《组合数学》期末整理

目录

1 基本计数

1.1 The twelvefold way

$f : N \to M$, $|N| = n$, $|M| = m$.

elements of N	elements of M	any f	$1-1$	on-to
distinct	distinct	m^n	$(m)_n$	$m!\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$
identical	distinct	$\left(\binom{m}{n}\right)$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
distinct	identical	$\sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	$\begin{cases} 1 & \text{if} \quad n \le m \\ 0 & \text{if} \quad n > m \end{cases}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$
identical	identical	$\sum_{k=1}^{m} p_k(n)$	$\begin{cases} 1 & \text{if} \quad n \le m \\ 0 & \text{if} \quad n > m \end{cases}$	$p_m(n)$

1.2 三个规则

- **加法规则**：对于两个有限且不相交的集合 S, T，有 $|S \cup T| = |S| + |T|$.
- **乘法规则**：对于两个有限集合 S, T，有 $|S \times T| = |S| \cdot |T|$.
- **双射规则**：对于两个有限集合 S, T，$\exists \phi : S \xrightarrow[\text{on}-\text{to}]{1-1} T \Rightarrow |S| = |T|$.

1.3 分析 the twelvefold way

- m^n, $(m)_n$, $\binom{m}{n}$ 是 trivial 的.
- 整数的 compositions（多个整数相加）的取法：隔板法. 可以得到 $\binom{n-1}{m-1}$. 若可取 0, 得到 $\left(\binom{m}{n}\right) = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}$（Multi-set）.
- 集合的 k-partitions（n-set 划分为 k 个子集）: $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. 考虑 k 的可能取值，对 any f 得到 $B_n = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$（Bell number）. 有递推式 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$（考虑 $\{n\}$ 是否是一个单独划分块的两种情况）. 当盒子 distinct 时，相当于有序的 m-划分，得到 $m!\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$.

- 数的 k-partitions（一个数 n 划分为无序的 k 个数之和）. 不失一般性，有模型

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1 \end{cases}$$

考虑 x_k 的两种情况，有递推式 $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$. k-partition $\to$ k-composition 是满射，partition of $n \to$ partition of $n + \frac{k(k-1)}{2}$ 是单射，由此给出两个界，逼出 $p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}, n \to \infty$. 根据 Ferrers diagram 的转置可以得出：k-partitions of n 的种数等价于最大 part 为 k 的 partitions of n 的种数. 由此 $p_k(n) = \sum_{j=1}^{k} p_j(n-k)$.

2 生成函数

2.1 生成函数

OGF：$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. x 一般作为不表示任何值的**形式变量**，我们要计数的是 a_i. 生成函数只是另一种用于表示 $(a_0, a_1, \dots)$ 的方法，它牛逼之处在于多样的代数操作.

2.2 组合

用 + 代表 "或"，用 $\star$ 代表 "且"，则 n-set 子集的选择可以表示为

$$\underbrace{(x_0 + x_1)(x_0 + x_1) \cdots (x_0 + x_1)}_{n\text{个元素}} = (x_0 + x_1)^n$$

$(1+x)^n$ 展开式中 $a_k x^k$ 表示 n-set 的 k-subset 的数目为 a_k. 这里 $1 = x^0$ 表示不选，x^1 表示选. 更一般的，对于 n 堆东西，第 k 堆有 a_k 个相同的东西，我们想取 t 个，先表示 $(1 + x + \cdots + x^{a_1}) \dots (1 + x + \cdots + x^{a_k})$，$x^t$ 的系数即为所求.

2.3 斐波那契数（求解递归的典型例子）

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & \text{if} \quad n \geq 2, \\ 1 & \text{if} \quad n = 1, \\ 0 & \text{if} \quad n = 0 \end{cases}$$

求解 F_n 的几个步骤：

1. 表示生成函数：$G(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$，用递推式展开，并通过在两边同乘 x, x^2 等得到 $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
2. 为了把 $G(x)$ 表示为直接得到 F_n 的形式，设 $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\phi x)(1-\hat{\phi} x)} = \frac{\alpha}{1-\phi x} + \frac{\beta}{1-\hat{\phi} x}$. 其中 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 解出 α, β.
3. 利用**重要的 geometric expansion:** $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$ 对 $G(x)$ 变形，便可得到 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \hat{\phi}^n\right)$.

2.4 生成函数的代数操作

给定 $G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n x^n$ 和 $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$.

shift	$x^k G(x) = \sum_{n \geq k} g_{n-k} x^n$
addition	$F(x) + G(x) = \sum_{n \geq 0} (f_n + g_n) x^k$
convolution	$F(x)G(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} x^n$
differentiation	$G'(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1) g_{n+1} x^n$

2.5 展开生成函数

- 泰勒展开：$G(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{G^{(n)}(0)}{n!}x^n$.
- 几何序列：$\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}x^n$.
- 广义二项式定理：$(1+x)^\alpha=\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$.

2.6 卡特兰数（Catalan Number）

递推关系： $C_0=1$, $C_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}$.

求解方法： 对生成函数作平方再乘 x，得到 $G(x)=1+xG(x)^2$. 得到 $G(x)$ 后用广义二项式定理展开，最后得到 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

2.7 快排分析

递推关系： 设 T_n 表示快排 n 个数的平均比较次数，有 $T_0=T_1=0$, $T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-1+T_{k-1}+T_{n-k})$.

求解方法： 对 $\sum_{n\geq 0}nT_nx^n$ 用递推式展开，得到

$$\sum_{n\geq 0}nT_nx^n=\sum_{n\geq 0}n(n-1)x^n+2\sum_{n\geq 0}\big(\sum_{k=0}^{n-1}T_k\big)x^n$$

这三个项分别采用乘 x 由导数逆推、乘 x^2 由导数和几何序列逆推、乘 x 由卷积逆推. 得到式子 $xG'(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{2x}{1-x}G(x)$ 后，**求解一阶线性微分方程**得到 $G(x)$，后面 trivial. 最终 $T_n=2(n+1)H(n)-2n$.

3 筛法

3.1 容斥原理

设 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是集合 U 的一系列子集,那么 U 的不在任何一个 A_i 中的元素个数为 $\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}(-1)^{|I|}|A_I|$.

3.1.1 满射

定理： 从 n-set 到 m-set 的满射数量为 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^n$.

证明思路： 设坏事件 A_I 表示 $I\subseteq[m]$ 没有 $[n]$ 中对应的原像. 我们希望这样的坏事件一个也不发生，于是 $\sum_{I\subseteq[m]}(-1)^{|I|}|A_I|=\sum_{I\subseteq[m]}(-1)^{|I|}(m-|I|)^n=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n$. 结合前面所学，可推知 $\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}=\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^n$.

3.1.2 错排（Derangement）

错排问题： 不存在不动点的排列种数.

定理： $\{1,2,\ldots,n\}$ 的错排数为 $n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\approx\frac{n!}{e}$.

