命题逻辑（续）

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

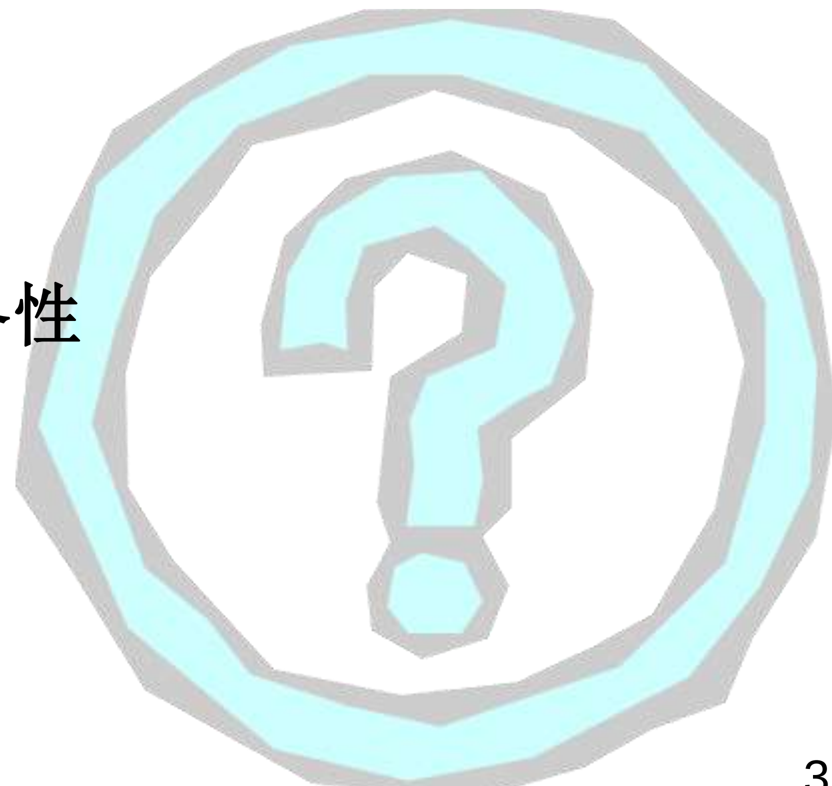
致谢：部分内容改编自北京大学曹永知老师、中科大肖明军老师和南大陶先平老师的《离散数学》slides。

前情回顾

- 数理逻辑（符号逻辑）
- 命题，逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 语义蕴含

内容提要

- 语意蕴含与逻辑等价
- 命题逻辑的推理
- 命题逻辑公式的范式
- 自然演绎规则及论证
- 命题逻辑的正确性及完备性



析取范式和合取范式性质

定理 16.2.2

1. 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式.
2. 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

到现在为止,我们研究的命题公式中含有 5 个联结词 $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,如何把这样的命题公式化成等值的析取范式和合取范式?

首先,可以利用蕴涵等值式与等价等值式

$$\left.\begin{aligned} &A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \\ &A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \end{aligned}\right\} \tag{16.2.1}$$

消去任何公式中的联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$.

其次,在范式中不出现如下形式: $\neg\neg A, \neg(A \wedge B), \neg(A \vee B)$.

对其利用双重否定律和德摩根律,可得

$$\left.\begin{aligned} &\neg\neg A \Leftrightarrow A \\ &\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ &\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{aligned}\right\} \tag{16.2.2}$$

析取范式和合取范式性质

再次，在析取范式中不出现如下形式：$A \wedge (B \vee C)$.

在合取范式中不出现如下形式：$A \vee (B \wedge C)$.

利用分配律，可得

$$\left.\begin{array}{l} A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}\right\} \qquad (16.2.3)$$

由上述 3 步，可将任一公式化成与之等值的析取范式和合取范式. 进而，有下面的范式存在定理.

定理 16.2.3

任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

求给定公式范式的步骤为：

1. 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$.
2. 用双重否定律消去双重否定符，用德摩根律内移否定符.
3. 使用分配律：求析取范式时使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律；求合取范式时使用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律.

命题逻辑公式的范式

- **定理：任一命题公式都存在着与之等值的析取范式和合取范式。**

证明：对于任一公式，可用下面的方法构造出与其等值的范式：

1. 利用等价公式：$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A)$使公式中仅含联结词$\neg$，$\land$，$\lor$；
2. 利用德•摩根定律和双重否定律$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$，$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$，$\neg\neg A \equiv A$将否定符$\neg$移到命题变元前，并去掉多余的否定符；
3. 利用分配律$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$，$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$将公式化成析取范式或合取范式，所得即与原公式等价。

证毕.

