Teoría de Cálculo de Diversas Variables. 1º de Carrera. Tema 1

Índice

1 Introducción

En esta asignatura se continuará con lo explicado en la asignatura de Cálculo en una Variable, expandiendo la integración, series y un apartado de topología en varias dimensiones.

La asignatura está dividida en 2 Parciales (40% cada uno) Un 15% de las prácticas y un 5% de la nota de los lliuraments. **No hay nota mínima**, solo es necesario que la ponderación de por encima de 5. Al final de curso en el caso de no haber aprobado la asignatura se realizará un examen de recuperación que incluirá todo el contenido del curso.

2 Espacio Euclídeo

El Espacio Euclídeo es el espacio $\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde todos los x pertenecen a $\mathbb{R}$

Por ejemplo, el plano cartesiano es un espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$

2.1 Operaciones

Vectores de ambos espacios pueden sumarse entre sí sumando componente a componente:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \tag{1}$$

Si se multiplica por un número real (λ) se multiplican todos sus componentes:

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \tag{2}$$

Pero sin duda la operación más importande en un espacio euclídeo es el **Producto escalar de dos vectores**. Si tenemos dos vectores x e y pertenecientes a $\mathbb{R}^n$:

$$< x, y >= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n \tag{3}$$

Las propiedades de este producto escalar son:

- $< x + z, y >=< x, y > + < z, y >, \ x, y, z \in \mathbb{R}^n$
- $< \lambda x, \mu y >= \lambda\mu < x, y > x, y \in \mathbb{R}^n$
- La Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $< x, y > \leq < x, x >^{1/2} \cdot < y, y >^{1/2} x, y \in \mathbb{R}^n$

2.1.1 Demostración de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Siendo t un número Real

$$\begin{aligned} 0 \ \leq < x + ty, x + ty > &=< x, x > +t^2 < y, y > +t < x, y > +t < y, x > \\ &=< x, x > +t^2 < y, y > +2t < x, y > \end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto el polinomio es:

$$P(t) =< x, x > +t^2 < y, y > +2t < x, y > \tag{5}$$

Es positivo para todo t pertenciente a los números reales

Luego el discriminante es menor o igual que 0

$$< x, y >^2 - < y, y >< x, x >\leq 0 \ es \ decir \ < x, y >^2=< x, x >< y, y > \tag{6}$$

La <norma> de x perteneciente a $\mathbb{R}^n$ es $\|x\| =< x, x >^{1/2}= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ que corresponde a la distancia del punto x al origen. Es decir, que según la desigualdad de Cauchy-Schwarz $< x, y >\leq \|x\| \cdot \|y\|$

Observamos que si dividimos el producto escalar por el producto de las normas siempre nos queda un valor entre 0 y 1. Este valor es el coseno del ángulo que forman los dos vectores.

La distancia entre dos puntos se calcula hayando la norma del vector resultante de la resta entre los dos. Las propiedades de la norma son:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $\|x\| = 0$ si y solo si $x = (0, ..., 0)$
- Si $\lambda \in R$, entonces $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$
- **Desigualdad Triangular:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

2.1.2 Demostración de la Desigualdad Triangular

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= < x+y, x+y > \\ &= < x, x > + < y, y > + < x, y > + < y, x > \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \text{ (Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

2.2 Otras coordenadas de $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$

2.2.1 Coordenadas Polares en $\mathbf{R^2}$

Están formadas por un radio (r) que corresponde a la distancia desde el origen y un ángulo (θ) que corresponde al ángulo que se debe girar el eje real positivo hasta llegar al punto (sentido antihorario). Para hacer el paso de coordenadas cartesianas a coordenadas polares tomaremos que:

$$r = \text{distancia de (x,y) al origen} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{ángulo que se debe girar el eje hor. positivo para llegar al punto} = arctan(\frac{y}{x})$$

Y para hacer el paso inverso se haría de la siguiente forma:

$$x = r \cdot cos(\theta)$$

$$y = r \cdot sin(\theta)$$

2.2.2 Coordenadas Cilíndricas en $\mathbf{R^3}$

Sean $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de un punto en $\mathbb{R}^3$, las coordenadas cilíndricas son (r, θ, z) donde (r, θ) corresponde al punto (x, y) en coordenadas polares. De esta forma se tomaría el círculo de radio r en el plano x, y y la altura (z), de ahí el nombre de coordenada cilíndrica. Las coordenadas en polares (r, θ).

2.2.3 Coordenadas Esféricas en $\mathbf{R^3}$

En las coordenadas esféricas, tomando un punto (x, y, z), las coordenadas esfericas son (ρ, φ, θ) donde

$$\rho = \text{distancia del punto al origen} = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \text{ángulo que debe moverse el eje verical para llegar al punto} \in (0, \pi)$$

$$\theta = \text{ángulo que se debe mover el eje real positivo hasta alcanzar el punto (x,y,0)}$$

De aquí se deduce que:

$$z = \rho \cdot cos(\varphi)$$

$$sin(\varphi) = \frac{r}{\rho} \qquad \text{(Siendo r la distancia de la proyección en el plano (x,y))}$$

$$x = \rho \cdot sin(\varphi) \cdot cos(\theta)$$

$$y = \rho \cdot sin(\varphi) \cdot sin(\theta)$$

En estas coordenadas, se toma una esfera de radio ρ y luego se indica en que posición de la superficie de esa esfera se encuentra el punto, de ahí el nombre de coordenadas esféricas.

3 Topología

3.1 Interior de un Conjunto

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, denotamos como $B(x_0, r)$ = puntos x de $\mathbb{R}^n$ a distancia de x_0 menor que r = $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$. Esto se llama **bola abierta** centrada a x_0 y de radio r, ya que los puntos de la superficie de la bola no se consideran dentro.

Siendo $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos que A^o, el interior del conjunto A es $x \in \mathbb{R}^n$ tal que exista un $r > 0$ de forma que $B(x, r) \subseteq A$

3.2 Conjunto abierto

Un conjunto A se considera un conjunto abierto si $A = A^o$. Se puede pensar como aquellos conjuntos que no incluyen su frontera. Por ejemplo, si tuvieramos un conjunto $A = (a, b)$, este conjunto sería abierto ya que $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}$ tal que hay un intervalo centrado a x contenido dentro de $(a, b)\}$

3.3 Conjunto cerrado

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos la **adherencia del conjunto A** como $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0\}$. Por este motivo sabemos con seguridad que $A \subseteq \overline{A}$. Por ejemplo, si se tuviera un intervalo (a, b), adherencia de este intervalo sería el intervalo $[a, b]$.

Observamos que si $x \notin [a, b]$ entonces $x \notin \overline{(a, b)}$, pues para radios más pequeños que la distancia entre x y (a, b), la intersección es $\emptyset$.

Decimos que un conjunto es un **conjunto cerrado** si $\overline{A} = A$. De esta forma nos encontramos con un teorema:

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces A es abierto $\Leftrightarrow$ su complementario es cerrado

3.4 Frontera de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos la frontera de A como $fr(A) = \overline{A} \backslash A^o$, es decir la parte que contiene $\overline{A}$ pero no A^o

3.5 Conjunto acotado y conjunto compacto

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se considera **acotado** si existe $M > 0$ tal que $A \subseteq$ Bola centrada al origen de radio M. Por ejemplo, una recta a en $\mathbb{R}^2$ no está acotado, pero un cubo en $\mathbb{R}^3$ sí.