组合数学-基本的组合计数公式习题课及作业

2024, 4, 15

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-基本概念

加法法则

设事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，当 A 与 B 产生的方式不重叠时，"事件 A 或 B"有 $m+n$ 种产生方式. 加法法则适用的条件是产生方式不重叠，用于分类处理.

乘法法则

设事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，当 A 与 B 产生的方式彼此独立时，"事件 A 与 B"有 mn 种产生方式. 乘法法则适用的条件是产生方式彼此独立，用于分步处理.

排列与组合的定义

定义 10.1.1 设 S 为 n 元集.

(1) 从 S 中有序选取的 r 个元素称作 S 的一个 r **排列**. S 的不同 r 排列总数记作 $P(n,r)$. $r=n$ 时的排列称作 S 的**全排列**. 元素依次排成一个圆圈的排列称作**环排列**.

(2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称作 S 的一个 r **组合**. S 的不同 r 组合总数记作 $C(n,r)$.

n 元集的 r 排列数公式

$$P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!}, & r\le n,\\ 0, & r>n.\end{cases}$$

n 元集的 r 环排列数公式

$$P(n,r)/r=\frac{n!}{(n-r)!r}, \quad r\le n.$$

n 元集的 r 组合数公式

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}, & r\le n,\\ 0, & r>n.\end{cases}$$

多重集排列与组合的定义

定义 10.1.2 设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 为多重集，$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 表示 S 中元素的总数.

(1) 从 S 中有序选取的 r 个元素称作多重集 S 的一个 r **排列**. $r=n$ 的排列称作 S 的**全排列**.

(2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称作多重集 S 的一个 r **组合**.

多重集 $\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的全排列数公式

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

多重集 $\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的 r 组合数公式

$C(k+r-1,r)$，其中 $r\leqslant n_i, i=1,2,\cdots,k$.

内容提要-二项式定理和组合恒等式

10.1.2 二项式定理和组合恒等式

定理 10.1.1 (二项式定理) 设 n 是正整数，对一切实数 x 和 y，有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

定理 10.1.2 (多项式定理) 设 n 为正整数，x_i 为实数，$i=1,2,\cdots,t$，那么有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{\substack{\text{满足 } n_1+\cdots+n_t=n\\ \text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t},$$

这里 $\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$，称作多项式系数.

组合恒等式

(1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $n,k\in\mathbb{N},k\le n.$ (10.1.1)

(2) $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, $n,k\in\mathbb{Z}^+,k\le n.$ (10.1.2)

(3) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, $n,k\in\mathbb{Z}^+,k\le n.$ (10.1.3)

(4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, $n\in\mathbb{N}.$ (10.1.4)

(5) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$, $n\in\mathbb{N}.$ (10.1.5)

(6) $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}$, $n,k\in\mathbb{N}.$ (10.1.6)

(7) $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$, $k\le r\le n,k,r,n\in\mathbb{N}.$ (10.1.7)

(8) $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$, $m,n,r\in\mathbb{N},r\leqslant\min(m,n).$ (10.1.8)

(9) $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$, $m,n\in\mathbb{N}.$ (10.1.9)

内容提要-组合计数模型

选取模型

集合的有序选取——集合排列.

集合的无序选取——集合组合.

多重集的有序选取——多重集的排列.

多重集的无序选取——多重集的组合.

不定方程

$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$, x_i 为非负整数, $i=1,2,\cdots,k$. 它的解的个数是 $C(k+r-1,r)$.

$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$, x_i 为正整数, $i=1,2,\cdots,k$. 它的解的个数是 $C(r-1,k-1)$.

当把 r 个相同个体分到 k 个不同的组时, 可能会用到不定方程的计数模型. 这种组合配置所关心的仅仅是每组被分配的个体数量, 而不是分配了哪一个个体.

基本要求

- 1. 能够应用上述计数模型求解简单的组合计数问题.
- 2. 能够用二项式定理（或多项式定理）展开二项式（或多项式）.
- 3. 能够证明组合恒等式.
- 4. 能够对含有组合数的公式求和.

题型一：基本的组合计数

1. 求 1 400 的不同的正因子个数.

2. 把 10 个不同的球放到 6 个不同的盒子里,允许空盒,且前 2 个盒子球的总数至多是 4,问有多少种方法.

3. 考虑由 m 个 A 和 n 个 B 构成序列,其中 m,n 为正整数,$m\leqslant n$. 如果要求每个 A 后面至少紧跟着 1 个 B,问有多少个不同的序列.

