南京大学智能科学与技术学院
最优化方法导论期中试卷

院 (系) ____________ 班级 ____________ 姓名 ____________ 学号 ____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	满分
得分									

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

1. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空凸集, f 是定义在 D 上的凸函数, α 是一个实数, 则水平集 $D_\alpha=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in D, f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha\}$ 是凸集. (10 分)

2. 用定义验证下列各集合是凸集: (1) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1+2x_2\geqslant 1, x_1-x_2\geqslant 1\}$; (2) $S=\{(x_1,x_2)\,|x_2\geqslant|\,x_1\,|\}$; (3) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 10\}$. (10 分)

3.$f(x)$ 为凸函数的充要条件是对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, 一元函数 $\varphi(\alpha) = f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y})$ 是关于 α 的凸函数. (10 分)

4. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数, $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是非负数, 且满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$, 证明:

$$f\left(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \cdots + \lambda_k x^{(k)}\right) \leqslant \lambda_1 f\left(x^{(1)}\right) + \lambda_2 f\left(x^{(2)}\right) + \cdots + \lambda_k f\left(x^{(k)}\right).$$

(10 分)

5. 试判定下述非线性规划是否为凸规划:

(1) $\begin{cases} \min f(X)=x_1^2+x_2^2+8 \\ x_1^2-x_2\geq 0 \\ -x_1-x_2^2+2=0 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \min f(X)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2 \\ x_1^2+x_2^2\leq 4 \\ 5x_1^2+x_3=10 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \max \quad f(X)=x_1+x_2 \\ \text{s.t.} \begin{cases} x_1^2+x_2^2\leqslant 1 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases} \end{cases}$ (15 分)

6. 试证明在一个集合上最小化一个线性函数等价于在其凸包上最小化该函数, 即:

$$\inf_{x\in conv(X)} c'x = \inf_{x\in X} c'x,$$

其中 $X \subset R^n$ 和 $c \in R^n$。此外，当且仅当等式右侧的下确界可以达到时，等式左侧的下确界才能达到。(15 分)

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

7. 令函数 $f : R^n \to R$ 满足

$$f(x) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$$

其中 $1 < p$。请证明上述函数的共轭函数为

$$f^{\star}(y) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q,$$

其中 q 的定义如下

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(15 分)

8. 令 C 为一个在 R^n 上的非空闭合凸锥，令 $x \in R^n$。试证明当且仅当 $\hat{x} \in C, (x-\hat{x})'\hat{x} = 0, x - \hat{x} \in C^\star$ 时，$\hat{x}$ 是 x 在 C 上的投影。(15 分)