问题求解（三）第10周作业

黄奕诚161220049

November 6, 2017

TJ Chapter 3

3

矩形的对称形所构成的群的Cayley表如下：

o	id	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
id	id	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	id	μ_4	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	id	ρ_1	μ_3	μ_4	μ_1	μ_2
ρ_3	ρ_3	id	ρ_1	ρ_2	μ_2	μ_3	μ_4	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	id	ρ_1	ρ_2	ρ_3
μ_2	μ_2	μ_3	μ_4	μ_1	ρ_3	id	ρ_1	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_4	μ_1	μ_2	ρ_2	ρ_3	id	ρ_1
μ_2	μ_4	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	id

有8个元素。

$(Z_4, +)$群构成的Cayley表如下：

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

共有4个元素。

由于这两个群含有不同数量的元素，故不同.

6

U(12)有4个元素，乘法表格如下：

$\cdot$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

共

7

Proof. 1.首先证明$(S, *)$是一个群：
(1)首先证明封闭性：因为$S = R\backslash\{-1\}$，对于$a, b \in S$，由于实数本身的封闭性，只要$a \cdot b \neq -1$即可满足封闭性.假设$a \cdot b = -1$，则可以得到$(a+1)(b+1) = 0$，即有$a = -1$或$b = -1$，这与$a, b \neq -1$矛盾.因此$a \cdot b \neq -1$，由此满足封闭性；
(2)再证明满足结合律：对任意$a, b, c \in S$，有$(a \cdot b) \cdot c = (a+b+ab) \cdot c = a+b+c+ab+(a+b+ab)c = a+b+c+ab+ac+bc+abc = a \cdot (b+c+bc) = a \cdot (b \cdot c)$，由此满足结合律；
(3)再证明有单位元：假设存在$e \in S$，使得对任意$a \in S$，有$e \cdot a = a \cdot e = e + a + ea$，取$e = 0$则成立.因此存在单位元$e$；
(4)最后证明存在逆元：对任意的$a \in S$，若$b \in S$，则$a \cdot b = e$，有$a + b + ab = 0$，得$b = -\frac{a}{a+1}$.由于$a \neq -1$，故存在这样的逆元；
综上，$(S, *)$是一个群.
2.又因为对$a, b \in S$，有$a \cdot b = a+b+ab = b+a+ba = b \cdot a$，满足交换律，所以它是阿贝尔群. □

17

以下三种都互为不同构的8阶群：
(1)$\mathbb{Z}_8$
(2)$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
(3)$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Proof. 第一个群为8阶循环群，每个子群包含一个元素；第二个群的每个子群包含两个元素；第三个群的每个子群包含三个元素.子群结构不同，因此它们互不同构. □

28

Proof. 对于(1)，$g^m g^n = (\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})\cdot(\underbrace{g\cdots g\cdot g}_{n个})$

$= e(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})\cdot(\underbrace{g\cdots g\cdot g}_{n个})$

$= e(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m+n个}) = \underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m+n个} = g^{m+n}$

对于(2)，$(g^m)^n =$

$\underbrace{(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})\cdot(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})\cdots(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})}_{n个}$

$= e\,\underbrace{(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})\cdot(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})\cdots(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{m个})}_{n个}$

$= e(\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{mn个})$

$= \underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{mn个} = g^{mn}$

对于(3)，因为$(gh)^n\cdot(h^{-1}g^{-1})^n$

$= \underbrace{gh\cdot gh\cdot gh\cdots gh}_{n个}\cdot\underbrace{h^{-1}g^{-1}\cdot h^{-1}g^{-1}\cdots h^{-1}g^{-1}}_{n个}$

$= e^n = e$.因此$(gh)^n = (h^{-1}g^{-1})^{-n}$.若$G$是阿贝尔群，则有$gh = hg$，此时$(gh)^n = \underbrace{gh\cdot gh\cdot gh\cdots gh}_{n个}$

