问题求解（三）第7周作业

黄奕诚161220049

October 16, 2017

28.1-2

解：$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -6 & 7 \\ 12 & -7 & 12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

其中$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

28.1-3

解：$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0.4 & -3.2 & 2.2 \\ 0.2 & 3.4 & 3.6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0.2 & 3.4 & 3.6 \\ 0.4 & -3.2 & 2.2 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0.2 & 3.4 & 3.6 \\ 0.4 & -\frac{16}{17} & \frac{95}{17} \end{bmatrix}$

于是可以得到$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.4 & -\frac{16}{17} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0 & 3.4 & 3.6 \\ 0 & 0 & \frac{95}{17} \end{bmatrix}$

于是方程可转化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.4 & -\frac{16}{17} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

因此

$$y = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ \frac{295}{17} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0 & 3.4 & 3.6 \\ 0 & 0 & \frac{95}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

解之得:

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{19} \\ -\frac{1}{19} \\ \frac{59}{19} \end{bmatrix}$$

28.1-6

Proof. 对于任意的$n \geq 1$，都存在$n \times n$的零矩阵，其可以表示如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

左边即为下三角矩阵L，右边即为上三角矩阵U.又因为零矩阵是奇异矩阵，因此得证. □

28.1-7

在LU-DECOMPOSITION中，当$k = n$时，有必要执行最外层的for循环迭代.因为若不执行，则u_{nn}会

呈现原先的值而不是正确的a_{nn}
在LUP-DECOMPOSITION中，当$k=n$时，没必要执行最外层的for循环迭代.此时行交换是对最后一行自身的交换，排列矩阵为零矩阵，不影响；再者，第16行的for循环也不会执行。因此这层循环没有影响，故没有必要.

28.2-1

Proof. 首先，运行时间为$M(n)$的矩阵乘法可以推出$O(M(n))$的矩阵平方算法。因为对于$B=A^2$，相当于$B=A\cdot A$，也即一切矩阵平方都是矩阵乘法，故这一点容易得到；
其次，欲从运行时间为$S(n)$的矩阵平方算法推出$O(S(n))$的矩阵乘法。对于相乘的矩阵A和B，不妨构造矩阵

$$C=\begin{bmatrix}A & I\\ B & 0\end{bmatrix}$$

于是

$$C^2=\begin{bmatrix}A^2+B & A\\ AB & B\end{bmatrix}$$

此时矩阵的左下角即为AB.由此可知$S(2n)=O(S(n))$，又因为刚才矩阵平方算法的复杂度为$S(n)=O(n^2)$，又因为$S(n)=\Omega(n^2)$，故有$O(n^2)$的矩阵乘法，即$O(S(n))$的矩阵乘法. □

28.2-2

Proof. 不妨设$n=2^k$，将A矩阵分块如下：

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}$$

设$A_1=L_1U_1P_1$，其中L_1为$\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$，$U_1$为$\frac{n}{2}\times n$，$P_1$为$n\times n$.进一步矩阵分块，设$U_1=[B|C], A_2P_1^{-1}=[D|F]$，其中$B$与$D$都是$\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$的矩阵.由于$A$为非奇异矩阵，则$B$非奇异，设$G=F-DB^{-1}C$，有

$$A=\begin{bmatrix}L_1 & 0\\ DB^{-1} & I_{n/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & C\\ 0 & G\end{bmatrix}P_1$$

再令$G=L_2U_2P_2$，并设$H=\begin{bmatrix}I_{n/2} & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}$，故有

$$A=\begin{bmatrix}L_1 & 0\\ DB^{-1} & L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & CP_2^{-1}\\ 0 & U_2\end{bmatrix}HP_1$$

这便是A的一个LUP分解。计算过程中计算了子矩阵的LUP分解、矩阵的乘法以及逆矩阵运算，后两者时间上等价，由运行时间的相加关系知LUP分解的运行时间为$O(M(n))$
对于证明的另一半，我并没有找到好的解决方法...... □

28.2-3

Proof. 由上题知LUP分解(或是LU分解)的运行时间为$O(M(n))$，则运行这个算法，并沿对角线将每个元素相乘，即是计算该矩阵的行列式，运行时间为$O(M(n))$.
证$O(D(n))$暂想不出解决方法(如何将求一个行列式的值构造成矩阵的乘法？) □

28.3-1

Proof. 可以进行如下构造：设列向量e_i为除了在第i行为1，其他位置上都是0的向量；易知行向量e_i^T除了在第i列为1，其他位置上都是0.于是有

$$e_i^TAe_i=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

前两个矩阵相乘后结果为一个行向量，其中第j列都是a_{ij}，再与第三个矩阵相乘，可得唯一的数a_{ii}.因为$e_i^TAe_i>0$，因此$a_{ii}>0$，这对任意的$i\in[1,n]$都成立.因此对称正定矩阵的对角线上所有元素都为正数. □

28.3-3

Proof. 可以进行如下构造：设列向量e_i,e_i为除了在第i,j行为1，其他位置上都是0的向量(其中$i\neq j$)；于是有

$$(e_i-e_j)^TA(e_i-e_j)=$$

$$(e_i - e_j)^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

前两个矩阵相乘后结果为一个除了第j列为-1，第i列为1，其他都为0的行向量，再与第三个矩阵相乘，结果为$a_{ii} + a_{jj} - a_{ij} - a_{ji} = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij}$.假设矩阵各元素中，最大值不在对角线上，则不妨设$a_{ij}$为最大值，此时$a_{ij} \geq a_{ii}, a_{ij} \geq a_{jj}$，此时得到$(e_i - e_j)^T A(e_i - e_j) \leq 0$，这与正定矩阵的定义矛盾.因此最大元素存在于对角线上.

28-1

a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

先求$Ly = Pb$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求得

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

然后$Ux = y$，也即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

因此解为

$$x = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 12 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

c.

将矩阵A^{-1}视为5个列向量x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，则有

$$Ax_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$$

可以得到

$$x_1 = [5, 4, 3, 2, 1]^T$$

同理可求出x_2, x_3, x_4, x_5，最后可求得逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d.

Proof. 首先，对三对称矩阵来说，第7-10行只需要交换至多两次以获得最大值，故缩为$O(1)$；其次，第13-15行交换是有限常数次数，也为$O(1)$的运行时间；对于第16-19行，同一列上至多有三个元素，故循环次数为常数次，也为$O(1)$.因此，对于三对称矩阵来说，它的LUP分解运行时间为$O(n)$，易知LU分解的运行时间也为$O(n)$.以求逆矩阵A^{-1}为基础的算法，因为需要记录逆矩阵中每一个元素的值，这个过程需要$\Theta(n^2)$的时间，加之算法的其他部分，故在最坏情况下运行时间可以达到$\Omega(n^2)$. □

e.

Proof. 由(a)中可知，LUP算法循环体中的各部分运行时间都为$O(1)$，故整体运行时间为$O(n^2)$，在forward和backward的过程中，由于U与L中每一行每一列同样只有很少的有限个非零元素，在计算$Ly = Pb$以及$Ux = y$对每一个元素x_i只需$O(1)$时间，共需要$O(n)$的时间.综上，算法运行时间为$O(n)$. □