离散数学

（第 3 版）

2024@nju

目录

目录

3.1 函数的定义与性质

函数,也可以称作映射,是一种特殊的二元关系.

定义 1.1.1

设 F 为二元关系,若 $\forall x \in \operatorname{dom} F$ 都存在唯一的 $y \in \operatorname{ran} F$ 使 xFy 成立,则称 F 为 函数 . 对于函数 F,若有 xFy,则记作 $y = F(x)$,并称 y 为 F 在 x 的值.

3.1 函数的定义与性质

函数,也可以称作映射,是一种特殊的二元关系.

定义 1.1.1

设 F 为二元关系,若 $\forall x \in \mathrm{dom}\, F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}\, F$ 使 xFy 成立,则称 F 为 函数. 对于函数 F,若有 xFy,则记作 $y = F(x)$,并称 y 为 F 在 x 的值.

例 1.1.1

设

$$F_1 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_2\rangle\}, F_2 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_1, y_2\rangle\},$$

判断它们是否为函数.

3.1 函数的定义与性质

函数,也可以称作映射,是一种特殊的二元关系.

定义 1.1.1

设 F 为二元关系,若 $\forall x \in \mathrm{dom}\, F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}\, F$ 使 xFy 成立,则称 F 为函数. 对于函数 F,若有 xFy,则记作 $y = F(x)$,并称 y 为 F 在 x 的值.

例 1.1.1

设

$$F_1 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_2\rangle\}, F_2 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_1, y_2\rangle\},$$

判断它们是否为函数.

解

F_1 是函数. F_2 不是函数,因为对应于 x_1 存在 y_1 和 y_2 满足 $x_1 F_2 y_1$ 和 $x_1 F_2 y_2$,与函数定义矛盾. □

函数相等

由于函数是集合，可以用集合相等来定义函数的相等.

定义 1.1.2

设 F, G 为函数，如果 $F \subseteq G$ 且 $G \subseteq F$，那么称函数 F 和 G 相等，记作 $F = G$.

函数相等

由于函数是集合，可以用集合相等来定义函数的相等.

定义 1.1.2

设 F, G 为函数，如果 $F \subseteq G$ 且 $G \subseteq F$，那么称函数 F 和 G **相等**，记作 $F = G$.

注 1.1.1

由以上定义可知，如果两个函数 F 和 G 相等，那么一定满足下面两个条件.

1. $\mathrm{dom}\, F = \mathrm{dom}\, G$;
2. $\forall x \in \mathrm{dom}\, F = \mathrm{dom}\, G$，都有 $F(x) = G(x)$.

例如，函数 $F(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $G(x) = x - 1$ 是不相等的，因为

$$\mathrm{dom}\, F = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq -1\},$$

而 $\mathrm{dom}\, G = \mathbb{R}, \mathrm{dom}\, F \neq \mathrm{dom}\, G$.

定义 1.1.3

设 A, B 为集合，若 f 为函数，且 $\operatorname{dom} f = A, \operatorname{ran} f \subseteq B$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$.

例如，$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数.

定义 1.1.3

设 A, B 为集合，若 f 为函数，且 $\operatorname{dom} f = A, \operatorname{ran} f \subseteq B$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$.

例如，$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数.

定义 1.1.4

所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B 上 A"，即 $B^A = \{f | f : A \to B\}$.

定义 1.1.3

设 A, B 为集合，若 f 为函数，且 $\operatorname{dom} f = A, \operatorname{ran} f \subseteq B$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$.

例如，$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数.

定义 1.1.4

所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B 上 A"，即 $B^A = \{f | f : A \to B\}$.

例 1.1.2

设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$，求 B^A.

定义 1.1.3

设 A, B 为集合，若 f 为函数，且 $\operatorname{dom} f = A, \operatorname{ran} f \subseteq B$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f : A \to B$.

例如，$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数.

定义 1.1.4

所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B 上 A"，即 $B^A = \{f | f : A \to B\}$.

例 1.1.2

设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$，求 B^A.

解

$B^A = \{f_0, f_1, \cdots, f_7\}$，其中：$f_0 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}, f_1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$,

$f_2 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}, f_3 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\}, f_4 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}$,

$f_5 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}, f_6 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}, f_7 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\}$.

从 A 到 B 的函数的个数

由排列组合的知识不难证明：若 $|A|=m, |B|=n$，且 $m,n>0$，则 $|B^A|=n^m$.
在例 1.1.2 中，$|A|=3, |B|=2$，有 $|B^A|=2^3=8$.
当 A 或 B 中至少有一个集合是空集时，可以分成下面 3 种情况.

1. $A=\emptyset$ 且 $B=\emptyset$，则 $B^A=\emptyset^\emptyset=\{\emptyset\}$.
2. $A=\emptyset$ 且 $B\neq\emptyset$，则 $B^A=B^\emptyset=\{\emptyset\}$.
3. $A\neq\emptyset$ 且 $B=\emptyset$，则 $B^A=\emptyset^A=\emptyset$.

换言之，当 $A=\emptyset$ 时，无论 B 是否为空集，均有唯一的函数 $\emptyset: A\to B$；
而当 $A\neq\emptyset, B=\emptyset$ 时，不存在从 A 到 B 的函数.

函数的像

定义 1.1.5

设函数 $f: A \to B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$.

1. 令 $f(A_1) = \{f(x) | x \in A_1\}$,称 $f(A_1)$ 为 *A_1 在 f 下的像*. 特别地,当 $A_1 = A$ 时称 $f(A)$ 为 *函数的像*.
2. 令 $f^{-1}(B_1) = \{x | x \in A, f(x) \in B_1\}$,称 $f^{-1}(B_1)$ 为 B_1 在 f 下的 *原像*.

在这里注意区别函数的值和像,它们是两个不同的概念. 函数值 $f(x) \in B$,而像 $f(A_1) \subseteq B$.

设 $B_1 \subseteq B$,显然 B_1 在 f 下的原像 $f^{-1}(B_1)$ 是 A 的子集.

考虑 $A_1 \subseteq A$,那么 $f(A_1) \subseteq B$ 的原像就是 $f^{-1}(f(A_1))$.

一般说来 $f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$,但是 $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

例如,函数 $f: \{1,2,3\} \to \{0,1\}$,满足 $f(1) = f(2) = 0, f(3) = 1$, 令 $A_1 = \{1\}$, 那么有 $f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{0\}) = \{1,2\}$. 这时 $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

满射、单射

例 1.1.3

设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{若 } x \text{ 为偶数}, \\ x+1, & \text{若 } x \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

令 $A = \{0,1\}, B = \{2\}$，那么有

$$f(A) = f(\{0,1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0,2\},$$
$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1,4\}.$$

满射、单射

例 1.1.3

设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,且

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{若 } x \text{ 为偶数}, \\ x+1, & \text{若 } x \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

令 $A = \{0, 1\}, B = \{2\}$,那么有

$$f(A) = f(\{0,1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 2\},$$
$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\}.$$

定义 1.1.6

设 $f : A \to B$.

1. 若 $\operatorname{ran} f = B$,则称 $f : A \to B$ 是满射.
2. 若 $\forall y \in \operatorname{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$,则称 $f : A \to B$ 是单射.
3. 若 $f : A \to B$ 既是满射又是单射,则称 $f : A \to B$ 是双射(或一一映射).

例 1.1.4

判断下列函数是否为单射、满射、双射. 为什么?

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$.
2. $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$.
4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.
5. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

例 1.1.4

判断下列函数是否为单射、满射、双射. 为什么?

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$.
2. $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$.
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}, f(x)=\lfloor x\rfloor$.
4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$.
5. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+, f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

解

(1) $f(x)=-x^2+2x-1$ 是开口向下的抛物线, 在 $x=1$ 点取得极大值 0. 因此它既不是单射, 也不是满射.

(2) $f(x)=\ln x$ 是单调上升的, 因此是单射. 但不是满射, 因为 $\operatorname{ran} f\subset\mathbb{R}$.

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}, f(x)=\lfloor x\rfloor$ 是满射, 但不是单射, 如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) $f(x)=2x+1$ 是满射、单射、双射, 因为它是单调函数且 $\operatorname{ran} f=\mathbb{R}$.

(5) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ 既不是单射, 也不是满射. 当 $x\to 0$ 时, $f(x)\to+\infty$; 而当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$. 在 $x=1$ 处函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1)=2$.

例 1.1.5

对于下列各题给定的 A, B 和 f，判断是否构成函数 $f: A \to B$. 如果是，说明 $f: A \to B$ 是否为单射、满射和双射，并根据要求进行计算.

(1) $A = \{1, 2, \cdots, 5\}, B = \{6, 7, \cdots, 10\}, f = \{\langle 1, 8\rangle, \langle 3, 9\rangle, \langle 4, 10\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 5, 9\rangle\}$.

