线性代数期中试卷　　(2022.11.12)

一. 简答与计算(本题共6小题，每小题8分，共48分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&2&2&2&2\\2&0&2&2&2\\2&2&0&2&2\\2&2&2&0&2\\2&2&2&2&0\end{vmatrix}$.

2. 计算 $(A^*)^*$，此处 $A=\begin{pmatrix}3&1&0&1\\1&3&1&-2\\0&1&3&-1\\2&-2&-1&3\end{pmatrix}$.

3. 计算以下向量组的一个极大线性无关组，并用以表示其余向量，此处：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

4. 向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 等价，证明齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 与 $Bx=\theta$ 同解，

此处　$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\alpha_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,　$B=(b_{ij})_{k\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_k^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

5. 计算矩阵 X 使得 $X\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\0&1&4\end{pmatrix}$.

6. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明：α_1 可由 α_2 与 α_3 线性表出，
α_4 不能由 α_1,α_2 与 α_3 线性表出.

二.(10分) A 是 n 阶实矩阵，$A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$，证明：如果 A 是三角矩阵，则 A 为对角矩阵.

三.(12分) 给定矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 与向量 β.
(1) 计算 $Ax=\theta$ 的基础解系，并据此表示出所有基础解系(6分);
(2) 计算 $Ax=\beta$ 的通解(3分);
(3) $\mathrm{r}(A)=r$,是否存在列满秩矩阵$B=(b_{ij})_{5\times r}$使得$\mathrm{r}(AB)=0,1,2$？若存在,各写出一个这样的矩阵(3分).

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

四. (10分) $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是可逆矩阵，$B^{-T}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，$A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm{T}}\ (k<n)$，$b$ 是 n 维向量.
(1) 证明：$Ax=b$ 有解当且仅当 b 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的线性组合(5分);
(2) 用已有的数据 (b,α_i,β_j) 表示 $Ax=b$ 的通解(5分).

五.(10分) $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-1&2&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，计算 $B=P^{-1}AP$ 与 A^3+A^2+A+E.

六.(10分) $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{k\times n}$，β 为 m 维向量，γ 为 k 维向量. 对以下两个问题给出判断，并给出证明或举出反例.
(1) 如果 $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 同解，那么 (A,β) 与 (B,γ) 行向量组是否等价？
(2) 如果 (A,β) 与 (B,γ) 行向量组等价，那么 $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 是否同解？

线性代数期中试卷 答案 (2022.11.12)

一. 简答与计算(本题共6小题，每小题8分，共48分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&2&2&2&2\\2&0&2&2&2\\2&2&0&2&2\\2&2&2&0&2\\2&2&2&2&0\end{vmatrix}$.

解：$D \overset{c_1+c_2+c_3+c_4+c_5}{=} \begin{vmatrix}8&2&2&2&2\\8&0&2&2&2\\8&2&0&2&2\\8&2&2&0&2\\8&2&2&2&0\end{vmatrix} \overset{r_i-r_1,i=2,3,4,5}{=} \begin{vmatrix}8&2&2&2&2\\0&-2&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{vmatrix}=128.$

解法二：$D \overset{r_i-r_5,i=1,2,3,4}{=} \begin{vmatrix}-2&0&0&0&2\\0&-2&0&0&2\\0&0&-2&0&2\\0&0&0&-2&2\\2&2&2&2&0\end{vmatrix} \overset{r_5+r_1+r_2+r_3+r_4}{=} \begin{vmatrix}-2&0&0&0&2\\0&-2&0&0&2\\0&0&-2&0&2\\0&0&0&-2&2\\0&0&0&0&8\end{vmatrix}=128.$

2. 计算 $(A^*)^*$，此处 $A=\begin{pmatrix}3&1&0&1\\1&3&1&-2\\0&1&3&-1\\2&-2&-1&3\end{pmatrix}$.

解：$A\to\begin{pmatrix}1&3&1&-2\\0&1&3&-1\\0&0&21&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $\mathrm{r}(A)=3$. 故有 $|A|=0, AA^*=|A|E=O$.

于是 $0=\mathrm{r}(O)=\mathrm{r}(AA^*)\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A^*)-4=\mathrm{r}(A^*)-1$，故 $\mathrm{r}(A^*)\leq 1$. 从而 $(A^*)^*=O$.

解法二：$|A|=0$，故有 $AA^*=|A|E=O$，从而 A^* 的列都是 $Ax=\theta$ 的解，于是 $\mathrm{r}(A^*)\leq 4-\mathrm{r}(A)$.
易知，$\mathrm{r}(A)\geq 2$，故 $\mathrm{r}(A^*)\leq 2$，所以有 $(A^*)^*=O$.

