Teoría de Probabilidad. 1º de Carrera. Tema 1

Índice

1 Introducción

El primer objetivo de la probabilidad fue estudiar los jeugos de mesa. Comenzó con el juego del taba (40000 años de antiguedad). Se han visto varios ejemplos de azar en distintas civilizaciones. Antiguamente era relacionado con la voluntad Divina y posteriormente con las matemáticas (Renacimiento).

Cardano establece la equiprobabilidad de las caras de un dado (1526). Tartaglia aborda problemas de probabilidad, pero el verdadero cálculo de probabilidades llega con Pascal y Fermat. El primer libro de Probabilidad (1657) llega de la mano de Huygens. Las primeras ayudas más potentes de la probabilidad llegan gracias a Bernouille, de Moivre y Bayes, seguidas de la definición explicitá de Laplace, la teoría de errores de Gauss y los minimos cuadrados de Legendre. Durante el siglo 19-20 llegan Chebychev y Markov, matemáticos rusos que contribuyeron al estudio. La base del cálculo de la probabilidad la establece Kolmogrov.

2 Fenómenos aleatorios y experimentos aleatorios

2.1 Fenómentos aleatorios

La teoria de la probabilidad tiene como estudio los fenómentos o experimentos aleatorios. Estos tienen las siguientes caracterísicas:

- No se sabe que resultado se obtendrá antes de empezar el experimento pero si los resultados posibles.
- Pueden realizarse tantas veces como se quiera en las mismas condiciones
- Podemos asignar probabilidades a los resultados

Lo opuesto a los experimentos aleatorios son los experimentos **deterministas**, en los que el resultado es absolutamente predecible. Algunos ejemplos de experimentos aleatorios son las pruebas para comprobar la efectividad de un medicamento, el número de accidentes en un determinado punto de una carretera, el número de llamadas que recibe una central telefónica o la duración de una particula radioactiva.

2.2 Espacio Muestral

Es el primer elemento de un modelo probabilístico. Se denomina con la letra omega mayúscula (Ω) y sus elementos con la letra omega minúscula (ω). Este espacio contiene todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En esta asignatura el profesor considera que los números naturales no incluyen el 0, luego si hiciera falta analizar el número de llamadas a una central telefónica quedaría así:

$$A = \mathbb{N} \cup 0 \tag{1}$$

2.3 Sucesos

Es cualquier subconjunto del espacio muestral e indica que puede ocurrir en un experimento aleatorio. Lo que se busca es calcular la probabilidad de estos sucesos. El conjunto de sucesos debe seguir una estructura σ-algebra.

Por ejemplo al tirar un dado un subconjunto podría ser:

$$A = \{2, 4, 6\} \tag{2}$$

Si ω perteneciente a Ω es un resultado tal que ω pertenezca a A entonces puede decirse que el suceso A se ha realizado. Después de observar un suceso se puede saber si se ha realizado o no.

2.4 Sigma-algebra

La estructura σ-algebra indica que siendo $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de Ω, decimos que A es una σ-algebra si cumple que:

- Ω pertenece a $\mathcal{A}$
- Si A pertenece a $\mathcal{A}$ entonces el complementario de A pertenece a $\mathcal{A}$
- Si A_1, A_2,... pertenecen a $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{A}$ se considera la unión de todos estos sucesos.

Si $\mathcal{A}$ es una σ-algebra, tiene las siguientes propiedades:

- El conjunto vacío pertenece a $\mathcal{A}$
- Si A y B son elementos de $\mathcal{A}$ entonces su intersección también pertenece a $\mathcal{A}$
- Si A y B son elementos de $\mathcal{A}$, entonces

$$B \backslash A = B \cap A^c \tag{3}$$

  Que también pertenece al conjunto $\mathcal{A}$

P(Ω) es el conjunto de las partes de Ω. Este conjunto es un conjunto σ-algebra siempre.

Si por ejemplo hicieramos el experimento de lanzar una moneda, Ω podría pensarse como el conjunto de posibles sucesiones de 0 y 1, donde 0 es cruz y 1 es cara. Este conjunto no es numerable.

