نام آزمون: ریاضی ۱ فصل ۲

زمان برگزاری: ۳۶ دقیقه

آکادمی آموزشی انگیزشی
رویش

۱) چه تعداد از موارد زیر، یک اتحاد مثلثاتی را نشان می دهند؟ (عبارت‌ها تعریف‌شده هستند.)

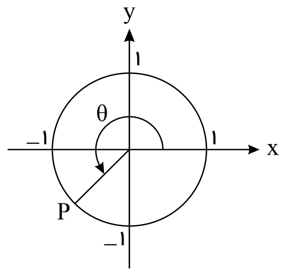
الف) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = ۲\sin^۲\theta - ۱$

ب) $\sin^۲\theta\tan^۲\theta = \tan^۲\theta - \sin^۲\theta$

پ) $\cos^۲\theta - \cot^۲\theta = \cot^۲\theta\cos^۲\theta$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲) در شکل زیر، اگر $\cos\theta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{۳}\tan\theta - ۴\sin\theta}{\cot\theta}$ کدام است؟



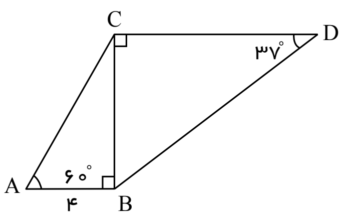
۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۳) اگر $\sin ۲\alpha > ۰$ و $\sin\alpha\tan\alpha > ۰$ باشد، آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی است؟ ($۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ$)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۴) در شکل زیر، اگر $AB = ۴$ و $\cot ۳۷^\circ \simeq \frac{۴}{۳}$ باشد، طول CD تقریباً کدام است؟



۱) $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۵}$ ۲) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۵}$

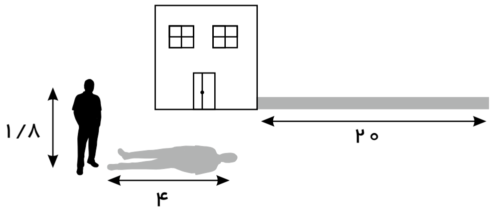
۵) اگر $\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta + \frac{۱}{۱+\cot^۲\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{-۵}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{-۷}{۸}$

۶) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ A قائمه و $\tan C = \frac{۵}{۱۲}$ است. حاصل $\cos B + \cos C$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱۳}{۱۷}$ (۲) $\frac{۱۷}{۱۳}$ (۳) $\frac{۱۲}{۱۷}$ (۴) $\frac{۱۷}{۱۲}$

۷) حسین می‌خواهد طول یک ساختمان را با استفاده از اندازهٔ سایهٔ آن محاسبه کند. اگر خورشید به او و ساختمان با یک زاویه بتابد و سایهٔ حسین که ۱٫۸ متر قد دارد، برابر با ۴ متر و طول سایهٔ ساختمان برابر با ۲۰ متر باشد، ارتفاع ساختمان چند متر است؟



(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۸) چه تعداد از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

الف) $\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\sin\theta}$

ب) $\frac{۱}{\cos x} - \frac{\cos x}{۱+\sin x} = \tan x$

ج) $\frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

د) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹) اگر $\tan\theta + \cot\theta < ۰$ باشد، آن‌گاه θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

(۱) اول یا دوم (۲) سوم یا چهارم (۳) اول یا چهارم (۴) دوم یا چهارم

۱۰) اگر $\sqrt{۲} = \frac{۱}{\cos^۲\theta} - \frac{\tan^۳\theta - ۱}{\tan\theta - ۱}$ و انتهای کمان θ در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\sin\theta$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۲) $-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ (۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۴) $-\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

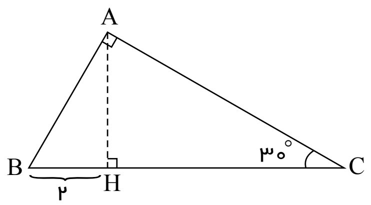
۱۱) حاصل عبارت تعریف‌شدهٔ $۲\tan^۲\theta - \frac{۱}{۱+\sin\theta} + \frac{۱}{۱-\sin\theta}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲) نقطهٔ P بر روی دایرهٔ مثلثاتی و در ناحیهٔ چهارم قرار دارد. اگر عرض نقطهٔ P برابر $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، در این صورت کتانژانت زاویه‌ای که پاره‌خط PO با جهت مثبت محور xها می‌سازد، کدام است؟ (نقطهٔ O مبدأ مختصات است.)

