问题求解（三）第5周作业

黄奕诚161220049

October 1, 2017

26.1-1

Proof. 首先，对于还未进行分割但不满足单向条件的(u,v)来说，设两点之间的流为$f(u,v)$，因为添加结点x后满足$c(u,v)=c(u,x)=c(x,v)$，边的最大容量不变，且u到v原先的路径除了经过x，其他也不变，可得$f'(u,v)=f'(u,x)=f'(x,v)$，并且此时满足网络流的构成条件，与原图等价.
其次，对于已经对边(u,v)进行分割的图G'来说，因为结点x入度与出度都为1，故满足$f'(u,x)=f'(x,v)$，则将$(u,x),(x,v)$替换成同一条有向边(u,v)，则有$f'(u,v)=f'(u,x)=f'(x,v)$，仍保持原先的性质.所以分割前后是等价的. □

26.1-2

Proof. 在插入源s之前，这个网络流的流可以表示为$f_i=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{v\in V}f(s_i,v)-\sum_{v\in V}f(v,s_i))$，也即对从每一个源$s_i$出发的流进行求和.在插入$s$之后，满足$c(s,s_i)=\infty$，不妨设$f(s,s_i)=\sum_{v\in V}f(s_i,v)-\sum_{v\in V}f(v,s_i)=f_i$(因为肯定小于$\infty$，所以合理)，于是有$f_i'=\sum_{i=1}^{n}f_i$，由此可知添加源的前后流是等价的.对于添加所有$t_i$的同一后继$t$的情况，证法同理. □

26.1-6

将家视为发点s，将学校视为收点t，将一个路口到另一个路口之间的最大"容量"设为$c(v_i,c_j)=1$，假设存在双向的情况，则补等效点；根据流量$f=\sum_{v\in V}f(s,v)-\sum_{v\in V}f(v,s)$，若从家到学校存在至少两条没有重边的路径，则有$f\geq 2$，假设恰好有一条从$s$到$t$的路径，则必存在一条割边$(u,v)$，由流量守恒可知从$u$出来的流量为1，于是$f=1$，若没有从$s$到$t$的路径，则显然$f<1$，故有$f\leq 1$.因此只需要计算最大流，若最大流不小于2，则满足.

26.1-7

若$(u,x),(x,v)$是两条有向边，则将x分成x_1和x_2，满足$c(u,x_1)=c(u,x),c(x_2,v)=c(x,v),c(x_1,x_2)=l(x)$即可.由于每个顶点分裂为两个(包括$s$和$t$)，故总顶点数为$2|V|$，每个顶点为图增加一条边，故总边数为$|V|+|E|$.

26.2-2

跨越两个集合的流量为$f(S,T)=11+1+7+4-4=19$，容量为$c(S,T)=16+4+7+4=31$.

26.2-6

如题26.1-2，只需要在所有s_i之前插入一个共同全驱的发点s，设$p=\sum_{i=1}^{n}\sum_{v\in V}f(s_i,v)$，则从$s$出发的流量为从$s_i$出发的所有流量的总和；同理，在所有$t_i$之后插入一个共同后继的收点$t$，设$q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{v\in V}f(v,t_i)$，则到达$t$的流量为到达$t_i$的所有流量之和.于是就构成了单收发点的网络流图，可以在此求解最大流问题.

26.2-8

Proof. 在寻找从s到t的路径p的过程中，路径p是简单路径，且所有边的流量、容量都为非负值，故不会包含那些从某顶点v指向s的有向边，所以这对FORD-FULKERSON算法的正确性并无影响. □

26.2-10

将FORD-FULKERSON算法稍作修改：在算法执行过程中，若某条边的流量达到最大容量，则移去该边，且不再生成对应的反向边，因为通过该边的流量不会超过最大流，所以不影响算法正确性.于是增广路径最多有$|E|$条，因为每条增广路径都至少包含一条$c = f$的边.

26.2-12

Proof. 由题意知，存在顶点v，其指向发点s，且$f(v, s) = 1$；又s是发点(能够通过某路径达到每个顶点).因为存在一个包含(v, s)的环，只需要用DFS找到这个环，并将环上所有边的f减1，得到f'，这个过程共需$O(E)$的运行时间.以下证明修改f前后，网络流的性质仍成立：
首先，因为每条边的流为正整数，所以减去1之后仍能满足为非负数；
其次，对于环上的每一个顶点，其流出和流入的流量同时减1，仍满足守恒定律；
再者，在修改f的值后不改变最大流，即$|f| = |f'|$.并且有$f'(v, s) = 0$. □

26.2-13

(此题不是很会……)将每条边的容量乘以$|E|$，再在每个顶点v之后添上一条边(v, x)，使得$f(v, x) = 1$.

26.3-3

增广路径的上界可以设定为$2 * min\{|L|, |R|\} + 1$.记L中的顶点为$\{l_1, l_2, \cdots, l_{|L|}\}$，$R$中的顶点为$\{r_1, r_2, \cdots, r_{|R|}\}$，记$m = min\{|L|, |R|\}$.则可能的最长增广路径为：$\{s, l_m, r_{m-1}, l_{m-1}, r_{m-2}, l_{m-2}, \cdots, l_2, r_1, l_1, r_m, t\}$，其长度即为$2m + 1$.

26-1

(a)

本题的构造和26.1-6中两个熊孩子的问题很相似.为每个出发点$s_1, s_2, \cdots, s_m$添加一个共同前驱s，并为每个边界点$t_1, t_2, \cdots, c_{4n-4}$添加一个共同后继$t$，且$f(t_i, t) = \infty$，将从$s$出发能到达的非边界非出发点设为该网络流中的中间结点.然后即可通过判断是否有m条无重边的增广路径来判断是否能够"逃脱".

(b)

设对于任意$(u, v) \in E$，有$c(u, v) = 1$，由26.1-6题类似地，若该网络流的$f = m$，则可以找到逃脱的路径，若$f < m$，则不满足.f不可能大于m，因为从s出发的流只有m.

26-2

(a)

建立图$G' = (V', E')$，其中$V' = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \cdots, y_n\}$，$E' = \{(x_0, x_i) : i \in V\} \cup \{(y_i, y_0) : i \in V\} \cup \{(x_i, y_i) : (i, j) \in E\}$，并给每条边的容量赋值1，然后运行最大流算法.在算法运行结束后，遍历所有边，将流量为1的边添加到path cover中，则可以得到一条最短的路径覆盖.下列证明它满足"路径覆盖"的要求：
假设存在一个顶点y_i,它存在于两条不同的路径上，也即存在x_j, x_k，使得$f(x_j, y_i) = f(x_k, y_i)$，但是这样流入$y_i$的流量至少为2，而流出$y_i$的流量为1，与守恒定律矛盾.同理，邻接于$y_i$的顶点只能有1个，否则也与守恒定律矛盾.因此满足"路径覆盖"的要求.

(b)

对于含圈的有向图不奏效.例子：$V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$此时算法输出结果的最小路径覆盖为1,2,3,4，而在图中由边$(x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_4)$组成了最大流.