(2) A, B 同 *(1)*, $f = \{\langle 1, 7\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 1, 9\rangle, \langle 5, 10\rangle\}$.

(3) A, B 同 *(1)*, $f = \{\langle 1, 8\rangle, \langle 3, 10\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 4, 9\rangle\}$.

(4) $A = B = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

例 1.1.5

对于下列各题给定的 A, B 和 f,判断是否构成函数 $f: A \to B$. 如果是,说明 $f: A \to B$ 是否为单射、满射和双射,并根据要求进行计算.

(1) $A = \{1, 2, \cdots, 5\}, B = \{6, 7, \cdots, 10\}, f = \{\langle 1, 8\rangle, \langle 3, 9\rangle, \langle 4, 10\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 5, 9\rangle\}$.

(2) A, B 同 *(1)*,$f = \{\langle 1, 7\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 1, 9\rangle, \langle 5, 10\rangle\}$.

(3) A, B 同 *(1)*,$f = \{\langle 1, 8\rangle, \langle 3, 10\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 4, 9\rangle\}$.

(4) $A = B = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

解

(1) 能构成函数 $f: A \to B$,但 $f: A \to B$ 既不是单射,也不是满射,因为 $f(3) = f(5) = 9$ 且 $7 \notin \operatorname{ran} f$.

(2) 不能构成函数 $f: A \to B$,因为 $\operatorname{dom} f = \{1, 2, 4, 5\} \neq A$,且 $\langle 1, 7\rangle \in f$, $\langle 1, 9\rangle \in f$,与函数定义矛盾.

(3) 不能构成函数 $f: A \to B$,因为 $\operatorname{dom} f = \{1, 2, 3, 4\} \neq A$.

(4) 能构成函数 $f: A \to B$,且 $f: A \to B$ 是双射.

例1.1.5(续)

对于下列各题给定的 A, B 和 f，判断是否构成函数 $f: A \to B$. 如果是，说明 $f: A \to B$ 是否为单射、满射和双射，并根据要求进行计算.

(5) $A = B = \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(6) $A = B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle$. 令 $L = \{\langle x, y \rangle | x, y \in \mathbb{R}, y = x + 1\}$，计算 $f(L)$.

(7) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(\langle x, y \rangle) = |x^2 - y^2|$，计算 $f(\mathbb{N} \times \{0\}), f^{-1}(\{0\})$.

例1.1.5(续)

对于下列各题给定的 A, B 和 f，判断是否构成函数 $f: A \to B$. 如果是，说明 $f: A \to B$ 是否为单射、满射和双射，并根据要求进行计算.

(5) $A = B = \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(6) $A = B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(\langle x, y \rangle) = \langle x+y, x-y \rangle$. 令 $L = \{\langle x, y \rangle | x, y \in \mathbb{R}, y = x+1\}$，计算 $f(L)$.

(7) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(\langle x, y \rangle) = |x^2 - y^2|$，计算 $f(\mathbb{N} \times \{0\}), f^{-1}(\{0\})$.

解

(5) 能构成函数 $f: A \to B$. 但 $f: A \to B$ 既不是单射，也不是满射，因为该函数在 $x = 1$ 取得极大值 $f(1) = \frac{1}{2}$，函数不是单调的，且 $\operatorname{ran} f \neq \mathbb{R}^+$.

(6) 能构成函数 $f: A \to B$，且是双射. $f(L) = \{\langle 2x+1, -1 \rangle | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{-1\}$.

(7) 能构成函数 $f: A \to B$，但 $f: A \to B$ 既不是单射，也不是满射. 因为 $f(\langle 1, 1 \rangle) = f(\langle 2, 2 \rangle) = 0$，且 $2 \notin \operatorname{ran} f$.

$$f(\mathbb{N} \times \{0\}) = \{n^2 - 0^2 | n \in \mathbb{N}\} = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\},$$
$$f^{-1}(\{0\}) = \{\langle n, n \rangle | n \in \mathbb{N}\}.$$

例 1.1.6

对于下列给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f : A \to B$.

(1) $A = P(\{1,2,3\}), B = \{0,1\}^{\{1,2,3\}}$.

(2) $A = [0,1], B = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

例 1.1.6

对于下列给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f: A \to B$.

(1) $A = P(\{1,2,3\}), B = \{0,1\}^{\{1,2,3\}}$.

(2) $A = [0,1], B = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

解

(1) $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, $B = \{f_0, f_1, \cdots, f_7\}$, 其中:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \{\langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,0\rangle\}, \ f_1 = \{\langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,1\rangle\}, \\
f_2 &= \{\langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle\}, \ f_3 = \{\langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle\}, \\
f_4 &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,0\rangle\}, \ f_5 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,1\rangle\}, \\
f_6 &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle\}, \ f_7 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle\}.
\end{aligned}
$$

令 $f: A \to B$, 使得 $f(\emptyset) = f_0$, $f(\{1\}) = f_1$, $f(\{2\}) = f_2$, $f(\{3\}) = f_3$, $f(\{1,2\}) = f_4$, $f(\{1,3\}) = f_5$, $f(\{2,3\}) = f_6$, $f(\{1,2,3\}) = f_7$.

(2) 令 $f: [0,1] \to [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{x+1}{4}$.

例1.1.6(续)

对于下列给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f: A \to B$.

(3) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$.

(4) $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], B = [-1, 1]$.

例1.1.6(续)

对于下列给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f : A \to B$.

(3) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$.

(4) $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], B = [-1, 1]$.

解

(3) 将 $\mathbb{Z}$ 中元素依下列顺序排列并与 $\mathbb{N}$ 中元素对应.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots
\end{array}$$

则这种对应所表示的函数是

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 0, \\ -2x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

(4) 令 $f : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$.

例 1.1.7

设 $A=\{1,2,\cdots,n\}, B=\{1,2,\cdots,m\}$, 令 $S=\{f|f:A\to B\}$ 是从 A 到 B 的所有函数构成的集合. 问: S 中有多少个满射函数?

例 1.1.7

设 $A=\{1,2,\cdots,n\},B=\{1,2,\cdots,m\}$，令 $S=\{f|f:A\to B\}$ 是从 A 到 B 的所有函数构成的集合. 问：S 中有多少个满射函数？

解

S 中存在满射函数的条件是 $n\geqslant m$. 对于满射函数 $f:A\to B$，B 中的每个数都是 f 的函数值. 设定 S 中元素的性质如下.

$$f \text{ 满足性质 } P_i \Leftrightarrow i\notin \operatorname{ran} f,\ \ i=1,2,\cdots,m.$$

所有满足性质 P_i 的函数构成 S 的子集 A_i，即

$$A_i=\{f|f\in S \text{ 且 } f \text{ 满足 } P_i\},\ \ i=1,2,\cdots,m.$$

例1.1.7(续)

因此有

$$
\begin{aligned}
&|S| = m^n;\\
&|A_i| = (m-1)^n,\ i = 1, 2, \cdots, m;\\
&|A_i \cap A_j| = (m-2)^n,\ 1 \leqslant i < j \leqslant m;\\
&\cdots\\
&|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| = 0.
\end{aligned}
$$

使用包含排斥原理(定理 ??)得到

$$
\begin{aligned}
&|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \bar{A}_m|\\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\\
&= m^n - C(m,1)(m-1)^n + C(m,2)(m-2)^n - \cdots + (-1)^{m-1} C(m, m-1) \cdot 1^n\\
&= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r C(m,r)(m-r)^n.
\end{aligned}
$$

定义 1.1.7

1. 设 $f : A \to B$,若存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 $f : A \to B$ 是常函数.

定义 1.1.7

1. 设 $f : A \to B$,若存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 $f : A \to B$ 是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数. 即 $\forall x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

定义 1.1.7

1. 设 $f: A \to B$,若存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 $f: A \to B$ 是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数. 即 $\forall x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.
3. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle, \langle B, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集,$f: A \to B$,如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \preccurlyeq x_2$ 时,均有 $f(x_1) \preccurlyeq f(x_2)$,那么称 f 为单调递增的;如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \prec x_2$ 时,有 $f(x_1) \prec f(x_2)$,那么称 f 为严格单调递增的. 类似地,也可以定义单调递减的和严格单调递减的函数.