۱) $-\sqrt{۲}$　　۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۳) $-\sqrt{۳}$　　۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

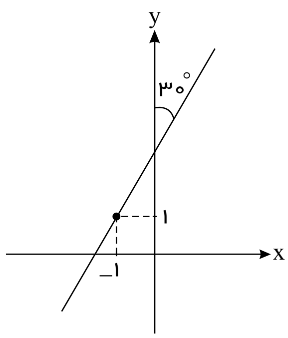
۱۳) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC شکل زیر، مساحت مثلث AHC کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$　　۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۶\sqrt{۳}$　　۴) $۸\sqrt{۳}$

۱۴) مطابق شکل زیر، عرض از مبدأ خطی که با جهت مثبت محور yها زاویهٔ ۳۰° بسازد و از نقطهٔ $(-۱,۱)$ بگذرد، کدام است؟



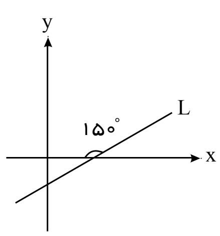
۱) $y=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+۱$　　۲) $y=۲\sqrt{۳}+۱$

۳) $y=۲\sqrt{۳}-۱$　　۴) $y=\sqrt{۳}+۱$

۱۵) اگر $\tan\alpha=-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ و انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ P باشد که در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات واقع است، مجموع مؤلفه‌های اول و دوم مختصات نقطهٔ P کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۲}{۳}$　　۲) $\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}$　　۳) $\frac{\sqrt{۵}+۲}{۳}$　　۴) $\frac{-۲-\sqrt{۵}}{۳}$

۱۶) اگر نمودار خط $L: ۳x+ay=۴$ به‌صورت مقابل باشد، a کدام است؟



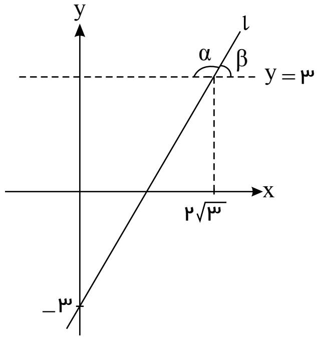
۱) $-\sqrt{۳}$　　۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۳}$　　۴) $-۳\sqrt{۳}$

۱۷) اگر داشته باشیم $\tan\theta<۰$ و $\cos\theta\cot\theta<۰$، زاویهٔ θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی واقع شده است؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

۱۸) با توجه به نمودار زیر، زاویهٔ α چند برابر زاویهٔ β است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۱۹) کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد مثلثاتی نیست؟ (همهٔ عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

۱) $\dfrac{۱-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{۱+\cos x}$

۲) $\sin^۴ x-\sin^۲ x=\cos^۴ x-\cos^۲ x$

۳) $\dfrac{۱+\tan^۲ x}{۱+\cot^۲ x}=(\dfrac{۱+\tan x}{۱+\cot x})^۲$

۴) $\tan^۲ x+\cot^۲ x=\dfrac{۱-۲(\sin x\cos x)}{\sin^۲ x\cos^۲ x}$

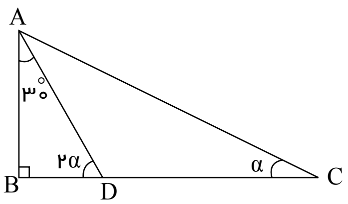
۲۰) اگر خط $۳x-۴y=۱۲$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α را بسازد، آن‌گاه مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۵}$ ۲) $\dfrac{۴}{۵}$ ۳) $\dfrac{۳}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۲۱) اگر $\dfrac{۵}{۴}=۱-\sin\theta$ و $\cot\theta\sin\theta>۰$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۲) در شکل زیر، اگر $AD=DC$ باشد، حاصل $\dfrac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}$ کدام است؟



