# 离散数学

（第 3 版）

智能科学与技术学院 2024 级

# 目录

- 第一部分 集合论
- 第二部分 初等数论
- 第三部分 图论
- 第四部分 组合数学
- 第五部分 代数结构
- 第六部分 数理逻辑

# 目录

# 14.1 格的定义及性质

格和布尔代数都是具有两个二元运算的代数系统，但是它们与同样具有两个二元运算的代数系统——环有着完全不同的性质.

格或布尔代数在逻辑电路设计、形式化方法、数据仓库等各方面都有重要的应用.

本章出现的 $\wedge$ 和 $\vee$ 的符号不代表逻辑上的合取与析取，而是格中的运算符.

# 14.1 格的定义及性质

格和布尔代数都是具有两个二元运算的代数系统，但是它们与同样具有两个二元运算的代数系统——环有着完全不同的性质.

格或布尔代数在逻辑电路设计、形式化方法、数据仓库等各方面都有重要的应用.

本章出现的 $\wedge$ 和 $\vee$ 的符号不代表逻辑上的合取与析取，而是格中的运算符.

**定义 1.1.1**

设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S, \{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，那么称 $S$ 关于偏序 $\preccurlyeq$ 构成一个格.

# 14.1 格的定义及性质

格和布尔代数都是具有两个二元运算的代数系统，但是它们与同样具有两个二元运算的代数系统——环有着完全不同的性质.

格或布尔代数在逻辑电路设计、形式化方法、数据仓库等各方面都有重要的应用.

本章出现的 $\wedge$ 和 $\vee$ 的符号不代表逻辑上的合取与析取，而是格中的运算符.

**定义 1.1.1**

设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S, \{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，那么称 $S$ 关于偏序 $\preccurlyeq$ 构成一个格.

由于最小上界和最大下界的唯一性，可以将求 $\{x, y\}$ 的最小上界和最大下界分别看成 $x$ 与 $y$ 的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$，即 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 分别表示 $x$ 与 $y$ 的最小上界和最大下界.

# 格的实例

## 例 1.1.1

设 $n$ 是正整数，$S_n$ 是 $n$ 的正因子的集合. $D$ 为整除关系，则偏序集 $\langle S_n, D\rangle$ 构成格. $\forall x, y \in S, x \vee y$ 是 $\operatorname{lcm}(x, y)$，即 $x$ 与 $y$ 的最小公倍数. $x \wedge y$ 是 $\gcd(x, y)$，即 $x$ 与 $y$ 的最大公因数. 图 *1.1.1* 给出了格 $\langle S_8, D\rangle, \langle S_6, D\rangle$ 和 $\langle S_{30}, D\rangle$ 的哈斯图.

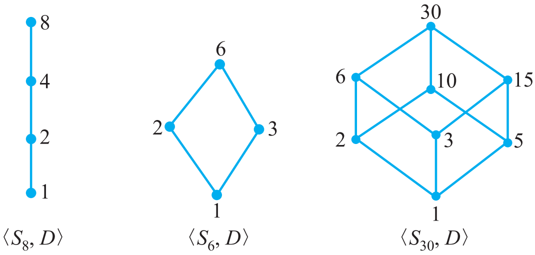



图 1.1.1

## 例 1.1.2

判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

1. $\langle P(B), \subseteq \rangle$.
2. $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$.
3. 偏序集的哈斯图分别如下图.

## 例 1.1.2

判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

1. $\langle P(B), \subseteq \rangle$.
2. $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$.
3. 偏序集的哈斯图分别如下图.

## 解

(1) 是格. $\forall X, Y \in P(B)$,
$X \vee Y = X \cup Y$, $X \wedge Y = X \cap Y$.

由于 $\cup$ 和 $\cap$ 运算在 $P(B)$ 上封闭，故
$X \cup Y, X \cap Y \in P(B)$.

## 例 1.1.2

判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

1. $\langle P(B), \subseteq \rangle$.
2. $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$.
3. 偏序集的哈斯图分别如下图.

## 解

(1) 是格. $\forall X, Y \in P(B)$,

$X \vee Y = X \cup Y$, $X \wedge Y = X \cap Y$.

由于 $\cup$ 和 $\cap$ 运算在 $P(B)$ 上封闭，故

$X \cup Y, X \cap Y \in P(B)$.

(2) 是格. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \vee y = \max(x, y)$,

$x \wedge y = \min(x, y)$，它们都是整数.

## 例 1.1.2

判断下列偏序集是否构成格,并说明理由.

1. $\langle P(B), \subseteq \rangle$.
2. $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$.
3. 偏序集的哈斯图分别如下图.

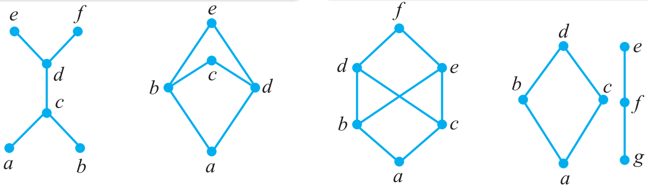
## 解

(1) 是格. $\forall X, Y \in P(B)$, $X \vee Y = X \cup Y$, $X \wedge Y = X \cap Y$.

由于 $\cup$ 和 $\cap$ 运算在 $P(B)$ 上封闭,故 $X \cup Y, X \cap Y \in P(B)$.

(2) 是格. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$,它们都是整数.

(3) 都不是格. (a) 中的 $\{a, b\}$ 没有最大下界;(b) 中的 $\{b, d\}$ 有两个上界 $c$ 和 $e$,但没有最小上界;(c) 的 $\{b, c\}$ 有 3 个上界 $d, e$ 和 $f$,但没有最小上界;(d) 中的 $\{a, g\}$ 没有最大下界. □



(a) (b) (c) (d)

由例 1.1.2知,集合 $B$ 的幂集 $P(B)$ 关于包含关系 $\subseteq$ 构成一个格,称 $\langle P(B), \subseteq \rangle$ 为 $B$ 的幂集格.

## 例 1.1.3

设 $G$ 是群，$L(G)$ 是 $G$ 的所有子群的集合，即

$$L(G) = \{H|H \leqslant G\}.$$

对任意的 $H_1, H_2 \in L(G), H_1 \cap H_2$ 也是 $G$ 的子群，而 $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$ 是由 $H_1 \cup H_2$ 生成的子群(见第 *13.2* 节)．在 $L(G)$ 上定义包含关系 $\subseteq$，则 $L(G)$ 关于包含关系构成一个格，称作 $G$ 的 子群格．

易见在 $L(G)$ 中，$H_1 \wedge H_2$ 就是 $H_1 \cap H_2, H_1 \vee H_2$ 就是 $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$． □

# 数据仓库中的视图格

## 例 1.1.4

数据仓库中的数据空间可以看成一个多维的“立方体”. 例如,一个汽车销售的数据仓库的模式可能是:

$Sales(serialNo, date, dealer, price)$;

$Autos(serialNo, model, color)$;

$Dealers(name, city, phone)$.

