

## 问题求解（三）第7周作业

黄奕诚161220049

December 11, 2017

### 28.1-2

解: 
$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -6 & 7 \\ 12 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

其中  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### 28.1-3

解: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0.4 & -3.2 & 2.2 \\ 0.2 & 3.4 & 3.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0.2 & 3.4 & 3.6 \\ 0.4 & -3.2 & 2.2 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0.2 & 3.4 & 3.6 \\ 0.4 & -\frac{16}{17} & \frac{95}{17} \end{bmatrix}$$

于是可以得到  $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.4 & -\frac{16}{17} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0 & 3.4 & 3.6 \\ 0 & 0 & \frac{95}{17} \end{bmatrix}$$

于是方程可转化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.4 & -\frac{16}{17} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

因此

$$y = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ \frac{295}{17} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0 & 3.4 & 3.6 \\ 0 & 0 & \frac{95}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

解之得:

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{19} \\ -\frac{1}{19} \\ \frac{59}{19} \end{bmatrix}$$

### 28.1-6

*Proof.* 对于任意的  $n \geq 1$ , 都存在  $n \times n$  的零矩阵, 其可以表示如下:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

左边即为下三角矩阵  $L$ , 右边即为上三角矩阵  $U$ . 又因为零矩阵是奇异矩阵, 因此得证.  $\square$

### 28.1-7

在 LU-DECOMPOSITION 中, 当  $k = n$  时, 有必要执行最外层的 for 循环迭代. 因为若不执行, 则  $u_{nn}$  会

呈现原先的值而不是正确的 $a_{nn}$

在LUP-DECOMPOSITION中, 当 $k = n$ 时, 没必要执行最外层的for循环迭代. 此时行交换是对最后一行自身的交换, 排列矩阵为零矩阵, 不影响; 再者, 第16行的for循环也不会执行. 因此这层循环没有影响, 故没有必要.

## 28.2-1

*Proof.* 首先, 运行时间为 $M(n)$ 的矩阵乘法可以推出 $O(M(n))$ 的矩阵平方算法. 因为对于 $B = A^2$ , 相当于 $B = A \cdot A$ , 也即一切矩阵平方都是矩阵乘法, 故这一点容易得到;

其次, 欲从运行时间为 $S(n)$ 的矩阵平方算法推出 $O(S(n))$ 的矩阵乘法. 对于相乘的矩阵 $A$ 和 $B$ , 不妨构造矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A & I \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$C^2 = \begin{bmatrix} A^2 + B & A \\ AB & B \end{bmatrix}$$

此时矩阵的左下角即为 $AB$ . 由此可知 $S(2n) = O(S(n))$ , 又因为刚才矩阵平方算法的复杂度为 $S(n) = O(n^2)$ , 又因为 $S(n) = \Omega(n^2)$ , 故有 $O(n^2)$ 的矩阵乘法, 即 $O(S(n))$ 的矩阵乘法.  $\square$

## 28.2-2

*Proof.* 不妨设 $n = 2^k$ , 将 $A$ 矩阵分块如下:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

设 $A_1 = L_1 U_1 P_1$ , 其中 $L_1$ 为 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ ,  $U_1$ 为 $\frac{n}{2} \times n$ ,  $P_1$ 为 $n \times n$ . 进一步矩阵分块, 设 $U_1 = [B|C]$ ,  $A_2 P_1^{-1} = [D|F]$ , 其中 $B$ 与 $D$ 都是 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ 的矩阵. 由于 $A$ 为非奇异矩阵, 则 $B$ 非奇异, 设 $G = F - DB^{-1}C$ , 有

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ DB^{-1} & I_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & G \end{bmatrix} P_1$$

再令 $G = L_2 U_2 P_2$ , 并设 $H = \begin{bmatrix} I_{n/2} & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ , 故有

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ DB^{-1} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & CP_2^{-1} \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} H P_1$$

这便是 $A$ 的一个LUP分解. 计算过程中计算了子矩阵的LUP分解、矩阵的乘法以及逆矩阵运算, 后两者时间上等价, 由运行时间的相加关系知LUP分解的运行时间为 $O(M(n))$

对于证明的另一半, 我并没有找到好的解决方法. ....  $\square$

## 28.2-3

*Proof.* 由上题知LUP分解(或是LU分解)的运行时间为 $O(M(n))$ , 则运行这个算法, 并沿对角线将每个元素相乘, 即是计算该矩阵的行列式, 运行时间为 $O(M(n))$ .

