微积分 II (第一层次)期中试卷 (2021.4.24)

一、计算下列各题（每题6分，共30分）

1. 求曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $(2,-3,1)$ 处的切平面与法线方程.

2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x})$, 其中 f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 函数 $u=\arctan(x^2+2y+z)$ 在点 $(1,0,2)$ 处沿方向 $\overrightarrow{l}=(1,2,3)$ 的方向导数.

二、计算下列各题（每题8分，共40分）

1. 计算三重积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1,z=2$ 所围立体.

2. 计算曲线积分 $I_2=\oint_L\dfrac{(x+2)^2+(z-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y=0\end{cases}$ $(a>0)$.

3. 计算曲线积分 $I_3=\int_C(x^2+2xy)\mathrm{d}y$, 其中 C 是上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0,y\geq 0)$, 逆时针方向.

4. 计算 $I_4=\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\frac12}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

5. 设 $D=\{(x,y)||x|\leq 2,|y|\leq 2\}$, 计算 $I_5=\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三、(10分)对任意 $k>0$, 设 Ω_k 为 $\sqrt{x^2+y^2}\leq kz$ 与 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 所交区域, 记其体积为 V_k. 已知存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{k\to 0^+}\dfrac{V_k}{k^\lambda}$ 为正数, 求 λ 的值及该极限.

四、(10分)求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在区域 $x^2+y^2\leq z\leq 1$ 上的最大值和最小值.

五、(10分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论 f 在 y 轴点上的连续性,可偏导性及可微性.

微积分 II (第一层次)期中试卷 (2022.5.8)

一、计算下列各题:(每题6分，共30分)

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{e^{-(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})}}{(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})^{xy}}$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $w=f(x+y+z,xyz)$. 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

3. 设函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3-3xyz=1 \\ x+y+z=a\ (a\neq 0)\end{cases}$ 确定. 求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$.

4. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

5. 交换积分次序并计算积分 $I_1 = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\arccos y} y^3 dx + \int_{-1}^{1} dy \int_{2\pi-\arccos y}^{2\pi} y^3 dx$.

二、计算下列各题:(每题8分，共40分)

1. 计算二重积分 $I_2 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dxdy$.

2. 计算三重积分 $I_3 = \iiint\limits_V \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\, dxdydz$, V 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\ \ (a,b,c>0)$.

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被两平面 $z=\pm y$ 所截下的有限部分的面积 S.

4. 计算曲线积分 $I_4 = \int\limits_C y\, ds$. 其中 C 是摆线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 在 $0\le t\le 2\pi$ 的一拱.

5. 计算曲线积分 $I_5 = \oint\limits_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)\, dy$. 其中 L 是以 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$ 为顶点的正向三角形闭路 $ABCA$.

三、(12分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0, \\ y, & x=0. \end{cases}$ 讨论 f 的连续性, 可偏导性, 及可微性.

四、(10分) 求函数 $z=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$ 上的最大值与最小值.

五、(8分) 设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}\ (a>0)$ 上连续可微, 在 D 的边界上取值为 0. 证明:

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = -\iint\limits_D x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dxdy = -\iint\limits_D y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dxdy$;

(2) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy\right| \le \dfrac{\pi a^3}{3} \max\limits_{(x,y)\in D} \left((\dfrac{\partial f}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2023.4.22)

一、计算下列各题:(每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\mathrm{e}^{\sin^2(xy)}}{x^2+y^2}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x(y^2+z)+\mathrm{e}^z-1=0$ 确定的隐函数, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y)=(0,1)}$.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ 在点 $(0,-1,0)$ 处的切线与法平面.

4. 求函数 $u=xy+y^2z^3+z$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0)$, 其中 $P_0\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\Big)$, $\boldsymbol{l}$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 P_0 处的外法向量.

5. 求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

二、计算下列各题:(每题8分, 共40分)

1. 计算 $I_1=\iint\limits_D f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $D=\{(x,y)\big||x|\le 4,|y|\le 4\}$.

2. 计算三重积分 $I_2=\iiint\limits_\Omega (x+2y+3z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega:\ x^2+y^2+z^2\le a^2\ (a>0)$.

3. 求曲线 $2x^2+2xy+y^2=1$ 所围成的平面区域的面积.

4. 计算曲线积分 $I_3=\oint\limits_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2$ 与直线 $y=x,y=0$ 所围的位于第一象限的区域的边界.

5. 计算 $I_4=\displaystyle\int_L (x\sin y+x)\mathrm{d}x+\Big(\frac{1}{2}x^2\cos y+xy\Big)\mathrm{d}y$, 其中 L 是极坐标表达式为 $\rho=1+\cos\theta$ 的心脏线从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 沿顺时针方向的一段弧.

三、(10分) 记曲线 $\begin{cases} x^2=z \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z=1,z=2$ 所围成立体区域为 Ω,

计算 $I_5=\iiint\limits_\Omega \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

四、(12 分) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性, 偏导数存在性, 方向导数的存在性, 可微性.

五、(8 分) 在第一象限内, 过曲线 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 上任意一点作其切线, 若切线与坐标轴所围成的三角形面积最小值为 $\dfrac{1}{4}$, 求 a 的值.