Teoría de Probabilidad. 1º de Carrera. Tema 2: Variables Aleatorias

Índice

1 Introducción **2**

2 Como hallar variables aleatorias **3**

2.1 Operaciones . . . 3

2.2 Sucesiones . . . 3

3 Función de distribución de una variable aleatoria **3**

3.1 Propiedades . . . 3

4 Variables aleatorias discretas **4**

4.1 Función de probabilidad . . . 4

4.2 Ejemplos . . . 4

1 Introducción

El objetivo de la propiedad, como hemos visto en el apartado anterior, busca estudiar los fenómenos aleatorios que resultan de un experimento. Sin embargo, muchas veces no nos interesan los restultados en si, sino una cantidad que nos permita extraer información de estos valores. Pongamos que estamos jugando a un juego de azar. No nos interesan tanto los resultados del juego como el beneficio o la pérdida que se pueda tener.

$$\Omega = \{\text{Resultado del juego}\}$$

Nos interesa:

$$\Omega(resultado) \to \mathbb{R}(ganador)$$

Por ejemplo, pongamos que jugamos con un dado trucado. Lo lanzamos muchas veces, pero el que anota el resultado solo comprueba si el resultado es par o impar. Los resultados posibles de este experimento serán $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Digamos que el suceso $A =$ "par".

- Obtenemos como resultado:
$$\mathbb{P}(A) \approx \frac{7}{10}$$
- Información: $\sigma - algebra$
$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$$
- Observación: no podemos calcular $\mathbb{P}(1)$
- P queda determinada por $\mathbb{P}(A) \approx \frac{7}{10}$
- Apuesta: Se gana 10 euros si sale un **5 o 6**. Se pierden 2 euros si sale cualquier otro número.
- Aplicación:
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$X(5) = X(6) = 10 \text{ €}; X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = -2 \text{ €}$$

En nuestro modelo $(\Omega, (A), \mathbb{P})$, **NO** podemos calcular la probabilidad de ganar 10€:

$$\mathbb{P}(\text{ganar } 10 \text{ €}) = \mathbb{P}(\{w \in \Omega, X(\omega) = 10\}) = \mathbb{P}(\{5, 6\}) \ \to \text{No pertenece a } \mathcal{A}$$

DEFINICIÓN: dado $(\Omega, (A), \mathbb{P})$, diremos que una aplicación

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

es una **variable aleatoria** si, para todo intervalo $B \in \mathbb{R}$ (o semirecta) tenemos que:

$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

En el caso mencionado anteriormente, X no es una variable aleatoria, ya que el resultado sería $\{5, 6\}$, que no pertenece a $\mathcal{A}$
Observaciones:

1. En la definición de variable aleatoria no interviene $\mathbb{P}$, pese a que la motivación es calcular:
$$\mathbb{P}(\underbrace{\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}}_{X^{-1}(B)}) = \mathbb{P}(X \in B)$$
2. Notación: Si $B = \{a\}$, entonces:
$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \in \{a\}) = \mathbb{P}(X = a)$$
o también:
$$a \leq b : B = [a, b] : \mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$
3. Si $\mathcal{A} = P(\Omega)$, entonces toda aplicación $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es variable aleatoria.

2 Como hallar variables aleatorias

2.1 Operaciones

Sean X, Y variables aleatorias y $a \in \mathbb{R}$ entonces son variables aleatorias:

- $X + Y$
- $X \cdot Y$
- $a \cdot X$
- $absX$
- X^a
- Si $X(\omega) \neq 0; \forall \omega \in \Omega$, entonces $\dfrac{1}{X}$ también es una variable aleatoria.

2.2 Sucesiones

Tomemos $\{X_n, n \geq 1\}$ como una sucesión de variables aleatorias tales que $\forall \omega \in \Omega$, la sucesión

$$\{X_n(\omega) \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$$

es convergente. En ese caso, definiremos

$$X(\omega) \coloneqq \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \in \mathbb{R}$$

Entonces, X es una variable aleatoria.

3 Función de distribución de una variable aleatoria

DEFINICIÓN: Sea X una variable aleatoria. La **función de distribución** de X es:

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$$x \to F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} = \mathbb{P}(\underbrace{\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}}_{\in \mathcal{A}}) \text{ donde } B = (-\infty, x]$$

3.1 Propiedades

1. F es no decreciente: $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
2. F es continua por la derecha y tiene límite por la izquierda en todos sus puntos (càdlàg *continu à droit, limit à gauche*).
3. $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$
4. F tiene como máximo un numero numerable de puntos de discontinuidad. Esto se debe a que la recta real se puede expresar como la unión de $\mathbb{Z}$ intervalos.
5. $$\mathbb{P}(s \leq X \leq t) = F(t) - F(s)$$
6. $$\mathbb{P}(X < x) = F(x^-) = \lim_{X \to x^-} F(X)$$
7. $$\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$$
   si F es discontinua en x:
   $$\mathbb{P}(X = x) > 0$$

4 Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria X es **discreta** si:

$$\exists S \subset R \text{ finito o numerable tal que } \mathbb{P}(X \in S) = 1$$

Siendo S el soporte de X. Suponemos que todo $x \in S$ cumple que $\mathbb{P}(X = a) > 0$. También:

$$S = \{x_i, i \in I\}; I \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

4.1 Función de probabilidad

$$p : S \to [0, 1]$$

$$x_i \to p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$$

En la notación de esta función normalmente se escribirá p_i para referirse a $p(x_i)$.
Observaciones:

A
$$\sum_{i \in I} p_i = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \in S) = 1$$

B $\forall B \subset \mathbb{R}$ intervalo/semirecta
$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{i \in I, x \in B} p_i$$

C La función de probabilidad de X permite calcular todas las probabilidades relacionadas con la variable aleatoria X y determina la **función de distribución**:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{i \in I, x_i \le x} pi$$

4.2 Ejemplos

1. Caso Degenerado:
$$X = a \Rightarrow S = \{a\} \text{ y } \mathbb{P}(X = a) = 1$$

2. Caso Bermoulli:

$$X = \{1, \text{ con probabilidad } p \in (0, 1) \text{ y } 0, \text{ con probabilidad } 1 - p \in (0, 1)\}$$

$$S = \{a\}; \mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

X tiene distribución Bermouilli de parámetro p:

$$X \sim B(p)$$