离散数学

（第 3 版）

智能科学与技术学院 2024 级

目录

目录

6.1 欧拉图

定义 1.1.1

通过图(无向图或有向图)中每条边一次且仅一次,并且过每一顶点的通路称作*欧拉通路*. 通过图中每条边一次且仅一次,并且过每一顶点的回路称作*欧拉回路*. 具有欧拉回路的图称作*欧拉图*. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称作*半欧拉图*. 规定平凡图是欧拉图.

6.1 欧拉图

定义 1.1.1

通过图(无向图或有向图)中每条边一次且仅一次,并且过每一顶点的通路称作欧拉通路. 通过图中每条边一次且仅一次,并且过每一顶点的回路称作欧拉回路. 具有欧拉回路的图称作欧拉图. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称作半欧拉图. 规定平凡图是欧拉图.

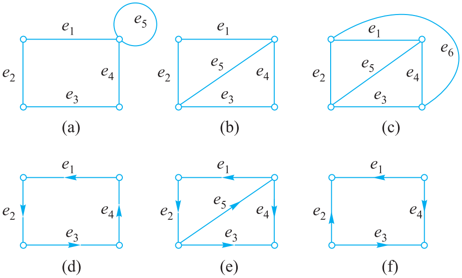


图 1.1.1

在图 1.1.1 所示各图中, $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ 为 (a) 中的一条欧拉回路, (a) 为欧拉图;

$e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ 为 (b) 中的一条欧拉通路, 但不存在欧拉回路, (b) 为半欧拉图;

(c) 中既没有欧拉回路, 也没有欧拉通路, (c) 不是欧拉图, 也不是半欧拉图;

$e_1 e_2 e_3 e_4$ 为 (d) 中的欧拉回路, (d) 为欧拉图;

(e)、(f) 中都既没有欧拉回路, 也没有欧拉通路.

定理 1.1.1

无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图且没有奇度顶点.

定理 1.1.1

无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图且没有奇度顶点.

证明.

若 G 为平凡图,结论显然成立. 下面设 G 为非平凡图,设 G 是 m 条边的 n 阶无向图,其顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

必要性. 因为 G 为欧拉图,所以 G 中存在欧拉回路,设 C 为 G 中任意一条欧拉回路.$\forall v_i,v_j\in V$, v_i,v_j 都在 C 上,因而 v_i,v_j 连通,所以 G 为连通图. 又对任意 $v_i\in V$, v_i 在 C 上每出现一次获得 2 度,若出现 k 次就获得 $2k$ 度,即 $d(v_i)=2k$,所以 G 中无奇度顶点.

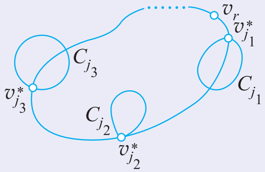
充分性. 由于 G 为非平凡的连通图,边数 $m\geqslant 1$. 对 m 作归纳证明.

当 $m=1$ 时,由 G 的连通性及无奇度顶点可知,G 只能是一个环,因而 G 为欧拉图.

设 $m\leqslant k$ 时结论成立,这里 $k\geqslant 1$,要证明当 $m=k+1$ 时,结论也成立. 由 G 的连通性及无奇度顶点,$\delta(G)\geqslant 2$. 可以证明 G 中必含圈,设 C 为 G 中一个圈.

定理1.1.1证明(续)

删除 C 上的全部边,得 G 的生成子图 G'. 设 G' 有 s 个连通分支 $G'_1, G'_2, \cdots, G'_s$,每个连通分支至多有 k 条边,且无奇度顶点. 设 G'_i 与 C 的公共顶点为 $v^*_{j_i}, i = 1, 2, \cdots, s$. 由归纳假设可知,$G'_1, G'_2, \cdots, G'_s$ 都是欧拉图,因而都存在欧拉回路. 设 C_i 是 G'_i 中一条欧拉回路,$i = 1, 2, \cdots, s$. 从某个顶点 v_r 开始沿 C 行走,每遇到 $v^*_{j_i}$,就行遍 C_i,回到 $v^*_{j_i}$ 再继续沿 C 行走,最后回到 v_r,得到一条回路 $v_r \cdots v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_1} \cdots v^*_{j_2} \cdots v^*_{j_2} \cdots v^*_{j_s} \cdots v^*_{j_s} \cdots v_r$,此回路经过 G 中每条边一次且仅一次并行遍 G 中所有顶点,它是 G 中的一条欧拉回路(见下图),得证 G 为欧拉图.



由定理 1.1.1,图 1.1.1 中的 3 个无向图中,只有 (a) 中无奇度顶点,因而 (a) 是欧拉图,而 (b),(c) 都有奇度顶点,因而它们都不是欧拉图.

18 世纪中叶在欧洲普鲁士的哥尼斯堡城内有一条贯穿全市的普雷格尔河，河中有两个小岛，由七座桥相连接（如图 1.1.2(a) 所示）. 当时该城市中的人们热衷于一个难题：一个人怎样不重复地走完七座桥，最后回到出发地点？这就是所谓的哥尼斯堡七桥问题.

1736 年，瑞士数学家欧拉（Euler）发表论文，他用 4 个点分别表示两个小岛和两岸，用连接两点的线段表示桥，如图 1.1.2(b) 所示. 于是，用现在的语言，哥尼斯堡七桥问题就是要求在这个图中走一条欧拉回路. 欧拉在这篇论文中证明了定理 1.1.1. 由于 4 个顶点都是奇度顶点，故该问题无解. 这篇论文现在被公认为是第一篇关于图论的论文. 这也正是欧拉回路和欧拉图这个名字的来源.

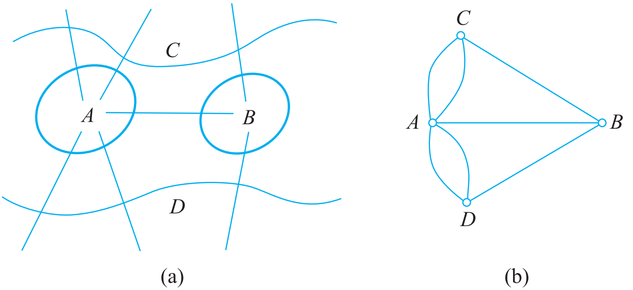


图 1.1.2

定理 1.1.2

无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

定理 1.1.2

无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

证明.

必要性. 设 G 是 m 条边的 n 阶无向图，因为 G 为半欧拉图，因而 G 中存在欧拉通路(但不存在欧拉回路). 设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} \cdots v_{i_{m-1}} e_{j_m} v_{i_m}$ 为 G 中一条欧拉通路，$v_{i_0} \neq v_{i_m}$. G 的连通性是显然的.$\forall v \in V(G)$，若 v 不是 Γ 的端点，设它在 Γ 中出现 k 次，其中 $k \geqslant 1$，每次获得 2 度，故 $d(v) = 2k$；若 v 是 Γ 的端点，由于 2 个端点是不同的且不相邻，v 作为端点只能出现一次，获得 1 度，它还可能作为非端点出现若干次，每次获得 2 度，故 $d(v)$ 为奇数.

