考试科目名称 离散数学（B 卷）

考试方式：闭 卷 考试日期 2019 年__月__日 教师__

系（专业）计算机科学与技术系 年级____ 班级________

学号________________ 姓名________________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分 数									

得 分	

一、（本题满分 10 分）

请运用命题逻辑进行表示，并证明下列推理。

（1）“今天海面不平稳并且紫外线不强”，（2）“若今天海面不平稳或紫外线很强，则探险队不出海”，（3）“若探险队不出海，则探险队将修理船只”，（4）“若探险队修理船只，则探险队在晚上发布行程记录”，**证明结论**“探险队在晚上发布行程记录”。

答案：

p: 今天海面平稳，q: 今天紫外线不强，r: 探险队出海，s: 探险队修理船只，t: 探险队在晚上发布行程记录 （2 分）

表示：$\neg p \wedge q$，$\neg p \vee \neg q \to \neg r$，$\neg r \to s$，$s \to t$，证明 t （2 分）

1. $\neg p \wedge q$
2. $\neg p$
3. $\neg p \vee \neg q$
4. $\neg r$ （ $\neg p \vee \neg q \to \neg r$ ）
5. s （$\neg r \to s$ ）
6. t （$s \to t$）

（上述证明过程 6 分）

得 分	

二、（本题满分 12 分）

定义集合 S={(x, y, z) | x, y, z∈N}上的关系 R：若(x,y,z)R(a,b,c)，当且仅当存在非负实数 k，使得(x,y,z)=k(a,b,c)，

（1）证明 R 为等价关系；

（2）请至少写出三个元素分别与(1, 2, 3)和(2, 2, 2)属于同一等价类；

（3）除等价类{(0, 0, 0)}外，请分析其他等价类属于有限集合、属于可数无穷集、属于不可列集合的情况。

答案：

（1） 证明 R 为等价关系，分别证明自反性、对称性、传递性

自反性：

对任意（x,y,z）∈S，存在非负整数 k=1，使得(x,y,z)=1(x,y,z)

由关系 R 的定义，有(x,y,z)R(x,y,z)，

即对任意（x,y,z）有(x,y,z)R(x,y,z)，关系 R 满足自反性.

对称性易见。

传递性：

对任意 R 中的两个元素满足(x1,y1,z1)R(x2,y2,z2)，(x2,y2,z2)R(x3,y3,z3)

存在非负整数 k1，k2 使得(x1,y1,z1)=k1(x2,y2,z2)，(x2,y2,z2)=k2(x3,y3,z3)

令 K=k1*k2，则有(x1,y1,z1)=k1k2(x3,y3,z3)=K(x3,y3,z3)，K 是非负整数。 根据 R 的定义，有(x1,y1,z3)R(x3,y3,z3)，关系 R 满足传递性

（2） (2,4,6)，(4,8,12)，（8,16,24）….

(1,1,1)，(4,4,4)，(8,8,8) …

（3） 因为 k 是非负整数，{(0,0,0)}以外的所有等价类都是可数无穷集。

得 分	

三、（本题满分 10 分）

设方程 X×Y=(X∨Y)×(X∧Y)，其中未知整数 X,Y∈[0,31]，×表示普通乘法运算，X∨Y 表示变量 X 和 Y 对应二进制数的按位或运算，X∧Y 表示变量 X 和 Y 对应二进制数的按位与运算. 试求此方程所有整数解的组数.

答案：

（1）证明结论：若满足此方程式，当且仅当(X∨Y)等于 X 和 Y 中的较大值，且(X∧Y) 等于 X 和 Y 中的较小值。

证明：假设 X<=Y，则(X∧Y)<=X,(X∨Y)>=Y,且设 X∨Y = Y + a (a 为整数)，则(X∧Y) = X - a

(X∨Y)×(X∧Y) = (X-a) ×(Y+a) = X×Y-a×(Y-X)-a*a <= X×Y，且当且仅当 a=0 时等号成立。

所以当 X<=Y，等式成立时当且仅当(X∨Y)=Y 且(X∧Y)=X。

所以由对称性，若满足此方程式，当且仅当(X∨Y)等于 X 和 Y 中的较大值，且(X∧Y) 等于 X 和 Y 中的较小值。

（2）根据以上定理，枚举 1 的个数，整数解个数为

2*(C(5,0)*2^0+C(5,1)*2^1+C(5,2)*2^2+C(5,3)*2^3+C(5,4)*2^4+C(5,5)*2^5)-2^5 =454

得 分	

四、（本题满分 10 分）

一辆出租车在夜晚肇事之后逃逸，一位目击证人辨认出肇事车辆是蓝色的。已知这座城市 85% 的出租车是绿色的，15% 是蓝色的。警察经过测试，认为目击者在当时可以正确辨认出这两种颜色的概率是 80%，辨别错误的概率是 20%. 请问，肇事出租车是蓝色的概率是多少？

答案：

事件 A：目击证人辨认车是蓝色的，B：肇事车是蓝色的，
则 P(B)=0.15，
根据全概率公式，P(A)=0.85*(1-0.8)+0.15*0.8=0.29
根据贝叶斯公式
P(B|A)=P(B)*P(A|B)/P(A) = 0.15*0.8/0.29 约等于 0.41
肇事出租车是蓝色的概率是 41%。

得 分	

五、（本题满分 12 分）

考虑整数加群（Z，+）的循环子群〈a〉和〈b〉，其中 a, b 分别是两个循环群的生成元，则〈a〉是〈b〉的子群当且仅当 b|a。

答案：

先证明充分性，即：
考虑整数加群（Z，+）的循环子群<a>和<b>，其中 a, b 分别是两个循环群的生成元，b|a，证明<a>是<b>的子群
证明：由 b|a 得，存在一整数 k，使得 b=k*a。
n 和 k 为整数，n*k 为整数，
所以对于任意<a>中的元素 ai=a^i，存在一整数 k，使得 a^i=b^(i*k) ∈<b>
所以<a>是<b>的子群。

