

08 离散信号的傅里叶变换

傅里叶分析方法的“离散化”



傅里叶级数和傅里叶变换

- 傅里叶级数 (FS) , 针对连续周期信号

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

其中

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \end{aligned}$$

- 离散频谱

- 傅里叶变换 (FT) , 针对一般连续信号

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

- 逆变换

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 连续频谱

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散
傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散
傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

离散信号（序列）的傅里叶变换

- 傅里叶变换（FT），针对一般连续信号

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \mathcal{F}[x(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

- 逆变换

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

- 连续频谱

- 离散时间**傅里叶变换（DTFT）：

$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x[n]] &= X(e^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega} \end{aligned}$$

- 逆变换

$$\begin{aligned} \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})] &= x[n] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

- $X(e^{j\omega})$ 是复数，是以 2π 为周期的**周期函数**
- 收敛充分条件：能量受限或绝对可和

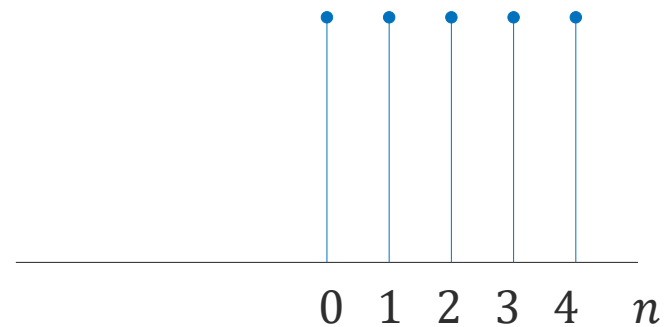
DTFT的计算

计算 $x[n] = u[n] - u[n - 5]$ 的傅里叶变换

- 根据定义

$$\text{DTFT}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^4 e^{-jn\omega} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\omega 2.5}}{e^{-j\omega 0.5}} \left(\frac{e^{j\omega 2.5} - e^{-j\omega 2.5}}{e^{j\omega 0.5} - e^{-j\omega 0.5}} \right) = e^{-j2\omega} \left[\frac{\sin(2.5\omega)}{\sin(0.5\omega)} \right]$$



DTFT的性质

- 时移

$$\text{DTFT}\{x[n - k_0]\} = e^{-j\omega k_0} X(e^{j\omega})$$

- 频移

$$\text{DTFT}\{e^{-j\omega_0 n} x[n]\} = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

- 能量定理

$$\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

- 时域卷积

$$\text{DTFT}\{x[n] * h[n]\} = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- 频域卷积

$$\text{DTFT}\{x[n]h[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$$

- 频域微分

$$\text{DTFT}\{nx[n]\} = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

DTFT的性质

- $X(e^{j\omega}) = 1 - \frac{j\omega}{\pi} \quad |\omega| \leq \pi, \text{ 求 } x[n]$

- 令

$$G(e^{j\omega}) = \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \begin{cases} 1/\pi & -\pi \leq \omega < 0 \\ -1/\pi & 0 < \omega \leq \pi \end{cases}$$

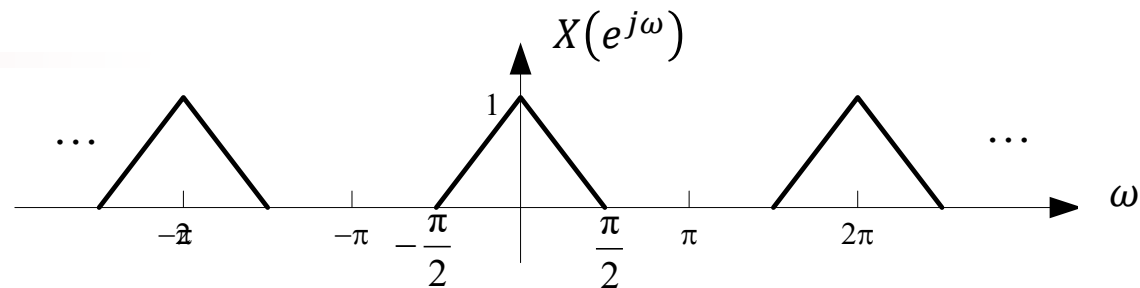
$$g[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = -\frac{j}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sin n\omega d\omega = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ j\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n}\right] & n \neq 0 \end{cases}$$

- 利用频域微分特性

$$x[n] = \frac{jg[n]}{n} = \begin{cases} 0 & n = \text{even} \\ 2/(\pi^2 n^2) & n = \text{odd} \end{cases}$$

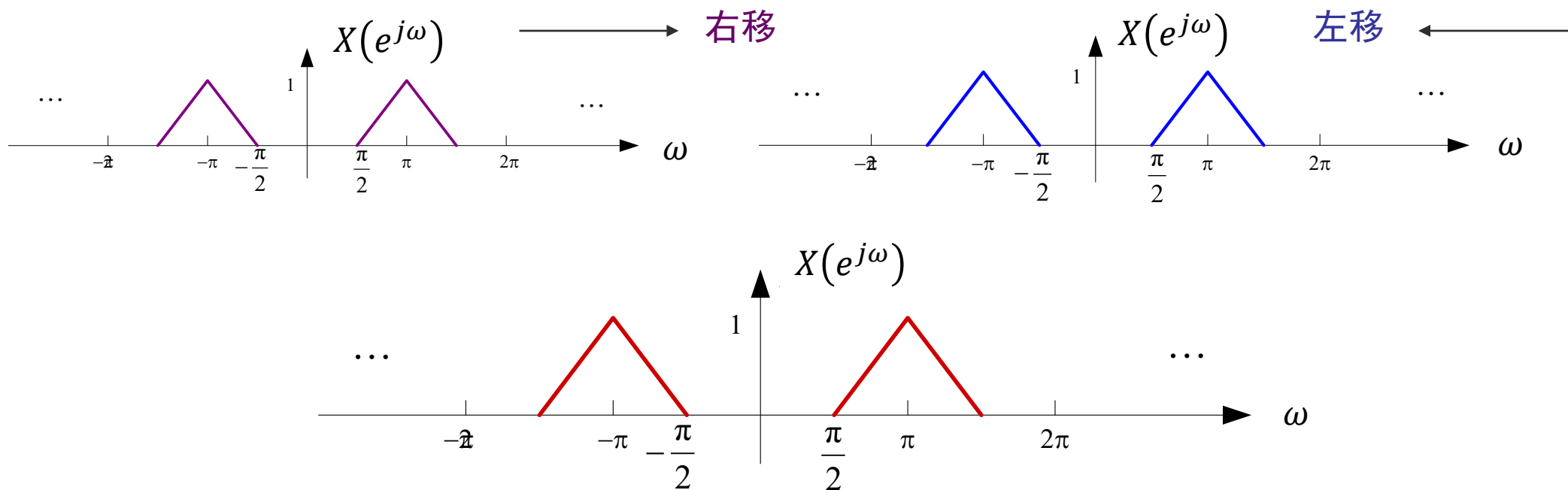
DTFT的性质

已知 $x[n]$ 的频谱如图，试求 $\text{DTFT}\{x[n] \cos(\pi n)\}$



- 利用频移特性，可得

$$\text{DTFT}\{x[n] \cos(\pi n)\} = [X(e^{j(\omega-\pi)}) + X(e^{j(\omega+\pi)})]/2$$



