

# 组合数学-基本的组合计数公式

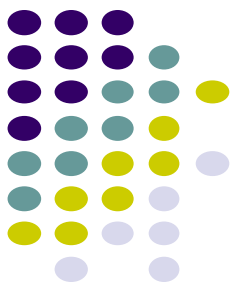
## 习题课及作业

---

**2024, 4, 15**

南京大学计算机科学与技术系

# 内容提要-基本概念



## 加法法则

设事件  $A$  有  $m$  种产生方式, 事件  $B$  有  $n$  种产生方式, 当  $A$  与  $B$  产生的方式不重叠时, “事件  $A$  或  $B$ ” 有  $m+n$  种产生方式. 加法法则适用的条件是产生方式不重叠, 用于分类处理.

## 乘法法则

设事件  $A$  有  $m$  种产生方式, 事件  $B$  有  $n$  种产生方式, 当  $A$  与  $B$  产生的方式彼此独立时, “事件  $A$  与  $B$ ” 有  $mn$  种产生方式. 乘法法则适用的条件是产生方式彼此独立, 用于分步处理.

## 排列与组合的定义

**定义 10.1.1** 设  $S$  为  $n$  元集,

- (1) 从  $S$  中有序选取的  $r$  个元素称作  $S$  的一个  $r$  排列.  $S$  的不同  $r$  排列总数记作  $P(n, r)$ .  $r = n$  时的排列称作  $S$  的 **全排列**. 元素依次排成一个圆圈的排列称作 **环排列**.
- (2) 从  $S$  中无序选取的  $r$  个元素称作  $S$  的一个  $r$  组合.  $S$  的不同  $r$  组合总数记作  $C(n, r)$ .

## $n$ 元集的 $r$ 排列数公式

$$P(n, r) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!}, & r \leq n, \\ 0, & r > n. \end{cases}$$

## $n$ 元集的 $r$ 环排列数公式

$$P(n, r)/r = \frac{n!}{(n-r)!r}, \quad r \leq n.$$

## $n$ 元集的 $r$ 组合数公式

$$C(n, r) = \begin{cases} \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, & r \leq n, \\ 0, & r > n. \end{cases}$$

## 多重集排列与组合的定义

**定义 10.1.2** 设  $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$  为多重集,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  表示  $S$  中元素的总数.

- (1) 从  $S$  中有序选取的  $r$  个元素称作多重集  $S$  的一个  $r$  排列.  $r = n$  的排列称作  $S$  的 **全排列**.
- (2) 从  $S$  中无序选取的  $r$  个元素称作多重集  $S$  的一个  $r$  组合.

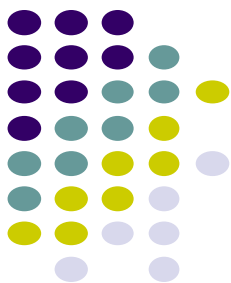
## 多重集 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 的全排列数公式

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

## 多重集 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 的 $r$ 组合数公式

$$C(k+r-1, r), \text{ 其中 } r \leq n_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

# 内容提要-二项式定理和组合恒等式



## 10.1.2 二项式定理和组合恒等式

**定理 10.1.1 (二项式定理)** 设  $n$  是正整数, 对一切实数  $x$  和  $y$ , 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

**定理 10.1.2 (多项式定理)** 设  $n$  为正整数,  $x_i$  为实数,  $i = 1, 2, \dots, t$ , 那么有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{\text{满足 } n_1 + \cdots + n_t = n \\ \text{的非负整数解}}} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t},$$

这里  $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_t!}$ , 称作**多项式系数**.

### 组合恒等式

$$(1) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n, k \in \mathbb{N}, k \leq n. \quad (10.1.1)$$

$$(2) \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad n, k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n. \quad (10.1.2)$$

$$(3) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad n, k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n. \quad (10.1.3)$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.4)$$

$$(5) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.5)$$

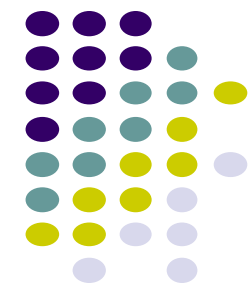
$$(6) \quad \sum_{i=0}^n \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n, k \in \mathbb{N}. \quad (10.1.6)$$

$$(7) \quad \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}, \quad k \leq r \leq n, k, r, n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.7)$$

$$(8) \quad \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}, \quad m, n, r \in \mathbb{N}, r \leq \min(m, n). \quad (10.1.8)$$

$$(9) \quad \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.9)$$

# 内容提要-组合计数模型



## 选取模型

集合的有序选取——集合排列.

