第八章

資料搜尋

Searching

本章內容

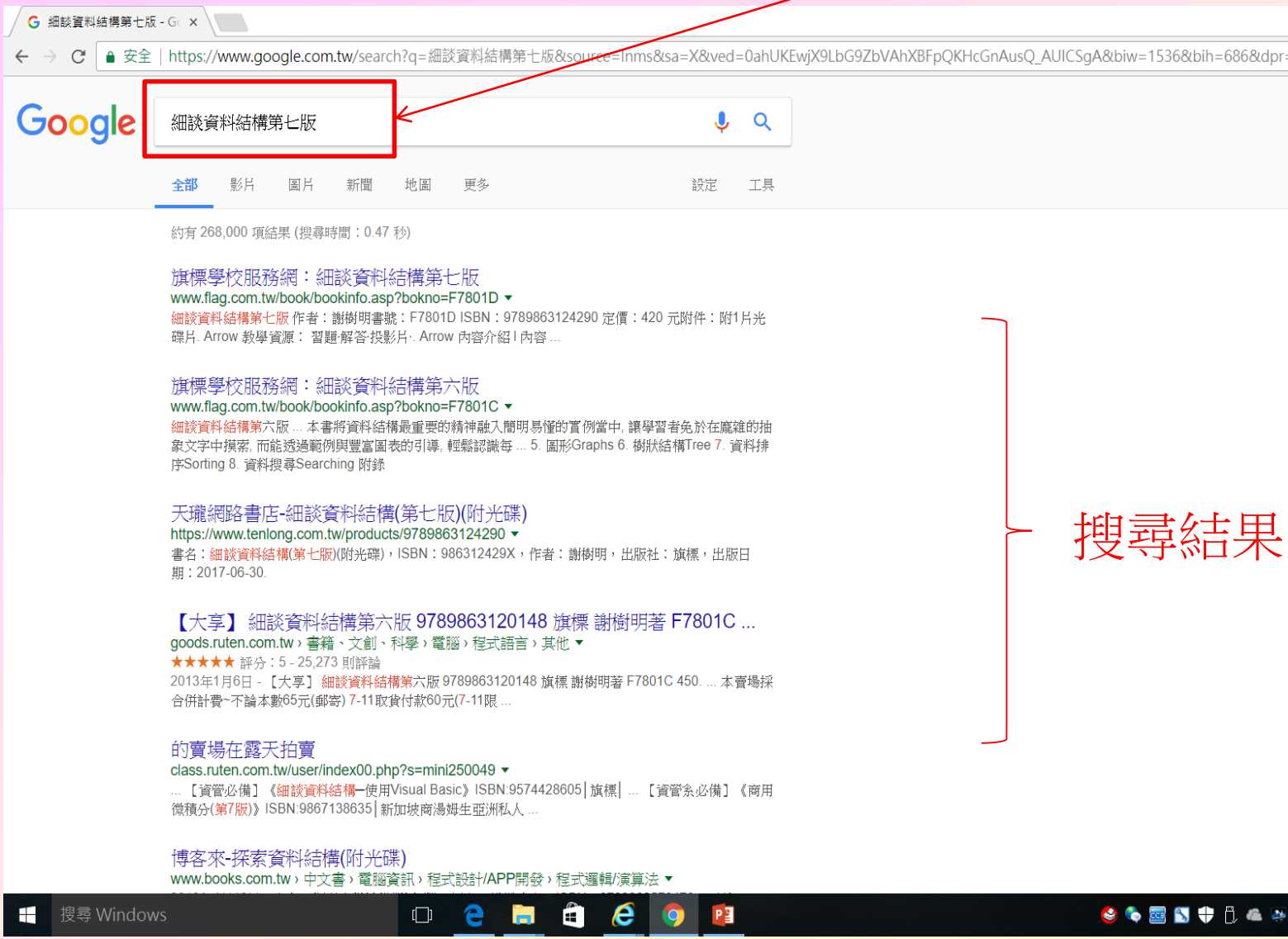
8-1 搜尋及定義

8-2 在循序結構上的搜尋
- 線性搜尋法
- 二分搜尋法
- 內插搜尋法

8-3 索引結構的搜尋
- 直接索引、二元搜尋樹索引、B樹索引

8-4 雜湊法
- 雜湊函數
- 解決碰撞的方法
- 可擴充雜湊

「搜尋引擎」(search engine)：根據使用者輸入的「關鍵字」(key words)當作搜尋鍵，藉助於事先整理好的索引結構，搜尋出與輸入關鍵字相關的網頁列表作為搜尋結果。



當眾多玩家使出看家本領，追分搶分灌分後，遊戲設計者如何按照分數將各家英雄好漢定出高下，以找出冠軍得主？

是的，答案是使用「**排序**」演算法。

排序被廣泛用在各種場合，例如：

1. 各種考試後的分發， 按照成績高低順序媒合志願
2. 使用 Excel 試算表時，按照選定的欄位將資料由小到大或由大到小排序。

8-1 搜尋及定義

※用某些欄位為依據來找出記錄，進而得到同一筆記錄的其他屬性，這個動作稱為**搜尋**（search），搜尋首要的考慮是速度。

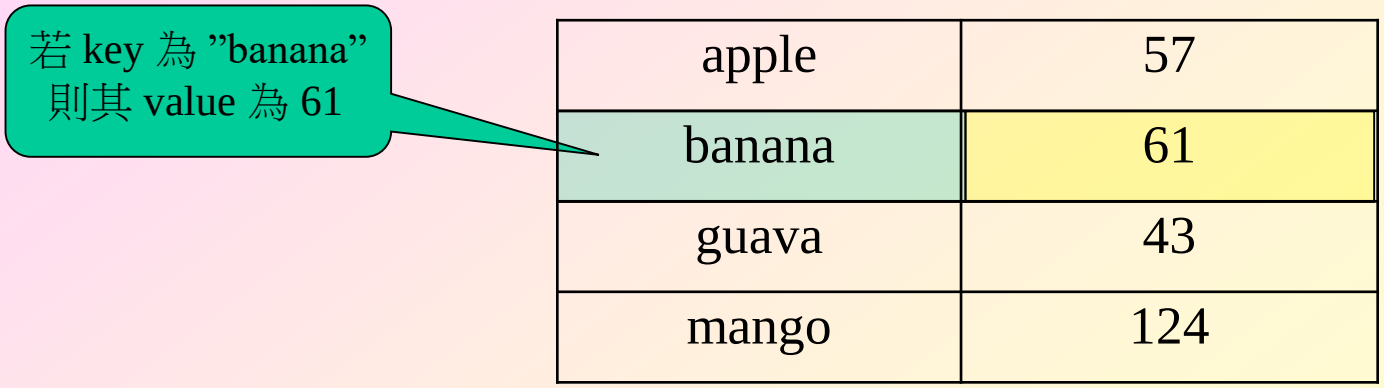
◎ 例如：我們可以在通訊錄**檔案**中，根據姓名來找出某一筆記錄，進而獲知其他屬性如年齡、電話、地址

根據搜尋鍵"**趙大**"找到第四筆記錄，得到他的電話、地址等欄位

記錄編號	姓名	年齡	電話	住址
1	張四	31	(02)2334----	台北市XXX
2	李五	16	(02)2999----	台北縣XXX
3	王六	25	(03)3444----	桃園縣XXX
4	趙大	41	(02)2887----	台北市XXX
5	陳文	53	(04)333----	台中市XXX
6	江水	28	(03)534----	新竹市XXX

