

微积分1(第一层次) 期中试卷及参考答案2025.11.15

震撼首发：吻安

一、证明下列各题（每题6分，共12分）

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon - \delta$ 语言) 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$ 设 $1 < x < 3$ 则

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{4 - x^2}{4x^2} \right| = \left| \frac{(x-2)(x+2)}{4x^2} \right| < \frac{5|x-2|}{4},$$

要使 $\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon$ 只需要 $\frac{5|x-2|}{4} < \varepsilon$. 即 $|x-2| < \frac{4}{5}\varepsilon$. 取 $\delta = \min \{1, \frac{4}{5}\varepsilon\}$. 则当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 总有 $\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon$. 因此 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$.

2. 用数列极限的定义 (ε -N语言) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 记 $a = \sqrt[n]{n+1} - 1$ 则

$$1 + n = (1 + a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}a^2,$$

可得 $0 < a \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 即 $|\sqrt[n]{n+1} - 1| = a \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 要使 $|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \varepsilon$, 只需 $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. 取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 总有 $|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \varepsilon$.

二、计算下列各题（每题6分，共24分）

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{2(1 - \cos \frac{1}{n^2})}}{\sqrt{n^2+1}-n}$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{2(1 - \cos \frac{1}{n^2})}}{\sqrt{n^2+1}-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 - \cos \frac{1}{n^2})}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}} = 1$.

2. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

解:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}{\ln x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}} \right) = e$$

3. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (e^x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1$$

4. 设 $y = 2^{\arctan \frac{1}{x}}$, 求微分 dy 。

解:

$$dy = -\frac{\ln 2}{x^2 + 1} \cdot 2^{\arctan \frac{1}{x}} dx$$

三、计算下列各题 (每题8分, 共24分)

1. 已知 $f(x) = \frac{x \ln(1+x^2)}{x+a} + \cos bx + e^{cx} - x - 2$, 其中 $a = 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是与 x^4 同阶的无穷小量, 求 a, b, c 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}$ 。

解: 由

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + o(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

可得 $f(x)$

$$\begin{aligned} &= x \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \right) \cdot \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{a}x + o(x) \right) + 1 - \frac{1}{2}b^2x^2 + \frac{1}{24}b^4x^4 + 1 + cx + \frac{1}{2}c^2x^2 + \frac{1}{6}c^3x^3 + \frac{1}{24}c^4x^4 - x - 2 + o(x^4) \\ &= (c-1)x + \left(\frac{c^2-b^2}{2} \right)x^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{c^3}{6} \right)x^3 + \left(\frac{b^4+c^4}{24} - \frac{1}{a^2} \right)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 是与 x^4 同阶的无穷小量, 所以

$$c = 1, \quad b = \pm 1, \quad a = -6, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = \frac{b^4 + c^4}{24} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{18}.$$

2. 计算 $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 3)$ 的 n 阶导数, n 为正整数

$$\text{解: } f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left(\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+3)^n} \right).$$

3. 求参数方程 $\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < \pi)$ 所确定的曲线在 $x = 2$ 处的切线和法线方程。

解: 在 $x = 2$ 处 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 此时 $y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 所以切点为 $\left(2, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 。

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \left. \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \left. \frac{\cos \theta}{-4 \sin \theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

所以切线方程为

$$y = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4\sqrt{3}}(x - 2),$$

法线方程为

$$y = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\sqrt{3}(x - 2).$$

四、(8分) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n-1}}$ 讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 并指明断点的类型.

解: 由 $\frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n-1}}$ 表达式可知 $x \neq 0, x \neq -1$.

1. 当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^{-2n}}{1 + x^{-2n-1}} = x^2$;
2. 当 $|x| < 1$ 且 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3} - x}{x^{2n+1} + 1} = -x$;
3. 当 $x = 1$ 时 $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{n+2} - 1^{-n}}{1^n + 1^{-n-1}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$;

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| > 1; \\ -x, & |x| < 1, x \neq 0; \\ 0, & x = 1. \end{cases} \text{ 所以 } f(x) \text{ 的间断点为 } 0, 1, -1.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} (-x) = 0$, 所以 0 是可去间断点;

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 = 1$, 所以 -1 是可去间断点;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$, 所以 1 是跳跃间断点.

