第一讲 赋范空间

如下空间系数域 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 本讲乃赋范线性空间之皮毛.

1 范数

定义 1.1. 设 E 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 设函数 $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ 满足如下三公理:

(1) *(正定性)* $\forall x \in E$, 有 $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) *(齐次性)* $\forall k \in \mathbb{F}$, $\forall x \in E$, 有 $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$;

(3) *(三角不等式)* $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, 有 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称 $\|\cdot\|$ 是 E 上的**范数**, 称 $(E, \|\cdot\|)$ 是**赋范线性空间**.

设函数 $p: E \to \mathbb{R}$ 未必满足条件: $p(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 但 p 满足范数定义 1.1 中的其余条件. 则称 p 是 E 上的**半范数**, 其有**半正定性**. 范数当然是半范数.

范数 $\|\cdot\|$ 导出 E 上的距离 $d(x,y) = \|x-y\|$. 据此可研究 E 的拓扑及收敛性、连续性等问题.

引理 1.1. 范数 $\|\cdot\|$ 是 *Lipschitz* 常数为 1 的函数.

证明. 据三角不等式, 得 $\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$, 进而 $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. 同理, $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$. 故

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

可见 $\|\cdot\|$ 是 Lipschitz 常数不超过 1 的函数. 又, $|\|x\| - \|0\|| = \|x-0\|$, 故常数为 1. □

易证如下引理.

引理 1.2. 设有 E 中的点列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. 又设有 $\mathbb{F}$ 中的点列 $\{k_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k_0$. 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n x_n = k_0 x_0$.

引理 1.2 说明 E 中的加与数乘为连续运算.

若 F 是 $(E, \|\cdot\|)$ 的线性子空间, 则 $(F, \|\cdot\|)$ 亦是赋范线性空间. 此时简称 F 是 E 的子空间, F 的范数继承自 E. 据引理 1.2, 易证如下结论.

引理 1.3. 若 F 是 E 的线性子空间, 则 F 的闭包亦然.

定义 1.2. 若 $(E, \|\cdot\|)$ 是完备度量空间, 则称其为 ***Banach* 空间**.

例 1.1. 记 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上 $\mathbb{F}$ 值连续函数构成的线性空间. 在其上定义范数为: $\forall f \in C[a,b]$, $\|f\| = \max\limits_{[a,b]}|f|$. 则易证 $C[a,b]$ 是可分 *Banach* 空间. 其完备性等价于定理: 一致收敛连续函数列的极限仍连续. 而可分性能以 *Weierstrass* 逼近定理证得: $[a,b]$ 上的连续函数可由多项式一致逼近, 进而由有理系数多项式一致逼近.

例 1.2. 设 $1 \le p < \infty$. 定义 $L^p[a,b]$ 上满足 $\int_{[a,b]} |f|^p < \infty$ 的 $\mathbb{F}$ 值 *Lebesgue* 可测函数 f 构成的线性空间. 须知, 如前所说, $L^p[a,b]$ 中的元素是函数等价类. 两函数在 $L^p[a,b]$ 相等当且仅当两者几乎处处相等. 定义范数

$$\|f\| = \left(\int_{[a,b]} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

则可证 $L^p[a,b]$ 是 *Banach* 空间, 证明今后再说. 据 *Lusin* 定理, $L^p[a,b]$ 中的元素可由连续函数逼近, 进而由有理系数多项式逼近. 故 $L^p[a,b]$ 可分.

例 1.3. 设 f 是 $[a,b]$ 上的 *Lebesgue* 可测函数. 定义 f 的**本质上确界**为

$$\mathrm{esssup} f = \inf_{E \subseteq [a,b], |E|=0} \sup_{[a,b] \setminus E} f,$$

此处 $|E|$ 是 E 的 *Lebesgue* 测度. 类似可定义 f 的**本质下确界** $\mathrm{essinf} f$. 若 $\mathrm{esssup}|f| < \infty$, 则称 f **本质有界**.

定义 $L^\infty[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上本质有界的 *Lebesgue* 可测函数等价类构成的线性空间, 等价关系也是几乎处处相等. 定义其上的范数为 $\|f\| = \mathrm{esssup}|f|$. 易见, $L^\infty[a,b]$ 是 *Banach* 空间, 且 $C[a,b]$ 是 $L^\infty[a,b]$ 的闭子空间. 此时 $C[a,b]$ 本身的范数正从 $L^\infty[a,b]$ 而得.

须知, $L^\infty[a,b]$ 不可分. 设 $x \in [a,b]$, 定义 $\chi_{[a,x]}$ 为 $[a,x]$ 的特征函数. 则 $L^\infty[a,b]$ 含不可数子集 $\{\chi_{[a,x]} \mid x \in [a,b]\}$, 且该子集中的元素两两距离为 1.

例 1.4. 设 $1 \le p < \infty$. 定义 l^p 为满足如下条件的 $\mathbb{F}$ 值序列构成的线性空间:

$$l^p = \left\{ (a_1, a_2, \cdots) \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

定义其上的范数为

$$\|(a_1, a_2, \cdots)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right)^{\frac{1}{p}}.$$

与赋 p-范数的 $\mathbb{F}^n$ 类似, 易证此处 $\|\cdot\|$ 是范数且 l^p 是可分 *Banach* 空间, 证明留为习题.

例 1.5. 定义 l^∞ 为有界的 $\mathbb{F}$ 序列构成的空间. 在其上定义范数.

$$\|(a_1, a_2, \cdots)\| = \sup_n |a_n|.$$

易证 l^∞ 是 *Banach* 空间. 之前已说 l^∞ 不可分.

例 1.6. 定义 $c_0 \subset l^\infty$ 为

$$c_0 = \left\{(a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty \middle| \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}.$$

显然, c_0 是 l^∞ 的子空间. 易证其甚至为闭子空间, 故为 *Banach* 空间.

2 连续映射

今研究线性映射—亦称之为**线性算子**—的连续性. 设 E 是赋范线性空间, $x \in E$, $r > 0$. 记

$$B(x,r) = \{y \in E \mid \|x - y\| < r\}$$

为 E 中以 x 为心, r 为半径, 的开球. 为明示其所在空间, 亦记为 $B_E(x,r)$. 易证其闭包为

$$\overline{B(x,r)} = \{y \in E \mid \|x - y\| \le r\},$$

即为同心同半径的闭球. (须知, 一般度量空间中, 上述等号须改为 "$\subseteq$".)

引理 2.1. 设 E 与 F 是赋范线性空间, $T : E \to F$ 是线性映射. 则如下论断等价:

(1) T 连续;

(2) T 在 $0 \in E$ 处连续;

(3) $\exists r_1, r_2 > 0$, 使得 $T(B_E(0,r_1)) \subseteq B_F(0,r_2)$;

(4) $\exists L \ge 0$, $\forall x \in E$, 有 $\|Tx\| \le L\|x\|$;

(5) L 是 *Lipschitz* 连续.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 平凡. (2) $\Rightarrow$ (3) 据连续之定义.

(3) $\Rightarrow$ (4): 不妨设 $x \neq 0$. 取 $r_3 \in (0, r_1)$, 则 $\overline{B_E(0,r_3)} \subseteq B_E(0,r_1)$, 进而

$$T\left(\overline{B_E(0,r_3)}\right) \subseteq T(B_E(0,r_1)) \subseteq B_F(0,r_2).$$

令 $L = r_2 r_3^{-1}$, 则 $L > 0$. 据 T 线性,

$$T\left(\overline{B_E(0,1)}\right) = T\left(r_3^{-1}\overline{B_E(0,r_3)}\right) = r_3^{-1}T\left(\overline{B_E(0,r_3)}\right) \subseteq r_3^{-1}B_F(0,r_2) = B_F(0,L).$$

又, $\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B_E(0,1)}$, 故 $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \le L$, 亦即 $\|Tx\| \le L\|x\|$.

