谓词逻辑初步

2024年3月14日

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 为什么需要谓词逻辑？
  - 命题逻辑的局限性
- 什么是谓词？
- 量词及谓词表达式
- 一阶谓词逻辑

无能为力的命题逻辑

- 常见的推理过程和结论如何形式化？如何进行自然推演？
  - 人，都是要死的
  - 苏格拉底是人
  - 所以，苏格拉底是要死的！
- 形式化：
  - P：人都是要死的；Q：苏格拉底是人；R：苏格拉底要死
  - $P \wedge Q \Rightarrow R$?

问题出在哪里？

另一方面

- 如何揭示“张三和李四是同学”的内涵?
  - 令P：张三和李四是同学
  - P只是陈述了这个事实，但无法表达以下后续推演所需的事实：
    - 同学是学同一专业的
    - 张三是计算机专业的
    - 所以，李四是计算机专业的
- “*x* 大于2”(如果*x*是整数)不是命题,但是：
  - If x>2 then x:=x+1
  - 仍然需要我们去形式刻画：当x=3时，程序如何去执行

一阶逻辑命题

命题逻辑具有一定的局限性，甚至无法判断一些常见的简单推理．例如，考虑下面的推理：

凡偶数都能被 2 整除．6 是偶数．所以 6 能被 2 整除．

这个推理是数学中的真命题，但在命题逻辑中却无法判断它的正确性．

在命题逻辑中只能将推理中出现的 3 个简单命题依次符号化为 p, q, r，将推理的形式结构符号化为

$(p \wedge q) \to r.$

由于上式不是重言式，所以不能由它判断推理的正确性．

问题出在"凡"字，在命题逻辑中不能很好地描述"凡偶数都能被 2 整除"的本意，只能把它作为一个简单命题．

为克服命题逻辑的这种局限性，需要引入量词，以期达到表达出个体与总体之间的内在联系和数量关系，这就是一阶逻辑所研究的内容．一阶逻辑也称作一阶谓词逻辑或谓词逻辑．

个体词、谓词和量词是一阶逻辑命题符号化的 3 个基本要素．

1 个体词

个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体.

例如，小王，小李，中国，$\sqrt{2}$，3 等都可作为个体词.

将表示具体或特定的客体的个体词称作个体常项，一般用小写英文字母 a, b, c 等表示，而将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，常用 x, y, z 等表示.

称个体变项的取值范围为个体域（或称作论域）.

个体域可以是有穷集合，例如，$\{1, 2, 3\}$，$\{a, b, c, d\}$，$\{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$ 等，也可以是无穷集合，如自然数集合 $\mathbb{N}$、实数集合 $\mathbb{R}$ 等.

有一个特殊的个体域，它是由宇宙间一切事物组成的，称作全总个体域.

作为一种约定，本课程在论述或推理中若没有特别指明所采用的个体域，则都是使用全总个体域.

2 谓词

谓词是用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词，常用 $F, G.H$ 等表示.

考虑下面 4 个陈述句.

1. $\sqrt{2}$ 是无理数.
2. x 是有理数.
3. 小王与小李同岁.
4. x 与 y 具有关系 L.

在 (1) 中，$\sqrt{2}$ 是个体常项，"$\cdots$ 是无理数"是谓词，记为 F. 整个陈述句可以表示成 $F(\sqrt{2})$.

在 (2) 中，x 是个体变项，"$\cdots$ 是有理数"是谓词，记作 G. 这个陈述句可以表示成 $G(x)$.

在 (3) 中，小王，小李都是个体常项，"$\cdots$ 与 $\cdots$ 同岁"是谓词，记作 H. 这个陈述句可符号化为 $H(a, b)$，其中 a 表示小王，b 表示小李.

在 (4) 中，x, y 为两个个体变项，L 是谓词，这个陈述句的符号化形式为 $L(x, y)$.

2 谓词

同个体词一样，谓词也有常项与变项之分. 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项；表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项. 无论是谓词常项或变项都用大写英文字母 F, G, H 等表示，要根据上下文区分.

上面 4 个陈述句中，(1)，(2)，(3) 中谓词 F, G, H 是常项，(4) 中谓词 L 是变项.

一般地，含 $n(\geqslant 1)$ 个个体变项 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的谓词 P 称作 n 元谓词，记作 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

当 $n = 1$ 时，$P(x_1)$ 表示 x_1 具有性质 P；当 $n \geqslant 2$ 时，$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 具有关系 P.

n 元谓词是以个体域为定义域，以 $\{0, 1\}$ 为值域的 n 元函数或关系.

有时将不带个体变项的谓词称作 0 元谓词.

例如，$F(a)$，$G(a, b)$，$P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 等都是 0 元谓词.

当 F, G, P 为谓词常项时，0 元谓词为命题. 反之，任何命题均可以表示成 0 元谓词，因而可以将命题看成特殊的谓词.

