نام آزمون: ریاضی ۱ فصل ۵

زمان برگزاری: ۳۶ دقیقه

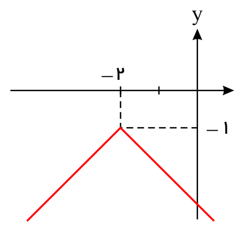
آکادمی آموزشی انگیزشی رویش

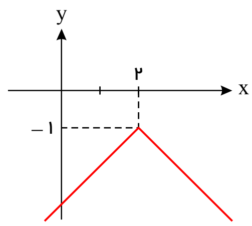
۱) نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ چند نقطهٔ مشترک دارند؟

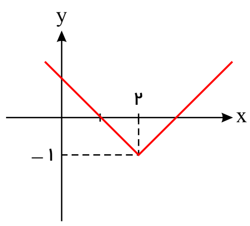
$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & , 0<|x|<2 \\ 1 & , x=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} 1-|x| & , |x|<2 \\ 2 & , |x|\geq 2 \end{cases}$$

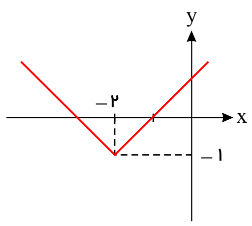
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲) نمودار تابع $y=-|-x+2|-1$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳) اگر رابطهٔ $f=\{(3,x+2y),(6,2),(3,4),(4,4),(6,x-2y)\}$ تابع باشد، آنگاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۵

۴) اگر برد تابع $f=\{(1,5),(2,a^2),(1,b),(a,c^2+5)\}$ مجموعهٔ $R=\{4,5,6\}$ باشد، بیش‌ترین مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۴

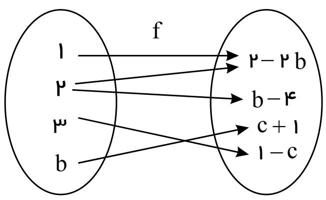
۵) اگر برد تابع $f(x)=-2x+3$، بازهٔ $[-2,3]$ باشد، دامنهٔ این تابع شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶) مساحت محدود به نمودار $f(x)=2-|x-2|$ و محور طول‌ها کدام است؟

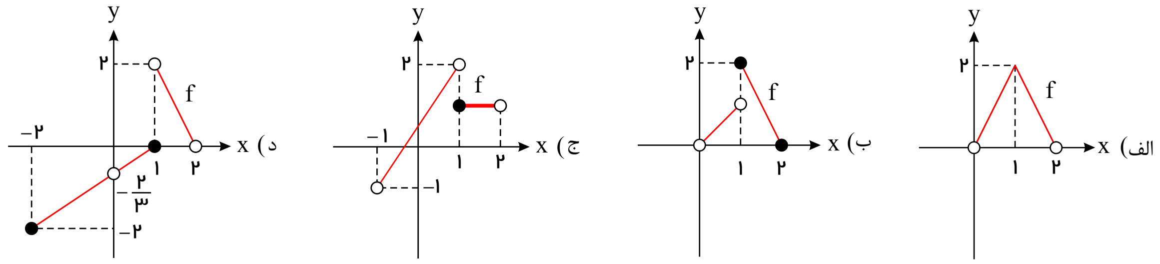
۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۷) با توجه به نمودار پیکانی تابع f، $f(-c)$ کدام است؟



۱) −۲ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۸ در چند نمودار زیر، مجموعه‌های دامنه و برد تابع f باهم برابرند؟



(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

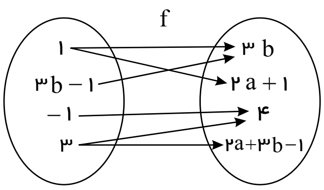
۹ به‌ازای کدام مجموعه مقادیر b، رابطهٔ زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

$$f=\{(1,-3a),(a-1,b+3),(1,a^3-4),(4,5),(3a+a^3,2b+7)\}$$

(۱) $\{-4\}$ (۲) $\{-1\}$

(۳) $\{-1,-4\}$ (۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

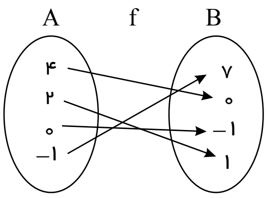
۱۰ اگر نمودار پیکانی مقابل یک تابع را مشخص کند، $a+b$ کدام است؟



(۱) صفر (۲) ۵

(۳) ۲ (۴) ۶

۱۱ اگر f تابعی به‌صورت زیر و $f(0)=a$, $f(4)=b$ باشد، $f(b)+f(a)$ کدام است؟



(۱) -1 (۲) ۶

(۳) ۷ (۴) ۸

۱۲ اگر رابطهٔ R به هر عدد طبیعی از ۳ تا ۶، مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن عدد را نسبت دهد، با حذف حداقل چند زوج‌مرتب از R، این رابطه تبدیل به تابع می‌شود؟

