



۱) از بین ۴ مهره سفید، ۵ مهره قرمز و ۶ مهره سیاه به چند طریق می توان ۶ مهره انتخاب کرد به طوری که تعداد مهره های سفید و قرمز برابر باشند؟

۱۲۴۱ (۴)

۳۶۸۱ (۳)

۲۰۴۱ (۲)

۱۵۴۱ (۱)

۲) مقدار n در معادله $n! = (12! + 13!)$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

۳) برای شرکت در یک میهمانی ۵ نفره قرار است از بین ۸ نفر دعوت به عمل آید. اگر ۲ نفر از این ۸ نفر باهم قهر باشند و امکان دعوت هم زمان آن ها در میهمانی نباشد دعوت مهمان ها به چند طریق امکان پذیر است؟

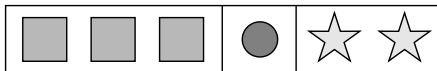
۵۶ (۴)

۵۰ (۳)

۳۶ (۲)

۳۰ (۱)

۴) اگر برچسب های اجناس یک فروشگاه به صورت زیر طراحی شده باشد، این فروشگاه حداکثر چند برچسب با این طراحی و شرایط زیر می تواند بسازد؟



الف) داخل هر ستاره یک رقم غیر صفر قرار گیرد.

ب) داخل دایره یک حرف از حروف مجموعه $\{A, B, P, T, J, D\}$ قرار گیرد.

پ) داخل مربع یک عدد از میان اعداد حسابی زوج یک رقمی و غیر تکراری قرار گیرد.

۲۵۹۲۰ (۴)

۱۱۶۶۴ (۳)

۲۹۱۶۰ (۲)

۳۲۴۰۰ (۱)

۵) تعداد جایگشت های حروف کلمه $HAMID$ ، به طوری که دو حرف H و D کنار هم نباشند کدام است؟

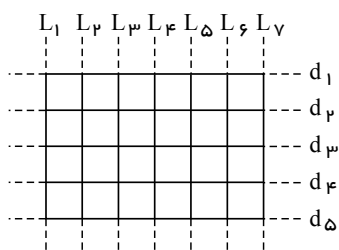
۸۰ (۴)

۷۲ (۳)

۶۵ (۲)

۵۴ (۱)

۶) در شکل زیر از برخورد خطوط افقی d_1 تا d_5 و خطوط عمودی L_1 تا L_7 چند مستطیل به وجود آمده است؟



۲۰۰ (۱)

۲۱۰ (۲)

۲۲۰ (۳)

۲۴۰ (۴)



۷) یک آزمون شامل ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای و ۵ سؤال دوگزینه‌ای (بلی - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. اگر جواب دادن به سؤال‌های چهارگزینه‌ای اجباری و جواب دادن به سؤال‌های دوگزینه‌ای اختیاری باشد، این فرد به چند روش می‌تواند به سؤال‌ها جواب دهد؟

- ۱) $5^1 \times 3^5$ (۱) ۲) $4^1 \times 2^5$ (۲) ۳) $5^1 \times 2^5$ (۳) ۴) $4^1 \times 3^5$ (۴)

۸) با ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۱) ۱۲۰ (۱) ۲) ۱۰۸ (۲) ۳) ۹۶ (۳) ۴) ۲۴۰ (۴)

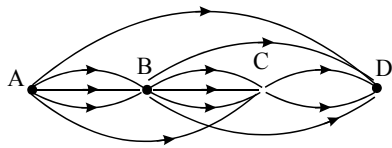
۹) با ترکیب حداقل ۳ رنگ از ۵ رنگ قرمز، آبی، زرد، سیاه و سفید، چند رنگ جدید می‌توان درست کرد؟

- ۱) ۱۳ (۱) ۲) ۱۴ (۲) ۳) ۱۵ (۳) ۴) ۱۶ (۴)

۱۰) تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی از مجموعه حروف فارسی که ۲ حرف «س» و «ش» در آن‌ها نیستند و ۳ حرف «ب»، «ل» و «م» حتماً در آن‌ها هستند، کدام است؟

