Teoría de Cálculo de Diversas Variables. 1º de Carrera. Tema 1

Índice

1 Introducción

En esta asignatura se continuará con lo explicado en la asignatura de Cálculo en una Variable, expandiendo la integración, series y un apartado de topología en varias dimensiones.

La asignatura está dividida en 2 Parciales (40% cada uno) Un 15% de las prácticas y un 5% de la nota de los lliuraments. **No hay nota mínima**, solo es necesario que la ponderación de por encima de 5. Al final de curso en el caso de no haber aprobado la asignatura se realizará un examen de recuperación que incluirá todo el contenido del curso.

2 Espacio Euclídeo

El Espacio Euclídeo es el espacio $\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde todos los x pertenecen a $\mathbb{R}$

Por ejemplo, el plano cartesiano es un espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$

2.1 Operaciones

Vectores de ambos espacios pueden sumarse entre sí sumando componente a componente:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \tag{1}$$

Si se multiplica por un número real (λ) se multiplican todos sus componentes:

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \tag{2}$$

Pero sin duda la operación más importande en un espacio euclídeo es el **Producto escalar de dos vectores**. Si tenemos dos vectores x e y pertenecientes a $\mathbb{R}^n$:

$$< x, y >= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n \tag{3}$$

Las propiedades de este producto escalar son:

- $< x + z, y >=< x, y > + < z, y >, \ x, y, z \in \mathbb{R}^n$
- $< \lambda x, \mu y >= \lambda\mu < x, y > x, y \in \mathbb{R}^n$
- La Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $< x, y > \leq < x, x >^{1/2} \cdot < y, y >^{1/2} x, y \in \mathbb{R}^n$

2.1.1 Demostración de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Siendo t un número Real

$$\begin{aligned} 0 \ \leq < x + ty, x + ty > &=< x, x > +t^2 < y, y > +t < x, y > +t < y, x > \\ &=< x, x > +t^2 < y, y > +2t < x, y > \end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto el polinomio es:

$$P(t) =< x, x > +t^2 < y, y > +2t < x, y > \tag{5}$$

Es positivo para todo t pertenciente a los números reales
Luego el discriminante es menor o igual que 0

$$< x, y >^2 - < y, y >< x, x >\leq 0 \ es \ decir \ \ < x, y >^2=< x, x >< y, y > \tag{6}$$

La <norma> de x perteneciente a $\mathbb{R}^n$ es $\|x\| =< x, x >^{1/2}= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ que corresponde a la distancia del punto x al origen. Es decir, que según la desigualdad de Cauchy-Schwarz $< x, y >\leq \|x\| \cdot \|y\|$

Observamos que si dividimos el producto escalar por el producto de las normas siempre nos queda un valor entre 0 y 1. Este valor es el coseno del ángulo que forman los dos vectores.

La distancia entre dos puntos se calcula hayando la norma del vector resultante de la resta entre los dos. Las propiedades de la norma son:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $\|x\| = 0$ si y solo si $x = (0, ..., 0)$
- Si $\lambda \in R$, entonces $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$
- **Desigualdad Triangular:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

2.1.2 Demostración de la Desigualdad Triangular

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= < x+y, x+y > \\
&= < x,x > + < y,y > + < x,y > + < y,x > \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x,y > \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \text{ (Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz)} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned} \tag{7}$$

2.2 Otras coordenadas de $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$

2.2.1 Coordenadas Polares en $\mathbf{R^2}$

Están formadas por un radio (r) que corresponde a la distancia desde el origen y un ángulo (θ) que corresponde al ángulo que se debe girar el eje real positivo hasta llegar al punto (sentido antihorario). Para hacer el paso de coordenadas cartesianas a coordenadas polares tomaremos que:

$$r = \text{distancia de (x,y) al origen} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{ángulo que se debe girar el eje hor. positivo para llegar al punto} = arctan(\frac{y}{x})$$

Y para hacer el paso inverso se haría de la siguiente forma:

$$x = r \cdot cos(\theta)$$

$$y = r \cdot sin(\theta)$$

2.2.2 Coordenadas Cilíndricas en $\mathbf{R^3}$

Sean $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de un punto en $\mathbb{R}^3$, las coordenadas cilíndricas son (r, θ, z) donde (r, θ) corresponde al punto (x, y) en coordenadas polares. De esta forma se tomaría el círculo de radio r en el plano x, y y la altura (z), de ahí el nombre de coordenada cilíndrica. Las coordenadas en polares (r, θ).