定理 1.1.2

无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

证明.

必要性. 设 G 是 m 条边的 n 阶无向图,因为 G 为半欧拉图,因而 G 中存在欧拉通路(但不存在欧拉回路). 设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} \cdots v_{i_{m-1}} e_{j_m} v_{i_m}$ 为 G 中一条欧拉通路,$v_{i_0} \neq v_{i_m}$. G 的连通性是显然的.$\forall v \in V(G)$,若 v 不是 Γ 的端点,设它在 Γ 中出现 k 次,其中 $k \geqslant 1$,每次获得 2 度,故 $d(v) = 2k$;若 v 是 Γ 的端点,由于 2 个端点是不同的且不相邻,v 作为端点只能出现一次,获得 1 度,它还可能作为非端点出现若干次,每次获得 2 度,故 $d(v)$ 为奇数.

充分性. 设 G 的两个奇度顶点分别为 u_0 和 v_0,对 G 加新边 (u_0, v_0),得 $G' = G \cup (u_0, v_0)$,则 G' 连通且无奇度顶点. 由定理 1.1.1,G' 为欧拉图,因而存在欧拉回路 C',而 $C = C' - (u_0, v_0)$ 为 G 中一条欧拉通路,得证 G 为半欧拉图. □

定理 1.1.2

无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

证明.

必要性. 设 G 是 m 条边的 n 阶无向图,因为 G 为半欧拉图,因而 G 中存在欧拉通路(但不存在欧拉回路). 设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} \cdots v_{i_{m-1}} e_{j_m} v_{i_m}$ 为 G 中一条欧拉通路,$v_{i_0} \neq v_{i_m}$. G 的连通性是显然的.$\forall v \in V(G)$,若 v 不是 Γ 的端点,设它在 Γ 中出现 k 次,其中 $k \geqslant 1$,每次获得 2 度,故 $d(v) = 2k$;若 v 是 Γ 的端点,由于 2 个端点是不同的且不相邻,v 作为端点只能出现一次,获得 1 度,它还可能作为非端点出现若干次,每次获得 2 度,故 $d(v)$ 为奇数.

充分性. 设 G 的两个奇度顶点分别为 u_0 和 v_0,对 G 加新边 (u_0, v_0),得 $G' = G \cup (u_0, v_0)$,则 G' 连通且无奇度顶点. 由定理 1.1.1,G' 为欧拉图,因而存在欧拉回路 C',而 $C = C' - (u_0, v_0)$ 为 G 中一条欧拉通路,得证 G 为半欧拉图. □

由定理 1.1.2,图 1.1.1(b) 是半欧拉图,但 (c) 不是. 关于有向图,可类似证明:

定理 1.1.3

有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度等于出度.

定理 1.1.4

有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的且恰有两个奇度顶点，其中一个顶点的入度比出度大 1，另一个顶点的出度比入度大 1，其余顶点入度等于出度.

定理 1.1.4

有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的且恰有两个奇度顶点，其中一个顶点的入度比出度大 1，另一个顶点的出度比入度大 1，其余顶点入度等于出度.

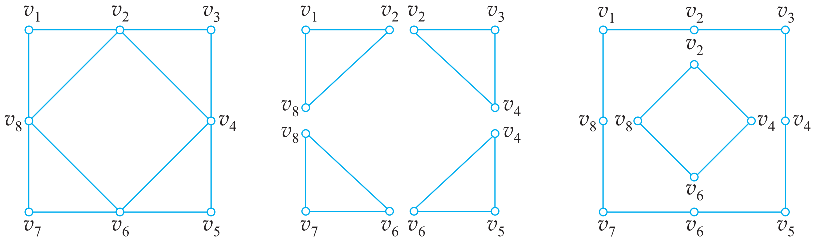
由定理 1.1.3 和 1.1.4，图 1.1.1 中所示的 3 个有向图中只有 (d) 是欧拉图，没有半欧拉图.

定理 1.1.4

有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的且恰有两个奇度顶点，其中一个顶点的入度比出度大 1，另一个顶点的出度比入度大 1，其余顶点入度等于出度.

由定理 1.1.3 和 1.1.4，图 1.1.1 中所示的 3 个有向图中只有 (d) 是欧拉图，没有半欧拉图.

由定理 1.1.1，下图中 (a) 为欧拉图，该图既可以看成圈 $v_1v_2v_8v_1$，$v_2v_3v_4v_2$，$v_4v_5v_6v_4$，$v_6v_7v_8v_6$ 之并(为清晰起见，将 4 个圈画在 (b) 中)，也可看成圈 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_1$ 与圈 $v_2v_4v_6v_8v_2$ 之并(两个圈画在 (c) 中). 将 (a) 分解成若干个边不重的圈的并不是 (a) 所特有的性质，任何欧拉图都有这个性质.



(a) (b) (c)

定理 1.1.5

G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且是若干个边不重的圈的并.

本定理可以用归纳法证明.

定理 1.1.5

G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且是若干个边不重的圈的并.

本定理可以用归纳法证明.

例 1.1.1

设 G 是非平凡的欧拉图，证明：$\lambda(G) \geqslant 2$.

证明.

只需证明 G 不是 1 边-连通图，即证明 G 的任意一条边 e 都不是桥. 设 C 是一条欧拉回路，e 在 C 上，因而 $p(G-e)=p(G)$，故 e 不是桥. □

定理 1.1.5

G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且是若干个边不重的圈的并.

本定理可以用归纳法证明.

例 1.1.1

设 G 是非平凡的欧拉图,证明:$\lambda(G) \geqslant 2$.

证明.

只需证明 G 不是 1 边-连通图,即证明 G 的任意一条边 e 都不是桥. 设 C 是一条欧拉回路,e 在 C 上,因而 $p(G-e)=p(G)$,故 e 不是桥. □

定理 1.1.1 充分性证明是构造性证明,它提供了一种求欧拉回路的算法——逐步插入回路法.

下面介绍另一种更简单的求欧拉回路的算法——弗勒里(Fleury)算法，它的基本思想是能不走桥就不走桥.

Fleury 算法

输入：欧拉图 G.

---

1 任取 $v_0 \in V(G)$，令 $P_0 = v_0, i = 0$.

2 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$，若 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边，则计算停止；否则按下述条件从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中任取一条边 e_{i+1}：

   1. e_{i+1} 与 v_i 相关联；
   2. 除非无别的边可供选择，否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中的桥.

   设 $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$，把 $e_{i+1} v_{i+1}$ 加入 P_i 得到 P_{i+1}.

3 令 $i = i + 1$，返回 2.

下面介绍另一种更简单的求欧拉回路的算法——弗勒里(Fleury)算法，它的基本思想是能不走桥就不走桥.

Fleury 算法

输入：欧拉图 G.

---

1 任取 $v_0 \in V(G)$，令 $P_0 = v_0, i = 0$.

2 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$，若 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边，则计算停止；否则按下述条件从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中任取一条边 e_{i+1}：

1. e_{i+1} 与 v_i 相关联；
2. 除非无别的边可供选择，否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中的桥.