- ۱) $\binom{27}{4}$ (۱) ۲) $\binom{30}{4}$ (۲) ۳) $\binom{32}{4}$ (۳) ۴) $24 \times 25 \times 26$ (۴)

۱۱) در شکل زیر، مسیرها یک طرفه هستند، به چند طریق مختلف می‌توان از A به D رسید؟



- ۱) ۲۱ (۱) ۲) ۱۸ (۲) ۳) ۲۴ (۳) ۴) ۲۷ (۴)

۱۲) ۳ پسر و ۴ دختر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که فقط پسرها یک در میان نسبت به هم باشند؟

- ۱) ۲۸۴ (۱) ۲) ۱۴۴ (۲) ۳) ۲۸۸ (۳) ۴) ۲۱۸ (۴)

۱۳) اگر $120 = (n-2)((n-2)! + (n-3)!)$ باشد، n کدام است؟

- ۱) ۴ (۱) ۲) ۵ (۲) ۳) ۶ (۳) ۴) ۷ (۴)

۱۴) با حروف کلمه «خوارزمی» چند کلمه ۵ حرفی و بدون توجه به معنا می‌توان نوشت که فقط ۲ نقطه داشته باشد؟

- ۱) ۷۲۰ (۱) ۲) ۷۴۴ (۲) ۳) ۶۲۴ (۳) ۴) ۴۸۰ (۴)

۱۵) از بین ۷ نفر که قرار است در یک صف قرار گیرند، فقط ۳ نفر با هم فامیل هستند. این افراد به چند طریق می‌توانند یک صف تشکیل دهند به طوری که هیچ دو فردی که فامیل هستند، کنار هم نباشند؟

- ۱) $5!$ (۱) ۲) $12 \times 5!$ (۲) ۳) $72 \times 5!$ (۳) ۴) $\binom{7}{3} \times \binom{4}{2}$ (۴)



۱۶) با حروف کلمه *SISTERS* چند کلمه ۷ حرفی بدون توجه به معنا می توان نوشت به طوری که هیچ دو حرف

ای کنار هم نباشند؟

۳۰۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۴۸۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

۱۷) با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به طوری که اگر حرف «ن» در کلمه باشد، حتماً

کنار حرف «ج» باشد؟

۱۵۸۴۰ (۴)

۱۰۸۰۰ (۳)

۶۸۴۰ (۲)

۸۶۴۰ (۱)

۱۸) با ارقام ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۰ چند عدد زوج ۴ رقمی بزرگ تر از ۵۰۰۰ با ارقام متمایز می توان نوشت؟

۷۸ (۴)

۱۲۰ (۳)

۴۸ (۲)

۳۲ (۱)

۱۹) با استفاده از ارقام ۰ و ۱ و ۲ چند عدد طبیعی که حداقل ۲ رقمی و حداکثر ۴ رقمی باشند، می توان نوشت؟

۶۸ (۴)

۷۲ (۳)

۷۸ (۲)

۸۱ (۱)

۲۰) در معادله ${}^3P(2n, 3) = {}^{14}P(n, 2)$ مقدار n برابر کدام است؟

وجود ندارد. (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)



پاسخنامه تشریحی

تعداد مهره‌های سفید و قرمز می‌توانند به حالت‌های صفر، یک، دو و سه تا باهم برابر باشند: ① ② ③ ④

تعداد حالات

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{صفر سفید، صفر قرمز، شش سیاه} : \binom{4}{0} \times \binom{5}{0} \times \binom{6}{6} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \\ \text{یک سفید، یک قرمز، چهار سیاه} : \binom{4}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{6}{4} = 4 \times 5 \times 15 = 300 \\ \text{دو سفید، دو قرمز، دو سیاه} : \binom{4}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{6}{2} = 900 \\ \text{سه سفید، سه قرمز، صفر سیاه} : \binom{4}{3} \times \binom{5}{3} \times \binom{6}{0} = 40 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 1 + 300 + 900 + 40 = 1241$$

می‌دانیم: ① ② ③ ④ ② $n! = n(n-1)!$

$$13(13! + 12!) = 13(13 \times 12! + 12!) = 13 \times 12!(13 + 1) = 12! \times 13 \times 14 = 14!$$

$$\Rightarrow n = 14$$

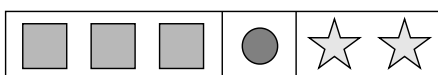
تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز
از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

