问题求解（三）第16周作业

黄奕诚161220049

December 18, 2017

TJ Chapter 12

2

Proof. $O(n)$表示所有n阶正交矩阵所组成的定义在矩阵乘法运算的群.下面依次证明各性质:

(a) 对于任意的$A, B, C \in O(n)$，根据矩阵乘法的结合律可以得到$(AB)C = A(BC)$.由此证明了结合性.

(b) 对任意的$A \in O(n)$，有单位矩阵I_n，使得$I_n A = AI_n = A$，并且$I(n)$也是正交矩阵，由此证明了单位元存在性.

(c) 对任意的$A \in O(n)$，都必然存在$A^T \in O(n)$，又因为$A^T = A^{-1}$，所有每一个正交矩阵都有逆矩阵，使得$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$，由此证明了逆元存在性.

综上所述，$O(n)$是一个群. □

3

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

则易求得

$$A^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1/2 + 1/2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = A^T$$

因此A是正交矩阵，又因为$|A| = 1$，所以A在群$SO(n)$中.

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

则易求得

$$B^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1/5 + 4/5} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = B^T$$

因此B是正交矩阵，又因为$|B| = 1$，所以B在群$SO(n)$中.

(c) 对于矩阵的第三列，因为$\sqrt{(3/\sqrt{5})^2 + (4/\sqrt{5})^2} = 5 \neq 1$，所以它不是正交矩阵，也不属于$SO(n)$.

(d) 对于矩阵的前两列的向量积，因为$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{9} \neq 0$，所以它不是正交矩阵，也不属于$SO(n)$.

6

Proof. $E(n)$所定义的"乘法"运算为:$(A, x)(B, y) = (AB, Ay + x)$，下面证明三条性质:

(a) 对任意的$(A, x), (B, y), (C, z) \in E(n)$，有$(A(x)(B(y))(C, z) = (AB, Ay + x)(C, z) = (ABC, ABz + Ay + x)$，又因

为$(A,x)((B,y)(C,z)) = (A,x)(BC,Bz+y) = (ABC, A(Bz+y)+x) = (ABC, ABz+Ay+x)$，因此有$(A(x)(B(y))(C,z) = (A,x)((B,y)(C,z))$，由此证明了结合性.

(b) 存在$(I_n,0) \in E(n)$，对任意的$(A,x) \in E(n)$，有$(I_n,0)(A,x) = (I_nA, xI_n) = (A,x)$且$(A,x)(I_n,0) = (AI_n, A0+x) = (A,x)$，因此有$(I_n,0)(A,x) = (A,x)(I_n,0) = (A,x)$，所以$(I_n,0)$是单位元，由此证明了单位元存在性.

(c) 因为对任意的$(A,x) \in E(n)$，有$A \in O(n)$，所以A是可逆矩阵，因为总有$(A,x)(A^{-1}, -A^{-1}x) = (-A^{-1}x, A^{-1})(A,x) = (I_n, 0)$，由此证明了逆元的存在性.

综上所述，$E(n)$是一个群. □

11

Proof. 假设存在$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$并且$f(x_1) = f(x_2)$，根据定义$||f(x_1) - f(x_2)|| = ||x_1 - x_2||$可得$||x_1 - x_2|| = 0$，可以得到$x_1 = x_2$，所以$f$是$\mathbb{R}^n$上的单射. □

TJ Chapter 14

2

(a) 根据14.1-Example 2.的描述可以得出：
$X_{(1)} = X, X_{(12)} = \{3\}, X_{(13)} = \{2\}$
$X_{(23)} = \{1\}, X_{(123)} = X_{(132)} = \emptyset$
$G_1 = \{(1),(23)\}, G_2 = \{(1),(13)\}, G_3 = \{(1),(12)\}$

(b) 同理可得
$X_{(1)} = X$,$X_{(12)} = \{3,4,5,6\}, X_{(345)} = \{1,2,6\}$
$X_{(354)} = \{1,2,6\}, X_{(12)(345)} = \{6\}$
$X_{(12)(354)} = \{6\}$.
$G_1 = G_2 = \{(1),(345),(354)\}, G_3 = G_4 = G_5 = \{(1),(12)\}$,
$G_6 = \{(1),(12),(345),(354),(12)(345),(12)(354)\}$.