解法三：若$|A|\neq 0$，则有 $A^*=|A|A^{-1}$，可得 $|A^*|=|A|^{n-1}, A^{**}=|A^*|(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$.
若$|A|=0$，则令$B(t)=A+tE$，只要$t\neq 0$且t足够小，可以保证$|B(t)$没有0特征值，故$|B(t)|\neq 0$，
且$|B(t)|$是t的连续函数. 故$t\neq 0$且很小时，有 $B(t)^{**}=|B(t)|^{n-2}B(t)$，且 $B(t)^{**}$ 为 t 的连续函数矩阵.
本题有 $|A|=0$，故 $(A^*)^*=\lim\limits_{t\to 0}B(t)^{**}=\lim\limits_{t\to 0}|B(t)|^{n-2}B(t)=|A|^{n-2}A=O$.

解法四：$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&A_{41}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&A_{42}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}&A_{43}\\A_{14}&A_{24}&A_{34}&A_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-13&0&-13\\-18&18&0&18\\-1&1&0&1\\-21&21&0&21\end{pmatrix}$，其中 A_{ij} 为$|A|$中a_{ij}的代数余子式.
于是有 $(A^*)^*=O$.

3. 计算以下向量组的一个极大线性无关组，并用以表示其余向量，此处：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\4&1&3&2\\3&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&0&1&1\\0&-2&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$

故可取 α_1,α_2 为一个极大无关组，且有 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2, \alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2$.

4. 向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 等价，证明齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 与 $Bx=\theta$ 同解，

此处 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\alpha_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, $B=(b_{ij})_{k\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_k^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

证：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 等价，则可相互表示.

即有 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1k}\\ \vdots&&\vdots\\ c_{m1}&\cdots&c_{mk}\end{pmatrix}$，

此即 $B^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}C$，两边转置得 $B=C^{\mathrm{T}}A$.

若 x 是 $Ax=\theta$ 的解，则有 $Bx=C^{\mathrm{T}}Ax=C^{\mathrm{T}}\theta=\theta$，$x$ 也是 $Bx=\theta$ 的解.

同理由 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 可表示 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 可得 $Bx=\theta$ 的解也是 $Ax=\theta$ 的解，故同解.

证法二：因为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 等价，故 A 与 B 的行向量组等价，于是 A 的行向量组可以表示 B 的行向量组，设 $\beta_i^{\mathrm{T}}=t_{i1}\alpha_1^{\mathrm{T}}+t_{i2}\alpha_2^{\mathrm{T}}+\cdots+t_{im}\alpha_m^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,k$.

若 x 是 $Ax=\theta$ 的解，则有 $\alpha_j^{\mathrm{T}}x=0,j=1,2,\cdots,m$，

于是有 $\beta_i^{\mathrm{T}}x=t_{i1}\alpha_1^{\mathrm{T}}x+t_{i2}\alpha_2^{\mathrm{T}}x+\cdots+t_{im}\alpha_m^{\mathrm{T}}x=t_{i1}0+t_{i2}0+\cdots+t_{im}0=0,i=1,2,\cdots,k$，即 $Bx=\theta$.

同理 $Bx=\theta$ 的解也是 $Ax=\theta$ 的解，故同解.

证法三：因为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 等价，故 A 与 B 的行向量组等价，于是 A 的行向量组可以表示 B 的行向量组，从而 A 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 可相互表示，即有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，

于是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta,Ax=\theta$ 基础解系向量个数相同. 再由 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta$ 的解一定是 $Ax=\theta$ 的解，

可知 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta$ 的基础解系也是 $Ax=\theta$ 的基础解系，于是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta,Ax=\theta$ 同解.

同理 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta,Bx=\theta$ 同解，故 $Ax=\theta,Bx=\theta$ 同解.

证法四：若 $Ax=\theta$ 与 $Bx=\theta$ 都只有零解，则结论成立.

我们证明若有一个方程组有非零解，则两个方程组同解.

不妨设 $Ax=\theta$ 有非零解，并设 $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ 是 $Ax=\theta$ 的一个基础解系，$Q=(\gamma_1,\cdots,\gamma_s)$.

我们有 $AQ=A(\gamma_1,\cdots,\gamma_s)=O$，故有 $Q^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=Q^{\mathrm{T}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=O$，即 $Q^{\mathrm{T}}\alpha_i=\theta,i=1,2,\cdots,m$.