设 $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$，把 $e_{i+1} v_{i+1}$ 加入 P_i 得到 P_{i+1}.

3 令 $i = i + 1$，返回 2.

可以证明，若 G 是欧拉图，当算法停止时所得的简单回路 $P_m = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_m v_m$ 为 G 中的一条欧拉回路，这里 $v_m = v_0$.

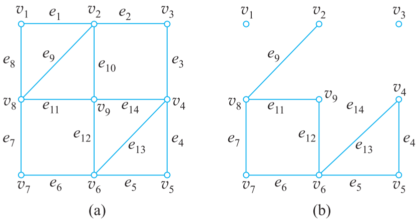


图 1.1.3

例 1.1.2

图 *1.1.3(a)* 是一个欧拉图. 某人用 *Fleury* 算法求这个图中的欧拉回路时，走了简单回路 $v_2\,e_2\,v_3\,e_3\,v_4\,e_{14}\,v_9\,e_{10}\,v_2\,e_1\,v_1\,e_8\,v_8\,e_9\,v_2$ 之后，无法进行下去，试分析他在哪步犯了错误？

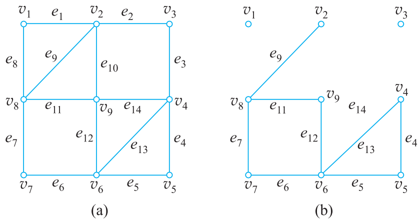


图 1.1.3

例 1.1.2

图 1.1.3(a) 是一个欧拉图. 某人用 Fleury 算法求这个图中的欧拉回路时，走了简单回路 $v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_{14} v_9 e_{10} v_2 e_1 v_1 e_8 v_8 e_9 v_2$ 之后，无法进行下去，试分析他在哪步犯了错误？

解

记这个图为 G. 当他走到 v_8 时，$G - \{e_2, e_3, e_{14}, e_{10}, e_1, e_8\}$ 为上图 (b) 所示. 此时 e_9 为该图中的桥，而 e_7, e_{11} 均不是桥. 他不应走 e_9，应走 e_7 或 e_{11}. 而他选择了 e_9，这违反了算法中 2 的条件能不走桥就不走桥的规定. 正确的走法是 $v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_{14} v_9 e_{10} v_2 e_1 v_1 e_8 v_8 e_{11} v_9 e_{12} v_6 e_{13} v_4 e_4 v_5 e_5 v_6 e_6 v_7 e_7 v_8 e_9 v_2$. 注意，在 v_3 处选择 e_3，在 v_1 处选择 e_8 等，当时 e_3, e_8 都是桥，但当时除这些桥外无别的边可走. 按照算法，只有在这种情况下才可以选择桥. 同理，当第一次走到 v_6 时必须选择 e_{13} 或 e_5，而不能选择 e_6. $\square$

Fleury 算法给出在欧拉图中“一笔画出”欧拉回路的方法.

6.2 哈密顿图

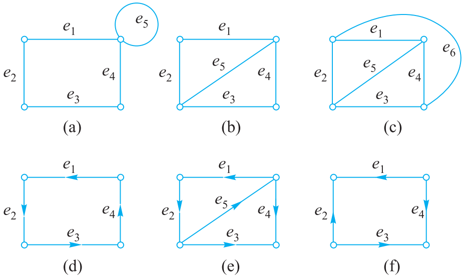
定义 1.2.1

经过图(有向图或无向图)中每个顶点一次且仅一次的通路称作哈密顿通路. 经过图中每个顶点一次且仅一次的回路称作哈密顿回路. 具有哈密顿回路的图称作哈密顿图 ,具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称作半哈密顿图 .

6.2 哈密顿图

定义 1.2.1

经过图(有向图或无向图)中每个顶点一次且仅一次的通路称作哈密顿通路. 经过图中每个顶点一次且仅一次的回路称作哈密顿回路. 具有哈密顿回路的图称作哈密顿图,具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称作半哈密顿图.



规定:平凡图是哈密顿图.

左图中,3 个无向图都有哈密顿回路,都是哈密顿图. (d) 有哈密顿回路,是哈密顿图;(e) 只有哈密顿通路,是半哈密顿图;而 (f) 中既无哈密顿回路,也没有哈密顿通路,因而不是哈密顿图,也不是半哈密顿图.

与判断一个图是否为欧拉图不一样,到目前为止,人们还没有找到哈密顿图便于判断的充分必要条件.

哈密顿图的必要条件

定理 1.2.1

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是哈密顿图，则对于任意 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$，均有

$$p(G-V_1)\leqslant|V_1|,$$

其中，$p(G-V_1)$ 为 $G-V_1$ 的连通分支数.

哈密顿图的必要条件

定理 1.2.1

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是哈密顿图，则对于任意 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$，均有

$$p(G-V_1)\leqslant|V_1|,$$

其中，$p(G-V_1)$ 为 $G-V_1$ 的连通分支数.

证明.

设 C 为 G 中的任意一条哈密顿回路. 易知，当 V_1 中的顶点在 C 上均不相邻时，$p(C-V_1)$ 达到最大值 $|V_1|$，而当 V_1 中的顶点在 C 上有彼此相邻的情况时，均有 $p(C-V_1)<|V_1|$，所以有 $p(C-V_1)\leqslant|V_1|$. 而 C 是 G 的生成子图，所以有 $p(G-V_1)\leqslant p(C-V_1)\leqslant|V_1|$. □

哈密顿图的必要条件

定理 1.2.1

设无向图 $G = \langle V, E\rangle$ 是哈密顿图,则对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$,均有

$$p(G - V_1) \leqslant |V_1|,$$

其中,$p(G - V_1)$ 为 $G - V_1$ 的连通分支数.

证明.

设 C 为 G 中的任意一条哈密顿回路. 易知,当 V_1 中的顶点在 C 上均不相邻时,$p(C - V_1)$ 达到最大值 $|V_1|$,而当 V_1 中的顶点在 C 上有彼此相邻的情况时,均有 $p(C - V_1) < |V_1|$,所以有 $p(C - V_1) \leqslant |V_1|$. 而 C 是 G 的生成子图,所以有 $p(G - V_1) \leqslant p(C - V_1) \leqslant |V_1|$. □

本定理给出哈密顿图的必要条件,但不是充分条件. 可以验证彼得松图(图??(a))满足定理中的条件,但它不是哈密顿图.

半哈密顿图的必要条件

推论 1.2.1

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是半哈密顿图，则对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$，均有

$$p(G - V_1) \leqslant |V_1| + 1.$$

半哈密顿图的必要条件

推论 1.2.1

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是半哈密顿图，则对于任意的 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$，均有

$$p(G-V_1)\leqslant|V_1|+1.$$

证明.