定义 1.1.7

1. 设 $f: A \to B$,若存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 $f: A \to B$ 是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数. 即 $\forall x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.
3. 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle, \langle B, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集,$f: A \to B$,如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \preccurlyeq x_2$ 时,均有 $f(x_1) \preccurlyeq f(x_2)$,那么称 f 为单调递增的;如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \prec x_2$ 时,有 $f(x_1) \prec f(x_2)$,那么称 f 为严格单调递增的. 类似地,也可以定义单调递减的和严格单调递减的函数.
4. 设 A 为集合,对于任意的 $A' \subseteq A$,A' 的特征函数 $\chi_{A'}: A \to \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A', \\ 0, & a \in A - A'. \end{cases}$$

定义 1.1.7

1. 设 $f : A \to B$,若存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$,则称 $f : A \to B$ 是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数. 即 $\forall x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.
3. 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle, \langle B, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集,$f : A \to B$,如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \preccurlyeq x_2$ 时,均有 $f(x_1) \preccurlyeq f(x_2)$,那么称 f 为单调递增的;如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$,当 $x_1 \prec x_2$ 时,有 $f(x_1) \prec f(x_2)$,那么称 f 为严格单调递增的.
   类似地,也可以定义单调递减的和严格单调递减的函数.
4. 设 A 为集合,对于任意的 $A' \subseteq A$,A' 的特征函数 $\chi_{A'} : A \to \{0, 1\}$ 定义为
$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A', \\ 0, & a \in A - A'. \end{cases}$$
5. 设 R 是 A 上的等价关系,令
$$g : A \to A/R$$
$$g(a) = [a], \forall a \in A,$$
   称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.

单调函数可以定义于一般的偏序集上. 例如,给定偏序集 $\langle P(\{a,b\}), R_{\subseteq}\rangle$, $\langle \{0,1\}, \leqslant\rangle$,其中 $R_{\subseteq}$ 为集合的包含关系,$\leqslant$ 为一般的小于等于关系. 令 $f: P(\{a,b\}) \to \{0,1\}, f(\emptyset) = f(\{a\}) = f(\{b\}) = 0, f(\{a,b\}) = 1$,则 f 是单调递增的,但不是严格单调递增的.

单调函数可以定义于一般的偏序集上. 例如,给定偏序集 $\langle P(\{a,b\}), R_{\subseteq}\rangle$, $\langle \{0,1\}, \leqslant \rangle$,其中 $R_{\subseteq}$ 为集合的包含关系,$\leqslant$ 为一般的小于等于关系. 令 $f: P(\{a,b\}) \to \{0,1\}, f(\emptyset) = f(\{a\}) = f(\{b\}) = 0, f(\{a,b\}) = 1$,则 f 是单调递增的,但不是严格单调递增的.

子集与特征函数的对应. 设 A 为集合,不难证明,A 的每一个子集 A' 都对应于一个特征函数,不同的子集则对应于不同的特征函数. 例如,$A = \{a, b, c\}$,则有

$$\begin{aligned}
\chi_{\{a\}} &= \{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\},\\
\chi_{\emptyset} &= \{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\},\\
\chi_{\{a,b\}} &= \{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}.
\end{aligned}$$

由于 A 的子集与特征函数的对应关系,可以用特征函数来标记 A 的不同子集.

单调函数可以定义于一般的偏序集上. 例如,给定偏序集 $\langle P(\{a,b\}), R_{\subseteq}\rangle$, $\langle\{0,1\},\leqslant\rangle$,其中 $R_{\subseteq}$ 为集合的包含关系,$\leqslant$ 为一般的小于等于关系. 令 $f: P(\{a,b\}) \to \{0,1\}, f(\emptyset) = f(\{a\}) = f(\{b\}) = 0, f(\{a,b\}) = 1$,则 f 是单调递增的,但不是严格单调递增的.

子集与特征函数的对应. 设 A 为集合,不难证明,A 的每一个子集 A' 都对应于一个特征函数,不同的子集则对应于不同的特征函数. 例如,$A = \{a,b,c\}$,则有

$$\begin{aligned}\chi_{\{a\}} &= \{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\},\\ \chi_{\emptyset} &= \{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\},\\ \chi_{\{a,b\}} &= \{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}.\end{aligned}$$

由于 A 的子集与特征函数的对应关系,可以用特征函数来标记 A 的不同子集.

等价关系与自然映射. 给定集合 A 和 A 上的等价关系 R,就可以确定一个自然映射 $g: A \to A/R$. 例如,$A = \{1,2,3\}, R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \cup I_A$ 是 A 上的等价关系,那么有

$$g(1) = g(2) = \{1,2\},\ \ g(3) = \{3\}.$$

不同的等价关系将确定不同的自然映射,其中恒等关系所确定的自然映射是双射,而其他自然映射一般说来只是满射.

时间复杂度函数

- 估计算法效率的方法是:选择一个基本运算,对于给定规模为 n 的输入,计算算法所做基本运算的次数,将这个次数表示为输入规模的函数. 例如,排序和检索问题的基本运算是比较,矩阵乘法的基本运算是元素的相乘.
- 容易看到,对于规模为 n 的不同输入,一个算法所做的基本运算次数是不同的. 例如检索问题,设 $L = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 个不同的数构成的数组,从 L 中检索给定的元素 x. 如果 x 在 L 中,输出 x 在 L 中的位置 i;如果 x 不在 L 中,输出 0. 这个问题的基本运算是比较,输入规模是 n,算法采用顺序比较的方法. 如果给定数组 L 和元素 x,恰好 $x = x_1$,那么只需要 1 次比较,算法就可以输出结果;如果 x 不在 L 中,必须通过 n 次比较才能输出 0.
- 为了解决这个问题,一般只估计算法在最坏情况下所做基本运算的次数和平均情况下所做基本运算的次数. 通常将最坏情况下的基本运算次数记作 $W(n)$,平均情况下的基本运算次数记作 $A(n)$,分别称为算法最坏情况下和平均情况下的时间复杂度. 显然,$W(n)$ 和 $A(n)$ 都是正整数集合或自然数集合上的函数. 例如,顺序搜索算法最坏情况下的复杂度函数 $W(n) = n$.

时间复杂度函数(续)

设 f 是定义在自然数集合上的函数,当 n 变得很大时,函数值 $f(n)$ 的增长取决于函数的阶. 阶越高的函数,增长得越快,算法的复杂度就越高,同时就意味着算法的效率越低.

算法分析的主要工作就是估计复杂度函数的阶. 复杂度函数的阶可以是 $n, n^2, n\log n, \log n, 2^n$ 等. 如果这个函数是指数函数,那么它随着 n 的增加将增长得非常快. 当 n 比较大时,即使最先进的计算机也不可能在允许的时间内求解,这就是所谓的"指数爆炸"问题.

若存在正数 c 和 n_0 使得对一切 $n \geqslant n_0$ 有 $0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n)$,则记作 $f(n) = O(g(n))$.

若存在正数 c 和 n_0 使得对一切 $n \geqslant n_0$ 有 $0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n)$,则记作 $f(n) = \Omega(g(n))$.

若 $f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$,则 $f(n) = \Theta(g(n))$.

例如,设 $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n, g(n) = 6n^3$,则 $f(n) = \Theta(n^2)$, $g(n) = \Theta(n^3)$, $f(n) = O(g(n))$. 而 $h(n) = \Theta(1)$ 则表示常数函数.

分治策略基本思想是：把输入规模为 n 的原问题分解为 k 个规模相等、互相独立的子问题. 子问题除了输入规模减小以外，其他都与原问题相同. 使用同样的算法分别求解这些子问题，然后把子问题的解组合起来得到原问题的解.

例如，检索问题就可采用二分检索算法：把 x 和中间的数比较，若 x 等于这个数，则算法结束；若 x 大于这个数，下面只需搜索后半个数组；若 x 小于这个数，则只需搜索前半个数组. 不管怎样，经过一次比较数组的规模就将缩小一半.

算法　二分法搜索

输入：数组 L，下标从 1 到 n；数 x

输出：j

$k \leftarrow 1; m \leftarrow n$

while $k \leqslant m$ **do**

　　$j \leftarrow \lfloor (k+m)/2 \rfloor$

　　if $x = L[j]$ **then return**;

　　if $x < L[j]$ **then** $m \leftarrow j-1$;

　　else $k \leftarrow j+1$;

$j \leftarrow 0$

如果原来的问题规模 $n = 2^k$，那么至多经过 k 次比较，问题规模就可以减少到 1. 所以复杂度函数 $W(n)$ 的阶为 $\Theta(k) = \Theta(\log n)$.

