第二次习题课思考题

liangs

October 2024

1 桥牌作弊案

1965 年 5 月，在布宜诺斯艾利斯举行的世界桥牌锦标赛上，英国一对著名的桥牌手 T. 里斯和 B. 夏皮罗被指控作弊，说是他们用手指作暗号暗示他们红心的张数。里斯和夏皮罗都否认这项指控。事后，英国桥牌协会举行了一个听证会。听证会以法律的程序进行，既包含控方，也包含辩方。双方都有目击证人。在接下来的调查过程中，控方检查了里斯和夏皮罗打的几手牌，并声称他们的打法与用作弊已知了红心的张数的打法是吻合的。针对这个观点，辩方律师指出，他们的打法同样也与同标准打法一致。然而，控方指出，既然他们的打法与作弊的假设是一致的，那么就应该是支持这种假设。你如何理解控方的理由？

解：记 H 表示 "里斯和夏皮罗确实作弊",E 表示 "新的证据"（例如本问中，控方所谓的证据 E 是 "他们的打法与用作弊已知了红心的张数的打法是吻合的"）。直观来看，控方提供的 "新的证据" 应该使得假设 H 发生的概率增大。这可以用先验和后验概率来解释：E 有用当且仅当 $P(H|E) > P(H)$。由贝叶斯公式

$$\begin{aligned} P(H|E) &= \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + (1-P(H))\,P(E|H^c)} \\ &= \frac{P(H)}{P(H) + (1-P(H))\,\frac{P(E|H^c)}{P(E|H)}} \end{aligned}$$

易知 $P(H|E) > P(H)$ 当且仅当 $\frac{P(E|H^c)}{P(E|H)} < 1$。即假设成立时证据发生的概率要大于假设不成立时证据发生的概率。在本问的背景下，即 "里斯和夏皮罗确实作弊的条件下，他们使用这种打法" 的概率应该大于 "里斯和夏皮罗没作弊的条件下，他们使用这种打法"。然而控方提供的证据却不能说明这点。因此该指控是无效的。

2 事件先于另一事件

(1) 进行独立重复试验，每次试验为掷两枚均匀的骰子，并记录两枚骰子点数之和。问 "和为 5" 出现在 "和为 7" 之前的概率是多少。

解:用（2）,记 E 表示 "和为 5",记 F 表示 "和为 7"。则 $P(E)=\frac{4}{36}, P(F)=\frac{6}{36}$，则

$$P(E\text{发生在}F\text{之前})=\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}=\frac{2}{5}$$

(2) 进行独立重复试验（或，现有一独立重复试验列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$），$E$ 和 F 是一次试验中的两个互不相容事件，发生的概率分别为 $P(E)$ 和 $P(F)$. 证明：事件 E 在事件 F 之前发生的概率为 $\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$。

解：记 A 表示 "事件 E 在事件 F 之前发生"，以第一次试验结果为条件，记 R_1 表示 "第一次试验结果为事件 E"，记 R_2 表示 "第一次试验结果为事件 F"，记 R_3 表示 "第一次试验结果既不是事件 E 也不是事件 F" 利用全概率公式，有：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|R_1)P(R_1)+P(A|R_2)P(R_2)+P(A|R_3)P(R_3) \\ &= P(A|R_1)P(E)+P(A|R_2)P(F)+P(A|R_3)\left(1-P(E)-P(F)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

注意 $P(A|R_1)=1$，因为第一次试验就发生事件 E 了，那 E 必然在 F 前；同理 $P(A|R_2)=0$. 另外，$P(A|R_3)=P(A)$, 因为第一次既不是 E 又不是 F 的话，相当于这次试验白做，或相当于重新进行试验。则式 (1)化为

$$P(A)=P(E)+P(A)\left(1-P(E)-P(F)\right)$$

即

$$P(A)=\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

注：为什么不写 $P(A|E)$ 而是 $P(A|R_1)$？这两者间有微妙的差别。前者表示 "E 发生"，让人困惑的地方在于，从直觉上看，E 是否发生好像与 A 并无关系。然而后者表示 "第一次试验结果为事件 E", 与前者并不是同一个事件。

3 完全图边着色

见 slides 例 0.60，解答中需要证明: 当 $n \geq 10$ 和 $k > \frac{n}{2}$ 时：

$$C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2-1} \leq 1$$

证 1: 这边只证明偶数的情况，即 $n=2m$，此时 $k=m$, 那么问题转化为证明当 $m \geq 5$ 时，成立

$$f(m)=C_{2m}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(m-1)/2-1} \leq 1$$

只要证明 $f(m)$ 单调递减就好了

$$\frac{f(m+1)}{f(m)}=\frac{(2m+1)(2m+2)}{(m+1)^{2}2^{m}}<1$$

且

$$f(5)<1$$

证 2: 这里 $f(m)$ 性质很好，它单调，但万一不单调呢？这在现实问题中很常见。我们可以采用渐进分析的方法，比如我能从理论上证明 $m \geq M$ 时不等式成立（这个 M 相当于一种截断，M 可以用数值模拟的方法估计，或者直接目测），那么对于 $5 \leq m \leq M$ 的部分，直接穷举就好了，这个开销并不是很大。预备知识–斯特林公式 (Stirling's formula),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}=1, \text{或} n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

这是一个对阶乘估阶的公式。

首先，固定 n 时，$k=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 时，C_{n}^{k} 最大值。所以只需要证 $k=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 时命题成立即可。这边只证明偶数的情况，即 $n=2m$，此时 $k=m$, 那么问题转化为证明当 $m \geq 5$ 时，成立

$$C_{2m}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(m-1)/2-1} \leq 1$$

我们去证更强的结论：

$$\lim_{m\to\infty}C_{2m}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(m-1)/2-1}=0$$

利用斯特林公式，有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}C_{2m}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(m-1)/2-1} &= \lim_{m\to\infty}\frac{(2m)!}{(m!)^{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(m-1)/2-1} \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{4\pi m}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{\left[\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^{m}\right]^{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(m-1)/2-1} \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi m}}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(m-5)/2-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

这样，对于充分大的 m(即 $m \geq M$)，我们就能保证命题成立，而至于 $5 \leq m \leq M$ 的部分，直接暴力计算就好了