

离散数学

(第 3 版)

智能科学与技术学院 2024 级

目录

- 第一部分 集合论
- 第二部分 初等数论
- 第三部分 图论
- 第四部分 组合数学
- 第五部分 代数结构
- 第六部分 数理逻辑

目录

1 平面图

- 平面图的基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图

8.1 平面图的基本概念

定义 1.1.1

若能将无向图 G 画在平面上使得除顶点处外无边相交，则称 G 为可平面图，简称为平面图。画出的无边相交的图称作 G 的平面嵌入。无平面嵌入的图称作非平面图。

8.1 平面图的基本概念

定义 1.1.1

若能将无向图 G 画在平面上使得除顶点处外无边相交，则称 G 为可平面图，简称为平面图。画出的无边相交的图称作 G 的平面嵌入。无平面嵌入的图称作非平面图。

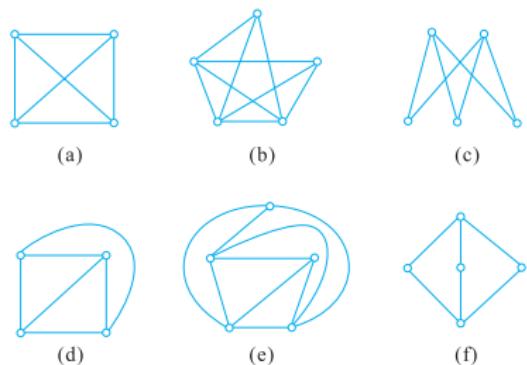


图 1.1.1

K_1 (平凡图), K_2, K_3, K_4 都是平面图。

K_1, K_2, K_3 的通常画法就是它们的平面嵌入。 K_4 的平面嵌入如图 1.1.1(d) 所示。 $K_5 - e$ (K_5 删除任意一条边) 也是平面图，它的平面嵌入如图 1.1.1(e) 所示。完全二部图 $K_{1,n}, n \geq 1$, 和 $K_{2,n}, n \geq 2$, 也都是平面图，用标准画法画出的 $K_{1,n}$ 已是平面嵌入， $K_{2,3}$ 的平面嵌入如图 1.1.1(f) 所示。图 1.1.1 中的 (a),(b),(c) 分别为 $K_4, K_5 - e, K_{2,3}$ 的通常画法。

下面讨论平面图的性质,有些性质与图的画法有关,这时是针对平面嵌入的.因此,下面谈到平面图有时是指平面嵌入,有时则不是,不难根据上下文来区分.当然,有时为了强调会特别指明是平面嵌入.

在这里要提前指出并使用下述事实:在平面图理论中有两个具有特殊地位的图—— K_5 和 $K_{3,3}$,它们都是非平面图(见定理 1.2.3 的推论1.2.1).

下面讨论平面图的性质,有些性质与图的画法有关,这时是针对平面嵌入的.因此,下面谈到平面图有时是指平面嵌入,有时则不是,不难根据上下文来区分.当然,有时为了强调会特别指明是平面嵌入.

在这里要提前指出并使用下述事实:在平面图理论中有两个具有特殊地位的图—— K_5 和 $K_{3,3}$,它们都是非平面图(见定理 1.2.3 的推论 1.2.1). 下述两个定理是显然的.

定理 1.1.1

平面图的子图都是平面图,非平面图的母图都是非平面图.

由定理 1.1.1 立即可知, $K_n, n \leq 4$, 和 $K_{2,n}, n \geq 1$, 的所有子图都是平面图;含 K_5 或 $K_{3,3}$ 作为子图的图都是非平面图, 特别地 $K_n, n \geq 5$, 和 $K_{s,t}, s, t \geq 3$, 都是非平面图.

下面讨论平面图的性质,有些性质与图的画法有关,这时是针对平面嵌入的.因此,下面谈到平面图有时是指平面嵌入,有时则不是,不难根据上下文来区分.当然,有时为了强调会特别指明是平面嵌入.

在这里要提前指出并使用下述事实:在平面图理论中有两个具有特殊地位的图—— K_5 和 $K_{3,3}$,它们都是非平面图(见定理 1.2.3 的推论 1.2.1). 下述两个定理是显然的.

定理 1.1.1

平面图的子图都是平面图,非平面图的母图都是非平面图.

由定理 1.1.1 立即可知, $K_n, n \leq 4$, 和 $K_{2,n}, n \geq 1$, 的所有子图都是平面图;含 K_5 或 $K_{3,3}$ 作为子图的图都是非平面图, 特别地 $K_n, n \geq 5$, 和 $K_{s,t}, s, t \geq 3$, 都是非平面图.

定理 1.1.2

设 G 是平面图, 则在 G 中加平行边或环后所得的图还是平面图.

本定理说明平行边和环不影响图的平面性, 因而在研究一个图是否为平面图时可以不考虑平行边和环.