证 $O(D(n))$ 暂想不出解决方法(如何将求一个行列式的值构造矩阵的乘法?)  $\square$

## 28.3-1

*Proof.* 可以进行如下构造: 设列向量 $e_i$ 为除了在第 $i$ 行为1, 其他位置上都是0的向量; 易知行向量 $e_i^T$ 除了在第 $i$ 列为1, 其他位置上都是0. 于是有

$$e_i^T A e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

前两个矩阵相乘后结果为一个行向量, 其中第 $j$ 列都是 $a_{ij}$ , 再与第三个矩阵相乘, 可得唯一的数 $a_{ii}$ . 因为 $e_i^T A e_i > 0$ , 因此 $a_{ii} > 0$ , 这对任意的 $i \in [1, n]$ 都成立. 因此对称正定矩阵的对角线上所有元素都为正数.  $\square$

## 28.3-3

*Proof.* 可以进行如下构造: 设列向量 $e_i, e_j$ 为除了在第 $i, j$ 行为1, 其他位置上都是0的向量(其中 $i \neq j$ ); 于是有

$$(e_i - e_j)^T A (e_i - e_j) =$$

$$(e_i - e_j)^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

前两个矩阵相乘后结果为一个除了第 $j$ 列为-1, 第 $i$ 列为1, 其他都为0的行向量, 再与第三个矩阵相乘, 结果为 $a_{ii} + a_{jj} - a_{ij} - a_{ji} = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij}$ . 假设矩阵各元素中, 最大值不在对角线上, 则不妨设 $a_{ij}$ 为最大值, 此时 $a_{ij} \geq a_{ii}, a_{ij} \geq a_{jj}$ , 此时得到 $(e_i - e_j)^T A(e_i - e_j) \leq 0$ , 这与正定矩阵的定义矛盾. 因此最大元素存在于对角线上.

因此

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

先求 $Ly = Pb$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求得

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

然后 $Ux = y$ , 也即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

因此解为

$$x = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 12 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

## 28-1

a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c.

将矩阵 $A^{-1}$ 视为5个列向量 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ，则有

$$Ax_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$$

可以得到

$$x_1 = [5, 4, 3, 2, 1]^T$$

同理可求出 $x_2, x_3, x_4, x_5$ ，最后可求得逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d.

*Proof.* 首先，对三对称矩阵来说，第7-10行只需要交换至多两次以获得最大值，故缩为 $O(1)$ ；其次，第13-15行交换是有限常数次数，也为 $O(1)$ 的运行时间；对于第16-19行，同一列上至多有三个元素，故循环次数为常数次，也为 $O(1)$ 。因此，对于三对称矩阵来说，它的LUP分解运行时间为 $O(n)$ ，易知LU分解的运行时间也为 $O(n)$ 。以求逆矩阵 $A^{-1}$ 为基础的算法，因为需要记录逆矩阵中每一个元素的值，这个过程需要 $\Theta(n^2)$ 的时间，加之算法的其他部分，故在最坏情况下运行时间可以达到 $\Omega(n^2)$ 。□

e.

*Proof.* 由(a)中可知，LUP算法循环体中的各部分运行时间都为 $O(1)$ ，故整体运行时间为 $O(n^2)$ ，在forward和backward的过程中，由于 $U$ 与 $L$ 中每一行每一列同样只有很少的有限个非零元素，在计算 $Ly = Pb$ 以及 $Ux = y$ 对每一个元素 $x_i$ 只需 $O(1)$ 时间，共需要 $O(n)$ 的时间。综上，算法运行时间为 $O(n)$ 。□