命题逻辑（续）

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

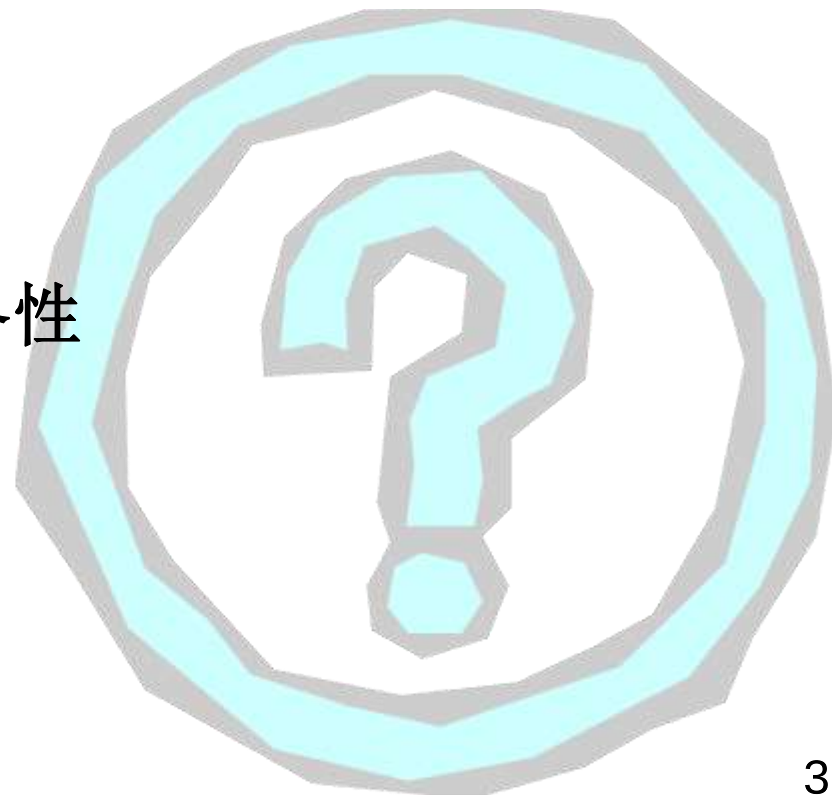
致谢：部分内容改编自北京大学曹永知老师、中科大肖明军老师和南大陶先平老师的《离散数学》slides。

前情回顾

- 数理逻辑（符号逻辑）
- 命题，逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 语义蕴含

内容提要

- 语意蕴含与逻辑等价
- 命题逻辑的推理
- 命题逻辑公式的范式
- 自然演绎规则及论证
- 命题逻辑的正确性及完备性



语义蕴涵（Semantic Entailment）

- $\varphi_1 \vDash \varphi_2$：对于$\varphi_1$的任意一个成真指派，$\varphi_2$均为真

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	1

举例说明

$\neg p \wedge q \ \vDash \ p \to q$

$\neg p \wedge q \ \vDash \ \neg p$

语义蕴涵

- $\varphi_1 \vDash \varphi_2$ iff $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$永真

一般情形

- $\varphi_1, \ldots \varphi_n \vDash \varphi$ *iff* $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi)$永真

- 语义蕴涵可归结为“判断某个命题是否永真”

语义蕴涵

- φ 是永真的，iff $\vDash \varphi$ （φ is valid）
- 举例说明

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

$\vDash p \vee \neg p$

$p \vee \neg p$ 是永真的

逻辑等价

- 命题逻辑公式 p 和 q 逻辑等价：在所有可能情况下 p 和 q 都有相同的真值。
  - 也就是说，$p \leftrightarrow q$是永真式　（亦即 $\models p \leftrightarrow q$ ）
  - 记法：$p \equiv q$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\mathbf{T} \equiv p \vee \neg p \qquad \mathbf{F} \equiv p \wedge \neg p$$

等值式

设公式 A, B 共同含有 n 个命题变项, A 或 B 可能有哑元. 若 A 与 B 有相同的真值表, 则说明在所有 2^n 个赋值下, A 与 B 的真值都相同, 因而等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式.

