Вопросы:

1) Линейное уравнение 1-го порядка
2) Уравнение Бернулли

Линейное уравнение 1-го порядка

Определение Уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$ (**1**), в котором функции $a(x)$ и $b(x)$ определены и непрерывны на промежутке $\alpha < x < \beta$, которое может быть и бесконечно $-\infty < \text{x} < \infty$, называется линейным однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка, если $b(x) = 0$, то уравнение $y' = a(x)y$ (**2**) – линейное однородное уравнение -го порядка, соответствующее уравнение (**1**).

Уравнение (**2**) – одновременно и уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим: $\frac{dy}{dx} = a(x)y \mid : y \neq 0 \mid * dx \qquad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx \; (*)$

$$ln|y| = \int a(x)dx + C \quad e^{ln|y|} = e^{\int a(x)dx + C} \qquad y' = a(x)y + b(x)(1)$$

$y = e^c * e^{\int a(x)dx} = c * e$ (**3**) – задаёт общее решение для однородного уравнения (**2**)

(*****) заменим неопределённый интеграл на интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = \int_{x}^{c} a(s)ds \qquad ln|y||_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} a(s)ds$$

$$ln|y(x)| - ln|y(x_0)| = \int_{x_0}^{x} a(s)ds \quad ln|y(x)| = c_0 + \int_{x_0}^{x} a(s)ds$$

$$y(x) = e^{c_0 + \int_{x_0}^{x} a(s)ds} = e^{c_0} * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

$y(x) = c_0 * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ (**4**) – определяет общее решение для однородного уравнения (**2**)

Предположим, что уравнению (**2**) поставили начальное условие:

$$y(x_0) = y_0(\mathbf{5}) \qquad y(x_0) = c_0 * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = c_0 = y_0 \; (\mathbf{2})(\mathbf{5})$$

Решение начальной задачи (**2**)(**5**) имеет вид: $y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ (**6**)

Для того, чтобы найти общее решение неоднородного уравнения (**2**), будем применять метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Для этого в формуле общего решения однородного уравнения $c * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ заменим константу c на дифференцируемую функцию $c(x)$:

$$y = c(x) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \text{ } \mathbf{(7)} \text{ – подставим в } \mathbf{(1)}$$

$$y' = c'(x) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + c(x)\left(e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\right)' = \cdots$$

$$\left(e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\right)' = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} * \left(\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right)' = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} * a(x)$$

$$\ldots = c'(x) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + c(x) * a(x) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = a(x) * c(x) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + b(x), \text{ где } b(x) = c'(x) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

Умножим последнее равенство на обратную экспоненту

$$c'(x) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x) \mid * e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

$$c'(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} * b(x) \qquad \begin{bmatrix} x \to s \\ s \to \sigma \end{bmatrix} \leftarrow \text{замена}$$

$c'(s) = e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} * b(s)$ → проинтегрируем в промежутке от x_0 до x

$$\int_{x_0}^{x} c'(s)ds = \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} * b(s)ds$$

$$c(x) - c(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} * b(s)ds, \; c(x_0) = c_0$$

$$c(x) = c_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} * b(s)ds \text{ } \mathbf{(8)}$$

Подставим (**8**) в (**7**)

$$y = \left(c_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} * b(s)ds\right) * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$
$$= c_0 * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} * b(s)ds$$

$$y = c_0 * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{s}^{x} a(\sigma)d\sigma} * b(s)ds \text{ } \mathbf{(9)} \text{ – общее решение для уравнения } \mathbf{(1)}$$

$c_0 * e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ – общее решение однородного уравнения (**2**)

$\int_{x_0}^{x} e^{\int_{s}^{x} a(\sigma)d\sigma} * b(s)ds$ – частное решение <u>не</u> однородного уравнения (**1**)

$y(x_0) = y_0$ (**10**) – начальное условие уравнения (**1**)

$y_0 = c_0$ совершая данную замену мы получаем решение начальной задачи (**1**)(**10**): $y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{s}^{x} a(\sigma)d\sigma} * b(s)ds$

Уравнение Бернулли

Определение Уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)y^n$ (**11**) называется уравнением Бернулли. $a(x), b(x)$ – непрерывные функции $\alpha < x < \beta, n \neq 0,1$

n = 0:

$y' = a(x)y + b(x)$ – линейное уравнение 1-го порядка

n = 1:

$y' = a(x)y + b(x)y = \big(a(x) + b(x)\big)y$ – уравнение с разделяющимися типами

Если n>0, то (11)≡0

Если n<0, то нет решения (y≢0)

Разделим обе части уравнения (**11**) на $y^n \neq 0$: $y^{-n} * y^1 = a(x)y^{1-n} + b(x)$

Сделаем замену переменных: $y^{1-n} = z$ (**12**) ← позволяет преобразовать уравнение Бернулли (**11**) к линейному неоднородному уравнению (**13**)

Посчитаем производную от z

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y' \qquad y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$$

$$\frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x) \mid * (1-n) \qquad z' = (1-n)(a(x)z) + b(x)(1-n)$$

$z' = a(x) + b(x)$ (**13**) – линейно неоднородное уравнение относительно z

$$(1-n)(a(x)z) = a(x)$$

$$b(x)(1-n) = b(x)$$

Замена переменных (**12**) позволяет преобразовать уравнение Бернулли (**11**) к линейному неоднородному уравнению (**13**). Необходимо найти общее решение неоднородного линейного уравнения (**13**) и сделать обратную замену. Проверить, что не потеряли условий, если n>0, то будет ещё решение y ≡0.