函数阶的比较

例 1.1.8

下面是一些常用函数,它们是按照阶从高到低的顺序排列的.

$$
\begin{aligned}
&2^{2^n},\ (n+1)!,\ n!,\ n2^n\ ,(3/2)^n,\\
&(\log n)^{\log n} = \Theta(n^{\log\log n}),\ (\log n)!,\\
&n^3,\ n^2 = \Theta(4^{\log n}),\ n\log n = \Theta(\log(n!)),\\
&n = \Theta(2^{\log n}),\ (\sqrt{2})^{\log n},\ 2^{\sqrt{2\log n}},\\
&\log^2 n,\ \log n,\ \sqrt{\log n},\ \log\log n,\\
&n^{1/\log n} = \Theta(1).
\end{aligned}
$$

3.2 函数的复合与反函数

函数是一种特殊的二元关系，函数的复合就是关系的右复合. 一切和关系右复合有关的定理都适用于函数的复合. 下面着重考虑函数在复合中的特有性质.

定理 1.2.1

设 F, G 是函数，则 $F \circ G$ 也是函数，且满足

1. $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{x | x \in \mathrm{dom}\, F, F(x) \in \mathrm{dom}\, G\}$;
2. $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = G(F(x))$.

3.2 函数的复合与反函数

函数是一种特殊的二元关系，函数的复合就是关系的右复合．一切和关系右复合有关的定理都适用于函数的复合．下面着重考虑函数在复合中的特有性质．

定理 1.2.1

设 F, G 是函数，则 $F \circ G$ 也是函数，且满足

1. $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{x | x \in \mathrm{dom}\, F, F(x) \in \mathrm{dom}\, G\}$;
2. $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = G(F(x))$.

证明.

因为 F, G 是关系，所以 $F \circ G$ 也是关系．若对某个 $x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 有 $xF \circ Gy_1$ 和 $xF \circ Gy_2$，则有 $\langle x, y_1 \rangle \in F \circ G$且$\langle x, y_2 \rangle \in F \circ G$．因此存在 t_1，使得 $\langle x, t_1 \rangle \in F, \langle t_1, y_1 \rangle \in G$，同时存在 t_2，使得 $\langle x, t_2 \rangle \in F, \langle t_2, y_2 \rangle \in G$．因为 F 为函数，所以 $t_1 = t_2$，从而有 $\langle t_1, y_1 \rangle \in G$ 且 $\langle t_1, y_2 \rangle \in G$．又因为 G 为函数，所以必然有 $y_1 = y_2$，故 $F \circ G$ 为函数.

定理1.2.1(续)

1. $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in\mathrm{dom}\,F, F(x)\in\mathrm{dom}\,G\}$;
2. $\forall x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x)=G(F(x))$.

证明.

先证明(1). 对于任取 x,有 $x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$ 当且仅当存在 t,y,使得 $\langle x,t\rangle\in F$, $\langle t,y\rangle\in G$,这意味着 $x\in\mathrm{dom}\,F$, $t=F(x)$, $t\in\mathrm{dom}\,G$,即 $x\in\{x|x\in\mathrm{dom}\,F, F(x)\in\mathrm{dom}\,G\}$,故(1)得证.

定理1.2.1(续)

1. $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{x | x \in \mathrm{dom}\, F, F(x) \in \mathrm{dom}\, G\}$;
2. $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = G(F(x))$.

证明.

先证明(1). 对于任取 x,有 $x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 当且仅当存在 t, y,使得 $\langle x, t\rangle \in F$, $\langle t, y\rangle \in G$,这意味着 $x \in \mathrm{dom}\, F$, $t = F(x)$, $t \in \mathrm{dom}\, G$,即 $x \in \{x | x \in \mathrm{dom}\, F, F(x) \in \mathrm{dom}\, G\}$,故(1)得证.

下面证明 (2). 对任意 $x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$,有 $x \in \mathrm{dom}\, F, F(x) \in \mathrm{dom}\, G$,即 $\langle x, F(x)\rangle \in F, \langle F(x), G(F(x))\rangle \in G$,因此有 $\langle x, G(F(x))\rangle \in F \circ G$,这表明 $F \circ G(x) = G(F(x))$,所以 (2) 得证. $\square$

推论 1.2.1

设 F, G, H 为函数, 则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数, 且

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H).$$

证明.

由定理 1.2.1和 ??得证. □

推论 1.2.1

设 F, G, H 为函数，则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数，且

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H).$$

证明.

由定理 1.2.1和 ??得证. □

推论 1.2.2

设 $f : A \to B, g : B \to C$，则 $f \circ g : A \to C$，且 $\forall x \in A$ 都有 $f \circ g(x) = g(f(x))$.

推论 1.2.1

设 F, G, H 为函数,则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数,且

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H).$$

证明.

由定理 1.2.1和 **??**得证. □

推论 1.2.2

设 $f : A \to B, g : B \to C$,则 $f \circ g : A \to C$,且 $\forall x \in A$ 都有 $f \circ g(x) = g(f(x))$.

证明.

由定理 1.2.1可知 $f \circ g$ 是函数,且

$$\mathrm{dom}(f \circ g) = \{x | x \in \mathrm{dom}\, f, f(x) \in \mathrm{dom}\, g\} = \{x | x \in A, f(x) \in B\} = A,$$
$$\mathrm{ran}(f \circ g) \subseteq \mathrm{ran}\, g \subseteq C.$$

因此有 $f \circ g : A \to C$,且 $\forall x \in A$ 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$. □

定理 1.2.2

设 $f : A \to B, g : B \to C$.

1. 如果 $f : A \to B, g : B \to C$ 都是满射，那么 $f \circ g : A \to C$ 也是满射.
2. 如果 $f : A \to B, g : B \to C$ 都是单射，那么 $f \circ g : A \to C$ 也是单射.
3. 如果 $f : A \to B, g : B \to C$ 都是双射，那么 $f \circ g : A \to C$ 也是双射.

定理 1.2.2

设 $f : A \to B, g : B \to C$.

1. 如果 $f : A \to B, g : B \to C$ 都是满射,那么 $f \circ g : A \to C$ 也是满射.
2. 如果 $f : A \to B, g : B \to C$ 都是单射,那么 $f \circ g : A \to C$ 也是单射.
3. 如果 $f : A \to B, g : B \to C$ 都是双射,那么 $f \circ g : A \to C$ 也是双射.

证明.

(1) 任取 $c \in C$,因为 $g : B \to C$ 是满射,所以存在 $b \in B$ 使得 $g(b) = c$. 对于这个 b,由于 $f : A \to B$ 也是满射,所以存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 由定理 1.2.1 有 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. 从而证明了 $f \circ g : A \to C$ 是满射.
(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$, 则由定理 1.2.1 有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. 因为 $g : B \to C$ 是单射,故 $f(x_1) = f(x_2)$. 又由于 $f : A \to B$ 也是单射,所以 $x_1 = x_2$. 从而证明了 $f \circ g : A \to C$ 是单射.
(3) 由(1) 和 (2) 得证. □

定理 1.2.2 说明函数的复合运算能够保持函数单射、满射、双射的性质. 但该定理的逆命题不为真,即如果 $f \circ g : A \to C$ 是单射(或满射、双射),不一定有 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$ 都是单射(或满射、双射).

考虑集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, C = \{c_1, c_2, c_3\}$. 令

$$f = \{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \langle a_3, b_3\rangle\},$$
$$g = \{\langle b_1, c_1\rangle, \langle b_2, c_2\rangle, \langle b_3, c_3\rangle, \langle b_4, c_3\rangle\},$$

则有 $f \circ g = \{\langle a_1, c_1\rangle, \langle a_2, c_2\rangle, \langle a_3, c_3\rangle\}$.

不难看出$f : A \to B$ 和 $f \circ g : A \to C$ 都是单射,但 $g : B \to C$ 不是单射.

再考虑集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}, C = \{c_1, c_2\}$. 令

$$f = \{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \langle a_3, b_2\rangle\},$$
$$g = \{\langle b_1, c_1\rangle, \langle b_2, c_2\rangle, \langle b_3, c_2\rangle\},$$

则有 $f \circ g = \{\langle a_1, c_1\rangle, \langle a_2, c_2\rangle, \langle a_3, c_2\rangle\}$.

不难看出$g : B \to C$ 和 $f \circ g : A \to C$ 都是满射,但 $f : A \to B$ 不是满射.

与恒等映射的复合

定理 1.2.3

设 $f: A \to B$,则有 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$.

与恒等映射的复合

定理 1.2.3

设 $f: A \to B$,则有 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$.

证明.

