

离散数学期中考试备选题(2016 年 4 月)

1. 【10'】用谓词逻辑表述以下命题，并给出其逻辑推理过程。
 - (1) 硬的饼都不好吃，不硬的饼都是甜的，所以好吃的饼都是甜的。
 - (2) 上了艺术课的高中生都很酷，有的聪明的高中生并不酷，所以有的聪明的高中生并没上艺术课。
2. 【10'】令 A, B , 和 C 为集合。试证明：
$$A \cup B \cup C = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B \cap C)$$
3. 【15'】定义实数集合上的“算术三角函数”集合如下：
 - (1) 恒等函数 $I(x) = x$ 是算术三角函数；任意常函数（也就是常数）是算术三角函数；正弦函数 $\sin(x)$ 是算术三角函数；
 - (2) 若 f 和 g 是算术三角函数，则 $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ 都是算术三角函数；
 - (3) 没有其他的算术三角函数。试以结构归纳法证明：若 $f(x)$ 是算术三角函数则其导数 $f'(x) = df/dx$ 也是算术三角函数。
4. 【10'】 A 和 B 是非空集合， $X \subseteq A$, $f: A \rightarrow B$ 是一个函数。试证明：若 f 是单射，则 X 与 $f(X)$ 等势。
5. 【10'】令 $\{1,2,3\}^\omega$ 为所有仅由数字 1、2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。
6. 【10'】试证明：若 p 是大于 3 的素数，则 $p^2 - 1$ 是 24 的倍数。
7. 【15'】 A 和 B 是两个非空集合。对任一个给定的函数 $f: A \rightarrow B$ ，可定义 A 上的一个关系 \equiv_f 如下：
$$a \equiv_f a' \quad \text{当且仅当} \quad f(a) = f(a')$$
 - a) 试证明：关系 \equiv_f 是等价关系。
 - b) 对于非空集合 A 上的任意一个等价关系 R ，试定义一个函数 $f: A \rightarrow P(A)$ 使得 $R = \equiv_f$. ($P(A)$ 是 A 的幂集。)
8. 【20'】定义：偏序集 (L, \leq) 是完全格 (complete lattice) 当且仅当 L 的任何一个子集 A 都有其最小上界 (记为 $\vee A$) 和最大下界 (记为 $\wedge A$)。定义：从偏序集 (A, \leq_A) 到偏序集 (B, \leq_B) 的函数 $f: A \rightarrow B$ 是一个单调函数当且仅

当 $\forall x, y (x \leq_A y \rightarrow f(x) \leq_A f(y))$ 。

a) 请证明：若 L 是非空有限集合，则格 (L, \leq) 必是完全格。

b) 请举出一个非空的偏序格但不是完全格的例子。

c) 试证明（Tarski-Knaster 定理）：

令 (X, \leq) 是一个完全格， $f: X \rightarrow X$ 是一个单调函数，则 f 有不动点，即存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) = x$ 。

（提示：令 $A = \{x \in X \mid f(x) \leq x\}$ 。证明 $\bigwedge A$ 是一个不动点）

d) 试证明上述提示中的不动点是 f 的最小不动点。