集合论-函数部分习题课

2023,3,28

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-函数基本概念1

函数

定义 3.1.1 设 F 为二元关系，若 $\forall x \in \operatorname{dom} F$ 都存在唯一的 $y \in \operatorname{ran} F$ 使 xFy 成立，则称 F 为函数[①]. 对于函数 F，若有 xFy，则记作 $y = F(x)$，并称 y 为 F 在 x 的值.

函数相等

定义 3.1.2 设 F, G 为函数，如果 $F \subseteq G$ 且 $G \subseteq F$，那么称函数 F 和 G 相等，记作 $F = G$.

由定义可知，如果两个函数 F 和 G 相等，那么一定满足下面两个条件.

(1) $\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} G$；

(2) $\forall x \in \operatorname{dom} F = \operatorname{dom} G$，都有 $F(x) = G(x)$.

从 A 到 B 的函数

定义 3.1.3 设 A, B 为集合，若 f 为函数，且 $\operatorname{dom} f = A$，$\operatorname{ran} f \subseteq B$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f: A \to B$.

B 上 A

定义 3.1.4 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B 上 A". 符号化表示为

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}.$$

若 $|B| = m$，$|A| = n$，则 $|B^A| = m^n$.

特别地，当 $A = \varnothing$ 时，无论 B 是否为空集，均有唯一的函数 $\varnothing: A \to B$；而当 $A \neq \varnothing$，$B = \varnothing$ 时，不存在从 A 到 B 的函数.

内容提要-函数基本概念2

像与原像

定义 3.1.5 设函数 $f:A\to B, A_1\subseteq A, B_1\subseteq B$.

(1) 令 $f(A_1)=\{f(x)|x\in A_1\}$,称 $f(A_1)$ 为 A_1 在 f 下的像. 特别地,当 $A_1=A$ 时称 $f(A)$ 为函数的像.

(2) 令 $f^{-1}(B_1)=\{x|x\in A, f(x)\in B_1\}$,称 $f^{-1}(B_1)$ 为 B_1 在 f 下的原像.

一般说来,像与原像满足下述性质:

$$A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1)),\ f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1.$$

函数的性质

定义 3.1.6 设 $f:A\to B$.

(1) 若 $\operatorname{ran} f=B$,则称 $f:A\to B$ 是满射.

(2) 若 $\forall y\in\operatorname{ran} f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$,则称 $f:A\to B$ 是单射.

(3) 若 $f:A\to B$ 既是满射又是单射,则称 $f:A\to B$ 是双射 (或一一映射).

显然, $f:A\to B$ 是单射当且仅当 $\forall x_1,x_2\in A$, 若 $x_1\neq x_2$, 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 这也等价于 $\forall x_1,x_2\in A$, 若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1=x_2$.

内容提要-函数基本概念3

特殊函数

定义 3.1.7

(1) 设 $f:A\to B$,若存在 $c\in B$ 使得对所有的 $x\in A$ 都有 $f(x)=c$,则称 $f:A\to B$ 是常函数.

(2) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数. 即对所有的 $x\in A$ 都有 $I_A(x)=x$.

(3) 设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle,\langle B,\preccurlyeq\rangle$ 为偏序集,$f:A\to B$,如果对任意的 $x_1,x_2\in A$,当 $x_1\preccurlyeq x_2$ 时,均有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$,那么称 f 为单调递增的;如果对任意的 $x_1,x_2\in A$,当 $x_1\prec x_2$ 时,有 $f(x_1)\prec f(x_2)$,那么称 f 为严格单调递增的. 类似地,也可以定义单调递减的和严格单调递减的函数.

(4) 设 A 为集合,对于任意的 $A'\subseteq A$,A' 的特征函数 $\chi_{A'}:A\to\{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a)=\begin{cases}1, & a\in A',\\ 0, & a\in A-A'.\end{cases}$$

(5) 设 R 是 A 上的等价关系,令

$$g:A\to A/R$$
$$g(a)=[a],\forall a\in A,$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.

