लिए

$\mathbf{V + F - E = 2}$

❖ When a cube of maximum size put inside a hemisphere.

जब एक अर्धगोले के अंदर अधिकतम आकार का घन रखा जाता है।



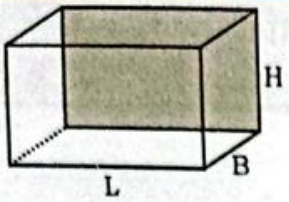
$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$$

$$\frac{a^2}{2} + a^2 = r^2 \quad \Rightarrow \frac{3}{2}a^2 = r^2$$

$$a \text{ (side of cube)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$$

CamScanner

Cuboid (घनाभ)

❖ 

Face / सतह = 6

Vertices / शिखर = 8

Edge / किनारा = 12

Adjacent faces (अगल बगल के सतह) = LH, BH, LB

LSA = 2(bh + lh) = 2(L+B) × H = Area of 4 walls

4 दीवारों का क्षेत्रफल

TSA = 2(LB+BH+HL)

Volume / आयतन = L×B×H

Diameter / व्यास = $\sqrt{L^2+B^2+H^2}$

❖ If area of 3 adjacent faces of a cuboid are x, y, z respectively.

यदि एक घनाभ के 3 आसन्न फलकों का क्षेत्रफल क्रमशः x, y, z है।

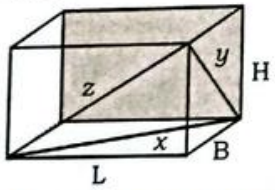
volume / आयतन = $\sqrt{xyz}$

$x = lb \quad y = bh \quad z = hl$

$xyz = l^2b^2h^2$

$\sqrt{xyz} = lbh$ = volume (आयतन)

❖ If x, y, z are diagonals of three adjacent faces of a cuboid



यदि x, y, z एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों के विकर्ण हैं

$x = \sqrt{l^2+b^2}$ $\qquad x^2+y^2+z^2=2(l^2+b^2+h^2)$

$y = \sqrt{b^2+h^2}$ $\qquad l^2+b^2+h^2 = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$

$z = \sqrt{h^2+l^2}$ $\qquad D = \sqrt{l^2+b^2+h^2} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}}$

$l = \sqrt{\dfrac{x^2-y^2+z^2}{2}}$, $b = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2}}$, $h = \sqrt{\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2}}$

$$\text{Volume} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(y^2+z^2-x^2)}}{2\sqrt{2}}$$

❖ Longest rod that can be put inside a cuboid (Room) = Diagonal = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$

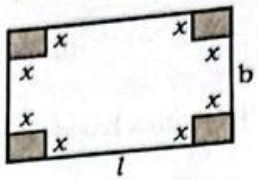
एक घनाभ (कक्ष) के अंदर रखी जा सकने वाली सबसे लंबी छड़ = विकर्ण = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$

❖ If x is the thickness of a cuboid, then volume of the hollow cuboid = $lbh - (l-2x)(b-2x)(h-2x)$

यदि x घनाभ की मोटाई है, तो खोखले घनाभ का आयतन = $lbh - (l-2x)(b-2x)(h-2x)$

❖ Making open rectangular box by cutting 4 corners of a retangular sheet.

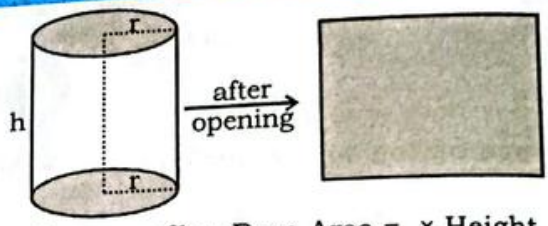
एक आयताकार शीट के 4 कोनों को काटकर खुला आयताकार बॉक्स बनाना



Volume of rectangular box = $(l-2x)(b-2x)x$.

आयताकार बॉक्स का आयतन = $(l-2x)(b-2x)x$.

Cylinder (बेलन)

❖ 

Volume = $\pi r^2 h$ = Base Area = × Height

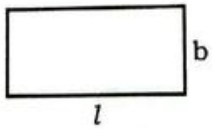
CSA = $2\pi rh$ = Base Perimeter × Height

TSA = CSA + 2 × Base Area = $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h)$

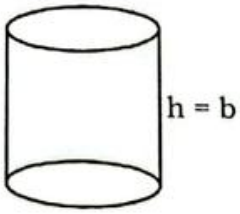
Ratio ⇒ $\dfrac{\text{CSA}}{\text{TSA}} = \dfrac{h}{r+h}$

❖ Folding of rectangular sheet to form a cylinder

एक बेलन बनाने के लिए आयताकार शीट को मोड़ना

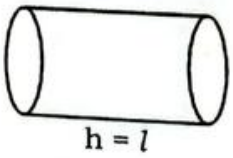


A Folding along length (लंबाई के साथ मोड़ना)



$2\pi r = l \qquad r = \dfrac{l}{2\pi}$

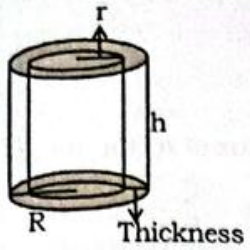
B Folding along breadth (चौड़ाई के साथ मोड़ना)



$2\pi r = b \qquad r = \dfrac{b}{2\pi}$

CamScanner

Hollow Cylinder (खोखला बेलन)

❖ 

thickness (मोटाई) = t

volume of metal (धातु की मात्रा) = $\pi R^2h - \pi r^2h$

$= \pi(R^2 - r^2)h$

Volume = $\pi(R+r)(R-r)h$

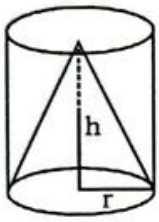
CSA = $2\pi(R+r)h$

TSA = $2\pi(R+r)h + 2\pi(R^2-r^2)$

$= 2\pi(R+r)(h+R-r)$

❖ A maximum size cone inside a cylinder

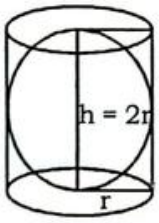
(एक बेलन के अंदर एक अधिकतम क्षेत्रफल वाला शंकु)



Ratio $\Rightarrow \dfrac{\text{vol. of cylinder}}{\text{vol. of cone}} = \dfrac{3}{1}$

❖ A cylinder encloses a sphere

(एक बेलन एक गोले को घेरता है)



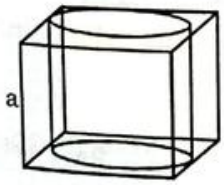
Height of cylinder = Diameter of sphere

(बेलन की ऊँचाई = गोले का व्यास)

Ratio $\Rightarrow \dfrac{\text{vol. of cylinder}}{\text{vol. of sphere}} = \dfrac{3}{2}$

❖ A maximum size cylinder inside a cube

एक घन के अंदर अधिकतम आकार का एक बेलन



Radius of cylinder (बेलन की त्रिज्या) = $\dfrac{a}{2}$

Height of cylinder (बेलन की ऊंचाई) = a

Ratio $\Rightarrow \dfrac{\text{vol. of cube}}{\text{vol. of cylinder}} = \dfrac{14}{11}$

❖ Maximum size cylinder inside a cone

एक शंकु के अंदर अधिकतम क्षेत्रफल वाला बेलन

Height of cone (शंकु की ऊँचाई) = H

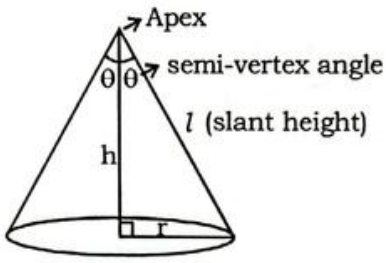
Height of cylinder (बेलन की ऊंचाई) = h

Radius of cone (शंकु की त्रिज्या) = R

Radius of cylinder (बेलन की त्रिज्या) = r

$\dfrac{R}{r} = \dfrac{H}{H-h}$ (Property)

Cone (शंकु)

❖ 

$l^2 = h^2 + r^2 \quad \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2}$

volume = $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$

CSA = $\pi r l$

TSA = $\pi r l + \pi r^2 = \pi r(r + l)$

❖ If H, C and V are the height, curved surface area and volume of a cone. Then find the value of $3\pi VH^3 - C^2H^2 + 9V^2$?

यदि H, C और V क्रमशः किसी शंकु की ऊँचाई, वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल और आयतन को व्यक्त करते है, तब $3\pi VH^3 - C^2H^2 + 9V^2$ का मान क्या होगा?

Let $r = 1, h = 1 \quad \therefore l = \sqrt{2}$

Volume = $\dfrac{1}{3}\pi$, $\quad C = \sqrt{2}\pi$

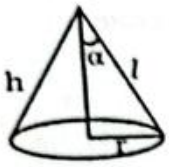
$3\pi VH^3 - C^2H^2 + 9V^2 = 3\pi \times \dfrac{1}{3}\pi - 2\pi^2 + 9\dfrac{1}{9}\pi^2$

$\Rightarrow \pi^2 - 2\pi^2 + \pi^2 = \mathbf{0}$

CamScanner

❖ **If S denotes the area of the curved surface area of a right circular cone of height and semivertical angle α then S equals?**

S किसी शंकु के वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल को व्यक्त करता है, h ऊँचाई को और α अर्ध शीर्ष कोण को व्यक्त करता है तब S का मान होगा?



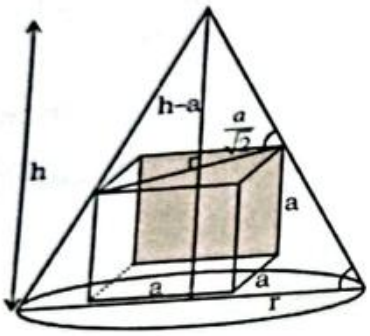
$\tan\alpha = \frac{r}{h}$ $\cos\alpha = \frac{h}{l}$

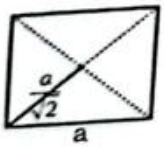
$r = h\tan\alpha$ $l = h\sec\alpha$

$S = \pi r l = \pi h^2 \sec\alpha \tan\alpha$

❖ **When a cube of maximum volume is cut from a cone**

(जब एक शंकु से अधिकतम आयतन का घन काटा जाता है)





$\frac{h-a}{h} = \frac{a}{\sqrt{2}r}$

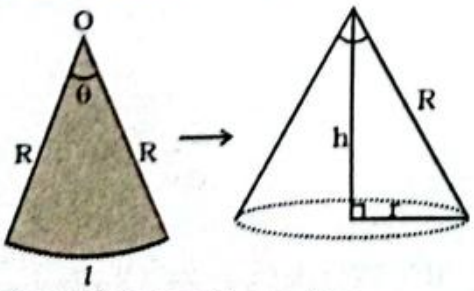
$\sqrt{2}rh - \sqrt{2}ra = ah$

$a(h + \sqrt{2}r) = \sqrt{2}rh$

$a\text{ (side of cube)} = \frac{\sqrt{2}rh}{\sqrt{2}r + h}$

❖ **When a sector is folded to make a cone:**

(जब एक त्रिज्यखंड को मोड़कर एक शंकु बनाया जाता है)



circumference of base of cone = arc l

(शंकु के आधार की परिधि = arc l)

$2\pi r = 2\pi R \times \frac{\theta}{360°}$

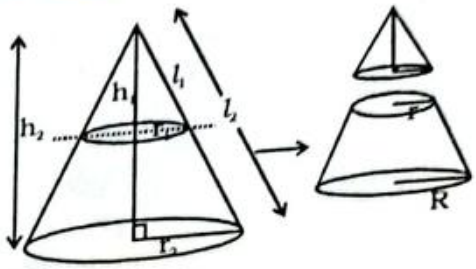
$r = R\frac{\theta}{360°}$

slant height of cone = radius of sector, $h = \sqrt{R^2 - r^2}$

(शंकु की तिर्यक ऊंचाई = त्रिज्यखंड की त्रिज्या, $h = \sqrt{R^2 - r^2}$)

Cutting of Cone (शंकु काटना)

❖



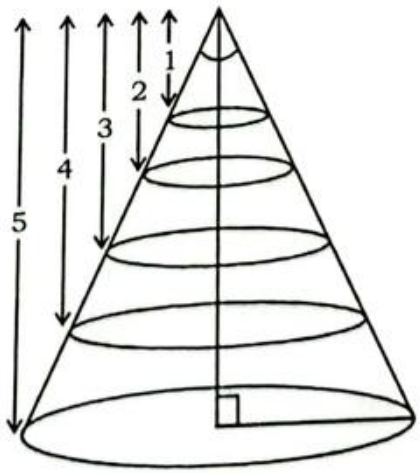
Frustum

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$

$\frac{\text{small cone CSA}}{\text{Big cone CSA}} = \frac{\pi r_1 l_1}{\pi r_2 l_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$

$\frac{\text{small cone volume}}{\text{Big cone volume}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$

❖



CSA of 5 parts ⇒

$1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2 : 5^2 - 4^2$

1 : 3 : 5 : 7 : 9 (Ratio)

Volume of 5 parts ⇒

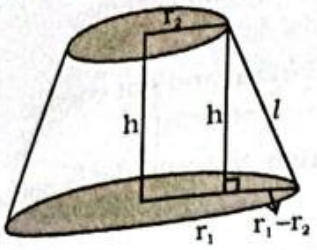
$1^3 : 2^3 - 1^3 : 3^3 - 2^3 : 4^3 - 3^3 : 5^3 - 4^3$

1 : 7 : 19 : 37 : 61 (Ratio)

CamScanner

Frustom of Cone (शंकु के छिन्नक)

- When a cone is cut parallel to its base, lower portion is called frustum.
(जब एक शंकु को उसके आधार के समांतर काटा जाता है तो निचला भाग छिन्नक कहलाता है।)



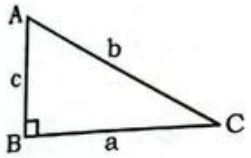
$CSA = \pi(r_1+r_2)l$

$TSA = \pi(r_1+r_2)l + \pi(r_1^2+r_2^2)$

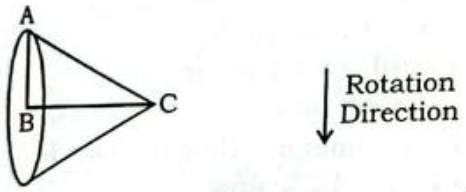
$volume = \frac{1}{3}\pi(r_1^2+r_2^2+r_1r_2) \times h$

$l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

- Rotation of right angle triangle to form a cone
(एक शंकु बनाने के लिए समकोण त्रिभुज का घूर्णन)

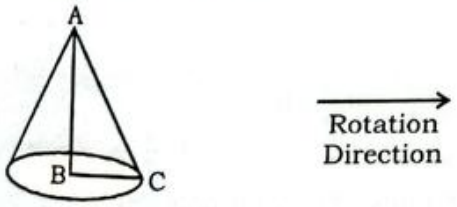


A Rotation along base a (आधार a के साथ घुमाना)



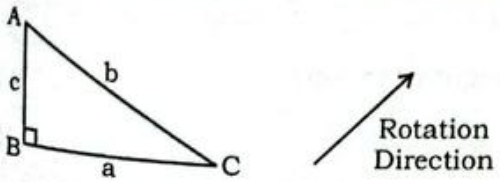
r = c h = a l = b

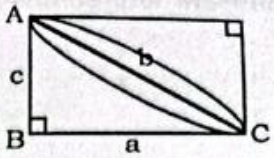
B Rotation along perpendicular BC
(लंबवत BC के साथ घुमाना)



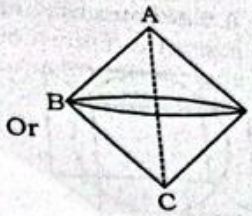
r = a h = c l = b

C Rotation along hypotenuse AC (कर्ण AC के साथ घूमना)





Or



Sum of vol. of 2 cones (2 शंकु का आयतन) $= \frac{1}{3}\pi\frac{(ac)^2}{b}$

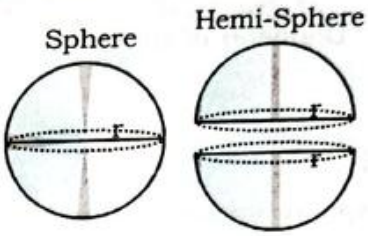
Sphere (गोला)

-

Volume $= \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V \alpha R^3$

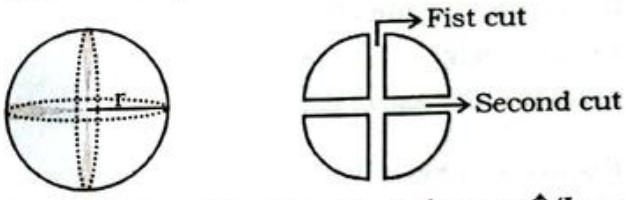
CSA = TSA = $4\pi R^2 \Rightarrow$ Area α R^2

Cutting of Sphere (गोला काटना)

- 

Volume of hemisphere (गोलार्द्ध का आयतन) $= \frac{2}{3}\pi r^3$

CSA of Hemi-sphere = $2\pi r^2$
TSA of Hemi-sphere = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$
TSA of both parts = $4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$

- 

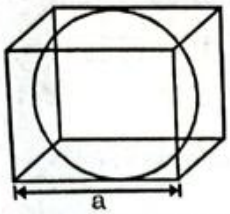
2 cut (4 pieces) 1 cut → 2 circle area ↑ (Increase)
4 parts TSA = $4\pi r^2 + 4\times\pi r^2 = \mathbf{8\pi r^2}$

TSA of each part $= \frac{8\pi r^2}{4} = \mathbf{2\pi r^2}$

(Quarter sphere) / चौथाई गोला
If we make 3 cuts at x, y, z axis
यदि हम x, y, z अक्ष पर 3 कट बनाते हैं
3 cut → 8 parts
3 cut → 6 circle area
8 parts TSA = $4\pi r^2 + 6\times\pi r^2 = \mathbf{10\ \pi r^2}$

TSA of each part (प्रत्येक भाग का TSA) $= \frac{10\pi r^2}{8} = \frac{5}{4}\pi r^2$

❖ A maximum size sphere inside a cube
(एक घन के अंदर एक अधिकतम आकार का गोला)

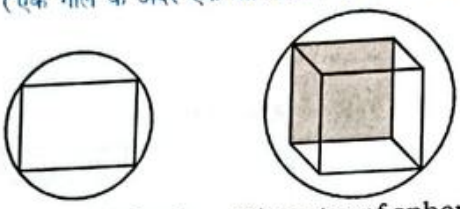


Diameter of sphere (गोले का व्यास) = a

∴ Radius of sphere (गोले की त्रिज्या) = $\frac{a}{2}$

Ratio ⇒ $\frac{\text{vol. of cube}}{\text{vol. of sphere}} = \frac{21}{11}$

❖ A maximum size cube inside a sphere
(एक गोले के अंदर एक अधिकतम आकार का घन)



Diagonal of cube = Diameter of sphere
(घन का विकर्ण = गोले का व्यास)

$\frac{\text{vol. of sphere}}{\text{vol. of cube}} = \frac{11\sqrt{3}}{7}$

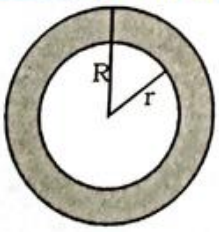
❖ A maximum size sphere inside a cone
(एक शंकु के अंदर एक अधिकतम आकार का गोला)

h = height of cone (h = शंकु की ऊंचाई)
l = slant height of cone (l = शंकु की तिरछी ऊँचाई)
r = radius of base of cone (r = शंकु के आधार की त्रिज्या)

Radius of sphere (गोले की त्रिज्या) = R = $\frac{hr}{l+r}$

Hollow Sphere (खोखला गोला)

❖



Volume of metal (धातु की मात्रा) = $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$

TSA = $4\pi R^2$

Thickness (मोटाई) (t)= R–r

Prism (प्रिज्म)

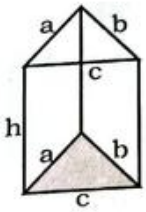
❖ A prism is a solid figure with identical ends, flat faces and same cross section all along its length.
एक प्रिज्म एक ठोस आकृति है जिसके सिरे समान होते हैं, चपटे फलक होते हैं और इसकी लंबाई के साथ समान अनुप्रस्थ काट होती है।

→ Base and Top of the prism is same
→ प्रिज्म का आधार और शीर्ष समान है।

Surface of prism is lateral and not curved.
प्रिज्म की सतह पार्श्व है और घुमावदार नहीं है।

Cube, cuboid are prism but cylinder is not prism
(घन, घनाभ प्रिज्म हैं लेकिन बेलन प्रिज्म नहीं है)

Triangular base prism
(त्रिकोणीय आधार प्रिज्म)



Volume of prism = area of base × height
प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

LSA = perimeter of base × height
(LSA = (आधार की परिधि × ऊंचाई)

⇒ 3 rectangles formed if we open it
⇒ इसे खोलने पर 3 आयत बनते हैं

ah + bh + ch = (a + b + c) × h

TSA = LSA + 2 × Base Area

❖ General formulae for a prism–
प्रिज्म के लिए सामान्य सूत्र–

A CSA = Base perimeter × Height = na × h

B TSA = CSA + 2 × Base area

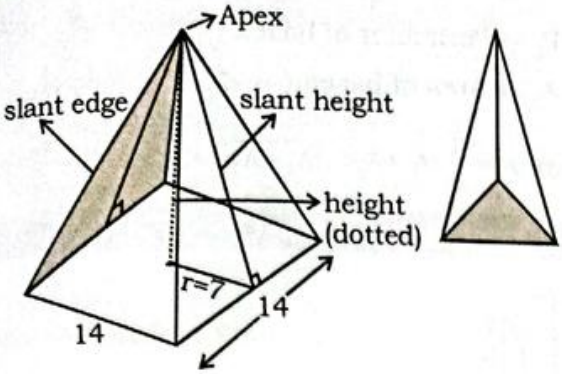
$$TSA = nah + 2 \times \frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}$$

C Volume = Base area × Height
आयतन = आधार क्षेत्रफल × ऊँचाई

$$\text{Volume} = \frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{4} \times h$$

Here (यहां),
n → no. of sides of regular polygon
n → नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या
a → side length of regular polygon
a → नियमित बहुभुज की पार्श्व लंबाई
h → height of prism/प्रिज्म की ऊंचाई

Pyramid (पिरामिड)



Square Pyramid
(वर्गाकार पिरामिड)

Triangular Pyramid
(त्रिकोणीय पिरामिड)

Height → Apex to centre of base

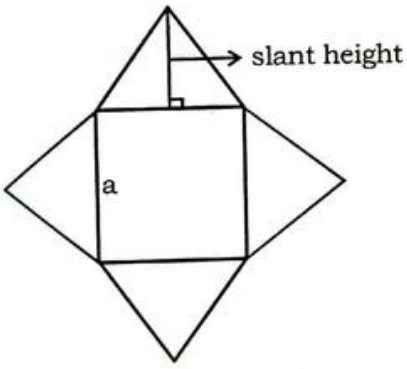
ऊँचाई → शीर्ष से आधार के केंद्र तक

slant edge → Apex to vertex of base

तिरछा किनारा → आधार के शीर्ष से शीर्ष तक

slant height → Apex to side of base

तिरछी ऊंचाई → आधार के किनारे से शीर्ष तक



for a regular pyramid/एक नियमित पिरामिड के लिए ⇒

LSA = $\frac{1}{2}$ ×perimeter of base × slant height

LSA = $\frac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिरछी ऊंचाई

TSA ⇒ LSA + Base Area

Volume ⇒ $\frac{1}{3}$ ×base area × height

आयतन ⇒ $\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

After opening square pyramid ⇒ LSA = 4Δ's

वर्गाकार पिरामिड खोलने के बाद ⇒ LSA = 4Δ's

⇒ $4 \times \frac{1}{2} \times a \times$ slant height

⇒ $\frac{1}{2} \times 4a \times$ slant height

⇒ $\frac{1}{2}$ × base perimeter × slant height

⇒ $\frac{1}{2}$ × आधार की परिधि × तिरछी ऊंचाई

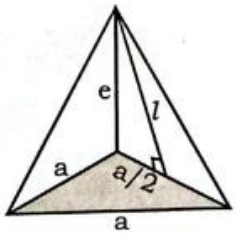
In square pyramid (वर्गाकार पिरामिड में)→

$l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

If slant edge (अगर तिरछा किनारा) = e ∴ $e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

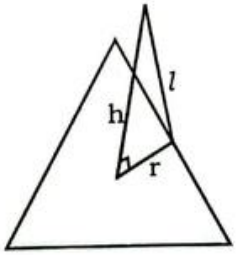
$= e^2 = h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$

❖ In triangular pyramid (त्रिकोणीय पिरामिड में) ⇒

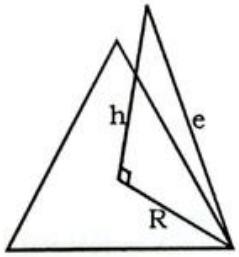


$e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$e^2 = h^2 + R^2$



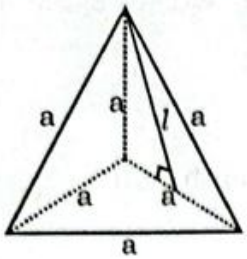
$l^2 = h^2 + r^2$



$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Tetrahedron (समचतुष्फलक)

❖



Slant height (l) = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

LSA = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 3$

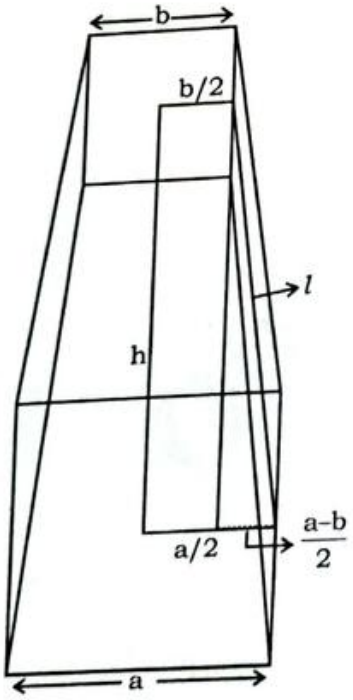
TSA = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 4 = \sqrt{3}\,a^2$

height = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$

Volume = $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$

Frustum of a Pyramid (एक पिरामिड का छिन्नक)

➢



$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$

LSA = $\frac{1}{2}(P_1+P_2) \times l$

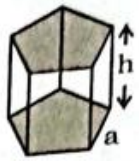
$P_1, P_2 \rightarrow$ Perimeter of bases (→ आधारों की परिधि)

$A_1, A_2 \rightarrow$ Area of bases (→ आधारों का क्षेत्रफल)

Volume = $\frac{1}{3}(A_1+A_2+\sqrt{A_1 \times A_2}) \times h$

Pentagonal Prism (पंचभुज प्रिज्म)

❖



Surface area of pentagonal = $\sqrt{3}a^2$

पंचभुज का सतह क्षेत्रफल = $\sqrt{3}a^2$

Lateral surface area = $5a \times h = 5ah$

पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल = $5a \times h = 5ah$

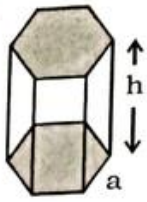
Total surface area = $5ah + 2\sqrt{3}a^2$

कुल सतही क्षेत्रफल = $5ah + 2\sqrt{3}a^2$

Volume / आयतन = $\sqrt{3}a^2 \times h = \sqrt{3}a^2h$

Hexagonal Prism (षटभुज प्रिज्म)

❖



Surface area of hexagonal = $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 2.5981a^2$

षटभुज का सतह क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 2.5981a^2$

Lateral surface area = $6a \times h = 6ah$

पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल = $6a \times h = 6ah$

Total surface area = $6ah + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

कुल सतही क्षेत्रफल = $6ah + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

Volume / आयतन = $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h = 25981a^2h$

Pentagonal Pyramid (पंचभुज पिरामिड)

Lateral surface area $= \frac{1}{2} \times 5a \times s = \frac{5}{2} as$

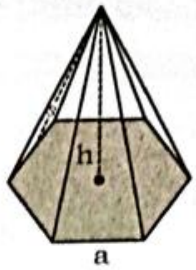
पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 5a \times s = \frac{5}{2} as$

Total surface area $= \frac{5}{2} as + \sqrt{3}a^2$

कुल सतही क्षेत्रफल $= \frac{5}{2} as + \sqrt{3}a^2$

Volume / आयतन $= \frac{1}{3} \times \sqrt{3}a^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} a^2$

Hexagonal Pyramid (षटभुज पिरामिड)



s = slant height / तिरछी ऊंचाई

Lateral surface area $= \frac{1}{2} \times 6a \times s = 3as$

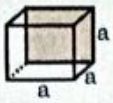
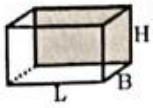
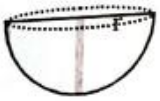
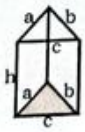
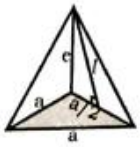
पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 6a \times s = 3as$

Total surface area $= 3as + \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

कुल सतही क्षेत्रफल $= 3as + \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

Volume / आयतन $= \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 h$

CamScanner

Solid figure	Figure	Volume	CSA/LSA	TSA
Cube/(घन)		a^3	$4a^2$	$6a^2$
Cuboid/(घनाभ)		$L \times B \times H$	$2(L + B)H$	$2(LB + BH + HL)$
Cylinder/(बेलन)		$\pi r^2 h$	$2\pi rh$	$2\pi r(r + h)$
Cone/(शंकु)		$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r l$	$\pi r(r + l)$
Frustum of cone (शंकु का छिन्नक)		$\frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)h$	$\pi(R + r)l$	$\pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$
Sphere/(गोला)		$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
Hollow sphere (खोखला गोला)		$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$		$4\pi R^2$
Hemi-sphere (अर्धगोला)		$\frac{2}{3}\pi r^3$	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$
Prism/(प्रिज्म)		Base area × Height	Base peri. × Height	LSA + 2 × Base area
Pyramid/(पिरामिड)		$\frac{1}{3}$ × Base area × H	$\frac{1}{2}$ × Base peri. × Slant h.	LSA + Base area

Number system (संख्या प्रणाली)

Numbers

- Real number
  - Rational numbers
    - Non-integer rational numbers
    - Integers
      - Negative numbers
      - Whole numbers
        - Zero
        - Natural numbers
  - Irrational numbers
- Imaginary numbers

Classification of Numbers (संख्याओं का वर्गीकरण)

Real Numbers
वास्तविक संख्याएं
which can be denoted on number line.
जिसे संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।

Ex. $+3, -7, 5, \frac{19}{13}, \frac{5}{7}$
$0.0675, \sqrt{5}, \sqrt{11}$

Imaginary Numbers
काल्पनिक संख्याएं
can not be denoted on number line.
संख्या रेखा पर निरूपित नहीं किया जा सकता है।

$\sqrt{-7}, \sqrt{-3}, \sqrt{-5}, \sqrt{-1} = i$
$-1 = i^2$
↓
a+ib 5+3i

Real Numbers (वास्तविक संख्याएं)

Rational Numbers
परिमेय संख्याएं
which can be written in $\frac{p}{q}$ form ($q \neq 0$) p, q → Int
जिसे $\frac{p}{q}$ में लिखा जा सकता है

Ex. $\frac{5}{3}, \frac{13}{1}, \frac{-8}{1}, 0.5555, \frac{22}{7}, \sqrt{q}$

Irrational Numbers
अपरिमेय संख्याएं
can not be written in $\frac{p}{q}$ form.
$\frac{p}{q}$ में नहीं लिखा जा सकता

$0.1342607532 ....$
$\pi = 3.141592 ....$

Decimal Numbers (दशमलव संख्याएं)

Terminating decimal	Non-Terminating Repeating decimal	Non-terminating Non-repeating decimal
शांत दशमलव	गैर-शांत दोहराए जाने वाले दशमलव	गैर-शांत गैर-दोहराव दशमलव
$0.5 = \frac{1}{2}$	$0.333333... = \frac{1}{3}$	$\sqrt{2} = 1.414....$
$0.73 = \frac{73}{100}$	$0.565656... = \frac{56}{99}$	↓
$0.648 = \frac{81}{125}$	$0.137137137... = \frac{137}{999}$	Irrational Numbers
Rational Numbers		

❖ **Integers** → All integers are rational no.

$\left(\frac{p}{q}\right)$ where q = 1

पूर्णांक → सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं।

Integers (पूर्णांक)

Negative Integers
ऋणात्मक पूर्णांक
$\{-\infty, ...-4, -3, -2, -1\}$

Non-negative Integers
गैर-ऋणात्मक पूर्णांक
$\{0,1,2,3,4,....\infty\}$
↓
Whole Numbers
पूर्ण संख्या

0 → Neither positive nor negative
सकारात्मक भी नहीं न ही नकारात्मक

❖ Natural numbers / प्राकृतिक संख्याएं →
$\{1,2,3,4,5,....\infty\}$

Integers (पूर्णांक)

Even / सम
Even → which are divisible by 2. (2K form)
सम → जो 2 से विभाज्य हैं। (2K रूप)
$\{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

Odd / विषम
Odd → which are not divisible by 2. (2K±1 form)
विषम → जो 2 से विभाज्य नहीं हैं। (2K±1 रूप)
$\{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 11\}$

❖ Odd × odd → odd
odd × even → even
odd±odd → even
even ± even → even
odd ± even → odd

❖ $\left.\begin{array}{l} a+b=\text{odd} \\ a-b=\text{odd} \end{array}\right] \rightarrow a=\dfrac{\text{odd}+\text{odd}}{2}=\text{even}$

$\left.\begin{array}{l} a+b=\text{even} \\ a-b=\text{even} \end{array}\right] \rightarrow a=\dfrac{\text{even}+\text{even}}{2}=\text{even}$

$\left.\begin{array}{l} a+b=\text{even} \\ a-b=\text{odd} \end{array}\right] \rightarrow a=\dfrac{\text{even}+\text{odd}}{2}=\dfrac{\text{odd}}{2}\neq\text{natural}$

Natural numbers (प्राकृतिक संख्याएं)

Prime numbers — अभाज्य संख्याएं

Composite numbers — भाज्य/समग्र संख्याएं

Prime Numbers → Only two factors 1 & itself.

अभाज्य संख्याएँ → केवल दो गुणनखंड 1 और स्वयं।

2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 61, 67, 97 etc.

2 → even prime no. & smallest prime no.

2 → सम अभाज्य संख्या और सबसे छोटी अभाज्य संख्या

3,5,7 → only pair of consecutive odd prime no.

3,5,7 → लगातार विषम अभाज्य संख्या का केवल युग्म।

Prime no.→
1-50 → 15
50-100 → 10
1-100 → 25
1-200 → 46
1-1000 → 168

Each prime number can be written in (6k±1) form.

प्रत्येक अभाज्य संख्या को (6k±1) रूप में लिखा जा सकता है।

But every (6k±1) form may not be necessarily prime no.

लेकिन हर (6k±1) रूप आवश्यक रूप से अभाज्य संख्या नहीं हो सकता है।

13 → 6×2+1 (prime)
25 → 6×4+1 (not prime)

❖ **Composite Numbers** → more than two factors.

समग्र संख्या → दो से अधिक कारक (गुणनखंड)।

Ex. 4, 6, 8, 9 etc.

1 → Neither prime nor cocmposite

1 → न तो अभाज्य और न ही भाज्य/समग्र

4 → Smallest composite number.

4 → सबसे छोटी समग्र संख्या।

9 → Smallest odd composite number.

9 → सबसे छोटी विषम समग्र संख्या।

❖ **Relatively prime/co-prime numbers** → Two numbers in which nothing is common i.e. their HCF = 1

अपेक्षाकृत अभाज्य/सह-अभाज्य संख्याएँ → दो संख्याएँ जिनमें कुछ भी उभयनिष्ठ नहीं है अर्थात उनका HCF = 1

(25, 19) (16, 9) (2, 3) (11, 13)

❖ **Twin-prime numbers** → Two prime numbers with a gap of 2.

जुड़वां अभाज्य संख्याएँ → 2 के अंतराल के साथ दो अभाज्य संख्याएँ।

(3, 5) (5, 7) (11, 13)

❖ only pair of prime no. with a gap of 2 is **3, 5, 7.**

2 के अंतराल के साथ **3, 5, 7** अभाज्य संख्या की केवल एक जोड़ी है।

❖ Smallest 3 digit prime → 101

सबसे छोटी 3 अंकों की अभाज्य संख्या = 101

largest 3 digit prime → 997

सबसे बड़ी 3 अंकों की अभाज्य संख्या → 997

Perfect Numbers (पूर्ण संख्याएँ)

❖ If the sum of all the factors (excluding that no.) is equal to that number then it is called a perfect no.

यदि सभी गुणनखंडों (उस संख्या को छोड़कर) का योग उस संख्या के बराबर हो तो उसे पूर्ण संख्याएँ कहते हैं।

6 → 1,2,3,6 (factors) ∴ 1+2+3 = 6

(Smallest perfect no.) ∴ 6 is perfect no.

28 → 1,2,4,7,14,28

(1+2+4+7+14) = 28

Perfect numbers / पूर्ण संख्या → 6, 28, 496, 8128 ....

CamScanner

Divisibility Rules (विभाज्यता के नियम)

Divisibility Rules (विभाज्यता नियम)

❖ 1 is not divisible by any number except 1 but 1 is a universal factor.

1, 1 को छोड़कर किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है, लेकिन 1 एक सार्वत्रिक गुणनखंड है।

Divisibity Rule of 2, 4, 8, 16

2→ Last digit should be divisible by 2.

2→ अंतिम अंक 2 से विभाज्य होना चाहिए।

4→ Last 2 digit should be divisible by 4.

4→ अंतिम 2 अंक 4 से विभाज्य होना चाहिए।

8→ Last 3 digit should be divisible by 8.

8→ अंतिम 3 अंक 8 से विभाज्य होना चाहिए।

16→ Last 4 digits should be divisible by 16

16→ अंतिम 4 अंक 16 से विभाज्य होने चाहिए

Divisibility Rule of 3 and 9

3→ Sum of digits should be divisible by 3.

3→ अंकों का योग 3 से विभाज्य होना चाहिए।

9→ Sum of digits should be divisible by 9.

9→ अंकों का योग 9 से विभाज्य होना चाहिए।

Divisibility Rule of 5, 25, 125

5. → Last digit should be 0 or 5

5. → अंतिम अंक 0 या 5 होना चाहिए

25 → Last two digit should be divisible by 25.

25 → अंतिम दो अंक 25 से विभाज्य होने चाहिए।

125. → Last 3 digit should be divisible by 125.

125. → अंतिम 3 अंक 125 से विभाज्य होना चाहिए।

Divisibility Rule of 6

6. → 6=2×3 (co-prime factors) / (सह अभाज्य गुणनखंड)

∴ If a number is divisible by 2 & 3 both, that number will also be divisible by 6

∴ यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य है, तो वह संख्या 6 से भी विभाज्य होगी

Divisibility Rule of 7, 11, 13

5922 → Make pair of 3 digits from RHS

5922 → RHS से 3 अंकों का युग्म बनाएं

→ Add alternate pairs & take difference

→ वैकल्पिक जोड़े को जोड़ें और अंतर ज्ञात करें

→ If difference is divisible by 7, 11, 13 then number will be divisible by 7, 11, 13 respectively.

यदि अंतर 7, 11, 13 से विभाज्य है तो संख्या क्रमशः 7, 11, 13 से विभाज्य होगी।

005922 → 922 – 5 = 917 — 7 ✓, 11 ×, 13 ×

6489 → 489 – 6 → 483 — 7 ✓, 11 ×, 13 ×

380247 → 380–247 → 133 — 7 ✓, 11 ×, 13 ×

❖ ABAB → divisible by 101

73×101 = 7373

❖ ABCABC → divisible by 1001

687×1001 = 687687

❖ 7×11×13 = 1001 (Remember)

Divisibility Rule of 11

❖ If the difference between the sum of the digits at odd places and sum of the digits at even places is zero or multiple of 11.

यदि विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग के बीच का अंतर शून्य या 11 का गुणक है।

Add even place digits / Add odd place digits → Take diff. → If diff. is O or multiple of 11 then no. will be divisible by 11

166452 → 1+6+5 = 12

6+4+2 = 12 diff. = 0 ∴ div. by 11

7945938 → 28–17 = 11

Divisibility Rule of 12

12 = 4 × 3

❖ If a number is divisible by 4 and 3 both then that number will also be divisible by 12.

यदि कोई संख्या 4 व 3 दोनों से विभाजित होती है तो वह संख्या 12 से भी विभाजित होगी।

CamScanner

Remainder Theorem (शेषफल प्रमेय)

Remainder (शेषफल)

❖ The remainder is the value left after the division if the dividend is not completely divided by the divisor.

किसी भाग में यदि भाजक द्वारा भाज्य को पूरी तरह विभाजित नहीं किया जाता तो बचा हुआ मान शेषफल कहलाता है।

❖ If dividend is completely divided by the divisor then in that case remainder will be zero.

यदि भाजक भाज्य को पूरी तरह विभाजित करता है तो शेषफल शून्य होगा।

Remainder Theorem (शेष प्रमेय)

Dividend / भाज्य

Divisor ← 13) 72 (5 → quotient / भागफल
भाजक
65
7 → Remainder / शेष

$72 = 13 \times 5 + 7$

Dividend = Divisor × Quotient + Remainder

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$\frac{206}{11}$, R = 8

Remainder is always less than divisor.

शेष हमेशा भाजक से छोटा होता है।

❖ a, b, n → natural numbers / प्राकृतिक संख्या

$a^n + b^n$ (n=odd) → $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)[a^2b^0-a^1b^1+a^0b^2] \rightarrow (a+b)[a^2-ab+b^2]$

(+ − + − + − (+ से start है तो पहले + then − goes on)

$(a^5 + b^5) = (a+b)[a^4b^0-a^3b^1 + a^2b^2 - a^1b^3+a^0b^4]$

$= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

∴ $a^n + b^n$ → n odd → (a+b) is a factor always.

No. of the form	Div. by (a+b)	Div. by (a−b)
1. a^n+b^n (n → odd)	✓	×
2. a^n+b^n (n → even)	×	×
3. a^n-b^n (n → odd)	×	✓
4. a^n-b^n (n → even)	✓	✓

❖ If Power is odd / यदि घात विषम है →

$a^n+b^n+c^n+d^n$ is divisible by (a+b+c+d)

Fermat's Theorem

❖ **Fermat's Theorem** → $\frac{a^{P-1}}{P} = 1$ **(Remainder)**

Fermat's की प्रमेय → $\frac{a^{P-1}}{P} = 1$ (शेष)

p = prime number / अभाज्य संख्या

a, p → co-prime / सह अभाज्य

$\frac{50^{16}}{17} \rightarrow R = 1$

Wilson's Theorem (विल्सन की प्रमेय)

❖ P = any prime number / P = कोई भी अभाज्य संख्या

$\frac{(P-1)!}{P} \rightarrow$ Remainder = −1 or (P−1)

❖ $\frac{(ax+k)^n}{a}$ = Remainder → K^n

$\frac{(ax+1)^n}{a} \rightarrow$ Remainder = $1^n = 1$

$\frac{(ax-k)^n}{a} \rightarrow$ Remainder = $(-k)^n$

$\frac{(ax-1)^n}{a} \rightarrow$ Remainder = $(-1)^n$

n = even → **1**

n = odd → **−1**

Euler's Theorem (यूलर की प्रमेय)

❖ $\frac{a^{\Phi(N)}}{N} \rightarrow R=1$ Φ(N)=Toient function of N

a, N → co-prime

N → Natural number / (प्राकृतिक संख्या)

How to find Φ(N)

$72 = 2^3 \times 3^2$

❖ $\Phi(72) \rightarrow 72 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$= 72 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 24$

CamScanner

- $100 \rightarrow 2^2 \times 5^2$

$\Phi 100 \rightarrow 100 \times \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{5}\right) \rightarrow 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \rightarrow 40$

- $\Phi(P) = \mathbf{P-1}$ where P = prime number

$\therefore \Phi(N) \rightarrow$ N से छोटी कितनी संख्याएं N के साथ co-prime है।

- Product of any 'n' consecutive (+ve) numbers is always divisible by n!

किसी भी 'n' क्रमागत (+ve) संख्याओं का गुणनफल हमेशा n! से विभाज्य होता है!

- $\frac{15\times16\times17\times18\times19}{5!} \rightarrow$ 5 numbers

$\Rightarrow \frac{15\times16\times17\times18\times19}{120}$, R = 0

Consecutive Remainder (लगातार शेषफल)

- 17) 8697 (511
  - → 85
  - ① 9
  - → 17
  - ② 7
  - → 17
  - ⑩

consecutive remainder / लगातार शेष = 1, 2, 10

Divisor → HCF [85, 17, 17]

→ **17**

8. Successive Division / क्रमिक विभाजन

Divide 620 by 8, 5, 6 successively / क्रमिक

8) 620 (77 → 56 → 60 → 56 → ④

5) 77 (15 → 5 → 27 → 25 → ②

6) 15 (2 → 12 → ③ → Final Quotient

successive remainders / क्रमिक अवशेष → 4, 2, 3

8	620	4
5	77	2
6	15	3
3	2	

↓ Successive remainders

OR

↘ Final quotient

Some Important points (कुछ महत्वपूर्ण बिंदु)

- If two numbers are divided by same divisor the remainders are respectively r_1 and r_2. If sum of these two numbers are divided by the same divisor the remainder is r_3. Then divisor is → **divisor = $r_1 + r_2 - r_3$**

यदि दो संख्याओं को एक ही भाजक द्वारा भाग देने पर शेषफल क्रमशः r_1 व r_2 आता है तथा यदि दोनों संख्याओं के योग को उसी भाजक द्वारा भाग देने पर शेषफल r_3 है तो → **भाजक = $r_1 + r_2 - r_3$**

- $\frac{4^n}{6} \rightarrow$ Rem = 4
- $\frac{10^n}{6} \rightarrow$ Rem = 4

Unit digit (UD) (इकाई अंक)

- 5 × odd → U.D = 5

5 × even → UD = 0

one zero = one pair of 5 × 2

875 × 64 → 5 × 5 × 5 × 7 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

3 pair of 5 & 2

∴ 3 zero at the end of product / गुणनफल के अंत में 3 शून्य

0 → $(1370)^{189} \rightarrow$ **UD = 0**

No. of zero at the end = 189

- 0, 1 की कितनी भी power हो unit digit same ही रहता है।

1 → $(371)^{108} \rightarrow 371 \times 371 \ldots.$ 108 times

UD = 1

5 → $(865)^{99} \rightarrow 865 \times 865 \times \ldots.$ 99 time

UD = 5 Any power of 5 → UD = 5

6 → $(106)^{357} \rightarrow 106 \times 106 \times \ldots.$ 357 times

UD = 6

- **Any power of 0, 1, 5, 6 → UD = same**

4 → $(4)^{odd}$ = UD → 4

$(4)^{even}$ = UD → 6

9 → $(9)^{odd}$ → UD = 9

$(9)^{even}$ → UD = 1

10. Rule of 2, 3, 7, 8

	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
UD →	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4

UD repeat after every power 4

∴ cyclicity = 4

∴ UD → $2^n = 2^{n+4}$

- $(132)^{25} \rightarrow \frac{25}{4}$, R=1 ∴ $(132)^1 \rightarrow$ UD = **2**

	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
UD →	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9

∴ UD repeat after power 4

∴ cyclicity = 4

- $333^{337^{334}} \rightarrow \frac{337^{334}}{4} \rightarrow 1^{334} \rightarrow 1$

∴ $333^1 \rightarrow$ UD = 3

- Similarly cyclicity of 7 & 8 is also 4.

