Дифференциальные уравнения первого порядка

Вопросы:

1) Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
2) Однородное уравнение
3) Уравнение в полных дифференциалах

Говорят, что уравнение дифференциально интегрируемо, если его общее решение или общий интеграл можно записать с помощью элементарных функций и операцией интегрирования над ними. $(exp, sin, cos\ )$

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Предположим, что есть уравнение вида $y' = f(x)$ (**1**), в котором функция $f(x)$ определена непрерывно на некотором промежутке

$$\alpha < x < \beta \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$y' = \frac{\delta y}{\delta x} \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = f(x) \qquad dy = f(x)dx \quad \int dy = \int f(x)dx$$

$$\text{y} = \int f(x)dx + \text{C} \ (\mathbf{2}) \leftarrow \text{Общее решение}$$

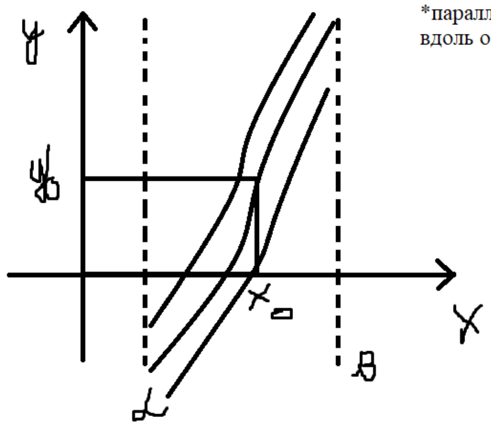
$$y = \int_{x_0}^{x} f(s)ds + C \ (\mathbf{3})$$

Предположим, что к уравнению (**1**) поставили начальное условие

$$(x_0) = y_0.$$

Воспользуемся формулой (**3**)

$$y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \ (\mathbf{4})$$



*параллельный перенос вдоль оси игриков

$$dy = f(x)dx \qquad \int dy = \int f(x)dx$$

Предположим, что дифференциальное уравнение имеет вид $y' = g(y)$ (**5**).

Функция $g(y)$ определима и непрерывна на $\alpha < x < \beta(-\infty < x < +\infty)$

Предположим, что $g(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \quad \frac{dy}{g(y)} = dx \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx \qquad x = \int \frac{dy}{g(y)} + C \ (\mathbf{6})$$

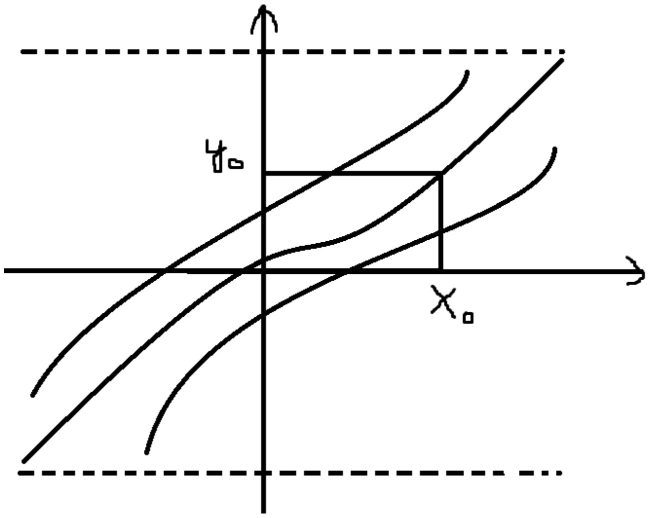
Формула (**6**) определяет общий интеграл для уравнения (**5**).

Предположим, что поставлено начальное условие $y(x_0) = y_0$.

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} + C \quad x_0 = \int_{y_0}^{y_0} \frac{ds}{g(s)} + C \qquad C = x_0$$

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} + x_0 \ (\mathbf{7})$$

Формула (**7**) задаёт частный интеграл для уравнения (**5**).



Предположим, $g(y) = 0$.

Предположим, что уравнение имеет решение $y = y_0$. Необходимо проверить, удовлетворяет оно уравнению (**5**) или нет.