谓词（Predicate）

- **如果*x*是整数，“*x* 大于2” 不是命题，它的真值依赖于*x*的取值**
  - **可以将“*x*大于2”表示为 *P*(*x*)。//论域为实数**
- **一元谓词*P*(·) : 给定x, *P*(*x*) 要么为真，要么为假.**
  - 如 ***p*(*x*): *x* is a prime number // *x***是变量，论域为正整数
- **二元(多元)谓词*Q* (·, ·)**
  - 如 **Q(*x*, *y*)：*x*和*y*是同学 // 2**个变量，**x,y**的论域是全体人
  - 如 ***uncle*(*z*, *x*)： *z* is uncle of *x* //**论域？

由谓词产生的命题

- *P*(*x*): *x*大于2, 论域为自然数
  - P(2)为FALSE，P(3)为TRUE
- Q(x): x是人，论域为?
  - 人?
  - 全总个体域
  - P(苏格拉底)为TRUE；P(馆3-103)为?
- R(x,y)：x=y+3, 论域为实数集
  - R(1,4)和R(4,1)分别是?

一阶逻辑谓词符号化

例 18.1.1

将下列命题在一阶逻辑中用 0 元谓词符号化,并讨论它们的真值.

1. 仅当 2 是素数,4 才是素数.
2. 若 5 大于 4,则 4 大于 6.

解

(1) 设 1 元谓词 $F(x)$: x 是素数,命题可符号化为

$$F(4) \to F(2).$$

由于此蕴涵式的前件为假,所以命题为真.

(2) 设 2 元谓词 $G(x, y)$: $x > y$,命题可符号化为

$$G(5,4) \to G(4,6).$$

由于 $G(5,4)$ 为真,而 $G(4,6)$ 为假,所以命题为假.

3 量词

表示个体常项或变项之间数量关系的词称作量词. 有两种量词.

(1) 全称量词. 日常生活和数学中常用的"一切的""所有的""每一个""任意的""凡""都"等词统称作全称量词, 用符号"$\forall$"表示, $\forall x$ 表示个体域里的所有个体 x, 其中个体域是事先约定的.

例如, $\forall x F(x)$ 表示个体域里所有个体 x 都有性质 F, $\forall x \forall y G(x,y)$ 表示个体域里的所有个体 x 和 y 有关系 G, 其中 F 和 G 是谓词.

(2) 存在量词. 日常生活和数学中常用的"存在""有一个""有的""至少有一个"等词统称作存在量词, 用符号"$\exists$"表示. $\exists x$ 表示个体域里有一个个体 x.

例如, 用 $\exists x F(x)$ 表示在个体域里存在个体 x 具有性质 F, $\exists x \exists y G(x,y)$ 表示在个体域里存在个体 x 和 y 有关系 G.

全称量词和存在量词可以联合使用.

例如 $\forall x \exists y G(x,y)$ 表示对个体域里所有个体 x, 存在 y 使得 x 和 y 有关系 G;

而 $\exists x \forall y G(x,y)$ 表示个体域里存在个体 x, 使得该 x 和所有的个体 y 有关系 G.

谓词表达式中的量词(谓词的量化)

- 表达论域内，谓词成立的范围(程度)
- $\forall x$（**全称量词**）
  - $\forall x P(x)$ 为真 *iff* **对所有的**x, $P(x)$为真 //论域， **domain of discourse**
- $\exists x$（**存在量词**）
  - $\exists x P(x)$为真 *iff* **存在某个**x, $P(x)$为真 //论域
- $\forall x(x>2)$为假， $\exists x(x>2)$为真 //论域为实数
- $\forall x \exists y(y>x)$为真，$\exists y \forall x\ (y>x)$为假 //论域为实数

习题1：一阶谓词逻辑符号化

例 18.1.2

在个体域分别限制为 (a) 和 (b) 条件时，将下面两个命题符号化.

1. 凡人都呼吸.
2. 有的人用左手写字.

其中：(a) 个体域 D_1 为人类集合；(b) 个体域 D_2 为全总个体域.

解

(a) 令 $F(x)$：x 呼吸. $G(x)$：x 用左手写字. 在 D_1 中除人外，再无别的东西，因而 (1) 符号化为

$$\forall x F(x). \tag{18.1.1}$$

(2) 符号化为

$$\exists x G(x). \tag{18.1.2}$$

(b) D_2 中除有人外，还有万物，因而在符号化时必须考虑将人先分离出来. 为此引入谓词 $M(x)$：x 是人. 在 D_2 中，把

(1)，(2) 说得更清楚些：(1) 对于宇宙间一切个体而言，若个体是人，则他呼吸. (2) 在宇宙间存在用左手写字的人（或者更清楚地，在宇宙间存在这样的个体，该个体是人且用左手写字）.

于是，(1)，(2) 的符号化形式应分别为

$$\forall x(M(x) \to F(x)), \tag{18.1.3}$$

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)), \tag{18.1.4}$$

其中 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的含义同 (a). □

由例 18.1.2 可知，命题 (1)，(2) 在不同的个体域中符号化的形式可能不一样. 当使用全总个体域 D_2 时，为了将人与其他事物区别出来，引进了谓词 $M(x)$. 这样的谓词称作特性谓词. 换言之，特性谓词是用来限制个体域的，它将个体变元限制在满足该谓词代表的性质或关系的范围内.

