Теорема существования единственности

Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешённое относительно производной. $y' = f(x, y)(\mathbf{1})$.

Будем считать, что $f(x, y)$ определена на некотором множестве G.

Зафиксируем некоторую точку (x_0, y_0) из этого множества и подставим начальное условие $y(x_0) = y_0(\mathbf{2})$

Рассмотрим прямоугольник D, определённый по следующему уравнению:

$D = (x, y)|x - x_0| \leq a * |y - y_0| \leq b(\mathbf{3})$ a и b задали заданные числа

Предположим, что $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных, т.е.

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\sigma(\varepsilon) > 0)\forall(\xi, \nu) \in D \subset G\ [|x - \xi| < \sigma \text{ и } |y - \nu| < 0 \\ \Rightarrow |f(x, y) - f(\xi, \nu)| < \varepsilon]$$

Из непрерывности функции $f(x, y)$ следует непрерывность функции $g(x, y) = |f(x, y)|$.

Будем считать, что множество G совпадает с этим прямоугольником, тогда $g(x, y)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве.

Тогда, по теореме Вейерштрасса, функция $g(x, y)$ достигает на прямоугольнике своего максимального значения $\mathrm{M} = \mathrm{max}_{(x,y)\in D}|f(x, y)|(\mathbf{4})$

Будем считать, что $f(x, y)$ по второй переменной удовлетворяет условию Липшица с константой L, т.е. $\exists L > 0|f(x, y) - f(x, \nu)| \leq L|y - \nu|(\mathbf{5})$

Утверждение: Для того, чтобы $f(x, y)$ удовлетворяла условию с константой $L(\mathbf{5})$ необходимо и достаточно, чтобы производная по второй переменной от функции f была ограничена.

$$\left|\frac{zf(x,y)}{zy}\right| \leq L(\mathbf{6})\ f(x, y) \in D$$

Теорема (Коши-Липинца)

Рассмотрим начальную задачу $(\mathbf{1})(\mathbf{2})$. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D, тогда $\exists M$ – определяемое формулой $(\mathbf{4})$. Пусть функция $f(x, y)$ по второй переменной удовлетворяет условию $(\mathbf{5})$. Тогда начальная задача $(\mathbf{1})(\mathbf{2})$ имеет единственное решение, которое можно считать определяемым на промежутке

$$|x - x_0| \leq h(\mathbf{7}), \text{ где } h = min\{a, \tfrac{b}{M}\}(\mathbf{8})$$

Единственность решения задачи $(\mathbf{1})(\mathbf{2})$ означает, что любые 2 её решения совпадают на пересечении их областей определения.