इसी प्रकार 7 और 8 की चक्रीयता भी 4 होती है।

CamScanner

Number of Factors (गुणनखंडों की संख्या)

Factors (गुणनखंड)

❖ Factors are the positive integers that can divide a number exactly.

गुणनखंड धनात्मक पूर्णांक हैं जो किसी संख्या को सटीक रूप से विभाजित कर सकते हैं।

Properties of factors (कारकों के गुण)

1. 1 is a factor of every number.

   1 हर संख्या का गुणनखंड है।

2. Every natural number is a factor of itself.

   हर प्राकृतिक संख्या स्वयं का एक गुणनखंड है।

3. Apart from 1 all natural numbers have atleast two factors.

   1 के अतिरिक्त सभी प्राकृत संख्याओं के कम से कम दो गुणनखंड होते हैं।

Number of Factors (NOF) (गुणनखंडों की संख्या)

❖ 12 → 12, 24, 36, 48, 60 .... (multiples) / (गुणक)

12 → 1, 2, 3, 4, 6, 12 (factors) / (गुणखंड)

NOF of 12 → 6

perfect square NOF / पूर्ण वर्ग NOF → 2

Even NOF of 12 → 4

perfect cube NOF → 1 / पूर्ण घन NOF = 1.

odd NOF of 12 → 2

NOF of multiple of 3 → 3

❖ $72 \rightarrow 2^3 \times 3^2$ (write in prime base)

(अभाज्य संख्या के घात में लिखना है)

$[2^0\ 2^1\ 2^2\ 2^3]\ [3^0\ 3^1\ 3^2]$ OR 4 × 3 = 12 combinations /

∴ NOF → 12

Direct: NOF = (power + 1) × (power + 1) ....

NOF of 72 → (3+1) × (2+1) → 4 × 3 → **12**

❖ $N = a^x \times b^y \times c^z$

a,b,c → prime number / अभाज्य संख्या

NOF of N = **$(x+1)(y+1)(z+1)$**

Sum of factors (SOF) (गुणनखंडों का योग)

❖ $72 \rightarrow [2^0+2^1+2^2+2^3]\times[3^0+3^1+3^2] = 15 \times 13 = 195$

❖ $2160 \rightarrow 2^4\times3^3\times5^1$

SOF → $(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)\times(3^0+3^1+3^2+3^3)\times(5^0+5^1)$

→ 31×40×6 → **7440**

OR **Sum of factors** / गुणनखंडों का योग → $\frac{a[r^n-1]}{(r-1)}$ → GP

$\therefore \frac{1(2^5-1)}{2-1} \times \frac{1(3^4-1)}{3-1} \times \frac{1(5^2-1)}{5-1}$

→ 31 × 40 × 6 = 7440

❖ $2160 = 2^4\times3^3\times5^1$

Even factors → minimum 2^1 / सम कारक → न्यूनतम 2^1

NOF = 5×4×2=40

$(2^0\ 2^1\ 2^2\ 2^3\ 2^4) \times (3^0\ 3^1\ 3^2\ 3^3) \times (5^0\ 5^1)$

Even NOF → 4 × 4 × 2 → **32**

OR $2160 = 2^4\times3^3\times5^1 \rightarrow 2(2^3\times3^3\times5^1)$

↓

4×4×2 = 32

Sum of even factors / सम गुणकों का योग → 30×40×6 → 7200

No. of odd factors / विषम कारकों की संख्या → 40–32 = 8

No. of odd factors / विषम कारकों की संख्या → Absence of 2

$\therefore 2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 \rightarrow 4 \times 2 = 8$

Sum of odd factors / विषम कारकों का योग → 40 × 6 = 240

❖ $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1$

$(2^0\ 2^1\ 2^2\ 2^3\ 2^4)\ (3^0\ 3^1\ 3^2\ 3^3)\ (5^0\ 5^1)$

Number of factors which are multiple of 18 →

$18=2^1\times3^2$

कारकों की संख्या जो 18 के गुणक हैं →

$18=2^1\times3^2$

∴ minimum 2^1 and 3^2 required for multiple of 18.

→ 4 × 2 × 2 = 16

OR $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 \rightarrow 2\times3^2[2^3\times3^1\times5^1]$

↓

4×2×2=16

❖ **Sum of reciprocal of all factors = $\frac{\text{sum of factors}}{\text{number}}$**

8 → 1, 2, 4, 8

Sum of reciprocal → $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{8+4+2+1}{8}$

$= \frac{\text{Sum of factors}}{\text{number}}$

CamScanner

- $10800 \rightarrow 2^4 \times 3^3 \times 5^2$

  Number of factors which are perfect squares →

  गुणनखण्डों की संख्या जो पूर्ण वर्ग हैं →

  a^{2n} = perfect square number / पूर्ण वर्ग संख्या

  a^{3n} = perfect cube number / पूर्ण घन संख्या

  a^{6n} = perfect square as well as perfect cube / पूर्ण वर्ग और साथ ही पूर्ण घन

  $(2^0\ 2^2\ 2^4) \times (3^0\ 3^2) \times (5^0\ 5^2)$

  $\rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$

  OR No. of factors (perfect squares) →

  ⇒ गुणनखंडों की संख्या (पूर्ण वर्ग) →

  $$\frac{\text{Power}}{2} \rightarrow \text{Integer} + 1$$

  $$\rightarrow (2+1)\ (1+1)\ (1+1)$$

  $$\rightarrow 3 \times 2 \times 2 \rightarrow 12$$

- $72 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$

  make pairs from 1st & last, NOF = 12

  पहले और आखिरी से जोड़े बनाएं,

  $1 \times 72 = 72$ $\quad 4 \times 18 = 72$

  $2 \times 36 = 72$ $\quad 6 \times 12 = 72$

  $3 \times 24 = 72$ $\quad 8 \times 9 = 72$

  Product of factors / कारकों का गुणनफल = 72^6

  ∴ Product of factors of N / N के कारकों का = $(N)^{\frac{NOF}{2}}$

- Only perfect square number has odd number of factors.

  किसी पूर्ण वर्ग संख्या में गुणनखंडों की विषम संख्या होती है।

- Perfect square number upto 100 → 10

  100 तक पूर्ण वर्ग संख्या = 10

  ∴ Even number of factors / गुणनखंडों की सम संख्या → 100−10 = 90

- Perfect square of a prime number has exactly **3** factors.

  एक अभाज्य संख्या के पूर्ण वर्ग में **3** गुणनखंडों होते हैं।

  $49 \rightarrow 7^2 \rightarrow 2 + 1 = 3$

  1 ↔ 49, 7

  (1−100) → $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ → 4 numbers

- more than 3 factors between (1−100) = ?

  exactly 3 factors = 4

  ठीक 3 गुणनखंड = 4

  only 1 factor = 1

  (1 has only one factor)

  ∴ More than 3 factors

  ∴ 3 से अधिक कारक → 100 − 5 = 95 numbers

CamScanner

Sequences and Series (अनुक्रम और श्रृंखला)

Sequence (अनुक्रम)

❖ A sequence is an arrangement of numbers in definite order according to some rule.

अनुक्रम किसी नियम के अनुसार निश्चित क्रम में संख्याओं की व्यवस्था है।

Progression (श्रेणी)

❖ A sequence whose terms follow a certain pattern is called a progression.

एक क्रम जिसके पद एक निश्चित पैटर्न का पालन करते हैं, एक श्रेणी कहलाती है।

Series (श्रृंखला)

❖ If $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ is a sequence, then the sum expressed as $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ is called a series.

अगर $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ एक अनुक्रम है, तो $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ के रूप में व्यक्त योग को एक श्रृंखला कहा जाता है।

❖ A series having finite number of terms is called **finite series.**

पदों की परिमित संख्या वाली श्रेणी को परिमित श्रेणी कहते हैं

❖ A series having infinite number of terms is called **infinite series.**

अनंत पदों वाली श्रृंखला को अनंत श्रेणी कहते हैं।

Special series (विशेष श्रृंखला)

❖ If denominator is same as multiplier

यदि हर गुणक के समान है

$$999\frac{991}{999}\times 999 = ?$$

Step 1 → जिससे Multiply किया है = 999

Step 2 → आगे जितने 9 है उतनी zero = 000

Step 3 → Diff. of 999 – 991 = 8

$\therefore$ 999000 – 8 = 998992

❖ $\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\ldots+\frac{1}{24\times25}$

common difference / सामान्य अंतर = 1

$$\frac{6-5}{5\times6}+\frac{7-6}{6\times7}+\frac{8-7}{7\times8}+\frac{9-8}{8\times9}+\ldots\frac{25-24}{24\times25}$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots\frac{1}{23}-\frac{1}{24}+\frac{1}{24}-\frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=\mathbf{\frac{4}{25}}$$

OR $\frac{1}{\text{common difference}}\left[\frac{1}{\text{1st no. of den.}}-\frac{1}{\text{Last no. of den.}}\right]$

$$1\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}\right)=\mathbf{\frac{4}{25}}$$

❖ $\frac{1}{1\times4\times7}+\frac{1}{4\times7\times10}+\frac{1}{7\times10\times13}+\frac{1}{10\times13\times16}+\frac{1}{13\times16\times19}=?\Rightarrow\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{32}$

❖ $\frac{1}{\text{diff. of 1st \& 3rd no. in den.}}\left(\frac{1}{\text{1st 2no.}}-\frac{1}{\text{last 2 no.}}\right)$

Arithmetic Progression (AP) (अंकगणितीय श्रेणी)

❖ A sequence in which terms increase or decrease regularly by a fixed number. This fixed number is called the common difference of AP.

एक क्रम जिसमें पद एक निश्चित संख्या से नियमित रूप से बढ़ते व घटते हैं। यह निश्चित संख्या AP का सार्व अंतर कहलाती है।

Ex. a, a + d, a + 2d,... is an AP

Where a = first term and d = common difference.

जहाँ a = पहला पद और d = सार्व अंतर है।

nth Term (or General Term) of an AP

किसी AP का nवां पद (या सामान्य पद)

❖ If a is the first term, d is the common difference and l is the last term of an AP, i.e. the given AP is a, a+d, a+2d, a+3d,..., l, then

यदि a पहला पद है, d सार्व अंतर है और l किसी AP का अंतिम पद है, अर्थात दिया गया a, a+d, a+2d, a+3d,..., l, है, तो

(a) nth term is given by $\mathbf{a_n = a+(n-1)d}$

nवाँ पद दिया गया है $\mathbf{a_n = a+(n-1)d}$

(b) nth term of an AP from the last term is given by

$\mathbf{a_n' = l-(n-1)d}$

nवां पद किसी AP का अंतिम पद से $\mathbf{a_n' = l-(n-1)d}$

Note / नोट

(i) $a_n+a_n' = a + l$

i.e. nth term from the beginning + nth term from the end = first term + last term

अर्थात प्रारंभ से nवां पद + अंत से nवां पद = पहला पद + अंतिम पद

CamScanner

Properties of Arithmetic Progression (अंकगणितीय प्रगति के गुण)

(i) If a constant is added or subtracted from each term of an AP, then the resulting sequence is also an AP with same common difference.

यदि किसी AP के प्रत्येक पद में एक स्थिरांक जोड़ा या घटाया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी समान सामान्य अंतर वाला एक AP होता है।

(ii) If each term of an AP is multiplied or divided by a non-zero constant k, then the resulting sequence is also an AP, with common difference kd or $\frac{d}{k}$ respectively, where d = common difference of given AP.

यदि किसी AP के प्रत्येक पद को एक गैर-शून्य स्थिरांक k से गुणा या विभाजित किया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी एक AP होता है, जिसमें सामान्य अंतर क्रमशः kd या $\frac{d}{k}$ होता है, जहाँ d = दिए गए AP का सामान्य अंतर होता है।

(iii) If a_n, a_{n+1} and a_{n+2} are three consecutive terms of an AP, then $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$.

यदि a_n, a_{n+1} और a_{n+2} एक AP के लगातार तीन पद हैं, तो $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$.

(iv) If the terms of an AP are chosen at regular intervals, then they form an AP.

यदि किसी AP के पदों को नियमित अंतराल पर चुना जाता है, तो वे एक AP बनाते हैं।

(v) If a sequence is an AP, then its nth term is a linear expression in n, i.e. its nth term is given by An+B, where A and B are constants and A = common difference.

यदि एक अनुक्रम एक AP है, तो इसका nवाँ पद n में एक रैखिक व्यंजक है, अर्थात इसका nवाँ पद An+B द्वारा दिया जाता है, जहाँ A और B स्थिरांक हैं और A = सार्व अंतर है।

Selection of Terms in an AP (AP में पदों का चयन)

❖ Any terms in AP can be taken as

AP में कोई भी पद के रूप में लिया जा सकता है।

(i) 3 terms → (a–d), a, (a+d)

(ii) 4 terms → (a–3d), (a–d), (a+d), (a+3d)

(iii) 5 terms → (a – 2d), (a – b), a, (a + d), (a + 2d)

Sum of First n Terms of an AP (किसी AP के प्रथम n पदों का योग)

❖ Sum of first n terms of AP, is given by

AP के पहले n पदों का योग, द्वारा दिया गया है

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + l]$

When l = last term

Note / नोट

(i) A sequence is an AP if the sum of its first n terms is of the form $A_n^2 + Bn$, there A and B are constants and common difference in such case wil be 2A.

एक अनुक्रम एक AP है यदि इसके पहले n पदों का योग $A_n^2 + Bn$ के रूप में है, यहां A और B स्थिर हैं और ऐसे मामले में सामान्य अंतर 2A होगा।

(ii) $a_n = S_n - S_{n-1}$ i.e.

nth term of AP = Sum of first n terms – Sum of first (n – 1) terms

$a_n = S_n - S_{n-1}$ यानी

AP का वाँ पद = पहले n पदों का योग - प्रथम (n – 1) पदों का योग

Ex. $\underbrace{7, 11, 15, 19}_{+4\ +4\ +4}$, 23..... common difference / सामान्य अंतर (d) = 4

1st term / प्रथम पद (a) = 7

a, a+d, a+2d, a+3d, ...a+(n–1)d

$T_n = n_{th}$ term = **a+(n–1)d** = Last term for n term AP

$T_n = n_{th}$ term = **a+(n–1)d** = n पद AP का अंतिम पद

Sum / जोड़ → $\mathbf{n\frac{(a+l)}{2}}$ OR/और $\mathbf{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$

$T^n = l = a + (n-1)d \rightarrow \frac{l-a}{d} = n - 1$

$\therefore \mathbf{n = \frac{l-a}{d} + 1}$

$\Sigma n = 1+2+3+ .... +n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\Sigma n^2 = 1^2+2^2+3^2+ .... +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\Sigma n^3 = 1^3+2^3+3^3+ .... +n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

❖ Sum of 1st n even natural numbers

1st n सम प्राकृत संख्याओं का योग

$2 + 4 + 6 + 8 + ... +2n = \frac{n}{2}[2+2n] = \mathbf{n(n+1)}$

Sum of 1st n odd natural numbers

1st n विषम प्राकृतिक संख्या का योग

$1 + 3 + 5 + 7 +.... +(2n-1) = \frac{n}{2}[1+2n-1] = \mathbf{n^2}$

CamScanner

Arithmetic Mean (AM) (अंकगणितीय माध्य)

(i) If a, m and b are in AP, then m is called the arithmetic mean of a and b and it is given by

$$m = \frac{a+b}{2}$$

यदि a, m और b, AP में हैं, तो m को a और b का अंकगणितीय माध्य कहा जाता है और इसे $m = \frac{a+b}{2}$ द्वारा दिया जाता है

(ii) If $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ are n numbers, then their AM is given by, $A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}$

यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ संख्याएँ हैं, तो उनका AM निम्न द्वारा दिया जाता है, $A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}$

(iii) If a, $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$, b are in AP, tern

(a) $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ are called n arithmetic mean between a and b, where

यदि a, $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$, b, AP में हैं

(a) $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ को A और B के बीच अंकगणितीय माध्य कहा जाता है, जहां

$$A_1 = a + d = \frac{na+b}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = \frac{(n-1)a+2b}{n+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_n = a + nd = \frac{a+nb}{n+1}$$

and/और $d = \frac{b-a}{n+1}$

(b) Sum of n AM's between a and b is nA

a और b के बीच n AM's का योग nA है

i.e. $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = nA$, where $A = \frac{a+b}{2}$

यानी $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = nA$, जहां $A = \frac{a+b}{2}$

Important Results on AP (AP पर महत्वपूर्ण परिणाम)

(i) If/यदि $a_p = q$ and/और $a_q = p$, then/तब $a_{p+q} = 0$, $a_r = p+q-r$

(ii) If/यदि $pa_p = qa_q$, then/तब $a_{p+q} = 0$

(iii) If/यदि $a_p = \frac{1}{q}$ and/और $a_q = \frac{1}{p}$, then/तब $a_{pq} = 1$

(iv) If/यदि $S_p = q$ and/और $S_q = p$, then/तब $S_{p+q} = -(p+q)$

(v) If/यदि $S_p = S_q$, then/तब $S_{p+q} = 0$

(vi) If/यदि a^2, b^2 and c^2 are/और in AP, then/तब

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ and/और $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ both are also in AP/दोनों भी हैं AP में होंगे।

(vii) If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are the non-zero terms of an AP, then

यदि $a_1, a_2, \ldots, a_n$ किसी AP के शून्येतर पद हैं, तब

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

Geometric Progression (GP) (ज्यामितीय श्रेणी)

❖ A sequence in which the ratio of any term (except first term) to its just preceding term is constant throughout. The constant ratio is called common ratio (r).

एक अनुक्रम जिसमें किसी भी पद (पहले पद को छोड़कर) का उसके ठीक पहले वाले पद से अनुपात पूरे समय स्थिर रहता है। स्थिर अनुपात को सामान्य अनुपात (r) कहा जाता है

i.e. $\frac{\alpha_{n+a}}{a_n} = r, \forall n \geq 1$

❖ If a is the first term, r is the common ratio and l is the last term of a GP, then the GP can be written as a, ar, $ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots l$.

यदि a पहला पद है, r सार्व अनुपात है और l किसी GP का अंतिम पद है, तो GP को a, ar, $ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots l$ के रूप में लिखा जा सकता है।

4, 12, 36, 108 r = common ratio / सामान्य अनुपात

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{4} = 3$$

nth Term (Or General Term) of a GP

GP का nवाँ पद (या सामान्य पद)

❖ If a is the first term, r is the common ratio and l is the last term, then

यदि a पहला पद है, r सार्व अनुपात है और l अंतिम पद है, तब

(i) nth term of a GP from the beginning is given by $a_n = ar^{n-1}$

यदि a पहला पद है, n सार्व अनुपात है और l अंतिम पद है, तब $a_n = ar^{n-1}$

(ii) nth term of a GP from the end is given by $a_n = \frac{l}{r^{n-1}}$

किसी GP का nवाँ पद अंत से दिया जाता है $a_n = \frac{l}{r^{n-1}}$

CamScanner

(iii) The nth term from the end of a finite GP consisting of m terms is ar^{m-n}.

एक परिमित GP के अंत से nवाँ शब्द जिसमें m शब्द हैं, ar^{m-n} है।

(iv) $a_n a_n' = al$

i.e. nth term from the beginning × nth term from the end = first term × last term

$a_n a_n' = al$

अर्थात प्रारंभ से nवाँ पद × अंत से nवाँ पद = पहला पद × अंतिम पद $a_n a_n' = al$

Properties of Geometric Progression (गुणोत्तर श्रेणी के गुण)

(i) If all the terms of GP are multiplied or divided by same non-zero constant, then the resulting sequence is also a GP with the same common ratio.

यदि GP की सभी शर्तों को एक ही गैर-शून्य स्थिरांक से गुणा या विभाजित किया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी समान सामान्य अनुपात वाला GP होता है।

(ii) The reciprocal of terms of a given GP also form a GP.

किसी दिए गए GP की पदों का पारस्परिक भी एक GP बनाता है।

(iii) If each term of a GP is raised to same power, then the resulting sequence also forms a GP.

यदि किसी GP के प्रत्येक पद को समान घात तक बढ़ाया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी GP बनाता है।

(iv) If the terms of a GP are chosen at regular intervals, then the resulting sequence is also a GP.

यदि एक GP की पदों को नियमित अंतराल पर चुना जाता है, तो परिणामी क्रम भी एक GP होता है।

(v) If $a_1, a_2, a_2, a_3, \ldots, a_n$ are non-zero and non-negative term of a GP, then $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots, \log a_n$ are in an AP and vice-versa.

यदि $a_1, a_2, a_2, a_3, \ldots, a_n$ किसी GP का शून्येतर और गैर-ऋणात्मक पद हैं, तो $a_3, \ldots, \log a_n$ AP में हैं और इसके विपरीत भी सही है।

(vi) If a, b and c are three consecutive terms of a GP, then $b^2 = ac$.

यदि a, b और c किसी GP के लगातार तीन पद हैं, तो $b^2 = ac$

Selection of Terms in a GP (GP में शर्तों का चयन)

Any terms in a GP can be taken as

GP में पदों को के रूप में लिया जा सकता है।

(i) 3 terms → $\frac{a}{r}$, a and ar.

(ii) 4 terms → $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}$, a and ar^3.

(iii) 5 terms → $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}$, a, ar, and ar^2.

Sum of First n Terms of a GP (a GP के प्रथम n पदों का योग)

(i) Sum of first n terms of a GP is given by

GP के पहले n पदों का योग किसके द्वारा दिया जाता है

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{if } r<1 \\ \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \text{if } r>1 \\ na, \text{if } r=1 \end{cases}$$

(ii) $S_n = \frac{a-lr}{1-r}, r<1$ or $S_n = \frac{lr-a}{r-1}, r>1$

where, l = last term of the GP.

जहां, l = GP की अंतिम अवधि

Sum of Infinite Terms of a GP (a GP की अनंत पदों का योग)

(i) If/यदि $|r| < 1$, then/तब $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

(ii) If/यदि $|r| \geq 1$, then/तब S_∞ does not exist./मौजूद नहीं है।

Geometric Mean GM (ज्यामितीय माध्य)

(i) If a, G, b are in GP, then G is called the geometric mean of a and b and is given by $G = \sqrt{ab}$.

यदि a, G, b GP में हैं, तो G को A और B का ज्यामितीय माध्य कहा जाता है और $G = \sqrt{ab}$ द्वारा दिया जाता है।

(ii) GM of n positive numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ are given by $G = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$

n धनात्मक संख्याओं $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ का GM = $G = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$ द्वारा दिया जाता है

(iii) If a, $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ b are in GP, then

यदि a, $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ b में हैं, GP तो

(a) $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$, are called n GM's between a and b, where

$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} \text{ and}$$

$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

(b) Product of n GM's,

$G1 \times G2 \times G3 \times \ldots Gn = G^n$, where $G = \sqrt{ab}$

CamScanner

Harmonic Progression (हरात्मक श्रेणी)

❖ A sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ of non-zero numbers is called a Harmonic Progression (HP), if the sequence $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$ is in AP.

गैर-शून्य संख्याओं के अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ को एक हरात्मक श्रेणी (HP) कहा जाता है, यदि अनुक्रम $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$ AP में है।

nth Term (or General Term) of Harmonic Progressio (हरात्मक श्रेणी का nवां पद या सामान्य पद)

(i) nth term of the HP from the beginning

HP का nवाँ पद शुरू से

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}$$

(ii) nth term of the HP from the end

HP का nवाँ पद अंत से

$$a'_n = \frac{1}{\frac{1}{l} - (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 l}{a_1 a_2 - l(n-1)(a_1 - a_2)}$$, where l is the last term.

(iii) $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a'_n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{l} = \frac{1}{\text{First term of HP}} + \frac{1}{\text{Last term of HP}}$

(iv) $a_n = \frac{1}{a + (n-1)d}$, if a, d are the first term and common difference of the corresponding AP.

$a_n = \frac{1}{a + (n-1)d}$ यदि a, d संबंधित AP का पहला पद और सार्व अंतर है।

Note There is no formula for determining the sum of harmonic series.

नोट हरात्मक श्रृंखला का योग निर्धारित करने के लिए कोई सूत्र नहीं है।

AP = 2, 5, 8, 11 ....

HP = $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$

Harmonic Mean (हरात्मक माध्य)

(i) If a, H and b are in HP, then H is called the harmonic mean of a and b and is given by $H = \frac{2ab}{a+b}$

यदि a, H और b HP में हैं, तो H को a और b का हरात्मक माध्य कहा जाता है और $H = \frac{2ab}{a+b}$ द्वारा दिया जाता है।

(ii) Harmonic Mean (HM) of $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ is given by

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Important Results on HP (HP पर महत्वपूर्ण परिणाम)

(i) If in a HP, $a_m = n$ and $a_n = m$, then

$$a_{m+n} = \frac{mn}{m+n}, \; a_{mn} = 1, \; a_p = \frac{mn}{p}$$

(ii) If in a HP, $a_p = qr$ and $a_q = pr$, then $a_r = pq$

(iii) If H is HM between a and b, then

(a) $(H-2a)(H-2b) = H^2$

(b) $\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(c) $\frac{H+a}{H-a} + \frac{H+b}{H-b} = 2$

Properties of AM, GM and HM between Two Numbers (दो संख्याओं के बीच AM, GM और HM के गुण)

1. If A, G and H are arithmetic, geometric and harmonic means of two positive numbers a and b, then

यदि A, G और H दो सकारात्मक संख्याओं A और B के अंकगणितीय, ज्यामितीय और हरात्मक माध्य हैं, तो

(i) $A = \frac{a+b}{2}, \; G = \sqrt{ab}, \; H = \frac{2ab}{a+b}$

(ii) $A \geq G \geq H$

(iii) $G^2 = AH$ and so A,G,H are in GP.

(iv) $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \begin{cases} A, \text{if } n = 0 \\ G, \text{if } n = -\frac{1}{2} \\ H, \text{if } n = -1 \end{cases}$

Exponential Series (घातीय श्रृंखला)

❖ The sum of the series $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\infty$ is denoted by the number e.

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\infty$ श्रृंखला का योग e द्वारा दर्शाया जाता है।

CamScanner

$$\therefore e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

(i) e lies between 2 and 3.

(ii) e is an irrational number.

(iii) $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\infty,\ x \in R$

(iv) $e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\infty,\ x \in R$

(v) For any $a > 0$, $a^x = e^{x\log_e^a}$

$$= 1+x(\log_e a)+\frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3+\ldots\infty,\ x \in R$$

(vi) Sum of first n even natural numbers.

प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग।

i.e. $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

(vii) Sum of first n odd natural numbers.

प्रथम n विषम प्राकृतिक संख्याओं का योग।

i.e. $1+3+5+\ldots(2n-1) = n^2$

(viii) $\sum_{r=1}^{n} n^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ix) $\sum_{r=1}^{n} n^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(x) $\sum_{r=1}^{n} n^4 = 1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

(xi) Sum of n terms of series

श्रृंखला के n पदों का योग

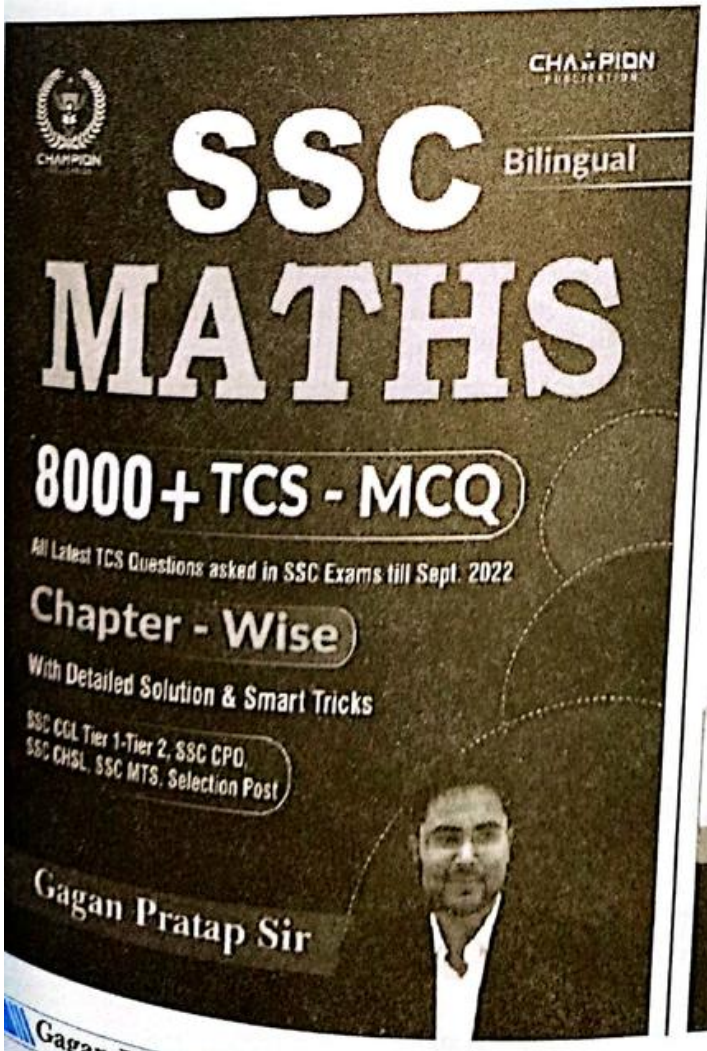
$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+\ldots$

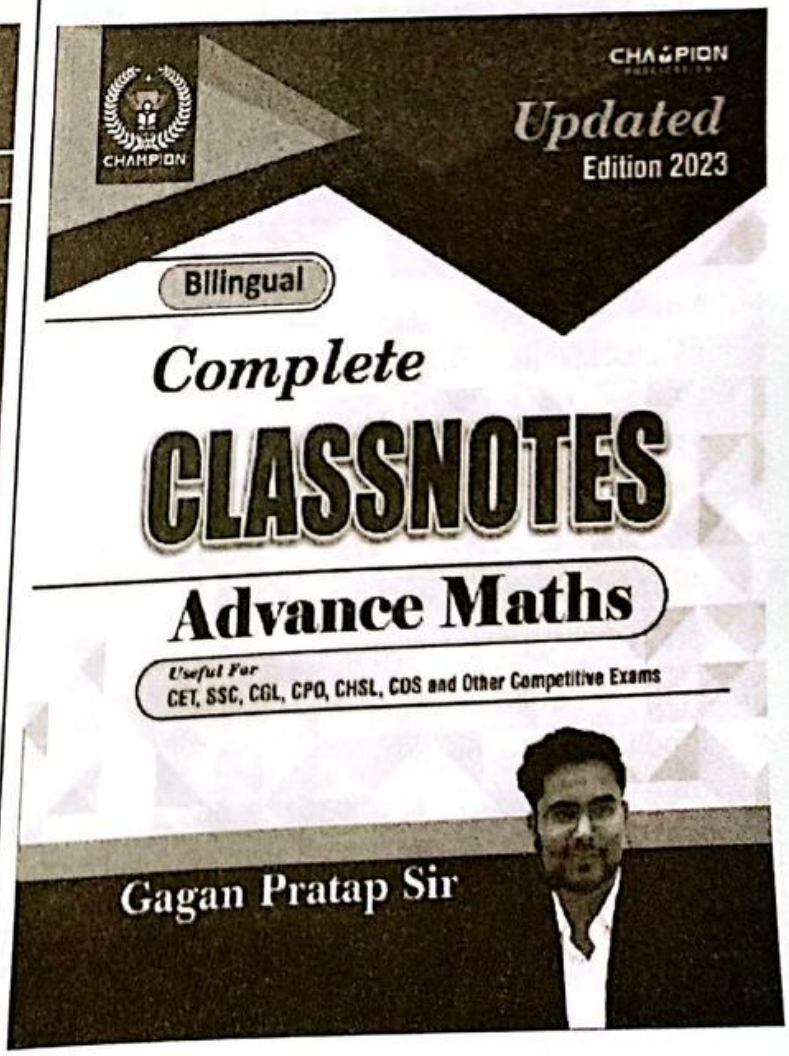
Case I when n is odd $= \frac{n(n+1)}{2}$

स्थिति I जब n विषम है $= \frac{n(n+1)}{2}$

Case II when n is even $= \frac{-n(n+1)}{2}$

स्थिति II जब n सम है $= \frac{-n(n+1)}{2}$





LCM & HCF (ल.स.व. और म.स.व.)

LCM (Least Common Multiple) (लघुत्तमसमापवर्तक)

❖ The least common multiple (LCM) is defined as the smallest multiple that two or more number have in common.

लघुतम समापवर्त्य (LCM) को दो या दो से अधिक संख्याओं में उभयनिष्ठ लघुतम गुणज के रूप में परिभाषित किया जाता है।

❖ LCM of the any two number is the value that is completely divisible by the two given numbers.

किन्हीं दो संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य वह मान है जो दी गई दो संख्याओं से पूर्णतः विभाज्य है।

Ex. Find LCM of 36, 45.

$36 \rightarrow 36, 72, 108, 144, \underline{180}, 216, 252 ....$

$45 \rightarrow 45, 90, 135, \underline{180}, 225, 270 ....$

LCM (36, 45) → 180 (Least common multiple of both) (दोनों का लघुतम समापवर्तक)

❖ Find LCM of 24, 30, 36.

$24 \rightarrow 2^3 \times 3^1$

$30 \rightarrow 2^1 \times 3^1 \times 5$

$36 \rightarrow 2^2 \times 3^2$

LCM $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ (Take max. power of each) / (प्रत्येक की अधिकतम घात लें) $= 8 \times 9 \times 5 = 360$

❖ Find LCM of 55, 66, 60.

$55 \rightarrow 5 \times 11$ LCM $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 =$ **660**

$66 \rightarrow 2 \times 3 \times 11$

$60 \rightarrow 2^2 \times 3 \times 5$

❖ Find LCM of 13, 29, 41.

13 → LCM (prime no.) → their product / उनका गुणनफल

29 → ∴ LCM = 13×29×41

41 →

❖ Find LCM of 24, 30, 36.

24 → 12 × ② Let LCM = 36

30 → 6 × ⑤ ∴ 36 × 5 × 2 = **360**

36 → ↘ 6, 12 included in 36 so skip them

❖ Find LCM of 55, 66, 60.

55 → 11 × ⑤ LCM = 66×5×2 = **660**

66 →

60 → 5 × 6 × ②

❖ Product of co-prime number = their LCM

सह-अभाज्य संख्या का गुणनफल = उनका LCM

❖ The number which when divided by a, b, c leaves remainder 'r' in each case = LCM(a,b,c) × k + r

वह संख्या जिसे a, b, c से भाग देने पर प्रत्येक स्थिति में 'r' शेष बचता है = LCM(a,b,c) × k + r

❖ The number which when divided by a, b, c respectively gives remainder x, y, z such that

वह संख्या जिसे क्रमशः a, b, c से विभाजित करने पर शेषफल x, y, z प्राप्त होता है

common difference (d) / सामान्य अंतर (d) $= a-x = b-y = c-z$

number = LCM (a, b, c)k − d

HCF (Highest common factor) (महत्तमसमापवर्तक)

❖ HCF is used to find the highest common factors of any two or more given integers.

किसी भी दो या अधिक दिए गए पूर्णांकों के उच्चतम सामान्य गुणनखंड को खोजने के लिए HCF का उपयोग किया जाता है।

❖ In other words HCF is the largest positive integer that divides each of the given integers.

दूसरे शब्दों में HCF सबसे बड़ा धनात्मक पूर्णांक है जो दिए गए पूर्णांकों में से प्रत्येक को विभाजित करता है।

Ex. Find HCF of 40, 64.

$40 \rightarrow (1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40)$

$64 \rightarrow (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$

common-factors of 40, 64 ⇒ [1,2,4,⑧] HCF = **8**

40, 64 के उभयनिष्ठ गुणनखंड ⇒ [1,2,4,⑧] HCF = **8**

HCF is the greatest common number which divide all the given numbers.

HCF वह बड़ी से बड़ी समापवर्तक संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं को विभाजित करती है।

❖ 40 → ⑧ × 5
64 → ⑧ × 8 } Co-prime ⇒ HCF = 8

42 → 6 × 7
66 → 6 × 11 } Co-prime no. ⇒ HCF = 6

यही बचे हुए co-prime no. दोनो संख्याओं का Ratio होते है।

HCF निकालने के बाद जो no. बचते है उनमे कुछ भी common नही बचेगा वे आपस में co-prime होगी।

40 : 64	42 : 66
5 : 8	7 : 11

❖ HCF of two no. = H
Numbers = Hx, Hy
x, y → co-prime
LCM = Hxy

Ratio of no's = Hx : Hy
$x : y$

CamScanner

How to find HCF

Factorization Method (गुणनखंड विधि)

- Find HCF of 168, 294, 420

  $168 \to 2^3 \times 3 \times 7$

  Take minimum power of common in all / सभी में समान की न्यूनतम घात लो

  $294 \to 2 \times 3 \times 7^2$ $\quad \therefore$ HCF $\Rightarrow 2 \times 3 \times 7 = \mathbf{42}$

  $420 \to 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

Difference Method (अंतर विधि)

- HCF of two numbers = H
  Numbers = Hx, Hy
  $x, y \to$ co-prime

  Diff. = $Hx - Hy$
  $= H(x-y)$
  $\downarrow$
  HCF = diff. का factor

  Diff. = $H(x-y)$
  If $(x-y)=1$ $\to$ HCF=diff.
  If $(x-y)>1$ $\to$ HCF=factor of diff.

  HCF of 2 numbers can not be greater than their difference.

  2 संख्याओं का HCF उनके अंतर से अधिक नहीं हो सकता।

- 48 →, 56 → Difference=8=HCF
  $48 = 8 \times 6$, $56 = 8 \times 7$] Difference=1
  $\therefore$ HCF = difference = **8**

- 306, 391 $\quad \therefore$ HCF = 17
  d = 85 → 17 × 5

- 1518 1840
  D = 322 < 161×2, 23 ×7×2
  $\therefore$ Both number divisible by 23 / दोनों संख्याएँ 23 से विभाज्य हैं
  Both are even number / दोनों सम संख्या हैं
  $\therefore$ HCF = 23×2 = 46

- 323, 456, 703
  133
  19 ×7
  19 divide all 3
  $\therefore$ HCF = 19

- 1008, 1323, 1722
  d=315
  63 ×5
  3×21
  HCF of (1008, 1323) = 63
  1722 not divisible by 9 $\therefore$ Remove 9 from 63 /
  Hence not divisible by 63 / अत: 63 से विभाज्य नहीं है
  → 1722 divisible by 21 / 1722 21 से विभाज्य है
  $\therefore$ HCF (1008, 1323, 1722) = 21

Long Division Method (लंबी विभाजन प्रणाली)

- 693, 945
  HCF = 63

```
693) 945 (1
     693
     252) 693 (2
          504
          189) 252 (1
               189
Final divisor ← 63) 189 (3
= HCF               189
                     ×
```

  1,2,1,3 → successive quotient / क्रमिक भागफल

- Note: If 2 or 3 numbers are even their HCF will be even. If any one number is odd their HCF can not be even.
  नोट: यदि 2 या 3 संख्याए सम हो तो उनका HCF भी सम होगा। यदि कोई एक संख्या विषम है तो उनका HCF सम नहीं हो सकता।

- If HCF of 2 numbers = H $\quad \therefore$ LCM = Hxy
  Nos. → Hx, Hy $\quad$ Diff. = $H(x-y)$
  $x, y \to$ co-prime $\quad$ Sum = $H(x+y)$
  $\therefore$ HCF is present in LCM, difference & sum of the numbers.
  HCF, LCM, संख्याओं के अंतर और संख्याओं के योग में मौजूद होता है।

- 18, 30 $\quad$ HCF = 6
  LCM=90, Diff.=12, Sum=48] All will be divisible by HCF. सभी HCF से विभाज्य होंगे।

- $Hx \times Hy = Hxy \times H$
  I × II = LCM × HCF
  $H^2xy = H^2xy$

- I × II = LCM × HCF
  $\Rightarrow$ 1st no. × 2nd no. = LCM × HCF

- 'K' is the largest number which when divide a,b,c gives same remainder 'r' & quotients are x,y,z respectively
  'K' सबसे बड़ी संख्या है जिसे a,b,c से विभाजित करने पर समान शेषफल 'r' और भागफल क्रमश: x,y,z हैं

  k) a (x $\quad$ k) b (y $\quad$ k) c (z
  r $\quad$ r $\quad$ r
  a–b, b–c, c–a
  ↓ ↓ ↓
  $k(x-y)$ $k(y-z)$ $k(z-x)$
  $a = kx + r$ $\quad b = ky + r$ $\quad c = kz + r$
  $\therefore$ K = HCF [a–b, b–c, c–a]

- $\text{LCM}\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right] \to \frac{\text{LCM}(a,c,e)}{\text{HCF}(b,d,f)}$

  $\text{HCF}\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right] \to \frac{\text{HCF}(a,c,e)}{\text{LCM}(b,d,f)}$

- HCF $[a^n \pm 1, b^m \pm 1] = \mathbf{a^{HCF(n,m)} \pm 1}$

CamScanner

Squares - Cubes - Square Root Chart

number n	square n^2	cube n^3	square root $\sqrt{n}$
1	1	1	1.0000
2	4	8	1.4142
3	9	27	1.7321
4	16	64	2.0000
5	25	125	2.2361
6	36	216	2.4495
7	49	343	2.6458
8	64	512	2.8284
9	81	729	3.0000
10	100	1000	3.1623
11	121	1331	3.3166
12	144	1728	3.4641
13	169	2197	3.6056
14	196	2744	3.7417
15	225	3375	3.8730
16	256	4096	4.0000
17	289	4913	4.1231
18	324	5832	4.2426
19	361	6859	4.3589
20	400	8000	4.4721
21	441	9261	4.5826
22	484	10648	4.6904
23	529	12167	4.7958
24	576	13824	4.8990
25	625	15625	5.0000
26	676	17576	5.0990
27	729	19683	5.1962
28	784	21952	5.2915
29	841	24389	5.3852
30	900	27000	5.4772
31	961	29791	5.5678
32	1024	32768	5.6569
33	1089	35937	5.7446
34	1156	39304	5.8310
35	1225	42875	5.9161
36	1296	46656	6.0000
37	1369	50653	6.0828
38	1444	54872	6.1644
39	1521	59319	6.2450
40	1600	64000	6.3246

number n	square n^2	cube n^3	square root $\sqrt{n}$
41	1681	68921	6.4031
42	1764	74088	6.4807
43	1849	79507	6.5574
44	1936	85184	6.6332
45	2025	91125	6.7082
46	2116	97336	6.7823
47	2209	103823	6.8557
48	2304	110592	6.9282
49	2401	117649	7.0000
50	2500	125000	7.0711
51	2601	132651	7.1414
52	2704	140608	7.2111
53	2809	148877	7.2801
54	2916	157464	7.3485
55	3025	166375	7.4162
56	3136	175616	7.4833
57	3249	185193	7.5498
58	3364	195112	7.6158
59	3481	205379	7.6811
60	3600	216000	7.7460
61	3721	226981	7.8102
62	3844	238328	7.8740
63	3969	250047	7.9373
64	4096	262144	8.0000
65	4225	274625	8.0623
66	4356	287496	8.1240
67	4489	300763	8.1854
68	4624	314432	8.2462
69	4761	328509	8.3066
70	4900	343000	8.3666
71	5041	357911	8.4261
72	5184	373248	8.4853
73	5329	389017	8.5440
74	5476	405224	8.6023
75	5625	421875	8.6603
76	5776	438976	8.7178
77	5929	456533	8.7750
78	6084	474552	8.8318
79	6241	493039	8.8882
80	6400	512000	8.9443

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338	351	364	377	390
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425	442	459	476	493	510
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525	546	567	588	609	630
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550	572	594	616	638	660
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575	598	621	644	667	690
24	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600	624	648	672	696	720
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625	650	675	700	725	750
26	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	567	594	621	648	675	702	729	756	783	810
28	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	588	616	644	672	700	728	756	784	812	840
29	29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725	754	783	812	841	870
30	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660	690	720	750	780	810	840	870	900

CamScanner

Calculation & simplification (गणना और सरलीकरण)

Conditions to be a perfect square number (एक पूर्ण वर्ग संख्या होने की शर्तें)

- If a no. ends with 2,3,7,8 it can't be a perfect square
  यदि कोई संख्या 2,3,7,8 के साथ समाप्त होती है वह एक पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती।
- If unit digit is 5 then ten's digit always 2.
  यदि इकाई का अंक 5 है तो दहाई का अंक हमेशा 2 होता है।
- No number can be a perfect square unless its digital root is 1, 4, 7 or 9.
  कोई भी संख्या तब तक पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती जब तक उसका अंकीय मूल 1, 4, 7 या 9 न हो।
- Last 2 digit of a perfect square number = last two digits from the squares of numbers between (1 to 24).
  एक पूर्ण वर्ग संख्या के अंतिम 2 अंक = (1 से 24) के बीच की संख्याओं के वर्गों के अंतिम दो अंक।
- n → 2K(even) → $n^2=(2k)^2=4k^2$ → multiple of 4
  n → 2K+1(odd) → $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1 \to \underline{4(k^2+1)+1}$
  R=1 after divisible by 4

$\therefore n^2 \to 4K, 4K+1$

51767 → Not a perfect square / पूर्ण वर्ग नहीं

$\left(\frac{67}{47}, R=3\right)$

Find squares (वर्ग खोजें)

- **Base / आधार 100 →**

$102^2 = 102+2 \mid \underline{2}^2 = 10404$

$107^2 = 107+7 \mid 7^2 = 11449$

$113^2 = 113+13 \mid \underline{13}^2 = 126 \mid 169 \to 12769$

$121^2 = 121+121 \mid 21^2 = 142 \mid 441 \to 14641$

$97^2 = 97-3 \mid \underline{3}^2 = 9409$

$92^2 = 92-8 \mid 8^2 = 8464$

$83^2 = 83-17 \mid \underline{17}^2 = 66 \mid 289 \to 6889$

Base / आधार 50 $\to \frac{1}{2} \times 100$

$59^2 = \frac{1}{2}(59+9) \mid 9^2 \to 3481$

$54^2 = \frac{1}{2}(54+4) \mid 4^2 \to 2916$

$48^2 = \frac{1}{2}(48-2) \mid 2^2 \to 2304$

$44^2 = \frac{1}{2}(44-6) \mid 6^2 \to 1936$

$38^2 = \frac{1}{2}(38-12) \mid 12^2 \to 13 \mid 144 \to 1444$

$67^2 = \frac{1}{2}(67+17) \mid 17^2 \to 42 \mid 289 \to 4489$

Base / आधार 200 $\to 2 \times 100$

$208^2 = 2(208+8) \mid 8^2 = 43264$

$219^2 = 2(219+19) \mid 19^2 = 476 \mid 361 \to 47961$

$194^2 = 2(194-6) \mid 6^2 = 37636$

$182^2 = 2(182-18) \mid 18^2 = 328 \mid 324 \to 33124$

Base / आधार 150 $\to \frac{3}{2} \times 100$

$152^2 = \frac{3}{2}(152+2) \mid \underline{2}^2 \to 23104$

$141^2 = \frac{3}{2}(141-9) \mid 9^2 \to 19881$

- $614^2 = 6(614+14) \mid 14^2 \to 6\times628 \mid 196 \to 376996$
  $793^2 = 8(793-7) \mid 7^2 \to 8\times786 \mid 49 \to 628849$
- Last 2 digits of / के अंतिम 2 अंक →

18^2, 32^2, 68^2, 82^2, 118^2, 368^2

↓ $(50-18)^2$ = 24, ↓ $(100-18)^2$, ↓ $(350+18)^2$

$\therefore x^2, (50k \pm x)^2, (100k \pm x)^2 \to$ Last 2 digits same.
अंतिम 2 अंक समान।

- $x(x+a)(x+2a)(x+3a)+k$ is a perfect square then k=?
  $x(x+a)(x+2a)(x+3a)+k$ तब एक पूर्ण वर्ग है k=?

