シンプレックス法を用いた線形計画法

2016年1月20日(水)

プロコン塾
制御情報工学科4年　樫福智哉

線形計画法とは？

「一次不等式の制約条件の下で、
一次式を最大（最小）にする技法」

一次式 ＝ 直線 ＝ 線形(リニア)

線形数学を利用した計画法を「線形計画法」

（制約条件や目的関数が一次式でないときは非線形計画法）

線形計画法であんなことこんなこと

ナップザック問題

多数の品物の容積と重量などの特性値と効果と、
それぞれの特性値の上限値が与えられたとき、
効果を最大にするには、どの品物を選べばよいかという問題

輸送問題

M個の供給地の供給可能量、N個の需要地の需要量、
各供給地と各需要地までの運賃を与えて、
総運賃を最小にする輸送割当をする問題です。

巡回セールスマン問題

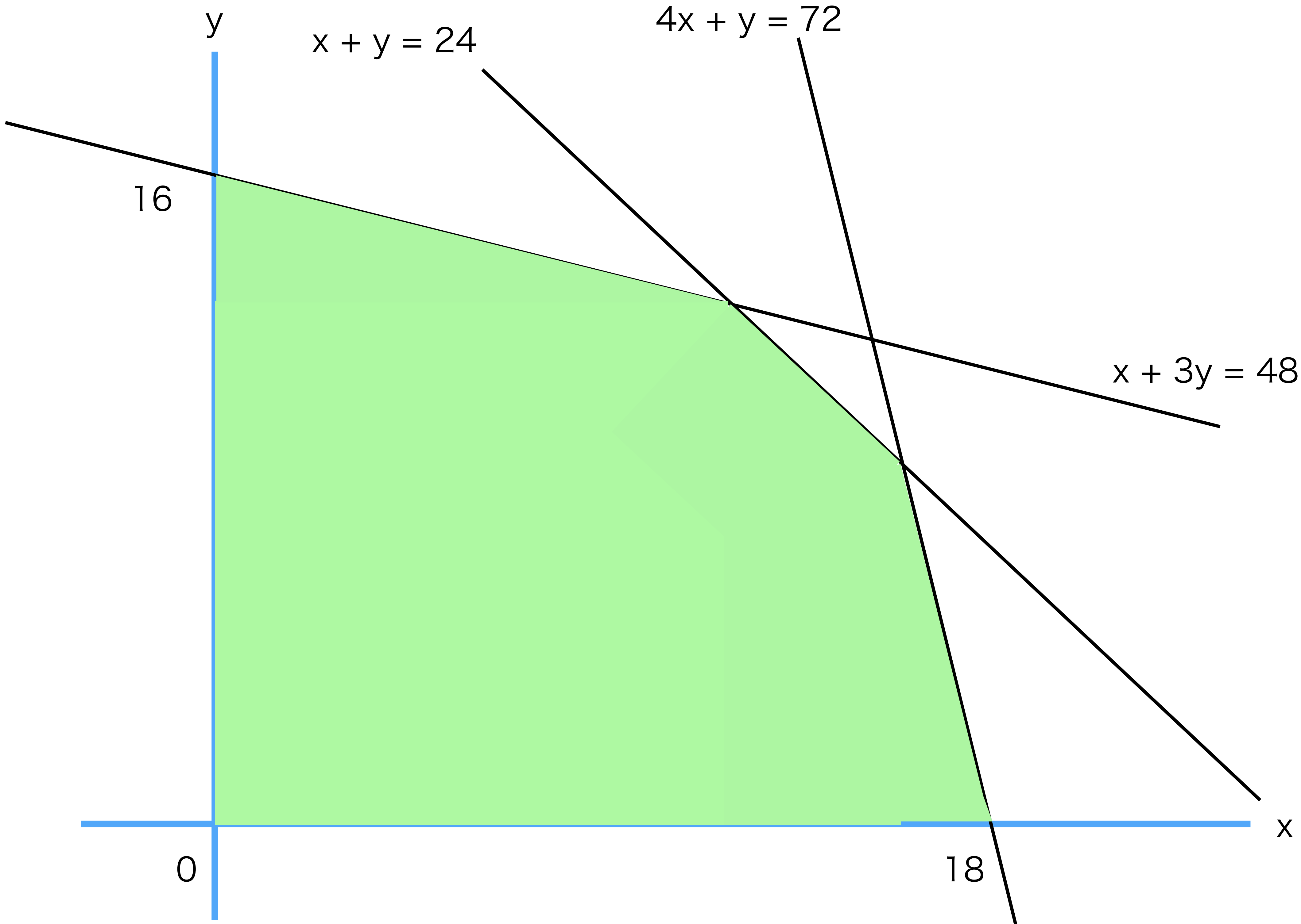
都市の集合と各2都市間の距離が与えられたとき、
全ての都市をちょうど一度ずつ巡り出発地に戻る
巡回路の総移動距離が最小のものを求める

