Основные понятия

Вопросы:

1) Обыкновенные дифференциальные уравнения. Решение. Начальная задача. Частное и общее решение. Частный и общий интегралы
2) Составление дифференциального уравнения
3) Геометрическая интерпретация: поле направлений, интегральная кривая:
4) Метод изоклины

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Решение. Начальная задача. Частное и общее решение. Частный и общий интегралы

Рассмотрим в 3-х мерном пространстве переменных x, y, z, некоторую область G. На множестве G рассмотрим функцию 3-х переменных F.

Определение Соотношение, связывающее независимую переменную x, функцию $y(x)$ и её производную: $F(x, y, y') = 0$ (**1**) называется дифференциальным уравнением.

Искомым в этом уравнении является функция $y(x)$.

Поскольку функция y зависит от одной переменной x, то уравнение (**1**) называют обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей, входящей в него производных.

Если производная входит в уравнение в качестве переменной, то уравнение называют неразрешённым относительно производной.

Определение Функция $\varphi(x)$ называется решением уравнения (**1**), если выполнимы следующие требования:

1) $\varphi(x)$ дифференцируема;
2) При $\forall x$ точка $\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big) \in G$;
3) Функция $\varphi(x)$ обращает уравнение (**1**) в тождество.

Предположим, что уравнение (**1**) разрешено относительно производной: $y' = f(x, y)$ (**2**).

Поставим уравнение (**2**) в начальное условие: $y(x_0) = y_0$ (**3**), тогда задача (**2**), (**3**) называется начальной задачей или задачей Коши.

Определение Говорят, что формула (**4**), в которой $c = const$, $y = \varphi(x, c)$ (**4**) определяет общее решение дифференциального уравнения (**2**), если совокупность решений этого уравнения и множества функций, задаваемых формулой (**4**), совпадают. Другими словами, любое решение уравнения (**2**) можно получить из формулы (**4**) выбором подходящего значения константы c. При любом конкретном значении константы c, формула (**4**) задаёт частное решение уравнения (**2**)

Определение Если некоторое решение уравнения (**2**) задано в неявном виде $\Phi(x,y) = 0$ (**5**), то уравнение (**5**) задаёт частный интеграл для уравнения (**2**).

Если удалось построить функцию $\Phi(x,y,c) = 0$ (**6**), которая охватывает все частные интегралы, то она называется общим интегралом.

Составление дифференциального уравнения

Предположим, что есть дифференциальное уравнение $F(x,y,y')=0$ есть общий интеграл $\Phi(x,y,c)=0$ (*) и между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

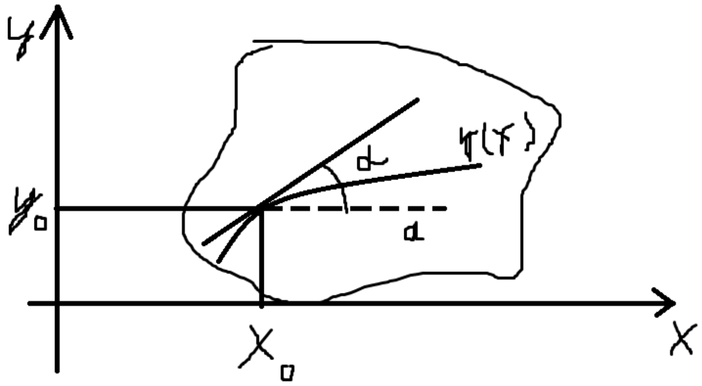
Продифференцируем соотношение по переменной x.

$$\Phi'_x(x,y,c)+\Phi'_y(x,y,c)*\mathrm{y}'(\mathrm{x})=0 \text{ (**)}$$

Исключая из равенства (*) константу c, и подставив её в равенство (**), получим уравнение $F(x,y,y')=0$

Геометрическая интерпретация: поле направлений, интегральная кривая:

Плоскость переменных (x, y) называют фазовой плоскостью



Пусть на кривой $y(x)$ задана точка $(x_0; y_0)$. Проведем через неё касательную. Уравнение касательной: $y = y_0 + k(x - x_0)$

$$k = tg\alpha = f'(x_0; y_0)$$

Пусть уравнение разрешено относительно производной: $y' = f(x, y)$.

$$y = y_0 + f'(x_0; y_0) * (x - x_0) \text{ (7)}$$

Прямая, проходящая через точку $(x_0; y_0)$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0; y_0)$, задаёт в этой точке направление поля.

Определение Совокупность всех таких касательных определяет поле направлений.

Геометрический образ решения дифференциального уравнения (его график), называется интегральной кривой.

Метод изоклины

Геометрическое место точек в плоскости (x, y), в каждой из которых угол наклона касательной к графику решения уравнения (**2**), называется изоклиной.

$y' = f(x, y) \quad k = tg\alpha = const \quad k = f(x, y)$ (**8**) ← уравнение изоклины

Придавая константе k всевозможные значения $k_1, k_2, \ldots$ будем строить семейство изоклин. $f(x, y) = k_i, i = 1,2, \ldots$

Метод получения информации об интегральных кривых дифференциального уравнения, основанной на использовании изоклин, называется методом изоклин.