常见错误：不能正确地使用 $\to$ 与 $\wedge$. 例如，在 D_2 中错误地将 (1) 符号化为下面形式

$$\forall x(M(x) \wedge F(x)). \tag{18.1.5}$$

若将它翻译成自然语言，则应该是"宇宙间的所有个体都是人并且都呼吸"，这显然不是 (1) 的原意. 另一方面，还有人错误地将 (2) 符号化为

$$\exists x(M(x) \to G(x)). \tag{18.1.6}$$

将它翻译成自然语言应该为"在宇宙间存在个体，如果这个个体是人，那么他用左手写字"，这显然也不是 (2) 的原意.

当 F 是谓词常项时，$\forall xF(x)$ 是一个命题. 如果把个体域中的任一个体 a 代入，$F(a)$ 都为真，那么 $\forall xF(x)$ 为真；否则 $\forall xF(x)$ 为假. $\exists xF(x)$ 也是一个命题. 如果个体域中存在一个个体 a，使得 $F(a)$ 为真，那么 $\exists xF(x)$ 为真；否则 $\exists xF(x)$ 为假.

习题2 一阶谓词符号化

例 18.1.3

在个体域限制为 *(a)* 和 *(b)* 条件时，将下列命题符号化，并给出它们的真值.

1. 对于任意的 x，均有 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.
2. 存在 x，使得 $x+5=3$.

其中：*(a)* 个体域 $D_1=\mathbb{N}$；*(b)* 个体域 $D_2=\mathbb{R}$.

解

(a) 令

$F(x): x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,

$G(x): x+5=3$. 命题 (1) 的符号化形式为

$$\forall x F(x). \qquad (18.1.7)$$

命题 (2) 的符号化形式为

$$\exists x G(x). \qquad (18.1.8)$$

显然 (1) 为真命题，而 (2) 为假命题.

(b) 在 D_2 内，(1) 与 (2) 的符号化形式还分别是式(18.1.7)和式(18.1.8)，(1) 仍然是真命题，而此时 (2) 也为真命题.

□

注 18.1.1

从例 *18.1.2* 和例 *18.1.3* 可以看出：

1. 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同.
2. 同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同.

例18.1.4解(续)

(2) 令 $G(x)$: x 登上过月球. 命题 (2) 符号化形式为

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)). \tag{18.1.10}$$

设 a 是 1969 年登上月球完成阿波罗计划的美国宇航员阿姆斯特朗, $M(a) \wedge G(a)$ 为真, 所以式 (18.1.10) 为真.

(3) 令 $H(x)$: x 登上过木星. 命题 (3) 符号化形式为

$$\neg\exists x(M(x) \wedge H(x)). \tag{18.1.11}$$

到目前为止, 还没有人登上过木星, 所以对任何个体 a, 要么 $M(a)$ 为假(a 不是人), 要么 $H(a)$ 为假(a 没有登上过木星), 故 $M(a) \wedge H(a)$ 均为假, 因而 $\exists x(M(x) \wedge H(x))$ 为假, 式 (18.1.11) 为真.

(4) 令 $F(x)$: x 是在美国留学的学生, $G(x)$: x 是亚洲人. 命题 (4) 符号化形式为

$$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \tag{18.1.12}$$

此命题为真. $\square$

习题2 一阶谓词符号化

注18.1.2(续)

(4) 命题的符号化形式不唯一．例如，在例 18.1.5 中，(3) 还可以符号化为

$$\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)); \tag{18.1.19}$$

(4) 还可以符号化为

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge N(x, y) \rightarrow \neg L(x, y)). \tag{18.1.20}$$

第 19 章可以证明式 (18.1.15) 和式 (18.1.19) 、式 (18.1.16) 与式 (18.1.20) 是等值的．

由于引进了个体词、谓词和量词的概念，现在可以将本章开始时讨论的推理“凡偶数都能被 2 整除．6 是偶数．所以 6 能被 2 整除．”在一阶逻辑中符号化为

$$(\forall x (F(x) \rightarrow G(x))) \wedge F(6) \rightarrow G(6), \tag{18.1.21}$$

其中，$F(x)$: x 是偶数，$G(x)$: x 能被 2 整除．第 19 章可以证明式 (18.1.21) 是永真式，即恒真．

量化公式中的变元

- 约束变元
  - $\forall x \exists y(y>x)$ 是 $\forall x(\exists y(y>x))$ 简写，x和y都是约束变元
  - $\exists y(y>x) \land \exists z(x>z)$，$y$和$z$都是约束变元
  - 量词作用域
    - 量词绑定的约束变元的应用范围
    - $\exists y(y>x) \land (x+2>y) \equiv \exists z(z>x) \land (x+2>y)$
      - *$\exists y$和$\exists z$的作用域？*
- 自由变元
  - $\exists y(y>x) \land \exists z(x>z)$，$x$是自由变元
  - $\exists y(y>x) \land (x+2>y)$，$x$是自由变元，后面那个$y$也是自由变元
  - 自由变元通常被认定为全称量词约束

多个量词嵌套

- $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$

  举例：$P(x,y)$ 表示 $x+y=y+x$。论域为实数集

- $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$

  举例： $P(x,y)$ 表示$x=y+1$。

- $\forall x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \forall x P(x,y)$ 不一定等价
  - **往往不等价**