می‌دانیم: ① ② ③ ④ ③

حالات ممکن

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هیچ یک از دو نفر دعوت نشوند} : \binom{8-2}{5} = \binom{6}{5} = 6 \\ \text{فقط نفر اول دعوت شود} : \binom{8-2}{5-1} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \\ \text{فقط نفر دوم دعوت شود} : \binom{8-2}{5-1} = \binom{6}{4} = 15 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{مجموع حالات} = 6 + 15 + 15 = 36$$



① ② ③ ④ ④



یکی از ۶ خوشه‌ها به‌جز

مشخص‌شده مربع اول

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ 5 \times 3 \times 6 \times 9 \times 9 = 29160 \end{array}$$

↓ ↓ زوج‌ها به‌جز
↓ رقم غیر صفر
↓ رقم مربع اول

تعداد حالاتی که H و D در کنار هم هستند را از تعداد کل حالات کم می‌کنیم تا تعداد حالات

موردنظر مسئله به‌دست آید:

$$120 = 5! = \text{تعداد کل حالات}$$

جایگشت H و D

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \boxed{H, D}, \boxed{A}, \boxed{M}, \boxed{I} = 4! = 24 \\ \downarrow \\ \text{۴ شیء داریم} \end{array}$$

$$\Rightarrow 120 - 48 = 72$$

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز

$$\text{از رابطه } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ به‌دست می‌آید.}$$

۶ می‌دانیم

هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی تشکیل می‌شود:

خطوط افقی

خطوط عمودی

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \binom{5}{2} \times \binom{7}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{7!}{2! \times 5!} = 10 \times 21 = 210 \end{array}$$

هر تست چهارگزینه‌ای را می‌توان به ۴ حالت پاسخ داد؛ اما برای پاسخ هر سؤال بله/خیر، ۳

حالت وجود دارد، چون می‌توان هیچ پاسخی به آن‌ها نداد؛ پس با توجه به اصل ضرب داریم:

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ سؤال ۴ گزینه‌ای}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{5 \text{ سؤال ۲ گزینه‌ای}} = 4^{10} \times 3^5$$

۸

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{کل حالات ممکن} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{0} \boxed{4} \times 3 \times 1 = 20 \\ \downarrow \\ \text{همه به‌جز صفر} \\ \boxed{4} \boxed{4} \times 3 \times 1 = 48 \\ \downarrow \\ \text{همه به‌جز ۵ و صفر} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{کل حالات ها} : 60 + 48 = 108$$

می دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

می دانیم: ۱۰ ۴ ۳ ۲ ۱

برای رسیدن از A به D راه‌های زیر موجود است.

1 2 3 4 13

$$\Rightarrow (n - 1)! = 5! \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$



۱۴) دقت کنید که حرف «ی» اگر در آخر کلمه بیاید، نقطه ندارد و در غیر این صورت ۲ نقطه دارد. ۱ ۲ ۳ ۴

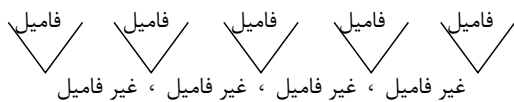
چیدن ۵ حرف

حالات ممکن

- چیدن همه جز «ی»: $\binom{4}{3} \times 5! = 4 \times 120 = 480$
انتخاب ۳ حرف از ۴ حرف باقی مانده
- چیدن همه جز «ی»: $\binom{4}{2} \times 4! = 6 \times 24 = 144$
انتخاب ۲ حرف از ۴ حرف باقی مانده
- چیدن همه جز «ی»: $5! - 4! = 96$
در آخر است — جایگشت ۵ حرف باقی مانده : «ز»، «خ» نباشند و «ی» باشد و حرف آخر هم نباشد.

$$\Rightarrow \text{مجموع} = 480 + 144 + 96 = 720$$

۱۵) این ۷ نفر باید به صورت مقابل در یک صف قرار بگیرند: ۱ ۲ ۳ ۴



«غیر فامیل‌ها» را به ۴! حالت در صف قرار می‌دهیم؛ سپس از ۵ محل مجاز برای فامیل‌ها ۳ جا را انتخاب می‌کنیم و ۳ فامیل را به ۳! حالت در این مکان‌ها قرار می‌دهیم:

$$4! \times \binom{5}{3} \times 3! = 4! \times \frac{5!}{3!2!} \times 3! = 12 \times 5!$$