◎ 在符號表(symbol table)上作搜尋，也是根據搜尋鍵來獲得此符號在符號表中的位置，進而得到此符號的其它屬性值，例如符號在記憶體中的位址，或符號的內含值等

「鍵—值配對」(key-value pairs)：根據 *key* 找出對應的 *value*



※整理檔案或符號表的方式基本上有兩種：

- 循序結構：一筆一筆記錄或一個一個符號循序排列下來，除此之外沒有其它輔助，循序結構又分為**沒有排序過**和有根據鍵欄**排序過**兩種。
- 索引結構：另外加上的輔助工具，用來協助搜尋，這些工具通稱為**索引**(index)。例如一本書除了課文(循序結構)之外，另外會有章節索引或關鍵字索引。利用索引可以比較有效率地找到記錄或符號所在的位置。索引結構有很多，例如二元搜尋樹索引、B樹、B+樹、以及雜湊表

※對檔案或符號表主要的處理動作包括：

- 排序。
- 插入新記錄或新符號。
- 刪除記錄或符號。
- 搜尋某特定記錄或符號是否存在。
- 取得該特定記錄或符號的其他屬性。

※如果一個檔案或符號表的資料儲存妥當之後，就不會再有插入及刪除的動作，則稱這個檔案或符號表是「**靜態**」(static)的結構。如果可能會有插入或刪除的動作，則它們屬於「**動態**」(dynamic)的結構。動態的結構除了和靜態的結構一樣重視搜尋的速度，它同時還要考慮**動態維護**（插入及刪除資料）的效率。

8-2 在循序結構上的搜尋

循序搜尋法

```
int Sequential_Search(int a[], int n, int key)
{   int i;
    for( i=0 ; i < n ; i++)
        if (a[i] == key)
            return(i);       /*成功傳回位置*/
    return(-1);              /*失敗傳回-1*/
}
```

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
39	81	6	78	69	41	52	33	55	77

key = 78：比較 4 次後成功 (39, 81, 6, 78)。

key = 68：比較 10 次後失敗 (全部)。

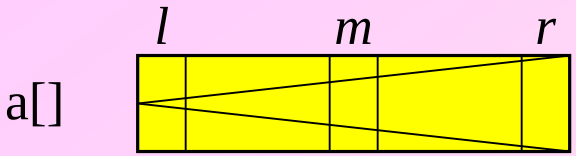
特性： 從第一個資料找起，直到找到為止，或是比對了所有資料都與 key 不相等而宣告失敗。

搜尋效率： O (*n*) 。

整理效率： 資料不需要整理。

應用場合： 通常應用在未經排序的資料。或是資料經常變動，以致不值得花代價排序的時候。

二分搜尋法



循序搜尋從頭比起，
二分搜尋比中間

由小到大排序好的資料

$m = (l + r)/ 2$

搜尋鍵 key 和 中間元素 a[m] ($m = (l + r)/ 2$)作比較，只有三種結果之一 :

1. key = a [m] : 那麼搜尋已經成功。
2. key > a [m] : 那麼如果在陣列中，只可能出現在右半部。(a[m+1] ~ a[r])
3. key < a [m] : 那麼如果在陣列中，只可能出現在左半部。(a[l] ~ a[m-1])

＊ 如果是 2. 或 3.，則搜尋範圍已經減半，我們再重複選取新範圍的中間元素做比較，直到搜尋成功

＊ 或是範圍內已經無法再二分為止，亦即搜尋失敗

```
1.      int Binary_Search(int a[], int n, int key)
2.      {       int  l = 0, r = n-1, m;
3.              while (l <= r)
4.              {       m = (l+r)/2;
5.                      if (key == a[m])
6.                              return(m);      //找到,傳回位置
7.                      if (key > a[m])         //右半部,改變左限
8.                              l = m+1;
9.                      else                    //左半部,改變右限
10.                             r = m-1;
11.             }
12.             return(-1);                     //失敗傳回-1
13.     }
```

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
6	33	39	41	52	55	69	77	78	81

key=41

第 i次比較	*l*	*r*	*m*	key與 a[*m*]	新範圍
1	0	9	4	41 < 52	左半部
2	0	3	1	41 > 33	右半部
3	2	3	2	41 > 39	右半部
4	3	3	3	41 = 41	成功

共作4次比較，搜尋成功

搜尋效率： O (lg *n*)

整理效率： 資料需要排序

應用場合： 通常應用在資料極少變動，亦即插入和刪除極少發生的情況。因此一次排序，就可以做多次的搜尋

補充：二分搜尋法搜尋效率

對n個鍵值作搜尋所需的時間

每作 1 次比較，就將問題的規模減半為$n/2$

$$T(n) \le T(n/2) + 1 , \ T(1)=1$$
$$\le (T(n/4) + 1) + 1 , \because T(n/2) \le T(n/4) + 1$$
$$\rightarrow T(n) \le T(n/2^2) + 2$$
$$\vdots$$
$$\rightarrow T(n) \le T(n/2^k) + k$$

當 $n \fallingdotseq 2^k$ ($\lg n \fallingdotseq k$) 時

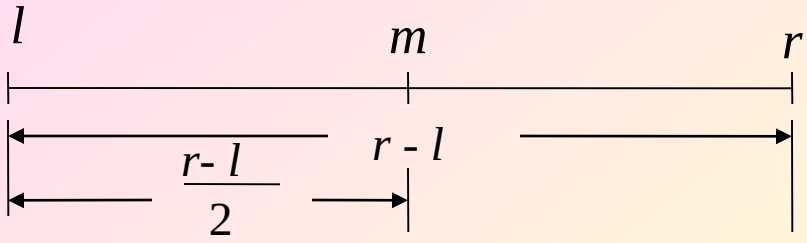
$$\rightarrow T(n) \le T(n/2^k) + k$$
$$\rightarrow T(n) \le T(1) + k$$
$$\le 1 + k$$
$$= 1 + \lg n$$

因此$T(n) = O(\lg n)$

內插搜尋法

◎二分搜尋法預測 m 值

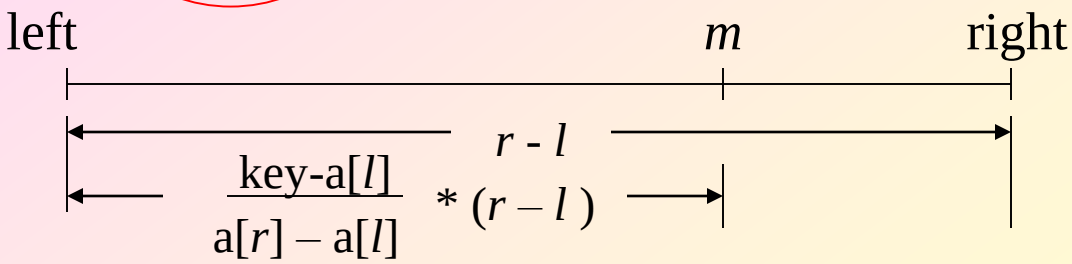
$$m = \frac{l+r}{2} = l + \frac{1}{2} * (r-l)$$