内容提要-函数的复合与反函数

有关函数复合的定理

(1) 设 F,G 是函数，则 $F\circ G$ 也是函数，且满足

$$\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in\mathrm{dom}\,F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}\,G\},$$

$$\forall x\in\mathrm{dom}(F\circ G)\text{有 } F\circ G(x)=G(F(x)).$$

注意我们这里采用的是从左往右的复合顺序，有的文献会采用从右往左的复合顺序，一般从上下文能够区分.

(2) 设 $f:A\to B, g:B\to C$，若 f,g 都是满射(单射或者双射)，则 $f\circ g:A\to C$ 也是满射(单射或者双射).

(3) 设 $f:A\to B$，则有 $f=f\circ I_B=I_A\circ f$.

有关反函数的定理

(1) 设 $f:A\to B$ 是双射，则 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射.

(2) 设 $f:A\to B$ 是双射，则 $f^{-1}\circ f=I_B$，$f\circ f^{-1}=I_A$.

内容提要-集合的等势与优势

等势

定义 3.1.8 设 A,B 是集合，如果存在从 A 到 B 的双射函数，那么称 A 和 B 是等势的，记作 $A\approx B$；如果 A 与 B 不等势，那么记作 $A\not\approx B$.

等势具有下述性质.

定理 3.1.1 设 A,B,C 为任意集合，则

$$A\approx A;\ A\approx B\Rightarrow B\approx A;\ A\approx B\wedge B\approx C\Rightarrow A\approx C.$$

定理 3.1.2 (康托定理) $\mathbb{N}\not\approx\mathbb{R},\ A\not\approx P(A)$.

有关等势与优势的重要结果

$\mathbb{N}\approx\mathbb{Z}\approx\mathbb{Q}\approx\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$\mathbb{R}\approx[a,b]\approx(c,d)\approx\{0,1\}^{\mathbb{N}}\approx P(\mathbb{N})$.

$\{0,1\}^{A}\approx P(A)$.

$\mathbb{N}\prec\cdot\mathbb{R}$.

$A\prec\cdot P(A)$.

优势与真优势

设 A,B 为集合，如果存在从 A 到 B 的单射函数，那么称 B 优势于 A，记作 $A\preccurlyeq\cdot B$. 若 B 不优势于 A，则记作 $A\not\preccurlyeq\cdot B$. 若 $A\preccurlyeq\cdot B$ 且 $A\not\approx B$，则称 B 真优势于 A，记作 $A\prec\cdot B$. 如果 B 不是真优势于 A，那么记作 $A\not\prec\cdot B$.

优势具有下述性质.

定理 3.1.3 设 A,B,C 是任意集合，则

$$A\preccurlyeq\cdot A;\ A\preccurlyeq\cdot B\wedge B\preccurlyeq\cdot A\Rightarrow A\approx B;\ A\preccurlyeq\cdot B\wedge B\preccurlyeq\cdot C\Rightarrow A\preccurlyeq\cdot C.$$

内容提要-集合的基数

集合 A 的基数记作 $\operatorname{card} A$.

几个常见的基数

有穷集 A 的基数是 A 中的元素个数,记作 $|A|$. 自然数集合的基数是 $\aleph_0$;实数集合的基数是 $\aleph$.

基数的相等与大小

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B \Leftrightarrow A \approx B.$$
$$\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B \Leftrightarrow A \preccurlyeq \cdot B.$$
$$\operatorname{card} A < \operatorname{card} B \Leftrightarrow A \prec \cdot B.$$

将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, \aleph_0, \aleph, \cdots$$

其中 $0, 1, 2, \cdots, n \cdots$ 恰好是全体自然数,是有穷集合的基数,也称作有穷基数,而 $\aleph_0, \aleph, \cdots$ 是无穷集合的基数,也称作无穷基数,$\aleph_0$ 是最小的无穷基数,而 $\aleph$ 后面还有更大的基数,如 $\operatorname{card} P(\mathbb{R})$ 等.

定义 3.1.9 设 A 为集合,若 $\operatorname{card} A \leqslant \aleph_0$,则称 A 为可数集或可列集.

