

问题求解（三）第8周作业

黄奕诚161220049

December 11, 2017

29.1-4

将最小化问题转化为最大化，即目标函数系数取负

最大化: $-2x_1 - 7x_2 - x_3$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & \geq & 24 \\ & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

将 x_3 转化为 $-x_3$

最大化: $-2x_1 - 7x_2 + x_3$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & \geq & 24 \\ & & & & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

将 x_1 替换成 $x'_1 - x''_1$

最大化: $-2x'_1 + 2x''_1 - 7x_2 + x_3$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x'_1 & - & x''_1 & + & x_3 & = & 7 \\ 3x'_1 & - & 3x''_1 & + & x_2 & \geq & 24 \\ & & x'_1, x''_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

对不等式的符号进行处理

最大化: $-2x'_1 + 2x''_1 - 7x_2 + x_3$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x'_1 & - & x''_1 & + & x_3 & \leq & 7 \\ -x'_1 & + & x''_1 & - & x_3 & \leq & -7 \\ -3x'_1 & + & 3x''_1 & - & x_2 & \leq & 24 \\ & & x'_1, x''_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

29.1-5

首先逐步将线性规划转化为标准型

最大化: $2x_1 - 6x_3$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 7 \\ -3x_1 & - & x_2 & & & \leq & -8 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 0 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

令 $x_4 = 7 - x_1 - x_2 + x_3$, $x_5 = -8 + 3x_1 + x_2$, $x_6 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3$, 于是松弛型即为: 最大化: $2x_1 - 6x_3$
满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & -8 & + & 3x_1 & - & x_2 & & \\ x_6 & = & & & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

其中基本变量为 x_4, x_5, x_6 , 非基本变量为 x_1, x_2, x_3 .

29.1-6

Proof. 由第二个不等式可知 $-2x_1 - 2x_2 \leq -10$, 也即 $-x_1 - x_2 \leq -5$, 又由第一个不等式知 $x_1 + x_2 \leq 2$, 相加得 $0 \leq -3$, 显然不成立, 因此该线性规划不可解. \square

29.1-7

Proof. 从特殊性考虑, 取 $x_1 = 2a, x_2 = a$, 则 $x_1 - x_2 = a$, 此时不等式为

$$-3a \leq -1 - 4a \leq -2a \geq 0$$

此时 a 的取值范围为 $[\frac{1}{3}, +\infty]$, 右侧无界. 也即可行域中直线 $x_2 = 2x_1$ 不能被其它两条直线截断, 因此该线性规划是无界的. \square

29.1-9

例子如下:

最小化: $x_1 + x_2$

满足约束:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

此时显然可行区域无界, 但有最佳目标值: 1(此时 $x_1 = 1, x_2 = 0$)

29.2-2

线性规划如下:

最大化: d_t

满足约束:

$$\begin{aligned} d_t &\leq d_s + 3 \\ d_t &\leq d_y + 1 \\ d_x &\leq d_t + 6 \\ d_x &\leq d_y + 4 \\ d_x &\leq d_z + 7 \\ d_y &\leq d_s + 5 \\ d_y &\leq d_t + 2 \\ d_z &\leq d_x + 2 \\ d_z &\leq d_y + 6 \\ d_s &= 0 \end{aligned}$$

29.2-3

最短路径权值只需要改动目标函数即可, 也即路径上所经过的结点的 d_i 之和, 若能保证这个和取到最大值, 则可以找出从源点 s 到所有顶点 $v \in V$ 的最短路径权值.

最大化: $\sum_{v \in V} d_v$

满足约束:

$$\begin{aligned} d_v &\leq d_u + \omega(u, v) \\ d_s &= 0 \end{aligned}$$

其中第一个不等式中, $(u, v) \in E$

29.2-6

按照26.3的方法, 添加两个结点 s, t , 并把每条边的容量设为1, 转化为最大流问题, 于是:

最大化: $\sum_{v \in L} f_{sv}$

满足约束:

$$\begin{aligned} f_{uv} &\leq 1 \\ \sum_{v \in V} f_{vu} &= \sum_{v \in V} f_{uv} \\ f_{uv} &\geq 0 \end{aligned}$$

其中对于第一个不等式, $u, v \in V$, 对于第二个不等式, $u \in L \cup R$, 对于第三个不等式, $u, v \in V$.

