代数结构-代数系统
习题课及作业

2024, 4, 29

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-运算及其性质

二元运算的定义

定义 12.1.1 设 S 为集合,函数 $f:S\times S\to S$ 称为 S 上的二元运算,简称为二元运算. 这时也称 S 对 f 是封闭的

验证一个运算是否为集合 S 上的二元运算主要考虑以下两点.

(1) S 中任何两个元素都可以进行这种运算,且运算的结果是唯一的.

(2) S 中任何两个元素的运算结果都属于 S,即 S 对该运算是封闭的.

一元运算的定义

定义 12.1.2 设 S 为集合,函数 $f:S\to S$ 称为 S 上的一个一元运算,简称为一元运算. 这时也称 S 对 f 是封闭的

二元和一元运算的算符

方便起见,通常用 $\circ,*,\cdot,\diamond,\Delta$ 等符号表示二元运算或一元运算,称为算符.

二元和一元运算的表示法

表达式或运算表.

(4) 有关的重要结果.

定理 12.1.1 单位元若存在,则是唯一的.

定理 12.1.2 零元若存在,则是唯一的.

定理 12.1.3 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算,e 和 θ 分别为 $\circ$ 运算的单位元和零元. 如果 S 至少有两个元素,那么 $e\neq\theta$.

定理 12.1.4 对于可结合的二元运算,可逆元素 x 只有唯一的逆元 x^{-1}.

二元运算的算律及性质

(1) 二元运算的特异元素.

单位元 e: $\forall x\in S, x\circ e=e\circ x=x$.

零元 θ: $\forall x\in S, x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$.

幂等元 x: $x\circ x=x$.

可逆元 x 及其逆元 y(常记作 x^{-1}): $x\circ y=y\circ x=e$.

(2) 涉及一个二元运算的算律.

交换律: $\forall x,y\in S, x\circ y=y\circ x$.

结合律: $\forall x,y,z\in S,(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.

幂等律: $\forall x\in S, x\circ x=x$.

消去律: $\forall x,y,z\in S, x\neq\theta$,

$$x\circ y=x\circ z\Rightarrow y=z,$$
$$y\circ x=z\circ x\Rightarrow y=z.$$

(3) 涉及两个二元运算的算律.

分配律: $\forall x,y,z\in S$,

$$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),$$
$$(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x).$$

吸收律: $\circ$ 与 $*$ 可交换, $\forall x,y\in S$,

$$x\circ(x*y)=x,$$
$$x*(x\circ y)=x.$$

内容提要-代数系统

代数系统定义

定义 12.1.3 非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 组成的系统称作一个代数系统，简称为代数，记作 $\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$.

同类型的代数系统与同种的代数系统

定义 12.1.4 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，那么称这两个代数系统具有相同的构成成分，也称它们是同类型的代数系统. 如果两个同类型的代数系统具有共同的运算性质，那么称它们是同种的.

子代数

定义 12.1.5 设 $V = \langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$ 是代数系统，$B \subseteq S$，如果 B 对 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 都是封闭的，且 B 和 S 含有相同的代数常数，那么称 $\langle B, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$ 是 V 的子代数系统，简称为子代数. 有时将子代数系统简记为 B.

平凡子代数与真子代数

定义 12.1.6 对于任何代数系统 $V = \langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$，最大的子代数就是 V 本身. 如果令 V 中所有代数常数构成的集合为 B，且 B 对 V 中所有的运算都是封闭的，那么 B 构成了 V 的最小的子代数. 这种最大和最小的子代数称为 V 的平凡子代数. 若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为 V 的真子代数.

注：V 的子代数与 V 不仅是同类型的，也是同种的.

