问题求解（三）第8周作业

黄奕诚161220049

October 29, 2017

29.1-4

将最小化问题转化为最大化，即目标函数系数取负

最大化：$-2x_1 - 7x_2 - x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & \geq & 24 \\ & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

将x_3转化为$-x_3$

最大化：$-2x_1 - 7x_2 + x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & \geq & 24 \\ & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

将x_1替换成$x_1' - x_1''$

最大化：$-2x_1' + 2x_1'' - 7x_2 + x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & - & x_1'' & + & x_3 & = & 7 \\ 3x_1' & - & 3x_1'' & + & x_2 & \geq & 24 \\ x_1', & & x_1'', & & x_2, \quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

对不等式的符号进行处理

最大化：$-2x_1' + 2x_1'' - 7x_2 + x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & - & x_1'' & + & x_3 & \leq & 7 \\ -x_1' & + & x_1'' & - & x_3 & \leq & -7 \\ -3x_1' & + & 3x_1'' & - & x_2 & \leq & 24 \\ x_1', & & x_1'', & & x_2, \quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

29.1-5

首先逐步将线性规划转化为标准型

最大化：$2x_1 - 6x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 7 \\ -3x_1 & - & x_2 & & & \leq & -8 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 0 \\ & & x_1, & & x_2, \quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

令$x_4 = 7 - x_1 - x_2 + x_3, x_5 = -8 + 3x_1 + x_2, x_6 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3$，于是松弛型即为：最大化：$2x_1 - 6x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{rrcrcrcr} x_4 = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_5 = & -8 & + & 3x_1 & - & x_2 & & \\ x_6 = & & & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

其中基本变量为x_4, x_5, x_6，非基本变量为x_1, x_2, x_3.

29.1-6

Proof. 由第二个不等式可知$-2x_1 - 2x_2 \leq -10$，也即$-x_1 - x_2 \leq -5$，又由第一个不等式知$x_1 + x_2 \leq 2$，相加得$0 \leq -3$，显然不成立，因此该线性规划不可解. □

29.1-7

Proof. 从特殊性考虑，取$x_1 = 2a, x_2 = a$，则$x_1 - x_2 = a$，此时不等式为

$$-3a \le -1 - 4a \le -2a \ge 0$$

此时a的取值范围为$[\frac{1}{2}, +\infty]$，右侧无界.也即可行域中直线$x_2 = 2x_1$不能被其它两条直线截断，因此该线性规划是无界的. □

29.1-9

例子如下：
最小化：$x_1 + x_2$
满足约束：

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \ge & 1 \\ x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

此时显然可行区域无界，但有最佳目标值：1(此时$x_1 = 1, x_2 = 0$)

29.2-2

线性规划如下：
最大化：d_t
满足约束：

$$\begin{array}{rcccl} d_t & \le & d_s & + & 3 \\ d_t & \le & d_y & + & 1 \\ d_x & \le & d_t & + & 6 \\ d_x & \le & d_y & + & 4 \\ d_x & \le & d_z & + & 7 \\ d_y & \le & d_s & + & 5 \\ d_y & \le & d_t & + & 2 \\ d_z & \le & d_x & + & 2 \\ d_z & \le & d_y & + & 6 \\ & & d_s & = & 0 \end{array}$$

29.2-3

最短路径权值只需要改动目标函数即可，也即路径上所经过的结点的d_i之和，若能保证这个和取到最大值，则可以找出从源点s到所有顶点$v \in V$的最短路径权值.
最大化：$\sum_{v \in V} d_v$
满足约束：

$$\begin{array}{rcccl} d_v & \le & d_u & + & \omega(u,v) \\ d_s & = & 0 & & \end{array}$$

其中第一个不等式中，$(u,v) \in E$

29.2-6

按照26.3的方法，添加两个结点s, t，并把每条边的容量设为1，转化为最大流问题，于是：
最大化：$\sum_{v \in L} f_s v$
满足约束：

$$\begin{array}{ccc} f_{uv} & \le & 1 \\ \sum_{v \in V} f_{vu} & = & \sum_{v \in V} f_{uv} \\ f_{uv} & \ge & 0 \end{array}$$

其中对于第一个不等式，$u, v \in V$，对于第二个不等式，$u \in L \cup R$，对于第三个不等式，$u, v \in V$.