  举例：$P(x,y)$ 表示 “$y>x$” 。

逻辑公式（formula）

原子陈述：

- $P(t_1,\ldots t_n)$，**其中**P是n元谓词，t_i**是常量、变量或函数取值**

逻辑公式（有时称为“陈述”）：

- **原子陈述是逻辑公式；**
- 若P是**逻辑公式**，x是自由变元，则$\exists xP$和$\forall xP$是**逻辑公式；**
- 若P和Q是**逻辑公式**，则 $\neg P, P\wedge Q, P\vee Q, P\rightarrow Q, P\leftrightarrow Q$是**逻辑公式。**
- 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是逻辑公式

备注：量词的优先级高于其它逻辑连接符

举例： $\forall x\,(x \le 0 \vee \exists y\,(y>0 \wedge x = y^2))$

谓词逻辑公式的否定

- 量词的德摩根定律

表 2　量词的德·摩根律

否定	等价语句	何时为真	何时为假
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	对每个 x，$P(x)$ 为假	有 x，使 $P(x)$ 为真
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	有 x 使 $P(x)$ 为假	对每个 x，$P(x)$ 为真

- 嵌套量词的否定
  - 反复使用单量词德摩根定律
- 例：$\forall w \neg \forall a \exists f (P(w,f) \wedge Q(f,a))$ 的否？

谓词表达式的真值判定

- 全称量词公式$\forall x$ P(x)的真值判定：
  - 如果论域是有限集合：枚举所有元素a_i
    - $\forall x\, P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots P(a_n)$
  - 如果论域是无限集合：
    - 为真：数学证明
    - 为假：找到反例
- 存在量词公式$\exists x P(x)$的真值判定
  - 如果论域是有限集合：枚举所有元素a_i
    - $\exists x\, P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots P(a_n)$
  - 如果论域是无限集合：
    - 为真：举出（构造）一个实例
    - 为假：数学证明

谓词公式的真值判定

一阶逻辑公式的永真性判定有相当的难度！

$$\forall n(even(n)\wedge(n>2)\rightarrow\exists m\exists k(p(m)\wedge p(k)\wedge(n=m+k)))$$

哥德巴赫猜想（1740s年），就是这个逻辑公式，至今无法判定其真假

变量的论域（**domain of discourse**）：无限与有限，天壤之别

谓词逻辑的应用

- 知识表示
  - $\forall n\ (odd(n) \rightarrow odd(n^2))$
  - $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$

    // *z* is uncle of *x*
  - $father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)$

上述知识无法用命题逻辑表达！

Prolog (Programming in Logic)

- 若z是y的兄弟，且y是x的父亲，则z是x的叔叔。
  - $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$

$$\boxed{uncle(z, x) \text{ :- } brother(z, y), father(y, x)}$$

- 事实
  - *brother(Klopp, Karl)*
  - *brother(Klinsmann, Karl)*
  - *brother(Karl, Loew)*
  - *father(Karl, Neuer)*
- 查询：？ *uncle(z, Neuer)*

谓词逻辑的应用

- 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
  - $\forall n(even(n) \land (n>2) \rightarrow \exists m \exists k(p(m) \land p(k) \land (n= m+k)))$

    ***even*(*n*) : *n* is a even number**

    ***p*(*x*): *x* is a prime number**

这个猜想的内涵无法用命题逻辑表达！（命题逻辑的局限性）

将自然语言翻译成逻辑公式

- 任意实数的平方都是正数
  - $\forall x P(x)$，其中 $P(x)$表示$x^2>0$，论域为实数
- 所有美国人都吃汉堡包
  - $\forall x\ C(x)$，其中$C(x)$表示“x吃汉堡包”，论域为美国人
  - $\forall x(A(x)\rightarrow C(x))$ //论域为人类
  - $A(x)$表示“x是美国人”， $C(x)$表示“x吃汉堡包”

将自然语言翻译成逻辑公式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: x是这个班上的学生

$C(x)$: x学过微积分课程

$\forall x\,(S(x) \rightarrow C(x))$

这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

$S(x)$: x是这个班上的学生

$V(x, y)$表示“x访问过（去过）y”

其中，c代表“加拿大”， m代表“墨西哥”

$\forall x\,(S(x) \rightarrow V(x, c) \vee V(x, m))$

自然语言的形式化

- $\lim_{x\to a} f(x)$不存在

由于“$\lim_{x\to a} f(x)$不存在”意味着对全体实数 L，$\lim_{x\to a} f(x)\neq L$，这个语句可以表达为

$$\forall L\,\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x(0<|x-a|<\delta\wedge|f(x)-L|\geqslant\varepsilon)$$

最后一个语句表示，对每个实数 L，存在实数 $\varepsilon>0$ 使得对每个实数 $\delta>0$，都存在实数 x 使得 $0<|x-a|<\delta$ 但是 $|f(x)-L|\geqslant\varepsilon$。

存在量词形式化过程中的“困惑”