۱) ۲

۲) $۲\sqrt{۳}$

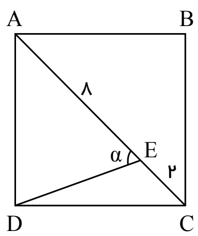
۳) ۳

۴) $۴\sqrt{۳}$

۲۳) اگر $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{۱}{۳}$، آنگاه حاصل $\tan\theta+\cot\theta$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۹}{۸}$ ۲) $\dfrac{۸}{۹}$ ۳) $\dfrac{۹}{۴}$ ۴) $\dfrac{۴}{۹}$

۲۴) اگر $ABCD$ یک مربع باشد، آن‌گاه $\tan\alpha$ کدام است؟ $(EC=۲\ ,\ AE=۸)$



۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۵}$ ۳) $\dfrac{۵}{۳}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

۲۵) اگر نقطهٔ P انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α روی دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۶}}{۱۲}$ باشد، مختصات نقطهٔ P کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}, ۱)$ ۲) $(\frac{۱}{۵}, \frac{۲\sqrt{۶}}{۵})$ ۳) $(۱, \frac{\sqrt{۶}}{۱۲})$ ۴) $(\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}, \frac{۱}{۵})$

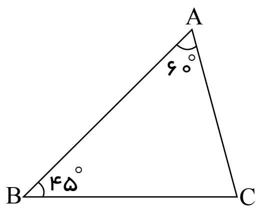
۲۶) خطی که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۴۵° باشد و از نقطهٔ $(۲,۳)$ عبور کند، محور طول‌ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۵

۲۷) حاصل عبارت $A = \frac{۱}{\cos^۶ x} - \frac{۳\tan^۲ x}{\cos^۲ x}$، همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند.)

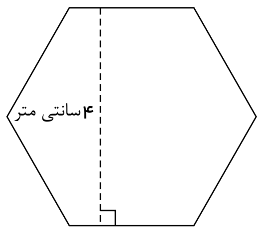
۱) $۱+\tan^۲ x$ ۲) $۱+\tan^۳ x$ ۳) $۱+\tan^۴ x$ ۴) $۱+\tan^۶ x$

۲۸) در شکل زیر، اگر $AC = ۱۰\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع BC کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) $۱۵\sqrt{۲}$ ۳) $۱۵\sqrt{۳}$ ۴) ۲۰

۲۹) مساحت شش‌ضلعی منتظم شکل زیر کدام است؟



۱) $۱۶\sqrt{۳}$ ۲) $۲۴\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۳۲}$

۳۰) مساحت پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع a کدام گزینه است؟

$(\sin ۵۴^\circ = \cos ۳۶^\circ = ۰/۸ \quad , \quad \sin ۳۶^\circ = \cos ۵۴^\circ = ۰/۶)$

۱) $\frac{۳a^۲}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۶}a^۲$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}a^۲$ ۴) $\frac{۵}{۳}a^۲$

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴ بررسی گزینه‌ها:

الف) درست زیرا:

$$\sin^۴\theta-\cos^۴\theta=(\underbrace{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}_{۱})(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)=\sin^۲\theta-\cos^۲\theta$$

$$=\sin^۲\theta-(۱-\sin^۲\theta)=\sin^۲\theta-۱+\sin^۲\theta=۲\sin^۲\theta-۱$$

ب) درست زیرا:

$$\tan^۲\theta-\sin^۲\theta=\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}-\sin^۲\theta=\frac{\sin^۲\theta-\sin^۲\theta\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}$$

$$=\frac{\sin^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\cos^۲\theta}=\frac{\sin^۲\theta\times\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\sin^۲\theta\tan^۲\theta$$