证明思路： $|U|=n!$. 设 A_I 表示 $I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ 都是不动点. $|A_I|=(n-|I|)!$. 根据容斥原理展开式子，逆向使用泰勒展开 $\frac{1}{e}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\pm o(\frac{1}{n!})$.

3.1.3 受限位置排列

问题： 避免一些禁止位置的排列种数.

定理： $N_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k r_k(n-k)!$. 其中 B 表示 $[n]\times[n]$ 棋盘中标记的禁止位. r_k 表示在 B 中不冲突放置 k 个棋子的放法种数. N_0 表示不冲突放置 n 个棋子且没有棋子在 B 中的放法种数.

3.1.4 夫妻问题（Problème des ménages）

问题： n 对夫妻坐一圈，男女交差坐，不可和自己的夫/妻相邻.

解法： 先坐定妻子，然后丈夫的坐法满足 $\pi(i) \neq i$ 且 $\pi(i) \neq i+1 \pmod n$. r_k 即为在大小为 $2n$ 的环中取非连续的 k 个的取法种数. 依据下面的引理，$r_k = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$.

引理： 从一条线上的 m 个对象中选择 k 个不连续对象的选法有 $\binom{m-k+1}{k}$ 种.（先按定 $m-k$ 个不取的，再对 $m-k+1$ 个空隙插入 k 个）将线改成环，则为 $\frac{m}{m-k}\binom{m-k}{k}$ 种.（双重计数：$f(m,k)$ 为所求，$g(m,k)$ 为在 $f(m,k)$ 基础上将 k 个对象涂红，剩下 $m-k$ 个之一涂蓝的种数，则 $g(m,k) = (m-k)f(m,k) = m\binom{m-k}{k}$）

3.1.5 二分完美匹配

问题： 设二分图 $G([n],[n],E)$，$(i,\pi(i)) \in E$，$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & (i,j) \notin E \end{cases}$. 求 G 中完美匹配的数目，也即 $\sum_{\pi \in S_n} \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)}$.

解法： 暴力求解需要 $O(n!)$. 根据 Ryser's formula，$\sum_{\pi\in S_n} \prod_{i\in[n]} A_{i,\pi(i)} = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{n-|I|} \prod_{i\in[n]} \sum_{j\in I} A_{i,j}$.

3.1.6 欧拉函数（The Euler totient function）

定理： 设 $\phi(n)$ 表示 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中与 n 互质的数的个数. 假设 n 可被 r 个不同的素数 $p_1,\ldots,p_r$ 整除，则

$$\phi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

证明思路： 坏事件 A_i 为 $U = \{1,2,\ldots,n\}$ 中可被 p_i 整除的数的集合，对应的有 A_I. $|A_i| = \frac{n}{p_i}$ 且 $|A_I| = \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}$. 由此 $\phi(n) = \sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}|A_I|$. 展开即可.

4 波利亚计数理论（Pólya's theory of counting）

4.1 群

4.1.1 定义

群 $(G,\cdot)$ 由集合 G 和二元操作符 $\cdot$ 组合，满足如下公理：

- **封闭性（closure）：** $\forall g,h \in G, g\cdot h \in G$.
- **结合律（associativity）：** $\forall f,g,h \in G, f\cdot(g\cdot h) = (f\cdot g)\cdot h$.
- **单位元（identity）：** 存在一个元素 $e \in G$，使得对任意 $g \in G$ 都有 $e\dot{g} = g$.
- **逆元（inverse）：** 对任意 $g \in G$，都存在 $h \in G$ 使得 $g\cdot h = e$，记为 $h = g^{-1}$.

4.1.2 排列群（Permutation groups）

- **对称群（Symmetric group S_n）：** 所有排列 $[n] \xrightarrow[\text{on-to}]{1-1} [n]$ 的集合，满足对任意 $\pi,\sigma \in S_n$ 有 $(\pi\cdot\sigma)(i) = \pi(\sigma(i))$. 它的子群被称为 permutation groups.
- **循环群（Cyclic group C_n）：** $\sigma(i) = (i+1) \mod n$. $C_n = \{\sigma^t \mid t \geq 0\}$，它可以由 n 条边的正则多边形的旋转对称形成，$|C_n| = n$.
- **二面体群（Dihedral group D_n）：** $\rho(i) = n-i-1$. 它可以由 n 条边的正则多边形的旋转和反射形成，$|D_n| = 2n$.

4.1.3 群作用（Group action）

定义：在集合 X 上的一个群 G 的群作用是一个二元操作符：$\circ: G \times X \to X$. 满足对任意 $g, h \in G, x \in X$ 有 $(g \cdot h) \circ X = g \circ (h \circ X)$，并且 $e \circ x = x$.

4.2 Burnside's Lemma

4.2.1 轨道（Orbits）

- **定义：**设 G 是作用在集合 X 上的一个排列群，对任意 $x \in X$，x 的轨道为 $Gx = \{\pi \circ x \mid \pi \in G\}$.
- **性质：**$x \in Gy$ 定义了 x, y 之间的等价关系（易证），轨道划分了集合 X.
- **例子：**4 个珠子的项链涂 2 种颜色，按 C_4 可以将 X 划分为 6 组等价类.

4.2.2 不变集（Invariant sets）和稳定子群（stabilizers）

- **π 的不变集：**$X_\pi = \{x \in X \mid \pi \circ x = x\}$.
- **x 的稳定子群：**$G_x = \{\pi \in G \mid \pi \circ x = x\}$.
- **引理：**设 G 是作用在 X 上的一个排列群，对任意 $x \in X$ 有 $|G_x||Gx| = |G|$.

4.2.3 轨道的计数（Counting orbits）

Burnside's Lemma：设 G 是作用在 X 上的一个排列群，则轨道数目为 $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G}|X_\pi|$.

证明思路：矩阵 $A = G \times X$，$A(\pi, x) = 1$ 当 $\pi \circ x = x$ 否则为 0. 由此根据双重计数得到 $\sum_{\pi \in G}|X_\pi| = \sum_{x \in X}|G_x|$. 由上面引理化简，并记 X 被轨道划分为 $X_1, X_2, \ldots, X_{|X/G|}$. 有 $\sum_{x \in X}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{i=1}^{|X/G|}\sum_{x \in X_i}\frac{1}{|X_i|}$. 继而化简得证.

4.3 波利亚计数理论（Pólya's Theory of Counting）

4.3.1 循环指数（The cycle index）

对于一个 $[n]$ 的排列 $\pi \in G$,若它是 k 个 cycles 的乘积,设第 i 个环的长度为 ℓ_i. 设单项式 $M_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{k} x_{\ell_i}$. 那么它的 **cycle index** 为

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} M_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

根据 Burnside's Lemma，n 对象的 m 涂色的等价类数目为 $P_G(\underbrace{m, m, \ldots, m}_{n})$.