其中,涉及销售的属性有汽车型号、销售日期、代理商、价格;涉及汽车的属性有汽车型号、类型、颜色;涉及代理商的属性有名称、城市、电话. 在决策查询中可能需要某段指定时间的销售情况. 例如

# 数据仓库中的视图格

**例 1.1.4**

数据仓库中的数据空间可以看成一个多维的“立方体”. 例如, 一个汽车销售的数据仓库的模式可能是:

$Sales(serialNo, date, dealer, price);$

$Autos(serialNo, model, color);$

$Dealers(name, city, phone).$

其中, 涉及销售的属性有汽车型号、销售日期、代理商、价格; 涉及汽车的属性有汽车型号、类型、颜色; 涉及代理商的属性有名称、城市、电话. 在决策查询中可能需要某段指定时间的销售情况. 例如

$SELECT\ city, AVG(prices)$

$FROM\ Sales, Dealers$

$WHERE\ Sales, dealer = Dealers.\ name\ AND$

$\quad Data >= '2005\text{-}01\text{-}01'$

$GROUP\ BY\ city;$

这个查询将返回 $2005$ 年 $1$ 月 $1$ 号以后各个城市的每种汽车的平均销售价格.

# 数据仓库中的视图格(续)

数据仓库可以分成日期维,汽车维(轿车、越野车和可转换汽车),代理商维(西部地区、东部地区)等. 可以对它进行切块和切片查询,这种查询会涉及在某一维上进行切片,而在其他维上进行切块. 图 1.1.2 中的阴影部分就是在日期维切片,而在汽车和代理商维进行切块的分割.

# 数据仓库中的视图格(续)

数据仓库可以分成日期维,汽车维(轿车、越野车和可转换汽车),代理商维(西部地区、东部地区)等. 可以对它进行切块和切片查询,这种查询会涉及在某一维上进行切片,而在其他维上进行切块. 图 1.1.2 中的阴影部分就是在日期维切片,而在汽车和代理商维进行切块的分割.

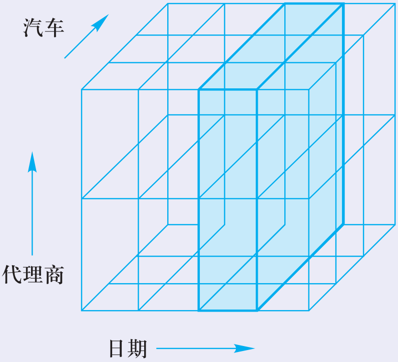



图 1.1.2

# 数据仓库中的视图格(续)

数据仓库可以分成日期维,汽车维(轿车、越野车和可转换汽车),代理商维(西部地区、东部地区)等. 可以对它进行切块和切片查询,这种查询会涉及在某一维上进行切片,而在其他维上进行切块. 图 1.1.2 中的阴影部分就是在日期维切片,而在汽车和代理商维进行切块的分割.

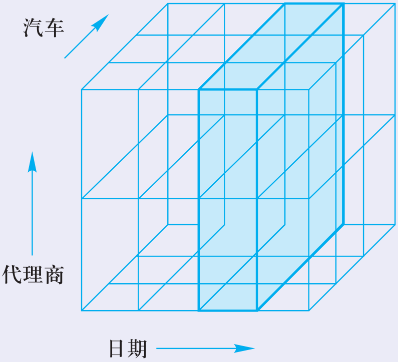



图 1.1.2

面对数据仓库的海量数据,在联机分析处理(OLAP)中,为了加快查询速度,可以将数据按照维进行聚集. 例如,沿日期维将每种汽车、每个代理商的数据聚集到一起,也可以沿代理商维将每个日期、每种汽车的所有代理商的数据聚集起来. 如果在这两个维度上进行聚集,那么就得到每种汽车在所有日期和代理商的数据. 如果限制查询只能是完全聚集或不聚集,那么这种聚集才是有用的.

# 数据仓库中的视图格(续)

但是实际的大量查询可能涉及部分聚集的数据. 例如,需要查询省会城市大众汽车的销售情况. 如果每次查询都从原始数据查找,效率是很低的,为此需要建立物化视图.

# 数据仓库中的视图格(续)

但是实际的大量查询可能涉及部分聚集的数据. 例如,需要查询省会城市大众汽车的销售情况. 如果每次查询都从原始数据查找,效率是很低的,为此需要建立物化视图.

在这个例子中,一个可能的物化视图 $V_1$ 可以按月对日期分组,按城市对代理商分组. 另一个物化视图 $V_2$ 可能是按周对日期分组,按省对代理商分组,还可以有许多其他的方案.

# 数据仓库中的视图格(续)

但是实际的大量查询可能涉及部分聚集的数据. 例如,需要查询省会城市大众汽车的销售情况. 如果每次查询都从原始数据查找,效率是很低的,为此需要建立物化视图.

在这个例子中,一个可能的物化视图 $V_1$ 可以按月对日期分组,按城市对代理商分组. 另一个物化视图 $V_2$ 可能是按周对日期分组,按省对代理商分组,还可以有许多其他的方案.

如何选择物化视图的分组方案,使得占用较小的空间,同时尽可能满足更多的查询要求? 这里就可以使用格的结构.

# 数据仓库中的视图格(续)

但是实际的大量查询可能涉及部分聚集的数据. 例如,需要查询省会城市大众汽车的销售情况. 如果每次查询都从原始数据查找,效率是很低的,为此需要建立物化视图.

在这个例子中,一个可能的物化视图 $V_1$ 可以按月对日期分组,按城市对代理商分组. 另一个物化视图 $V_2$ 可能是按周对日期分组,按省对代理商分组,还可以有许多其他的方案.

如何选择物化视图的分组方案,使得占用较小的空间,同时尽可能满足更多的查询要求? 这里就可以使用格的结构.

每维上的数据构成集合,对它的一种分组就是对这个集合的划分. 对同维上的两个划分 $P_1$ 和 $P_2$,如果 $P_1$ 的每个划分块都是 $P_2$ 的某个划分块的子集,就称 $P_1$ 是 $P_2$ 的加细,记作 $P_1 \preccurlyeq P_2$. 例如,在日期维上,$P_1$ 把数据按天划分,$P_2$ 把数据按月划分,那么 $P_1$ 就是 $P_2$ 的加细. 显然加细是偏序关系. 如果把维上的所有分组的集合记作 $X$,那么 $X$ 关于加细关系构成格.

# 数据仓库中的视图格(续)

图 1.1.3 给出了日期维和代理商维对应的两个格.

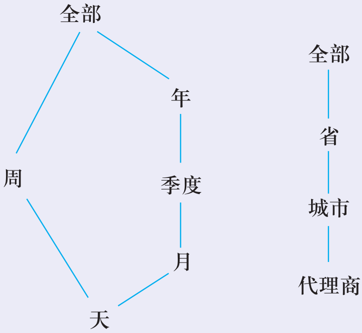



图 1.1.3

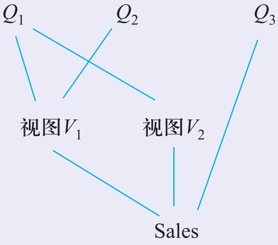



图 1.1.4

# 数据仓库中的视图格(续)

如果数据立方体的每个维都有一个格,那么可以为数据立方体的所有可能的物化视图定义一个格(习题 2 第 48 题断定偏序集的 2 阶笛卡儿积仍旧是偏序,这里则是高维的),这个格称作视图格.