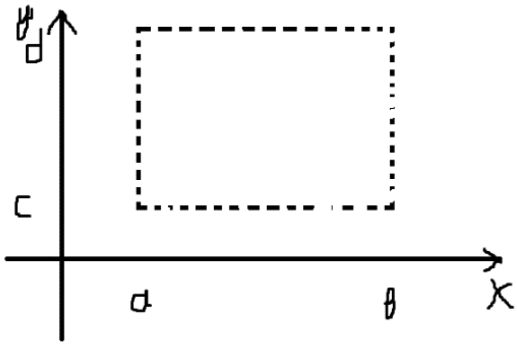
Предположим, что уравнение имеет вид $y' = f(x) * g(y)$ (**8**).

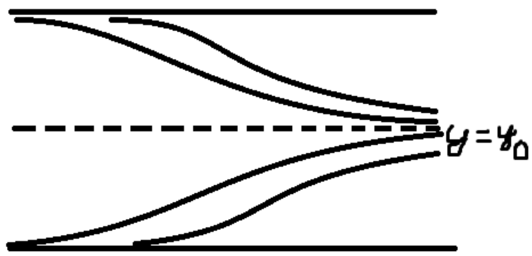
Функция $g(y)$ определена и непрерывна на промежутке

$$c < y < d(a < x < b) \ g(y) \neq 0$$

$$\frac{dy}{\mathrm{d}x} = f(x) * g(y) \qquad \frac{dy}{\mathrm{g(y)}} = f(x)dx \qquad \int \frac{dy}{\mathrm{g(y)}} = \int f(x)dx + C \ \mathbf{(9)}$$

Предположим, что $g(y) = 0, y = y_0$





Однородное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

Определение Функция $f(x, y)$ называется однородной, если она обладает одним из следующий свойств (**10**):

1) $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$

2) $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y)$

Если правая часть д/у является однородной функцией, то уравнение тоже называется однородным.

Сделаем некоторые преобразования.

$$f(x, y) = f\left(x * 1, x * \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Сделаем замену переменной.

$$\frac{y}{x} = u \quad (11) \qquad u = u(x) \quad y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \; y = u * x \quad y' = u' * x + u$$

$$u' * x + u = g(u) \qquad u' = \frac{g(u) - u}{x} \qquad \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C = ln|x| + C = ln|x| + lnC = ln|cx| \;\; \mathbf{(12)}$$

Формула (**12**) задаёт общий интеграл для однородного уравнения, если сделать обратную замну для формулы (**11**).

Рассмотрим отдельный случай, когда $g(u) - u = 0 \to g(u) = u$

Пусть $u = u_0$ – решение уравнения $g(u_0) = u_0$ (**13**)

В этом случае u_0 называется неподвижной точкой функции g.

Уравнение в полных дифференциалах

Любое уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ можно переписать в дифференциалах.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad dy = f(x, y)dx = 0$$

В более общем виде мы можем записать:

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0 \ \mathbf{(14)}$$

Уравнение (**14**) называется уравнением в полным дифференциалах, если существует функция $F(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируема по каждой переменной, такая, что, полный дифференциал этой функции совпадает с левой частью уравнения (**14**)

$$dF(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

$$dF(x, y) =^{def} \frac{\delta F(x,y)}{\delta x} * dx + \frac{\delta F(x,y)}{\delta y} * dy \ \rightarrow \begin{cases} \frac{\delta F(x,y)}{\delta x} = A(x, y) \\ \frac{\delta F(x,y)}{\delta y} = B(x, y) \end{cases} \mathbf{(15)}$$

$$dF(x, y) = 0 \qquad dF(x, y) = C \ \mathbf{(16)} \leftarrow \text{Задаёт общий интеграл}$$

Теорема (Шварца) Пусть функция $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда, для того чтобы уравнение (1**4**) было уравнением полных дифференциалов тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство: $\frac{\delta A(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta B(x,y)}{\delta x}$ (**17**)

Доказательство:

Необходимость: Пусть уравнение (**14**) – уравнение в полных дифференциалах. Покажем (**17**):

$$\frac{\delta A(x, y)}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F(x, y)}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta y \delta x}$$

$$\frac{\delta B(x, y)}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F(x, y)}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta y \delta x}$$

Поскольку функция $F(x, y)$ дважды непрерывна дифференцируема по каждой переменной, то вторые смешанные производные совпадают.

Ч.т.д.

Предположим, что уравнение $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$ не является уравнением полных дифференциалов.

Определение Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем для уравнения (**18**), если уравнение $\mu(x, y)A(x, y)dx + \mu(x, y)B(x, y)dy = 0$ (**19**) является уравнением в полных дифференциалах.