集合的无序选取——集合组合.

多重集的有序选取——多重集的排列.

多重集的无序选取——多重集的组合.

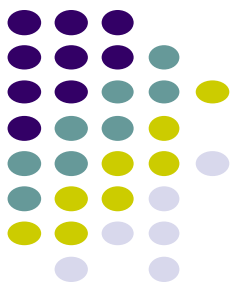
## 不定方程

$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ ,  $x_i$  为非负整数,  $i = 1, 2, \dots, k$ . 它的解的个数是  $C(k+r-1, r)$ .

$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ ,  $x_i$  为正整数,  $i = 1, 2, \dots, k$ . 它的解的个数是  $C(r-1, k-1)$ .

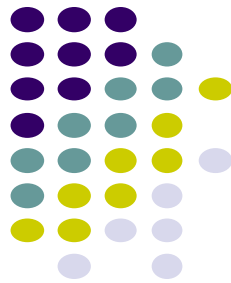
当把  $r$  个相同个体分到  $k$  个不同的组时,可能会用到不定方程的计数模型. 这种组合配置所关心的仅仅是每组被分配的个体数量,而不是分配了哪一个个体.

# 基本要求



- 1. 能够应用上述计数模型求解简单的组合计数问题.
- 2. 能够用二项式定理（或多项式定理）展开二项式（或多项式）.
- 3. 能够证明组合恒等式.
- 4. 能够对含有组合数的公式求和.

# 题型一：基本的组合计数



- 1. 求 1 400 的不同的正因子个数.
- 2. 把 10 个不同的球放到 6 个不同的盒子里, 允许空盒, 且前 2 个盒子球的总数至多是 4, 问有多少种方法.
- 3. 考虑由  $m$  个  $A$  和  $n$  个  $B$  构成序列, 其中  $m, n$  为正整数,  $m \leq n$ . 如果要求每个  $A$  后面至少紧跟着 1 个  $B$ , 问有多少个不同的序列.

## 解答与分析

1. 1 400 的素因子分解式是

$$1\,400 = 2^3 \times 5^2 \times 7.$$

因此, 1 400 的任何正因子都具有下述形式:  $2^i \times 5^j \times 7^k$ , 其中  $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 1$ . 根据乘法法则, 1 400 的正因子数是  $i, j, k$  的选法数:

$$N = (1 + 3) \times (1 + 2) \times (1 + 1) = 24.$$

2. 根据前两个盒子所含球数  $k$  对放法进行分类, 其中  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . 对于给定的  $k$ , 再用分步处理的思想计算放球的方法数. 这里的步骤是:

- (2.1) 先从 10 个球中选择放入前两个盒子的  $k$  个球, 有  $C(10, k)$  种选法.
- (2.2) 把选好的  $k$  个球分到 2 个不同的盒子里, 每个球可以有 2 种选择, 有  $2^k$  种分法.
- (2.3) 剩下的  $10 - k$  个球分到其他 4 个不同的盒子里有  $4^{10-k}$  种分法.

根据乘法法则, 使得前两个盒子含  $k$  个球的放法数是  $C(10, k) \cdot 2^k \cdot 4^{10-k}$ .

最后使用加法法则对  $k$  求和, 就得到所求的方法数, 即

$$\sum_{k=0}^4 C(10, k) \cdot 2^k \cdot 4^{10-k} = 47\,579\,136.$$

3. 方法一 先放  $n$  个  $B$ , 只有 1 种方法. 然后, 在每个  $B$  之间的  $n$  个位置中选择  $m$  个位置放  $A$ , 有  $C(n, m)$  种方法.