◎內插搜尋法預測 m 值

$$m = l + \frac{key - a[l]}{a[r] - a[l]} * (r-l)$$

由固定的1/2變成一個比例



◎除了預測 m 值的方法不同，其他都和二分搜尋法相同

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
6	33	39	41	52	55	69	77	78	81

key= 78

第i次比較	*l*	*r*	*m*	key與 a[m]	新範圍
1	0	9	$0+(\frac{78-6}{81-6})*9=8$	78 = 78	成功

共作 1 次比較，搜尋成功

搜尋效率： $O(\lg(\lg n))$

整理效率： 資料需要排序

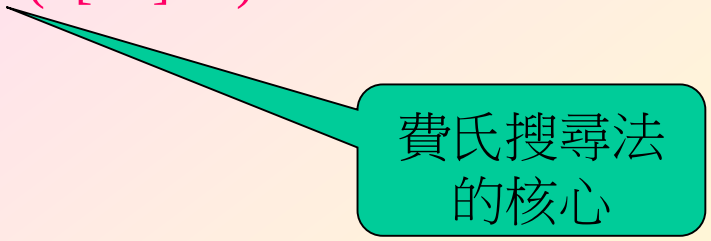
應用場合： 與二分搜尋法相同，但如果鍵值分佈極端不平均，則效率會變差

```
1.      int Inter_Search(int a[], int n, int key)
2.      {       int l = 0, r = n-1, m;
3.              float x;
4.              while (l <= r)
5.              {       if (a[r] − a[l] != 0)
6.                              x = (float) (key − a[l])/(a[r] − a[l]);
7.                      else
8.                              x = 0;
9.                      m = l + (int)(x * (r−l));
10.                     if (key == a[m])
11.                             return (m);             //找到,傳回位置
12.                     if (key > a[m])                 //右半部,改變左限
13.                             l = m + 1;
14.                     else                            //左半部,改變右限
15.                             r = m − 1;
16.             }
17.             return(-1);                                     //失敗傳回-1
18.     }
```

費氏搜尋法

- 費氏搜尋法的好處，是避免二分搜尋法及內插搜尋法計算搜尋目標時所必須作的**乘法及除法**。
- 費氏搜尋法仍然必須作用在已經排序好的資料，並且其搜尋效率也是 O(lg n)。

- 費氏數列的定義：F[0] = 0, F[1] = 1；F[i] = F[i-1] + F[i-2]，$i \geq 2$
  因此　F[i] – 1 = (F[i-1] – 1) + (F[i-2] –1) + 1



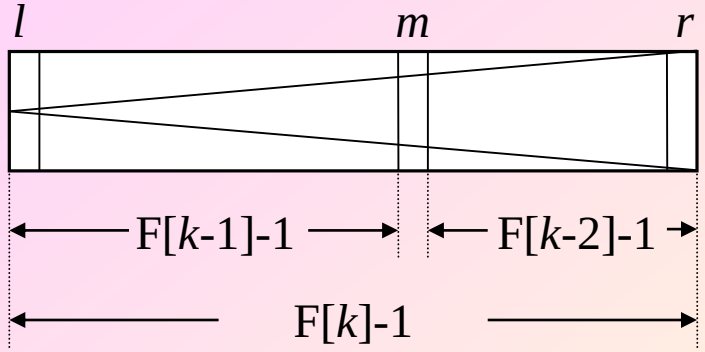
假設鍵值個數 n 為某個費氏數減 1（F[k] –1，否則只要在後面全部加上最大的鍵值作為虛擬鍵值，dummy key），並且整個搜尋範圍為$a[l] \sim a[r]$ ，

假設鍵值個數n為某個費氏數減1（F[k] –1），並且整個搜尋範圍為a[l] ~ a[r] ，選取a[m]（$m = l$ +F[k-1] – 1）與鍵值 (key) 作比較，比較只有三種結果：

$key = a[m]$：那麼搜尋已經成功。

$key < a[m]$：那麼新範圍是第 l 個到第 m-1個 ($a[l]$ 到$a[l$ +F[k-1] – 2]) ，
此範圍的個數為F[k-1] – 1個，仍為某個費氏數減 1

$key > a[m]$：那麼新範圍是第m+1個到第r個 ($a[l$ + F[k-1]] 到$a[r]$) ，
此範圍的個數為F[k-2] – 1個，仍為某個費氏數減 1



由小到大排序好的鍵值

$$F[k] - 1 = (F[k-1] - 1) + (F[k-2] - 1) + 1$$

費氏搜尋法的核心

這種搜尋法與二分搜尋法類似，都屬於「個個擊破法」。但是二分搜尋法的 m固定為中間位置，而費氏搜尋法則固定以**費氏數列**作分割。

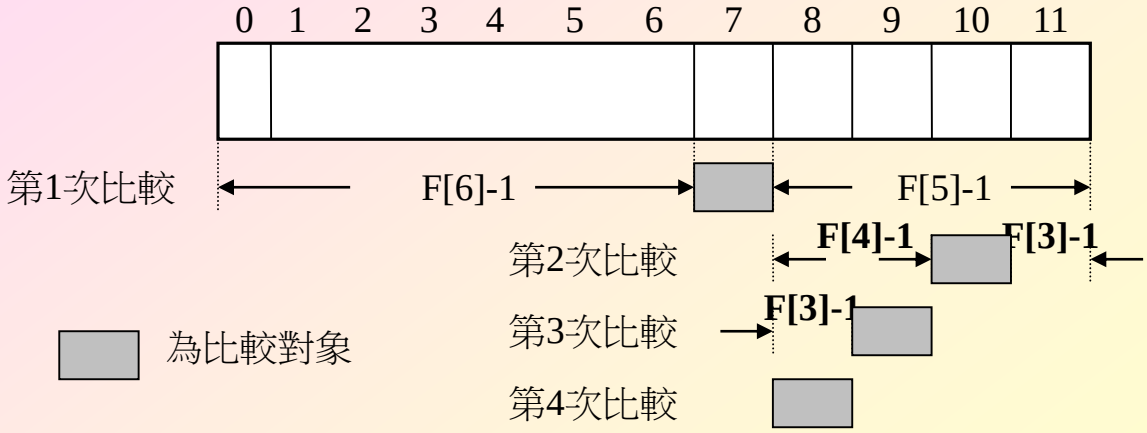
假設鍵值數目 *n* 為12 (= F[7]-1)

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
6	33	39	41	52	55	69	77	78	81	88	92

且假設搜尋鍵值 *key* = 78

第*i*次比較	*l*	*r*	*m*	*key*與 *a*[*m*]比較	新範圍
第1次比較	0	11	7(=0+F[6]-1)	78 > 77	右半部
第2次比較	8	11	10(=8+F[4]-1)	78 < 88	左半部
第3次比較	8	9	9(=8+F[3]-1)	78 < 81	左半部
第4次比較	8	8	8(=8+F[2]-1)	78 = 78	成功

