Однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней.

Вопросы:

1) Характеристическое уравнение. Метод Лагранжа
2) Формула смещения
3) Теорема об общем решении

Характеристическое уравнение. Метод Лагранжа

Рассмотрим уравнение n-го порядка $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n z = 0$ (**1**) с комплексными коэффициентами $a_1, \dots, a_n \in C$. Выпишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \ (\mathbf{2})$$

Предположим, что уравнение (**2**) имеет кратные корни

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$
$$k_1, k_2, \dots, k_m$$
$$m < n \ \ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n \qquad z = e^{\lambda x}$$

Пусть λ -кратный корень. Рассмотрим вместе с λ еще 1 корень:

$$\lambda + \Delta\lambda \qquad \lambda + \Delta\lambda \to 0 (\Delta\lambda \to 0) \qquad e^{\lambda x}, e^{(\lambda+\Delta\lambda)x} \to e^{\lambda x} (\Delta\lambda \to 0)$$

Составим разность функций:

$$\frac{e^{(\lambda+\Delta\lambda)x} - e^{\lambda x}}{\Delta\lambda} = \frac{e^{\lambda x}\left(e^{\Delta\lambda x} - 1\right)}{\Delta\lambda} = e^{\lambda x} * \frac{e^{\Delta\lambda x} - 1}{\Delta\lambda} = e^{\lambda x} x e^{\Delta\lambda x}$$
$$\to x * e^{\lambda x} \ (\Delta\lambda \to 0)$$

Если число λ является корнем уравнения (**2**) кратности k, то можно показать, что этому корню будет отвечать группа из k решений дифференциального уравнения (**1**) следующего виде:

$$e^{\lambda x}, x * e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} * e^{\lambda x} \ (\mathbf{3})$$

Формула смещения

Предположим, что задан некоторый многочлен n-го порядка.

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

Введём обозначение: p-однократный дифференциал $p = \frac{d}{dx}$. Составим отображение по многочлену, заменяя λ на p:

$$L(p)z = 0 \ (\mathbf{4})$$

Предположим, что есть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируемая, тогда справедлива формула смещения:

$$L(p)\{e^{\lambda x} * f(x)\} = e^{\lambda x} L(p+\lambda) f(x) \ (\mathbf{5})$$

Доказательство

Будем доказывать формулу (**5**) методом математической индукции по порядку дифференцирования оператора.

1) Пусть порядок = 1. В этом случае $L(p)$ имеет вид $L(p) = ap + b,\ a, b$ – некоторые числа.

$$\begin{aligned} L(p)\{e^{\lambda x} * f(x)\} &= a\left(e^{\lambda x} f(x)\right)' + be^{\lambda x} f(x) \\ &= a\left(\lambda e^{\lambda x} f(x) + e^{\lambda x} f'(x)\right) + be^{\lambda x} f(x) \\ &= e^{\lambda x}\big(a\lambda f(x) + apf(x) + bf(x)\big) \\ &= e^{\lambda x}\big(a(p+\lambda) f(x) + bf(x)\big) = e^{\lambda x} L(p+2) f(x) \end{aligned}$$

2) Предположим, что формула (**5**) справедлива для любого дифференциального оператора до $n-1$ порядка включительно. Рассмотрим многочлен n-го порядка $L(\lambda) = M(\lambda) * N(\lambda)$

   $M(\lambda)$ – 1-го порядка, $N(\lambda)$ – $n-1$-го порядка

   Поставим каждому из них в соответствие дифференциальный оператор

$$M(\lambda) \to M(p); N(\lambda) \to N(p)$$

$$L(p) = M(p) * N(p) \ L(p) * \{e^{\lambda x} f(x)\} = M(p) * N(p) * \{e^{\lambda x} f(x)\} = M(p)\{e^{\lambda x} N(p+\lambda) f(x)\} = e^{\lambda x} M(p+\lambda) * N(p+\lambda) f(x) = e^{\lambda x} L(p+\lambda) f(x)$$

Ч.т.д.

Теорема об общем решении

Предположим, что уравнение (**2**) имеет кратные корни, тогда выпишем решение уравнения (**1**) соответствующее этим корням:

$$z_1 = e^{\lambda_1 x}, z_2 = xe^{\lambda_2 x}, \dots, z_{k_1} = x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x},$$

$$z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 x}, z_{k_1+2} = xe^{\lambda_2 x}, \dots, z_{k_1+k_2} = x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x}, \dots, \quad (\mathbf{6})$$

$$z_{n-k_m+1} = e^{\lambda_m x}, \dots, z_n = x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x}$$

Система функций (**6**) задаёт фундаментальную систему решений однородного уравнения (**1**)

Общее решение такого уравнения имеет вид:

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_n z_n \ (\mathbf{7}), \text{ где } c_1, \dots, c_n \in C$$

Если λ – вещественный корень кратности k, то в формулу общего решения будет входить соответствующее ему решение вида:

$$e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) \ (\mathbf{8})$$

Если λ – комплексное кратности k, то в формулу решения будут входить слагаемые вида: $(\lambda = \alpha + i\beta)$

$$e^{\lambda x}\Big((a_1 \cos\beta x + b_1 \sin\beta x) + x(a_2 \cos\beta x + b_2 \sin\beta x) + \dots + x^{k-1}(a_k \cos\beta x + b_k \sin\beta x)\Big) \ (\mathbf{9})$$