Teoría de Cálculo de Diversas Variables. 1º de Carrera. Tema 1

Índice

1 Introducción

En esta asignatura se continuará con lo explicado en la asignatura de Cálculo en una Variable, expandiendo la integración, series y un apartado de topología en varias dimensiones.

La asignatura está dividida en 2 Parciales (40% cada uno) Un 15% de las prácticas y un 5% de la nota de los lliuraments. **No hay nota mínima**, solo es necesario que la ponderación de por encima de 5. Al final de curso en el caso de no haber aprobado la asignatura se realizará un examen de recuperación que incluirá todo el contenido del curso.

2 Espacio Euclídeo

El Espacio Euclídeo es el espacio $\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde todos los x pertenecen a $\mathbb{R}$

Por ejemplo, el plano cartesiano es un espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$

2.1 Operaciones

Vectores de ambos espacios pueden sumarse entre sí sumando componente a componente:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \tag{1}$$

Si se multiplica por un número real (λ) se multiplican todos sus componentes:

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \tag{2}$$

Pero sin duda la operación más importande en un espacio euclídeo es el **Producto escalar de dos vectores**. Si tenemos dos vectores x e y pertenecientes a $\mathbb{R}^n$:

$$< x, y >= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n \tag{3}$$

Las propiedades de este producto escalar son:

- $< x + z, y >=< x, y > + < z, y >, \; x, y, z \in \mathbb{R}^n$
- $< \lambda x, \mu y >= \lambda\mu < x, y > x, y \in \mathbb{R}^n$
- La Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $< x, y > \leq < x, x >^{1/2} \cdot < y, y >^{1/2} x, y \in \mathbb{R}^n$

2.1.1 Demostración de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Siendo t un número Real

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq < x + ty, x + ty > =< x, x > +t^2 < y, y > +t < x, y > +t < y, x > \\ &=< x, x > +t^2 < y, y > +2t < x, y > \end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto el polinomio es:

$$P(t) =< x, x > +t^2 < y, y > +2t < x, y > \tag{5}$$

Es positivo para todo t pertenciente a los números reales
Luego el discriminante es menor o igual que 0

$$< x, y >^2 - < y, y >< x, x >\leq 0 \; es \; decir \; < x, y >^2=< x, x >< y, y > \tag{6}$$

La <norma> de x perteneciente a $\mathbb{R}^n$ es $\|x\| =< x, x >^{1/2}= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ que corresponde a la distancia del punto x al origen. Es decir, que según la desigualdad de Cauchy-Schwarz $< x, y >\leq \|x\| \cdot \|y\|$

Observamos que si dividimos el producto escalar por el producto de las normas siempre nos queda un valor entre 0 y 1. Este valor es el coseno del ángulo que forman los dos vectores.

La distancia entre dos puntos se calcula hayando la norma del vector resultante de la resta entre los dos. Las propiedades de la norma son:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además $\|x\| = 0$ si y solo si $x = (0, ..., 0)$
- Si $\lambda \in R$, entonces $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$
- **Desigualdad Triangular:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

2.1.2 Demostración de la Desigualdad Triangular

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= < x+y, x+y > \\
&= < x,x > + < y,y > + < x,y > + < y,x > \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x,y > \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \text{ (Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz)} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned} \tag{7}$$

2.2 Otras coordenadas de $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$

2.2.1 Coordenadas Polares en $\mathbf{R^2}$

Están formadas por un radio (r) que corresponde a la distancia desde el origen y un ángulo (θ) que corresponde al ángulo que se debe girar el eje real positivo hasta llegar al punto (sentido antihorario). Para hacer el paso de coordenadas cartesianas a coordenadas polares tomaremos que:

$$r = \text{distancia de (x,y) al origen} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{ángulo que se debe girar el eje hor. positivo para llegar al punto} = arctan(\frac{y}{x})$$

Y para hacer el paso inverso se haría de la siguiente forma:

$$x = r \cdot cos(\theta)$$

$$y = r \cdot sin(\theta)$$

2.2.2 Coordenadas Cilíndricas en $\mathbf{R^3}$

Sean $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de un punto en $\mathbb{R}^3$, las coordenadas cilíndricas son (r, θ, z) donde (r, θ) corresponde al punto (x, y) en coordenadas polares. De esta forma se tomaría el círculo de radio r en el plano x, y y la altura (z), de ahí el nombre de coordenada cilíndrica. Las coordenadas en polares (r, θ).