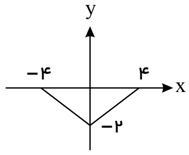
(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

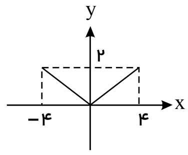
۱۳ اگر رابطهٔ $f=\{(1,3),(2,4),(3,5),(a,3)\}$ تابع نباشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

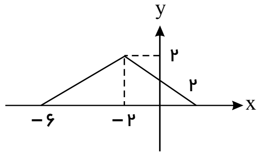
(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) همواره تابع است.

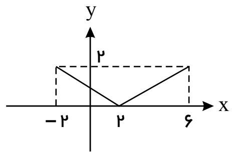
۱۴ اگر برد تابع $y_1=f(x)$ به‌صورت بازهٔ $[1,5]$ باشد، برد تابع $f(x+1)-\frac{2}{3}$ کدام است؟

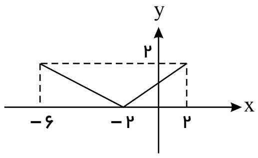
(۱) $\left[\frac{1}{3},\frac{17}{3}\right]$ (۲) $[2,6]$ (۳) $\left[\frac{1}{3},\frac{13}{3}\right]$ (۴) $[0,4]$

۱۵) اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت  باشد، نمودار تابع $y = f(x-۲)+۲$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۶) اگر $f(۱) = ۲$ در رابطهٔ $f(x) - xf(x-۱) = x^۲ - ۱$ برقرار باشد، آن‌گاه $f(۴)$ چقدر است؟

۱) ۱۳۱ ۲) ۱۴۳ ۳) ۲۹ ۴) ۷۳

۱۷) اگر تابع $f = \{(a^۲-۱, b), (-۲,۳), (۸, ۲b-۴)\}$ فقط شامل دو زوج مرتب متمایز باشد، مقدار $a^۲ + b^۲$ کدام است؟ (a و b اعداد حقیقی می‌باشند.)

۱) ۵ ۲) ۱۳ ۳) ۲۵ ۴) ۴۱

۱۸) اگر مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۱۶\}$ برد تابع $f(x) = (a^۲+b)x^۲ + (b^۲+c)x + c^۲$ و مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دامنهٔ آن باشد، حاصل $b+c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۶ ۴) -۶

۱۹) یک سهمی را روی محور xها ۲ واحد به‌سمت چپ و روی محور yها ۳ واحد به‌سمت بالا منتقل کرده‌ایم که در انتها معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = -x^۲$ تبدیل شد. معادلهٔ سهمی اولیه کدام بوده است؟

۱) $y = -(x-۱)^۲$ ۲) $y = -x^۲ - ۳$

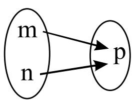
۳) $y = -(x+۲)^۲ + ۳$ ۴) $y = -x^۲ + ۴x - ۷$

۲۰) برد تابع
$$f(x) = \begin{cases} -x^۲ + ۲x - ۳ & , x < ۱ \\ ۱ & , x = ۱ \\ -x^۲ + ۴x - ۴ & , x > ۱ \end{cases}$$
کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R} - (-۲, ۰]$

۳) $(-\infty, ۰] \cup \{۱\}$ ۴) $(-\infty, ۰] \cup \{۱\} - [-۲, -۱]$

۲۱) نمودار ون تابع $f = \{ (۳a, ۲c), (۳a+۲, ۴a), (c^۲+۱, -۲b+۲) \}$ به‌صورت زیر است، حاصل $m+n+p$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)



۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۸

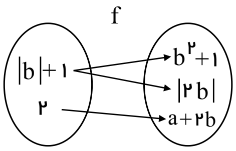
۲۲) مساحت ناحیهٔ محدود بین نمودار دو تابع $f(x) = ۱ - |x+۱|$ و $g(x) = |x+۱| - ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۳) در تابع خطی $f(x) = ax + ۵$ با دامنهٔ $[-۱, ۴]$، اگر $a < ۰$ و $f(۳) = c$ باشد و داشته باشیم $f(c) = ۷$، آنگاه برد این تابع شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۱　　۳) ۱۲　　۴) ۱۳

۲۴) اگر نمودار زیر مربوط به تابع f باشد، مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۲ یا ۳　　۲) ۱ یا ۳

۳) فقط ۱　　۴) فقط ۳

۲۵) در مورد تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، اگر تساوی $f(۲x + ۱) + f(۳) = ۵x - ۱$ برقرار باشد، آنگاه مقدار $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۷

