最优化导论　第五次作业

1. 考虑函数 $f(x)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1^3+x_1^4$, 求出其所有一阶稳定点, 并判断它们是否为局部最优点（极小或极大）、鞍点或全局最优点?

2.(a) 谈论三次函数 z = $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}$ 什么情况下是拟凹函数或拟凸函数，什么情况下既非拟凹函数也非拟凸函数。

(b) 对于 x ≥ 0 ，有可能对参数施加某些限制，使得函数变成既是拟凹又是拟凸吗?

3. 设函数 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 满足如下性质：当固定 $z\in\mathbb{R}^m$ 时，$f(x,z)$ 关于 x 为凸函数；当固定 $x\in\mathbb{R}^n$ 时，$f(x,z)$ 关于 z 是凹函数，则称 f 为凸 - 凹函数.

(a) 设 f 二阶可导，试利用海瑟矩阵 $\nabla^2 f$ 给出 f 为凸 - 凹函数的一个二阶条件；

(b) 设 f 为凸 - 凹函数且可微, 且在点 $(\bar{x},\bar{z})$ 处满足 $\nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$, 求证：对任意 x 和 z ，如下鞍点性质成立：

$$f(\bar{x},z)\leqslant f(\bar{x},\bar{z})\leqslant f(x,\bar{z})$$

进一步证明 f 满足极小 - 极大性质：

$$\sup_z\inf_x f(x,z)=\inf_x\sup_z f(x,z).$$

(c) 设 f 可微但不一定是凸 - 凹函数, 且在点 $(\bar{x},\bar{z})$ 处满足鞍点性质

$$f(\bar{x},z)\leqslant f(\bar{x},\bar{z})\leqslant f(x,\bar{z}),\quad \forall x,z$$

求证: $\nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$.

课本习题：　《Convex Optimization》4.2(a), 4.4(a)(b)(c), 4.7(a)(b)(c), 4.11(a)(b), 4.22