پ) نادرست زیرا:

$$\cos^۲\theta-\cot^۲\theta=\cos^۲\theta-\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{\cos^۲\theta\sin^۲\theta-\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}$$

$$=\frac{\cos^۲\theta(\sin^۲\theta-۱)}{\sin^۲\theta}=-\frac{\cos^۲\theta\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=-\cot^۲\theta\cos^۲\theta$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos\theta=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{\theta\ \text{ربع سوم}}\sin\theta=-\sqrt{۱-(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})^۲}=-\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}=-\sqrt{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\sqrt{۳}$$

$$A=\frac{\sqrt{۳}\tan\theta-۴\sin\theta}{\cot\theta}=\frac{\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}-۴\times(-\frac{۱}{۲})}{\sqrt{۳}}=\frac{۱+۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: $\boxed{\sin\alpha>۰\Rightarrow ۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ}$

$$\sin ۲\alpha>۰^\circ\Rightarrow ۰^\circ<۲\alpha<۱۸۰^\circ\Rightarrow ۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ\quad(I)$$

ریاضی ۲ فصل ۱

$$\sin\alpha\tan\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} > 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ ربع اول} \\ \alpha \text{ ربع چهارم} \end{cases} \qquad (II)$$

$(I)\cap(II): 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ربع اول α

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

$$\tan 37^\circ = \frac{1}{\cot 37^\circ} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan 37^\circ = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{CD} \Rightarrow CD = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

۵ ۱ **۲** ۳ ۴ می‌دانیم:

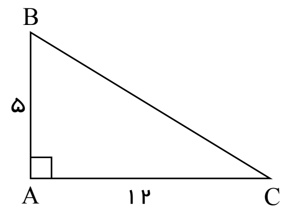
$$\boxed{1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$A = \sin^2\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{1+\cot^2\theta} = \sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2\sin^2\theta - \cos^2\theta$$

$$= 2\sin^2\theta - (1-\sin^2\theta) = 2\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta = 3\sin^2\theta - 1$$

$$\xlongequal{\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}} 3\times\frac{2}{16} - 1 = \frac{6}{16} - 1 = \frac{-10}{16} = \frac{-5}{8}$$

۶ ۱ **۲** ۳ ۴ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با فرض $AB = 5$ و $AC = 12$ مطابق شکل داریم:

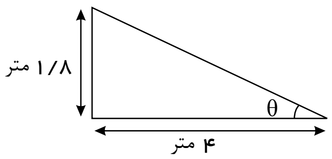


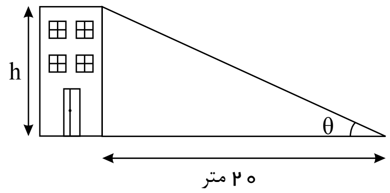
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\begin{cases} \cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{13} \\ \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \cos B + \cos C = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$$

۷ ۱ **۲** ۳ ۴ چون خورشید به هردو با یک زاویه می‌تابد، زاویهٔ تشکیل‌شده در انتهای سایهٔ حسین و سایهٔ خانه یکسان است.

مطابق شکل‌های زیر، اگر $\tan\theta$ را برای هریک از شکل‌ها بنویسیم، داریم:





$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{۱/۸}{۴} \Rightarrow \dfrac{۱/۸}{۴} = \dfrac{h}{۲۰} \Rightarrow h = ۹ \text{ متر} \\ \tan\theta = \dfrac{h}{۲۰} \end{cases}$$