Sería interesante que los subconjuntos de una σ-algebra fueran sucesos. Si A_n fuera la primera cara que sale en el lanzamiento n-ésimo de una moneda, entonces tendremos que A (haber obtenido alguna vez cara) es la unión de todos los sucesos independientes. Al ser un suceso podremos calcular la probabilidad de este.

2.5 Notación de teoría de conjuntos y probabilidad

Notación	Teoría de conjuntos	Teoría de la Probabilidad
ω	Elemento de Ω	Suceso elemental / resultado posible
A	Elemento de $\mathcal{A}$	Suceso
$A \cup B$	Unión de A y B	A o B
$A \cap B$	Intersección de A y B	A y B
A^c	Complementario de A	Contrario de A
$\emptyset$	Conjunto Vacío	Suceso imposible
Ω	Conjunto Total	Suceso seguro

3 Probabilidades

El problema de calcular la probabilidad ha estado abierto mucho tiempo, ya que varios intentos fueron infructuosos. La primera definición, denominada clásica es la fórmula de la Laplace que indica que:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Casos\ favorables\ de\ A}{Casos\ posibles} \tag{4}$$

Esta definición es muy limitada ya que solo funciona si hay un número finito de elementos. Es más se utiliza el concepto de probabilidad para definirla, pues si dos sucesos aparecen la misma cantidad de veces implica que tienen la misma probabilidad. Más tarde aparece la definición frecuentista, que indica que:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{x \to \infty} f_n(A) \tag{5}$$

Donde $f_n(A)$ es la frecuencia relativa de A.

$$f_n(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurre A}}{n} \tag{6}$$

Sin embargo, si hacemos un experimento infinitas veces es posible que no se den todos los sucesos. Este método lo usaremos para probabilidades dificiles de calcular.

Finalmente se defina le la probabilidad como una aplicación de un conjunto σ-algebra tal que cumpla que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si un conjunto de sucesos contenidos no presentan intersección entre sí, la probabilidad de la unión de los dos debe ser la suma de las probabilidades por separado.

Esta probabilidad se llama σ-aditividad

3.1 Espacio de Probabilidad

Se denomina espacio de probabilidad a la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

3.2 Propiedades de P

Las uniones disjuntas a veces se indican con la notación $\dot{\bigcup}$.

Las propiedades de la probabilidad son:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Si A y B son sucesos disconjuntos entonces la probabilidad de su unión es la suma de los dos.
- Si A está incluido en B, la probabilidad de A es menor o igual que la probabilidad de B. Es decir, la probabilidad es monótona creciente.
- Si A está incluido en B entonces:

  $$\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \tag{7}$$

  Luego:

  $$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \tag{8}$$

- Para cualquier suceso A y B tenemos que:

  $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \tag{9}$$

- Sub-aditividad:

  $$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{(Porque } \mathbb{P}(A \cap B) \geq 0\text{)} \tag{10}$$

3.3 La Fórmula de Laplace

Supongamos que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$ es un conjunto finito con equiprobabilidad. Entonces, si $(A) = \mathbb{P}(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos posibles}} \tag{11}$$

Al sumar todas las probabilidades de forma independiente, obtenemos 1. Luego si son equiprobables, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$. Si A incluye a r elementos de Ω, la probabilidad de A es $\frac{r}{n}$. Por lo tanto la formula de Laplace es tan solo una aplicación particular de la axiomática de Kolmogrov.

3.4 Continuidad secuencial de la probabilidad

Estas propiedades vistas hasta ahora son básicas, pero lo que se estudia en teoría de probabilidad son las propiedades que involucran colecciones numerables de sucesos. Si tenemos una sucesiónde acontecimientos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, buscamos cuando existe el límite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

3.4.1 Continuidad secuencial de la probabilidad por uniones crecientes

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de sucesos en el que cada elemento contiene a los anteriores ($A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ... \subset A_n$). Si A es igual a la unión de todos los elementos:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \tag{12}$$

3.4.2 Continuidad secuencial de la probabilidad por uniones decrecientes

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de sucesos en el que cada elemento contiene a los anteriores ($A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ... \supset A_n$). Si A es igual a la intersección de todos los elementos:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \tag{13}$$

4 Combinatoria

La combinatoria nos permite conocer las posibles combinaciones que aparecen a la hora de llevar a cabo un experimento junto a sus correspondientes probabilidades. Se basa en que:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{14}$$

Una de las propiedades más importantes en combinatoria es que si se tienen dos experimentos, cada uno con A y B posibles resultados respectivamente, Si ambos experimentos se realizan a la vez, el número de resultados que se pueden obtener es $A \times B$. Esto es conocido como el **Principio de Multiplicación.**

Pongamos que tuviesemos una caja con bolas numeradas. Existen distintas formas de ordenar la forma que la que las cogemos.

