二元关系-习题课

2023,3,25

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-1有序对与笛卡儿积

有序对

定义 2.1.1 由两个元素 x 和 y(允许 $x=y$)按照一定顺序排列成的二元组称作一个**有序对**或**序偶**,记作 $\langle x,y\rangle$,其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素.

有序对的性质:

(1) 当 $x \neq y$ 时,$\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$.

(2) $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$.

笛卡儿积

定义 2.1.2 设 A,B 为集合,用 A 中元素为第一元素,B 中元素为第二元素构成有序对,所有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的**笛卡儿积**,记作 $A\times B$,即

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle | x\in A, y\in B\}.$$

笛卡儿积运算的性质

不满足交换律、结合律,但是对于并或交运算满足分配律. 若 A 或 B 中有一个为空集,则 $A\times B$ 就是空集.

笛卡儿积中元素的计数

若 $|A|=n, |B|=m$,则 $|A\times B|=mn$.

内容提要-2二元关系

二元关系

定义 2.1.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空,且它的元素都是有序对;

(2) 集合是空集.

那么称该集合为一个*二元关系*,记作 R. 二元关系也可简称为*关系*. 对于二元关系 R,若 $\langle x,y\rangle \in R$,则记作 xRy;若 $\langle x,y\rangle \notin R$,则记作 $x \not R y$.

从 A 到 B 的关系

定义 2.1.4 设 A,B 为集合,$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作*从 A 到 B 的二元关系*,特别当 $A=B$ 时称作*A 上的二元关系*.

若 $|A|=n,|B|=m$, 则 $|A\times B|=mn$,从 A 到 B 的二元关系有 2^{mn} 个,A 上的关系有 2^{n^2} 个.

A 上的某些特殊关系

对于任何集合 A,空集 $\varnothing$ 是 $A\times A$ 的子集,称作 A 上的*空关系*.

定义 2.1.5 对任意集合 A,A 上的*全域关系* E_A 和*恒等关系* I_A 分别定义为

$$E_A=\{\langle x,y\rangle | x\in A \wedge y\in A\}=A\times A,$$
$$I_A=\{\langle x,x\rangle | x\in A\}.$$

内容提要-3关系的表示及性质

表示一个关系的方式有 3 种：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图.

关系矩阵

若 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$B=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，R 是从 A 到 B 的关系，则 R 的关系矩阵是布尔矩阵 $M_R=(r_{ij})_{n\times m}$，其中 $r_{ij}=1 \Leftrightarrow \langle x_i,y_j\rangle \in R$，$r_{ij}=0 \Leftrightarrow \langle x_i,y_j\rangle \notin R$. 若 R 为 A 上的关系，则 R 的关系矩阵为 n 阶方阵.

关系图

若 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，R 是 A 上的关系，则 R 的关系图是 $G_R=\langle A,R\rangle$，其中 A 为顶点集，R 为边集. 这就是说，A 中的每个元素都对应一个顶点，如果 $\langle x_i,x_j\rangle \in R$，那么在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

关系的性质

设 R 是集合 A 上的关系，R 的性质有：

R 在 A 上自反 当且仅当 $\forall x\in A, \langle x,x\rangle\in R$.

R 在 A 上反自反 当且仅当 $\forall x\in A, \langle x,x\rangle\notin R$.

R 在 A 上对称 当且仅当 $\forall x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in R$，则 $\langle y,x\rangle\in R$.

R 在 A 上反对称 当且仅当 $\forall x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,x\rangle\in R$，则 $x=y$.

当且仅当 $\forall x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in R$，$x\neq y$，则 $\langle y,x\rangle\notin R$.

R 在 A 上传递 当且仅当 $\forall x,y,z\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in R$，则 $\langle x,z\rangle\in R$.

R 的表示有集合表达式、关系矩阵、关系图 3 种方法，对 R 的性质的判别也有 3 种方法，如表 2.1.1 所示.

表 2.1.1

表示	性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A\subseteq R$	$R\cap I_A=\varnothing$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R\circ R\subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$ 且 $i\neq j$，则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中 1 所在的位置，M 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，那么一定是一对方向相反的边（无单边）	如果两个顶点之间有边，那么一定是一条有向边（无双向边）	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，那么从 x_i 到 x_k 也有边

内容提要-4关系运算的定义及性质

运算的定义

定义域	$\mathrm{dom}\, R = \{x \mid \exists y$ 使得 $\langle x, y\rangle \in R\}$.
值域	$\mathrm{ran}\, R = \{y \mid \exists x$ 使得 $\langle x, y\rangle \in R\}$.
域	$\mathrm{fld}\, R = \mathrm{dom}\, R \cup \mathrm{ran}\, R$.
逆	$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$.
右复合	$F \circ G = \{\langle x, z\rangle \mid \exists y$ 使得 $\langle x, y\rangle \in F, \langle y, z\rangle \in G\}$.
限制	$R \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R, x \in A\}$.
像	$R[A] = \mathrm{ran}(R \upharpoonright A)$.
幂	$R^0 = I_A$,
	$R^{n+1} = R^n \circ R$.
自反闭包	$r(R) = R \cup R^0$.
对称闭包	$s(R) = R \cup R^{-1}$.
传递闭包	$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$;
	$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$ （对于 n 元集上的关系 R）

运算与性质间的联系

设 R_1, R_2 为非空集合 A 上的关系，如果它们满足某种性质，那么经过相应的运算后得到的关系是否也满足同样的性质？有关的结果给在表 2.1.2 中.