- 有的政治家是诚实的
  - $P(x)$表示“x是政治家”， $H(x)$表示“x是诚实的”
  - 如果论域是政治家：
    - $\exists x H(x)$
  - 如果论域是人：
    - $\exists x(P(x) \wedge H(x))$ //外层的( )不能缺
      - $\exists x(P(x) \rightarrow H(x))$的真值情况 … 语言等价吗？
      - 如果所有的政治家 … 是：
        - P(陶先平) … 为真
        - 而 *P*(陶先 …

我们为什么用
合取连接符？

谓词逻辑推理

- 常用逻辑等价式
- 基于规则的推理

常用逻辑等价式

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
  - $\forall x P(x)$: **对所有实数x**, 其**平方是正数** // $P(x)$表示$x^2>0$
  - **否定：存在某个实数 x, 其平方方不是正数。**
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
  - $\exists x P(x)$: **存在实数x，x的平方是正数.**
  - **否定：**对任意实数x, 其**平方不是正数**

常用逻辑等价式

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$

反向蕴涵×：是奇数或偶数

- $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \vDash \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vDash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

- $\forall x(P(x) \vee R) \equiv (\forall x P(x)) \vee R$
- $\exists x(P(x) \wedge R) \equiv (\exists x P(x)) \wedge R$

常用逻辑等价式（可以证明）

- $\forall x(R \to P(x)) \equiv R \to \forall x P(x)$

$\forall x(\neg R \vee P(x)) \equiv \neg R \vee (\forall x P(x))$

- $\exists x(R \to P(x)) \equiv R \to \exists x P(x)$
- $\forall x(P(x) \to R) \equiv (\exists x P(x)) \to R$
- $\exists x(P(x) \to R) \equiv (\forall x P(x)) \to R$

$\exists x(\neg P(x) \vee R) \equiv (\exists x \neg P(x)) \vee R \equiv \neg(\forall x P(x)) \vee R$

注意：这里x不在R中出现

前束范式（Prenex Normal Form）

$\forall x\,(x \le 0 \vee \exists y\,(y>0 \wedge x = y^2))$ //不是前束范式

$\forall x\,\exists y\,(x \le 0 \vee (y>0 \wedge x = y^2))$ //前束析取范式

有通用方法，把任意一阶逻辑公式转化为PNF（PDNF/PCNF）

转化为前束范式（举例说明）

$\exists z(\exists xQ(x, z)\vee\exists xP(x)) \to \neg(\neg\exists xP(x) \wedge\forall x\exists zQ(z, x))$ （消去→）

$\equiv \neg\exists z(\exists xQ(x, z)\vee\exists xP(x)) \vee \neg(\neg\exists xP(x)\wedge\forall x\exists zQ(z, x))$ （内移¬）

$\equiv \forall z(\forall x\neg Q(x, z)\wedge\forall x\neg P(x)) \vee (\exists xP(x)\vee\exists x\forall z \neg Q(z, x))$ （简化）

$\equiv \forall z\forall x(\neg Q(x, z)\wedge\neg P(x)) \vee \exists x(P(x)\vee\forall z \neg Q(z, x))$ （重命名）

$\equiv \forall z\forall x(\neg Q(x, z)\wedge\neg P(x)) \vee \exists y(P(y)\vee\forall w\neg Q(w, y))$ （前移量词）

$\equiv \forall z\forall x \exists y((\neg Q(x, z)\wedge\neg P(x)) \vee P(y)\vee\forall w\neg Q(w, y))$ （前移量词）

$\equiv \forall z\forall x\exists y\forall w((\neg Q(x, z)\wedge\neg P(x)) \vee P(y)\vee\neg Q(w, y))$ （合取分配）

$\equiv \forall z\forall x\exists y\forall w((\neg Q(x, z)\vee P(y)\vee\neg Q(w, y))\wedge(\neg P(x)\vee P(y)\vee\neg Q(w, y)))$

前束合取范式PCNF

前束合取范式（举例说明）

$$\forall z \forall x\, \exists y \forall w ((\neg Q(x,z) \vee P(y) \vee \neg Q(w,y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w,y)))$$

$$\forall x \forall y \forall z\, ((\neg B(z,y) \vee \neg F(y,x) \vee U(z,x)) \wedge (\neg F(z,y) \vee \neg F(y,x) \vee G(z,x)))$$

$$\boxed{brother(z,y) \wedge father(y,x) \rightarrow uncle(z,x)}$$

$$\boxed{father(z,y) \wedge father(y,x) \rightarrow grandfather(z,x)}$$

量词相关的“自然演绎规则”

$$\frac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(c)}$$

全称例示

∀− 规则

$$\frac{P(c)\text{对任意的}c}{\therefore\ \forall x\, P(x)}$$

全称生成

∀+ 规则

$$\frac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c)\text{对于某个}c}$$

存在例示

∃− 规则

$$\frac{P(c)\text{对某个}c}{\therefore\ \exists x\, P(x)}$$

存在生成

∃+ 规则.