因为向量组等价，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 可表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合也是 $Q^{\mathrm{T}}y=\theta$ 的解，即 $Q^{\mathrm{T}}\beta_j=\theta,j=1,2,\cdots,k$，故 $Q^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=O$，即 $BQ=O$，

于是 $Bx=\theta$ 也有非零解，且 $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ 也是 $Bx=\theta$ 的解，从而 $Ax=\theta$ 的解也是 $Bx=\theta$ 的解.

当 $Bx=\theta$ 有非零解时，同理可得也是 $Ax=\theta$ 的解，故同解.

5. 计算矩阵 X 使得 $X\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\0&1&4\end{pmatrix}$.

解：$X=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\0&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\0&1&4\end{pmatrix}\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3&3\\5&3&-3\\-3&5&3\end{pmatrix}$.

解法二：$\left(\begin{array}{ccc}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\\\hline 4&1&0\\1&4&0\\0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&2\\\hline 4&-3&3\\1&3&-3\\0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 5/2&-3/2&3/2\\5/2&3/2&-3/2\\-3/2&5/2&3/2\end{array}\right)$，故 $X=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3&3\\5&3&-3\\-3&5&3\end{pmatrix}$.

6. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明：α_1 可由 α_2 与 α_3 线性表出，α_4 不能由 α_1,α_2 与 α_3 线性表出.

证：因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，故$\alpha_2,\alpha_3$线性无关. 由条件，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，故$\alpha_1$可由 α_2,α_3 线性表出.

假设 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，由于 α_1 可由 α_2,α_3 线性表出，故 α_4 可由 α_2,α_3 线性表出，与 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关矛盾，故 α_4 不能由 α_1,α_2 与 α_3 线性表出.

证法二：因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，故 α_2,α_3 线性无关. 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，

知 α_2,α_3 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组，于是 α_1 可由 α_2,α_3 线性表出，且 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=2$.

同样由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，知$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组，于是 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=3$.

由于 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}<\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，故 α_4 不能由 α_1,α_2 与 α_3 线性表出.

二.(10分) A 是 n 阶实矩阵，$A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$，证明：如果 A 是三角矩阵，则 A 为对角矩阵.

证：不妨设 A 是上三角矩阵，令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$，即为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

比较两边乘积矩阵的(1,1)元素，得 $a_{11}^2=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2$，故有 $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$.
再比较两边乘积矩阵的(2,2)元素，得 $a_{22}^2=a_{22}^2+a_{23}^2+\cdots+a_{2n}^2$，故有 $a_{23}=a_{24}=\cdots=a_{2n}=0$.
再比较 $(3,3),(4,4),\cdots,(n-1,n-1)$ 元素，最终得 $a_{ij}=0, 1\le i<j\le n$，故 A 为对角矩阵.

证法二：不妨设 A 是下三角矩阵，用数学归纳法证明.
显然 $n=1$ 时 A 为对角矩阵，假设 $n=m$ 时结论成立.
考虑 $m+1$ 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$，将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \theta^{\mathrm{T}} \\ \beta & A_2 \end{pmatrix}$，易知 A_2 为下三角矩阵.
由 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$，展开得 $\begin{pmatrix} a_{11} & \beta^{\mathrm{T}} \\ \theta & A_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \theta^{\mathrm{T}} \\ \beta & A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \theta^{\mathrm{T}} \\ \beta & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \beta^{\mathrm{T}} \\ \theta & A_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，
即 $\begin{pmatrix} a_{11}^2+\beta^{\mathrm{T}}\beta & \beta^{\mathrm{T}}A_2 \\ A_2^{\mathrm{T}}\beta & A_2^{\mathrm{T}}A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}\beta^{\mathrm{T}} \\ a_{11}\beta & \beta\beta^{\mathrm{T}}+A_2A_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, 比较两边可得 $a_{11}^2+\beta^{\mathrm{T}}\beta=a_{11}^2, A_2^{\mathrm{T}}A_2=\beta\beta^{\mathrm{T}}+A_2A_2^{\mathrm{T}}$，
于是 $\beta=\theta, A_2^{\mathrm{T}}A_2=A_2A_2^{\mathrm{T}}$. 由归纳假设，$m$阶矩阵$A_2$为下三角矩阵满足$A_2^{\mathrm{T}}A_2=A_2A_2^{\mathrm{T}}$,故$A_2$为对角矩阵，
于是 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \theta^{\mathrm{T}} \\ \theta & A_2 \end{pmatrix}$ 为对角矩阵，即 $n=m+1$ 时结论也成立.