(4) $\Rightarrow$ (5): $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, 据 T 线性, 得

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \le L\|x - y\|.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) 平凡. □

注 2.1. 易证: 可将引理 *2.1* 之 *(2)* 改为 "$\exists x_0 \in E$, T 在 x_0 处连续". 证明留为习题.

注 2.2. *引理 2.1 之 (3) 乃常用几何描述. 若将其中开球 $B_E(0,r_1)$ 或 $B_F(0,r_2)$ 换为闭球, 无质变.*

自然希望引理 2.1 之 (4) 的 L 越小越好. 想当然, 此最优常数应是 $L_{\text{opt}} = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$, 但如此算法忽略了重要特例—$E=0$. 两全其美之算法则是 $L_{\text{opt}} = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|$. 当 $E=0$ 时, 有 $L_{\text{opt}}=0$. 如下定义水到渠成.

定义 2.1. *设 $T:E\to F$ 是赋范线性空间的线性映射. 定义 T 的***范数***为 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|$.*

作为特例, 若 $f:E\to\mathbb{F}$ 是连续线性泛函, 则约定取 $\mathbb{F}$ 上的模为范数, 因而 $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}|f(x)|$.

引理 2.2. *设 $T:E\to F$ 是连续线性映射. 则 $\forall x\in E$, 有 $\|Tx\|\leq\|T\|\cdot\|x\|$, 且 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|<1}\|Tx\|$. 而当 $E\neq 0$ 时, 又有*

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

正因 T 连续等价于 $\|Tx\|\leq L\|x\|$, 故亦称线性连续映射为线性**有界映射**. 易得如下引理.

引理 2.3. *如下映射皆为从 E 到 F 的线性映射. 则*

(1) $\|T\|\geq 0$, 且 $T=0$ 当且仅当 $\|T\|=0$;

(2) 若 T 有界, $k\in\mathbb{F}$, 则 kT 有界, 且 $\|kT\| = |k|\cdot\|T\|$.

(3) 若 T_1 与 T_2 有界, 则 T_1+T_2 亦然, 且 $\|T_1+T_2\|\leq\|T_1\|+\|T_2\|$.

引理 2.4. *设 $T:E\to F$ 与 $S:F\to G$ 皆线性有界, 则 $ST:E\to G$ 亦然, 且 $\|ST\|\leq\|S\|\cdot\|T\|$.*

下一讲将证明: 若 $\dim E$ 有限, 则以 E 为定义域的线性映射皆有界. 而若 $\dim E$ 无限, 则当然有以其为定义域的无界线性映射甚至泛函.

例 2.1. *设 E 是无限维赋范线性空间. 取 E 的 Hamel 基 X, 再取 X 的可数子集 $\{e_n \mid n\in\mathbb{N}^+\}$. 进而可取 E 上线性泛函满足 $\forall n$, $f(e_n)=n\|e_n\|$. 则 f 无界.*

显然, 单点集是度量空间中的闭集. 而 $\ker T = T^{-1}(0)$, 故有如下结论.

引理 2.5. *设 $T:E\to F$ 线性有界, 则 $\ker T$ 是 E 的闭子空间.*

问题 2.1. *反之, 若 $\ker T$ 闭, 则 $T:E\to F$ 是否有界?*

一般而言, 答案为否, 但下一讲将证明: 若 $\dim F$ 有限, 如 T 是泛函, 则答案为是.

问题 2.2. *若线性映射 $T:E\to F$ 有界, 则 $\mathrm{im}T$ 是否 F 的闭子空间?*

此答案为否. 最简之反例如下.

例 2.2. *设 E 是 F 的子空间, 且 E 不闭, 则含入映射 $\iota:E\to F$ 有界, 但 $\mathrm{im}\iota$ 不闭. 此例当然正确, 固然简单, 但显然粗暴. 其定义域不完备, 有寻衅滋事之嫌, 且非自然造化, 故说服力似弱. 且看下例.*

例 2.3. 含入映射 $T: C[a,b] \to L^p[a,b]$ 连续, 此处 $1 \le p < \infty$, 且两空间皆得赋默认的范数而成 *Banach* 空间. 已知 $\mathrm{im}T$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密. 若 $\mathrm{im}T$ 闭, 则 $\mathrm{im}T = L^p[a,b]$, 矛盾! 故 $\mathrm{im}T$ 不闭. 此例似浑然天成, 实为例 *2.2* 之改造: $\mathrm{im}T$ 在 $L^p[a,b]$ 中不闭, 自然不完备. 将其从 $L^p[a,b]$ 中取出, 改赋之更强范数, 则得 *Banach* 空间, 且从强范至弱范的含入又必然有界. 此手法有一般性.

在泛函分析中对映射的象取闭包是常态.

3 同构

定义 3.1. 设 E 与 F 是赋范空间, $T: E \to F$ 是线性双射. 若 T 与 T^{-1} 皆连续, 则称 T 为**同构**. 若 E 与 F 之间有同构映射, 则称 E 与 F 同构. 若再设上述 T 保距, 则称相应的概念为**等距同构**.

须知, 在赋范线性空间范畴中, 同构具代数与拓扑双重意义: **此处 T 不仅是线性空间的线性同构, 而且是度量空间的同胚.** 易证, 空间的同构关系是等价关系. 而同构映射保收敛列、Cauchy 列、开集、闭集等. 因之有诸多明显推论, 如完备性是空间的同构不变性, 在此不赘述.

设赋 E 两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 自然可考虑恒等映射 $I: (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ 是否同构? 故得如下定义.

定义 3.2. 设 E 有范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 且 $\exists C_1, C_2 > 0$, 使得 $\forall x \in E$, 有

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1.$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ **等价**.

引理 3.1. $I: (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ 是同构当且仅当 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

据此引理, 当然亦可据定义 3.2 直接算, 知范数之"等价"恰如其名, 确是逻辑上的等价关系. 如下结论则用几何刻画此关系.

引理 3.2. 设 $0 \ne E$ 有范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 记 $S_1 = \{x \in E \mid \|x\|_1 = 1\}$ 为 E 关于 $\|\cdot\|_1$ 的单位球面. 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价当且仅当 $\|\cdot\|_2$ 在 S_1 上的上确界有限且下确界为正.

证明. 据定义 3.2, 两范数等价当且仅当: $\exists C_1, C_2 > 0$, 使得 $\forall x \ne 0$, 有

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1, \qquad \text{亦即} \qquad C_1 \le \left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 \le C_2.$$

而当 x 遍历 $E \setminus 0$ 时, $\frac{x}{\|x\|_1}$ 遍历 S_1. 故上述不等式又等价于

$$C_1 \le \inf_{S_1}\|\cdot\|_2 \le \sup_{S_1}\|\cdot\|_2 \le C_2.$$

因而存在如此 C_1 与 C_2 当且仅当: $\inf\limits_{S_1}\|\cdot\|_2 > 0$ 且 $\sup\limits_{S_1}\|\cdot\|_2 < \infty$. □

注 3.1. 据上述引理之证明可知, 定义 *3.2* 中 C_1 的最优值(亦即最大)为 $\inf\limits_{S_1}\|\cdot\|_2$, 而 C_2 的最优值(亦即最小)为 $\sup\limits_{S_1}\|\cdot\|_2$.

