南京大学数学课程试卷

2011/2012 学年 第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 **2011.12.28** 系别 ________ 学号 ________ 姓名 ________

题号	一 36	二 10	三 10	四 12	五 10	六 10	七 12	合计
得分								

$\Phi(1.0)=0.8413$, $\Phi(1.28)=0.90$, $\Phi(1.58)=0.943$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$,
$\Phi(2.33)=0.99$, $\Phi(2.58)=0.995$, $t_{0.025}(27)=2.052$, $t_{0.025}(28)=2.048$, $t_{0.05}(27)=1.703$, $t_{0.05}(28)=1.706$
$t_{0.025}(24)=2.052$, $t_{0.025}(25)=2.048$, $t_{0.05}(24)=1.703$, $t_{0.05}(25)=1.706$

一.（6 分×6=36 分）

（1）给定 $p=P(A)$, $q=P(B)$, $r=P(A\cup B)$, 求 $P(A\overline{B})$ 及 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

（2）设随机变量 $X_i \sim N(2, 3^2)$, $i=1,2,\cdots 10$, 且相互独立, 求 $E[2X_1\sum_{i=1}^{10}X_i]$.

（3）设$\{\xi_n\}$为独立随机变序列，且 $\xi_k \sim \begin{pmatrix} 2^k & 0 & -2^k \\ 2^{-(2k+1)} & 1-2^{-2k} & 2^{-(2k+1)} \end{pmatrix}$, $k=1, 2, \cdots$.

求证：$\forall\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\ge\varepsilon)=0$, 即 $\{\xi_n\}$服从大数定律.

（4）已知两正态总体ξ～N(20, 4), η～N(20, 6). 分别从ξ，η中取出 n_1=10, n_2=25 的两组独立样本，$\overline{X}$,$\overline{Y}$ 分别为ξ，η的样本均值．计算 P($\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|$>0.8).

（5）设某年级数学考试成绩服从正态分布，随机抽取其中 28 名学生的考试成绩，得样本均值 $\bar{x}$=80 分，样本方差$\widetilde{S}^2=\frac{1}{28}\sum_{i=1}^{28}(x_i-\bar{x})^2$ =64，试求该年级数学考试平均成绩的置信区间（置信度 0.95）.

（6）设总体 X～N（μ，σ^2），X_1，X_2，X_3 是一个样本，试验证 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3$，$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$ 都是μ的无偏估计量，并比较它们的有效性.

二．(12 分)设（ξ,η）的联合密度为 p(x, y)=$\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$ **，试求：**

（1）边际密度 $p_1(x)$和 $p_2(y)$，ξ与η是否相互独立？说明理由； (2) P$\{\xi<\eta\}$ 的值.

三．**(10 分)设 $X \sim U(-0.5, 0.5)$，而 $Y=\cos X$，试问：（1）X 与 Y 是否不相关？（2）X 与 Y 是否独立？（均须说明理由）.**

四．**(10 分)设某地区拟建一家新电影院，据分析，该地区平均每日约有 1600 人去看电影，且预计新电影院建成后，平均每天约有四分之三的观众将去这家新电影院，现该影院在计划座位数时，要求座位数尽可能多，但还要求“空座位数达到 200 或更多”的概率不能超过 0.1，问至多可设多少个座位？**

五．**(10 分)设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是取自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的容量为 5 的样本，试求下列统计量的分布：（1）$Y=\frac{1}{2\sigma^2}(X_1+X_2)^2+\frac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2+X_5^2)$；（2）$Z=\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$.（如有自由度，必须指出）**

六．**(12 分)**设总体 **X** 服从二项分布，即 **X～B（m， p）**，其中 **m** 是已知的自然数，**p** 是未知参数，（$X_1, X_2, \dots, X_n$）是来自总体 **X** 的随机样本，**(1)**求 **p** 的矩估计量与极大似然估计量．**(2)**这些估计量是否为 **p** 的无偏估计量？是否为 **p** 的一致估计量？（均须说明理由）.

七．**(10 分)**一种元件，要求其平均使用寿命不得低于是 **1000** 小时，今从这批元件中随机地抽取 **25** 件，测得其平均寿命为 **950** 小时．已知该种元件寿命ξ服从标准差σ=**100** 小时的正态分布，（**1**）试在显著水平α=**0.05** 下确定这批元件是否合格？（**2**）求μ=**E**ξ的置信度为 **95%**的置信区间.