4.3.2 Pattern Inventory

对任意非负整数元组 $\mathbf{v} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$，其中 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$，$a_{\mathbf{v}}$ 表示这 n 个对象的 m 染色且第 i 种颜色出现 n_i 次的等价类数目. **Pattern Inventory** 是 $a_{\mathbf{v}}$ 的生成函数，定义为

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_m^{n_m}$$

4.3.3 波利亚计数公式（Pólya's enumeration formula）

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = P_G\left(\sum_{i=1}^{m} y_i, \sum_{i=1}^{m} y_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^{m} y_i^n\right)$$

5 凯利公式（Cayley's Formula）

Cayley's formula for trees： n 个不同顶点构成 n^{n-2} 棵不同的树.

5.1 证法 1：双重计数

目标： 求可以向一个 n 顶点的 empty graph 中加入有向边形成有根树的不同有向边序列. **计数方法：**

- 从无根树出发, 先选一个顶点作为根, 然后 $n-1$ 条边的方向可以确定, 全排列即可. 有 $T_n n(n-1)! = T_n n!$.
- 从 empty graph 出发，起初有 n 棵有根树，第 k 步有 $n-k$ 棵有根树，可以在任何顶点（n 种）和其它树的根（$n-k-1$ 种）之间建立有向边. 有 $\prod_{k=0}^{n-2} n(n-k-1) = n^{n-2}n!$.

5.2 证法 2：Prüfer 编码

1. **编码：** 输入一棵顶点标记为 $1,2,\ldots,n$ 的树 T，令 $T_1 = T$，对于 i 从 1 到 $n-1$，设 u_i 为 T_i 拥有最小标记的叶结点，v_i 为它的邻居. T_{i+1} 是从 T_i 中删去 u_i 和它所连的边. 最后得到 $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-2})$.
2. **引理 1：** 对任意 $1 \le i \le n-1$, T_i 的顶点为 $u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}$, 每条边为 $\{u_j, v_j\}$, 其中 $i \le j \le n-1$.
3. **引理 2：** $v_{n-1} = n$.
4. **引理 3：** 对任意 $1 \le i \le n-1$，u_i 是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中不在 $\{u_1,u_2,\ldots,u_{i-1}\} \cup \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}\}$ 中的最小元素.
5. **解码：** 输入一个元组 $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}) \in \{1,2,\ldots,n\}^{n-2}$. 令 T 为空图且 $v_{n-1} = n$. 对于 i 从 1 到 $n-1$，设 u_i 是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中不在 $\{u_1,u_2,\ldots,u_{i-1}\} \cup \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}\}$ 中的最小元素, 向 T 中添加边 $\{u_i, v_i\}$. 最后得到 T.
6. **证明双射：** Encode 过程证明了单射，Decode 过程证明了满射. 只要证明 T 无环即可.

5.3 证法 3：基尔霍夫矩阵-树定理（Kirchhoff's matrix tree theorem）

1. 图 $G([n], E)$ 的 $n \times n$ 的邻接矩阵 $A(i,j) = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E, \\ 0 & \{i,j\} \notin E \end{cases}$. $n \times n$ 的对角矩阵 $D(i,j) = \begin{cases} \deg(i) & i = j, \\ 0 & i \ne j \end{cases}$. Laplacian 矩阵 $L = D - A$，有 $L(i,j) = \begin{cases} \deg(i) & i = j, \\ -1 & i \ne j \text{且} \{i,j\} \in E, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$. 设 $|E| = m$，$n \times m$ 的关联矩阵 $B(i,e) = \begin{cases} 1 & e = \{i,j\} \text{且} i < j, \\ -1 & e = \{i,j\} \text{且} i > j, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$. 易知 $L = BB^T$.
2. **Kirchhoff's matrix tree theorem：** 对于任意 n 个顶点的连通图 G，它的生成树个数为 $\det(L_{i,i})$，其中 $i \in [n]$，$L_{i,i}$ 是从 L 中删去第 i 行第 i 列得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵.
3. 证明暂略. 在 $G = K_n$ 中运用该定理即有 $L_{i,i}(x,y) = \begin{cases} n-1 & i = j, \\ -1 & i \ne j \end{cases}$. 于是 $\det(L_{i,i}) = n^{n-2}$.

6 存在性问题

6.1 存在性

6.1.1 Shannon 的电路下界

定义： 一个布尔电路（boolean circuit）是一个有向无环图，入度为 0 的结点是输入结点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 出度为 0 的唯一结点是输出结点. 其它结点是门（gate），有三种，分别为 AND（入度为 2），OR（入度为 2）和 NOT（入度为 1）门. 电路复杂度即为门的数目.

定理： 存在一个布尔函数 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 使得电路复杂度大于 $\frac{2^n}{3n}$.

证明思路： 共有 2^{2^n} 个这样的布尔函数. 由 De Morgan's laws，将 NOT 门放在输入端，每个门有两种类型（AND 或 OR）且有两个输入，输入可能是 0, 1, x_i, $\neg x_i$ 或其它门的输出. 故有 t 个门的电路总数最多为 $2^t(t+2n+1)^{2t}$. 取 $t = 2^n/3n$ 可以得到 $2^t(t+2n+1)^{2t} < 2^{2^n}$.

6.2 双重计数

6.2.1 欧拉引理

引理： $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

证明思路： 数有向边个数：从边数；从顶点数.

6.2.2 Sperner 引理

定义： 一个 **triangulation（三角形划分）** 是指将三角形 abc 划分为多个小三角形（cells，格子），两个不同的 cells 要么不相连，要么共享一条边，要么共享一个顶点. 一个 **proper coloring 恰当着色**是指将 abc 的 triangulation 中每个顶点着红、绿、蓝中的一个颜色，并满足：

- 三个顶点 a, b, c 有三种不同颜色；
- 三条边 ab, bc, ac 中每条边的顶点有两种颜色.

Sperner 引理： 对任意恰当着色的三角形划分，都存在接收了所有三种颜色的格子. （For any properly colored triangulation, there exists a cell receiving all three colors.）

证明思路： 构造对偶图（每个格子对应一个顶点；三角形的外界对应一个单独顶点；两个共享一条红-蓝边的格子对应一条边），在对偶图中，若一个格子接收所有三种颜色，它的度数为 1；若只接收了红、蓝，它的度数为 2；其它情况下，度数为 0. 外界顶点度数为奇数（由定义），加之握手引理得证.

6.3 鸽巢原理

广义鸽巢原理： 若一个包含超过 mn 个对象的集合被划分为 n 组，那么有某些组会接收超过 m 个对象.

6.3.1 不可避免的因数（Inevitable divisors）

定理： 对于任意子集 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ 且 $|S| > n$，都存在两个数 $a, b \in S$ 使得 a 整除 b（$a \mid b$）.