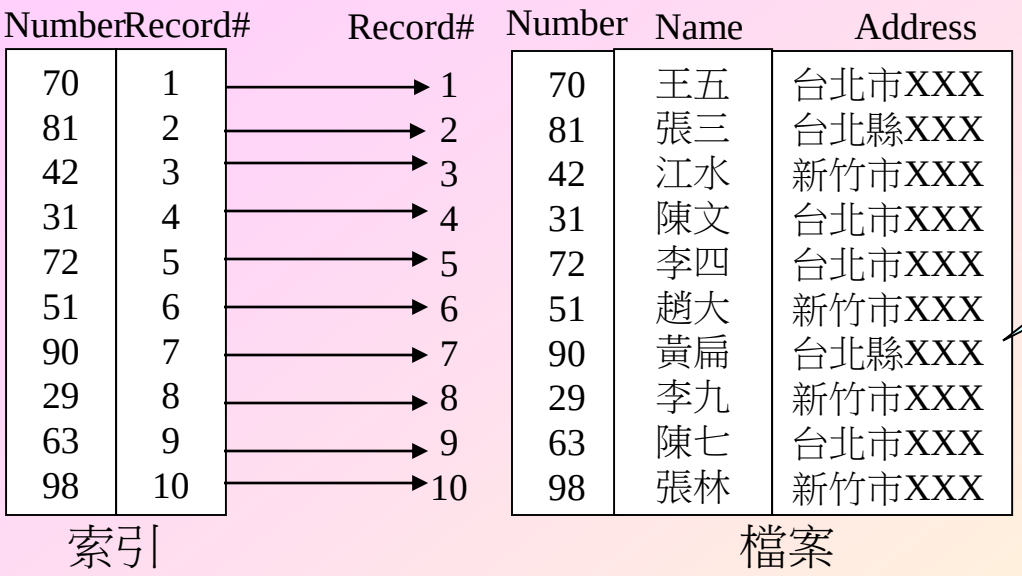
共作4次比較，搜尋成功
比較過程可以用下圖圖示：



8-3 索引結構的搜尋

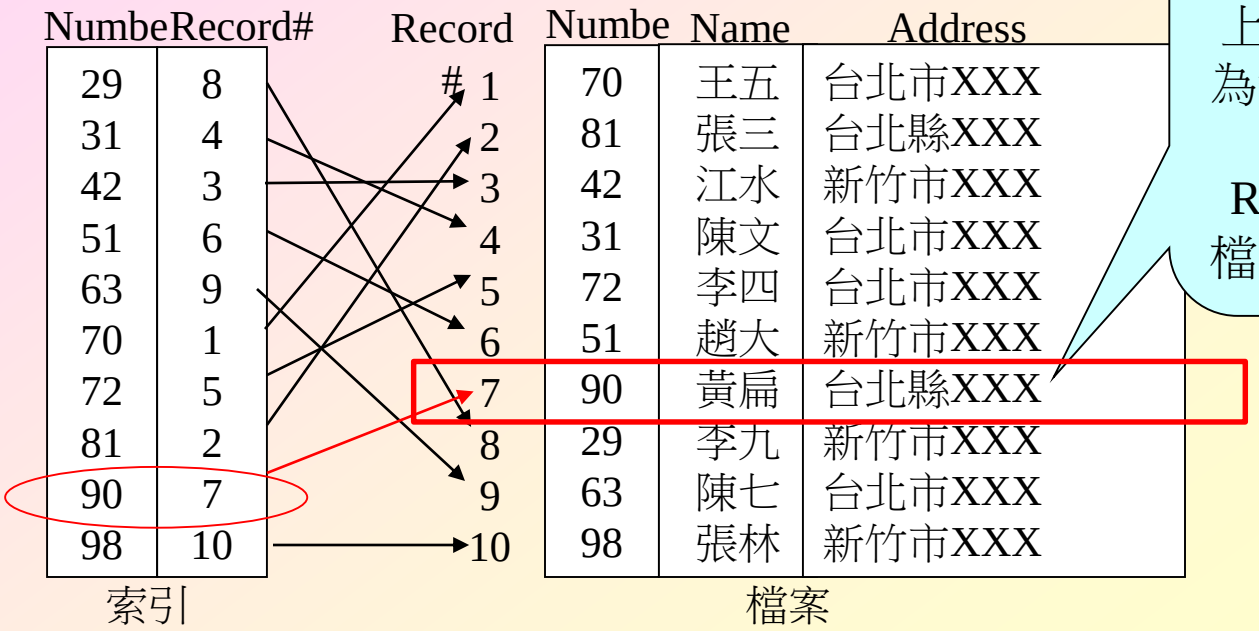
直接索引

使用Number的索引(未排序)



在未排序的直接索引上只能作循序搜尋

根據Number排序過的索引



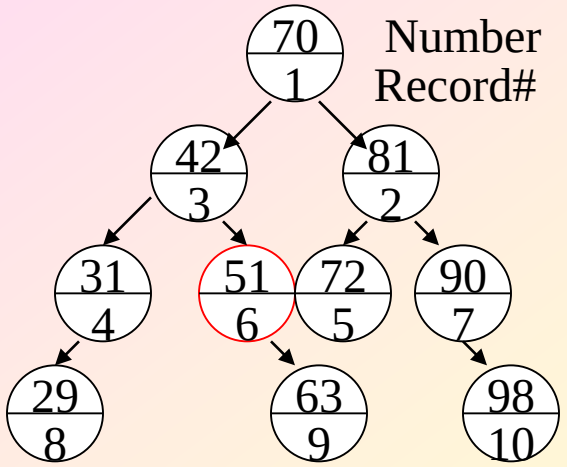
在已排序的索引上用Number 90為鍵值作二分搜尋，再根據Record# 7找到檔案中對應的記錄

二元搜尋樹的索引

檔案

Record#	Number	Name	Address
1	70	王五	台北市XXX
2	81	張三	台北縣XXX
3	42	江水	新竹市XXX
4	31	陳文	台北市XXX
5	72	李四	台北市XXX
6	51	趙大	新竹市XXX
7	90	黃扁	台北縣XXX
8	29	李九	新竹市XXX
9	63	陳七	台北市XXX
10	98	張林	新竹市XXX

索引



要搜尋鍵值為 51 的記錄，根據二元搜尋樹的搜尋法則，

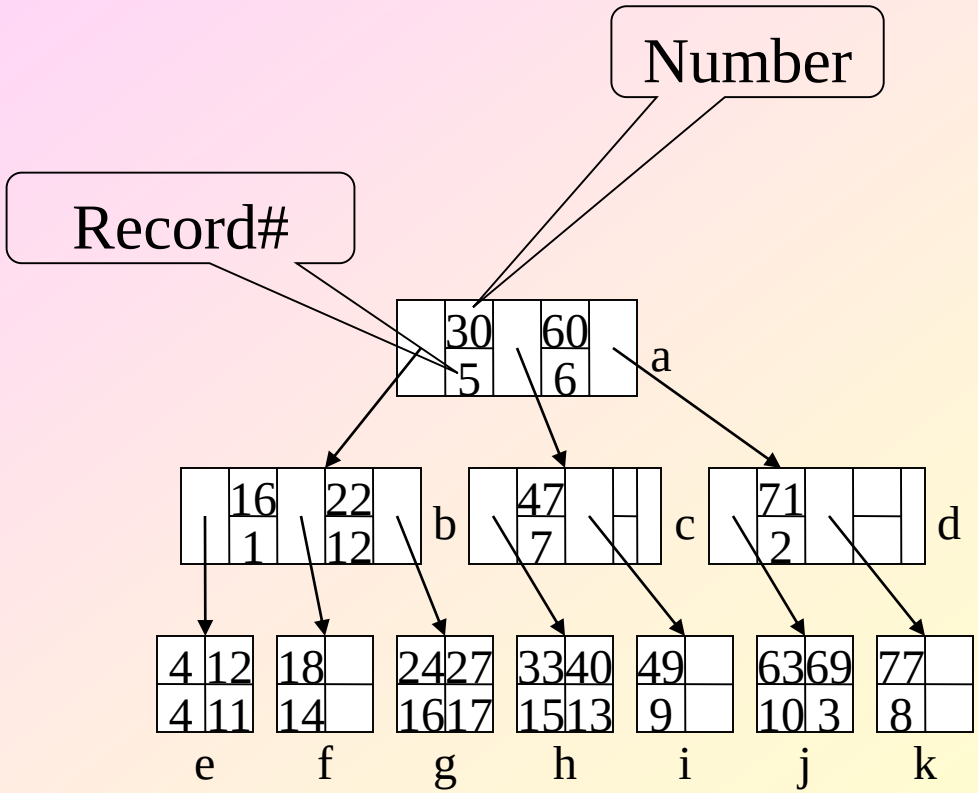
1. 比較 3 次可得到鍵值 51 的記錄在二元搜尋樹中的位置。
2. 再根據這個節點的Record# 屬性，得到鍵值 51 的記錄在檔案的第 6 筆，
3. 再到檔案中抓取第6筆紀錄即可