积代数

定义 12.1.7 设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2 = \langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统，$\circ$ 和 $*$ 为二元运算，在集合 $A \times B$ 上定义二元运算 $\cdot$ 如下.

$$\forall \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in A \times B,$$

有

$$\langle a_1, b_1 \rangle \cdot \langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1 \circ a_2, b_1 * b_2 \rangle,$$

称 $V = \langle A \times B, \cdot \rangle$ 为 V_1 与 V_2 的积代数，记作 $V_1 \times V_2$. 这时也称 V_1 和 V_2 为 V 的因子代数.

定理 12.1.5 积代数能够保持因子代数的下述运算性质：交换律、结合律、幂等律、分配律、吸收律、单位元、零元、可逆元素等.

注：消去律不一定能保持，即存在反例：两个因子代数都满足消去律，但积代数不满足消去律.

同态映射

定义 12.1.8 设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2 = \langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统，$f: A \to B$，且 $\forall x, y \in A$ 有

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y),$$

则称 f 是 V_1 到 V_2 的同态映射，简称为同态.

单同态、满同态、同构

根据同态映射的性质可以将同态分为单同态、满同态和同构，即：同态映射 f 如果是单射，那么称作单同态；如果是满射，那么称作满同态，这时称 V_2 是 V_1 的同态像；如果 f 是双射，那么称作同构，也称代数系统 V_1 同构于 V_2，记作 $V_1 \cong V_2$.

如果同态映射 f 是 V 到 V 的，那么称 f 为自同态. 类似地，可以定义单自同态、满自同态和自同构.

基本要求

- 1. 会判断给定函数 f 是否为集合 S 上的二元运算或一元运算.
- 2. 会判断或者证明二元运算的性质.
- 3. 会求二元运算的特异元素.
- 4. 掌握子代数的概念.
- 5. 掌握积代数的定义及其性质.
- 6. 能够判断函数是否为同态并分析同态的性质

题型一：代数系统及运算性质的判别

1. 下列集合和运算是否构成代数系统？如果构成，说明该系统是否满足交换律、结合律，求出该运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

   (1) 有理数集 $\mathbb{Q}$，$x*y=\dfrac{x+y}{2}$.

   (2) 自然数集 $\mathbb{N}$，$x*y=2^{xy}$.

   (3) 正整数集 $\mathbb{Z}^+$，$x*y=\gcd(x,y)$，即求 x 与 y 的最大公因数.

   (4) $A=\mathbb{R}$，$x*y=|x-y|$.

   (5) $A=\{1,-2,3,2,-4\}$，$x*y=|y|$.

   (6) $A=\mathbb{Z}$，$x*y=x+y+xy$，这里 $+$ 为普通加法.

2. 对于下列集合和二元运算，判断在 A 上是否封闭．如果是封闭的，那么指出它是否满足交换律、结合律，是否有零元和单位元.

   (1) $A=P(\{a,b\})$，$X*Y=X\cup Y$.

   (2) $A=S^S$，其中 S 为任意非空集合，运算为函数合成.

   (3) A 是非空集合 B 上所有二元关系的关系矩阵集合，$*$ 为关系矩阵乘法（相加采用逻辑加）.

   (4) $A=n\mathbb{Z}=\{nk|k\in\mathbb{Z}\}$，$n$ 是正整数，$*$ 为普通乘法.

   (5) $A=P(\{a,b\})$，$X*Y=X\oplus Y$，$\oplus$ 为集合的对称差.

   (6) A 是非空集合 B 上所有等价关系的集合，$R_1*R_2=R_1\cup R_2$.

3. 设 $A=\{a,b,c\}$，运算 $*,\circ,\cdot$ 如表 12.3.1 所示，说明这些运算是否满足交换律、结合律、幂等律、消去律，求这些运算的单位元、零元、幂等元和所有可逆元素的逆元.

表 12.3.1

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	c

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	a
b	a	a	a
c	a	a	a

题型一：代数系统及运算性质的判别

解答与分析

1. (1) 构成;交换,不结合,无单位元、零元、可逆元.