由定理 1.2.1 的推论 1.2.2 可知

$$f \circ I_B : A \to B \quad \text{和} \quad I_A \circ f : A \to B.$$

我们仅证 $f = f \circ I_B$,同理可证 $f = I_A \circ f$.
任取 $\langle x, y \rangle$,若 $\langle x, y \rangle \in f$,则有 $\langle x, y \rangle \in f$ 且 $y \in B$,从而有 $\langle x, y \rangle \in f$, $\langle y, y \rangle \in I_B$,故 $\langle x, y \rangle \in f \circ I_B$.
反过来,若 $\langle x, y \rangle \in f \circ I_B$,则存在 t,使得 $\langle x, t \rangle \in f$, $\langle t, y \rangle \in I_B$. 由 $\langle t, y \rangle \in I_B$ 知,$t = y$,因此有 $\langle x, y \rangle \in f$. 这就证明了 $f = f \circ I_B$. □

定理 1.2.3 说明了恒等函数在函数复合中的特殊性质,特别地,对于 $f \in A^A$ 有 $f \circ I_A = I_A \circ f = f$.

函数的逆运算

任给函数 F,它的逆 F^{-1} 不一定是函数,只是一个二元关系. 例如,

$$F = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle\},$$

则有

$$F^{-1} = \{\langle y_1, x_1\rangle, \langle y_1, x_2\rangle\}.$$

显然,F^{-1} 不是函数. 因为对于 $y_1 \in \operatorname{dom} F^{-1}$ 有 x_1 和 x_2 两个值与之对应,破坏了函数的单值性.

任给单射函数 $f : A \to B$,则 f^{-1} 是函数,且是从 $\operatorname{ran} f$ 到 A 的双射函数,但不一定是从 B 到 A 的双射函数. 因为当 f 不是满射时,对任意 $y \in B - \operatorname{ran} f, f^{-1}$ 均没有值与之对应.

对于什么样的函数 $f : A \to B$,它的逆 f^{-1} 是从 B 到 A 的函数 $f^{-1} : B \to A$ 呢? 有以下定理.

定理 1.2.4

设 $f : A \to B$ 是双射, 则 $f^{-1} : B \to A$ 也是双射.

定理 1.2.4

设 $f: A \to B$ 是双射, 则 $f^{-1}: B \to A$ 也是双射.

证明.

先证明 f^{-1} 是从 B 到 A 的函数 $f^{-1}: B \to A$. 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且由定理 ?? 得

$$\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{ran} f = B, \operatorname{ran} f^{-1} = \operatorname{dom} f = A.$$

对于任意的 $x \in B = \operatorname{dom} f^{-1}$, 假设有 $y_1, y_2 \in A$ 使得 $\langle x, y_1 \rangle \in f^{-1}, \langle x, y_2 \rangle \in f^{-1}$ 均成立, 则由逆的定义有 $\langle y_1, x \rangle \in f, \langle y_2, x \rangle \in f$. 根据 f 的单射性可得 $y_1 = y_2$, 从而证明了 f^{-1} 是函数. 综上所述, $f^{-1}: B \to A$ 是满射函数.

再证明 $f^{-1}: B \to A$ 的单射性. 若存在 $x_1, x_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$, 则有 $\langle x_1, y \rangle \in f^{-1}, \langle x_2, y \rangle \in f^{-1}$, 即 $\langle y, x_1 \rangle \in f, \langle y, x_2 \rangle \in f$. 因为 f 是函数, 所以 $x_1 = x_2$, 这就证明了 f^{-1} 的单射性. □

对于双射函数 $f: A \to B$, 称 $f^{-1}: B \to A$ 是它的*反函数*.

定理 1.2.5

设 $f: A \to B$ 是双射，则

$$f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A.$$

定理 1.2.5

设 $f: A \to B$ 是双射，则

$$f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A.$$

证明.

由定理 1.2.4 可知 $f^{-1}: B \to A$ 也是双射，再由定理 1.2.1 的推论 1.2.2 可知 $f^{-1} \circ f: B \to B, f \circ f^{-1}: A \to A$.

对任意 $\langle x, y\rangle \in f^{-1} \circ f$，存在 t，使得 $\langle x, t\rangle \in f^{-1}, \langle t, y\rangle \in f$，从而有 $\langle t, x\rangle \in f$, $\langle t, y\rangle \in f$. 因为 f 是函数，所以有 $x = y, x, y \in B$，故 $\langle x, y\rangle \in I_B$.

反过来，对任意 $\langle x, y\rangle \in I_B$，有 $x = y, x, y \in B$. 因为 $f: A \to B$ 是双射，故存在 t，使得 $\langle t, x\rangle \in f, \langle t, y\rangle \in f$，即 $\langle x, t\rangle \in f^{-1}, \langle t, y\rangle \in f$，从而有 $\langle x, y\rangle \in f^{-1} \circ f$.

综上所述，$f^{-1} \circ f = I_B$. 同理可证 $f \circ f^{-1} = I_A$. □

定理 1.2.5 告诉我们，对于双射函数 $f: A \to A$，有

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A.$$

例 1.2.1

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,其中

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 3,\\ -2, & x<3,\end{cases}\quad g(x)=x+2.$$

求 $f\circ g, g\circ f$. 若 f 和 g 存在反函数,则求出它们的反函数.

例 1.2.1

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,其中

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3,\\ -2, & x<3,\end{cases}\quad g(x)=x+2.$$

求 $f\circ g, g\circ f$. 若 f 和 g 存在反函数,则求出它们的反函数.

解

易见 $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 根据定义,得

$$f\circ g(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\geqslant 3,\\ 0, & x<3.\end{cases}$$

$$g\circ f(x)=\begin{cases}(x+2)^2, & x\geqslant 1,\\ -2, & x<1.\end{cases}$$

因为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 不是双射,所以不存在反函数. 而 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是双射,它的反函数是

$$g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g^{-1}(x)=x-2.$$

3.3 双射函数与集合的基数

定义 1.3.1

设 A, B 是集合,如果存在从 A 到 B 的双射函数,那么称 A 和 B 是等势的,记作 $A \approx B$;如果 A 与 B 不等势,那么记作 $A \not\approx B$.

3.3 双射函数与集合的基数

定义 1.3.1

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的双射函数，那么称 A 和 B 是等势的，记作 $A \approx B$；如果 A 与 B 不等势，那么记作 $A \not\approx B$.

例 1.3.1

(1) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$. 根据例 *1.1.6(3)* 定义的双射函数可以证明 $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

3.3 双射函数与集合的基数

定义 1.3.1

设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的双射函数，那么称 A 和 B 是等势的，记作 $A \approx B$；如果 A 与 B 不等势，那么记作 $A \not\approx B$.

例 1.3.1

(1) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$. 根据例 *1.1.6(3)* 定义的双射函数可以证明 $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.
(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. 为建立 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数，只需把 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的所有元素排成一个有序图形，如图 *1.3.1* 所示.
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的元素恰好是坐标平面上第一象限（含坐标轴在内）中所有整数坐标的点. 如果能够找到"数遍"这些点的方法，那么这个计数过程就是建立 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数的过程.
按照图 *1.3.1* 中箭头所标明的顺序，从 $\langle 0, 0 \rangle$ 开始数起，依次得到下面的序列：

例1.3.1(续)

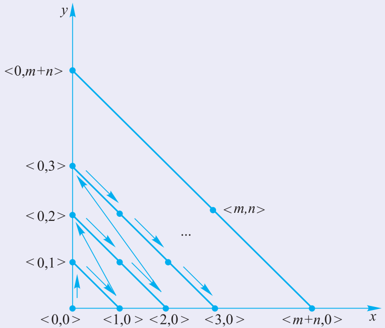

图 1.3.1

$$\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

设 $\langle m,n\rangle$ 是图上的一个点，并且它所对应的自然数是 k. 考察 m,n 和 k 之间的关系. 首先计数 $\langle m,n\rangle$ 点所在斜线下方的平面上所有的点数，是

$1+2+\cdots+(m+n)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}$;

然后计数 $\langle m,n\rangle$ 所在的斜线上按照箭头标明的顺序位于 $\langle m,n\rangle$ 点之前的点数，是 m. 因此 $\langle m,n\rangle$ 点是第 $\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m+1$ 个点. 这就得到 $k=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$. 根据上面的分析，不难给出 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数 f:

$$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N},\quad f(\langle m,n\rangle)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m.$$

例1.3.1(续)

(3) $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$. 先把所有形为 p/q,其中 p, q 为整数且 $q > 0$,的数排成一张表. 显然所有的有理数都在这张表内. 以 $0/1$ 作为第一个数,按照箭头规定的顺序可以"数遍"表中所有的数.

为避免同一个有理数可能被多次数到,例如,$1/1, 2/2, 3/3$ 等,规定在计数过程中必须跳过第二次以及以后各次所遇到的同一个有理数. 表中数 p/q 上方的方括号内标明了这个有理数所对应的计数. 这样就可以定义双射函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,其中 $f(n)$ 是 $[n]$ 下方的有理数. 从而证明了 $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.

