

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题 (6分×5 = 30 分)

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$ 在点 $P(1, 2, 3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2 + y^2 = ay$ ($a > 0$) 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1 = \int_C \cos(x + y^2)dx + (2y \cos(x + y^2) - \sqrt{1 + y^4})dy$, 其中 C 为旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, 由 $O(0, 0)$ 到 $A(2\pi a, 0)$, 其中 $a > 0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2 = \iint_S (xy + yz + zx)dS$, 其中 S 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ 的敛散性.

二、计算下列各题 (8分×5 = 40 分)

1. 讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

3. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ 的和.

4. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{2xy - x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、(本题10分) 计算 $I_3 = \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 C 是平面 $x + y + z = 1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线, 从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、(本题10分) 计算 $I_4 = \iint_S 4xz dy dz - 2yz dz dx + (1 - z^2) dx dy$, 其中 S 为曲线 $z = e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面, 取下侧.

五、(本题10分) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2(n+1)}$, $x \in (-1, 1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程, 并求解之. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2022.6.13)

一、简答题 (8 分 \times 6 = 48 分)

1. 计算 $I = \iint_D x^2 dx dy$, 其中 D 是由曲线 $xy = 1$, $xy = 2$ 以及 $y = x$, $y = 2x$ 所围图形在第一象限的部分.

2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\cos\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \right)$ 绝对收敛.

3. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数及收敛域.

4. 求方程 $y'' + e^{y'} = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ 的解.

5. 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的马克劳林展式.

6. 求函数 $y = x$ ($x \in [0, \pi]$) 的余弦级数.

二、(10 分) 已知 $y = e^x$ 为方程 $y'' + \tan x y' - (1 + \tan x)y = 0$ 的一个解, 求方程的通解.

三、(10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + dz dx + \frac{1}{1+z} dx dy$, 其中 $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, 取上侧.

四、(10 分) 已知第二型曲线积分 $I_L = \int_L (x + y^2 + e^z) dx + (2xy + yz) dy + R(x, y, z) dz$ 与路径无关, $R(0, 0, z) = z^2$. 求函数 $R(x, y, z)$ 的表达式以及当 L 的起点为 $(0, 0, 0)$, 终点为 $(1, 1, 1)$ 时 I_L 的值.

五、(10 分) 已知 $A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^k} \iiint_{\Omega(t)} (e^{xy} - 1) dx dy dz$ 为非零常数, 求 A 及 k 的值, 其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$.

六、(12 分) 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的有界连续函数, 记 $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. 求方程 $y'' - y = f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) 的有界解, 并证明对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $|y(x)| \leq M$.

微积分 II (第一层次) 期末试卷 (2023.6.14)

一、计算下列各题 (每题 6 分, 共 3 题, 合计 18 分)

1. 设 $u = e^{xy^2} + \ln(x + y + z^2)$, 求 u 在点 $P(1, -1, 1)$ 处的全微分.
2. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ 截下的部分曲面的面积.
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ 的和.

二、计算下列各题 (每题 7 分, 共 3 题, 合计 21 分)

1. 求函数 $f(x) = \frac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 的马克劳林级数, 并给出其收敛域.
2. 求微分方程 $y' - y = xy^5$ 的通积分.
3. 求微分方程 $y'' - 8y' + 16y = xe^{4x}$ 的通解.

三. (本题10分) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.

四. (本题10分) $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, Σ 为立体 Ω 的表面, 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^4 + y^4 + z^4 - z^3) dS$.

五. (本题10分) 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$ 的敛散性 (绝对收敛/条件收敛/发散), 其中 $p > 0$.

六. (本题10分) 试将函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 展成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

七. (本题10分) 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 2 + |x|, x \in [-1, 1]$.

1. 求 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的傅里叶展开式;
2. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和;
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

八. (本题11分) 求微分方程 $y'' - y = \frac{e^{2x}}{1+e^x} + \cos x$ 的通解.