第 8 章 解线性方程组的迭代法

姚遥

南京大学智能科学与技术学院

本章目录

定理8.5 解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的Gauss-Seidel迭代法收敛的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{G}) < 1$，其中 $\boldsymbol{G}$ 为Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵

- 对Gauss-Seidel迭代法应用定理8.3即可证

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \tag{8.2.6}$$

迭代法 | 特殊系数矩阵

在实际应用中常遇到一些线性代数方程组，其系数矩阵具有某些性质

- 系数矩阵的对角元素占优
- 系数矩阵可约、不可约
- 系数矩阵为对称正定等

充分利用这些性质往往可使判定迭代法收敛的问题变得简单

迭代法丨对角占优矩阵

定义8.4（对角占优阵）设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$

- 如果矩阵$\boldsymbol{A}$满足条件

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \ (i = 1,2,\dots,n)$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和，则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵

- 如果 $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \ (i = 1,2,\dots,n)$ 且至少有一个不等式严格成立，称 $\boldsymbol{A}$ 为弱对角占优阵

迭代法 | 对角占优矩阵

定义8.4（对角占优阵）设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$

- 如果矩阵$\boldsymbol{A}$满足条件

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

  即 $\boldsymbol{A}$ 的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和，则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵

- 如果 $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ $(i = 1,2,\dots,n)$ 且至少有一个不等式严格成立，称 $\boldsymbol{A}$ 为弱对角占优阵

例8.9

- $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$为严格对角占优阵

- $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$为弱对角占优阵

迭代法 | 可约与不可约矩阵

定义8.5（可约与不可约矩阵）设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ ，当 $n\geq 2$ 时，如果存在 n 阶置换阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} \tag{8.3.8}$$

成立，其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 为 r 阶子矩阵，$\boldsymbol{A}_{22}$ 为 $n-r$ 阶子矩阵（ $1\leq r\leq n$ ），则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约矩阵。如果不存在，则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约矩阵

迭代法 | 可约与不可约矩阵

- $\boldsymbol{A}$ 是可约矩阵，意味着 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可经过若干行列重排，化为两个低阶方程组求解
  - ➢ 若 $\boldsymbol{A}$ 经过两行交换的同时进行相应的两列的交换，称对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次行列重排

- 由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可化为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，可化为求解

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{d}_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{d}_2\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{d}_1$ 为 r 维向量

- 也可写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{d}_2\end{cases}$$

例8.10 在例8.9中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是可约矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

- 存在置换阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_{13}$ ，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

定理8.6 如果 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵

下面只证明 A 为严格对角占优阵的情况

- 若$\det\boldsymbol{A}=0$ ，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，记作

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

- 又记 $x_k=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|\neq 0$

迭代法 | 对角占优定理

- 由齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的第 k 个方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0$$

可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

- 因此

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

与假设矛盾，故 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$ ，即 $\boldsymbol{A}$ 非奇异阵

迭代法 | 面向对角占优矩阵的收敛条件

定理8.7 如果 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ 为严格对角占优阵或为不可约弱对角占优阵，则对于任意的 $x^{(0)}$ ，解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的Jacobi迭代法，Gauss-Seidel迭代法均收敛

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为不可约弱对角占优阵，现证明Gauss-Seidel迭代法收敛
- 对于方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ，Gauss-Seidel迭代法为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

- 迭代矩阵为

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$$

迭代法丨面向对角占优矩阵的收敛条件

根据定理8.3，如果 $\boldsymbol{G}$ 的特征值小于 1，则Gauss-Seidel迭代法收敛

- 令 λ 为 $\boldsymbol{G}$ 的特征值， 有 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}) = 0$
- 由

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}) &= \det(\lambda \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1} \boldsymbol{U}) \\
&= \det\left((\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1} (\lambda(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}) - \boldsymbol{U})\right) \\
&= \det\left((\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\right) \cdot \det(\lambda(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}) - \boldsymbol{U})
\end{aligned}
$$

- 可得

$$
\det(\lambda(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}) - \boldsymbol{U}) = 0
$$

迭代法丨面向对角占优矩阵的收敛条件

接下来反证：当 $|\lambda| \geq 1$ **时** $\det(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}) \neq 0$**，根据** $\boldsymbol{D}$**、**$\boldsymbol{L}$ **和** $\boldsymbol{U}$ **的定义**

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$\boldsymbol{L} = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- 可得

$$\boldsymbol{C} = \lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \lambda a_{31} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{n,n-1} & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} = (c_{ij})_{n\times n}$$

迭代法 | 面向对角占优矩阵的收敛条件

- 由 $\boldsymbol{A}$ 为不可约矩阵，则 $\boldsymbol{C}$ 亦为不可约矩阵
- 由 $\boldsymbol{A}$ 为弱对角占优阵得到（当$|\lambda| \geq 1$时）

$$|c_{ii}| = |\lambda||a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} \lambda|a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} \lambda|a_{ij}|$$

$$\geq \sum_{j=1}^{i-1} \lambda|a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j \neq i} |c_{ij}|$$