概要

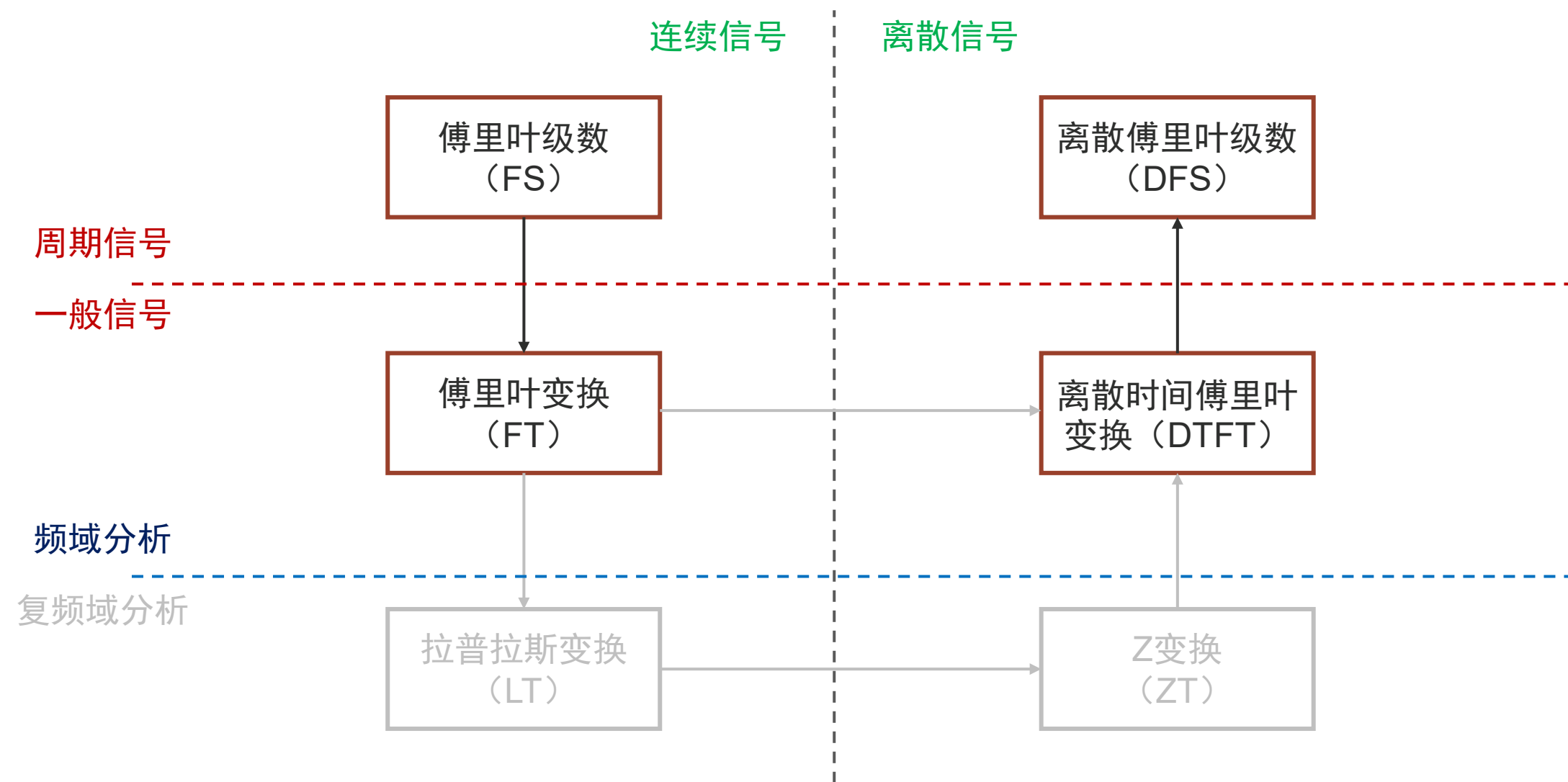
1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散
傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

几类变换之间的关系



离散傅里叶级数

- 连续周期信号的傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega t}$$

$$X_k = \frac{\langle x, e^{jk\omega t} \rangle}{\langle e^{jk\omega t}, e^{jk\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$$

- 离散正交基？

$$e^{jk\omega n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- 周期为 N 的序列 $\tilde{x}[n]$ 可分解为基本序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 的和

$$\tilde{x}[n] = \sum_k \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- 周期序列 $\tilde{x}[n]$ 使用周期序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ 的各次谐波表示

- $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 是关于 n 的周期函数，周期为 N

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}(n+mN)k} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{j2\pi mk}$$

- $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 是关于 k 的周期函数，周期为 N

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{j2\pi ln}$$

离散傅里叶级数

- 周期为 N 的序列 $\tilde{x}[n]$ 可分解为基本序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 的和

- 只用一个周期信息表示

- DFS:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\tilde{X}[k] = \text{DFS}(\tilde{x}[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

- IDFS:

$$\tilde{x}[n] = \text{IDFS}(\tilde{X}[k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

DFS只有 N 个不同的数值

- 整体记为

$$\tilde{x}[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$$

常用离散周期序列的频谱

- 周期单位脉冲序列 $\delta_N[n]$

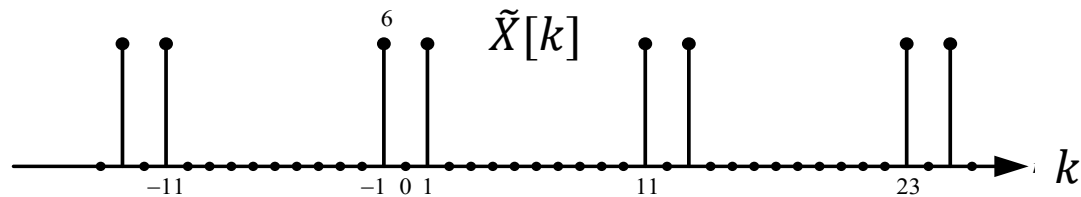
$$\tilde{X}[k] = \text{DFS}\{\delta_N[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n] W_N^{kn} = 1$$

- 正弦序列

- 周期序列 $\tilde{x}[n] = \cos(\pi n/6)$ 的频谱, $N = 12$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi n}{12}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi n}{12}} = \frac{1}{12} (6W_{12}^k + 6W_{12}^{-k})$$

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 6 & k = \pm 1 \\ 0 & -5 \leq k \leq 6, k \neq \pm 1 \end{cases} \quad \tilde{X}[k] = \begin{cases} 6 & k = 1, 11 \\ 0 & 2 \leq k \leq 10, k = 0 \end{cases}$$



常用离散周期序列的频谱

求周期为4序列 $\tilde{x}_4[n] = \{\dots, 1, 1, -1, 1, \dots\}$ 的频谱

- 根据定义

$$\tilde{X}[k] = \text{DFS}(\tilde{x}_N[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- $\tilde{X}[0] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1] + \tilde{x}_4[2] + \tilde{x}_4[3] = 2$
- $\tilde{X}[1] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}} + \tilde{x}_4[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + \tilde{x}_4[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3} = 2$
- $\tilde{X}[2] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + \tilde{x}_4[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 4} + \tilde{x}_4[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 6} = -2$
- $\tilde{X}[3] = \tilde{x}_4[0] + \tilde{x}_4[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3} + \tilde{x}_4[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 6} + \tilde{x}_4[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 9} = 2$

DFS的性质

- 线性特性

$$DFS\{a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]\} = aDFS\{\tilde{x}_1[n]\} + bDFS\{\tilde{x}_2[n]\}$$

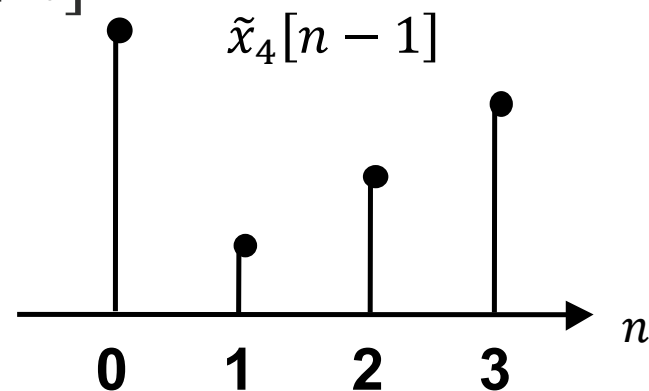
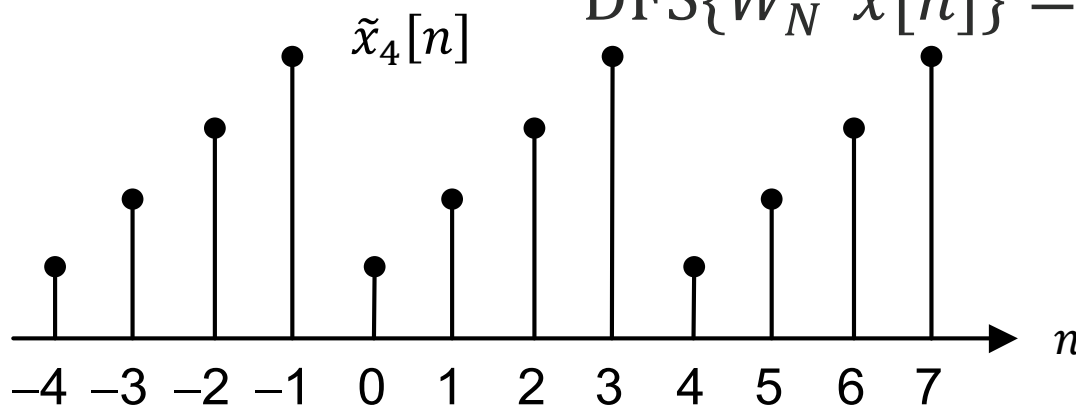
- 位移特性