2.2.3 Coordenadas Esféricas en $\mathbf{R^3}$

En las coordenadas esféricas, tomando un punto (x, y, z), las coordenadas esfericas son (ρ, φ, θ) donde

$$\rho = \text{distancia del punto al origen} = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \text{ángulo que debe moverse el eje verical para llegar al punto} \in (0, \pi)$$

$$\theta = \text{ángulo que se debe mover el eje real positivo hasta alcanzar el punto (x,y,0)}$$

De aquí se deduce que:

$$z = \rho \cdot cos(\varphi)$$

$$sin(\varphi) = \frac{r}{\rho} \qquad \text{(Siendo r la distancia de la proyección en el plano (x,y))}$$

$$x = \rho \cdot sin(\varphi) \cdot cos(\theta)$$

$$y = \rho \cdot sin(\varphi) \cdot sin(\theta)$$

En estas coordenadas, se toma una esfera de radio ρ y luego se indica en que posición de la superficie de esa esfera se encuentra el punto, de ahí el nombre de coordenadas esféricas.

3 Topología

3.1 Interior de un Conjunto

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, denotamos como $B(x_0, r) =$ puntos x de $\mathbb{R}^n$ a distancia de x_0 menor que r $= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$. Esto se llama **bola abierta** centrada a x_0 y de radio r, ya que los puntos de la superficie de la bola no se consideran dentro.

Siendo $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos que A^o, el interior del conjunto A es $x \in \mathbb{R}^n$ tal que exista un $r > 0$ de forma que $B(x, r) \subseteq A$

3.2 Conjunto abierto

Un conjunto A se considera un conjunto abierto si $A = A^o$. Se puede pensar como aquellos conjuntos que no incluyen su frontera. Por ejemplo, si tuvieramos un conjunto $A = (a, b)$, este conjunto sería abierto ya que $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}$ tal que hay un intervalo centrado a x contenido dentro de $(a, b)\}$

3.3 Conjunto cerrado

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos la **adherencia del conjunto A** como $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0\}$. Por este motivo sabemos con seguridad que $A \subseteq \overline{A}$. Por ejemplo, si se tuviera un intervalo (a, b), adherencia de este intervalo sería el intervalo $[a, b]$.

Observamos que si $x \notin [a, b]$ entonces $x \notin \overline{(a, b)}$, pues para radios más pequeños que la distancia entre x y (a, b), la intersección es $\emptyset$.

Decimos que un conjunto es un **conjunto cerrado** si $\overline{A} = A$. De esta forma nos encontramos con un teorema:

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces A es abierto $\Leftrightarrow$ su complementario es cerrado

3.4 Frontera de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos la frontera de A como $fr(A) = \overline{A} \backslash A^o$, es decir la parte que contiene $\overline{A}$ pero no A^o

3.5 Conjunto acotado y conjunto compacto

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se considera **acotado** si existe $M > 0$ tal que $A \subseteq$ Bola centrada al origen de radio M. Por ejemplo, una recta a en $\mathbb{R}^2$ no está acotado, pero un cubo en $\mathbb{R}^3$ sí.

4 Límites de funciones y Continuidad

En este apartado, estudiaremos funciones que vayan desde $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$:

$$f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \to (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$$

Por ejemplo: una función que iría de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ es $f(x, y) = cos(x + y)e^{-x}$, mientras que una función que vaya desde $\mathbb{R}$ hasta $\mathbb{R}^3$ podría ser $f(t) = (e^{-t}, cos(t), sin(t))$. Cuando trabajamos con funciones que trabajan con más de una variable llega un punto en el que no pueden representarse de forma sencilla, ya que las dimensiones necesarias para representar la función serían $n + m$, por lo que primero definiremos el concepto de gráfico.