2変数での線形計画

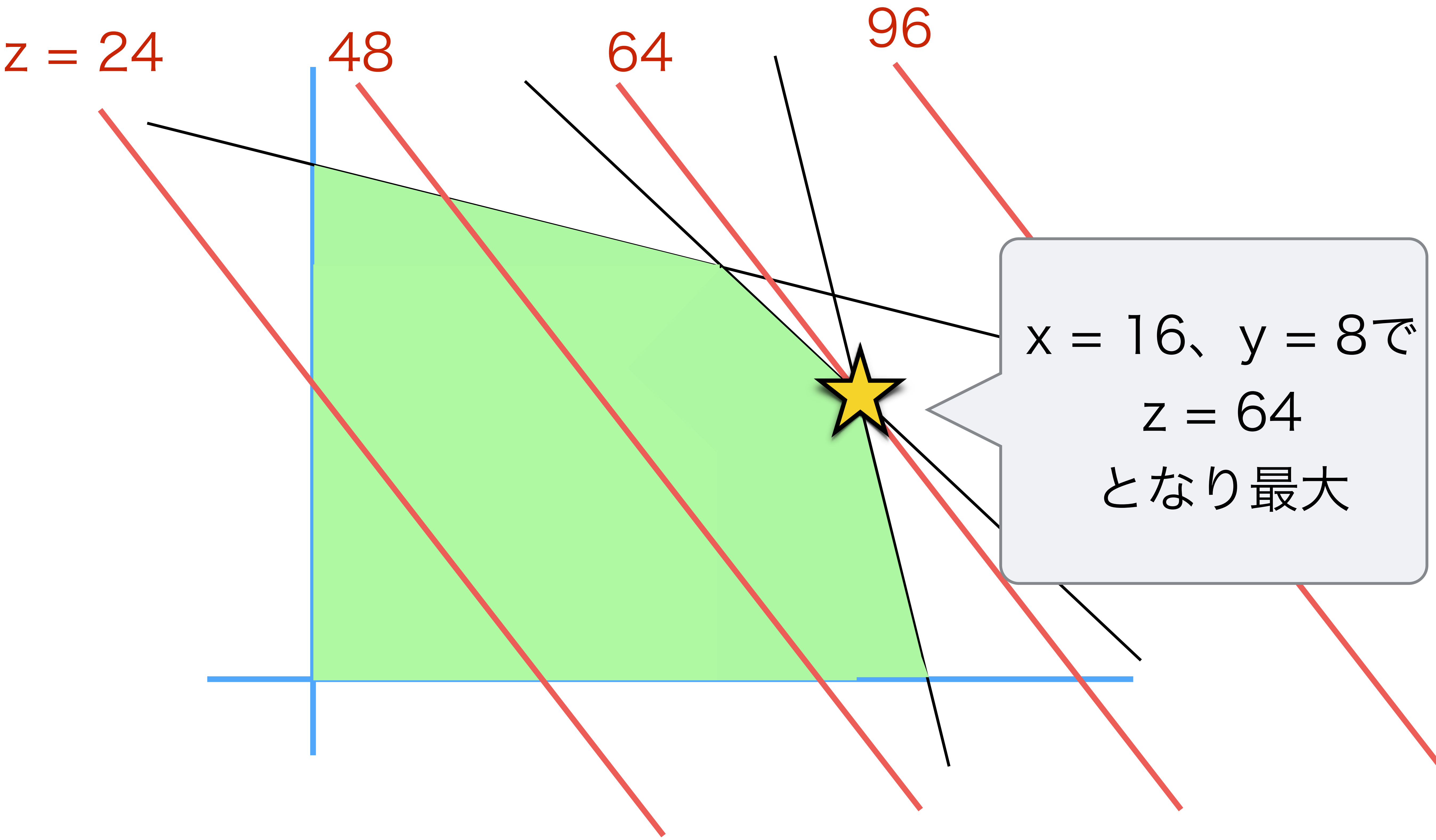
以下の条件で、$z = 3x + 2y$ の最大値を求めなさい

- $4x + y \leq 72$
- $x + y \leq 24$
- $x + 3y \leq 48$
- $x, y \geq 0$

条件の範囲をグラフで示すとこんな感じ



z = 3x + 2yのグラフを



問題の式が線形であるため、
図形の各角を全て見ると答えがある

しかし、3次元以上では表示ができない
また、角の数が莫大になる

シンプレックス法を使用

シンプレックス法

1. 式の変形

- 与式を正規形に変形する（条件の数だけ変数を作る）
- 目的関数をzとする

pは 4x+y と 72 の差

- $4x + y \leq 72$
- $x + y \leq 24$
- $x + 3y \leq 48$
- $x, y \geq 0$
- $z = 3x + 2y$

→

- $4x + y + p = 72$
- $x + y + q = 24$
- $x + 3y + r = 48$
- $x, y, p, q, r \geq 0$
- $z - 3x - 2y = 0$

シンプレックス法

2. シンプレックス表の作成

- $4x + y + p = 72$
- $x + y + q = 24$
- $x + 3y + r = 48$
- $z - 3x - 2y = 0$

の係数行列

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項	定数項 列要素
	0	4	1	1	0	0	72	
	0	1	1	0	1	0	24	
	0	1	3	0	0	1	48	
	1	-3	-2	0	0	0	0	

x = y = 0のとき簡単に解が見つかるので、
その他(p, q, r)と目的変数zを基底変数とする

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項	定数項 列要素
p	0	4	1	1	0	0	72	
q	0	1	1	0	1	0	24	
r	0	1	3	0	0	1	48	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	

最下行の係数に負の最小値の列に注目（ここではx）

