# 线性代数期中试卷

2022.5.8

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算 $A_{31}-2A_{32}+2A_{34}$，此处 $A_{ij}$ 为 $A=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$ 的代数余子式.

2. 用克莱姆法则求解线性方程组 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&3^2&5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$.

3. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 是实向量，计算 $y=Ax=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 与 $A^{\mathrm{T}}A$，此处

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \sin\theta=\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}},\quad \cos\theta=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}.$$

4. $A=(a_{ij})_{n\times n},A^k=O,k>1$ 是正整数，计算 $|E+3A|$.

5. $A=\begin{pmatrix}a&-1&a\\5&-3&b\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-1$(3重)，计算 $a,b$.

二.(12分) 计算矩阵 $2X+XA=B$，此处 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

三.(12分) (1) 计算 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的所有极大无关组（6分）；
(2) 计算 $AX=0$ 的基础解系（基本解组）（6分）

其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1&1\\1&8&6&-3&0\\1&-11&-8&4&1\\0&19&14&-7&-1\end{pmatrix}$.

四. (12分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1=\alpha_3+\alpha_4,\alpha_2=\alpha_4+\alpha_5$，$\beta=-2\alpha_1+3\alpha_2$，计算 $Ax=\beta$ 的通解.

五.(12分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 可逆，$B=A^{-1},B^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 试计算 $C=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$ 的特征值与特征向量.

六.(12分) $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\{c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_r\eta_r\mid c_i\in\mathbf{C},\ 1\le i\le r\}$，
$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，$\gamma_j=c_{1j}\eta_1+c_{2j}\eta_2+\cdots+c_{rj}\eta_r,(1\le j\le r)$. 证明：
(1) $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆；
(2) $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.

# 线性代数期中试卷 答案 2022.5.8

## 一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算 $A_{31}-2A_{32}+2A_{34}$，此处 $A_{ij}$ 为 $A=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$ 的代数余子式.

解：$A_{31}-2A_{32}+2A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\1&-2&0&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=-76.$

解法二：$A_{31}=\begin{vmatrix}2&3&4\\3&4&1\\1&2&3\end{vmatrix}=4, A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3&4\\2&4&1\\4&2&3\end{vmatrix}=44, A_{34}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&1&2\end{vmatrix}=4.$

故有 $A_{31}-2A_{32}+2A_{34}=4-2\times 44+2\times 4=-76.$

2. 用克莱姆法则求解线性方程组 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&3^2&5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}.$

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&3^2&5^2\end{vmatrix}=16, D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&5\\5&3^2&5^2\end{vmatrix}=-8, D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&5&5^2\end{vmatrix}=32, D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&3\\1&3^2&3\end{vmatrix}=-8.$

故方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{D_2}{D}=2, x_3=\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{1}{2}.$

3. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 是实向量，计算 $y=Ax=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 与 $A^{\mathrm{T}}A$，此处

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \sin\theta=\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}},\quad \cos\theta=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}.$$

解：$y=Ax=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\cos\theta+x_3\sin\theta\\-x_2\sin\theta+x_3\cos\theta\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\0\\x_4\end{pmatrix},$

令 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&B&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，易知 $B^{\mathrm{T}}B=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$

则有 $A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&B^{\mathrm{T}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&B&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$

解法二：$y=Ax=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\cos\theta\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\\sin\theta\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\0\\x_4\end{pmatrix}.$

易知 $A$ 的 4 列构成标准正交向量组，故 $A$ 为正交矩阵，于是 $A^{\mathrm{T}}A=E_4$.

4. $A=(a_{ij})_{n\times n}, A^k=O, k>1$ 是正整数，计算 $|E+3A|$.
解：设 $\lambda$ 为 $A$ 的任意特征值，则由 $A^k=O$ 可得 $\lambda^k=0$，即 $\lambda=0$，故 $A$ 只有 0 特征值.
故 $E+3A$ 的特征值都为 $1+3\lambda=1$，于是 $|E+3A|=1\times 1\times\cdots\times 1=1.$

5. $A=\begin{pmatrix}a&-1&a\\5&-3&b\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-1$(3重)，计算 $a,b$.
解：因为 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，故 $\mathrm{tr}(A)=a-3-2=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3$，

$|A|=b-10+3a=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$，解得 $a=2,b=3$.

解法二：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 1 & -a\\ -5 & \lambda+3 & -b\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+(5-a)\lambda^2+(11-4a)\lambda+10-b-3a$，

又有 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$. 比较系数得 $a=2,b=3$.

