离散数学

（第 3 版）

智能科学与技术学院 2024 级

目录

目录

1. 图的基本概念
   - 图的定义及运算
   - 度数、通路与回路
   - 图的连通性
   - 图的矩阵表示

5.1 图的定义及运算

设 A, B 为任意两个集合，称 $\{\{a, b\}|a \in A, b \in B\}$ 为 A 与 B 的无序积，记作 $A\&B$.

为方便起见，将无序积中的无序对 $\{a, b\}$，记为 (a, b)，并且允许 $a = b$.

需要指出的是，无论 a, b 是否相等，均有 $(a, b) = (b, a)$，因而 $A\&B = B\&A$.

5.1 图的定义及运算

设 A, B 为任意两个集合，称 $\{\{a, b\}|a \in A, b \in B\}$ 为 A 与 B 的无序积，记作 $A\&B$.

为方便起见，将无序积中的无序对 $\{a, b\}$，记为 (a, b)，并且允许 $a = b$.

需要指出的是，无论 a, b 是否相等，均有 $(a, b) = (b, a)$，因而 $A\&B = B\&A$.

定义 1.1.1

一个无向图 G 是一个有序的二元组 $\langle V, E\rangle$，其中

1. V 是一个非空有穷集，称作顶点集，其元素称作顶点或结点.
2. E 是无序积 $V\&V$ 的有穷多重子集，称作边集，其元素称作无向边或边.

5.1 图的定义及运算

设 A, B 为任意两个集合，称 $\{\{a,b\}|a \in A, b \in B\}$ 为 A 与 B 的 无序积，记作 $A\&B$.

为方便起见，将无序积中的无序对 $\{a,b\}$，记为 (a,b)，并且允许 $a=b$.

需要指出的是，无论 a,b 是否相等，均有 $(a,b)=(b,a)$，因而 $A\&B=B\&A$.

定义 1.1.1

一个 无向图 G 是一个有序的二元组 $\langle V, E\rangle$，其中

1. V 是一个非空有穷集，称作 顶点集，其元素称作 顶点 或 结点.
2. E 是无序积 $V\&V$ 的有穷多重子集，称作 边集，其元素称作 无向边 或 边.

定义 1.1.2

一个 有向图 D 是一个有序的二元组 $\langle V, E\rangle$，其中

1. V 同定义 *1.1.1*(1).
2. E 是笛卡儿积 $V \times V$ 的有穷多重子集，称作 边集，其元素称作 有向边 或 边.

例 1.1.1

1. 给定无向图 $G=\langle V,E\rangle$,其中
   $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$,
   $E=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_1,v_5),(v_4,v_5)\}$.
2. 给定有向图 $D=\langle V,E\rangle$,其中
   $V=\{a,b,c,d\},\ E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$.

画出 G 和 D 的图形.

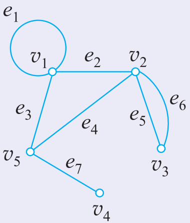
例 1.1.1

1. 给定无向图 $G = \langle V, E\rangle$，其中
   $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
   $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$.
2. 给定有向图 $D = \langle V, E\rangle$，其中
   $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, b\rangle\}$.

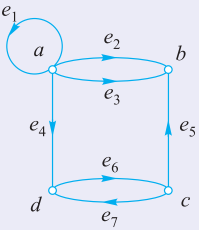
画出 G 和 D 的图形.

解

下图中 (a),(b) 分别给出了无向图 G 和有向图 D 的图形.



(a)



(b)

概念和规定

注 1.1.1

(1) 无向图和有向图统称作图，但有时也常把无向图简称作图. 通常用 G 表示无向图，D 表示有向图，有时也用 G 泛指图(无向的或有向的). 用 $V(G), E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集，$|V(G)|, |E(G)|$ 分别是 G 的顶点数和边数. 有向图也有类似的符号.

概念和规定

注 1.1.1

(1) 无向图和有向图统称作图，但有时也常把无向图简称作图. 通常用 G 表示无向图，D 表示有向图，有时也用 G 泛指图(无向的或有向的). 用 $V(G), E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集，$|V(G)|, |E(G)|$ 分别是 G 的顶点数和边数. 有向图也有类似的符号.

(2) 顶点数称作图的阶，n 个顶点的图称作 n 阶图.

(3) 一条边也没有的图称作零图. n 阶零图记作 N_n. 1 阶零图 N_1 称作平凡图. 平凡图只有一个顶点，没有边.

概念和规定

注 1.1.1

(1) 无向图和有向图统称作图，但有时也常把无向图简称作图. 通常用 G 表示无向图，D 表示有向图，有时也用 G 泛指图(无向的或有向的). 用 $V(G)$, $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集，$|V(G)|$, $|E(G)|$ 分别是 G 的顶点数和边数. 有向图也有类似的符号.

(2) 顶点数称作图的阶，n 个顶点的图称作 n 阶图.

(3) 一条边也没有的图称作零图. n 阶零图记作 N_n. 1 阶零图 N_1 称作平凡图. 平凡图只有一个顶点，没有边.

(4) 在图的定义中规定顶点集 V 为非空集，但在图的运算中可能产生顶点集为空集的运算结果，为此规定顶点集为空集的图为空图，并将空图记作 $\emptyset$.

(5) 当用图形表示图时，如果给每一个顶点和每一条边指定一个符号(字母或数字，当然字母还可以带下标)，那么称这样的图为标定图，否则称作非标定图.

注1.1.1(续)

(6) 将有向图的各条有向边改成无向边后所得到的无向图称作这个有向图的 基图 .

(7) 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图, $e_k = (v_i, v_j) \in E$, 称 v_i, v_j 为 e_k 的 端点 , e_k 与 v_i (v_j)关联 . 若 $v_i \neq v_j$, 则称 e_k 与 $v_i(v_j)$的 关联次数 为 1; 若 $v_i = v_j$, 则称 e_k 与 v_i 的 关联次数 为 2, 并称 e_k 为 环 . 如果顶点 v_l 不与边 e_k 关联, 那么称 e_k 与 v_l 的 关联次数 为 0.

若两个顶点 v_i 与 v_j 之间有一条边连接, 则称这两个顶点 相邻 . 若两条边至少有一个公共端点, 则称这两条边 相邻 .

注1.1.1(续)

(6) 将有向图的各条有向边改成无向边后所得到的无向图称作这个有向图的基图.

(7) 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图,$e_k=(v_i,v_j)\in E$,称 v_i,v_j 为 e_k 的端点,e_k 与 v_i (v_j)关联. 若 $v_i\neq v_j$,则称 e_k 与 $v_i(v_j)$的关联次数为 1;若 $v_i=v_j$,则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 2,并称 e_k 为环. 如果顶点 v_l 不与边 e_k 关联,那么称 e_k 与 v_l 的关联次数为 0.

若两个顶点 v_i 与 v_j 之间有一条边连接,则称这两个顶点相邻. 若两条边至少有一个公共端点,则称这两条边相邻.

(8) 设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图,$e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E$,称 v_i,v_j 为 e_k 的端点,v_i 为 e_k 的始点,v_j 为 e_k 的终点,并称 e_k 与 $v_i(v_j)$关联. 若 $v_i=v_j$,则称 e_k 为 D 中的环.

若两个顶点之间有一条有向边,则称这两个顶点相邻. 若两条边中一条边的终点是另一条边的始点,则称这两条边相邻.

图(无向的或有向的)中没有边关联的顶点称作孤立点.

注1.1.1(续)

(9) 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,任意 $v\in V$,

称 $N_G(v)=\{u|u\in V,(u,v)\in E,u\neq v\}$ 为 v 的邻域;

称 $\bar{N}_G(v)=N_G(v)\cup\{v\}$ 为 v 的闭邻域;

称 $I_G(v)=\{e|e\in E,e$ 与 v 相关联$\}$ 为 v 的关联集.

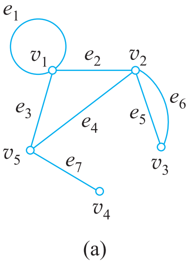
设有向图 $D=\langle V,E\rangle$,任意 $v\in V$,

称 $\Gamma_D^+(v)=\{u|u\in V,\langle v,u\rangle\in E,u\neq v\}$ 为 v 的后继元集;

称 $\Gamma_D^-(v)=\{u|u\in V,\langle u,v\rangle\in E,u\neq v\}$ 为 v 的先驱元集;

称 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$ 为 v 的邻域;

称 $\bar{N}_D(v)=N_D(v)\cup\{v\}$ 为 v 的闭邻域.



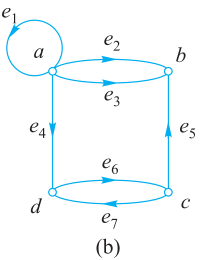


图 1.1.1

在图 1.1.1(a) 中,

$N_G(v_1) = \{v_2, v_5\}, \bar{N}_G(v_1) = \{v_1, v_2, v_5\}, I_G(v_1) = \{e_1, e_2, e_3\}.$

在图 1.1.1(b) 中,

$\Gamma_D^+(d) = \{c\}, \Gamma_D^-(d) = \{a, c\}, N_D(d) = \{a, c\}, \bar{N}_D(d) = \{a, c, d\}.$

定义 1.1.3

在无向图中，如果关联一对顶点的无向边多于 1 条，那么称这些边为 *平行边*，平行边的条数称作 *重数*.
在有向图中，如果关联一对顶点的有向边多于 1 条，并且这些边的始点与终点相同（也就是它们的方向相同），那么称这些边为 *平行边*.
含平行边的图称作 *多重图*，既不含平行边也不含环的图称作 *简单图*.

定义 1.1.3

在无向图中,如果关联一对顶点的无向边多于 *1* 条,那么称这些边为 平行边 ,平行边的条数称作 重数 .
在有向图中,如果关联一对顶点的有向边多于 *1* 条,并且这些边的始点与终点相同(也就是它们的方向相同),那么称这些边为 平行边 .
含平行边的图称作 多重图 ,既不含平行边也不含环的图称作 简单图 .

在图 1.1.1(a) 中,e_5 与 e_6 是平行边.
在图 1.1.1(b) 中,e_2 与 e_3 是平行边,而 e_6 与 e_7 不是平行边.
图 1.1.1(a),(b) 两个图都不是简单图.

定义 1.1.3

在无向图中，如果关联一对顶点的无向边多于 1 条，那么称这些边为 平行边，平行边的条数称作 重数.
在有向图中，如果关联一对顶点的有向边多于 1 条，并且这些边的始点与终点相同(也就是它们的方向相同)，那么称这些边为 平行边.
含平行边的图称作 多重图，既不含平行边也不含环的图称作 简单图.