如前所述, 若空间改其范数为另一等价范数, 则收敛性、连续性等无质变. 仅举一例, 不赘述.

引理 3.3. *设 E 有等价范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$, F 有等价范数 $\|\cdot\|'_1$ 与 $\|\cdot\|'_2$. 则 $T:(E,\|\cdot\|_1)\to(F,\|\cdot\|'_1)$ 连续当且仅当 $T:(E,\|\cdot\|_2)\to(F,\|\cdot\|'_2)$ 连续.*

4 直和

设 E_1 与 E_2 分别有范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 在直和 $E_1\oplus E_2$ 上定义范数 $\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|_1+\|x_2\|_2$, 即得赋范线性空间范畴中的直和. 类似可定义多个空间的直和 $\bigoplus_{i=1}^n E_i$. 据2月16日补充题 #3, 得:

引理 4.1. *$E_1\oplus E_2$ 完备当且仅当 E_1 与 E_2 皆完备.*

记 $p_i:E_1\oplus E_2\to E_i$ 为坐标投影, $\iota_i:E_i\to E_1\oplus E_2$ 为坐标含入, 亦即 $\iota_1(x_1)=(x_1,0)$, $\iota_2(x_2)=(0,x_2)$.

引理 4.2. *ι_i 为保距线性映射; p_i 为有界线性映射, 且 $E_i\neq 0$ 时, 有 $\|p_i\|=1$.*

投影与含入的根本用处体现于如下简单结论.

引理 4.3. *(1) 线性映射 $\varphi:E_1\oplus E_2\to F$ 连续当且仅当 $\forall i$, $\varphi\iota_i$ 连续;*

(2) 映射(无须线性) $\phi:G\to E_1\oplus E_2$ 连续当且仅当 $\forall i$, $p_i\phi$ 连续.

设 E 有子空间 E_1 与 E_2 使得 $E=E_1+E_2$ 且 $E_1\cap E_2=0$. 此时可将 E_i 从 E 中取出, 不顾 E_1 与 E_2 之因缘, 而依上法作直和 $E_1\oplus E_2$, 此称之为两者的**外直和**. 另一面, E 自然可视为子空间 E_1 与 E_2 的直和, 两子空间在 E 中有位置关系, 称 E 是 E_1 与 E_2 的**内直和**. 在代数范畴中, 内外直和仅是概念有异, 实非本质不同. 而今赋范, 两者"位置"则有鲜明体现. 且来比较内外直和. 定义从外直和到内直和的加法映射 $A:E_1\oplus E_2\to E$ 为 $A(x,y)=x+y$.

引理 4.4. *$A:E_1\oplus E_2\to E$ 为线性双射, 且 $\|A\|\le 1$.*

问题 4.1. *$A:E_1\oplus E_2\to E$ 是否同构? 亦即 A^{-1} 是否连续?*

该问题答案为否. 读者或问: "为否又如何?" 于兹说一异象. 先看外直和. 在直和因子中分别取点列 $\{(x_n,0)\}\subset E_1\oplus 0$ 及 $\{(0,y_n)\}\subset 0\oplus E_2$. 则 $(x_n,0)$ 与 $(0,y_n)$ 的距离为

$$\|(x_n,0)-(0,y_n)\|=\|(x_n,-y_n)\|=\|x_n\|_E+\|y_n\|_E=\|(x_n,0)\|+\|(0,y_n)\|.$$

此处 $\|\cdot\|_E$ 是 E 中的范数. 若 $(x_n,0)$ 与 $(0,y_n)$ 的范数趋于无穷, 亦即与原点的距离趋于无穷, 则 $(x_n,0)$ 与 $(0,y_n)$ 的距离亦趋于无穷. 此事实合于我们对有限维空间的直观. 再用加法映射 A 将 $(x_n,0)$ 与 $(0,y_n)$ 搬至 E 中, 而得 $\{x_n\}\subset E_1$ 及 $\{y_n\}\subset E_2$. 景象是否如前? 易证(可作读者项目选题): 若 A 非同构, 则能找到点列 $\{x_n\}\subset E_1$ 及 $\{y_n\}\subset E_2$, 使得其范数趋于无穷, 但在 E 中的距离 $\|x_n-y_n\|_E$ 却趋于 0. 可谓: "青山隐隐孤舟微, 白鹤双飞忽相见." 该异象或富诗意, 实属病态, 因其与我们关于有限维空间的直观相违! 鉴于此, 有必要研究内外直和同构之条件.

记 $\tau_i : E_i \to E$ 为子空间含入. 据引理 4.3, A^{-1} 连续当且仅当 $\forall i$, p_iA^{-1} 连续, 进而当且仅当 $\forall i$, $P_i = \tau_i p_i A^{-1}$ 连续. 易见, $P_i : E \to E$ 正是关于 E 的内直和分解的幂等算子, $\mathrm{im} P_i = E_i$, $\ker P_i = E_{3-i}$ (参课件《线性代数选讲》习题 #5-7). 而 $P_i = I - P_{3-i}$, 故 P_i 连续当且仅当 P_{3-i} 连续. 至此得:

命题 4.5. *设 E 是 E_1 与 E_2 的内直和, $P_i : E \to E$ 为幂等算子, $\mathrm{im} P_i = E_i$, $\ker P_i = E_{3-i}$. 则如下论断等价:*

(1) 加法映射 $A : E_1 \oplus E_2 \to E$ 为同构;

(2) P_1 与 P_2 皆连续;

(3) P_1 或 P_2 连续.

若 P_{3-i} 连续, 则 $E_i = \ker P_{3-i}$ 是 E 的闭子空间. 故得 A 是同构的必要条件:

推论 4.6. *若 $A : E_1 \oplus E_2 \to E$ 为同构, 则 E_1 与 E_2 是 E 的闭子空间.*

当然, 此推论另有一证法或更快: 易见 $E_1 \oplus 0$ 是 $E_1 \oplus E_2$ 的闭子空间. 因同构保闭集, 故 $E_1 = A(E_1 \oplus 0)$ 是 E 的闭子空间.

至此读者或问: "若 E_1 与 E_2 皆是闭子空间, 则 A 必是同构否?" 答案仍为否. 此反例不难觅得, 可为读者项目选题. 但需温馨提醒: 两情形下无反例. 一则, E_1 或 E_2 是有限维, 证明需有限维空间之范数等价定理. 二则, E 完备, 证明需开映射定理, 其为 Banach 空间论三大基石之一.

如下可补性问题紧相关于问题 4.1.

问题 4.2. *设 E_1 是 E 的闭子空间, 有否 E 的子空间 E_2 使得加法映射 $A : E_1 \oplus E_2 \to E$ 为同构?*

显然, 若仅要求问题 4.2 中的 A 是线性空间之同构, 则必有相应的子空间 E_2 (参课件《线性代数选讲》引理 2.5), 此时称 E_2 是 E_1 的**代数补空间**. 而使本问题答案为是的 E_2 当然满足更强条件, 称其为 E_1 的**拓扑补空间**. 若 E_1 在 E 中的余维有限, 则本问题答案为是, 证明需有限维空间之范数等价定理. 若 E_1 是有限维, 答案亦为是, 证明需 Hahn-Banach 泛函延拓定理, 其为 Banach 空间论三大基石之首. 若 E 为 Banach 空间之特例—Hilbert 空间, 则答案显然为是, 取 E_2 为 E_1 的正交补即可. 正交补的存在性需著名的正交投影定理. 以上知识将在本课程中明示. 此外, 问题 4.2 之答案普遍为否. 初等反例可在 $E = l^1$ 中寻得, 然此例之构造或已超出本课程, 看官请见谅!