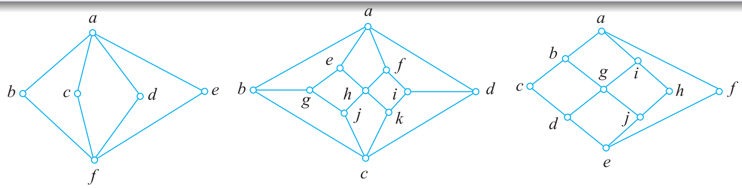
设 P 是 G 中起于 u 终于 v 的哈密顿通路，令 G' 为在 u,v 之间加新边 e 所得到的图，易知 G' 为哈密顿图. 由定理 1.2.1 可知，$p(G'-V_1)\leqslant|V_1|$. 故

$$\begin{aligned}p(G-V_1)&=p(G'-V_1-e)\\&\leqslant p(G'-V_1)+1\\&\leqslant|V_1|+1,\end{aligned}$$

即 $p(G-V_1)\leqslant|V_1|+1$. □

例 1.2.1

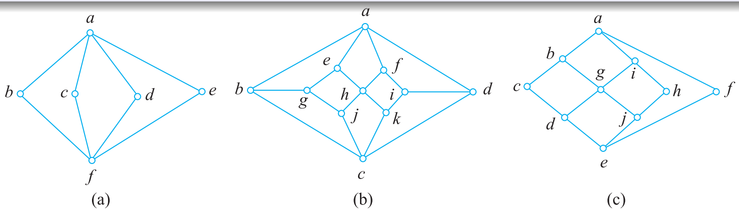
下图所示的 3 个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图？哪些是半哈密顿图？



(a) (b) (c)

例 1.2.1

下图所示的 3 个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图？哪些是半哈密顿图？

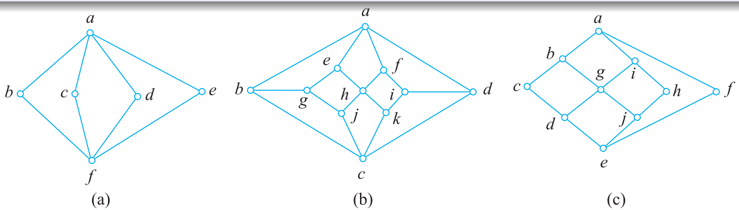


解

设 (a) 为 $G_1 = \langle V_1, V_2, E \rangle$，互补顶点子集 $V_1 = \{a, f\}, V_2 = \{b, c, d, e\}$. $p(G - V_1) = |V_2| = 4 > |V_1| = 2$. 由定理 1.2.1 及其推论1.2.1可知，$G_1$ 不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

例 1.2.1

下图所示的 3 个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图？哪些是半哈密顿图？



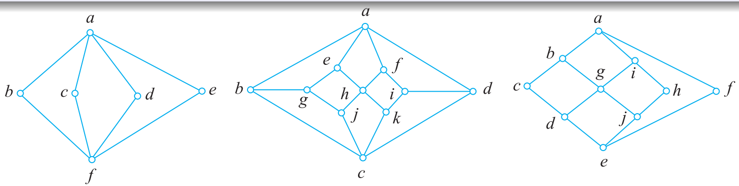
解

设 (a) 为 $G_1 = \langle V_1, V_2, E\rangle$，互补顶点子集 $V_1 = \{a, f\}, V_2 = \{b, c, d, e\}$. $p(G - V_1) = |V_2| = 4 > |V_1| = 2$. 由定理 1.2.1 及其推论1.2.1可知，$G_1$ 不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

设 (b) 为 $G_2 = \langle V_1, V_2, E\rangle$，其中 $V_1 = \{a, g, h, i, c\}$, $V_2 = \{b, e, f, j, k, d\}$, $p(G_2 - V_1) = |V_2| = 6 > |V_1| = 5$. 由定理 1.2.1 可知，$G_2$ 不是哈密顿图. 而 $baegjckhfid$ 是一条哈密顿通路，故 G_2 是半哈密顿图.

例 1.2.1

下图所示的 3 个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图？哪些是半哈密顿图？



(a) (b) (c)

解

设 (a) 为 $G_1 = \langle V_1, V_2, E\rangle$，互补顶点子集 $V_1 = \{a, f\}$, $V_2 = \{b, c, d, e\}$. $p(G - V_1) = |V_2| = 4 > |V_1| = 2$. 由定理 1.2.1 及其推论1.2.1可知，$G_1$ 不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

设 (b) 为 $G_2 = \langle V_1, V_2, E\rangle$，其中 $V_1 = \{a, g, h, i, c\}$, $V_2 = \{b, e, f, j, k, d\}$, $p(G_2 - V_1) = |V_2| = 6 > |V_1| = 5$. 由定理 1.2.1 可知，$G_2$ 不是哈密顿图. 而 $baegjckhfid$ 是一条哈密顿通路，故 G_2 是半哈密顿图.

在 (c) 中，$abcdgihjefa$ 是一条哈密顿回路，所以它是哈密顿图. 设这个图为 $G_3 = \langle V_1, V_2, E\rangle$，其中 $V_1 = \{a, c, g, h, e\}$, $V_2 = \{b, i, f, d, j\}$. 有 $|V_1| = |V_2|$.

注 1.2.1

一般情况下,设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle, |V_1| \leqslant |V_2|$,且 $|V_1| \geqslant 2, |V_2| \geqslant 2$. 由定理 *1.2.1*及其推论*1.2.1*可以得出以下结论.

1. 若 G 是哈密顿图,则 $|V_2| = |V_1|$.
2. 若 G 是半哈密顿图,则 $|V_2| = |V_1|$ 或 $|V_2| = |V_1| + 1$.
3. 若 $|V_2| \geqslant |V_1| + 2$,则 G 不是哈密顿图,也不是半哈密顿图.

注 1.2.1

一般情况下,设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$, $|V_1|\leqslant|V_2|$,且 $|V_1|\geqslant 2$, $|V_2|\geqslant 2$. 由定理 *1.2.1*及其推论*1.2.1*可以得出以下结论.

1. 若 G 是哈密顿图,则 $|V_2|=|V_1|$.
2. 若 G 是半哈密顿图,则 $|V_2|=|V_1|$ 或 $|V_2|=|V_1|+1$.
3. 若 $|V_2|\geqslant|V_1|+2$,则 G 不是哈密顿图,也不是半哈密顿图.

定理 1.2.2

设 G 是 n 阶无向简单图,若对于 G 中任意不相邻的顶点 u,v,均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n-1, \tag{1.2.1}$$

则 G 中存在哈密顿通路.

注 1.2.1

一般情况下，设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$，$|V_1| \leqslant |V_2|$，且 $|V_1| \geqslant 2, |V_2| \geqslant 2$. 由定理 *1.2.1*及其推论*1.2.1*可以得出以下结论.

1. 若 G 是哈密顿图，则 $|V_2| = |V_1|$.
2. 若 G 是半哈密顿图，则 $|V_2| = |V_1|$ 或 $|V_2| = |V_1| + 1$.
3. 若 $|V_2| \geqslant |V_1| + 2$，则 G 不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

定理 1.2.2

设 G 是 n 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 u, v，均有

$$d(u) + d(v) \geqslant n - 1, \tag{1.2.1}$$

则 G 中存在哈密顿通路.