定义 1.1.2

给定平面图 G 的平面嵌入, 它的边将平面划分成若干个区域, 每个区域都称作 G 的一个面, 其中有一个面的面积无限, 称作 无限面 或 外部面, 其余面的面积有限, 称作 有限面 或 内部面. 包围每个面的所有边组成的回路组称作该面的边界, 边界的长度称作该面的次数.

定义 1.1.2

给定平面图 G 的平面嵌入, 它的边将平面划分成若干个区域, 每个区域都称作 G 的一个面, 其中有一个面的面积无限, 称作 无限面 或 外部面, 其余面的面积有限, 称作 有限面 或 内部面. 包围每个面的所有边组成的回路组称作该面的 边界, 边界的长度称作该面的 次数.

常记外部面为 R_0 , 内部面为 R_1, R_2, \dots, R_k , 面 R 的次数记作 $\deg(R)$.

定义 1.1.2 中回路组中的回路可能是圈、简单回路, 也可能是复杂回路.

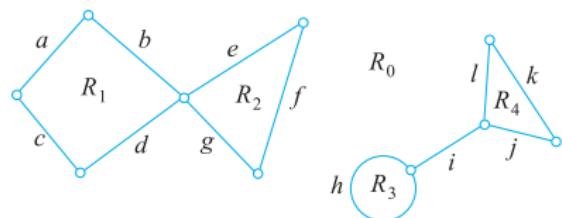


图 1.1.2

图 1.1.2 是一个平面嵌入, 它有 5 个面.

R_1 的边界为圈 $abdc$, $\deg(R_1) = 4$.

R_2 的边界也是圈, 此圈为 efg , $\deg(R_2) = 3$.

R_3 的边界为环 h , $\deg(R_3) = 1$.

R_4 的边界为圈 kjl , $\deg(R_4) = 3$.

外部面 R_0 的边界由一条简单回路 $abefgd$ 和一条复杂回路 $kjihil$ 组成, $\deg(R_0) = 13$.

定理 1.1.3

平面图所有面的次数之和等于边数的两倍.

定理 1.1.3

平面图所有面的次数之和等于边数的两倍.

证明.

对每一条边 e , 若 e 在两个面的公共边界上, 则在计算这两个面的次数时, e 各提供 1 次. 而当 e 只在某一个面的边界上出现时, 它必在该面的边界上出现 2 次, 如图 1.1.2 中的边 i 所示, 从而在计算该面的次数时, e 提供 2 次. 于是, 在计算总次数时, 每条边都提供 2 次, 因而所有面的次数之和等于边数的两倍. □

定理 1.1.3

平面图所有面的次数之和等于边数的两倍.

证明.

对每一条边 e , 若 e 在两个面的公共边界上, 则在计算这两个面的次数时, e 各提供 1 次. 而当 e 只在某一个面的边界上出现时, 它必在该面的边界上出现 2 次, 如图 1.1.2 中的边 i 所示, 从而在计算该面的次数时, e 提供 2 次. 于是, 在计算总次数时, 每条边都提供 2 次, 因而所有面的次数之和等于边数的两倍. □

定义 1.1.3

设 G 为简单平面图, 若 G 是 $K_i (1 \leq i \leq 4)$, 或者在 G 的任意两个不相邻的顶点之间加一条边, 所得图均为非平面图, 则称 G 为极大平面图.

定理 1.1.3

平面图所有面的次数之和等于边数的两倍.

证明.

对每一条边 e , 若 e 在两个面的公共边界上, 则在计算这两个面的次数时, e 各提供 1 次. 而当 e 只在某一个面的边界上出现时, 它必在该面的边界上出现 2 次, 如图 1.1.2 中的边 i 所示, 从而在计算该面的次数时, e 提供 2 次. 于是, 在计算总次数时, 每条边都提供 2 次, 因而所有面的次数之和等于边数的两倍. □

定义 1.1.3

设 G 为简单平面图, 若 G 是 $K_i (1 \leq i \leq 4)$, 或者在 G 的任意两个不相邻的顶点之间加一条边, 所得图均为非平面图, 则称 G 为极大平面图.

从定义不难看出, $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 - e$ (K_5 删除任意一条边) 都是极大平面图.

定理 1.1.4

极大平面图是连通的, 并且当阶数大于等于 3 时没有割点和桥.

定理的证明在此省略.

定理 1.1.5

设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶简单连通的平面图，则 G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3.

定理 1.1.5

设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶简单连通的平面图, 则 G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3.

证明.