因问题 4.2 之答案一般为否, 故商空间益显其要!

5 商空间

设 E 是赋范空间, W 是 E 的**闭**子空间. 则代数商空间为 $E/W = \{x + W \mid x \in E\}$. 定义函数 $\|\cdot\|_{E/W} : E/W \to \mathbb{R}$ 为

$$\|x + W\|_{E/W} = \inf_{w \in W} \|x + w\|_E.$$

易见, $\|x+W\|_{E/W}$ 与 $x+W$ 的代表元选取无关, 故为良定义. 而 $\|x+W\|_{E/W}$ 的几何意义即为距离 $d(x,W)$. 因 W 闭, 此乃关键, 得 $\|\cdot\|_{E/W}$ 正定, 亦即 $\|x+W\|_{E/W}=0$ 当且仅当 $x+W=0$. 进而可证: $\|\cdot\|_{E/W}$ 是 E/W 上的范数, 证明留为习题. 称 $(E/W,\|\cdot\|_{E/W})$ 为赋范空间范畴中的**商空间**.

如下重要结论之证明留为习题.

引理 5.1. 设 W 是 E 的闭子空间. 若 E 完备, 则 E/W 亦然.

记 $\pi: E\to E/W$ 为商投射.

引理 5.2. *(1)* $\forall\epsilon>0$, $\forall y\in E/W$, $\exists x\in E$, 使得 $\pi x=y$ 且 $\|x\|\le(1+\epsilon)\|y\|$.

(2) $\forall r>0$, 有 $\pi(B_E(0,r))=B_{E/W}(0,r)$.

(3) $\|\pi\|=1$.

证明. (1). 若 $y=0$, 取 $x=0$ 即可. 下设 $y\neq0$. 取 $x_0\in E$ 使得 $\pi(x_0)=y$. 则 $\|y\|=\inf\limits_{w\in W}\|x_0+w\|$. 因而 $\exists w_0\in W$, 使得 $\|x_0+w_0\|\le(1+\epsilon)\|y\|$. 令 $x=x_0+w_0$ 即可.

(2). 设 $x\in E$, 则

$$\|\pi x\|=\inf_{w\in W}\|x+w\|\le\|x+0\|=\|x\|.$$

故 $\pi(B_E(0,r))\subseteq B_{E/W}(0,r)$. 再据 (1), 结论得证.

(3) 据 (2) 而得. □

引理 5.2 之 (2) 是很强结论. 其蕴含结论 (3), 但反之不然. 结论 (2) 其实说明: $\pi: E\to E/W$ 是开映射, 亦即 π 把 E 的开集映成 E/W 的开集. 熟悉点集拓扑的读者当知, 此表明 π 是拓扑意义下的商映射. 故赋范空间范畴中的商空间兼具代数与拓扑双义. 另一面, 不能将 (2) 中的开球换成闭球, 其实有 $\pi\left(\overline{B_E(0,r)}\right)\subseteq\overline{B_{E/W}(0,r)}$, 但不能保证反包含. 作为补偿, 有结论 (1), 其蕴含如下著名结论.

推论 5.3 (Riesz 引理)**.** 设 W 是 E 的真闭子空间. 则 $\forall\epsilon>0$, $\exists x\in E$ 使得 $\|x\|=1$ 且 $d(x,W)>1-\epsilon$.

证明. 因 W 闭, 知 E/W 是赋范空间. 又 $W\neq E$, 知 $E/W\neq0$, 进而 $\exists y\in E/W$ 使得 $\|y\|=1$. 取 $\epsilon'>0$, 使得 $(1+\epsilon')^{-1}>1-\epsilon$. 据引理 5.2 之 (1), 知 $\exists z\in E$ 使得 $\pi z=y$ 且 $\|z\|\le(1+\epsilon')$. 令 $x=\frac{z}{\|z\|}$. 则 $\|x\|=1$, $d(x,W)=\|\pi x\|=\|\frac{y}{\|z\|}\|=\frac{1}{\|z\|}>1-\epsilon$. □

引理 5.2 之 (2) 的威力体现于如下定理.

定理 5.4. 设 $T:E\to F$ 是连续线性映射, W 是 E 的闭子空间且 $\ker T\supseteq W$. 则有连续线性映射 $\bar{T}: E/W\to F$ 使下图交换.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "T"] & \\ E/W \arrow[r, "\bar{T}"] & F \end{tikzcd}$$

证明. 据代数同态基本定理, 存在线性映射 $\bar{T}$ 使上图交换. 因 T 连续, 据引理 2.1, 知 $\exists L>0$, 使得 $T(B_E(0,1))\subseteq B_F(0,L)$. 据引理 5.2, 得

$$\bar{T}(B_{E/W}(0,1))=\bar{T}(\pi(B_E(0,1)))=T(B_E(0,1))\subseteq B_F(0,L).$$

再据引理 2.1, 知 $\bar{T}$ 连续. $\square$

问题 5.1. *设 $T : E \to F$ 是连续线性映射. 则 $\bar{T} : E/\ker T \to \mathrm{im}T$ 是否同构?*

代数同态基本定理说明, 在线性空间范畴中相应问题答案为是. 而在赋范线性空间范畴中, 答案却为否. 如例 2.3, 其中 $\ker T = 0$ 进而 $\bar{T} = T$, $E = C[a, b]$ 完备, 而 $\mathrm{im}T$ 不完备, 故 $\bar{T}$ 非同构. 但须指出: 若 E 与 $\mathrm{im}T$ 皆完备, 则答案为是. 此即开映射定理.

商空间 E/W 与 W 在 E 中的补空间紧相关. 设 V 是 W 在 E 中的代数补空间. (已知代数补空间必存在.) 则 $\pi|_V : V \to E/W$ 是线性双射且连续.

命题 5.5. *设 V 是 W 在 E 中的代数补空间. 则 $\pi|_V : V \to E/W$ 是同构当且仅当 V 是 W 的拓扑补空间.*

证明. 已知 $\pi|_V : V \to E/W$ 是同构当且仅当 $(\pi|_V)^{-1}$ 连续. 记 $P : E \to E$ 为关于代数补的幂等算子, 满足 $\mathrm{im}P = V$, $\ker P = W$. 据代数同态基本定理, 知有线性双射

$$\bar{P} : E/W \to \mathrm{im}\bar{P} = \mathrm{im}P = V$$

使得 $P = \bar{P}\pi$. 再据定理 5.4, 知 P 连续当且仅当 $\bar{P}$ 连续. 易见(请读者自证): $\bar{P} = (\pi|_V)^{-1}$. 故 $(\pi|_V)^{-1}$ 连续当且仅当 P 连续. 据命题 4.5, 进一步当且仅当 V 是 W 的拓扑补. $\square$

据命题 5.5, 若 W 有拓扑补空间, 则不用商空间亦无妨. 回顾问题 4.2, 抚今追昔, 拓扑补“帝乡不可期”, 而商空间“人间春常在”. 堪重任者, 其商空间乎!

6 完备化

设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间. 若 E 不完备, 则可将 E **完备化**, 亦即构造一 Banach 空间 $\tilde{E}$ 及等距映射 $T : E \to \tilde{E}$ 使得 $T(E)$ 在 $\tilde{E}$ 中稠密. 此时可视 T 为子空间含入. 在此我们承认 E 有度量完备化 $\tilde{E}$, 余下工作不劳神.