$\to (x^2+3ax)(\underline{x^2+3ax}+2a^2)$

$\to \underbrace{(x^2+3ax)^2}_{a^2} + \underbrace{2\times a^2\times(x^2+3ax)}_{+2ab} + b^2 = (a+b)^2$

$\therefore$ to make perfect square add $(a^2)^2 = a^4$

$\therefore$ पूर्ण वर्ग बनाने के लिए $(a^2)^2 = a^4$ जोड़ें

$\therefore (\underline{x^2+3ax}+a^2)^2$ & $k = a^4$

CamScanner

- If I, II, III, IV are in AP with common difference d
  यदि If I, II, III, IV सार्व अंतर d के साथ AP में है
  Then $I \times II \times III \times IV + d^4 = (I \times IV + d^2)^2$
- To make perfect square what should add from:
  पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें से क्या जोड़ना चाहिए:
  $1119 \times 1126 \times 1133 \times 1140$
  ∴ Gap between these consecutive numbers = 7
  इन क्रमागत संख्याओं के बीच का अंतर = 7
  ∴ 7^4 = **2401** should be added.
- To make perfect square what should subtract from:
  पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें से क्या घटाना चाहिए:
  $841 \times 846 \times 851 \times 856 + 700$
  ∴ $841 \times 846 \times 851 \times 856$ → to make square 5^4 = 625 should be added
  ∴ $841 \times 846 \times 851 \times 856$ → को वर्ग बनाने के लिए 5^4 = 625 जोड़ा जाना चाहिए

∴ $\underbrace{841\times846\times851\times856+625}_{\text{Perfect square}} + 75$ → should be subtracted

C.

Unit digit of N N का इकाई अंक	Unit digit of N^2 N^2 का इकाई अंक
N=1, 9	1
N=2, 8	4
N=3, 7	9
N=4,6	6
N=5	5

- If 3 is repeated n times
  I → Before 0 (n−1) times 1
  II → Before 9 (n−1) times 8

  eg. → $3^2 = 09$, $\underline{33333}^2 = \underline{1111}0\underline{8888}9$
  $\underline{33}^2 = \underline{1}0\underline{8}9$
  $\underline{333}^2 = \underline{11}0\underline{88}9$
- 6 is repeated n times
  I → Before 3 (n−1) times 4
  II → Before 6 (n−1) times 5
  eg. → $6^2 = 36$
  $\underline{66}^2 = \underline{4}3\underline{5}6$
  $\underline{666}^2 = \underline{44}3\underline{55}6$
  $\underline{666666}^2 = \underline{4444}3\underline{5555}6$
- $9^2 = 81$ $9999^2 = 99980001$
  $\underline{99}^2 = \underline{9}8\underline{0}1$
  $\underline{999}^2 = \underline{99}8\underline{00}1$
- $\sqrt{9999800001} + \sqrt{1111088889} - \sqrt{4444355556} = ?$
  99999 + 33333 − 66666 = **66666**
-

n^3		UD
1^3	1→	1
2^3	8→	8
3^3	27→	7
4^3	64→	4
5^3	125→	5
6^3	216→	6
7^3	343→	3
8^3	512→	2
9^3	729→	9

- $\sqrt[3]{571\underline{787}}$ → UD = 3
  → ignore last 3 digit / अंतिम 3 अंकों की उपेक्षा करें
  → smaller than 571 perfect cube number = 512 = 8^3
  → 571 से छोटा पूर्ण घन संख्या = 512 = 8^3
  ∴ $\sqrt[3]{571787}$ = **83**
- N^2 → odd no. of digits N^2 → even no. of digits
  $N \rightarrow \frac{\text{odd no. of digits} + 1}{2}$ $N \rightarrow \frac{\text{even no. of digits}}{2}$
- N^2 → 17 digits
  $N \rightarrow \frac{17+1}{2} = 9$ digits
  N^2 → 24 digits
  $N \rightarrow \frac{24}{2} = 12$ digits

Square Mirrors (वर्ग दर्पण)

- $14^2 + 87^2 = 78^2 + 41^2$
  $15^2 + 75^2 = 57^2 + 51^2$
  $17^2 + 84^2 = 48^2 + 71^2$
  $26^2 + 97^2 = 79^2 + 62^2$
  $27^2 + 96^2 = 69^2 + 72^2$

Non-terminating repeating decimal
(गैर-शांत आवर्ती दशमलव)

Let $x = 0.55555 ....$
(−) $10x = 5.55555 ....$
$9x = 5$ ∴ $x = \frac{5}{9}$

- $0.77777 .... = 0.\overline{7} \rightarrow \frac{7}{9}$ (no. of bar = no. of 9)
  $0.838383 .... = 0.\overline{83} \rightarrow \frac{83}{99}$

$0.514514514 .... = 0.\overline{514} \rightarrow \frac{514}{999}$

$0.6823232323 .... = 0.68\overline{23} \rightarrow \frac{6823-68}{9900} \rightarrow \frac{6755}{9900}$

(no. of non bar digit = no. of zero)

$7.518651865186 .... = 7 + \frac{5186}{9999}$

❖ $0.866666 .... = 0.8\overline{6} = \frac{86-8}{90} = \frac{78}{90} = \frac{13}{15}$

$0.531313131 .... = 0.5\overline{31} = \frac{531-5}{990} = \frac{526}{990}$

$0.43777777 .... = 0.43\overline{7} = \frac{437-43}{900} = \frac{394}{900}$

$0.8\overline{169}169 .... = 0.8\overline{169} = \frac{8169-8}{9990} = \frac{8161}{9990}$

$7.581\overline{6} \rightarrow 7 + \frac{5816-581}{9000} \rightarrow 7\frac{5235}{9000}$

OR $\frac{75816-7581}{9000} = \frac{68235}{9000}$

$11.43\overline{25} \rightarrow 11 + \frac{4325-43}{9900} \rightarrow 11\frac{4282}{9900} \rightarrow 11\frac{2141}{4950}$

OR $\frac{114325-1143}{9900} = \frac{113182}{9900}$

❖

B	O	D	M	A	S
↓	↓	↓	↓	↓	↓
Brackets	of	div.	multiply	Add	subtract

↓

small / ( )

middle /{ }

Larger / [ ]

of means multiplication

Surds & Indices (घातांक और करणी)

Law of Indices (करणी का नियम)

- $a \times a \times a \times .... \text{ n times} = a^n$
- $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$ $(a \neq 0)$

  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(m > n)$

  $= \frac{1}{a^{n-m}}$ $(n > m)$

  $= 1$ $(m = n)$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$
- $(abc)^n = a^n \times b^n \times c^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$
- $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

  $(3^2)^4 \neq 3^{2^4}$

  $3^8 \neq 3^{16}$
- $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q} \cdot p} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$
- If $a^m = a^n$ then $m = n$

  If $a^m = b^m$ then $a = b$
- $a^0 = 1$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ & $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$
- $(-1)^n = +1$ (n = even)

  $= -1$ (n = odd)

Laws of Surds (करणी के नियम)

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{a}$ → Radicand

  n → order of surd
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{mn}}$
- $\left(\sqrt[z]{\left(\sqrt[y]{\left(\sqrt[x]{a}\right)^m}\right)^n}\right)^o = a^{\frac{mno}{xyz}}$

Find Square Root (वर्गमूल ज्ञात करें)

- $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2+\sqrt{3}^2+2 \times \underbrace{2 \times \sqrt{3}}_{ab}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$

  $= \left(2+\sqrt{3}\right)$ $\quad (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$
- $\sqrt{28+10\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \rightarrow 2 \times 5\sqrt{3}$

  $5^2 + \sqrt{3}^2 = 28$

  $\therefore \left(5+\sqrt{3}\right)$
- $(a-b)^2 = (b-a)^2 = a^2+b^2-2ab$

  $\sqrt{a^2+b^2-2ab}$ → $a-b \rightarrow (a>b)$, $b-a \rightarrow (b>a)$
- $\sqrt{43-24\sqrt{3}} = \left(3\sqrt{3}-4\right)$ $\quad 24\sqrt{3} = 2 \times 12\sqrt{3}$

  $4 \quad 3\sqrt{3}$

  $16+27=43$
- $\sqrt{99-70\sqrt{2}} = \left(5\sqrt{2}-7\right)$ $\quad 70\sqrt{3} = 2 \times 35\sqrt{2}$

  $7 \quad 5\sqrt{2}$

  $49+50=99$
- $x = 5+2\sqrt{6}$

  $\frac{1}{x} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}} \rightarrow \frac{1}{5+2\sqrt{6}} \times \frac{5-2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} \rightarrow \frac{5-2\sqrt{6}}{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}$

  $= \frac{5-2\sqrt{6}}{25-24} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1}$ → sign change, → diff. of square
- $x = 7+4\sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{7-4\sqrt{3}}{1}$

  $\downarrow \quad \downarrow$

  $49 \quad 48$

CamScanner

❖ $x = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{43}$

$\downarrow \quad \downarrow$

75 32

❖ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

❖ $(x-1)(x+1) = x^2-1$

$\Rightarrow 1 + (x-1)(x+1) = x^2 \Rightarrow \sqrt{1+(x-1)(x+1)} = x$

Componendo & dividendo (योगांतरानुपात)

❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Apply C & D (Add and subtract den. in number)

C और D लागू करें

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Apply again

$\frac{a+b+(a-b)}{a+b-(a-b)} = \frac{c+d+(c-d)}{c+d-(c-d)}$

$\frac{2a}{2b} = \frac{2c}{2d}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$

If we apply C & D two times on a fract ion, same fraction is achieved.

यदि हम एक भिन्न पर दो बार C और D लगाते हैं, तो समान भिन्न प्राप्त होती है।

❖ $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{2(x+y)}{(x-y)}$

$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{+4\sqrt{xy}}{x-y}$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 4\sqrt{xy}$

❖ $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a....\infty}}}} = a$

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a....n\text{ times}}}} = a^{1-\frac{1}{2^n}} = a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a....\infty}}} = \sqrt{a} \qquad \sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a....\infty}}} = \sqrt[n-1]{a}$

$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a....\infty}}} = \sqrt[3]{a}$

❖ $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2} = x$

$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+1}-1}{2} = y$

$x-y = 1$

$xy = a$

OR Take two factors of a whose difference is 1 like

अथवा a के दो गुणनखंड लीजिए जिनका अंतर 1 हो।

$56 \leftarrow \begin{matrix}8\\7\end{matrix} \qquad 72 \leftarrow \begin{matrix}8\\9\end{matrix}$

Then x = Larger factor / तब x = बड़ा गुणक

y = smaller factor / यदि y = छोटा कारक

$x + y = \sqrt{4a+1}$

❖ $x = \sqrt{a+\sqrt[b]{a+\sqrt[b]{a+....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+b^2}+b}{2}$

$y = \sqrt{a-\sqrt[b]{a-\sqrt[b]{a-....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+b^2}-b}{2}$

$x-y = b$

$xy = a$

$x+y = \sqrt{4a+b^2}$

❖ $x = \sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a-3}+1}{2}$

$y = \sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$

$x-y = 1 \qquad xy = 2(a-1)$

❖ $\sqrt{a+\sqrt[b]{a-\sqrt[b]{a+....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a-3b^2}+b}{2}$

$\sqrt{a-\sqrt[b]{a+\sqrt[b]{a-....\infty}}} = \frac{\sqrt{4a-3b^2}-b}{2}$

❖ $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}$ Powers $\rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \rightarrow$ LCM = 12

$\therefore (\sqrt{2})^{12}, (\sqrt[3]{3})^{12}, (\sqrt[4]{5})^{12}$

$\rightarrow 2^6, 3^4, 5^3 \quad \therefore \sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

64 81 125

❖ If $x + y = 12$ (constant)

$(xy)_{max}$ = diff. of x & y should be min. $= 6 \times 6 = 36$

CamScanner

$(xy)_{min}$ = diff. of x & y should be max. = 1 × 11 = **11**

- $a > b > c$

  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

- $a \times b = 16$ (constant)

  $\therefore (a+b)_{min} = 4 + 4 = 8$ $\quad 1\times16 \rightarrow 16+1=17$

  $(a^2+b^2)_{min} = 4^2+4^2=32$

  $a\times b\times c = 125$ (constant) for min $a=b=c=5$

  $(a^2+b^2+c^2)min = 25+25+25 = 75$

Approx Root Value (लगभग वर्गमूल मान)

- $\sqrt{13}$: $\sqrt{9} \rightarrow 3$, $\sqrt{16} \rightarrow 4$

  $\therefore 3 < \sqrt{13} < 4$

  $3 + \frac{13-9}{16-9} \Rightarrow 3 + \frac{4}{7} \Rightarrow 3\frac{4}{7} \Rightarrow$ **3.57**

  $\sqrt{21}$: $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$ $\quad 4 + \frac{5}{9} \rightarrow 4\frac{5}{9} \rightarrow$ **4.55**

  $\sqrt[3]{53}$: $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{64}$ $\quad \rightarrow 3 + \frac{26}{37} \approx$ **3.7**

- $\sqrt{121} = 11$ $\quad \sqrt{1234321} = 111$

  $\sqrt{12321} = 111$ $\quad \sqrt{1234567654321} = 1111111$

- If I, II, III, IV are in AP with common diff. d then $I\times II\times III\times IV + d^4 = (I\times IV + d^2)^2$

Algebra (बीजगणित)

Square Formulae

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
3. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
4. $ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2}$
5. $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$
6. $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$
7. $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
8. $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
9. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2ab$
10. $(a^2 - b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$
11. $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$
12. $a^4 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2$
13. $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$
14. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)}$
15. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

Cube Formulae

1. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$
2. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
3. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
4. $a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$
6. $a^2 + b^2 - ab = \frac{a^3+b^3}{a+b}$
7. $a + b = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab}$
8. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$
9. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
10. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
11. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$
12. $a^3 - b^3 = (a - b)[(a - b)^2 + 3ab]$
13. $a^2 + b^2 + ab = \frac{a^3-b^3}{a-b}$
14. $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}$
15. $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b^3 + 6a^2b = 2b(b^2+3a^2)$
16. $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2+3b^2)$

Componendo & Dividendo Rule

If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

If $\frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{2x}{2y} = \frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b}$

How to find Conjugate

अगर square का difference 1 है तो conjugate में सिर्फ sign change होगा अगर difference 1 नहीं है तो square के difference से divide कर देंगे।

❖ If $x = 15 + 4\sqrt{14}$ then $\frac{1}{x} = ?$

$(15)^2 = 225$ $\left(4\sqrt{14}^2\right) = 224$

$\therefore \frac{1}{x} = 15 - 4\sqrt{14}$ (square का diff. 1 है इसलिए सिर्फ sign change होगा)

❖ If $x > \frac{1}{x}$

Then $x + \frac{1}{x}$ = **2 × Bigger no.** = 2 × 15 = 30

$x - \frac{1}{x}$ = **2 × smaller no.** = $2 \times 4\sqrt{14} = 8\sqrt{14}$

If $x < \frac{1}{x}$ then $x + \frac{1}{x}$ = **2× Big number**

$x - \frac{1}{x}$ = **−2 × small number**

Power 2 Formulae

1. If $x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$

☞ If $x + \frac{1}{x} = k$

Then $x(x - k) = -1$ (Important)

or $x(x - k) + 1 = 0$

or $x^2 - kx + 1 = 0$

CamScanner

2. If $x-\frac{1}{x}=k \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=k^2+2$

Then

$x-k=\frac{1}{x}$

$x(x-k)=1$ (important)

$x^2-kx-1=0$

3. If $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{2}$ then $x^2+\frac{1}{x^2}=0$

$x^4+1=0$

Power difference 4 results in zero

$\therefore x^4+x^0=0$

4. $x+\frac{1}{x}=k$

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}+2=k+2$

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\pm\sqrt{k+2}$

5. $x^2+\frac{1}{x^2}=k$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=k+2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)=\pm\sqrt{k+2}$

6. $x^2+\frac{1}{x^2}=k$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=k-2$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)=\pm\sqrt{k-2}$

Same Power Formulae

- If $x+\frac{1}{x}=k$, then $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{k^2-4}$
- If $x-\frac{1}{x}=k$, then $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{k^2+4}$
- If $\frac{A+B}{\sqrt{AB}}=a$, then $\frac{A-B}{\sqrt{AB}}=\pm\sqrt{a^2-4}$
- If $\sqrt{\frac{A}{B}}+\sqrt{\frac{B}{A}}=a$, then $\sqrt{\frac{A}{B}}-\sqrt{\frac{B}{A}}=\sqrt{a^2-4}$

Power 3 Formulae

1. If $x-\frac{1}{x}=k$, then $x^3-\frac{1}{x^3}=k^3+3k$

2. If $x+\frac{1}{x}=k$ then $x^3+\frac{1}{x^3}=k^3-3k$

$x+\frac{1}{x}=$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$x^3+\frac{1}{x^3}=$	2,	18	52	110	198	322	488	702	970
$x-\frac{1}{x}=$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$x^3-\frac{1}{x^3}=$	14,	36	76	140	234	364	536	756	1030

3. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{t}$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(\sqrt{t}\right)^3-3\sqrt{t}=t\sqrt{t}-3\sqrt{t}=(t-3)\sqrt{t}$

4. If $x-\frac{1}{x}=\sqrt{t}$

$x^3-\frac{1}{x^3}=(t+3)\sqrt{t}$

5. If $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=a$, then $x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=a^3-3a$

6. If $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=a$, then $x\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=a^3+3a$

7. If $\frac{a-b}{\sqrt{ab}}=k$ or $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}=k$,

then $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=k^3+3k$

8. If $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=k$ or $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=k$

then $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=k^3-3k$

9. If $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{3}$, then $x^3+\frac{1}{x^3}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$

$x^6+1=0$

$x^6=-1$

7. $(a^5-b^5)=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$(a^5+b^5)=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

CamScanner

Higher Power Formulae

1. $x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

2. $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

3. $\left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right)$

4. $x^7 + \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

5. $x^7 - \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)$

6. $x^8 - \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

Formulae based on $x + \frac{1}{x}$

1. If $x + \frac{1}{x} = 2$, then $x = 1$

2. If $x + \frac{1}{x} = -2$, then $x = -1$

3. If $x + \frac{1}{x} = 1$, then $x^3 = -1$

❖ If $x + \frac{1}{x} = 1$ then $x^2 - x + 1 = 0$

$x^2 - x + 1 = 0$
$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0(x + 1)$
$x^3 + 1 = 0$
$x^3 + x^0 = 0$ power difference 3 results in zero
$x^3 = -1$

4. If $x + \frac{1}{x} = -1$ or $x^2 + x + 1 = 0$

Then $x^3 = 1$
or $x^2 + x + 1 = 0$

Relation between Power 2 and Power 4

1. $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$
$(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = x^4 + y^4 + x^2y^2$
$(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = x^4 + y^4 + x^2y^2$
$\mathbf{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = x^4 + y^4 + x^2y^2}$

2. $x^2 + y^2 + xy = A$ and $x^2 + y^2 - xy = B$

$x^2 + y^2 = \frac{A + B}{2}$, $xy = \frac{A - B}{2}$

❖ If $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 189$, $x^2 + xy + y^2 = 21$

(i) $x^2 - xy + y^2 = \frac{189}{21} = \mathbf{9}$

(ii) $x^2 + y^2 = \frac{21 + 9}{2} = \mathbf{15}$

(iii) $xy = \frac{21 - 9}{2} = \mathbf{6}$

(iv) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{21 + 9}{21 - 9} = \mathbf{\frac{5}{2}}$

(v) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 = \mathbf{\frac{17}{4}}$

(vi) $x + y = ?$
$x^2 + xy + y^2 + xy = 21 + 6$
$(x + y)^2 = 27 \therefore x + y = \mathbf{3\sqrt{3}}$

(vii) $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = ?$
$x^2 - xy + y^2 - xy = 9 - 6 = 3$
$(x - y)^2 = 3$
$(x - y) = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

3. $\frac{x^6 - y^6}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2)^3 - (y^2)^3}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + y^4 + x^2y^2)}{(x^2 - y^2)}$
$= x^4 + y^4 + x^2y^2$

4. $a^2 + b^2 + ab = \left(a + b + \sqrt{ab}\right)\left(a + b - \sqrt{ab}\right)$

5. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

6. $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$
$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = x^4 + y^4$
$(x^2 + y^2)^2 - \left(\sqrt{2}xy\right)^2 = x^4 + y^4$
$(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy) = x^4 + y^4$

Concept of Root Value

❖ $(x)^2 = (-x)^2 = x^2$

$\sqrt{x^2} = +x$
$\sqrt{49} = 7$
Root के बाहर (+ve) value जायेगी

$(17)^2 = 49$

$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$

(a–b) → if a > b
(b–a) → if b > a

CamScanner

Concept of Degree

$3x^3 - 7x^2y + 8zx^2 \rightarrow$ Degree = 3 (highest powers)

$8x + 7 \rightarrow$ Degree = 1

$25x^2 - 10x^3 + 19z^{26}x^1 + 48w^1$

Degree = 27

Multiply में power add होगी।

Divide में power subtract होगी

$xy \rightarrow$ Degree = 2

$\frac{x^8}{y^3} \rightarrow$ Degree = 8 – 3 = 5

Symmetric Function

- Degree of each term is same on both sides.
- $a + b + c,\ a^2bc + b^2ca + c^2ab$
- $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2 \rightarrow$ Both side degree is 2
- $\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)} = ab + bc + ca$
- $\frac{a^3\times(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3\times(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3\times(a+b)}{(c-a)(c-b)}$
  $= ab + bc + ca$
- $\frac{a\times(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \frac{b\times(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c\times(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$
  $= a + b + c$
- If $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ then $\frac{x^m + y^m + z^m + w^m}{x^{-m} + y^{-m} + z^{-m} + w^{-m}} = (xyzw)^{m/2}$
- If $x = a + \frac{1}{a}$ and $y = a - \frac{1}{a}$ then $\sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2} = 4$
- If $x + y = 2z$, then the value of $= \frac{z}{x-z} + \frac{y}{y-z} = 0$
- If $x + y = 2z$, then $\frac{x}{x-z} + \frac{y}{y-z} = 2$

If a + b + c = 0, then following results follows

1. Then $\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(a+c)(b+a)} + \frac{1}{(c+a)(c+b)} = 0$
2. Then $\frac{a^2}{a^2-bc} + \frac{b^2}{b^2-ca} + \frac{c^2}{c^2-ab} = 2$
3. Then $\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} = 1$
4. Then $\frac{a^2+b^2+c^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2} = \frac{1}{3}$
5. Then $\frac{1}{a^2+b^2-c^2} + \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} = 0$
6. Then $\frac{2(a^4+b^4+c^4)}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = 4$
7. Then $\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2) = 0$
8. Then $\frac{2a^2}{(b^2+c^2-a^2)} + \frac{2b^2}{(a^2+c^2-b^2)} + \frac{2c^2}{(a^2+b^2-c^2)} = -3$

Some other results

⇒ $(x^2 + ax + bx + ab) = (x + a)(x + b)$

⇒ $1 + A + B + AB = (1 + A)(1 + B)$

⇒ $(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$

⇒ If $xy = 1$ or $x = \frac{1}{y}$ then $\frac{1}{1+x^n} + \frac{1}{1+y^n} = 1$

- If $a + b + c = 2s$, then $\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$
- If $xy + yz + zx = 0$, then $\left(\frac{1}{x^2-yz} + \frac{1}{y^2-zx} + \frac{1}{z^2-xy}\right) = 0\ (x, y, z \neq 0)$
- If $pq + qr + rp = 0$, then $\left(\frac{p^2}{p^2-qr} + \frac{q^2}{q^2-rp} + \frac{r^2}{r^2-pq}\right) = 1$
- If $\left[\sqrt{(a^2+b^2+ab)} + \sqrt{(a^2+b^2-ab)}\right] = 1$, then $(1 - a^2)(1 - b^2) = \frac{3}{4}$
- If $\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = 1$, where x and y are real numbers, then $(x + y)^2 = 0$
- $\frac{x^4}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)} + \frac{y^4}{(y^2-x^2)(y^2-z^2)} + \frac{z^4}{(z^2-x^2)(z^2-y^2)} = 1$
- If $a + b + c = abc$, then
  $\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab} + \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc} + \frac{(1-c^2)(1-a^2)}{ca} = 4$
- If $bc + ca + ab = abc$, then
  $\frac{b+c}{bc(a-1)} + \frac{c+a}{ca(b-1)} + \frac{a+b}{ab(c-1)} = 1$

CamScanner

❖ If $xy + yz + xz = 1$, then $\left(\frac{x+y}{1-xy}+\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-xz}\right)$

$= \frac{1}{xyz}$

❖ If $x = \frac{a-b}{a+b}, y = \frac{b-c}{b+c}, z = \frac{c-a}{c+a}$,

then $\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{(1+x)(1+y)(1+z)} = 1$

❖ If $x^2 + y^2 = z + 1$, $y^2 + z^2 = x + 1$, $z^2 + x^2 = y + 1$, then

$xyz = 1$ or $-\frac{1}{8}$

❖ $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = (b-a)(b-c)(c-a)$

❖ $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = (a+b)(b+c)(c+a)$

❖ $(a+b+c)(ab+bc+ca) = a^2b + b^2a + b^2c + bc^2 + a^2c + a^2c + 3abc$

❖ $(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$

❖ If $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ (where $a \neq b \neq c$) then abc is equal to $= \pm 1$

3 Variable Formulae

1. If $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, then $x = 0, y = 0, z = 0$

2. $\mathbf{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}$

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

$ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2}$

$(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

3. $\mathbf{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]}$

↓

$\frac{1}{2}[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca]$

$\frac{1}{2}[a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+a^2+c^2-2ca]$

$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

4. If $\underset{+d}{a}, \underset{+d}{b}, c$ are in A.P. with comon difference d

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}[d^2+d^2+(2d)^2] = \mathbf{3d^2}$

5. $\left.\begin{array}{l}\text{If } a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\\ \text{OR } a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{a=b=c}$

6. $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2} = \frac{a+b+c}{2}$

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$

$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2]$

7. $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$

If $a+b+c=0$ then $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

OR $a^3+b^3+c^3=3abc$

8. $a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

If $a^3+b^3+c^3-3abc = 0$

OR $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

$a+b+c = 0$ $\quad$ $a = b = c$

❖ If a, b, c are distinct integers & $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ then $a+b+c=0$

❖ If a, b, c are +ve integers & $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ then $a = b = c$

❖ If a, b, c are in A.P. then $a^3+b^3+c^3-3abc = 9bd^2$

9. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]+2abc$

$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

10. If $x + \frac{1}{y} = a$, $y + \frac{1}{z} = b$, $z + \frac{1}{x} = c$

then $xyz + \frac{1}{xyz} = abc - (a+b+c)$

11. If $x - \frac{1}{y} = a$, $y - \frac{1}{z} = b$, $z - \frac{1}{x} = c$

then $xyz - \frac{1}{xyz} = abc + (a+b+c)$

12. If $a + b + c = x$

and $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = y$

Then $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} = xy - 3$

CamScanner

Theory of Equations (समीकरणों का सिद्धांत)

Polynomial (बहुपद)

❖ An algebraic expression of the form $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, where $n \in N$, is called a polynomial. It is generally denoted by $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $g(x)$ etc.

$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ के रूप का एक बीजगणितीय व्यंजक, जहाँ $n \in N$, बहुपद कहलाता है। इसे आमतौर पर $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $g(x)$ आदि द्वारा दर्शाया जाता है।

Real Polynomial (वास्तविक बहुपद)

Let $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ be real numbers and x is a real variable, then, $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ is called a real polynomial of real variable x with real coefficients.

माना कि $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ वास्तविक संख्याएं हैं और x एक वास्तविक चर है, फिर, $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ को वास्तविक गुणांक के साथ वास्तविक चर x का वास्तविक बहुपद कहा जाता है।

Degree of a Polynomial (एक बहुपद की डिग्री)

❖ A Polynomial $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$, real or complex is a polynomial of degree n, if $a_n \neq 0$.

एक बहुपद $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$, वास्तविक या जटिल डिग्री n का एक बहुपद है, अगर एक $a_n \neq 0$।

Some Important Deduction

(i) **Linear Polynomial** A polynomial of degree one is known as linear polynomial.

रेखीय बहुपद एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।

(ii) **Quadratic Polynomial** A polynomial of second degree is known as quadratic polynomial.

द्विघात बहुपद दूसरी डिग्री के बहुपद को द्विघात बहुपद के रूप में जाना जाता है।

(iii) **Cubic Polynomial** A polynomial of degree three is known as cubic polynomial.

घन बहुपद तीन डिग्री के बहुपद को घन बहुपद के रूप में जाना जाता है।

(iv) **Biquadratic Polynomial** A polynomial of degree four is known as biquadratic polynomial.

द्विवर्गीय बहुपद चार डिग्री के बहुपद को द्विवर्गीय बहुपद के रूप में जाना जाता है।

Polynomial Equation / बहुपद समीकरण

If $f(x)$ is a polynomial, real or complex, then $f(x)=0$ is called a polynomial equation.

अगर $f(x)$ एक बहुपद, वास्तविक या जटिल है, तो $f(x)=0$ एक बहुपद समीकरण कहा जाता है।

Quadratic Equation (द्विघात समीकरण)

❖ A quadratic polynomial $f(x)$ when equated to zero is called quadratic equation.

एक द्विघात बहुपद $f(x)$ जब शून्य के बराबर हो तो द्विघात समीकरण कहलाता है।

i.e. $ax^2+bx+c=0$, where $a,b,c \in R$ and $a \neq 0$.

Roots of a Quadratic Equation

एक द्विघात समीकरण की जड़ें

The values of variable x which satisfy the quadratic equation is called roots of quadratic equation.

चर x के वे मान जो द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते हैं, द्विघात समीकरण के मूल कहलाते हैं।

Solution of Quadratic Equation

द्विघात समीकरण का हल

1. **Factorisation Method / गुणनखंडन विधि**

Let $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$. Then, $x = \alpha$ and $x = \beta$ will satisfy the given equation.

मान लीजिए $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$. तब, $x = \alpha$ और $x = \beta$ दिए गए समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

2. **Direct Formula / प्रत्यक्ष सूत्र**

Quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ has two roots, given by

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ के दो मूल हैं, जो निम्नलिखित हैं

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{or } \alpha = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

where, $D = \Delta = b^2 - 4ac$ is called discriminate of the equation.

जहाँ, $D = \Delta = b^2 - 4ac$ समीकरण का विविक्तक कहलाता है।

Above formulas also known as **Sridharachary formula.**

उपरोक्त सूत्रों को श्रीधराचार्य सूत्र के नाम से भी जाना जाता है।

CamScanner

Nature of Roots (मूल की प्रकृति)

(i) Let quadratic equation be $ax^2 + bx + c = 0$, whose discriminate is D.

Nature of Roots

- If D = 0 → Roots are real and equal
- If D > 0 → D = Perfect square → Roots are real, unequal and rational
- If D > 0 → D = Not square → Roots are real, unequal and irrational
- If D < 0 → Roots are imaginary

(ii) **Conjugate Roots** The irrational (complex) roots of a quadratic equation, whose coefficients are rational (real) always occur in conjugate pairs. Thus,

संयुग्मी मूल द्विघात समीकरण के अपरिमेय (जटिल) मूल, जिनके गुणांक परिमेय (वास्तविक) होते हैं, सदैव संयुग्म युग्मों में होते हैं। इस प्रकार,

(a) If one root be $\alpha + i\beta$, then other root will be $\alpha - i\beta$.

यदि एक मूल $\alpha + i\beta$ है तो दूसरा मूल $\alpha - i\beta$ पद होगा।

(b) If one root be $\alpha + \sqrt{\beta}$, then other root will be $\alpha - \sqrt{\beta}$. / यदि एक मूल $\alpha + \sqrt{\beta}$ है, तो दूसरा मूल $\alpha - \sqrt{\beta}$ होगी।

Relation between Roots and Coefficients
(मूल और गुणांक के बीच संबंध)

1. Quadratic Equation / द्विघात समीकरण

If roots of quadratic equation $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ are α and β, then

यदि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ के मूल α और β हैं, तो

Sum of roots / मूलों का योग $= S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$= -\frac{\text{coefficient of } x}{\text{coefficient of } x^2}$

Product of roots / मूलों का गुणनफल

$= P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{constant term}}{\text{coefficient of } x^2}$

Also, $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$

2. Cubic Equation / घन समीकरण

If α, β and γ are the roots of cubic equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

यदि α, β और γ घन समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के मूल हैं।

Then, $\Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

3. Biquadratic Equation / द्विवर्गीय समीकरण

If α, β, γ and δ are the roots of the biquadratic equation

यदि α, β, γ और δ द्विवर्गीय समीकरण के मूल हैं

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, then

$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$,

$S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$

$= (-1)^2 \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$

or $S_2 = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) + \alpha\beta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$

$S_3 = \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \alpha\beta\delta$

$= (-1)^3 \frac{d}{a} = -\frac{d}{a}$

or $S_3 = \alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = -\frac{d}{a}$

and $S_4 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = (-1)^4 \frac{e}{a} = \frac{e}{a}$

Formation of Polynomial Equation from Given Roots
दिए गए मूलों से बहुपद समीकरण का निर्माण

❖ If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, a_n$ are the roots of an nth degree equation, then the equation is $x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^n S_n = 0$, where S_n denotes the sum of the products of roots taken n at a time.

अगर $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, a_n$ डिग्री समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण है $x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^n S_n = 0$, जहां S_n एक समय में ली गई मूलों के गुणनफल के योग को दर्शाता है।

1. Quadratic Equation / द्विघात समीकरण

If α and β are the roots of a quadratic equation, then the equation is $x^2 - S_1x + S_2 = 0$, where S_1 = sum of roots and S_2 = product of roots

यदि α और β द्विघात समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण $x^2 - S_1x + S_2 = 0$ है, जहाँ S_1 = मूलों का योग और S_2 = मूलों का गुणनफल

2. Cubic Equation / घन समीकरण

If α, β and γ are the roots of cubic equation, then the equation is

यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण है

$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$

i.e. $x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

CamScanner

3. Biquadratic Equation / द्विवर्गीय समीकरण

If α, β, γ and δ are the roots of a biquadratic equation, then the equation is

यदि α, β, γ और δ द्विवर्गीय समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण है

$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$

i.e. $x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3$

$+ (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\alpha\delta+\beta\delta+\alpha\gamma)x^2$

$- (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha)x + \alpha\beta\gamma\delta = 0$

Maximum and Minimum Values of Quadratic Expression (द्विघात व्यंजक का अधिकतम और न्यूनतम मान)

(i) If $a > 0$, quadratic expression has least value at $x = \frac{-b}{2a}$. This least value is given by $\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$. But their is no greatest value.

यदि $a > 0$, $x = \frac{-b}{2a}$ पर द्विघात व्यंजक का मान न्यूनतम है, तो यह न्यूनतम मान $= \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ लेकिन उनका कोई अधिकतम मान नहीं है।

(ii) If $a < 0$, quadratic expression has greatest value at $x = -\frac{b}{2a}$. This greatest value is given by $\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$. But their is no least value.

यदि $a < 0$, द्विघात व्यंजक का $x = -\frac{b}{2a}$ पर सबसे बड़ा मान है, तो वह सबसे बड़ा मान $= \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ लेकिन उनका कोई न्यूनतम मान नहीं है।

Inequality (असमानता)

❖ A statement involving the symbols >, <, ≤ or ≥ is called an inequality or in equation.

Here, the symbols < (less than), > (greater than), ≤ (less than or equal to) and ≥(greater than or equal to) are known as symbol of inequalities.

>, <, ≤ या ≥ प्रतीकों को शामिल करने वाले एक कथन को असमानता या समीकरण कहा जाता है। यहाँ, प्रतीक < (इससे कम), > (इससे बड़ा), ≤ (इससे कम या इसके बराबर) और ≥ (इससे बड़ा या इसके बराबर) को असमानताओं के प्रतीक के रूप में जाना जाता है।

e.g. $5<7$, $x \le 2$, $x + y \ge 11$

Types of Inequalities / असमानताओं के प्रकार

(i) **Numerical inequality** An inequality which does not involve any variable is called a numerical inequality.

संख्यात्मक असमानता एक असमानता जिसमें कोई चर शामिल नहीं होता है, संख्यात्मक असमानता कहलाती है।

e.g. $4 > 2$, $8 < 21$

(ii) **Literal inequality** An inequality which have variables is called literal inequality.

शाब्दिक असमानता एक असमानता जिसमें चर होते हैं, शाब्दिक असमानता कहलाती है।

e.g. $x < 7$, $y \ge 11$, $x - y \le 4$

(iii) **Strict inequality** An inequality which have only <or> is called strict inequality.

कठोर असमानता ऐसी असमानता जिसमें केवल <या> हो, कठोर असमानता कहलाती है।

e.g. $3x + y < 0$, $x > 7$

(iv) **Slack inequality** An inequality which have only

सुस्त असमानता एक असमानता जो केवल है

≥or≤ is called slack inequality.

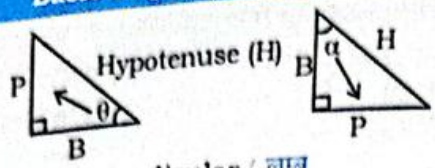
≥ या ≤ को सुस्त असमानता कहा जाता है।

e.g. $3x + 2y \le 0$, $y \ge 4$

CamScanner

Trigonometry (त्रिकोणमिति)

Basic Triplets Theory (बेसिक ट्रिपल थ्योरी)

1. 

P → Perpendicular / लम्ब

B → Base / आधार

$H^2 = P^2 + B^2$ → Pythagoras Theorem / पाइथागोरस प्रमेय

2. A Pythagoras triplet is a set of Positive integers a, b and c that fits the rule : $a^2 + b^2 = c^2$

एक पाइथागोरस त्रिगुण धन पूर्णांकों a, b और c का एक सेट है जो $a^2 + b^2 = c^2$ नियम को सही करता है:

$3^2 + 4^2 = 5^2$

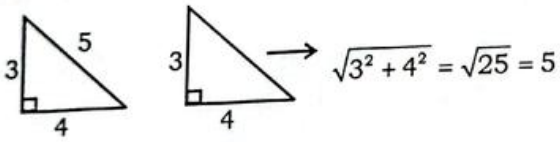
∴ 3, 4, 5 are triplets / त्रिगुण हैं

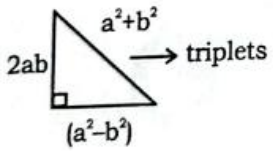
3. **Some Pythagorean Triplets** / कुछ पाइथागोरस त्रिक :

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)
(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(11, 60, 61)
(12, 35, 37)	(13, 84, 85)	(16, 63, 65)
(20, 21, 29)	(28, 45, 53)	(33, 56, 65)
(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)
(65, 72, 97)	(20, 99, 101)	

In a triplet largest side is hypotenuse

एक त्रिक में सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है





❖ a^2-b^2, 2ab, a^2+b^2
x^2-1, $2x$, x^2+1
a−b, $2\sqrt{ab}$, a+b
] Triplets form

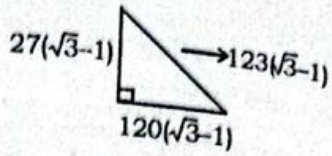
4. Multiplication and division of basic triplets results into other triplets

मूल त्रिक का गुणन और विभाजन अन्य त्रिक में बदल जाता है

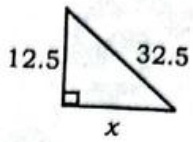
(3, 4, 5) $\xrightarrow{\times 2}$ (6, 8, 10) $\xrightarrow{\times 2}$ (12, 16, 20)

(5, 12, 13) $\xrightarrow{\times 2}$ (10, 24, 26) $\xrightarrow{\times 1.5}$ (15, 36, 39)

(3, 4, 5) $\xrightarrow{\times\sqrt{2}}$ $(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

❖ 

9,	40,	41	→ Triplet
↓×3	↓×3	↓×3	
27	120	123	

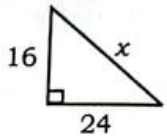


12.5 : 32.5 5, 12, 13 → Triplet

5 : 13

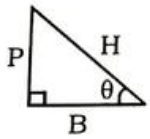
∴ $x = 12 \times 2.5 = \mathbf{30}$

❖ जब Triplet ना बने→



16 :	24	x
		↓
8 × 2	8 × 3	$8\sqrt{9+4} = \mathbf{8\sqrt{13}}$

Basic Trigonometry Ratios (मूल त्रिकोणमिति अनुपात)

1. 