定义 16.1.1

设 A, B 是两个命题公式, 若 A, B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式, 则称 A 与 B 是等值的, 记作 $A \Leftrightarrow B$, 并称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式.

定义中的符号 $\Leftrightarrow$ 不是联结符, 它是用来说明 A 与 B 等值($A \leftrightarrow B$ 是重言式)的一种记法, 因而 $\Leftrightarrow$ 是元语言符号. 不要将 $\Leftrightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 混为一谈, 同时也要注意它与一般等号"$=$"的区别.

下面讨论判断两个公式 A 与 B 是否等值的方法, 其中最直接的方法是用真值表法判断 $A \leftrightarrow B$ 是否为重言式.

习题1：判断公式等值

例 16.1.1

判断下面两个公式是否等值: $\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$.

解

用真值表法判断 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 是否为重言式. 此等价式的真值表如下表所示, 从表可知它是重言式, 因而 $\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$ 等值, 即 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$. □

表 16.1.1 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

其实, 用真值表法判断 $A \leftrightarrow B$ 是否为重言式时, 真值表的最后一列可以省略. 若 A 与 B 真值表相同, 则 $A \Leftrightarrow B$; 否则, $A \not\Leftrightarrow B$($\not\Leftrightarrow$ 表示不等值, 也是常用的元语言符号).

例 16.1.2

判断下列各组公式是否等值.

1. $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$.
2. $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$.

解

表 16.1.2 中列出了 3 个公式的真值表. 不难看出 $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$ 等值. 而 $(p \to q) \to r$ 与 $(p \wedge q) \to r$ 的真值表不同, 因而它们不等值.

表 16.1.2 3 个公式的真值表

p	q	r	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q) \to r$	$(p \to q) \to r$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

判断公式等值

虽然用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等值，但当命题变项较多时，工作量是很大的. 证明公式等值的另一个方法是利用已知的等值式通过代换得到新的等值式.

例如，用真值表很容易验证 $p \leftrightarrow \neg\neg p$ 是重言式. 如果用任意一个命题公式替换式子中的 p，如用 $p \wedge q$ 替换 p 得到 $p \wedge q \leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$，直觉上所得到的新式子也是重言式.

事实上，有下述命题：

设 A 是一个命题公式，含有命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，又设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意的命题公式. 对每一个 $i, i = 1, 2, \cdots, n$，把 p_i 在 A 中的所有出现都替换成 A_i，所得到的新命题公式记作 B. 那么，若 A 是重言式，则 B 也是重言式.

这是显然的. 事实上，对任意的真值赋值，把在这个真值赋值下 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的真值代入 A 中的命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，与把这个真值赋值直接代入 B 是一回事. 如果 A 是重言式，A 必为 1，B 也必为 1. 从而，B 也是重言式.

根据这个命题和 $p \leftrightarrow \neg\neg p$ 是重言式，得到 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$，其中 A 是任意的命题公式，称这个式子为等值式模式.

等值式模式1

1. 双重否定律

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A. \tag{16.1.1}$$

2. 幂等律

$$A \Leftrightarrow A \vee A,\ A \Leftrightarrow A \wedge A. \tag{16.1.2}$$

3. 交换律

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A,\ A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A. \tag{16.1.3}$$

4. 结合律

$$\begin{gathered}(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C), \\ (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C).\end{gathered} \tag{16.1.4}$$

等值式模式2

5. 分配律

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (\vee \text{ 对 } \wedge \text{ 的分配律})$$
$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \quad (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 的分配律}) \qquad (16.1.5)$$

6. 德摩根律

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B. \qquad (16.1.6)$$

7. 吸收律

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A,\ A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A. \qquad (16.1.7)$$

8. 零律

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1,\ A \wedge 0 \Leftrightarrow 0. \qquad (16.1.8)$$

等值式模式3

9. 同一律

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A,\ A \wedge 1 \Leftrightarrow A. \tag{16.1.9}$$