   (2) 构成;交换,不结合,无单位元、零元、可逆元.

   (3) 构成;交换,结合,无单位元和可逆元,零元 1.

   (4) 构成;交换,不结合,无单位元、零元、可逆元.

   (5) 不构成.

   (6) 构成;交换、结合,单位元 0,零元 -1,可逆元是 0 和 -2, $0^{-1}=0,(-2)^{-1}=-2$.

在讨论运算性质时注意给定的是什么集合. 例如,如果 (6) 中的运算不是定义在整数集 $\mathbb{Z}$ 上,而是定义在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上,那么除了零元 -1 以外,其他有理数 x 都是可逆元素,且 $x^{-1}=-\dfrac{x}{1+x}$.

2. (1) 封闭;交换、结合,单位元是 $\varnothing$,零元是 $\{a,b\}$.

   (2) 封闭;可结合,仅当 S 为单元集时可交换,单位元是恒等函数,S 为单元集时单位元也是零元.

   (3) 封闭;可结合,仅当 B 为单元集时可交换;单位元为单位矩阵,零元为全 0 矩阵.

   (4) 封闭;可交换、可结合;仅当 $n=1$ 时有单位元 1,0 是零元.

   (5) 封闭;可交换、可结合;单位元是空集;没有零元.

   (6) 当 $|B|<3$ 时,B 上的所有等价关系只有恒等关系和全域关系,运算封闭;此时运算满足交换律和结合律,单位元是恒等关系,零元为全域关系. 当 $|B|\geqslant 3$ 时,两个等价关系的并集不一定具有传递性,运算不封闭.

注意:有的问题中对所给定的集合或者参数没有加以具体说明. 例如 (2) 中的集合 S,(3) 和 (6) 中的集合 B,(4) 中的正整数 n 等,当这些集合或者参数取不同的值时,系统涉及交换律、单位元、零元、可逆元等性质有可能会发生改变,因此要针对不同取值进行分析.

3. $*$ 运算满足交换、结合、幂等律,不满足消去律. 单位元是 b;零元是 a;a,b,c 都是幂等元;可逆元只有 b, $b^{-1}=b$.

   $\circ$ 运算满足结合律,幂等律,不满足交换律和消去律. 没有单位元和零元,也没有可逆元素,a,b,c 都是幂等元.

   $\cdot$ 运算不满足交换律、结合律、幂等律和消去律;没有单位元、零元、可逆元素;只有 a 是幂等元.

通过运算表可以判别运算性质,也可以求运算的特异元素. 具体方法如下.

如果运算表的元素关于主对角线成对称分布,那么运算是可交换的,如表 12.3.1 中的 $*$ 运算.

如果主对角线元素的排列顺序与表头元素的排列顺序(表 12.3.1 中的 a,b,c)一样,那么运算是幂等的,如表 12.3.1 中的 $*$ 和 $\circ$ 运算.

如果在运算表中的某行或者某列(除了零元所在的行和列之外)有两个相同的元素,那么运算不满足消去律. 例如,上述的 $*$ 运算,由于 a 是零元,不考虑 a 所在的行与列,在 c 所在的行与列中 c 都出现了 2 次,这就意味着 $b*c=c*c$ 或者 $c*b=c*c$,但是显然没有 $b=c$. 因此,破坏了消去律.

如果一个元素所在的行和列的元素排列顺序都与表头元素排列顺序(表 12.3.1 中的 a,b,c)一致,那么这个元素是单位元,如 $*$ 运算表中的 b.

如果一个元素的行和列的元素都是这个元素自身,那么这个元素是零元,如 $*$ 运算表中的 a,其所在的行和列元素全是 a,因此它是零元.

如果元素 x 在主对角线中排列的位置与表头中的位置一致,那么这个元素是幂等元,如 $*$ 运算表中的 a,a 在表头中的位置是第一位,在主对角线也是排在第一位. 类似的,b 和 c 也满足要求.