\downarrow جایگشت غیر فامیل‌ها \downarrow انتخاب ۳ جا \downarrow جایگشت فامیل‌ها

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز
از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

۱۶) می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴

اگر حروف I, T, E, R را بچینیم، S ‌ها باید در مکان‌های قرار گیرند:



انتخاب ۳ مکان
برای قرار گرفتن S ‌ها

$$\Rightarrow \text{تعداد حالات} = 4! \times \binom{5}{3} = 24 \times 10 = 240$$

\uparrow جایگشت I, T, E, R

۱۷) اگر حرف «ن» در کلمه باشد حتماً کنار حرف «ج» باشد، یعنی:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{از ۷ حرف باقی‌مانده} \\ \text{۶ تا انتخاب کنیم} \end{array} \right\} \rightarrow \text{آن‌ها را بچینیم و} \rightarrow \binom{7}{6} \times 6! = 7! \rightarrow \text{حرف «ن» در کلمه ۶ حرفی نباشد.}$$

$$\rightarrow \underbrace{2! \times \binom{6}{4}}_{\text{جایگشت نوج}} \times \underbrace{5!}_{\text{چیدن ۵ شیء حاصل}} = 30 \times 5!$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = 7! + 30 \times 5! = 8640$$

اعداد داریم:

حالات ممکن

$$\frac{3}{8 \text{ یا } 7 \text{ یا } 5} \times \underbrace{\frac{3}{2} \times \frac{2}{1}}_{\text{بقیه}} \times \frac{1}{\text{صفر}} = 18$$

$$\frac{2}{7 \text{ یا } 5} \times \underbrace{\frac{3}{2} \times \frac{2}{1}}_{\text{بقیه}} \times \frac{1}{8} = 12$$

$$\frac{3}{8 \text{ یا } 7 \text{ یا } 5} \times \underbrace{\frac{3}{2} \times \frac{2}{1}}_{\text{بقیه}} \times \frac{1}{4} = 18$$

طبق اصل جمع داریم:

$$\Rightarrow \text{مجموع} = 18 + 12 + 18 = 48$$

1 2 3 4 19

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۲ رقمی}}{\text{دهگان}} \times \frac{\text{یکان}}{\text{دهگان}} = ۶$$

$$\frac{۲}{\text{صدگان}} \times \frac{۳}{\text{دهگان}} \times \frac{۳}{\text{یکان}} = ۱۸ : \text{تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۳ رقمی}$$

تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۴ رقمی: $\frac{۲}{\text{هزارگان}} \times \frac{۳}{\text{صدگان}} \times \frac{۳}{\text{دهگان}} \times \frac{۳}{\text{یکان}} = ۵۴$

حالا طبق اصل جمع باید اعداد حاصل را با هم جمع کنیم:

$$6 + 1\lambda + 5\lambda^2 = 7\lambda$$

۲۰ با استفاده از رابطه ترتیب، مقادیر $P(n, 2)$ و $P(2n, 3)$ را می‌نویسیم:

$$P(n, \mathfrak{r}) = \frac{n!}{(n - \mathfrak{r})!} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - \mathfrak{r} + 1)}{(n - \mathfrak{r})!} = n(n - 1) \cdots (n - \mathfrak{r} + 1)$$



$$P(2n, 3) = \frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{(2n-3)!}$$

$$= (2n-2)(2n-1)2n = 4n(n-1)(2n-1)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$12n(n-1)(2n-1) = 14n(n-1) \xrightarrow{n \neq 0, 1} 12(2n-1) = 14$$

$$\Rightarrow 2n-1 = \frac{7}{6} \Rightarrow 2n = \frac{7}{6} + 1 \Rightarrow n = \frac{13}{12}$$

که با توجه به این که در $P(n, 2)$ باید n عدد طبیعی باشد، پس $n = \frac{13}{12}$ قابل قبول نیست.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