

离散数学

(第 3 版)

2024@nju

目录

- 第一部分 集合论
- 第二部分 初等数论
- 第三部分 图论
- 第四部分 组合数学
- 第五部分 代数结构
- 第六部分 数理逻辑
- 第七部分 计算模型(文法与自动机)

目录

1 集合

- 集合的基本概念
- 集合的运算
- 集合运算的性质
- 有穷集的计数

1.1 集合的基本概念

集合是一个不能精确定义的基本概念. 直观地说, 把一些事物汇集到一起组成一个整体就称作 **集合**, 而这些事物就是这个集合的 **元素** 或 **成员**. 例如:

方程 $x^2 - 1 = 0$ 的实数解集合;

26 个英文字母的集合;

坐标平面上所有点的集合.

集合通常用大写的英文字母来标记, 如自然数集 \mathbb{N} (在离散数学中认为 0 也是自然数)、整数集 \mathbb{Z} 、有理数集 \mathbb{Q} 、实数集 \mathbb{R} 、复数集 \mathbb{C} 等.

1.1 集合的基本概念

集合是一个不能精确定义的基本概念. 直观地说, 把一些事物汇集到一起组成一个整体就称作 **集合**, 而这些事物就是这个集合的 **元素** 或 **成员**. 例如:

方程 $x^2 - 1 = 0$ 的实数解集合;

26 个英文字母的集合;

坐标平面上所有点的集合.

集合通常用大写的英文字母来标记, 如自然数集 \mathbb{N} (在离散数学中认为 0 也是自然数)、整数集 \mathbb{Z} 、有理数集 \mathbb{Q} 、实数集 \mathbb{R} 、复数集 \mathbb{C} 等.

表示集合的方法

有两种常见方法: **列举法** 和 **描述法**.

列举法 是列出集合的所有元素, 元素之间用逗号隔开, 并把它们用花括号括起来.

描述法 是把集合中元素的公共属性用文字, 符号或式子等描述出来, 写在大括号内.

集合与元素

集合的三要素

- ① 确定性, 集合里的元素是确定的, 要么在集合中要么不在, 二者必居其一;
- ② 互异性, 集合里的元素是彼此不同的, 如果同一个元素在集合中多次出现应该认为是一个元素;
- ③ 无序性, 集合里元素的排列不考虑顺序问题.

在本书所采用的体系中规定元素和集合之间的关系是隶属关系, 即 属于 或 不属于, 属于记作 \in , 不属于记作 \notin . 例如

$$A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\},$$

这里 $a \in A, \{b, c\} \in A, d \in A, \{\{d\}\} \in A$, 但 $b \notin A, \{d\} \notin A$. b 和 $\{d\}$ 都是 A 的元素的元素.

隶属关系的树形图

可以用一种树形图来表示这种隶属关系, 每一层上的结点都是其上一层父亲结点(若存在)的元素. 上述集合
 $A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$ 的树形图如图 1.1.1 所示.

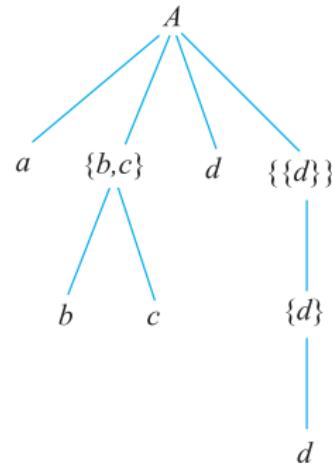


图 1.1.1

注 1.1.1

为了体系上的严谨性, 规定: 对任何集合 A , 都有 $A \notin A$.

集合间的关系

定义 1.1.1

设 A, B 为集合, 若 B 中的每个元素都是 A 中的元素, 则称 B 是 A 的子集合, 简称为 子集. 这时也称 B 包含于 A , 或 A 包含 B , 记作 $B \subseteq A$.

若 B 不被 A 包含, 则记作 $B \not\subseteq A$.

例如, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, 但 $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$.

概念包含的形式化表述为: $B \subseteq A$ 当且仅当对任意 x , 若 $x \in B$, 则有 $x \in A$.

显然, 对任何集合 A , 都有 $A \subseteq A$.