- 时域位移

$$DFS\{\tilde{x}[n + m]\} = W_N^{-km} \tilde{X}[k]$$

- 频域位移

$$DFS\{W_N^{ln} \tilde{x}[n]\} = \tilde{X}[m + l]$$



DFS的性质

- 对称性

$$DFS\{\tilde{x}^*[n]\} = \tilde{X}^*[-k], \quad DFS\{\tilde{x}^*[-n]\} = \tilde{X}^*[k]$$

- $\tilde{x}[n]$ 为实序列, $\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$
- $\tilde{x}[n]$ 为偶对称实序列, $\tilde{X}[k]$ 为偶对称实序列
- $\tilde{x}[n]$ 为奇对称实序列, $\tilde{X}[k]$ 为奇对称虚序列 (实部为零)
- 偶对称: $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[-n] = \tilde{x}[N - n]$
- 奇对称: $\tilde{x}[n] = -\tilde{x}[-n] = -\tilde{x}[N - n]$

DFS的性质

- 周期卷积定理

$$\text{DFS}\{\tilde{x}_1[n] \tilde{*} \tilde{x}_2[n]\} = \text{DFS}\{\tilde{x}_1[n]\} \text{DFS}\{\tilde{x}_2[n]\}$$

$$\text{DFS}\{\tilde{x}_1[n] \cdot \tilde{x}_2[n]\} = \frac{1}{N} \text{DFS}\{\tilde{x}_1[n]\} \tilde{*} \text{DFS}\{\tilde{x}_2[n]\}$$

- 周期卷积的结果一般和线性卷积不同
- 通过对序列补零可使周期卷积的结果和线性卷积的结果相同

概要

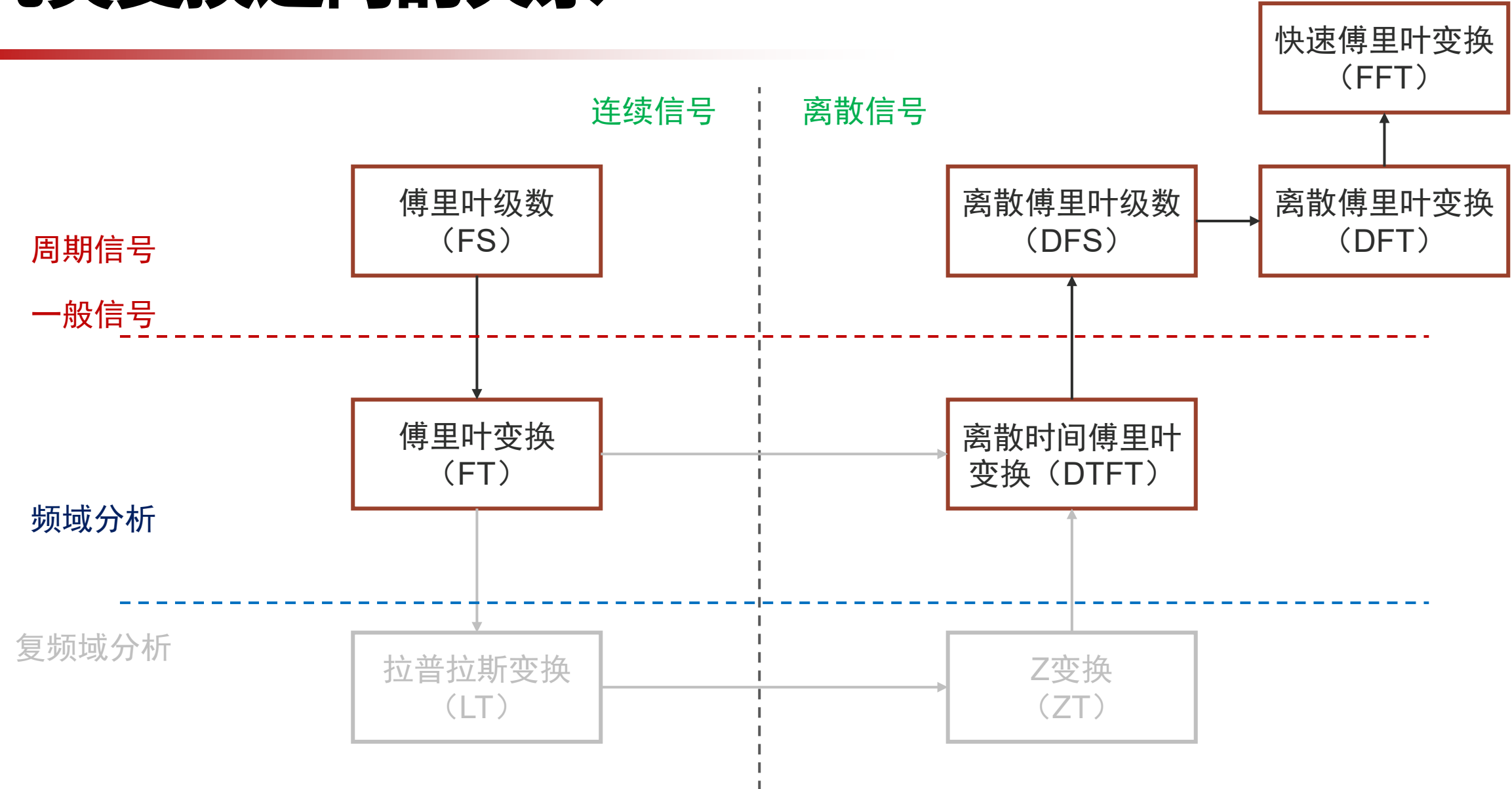
**1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号**

