Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Случай простых корней.

Вопросы:

1) Метод Эйлера и характеристики уравнения
2) Комплексное решение. Комплексное дифференциальное уравнение
3) Теорема об общем решении в комплексном случае
4) Теорема об общем решении в вещественном случае

Метод Эйлера и характеристики уравнения

Определение Уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n y = 0 \ (\mathbf{1}),\ a_1, \dots, a_n \in R$$

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$y = e^{\lambda x} \ (\mathbf{2})\ \lambda \in R$$

Такой способ называют методом Эйлера.

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^n = \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_n e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^n + a_1 \lambda n - 1 + \cdots a_n = 0 \ (\mathbf{3})$$

Решение уравнения (**1**) можно искать в виде (**2**) тогда и только тогда λ – является решением алгебраического уравнения (**3**). Уравнение (**3**) – характеристическое уравнение, его левая часть называется характеристическим многочленом, его корни называются характеристическими корнями.

Комплексное решение. Комплексное дифференциальное уравнение

Комплексной функцией вещественного аргумента x называется функция следующего вида:

$$z(x) = u(x) + iv(x), \text{ где } u(x) \text{ и } iv(x) \text{ – вещественные функции.}$$

Функция $z(x)$ непрерывна и дифференцируема, если непрерывна и дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$

$$z'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

$$\dots$$

$$z^k(x) = u^k(x) + iv^k(x)$$

Будем рассматривать уравнение с комплексными коэффициентами

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n z = 0\ (\mathbf{4}),\ a_1, \dots, a_n \in C$$

Будем искать решение уравнения (**4**) по методу Эйлера

$$z = e^{\lambda x}, \lambda \in C, \lambda = \alpha + i$$

$$z = e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} * e^{i\beta x} = e^{\alpha(x)}(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x)$$

$(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x)$ – формула Эйлера

Высчитаем произведение от z:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{de^{\lambda x}}{dx} = \frac{e^{\lambda x} * cos\,\beta\, x}{dx} + i\frac{e^{\lambda x} * sin\,\beta\, x}{dx}$$
$$= \alpha e^{\lambda x} cos\,\beta\, x - e^{\lambda x} sin\,\beta\, x + i\alpha e^{\lambda x} * sin\,\beta\, x + ie^{\lambda x}\beta * cos\,\beta\, x$$
$$= \alpha e^{\lambda x}(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x) + i\beta e^{\lambda x}(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x)$$
$$= e^{\lambda x}(cos\,\beta\, x + i\, sin\,\beta\, x)(\alpha + i\beta) = \lambda e^{\lambda x}$$

Можно показать, что производную любого порядка можно высчитывать по такому же правилу, как и в вещественном случае:

$$\frac{d^{ke^{\lambda x}}}{dx^k} = \lambda^{ke^{\lambda x}}$$

Теорема об общем решении в комплексном случае

Рассмотрим случай однородного уравнения с комплексными коэффициентами.

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n z = 0\ (\mathbf{5}),\ a_1, \dots, a_n \in C$$

Уравнение (**5**) имеет решение $z = e^{\lambda x}$, $\lambda \in C$, тогда и только тогда, когда число λ является решением характеристического уравнения

$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ (**6**)

Пусть уравнение (**6**) имеет только простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_i \neq \alpha_j$, $i \neq$ j, тогда выпишем для каждого корня соответствующее комплексное решение и общее решение можно записать в виде:

z $= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$ (**7**), где $c_1, \dots, c_n$ – произвольные комплексные постоянные.

Доказательство

Необходимо показать, что $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ – линейно независимы.

Составим определитель Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & a\lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & a\lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)x} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$

$\Rightarrow$линейно независима

Теорема об общем решении в вещественном случае

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n y = 0\ (\mathbf{8}),\ a_1, \ldots, a_n \in R$$

$$\lambda^n + a_1 \lambda n - 1 + \cdots a_n = 0\ (\mathbf{9})$$

Уравнение с вещественными коэффициентами обладает следующим свойством:

Если оно имеет комплексный корень $\alpha + i\beta$, то оно имеет и сопряжённый корень $\alpha - i\beta$. Уравнение (**9**) имеет только простые корни, выпишем:

$\lambda_1, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{2k-1}, \lambda_{2k} = \overline{\lambda_{2k-1}}$ (k-пар)

$\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$ – вещественные корни, тогда общее комплексное решение уравнения (**8**) имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_2 e^{\lambda_{2k} x} + c_2 e^{\lambda_{2k+1} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Теорема Пусть характеристическое уравнение (**9**) имеет только простые характеристические корни. Тогда общее вещественное решение однородного уравнения (**8**) с вещественными коэффициентами имеет следующий вид:

$y = a_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + b_1 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + \cdots + a_k e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x + b_k e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x + c_{k+1} e^{\alpha_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{\alpha_n x}$ (**11**)