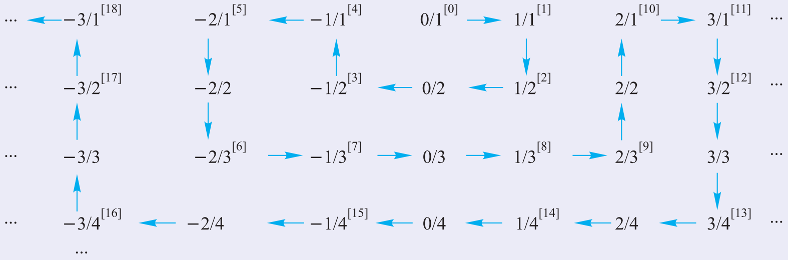

图 1.3.2

例1.3.1(续)

(4) $(0,1) \approx \mathbb{R}$,其中 $(0,1) = \{x|x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$. 令

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \tan \frac{2x-1}{2}\pi.$$

易见 f 是单调上升的,且 $\operatorname{ran} f = \mathbb{R}$,从而证明了 $(0,1) \approx \mathbb{R}$.

例1.3.1(续)

(4) $(0,1) \approx \mathbb{R}$,其中 $(0,1) = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$. 令

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \tan \frac{2x-1}{2}\pi.$$

易见 f 是单调上升的,且 $\operatorname{ran} f = \mathbb{R}$,从而证明了 $(0,1) \approx \mathbb{R}$.

(5) $[0,1] \approx (0,1)$. 其中 $(0,1)$ 如 (4) 中的定义,而

$$[0,1] = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

为构造 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的双射函数,必须要解决端点 0 和 1 的对应问题. 为此,选择一个无限序列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

构造一一对应如下:

$$\begin{array}{ccccccc}
0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2^2}, & \cdots, & \frac{1}{2^n}, & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^4}, & \cdots, & \frac{1}{2^{n+2}}, & \cdots
\end{array}$$

例1.3.1(续)

显然这个对应是双射. 区间 $[0,1]$ 中其余的数则自己对应自己，从而得到了双射函数 $f:[0,1]\to(0,1)$. 将 f 的对应法则形式化就是

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0,\\ \frac{1}{2^2}, & x=1,\\ \frac{1}{2^{n+2}}, & x=\frac{1}{2^n},\\ x, & \text{其他 } x.\end{cases}$$

通过以上证明可以得到 $[0,1]\approx(0,1)$.

例1.3.1(续)

显然这个对应是双射. 区间 $[0,1]$ 中其余的数则自己对应自己,从而得到了双射函数 $f:[0,1]\to(0,1)$. 将 f 的对应法则形式化就是

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0,\\ \frac{1}{2^2}, & x=1,\\ \frac{1}{2^{n+2}}, & x=\frac{1}{2^n},\\ x, & \text{其他 } x.\end{cases}$$

通过以上证明可以得到 $[0,1]\approx(0,1)$.

(6) 对任何 $a,b\in\mathbb{R},a<b,[0,1]\approx[a,b]$.

只需找到一个过点 $(0,a)$ 和 $(1,b)$ 的单调函数即可. 显然一次函数是最简单的. 由解析几何的知识不难得到

$$f:[0,1]\to[a,b],f(x)=(b-a)x+a.$$

从而证明了 $[0,1]\approx[a,b]$.

类似地可以证明,对任何 $a,b\in\mathbb{R},a<b$,有 $(0,1)\approx(a,b)$.

幂集等势

例 1.3.2

设 A 为任意集合，则 $P(A) \approx \{0,1\}^A$.

幂集等势

例 1.3.2

设 A 为任意集合，则 $P(A) \approx \{0,1\}^A$.

证明.

构造从 $P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数如下.

$$f : P(A) \to \{0,1\}^A, f(A') = \chi_{A'}, \forall A' \in P(A),$$

其中 $\chi_{A'}$ 是集合 A' 的特征函数(见定义 1.1.74)，易证 f 是单射. 对于任意的 $g \in \{0,1\}^A$，有 $g : A \to \{0,1\}$. 令

$$B = \{x | x \in A, g(x) = 1\},$$

则 $B \subseteq A$，且 $\chi_B = g$，即存在 $B \in P(A)$，且 $f(B) = g$. 从而证明了 f 是满射. 由等势定义得 $P(A) \approx \{0,1\}^A$. □

等势的性质

定理 1.3.1

设 A, B, C 是任意集合,

1. $A \approx A$.
2. 若 $A \approx B$,则 $B \approx A$.
3. 若 $A \approx B, B \approx C$,则 $A \approx C$.

证明留作练习.

根据前面的分析和这个定理可以得到下面的结果.

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$
$$\mathbb{R} \approx [0,1] \approx (0,1).$$

后一个结果可以强化成:任何实数区间(包括开区间. 闭区间以及半开半闭的区间)都与实数集合 $\mathbb{R}$ 等势.

那么 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{R}$ 是否等势呢? 如果有 $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}$,上面列出的所有集合彼此都是等势的;如果 $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$,与 $\mathbb{N}$ 等势的那些集合也不会与 $\mathbb{R}$ 等势. 下面证明 $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.

康托定理

定理 1.3.2

1. $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.
2. 对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$.

康托定理

定理 1.3.2

1. $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.
2. 对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$.

证明.

(1) 如果能证明 $\mathbb{N} \not\approx [0,1]$,就可以断定 $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$,为此只需证明任何函数 $f:\mathbb{N} \to [0,1]$ 都不是双射. 采用反证法. 假设存在一个双射函数 $f:\mathbb{N} \to [0,1]$,那么 $[0,1]$ 中的元素必与 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 中的元素一一对应,因此 $[0,1]$ 中的元素必可排列成:第 0 个实数,第 1 个实数,第 2 个实数,⋯⋯,第 k 个实数,⋯⋯

为了表示式的唯一性,我们规定一下 $[0,1]$ 中数的表示. 对 $\forall x \in [0,1]$,令

$$x = 0.a_0a_1a_2\cdots,\ 0 \le a_i \le 9.$$

考察下面两个表达式:$0.249\,999\ \cdots$ 和 $0.250\,000\ \cdots$. 显然它们是同一个 x 的表示. 为了保证表示式的唯一性,如果遇到上述情况,那么将 x 表示为 $0.250\,000\ \cdots$.

定理1.3.2(续)

根据这种表示法,任何函数 $f:\mathbb{N}\to[0,1]$ 的值都可以用这种表示式给出. 如下列出 f 的所有函数值:

$$f(0)=x_0=0.a_{00}a_{01}a_{02}\cdots,f(1)=x_1=0.a_{10}a_{11}a_{12}\cdots,$$
$$f(2)=x_2=0.a_{20}a_{21}a_{22}\cdots,\cdots,f(k)=x_k=0.a_{k0}a_{k1}\cdots a_{kk}\cdots,\cdots$$

因为 f 是双射,所以 $[0,1]$ 中的任意实数均应出现在上表中的某一行.
下面按照对角线法则构造一个新的小数 $x^*=0.a_{00}^*a_{11}^*a_{22}^*\cdots a_{kk}^*\cdots$,使得 $a_{ii}^*\neq a_{ii}$ 且 $a_{ii}^*\neq 9$ (这是为了避免出现 0.249 999 $\cdots$ 等类似情况), $i=0,1,2,\cdots,k,\cdots$. 易见 $x^*\in[0,1]$. 注意到 x^* 与上表中每一行小数点后都至少有一位不同,故 x^* 不在上表中,即 $x^*\notin \operatorname{ran} f$. 因此 f 不可能是满射,更不可能是双射.

定理1.3.2(续)

根据这种表示法，任何函数 $f:\mathbb{N}\to[0,1]$ 的值都可以用这种表示式给出. 如下列出 f 的所有函数值:

$$f(0)=x_0=0.a_{00}a_{01}a_{02}\cdots, f(1)=x_1=0.a_{10}a_{11}a_{12}\cdots,$$
$$f(2)=x_2=0.a_{20}a_{21}a_{22}\cdots,\cdots,f(k)=x_k=0.a_{k0}a_{k1}\cdots a_{kk}\cdots,\cdots$$

因为 f 是双射，所以 $[0,1]$ 中的任意实数均应出现在上表中的某一行.
下面按照对角线法则构造一个新的小数 $x^*=0.a_{00}^*a_{11}^*a_{22}^*\cdots a_{kk}^*\cdots$，使得 $a_{ii}^*\neq a_{ii}$ 且 $a_{ii}^*\neq 9$ (这是为了避免出现 0.249 999 $\cdots$ 等类似情况)，$i=0,1,2,\cdots,k,\cdots$. 易见 $x^*\in[0,1]$. 注意到 x^* 与上表中每一行小数点后都至少有一位不同，故 x^* 不在上表中，即 $x^*\notin \operatorname{ran} f$. 因此 f 不可能是满射，更不可能是双射.
(2) 和 (1) 的证明类似，下面将证明任何函数 $g:A\to P(A)$ 都不是满射. 设 $g:A\to P(A)$ 是从 A 到 $P(A)$ 的函数. 如下构造集合 B:
$B=\{x|x\in A, x\notin g(x)\}$, 则 $B\in P(A)$，但对任意 $x\in A$ 都有 $x\in B$当且仅当$x\notin g(x)$. 从而证明了对任意的 $x\in A$ 都有 $B\neq g(x)$. 即 $B\notin \operatorname{ran} g$.

