命题逻辑

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 引言
- 逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 语意蕴含

联结词集

以上定义了 5 个基本、常用，也是重要的联结词，它们组成一个联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，其中 $\neg$ 为一元联结词，其余 4 个是二元联结词.

现将它们汇总如表 15.1.1 所示.

表 15.1.1 联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 的定义

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词的优先顺序

使用多个联结词可以组成更复杂的复合命题,此外还可以使用圆括号 (和). 需要注意的是,这样的圆括号必须成对出现. 在求这种复杂的复合命题的真值时,除依据表 15.1.1 外,还要规定联结词的优先顺序. 将圆括号计算在内,规定优先顺序为 ( ), $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;对同一优先级,从左到右顺序进行.

例 15.1.7

令 p : 北京比天津人口多.

$q: 2+2=4.$

r : 乌鸦是白色的.

求下列复合命题的真值.

1. $((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow r.$
2. $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r).$
3. $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r).$

解

p, q, r 的真值分别为 $1, 1, 0$, 容易算出 (1), (2), (3) 的真值分别为 $1, 1, 0$. □

命题公式及其赋值

上节讨论了简单命题(原子命题)和复合命题以及它们的符号化形式.

简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位,其真值是确定的,又称作 *命题常项* 或 *命题常元*. 命题常项相当于初等数学中的常数.

初等数学中还有变量,对应地,这里有命题变项. 取值 1(真)或 0(假)的变元称作 *命题变项* 或 *命题变元*. 可以用命题变项表示真值可以变化的陈述句.

命题变项不是命题,命题变项与命题常项的关系如同初等数学中变量与常量的关系. 今后也用 p, q, r 等表示命题变项. 这样一来,p, q, r 等既可以表示命题常项,又可以表示命题变项,通常可以由上下文确定.

合式公式

将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作合式公式. 当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 时, 合式公式定义如下.

定义 15.2.1

1. 单个命题变项和命题常项是合式公式, 并称为原子命题公式.
2. 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 是合式公式.
3. 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 是合式公式.
4. 有限次地应用 *(1)–(3)* 形成的符号串是合式公式.

合式公式也称作命题公式或命题形式, 简称为公式.

设 A 为合式公式, B 为 A 中一部分, 若 B 也是合式公式, 则称 B 为 A 的子公式.

对于定义 15.2.1, 要做以下说明.

补充说明

注 15.2.1

1. 定义 *15.2.1* 给出的合式公式的定义方式称作归纳定义或递归定义方式.
2. 定义中引进了 A, B 等符号, 用它们表示任意的合式公式, 称作元语言符号. 而某个具体的公式, 如 $p, p \wedge q, (p \wedge q) \rightarrow r$ 等称作对象语言符号. 所谓对象语言是指用来描述研究对象的语言, 而元语言是指用来描述对象语言的语言, 这两种语言是不同层次的语言. 做一个不完全恰当的类比, 中国人学英语, 常用汉语描述英语, 英语是对象语言, 而汉语就成了元语言.
3. 为方便起见, 当 $(\neg A), (A \wedge B)$ 等公式单独出现时, 外层括号可以省去, 写成 $\neg A, A \wedge B$ 等. 另外, 公式中不影响运算次序的括号也可以省去, 如公式 $(p \vee q) \vee (\neg r)$ 可以写成 $p \vee q \vee \neg r$.
4. 在公式中也可以出现 0 和 1, 此时把它们看作 $p \wedge \neg p$ 和 $p \vee \neg p$ 的缩写. 同样, 当公式中出现 $p \wedge \neg p$ 和 $p \vee \neg p$ 时, 也常把它们写成 0 和 1.

由定义可知, $(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r), (p \wedge q) \wedge \neg r, p \wedge (q \wedge \neg r)$ 等都是合式公式, 而 $pq \rightarrow r, p \rightarrow (r \rightarrow q$ 等都不是合式公式.