2.2.3 Coordenadas Esféricas en $\mathbf{R^3}$

En las coordenadas esféricas, tomando un punto (x, y, z), las coordenadas esfericas son (ρ, φ, θ) donde

$$\rho = \text{distancia del punto al origen} = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \text{ángulo que debe moverse el eje verical para llegar al punto} \in (0, \pi)$$

$$\theta = \text{ángulo que se debe mover el eje real positivo hasta alcanzar el punto (x,y,0)}$$

De aquí se deduce que:

$$z = \rho \cdot cos(\varphi)$$

$$sin(\varphi) = \frac{r}{\rho} \qquad \text{(Siendo r la distancia de la proyección en el plano (x,y))}$$

$$x = \rho \cdot sin(\varphi) \cdot cos(\theta)$$

$$y = \rho \cdot sin(\varphi) \cdot sin(\theta)$$

En estas coordenadas, se toma una esfera de radio ρ y luego se indica en que posición de la superficie de esa esfera se encuentra el punto, de ahí el nombre de coordenadas esféricas.

3 Topología

3.1 Interior de un Conjunto

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, denotamos como $B(x_0, r)$ = puntos x de $\mathbb{R}^n$ a distancia de x_0 menor que r = $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$. Esto se llama **bola abierta** centrada a x_0 y de radio r, ya que los puntos de la superficie de la bola no se consideran dentro.

Siendo $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos que A^o, el interior del conjunto A es $x \in \mathbb{R}^n$ tal que exista un $r > 0$ de forma que $B(x, r) \subseteq A$

3.2 Conjunto abierto

Un conjunto A se considera un conjunto abierto si $A = A^o$. Se puede pensar como aquellos conjuntos que no incluyen su frontera. Por ejemplo, si tuvieramos un conjunto $A = (a, b)$, este conjunto sería abierto ya que $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}$ tal que hay un intervalo centrado a x contenido dentro de $(a, b)\}$

3.3 Conjunto cerrado

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos la **adherencia del conjunto A** como $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0\}$. Por este motivo sabemos con seguridad que $A \subseteq \overline{A}$. Por ejemplo, si se tuviera un intervalo (a, b), adherencia de este intervalo sería el intervalo $[a, b]$.

Observamos que si $x \notin [a, b]$ entonces $x \notin \overline{(a, b)}$, pues para radios más pequeños que la distancia entre x y (a, b), la intersección es $\emptyset$.

Decimos que un conjunto es un **conjunto cerrado** si $\overline{A} = A$. De esta forma nos encontramos con un teorema:

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces A es abierto $\Leftrightarrow$ su complementario es cerrado

3.4 Frontera de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos la frontera de A como $fr(A) = \overline{A} \backslash A^o$, es decir la parte que contiene $\overline{A}$ pero no A^o

3.5 Conjunto acotado y conjunto compacto

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se considera **acotado** si existe $M > 0$ tal que $A \subseteq$ Bola centrada al origen de radio M. Por ejemplo, una recta a en $\mathbb{R}^2$ no está acotado, pero un cubo en $\mathbb{R}^3$ sí.

4 Límites de funciones y Continuidad

En este apartado, estudiaremos funciones que vayan desde $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$:

$$f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \to (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$$

Por ejemplo: una función que iría de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ es $f(x, y) = cos(x + y)e^{-x}$, mientras que una función que vaya desde $\mathbb{R}$ hasta $\mathbb{R}^3$ podría ser $f(t) = (e^{-t}, cos(t), sin(t))$. Cuando trabajamos con funciones que trabajan con más de una variable llega un punto en el que no pueden representarse de forma sencilla, ya que las dimensiones necesarias para representar la función serían $n + m$, por lo que primero definiremos el concepto de gráfico.