۲۶) نمودار دو تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < -۱ \\ ۵ + x & -۱ \leq x < ۵ \\ ۳ & x \geq ۵ \end{cases}$ و $g(x) = |x - ۱| - ۶$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۷) اگر $f(x) = \begin{cases} -x^۲ + ۲x & x \geq -۱ \\ x^۲ + ۱ & x < -۱ \end{cases}$ باشد، آن‌گاه به‌ازای کدام مجموعه مقادیر x نمودار تابع f زیر محور xها نیست؟

۱) $[-۲, -۱] \cup (۰, ۲)$　　۲) $(-\infty, -۱) \cup [۰, ۲]$

۳) $[۰, +\infty)$　　۴) $(-\infty, ۲]$

۲۸) مساحت محدود بین قسمتی از نمودار $y = |x - ۲| + a$ که زیر محور xها قرار دارد با محور xها دو برابر مساحت سطح بسته‌ای است که نمودار با محورها در ناحیهٔ اول مختصات می‌سازد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) -۱　　۴) -۲

۲۹) اگر $f = \{(۲, a + b), (-۲a, b), (۲, c + ۲), (۱, ۳ + c), (-۲, ۳), (۱, b + ۲)\}$ یک تابع باشد، آنگاه $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

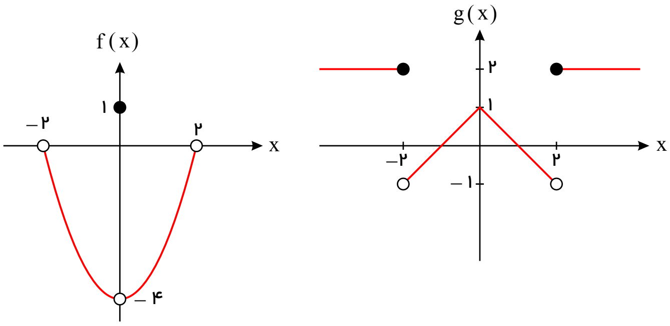
۳۰) تابع f به‌صورت $f = \{(۱, ۱۶), (۳, ۹), (a, ۱), (-۴, a^۲)\}$ مفروض است. اگر برد این تابع دارای ۳ عضو متمایز باشد، چند مقدار مختلف برای a وجود دارد؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۶

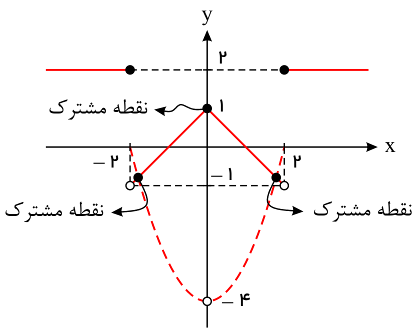
پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



دو نمودار را در یک شکل نشان می‌دهیم، داریم:



این دو نمودار در سه نقطه متقاطع‌اند.

۲ ۱ **۲** ۳ ۴

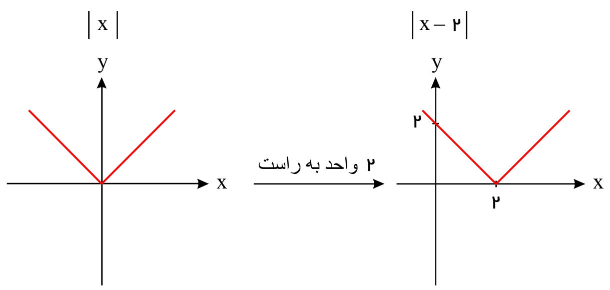
می‌دانیم: $\boxed{|u| = |-u|}$

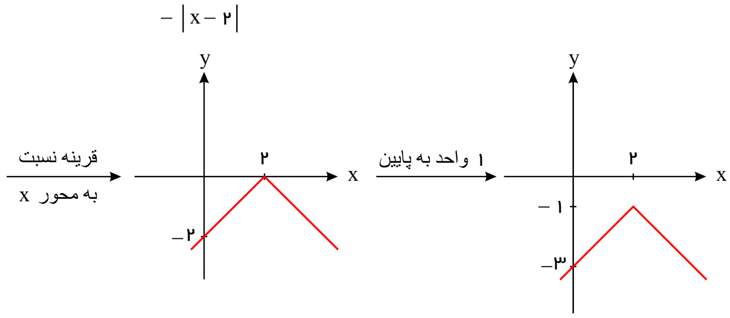
تابع را به‌صورت زیر، ساده می‌نویسیم:

$$y = -|-(x-۲)| - ۱$$

$$\Rightarrow y = -|x-۲| - ۱$$

حال از تابع $y=|x|$ شروع می‌کنیم:





۳ ۱ ۲ ۳ ۴

از آن‌جایی که رابطهٔ داده‌شده تابع است؛ داریم:

$$\begin{cases}(3, x+2y)\\(3, 4)\end{cases} \Rightarrow x+2y=4 \quad (I)$$

$$\begin{cases}(6, 2)\\(6, x-2y)\end{cases} \Rightarrow x-2y=2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} + \begin{cases}x+2y=4\\x-2y=2\end{cases}$$

$$2x=6 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{x+2y=4} 3+2y=4 \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

درنتیجه:

$$x+y=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases}(1, 5)\\(1, b)\end{cases} \Rightarrow b=5$$

$$\{a^2, 5, c^2+5\}=\{4, 5, 6\} \Rightarrow \begin{cases}a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2\\c^2+5=6 \Rightarrow c^2=1 \Rightarrow c=\pm 1\end{cases}$$

$a=2 : \begin{cases}(2, 4)\\(2, 6)\end{cases}$ تابع نیست.

پس $a=-2$ قابل‌قبول است.

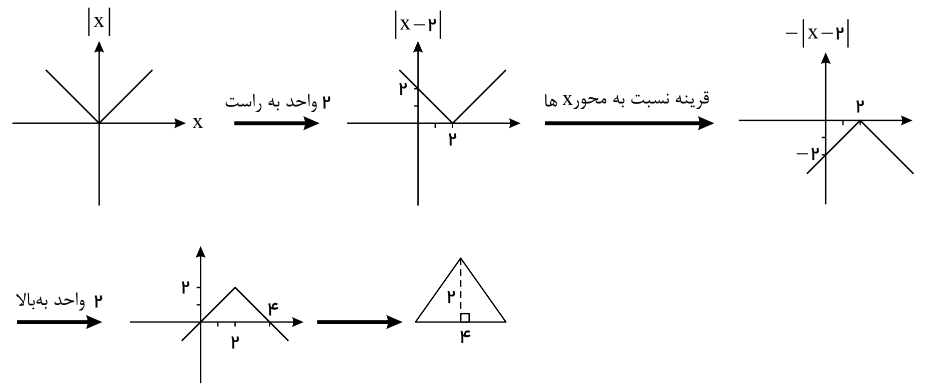
$$Max(a+b+c)=(-2+5+1)=4$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴ $f(x)$ **یک تابع خطی با شیب منفی است. پس با دامنهٔ** $[a, b]$ **برد آن به‌صورت** $[f(b), f(a)]$ **خواهد بود؛ داریم:**

$$\text{برد}=[-۲,۳]=[f(b),f(a)]\Rightarrow\begin{cases}f(b)=-۲\Rightarrow -۲b+۳=-۲\Rightarrow b=\dfrac{۵}{۲}\\ f(a)=۳\Rightarrow -۲a+۳=۳\Rightarrow a=۰\end{cases}$$

$\Rightarrow$ دامنه $=[a,b]=[۰,\dfrac{۵}{۲}]\Rightarrow$ اعداد طبیعی ۱ و ۲ در این بازه قرار دارند.

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ با $y=|x|$ شروع می‌کنیم:



سطح محدود به نمودار و محور طول‌ها برابر است با:

$$S=\frac{۴\times ۲}{۲}=۴$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases}(۲,۲-۲b)\\(۲,b-۴)\end{cases}\Rightarrow ۲-۲b=b-۴\Rightarrow ۳b=۶\Rightarrow b=۲$$

$$\begin{cases}(۲,-۲)\\(۲,c+۱)\end{cases}\Rightarrow c+۱=-۲\Rightarrow c=-۳\Rightarrow -c=۳\Rightarrow f(۳)=۱-c=۱+۳=۴$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با بررسی دامنه و برد نمودارهای سؤال داریم:

الف) $\begin{cases}D_f=(۰,۲)\\R_f=(۰,۲]\end{cases}\Rightarrow D_f\neq R_f$ ب) $\begin{cases}D_f=(۰,۲]\\R_f=[۰,۲]\end{cases}\Rightarrow D_f\neq R_f$

ج) $\begin{cases}D_f=(-۱,۲)\\R_f=(-۱,۲)\end{cases}\Rightarrow D_f=R_f$ د) $\begin{cases}D_f=[-۲,۲)-\{۰\}\\R_f=[-۲,۲)-\{-\frac{۲}{۳}\}\end{cases}\Rightarrow D_f\neq R_f$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده‌شده باشد هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفهٔ اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