表 2.1.2

运算	原有性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	×	×
$R_1 - R_2$	×	✓	✓	✓	×
$R_1 \circ R_2$	✓	×	×	×	×

运算的性质

$(F^{-1})^{-1} = F$.

$\mathrm{dom}\, F^{-1} = \mathrm{ran}\, F$, $\mathrm{ran}\, F^{-1} = \mathrm{dom}\, F$.

$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

$R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

$F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$.

$(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$.

$F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$.

$(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$.

$F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.

$F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$.

$F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$.

$F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

$(R^m)^n = R^{mn}$.

$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow r(R_1) \subseteq r(R_2), s(R_1) \subseteq s(R_2), t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

R 自反 $\Rightarrow s(R)$ 和 $t(R)$ 自反.

R 对称 $\Rightarrow r(R)$ 和 $t(R)$ 对称.

R 传递 $\Rightarrow r(R)$ 传递.

内容提要-5等价关系与划分

等价关系

定义 2.1.6 设 R 为非空集合 A 上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 那么称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x,y\rangle \in R$, 则称 x 等价于 y, 记作 $x \sim y$.

等价类

定义 2.1.7 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A, \langle x,y\rangle \in R\},$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为 $[x]$ 或 $\bar{x}$.

等价类的性质

定理 2.1.1 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集.

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy, 那么 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 那么 $[x]\cap[y]=\varnothing$.

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$.

商集

定义 2.1.8 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集, 记作 A/R, 即

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

集合 A 的划分

定义 2.1.9 设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi \subseteq P(A)$ 满足下面的条件:

(1) $\varnothing \notin \pi$;

(2) $\forall X,Y \in \pi$, 若 $X \neq Y$, 则 $X \cap Y = \varnothing$;

(3) $\cup\pi = A$,

则称 π 是 A 的一个划分, 称 π 中的元素为 A 的划分块.

等价关系与划分间的一一对应

集合 A 上的等价关系 R 所确定的商集 A/R 就是 A 的划分; 反之, 给定 A 的划分 π, 定义 A 上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A$且 x,y 在 π 的同一划分块里$\}$, 易验证 R 是 A 上的等价关系.

内容提要-6偏序关系与偏序集

偏序关系

定义 2.1.10 设 R 为非空集合 A 上的关系. 如果 R 是自反的、反对称的和传递的, 那么称 R 为 A 上的偏序关系, 记作 $\preccurlyeq$. 设 $\preccurlyeq$ 为偏序关系, 若 $\langle x,y\rangle \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x"小于等于"y.

偏序集与全序集

定义 2.1.11 设 $\preccurlyeq$ 为非空集合 A 上的偏序关系, 对 $\forall x,y \in A$, 定义

(1) $x \prec y$, 如果 $x \preccurlyeq y$ 且 $x \neq y$.

(2) x 与 y 是可比的, 如果 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$.

在偏序集中任取元素 x,y, 可能出现下述 4 种不同情况: $x = y, x \prec y, y \prec x$, x 与 y 不可比, 即 x 与 y 没有序的关系. 这里的 $x \prec y$ 等价于 $x \preccurlyeq y$ 且 $x \neq y$.

定义 2.1.12 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系, 若 $\forall x,y \in A$, x 与 y 都是可比的, 则称 R 为 A 上的全序关系 (或线序关系).

定义 2.1.13 集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起称作偏序集, 记作 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$.

哈斯图

定义 2.1.14 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集, $\forall x,y \in A$, 若 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖 x.

有穷偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 可以用哈斯图来表示. 在哈斯图中用顶点表示 A 中的元素, 如果对于不同的顶点 x 和 y, $x \prec y$, 那么将 x 画在 y 的下方; 如果 y 覆盖 x, 那么在 x 和 y 之间连一条线段.

特殊元素

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集, B 是 A 的子集, 与 B 相关的特殊元素有:

B 的极大元 y　$y \in B$ 且不存在 $x \in B$ 使得 $y \prec x$, 这等价于 $y \in B$ 且对 $\forall x \in B$, 若 $y \preccurlyeq x$, 则 $x = y$.

B 的极小元 y　$y \in B$ 且不存在 $x \in B$ 使得 $x \prec y$, 这等价于 $y \in B$ 且对 $\forall x \in B$, 若 $x \preccurlyeq y$, 则 $x = y$.

B 的最大元 y　$y \in B$ 且对 $\forall x \in B$, 均有 $x \preccurlyeq y$.