# 数据仓库中的视图格(续)

如果数据立方体的每个维都有一个格，那么可以为数据立方体的所有可能的物化视图定义一个格(习题 2 第 48 题断定偏序集的 2 阶笛卡儿积仍旧是偏序，这里则是高维的)，这个格称作视图格.

如果 $V_1$ 和 $V_2$ 是两个物化视图，它们通过在每一维上选择一种划分构成. 那么 $V_1 \preccurlyeq V_2$ 就意味着：在每一维上 $V_1$ 对应的划分都是 $V_2$ 对应划分的加细.

# 数据仓库中的视图格(续)

如果数据立方体的每个维都有一个格,那么可以为数据立方体的所有可能的物化视图定义一个格(习题 2 第 48 题断定偏序集的 2 阶笛卡儿积仍旧是偏序,这里则是高维的),这个格称作视图格.

如果 $V_1$ 和 $V_2$ 是两个物化视图,它们通过在每一维上选择一种划分构成. 那么 $V_1 \preccurlyeq V_2$ 就意味着:在每一维上 $V_1$ 对应的划分都是 $V_2$ 对应划分的加细.

上述数据仓库中物化视图 $V_1$ 和 $V_2$ 构成的格(整个格的一部分)如图 1.1.4 所示. 其中 $Q_1, Q_2$ 和 $Q_3$ 代表 3 个不同的查询. $Q_1$ 既可以从视图 $V_1$ 得到回答,也可以从视图 $V_2$ 得到回答,而 $Q_3$ 只能从 Sales 中得到回答,视图 $V_1$ 和 $V_2$ 不支持 $Q_3$ 查询,但是 Sales 也是视图,它在每一维上的划分都是最细的,它可以支持所有的查询.

# 格的对偶原理

**定义 1.1.2**

设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 $p^*$ 是将 $p$ 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题, 则称 $p^*$ 为 $p$ 的*对偶命题*.

# 格的对偶原理

**定义 1.1.2**

设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 $p^*$ 是将 $p$ 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题, 则称 $p^*$ 为 $p$ 的 *对偶命题*.

例如, 在格中令 $p$ 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$, 则 $p^*$ 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

# 格的对偶原理

**定义 1.1.2**

设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 $p^*$ 是将 $p$ 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题, 则称 $p^*$ 为 $p$ 的*对偶命题*.

例如, 在格中令 $p$ 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$, 则 $p^*$ 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

**格的对偶原理** 设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题. 若 $p$ 对一切格为真, 则 $p$ 的对偶命题 $p^*$ 也对一切格为真.

# 格的对偶原理

**定义 1.1.2**

设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 $p^*$ 是将 $p$ 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题, 则称 $p^*$ 为 $p$ 的*对偶命题*.

例如, 在格中令 $p$ 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$, 则 $p^*$ 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

**格的对偶原理**　设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题. 若 $p$ 对一切格为真, 则 $p$ 的对偶命题 $p^*$ 也对一切格为真.

例如, 若对一切格 $L$ 都有 $\forall a, b \in L,\ a \wedge b \preccurlyeq a$, 那么对一切格 $L$ 都有 $\forall a, b \in L,\ a \vee b \succcurlyeq a$.

# 格的对偶原理

**定义 1.1.2**

设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 $p^*$ 是将 $p$ 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题, 则称 $p^*$ 为 $p$ 的*对偶命题*.

例如, 在格中令 $p$ 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$, 则 $p^*$ 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

**格的对偶原理**　设 $p$ 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题. 若 $p$ 对一切格为真, 则 $p$ 的对偶命题 $p^*$ 也对一切格为真.

例如, 若对一切格 $L$ 都有 $\forall a, b \in L,\ a \wedge b \preccurlyeq a$, 那么对一切格 $L$ 都有 $\forall a, b \in L,\ a \vee b \succcurlyeq a$.

格的许多性质都是互为对偶命题的, 有了格的对偶原理, 在证明格的性质时, 只需证明其中的一个命题就可以了.

## 定理 1.1.1

设 $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是格，则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

1. $\forall a, b \in L$ 有
$$a \vee b = b \vee a, \;\; a \wedge b = b \wedge a.$$
2. $\forall a, b, c \in L$ 有
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$
3. $\forall a \in L$ 有
$$a \vee a = a, \;\; a \wedge a = a.$$
4. $\forall a, b \in L$ 有
$$a \vee (a \wedge b) = a,$$
$$a \wedge (a \vee b) = a.$$

## 定理 1.1.1

设 $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是格，则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

1. $\forall a, b \in L$ 有
$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$$
2. $\forall a, b, c \in L$ 有
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$
3. $\forall a \in L$ 有
$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$
4. $\forall a, b \in L$ 有
$$a \vee (a \wedge b) = a,$$
$$a \wedge (a \vee b) = a.$$

## 证明.

(1) $a \vee b$ 和 $b \vee a$ 分别是 $\{a, b\}$ 的最小上界和 $\{b, a\}$ 的最小上界. 由于 $\{a, b\} = \{b, a\}$，所以 $a \vee b = b \vee a$.

由对偶原理，$a \wedge b = b \wedge a$ 得证.

## 定理 1.1.1

设 $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是格，则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

1. $\forall a, b \in L$ 有
$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$$
2. $\forall a, b, c \in L$ 有
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$
3. $\forall a \in L$ 有
$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$
4. $\forall a, b \in L$ 有
$$a \vee (a \wedge b) = a,$$
$$a \wedge (a \vee b) = a.$$

## 证明.

(1) $a \vee b$ 和 $b \vee a$ 分别是 $\{a, b\}$ 的最小上界和 $\{b, a\}$ 的最小上界. 由于 $\{a, b\} = \{b, a\}$，所以 $a \vee b = b \vee a$.
由对偶原理，$a \wedge b = b \wedge a$ 得证.
(2) 由最小上界的定义有

$$(a \vee b) \vee c \succcurlyeq a \vee b \succcurlyeq a, \tag{1.1.1}$$
$$(a \vee b) \vee c \succcurlyeq a \vee b \succcurlyeq b, \tag{1.1.2}$$
$$(a \vee b) \vee c \succcurlyeq c. \tag{1.1.3}$$

由式 (1.1.2) 和 (1.1.3) 有

$$(a \vee b) \vee c \succcurlyeq b \vee c. \tag{1.1.4}$$

由式 (1.1.1) 和 (1.1.4) 有
$(a \vee b) \vee c \succcurlyeq a \vee (b \vee c)$.
同理可证 $(a \vee b) \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c)$.

## 定理1.1.1证明(续)

根据偏序的反对称性有 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

由对偶原理,$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ 得证.