证明.

首先证明 G 是连通图. 假设 G 不是连通的，则 G 至少有两个连通分支，设 G_1, G_2 是阶数分别为 n_1, n_2 的两个连通分支. 设 $u \in V(G_1), v \in V(G_2)$. 因为 G 是简单图，所以 $d_G(u) + d_G(v) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) \leqslant n_1 - 1 + n_2 - 1 \leqslant n - 2$. 这与 (1.2.1) 矛盾.

定理1.2.2证明(续)

下面证 G 中存在哈密顿通路. 设 $\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_l$ 为 G 中的一条极大路径,即 Γ 的始点 v_1 与终点 v_l 不与 Γ 外的顶点相邻,$l \leqslant n$.

1. 若 $l = n$,则 Γ 为 G 中的哈密顿通路,定理成立.
2. 若 $l < n$,则 G 中有 Γ 外的顶点. 需证 G 中存在过 Γ 上所有顶点的圈.
   (a) 若 v_1 与 v_l 相邻,即 $(v_1, v_l) \in E(G)$,则 $\Gamma \cup (v_1, v_l)$ 为满足要求的圈.

定理1.2.2证明(续)

下面证 G 中存在哈密顿通路. 设 $\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_l$ 为 G 中的一条极大路径，即 Γ 的始点 v_1 与终点 v_l 不与 Γ 外的顶点相邻，$l \leqslant n$.

1. 若 $l = n$，则 Γ 为 G 中的哈密顿通路，定理成立.
2. 若 $l < n$，则 G 中有 Γ 外的顶点. 需证 G 中存在过 Γ 上所有顶点的圈.
   (a) 若 v_1 与 v_l 相邻，即 $(v_1, v_l) \in E(G)$，则 $\Gamma \cup (v_1, v_l)$ 为满足要求的圈.
   (b) 否则，设 v_1 与 Γ 上的 $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻($k \geqslant 2$，否则 $d(v_1) + d(v_l) \leqslant 1 + l - 2 = l - 1 < n - 1$，与式(1.2.1)矛盾). v_l 至少与 $v_{i_2}, v_{i_3}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻的顶点 $v_{i_2 - 1}, v_{i_3 - 1}, \cdots, v_{i_k - 1}$ 之一相邻(否则，$d(v_1) + d(v_l) \leqslant l - 1 < n - 1$，与式(1.2.1) 矛盾). 设 v_l 与 $v_{i_r - 1}$ 相邻, $2 \leqslant r \leqslant k$，如图 1.2.1(a) 所示. 于是，回路 $C = v_1 v_2 \cdots\ v_{i_r - 1} v_l v_{l-1} \cdots\ v_{i_r} v_1$ 过 Γ 上的所有顶点.

定理1.2.2证明(续)

下面证 G 中存在哈密顿通路. 设 $\varGamma = v_1 v_2 \cdots v_l$ 为 G 中的一条极大路径, 即 $\varGamma$ 的始点 v_1 与终点 v_l 不与 $\varGamma$ 外的顶点相邻, $l \leqslant n$.

1. 若 $l = n$, 则 $\varGamma$ 为 G 中的哈密顿通路, 定理成立.
2. 若 $l < n$, 则 G 中有 $\varGamma$ 外的顶点. 需证 G 中存在过 $\varGamma$ 上所有顶点的圈.
   - (a) 若 v_1 与 v_l 相邻, 即 $(v_1, v_l) \in E(G)$, 则 $\varGamma \cup (v_1, v_l)$ 为满足要求的圈.
   - (b) 否则, 设 v_1 与 $\varGamma$ 上的 $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻($k \geqslant 2$, 否则 $d(v_1) + d(v_l) \leqslant 1 + l - 2 = l - 1 < n - 1$, 与式(1.2.1)矛盾). v_l 至少与 $v_{i_2}, v_{i_3}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻的顶点 $v_{i_2-1}, v_{i_3-1}, \cdots, v_{i_k-1}$ 之一相邻(否则, $d(v_1) + d(v_l) \leqslant l - 1 < n - 1$, 与式(1.2.1) 矛盾). 设 v_l 与 v_{i_r-1} 相邻, $2 \leqslant r \leqslant k$, 如图 1.2.1(a) 所示. 于是, 回路 $C = v_1 v_2 \cdots\ v_{i_r-1} v_l v_{l-1} \cdots\ v_{i_r} v_1$ 过 $\varGamma$ 上的所有顶点.
   - (c) 下面证明存在比 $\varGamma$ 更长的路径. 因为 $l < n$, 所以 C 外还有顶点, 由 G 的连通性可知, 存在 $v_{l+1} \in V(G) - V(C)$ 与 C 上的某顶点 v_t 相邻, 当 $t < i_r - 1$ 时, 如图 1.2.1(b) 所示. 删除边 (v_{t-1}, v_t) 得路径 $\varGamma' = v_{t-1} \cdots v_1 v_{i_r} \cdots$ $v_l v_{i_r-1} \cdots\ v_t v_{l+1}$ 比 $\varGamma$ 的长度大 1. 当 $t > i_r - 1$ 和 $t = i_r$ 时, 可以类似地构造出比 $\varGamma$ 的长度大 1 的路径 $\varGamma'$. 重复 (a)–(c), 在有限步内一定能得到 G 的一条哈密顿通路.

定理1.2.2证明(续)

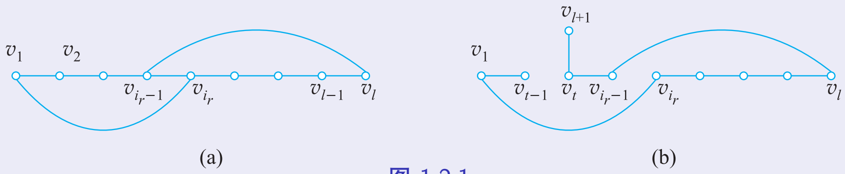


图 1.2.1

推论 1.2.2

设 G 为 $n(\geqslant 3)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 u, v 均有

$$d(u) + d(v) \geqslant n, \tag{1.2.2}$$

则 G 中存在哈密顿回路.

定理1.2.2证明(续)

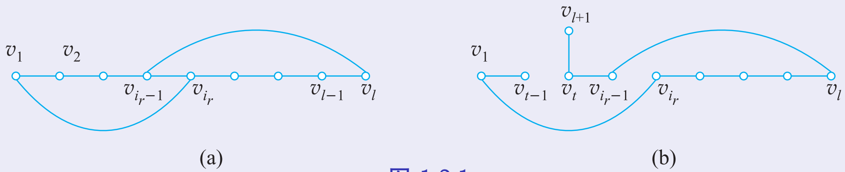


图 1.2.1

推论 1.2.2

设 G 为 $n(\geqslant 3)$ 阶无向简单图,若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 u, v 均有

$$d(u) + d(v) \geqslant n, \tag{1.2.2}$$

则 G 中存在哈密顿回路.

证明.