须知, $\tilde{E}$ 迄今仅有度量, 尚需线性结构与范数. 考虑 E 上的加法映射

$$\begin{aligned} A :\ E \oplus E &\to E \subseteq \tilde{E}, \\ (x, y) &\mapsto x + y. \end{aligned}$$

易见 A 是 Lipschitz 映射. (其实为线性映射, 有 Lipschitz 常数 1.) 又, $\tilde{E} \times \tilde{E}$ 为 $E \oplus E$ 的完备化(参2月16日补充题 #4). 则 A 唯一延拓为 Lipschitz 映射 $\tilde{A} : \tilde{E} \times \tilde{E} \to \tilde{E}$ (参2月16日补充题 #9). 定义 $\tilde{E}$ 上的加法为 $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{y})$. 又, 固定 $k \in \mathbb{F}$, 考虑数乘映射

$$\begin{aligned} M_k :\ E &\to E \subseteq \tilde{E}, \\ x &\mapsto kx. \end{aligned}$$

显然 M_k 亦是 Lipschitz 映射. 其可唯一延拓为 Lipschitz 映射 $\tilde{M}_k : \tilde{E} \to \tilde{E}$. 定义 $\tilde{E}$ 上的数乘为 $k\tilde{x} = \tilde{M}_k(\tilde{x})$. 而今检验 $\tilde{E}$ 上的加与数乘满足线性空间八公理. 此事不难, 因 $\tilde{E}$ 上的运算由 E 上的连续延拓而得. 如检验加法交换律: $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}$, 取 E 中的点列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 分别收敛于 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{x} + \tilde{y} &= \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{A}\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{A}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} A(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} A(y_n, x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tilde{A}(y_n, x_n) = \tilde{A}\left(\lim_{n\to\infty} y_n, \lim_{n\to\infty} x_n\right) = \tilde{A}(\tilde{y}, \tilde{x}) = \tilde{y} + \tilde{x}.\end{aligned}$$

上式第三、七等号用了 $\tilde{A}$ 的连续性, 第五等号用了 E 的加法的交换律. 如法炮制, 遂能证得八公理, 因而 $\tilde{E}$ 是线性空间.

再定义 $\tilde{E}$ 上的范数. 范数 $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ 虽非线性, 然仍是 Lipschitz 函数, 故可唯一连续延拓为 $\|\cdot\|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \to \mathbb{R}$. 先证等式: $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}$, $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\tilde{E}} = d_{\tilde{E}}(\tilde{x}, \tilde{y})$. 取 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 如上, 则

$$\begin{aligned}\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\tilde{E}} &= \left\|\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n\right\|_{\tilde{E}} = \left\|\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n)\right\|_{\tilde{E}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_{\tilde{E}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_E \\ &= \lim_{n\to\infty} d_E(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_{\tilde{E}}(x_n, y_n) = d_{\tilde{E}}\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = d_{\tilde{E}}(\tilde{x}, \tilde{y}).\end{aligned}$$

上式第二等式用了加法 $\tilde{A}$ 与数乘 $\tilde{M}_{-1}$ 的连续性, 第三等号用了 $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ 的连续性, 第五等号是 E 上的已知关系, 第七等号用了 $d_{\tilde{E}}$ 的连续性. 等式 $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\tilde{E}} = d_{\tilde{E}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ 蕴含两事: 一则, $d_{\tilde{E}}$ 由 $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ 导出; 二则, $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ 满足正定性. 而 $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ 的齐次性与三角不等式亦可由 $\|\cdot\|_E$ 的相应性质逼近而得.

总之, 得 $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ 为 Banach 空间, 其为 $(E, \|\cdot\|_E)$ 的完备化. 度量空间完备化既有唯一性, 赋范空间从之.

例 6.1. *设 E 为取 $\mathbb{F}$ 值的序列构成的线性空间, 此等序列满足条件: 仅有限个分量非 0. 当 $1 \le p < \infty$ 时, 在 E 上定义 p-范数*

$$\|(a_1, a_2, \cdots)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

则 $(E, \|\cdot\|_p)$ 不完备, 其完备化为 l^p. 定义 ∞-范数为

$$\|(a_1, a_2, \cdots)\|_\infty = \sup_n |a_n|.$$

则 $(E, \|\cdot\|_p)$ 亦不完备, 其完备化为 c_0. 此等证明留为习题.

例 6.2. *令 $C^\infty[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上光滑函数构成的线性空间. 对于整数 $0 \le k < \infty$, 定义 $C^\infty[a,b]$ 上的 C^k-范数为*

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|.$$

则 $(C^\infty[a,b], \|\cdot\|_{C^k})$ 不完备. 其完备化为

$$C^k[a,b] = \{[a,b] \text{ 上 } k \text{ 阶连续可微函数}\}.$$

$C^k[a,b]$ 的范数定义如上. 易证 $C^k[a,b]$ 可分. 此等证明留为习题.

7 映射空间

设 E 与 F 皆为赋范空间. 记 $L(E,F)$ 为所有从 E 到 F 的线性映射构成的集合. 显然, $L(E,F)$ 上有通常的加与数乘, 而成线性空间. 而 $\forall T \in L(E,F)$, 之前已定义 T 的范数 $\|T\|$. 故得函数 $\|\cdot\| : L(E,F) \to \mathbb{R}$.

引理 7.1. *(1) $L(E,F)$ 是赋范线性空间.*

(2) 若 F 完备, 则 $L(E,F)$ 亦然.

证明. (1). 仅需证映射的范数的确定义了线性空间 $L(E,F)$ 上的范数. 此据引理 2.3 得证.

(2). 设 $\{T_n\}$ 是 $L(E,F)$ 的 Cauchy 列. 则 $\forall x \in E$, 有

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\|,$$

故 $\{T_n x\}$ 是 F 的 Cauchy 列. 又, F 完备, 知 $\{T_n x\}$ 收敛. 定义映射 $T : E \to F$ 为 $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$.

设 $x, y \in E$, 据 T_n 线性, 得

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty}(T_n x + T_n y) = Tx + Ty.$$

同理, $\forall k \in \mathbb{F}$, 有 $T(kx) = kTx$. 故 T 线性.

再据 $\{T_n\}$ 是 Cauchy 列, 知 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$, $\forall m > N$, 有 $\|T_m - T_n\| < \epsilon$. 进而 $\forall x \in E$, 有

$$\|(T - T_n)x\| = \|Tx - T_n x\| = \lim_{m\to\infty}\|T_m x - T_n x\| \le \varliminf_{m\to\infty}\|T_m - T_n\|\|x\| \le \epsilon\|x\|.$$

故 $\forall n > N$, 有 $T - T_n$ 有界, 且 $\|T - T_n\| \le \epsilon$. 因而 $T = T_n + (T - T_n)$ 有界, 且 $\{T_n\}$ 收敛于 T. □

设 E 是赋范空间, $\tilde{E}$ 是 E 的完备化. 设 F 是 Banach 空间. 考虑限制映射 $L(\tilde{E},F) \to L(E,F)$, 亦即 $T \mapsto T|_E$, 则 T 为 $T|_E$ 唯一决定. 反之, $\forall S \in L(E,F)$, 其可唯一延拓成 $\tilde{S} \in L(\tilde{E},F)$. 故有如下结论, 证明细节留为习题.

