南京大学数学课程试卷

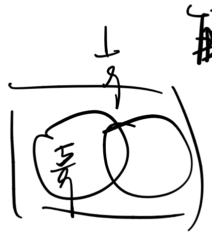
______ 学年 第____ 学期　考试形式 闭 卷　课程名称 概 率 统 计

系别 ______________ 学号 ______________ 姓名 ______________

题号	一 36	二 10	三 12	四 10	五 10	六 12	七 10	合计
得分								

一． 简答题：（6x6）

1） 两个相互独立的随机事件 A 和 B 至少发生一个的概率为 8/9, 事件 A 发生而 B 不发生的概率为 5/9，试求 P(A).



解：$P(A\cup B)=\frac{8}{9}$　∴ $P(\bar A\bar B)=\frac{1}{9}$　∴ $P(\bar B)=\frac{3}{9}$

$P(A\bar B)=\frac{5}{9}$　$P(\bar B\bar A)+P(A\bar B)=\frac{3}{9}$　∴ $P(B)=\frac{2}{3}$

∴ $P(A)=P(A\bar B)/P(\bar B)=\frac{5}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$

2） 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 且 EX=2.3, EX^2=5.9，求 X 的概率分布列。

解：$E(X)=2.3$

$E(X^2)=5.9$

设 P_1, P_2 分别为 1, 2 的概率

列式解方程

3） 设总体 X 服从泊松分布：$P(X=k)=\frac{1}{k!}e^{-1},\ k=0,1,2,\cdots$. 从总体中抽取容量为 100 的简单随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$，用中心极限定理求概率 $P(X_1+X_2+\ldots+X_{100}<120)$.

解：$Y=\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda^2}}=\frac{\sum X_i-100\lambda}{10\lambda}\leq\frac{20}{10}$

$\Phi(2)$

4） 设总体 X~N(μ, 4), 从 X 中抽取容量 n 的样本 $X_1, X_2, \ldots X_n$，样本均值 $\bar X$，问 n 至少取多少时，才能以 90%的概率保证样本均值与总体均值μ之差的绝对值小于 0.1

解：$(\bar X - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt n},\ \bar X + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt n})$　$u_{0.05}=\Phi(0.95)=1.65$

$1-\alpha=0.9\Rightarrow\alpha=0.1\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.05$　∴ $1.65\times2\times\frac{2}{\sqrt n}<0.1$

$0.1\sqrt n>2\times2\times1.65$

5） 设 $X_1, X_2, \ldots, X_9$ 是取自总体 X~N(0,2)的样本，求常数 *a, b, c*，使 $Z=a\,(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)^2+b(X_5+5X_6+X_7)^2+c\,(3X_8+4X_9)^2$ 服从 χ^2 分布，并指出其自由度

正态分布的和→正态分布

6） 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，从 X 中抽取 5 个样本: 15, 19, 15, 18, 13，求 μ 的置信度 0.95 的置信区间。

解：σ^2未知 $\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ $1-\alpha=0.95$

代入即可 $\alpha=0.05$

$\frac{\alpha}{2}=0.025$

二． 已知甲乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件正品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件正品。现从甲箱任取 3 件产品放入乙箱，再从乙箱任取 1 件，发现是次品. 问前面从甲箱中取出放入乙箱的 3 件产品中，有 1 件，2 件和 3 件次品三种情况中，那一种可能性最大？

三． 设二维随机变量（X，Y）在平面区域 D 上服从均匀分布，其中 D 是抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 在第一象限所围的有界闭区域，（1）求 X, Y 的边缘密度，(2）求 D(X)，E(XY).

四． 某保险公司开办车辆盗窃险, 有5000辆车参保. 若一年内整车被盗, 赔偿2万元. 设每辆车一年内被盗的概率为 0.004, 且各车是否被盗是独立的. (1) 若每车每年交保费 300 元, 求保险公司盈利超过 100 万元的概率. (2) 若保险公司希望每年盈利超过 120 万元的概率达到 90%, 问保险公司应要求每车每年交保费多少元? (用中心极限定理求解).

五． 设总体 $X \sim N(1, 5)$, $Y \sim N(2, 8)$且 X,Y 独立，X_1, X_2 及 $Y_1, \ldots, Y_9$ 是 X, Y 的样本，求常数 C_1，使

$$C_1 \cdot \frac{(X_1-1)^2+(X_2-1)^2}{\sum_{k=1}^{9}(Y_k-2)^2}$$ 服从 F 分布.

查表：$\Phi(1.12)=0.8686$, $\Phi(1.28)=0.9$, $\Phi(1.65)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.9773$, $t_{0.025}(4)=2.776$, $t_{0.05}(4)=2.1318$, $t_{0.025}(9)=2.262$, $t_{0.05}(9)=1.833$, $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$, $\chi^2_{0.025}(10)=20.483$

六． 设总体 X 的概率密度函数为 $p(x,\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} & -\infty<\theta_1\le x<+\infty \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$(\theta_2>0)$.

若 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，求未知参数 θ_1，θ_2 的矩估计量和极大似然估计量。

七． 机器包装产品，假设每包重量服从正态分布，要求每袋标准重量为 100 克，方差不能超过 4 克。某天开机后，随机抽取 n=10 袋，测得平均重量为 99.89 克，样本标准差 S_{n-1}＝0.975 克，试检验包装机的标准重量和方差是否合格？（取 $\alpha=0.05$）