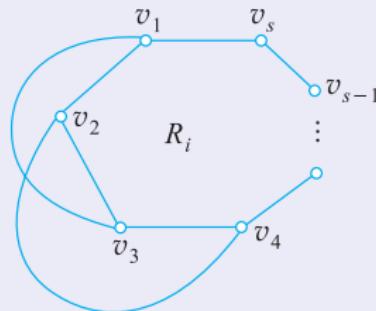


图 1.1.3

本定理的充分性留在第 8.2 节的最后证明, 现在只证必要性.

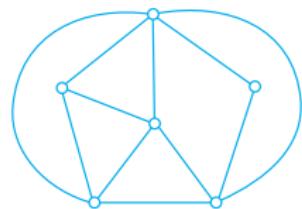
因为 G 为简单平面图, 所以 G 中无环和平行边. 由于只有以一个环为边界的面的次数等于 1, 以一条边为边界的面的次数等于 2, 故 G 中各面的次数都大于等于 3. 下面要证明 G 各面的次数不可能大于 3. 假设面 R_i 的次数

$\deg(R_i) = s \geq 4$, 如图 1.1.3 所示.

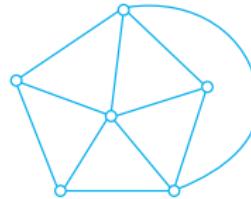
若 v_1 与 v_3 不相邻, 在 R_i 内加边 (v_1, v_3) 不破坏平面性, 这与 G 是极大平面图矛盾, 因而 v_1 与 v_3 必相邻, 且边 (v_1, v_3) 必在 R_i 外部. 类似地, v_2 与 v_4 也相邻, 且边 (v_2, v_4) 也在 R_i 的外部. 于是, (v_1, v_3) 与 (v_2, v_4) 相交于 R_i 的外部, 这又与 G 是平面图矛盾. 所以, 必有 $s = 3$, 即 G 中不存在次数 ≥ 4 的面.

极小非平面图

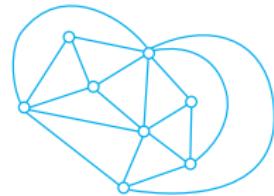
根据定理 1.1.5, 在图 1.1.4 所示的各平面图中, 只有 (c) 是极大平面图.



(a)



(b)

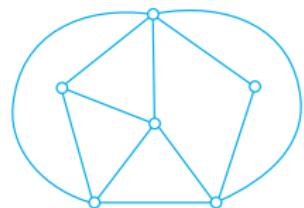


(c)

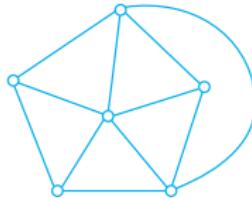
图 1.1.4

极小非平面图

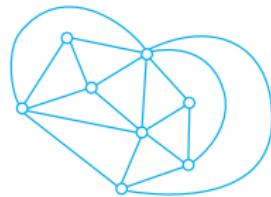
根据定理 1.1.5, 在图 1.1.4 所示的各平面图中, 只有 (c) 是极大平面图.



(a)



(b)



(c)

图 1.1.4

定义 1.1.4

若在非平面图 G 中任意删除一条边, 所得的图为平面图, 则称 G 为 极小非平面图.

例如, K_5 和 $K_{3,3}$ 都是极小非平面图.

8.2 欧拉公式

定理 1.2.1

设连通平面图 G 的顶点数、边数和面数分别为 n, m 和 r , 则有 $n - m + r = 2$.

8.2 欧拉公式

定理 1.2.1

设连通平面图 G 的顶点数、边数和面数分别为 n, m 和 r , 则有 $n - m + r = 2$.

证明.

对边数 m 作归纳证明. 当 $m = 0$ 时, 由于 G 为连通图, 所以 G 只能是平凡图, 此时 $n = 1, m = 0, r = 1$, 结论成立.

设 $m = k \geq 0$ 时结论成立. 当 $m = k + 1$ 时, 对 G 进行如下讨论.

若 G 是树, 则 G 是非平凡的, 至少有 2 片树叶. 设 v 为树叶, 令 $G' = G - v$, 则 G' 仍然是连通的, 且 G' 的边数 $m' = m - 1 = k$, 由归纳假设 $n' - m' + r' = 2$, 式中 n', m', r' 分别为 G' 的顶点数、边数和面数. 而 $n' = n - 1, r' = r$, 于是

$$n - m + r = (n' + 1) - (m' + 1) + r' = n' - m' + r' = 2.$$

若 G 不是树, 则 G 中含圈, 设边 e 在 G 中的某个圈上, 令 $G' = G - e$, 则 G' 仍连通且 $m' = m - 1 = k$. 由归纳假设有 $n' - m' + r' = 2$. 而 $n' = n, r' = r - 1$, 于是 $n - m + r = n' - (m' + 1) + (r' + 1) = n' - m' + r' = 2$, 得证
当 $m = k + 1$ 时结论也成立.



欧拉公式中, 平面图 G 的连通性是不可少的. 对于非连通的平面图有以下定理.