在图 1.1.1(a) 中，e_5 与 e_6 是平行边.
在图 1.1.1(b) 中，e_2 与 e_3 是平行边，而 e_6 与 e_7 不是平行边.
图 1.1.1(a)，(b) 两个图都不是简单图.

定义 1.1.4

设 $G = \langle V, E\rangle, G' = \langle V', E'\rangle$ 为两个图(同为无向图或同为有向图)，若 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$，则称 G' 为 G 的 子图，G 为 G' 的 母图，记作 $G' \subseteq G$.
又若 $V' \subset V$ 或 $E' \subset E$，则称子图 G' 为 G 的 真子图.
若 $V' = V$，则称子图 G' 为 G 的 生成子图.

导出子图

设 $G=\langle V,E\rangle$, $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$,称以 V_1 为顶点集,以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集 E_1 的图为 G 的 V_1 导出的子图,记作 $G[V_1]$.

又设 $E_1 \subset E$ 且 $E_1 \neq \emptyset$,称以 E_1 为边集,以 E_1 中边关联的顶点为顶点集 V_1 的图为 G 的 E_1 导出的子图,记作 $G[E_1]$.

导出子图

设 $G=\langle V,E\rangle, V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$,称以 V_1 为顶点集,以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集 E_1 的图为 G 的 V_1 导出的子图,记作 $G[V_1]$.
又设 $E_1 \subset E$ 且 $E_1 \neq \emptyset$,称以 E_1 为边集,以 E_1 中边关联的顶点为顶点集 V_1 的图为 G 的 E_1 导出的子图,记作 $G[E_1]$.
在图 1.1.2 中,取 $V_1=\{a,b,c\}$,(b) 是 (a) 的 V_1 导出的子图.
取 $E_1=\{e_1,e_3\}$,(c) 是 (a) 的 E_1 导出的子图.

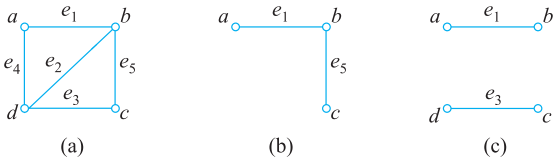


图 1.1.2

定义 1.1.5

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图.

1. 设 $e \in E$,用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e,称作删除边 e. 又设 $E' \subset E$,用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边,称作删除 E'.

定义 1.1.5

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图.

1. 设 $e\in E$,用 $G-e$ 表示从 G 中去掉边 e,称作删除边 e. 又设 $E'\subset E$,用 $G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边,称作删除 E'.
2. 设 $v\in V$,用 $G-v$ 表示从 G 中去掉 v 及所关联的一切边,称作删除顶点 v. 又设 $V'\subset V$,用 $G-V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有的顶点,称作删除 V'.

定义 1.1.5

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图.

1. 设 $e\in E$,用 $G-e$ 表示从 G 中去掉边 e,称作删除边 e. 又设 $E'\subset E$,用 $G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边,称作删除 E'.
2. 设 $v\in V$,用 $G-v$ 表示从 G 中去掉 v 及所关联的一切边,称作删除顶点 v. 又设 $V'\subset V$,用 $G-V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有的顶点,称作删除 V'.
3. 设 $e=(u,v)\in G$,用 $G\backslash e$ 表示从 G 中删除 e 后,将 e 的两个端点 u,v 用一个新的顶点 w(可以用 u 或 v 充当 w)代替,并使 w 关联除 e 以外 u,v 关联的所有边,称作边 e 的收缩.

定义 1.1.5

设 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图.

1. 设 $e \in E$,用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e,称作删除边 e. 又设 $E' \subset E$,用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边,称作删除 E'.
2. 设 $v \in V$,用 $G - v$ 表示从 G 中去掉 v 及所关联的一切边,称作删除顶点 v. 又设 $V' \subset V$,用 $G - V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有的顶点,称作删除 V'.
3. 设 $e = (u, v) \in G$,用 $G\backslash e$ 表示从 G 中删除 e 后,将 e 的两个端点 u, v 用一个新的顶点 w(可以用 u 或 v 充当 w)代替,并使 w 关联除 e 以外 u, v 关联的所有边,称作边 e 的收缩.
4. 设 $u, v \in V$(u, v 可能相邻,也可能不相邻),用 $G \cup (u, v)$(或 $G + (u, v)$)表示在 u, v 之间加一条边 (u, v),称作加新边.

在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边.

在图 1.1.3 中,设 (a) 中图为 G,则 (b) 为 $G-e_5$,(c) 为 $G-\{e_1,e_4\}$,(d) 为 $G-v_5$,(e) 为 $G-\{v_4,v_5\}$,而 f 为 $G\backslash e_5$.

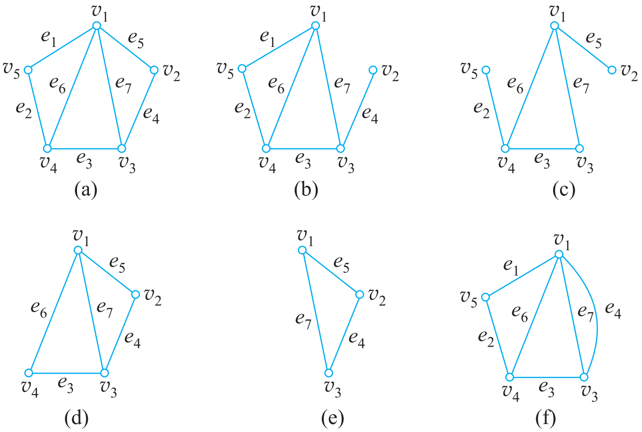


图 1.1.3

图运算

定义 1.1.6

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为不含孤立点的两个图(它们同为无向图或同为有向图).

1. 称以 $V_1 \cup V_2$ 为顶点集,以 $E_1 \cup E_2$ 为边集的图为 G_1 与 G_2 的 并图 ,记作 $G_1 \cup G_2$,即 $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$.

图运算

定义 1.1.6

设 $G_1 = \langle V_1, E_1\rangle, G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$ 为不含孤立点的两个图(它们同为无向图或同为有向图).

1. 称以 $V_1 \cup V_2$ 为顶点集,以 $E_1 \cup E_2$ 为边集的图为 G_1 与 G_2 的*并图*,记作 $G_1 \cup G_2$,即 $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2\rangle$.
2. 称以 $E_1 - E_2$ 为边集,以 $E_1 - E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的*差图*,记作 $G_1 - G_2$.

图运算

定义 1.1.6

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为不含孤立点的两个图(它们同为无向图或同为有向图).

1. 称以 $V_1 \cup V_2$ 为顶点集,以 $E_1 \cup E_2$ 为边集的图为 G_1 与 G_2 的 *并图*,记作 $G_1 \cup G_2$,即 $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$.
2. 称以 $E_1 - E_2$ 为边集,以 $E_1 - E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的 *差图*,记作 $G_1 - G_2$.
3. 称以 $E_1 \cap E_2$ 为边集,以 $E_1 \cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的 *交图*,记作 $G_1 \cap G_2$.

图运算

定义 1.1.6

设 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle, G_2=\langle V_2,E_2\rangle$ 为不含孤立点的两个图(它们同为无向图或同为有向图).

1. 称以 $V_1\cup V_2$ 为顶点集,以 $E_1\cup E_2$ 为边集的图为 G_1 与 G_2 的并图,记作 $G_1\cup G_2$,即 $G_1\cup G_2=\langle V_1\cup V_2, E_1\cup E_2\rangle$.
2. 称以 E_1-E_2 为边集,以 E_1-E_2 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的差图,记作 G_1-G_2.
3. 称以 $E_1\cap E_2$ 为边集,以 $E_1\cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的交图,记作 $G_1\cap G_2$.
4. 称以 $E_1\oplus E_2$ 为边集,以 $E_1\oplus E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的环和,记作 $G_1\oplus G_2$.

图运算

注 1.1.2

在定义 *1.1.6* 中应注意以下几点.

1. 若 $G_1 = G_2$, 则 $G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2 = G_1 = G_2$, 而 $G_1 - G_2 = G_2 - G_1 = \emptyset$, 这就是在图的定义中给出空图概念的原因.

图运算

注 1.1.2

在定义 *1.1.6* 中应注意以下几点.

1. 若 $G_1 = G_2$,则 $G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2 = G_1 = G_2$,而 $G_1 - G_2 = G_2 - G_1 = \emptyset$,这就是在图的定义中给出空图概念的原因.
2. 设图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$,若 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,则称 G_1 与 G_2 是不交的. 若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,则称 G_1 与 G_2 是边不交的或边不重的. 显然,不交的图必然是边不交的,但反之不成立. 当 G_1 与 G_2 边不重时, $G_1 \cap G_2 = \emptyset, G_1 - G_2 = G_1, G_2 - G_1 = G_2, G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$.

图运算

注 1.1.2

在定义 *1.1.6* 中应注意以下几点.

1. 若 $G_1 = G_2$,则 $G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2 = G_1 = G_2$,而 $G_1 - G_2 = G_2 - G_1 = \emptyset$,这就是在图的定义中给出空图概念的原因.
2. 设图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$,若 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,则称 G_1 与 G_2 是不交的. 若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,则称 G_1 与 G_2 是边不交的或边不重的. 显然,不交的图必然是边不交的,但反之不成立. 当 G_1 与 G_2 边不重时, $G_1 \cap G_2 = \emptyset, G_1 - G_2 = G_1, G_2 - G_1 = G_2, G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$.
3. 两个图的环和可以用并、交、差给出: $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$.

5.2 度数、通路与回路

定义 1.2.1

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图,任意 $v\in V$,将 v 作为边的端点的次数称为 v 的度数,简称为度,记作 $d_G(v)$. 在不发生混淆时,略去下标 G,简记为 $d(v)$.
设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图,任意 $v\in V$,将 v 作为边的始点的次数称为 v 的出度,记作 $d_D^+(v)$,简记为 $d^+(v)$;将 v 作为边的终点的次数称为 v 的入度,记作 $d_D^-(v)$,简记为 $d^-(v)$;称 $d^+(v)+d^-(v)$ 为 v 的度数,记作 $d_D(v)$,简记为 $d(v)$.

5.2 度数、通路与回路

定义 1.2.1

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图，任意 $v\in V$，将 v 作为边的端点的次数称为 v 的度数，简称为度，记作 $d_G(v)$. 在不发生混淆时，略去下标 G，简记为 $d(v)$.
设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图，任意 $v\in V$，将 v 作为边的始点的次数称为 v 的出度，记作 $d_D^+(v)$，简记为 $d^+(v)$；将 v 作为边的终点的次数称为 v 的入度，记作 $d_D^-(v)$，简记为 $d^-(v)$；称 $d^+(v)+d^-(v)$ 为 v 的度数，记作 $d_D(v)$，简记为 $d(v)$.