**二.**(12分) 计算矩阵 $2X+XA=B$，此处 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

解：易知 $X(2E+A)=B$，故 $X=B(2E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\\ 1 & 1 & 4\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

解法二：易知 $X(2E+A)=B$，

解矩阵方程 $\begin{pmatrix}2E+A\\ B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ \hline 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{列变换}}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline -1/2 & -1/2 & -7/2\\ 1 & 1 & 4\\ 1/2 & -3/2 & 3/2\end{array}\right)$. 故 $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\\ 1 & 1 & 4\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

**三.**(12分) (1) 计算 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的所有极大无关组（6分）；
(2) 计算 $AX=0$ 的基础解系（基本解组）（6分）

其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2 & -3 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 8 & 6 & -3 & 0\\ 1 & -11 & -8 & 4 & 1\\ 0 & 19 & 14 & -7 & -1\end{pmatrix}$.

解：(1) $A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2/19 & -1/19 & 8/19\\ 0 & 1 & 14/19 & -7/19 & -1/19\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 向量组的秩为 2，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$

除$\alpha_3,\alpha_4$外两两都不成比例，故除$\alpha_3,\alpha_4$外任意两个向量都组成极大无关组，

即 $\alpha_1,\alpha_2$; $\alpha_1,\alpha_3$; $\alpha_1,\alpha_4$; $\alpha_1,\alpha_5$; $\alpha_2,\alpha_3$; $\alpha_2,\alpha_4$; $\alpha_2,\alpha_5$; $\alpha_3,\alpha_4$; $\alpha_3,\alpha_5$; $\alpha_4,\alpha_5$，共 10 组.

(2) 由(1)的行简化梯形得基础解系为：

$\beta_1=(-\frac{2}{19},-\frac{14}{19},1,0,0)^{\mathrm T},\beta_2=(\frac{1}{19},\frac{7}{19},0,1,0)^{\mathrm T},\beta_3=(-\frac{8}{19},\frac{1}{19},0,0,1)^{\mathrm T}$.

**四.** (12分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1=\alpha_3+\alpha_4,\alpha_2=\alpha_4+\alpha_5$，$\beta=-2\alpha_1+3\alpha_2$，计算 $Ax=\beta$ 的通解.

解：等式重写为：$\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4=\theta,\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5=\theta,-2\alpha_1+3\alpha_2=\beta$.

故知 $\xi_1=(1,0,-1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm T},\xi_2=(0,1,0,-1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$ 为 $Ax=\theta$ 的两个线性无关解.

$\eta=(-2,3,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$ 为 $Ax=\beta$ 的一个特解.

由于 $\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故 $\mathrm{r}(A)\geq n-2$，而 $Ax=\theta$ 至少有两个线性无关解，故 $\mathrm{r}(A)=n-2$，$Ax=\theta$ 的基础解系就是 $\xi_1,\xi_2$，$Ax=\beta$ 的通解为 $\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2,k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

**五.**(12分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 可逆，$B=A^{-1},B^{\mathrm T}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 试计算 $C=\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}$ 的特征值与特征向量.

解：因为 $BA=A^{-1}A=E$，即 $\beta_i^{\mathrm T}\alpha_j=\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$，其中 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0,i\neq j$.

故$C(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \beta_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\theta,\cdots,\theta)$.

由于 $A$ 可逆，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，即 $C$ 有特征值 1 和 0.

其中1 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, $k_1,k_2\in\mathbf{R}$, $k_1,k_2$不全为0,

0 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+\cdots+k_n\alpha_n$, $k_3,k_4,\cdots,k_n\in\mathbf{R}$, $k_3,\cdots,k_n$不全为0.

**六.**(10分) $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\{c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_r\eta_r\mid c_i\in\mathbf{C},\ 1\leq i\leq r\}$，

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，$\gamma_j=c_{1j}\eta_1+c_{2j}\eta_2+\cdots+c_{rj}\eta_r,(1\le j\le r)$. 证明：

(1) $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆；

(2) $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.

证：易知有 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rr}\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)C$.

(1) 令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^{\mathrm{T}}$，考虑 $x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+\cdots+x_r\gamma_r=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)x=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)Cx=\theta$.

因为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，故有 $Cx=\theta$，

于是 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow Cx=\theta$ 只有零解 $x=\theta$ $\Leftrightarrow C$ 可逆.

(2) 若 $C$ 可逆，则有 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)C^{-1}$，即 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 可相互表示，故 $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$.

若 $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 可表示 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$，故存在 $r$ 阶的矩阵 $D$，使得 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)D$，又由 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)C$ 有 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)CD$，由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，可得 $CD=E$，故 $C$ 可逆.

(2) 证法二：$\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关，

由(1)的结论，$\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.