定理 1.2.2

对于有 $k(\geq 2)$ 个连通分支的平面图 G , 有 $n - m + r = k + 1$, 其中 n, m, r 分别为 G 的顶点数、边数和面数.

欧拉公式中,平面图 G 的连通性是不可少的. 对于非连通的平面图有以下定理.

定理 1.2.2

对于有 $k(\geq 2)$ 个连通分支的平面图 G , 有 $n - m + r = k + 1$, 其中 n, m, r 分别为 G 的顶点数、边数和面数.

证明.

设 G 的连通分支分别为 G_1, G_2, \dots, G_k , 并设 G_i 的顶点数、边数和面数分别为 $n_i, m_i, r_i, i = 1, 2, \dots, k$. 由欧拉公式知 $n_i - m_i + r_i = 2$. 由于每个 G_i 有一个外部面, 而 G 只有一个外部面, 所以 G 的面数 $r = \sum_{i=1}^k r_i - k + 1$. 而 $m = \sum_{i=1}^k m_i, n = \sum_{i=1}^k n_i$, 于是,

$$\begin{aligned} 2k &= \sum_{i=1}^k (n_i - m_i + r_i) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k m_i + \sum_{i=1}^k r_i \\ &= n - m + r + k - 1, \end{aligned}$$

经过整理得 $n - m + r = k + 1$.



由欧拉公式及其推广可以进一步得到平面图的一些性质.

定理 1.2.3

设 G 是连通的平面图, 且每个面的次数至少为 $l (\geq 3)$, 则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$.

由欧拉公式及其推广可以进一步得到平面图的一些性质.

定理 1.2.3

设 G 是连通的平面图, 且每个面的次数至少为 $l (\geq 3)$, 则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$.

证明.

由定理 1.1.3, $2m = \sum_{i=1}^r \deg(R_i) \geq lr$. 由欧拉公式知 $r = 2 + m - n$. 代入上式得 $2m \geq l(2 + m - n)$. 经过整理得 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$. □

由欧拉公式及其推广可以进一步得到平面图的一些性质.

定理 1.2.3

设 G 是连通的平面图, 且每个面的次数至少为 $l (\geq 3)$, 则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$.

证明.

由定理 1.1.3, $2m = \sum_{i=1}^r \deg(R_i) \geq lr$. 由欧拉公式知 $r = 2 + m - n$. 代入上式得 $2m \geq l(2 + m - n)$. 经过整理得 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$. □

推论 1.2.1

K_5 和 $K_{3,3}$ 都是非平面图.

由欧拉公式及其推广可以进一步得到平面图的一些性质.

定理 1.2.3

设 G 是连通的平面图, 且每个面的次数至少为 $l (\geq 3)$, 则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$.

证明.

由定理 1.1.3, $2m = \sum_{i=1}^r \deg(R_i) \geq lr$. 由欧拉公式知 $r = 2 + m - n$. 代入上式得 $2m \geq l(2 + m - n)$. 经过整理得 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$. □

推论 1.2.1

K_5 和 $K_{3,3}$ 都是非平面图.

证明.

若 K_5 是平面图, 则由于 K_5 中无环和平行边, 所以每个面的次数均 ≥ 3 , 由定理 1.2.3 可知边数 10 应满足 $10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9$, 矛盾, 所以 K_5 是非平面图.

类似地, 若 $K_{3,3}$ 是平面图, 由于 $K_{3,3}$ 中最短圈的长度为 4, 从而每个面的次数均 ≥ 4 . 于是, 边数 9 应满足 $9 \leq \frac{4}{4-2}(6-2) = 8$, 矛盾, 故 $K_{3,3}$ 也是非平面图. □

定理 1.2.4

设平面图 G 有 $k(\geq 2)$ 个连通分支, 各面的次数至少为 $l(\geq 3)$, 则边数 m 与顶点数 n 应有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n - k - 1)$.

定理 1.2.4

设平面图 G 有 $k(\geq 2)$ 个连通分支, 各面的次数至少为 $l(\geq 3)$, 则边数 m 与顶点数 n 应有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n - k - 1)$.

利用欧拉公式的推广容易证明此定理.

定理 1.2.4

设平面图 G 有 $k(\geq 2)$ 个连通分支, 各面的次数至少为 $l(\geq 3)$, 则边数 m 与顶点数 n 应有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n - k - 1)$.

利用欧拉公式的推广容易证明此定理.

定理 1.2.5

设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶 m 条边的极大平面图, 则 $m = 3n - 6$.

定理 1.2.4

设平面图 G 有 $k(\geq 2)$ 个连通分支, 各面的次数至少为 $l(\geq 3)$, 则边数 m 与顶点数 n 应有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n - k - 1)$.

利用欧拉公式的推广容易证明此定理.