**2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散
傅里叶级数**

**3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理**

**4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本**

几类变换之间的关系



四类信号的傅里叶变换

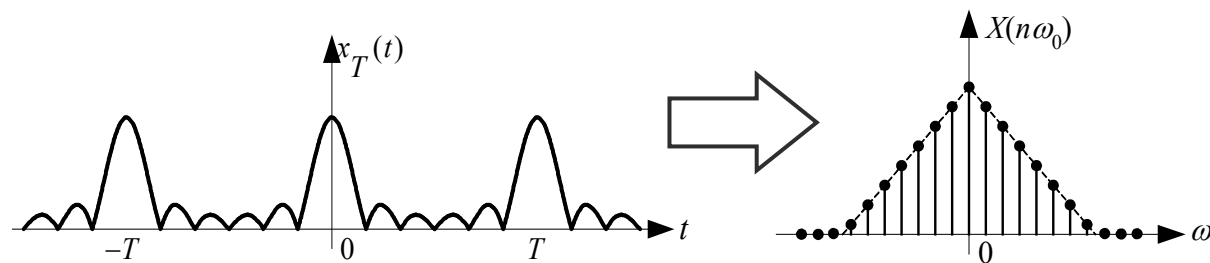
连续信号

周期为 T 的连续时间周期信号（频谱离散非周期）

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

周期信号

$$X_n = X(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

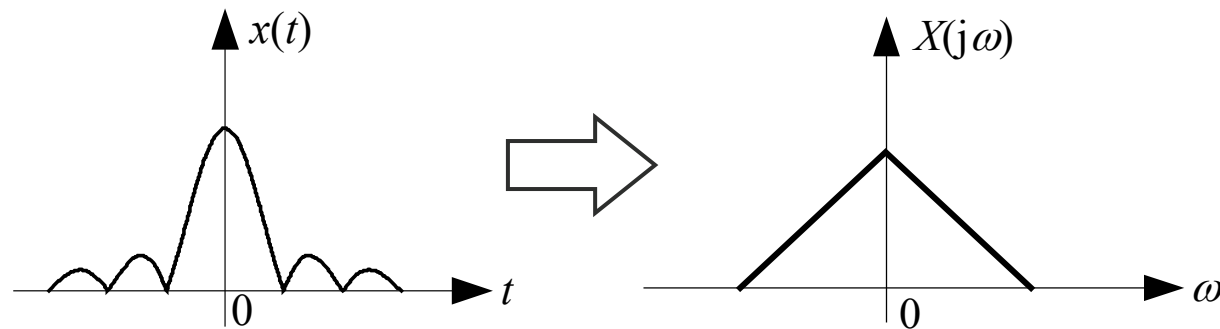


非周期信号

连续时间非周期信号（频谱连续非周期）

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$



四类信号的傅里叶变换

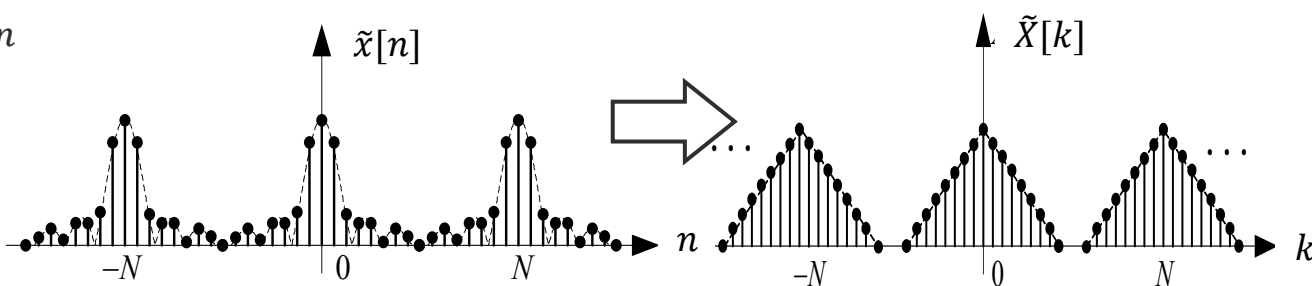
离散信号

周期为 N 的**离散周期**信号（频谱**周期**为 N 的**离散谱**）

$$\tilde{x}[n] = \text{IDFS}\{\tilde{X}[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

周期信号

$$\tilde{X}[k] = \text{DFS}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

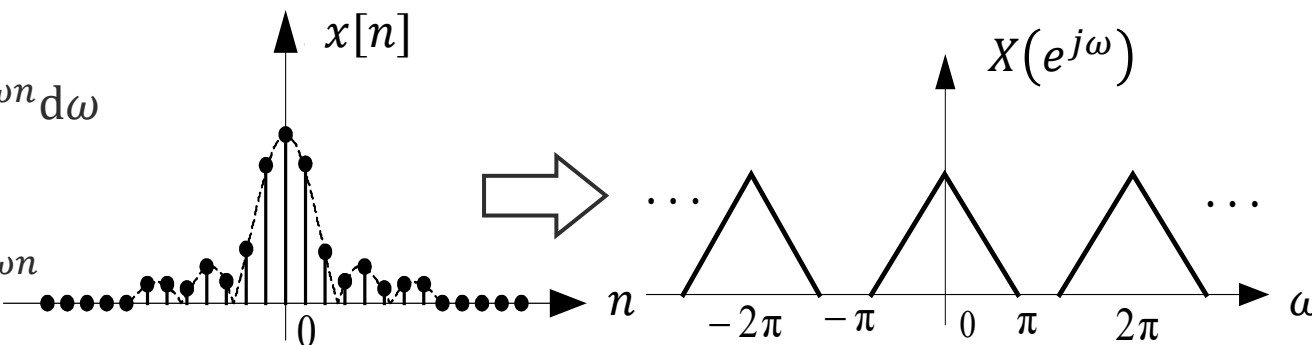


非周期信号

离散非周期信号（频谱**周期**为 2π 的**连续谱**）

$$x[n] = \text{IDTFT}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$



四类信号的傅里叶变换

连续信号

周期为 T 的连续时间周期信号（频谱离散非周期）

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

周期信号

$$X_n = X(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

非周期信号

连续时间非周期信号（频谱连续非周期）

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

离散信号

周期为 N 的离散周期信号（频谱周期为 N 的离散谱）

$$\tilde{x}[n] = \text{IDFS}\{\tilde{X}[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \text{DFS}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

离散非周期信号（频谱周期为 2π 的连续谱）

$$x[n] = \text{IDTFT}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

信号的数字处理

- 信号的计算机处理

- 输入、输出为**离散**信号
- 何种变换满足输入输出离散条件？



输入为离散信号 $x[n]$

⇒ 基于DTFT，输出为**连续**频谱

输出为离散（周期）信号 $X[k]$

⇒ 基于DFS，输入为离散**周期**信号

输入非周期序列，计算机计算时，当作由 $x[n]$ 延拓的周期序列处理

离散傅里叶变换

- 基于主值序列定义长度为 N （非周期）序列的离散傅里叶变换（DFT）

- DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- 表示为

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}, \quad x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\}$$

离散傅里叶变换

$x[n] = \delta[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$, 求 N 点序列 $x[n]$ 的DFT

▪ 根据DFT定义

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{nk} = 1, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

$x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N}n)$, $0 \leq n \leq N - 1$, 求 N 点DFT

▪ 根据

$$x[n] = \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{N}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n} \right)$$

$$\text{可得 } X[k] = \begin{cases} N/2 & k = 1, N - 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

离散傅里叶变换

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

求有限长4点序列 $x[n] = \{1, 1, -1, 1\}$ 的DFT

■ 根据

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$$

有

$$X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 2$$

$$X[1] = x[0] + x[1]W_4^1 + x[2]W_4^2 + x[3]W_4^3 = 2$$

$$X[2] = x[0] + x[1]W_4^2 + x[2]W_4^4 + x[3]W_4^6 = -2$$

$$X[3] = x[0] + x[1]W_4^3 + x[2]W_4^6 + x[3]W_4^9 = 2$$

因此 $X[k] = \{2, 2, -2, 2\}$, $k = 0, 1, 2, 3$

■ 使用矩阵方式表示左侧计算过程

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

DFT的矩阵表示

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

求有限长4点序列 $x[n] = \{1, 1, -1, 1\}$ 的DFT

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■ 因此 $X[k] = \{2, 2, -2, 2\}$, $k = 0, 1, 2, 3$

■ 设

$$\mathbf{X} = [X[0] \quad X[1] \quad \cdots \quad X[N-1]]^T,$$

$$\mathbf{x} = [x[0] \quad x[1] \quad \cdots \quad x[N-1]]^T,$$

■ DFT矩阵形式为

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \mathbf{x}$$

$$\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix}$$

DFT、DFS、DTFT的关系

- DFT可以看成是截取DFS的主值序列构成的变换对

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{x}[n] \cdot R_N[n]$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{X}[k] \cdot R_N[k]$$

