

数理逻辑（2025 春）作业 - II

1 [Enderton, 第 4 题, 第 146 页]

设 $\Gamma = \{\neg\forall v_1 P v_1, P v_2, P v_3, \dots\}$ 。 Γ 是一致的吗？ Γ 是可满足的吗？

2 [Enderton, 第 7 题, 第 146 页]

对于下列每个句子，要么说明其存在一个推导，要么给出一个反模型（即在其中该句子为假的结构）。

1. $\forall x(Qx \rightarrow \forall y Qy)$
2. $(\exists x Px \rightarrow \forall y Qy) \rightarrow \forall z(Pz \rightarrow Qz)$
3. $\forall z(Pz \rightarrow Qz) \rightarrow (\exists x Px \rightarrow \forall y Qy)$
4. $\neg\exists y\forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)$

3 [Enderton, 第 8 题, 第 146 页]

假设该语言（带等号）仅包含量词 \forall 和谓词符号 P ，其中 P 是一个二元谓词符号。设 \mathfrak{A} 是一个结构，其 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{Z}$ ，即整数集合（正整数、负整数和零），并且当且仅当 $|a - b| = 1$ 时，有 $\langle a, b \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ 。因此， \mathfrak{A} 看起来像一个无限图：

$$\cdots \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \cdots$$

证明存在一个与其初等等价的结构 \mathfrak{B} ，但它不是连通的。（连通，是指对于 $|\mathfrak{B}|$ 中任意两个元素，存在一条路径连接它们。一条从 a 到 b 的长度为 n 的路径是一个序列 $\langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ ，其中 $a = p_0$ 且 $b = p_n$ ，并且对于每个 i ，都有 $\langle p_i, p_{i+1} \rangle \in P^{\mathfrak{B}}$ 。）提示：加入常元符号 c 和 d 。写出表示 c 和 d 距离很远的句子。应用紧致性。

4 [Enderton, 第 11 题, 第 100 页]

对于下列每个关系，在 $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ 中给出一个定义它的公式。（假设语言包含等号以及 \forall 、 $+$ 、和 \cdot 。）

1. $\{0\}$.
2. $\{1\}$.
3. $\{\langle m, n \rangle \mid n \text{ 是 } m \text{ 在 } \mathbb{N} \text{ 中的后继}\}$.
4. $\{\langle m, n \rangle \mid m < n \text{ 在 } \mathbb{N} \text{ 中}\}$.

5 [Enderton, 第 6 题, 第 146 页]

设 Σ_1 和 Σ_2 是两个句子的集合，且没有模型同时满足 Σ_1 和 Σ_2 。证明存在一个句子 τ ，使得

$$\text{Mod } \Sigma_1 \subseteq \text{Mod } \tau \quad \text{且} \quad \text{Mod } \Sigma_2 \subseteq \text{Mod } \neg\tau.$$

（这可以表述为：不相交的 EC_Δ 类可以被某个 EC 类区分开。）提示： $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是不可满足的；应用紧致性。