B 的最小元 y　$y \in B$ 且对 $\forall x \in B$, 均有 $y \preccurlyeq x$.

B 的上界 y　$y \in A$ 且对 $\forall x \in B$, 均有 $x \preccurlyeq y$.

B 的下界 y　$y \in A$ 且对 $\forall x \in B$, 均有 $y \preccurlyeq x$.

B 的上确界(最小上界)　B 的上界中的最小元

B 的下确界(最大下界)　B 的下界中的最大元

基本要求

- 1. 理解有序对，二元关系，集合 A 到 B 的关系，集合 A 上的关系（包含空关系、全域关系、小于等于关系、整除关系、包含关系等）的定义. 掌握笛卡儿积的运算和性质.
- 2. 熟练掌握关系表达式、关系矩阵、关系图的表示法.
- 3. 熟练掌握关系的定义域、值域、逆、右复合、限制、像、幂的计算方法.
- 4. 熟练计算集合 A 上关系 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包.
- 5. 能够证明含有上述关系运算的集合恒等式或者包含式.
- 6. 熟练掌握判断关系 5 种性质的方法，并能够对关系的自反、对称、反对称、传递性给出证明.
- 7. 熟练掌握等价关系、等价类、商集、划分的概念，以及等价关系与划分的对应性质.
- 8. 熟练掌握偏序关系、偏序集、哈斯图、偏序集中的特殊元素等概念.
- 9. 能够利用上述关系模型处理简单的实际问题.

题型一：有序对与笛卡儿积

1. 设 $\langle x, y+5\rangle = \langle y-1, 2x\rangle$，求 x 和 y.
2. 已知 $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$，确定下面集合的元素.

   (1) $A \times \{1\} \times B$.

   (2) $A^2 \times B$.

   (3) $(B \times A)^2$.

解答与分析

1. 由有序对相等的条件得到方程组

$$\begin{cases} x = y - 1, \\ y + 5 = 2x. \end{cases}$$

解得 $x = 6, y = 7$.

2. (1) $\{\langle 0,1,1\rangle, \langle 0,1,2\rangle, \langle 1,1,1\rangle, \langle 1,1,2\rangle\}$.

   (2) $\{\langle 0,0,1\rangle, \langle 0,0,2\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 0,1,2\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,0,2\rangle, \langle 1,1,1\rangle, \langle 1,1,2\rangle\}$.

   (3) $\{\langle\langle 1,0\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle, \langle\langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle\rangle,$
   $\langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle, \langle\langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle\rangle,$
   $\langle\langle 2,0\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle, \langle\langle 2,0\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle, \langle\langle 2,0\rangle, \langle 2,0\rangle\rangle, \langle\langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle\rangle,$
   $\langle\langle 2,1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle, \langle\langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle, \langle\langle 2,1\rangle, \langle 2,0\rangle\rangle, \langle\langle 2,1\rangle, \langle 2,1\rangle\rangle\}$.

题型二：关系的基本概念

1. $R=\{\langle x,y\rangle | x,y\in\{2,3,4,5,6,7,8\}, x\mid y, x\neq y\}$，用列举法表示关系 R.
2. R 为 $A\times A$ 上的关系，其中 $A=\{1,2,3,4\}$，且 $\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle \Leftrightarrow xv=uy$，列出 R 的元素.
3. 设 A 中有 $n(\geq 1)$ 个元素，R 为 A 上的二元关系，且已知 R 中有 r 个有序对，问：
   (1) A 上有多少个不同的二元关系?
   (2) I_A 中有多少个有序对?
   (3) E_A 中有多少个有序对?
   (4) $\sim R=E_A-R$ 中有多少个有序对?

解答与分析

1. $R=\{\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,8\rangle\}$.
2. 注意到 $xv=uy \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v}$，因此第一元素与第二元素的比值相同的有序对彼此正好有关系.

$$\begin{aligned}R=\{&\langle\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,\langle 4,4\rangle\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\rangle,\\&\langle\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle\rangle,\langle\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle,\langle\langle 3,3\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\langle\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\rangle,\\&\langle\langle 4,4\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle,\langle\langle 4,4\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\langle\langle 4,4\rangle,\langle 3,3\rangle\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle\rangle,\\&\langle\langle 2,4\rangle,\langle 1,2\rangle\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle\rangle,\langle\langle 4,2\rangle,\langle 2,1\rangle\rangle\}\cup I_{A\times A}.\end{aligned}$$

3. (1) A 上有 2^{n^2} 个二元关系.
   (2) I_A 中有 n 个有序对.
   (3) E_A 中有 n^2 个有序对.
   (4) $\sim R$ 中有 n^2-r 个有序对.

