概率论与数理统计第7、8次作业

161220049　黄奕诚

April 25, 2018

教材习题二

12.

(1) 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

故

$$\int_0^1 Ax^3 dx = 1$$

解得

$$A = 4$$

(2)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt =$$

当$x \leq 0$时，$F(x) = 0$.当$x \geq 1$时，$F(x) = 1$.当$0 < x < 1$时，

$$F(x) = \int_0^x 4t^3 dt = x^4$$

因此

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^4 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(3) $P(X < B) = F(B), P(X > B) = 1 - F(B)$.若$P(X < B) = P(X > B)$，则有$F(B) = 1/2$.由此可知$B = \sqrt[4]{1/2}$.

17.

(1) 设电子元件损坏为事件A.该电子元件损坏的概率为$p(A)$，因为电源电压$X(V)$服从正态分布$N(220, 25^2)$，所以可知

$$\begin{aligned} p(A) &= 0.1 \times F(200) + 0.001 \times [F(240) - F(200)] + 0.2 \times [1 - F(\\ &= 0.099F(200) - 0.199F(240) + 0.2 \\ &= 0.099\Phi(\frac{200-220}{25}) - 0.199\Phi(\frac{240-220}{25}) + 0.2 \\ &= 0.299 - 0.298\Phi(\frac{4}{5}) \\ &\approx 0.299 - 0.298 \cdot 0.7881 \\ &= 0.0641 \end{aligned}$$

(2) 设电压介于200到240V之间的概率为p_1.则

$$\begin{aligned} p_1 &= P(200 \leq X \leq 240 | A) = \frac{P(200 \leq X \leq 240, A)}{P(A)} \\ &= \frac{0.001 \times P(200 \leq X \leq 240)}{0.0641} \\ &\approx 0.009 \end{aligned}$$

故此时电压介于200-240V的概率为0.009

21.

$$P(Y \leq x) = P(2X + 4 \leq x) = P(X \leq \frac{x-4}{2})$$

于是Y的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{(x-4)/2} p(t)dt = \int_{-\infty}^{(x-4)/2} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{16}(t-2)^2}$$

所以

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{16}(\frac{x-4}{2}-2)^2} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{64}(x-8)^2}$$

24.

$$P(Y \le x) = P(1-\sqrt[3]{X} \le x) = P(X \ge (1-x)^3) = 1 - P(X \le (1-x)^3)$$

于是Y的分布函数

$$F(x) = 1 - \int_{-\infty}^{(1-x)^3} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$$

因此

$$p(x) = F'(x) = \frac{3(1-x)^2}{\pi[1+(1-x)^6]}$$

教材习题三

4.

(1)

$$\begin{aligned} P(X > 2Y) &= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} (2-x-y)dydx \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (2-x-y)dy \end{aligned}$$

设$u = x+y$，则有$y = u-x$.于是

$$\begin{aligned} P(X > 2Y) &= \int_0^1 dx \int_x^{\frac{3x}{2}} (2-u)du \\ &= \int_0^1 (x - \frac{5x^2}{8})dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{5}{24} \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

(2) $F(z) = P(X+Y \le z)$.当$z \le 0$时，由于此时$p(x,y) = 0$，因此$p_Z(z) = 0$.当$z \ge 2$时，有

$$F(z) = \int_0^1 \int_0^1 p(x,y)dxdy$$

它是常数，导数为0，因此此时$p_Z(z) = 0$.当$1 \le z < 2$时，x可以取遍$z-1$到1中的数，故

$$p_Z(z) = \int_{z-1}^1 p(x, z-x)dx = (2-z)^2$$

当$0 < z \le 1$时，

$$p_Z(z) = \int_0^z p(x, z-x)dx = z(2-z)$$

综上所述，

$$p_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ z(2-z) & 0 < z \le 1 \\ (2-z)^2 & 1 < z \le 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

5.