(3) 显然 $a \preccurlyeq a \vee a$,又由 $a \preccurlyeq a$ 可得 $a \vee a \preccurlyeq a$,根据反对称性有 $a \vee a = a$.

由对偶原理,$a \wedge a = a$ 得证.

## 定理1.1.1证明(续)

根据偏序的反对称性有 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

由对偶原理, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ 得证.

(3) 显然 $a \preccurlyeq a \vee a$, 又由 $a \preccurlyeq a$ 可得 $a \vee a \preccurlyeq a$, 根据反对称性有 $a \vee a = a$.

由对偶原理, $a \wedge a = a$ 得证.

(4) 显然

$$a \vee (a \wedge b) \succcurlyeq a. \tag{1.1.5}$$

又由 $a \preccurlyeq a, a \wedge b \preccurlyeq a$ 可得

$$a \vee (a \wedge b) \preccurlyeq a. \tag{1.1.6}$$

由式 (1.1.5) 和 (1.1.6) 可得 $a \vee (a \wedge b) = a$.

根据对偶原理, $a \wedge (a \vee b) = a$ 得证. □

## 定理1.1.1证明(续)

根据偏序的反对称性有 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

由对偶原理,$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ 得证.

(3) 显然 $a \preccurlyeq a \vee a$,又由 $a \preccurlyeq a$ 可得 $a \vee a \preccurlyeq a$,根据反对称性有 $a \vee a = a$.

由对偶原理,$a \wedge a = a$ 得证.

(4) 显然

$$a \vee (a \wedge b) \succcurlyeq a. \tag{1.1.5}$$

又由 $a \preccurlyeq a, a \wedge b \preccurlyeq a$ 可得

$$a \vee (a \wedge b) \preccurlyeq a. \tag{1.1.6}$$

由式 (1.1.5) 和 (1.1.6) 可得 $a \vee (a \wedge b) = a$.

根据对偶原理,$a \wedge (a \vee b) = a$ 得证. □

由定理 1.1.1 可知,格是具有两个二元运算的代数系统 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$,其中运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 满足交换律、结合律、幂等律和吸收律. 那么能不能像群、环、域一样,通过规定运算及其基本性质来给出格的定义呢?回答是肯定的.

## 定理 1.1.2

设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统，且 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义 $S$ 中的偏序 $\preccurlyeq$，使得 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 构成一个格，且 $\forall a, b \in S$ 有 $a \wedge b = a * b, a \vee b = a \circ b$.

## 定理 1.1.2

设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统，且 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义 $S$ 中的偏序 $\preccurlyeq$，使得 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 构成一个格，且 $\forall a, b \in S$ 有 $a \wedge b = a * b, a \vee b = a \circ b$.

## 证明.

(1) 先证在 $S$ 中 $*$ 和 $\circ$ 运算都满足幂等律. $\forall a \in S$，由吸收律得

$$a * a = a * (a \circ (a * a)) = a,$$

即 $a * a = a$. 同理有 $a \circ a = a$.

## 定理 1.1.2

设 $\langle S,*,\circ\rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统，且 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义 $S$ 中的偏序 $\preccurlyeq$，使得 $\langle S,\preccurlyeq\rangle$ 构成一个格，且 $\forall a,b\in S$ 有 $a\wedge b=a*b, a\vee b=a\circ b$.

**证明.**

(1) 先证在 $S$ 中 $*$ 和 $\circ$ 运算都满足幂等律. $\forall a\in S$，由吸收律得

$$a*a=a*(a\circ(a*a))=a,$$

即 $a*a=a$. 同理有 $a\circ a=a$.

(2) 在 $S$ 上如下定义二元关系 $R:\forall a,b\in S, \langle a,b\rangle\in R\Leftrightarrow a\circ b=b$.

下面证明 $R$ 是 $S$ 上的偏序. 根据幂等律，$\forall a\in S$ 都有 $a\circ a=a$，即 $\langle a,a\rangle\in R$，所以 $R$ 在 $S$ 上是自反的.

$\forall a,b\in S$，若 $\langle a,b\rangle\in R$, $\langle b,a\rangle\in R$，则有 $a\circ b=b$ 且 $b\circ a=a$. 因为 $a\circ b=b\circ a$，所以 $a=b\circ a=a\circ b=b$. 这就证明了 $R$ 在 $S$ 上是反对称的.

下面证明 $R$ 具有传递性. $\forall a,b,c\in S$，若 $\langle a,b\rangle\in R$ 且 $\langle b,c\rangle\in R$，则有 $a\circ b=b$ 且 $b\circ c=c$. 因此有

$$\begin{aligned}a\circ c&=a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c\\&=b\circ c=c,\end{aligned}$$

即 $a\circ c=c$，$\langle a,c\rangle\in R$，从而证明了 $R$ 在 $S$ 上是传递的.

综上，$R$ 为 $S$ 上的偏序. 将 $R$ 记作 $\preccurlyeq$.

## 定理1.1.2证明(续)

(3) 证明 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 构成格.

$\forall a, b \in S$ 有

$$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b,\ \ b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) = a \circ b.$$

这就得到 $a \preccurlyeq a \circ b$ 和 $b \preccurlyeq a \circ b$,所以 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的上界.

假设 $c$ 也是 $\{a, b\}$ 的上界,则有 $a \circ c = c$ 和 $b \circ c = c$,从而有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c.$$

这就证明了 $a \circ b \preccurlyeq c$,所以 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的最小上界,即 $a \vee b = a \circ b$.

## 定理1.1.2证明(续)

(3) 证明 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 构成格.

$\forall a, b \in S$ 有

$$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b,\ \ b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) = a \circ b.$$

这就得到 $a \preccurlyeq a \circ b$ 和 $b \preccurlyeq a \circ b$,所以 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的上界.

假设 $c$ 也是 $\{a, b\}$ 的上界,则有 $a \circ c = c$ 和 $b \circ c = c$,从而有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c.$$

这就证明了 $a \circ b \preccurlyeq c$,所以 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的最小上界,即 $a \vee b = a \circ b$.

为证 $a * b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界,先证

$$a \circ b = b \Leftrightarrow a * b = a. \tag{1.1.7}$$

首先由 $a \circ b = b$ 可知 $a * b = a * (a \circ b) = a$. 反之由 $a * b = a$ 可知 $a \circ b = (a * b) \circ b = b \circ (b * a) = b$. 这就证明了式(1.1.7). 从而有 $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a * b = a$,按照前面的证明,类似地可证 $a * b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界,即 $a \wedge b = a * b$. □

# 格的代数定义

根据定理 1.1.2，可以给出格的另一个等价定义.

**定义 1.1.3**

设 $\langle S,*,\circ\rangle$ 是代数系统，$*$ 和 $\circ$ 是二元运算，若 $*$ 和 $\circ$ 满足交换律、结合律和吸收律，则 $\langle S,*,\circ\rangle$ 构成一个格.

# 格的代数定义

根据定理 1.1.2，可以给出格的另一个等价定义.

