问题求解（三）第3周作业

黄奕诚161220049

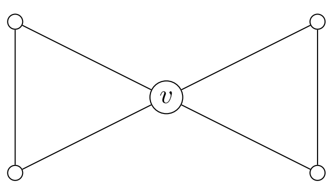
September 19, 2017

GC Chapter 5

5.3

(a)

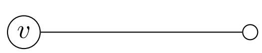
不同意.反例如下：



此时v在一个环内，而若移去v，则G会成为非连通图，因此v是一个割点.

(b)

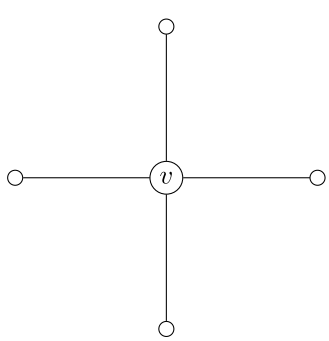
不同意.反例如下：



此时v不在任何环内，而v不是割点.

(c)

不同意.反例如下：



此时割点有1个，端点有4个，割点少于端点.

(d)

再次借用(c)中的图，其割点有1个，而桥边有4条，割点数少于桥边数.

5.4

Proof. 因为v是图G的割点，所以$G-v$不连通，至少有两个连通分量.在$G-v$中任取两结点v_1, v_2，若两者处于不同连通分量，则在$\overline{G}$中两者连通；若两者处于同一连通分量，在其他分量中取一结点v_3，于是在$\overline{G}$中v_1, v_2相连.因此v不是$\overline{G}$的割点. □

5.6

Proof. 首先，若3-正则图G有一个割点v，先证其存在不在环中的边：若所有边都在环中，由于每个结点的度数都为3，当移去v后对任意两个结点仍然有相连的路径.因此存在不在环中的边，该边即为桥.
再者，如果G有桥，显然G的结点个数大于等于3，由Corollary 5.2可知G包含一个割点. □

5.10

Proof. 如果边数不少于2的连通图G是不可分图，假设存在两条相邻的边uv, vw属于不同的两个环，且$u->w$的唯一路径经过v(若存在其他路径，则两边属于同一环).选取v，此时$G-v$将u和w分在不同的分量中，这与G是不可分图矛盾.因此任意两条相邻边都属于同一个环.
如果G中任意两条相邻边都属于同一个环，则取任意一对相邻边uv, vw，u, v, w都不可能是割点.因此G是不可分图. □

5.11

Proof. 假设G可分，即存在一个割点v，且至少有两个块，$G-v$至少有两个连通分量.对于每个连通分量中的结点，取结最少的连通分量，则假若该分量中每个结点的度数都大于等于$\frac{n}{2}$，则该分量中至少有$\frac{n}{2}$个结点，加之v，则原先图G中至少有$n+1$个结点，不成立.因此G不可分. □

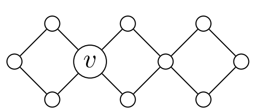
5.14

(a)

由于G_1是$G-v$的一个连通分量，所以G_1是连通图，显然$G[V(G_1)]$是连通图.假设G_1中不存在结点u，使得在G中u和v连通，则与G是连通图矛盾.故存在这样的结点u，于是诱导子图$G[V(G_1)\cup\{v\}]$是连通图.

(b)

举例如下：



选右边的一个连通分量，易知该诱导子图不是G的一个块，因此不必要.

5.15

Proof. 先证(1)-¿(2):
若G_1是G中的一个不可分的子图且不是其他任何G的不可分子图的真子集，假设G_1中存在不满足Theorem 5.8中等价关系的两条边，其不属于同一个环，由题5.10的证明知G_1可分，与条件矛盾.故推得(2).
再证(2)-¿(1):
若G由那些满足Theorem 5.8中等价关系的边对诱导而成，则对于任意一条边总能找到与其同在一个环中的另一条边，满足不可分的性质.假设存在一个G的不可分子集G_2，使得$G_1\subset G_2$，则G_2比G_1多的边无法与其他边成环（否则违背条件），故存在桥，于是便可分，与不可分矛盾.故推得(1). □

5.20

(a)

Proof. 因为$n=4, 2\le k\le n-2$，故$k=2$.若G不是2-connected图，则存在一个结点v，$G-v$是非连通图，便可知G包含一个vertex-cut$U$且$|U|=k-1$. □