- 其中

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

- $x[n]$ 的DFT $X[k]$ 是其DTFT $X(e^{j\omega})$ 在一个周期 $[0, 2\pi)$ 的等间隔抽样

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\omega}$$

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT的周期性

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- (隐藏的) 周期性
- $X[k]$ 的周期为 N

$$X[k + N] = X[k]$$

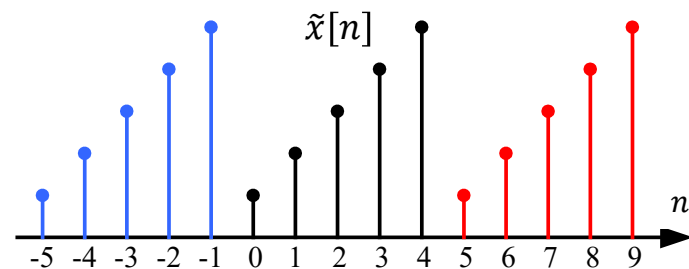
- $x[n]$ 的周期为 N

$$x[n + N] = x[n]$$

离散傅里叶变换的性质

- 线性：需将较短序列补零后，再按长序列的点数做DFT

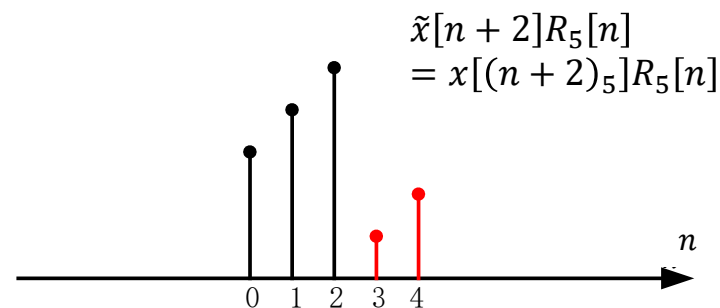
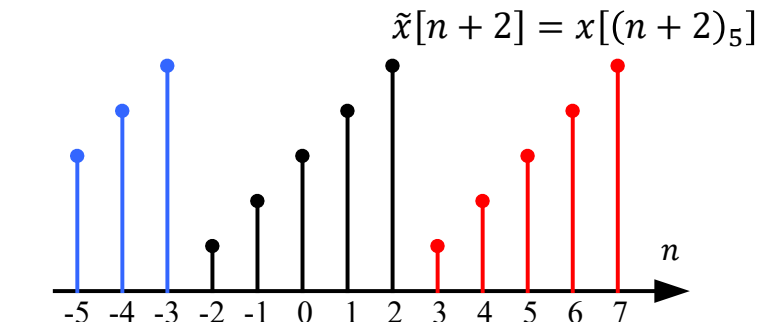
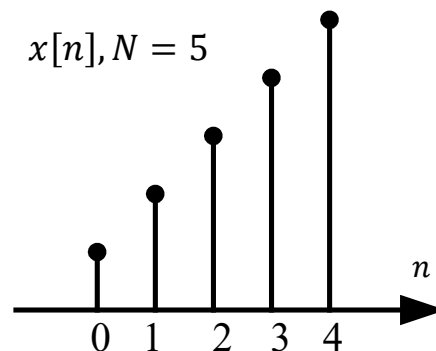
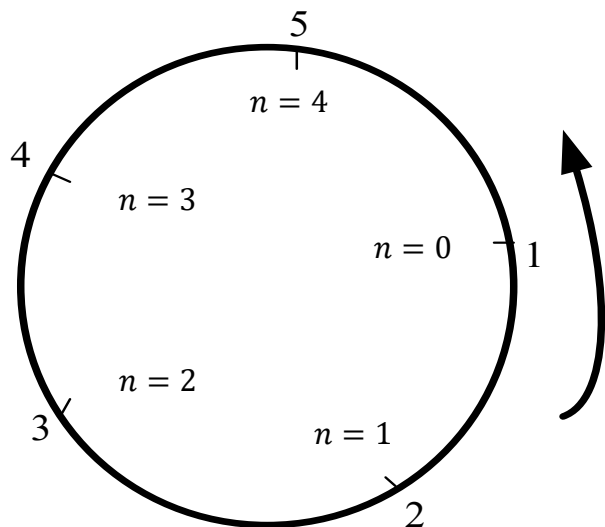
$$\text{DFT}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\text{DFT}\{x_1[n]\} + b\text{DFT}\{x_2[n]\}$$



- DFT循环位移特性

$$y[n] = x[(n \pm m)_N]R_N[n]$$

- 序列周期延拓
- 周期序列移位
- 抽取主值序列



离散傅里叶变换的性质

- DFT循环位移特性
 - **时域**的循环位移对应频域的相移

$$\text{DFT}\{x[(n + m)_N]\} = W_N^{-mk} X[k]$$

$$\text{DFT}\{x[(n - m)_N]\} = W_N^{mk} X[k]$$

- 时域的相移对应**频域**的循环位移

$$\text{DFT}\{W_N^{ln} x[n]\} = X[(k + l)_N]$$

$$\text{DFT}\{W_N^{-ln} x[n]\} = X[(k - l)_N]$$

离散傅里叶变换的性质

- 序列的循环卷积

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[(k)_N] x_2[(n-k)_N] R_N[n]$$

离散傅里叶变换的性质

- 若 $x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k], x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_2[k]$

- 时域卷积定理

- 时域的**循环卷积**对应频域的乘积

$$\text{DFT}\{x_1[n] \circledast x_2[n]\} = X_1[k] \cdot X_2[k]$$

- 频域卷积定理

- 时域的乘积对应频域的**循环卷积**

$$\text{DFT}\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} = \frac{1}{N} X_1[k] \circledast X_2[k]$$

卷积和循环卷积

$x_1[n] = \{1, 1, 1\}$, $x_2[n] = \{1, 1, 0, 1\}$, 计算

- (1) $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积;

$$x_1[n] * x_2[n] = [1, 2, 2, 2, 1, 1]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1[n] = \{1, 1, 1\}$, $x_2[n] = \{1, 1, 0, 1\}$, 计算

- (2) $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的4点**循环卷积** $y[n]$;

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] \\ x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

卷积和循环卷积

$x_1[n] = \{1, 1, 1\}$, $x_2[n] = \{1, 1, 0, 1\}$, 计算

- (3) $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的5点、6点和7点循环卷积

- $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的5点循环卷积 $y_5[n]$ 为

$$y_5[n] = \{2, 2, 2, 2, 1\}$$

- $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的6点循环卷积 $y_6[n]$ 为

$$y_6[n] = \{1, 2, 2, 2, 1, 1\}$$

和线性卷积结果一致

- $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的7点循环卷积 $y_7[n]$ 为

$$y_7[n] = \{1, 2, 2, 2, 1, 1, 0\}$$

卷积的矩阵表示

■ 线性卷积的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & & & & & \\ x_1[1] & x_1[0] & & & & \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & & & \\ 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & & \\ 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & \\ 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

卷积的矩阵表示

4点循环卷积的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[3] \\ x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6点循环卷积的矩阵表示

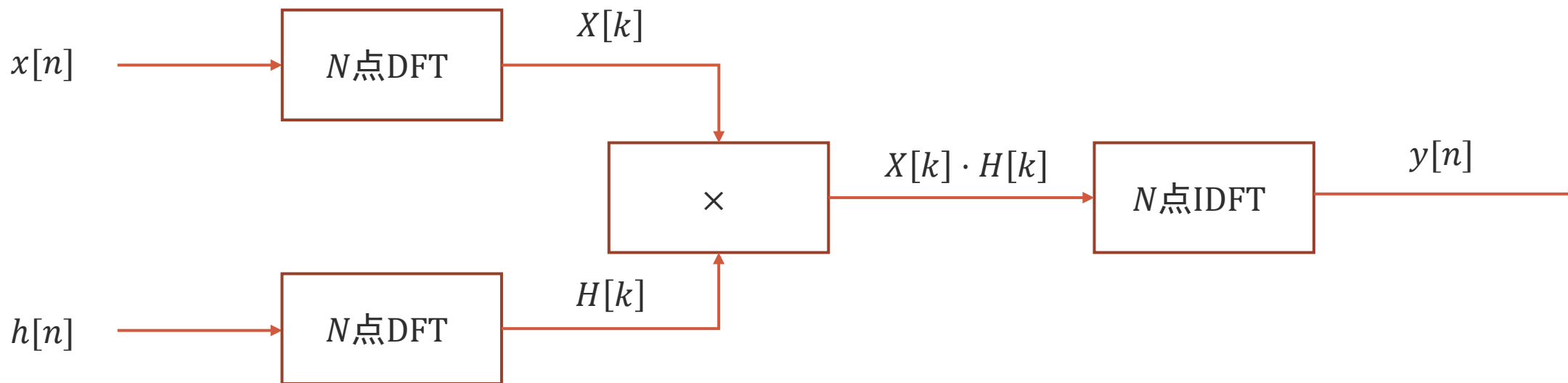
$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[0] & 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 & 0 & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \\ x_2[4] \\ x_2[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基于DFT的卷积计算

- 利用DFT计算长为 M, L 序列的卷积（输出长度为 $M + L - 1$ ）

$$y[n] = \text{IDFT}[X[k] \cdot H[k]] = x[n] * h[n]$$

- 对 $x[n], h[n]$ 补零到长度为 N ，做 N 点DFT
- 在频域做乘积得到 $Y[k]$
- 对 $Y[k]$ 做IDFT



DFT的计算

- 利用MATLAB由DFT计算 $x[n] * h[n]$. $x[n] = [1, 2, 0, 1]$, $h[k] = [2, 2, 1, 1]$
- % Calculate Linear Convolution by DFT
- $x = [1 \ 2 \ 0 \ 1];$
- $h = [2 \ 2 \ 1 \ 1];$
- % determine the length for zero padding
- $L = \text{length}(x) + \text{length}(h) - 1;$
- % Compute the DFTs by zero-padding
- $XE = \text{fft}(x, L);$
- $HE = \text{fft}(h, L);$
- % Determine the IDFT of the product
- $y1 = \text{ifft}(XE .* HE);$