注意：在无向图中，顶点 v 上的环以 v 作 2 次端点. 在有向图中，顶点 v 上的环以 v 作一次始点和一次终点，共作 2 次端点.
在无向图 G 中，令

$$\Delta(G)=\max\{d(v)|v\in V(G)\},\ \delta(G)=\min\{d(v)|v\in V(G)\},$$

分别称为 G 的最大度和最小度.

度数

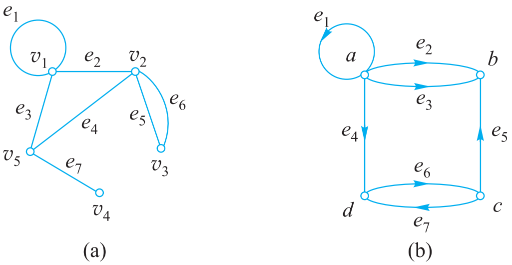
可以类似定义有向图 D 的最大度 $\varDelta(D)$、最小度 $\delta(D)$ 和最大出度 $\varDelta^+(D)$、最小出度 $\delta^+(D)$、最大入度 $\varDelta^-(D)$、最小入度 $\delta^-(D)$.

$$\varDelta(D) = \max\{d(v)|v \in V(D)\},\ \delta(D) = \min\{d(v)|v \in V(D)\},$$
$$\varDelta^+(D) = \max\{d^+(v)|v \in V(D)\},\ \delta^+(D) = \min\{d^+(v)|v \in V(D)\},$$
$$\varDelta^-(D) = \max\{d^-(v)|v \in V(D)\},\ \delta^-(D) = \min\{d^-(v)|v \in V(D)\},$$

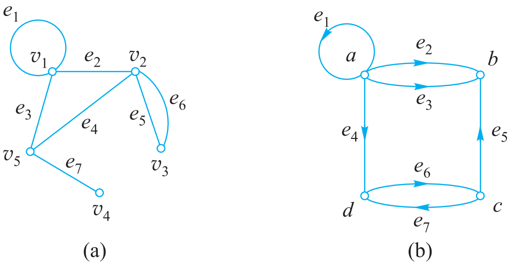
并把它们分别简记为 $\varDelta, \delta, \varDelta^+, \delta^+, \varDelta^-, \delta^-$.

另外,称度数为 1 的顶点为 悬挂顶点 ,与它关联的边称作 悬挂边 . 度为奇数的顶点称作 奇度顶点 ;度为偶数的顶点称作 偶度顶点 .

度数

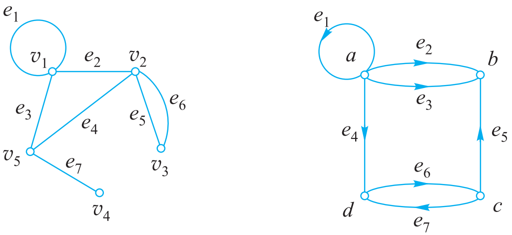


度数



在上图 (a) 中, $d(v_1) = 4$ (注意, 环提供 2 度), $\Delta = 4, \delta = 1$, v_4 是悬挂顶点, e_7 是悬挂边.

度数



(a) (b)

在上图 (a) 中, $d(v_1) = 4$ (注意, 环提供 2 度), $\varDelta = 4, \delta = 1$, v_4 是悬挂顶点, e_7 是悬挂边.

在上图 (b) 中, $d^+(a) = 4, d^-(a) = 1$(环 e_1 提供 1 个出度和 1 个入度), $d(a) = 4 + 1 = 5$. $\varDelta = 5, \delta = 3, \varDelta^+ = 4$(在 a 点达到), $\delta^+ = 0$(在 b 点达到), $\varDelta^- = 3$(在 b 点达到), $\delta^- = 1$(在 a 和 c 点达到).

握手定理

下述定理是欧拉于 1736 年给出的，称作*握手定理*，是图论的基本定理.

定理 1.2.1

在任何无向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

握手定理

下述定理是欧拉于 1736 年给出的，称作*握手定理*，是图论的基本定理.

定理 1.2.1

在任何无向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

证明.

图中每条边(包括环)均有两个端点，所以在计算各顶点度数之和时，每条边均提供 2 度. m 条边，共提供 $2m$ 度. □

握手定理

下述定理是欧拉于 1736 年给出的，称作*握手定理*，是图论的基本定理.

定理 1.2.1

在任何无向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

证明.

图中每条边(包括环)均有两个端点，所以在计算各顶点度数之和时，每条边均提供 2 度. m 条边，共提供 $2m$ 度. □

定理 1.2.2

在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍；所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，都等于边数.

本定理的证明类似于定理 1.2.1.

握手定理

推论 1.2.1

任何图(无向的或有向的)中,奇度顶点的个数是偶数.

握手定理

推论 1.2.1

任何图(无向的或有向的)中,奇度顶点的个数是偶数.

证明.

设图 $G=\langle V,E\rangle$,令

$$V_1=\{v|v\in V, d(v)\text{ 为奇数}\},$$
$$V_2=\{v|v\in V, d(v)\text{ 为偶数}\},$$

则 $V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\emptyset$. 由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v).$$

由于 $2m, \sum_{v\in V_2}d(v)$ 均为偶数,所以 $\sum_{v\in V_1}d(v)$ 也为偶数,但因 V_1 中顶点度数为奇数,所以 $|V_1|$ 必为偶数. □

度数列

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个 n 阶无向图, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,称 $d(v_1),d(v_2),\cdots,$ $d(v_n)$ 为 G 的 度数列. 对于顶点标定的无向图,它的度数列是唯一的.

度数列

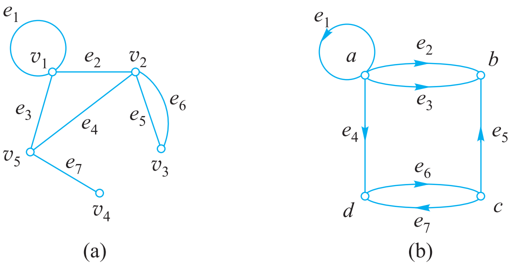
设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个 n 阶无向图, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,称 $d(v_1),d(v_2),\cdots,$ $d(v_n)$ 为 G 的度数列. 对于顶点标定的无向图,它的度数列是唯一的.

反之,对于给定的非负整数列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,若存在以 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为顶点集的 n 阶无向图 G,使得 $d(v_i)=d_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则称 d 是可图化的. 特别地,若所得到的图是简单图,则称 d 是可简单图化的.

对有向图还可以类似定义出度列和入度列.

度数列

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个 n 阶无向图，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，称 $d(v_1), d(v_2), \cdots,$ $d(v_n)$ 为 G 的*度数列*. 对于顶点标定的无向图，它的度数列是唯一的.
反之，对于给定的非负整数列 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$，若存在以 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为顶点集的 n 阶无向图 G，使得 $d(v_i) = d_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则称 d 是*可图化的*. 特别地，若所得到的图是简单图，则称 d 是*可简单图化的*.
对有向图还可以类似定义*出度列*和*入度列*.



在上图中，(a) 的度数列为 $4, 4, 2, 1, 3$；
(b) 的度数列为 $5, 3, 3, 3$，出度列为 $4, 0, 2, 1$，入度列为 $1, 3, 1, 2$.

可图化

定理 1.2.3

非负整数列 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是可图化的当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.

可图化

定理 1.2.3

非负整数列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是可图化的当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.

证明.

由定理 1.2.1，必要性显然. 下面证明充分性. 由已知条件可知，d 中有 $2k$ 个奇数，其中 $0\leqslant k\leqslant\lfloor n/2\rfloor$. 不妨设它们为 $d_1,d_2,\cdots,d_k,d_{k+1},d_{k+2},\cdots,d_{2k}$. 如下构造以 d 为度数列的 n 阶无向图 $G=\langle V,E\rangle$: $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，在顶点 v_r 和 v_{r+k} 之间连边，$r=1,2,\cdots,k$. 若 d_i 为偶数，令 $d_i'=d_i$；若 d_i 为奇数，令 $d_i'=d_i-1$，得 $d'=(d_1',d_2',\cdots,d_n')$，则 d_i' 均为偶数. 再在 v_i 处画 $d_i'/2$ 条环，$i=1,2,\cdots,n$. 这就证明了 d 是可图化的. □

可图化

定理 1.2.3

非负整数列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是可图化的当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.

证明.

由定理 1.2.1,必要性显然. 下面证明充分性. 由已知条件可知,d 中有 $2k$ 个奇数,其中 $0\leqslant k\leqslant \lfloor n/2\rfloor$. 不妨设它们为 $d_1,d_2,\cdots,d_k,d_{k+1},d_{k+2},\cdots,d_{2k}$. 如下构造以 d 为度数列的 n 阶无向图 $G=\langle V,E\rangle$: $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,在顶点 v_r 和 v_{r+k} 之间连边,$r=1,2,\cdots,k$. 若 d_i 为偶数,令 $d_i'=d_i$;若 d_i 为奇数,令 $d_i'=d_i-1$,得 $d'=(d_1',d_2',\cdots,d_n')$,则 d_i' 均为偶数. 再在 v_i 处画 $d_i'/2$ 条环,$i=1,2,\cdots,n$. 这就证明了 d 是可图化的. □

由定理 1.2.3知,$(3,3,2,1),(3,2,2,1,1)$ 不是可图化的,而 $(3,3,2,2),(3,2,2,2,1)$ 是可图化的. 下述定理是显然的.

定理 1.2.4

设 G 为任意 n 阶无向简单图,则 $\Delta(G)\leqslant n-1$.

例 1.2.1

判断下列非负整数列哪些是可图化的？哪些是可简单图化的？

1. $(5, 5, 4, 4, 2, 1)$.
2. $(5, 4, 3, 2, 2)$.
3. $(3, 3, 3, 1)$.
4. $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $d_1 > d_2 > \cdots > d_n \geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.
5. $(4, 4, 3, 3, 2, 2)$.

例 1.2.1

判断下列非负整数列哪些是可图化的？哪些是可简单图化的？

1. $(5, 5, 4, 4, 2, 1)$.
2. $(5, 4, 3, 2, 2)$.
3. $(3, 3, 3, 1)$.
4. $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $d_1 > d_2 > \cdots > d_n \geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.
5. $(4, 4, 3, 3, 2, 2)$.