۸ ۱ ۲ **۳** ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

الف) نادرست زیرا:

$$\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۱}{\cos\theta}$$

ب) درست زیرا:

$$\frac{۱}{\cos x} - \frac{\cos x}{۱+\sin x} = \frac{۱+\sin x - \cos^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)} = \frac{\sin x + (۱-\cos^۲ x)}{\cos x(۱+\sin x)}$$

$$= \frac{\sin x + \sin^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)} = \frac{\sin x(۱+\sin x)}{\cos x(۱+\sin x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ج) درست زیرا:

$$\frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

د) درست زیرا:

$$\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \underbrace{(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)}_{۱}(\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\tan\theta + \cot\theta < ۰ \to \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} < ۰ \to \frac{\sin^۲\theta + \cos^۲\theta}{\sin\theta\cos\theta} < ۰ \to \frac{۱}{\sin\theta\cos\theta} < ۰$$

$$\to \sin\theta\cos\theta < ۰ \to \begin{cases} \sin\theta > ۰ \ , \ \cos\theta < ۰ \to (\text{ربع دوم}) \\ \sin\theta < ۰ \ , \ \cos\theta > ۰ \to (\text{ربع چهارم}) \end{cases}$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} x^۳ - ۱ = (x-۱)(x^۲+x+۱) \\ ۱ - \tan^۲\theta = \dfrac{۱}{\cos^۲\theta} \end{array}}$$

$$\frac{\tan^۳\theta - ۱}{\tan\theta - ۱} - \frac{۱}{\cos^۲\theta} = \sqrt{۲}$$

$$\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1)}{(\tan\theta-1)}-(1+\tan^2\theta)=\sqrt{2}$$

$$\cancel{\tan^2\theta}+\tan\theta\cancel{+1}\cancel{-1}\cancel{-\tan^2\theta}=\sqrt{2}\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{2}$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow 1+2=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\frac{1}{3}=\cos^2\theta\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\xrightarrow[\cos\theta<0]{\theta\ \text{ربع سوم}}\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\xrightarrow[\sin\theta<0]{\theta\ \text{ربع سوم}}\sin\theta=-\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{6}}{3}$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

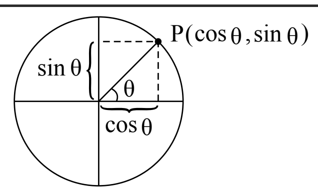
$$\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}-2\tan^2\theta=\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}-2\tan^2\theta$$

$$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}-\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}-\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2-2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2(1-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=2$$

۱۲ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم:

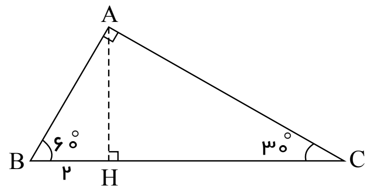


$$\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\xrightarrow{\theta\ \text{ربع چهارم}}\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{۶}}{۳}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=-\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}}=-\sqrt{۲}$$

۱ ۲ ۳ ۴ **۱۳**



$$\tan ۶۰^\circ=\frac{AH}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow AH=۲\sqrt{۳}$$

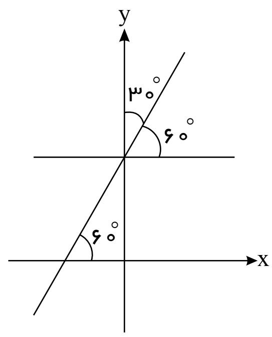
$$\sin ۳۰^\circ=\frac{AH}{AC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۳}}{AC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AC=۴\sqrt{۳}$$

$$AC^{۲}=AH^{۲}+HC^{۲}\Rightarrow ۴۸=۱۲+HC^{۲}\Rightarrow HC^{۲}=۳۶\Rightarrow HC=۶$$

$$S_{\overset{\triangle}{AHC}}=\frac{۱}{۲}\times AH\times HC=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۳}\times ۶=۶\sqrt{۳}$$

۱ ۲ ۳ ۴ **۱۴** می‌دانیم:

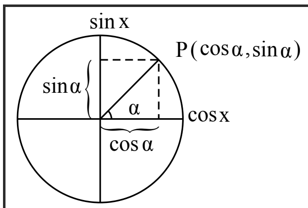
شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ θ بسازد، برابر است با: $\tan\theta$.



