M1 MFA DS Université d'Angers – Optimisation non linéaire

Fiche de TP n°1

Dans ce TP et les suivants, x, X, XX représentent respectivement la valeur en un point, un vecteur ou les valeurs sur une grille. x représente dans ce TP une coordonnée d'un point (x, y) pour utiliser facilement la fonction `meshgrid`, dans les TP suivant nous utiliserons de préférence une notation vectorielle $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice 1 Courbes de niveau
Soit la fonction $f(x, y) = \sin^{10} x + \cos(x \times y) \cos(x)$.

1. Construire une fonction f renvoyant $f(x, y)$.
2. Construire une grille, XX, YY, 500×500 du pavé $[0, 5] \times [0, 5]$ à l'aide de la fonction `np.meshgrid`.
3. Définir un tableau ZZ contenant les évaluations de $f(XX, YY)$ pour les différentes valeurs (x, y) de la grille.
4. Construire une figure appelée contour représentant les courbes de niveau avec la fonction `plt.contour` en noir et blanc `colors='black'`.
5. Interpréter les commandes
   ```
   plt.clabel(contour,inline=True, fontsize=8)
   plt.imshow(Z, extent=[0, 5, 0, 5], origin="lower",cmap="RdGy", alpha=0.5)
   plt.colorbar()
   ```
6. La fonction `niveau(f,a,b,c,d)` suivante sera utilisée par la suite pour construire rapidement une courbe de niveau.

Exercice 2 Surface
Soit la fonction $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Construire une fonction f renvoyant $f(x, y)$. Construire les courbes de niveau sur le pavé $[-6, 6]^2$. Interpréter la commande et justifier le résultat obtenu :
   ```
   plt.axis('equal')
   ```
2. Pour représenter une figure en 3D on importera la fonction `mplot3d` du module `mpl_oolkits`. On finira alors la figure 3D par :
   ```
   ax=plt.axes(projection='3d')
   ```
   Remarque : Pour exploiter au mieux la figure, utiliser une fenêtre graphique (Tools, Preferences, Ipython console, graphics, Backend Automatics).
   Construire une grille XX, YY sur le pavé $[-6, 6]^2$ et l'évaluer, ZZ. Représenter la surface obtenue :
   ```
   ax.plot_wireframe(XX, YY, ZZ, linewidth=0.5,color="grey")
   ```
3. Interpréter les commandes suivantes
   ```
   ax=plt.axes(projection='3d')
   ax.plot_surface(XX, YY, ZZ, cmap="viridis")
   ax.set_xlabel('x');ax.set_ylabel('y');ax.set_zlabel('z')
   ax.contour(XX, YY, ZZ, zdir="x", offset=+7)
   ax.contour(XX, YY, ZZ, zdir="y", offset=-7)
   ax.contour(XX, YY, ZZ, zdir="z", offset=+1)
   ```
4. La fonction `surface(f,a,b,c,d)` sera utilisée par la suite pour construire la surface définie par $z = f(x, y)$ sur le pavé $[a, b] \times [c, d]$.

Exercice 3 Courbes et points en 3D

On définit une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ par $x = \cos(z)$ et $y = \sin(z)$.

1. Calculer x, y pour 1000 valeurs de z variant de 0 à 15.
2. Représenter la courbe obtenue avec `ax.plot3D(X,Y,Z, "grey")`.
3. Simuler $n = 100$ points $(x_i, y_i) = (\cos(z_i) + \epsilon_i, \sin(z_i) + \epsilon_i')$ avec $z_1, \ldots, z_{100}$ pris uniformément sur $[0, 15]$ et ϵ_i, ϵ_i suivant des lois normales indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 0.01)$ en utilisant `np.random.randn(n)`.
4. Représenter sur une même figure la courbe paramétrée et les points simulés avec la fonction `ax.scatter3D(X,Y,Z)`

Exercice 4 Plan tangent,

Soit la fonction $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

1. Justifier que la fonction est de classe C^2.
2. Construire les courbes de niveau.
3. Tracer la courbe de niveau $f(x, y) = \ln(2)$ en rouge,
   `contour=plt.contour(XX,YY,ZZ,levels=[np.log(2)],colors='red')`
   puis la tangente à cette courbe en $(a, a) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
   `plt.arrow(a,a,a/2,-a/2,width = 0.005,head_width=0.05, head_length=0.05)`
   et enfin le gradient en (a, a).
4. Construire la surface sur le pavé $[-1.5, 1.5]^2$. Tracer la courbe de niveau $f(x, y) = \ln 2$ et le plan tangent en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
   `def g(x,y): return 0.5**0.5*((x-0.5**0.5)+(y-0.5**0.5))+np.log(2)`
   `ax.plot_wireframe(XX, YY, g(XX,YY),linewidth=0.5,color="red")`
5. Construire le plan tangent en $(0, 0)$.
6. Construire la surface définie par le développement limité d'ordre 2 de f en $(0, 0)$.
7. Qu'en conclure pour le point $(0, 0)$.

Exercice 5 Fonctions quadratiques

Les formes quadratiques sont des fonctions de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$$

On donne 4 formes définies par A, reconnaître la forme définie positive, positive, définie négative, ni ni.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$