隶属关系和包含关系都是两个集合之间的关系, 对于某些集合这两种关系可以同时成立. 例如

$$A = \{a, \{a\}\} \text{ 和 } \{\{a\}\},$$

既有 $\{a\} \in A$, 又有 $\{a\} \subseteq A$. 前者把它们看成是不同层次上的两个集合, 后者把它们看成是同一层次上的两个集合, 都是正确的.

集合间的关系(续)

定义 1.1.2

设 A, B 为集合, 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 那么称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

若 A 与 B 不相等, 则记作 $A \neq B$.

定义 1.1.3

设 A, B 为集合, 如果 $B \subseteq A$, 但 $B \neq A$, 那么称 B 是 A 的真子集, 记作 $B \subset A$.

若 B 不是 A 的真子集, 则记作 $B \not\subset A$.

例如 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, 但 $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}$.

定义 1.1.4

不含任何元素的集合称作空集, 记作 \emptyset .

空集可以用描述法表示为

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}.$$

空集的性质

定理 1.1.1

空集是一切集合的子集.

空集的性质

定理 1.1.1

空集是一切集合的子集.

证明.

(反证法) 假设上述定理不正确, 即存在集合 A , 使得 $\emptyset \not\subseteq A$. 由子集定义知, 存在 $a \in \emptyset$, 但 $a \notin A$. 这与空集 \emptyset 不包含任何元素矛盾, 故定理成立. \square

空集的性质

定理 1.1.1

空集是一切集合的子集.

证明.

(反证法)假设上述定理不正确, 即存在集合 A , 使得 $\emptyset \not\subseteq A$. 由子集定义知, 存在 $a \in \emptyset$, 但 $a \notin A$. 这与空集 \emptyset 不包含任何元素矛盾, 故定理成立. \square

推论 1.1.1

空集是唯一的.

空集的性质

定理 1.1.1

空集是一切集合的子集.

证明.

(反证法)假设上述定理不正确, 即存在集合 A , 使得 $\emptyset \not\subseteq A$. 由子集定义知, 存在 $a \in \emptyset$, 但 $a \notin A$. 这与空集 \emptyset 不包含任何元素矛盾, 故定理成立. \square

推论 1.1.1

空集是唯一的.

证明.

(反证法)假设存在空集 \emptyset_1 和 \emptyset_2 , 由定理 1.1.1 有

$$\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \text{ 和 } \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1.$$

根据集合相等的定义, 有 $\emptyset_1 = \emptyset_2$. \square

m 元子集

含有 n 个元素的集合简称为 n 元集, 其含有 $m(\leq n)$ 个元素的子集称作它的 m 元子集. 任给一个 n 元集, 怎样求出它的全部子集呢? 举例说明如下.

例 1.1.1

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 将 A 的子集分类.

m 元子集

含有 n 个元素的集合简称为 n 元集, 其含有 $m(\leq n)$ 个元素的子集称作它的 m 元子集. 任给一个 n 元集, 怎样求出它的全部子集呢? 举例说明如下.

例 1.1.1

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 将 A 的子集分类.

解

0 元子集, 也就是空集, 只有一个: \emptyset ;

1 元子集, 即 单元集 : $\{1\}, \{2\}, \{3\}$;

2 元子集 : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$;

3 元子集 : $\{1, 2, 3\}$.

幂集

一般地说,对于 n 元集 A ,它的 0 元子集有 $C(n, 0)$ 个,1 元子集有 $C(n, 1)$ 个,
 $\dots\dots$, m 元子集有 $C(n, m)$ 个, $\dots\dots$, n 元子集有 $C(n, n)$ 个,故子集总数为

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n,$$

式中的 $C(n, m)$, $m = 0, 1, \dots, n$,表示从 n 个元素中选取 m 个元素的方法数.

定义 1.1.5

设 A 为集合,称 A 的全体子集构成的集合为 A 的幂集,记作 $P(A)$ 或 2^A .

形式地,

$$P(A) = \{X | X \subseteq A\}.$$

不难看出,如果 A 是 n 元集,那么 $P(A)$ 有 2^n 个元素.