命题表达式（命题逻辑公式）

- 命题变元是命题表达式；
- 若p是命题表达式，则（$\neg p$）也是；
- 若p和q是命题表达式，则$(p\wedge q)$, $(p\vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p\leftrightarrow q)$也是；
- 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是命题表达式。
  - $(p\rightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)$, $p\rightarrow(q\rightarrow r)$是命题公式（省略了外层括号）。
  - $pq\rightarrow r$以及 $p\rightarrow\wedge q$都不是命题公式。
  - $p\vee q \rightarrow r$， $\neg p\wedge q$ ， $(\neg p)\wedge q$是命题公式
- 运算符的优先级： $\neg$， $\wedge$， $\vee$， $\rightarrow$， $\leftrightarrow$

命题逻辑公式（定义为一个形式语言）

- $\phi ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \mid \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$

或者

$\phi ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$

- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \triangleq (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \wedge (\phi_2 \rightarrow \phi_1)$

将自然语言翻译成命题表达式

只有你主修计算机科学或不是新生, 才可以从校园网访问因特网.

a: 你可以从校园网访问因特网

c: 你主修计算机科学

f: 你是新生

$a \to (c \vee \neg f)$;

将自然语言翻译成命题表达式（续）

除非你满16周岁, 否则只要你身高不足4英尺就不能乘滑行游乐车.

q: 你能乘滑行游乐车

r: 你身高不足4英尺

s: 你满16周岁

$s \vee (r \rightarrow \neg q)$

$(\neg s \wedge r) \rightarrow \neg q$

公式的层次

定义 15.2.2

1. 若公式 A 是单个的命题变项，则称 A 为0 *层公式*
2. 称 A 是 $n+1(\geqslant 1)$ 层公式是指下面情况之一.
   1. $A = \neg B$[a]，B 是 n 层公式；
   2. $A = B \wedge C$，其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n = \max(i, j)$；
   3. $A = B \vee C$，其中 B, C 的层次及 n 同 (b)；
   4. $A = B \to C$，其中 B, C 的层次及 n 同 (b)；
   5. $A = B \leftrightarrow C$，其中 B, C 的层次及 n 同 (b).
3. 若公式 A 的层次为 k. 则称 A 是 k *层公式*.

[a] "="为普通意义下的等号，在这里 $=$ 为元语言符号

例如，$(\neg p \wedge q) \to r, (\neg(p \to \neg q)) \wedge ((r \vee s) \leftrightarrow \neg p)$ 分别为 3 层和 4 层公式.

公式的赋值

在命题公式中，由于有命题变项的出现，因而真值是不确定的．用命题常项替换公式中的命题变项称作解释．在将公式中出现的全部命题变项都解释成具体的命题常项之后，公式就成了真值确定的命题．

可以给出这个公式各种不同的解释，其结果不是得到真命题就是得到假命题．其实，将命题变项 p 解释成真命题，相当于指定 p 的真值为 1；解释成假命题，相当于指定 p 的真值为 0．

定义 15.2.3

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变项，给 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 各指定一个真值，称为对 A 的一个*赋值*或*解释*．若指定的一组值使 A 为 *1*，则称这组值为 A 的*成真赋值*；若使 A 为 *0*，则称这组值为 A 的*成假赋值*．

公式的赋值（续）

在本书中，对含 n 个命题变项的公式 A 的赋值采用下述记法.

1. 若 A 中出现的命题变项为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, A 的赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是指 $p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, \cdots, p_n = \alpha_n$.
2. 若 A 中出现的命题变项(按照字母顺序)为 $p, q, r, \cdots$, A 的赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是指 $p = \alpha_1, q = \alpha_2, \cdots$,最后字母赋值 α_n.

其中 α_i 为 0 或 1, $i = 1, 2, \cdots, n$.

例如，在公式

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2)$$

中，000 $(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0)$, 110 $(p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 0)$ 都是成真赋值，而 001 $(p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1)$, 011 $(p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 1)$ 都是成假赋值.
在 $(p \wedge \neg q) \to r$ 中，011 $(p = 0, q = 1, r = 1)$ 为成真赋值，100 $(p = 1, q = 0, r = 0)$ 为成假赋值.

真值表

不难看出，含 $n(\geqslant 1)$ 个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值.

定义 15.2.4

将命题公式 A 在所有赋值下取值情况列成表，称该表为 A 的*真值表*.

构造真值表的具体步骤如下.

1. 找出公式中所含的全体命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$(若无下标就按照字母顺序排列)，列出 2^n 个赋值. 赋值从 $00\cdots0$ 开始，然后按照二进制加法每次加 1，依次写出每个赋值，直到 $11\cdots1$ 为止.
2. 按照从低到高的顺序写出公式的各个层次.
3. 对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值.

如果两个公式 A 与 B 的真值表对所有赋值最后一列都相同，即最后结果都相同，那么称这两个真值表相同，而不考虑构造真值表的中间过程.

命题表达式的真值表 $(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$

p q r	$\neg p$	$\neg p\wedge q$	$\neg r$	$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	0	0
1 0 0	0	[illegible]	[illegible]	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	1

一种“成假”指派

该命题表达式的所有指派

命题表达式的真值表

$$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

习题7：命题公式的真值表

例 15.2.1

写出下列公式的真值表，并求它们的成真赋值和成假赋值.