解

由定理 1.2.3，除 (1) 不可图化外，其余各序列都可以图化. 但除了 (5) 中序列外，其余的都是不可简单图化的. (2) 中序列有 5 个数，最大的数是 5. 根据定理 1.2.4，它不可简单图化. 类似可证 (4) 不可简单图化.

例 1.2.1

判断下列非负整数列哪些是可图化的？哪些是可简单图化的？

1. $(5,5,4,4,2,1)$.
2. $(5,4,3,2,2)$.
3. $(3,3,3,1)$.
4. $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $d_1>d_2>\cdots>d_n\geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.
5. $(4,4,3,3,2,2)$.

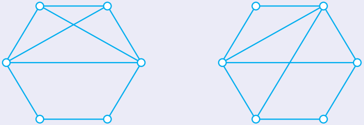
解

由定理 1.2.3，除 (1) 不可图化外，其余各序列都可以图化. 但除了 (5) 中序列外，其余的都是不可简单图化的. (2) 中序列有 5 个数，最大的数是 5. 根据定理 1.2.4，它不可简单图化. 类似可证 (4) 不可简单图化.

假设 (3) 可以简单图化，设 $G=\langle V,E\rangle$ 以 $(3,3,3,1)$ 为度数列. 不妨设 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，且 $d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=3$, $d(v_4)=1$. 由于 $d(v_4)=1$，因而 v_4 只能与 v_1,v_2,v_3 之一相邻，不妨设与 v_1 相邻. 于是 v_2 只能与 v_1 和 v_3 相邻，v_3 只能与 v_1 和 v_2 相邻，不可能有 3 度. 因而，(3) 不可简单图化.

例1.2.1(续)

(5) 中序列 $(4,4,3,3,2,2)$ 是可简单图化的，图 1.2.1 中两个 6 阶无向简单图都以 $(4,4,3,3,2,2)$ 为度数列.



(a) (b)

图 1.2.1

定义 1.2.2

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 和 $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 是两个无向图，若存在双射函数 $f: V_1 \to V_2$，使得 $\forall v_i, v_j \in V_1, (v_i, v_j) \in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$，并且 (v_i, v_j) 与 $(f(v_i), f(v_j))$ 的重数相同，则称 G_1 与 G_2 同构，记作 $G_1 \simeq G_2$. 对有向图，可类似定义同构，即要求双射函数 $f: V_1 \to V_2$，使得 $\forall v_i, v_j \in V_1, \langle v_i, v_j \rangle \in E_1$ 当且仅当 $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle \in E_2$，且 $\langle v_i, v_j \rangle$ 与 $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle$ 的重数相同.

定义 1.2.2

设 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$ 和 $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$ 是两个无向图，若存在双射函数 $f: V_1\to V_2$，使得 $\forall v_i,v_j\in V_1,(v_i,v_j)\in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i),f(v_j))\in E_2$，并且 (v_i,v_j) 与 $(f(v_i),f(v_j))$ 的重数相同，则称 G_1 与 G_2 同构，记作 $G_1\simeq G_2$. 对有向图，可类似定义同构，即要求双射函数 $f: V_1\to V_2$，使得 $\forall v_i,v_j\in V_1,\langle v_i,v_j\rangle\in E_1$ 当且仅当 $\langle f(v_i),f(v_j)\rangle\in E_2$，且 $\langle v_i,v_j\rangle$ 与 $\langle f(v_i),f(v_j)\rangle$ 的重数相同.

在图 1.2.2 中，(a) 称作彼得松(Peterson)图，(b)，(c) 均与 (a) 同构. (d)，(e)，(f) 各图彼此间都不同构.

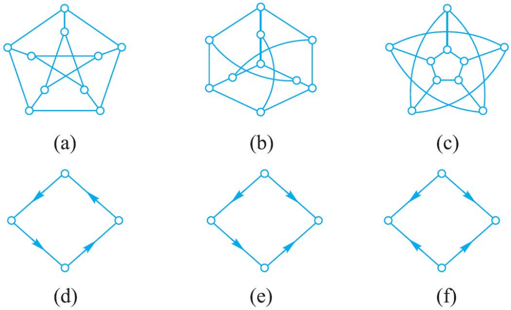


图 1.2.2

图之间的同构关系“$\cong$”构成全体图集合上的等价关系，每个等价类中的图在同构意义下都可以看成同一个图．在图 1.2.2 中，(a)，(b)，(c) 可以看成一个图．
至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件．

图之间的同构关系“$\cong$”构成全体图集合上的等价关系，每个等价类中的图在同构意义下都可以看成同一个图．在图 1.2.2 中，(a)，(b)，(c) 可以看成一个图．
至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件．

定义 1.2.3

设 G 为 n 阶无向简单图，$n \geqslant 1$，若 G 中每个顶点均与其余的 $n-1$ 个顶点相邻，则称 G 为 n 阶无向完全图，简称为 n 阶完全图，记作 K_n.

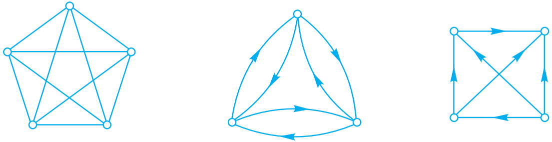
图之间的同构关系"$\cong$"构成全体图集合上的等价关系，每个等价类中的图在同构意义下都可以看成同一个图．在图 1.2.2 中，(a)，(b)，(c) 可以看成一个图．

至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件．

定义 1.2.3

设 G 为 n 阶无向简单图，$n \geqslant 1$，若 G 中每个顶点均与其余的 $n-1$ 个顶点相邻，则称 G 为 n 阶无向完全图，简称为 n 阶完全图，记作 K_n．

设 D 为 n 阶有向简单图，若 D 中每个顶点都邻接到其余的 $n-1$ 个顶点，则称 D 为 n 阶有向完全图；若 D 的基图为 n 阶无向完全图 K_n，则称 D 为 n 阶竞赛图．在下图中，(a) 为 K_5，(b) 为 3 阶有向完全图，(c) 为 4 阶竞赛图．



(a) (b) (c)

易知，n 阶无向完全图，n 阶有向完全图，n 阶竞赛图的边数分别为

$\frac{n(n-1)}{2}$, $n(n-1)$, $\frac{n(n-1)}{2}$.

k-正则图

定义 1.2.4

设 G 为 n 阶无向简单图，若 $\forall v \in V(G)$，均有 $d(v) = k$，则称 G 为 k-正则图 .

k-正则图

定义 1.2.4

设 G 为 n 阶无向简单图，若 $\forall v \in V(G)$，均有 $d(v)=k$，则称 G 为 k-正则图 .

由定义可知，n 阶零图是 0-正则图，n 阶无向完全图是 $(n-1)$-正则图，彼得松图是 3-正则图. 由握手定理可知，n 阶 k-正则图中，边数 $m=\frac{kn}{2}$，因而当 k 为奇数时，n 必为偶数.

k-正则图

定义 1.2.4

设 G 为 n 阶无向简单图，若 $\forall v \in V(G)$，均有 $d(v) = k$，则称 G 为 k-正则图．

由定义可知，n 阶零图是 0-正则图，n 阶无向完全图是 $(n-1)$-正则图，彼得松图是 3-正则图．由握手定理可知，n 阶 k-正则图中，边数 $m = \frac{kn}{2}$，因而当 k 为奇数时，n 必为偶数．

例 1.2.2

1. 画出 4 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图．
2. 画出 3 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图．

k-正则图

定义 1.2.4

设 G 为 n 阶无向简单图，若 $\forall v \in V(G)$，均有 $d(v) = k$，则称 G 为 k-正则图.

由定义可知，n 阶零图是 0-正则图，n 阶无向完全图是 $(n-1)$-正则图，彼得松图是 3-正则图. 由握手定理可知，n 阶 k-正则图中，边数 $m = \frac{kn}{2}$，因而当 k 为奇数时，n 必为偶数.

例 1.2.2

1. 画出 *4* 阶 *3* 条边的所有非同构的无向简单图.
2. 画出 *3* 阶 *2* 条边的所有非同构的有向简单图.

解

(1) 由握手定理，所画的无向简单图各顶点度数之和为 $2 \times 3 = 6$，最大度数小于等于 3. 于是所求无向简单图的度数列应满足的条件是，将 6 分成 4 个非负整数，每个整数均大于等于 0 且小于等于 3，并且奇数的个数为偶数.

例1.2.2(续)

这样的整数列排出来有 3 种:

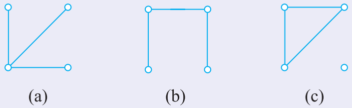
$3,1,1,1$; $2,2,1,1$; $2,2,2,0$.

将每个度数列所有非同构的图都画出来即得,见下图 (a),(b),(c).

(2) 由握手定理可知,所画有向简单图各顶点度数之和为 4,最大出度和最大入度均小于等于 2. 度数列及入度出度列为:

1. 度数列为 $1,2,1$.
   1. 入度列为 $0,1,1$,出度列为 $1,1,0$.
   2. 入度列为 $0,2,0$,出度列为 $1,0,1$.
   3. 入度列为 $1,0,1$,出度列为 $0,2,0$.
2. 度数列为 $2,2,0$,入度列为 $1,1,0$,出度列为 $1,1,0$.

4 个所要求的有向简单图见下图 (d)–(g).



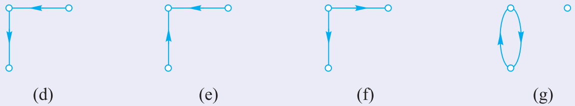


图 1.2.3

定义 1.2.5

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶无向简单图, 令 $\bar{E}=\{(u,v)|u,v\in V,u\neq v,(u,v)\notin E\}$, 称 $\bar{G}=\langle V,\bar{E}\rangle$ 为 G 的补图. 若图 $G\cong\bar{G}$, 则称 G 为自补图.

在图 1.2.3 中, (a) 与 (c) 互为补图, (b) 是自补图.

定义 1.2.5

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图，令 $\bar{E} = \{(u, v) | u, v \in V, u \neq v, (u, v) \notin E\}$，称 $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$ 为 G 的补图. 若图 $G \cong \bar{G}$，则称 G 为自补图.

在图 1.2.3 中，(a) 与 (c) 互为补图，(b) 是自补图.

定义 1.2.6

设 G 为无向标定图，G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$ 称作 v_{i_0} 到 v_{i_l} 的通路，其中 $v_{i_{r-1}}, v_{i_r}$ 为 e_{j_r} 的端点，$r = 1, 2, \cdots, l$.