10. 排中律

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1. \tag{16.1.10}$$

11. 矛盾律

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0. \tag{16.1.11}$$

12. 蕴涵等值式

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B. \tag{16.1.12}$$

等值式模式 4

13. 等价等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A). \tag{16.1.13}$$

14. 假言易位

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A. \tag{16.1.14}$$

15. 等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B. \tag{16.1.15}$$

16. 归谬论

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A. \tag{16.1.16}$$

等值演算

以上 16 组等值式模式共包含了 24 个重要等值式，它们都是用元语言符号书写的．等值式模式中的 A, B, C 可以替换成任意的公式，每个等值式模式都可以给出无穷多个同类型的具体的等值式．

12\. 蕴涵等值式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B. \tag{16.1.12}$$

例如，在蕴涵等值式 (16.1.12) 中，取 $A = p, B = q$ 时，得到等值式

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q.$$

当取 $A = p \vee q \vee r, B = p \wedge q$ 时，得到等值式

$$(p \vee q \vee r) \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q \vee r) \vee (p \wedge q).$$

这些具体的等值式称为等值式模式的 代入实例．

由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程称作 等值演算． 等值演算是布尔代数或逻辑代数的重要组成部分．

在等值演算过程中，要使用下述重要规则．

置换规则　　设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中 A 的所有出现后得到的命题公式．若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$．

等值演算

置换规则是显然的，因为如果 $B \Leftrightarrow A$，那么在任意的真值赋值下 B 和 A 的真值相同，把它们代入 $\Phi(\cdot)$ 得到的结果当然也相同，从而 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

例如，在公式 $(p \to q) \to r$ 中，可以用 $\neg p \vee q$ 置换其中的 $p \to q$，由蕴涵等值式可知，$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$，所以，有

$$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r.$$

在这里，使用了置换规则.

如果再一次地用蕴涵等值式及置换规则，又会得到

$$(\neg p \vee q) \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r.$$

再用德摩根律及置换规则，又会得到

$$\neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r.$$

再用分配律及置换规则，又会得到

$$(p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r).$$

等值演算

将以上过程合在一起，得到

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \to r &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r && \text{(蕴涵等值式、置换规则)}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r && \text{(蕴涵等值式、置换规则)}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r && \text{(德摩根律、置换规则)}\\
&\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r). && \text{(分配律、置换规则)}
\end{aligned}
$$

公式之间的等值关系具有自反性、对称性和传递性，所以上述演算中得到的 5 个公式彼此之间都是等值的.

在演算的每一步都用到了置换规则，因而在以后的演算中，置换规则均不必写出.

习题2：等值演算

例 16.1.3

用等值演算法验证等值式

$$(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r).$$

证明.

可以从左边开始演算，也可以从右边开始演算. 现在从右边开始演算.

$$\begin{aligned}
(p \to r) \wedge (q \to r) &\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{(分配律)} \\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r && \text{(德摩根律)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \to r, && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}$$

所以，原等值式成立. 读者亦可从左边开始演算验证之. □

例 16.1.3 说明，用等值演算法可以验证两个公式等值. 但一般情况下，不能用等值演算法直接验证两个公式不等值.

习题2：等值演算

例 16.1.4

证明：$(p \to q) \to r \nLeftrightarrow p \to (q \to r)$.

方法一：真值表法.

方法二：观察法. 只要给出一个赋值使得这两个命题公式的真值不同，就表明它们不等值. 容易看出，010 是 $(p \to q) \to r$ 的成假赋值，是 $p \to (q \to r)$ 的成真赋值，因此两个公式不等值得证.

方法三：当两个公式比较复杂，一时看不出使它们一个成真另一个成假的赋值时，可以先通过等值演算将它们化成容易观察真值的情况，再进行判断.

$$
\begin{aligned}
A = (p \to q) \to r &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r, && \text{(德摩根律)}\\
B = p \to (q \to r) &\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r. && \text{(结合律)}
\end{aligned}
$$

容易观察到，000 和 010 均是 A 的成假赋值，B 的成真赋值. □

习题2：等值演算

例 16.1.5

用等值演算法判断下列公式的类型.