Definición: Un **gráfico** se define como

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dominio\ de\ f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \text{tiene } n + m \text{ componentes}$$

Esta x que aparece en la definición de gráfico no se refiere a la componente x, sino al vector del espacio $\mathbb{R}^n$ que se introduce en la función (Puede escribirse si resulta más fácil como $\vec{x}$). Por ejemplo, si tuvieramos que escribir el gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sería:

$$Graf(f) = \{(x, y, x^2 + y^2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Tras esto será necesario definir el concepto de conjunto de nivel:

Definición: Un **conjunto de nivel** o **nivel c** de una función f es el conjunto de $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(\vec{x}) = c\}$

Aplicando este concepto a la función anterior, un conjunto de nivel c sería:

$$= \{(x,y) : x^2 + y^2 = c\} = \{(x,y) : dist((x,y),(0,0)) = \sqrt{c}\} = \text{circunferencia de centro } (0,0) \text{ y radio } \sqrt{c}$$

4.1 Límite de una sucesión en un espacio n-dimensional

Sea $\{x_k\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$, definimos su límite como:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = L \text{ si para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } k_0 = k_0(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } \|x_k - L\| = dist(x_k, L) < \varepsilon \tag{8}$$

Es decir, x_k pertenece a una bola de centro L y radio ε si $k \geq k_0$

4.2 Límte de una función en n dimensiones

El límite de una función que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ lo definimos como:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(x) = L \text{ si para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } \|f(\vec{x}) - L\| < \varepsilon \ si \ 0 < \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta \tag{9}$$

Es decir, se cumple el límite si cuando x se acerca a x_0, $f(\vec{x})$ se acerca a L. Por ejemplo, tomando la función $f(x,y,z) = (e^{-y-z}x^2, sin(xy) + z^2 + 1)$, si cogieramos el límite cuando (x,y,z) tiende a $(0,0,0)$, obtendríamos como resultado $L = (0,1)$.

Estos límites presentan unas propiedades similares a los límites en una variable. Si tomaramos dos límites $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, las propiedades serían:

A El límite de la suma de funciones es la suma de los límites

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

B El límtie del producto de funciones es el producto de los límties

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2$$

C Si $L_2 \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

D **Límites direccionales:** Sea f una función que va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(t, mt) = L \text{ con L independiente de } m$$

Sin embargo, esta dependencia no ocurre en el sentido contrario, solo funciona de esta forma.

Si aplicamos los limites direccionales a un ejemplo quedaría de la siguiente forma:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + e^x y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$$

Aplicando los límites direccionales:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} f(t, mt) &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 + e^t (mt)^2}{t^2 + (mt)^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t + e^t m^2}{1 + m^2} \\
&= \frac{m^2}{1 + m^2} \to \text{Depende de m}
\end{aligned} \tag{10}$$

Por lo tanto, el límite original no existe. Sin embargo, podemos encontrarnos con casos en los que $\lim_{t\to 0} f(t, mt)$ exista y no sea dependiente de m. En esos casos, no podemos decir nada, pues es posible que el límite original no exista aún así.

4.3 Continuidad de una función en n dimensiones

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in U$. **Definición:** Decimos que f es continua en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ya que $x_0 \in U_{abierto}$, entonces existe una bola centrada en x_0 contenida en U y por tanto f está definida en el borde de x_0.

- Si tenemos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ donde cada $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces, diremos que f es continua en x_0 si todas las f_j son continuas en x_0
- Decimos que f es continua en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si es continua en todos los puntos de U.

4.3.1 Propiedades de la continuidad

Sean $f, g : U \to \mathbb{R}$ continuas en $x_0 \in U$

A Entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_0

B Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0

C Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en el punto $f(x_0)$, entonces $h \circ f$ es continua en x_0

Es importante tener en cuenta que la continuidad es una propiedad local, se observa un punto x_0 y sus alrededores pero no se observa toda la función. Para poder observar la continuidad en todo el espacio tendremos que hacernos valer de las propiedades mencionadas anteriormente. Por ejemplo, pongamos que tenemos la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) sin(\dfrac{1}{x^2 + y^2}) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{11}$$

De esta ecuación distinguimos dos casos:

- Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, f es continua en (x_0, y_0) ya que es producto, composición y división de funciones continuas con denominador distinto de 0 en el punto (x_0, y_0)

- ¿f es continua en $(0,0)$? $\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)sin(\frac{1}{x^2+y^2}) = 0$$

Esto se cumple empleando el teorema del sandwich, ya que como $|sin(t)| \leq 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \left|(x^2+y^2)sin(\frac{1}{x^2+y^2})\right| \leq \left|x^2+y^2\right| \to 0$$

Luego es continua.