1. $(\neg p \wedge q) \to \neg r$.
2. $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$.
3. $\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$.

解

公式 (1) 是含 3 个命题变项的 3 层合式公式. 它的真值表如表 15.2.1 所示.

从表可知 (1) 的成假赋值为 011，其余 7 个赋值都是成真赋值.

表 15.2.1 $(\neg p \wedge q) \to \neg r$ 的真值表

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \to \neg r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

习题7：命题公式的真值表（续1）

例15.2.1解(续)

公式 (2) 是含 2 个命题变项的 3 层合式公式，它的真值表如表 15.2.2 所示.
从表 15.2.2 可以看出，该公式的 4 个赋值全是成真赋值，即无成假赋值.

表 15.2.2 $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg p$	$q \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1

习题7：命题公式的真值表（续2）

例15.2.1解(续)

公式 (3) 是含 3 个命题变项的 4 层合式公式，它的真值表如表 15.2.3 所示. 不难看出，该公式的 8 个赋值全是成假赋值，无成真赋值. □

表 15.2.3 $\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$ 的真值表

p	q	r	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \wedge q$	$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

公式的分类

定义 15.2.5

设 A 为任一命题公式.

1. 若 A 在它的各种赋值下取值均为真, 则称 A 为重言式或永真式.
2. 若 A 在它的各种赋值下取值均为假, 则称 A 为矛盾式或永假式.
3. 若 A 不是矛盾式, 则称 A 为可满足式.

注 15.2.2

1. A 是可满足式当且仅当 A 至少存在一个成真赋值.
2. 重言式一定是可满足式, 但反之不真. 若公式 A 是可满足式, 且它至少存在一个成假赋值, 则称 A 为非重言式的可满足式.
3. 真值表可用来判断公式的类型.
   1. 若真值表最后一列全为 1, 则对应的公式为重言式.
   2. 若真值表最后一列全为 0, 则对应的公式为矛盾式.
   3. 若真值表最后一列中至少有一个为 1, 则对应的公式为可满足式.

永真式、矛盾式与可能式

- 永真式（重言式）：总是真的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p \vee \neg p$ **Tautology**
- 矛盾式：总是假的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如： $p \wedge \neg p$ **Contradiction**
- 可能式：既不是永真式又不是矛盾式。比如： $\neg p$

Contingency

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

习题8：公式分类

例 15.2.2

下列各公式均含两个命题变项 p 与 q，它们中哪些具有相同的真值表？

(1) $p \to q$. (2) $p \leftrightarrow q$. (3) $\neg(p \wedge \neg q)$. (4) $(p \to q) \wedge (q \to p)$. (5) $\neg q \vee p$.

解

构造过程略去不写，表 15.2.4 给出了 5 个公式的真值表．从表中可看出，(1) 与 (3) 具有相同的真值表，(2) 与 (4) 具有相同的真值表．

表 15.2.4 5 个公式的真值表

p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$\neg q \vee p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

解

本例中给出的 4 个公式，总共有 3 个命题变项 p,q 和 r，r 是公式 (1) 的哑元，p 是公式 (2) 的哑元，在讨论它们是否有相同的真值表时，均按照 3 个命题变项写出它们的真值表. 表 15.2.5 列出了 4 个公式的真值表. 从表中可看出，公式 (1) 与公式 (3) 有相同的真值表，公式 (2) 与公式 (4) 有相同的真值表.

表 15.2.5 4 个公式的真值表

p	q	r	$p \to q$	$\neg q \vee r$	$(\neg p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \to p)$	$(q \to r) \wedge (p \to p)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

习题课-题型一：命题符号化

1. 将下列命题符号化，并求命题的真值.

(1) 蓝色和黄色可以调配成绿色.

(2) 蓝色和黄色都是常用的颜色.

(3) $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 之和是无理数.

(4) $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$ 都是有理数.

2. 将下列语句符号化，并求 (1)、(5) 的真值.

(1) 虽然 2 能整除 4，但 2 不能整除 5.

(2) 小丽一边吃苹果，一边看电视.

(3) 王大力不但是 100 米冠军，而且是 500 米冠军.

(4) 王小红虽然没上过大学，但她自学成才.

(5) 2 是偶素数.

3. 将下列语句符号化，并求 (1)–(4) 的真值.

(1) $\sqrt{3}$ 或 5 是无理数.

