Вопросы:

1) Формула Вронского и уравнение Лиувилля:
2) Восстановление дифференциального уравнения по известной фундаментальной системе
3) Понижение порядка дифференциального уравнения при известных частных решениях

Формула Вронского и уравнение Лиувилля:

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = 0 \ \mathbf{(1)}$$

Выберем систему из n решений, причём $W(x) \equiv 0$ или $W(x) \neq 0$

Для подсчёта определителя существует формула в любой точке можно высчитать:

$$W(x_0) \ \mathbf{(2)} \text{ – формула в } W(x) = e^x$$

Функция $W(x)$ вычислимо по правилу (**2**), если эта функция является решением дифференциального уравнения:

$$W'(x) = -a_1(x)W(x) \ \mathbf{(3)}$$

Между (**2**) и (**3**) имеется взаимно-однозначное соответствие:

$$W'(x) = \frac{dW}{dx}, \frac{dW}{dx} = -a_1(x)W(x)$$

Покажем, что такое уравнение есть: $W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{bmatrix}$

Правило дифференцирования функционального определителя:

Произведение представляет собой сумму n определителей в первом, из которых продифференцируем первую строка, остальные без изменений, во 2-м продифференцируем 2-ую строка, остальные без изменений.

Введём обозначение: $\phi(x) = \big(y_1(x)y_2(x) \ldots y_n(x)\big)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \phi(x) \\ \phi'(x) \\ \cdots \\ \phi^{n-1}(x) \end{vmatrix} W'(x) = \begin{vmatrix} \phi'^{(x)} \\ \phi'(x) \\ \cdots \\ \phi^{n-1}(x) \end{vmatrix} (= 0) + \begin{vmatrix} \phi(x) \\ \phi''^{(x)} \\ \cdots \\ \phi^{n-1}(x) \end{vmatrix} (= 0) + \ldots + \begin{vmatrix} \phi(x) \\ \phi'(x) \\ \cdots \\ \phi^{n}(x) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \phi(x) \\ \phi'(x) \\ \cdots \\ \phi^{n}(x) \end{vmatrix}$$

Вектор функции $W(x)$ удовлетворяет уравнению (**1**):

$$\phi^n + a_1(x)\phi^{n-1} + \cdots + a_n(x)\phi = 0$$

$$\phi^n = -a_1(x)\phi^{n-1} - \cdots - a_n(x)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \phi(x) \\ \dots \\ -a_1(x)\phi^{n-1}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \phi(x) \\ \dots \\ -a_n(x) \end{vmatrix} = -a_1(x)W(x)$$

Ч.т.д.

Восстановление дифференциального уравнения по известной фундаментальной системе

Пусть есть фундаментальная система решений для какого-то уравнения $y_1(x)y_2(x) \dots y_n(x)$

Задача: найти функции $a_1(x), \dots, a_n(x)$. Все эти функции удовлетворяют условию (**1**)

$$\begin{cases} y_1^n + a_1(x)y_1^{n-1} + \dots + a_n(x)y_1 = 0 \\ \dots \\ y_n^n + a_1(x)y_n^{n-1} + \dots + a_n(x)y_n = 0 \end{cases} \quad (\mathbf{4})$$

$$\begin{cases} a_1(x)y_1^{n-1} + \dots + a_n(x)y_1 = -y_1^n \\ \dots \\ a_1(x)y_n^{n-1} + \dots + a_n(x)y_n = -y_n^n \end{cases} \quad (\mathbf{5})$$

Чтобы из определителя системы (**5**) получить определитель Вронского, необходимо:

1) Транспортировать его;
2) Порядок столбцов поменять на противоположный.

Так как система функций фундаментальна, то определитель системы $(\mathbf{5}) \neq 0$ и эта система имеет единственное решение.

Составим определитель n+1.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & a & y(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) & y^{n-1}(x) \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) & y^n(x) \end{vmatrix} = 0 \ (\mathbf{6})$$

$$y^n(x)W(x) + W_1(x)y^{n-1}(x) + \dots + W_n(x)y(x) = 0 | : W(x) \neq 0$$

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x)y = 0$$

Пример

$y_1(x) = x^2; y_2(x) = x^3$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & y \\ 2x & 3x^2 & y' \\ 2 & 6x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

$$y''(3x^4 - 2x^4) + (-1)^{2+3}y'(6x^3 - 2x^3) + (-1)^{1+3}y(12x^2 - 6x^2) = 0$$

$$\dots y'' - \frac{y}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

Понижение порядка дифференциального уравнения при известных частных решениях

Если известно k уравнений n-го порядка, то этот порядок можно понизить на k единиц.

Пусть уравнение (**1**) имеет. Сделаем замену переменных (**7**) и подставим её в уравнение (**1**)

$$y = y(x)u(x) \ (\mathbf{7}) \qquad \begin{matrix} a_n(x) \\ a_{n-1}(x) \end{matrix}\Bigg| y' = y'(x)u(x) + y(x)u'(x)$$

$$y''(x)u(x) + y'(x)u'(x) + y(x)u''(x)$$

$$\dots$$

$$1\Bigg| y^n = y^n(x)u(x) + y^{n-1}(x)u^2(x) + \dots + y(x)u^n(x)$$

$$0 = u(x)\langle y^n(x) + a_1(x)y^{n-1}(x) + \dots + u'(x)(a_{n-1}(x)y(x) + \dots \rangle + \dots + y(x)u^n(x)$$

$$y(x)u^n(x) + \dots (\ )u'(x) = 0 \quad u'(x) = z(x)$$