由定理 1.2.2 可知,G 中存在哈密顿通路,设 $\varGamma = v_1 v_2 \cdots v_n$ 为其中的一条,若 v_1 与 v_n 相邻,设边 $e = (v_1, v_n)$,则 $\varGamma \cup e$ 为 G 中的哈密顿回路. 若 v_1 与 v_n 不相邻,应用式 (1.2.2),同定理 1.2.2 证明中的 (2) 类似,可以证明存在过 $\varGamma$ 上各顶点的圈,此圈即为 G 中的哈密顿回路. □

定理 1.2.3

设 u, v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点, 且 $d(u) + d(v) \geqslant n$, 则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u, v)$ 为哈密顿图, 其中 (u, v) 是加的新边.

定理 1.2.3

设 u, v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点，且 $d(u) + d(v) \geqslant n$，则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u, v)$ 为哈密顿图，其中 (u, v) 是加的新边.

本定理的证明留作习题.

例 1.2.2

在某次国际会议的预备会中，共有 8 人参加，他们来自不同的国家. 已知他们中任何两个不会说同一种语言的人，与其余会说同一种语言的人数之和大于等于 8，试证明能将这 8 个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈.

定理 1.2.3

设 u, v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点，且 $d(u)+d(v) \geqslant n$，则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u, v)$ 为哈密顿图，其中 (u, v) 是加的新边.

本定理的证明留作习题.

例 1.2.2

在某次国际会议的预备会中，共有 8 人参加，他们来自不同的国家. 已知他们中任何两个不会说同一种语言的人，与其余会说同一种语言的人数之和大于等于 8，试证明能将这 8 个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈.

解

设 8 个人分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_8$，作无向简单图 $G = \langle V, E\rangle$，其中

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_8\},\ E = \{(v_i, v_j) |\, v_i \text{ 与 } v_j \text{ 会说同一种语言}, 1 \leqslant i < j \leqslant 8\}.$$

G 为 8 阶无向简单图，$d(v_i)$ 为与 v_i 会说同一种语言的人数. 由已知条件，$\forall v_i, v_j \in V$ 且 $(v_i, v_j) \notin E$，均有 $d(v_i)+d(v_j) \geqslant 8$. 由定理 1.2.2 的推论1.2.2可知，$G$ 中存在哈密顿回路，设 $C = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_8} v_{i_1}$ 为 G 中的一条哈密顿回路，按照这条回路的顺序安排座次即可. □

定理 1.2.4

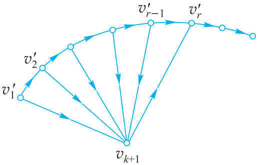
$n(\geqslant 2)$ 阶竞赛图中都有哈密顿通路.

定理 1.2.4

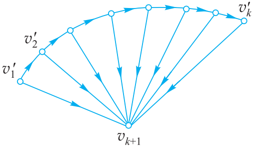
$n(\geqslant 2)$ 阶竞赛图中都有哈密顿通路.

证明.

设 D 为 n 阶竞赛图，对 n 归纳证明. 当 $n=2$ 时，D 的基图为 K_2，结论成立. 设 $n=k\geqslant 2$ 时结论成立. 对 $n=k+1$，设 $V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+1}\}$. 令 $D_1=D-v_{k+1}$，易知 D_1 为 k 阶竞赛图. 由归纳假设，D_1 存在哈密顿通路 $\Gamma_1=v_1'v_2'\cdots v_k'$. 下证明 v_{k+1} 可扩到 Γ_1 中去. 若存在 $v_r', 1\leqslant r\leqslant k$, 使得 $\langle v_i', v_{k+1}\rangle \in E(D), i=1,2,\cdots,r-1$，且 $\langle v_{k+1}, v_r'\rangle\in E(D)$，如下图 (a) 所示，则 $\Gamma=v_1'v_2'\cdots v_{r-1}'v_{k+1}v_r'\cdots v_k'$ 为 D 中哈密顿通路. 否则 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$，或者均有 $\langle v_i', v_{k+1}\rangle\in E(D)$，如下图 (b) 所示，则 $\Gamma=v_1'v_2'\cdots v_k'v_{k+1}$ 为 D 中哈密顿通路; 或者均有 $\langle v_{k+1}, v_i'\rangle\in E(D)$，则 $\Gamma=v_{k+1}v_1'v_2'\cdots v_k'$ 为 D 中哈密顿通路. □



(a)



(b)

例 1.2.3

图 *1.2.2* 所示的 *3* 个图中哪些是哈密顿图？哪些是半哈密顿图？

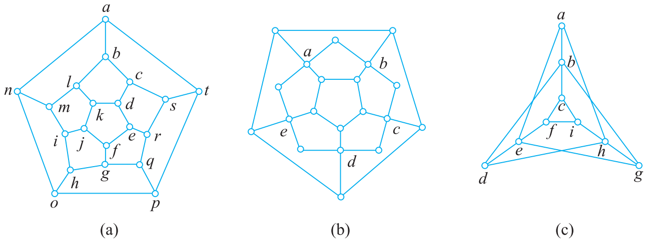


图 1.2.2

例 1.2.3

图 *1.2.2* 所示的 *3* 个图中哪些是哈密顿图?哪些是半哈密顿图?

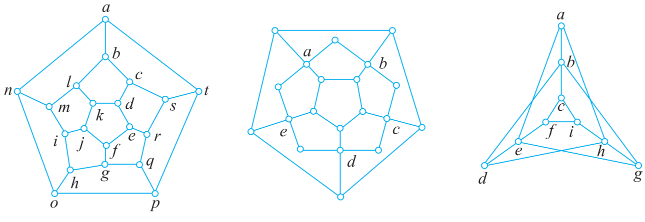


图 1.2.2

解

在 (a) 中,按照字母顺序经过各顶点走出一条哈密顿回路 $abc\cdots rsta$,所以它为哈密顿图.

在 (b) 中,取 $V_1=\{a,b,c,d,e\}$,从图中删除 V_1,得 7 个连通分支,由定理 1.2.1 及推论1.2.1可知,它不是哈密顿图,也不是半哈密顿图.

在 (c) 中取 $V_1=\{b,e,h\}$,从图中删除 V_1 得 4 个连通分支,由定理 1.2.1,它不是哈密顿图. 但图 1.2.2(c) 中 $abcifedhg$ 为哈密顿通路,所以它是半哈密顿图.

哈密顿回路

1859 年爱尔兰数学家威廉·哈密顿(William Hamilton)设计出一个在正十二面体(如图 1.2.3 所示)上的游戏——周游世界问题. 他将 20 个顶点看作 20 个城市,每一条棱看作一条公路,要求从一个城市出发,沿着公路经过每一个城市一次且仅一次,最后回到出发的城市.

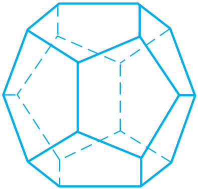


图 1.2.3

哈密顿回路

1859 年爱尔兰数学家威廉·哈密顿(William Hamilton)设计出一个在正十二面体(如图 1.2.3 所示)上的游戏——周游世界问题. 他将 20 个顶点看作 20 个城市,每一条棱看作一条公路,要求从一个城市出发,沿着公路经过每一个城市一次且仅一次,最后回到出发的城市.