$$\begin{cases}y=ax+b\\a=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow y=\sqrt{۳}x+b\xrightarrow{(-۱,۱)}۱=-\sqrt{۳}+b\Rightarrow b=\sqrt{۳}+۱$$

۱ ۲ ۳ ۴ **۱۵**

می دانیم



$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۴}{۵}=\frac{۹}{۵}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۵}{۹}\Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha<۰]{\alpha\ \text{ربع چهارم}}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}=\frac{\sin\alpha}{\frac{-\sqrt{۵}}{۳}}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{-۲\sqrt{۵}\times-\sqrt{۵}}{۵\times ۳}=\frac{۲}{۳}$$

مجموع مؤلفه‌ها: $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}=\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}$

۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم:

شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد برابر است با: $\tan\alpha$

$$L:۳x+ay=۴\Rightarrow ay=-۳x+۴\Rightarrow y=\frac{-۳}{a}x+\frac{۴}{a}$$

$$\frac{-۳}{a}=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow a=\frac{-۹}{\sqrt{۳}}=-\frac{۹\sqrt{۳}}{۳}=-۳\sqrt{۳}$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

۱) $\tan\theta<۰\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<۰\Rightarrow$ $\sin\theta$ و $\cos\theta$ غیر هم‌علامتند $\Rightarrow$ θ در ربع دوم یا چهارم است.

۲) $\cos\theta\times\cot\theta<۰\Rightarrow\cos\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}<۰\Rightarrow\frac{\cos^۲\theta}{\sin\theta}<۰\Rightarrow$ $\sin\theta$ منفی است.

$\Rightarrow$ از بین ربع‌های دوم و چهارم، ربع چهارم را می‌پذیریم.

۱۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$y=ax+b\to\begin{cases}(۰,-۳)\Rightarrow b=-۳\\(۲\sqrt{۳},۳)\Rightarrow ۳=۲\sqrt{۳}a-۳\Rightarrow ۶=۲\sqrt{۳}a\Rightarrow a=\frac{۶}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$y=\sqrt{۳}x-۳\to\tan\beta=\sqrt{۳}\Rightarrow\beta=۶۰^\circ\Rightarrow\alpha=۱۲۰^\circ\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{۱۲۰^\circ}{۶۰^\circ}=۲$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴** بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

طرف چپ : $\frac{\sin x}{۱+\cos x} = \frac{\sin x}{۱+\cos x} \times \frac{۱-\cos x}{۱-\cos x} = \frac{\sin x(۱-\cos x)}{۱-\cos^۲ x}$

$= \frac{\sin x(۱-\cos x)}{\sin^۲ x} = \frac{۱-\cos x}{\sin x}$: طرف راست

گزینهٔ «۲»:

طرف چپ : $\sin^۴ x - \sin^۲ x = (۱-\cos^۲ x)^۲ - (۱-\cos^۲ x)$

$= (۱ - ۲\cos^۲ x + \cos^۴ x) - (۱-\cos^۲ x) \quad = \cos^۴ x - \cos^۲ x$: طرف راست

گزینهٔ «۳»:

طرف چپ : $\frac{۱+\tan^۲ x}{۱+\cot^۲ x} = \frac{\frac{۱}{\cos^۲ x}}{\frac{۱}{\sin^۲ x}} = \frac{\sin^۲ x}{\cos x} = (\frac{\sin x}{\cos x})^۲ = \tan^۲ x$

طرف راست : $(\frac{۱+\tan x}{۱+\cot x})^۲ = (\frac{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}})^۲ = (\frac{\sin x}{\cos x})^۲ = \tan^۲ x$

گزینهٔ «۴»:

طرف چپ : $\tan^۲ x + \cot^۲ x = (۱+\tan^۲ x) + (۱+\cot^۲ x) - ۲$

$= \frac{۱}{\cos^۲ x} + \frac{۱}{\sin^۲ x} - ۲ = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x} = \frac{۱-۲(\sin x\cos x)^۲}{\sin^۲ x\cos^۲ x}$: مخالف طرف راست