$= \underbrace{g\cdot g\cdot g\cdots g}_{n个}\cdot\underbrace{h\cdot h\cdot h\cdots h}_{n个} = g^n h^n$. □

36

Proof. 除零有理数集Q^*的单位元为1，因为对于$k \in Z$，有$1\cdot 2^k = 2^k$，故1也是H的单位元，满足条件1.对于任意的$k_1, k_2 \in Z$，有$2^{k_1}\cdot 2^{k_2} = 2^{k_1+k_2} \in H$，满足条件2.对于任意的$k \in Z$，有$2^{-k} = \frac{1}{2^k}$，即存在逆元，满足条件3.因此$H$是$Q^*$的一个子集. □

38

Proof. 不妨设$z_1, z_2 \in T$，并且$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$定义"乘法"运算为$z_1 + z_2 = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$.并定义"逆元"为$z^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta$.
于是，对于任意的$z_1, z_2 \in T$，有$z_1\cdot z_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$，有$|z_1\cdot z_2| = 1$，故$z_1\cdot z_2 \in T$.又对于$z^{-1}$，有$|z^{-1}| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = 1$，故$z^{-1} \in T$.
因此，T是C^*的一个子群. □

41

Proof. 定义"乘法"运算为矩阵的加法运算，定义矩阵A的"逆元"为$-A$.于是，用Proposition 3.10可证：
首先，矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

有$A \in H$，故H非空.对于任意的$h_1, h_2 \in H$，有$h_1\cdot h_2^{-1} = h_1 - h_2 = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & d_1 - d_2 \end{bmatrix}$ 此时$(a_1 - a_2) + (d_1 - d_2) = (a_1 + d_1) - (a_2 + d_2) = 0$.因此有$h_1 h_2^{-1} \in H$.由此可知$H$是$G$的一个子群. □

48

Proof. 因为a, b是群G的两个元素，所以有$ea = a$.因为$a^3 = e$，两边同时"乘以"一个a，则有$a^4 = ea = a$.又因为$a^4 b = ba$，所以可得$ab = ba$，得证. □

52

Proof. $(xy)^2 = xyxy = xy$
在等式两边左"乘"$y^{-1}x^{-1}$，可得$xy = e$
在等式两边先左"乘"x^{-1}，再右"乘"y^{-1}，可得$yx = e$
由此可得$xy = yx$，因此G是一个阿贝尔群. □

TJ Chapter 4

1

(a)

Disprove 易知$U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$，若以1,3,5,7为生成元，都不能得到$U(8)$，故它不是循环的.

(b)

Disprove 21也是Z_{60}的一个生成元，但它不是质数.

(c)

Disprove 假设g是有理数群Q的一个生成元，则设$g = p/q(q, p$为非零整数)，则对于ng和$(n+1)g$来说，Q中的一个元素，即$\frac{2n+1}{2}g$无法用g生成，因此Q不是循环群.

(d)

Disprove 暂举不出反例……

(e)

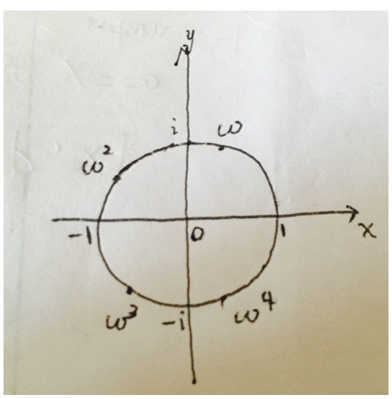
Prove 假设A是一个无穷群，则它必有无穷多个子群，因此A是有穷群.

12

一个生成元的循环群：Z_1，生成元为1
两个生成元的循环群：Z_6，加法运算.生成元为1和5
四个生成元的循环群：Z_10，加法运算.生成元为$1, 3, 7, 9$
n个生成元的循环群：Z_m，其中满足大于等于0，小于m，并且与m互质的数有n个.