定理 1.2.5

设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶 m 条边的极大平面图, 则 $m = 3n - 6$.

证明.

由于极大平面图是连通图, 由欧拉公式得 $r = 2 + m - n$. 又因为 G 是极大平面图, 由定理 1.1.5 的必要性可知, G 的每个面的次数均为 3, 所以 $2m = 3r$. 代入上式, 整理后得 $m = 3n - 6$. □

定理 1.2.4

设平面图 G 有 $k(\geq 2)$ 个连通分支, 各面的次数至少为 $l(\geq 3)$, 则边数 m 与顶点数 n 应有如下关系: $m \leq \frac{l}{l-2}(n - k - 1)$.

利用欧拉公式的推广容易证明此定理.

定理 1.2.5

设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶 m 条边的极大平面图, 则 $m = 3n - 6$.

证明.

由于极大平面图是连通图, 由欧拉公式得 $r = 2 + m - n$. 又因为 G 是极大平面图, 由定理 1.1.5 的必要性可知, G 的每个面的次数均为 3, 所以 $2m = 3r$. 代入上式, 整理后得 $m = 3n - 6$. □

推论 1.2.2

设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶 m 条边的简单平面图, 则 $m \leq 3n - 6$.

定理 1.2.6

设 G 是简单平面图，则 G 的最小度 $\delta \leq 5$.

定理 1.2.6

设 G 是简单平面图，则 G 的最小度 $\delta \leq 5$.

证明.

若 G 的阶数 $n \leq 6$, 结论显然成立. 因而仅就 $n \geq 7$ 讨论. 若 $\delta \geq 6$, 由握手定理可知 $2m \geq 6n$. 因而 $m \geq 3n$, 这与推论1.2.2矛盾. □

上述定理在图着色理论中占重要地位.

定理 1.2.6

设 G 是简单平面图, 则 G 的最小度 $\delta \leq 5$.

证明.

若 G 的阶数 $n \leq 6$, 结论显然成立. 因而仅就 $n \geq 7$ 讨论. 若 $\delta \geq 6$, 由握手定理可知 $2m \geq 6n$. 因而 $m \geq 3n$, 这与推论 1.2.2 矛盾. \square

上述定理在图着色理论中占重要地位.

在结束本节之前, 回过来证明定理 1.1.5 的充分性: 如果简单连通平面图 G 的每个面的次数都等于 3, 那么 G 为极大平面图.

定理 1.1.5 充分性的证明

由定理 1.1.3 可知 $2m = 3r$. 又因为 G 是连通的, 由欧拉公式可知

$r = 2 + m - n$. 代入上式, 经过整理得 $m = 3n - 6$. 若 G 不是极大平面图, 则 G 中一定存在不相邻的顶点 u, v , 使得 $G' = G \cup (u, v)$ 还是简单平面图, 而 G' 的边数 $m' = m + 1$, $n' = n$, 故 $m' > 3n' - 6$, 这与定理 1.2.5 的推论 1.2.2 相矛盾.

8.3 平面图的判断

定义 1.3.1

设 $e = (u, v)$ 为图 G 的一条边, 在 G 中删除 e , 增加新的顶点 w , 使 u, v 均与 w 相邻, 称作在 G 中 **插入 2 度顶点 w** .

设 w 为 G 中的一个 2 度顶点, w 与 u, v 相邻, 删除 w , 增加新边 (u, v) , 称作在 G 中 **消去 2 度顶点 w** .

若两个图 G_1 与 G_2 同构, 或通过反复插入、消去 2 度顶点后同构, 则称 G_1 与 G_2 **同胚**.

8.3 平面图的判断

定义 1.3.1

设 $e = (u, v)$ 为图 G 的一条边, 在 G 中删除 e , 增加新的顶点 w , 使 u, v 均与 w 相邻, 称作在 G 中 **插入 2 度顶点 w** .

设 w 为 G 中的一个 2 度顶点, w 与 u, v 相邻, 删除 w , 增加新边 (u, v) , 称作在 G 中 **消去 2 度顶点 w** .

若两个图 G_1 与 G_2 同构, 或通过反复插入、消去 2 度顶点后同构, 则称 G_1 与 G_2 **同胚**.

在图 1.3.1 中, (a) 与 K_3 同胚, (b) 与 K_4 同胚.

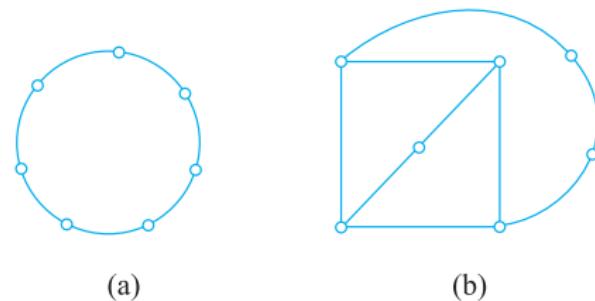


图 1.3.1

库拉托夫斯基(Kuratowski)定理

下面给出平面图的两个充分必要条件: 库拉托夫斯基(Kuratowski)定理 1 和库拉托夫斯基(Kuratowski)定理 2, 证明都超出了本书的范围.