证明思路： 笼子——对任意奇数 $m \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$，$C_m = \{2^k m \mid k \geq 0, 2^k m \leq 2n\}$.

6.3.2 单调子序列（Monotonic subsequences）

定理： 一个包含超过 mn 个不同实数的序列要么包含一个长度为 $m+1$ 的递增子序列，要么包含一个长度为 $n+1$ 的递减子序列.

证明思路： 设 $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$，$N > mn$. 对每个 a_i 给定一个 (x_i, y_i) 对，其中 x_i 表示在 a_i 结束的最长递增子序列的长度，y_i 表示从 a_i 开始的最长递减子序列的长度. 可以证明只要 $i \neq j$ 就有 $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$. 因为 $N > mn$，必有 (x_i, y_i) 在 $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ 之外.

6.3.3 狄利克雷近似（Dirichlet's approximation）

定理： 设 x 为无理数，对于任意的自然数 n，都存在一个有理数 $\frac{p}{q}$ 使得 $1 \leq q \leq n$ 并且 $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$.
证明思路： 设小数部分 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

- 鸽子——$\{kx\}, k = 1, 2, \ldots, n+1$.
- 笼子——$(0, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \ldots, (\frac{n-1}{n}, 1)$.

7 概率法

7.1 概率法

基本原理： 从一个域中随机选取的一个对象若以正的概率满足一个性质，那么在该域中必然存在一个满足该性质的对象；若至少有一个随机变量不小于其期望值，那么至少存在一个随机变量不大于其期望值.

7.1.1 Ramsey number

定义： $R(k, \ell)$ 是满足对 K_n 染红色或蓝色，要么存在一个红色 K_k，要么存在一个蓝色 K_ℓ 的最小的 n 值.
定理： 若 $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$，则可以用两种颜色对 K_n 进行染色使得不存在同色的 K_k 子图.
证明思路： 对 K_n 的每条边随机取颜色，则对给定的 k 个顶点集 S 其 K_k 同色概率为 $\Pr[\epsilon_S] = 2^{1-\binom{k}{2}}$. 根据 union bound，$\Pr[\exists S, \epsilon_S] \leq \binom{n}{k}\Pr[\epsilon_S] = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$.

7.1.2 竞赛图（Tournament）

定义： 由 n 个选手组成的顶点集 V 的竞赛图中，对任意不同的两个顶点 $u, v \in V$，$(u, v) \in E$ 和 $(v, u) \in E$ 有且仅有一个满足. 一个竞赛图有 $k-$paradoxical 若对任意的 k 个选手，都存在一个选手将这 k 个选手都打败.
定理： 若 $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$，则存在一个 n 个顶点上的 $k-$paradoxical 竞赛图.
证明思路： 给定 $S \in \binom{n}{k}$，计算 "不存在 $V \backslash S$ 中的顶点打败所有 S 中的顶点" 的概率，为 $(1 - 2^{-k})^{n-k}$. 考虑 S 的所有可能选取，根据 union bound，T 不满足 $k-$paradoxical 的概率小于 $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$.

7.1.3 哈密顿路径（Hamiltonian paths）

定理： 存在一个 n 选手的竞赛图，它包含至少 $n!2^{-(n-1)}$ 条哈密顿路径.
证明思路： 随机选取一个 $[n]$ 上的竞赛图 T，对 $[n]$ 的任意排列 π，设 X_π 表示指示随机变量

$$X_\pi = \begin{cases} 1 & \forall i \in [n-1], (\pi_i, \pi_{i+1}) \in T, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则 $E[X_\pi] = 2^{-(n-1)}$. 令 $X = \sum_{\pi:[n]\text{的排列}} X_\pi$. 由 $E[X] = n!2^{-(n-1)}$.

7.1.4 独立集（Independent sets）

定理： 设 $G(V, E)$ 是一个包含 n 个顶点 m 条边的图，它有一个至少包含 $\frac{n^2}{4m}$ 个顶点的独立集.
证明思路： 以 p 的概率独立地把每个顶点选到集合 S 中. $E[X] = E[|S|] = np$. S 诱导的 G 的子图边数 $E[Y] = mp^2$. 想要把 S 删去一些顶点/边变成独立集 S^*，对于每条边删去其中的一个端点，共删去的顶点个数不大于边数，故 $E[|S^*|] \geq E[X - Y] = np - mp^2 \geq \frac{n^2}{4m}$.

7.1.5 大周长图着色（Coloring large-girth graphs）

定义： 图 G 的**周长**（**girth**）$g(G)$ 是指 G 的最小环的长度. 图 G 的**色数**（**chromatic number**）$\chi(G)$ 是指存在对 G 的顶点涂色并满足任意相邻顶点异色的最小颜色数. 图 G 的**独立数**（**independence number**）$\alpha(G)$ 是指 G 的最大独立集的大小.

定理： 对任意 k, ℓ 存在一个满足 $g(G) > \ell$ 且 $\chi(G) > k$ 的图 G.

证明思路： 先有引理 $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$（由鸽巢原理易证）. 固定 $\theta < \frac{1}{\ell}$，G 为随机图 $G(n,p)$ 其中 $p = n^{\theta-1}$.

> **证明过程中有一步 "For any $3 \leq i \leq n$, the number of length-i simple cycle is $\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{2i}$" 不理解.**

7.2 Lovász Local Lemma

7.2.1 Lovász Local Lemma

背景： 对于 "坏" 事件集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$. 假设对任意 $1 \leq i \leq n$ 有 $\Pr[A_i] \leq p$, 我们想要说明存在坏事件一个都不发生的情况. 当这些事件两两独立时, 易证, 否则依赖应当是有限的（limited）. 事件 $A_1, \ldots, A_n$ 的**依赖图**（**dependency graph**）$D(V,E), V = \{1, 2, \ldots, n\}$ 满足对任意 $1 \leq i \leq n$，事件 A_i 与所有事件 $\{A_j \mid (i,j) \notin E\}$ 互相独立.

Lovász Local Lemma（对称情况）： 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是一个事件集合，假设下列条件成立

1. 对任意 $1 \leq i \leq n$ 有 $\Pr[A_i] \leq p$.
2. 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的依赖图的最大度数是 d，并且 $ep(d+1) \leq 1$.

那么有

$$\Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right] > 0$$

Lovász Local Lemma（广义情况）： 设 $D = (V,E)$ 是事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的依赖图. 假设存在实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 使得 $0 < x_i < 1$ 并且对于 $1 \leq i \leq n$ 有 $\Pr[A_i] \leq x_i \prod_{(i,j)\in E}(1 - x_j)$. 那么有

$$\Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right] \geq \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

7.2.2 对角 Ramsey Number 的 lower bound

定理： 对于某些常数 $C > 0$，有 $R(k,k) \geq Ck2^{k/2}$.