B樹的索引

檔案

Record#	Number	Name
1	16	王五
2	71	張三
3	69	江水
4	4	陳文
5	30	李四
6	60	趙大
7	47	黃扁
8	77	李九
9	49	陳七
10	63	張林
11	12	湯姆
12	22	捷克
13	40	約翰
14	18	西門
15	33	保羅
16	24	雅各
17	27	馬可

索引



1. 在B樹中作搜尋找到key(Number)的位置。
2. 再根據這個節點的Record# 屬性，得到此記錄在檔案的紀錄編號，
3. 再到檔案中抓取這筆紀錄即可

8-4 雜湊法 (Hashing)

位置 = *f* (鍵)

◎ 雜湊函數：把鍵轉換成位置的函數。因此理想狀況下效率為O(1)。

◎ 碰撞：把不同鍵轉換成同一位置的現象(現實狀況)

◎ 雜湊函數的設計考量：在 “減少碰撞” 和 “計算簡單” 之間作權衡

◎ 常見的雜湊函數設計方式：

★ 除法 (division method)

★ 平方去中法 (midsquare method)

★ 折疊法 (folding method)

★ 位數分析法 (digit analysis method)

★除法 (division method)

- 如果資料量大小（鍵值數目）為 *n*，我們可以取一個大於 *n* 的質數 *m*，而令　位置 = 鍵值 MOD *m*。
- 因此儲存資料的表格大小也必須為 *m*。
- 例如 *m* = 13，則鍵值為57的記錄將被放在表格的第5個位置（因為 57 MOD 13 = 5）。
- 為什麼表格大小必須為質數呢？原因在於如果 *m* 不是質數，鍵值 MOD *m* 得到的數值會較容易碰撞。

如果鍵值數目 *n* = 6，鍵值為57, 8, 62, 26, 77, 42，而表格大小 *m* = 13，則可以將這些鍵值雜湊為：

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
26			42		57			8		62		77

42 % 13 = 3

★平方取中法 (midsquare method)

我們可以將鍵值平方後，再取中間 *k* 位數當作位置。例如鍵值為5762，5762的平方為33200644，取任意3位數，如千百十3位數作為位置，得到064。如果鍵值為2642，2642的平方為6980164，獲得016。

★折疊法 (folding method)

如果鍵值的位數很多，我們可以將鍵值折成若干段，再相加之後MOD表格大小。例如 m = 101，而鍵值為381231596，將鍵值折成3段：381, 231, 596，再相加得到：

```
  381
  231
+ 596
------
 1208
```

MOD 101 = 97
因此得到位置為 97

折疊的方式很多，我們也可以將鍵值折成：38, 1231, 596，再相加得到：

```
   38
 1231
+ 596
------
 1865
```

MOD 101 = 47
因此得到位置為 47

另外相加的方法也很多，可以向左對齊、向右對齊，甚至可以翻轉過來：

```
   38
 1231
+596
-------
 10991
```

向左對齊

```
   83
 1321
+ 695
------
 2099
```

全部翻轉

★位數分析法 (digit analysis method)

位數分析法是分析所有已知鍵值每一個位數出現的分佈狀況，並且挑選分佈較為均勻的

百萬	十萬	萬	千	百	十	個
5	8	1	1	2	1	1
5	8	0	1	1	5	3
5	7	9	3	2	3	7
2	8	3	2	2	3	9
5	8	1	3	3	1	8
5	8	0	4	1	3	2
5	7	9	5	2	5	4
5	7	9	5	3	2	5

很明顯地百萬位數出現只有 2 和 5，十萬位數出現只有 7 和 8，而百位數只有 1 和 2 和 3。因此我們挑出其餘較為均勻的「萬、千、十、個」位數再 MOD 101。因此：

鍵值5811211 → 1111, 1111 MOD 101 = 0

鍵值5801153 → 0153, 0153 MOD 101 = 42

鍵值5793237 → 9337, 9337 MOD 101 = 45

解決碰撞的方法

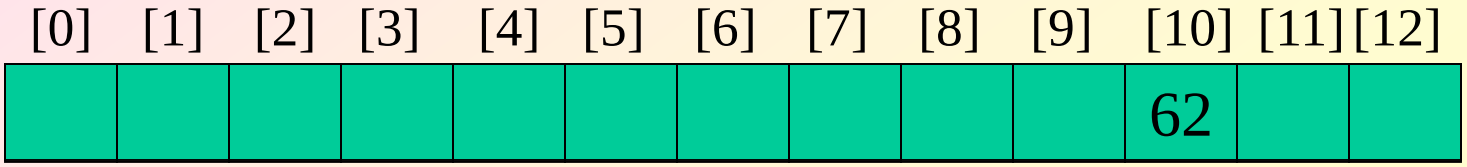
- 開放位址(open addressing)
  - 線性探測 (linear probing)
  - 重雜湊 (rehashing)
- 分別鏈結法 (chaining)

◎ 線性探測 (linear probing)

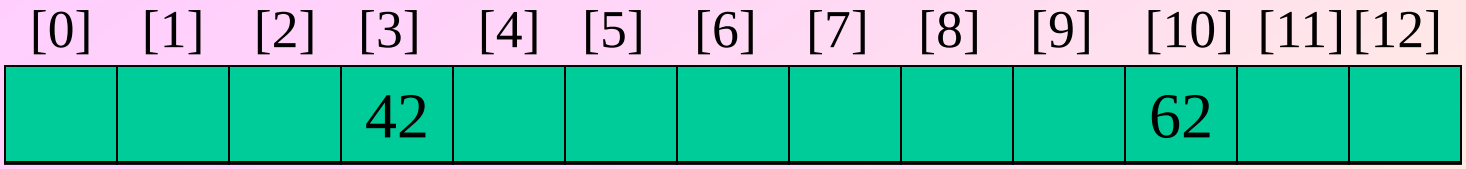
一旦發生碰撞，就往下探測下一個位置。在安排資料時，一旦雜湊出來的表格位置已被佔用，就往下找空格將鍵值放入

如果表格大小 m = 13,鍵值為62, 42, 13, 57, 8, 60, 73,雜湊函數為 " 鍵值 MOD m "