(1) 由全概率公式可知

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy = 2x(0 < x < 1)$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \int_{\frac{y}{2}}^1 dx = 1 - \frac{y}{2}(0 < y < 2)$$

(2) 当$z \le 0$或$z \ge 2$时，有$F(z) = 0$，故$p_Z(z) = 0$.当$0 < z < 2$时，

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 \int_0^{2x} dxdy - \int_{z/2}^1 \int_0^{2-z} dxdy \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})(2-z) \\ &= z - \frac{z^2}{4} \end{aligned}$$

因此$p_Z(z) = F'(z) = 1 - \frac{z}{2}$.综上所述

$$p_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-\frac{z}{2} & 0 < z < 2 \\ 0 & z \ge 2 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(Y \le \frac{1}{2} | X \le \frac{1}{2}) &= \frac{P(X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2})}{P(X \le \frac{1}{2})} \\ &= \frac{\int_0^{1/2}\int_0^{2x} dxdy - \int_{1/4}^{1/2}\int_{1/2}^{2x} dxdy}{\int_0^{1/2}\int_0^{2x} dxdy} \\ &= 1 - \frac{1/16}{1/4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

12.

(1) 由

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{-x}^{x} (cx^2e^{-x} - cy^2e^{-x})dy = 1$$

也即

$$\frac{4}{3}c\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx = 1$$

因而

$$\frac{4c}{3}\Gamma(4) = 1$$

即得

$$c = \frac{1}{8}$$

(2)

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-x}^{x} p(x,y)dy \\ &= \frac{1}{8}(x^2e^{-x}y - \frac{1}{3}y^3e^{-x})|_{-x}^{x} \\ &= \frac{1}{6}x^3e^{-x}(0 < x < +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_{|y|}^{+\infty} p(x,y)dx \\ &= \frac{1}{8}\int_{|y|}^{+\infty}(x^2e^{-x} - y^2e^{-x})dx \\ &= \frac{1}{8}(y^2 - x^2 - 2x - 2)e^{-x}|_{|y|}^{+\infty} \\ &= \frac{|y|+1}{4}e^{-|y|}(-\infty < y < +\infty) \end{aligned}$$

因为不能总满足

$$p(x,y) = p(x)p(y)$$

因为X与Y不独立.

(3)

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{x^2-y^2}{2(|y|+1)}e^{|y|-x}(x>0)$$

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{3(x^2-y^2)}{4x^3}(|y|<x)$$

2.

Proof. 因为随机变量X服从参数为λ的指数分布，所以有

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

由此可知

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(1 - e^{-\lambda X} \le y) \\ &= P(X \le \frac{-1}{\lambda}\ln(1-y)) \\ &= F_X(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)) \end{aligned}$$

当$0 \le y \le 1$时，有

$$F_Y(y) = F_X(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)) = y$$

服从均匀分布.可以给出如下算法:输入λ，随机取若干个$[0,1]$上的数y，相应地输出$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$，如此即可得到服从参数为$\lambda$的指数分布. □

3.

利用指示变量的方法，设$X_i(1 \le i \le n)$为1当且仅当第i个圆弧长度超过了$\frac{1}{n}$.并设p_i为第i个圆弧长度超过$\frac{1}{n}$的概率.有

$$p_i = p(1 \le i \le n)$$

于是

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

对于p的求法，假定一个圆周上只有任意的一点，现在再在圆周上任意撒$n-1$个点，它们与第一个点的距离的最小值大于$1/n$即可满足条件，且撒点遵循均匀分布.又因为每次撒点互为独立事件，所以

$$p = (1 - \frac{1}{n})^{n-1}$$

因此

$$E(X) = np = n(1 - \frac{1}{n})^{n-1}$$

4.

a) *Proof.* 由题意可知

$$p_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_i} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

设$Y = X_1 + X_2$. 根据卷积公式可知

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(y - x_1) dx_1$$

当$z \leq 0$时，$p_Y(y) = 0$.当$z > 0$时，

$$p_Y(y) = \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} dx_1 = \lambda^2 y e^{-\lambda y}$$

因此

$$p_Y(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

所以$X_1 + X_2$不服从指数分布. □

b) *Proof.* 猜想

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^{N-1}}{(N-1)!} \cdot e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

利用数学归纳法可以证明之，过程与第1小问基本一致，在此不再赘述.又因为N遵循参数为p的几何分布，所以当$y > 0$时，

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_{N=1}^{+\infty} (1-p)^{N-1} \cdot p \cdot \frac{y^{N-1}}{(N-1)!} \cdot e^{-y} \\ &= pe^{-y} \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{[y(1-p)]^{N-1}}{(N-1)!} \\ &= pe^{-y} \cdot e^{1-N} \\ &= pe^{-py} \end{aligned}$$

因此有

$$p_Y(y) = \begin{cases} pe^{-py} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

所以$\sum_{i=1}^N X_i$服从参数为p的指数分布. □