$\sin\theta = \frac{P}{H}$ $\cot\theta = \frac{B}{P}$

$\cos\theta = \frac{B}{H}$ $\sec\theta = \frac{H}{B}$

$\text{Tan}\theta = \frac{P}{B}$ $\text{cosec}\theta = \frac{H}{P}$

2. $\text{Cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ⇒ $\mathbf{\sin\theta \times \text{cosec}\theta = 1}$

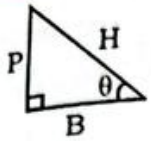
$\text{Sec}\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ⇒ $\mathbf{\cos\theta \times \sec\theta = 1}$

$\text{Cot}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ⇒ $\mathbf{\tan\theta \times \cot\theta = 1}$

3. $\text{Tan}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sec\theta}{\text{cosec}\theta}$

$\text{Cot}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\text{cosec}\theta}{\sec\theta}$

Basic Trigonometric Identities (बुनियादी त्रिकोणमितीय पहचान)



$P^2 + B^2 = H^2$

1. $\left(\dfrac{P}{H}\right)^2 + \left(\dfrac{B}{H}\right)^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \rightarrow \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \rightarrow \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 = 1^2$

$\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$

$\mathbf{\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = (1)^3$

$\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$

$\mathbf{\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta}$

2. $(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \div \cos^2\theta$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \rightarrow \tan^2\theta = (\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$

$\downarrow$

$\dfrac{\text{Tan}\theta}{(\sec\theta+1)} = \dfrac{(\sec\theta-1)}{\tan\theta}$

$\mathbf{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

$(\sec\theta - \tan\theta) = \dfrac{1}{(\sec\theta + \tan\theta)}$

$(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^2 = (1)^2$

$\sec^4\theta + \tan^4\theta - 2\sec^2\theta\tan^2\theta = 1$

$\mathbf{\sec^4\theta + \tan^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta}$

$(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^3 = (1)^3$

$\sec^6\theta - \tan^6\theta - 3\sec^2\theta\tan^2\theta \times 1 = 1$

$\mathbf{\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\sec^2\theta\tan^2\theta}$

3. $(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \div \sin^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

$\mathbf{\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1} \Rightarrow \dfrac{\cot\theta}{\text{cosec}\theta + 1} = \dfrac{\text{cosec}\theta - 1}{\cot\theta}$

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$(\text{cosec}\theta + \cot\theta)(\text{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$(\text{cosec}\theta + \cot\theta) = \dfrac{1}{(\text{cosec}\theta - \cot\theta)}$

$\mathbf{\text{cosec}^4\theta + \cot^4\theta = 1 + 2\text{cosec}^2\theta\cot^2\theta}$

$\mathbf{\text{cosec}^6\theta - \cot^6\theta = 1 + 3\,\text{cosec}^2\theta\cot^2\theta}$

Trigonometry Ratio Table (त्रिकोणमिति अनुपात तालिका)

Angle (In Degrees)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Angle (In Radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Not Defined	0	Not Defined	1
cot	Not Defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Not Defined	0	Not Defined
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	Not Defined	−1	Not Defined	1
cosec	Not Defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	Not Defined	−1	Not Defined

CamScanner

❖ $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$

$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

$\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \sec\theta\,\text{cosec}\theta = 2\,\text{cosec}2\theta$

Range

1. $-1 \le \sin\theta \le +1$

$\sin\theta = \dfrac{P}{H}$ H > P (∴ Always between –1 and +1)

$-1 \le \cos\theta \le +1 \qquad (-1)^2 = 1$

$-\infty \le \tan\theta, \cot\theta \le +\infty$

$\therefore 0 \le \sin^2\theta, \cos^2\theta \le +1$

$0° \to 90°$ $\sin\theta$ increases from 0 to 1

$0° \to 90°$ $\cos\theta$ decreases from 1 to 0

$\sin 61° > \cos 32° \Rightarrow \cos 32° = \sin 58°$

$\therefore \sin 61° > \sin 58°$

$\therefore \sin 61° > \cos 32°$

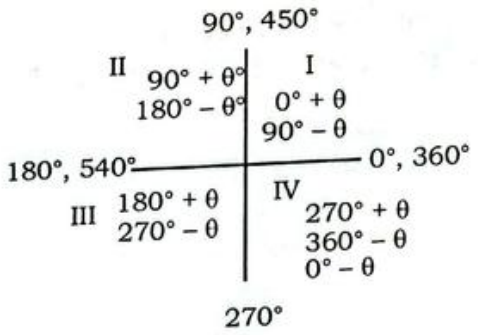
2. $0° < \theta < 45°$ $\quad \sin\theta < \cos\theta \quad \sin 19° < \cos 19°$

$45° < \theta < 90°$ $\quad \sin\theta > \cos\theta \quad \sin 71° < \cos 71°$

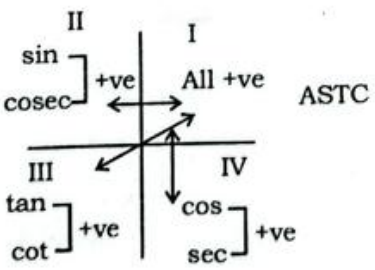
3. If $0 < x < 1$, $\quad x > x^2$

Quadrant theory (चतुर्थांश सिद्धांत)

1.



$\theta \to$ **Any Acute Angle** / कोई न्यून कोण



sin पट → sin +ve in I, II

cos खड़ा → cos +ve in I, IV

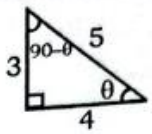
tan तिरछा → Tan +ve in I, III

2. Change of T-Ratio / टी-अनुपात का परिवर्तन

90°, 270° .... (90° के odd multiple पर change)

180°, 360° .... no change (90° के even multiple पर no change)

sin ↔ cos, tan ↔ cot, sec ↔ cosec



$\sin(90°-\theta) = \dfrac{4}{5} = \cos\theta$

$\therefore \cos(90°-\theta) = \sin\theta$

$\tan(90°-\theta) = \cot\theta \qquad \sec(90°-\theta) = \text{cosec}\theta$

$\cot(90°-\theta) = \tan\theta \qquad \text{cosec}(90°-\theta) = \sec\theta$

❖ $\text{Sin}(90°+\theta) = \cos\theta$

$\text{Cos}(90°+\theta) = -\sin\theta$

$\text{Tan}(90°+\theta) = -\cot\theta$

$\text{Cot}(90°+\theta) = -\tan\theta$

$\text{Sec}(90°+\theta) = -\text{cosec}\theta$

$\text{Cosec}(90°+\theta) = \sec\theta$

$\text{Tan}150° = \text{Tan}(90°+60°) = -\cot 60° = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\text{Sin}120° = \sin(90°+30v°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{Cos}120° = \cos(180°-60°) = -\cos 60° = \dfrac{-1}{2}$

❖ $\text{Sin}(180°-\theta) = \sin\theta$

$\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$

$\cot(180°-\theta) = -\cot\theta$

$\text{Sec}150° = \sec(180°-30°) = -\sec 30° = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

$\text{Tan}135° = \text{Tan}(180°-45°) = -\text{Tan}45° = -1$

❖ $\text{Sin}(180°+\theta) = -\sin\theta$

$\text{Cos}(180°+\theta) = -\cos\theta$

$\text{Cos}210° = \cos(180°+30°) = -\cos 30° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$\text{Sin}225° = \sin(180°+45°) = -\sin 45° = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$\text{Cot}240° = \text{Cot}(270°-30°) = -\text{Tan}30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

❖ $\text{Cos}(270°-\theta) = -\text{Sin}\theta$

$\text{Tan}(270°-\theta) = \cot\theta$

$\text{Cosec}(270°-\theta) = -\sec\theta$

$\text{Sec}240° = \sec(270°-30°) = -\text{cosec}30° = -2$

CamScanner

❖ $\sin(270°+\theta) = -\cos\theta$
$\cos(270°+\theta) = \sin\theta$
$\tan(270°+\theta) = -\cot\theta$

$\sin 300° = \sin(270°+30°) = -\cos 30° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\cot 315° = \cot(270°+45°) = -\tan 45° = -1$

$\text{cosec}\,330° = \text{cosec}(360°-30°) = -\text{cosec}\,30° = -2$

❖ $\sin(360°-\theta) = -\sin\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\tan 780° = \tan(360°\times2+60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

$\text{cosec}\,1125° = \text{cosec}(360°\times3+45°) = \text{cosec}\,45° = \sqrt{2}$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin 180° = 0$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\cos 180° = -1$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan 180° = 0$

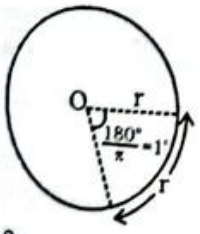
$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$

If A+B = 90° then

1. If $A+B=90° \Rightarrow$ A, B are complementary to each other
2. $\sin A = \cos B \rightarrow \sin A \sec B = 1$
3. $\tan A = \cot B \rightarrow \tan A \tan B = 1$ or $\cot A \cot B = 1$
4. $\sec A = \text{cosec}\,B \rightarrow \cos A\,\text{cosec}\,B = 1$
   $\tan 31 \times \tan 59° = 1$
5. $\sin^2 A + \sin^2 B = 1 \rightarrow \sin^2 A + \sin^2(90-A)$
6. $\cos^2 A + \cos^2 B = 1 \rightarrow \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Radian Angle Theory (रेडियन कोण सिद्धांत)

1. $\frac{\text{circumference}}{\text{diameter}}$ = fixed number
   = π (Irrational numer)



$2\pi r \rightarrow 360°$

$r \rightarrow \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 1$ radian

circle के Radius की बराबर की Arc centre पर 1 radian का Angle बनाएगी।

π radian (π^c) = 180°

1° = 60', 1' = 60"

2. **1° ≈ 57°16'22"**

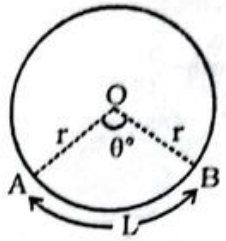
π radian = 180°

$1 \text{ rad } (1^c) = \frac{180° \times 7}{22} = \frac{630°}{11} = 57° + \frac{3°}{11}$

$\Rightarrow 3° = 180' \rightarrow \frac{180'}{11} = 16' + \frac{4'}{11}$ $\quad \therefore 1^c = 57°16'22"$

$\Rightarrow 4' = 240" \rightarrow \frac{240}{11} = 22"$

3.



$\overline{AB} = L = 2\pi r \times \frac{\theta°}{360°}$

$L = r \times \frac{\pi\theta°}{180°}$

$\mathbf{L = r \times \theta^c}$

$\theta° = \theta \times \frac{\pi}{180°}$

Some Important Properties (कुछ महत्वपूर्ण गुण)

1. If $a\sin\theta + b\cos\theta = c$
   $a\cos\theta - b\sin\theta = x$ (let)] square and add

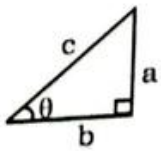
   $\mathbf{a^2+b^2 = c^2 + x^2}$ OR $\mathbf{x^2 = a^2 + b^2 - c^2}$

❖ If $a\sin\theta + b\cos\theta = c$ and $a^2+b^2 = c^2$

↓ P ↓ B ↓ H

$\frac{a}{c}\sin\theta + \frac{b}{c}\cos\theta = 1$
$\sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cos\theta = 1$] compare

$\sin\theta = \frac{a}{c}$, $\cos\theta = \frac{b}{c}$



❖ If $48\sin\theta + 55\cos\theta = 73$ then $\cot\theta = \frac{55}{48}$

↓ P ↓ B ↓ H

❖ $(\sin\theta+\sec\theta)^2+(\cos\theta+\text{cosec}\,\theta)^2 = (1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta)^2$

❖ $(1-\sec\theta+\tan\theta)(1+\text{cosec}\,\theta+\cot\theta) = 2$

CamScanner

2. If $a\sec A+b\tan A = c$
Then $a\tan A+b\sec A = x$ (Let)) square and subtract

$a^2-b^2=c^2-x^2 \Rightarrow x^2 = c^2 - a^2+b^2$

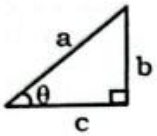
$x = \pm\sqrt{c^2 - a^2 + b^2}$

❖ If $a\sec A - b\tan A = c$
$a\tan A - b\sec A = x$ (let)
$\Rightarrow a^2-b^2=c^2-x^2$

❖ If $a\sec\theta-b\tan\theta = c$ and $a^2=b^2+c^2$

$\frac{a}{c}\sec\theta-\frac{b}{c}\tan\theta=1$
$\sec\theta\sec\theta-\tan\theta=1$) compare $\sec\theta=\frac{a}{c}$, $\tan\theta=\frac{b}{c}$

$\therefore a\sec\theta-b\tan\theta = c$
↓ ↓ ↓
H P B



3. **If $\sec x + \tan x = \frac{a}{b}$ then $\operatorname{cosec} x + \cot x = \frac{a+b}{a-b}$**
(a > b)

$\sec x + \tan x = \frac{a}{b}$

$\sec x - \tan x = \frac{b}{a}$

$2\sec x = \frac{a^2+b^2}{ab}$

$\sec x = \frac{a^2+b^2}{ab}$

$\sec x = \frac{a^2+b^2 \to H}{2ab \to B}$

$\therefore P = a^2-b^2$
↓

$\frac{H}{P}+\frac{B}{P}=\frac{H+B}{P}$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}$

$=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}$

Formula form - (A+B)

1. $\sin(A+B) = \sin A\cos B+\cos A\sin B$
$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

2. $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

3. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2A\cos^2B - \cos^2A\sin^2B$
$= \sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$
$= \sin^2A-\sin^2B = \cos^2B-\cos^2A$

$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A$

4. $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

❖ $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

❖ $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

❖ $\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

❖ $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

Multiples of Angle (कोण के गुणक)

1. $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\operatorname{Tan}A}{1+\operatorname{Tan}^2A}$

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}}$

$\operatorname{cosec}2A = \frac{\operatorname{Sec}A.\operatorname{Cos}ecA}{2}$

2. $\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=1-2\sin^2A=2\cos^2A-1=\frac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}$

$=\frac{\cot^2A-1}{\cot^2A+1}$

$\cos A = \sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}}$

3. $\operatorname{Tan}2A = \frac{2\operatorname{Tan}A}{1-\tan^2A}$

4. $\operatorname{Sin}3A = 3\sin A-4\sin^3A$
$\operatorname{Cos}3A = 4\cos^3A - 3\cos A$

$\operatorname{Tan}3A = \frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}$

5. $\text{Tan}(A+B) = \dfrac{\text{Tan}A + \text{Tan}B}{1 - \text{Tan}A\,\text{Tan}B}$

$\text{Tan}(A-B) = \dfrac{\text{Tan}A - \text{Tan}B}{1 + \text{Tan}A\,\text{Tan}B}$

6. $\text{Cot}(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$

$\text{Cot}(A-B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

Some special formulae (कुछ खास सूत्र)

1. $\text{Tan}(45-\theta) = \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$, $\text{Tan}(45+\theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

2. If $A+B = 45°$ or $225° \Rightarrow$ **(1+TanA) (1+TanB) = 2**

$\tan(A+B) = \tan 45°$

$\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1 \Rightarrow$ **tanA+tanB+tanAtanB = 1**

$1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B = 1+1$

$\Rightarrow$ **(1+tanA) (1+tanB) = 2**

3. If $A+B = 45°$ or $225° \Rightarrow$ **(cotA–1) (cotB–1) = 2**

OR **(1–cotA) (1–cotB) = 2**

4. $\text{Tan}(A+B+C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

Put B = C = 'A' $\Rightarrow$ **Tan3A** $= \dfrac{\mathbf{3\,TanA - \tan^3 A}}{\mathbf{1 - 3\tan^2 A}}$

If $A+B+C=90°$

$\dfrac{\sin 90°}{\cos 90°} = \dfrac{1}{0} = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

$\Rightarrow \text{Tan}A\text{Tan}B + \text{Tan}B\text{Tan}C + \tan C\text{Tan}A = 1$

OR $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$

❖ If $A+B+C = 180°$

$\Rightarrow \text{Tan}A + \text{Tan}B + \text{Tan}C = \text{Tan}A\text{Tan}B\text{Tan}C$

$\Rightarrow \cot A.\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

5. $\text{Tan}4\theta = \dfrac{4\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$

6. $\cos^2\theta + \cos^2(60-\theta) + \cos^2(60+\theta) = \dfrac{3}{2}$

7. $\cos^3 A + \cos^3(120°-A) + \cos^3(120°+A) = \dfrac{3}{4}\cos 3A$

8. $\text{Tan}\theta - \text{Tan}(60-\theta) + \tan(60+\theta) = 3\tan 3\theta$

$\cot\theta - \cot(60-\theta) + \cot(60+\theta) = 3\cot 3\theta$

9. $\sin\theta\sin(60-\theta)\sin(60+\theta) = \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

$\cos\theta\cos(60-\theta)\cos(60+\theta) = \dfrac{1}{4}\cos 3\theta$

$\tan\theta\tan(60-\theta)\tan(60+\theta) = \tan 3\theta$

10. $\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cos 2^3\theta \ldots\ldots \cos 2^n\theta = \dfrac{\sin 2^{n+1}\theta}{2^{n+1}\sin\theta}$

11. $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ $\quad \cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ $\quad \sin 36° = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

12. $\text{Sin}75° = \cos 15° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\text{Sin}15° = \cos 75° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

❖ $\text{Tan}75° = \cot 15° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$

❖ $\text{Tan}15° = \cot 75° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$

Some other formulae (कुछ अन्य सूत्र)

1. $(\sin^2 A + \cos^2 A - \sin A\cos A)(\sin A + \cos A)$

$= \mathbf{\sin^3 A + \cos^3 A}$

2. $\dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \tan B \cot A$ (ऊपर वाली term direct multiply में लिख देते है)

3. $\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2 = \tan^2\theta$

4. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \times \dfrac{1-\sin\theta}{1\sin\theta}} = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

5. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \times \dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \text{cosec}\theta + \cot\theta$

6. $\sqrt{\dfrac{\text{cosec}A+1}{\text{cosec}A-1}} = \sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

7. $\sqrt{\dfrac{\sec\alpha + \tan\alpha}{\sec\alpha - \tan\alpha}} = \sqrt{(\sec\alpha + \tan\alpha)^2} = \sec\alpha + \tan\alpha$

8. $\sqrt{\dfrac{\cot\theta + \cos\theta}{\cot\theta - \cos\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

9. $\sin 1°.\sin 2°.\sin 3° \ldots\ldots \sin 180° = 0$

$\cos 1°.\cos 2°.\cos 3° \ldots\ldots \cos 90° = 0$

$\tan 1°.\tan 2°.\tan 3° \ldots\ldots \tan 89° = 1$

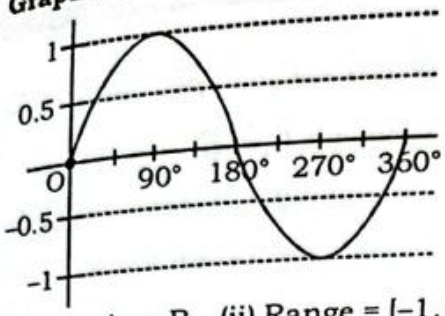
CamScanner

Interchange of Trigonometry Ratio Table (त्रिकोणमिति अनुपात तालिका का बदलाव)

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cose}\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sec^2\theta-1}$	$\operatorname{cosec}^2\theta-1$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}^2\theta}{\operatorname{cosec}^2-1}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

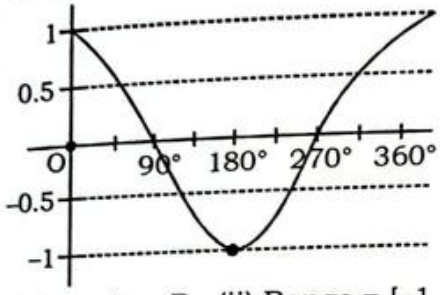
CamScanner

1. Graph of sin x



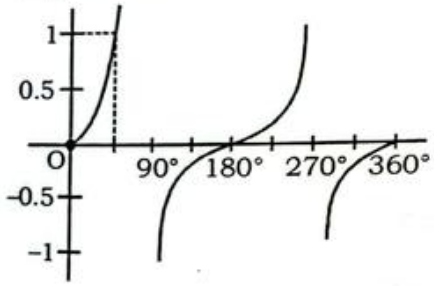
(i) Domain = R (ii) Range = $[-1,1]$ (iii) Period = 2π

2. Graph of cos x



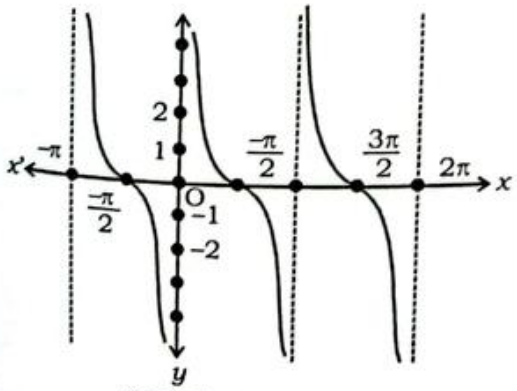
(i) Domain = R (ii) Range = $[-1, 1]$
(iii) Period = 2π

3. Graph of tan x



(i) Domain = $R \sim (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$
(ii) Range = $(-\infty, \infty)$
(iii) Period = π

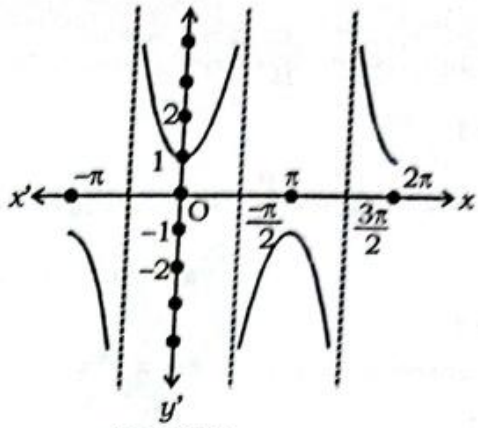
4. Graph of cot x



$y = \cot x$

(i) Domain = $R \sim n\pi, n \in I$ (ii) Range = $(-\infty, \infty)$
(iii) Period = π

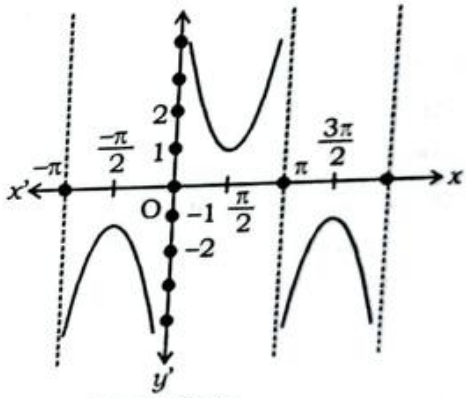
5. Graph of sec x



$y = \sec x$

(i) Domain = $R \sim (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in I$
(ii) Range = $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
(iii) Period = 2π

6. Graph of cosec x



$y = \text{cosec } x$

(i) Domain = $R \sim n\pi, n \in I$
(ii) Range = $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
(iii) Period = 2π

Note $|\sin\theta| \le 1, |\cos\theta| \le 1, |\sec\theta| \ge 1, |\text{cosec}\theta| \ge |$ for all values of θ, for which the functions are defined.

Maxima & Minima (अधिकतम और न्यूनतम)

1. $-1 \le \sin\theta \le +1$ $\quad \sin\theta = \frac{P}{H}, H \ge P$

$-1 \le \cos\theta \le +1$

$-\infty \le \tan\theta \le +\infty$ $\quad \text{Tan}\theta = \frac{P}{B}$ (We can take any value of P and B)

$-\infty \le \cot\theta \le +\infty$

$-\infty \le \sec\theta, \text{cosec}\theta \le +\infty$ But -1 से 1 के बीच नहीं होगी।

$\text{cosec}\theta = \frac{H}{P}$ ...$H \ge (B, P)$

$\sec\theta = \frac{H}{B}$

2. If x = Real $\Rightarrow x^2 \to$ +ve

$x^2_{min} = 0$ at $x = 0$

$0 \le \sin^2\theta, \cos^2\theta \le +1$

$-1 \le \sin^3\theta, \cos^3\theta \le +1$

$0 \le \tan^2\theta, \cot^2\theta \le +\infty$

$-\infty \le \tan^3\theta, \cot^3\theta \le +\infty$

$+1 \le \sec^2\theta, \text{cosec}^2\theta \le +\infty$

$-\infty \le \sec^3\theta, \text{cosec}^3\theta \le +\infty$ But -1 से $+1$ के बीच नहीं होगी।

3. $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta \to$ max value = max [a,b]

$\to$ min value = min [a, b]

$37\sin^2\theta + 45\cos^2\theta \Rightarrow$ maximum = **45**

minimum = **37**

4. $\sin^n\theta\cos^n\theta \to$ max $= \frac{1}{2n}$, min $= \frac{-1}{2n}$] when n=odd

$\sin^n\theta\cos^n\theta \to$ max $= \frac{1}{2n}$, min $= 0$] when n=even

5. $a\sin\theta + b\cos\theta \to$ max $= +\sqrt{a^2+b^2}$

$\to$ min $= -\sqrt{a^2+b^2}$

6. $a\sin^2\theta + b\text{cosec}^2\theta$ $\quad$ min $= 2\sqrt{ab}$ (when a>b)

$a\cos^2\theta + b\sec^2\theta$ $\quad$ a+b (when a < b)

max $= \infty$

7. $a\sec^2\theta + b\text{cosec}^2\theta \xrightarrow{\text{min value}} \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

8. $\sin^{2m}\theta + \cos^{2n}\theta \to$ max = +1 $\quad$ m, n $\in$ natural no.

9. If $y = \cos^2 x + \sec^2 x$ then $y \ge 2$

	T - ratio	min	max
1.	$\sin\theta, \cos\theta$ (odd power)	-1	$+1$
2.	$\sin^2\theta, \cos^2\theta$ (even power)	0	$+1$
3.	$\tan\theta, \cot\theta$ (odd power)	$-\infty$	$+\infty$
4.	$\tan^2\theta, \cot^2\theta$ (even power)	0	∞
5.	$\sec\theta, \text{cosec}\,\theta$ (odd power)	$-\infty$	$+\infty$
6.	$\sec^2\theta, \text{cosec}^2\theta$ (even power)	1	∞

10. $\sin^{2n}\theta + \cos^{2n}\theta$

max value = 1

min value = put $\theta \to 45°$

11. $a\tan^2\theta + b\cos^2\theta$

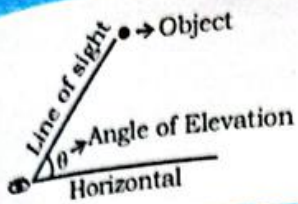
min value = $2\sqrt{ab}$

max value = ∞

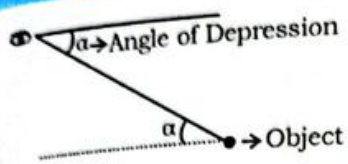
CamScanner

Height & Distance (लंबाई और दूरी)

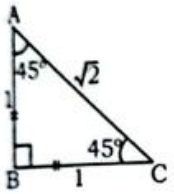
Elevation Angle (उन्नयन कोण)



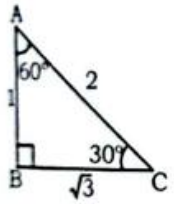
Angle of Depression (अवनमन कोण)



Angle-side Ratio (कोण-पक्ष अनुपात)

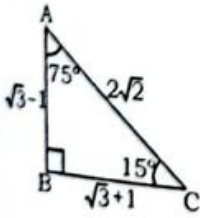
1. 

45°	45°	90°
↓	↓	↓
1 :	1 :	√2

2. 

30°	60°	90°
↓	↓	↓
1 :	√3 :	2

$\text{Tan}30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{AC}$

3. 

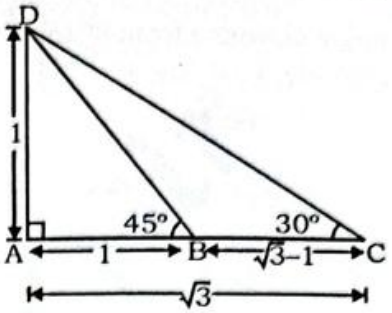
$\text{Tan}15° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{BC}{AC}$

15°	75°	90°
↓	↓	↓
√3 - 1	√3 + 1	2√2

Change of Angle (कोण का परिवर्तन)

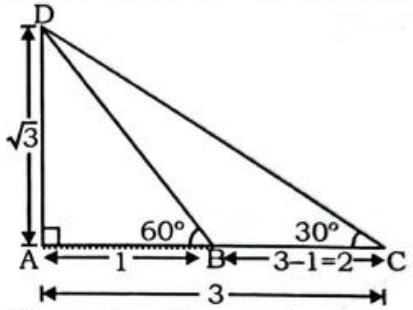
1. When elevation angle changes from 30° to 45°

जब उन्नयन कोण 30° से 45° हो जाता है



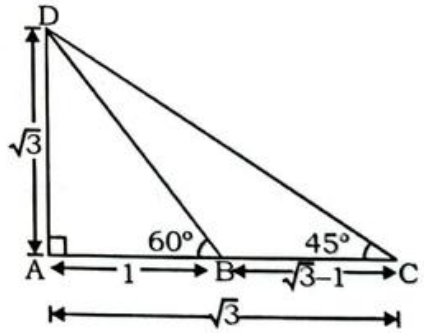
2. When elevation angle changes from 30° to 60°

जब उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है



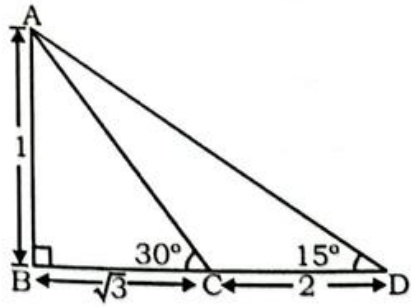
3. When elevation angle changes from 45° to 60°

जब उन्नयन कोण 45° से 60° हो जाता है



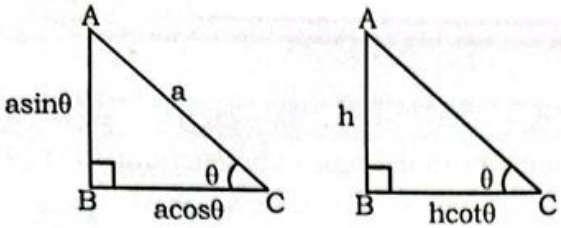
4. When elevation angle changes from 15° to 30°

जब उन्नयन कोण 15° से 30° हो जाता है



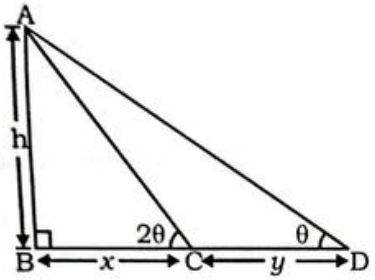
5. When elevation angle changes from ....

जब उन्नयन कोण .... से बदलता है



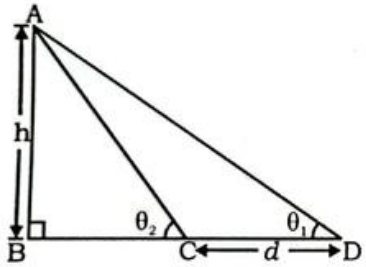
6. When elevation angle changes from θ° to 2θ.

जब उन्नयन कोण θ° से बदलकर 2θ हो जाता है



$h^2 = y^2 - x^2$

7.

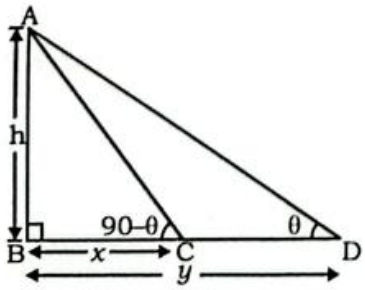


$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

Some other results (कुछ अन्य परिणाम)

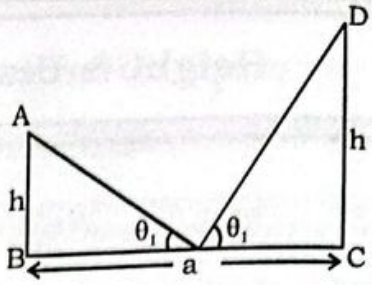
1. If Angles of elevation are complimentary

यदि उन्नयन कोण पूरक हैं



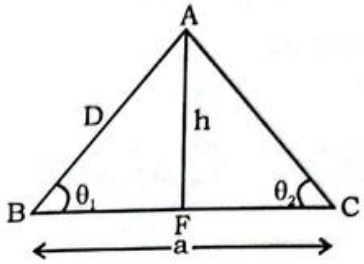
$h = \sqrt{xy}$

2.



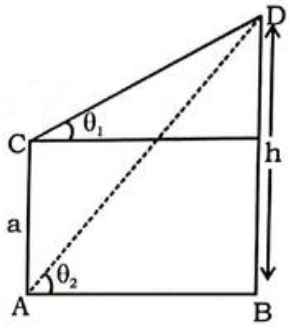
$a = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

3.



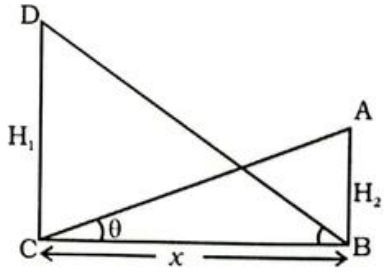
a = h (cotθ1 + cotθ2)

4.



$h = \dfrac{a\cot\theta 2}{\cot\theta 2 - \cot\theta 1}$

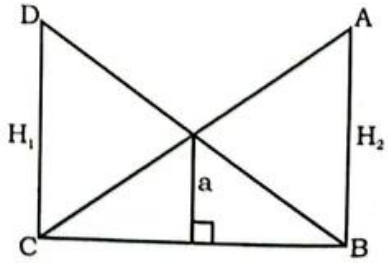
5.



$\theta + \alpha = 90°$

$x = \sqrt{h_1 h_2}$

6.



$\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{H_1} + \dfrac{1}{H_2}$

CamScanner

Percentage (प्रतिशत)

Fraction percentage chart (भिन्न प्रतिशत चार्ट)

Fraction	Percentage	Percentage
1	100%	100%
$\frac{1}{2}$	50%	50%
$\frac{1}{3}$	33.33%	$33\frac{1}{3}\%$
$\frac{1}{4}$	25%	25%
$\frac{1}{5}$	20%	20%
$\frac{1}{6}$	16.66%	$16\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{7}$	14.28%	$14\frac{2}{7}\%$
$\frac{1}{8}$	12.5%	$12\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{9}$	11.11%	$11\frac{1}{9}\%$
$\frac{1}{10}$	10%	10%
$\frac{1}{11}$	9.09%	$9\frac{1}{11}\%$
$\frac{1}{12}$	8.33%	$8\frac{1}{3}\%$
$\frac{1}{13}$	7.69%	$7\frac{9}{13}\%$
$\frac{1}{14}$	7.14%	$7\frac{1}{7}\%$
$\frac{1}{15}$	6.66%	$6\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{16}$	6.25%	$6\frac{1}{4}\%$
$\frac{1}{17}$	5.88%	$5\frac{15}{17}\%$
$\frac{1}{18}$	5.55%	$5\frac{5}{9}\%$
$\frac{1}{19}$	5.26%	$5\frac{5}{19}\%$
$\frac{1}{20}$	5%	5%

Fraction	Percentage	Percentage
$\frac{1}{21}$	4.76%	$4\frac{16}{21}\%$
$\frac{1}{22}$	4.54%	$4\frac{6}{11}\%$
$\frac{1}{23}$	4.34%	$4\frac{8}{23}\%$
$\frac{1}{24}$	4.16%	$4\frac{1}{6}\%$
$\frac{1}{25}$	4%	4%
$\frac{1}{40}$	2.5%	$2\frac{1}{2}\%$
$\frac{3}{8}$	37.5%	$37\frac{1}{2}\%$
$\frac{5}{8}$	62.5%	$62\frac{1}{2}\%$
$\frac{4}{7}$	57.14%	$57\frac{1}{7}\%$
$\frac{5}{7}$	71.42%	$71\frac{3}{7}\%$
$\frac{2}{3}$	66.66%	$66\frac{2}{3}\%$
$\frac{4}{5}$	80%	80%
$\frac{3}{4}$	75%	75%
$\frac{5}{11}$	45.45%	$45\frac{5}{11}\%$
$\frac{7}{11}$	63.63%	$63\frac{7}{11}\%$
$\frac{10}{11}$	90.90%	$90\frac{10}{11}\%$
$\frac{4}{9}$	44.44%	$44\frac{4}{9}\%$
$\frac{7}{9}$	77.77%	$77\frac{7}{9}\%$

CamScanner

Derived fraction from base fractions
(आधार भिन्न से व्युत्पन्न भिन्न)

❖ $\frac{1}{4} = 25\%$

$\downarrow \times 3$

$\frac{3}{4} = 75\%$

❖ $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$

$\frac{4}{7} = 57\frac{1}{7}\%$

$\frac{5}{7} = 71\frac{3}{7}\%$

❖ $\frac{1}{5} = 20\%$

$\frac{3}{5} = 3 \times 20\% = 60\%$

❖ $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$

$\frac{5}{6} = 5 \times 16\frac{2}{3}\% = 83\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$

$\frac{11}{15} = 11 \times 6\frac{2}{3}\% = 73\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$

$\frac{11}{16} = 11 \times 6\frac{1}{4}\% = 68\frac{3}{4}\%$

❖ $\frac{1}{24} = 4\frac{1}{6}\%$

$\frac{1}{48} = 2\frac{1}{12}\%$

$\frac{17}{48} = 17 \times 2\frac{1}{12}\% = 35\frac{5}{12}\%$

❖ $\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$

$\frac{13}{16} = 13 \times 6\frac{1}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$

or $\frac{13}{16} = 1 - \frac{3}{16} = 100\% - 18\frac{3}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$

❖ $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$

$\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7} = 100 - 14\frac{2}{7}\% = 85\frac{5}{7}\%$

❖ $\frac{1}{12} = 8\frac{1}{3}\%$

$\frac{11}{12} = 1 - \frac{1}{12} \rightarrow 100\% - 8\frac{1}{3}\% \rightarrow 91\frac{2}{3}\%$

❖ $\frac{19}{24} = 1 - \frac{5}{24} \Rightarrow 100\% - 5\left(4\frac{1}{6}\%\right)$

$\Rightarrow 100\% - 20\frac{5}{6}\% \Rightarrow 79\frac{1}{6}\%$

❖ $\frac{40}{9} = 4 + \frac{4}{9} \rightarrow 400\% + 44.44\% \rightarrow 444.44\%$

❖ $\frac{43}{6} = 7 + \frac{1}{6} \rightarrow 700\% + 16.66\% \rightarrow 716.66\%$

❖ $\frac{13}{7} = 1 + \frac{6}{7} \rightarrow 100\% + 85\frac{5}{7}\% \rightarrow 185\frac{5}{7}\%$

❖ $\frac{35}{6} = 5 + \frac{5}{6} \rightarrow 500\% + 83\frac{1}{3}\% \rightarrow 583\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{29}{3} = 9 + \frac{2}{3} \rightarrow 966\frac{2}{3}\%$

❖ $\frac{71}{12} = 5 + \frac{11}{12} \rightarrow 500\% + 11\left(8\frac{1}{3}\%\right) \rightarrow 500\% + 91\frac{2}{3}\%$

$\rightarrow 591\frac{2}{3}\%$

❖ $\frac{37}{15} = 2 + \frac{7}{15} \rightarrow 200\% + 46\frac{2}{3}\% \rightarrow 246\frac{2}{3}\%$

Percentage to fraction conversion
(भिन्न रूपांतरण का प्रतिशत)

❖ $17.5\% \rightarrow 17.5 \times \frac{1}{100} \rightarrow \frac{7}{40}$ or

$\left(2.5\% = \frac{1}{40}\right) \times 7 \rightarrow 17.5\% = \frac{7}{40}$

❖ $164\% \rightarrow \frac{164}{100} \rightarrow \frac{41}{25}$

❖ $15\frac{5}{8}\% \rightarrow \frac{125}{8}\% \rightarrow \frac{125}{800} \rightarrow \frac{5}{32}$

❖ $35\frac{5}{7}\% \rightarrow 5 \times 7\frac{1}{7}\% \rightarrow 5 \times \frac{1}{14} \rightarrow \frac{5}{14}$

❖ $29\frac{1}{6}\% \rightarrow 25\% + 4\frac{1}{6}\% \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \rightarrow \frac{7}{24}$

❖ $23.33\% \rightarrow 20\% + 3.33\% \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$

❖ $78\frac{1}{3}\% \rightarrow 75\% + 3\frac{1}{3}\% \rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{30} \rightarrow \frac{49}{60}$

❖ $46.66\% \rightarrow 40\% + 6.66\% \rightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{15} \rightarrow \frac{7}{15}$

CamScanner

- $82.5\% \to 80\% + 2.5\% \to \frac{4}{5} + \frac{1}{40} \to \frac{33}{40}$
- $83\frac{1}{3}\% \to 100\% - 16\frac{2}{3}\% \to 1 - \frac{1}{6} \to \frac{5}{6}$
- $237.5\% \to 200\% + 37.5\% \to 2 + \frac{3}{8} \to \frac{19}{8}$
- $342.84\% \to 300\% + 42.84\% \to 3 + \frac{3}{7} \to \frac{24}{7}$
- $756.25 \to 7 + \frac{9}{16} \to \frac{121}{16}$
- $538.33 \to 500\% + 30\% + 8.33\% \to 5 + \frac{3}{10} + \frac{1}{12} \to \frac{323}{60}$
- $528.56\% \to 5 + \frac{2}{7} \to \frac{37}{7}$

- $x\%$ of $y = y\%$ of $x \to \frac{x}{100} \times y = \frac{y}{100} \times x$
- 840% of $62.5 \to 62.5\%$ of $840 \to \frac{5}{8} \times 840 \to 525$
- 7.44% of $3750 \to 37.50\%$ of $744 \to \frac{3}{8} \times 744 \to 279$

- 99 is what % of 135

$\frac{99}{135} \times 100\% = 73\frac{1}{3}\%$ or

$135 \longrightarrow 100\%$

$1 \longrightarrow \frac{100}{135}\%$

$99 \longrightarrow 99 \times \frac{100}{135}\%$

or

$15 : 11$

$\frac{1}{15} = 6\frac{2}{23}\%$

$\frac{11}{15} = 73\frac{1}{3}\%$

- 99 is what % less than 135

$\underbrace{99 \quad 135}_{-36} \to \frac{36}{135} \times 100\%$ or

$15 : 4 \to \frac{4}{15} = 26\frac{2}{3}\%$

- 180 is what % of 125

$\frac{180}{125} \times 100\% = 144\%$

or

$125 : 180$

$\downarrow \times 0.8 \qquad \downarrow$

$100 \qquad 144$

$+44\%$

Scaling factor/multiplying factor

- $K \xrightarrow{+x\%} K + kx\% = K(1 + x\%) = K\left(1 + \frac{x}{100}\right)$

$\downarrow$ multiplying factor $\qquad \downarrow$ multiplying factor

Initial 100% — Final 128%

+1.28

$28\% = \frac{+7}{25}$ → Change in value; → Initial value

∴ Initial 25 — Final 32

+7

- $-44\% \to 44\% = \frac{-11}{25}$

1.V 25 — F.V 14

-11

- $+35\% \to 35\% = \frac{+7}{20}$

1.V 20 — F.V 27

+7

- $-22.5\% \to \frac{-9}{40} \to 40 : 31$ (-9)
- $x \xrightarrow{+26\%} (x + x \times 26\%)$

$x + x \times \frac{26}{100} = x\left(1 + \frac{26}{100}\right)$

$= x \times 1.26$

multiplying factor (m.F)

Initial value	Change	Final value
x	+37%	$1.37x = \left(1 + \frac{37}{100}\right)x$
y	-45%	$0.55y = \left(1 - \frac{45}{100}\right)y$
z	+45.45% ↓ $\left(\frac{5}{11}\right)$	$z + z \times \frac{5}{11}$ ↓ $\left(1 + \frac{5}{11}\right) \times z = \frac{16}{11}z$
w	+31.25%	$\left(1 + \frac{5}{16}\right)w = \frac{21}{16}w$
u	$-46\frac{2}{3}\%$ ↓ $\left(\frac{7}{15}\right)$	$\left(1 - \frac{7}{15}\right)u = \frac{8}{15}u$

CamScanner

❖ Net income = Income – Income Tax
शुद्ध आय = आय – आयकर
Rs.700 = Rs.800 – Rs.100
Rate of income tax /आयकर की दर =

$$\frac{100}{800} \times 100\% = 12.5\%$$

$$= \frac{\text{Income Tax}}{\text{Total income}} \times 100\%$$

Net Income = Income – Income Tax
शुद्ध आय = आय – आयकर

700 = 800 – 100
↓ –50 ↓ +50
650 = 800 – 150

Change in net income & tax will be same
शुद्ध आय और कर में परिवर्तन समान होगा

Concept of deviation (विचलन की अवधारणा)

❖

	Rice		Dal		Sugar
Exp (खर्च) →	7	:	13	:	5
% Change →	+17%		+20%		+19%
Deviation →	–1%		+2%		+1%

Let overall change is 18% / माना कुल परिवर्तन 18% है

Deviation in rice ↑ Deviation in dal ↑ Deviation in sugar ↑

$$\frac{(-1\% \times 7 + 2\% \times 13 + 1\% \times 5)}{7+13+5}$$

Total deviation को सब में divide कर देंगे।

$$\therefore 18\% + \left(\frac{-7+26+5}{25}\%\right)$$

18% + 0.96% = 18.96%

or

	Rice	:	Dal	:	Sugar
Exp→	7	:	13	:	5
% Change	17%		17+3%		17%+2%

Let overall % change = 17%
deviation = 13 × 3% + 5 × 2% = 49%
इसको सब में divide कर देंगे

$$\therefore \text{overall \% change} \rightarrow 17\% + \frac{49}{25}\%$$

$$\rightarrow 17\% + 1.96 \rightarrow 18.96\%$$

Annual increment/decrement (वार्षिक वेतन वृद्धि/कमी)

❖ **Successive percentage change:-**
क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन

$$100 \xrightarrow[+20\%]{+20} 120 \xrightarrow[+30\%]{+36} 156 \xrightarrow[-50\%]{-78} 78$$

$$100 \xrightarrow{-22} 78$$

net % change = 22%

Second Method / दूसरा तरीका:-

Initial:		Final
100	:	{(100 × 1.2) × 1.3}×0.5
100	:	78

↓
22% Change (Decrease)

1. If the population/cost of a certain town/article, is P and annual increment rate is r%, then
यदि किसी कस्बे/वस्तु की जनसंख्या/लागत P है और वार्षिक वृद्धि दर r% है, तो

(i) After 't' years population/cost $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

't' वर्षों के बाद जनसंख्या/लागत $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

(ii) Before 't' years population/cost $= \frac{P}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t}$

't' वर्ष से पहले जनसंख्या/लागत $= \frac{P}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t}$

2. Formula: If we change a number by $x\%$ & $y\%$ successively
Then, net% change
सूत्र: यदि हम कोई संख्या क्रमशः $x\%$ और $y\%$ द्वारा बदलते हैं फिर, शुद्ध% परिवर्तन

$$\rightarrow \left(x+y+\frac{xy}{100}\right)\%$$

3. If the population of a town /cost of a article is P and it decreases/reduces at the rate of r% annually, then.
यदि किसी कस्बे की जनसंख्या / वस्तु की लागत P है और वह r% वार्षिक दर से घटती है, तो

(i) After 't' years population/cost $= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^t$

't' वर्षों के बाद जनसंख्या/लागत $= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^t$

(ii) Before 't' years population/cost $= \frac{P}{\left(1-\frac{r}{100}\right)^t}$

't' वर्ष से पहले जनसंख्या/लागत $= \frac{P}{\left(1-\frac{r}{100}\right)^t}$

4. Net % change of $x\%$, $y\%$ and $z\%$ is
$x\%$, $y\%$ और $z\%$ का शुद्ध परिवर्तन है

$$\left[(x+y+z)+\frac{xy+yz+zx}{100}+\frac{xyz}{10000}\right]\%$$

CamScanner

5. If the present population of a town is P and the population increases or decreases at rate of R_1%, R_2% and R_3% in first, second and third year respectively.