题型三：关系的表示及性质判断

1. 设 $A=\{1,2,3\}$，举出 A 上关系 R 的例子，使得它具有下列性质.
   (1) R 既是对称的又是反对称的.
   (2) R 既不是对称的又不是反对称的.
   (3) R 是传递的.
2. 设 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$，
   (1) 给出 R 的关系矩阵.
   (2) 说明 R 具有的性质(自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性).
3. 设 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x-y+2>0, x-y-2<0\}$ 是实数集上的关系，指出 R 具有什么性质，并说明理由.

解答与分析

1. (1) 只要 R 是 I_A 的子集，就满足这个要求，例如，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$.

   (2) 只要 R 的关系图中同时含有单向边和双向边即可，例如，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$.
   (3) 有许多传递关系的实例，例如，I_A，E_A，$R=\{\langle 1,2\rangle\}$ 等都满足要求.

2. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (2) 反自反性、反对称性、传递性.

3. 因为对任意实数 x 都有 $x-x+2>0$，$x-x-2<0$ 成立，所以 $\langle x,x\rangle\in R$，故 R 是自反的且不是反自反的.

如果 $\langle x,y\rangle\in R$，即有 $x-y+2>0$ 和 $x-y-2<0$，从而得到 $y-x-2<0$ 和 $y-x+2>0$. 这就证明了 $\langle y,x\rangle\in R$，从而验证了对称性.

由 $\langle 1,1.5\rangle$ 和 $\langle 1.5,1\rangle$ 同时属于 R 可知 R 不是反对称的.

最后，由 $\langle 1,1.5\rangle$，$\langle 1.5,3\rangle$ 同时属于 R，但是 $\langle 1,3\rangle$ 不属于 R 可知，R 不是传递的.

关系有 3 种表示法：集合表达式、关系矩阵、关系图. 不同的表示法，判断方法也不同. 主要的判断方法已经在表 2.1.1 中给出.

在关系图中判断关系是否具有传递性的一般方法是：如果图中有一条从顶点 x_i 到 x_j 的路径，并且这条路径至少含有两条边，那么就应该有一条从 x_i 到 x_j 的边. 如果这条路径是一条回路，那么这条路径上的每个顶点都应该有环，缺少任何一个环都破坏了传递性.

另外需要说明的是，如果不存在 x,y,z 同时满足 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$ 的条件，那么传递性定义中的前件为假，结论自然为真，换言之，这个关系满足传递性的定义，因此具有传递性. 这也解释了本题型第 1 题中 $R=\{\langle 1,2\rangle\}$ 为什么满足传递关系.

图 2.3.1 给出了集合 $\{a,b,c\}$ 上的三个关系的关系图. 在左边的关系图中存在一条长度为 2 的路径：$c\to a\to b$，但是缺少从 c 到 b 的边，因此不是传递的. 中间的关系图有一条长度为 2 的回路，但是这条回路上的顶点都没有环，因此也破坏了传递性. 在右边的关系图中，传递性条件的前件永远为假，因此传递性条件成立，所以这个关系反而是传递的.

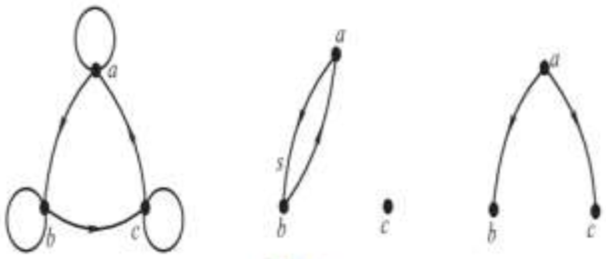

图 2.3.1

题型四：关系的基本运算

1. 设二元关系 $R=\{\langle\{1\},a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,\{d\}\rangle\}$，求 $\mathrm{dom}\,R$, $\mathrm{ran}\,R$.
2. 设 $R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in\mathbb{N}$ 且 $x+3y=12\}$.
   (1) 求 R 的集合表达式.
   (2) $\mathrm{dom}\,R$, $\mathrm{ran}\,R$.
   (3) 求 $R\circ R$.
   (4) 求 $R\restriction\{2,3,4,6\}$.
   (5) 求 $R[\{3\}]$.
   (6) 求 R^3.
3. 设二元关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle\{a\},b\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing\}\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle\}$，求

   (1) $\mathrm{dom}\,R$, $\mathrm{ran}\,R$.
   (2) $R\circ R$, $R^{-1}\circ R^{-1}$.

解答与分析

1. $\mathrm{dom}\,R=\{\{1\},1,2,3\}$, $\mathrm{ran}\,R=\{a,b,c,\{d\}\}$.
2. (1) $R=\{\langle 0,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 12,0\rangle\}$.
   (2) $\mathrm{dom}\,R=\{0,3,6,9,12\}$, $\mathrm{ran}\,R=\{0,1,2,3,4\}$.
   (3) $R\circ R=\{\langle 3,3\rangle,\langle 12,4\rangle\}$.
   (4) $R\restriction\{2,3,4,6\}=\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle\}$.
   (5) $R[\{3\}]=\{3\}$.
   (6) $R^3=\{\langle 3,3\rangle\}$.
3. (1) $\mathrm{dom}\,R=\{a,\{a\},\{\varnothing\},\varnothing\}$, $\mathrm{ran}\,R=\{b,\{\varnothing\}\}$.
   (2) $R\circ R=\{\langle\{\varnothing\},\{\varnothing\}\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle\}$.
   $R^{-1}\circ R^{-1}=\{\langle\{\varnothing\},\{\varnothing\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle\}$.