**定义 1.1.3**

设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是代数系统，$*$ 和 $\circ$ 是二元运算，若 $*$ 和 $\circ$ 满足交换律、结合律和吸收律，则 $\langle S, *, \circ \rangle$ 构成一个格.

读者可能会注意到，格中运算满足 4 条算律，还有一条幂等律(见定理 1.1.1)，但幂等律可以由吸收律推导出(见定理 1.1.2 证明 (1))，所以上述定义中只需满足 3 条算律即可.

以后不再区别是偏序集定义的格，还是代数系统定义的格，而统称为格 $L$.

## 定理 1.1.3

设 $L$ 是格,$\forall a, b \in L$,则下面条件彼此等价:

1. $a \preccurlyeq b$.
2. $a \wedge b = a$.
3. $a \vee b = b$.

## 定理 1.1.3

设 $L$ 是格,$\forall a, b \in L$,则下面条件彼此等价:

1. $a \preccurlyeq b$.
2. $a \wedge b = a$.
3. $a \vee b = b$.

## 证明.

先证 (1)⇒(2). 由 $a \preccurlyeq a$ 和 $a \preccurlyeq b$ 可知 $a$ 是 $\{a, b\}$ 的下界,故 $a \preccurlyeq a \wedge b$. 显然有 $a \wedge b \preccurlyeq a$,根据偏序关系的反对称性得 $a \wedge b = a$.

再证 (2)⇒(3). 根据吸收律有 $b = b \vee (b \wedge a)$.
由 $a \wedge b = a$ 得 $b = b \vee a$,即 $a \vee b = b$.

最后证 (3)⇒(1). 由 $a \preccurlyeq a \vee b$ 得
$a \preccurlyeq a \vee b = b$, 故 (1) 成立. □

### 定理 1.1.3

设 $L$ 是格,$\forall a, b \in L$,则下面条件彼此等价:

1. $a \preccurlyeq b$.
2. $a \wedge b = a$.
3. $a \vee b = b$.

### 证明.

先证 (1)⇒(2). 由 $a \preccurlyeq a$ 和 $a \preccurlyeq b$ 可知 $a$ 是 $\{a, b\}$ 的下界,故 $a \preccurlyeq a \wedge b$. 显然有 $a \wedge b \preccurlyeq a$,根据偏序关系的反对称性得 $a \wedge b = a$.

再证 (2)⇒(3). 根据吸收律有 $b = b \vee (b \wedge a)$.

由 $a \wedge b = a$ 得 $b = b \vee a$,即 $a \vee b = b$.

最后证 (3)⇒(1). 由 $a \preccurlyeq a \vee b$ 得

$a \preccurlyeq a \vee b = b$, 故 (1) 成立. □

### 定理 1.1.4

设 $L$ 是格,$\forall a, b, c, d \in L$,若 $a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$,则

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d,$$

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d.$$

## 定理 1.1.3

设 $L$ 是格,$\forall a,b\in L$,则下面条件彼此等价:

1. $a\preccurlyeq b$.
2. $a\wedge b=a$.
3. $a\vee b=b$.

## 证明.

先证 (1)⇒(2). 由 $a\preccurlyeq a$ 和 $a\preccurlyeq b$ 可知 $a$ 是 $\{a,b\}$ 的下界,故 $a\preccurlyeq a\wedge b$. 显然有 $a\wedge b\preccurlyeq a$, 根据偏序关系的反对称性得 $a\wedge b=a$.

再证 (2)⇒(3). 根据吸收律有 $b=b\vee(b\wedge a)$. 由 $a\wedge b=a$ 得 $b=b\vee a$,即 $a\vee b=b$.

最后证 (3)⇒(1). 由 $a\preccurlyeq a\vee b$ 得 $a\preccurlyeq a\vee b=b$, 故 (1) 成立. □

## 定理 1.1.4

设 $L$ 是格,$\forall a,b,c,d\in L$,若 $a\preccurlyeq b$ 且 $c\preccurlyeq d$,则

$$a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d,$$
$$a\vee c\preccurlyeq b\vee d.$$

## 证明.

由定理条件,有

$$a\wedge c\preccurlyeq a\preccurlyeq b,$$
$$a\wedge c\preccurlyeq c\preccurlyeq d.$$

因此 $a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d$.

同理可证 $a\vee c\preccurlyeq b\vee d$. □

### 例 1.1.5

设 $L$ 是格，证明 $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

## 例 1.1.5

设 $L$ 是格，证明 $\forall a,b,c\in L$ 有

$$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

## 证明.

由 $a\preccurlyeq a, b\wedge c\preccurlyeq b$ 得

$$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq a\vee b.$$

由 $a\preccurlyeq a, b\wedge c\preccurlyeq c$ 得

$$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq a\vee c.$$

从而得到

$$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

□

## 例 1.1.5

设 $L$ 是格，证明 $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

## 证明.

由 $a \preccurlyeq a, b \wedge c \preccurlyeq b$ 得

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq a \vee b.$$

由 $a \preccurlyeq a, b \wedge c \preccurlyeq c$ 得

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq a \vee c.$$

从而得到

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

□

例 1.1.5 说明在格中分配不等式成立. 一般说来，格中的 $\vee$ 和 $\wedge$ 运算并不是互相满足分配律的.

# 子格

## 定义 1.1.4

设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格，$S$ 是 $L$ 的非空子集，若 $S$ 关于 $L$ 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 仍构成格，则称 $S$ 为 $L$ 的子格.

# 子格

## 定义 1.1.4

设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格，$S$ 是 $L$ 的非空子集，若 $S$ 关于 $L$ 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 仍构成格，则称 $S$ 为 $L$ 的子格.

## 例 1.1.6

设格 $L$ 如图 *1.1.5* 所示. 令 $S_1 = \{a, e, f, g\}$ 和 $S_2 = \{a, b, e, g\}$，则 $S_1$ 不是 $L$ 的子格，$S_2$ 是 $L$ 的子格. 因为对 $e$ 和 $f$，有 $e \wedge f = c$，但 $c \notin S_1$.

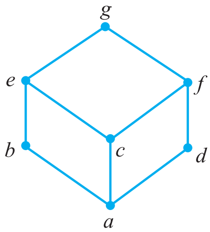



图 1.1.5

# 14.2 分配格、有补格与布尔代数

**定义 1.2.1**

设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格，若 $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

成立，则称 $L$ 为分配格.

不难证明，以上两个等式中只要成立一个，另一个也一定成立.

## 例 1.2.1

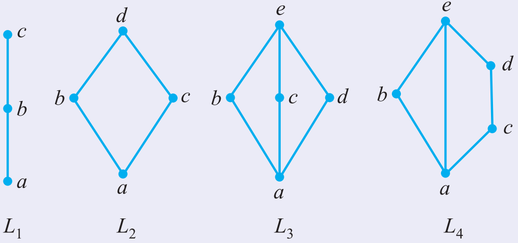



图 1.2.1

上图中, $L_1$ 和 $L_2$ 是分配格, $L_3$ 和 $L_4$ 不是分配格. 在 $L_3$ 中,

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b, \ (b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a.$$

而在 $L_4$ 中,

$$c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c, \ (c \vee b) \wedge (c \vee d) = e \wedge d = d.$$

称 $L_3$ 为钻石格, $L_4$ 为五角格.