定数項をxで割ったときの最小を見つける

(ここでは1行目が18で最小)

1行目のxの値をピボット変数とし、

1行目を 「1行目/ピボット変数」で更新する（行列みたい）

この行を÷4

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項	定数項/列要素
p	0	4	1	1	0	0	72	72/4 = 18
q	0	1	1	0	1	0	24	24/1 = 24
r	0	1	3	0	0	1	48	48/1 = 48
z	1	-3	-2	0	0	0	0	

ピボット変数の行の基底変数を、
ピボット変数の列の変数で置き換える
xの全ての係数が0になるよう、緑の行を何倍かして加算

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項	**定数項** 列要素
x	0	1	1/4	1/4	0	0	18	
q	0	1	1	0	1	0	24	
r	0	1	3	0	0	1	48	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項
	0	1	1/4	1/4	0	0	18
Lq - Lx	0	1	1	0	1	0	24
Lr - Lx	0	1	3	0	0	1	48
Lz + 3Lx	1	-3	-2	0	0	0	0

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項
x	0	1	1/4	1/4	0	0	18
q	0	0	3/4	-1/4	1	0	6
r	0	0	11/4	-1/4	0	1	30
z	1	0	-5/4	3/4	0	0	54

最下行の係数の負の最小値（ここではy）

定数項をyで割ったときの最小を見つける

(ここでは2行目が8で最小)

2行目のyの値をピボット変数とし、

2行目を 「2行目/ピボット変数」で更新する

この行を÷(3/4)

基底変数	**z**	**x**	**y**	**p**	**q**	**r**	**定数項**	**定数項/列要素**
x	0	1	1/4	1/4	0	0	18	18/(1/4)=72
q	0	0	3/4	-1/4	1	0	6	6/(3/4)=8
r	0	0	11/4	-1/4	0	1	30	30/(11/4)=120/11
z	1	0	-5/4	3/4	0	0	54	