题型五：求关系闭包

设关系 R 的关系图如图 2.3.2 所示，求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图.

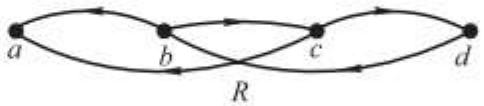

图 2.3.2

解答与分析

三个闭包如图 2.3.3 所示. 注意传递闭包的计算关键在于检查顶点之间的可达性. 如果顶点 x_i 到达 x_j 有一条至少 2 步长的路径，那么在传递闭包 $t(R)$ 的关系图中就存在一条边. 如果这条路径是回路（如图 2.3.2 中的 $b \to c \to d \to b$），那么在传递闭包的图中，该路径上的每个顶点都应该有一个环.

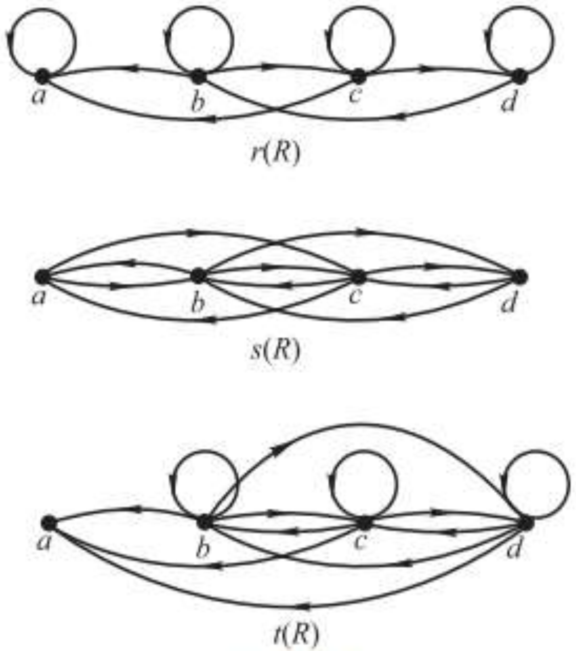

图 2.3.3

六：证明涉及关系的式子

1. 设 R 为 A 到 B 的关系，S 为 B 到 C 的关系，$T, W \subseteq A$，证明：

(1) $R[T] \subseteq B$.

30

(2) $(R \circ S)[T] = S[R[T]]$.

(3) $R[T \cup W] = R[T] \cup R[W]$.

(4) $R[T \cap W] \subseteq R[T] \cap R[W]$.

2. 设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系，证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$.

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$.

(3) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.

解答与分析

1. (1) 对 $\forall y \in R[T]$，由定义，$\exists x \in T$ 使得 $\langle x, y\rangle \in R$. 因为 R 为 A 到 B 的关系，所以 $y \in B$，这就证明了 $R[T] \subseteq B$.

(2) 先证 $(R \circ S)[T] \subseteq S[R[T]]$. 对 $\forall y \in (R \circ S)[T]$，由定义，$\exists x \in T$ 使得 $\langle x, y\rangle \in R \circ S$. 进而 $\exists t \in B$ 使得 $\langle x, t\rangle \in R$, $\langle t, y\rangle \in S$. 由 $x \in T$ 和 $\langle x, t\rangle \in R$ 知，$t \in R[T]$，注意到 $\langle t, y\rangle \in S$，故 $y \in S[R[T]]$，于是证明了 $(R \circ S)[T] \subseteq S[R[T]]$.

反过来，对 $\forall y \in S[R[T]]$，由定义 $\exists t \in R[T]$ 使得 $\langle t, y\rangle \in S$. 由 $t \in R[T]$ 知，$\exists x \in T$ 使得 $\langle x, t\rangle \in R$，从而有 $\langle x, y\rangle \in R \circ S$，这意味着 $y \in (R \circ S)[T]$，故证明了 $S[R[T]] \subseteq (R \circ S)[T]$.

(3) 由关系在集合上限制的定义，不难看出，如果 $X \subseteq Y \subseteq A$，那么必然有 $R[X] \subseteq R[Y]$. 因此，显然有 $R[T] \subseteq R[T \cup W]$ 和 $R[W] \subseteq R[T \cup W]$，故 $R[T] \cup R[W] \subseteq R[T \cup W]$.

反过来，对 $\forall y \in R[T \cup W]$，$\exists x \in T \cup W$ 使得 $\langle x, y\rangle \in R$. 进一步，若 $x \in T$，则有 $y \in R[T]$；而若 $x \in W$，则有 $y \in R[W]$. 故对于 $x \in T \cup W$，总有 $y \in R[T] \cup R[W]$，这就证明了 $R[T \cup W] \subseteq R[T] \cup R[W]$.