顶点 v_{i_0}, v_{i_l} 分别称为 Γ 的始点和终点，Γ 中边的条数称作它的长度.

若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$，则称 Γ 为回路.

若 Γ 的所有边互不相同，则称 Γ 为简单通路.

若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$，则称 Γ 为简单回路.

若所有顶点(除 v_{i_0} 与 v_{i_l} 可能相同外)互不相同，所有边也互不相同，则称 Γ 为初级通路或路径.

若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$，则称 Γ 为初级回路或圈.

将长度为奇数的圈称作奇圈，长度为偶数的圈称作偶圈.

注意，在定义中，仍将初级回路看成初级通路(路径)的特殊情况，但是在应用中，初级通路(路径)通常都是始点与终点不相同的. 若 Γ 中有边重复出现，则称 Γ 为复杂通路. 若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$，则称 Γ 为复杂回路. 在有向图中，通路、回路及分类的定义与无向图中的类似. 根据定义，回路是通路的特殊情况；初级通路(回路)必是简单通路(回路)，但反之不成立.

在简单图中可以只用顶点序列表示通路(回路)，写成 $\Gamma = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_l}$.

注意,在定义中,仍将初级回路看成初级通路(路径)的特殊情况,但是在应用中,初级通路(路径)通常都是始点与终点不相同的. 若 Γ 中有边重复出现,则称 Γ 为复杂通路. 若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$,则称 Γ 为复杂回路. 在有向图中,通路、回路及分类的定义与无向图中的类似. 根据定义,回路是通路的特殊情况;初级通路(回路)必是简单通路(回路),但反之不成立.

在简单图中可以只用顶点序列表示通路(回路),写成 $\Gamma = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_l}$.

定理 1.2.5

在 n 阶图 G 中,若从顶点 u 到 v 存在通路,且 $u \neq v$,则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

注意，在定义中，仍将初级回路看成初级通路（路径）的特殊情况，但是在应用中，初级通路（路径）通常都是始点与终点不相同的. 若 Γ 中有边重复出现，则称 Γ 为复杂通路. 若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$，则称 Γ 为复杂回路. 在有向图中，通路、回路及分类的定义与无向图中的类似. 根据定义，回路是通路的特殊情况；初级通路（回路）必是简单通路（回路），但反之不成立.

在简单图中可以只用顶点序列表示通路（回路），写成 $\Gamma = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_l}$.

定理 1.2.5

在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v 存在通路，且 $u \neq v$，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

证明.

设 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_l v_l$，其中 $v_0 = u, v_l = v$，为 G 中从 u 到 v 的通路. 若 $l \leqslant n-1$，则定理成立. 假设 $l > n-1$，此时 Γ 上的顶点数大于 G 中的顶点数，于是必存在 $k, s, 0 \leqslant k < s \leqslant l$，使得 $v_s = v_k$，即在 Γ 上存在 v_k 到自身的回路 C，在 Γ 上删除 C，得到 $\Gamma' = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_k e_{s+1} \cdots e_l v_l$，$\Gamma'$ 仍为从 u 到 v 的通路，且长度至少比 Γ 少 1. 若 Γ' 还不满足要求，重复上述过程. 由于 G 是有限图，经过有限步后，必得到 u 到 v 长度小于等于 $n-1$ 的通路. □

推论 1.2.2

在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v 存在通路，且 $u \neq v$，则 u 到 v 一定存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路(路径).

推论 1.2.2

在 n 阶图 G 中,若从顶点 u 到 v 存在通路,且 $u \neq v$,则 u 到 v 一定存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路(路径).

类似可证明下面的定理和推论.

定理 1.2.6

在 n 阶图 G 中,若存在 v 到自身的回路,则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

推论 1.2.2

在 n 阶图 G 中,若从顶点 u 到 v 存在通路,且 $u \neq v$,则 u 到 v 一定存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路(路径).

类似可证明下面的定理和推论.

定理 1.2.6

在 n 阶图 G 中,若存在 v 到自身的回路,则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

推论 1.2.3

在 n 阶图 G 中,若存在 v 到自身的简单回路,则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的初级回路.

长度相同的圈都是同构的，因此*在同构意义下*给定长度的圈只有一个.

在标定图中，圈表示成顶点和边的标记序列. 只要两个标记序列不同，就认为这两个圈不同，称这两个圈*在定义意义下*不同.

长度相同的圈都是同构的，因此*在同构意义下*给定长度的圈只有一个.

在标定图中，圈表示成顶点和边的标记序列. 只要两个标记序列不同，就认为这两个圈不同，称这两个圈*在定义意义下*不同.

例 1.2.3

无向完全图 K_3 的顶点依次标定为 a, b, c. 在定义意义下，K_3 中有多少个不同的圈？

长度相同的圈都是同构的，因此在同构意义下给定长度的圈只有一个.

在标定图中，圈表示成顶点和边的标记序列. 只要两个标记序列不同，就认为这两个圈不同，称这两个圈在定义意义下不同.

例 1.2.3

无向完全图 K_3 的顶点依次标定为 a, b, c. 在定义意义下，K_3 中有多少个不同的圈?

解

在同构意义下，K_3 中只有一个长为 3 的圈.

但在定义意义下，不同起点(终点)的圈是不同的，顶点间排列顺序不同的圈也看成是不同的，因而 K_3 中有 6 个不同的长度为 3 的圈:

$$abca, acba, bacb, bcab, cabc, cbac.$$

如果只考虑起点(终点)的差异，而不考虑顺时针和逆时针的差异，应该有 3 种不同的圈，当然它们的长度都是 3. $\square$

5.3 图的连通性

定义 1.3.1

设无向图 $G = \langle V, E\rangle$,若 $u, v \in V$ 之间存在通路,则称 u, v 是连通的,记作 $u \sim v$. 规定:$\forall v \in V, v \sim v$.

5.3 图的连通性

定义 1.3.1

设无向图 $G = \langle V, E\rangle$,若 $u, v \in V$ 之间存在通路,则称 u, v 是连通的,记作 $u \sim v$. 规定:$\forall v \in V, v \sim v$.

若无向图 G 是平凡图或 G 中任何两个顶点都是连通的,则称 G 为连通图,否则称 G 为非连通图.

由定义不难看出,无向图中顶点之间的连通关系 $\sim$ 是 V 上的等价关系.

当 $n \geqslant 1$ 时,完全图 K_n 都是连通图,而当 $n \geqslant 2$ 时,零图 N_n 都是非连通图.

5.3 图的连通性

定义 1.3.1

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$,若 $u, v \in V$ 之间存在通路,则称 u, v 是连通的,记作 $u \sim v$. 规定:$\forall v \in V, v \sim v$.

若无向图 G 是平凡图或 G 中任何两个顶点都是连通的,则称 G 为连通图,否则称 G 为非连通图.

由定义不难看出,无向图中顶点之间的连通关系 $\sim$ 是 V 上的等价关系.

当 $n \geqslant 1$ 时,完全图 K_n 都是连通图,而当 $n \geqslant 2$ 时,零图 N_n 都是非连通图.

定义 1.3.2

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, V_i 是 V 关于顶点之间的连通关系 $\sim$ 的一个等价类,称导出子图 $G[V_i]$ 为 G 的一个连通分支. G 的连通分支数记作 $p(G)$.

5.3 图的连通性

定义 1.3.1

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,若 $u,v\in V$ 之间存在通路,则称 u,v 是连通的,记作 $u\sim v$. 规定:$\forall v\in V, v\sim v$.

若无向图 G 是平凡图或 G 中任何两个顶点都是连通的,则称 G 为连通图,否则称 G 为非连通图.

由定义不难看出,无向图中顶点之间的连通关系 $\sim$ 是 V 上的等价关系.

当 $n\geqslant 1$ 时,完全图 K_n 都是连通图,而当 $n\geqslant 2$ 时,零图 N_n 都是非连通图.

定义 1.3.2

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, V_i 是 V 关于顶点之间的连通关系 $\sim$ 的一个等价类,称导出子图 $G[V_i]$ 为 G 的一个连通分支. G 的连通分支数记作 $p(G)$.

由定义,若 G 为连通图,则 $p(G)=1$;若 G 为非连通图,则 $p(G)\geqslant 2$. 在所有的 n 阶无向图中,n 阶零图是连通分支最多的,$p(N_n)=n$.

短程线

定义 1.3.3

设 u, v 为无向图 G 中的任意两个顶点，若 $u \sim v$，则称 u, v 之间长度最短的通路为 u, v 之间的短程线 .
短程线的长度称为 u, v 之间的距离 ，记作 $d(u, v)$.
当 u, v 不连通时，规定 $d(u, v) = +\infty$.

短程线

定义 1.3.3

设 u, v 为无向图 G 中的任意两个顶点，若 $u \sim v$，则称 u, v 之间长度最短的通路为 u, v 之间的短程线.
短程线的长度称为 u, v 之间的距离，记作 $d(u, v)$.
当 u, v 不连通时，规定 $d(u, v) = +\infty$.

距离有以下性质：$\forall u, v, w \in V(G)$，

1. 非负性：$d(u, v) \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $u = v$.
2. 对称性：$d(u, v) = d(v, u)$.
3. 满足三角不等式：$d(u, v) + d(v, w) \geqslant d(u, w)$.

例 1.3.1

一个农夫带着一条狗、一只羊和一筐白菜来到河的南岸. 河边有一条小船, 小船一次只能运载农夫和他带的一样东西(狗、羊或白菜). 而在农夫不在场的情况下, 狗和羊, 羊和白菜不能放在一起, 因为狗要咬羊, 羊会吃白菜. 问: 农夫怎样才能把他的 3 样东西安全地运到河对岸? 至少需要来回几次?

例 1.3.1

一个农夫带着一条狗、一只羊和一筐白菜来到河的南岸. 河边有一条小船,小船一次只能运载农夫和他带的一样东西(狗、羊或白菜). 而在农夫不在场的情况下,狗和羊,羊和白菜不能放在一起,因为狗要咬羊,羊会吃白菜. 问:农夫怎样才能把他的 3 样东西安全地运到河对岸? 至少需要来回几次?

解

用顶点表示可能的状况. 例如,(人狗羊菜, $\emptyset$)表示人狗羊菜都在南岸,北岸什么也没有;(人羊,狗菜)表示人羊在南岸,狗菜在北岸. 两个顶点之间有一条边当且仅当一次摆渡使表示的一种状态变成另一种状态,如图 1.3.1 所示. 于是,从(人狗羊菜, $\emptyset$)到($\emptyset$,人狗羊菜)的一条通路给出农夫把他的 3 样东西安全地运到河对岸的一种方法,而这两点之间的距离是至少需要来回的次数.

