微积分 I (第一层次)期中试卷 (2022.11.12)

一、证明下列各题（每题 6 分，共 12 分）

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon-\delta$ 语言) 证明 $\lim\limits_{x\to1}(x+2\sqrt{x})=3$.

2. 用数列极限定义 ($\varepsilon-N$ 语言) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3q^n=0$, $(|q|<1, q\neq0)$.

二、计算下列各题（每题 6 分，共 36 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.

3. 设 $x\geqslant0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^n}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=1$. 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5. 求 $y=\dfrac{5}{x^2-x-6}$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

6. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\cos t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

三、(8分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$ 的连续性，并判断其间断点的类型.

四、(8分) 设函数 $f(x)=\tan x-\sin x+\mathrm{e}^x+ax^2+bx+c$, 满足 $f(x)=o(x^2)$, 求 a,b,c, 并求 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

五、(10分) 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n+6}{x_n+2}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

六、(6分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(f(x))=x$ 有实根，求证 $f(x)=x$ 亦有实根.

七、(10分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=0$, $f(2)=2$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $f(\xi)=2-\xi$;

(2) 存在 $\eta,\zeta\in(0,2)$, $(\eta\neq\zeta)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

八、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(a\ln(1+x)+b\cos x-b), & x<0,\\ 1+\sin x, & x\geqslant0.\end{cases}$ 试求：

(1) a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

(2) 在 (1) 成立的前提下，复合函数 $F(x)=f(f(x))$ 在 $x=0$ 处是否可导？若可导，求出其在 $x=0$ 处的导数值.

微积分 I (第一层次)期中试卷 2023.11.12

一、计算或证明下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon-\delta$ 语言) 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=1$.

2. 当 $x\to 0$ 时, 以 x 为基准无穷小, 求 $1-\dfrac{e^x}{1+x}\cos x$ 的无穷小主部.

3. 设 $f(x)=(x^2+11x+12)\sin x$, 求 $f^{(23)}(x)$.

4. 设 $y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$, 求 dy.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x-x\cos x}{\arctan x\cdot\arcsin^2 x}$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0, f'(0)=2$. 设 n 是自然数, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n}+1\right)^n$.

7. 已知 $u=g(\sin y)$, 这里 g 是一个可导函数, $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2}, ab\neq 0)$ 所确定，求 $\dfrac{du}{dx}$.

8. 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^{\frac{1}{y}}=x$ 确定 $(0<y<1)$. 求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

二、(8分) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明对任何正实数 α 和 β, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(\xi).$$

三、(8分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$ 证明 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导.

四、(10分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 4\arctan x+1, & x\geqslant 0, \\ -x^2+bx+c, & x<0.\end{cases}$

(1) b, c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导?　(2) 在 (1) 成立的前提下, 求 $(f^{-1})'(1)$.

五、(8分) 设 a,b,c 是三个实数，证明 $e^x=ax^2+bx+c$ 的实根数目 $\leqslant 3$.

六、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f(x)+1)x^2}{x-\sin x}=2$, 求 $f'(0)$.

七、(10分) 证明方程 $\cos x-x=0$ 有唯一根, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\cos\cos\cos\ldots\cos}_{n\text{个}}x$ 恰为此根.

微积分 I (第一层次)期中试卷 2024.11.16

一、计算或证明下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon-\delta$ 语言) 证明 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$.

3. 设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(2024)}(0)$.

4. 设 $y=\mathrm{e}^{\sin x}+\ln|\cos\sqrt{x}|$, 求 $\mathrm{d}y$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$.

6. 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点处有相同的切线, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf(\dfrac{2}{n})}$.

7. 函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

8. 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^x=x^y\ (x>0, y>0)$ 确定, 求 y'.

二、(8分) 设 $a_i>0\ (i=1,2,\ldots,k)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$.

三、(8分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} \sin^2 x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(1) 求导函数 $f'(x)$;　　(2) 讨论 $f'(x)$ 的连续性, 若存在间断点, 判断其类型.

四、(10分) 求 a 和 b 的值, 使得函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 在其定义域内连续.

五、(8分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 证明 $f(x)=0$ 的两个实根之间必有 $f(x)-f'(x)=0$ 的实根.

六、(8分) 已知 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2024)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+2024)}$, 求 $f'(1)$.

七、(10分) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$,
证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $f'''(\xi)=3$.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 (2022.11.12)

一、1. (略)； 2. 证明：记 $a=\dfrac{1}{|q|}>1$. $\forall\varepsilon>0$, 注意到 $|n^3q^n|=\dfrac{n^3}{a^n}=\dfrac{n^3a^3}{(1+a-1)^{n+3}}<\dfrac{n^3a^3}{C_{n+3}^4(a-1)^4}<\dfrac{4!a^3}{(a-1)^4}\dfrac{1}{n}$, 取 $N=\left[\dfrac{4!a^3}{(a-1)^4\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有 $|n^3q^n|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3q^n=0$.

