概率论与数理统计第3次作业

161220049　黄奕诚

March 21, 2018

教材习题二(1)

设$P(X=x_i)=p_i$表示"盒子中球的最多个数为x_i的概率为p_i.x_i的可能取值为1,2,3.
于是

$$P(X=1)=\frac{A_4^3}{64}=\frac{3}{8}$$
$$P(X=3)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$
$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=2)=\frac{9}{16}$$

所以X的分布律为

X	1	2	3
P	3/8	9/16	1/16

教材习题二(3)

(1) 若p_k为概率分布律，则有

$$p_1+p_2+p_3=1$$

即

$$\frac{2}{3}C+\frac{4}{9}C+\frac{8}{27}C=1$$

得到

$$C=\frac{27}{38}$$

(2) 若p_k为概率分布律，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}C\frac{\lambda^k}{k!}=1$$

即

$$(e^k-1)C=1 \quad C=\frac{1}{e^k-1}$$

教材习题二(19)

(1) 当X取遍$\{-2,-1/2,0,1/2,4\}$时,$Y=2X$的取值为$\{-4,-1,0,1,8\}$.由于是一一对应关系，所以Y各变量对应的概率与原像X对应的概率相同.故分布律为

Y	-4	-1	0	1	8
P	1/8	1/4	1/8	1/6	1/3

(2) 当X取遍$\{-2,-1/2,0,1/2,4\}$时,$Y=X^2$的取值为$\{4,1/4,0,16\}$.此时

$$P(Y=4)=P(X=-2)=\frac{1}{8}$$
$$P(Y=1/4)=P(X=-1/2)+P(X=1/2)=\frac{5}{12}$$
$$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$$
$$P(Y=16)=P(X=4)=\frac{1}{3}$$

故分布律为

Y	0	1/4	4	16
P	1/8	5/12	1/8	1/3

(3) 当X取遍$\{-2,-1/2,0,1/2,4\}$时,$Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$的取值为$\{0,-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\}$.此时

$$P(Y=0)=P(X=-2)+P(X=0)+P(X=4)=\frac{7}{12}$$
$$P(Y=-\sqrt{2}/2)=P(X=-1/2)=\frac{1}{4}$$
$$P(Y=\sqrt{2}/2)=P(X=1/2)=\frac{1}{6}$$

故分布律为

Y	0	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
P	$7/12$	$1/4$	$1/6$

教材习题三(3)

易知

$$P(X+Y=2)=$$
$$P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)+$$
$$P(X=3,Y=-1)$$

又因为随机变量X和Y相互独立，所以

$$P(X+Y=2)=P(X=1)P(Y=1)+$$
$$P(X=2)P(Y=0)+P(X=3)P(Y=-1)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$$

2.蓄水池抽样

- *Proof.* 设最终采样的数据为第k个数据的概率为p_k，数据总量为n.假若最终采样的数据为第k个数据，则其不会被后面的$n-k$个数据所替代，因此有

  $$p_k=\frac{1}{k}\prod_{i=k+1}^{n}(1-\frac{1}{i})$$

  也即

  $$p_k=\frac{1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k+2}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{n}$$

  因此对任意的k都有

  $$p_k=\frac{1}{n}$$

  所以采样的数据等可能地为所有已经流经该系统地数据中的一个. □

- 若替代的概率为1/2，则可以修正第$k(k\geq 2)$个数据被采样的概率为

  $$p_k=\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^{n-k+1}$$

  所以当有n个数据流过时，第1个数据留在内存的概率为$(0.5)^{n-1}$(因为第1个数据必选).第$k(k\geq 2)$个数据留在内存的概率为$(0.5)^{n-k+1}$，由此便可得到分布律.

3

设

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}i\cdot P(X=i)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i}$$

下面证明调和级数发散:

Proof. 设$S_n=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$，则

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}+S_n)=0$$

但因为

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}>\frac{1}{2}$$

与其矛盾.因此调和级数发散. □

故该随机变量不存在期望值.

4

设人的个数为n，经过n轮牵手后所形成的环的期望为$E(n)$.
当$n=1$时，只有一个人，左手牵右手，故$E(1)=1$.
当$n=2$时，有1/3概率两人都牵自己的手，有2/3概率两人互相牵了手，故

$$E(2)=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$$

当$n=3$时，有1/5概率全牵自己的手，有4/5概率存在互相牵手，此时两人或三人可以视为同一个人(就当已经互相牵好的手不存在)，便回到了$n=2$的情形:

$$E(3)=\frac{1}{5}\cdot(1+E(2))+\frac{4}{5}\cdot E(2)$$

.
于是可知

$$E(n)=\frac{1}{2n-1}(1+E(n-1))+\frac{2n-2}{2n-1}E(n-1)$$

即

$$E(n) = \frac{1}{2n-1} + E(n-1)$$

最后可得到

$$E(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}$$

5.Jensen不等式

Proof. 设X可 取 值 为$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$.且$P(X = x_i) = p_i$.则有

$$\begin{aligned}
&E[f(X)] \\
=&p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_m f(x_m) \\
=&(p_1+p_2)(\frac{p_1}{p_1+p_2} f(x_1) + \frac{p_2}{p_1+p_2} f(x_2)) + \cdots + p_m f(x_m) \\
\geq&(p_1+p_2) f(\frac{p_1}{p_1+p_2} x_1 + \frac{p_2}{p_1+p_2} x_2) + \cdots + p_m f(x_m) \\
\geq&\cdots \\
\geq&(\sum_{i=1}^{m} p_i) f(\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} E[X])
\end{aligned}$$

即有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} E[f(X)] \geq f(\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} E[X])$$

即

$$E[\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} f(X)] \geq f(\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} E[X])$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

因此

$$E[f(X)] \geq f(E[X])$$

□