طبق تعریف تابع داریم:

$$\begin{cases}(۱,-۳a)\in f\\(۱,a^۳-۴)\in f\end{cases}\xrightarrow{\text{تابع است } f}-۳a=a^۳-۴\Rightarrow a^۳+۳a=۴$$

$$\Rightarrow(۳a+a^۳,۲b+۷)=(۴,۲b+۷)$$

$$\begin{cases}(۴,۲b+۷)\in f\\(۴,۵)\in f\end{cases}\xrightarrow{f\text{ تابع است .}}۲b+۷=۵\Rightarrow ۲b=-۲\quad\Rightarrow b=-۱$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases}(۱,۳b)\\(۱,۲a+۱)\end{cases}\Rightarrow ۲a+۱=۳b\Rightarrow ۲a-۳b+۱=۰$$

$$\begin{cases}(۳,۴)\\(۳,۲a+۳b-۱)\end{cases}\Rightarrow ۲a+۳b-۱=۴\Rightarrow ۲a+۳b-۵=۰$$

$$\begin{cases}۲a-۳b+۱=۰\\۲a+۳b-۵=۰\end{cases}$$
$$۴a-۴=۰\Rightarrow a=۱$$

$$۲a-۳b+۱=۰\Rightarrow ۲-۳b+۱=۰\Rightarrow ۳b=۳\Rightarrow b=۱$$

$$a+b=۲$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}f(۰)=a\\f(۰)=-۱\end{cases}\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(a)=f(-۱)=۷\\ \\ \begin{cases}f(۴)=b\\f(۴)=۰\end{cases}\Rightarrow b=۰\Rightarrow f(b)=f(۰)=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow f(a)+f(b)=۷-۱=۶$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم:

رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی در آن مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند.

رابطهٔ R را به‌صورت زیر با زوج‌های مرتب آن نمایش می‌دهیم:

$$R=\{(۳,۱),\underline{\underline{(۳,۳)}},(۴,۱),\underline{\underline{(۴,۲)}},\underline{\underline{(۴,۴)}},(۵,۱),\underline{\underline{(۵,۵)}},(۶,۱),\underline{\underline{(۶,۲)}},\underline{\underline{(۶,۳)}},\underline{\underline{(۶,۶)}}\}$$

زوج‌های مرتب مشخص‌شده را حذف می‌کنیم تا R یک تابع شود؛ یعنی حداقل ۷ زوج مرتب.

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ **اگر یک رابطه را به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفهٔ اول یکسان و مؤلفهٔ دوم متفاوت وجود نداشته باشد. به‌ازای $a=۱$ ، دو زوج مرتب $(a,۳)$ و $(۱,۳)$ یکی می‌شوند و رابطهٔ f تابع خواهد بود، به‌ازای $a=۲,۳$ ، f تابع نیست، پس:**

a مجموع مقادیر ممکن برای $=۲+۳=۵$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۱ \leq f(x) \leq ۵ \Rightarrow ۱ \leq f(x+۱) \leq ۵ \Rightarrow \frac{۱}{۳} \leq f(x+۱) - \frac{۲}{۳} \leq \frac{۱۳}{۳}$$

در نتیجه برد تابع $f(x+۱) - \frac{۲}{۳}$ بازهٔ $\left[\frac{۱}{۳}, \frac{۱۳}{۳}\right]$ است.

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ **مطابق نمودار گزینهٔ «۳» اگر نمودار تابع $y = f(x)$ دو واحد به سمت راست و دو واحد به سمت بالا منتقل شود نمودار تابع $y = f(x-۲)+۲$ به‌دست می‌آید.**

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = x(x-۱) + x^۲ - ۱$$

$$f(۱) = ۲ \xrightarrow{x=۲} f(۲) = ۲f(۱) + ۳ = ۷$$

$$\xrightarrow{x=۳} f(۳) = ۳f(۲) + ۸ = ۲۹ \quad \xrightarrow{x=۴} f(۴) = ۴f(۳) + ۱۵ \ = ۱۱۶ + ۱۵ = ۱۳۱$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

از آن‌جایی‌که f فقط شامل دو زوج‌مرتب متمایز است؛ داریم:

$$\begin{cases} a^۲ - ۱ = -۲ \Rightarrow a^۲ = -۱ \quad (\text{غ.ق.}) \\ \text{یا} \\ a^۲ - ۱ = ۸ \Rightarrow a^۲ = ۹ \end{cases}$$

چون f یک تابع است؛ درنتیجه:

$$a^۲ = ۹ : \begin{cases} (۸, b) \\ (۸, ۲b - ۴) \end{cases} \Rightarrow b = ۲b - ۴ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow b^۲ = ۱۶$$

$$a^۲ + b^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ **می‌دانیم:**

تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو باشد را تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو k باشد، این تابع ثابت را با معادلهٔ $f(x) = k$ نشان می‌دهیم.