(4) 由 (3) 的证明知，关系在集合上的限制满足单调性，故由 $T \cap W \subseteq T$ 和 $T \cap W \subseteq W$ 有，$R[T \cap W] \subseteq R[T]$ 且 $R[T \cap W] \subseteq R[W]$，从而有 $R[T \cap W] \subseteq R[T] \cap R[W]$.

2. (1) 由 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$ 易证如下的包含式：

$$r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2), \ r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2).$$

从而有

$$r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2).$$

反之，由 $R_1 \subseteq r(R_1)$, $R_2 \subseteq r(R_2)$ 得

$$R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2).$$

又知道 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是自反的，即 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是包含 $R_1 \cup R_2$ 的自反关系，根据闭包的最小性，从而得到

$$r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2).$$

综上所述，命题得证.

(2) 证明过程与 (1) 相似，只需将 $r(R)$ 替换成 $s(R)$ 即可.

(3) 证明类似 (1) 的前半部分.

以上涉及关系运算的恒等式或者包含式的证明方法实际上就是集合恒等式或者包含式的证明方法，只不过在证明中需要引入相应关系运算的定义.

题型七：证明关系的性质

1. 设 R 是 A 上的等价关系，设 $S=\{\langle a,b\rangle|\exists c$ 使得 $\langle a,c\rangle\in R,\langle c,b\rangle\in R\}$. 证明：$S$ 也是 A 上的等价关系.
2. (1) 证明：如果 R_1 和 R_2 都是反对称的，那么 $R_1\cap R_2$ 也是反对称的.
   (2) 设 R_1 和 R_2 都是传递的，举出反例说明 $R_1\circ R_2$ 不一定是传递的.
3. 设 R 是复数集 $\mathbb{C}$ 上的关系，且满足 $xRy\Leftrightarrow x-y=a+b\mathrm{i}$，$a$ 和 b 为给定的非负整数，试确定 R 的性质(自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性)，并证明之.

解答与分析

1. 设 R 是 A 上的等价关系. 下面逐条验证 S 满足自反性、对称性和传递性.

自反性. 对 $\forall x\in A$，因为 R 是 A 上的等价关系，满足自反性，所以 $\langle x,x\rangle\in R$. 这样 $\exists x$ 使得 $\langle x,x\rangle\in R\wedge\langle x,x\rangle\in R$，故 $\langle x,x\rangle\in S$，即 S 在 A 上是自反的.

对称性. 对 $\forall\langle x,y\rangle\in S$，则 $\exists c$ 使得 $\langle x,c\rangle\in R,\langle c,y\rangle\in R$. 因为 R 是对称的，所以有 $\langle c,x\rangle\in R,\langle y,c\rangle\in R$，即 $\exists c$ 使得 $\langle y,c\rangle\in R,\langle c,x\rangle\in R$. 这表明 $\langle y,x\rangle\in S$，因此 S 是对称的.

传递性. 给定 $\forall\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in S$，则 $\exists c$ 使得 $\langle x,c\rangle\in R,\langle c,y\rangle\in R$，同时 $\exists d$ 使得 $\langle y,d\rangle\in R,\langle d,z\rangle\in R$. 因为 R 在 A 上是传递的，于是得 $\langle x,y\rangle\in R,\langle y,z\rangle\in R$，从而 $\langle x,z\rangle\in S$. 这就证明了 S 是传递的.

2. (1) 对 $\forall\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2,\langle y,x\rangle\in R_1\cap R_2$，则有 $\langle x,y\rangle\in R_i,\langle y,x\rangle\in R_i$，这里 $i=1,2$. 因为 $R_i,i=1,2$，是反对称的，所以有 $x=y$，这就证明了 $R_1\cap R_2$ 也是反对称的.

   (2) 反例如下：$A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$ 是 A 上的关系，它们都是传递的，但是 $R_1\circ R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$ 不是传递的.

3. 当 $a=b=0$ 时，满足自反性、对称性、反对称性和传递性，不满足反自反性.

证明如下：$xRy\Leftrightarrow x-y=a+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow x=y$，所以 $R=I_{\mathbb{C}}$，是 $\mathbb{C}$ 上的恒等关系. 因此有 $I_{\mathbb{C}}\subseteq R$，$R^{-1}=I_{\mathbb{C}}^{-1}=I_{\mathbb{C}}=R$，$R\cap R^{-1}=I_{\mathbb{C}}\cap I_{\mathbb{C}}=I_{\mathbb{C}}\subseteq I_{\mathbb{C}}$，$R\circ R=I_{\mathbb{C}}\circ I_{\mathbb{C}}=I_{\mathbb{C}}=R\subseteq R$，$R\cap I_{\mathbb{C}}\neq\varnothing$，根据定理 2.4.1(见主教材第 2.4 节)得证.