引理 7.2. *限制映射 $L(\tilde{E},F) \to L(E,F)$ 为等距同构.*

有两类映射空间值得关注. 第一类: 取 $F = \mathbb{F}$, 记 $E^* = L(E,\mathbb{F})$. 其为 E 上有界线性泛函构成的空间, 称之为 E 的**对偶空间**. 对偶空间或是最简之映射空间. 据引理 7.1, E^* 是 Banach 空间, 哪怕 E 不完备. 而据引理 7.2 又知: 若 $\tilde{E}$ 是 E 的完备化, 则 $\tilde{E}^* = E^*$. 故研究 E^* 时, 不妨设 E 完备.

欲研究对偶空间, 即使浅尝辄止, 亦常需 Hahn-Banach 泛函延拓定理. 且看一例. 考虑配对

$$\begin{aligned} E \times E^* &\to \mathbb{F}, \\ \langle x, x^* \rangle &\mapsto x^*(x). \end{aligned}$$

据 $|\langle x, x^*\rangle| \le \|x\|\|x^*\|$ 知: 固定 x, 而让 x^* 变化, 则可视 x 为 E^* 上的连续线性泛函. 因之得映射 $** : E \to E^{**}$, 亦即 $x \mapsto x^{**}$ 使得 $\forall x^* \in E^*$, $\langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x, x^*\rangle$.

问题 7.1. *映射 $x \mapsto x^{**}$ 是否从 E 到 E^{**} 的单射? 甚至等距映射?*

问题 7.1 之答案为是, 其证明需泛函延拓定理.

再看具体空间.

例 7.1. 设 $1<p<\infty$. 记 $p'>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 称 p 与 p' 互为**共轭指标**. 设 $x=(a_1,a_2,\cdots)\in l^p$, $y=(b_1,b_2,\cdots)\in l^{p'}$. 定义配对 $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$. 今证明如此配对将 $(l^p)^*$ 等同于 $l^{p'}$.

据 *Hölder* 不等式,

$$|\langle x,y\rangle|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\right|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=\|x\|_p\|y\|_{p'}.$$

故 y 定义了 $Ty\in(l^p)^*$, 且 $\|Ty\|\le\|y\|$. 显然, $T:l^{p'}\to(l^p)^*$ 是线性映射.

下证 T 保距. 固定 y. 定义序列 $z=(c_1,c_2,\cdots)$ 使得

$$c_n=\begin{cases}\overline{b_n}|b_n|^{p'-2}, & b_n\ne 0;\\ 0, & b_n=0.\end{cases}$$

此处 $\overline{b_n}$ 是 b_n 的共轭复数. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^{(p'-1)p}=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^{p'}=\|y\|^{p'},$$

进而 $z\in l^p$ 且 $\|z\|=\|y\|^{\frac{1}{p-1}}$. 又,

$$\|Ty\|\|y\|^{\frac{1}{p-1}}=\|Ty\|\|z\|\ge|Ty(z)|=|\langle z,y\rangle|=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^{p'}=\|y\|^{p'}.$$

得 $\|Ty\|\ge\|y\|$. 综上, T 保距.

最后证 T 为满射. 设 $e_n\in l^p$ 为第 n 个分量为 1 且其余分量为 0 的元素. 设 $f\in(l^p)^*$. 定义 $b_n=f(e_n)$. 设 $x\in l^p$ 如上. 则

$$f(x)=f\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nf(e_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n.$$

定义序列 $y=(b_1,b_2,\cdots)$, 需证 $y\in l^{p'}$. 据 y 定义 $z=(c_1,c_2,\cdots)$ 如上. 令 $z_n=(c_1,\cdots,c_n,0,0,\cdots)$. 则 $z_n\in l^p$,

$$\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\|z_n\|\ge|f(z_n)|=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p'}.$$

进而得, $\forall n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\le\|f\|.$$

因而 $y\in l^{p'}$ 且 $Ty=f$, 亦即 T 为满射. 综上, $T:l^{p'}\to(l^p)^*$ 是等距同构.

据例 7.1, 当 $1<p<\infty$ 时, l^p 与 $l^{p'}$ 互为对偶, 且问题 7.1 中的映射 $l^p\to(l^p)^{**}$ 为等距同构. 此时称 l^p **自反**. 显然, 自反空间必完备.

例 7.2. 设 $x=(a_1,a_2,\cdots)\in l^1$, $y=(b_1,b_2,\cdots)\in l^\infty$. 定义配对 $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^\infty a_nb_n$. 今证明据此有 $l^\infty=(l^1)^*$. 首先,

$$|\langle x,y\rangle|=\left|\sum_{n=1}^\infty a_nb_n\right|\le\sum_{n=1}^\infty|a_n|\cdot\sup_n|b_n|=\|x\|_1\|y\|_\infty$$

如此定义线性映射 $T:l^\infty\to(l^1)^*$ 满足 $\|Ty\|\le\|y\|$.

取 e_n 如例 *7.1*, 则 $e_n\in l^1$ 且 $\|e_n\|=1$. 进而 $\forall n$,

$$|b_n|=|Ty(e_n)|\le\|Ty\|\|e_n\|=\|Ty\|.$$

故 $\|Ty\|\ge\|y\|$. 综上, T 保距.

最后证 T 是满射. 设 $f\in(l^1)^*$, 记 $b_n=f(e_n)$. 则 $|b_n|\le\|f\|$. 进而 $y=(b_1,b_2,\cdots)\in l^\infty$. 如例 *7.1*, 可证: $Ty=f$. 故 T 是满射.

问题 7.2. 是否 $l^1=(l^\infty)^*$?

该问题答案为否, 有两法证之. 法一: 已知 l^∞ 不可分, 而 l^1 可分. 有结论: 若 E 不可分, 则 E^* 不可分. 此结论之证明再需泛函延拓定理. 法二如下.

例 7.3. 设 $x=(a_1,a_2,\cdots)\in c_0$, $y=(b_1,b_2,\cdots)\in l^1$. 定义配对 $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^\infty a_nb_n$. 据此有 $l^1=(c_0)^*$. 此结论之证明留为习题.

已知 c_0 是 l^∞ 的真闭子空间, 则 $(l^\infty)^*$ 与 $(c_0)^*$ 是否必不同? 的确如此. 有结论: 若 W 是 E 的真闭子空间, 则 W^* 是 E^* 的商空间且 $W^*\ne E^*$. 此结论之证明仍需泛函延拓定理!

第二类值得关注的映射空间为 $L(E,E)$. 为不致病态, 设 E 完备, 据引理 7.1, 知 $L(E,E)$ 是 Banach 空间. 此外 $L(E,E)$ 上有乘法: $\forall S,T\in L(E,E)$, 有 $ST\in L(E,E)$. 故 $L(E,E)$ 又是 $\mathbb{F}$-代数. 且据引理 2.4, 有 $\|ST\|\le\|S\|\|T\|$. 将此等性质抽象化, 即得 Banach 代数之概念.

定义 7.1. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$-代数, 且为 *Banach* 空间. 又设 $\forall a,b\in\mathcal{A}$, 有 $\|ab\|\le\|a\|\|b\|$. 则称 $\mathcal{A}$ 是 ***Banach* 代数**.

Banach 代数是泛函分析的深刻分支. 即使其初等部分或已超出本课程. 但本课程的算子谱论将以具体方式表现 Banach 代数抽象理论之沧海一粟.

8 基

基是研究线性空间的重要工具, 其于有限维空间极为有力. 无限维赋范空间当然有 Hamel 基, 但其未顾及空间的拓扑结构, 故并不适合分析手段. 如: 一般不能考虑 Hamel 基的无限项线性组合. 作为 Banach 空间的特例, Hilbert 空间有完美的正规基, 实为分析手段之利器. 而此外迄今则未发现广有且好用的基.