定义 3.1.10 一个集合是有穷集当且仅当它是空集或者与某个 $\mathbb{N}_k, k \geq 1$, 等势;若一个集合不是有穷的,则称作无穷集.

基本要求

- 1. 掌握函数的基本概念，会判断给定的关系是否为函数、是否为从 A 到 B 的函数.
- 2. 熟练计算函数的值、像、原像以及 B^A.
- 3. 会判断和证明函数的单射、满射、双射的性质.
- 4. 给定集合 A 和 B，会判断或构造从 A 到 B 的双射函数.
- 5. 会计算复合函数、双射函数的反函数.
- 6. 会判断或证明两个集合等势或者不等势.
- 7. 了解如何精确地定义有穷集.
- 8. 了解有关等势或者优势的重要结果.
- 9. 了解基数的定义，会计算简单集合的基数

题型一：函数定义

设 $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ 分别代表复数集、实数集、整数集及自然数集. 针对下列给定的集合 A,B 及 $f(\subseteq A\times B)$, 判断 f 是否为从 A 到 B 的函数. 如果不是, 说明理由.

(1) $A=B=\mathbb{R}, xfy\Leftrightarrow x^2=y^2$.

(2) $A=B=\mathbb{R}^+, xfy\Leftrightarrow x^2=y^2$.

(3) $A=\mathbb{N}, B=\mathbb{Z}, xfy\Leftrightarrow x^2=y^3$.

(4) $A=\mathbb{N}, B=\mathbb{Z}, xfy\Leftrightarrow x^3=y^2$.

(5) $A=B=\mathbb{C}, x=a+b\mathrm{i}, y=c+d\mathrm{i}, xfy\Leftrightarrow a=c$.

解答与分析

(1) 不是, 因为 $\langle 1,1\rangle,\langle 1,-1\rangle$ 都属于 f.

(2) 是.

(3) 不是, 因为 $\mathrm{dom}\, f\neq\mathbb{N}$.

(4) 不是, 因为 $\langle 1,1\rangle,\langle 1,-1\rangle$ 都属于 f.

(5) 不是, 因为 $\langle 1,1+\mathrm{i}\rangle,\langle 1,1+2\mathrm{i}\rangle$ 都属于 f.

题型二：判断函数单满射

设 $\mathbb{R}$ 代表实数集，针对下列给定函数 f，判断 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是否为单射或满射．如果不是，请说明理由．

(1) $f(x)=2^x$.

(2) $f(x)=\lfloor x\rfloor$.

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

(4) $f(x)=2^x+x$.

(5) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

(6) $f(x)=x^3-x^2$.

(7) $f(x)=\begin{cases}x\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(8) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & x\in\mathbb{R}^+,\\ 2x, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{R}^+.\end{cases}$

(9) $f(x)=\sin x$.

解答与分析

(1) 是单射，但不是满射．因为 $\operatorname{ran} f=\mathbb{R}^+\neq\mathbb{R}$.

(2) 既不是单射，也不是满射．因为 $f(1)=f(1.2)$，且 $\operatorname{ran} f=\mathbb{Z}\neq\mathbb{R}$.

(3) 既不是单射，也不是满射．因为 $f(1)=f(\frac{1}{2})=0$，且 $2\notin\operatorname{ran} f$.

(4) 双射.

(5) 既不是单射，也不是满射．通过求导可以知道 f 在 $x=1$ 和 $x=-1$ 取得极值，$f(1)=1, f(-1)=-1$，所以 $\operatorname{ran} f=f(\mathbb{R})=[-1,1]$，故 f 不是满射．在极大值两边容易找到 $f(2)=f(\frac{1}{2})=\frac{4}{5}$，因此 f 也不是单射.

(6) 不是单射，但是满射．通过求导可以知道在 $x=0$ 取得一个极大值 $f(0)=0$，而在 $x=\frac{2}{3}$ 取得极小值 $f(\frac{2}{3})<0$. 当 $x=1$ 时，$f(1)=0$．因此函数 f 不是单射.

(7) 不是单射，但是满射．因为 $f(1)=f(-1)=0$.