4.4 Teorema de Weierstrass

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f tiene un máximo y un mínimo en K, es decir

$$\exists x_{MAX} \in K \; y \; x_{MIN} \in K \text{ tal que } f(x_{MIN}) \leq f(x) \leq f(x_{MAX}) \; \forall x \in K \tag{12}$$

4.5 Propiedad Útil: Desigualdad de la suma de cuadrados

Una propiedad que puede resultar muy útil a la hora de realizar límites es la siguiente:

$$x^2+y^2 \geq 2\,|x| \cdot |y| \tag{13}$$

Esta propiedad se deduce de la desigualdad entre la media aritmética, obtenida a partir de la suma de todos los términos dividido entre el número de términos sumados, y la media geométrica, obtenida a base de multiplicar todos los términos y hacer la raiz enésima siendo n el número de términos. Si tomamos ambas medias, la media aritmética siempre será más grande que la geométrica, de ahí obtenemos esta desigualdad.

5 Diferenciabilidad

Pongamos que tenemos un $U \in \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$. Definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot e_i) - f(a)}{h} \text{ (si existe)} \equiv \tag{14}$$

Donde:

$$e_i = (0,...,0,\overbrace{1}^{i},0,...,0)$$

De esta forma, todas las variables diferentes se mantienen fijas y se deriva respecto a x_i

Ejemplo:

$$f(x,y,z) = e^x cos(y) - sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = cos(y)\cdot e^x \text{ (Aquí cos(y) actúa como constante)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cdot (-sin(y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -cos(z)$$

5.1 Continuidad en derivadas parciales

Hay funciones tales que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existen para todo i pero f no es continua. Por ejemplo:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{15}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existen para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ya que pueden calcularse todos los valores en los que $x_0\neq 0$ y $y_0\neq 0$, y para los casos en los que $x_0=0$ o $y_0=0$ da 0.

Sin embargo, f no es continua en $(0,0)$, ya que el límite cuando (x,y) tiende a 0 no existe.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to mx}} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}\to \text{Depende de la recta}$$

NOTACIÓN:

$$\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \tag{16}$$

Recordemos que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}$, f es derivable en el punto a $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+f'(a)h)}{h}=0 \xLeftrightarrow{x=a+h} \lim_{x\to a}\frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{x-a}=0$$

Definición: Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto, $a\in U$ y $f:U\to\mathbb{R}$. Suponemos que $\nabla f(a)$ existe. Decimos que f es diferenciable en el punto a si:

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-(f(a)+\nabla f(a)\cdot(x-a))|}{\|x-a\|}=0 \tag{17}$$

Observemos que $x_{n+1}-f(a)=\nabla f(a)\cdot(x-a)$ es el plano tangente a la gráfica en el punto $(x,f(a))$.
Propuesta: Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en el punto a.
Demostración: Utilizando Cauchy-Schwartz:

$$|\nabla f(a)\cdot(x-a)|\leq\|\nabla f(a)\|\cdot\|x-a\|$$

Entonces:

$$\frac{|\nabla f(a)\cdot(x-a))|}{\|x-a\|}\leq|\nabla f(a)|$$

Como f es diferenciable en el punto a:

$$\frac{|f(x)-f(a)|}{\|x-a\|}\leq\|\nabla f(a)\|+\varepsilon \text{ si } \|x-a\| \text{ es muy pequeño}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to a}|f(x)-f(a)|=0$$

Y eso implica que f es continua en el punto a.
Propuesta: Sean f,g funciones diferenciables en el punto a entonces:

- $f\pm g$ es diferenciable en a
- $f\cdot g$ es diferenciable en a
- Si $g(a)\neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en a

TEOREMA:

Sea f una función tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ son funciones continuas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $i = 1, ..., n$, entonces f es diferenciable en U, es decir, f es diferenciable en todos los puntos del abierto U

Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$. Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{v}\| = 1$. Definimos:

$$D_{\vec{v}} f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h} \tag{18}$$

Esta nomenclatura corresponde a la derivada en la dirección $\vec{v}$.

