概率论与数理统计第10次作业

161220049 黄奕诚

May 21, 2018

1.教材习题五

(2)

设同时在使用的终端的个数为X，则$X\ B(120, 0.05)$.

$$E(X) = 120 \cdot 0.05 = 6 \quad D(X) = 6 \cdot 0.95 = 5.7$$

由拉普拉斯中心极限定理，X近似服从$N(6, 5.7)$.则有

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(\frac{X-6}{\sqrt{5.7}} \geq \frac{10-6}{\sqrt{5.7}}) \\ &= 1 - \Phi(\frac{4}{\sqrt{5.7}}) \\ &\approx 1 - \Phi(1.675) \\ &= 0.047 \end{aligned}$$

所以有10个或更多终端在使用的概率约为0.047.

(4)

(a) 设第k个数的误差为X_k，则有$X_k\ U(-0.5, 0.5)$，即

$$E(X_k) = 0 \quad D(X_k) = \frac{1}{12}$$

设$X = \sum_{k=1}^{1500} X_k$.则有

$$E(X) = 0 \quad D(X) = 125$$

由中心极限定理，X近似服从$N(0, 125)$.于是

$$\begin{aligned} P(|X| > 15) &= P(X < -15) + P(X > 15) \\ &= 1 - \Phi(\frac{3}{\sqrt{5}}) + 1 - \Phi(\frac{3}{\sqrt{5}}) \\ &\approx 2 - 2\Phi(1.342) \\ &= 0.18 \end{aligned}$$

所以误差总和的绝对值超过15的概率是0.18.

(b) 设最多有s个数相加，则

$$\begin{aligned} P(|X| < 10) &= 2\Phi(\frac{10}{\sqrt{s/12}}) - 1 \\ &\geq 0.96 \end{aligned}$$

也即

$$\Phi(\frac{10}{\sqrt{s/12}}) \geq 0.98$$

查表可知

$$\frac{10}{\sqrt{s/12}} > 2$$

即$s < 300$.所以最多可有300个数相加使得误差总和的绝对值小于10的概率不小于0.96

(5)

对于任意的X_k，有

$$E(X_k) = \int_0^1 6x^2(1-x) = \frac{1}{2}$$

又因为序列$\{X_n\}$独立同分布，所以

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{n}{2}$$

由独立同分布大数定律可知$\{X_n\}$服从大数定律，所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$$

(7)

Proof. 由题意可知对任意的$k \in N^*$，都有X_k $U(0,1)$，所以

$$E(X_k) = \frac{1}{2} \quad D(X_k) = \frac{1}{12}$$

令$Y_k = \ln X_k$，则Y_k独立同分布.

$$E(Y_K) = \int_0^1 \ln x dx = -1$$

由独立同分布大数定理可知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow{P} -1, n \to \infty$$

所以有

$$(\prod_{k=1}^{n} X_k)^{\frac{1}{n}} = exp\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\} \xrightarrow{P} e^{-1}$$

因此存在常数$C = e^{-1}$，使得$Z_n \xrightarrow{P} C$. □

2

Proof. 因为$g(x,y)$在(a,b)连续，所以对任意的$\epsilon > 0$，存在$r > 0$，对任意x, y，若$d((x,y),(a,b)) < r$，则有

$$|g(x,y) - g(a,b)| < \epsilon \qquad (*)$$

又因为$X_n \xrightarrow{P} a$且$Y_n \xrightarrow{P} b$，所以对任意$r > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \frac{r}{\sqrt{2}}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - b| < \frac{r}{\sqrt{2}}) = 1$$

由此可知对任意$r > 0$，有

$$P(d((X_n, Y_n),(a,b)) < r) = 1$$

又由(*)可知对任意的$\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a,b)| < \epsilon) = 1$$

也即

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$$

□

3

Proof. 因为X_i $E(1)$，所以

$$E(X_i) = 1 \quad D(X_i) = 1$$

考虑标准化随机变量列

$$Y_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n}{\sqrt{n}}$$

随后由第8次作业最后一题的结论可知，若令$X_n' = \sum_{k=1}^{n} X_k$，则有

$$p(X_n') = \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} \cdot e^{-y} \quad y > 0$$

所以

$$p(Y_n^*) = \frac{y^{n-1} \cdot e^{-y} - n!}{(n-1)!\sqrt{n}} \quad y > 0$$

故

$$F(Y_n^*) = \int_{-\infty}^{x} \frac{y^{n-1} \cdot e^{-y} - n!}{(n-1)!\sqrt{n}} dy$$

然后不知道怎么算下去...... □