当 a,b 不全为 0 时，只满足反自反性和反对称性，不满足自反性、对称性和传递性.

事实上，对 $\forall x\in\mathbb{C}$，若 $\langle x,x\rangle\in R$，则有 $x-x=a+b\mathrm{i}$，但是 $x-x=0$，而 $a+b\mathrm{i}\neq 0$，矛盾！因此 $\langle x,x\rangle\notin R$. 所以 R 是反自反的.

下面证明 R 满足反对称性. 假设 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,x\rangle\in R$，则有 $x-y=a+b\mathrm{i}$，$y-x=a+b\mathrm{i}$，于是 $x-y=y-x$，故 $x=y$，因此 R 是反对称的.

因为 R 是反自反的，故 R 不满足自反性.

R 不满足对称性的反例如下：$\langle a+b\mathrm{i},0\rangle\in R$，但是 $\langle 0,a+b\mathrm{i}\rangle\notin R$.

R 不满足传递性的反例如下：$\langle a+b\mathrm{i},0\rangle\in R$，$\langle 0,-a-b\mathrm{i}\rangle\in R$，但是 $\langle a+b\mathrm{i},-a-b\mathrm{i}\rangle\notin R$.

在本题中证明性质成立既使用了定义，也使用了有关性质的充分必要条件. 证明性质不成立，只要举一个反例即可.

有些题目中含有一些给定的常数，但是又没有具体指定这些常数的值(如本题中的 a 和 b). 注意在解题时要根据这些常数的不同取值进行讨论.

题型八：等价类、商集及划分

1. 设 $A=\{1,2,3\}$，R 为 $A\times A$ 上的等价关系，且 $\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$ 当且仅当 $a-b=c-d$.

   (1) 设 I 为 $A\times A$ 上的恒等关系，求 $R-I$.

   (2) 求 R 对应的 $A\times A$ 的划分 π.

2. 设 R 是集合 A 上的等价关系，$|A|=n$，$|R|=r$，$|A/R|=m$，证明：$mr\geqslant n^2$.

解答与分析

1. (1)

$$R-I=\{\langle\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\rangle,\langle\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\\ \langle\langle 2,2\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle\rangle,\langle\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\rangle,\langle\langle 3,3\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle\}.$$

   (2) $\{\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\},\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\},\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\},\{\langle 1,3\rangle\},\{\langle 3,1\rangle\}\}$.

2. 设 $A/R=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，$|A_i|=n_i$，下面证明

$$\bigcup_{i=1}^{m}(A_i\times A_i)=R. \tag{2.3.1}$$

因为对 $\forall\langle x,y\rangle$，

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in\bigcup_{i=1}^{m}(A_i\times A_i)&\Leftrightarrow\exists i\in\{1,2,\cdots,m\}\text{ 使得 }\langle x,y\rangle\in A_i\times A_i\\&\Leftrightarrow\exists i\in\{1,2,\cdots,m\}\text{ 使得 }x,y\in A_i\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R,\end{aligned}$$

故式(2.3.1)成立．由于等价类彼此不交，故有 $\sum_{i=1}^{m}n_i^2=r$，注意到 $\sum_{i=1}^{m}n_i=n$，从而由均值不等式(平方平均数不小于算术平均数)，得到

$$r=\sum_{i=1}^{m}n_i^2\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^{m}n_i)^2}{m}=\frac{n^2}{m}.$$

题型九：偏序集与哈斯图

1. 设图 2.3.4 是偏序集 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图.

(1) 求 A 和 $\preccurlyeq$ 的集合表达式.

(2) 求该偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元.

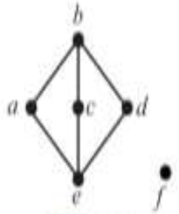

图 2.3.4

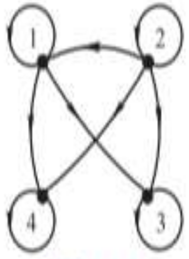

图 2.3.5

2. 设 $\langle A,R\rangle$ 为偏序集，其中 $A=\{1,2,3,4,6,9,24,54\}$，R 是 A 上的整除关系.

(1) 画出 $\langle A,R\rangle$ 的哈斯图.

(2) 求 A 中的极大元.

(3) 令 $B=\{4,6,9\}$，求 B 的上确界和下确界.

3. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，图 2.3.5 给出了 A 上偏序的关系图，试画出它的哈斯图并指出该偏序集的极大元、最大元、极小元、最小元.

解答与分析

1. (1) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，

$\preccurlyeq=\{\langle e,a\rangle,\langle e,c\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle\}\cup I_A$.

(2) 极大元为 b,f；极小元为 e,f；没有最大元和最小元.

2. (1) 哈斯图如图 2.3.6 所示.

(2) 极大元为 24，54.

(3) B 没有上确界，下确界为 1.

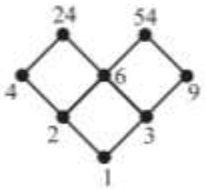

图 2.3.6

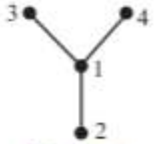

图 2.3.7

3. (1) 哈斯图如图 2.3.7 所示.