4.1 Permutaciones

En las permutaciones se cogen todas las bolas de forma ordenada. Si trataramos de coger n bolas, existirían $n!$ posibles permutaciones.

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \tag{15}$$

4.1.1 Permutaciones con Repetición

Pongamos que dentro de la caja hay n bolas con k colores diferentes (ya no se encuentran ordenadas numéricamente), es decir hay n_1 bolas del color 1, n_2 bolas de color 2 así hasta n_k bolas de color k cumpliendo que $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$.

Si las sacamos todas de forma ordenada, los órdenes distintos que podría haber son:

$$PR_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!} \tag{16}$$

4.2 Variaciones

Volviendo a nuestra caja con n bolas ordenadas numéricamente, sacamos un número de bolas $m \leq n$ de forma ordenada sin repetición. El número de ordenaciones posibles es:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(m-1)) \tag{17}$$

Observemos que las variaciones de n elementos cogidos de n en n es igual a las permutaciones de n:

$$V_n^n = P_n$$

4.2.1 Variaciones con repetición

Si en lugar de extraer m bolas de forma ordenada y ir dejando las bolas fuera voy colocándolas de nuevo en la caja, aparece la posibilidad de repetir la misma bola más de una vez. El número de formas posibles de realizar el siguiente proceso se calcula usando:

$$VR_n^m = n^m \tag{18}$$

En estos casos, m no tiene que ser menor a n, basta con $m \geq 1$

4.3 Combinaciones

En este caso, cogeremos de nuestra caja de n bolas ordenadas un subconjunto m de bolas. La diferencia es que en este caso no nos importará el orden y no será posible la repetición. Puede pensarse como si sacaras directamente m bolas sin irlas extrayendo de una en una. El número de formas posibles de extraerlas es:

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{V_n^m}{P_m} \tag{19}$$

Podemos observar que la combinación de n elementos tomados de m en m puede verse como la división de las variaciones de n elementos tomados de m en m (explicado en la fórmula 17) partido las permutaciones de m elementos (explicado en la fórmula 15)

¿Que ocurriría si nos encontraramos con un caso en el que hubiera elementos repetidos? Un ejemplo posible sería sacar 10 alumnos de una clase formada por 15 chicos y 30 chicas. Para hallar la probabilidad de sacar 3 chicos y 7 chicas exactamente primero calcularemos todas las combinaciones posibles de 45 elementos sacados de 10 en 10

$$C_{45}^{10} = \frac{45!}{10!(45-10)!}$$

El número de casos que cumplen el requisito calculando el número de combinaciones de 10 chicos sacados de 3 en 3

$$C_{15}^{3} = \binom{15}{3}$$

y el número de combinaciones de 30 chicas sacadas de 7 en 7

$$C_{30}^{7} = \binom{30}{7}$$

Aplicando el principio de multipliación (*explicado en 4*), multiplicaremos estas dos posibilidades entre si:

$$\binom{15}{3} \cdot \binom{30}{7}$$

y dividiremos entre los casos posibles:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{30}{7}}{\binom{45}{10}} = 0,2904 \tag{20}$$

Existen muchos casos en los que calcular el complementario puede resultar mucho más fácil que calcular el suceso en sí, un ejemplo es el problema del cumpleaños. Este problema pregunta cual es la probabilidad de que si se cogen k personas escogidas de forma aleatoria al menos dos de ellas cumplan el mismo día. Abordar este problema directamente puede resultar muy complejo, sin embargo hallar el complementario de este problema (La probabilidad de que de k personas cogidas aleatoriamente **ninguna** cumpla el mismo día) resulta mucho más sencillo. En este tipo de problemas basta con emplear la propiedad 8 para hallar la probabilidad del complementario.

