Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами

Вопросы:

1) Нелокальная теорема существования и единственности решения начальной задачи
2) Теорема об общем решении
3) Метод Лагранжа вариации производных постоянных

Нелокальная теорема существования и единственности решения начальной задачи

Определение Уравнение вида $y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$ (**1**) называется линейным неоднородным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами.

Функции $a_i(x), f(x)$ определены в некотором прошлом $(\alpha, \beta), \alpha < x < \beta(-\infty < x < \infty)$

Общее решение такого уравнения будет содержать n произвольных постоянных. Для того, чтобы выделить одно решение, необходимо поставить n штук начальных условий. Для этого возьмём точку $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и поставим условия:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ y''(x_0) &= y_0'' \quad \textbf{(2)} \\ &\dots \\ y^{n-1}(x_0) &= y_0^{n-1} \end{aligned}$$

(**1**), (**2**) – начальная задача или задача Коши.

Теорема Если функции $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$ непрерывны на (α, β), то решение начальной задачи (**1**)(**2**) существует единственно и его можно считать определяемым на промежутке (α, β).

Свойства решений уравнения (*1*)

1) Если функция y(x) – решение однородного уравнения $y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = 0$ соответствует уравнению (**1**), а функция $z(x)$ – решение неоднородного уравнения, то их сумма $y(x) + z(x)$ – решение неоднородного уравнения;
2) Если функции $z(x), w(x)$ – решение неоднородного уравнения (**1**), то их разность $z(x) - w(x)$ – решение соответствующего однородного уравнения.

Теорема об общем решении

Пусть функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ (**3**) образуют фундаментальную систему решений для однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (**1**). Пусть функции $z(x)$ некоторое частное решение неоднородного уравнения.

Теорема Общее решение неоднородного уравнения представимо в виде: $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + z(x)$ (**4**), где $c_1, \dots, c_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство:

1) Покажем, что выражение (**4**) при любом выборе констант $c_1, \dots, c_n$ задаёт решение неоднородного уравнения.

   Поскольку функции (**3**) задают фундаментальную систему решений однородного уравнения, то их линейная комбинация – это решение однородного уравнения: $c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$

   По **1)** сумма однородного и неоднородного уравнения – это снова решение неоднородного уравнения.

2) Выберем произвольное решение $w(x)$ неоднородного уравнения (**1**) и покажем, что оно представимо в виде (**4**).

   Составим разность двух решений $w(x) - z(x)$.

   По (**2**) она является решение однородного уравнения.

   Тогда эта функция представима в виде:

$$w(x) - z(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

$$\mathrm{w}(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + z(x)$$

Ч.т.д

Метод Лагранжа вариации производных постоянных

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (**1**) можно применять метод Лагранжа вариаций произвольных постоянных.

Для этого необходимо сначала найти фундаментальную систему решений для однородного уравнения, соответствующую уравнению (**1**), и составить общее решение: $y = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$

Затем произвольные постоянные заменяют на дифференцируемые функции:

$$y = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \ (\mathbf{5})$$

Найдём частное решение. Подставим функцию (**5**) в уравнение (**1**):

$$\begin{array}{r|c}
a_n(x) & y' = c_1(x)y_1'(x) + c_1'(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x) + c_n'(x)y_n(x) \\
a_{n-1}(x) & y'' = c_1(x)y_1''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + .. + c_n'(x)y_n'(x) \\
\ldots & \ldots \\
 & y^{n-1} = c_1(x)y_1^n(x) + \cdots \\
1 & y^{=} c_1(x)y_1^n(x) + \cdots
\end{array}$$

$$0 = c_1(x)(y_1^n + \cdots) + c_2(x)(y_2^n \ldots) + \cdots + c_n(x)(y_n^n + \cdots) + \cdots$$

$$\begin{cases}
c_1'(x)y_1 + \cdots c_n'(x)y_n = 0 \\
c_1'(x)y_1' + \cdots + c_n'(x)y_n' \\
\ldots \\
c_1'(x)y_1^{n-2} + c_n'(x)y_n^{n-2} = 0 \\
c_1'(x)y_1^{n-1} + c_n'(x)y_n^{n-1} = f(x)
\end{cases} \quad (\mathbf{6})$$

Определителями системы (**6**) является определитель Вронского, составленный по фундаментальную систему решений однородного уравнения, поэтому он никогда в ноль <u>не</u> обращается.

Будем искать решения этой системы методом Крамера:

$$c_i' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & 0 & \ldots & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1} & \ldots & f(x) & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_i & \ldots & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1} & \ldots & y_i^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{W_i}{W(x)} * f(x), i = \overline{1,n} \ (\mathbf{7})$$

Проинтегрируем (**7**) по промежутку $(x_0; x)$:

$$c_i(x) = c_i + \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} ds\, , i = \overline{1,n} \ (\mathbf{8})$$

Подставим функции (**8**) в представление (**5**):

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds \right) y_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{W_i(s)}{W(s)} y_i(x) \right) f(s) ds \quad (\mathbf{9})$$

Введём обозначение $k(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i(s)}{W(s)} y_i(x)$ $(\mathbf{10})$ → функция Коши

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + \int_{x_0}^{x} k(x,s) f(s) ds \quad (\mathbf{11})$$

Свойства функции Коши

1) При любом фиксированном $s \in (\alpha, \beta)$ функция переменной x является решением однородного уравнения;
2) При $\forall s \in (\alpha, \beta)$ функция Коши имеет производные до $(n-1)$ порядка включительно. При этом имеет место равенство:

При x=s:

$$k(s,s) = 0$$

$$\left.\frac{\delta k}{\delta x}\right|_{x=s} = 0$$

$$\left.\frac{\delta^{n-2} k}{\delta x^{n-2}}\right|_{x=s} = 0$$

$$\left|\frac{\delta^{n-1} k}{\delta x^{n-1}}\right|_{x=s} = 1$$