(2) $\sqrt{3}$ 和 5 中有且仅有一个是无理数.

(3) $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 中有且仅有一个是无理数.

(4) 3 和 5 中有且仅有一个是无理数.

(5) 李和平是山西人或陕西人.

(6) 李冰只能选学英语或只能选学法语.

(7) 李冰选学英语或法语.

4. 将下列命题符号化，并求它们的真值.

(1) 只要 4 是偶数，5 就是奇数.

(2) 若 4 是偶数，则 5 也是偶数.

(3) 只有 4 是偶数，5 才是偶数.

(4) 5 是偶数仅当 4 是奇数.

(5) 除非 4 是奇数，否则 5 不是奇数.

(6) 种瓜得瓜，种豆得豆.

(7) 除非 $2+2=5$，否则地球是静止不动的.

(8) 只有地球是静止不动的，才有 $2+2=5$.

5. 将下列语句符号化，并求 (3)、(4)、(5)、(6) 的真值.

(1) 经一事，长一智，并且不经一事，不长一智.

(2) 经一事，长一智，并且不长一智，不经一事.

(3) $2+3=5$ 当且仅当 19 是素数.

(4) $2+3=5$ 当且仅当 19 不是素数.

(5) $2+3\neq 5$ 当且仅当 19 是素数.

(6) $2+3\neq 5$ 当且仅当 19 不是素数.

习题课-题型二：求命题的真值与公式的赋值

1. 设 p : 4 是素数, q : 南京在北京的北边, r : 苹果树是落叶乔木. 求下列复合命题的真值.

   (1) $\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$.

   (2) $(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$.

   (3) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow \neg q)$.

2. 求下列公式的成真赋值和成假赋值.

   (1) $\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$.

   (2) $(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$.

习题课-题型三：判断公式的类型

1. 用观察法判断下列公式的类型.

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$.

(2) $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$.

(3) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$.

2. 用真值表法判断第 1 题中 3 个公式的类型.

题型四：复合命题符号化

将下面两段论述符号化,并求所得复合命题的真值.

1. 若 π 是无理数,则自然对数的底 e 也是无理数. 只有 3 是偶数,4 才是素数. $\sqrt{2}$ 是无理数,仅当 $\sqrt{5}$ 不是无理数. $\sqrt{5}$ 是无理数.

2. 若 2 和 3 都是素数,则 5 是奇数. 2 是素数,3 也是素数. 所以,5 或 6 是奇数.

小测验

1. 填空题(5 小题,每小题 5 分,共 25 分).

   (1) 公式 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的成真赋值为____________.

   (2) 设 p, r 为真命题,q, s 为假命题,则复合命题 $(p \to q) \leftrightarrow (\neg r \to s)$ 的真值为____________.

   (3) 设 p, q 均为命题,在____________的条件下,p 和 q 的排斥或也可以写成 p 和 q 的相容或.

   (4) 公式 $\neg(p \leftrightarrow q)$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 共同的成真赋值为____________.

   (5) 设 A 为任意的公式,B 为重言式,则 $A \vee B$ 的类型为____________.

2. 将下列命题或语句符号化(5 小题,每小题 5 分,共 25 分).

   (1) $\sqrt{7}$ 不是无理数是不对的.

   (2) 小刘既不怕吃苦,又很爱钻研.

   (3) 只有不怕困难,才能战胜困难.

   (4) 只要别人有困难,老王就帮助别人,除非困难解决了.

   (5) 整数 n 是偶数当且仅当 n 能被 2 整除.

3. 求复合命题的真值(2 小题,每小题 5 分,共 10 分).

   p:2 能整除 5,q:旧金山是美国的首都,r:在中国一年分四季.

   (1) $((p \vee q) \to r) \wedge (r \to (p \wedge q))$.

   (2) $((\neg q \leftrightarrow p) \to (r \vee p)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \wedge r)$.

4. 判断下述推理是否正确(10 分).

   设 $y = 2|x|$,x 为实数. 推理如下:

   若 y 在 $x = 0$ 可导,则 y 在 $x = 0$ 连续. y 在 $x = 0$ 连续. 所以,y 在 $x = 0$ 可导.

5. 判断公式的类型(3 小题,每小题 10 分,共 30 分).

   (1) $(\neg(p \leftrightarrow q) \to ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))) \vee r$.

   (2) $(p \wedge \neg(q \to p)) \wedge (r \wedge q)$.

   (3) $(p \leftrightarrow \neg r) \to (q \leftrightarrow r)$.