5 Probabilidad y ODDS

La palabra **odds** es muy utilizada en paises de habla inglesa, sobre todo para referirse a juegos de azar. Pero, ¿como se interpreta tener "odds a favor de 3 a 2"?. Si realizamos un fenómeno aleatorio de espacio muestral Ω, unos sucesos $\mathcal{A}$ con una probabilidad $\mathbb{P}$, dado un suceso $A \in \mathcal{A}$:

$$\text{ODDS en contra } A \to Odds(A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(A)} \tag{21}$$

$$\text{ODDS a favor de } A \to Odds(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)} \tag{22}$$

Esto nos permite establecer una relación entre la probabilidad de que un suceso ocurra y que no. En el caso anteriormente mencionado, significaría que la probabilidad de que se cumpla el suceso A es 1.5 veces mayor que el suceso contrario. De hecho, podemos obtener también el valor de la probabilidad de A:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{2}\mathbb{P}(A^c) = \frac{3}{2}(1 - \mathbb{P}(A)) = \frac{3}{5}$$

Ejemplo: Lanzamos 3 monedas. Suceso $A =$ salen exactamente 2 caras. Suceso $B =$ sale una cara y una cruz.

$$\Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, xcx, xxc, cxx, xxx\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{3}{8} \Rightarrow Odds(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow Odds(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{3/4}{1/4} = 3$$

Luego es más favorable apostar por el suceso B, pues tiene mejores ODDS que A

6 Probabilidad Condicionada

Pongamos un supuesto en el que tomo 2 dados de diferente color (Rojo y Verde). Al lanzar los dados el espacio muestral que obtengo es el siguiente:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), ..., (6,6)\} \ \#\Omega = 36$$

Hay que tener en cuenta que los elementos de este espacio muestral están ordenados, pues los dados se tomará siempre la tirada del dado de color rojo primero y luego la tirada del dado de color verde. Tomaremos que $\mathcal{A} = \mathbb{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ es tal que $\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = 1/36$ para todo i, j entre 1 y 6. De esta forma, la probabilidad de que ocurra cada suceso es la misma.

Sea $B =$ "Los dos dados tienen la misma puntuación" entonces:

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

¿Que ocurriría si tuvieramos como información que la suma de los dos dados es 8? Lo primero que haremos será saber para cuantos casos se cumplirá el suceso $A =$ "La suma es 8", para posteriormente calcular la **probabilidad condicionada en A**, es decir, cual es la probabilidad de que ocurra un suceso si se sabe que ha ocurrido A.

Esta probabilidad se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{(Siempre y cuando } \mathbb{P}(A) > 0) \tag{23}$$

Siguiendo el ejemplo anterior, nos quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/6}{5/36} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Luego, si los números suman 8, hay más posibilidades de que se cumpla el suceso B de las que había antes (0.17), por lo que se recomendaría subir la apuesta.

IMPORTANTE: En sucesos en los que $\mathbb{P}(A) > 0$:

$$\mathbb{P}(\cdot|A) : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

$$B \to \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Es una **probabilidad**, ya que cumple todas las propiedades de las probabilidades:

1. $\mathbb{P}(\Omega|A) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$
2. $\sigma - aditividad$: siendo $A_1, A_2, ...$ disjuntos 2 a 2:

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|A) = \frac{\mathbb{P}((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A))}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Algunas otras propiedades son:

- $\mathbb{P}(B^c|A) = 1 - \mathbb{P}(B|A)$
- $\mathbb{P}(B \cup C|A) = \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(B \cap C|A)$
  Aunque, en general no se cumple que $\mathbb{P}(B|A^c) \neq 1 - \mathbb{P}(B|A)$
- Regla del producto (Fórmula de probabilidad compuesta)

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) \quad \text{(Siempre que } \mathbb{P}(A) \text{ no sea 0)}$$

Esta fórmula de la probabilidad condicionada existe también para 3 sucesos, si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) \end{aligned} \tag{24}$$

7 Independencia de sucesos

Queremos decir que:

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \text{ y } \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{(Sea } \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$$

Definición: Decimos que dos sucesos A y B son **independientes** si:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Si observamos, si aplicamos esta definición a la fórmula de la probabilidad condicionada (23) obtenemos lo que buscabamos representar.