幂集

一般地说,对于 n 元集 A ,它的 0 元子集有 $C(n, 0)$ 个,1 元子集有 $C(n, 1)$ 个,
 $\dots\dots$, m 元子集有 $C(n, m)$ 个, $\dots\dots$, n 元子集有 $C(n, n)$ 个,故子集总数为

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n,$$

式中的 $C(n, m)$, $m = 0, 1, \dots, n$,表示从 n 个元素中选取 m 个元素的方法数.

定义 1.1.5

设 A 为集合,称 A 的全体子集构成的集合为 A 的幂集,记作 $P(A)$ 或 2^A .

形式地,

$$P(A) = \{X | X \subseteq A\}.$$

不难看出,如果 A 是 n 元集,那么 $P(A)$ 有 2^n 个元素.

定义 1.1.6

在一个具体问题中,若所涉及的集合都是某个集合的子集,则称这个集合为全集,记作 E .

1.2 集合的运算

集合的基本运算有并、交、相对补和对称差。为叙述方便，有时我们采用符号 \vee 和 \wedge 分别表示自然语言“或”和“且”，对应第 15 章逻辑上的析取与合取。

定义 1.2.1

设 A, B 为集合， A 与 B 的并集 $A \cup B$, 交集 $A \cap B$, B 对 A 的相对补集 $A - B$ 分别定义如下：

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

若两个集合的交集为 \emptyset ，则称这两个集合是不交的。

1.2 集合的运算

集合的基本运算有并、交、相对补和对称差. 为叙述方便, 有时我们采用符号 \vee 和 \wedge 分别表示自然语言“或”和“且”, 对应第 15 章逻辑上的析取与合取.

定义 1.2.1

设 A, B 为集合, A 与 B 的并集 $A \cup B$, 交集 $A \cap B$, B 对 A 的相对补集 $A - B$ 分别定义如下:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

若两个集合的交集为 \emptyset , 则称这两个集合是 不交 的.

两个集合的并和交运算可以分别推广到 n 个集合的并和交.

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\},$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}.$$

上述的并和交可以分别简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

对称差

定义 1.2.2

设 A, B 为集合, A 与 B 的 对称差 $A \oplus B$ 定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

例如, 若 $A = \{a, b, c\}, B = \{b, d\}$, 则 $A \oplus B = \{a, c, d\}$.

对称差

定义 1.2.2

设 A, B 为集合, A 与 B 的 对称差 $A \oplus B$ 定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

例如, 若 $A = \{a, b, c\}, B = \{b, d\}$, 则 $A \oplus B = \{a, c, d\}$.

对称差运算的另一种定义是

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

不难证明这两种定义是等价的.

对称差

定义 1.2.2

设 A, B 为集合, A 与 B 的 对称差 $A \oplus B$ 定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

例如, 若 $A = \{a, b, c\}, B = \{b, d\}$, 则 $A \oplus B = \{a, c, d\}$.

对称差运算的另一种定义是

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

不难证明这两种定义是等价的.

在给定全集 E 以后, E 的子集 A 的 绝对补集 $\sim A$ 定义如下.

定义 1.2.3

$$\sim A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}.$$

例如, 若 $E = \{a, b, c, d\}, A = \{a, b, c\}$, 则 $\sim A = \{d\}$.

广义并

除了幂集 $P(A)$ 这种由集合构成的集合外, 我们还会遇到许多其他形式的由集合构成的集合, 我们将这样的集合统称为 **集族**, 用花体大写字母 \mathcal{A}, \mathcal{B} 等表示. 上文定义的并和交运算分别称为初级并和初级交. 对于集族, 下面考虑推广的并和交运算, 即广义并和广义交.

定义 1.2.4

设 \mathcal{A} 为一个集族, \mathcal{A} 中全体元素的元素组成的集合称作 \mathcal{A} 的 **广义并**, 记作 $\cup\mathcal{A}$; 描述法表示为

$$\cup\mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } x \in A\}.$$

广义并

除了幂集 $P(A)$ 这种由集合构成的集合外, 我们还会遇到许多其他形式的由集合构成的集合, 我们将这样的集合统称为 **集族**, 用花体大写字母 \mathcal{A}, \mathcal{B} 等表示. 上文定义的并和交运算分别称为初级并和初级交. 对于集族, 下面考虑推广的并和交运算, 即广义并和广义交.