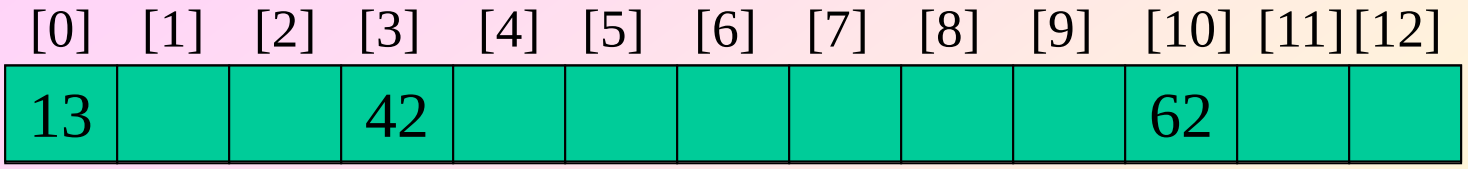
1. 加入62 ，62 MOD 13 = 10



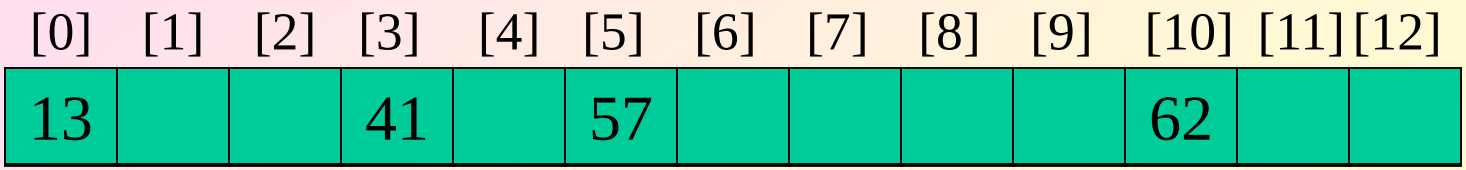
2. 加入42 ，42 MOD 13 = 3



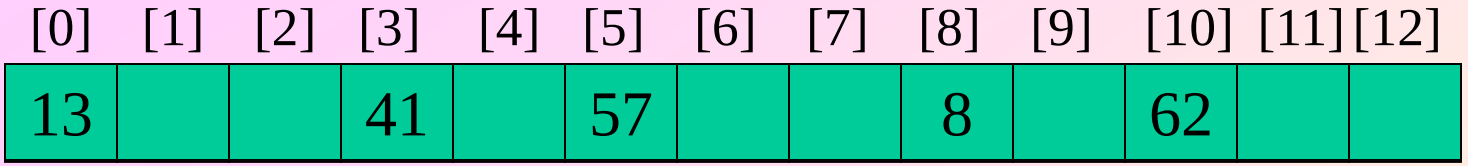
3. 加入13 ，13 MOD 13 = 0



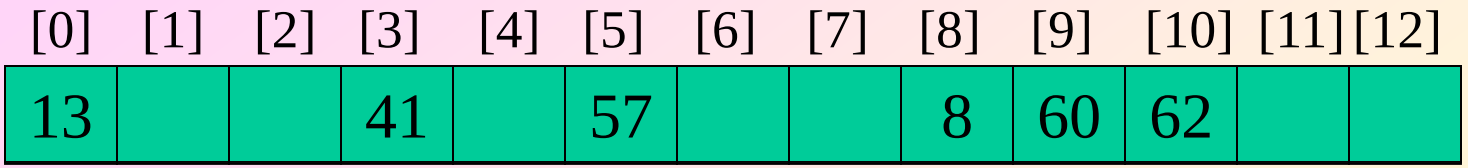
4. 加入57 ，57 MOD 13 = 5



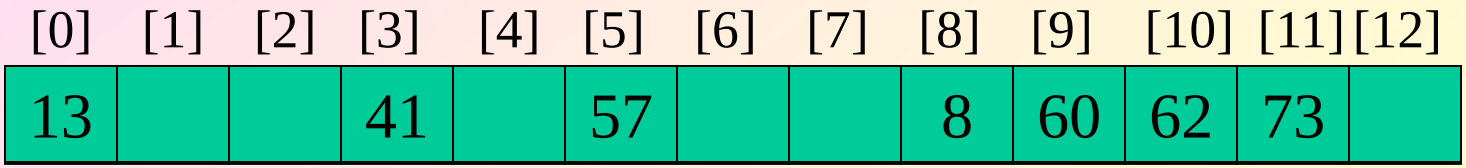
5. 加入8　，8 MOD 13 = 8



6. 加入 60　，60 MOD 13 = 8，碰撞，往下探測得 table[9] 為空格



7. 加入 73　，73 MOD 13 = 8，碰撞，往下探測得 table[11] 為空格



◎重雜湊 (rehashing)

重雜湊和線性探測不同之處，在於一旦發生碰撞，不是往下探測，而是再利用第二個雜湊函數hash_2。如果第二個雜湊值也碰撞，就再利用第三個雜湊函數hash3，以此類推。重雜湊在平均狀況下，會比線性探測所探測的次數要少。

例 8.1

若表格大小m = 13，鍵值為62, 42, 13, 57, 8, 60, 73。

而第一個雜湊函數為 n_1 = key MOD m。

第二個雜湊函數為 $n_2 = n_1$ * key MOD m。

第三個雜湊函數為 $n_3 = n_2$ * key MOD m。

第 i 個雜湊函數為 $n_i = n_{(i-1)}$ * key MOD m。

則安排資料的過程為：

1.加入62, 42, 13, 57, 8之後表格為：

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
13			42		57			8		62		

2.加入60，60 MOD 13 = 8，碰撞，重雜湊hash2

8 * 60 MOD 13 = 12

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
13			42		57			8		62		60

3. 加入73，73 MOD 13 = 8 ，碰撞，重雜湊hash2

(8 * 73) MOD 13 = 12 ，碰撞，重雜湊hash3

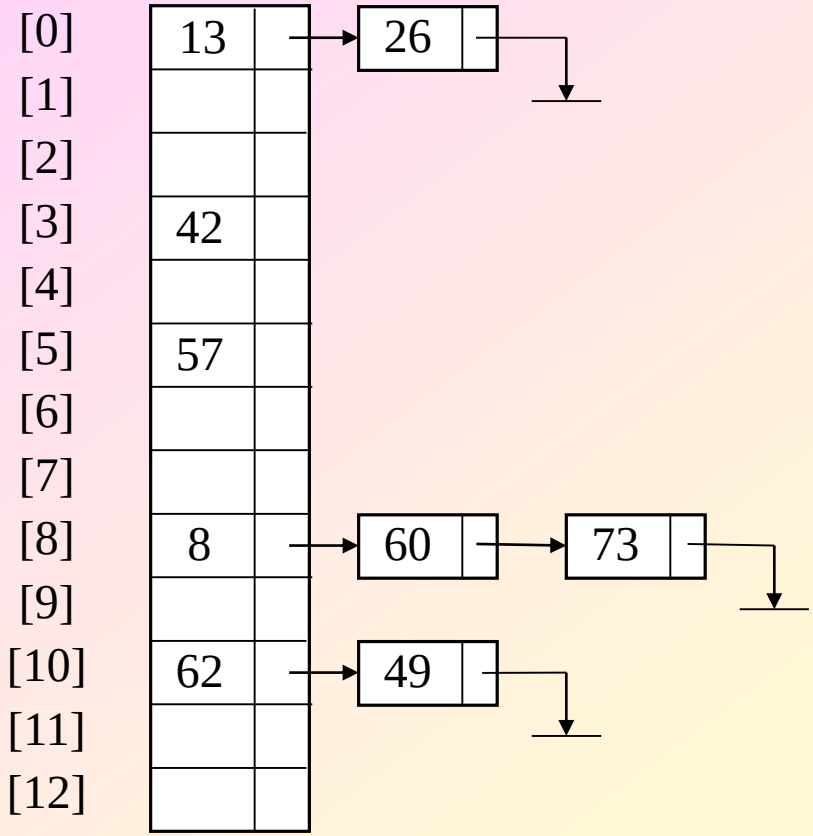
(12 * 73) MOD 13 = 5 ，碰撞，重雜湊hash4

(5 * 73) MOD 13 = 1

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
13	73		42		57			8		62		60

◎分別鏈結法 (chaining)

一旦發生碰撞的時候，就將雜湊值相同的鍵值串在同一個串列



可擴充雜湊

特性

1. 雜湊鍵值可以動態擴充，不需將原有資料進行重新雜湊。
2. 保證磁碟存取次數不超過2次。因為記錄通常儲存在輔助記憶體例如磁碟中，因此減少磁碟存取次數就是減少搜尋時間。