谓词假言推理示例

- A classic inference, dating back to ancient Greece:

$P(x)$: x is a man; $Q(x)$: x will die;

Every man will die: $\forall x(P(x)\Rightarrow Q(x))$

Socrates is a Man: $P(s)$

Conclusion: Socrates will die: $Q(s)$

$$\frac{\forall x(P(x)\Rightarrow Q(x)) \quad P(s)\Rightarrow Q(s) \quad P(s)}{Q(s)}$$

基于规则的推理（举例）

- **前提**
  - 在这个班上的某个学生没有读过这本书
  - 班上的每个人都通过了第一门考试
- **结论：通过第一门考试的某个人没有读过这本书**
- $C(x)$: x**在这个班上**
- $B(x)$: x**读过这本书了**
- $P(x)$: x**通过了第一门考试**
  - $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
  - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
  - $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

基于规则的推理（举例）

$$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x)), \forall x(C(x) \to P(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$$

因为 $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ **//这是前提**

根据存在例示，有某个a，$C(a) \wedge \neg B(a)$**成立。**

根据化简，得到$C(a)$ **成立，** $\neg B(a)$**成立。**

因为$\forall x(C(x) \to P(x))$ **//这是前提**

根据全称例示，得到 $C(a) \to P(a)$

根据**假言推理**，得到 $P(a)$

根据合取律，得到 $P(a) \wedge \neg B(a)$

根据存在生成，得到 $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

What’s Wrong?

Somebody proves the expression:

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))$$

as follows:

1. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$	前提
2. $\exists x A(x)$	化简, 1
3. $\exists x B(x)$	化简, 1
4. $A(c)$	存在例示, 2
5. $B(c)$	存在例示, 3
6. $A(c) \wedge B(c)$	合取，4,5
7. $\exists x (A(x) \wedge B(x))$	存在生成, 6

Is it correct?

习题课-题型一：

1. 设个体域为自然数集 $\mathbb{N}$，$F(x)$：x 是偶数，$G(x)$：x 是素数，用
假.
   (1) 2 是偶素数.
   (2) 若 2 是素数，则 4 不是素数.
   (3) 只有 2 是素数，6 才能是素数.
   (4) 除非 6 是素数，否则 4 是素数.
   (5) 5 是素数当且仅当 6 是素数.
   (6) 5 不是素数当且仅当 6 是素数.
2. 设个体域 $D=\{0,1,2,\cdots,10\}$，将下列命题符号化.
   (1) D 中所有元素都是整数.
   (2) D 中有的元素是偶数.
   (3) D 中所有的偶数都能被 2 整除.
   (4) D 中有的偶数是 4 的倍数.
3. 设个体域为 $D=\{x|x$ 为人$\}$，将下列命题符号化.
   (1) 人都生活在地球上.
   (2) 有的人长着黑头发.
   (3) 中国人都用筷子吃饭.
   (4) 有的美国人不住在美国.
4. 将下列命题符号化.
   (1) 人都生活在地球上.
   (2) 有的人长着黑头发.
   (3) 并不是所有的实数都能表示成分数.
   (4) 没有能表示成分数的无理数.
5. 将下列命题符号化.
   (1) 任意的偶数 x 和 y 都有大于 1 的公因数.
   (2) 存在奇数 x 和 y 没有大于 1 的公因数.
   (3) 说所有火车比所有汽车都快是不对的.
   (4) 说有的火车比所有汽车都快是正确的.

   (4) $\neg G(6)\rightarrow G(4)$（或 $\neg G(4)\rightarrow G(6)$），由于蕴涵式的前件为真，后件为假，故复合命题 $\neg G(6)\rightarrow G(4)$ 为假命题.
   (5) $G(5)\leftrightarrow G(6)$，假命题.
   (6) $\neg G(5)\leftrightarrow G(6)$，真命题.
2. 本题 (1)、(2) 不引入特性谓词，而 (3)、(4) 要引入特性谓词.
   (1) $\forall xF(x)$，其中 $F(x)$：x 是整数.
   (2) $\exists xG(x)$，其中 $G(x)$：x 是偶数.
   (3) $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$，其中 $G(x)$：x 是偶数，$H(x)$：x 能被 2 整除，$G(x)$ 在这里是特性谓词.
   (4) $\exists x(G(x)\wedge R(x))$，其中 $G(x)$：x 是偶数，$R(x)$：x 是 4 的倍数，这里 $G(x)$ 是特性谓词.
3. (1) 与 (2) 不用引入特性谓词，而 (3) 与 (4) 要引入特性谓词.
   (1) $\forall xF(x)$，其中 $F(x)$：x 生活在地球上.
   (2) $\exists xG(x)$，其中 $G(x)$：x 长着黑头发.
   (3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，其中 $F(x)$：x 为中国人，$G(x)$：x 用筷子吃饭.
   (4) $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$，其中 $F(x)$：x 是美国人，$G(x)$：住在美国.
4. 在本题中没有指明个体域，因而使用全总个体域. 在使用全总个体域时，第 3 题 (1) 与 (2) 中的命题在本题中也要使用特性谓词，将人从宇宙间的所有事物中分离出来.
   (1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，其中 $F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 生活在地球上.
   (2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$，其中 $F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 长着黑头发.
   (3) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$，其中 $F(x)$：x 为实数，$G(x)$：x 能表示成分数.
   (4) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$，其中 $F(x)$：x 是无理数，$G(x)$：x 能表示成分数.

