

# 问题求解 (三) 第4周作业

黄奕诚161220049

September 25, 2017

## GC Chapter 7

一条定向边添加一条相反方向的边, 便构成一个无向图, 且每个顶点度数都为偶数, 因此是欧拉图。□

### 7.1

#### (a)

*Proof.* 假设 $D$ 不是强连通图, 则存在两个顶点 $v_1, v_2$ , 使得不存在一条从 $v_1$ 到 $v_2$ 的路径。由题意知, 图 $D - v_1$ 是强连通图, 则必存在一个顶点 $v_3$ , 从 $v_3$ 到 $v_2$ 存在一条路径 $P_1$ ; 同理, 图 $D - v_2$ 是强连通图, 则从 $v_1$ 到 $v_3$ 存在一条路径。由此可知从 $v_1$ 到 $v_2$ 存在一条路径, 与假设矛盾。因此,  $D$ 是强连通的。□

#### (b)

*Proof.* 假设存在满足这一性质的四阶定向图 $D$ 。易知三阶定向强连通图是唯一(两两首尾相接), 则若要满足题意, 则 $D$ 去掉任意一个顶点后的三阶图都必须是该图。设该三阶图的顶点为 $v_1, v_2, v_3$ , 边为 $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)$ , 则另有一顶点 $v_4$ , 在三个顶点中存在一顶点与 $v_4$ 直接相连, 不妨设为 $v_1$ , 则存在 $(v_1, v_4)$ 。若删去 $v_1$ 且仍满足余下三顶点构成三阶定向强连通图, 则必存在 $(v_3, v_4), (v_4, v_2)$ , 此时若在 $D$ 中删去 $v_3$ , 剩下的边为 $(v_1, v_4), (v_4, v_2), (v_1, v_2)$ , 不满足三阶强连通图, 故矛盾。由此得证。□

### 7.2

*Proof.* 首先, 假设 $G$ 是一个欧拉图, 则每个顶点的度数都为偶数, 延着一个欧拉环给每一条边定向, 且方向与环路径方向一致。由于每次经过一个顶点, 都会同时增加一个入度和一个出度, 由此可推出对任意的顶点, 都有入度等于出度, 便能构成一个欧拉定向环, 得证;

再者, 假设 $G$ 存在欧拉定向环, 则对每一个顶点都有入度等于出度, 则该顶点的总度数必为偶数, 将每

### 7.4

*Proof.* 假设图 $D$ 是强连通的, 则对于其中任意两个顶点 $v_1, v_2$ , 存在路径 $P_1$ , 使得 $v_1 \rightarrow P_1 \rightarrow v_2$ , 也存在路径 $P_2$ , 使得 $v_2 \rightarrow P_2 \rightarrow v_1$ 。若 $P_1 = P_2$ , 则将所有边的方向反向对其连通性没有影响, 依然是强连通; 若 $P_1 \neq P_2$ , 将所有边反向时, 则有 $v_1 \rightarrow P_2 \rightarrow v_2$ 且 $v_2 \rightarrow P_1 \rightarrow v_1$ , 因此仍然是强连通图; 充分性同理可证。□

### 7.5

*Proof.* 首先, 若有向图 $D$ 是强连通, 设 $A, B$ 的诱导图分别为 $G(A), G(B)$ 。则对 $D$ 中任意两点 $v_1, v_2$ 都有路径使 $v_1$ 连通到 $v_2$ , 或使 $v_2$ 连通到 $v_1$ 。若 $v_1, v_2 \in G(A)$ 或 $v_1, v_2 \in G(B)$ , 由于两者在同一分量中, 必有路径使之相连; 若 $v_1 \in G(A), v_2 \in G(B)$ , 则必存在两个顶点, 使得 $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow \dots \rightarrow v_2$ , 其中 $v_3 \in G(A), v_4 \in G(B)$ , 且 $v_1$ 可能等于 $v_3, v_2$ 可能等于 $v_4$ , 则 $(v_3, v_4)$ 即为从 $G(A)$ 到 $G(B)$ 的一个有向边, 反之从 $G(B)$ 到 $G(A)$ 亦然。

其次, 若由割边集分割而成的两个连通分量 $G(A)$ 和 $G(B)$ , 存在由 $G(A)$ 指向 $G(B)$ 的边以及由 $G(B)$ 指向 $G(A)$ 的边, 分别设其为 $(v_1, v_2)$ 和 $(v_3, v_4)$ 。对于 $D$ 中的任意两个顶点 $(u, v)$ , 若它们在同一个连通分量中, 则显然互相连通, 若 $u \in G(A), v \in G(B)$ , 则有路径 $u \rightarrow \dots \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v$ 与 $v \rightarrow \dots \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow \dots \rightarrow u$ , 由此可推知 $D$ 是强连通图。□