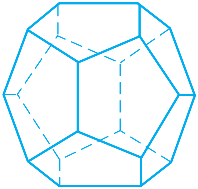


图 1.2.3

可以把正十二面体的一个面撕开,平摊到平面上,如图 1.2.2(a) 所示. 问题变成要在图 1.2.2(a) 中找一条经过每一个顶点恰好一次的回路. 这就是哈密顿回路的来源. 例 1.2.3 中给出这个游戏的一个答案,实际上它还有好几种其他的走法.

6.3 最短路问题

定义 1.3.1

设图 $G=\langle V,E\rangle$(无向图或有向图),给定 $W:E\to\mathbb{R}$,对 G 的每一条边 e,称 $W(e)$ 为边 e 的权. 把这样的图称作带权图,记作 $G=\langle V,E,W\rangle$. 当 $e=(u,v)$ 或 $e=\langle u,v\rangle$ 时,把 $W(e)$ 记作 $W(u,v)$.

6.3 最短路问题

定义 1.3.1

设图 $G = \langle V, E \rangle$(无向图或有向图),给定 $W : E \to \mathbb{R}$,对 G 的每一条边 e,称 $W(e)$ 为边 e 的权. 把这样的图称作带权图,记作 $G = \langle V, E, W \rangle$. 当 $e = (u, v)$ 或 $e = \langle u, v \rangle$ 时,把 $W(e)$ 记作 $W(u, v)$.

设 P 是 G 中的一条通路,P 中所有边的权之和称作 P 的长度,记作 $W(P)$,即 $W(P) = \sum_{e \in E(P)} W(e)$. 类似地,可以定义回路 C 的长度 $W(C)$.

6.3 最短路问题

定义 1.3.1

设图 $G=\langle V,E\rangle$(无向图或有向图),给定 $W:E\to\mathbb{R}$,对 G 的每一条边 e,称 $W(e)$ 为边 e 的*权*. 把这样的图称作*带权图*,记作 $G=\langle V,E,W\rangle$. 当 $e=(u,v)$ 或 $e=\langle u,v\rangle$ 时,把 $W(e)$ 记作 $W(u,v)$.

设 P 是 G 中的一条通路,P 中所有边的权之和称作 P 的*长度*,记作 $W(P)$,即 $W(P)=\sum_{e\in E(P)}W(e)$. 类似地,可以定义回路 C 的长度 $W(C)$.
设带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$(无向图或有向图),其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数. $\forall u,v\in V$,当 u 和 v 连通(u 可达 v)时,称从 u 到 v 长度最短的路径为从 u 到 v 的*最短路径*,称其长度为从 u 到 v 的*距离*,记作 $d(u,v)$. 约定:
$d(u,u)=0$;当 u 和 v 不连通(u 不可达 v)时,$d(u,v)=+\infty$.

最短路问题

本节考虑带权图上的 3 个问题——最短路问题、中国邮递员问题和货郎担问题.

最短路问题

给定带权图 $G = \langle V, E, W\rangle$ 及顶点 u 和 v,其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数,求从 u 到 v 的最短路径.

最短路问题

本节考虑带权图上的 3 个问题——最短路问题、中国邮递员问题和货郎担问题.

最短路问题

给定带权图 $G = \langle V, E, W \rangle$ 及顶点 u 和 v,其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数,求从 u 到 v 的最短路径.

不难看出,如果 $uv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v$ 是从 u 到 v 的最短路径,那么对每一个 t, $1 \leqslant t \leqslant k$,路径 $uv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_t}$ 是从 u 到 v_{i_t} 的最短路径.
根据这条性质,E. W. Dijkstra 于 1959 年给出了下述最短路径算法.

最短路问题

本节考虑带权图上的 3 个问题——最短路问题、中国邮递员问题和货郎担问题.

最短路问题

给定带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 及顶点 u 和 v,其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数,求从 u 到 v 的最短路径.

不难看出,如果 $uv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v$ 是从 u 到 v 的最短路径,那么对每一个 t, $1\leqslant t\leqslant k$,路径 $uv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_t}$ 是从 u 到 v_{i_t} 的最短路径.

根据这条性质,E. W. Dijkstra 于 1959 年给出了下述最短路径算法.

算法给出从给定的起点 s 到每一点的最短路径. 在计算过程中,赋予每一个顶点 v 一个标号 $l(v)=(l_1(v),l_2(v))$. 标号分永久标号和临时标号. 在 v 的永久标号 $l(v)$ 中,$l_2(v)$ 是从 s 到 v 的距离,$l_1(v)$ 是 s 到 v 的最短路径上 v 的前一个顶点. 当 $l(v)$ 是临时标号时,$l_1(v)$ 和 $l_2(v)$ 分别是当前从 s 经过永久标号的顶点到 v 的长度最短的路径上 v 的前一个顶点和这条路径的长度.

最短路径算法

Dijkstra 标号法

输入：带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 和 $s\in V$，其中 $|V|=n,\forall e\in E,W(e)\geqslant 0.$

输出：s 到 G 中每一点的最短路径及距离.

---

1 令 $l(s)\leftarrow(s,0),l(v)\leftarrow(s,+\infty)\quad(v\in V-\{s\}),i\leftarrow 1$，
  $l(s)$ 是永久标号，其余标号均为临时标号，$u\leftarrow s$

2 **for** 与 u 关联的临时标号的顶点 v **do**

3 　　**if** $l_2(u)+W(u,v)<l_2(v)$ **then** 令 $l(v)\leftarrow(u,l_2(u)+W(u,v))$;

4 计算 $l_2(t)=\min\{l_2(v)|v\in V$ 且有临时标号$\}$，
  把 $l(t)$ 改为永久标号

5 **if** $i<n$ **then** 令 $u\leftarrow t,i\leftarrow i+1$，转 2;

最短路径算法

Dijkstra 标号法

输入：带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 和 $s\in V$，其中 $|V|=n, \forall e\in E, W(e)\geqslant 0$.

输出：s 到 G 中每一点的最短路径及距离.

---

1 令 $l(s)\leftarrow(s,0), l(v)\leftarrow(s,+\infty)\quad(v\in V-\{s\}), i\leftarrow 1$，
 $l(s)$ 是永久标号，其余标号均为临时标号，$u\leftarrow s$

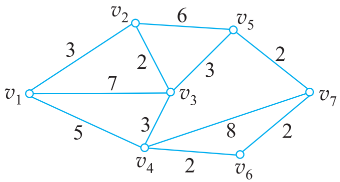
2 **for** 与 u 关联的临时标号的顶点 v **do**

3 **if** $l_2(u)+W(u,v)<l_2(v)$ **then** 令 $l(v)\leftarrow(u,l_2(u)+W(u,v))$;

4 计算 $l_2(t)=\min\{l_2(v)|v\in V$ 且有临时标号$\}$，
 把 $l(t)$ 改为永久标号

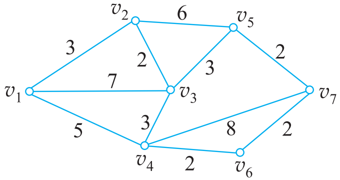
5 **if** $i<n$ **then** 令 $u\leftarrow t, i\leftarrow i+1$，转 2;

计算结束时，对每一个顶点 u, $d(s,u)=l_2(u)$，利用 $l_1(v)$ 从 u 开始回溯找到从 s 到 u 的最短路径.