方法

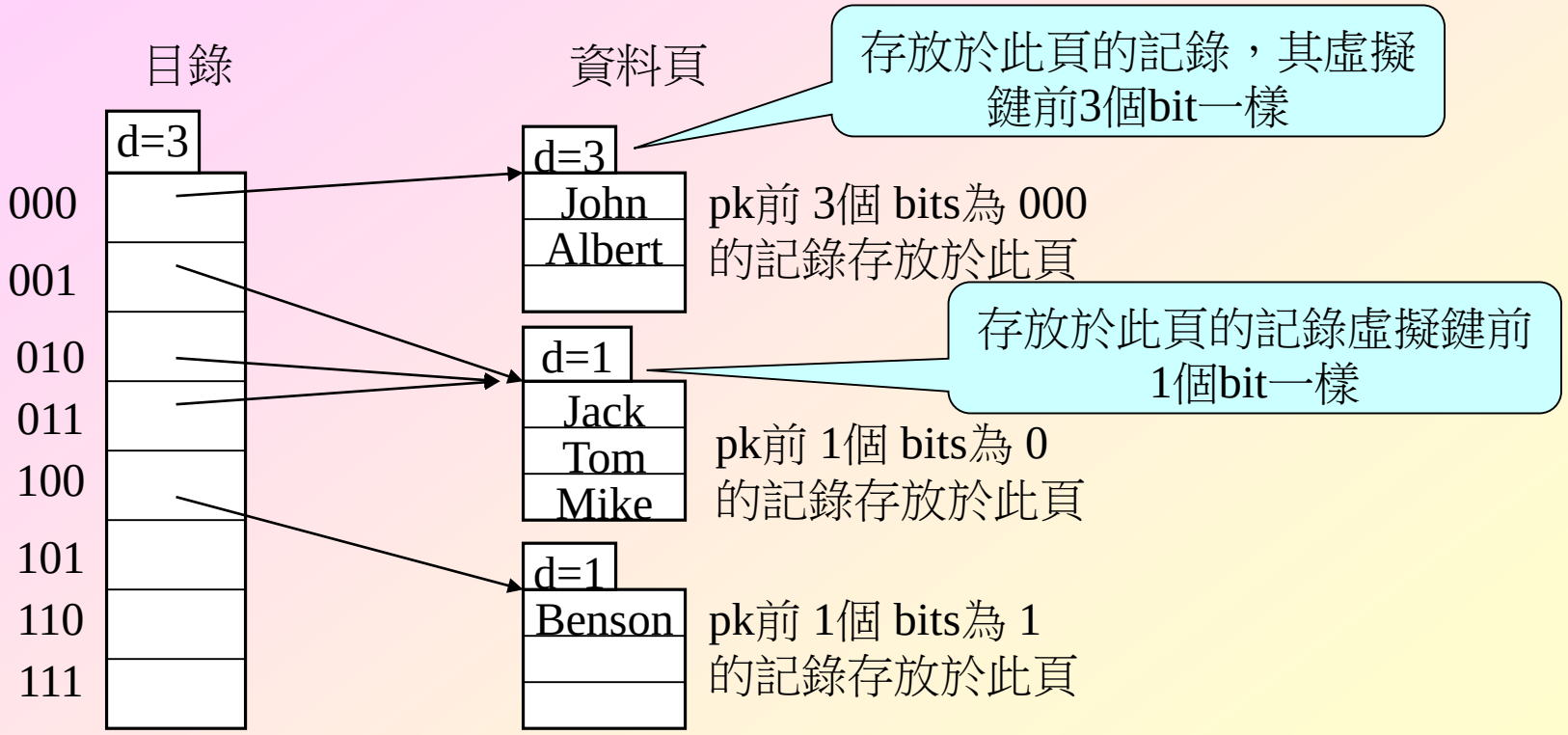
1. 將記錄的鍵值 key，經過雜湊函數 *h* 計算得到雜湊值 pk，稱為虛擬鍵 (pseudo key)

2.取 pk 的前面 d 個位元 (bits) 構成目錄，目錄中有指標指向資料位址

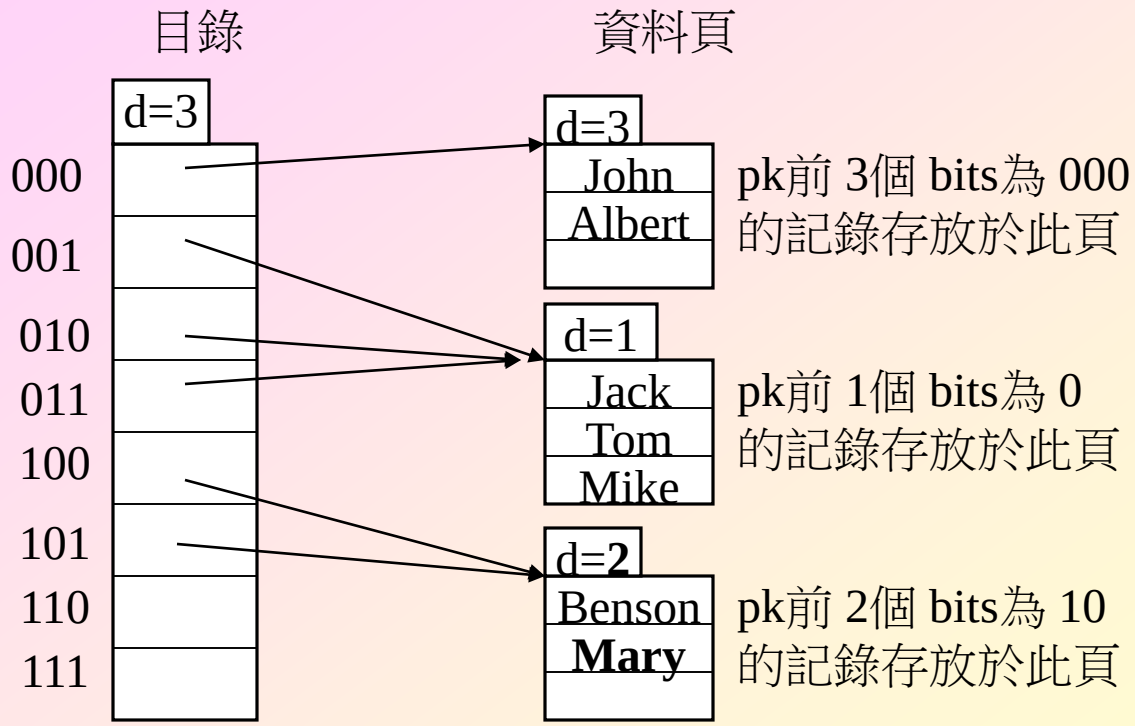
假設有6筆記錄，鍵值分別為 Tom, Jack, John, Mike, Benson, Albert。