29.3-2

Proof. 欲证v不减，即证$c_e \hat{b}_e \ge 0$，即证$c_e \ge 0$并且$\hat{b}_e \ge 0$.对于c_e，由于e是自选的，只要选择一个e保证$c_e > 0$即可；对于$\hat{b}_e$，在PIVOT第3行中有$\hat{b}_e = \frac{b_l}{a_{le}}$.在引理29.2中可知$b_l \ge 0$，而$a_{le}$可以通过选择$l$来达到为正数.因此，SIMPLEX中第12行对PIVOT的调用不会减小v的值. □

29.3-3

Proof. 即证这两个松弛型的目标函数相同，并且可行解集相同.
首先证明它们的目标函数相同：目标函数的变化发生在PIVOT中第14-17行，它基本变量代替了非基本变量，而基本变量与非基本变量有等式连接，所以替代前后等价.
再者证明它们可行解相同：在PIVOT中，我们根据选定的e与l_e来解方程，然后利用这个表达式来替代所有有关e的变量，其可行解仍然与之前等价.
因此可证得给定的松弛型与返回的松弛型等价. □

29.3-5

原式

最大化：$18x_1 + 12.5x_2$
满足约束：

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\ x_1 & & & \leq & 12 \\ & & x_2 & \leq & 16 \\ & & x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

首先将标准型转化为松弛型

最大化：$18x_1 + 12.5x_2$
满足约束：

$$\begin{array}{ccccccccc} x_3 & = & 20 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 12 & - & x_1 \\ x_5 & = & 16 & - & x_2 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

选定x_1作为基本变量

最大化：$216 - 18x_4 + 12.5x_2$
满足约束：

$$\begin{array}{ccccccccc} x_3 & = & 8 & + & x_4 & - & x_2 \\ x_1 & = & 12 & - & x_4 \\ x_5 & = & 16 & - & x_2 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

选定x_2作为基本变量

最大化：$316 - 5.5x_4 + 12.5x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & = & 8 & + & x_4 & - & x_3 \\ x_1 & = & 12 & - & x_4 \\ x_5 & = & 8 & - & x_4 & + & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

因为此时没有纯减的非基本变量，故不再进行下去，最优解即为(12,8,0,0,8)，目标值为316.

29.4-2

首先，若问题是最小化问题，通过取负将其转化为最大化问题；其次，我们将原先第j行的各系数放至其对偶线性规划第j列的相应位置，将约束不等式中的不等号反向，将MAXIMUN中的各系数与不等式中不等号右边的值进行交换，如此可以得到对偶线性规划，

29-1

a.

Proof. 如果我有一个线性规划的算法，则会有目标函数及各个约束不等式。先将这些约束不等式作为一个线性系统中的各个不等式，并且将目标函数作为线性系统的常数.如果该线性规划算法没有任何可行解，那么约束不等式之间的交集即为空集，此时相应的线性不等式必然无解；反之，若该线性规划有可行解，则约束不等式交集非空，线性不等式便有解. □

b.

Proof. 考虑如何将目标函数设定为一个常数，这样就可以由线性不等式的可行性算法直接推导出线性规划求解.选定一个数k，且设定c_k为常数，保证目标函数始终保持一个常数.同时考虑对偶的线性变换，可如下构造：最大化：$316 - 5.5x_4 + 12.5x_3$
满足约束：

$$\begin{array}{rcccc} Ax & \leq & b \\ A^T y & \geq & c \\ c_k x_k & = & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & - & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \end{array}$$

若该线性不等式无解，则可知线性规划没有可行解；否则能够通过单纯形算法求解该线性规划的最优解， □