यदि किसी कस्बे की वर्तमान जनसंख्या P है और जनसंख्या क्रमशः पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष में R_1%, R_2% और R_3% की दर से बढ़ती या घटती है।

then the population of town after 3 years

तो 3 वर्ष बाद शहर की जनसंख्या

$$= P\left(1 \pm \frac{R_1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{R_2}{100}\right)\left(1 \pm \frac{R_3}{100}\right)$$

'+' is used when population increases

जनसंख्या बढ़ने पर '+' का प्रयोग किया जाता है

'–' is used when population decreases.

जनसंख्या घटने पर '–' का प्रयोग होता है।

The above formula may be extended for n number of years.

उपरोक्त सूत्र n वर्षों के लिए बढ़ाया जा सकता है।

⇒ Population after 'n' years / 'n' वर्षों के बाद जनसंख्या

$$= P\left(1 \pm \frac{R_1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{R_2}{100}\right)\ldots\left(1 \pm \frac{R_n}{100}\right)$$

6. +30% +35% –48%
= +35% –48% +30%

Initial × 1.3 × 1.35 × 0.52 = Initial × 1.35 × 0.52 × 1.3

❖ कैसे भी sequence change करो, किसी में भी successive change बराबर ही आयेगा।

Important Points (महत्वपूर्ण बिंदु)

❖ **Based on increase/decrease**

वृद्धि/कमी के आधार पर

1. If an amount is increased by x% and then it is reduced by x% again, then percentage change will be a decrease of $\frac{x^2}{100}$%

यदि किसी राशि में x% की वृद्धि की जाती है और फिर इसे फिर से x% घटाया जाता है, तो प्रतिशत परिवर्तन में $\frac{x^2}{100}$% की कमी होगी

Ex. Price of an article is increased by 10% and then reduced by 10%. What will be net percentage change?

एक वस्तु के मूल्य में 10% की वृद्धि की जाती है और फिर 10% की कमी की जाती है। कुल प्रतिशत परिवर्तन क्या होगा?

∴ Price will be decrease by $\frac{10^2}{100}$% = 1%

2. If a number is increased by a% and then it is decreased by b%, then resultant change in percentage will be $\left(a - b - \frac{ab}{100}\right)$%

यदि एक संख्या में a% की वृद्धि की जाती है और फिर इसे b% से घटा दिया जाता है, तो प्रतिशत में परिणामी परिवर्तन $\left(a - b - \frac{ab}{100}\right)$% होगा

(Negative for decrease, Positive for increase)

(घटने के लिए ऋणात्मक, वृद्धि के लिए धनात्मक)

3. If a number is decreased by a% and then it is increased by b%, then net increase or decrease percent is

यदि किसी संख्या में a% की कमी की जाती है और फिर इसे b% से बढ़ा दिया जाता है, तो शुद्ध वृद्धि या कमी प्रतिशत है

$$\left(-a + b - \frac{ab}{100}\right)\%$$

(Negative sign for decrease
Positive sign for increase)

4. If a number is first decreased by a% and then by b%, then net decrease percent is $\left(-a - b + \frac{ab}{100}\right)$%

(–ve sign for decrease)

यदि किसी संख्या में पहले a% और फिर b% की कमी की जाती है, तो शुद्ध कमी प्रतिशत है $\left(-a - b + \frac{ab}{100}\right)$% (–ve संकेत कमी के लिए)

5. If a number is first increased by a% and then again increased by b%, then total increase percent is

यदि किसी संख्या में पहले a% की वृद्धि की जाती है और फिर b% की वृद्धि की जाती है, तो कुल वृद्धि प्रतिशत है

$$\left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%$$

6. If the cost of an article is increased by A%, then how much to decrease the consumption of article, so that expenditure remains same is given by

यदि किसी वस्तु की कीमत में A% की वृद्धि की जाती है, तो वस्तु की खपत को कितना कम किया जाए, ताकि व्यय समान रहे

OR

If the income of a man is A% more than another man, then income of another man is less in comparison to the 1st man by

यदि एक आदमी की आय दूसरे आदमी की तुलना में A% अधिक है, तो दूसरे आदमी की आय पहले आदमी की तुलना में कितनी कम है?

$$\left(\frac{A}{(100 + A)} \times 100\right)\%$$

7. If the cost of an article is decreased by A%, then the increase in consumption of article to maintain the expenditure will be?

यदि किसी वस्तु की लागत में A% की कमी की जाती है, तो व्यय को बनाए रखने के लिए वस्तु की खपत में वृद्धि होगी?

CamScanner

OR

If 'x' is A% less than 'y'. then y is more than 'x' by

$$\text{Required\%} = \left(\frac{A}{(100-A)} \times 100\right)\% \text{ (increase)}$$

यदि 'x', 'y' से A% कम है। तो y 'x' से $\left(\frac{A}{(100-A)} \times 100\right)\%$ अधिक है

8. If the length of a rectangle is increase by a% and breadth is increased by b%, then the area of rectangle will increase by

यदि एक आयत की लंबाई में a% की वृद्धि की जाती है और चौड़ाई में b% की वृद्धि की जाती है, तो आयत के क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि होगी?

$$\text{Required Increase / आवश्यक वृद्धि} = \left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%$$

9. If the side of a square is increases by a% then, its area will increase by

यदि किसी वर्ग की भुजा में a% की वृद्धि कर दी जाए, तो उसका क्षेत्रफल कितना बढ़ जाएगा

$$\left(2a + \frac{a^2}{100}\right)\%$$

10. If radius of circle is increased by a% then its area will be increased by $= \left(2a + \frac{a^2}{100}\right)\%$

यदि वृत्त की त्रिज्या में a% की वृद्धि की जाती है तो इसके क्षेत्रफल में $= \left(2a + \frac{a^2}{100}\right)\%$ वृद्धि होगी

11. If the side of a square is decreased by a%, then the area of square will decrease by

यदि किसी वर्ग की भुजा को a% कम कर दिया जाए, तो वर्ग का क्षेत्रफल कितना कम हो जाएगा?

$$\therefore \text{Decrease} = \left(-2a + \frac{a^2}{100}\right)\%$$

This formula is also applicable for circles where decrease % of radius is given.

यह सूत्र उन वृत्तों के लिए भी लागू होता है जहां त्रिज्या का घटा हुआ प्रतिशत दिया गया है।

12. If the length, breadth and height of a cuboid are increased by a%, b% and c% respectively, then, Increase% in volume

यदि एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई में क्रमशः a%, b% और c% की वृद्धि की जाती है, तो, आयतन में वृद्धि?

$$= \left[a + b + c + \frac{ab + bc + ca}{100} + \frac{abc}{(100)^2}\right]\%$$

13. If every side of cube or radius of sphere is increased by a%, then increase % in volume

यदि घन की प्रत्येक भुजा या गोले की त्रिज्या में a% की वृद्धि की जाती है, तो आयतन में % की वृद्धि होती है

$$= \left(3a + \frac{3a^2}{100} + \frac{a^3}{(100)^2}\right)\%$$

14. If a% of a certain sum is taken by 1st man and b% of remaining sum is taken by 2nd man and finally c% of remaining sum is taken by 3rd man, then if 'x' rupee is the remaining amount then,

यदि एक निश्चित राशि का a% पहले आदमी द्वारा लिया जाता है और शेष राशि का b% दूसरे आदमी द्वारा लिया जाता है और अंत में शेष राशि का c% तीसरे आदमी द्वारा लिया जाता है, तो यदि 'x' रुपये शेष राशि है, तो,

Initial amount / शुरुआती रकम

$$x \times \frac{100}{100-a} \times \frac{100}{100-b} \times \frac{100}{100-c}$$

15. If an amount is increased by a% and then again increased by b% and finally increased by c%. So, that resultant amount is 'x' rupees, then

यदि किसी राशि में a% की वृद्धि की जाती है और फिर से b% की वृद्धि की जाती है और अंत में c% की वृद्धि की जाती है। तो, वह परिणामी राशि 'x' रुपए है, तब

Initial amount / शुरुआती रकम

$$x \times \frac{100}{100+a} \times \frac{100}{100+b} \times \frac{100}{100+c}$$

16. On increasing/decreasing the cost of a certain article by x%, a person can buy 'a' kg article less/more in 'y' rupees, then

किसी वस्तु के मूल्य में x% की वृद्धि/कमी करने पर, एक व्यक्ति 'a' रुपये में 'y' किग्रा वस्तु कम/अधिक खरीद सकता है, तो

Increased/decreased cost of the article

वस्तु की लागत में वृद्धि/कमी $= \left(\frac{xy}{100 \times a}\right)$

And initial cost / और प्रारंभिक लागत $= \frac{xy}{(100 \pm x)a}$

[Negative sign when decreasing and positive sign when increasing]

[घटने पर ऋणात्मक चिन्ह और बढ़ने पर धनात्मक चिन्ह]

17. If a person saves 'R' rupees after spending x% on food, y% on cloth and z% on entertainment of his income then.

यदि एक व्यक्ति अपनी आय का x% भोजन पर, y% कपड़े पर और z% मनोरंजन पर खर्च करने के बाद 'R' रुपये बचाता है तो।

$$\textbf{Monthly income} \text{ / मासिक आय} = \frac{100}{100-[x+y+z]} \times R$$

CamScanner

Examination based (परीक्षा आधारित)

1. In an examination, a% candidates failed in Maths and b% candidates failed in English. If c% candidate failed in both the subjects, then

एक परीक्षा में, a% अभ्यर्थी गणित में तथा b% अभ्यर्थी अंग्रेजी में अनुत्तीर्ण हुए। यदि c% अभ्यर्थी दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण है, तो

(i) Passed candidates in both the subjects

दोनों विषयों में उत्तीर्ण उम्मीदवार

$= 100 - (a + b - c)\%$

(ii) Percentage of candidates who failed in either subject

किसी भी विषय में असफल होने वाले उम्मीदवारों का प्रतिशत

$= (a + b - c)\%$

2. In a certain examination passing marks is a%. If any candidate obtains 'b' marks and fails by 'c' marks then,

एक निश्चित परीक्षा में उत्तीर्ण अंक a% है। यदि कोई अभ्यर्थी 'b' अंक प्राप्त करता है और 'c' अंक से अनुत्तीर्ण हो जाता है तो,

$$\text{Total marks} = \frac{100(b+c)}{a}$$

Ex. In an examination passing marks are 35%. A person got 80 marks and fail by 25 marks. Find total marks?

एक परीक्षा में उत्तीर्ण अंक 35% हैं। एक व्यक्ति 80 अंक प्राप्त करता है और 25 अंकों से अनुत्तीर्ण हो जाता है। कुल अंक ज्ञात कीजिये?

$$\text{Total marks} = \frac{100(80+25)}{35} = \frac{100\times105}{35} = \mathbf{300}$$

3. In a certain examination, 'B' boy and 'G' girls participated x% of boys and y% of girls passed the examination, then.

एक निश्चित परीक्षा में, 'B' लड़के और 'G' लड़कियों ने भाग लिया। x% लड़कों और y% लड़कियों ने परीक्षा उत्तीर्ण की तब औसत

$$= \left(\frac{B.x + G.y}{B+G}\right)\%$$

4. If a candidate got A% votes in a poll and he won or defeated by 'x' votes, then, what was the total no. of votes which was casted in poll ?

यदि एक उम्मीदवार को एक मतदान में A% मत मिले और वह 'x' मतों से जीता या पराजित हुआ, तो मतदान में डाले गए वोटों की संख्या कितनी थी?

$$\therefore \text{Total number of votes / मतों की कुल संख्या} = \frac{50\times x}{(100-A)}$$

Ex. A candidate got 55% votes in an election and won by 3600 votes. Find total number of votes?

एक उम्मीदवार ने एक चुनाव में 55% मत प्राप्त किए और 3600 मतों से जीत गया। वोटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए?

$$\therefore \text{Total no. of votes} = \frac{50\times3600}{100-55}$$

$$= \frac{50\times3600}{45} = \mathbf{4000}$$

Price increase/decrease (मूल्य वृद्धि/कमी)

❖ If the price of an article is reduced by a% and buyer gets c kg more for some Rs. b, the new price per kg of article $= \frac{ab}{100\times c}$

यदि किसी वस्तु की कीमत a% कम कर दी जाती है और खरीदार को b रुपये में c किलो अधिक मिलता है। तो नई कीमत प्रति किग्रा

$$= \frac{ab}{100\times c}$$

Ex. Price of an article is reduced by 10% and buyer gets 8 kg more for Rs. 300. Find new price per kg?

एक वस्तु की कीमत 10% कम हो जाती है और खरीदार को 300 रुपये में 8 किलो अधिक मिलता है। प्रति किलो नया मूल्य ज्ञात करें?

$$\text{New price per kg} = \frac{10\times300}{100\times8} = \frac{15}{4} = \mathbf{3\frac{3}{4}\ Rs/kg}$$

Miscellaneous (मिश्रित)

1. If two numbers are respectively x% and y% less than the third number, first number as a percentage of second is $\frac{100-x}{100-y}\times100\%$

यदि दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः x% और y% कम हैं, तो दूसरी संख्या के प्रतिशत के रूप में पहली संख्या $\frac{100-x}{100-y}\times100\%$ है।

2. If two numbers are respectively x% and y% more than a third number the first as percentage of second is

यदि दो संख्याएँ एक तीसरी संख्या से क्रमशः x% और y% अधिक हैं, तो दूसरी संख्या के प्रतिशत के रूप में पहली संख्या है

$$\frac{100+x}{100+y}\times100\%$$

3. If a number 'a' is increased or decreased by b%, then the new number will be

यदि किसी संख्या 'a' में b% की वृद्धि या कमी की जाती है, तो नई संख्या होगी

$$\left(\frac{100\pm b}{100}\right)\times a$$

CamScanner

Profit & Loss (लाभ और हानि)

❖ Cost price (CP) = Total investment for a product.
लागत मूल्य (CP) = किसी उत्पाद के लिए कुल निवेश

1. SP > CP → Profit = SP- CP
SP < CP → Loss = CP-SP
SP = CP → No profit No loss

Profit % (लाभ %)

❖ CP Rs.250 → SP Rs.290

Profit = Rs. 40

$$\text{Profit\%} = \frac{40}{250} \times 100\% = 16\%$$

$$\textbf{Profit\%} = \frac{\textbf{Profit(Rs)}}{\textbf{CP}} \times 100\% = \frac{\textbf{SP} - \textbf{CP}}{\textbf{CP}} \times 100\%$$

Rs.250 ⟶ Rs. 40 Profit

Rs.1 ⟶ $\frac{40}{250}$ Profit

Rs.100 ⟶ $\frac{40}{250} \times 100$ = Rs. 16 Profit

15% Profit → 15% = $\frac{3 \to \text{Profit}}{20 \to \text{CP}}$

CP : SP
20 : 23

CP 100% → SP 115%

$\times 1.15$ or $\times \left(1 + \frac{3}{20}\right) = \frac{23}{20}$

Loss % (हानि %)

❖ Loss = 35% = $\frac{3 \to \text{Loss}}{20 \to \text{CP}}$

$$\textbf{Loss\%} = \frac{\textbf{Loss}}{\textbf{CP}} \times 100\% = \frac{\textbf{cp} - \textbf{sp}}{\textbf{CP}} \times 100\%$$

∴ CP : SP
20 : 13

CP 100% → SP 65%

$\times 0.65$ or $\times \left(1 - \frac{7}{20}\right) = \frac{13}{20}$

CP 475Rs. → SP 399Rs.

Loss = Rs. 76

$$\text{Loss\%} \ \frac{76}{475} \times 100\% = 16\%$$

CP 25% → SP 21%

$$\frac{-4}{25} = -16\%$$

❖ **Label price/marked price** = printed price on a product
लेबल मूल्य/चिह्नित मूल्य = उत्पाद पर मुद्रित मूल्य

The cost price of an article is Rs. 500 and its mark price is Rs. 800, then find markup percentage?
एक वस्तु का क्रय मूल्य रु. 500 और इसका मुद्रित मूल्य रु 500 है, तो मुद्रित मूल्य प्रतिशत ज्ञात कीजिये?

CP Rs.500 → MP Rs.800

Mark-up = MP – CP = Rs. 300
मार्क अप = MP – CP = Rs. 300

$$\textbf{Mark-up\%} = \frac{\textbf{mark - up(rs)}}{\textbf{CP}} \times 100\%$$

$$= \frac{\textbf{MP} - \textbf{CP}}{\textbf{CP}} \times 100\%$$

$$= \frac{800 - 500}{500} \times 100\% = 60\%$$

❖ If an object is sold on r% Profit.
यदि कोई वस्तु r% लाभ पर बेची जाती है।

then, S.P. = C.P$\left[\frac{100 + \text{Profit\%}}{100}\right]$ or C.P.

= S.P.$\left[\frac{100}{100 + \text{Profit\%}}\right]$

Similarly, if an object is sold on r% loss, then
इसी प्रकार, यदि कोई वस्तु r% हानि पर बेची जाती है, तो

S.P. = CP$\left[\frac{100 - \text{Loss\%}}{100}\right]$ or = S.P.$\left[\frac{100}{100 - \text{Loss\%}}\right]$

Successive profit/loss (क्रमिक लाभ/हानि)

1. **Successive Profits :** If A sells an article to B at a% profit and B sells it to C at b% profit
क्रमिक लाभ: यदि A एक वस्तु B को a% लाभ पर बेचता है और B इसे C को b% लाभ पर बेचता है

OR

If a% and b% are two successive profits

यदि a% और b% दो क्रमिक लाभ हैं

then Total Profit / फिर कुल लाभ $=\left(a+b+\frac{ab}{100}\right)\%$

If A sells an article to B at a% profit and B sells it to C at b% profit and if C paid Rs. x, then amount paid by $A = x\times\left(\frac{100}{100+a}\right)\left(\frac{100}{100+b}\right)$

यदि A एक वस्तु B को a% लाभ पर बेचता है और B इसे C को b% लाभ पर बेचता है और यदि C, x रुपये का भुगतान करता है। A द्वारा भुगतान की गई राशि $= x\times\left(\frac{100}{100+a}\right)\left(\frac{100}{100+b}\right)$

2. If a% profit and b% loss occur, simultaneously then overall loss or profit% is $\left(a-b-\frac{ab}{100}\right)\%$

यदि a% लाभ और b% हानि एक साथ होती है, तो समग्र हानि या लाभ% है $\left(a-b-\frac{ab}{100}\right)\%$

(–ve sign for loss, +ve sign for profit)

(हानि के लिए –ve चिह्न, लाभ के लिए +ve चिह्न)

Based on number of article (वस्तुओं की संख्या के आधार पर)

1. If cost price of 'x' articles is equal to selling price of 'y' articles, then

Selling Price = x. Cost Price = y

यदि 'x' वस्तु का क्रय मूल्य 'y' वस्तु के विक्रय मूल्य के बराबर है, तो विक्रय मूल्य = x। लागत मूल्य = y

Hence, Profit and Loss% $= \frac{x-y}{y}\times 100$

इसलिए, लाभ और हानि% $= \frac{x-y}{y}\times 100$

2. On selling 'x' articles the profit or loss is equal to selling of 'y' articles, then Profit% $\frac{y\times 100}{x-y}$

'x' वस्तु को बेचने पर लाभ या हानि 'y' वस्तु को बेचने के बराबर है, तो लाभ% $= \frac{y\times 100}{x-y}$

Loss% $= \frac{y\times 100}{x+y}$

Ex. On selling 12 articles the profit earned is equal to selling of 4 articles. Find profit%.

12 वस्तुओं को बेचने पर अर्जित लाभ 4 वस्तुओं को बेचने के बराबर है। लाभ% ज्ञात कीजिए।

Profit% $= \frac{4\times 100}{12-4} \Rightarrow$ **50%**

3. If a man sells two similar objects one at a loss of x% and another at a gain of x%, then he always incures loss in this transaction and loss% is $\frac{x^2}{100}\%$

यदि एक व्यक्ति दो समान वस्तुओं को एक x% की हानि पर और दूसरी को x% के लाभ पर बेचता है, तो उसे इस लेनदेन में हमेशा हानि होती है और हानि% $\frac{x^2}{100}\%$ है

4. A man sells his items at a profit/loss of x%. If he had sold it for Rs. R more, he would have gained/loss y%. Then.

एक आदमी अपनी वस्तुओं को x% के लाभ/हानि पर बेचता है। अगर उसने इसे R अधिक रुपये में बेचा होता। उसे y% का लाभ/हानि होती। फिर।

C.P. of items $= \frac{R}{(y\pm x)}\times 100$

'+' = when one is profit and other is loss.

'+' = जब एक लाभ और दूसरा हानि हो।

'–' = When both are either profit or loss.

'–' = जब दोनों लाभ या हानि हों।

Ex. A man sells his items at 10% profit. If he had sold for Rs. 40 more then he would have gained 15% profit. Find cost price of item.

एक आदमी अपनी वस्तुओं को 10% लाभ पर बेचता है। अगर उसने 40 रुपये अधिक में बेचा होता। तो उसे 15% का लाभ होता। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

CP $= \frac{40}{(15-10)}\times 100 \Rightarrow$ **Rs. 800**

5. If a man purchases 'a' items for Rs. x and sells 'b' items for Rs. y, then his profit or loss per cent is given by

अगर एक आदमी x रुपये के लिए 'a' वस्तुएं खरीदता है। और y रुपये के लिए 'b' वस्तुएं बेचता है। लाभ या हानि प्रतिशत है

$\left(\frac{ay-bx}{bx}\right)\times 100\%$

Dishonest Shopkeeper (बेईमान दुकानदार)

1. A dishonest shopkeeper sells his goods at C.P. but uses false weight, then his profit =

एक बेईमान दुकानदार अपना माल क्रय मूल्य पर बेचता है। लेकिन झूठे वजन का उपयोग करता है, फिर उसका

Gain% / लाभ% $= \frac{\text{True weight} - \text{False weight}}{\text{False weight}}\times 100$

or Gain% / $= \frac{\text{Error}}{\text{True value} - \text{Error}}\times 100$

(Positive and negative sign conventions are used for profit and loss.)

(सकारात्मक और नकारात्मक चिह्न परिपाटियों का उपयोग लाभ और हानि के लिए किया जाता है।)

CamScanner

Ex. A dishonest shopkeeper sells his goods at CP but uses 750 gm weight instead of 1000 gm. Find his profit percent?

एक बेईमान दुकानदार क्रय मूल्य पर अपना सामान बेचता है लेकिन 1000 ग्राम के बजाय 750 ग्राम वजन का उपयोग करता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिये?

$$\text{Gain\%} = \frac{1000-750}{750} \times 100\%$$

$$= \frac{250}{750} \times 100\% = 33\frac{1}{3}\%$$

2. If a vendor used to sell his articles at x% loss on cost price but uses y grams instead of z grams, then his profit or loss% is

यदि एक विक्रेता अपने सामान को लागत मूल्य के x% हानि पर बेचता है लेकिन y ग्राम के बजाय z ग्राम का उपयोग करता है, तो उसका लाभ या हानि% है

$$\left[(100-x)\frac{z}{y} - 100\right]\%$$

[Profit or loss as per positive or negative sign).

[लाभ या हानि सकारात्मक या नकारात्मक संकेत के अनुसार)।

Ex. If a vendor used to sell his articles at 13% loss but uses 150 gm instead of 200 gm. Then his profit/loss% is?

यदि एक विक्रेता अपने सामान को 13% हानि पर बेचता है लेकिन 200 ग्राम के बजाय 150 ग्राम का उपयोग करता है। तो उसका लाभ/हानि% है?

$$\left[(100-13)\times\frac{200}{150} - 100\right]\%$$

$$= \left(87\times\frac{4}{3} - 100\right)\% = (116-100)\% = \mathbf{16\%\ profit}$$

3. If a% and b% are two successive losses then (negative sign shows loss and positive sign shows profit).

यदि a% और b% लगातार दो नुकसान हैं तो (नकारात्मक चिह्न हानि दर्शाता है और धनात्मक चिह्न लाभ दर्शाता है)

$$\text{Total loss\% / कुल हानि\%} = \left(-a - b + \frac{ab}{100}\right)\%$$

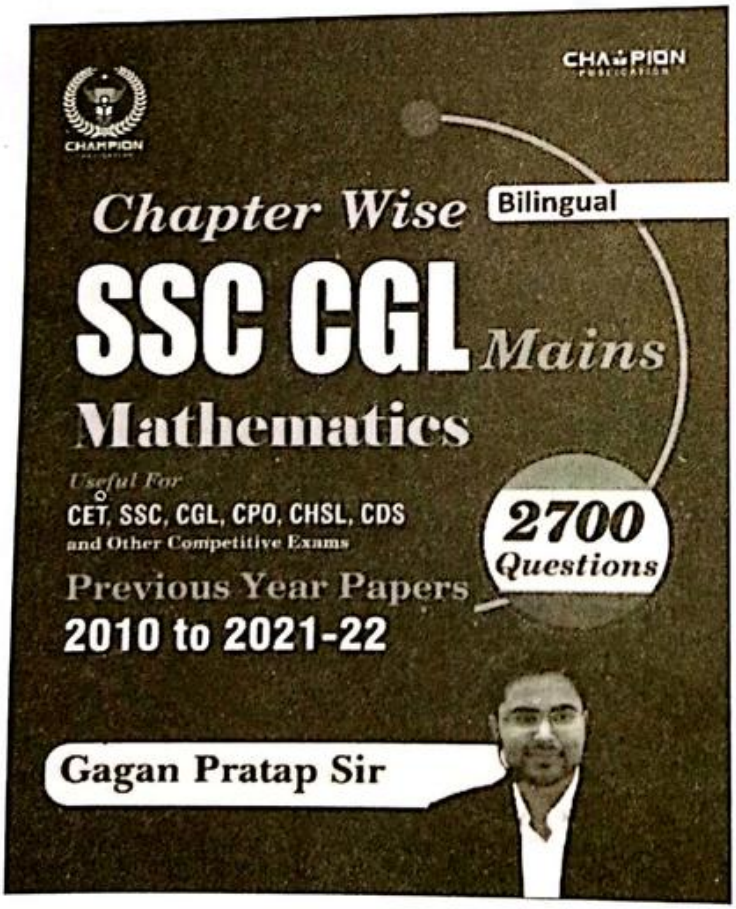
4. If a% loss and b% profit occur then, total loss/profit is

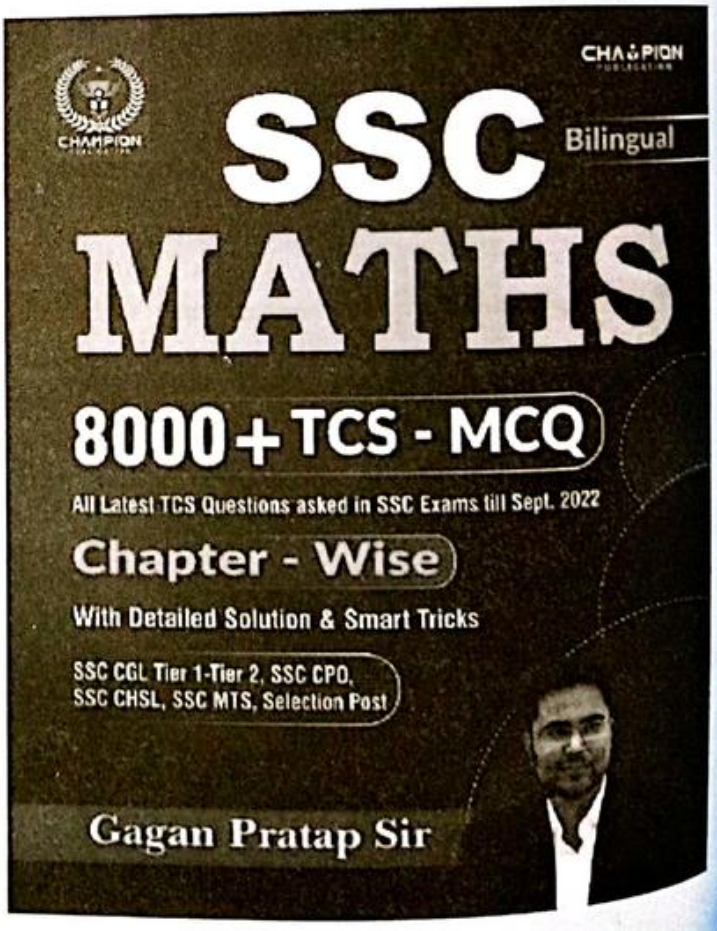
यदि a% हानि और b% लाभ होता है, तो कुल हानि/लाभ है

$$\left(-a + b - \frac{ab}{100}\right)\%$$

(negative sign for loss and positive sign for profit)

(हानि के लिए ऋणात्मक चिह्न और लाभ के लिए धनात्मक चिह्न)





Discount (बट्टा/छूट)

Discount (छूट)

- Discount = MP – SP
- Always calculated on marked price
  हमेशा अंकित मूल्य पर गणना की जाती है
- Can not be greater than 100%
  100% से अधिक नहीं हो सकता

1. CP SP MP
   500 700 800
   Discount = MP – SP = 100

$$\text{Discount\%} = \frac{\text{Discount}}{\text{MP}} \times 100\%$$

$$= \frac{\text{MP} - \text{SP}}{\text{MP}} \times 100\%$$

$$\therefore \frac{100}{800} \times 100\% = 12.5\%$$

2. If shopkeeper does not allow any discount
   अगर दुकानदार कोई छूट नहीं देता है
   MP = SP ⇒ Mark-up% = Profit%
3. SP = CP + Profit = MP - Discount
   700 = 500 + 200 = 800 - 100
4. CP —(+P% Profit)→ SP —(-d discount)→ MP
   SP = CP × (100 + P)% = MP × (100-d)%

$$\therefore \frac{\text{CP}}{\text{MP}} = \frac{100 - d\%}{100 + p\%}$$

5. Net effect (successive) of mark up% and discount% is profit %
   मार्क अप% और छूट% का शुद्ध प्रभाव (क्रमिक) लाभ% है

$$P\% = \left(M - D - \frac{M \times D}{100}\right)\%$$

Successive Discount (क्रमिक छूट)

1. 100 CP —(+60% Markup)→ 160 MP —(−10% DI)→ 144 —(−8.33% DII)→ 132 —($-18\frac{2}{11}$% DIII)→ 108
   8% profit

$60\% = \frac{+3}{5}$

$10\% = \frac{+1}{10}$

$8.33\% = \frac{-1}{12}$

$18\frac{2}{11}\% = \frac{-2}{11}$

$\rightarrow \frac{2}{25} \times 100 = 8\%$ profit

2. MP 100 —(−10% DI)→ □ 90 —(−8.33% DII)→ □ 90 —($-18\frac{2}{11}$% DIII)→ □
   $90 \times \frac{11}{12} \times \frac{9}{11}$
   = 67.5
   D = 32.5%

   Equivalent discount of 10%, 8.33% & $18\frac{2}{11}\%$ = 32.5%
3. Successive discount → $x\%, y\%$

   Net discount- $\left(x + y - \frac{xy}{100}\right)\%$
4. Successive discount / लगातार छूट → $x\%, y\%, z\%$
   Net discount / शुद्ध छूट

$$= (x + y + z) - \frac{xy + yz + zx}{100} + \frac{xyz}{10000}$$

Ex:- 5%, 7%, 8%
Net discount / शुद्ध छूट

$$= 20 - \left(\frac{35 + 56 + 40}{100}\right) + \frac{5 \times 7 \times 8}{10000}$$

= 20 – 1.31 + 0.0280
= 18.718%

Free Article (मुफ्त वस्तु)

- **Buy 4 get 1 free / 4 खरीदें 1 मुफ्त पाएं :-**
  1 Article MP = Rs. 1
  D = 1
  MP = 5

$$D\% = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$$

Note: Any kind of Discount is calculated only on marked price and not on selling price or cost price.
नोट: किसी भी प्रकार की छूट की गणना केवल अंकित मूल्य पर की जाती है न कि विक्रय मूल्य या लागत मूल्य पर।

'y' articles (quantity/number) are given free on purchasing 'x' articles. Then,
'y' वस्तु खरीदने पर 'x' वस्तु (मात्रा/संख्या) निःशुल्क दी जाती है। फिर,

$$\text{Discount\%} / \text{छूट\%} = \frac{y \times 100}{x + y}$$

CamScanner

Ex. If 2 articles are given free on purchase of 8 articles then find discount %.

यदि 8 वस्तुओं की खरीद पर 2 वस्तुएं मुफ्त दी जाती हैं तो छूट प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

$$\text{Discount \%} = \frac{2}{(2+8)} \times 100\% = \mathbf{20\%}$$

Miscellaneous (विविध)

1. If article is sold on D% discount, then

यदि वस्तु को D% छूट पर बेचा जाता है, तो

$$SP = \frac{MP(100-D)}{100}.$$

$$MP = \frac{SP \times 100}{100-D}$$

2. A tradesman marks his goods r% above his cost price. If he allows his customers a discount of r_1% on the marked price. Then the profit or loss percent is

एक व्यापारी अपने माल पर क्रय मूल्य से r% अधिक मूल्य अंकित करता है। यदि वह अपने ग्राहकों को अंकित मूल्य पर r_1% की छूट देता है। तो लाभ या हानि प्रतिशत है

$$\frac{r \times (100 - r_1)}{100} - r_1$$

(Positive sign signifies profit and negative sign signifies loss).

(सकारात्मक चिन्ह लाभ को दर्शाता है और ऋणात्मक चिन्ह हानि को दर्शाता है)।

Ex. A shopkeeper marks his goods 30% above the cost price. If he allows a discount of 15% on the mark price. Then his profit or loss percent is?

एक दुकानदार अपने सामान पर क्रय मूल्य से 30% अधिक मूल्य अंकित करता है। यदि वह अंकित मूल्य पर 15% की छूट देता है। तो उसका लाभ या हानि प्रतिशत है?

$$\Rightarrow \frac{30 \times (100-15)}{100} - 15$$

$$\Rightarrow \frac{255}{10} - 15 \Rightarrow 25.5 - 15 = \mathbf{10.5\%} \text{ profit}$$

3. The marked price of an article is fixed in such a way that after allowing a discount of r% a profit of R% is obtained. Then the marked price of the article is $\left(\frac{r+R}{100-r} \times 100\right)$% more than its cost price.

एक वस्तु का अंकित मूल्य इस प्रकार निर्धारित किया जाता है कि r% की छूट देने के बाद R% का लाभ प्राप्त होता है। तब वस्तु का अंकित मूल्य उसके क्रय मूल्य से $\left(\frac{r+R}{100-r} \times 100\right)$% अधिक है।

Ex. The MP of an article is fixed in such a way that after allowing a discount of 20% a profit of 30% is obtained. Then mark-up percent is?

एक वस्तु का अंकित मूल्य इस प्रकार निर्धारित किया जाता है कि 20% की छूट देने के बाद 30% का लाभ प्राप्त होता है। तो मार्क-अप प्रतिशत है?

$$\text{Mark-up\%} = \left(\frac{20+30}{(100-20)} \times 100\right)\%$$

$$= \frac{50}{80} \times 100\% = \mathbf{62.5\%}$$

CamScanner

Simple interest (साधारण ब्याज)

Important Points (महत्वपूर्ण बिंदु)

- Borrowed money is called Principal and it is denoted by 'P'.
  उधार लिया हुआ पैसा मूलधन कहलाता है और इसे 'P' से दर्शाया जाता है।
- Money is borrowed for certain time period, that time is called interest time and it is denoted by 'T' or 't'.
  पैसा एक निश्चित समय अवधि के लिए उधार लिया जाता है, उस समय को ब्याज समय कहा जाता है और इसे 'T' या 't' द्वारा दर्शाया जाता है।
- The principal becomes Amount when interest is added to it Amount is represented as A.
  मूलधन मिश्रधन तब बन जाता है जब इसमें ब्याज जोड़ा जाता है मिश्रधन को A के रूप में दर्शाया जाता है।
- So, Amount = Principal + Interest ⇒ A = P + S.I.
  इसलिए, मिश्रधन = मूलधन + ब्याज ⇒ A = P + S.I.

  OR

  Interest = Amount – Principal ⇒ S.I = A – P
  ब्याज = मिश्रधन – मूलधन ⇒ S.I = A – P
- When Interest is payable half – yearly
  जब ब्याज अर्धवार्षिक देय हो
  Rate will be half and time will be twice
  दर आधी और समय दोगुना होगा
  When interest is payable quarterly
  जब ब्याज तिमाही देय हो
  Rate will be one-fourth and time will be four times.
  दर एक चौथाई और समय चार गुना होगा।

Simple Interest (SI) (साधारण ब्याज)

- $SI = \frac{\text{Principal} \times \text{Rate} \times \text{Time}}{100}$

  or,

  $S.I = \frac{P \times R \times T}{100}$

  $P = \frac{S.I \times 100}{R \times T}$

  $R = \frac{S.I \times 100}{P \times T}$

  $T = \frac{S.I \times 100}{P \times R}$

  A = P + S.I

  or,

  S.I. = A – P
- If there are distinct rates of interest for distinct time periods i.e.
  यदि अलग-अलग समय अवधि के लिए ब्याज की अलग-अलग दरें हैं यानी

  Rate for 1st t_1 years → R_1%
  पहले t_1 वर्ष के लिए दर → R_1%
  Rate for 2nd t_2 years → R_2%
  दूसरे t_2 वर्षों के लिए दर → R_2%
  Rate for 3rd t_3 years → R_3%
  तीसरे t_3 वर्षों के लिए दर → R_3%
  Then, Total S.I. for 3 years
  फिर, 3 साल के लिए कुल S.I.

  $= \frac{P(R_1t_1 + R_2t_2 + R_3t_3)}{100}$

Rate of Interest (ब्याज की दर)

- Interest on Rs. 100 in one year is called Rate of Interest.
  100 रुपये पर एक वर्ष में ब्याज को ब्याज की दर कहा जाता है।
- If a certain sum becomes 'n' times of itself in T years on Simple Interest, then the rate per cent per annum is.
  यदि एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर T वर्ष में स्वयं की 'n' गुनी हो जाती है, तो वार्षिक दर प्रतिशत है।

  $R\% = \frac{(n-1)}{T} \times 100\%$ and,

  $T = \frac{(n-1)}{R} \times 100\%$

Ex. If a certain sum becomes 3 times of itself in 4 years on simple interest. Find rate percent per annum.
यदि कोई राशि साधारण ब्याज पर 4 वर्ष में स्वयं की 3 गुनी हो जाती है। प्रति वर्ष दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

$R = \frac{(3-1)}{4} \times 100\% = \mathbf{50\%}$

- If Simple Interest (S.I.) becomes 'n' times of principal i.e.
  यदि साधारण ब्याज (S.I.) मूलधन का 'n' गुना हो जाता है अर्थात
  S.I. = P × n then.
  RT = n × 100
- If an Amount (A) becomes 'n' times of certain sum (P) i.e.
  यदि कोई राशि (A) निश्चित राशि (P) का 'n' गुना हो जाती है यानी
  A = Pn then
  RT = (n – 1) × 100

CamScanner

❖ If the difference between two simple interests is 'x' calculated at different annual rates and times, then principal (P) is

यदि दो साधारण ब्याज के बीच के अंतर 'x' की गणना अलग-अलग वार्षिक दरों और समय पर की जाती है, तो मूलधन (P) है

$$P = \frac{x \times 100}{(\text{diff. in rate}) \times (\text{diff. in time})}$$

❖ If a sum amounts to x_1 in t years and then this sum amounts to x_2 in t yrs. Then the sum is given by

यदि कोई राशि t वर्षों में x_1 हो जाती है और फिर यह राशि t वर्षों में x_2 हो जाती है। तब मूलधन =

$$P = \frac{(\text{Diff in amount}) \times 100}{(\text{Change in interest Rate}) \times \text{time}}$$

❖ If a sum with simple interest rate, amounts to 'A' in t_1 years and 'B' in t_2 years, then.

यदि साधारण ब्याज दर वाली राशि t_1 वर्षों में 'A' और t_2 वर्षों में 'B' हो जाती है, तो।

$$R\% = \frac{(B-A) \times 100}{A.t_2 - B.t_1} \text{ and}$$

$$P = \frac{At_2 - Bt_1}{t_2 - t_1}$$

Installment (किश्त)

❖ If a sum is to be deposited in equal installments, then / यदि कोई राशि समान किस्तों में जमा करनी है, तो

$$\text{Equal installments/ समान किश्त} = \frac{A \times 200}{T[200 + (T-1)r]}$$

where / जहाँ

T = no. of years / वर्षों की संख्या

A = amount / राशि

r = Rate of Interest / ब्याज दर

❖ To find the rate of interest under current deposit plan,

वर्तमान जमा योजना के तहत ब्याज दर का पता लगाने के लिए,

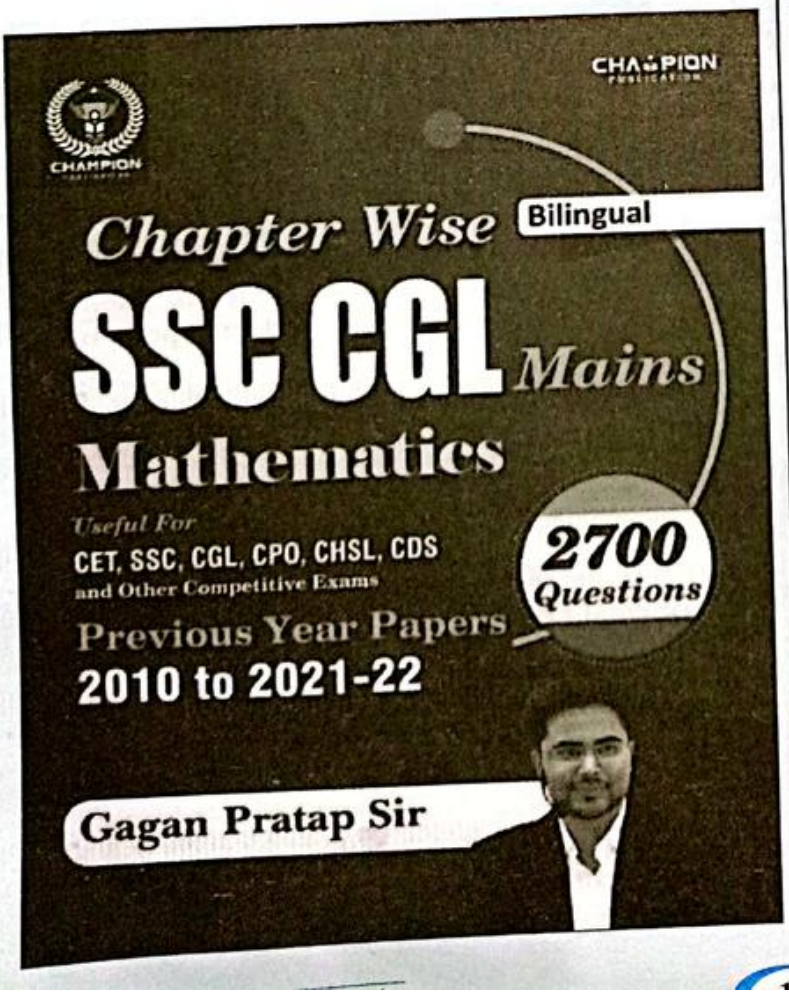
$$r = \frac{S.I. \times 2400}{n(n+1) \times (\text{deposited amount})}$$

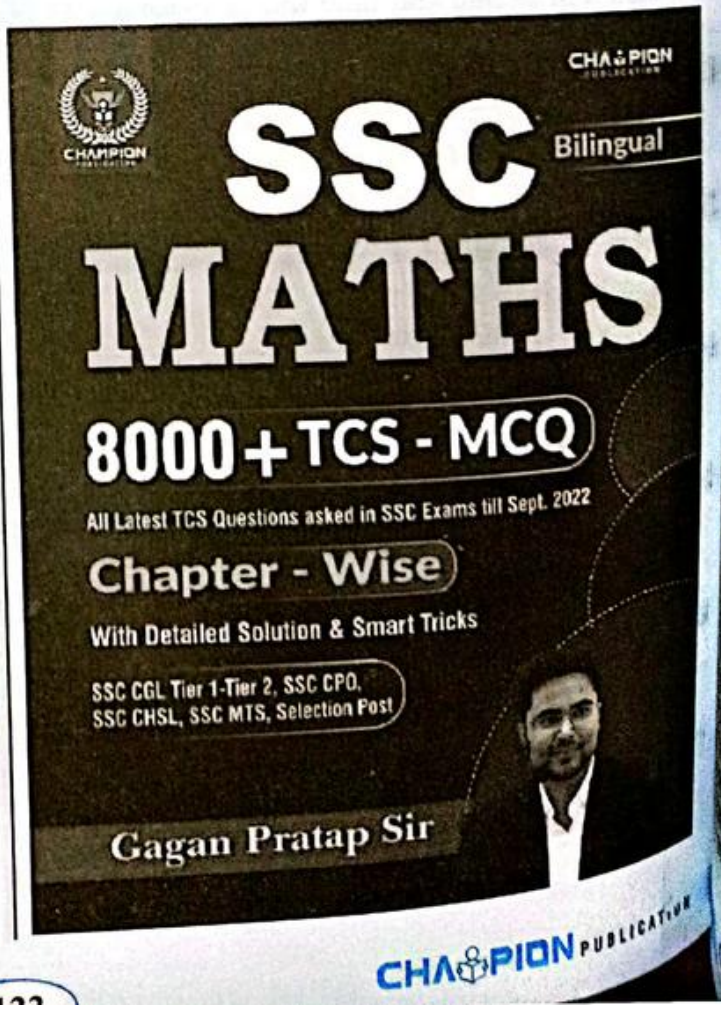
where n = no. of months

❖ The difference between the S.I. for a certain sum P_1 deposited for time T_1 at R_1 rate of interest and another sum P_2 deposited for time T_2 at R_2 rate of interest is

ब्याज की R_1 दर पर T_1 समय के लिए जमा की गई एक निश्चित राशि P_1 के लिए साधारण ब्याज और R_2 ब्याज दर पर T_2 समय के लिए जमा की गई दूसरी राशि P_2 के बीच का अंतर है

$$S.I. = \frac{P_2R_2T_2 - P_1R_1T_1}{100}$$





Compound interest (चक्रवृद्धि ब्याज)

Compound interest is the interest you earn on interest
(चक्रवृद्धि ब्याज वह ब्याज है जो आप ब्याज पर कमाते हैं)

1. If rate of interest in first and 2nd cycle are $x\%$ & $y\%$ respectively
यदि पहले और दूसरे चक्र में ब्याज दर क्रमशः $x\%$ और $y\%$ है

$$CI_2 = \left(x + y + \frac{xy}{10}\right)\%$$

- If rate is same / यदि दर समान है = r%

$$CI_2 = \left(2r + \frac{r^2}{100}\right)\%$$

2. Difference between CI & SI for 2 years = $\frac{r^2}{100}\%$

Rate	$CI_2\left(2r + \frac{r^2}{100}\right)$	Difference between CI and SI
5%	10.25%	0.25%
10%	21%	1%
15%	32.25%	2.25%
20%	44%	4%
25%	56.25%	6.25%
30%	69%	9%

3. Rate = $x\%, y\%, z\%$ for 3 cycles.

$$CI = \left[(x + y + z) + \frac{(xy + yz + zx)}{100} + \frac{xyz}{10000}\right]\%$$

- P = Rs. 4000
R = 2%, 3%, 5%
CI = (10 + 0.31 + 0.0030)% = 10.313%
∴ 4000 × 10.313% = Rs. 412.52

- If r% for 3 consecutive years / लगातार वर्ष
r%, r%, r%

$$CI_3 = \left(3r + \frac{3r^2}{100} + \frac{r^3}{10000}\right)\%$$

- P = Rs. 10, 000
R = 7% p.a.
CI_3 = ?
Eff. Rate = (21 + 1.47 + 0.0343)% = 22.0543%
∴ $CI_3 \rightarrow$ 10, 000 × 22.5043%
= Rs. 2250.43

4.

