

问题求解 (三) 第15周作业

黄奕诚161220049

December 13, 2017

TJ Chapter 8

6

(a) $d_{min} = 2$, 最多可以检1位错, 无法纠错;

(b) $d_{min} = 1$, 无法检错或纠错;

(c) $d_{min} = 1$, 无法检错或纠错;

(d) $d_{min} = 2$, 最多可以检1位错, 无法纠错;

7

(a) 设 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$, 由 $HX = 0$ 得到

$$x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 0$$

解得零空间为

$$(00000), (00101), (10011), (10110)$$

零空间是(5, 3)块. 由于极大线性无关组的秩为2, 所以一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

生成矩阵是不唯一的.

(b) 设 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$, 由 $HX = 0$ 得到

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 0$$

解得零空间为

$$(000000), (010100), (111010), (101101)$$

零空间是(6, 4)块. 由于极大线性无关组的秩为2, 所以一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

生成矩阵是不唯一的.

(c) 设 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$, 由 $HX = 0$ 得到

$$x_1 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_2 + x_4 + x_5 = 0$$

解得零空间为

$$(00000), (00100), (00011), (00111)$$

$$(11001), (11101), (11010), (11110)$$

零空间是(5,3)块.由于极大线性无关组的秩为2,所以一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

生成矩阵不唯一.

(d) 设 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T$, 由 $HX = 0$ 得到

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0$$

解得零空间为

$$(0000000), (1101001), (0101010), (1000011)$$

$$(1001100), (0100101), (1100110), (0001111)$$

$$(1110000), (0011001), (1011010), (0110011)$$

$$(0111100), (1010101), (0010110), (1111111)$$

零空间是(7,3)块.由于极大线性无关组的秩为4,一个生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

生成矩阵不唯一.

8

我构建的这样一个编码为

$$(10100), (01010), (11001)$$

, 它的 $d_{min} = 3$, 可以检2位错, 纠1位错.

9

依次计算 $Hx_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 可以得到

$$Hx_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

说明第4列有错

$$Hx_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

出现多位错

$$Hx_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

出现多位错

$$Hx_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

出现多位错

11

(a) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$x_1 + x_5 = 0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因为 $d_{min} = 3$, 所以最多可以检2位错, 纠1位错.

(b) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $d_{min} = 3$, 所以最多可以检2位错, 纠1位错. (c)

(c) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $d_{min} = 2$, 所以最多可以检1位错.

(d) 是标准奇偶校验矩阵.由

$$x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_3 + x_6 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_7 = 0$$

得到它的标准生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $d_{min} = 2$, 所以最多可以检1位错.

13

(a)

$$Hx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$Hy = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$Hz = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Hx = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

18

Proof. 设 $x \in C_i$ 为非零数.定义一个从非零数到0的映射: $y \mapsto x + y$.对于0, 可以表示为两个非零数之和, 而且每个 x 对应唯一的0, 所以若在第 i 个坐标存在非零数, 则存在相同数量的0, 于是正好有一半是0.若不存在非零数, 则全为0. \square

19

Proof. 设 $x \in C$ 有奇权重, 定义一个从奇码字到偶码字的映射: $y \mapsto x + y$.对于任意一个偶码字, 都可以表示为两个奇码字之和, 并且每个奇码字加上 x 对应唯一的偶码字, 因此该映射是双射.所以若存在奇权重的码字, 则存在相等数量的偶权重码字, 此时正好有一半的偶权重码字.或者不存在奇权重码字, 即全为偶权重码字. \square

21

当ASCII码的数量为128时, 信息位有7位, 所以对于 $2^i - 1 > i + 7$, 解之得 $i \geq 4$, 所以至少需要4位校验位, 于是需要的矩阵规模为 4×11 ;
当ASCII码的数量为256时, 信息位为8位, 所以对于 $2^i - 1 > i + 8$, 解之得 $i \geq 4$, 所以至少需要4位校

验位，于是需要的矩阵规模为 4×12 ；
若仅需要检错功能，则各需要的校验位为1位，对应的矩阵规模分别为 1×7 和 1×8 。

22

三位信息位对应的标准偶校验矩阵为

$$[1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

对于七位信息位，则为

$$[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

生成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

23

设需要 n 位校验位，则 $2^n - 1 \geq n + 20$ ，得到 $n \geq 5$ ，所以需要5位校验位来实现20位信息位的纠错。又由 $2^n - 1 \geq n + 32$ ，得到 $n \geq 6$ ，所以需要6位校验位来实现32位信息位的纠错。