最优化导论 第一次作业

1. 设$u, v \in V$ 证明$\langle u, v\rangle = 0$ 当且仅当对所有$a \in \boldsymbol{F}$ 均有$\|u\| \leq \|u + av\|$.

2. 证明如果 $C \subset R^n$ 是凸集，那么 C 的闭包 $\bar{C}$ 也是凸集.

3. 将下面的问题转化为线性规划: 给定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^n$,

(a) $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_1$, s.t. $\|x\|_\infty \leqslant 1$;

(b) $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1$, s.t. $\|Ax-b\|_\infty \leqslant 1$;

(c) $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_1 + \|x\|_\infty$;

(d) $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \max\left\{0, a_i^{\mathrm{T}}x + b_i\right\}$.

4. 设 $u, v \in \boldsymbol{R}^n$, 对于 2 -范数 $\|\cdot\|$, 如果

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

证明对某个实数 λ ， $u = 0$ 或 $v = \lambda u$ 。

5. 在线性空间中, 证明:

1) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

2) $k(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta}$.

6. 考虑二次不等式

$$x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x + c \leqslant 0,$$

其中 A 为 n 阶对称矩阵, 设 C 为上述不等式的解集.

(a) 证明当 A 正定时， C 为凸集；

(b) 设 C' 是 C 和超平面 $g^{\mathrm{T}}x + h = 0$ 的交集 ($g \neq 0$), 若存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $A + \lambda gg^{\mathrm{T}}$ 半正定, 证明 C' 为凸集.

7. 设 D 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭凸集, $y \notin D$, 证明存在唯一的点 $\overline{\boldsymbol{x}} \in D$, 使得

$$\|y - \bar{x}\| = \inf_{x\in D} \|y - x\|.$$

课本习题： 《Convex Optimization》2.5, 2.7, 2.10, 2.14, 2.16, 2.20, 2.21, 2.31, 2.39