例 1.3.1

带权图 G 如左图所示，求从 v_1 到其余各点的最短路径和距离.



例 1.3.1

带权图 G 如左图所示，求从 v_1 到其余各点的最短路径和距离.

解

用 Dijkstra 标号法求解，计算过程如表 1.3.1 所示. 表中 $*$ 表示永久标号，$**$ 表示这一步选中的永久标号，其余均是临时标号.

表 1.3.1

步骤	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	$(v_1,0)^{**}$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
2	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{**}$	$(v_1,7)$	$(v_1,5)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
3	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{**}$	$(v_1,5)$	$(v_2,9)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
4	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{**}$	$(v_3,8)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
5	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{*}$	$(v_3,8)$	$(v_4,7)^{**}$	$(v_4,13)$
6	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{*}$	$(v_3,8)^{**}$	$(v_4,7)^{*}$	$(v_6,9)$
7	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{*}$	$(v_3,8)^{*}$	$(v_4,7)^{*}$	$(v_6,9)^{**}$

例1.3.1(续)

根据表 1.3.1 的最后一行，从 v_1 到其余各点的最短路径和距离如下.

$$
\begin{aligned}
&v_1v_2, && d(v_1,v_2)=3;\\
&v_1v_2v_3, && d(v_1,v_3)=5;\\
&v_1v_4, && d(v_1,v_4)=5;\\
&v_1v_2v_3v_5, && d(v_1,v_5)=8;\\
&v_1v_4v_6, && d(v_1,v_6)=7;\\
&v_1v_4v_6v_7, && d(v_1,v_7)=9.
\end{aligned}
$$

中国邮递员问题

邮递员从邮局出发，走遍他负责的街区投递邮件，最后回到邮局. 问：如何走才能使他走的路最短?

中国邮递员问题

邮递员从邮局出发,走遍他负责的街区投递邮件,最后回到邮局. 问:如何走才能使他走的路最短?

这个问题的图论提法如下:给定一个带权无向图,其中每条边的权为非负实数,求每一条边至少经过一次的最短回路.

这个问题是我国管梅谷教授于 1962 年提出的,故称为中国邮递员问题.

中国邮递员问题

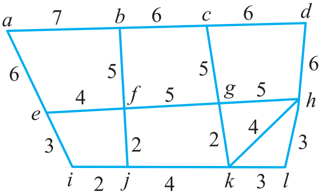
邮递员从邮局出发，走遍他负责的街区投递邮件，最后回到邮局. 问：如何走才能使他走的路最短?

这个问题的图论提法如下：给定一个带权无向图，其中每条边的权为非负实数，求每一条边至少经过一次的最短回路.

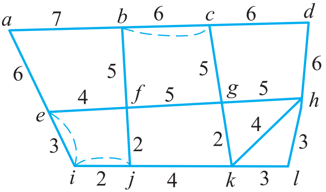
这个问题是我国管梅谷教授于 1962 年提出的，故称为中国邮递员问题.

例 1.3.2

邮递员负责的街区如图 *1.3.1(a)* 所示，长度单位是百米，邮局位于 a 处. 试设计邮递员的最短投递路线.



(a)



(b)

例1.3.2(续)

解

如果图中有欧拉回路,显然欧拉回路就是最短的投递路线.

图 1.3.1(a) 中有 4 个奇度顶点 b, c, e, j,不存在欧拉回路,因此投递路线必须重复走某些边.

为此,只需要把 4 个奇度顶点分成 2 对,在每对之间沿着最短路重复走一遍. 为了使投递路线最短,应使重复的路线最短.

把图 1.3.1(a) 中 4 个奇度顶点分成 2 对:b 和 c,e 和 j. 需要重复的路线是:(b, c),(e, i) 和 (i, j). 如图 1.3.1(b) 所示,其中重复的路线用虚线表示.

最短投递路线为 $abcdhlkhgkjieijfgcbfea$. 总长度为街道的总长度 + 重复路线的长度,等于

$$(7+6+6+6+5+5+6+4+5+5+3+2+2+4+3+2+4+3)+(6+3+2) = 89\,(\text{百米}).$$

货郎担问题(旅行商问题)

有 n 个城市,给定城市之间道路的长度(长度可以为 $+\infty$,对应这两个城市之间无交通线). 一个旅行商从某个城市出发,要经过每个城市一次且仅一次,最后回到出发的城市,问:如何走才能使他走的路线最短?

货郎担问题(旅行商问题)

有 n 个城市，给定城市之间道路的长度(长度可以为 $+\infty$，对应这两个城市之间无交通线). 一个旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，问：如何走才能使他走的路线最短?

这个问题可以用图论方法描述如下：设 $G = \langle V, E, W \rangle$ 为一个 n 阶完全带权图，各边的权 $W(e)$ 非负且可以为 $+\infty$，求 G 中一条最短的哈密顿回路.

货郎担问题(旅行商问题)

有 n 个城市,给定城市之间道路的长度(长度可以为 $+\infty$,对应这两个城市之间无交通线). 一个旅行商从某个城市出发,要经过每个城市一次且仅一次,最后回到出发的城市,问:如何走才能使他走的路线最短?

这个问题可以用图论方法描述如下:设 $G = \langle V, E, W \rangle$ 为一个 n 阶完全带权图,各边的权 $W(e)$ 非负且可以为 $+\infty$,求 G 中一条最短的哈密顿回路.

例如,图 1.3.2(a) 给出一个 4 阶完全带权图 K_4. 不计起点、也不计顺时针和逆时针,只有 3 条不同的哈密顿回路: $C_1 = abcda$; $C_2 = abdca$; $C_3 = acbda$. 分别如图 1.3.2(b),(c),(d) 所示,其长度分别为 $8, 10, 12$. 因此, C_1 是所求的最短路线.

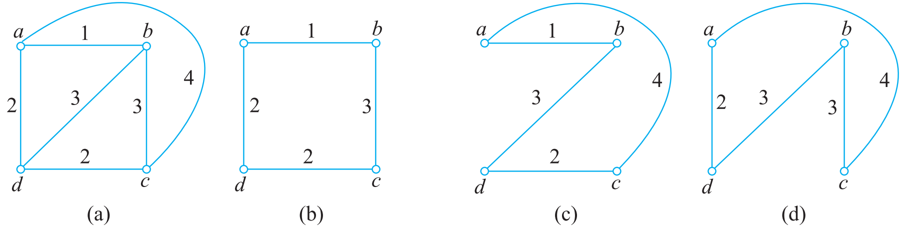


图 1.3.2