(b)

Proof. 若G不是2-edge-connected图，则存在一条边uv，$G-uv$是连通图，便可知G包含一个edge-cut$X$且$|X|=k-1$. □

5.22

(a)

Proof. 若G是一个k-connected图，则去掉任意$k-1$个结点，仍然保持连通性.假设去掉的边e连接去掉的两个结点，则对结果无影响，仍可满足k-connected.若e连接去掉的结点和没有去掉的结点，同理可满足k-connected.若e连接没有去掉的两个结点，只要保留其中一个结点即可，于是条件可放宽至(k-1)-connected.因此$G-e$是(k-1)-connected. □

(b)

Proof. 若G是一个k-edge-connected图，则去掉任意$k-1$条边，仍然保持连通性.若e是先前去掉的边之一，则不影响结果，仍满足k-edge-connected.若是新去掉的边，则保留该边即可，因此$G-e$是(k-1)-edge-connected. □

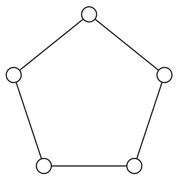
5.30

$\overline{\kappa}(G)\ge\kappa(G), \overline{\lambda}(G)\ge\lambda(G), \overline{\kappa}(G)\le\overline{\lambda}(G)$.

GC Chapter 6

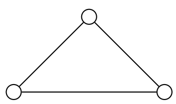
6.4

(a)

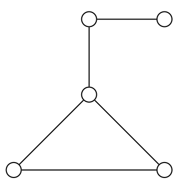


补图：五角星.

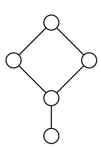
(b)



(c)

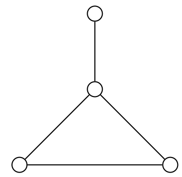


补图：



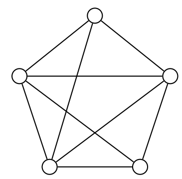
(d)

(e)



去掉最上方的边即可构成欧拉图.

6.5

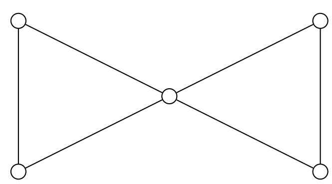


6.6

Proof. 由于G是正则图，则每个结点的度数都相同，设为k.由于G连通且不是欧拉图，则k为奇数.k正则图存在的必要和充分条件是$n \geq k+1$并且nk是偶数，因此n为偶数.在$\overline{G}$中，每个结点的度数变为$n-1-d$为偶数.又因为其连通，所以是欧拉图. □

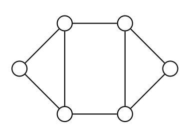
6.13

(a)



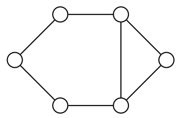
不存在能够经过所有顶点的环.

(b)

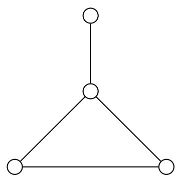


存在度数为奇数的结点，故不是欧拉图.

(c)



(d)



6.16

(a)

Proof. 若$\overline{G}$不是欧拉图，则$n-1-r$为奇数，又因为n为偶数，故r是偶数，又G连通，因此G是欧拉图；
若G不是欧拉图，则r为奇数，如此$n-1-r$为偶数，推得$\overline{G}$是欧拉图.得证. □

(b)

Proof. 若G不是汉密尔顿图，则存在G中的结点v，其$deg(v) < \frac{n}{2}$，又因为其为正则图，故所有的结点的度数都小于$\frac{n}{2}$，其补图$\overline{G}$的每个结点的度数都大于等于$\frac{n}{2}$，由此可推知$\overline{G}$是汉密尔顿图.
若$\overline{G}$不是汉密尔顿图，则仿照上方证明易推知G是汉密尔顿图.得证. □

6.21

假设对任意不相邻的结点u, v，都有$degu + degv \geq n$，则G为汉密尔顿图，显然有汉密尔顿路径
假设存在两个不相邻的结点u, v，且$degu + degv = n-1$，则通过添加一条边uv，即可满足$degu+degv = n$，而此时亦可满足汉密尔顿图.而汉密尔顿图通过去掉某条边亦可以满足汉密尔顿路径.如此，对于每一对非相邻且度数和为$n-1$的结点如此操作，即可证得G包含一条汉密尔顿路径.