问题求解（三）第15周作业

黄奕诚161220049

March 11, 2018

TJ Chapter 8

6

(a) $d_{min} = 2$，最多可以检1位错，无法纠错；

(b) $d_{min} = 1$，无法检错或纠错；

(c) $d_{min} = 1$，无法检错或纠错；

(d) $d_{min} = 2$，最多可以检1位错，无法纠错；

7

(a) 设$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$，由$HX = 0$得到

$$x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 0$$

解得零空间为

$$(00000), (00101), (10011), (10110)$$

零空间是$(5, 3)$块.由于极大线性无关组的秩为2，所以一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

生成矩阵是不唯一的.

(b) 设$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$，由$HX = 0$得到

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 0$$

解得零空间为

$$(000000), (010100), (111010), (101101)$$

零空间是$(6, 4)$块.由于极大线性无关组的秩为2，所以一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

生成矩阵是不唯一的.

(c) 设$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$，由$HX = 0$得到

$$x_1 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + x_4 + x_5 = 0$$

解得零空间为

$$(00000), (00100), (00011), (00111)$$

$$(11001), (11101), (11010), (11110)$$

零空间是$(5,3)$块.由于极大线性无关组的秩为2，所以一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

生成矩阵不唯一.

(d) 设$X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)^T$，由$HX=0$得到

$$x_4+x_5+x_6+x_7=0$$

$$x_2+x_3+x_6+x_7=0$$

$$x_1+x_3+x_5+x_7=0$$

$$x_2+x_3+x_6+x_7=0$$

解得零空间为

$$(0000000),(1101001),(0101010),(1000011)$$

$$(1001100),(0100101),(1100110),(0001111)$$

$$(1110000),(0011001),(1011010),(0110011)$$

$$(0111100),(1010101),(0010110),(1111111)$$

零空间是$(7,3)$块.由于极大线性无关组的秩为4，一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

生成矩阵不唯一.

8

我构建的这样一个编码为

$$(10100),(01010),(11001)$$

，它的$d_{min}=3$，可以检2位错，纠1位错.

9

依次计算$Hx_i(i=1,2,3,4)$，可以得到

$$Hx_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

说明第4列有错

$$Hx_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

出现多位错

$$Hx_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

出现多位错

$$Hx_4=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

出现多位错

11

(a) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_1+x_2=0$$

$$x_3=x_4=0$$

$$x_1+x_5=0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

因为$d_{min}=3$，所以最多可以检2位错，纠1位错.

(b) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_2+x_3=0$$

$$x_1+x_2+x_4=0$$

$$x_2 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为$d_{min} = 3$，所以最多可以检2位错，纠1位错.

(c) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因为$d_{min} = 2$，所以最多可以检1位错.

(d) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_6 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_7 = 0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为$d_{min} = 2$，所以最多可以检1位错.

13

(a)

$$Hx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$Hy = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$Hz = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$Hx = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

18

Proof. 设$x \in C_i$为非零数.定义一个从非零数到0的映射:$y \mapsto x + y$.对于0，可以表示为两个非零数之和，而且每个x对应唯一的0，所以若在第i个坐标存在非零数，则存在相同数量的0，于是正好有一半是0.若不存在非零数，则全为0. □

19

Proof. 设$x \in C$有奇权重，定义一个从奇码字到偶码字的映射：$y \mapsto x + y$.对于任意一个偶码字，都可以表示为两个奇码字之和，并且每个奇码字加上x对应唯一的偶码字，因此该映射是双射.所以若存在奇权重的码字，则存在相等数量的偶权重码字，此时正好有一半的偶权重码字.或者不存在奇权重码字，即全为偶权重码字. □

21

当ASCII码的数量为128时，信息位有7位，所以对于$2^i - 1 > i + 7$，解之得$i \geq 4$，所以至少需要4位校验位，于是需要的矩阵规模为4×11;
当ASCII码的数量为256时，信息位为8位，所以对于$2^i - 1 > i + 8$，解之得$i \geq 4$，所以至少需要4位校

验位，于是需要的矩阵规模为4×12;
若仅需要检错功能，则各需要的校验位为1位，对应的矩阵规模分别为1×7和1×8.

22

三位信息位对应的标准偶校验矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

对于七位信息位，则为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

23

设需要n位校验位，则$2^n - 1 \geq n + 20$，得到$n \geq 5$，所以需要5位校验位来实现20位信息位的纠错.又由$2^n - 1 \geq n + 32$，得到$n \geq 6$，所以需要6位校验位来实现32位信息位的纠错.