定义 1.2.4

设 \mathcal{A} 为一个集族, \mathcal{A} 中全体元素的元素组成的集合称作 \mathcal{A} 的 **广义并**, 记作 $\cup\mathcal{A}$; 描述法表示为

$$\cup\mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } x \in A\}.$$

例 1.2.1

设 $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e, f\}\}$, $\mathcal{B} = \{\{a\}\}$, 则

$$\cup\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad \cup\mathcal{B} = \{a\}.$$

广义交

根据定义不难证明,若 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 则 $\cup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

定义 1.2.5

设 \mathcal{A} 为一个集族, \mathcal{A} 中全体元素的公共元素组成的集合称作 \mathcal{A} 的 广义交, 记作 $\cap \mathcal{A}$; 描述法表示为

$$\cap \mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} \text{ 均有 } x \in A\}.$$

考虑例 1.2.1 中的集合, 有 $\cap \mathcal{A} = \{a, c\}$, $\cap \mathcal{B} = \{a\}$.

和广义并类似, 若 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 则 $\cap \mathcal{A} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

广义交

根据定义不难证明,若 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 则 $\cup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

定义 1.2.5

设 \mathcal{A} 为一个集族, \mathcal{A} 中全体元素的公共元素组成的集合称作 \mathcal{A} 的 广义交, 记作 $\cap \mathcal{A}$; 描述法表示为

$$\cap \mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} \text{ 均有 } x \in A\}.$$

考虑例 1.2.1 中的集合, 有 $\cap \mathcal{A} = \{a, c\}$, $\cap \mathcal{B} = \{a\}$.

和广义并类似, 若 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 则 $\cap \mathcal{A} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

值得注意的是, 当集族 \mathcal{A} 是空族, 即 $\mathcal{A} = \emptyset$ 时, 根据定义, 其广义并和广义交分别为

$$\begin{aligned}\cup \mathcal{A} &= \{x \in E \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } x \in A\} = \emptyset, \\ \cap \mathcal{A} &= \{x \in E \mid \forall A \in \mathcal{A} \text{ 均有 } x \in A\} = E,\end{aligned}$$

这里 E 表示全集.

集合运算的优先顺序

在后面的叙述中,若只说并或交,则这都是指集合的初级并或初级交;若在并或交前面冠以“广义”两个字,则指集合的广义并或广义交.

注 1.2.1

为了使得集合表达式更为简洁,对集合运算的优先顺序做如下规定.

- ① 一类运算(一元运算)包括绝对补、幂集、广义并和广义交;一类运算之间由右向左顺序进行.
- ② 二类运算(二元运算)包括相对补、对称差、初级并和初级交,其运算按照括号结合顺序进行运算,没有括号按照从左到右顺序进行运算.
- ③ 一类运算优先于二类运算.

1.3 集合运算的性质

设 E 为全集, $A, B, C \in P(E)$.

幂等律
$$A \cup A = A \tag{1.3.1}$$

$$A \cap A = A \tag{1.3.2}$$

结合律
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1.3.3}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{1.3.4}$$

交换律
$$A \cup B = B \cup A \tag{1.3.5}$$

$$A \cap B = B \cap A \tag{1.3.6}$$

分配律
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.3.7}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1.3.8}$$

同一律
$$A \cup \emptyset = A \tag{1.3.9}$$

$$A \cap E = A \tag{1.3.10}$$

零律
$$A \cup E = E \tag{1.3.11}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{1.3.12}$$

集合运算的主要算律

排中律

$$A \cup \sim A = E \quad (1.3.13)$$

矛盾律

$$A \cap \sim A = \emptyset \quad (1.3.14)$$

吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (1.3.15)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (1.3.16)$$

德摩根律

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \quad (1.3.17)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \quad (1.3.18)$$

$$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C \quad (1.3.19)$$

$$\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C \quad (1.3.20)$$

$$\sim \emptyset = E \quad (1.3.21)$$

$$\sim E = \emptyset \quad (1.3.22)$$

$$\sim\sim A = A \quad (1.3.23)$$

集合算律证明

这里选证其中的一部分，在证明中，我们可以根据定义，采用验证等式左右互相包含的方式。

例 1.3.1

证明式 (1.3.17)，即 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

集合算律证明

这里选证其中的一部分，在证明中，我们可以根据定义，采用验证等式左右互相包含的方式。

例 1.3.1

证明式 (1.3.17)，即 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

证明.