(2) 极大元为 3，4；没有最大元；极小元和最小元为 2.

注意　在偏序集中有以下事实：

(1) 有穷偏序集一定存在极大元和极小元，不一定存在最大元和最小元.

(2) 极大元和极小元可能存在多个，最大元和最小元如果存在，一定是唯一的.

(3) 最大元一定是极大元，最小元一定是极小元，反之不对.

(4) 孤立元素本身既是极大元，也是极小元.

(5) 上界、下界、最小上界、最大下界可能不存在. 最小上界、最大下界如果存在，那么是唯一的.

(6) 最大元一定是最小上界，最小元一定是最大下界. 反之不对.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) 设 $A=\{1,2,3\}$, A 上的关系 R 的补关系 $\overline{R}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\notin R\}$ 也是 A 上的关系,若 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x=y+1$ 或 $x=y-1\}$,则 $\overline{R}=$__________.

(2) 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,8\}$, R 和 S 均是从 A 到 B 的关系:xRy 当且仅当 $\gcd(x,y)=1$,即 x 与 y 的最大公因数等于 1;xSy 当且仅当 $x+y<8$. 则 $R\cap S=$__________.

(3) 下列各关系中具有自反性和对称性的关系是__________.

R_1 是自然数集 $\mathbb{N}$ 上的关系,且 xR_1y 当且仅当 $x+y$ 是偶数.

R_2 是自然数集 $\mathbb{N}$ 上的关系,且 xR_2y 当且仅当 $x>y$ 或 $y>x$.

R_3 是自然数集 $\mathbb{N}$ 上的关系,且 xR_2y 当且仅当 $|x|+|y|\neq 3$.

R_4 是自然数集 $\mathbb{Q}$ 上的关系,且 xR_4y 当且仅当 $y=x+2$.

R_5 是自然数集 $\mathbb{N}$ 上的关系,且 xR_5y 当且仅当 $x\cdot y=4$.

(4) 已知 $R\subseteq A\times A$ 且 $A=\{a,b,c\}$, R 的关系矩阵

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则传递闭包 $t(R)$ 的关系矩阵 $M(t(R))=$__________.

(5) 设集合 $X=\{1,2,3\}$,下列关系中__________不是等价的.

$A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

$B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$.

$C=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$.

$D=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$.

(6) 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, R 是 A 上如下定义的二元关系:

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}.$$

使得 $R^s=R^t$ 成立的最小的自然数 s,t,其中 $s<t$,是__________.

2. 简答题(4 小题,每小题 10 分,共 40 分).

(1) 给出集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的一个关系 R,使得 R 不具有以下 5 种性质(自反、反自反、对称、反对称、传递)中的任何一种,解释为什么所给的关系没有这些性质,并画出 R 的关系图.

(2) 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, R 是 A 上的二元关系,且 $R=\{\langle a,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,a\rangle\}$. 设 $R^*=tsr(R)$,则 R^* 是 A 上的等价关系. 写出 R^* 的关系表达式和商集 A/R^*.

(3) 图 2.5.1 是偏序集 $\langle X,\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图,求 X 和 $\preccurlyeq$ 的集合表达式,并指出该偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元.

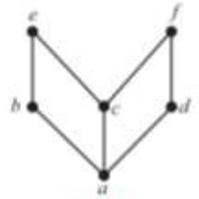

图 2.5.1

(4) $A=\{a,b,c,d\}$, $\pi_i, i=1,2,3,4$, 是 A 的划分,其中

$$\pi_1=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\},$$
$$\pi_2=\{\{a,c\},\{b,d\}\},$$
$$\pi_3=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\},$$
$$\pi_4=\{\{a,b,c,d\}\}.$$

设 $\Pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$, $\preccurlyeq$ 为划分的加细关系,即 $\pi_i\preccurlyeq\pi_j$ 当且仅当 π_i 的每个划分块都包含在 π_j 的某个划分块中,求偏序集 $\langle\Pi,\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图.

3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) 指出下面命题证明中的错误:

命题:设 R 是集合 A 上的对称、传递的关系,则 R 是自反的.

证:设 $x\in A$,根据对称性由 $\langle x,y\rangle\in R$ 得到 $\langle y,x\rangle\in R$,再使用传递性得到 $\langle x,x\rangle\in R$. 从而证明了 R 的自反性.

(2) 设 R 是 A 上任意自反和传递的关系,证明 $R\circ R=R$. 该命题的逆命题是否成立,证明你的结论.

4. 应用题(10 分).

在一个道路网络上连接有 8 个城市,分别标记为 a,b,c,d,e,f,g,h. 城市之间直接连接的道路是单向的,有 $a\to b, a\to c, b\to g, g\to b, c\to f, f\to e, b\to d, d\to f$. 对每一个城市求出从它出发能够到达的所有其他城市.