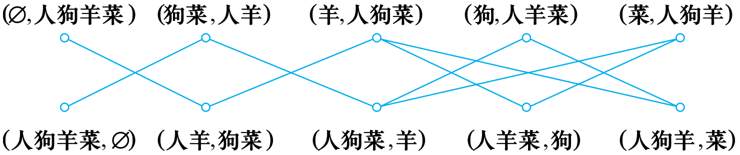
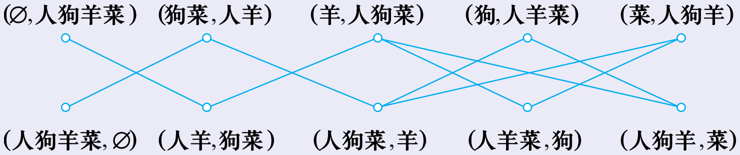
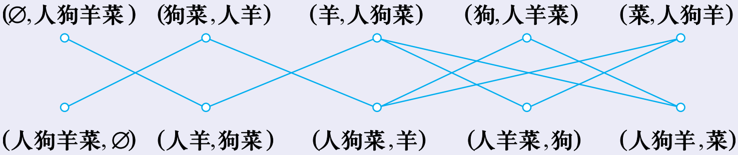


图 1.3.1

例1.3.1(续)



例1.3.1(续)



不难看出,(人狗羊菜,∅)(狗菜,人羊)(人狗菜,羊)(菜,人狗羊)(人羊菜,狗)(羊,人狗菜)(人羊,狗菜)(∅,人狗羊菜)是一条短程线,距离为 7.

农夫至少要摆渡 7 次,7 次摆渡如下:

1. 带羊到北岸,2. 空手回到南岸,3. 带狗到北岸,4. 带羊回到南岸,5. 带菜到北岸,6. 空手回到南岸,7. 带羊到北岸.

另一条短程线是(人狗羊菜,∅)(狗菜,人羊)(人狗菜,羊)(狗,人羊菜)(人狗羊,菜)(羊,人狗菜)(人羊,狗菜)(∅,人狗羊菜),它给出的摆渡方法与上面的稍有不同,当然也是 7 次.

点割集

定义 1.3.4

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,若存在 $V'\subset V$ 使得 $p(G-V')>p(G)$,且对于任意的 $V''\subset V'$,均有 $p(G-V'')=p(G)$,则称 V' 是 G 的点割集.

若 $V'=\{v\}$,则称 v 为割点.

点割集

定义 1.3.4

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,若存在 $V'\subset V$ 使得 $p(G-V')>p(G)$,且对于任意的 $V''\subset V'$,均有 $p(G-V'')=p(G)$,则称 V' 是 G 的点割集.

若 $V'=\{v\}$,则称 v 为割点.

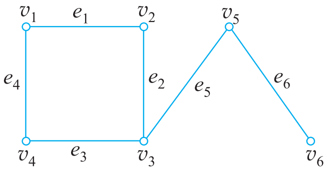


图 1.3.2

在图 1.3.2中,$\{v_2,v_4\}$,$\{v_3\}$,$\{v_5\}$ 都是点割集,而 v_3,v_5 都是割点. 注意,v_1 与悬挂顶点 v_6 不在任何点割集中.

边割集

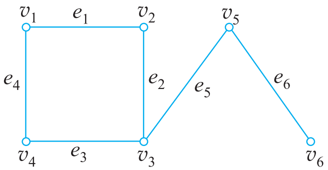
定义 1.3.5

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$,若存在 $E' \subseteq E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$,且对于任意的 $E'' \subset E'$,均有 $p(G - E'') = p(G)$,则称 E' 是 G 的边割集,或简称为割集.
若 $E' = \{e\}$,则称 e 为割边或桥.

边割集

定义 1.3.5

设无向图 $G = \langle V, E\rangle$,若存在 $E' \subseteq E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$,且对于任意的 $E'' \subset E'$,均有 $p(G - E'') = p(G)$,则称 E' 是 G 的 边割集 ,或简称为 割集 .
若 $E' = \{e\}$,则称 e 为 割边 或 桥 .



在上图中,$\{e_6\}, \{e_5\}, \{e_2, e_3\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}$ 都是割集,其中 e_6, e_5 是桥.

点连通度

定义 1.3.6

设 G 为无向连通图且不是完全图，则称

$$\kappa(G)=\min\{|V'|\mid V'\text{为 } G \text{ 的点割集}\}$$

为 G 的点连通度，简称为连通度. $\kappa(G)$ 有时简记为 κ.

当 $n\geqslant 1$ 时，规定完全图 K_n 的点连通度为 $n-1$，非连通图的点连通度为 0.

又若 $\kappa(G)\geqslant k$，则称 G 为k-连通图，k 为非负整数.

点连通度

定义 1.3.6

设 G 为无向连通图且不是完全图,则称

$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V'\text{为 } G \text{ 的点割集}\}$$

为 G 的点连通度,简称为连通度. $\kappa(G)$ 有时简记为 κ.
当 $n \geqslant 1$ 时,规定完全图 K_n 的点连通度为 $n-1$,非连通图的点连通度为 0.
又若 $\kappa(G) \geqslant k$,则称 G 为 k-连通图,k 为非负整数.

图 1.3.2 中图的点连通度为 1,此图为 1-连通图.
K_5 的点连通度 $\kappa = 4$,所以 K_5 是 1-连通图、2-连通图、3-连通图、4-连通图.
若 G 是 k-连通图,$k \geqslant 1$,则在 G 中删除任何 $k-1$ 个顶点后,所得的图一定还是连通的.

边连通度

定义 1.3.7

设 G 是无向连通图，称

$$\lambda(G)=\min\{|E'| \mid E' \text{ 为 } G \text{ 的边割集}\}$$

为 G 的*边连通度*. $\lambda(G)$ 有时简记为 λ. 规定非连通图的边连通度为 *0*. 又若 $\lambda(G)\geqslant r$，则称 G 是*r 边-连通图*.

边连通度

定义 1.3.7

设 G 是无向连通图，称

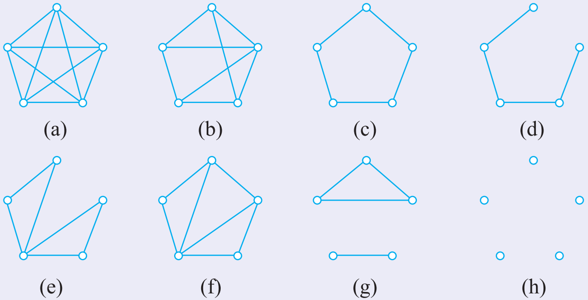
$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 为 } G \text{ 的边割集}\}$$

为 G 的*边连通度*. $\lambda(G)$ 有时简记为 λ. 规定非连通图的边连通度为 *0*. 又若 $\lambda(G) \geqslant r$，则称 G 是*r 边-连通图*.

若 G 是 r 边-连通图，则在 G 中任意删除 $r-1$ 条边后，所得的图依然是连通的.
完全图 K_n 的边连通度为 $n-1$，因而 K_n 是 r 边-连通图，$0 \leqslant r \leqslant n-1$.
图 1.3.2 中图的边连通度 $\lambda = 1$，它只能是 1 边-连通图.
设 G_1, G_2 都是 n 阶无向简单图，若 $\kappa(G_1) > \kappa(G_2)$，则称 G_1 比 G_2 的点连通程度高. 若 $\lambda(G_1) > \lambda(G_2)$，则称 G_1 比 G_2 的边连通程度高.

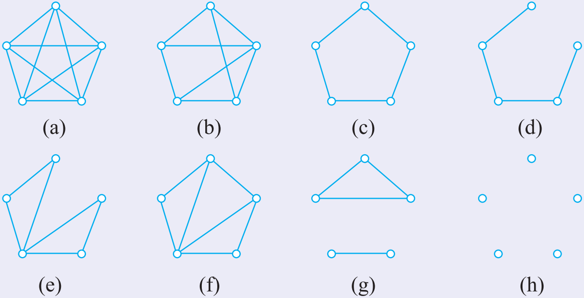
例 1.3.2

求下图所示各图的点连通度和边连通度，并指出它们各是几连通图及几边-连通图，最后将它们按照点连通程度及边连通程度排序.



例 1.3.2

求下图所示各图的点连通度和边连通度，并指出它们各是几连通图及几边-连通图，最后将它们按照点连通程度及边连通程度排序.



解

设第 i 个图的点连通度为 κ_i，边连通度为 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,8$. 容易看出，

$\kappa_1=\lambda_1=4, \kappa_2=\lambda_2=3, \kappa_3=\lambda_3=2, \kappa_4=\lambda_4=1,$

$\kappa_5=1, \lambda_5=2, \kappa_6=\lambda_6=2, \kappa_7=\lambda_7=0, \kappa_8=\lambda_8=0.$

例1.3.2(续)

(a) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2,3,4$.

(b) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2,3$.

(c) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2$.

(d) 是 1-连通图, 1 边-连通图.

(e) 是 1-连通图, k 边-连通图, $k=1,2$.

(f) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2$.

(g) 是 0-连通图, 0 边-连通图.

(h) 是 0-连通图, 0 边-连通图.

点连通程度为:(a)>(b)>(c)=(f)>(d)=(e)>(g)=(h).

边连通程度为:(a)>(b)>(c)=(e)=(f)>(d)>(g)=(h).

例1.3.2(续)

(a) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2,3,4$.

(b) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2,3$.

(c) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2$.

(d) 是 1-连通图, 1 边-连通图.

(e) 是 1-连通图, k 边-连通图, $k=1,2$.

(f) 是 k-连通图, k 边-连通图, $k=1,2$.

(g) 是 0-连通图, 0 边-连通图.

(h) 是 0-连通图, 0 边-连通图.

点连通程度为:(a)>(b)>(c)=(f)>(d)=(e)>(g)=(h).
边连通程度为:(a)>(b)>(c)=(e)=(f)>(d)>(g)=(h).

可以证明点连通度和边连通度有下列性质.

定理 1.3.1

对于任何无向图 G, 有 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$.

例 1.3.3

1. 给出 $\kappa = \lambda = \delta$ 的无向简单图.
2. 给出 $\kappa < \lambda < \delta$ 的无向简单图.

例 1.3.3

1. 给出 $\kappa = \lambda = \delta$ 的无向简单图.
2. 给出 $\kappa < \lambda < \delta$ 的无向简单图.

解

(1) n 阶无向完全图 K_n 和 n 阶零图 N_n 都满足 $\kappa = \lambda = \delta$.