基论的一个著名的尝试是 Schauder 基. 若赋范空间 E 中有一列向量 $\{e_n\}$ 满足: $\forall x\in E$, 有**唯一**的系数列 $\{a_n\}\subset\mathbb{F}$ 使得 $x=\sum_{n=1}^\infty a_ne_n$, 则称 $\{e_n\}$ 是 E 的 **Schauder 基**. 须知, 上述级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ 一般不能随意重排. 若能随意重排, 亦即**无条件收敛**, 则称 $\{e_n\}$ 是**无条件 Schauder 基**. 显然, 若 E 有 Schauder 基, 则 E 可分. 反之, 是否可分空间必有 Schauder 基? 答案为否. 一些经典的可分空间有 Schauder 基. 如: c_0 与 l^p $(1 \leq p < \infty)$ 显然存在无条件 Schauder 基. 可分 Hilbert 空间的正规基当然是无条件 Schauder 基. 但一般可分空间的 Schauder 基存在性是个艰深问题.

"有则用之, 无则改之." 泛函分析的很多手法皆不用基.

习题

1. 设 E 是线性空间.

   (1). 设 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 皆为 E 的范数. 求证: $\|\cdot\| + \|\cdot\|'$ 亦然.

   (2). 设 $\|\cdot\|$ 为 E 的范数, $k > 0$. 求证: $k\|\cdot\|$ 为 E 的范数.

2. 设 E 是线性空间, p 是其上的半范数. 定义 $\ker p = p^{-1}(0)$ 为 p 的核.

   (1). 求证: 若 p 是半范数, 则 $\ker p$ 是 E 的子空间.

   (2). 求证: 若 p 与 p' 皆是半范数, 则 $p + p'$ 亦然, 且 $\ker(p + p') = \ker p \cap \ker p'$.

   (3). 求证: 若 p 是半范数, $k > 0$. 求证: kp 是半范数, 且 $\ker(kp) = \ker p$.

   (4). 求证: 若 f 是线性泛函, 则 $|f|$ 是半范数, 且 $\ker |f| = \ker f$.

3. 设 E 与 F 皆为线性空间, $T : E \to F$ 为线性映射, p 为 F 上的半范数. 定义 $T^*p : E \to \mathbb{R}$ 为 $T^*p(x) = p(Tx)$. 求证: T^*p 是 E 上的半范数, 且 $\ker T^*p = T^{-1} \ker p$.

4. 设 E 是赋范线性空间. 求证如下论断等价:

   (1). E 可分;

   (2). 存在 E 的可数子集 X 使得 $E = \overline{\operatorname{span}(X)}$;

   (3). 存在 E 的一列增子空间 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$, 使得 $\forall n$, $\dim E_n$ 有限, 且 $E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$.

5. 设 E 是赋范线性空间. 求证如下论断等价:

   (1). E 可分;

   (2). E 的单位球体 $B(0, 1)$ 可分;

   (3). E 的单位球面 $S(0, 1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ 可分.

6. 求证: $1 \leq p \leq \infty$ 时, l^p 完备.

7. 求证: c_0 是 l^∞ 的闭子集.

8. 设 $1 \leq p \leq \infty$, 记 $e_n \in l^p$ 为第 n 个分量为 1, 其余分量为 0 的向量. 记 F 为诸 e_n 生成的线性子空间.

   (1). 再设 $p < \infty$. 求证: $l^p = \overline{F}$, 因而 l^p 可分.

(3). 再设 $p=\infty$. 求证: $c_0=\overline{F}$, 因而 c_0 可分.

(2). 设 $x\in l^\infty$ 为所有分量为 1 的向量. 求证: $d(x,\overline{F})=1$.

9. 设 $T:E\to F$ 为线性映射. 求证: T 连续当且仅当 $\exists x_0\in E$, T 在 x_0 处连续.

10. 设 $T:E\to F$ 为线性映射. 求证: 若 $T(B_E(0,1))\subseteq B_F(0,L)$, 则 $\|T\|\le L$; 若 $F\neq 0$ 且 $T(B_E(0,1))=B_F(0,L)$, 则 $\|T\|=L$.

11. 设 E 是赋范空间, p 是 E 上的半范数. 求证: p 连续当且仅当 $\exists C\ge 0$, 使得 $\forall x\in E$, $p(x)\le C\|x\|$.

12. 证明引理 2.4.

13. 设 $T:E\to F$ 为线性映射. 若 $\dim\mathrm{im}T$ 有限, 则称 T 是**有限秩映射**, 称 $\dim\mathrm{im}T$ 为 T 的**秩**, 记为 $\mathrm{rank}T$. 设 f_i 是 E 上的线性泛函, $y_i\in F$, $1\le i\le n$. 定义 $T:E\to F$ 为 $Tx=\sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$.

    (1). 求证: T 是有限秩的线性映射, 且 $\mathrm{rank}T\le n$.

    (2). 求证: 若诸 f_i 连续, 则 T 亦然.

    (注: 今后将证本题之逆, 亦即有限秩的(连续)线性映射必有如此表达.)

14. 设 X 是度量空间. 定义 $C_b(X)$ 为 X 上的**有界**连续函数构成的线性空间, 定义其上的范数为 $\|f\|=\sup|f|$. 若另有度量空间 Y, 且有连续映射 $\tau:X\to Y$. 定义映射 $\tau^\#:C_b(Y)\to C_b(X)$ 为 $\tau^\# f=f\circ\tau$. (此处 $C_b(X)$ 的下标 b 意指“有界”—“bounded”. 若 X 紧, 则 $C_b(X)=C(X)$.)

    (1). 求证: $C_b(X)$ 是 Banach 空间.

    (2). 求证: $\tau^\#$ 是有界线性映射, 且 $\|\tau^\#\|=1$.

    (3). 求证: $\tau^\#$ 是单射当且仅当 $\tau(X)$ 在 Y 中稠密, 且此时 $\tau^\#$ 保距.

15. 设 $(a_1,a_2,\cdots)\in l^\infty$. 定义

$$T(b_1,b_2,\cdots)=(a_1b_1,a_2b_2,\cdots).$$

    (1). 求证: 对 $1\le p\le\infty$, T 为 l^p 到自身的有界线性映射, 且 $\|T\|=\|(a_1,a_2,\cdots)\|$.

    (2). 求证: T 为单射当且仅当 $\forall n$, $a_n\neq 0$.

16. 如题 15, 取 $a_n=2^{-n}$, 再设 $p<\infty$.

    (1). 设 F 如题 8. 求证: $\mathrm{im}T\supseteq F$, 因而 $\mathrm{im}T$ 在 l^p 中稠密.

    (2). 求证: $\mathrm{im}T\neq l^p$, 因而 $\mathrm{im}T$ 不闭.

    (注: 较之例 2.3, 本题优势在于定义域与上域为同一空间. 又, 若 $p=\infty$, 甚至取 $(a_1,a_2,\cdots)\in c_0$, 则亦有 $\mathrm{im}T$ 不闭. 待读者学得紧算子后, 则有抽象证法得一般结论.)

17. 设赋范空间 E 与 F 同构. 求证: 若 E 完备, 则 F 亦然.

18. (1). 设 $T: E \to F$ 是赋范空间的有界线性映射. 又设 $\exists C > 0$, 使得 $\forall x \in E$, 有 $\|Tx\| \geq C\|x\|$. 求证: $T: E \to \mathrm{im}T$ 为同构.