对任意的 x ，若 $x \in A - (B \cup C)$ ，则有 $x \in A$ 且 $x \notin B \cup C$ ，即 $x \in A$, $x \notin B$ 且 $x \notin C$ ，故 $x \in A - B$ 且 $x \in A - C$ ，即 $x \in (A - B) \cap (A - C)$ ，从而有 $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$.

反过来，对任意的 x ，如果 $x \in (A - B) \cap (A - C)$ ，那么有 $x \in A - B$ 且 $x \in A - C$ ，这意味着 $x \in A$ 且 $x \notin B$, $x \notin C$ ，即 $x \in A - (B \cup C)$ ，于是有 $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C)$.

综上，我们证明了

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

集合算律证明(续)

例 1.3.2

证明式 (1.3.10), 即 $A \cap E = A$.

集合算律证明(续)

例 1.3.2

证明式 (1.3.10), 即 $A \cap E = A$.

证明.

对任意的 x , 若 $x \in A \cap E$, 则有 $x \in A$ 且 $x \in E$, 由前者知, $A \cap E \subseteq A$.

另一方面, 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则由 $A \in P(E)$ 知, 自然有 $x \in E$. 于是 $x \in A \cap E$, 故 $A \subseteq A \cap E$ 成立.

综上, 我们有 $A \cap E = A$.



集合运算性质

证明集合恒等式的另一种方法是利用已知的恒等式来代入，举例如下。

例 1.3.3

假设已知式 (1.3.1)– 式 (1.3.14)，试证明式 (1.3.15)，即 $A \cup (A \cap B) = A$ 。

集合运算性质

证明集合恒等式的另一种方法是利用已知的恒等式来代入，举例如下。

例 1.3.3

假设已知式 (1.3.1)– 式 (1.3.14)，试证明式 (1.3.15)，即 $A \cup (A \cap B) = A$ 。

证明。

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap E) \cup (A \cap B) && (\text{式 (1.3.10)}) \\ &= A \cap (E \cup B) && (\text{式 (1.3.8)}) \\ &= A \cap (B \cup E) && (\text{式 (1.3.5)}) \\ &= A \cap E && (\text{式 (1.3.11)}) \\ &= A. && (\text{式 (1.3.10)}) \end{aligned}$$

这就证明了 $A \cup (A \cap B) = A$ 。 □

集合运算性质(续)

除了以上算律以外,还有一些关于集合运算性质的重要结果. 例如,

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B. \quad (1.3.24)$$

$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B. \quad (1.3.25)$$

$$A \subseteq A. \quad (1.3.26)$$

$$A - B = A \cap \sim B. \quad (1.3.27)$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset. \quad (1.3.28)$$

$$A \oplus B = B \oplus A. \quad (1.3.29)$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C). \quad (1.3.30)$$

$$A \oplus \emptyset = A. \quad (1.3.31)$$

$$A \oplus A = \emptyset. \quad (1.3.32)$$

$$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C. \quad (1.3.33)$$

集合运算性质(续)

下面选证其中的一部分.

例 1.3.4

证明式 (1.3.27), 即 $A - B = A \cap \sim B$.

集合运算性质(续)

下面选证其中的一部分.

例 1.3.4

证明式 (1.3.27), 即 $A - B = A \cap \sim B$.

证明.

对任意的 x , 若 $x \in A - B$, 则有 $x \in A$ 且 $x \notin B$. 由后者知, $x \in \sim B$, 故有 $x \in A$ 且 $x \in \sim B$, 即 $x \in A \cap \sim B$, 故 $A - B \subseteq A \cap \sim B$.

反过来, 对任意的 x , 若 $x \in A \cap \sim B$, 则有 $x \in A$ 且 $x \in \sim B$. 由后者知, $x \notin B$, 即 $x \in A$ 且 $x \notin B$, 这表明 $x \in A - B$, 故 $A \cap \sim B \subseteq A - B$.