方法二 先放  $m$  个  $AB$ , 只有 1 种方法. 把每个  $AB$  看作隔板,  $m$  个隔板构成  $m + 1$  个空格, 在空格中放入  $n - m$  个  $B$ . 这相当于方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - m$$

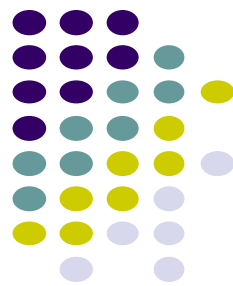
的非负整数解的个数, 因此

$$N = C(n - m + m + 1 - 1, n - m) = C(n, n - m) = C(n, m).$$

上述计数问题的求解往往使用选取问题、方程的非负整数解、非降路径模型. 应该注意的是:

- (1) 选择适当的组合计数模型.
- (2) 把问题分解, 这里需要使用分步处理和分类处理的思想. 例如, 上面第 1 题和第 3 题是分步处理, 第 2 题是先分类处理, 再分步处理.
- (3) 在分步处理时, 要考虑选取的顺序. 不同的次序可能会影响计算的复杂程度. 例如, 第 3 题, 先放  $A$  还是先放  $B$ , 两种方法都可以用, 但是先放  $B$  的方法计算起来比较简单.
- (4) 在每一步或每一类的计数中, 特别要区分选取是否有序, 从而采用合适的组合计数公式 (乘法法则、加法法则、排列、组合以及涉及多重集的计数公式).





# 题型二：二项式定理和多项式定理的应用

1. 设  $S$  是  $n$  元集,  $N$  表示满足  $A \subseteq B \subseteq S$  的有序对  $\langle A, B \rangle$  的个数, 用二项式定理证明  $N = 3^n$ .
2. 确定在  $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^8$  的展开式中  $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4^2$  项的系数.

## 解答与分析

1. 令  $|A| = k$ , 按照  $k = 0, 1, \dots, n$  对有序对  $\langle A, B \rangle$  进行分类. 对于给定的  $k$ , 先选  $A$ , 方法数是  $C(n, k)$ ; 每个  $B$  都含有  $A$  的元素, 不同的  $B$  取决于剩下的  $n - k$  个元素的选择. 每个元素都有“加入”或“不加入”2 种选法, 因此有  $2^{n-k}$  个不同的  $B$  集合. 由乘法法则, 这样的  $\langle A, B \rangle$  有  $C(n, k) \cdot 2^{n-k}$  个, 再使用加法法则和二项式定理, 从而得到

$$N = \sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot 1^k \cdot 2^{n-k} = (1 + 2)^n = 3^n.$$

这个问题的计数结果如此简单, 可能预示着存在更简单的计数方法. 确实如此. 如果不分步选取, 而是直接考虑对  $\langle A, B \rangle$  的选择.  $S$  中的每个元素可以有 3 种选法: 同时加入  $A$  和  $B$ ; 不加入  $A$  但加入  $B$ ;  $A$  和  $B$  都不加入. 即只有“加入  $A$  但不加入  $B$ ”的选法与题目条件不符. 因此,  $n$  个元素总共有  $3^n$  种选法.

2. 使用多项式定理, 所求的系数为

$$\binom{8}{2\ 3\ 1\ 2} = (-1)^3 \cdot 2^1 \cdot (-2)^2 = -8 \cdot \frac{8!}{2!3!1!2!} = -13\ 440.$$

# 题型三：组合公式的证明与化简

1. 证明:  $\sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2).$

2. 证明:  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}.$

3. 求和  $\sum_{k=0}^m \binom{n-m+k}{k}.$

3. 根据 Pascal 公式逐步归并相邻的两项可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{n-m+k}{k} &= \binom{n-m+0}{0} + \binom{n-m+1}{1} + \cdots + \binom{n}{m} \\ &= \left[ \binom{n-m+1}{0} + \binom{n-m+1}{1} \right] + \binom{n-m+2}{2} + \cdots + \binom{n}{m} \\ &= \left[ \binom{n-m+2}{1} + \binom{n-m+2}{2} \right] + \binom{n-m+3}{3} + \cdots + \binom{n}{m} \\ &= \cdots \\ &= \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \\ &= \binom{n+1}{m}. \end{aligned}$$

对于某些问题可能存在多种证明方法,一般可以根据情况从下述方法中选择.