Rate	CI_3	$CI_3 - SI_3$
5%	15.7625%	0.7625%
10%	33.1%	3.1%
15%	52.0875%	7.0875%
20%	72.8%	12.8%
25%	95.3125%	20.3125%
30%	119.7%	29.7%

- P = Rs. 7500
R = 7%, 8%

$$CI_2 - SI_2 \rightarrow \frac{7 \times 8}{100}\% = 0.56\%$$

7500 × 0.56% ⇒ Rs. 42

5. P = 10.000
T = 3 years

$$R = 10\% \text{ p.a} = \frac{1}{10} \quad \therefore \frac{11}{10} \text{ or } 1.1$$

P	A_1	A_2	A_3
10000	11000	12100	13310

×1.1 ×1.1 ×1.1

CI_I	CI_{II}	CI_{III}
1000	1100	1210

×1.1 ×1.1

Amount & CI_I, CI_{II}, CI_{III} G.P में होंगे

6. Ratio of CI of
2 years → 2 : 1
3 years → 3 : 3 : 4
4 years → 4 : 6 : 4 : 1
5 years → 5 : 10 : 10 : 5 : 1

Some important points (कुछ महत्वपूर्ण बिंदु)

1. If / यदि
A = Amount / मिश्रधन,
P = Principal / मूलधन
r = Rate of Compound Interest (C.I.)
चक्रवृद्धि ब्याज की दर (C.I.)
t = no. of years / समय अवधि
then / तब,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t, \text{ C.I.} = A - P$$

$$\text{C.I.} = P\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - 1\right]$$

2. Compound interest is calculated on four basis:
चक्रवृद्धि ब्याज की गणना चार आधारों पर की जाती है

	Rate	Time(n)
Annually / हर साल	r%	t years
Half-yearly / अर्धवार्षिक	$\frac{r}{2}\%$	t × 2 years
Quarterly / त्रैमासिक	$\frac{r}{4}\%$	t × 4 years
Monthly / महीने के	$\frac{r}{12}\%$	t × 12 years

CamScanner

3. If there are distinct 'rates of interest' for distinct time periods i.e.

अगर अलग-अलग समय अवधि के लिए अलग अलग 'ब्याज की दरें' हैं,

Rate for 1st year / प्रथम वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_1\%$

Rate for 2nd year / द्वितीय वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_2\%$

Rate for 3nd year / तीसरे वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_3\%$ and so on / और इसी तरह

Then / फिर

$$A = P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)\ldots$$

C.I. = A – P

4. If the time is in fractional form i.e.,

यदि समय भिन्नात्मक रूप में है अर्थात,

t = nF, then

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n\left(1+\frac{rF}{100}\right) \text{ e.g. } t = 3\frac{5}{7} \text{ yrs, then}$$

$$A = \left(1+\frac{r}{100}\right)^3\left(1+\frac{r}{100}\times\frac{5}{7}\right)$$

5. A certain sum becomes 'm' times of itself in 't' years on compound interest then the time it will take to becomes m^n times of itself is t × n years.

एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 'm' वर्षों में स्वयं का 't' गुना हो जाती है तो इसे स्वयं का m^n गुना होने में लगने वाला समय t × n वर्ष है।

Ex. A certain sum becomes 3 times of itself in 5 years on compound interest. Then the time it will take to becomes 81 times of itself is →

एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 5 वर्ष में स्वयं की 3 गुनी हो जाती है। तो इसे स्वयं का 81 गुना होने में कितना समय लगेगा।

$81 = 3^4$

∴ Time = 5 × 4 = **20 years**

6. The difference between C.I. and S.I. on a sum 'P' in 2 years at the rate of R% rate of compound interest will be

S.I. और C.I. के बीच का अंतर और किसी राशि 'P' पर 2 वर्ष में R% की चक्रवृद्धि ब्याज की दर से साधारण ब्याज होगा

For 2 year, $C.I. - S.I. = P\left(\frac{R}{100}\right)^2 = \frac{S.I.\times R}{200}$

For 3 years, $C.I. - S.I. = P\left(\frac{R}{100}\right)^2\times\left(3+\frac{R}{100}\right)$

7. If on compound interest, a sum becomes Rs. A in 'a' years and Rs. B in 'b' years then,

यदि चक्रवृद्धि ब्याज पर, एक राशि 'a' साल में A रुपये हो जाती है। और 'b' साल में B रु. हो जाती है तब-

(i) If b – a = 1, then $R\% = \left(\frac{B}{A}-1\right)\times 100\%$

(ii) If b – a = 2, then $R\% = \left(\sqrt{\frac{B}{A}}-1\right)\times 100\%$

(iii) If b – a = n then, $R\% = \left[\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]\times 100\%$

where n is a whole number.

जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

8. If a sum becomes 'n' times of itself in 't' years on compound interest, then $R\% = \left[n^{\frac{1}{t}}-1\right]\times 100\%$

यदि कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 't' वर्षों में स्वयं का 'n' गुना हो जाती है, तो $R\% = \left[n^{\frac{1}{t}}-1\right]\times 100$

Ex. If a sum becomes 3 times of itself in 2 years on compound interest then R% is →

यदि कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 2 वर्ष में स्वयं की 3 गुनी हो जाती है तो R% है

$$R\% = \left(3^{\frac{1}{2}}-1\right)\times 100\%$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)\times 100\%$$

9. (i) for n = 2. Each annual installment

n = 2 के लिए। प्रत्येक वार्षिक किस्त

$$= \frac{P}{\left(\frac{100}{100+r}\right)+\left(\frac{100}{100+r}\right)^2}$$

(ii) For n = 3. Each annual installment

n = 3 के लिए। प्रत्येक वार्षिक किस्त

$$= \frac{P}{\left(\frac{100}{100+r}\right)+\left(\frac{100}{100+r}\right)^2+\left(\frac{100}{100+r}\right)^3}$$

10. The simple interest for a certain sum for 2 years at an annual rate of interest R% is S.I., then

वार्षिक ब्याज दर R% पर 2 वर्षों के लिए एक निश्चित राशि के लिए साधारण ब्याज S.I. है, तो

$$C.I. = S.I.\left(1+\frac{R}{200}\right)$$

11. A certain sum at C.I., becomes x times in n_1 year and y times in n_2 years then $x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$.

चक्रवृद्धि ब्याज पर एक निश्चित राशि, n_1 वर्ष में x गुना और n_2 वर्षों में y गुना हो जाती है। तो $x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$

CamScanner

Ratio & Proportion (अनुपात तथा समनुपात)

Concept of Ratio (अनुपात की अवधारणा)

- The comparative relation between two amounts/ quantities of same type is called ratio.
  एक ही प्रकार की दो राशियों/मात्राओं के बीच के तुलनात्मक संबंध को अनुपात कहते हैं।
- Ratio always occurs between units, as-
  अनुपात हमेशा समान इकाइयों के बीच होता है, जैसे-

Rupees : Rupees	रुपये: रुपये
kg : kg	किग्रा: किग्रा
Hour : Hour	घंटा: घंटा
Second : Second etc.	सेकंड: सेकंड आदि।

- Let an amount be x and another is y, then the ratio between them is $x : y$ or $x \div y$.
  माना एक राशि x और दूसरी y है, तो उनके बीच का अनुपात $x : y$ या $x \div y$ है।
- In ratio 1st number i.e. 'x' is called "antecedent" and 2nd number i.e., 'y' is called "consequent".
  अनुपात में पहली संख्या यानी 'x' को "पूर्ववर्ती" कहा जाता है और दूसरी संख्या यानी 'y' को "परिणामी" कहा जाता है।
- If a : b : : c : d, then a and d are called extremes and b and c are called means.
  यदि a : b : : c : d, तो a और d चरम कहलाते हैं और b और c माध्य कहलाते हैं।
  ∴ Product of extremes = Product of means.
  i.e., ad = bc

1. It does not change the ratio, when we multiply or divide antecedent and consequent of the ratio by a same non-zero number as-
   यह अनुपात में परिवर्तन नहीं करता है, जब हम पूर्ववृत्त को तथा परिणामी को एक ही गैर शून्य संख्या से गुणा या विभाजित करते हैं
   e.g. $a : b = \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = ac : bc = a : b$
2. What should be added to all of a, b, c, d (numbers) so that these become proportional respectively?
   सभी a, b, c, d (संख्याओं) में क्या जोड़ा जाए कि ये क्रमशः समानुपातिक हो जाएँ?
   Let x should be added / माना x जोड़ा जाना चाहिए :
   Then / फिर $\frac{a+x}{b+x} :: \frac{c+x}{d+x}$
3. If an amount R is to be divided between A and B in the ratio m : n then
   यदि एक राशि R को A और B के बीच m : n के अनुपात में विभाजित किया जाना है, तो
   (i) Part of A $= \frac{m}{m+n} \times R$
   (ii) Part of B $= \frac{n}{m+n} \times R$
   (iii) Difference of part of A and B $= \frac{m-n}{m+n} \times R$
   where m > n
4. If the ratio of A and B is m : n and the difference in their share is 'R' units then,
   यदि A और B का अनुपात m : n है और उनके हिस्से का अंतर 'R' इकाई है, तो,
   (i) Part of A $= \frac{m}{m-n} \times R$
   (ii) Part of B $= \frac{n}{m-n} \times R$
   (iii) The sum of parts of A and B $= \frac{m+n}{m-n} \times R$
   where m > n
5. If the ratio of alligation of milk and water in a glass is m : n and in other glass alligation is p : q, then the ratio of milk and water in third glass which contains alligation of both glasses is
   यदि एक गिलास में दूध और पानी के मिश्रण का अनुपात m : n है और दूसरे गिलास में मिश्रण का अनुपात p : q है, तो तीसरे गिलास में दूध और पानी का अनुपात है जिसमें दोनों गिलासों का मिश्रण है
   $$\text{Ratio} = \left(\frac{m}{m+n} + \frac{p}{p+q}\right) : \left(\frac{n}{m+n} + \frac{q}{p+q}\right)$$
6. If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ...$ then each ratio $= \frac{a+c+e+...}{b+d+f+...}$

Definition of different types of ratio (विभिन्न प्रकार के अनुपात की परिभाषा)

1. **Mixed ratio** – Let $x : y$ and P : Q be two ratios, then $Px : Qy$ is called mixed ratio.
   मिश्रित अनुपात – मान लीजिए $x : y$ और P : Q दो अनुपात हैं, तो $Px : Qy$ को मिश्रित अनुपात कहते हैं।
2. **Duplicate ratio** – The mixed ratio of two equal ratios is called the duplicate ratio as
   डुप्लीकेट अनुपात – दो समान अनुपातों के मिश्रित अनुपात को दोहराव अनुपात कहा जाता है
   duplicate ratio of a : b is $a^2 : b^2$
   a : b का डुप्लीकेट अनुपात $a^2 : b^2$ है

3. **Subduplicate ratio** – The square root of a certain ratio is called its subduplicate.

सबडुप्लीकेट अनुपात - एक निश्चित अनुपात के वर्गमूल को उसका सबडुप्लिकेट अनुपात कहा जाता है।

The subduplicate ratio of $a : b = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

a : b का सबडुप्लिकेट अनुपात = $\sqrt{a} : \sqrt{b}$

4. **Triplicate ratio** – The cube of a certain ratio is called triplicate ratio.

त्रिगुणित अनुपात - एक निश्चित अनुपात के घन को त्रिगुणित अनुपात कहते हैं।

The triplicate ratio of $a : b = a^3 : b^3$

a : b का त्रिगुणित अनुपात = $a^3 : b^3$

5. **Subtriplicate ratio** – The cube root of a certain ratio is called subtriplicate ratio as -

सबट्रिप्लिकेट अनुपात - एक निश्चित अनुपात के घनमूल को सबट्रिप्लीकेट अनुपात कहा जाता है

The Subtriplicate ratio of $a : b = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$

a : b का उपट्रिप्लिकेट अनुपात: = $\sqrt[3]{a} : \sqrt{b}$

6. **Inverse ratio** – The reciprocal of quantities of ratio is called its inverse. Reciprocal or inverse ratio of a : b

व्युत्क्रम अनुपात - अनुपात की मात्राओं का व्युत्क्रम इसका व्युत्क्रम कहलाता है। a : b का पारस्परिक या व्युत्क्रम अनुपात

$= \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ or $= \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right) \times$ (L.C.M of a and b)

7. **Invertendo** – The proportion in which antecedent and consequent quantities change their places, is called invertendo, as -

उलटा - जिस अनुपात में पूर्ववर्ती और परिणामी मात्राएँ अपना स्थान बदलती हैं, उसे उलटा कहा जाता है, क्योंकि

Invertendo of / का उलटा a : b = c : d is b : a = d : c

means / $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

8. **Alternendo** – If a : b :: c : d is a proportion then its alternendo is a : c :: b : d. i.e alternendo of $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ is $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

अल्टरनेंडो - यदि a : b :: c : d एक समानुपात है तो इसका अल्टरनेंडो a : c :: b : d है। यानी $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ का अल्टरनेंडो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ है।

9. **Componendo** – If a : b :: c : d is a proportion, then componenedo is (a + b) : b :: (c + d) : d

समाकलन - यदि a : b :: c : d एक समानुपात है, तो सहयोजन होगा (a + b) : b :: (c + d) : d

It means, If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

इसका अर्थ है, यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तब, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

or, $\left[\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}\right]$

10. **Dividendo** – If a : b :: c : d is a proportion, then its dividendo is (a – b) : b :: (c – d) : d

लाभांश - यदि a : b :: c : d एक समानुपात है, तो उसका लाभांश (a – b) : b :: (c – d) : d होगा।

It means / , $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$\Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

11. **Componendo and dividendo** – If there is a proportion a : b :: c : d then its componendo and dividendo is

योगान्तरानुपात – अगर कोई अनुपात है a : b :: c : d तो इसका योगान्तरानुपात है

(a + b) : (a – b) :: (c + d) : (c – d) or, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

To simplify the proportion any one method of componendo, dividendo, componendo and Dividendo can direcly be used.

अनुपात को सरल बनाने के लिए योगान्तरानुपात की किसी एक विधि का सीधे उपयोग किया जा सकता है।

Concept of Proportion (अनुपात की अवधारणा)

1. **Directly Proportional:** If $x = ky$, where k is a constant, then we say that x is direcly proportional to y. If it is written as $x \propto y$.

सीधे आनुपातिक: यदि $x = ky$, जहाँ k एक अचर है, तो हम कहते हैं कि x, y के समानुपाती है। यदि इस को $x \propto y$ के रूप में लिखा जाता है।

2. **Inversely Proportional:** If $x = \frac{k}{y}$ where k is a constant, then we say that x is inversely proportional to y. It is written as $x \propto \frac{1}{y}$.

व्युत्क्रमानुपाती: यदि $x = \frac{k}{y}$ जहाँ k एक अचर है, तो हम कहते हैं कि x, y के व्युत्क्रमानुपाती है। $x \propto \frac{1}{y}$ के रूप में लिखा जाता है।

3. **Proportion:** When two ratios are equal to each other, then they are called proportional as

समानुपात : जब दो अनुपात एक दूसरे के बराबर होते हैं, तो उन्हें समानुपाती कहते हैं

CamScanner

a : b = c : d, then, a, b, c and d are in proportion.

a : b = c : d, तो a, b, c और d समानुपात में हैं।

or,

a : b :: c : d

E.g. 2 : 5 = 6 : 15, then we write 2 : 5 :: 6 : 15

4. **Mean Proportion** – Let x be the mean proportion between a and b, then a : x :: x : b (Real condition)

औसत अनुपात – मान लीजिए x, a और b के बीच औसत अनुपात है, तो a : x :: x : b (वास्तविक स्थिति)

$$\therefore \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$

So, mean proportion of a and b $= \sqrt{ab}$

तो, a और b का औसत अनुपात $= \sqrt{ab}$

If x be the mean proportion between $(x - a)$ and $(x - b)$ then what will be the value of x?

यदि x, $(x - a)$ और $(x - b)$ के बीच माध्य अनुपात हो, तो x का मान क्या होगा?

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

5. **Third proportional** – Let 'x' be the third proportional of a and b then,

तीसरा समानुपाती – माना 'x', a और b का तीसरा समानुपाती है, तब, a : b :: b : x (Real condition)

i.e. $\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \Rightarrow ax = b^2$

$$\therefore x = \frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ Third proportional of a and b $= \frac{b^2}{a}$

$\therefore$ a और b का तीसरा आनुपातिक $= \frac{b^2}{a}$

6. **Fourth Proportional** – Let x be the fourth proportional of a, b and c, then a : b :: c : x (Real condition)

चौथा समानुपातिक – मान लीजिए x, a, b और c का चौथा समानुपाती है, तो a : b :: c : x (वास्तविक स्थिति)

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow ax = bc$$

$$\therefore x = \frac{bc}{a}$$

$\therefore$ Fourth proportional of a, b and c $= \frac{bc}{a}$

$\therefore$ a, b और c का चौथा आनुपातिक $= \frac{bc}{a}$

7. **First Proportional** – Let x be the first proportional of a, b and c. then, x : a :: b : c (Real condition)

पहला समानुपातिक – मान लीजिए कि x, a, b और c का पहला समानुपात है। तब, x : a :: b : c (वास्तविक स्थिति)

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow cx = ab$$

$$\therefore x = \frac{ab}{c}$$

8. Let 'x' be a number which is subtracted from a, b, c and d to make them proportional then

मान लीजिए 'x' एक संख्या है जिसे a, b, c और d से घटाकर उन्हें समानुपातिक बनाया जाता है

$$x = \frac{ad - bc}{(a+d)-(b+c)}$$

Let 'x' be a number which is added to a, b, c and d to make them proportional, then

मान लीजिए 'x' एक संख्या है जिसे a, b, c और d में जोड़कर उन्हें समानुपातिक बनाया जाता है, तब

$$x = \frac{bc - ad}{(a+d)-(b+c)}$$

Here a, b, c and d should always be in ascending order.

यहाँ a, b, c और d हमेशा बढ़ते क्रम में होने चाहिए।

Law of Ratios (अनुपात का नियम)

❖ If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then

(i) ad = bc

(ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(iii) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(iv) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(v) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

How to find ratio (अनुपात कैसे पता करें)

1. If 3A = 4B = 5c find A : B : C

step1: Take LCM of (3,4,5) = 60

$$\therefore A = \frac{60}{3} = 20$$

$\therefore$ A : B : C = **20 : 15 : 12**

$$B = \frac{60}{4} = 15$$

$$C = \frac{60}{5} = 12$$

CamScanner

2nd Method 3A=4B=5C

A:B:C =	4×5 :	3×5 :	3×4
	↓	↓	↓
	forA	forB	forC
	multiply the coeff. of B & C	multiply the coeff. of A & C	multiply the coeff. of A & C

⇒ **20 : 15 : 12**

2. If A:B = 4:5, B:C = 2:5 then find A:B:C = ?

A : B : C
4 : 5
2 : 5
8 : 10 : 25

Second methtod:-(B is common, so make B equal)

दूसरा तरीका:- (B कॉमन है, B को बराबर कर ले)

A : B : C
$4_{\times 2}$: $5_{\times 2}$
$2_{\times 5}$: $5_{\times 5}$
8 : 10 : 25

Concept of Degree (डिग्री की अवधारणा)

1. If $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

then $\frac{5a+3b}{7a-4b} = \frac{5\times7+3\times3}{7\times7-4\times3} = \frac{44}{37}$

2. $\frac{2a^2+3b^2}{a^2-4ab} = \frac{98+27}{49-84} = \frac{-25}{7}$

3. $\frac{3a^3+4b^2}{5a^2+2b^3}$ = can not be determined because degree of each term is not same.

$\frac{3a^3+4b^2}{5a^2+2b^3}$ = निर्धारित नहीं किया जा सकता क्योंकि प्रत्येक पद की घात समान नहीं है।

Note:-

To solve this type of equations degree of each term should be same.

इस प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए प्रत्येक पद की घात समान होनी चाहिए।

Mixture & Alligation (मिश्रण तथा आरोपण)

Concentration (सांद्रता)

- Concentration is the percentage of a particular quantity in the full mixture
  पूर्ण मिश्रण में एक विशेष मात्रा का प्रतिशत सांद्रता है

Ex. In a mixture ratio of milk; water = 60 : 40
= 60 : 40

∴ Concentration of milk / दूध की सांद्रता =

$\frac{60}{60+40} \times 100\% = 60\%$

If ratio of milk : water = 11 : 5
यदि दूध : पानी का अनुपात = 11 : 5 है

Then concentration of milk / फिर दूध की सांद्रता

$= \frac{11}{11+5} \times 100\% = 68.75\%$

Concentration of water / पानी की सांद्रता =

$\frac{5}{16} \times 100\% = 31.25\%$

or concentration of water = 100 – concentration of milk
या पानी की सांद्रता = 100 – दूध की सांद्रता
= 100 – 68.75% = 31.25%

Replacement of mixture (मिश्रण का प्रतिस्थापन)

1. When same quantity is replaced each time from 400 L Pure Milk.
   जब समान मात्रा को हर बार 400 लीटर शुद्ध दूध से बदल दिया जाता है

$\frac{-80}{400} = \frac{-1}{5}$ = part of 20% removed each time
हर बार 20% का हिस्सा हटा दिया गया

-80L pure milk
+80L water

left quantity of pure milk after 3 times / 3 बार के बाद बचा हुआ शुद्ध दूध $\Rightarrow 400 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$\Rightarrow 400 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$

$\Rightarrow 400 \times 0.512 = 204.8L$

water in final mixture / अंतिम मिश्रण में पानी = 400–204.8 = 195.2L

- Concentration of milk / दूध की सांद्रता =

$\frac{\text{Left pure milk}}{\text{Total mixture}} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0.512$

= 51.2%

Concentration of water = 100% – 51.2% = 48.8%

2. When different quantity is replaced each time.
   जब हर बार अलग-अलग मात्रा बदली जाती है।

400L pure milk / शुद्ध दूध

–40L pure milk +40L water = $\frac{-1}{10}$

–40 लीटर शुद्ध दूध + 40 लीटर पानी = $\frac{-1}{10}$

–50L mix +50L water = $\frac{-1}{8}$

–50 लीटर मिश्रण +50L लीटर पानी = $\frac{-1}{8}$

–80L mix +80L water = $\frac{-1}{5}$

–80 लीटर मिश्रण +80L लीटर पानी = = $\frac{-1}{5}$

Left Quantity of pure milk / शुद्ध दूध की शेष मात्रा

$= 400 \times \frac{9}{10} \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{5} = 252L$

water = 400 – 252 = 148L

2nd method :-

10	:	9
8	:	7
5		4
400	:	252
↓×1		↓×1
400L		**252L**

3. If from x litre of liquid A, p litre is withdrawn and same quantity of liquid B is added. Again from mixture, q litre mixture is withdrawn and same quantity of liquid B is added. Again from mixture, r litre is withdrawn and same quantity of liquid B is added, then
   यदि x लीटर द्रव में से p लीटर निकाल लिया जाता है और उतनी ही मात्रा में द्रव B मिला दिया जाता है। फिर से मिश्रण से q लीटर मिश्रण निकाल लिया जाता है और समान मात्रा में तरल B मिलाया जाता है। दोबारा मिश्रण से, r लीटर निकाल लिया जाता है और फिर समान मात्रा में तरल B मिलाया जाता है।

In final mixture, liquid A is / अंतिम मिश्रण में द्रव A है

$x\left(\frac{x-p}{x}\right)\left(\frac{x-q}{x}\right)\left(\frac{x-r}{x}\right)$.....

If only one process is repeated n times, then liquid A in final mixture is $= x\left(\frac{x-p}{x}\right)^n$ or $\left(1-\frac{p}{x}\right)^n$ and liquid B in final mixture = x – (liquid A in final mixture)

यदि केवल एक प्रक्रिया को n बार दोहराया जाता है, तो अंतिम मिश्रण में द्रव A $= x\left(\frac{x-p}{x}\right)^n$ या $\left(1-\frac{p}{x}\right)^n$ है और अंतिम मिश्रण में द्रव B $= x -$ (अंतिम मिश्रण में द्रव A)

4. If x is initial amount of liquid. p is the amount which is drawn, and this process is repeated n-times such that the resultant mixture is in the ratio a : b then, $\frac{a}{a+b} = \left(\frac{x-p}{x}\right)^n$

यदि x तरल की प्रारंभिक मात्रा है। p वह मात्रा है जो निकाली जाती है, और इस प्रक्रिया को n बार इस तरह दोहराया जाता है कि परिणामी मिश्रण a : b के अनुपात में होता है, तो $\frac{a}{a+b} = \left(\frac{x-p}{x}\right)^n$

Increase/decrease of mixture (मिश्रण का बढ़ना/घटना)

1. There is x% milk in 'a' unit mixture of milk and water. The amount of milk that should be added to increase the percentage of milk from x% to y% is given by

दूध और पानी के 'a' इकाई मिश्रण में x% दूध है। दूध की मात्रा जो दूध के प्रतिशत को x% से y% तक बढ़ाने के लिए जोड़ा जाना चाहिए, द्वारा दिया गया है

Required quantity of milk / दूध की आवश्यक मात्रा

$= \frac{a(x-y)}{(100-y)}$ unit.

2. There is x% water in 'a' unit the mixture of sugar and water. The quantity of water vapourised such that decrease in the percentage of water is from x% to y% is given by

चीनी और पानी के मिश्रण 'a' इकाई में x% पानी है। वाष्पीकृत पानी की मात्रा जिससे पानी के प्रतिशत में कमी x% से y% हो जाती है, द्वारा दिया जाता है

∴Required quantity of vapourised water/ वाष्पित जल की आवश्यक मात्रा $= \frac{a(x-y)}{y}$ unit.

3. The amount of acid/milk is x% in 'M' litre mixture. How much water should be mixed in it so that percentage amount of acid/milk would be y%?

'M' लीटर मिश्रण में अम्ल/दूध की मात्रा x% है। इसमें कितना पानी मिलाया जाए कि अम्ल/दूध की प्रतिशत मात्रा y% हो जाए?

Amount of water/ पानी की मात्रा $= \frac{M(x-y)}{y}$

Alligation (सम्मिश्रण)

1. The cost of cheap object is Rs. C/kg and the cost of dear object is Rs. D/kg. If the mixture of both object costs Rs. M/kg then

सस्ती वस्तु की कीमत रु. C/किग्रा. और महंगी वस्तु की कीमत रु. D / किग्रा। यदि दोनों वस्तुओं के मिश्रण का मूल्य रु. M/किग्रा हो

$$\frac{\text{Cheap object}}{\text{Dear object}} = \frac{D-M}{M-C}$$

Cheap (C) Dear(D)

Mixture (M)

D–M Cheap Quantity : M–C Dear Quantity

2. Alligation in population related questions

जनसंख्या संबंधी प्रश्नों में सम्मिश्रण

% increase/decrease (Male) % increase/decrease (female)

% increase/decrease (overall population)

Initial number of males Initial number of females

Ex. The population of a town is 6000. If males increase by 5% and females increase by 9% then population will become 6500 after 1 year. Find the initial ratio of males and females?

उदा. एक कस्बे की जनसंख्या 6000 है। यदि पुरुषों में 5% की वृद्धि होती है और महिलाओं में 9% की वृद्धि होती है तो 1 वर्ष बाद जनसंख्या 6500 हो जाएगी। पुरुषों और महिलाओं का प्रारंभिक अनुपात ज्ञात कीजिए?

❖ Overall increase in population / जनसंख्या में कुल वृद्धि

$= \frac{500}{6000} \times 100 = \frac{50}{6}\%$

Male 5% Female 9%

$\frac{50}{6}\%$

$9 - \frac{50}{6}$: $\frac{50}{6} - 5$

$\frac{4}{6}$: $\frac{20}{6}$

1 : 5

CamScanner

3. Alligation in income related questions:
आय संबंधी प्रश्नों में सम्मिश्रण

% increase/decrease in expenditure % increase/decrease in savings

% increase/decrease in income

Expenditure Saving

Ex. A man spends 75% of his income. If his income is increased by 20% and expenditure increased by 10%. Then find % change in savings.

एक आदमी अपनी आय का 75% खर्च करता है। यदि उसकी आय में 20% की वृद्धि होती है और व्यय में 10% की वृद्धि होती है। तो बचत में % परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

$75\% = \frac{3 \rightarrow \text{spends}}{4 \rightarrow \text{income}}$ ∴ Exp: saving = 3 : 1

Expenditure 10% Savings x%

20%

$x-20$: 10

3 : 1

$\Rightarrow \frac{x-20}{10} = \frac{3}{1}$

$x - 20 = 30$

$x = 50\%$

4. Alligation in profit loss / लाभ हानि में सम्मिश्रण

cost price A cost price B

cost price of mixture

Quantity A : Quantity B

Ex. Cost price of type A sugar is 36 Rs./Kg and type B sugar is 45 Rs/Kg. In what ratio these type of sugar should be mixed to get a mixture worth 39 Rs./Kg.

A प्रकार की चीनी का लागत मूल्य 36 रुपये/किग्रा है और प्रकार B चीनी का 45 रुपये/किग्रा है। इस प्रकार की चीनी को किस अनुपात में मिलाया जाए कि मिश्रण का मूल्य 39 रु./किग्रा हो जाए।

Type A 36 Rs/Kg Type B 45 Rs/Kg

45 Rs/Kg

45–39 : 39–36

6 : 3

2 : 1

5. Profit/loss% (A) Profit/Loss% (B)

overall profit/loss%

cost price (A) : cost price (B)

Ex. First watch is sold at 10% profit and 2nd watch is sold at 15% profit and the overall profit on both the watches is 12% if cost price of first watch is Rs. 360 Find cost price of second watch ?

पहली घड़ी को 10% लाभ पर बेचा जाता है और दूसरी घड़ी को 15% लाभ पर बेचा जाता है और दोनों घड़ियों पर कुल लाभ 12% है यदि पहली घड़ी का लागत मूल्य 360 रुपये है। दूसरी घड़ी का लागत मूल्य ज्ञात कीजिये?

Watch 1 10% Watch 2 15%

12%

3 : 2 → Ratio of cost price

×120 ×120

360 Rs. **240 Rs.**

6. Discount%(A) Discount% (B)

overall discount%

Marked price A : Marked price B

7. Alligation in simple interest / साधारण ब्याज में सम्मिश्रण

Rate of Interest %(A) Rate of Interest % (B)

Total rate of interest (A+B)

Principal (A) : Principal (B)

Ex. Rs. 10,000 is lent at 5% per annum simple interest and Rs. x is lent at 10% p.a. If overall rate of interest is 8% then find value of x.

रु. 10,000 रुपये प्रति वर्ष 5% साधारण ब्याज पर उधार दिया जाता है और रु. x को 10% वार्षिक दर पर उधार दिया जाता है। यदि कुल ब्याज दर 8% है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5% 10%

8%

2 : 3 → Ratio of principal

×5000 ×5000

Rs. 10,000 **Rs. 15000**

CamScanner

8. Alligation in Average / औसत में सम्मिश्रण

Average 1 Average 2
↘ ↙
Total average
↙ ↘
1st number : 2nd Number

9. Bowling Average (till innings A) Bowling Average (till innings B)
↘ ↙
Total average
↙ ↘
wickets (till innings A) : wickets (till innings B)

10. Alligation in time and distance

समय और दूरी में सम्मिश्रण

Average speed (for part 1) Average speed (for part 2)
↘ ↙
Average speed (whole journey)
↙ ↘
Time (for part 1) : Time (fort part 2)

11. speed 1 speed 2
↘ ↙
speed (Avg)
↙ ↘
Time 1 : Time 2

$$\text{Speed} = \frac{\text{distance}}{\text{time}}$$

Note → Mean value जिसके **respect** में निकलती है, **ratio** उसी का आता है।

❖ P% L%
↘ ↙
P%/L%
↙ ↘
CP_1 CP_2

$$P\% = \frac{P}{CP} \times 100$$

CamScanner

Partnership (साझेदारी)

❖ **Partnership / साझेदारी**

simple partnership
सरल साझेदारी

If all partners invest different capital for same time period or same capital for different time period

यदि सभी साझेदार एक ही समय अवधि के लिए अलग-अलग पूंजी या अलग-अलग समय अवधि के लिए एक ही पूंजी का निवेश करते हैं

compound partnership
यौगिक साझेदारी

If all partners invest their different capitals for different time period

यदि सभी साझेदार अलग-अलग समय अवधि के लिए अपनी अलग-अलग पूंजी निवेश करते हैं

❖ **Partners / साझेदार**

Active Partner
क्रियाशील साझेदार

invests money as well as takes part in business activity for which he is paid salary from the profit.

पैसे का निवेश करता है और साथ ही साथ व्यापारिक कामों में भाग लेता है और जिसके लिए उसे लाभ से वेतन भुगतान किया जाता है।

Sleeping Partner
अक्रियाशील साझेदार

who only invests money and does not take part in business activities.

केवल धन का निवेश करता है व्यावसायिक गतिविधियों में भाग नहीं लेता है।

❖ Profit = Capital × time

$P = C \times T$

$C = \frac{P}{T}$

$T = \frac{P}{C}$

❖ Profit and capital × time / लाभ और पूंजी × समय

Profit = $I_1T_1 : I_2T_2 : I_3T_3 : I_4T_4$

where $I_1, I_2, I_3, I_4 \rightarrow$ Investments by different persons

$T_1, T_2, T_3, T_4 \rightarrow$ Time

जहां $I_1, I_2, I_3, I_4 \rightarrow$ विभिन्न व्यक्तियों द्वारा निवेश

$T_1, T_2, T_3, T_4 \rightarrow$ समय

CHAMPION PUBLICATION

CamScanner

Average (औसत)

Concept of Deviation (विचलन की अवधारणा)

❖ Find Average of (का औसत ज्ञात कीजिए) 40, 42, 35, 50, 85

❖ Traditional method is to add all the numbers and divide by the number of observations but this method is lengthy and calculative. To avoid calculation and save time we solve it by concept of deviation.

पारंपरिक विधि सभी संख्याओं को जोड़ने और प्रेक्षणों की संख्या से भाग देने की है लेकिन यह विधि लंबी और गणनात्मक है। गणना से बचने और समय बचाने के लिए हम इसे विचलन की अवधारणा से हल करते हैं।

Step I : Consider any number in the range of these numbers as average.

चरण I : इन संख्याओं की श्रेणी में किसी भी संख्या को औसत मानें।

Step II : Find the difference of average from each number (deviation)

चरण II : प्रत्येक संख्या से औसत का अंतर ज्ञात कीजिए। (विचलन)

Step III: Add the deviation and divide it by total number of observations.

चरण III : विचलन जोड़ें और इसे प्रेक्षणों की कुल संख्या से विभाजित करें।

Step IV: Add or subtract (according to sign of deviation) the deviation from the average that we considered to get accurate average.

चरण IV : औसत से विचलन को जोड़ें या घटाएं (विचलन के संकेत के अनुसार) जिसे हमने सटीक औसत प्राप्त करने के लिए माना।

Example:	40,	42,	35,	50,	85
Deviation:	0	+2	–5	+10	+45

Let Average = 40

Net deviation (शुद्ध विचलन) = $\frac{0+2-5+10+45}{5} = \frac{52}{5} = +10.4$

∴ Actual Average(वास्तविक औसत) = 40 + 10.4 = **50.4**

1. Sum of the observation = Average × total number of the observation

प्रेक्षणों का योग = औसत × प्रेक्षणों की कुल संख्या

2. Average of two or more numbers/ quantities is called the mean of these numbers, which is given by

दो या दो से अधिक संख्याओं/मात्राओं का औसत इन संख्याओं का माध्य कहलाता है, जो निम्न द्वारा दिया जाता है

$$\textbf{Average (A)} = \frac{\textbf{Sum of all observation}}{\textbf{Total no. of all observation}}$$

Example:- Weight of 60 students = 40, 42, 35, 50....

Total weight = 2400kg

Average = $\frac{2400}{60}$ = 40 kg/student

3. If the given observation (x) are occuring with certain frequency (A) then,

यदि दिए गए अवलोकन (x) निश्चित आवृत्ति (A) के साथ हो रहे हैं, तो,

$$\textbf{Average} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

where $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ are frequencies

4. If the average of 'n_1' numbers is a_1 and the average of 'n_2' numbers is a_2, then average of total numbers n_1 and n_2 is, Average = $\frac{n_1a_1 + n_2a_2}{n_1 + n_2}$

यदि 'n_1' संख्याओं का औसत a_1 है और 'n_2' संख्याओं का औसत a_2 है, तो कुल संख्याओं n_1 और n_2 का औसत औसत है = $\frac{n_1a_1 + n_2a_2}{n_1 + n_2}$

CamScanner

Ex. If average of 10 numbers is 24 and average of 5 numbers is 15. Find the combined average?
यदि 10 संख्याओं का औसत 24 है और 5 संख्याओं का औसत 15 है, तो संयुक्त औसत ज्ञात कीजिए?

$$\text{Combined average} = \frac{10\times24+5\times15}{10+5} = \frac{315}{15} = \mathbf{21}$$

5. No. of data → n_1 n_2 n_3 n_4
Average → a_1 a_2 a_3 a_4

$$\text{Net avg/weighted avg} \rightarrow \frac{n_1a_1+n_2a_2+n_3n_3+n_4a_4}{n_1+n_2+n_3+n_4}$$

Example:

Class	A	B	C
No. of Students →	9 :	17 :	14
Average weight →	53 kg	59 kg	64 kg

$$\text{Avg.wt. of all class} \rightarrow \frac{9\times53+17\times59+14\times64}{9+17+14} = \frac{2376}{40} = 59.4$$

OR, Deviation Method :

Student →	9 :	17 :	14
Avg wt. →	53	59	64kg
	(–6kg×9)	0	(+5kg ×14)

Let Average weight of all classes / माना सभी वर्गों का औसत भार है = 59 kg

$$= 59\text{ kg} + \frac{(-54+70)}{40}$$

$= 59 + 0.4 = 59.4$ kg

Average of consecutive numbers (क्रमिक संख्याओं का औसत।)

1. The average of 'n' consecutive natural numbers starting from 1 i.e. Average of 1,2,3,....n
1 से शुरू होने वाली 'n' लगातार प्राकृतिक संख्याओं का औसत यानी 1,2,3, का औसत,...n

$$\frac{\text{sum of first n natural no.}}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}}$$

2. The average of squares of 'n' consecutive natural numbers starting from 1 i.e.
1 से शुरू होने वाली 'n' क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत अर्थात्

$$\text{Average of } 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots n^2 = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} = \frac{\mathbf{(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{6}}$$

3. The average of cubes of first 'n' consecutive natural numbers i.e. Average of $1^3, 2^3, 3^3, \ldots n^3$
प्रथम 'n' क्रमागत प्राकृत संख्याओं के घनों का औसत अर्थात $1^3, 2^3, 3^3, \ldots n^3$ का औसत

$$= \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n} = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

4. The average of first 'n' consecutive even natural numbers i.e. Average of 2, 4, 6,.... 2n = $\frac{n(n+1)}{n}$ = (n + 1)

प्रथम 'n' क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का औसत अर्थात 2, 4, 6, ... 2nका औसत = $\frac{n(n+1)}{n}$ = **(n + 1)**

5. The average of first 'n' consecutive odd natural numbers i.e. 1, 3, 5, ... (2n – 1) = $\frac{n^2}{n}$ = **n**

प्रथम 'n' क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का औसत अर्थात 1, 3, 5, ... (2n – 1) = $\frac{n^2}{n}$ = n

CamScanner

6. The average of certain consecutive numbers a, b, c, ... n is $\frac{\text{First no.}+\text{Last no.}}{2} = \frac{a+n}{2}$

कुछ क्रमागत संख्याओं a, b, c, ... n का औसत $\frac{\text{First no.}+\text{Last no.}}{2} = \frac{a+n}{2}$ है

Ex. Find average of 4, 5, 6 ..... 20.

4, 5, 6 ..... 20 का औसत ज्ञात कीजिए।

Average = $\frac{4+20}{2} = \frac{24}{2} = 12$

7. The average of 1st 'n' multiples of certain numbers x (कुछ संख्याओं के पहले 'n' गुणकों का औसत) = $\frac{x(1+n)}{2}$

Ex. Find average of first 10 multiples of 3 / 3 के पहले 10 गुणकों का औसत ज्ञात कीजिए

First 10 multiples of 3 = 3, 6, 9 ..... 30 / 3 के पहले 10 गुणक = 3, 6, 9 30

Average = $\frac{3(1+10)}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$

8. Average of square of 1st n even number / (पहली n सम संख्या के वर्ग का औसत) = $\frac{2(n+1)(2n+1)}{3}$

9. Average of cube of 1st n even number / (पहली n सम संख्या के घन का औसत) = $2n(n+1)^2$

10. Average of square of 1st n odd number / (पहली n विषम संख्या के वर्ग का औसत) = $\frac{2(n+1)(2n+1)}{3}$

11. Average of cube of 1st n odd number / (पहली n विषम संख्या के घन का औसत) = $n(2n^2-1)$

12. Average of 1 to n odd number / (1 से n विषम संख्या का औसत) = $\frac{\text{Last odd no.}+1}{2}$

13. Average of 1 to n even number / (1 से n सम संख्या का औसत) = $\frac{\text{Last even no.}+2}{2}$

Average speed (औसत गति)

1. If A goes from P to Q with speed of x km/h and returns from Q to P with speed of y km/h, then the average speed of total journey is

यदि A, P से Q तक x किमी/घंटा की गति से जाता है और Q से P तक y किमी/घंटा की गति से वापस आता है, तो कुल यात्रा की औसत गति है

Average speed = $\frac{2xy}{x+y} = \frac{\text{total distance}}{\text{total time taken}}$

2. If a distance is travelled with three different speeds a km/h, b km/h and c km/h, then Average speed of total journey = $\frac{3abc}{ab+bc+ca}$ km/h

यदि एक दूरी तीन अलग अलग गति a किमी/घंटा, b किमी/घंटा और c किमी/घंटा से तय की जाती है, तो कुल यात्रा की औसत गति = $\frac{3abc}{ab+bc+ca}$ km/h

Ex. A particular distance is travelled with 2 km/hr, 3 km/hr and 4 km/hr. Find average speed of the whole journey.