(8) 是单射，但不是满射．因为 $\operatorname{ran} f=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}-(0,1]$.

(9) 既不是单射，也不是满射．因为 $\operatorname{ran} f=f(\mathbb{R})=[-1,1]$, $f(0)=f(2\pi)$.

对于实数集上的函数，通常可以通过求导找到极值点．而有的极小值（或极大值）恰好是函数的最小值（或最大值），这样就可以求出函数的值域，从而判断函数是否为满射．此外，当函数连续时，如果函数存在极值，那么可以断定函数不是单射．因为在极值点两侧可以找到不相等的 x_1 和 x_2 满足 $f(x_1)=f(x_2)$.

通过这个例题可以看到，证明函数不具有某种性质的一般方法就是给出反例．为证明函数不是单射，需要找到 $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$（有时可能不容易找到具体的 x_1 和 x_2，但是可以证明这样的 x_1 和 x_2 是存在的）．证明函数不是满射的一般方法就是找到 $y\in B-\operatorname{ran} f$.

题型三：函数的计算

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+1$，计算
   (1) $f(\{0,\frac{3\pi}{2}\})$.
   (2) $f^{-1}((\frac{1}{2},+\infty))$.
   (3) $f^{-1}(\{0\})$.

2. 对于给定的函数 f 和 g，求复合函数 $f\circ g$. 若 f 或 g 存在反函数，则求出它们的反函数.
   (1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1; g:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}, g(x)=\lfloor x-\frac{1}{3}\rfloor$.
   (2) $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}, f(\langle x,y\rangle)=x+yi; g:\mathbb{C}\to\mathbb{R}, g(z)=|z|+1$，这里 $|z|$ 是复数 z 的模.
   (3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}; g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^4-x^2$.

解答与分析

1. (1) $\{0,1\}$.
   (2) $\cup\{(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7}{6}\pi+2k\pi)|k\in\mathbb{Z}\}$.
   要使得 $\frac{1}{2}<\sin x+1<+\infty$，即 $-\frac{1}{2}<\sin x\leqslant 1$. 下面找到自变量 x 在一个周期内的变化范围，应该是 $-\frac{\pi}{6}$ 到 $\frac{7}{6}\pi$. 考虑到周期性，应该取到所有的区间 $(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7}{6}\pi+2k\pi)$，其中 $k\in\mathbb{Z}$. 由于这些区间两两不相交，所以 $f^{-1}((\frac{1}{2},+\infty))$ 就是它们的并集.
   (3) $\{\frac{3}{2}\pi+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.
2. (1) $f\circ g(x)=\lfloor x+\frac{2}{3}\rfloor$, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=x-1$，$g$ 不存在反函数.
   (2) $f\circ g(\langle x,y\rangle)=\sqrt{x^2+y^2}+1$, $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, f^{-1}(x+yi)=\langle x,y\rangle$，$g$ 不存在反函数.
   (3) $f\circ g(x)=x^2-x$，f,g 都不存在反函数.

注意在计算复合函数时分段函数的分界点可能会发生变化(见主教材的例 3.2.1).

题型四：构造双射函数

针对下列给定的集合 A 和 B，构造双射函数 $f:A\to B$.

1. $A=P(\{a,b,c,d\}),B=\{0,1\}^{\{a,b,c,d\}}$.
2. $A=[-1,1),B=(2,4]$.
3. $A=\{2^n|n\in\mathbb{N}\},B=\mathbb{N}-\{0,1,2\}$.

解答与分析

1. A 中有 16 个子集，B 中有 16 个函数，容易给出一种双射对应. 一般说来，$A=P(S),B=\{0,1\}^S$，那么令 $f:A\to B,f(X)=\chi_X$，其中 χ_X 是子集 X 的特征函数. 即

$$\chi_X(x)=\begin{cases}1, & x\in X,\\ 0, & x\in S-X.\end{cases}$$

易验证 f 是双射.