# 分配格的充要条件

**定理 1.2.1**

设 $L$ 是格,则 $L$ 是分配格当且仅当 $L$ 中不含有与钻石格或五角格同构的子格.

由于该定理的证明比较烦琐,故此略去.

**推论 1.2.1**

1. 小于 $5$ 元的格都是分配格.
2. 任何一条链(即偏序集的子集,其中任意两个元素均是可比的)都是分配格.

# 例 1.2.2

说明图 *1.2.2* 中的格是否为分配格，为什么？

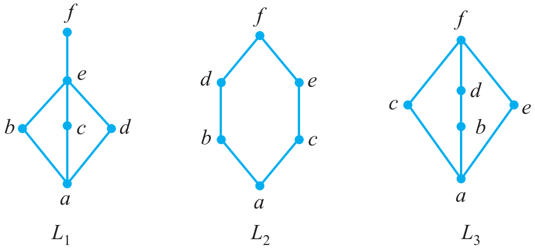



图 1.2.2

## 例 1.2.2

说明图 *1.2.2* 中的格是否为分配格，为什么？

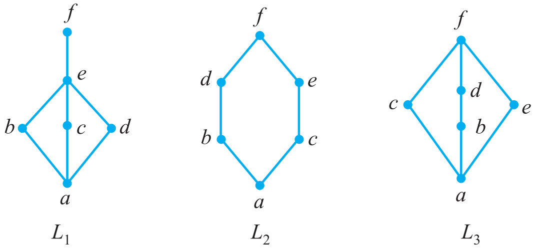



图 1.2.2

## 解

$L_1, L_2$ 和 $L_3$ 都不是分配格，因为 $\{a, b, c, d, e\}$ 是 $L_1$ 的子格，并且同构于钻石格；$\{a, b, c, e, f\}$ 是 $L_2$ 的子格，并且同构于五角格；$\{a, c, b, e, f\}$ 是 $L_3$ 的子格，也同构于钻石格. □

# 有界格

**定义 1.2.2**

设 $L$ 是格,若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \preccurlyeq x$,则称 $a$ 为 $L$ 的全下界. 若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \preccurlyeq b$,则称 $b$ 为 $L$ 的全上界.

# 有界格

**定义 1.2.2**

设 $L$ 是格,若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \preccurlyeq x$,则称 $a$ 为 $L$ 的全下界. 若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \preccurlyeq b$,则称 $b$ 为 $L$ 的全上界.

可以证明,格 $L$ 若存在全下界或全上界,该界一定是唯一的. 以全下界为例,假若 $a_1$ 和 $a_2$ 都是格 $L$ 的全下界,则有 $a_1 \preccurlyeq a_2$ 和 $a_2 \preccurlyeq a_1$. 根据偏序关系 $\preccurlyeq$ 的反对称性必有 $a_1 = a_2$. 由于唯一性,一般将格 $L$ 的全下界记为 0,全上界记为 1.

# 有界格

## 定义 1.2.2

设 $L$ 是格，若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \preccurlyeq x$，则称 $a$ 为 $L$ 的全下界. 若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \preccurlyeq b$，则称 $b$ 为 $L$ 的全上界.

可以证明，格 $L$ 若存在全下界或全上界，该界一定是唯一的. 以全下界为例，假若 $a_1$ 和 $a_2$ 都是格 $L$ 的全下界，则有 $a_1 \preccurlyeq a_2$ 和 $a_2 \preccurlyeq a_1$. 根据偏序关系 $\preccurlyeq$ 的反对称性必有 $a_1 = a_2$. 由于唯一性，一般将格 $L$ 的全下界记为 0，全上界记为 1.

## 定义 1.2.3

设 $L$ 是格，若 $L$ 存在全下界和全上界，则称 $L$ 为有界格，并将 $L$ 记作 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$.

# 有界格

**定义 1.2.2**

设 $L$ 是格,若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \preccurlyeq x$,则称 $a$ 为 $L$ 的全下界. 若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \preccurlyeq b$,则称 $b$ 为 $L$ 的全上界.

可以证明,格 $L$ 若存在全下界或全上界,该界一定是唯一的. 以全下界为例,假若 $a_1$ 和 $a_2$ 都是格 $L$ 的全下界,则有 $a_1 \preccurlyeq a_2$ 和 $a_2 \preccurlyeq a_1$. 根据偏序关系 $\preccurlyeq$ 的反对称性必有 $a_1 = a_2$. 由于唯一性,一般将格 $L$ 的全下界记为 0,全上界记为 1.

**定义 1.2.3**

设 $L$ 是格,若 $L$ 存在全下界和全上界,则称 $L$ 为有界格,并将 $L$ 记作 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$.

不难看出,有限格 $L$ 一定是有界格. 对于无限格 $L$ 来说,有的是有界格,有的不是有界格. 例如,集合 $B$ 的幂集格 $\langle P(B), \cap, \cup\rangle$,不管 $B$ 是有穷集还是无穷集,它都是有界格. 它的全下界是空集 $\emptyset$,全上界是 $B$. 而整数集 $\mathbb{Z}$ 关于通常数的小于等于关系 $\leqslant$ 构成的格不是有界格.

不难看出,在有界格中,全下界 0 是关于 $\wedge$ 运算的零元、$\vee$ 运算的单位元. 而全上界 1 是关于 $\vee$ 运算的零元、$\wedge$ 运算的单位元. 对于涉及有界格的命题,如果其中含有全下界 0 或全上界 1,在求该命题的对偶命题时,必须将 0 替换成 1,而将 1 替换成 0.

不难看出，在有界格中，全下界 0 是关于 $\wedge$ 运算的零元、$\vee$ 运算的单位元. 而全上界 1 是关于 $\vee$ 运算的零元、$\wedge$ 运算的单位元. 对于涉及有界格的命题，如果其中含有全下界 0 或全上界 1，在求该命题的对偶命题时，必须将 0 替换成 1，而将 1 替换成 0.

**定义 1.2.4**

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格，$a \in L$，若存在 $b \in L$ 使得

$$a \wedge b = 0 \text{ 和 } a \vee b = 1$$

成立，则称 $b$ 为 $a$ 的补元.

不难看出,在有界格中,全下界 0 是关于 $\wedge$ 运算的零元、$\vee$ 运算的单位元. 而全上界 1 是关于 $\vee$ 运算的零元、$\wedge$ 运算的单位元. 对于涉及有界格的命题,如果其中含有全下界 0 或全上界 1,在求该命题的对偶命题时,必须将 0 替换成 1,而将 1 替换成 0.