۲۰ ۴ ۳ ۲ ۱

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویه θ سازد برابر است با: $\tan\theta$

$۳x - ۴y = ۱۲ \to ۴y = ۳x - ۱۲ \to y = \frac{۳}{۴}x - ۳$

$\tan\alpha = \frac{۳}{۴} \to ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + (\frac{۳}{۴})^۲ = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

$\cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵} \to \cos\alpha = \pm\frac{۴}{۵}$

۲۱ ۴ ۳ ۲ ۱

$$۱-\sin\theta=\frac{۵}{۴}\Rightarrow \sin\theta=-\frac{۱}{۴}<۰$$

پس θ در ناحیهٔ سوم یا چهارم قرار دارد.

$$\cot\theta\cdot\underbrace{\sin\theta}_{-}>۰\Rightarrow \cot\theta<۰$$

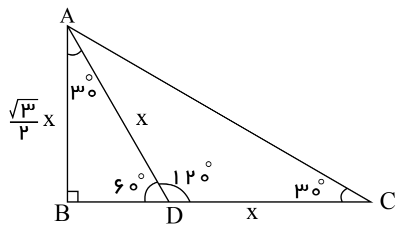
θ در ناحیهٔ دوم یا چهارم است.

طبق اشتراک جواب‌ها، θ در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار دارد.

۲۲ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot BC\cdot\sin B\\ \sin ۱۲۰^\circ=\sin ۶۰^\circ\end{array}}$$

اگر $AD=DC=x$ باشد، آنگاه داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{ABD}}:\ ۹۰^\circ+۳۰^\circ+۲\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABD}}:\ \cos ۳۰^\circ=\frac{AB}{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABD}}=\frac{۱}{۲}AD\cdot AB\cdot\sin A=\frac{۱}{۲}\times x\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\times\sin ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}x^۲}{۸}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ADC}}=\frac{۱}{۲}AD\cdot DC\cdot\sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times x\times x\times\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۸}x^۲}=۲$$

۲۳ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم:

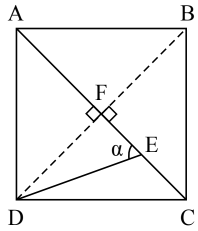
$$\boxed{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱}$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^۲\theta+\cos^۲\theta-۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱-۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۹}\Rightarrow ۲\sin\theta\cos\theta=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{۴}{۹}$$

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$$

۲۴ ۴ **۳** ۲ ۱ اگر قطر دیگر مربع را رسم کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ F قطع کنند می‌دانیم قطرهای مربع برهم عمودند و همدیگر را نصف می‌کنند. با توجه به این که قطر مربع ۱۰ می‌باشد، در مثلث DEF داریم:



$$\tan\alpha=\frac{DF}{FE}=\frac{AC\div 2}{CF-CE}=\frac{10\div 2}{5-2}=\frac{5}{3}$$

۲۵ **۴** ۳ ۲ ۱ در دایرهٔ مثلثاتی شعاع $r=1$ است و لذا مجموع مجذور طول و عرض هر نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی برابر یک می‌شود، یعنی $x^2+y^2=1$ در گزینهٔ «۱» و «۳» این حالت برقرار نیست پس یکی از گزینه‌های «۲» یا «۴» جواب است. از طرفی در دایرهٔ مثلثاتی اگر نقطهٔ $(x_P$ و $y_P)$ مختصات انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α باشد، آن‌گاه $\tan\alpha=\frac{y_P}{x_P}$ است. پس:

گزینهٔ «۲»: $(\frac{1}{5},\frac{2\sqrt{6}}{5})\Rightarrow\tan\alpha=\frac{y_P}{x_P}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}}=2\sqrt{6}$ غ.ق.ق

گزینهٔ «۴»: $(\frac{2\sqrt{6}}{5},\frac{1}{5})\Rightarrow\tan\alpha=\frac{y_P}{x_P}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$ ✓