1. $(p \to q) \wedge p \to q$.
2. $\neg(p \to (p \vee q)) \wedge r$.
3. $p \wedge (((p \vee q) \wedge \neg p) \to q)$.

解

在以下的演算中没有写出所用的基本等值式.

(1)

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \wedge p \to q &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge p \to q \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\
&\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p) \vee q \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee q \\
&\Leftrightarrow ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee q \\
&\Leftrightarrow (1 \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee q \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee q \\
&\Leftrightarrow (\neg q \vee q) \vee \neg p \Leftrightarrow 1 \vee \neg p \Leftrightarrow 1.
\end{aligned}
$$

最后结果说明 (1) 是重言式.

例16.1.5解(续)

(2)

$$\begin{aligned}\neg(p \to (p \vee q)) \wedge r &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge \neg p \wedge \neg q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow (0 \wedge \neg q) \wedge r \Leftrightarrow 0 \wedge r \Leftrightarrow 0.\end{aligned}$$

最后结果说明 (2) 是矛盾式.

(3)

$$\begin{aligned}p \wedge (((p \vee q) \wedge \neg p) \to q) &\Leftrightarrow p \wedge (((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \to q) \\ &\Leftrightarrow p \wedge ((0 \vee (q \wedge \neg p)) \to q) \\ &\Leftrightarrow p \wedge ((q \wedge \neg p) \to q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg(q \wedge \neg p) \vee q) \\ &\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge 1 \Leftrightarrow p.\end{aligned}$$

最后结果说明 (3) 不是重言式,00 和 01 均是成假赋值;也不是矛盾式,10 和 11 均是成真赋值. □

等值演算中各步得出的等值式所含命题变项可能不一样多,如 (3) 中最后一步不含 q,此时将 q 看成它的哑元,考虑赋值时应将哑元也算在内,因而赋值的长度为 2. 这样,可以将 (3) 中各步的公式都看成含命题变项 p, q 的公式.

习题3：逻辑演算

例 16.1.6

在某次研讨会的中间休息时间，3 名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人.

乙：王教授不是上海人，是苏州人.

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人.

听完这 3 人的判断后，王教授笑着说，你们 3 人中有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对. 试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人.

解

设命题

p : 王教授是苏州人.

q : 王教授是上海人.

r : 王教授是杭州人.

p, q, r 中必有一个真命题，两个假命题，要通过逻辑演算将真命题找出来.

甲的判断为 $\neg p \wedge q$. 乙的判断为 $p \wedge \neg q$. 丙的判断为 $\neg q \wedge \neg r$.

于是

例16.1.6解(续)

类似可得

$$B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0,$$
$$B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r,$$
$$B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0.$$

于是,由同一律可知

$$E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r).$$

但因为王教授不能既是苏州人,又是杭州人,因而 p, r 必有一个假命题,即 $p \wedge r \Leftrightarrow 0$. 于是

$$E \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

为真命题,因而必有 p, r 为假命题,q 为真命题,即王教授是上海人. 甲说得全对,丙说对了一半,而乙全说错了. □

SAT（The Satisfiability Problem）

- $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ 是否可满足？若可满足，求成真指派。

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \equiv ((p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((p \vee q) \wedge \neg q)$$

$$\equiv \underline{(\neg p \wedge q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q)} \quad \text{//析取范式}$$

答案：可满足，当$p=0, q=1$; 或$p=1, q=0$ 时，该命题为真

- 给定命题φ，它是否可满足？即，$\varphi=1$是否有解？
  - 有求解的方法
  - 但是还没有时间复杂度在多项式内的算法
  - 该问题是NP完全的（Stephen Cook）

Sudoku谜题（九宫格数独游戏）

- $3^2 \times 3^2$的网格，3^2个3×3的子网格。
- 每行、每列及每宫填入数字1-9且不能重复。

		2	9				4		
4 →				5		4	1		
		4							
					4	2			
	6							7	
	5								
	7			3					5
		1			9				
								6	

Sudoku谜题（命题可满足问题）

- s_{xyz}：第x行第y列的格子里填上数字z.