根据康托定理知道 $\mathbb{N} \not\approx P(\mathbb{N})$，再综合例 1.3.2 的结果可知 $\mathbb{N} \not\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. 实际上，$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是比 $\mathbb{N}$“更大”的集合.

定义 1.3.2

1. 设 A, B 是集合，若存在从 A 到 B 的单射函数，则称 *B 优势于 A*，记作 $A \preccurlyeq \cdot B$；若 B 不是优势于 A，则记作 $A \not\preccurlyeq \cdot B$.
2. 设 A, B 是集合，若 $A \preccurlyeq \cdot B$ 且 $A \not\approx B$，则称 *B 真优势于 A*，记作 $A \prec \cdot B$；若 B 不是真优势于 A，则记作 $A \not\prec \cdot B$.

例如 $\mathbb{N} \preccurlyeq \cdot \mathbb{N}, \mathbb{N} \preccurlyeq \cdot \mathbb{R}, A \preccurlyeq \cdot P(A), \mathbb{R} \not\preccurlyeq \cdot \mathbb{N}$. 又如 $\mathbb{N} \prec \cdot \mathbb{R}, A \prec \cdot P(A)$，但 $\mathbb{N} \not\prec \cdot \mathbb{N}$.

根据康托定理知道 $\mathbb{N} \not\approx P(\mathbb{N})$，再综合例 1.3.2 的结果可知 $\mathbb{N} \not\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. 实际上，$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是比 $\mathbb{N}$"更大"的集合.

定义 1.3.2

1. 设 A, B 是集合，若存在从 A 到 B 的单射函数，则称 B 优势于 A，记作 $A \preccurlyeq \cdot B$；若 B 不是优势于 A，则记作 $A \not\preccurlyeq \cdot B$.
2. 设 A, B 是集合，若 $A \preccurlyeq \cdot B$ 且 $A \not\approx B$，则称 B 真优势于 A，记作 $A \prec \cdot B$；若 B 不是真优势于 A，则记作 $A \not\prec \cdot B$.

例如 $\mathbb{N} \preccurlyeq \cdot \mathbb{N}, \mathbb{N} \preccurlyeq \cdot \mathbb{R}, A \preccurlyeq \cdot P(A), \mathbb{R} \not\preccurlyeq \cdot \mathbb{N}$. 又如 $\mathbb{N} \prec \cdot \mathbb{R}, A \prec \cdot P(A)$，但 $\mathbb{N} \not\prec \cdot \mathbb{N}$.

定理 1.3.3

设 A, B, C 是任意的集合，则

1. $A \preccurlyeq \cdot A$.
2. 若 $A \preccurlyeq \cdot B$ 且 $B \preccurlyeq \cdot A$，则 $A \approx B$.
3. 若 $A \preccurlyeq \cdot B$ 且 $B \preccurlyeq \cdot C$ 则 $A \preccurlyeq \cdot C$.

以上定理为证明集合之间的优势提供了方法，也为证明集合之间的等势提供了一个有力的工具．因为在某些情况下直接构造从 A 到 B 的双射函数是相当困难的．相比之下，构造两个单射函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$ 则可能要容易得多．下面使用这种方法证明 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$.

设 x 是 $[0,1)$ 区间的小数，$0.x_1x_2\cdots$ 是 x 的二进制表示．为了保证表示的唯一性，在表示式中不允许出现连续无数个 1 的情况．例如 $0.101\ 011\ 111\cdots$，应按照规定将 x 记为 $0.101\ 100\ 000\cdots$.

任取 $x \in [0,1)$, $x = 0.x_1x_2\cdots$ 是 x 的二进制表示．如下定义 $f: [0,1) \to [0,1]^{\mathbb{N}}$，使得

$$f(x) = t_x, \text{且 } t_x : \mathbb{N} \to \{0,1\}, t_x(n) = x_{n+1}, n = 0,1,2,\cdots.$$

例如 $x = 0.101\ 101\ 00\cdots$，则对应于 x 的函数 t_x 是

$$\begin{array}{ccccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ t_x(n) & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

易见 $t_x = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，且对于 $x, y \in [0,1)$, $x \neq y$，必有 $t_x \neq t_y$，即 $f(x) \neq f(y)$．这就证明了 $f: [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是单射.

如果上面定义的 f 是满射，就直接证明了 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$. 但这是不可能的，因为 f 不是满射. 事实上，考虑 $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，其中 $t(0)=0, t(n)=1, n=1,2,\cdots$. 按照 f 的映射法则，只有 $x=0.011\cdots$ 才能满足 $f(x)=t$. 但根据我们的表示法，这个数 x 应该表为 $0.100\cdots$，所以不存在 $x \in [0,1)$，满足 $f(x)=t$.

定义另一个单射函数 $g:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1)$. g 的映射法则恰好与 f 相反，即任意 $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, t:\mathbb{N} \to \{0,1\}, g(t)=0.x_1x_2\cdots$，其中 $x_{n+1}=t(n)$. 但不同的是，将 $0.x_1x_2\cdots$ 看成数 x 的十进制表示. 例如 $t_1, t_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，且

$g(t_1)=0.011\ 1\cdots, g(t_2)=0.100\ 0\cdots$. 若将 $g(t_1)$ 和 $g(t_2)$ 都看成二进制表示，则 $g(t_1)=g(t_2)$；但若看成十进制表示，则 $g(t_1) \neq g(t_2)$. 这样就避免了因进位造成的干扰，从而保证了 g 的单射性.

根据定理 1.3.3 有 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$. 再使用等势的传递性得 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$.

如果上面定义的 f 是满射，就直接证明了 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$. 但这是不可能的，因为 f 不是满射. 事实上，考虑 $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，其中 $t(0)=0, t(n)=1, n=1,2,\cdots$. 按照 f 的映射法则，只有 $x=0.011\cdots$ 才能满足 $f(x)=t$. 但根据我们的表示法，这个数 x 应该表为 $0.100\cdots$，所以不存在 $x \in [0,1)$，满足 $f(x)=t$.

定义另一个单射函数 $g:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1)$. g 的映射法则恰好与 f 相反，即任意 $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, t:\mathbb{N} \to \{0,1\}, g(t)=0.x_1x_2\cdots$，其中 $x_{n+1}=t(n)$. 但不同的是，将 $0.x_1x_2\cdots$ 看成数 x 的十进制表示. 例如 $t_1, t_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，且 $g(t_1)=0.011\ 1\cdots, g(t_2)=0.100\ 0\cdots$. 若将 $g(t_1)$ 和 $g(t_2)$ 都看成二进制表示，则 $g(t_1)=g(t_2)$；但若看成十进制表示，则 $g(t_1) \neq g(t_2)$. 这样就避免了因进位造成的干扰，从而保证了 g 的单射性.

根据定理 1.3.3 有 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$. 再使用等势的传递性得 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$.

总结前面的讨论，有

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$\mathbb{R} \approx [a,b] \approx (c,d) \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx P(\mathbb{N})$, 其中 $[a,b],(c,d)$ 代表实数闭区间和开区间,

$\{0,1\}^{A} \approx P(A)$, 其中 A 为任意集合,

$\mathbb{N} \prec\cdot \mathbb{R}$,

$A \prec\cdot P(A)$, 其中 A 为任意集合.

无穷集

上面只是抽象地讨论了集合的等势与优势. 下面将进一步研究度量集合的势的方法. 最简单的集合是有穷集. 尽管前面已经多次用到"有穷集"这一概念, 但当时只是直观地将其理解成含有有限个元素的集合, 一直没有精确地给出有穷集的定义. 下面我们通过等势和自然数集的子集解决这个问题.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$\mathbb{N}_k = \begin{cases} \emptyset, & \text{若 } k = 0, \\ \{0, 1, \cdots, k-1\}, & \text{若 } k \geq 1. \end{cases}$$

定义 1.3.3

一个集合是*有穷集*当且仅当它是空集或者与某个 $\mathbb{N}_k, k \geq 1$, 等势; 若一个集合不是有穷的, 则称作*无穷集*.