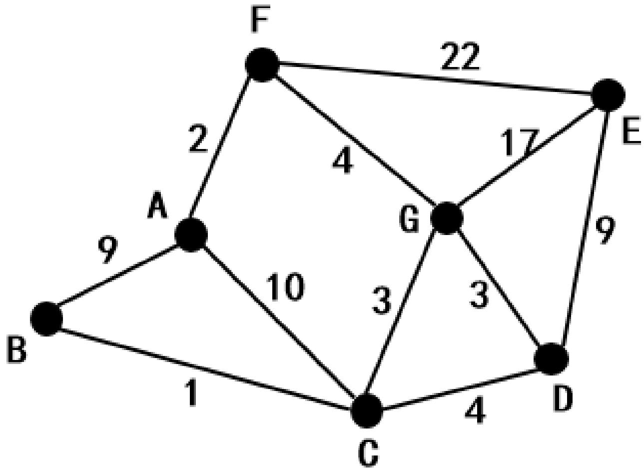
再证明必要性，即：
考虑整数加群（Z，+）的循环子群<a>和<b>，其中 a, b 分别是两个循环群的生成元且， <a>是<b>的子群，证明 b|a
证明：由<a>是<b>的子群，对任意<a>中元素 ai=a^i,aj=a^j，则 ai，aj∈<b>
令 j=i+1，则存在整数 p,q，满足 a^i=b^p，a^(i+1)=b^q
两边分别做商，得 a=b^(q-p) = b+b+…+b(q-p 个 b 相加)=(q-p)*b
令 r = q-p，由 p 和 q 为整数，r 为整数，即存在整数 r，使得 a=r*b
所以 b|a.

因此，<a>是<b>的子群，当且仅当 b|a.

得 分	

六、（本题满分 10 分）

求下图中以 A 为源点到图中其他所有点的最短路径。



Dijkstra

迭代次数	L(B)	L(C)	L(D)	L(E)	L(F)	L(G)	点
初始	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
1	9	∞	∞	∞	**2**	∞	A
2	9	∞	∞	24		**6**	F
3	**9**	9	9	23			G
4		**9**	9	23			B
5			**9**	23			C
6				**18**			D

AB=A-B=9,　AC=A-F-G-C=9,　AD=A-F-G-D =9,

AE=A-F-G-D-E=18,　AF=A-F=2,　AG=A-F-G=6

得 分	

七、（本题满分 12 分）

有甲、乙、丙、丁 4 个人，从甲开始相互传球 6 次（自己不能传球给自己），要求球最终回到甲的手中（例如甲→乙→甲→乙→甲→乙→甲 或者甲→乙→丙→丁→丙→乙→甲 都是允许的传球方式）.

⑵ 建立上述问题的数学模型.

⑵ 求解这样的传球方式共有多少种？

答案：

(1)

每一步球都有 3 种传法，传球 x 次总方法数为 3^x

若第 x 次传球后球在甲手中，则第 x-1 次时，球一定不在甲手中。

令 a(x)：从甲开始传球 x 次，球回到甲的手里的方法数。

则 a(1) = 0

则可得到递推式 <u>a(x+1)=3^x – a(x)</u>

（2）

解此递推式，得 a(x+1) - (1/4)*3^(x+1)= - a(x) + (1/4)*3^x

令 b(x) = a(x)-(1/4)*3^x，则 b(x+1) = -b(x)

b(x) = (-1)^(x+1) * b(1) = (-1)^(x+1)*(a(1)-(1/4)*3)

a(x)通项公式为：a(x) =<u>3/4 *(-1)^x + (1/4)*3^x</u>

根据 a(x)，得 a(6) = 183。

得 分	

八、（本题满分 12 分）

所谓“子图同构”(Subgraph isomorphism)问题是指：

对于任意的图$G=(V,E)$和图$H=(V',E')$， 判定是否存在G的一个子图$G_0=(V_0,E_0)$:$V_0\subseteq V,E_0\subseteq E\cap(V_0\times V_0)$ 使得G_0与H同构（记作$G_0\cong H$）.

试说明，“判断一个图是否是哈密尔顿图”这一问题可以作为上述子图同构问题的一个特例。

答案：

要证 G与H子图同构（G_0为G的子图）

即证 $\exists$双射函数$f:V_0\to V'$,使得$\forall V_i,V_j\in V_0$，$<V_i,V_j>\in E_0$当且仅当 $<f(V_i),f(V_j)>\in E'$， 2 分

要证 G是哈密尔顿图

即证 G中存在哈密尔顿回路 2 分

设G的顶点数为 n。 1 分

G中存在哈密尔顿回路 充分必要 G中存在一个与Cn同构的子图。 6 分

因此，判断一个图是否是哈密尔顿图，可以作为子图同构问题的一个特例 1 分

得 分	

九、 （本题满分 12 分）

G 的**围长**是指<u>**G 中最短回路的长**</u>；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 2k 个顶点，且恰有 2k 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

答案：

设 u，v 是 G 中相邻顶点，N(u) 和 N(v)分别代表 u 和 v 的邻居构成的集合，则 N(u) 和 N(v)不相交，否则 G 的围长为 3，产生矛盾。因此，G 至少有 2(k-1)+2 个顶点。

将 N(u)\{v} 和 N(v)\{u}连为完全偶图，得到 2k 个顶点的围长为 4 的图。不难证明，这样的图（在同构意义下）只有一个。