定理 1.3.1

图 G 是平面图当且仅当 G 中既不含与 K_5 同胚的子图, 也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

库拉托夫斯基(Kuratowski)定理

下面给出平面图的两个充分必要条件: 库拉托夫斯基(Kuratowski)定理 1 和库拉托夫斯基(Kuratowski)定理 2, 证明都超出了本书的范围.

定理 1.3.1

图 G 是平面图当且仅当 G 中既不含与 K_5 同胚的子图, 也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

定理 1.3.2

图 G 是平面图当且仅当 G 中既没有可以收缩到 K_5 的子图, 也没有可以收缩到 $K_{3,3}$ 的子图.

关于边的收缩见定义 ??.

例 1.3.1

证明彼得松图不是平面图.

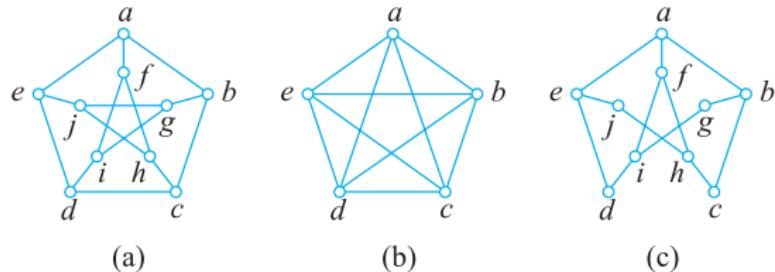


图 1.3.2

例 1.3.1

证明彼得松图不是平面图.

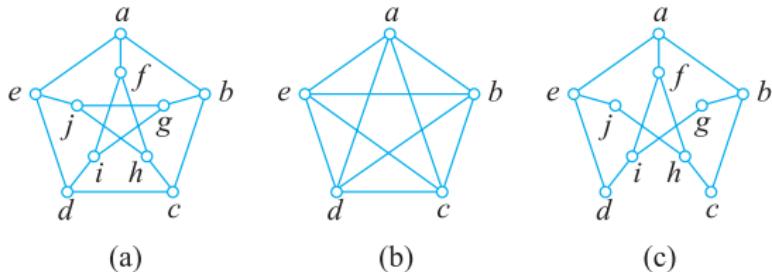


图 1.3.2

证明.

彼得松图见图 1.3.2(a). 在图 1.3.2(a) 中将边 $(a, f), (b, g), (c, h), (d, i), (e, j)$ 收缩, 得到图 1.3.2(b), 它是 K_5 . 由定理 1.3.2, 彼得松图不是平面图.

还可以这样证明: 删去图 1.3.2(a) 中的两条边 (j, g) 和 (c, d) , 得到图 1.3.2(c).

不难看出, 它与 $K_{3,3}$ 同胚. 由定理 1.3.1, 彼得松图是非平面图. □

例 1.3.2

对 K_5 插入一个 2 度顶点, 或在 K_5 外放置一个顶点使其与 K_5 上的若干个顶点相邻, 共可以产生多少个非同构的 6 阶简单连通非平面图?



(a)



(b)



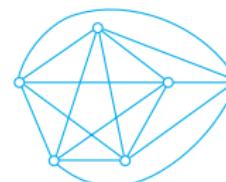
(c)



(d)



(e)



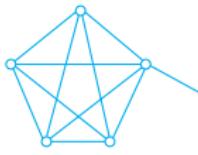
(f)

例 1.3.2

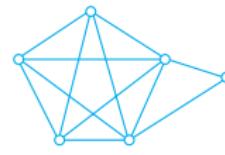
对 K_5 插入一个 2 度顶点, 或在 K_5 外放置一个顶点使其与 K_5 上的若干个顶点相邻, 共可以产生多少个非同构的 6 阶简单连通非平面图?



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

解

由于所要求的非平面图是 6 阶的, 因而用插入 2 度顶点的方法只能产生一个非平面图, 见上面 (a) 所示的图. 它与 K_5 同胚, 所以是非平面图. 在 K_5 外放置一个顶点, 使其与 K_5 上的 1 个到 5 个顶点相邻, 得 5 个图, 如上图中 (b) 到 (f) 所示, 它们都含 K_5 子图, 由库拉托夫斯基定理可知, 它们都是非平面图.

