问题求解（三）第6周作业

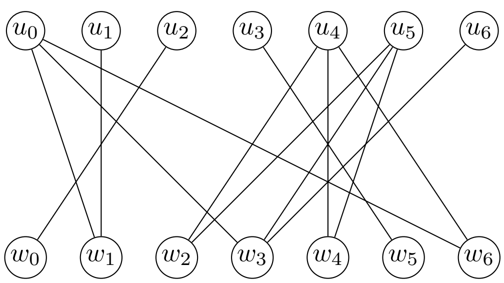
黄奕诚161220049

October 10, 2017

8.1

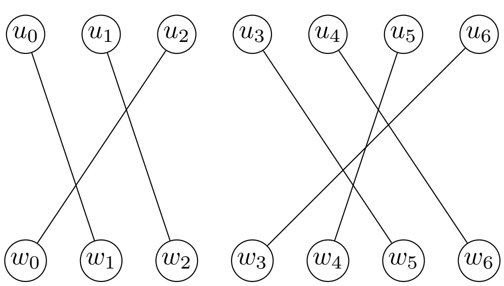
(a)

对于u_0，非平凡完全图边数可以为$1(n=2), 3(n=3), 6(n=4)$；对于u_1，树上任意两顶点之间只有唯一路径，否则会成圈，不满足树的性质；对于u_2，可迁竞赛图不含圈，故答案为0；对于u_3，6阶树含有5条边，由于不含圈，故每条边都是割边；对于u_4，7阶非空正则图的r可以是2 7之间的偶数，即2,4,6；对于u_5，通过穷举，容易得出5阶树的最大度可以为2,3,4；对于u_6，5阶图当形如一条折线时，有最大割点个数，为3；
综上所述：



(b)

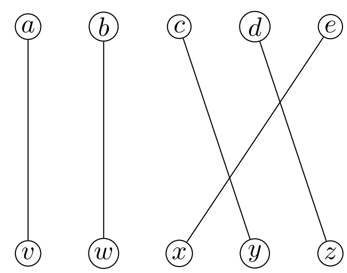
包含完美匹配，如下图所示：



8.3

(a)

能够完美匹配(对任意的X有$|N(X)| \geq |X|$)，如下图所示：



(b)

不能完美匹配，因为存在$X=\{v,x,y\}, N(X)=\{a,c\}$，此时$|X|>|N(X)|$，如此不能完美匹配.

8.4

Proof. 由于有条件$|U|=|W|=k\geq 2$，且U中任意两点在G中有不同的度，不妨设$\mathrm{Degree}(u_1)=1, \mathrm{Degree}(u_2)=2, \cdots, \mathrm{Degree}(u_k)=k$，如此对$U$中任意子集$X$，设$X$中最大下标为$t$，则有$|N(X)|\geq t\geq |X|$，因此满足完美匹配. □

9.6

(a)

正确

Proof. 平面图可以构成在平面内任意两条边都不相交的平图，此时去掉任意的边或顶点，仍然满足任意两条边都不相交的性质，因此平面图的子图仍是平面图. □

(b)

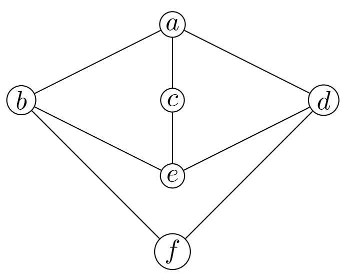
错误

Proof. 非平面图的顶点个数必大于等于4，只要取其中一条边作为它的子图即可，显然是平面图，故命题不成立. □

(c)

错误

Proof. 反例：对于$K_{3,3}$来说，任意删去一条边，则



□

此时为平面图.

(d)

错误

Proof. 假若G包含K_5或$k_{3,3}$的细分作为子图，则不是平面图(由Theorem9.7可直接得到). □

(e)

错误

Proof. 反例：$K_{3,3}$满足$n = 6, m = 9$，且$m \leq 3n - 6$，而它是非平面图. □

(f)

错误

Proof. 反例：$K_{3,3}$在任意两个不相邻的顶点之间添加一条边，此时它具有三角形圈，但它存在$K_{3,3}$子图，因此不是平面图. □

9.13

(a)

Proof. 因为连通图G的顶点个数大于等于3，且边不构成三角形.当$n = 3$时，$m = 2$，满足$m \leq 2n - 4$.当$n = 4$时，$m = 3$或$m = 4$，也满足$m \leq 2n - 4$.当$n \geq 5$时，每个区域所包含的边至少有4条，记m_i为区域R_i所包含的边的个数，则$m_i \geq 4$，于是

$$M = \sum_{i=1}^{r} m_i \geq 4r.$$

在这个计数中，若边为割边，则M记了一次，若边不是割边，则M记了2次，因此$M \leq 2m$，于是有$4r \leq M \leq 2m$，所以$2r \leq m$.
又由欧拉定理知$n - m + r = 2$，所以$4 = 2n - 2m + 2r \leq 2n - 2m + m = 2n - m$，由此$m \leq 2n - 4$. □