例16.2.1解(续)

(2) 求析取范式

求析取范式与求合取范式的前两步是相同的,只是在利用分配律时有所不同,因而前 4 步与 (1) 相同,接着使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律.

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow & ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \\
\Leftrightarrow & (p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
& \vee (r \wedge \neg p) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge \neg r) \qquad (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 的分配律}) \\
\Leftrightarrow & (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r). \quad (\text{矛盾律和同一律})
\end{aligned}
$$

□

最后两步的结果都是析取范式. 一般地,命题公式的析取范式是不唯一的. 同样,合取范式也是不唯一的. 为了使命题公式的范式唯一,需要进一步将简单合取式和简单析取式规范化.

极小项和极大项

定义 16.2.3

在含有 n 个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下标从小到大或按照字典顺序排列，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项).

由于每个命题变项在极小项中以原形或否定形式出现且仅出现一次，因而 n 个命题变项共可以产生 2^n 个不同的极小项.

每个极小项都有且仅有一个成真赋值. 若极小项的成真赋值所对应的二进制数等于十进制数 i，就将这个极小项记作 m_i.

类似地，n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极大项，每个极大项只有一个成假赋值，将其对应的十进制数 i 做极大项的下标，记作 M_i.

表 16.2.2 含 p, q, r 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式和主合取范式

根据表 16.2.1 和表 16.2.2 可以直接验证极小项与极大项之间有下述关系.

定理 16.2.4

设 m_i 与 M_i 是命题变项含 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的极小项和极大项,则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \ \neg M_i \Leftrightarrow m_i.$$

定义 16.2.4

所有简单合取式都是极小项的析取范式称为主析取范式;

所有简单析取式都是极大项的合取范式称为主合取范式.

下面讨论如何求出与给定公式等值的主析取范式和主合取范式. 首先证明它们的存在性和唯一性,再给出它们的求法.

主析取范式和主合取范式

定理 16.2.5

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的.

证明.

这里只证主析取范式的存在性和唯一性；主合取范式的存在性和唯一性可类似证明. 首先证明存在性. 设 A 是任一含 n 个命题变项的公式. 由定理 16.2.3 可以知道，存在与 A 等值的析取范式 A'，即 $A \Leftrightarrow A'$. 若 A' 的某个简单合取式 A_i 中既不含命题变项 p_j，也不含它的否定式 $\neg p_j$，则将 A_i 展开成如下等值的形式：

$$A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j).$$

继续这个过程，直到所有的简单合取式都含有所有的命题变项或它的否定式. 若在演算过程中出现重复出现的命题变项以及极小项和矛盾式，就应"消去". 例如，用 p 代替 $p \wedge p$，用 m_i 代替 $m_i \vee m_i$，用 0 代替矛盾式等. 最后就将 A 化成与之等值的主析取范式 A''.

下面再证明唯一性. 假设命题公式 A 等值于两个不同的主析取范式 B 和 C，那么必有 $B \Leftrightarrow C$. 由于 B 和 C 是不同的主析取范式，不妨设极小项 m_i 只出现在 B 中而不出现在 C 中. 于是，下标 i 的二进制表示为 B 的成真赋值，C 的成假赋值，这与 $B \Leftrightarrow C$ 矛盾. □

命题逻辑公式的范式

- **主析取范式和主合取范式**

范式不唯一。如公式$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$与之等价的公式有：$p\vee(q\wedge r)$，$(p\wedge p)\vee(q\wedge r)$，$p\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$，$p\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$,等。

- 包含所有命题变元或其否定一次仅一次的简单合取式，称为**极小项**；
- 包含所有命题变元或其否定一次仅一次的简单析取式，称为**极大项**；
- 由有限个极小项组成的析取范式称为**主析取范式**；
- 由有限个极大项组成的合取范式称为**主合取范式**。

命题逻辑公式的范式

- 1. 极小项和极大项的性质

对于两个命题变元P，Q来说，由于每个P，Q可以取命题变元自身和其否定，所以其对应的极小项和极大项分别有四项：P∧Q，¬P∧Q，P∧¬Q，¬P∧¬Q；P∨Q，¬P∨Q, P∨¬Q，¬P∨¬Q。其真值表如下：

P	Q	P∧Q	¬P∧Q	P∧¬Q	¬P∧¬Q	¬P∨¬Q	¬P∨Q	P∨¬Q	P∨Q
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1