   学完第 19 章之后，可以验证 (3)、(4) 中两种符号化形式是等值的.
5. 本题中仍然应该使用全总个体域.
   (1) $\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\rightarrow H(x,y))$，其中 $F(x)$：x 是偶数，$H(x,y)$：x 和 y 有大于 1 的公因数.
   (2) $\exists x\exists y(G(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$，其中 $G(x)$：x 是奇数，$H(x,y)$：x 和 y 有大于 1 的公因数.
   (3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$ 或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$，其中 $F(x)$：x 是火车，$G(y)$：y 是汽车，$H(x,y)$：x 比 y 块.
   (4) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$，其中，$F(x)$：$x$ 为火车，$G(y)$：y 为汽车，$H(x,y)$：x 比 y 快.

题型二：一阶逻辑中数学命题符号化

1. 设个体域为整数集 $\mathbb{Z}$,将下列问题符号化.

 (1) 对于任意的 x 和 y,存在 z,使得 $x+y=z$.

 (2) "存在 x,对于任意的 y 和 z,均有 $y-z=x$"是不成立的.

2. 设个体域为非 0 有理数集 $\mathbb{Q}^*$,将下列命题符号化.

 (1) 对于任意的 x,存在 y,使得 $x\cdot y=1$.

 (2) "对于任意的 x 和 y,存在 z,使得 $x^2+y^2=z^2$"不为真.

3. 设个体域为实数集 $\mathbb{R}$,将下列命题符号化.

 (1) 对于任意的 x 和 y,存在 z,使得 $x^2+y^2=z^2$.

 (2) 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,均有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

解本题型时,数学公式不再重新符号化.

1. (1) $\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$.

 (2) $\neg(\exists x\forall y\forall z(y-z=x))$ 或 $\forall x\exists y\exists z(y-z\neq x)$.

2. (1) $\forall x\exists y(x\cdot y=1)$.

 (2) $\neg(\forall x\forall y\exists z(x^2+y^2=z^2))$ 或 $\exists x\exists y\forall z(x^2+y^2\neq z^2)$.

3. (1) $\forall x\forall y\exists z(x^2+y^2=z^2)$.

 (2) $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow(\exists\delta(\delta>0\wedge(|x-x_0|<\delta\rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon))))$.

 此命题是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续的定义.

题型三：在有限个体域内消去公式中量词

1. 设个体域 $D=\{a,b,c\}$，消去下列公式中的量词.

(1) $\exists x F(x) \to \forall y G(y)$.

(2) $\forall x \forall y (F(x) \to G(y))$.

(3) $(\forall x F(x) \wedge \exists y G(y)) \to H(y)$.

2. 设个体域 $D=\{a,b\}$，消去下列公式中的量词.

(1) $\forall x \exists y (F(x) \to G(y))$.

(2) $\forall x \exists y (F(x,y) \to G(x,y))$.

3. 设个体域 $=\{1,2,3,4\}$，$F(x)$: x 是 2 的倍数. $G(x)$: x 是奇数. 将命题 $\forall x(F(x) \to$ -

讨论命题的真值.

解答与分析

1. (1) $\exists x F(x) \to \forall y G(y) \Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \to (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c))$.

(2) 方法一　对公式不做变化，直接消量词.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y (F(x) \to G(y)) &\Leftrightarrow \forall x((F(x) \to G(a)) \wedge (F(x) \to G(b)) \wedge (F(x) \to G(c))) \\
&\Leftrightarrow ((F(a) \to G(a)) \wedge (F(a) \to G(b)) \wedge (F(a) \to G(c))) \wedge \\
&\quad ((F(b) \to G(a)) \wedge (F(b) \to G(b)) \wedge (F(b) \to G(c))) \wedge \\
&\quad ((F(c) \to G(a)) \wedge (F(c) \to G(b)) \wedge (F(c) \to G(c))).
\end{aligned}
$$

方法二　先缩小量词辖域，然后再消量词.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y (F(x) \to G(y)) &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \to \forall y G(y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x F(x) \to \forall y G(y) \\
&\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \to (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c)).
\end{aligned}
$$

可见，方法二要好得多. 因此，当能够缩小量词辖域时，应先缩小量词辖域，然后再消量词.

(3) $(\forall x F(x) \wedge \exists y G(y)) \to H(y) \Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \wedge (G(a) \vee G(b) \vee G(c)) \to H(y)$.

注意，消去量词后，仍然含自由出现的个体变项 y，因为 $H(y)$ 不在任何量词的辖域中.

2. (1)

$$
\begin{aligned}
\forall x \exists y (F(x) \to G(y)) &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \to \exists y G(y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x F(x) \to \exists y G(y) \\
&\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b)) \to (G(a) \vee G(b)).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\forall x \exists y (F(x,y) \to G(x,y)) &\Leftrightarrow \forall x((F(x,a) \to G(x,a)) \vee (F(x,b) \to G(x,b))) \\
&\Leftrightarrow ((F(a,a) \to G(a,a)) \vee (F(a,b) \to G(a,b))) \wedge \\
&\quad ((F(b,a) \to G(b,a)) \vee (F(b,b) \to G(b,b))).
\end{aligned}
$$

在 (1) 中，量词辖域可以缩小，因而先缩小量词辖域，再消量词. 但在 (2) 中，因为全称量词与存在量词均约束 F 与 G 中的个体变量 x 和 y，因而它们的辖域不能缩小，消去量词后所得公式也不易化得更简单.