综上, 我们证明了 $A - B = A \cap \sim B$. □

集合运算性质(续)

例 1.3.5

证明 $(A - B) \cup B = A \cup B$.

集合运算性质(续)

例 1.3.5

证明 $(A - B) \cup B = A \cup B$.

证明.

由式 (1.3.27), 有

$$\begin{aligned}(A - B) \cup B &= (A \cap \sim B) \cup B \\&= (A \cup B) \cap (\sim B \cup B) \\&= (A \cup B) \cap E \\&= A \cup B,\end{aligned}$$

即 $(A - B) \cup B = A \cup B$.

□

例 1.3.6

证明式 (1.3.28) 成立, 即 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

例 1.3.6

证明式 (1.3.28) 成立, 即 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

证明.

先证 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$. 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则有 $x \in A \cup B$. 由 $A \cup B = B$, 知 $x \in B$, 故 $A \subseteq B$.

例 1.3.6

证明式 (1.3.28) 成立, 即 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

证明.

先证 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$. 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则有 $x \in A \cup B$. 由 $A \cup B = B$, 知 $x \in B$, 故 $A \subseteq B$.

下证 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$. 显然有 $A \cap B \subseteq A$, 反过来, 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则由 $A \subseteq B$ 知, 也有 $x \in B$, 即 $x \in A \cap B$, 故 $A \subseteq A \cap B$, 从而有 $A \cap B = A$.

例 1.3.6

证明式 (1.3.28) 成立, 即 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

证明.

先证 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$. 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则有 $x \in A \cup B$. 由 $A \cup B = B$, 知 $x \in B$, 故 $A \subseteq B$.

下证 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$. 显然有 $A \cap B \subseteq A$, 反过来, 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则由 $A \subseteq B$ 知, 也有 $x \in B$, 即 $x \in A \cap B$, 故 $A \subseteq A \cap B$, 从而有 $A \cap B = A$. 接下来, 我们证明 $A \cap B = A \Rightarrow A - B = \emptyset$. 由式 (1.3.27) 得

$$\begin{aligned}A - B &= A \cap \sim B \\&= (A \cap B) \cap \sim B \quad (\text{因为 } A \cap B = A) \\&= A \cap (B \cap \sim B) = A \cap \emptyset = \emptyset.\end{aligned}$$

例 1.3.6

证明式 (1.3.28) 成立, 即 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

证明.

先证 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$. 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则有 $x \in A \cup B$. 由 $A \cup B = B$, 知 $x \in B$, 故 $A \subseteq B$.

下证 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$. 显然有 $A \cap B \subseteq A$, 反过来, 对任意的 x , 若 $x \in A$, 则由 $A \subseteq B$ 知, 也有 $x \in B$, 即 $x \in A \cap B$, 故 $A \subseteq A \cap B$, 从而有 $A \cap B = A$. 接下来, 我们证明 $A \cap B = A \Rightarrow A - B = \emptyset$. 由式 (1.3.27) 得

$$\begin{aligned}A - B &= A \cap \sim B \\&= (A \cap B) \cap \sim B \quad (\text{因为 } A \cap B = A) \\&= A \cap (B \cap \sim B) = A \cap \emptyset = \emptyset.\end{aligned}$$

最后证 $A - B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$. 由例 1.3.5 及条件 $A - B = \emptyset$ 有

$$A \cup B = (A - B) \cup B = \emptyset \cup B = B.$$

故式 (1.3.28) 成立. □

例 1.3.7

化简 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$.

例 1.3.7

化简 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$.

解

因为 $A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$, $A \subseteq A \cup (B - C)$, 所以由式 (1.3.28) 有

$$\begin{aligned} & ((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A) \\ &= (A \cup B) - A \\ &= B - A. \end{aligned}$$

例 1.3.7

化简 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$.

解

因为 $A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$, $A \subseteq A \cup (B - C)$, 所以由式 (1.3.28) 有

$$\begin{aligned} & ((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A) \\ &= (A \cup B) - A \\ &= B - A. \end{aligned}$$

例 1.3.8

已知 $A \oplus B = A \oplus C$, 证明 $B = C$.

例 1.3.7

化简 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$.