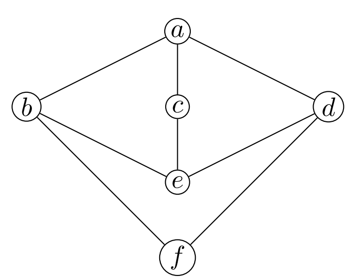
(b)

Proof. $K_{3,3}$中不含有三角形，并且顶点个数大于3.由于$n = 6, m = 9$而$m > 2n - 4$，因此由(a)中的逆否命题可知$K_{3,3}$不是平面图. □

(c)

Disprove

Proof. 反例：对于$K_{3,3}$来说，任意删去一条边，则



此时G的度数为6. $\square$

9.14

(a)

Proof. 因为连通图G的顶点个数大于等于5，且最小圈的长度为5，则每个区域所包含的边至少有5条，记m_i为区域R_i所包含的边的个数，则$m_i \geq 5$，于是

$$M = \sum_{i=1}^{r} m_i \geq 5r.$$

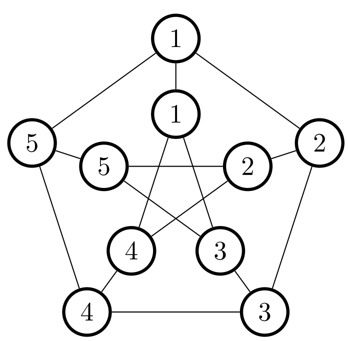
在这个计数中，若边为割边，则M记了一次，若边不是割边，则M记了2次，因此$M \leq 2m$，于是有$5r \leq M \leq 2m$.
又由欧拉定理知$n - m + r = 2$，所以$20 = 10n - 10m + 10r \leq 10n - 10m + 4m = 2n - 6m$，由此$m \leq \frac{5}{3}(n-2)$. $\square$

(b)

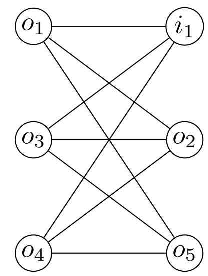
Proof. 因为Petersen图满足其边数最小的圈的边数为5，又$n = 10, m = 15$，而$m > \frac{5}{3}(n-2)$，因此Petersen图不是平面图. $\square$

(c)

Proof. Peterson图如图所示:



(记内部5个顶点为i_1, i_2, i_3, i_4, i_5，外部5个顶点为o_1, o_2, o_3, o_4, o_5)
下面找出其中包含的一个细分的$K_{3,3}$，即为



因此由Kuratowski定理可知Petersen图不是平面图. $\square$

(d)

Disprove

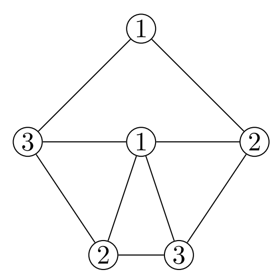
Proof. 假设所有顶点的度数都大于等于3，则有$\sum_{i=1}^{n}(\text{degree})V_i \geq 3n$，也即$2m \geq 3n$.因为有$m \leq \frac{5}{3}(n-2)$，故$3n \leq \frac{10}{3}(n-2)$,得$n \geq 20$，这与$n \leq 20$矛盾.因此存在度数小于等于2的顶点. $\square$

9.15

Proof. 假设所有顶点的度数都大于等于5，则有$\sum_{i=1}^{n}(\text{degree})V_i \geq 5n$，也即$2m \geq 5n$.当$n = 1, n = 2$时矛盾，当$n \geq 3$时，有$m \leq 3n - 6$，故$5n \leq 6n - 12$,得$n \geq 12$，这与$n \leq 11$矛盾.因此存在度数小于等于4的顶点. $\square$

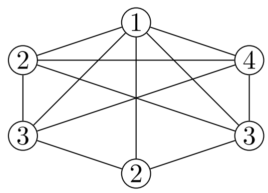
10.1

对于G_1，存在奇圈，故$\chi(G_1) \geq 3$，又存在如下图所示的染色数为3的情形:

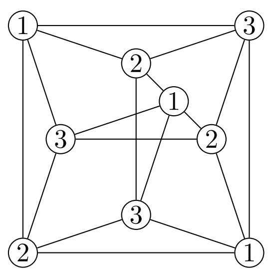


故$\chi(G_1) = 3$.
对于G_2，因为存在K_4子图，所以$\chi(G_2) \geq 4$，又因为G_2是平面图，所以$\chi(G_2) \leq 4$，因此$\chi(G_2) = 4$.