Definición: Un **gráfico** se define como

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dominio\ de\ f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \text{tiene } n + m \text{ componentes}$$

Esta x que aparece en la definición de gráfico no se refiere a la componente x, sino al vector del espacio $\mathbb{R}^n$ que se introduce en la función (Puede escribirse si resulta más fácil como $\vec{x}$). Por ejemplo, si tuvieramos que escribir el gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sería:

$$Graf(f) = \{(x, y, x^2 + y^2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Tras esto será necesario definir el concepto de conjunto de nivel:

Definición: Un **conjunto de nivel** o **nivel c** de una función f es el conjunto de $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(\vec{x}) = c\}$

Aplicando este concepto a la función anterior, un conjunto de nivel c sería:

$$= \{(x,y) : x^2 + y^2 = c\} = \{(x,y) : dist((x,y),(0,0)) = \sqrt{c}\} = \text{circunferencia de centro } (0,0) \text{ y radio } \sqrt{c}$$

4.1 Límite de una sucesión en un espacio n-dimensional

Sea $\{x_k\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$, definimos su límite como:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = L \text{ si para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } k_0 = k_0(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } \|x_k - L\| = dist(x_k, L) < \varepsilon \tag{8}$$

Es decir, x_k pertenece a una bola de centro L y radio ε si $k \geq k_0$

4.2 Límte de una función en n dimensiones

El límite de una función que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ lo definimos como:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(x) = L \text{ si para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } \|f(\vec{x}) - L\| < \varepsilon\ si\ 0 < \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta \tag{9}$$

Es decir, se cumple el límite si cuando x se acerca a x_0, $f(\vec{x})$ se acerca a L. Por ejemplo, tomando la función $f(x,y,z) = (e^{-y-z}x^2, sin(xy) + z^2 + 1)$, si cogieramos el límite cuando (x,y,z) tiende a $(0,0,0)$, obtendríamos como resultado $L = (0,1)$.

Estos límites presentan unas propiedades similares a los límites en una variable. Si tomaramos dos límites $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, las propiedades serían:

A El límite de la suma de funciones es la suma de los límites

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

B El límtie del producto de funciones es el producto de los límties

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2$$

C Si $L_2 \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

D **Límites direccionales:** Sea f una función que va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(t, mt) = L \text{ con L independiente de } m$$

Sin embargo, esta dependencia no ocurre en el sentido contrario, solo funciona de esta forma.

Si aplicamos los limites direccionales a un ejemplo quedaría de la siguiente forma:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + e^x y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$$

Aplicando los límites direccionales:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} f(t, mt) &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 + e^t (mt)^2}{t^2 + (mt)^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t + e^t m^2}{1 + m^2} \\ &= \frac{m^2}{1 + m^2} \to \text{Depende de m} \end{aligned} \tag{10}$$

Por lo tanto, el límite original no existe. Sin embargo, podemos encontrarnos con casos en los que $\lim_{t\to 0} f(t, mt)$ exista y no sea dependiente de m. En esos casos, no podemos decir nada, pues es posible que el límite original no exista aún así.

4.3 Continuidad de una función en n dimensiones

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in U$. **Definición:** Decimos que f es continua en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ya que $x_0 \in U_{abierto}$, entonces existe una bola centrada en x_0 contenida en U y por tanto f está definida en el borde de x_0.

- Si tenemos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ donde cada $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces, diremos que f es continua en x_0 si todas las f_j son continuas en x_0
- Decimos que f es continua en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si es continua en todos los puntos de U.

4.3.1 Propiedades de la continuidad

Sean $f, g : U \to \mathbb{R}$ continuas en $x_0 \in U$

A Entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son continus en x_0

B Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0

C Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en el punto $f(x_0)$, entonces $h \circ f$ es continua en x_0

Es importante tener en cuenta que la continuidad es una propiedad local, se observa un punto x_0 y sus alrededores pero no se observa toda la función. Para poder observar la continuidad en todo el espacio tendremos que hacernos valer de las propiedades mencionadas anteriormente. Por ejemplo, pongamos que tenemos la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) sin(\dfrac{1}{x^2 + y^2}) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{11}$$

De esta ecuación distinguimos dos casos:

- Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, f es continua en (x_0, y_0) ya que es producto, composición y división de funciones continuas con denominador distinto de 0 en el punto (x_0, y_0)

- ¿f es continua en $(0,0)$? $\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)sin(\frac{1}{x^2+y^2}) = 0$$

Esto se cumple empleando el teorema del sandwich, ya que como $|sin(t)| \leq 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \left|(x^2+y^2)sin(\frac{1}{x^2+y^2})\right| \leq \left|x^2+y^2\right| \to 0$$

Luego es continua.

4.4 Teorema de Weierstrass

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f tiene un máximo y un mínimo en K, es decir

$$\exists x_{MAX} \in K \; y \; x_{MIN} \in K \text{ tal que } f(x_{MIN}) \leq f(x) \leq f(x_{MAX}) \; \forall x \in K \tag{12}$$