解

因为 $A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$, $A \subseteq A \cup (B - C)$, 所以由式 (1.3.28) 有

$$\begin{aligned} & ((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A) \\ &= (A \cup B) - A \\ &= B - A. \end{aligned}$$

例 1.3.8

已知 $A \oplus B = A \oplus C$, 证明 $B = C$.

证明.

因为 $A \oplus B = A \oplus C$, 所以有 $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$. 由式 (1.3.30), 得 $(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$. 于是由式(1.3.32), 有 $\emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C$. 进而由式(1.3.29)和(1.3.31), 我们有 $B = C$, 故得证. □

1.4 有穷集的计数

集合之间的关系和初级运算
可以用文氏图 (Venn diagram), 也称维恩图, 给予描述. 文氏图是十九世纪英国的哲学家和数学家 John Venn 在 1881 年发明的.

图 1.4.1 就是一些文氏图的实例, 图中阴影的区域表示新组成的集合.

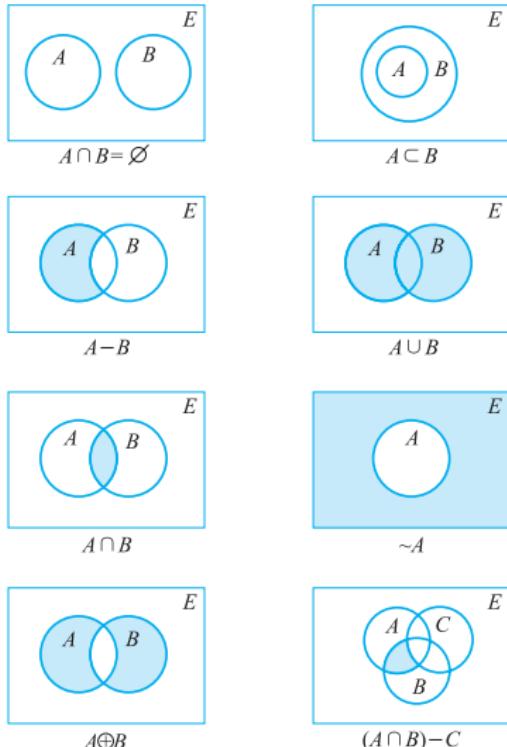


图 1.4.1

例 1.4.1

对 24 名会外语的科技人员进行外语掌握情况的调查. 结果如下: 会英语、日语、德语和法语的人数分别为 13, 5, 10 和 9 人, 其中, 同时会英语和日语的有 2 人, 会英语、德语和法语中任两种语言的都是 4 人, 会日语的人既不懂法语也不懂德语. 分别求只会一种语言(英语、德语、法语、日语)的人数和会 3 种语言的人数.

例 1.4.1

对 24 名会外语的科技人员进行外语掌握情况的调查. 结果如下: 会英语、日语、德语和法语的人数分别为 13, 5, 10 和 9 人, 其中, 同时会英语和日语的有 2 人, 会英语、德语和法语中任两种语言的都是 4 人, 会日语的人既不懂法语也不懂德语. 分别求只会一种语言(英语、德语、法语、日语)的人数和会 3 种语言的人数.

解

令 A, B, C, D 分别表示会英语、法语、德语、日语的人的集合. 根据题意画出文氏图, 设同时会 3 种语言的有 x 人, 只会英语、法语或德语一种语言的分别为 y_1, y_2 和 y_3 人. 根据已知条件列出方程组

$$\begin{cases} y_1 + 2(4 - x) + x + 2 = 13, \\ y_2 + 2(4 - x) + x = 9, \\ y_3 + 2(4 - x) + x = 10, \\ y_1 + y_2 + y_3 + 3(4 - x) + x = 19. \end{cases}$$

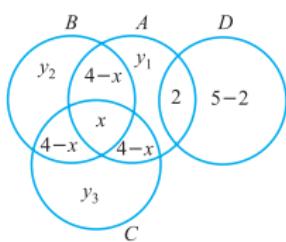


图 1.4.2

解得 $x = 1, y_1 = 4, y_2 = 2, y_3 = 3$. 只会日语的有 3 人.

例 1.4.2

求 1 到 1000 之间(包含 1 和 1000 在内)既不能被 5 和 6,也不能被 8 整除的数的个数.