最后谈谈对结合律的判断. 为判断结合律是否成立,应该对 A 中的所有元素 x,y,z 验证 $(xy)z=x(yz)$ 是否为真. 如果 A 中有 n 个元素,必须验证 n^3 个等式. 注意到以下事实:如果 x,y,z 中存在单位元或者零元,那么等式一定成立. 因此验证只需对 A 中的非单位元和非零元进行. 例如,对于 $*$ 运算只需验证 $(c*c)*c=c*(c*c)$ 是否成立,显然这是成立的,因此满足结合律. 对于 $\circ$ 运算,既没有单位元,也没有零元,这种简化验证的方法就不起作用了. 但是观察到 $\circ$ 运算具有下述特征:每个元素都是左零元,即满足 $x\circ y=x$. 因此,无论是 $(x\circ y)\circ z$ 还是 $x\circ(y\circ z)$ 都等于最左边的元素 x,从而证明了结合律. 对于 $\cdot$ 运算,上述方法都没有用. 观察运算表只有 $a\cdot b=b$,其他都是 a,有可能在涉及 $a\cdot b$ 的运算中破坏结合律. 由于

$$(b\cdot b)\cdot b=a\cdot b=b,$$

$$b\cdot(b\cdot b)=b\cdot a=a,$$

而 $a\neq b$,因此 $\cdot$ 运算不满足结合律.

题型二：子代数的判别

1. 设 $V=\langle\mathbb{Z},+\rangle$，问 $3\mathbb{Z},\{0\},V$ 是否为 V 的子代数系统，为什么？如果是，说明其中哪些是平凡子代数，哪些是真子代数.
2. 设 $V=\langle A,\oplus\rangle$，其中 $A=P(\{1,2,3\})$，$\oplus$ 为集合的对称差，试给出 V 的所有子代数，并说明哪些是平凡子代数，哪些是真子代数.

解答与分析

1. 都构成 V 的子代数，显然 $\{0\}$ 和 V 关于 + 运算是封闭的，而对于任意 $3i,3j\in 3\mathbb{Z}$，$3i+3j=3(i+j)\in 3\mathbb{Z}$，故 $3\mathbb{Z}$ 关于 + 运算也是封闭的. $\{0\}$ 和 V 是平凡子代数，$\{0\}$ 和 $3\mathbb{Z}$ 是真子代数.
2. 构成 V 的子代数. $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

   平凡子代数：$B_1=\{\varnothing\},V$.

   非平凡子代数：

   2 元的：$B_2=\{\varnothing,\{1\}\},B_3=\{\varnothing,\{2\}\},B_4=\{\varnothing,\{3\}\},B_5=\{\varnothing,\{1,2\}\},$

   $B_6=\{\varnothing,\{1,3\}\},B_7=\{\varnothing,\{2,3\},B_8=\{\varnothing,\{1,2,3\}\}\}.$

   4 元的：$B_9=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\},B_{10}=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{1,3\}\},B_{11}=\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{2,3\}\},$

   $B_{12}=\{\varnothing,\{1\},\{2,3\},\{1,2,3\}\},B_{13}=\{\varnothing,\{2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\},B_{14}=\{\varnothing,\{3\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}.$

   以上子代数中除了 V 之外，都是真子代数.

题型三：积代数中的运算

设 $V_1=\langle\{1,2,3\},\max\rangle$, $V_2=\langle\{5,6\},\min\rangle$，其中 $\max(x,y)$ 表示 x 与 y 中较大的数，$\min(x,y)$ 表示 x 与 y 中较小的数，max 与 min 可以看作二元运算. 考虑积代数 $V_1\times V_2$.

(1) 设积代数中的二元运算为 $\circ$ 运算，给出它的运算表.

(2) 说明积代数中的单位元和零元.

解答与分析

(1) 运算表如表 12.3.2 所示.