一般来说，对于n个命题变元，则应有2^n个不同的极小项和2^n个不同的极大项。

命题逻辑公式的范式

- **性质：**

(1)：没有两个不同的极小项是等价的，且每个极小项只有一组真值指派使该极小项的真值为真，因此可给极小项编码，使极小项为“T”和那组真值指派为对应的极小项编码；如极小项¬P∧¬Q∧¬R只有在P，Q，R分别取真值0，0，0时才为真，所以有时又可用 m_{000}（m_0）来表示，又如¬P∧Q∧¬R也可用 m_{010}（m_2）来表示。

(2)：没有两个不同的极大项是等价的，且每个极大项只有一组真值指派，使该极大项的真值为假。因此可给极大项编码，使极大项为“F”的那组真值指派为对应的极大项的编码，如极大项¬P∨¬Q∨¬R只有在P，Q，R分别取真值1，1，1时才为假，所以有时又可用 $M_{111}(M_7)$ 来表示。

命题逻辑公式的范式

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	m0= $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	M0= $P \vee Q \vee R$
0	0	1	m1= $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	M1= $P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	m2= $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	M2= $P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	m3= $\neg P \wedge Q \wedge R$	M3= $P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	m4= $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	M4= $\neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	m5= $P \wedge \neg Q \wedge R$	M5= $\neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	m6= $P \wedge Q \wedge \neg R$	M6= $\neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	m7= $P \wedge Q \wedge R$	M7= $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

三个命题变元的真值取值与极小项和极大项的对应对位关系表

命题逻辑公式的范式

(3)：任意两极小项的合取必假，任意两个极大项的析取必为真。极大项的否定是极小项，极小项的否定是极大项，即

$$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T,\ \ m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F(i \neq j.i, j \in [0,2^n - 1]);$$

$$m_i \Leftrightarrow \neg M_i,\ \ M_i \Leftrightarrow \neg m_i$$

(4)：所有极小项的析取为永真公式，所有极大项的合取是永假公式，即

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1,\ \ \bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

命题逻辑公式的范式

- **主析取范式和主合取范式的存在性和唯一性**

定理:任何命题公式的主析取范式和主合取范式存在且唯一，即任何命题公式都有且仅有一个与之等价的主合取范式和主析取范式。

析取（合取）范式的存在性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的析取范式
  - $(\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee(\neg(\neg p\vee q)\wedge\neg r)$ （消去↔ ）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee((p\wedge\neg q)\wedge\neg r)$ （否定号内移）
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律、结合律）

- 有通用的方法，把任一命题转化与之等价的CNF

主析取（合取）范式的唯一性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （析取范式）

$$\neg p\wedge r \equiv \neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$
$$\equiv (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$q\wedge r \equiv (p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
  - 001 011 100 111

例16.2.2解(续)

例 16.2.1

求下面公式的析取范式与合取范式.

$$(p \to q) \leftrightarrow r.$$

(2) 求主合取范式.

由例 16.2.1 已求出公式的合取范式为

$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$,

其中 $\neg p \vee q \vee \neg r$ 已是极大项 M_5. 利用矛盾律和同一律将另两个简单析取式化成极大项.

$$\begin{aligned}
p \vee r &\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2, \\
\neg q \vee r &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee r \\
&\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow M_2 \wedge M_6.
\end{aligned}$$

于是

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6.$$

习题4：主析取范式与主合取范式

例 16.2.3

求命题公式 $p \to q$ 的主析取范式与主合取范式.

解

本公式中含两个命题变项，所以极小项和极大项均含两个文字.

(1)

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow M_2. \qquad \text{(主合取范式)}$$

(2)

$$\begin{aligned} p \to q &\Leftrightarrow \neg p \vee q \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3. \qquad \text{(主析取范式)} \end{aligned}$$

由例 16.2.2 与例 16.2.3 可知，在求给定公式的主析取范式(主合取范式)时，一定要根据公式中命题变项的个数决定极小项(极大项)中文字的个数.

主析取范式的用途1

下面讨论主析取范式的用途(主合取范式可以进行类似讨论). 主析取范式像真值表一样,可以表达出公式以及公式之间关系的一切信息.

1. 求公式的成真赋值与成假赋值.

若公式 A 中含 n 个命题变项, A 的主析取范式含 $s, 0 \leqslant s \leqslant 2^n$, 个极小项,则 A 有 s 个成真赋值,它们是所含极小项下标的二进制表示,其余 $2^n - s$ 个赋值都是成假赋值.