2. 如图 3.3.1 所示，在 x 轴上画出 A 代表的区间，在 y 轴旁边画出 B 代表的区间. 直线 $y=-x+3$ 经过两点 $(-1,4)$ 和 $(1,2)$，恰好构造了从 A 到 B 的双射函数. 因此得到

$$f:A\to B,\ f(x)=-x+3.$$

当然这种双射函数不是唯一的，可能有多种选择，这只是其中的一种. 一般说来，只要 A 和 B 代表的区间

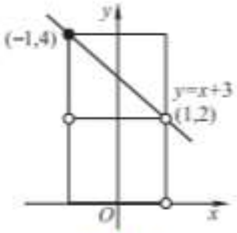

图 3.3.1

是同类型的，即都是闭区间、开区间，或者都是半开半闭的区间，那么都可以利用过两点的直线方程构造双射函数，其中这两个点的横、纵坐标分别代表 A 和 B 区间的一个端点. 例如，$y=-x+3$ 是过点 $(-1,4)$ 和点 $(1,2)$ 的直线方程，点 $(-1,4)$ 的横坐标 -1 代表 A 区间 $[-1,1)$ 的一个端点，纵坐标 4 代表 B 区间 $(2,4]$ 的一个端点. 注意当 A 和 B 代表的区间为半开半闭的区间时，一个点的横、纵坐标分别代表 A 和 B 区间的两个开端点，而另一个点的横、纵坐标则代表 A 和 B 区间的两个闭端点.

3. 容易看出 B 与自然数集只不过相差几个元素，先构造 A 到自然数集的双射，然后再将对应关系进行适当的移位就可以了. 为构造集合 A 到自然数集的对应，只需将 A 中的元素排列出一个顺序，并指定一个首元素. 然后从首元素开始对 A 中的元素进行“计数”，第一个元素对应于 0，第二个元素对应于 1，⋯，第 $n+1$ 元素对应于 n，⋯ 这就建立了 A 与自然数集之间的双射. 令

$$g:A\to\mathbb{N},\ g(x)=\log_2 x,$$
$$f:A\to B,\ f(x)=g(x)+3=\log_2 x+3,$$

则 f 为所求.

5 题型五：证明有关函数的等式或单满射性

1. 设 $f: A \to B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$，证明 $f(A \cap f^{-1}(B_1)) = f(A) \cap B_1$.

2. 设 $A \to B, g: B \to A, h: B \to A$，且满足 $g \circ f = h \circ f = I_B$ 和 $f \circ g = f \circ h = I_A$，证明：$g = h$.

3. 设 $f: A \to B, g: B \to A$，且 $f \circ g = I_A$，证明 f 是单射，g 是满射.

解答与分析

1. 先证 $f(A \cap f^{-1}(B_1)) \subseteq f(A) \cap B_1$. 对任意 $y \in f(A \cap f^{-1}(B_1))$，存在 $x \in A \cap f^{-1}(B_1)$ 使得 $f(x) = y$. 由 $x \in A$ 和 $f(x) = y$ 知，$y \in f(A)$. 而由 $x \in f^{-1}(B_1)$ 和 $f(x) = y$ 知，$y \in f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$. 因此有 $y \in f(A) \cap B_1$.
反过来，对任意 $y \in f(A) \cap B_1$，存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y \in B_1$，故 $x \in f^{-1}(B_1)$，从而有 $x \in A \cap f^{-1}(B_1)$，因此 $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B_1))$，这就证明了 $f(A) \cap B_1 \subseteq f(A \cap f^{-1}(B_1))$.

2. 利用已知条件、函数复合运算的定理以及结合律得

$$g = I_B \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ I_A = h.$$

3. 假设 $f(x_1) = f(x_2)$，由 $f \circ g = I_A$ 有 $g(f(x)) = x$，从而有

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

这就证明了 f 是单射.
任取 $x \in A$，由于 f 是从 A 到 B 的函数，故存在 $y \in B$ 使得 $f(x) = y$. 由 $f \circ g = I_A$ 有 $g(f(x)) = x$，即 $g(y) = x$，因此 g 是满射.

关于涉及函数的等式的证明，经常采用集合等式的证明方法，正如第 1 题的证明所显示的. 与一般集合等式证明的区别在于这里要用到函数的定义、运算性质等相关概念.

