考试科目名称 离散数学期末测验

2018—2019 学年第 一 学期　　　　考试方式： 闭 卷

院系______________　学号_____________　姓名___________　成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分数									

得分	

一、（本题满分 12 分）

试符号化以下各命题，并根据前提推证结论是否有效。

前提：(1) “有的病人喜欢所有的医生。”

(2) “没有一个病人喜欢庸医。”

结论：“没有医生是庸医。”

参考答案：定义 P(x) 表示 x 是病人，D(x) 表示 x 是医生，Q(x) 表示 x 是庸医，L(x,y) 表示 x 喜欢 y。

前提：(1) $\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)))$

(2) $\forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg L(x,y)))$

结论：$\forall x(D(x) \to \neg Q(x))$

证明：	（a） $P(c) \wedge \forall y(D(y) \to L(c,y))$	（1）的存在例示
	（b） $P(c) \to \forall y(Q(y) \to \neg L(c,y))$	（2）的全称例示
	（c） $P(c)$， $\forall y(D(y) \to L(c,y))$	（a）化简
	（d） $D(y) \to L(c,y)$	（b）全称例示
	（e） $\forall y(Q(y) \to \neg L(c,y))$	（b）（c）假言推理
	（f） $Q(y) \to \neg L(c,y)$	（e）的全称例示
	（g） $L(c,y) \to \neg Q(y)$	（f）的等价命题
	（h） $D(y) \to \neg Q(y)$	（d）（g）假言三段论
	（i） $\forall x(D(x) \to \neg Q(x))$	（h）的全称生成

得分	

二、（本题满分 10 分）

证明或反驳：对于集合 A, B, C，如果 $\forall x, x \in A \to (x \in B \to x \in C)$ 永真，则有 $A \cap B \subseteq C$.

参考答案：

$x \in A \to (x \in B \to x \in C)$ 等价于 $(x \notin A) \vee (x \notin B) \vee (x \in C)$，

又等价于 $\neg(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in C)$

又等价于 $(x \in A \wedge x \in B) \to (x \in C)$

对于任意的 $x \in A \cap B$，由上式永真知 $x \in C$ 为真。因此 $A \cap B \subseteq C$。

得分	

三、（本题满分 10 分）

若已知$p = 2^{24036583} - 1$是梅森素数，试证明：$\frac{9^{2^{24036582}}-9}{2^{24036583}-1}$是整数。

参考答案:

不妨定义 x=24036583，则 p=2^x-1. 问题变成了证明$p|9^{2^{x-1}} - 9$.

做变形$9^{2^{x-1}} = 3^{2^x} = 3^{2^{x-2}} \cdot 9 = 3^{p-1} \cdot 9$。

由费马小定理3^{p-1}=1 (mod p)，于是有$9^{2^{x-1}} = 9$ (mod p)。因此$p|9^{2^{x-1}} - 9$。

得分	

四、（本题满分 12 分）

证明或证伪:

(1) 若集合 S 关于偏序关系≼构成格，则如果 x 是 S 的极小元，则 x 一定是 S 的最小元。

(2) 若偏序集(S, ≼)中集合 S 的任意子集均有最小元，则 S 是全序。

参考答案:

（1）根据极小元定义有，对于任意的 y≤x，都有 y=x.

现考虑任意元素 z，有 x∧z≤x，则 x∧z=x，而 x=x∧z≤z。

故 x 是最小元。

（亦可用反证法证明。反设有元素 y 使得 x≤y 不成立。考察 z=x∧y，有 z≤x 且 z 不等于 x，与 x 是极小元矛盾。）

（2）即证 S 中任意两个元素可比。

若 S 为空集显然成立。否则，任取元素 x 和 y，{x, y}是 S 子集且有最小元。于是 x 和 y 可比。

得分	

五、（本题满分 12 分）

试证明：

(1) 若群 G 的阶为素数，则 G 为循环群。

(2) 实数上的加法群与正实数上的乘法群同构。

参考答案：

（1）首先，由拉格朗日定理及其推论 1 有：有限群的元素 a 满足|a| 整数|G|。
又因为 G 的阶大于等于 2，因此|a|只能等于|G|。故 G=<a>。

（2）令实数上的加法群为 G，正实数上的乘法群同构为 H。构建如下函数：
$f: G \to H, f(x) = e^{x}$. 显然 f 是一个双射函数。且$f(x + y) = e^{x+y} = e^{x}e^{y} = f(x) * f(y)$。

得分	

六、（本题满分 12 分）

给定一个顶点个数有限的简单图 G，假定我们只可以通过如下方式逐步删除 G 中的顶点：每一步可以删除度数小于 2 的顶点。试证明：如果 G 中的所有顶点能被删除当且仅当 G 中没有回路。

参考答案 1：

必要性：反设 G 中有回路，则显然 G 中此回路上的顶点不会被删除，得证。

充分性： G 中没有回路，则 G 是一棵树或是若干棵树构成的森林。对于 G 中的每一棵树，指定一个内点为 r，可以给出一个删除所有顶点的步骤（每次删除与 r 距离最远的树叶）。

参考答案 2：

根据 G 中是否存在度数小于 2 的点进行分情况讨论：

（1）先考虑 G 中没有度数小于 2 的点的情况。此时，要证原命题，只需证明 G 中存在回路。一方面，因为 G 不存在度数小于 2 的点，即每个节点的度数至少为 2，由握手定理（节点度数和是边数的两倍）有 G 的边数至少为 n。另一方面，我们知道含有 n-1 条边的树是边最多的没有简单回路的图。因此，G 一定含有回路。