三.(12分) 给定矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 与向量 β.
(1) 计算 $Ax=\theta$ 的基础解系，并据此表示出所有基础解系(6分);
(2) 计算 $Ax=\beta$ 的通解(3分);
(3) $\mathrm{r}(A)=r$,是否存在列满秩矩阵$B=(b_{ij})_{5\times r}$使得$\mathrm{r}(AB)=0,1,2$？若存在,各写出一个这样的矩阵(3分).

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

解：(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有基础解系 $\gamma_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$.

因为 γ_1,γ_2 组合出的两个不成比例的向量都是基础解系，故所有的基础解系为
$\{\ \xi_1,\xi_2 \mid \xi_1=c_{11}\gamma_1+c_{21}\gamma_2, \xi_2=c_{12}\gamma_1+c_{22}\gamma_2, |(c_{ij})|=c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}\neq 0, c_{ij}\in\mathbf{R}, i,j=1,2\ \}$.

(2) $(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, 得一个特解为:$\eta=\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\\0\\0\end{pmatrix}$.

故 $Ax=\beta$ 的通解为：$x=\eta+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2, k_1,k_2\in\mathbf{R}$.
(2)的解法二：由于 $\beta=\alpha_5$，故有特解 $\eta=(0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，故通解为：$x=\eta+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2, k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

(3) 由(1)知 $\mathrm{r}(A)=3$，故对于 B 为5×3阶矩阵，由于列满秩，则 $\mathrm{r}(B)=3$，
则不可能有 $AB=O$，否则 $\mathrm{r}(B)\le Ax=\theta$基础解系向量个数2，矛盾.
故有：$\mathrm{r}(AB)=0$ 不可能；$\mathrm{r}(AB)=1$ 可取 $B=(e_1,\gamma_1,\gamma_2)$；$\mathrm{r}(AB)=2$ 可取 $B=(e_1,e_2,\gamma_2)$.
(3)的解法二：由(1)知 $\mathrm{r}(A)=3$，又由于 B 列满秩，故 $\mathrm{r}(B)=3$，于是 $\mathrm{r}(AB)\ge\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-5=1$，
故 $\mathrm{r}(AB)=0$ 不可能；$\mathrm{r}(AB)=1$ 可取 $B=(e_1,\gamma_1,\gamma_2)$；$\mathrm{r}(AB)=2$ 可取 $B=(e_1,e_2,\gamma_2)$.

四. (10分) $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是可逆矩阵，$B^{-T}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，$A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm{T}}\ (k<n)$，$b$ 是 n 维向量.

(1) 证明：$Ax=b$ 有解当且仅当 b 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的线性组合(5分);

(2) 用已有的数据 (b,α_i,β_j) 表示 $Ax=b$ 的通解(5分).

解：(1) $A=B\begin{pmatrix}E_k&\\&O\end{pmatrix}B^{-1}$，故 $Ax=b$ 有解即$B\begin{pmatrix}E_k&\\&O\end{pmatrix}B^{-1}x=b$ 有解，

令 $y=\begin{pmatrix}E_k&\\&O\end{pmatrix}B^{-1}x$，则有 $y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_k\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $b=Ax=By=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_k\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=y_1\alpha_1+\cdots+y_k\alpha_k.$

若 $b=y_1\alpha_1+\cdots+y_k\alpha_k=By$，其中 $y=(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，则取 $x=b$

有 $Ax=B\begin{pmatrix}E_k&\\&O\end{pmatrix}B^{-1}By=By=b.$

(2) 因为 $A(\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n)=A(B(e_{k+1},\cdots,e_n))=B\begin{pmatrix}E_k&\\&O\end{pmatrix}B^{-1}B\begin{pmatrix}O\\E_{n-k}\end{pmatrix}=O.$

由 B 可逆，则 B 列线性无关，故 $\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

由(1)知 $\mathrm{r}(A)=k$，从而 $\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n$ 为 $Ax=\theta$ 的基础解系.

再由(1) $Ax=b$ 有解知 b 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 的线性组合，于是 $x=b$ 为 $Ax=b$ 的一个特解，

则 $x=b+t_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+t_n\alpha_n$ 为 $Ax=b$ 的通解.