ピボット変数の行の基底変数を、
ピボット変数の列の変数で置き換える
yの全ての係数が0になるよう、緑の行を何倍かして加算

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項	定数項 列要素
x	0	1	1/4	1/4	0	0	18	
y	0	0	1	-1/3	4/3	0	8	
r	0	0	11/4	-1/4	0	1	30	
z	1	0	-5/4	3/4	0	0	54	

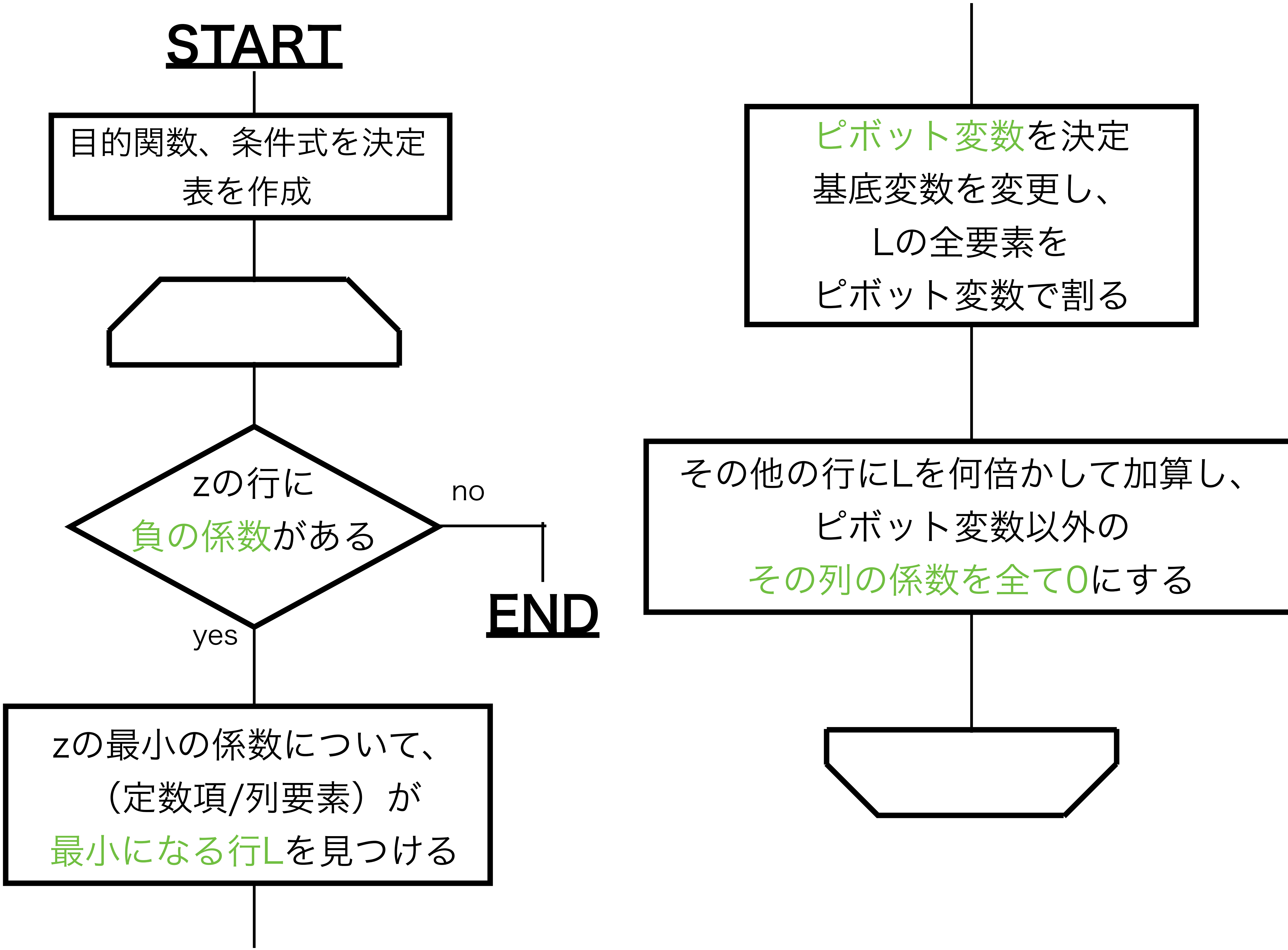
変数	z	x	y	p	q	r	定数項
Lx - (1/4)Ly	0	1	1/4	1/4	0	0	18
	0	0	1	-1/3	4/3	0	8
Lr - (11/4)Ly	0	0	11/4	-1/4	0	1	30
Lz + (5/4)Ly	1	0	-5/4	3/4	0	0	54