    (2). (闭值域定理) 设 $T: E \to F$ 是赋范空间的有界线性映射, 且设 E 完备. 又设 $\exists C > 0$, 使得 $\forall x \in E$, 有 $\|Tx\| \geq C\|x\|$. 求证: $\mathrm{im}T$ 完备, 因而是 F 的闭子集. (注: 对照例 2.2 与题 16, 体会本题两条件之要害. 一则, E 完备. 二则, 常数 $C > 0$ 且与 x 无关. 据题 15 之 (2), 知题 16 的 T 满足: $\forall x \neq 0$, $\|Tx\| > 0$. 但此不足保证闭值域.)

19. 设 E 上有范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$, 且 $\exists C > 0$ 使得 $\|\cdot\|' \leq C\|\cdot\|$.

    (1). 求证: $(E, \|\cdot\|)$ 中的 Cauchy 列必是 $(E, \|\cdot\|')$ 中的 Cauchy 列.

    (2). 求证: 若 $\{x_n\}$ 在 $(E, \|\cdot\|)$ 中收敛至 x_0, 则在 $(E, \|\cdot\|')$ 中亦然.

    (3). 设 $(E, \|\cdot\|)$ 的单位闭球 $\overline{B}$ 是 $(E, \|\cdot\|')$ 的闭集, 且 $(E, \|\cdot\|')$ 完备. 求证: $(E, \|\cdot\|)$ 完备. (提示: 在 $(E, \|\cdot\|')$ 中用闭集套定理证 $(E, \|\cdot\|)$ 中的 Cauchy 列按 $\|\cdot\|$ 收敛. 注: 今后将证, 若 $(E, \|\cdot\|)$ 与 $(E, \|\cdot\|')$ 皆完备, 则两范数等价, 进而 "$\overline{B}$ 是 $(E, \|\cdot\|')$ 的闭集" 实乃必要条件. 又, 本题若去此条件, 则有反例.)

20. 在 $C[a, b]$ 上考虑 L^p 范数, 记为 $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. 则 $\|\cdot\|_\infty$ 即为 $C[a, b]$ 的通常范数, 因而 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 完备. 记 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 的单位闭球为 $\overline{B}$. 求证: $\forall p < \infty$, $\exists C > 0$, 使得 $\|\cdot\|_p \leq C\|\cdot\|_\infty$; 且 $\overline{B}$ 在中 $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ 闭; 但 $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ 不完备. (注: 请对照题 19 之 (3) 与例 2.3.)

21. 设 W 是 E 的闭子空间. 定义 $\|x + W\|_{E/W} = \inf_{w \in W} \|x + w\|_E$. 求证: $\|\cdot\|_{E/W}$ 是 E/W 上的范数.

22. 设 E 是 Banach 空间, $\{x_n\}$ 是 E 中点列满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 且 $\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. (注: 此时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ **绝对收敛**. 今后将证, 该级数重排后不更其值, 亦即绝对收敛蕴含无条件收敛.)

23. 证明引理 5.1. (提示: 欲证 Cauchy 列收敛, 仅需证其某一子列收敛. 用题 22.)

24. 求证: 投射 $\pi: E \to E/W$ 是开映射, 亦即若 U 是 E 的开集, 则 $\pi(U)$ 是 E/W 的开集.

25. 命题 5.5 之证明中用到结论 $\bar{P} = (\pi|_V)^{-1}$. 证明此结论.

26. 设 E 是赋范空间, W 是 E 的闭子空间. 又设 V_1 与 V_2 均为 W 的拓扑补. 设 P_1 与 P_2 为 E 上的幂等算子, 满足 $\mathrm{im}P_i = V_i$, $\ker P_1 = \ker P_2 = W$. 求证: $P_2|_{V_1}: V_1 \to V_2$ 与 $P_1|_{V_2}: V_2 \to V_1$ 互逆, 因而 V_1 与 V_2 同构.

27. 设 E 是线性空间, W 是 E 的子空间, E/W 是代数商空间, $\pi: E \to E/W$ 是商投射.

    (1). 设 $\|\cdot\|_{E/W}$ 是 E/W 上的范数. 定义 $p = \pi^*\|\cdot\|_{E/W}$, 亦即 $p(x) = \|\pi x\|_{E/W}$. 求证: p 是 E 上的半范数, 且 $\ker p = W$.

(2). 设 p 是 E 上的半范数, 且 $\ker p = W$. 求证: 存在 E/W 上的范数 $\|\cdot\|_{E/W}$, 使得 $p = \pi^*\|\cdot\|_{E/W}$.

28. (1). 设 k 是非负整数. 求证: $C^k[a,b]$ 完备.

    (2). 记 $P[a,b]$ 为 $[a,b]$ 是上多项式构成的空间. 求证: $P[a,b]$ 在 $C^k[a,b]$ 中稠密. (据此得 $C^k[a,b]$ 可分.)

29. 定义映射 $T: C^k[a,b] \to \oplus_{i=1}^k C[a,b]$ 为 $Tf = (f^{(0)}, f^{(1)}, \cdots, f^{(k)})$.

    (1). 求证: T 是保距线性映射.

    (2). 以 (1) 证得 $C^k[a,b]$ 可分. (注: 本法的优势为易推广至多元.)

30. 在 $C^k[a,b]$ 上定义函数 $p_i = \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$, $0 \le i \le k$.

    (1). 求证: p_i 是 $C^k[a,b]$ 上的半范数, 且 p_0 是范数.

    (2). 求证: 当 $i > 0$ 时, $\ker p_i = P_{i-1}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上次数不超过 $(i-1)$ 的多项式构成的空间.

31. 设 X 是 $C^{k+1}[a,b]$ 中的有界集, $0 \le k < \infty$. 求证: X 是 $C^k[a,b]$ 中的准紧集.

32. 设 E 是 $C^{k+1}[a,b]$ 的子空间, $0 \le k < \infty$.

    (1). 求证: $(E, \|\cdot\|_{C^{k+1}})$ 的单位闭球是 $(E, \|\cdot\|_{C^k})$ 的闭集. (提示: 用 $f^{(k)}$ 的差商控制 $f^{(k+1)}$.)

    (2). 设有 $0 \le l \le k$ 使得 $(E, \|\cdot\|_{C^l})$ 完备. 求证: $(E, \|\cdot\|_{C^{k+1}})$ 完备. (提示: 用题 19. 注: 今后将知, 此时 $\dim E$ 有限.)

33. 证明引理 7.2.

34. 设 $A \in L(E_1, E)$, $T \in L(E, F)$, $B \in L(F, F_1)$. 定义 $A^{\#}T = TA$, $B_{\#}T = BT$.

    (1). 求证: $A^{\#}$ 是从 $L(E,F)$ 到 $L(E_1,F)$ 的线性映射, 且 $\|A^{\#}\| \le \|A\|$.

    (2). 求证: $B_{\#}$ 是从 $L(E,F)$ 到 $L(E,F_1)$ 的线性映射, 且 $\|B_{\#}\| \le \|B\|$.

35. 设 E 是赋范空间.

    (1). 求证: 从 $\mathbb{F}$ 到 E 的线性映射皆连续. (下一讲有此结论之大推广: 从有限维赋范空间到赋范空间的线性映射皆连续.)

    (2). 定义映射 $L(\mathbb{F}, E) \to E$ 为 $T \mapsto T(1)$. 求证: 此映射为等距同构.

36. 证明例 7.3 之结论.

37. 求证: Schauder 基线性无关.

38. 求证: 若 E 有 Schauder 基, 则 E 可分.

39. 求证: c_0 与 l^p $(1 \le p < \infty)$ 存在无条件 Schauder 基.