

# Teoría de Algoritmia. 1º de Carrera. Tema 1

## Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definiciones Básicas</b>	<b>2</b>
2.1	Orden y medida . . . . .	2
2.2	Valencia y Grado . . . . .	2
2.3	Vértice Hoja y Vértice Rama . . . . .	3
2.4	Camino y Bucles . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Conectividad de un grafo</b>	<b>3</b>
3.1	Conectividad de un grafo no dirigido . . . . .	3
3.2	Conectividad de un grafo dirigido . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Modelos de Memoria</b>	<b>4</b>
4.1	Lista de Adyacencia . . . . .	4
4.2	Lista de Incidencia . . . . .	4
4.3	Matriz de Adyacencia . . . . .	4
4.4	Matriz de Incidencia . . . . .	4

# 1 Introducción

Un grafo combinatorio es una pareja ordenada  $G = (V, E)$  de  $V$  vértices y un subconjunto  $E$  contenido en  $V \times V$  siendo este el producto Cartesiano  $V \times V$ . Si el grafo no está dirigido se llaman aristas y las parejas  $(v, w) \in E$  se consideran sin orden. Si el grafo está dirigido u orientado los elementos de  $E$  se llaman flechas, las cuales poseen una dirección, y las parejas  $(v, w)$  un orden. Si el grafo no está dirigido, no se considera que tenga un principio o un final, simplemente están relacionados.

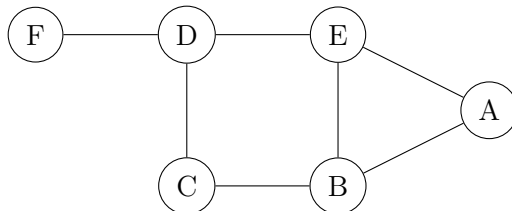


Figure 1: Grafo No Dirigido

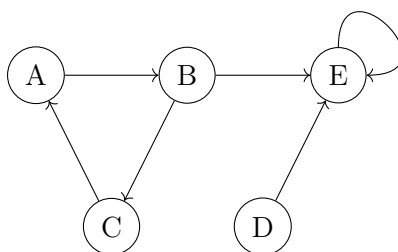


Figure 2: Grafo Dirigido

Los grafos se usan para representar redes de comunicación, organizaciones de datos y flujos de computación. La primera persona que habló de grafos fue Leonhard Euler resolviendo el problema de los siete puentes de Königsberg. En este problema surgió lo que hoy es conocido como la **Fórmula de Euler**, la cual relaciona el número de aristas, vértices y caras de un poliedro convéxo.

Uno de los problemas más clásicos en teoría de grafos fue el problema de los cuatro colores:

*¿Es cierto que cualquier mapa dibujado en el plano puede colorearse con 4 colores de tal forma que cualesquiera dos regiones que tengan una frontera común tengan diferentes colores?*

## 2 Definiciones Básicas

### 2.1 Orden y medida

El Orden de un grafo es el número de vértices de un grafo ( $|V|$ ). La medida de un grafo es el número de aristas o flechas ( $|E|$ )

### 2.2 Valencia y Grado

El grado o valencia de un vértice es el número de aristas llegando o saliendo de él. Si una arista une un vértice consigo mismo cuenta 2 veces.

El in-grado (*in-degree originalmente*) es el número de aristas que llegan al vértices. El out-grado (*out-degree originalmente*) es el número de aristas saliendo del vértice. Estos valores solo se pueden calcular en un grafo dirigido.

## 2.3 Vértice Hoja y Vértice Rama

Un vértice hoja, es un vértice que posee una única arista. También pueden ser llamados terminales.

Un vértice rama, es aquel vértice que está conectado por más de dos aristas.

***NOTA:** Si un vértice está unido por dos aristas, una a otro vértice y otra a si mismo, en un grafo dirigido formalmente se considera rama, pero ya que muchas veces se toma solo la valencia de entrada no sería rama.*

## 2.4 Camino y Bucles

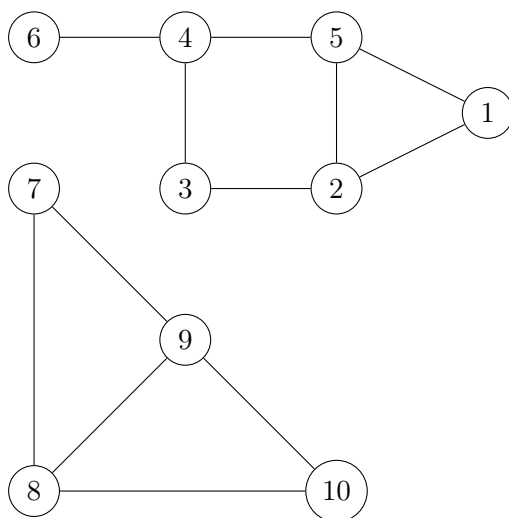
El camino de un grafo es la secuencia de aristas conectadas linealmente. En el grafo dirigido, el final de una arista debe ser el inicio de la siguiente. La longitud de un camino es el número de aristas que contiene.

Un bucle o circuito es un camino cerrado. Eso implica que el final de la última arista es el inicio de la primera.

## 3 Conectividad de un grafo

### 3.1 Conectividad de un grafo no dirigido

Un grafo no dirigido está **conectado** si existe un camino entre cualquier pareja de vértices. Un **componente conectado** es un subgrafo en el que todos los puntos están conectados entre sí. En el ejemplo que se muestra a continuación, el grafo es un grafo desconectado con 2 componentes conectados, el primero formado por los nodos 1,2,3,4,5 y el segundo formado por los nodos 7,8,9,10



### 3.2 Conectividad de un grafo dirigido

Se dice que un grafo dirigido está conectado de forma **débil** cuando está conectado como un grafo no dirigido.

Un grafo dirigido está **semiconectado** cuando para dos vértices cualesquiera  $(u, v)$  contiene un camino de  $u$  a  $v$  o de  $v$  a  $u$ .

Un grafo dirigido está conectado de forma **fuerte** si existen ambos caminos en el grafo semiconectado

## 4 Modelos de Memoria

### 4.1 Lista de Adyacencia

Los vértices están organizados como estructuras y cada vértice guarda una lista de vértices adyacentes (de ahí el nombre de lista de adyacencia). Esta estructura de datos permite almacenar datos adicionales sobre los vértices.

Una estructura en C se define utilizando el comando *struct*

### 4.2 Lista de Incidencia

Tanto los vértices como aristas están almacenadas como estructuras. Cada arista guarda los vértices que incide, y de forma opcional los vértices pueden guardar las aristas incidentes. Esto permite almacenar información adicional de tanto vértices como de aristas.

### 4.3 Matriz de Adyacencia

Es una matriz bidimensional en la que las columnas representan los vértices de inicio y las filas los vértices del final de una arista. La entrada  $i,j$  en la matriz, correspondería al número de flechas que empiezan en  $i$  y terminan en  $j$ . En un grafo no dirigido, esta matriz es simétrica.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa los datos del grafo dirigido representado en la Figura 2.

### 4.4 Matriz de Incidencia

Es una matriz bidimensional formada por datos *Bool* (True y False) en el que las filas representan los vértices y las columnas representan las aristas. Sus entradas indican si el vértice de la fila y la arista de la columna son incidentes. Para grafos dirigidos:

- +1 indica que el vértice es el origen de la flecha
- -1 indica que el vértice es el final de la flecha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz también representan el grafo dirigido de la Figura 2. Sin embargo, en este caso no se puede representar la flecha que sale del nodo 5 y vuelve a entrar.