21

当$n = 5$时，$z = cis(\frac{2k\pi}{5})$.如下图所示：
设生成元是ω，则列举如下：



$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$
$\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$
$\omega^3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$
$\omega^4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$

24

对于任意两个互异的质数p和q，Z_{pq}中的生成元g只要满足以下两个条件即可：
(1)$1 \leq g \leq pq - 1$
(2)$gcd(g, p) = 1$且$gcd(g, q) = 1$
考虑到p, q为质数，只要不存在正整数m, n，使得$g = pn$或者$g = qm$即可.又因为$1 \leq n \leq q-1$且$1 \leq m \leq p-1$，所以只要减去这些情况即可.
因此Z_{pq}的生成元个数为$pq - 1 - (p-1) - (q-1) = pq - p - q + 1$.

32

Proof. 对于$y, y^2, y^3, \cdots, y^n$，只要证明它们互不相同，则可推得其覆盖了x^0到x^{n-1}的所有值，即生成了G.假设存在$y^i = y^j$，则知$x^{ki} = x^{kj}$，即$ki \equiv kj (\mod n)$，也即$k(i-j) \equiv 0 (\mod n)$.又因为$gcd(k, n) = 1$，所以$(i-j) \equiv 0 (\mod n)$.于是$i = nk + j$，其中$k \in Z$.由此可知在一个周期内，$y, y^2, y^3, \cdots, y^{n-1}$的值互不相等，因此$y$是$G$的一个生成元. □

TJ Chapter 5

3

(a)

(14356)=(16)(15)(13)(14)

(b)

(156)(234)=(16)(15)(24)(23)

(c)

(1426)(142)=(16)(12)(14)

(d)

(17254)(1423)(154632)=(14)(15)(12)(17)(13)(16)

(e)

(142637)=(17)(13)(16)(12)(14)

5

S_4的所有子群为$\{1,2,3,4\}$的所有排列，共有24种.

(a)

穷举六种情况如下：

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{bmatrix}$$

因此，该集合为
$\{(13),(13)(24),(132),(134),(1324),(1342)\}$

(b)

按(a)中的穷举法，可以得到集合为$\{(1),(34),(13),(134),(143),(14)\}$

(c)

按(a)中的穷举法，可以得到集合为$\{(13),(134)\}$ 它们都不是S_4的子群.

16

对于正四面体，首先，恒等变换即为$\{(1)\}$；
其次，若以顶点与其对立面的面心之连线为轴，每次旋转120度，可以得到3种置换：$\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$；以棱心与对棱棱心为轴，进行轴对称置换，可以得到8种：$\{(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\}$.
综上所述，正四面体的所有刚体运动群为$\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\}$，与$A_4$同构.

27

Proof. 设$0 \le a < n, g \in Z$，欲证λ_g是G的一个排列，即证λ_g的所有元素都在G中，元素个数相同，并且没有重复的元素.对于前两点，由定义$\lambda_g(a) = ga$可直接得出.对于第三点，假设$\lambda_g(a) = \lambda_g(b)$，则有$ga = gb$，即$a = b$，实际上也即$a \equiv b(\mod n)$，说明元素互异.因此，$\lambda_g$是$G$的一个排列. □

29

D_8的中心为本身的单位元id以及将正八边形绕中心旋转180度的变换$\{(28)(37)(46)\},\{(13),(48),(57)\},\{(24),(15),(68)\},\{(17),(26),(35)\}$.
D_10的中心为单位元id以及将正十边形绕中心旋转180度的变换;
$D)_n$的中心，首先都有id，若n是偶数，则还有将图形绕中心旋转180度的变换;

TJ Chapter 6

11

(e)推(d)

因为$g_1^{-1}g_2 \in H$，所以存在$h \in H$，使得$g_1^{-1}g_2 = h$，即$g_2 = g_1h$，由此可以推得$g_2 \in g_1H$.