概要

1. 序列的傅里叶变换：
傅里叶变换用于离散信号

2. 离散信号的频域分析：
从离散时间傅里叶变换到离散
傅里叶级数

3. 离散傅里叶变换：
离散变换的数字化处理

4. 快速傅里叶变换：
离散傅里叶变换的加速版本

离散傅里叶变换

- 基于主值序列定义长度为 N （非周期）序列的离散傅里叶变换（DFT）

- DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- 表示为

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}, \quad x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\}$$

DFT和IDFT有相同的时间复杂度，且只包含加法和乘法

离散傅里叶变换的复杂度

- $N = 4$ 点序列[2, 3, 3, 2] DFT的计算复杂度

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[0] = x[0]W_N^0 + x[1]W_N^0 + x[2]W_N^0 + x[3]W_N^0 = 10$$

$$X[1] = x[0]W_N^0 + x[1]W_N^1 + x[2]W_N^2 + x[3]W_N^3 = -1 - j$$

$$X[2] = x[0]W_N^0 + x[1]W_N^2 + x[2]W_N^4 + x[3]W_N^6 = 0$$

$$X[3] = x[0]W_N^0 + x[1]W_N^3 + x[2]W_N^6 + x[3]W_N^9 = -1 + j$$

- 复数加法 $N(N-1)$; 复数乘法 N^2

降低DFT计算量的思路

- 将长序列DFT分解为短序列的DFT
- 利用旋转因子 W_N^{nk} 的周期性、对称性、可约性

- 周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k}$$

- 对称性

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k}$$

- 可约性

$$W_N^{nk} = W_{\frac{N}{m}}^{\frac{nk}{m}}, \quad N/m \text{ 为整数}$$

- 特殊值

$$W_N^0 = 1; \quad W_N^{\frac{N}{2}} = -1; \quad W_N^{\frac{N}{4}} = -j; \quad W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$$

离散傅里叶变换的复杂度

- $N = 4$ 点序列[2, 3, 3, 2] DFT的计算复杂度

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[0] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot 1 + x[2] \cdot 1 + x[3] \cdot 1 = 10$$

$$X[1] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot W_4^1 + x[2] \cdot -1 + x[3] \cdot -W_4^1 = -1 - j$$

$$X[2] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot -1 + x[2] \cdot 1 + x[3] \cdot -1 = 0$$

$$X[3] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot -W_4^1 + x[2] \cdot -1 + x[3] \cdot -W_4^1 = -1 + j$$

降低DFT计算量的思路

- 将时域序列逐次分解为一组**子序列**，利用旋转因子的特性，由**子序列**的DFT来实现整个序列的DFT
- 基2时间抽取(Decimation in time)FFT算法

$$x[n] \rightarrow \begin{cases} x[2r] \\ x[2r + 1] \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

- 基2频率抽取(Decimation in frequency)FFT算法

$$X[k] \rightarrow \begin{cases} X[2m] \\ X[2m + 1] \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

基2时间抽取FFT算法推导

$$X[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{km}$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rm} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)m} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rm} + W_N^m \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rm}$$

$$\text{记 } X_1[m] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rm} \quad X_2[m] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rm}$$

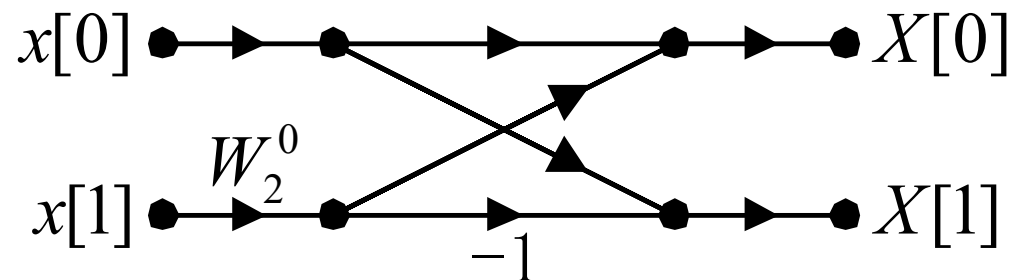
- 因此
- $X[m] = X_1[m] + W_N^m X_2[m]$
- $X[m + N/2] = X_1[m] - W_N^m X_2[m], \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

