微积分 I (第一层次) 期末试卷 (2025.1.7)

一、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 18 分).

1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;
2. 求极限 $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$;
3. 求函数 $y=\ln^2 x$ 的凹凸区间及拐点.

二、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 18 分).

1. $I_1=\int\frac{x^3}{x^4+5x^2+6}\,dx$;
2. $I_2=\int\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\,dx$;
3. $I_3=\int_0^R\frac{x^5}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$.

三、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 12 分).

1. 已知 $\overrightarrow{a}$ 为单位向量, $\overrightarrow{b}$ 为非零向量, $(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})\perp(7\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b})\perp(7\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})$, 求向量 $\overrightarrow{a}$ 与向量 $\overrightarrow{b}$ 的夹角 θ.
2. 将直线的一般方程 $\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 化为点向式方程.

四、(本题 10 分) 计算极限 $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\arcsin x}{\arctan x}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$.

五、(本题 10 分) 过点 $A(1,5)$ 作曲线 $\Gamma: y=x^3$ 的切线 L.
(1) 求切线方程;
(2) 求 Γ 与 L 所围成的平面图形 D 的面积 S;
(3) 求 D 的 $x\geq0$ 的部分绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

六、(本题 10 分) 设直线 $L:\begin{cases}2x-y-2z+1=0\\x+y+4z-2=0\end{cases}$, 平面 Π 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, 其中 a,b,c 均为非零常数, 且 $b=c$, 平面 Π 过直线 L. 求平面 Π 的方程.

七、(本题 14 分) 讨论函数 $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹向性与拐点, 渐近线, 并作出函数的草图.

八、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的导数, 且 $f(a)>0$, $f'(x)>0$. 求证: 存在唯一的 $\xi\in(a,b)$, 使得由 $y=f(x)$, $x=b$, $y=f(\xi)$ 所围成

的面积 S_1 与 $y=f(x)$, $x=a$, $y=f(\xi)$ 所围成的面积 S_2 之比为 2024.

微积分I期末试卷参考答案 2025.1.7

一、1. $\frac{1}{e}$; 2. 1; 3. 上凹区间为 (0, e), 下凹区间为 (e, +∞), 拐点为 (e, 1).

二、1. $\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+3)^3}{(x^2+2)^2}+C$; 2. $-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C$; 3. $\frac{8R^5}{15}$.

三、1. $\frac{\pi}{3}$. 2. $\frac{x+\frac{10}{7}}{4}=\frac{y-\frac{1}{7}}{-2}=\frac{z}{1}$.

四、$\frac{1}{e}$.

五、(1) $y=3x+2$; (2) $S=\frac{27}{4}$; (3) $V_x=\frac{264\pi}{7}$.

六、$7x-2y-2z+1=0$.

七、定义域 $x\neq 0$; 单调增区间 $(-\infty,-1]$, $(2,+\infty]$, 单调减区间 $[-1,0)$, $(0,2]$; 极大值 $y(-1)=e^{-1}$, 极小值 $y(2)=4\sqrt{e}$; 下凹区间 $(-\infty,-\frac{2}{5})$, 上凹区间 $(-\frac{2}{5},0)$, $(0,+\infty)$, 拐点 $\left(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$; 渐近线 $y=x+3$, $x=0$.

八、(略).