二、 1. e. 2. $\dfrac{3}{2}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^n}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<4,\\ \dfrac{x^2}{4}, & x\geqslant 4.\end{cases}$

4. $e^{-\frac{1}{2}}$. 5. $y^{(n)}=-\dfrac{n!}{(3-x)^{n+1}}-(-1)^n\dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}}$. 6. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\cos t(\cot t-t)$.

三、$x=0, x=1, x=2k(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为间断点, x为其它实数时 $f(x)$ 连续.

$x=0$ 为可去间断点, $x=1$ 为跳跃间断点, $x=2k$ 为第二类间断点(无穷间断点).

四、$a=-\dfrac{1}{2}, b=-1, c=-1$. $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数为 3，无穷小主部为 $\dfrac{2x^3}{3}$.

五、$|x_{n+1}-2|<\dfrac{1}{3^n}|x_1-2|$, 即 $|x_{n+1}-2|\to 0(n\to\infty)$, 说明数列 x_n 收敛，且极限为 2.

六、提示：对函数 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $[x_1,f(x_1)]$ 上用零点定理即可.

七、提示：(1) 对函数 $\phi(x)=f(x)+x-2$ 在 $[0,2]$ 上用零点定理;

(2) 对函数 $f(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 以及 $[\xi,2]$ 上使用拉格朗日中值定理.

八、(1) $a=1, b=-3$. (2) $f(f(x))$ 在 $x=0$ 处可导，且$F'(0)=\cos 1$.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 2023.11.12

一、1. (略)； 2. $\dfrac{1}{3}x^3$. 3. $f^{(23)}(x)=(-x^2-11x+494)\cos x-(46x+253)\sin x$.

4. $dy=\left(-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)dx$. 5. $\dfrac{2}{3}$. 6. e. 7. $\dfrac{du}{dx}=-g'(\sin y)\cdot\cos y\cdot\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x-x\ln y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(3-2\ln y)xy^3-xy^2(1-\ln y)^2}{(x-x\ln y)^3}$.

二、**提示**：$f(a)\leqslant\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}f(a)+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}f(b)\leqslant f(b)$, 由介值定理即得.

三、**提示**: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. 当 $x\neq0$ 时, 若 x 为有理数, 则取一无理数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则有 $\lim\limits_{x_n\to x}\dfrac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\infty$. 若 x 为无理数, 则取一有理数列 $\{y_n\}$, 其中 $y_n\neq0\ (\forall n\in\mathbb{N})$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x$, 则有 $\lim\limits_{y_n\to x}\dfrac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}=\lim\limits_{y_n\to x}\dfrac{y_n^2}{y_n-x}=\infty$. 所以 $f(x)$ 在$x\neq0$ 处不可导.

四、(1) $b=4, c=1$. (2) $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{4}$.

五、**证明**：假设此方程实根数 $\geqslant4$, 则$f(x)=e^x-(ax^2+bx+c)$的零点个数$\geqslant4$. 据罗尔中值定理，$f'(x)$ 零

点个数 $\geqslant 3$. 同理, $f''(x)$ 零点个数 $\geqslant 2$, $f'''(x)$ 零点个数 $\geqslant 1$. 但是 $f'''(x)=\mathrm{e}^x$, 无零点. 矛盾.

六、$f'(0)=\dfrac{1}{3}$.

七、提示：设方程 $\cos x - x = 0$ 的根为 a. 记 $x_1=\cos x, x_2=\cos x_1, \cdots, x_{n+1}=\cos x_n, \cdots$, 则

$$0 \leqslant |x_n - a| = |\cos x_{n-1} - \cos a| = |\sin\xi_n \cdot (x_{n-1}-a)| \leqslant \sin 1|x_{n-1}-a| \leqslant \cdots \leqslant (\sin 1)^{n-1}|x_1 - a| \to 0,$$

其中 $\xi_n \in (0,1)$. 所以由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 2024.11.16

一、1. (略)；　2. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$；　3. $y^{(2024)}(0)=0$；　4. $\mathrm{d}y=\left(\mathrm{e}^{\sin x}\cos x-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

5. $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.　6. $\sqrt{2}$.　7. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$.　8. $y'=\dfrac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$.

二、$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

三、(1) $f'(x)=\begin{cases} 2\sin x\cos x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin^2 x\cos\frac{1}{x}}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$　(2) $x=0$ 是间断点，是第二类间断点.

四、$a=1, b=0$.　五、提示：令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$. 对 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上用罗尔定理即可.

六、$f'(1)=-\dfrac{1}{2024\times 2025}$

七、证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(\eta)}{3!}x^3$, 分别取 $x=-1$ 和 $x=1$ 得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_1)}{6},\quad -1<\xi_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{6},\quad 0<\xi_2<1.$$

两式相减得 $\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$. 由教材例题可知存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$.