概率论与数理统计第4次作业

161220049　黄奕诚

March 28, 2018

1.教材习题一、二

(36)

设共有外线n条，并设x为在某一时刻，需要外线通话的分机个数.易知

$$x \sim B(100, 0.05)$$

又因为要求

$$P(x \leq n) = 0.9$$

由中心极限定理，

$$P(x \leq n) = \Phi(\frac{n - 100 \cdot 0.05}{\sqrt{100 \cdot 0.05 \cdot 0.95}}) \geq 0.9$$

即

$$\Phi(\frac{n-5}{\sqrt{4.5}}) \geq 0.9$$

即

$$\frac{n-5}{\sqrt{4.5}} \geq 1.29$$

可得n的最小整数为8.

(7)

(1) 设该人试验成功为事件A.于是

$$P(A) = \frac{1}{C_8^4} = \frac{1}{70}$$

故试验成功一次的概率为$\frac{1}{70}$.

(2) 设该人独立试验10次成功3次的概率为p，则

$$p = C_{10}^3(\frac{1}{70})^3(\frac{69}{70})^7 \approx 0.0003163$$

猜对的概率微乎其微.偏向于相信该人是确有区分能力的.

(8)

(1) 当必须有油船转港时，有$X \geq 4$.又因为X服从参数$\lambda = 2.5$的泊松分布.故

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - e^{-2.5}(\frac{2.5^0}{0!} + \frac{2.5^1}{1!} + \frac{2.5^2}{2!} + \frac{2.5^3}{3!}) \\ &\approx 0.242 \end{aligned}$$

(2) 因为$P(X=0) = \frac{1}{e^{2.5}}, P(X=1) = \frac{2.5}{e^{2.5}}, P(X=2) = \frac{3.125}{e^{2.5}}$.对于任意的$k \geq 2$，有

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{2.5}{k+1} < 1$$

因此$P(X=2)$是最大值，也即一天中最大可能到达港口的油船数为2，概率为0.257

(3) 设服务能力提高到n只油船时，能使到达油船以90%的概率得到服务.
由题意可知，$P(X \leq n) \geq 0.9$.通过查表可知$P(X \leq 4) < 0.9, P(X \leq 5) \geq 0.9$.因此需要将服务能力提高到5只油船.

2.

几何分布是负二项分布的一种特殊情况，在此题中相当于“正面向上次数为1”时停止，即$k=1$的情况.扩展为负二项分布时，设共抛掷n次，正面次数为k，则反面次数为$n-k$.当$n \geq k-1$，有

$$P(X=n) = C_{k-1}^{n-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

当$n < k-1$时，显然有$P(X=n) = 0$.

3.

a) 由$P(X=Y=k)$可得

$$(1-p)^{k-1}p=(1-q)^{k-1}q$$

即

$$k-1=\frac{\ln q-\ln p}{\ln(1-p)-\ln(1-q)}$$

代入可得

$$P(X=Y)=(1-p)^{\frac{\ln q-\ln p}{\ln(1-p)-\ln(1-q)}}$$

b) 易知

$$\begin{aligned}P(\min(X,Y)=k)&=P(X=k,Y=k)+P(X>k,Y=k)+P(X=k,Y>k)\\&=(1-p)^{k-1}p(1-q)^{k-1}q+(1-p)^{k}(1-q)^{k-1}q+(1-q)^{k}(1-p)^{k-1}p\\&=[(1-p)(1-q)]^{k-1}(p+q-pq)\end{aligned}$$

4.

一种方法:

- 两次两次地抛，以每两次的抛掷结果作为一个事件
- 若两次的结果相同，即皆正皆负，那么继续抛两次，直到出现两枚硬币结果不同的结果为止
- 若两次结果不同，当先正后负时，记此次结果为1，否则当先负后正，记此次结果为0.

证明合理性：只考虑两次试验，记两次结果相同为A，先正后负B，先负后正C.有

$$\begin{aligned}P(A)&=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1\\P(B)&=p(1-p)\\P(C)&=(1-p)p\end{aligned}$$

故有$P(B)=P(C)$.而考虑“是否抛出两个相同结果的硬币”时，之前的规定便得到了几何分布，所抛硬币次数的期望为$\frac{1}{2p-2p^2}<\frac{1}{p(1-p)}$.因此我的方法可行.