解答与分析

1. 1 400 的素因子分解式是

$$1\,400 = 2^3\times 5^2\times 7.$$

因此,1 400 的任何正因子都具有下述形式:$2^i\times 5^j\times 7^k$,其中 $0\leqslant i\leqslant 3, 0\leqslant j\leqslant 2, 0\leqslant k\leqslant 1$. 根据乘法法则,1 400 的正因子数是 i,j,k 的选法数:

$$N=(1+3)\times(1+2)\times(1+1)=24.$$

2. 根据前两个盒子所含球数 k 对放法进行分类,其中 $k=0,1,2,3,4$. 对于给定的 k,再用分步处理的思想计算放球的方法数. 这里的步骤是:

(2.1) 先从 10 个球中选择放入前两个盒子的 k 个球,有 $C(10,k)$ 种选法.

(2.2) 把选好的 k 个球分到 2 个不同的盒子里,每个球可以有 2 种选择,有 2^k 种分法.

(2.3) 剩下的 $10-k$ 个球分到其他 4 个不同的盒子里有 4^{10-k} 种分法.

根据乘法法则,使得前两个盒子含 k 个球的放法数是 $C(10,k)\cdot 2^k\cdot 4^{10-k}$.

最后使用加法法则对 k 求和,就得到所求的方法数,即

$$\sum_{k=0}^{4} C(10,k)\cdot 2^k\cdot 4^{10-k}=47\,579\,136.$$

3. <u>方法一</u> 先放 n 个 B,只有 1 种方法. 然后,在每个 B 之间的 n 个位置中选择 m 个位置放 A,有 $C(n,m)$ 种方法.

<u>方法二</u> 先放 m 个 AB,只有 1 种方法. 把每个 AB 看作隔板,m 个隔板构成 $m+1$ 个空格,在空格中放入 $n-m$ 个 B. 这相当于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_{m+1}=n-m$$

的非负整数解的个数,因此

$$N=C(n-m+m+1-1,n-m)=C(n,n-m)=C(n,m).$$

上述计数问题的求解往往使用选取问题、方程的非负整数解、非降路径模型. 应该注意的是:

(1) 选择适当的组合计数模型.

(2) 把问题分解,这里需要使用分步处理和分类处理的思想. 例如,上面第 1 题和第 3 题是分步处理,第 2 题是先分类处理,再分步处理.

(3) 在分步处理时,要考虑选取的顺序. 不同的次序可能会影响计算的复杂程度. 例如,第 3 题,先放 A 还是先放 B,两种方法都可以用,但是先放 B 的方法计算起来比较简单.

(4) 在每一步或每一类的计数中,特别要区分选取是否有序,从而采用合适的组合计数公式(乘法法则、加法法则、排列、组合以及涉及多重集的计数公式).

题型二：二项式定理和多项式定理的应用

1. 设 S 是 n 元集，N 表示满足 $A \subseteq B \subseteq S$ 的有序对 $\langle A, B\rangle$ 的个数，用二项式定理证明 $N = 3^n$.
2. 确定在 $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^8$ 的展开式中 $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4^2$ 项的系数.

解答与分析

1. 令 $|A| = k$，按照 $k = 0, 1, \cdots, n$ 对有序对 $\langle A, B\rangle$ 进行分类. 对于给定的 k，先选 A，方法数是 $C(n, k)$；每个 B 都含有 A 的元素，不同的 B 取决于剩下的 $n - k$ 个元素的选择. 每个元素都有“加入”或“不加入”2 种选法，因此有 2^{n-k} 个不同的 B 集合. 由乘法法则，这样的 $\langle A, B\rangle$ 有 $C(n, k) \cdot 2^{n-k}$ 个，再使用加法法则和二项式定理，从而得到
$$N = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \cdot 1^k \cdot 2^{n-k} = (1 + 2)^n = 3^n.$$
这个问题的计数结果如此简单，可能预示着存在更简单的计数方法. 确实如此. 如果不分步选取，而是直接考虑对 $\langle A, B\rangle$ 的选择. S 中的每个元素可以有 3 种选法：同时加入 A 和 B；不加入 A 但加入 B；A 和 B 都不加入. 即只有“加入 A 但不加入 B”的选法与题目条件不符. 因此，n 个元素总共有 3^n 种选法.
2. 使用多项式定理，所求的系数为
$$\binom{8}{2\,3\,1\,2} = (-1)^3 \cdot 2^1 \cdot (-2)^2 = -8 \cdot \frac{8!}{2!3!1!2!} = -13\,440.$$

题型三：组合公式的证明与化简

1. 证明：$\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2)$.