7.1 Propiedades de la independencia de sucesos

Son equivalentes:

1. A y B son independientes
2. A^c y B son independientes
3. A y B^c son independientes
4. A^c y B^c son independientes

Prueba: Es suficiente con demostrar que la propiedad (1) implica la propiedad (2).

$$\begin{aligned} B &= (A \cap B)\dot{\cup}(A^c \cup B) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(B) \cdot (1 - \mathbb{P}(A)) \\ &= \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A^c) \end{aligned} \tag{25}$$

7.2 Independencia de 3 o más sucesos

Tomados 3 elementos A, B, C podríamos pensar la independencia de estos 3 de dos formas. La primera de ellas es pensar que cada pareja de elementos que tomemos serán independientes, es decir:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \end{cases} \tag{26}$$

O bien se podría pensar como que se necesita la independencia de los 3 a la vez, es decir:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \tag{27}$$

Si solo se cumple la propiedad (26) podemos decir que los sucesos son *independientes 2 a 2*, pero no que los 3 sean independientes, luego diremos que:

"Para que 3 o más elementos se consideren independientes deben cumplirse la propiedad 26 y la propiedad 27"

8 Fórmulas importantes

8.1 Fórmula de las Probabilidades Totales

Pongamos que contamos con una población formada por un 45% de hombres y un 55% de mujeres. En esta población se está midiendo la prevalencia de una enfermedad disgregada por sexo. Se sabe que el 4% de hombres están enfermos y el 1% de las mujeres están enfermas. Lo que buscamos saber es, ¿Cual es la probabilidad de que cogiendo al azar una persona de la población esté enferma (prevalencia global)?

Si tomamos que es un experimento aleatorio, la probabilidad de que esté malo puede calcularse empleando la siguiente fórmula:

$$E = \textit{El individuo está enfermo}$$

$$\Omega = \{H_{enfermo}, H_{sano}, M_{enferma}, M_{sana}\}$$

Observemos que $E = \{H_enfermo, M_enferma\}$. Sabemos que $\mathbb{P}(H) = 0.45$ y que $\mathbb{P}(M) = 0.55$

$$\mathbb{P}(M|H) = 0.04 \; ; \; \mathbb{P}(M|E) = 0.01$$

Ya que $\Omega = H\dot{\bigcup}D$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(M \cap \Omega) = \mathbb{P}(M \cap (H\dot{\cup}D)) \\ &= \mathbb{P}((M \cap H)\dot{\cup}(M \cap D)) = \mathbb{P}(M \cap H) + \mathbb{P}(M \cap D) \\ &= \mathbb{P}(M|H) \cdot \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(M|D) \cdot \mathbb{P}(D) = 0.04 \times 0.45 + 0.01 \times 0.55 \\ &= 0.0235 = 2.35\%\end{aligned} \tag{28}$$

Esto se asemeja mucho a una media ponderada, ya que las probabilidades de cada uno de los sucesos no pueden simplemente sumarse y dividirse entre 2, sino que se debe tener en cuenta el peso de cada uno.

Teorema (FPT): *Sea $B_1, ..., B_N \in \mathcal{A}$, una* ***partición*** *de Ω:*

$$\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} B_i$$

tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i = 1, ..., N$. Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i) \tag{29}$$

Teorema (FPT condicionada): *Sea $B_1, ..., B_N \in \mathcal{A}$, una* ***partición*** *de Ω:*

$$\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} B_i$$

tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i = 1, ..., N$. Sea $A \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{A}$ tal que $\mathbb{P}(C) > 0$ entonces:

$$\mathbb{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i \cap C) \cdot \mathbb{P}(B_i|C) \tag{30}$$

8.2 Fórmula de Bayes

Pongamos que, continuando con el ejercicio anterior, quisieramos hallar la probabilidad de que sea una mujer sabiendo que el sujeto está enfermo ($\mathbb{P}(D|M)$). Esta probabilidad no la sabemos de primera mano, pero podemos calcularla:

$$\mathbb{P}(D|M) = \frac{\mathbb{P}(D \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M|D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(M)}$$

De esta forma, hemos girado el condicionamiento hasta obtener el cálculo en términos de probabilidades que podemos calcular. De forma general quedaría de la siguiente manera:

Teorema (Fórmula de Bayes): *Sea $B_1, ..., B_N$ una partición de Ω tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i = 1, ..., N$. $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mathbb{P}(A) > 0$. Entonces, para todo $j \in \{1, ..., N\}$*

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)} \tag{31}$$

8.3 Evaluación de evidencias y Fórmula de Bayes

En la estadística bayesiana, se toman $B_1, ..., B_N$ como particiones de Ω, es decir:

$$\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} B_i$$

En estos casos llamaremos a cada B_i una **causa**. Tomaremos $\mathbb{P}(B_i)$ y la llamaremos **probabilidad a priori**. Le daremos este nombre por motivos que veremos a continuación. Si tomamos otro suceso E, obtenemos una nueva probabilidad ($\mathbb{P}(B_i|E)$). A esta probabilidad la llamaremos **probabilidad a posteriori**.

Una vez ha pasado el suceso E (al que llamaremos **evidencia**), las probabilidades de las causas quedan modificadas. De aquí podemos extraer un nuevo concepto: Los **odds a posteriori**.

Sea A un suceso. Dada una evidencia E, tenemos odds a posteriori a favor de A:

$$Odds(A|E) = \frac{\mathbb{P}(A|E)}{\mathbb{P}(A^c|E)}$$

Empleando la Fórmula de Bayes explicada en el apartado anterior podemos expresar estas probabilidades de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E)}$$

$$prob(A^c|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(E)}$$

Luego:

$$Odds(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)}$$

Si nos fijamos esto se puede escribir sustituyendo por $Odds(A)$:

$$Odds(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A)}{\mathbb{P}(E|A^c)} \cdot Odds(A)$$

Está fracción se llama **Razón de Versemblanza** (*Likelihood Ratio*). Por tanto:

$$LR = \frac{Odds(A|E)}{Odds(A)}$$

Este concepto se llama **Odds Ratio**. Esto podemos interpretarlo de la siguiente forma:

$$LR = \begin{cases} \approx 1 : \text{La evidencia } E \text{ no apoya a } A \text{ ni a } A^c \\ > 1 : \text{La evidencia } E \text{ apoya a } A \\ < 1 : \text{La evidencia } E \text{ apoya a } A^c \end{cases} \tag{32}$$

9 Números Aleatorios

El ordenador es una máquina simple pero obediente que funciona de manera **determinista**: Una misma entrada devuelve una misma salida. ¿De donde surge el azar en un ordenador?. Los **números aleatorios** son números generados por un mecanismo aleatorio, como lanzar unos dados, y que no siguen un comportamiento predecible. Uno de los sucesos relacionados con los números aleatorios es el Sorteo de la Guerra de Vietnam (1965-1975)

El objetivo del sorteo era llevar al 20% de los jovenes nacidos en un año completo. Se pusieron todas las fechas del año en un bombo con cápsulas y se sacaba hasta obtener el 20%. Al hacer el experimento, se descubrió que aquellos soldados que nacían en el último cuatrimestre del año era más posible que salieran elegidos. ¿El motivo? El bombo no barajaba correctamente.

Para evitar esto, existen formas de comprobar la cualidad de unso números aleatorios. Estos métodos buscan unicamente comprobar que los datos no presentan ningún tipo de característica o patrón. Para poder llevar a cabo este estudio se necesitan grandes cantidades de datos, ya que con pocos datos se puede llegar a considerar como un patrón un suceso aleatorio posible. El hecho de obtener números aleatorios resulta fundamental para procesos tan sencillos como realizar una encuesta. Para poderlo llevar a cabo se busca una muestra de gente aleatoria que represente correctamente a la población con el fin de extrapolar los resultados.

Si no se realizan de forma aleatoria, pueden verse afectados los resultados de las encuestas. Un ejemplo fue la reelección de Truman, en el que resultó elegido a pesar de que las encuestas decían lo contrario. Esto ocurrió debido a que los encuestadores escogian a las peresonas que preguntaban y las personas que decidían votar a los republicanos eran más guapas que las que votaban a los demócratas. Sin embargo, aparte de este suceso, las personas son **malas generando números aleatorios**. Existen por este motivo números **pseudoaleatorios**.