（2）再考虑 G 中存在度数小于 2 的点的情况。此时，对顶点度数 n 进行归纳证明。

若 n=0 或 1，结论显然成立。

假设 n=k 时结论成立。

当 n=k+1 时，设此时图为 G0，不妨设存在的度数小于 2 的某个点为 v，删除此点后得到的新图 G1 满足归纳条件。即 G1 的所有顶点能被删除当且仅当 G1 中没有回路。此时，由于 v 的度数小于 2，所以 v 一定不在某个回路中。那么若 G1 没有回路，G0 也一定没有回路，并且可以通过先删除 v 再根据 G1 的删除方式依次删除 G1 中的点；若 G1 存在回路，那么 G0 也一定存在回路，并且删除 v 后不影响 G1 的结论。综上，G0 也满足归纳条件。

得分	

七、（本题满分 10 分）

往2n个孤立的顶点间加入n条边，试求总共能得到多少种不同的包含这2n个顶点的完美匹配?

参考答案：

将 2n 个顶点随机排序，连接 2k-1 和 2k 的点（k 从 1 到 n）就是一个完美匹配。共有(2n)!个排列。这些排列中存在重复的完美匹配：1）每条边的两个点交换顺序（例如 12 跟 21 是一种完美匹配，共 2^n 种可能）、2）边跟边交换顺序（例如，1234 和 3412 是一种完美匹配，共 n!种可能）。所以，共有 $(2n)!/(2^n\ n!)$种不同的完美匹配。

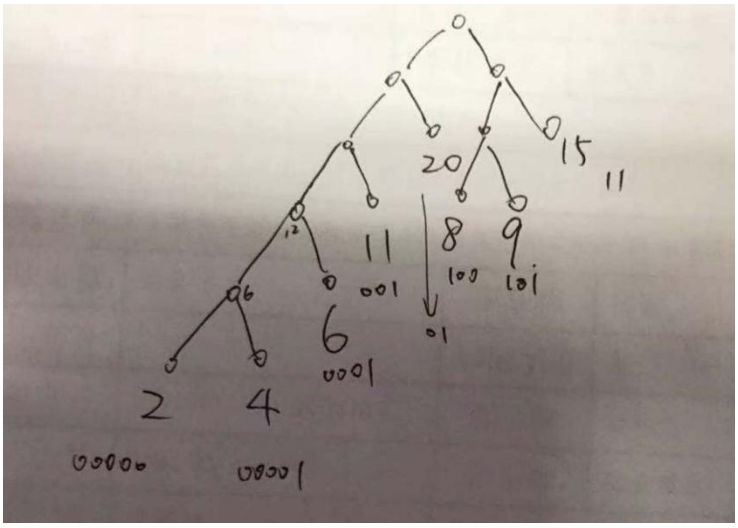
得分	

八、（本题满分 10 分）

某通信系统有 a, e, h, m, p, s, t, x 共 8 种字符，其出现的相对频率分别为 2, 4, 6, 8, 9, 11, 15, 20。试设计传输效率最高编码方案。

参考答案：

一颗霍夫曼树如下。



得分	

九、（本题满分 12 分）

简单图 G 满足|G|>2，令 m 为 G 的边数，n 为 G 的点数。试证明：如果$m > C_{n-1}^2 + 1$，则 G 一定存在汉密尔顿回路。（提示：可使用数学归纳法证明）

参考答案：

归纳证明。n=3 时，结论显然成立。

假设 n<k 时结论成立.

当 n=k 时，G 的补图$\overline{G}$的边数$|E(\overline{G})| < C_n^2 - C_{n-1}^2 - 1 = n-2$，这就意味着$\overline{G}$至少有一个节点的度数为 0 或 1。不妨设这个节点为 v。

(A) 先看度数为 1 的情况：d(v)=n-2，在 G 中删除 v 后得到 G’，此时 G’的边数满足归纳条件足$|E(G')| > C_{n-2}^2 + 1$，存在汉密尔顿回路 C。由于 v 跟 G’中 n-2 个顶点相连，总可以取其中的在 C 中相邻的顶点 u 和 w，将 u-w 改成 u-v-w 便得到 G 上的汉密尔顿回路。

(B) 再看度数为 0 的情况：d(v)=n-1。在图 G 中删除 v 得到 G’，下面对 G’分情况讨论(注意 G’有 n-1 个顶点)：

(1)如果 G’是完全图，G’一定存在汉密尔顿回路。由于 v 与 G’中的点均相连，不妨取其中的相邻的顶点 u 和 w，将 u-w 改成 u-v-w 便得到 G 上的汉密尔顿回路。

(2)如果 G’不是完全图，我们向其中加入一条边 e，对于 G’+e 满足$|E(G'+e)| > C_{n-1}^2 + 1 - (n-1) + 1 = C_{n-2}^2 + 1$，由归纳假设，G’+e 中存在汉密尔顿回路。不妨设此回路为 C：

a)如果 C 中不包含 e，则我们可以通过（1）的方式获得 G 的汉密尔顿回路；

b)如果 C 中包含 e，将 e 从 C 中删除得到一条汉密尔顿通路，类似的，将 v 和 e 的两个端点相连便是一条汉密尔顿回路。