例如,例 16.2.2 中, $(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$. 这里有 3 个命题变项,将主析取范式中各极小项的下标 $1, 3, 4, 7$ 写成长为 3 的二进制数,它们分别为 001, 011, 100, 111. 这 4 个赋值即为该公式的成真赋值. 而主析取范式中未出现的极小项 m_0, m_2, m_5, m_6 的下标的二进制表示 000, 010, 101, 110 为该公式的成假赋值.

又如例 16.2.3 中, $p \to q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$, 含两个命题变项,极小项的下标的二进制表示 00, 01, 11 为该公式的成真赋值,而 10 是它的成假赋值.

主析取范式的用途2

2. 判断公式的类型.

设公式 A 中含 n 个命题变项, 容易看出:

1. A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项.
2. A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项. 此时, 记 A 的主析取范式为 0.
3. A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式中至少含一个极小项.

例 16.2.4

用公式的主析取范式判断下述公式的类型.

1. $\neg(p \to q) \land q$.
2. $p \to (p \lor q)$.
3. $(p \lor q) \to r$.

例2.2.4解(续)

(3)

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \to r &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
&\quad \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7.
\end{aligned}
$$

该公式是可满足的,但不是重言式,因为它的主析取范式没含全部 8 个极小项.

例2.2.4解(续)

(2)

$$
\begin{aligned}
p \to (p \vee q) &\Leftrightarrow \neg p \vee p \vee q \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee (p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3.
\end{aligned}
$$

由于主析取范式含两个命题变项的全部 $2^2 = 4$ 个极小项,故该公式为重言式.
其实,以上演算在第一步就已知该公式等值于 1,因而它为重言式. 如果要写出它的主析取范式,由 1 可直接写出全部极小项.

$$
\begin{aligned}
p \to (p \vee q) &\Leftrightarrow \neg p \vee p \vee q \\
&\Leftrightarrow 1 \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3.
\end{aligned}
$$

主析取范式的用途3

3. 判断两个命题公式是否等值.

设公式 A, B 共含有 n 个命题变项, 按 n 个命题变项求出 A 与 B 的主析取范式 A' 与 B'. 若 $A' = B'$, 则 $A \Leftrightarrow B$, 否则 $A \not\Leftrightarrow B$.

例 16.2.5

判断下面两组公式是否等值.

1. p 与 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.
2. $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$.

解

(1) 这里有 2 个命题变项, 因而极小项含 2 个文字. 因为

$$\begin{aligned} p &\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow m_2 \vee m_3, \\ (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) &\Leftrightarrow m_2 \vee m_3, \end{aligned}$$

例2.2.5解(续)

所以

$$p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q).$$

(2) 这里有 3 个命题变项, 因而极小项含 3 个文字. 经过演算得到

$$\begin{aligned} (p \to q) \to r &\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7, \\ (p \wedge q) \to r &\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7. \end{aligned}$$

两者的主析取范式不同, 所以 $(p \to q) \to r \not\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$.

例 16.2.6

某科研所要从 3 名科研骨干 A, B, C 中挑选 1–2 名出国进修. 由于工作需要, 选派时要满足以下条件:

1. 若 A 去, 则 C 同去.
2. 若 B 去, 则 C 不能去.
3. 若 C 不去, 则 A 或 B 可以去.

问所里有哪些选派方案?

解

设 p : 派 A 去.

q : 派 B 去.

r : 派 C 去.

由已知条件可得公式

$$(p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg r \to (p \vee q)).$$

该公式的成真赋值即为可行的选派方案. 经过演算得到

$$\begin{aligned}
& (p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg r \to (p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & m_1 \vee m_2 \vee m_5,
\end{aligned}$$

故有 3 种选派方案:

1. C 去, A, B 都不去.
2. B 去, A, C 都不去.
3. A, C 同去, B 不去.

主析取范式的用途4

以上讨论了主析取范式的求法与用途，也可以对主合取范式做类似的讨论．关于主合取范式，还要说明以下两点．

1．由主析取范式求主合取范式．

设公式 A 含 n 个命题变项．A 的主析取范式含 $s, 0 < s < 2^n$，个极小项，即

$$A = m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s},\ 0 \leqslant i_j \leqslant 2^n - 1,\ j = 1, 2, \cdots, s.$$

没出现的极小项为 $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_{2^n-s}}$，它们的下标的二进制表示为 $\neg A$ 的成真赋值，因而 $\neg A$ 的主析取范式为

$$\neg A = m_{j_1} \vee m_{j_2} \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}.$$

