问题求解（三）第4周作业

黄奕诚161220049

January 28, 2018

GC Chapter 7

7.1

(a)

Proof. 假设D不是强连通图，则存在两个顶点v_1, v_2，使得不存在一条从v_1到v_2的路径.由题意知，图$D - v_1$是强连通图，则必存在一个顶点v_3，从v_3到v_2存在一条路径P_1；同理，图$D - v_2$是强连通图，则从v_1到v_3存在一条路径。由此可知从v_1到v_2存在一条路径，与假设矛盾。因此，D是强连通的。 □

(b)

Proof. 假设存在满足这一性质的四阶定向图D.易知三阶定向强连通图是唯一(两两首尾相接)，则若要满足题意，则D去掉任意一个顶点后的三阶图都必须是该图.设该三阶图的顶点为v_1, v_2, v_3，边为$(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)$，则另有一顶点$v_4$，在三个顶点中存在一顶点与$v_4$直接相连，不妨设为$v_1$，则存在$(v_1, v_4)$.若删去$v_1$且仍满足余下三顶点构成三阶定向强连通图，则必存在$(v_3, v_4), (v_4, v_2)$，此时若在$D$中删去$v_3$，剩下的边为$(v_1, v_4), (v_4, v_2), (v_1, v_2)$，不满足三阶强连通图，故矛盾。由此得证。 □

7.2

Proof. 首先，假设G是一个欧拉图，则每个顶点的度数都为偶数，延着一个欧拉环给每一条边定向，且方向与环路径方向一致。由于每次经过一个顶点，都会同时增加一个入度和一个出度，由此可推出对任意的顶点，都有入度等于出度，便能构成一个欧拉定向环，得证；
再者，假设G存在欧拉定向环，则对每一个顶点都有入度等于出度，则该顶点的总度数必为偶数，将每一条定向边添加一条相反方向的边，便构成一个无向图，且每个顶点度数都为偶数，因此是欧拉图。 □

7.4

Proof. 假设图D是强连通的，则对于其中任意两个顶点v_1, v_2，存在路径P_1，使得$v_1 \to P_1 \to v_2$，也存在路径P_2，使得$v_2 \to P_2 \to v_1$.若$P_1 = P_2$，则将所有边的方向反向对其连通性没有影响，依然是强连通；若$P_1 \neq P_2$，将所有边反向时，则有$v_1 \to P_2 \to v_2$且$v_2 \to P_1 \to v_1$，因此仍然是强连通图;
充分性同理可证。 □

7.5

Proof. 首先，若有向图D是强连通，设A, B的诱导图分别为$G(A), G(B)$.则对D中任意两点v_1, v_2都有路径使v_1连通到v_2，或使v_2连通到v_1.若$v_1, v_2 \in G(A)$或$v_1, v_2 \in G(B)$，由于两者在同一分量中，必有路径使之相连；若$v_1 \in G(A), v_2 \in G(B)$，则必存在两个顶点，使得$v_1 \to \cdots \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to v_2$，其中$v_3 \in G(A), v_4 \in G(B)$，且$v_1$可能等于$v_3$，$v_2$可能等于$v_4$，则$(v_3, v_4)$即为从$G(A)$到$G(B)$的一个有向边，反之从$G(B)$到$G(A)$亦然
其次，若由割边集分割而成的两个连通分量$G(A)$和$G(B)$，存在由$G(A)$指向$G(B)$的边以及由$G(B)$指向$G(A)$的边，分别设其为(v_1, v_2)和(v_3, v_4).对于D中的任意两个顶点(u, v)，若它们在同一个连通分量中，则显然互相连通，若$u \in G(A), v \in G(B)$，则有路径$u \to \cdots \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v$与$v \to \cdots \to v_3 \to v_4 \to \cdots \to u$，由此可推知$D$是强连通图. □

7.9

Proof. 首先，若竞赛图T是可迁的，假设(u,v)是T中的弧，v连接到的顶点集为A，则根据可迁性，对A中每一个顶点a，都有弧(u,a)，于是可得u的出度$od(u) \geq 1 + od(v)$，因此每两个顶点的出度不同。
再者，若竞赛图T中每两个顶点的出度都不同，设共有n个顶点，它们的出度在集合$\{n-1, n-2, \cdots, 1, 0\}$中，设$od(v_i) = n - i$，其中$1 \leq i \leq n$.对于任意顶点$v_i$，其邻接顶点为$v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_n)$，对于$v_{i+1}$，其邻接顶点为$v_{i+2}, \cdots, v_n$，由此可知若$(v_i, v_{i+1} \in E)$且$(v_{i+1}, v_{i+2}) \in E$，则有$(v_i, v_{i+2}) \in E$，满足可迁性，因此竞赛图$T$是可迁的. □

7.10

Proof. 设u到v的最短路径为$u- > v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{k-1} \to v$，则不存在弧$(u,v_2), (u,v_3), \cdots, (u,v_{k-1}), (u,v)$，否则便有更短的路径，因此可得$od(u) \leq (n-1)-(k-1) = n-k$，由此知$id(u) = n-1-od(u) \geq k-1$.得证. □

7.13

Proof. 对于竞赛图中任意两个顶点u,v，要么$(u,v) \in E$，要么$(v,u) \in E$，不妨设$\overrightarrow{d}(u,v) = 1$, $\overrightarrow{d}(u,v) > 1$，因此两者不等. □

7.14

(a)

Proof. 若顶点个数n为奇数，只要保证所有顶点的出度都为$\frac{n-1}{2}$即可.若$n = 1$，则必然成立；若$n = 3$，则只要成同向环即可，每个顶点出度为1.对于更多顶点的图，只要保证每个顶点出度为$\frac{n-1}{2}$，如此入度也为$\frac{n-1}{2}$，如此每个球队胜场与负场相同，同样获得第一名. □

(b)

Proof. 若顶点个数n为偶数，假设存在所有球队都获得第一名的结局，则所有球队的出度都相等，且入度也相等.设每个顶点的出度为o，入度为i，有$o + i = n - 1$.由有向图第一定理可知$o \cdot n = \frac{n(n-1)}{2}$，得$o = \frac{n-1}{2}$，而因为$n$为偶数，所以$o$不为整数，而这显然不可能.因此不存在这种情况. □

7.15

Proof. 用数学归纳法证明如下：
(1) 当$k = 3$时，由定理7.9可知其成立；
(2) 假设当$k = t(3 \leq t \leq n-1)$时，结论成立，也即T中含有一个长度为k得圈；(3) 由上述假设，当$k = t + 1$时，设此时长度为k的圈内有$v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1$，若有一点$u$异于圈内之点，且被圈内一点邻接，也邻接到圈内另一点，则圈可扩充为$v_1, v_2, \cdots, v_i, u, v_{i+1}, \cdots, v_k, v_1$，因此存在一个长度为$k+1$的圈.
假设不是上述情况，而是：不在圈内的顶点要么全部邻接到圈上，要么被圈上顶点邻接.设a符合前一种情况，b符合后一种情况.由于是强连通图，故在圈内存在一点c，使得扩充成更大圈$v_1, v_2, \cdots, v_i, b, a, v_{i+1}, \cdots, v_k, v_1$且去掉$c$，因此存在一个长度为$k+1$的圈.
(4) 综上所述，结论成立. □