**定义 1.2.4**

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格,$a \in L$,若存在 $b \in L$ 使得

$$a \wedge b = 0 \text{ 和 } a \vee b = 1$$

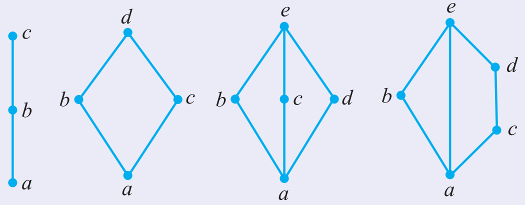
成立,则称 $b$ 为 $a$ 的补元.

由这个定义不难看出,如果 $b$ 是 $a$ 的补元,那么 $a$ 也是 $b$ 的补元. 换句话说,$a$ 和 $b$ 互为补元.

不难证明,在任何有界格中,全下界 0 与全上界 1 总是互补的. 而对于其他的元素,可能存在补元,也可能不存在补元. 如果存在补元,可能是唯一的,也可能有多个补元.

## 例 1.2.3

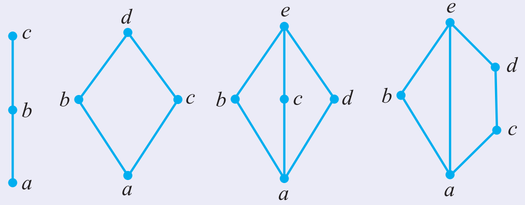
考虑下图中的 *4* 个格.




$L_1$ $L_2$ $L_3$ $L_4$

## 例 1.2.3

考虑下图中的 4 个格.




$L_1$　　$L_2$　　$L_3$　　$L_4$

1. $L_1$ 中的 $a$ 与 $c$ 互为补元, 其中 $a$ 为全下界, $c$ 为全上界, $b$ 没有补元.
2. $L_2$ 中的 $a$ 与 $d$ 互为补元, 其中 $a$ 为全下界, $d$ 为全上界, $b$ 与 $c$ 也互为补元.
3. $L_3$ 中的 $a$ 与 $e$ 互为补元, 其中 $a$ 为全下界, $e$ 为全上界, $b$ 的补元是 $c$ 和 $d$, $c$ 的补元是 $b$ 和 $d$, $d$ 的补元是 $b$ 和 $c$. 这里 $b, c, d$ 每个元素都有两个补元.
4. $L_4$ 中的 $a$ 与 $e$ 互为补元, 其中 $a$ 为全下界, $e$ 为全上界, $b$ 的补元是 $c$ 和 $d$, $c$ 的补元是 $b$, $d$ 的补元是 $b$.

## 定理 1.2.2

设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界分配格，若 $a\in L$，且对于 $a$ 存在补元 $b$，则 $b$ 是 $a$ 的唯一补元.

### 定理 1.2.2

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界分配格，若 $a \in L$，且对于 $a$ 存在补元 $b$，则 $b$ 是 $a$ 的唯一补元.

### 证明.

假设 $c \in L$ 也是 $a$ 的补元，则有 $a \vee c = 1$ 和 $a \wedge c = 0$. 又知 $b$ 是 $a$ 的补元，也有 $a \vee b = 1$ 和 $a \wedge b = 0$，从而得到

$$a \vee c = a \vee b, a \wedge c = a \wedge b.$$

由于 $L$ 是分配格，从而有

$$\begin{aligned} b &= b \wedge (b \vee a) = b \wedge (c \vee a) \\ &= (b \wedge c) \vee (b \wedge a) = (b \wedge c) \vee (a \wedge c) \\ &= (b \vee a) \wedge c = (a \vee c) \wedge c \\ &= c. \end{aligned}$$

□

# 布尔代数

**定义 1.2.5**

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格,若 $\forall a \in L$, $a$ 在 $L$ 中都存在补元,则称 $L$ 为有补格.

例如,图 1.2.1 中的 $L_2, L_3$ 和 $L_4$ 是有补格,$L_1$ 不是有补格;
图 1.2.2 中的 $L_2$ 和 $L_3$ 是有补格,$L_1$ 不是有补格,因为 $b, c, d, e$ 都不存在补元.

# 布尔代数

**定义 1.2.5**

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格，若 $\forall a \in L$，$a$ 在 $L$ 中都存在补元，则称 $L$ 为*有补格*.

例如，图 1.2.1 中的 $L_2, L_3$ 和 $L_4$ 是有补格，$L_1$ 不是有补格；
图 1.2.2 中的 $L_2$ 和 $L_3$ 是有补格，$L_1$ 不是有补格，因为 $b, c, d, e$ 都不存在补元.

**定义 1.2.6**

如果一个格是有补分配格，那么称它为*布尔格*或*布尔代数*.

根据定理 1.2.2，在分配格中，如果一个元素存在补元，那么补元是唯一的. 因此，在布尔代数中，每个元素都存在着唯一的补元，可以把求补元的运算看作是布尔代数中的一元运算. 从而可以把一个布尔代数记为 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$，其中 $\wedge, \vee, 0, 1$ 与有界格一样，$'$ 为求补运算，即 $\forall a \in B$, $a'$ 是 $a$ 的补元.

# 布尔代数实例

**例 1.2.4**

1. 设 $S_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$ 是 *110* 的正因子集合. 令 $\gcd, \mathrm{lcm}$ 分别表示求两个数的最大公因数和最小公倍数的运算，则 $\langle S_{110}, \gcd, \mathrm{lcm}\rangle$ 构成布尔代数.
2. 设 $B$ 为任意集合，可以证明 $B$ 的幂集格 $\langle P(B), \cap, \cup, \sim, \emptyset, B\rangle$ 构成布尔代数，称作 集合代数.
3. 数理逻辑中的命题代数是布尔代数.
4. 数字电路中的逻辑代数也是布尔代数.

## 定理 1.2.3

设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ 是布尔代数, 则

1. $\forall a \in B,\ (a')' = a.$
2. $\forall a, b \in B,\ (a \wedge b)' = a' \vee b',\ (a \vee b)' = a' \wedge b'.$

## 定理 1.2.3

设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ 是布尔代数,则

1. $\forall a \in B,\ (a')' = a.$
2. $\forall a, b \in B,\ (a \wedge b)' = a' \vee b',\ (a \vee b)' = a' \wedge b'.$

## 证明.

(1) 因为 $(a')'$ 是 $a'$ 的补元,$a$ 也是 $a'$ 的补元,由补元的唯一性得 $(a')' = a$.

## 定理 1.2.3

设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ 是布尔代数，则

1. $\forall a \in B,\ (a')' = a.$
2. $\forall a, b \in B,\ (a \wedge b)' = a' \vee b',\ (a \vee b)' = a' \wedge b'.$

## 证明.

(1) 因为 $(a')'$ 是 $a'$ 的补元，$a$ 也是 $a'$ 的补元，由补元的唯一性得 $(a')' = a.$

(2) 对任意 $a, b \in B$ 有

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a' \vee b') &= (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee a' \vee b') \\ &= (1 \vee b') \wedge (a' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1, \\ (a \wedge b) \wedge (a' \vee b') &= (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge b') \\ &= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0,\end{aligned}$$

所以 $a' \vee b'$ 是 $a \wedge b$ 的补元. 根据补元的唯一性有 $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. 同理可证 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$. □

定理 1.2.3 的 (1) 称作双重否定律，(2) 称作德摩根律.

