Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Вопросы:

1) Квазимногочлен и его свойства
2) Нерезонансный случай
3) Резонансный случай

Квазимногочлен и его свойства

Определение Квазимногочленом называется функция $f(x) = e^{\mu_1 x}p_1(x) + e^{\mu_2 x}p_2(x) + \cdots + e^{\mu_m x}p_m(x)$ (**1**), в котором $\mu_1, \dots, \mu_m \in C; p_1(x), \dots p_m(x)$ – многочлен с комплексными коэффициентами.

Если числа μ попарно различны, то число m – порядок квазимногочлена.

Над квазимногочленами можно осуществлять следующие операции: складывать, умножать, умножать на число, дифференцировать.

Утверждение Квазимногочлен (**1**) $f(x) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю ($p_1(x) = 0, \dots p_m(x) = 0$)

Доказательство

Будем доказывать утверждение методом математической индукции по порядку квазимногочлена.

1. m=1 $f(x) = e^{\mu_1 x}p_1(x) \equiv 0 | : e^{\mu_1 x} \neq 0 \Rightarrow p_1(x) = 0;$
2. Будем считать, что утверждение справедливо для любого квазимногочлена до $m-1$ порядка включительно $\mu_i \neq \mu_j$
3. Докажем для порядка m:

$$e^{\mu_1 x}p_1(x) + e^{\mu_2 x}p_2(x) + \cdots + e^{\mu_m x}p_m(x) \equiv 0 | : e^{\mu_m x} \neq 0$$

$$e^{(\mu_1-\mu_m)x}p_1(x) + e^{(\mu_2-\mu_m)x}p_2(x) + \cdots + p_m(x) \equiv 0$$

Будем считать, что степень многочлена $p_m : \deg p_m(x) = r_m$

Продифференцируем последнее соотношение $r_m + 1$ раз.

$$p = \frac{d}{dx} \quad L(p) = p^{r_m+1} \qquad L(x) = x^{r_m+1}$$

$$p^{r_m+1}\left(e^{(\mu_1-\mu_m)x}p_1(x) + e^{(\mu_2-\mu_m)x}p_2(x) + \cdots + e^{(\mu_{m-1}-\mu_m)x}p_{m-1}(x)\right) = 0$$

$$p^{r_m+1}\left(e^{(\mu_1-\mu_m)x}p_1(x)\right)+\cdots+p^{r_m+1}\left(e^{(\mu_{m-1}-\mu_m)x}p_{m-1}(x)\right)=0$$

Воспользуемся: $L(p)\left(e^{\lambda x}f(x)\right)=e^{\lambda x}L(p+\lambda)f(x)$

$$e^{(\mu_1-\mu_m)x}\big(p+(\mu_1-\mu_m)\big)^{r_m+1}p_1(x)+\cdots\\+e^{(\mu_{m-1}-\mu_m)x}\big(p+(\mu_{m-1}-\mu_m)\big)^{r_m+1}p_{m-1}(x)=0$$

Введём обозначения:

$q_j(x)=\Big(p+\big(\mu_j-\mu_m\big)\Big)^{r_m+1}p_j(x), j=1,\dots,m-1$ (**2**)
оператор $p+\big(\mu_j-\mu_m\big)$ сохраняет степень многочлена ⇒
$\Big(p+\big(\mu_j-\mu_m\big)\Big)^{r_m+1}$ тоже сохраняет эту степень

$$e^{(\mu_1-\mu_m)x}q_1(x)+\cdots+e^{(\mu_{m-1}-\mu_m)x}q_{m-1}(x)=0$$

Получаем многочлен на степень меньше, для которых предположение верно, следовательно, утверждение доказано.

Ч.т.д.