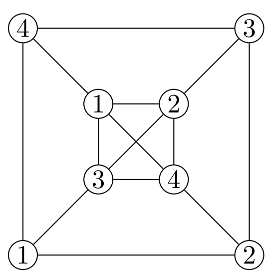
对于G_3，存在K_4子图，所以$\chi(G_3) \geq 4$，又存在如下图所示染色数为4的情形：



故$\chi(G_3) = 4$
对于G_4，因为含有三角形，所以$\chi(G_4) \geq 3$，又存在如下图所示的染色数为3的情形：



故$\chi(G_4) = 3$.
对于G_5，存在K_4为它的子图，因此$\chi(G_5) \geq 4$，又存在如下图所示的染色数为4的情形：



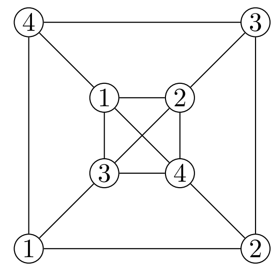
故$\chi(G_5) = 4$.

10.4

(a)

Disprove

Proof. 如下图所示，该图中包含三角形，而色数为4(在10.1中已证).

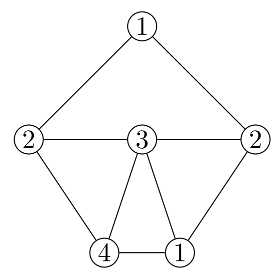


□

(b)

Disprove

Proof. 下图(10.1的a图)存在如图所示的4染色方法：

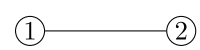


而在10.1中已证其色数为3，因此命题不正确. □

(c)

Disprove

Proof. 如图：



该图只有两个顶点，没有染色数为3的情形，但$\chi(G) = 2$. □

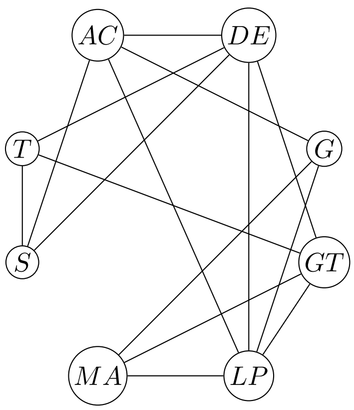
(d)

Disprove

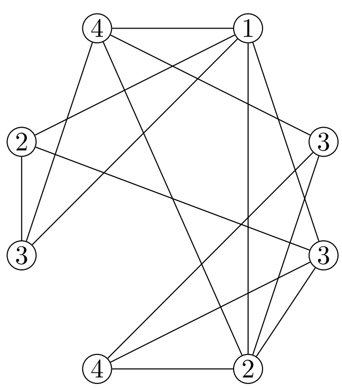
Proof. $\chi(K_{3,3}) = 2$，而$K_{3,3}$不是平面图. □

10.10

将每一个课程作为图G中的顶点.顶点v_1与顶点v_2相邻当且仅当有一个学生同时修读了它们.由此，可如下构造:



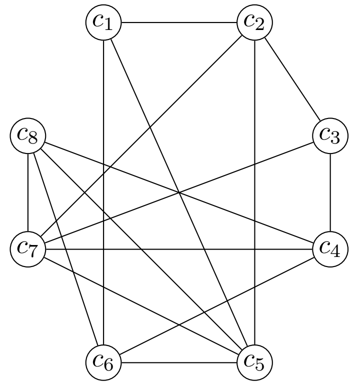
因为包含三角形，所以$\chi(G) \geq 3$，再证明$\chi(G) \neq 3$：若$DE = 1, LP = 2$，则$GT = 3$，则$MA = 1$，则$G = 3$，此时AC无法取1 3中的值，故$\chi(G) > 3$.下面给出染色数为4的情形:



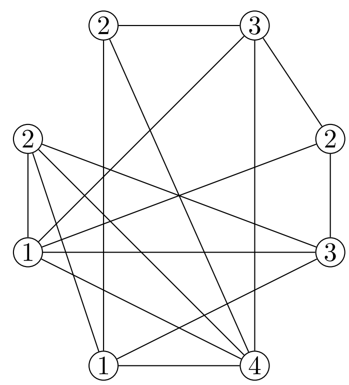
因此只需要4个不同时间段即可，也即最早结束时间为2:45-4:45.

10.11

将每一种化学药品作为图G中的顶点，边(v_1, v_2)存在当且仅当v_1与v_2相互作用.于是可如下构造:



因为包含三角形，所以$\chi(G) \geq 3$.再证明$\chi(G) \neq 3$: 若$c_7 = 1, c_8 = 2$，则$c_4 = 3, c_3 = 2, c_2 = 3, c_5 = 2$.此时$c_8 = c_5 = 2$，矛盾.因此$\chi(G) \geq 4$.下面给出染色数为4的情形:



因此至少需要4个容器，最小成本为380，容器1：v_6, v_7；容器2：v_1, v_3, v_8；容器3：v_2, v_4；容器4：v_5.