由定理 16.2.4 可知

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \neg\neg A \\ &\Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}) \\ &\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{j_{2^n-s}} \\ &\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n-s}}. \end{aligned}$$

这就由公式的主析取范式直接求出它的主合取范式．

解

(1) 由题设可知，没出现在主析取范式中的极小项为 m_0 和 m_3，所以 A 的主合取范式中含 2 个极大项 M_0 与 M_3，故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_3.$$

(2) B 的主析取范式中没出现的极小项为 m_0, m_4, m_5, m_6, m_7，因而

$$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7.$$

主析取范式的用途5

2. 重言式与矛盾式的主合取范式.

矛盾式无成真赋值，因而矛盾式的主合取范式含全部 2^n 个极大项，这里 n 为公式中命题变项个数.

重言式无成假赋值，主合取范式不含任何极大项，规定重言式的主合取范式为 1.

至于可满足式，它的主合取范式中极大项的个数一定小于 2^n.

问题：n 个命题变项的主析取范式(主合取范式)共有多少个?

n 个命题变项共可产生 2^n 个极小项(极大项)，因而共可产生

$C(2^n,0)+C(2^n,1)+\cdots+C(2^n,2^n)=2^{2^n}$

个不同的主析取范式(主合取范式). 这与在 15.2 节中对真值表个数的讨论情况是一样的.

事实上，$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 与 B 有相同的真值表，又当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式(主合取范式). 因而可以说，真值表与主析取范式(主合取范式)是描述命题公式的两种等价的不同标准形式，两者可以相互确定，由 A 的主析取范式(主合取范式)可以立刻确定 A 的真值表，由 A 的真值表也可以立刻确定 A 的主析取范式(主合取范式).

命题逻辑公式的范式

- 利用真值表技术求主析取范式和主合取范式的方法：

①：选出公式的真值结果为真的所有行，在这样的行中，找到其每一个解释所对应的极小项，将这些极小项析取即可得到相应的主析取范式；

②：选出公式的真值结果为假的所有行，在这样的行中，找到其每一个解释所对应的极大项，将这些极大项合取即可得到相应的主合取范式。

利用真值表技术求主析取范式

表 15.2.1 $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$	
0	0	0	1	1	0	1	$m_0=(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
0	0	1	1	0	0	1	$m_1=(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
0	1	0	1	1	1	1	$m_2=(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
0	1	1	1	0	1	0	
1	0	0	0	1	0	1	$m_4=(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
1	0	1	0	0	0	1	$m_5=(p \wedge \neg q \wedge r)$
1	1	0	0	1	0	1	$m_6=(p \wedge q \wedge \neg r)$
1	1	1	0	0	0	1	$m_7=(p \wedge q \wedge r)$

主析取范式：$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

利用真值表技术求主合取范式

表 15.2.1 $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

$M_4=(p \vee \neg q \vee \neg r)$

主合取范式：$M_4=(p \vee \neg q \vee \neg r)$

CNF的命题，其永真性是可判定的

- 命题逻辑公式的合取范式（CNF）
  - $\ldots \wedge (L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n) \wedge \ldots$
  - L_i 是原子命题、或原子命题的否定
- $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ 的永真性是可判定的
  - $\vDash L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ *iff* 存在i和j, L_i是L_j的否定

⇒ 命题的永真性是可判定的⇒命题逻辑是可判定的

命题的表达能力

- n个变元的函数/命题表达式（假设变元有顺序）
  - 成真指派，按自然顺序排列，e.g. 001,011,100,111
  - 指派的个数为$(2\uparrow n)$，其子集有$2\uparrow(2\uparrow n)$ 个
  - 命题的DNF, e.g. $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

- 任何一个 $B^n\rightarrow B$ 的函数，都可以用命题表达式来表示

习题课-题型一：等值演算法证明重言式和矛盾式

1. 证明下列公式为重言式.

(1) $p \to (p \vee \neg q \vee r)$.

(2) $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$.

2. 证明下列公式为矛盾式.

(1) $\neg((p \vee q) \wedge \neg p \to q)$.

(2) $(\neg(p \to q) \wedge q) \wedge r$.

习题课-题型二：等值演算法证明等值式

证明下列等值式.

1. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$.

2. $q \rightarrow (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$.

题型三：主析取范式或主合取范式判断公式类型

1. 用主析取范式判断下列公式的类型,并对可满足式求成真赋值.