证明思路： 随机涂色，设 A_S 表示 S（$|S| = k$）形成了同色 K_k 的事件，有 $\Pr[A_S] = 2^{1-\binom{k}{2}} = p$. A_S 和 A_T 不相互独立当且仅当 $|S \cap T| \geq 2$. 对 S 来说，满足 $|S \cap T| \geq 2$ 的 T 的数量最多为 $\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$，故最大度数 $d \leq \binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$. 取 $n = Ck2^{k/2}$ 可证 $ep(d+1) \leq 1$. 由 LLL 可知存在同色 K_k，故 $R(k,k) > n = Ck2^{k/2}$.

8 极值图论

8.1 禁止的团（Forbidden Cliques）

8.1.1 Mantel 定理

定理： 若 $G(V,E)$ 是由 n 个顶点组成的无三角形的图，那么 $|E| \leq \frac{n^2}{4}$.

- **证法 1（鸽巢原理）：** 反证. 数归. 假设 $|V| \le n-1$ 时成立. 不失一般性假设 $|E| = \frac{n^2}{4}+1$，任意选取 $uv \in E$，考察由 $V \backslash \{u,v\}$ 诱导的 G 子图 H（有 $n-2$ 个顶点），若 H 有 $> \frac{(n-2)^2}{4}$ 条边，直接证得；否则至少有 $(\frac{n^2}{4}+1) - \frac{(n-2)^2}{4} - 1 = n-1$ 条边在 H 和 $\{u,v\}$ 之间，由鸽巢原理知存在一个 H 中的顶点同时与 u,v 相邻，有三角形.

- **证法 2（Cauchy-Schwarz 不等式）：** 因为无三角形所以对任意 $uv \in E$ 有 $d_u + d_v \le n$，故而 $\sum_{uv\in E}(d_u + d_v) \le n|E|$. 又 $\sum_{uv\in E}(d_u+d_v) = \sum_{v\in V} d_v^2$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式，$n|E| \ge \sum_{v\in V} d_v^2 \ge \frac{(\sum_{v\in V}^{d_v})^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n}$.

- **证法 3（算术与几何平均数不等式）：** 设 A 是最大独立集，$\alpha = |A|$. 因为 G 无三角形，它每个顶点的邻居本身就是独立集，故对任意 $v \in V$，有 $d(v) \le \alpha$. $B = V\backslash A, \beta = |B|$. E 中每条边至少有一个端点在 B 内，故 $|E| \le \sum_{v\in B} d_v$. 由基本不等式，$|E| \le \sum_{v\in B} d_v \le \alpha\beta \le \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$.

8.1.2 Turán 定理

定理： 设 $G(V,E)$ 是由 n 个顶点组成的无 $r-$clique 的图（$r \ge 2$），则 $|E| \le \frac{r-2}{2(r-1)}n^2$.
Turán 图（Turán graph）： 完全 $r-1$ 部图 $K_{n_1,n_2,\ldots,n_{r-1}}$，其中 $n_i \in \{\lfloor \frac{n}{r-1} \rfloor, \lceil \frac{n}{r-1} \rceil\}$. 记为 $T(n, r-1)$.

- **证法 1（归纳法）：** 对 n 归纳，假设 $n < r$ 时成立，当 $n = r$ 时，假设 G 有满足无 r 团的最大边数，则它有 $r-1$ 团 A. 设 $B = V\backslash A$. $|A| = r-1, |E(A)| = \binom{r-1}{2}, |B| = n-r+1$. 由假设知 B 无 r 团，故 $|E(B)| \le \frac{r-2}{2(r-1)}(n-r+1)^2$. B 中每个顶点最多与 A 中 $r-2$ 个顶点相邻. 故 $|E(A,B)| \le (r-2)|B|$. 由 $|E| = |E(A)| + |E(B)| + |E(A,B)|$ 可证.

- **证法 2（权重转移）：** 给每个顶点 $v \in V$ 分配一个权重 $w_v \ge 0$ 满足 $\sum_{v\in V} w_v = 1$. 想最大化 $S = \sum_{uv\in E} w_u w_v$. 设 $W_u = \sum_{v:v\sim u} w_v$, 对于 $u \not\sim v$ 设 $W_u > W_v$, 证得 $(w_u+\epsilon)W_u + (w_v-\epsilon)W_v \ge w_u W_u + w_v W_v$.（$S$ 不减，继而知把所有权重给最大团可最大化 S）. 有 $S = \sum_{uv\in E} w_u w_v \le \binom{r-1}{2}\frac{1}{(r-1)^2}$. 取 $w_i = \frac{1}{n}$ 可证.

- **证法 3（概率法）：** 设 $w(G)$ 表示最大团的顶点个数. 先证 $w(G) \ge \sum_{v\in V}\frac{1}{n-d_v}$.（随机排列顶点，从前往后逐个加入 S 中并要求当前顶点与 S 所有顶点相邻，构造团 S，用指示变量计算 $E[|S|]$）. 再用 Cauchy-Schwarz 不等式，$n^2 \le \sum_{v\in V}(n-d_v)\sum_{v\in V}\frac{1}{n-d_v} \le w(G)\sum_{v\in V}(n-d_v) \le (r-1)(n^2 - 2|E|)$.

- **证法 4（顶点复制）：** 设 $G(V,E)$ 是由 n 个顶点构成的无 $r-$clique 的最大边数的图. **Claim:** G 中不存在这样的三点 u,v,w 其中 $uv \in E, uw \notin E, vw \notin E$. 反证：若 $d(w) < d(u)$ 或 $d(w) < d(v)$，不失一般性假设 $d(w) < d(u)$，复制 u，删去 w，仍然无 $r-$clique. 此时 $|E'| = |E| + d_u - d_w > |E|$，矛盾. 若 $d_w \ge d(u), d(v)$，复制 w 两次，删去 u,v，仍然无 $r-$clique，此时 $|E'| = |E| + 2d_w - (d_u+d_v+1) > |E|$，矛盾. 该 Claim 证明了 $uv \notin E$ 的传递性，由此 $uv \notin E$ 定义了一个等价关系，结合 G 要求最大边数，G 只能是 Turán 图.

8.1.3 Turán 定理（独立集）

定理： 若 $G(V,E)$ 满足 $|V| = n, |E| = m$，则 G 有一个大小至少为 $\frac{n^2}{2m+n}$ 的独立集.