证明函数 $f: A \to B$ 是满射的基本方法就是：任取 $y \in B$，找到 $x \in A$ 或者证明存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$，当然这里的 x 与 y 相关，可能是一个关于 y 的表达式.

证明函数 $f: A \to B$ 是单射的基本方法就是：假设 A 中存在 x_1 和 x_2，使得 $f(x_1) = f(x_2)$，利用已知条件或者相关的定理最终证明 $x_1 = x_2$.

题型六：证明集合等势

1. 设 $A\subset B$，证明 $A\preccurlyeq\cdot B$。根据题设，能够得到 $A\prec\cdot B$ 吗？为什么？
2. 设 $\mathcal{A}=\{A_n|n\in\mathbb{N}\}$，$\mathcal{B}=\{B_n|n\in\mathbb{N}\}$，且满足：

   (1) 对于任意 $n\in\mathbb{N}$，有 $A_n\approx B_n$；

   (2) 对于任意 $n\neq m$，有 $A_n\cap A_m=\varnothing$，$B_n\cap B_m=\varnothing$。

   证明 $\cup\mathcal{A}\approx\cup\mathcal{B}$。

解答与分析

1. 令 $f:A\to B$，$f(x)=x$，则 f 为单射函数，从而有 $A\preccurlyeq\cdot B$。不一定能得到 $A\prec\cdot B$。对于无穷集 B 来说，可能与它的真子集 A 等势。例如，$\mathbb{Q}\approx\mathbb{N}$。
2. 对任意 n，存在双射 $f_n:A_n\to B_n$，令 $f=\cup\{f_n|n\in\mathbb{N}\}$，下面证明 f 是 $\cup\mathcal{A}$ 到 $\cup\mathcal{B}$ 的双射。

   先证明 f 为函数。$\forall x\in\cup\mathcal{A}$，$\exists n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in A_n$，由于 A_n 与其他 A_m 不交，因此只有唯一的 $f_n(x)\in B_n\subseteq\cup\mathcal{B}$。

   下面证明 f 的满射性。任取 $y\in\cup\mathcal{B}$，必存在 B_n，$n\in\mathbb{N}$，使得 $y\in B_n$。由于 B_n 与其他的 B_m 不交，因此存在 $x\in A_n\subseteq\cup\mathcal{A}$，使得 $f_n(x)=y$，即 $f(x)=y$。

   再证明 f 的单射性。假设 $f(x_1)=f(x_2)=y\in\cup\mathcal{B}$，存在 B_n，$n\in\mathbb{N}$，使得 $y\in B_n$。由于 B_n 与其他的 B_m 不交，因此 $x_1,x_2\in A_n$，根据 f_n 的单射性必有 $x_1=x_2$。

证明集合等势的基本方法就是构造从其中一个集合到另一个集合的函数，然后证明函数的双射性。证明优势的方法与此类似，但构造的函数只要是单射函数就可以了。

题型七：计算或证明集合基数

1. 已知有穷集 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，计算下列集合的基数.

$$S,\ P(S),\ \mathbb{N},\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ P(\mathbb{N}),\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

2. 已知 $A\subseteq B\subseteq C$ 且 $A\approx C$，证明 $\operatorname{card}A=\operatorname{card}B=\operatorname{card}C$.

解答与分析

1. $\operatorname{card}S=n$, $\operatorname{card}P(S)=2^n$, $\operatorname{card}\mathbb{N}=\aleph_0$, $\operatorname{card}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\aleph_0$, $\operatorname{card}P(\mathbb{N})=\aleph$, $\operatorname{card}\mathbb{R}=\aleph$, $\operatorname{card}\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\aleph$.

2. 因为 $A\subseteq B$，所以存在单射函数 $f:A\to B, f(x)=x$，因此 $A\preccurlyeq\cdot B$. 同理存在单射函数 $g:B\to C$. 又 $A\approx C$，故存在双射函数 $h:C\to A$，因此 $g\circ h:B\to A$ 为单射函数，从而得到 $B\preccurlyeq\cdot A$. 综上所述有 $A\approx B$. 根据等势的传递性有 $A\approx B\approx C$，因此 $\operatorname{card}A=\operatorname{card}B=\operatorname{card}C$.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) 设 $X=\{a,b,c\}$,$Y=\{1,2,3\}$,$f=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$,则下列说法中唯一正确的是__________.