五、(8分) 设 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 是一非负数列, 令 $t_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$ 证明: 如果所有 $a_n = 1$ 数列 $\{t_n\}$ 收敛于 $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

证: 由 t_n 的定义知 $\{t_n\}$ 是非负数列. 用数学归纳法证明数列 $\{t_n\}$ 单调有界

$t_1 = 1, t_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}} > t_1$. 假设 $t_k > t_{k-1}$, 则 $t_{k+1} = \sqrt{1+t_k} > \sqrt{1+t_{k-1}} = t_k$, 由数学归纳法可知 $t_n > t_{n-1} (\forall n \in \mathbb{N})$, 因而 $\{t_n\}$ 是单调递增的.

已知 $t_1 = 1 < 2$. 假设 $t_k < 2$, 则 $t_{k+1} = \sqrt{1+t_k} < \sqrt{1+2} < 2$, 故由数学归纳法可知 $t_n < 2 (\forall n \in \mathbb{N})$. 因此 2 是 $\{t_n\}$ 的一个上界.

根据单调有界准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = A$. 对等式 $t_n^2 = 1 + t_{n-1}$ 两边取极限可得 $A^2 = 1 + A$, 解方程得 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 由于 $\{t_n\}$ 是非负数列, 故其极限 A 也非负, 因而 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

六、(10分) 在什么条件下, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ (n 为自然数)

1. 在点 $x = 0$ 处连续; (2) 在点 $x = 0$ 处可导; (3) 在点 $x = 0$ 处导函数连续.

解: (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0, |\sin \frac{1}{x}| \leq 1$. 无穷小与有界变量的积是无穷小, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$ 所以当 $n \in \mathbb{N}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$2. f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = \begin{cases} \text{不存在.} & n = 1. \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

所以当 $n \geq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

$$3. \text{ 由 (2) 可知, 当 } n \geq 2 \text{ 时, } f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \right) = \begin{cases} \text{不存在.} & n = 2. \\ 0 = f'(0), & n \geq 3. \end{cases}$$

所以 $n \geq 3$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处导函数连续.

七、(8分) 函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = f(2a)$. 且存在正的常数 k 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in [0, 2a].$$

证明: 存在 $\theta \in [0, 2a]$, 使得 $f(\theta) = f(\theta + a)$

解: 先证明 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续 $\forall x_0 \in [0, 2a]$ 以及 $\forall x \in [0, 2a]$ 可知

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$$

由夹逼准则可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续.

定义 $F(x) = f(x+a) - f(x)$ 则 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续.

$$F(0) = f(a) - f(0). \quad F(a) = f(2a) - f(a) = f(0) - f(a).$$

若 $f(a) = f(0)$, 取 $\theta = 0$ 即可。否则 $F(0)F(a) < 0$, 由零点定理可得存在 $\theta \in (0, a)$ 使得 $F(\theta) = 0$ 即 $f(\theta) = f(\theta + a)$ 。

八、(6分) 设函数 f 在 $[-2, 2]$ 有连续的二阶导数. $f(0) = 0$. 证明: 存在 $\eta \in (-2, 2)$, 使得

$$f''(\eta) + \eta = \frac{1}{4}(f(-2) + f(2)).$$

证: 令 $F(x) = f(x) + \frac{1}{6}x^3$ 则 $F(0) = 0, F(-2) + F(2) = f(-2) + f(2)$.

$F(x)$ 的1阶麦克劳林公式为

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(\xi)}{2}x^2$$

即

$$f(x) + \frac{x^3}{6} = f'(0)x + \frac{f''(\xi) + \xi}{2}x^2$$

分别代入 $x = 2$ 与 $x = -2$. 可得

$$f(-2) - \frac{4}{3} = -2f'(0) + 2(f''(\xi_1) + \xi_1). \quad \xi_1 \in (-2, 0)$$

$$f(2) + \frac{4}{3} = 2f'(0) + 2(f''(\xi_2) + \xi_2), \quad \xi_2 \in (0, 2)$$

以上两式相加后除以4. 得

$$\frac{f(-2) + f(2)}{4} = \frac{(f''(\xi_1) + \xi_1) + (f''(\xi_2) + \xi_2)}{2}$$

由 $f''(x) + x$ 的连续性以及介值定理知, 存在 $\eta \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq (-2, 2)$. 使得

$$f''(\eta) + \eta = \frac{(f''(\xi_1) + \xi_1) + (f''(\xi_2) + \xi_2)}{2} = \frac{1}{4}(f(-2) + f(2)).$$