2点基2时间抽取FFT算法流图

- $N = 2, \quad x[n] = [x[0], x[1]]$
- 则

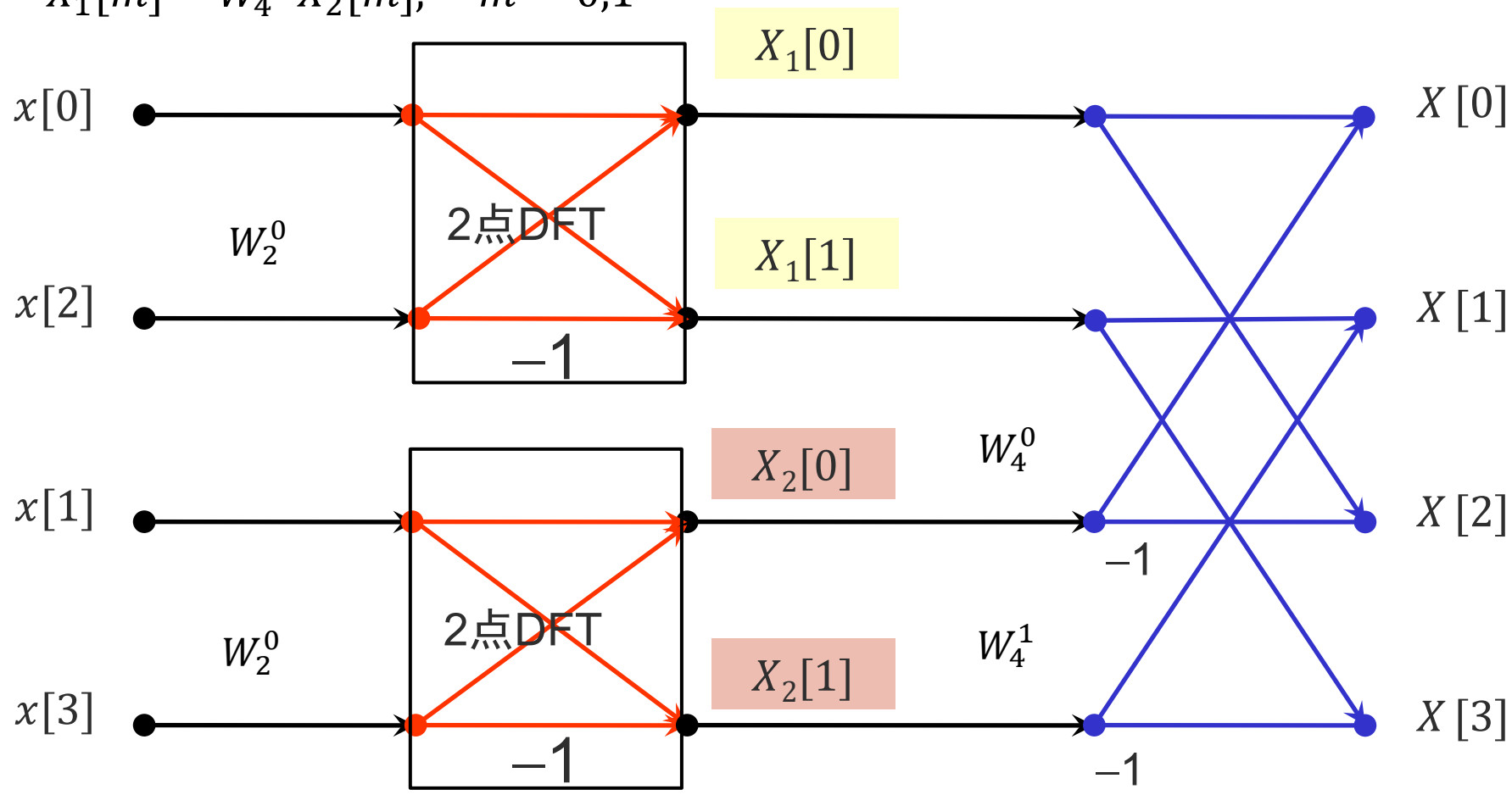
$$X[0] = x[0] + W_2^0 x[1]$$

$$X[1] = x[0] + W_2^1 x[1] = x[0] - W_2^0 x[1]$$



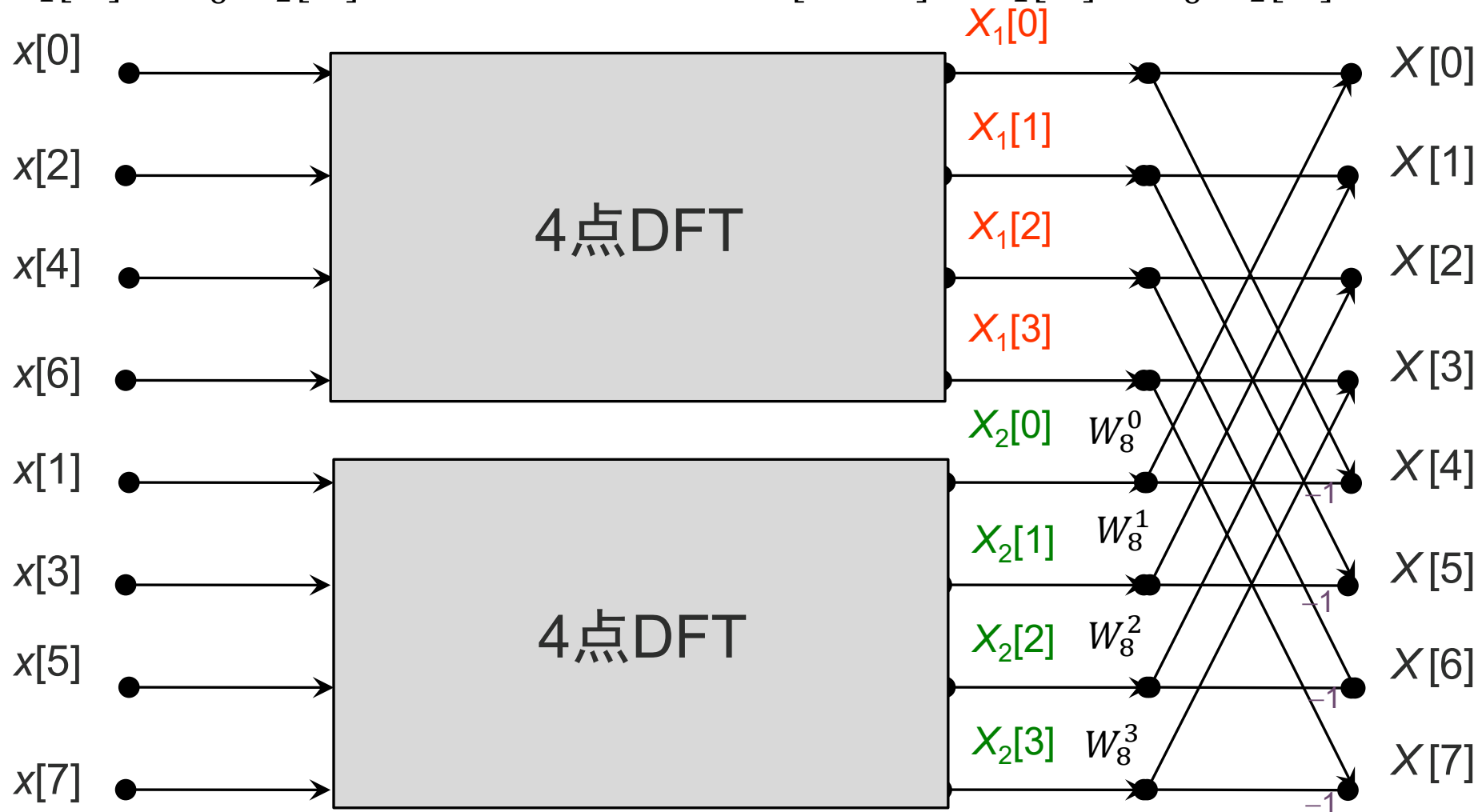
4点基2时间抽取FFT算法流图

- $X[m] = X_1[m] + W_4^m X_2[m], \quad m = 0, 1$
- $X[m + 2] = X_1[m] - W_4^m X_2[m], \quad m = 0, 1$