8.2 禁止的环（Forbidden Cycles）

Mantel 定理的另一个视角： 无三角形说明 $g(G) \ge 4$.
定理： 设 $G(V,E)$ 是包含 n 个顶点的图，若 $g(G) \ge 5$，则 $|E| \le \frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$.
证明思路： 设 $v_1, v_2, \ldots, v_d$ 是顶点 u 的邻居，$d = d(u)$. 设 S_i 表示除 u 之外的 v_i 的邻居集合. 对任意 v_i, v_j 有 $v_iv_j \notin E$（无三角形）故 $S_i \cap \{u, v_1, v_2, \ldots, v_d\} = \emptyset$. 除 u 之外没有顶点能和 $v_1, v_2, \ldots, v_d$ 中超过一个的相邻（无四边形）故 $S_i \cap S_j = \emptyset$. 于是由 $\{u, v_1, v_2, \ldots, v_d\} \cup S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_d \subseteq V$ 可证 $\sum_{v:v\sim u} d(v) \le n-1$（集合元素个数相加不大于 n）. 再用 Cauchy-Schwarz 不等式，$n(n-1) \ge \sum_{u\in V}\sum_{v:v\sim u} d(v) = \sum_{v\in V} d_v^2 \ge \frac{\left(\sum_{v\in V} d_v\right)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n}$.

8.3 Erds–Stone 定理

定义： $\mathrm{ex}(n,H)$ 表示不包含 H 子图，且含有 n 个顶点的图的最大边数. $K_s^r = K_{\underbrace{s,s,\ldots,s}_{r}} = T(sr,r)$.

Turán 定理的另一种表述： $\mathrm{ex}(n,K_r) \le \frac{r-2}{2(r-1)}n^2$.

极值图论基本定理： 对任意整数 $r \ge 2$ 和 $s \ge 1$，和任意正数 ϵ，若 n 足够大，则所有拥有 n 个顶点和至少 $\left(\frac{r-2}{2(r-1)}+\epsilon\right)n^2$ 条边的图都包含 K_s^r 作为子图，也即 $\mathrm{ex}(n,K_s^r) = \left(\frac{r-2}{2(r-1)}+o(1)\right)n^2$.

推论： 对任意的非空图 H，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$.

推论的证明思路： 设 $r=\chi(H)$. $T(n,r-1)$ 可被 $r-1$ 种颜色染色，故 $H \not\subseteq T(n,r-1)$. 因此 $|T(n,r-1)| \le \mathrm{ex}(n,H)$. 同时有 $|T(n,r-1)| \ge \binom{r-1}{2}\lfloor\frac{n}{r-1}\rfloor^2 = \left(\frac{r-2}{2(r-1)}-o(1)\right)n^2$. 此外，对足够大的 s 有 $H \subset K_s^r$，则 $\mathrm{ex}(n,H) \le \mathrm{ex}(n,K_s^r) = \left(\frac{r-2}{2(r-1)}+o(1)\right)n^2$. 综上，有

$$\frac{r-2}{r-1} - o(1) \le \frac{|T(n,r-1)|}{\binom{n}{2}} \le \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} \le \frac{\mathrm{ex}(n,K_s^r)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1} + o(1)$$

9 极值集合论

9.1 Sunflowers

定义： 一个集族 $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ 是大小为 r，核心（core）为 $C \subseteq X$ 的 sunflower，若满足对任意 $S,T \in \mathcal{F}, S \neq T$ 有 $S \cap T = C$.

Sunflower 引理： 设 $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$. 若 $|\mathcal{F}| > k!(r-1)^k$，那么 $\mathcal{F}$ 包含一个大小为 r 的 sunflower.

证明思路： 归纳法. $k=1$ 时 $\mathcal{F}$ 中所有集合不相交，取 r 个集合即可. 当 $k \ge 2$，取所有成员 disjoint 的最大集族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. 若 $|\mathcal{G}| \ge r$，证毕；否则设 $Y = \bigcup\limits_{S\in\mathcal{G}} S$. 有 $|Y| = k|\mathcal{G}| \le k(r-1)$. **Claim:** Y 和 $\mathcal{F}$ 中所有成员存在交集（易证）. 根据鸽巢原理，存在元素 $y \in Y$ 被包含在至少 $\frac{|\mathcal{F}|}{|Y|} > \frac{k!(r-1)^k}{k(r-1)} = (k-1)!(r-1)^{k-1}$ 个 $\mathcal{F}$ 的成员中. 将 y 从这些成员中删去，得到的 $\mathcal{H} = \{S\backslash\{y\} \mid S \in \mathcal{F} \wedge y \in S\}$ 满足 $\mathcal{H} \subseteq \binom{X}{k-1}$ 且 $|\mathcal{H}| > (k-1)!(r-1)^{k-1}$. 故 $\mathcal{H}$ 包含大小为 r 的 sunflower. 把 y 加回这些成员，仍是大小为 r 的 sunflower.

9.2 Erds–Ko–Rado 定理

定义： 一个集族 $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ 是**相交（intersecting）**的，若对任意 $S,T \in \mathcal{F}$ 有 $S \cap T \neq \emptyset$.

Erds–Ko–Rado 定理： 设 $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$，其中 $|X| = n$ 且 $n \ge 2k$. 若 $\mathcal{F}$ 是 intersecting 的，那么 $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1}$.

- **Katona 的证明（双重计数）：** 定义 X 的**环排列（cyclic permutation）** π 表示把 X 赋给一个环，共有 $(n-1)!$ 种环排列. $\mathcal{G}_\pi = \{\{\pi_{(i+j) \bmod n} \mid j \in [k]\} \mid i \in [n]\}$. 先证**引理：** 设 $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ 其中 $|X| = n$ 且 $n \ge 2k$. 若 $\mathcal{F}$ 是 intersecting 的，那么对任意 X 的环排列 π 都有 $|\mathcal{G}_\pi \cap \mathcal{F}| \le k$.（易证）**计数目标：** $\mathcal{R} = \{(S,\pi) \mid \pi\text{是}X\text{的一个环排列，并且}S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}_\pi\}$. 法 1：由上述引理加之有 $(n-1)!$ 种排列，得 $|\mathcal{R}| \le k(n-1)!$. 法 2：因为 S 是连续的，故 $|\mathcal{R}| = \sum_{S\in\mathcal{F}} k!(n-k)! = |\mathcal{F}|k!(n-k)!$.

- **Erds 的 shifting 技术：**
  - **定义：** 不失一般性设 $X = [n]$. 定义**转移操作符（shift operator）**：设 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ 且 $0 \le i < j \le n-1$. 对于每个 $T \in \mathcal{F}$，定义 $T_{ij} = (T\backslash\{j\}) \cup \{i\}$. $S_{ij}(T) = \begin{cases} T_{ij} & \text{若}j \in T, i \notin T, T_{ij} \notin \mathcal{F}, \\ T & \text{其它} \end{cases}$. $\mathcal{F}$ 的转换 $S_{ij}(\mathcal{F}) = \{S_{ij}(T) \mid T \in \mathcal{F}\}$.
  - **命题：** 1. $|S_{ij}(T)| = |T|$ 且 $|S_{ij}(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$. 2. 若 $\mathcal{F}$ 是 intersecting 的，那么 $S_{ij}(\mathcal{F})$ 也是 intersecting 的.（易证）