解法二：(1) $Ax=b$ 有解，故有

$b=Ax=(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm{T}})x=(\beta_1^{\mathrm{T}}x)\alpha_1+(\beta_2^{\mathrm{T}}x)\alpha_2+\cdots+(\beta_k^{\mathrm{T}}x)\alpha_k=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_k\alpha_k.$

若 $b=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_k\alpha_k$，则只要证明有 x 满足 $\beta_i^{\mathrm{T}}x=t_i,i=1,2,\cdots,k$，

即只要证明 $Cx=\gamma$ 有解，其中 $C=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_k^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix}t_1\\\vdots\\t_k\end{pmatrix}$. 由于 $B^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 可逆，故行向量组

线性无关，而C的行向量组是B的行向量组一部分，故线性无关，于是C行满秩，即$\mathrm{r}(C)=k$，

于是 $k=\mathrm{r}(C)\le\mathrm{r}(C,\gamma)\le k$，即 $\mathrm{r}(C)=\mathrm{r}(C,\gamma)$，故 $Cx=\gamma$ 有解.

(2) $B^{-1}B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\alpha_1&\beta_1^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\beta_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\beta_2^{\mathrm{T}}\alpha_1&\beta_2^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\beta_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\beta_n^{\mathrm{T}}\alpha_1&\beta_n^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\beta_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}=E$, 故有$\beta_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\delta_{ij},i,j=1,\cdots,n.$

易知 $A\alpha_i=\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j(\beta_j^{\mathrm{T}}\alpha_i)=\alpha_i,i=1,2,\cdots,k;A\alpha_j=\theta,j=k+1,\cdots,n$，

即 $AB=A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\theta,\cdots,\theta).$

由于 B 可逆，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，$\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\mathrm{r}(B)=n.$

故有 $k=\mathrm{r}(AB)\le\mathrm{r}(A),k=\mathrm{r}(AB)\ge\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n=\mathrm{r}(A)$，故 $\mathrm{r}(A)=k$，

于是 $\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n$ 是$Ax=\theta$的基础解系.

当 $Ax=b$ 有解时，有 $b=t_1\alpha_1+\cdots+t_k\alpha_k$，而 $Ab=t_1A\alpha_1+\cdots+t_kA\alpha_k=t_1\alpha_1+\cdots+t_k\alpha_k=b$，

故 b 为一个特解，故有 $Ax=b$ 的通解为 $x=b+t_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+t_n\alpha_n,t_{k+1},\cdots,t_n\in\mathbf{R}.$

五.(10分) $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-1&2&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，计算 $B=P^{-1}AP$ 与 A^3+A^2+A+E.

解：$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-1&2&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

$A=PBP^{-1}$，故

$A^3+A2+A+E=PB^3P^{-1}+PB^2P^{-1}+PBP^{-1}+PEP^{-1}=P(B^3+B^2+B+E)P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&-4\\-1&5&-4\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

解：解矩阵方程 $PX=AP$，其中 $AP=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-1&2&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$，于是

$$(P,AP)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-1&0\\1&1&1&1&-1&0\\0&1&1&0&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)，解得\ B=X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$A^3+A^2+A+E=(A+E)(A^2+E)=\begin{pmatrix}0&2&-2\\-1&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&-4\\-1&5&-4\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

六.(10分) $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{k\times n}$，β 为 m 维向量，γ 为 k 维向量. 对以下两个问题给出判断，并给出证明或举出反例.

(1) 如果 $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 同解，那么 (A,β) 与 (B,γ) 行向量组是否等价？

(2) 如果 (A,β) 与 (B,γ) 行向量组等价，那么 $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 是否同解？

解：(1) (i) $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 有解时，行向量组等价.

$Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 同解，则 $Ax=\theta$ 与 $Bx=\theta$ 同解，因为齐次方程组的解可以看成非齐次方程组特解的差. 由此知 $Ax=\theta$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\theta$ 同解，故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，

故 A 行向量的极大无关组也是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 行向量的极大无关组，自然可以表示 B 的行向量，故有 $B=PA$，

同理可得 $A=QB$.

设 y 是 $Ax=\beta$ 的解，则也是$Bx=\gamma$的解，故有 $By=PAy=P\beta=\gamma$，故有$\gamma=P\beta$，

于是$(B,\gamma)=P(A,\beta)$. 同理有 $(A,\beta)=Q(B,\gamma)$，即 (A,β) 与 (B,γ) 行向量组等价.

(ii) $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 无解时，行向量组不等价.

反例 $(A,\beta)=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&0&2\end{array}\right),(B,\gamma)=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$，行向量组不等价.

(2) 方程组同解.

(A,β) 与 (B,γ) 行向量组等价，则有矩阵 P 和 Q 使得 $P(A,\beta)=(B,\gamma)$, $Q(B,\gamma)=(A,\beta)$.

故$Ax=\beta$ 的解满足$PAx=P\beta$，即$Bx=\gamma$. 同样地，$Bx=\gamma$的解满足$QBx=Q\gamma$，即$Ax=\beta$，故同解.