एक विशेष दूरी 2 किमी/घंटा, 3 किमी/घंटा और 4 किमी/घंटा के साथ तय की जाती है। पूरी यात्रा की औसत गति ज्ञात कीजिए।

Average speed = $\frac{3\times2\times3\times4}{2\times3+3\times4+4\times2} = \frac{72}{26}$

$= \frac{36}{13}$ km / hr

CamScanner

Average age (औसत उम्र)

1. 't' years before, the average age of N members of a family was 'T' years. If during this period 'n' children increased in the family but average age (present) remains same, then.
Present age of n children = n.T – N.t
't' वर्ष पहले, एक परिवार के N सदस्यों की औसत आयु 'T' वर्ष थी। यदि इस अवधि में परिवार में 'n' बच्चे बढ़े परन्तु औसत आयु (वर्तमान) वही रहे तो।
n बच्चों की वर्तमान आयु = n.T – N.t

2. If in the group of N persons, a new person comes at the place of a person of 'T' years, so that average age, increase by 't' years
यदि N व्यक्तियों के समूह में, 'T' वर्ष के व्यक्ति के स्थान पर एक नया व्यक्ति आता है, तो औसत आयु, 't' वर्ष से बढ़ जाती है
Then, the age of the new person (फिर, नए व्यक्ति की आयु) = T + N.t
If the average age decrease by 't' years after entry of new person, then the age of the new person = T – N.t
यदि नए व्यक्ति के प्रवेश के बाद औसत आयु 't' वर्ष कम हो जाती है, तो नए व्यक्ति की आयु = T – N.t

3. The average age of a group of N students is 'T' years. If 'n' students join, the average age of the group increases by 't' years, then Average age of new students $= T + \left(\frac{N}{n} + 1\right)t$
N छात्रों के एक समूह की औसत आयु 'T' वर्ष है। यदि 'n' छात्र शामिल होते हैं, तो समूह की औसत आयु 't' वर्ष बढ़ जाती है, तो नए छात्रों की औसत आयु $= T + \left(\frac{N}{n} + 1\right)t$
If the average age of the group decreases by 't' years, then Average age of new students
यदि समूह की औसत आयु 't' वर्ष कम हो जाती है, तो (नए छात्रों की औसत आयु)
$= T + \left(\frac{N}{n} + 1\right)t$

4. If the average age (height) of 'n' persons is x year (cms) and from them 'm' persons went out whose average age (height) is 'y' years (cms) and same number of persons joined whose average age (height) is 'z' years (cms) then what is the average age (height) of n persons ?
यदि 'n' व्यक्तियों की औसत आयु (ऊंचाई) x वर्ष (cms) है और उनमें से 'm' व्यक्ति निकले जिनकी औसत आयु (ऊंचाई) 'y' वर्ष (cms) है और उतने ही व्यक्ति शामिल हुए जिनकी औसत आयु (ऊंचाई) 'z' वर्ष (cms) है तो n व्यक्तियों की औसत आयु (ऊंचाई) क्या है?
$\therefore$ Average age = $\left\{x - \frac{m(y-z)}{n}\right\}$ years(cms)

5. If in a group, one member is replaced by a new members, then.
Age of new member = (age of replaced member) ± xn
where, x = increase (+) or decrease (–) in average
n = Number of members.
यदि किसी समूह में एक सदस्य को नए सदस्य से बदल दिया जाता है, तो
नए सदस्य की आयु = (प्रतिस्थापित सदस्य की आयु) ± xn
जहाँ, x = औसत में वृद्धि (+) या कमी (–)
n = सदस्यों की संख्या।

6. If a new member is added in a group then.
age (or income) of added member = Average age (or income) ± x (n + 1).
अगर किसी ग्रुप में कोई नया सदस्य जोड़ा जाता है तो।
जोड़े गए सदस्य की आयु (या आय) = औसत आयु (या आय) ± x (n + 1).
where x = increase (+) or decrease (–) in average age (or income)
n = Number of members.
जहाँ x = औसत आयु (या आय) में वृद्धि (+) या कमी (–)
n = सदस्यों की संख्या।

7. If a member leaves the group, then income (or age) of left member = Average income (or age) ± x(n – 1)
यदि कोई सदस्य समूह छोड़ देता है, तो छोड़कर गए सदस्य की आय (या आयु) = औसत आय (या आयु) ± x(n – 1)
where, x = increase (+) or decrease (–) in average income (or age)
n = Number of members.
जहाँ, x = औसत आय (या आयु) में वृद्धि (+) या कमी (–)
n = सदस्यों की संख्या।

When change in data happens (जब डाटा में परिवर्तन होता है)

1. If in any series having common difference 'd' and Average 'k', 'x' numbers are added in forward or backward, then
यदि किसी श्रेणी जिसका सार्वान्तर d तथा औसत k हो और इसमें आगे से अथवा पीछे से x संख्याएं जोड़े तो
New Average / नया औसत = $k \pm \frac{xd}{2}$

2. In series of even or odd having Average "k", when we add "x" number in forward or backward, Then
सम अथवा विषम संख्याओं की श्रेणी जिसका औसत k है, उसमें यदि हम आगे से अथवा पीछे से x संख्याएं जोड़े तो
New Average / नया औसत = $k \pm x$

3. In series of natural number having Average "k", when we add "x" number in forward or backward, Then
k औसत वाली प्राकृतिक संख्याओं की किसी श्रेणी में यदि आगे से अथवा पीछे से "x" संख्याएं जोड़ी जाए तो
New Average / नया औसत = $k \pm x/2$

4. If average of n observations is a but the average becomes b when one observation is eliminated, then value of eliminated observation = n(a–b)+b

यदि n प्रेक्षणों का औसत a हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को विस्थापित कर दिया जाए तो औसत b हो जाता है। विस्थापित प्रेक्षण का मान = n(a–b) + b

5. If average of n observations is a but the average becomes b when a new observation is added, then value of added observation = n(b–a) + b

यदि n प्रेक्षणों का औसत a हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को और शामिल कर दिया जाए तो औसत b हो जाता है। तो शामिल किए गए प्रेक्षण का मान = n(b–a) + b

6. We have n observations out of which some observations (a_1, a_2, a_3....) are replaced by some other new observations and in this way, if the average increase or decreases by b, then value of new observations

यदि हमारे पास n प्रेक्षण हों जिसमें से कुछ प्रेक्षणों (a_1, a_2, a_3....) को कुछ नए प्रेक्षणों द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाए तथा इस प्रक्रिया में यदि औसत में b की वृद्धि अथवा कमी हो जाए तो नए प्रेक्षणों का मान

$= a \pm nb$

Where/जहां, $a = a_1 + a_2 + a_3 + ...$

Note: In this formula, the signs of '+' and '–' depend upon the increment or decrement in the average

इस सूत्र में '+' अथवा '–' का चिन्ह औसत में वृद्धि अथवा कमी पर निर्भर करता है।

7. Mathematical operation performed on each observation results in same effect on the average.

प्रत्येक प्रेक्षण पर की गई गणितीय संक्रिया का औसत पर समान प्रभाव पड़ता है।

Related to numbers (अंकों से संबंधित)

1. If there are 3 natural numbers and average of any two number when added with third number gives a, b, c. Then natural numbers.

यदि 3 प्राकृतिक संख्याएं हो और किसी दो संख्याओं के औसत को यदि तीसरी संख्या में जोड़ा जाए तो प्राप्त संख्याएं क्रमशः a, b तथा c हो तो

Sum of number (संख्या का योग) $= \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = k$

First number (पहला नंबर) = 2a–k

Second number (दूसरा नंबर) = 2b – k

Third number (तीसरा नंबर) = 2c – k

2. If the average of m numbers is x and out of these 'm' numbers the average of n numbers is y. (or vice versa) then the average of remaining numbers will be

यदि m संख्याओं का औसत x है और इन 'm' संख्याओं में से n संख्याओं का औसत y है। (या इसके विपरीत) तो शेष संख्याओं का औसत होगा

(i) Average of remaining numbers (शेष संख्याओं का औसत) $= \frac{mx - ny}{m - n}$ (if m > n)

(ii) Average of remaining numbers (शेष संख्याओं का औसत)

$= \frac{ny - mx}{n - m}$ (if n > m)

3. If from (n + 1) numbers, the average of first n numbers is 'F' and the average of last n numbers is 'L', and the first number is 'f' and the last number 'l' then

यदि (n + 1) संख्याओं से प्रथम n संख्याओं का औसत 'F' और अंतिम n संख्याओं का औसत 'L' तथा पहली संख्या 'f' और अंतिम संख्या 'l' हो तो

$f - l = n(F - L)$

4. If the average of 'n' observations is 'x' and from these the average of 1st 'm' observation is 'y' and the average of last 'm' observations is 'z' then

यदि 'n' अवलोकनों का औसत 'x' है और इनमें से पहले 'm' अवलोकन का औसत 'y' है और अंतिम 'm' अवलोकनों का औसत 'z' है तो

mth observation $= m(y + z) - nx$

(m + 1)th observation $= nx - m(y + z)$

When data is misread (जब डेटा गलत पढ़ा जाता है)

1. If average of n numbers is m but later on it was found that a number 'a' was misread as 'b'. The correct average will be

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि एक संख्या 'a' को गलती से 'b' पढ़ लिया गया था। सही औसत होगा

$= m + \frac{(a - b)}{n}$

2. If the average of n numbers is m but later on it was found that two numbers a and b misread as p and q.

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि दो संख्याएँ a और b को गलती से p और q पढ़ लिया गया।

The correct average (सही औसत) $= m + \frac{(a + b - p - q)}{n}$

Miscellaneous (विविध)

1. If the average of n students in a class is a, where average of passed students is x and average of failed students is y, then

यदि किसी कक्षा में n विद्यार्थियों का औसत a हो, जहां उत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत x और अनुत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत y हो तो

Number of students passed/उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या

$= \frac{n(a - y)}{(x - y)}$

2. Bowling Average (गेंदबाजी औसत) = $\frac{\text{Total runs given}}{\text{Total wickets taken}}$

3. Batting Average (औसत बल्लेबाजी) = $\frac{\text{Total runs scored}}{\text{Total number of innings played}}$

CamScanner

Time & Work (समय और कार्य)

1. If M_1 men finish W_1 work in D_1 days, working T_1 time each day and M_2 men finish W_2 work in D_2 days, working T_2 time each day then

यदि M_1 पुरुष W_1 कार्य को D_1 दिनों में पूरा करते हैं, प्रत्येक दिन T_1 समय कार्य करते हैं और M_2 पुरुष W_2 कार्य को D_2 दिनों में समाप्त करते हैं, प्रत्येक दिन T_2 समय कार्य करते हैं, तो

$$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

Ex. 5 men can finish a work in 10 days working 8 hours each day. How many men will be needed to finish the same work in 5 days working 4 hours each day?

5 आदमी एक काम को प्रतिदिन 8 घंटे काम करके 10 दिनों में पूरा कर सकते हैं। प्रतिदिन 4 घंटे कार्य करके उसी कार्य को 5 दिनों में पूरा करने के लिए कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी?

$5 \times 10 \times 8 = m \times 5 \times 4$

m = 20

2. If A completes a piece of work in 'x' days and B completes the same work in 'y' days, then.

यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में पूरा करता है और B उसी कार्य को 'y' दिनों में पूरा करता है।

Work done by A in 1 day $= \frac{1}{x}$

A द्वारा 1दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{x}$

Work done by B in 1 day $= \frac{1}{y}$

B द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य। $= \frac{1}{y}$

$\therefore$ Work done by A and B in 1 day $= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$

A और B द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$

$\therefore$Total time taken to complete the work by A and B both $= \left(\frac{xy}{x+y}\right)$

A और B दोनों द्वारा कार्य को पूरा करने में लिया गया कुल समय $= \left(\frac{xy}{x+y}\right)$

3. If A can do a work in 'x' days. B can do the same work in 'y' days, C can do the same work in 'z' days then, total time taken by A, B and C to complete the work together

यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है। B समान कार्य को 'y' दिनों में कर सकता है, C उसी कार्य को 'z' दिनों में कर सकता है, तो A, B और C द्वारा मिलकर कार्य को पूरा करने में लगा कुल समय $= \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{xyz}{xy+yz+zx}$

4. If A can finish $\frac{m}{n}$ part of the work in D days.

Then, total time taken to finish the work by A $= \frac{n}{m} \times D$ days

यदि A किसी कार्य का $\frac{m}{n}$ भाग D दिनों में पूरा कर सकता है। फिर,

A द्वारा कार्य को पूरा करने में लगा कुल समय $= \frac{n}{m} \times D$ दिन

Ex. Rahul can finish $\frac{4}{5}$th part of the work in 20 days. In how many days he will complete the work?

राहुल काम का $\frac{4}{5}$ भाग 20 दिनों में पूरा कर सकता है। वह कार्य को कितने दिनों में पूरा करेगा?

$\therefore$ Time taken to complete the work

$\frac{5}{4} \times 20 =$ **25 days**

5. If A and B can do a work in 'x' days B and C can do the same work in 'y' days. C and A can do the same work in 'z' days. Then total time taken, when A, B and C work together $= \frac{2}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$ OR

$$\frac{2xyz}{xy+yz+zx} \text{ days}$$

यदि A और B किसी काम को 'x' दिनों में कर सकते हैं तो B और C उसी काम को 'y' दिनों में कर सकते हैं। C और A समान कार्य को 'z' दिनों में कर सकते हैं। तब A, B और C एक साथ उस कार्य को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे $= \frac{2}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2xyz}{xy+yz+zx}$ दिन

CamScanner

6. If A alone can do a certain work in 'x' days and A and B together can do the same work in 'y' days then B alone can do the same work in

यदि A अकेला किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है और A और B मिलकर उसी कार्य को 'y' दिनों में कर सकते हैं तो B अकेला उसी कार्य को कितने दिनों में कर सकता है?

$$\Rightarrow \left(\frac{xy}{x-y}\right) \text{days}$$

Ex. If A can do a work in 8 days and A + B together can do the same work in 5 days. Then B alone can do the work in how many days?

यदि A किसी काम को 8 दिनों में कर सकता है और A + B मिलकर उसी काम को 5 दिनों में कर सकते हैं। तो B अकेला उस कार्य को कितने दिनों में कर सकता है?

Time taken by B alone

$$= \frac{8\times5}{8-5} = \frac{40}{3} \textbf{ days}$$

7. If food is available for 'x' days for 'A' men at a certain place and after 'y' days 'B' men join, then the remaining food will serve total men for

यदि एक निश्चित स्थान पर 'A' पुरुषों के लिए 'x' दिनों के लिए भोजन उपलब्ध है। A और 'y' दिनों के बाद 'B' पुरुष शामिल होते हैं, तो शेष भोजन कुल पुरुषों में कितने दिन चलेगा।

Required time (आवश्यक समय)

$$= \frac{A(x-y)}{(A+B)} \text{days}$$

Ex. If food is available for 60 days for 35 men. After 15 days 10 new men join, then remaining food will serve total men for?

यदि 35 आदमियों के लिए 60 दिनों के लिए भोजन उपलब्ध है। 15 दिनों के बाद 10 नए पुरुष शामिल हो जाते हैं, तो शेष भोजन कुल पुरुषों के लिए कितने दिन चलेगा?

$$\text{Required time} = \frac{35(60-15)}{35+10} = \textbf{35 days}$$

8. If A men or B boys or C women can do a certain work in 'x' days then A_1 men B_1 boys and C_1 women can do the same work in

यदि A पुरुष या B लड़के या C महिला किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकते हैं तो A_1 पुरुष B_1 लड़के और C_1 महिला समान कार्य कितने दिनों में कर सकते हैं?

$$\text{Time taken} = \frac{x}{\frac{A_1}{A}+\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}}$$

9. The comparison of rate of work done is called efficiency of doing work.

$$\text{Efficiency (E)} \propto \frac{1}{\text{No. of days}}$$

किए गए कार्य की दर की तुलना कार्य करने की दक्षता कहलाती है।

$$\text{दक्षता (E)} \propto \frac{1}{\text{No. of days}}$$

$$E_1 : E_2 : E_3 = \frac{1}{D_1} : \frac{1}{D_2} : \frac{1}{D_3},\ E = \frac{k}{D} \text{ or, } ED = k \text{ or, } E_1D_1 = E_2D_2$$

Ex. 3 persons can complete the work in 3 days, 4 days, 5 days respectively. Find ratio of their efficiency?

3 व्यक्ति एक कार्य को क्रमशः 3 दिन, 4 दिन, 5 दिन में पूरा कर सकते हैं। उनकी दक्षता का अनुपात ज्ञात कीजिये?

Persons →	A		B	C
Time →	3		4	5
Efficiency →	$\left(\frac{1}{3}\right.$	:	$\frac{1}{4}$	: $\left.\frac{1}{5}\right) \times 60$ (LCM)
	20	:	15	: 12

10. If the efficiency to work of A is twice the efficiency to work of B, then,
A : B (efficiency) = $2x : x$ and A : B (time) = t : 2t

यदि A की कार्यकुशलता, B की कार्यकुशलता की दोगुनी है, तो,
A : B (दक्षता) = $2x : x$ और A : B (समय) = t : 2t

11. If A can do a work in 'x' days and B is R% more efficient than A then 'B' alone will do the same work in $x\frac{100}{(100+R)}$ days

यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है और B, A की तुलना में R% अधिक कुशल है तो 'B' अकेला उसी कार्य को $x\frac{100}{(100+R)}$ दिनों में करेगा।

Ex. A can do a work in 10 days. B is 20% more efficient than A. Then B alone do the same work in?

A किसी काम को 10 दिनों में कर सकता है। B, A की तुलना में 20% अधिक कुशल है। तो B अकेले कितने दिनों में समान कार्य करेगा?

$$\text{B alone will do} = 10 \times \frac{100}{100+20}$$

$$= 10 \times \frac{100}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3} \textbf{ days}$$

12. A can do a work in 'm' days and B can do the same work in 'n' days. If they work together and total wages is R, then.

A किसी काम को 'm' दिनों में कर सकता है और B उसी काम को 'n' दिनों में कर सकता है। यदि वे एक साथ काम करते हैं और कुल वेतन R है, तो।

$$\text{Part of A / A का हिस्सा} = \frac{n}{(m+n)} \times R$$

$$\text{Part of B / B का हिस्सा} = \frac{m}{(m+n)} \times R$$

CamScanner

13. If A, B and C finish the work in m, n and p days respectively and they receive the total wages R, then the ratio of their wages is

यदि A, B और C कार्य को m, n और p दिनों में पूरा करते है। और उन्हें कुल मजदूरी R प्राप्त होती है, तो उनकी मजदूरी का अनुपात है

$\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p}$

14. If A working alone takes x days more than A & B and B working alone takes y days more than A & B. Then the number of days taken by A & B working together to finish a job $\Rightarrow \sqrt{xy}$ days.

यदि A अकेले कार्य करते हुए A और B से x दिन अधिक लेता है और B अकेले कार्य करते हुए A और B से y दिन अधिक लेता है। तो A और B द्वारा एक साथ कार्य को पूरा करने में लगने वाले दिनों की संख्या $\Rightarrow \sqrt{xy}$ दिन है।

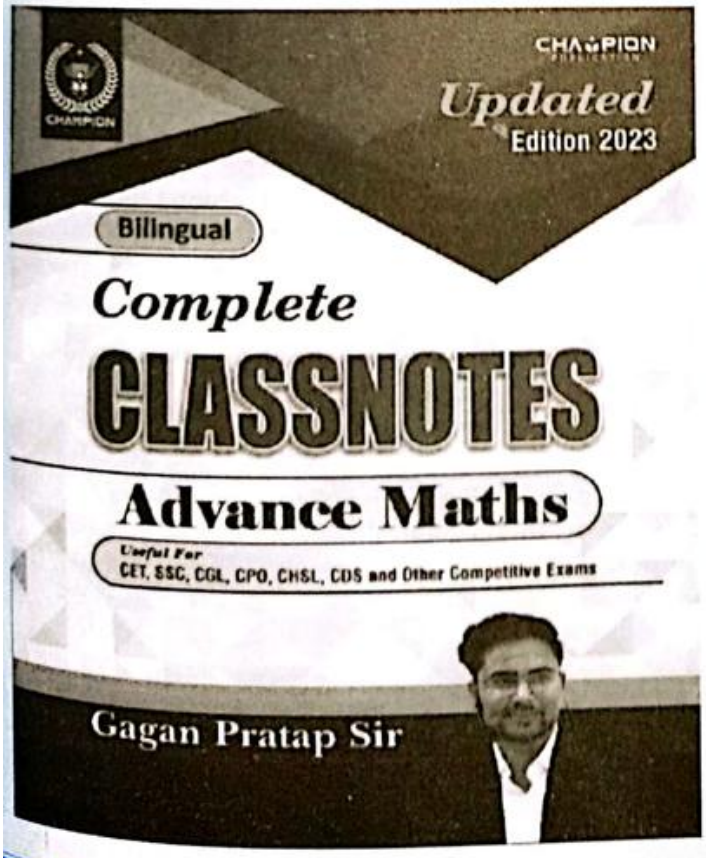
Ex. If A working alone takes 4 days more than A and B and B working alone takes 9 days more than A and B working together. Then the number of days taken by A and B working together to finish a job?

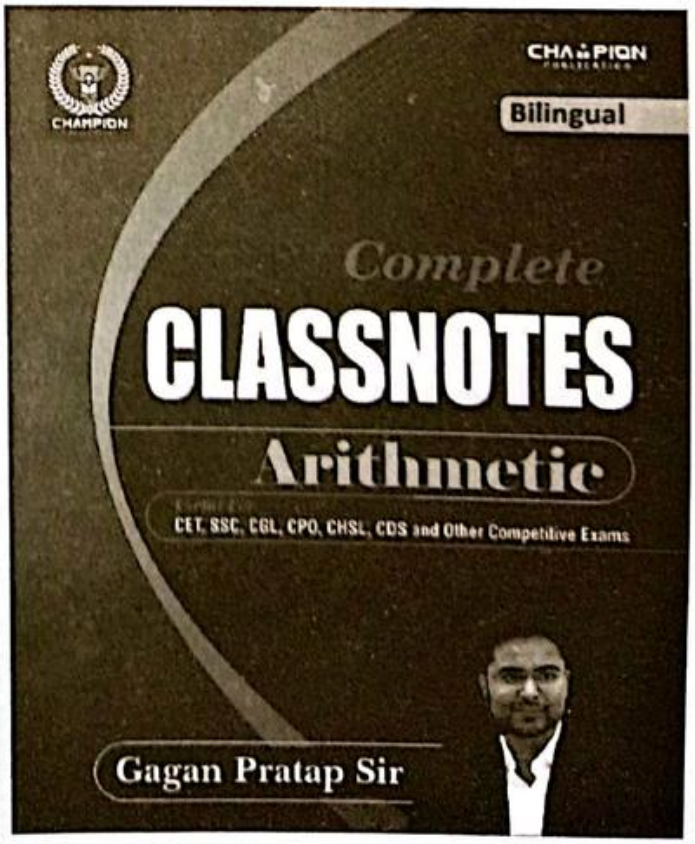
यदि A अकेले कार्य करते हुए A और B से 4 दिन अधिक लेता है और B अकेले कार्य करते हुए A और B के एक साथ कार्य करने से 9 दिन अधिक लेता है। तो A और B द्वारा मिलकर एक कार्य को पूरा करने में कितने दिन लगते हैं?

∴ Time taken by A and B together

A और B द्वारा एक साथ लिया गया समय

$= \sqrt{4 \times 9} = 6$ **days**





Pipe & Cistern (नल व टंकी)

Amount of water released or filled = Rate × time.
छोड़े गए या भरे गए पानी की मात्रा = दर × समय।

1. Two taps 'A' and 'B' can fill a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both the taps are opened together, then how much time it will take to fill the tank?
दो नल 'A' और 'B' एक टंकी को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाए, तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

Required time = $\left(\frac{xy}{x+y}\right)$hrs

2. Two taps 'A' and 'B' can empty a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both the taps are opened together, then time taken to empty the tank will be Required time = $\left(\frac{xy}{x+y}\right)$hrs
दो नल 'A' और 'B' एक टैंक को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को खाली करने में लगा समय = $\left(\frac{xy}{x+y}\right)$ घण्टे

3. If $x, y, z,$..... all taps are opened together then, the time required to fill/empty the tank will be:
यदि $x, y, z,$..... सभी नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को भरने/खाली करने में लगने वाला समय होगा:

$$\frac{1}{x} \pm \frac{1}{y} \pm \frac{1}{z} \pm .... = \frac{1}{T}$$

where T, is the required time.
जहाँ T, अभीष्ट समय है।

Note: Positive result shows that the tank is filling and Negative result shows that the tank is getting empty.
नोट : धनात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी भर रही है और ऋणात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी खाली हो रही है।

4. If a pipe fills a tank in 'x' hours but it takes 't' more hours to fill it due to leakage in tank. If tank is filled completely, then in how many hours it will be empty? [due to leakage outlet]
यदि एक पाइप किसी टंकी को 'x' घंटे में भरता है लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 't' घंटे अधिक लगते हैं। यदि टंकी पूरी तरह भर जाए, तो वह कितने घंटे में खाली हो जाएगी? [रिसाव आउटलेट के कारण]

Required time= $\frac{x(x+t)}{t}$

Ex. If a pipe fills a tank in 20 hours but it takes 4 hours more to fill it due to leakage in the tank. If the tank is filled completely, then in how many hours it will be empty?
यदि एक पाइप किसी टंकी को 20 घंटे में भरता है लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 4 घंटे अधिक लगते हैं। यदि टंकी अच्छी तरह से भरी जाती है, तो वह कितने घंटे में खाली हो जाएगी?

Required time = $\frac{20 \times (20+4)}{4}$
= 5 × 24 = **120 hours**

5. A tap 'A' can fill a tank in 'x' hours and 'B' can empty the tank in 'y' hours. Then (a) time taken to fill the tank
एक नल 'A' एक टंकी को 'x' घंटे में भर सकता है और 'B' टंकी को 'y' घंटे में खाली कर सकता है। तब (a) टैंक को भरने में लगने वाला समय
when both are opened (जब दोनों खोले जाते हैं)

$= \left(\frac{xy}{x-y}\right) : x > y$

(b) time taken to empty the tank
टंकी को खाली करने में लगा समय
when both are opened / जब दोनों खोले जाते हैं

$= \left(\frac{xy}{y-x}\right) : y > x$

6. Two taps A and B can fill a tank in x hours and y hours respectively. If both the pipes are opened together, then the time after which pipe B should be closed so that the tank is full in t hours
दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोल दिया जाता है, तो पाइप x को कितने समय बाद बंद कर देना चाहिए ताकि टैंक t घंटे में भर जाए।

Required time / आवश्यक समय $= \left[y\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]$hours

CamScanner

Time, Speed & Distance (समय, दूरी और चाल)

- **Distance = D, Speed = S, Time = T**

$D = S \times T, S = \frac{D}{T}, T = \frac{D}{S}$

$1km/hr = \frac{1km}{1Hr} = \frac{1000m}{3600sec} = \frac{5}{18} m/sec$

$\mathbf{1km/hr = \frac{5}{18} m/sec}$

$\mathbf{1 m/sec = \frac{18}{5} km/hr.}$

Case-I: If D = constant $\qquad S \propto \frac{1}{T}, T \propto \frac{1}{S}$

$D = S_1T_1 \Rightarrow S_1T_1 = S_2T_2$

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{T_2}{T_1}$

← 720 km →

A → $\qquad$ ← A

S = 60 km/h $\qquad$ S = 60 km/h

D = Constant

$A = \frac{720}{60} = 12 Hr.$

$B = \frac{720}{90} = 8 Hr.$

Speed → 2 : 3

Time → 3 : 2

Case-II: If time constant $D \propto S$

$D_1 = S_1 T$

$D_2 = S_2 T$

$\frac{D_1}{D_2} = \frac{S_1}{S_2}$

Case-III: If speed constant $D \propto T$

$D_1 = ST_1$

$D_2 = ST_2$

$\frac{D_1}{D_2} = \frac{T_1}{T_2}$

- If A and B starts walking towards each other. After meeting each other. A covered his remaining distance in t_1 time and B covered his remaining distance in t_2 time. Then ratio of their speed is

यदि A और B एक दूसरे की ओर चलने लगते हैं। आपस में मिलने के बाद, A अपनी शेष दूरी को t_1 समय में तय करता है और B अपनी शेष दूरी को t_2 समय में तय करता है। तो उनकी गति का अनुपात है

$\Rightarrow \frac{A}{B} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$

If they meet after 't' hours then $t = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$

यदि वे 't' घंटे के बाद मिलते हैं तो $t = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$

Relative speed (सापेक्ष गति)

1. When the two objects travel in same direction:-

जब दो वस्तुएँ एक ही दिशा में चलती हैं:-

→ 30km/hr.

→ 70 km/hr.

Relative speed (आपेक्षिक गति) = 70 – 30 = 40km/hr.

∴ Distance between man & bus in one hr. will be 40 km.

Relative speed = diff of speeds

आदमी और बस के बीच एक घंटे में 40 किमी दूरी होगी।

सापेक्ष गति = गति का अंतर

2. When two objects travel in opposite direction:-

जब दो वस्तुएँ विपरीत दिशा में चलती हैं:-

→ 30 km/hr $\qquad$ 70 km/hr ←

Relative speed (सापेक्ष गति) → 30+70 = 100 km/hr.

Relative speed (सापेक्ष गति) = sum of both speeds.

(दोनों गति का योग।)

When train passes (जब ट्रेन गुजरती है)

1. When train passes a pole or stationary man

जब ट्रेन किसी खंभे या स्थिर आदमी से गुजरती है

S → L $\qquad$ S → L

Distance covered will be equal to length of train

तय की गई दूरी ट्रेन की लंबाई के बराबर होगी

$T = \frac{L}{S}$

T = crossing time (पार करने का समय)

2. When train passes a bridge/platform.

जब ट्रेन पुल/प्लेटफार्म से गुजरती है।

S → L_T ← L_P →

distance covered will be equal to length of train + length of bridge/platform.

तय की गई दूरी = ट्रेन की लंबाई + पुल/प्लेटफॉर्म की लंबाई के बराबर होगी।

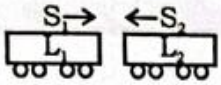
$T = \frac{L_T + L_P}{S}$

T= Crossing time (पार करने का समय)

CamScanner

3. When a train pases another train in opposite direction

जब एक ट्रेन विपरीत दिशा में दूसरी ट्रेन को पार करती है

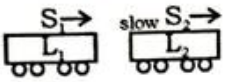


distance covered (तय की गई दूरी) = L_1+L_2

$$T = \frac{L_1+L_2}{S_1+S_2}$$

4. When a train passes another train in same direction.

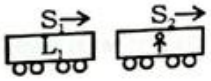
जब एक ट्रेन उसी दिशा में दूसरी ट्रेन को पार करती है।



$$T = \frac{L_1+L_2}{S_1+S_2}$$

5. When a train passes a person sitting in another moving train

जब एक ट्रेन दूसरी चलती ट्रेन में बैठे व्यक्ति को पार कर जाती है



$$T = \frac{L_1}{\text{Relative Speed}}$$

Average speed (औसत गति)

1. If a man travels different distances $d_1, d_2, d_3, \ldots$ and so on in different time t_1, t_2, t_3 respectively then,

यदि एक व्यक्ति अलग-अलग दूरी $d_1, d_2, d_3, \ldots$ और इसी तरह अलग-अलग समय t_1, t_2, t_3 में क्रमशः तय करता है, तो,

$$\text{Average speed / औसत गति} = \frac{\text{total travelled distance}}{\text{total time taken in travelling distance}}$$

$$= \frac{d_1+d_2+d_3+\ldots}{t_1+t_2+t_3+\ldots}$$

2. If a man travels different distances $d_1, d_2, d_3, \ldots$ and so on with different speeds s_1, s_2, s_3, respectively then,

यदि एक व्यक्ति अलग अलग दूरी $d_1, d_2, d_3, \ldots$ और इसी तरह अलग-अलग गति क्रमशः s_1, s_2, s_3 से यात्रा करता है, तो,

$$\text{Average speed / औसत गति} = \frac{(d_1+d_2+d_3+\ldots)}{\frac{d_1}{s_1}+\frac{d_2}{s_2}+\frac{d_3}{s_3}+\ldots}$$

3. If a distance is divided into n equal parts each travelled with different speeds, then,

यदि एक दूरी को n बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, प्रत्येक ने अलग-अलग गति से यात्रा की, तो

$$\text{Average speed / औसत गति} = \frac{n}{\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}\right)}$$

where n number of equal parts $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n$ are speeds.

जहाँ n बराबर भागों की संख्या $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n$ गति हैं।

4. If a bus travels from A to B with the speed of x km/h and returns from B to A with the speed of y km/h, then the average speed will be $\left(\frac{2xy}{x+y}\right)$ km/h,

यदि एक बस A से B तक x किमी/घंटा की गति से यात्रा करती है और B से A तक y किमी/घंटा की गति से वापस आती है, तो औसत गति होगी $\left(\frac{2xy}{x+y}\right)$

Speed increase/decrease (गति में वृद्धि/कमी)

1. If an object increases/decreases its speed from x km/hr to y km/hr. to cover a distance in t_2 hours in place of t_1 hours then (Here (t_2-t_1) will be given).

यदि कोई वस्तु अपनी गति को x किमी/घंटा से बढ़ाकर y किमी/घंटा कर देती है। किसी दूरी को t_1 घंटे के स्थान पर t_2 घंटे में तय करने के लिए (यहाँ (t_2-t_1) दिया जाएगा)।

$$\text{Distance} = \frac{xy}{(\text{Diff. of } x \text{ and } y)} \times \text{(Change in time)}$$

or,

$$\text{Distance} = \left(\frac{\text{Product of Speeds}}{\text{Diff. in Speeds}}\right) \times \text{(Change in time)}$$

2. If an object travels certain distance with the speed of $\frac{A}{B}$ of its original speed and reaches its destination 't' hours before or after, then the time taken by object travelling at original speed is

यदि कोई वस्तु अपनी मूल गति की $\frac{A}{B}$ गति के साथ निश्चित दूरी तय करती है और अपने गंतव्य 't' घंटे पहले या बाद में पहुँचती है, तो वस्तु द्वारा मूल गति से यात्रा करने में लिया गया समय है

$$\text{Time} = \frac{A}{(\text{Diff. of A and B})} \times \text{time (in hour)}$$

3. If a man travels at the speed of s_1, he reaches his destination t_1 late while he reaches t_2 before when he travels at s_2 speed, then the distance between the two places is

यदि एक व्यक्ति s_1 की गति से यात्रा करता है, तो वह अपने गंतव्य t_1 देर से पहुँचता है जबकि वह t_2 पहले पहुँचता है जब वह s_2 की गति से यात्रा करता है, तो दोनों स्थानों के बीच की दूरी है

$$\text{Distance} = \frac{(s_1 \times s_2) \times (t_1+t_2)}{s_2-s_1}$$

CamScanner

Some important points (कुछ महत्वपूर्ण बिंदु)

1. Formula to calculate the no. of rounds.
Circular Distance = (circumference) × No of rounds,
वृत्ताकार दूरी = (परिधि) × चक्करों की संख्या
$D = 2\pi r \times n$

2. If any one overtakes or follows another, then time taken to catch
अगर कोई किसी को ओवरटेक या पीछा करता है तो उसे पकड़ने में समय लगता है

$$= \frac{\text{distance between them}}{\text{Relative speed}}$$

or, meeting time (मिलने का समय)

$$= \frac{(\text{Speed of 1st traveller}) \times \text{time}}{(\text{Diff. of speeds})}$$

Total travelled distance to catch the thief (चोर को पकड़ने के लिए तय की गई कुल दूरी)

$$= \frac{(\text{Product of speeds}) \times \text{time}}{(\text{Diff. of speeds})}$$

3. Formula to calculate the no. of poles,
खम्बों की संख्या पता करना
Distance / खम्बों की संख्या (दूरी) = $(n-1)x$
where n = No. of poles.
x = distance between consecutive two poles.
x = लगातार दो खम्बों के बीच की दूरी।

4. If a man covers $\frac{1}{x}$ part of Journey at u km/h, $\frac{1}{y}$ part at v km/h and $\frac{1}{z}$ part at w km/hr and so on, then his average speed for the whole journey will be

यदि एक व्यक्ति अपनी यात्रा का $\frac{1}{x}$ भाग u किमी/घंटा की गति से, $\frac{1}{y}$ भाग v किमी/घंटा की गति से और $\frac{1}{z}$ भाग w किमी/घंटा की गति से तय करता है, तो पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत गति होगी

$$\frac{1}{\frac{1}{xu}+\frac{1}{yv}+\frac{1}{zw}+....}$$

5. Let 'a' metre long train is travelling with the speed 'x' m/s and 'b' metre long train is travelling with the speed 'y' m/s in the opposite direction on parallel path. Then, time taken by the trains to cross each other

मान लीजिए कि 'a' मीटर लंबी ट्रेन 'x' m/s की गति से यात्रा कर रही है और 'b' मीटर लंबी ट्रेन समानांतर पथ पर विपरीत दिशा में 'y' m/s की गति से यात्रा कर रही है। फिर, ट्रेनों द्वारा एक दूसरे को पार करने में लगने वाला समय

$$= \left(\frac{a+b}{x+y}\right) \text{seconds}$$

6. If a train crosses a standing man/a pole in 't_1' sec time and crosses 'P' meter long platform in 't_2' sec time, then length of the train $= \frac{P \times t_1}{(t_2 - t_1)}$

यदि कोई रेलगाड़ी किसी खड़े व्यक्ति/खंभे को 't_1' सेकण्ड समय में पार करती है तथा 'P' मीटर लम्बे प्लेटफार्म को 't_2' सेकण्ड समय में पार करती है, तो रेलगाड़ी की लम्बाई $= \frac{P \times t_1}{(t_2 - t_1)}$

7. If two trains of (same lengths) are coming from same direction and cross a man in t_1 and t_2 seconds, then time taken by both the trains to cross each other $= \frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Diff. of time}}$

यदि (समान लंबाई) की दो रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा से आ रही हैं और एक आदमी को t_1 और t_2 सेकंड में पार करती हैं, तो दोनों रेलगाड़ियों द्वारा एक दूसरे को पार करने में लिया गया समय $= \frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Diff. of time}}$

8. If two trains of same length are coming from opposite directions and cross a man in t_1 seconds and t_2 seconds then time taken by both trains to cross each other $= \frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Sum of time}}$

यदि समान लंबाई की दो ट्रेनें विपरीत दिशाओं से आ रही हैं और एक आदमी को t_1 सेकंड और t_2 सेकंड में पार करती हैं तो दोनों ट्रेनों द्वारा एक दूसरे को पार करने में लिया गया समय $= \frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Sum of time}}$

9. If a train of length lm passes a bridge/ platform of 'x' m in t_1 sec, then the time taken by the same train to cross another bridge/platform of length 'y' m is,

$$\text{Time taken} = \left(\frac{l+y}{l+x}\right) t_1$$

यदि l मीटर लंबाई की एक ट्रेन 'x' मीटर के पुल/प्लेटफॉर्म को t_1 सेकंड में पार करती है, तो उसी ट्रेन द्वारा लंबाई 'y' मीटर के दूसरे पुल/प्लेटफॉर्म को पार करने में लगने वाला समय है, $= \left(\frac{l+y}{l+x}\right) t_1$

CamScanner

10. From stations A and B, two trains start travelling towards each other at speeds a and b, respectively. When they meet each other, it was found that one train covers distance d more than that of another train. The distance between stations A and B is given as

स्टेशनों A और B से, दो ट्रेनें क्रमशः a और b की गति से एक दूसरे की ओर यात्रा करना शुरू करती हैं। जब वे एक-दूसरे से मिलते हैं, तो यह पाया गया कि एक ट्रेन दूसरी ट्रेन की तुलना में d अधिक दूरी तय करती है। स्टेशनों A और B के बीच की दूरी इस प्रकार दी गई है

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)\times d$$

11. Excluding stoppage, the average speed of a train is u and with stoppage its average speed is v. Then, the stoppage time per hour

ठहराव को छोड़कर, एक ट्रेन की औसत गति u है और ठहराव के साथ इसकी औसत गति v है। फिर, प्रति घंटे रुकने का समय

$$= \frac{\text{Diff. between their average speed}}{\text{Speed without stoppage}}$$

$$= \frac{u-v}{u}$$

With $u > v$ and $u, v \neq 0$

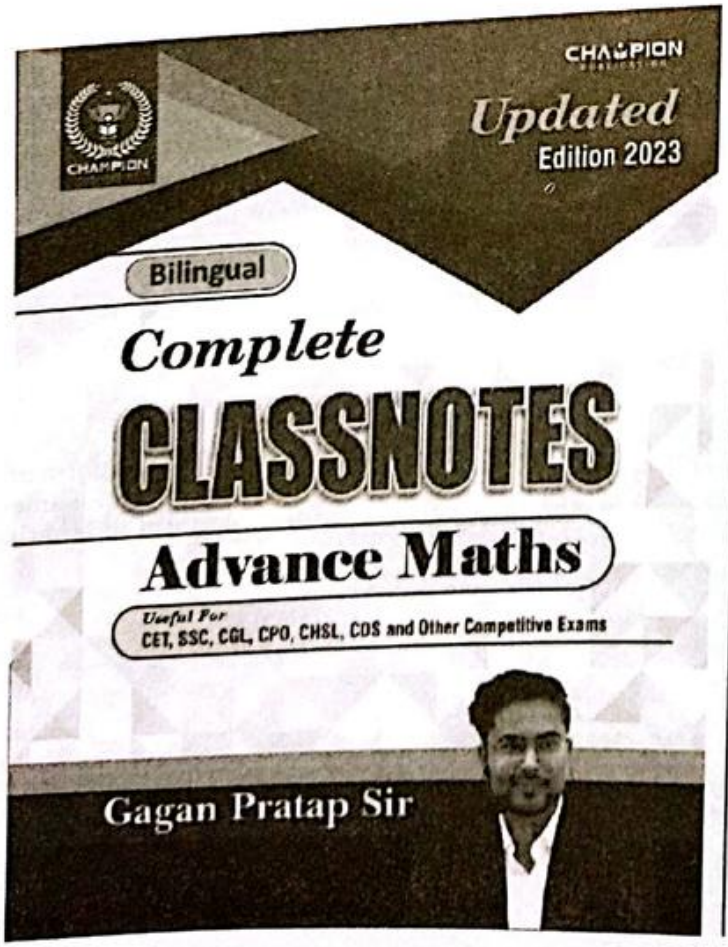
12. A train covers a distance between stations A and B in time t_1. If the speed is changed by S then the time taken to cover the same distance is t_2. Then the distance (D) between A and B is given by

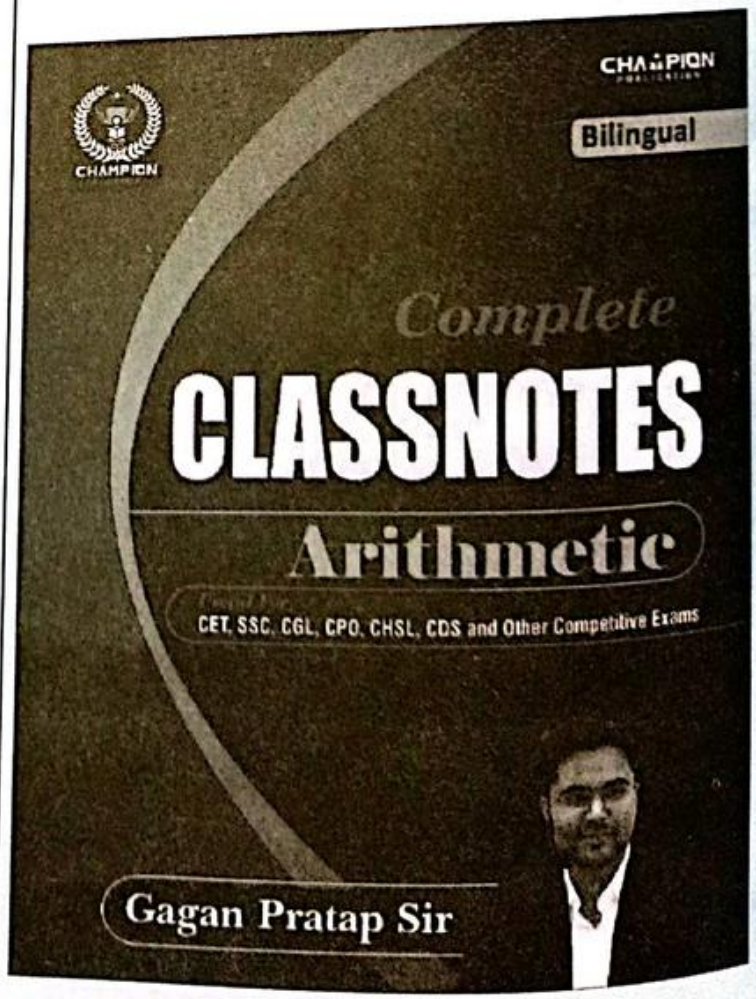
एक ट्रेन स्टेशनों A और B के बीच की दूरी को t_1 समय में तय करती है। यदि गति को S से बदल दिया जाए तो समान दूरी तय करने में लगने वाला समय t_2 है। तब A और B के बीच की दूरी (D) द्वारा दी जाती है

$$D = S\left(\frac{t_1t_2}{t_1-t_2}\right) \text{ or } \left(\frac{S'}{t'}\right)t_1t_2$$

Where 't' : change in the time taken

जहाँ 't' : लिए गए समय में परिवर्तन





CamScanner

Boat & Stream (नाव व धारा)

1. Speed of boat in still water = $x$km/hr
शांत जल में नाव की गति = $x$km/hr
Speed of current/stream = $y$km/hr
धारा की गति = $y$km/hr

- Speed of boat in same direction of stream = downstream = **D = $x + y$**
धारा की एक ही दिशा में नाव की गति = धारा के अनुकूल = **D = $x + y$**
- Speed of boat in opposite direction of stream = upstream = **U = $x - y$**
धारा के विपरीत दिशा में नाव की गति = धारा के प्रतिकूल = **U = $x - y$**
- $x > y$ $x = \frac{D+U}{2}$ = Speed of boat. (नाव की गति)

$y = \frac{D-U}{2}$ = Speed of stream. (धारा की गति)

D > U

2. Let the speed of boat is x km/h and speed of stream is y km/h. To travel d_1 km downstream and d_2 km upstream, the time is 't' hours, then
माना नाव की गति x किमी/घंटा है और धारा की गति y किमी/घंटा है। d_1 किमी धारा के अनुकूल और d_2 किमी धारा के प्रतिकूल यात्रा करने के लिए, समय 't' घंटे है, तब

$$\frac{d_1}{x+y} + \frac{d_2}{x-y} = t$$

3. If the speed of a boat or swimmer in still water is a km/hr and river is flowing with a speed of b km/hr. then average speed in going to a certain place and coming back to starting point is given by $= \frac{(a+b)(a-b)}{a}$ km/hr
यदि शांत जल में नाव या तैराक की गति a किमी/घंटा है और नदी b किमी/घंटा की गति से बह रही है। तो एक निश्चित स्थान पर जाने और प्रारंभिक बिंदु पर वापस आने की औसत गति = $\frac{(a+b)(a-b)}{a}$ किमी/घंटा द्वारा दी जाती है।

4. If a man or a boat covers x km distance in t_1 hours along the direction of stream (downstream) and covers the same distance in t_2 hours against the stream i.e. upstream, then
यदि कोई व्यक्ति या नाव धारा की दिशा में (धारा के अनुकूल) t_1 घंटे में x किमी की दूरी तय करता है और धारा के प्रतिकूल यानी धारा के विपरीत t_2 घंटे में समान दूरी तय करता है, तो
speed of man/boat (आदमी/नाव की गति) =

$$\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) \text{km/hr}$$

speed of stream (धारा की गति) = $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$ km/hr

5. If a swimmer takes same time to travel d_1 km downstream and d_2 km upstream, then,
यदि एक तैराक d_1 किमी धारा के अनुकूल और d_2 किमी धारा के प्रतिकूल यात्रा करने में समान समय लेता है, तो,

$$\frac{\text{Speed of swimmer or boat}}{\text{Speed of stream}} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2}$$

6. A swimmer or boat travels a certain distance upstream in t_1 hours, while it takes t_2 hours to travel same distance downstream. then,
एक तैराक या नाव एक निश्चित दूरी को धारा के प्रतिकूल t_1 घंटे में तय करता है, जबकि समान दूरी को धारा के अनुकूल तय करने में t_2 घंटे का समय लेता है। तब,

$$\frac{\text{Speed of swimmer}}{\text{Speed of stream}} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}$$

7. Let the speed of stream be y km/h and speed of board be x km/h. A boat travels equal distance (d) upstream as well as downstream in 't' hours, then
माना धारा की गति y किमी/घंटा और नाव की गति x किमी/घंटा है। एक नाव 't' घंटे में धारा के प्रतिकूल और धारा के अनुकूल समान दूरी तय करती है, तो

$$\frac{d}{x+y} + \frac{d}{x-y} = t,$$

d is the fixed distance or, $d = \frac{t(x^2 - y^2)}{2x}$

d निश्चित दूरी है तब, $d = \frac{t(x^2 - y^2)}{2x}$

$$t = \frac{2dx}{x^2 - y^2}$$

8. If a boat travels in downstream and upstream. then,
यदि कोई नाव धारा के अनुकूल और धारा के प्रतिकूल चलती है। तब,

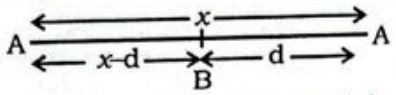
$$\text{Speed of boat} = \frac{\text{Sum of distances}}{2 \times \text{time}} = \frac{d_1 + d_2}{2 \times \text{time}}$$

$$\text{Speed of stream} = \frac{\text{Difference of distances}}{2 \times \text{time}} = \frac{d_1 - d_2}{2 \times \text{time}}$$

Race (दौड़)

1. Race:- $\xleftrightarrow{x}$ A beats B by d metres.

दौड़: $\xleftrightarrow{x}$ A, B को d मीटर से हराता है।



Time is same / समय एक ही है

Hence, $D \propto S$

$\therefore$ distance & speed का ratio same होगा।

$$\frac{D_A}{D_B} = \frac{S_A}{S_B} = \frac{x}{x\text{-}d}$$

Example:-

400m race — A give a start of 50m to B and still beat him by 80m

400 मीटर दौड़ - A ने B को 50 मीटर की शुरुआत दी और फिर भी उसे 80 मीटर से हरा दिया।

$$\frac{D_A}{D_B} = \frac{400}{270} = \frac{40}{27}$$

$$\therefore \frac{S_A}{S_B} = \frac{40}{27}$$

2. If in a race of length L, the time taken by A and B be t_A and t_B ($t_B > t_A$), then the distance (d) by which A beats B given by,

यदि लंबाई L की दौड़ में, A और B द्वारा लिया गया समय t_A और t_B ($t_B > t_A$) हो, तो दूरी (d) जिसके द्वारा A, B को हराता है,

$$d = \left(\frac{L}{t_B}\right)(t_B - t_A)$$

or, d = B's speed × $(t_B - t_A)$

3. If in a race of length L, A can give B a start of 'b' and C a start of 'c' then the start that B can give C.

यदि लंबाई L की दौड़ में, A, B को 'b' की शुरुआत देता है। और C को 'c' की शुरुआत देता है, तो वह शुरुआत जो B, C को दे सकता है

$$= L\left(\frac{c-b}{L-b}\right)$$

4. If A gives B a start of distance 'd' and still beats him by time 't' in a race of length 'L'. then B's speed is

यदि A, B को दूरी 'd' की शुरुआत देता है और फिर भी लंबाई 'L' की दौड़ में उसे 't' समय से हरा देता है। तो B की गति है

$$S_B = \frac{L-d}{\frac{L}{S_A}+t} = \frac{\text{Distance covered by B}}{\text{Total time taken by B}}$$

Where, S_A : A'S speed (जहां, S_A : A की गति)

Ex: A gives B a start of 200 m and still beats him by 5 sec in a race of 1 km. Find the speed of B it speed of A is 10 m/sec.