Нерезонансный случай

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $L(p)z = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z = f(x)$ (**3**)

Пусть $f(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_m f_m(x)$ (**4**)

Пусть $z_j(x)$ является решением уравнения $L(p)z_j = f_j(x), j = \overline{1,m}$ (**5**)

Если взять новую функцию как сумму $z = b_1 z_1 + \dots + b_m z_m$ – будет решением (**3**) с правой частью (**4**)

$$L(p)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j z_j\right) = \sum_{j=1}^{m} L(p) b_j z_j = \sum_{j=1}^{m} b_j L(p) z_j = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(x)$$

Пусть функция $f(x) = e^{\mu x} p(x)$ (**6**)

Теорема (нерезонансный случай) Предположим, что число μ не является корнем характеристического уравнения, составленного по однородному уравнению соответствующему уравнению (**3**) $L(\mu) \neq 0$. Тогда частное решение уравнения (**3**) с правой частью вида (**6**) можно записать в виде $z = e^{\mu x} * q(x)$ (**7**), где $q(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами, число μ такое же как в (**6**) и степень многочлена q совпадает со степенью p. Для того, чтобы найти коэффициента многочлена $q(x)$ необходимо подставить (**7**) в уравнение (**3**) и приравнять коэффициенты при подобных членах (слева, справа). В результате получится система линейных алгебраических уравнений, которая всегда имеет единственное решение.

Доказательство

$$L(p)\big(e^{\mu x} q(x)\big) = e^{\mu x} p(x)$$

Воспользуемся формулой смещения

$$e^{\mu x} L(p+\mu) q(x) = e^{\mu x} p(x) | : e^{\mu x} \neq 0$$

$$L(p+\mu) q(x) = p(x)$$

Введём обозначение: $N(p) = L(p+\mu)$

$$N(p) q(x) = p(x) \qquad N(0) = L(\mu) \neq 0$$

Заметим, что отображение $N(p)$ сохраняет степень многочлена

$$\underset{r_m}{N(0)q(x)} \overset{?}{=} \underset{r_m}{p(x)} \qquad p(x) = p_r x^{r_m} + \cdots \qquad q(x) = q_r x^{r_m} = \cdots$$

$$N(0)(q_r x^{r_m} + \cdots) = p_r x^{r_m} + \cdots \qquad N(0) q_r = p_r \Rightarrow q_r = \frac{p_r}{N(0)}$$

Остальные коэффициенты можно высчитать по такому же правилу.

Ч.т.д.

Резонансный случай

Теорема Пусть число μ является корнем характеристического уравнения, т.е. $L(\mu) = 0$, тогда дифференциальное уравнение (**3**) с правой частью вида (**6**) имеет единственное решение, представимое в виде $z = e^{\mu x}x^k q(x)$ (**8**), где k – кратность корня μ, $q(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами, причём степень $q(x)$ = степень $p(x)$. Для того, чтобы найти коэффициенты многочлена $q(x)$ необходимо подставить функцию (**8**) в уравнение (**3**) и приравнять коэффициенты при подобных слагаемых. Полученная система линейных алгебраических уравнений всегда имеет единственное решение.

Доказательство

Применим $L(p)$ к функции (**8**)

$$L(p)\left(e^{\mu x}x^k q(x)\right) = e^{\mu x}p(x)$$

$$e^{\mu x}L(p+\mu)\left(x^k q(x)\right) = e^{\mu x}p(x) | : e^{\mu x} \neq 0$$

$$L(p+\mu)\left(x^k q(x)\right) = p(x)$$

$$L(p+\mu) = M(p)(p-\mu)^k \qquad M(\mu) \neq 0$$

$$M(p+\mu) = N(p) \quad L(p+\mu) = N(p)p^k \quad N(0) = M(\mu) \neq 0$$

$$N(p)\overbrace{p^k\left(x^k q(x)\right)}^{p=\frac{d}{dx}} = p(x)$$

Пусть $\deg q(x) = r$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{r} q_j x^j \qquad x^k q(x) = x^k \sum_{j=0}^{r} q_j x^j = \sum_{j=0}^{r} q_j x^{k+j}$$

$$p^k\left(\sum_{j=0}^{r} q_j x^{k+j}\right) = \sum_{j=0}^{r} q_j\left(x^{k+j}p^k\right) = \sum_{j=0}^{r} q_j (j+k)*(j+k-1)*\ldots*(j)x^j$$

$\deg p(x) = r$

$$N(0)\sum_{j=0}^{r} q_j (j+k)*(j+k-1)*\ldots*(j)x^j = \sum_{j=0}^{r} p_j x^j$$

Многочлены равны между собой только тогда, когда совпадают коэффициенты при одинаковых степенях

$$q_j = \frac{p_j}{N(0)(j+k) * (j+k-1) * \ldots * (j)} \, (\mathbf{9}), j = \overline{0, r}$$

Ч.т.д.