且至少有一不等式严格成立

- 因此，当 $|\lambda| \geq 1$ 时，$\boldsymbol{C}$ 为不可约弱对角占优阵
- 根据定理8.6，此时 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异矩阵，即 $\det\boldsymbol{C} \neq 0$

本章目录

逐次超松弛迭代法（Successive Over Relaxation Method，简称SOR方法）

- 是Gauss-Seidel方法的一种加速方法
- 是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一
- 具有计算公式简单，程序设计容易，占用计算机内存较少等优点
- 但需要选择好的加速因子（即最佳松弛因子）

设有方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8.4.1}$$

- $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，且设 $a_{ii} \neq 0\ (i = 1,2,\dots,n)$

迭代法 | 逐次超松弛迭代法

Gauss-Seidel方法

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \quad (初始向量)$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots; i = 1,2, \ldots, n), \qquad (8.2.5)$$

逐次超松弛迭代法

- 设已知第 k 次迭代向量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$，及第 $k+1$ 次迭代向量 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 的分量 $x_j^{(k+1)}$ $(j = 1,2, \ldots, i-1)$，要求计算分量 $x_i^{(k+1)}$

迭代法 | 逐次超松弛迭代法

- 首先用Gauss-Seidel迭代法定义辅助量

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$(i = 1,2,\dots,n) \qquad (8.4.3)$$

- 再把 $x_i^{(k+1)}$ 取为 $x_i^{(k)}$ 与 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 某个平均值（即加权平均）

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} \\ &= x_i^{(k)} + \omega\left(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right) \end{aligned} \qquad (8.4.4)$$

ω 为松弛因子，$\omega = 1$ 为Gauss-Seidel迭代法

迭代法 | 逐次超松弛迭代法

- 用式(8.4.3)中的 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 代入(8.4.4)得解方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的逐次超松弛迭代公式

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\ x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \quad (k = 0,1,\cdots; i = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

- 可改写为

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i \quad (k = 0,1,\cdots; i = 1,2,\cdots,n) \\ \Delta x_i = \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \end{cases}$$

迭代法丨逐次超松弛迭代法

- 在SOR方法中，迭代一次主要的运算量是计算一次矩阵与向量的乘法
- 在计算机上应用SOR方法解方程组时只需一组工作单元，以便存放近似解
- 在用计算机计算时，可用 $|p_0| = \max_i |\Delta x_i| = \max_{1\le i\le n} \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$ 控制迭代终止
- 当 $\omega < 1$ 时，称式(8.4.5)为低松弛法；当 $\omega > 1$ 时，称式(8.4.5)为超松弛法

例8.11 用SOR方法解方程组（精确解为 $\boldsymbol{x}^* = (-1,-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ ）

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$，迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \omega\left(1 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4 \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4 \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4 \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 4x_4^{(k)}\right)/4 \end{cases}$$

迭代法 | 逐次超松弛迭代法

- 取 $\omega = 1.3$，第11次迭代结果为

$$x^{(11)} = (-0.99999646, -1.00000310, -0.99999953, -0.99999912)^{\mathrm{T}}$$

$$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(11)}\right\|_2 \le 0.46\times10^{-5}$$

ω	误差< 10^{-5}的迭代次数
1.0	22
1.1	17
1.2	12
1.3	11（最少迭代次数）
1.4	14
1.5	17
1.6	23
1.7	33
1.8	53
1.9	109

- 对 ω 取其他值，迭代次数如右表所示，从此例可以看到，松弛因子选择得好，会使SOR方法的收敛大大加速

- 本例中 $\omega = 1.3$ 是最佳松弛因子

迭代法 | SOR迭代公式的矩阵形式

SOR迭代公式可写为矩阵形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

- 上述SOR迭代公式亦可写为

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$(i = 1,2,\ldots,n) \qquad (8.4.7)$$

- 用 $\boldsymbol{A}$ 的分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ ，得

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\left(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

迭代法 | SOR迭代公式的矩阵形式

- 等价于

$$(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\big((1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}\big)\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega\boldsymbol{b}$$

由假设 $a_{ii}\neq 0; i=1,2,\dots,n$，可知 $\det(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})\neq 0$，即 $\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}$ 非奇异，因此

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

- SOR方法的迭代公式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{L}_\omega\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f} \qquad (8.4.8)$$

$$\boldsymbol{L}_\omega=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}],\qquad \boldsymbol{f}=\omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

- $\boldsymbol{L}_\omega$ 称为SOR方法的迭代矩阵，这说明SOR方法相当于对方程组 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{L}_\omega\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$ 应用一般迭代法，于是关于一般迭代法的理论可应用到式(8.4.8)，可得定理8.8

迭代法 | SOR迭代公式的矩阵形式

定理8.8 设有线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，且 $a_{ii} \neq 0\ (i = 1,2,\dots,n)$，SOR方法收敛的充要条件是

$$\rho(\boldsymbol{L}_\omega) < 1$$

引进超松弛迭代法的想法是希望能选择松弛因子 ω 使得SOR方法收敛较快，也就是应选择因子 ω 使 $\rho(\boldsymbol{L}_\omega) = \min_\omega \rho(\boldsymbol{L}_\omega)$