例如, $\{a, b, c\}$ 是有穷集, 因为 $\{a, b, c\} \approx \{0, 1, 2\} = \mathbb{N}_3$, 而 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是无穷集, 因为没有 $\mathbb{N}_k$ 与 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 等势.

基数

利用定理1.3.1可以证明：任何有穷集或者是空集，或者只与唯一的 $\mathbb{N}_k$ 等势. 下面给出基数的定义.

定义 1.3.4

1. 设 A 是有穷集，则 A 的基数，记作 $\operatorname{card} A$（或 $|A|$），定义为

$$\operatorname{card} A = \begin{cases} 0, & \text{若 } A = \emptyset, \\ k, & \text{若 } A \approx \mathbb{N}_k, k \geq 1. \end{cases}$$

基数

利用定理1.3.1可以证明:任何有穷集或者是空集,或者只与唯一的 $\mathbb{N}_k$ 等势. 下面给出基数的定义.

定义 1.3.4

1. 设 A 是有穷集,则 A 的基数,记作 $\operatorname{card} A$(或 $|A|$),定义为

$$\operatorname{card} A = \begin{cases} 0, & \text{若 } A = \emptyset, \\ k, & \text{若 } A \approx \mathbb{N}_k, k \geq 1. \end{cases}$$

2. 自然数集合 $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$(读作阿列夫零),即

$$\operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0.$$

基数

利用定理1.3.1可以证明:任何有穷集或者是空集,或者只与唯一的 $\mathbb{N}_k$ 等势. 下面给出基数的定义.

定义 1.3.4

1. 设 A 是有穷集,则 A 的 基数 ,记作 $\operatorname{card} A$(或 $|A|$),定义为

$$\operatorname{card} A = \begin{cases} 0, & 若\ A = \emptyset, \\ k, & 若\ A \approx \mathbb{N}_k, k \geq 1. \end{cases}$$

2. 自然数集合 $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$(读作阿列夫零),即

$$\operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0.$$

3. 实数集 $\mathbb{R}$ 的基数记作 $\aleph$(读作阿列夫),即

$$\operatorname{card} \mathbb{R} = \aleph.$$

基数(续)

定义 1.3.5

设 A, B 为集合.

1. 若 $A \approx B$,则称 A 与 B 基数相等,记作 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

基数(续)

定义 1.3.5

设 A, B 为集合.

1. 若 $A \approx B$,则称 A 与 B 基数相等,记作 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.
2. 若 $A \preccurlyeq \cdot B$,则称 A 的基数小于等于 B 的基数,记作 $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$.

基数(续)

定义 1.3.5

设 A, B 为集合.

1. 若 $A \approx B$,则称 A 与 B 基数相等,记作 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.
2. 若 $A \preccurlyeq \cdot B$,则称 A 的基数小于等于 B 的基数,记作 $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$.
3. 若 $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ 且 $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$,则称 A 的基数小于 B 的基数,记作 $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$.

基数(续)

定义 1.3.5

设 A, B 为集合.

1. 若 $A \approx B$, 则称 A 与 B 基数相等, 记作 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.
2. 若 $A \preccurlyeq \cdot B$, 则称 A 的基数小于等于 B 的基数, 记作 $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$.
3. 若 $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ 且 $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记作 $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$.

根据前面关于势的讨论不难得到:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card} \mathbb{Z} = \operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0, \\
&\operatorname{card} P(\mathbb{N}) = \operatorname{card} 2^{\mathbb{N}} = \operatorname{card}[a, b] = \operatorname{card}(c, d) = \aleph, \\
&\aleph_0 < \aleph,
\end{aligned}$$

其中 $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. 从这里可以看出, 集合的基数就是集合的势. 基数越大, 势就越大.

可数集

对于任何集合 A 都满足 $A \prec \cdot P(A)$,所以有 $\operatorname{card} A < \operatorname{card} P(A)$. 这说明不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, \aleph_0, \aleph, \cdots$$

其中 $0, 1, 2, \cdots, n \cdots$ 恰好是全体自然数,是有穷集合的基数,也称作*有穷基数*,而 $\aleph_0, \aleph, \cdots$ 是无穷集合的基数,也称作*无穷基数*,$\aleph_0$ 是最小的无穷基数,而 $\aleph$ 后面还有更大的基数,如 $\operatorname{card} P(\mathbb{R})$ 等.

可数集

对于任何集合 A 都满足 $A \prec \cdot P(A)$,所以有 $\operatorname{card} A < \operatorname{card} P(A)$. 这说明不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, \aleph_0, \aleph, \cdots$$

其中 $0, 1, 2, \cdots, n \cdots$ 恰好是全体自然数,是有穷集合的基数,也称作*有穷基数*,而 $\aleph_0, \aleph, \cdots$ 是无穷集合的基数,也称作*无穷基数*,$\aleph_0$ 是最小的无穷基数,而 $\aleph$ 后面还有更大的基数,如 $\operatorname{card} P(\mathbb{R})$ 等.

定义 1.3.6

设 A 为集合,若 $\operatorname{card} A \leqslant \aleph_0$,则称 A 为*可数集*或*可列集*.

例如,$\{a, b, c\}$, $\mathbb{N}$,整数集 $\mathbb{Z}$,有理数集 $\mathbb{Q}$,以及 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 等都是可数集,但实数集 $\mathbb{R}$ 不是可数集,与 $\mathbb{R}$ 等势的集合也不是可数集. 对于任何的可数集,它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说,都可以找到一个"数遍"集合中全体元素的顺序.

注 1.3.1

1. 可数集的任何子集都是可数集;两个可数集的笛卡儿积是可数集.
2. 两个可数集的并是可数集;可数个可数集的并仍是可数集.
3. 无穷集 A 的幂集 $P(A)$ 不是可数集.

注 1.3.1

1. 可数集的任何子集都是可数集;两个可数集的笛卡儿积是可数集.
2. 两个可数集的并是可数集;可数个可数集的并仍是可数集.
3. 无穷集 A 的幂集 $P(A)$ 不是可数集.

例 1.3.3

求下列集合的基数.

1. $T=\{x|x$ 是单词"*BASEBALL*"中的字母$\}$.
2. $B=\{x|x\in\mathbb{R},x^2=9,2x=8\}$.
3. $C=P(A),A=\{1,3,7,11\}$.

注 1.3.1

1. 可数集的任何子集都是可数集;两个可数集的笛卡儿积是可数集.
2. 两个可数集的并是可数集;可数个可数集的并仍是可数集.
3. 无穷集 A 的幂集 $P(A)$ 不是可数集.

例 1.3.3

求下列集合的基数.

1. $T = \{x|x$ 是单词“*BASEBALL*”中的字母$\}$.
2. $B = \{x|x \in \mathbb{R}, x^2 = 9, 2x = 8\}$.
3. $C = P(A), A = \{1, 3, 7, 11\}$.

解

(1) 由 $T = \{\mathsf{B}, \mathsf{A}, \mathsf{S}, \mathsf{E}, \mathsf{L}\}$ 可知 $\mathrm{card}\, T = 5$.

(2) 由 $B = \emptyset$ 可知 $\mathrm{card}\, B = 0$.

(3) 由 $|A| = 4$ 可知 $\mathrm{card}\, P(A) = 2^4 = 16$.

例 1.3.4

设 A, B 为集合，且 $\operatorname{card} A = \aleph_0, \operatorname{card} B = n, n$ 是自然数, $n \neq 0$. 求 $\operatorname{card} A \times B$.

例 1.3.4

设 A, B 为集合，且 $\operatorname{card} A = \aleph_0, \operatorname{card} B = n$, n 是自然数, $n \neq 0$. 求 $\operatorname{card} A \times B$.

解

由 $\operatorname{card} A = \aleph_0$ 可知 A, B 都是可数集. 令

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}, B = \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}\}.$$

对任意的 $\langle a_i, b_j \rangle, \langle a_k, b_l \rangle \in A \times B$ 有 $\langle a_i, b_j \rangle = \langle a_k, b_l \rangle \Leftrightarrow i = k, j = l$.
定义函数

$$f : A \times B \to \mathbb{N}$$
$$f(\langle a_i, b_j \rangle) = in + j, \ \ i = 0, 1, \cdots, \ \ j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

易见 f 是 $A \times B$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数，所以 $\operatorname{card} A \times B = \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$.
如果直接使用可数集的性质，那么本题的求解更为简单. 因为 $\operatorname{card} A = \aleph_0$, $\operatorname{card} B = n$，所以 A, B 都是可数集，从而可知 $A \times B$ 也是可数集，于是得到 $\operatorname{card} A \times B \leqslant \aleph_0$. 显然，当 $B \neq \emptyset$ 时 $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} A \times B$，这就得到 $\operatorname{card} A \times B = \aleph_0$.