۲۶ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم:

$\boxed{\text{شیب خطی که با جهت مثبت محور } x \text{ها زاویهٔ } \theta \text{ بسازد، برابر است با: } \tan\theta}$

$$\begin{cases} y=ax+b \\ a=\tan 45^\circ=1\end{cases}\Rightarrow y=x+b\xrightarrow{(2,3)}3=2+b\Rightarrow b=1$$

$$y=x+1\xrightarrow{(x,0)}x+1=0\Rightarrow x=-1$$

۲۷ **۴** ۳ ۲ ۱ می‌دانیم: $\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x}$

$$A=(\frac{1}{\cos^2 x})^3-3\tan^2 x(\frac{1}{\cos^2 x})=(1+\tan^2 x)^3-3\tan^2 x(1+\tan^2 x)$$

$$A=1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x-3\tan^2 x-3\tan^4 x=1+\tan^6 x$$

۲۸ ۴ ۳ **۲** ۱ همان‌طور که می‌دانیم مساحت مثلث ABC را می‌توان از روابط زیر پیدا کرد.

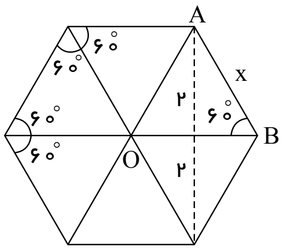
$$\begin{cases} S = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin ۶۰^\circ \\ S = \frac{۱}{۲}AB \times BC \times \sin ۴۵^\circ \end{cases} \Rightarrow AC \times \sin ۶۰^\circ = BC \times \sin ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۰\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = BC \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۳۰ = \sqrt{۲}BC \Rightarrow BC = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} \Rightarrow BC = ۱۵\sqrt{۲}$$

۲۹ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم:

اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک nضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n-۲)}{n} \times ۱۸۰^\circ$

اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک ۶ ضلعی منتظم برابر است با:



$$\theta = \frac{۴ \times ۱۸۰^\circ}{۶} = ۱۲۰^\circ$$

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{۲}{x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{۱}{۲} \times x \times x \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times \frac{\cancel{۴}\cancel{\sqrt{۳}}}{\cancel{۳}} \times \frac{۴\cancel{\sqrt{۳}}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

مساحت ۶ ضلعی منتظم برابر است با:

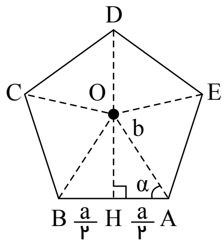
$$S_{\text{۶ ضلعی}} = ۶S_{\overset{\triangle}{OAB}} = ۶ \times \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم:

اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک nضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n-۲)}{n} \times ۱۸۰^\circ$.

$$A\hat{O}B = \frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$$

$$A\hat{O}H = \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$



$\alpha = ۹۰^\circ - ۳۶^\circ = ۵۴^\circ$

$\cos ۵۴^\circ = \frac{\frac{a}{۲}}{b} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۰{,}۶b \Rightarrow b = \frac{a}{۱{,}۲}$

AOB مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲}ab\sin ۵۴^\circ = \frac{۱}{۲}a \times \frac{a}{۱{,}۲} \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{a^۲}{۳}$

مساحت پنج‌ضلعی منتظم $= ۵ \times AOB$ مساحت مثلث $= \frac{۵}{۳}a^۲$

پاسخنامه کلیدی

۱	۲
۲	۴
۳	۱
۴	۳
۵	۲
۶	۲
۷	۲
۸	۳
۹	۴
۱۰	۴
۱۱	۴
۱۲	۱
۱۳	۳
۱۴	۴
۱۵	۲
۱۶	۴
۱۷	۴
۱۸	۱
۱۹	۴
۲۰	۲
۲۱	۴
۲۲	۱
۲۳	۳
۲۴	۳
۲۵	۴
۲۶	۳
۲۷	۴
۲۸	۲
۲۹	۳
۳۰	۴