概率论与数理统计第2次作业

161220049　黄奕诚

March 14, 2018

1.教材习题一

(4)

设事件A为"点$A(m,n)$落入圆$x^2+y^2=19$".样本空间共有36个样本点，而使事件A发生的样本点为$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1)\}$，共有11个.因此根据古典概型，$P(A)=\frac{11}{36}$.

(12)

设事件A为"方程$x^2+px+q=0$有实根".则事件A发生当且仅当$p^2-4q\geq 0$，也即$q\leq\frac{1}{4}p^2$.对于这个几何概型，Ω对应区域为$\{(p,q)||p|\leq 1,|q|\leq 1\}$，而$A$对应区域为$\{(p,q)||p|\leq 1,|q|\leq 1,q\leq\frac{1}{4}p^2\}$.可求出$A$对应区域的面积为

$$m(A)=2+2\cdot\int_0^1\frac{1}{4}p^2dp=\frac{13}{6}$$

.因此

$$P(A)=\frac{13}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{24}$$

.

(13)

设事件A为"打成的三折能够构成三角形".设x,y,z分别为打成的三折的长度，则有

$$x+y+z=2a$$

当A发生时，有$x+y>z$且$x+z>y$且$y+z>x$.此时相当于:

$$\begin{aligned}x+y&>a\\ y&<a\\ x&<a\end{aligned}$$

由此根据几何概型可以计算出

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{4}$$

.

(15)

由于

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A|B)\cdot P(B)\\ P(AB)&=P(B|A)\cdot P(A)\end{aligned}$$

可求出$P(B)=\frac{1}{6},P(AB)=\frac{1}{12}$.由此可知

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$$

因此

$$P(\overline{AB})=1-P(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

(16)

设事件A为"取出的2件中至少有一件次品".事件B为"取出的2件都是次品".则有

$$P(A)=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

因此题中要求的概率即为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{5}$$

.

(20)

(1) 设事件A为“任取一盒，可以出厂”.当A发生时，4个抽检的元件必须都没有次品.于是

$$P(A) = 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} + 0.1 \times \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} \approx 0.943$$

(2) 设事件A为“一盒元件可以出厂”.事件B为“一盒元件无次品”.则

$$P(A) \approx 0.943, P(B) = 0.8, P(AB) = 0.8$$

所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.8}{0.943} = 0.848$$

2

C++代码如下：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
#include <cstring>

using namespace std;

double getRandData(int min, int max)
{
    double m1 = (double)(rand() % 101) / 101;
    min++;
    double m2 = (double)((rand() %
    (max - min + 1)) + min);
    m2 = m2 - 1;
    return m1 + m2;
}

int main()
{
    double x, y;
    srand(time(0));
    int trial = 100000000;
    int in = 0;
    for (int i = 0; i < trial; i++) {
        x = getRandData(-2, 2);
        y = getRandData(-2, 2);
    if (pow(x, 2) + pow(y - pow(x, 2.0 / 3)
        , 2) < 1.0) in++;
    }
    cout << (double)in/(double)trial*16.0<<endl;
    system("pause");
    return 0;
}
```

三次运行结果为1.58068、1.58109、1.58055，取其平均值为1.58077.故图形面积约为1.58

3

Proof. 可以用数学归纳法证明.

- 当盒子中存在2个球时，白球数目必为1;当盒子中存在3个球时($n = 3$)，白球数目为1和2的概率均为$\frac{1}{2}$.
- 假设当$n = k, k \in N^*, k \geq 2$时结论成立，也即当盒子中存在$k$个球时，盒子里白球的数目等可能地为1到$k-1$的某个数.则设此时白球个数为$t$，有

  $$P_k(t=1) = P_k(t=2) = \cdots = P_k(t=k-1) = \frac{1}{k-1}$$

  不妨简写为

  $$P_k(1) = P_k(2) = \cdots = P_k(k-1) = \frac{1}{k-1}$$

  当共有$k+1$个球时，记此时白球个数为t.有

  $$P_{k+1}(t) = P_k(t-1) \cdot \frac{t-1}{k} + P_k(t) \cdot \frac{k-t}{k} = \frac{1}{k}$$

  因此此时盒子里白球的数目等可能地为1到k的某个数.

- 综上所述，当盒子中存在n个球时，白球个数等可能地分布在1到$n-1$.

$\square$

4

点数和是6的倍数的概率总为$\frac{1}{6}$.

Proof. 设抛掷一枚均匀骰子k次，设其点数和为6的倍数的概率为$P_k(A)$，点数和不为6的倍数的概率为$P_k(\overline{A})$.则设抛掷$k+1$次时，点数和为t，有

$$P_{k+1}(t)=\frac{1}{6}P_k(t-1)+\frac{1}{6}P_k(t-2)+\cdots+\frac{1}{6}P_k(t-6)$$

也即

$$P_{k+1}(t)=\frac{1}{6}(P_k(t-1)+P_k(t-2)+\cdots+P_k(t-6))$$

所以抛掷第$k+1$次时，无论前k次抛掷出的点数和是否是6的倍数，其此时的点数和是6的倍数的概率都是在先前k次抛掷条件下的$\frac{1}{6}$.也即

$$P_{k+1}(A)=\frac{1}{6}P(A)+\frac{1}{6}P(\overline{A})=\frac{1}{6}$$

$\square$