(2) 在两个 $K_n, n \geqslant 4$, 之间放置一个顶点 v,并连接 v 与每一个 K_n 的两个顶点. 所得的简单图有一个割点,$\kappa = 1$. 它没有桥,但有两条边组成的边割集,所以 $\lambda = 2$. 当 $n = 4$ 时,$\delta = 3$;当 $n \geqslant 5$ 时,$\delta = 4$.

图 1.3.3 给出了 $n = 4$ 和 $n = 5$ 的情况.

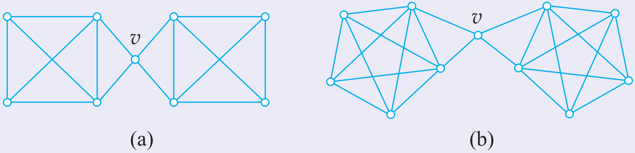


图 1.3.3

有向图的连通性

定义 1.3.8

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为一个有向图,$\forall v_i,v_j\in V$,若从 v_i 到 v_j 存在通路,则称 v_i 可达 v_j,记作 $v_i\rightarrow v_j$. 规定 v_i 总是可达自身的,即 $v_i\rightarrow v_i$. 若 $v_i\rightarrow v_j$ 且 $v_j\rightarrow v_i$,则称 v_i 与 v_j 是相互可达的,记作 $v_i\leftrightarrow v_j$. 规定 $v_i\leftrightarrow v_i$.

有向图的连通性

定义 1.3.8

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为一个有向图,$\forall v_i, v_j \in V$,若从 v_i 到 v_j 存在通路,则称 v_i 可达 v_j,记作 $v_i \to v_j$. 规定 v_i 总是可达自身的,即 $v_i \to v_i$. 若 $v_i \to v_j$ 且 $v_j \to v_i$,则称 v_i 与 v_j 是相互可达的,记作 $v_i \leftrightarrow v_j$. 规定 $v_i \leftrightarrow v_i$.

$\to$ 与 $\leftrightarrow$ 都是 V 上的二元关系,并且不难看出 $\leftrightarrow$ 是 V 上的等价关系.

有向图的连通性

定义 1.3.8

设 $D = \langle V, E\rangle$ 为一个有向图，$\forall v_i, v_j \in V$，若从 v_i 到 v_j 存在通路，则称 v_i 可达 v_j，记作 $v_i \to v_j$. 规定 v_i 总是可达自身的，即 $v_i \to v_i$. 若 $v_i \to v_j$ 且 $v_j \to v_i$，则称 v_i 与 v_j 是相互可达的，记作 $v_i \leftrightarrow v_j$. 规定 $v_i \leftrightarrow v_i$.

$\to$ 与 $\leftrightarrow$ 都是 V 上的二元关系，并且不难看出 $\leftrightarrow$ 是 V 上的等价关系.

定义 1.3.9

设有向图 $D = \langle V, E\rangle$，$\forall v_i, v_j \in V$，若 $v_i \to v_j$，则称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的短程线，短程线的长度为 v_i 到 v_j 的距离，记作 $d\langle v_i, v_j\rangle$.

有向图的连通性

定义 1.3.8

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为一个有向图,$\forall v_i,v_j\in V$,若从 v_i 到 v_j 存在通路,则称 v_i 可达 v_j,记作 $v_i\to v_j$. 规定 v_i 总是可达自身的,即 $v_i\to v_i$. 若 $v_i\to v_j$ 且 $v_j\to v_i$,则称 v_i 与 v_j 是相互可达的,记作 $v_i\leftrightarrow v_j$. 规定 $v_i\leftrightarrow v_i$.

$\to$ 与 $\leftrightarrow$ 都是 V 上的二元关系,并且不难看出 $\leftrightarrow$ 是 V 上的等价关系.

定义 1.3.9

设有向图 $D=\langle V,E\rangle,\forall v_i,v_j\in V$,若 $v_i\to v_j$,则称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的短程线,短程线的长度为 v_i 到 v_j 的距离,记作 $d\langle v_i,v_j\rangle$.

与无向图中顶点 v_i 与 v_j 之间的距离 $d(v_i,v_j)$ 相比,除无对称性外,$d\langle v_i,v_j\rangle$ 具有 $d(v_i,v_j)$ 所具有的一切性质.

连通图

定义 1.3.10

若有向图 $D = \langle V, E\rangle$ 的基图是连通图,则称 D 为弱连通图,简称为连通图.
若 $\forall v_i, v_j \in V$, $v_i \to v_j$ 和 $v_j \to v_i$ 至少成立其一,则称 D 为单向连通图.
若 $\forall v_i, v_j \in V$,均有 $v_i \leftrightarrow v_j$,则称 D 为强连通图.

连通图

定义 1.3.10

若有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 的基图是连通图，则称 D 为弱连通图，简称为连通图.
若 $\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 和 $v_j\to v_i$ 至少成立其一，则称 D 为单向连通图.
若 $\forall v_i,v_j\in V$，均有 $v_i\leftrightarrow v_j$，则称 D 为强连通图.

由定义可知，强连通图一定是单向连通图，单向连通图一定是弱连通图. 在图 1.3.4 中，(a) 为强连通图，(b) 为单向连通图，(c) 是弱连通图.

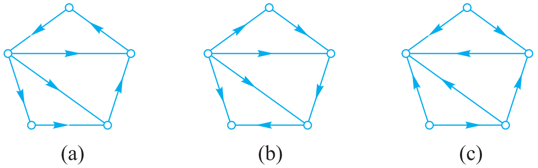


图 1.3.4

强连通图与单向连通图的判别定理

定理 1.3.2

有向图 $D = \langle V, E \rangle$ 是强连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

强连通图与单向连通图的判别定理

定理 1.3.2

有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 是强连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

证明.

充分性显然. 下面证明必要性. 设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,由 D 的强连通性, $v_i\to v_{i+1}, i=1,2,\cdots,n-1$. 设 Γ_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路, $i=1,2,\cdots,n-1$. 又因为 $v_n\to v_1$,设 Γ_n 为 v_n 到 v_1 的通路. 于是,依次连接 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{n-1},\Gamma_n$ 所得到的回路经过 D 中每个顶点至少一次. □

强连通图与单向连通图的判别定理

定理 1.3.2

有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 是强连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

证明.

充分性显然. 下面证明必要性. 设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 由 D 的强连通性, $v_i\to v_{i+1}, i=1,2,\cdots,n-1$. 设 Γ_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路, $i=1,2,\cdots,n-1$. 又因为 $v_n\to v_1$, 设 Γ_n 为 v_n 到 v_1 的通路. 于是, 依次连接 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{n-1},\Gamma_n$ 所得到的回路经过 D 中每个顶点至少一次. □

定理 1.3.3

有向图 D 是单向连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路.

证明略.

设 G 为 n 阶无向图,Γ 为一条路径. 若它的始点和终点都不与 Γ 外的顶点相邻,则称 Γ 为一条*极大路径*. 任给一条路径,如果它的始点或终点与路径外的某个顶点相邻,就把它延伸到这个顶点. 继续这一过程,直到最后不能向外延伸为止,最后总能得到一条极大路径. 称如此构造极大路径的方法为*扩大路径法*.

设 G 为 n 阶无向图, Γ 为一条路径. 若它的始点和终点都不与 Γ 外的顶点相邻, 则称 Γ 为一条极大路径. 任给一条路径, 如果它的始点或终点与路径外的某个顶点相邻, 就把它延伸到这个顶点. 继续这一过程, 直到最后不能向外延伸为止, 最后总能得到一条极大路径. 称如此构造极大路径的方法为扩大路径法.

例 1.3.4

设 G 为 $n(\geqslant 4)$ 阶无向简单图, $\delta(G) \geqslant 3$, 证明 G 中存在长度大于等于 *4* 的圈.

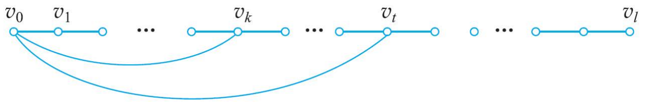
设 G 为 n 阶无向图，$\varGamma$ 为一条路径. 若它的始点和终点都不与 $\varGamma$ 外的顶点相邻，则称 $\varGamma$ 为一条*极大路径*. 任给一条路径，如果它的始点或终点与路径外的某个顶点相邻，就把它延伸到这个顶点. 继续这一过程，直到最后不能向外延伸为止，最后总能得到一条极大路径. 称如此构造极大路径的方法为*扩大路径法*.

例 1.3.4

设 G 为 $n(\geqslant 4)$ 阶无向简单图，$\delta(G) \geqslant 3$，证明 G 中存在长度大于等于 4 的圈.

证明.

不妨设 G 是连通图，设 u, v 为任意两个顶点，由于 G 是连通图，因而 u, v 间存在通路. 由推论1.2.2可知，u, v 之间存在一条路径. 用扩大路径法扩大这条路径，设最后得到的极大路径为 $\varGamma = v_0 v_1 \cdots v_l$. 由于 $\delta(G) \geqslant 3$，必有 $l \geqslant 3$. 若 v_0 与 v_l 相邻，则 $\varGamma \cup (v_0, v_l)$ 为长度大于等于 4 的圈. 否则，由于 $d(v_0) \geqslant \delta(G) \geqslant 3$，因而 v_0 除与 $\varGamma$ 上的 v_1 相邻外，还存在 $\varGamma$ 上的顶点 v_k 和 $v_t, 1 < k < t < l$，与 v_0 相邻. 于是，$v_0 v_1 \cdots v_k \cdots v_t v_0$ 为一个圈且长度大于等于 4，如下图所示. □



二部图

定义 1.3.11

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，若能将 V 划分成 V_1 和 V_2(即 $V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\emptyset$ 且 $V_1\neq\emptyset,\ V_2\neq\emptyset$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为二部图(或二分图、偶图)，称 V_1 和 V_2 为互补顶点子集，常将二部图 G 记作 $\langle V_1,V_2,E\rangle$.
又若 G 是简单二部图，V_1 中的每个顶点均与 V_2 中的所有顶点相邻，则称 G 为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中 $r=|V_1|,s=|V_2|$.

注意，当 $n\geqslant 2$ 时，n 阶零图为二部图.

二部图

图 1.3.5 所示的各图都是二部图，其中，(a)，(b)，(c) 为 K_6 的子图，(c) 为完全二部图 $K_{3,3}$. 常将 $K_{3,3}$ 画成与其同构的形式 (e).
(d) 是 K_5 的子图，它是完全二部图 $K_{2,3}$，$K_{2,3}$ 常画成 (f) 的形式.
画二部图时，人们习惯于将互补顶点子集 V_1, V_2 分开画成两排，如图 1.3.5(e) 和 (f) 所示的形式. 请读者将图 1.3.5(a) 和 (b) 也画成这种形式.