A. f 是从 X 到 Y 的二元关系,但不是从 X 到 Y 的函数.

B. f 是从 X 到 Y 的函数,但不是满射函数,也不是单射函数.

C. f 是从 X 到 Y 的满射函数,但不是单射函数.

D. f 是从 X 到 Y 的双射函数.

(2) 设 $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$ 为整数集,$\forall\langle n,k\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $f(\langle n,k\rangle)=n^2k$,则 $\operatorname{ran} f=$__________.

(3) 设 $A=\{a,b,c\}$,$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}\cup I_A$ 是 A 上的等价关系, 设自然映射 $g:A\to A/R$, $g(a)=$__________.

(4) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$,其中 $\mathbb{R}$ 为实数集,则 $f(\{1,3\})-f^{-1}(\{-6\})=$__________.

(5) 设 $\mathbb{R}$ 为实数集,$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-3$,则 $f\circ g(x)=$__________.

(6) 设 $f:A\to A$,如果 f 是双射,那么 $f\circ f^{-1}=$__________.

2. 简答题(4 小题,每小题 10 分,共 40 分).

(1) 下列定义中的哪些函数是从实数集 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射函数? 如果不是,说明理由.

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\ln x,\ x>0.$$

$$f_3(x)=\frac{1}{x^3+8},\ x\neq -2.$$

$$f_4(x)=x^3+8.$$

(2) 计算下列集合 A,B,C 的基数.

l 是坐标平面上的一条直线,A 是 l 上所有点的集合.

$S=\{a,b\}$,B 是 S 上的字符构成的有限长度的串的集合.

C 是某个服务器登录密码的集合,要求每个密码由 6 位构成,每位可以是小写的英文字母或者十进制数字.

(3) 对于以下给定的每组集合 X 和 Y,构造从 X 到 Y 的双射函数.

A. $X=2\mathbb{Z}=\{2k|k\in\mathbb{Z}\}$,$Y=\mathbb{N}$,其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集,$\mathbb{N}$ 为自然数集.

B. $X=\mathbb{R}$,$Y=(0,+\infty)$,其中 $\mathbb{R}$ 为实数集.

C. $X=P(\{a,b\})$,$Y=\{0,1\}^{\{a,b\}}$.

(4) $f:A\to B$ 导出的 A 上的等价关系 R 定义如下:$R=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A, f(x)=f(y)\}$. 设 $f_1,f_2,f_3,f_4\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,且满足:

$$f_1(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$f_2(n)=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$f_3(n)=\begin{cases}0, & n=3k,k\in\mathbb{N},\\ 1, & n=3k+1,k\in\mathbb{N},\\ 2, & n=3k+2,k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

$$f_4(n)=\begin{cases}0, & n=6k,k\in\mathbb{N},\\ 1, & n=6k+1,k\in\mathbb{N},\\ 2, & n=6k+2,k\in\mathbb{N},\\ 3, & n=6k+3,k\in\mathbb{N},\\ 4, & n=6k+4,k\in\mathbb{N},\\ 5, & n=6k+5,k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

令 R_i 为 f_i 导出的等价关系,求商集 N/R_i,这里 $i=1,2,3,4$,并分别求 $H=\{10k|k\in\mathbb{N}\}$ 在 f_1,f_2,f_3,f_4 下的像.

3. 证明题（2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

(1) 设 $f:A\to A$ 是满射函数,且 $f\circ f=f$,证明 $f=I_A$.

(2) 设 A,B,C 是集合,$A\cap B=A\cap C=\varnothing$,且 $B\approx C$. 证明:$A\cup B\approx A\cup C$.

4. 应用题(10 分).

设 $\operatorname{card} A=\aleph$,$B$ 是 A 的可数子集,$\operatorname{card}(A-B)$ 是否为可数的? 解释你的判断.