3

(a) $O_1 = O_2 = O_3 = \{1,2,3\}$，对任意的$x \in \{1,2,3\}$，都有$|O_x| = 3$，满足$|G| = 6 = 3 \cdot 2 = |O_x| \cdot |G_x|$.

(b) $O_1 = O_2 = \{1,2\}, O_3 = O_4 = O_5 = O_6 = \{3,4,5\}$.也满足$|G| = |O_x| \cdot |G_x|$.

4

(a) *Proof.* 当$\theta = 0$时，对任意的$x \in X$，相当于没有进行旋转，故$ex = x$.
对于

$$g_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

对于$x = (x_1, x_2)^T$，有

$$(g_1g_2)x = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

又根据矩阵乘法的结合律，可知$g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$.综上，$\mathbb{R}^2$是一个$G-$集.

□

(b) 以原点为圆心，OP为半径的一个圆周.

(c) 则$G_P = \{\theta | \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

8

由Burnside's Theorem，$|G| = 8$，类似于书中P217的例子，可得

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{8}(3^4 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1) \\ &= 21 \end{aligned}$$

共有21种涂色方案.

11

(a) 不变：$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$.

(b) 面心为轴，旋转90或270度(6个):$(1)(2345)(6), (1)(5432)(6)$.

(c) 面心为轴，旋转180度(3个):$(1)(24)(35)(6)$.

(d) 对边中心点为轴，旋转180度(6个):$(16)(25)(43)$.

(e) 体对角线为轴，旋转120或240度(8个):$(346)(152), (643)(251)$.

因此$k = \frac{1}{24}(3^6 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2) = 57$.因此共有57种方案.

12

(a) 不变：
$(1)(2)\cdots(12)$.

(b) 面心为轴，旋转90度或270度(6个):
$(3214)(7658)(9cba), (3412)(7856)(9abc)$.

(c) 面心为轴，旋转180度(3个):
$(13)(24)(57)(68)(9b)(ac)$.

(d) 体对角线为轴，旋转120度或240度(8个):
$(5ab)(372)(18c)(496), (5ba)(273)(1c8)(694)$

(e) 对棱棱心为轴，旋转180度(6个):
$(3)(b)(19)(47)(28)(5c)(6a)$

因此$k = \frac{1}{24}(2^12 + 6 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^7) = 218$.因此共有218种方案.

16

(a) 一氯取代：共1种；二氯取代(对、邻、间)：共3种；三氯取代：共3种；四氯取代相当于二氢取代：共3种；五氯取代相当于一氢取代：共1种；六氯取代：共1种；

(b) 用Burnside引理也可以得到
首先考虑过六边形中心垂直于该面的轴：不变：$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$；旋转60度或300度：(123456)；旋转120度或240度:$(135)(246)$；旋转180度：$(14)(25)(36)$.
其次考虑过六边形对角线的轴：旋转180度(同类3个)：$(1)(4)(26)(35)$;
再者考虑过六边形对边中心的轴：旋转180度(同类3个)：$(12)(36)(45)$;
又考虑到其中保持不变的方案数，不变时为C(6,3)=20种，沿中心旋转120或240度为2种，沿对角线旋转180度为4种.因此总方案数为$(20 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3)/12 = 3$.共有3种方案.

17

(a) 类似于S_3，有$(a)(b)(c), (a)(bc), (ab)(c), (abc), (acb), (ac)(b)$，结合转移方程可知方案数为$(1 \cdot 2^8 + 3 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4)/6 = 80$种.

(b) 类似于S_4，有$(a)(b)(c)(d), (abcd) \times 6, (a)(bcd) \times 8, (ac)(bd) \times 3, (a)(b)(cd) \times 6$，结合转移方程可知方案数为$(1 \cdot 2^{16} + 6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^{12} + 3 \cdot 2^{10} + 8 \cdot 2^{10})/24 = 4240$种.

19

将该领带视为一条直线，则除了自身不变，唯一的操作就是绕垂直于它且过中点的直线旋转180度，此时方案数为$(4^{12} + 4^6)/2 = 8390656$.