例 1.3.3

由 $K_{3,3}$ 加若干条边能生成多少个非同构的 6 阶简单连通非平面图？

例 1.3.3

由 $K_{3,3}$ 加若干条边能生成多少个非同构的 6 阶简单连通非平面图？

解

对 $K_{3,3}$ 加 1-6 条边所得图都含 $K_{3,3}$ 子图，由库拉托夫斯基定理可知，它们都是非平面图。在加 2 条，加 3 条，加 4 条边时又各产生两个非同构的非平面图，连同 $K_{3,3}$ 本身共有 10 个满足要求的非平面图，如图 1.3.3 所示，其中虚线边表示后加的新边。□

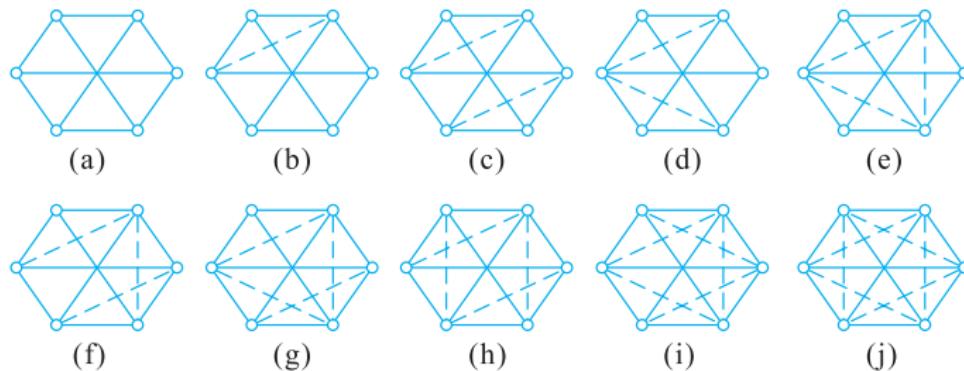


图 1.3.3

8.4 平面图的对偶图

定义 1.4.1

设 G 是一个平面图的平面嵌入, 构造图 G^* 如下: 在 G 的每一个面 R_i 中放置一个顶点 v_i^* . 设 e 为 G 的一条边, 若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上, 则作边 $e^* = (v_i^*, v_j^*)$ 与 e 相交, 且不与其他任何边相交. 若 e 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上, 则作以 v_i^* 为端点的环 $e^* = (v_i^*, v_i^*)$. 称 G^* 为 G 的对偶图.

8.4 平面图的对偶图

定义 1.4.1

设 G 是一个平面图的平面嵌入, 构造图 G^* 如下: 在 G 的每一个面 R_i 中放置一个顶点 v_i^* . 设 e 为 G 的一条边, 若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上, 则作边 $e^* = (v_i^*, v_j^*)$ 与 e 相交, 且不与其他任何边相交. 若 e 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上, 则作以 v_i^* 为端点的环 $e^* = (v_i^*, v_i^*)$. 称 G^* 为 G 的对偶图.

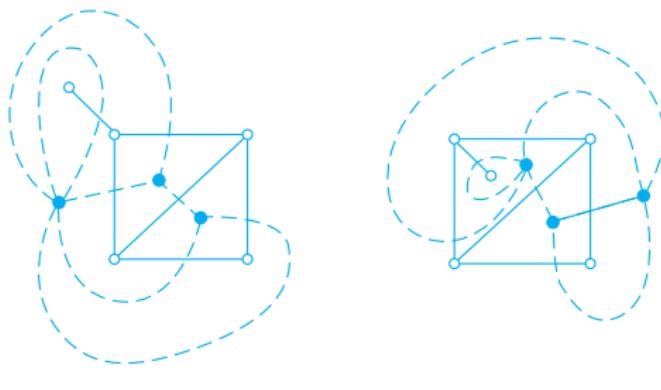


图 1.4.1

图 1.4.1 给出两个平面嵌入的对偶图, 实线和空心点是平面嵌入, 虚线和实心点是对偶图. 实际上这两个平面嵌入是同一个平面图的平面嵌入.

对偶图的性质

注 1.4.1

平面图 G 的对偶图 G^* 有以下性质.

- ① G^* 是平面图,而且是平面嵌入.
- ② G^* 是连通图.
- ③ 若边 e 为 G 中的环,则 G^* 与 e 对应的边 e^* 为桥;若 e 为桥,则 G^* 中与 e 对应的边 e^* 为环.
- ④ 在多数情况下, G^* 为多重图(含平行边的图).
- ⑤ 同一个平面图的不同平面嵌入的对偶图不一定同构. 如图 1.4.1 中的两个平面嵌入的对偶图不同构.

平面图 G 与它的对偶图 G^* 的顶点数、边数和面数有如下关系.

定理 1.4.1

设平面图 G 是连通的, G^* 是 G 的对偶图, n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数, 则

- ① $n^* = r$.
- ② $m^* = m$.
- ③ $r^* = n$.
- ④ 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中, 则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.