例 1.4.2

求 1 到 1000 之间(包含 1 和 1000 在内)既不能被 5 和 6,也不能被 8 整除的数的个数.

解

设

$$E = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq 1000\},$$

$$A = \{x | x \in E \wedge x \text{ 可被 } 5 \text{ 整除}\},$$

$$B = \{x | x \in E \wedge x \text{ 可被 } 6 \text{ 整除}\},$$

$$C = \{x | x \in E \wedge x \text{ 可被 } 8 \text{ 整除}\}.$$

则有

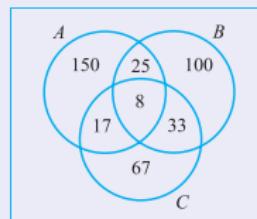
$$|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200, |B| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166, |C| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125,$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5, 6) \rfloor = 33, |A \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5, 8) \rfloor = 25,$$

$$|B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(6, 8) \rfloor = 41, |A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5, 6, 8) \rfloor = 8.$$

将这些数字依次填入文氏图,得到不能被 5,6 和 8 整除的数的个数为

$$1000 - (200 + 100 + 33 + 67) = 600.$$



包含排斥原理

定理 1.4.1 (包含排斥原理)

设 S 为有穷集, P_1, P_2, \dots, P_n 是 n 个性质. 集合 S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i , 或者不具有性质 P_i , 两种情况必居其一. 令 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, 则 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_n 的元素个数为

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| &= |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ &\quad \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

包含排斥原理(续)

推论 1.4.1

集合 S 中至少具有一条性质的元素个数为

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\&\quad \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

包含排斥原理(续)

推论 1.4.1

集合 S 中至少具有一条性质的元素个数为

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\&\quad \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

根据包含排斥原理, 例 1.4.2 所求的元素个数为

$$\begin{aligned}|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |E| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\&\quad - |A \cap B \cap C| \\&= 1\,000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\&= 600.\end{aligned}$$

错位排列

例 1.4.3

错位排列 的计数问题. 有 n 个人在参加晚会时寄存了自己的帽子. 可是保管人忘记放寄存号, 当每个人领取帽子时, 他只能随机选择一顶帽子交给寄存人. 问: 在 $n!$ 种领取帽子的方式中有多少种方式使得每个人都沒有领到自己的帽子? 如果将这些人与他们的帽子分别标号为 $1, 2, \dots, n$. 设 j 领到的帽子标号为 $i_j, j = 1, 2, \dots, n$, 那么这些人领到的帽子可以用排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 来表示, 其中每个人都沒有领到自己帽子的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 正好满足 $i_j \neq j, j = 1, 2, \dots, n$. 称这种排列为错位排列, 错位排列数记作 D_n . 证明:

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right].$$

证明.

设 S 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列的集合, P_i 是其中 i 处在排列中的第 i 位的性质, A_i 是 S 中具有性质 P_i 的排列的集合, $i = 1, 2, \dots, n$. 错位排列数 D_n 就是 S 中不具有以上任何一条性质的排列数. 不难看出

$$|S| = n!,$$

$$|A_i| = (n - 1)!, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$|A_i \cap A_j| = (n - 2)!, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n - 3)!, \quad 1 \leq i < j < k \leq n,$$

...

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 0! = 1.$$

证明.

设 S 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列的集合, P_i 是其中 i 处在排列中的第 i 位的性质, A_i 是 S 中具有性质 P_i 的排列的集合, $i = 1, 2, \dots, n$. 错位排列数 D_n 就是 S 中不具有以上任何一条性质的排列数. 不难看出

$$|S| = n!,$$

$$|A_i| = (n - 1)!, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$|A_i \cap A_j| = (n - 2)!, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n - 3)!, \quad 1 \leq i < j < k \leq n,$$

...

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 0! = 1.$$

故由包含排斥原理, 得

$$\begin{aligned} D_n &= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n| \\ &= n! - C(n, 1)(n - 1)! + C(n, 2)(n - 2)! - \dots + (-1)^n C(n, n)0! \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]. \end{aligned}$$

由此可见, 当 n 充分大时, 错位排列占所有排列的比例大约等于 e^{-1} .