A, B को 200 मीटर की शुरुआत देता है और फिर भी उसे 1 किमी की दौड़ में 5 सेकंड से हरा देता है। B की गति ज्ञात कीजिए, A की गति 10 मीटर/सेकंड है।

$$\text{Speed of B / B की गति} = \frac{1000-200}{\frac{1000}{10}+5} = \frac{800}{105}$$

$$\Rightarrow 7\frac{13}{21}\text{ m/sec}$$

5. A and B walk around a circle of circumference 'p' with speeds S_A and S_B respectively. If they start simultaneously from the same point, the time after which they will be together again for the first time

A और B क्रमशः S_A और S_B गति के साथ 'p' परिधि के एक वृत्त के चारों ओर चलते हैं। यदि वे एक साथ एक ही बिंदु से शुरू करते हैं, तो वह समय जिसके बाद वे पहली बार फिर से एक साथ होंगे

$$= \frac{P}{S_A - S_B} = \frac{\text{Circumference}}{\text{Relative Speed}} = \frac{\text{परिधि}}{\text{सापेक्ष चाल}}$$

Ex: A and B walk around a circle of circumference 132 m with speeds 18 m/sec and 7 m/sec respectively. If they start simultaneously from the same point, the time after which they will be together again for the first time?

A और B क्रमशः 18 मीटर/सेकंड और 7 मीटर/सेकंड की गति से 132 मीटर परिधि वाले एक वृत्त के चारों ओर चलते हैं। यदि वे एक साथ एक ही बिंदु से शुरू करते हैं, तो कितने समय बाद वे पहली बार फिर से एक साथ होंगे?

$$\frac{132}{18-7} = \frac{132}{11} = 12\text{ sec}$$

CamScanner

Permutation & Combinations
(क्रमचय और संचय)

Fundamental Principle of Counting
(गणना का मौलिक सिद्धांत)

- If an event can occur in m different ways, following which another event can occur in n different ways, then the total no. of occurrence of the events in the given order is m × n.

  यदि एक घटना m विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, जिसके बाद दूसरी घटना n विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है तो दोनों घटनाओं को मिलाकर कुल m × n तरीके से घटित हो सकते है।

Ex. Mohan has 3 pants and 2 shirts. How many different pairs of a pant and a shirt, can be dress up with?

मोहन के पास 3 पैंट और 2 कमीजें हैं। एक पैंट और एक शर्ट के कितने जोड़े तैयार किये जा सकते है?

For every choice of a pant, there are two choices of shirt.

पैंट की हर पसंद के लिए, शर्ट के दो विकल्प होते हैं।

Therefore → 3 × 2 = 6 pairs of pant and shirt.

अत: → 3 × 2 = 6 जोड़ी पैंट और शर्ट।

Permutation (क्रमचय)

- A permutation is an arrangement in a definite order of a number of objects taken some or all at a time.

  एक क्रमचय संख्या के एक निश्चित क्रम में एक व्यवस्था है। वस्तुओं का एक समय में कुछ या सभी लिया जाता है।

- Mathematically The number of ways of arranging n distinct objects in a row taking r(0<r≤n) at a time is denoted by P(n, r) or ^nP_r.

  गणितीय रूप से एक समय में r(0<r≤n) लेकर एक पंक्ति में n विशिष्ट वस्तुओं को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या को P(n, r) या ^nP_r द्वारा निरूपित किया जाता है।

i.e. $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Properties of Permutation (क्रमचय के गुण)

(i) $^nP_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!$

(ii) $^nP_0 = \frac{n!}{n!} = 1$

(iii) $^nP_1 = n$

(iv) $^nP_{n-1} = n!$

(v) $^nP_r = n.^{n-1}P_{r-1} = n(n-1).^{n-2}P_{r-2} = n(n-1)(n-2).^{n-3}P_{r-3}$

(vi) $^{n-1}P_r + r.^{n-1}P_{r-1} = {}^nP_r$

(vii) $\frac{^nP_r}{^nP_{r-1}} = n - r + 1$

Factorial notation → The notation (n!) represents the product of first n natural number.

क्रमगुणित अंकन → अंकन n! पहले n प्राकृतिक संख्या के गुणनफल का प्रतिनिधित्व करता है।

n! = 1 × 2 × 3 × ..... × (n-1) × n

1! = 1

1! = 2 × 1 = 2

3! = 3 × 2 × 1 = 6

4! = 4 × 3! = 4 × 3 × 2! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24

5! = 5 × 4! = 5 × 4 × 3! = 5 × 4 × 3 × 2! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

Note → 0! = 1

$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, $o \le r \le n$ (Repetition not allowed)

Note:-

$^nP_n = n!$

$^nP_o = 1$

When $n = r \Rightarrow {}^nP_n = \frac{n!}{o!} = n!$

- The number of permutations of n different objects taken 'r' at a time where repetition is allowed = n^r

  एक समय में 'r' लिए गए n विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या जहां पुनरावृत्ति की अनुमति है = n^r

- The number of permutations of n objects, where p objects are of same kind and rest are all different $\frac{n!}{p!}$

  n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या, जहाँ p वस्तुएँ एक ही प्रकार की हैं और शेष सभी भिन्न हैं। तो $\frac{n!}{p!}$

- The number of permutation of n objects, where p_1 objects are of one kind, p_2 are of 2nd kind ..... P_k are of kth kind and the rest if any are of different kind is $\frac{n!}{p_1!p_2!.....p_k!}$

CamScanner

n वस्तुओं के क्रमचय की संख्या, जहाँ p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की होती हैं, p_2 दूसरी प्रकार की होती हैं ..... P_k K प्रकार की होती हैं और शेष यदि कोई भिन्न प्रकार की होती हैं। $\frac{n!}{p_1!p_2!.....p_k!}$

Combination (संचय)

❖ Each of the different groups or selections which can be made by some or all of a number of given things without reference to the order of the things in each group is called a combination.

विभिन्न समूहों या चयनों में से प्रत्येक जो प्रत्येक समूह में चीजों के क्रम के संदर्भ के बिना कुछ या सभी दी गई चीजों के द्वारा किया जा सकता है, एक संचय कहलाता है।

❖ ***Mathematically*** The number of combinations of n different things taken r at a time is

गणितीय रूप से एक समय में ली गई n विभिन्न वस्तुओं के संचयों की संख्या r है

$$C(n,r) \text{ or } {}^nC_r \text{ or } \binom{n}{r} \text{ i.e. } {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \le r \le n$$

Properties of Combination (संचय के गुण)

(i) ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$

(ii) ${}^nC_1 = n$

(iii) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(iv) If ${}^nC_r = {}^nC_p$, then either r = p or r + p = n

(v) ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

(vi) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

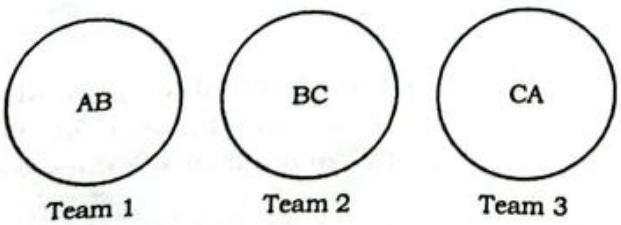
(vii) $n \times {}^{n-1}C_{r-1} = (n-r+1)\ {}^nC_{r-1}$

(viii) ${}^nC_r = \frac{n}{r}\ {}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n(n-1)}{r(r-1)}\ {}^{n-2}C_{r-2}$

(ix) ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$

❖ In combination order is not important let us assume there are 3 players A, B, C. A team consisting of two players is to be formed. In how many ways we can do it. → 3 Teams possible

संचय में क्रम महत्वपूर्ण नहीं है मान लें कि 3 खिलाड़ी हैं A, B, C। दो खिलाड़ियों से मिलकर एक टीम बनाई जानी है। हम इसे कितने तरीकों से कर सकते हैं। → 3 टीमें संभव



Each team is a combination of 3 different objects taken 2 at a time ⇒ ${}^3C_2$

प्रत्येक टीम 3 अंतर का संचय है। वस्तुओं को एक समय में 2 ⇒ ${}^3C_2$ लिया जाता है

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ If } r = n \text{ then } {}^nC_n = 1$$

$$\therefore \text{No. of teams} = {}^3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$${}^nC_0 = 1$$

Relation between permutation and combination (क्रमचय और संचय के बीच संबंध)

❖ ${}^nP_r = {}^nC_r \times r!,\ 0 < r \le n$

❖ ${}^nC_{n-r} = {}^nC_r \quad {}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

$= {}^nC_r$

i.e selecting r objects out of n objects is same as rejecting (n–r) objects.

अर्थात n वस्तुओं में से r वस्तुओं का चयन करना (n–r) वस्तुओं को अस्वीकार करने के समान है।

❖ ${}^nC_a = {}^nC_b \Rightarrow a = b \quad \& \quad n = a + b$

❖ ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

Fundamental Principles of Counting (गणना के मौलिक सिद्धांत)

❖ There are two Fundamental Principles of Counting

मतगणना के दो मूलभूत सिद्धांत हैं

1. Multiplication Principle / गुणन सिद्धांत

If first operation can be performed in m ways and then a second operation can be performed in n ways. Then, the two operations taken together can be performed in mn ways. This can be extended to any finite number of operations.

यदि पहला संक्रिया m तरीकों से किया जा सकता है और फिर दूसरा संक्रिया n तरीकों से किया जा सकता है। फिर, एक साथ ली गई दो संक्रियाओं को mn विधियों से निष्पादित किया जा सकता है। इसे किसी भी परिमित संख्या में संचालन तक बढ़ाया जा सकता है।

2. Addition Principle / जोड़ सिद्धांत

If an operation can be performed in m ways and another operation, which is independent of the first, can be performed in n ways. Then, either of the two operations can be performed in m + n ways. This can be extended to any finite number of mutually exclusive events.

यदि एक संक्रिया को m तरीकों से किया जा सकता है और दूसरी संक्रिया, जो पहले से स्वतंत्र है, n विधियों से की जा सकती है। फिर, दोनों में से कोई भी ऑपरेशन m + n तरीकों से किया जा सकता है। इसे परस्पर अनन्य घटनाओं की किसी भी परिमित संख्या तक बढ़ाया जा सकता है।

CamScanner

Factorial (क्रमगुणित)

- For any natural number n, we define factorial as
  किसी भी प्राकृतिक संख्या n के लिए, हम क्रमगुणित को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

  $n!$ or $\underline{|n}$ = $n(n-1)(n-2)\ldots 3\times2\times1$.

  The notation n! represent the prdouct of first n natural numbers.

  अंकन और n! पहले n प्राकृतिक संख्याओं के गुणन का प्रतिनिधित्व करते हैं।

Important Results Related to Factorial

क्रमगुणित से संबंधित महत्वपूर्ण परिणाम

(i) $0! = 1! = 1$

(ii) Factorials of negative integers and fractions are not defined.

ऋणात्मक पूर्णांकों और भिन्नों के गुणनखंड परिभाषित नहीं हैं।

(iii) $n! = n(n-1)! = n(n-1)\ (n-2)!$

(iv) $\frac{n!}{r!} = n(n-1)(n-2)\ldots(r+1)$

(v) n!+1 is not divisible by any natural number between 2 and n.c.

n!+1 और n.c के बीच किसी भी प्राकृतिक संख्या से विभाज्य नहीं है।

Exponent of a Prime p in n! / n! में प्राइम p का एक्सपोनेंट

- If p is prime and p^r divides n!, then maximum exponent of prime p in n! is given by

  यदि p अभाज्य है और p^r, n! को विभाजित करता है, तो n! में अभाज्य p का अधिकतम घातांक =

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

CamScanner

Probability (संभावना)

Trial (परीक्षण)

❖ Each trial is an action which results in one or several outcomes.

प्रत्येक परीक्षण एक क्रिया है जिसके परिणामस्वरूप एक या कई परिणाम प्राप्त होते हैं।

Ex. Each toss of a coin is a trial, each throw of a dice is a trial.

एक सिक्के का प्रत्येक टॉस एक ट्रायल है, पासे का प्रत्येक थ्रो एक ट्रायल है।

2. Let n be the total number of trials. The empirical Probability (P(E) of an event E is given by→

माना परीक्षणों की कुल संख्या n है। एक घटना E की अनुभवजन्य संभावना (P(E) द्वारा दी गई है

$$P(E) = \frac{\text{No. of trials in which the event happened}}{\text{The total no. of trials}}$$

Note:-

- The probability of each event lies between 0 and 1.

  प्रत्येक घटना की संभावना 0 और 1 के बीच होती है।

- Sum of all the probabilities of an event is 1.

  किसी घटना की सभी संभावनाओं का योग 1 है।

3.

Trial परीक्षण	All possible outcomes सभी संभावित परिणाम
Toss of a coin एक सिक्के का उछाल	2 (Head & Tail)
Dice is thrown पासा फेंका जाता है	→ 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

❖ Suppose a coin is tossed at random. We can reasonably assume that each outcome head or tail is as likely to occur as the other.

मान लीजिए एक सिक्का यादृच्छिक रूप से उछाला जाता है। हम यथोचित रूप से मान सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम हेड या टेल के दूसरे के रूप में होने की संभावना है।

∴ The outcomes head / tail are equally likely.

परिणाम चित/पट दोनों बराबर आ सकते हैं।

∴ The probability of getting a head or tail is / हेड या टेल आने की संभावना है = $\frac{1}{2}$

$$P(E) = \frac{\text{No. of outcomes favourable to an event(E)}}{\text{No. of all possible outcomes of the experiment}}$$

Ex. If a coin is tossed. 2 events will happen either head or tail.

एक सिक्के को उछाला जाता है। 2 घटनाएं या तो हेड या टेल होंगी।

All possible outcomes = 2 (Head or tail)

सभी संभव परिणाम = 2 (चित या पट)

∴ Probability of an event getting a head = $\frac{1}{2}$

किसी घटना के हेड आने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

Probability of an event getting a tail = $\frac{1}{2}$

किसी घटना के पट आने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

Complementary Events (पूरक घटनाएँ)

❖ Suppose we throw a dice / मान लीजिए हम एक पासा फेंकते हैं

Let E → event of getting a number greater than 4.

मान लीजिए E → 4 से बड़ी संख्या प्राप्त करने की घटना है।

F → event of getting a number less than 4 or equal to 4.

F → 4 से कम या 4 के बराबर संख्या प्राप्त करने की घटना।

Getting a number not greater than 4 is same as getting a number less than or equal to 4 i.e P(not E) = P(F)

4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना 4 से कम या बराबर संख्या प्राप्त करने के समान है अर्थात P(not E) = P(F)

∴ P(E) + P(F) = 1

P(E) + P(not E) = 1

⇒ $P(E) + P(\overline{E})$

∴ for an event E,

$p(\overline{E}) = 1 - P(E)$

$P(E) = 1 - P(\overline{E})$

(E) and ($\overline{E}$) are complementary events.

(E) और ($\overline{E}$) पूरक घटनाएं हैं।

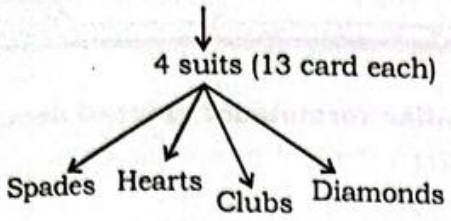
❖ $0 \le P(E) \le 1$ Probability of an event lies between 0 and 1.

$0 \le P(E) \le 1$ किसी घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच होती है।

CamScanner

5. In a deck of cards → 52 Cards

ताश की गड्डी में → 52 ताश



Black Colour → Clubs and spades

काला रंग → क्लब और हुकुम

Red Colour → Hearts and Diamonds

लाल रंग → दिल और हीरे

Cards in each suits (13) → 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Jack, queen, king, ace.

प्रत्येक सूट में कार्ड(13) → 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 जैक, क्वीन, किंग, ऐस।

Face Cards → King, Queen, Jack

फेस कार्ड्स → किंग, क्वीन, जैक

Total face card / कुल चेहरा कार्ड = 3 × 4 = 12

6. Probability of an event E + probability of the event not E = 1.

किसी घटना E की प्रायिकता + E नहीं की प्रायिकता = 1।

- The probability of an event that can not happen is 0. Such an event is called impossible event.

किसी घटना के घटित न होने की प्रायिकता 0 होती है। ऐसी घटना को असंभव घटना कहते हैं।

- The probability of an event that is certain to happen is 1. Such an event is called sure event.

जिस घटना का घटित होना निश्चित है उसकी प्रायिकता 1 होती है। ऐसी घटना को निश्चित घटना कहते हैं।

Some Basic Definitions (कुछ बुनियादी परिभाषाएं)

(i) **Trial** Performing an experiment is called a trial. The number of times an experiment is repeated is called the number of trials.

परीक्षण किसी प्रयोग को करने को परीक्षण कहा जाता है। किसी प्रयोग को जितनी बार दोहराया जाता है उसे परीक्षणों की संख्या कहा जाता है।

(ii) **Sample Space** The set of all possible outcomes of a random experiment is called the sample space of the experiment and it is denoted by S.

प्रतिदर्श समष्टि एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों के सेट को प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है और इसे S द्वारा निरूपित किया जाता है।

(iii) **Sample Point** The outcome of an experiment is called the sample point, i.e. the elements of set S are called the sample points.

प्रतिदर्श बिन्दु किसी प्रयोग के परिणाम को प्रतिदर्श बिन्दु कहते हैं, अर्थात् समुच्चय S के अवयवों को प्रतिदर्श बिन्दु कहते हैं।

(iv) **Event** A subset of the sample space associated with a random experiment is called event or case.

घटना एक यादृच्छिक प्रयोग से जुड़े प्रतिदर्श समष्टि के एक उपसमुच्चय को घटना या मामला कहा जाता है।

(v) **Elementary (or Simple) Event** An event containing only one sample point is called elementary event (or indecomposable event).

प्रारंभिक (या सरल) घटना एक घटना जिसमें केवल एक प्रतिदर्श बिन्दु होता है, प्राथमिक घटना (या अविघटनीय घटना) कहलाती है।

(vi) **Compound Event** An event containing more than one sample points is called compound event (or decomposable event).

मिश्र घटना से अधिक प्रतिदर्श बिंदुओं वाली घटना को मिश्र घटना (या विघटनीय घटना) कहा जाता है।

(vii) **Occurrence of an Event** An event associated to a random experiment is said to occur, if any one of the elementary events associated to it is an outcome.

किसी घटना का घटित होना एक यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित घटना घटित होना कहा जाता है, यदि इससे संबंधित प्राथमिक घटनाओं में से कोई एक परिणाम है।

(viii) **Certain Event** An event which must occur, whatever be the outcomes, is called a certain event (or sure event).

निश्चित घटना एक घटना जो घटित होनी चाहिए, परिणाम चाहे जो भी हो, एक निश्चित घटना (या निश्चित घटना) कहलाती है।

(ix) **Impossible Event** An event which cannot occur in a random experiment, is called an impossible event.

असंभव घटना एक घटना जो एक यादृच्छिक प्रयोग में घटित नहीं हो सकती, एक असंभव घटना कहलाती है।

(x) **Favourable Outcomes** Let S be the sample space associated with a random experiment and $E \subset S$. Then, the elementary events belonging to E are known as the favourable outcomes to E.

अनुकूल परिणाम मान लीजिए S एक यादृच्छिक प्रयोग और $E \subset S$ से जुड़ा प्रतिदर्श समष्टि है। फिर, E से संबंधित प्राथमिक घटनाओं को E के अनुकूल परिणाम के रूप में जाना जाता है।

(xi) **Equally likely Outcomes** The outcomes of a random experiment are said to be equally likely, when each outcome is as likely to occur as the other.

समान रूप से संभावित परिणाम एक यादृच्छिक प्रयोग के परिणामों को समान रूप से संभावित कहा जाता है, जब प्रत्येक परिणाम दूसरे के समान होने की संभावना होती है।

CamScanner

Statistics (सांख्यिकी)

Mean (माध्य)

❖ Mean is the average of all the numbers in the given data. Or

The arithmetic mean is found by adding the number & and dividing the sum of the total number of observations in the list.

माध्य दिए गए डेटा में सभी संख्याओं का औसत है। या

अंकगणितीय माध्य संख्या को जोड़कर और सूची में टिप्पणियों की कुल संख्या के योग को विभाजित करके पाया जाता है।

$$\text{Mean of observations} = \frac{\text{Sum of observations}}{\text{Total no. of observations}}$$

$$\text{प्रेक्षणों का माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

Ex. Data / उदा. डेटा : 3, 4, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15

Sum = 80

Total observations = 10

$\therefore$ Mean = $\frac{80}{10}$ = **8**

Mediam (माध्यिका)

❖ Median is the middle no., when data is arranged in ascending order. Or

Median is the middle value in a list ordered from smallest to largest.

माध्यिका मध्य संख्या है, जब आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। या

माध्यिका सबसे छोटी से सबसे बड़ी क्रमित सूची में मध्य मान है।

❖ If number of observations is even

यदि प्रेक्षणों की संख्या सम है

$$\text{Median} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{th term} + \left[\left(\frac{n}{2}\right)+1\right]\text{th term}}{2}$$

❖ If number of observations is odd.

यदि प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

$$\text{Median} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{th term.}$$

Ex.1 3, 4, 5, 5, <u>8, 9</u>, 9, 9, 13, 15

$$\text{Median} = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = \mathbf{8.5}$$

Ex.2 3, 4, 5, 5, 8, <u>9</u>, 9, 9, 13, 15, 16

$$\text{Median } \frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2}\text{th term} \Rightarrow 6\text{th term} \Rightarrow \mathbf{9}$$

❖ **Median formula for grouped data**

समूहीकृत डेटा के लिए माध्यिका सूत्र

$$L_m + \left[\frac{\frac{n}{2} - f}{f_m}\right] i$$

Where

n → Total frequency / कुल आवृत्ति

f → Cumulative frequency of class before the median class.

माध्यिका वर्ग से पहले वर्ग की संचयी बारंबारता।

f_m → Frequency of the class median.

वर्ग माध्यिका की आवृत्ति।

i → Class width. / वर्ग की चौड़ाई।

L_m → Lower boundary of the class median.

वर्ग माध्यिका की निचली सीमा।

Mode (बहुलक)

❖ Mode is the most common number of the data. / बहुलक डेटा की सबसे ज्यादा बार आने वाली संख्या है।

OR Mode is the most frequently occurring value in the list. / या बहुलक सूची में सबसे अधिक बार आने वाला मान है।

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15

9 is occurring 3 times / 9, 3 बार आ रहा है

$\therefore$ Mode = **9**

❖ **Mode for grouped data** / समूहीकृत डेटा के लिए बहुलक

Mode of observations / प्रेक्षणों का बहुलक = L + h .

$$\frac{fm - f1}{(fm - F1) + (fm - f2)}$$

Where L = Lower limit of the modal class.

जहाँ L = मोडल क्लास की लोअर लिमिट।

h = Size of the class interval.

h = वर्ग अंतराल का आकार

fm = Frequency of the modal

fm = मोडल की आवृत्ति

f1 = frequency of the class preceding the modal class.

f1 = बहुलक वर्ग से पहले वाले वर्ग की बारंबारता।

f2 = frequency of the class succeeding the modal class.

f2 = बहुलक वर्ग के बाद वाले वर्ग की बारंबारता।

CamScanner

Range (परास)

- Range is the difference between the largest number and smallest number of data.

परास डेटा की सबसे बड़ी संख्या और सबसे छोटी संख्या के बीच का अंतर है।

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15

Range ⇒ 15 – 3 = 12

Mean Deviation (औसत विचलन)

- The average deviation from the mean value of the given data set. / दिए गए डेटा सेट के माध्य मान से औसत विचलन।

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15 mean = 8

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Deviation→5 4 3 3 0 1 1 1 5 7 sum = 30

from mean

∴Mean deviation = $\frac{30}{10}$ = **3** / औसत झुकाव

Variance (विचरण, प्रसरण)

- Variance is the expected value of the squared variation of a random variable from its mean value.

OR Variance is the measure of how data points differ from the mean.

विचरण किसी अनियमित चर के वर्गाकार विचरण का उसके माध्य मान से अपेक्षित मान है। या विचरण इस बात का माप है कि डेटा बिंदु माध्य से कैसे भिन्न होते हैं।

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15 mean = 8

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Deviation→5 4 3 3 0 1 1 1 5 7

from ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

mean 25 16 9 9 0 1 1 1 25 49 sum 136

variance = $\frac{136}{10}$ = **13.6**

Standard Deviation (मानक विचलन)

- The Standard Deviation is a measure of how spread out numbers are.

मानक विचलन इस बात का माप है कि संख्याएँ कितनी फैली हुई हैं।

- Standard deviation / मानक विचलन =

$\sqrt{\text{variance}} = \sqrt{13.6}$

Frequency (आवृत्ति)

- The frequency (f) of a particular value is the number of times the value occurs in the data.

किसी विशेष मान की आवृत्ति (f) डेटा में मान के बार-बार होने की संख्या है।

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15

Frequency of
- 5 → 2
- 8 → 1
- 9 → 3

Frequency Distribution (आवृत्ति वितरण)

- It is a representation either in a graphical or tabular format that displays the number of observations within a given interval.

यह एक दिए गए अंतराल के भीतर टिप्पणियों का, एक चित्रमय या सारणीबद्ध प्रारूप में एक प्रतिनिधित्व है जो संख्या प्रदर्शित करता है।

Ex. The height of 50 students measured as :

50 छात्रों की ऊंचाई इस प्रकार मापी गई:

161, 150, 154, 165, 168, 161, 154, 162, 150, 151, 162, 164, 171, 165, 158, 154, 156, 172, 160, 170, 153, 159, 161, 170, 162, 165, 166, 168, 165, 164, 154, 152, 153, 156, 158, 162, 160, 161, 173, 166, 161, 159, 162, 167, 168, 159, 158, 153, 154, 159.

Frequency distribution from this data

इस डेटा से आवृत्ति वितरण

Class Interval कक्षा अन्तराल	Frequency आवृत्ति
150-155	12
155-160	9
160-165	14
165-170	10
170-175	5
Total	**50**

Frequency Polygon (आवृत्ति बहुभुज)

- A lone graph of class frequency plotted against class midpoint. It can be obtained by joining the midpoints of the tops of the rectangles in the histogram.

वर्ग आवृत्ति का एक अकेला ग्राफ वर्ग मध्य बिंदु के विरुद्ध प्लॉट किया गया। यह हिस्टोग्राम में आयतों के शीर्ष के मध्य बिंदुओं को जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है।

Clock (घड़ी)

Clocks consists of two arms, longer arm which shows minute is called minute hand and shorter arm which shows hour is called **hour hand**.

घड़ी में दो भुजाएँ होती हैं, लंबी भुजा जो मिनट दर्शाती है उसे मिनट की सुई कहते हैं और छोटी भुजा जो घंटा दर्शाती है उसे घंटे की सुई कहते हैं।

Dial

Dial of a clock is a circle, whose circumference is divided into 12 equal parts called 'hour space'. Each hour space is further divided into 5 parts, called 'minute space'.

घड़ी का डायल एक वृत्त होता है, जिसकी परिधि को 12 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, जिसे 'घंटे का स्थान' कहा जाता है। प्रत्येक घंटे के स्थान को आगे 5 भागों में विभाजित किया जाता है, जिसे 'मिनट का स्थान' कहा जाता है।

Some Important Results (कुछ महत्वपूर्ण परिणाम)

(i) The minute hand is 12 times faster than hour hand. / मिनट की सुई घंटे की सुई से 12 गुना तेज है।

(ii) In an hour, the minute hand covers 60 min spaces, while hour hand covers 5 min spaces. So, in an hour, the minute hand gains 55 min space.

एक घंटे में, मिनट की सुई 60 मिनट के स्थान को कवर करती है, जबकि घंटे की सुई 5 मिनट के स्थान को कवर करती है। इसलिए, एक घंटे में, मिनट की सुई 55 मिनट ज्यादा जगह हासिल कर लेती है।

(iii) Minutes space gained by minute hand in 1 min= $\frac{55}{60}$. / 1 मिनट में, मिनट की सुई द्वारा मिनट का स्थान = $\frac{55}{60}$

(iv) In 1 h, minute hand covers 360°, so in one minute it covers 6°.

1 घंटे में, मिनट की सुई 360° को कवर करती है, इसलिए एक मिनट में यह 6° को कवर करती है।

(v) In 1 h, hour hand covers $\frac{360°}{12}$ = 30°, so in one minute, hour hand covers (1/2)°. So, in 1 min, the minute hand gains $\left(5\frac{1}{2}\right)°$.

1 घंटे में, घंटे की सुई $\frac{360°}{12}$ = 30° कवर करती है, इसलिए एक मिनट में, घंटे की सुई (1/2)° कवर करती है। तो, 1 मिनट में, मिनट की सुई $\left(5\frac{1}{2}\right)°$ बढ़ जाती है।

(vi) In 1 h, both the hands coincide once, but in 12 h, they coincide 11 times.

1 घंटे में दोनों सुइयां एक बार मिलती हैं, लेकिन 12 घंटे में वे 11 बार मिलती हैं।

(vii) Two hands are at right angle, when they are 15 min space apart, this happens two times in an hour, but 22 times in 12 h.

दो सुई समकोण पर होंगी, जब वे 15 मिनट की दूरी पर हैं, यह एक घंटे में दो बार होता है, लेकिन 12 घंटे में 22 बार होता है।

(viii) Two hands are in opposite direction when they are 30 min space apart, this happens one time in an hour and 11 times in 12 h.

दो सुई विपरीत दिशा में होते हैं जब वे 30 मिनट की दूरी पर होते हैं, ऐसा एक घंटे में एक बार और 12 घंटे में 11 बार होता है।

(ix) If both hands start together from the same position, both will coincide after $65\frac{5}{11}$ min.

यदि दोनों सुई एक ही स्थिति से एक साथ शुरू होते हैं, तो दोनों $65\frac{5}{11}$ मिनट के बाद संपाती हो जाएंगे।

CamScanner

x) **Slow Clock** A clock in which both hands coincide at an interval more than $65\frac{5}{11}$ min, is called slow clock.

धीमी घड़ी वह घड़ी जिसमें दोनों सुइयाँ $65\frac{5}{11}$ मिनट से अधिक के अंतराल पर मिलती हैं, धीमी घड़ी कहलाती हैं।

xi) **Fast Clock** A clock in which both hands coincide at an interval less than $65\frac{5}{11}$ min, is called fast clock.

तीव्र घड़ी वह घड़ी जिसमें दोनों सुइयाँ $65\frac{5}{11}$ मिनट से कम के अंतराल पर मिलती हैं, तीव्र घड़ी कहलाती हैं।

xii) Angle between the hour hand and minute hand is given by $= \left|\frac{11}{2}M - 30H\right|$

किसी समय पर घंटे की सुई और मिनट की सुई के बीच का कोण $= \left|\frac{11}{2}M - 30H\right|$

xiii) If hour hand and minute hand coincide at $xx : yy$, then / यदि घंटे की सुई और मिनट की सुई $xx : yy$ पर मेल खाते हैं फिर

$$yy = \frac{60}{11} \times xx$$

(xiv) Between x and $(x + 1)$ O'clock, the two hands will coincide at $= 5 \times x \times \left(\frac{60}{55}\right)$ min past x.

x और $(x + 1)$ बजे के बीच, x के बाद दोनों सुइयाँ संपाती होंगी $= 5 \times x \times \left(\frac{60}{55}\right)$ min.

(xv) For a slow clock, total time lost in n hours $\Rightarrow n \times 60 = \left(\frac{x - 65\frac{5}{11}}{x}\right)$ min. where, x is the time in which the hands of slow clock coincide.

धीमी घड़ी के लिए, कुल समय जो खराब गया जहाँ, x वह समय है जिसमें धीमी घड़ी की सुइयाँ मिलती हैं। $\Rightarrow n \times 60 = \left(\frac{x - 65\frac{5}{11}}{x}\right)$

(xvi) For a fast clock, total time gained in n hours $= n \times 60\left(\frac{65\frac{5}{11} - x}{x}\right)$ min. where, x is the time in which the hands of the fast clock coincide.

तेज घड़ी के लिए, कुल समय जो बढ़ा $= n \times 60\left(\frac{65\frac{5}{11} - x}{x}\right)$ मिनट जहाँ, x वह समय है जिसमें तेज घड़ी की सुइयाँ मिलती हैं।

CamScanner

Calendar (कलेंडर)

- Calendar is a measure of time having day as the smallest unit.
  कैलेंडर समय का एक माप है जिसमें दिन सबसे छोटी इकाई है।
- **Ordinary Year** A year having 365 days, is called ordinary year.
  साधारण वर्ष जिस वर्ष में 365 दिन होते हैं, उसे साधारण वर्ष कहते हैं।
- **Leap Year** A year having 366 days, is called leap year.
  लीप वर्ष जिस वर्ष में 366 दिन होते हैं, उसे लीप वर्ष कहते हैं।
- **Odd Days** Number of days more than the complete numbers of weeks in a given period is called odd days.
  विषम दिन किसी निश्चित अवधि में सप्ताहों की कुल संख्या से अधिक दिनों की संख्या को विषम दिन कहा जाता है।

Important Points Related to Calendar (कैलेंडर से संबंधित महत्वपूर्ण बिंदु)

(i) Every year, except a centurial year is a leap year, if it is divisible by 4.
प्रत्येक वर्ष, एक शताब्दी वर्ष को छोड़कर, एक लीप वर्ष होता है, यदि वह 4 से विभाज्य हो।

(ii) Every 4th century is a leap year. A centurial year is a leap year, if it is divisible by 400.
हर चौथी शताब्दी एक लीप वर्ष है। एक शताब्दी वर्ष एक लीप वर्ष है, यदि वह 400 से विभाज्य है।

(iii) An ordinary year has only one odd day. / एक सामान्य वर्ष में केवल एक विषम दिन होता है।

(iv) A leap year has only two odd days. / एक लीप वर्ष में केवल दो विषम दिन होते हैं।

(v) 100 yr i.e. 1 century contains
$76 + 24 \times 2 = 76 + 48$ odd days / विषम दिन
= 124 odd days / विषम दिन
= 17 weeks + 5 odd days / विषम दिन
So, 100 year have 5 odd days. / अत: 100 वर्ष में 5 विषम दिन होते हैं।

(vii) 200 year contain 5×2 odd days = 1 week + 3 odd days / 200 वर्ष में 5×2 विषम दिन = 1 सप्ताह + 3 विषम दिन होते हैं
So, 200 year contain 3 odd days. / अत: 200 वर्ष में 3 विषम दिन होते हैं।
Similarly, 300 year contain 1 odd day / इसी प्रकार 300 वर्ष में 1 विषम दिन होता है
400 year contain $5 \times 4 + 1$ odd day = 21 odd days = 3 week
400 वर्ष में $5 \times 4 + 1$ विषम दिन = 21 विषम दिन = 3 सप्ताह होते हैं
i.e. 400 year contain no odd days / यानी 400 साल में कोई विषम दिन नहीं होता है

(viii) Last day of a century can not be either Tuesday, Thursday or Saturday.
सदी का अंतिम दिन मंगलवार, गुरुवार या शनिवार नहीं हो सकता।

(ix) The first day of a century must be either Monday, Tuesday, Thursday or Saturday.
सदी का पहला दिन सोमवार, मंगलवार, गुरुवार या शनिवार होना चाहिए।

Some Important Rules of Calender (कलैण्डर के कुछ महत्वपूर्ण नियम)

Rule 1 / नियम 1 →

Normal year
The year which is not fully divisible by 4
वह वर्ष जो 4 से पूर्णत: विभाज्य न हो
365 days in a normal year
एक सामान्य वर्ष में 365 दिन

Leap year
The year which if fully divisible by 4
वह वर्ष जो 4 से पूरी तरह से विभाज्य हो
366 days in a leap year
एक लीप वर्ष में 366 दिन

Century year
The year which is fully divisible by 100
वह वर्ष जो 100 से पूर्णत: विभाज्य हो
When century year is divisible by 400 it is called leap year otherwise it is normal year
जब शताब्दी वर्ष 400 से विभाज्य होता है तो उसे लीप वर्ष कहते हैं अन्यथा वह सामान्य वर्ष होता है
1900 → Normal year / साधारण वर्ष
2000 → Leap year / लीप वर्ष

Days in Feb = 28
फरवरी में दिन = 28

CamScanner

Rule 2 / नियम 2 →

Codes for normal year/Leap year and century (सामान्य वर्ष/लीप वर्ष और शताब्दी के लिए कोड)

Month Name	Jan.	Feb.	Mar.	April	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Simple year	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
Leap year	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
Century	1200+	1300+	1400+	1500+	1600+	1700+	1800+	1900+	2000+	2100+	2200+	2300+
Code	6	4	2	0	6	4	2	0	6	4	2	0

Rule 3 / नियम 3 →

How to find the number of leap years between two given years. / दो दिए गए वर्षों के बीच लीप वर्ष की संख्या कैसे ज्ञात करें।

- Generally gap between two leap years is 4 years. / आमतौर पर दो लीप वर्षों के बीच 4 साल का अंतर होता है।
- Sometimes when century year comes between the gap between two leap years may be 8 years.
  कभी कभी जब शताब्दी वर्ष आता है तो दो लीप वर्षों के बीच का अंतर 8 वर्ष हो सकता है।

Example / उदाहरण → After 1696 next year would be 1704 because 1700 is not a leap year.
1696 के बाद अगला साल 1704 होगा क्योंकि 1700 लीप ईयर नहीं है।

Find number of leap year (लीप वर्ष की संख्या ज्ञात कीजिए)

Step-1 / चरण-1 →

Divide the given years of 4 and note down the quotient. / दिए गए वर्षों को 4 से विभाजित करें और भागफल को नोट करें।

Step-2 / चरण-2 →

Subtract from the quotient the number of century year which are not leap year to get the number of leap years. / लीप वर्ष की संख्या प्राप्त करने के लिए भागफल से शताब्दी वर्ष की संख्या घटाएं जो लीप वर्ष नहीं है।

Example 1. / उदाहरण 1. →

Find number of leap years in first 15 years $\Rightarrow \frac{15}{4}$, Quotient = 3

पहले 15 वर्षों में लीप वर्ष की संख्या ज्ञात करें, $\Rightarrow \frac{15}{4}$, भागफल = 3

∴ Number of leap years = **3** / लीप वर्ष की संख्या = **3**

Example 2. / उदाहरण 2. →

Find number of leap years in first 300 years $\Rightarrow \frac{300}{4}$, Quotient = 75

पहले 300 वर्षों में लीप वर्ष की संख्या ज्ञात कीजिए, $\Rightarrow \frac{300}{4}$, भागफल = 75

Normal century years = 100, 200, 300 / सामान्य शताब्दी वर्ष = 100, 200, 300

∴ Number of leap years = 75 – 3 = **72** / लीप वर्ष की संख्या = 75 – 3 = **72**

Rule 4 / नियम 4 →

- The remainder obtained by dividing the number of days by 7, will be called odd days.
  दिनों की संख्या को 7 से भाग देने पर प्राप्त शेषफल विषम दिन कहलाएगा।

Day / दिन		Codes for the odd days / विषम दिनों के लिए कोड
Sunday / रविवार	→	1
Monday / सोमवार	→	2
Tuesday / मंगलवार	→	3
Wednesday / बुधवार	→	4
Thursday / बृहस्पतिवार	→	5
Friday / शुक्रवार	→	6
Saturday / शनिवार	→	0

CamScanner

Rule 5 / नियम 5 →

❖ 6 step formula to find day for a particular date. / किसी विशेष तिथि के लिए दिन खोजने के लिए 6 चरण सूत्र।

Example / उदाहरण →

What was day on 26 November 2016 ? / 26 नवंबर 2016 को कौन सा दिन था?

Step-1 / चरण-1 →

Divide the date by 7 and take remainder $\frac{26}{7}$, R = 5 / दिनांक को 7 से विभाजित करें और शेषफल निकालें, $\frac{26}{7}$, R = 5

Step-2 / चरण-2 →

Take month code, November = **4** / माह कोड लें, नवंबर = **4**

Step-3 / चरण-3 →

Divide the last 2 digit of the year by 7 and take remainder $\frac{16}{7}$, **R = 2**

वर्ष के अंतिम 2 अंकों को 7 से विभाजित करें और शेषफल निकालें, $\frac{16}{7}$, **R = 2**

Step-4 / चरण-4 →

Divide the last 2 digit of the year by 4 and take quotient $\frac{16}{4}$, Quotient = **4**

वर्ष के अंतिम 2 अंकों को 4 से विभाजित करें और भागफल लें $\frac{16}{4}$, भागफल = **4**

Step-5 / चरण-5 →

Take century code ⇒ 2000 + → 6 / शताब्दी कोड ⇒ 2000 + → 6

Step-6 / चरण-6 →

Take sum of all values from step-1 to step 5 and divide by 7. / चरण 1 से चरण 5 तक सभी मूल्यों का योग लें और 7 से विभाजित करें

$\frac{5+4+2+4+6}{7} = \frac{21}{7}$, Remainder / शेष = 0

Remainder obtained will be day code / प्राप्त शेष दिन का कोड होगा

∴ Code 0 is for Saturday / ∴ कोड 0 शनिवार के लिए है

∴ 26 November, 2016 → **Saturday** / ∴ 26 नवंबर, 2016 → शनिवार

CamScanner

CHAMPION PUBLICATION

About Gagan Sir

An ethusiastic and dynamic teacher with an experience of more than 6 years. Cracked SSC CGL Mains twice with top score. The way he teaches his students in a simplified way makes maths simple and fun loving.

Gagan Pratap Sir

Gagan Pratap Sir
pratapgagan123@gmail.com

CHAMPION PUBLICATION
championpublication1@gmail.com

Be in touch with us on: Facebook, Telegram, Instagram, Twitter and Youtube

Available on amazon Flipkart

If you find any correction in this book
please WhatsApp on 7351553388 with page number...

CHAMPION PUBLICATION
Add: 2nd Floor, Jaina Ext. Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-09

For Suggestions Whatsapp
7351553388

₹ 200/-

CamScanner