定理 1.4.1

设平面图 G 是连通的, G^* 是 G 的对偶图, n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数, 则

- ① $n^* = r$.
- ② $m^* = m$.
- ③ $r^* = n$.
- ④ 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中, 则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.

证明.

由 G^* 的构造可知, (1), (2) 是显然的.

定理 1.4.1

设平面图 G 是连通的, G^* 是 G 的对偶图, n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数, 则

- ① $n^* = r$.
- ② $m^* = m$.
- ③ $r^* = n$.
- ④ 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中, 则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.

证明.

由 G^* 的构造可知, (1), (2) 是显然的.

(3) 由于 G 与 G^* 都是连通的, 因而满足欧拉公式:

$$n - m + r = 2,$$

$$n^* - m^* + r^* = 2.$$

由 (1), (2) 可以得到 $r^* = n$.

定理 1.4.1

设平面图 G 是连通的, G^* 是 G 的对偶图, n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数, 则

- ① $n^* = r$.
- ② $m^* = m$.
- ③ $r^* = n$.
- ④ 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中, 则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.

证明.

由 G^* 的构造可知, (1), (2) 是显然的.

(3) 由于 G 与 G^* 都是连通的, 因而满足欧拉公式:

$$\begin{aligned}n - m + r &= 2, \\n^* - m^* + r^* &= 2.\end{aligned}$$

由 (1), (2) 可以得到 $r^* = n$.

(4) 设 G 的面 R_i 的边界为 C_i , 设 C_i 中有 $k_1 (\geq 0)$ 条桥、 k_2 条非桥的边, 于是 C_i 的长度为 $k_2 + 2k_1$, 即 $\deg(R_i) = k_2 + 2k_1$. 而 k_1 条桥对应 v_i^* 处有 k_1 个环, k_2 条非桥的边对应从 v_i^* 处引出 k_2 条边, 故 $d_{G^*}(v_i^*) = k_2 + 2k_1 = \deg(R_i)$. □

定理 1.4.2

设平面图 G 有 $k(\geq 1)$ 个连通分支, G^* 是 G 的对偶图, n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数, 则

- ① $n^* = r.$
- ② $m^* = m.$
- ③ $r^* = n - k + 1.$
- ④ 设 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中, 则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i).$

证明略.

定义 1.4.2

如果图 G 存在一个平面嵌入,使得 G 同构于对偶图 G^* ,那么称 G 为自对偶图.

在图 1.4.2 中 3 个实线的图都是自对偶图,虚线的图是它们的对偶图.

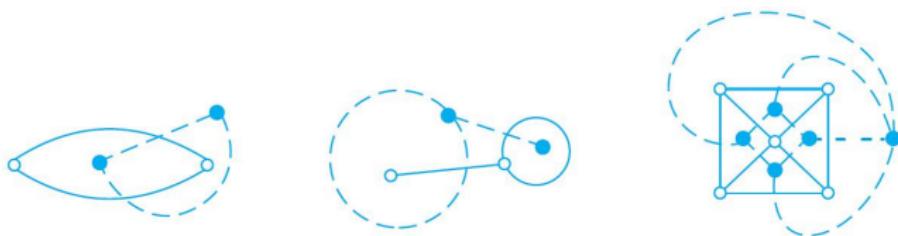


图 1.4.2

定义 1.4.2

如果图 G 存在一个平面嵌入,使得 G 同构于对偶图 G^* ,那么称 G 为自对偶图.

在图 1.4.2 中 3 个实线的图都是自对偶图,虚线的图是它们的对偶图.

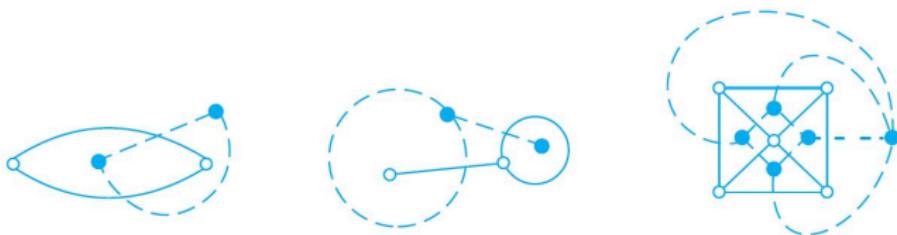


图 1.4.2

设 $n \geq 4$, 在正 $n - 1$ 边形 C_{n-1} 内放置一个顶点, 连接这个顶点与 C_{n-1} 上的所有顶点, 所得的 n 阶简单图称作 n 阶轮图, 记作 W_n . 特别地, n 为奇数的轮图称作 奇阶轮图, n 为偶数的轮图称作 偶阶轮图. 图 1.4.2(c) 中, 实边图为 5 阶轮图 W_5 . 可以证明轮图都是自对偶图.