– **证明思路：** $k=1$ 时显然；$n=2k$ 时对任意 $S\in\binom{X}{k}$，S 和 $X\backslash S$ 至多有一个在 $\mathcal{F}$ 中，故 $|\mathcal{F}|\le\frac{1}{2}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$. 考察 $n>2k$ 情况，I.H. 小于 n 都成立. 将 $\mathcal{F}$ 拆分为不相交的两部分 $\mathcal{F}_0=\{S\in\mathcal{F}\mid n\notin S\}$ 和 $\mathcal{F}_1=\{S\in\mathcal{F}\mid n\in S\}$. 显然 $\mathcal{F}_0$ 可用 I.H. 对于 $\mathcal{F}_1$，设 $\mathcal{F}_1'=\{S\backslash\{n\}\mid S\in\mathcal{F}_1\}$. 显然 $\mathcal{F}_1'\subseteq\binom{[n-1]}{k-1}$. 它也 intersecting（由 shifting 证）. 进而 $|\mathcal{F}|=|\mathcal{F}_0|+|\mathcal{F}_1|=|\mathcal{F}_0|+|\mathcal{F}_1'|\le\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-1}{k-1}$.

9.3 Sperner 系统

定义： 一个集族 $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ 是一个**反链（antichain，或被称为 Sperner 系统）**若对任意不同的 $S,T\in\mathcal{F}$ 有 $S\not\subseteq T$.

定理： 设 $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ 其中 $|X|=n$. 若 $\mathcal{F}$ 是一个反链，则 $|\mathcal{F}|\le\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$.

- **Sperner 的原始证明（shadows）：**
- **Lubell 的证明（计数）：** 设 π 是 X 的一个排列，定义 $S\subseteq X$ prefixes π 表示 S 是 X 在排列 π 下前 $|S|$ 个元素的集合. 给定 $S\subseteq X$，则被 S prefixes 的排列 π 共有 $|S|!(n-|S|)!$ 个. 因为 $\mathcal{F}$ 是反链，故一个排列只能被一个 S prefixes. 由此被某个 $S\in\mathcal{F}$ prefixes 的排列个数为 $\sum_{S\in\mathcal{F}}|S|!(n-|S|)!\le n!$. 得到 $\sum_{S\in\mathcal{F}}\frac{1}{\binom{n}{|S|}}\le 1$（**LYM 不等式**）. 又 $\binom{n}{|S|}\le\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$，所以 $1\ge\sum_{S\in\mathcal{F}}|S|!(n-|S|)!/n!\ge\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$.
- **LYM 不等式的 Alon 的证明（概率法）：** 设 π 是 X 的随机排列，定义一个随机最大链 $\mathcal{C}_\pi=\{\{\pi_i\mid 1\le i\le k\}\mid 0\le k\le n\}$. 对任意 $S\in\mathcal{F}$，定义指示随机变量 X_S 表示是否有 $S\in\mathcal{C}_\pi$. 于是 $E[X_S]=\frac{1}{\binom{n}{|S|}}$. 设 $X=\sum_{S\in\mathcal{F}}X_S$. 由期望线性性质，$E[X]=\sum_{S\in\mathcal{F}}\frac{1}{\binom{n}{|S|}}$. 因为 $|X|=|\mathcal{F}\cap\mathcal{C}_\pi|\le 1$（反链），故得证.

9.4 Sauer 引理和 VC 维（VC-dimension）

9.4.1 Shattering 和 VC 维

定义： 设 $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ 是一个集族，$R\subseteq X$. $\mathcal{F}$ 在 R 上的 **trace** $\mathcal{F}|_R$ 是指 $\mathcal{F}|_R=\{S\cap R\mid S\in\mathcal{F}\}$. $\mathcal{F}$ **shatters** R 是指 $\mathcal{F}|_R=2^R$.（对任意 $T\subseteq R$ 都存在一个 $S\in\mathcal{F}$ 使得 $T=S\cap R$）集族 $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ 的 **VC 维** $\mathrm{VC}-\dim(\mathcal{F})$ 是被 $\mathcal{F}$ shatters 的最大 $R\subseteq X$ 的大小.

9.4.2 Sauer 引理

Sauer 引理： 设 $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ 其中 $|X|=n$. 若 $|\mathcal{F}|>\sum_{1\le i<k}\binom{n}{i}$，那么存在一个 $R\in\binom{X}{k}$ 使得 $\mathcal{F}$ shatters R.

9.4.3 遗传族（Hereditary family）

定义： 一个集族 $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ 是 hereditary 的，若 $S\subseteq T\in\mathcal{F}$ 可以推出 $S\in\mathcal{F}$.

命题： 设 $\mathcal{F}$ 是一个 hereditary family，那么如果 $R\in\mathcal{F}$ 则有 $\mathcal{F}$ shatters R.（由此很容易证明 Sauer 引理的 hereditary 版本）

9.4.4 Down-shifts

思路： 把一个任意的集族转化为一个 hereditary 的集族.

定义： 假设 $\mathcal{F}\subseteq 2^{[n]}$ 且 $i\in[n]$. **Down-shift 操作符** S_i 定义如下：对任意 $T\in\mathcal{F}$，设 $S_i(T)=\begin{cases}T\backslash\{i\} & \text{若}i\in T\text{且}T\backslash\{i\}\notin\mathcal{F},\\ T & \text{其它}\end{cases}$. $S_i(\mathcal{F})=\{S_i(T)\mid T\in\mathcal{F}\}$.

定理： 若 $\mathcal{F}\subseteq 2^X$ 是 down-shifted，那么 $\mathcal{F}$ 是 hereditary 的.

命题： 1. $|S_i(\mathcal{F})|=|\mathcal{F}|$. 2. $|S_i(\mathcal{F})|_R|\le|\mathcal{F}|_R|$（若 $S_i(\mathcal{F})$ shatters R，那么 $\mathcal{F}$ 也能 shatters R）

10 Ramsey 理论

10.1 Ramsey 定理

10.1.1 图的 Ramsey 定理

Ramsey 定理（图、双色）： 设 k, ℓ 是正整数，那么存在一个整数 $R(k, \ell)$ 满足：若 $n \geq R(k, \ell)$，则对于 K_n 的任意边染色（红或蓝），总存在一个红色的 K_k 或一个蓝色的 K_ℓ.

证明思路： 对 $k + \ell$ 归纳. $R(k, 1) = R(1, \ell) = 1$. 欲证 $R(k, \ell) \leq R(k, \ell - 1) + R(k - 1, \ell)$. 设 $n = R(k, \ell - 1) + R(k - 1, \ell)$，给定任意 $v \in V$，按照与 v 相连的边的颜色为蓝/红把 $V \backslash \{v\}$ 划分为 S 和 T. 有 $|S| + |T| + 1 = n = R(k, \ell - 1) + R(k - 1, \ell)$. 于是要么 $|S| \geq R(k, \ell - 1)$ 要么 $|T| \geq R(k - 1, \ell)$，假设前者，那么根据 I.H.，若 S 有红 K_k 就证毕，若 S 有蓝 $K_{\ell-1}$ 就加上 v 即有蓝 K_ℓ.