(1) $p \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$.

(2) $(p \vee q) \to (q \to p)$.

(3) $\neg(p \to r) \wedge r \wedge q$.

2. 用主合取范式判断第 1 题中 3 个公式的类型,并对可满足式求成假赋值.

题型四：用等值演算等求解实际问题

- 讨论派遣方案：某公司派小李或小张去上海出差．若派小李去，则小赵要加班．若派小张去，小王也得去．小赵没加班．问公司是如何派遣的．
  - p ：派小李去上海.
  - q ：派小张去上海.
  - r ：小赵要加班.
  - s ：派小王去上海.

(2) $A = (p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s) \wedge \neg r$.

(3) 先用等值演算法化简 A:

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s) \wedge \neg r &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee s) \wedge \neg r \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee s) && \text{(交换律)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s) && \text{(分配律、矛盾律)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s) && \text{(分配律、矛盾律)} \\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s && \text{(分配律、矛盾律)} \\
&\Leftrightarrow m_5.
\end{aligned}
$$

小测验

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

 (1) 设 A 为含命题变项 p,q,r 的重言式,则公式 $A \vee ((p \wedge q) \rightarrow r)$ 的类型为__________.

 (2) 设 B 为含命题变项 p,q,r 的矛盾式,则公式 $B \wedge ((p \leftrightarrow q) \rightarrow r)$ 的类型为__________.

 (3) 设 p,q 为命题变项,则 $(\neg p \leftrightarrow q)$ 的成真赋值为__________.

 (4) 设 p,q 为真命题,r,s 为假命题,则复合命题 $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow s)$ 的真值为__________.

 (5) 矛盾式的主析取范式为__________.

 (6) 设公式 A 含命题变项 p,q,r, 又已知 A 的主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_5$, 则 A 的主析取范式为__________.

2. 用等值演算法求公式的主析取范式或主合取范式(3 小题,每小题 10 分,共 30 分).

 (1) 求公式 $p \rightarrow ((q \wedge r) \wedge (p \vee (\neg q \wedge \neg r)))$ 的主析取范式.

 (2) 求公式 $\neg(\neg(p \rightarrow q)) \vee (\neg q \rightarrow \neg p)$ 的主合取范式.

 (3) 求公式 $((p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ 的主析取范式,再由主析取范式求出主合取范式.

3. 用真值表求公式 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ 的主析取范式(10 分).

4. 将公式 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 化成与之等值且仅含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的公式(10 分).

5. 用主析取范式判断 $\neg(p \leftrightarrow q)$ 与 $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$ 是否等值(10 分).

6. 用消解原理证明 $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ 是矛盾式(10 分).

作业1

3. 用等值演算法判断下列公式的类型，对不是重言式的可满足式，再用真值表法求出成真赋值.

(1) $\neg(p \wedge q \rightarrow q)$.

(2) $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee (p \rightarrow r)$.

(3) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$.

4. 用等值演算法证明下列等值式.

(1) $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

(2) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$.

(3) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

(4) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

5. 求下列公式的主析取范式，并求成真赋值.

(1) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$.

(2) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \wedge r)$.

(3) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

6. 求下列公式的主合取范式，并求成假赋值.

(1) $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$.

(2) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$.

(3) $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee r$.

7. 求下列公式的主析取范式，再用主析取范式求主合取范式.

(1) $(p \wedge q) \vee r$.

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$.

作业2

8. 求下列公式的主合取范式，再用主合取范式求主析取范式.

   (1) $(p \wedge q) \to q$.

   (2) $(p \leftrightarrow q) \to r$.

   (3) $\neg(r \to p) \wedge p \wedge q$.

9. 用真值表求下列公式的主析取范式.

   (1) $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge r)$.

   (2) $(p \to q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$.

10. 用真值表求下列公式的主合取范式.

    (1) $(p \wedge q) \vee r$.

    (2) $(p \to q) \wedge (q \to r)$.

11. 用真值表求下列公式的主析取范式和主合取范式.

    (1) $(p \vee q) \wedge r$.

    (2) $p \to (p \vee q \vee r)$.

    (3) $\neg(q \to \neg p) \wedge \neg p$.

12. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p,q,r，并且它的成真赋值为 000, 011, 110，求 A 的主合取范式和主析取范式.

13. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p,q,r，并且它的成假赋值为 010, 011, 110, 111，求 A 的主析取范式和主合取范式.

14. 已知公式 A 含 n 个命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，并且无成假赋值，求 A 的主合取范式.