(d)推(c)

因为$g_2 \in g_1H$，所以存在$h \in H$，使得$g_2 = g_1h$.设$x \in g_1H$，则存在$h_1 \in H$，使得$g_1h_1 = x$，也即$x = g_2h^{-1}h_1$，因为$h^{-1}h_1 \in H$，故存在$h_2 \in H$，使得$x = g_2h_2$，所以$x \in g_2H$，因此$g_1H \subseteq g_2H$.

(c)推(a)

再证$g_2H \subseteq g_1H$:设$x \in g_2H$，则存在$h_1 \in H$，使得$x = g_2h_1$，于是$x = g_1hh_1$，又$hh_1 \in H$，所以$x \in g_1H$，因此$g_2H \subseteq g_1H$，故$g_1H = g_2H$.

(a)推(b)

设$x \in Hg_1^{-1}$，则存在$h_1 \in H$，使得$x = h_1g_1^{-1}$，因为$g_1h_1 = g_2h_1$，故有$g_1 = g_2$，代入前式，得到$x = h_1g_1^{-1} = h_1g_2^{-1}$，由此$x \in Hg_2^{-1}$.故$Hg_1^{-1} \subseteq Hg_2^{-1}$，同理可证$Hg_2^{-1} \subseteq Hg_1^{-1}$.因此$Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$.

(b)推(e)

由$Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$知$Hg_1^{-1}g_2 = H$，若$x \in Hg_1^{-1}g_2$，则存在$h_1, h_2 \in H$，使得$h_1g_1^{-1}g_2 = h_2$，即$g_1^{-1}g_2 = h_1^{-1}h_2$.因为$h_1^{-1}h_2 \in H$，所以$g_1^{-1}g_2 \in H$.

12

Proof. 设$x \in gH$，则存在$h \in H$，使得$x = gh$，有$x = gh = ghg^{-1}g = hg$.由此$x \in Hg$，所以$gH \subseteq Hg$.同理可知$Hg \subseteq gH$，因此$gH = Hg$. □

16

Proof. 将G分为三个部分：$\{e\}$,order为2的元素集S_1，order大于2的元素集S_2.x与其逆元相等当且仅当x的order为2或者$x = 1$，对于$x \in S_2$，有$x \neq x^{-1}$.又因为$x_1 \neq x_2$，即order(x) = order(x^{-1}).所以S_2的元素个数为偶数.因此，S_1的元素个数为偶数-1-偶数，为奇数个. □

21

Proof. 设x是G中非单位元的元素，则由拉格朗日定理知，x的阶整除$|G| = p^n$，又因为p^n的因数为$p, p^2, \cdots, p^n$，所以x的阶只能取其中一个，又因为当$|x| = p^2, p^3, \cdots, p^n$时，可分解为$p$的乘积.因此$G$有一个$p$阶的真子群。当$n \geq 3$时，$G$必有一个$p^2$阶真子群. □

TJ Chapter 9

6

Proof. 设从Z_n到unity第n个根的映射为$k \mapsto cis(\frac{2k\pi}{n})$.则有如下一一对应关系:
$1 \mapsto cis(\frac{2\pi}{n})$
$2 \mapsto cis(\frac{4\pi}{n})$
$\cdots$
$k \mapsto cis(\frac{2k\pi}{n})$
$\cdots$
如此可知它们同构. □

7

Proof. 设循环群$G = \{g^n | n \in Z\}$，设从Z_n到G的映射为$k \mapsto g^k$，则有如下一一对应关系:
$1 \mapsto g^1$
$2 \mapsto g^2$
$\cdots$
$k \mapsto g^k$
$\cdots$
如此可知它们同构. □

8

Proof. 在题目4.1(c)中已证知Q对于加法运算不是循环群，而Z对于加法运算是循环群，因此它们不同构. □

9

Proof. 欲证明G是一个定义在$*$运算的群，这个证明过程与题3.7一摸一样，因此不再赘述.下面证明$(G, *)$与非零实数的乘法群同构.
考虑到$a * b = a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$，所以$a * b + 1 = (a + 1)(b + 1)$，因此对于两个非零实数$a$和$b$，它们的*运算可以与简单乘法一一对应，所以两群同构. □