Ramsey 定理（图、多色）： 设 $r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ 是正整数，那么存在一个整数 $R(r; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ 满足：对任意包含 $n \geq R(r; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ 顶点的完全图的 r-染色，总存在一个某颜色 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ 的同色的 k_i 团.

证明思路：混合染色技巧（the “mixing color” trick）：$R(r; k_1, k_2, \ldots, k_r) \leq R(r-1; k_1, k_2, \ldots, k_{r-2}, R(2; k_{r-1}, k_{r-2}))$.

10.1.2 Ramsey 数

定义：Ramsey 数（Ramsey number）是满足 Ramsey 定理的最小的数 $R(k, \ell)$.

上界： $R(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$.（由递归式证）

下界： $R(k, k) \geq Ck2^{k/2}$ 对某个 $C > 0$.（由 LLL 证）

渐进： $\Omega(k2^{k/2}) \leq R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} = O(\frac{4^k}{\sqrt{k}})$.

10.1.3 超图的 Ramsey 定理

Ramsey 定理（超图、多色）： 设 $r, t, k_1, k_2, \ldots, k_r$ 是正整数，那么存在一个整数 $R_t(r; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ 满足：对任意包含 $n \geq R_t(r; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ 顶点的图 $\binom{[n]}{t}$ 的 r-染色，总存在一个 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ 和一个子集 $X \subseteq [n], |X| \geq k_i$ 使得所有的 $\binom{X}{t}$ 的成员都是第 i 种颜色.

证明思路：混合染色技巧（the “mixing color” trick）：$R_t(r; k_1, k_2, \ldots, k_r) \leq R_t(r-1; k_1, k_2, \ldots, k_{r-2}, R_t(2; k_{r-1}, k_r))$.

10.2 Ramsey 定理的应用

10.2.1 Happy Ending 问题

happing ending 问题： 平面上不存在三点共线的任意 5 个点，含有一个能组成凸四边形的四个顶点的子集.

定义： 平面中的一个点集位于 **general position** 是指不存在三点共线.

定理（Erds-Szekeres）： 对任意正整数 $m \geq 3$，存在一个数 $N(m)$ 使得平面上任意的至少含有 $N(m)$ 个点的位于 general position 的点集，都包含能构成一个凸 m 边形的顶点的 m 个点.

证明思路： 设 $N(m) = R_3(m, m)$. 对 $n \geq N(m)$，设 X 是平面上 n 个不共线点的任意集合. 定义这些点的大小为 3 的子集的 2 染色：$f : \binom{X}{3} \to \{0, 1\}$. 对任意 $\{a, b, c\} \in \binom{X}{3}$，设 $\triangle_{abc} \subset X$ 是被三角形 abc 覆盖的点集. $f(\{a, b, c\}) = |\triangle_{abc}| \mod 2$. 因为 $n = |X| \geq R_3(m, m)$ 所以存在一个 $Y \subseteq X$ 使得 $|Y| = m$ 且所有的 $\binom{Y}{3}$ 的成员都同色（由 f 定）. **Claim：** Y 中的 m 个顶点是凸 m 边形的顶点. 否则存在 $\{a, b, c, d\} \in Y$ 使得 $d \in \triangle_{abc}$ 且 $\triangle_{abc} = \triangle_{abd} \cup \triangle_{acd} \cup \triangle_{bcd} \cup \{d\}$.（所有集合都 disjoint）四者的奇偶性不可能相同，故 f 结果（涂色）也不相同，矛盾.

10.2.2 Yao 的隐含数据结构下界

引理： 设 $n \geq 2$ 是 2 的幂，$N \geq 2n$. 假设全集是 $[N]$，数据集的大小是 n. 若一个数据结构是一个有序表，那么在最坏情况下，任何的搜索算法需要至少 $\log n$ 次对数据结构的访问.

11 匹配论

11.1 相异代表系（Systems of Distinct Representatives ，SDR）

SDR： 一个集合序列 $S_1, S_2, \dots, S_m$ 的一个 SDR 是一个由不同元素 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 组成的序列，其中对任意 $i = 1, 2, \dots, m$ 有 $x_i \in S_i$.

11.1.1 Hall 婚姻定理

Hall 定理： 集合 $S_1, S_2, \dots, S_m$ 有一个 SDR 当且仅当对任意 $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ 有 $|\bigcup\limits_{i \in I} S_i| \geq |I|$.

证明思路： 只需证明 **Hall 条件**可以推出 SDR 的存在. 对 m 归纳. $m = 1$ 显然. I.H. 小于 m 成立. 引入概念 **critical family**：集族 $\{S_i \mid i \in I\}, |I| < m$ 若满足 $|\bigcup\limits_{i \in I} S_i| = |I|$，则被称为一个 critical family.

- 无 critical family. 取任意一个 $x \in S_m$ 作为它的代表，在其它 S_i（$1 \leq i \leq m-1$）中删去 x，于是对任意 $I \subseteq \{1, 2, \dots, m-1\}$ 有 $|\bigcup\limits_{i \in I} S_i'| \geq |\bigcup\limits_{i \in I} S_i| - 1 \geq |I|$. 由 I.H. 知存在 $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ 分别是 $S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$ 的代表，它们必然不是 x，加上 x 是 S_m 的代表，得证.

- 有 critical family. 设这样的 critical family 为 $S_{m-k+1}, \dots, S_m$（$k < m$），它们显然满足 Hall 条件，由 I.H. 可知 $x_{m-k+1}, \dots, x_m$ 分别是它们的代表. 将这 k 个元素从其它的 S_i（$1 \leq i \leq m-k$）中删去得到 S_i'. 根据 Hall 条件，对任意 $I \subseteq \{1, 2, \dots, m-k\}$，记 $S = \bigcup\limits_{i \in I} S_i \cup \bigcup\limits_{i=m-k+1}^{m} S_i$，有 $|S| \geq |I| + k$. 所以 $|\bigcup\limits_{i \in I} S_i'| \geq |S| - |\bigcup\limits_{i=m-k+1}^{m} S_i| \geq |I|$. 这样就找到了 $S_1, \dots, S_{m-k}$ 的代表，结合前面的得证.

Hall 定理的图论形式： 二部图 $G(U, V, E)$ 有 U 的匹配当且仅当对任意 $S \subseteq U$ 有 $|N(S)| \geq |S|$.

附录：可能需要的数学基础

泰勒展开

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} x^n$.
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$.

积分公式

- $\int x^\mu dx (\mu \neq -1) = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C$.
- $\int \frac{1}{a+bx} dx = \frac{1}{b} \ln |a+bx| + C$.
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
- $\int \log_a x dx = \frac{1}{\ln a}(x \ln x - x) + C$.