表 12.3.2

$\circ$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$
$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$
$\langle 1,6\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$
$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$
$\langle 2,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$
$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$
$\langle 3,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$

(2) 单位元是 $\langle 1,6\rangle$，零元是 $\langle 3,5\rangle$.

题型四：判断或证明同态（同构）

1. 设 $V_1 = \langle \mathbb{C}, \cdot \rangle, V_2 = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ 是代数系统，$\cdot$ 为普通乘法. 下面哪个(些)函数 f 是 V_1 到 V_2 的同态? 如果 f 是同态，指出 f 是否为单同态、满同态和同构，并求出 V_1 在 f 下的同态像；如果不是，说明理由.

    (1) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) = |z| + 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

    (2) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) = |z|, \forall z \in \mathbb{C}$.

    (3) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

    (4) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) = 2, \forall z \in \mathbb{C}$.

2. 设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle, V_2 = \langle B, * \rangle$ 和 $V_3 = \langle C, \cdot \rangle$ 都是含有一个二元运算的代数系统，证明：

    (1) $V_1 \cong V_1$.

    (2) 若 $V_1 \cong V_2$，则 $V_2 \cong V_1$.

    (3) 若 $V_1 \cong V_2, V_2 \cong V_3$，则 $V_1 \cong V_3$.

解答与分析

1. (1) 不是同态，因为 $f(1 \cdot 2) = 3, f(1) \cdot f(2) = 6$.

    (2) 是同态，不是单同态，也不是满同态与同构，同态像 $f(V_1) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

    (3) 是同态，不是单同态，也不是满同态与同构，同态像 $f(V_1) = \{0\}$.

    (4) 不是同态，因为 $f(1 \cdot 2) = 2, f(1) \cdot f(2) = 4$.

2. (1) 恒等函数 I_A 是从 A 到 A 的双射函数，且 $\forall x_1, x_2 \in V_1$ 有

$$I_A(x_1 \circ x_2) = x_1 \circ x_2 = I_A(x_1) \circ I_A(x_2),$$

因此 $V_1 \cong V_1$.

    (2) 若 $V_1 \cong V_2$，则存在同构映射 $f: V_1 \to V_2$，那么 $f^{-1}: V_2 \to V_1$ 为双射. 下面证明 f^{-1} 为同态. $\forall y_1, y_2 \in V_2$，令 $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$，则有 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. 进而由 f 是同态得

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1 * y_2) &= f^{-1}(f(x_1) * f(x_2)) \\ &= f^{-1}(f(x_1 \circ x_2)) \\ &= x_1 \circ x_2 \\ &= f^{-1}(y_1) \circ f^{-1}(y_2), \end{aligned}$$

即 $f^{-1}(y_1 * y_2) = f^{-1}(y_1) \circ f^{-1}(y_2)$，故 f^{-1} 是同态，从而有 $V_2 \cong V_1$.

    (3) 由已知，存在同构映射 $f: V_1 \to V_2, g: V_2 \to V_3$，易见 $f \circ g$ 是 V_1 到 V_3 的双射. 下面证明它也是同态映射. 任取 $x_1, x_2 \in V_1$，则有

$$\begin{aligned} f \circ g(x_1 \circ x_2) &= g(f(x_1 \circ x_2)) = g(f(x_1) * f(x_2)) \\ &= g(f(x_1)) \cdot g(f(x_2)) = f \circ g(x_1) \cdot f \circ g(x_2), \end{aligned}$$

故 $f \circ g$ 是同态，从而得到 $V_1 \cong V_3$.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) 设 $A=\{-1,1\}$,则 A 关于普通加法、减法、乘法、除法中________运算是封闭的.

(2) 设 $\mathbb{R}^*$ 为非零实数集,以下各式右边的运算为普通四则运算,

$$a\circ b=\frac{a+b}{2},\ a*b=\frac{a}{b},\ a\cdot b=ab,\ a\diamond b=a+b,$$

则在 $\mathbb{R}^*$ 上不满足结合律的运算是________运算.