3. $\forall x(F(x) \to \neg G(x)) \Leftrightarrow (F(1) \to \neg G(1)) \wedge (F(2) \to \neg G(2)) \wedge (F(3) \to \neg G(3)) \wedge (F(4) \to \neg G(4))$.

因为，在 $(F(1) \to \neg G(1))$ 和 $(F(3) \to \neg G(3))$ 中，前件与后件均为假，所以这两个蕴涵式均为真. 在 $(F(2) \to \neg G(2))$ 和 $(F(4) \to \neg G(4))$ 中，前件与后件均为真，因而蕴涵式也均为真，故此命题在以上解释下

题型四：自然推理系统构造自然语言描述的推理证明

- 1. 实数不是有理数就是无理数．无理数都不是分数．所以，若有分数，则必有有理数（个体域为实数集 R）．
- 2. 人都喜欢吃蔬菜．但不是所有的人都喜欢吃鱼．所以，存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人

1. 设 $F(x)$: x 是有理数, $G(x)$: x 是无理数, $H(x)$: x 是分数.

前提: $\forall x(F(x) \vee G(x))$, $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$.

结论: $\exists x H(x) \rightarrow \exists x F(x)$.

证明:

①	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	前提引入
②	$F(y) \vee G(y)$	①$\forall$-
③	$\neg F(y) \rightarrow G(y)$	②置换
④	$\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$	前提引入
⑤	$G(y) \rightarrow \neg H(y)$	④$\forall$-
⑥	$\neg F(y) \rightarrow \neg H(y)$	③⑤假言三段论
⑦	$H(y) \rightarrow F(y)$	⑥置换
⑧	$H(y) \rightarrow \exists x F(x)$	⑦$\exists$+
⑨	$\exists y H(y) \rightarrow \exists x F(x)$	⑧$\exists$-
⑩	$\exists x H(x) \rightarrow \exists x F(x)$	⑨置换

2. 因为本题没指明个体域, 因而使用全总个体域.

令 $F(x)$: x 为人, $G(x)$: x 喜欢吃蔬菜, $H(x)$: x 喜欢吃鱼.

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$, $\neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$.

结论: $\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$.

证明: 用归谬法.

①	$\neg \exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$	结论否定引入
②	$\forall x \neg(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$	①置换
③	$\neg(F(y) \wedge G(y) \wedge \neg H(y))$	②$\forall$-
④	$G(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$	③置换
⑤	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	前提引入
⑥	$F(y) \rightarrow G(y)$	⑤$\forall$-
⑦	$F(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$	④⑥假言三段论
⑧	$F(y) \rightarrow H(y)$	⑦置换
⑨	$\forall y(F(y) \rightarrow H(y))$	⑧$\forall$+
⑩	$\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	⑨置换
⑪	$\neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	前提引入
⑫	$\forall x(F(x) \rightarrow H(x)) \wedge \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	⑩⑪合取

注意, 先将 $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$ 开头的 $\neg$ 内移化成前束范式后, 才能消量词.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) $\neg\exists x\forall yF(x,y)$ 的前束范式为________.

(2) 由量词分配等值式,$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow$________.

(3) 缩小量词的辖域,$\forall x(F(x)\to B)\Leftrightarrow$________.

(4) 公式 $((\forall x\neg G(x)\wedge\forall xF(x))\wedge\exists yG(y))\to\forall xF(x)$ 的类型为________.

(5) 取解释 I 为:个体域为 $D=\{a\}$,$F(x)$:x 具有性质 F,在 I 下 $\forall xF(x)\leftrightarrow\exists xF(x)$ 的真值为________.

(6) 前提:$\forall x\exists yF(x,y)$.

结论:$\exists yF(y,y)$.

以上推理是错误的,某学生却给出了如下证明:

① $\forall x\exists yF(x,y)$	前提引入
② $\exists yF(y,y)$	①$\forall-$

此证明错在________.

2. 在有限个体域内消去量词(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) 个体域 $D=\{1,2,3\}$,公式为

$$\forall x\forall y(F(x)\to G(y)).$$

(2) 个体域 $D=\{a,b\}$,公式为

$$\forall x\exists y(F(x,y)\to G(y,x)).$$

3. 求前束范式(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) $\forall x(F(x,y)\to\forall y(G(x,y)\to\exists zH(x,y,z)))$.

(2) $(\exists xF(x,y)\to\forall yG(x,y,z))\to\exists zH(z)$.

4. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中,构造下列推理的证明(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) 前提:$\forall x\forall y(F(x)\to G(y))$, $F(a)$.

结论:$\exists xG(x)$.

(2) 前提:$\forall x(F(x)\to\forall y(G(y)\wedge H(x)))$, $\exists xF(x)$.

结论:$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge H(x))$.

5. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中,构造下面用自然语言描述的推理(10 分).

火车都比汽车快,汽车都比轮船快,a 是火车,b 是汽车,c 是轮船. 所以,a 比 b 快,b 比 c 快.