چون برد این تابع تک‌عضوی است، $f(x)$ باید تابع ثابت باشد، یعنی ضرایب $x^۲$ و x باید صفر باشند و $c^۲$ برابر با ۱۶ باشد:

$$\left.\begin{matrix} ۱)\ a^۲ + b = ۰ \Rightarrow a^۲ = -b \\ ۲)\ b^۲ + c = ۰ \Rightarrow b^۲ = -c \\ ۳)\ c^۲ = ۱۶ \Rightarrow c = \pm ۴ \end{matrix}\right\} \xrightarrow[c<۰]{b<۰} \begin{cases} a^۲ = ۲ \Rightarrow a = \pm\sqrt{۲} \\ \left.\begin{matrix} b^۲ = ۴ \Rightarrow b = -۲ \\ c = -۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b + c = -۶ \end{cases}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴** برعکس مراحل مذکور را روی $y=-x^۲$ انجام می‌دهیم تا تابع اولیه به‌دست آید:

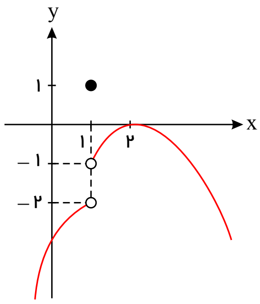
$$\xrightarrow{\text{۳ واحد رو به پایین}} y=-x^۲-۳ \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-۲)^۲-۳=-(x^۲-۴x+۴)-۳$$

$$\Rightarrow y=-x^۲+۴x-۷$$

۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم: $\boxed{\text{برد تابع، تصویر نمودار بر محور } y \text{ ها است.}}$

تابع را به‌صورت زیر بازنویسی و هر ضابطه را در دامنه‌اش رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -(x-۱)^۲-۲ & , x<۱ \\ ۱ & , x=۱ \\ -(x-۲)^۲ & , x>۱ \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow R_f=(-\infty,۰]\cup\{۱\}$$

۲۱ ۱ **۲** ۳ ۴ باتوجه به نمودار ون، در واقع تابع به‌صورت $f=\{(m,p),(n,p)\}$ است پس مؤلفه‌های دوم تابع یک عدد هستند.

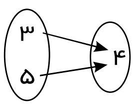
$$\Rightarrow ۲c=۴a=-۲b+۲=p \Rightarrow \begin{cases} c=۲a \\ ۲c=-۲b+۲ \Rightarrow c=-b+۱ \end{cases}$$

در ضمن از سه مؤلفهٔ اول تابع f، باید دو مؤلفهٔ یکسان داشته باشیم. دو حالت زیر درنظر می‌گیریم:

اگر : $۳a=c^۲+۱ \xrightarrow{c=۲a} ۳a=۴a^۲+۱ \Rightarrow ۴a^۲-۳a+۱=۰ \Rightarrow \Delta=(-۳)^۲-۴(۴)(۱)<۰$ غ ق ق

(۲) اگر : $۳a+۲=c^۲+۱ \xrightarrow{c=۲a} ۳a+۲=۴a^۲+۱ \Rightarrow ۴a^۲-۳a-۱=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=-\frac{۱}{۴}\notin \text{ غ ق ق} \end{cases} \xrightarrow{a=۱} \begin{cases} c=۲a=۲ \\ c=-b+۱ \Rightarrow ۲=-b+۱ \Rightarrow b=-۱ \end{cases}$$

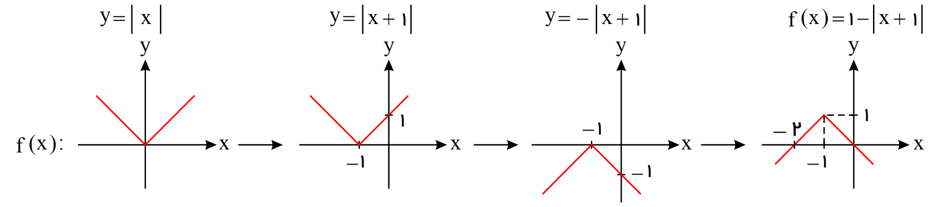


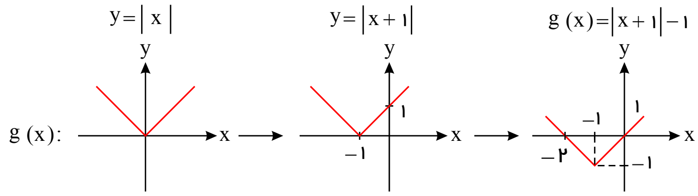
درنتیجه تابع f برابر است با:

$$\Rightarrow f=\{(۳,۴),(۵,۴),(۵,۴)\}=\{(۳,۴),(۵,۴)\}$$

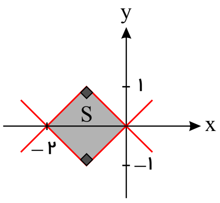
$$\Rightarrow m+n+p \overset{m=۳\ ,\ n=۵\ ,\ p=۴}{=\!=\!=\!=} ۳+۵+۴=۱۲$$

۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴ هر دو نمودار را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:





و هر دو را در یک دستگاه مختصات قرار می‌دهیم:



شکل محدود به دو نمودار از دو بخش هم‌مساحت به مساحت S تشکیل شده است.

$$\text{مساحت ناحیهٔ محصور} = 2 \times S = 2 \times \frac{2 \times 1}{2} = 2$$

۲۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$f(c) = 7\ ,\ c = f(3) = 3a + 5 \Rightarrow f(3a+5) = 7 \Rightarrow a(3a+5) + 5 = 7 \Rightarrow 3a^2 + 5a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (3a-1)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ \text{یا} \\ a = -2 \end{cases} \xrightarrow{a<0} a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x + 5$$

در تابع خطی با دامنهٔ $[a', b']$، برد با محاسبهٔ $f(a')$ و $f(b')$ به‌دست می‌آید به این‌صورت که مقدار کم‌تر مرز پایینی برد و مقدار بیشتر مرز بالایی می‌شود، لذا برای تابع $f(x) = -2x + 5$ با دامنهٔ $[-1, 4]$ مقادیر $f(-1)$ و $f(4)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(-1) = -2(-1) + 5 = 7\ \ ,\ \ f(4) = -2(4) + 5 = -3 \xrightarrow{\text{برد}} R_f = [-3, 7]$$

و می‌دانیم که بازهٔ $[-3, 7]$ شامل $7 - (-3) + 1 = 11$ عدد صحیح است.

۲۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴) نکته:در نمایش نمودار ون، رابطه‌ای تابع است که به هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ دوم را نسبت دهد یعنی اگر از یک عضو مجموعهٔ اول دو پیکان خارج شده باشد باید آن دو عضو مجموعه دوم باهم برابر باشند.

برای این که نمودار ون داده شده، نشان دهندهٔ یک تابع باشد، باید:

$$b^۲+۱=|۲b| \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{b>۰} b^۲-۲b+۱=۰ \Rightarrow (b-۱)^۲=۰ \Rightarrow \boxed{b=۱} \\ \xrightarrow{b<۰} b^۲+۲b+۱=۰ \Rightarrow (b+۱)^۲=۰ \Rightarrow \boxed{b=-۱} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |b|+۱=۲$$

$$\begin{cases} (۲,۲)\in f \xrightarrow{\text{تابع است.}\ f} \\ (۲,a+۲b)\in f \end{cases}$$

$$a+۲b=۲ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{b=۱} \quad a=۰ \\ \xrightarrow{b=-۱} \quad a=۴ \end{cases} \Rightarrow a+b=۳ \text{ یا } ۱$$

۲۵ ① ② ③ **④** ابتدا در $f(۲x+۱)$ مقدار x را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که $f(۵)$ را تولید کند یعنی:

$$۲x+۱=۵ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow \boxed{f(۵)+f(۳)=۹} \quad (۱)$$

اگر مقدار مجهول $f(۳)$ را بیابیم مقدار $f(۵)$ به دست می‌آید. برای به‌دست آوردن $f(۳)$، داریم:

$$۲x+۱=۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f(۳)+f(۳)=۴$$

$$\Rightarrow ۲f(۳)=۴ \Rightarrow f(۳)=۲ \quad (۲)$$

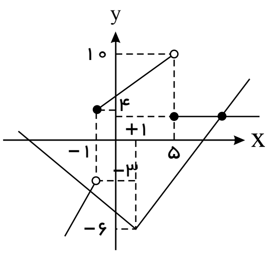
در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۵)+f(۳)=۹ \\ f(۳)=۲ \end{cases} \Rightarrow f(۵)=۷$$

۲۶ ① ② **③** ④

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم

و برای رسم نمودار تابع g نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست و ۶ واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



مطابق شکل، توابع f و g در ۲ نقطه متقاطع هستند. توجه کنید که دو تابع f و g در نقطه‌ای که طول آن کم‌تر از -۱ است، برخورد دارند، زیرا:

$$\xrightarrow{x<-۱} \begin{cases} f(x)=۲x-۱ \\ g(x)=-(x-۱)-۶ \end{cases} \Rightarrow ۲x-۱=-(x-۱)-۶$$

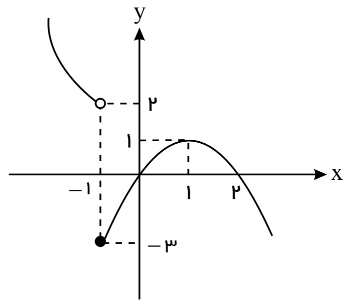
$$\Rightarrow ۳x=-۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳}$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y=-x^{۲}+۲x=-(x^{۲}-۲x+۱)+۱=-(x-۱)^{۲}+۱$$