經過雜湊函數計算，取3個位元後分別為 010, 001, 000, 011, 100, 000

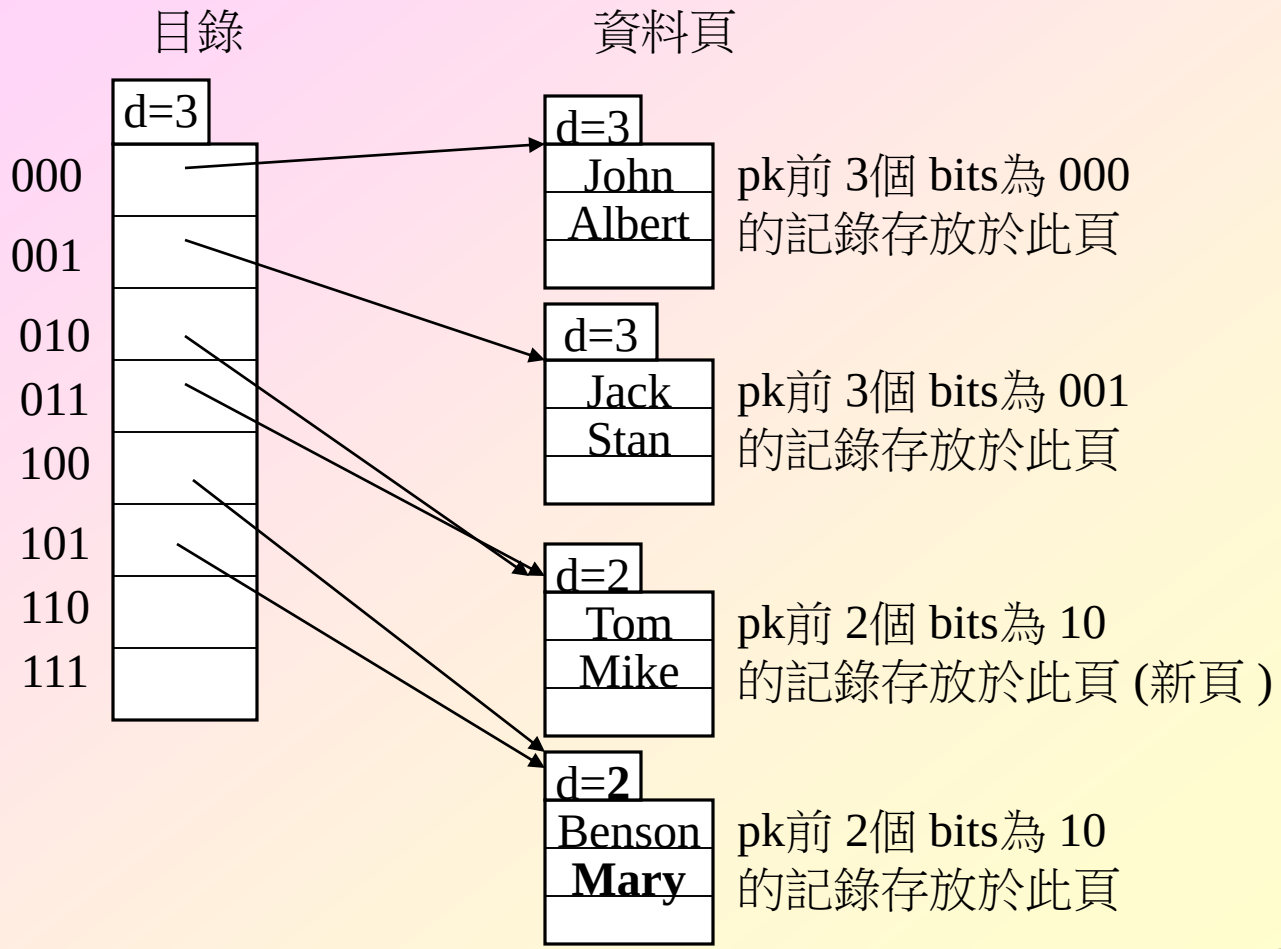
同時假設一個資料頁能存放3筆記錄，則目錄和資料頁將變為



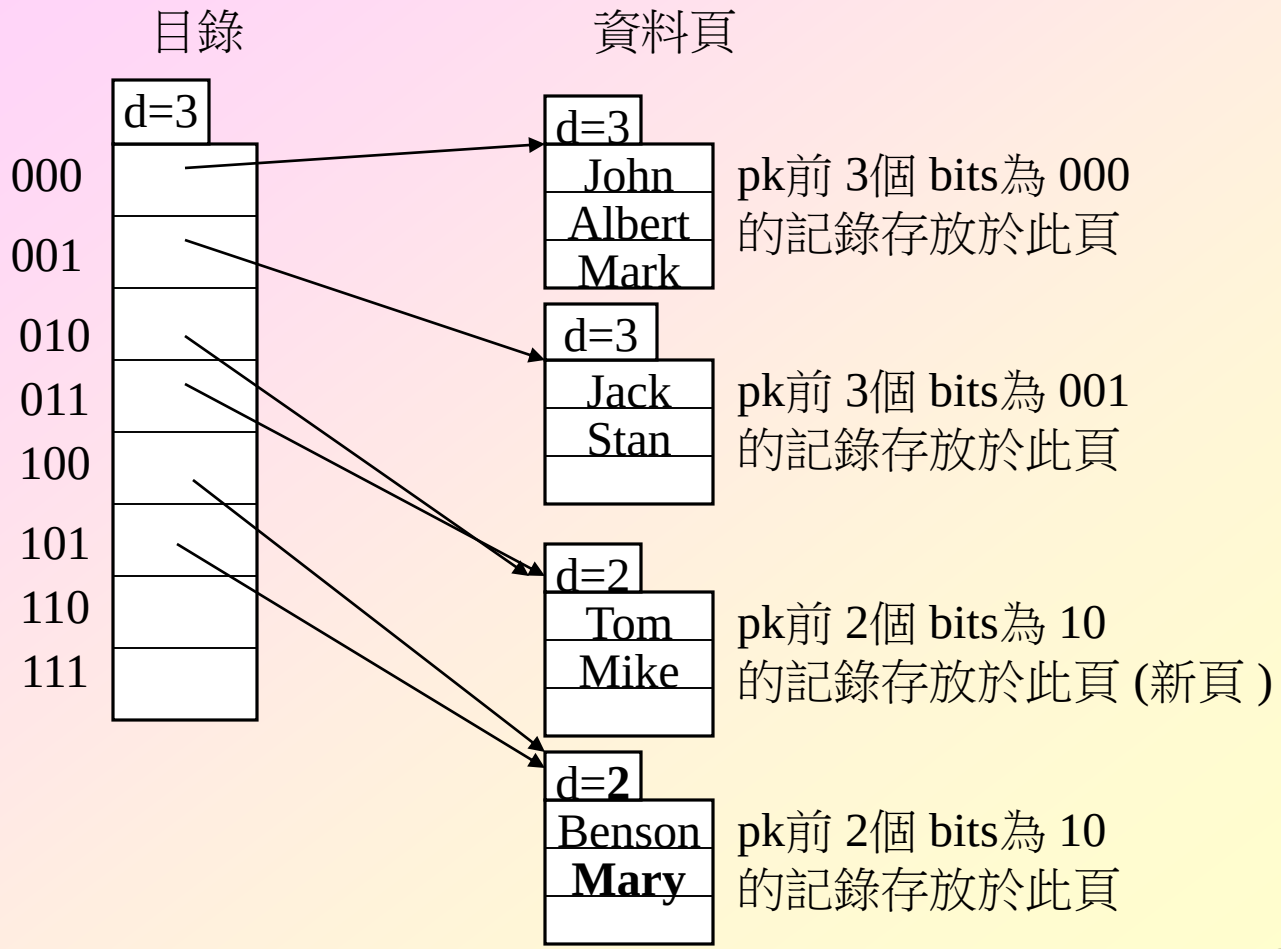
加入新記錄的鍵值為Mary，雜湊後取前 3 個bits為101



加入新記錄的鍵值為Stan，雜湊後取前 3 個bits為001



加入新記錄的鍵值為Mark，雜湊後取前 3 個bits為000



加入新記錄的鍵值為Luke，雜湊後取前 3 個bits為000