- (1) 已知恒等式代入并化简.
- (2) 使用二项式定理比较相同项的系数,或者进行级数的求导或者积分.
- (3) 数学归纳法.
- (4) 构造组合计数问题(如选取问题、非降路径问题等),使得等式两边都等于这个问题的计数结果.

求和或化简公式常用的方法一般有下列几种.

- (1) 利用 Pascal 公式不断归并相关的项.
- (2) 级数求和.
- (3) 观察和的计算结果,然后使用归纳法证明.
- (4) 利用已知的恒等式代入.

## 解答与分析

1. 根据主教材中例 10.3.1(1) 和式 (10.1.4), 分别有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= n 2^{n-1}, \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2^n. \end{aligned}$$

将上述两式相加得

$$\sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2).$$

2. 方法一 由二项式定理, 有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

于是有,

$$\int_0^x (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^n \int_0^x \binom{n}{k} x^k dx,$$

即

$$\frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

在上式中令  $x = -1$  得

$$\frac{-1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} (-1)^{k+1}.$$

从而得到

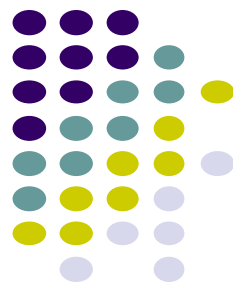
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} (-1) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

方法二 利用习题十第 24 题 (4) 的结果  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \binom{n}{k} &= 1 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$



# 作业



## 1. 填空题(6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分).

- (1) 从  $S = \{1, 2, \dots, 20\}$  中选出 2 个数使得其和是 3 的倍数, 则有\_\_\_\_\_种方法.
- (2) 满足不等式  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$  的非负整数解的个数是\_\_\_\_\_.
- (3) 把  $2n$  个不同的数分成  $n$  组, 2 个一组, 则有\_\_\_\_\_种分法.
- (4) 一个圆盘绕固定在圆心的轴转动. 把圆盘分成 3 个相等的扇形, 用  $n$  种颜色对扇形涂色, 且每个扇形的颜色都不相同, 则有\_\_\_\_\_种不同的涂色方案.
- (5) 方程  $x_1 + x_2 + x_3 = 15$  满足  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2$  的整数解的个数是\_\_\_\_\_.

- (6) 用红色、蓝色、黄色和绿色 4 种颜色涂色  $1 \times 10$  的方格图形, 每个方格一种颜色. 如果要求红格和绿格各 3 个, 蓝格和黄格各有 2 个, 那么有\_\_\_\_\_种涂色方案.

## 2. 简答题(4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分).

- (1) 把字母  $a, b, c, d, e, f$  进行排列, 使得字母  $b$  总是紧跟在字母  $e$  的左边, 问有多少种排法. 若在排列中使得字母  $b$  总在字母  $e$  的左边, 则又有多少种排法?
- (2) 求  $(x + 2y - 4z)^6$  的展开式中  $x^3 y^2 z$  项的系数.
- (3) 求和:  $\sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n-k}$ .
- (4)  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , 其中  $n$  为给定正整数. 设  $S \subseteq A$ , 若  $S$  的每个元素都不小于  $S$  的基数  $|S|$ , 则称  $S$  是饱满的(这里认为空集是饱满的). 令  $N(n)$  表示  $A$  的饱满子集的个数. 请导出关于  $N(n)$  的公式.

## 3. 证明题(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

- (1)  $\binom{m}{0}\binom{m}{n} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1} + \dots + \binom{m}{n}\binom{m-n}{0} = 2^n \binom{m}{n}$ .
- (2) 给定正整数  $n$ , 证明

$$\sum (-1)^{a+b} \binom{n}{a \ b \ c \ d} = 0,$$

其中, 求和是对方程  $a + b + c + d = n$  的一切非负整数解来求和. 如何将以上命题一般化?

## 4. 应用题(10 分).

试证: 任一整数是平方数的必要条件是它有奇数个正因子.