## 7.9

*Proof.* 首先, 若竞赛图 $T$ 是可迁的, 假设 $(u, v)$ 是 $T$ 中的弧,  $v$ 连接到的顶点集为 $A$ , 则根据可迁性, 对 $A$ 中每一个顶点 $a$ , 都有弧 $(u, a)$ , 于是可得 $u$ 的出度 $od(u) \geq 1 + od(v)$ , 因此每两个顶点的出度不同。再者, 若竞赛图 $T$ 中每两个顶点的出度都不同, 设共有 $n$ 个顶点, 它们的出度在集合 $\{n-1, n-2, \dots, 1, 0\}$ 中, 设 $od(v_i) = n-i$ , 其中 $1 \leq i \leq n$ 。对于任意顶点 $v_i$ , 其邻接顶点为 $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n$ , 对于 $v_{i+1}$ , 其邻接顶点为 $v_{i+2}, \dots, v_n$ , 由此可知若 $(v_i, v_{i+1}) \in E$ 且 $(v_{i+1}, v_{i+2}) \in E$ , 则有 $(v_i, v_{i+2}) \in E$ , 满足可迁性, 因此竞赛图 $T$ 是可迁的。  $\square$

## 7.10

*Proof.* 设 $u$ 到 $v$ 的最短路径为 $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v$ , 则不存在弧 $(u, v_2), (u, v_3), \dots, (u, v_{k-1}), (u, v)$ , 否则便有更短的路径, 因此可得 $od(u) \leq (n-1) - (k-1) = n-k$ , 由此知 $id(u) = n-1 - od(u) \geq k-1$ 。得证。  $\square$

## 7.13

*Proof.* 对于竞赛图中任意两个顶点 $u, v$ , 要么 $(u, v) \in E$ , 要么 $(v, u) \in E$ , 不妨设 $\vec{d}(u, v) = 1, \overleftarrow{d}(u, v) > 1$ , 因此两者不等。  $\square$

## 7.14

### (a)

*Proof.* 若顶点个数 $n$ 为奇数, 只要保证所有顶点的出度都为 $\frac{n-1}{2}$ 即可。若 $n=1$ , 则必然成立; 若 $n=3$ , 则只要成同向环即可, 每个顶点出度为1。对于更多顶点的图, 只要保证每个顶点出度为 $\frac{n-1}{2}$ , 如此入度也为 $\frac{n-1}{2}$ , 如此每个球队胜场与负场相同, 同样获得第一名。  $\square$

### (b)

*Proof.* 若顶点个数 $n$ 为偶数, 假设存在所有球队都获得第一名的结局, 则所有球队的出度都相等, 且入度也相等。设每个顶点的出度为 $o$ , 入度为 $i$ , 有 $o+i=n-1$ 。由有向图第一定理可知 $o \cdot n = \frac{n(n-1)}{2}$ , 得 $o = \frac{n-1}{2}$ , 而因为 $n$ 为偶数, 所以 $o$ 不为整数, 而这显然不可能。因此不存在这种情况。  $\square$

## 7.15

*Proof.* 用数学归纳法证明如下:

- (1) 当 $k=3$ 时, 由定理7.9可知其成立;
- (2) 假设当 $k=t$  ( $3 \leq t \leq n-1$ )时, 结论成立, 也即 $T$ 中含有一个长度为 $k$ 的圈; (3) 由上述假设, 当 $k=t+1$ 时, 设此时长度为 $k$ 的圈内有 $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ , 若有一点 $u$ 异于圈内之点, 且被圈内一点邻接, 也邻接到圈内另一点, 则圈可扩充为 $v_1, v_2, \dots, v_i, u, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1$ , 因此存在一个长度为 $k+1$ 的圈。假设不是上述情况, 而是: 不在圈内的顶点要么全部邻接到圈上, 要么被圈上顶点邻接。设 $a$ 符合前一种情况,  $b$ 符合后一种情况。由于是强连通图, 故在圈内存在一点 $c$ , 使得扩充成更大圈 $v_1, v_2, \dots, v_i, b, a, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1$ 且去掉 $c$ , 因此存在一个长度为 $k+1$ 的圈。
- (4) 综上所述, 结论成立。  $\square$