2. 证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k+1}\binom{n}{k}=\dfrac{n}{n+1}$.

3. 求和 $\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}$.

3. 根据 Pascal 公式逐步归并相邻的两项可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}&=\binom{n-m+0}{0}+\binom{n-m+1}{1}+\cdots+\binom{n}{m}\\
&=\left[\binom{n-m+1}{0}+\binom{n-m+1}{1}\right]+\binom{n+m+2}{2}+\cdots+\binom{n}{m}\\
&=\left[\binom{n-m+2}{1}+\binom{n-m+2}{2}\right]+\binom{n-m+3}{3}+\cdots+\binom{n}{m}\\
&=\cdots\\
&=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}\\
&=\binom{n+1}{m}.
\end{aligned}
$$

对于某些问题可能存在多种证明方法，一般可以根据情况从下述方法中选择.

(1) 已知恒等式代入并化简.

(2) 使用二项式定理比较相同项的系数，或者进行级数的求导或者积分.

(3) 数学归纳法.

(4) 构造组合计数问题(如选取问题、非降路径问题等)，使得等式两边都等于这个问题的计数结果.

求和或化简公式常用的方法一般有下述几种.

(1) 利用 Pascal 公式不断归并相关的项.

(2) 级数求和.

(3) 观察和的计算结果，然后使用归纳法证明.

(4) 利用已知的恒等式代入.

解答与分析

1. 根据主教材中例 10.3.1(1) 和式 (10.1.4)，分别有

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}.$$

将上述两式相加得

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2).$$

2. 方法一　由二项式定理，有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

于是有，

$$\int_0^x(1+x)^n\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\int_0^x\binom{n}{k}x^k\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

在上式中令 $x=-1$ 得

$$\frac{-1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}.$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}-\binom{n}{0}(-1)\\
&=1-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

方法二　利用习题十第 24 题 (4) 的结果 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\dfrac{1}{n+1}$，有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\binom{n}{k}&=1+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}\\
&=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n}{k}\\
&=\frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) 从 $S=\{1,2,\cdots,20\}$ 中选出 2 个数使得其和是 3 的倍数,则有________ 种方法.

(2) 满足不等式 $x_1+x_2+x_3\leqslant 7$ 的非负整数解的个数是________.

(3) 把 $2n$ 个不同的数分成 n 组,2 个一组,则有 ________ 种分法.

(4) 一个圆盘绕固定在圆心的轴转动. 把圆盘分成 3 个相等的扇形,用 n 种颜色对扇形涂色,且每个扇形的颜色都不相同,则有________ 种不同的涂色方案.

(5) 方程 $x_1+x_2+x_3=15$ 满足 $x_1\geq 0, x_2\geq 1, x_3\geq 2$ 的整数解的个数是________.

(6) 用红色、蓝色、黄色和绿色 4 种颜色涂色 1×10 的方格图形,每个方格一种颜色. 如果要求红格和绿格各 3 个,蓝格和黄格各有 2 个,那么有________ 种涂色方案.

2. 简答题(4 小题,每小题 10 分,共 40 分).

(1) 把字母 a,b,c,d,e,f 进行排列,使得字母 b 总是紧跟在字母 e 的左边,问有多少种排法. 若在排列中使得字母 b 总在字母 e 的左边,则又有多少种排法?

(2) 求 $(x+2y-4z)^6$ 的展开式中 x^3y^2z 项的系数.

(3) 求和: $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n-k}$.

(4) $A=\{1,2,\cdots,n\}$,其中 n 为给定正整数. 设 $S\subseteq A$,若 S 的每个元素都不小于 S 的基数 $|S|$,则称 S 是饱满的(这里认为空集是饱满的). 令 $N(n)$ 表示 A 的饱满子集的个数. 请导出关于 $N(n)$ 的公式.

3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) $\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}=2^n\binom{m}{n}$.

(2) 给定正整数 n,证明

$$\sum(-1)^{a+b}\binom{n}{a\,b\,c\,d}=0,$$

其中,求和是对方程 $a+b+c+d=n$ 的一切非负整数解来求和. 如何将以上命题一般化?

4. 应用题(10 分).

试证:任一整数是平方数的必要条件是它有奇数个正因子.