下面研究，对于一般方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$（$a_{ii} \neq 0; i = 1,2,\dots,n$），松弛因子 ω 在什么范围内取值，SOR方法才可能收敛

迭代法 | SOR迭代公式的矩阵形式

定理8.9 设解式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（$a_{ii}\neq 0;\ i=1,2,\ \dots,n$）的SOR方法收敛，则

$$0<\omega<2$$

- 由设SOR方法收敛，根据定理8.8

$$\rho(\boldsymbol{L}_\omega)<1$$

- 设 $\boldsymbol{L}_\omega$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$，则

$$|\det\boldsymbol{L}_\omega|=|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|\leq\big(\rho(\boldsymbol{L}_\omega)\big)^n$$

$$\Rightarrow |\det\boldsymbol{L}_\omega|^{1/n}\leq\rho(\boldsymbol{L}_\omega)<1$$

迭代法 | SOR迭代公式的矩阵形式

- 根据

$$\boldsymbol{L}_\omega = (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}]$$

$$\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

- 可得

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{L}_\omega &= \det\left((\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\right) \cdot \det\left((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}\right) \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}} \cdot (1-\omega)^n \cdot a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\ &= (1-\omega)^n\end{aligned}$$

- 结合 $|\det\boldsymbol{L}_\omega|^{1/n} < 1$，可得

$$|1-\omega| < 1 \Leftrightarrow 0 < \omega < 2$$

迭代法 | SOR方法收敛的充分条件

定理8.9说明对于解一般方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$（$a_{ii} \neq 0;\ i = 1,2,\dots,n$），SOR方法只有取松弛因子 ω 在 $(0,2)$ 范围内才能收敛；

- ω 在 $(0,2)$ 范围内， SOR方法一定收敛吗？

定理8.10 如果 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵，且 $0 < \omega < 2$，则解式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的SOR方法收敛

- 证明见教科书

迭代法 | 最佳松弛因子理论

最佳松弛因子理论是由Young(1950年）针对一类椭圆型微分方程数值解得到的代数方程组 $Ax = b$ 所建立的理论，给出了最佳松弛因子公式

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(\boldsymbol{B}_0)}}$$

- $\rho(\boldsymbol{B}_0)$ 是Jacobi方法迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_0$ 的谱半径
- 一般来说，在实际应用中计算 $\rho(\boldsymbol{B}_0)$ 较困难，对某些微分方程数值解问题可考虑用第 9 章求近似值的方法
- 亦可由计算实践摸索出（近似）最佳松弛因子

迭代法 | SOR算法流程

用SOR方法解式 $Ax = b$，其中 A 为对称正定矩阵

- 用一组数组 $\boldsymbol{x}$ 开始存放初始向量，然后存放近似值解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$，最后存放结果
- 用

$$|p_0| = \max_{1\le i\le n}|\Delta x_i| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \qquad \text{(精度要求)}$$

控制控制迭代终止，k 表示迭代次数，算法如下

1. $k \leftarrow 0$

2. $x_i \leftarrow 0\ (i = 1,2,\dots,n)$

3. $k \leftarrow k + 1$

4. $p_0 \leftarrow 0$

迭代法 | SOR算法流程

用SOR方法解式 $Ax = b$，其中 A 为对称正定矩阵

5. 对于 $i = 1,2,\ldots,n$，有

   ① $p \leftarrow \Delta x_i = \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)/a_{ii}$

   ② 如果 $|p| > |p_0|$，则 $p_0 \leftarrow p$

   ③ $x_i \leftarrow x_i + p$

6. 输出 p_0
7. 如果 $|p_0| > \varepsilon$，则转步3
8. 输出结果 $\boldsymbol{x}, k$

迭代法 | 总结

8.1 引言

- 定义、迭代法收敛、发散

8.2 Jacobi迭代法

- Jacobi迭代公式、Jacobi迭代法迭代矩阵

8.3 Gauss-Seidel迭代法

- Gauss-Seidel迭代公式、Gauss-Seidel迭代法迭代矩阵

8.4 迭代法的收敛性

- 迭代法基本定理、迭代法收敛的充分条件
- 对角占优定理、面向对角占优矩阵的收敛条件

8.5 解线性方程组的超松弛迭代法

- SOR迭代公式、SOR迭代法迭代矩阵
- SOR方法收敛的充要条件（$\rho(\boldsymbol{L}_\omega) < 1$）
- SOR方法收敛的必要条件（$0 < \omega < 2$）
- SOR方法收敛的充分条件（$0 < \omega < 2$ 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵）

方程求根 | 作业

作业信息

- **编程作业**：线性方程组求解与Attention机制优化，占比 20%，3 周（DDL：6.5）
- **课后作业**
  - 第七章 7、15、21 及第八章 1，5，8
  - 两章合并为 1 次作业，共 6 题，占比 3%，2 周（DDL：5.29）

成绩构成更新：

- **平时作业 13%**（共 6 次作业，5 * 2% + 3%）
- **编程作业 30%**（共 2 次，10% + 20%）
- **期末考试 55%**（半开卷考试，5% 小抄成绩 + 52% 卷面成绩）