# 布尔代数的等价定义

布尔代数中各条算律不是彼此独立的. 可以证明由交换律、分配律、同一律和补元律能够推导出吸收律和结合律,从而布尔代数有下述等价的定义.

# 布尔代数的等价定义

布尔代数中各条算律不是彼此独立的. 可以证明由交换律、分配律、同一律和补元律能够推导出吸收律和结合律, 从而布尔代数有下述等价的定义.

**定义 1.2.7**

设 $\langle B, *, \circ \rangle$ 是代数系统, $*$ 和 $\circ$ 是二元运算. 若 $*$ 和 $\circ$ 运算满足:

1. 交换律, 即 $\forall a, b \in B$ 有 $a * b = b * a,\ a \circ b = b \circ a$;
2. 分配律, 即 $\forall a, b, c \in B$ 有
$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c),\ a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c);$$
3. 同一律, 即存在 $0, 1 \in B$ 使得 $\forall a \in B$ 有 $a * 1 = a,\ a \circ 0 = a$;
4. 补元律, 即 $\forall a \in B$, 存在 $a' \in B$ 使得 $a * a' = 0,\ a \circ a' = 1$,

则称 $\langle B, *, \circ \rangle$ 为一个布尔代数.

以上定义中的同一律是说 1 是 $*$ 运算的单位元,0 是 $\circ$ 运算的单位元. 可以证明 1 和 0 分别也是 $\circ$ 和 $*$ 运算的零元. $\forall a \in B$ 有

$$\begin{aligned}
a \circ 1 &= (a \circ 1) * 1 && \text{(同一律)} \\
&= 1 * (a \circ 1) && \text{(交换律)} \\
&= (a \circ a') * (a \circ 1) && \text{(补元律)} \\
&= a \circ (a' * 1) && \text{(分配律)} \\
&= a \circ a' && \text{(同一律)} \\
&= 1. && \text{(补元律)}
\end{aligned}$$

同理可证 $a * 0 = 0$.
为证明以上定义的 $\langle B, *, \circ \rangle$ 是布尔代数,只需证明它是一个格,即证明 $*$ 和 $\circ$ 运算满足吸收律和结合律. 有兴趣的读者可以自己尝试给出证明.

下面，不加证明，只是给出与有限布尔代数结构有关的结果.

**定义 1.2.8**

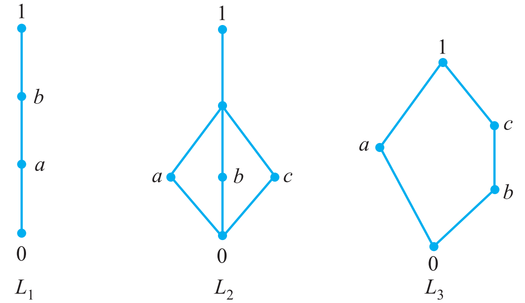
设 $L$ 是格，$0 \in L, 0 \neq a \in L$. 若 $\forall b \in L$，当 $0 \prec b \preccurlyeq a$ 时，总有 $b = a$, 则称 $a$ 为 $L$ 中的原子.

下面,不加证明,只是给出与有限布尔代数结构有关的结果.

## 定义 1.2.8

设 $L$ 是格,$0 \in L, 0 \neq a \in L$. 若 $\forall b \in L$,当 $0 \prec b \preccurlyeq a$ 时,总有 $b = a$, 则称 $a$ 为 $L$ 中的原子.

考虑下图中的几个格. 其中 $L_1$ 的原子是 $a$;$L_2$ 的原子是 $a, b, c$;$L_3$ 的原子是 $a$ 和 $b$. 若 $L$ 是正整数 $n$ 的全体正因子关于整除关系构成的格,则 $L$ 的原子恰为 $n$ 的全体素因子. 若 $L$ 是集合 $B$ 的幂集格,则 $L$ 的原子就是由 $B$ 中元素构成的单元集.



# 有限布尔代数的结构

下面的表示定理说明有限布尔代数有着良好的结构. 这里不再加以证明.

**定理 1.2.4**

设 $B$ 是有限布尔代数, $A$ 是 $B$ 的全体原子构成的集合, 则 $B$ 同构于 $A$ 的幂集代数 $P(A)$.

# 有限布尔代数的结构

下面的表示定理说明有限布尔代数有着良好的结构. 这里不再加以证明.

**定理 1.2.4**

设 $B$ 是有限布尔代数, $A$ 是 $B$ 的全体原子构成的集合, 则 $B$ 同构于 $A$ 的幂集代数 $P(A)$.

**推论 1.2.2**

任何有限布尔代数的基数为 $2^n, n \in \mathbb{N}$.

# 有限布尔代数的结构

下面的表示定理说明有限布尔代数有着良好的结构. 这里不再加以证明.

**定理 1.2.4**

设 $B$ 是有限布尔代数, $A$ 是 $B$ 的全体原子构成的集合, 则 $B$ 同构于 $A$ 的幂集代数 $P(A)$.

**推论 1.2.2**

任何有限布尔代数的基数为 $2^n, n \in \mathbb{N}$.

**证明.**

设 $B$ 是有限布尔代数, $A$ 是 $B$ 的所有原子构成的集合, 且 $|A| = n, n \in \mathbb{N}$. 由定理 1.2.4 得 $B \cong P(A)$, 而 $|P(A)| = 2^n$, 所以 $|B| = 2^n$. □

# 有限布尔代数的结构

下面的表示定理说明有限布尔代数有着良好的结构. 这里不再加以证明.

**定理 1.2.4**

设 $B$ 是有限布尔代数, $A$ 是 $B$ 的全体原子构成的集合, 则 $B$ 同构于 $A$ 的幂集代数 $P(A)$.

**推论 1.2.2**

任何有限布尔代数的基数为 $2^n, n \in \mathbb{N}$.

**证明.**

设 $B$ 是有限布尔代数, $A$ 是 $B$ 的所有原子构成的集合, 且 $|A| = n, n \in \mathbb{N}$. 由定理 1.2.4 得 $B \cong P(A)$, 而 $|P(A)| = 2^n$, 所以 $|B| = 2^n$. □

**推论 1.2.3**

任何等势的有限布尔代数都是同构的.

根据这个定理,有限布尔代数的基数都是 $2$ 的幂,同时在同构的意义上对于任何 $2^n, n$ 为自然数,仅存在一个 $2^n$ 元的布尔代数.

根据这个定理，有限布尔代数的基数都是 2 的幂，同时在同构的意义上对于任何 $2^n$, $n$ 为自然数，仅存在一个 $2^n$ 元的布尔代数.

图 1.2.3 给出了 1 元、2 元、4 元和 8 元的布尔代数.

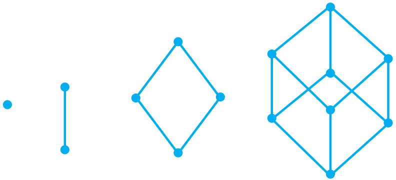


图 1.2.3