9.1 Números Pseudoaleatorios

Los números pseudoaleatorios son números que siguen la fórmula:

$$X_{n+1} = (a \times X_n) + c \; (mdulo \; m) \tag{33}$$

Donde a es el multiplicador, c es el sumador y m es el módulo. De esta forma se parte de un número cualquiera (1) y con un multplicador y sumador cualesquiera. Al cabo de varias operaciones los números serán imposibles de predecir. Estos números sin embargo presentan varios problemas.

Para generar una cantidad de puntos pequeña no surge un problema, pasa las pruebas estadísticas sin problema, pero cuando se necesitan muchos comienza a cometer errores. En el año 1970, aparece RANDU, un generador de números aleatorios. Se empleo para generar 100.000 puntos agrupados de 3 en 3 $((X_1, X_2, X_3), (X_4, X_5, X_6), ...)$ y al representarse en un plano se observó que se formaban planos separados de forma uniforme.

9.2 Generador Cuántico

Por los motivos mencionados anteriormente y con el fin de escapar de las condiciones deterministas se recurre al método más puro de aleatoriedad: un **generador cuántico**.

Si el generador cuántico se encontraba desequilibrado podría generar errores, por lo que se llevó a cabo un método de corrección. Si salían un 0 y un 1, se pondría 0, si salían 1 y 0 se pondría 1, y si salían iguales se volverían a tirar. Esto permitió corregir posibles imperfecciones en el generador. Una vez se tenía una tira de ceros y unos, se pasaría este número a binario, generando de esta forma números aleatorios.

10 Problemas

10.1 Problema 1

A Lanzamiento de dos monedas

$$\Omega = \{(c,c),(c,x),(x,c),(x,x)\}$$

B Lanzamiento de dos dados

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,6)\} \rightarrow 6^2 \text{ combinaciones}$$

C Número de accidentes en un tramo de carretera

$$\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

D Tiempo de espera si el autobús pasa cada 20 minutos y llegamos de forma aleatoria

$$\Omega = [0,20)$$

E Lanzamos una moneda indefinidamente hasta que salga cara

$$\Omega = \mathbb{N}$$

10.2 Problema 2

¿Cual es la probabilidad de acertar una quiniela de 14 resultados apostando solo a una columna?¿Y de acertar 13 o 12 resultados?

$$\text{Posibles resultados} \rightarrow 3^{14}$$

$$\text{Probabilidad de acertar 14 resultados} \rightarrow \frac{\text{casos favorables}}{\text{Casos posibles}} \rightarrow \frac{1}{3^{14}}$$

Para calcular la probabilidad de acertar un número n de veces con $n \leq 14$:

$$\frac{2^{14-n}\binom{14}{14-n}}{3^{14}} \tag{34}$$

Esta fórmula emplea la fórmula de Laplace (mencionada en el apartado 3.3), tomando como casos favorables $2^{14-n}\binom{14}{14-n}$ y como casos posibles los calculados anteriormente.

10.3 Problema 3

Calcula la probabilidad de que, tomando una diagonal aleatoria de un polinomio de n lados, la diagonal pase por un vértice en concreto.

Existen $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Pero solo $(n-3)$ diagonales pasan por ella, luego utilizando la fórmula de Laplace queda:

$$\mathbb{P} = \frac{(n-3)}{\frac{n(n-3)}{2}}$$

10.4 Problema 4

Calcula la probabilidad de que un número de 4 cifras sea capicúa

Sabemos que un número capicúa cumple que:

$$x_1x_2x_3x_4 \rightarrow x_1 = x_4; x_2 = x_3$$

Luego si fijamos los dos primeros números existen 100 posibilidades (10×10) ya que x_3 tiene 10 posibilidades y x_4 también. Luego, ya que existen 100 posibilidades para los números x_1 y x_2, siguiendo la formula de Laplace terminamos con

$$\Omega = \frac{100}{10000} = \frac{1}{100}$$

Por lo que 1 de cada 100 números de 4 cifras es capicúa.

10.5 Problema 5

En una carrera hay 4 atletas alemanes, 3 franceses, 2 británicos

A **Calcula el número de todas las posibilidades si solo tenemos en cuenta la probabilidad.**

$$\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}$$

B **¿Cuál es la probabilidad de que gane un francés?**

$$\frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}} = \frac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}$$

C **Calcula la probabilidad de que los últimos 3 puestos estén ocupados por un alemán**

10.6 Problema 11

Problema de las llaves.