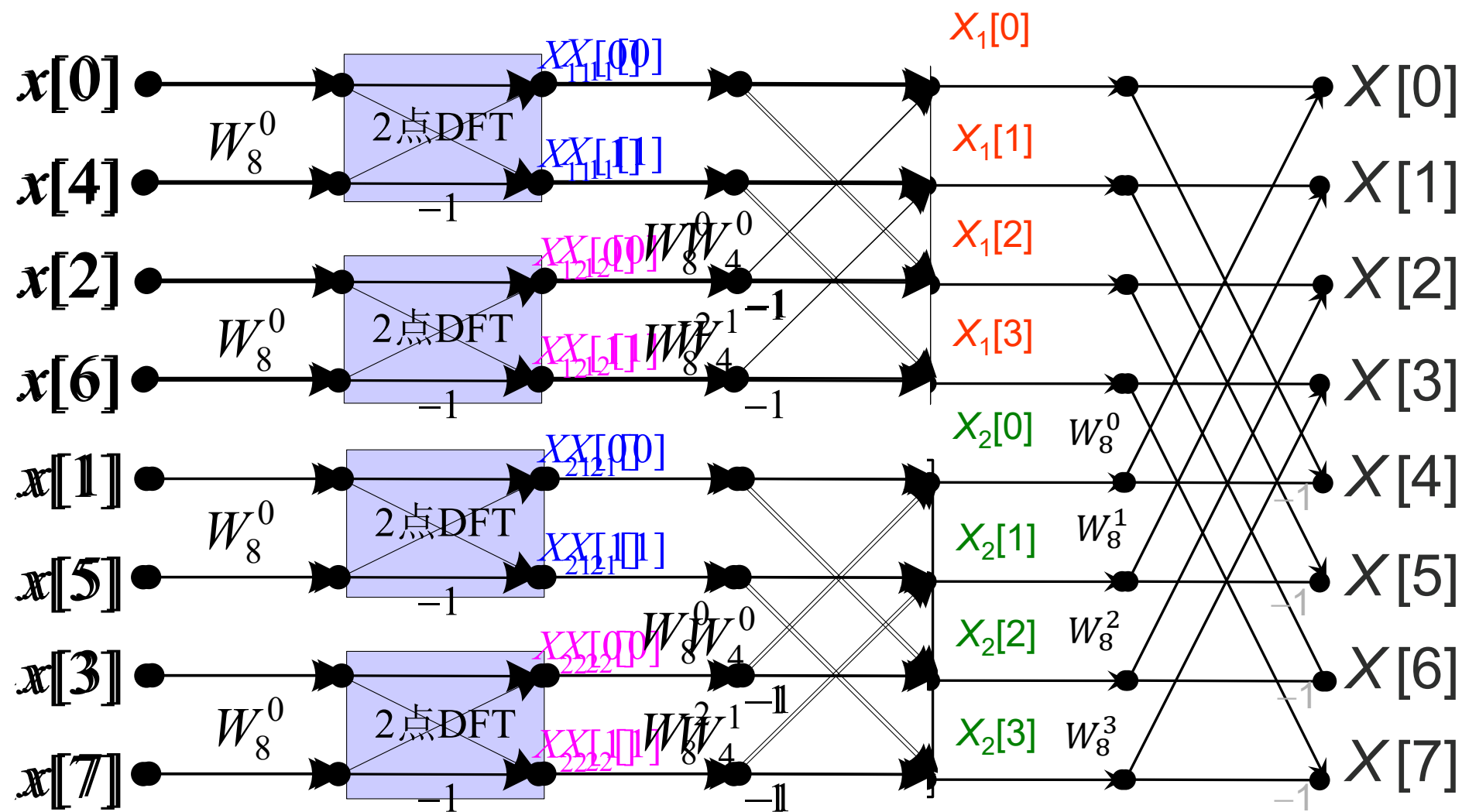


8点基2时间抽取FFT算法流图

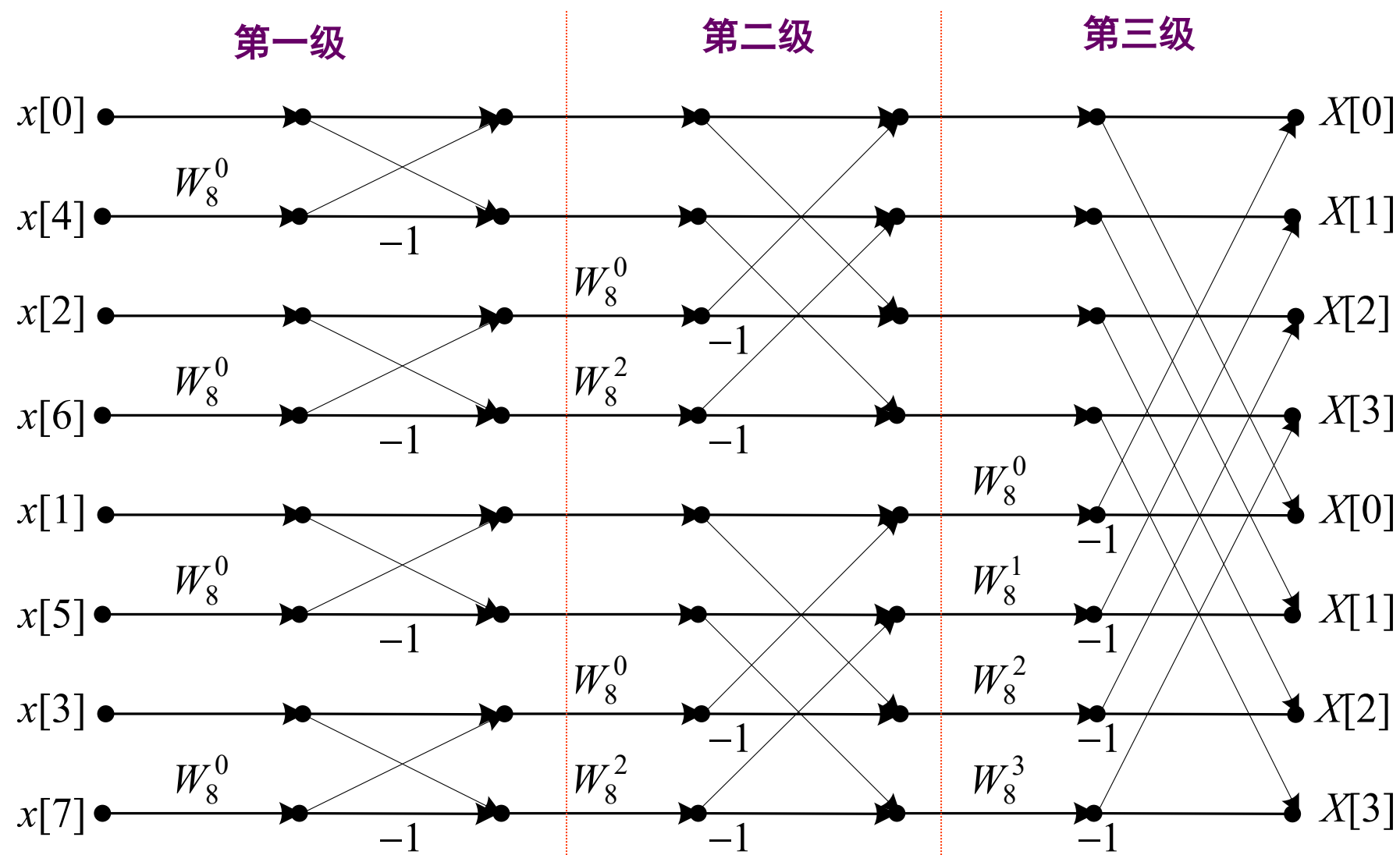
- $X[m] = X_1[m] + W_8^m X_2[m], \quad m = 0,1,2,3;$ $X[m+4] = X_1[m] - W_8^m X_2[m], \quad m = 0,1,2,3$



8点基2时间抽取FFT算法流图



8点基2时间抽取FFT算法流图

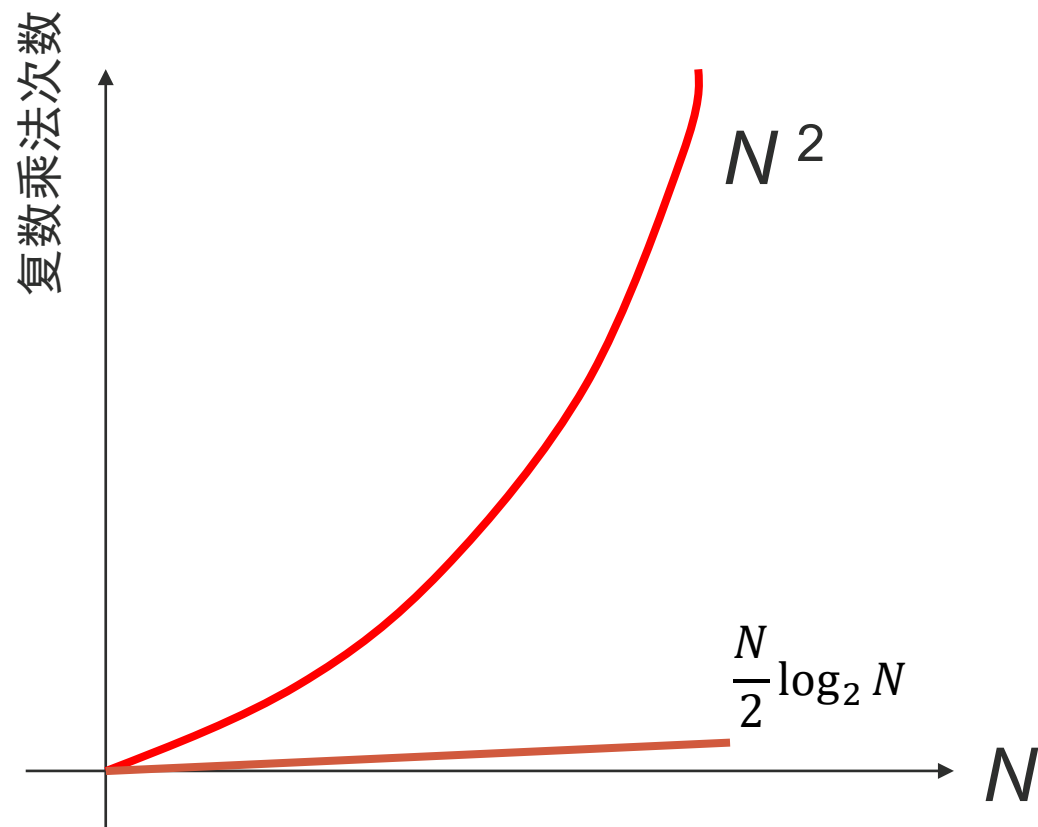


FFT算法流图旋转因子 W_N^P 规律

- 第一级的蝶形系数均为 W_N^0 ，蝶形节点的距离为1
- 第二级的蝶形系数为 $W_N^0, W_N^{N/4}$ ，蝶形节点的距离为2
- 第三级的蝶形系数为 $W_N^0, W_N^{N/8}, W_N^{2N/8}, W_N^{3N/8}$ ，蝶形节点的距离为4
- 第M级的蝶形系数为 $W_N^0, W_N^1, \dots, W_N^{(N/2-1)}$ ，蝶形节点的距离为 $N/2$

算法的计算复杂度

- FFT 复数乘法次数 $\frac{N}{2} \log_2 N$



FFT计算

- 利用 $N = 4$ 基2时间抽取的FFT流图计算8点序列 $x[n] = [1, -1, 1, -1, 2, 1, 1, 2]$ 的DFT。
- 根据基2时间抽取FFT算法原理，8点序列的DFT $X[k]$ 可由两个4点序列的DFT $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 表达。

如果按照序列 $x[n]$ 序号的奇偶分解为 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ ，则存在

$$\begin{aligned} X[k] &= X_1[k] + W_8^k \cdot X_2[k] \\ X[k + 4] &= X_1[k] - W_8^k \cdot X_2[k] \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

其中 $x_1[n] = [1, 1, 2, 1]$ ， $x_2[n] = [-1, -1, 1, 2]$ ， $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$ 可通过4点的FFT来计算。

利用FFT实现IFFT

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] W_N^{kn} \right)^*$$

- (1) 将 $X[m]$ 取共轭
- (2) 用FFT流图计算 $\text{DFT}\{X^*[m]\}$
- (3) 对步骤(2)中结果取共轭并除以 N