برای رسم نمودار تابع $y=-(x-۱)^{۲}+۱$، نمودار تابع $y=-x^{۲}$ را یک واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال داده‌ایم و آن را در محدودهٔ $x\geq -۱$ رسم کرده‌ایم. همچنین برای رسم نمودار $y=x^{۲}+۱$، نمودار تابع $y=x^{۲}$ را یک واحد به سمت بالا انتقال داده‌ایم و نمودار را برای $x<-۱$ رسم کرده‌ایم. نمودار تابع را در شکل زیر رسم کرده‌ایم:

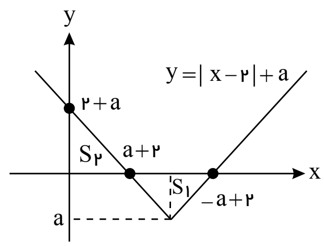
$$f(x)\geq ۰ \Rightarrow x\in(-\infty,-۱)\cup[۰,۲]$$



۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ چون نمودار به پایین محور xها انتقال یافته پس حتماً $a<۰$ می‌باشد.

محل برخورد با محور xها : $y=۰ \Rightarrow |x-۲|+a=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=a \\ x-۲=-a \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=a+۲ \\ x=-a+۲ \end{cases}$$



چون $a<۰$ می‌باشد پس $-a+۲>a+۲$ است.

$$S_{۱}=۲S_{۲} \Rightarrow \frac{|(-a+۲)-(a+۲)|\times|a|}{۲}=\frac{۲|a+۲||a+۲|}{۲} \Rightarrow a^{۲}=a^{۲}+۴a+۴$$

$$\Rightarrow ۴a+۴=۰ \Rightarrow a=-۱$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} (۲,a+b) \\ (۲,c+۲) \end{cases} \Rightarrow a+b=c+۲ \Rightarrow b-c=۲-a \\ \begin{cases} (۱,۳+c) \\ (۱,b+۲) \end{cases} \Rightarrow ۳+c=b+۲ \Rightarrow b-c=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲-a=۱ \Rightarrow a=۱$$

$$f=\{(۲,۱+b),(-۲,b),(۲,c+۲),(۱,۳+c),(-۲,۳),(۱,b+۲)\}$$

$$\begin{cases}(-۲,b)\\(-۲,۳)\end{cases} \Rightarrow b=۳ \longrightarrow b-c=۱ \Rightarrow c=۲$$

$$a+b+c=۱+۳+۲=۶$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ **برد تابع f به‌صورت $\{۱۶,۹,۱,a^۲\}$ است. پس $a^۲$ باید برابر یکی از مقادیر ۱ یا ۱۶ یا ۹ باشد وگرنه تعداد اعضای برد بیش از ۳ عضو خواهد شد. البته باید توجه کرد که مؤلفهٔ اول یکی از زوج مرتب‌های تابع f برابر a است. پس در نهایت باید امتحان کنیم مقدار به‌دست آمده برای a به‌گونه‌ای نباشد که تابع بودن رد شود؛ حالات زیر را در نظر می‌گیریم:**

$$۱)\ a^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \Rightarrow \begin{cases}(۱,۱۶)\in f\\(۱,۱)\in f\end{cases} \rightarrow f\ \text{تابع نیست.} \\ a=-۱ \Rightarrow f\ \text{تابع است.}\end{cases}$$

$$۲)\ a^۲=۹ \Rightarrow \begin{cases} a=۳ \Rightarrow \begin{cases}(۳,۹)\in f\\(۳,۱)\in f\end{cases} \rightarrow f\ \text{تابع نیست.} \\ a=-۳ \Rightarrow f\ \text{تابع است.}\end{cases}$$

$$۳)\ a^۲=۱۶ \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \Rightarrow f\ \text{تابع است.} \\ a=-۴ \Rightarrow \begin{cases}(-۴,۱)\in f\\(-۴,۱۶)\in f\end{cases} \rightarrow f\ \text{تابع نیست.}\end{cases}$$

بنابراین، برای a ، ۳ مقدار قابل قبول خواهد بود.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴
۲	۲
۳	۲
۴	۴
۵	۳
۶	۱
۷	۴
۸	۲
۹	۲
۱۰	۳
۱۱	۲
۱۲	۱
۱۳	۳
۱۴	۳
۱۵	۳
۱۶	۱
۱۷	۳
۱۸	۴
۱۹	۴
۲۰	۳
۲۱	۲
۲۲	۳
۲۳	۲
۲۴	۲
۲۵	۴
۲۶	۳
۲۷	۲
۲۸	۳
۲۹	۳
۳۰	۲