There are 9 × 9 × 9 = 729 such propositions

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{y=1}^{9}\bigvee_{z=1}^{9} s_{xyz}$$

?????

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{y=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{8}\bigwedge_{i=z+1}^{9}(\neg s_{xyz} \vee \neg s_{xyi})$$

?????

$$\bigwedge_{y=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{9}\bigvee_{x=1}^{9} s_{xyz}$$

every column contains every number

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{9}\bigvee_{y=1}^{9} s_{xyz}$$

every row contains every number

$$\bigwedge_{i=0}^{2}\bigwedge_{j=0}^{2}\bigvee_{z=1}^{9}\bigwedge_{x=1}^{3}\bigwedge_{y=1}^{3} s_{(3i+x)(3j+y)z}$$

each of the nine 3 × 3 blocks contains every number

……

命题逻辑的判定性

- 命题逻辑的推理问题可归结为："判定命题的永真性"
- 是否有通用的算法，对任一命题，都能判断其是否永真？
  - 有的 √
- 命题逻辑是可判定的（**decidable**）

命题逻辑公式的范式

- **为何要“范式”？**
  - 对于给定公式的判定问题，可用真值表方法加以解释，但当公式中命题变元的数目较大时，计算量较大，每增加一个命题变元，真值表的行数要翻倍，计算量加倍，此外，对于同一问题，可以从不同的角度去考虑，产生不同的但又等价的命题公式，即同一个命题可以有不同的表达形式。这样给命题演算带来了一定的困难，因此有必要使命题公式规范化。

析取范式与合取范式

定义 16.2.1

命题变项及其否定统称作*文字*. 由有限个文字构成的析取式称作*简单析取式*. 由有限个文字构成的合取式称作*简单合取式*.

$p, \neg q; p \vee \neg p, \neg p \vee q$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee r, p \vee \neg p \vee r$ 都是简单析取式,分别由 1,2 和 3 个文字构成.

$\neg p, q; p \wedge \neg p, p \wedge \neg q$ 和 $p \wedge q \wedge \neg r, \neg p \wedge p \wedge q$ 都是简单合取式,分别由 1,2 和 3 个文字构成. 注意,单个文字既是简单析取式,又是简单合取式.

设 A_i 是含 n 个文字的简单析取式,若 A_i 中既含某个命题变项 p_j,又含它的否定式 $\neg p_j$,则由交换律、排中律和零律可知,A_i 为重言式. 反之,若 A_i 为重言式,则它必同时含某个命题变项及它的否定式. 否则,若将 A_i 中的不带否定符的命题变项都取 0 值,带否定符的命题变项都取 1 值,此赋值为 A_i 的成假赋值,这与 A_i 是重言式相矛盾.
类似地,设 A_i 是含 n 个命题变项的简单合取式,若 A_i 中既含某个命题变项 p_j,又含它的否定式 $\neg p_j$,则 A_i 为矛盾式. 反之,若 A_i 为矛盾式,则 A_i 中必同时含某个命题变项及它的否定式.

析取范式与合取范式

定理 16.2.1

1. 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.
2. 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.

定义 16.2.2

由有限个简单合取式的析取构成的命题公式称作*析取范式*. 由有限个简单析取式的合取构成的命题公式称作*合取范式*. 析取范式与合取范式统称作*范式*.

析取范式一般形式为 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_s$,其中 $A_i, i = 1, 2, \cdots, s$, 为简单合取式;
合取范式一般形式为 $B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_t$,其中 $B_j, j = 1, 2, \cdots, t$, 为简单析取式.
例如, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p$ 为析取范式,
$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s)$ 为合取范式.
$\neg p \wedge q \wedge r$ 既是由一个简单合取式构成的析取范式, 又是由 3 个简单析取式构成的合取范式; 类似地, $p \vee \neg q \vee r$ 既是由 3 个简单合取式构成的析取范式, 又是由一个简单析取式构成的合取范式.