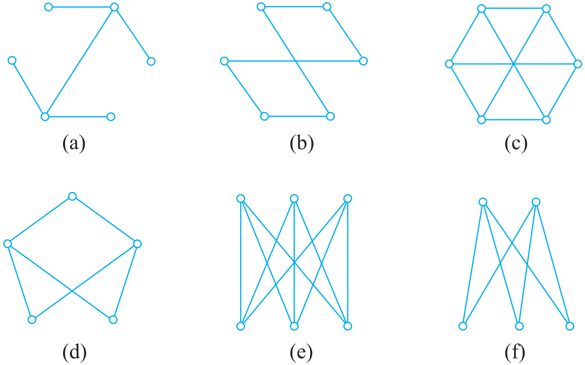


图 1.3.5

定理 1.3.4

设 $n \geqslant 2$, 则 n 阶无向图 G 是二部图当且仅当 G 中无奇圈.

定理 1.3.4

设 $n \geqslant 2$,则 n 阶无向图 G 是二部图当且仅当 G 中无奇圈.

证明.

必要性. 若 G 中无圈,则显然成立. 若 G 中有圈,设 C 为 G 中的一个圈,下证 C 是偶圈. 令 $C = v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_l}v_{i_1}$, $l \geqslant 2$. 不妨设 $v_{i_1} \in V_1$,则 $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_l}$ 依次交替属于 V_1, V_2 且 $v_{i_l} \in V_2$,因而 l 为偶数,得证 C 为偶圈.

充分性. 不妨设 G 为连通图,v_0 为 G 中的任意一个顶点,令

$$V_1 = \{v|v \in V(G), d(v_0, v)\text{ 为偶数}\},\ \ V_2 = \{v|v \in V(G), d(v_0, v)\text{ 为奇数}\}.$$

易知,$V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V(G)$. 下面只要证明 $V_i, i = 1, 2$, 中任意两顶点不相邻. 若存在 $v_i, v_j \in V_1$ 相邻,令 $e = (v_i, v_j)$,设 v_0 到 v_i, v_j 的短程线分别为 Γ_i, Γ_j,则它们的长度 $d(v_0, v_i)$, $d(v_0, v_j)$ 都是偶数. 于是,由 Γ_i, Γ_j 和 e 构成一条长度为奇数的回路. 这条回路可能是一条复杂回路,可以分解成若干由 Γ_i, Γ_j 共有的边构成的回路(实际上是每条边重复一次的路径)和由 Γ_i, Γ_j 不共有的边及 e 构成的圈. 由 Γ_i, Γ_j 共有的边构成的回路的长度为偶数,故在由 Γ_i, Γ_j 不共有的边(可以还包括 e)构成的圈中一定有奇圈,这与已知条件矛盾.
类似可证,V_2 中也不存在相邻的顶点,得证 G 为二部图. □

5.4 图的矩阵表示

用矩阵表示图便于用代数方法研究图的性质. 为了用矩阵表示图, 必须指定顶点或边的顺序, 使其成为标定图.

本节中讨论无向图和有向图的关联矩阵及有向图的邻接矩阵和可达矩阵.

定义 1.4.1

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数, 则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记作 $\boldsymbol{M}(G)$.

5.4 图的矩阵表示

用矩阵表示图便于用代数方法研究图的性质. 为了用矩阵表示图,必须指定顶点或边的顺序,使其成为标定图.

本节中讨论无向图和有向图的关联矩阵及有向图的邻接矩阵和可达矩阵.

定义 1.4.1

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的 关联次数 ,则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的 关联矩阵 ,记作 $\boldsymbol{M}(G)$.

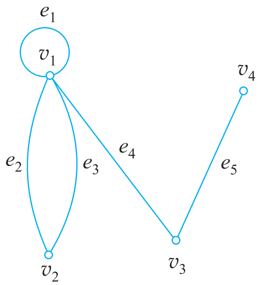


图 1.4.1

图 1.4.1 所示的无向图的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{pmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

无向图关联矩阵性质

不难看出，关联矩阵 $M(G)$ 有以下性质.

命题 1.4.1

1. $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2, j = 1, 2, \cdots, m$，即 $M(G)$ 每列元素之和均为 2，这是因为每条边恰好关联两个顶点（环所关联的两个顶点重合）.
2. $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i), i = 1, 2, \cdots, n$，即 $M(G)$ 第 i 行元素之和为 v_i 的度数.
3. $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{m} 2 = 2m$，这个结果正是握手定理的内容，即各顶点的度数之和等于边数的 2 倍.
4. 第 j 列与第 k 列相同当且仅当边 e_j 与 e_k 是平行边.
5. $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$ 当且仅当 v_i 是孤立点.

有向图关联矩阵

定义 1.4.2

设有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 中无环，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点}, \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联}, \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点},\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的关联矩阵，记作 $\boldsymbol{M}(D)$.

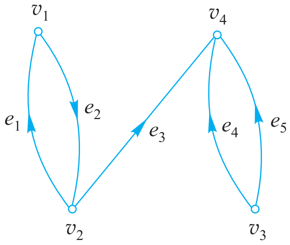


图 1.4.2

图 1.4.2 所示的图 D 的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

有向图关联矩阵性质

$\boldsymbol{M}(D)$ 有下列各条性质.

1. 每一列恰好有一个 $+1$ 和一个 -1.
2. -1 的个数等于 $+1$ 的个数,都等于边数 m,这正是有向图握手定理的内容.
3. 第 i 行中,$+1$ 的个数等于 $d^+(v_i)$,-1 的个数等于 $d^-(v_i)$.
4. 平行边所对应的列相同.

有向图关联矩阵性质

$\boldsymbol{M}(D)$ 有下列各条性质.

1. 每一列恰好有一个 $+1$ 和一个 -1.
2. -1 的个数等于 $+1$ 的个数,都等于边数 m,这正是有向图握手定理的内容.
3. 第 i 行中,$+1$ 的个数等于 $d^+(v_i)$,-1 的个数等于 $d^-(v_i)$.
4. 平行边所对应的列相同.

定义 1.4.3

设有向图 $D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 的边的条数,称 $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵,记作 $\boldsymbol{A}(D)$,或简记为 $\boldsymbol{A}$.

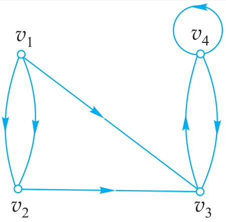


图 1.4.3

图 1.4.3所示的有向图 D 的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

有向图邻接矩阵性质

有向图的邻接矩阵有以下性质.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\ i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

有向图邻接矩阵性质

有向图的邻接矩阵有以下性质.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\ i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

于是,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = m;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} d^{-}(v_j) = m.$$

即 $\boldsymbol{A}(D)$ 中所有元素之和等于边数,这也正是有向图的握手定理.

下面定理中的通路和回路可以是复杂通路和复杂回路，而且是在定义意义下计算通路数和回路数.

定理 1.4.1

设 $\boldsymbol{A}$ 为有向图 D 的邻接矩阵，D 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{A}^l, l\geqslant 1$, 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中 $a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路(含回路)总数，其中 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

下面定理中的通路和回路可以是复杂通路和复杂回路，而且是在定义意义下计算通路数和回路数.

定理 1.4.1

设 $\boldsymbol{A}$ 为有向图 D 的邻接矩阵，D 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{A}^l, l\geqslant 1$，中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中 $a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路(含回路)总数，其中 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

证明.

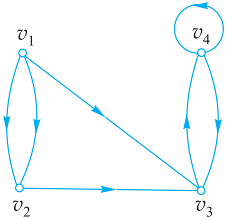
只需证明 $a_{ij}^{(l)}$ 等于 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数. 对 l 归纳证明. 当 $l=1$ 时，根据定义，$a_{ij}^{(1)}$ 等于 v_i 到 v_j 的边数，即 v_i 到 v_j 长度为 1 的通路数，结论成立. 假设对 l 结论成立，即 $a_{ij}^{(l)}$ 等于 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，要证对 $l+1$ 结论成立，即 $a_{ij}^{(l+1)}$ 等于 v_i 到 v_j 长度为 $l+1$ 的通路数. 因为 v_i 到 v_j 长度为 $l+1$ 的任一条通路均由 v_i 到某一点 v_k 长度为 l 的一条通路加 v_k 到 v_j 的一条边组成，根据归纳假设，v_i 到 v_k 长度为 l 的通路数等于 $a_{ik}^{(l)}$，所以 v_i 到 v_j 长度为 $l+1$ 的通路数等于 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)}\cdot a_{kj}^{(1)}=a_{ij}^{(l+1)}$，得证对 $l+1$ 结论成立. □

推论 1.4.1

设 $l \geqslant 1$, $\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^l$,则 $\boldsymbol{B}_l$ 中元素之和 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于等于 l 的通路数,其中 $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于等于 l 的回路数.

推论 1.4.1

设 $l \geqslant 1$, $\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^l$, 则 $\boldsymbol{B}_l$ 中元素之和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于等于 l 的通路数, 其中 $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于等于 l 的回路数.



左图所示的有向图 D 的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

从 $\boldsymbol{A}^1$–$\boldsymbol{A}^4$ 不难看出, D 中 v_2 到 v_4 长度为 $1, 2, 3, 4$ 的通路分别有 $0, 1, 1, 2$ 条. v_4 到自身长度为 $1, 2, 3, 4$ 的回路分别有 $1, 2, 3, 5$ 条, 其中有复杂回路. D 中长度小于等于 4 的通路有 53 条, 其中有 15 条回路.

可达矩阵

定义 1.4.4

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 D 的可达矩阵，记作 $\boldsymbol{P}(D)$，简记为 $\boldsymbol{P}$.

可达矩阵

定义 1.4.4

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 可达 } v_j,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为 D 的 可达矩阵 , 记作 $\boldsymbol{P}(D)$, 简记为 $\boldsymbol{P}$.

由于 $\forall v_i \in V, v_i \to v_i$, 所以 $\boldsymbol{P}(D)$ 主对角线上的元素全为 1.

图 1.4.2和图 1.4.3 所示的有向图的可达矩阵分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

由定理 1.2.5 和推论1.4.1可知, 只要计算出 $\boldsymbol{B}_{n-1}$, 由 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 的元素 $b_{ij}^{(n-1)}$, $i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j$, 是否为 0 就可以写出有向图 D 的可达矩阵. 不过 p_{ii} 总为 1, 它与 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 无关.