

2020春季学期“数理逻辑”期末考试试卷(开卷)

1. (20分) 在G系统中证明下列序贯

$$(1) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

$$(2) \vdash \exists x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \exists x B)$$

2. (15分) 若命题A永真且A中仅含有联结词 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, 证明A中必含有联结词 \neg 或 \rightarrow .

3. (15分) 令 φ 为一阶逻辑公式 $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge P(x))) \rightarrow (R(x) \rightarrow \neg Q(x))$,

(1) φ 是否可满足, 若可满足请给出满足 φ 的模型, 反之证明 φ 不可满足.

(2) φ 是否永真, 若永真请证明, 反之请给出使得 φ 不满足的模型.

4. (15分) 设 Γ 为一阶谓词语言L公式的协调集. 令 $\{A_n | n \in N\}$ 为所有L公式的一个枚举. 归纳定义序列 Γ_n 如下:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma, \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\}, Con\{\Gamma_n \cup \{A_n\}\}; \\ \Gamma_n, else. \end{cases} \end{aligned}$$

令 $\Delta = \cup\{\Gamma_n | n \in N\}$. 证明:

(1) Γ_n 是协调的;

(2) Δ 是极大协调的.

5. (15分) 请在H系统中证明: $A \rightarrow B, A \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \wedge C)$

6. (20分) 美食殿堂储备的炒面被人一扫而空, 经调查发现以下三条线索:

(a) 如果可可萝没有偷吃, 那么凯露肯定偷吃了;

(b) 可可萝和凯露都没有偷吃;

(c) 凯露和佩可莉姆都偷吃了.

进一步调查发现, 前述三条线索中有且仅有一条是假的. 请将上列全部信息形式化, 并证明下列推论的对错:

(1) 凯露没有偷吃; (2) 可可萝没有偷吃; (3) 佩可莉姆偷吃了.