命题逻辑公式的范式

- 一些术语：
  - 命题变元或命题变元的否定称为**文字**；
  - 有限个文字的析取式称为简单析取式(基本和)，有限个文字的合取式称为简单合取式(基本积)；
  - 由有限个简单合取式构成的析取式称为**析取范式**(DNF，Disjunctive Normal From)，由有限个简单析取式构成的合取式称为**合取范式**(CNF，Conjunctive Normal From)。

命题逻辑公式的范式

- 例如， ①：p，$\neg p$；

  ②：$p \vee q \vee \neg r$；

  ③：$\neg p \wedge q \wedge r$；

  ④：$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$；

  ⑤：$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$；

命题逻辑公式的范式

- 性质：
  - 一个文字既是一个析取范式又是一个合取范式；
  - 一个析取范式为矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式是矛盾式；
  - 一个合取范式为重言式，当且仅当它的每个简单析取式是重言式。

析取范式和合取范式性质

定理 16.2.2

1. 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式.
2. 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

到现在为止,我们研究的命题公式中含有 5 个联结词 $\{\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow\}$,如何把这样的命题公式化成等值的析取范式和合取范式?

首先,可以利用蕴涵等值式与等价等值式

$$\left.\begin{aligned} &A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B \\ &A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \end{aligned}\right\} \tag{16.2.1}$$

消去任何公式中的联结词 $\to$ 和 $\leftrightarrow$.

其次,在范式中不出现如下形式: $\neg\neg A, \neg(A \wedge B), \neg(A \vee B)$.

对其利用双重否定律和德摩根律,可得

$$\left.\begin{aligned} &\neg\neg A \Leftrightarrow A \\ &\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ &\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{aligned}\right\} \tag{16.2.2}$$

析取范式和合取范式性质

再次，在析取范式中不出现如下形式：$A \wedge (B \vee C)$.

在合取范式中不出现如下形式：$A \vee (B \wedge C)$.

利用分配律，可得

$$\left.\begin{array}{l} A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}\right\} \tag{16.2.3}$$

由上述 3 步，可将任一公式化成与之等值的析取范式和合取范式．进而，有下面的范式存在定理．

定理 16.2.3

任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式．

求给定公式范式的步骤为：

1. 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$.
2. 用双重否定律消去双重否定符，用德摩根律内移否定符．
3. 使用分配律：求析取范式时使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律；求合取范式时使用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律．

作业1

3. 用等值演算法判断下列公式的类型,对不是重言式的可满足式,再用真值表法求出成真赋值.

(1) $\neg(p \wedge q \rightarrow q)$.

(2) $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee (p \rightarrow r)$.

(3) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$.

4. 用等值演算法证明下列等值式.

(1) $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

(2) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$.

(3) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

(4) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

5. 求下列公式的主析取范式,并求成真赋值.

(1) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$.

(2) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \wedge r)$.

(3) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

6. 求下列公式的主合取范式,并求成假赋值.

(1) $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$.

(2) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$.

(3) $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee r$.

7. 求下列公式的主析取范式,再用主析取范式求主合取范式.

(1) $(p \wedge q) \vee r$.

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$.

作业2

8. 求下列公式的主合取范式,再用主合取范式求主析取范式.

(1) $(p \wedge q) \rightarrow q$.

(2) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$.

(3) $\neg(r \rightarrow p) \wedge p \wedge q$.

9. 用真值表求下列公式的主析取范式.

(1) $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge r)$.

(2) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$.

10. 用真值表求下列公式的主合取范式.

(1) $(p \wedge q) \vee r$.

(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$.

11. 用真值表求下列公式的主析取范式和主合取范式.

(1) $(p \vee q) \wedge r$.

(2) $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

(3) $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$.

12. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p, q, r,并且它的成真赋值为 000,011,110,求 A 的主合取范式和主析取范式.

13. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p, q, r,并且它的成假赋值为 010,011,110,111,求 A 的主析取范式和主合取范式.

14. 已知公式 A 含 n 个命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$,并且无成假赋值,求 A 的主合取范式.