- **Sacar las llaves sin repetición**

$$\mathbb{P}(\text{k veces sin repetición}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times(n-(k-1))}{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-(k-1))} = \frac{1}{n}$$

- **Sacar las llaves con repetición**

$$\mathbb{P}(\text{k veces con repetición}) = \frac{\overbrace{(n-1\times(n-1)\times\cdots\times(n-1)}^{\text{k-1 elementos}}\times 1}{\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{\text{k elementos}}} = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

10.7 Problema 12

- **Problema de que bailen siendo un matrimonio:**

$$A = \textit{El hombre baila con su pareja}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{al menos 1 pareja}) &= \mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<\delta}\mathbb{P}(A_i\cap A_\delta) + \sum_{i<\delta<k}\mathbb{P}(A_i\cap A_\delta\cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)\\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\\ &= 1 - e^{-1}\end{aligned} \tag{35}$$

10.8 Problema 14:Ficha 1

A

$$2_{(temp.)}\times 3_{(hum.)} = 6$$

B

$$\Omega = \{T_1H_1, T_2, H_2\} \text{ Luego solo hay 2 posibilidades}$$

C

$$\Omega = \{(T_iH_j, T_rH_s, T_nH_m),\ i,r,n\in\{1,2\},\ j,s,m\in\{1,2,3\}\}$$
$$\#\Omega = 6^3$$

Buscamos:

$$\mathbb{P}(\text{Se han usado los 3 niveles de hum.}) = \frac{6\times(2\cdot 2_{(\text{hum. posibles})})\times(2\cdot 1_{(\text{hum. posibles})})}{6^3} = \frac{2}{9}$$

10.9 Prob. 15 Ficha 1

Experimento aleatorio: Observamos el orden de los aminoácidos.

$$\Omega = \{\text{Todas las formas de ordenar A,G,L,H}\}$$

$$\#\Omega = P_4 = 4! = 24$$

Queremos encontrar $\mathbb{P}(A)$, donde $A =$ *"Aparece GA"* Elementos de A:

- GALH
- GAHL
- LGAH
- HGAL
- HLGA
- LHGA

Se puede considerar como si GA fuese un elemento y calculáramos permutaciones de 3 elementos (6). Luego:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

10.10 Prob. 18 Ficha 1

4 hijos (chico o chica). $p = \mathbb{P}(chico)$, $q = \mathbb{P}(chica)$, $p + q = 1$, $p, q \in (0, 1)$

A

$$\mathbb{P}(\text{primer y segundo 2 hijos}) = p \times p = p^2$$

B

$$\mathbb{P}(\text{más chica que chico}) = \mathbb{P}(\text{3 chica y 1 chico}) + \mathbb{P}(\text{4 chica})$$

$$= q^3 \times p \cdot \binom{4}{1} + q^4 = q^3(q + 4p)$$

C

$$\mathbb{P}(\text{2 chicas y 2 chicos}) = q^2 \times p^2 \cdot \binom{4}{2} \to \text{Coger las 2 pos. de los chicos de las } 4 = 6 \cdot q^2 \cdot p^2$$

10.11 Prob. 19 Ficha 1

$Tazas = \{TL, TL, TL, TL, LT, LT, LT, LT\}$

1. $\mathbb{P}(\text{Acertar 6 de las 8})$
   <u>Experimento:</u> Escoge las cuatro tazas con TL al azar.

   $$\#\Omega = \binom{8}{4}$$

   Por tanto:

   $$\mathbb{P}(\text{Acertar 6 de las 8}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}}{\binom{8}{4}} \approx 0.2286$$

   De aquí podemos deducir que siempre se va a acertar un número par, pues el error surge del intercambio entre 2 correctas, y al producirse este cambio se fallarán ambas.

2.

$$\mathbb{P}(\text{Acertar 4 de las 8}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}$$

3. Experimento con 10 tazas:

$$\mathbb{P}(\text{acertar todas las tazas}) = \frac{1}{\binom{10}{5}} = 0.00397$$