Propuesta:

$$D_{\vec{v}} f(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{v}$$

Demostración: Sea $\vec{e_i} = (0, 0, ..., 0, \overbrace{1}^{i}, 0, ..., 0, 0), i = 1, ..., n$, tenemos:

$$\vec{v} \equiv \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e_i}$$

$$\frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h} = \frac{f(a + \sum_{i=1}^{n} h v_i \vec{e_i}) - f(a)}{h} (n = 2)$$

$$= \frac{f(a + hv_1\vec{e_1} + hv_2\vec{e_2}) - f(a + hv_1\vec{e_1})}{h} + \frac{f(a + hv_1\vec{e_1}) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{f(a + hv_1\vec{e_1} + hv_2\vec{e_2}) - f(a + hv_1\vec{e_1})}{hv_2} \cdot v_2 + \frac{f(a + hv_1\vec{e_1}) - f(a)}{hv_1} \cdot v_1$$

Cuando h tiende a 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot v_2 = \nabla f(a) \cdot \vec{v}$$

Corolario:

A

$$|D_{\vec{v}} f(a)| \leq \|\nabla f(a) \cdot \vec{v}\| \,;\ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{v}\| = 1$$

B La dirección $\vec{v}$ de máximo crecimiento (decrecimiento) de la función f en el punto a es $\vec{v} = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ $(\vec{v} = -\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|})$

5.2 Funciones que devuelven un resultado en m dimensiones

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y consideramos $f : U \to \mathbb{R}^m$. $\mathbb{R}^n \ni \vec{x} \to f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x}))$. Diremos que f es diferenciable en el punto a si $f_a, f_2, ..., f_m$ son diferenciables en el punto a.

$$(\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{|f_k(x) - f(a) - \nabla f_k(a) \cdot (x - a)|}{\|x - a\|} = 0; k = 1, ..., m \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - Df(a) \cdot (x - a)|}{\|x - a\|} = 0$$

$Df(a)$ corresponde a la **matriz diferencial** de f. Esta matriz posee los resultados de las derivadas parciales de cada función (filas) y cada variable(columnas):

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_3}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \tag{19}$$

Regla de la Cadena: Sea $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$. Sea $a \in U$ y suponiendo que f es diferenciable en el punto a y g es derivable en el punto $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en el punto a y:

$$D(g \circ f)(a) = D(g)(f(a)) \cdot D(f)(a)$$

6 Curvas y Superficies

Una curva γ en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua.

$$t \to \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$$

Ejemplo:

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$$
$$t \to (Acos(t), Bsin(t))$$

Esta es una curva en $\mathbb{R}^2$ que corresponderá a una elipse. El **vector tangente** de una curva γ en un punto t es aquel vector con la misma pendiente que la curva γ en ese punto y que parte de $\gamma(t)$ en dirección b, pues siempre tiene que ir en el sentido de la curva. Para hallar este vector observaremos $\gamma(t+h)$. Usando este nuevo punto y el punto original definiremos el vector como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), ..., \gamma_n'(t))$$

Aplicando esto a nuestro ejemplo anterior:

$$\gamma'(t) = (-Asin(t), Bcos(t)) \Rightarrow \gamma'(\pi/4) = (\frac{-A\sqrt{2}}{2}, \frac{B\sqrt{2}}{2})$$

Este sería el vector tangente a la elipse en el punto $\gamma(\pi/4)$

6.1 Longitud de una curva

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, entonces $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$. Luego:

$$\text{Longitud de la poligonal} = \sum_{i=1}^{N} \text{Longitud del segmento entre } \gamma(t_i) \text{ y } \gamma(t_{i-1})$$