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項
x	0	1	0	1/3	-1/3	0	16
y	0	0	1	-1/3	4/3	0	8
r	0	0	0	2/3	-11/3	1	8
z	1	0	0	1/3	5/3	0	64

最下行に負の係数がなくなったのでおしまい

zの定数項「64」が最大値

基底変数	z	x	y	p	q	r	定数項	**定数項** **列要素**
x	0	1	0	1/3	-1/3	0	16	x = 16
y	0	0	1	-1/3	4/3	0	8	y = 8
r	0	0	0	2/3	-11/3	1	8	r = 8
z	1	0	0	1/3	5/3	0	64	p = q = 0


START
目的関数、条件式を決定
表を作成
zの行に
負の係数がある
no
END
yes
zの最小の係数について、
（定数項/列要素）が
最小になる行Lを見つける
ピボット変数を決定
基底変数を変更し、
Lの全要素を
ピボット変数で割る
その他の行にLを何倍かして加算し、
ピボット変数以外の
その列の係数を全て0にする

参考：その他の線形計画法を解くアルゴリズム

内点法

実行可能領域の内部を経由して、最適解に収束するのが特徴である。また、大規模問題に対しては計算効率が良い点や非線型問題にも対応できる点で、シンプレックス法よりも優れている。

http://ismrepo.ism.ac.jp/dspace/bitstream/10787/2064/1/TS40-1_005.pdf

カーマーカーのアルゴリズム

内点法の一種。美しい

http://qiita.com/neka-nat@github/items/c8586f0f1ea75e785564

例題1 (参考：http://mikilab.doshisha.ac.jp/dia/seminar/2002/pdf/opt03.pdf)

ある会社が，製品 A，B を売ろうとした．それらを製作するための原料を石油，鉄，パルプとする．それぞれ 1 個を製作するのに必要な材料の量を以下の表の通りとす。

	石油	鉄	パイプ	単価
A	1kg	1kg	3kg	2万円
B	2kg	1kg	1kg	1万円
手持ちの材料	14kg	8kg	18kg	

手持ちの材料の範囲内で売上高を最大にするためには，
A，B をそれぞれいくつ作ったらよいのか

A、Bをそれぞれa、b個ずつ作るとして、

- $a + 2b \leq 14$
- $a + b \leq 8$
- $3a + b \leq 18$

を満たし、2a + b が最大となる a、bの組み合わせ

目的関数をzとして正規化する

- $a + 2b + p = 14$
- $a + b + q = 8$
- $3a + b + r = 18$
- $z - 2a - b = 0$

とすると、a = 5、b = 3のとき売上高が最大13万円

例題2(参考：http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching/mp04/mp04-1.pdf)

オレンジ、にんじん、トマトを使って、オレンジジュース、トマトジュース、ミックスジュースを売ろうとした。それぞれ１個を作るのに必要な材料の量を以下の表の通りとする。

	オレンジ	にんじん	トマト	単価
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
手持ちの材料	8	2	9	

手持ちの材料の範囲内で売上高を最大にするためには,
各ジュースをそれぞれいくつ作ったらよいのか

オレンジ、トマト、ミックスをそれぞれa、b、c個ずつ作るとして、

- $5a + 3c \leq 8$
- $2c \leq 2$
- $4b + c \leq 9$

を満たし、$2a + 2b + 3c$が最大となる a、b、cの組み合わせ

目的関数をzとして正規化する

- $5a + 3c + p = 8$
- $2c + q = 2$
- $4b + c + r = 9$
- $z - 2a - 2b - 3c = 0$

とすると、$a = 1$、$b = 2$、$c = 1$のとき売上高が最大9