(3) 设 $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$, $\otimes$ 为模 4 乘法,即 $x\otimes y=(xy)\bmod 4$,则 $\langle\mathbb{Z}_4,\otimes\rangle$ 的运算表为________.

(4) 设 $\mathbb{Z}$ 为整数集, $\forall a,b\in\mathbb{Z}, a\circ b=a+b-1$,则 $\forall a\in\mathbb{Z}$, a 的逆元 $a^{-1}=$________.

(5) 设代数系统 $V=\langle 2\mathbb{Z},+\rangle$,其中 $2\mathbb{Z}=\{2k|k\in\mathbb{Z}\}$, $+$ 为普通加法. 则 V 的子代数是________.

(6) 设代数系统 $V=\langle A,+\rangle$,其中 $A=\left\{\left.\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\right| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$, $+$ 为矩阵加法,则 V 中运算的单位元和矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ 的逆元分别是________.

2. 简答题(4 小题,每小题 10 分,共 40 分).

(1) 判断正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 和下面的每个二元运算是否构成代数系统. 如果是,那么说明这个运算是否满足交换律、结合律和幂等律,并求出单位元和零元.

$$a\circ b=\max(a,b),\ a*b=\min(a,b),\ a\cdot b=a^b,\ a\diamond b=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

(2) 设 $A=\{a,b\}$,试给出 A 上所有的一元运算,并找出一个既不可交换也不可结合的二元运算.

(3) 设代数系统 V_1,V_2,V_3 中的运算如表 12.5.1 所示,说明这些运算是否满足交换律、结合律和幂等律,求出单位元、零元和所有可逆元素的逆元(如果存在的话).

表 12.5.1

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

(4) 代数系统 $V=\langle P(\{a,b\}),\oplus\rangle$, $\oplus$ 为集合的对称差运算,求出 V 的所有子代数,并说明哪些是非平凡的真子代数.

3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) 设 $V=\langle A,\circ\rangle$ 是代数系统, V 中运算满足结合律,存在单位元,且每个元素都有逆元. 证明: $\forall a,b,c\in A$, 若 $a\circ b=a\circ c$, 则 $b=c$.

(2) 设 $V_1=\langle\mathbb{Q}^*,\cdot\rangle$ 和 $V_2=\langle\mathbb{Q},+\rangle$ 是代数系统,其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数集, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{0\}$, $\cdot$ 和 $+$ 分别代表普通乘法和加法. 证明:不存在 V_1 到 V_2 的同构映射.

4. 应用题(10 分).

设 Σ 是非空有穷字母表, ω 是 Σ 上的有限个字符构成的序列. 序列中的字符个数称为串的长度,记作 $|\omega|$. ε 表示空串, $|\varepsilon|=0$. 对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 令 Σ_k 表示 Σ 上的所有长度为 k 的串的集合, 那么 $\Sigma^*=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\Sigma_k$ 表示 Σ 上的所有串的集合. 在 Σ^* 上定义连接运算 $\circ$: $\forall\omega_1,\omega_2\in\Sigma^*$, $\omega_1=a_1a_2\cdots a_m$, $\omega_2=b_1b_2\cdots b_n$, 定义 $\omega_1\circ\omega_2=a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n$. 回答下面的问题:

(1) 如果 $|\Sigma|=n$, $\mathrm{card}\,|\Sigma^*|$ 等于什么?

(2) Σ^* 和连接运算 $\circ$ 构成代数系统,分析这个系统是否满足交换律、结合律、幂等律和消去律,是否具有单位元和零元.

(3) 令 $f:\Sigma^*\to\mathbb{N}$, $f(\omega)=|\omega|$, 证明 f 是 $\langle\Sigma^*,\circ\rangle$ 到 $\langle\mathbb{N},+\rangle$ 的满同态映射.