Para hallar la distancia de cada segmento podemos usar pitágoras, pues usando cada una de las componentes nos queda un triángulo rectángulo:

$$\gamma(t_{i-1}) = (\gamma_1(t_{i-1}), \gamma_2(t_{i-1}))\ ;\ \gamma(t_i) = (\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i))$$
$$h^2 = c_x^2 + c_y^2\ ;\ c_x = \gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}), c_y = \gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})$$

Sabiendo esto:

$$\begin{aligned}
\text{Longitud de la poligonal} &= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))^2} && (20)\\
&\simeq \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\gamma_1'(t_i)^2(t_i - t_{i-1})^2 + \gamma_2'(t_i)^2(t_i - t_{i-1})^2} && (21)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\gamma_1'(t_i)^2 + \gamma_2'(t_i)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) && (22)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\|\gamma'(t_i)\right\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \to \text{si } n \text{ tiende a infinito} \simeq \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt && (23)
\end{aligned}$$

6.2 Superficies en 3 dimensiones

Una superficie en $\mathbb{R}^3$ es $f(x, y, z) = \mathcal{C}$ donde f es una función continua y $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$. Por ejemplo:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

Esta superficie es una elipsoide. Efectivamente, si $z = cte.$ obtenemos $x^2 + 2y^2 + 3\mathcal{C}^2 = 6$, es decir, $x^2 + 2y^2 = 6 - 3\mathcal{C}^2$

Observación: El vector normal a la superficie $f(x, y, z) = \mathcal{C}$ en el punto (x, y, z) es $\nabla f(x, y, z)$

¿Por qué? Śea γ una curva contenida en la superficie. Tenemos $f(\gamma(t)) = \mathcal{C}$

6.3 Polinomio de Taylor

Recordemos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el polinomio de Taylor de $f(x)$ en el punto x_0 y de grado n es:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{n'}(x_0)}{(x - x_0)^n}$$

Sea ahora $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, el polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto x_0 es:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j}) + \cdots +$$
$$\frac{1}{n!} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{3} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(x_0)(x_{i_1} - x_{0_{i_1}}) \cdots (x_{i_n} - x_{0_{i_n}}) \tag{24}$$

TEOREMA DE SCHWARZ: *Sea f una función con segundas derivadas continuas. Entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$$

6.3.1 Cálculo de Polinomios de Taylor utilizando polinomios de grado 1

Si nos pidiesen calcular el poliomio de taylor de una función $f(x, y, z) = \dfrac{1}{1 - xyz}$ en el punto $(0, 0, 0)$ y grado 8 podríamos emplear un polinomio de taylor de grado 1. Sabemos que:

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n;\ t \in (-1, 1)$$

Luego si $t = xyz$, podríamos hallar el polinomio de Taylor facilmente. Lo mismo ocurre con la función $g(x, y) = e^x \cdot sin(y)$. En este caso podemos sacar facilmente el polinomio de taylor de ambas funciones por separado (e^x y $sin(y)$) por lo que luego solo haría falta multiplicar ambos polinomios.

TEOREMA DE TAYLOR: *Sea P_k el polinomio de taylor de grado k de la función f en el punto a entonces:*

$$f(x) = P_k(x) + O(\|x - a\|^{k+1})$$

Es decir:

$$|f(x) - P_k(x)| \leq \mathcal{C} \|x - a\|^k + 1;\ \text{Para alguna constante } \mathcal{C} > 0$$

6.3.2 Cálculo de Polinomios de Taylor utilizando polinomios de grado 2

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$. El polinomio de Taylor de grado 2 en el punto a es:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j})$$

De aquí se puede considerar dos partes. El primer sumatorio, que corresponde al gradiente:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i}) = \nabla f(a) \cdot (x - a)$$

Y el segundo sumatorio, que puede expresarse en forma de matriz como ya hemos visto anteriormente:

$$\text{Segundo Sumatorio} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_n - a_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_n)^2}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

Esta matriz formada por las derivadas segundas es la matriz Hessiana ($Hess\ f(a)$)