29.3-2

Proof. 欲证 v 不减, 即证 $c_e \hat{b}_e \geq 0$, 即证 $c_e \geq 0$ 并且 $\hat{b}_e \geq 0$. 对于 c_e , 由于 e 是自选的, 只要选择一个 e 保证 $c_e > 0$ 即可; 对于 \hat{b}_e , 在 PIVOT 第3行中有 $\hat{b}_e = \frac{b_l}{a_{le}}$. 在引理29.2中可知 $b_l \geq 0$, 而 a_{le} 可以通过选择 l 来达到为正数. 因此, SIMPLEX 中第12行对 PIVOT 的调用不会减小 v 的值. \square

29.3-3

Proof. 即证这两个松弛型的目标函数相同, 并且可行解集相同.

首先证明它们的目标函数相同: 目标函数的变化发生在 PIVOT 中第14-17行, 它基本变量代替了非基本变量, 而基本变量与非基本变量有等式连接, 所以替代前后等价.

再者证明它们可行解相同: 在 PIVOT 中, 我们根据选定的 e 与 l_e 来解方程, 然后利用这个表达式来替代所有有关 e 的变量, 其可行解仍然与之前等价.

因此可证得给定的松弛型与返回的松弛型等价. \square

29.3-5

原式

最大化: $18x_1 + 12.5x_2$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & & x_2 & \leq & 20 \\ & & & & \leq & 12 \\ x_1 & & & & \leq & 16 \\ & & x_2 & & \leq & 0 \\ x_1, & x_2 & & & \geq & 0 \end{array}$$

首先将标准型转化为松弛型

最大化: $18x_1 + 12.5x_2$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 20 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 12 & - & x_1 & & \\ x_5 & = & 16 & - & x_2 & & \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

选定 x_1 作为基本变量

最大化: $216 - 18x_4 + 12.5x_2$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 8 & + & x_4 & - & x_2 \\ x_1 & = & 12 & - & x_4 & & \\ x_5 & = & 16 & - & x_2 & & \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

选定 x_2 作为基本变量

最大化: $316 - 5.5x_4 + 12.5x_3$

满足约束:

$$\begin{array}{rclcl} x_2 & = & 8 & + & x_4 & - & x_3 \\ x_1 & = & 12 & - & x_4 & & \\ x_5 & = & 8 & - & x_4 & + & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

因为此时没有纯减的非基本变量，故不再进行下去，最优解即为(12,8,0,0,8)，目标值为316。

29.4-2

首先，若问题是最小化问题，通过取负将其转化为最大化问题；其次，我们将原先第 j 行的各系数放至其对偶线性规划第 j 列的相应位置，将约束不等式中的不等号反向，将MAXIMUN中的各系数与不等式中不等号右边的值进行交换，如此可以得到对偶线性规划，

29-1

a.

Proof. 如果我有一个线性规划的算法，则会有目标函数及各个约束不等式。先将这些约束不等式作为一个线性系统中的各个不等式，并且将目标函数作为线性系统的常数。如果该线性规划算法没有任何可行解，那么约束不等式之间的交集即为空集，此时相应的线性不等式必然无解；反之，若该线性规划有可行解，则约束不等式交集非空，线性不等式便有解。 \square

b.

Proof. 考虑如何将目标函数设定为一个常数，这样就可以由线性不等式的可行性算法直接推导出线性规划求解。选定一个数 k ，且设定 c_k 为常数，保证目标函数始终保持一个常数。同时考虑对偶的线性变换，可如下构造：最大化: $316 - 5.5x_4 + 12.5x_3$
满足约束:

$$\begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ A^T y & \geq & c \\ c_k x_k & = & \sum_{i=1}^m b_i y_i - \sum_{j=1}^n c_j y_j \end{array}$$

若该线性不等式无解，则可知线性规划没有可行解；否则能够通过单纯形算法求解该线性规划的最优解， \square