

离散数学

(第 3 版)

智能科学与技术学院 2024 级

目录

- 第一部分 集合论
- 第二部分 初等数论
- 第三部分 图论
- 第四部分 组合数学
- 第五部分 代数结构
- 第六部分 数理逻辑

目录

1 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 支配集、点独立集与点覆盖集
- 边覆盖集与匹配
- 二部图中的匹配
- 着色

9.1 支配集、点独立集与点覆盖集

定义 1.1.1

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$, 若 $\forall v_i \in V - V^*, \exists v_j \in V^*$ 使得 $(v_i, v_j) \in E$, 则称 V^* 为 G 的一个支配集, 并称 v_j 支配 v_i . 设 V^* 是 G 的支配集, 且 V^* 的任何真子集都不是支配集, 则称 V^* 为极小支配集. G 的顶点数最少的支配集称作 G 的最小支配集, 最小支配集中顶点的个数称作 G 的支配数, 记作 $\gamma_0(G)$, 简记为 γ_0 .

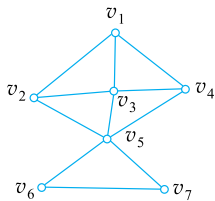
9.1 支配集、点独立集与点覆盖集

定义 1.1.1

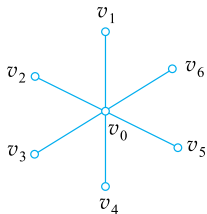
设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$, 若 $\forall v_i \in V - V^*, \exists v_j \in V^*$ 使得 $(v_i, v_j) \in E$, 则称 V^* 为 G 的一个支配集, 并称 v_j 支配 v_i . 设 V^* 是 G 的支配集, 且 V^* 的任何真子集都不是支配集, 则称 V^* 为极小支配集. G 的顶点数最少的支配集称作 G 的最小支配集, 最小支配集中顶点的个数称作 G 的支配数, 记作 $\gamma_0(G)$, 简记为 γ_0 .

例如, 设计一个大型工作站网络, 所有的工作站都需要访问一个公共的中心数据库. 为了避免拥塞, 提高查找速度, 打算在某些工作站复制这个数据库, 使得每个工作站要么自己有这个数据库的副本, 要么直接链接到一个有副本的工作站. 为了使复制的副本数尽可能少, 应如何放置副本?

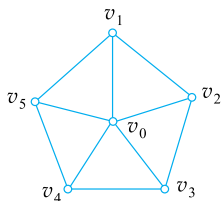
用无向图 G 建模这个网络, G 的顶点表示各个工作站, 边表示工作站之间的直接通信链路. 根据要求, 应该把副本放置在 G 的最小支配集上.



(a)

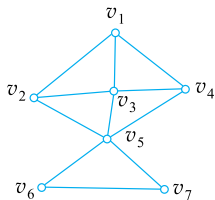


(b)

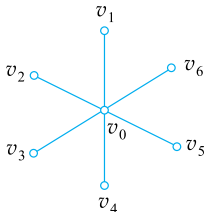


(c)

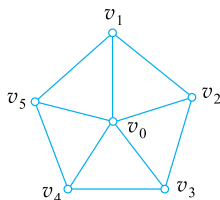
图 1.1.1



(a)



(b)



(c)

图 1.1.1

在图 1.1.1(a) 中, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_2, v_4, v_7\}$ 都是极小支配集, 其中, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$ 是最小支配集, $\gamma_0 = 2$.

图 1.1.1(b) 为 7 阶星形图, $\{v_0\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ 为极小支配集, 其中 $\{v_0\}$ 是最小支配集, $\gamma_0 = 1$.

图 1.1.1(c) 为轮图 W_6 , $\{v_0\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$ 等都是极小支配集, $\{v_0\}$ 是最小支配集, $\gamma_0 = 1$.

点独立集

定义 1.1.2

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$, 若 V^* 中任何两个顶点均不相邻, 则称 V^* 为 G 的 **点独立集**, 简称为 **独立集**. 若 V^* 再加入任何其他的顶点都不是独立集, 则称 V^* 为 **极大点独立集**; G 的顶点数最多的点独立集称作 G 的 **最大点独立集**; 最大独立集的顶点数称作 G 的 **点独立数**, 记作 $\beta_0(G)$, 简记为 β_0 .

点独立集

定义 1.1.2

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$, 若 V^* 中任何两个顶点均不相邻, 则称 V^* 为 G 的 **点独立集**, 简称为 **独立集**. 若 V^* 再加入任何其他的顶点都不是独立集, 则称 V^* 为 **极大点独立集**; G 的顶点数最多的点独立集称作 G 的 **最大点独立集**; 最大独立集的顶点数称作 G 的 **点独立数**, 记作 $\beta_0(G)$, 简记为 β_0 .

在图 1.1.1(a) 中, $\{v_1, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_2, v_4, v_7\}$ 等都是极大点独立集, 其中 $\{v_2, v_4, v_7\}$ 为最大点独立集, $\beta_0 = 3$.

图 1.1.1(b) 中, $\{v_0\}, \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ 都是极大点独立集, 其中 $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ 是最大点独立集, $\beta_0 = 6$.

图 1.1.1(c) 中, $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}$ 等都是极大点独立集, 也都是最大点独立集, $\beta_0 = 2$.

定理 1.1.1

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, 则 G 的极大点独立集都是极小支配集.

定理 1.1.1

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, 则 G 的极大点独立集都是极小支配集.

证明.

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, V^* 为 G 的极大独立集, 则 $\forall v \in V - V^*$, 必 $\exists v' \in V^*$, 使得 $(v, v') \in E$, 否则 $\exists v_0 \in V - V^*$ 不与 V^* 中任何顶点相邻, 因而 $V^* \cup \{v_0\}$ 仍为独立集, 这与 V^* 是极大独立集矛盾. 所以, V^* 是 G 的支配集. 又由于 V^* 是点独立集, 因而任何的 $V_1 \subset V^*$, $V^* - V_1$ 中的顶点都不受 V_1 中顶点支配, 即 V_1 不是支配集, 所以 V^* 是极小支配集. □

定理 1.1.1

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, 则 G 的极大点独立集都是极小支配集.

证明.

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, V^* 为 G 的极大独立集, 则 $\forall v \in V - V^*$, 必 $\exists v' \in V^*$, 使得 $(v, v') \in E$, 否则 $\exists v_0 \in V - V^*$ 不与 V^* 中任何顶点相邻, 因而 $V^* \cup \{v_0\}$ 仍为独立集, 这与 V^* 是极大独立集矛盾. 所以, V^* 是 G 的支配集. 又由于 V^* 是点独立集, 因而任何的 $V_1 \subset V^*$, $V^* - V_1$ 中的顶点都不受 V_1 中顶点支配, 即 V_1 不是支配集, 所以 V^* 是极小支配集. □

定理 1.1.1 的逆命题不成立. 在图 1.1.1(a) 中, $\{v_3, v_5\}$ 是极小支配集, 但它显然不是独立集, 更不是极大独立集.

点覆盖集

定义 1.1.3

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$, 若 $\forall e \in E, \exists v \in V^*$, 使得 v 与 e 相关联, 则称 V^* 为 G 的 **点覆盖集**, 简称为 **点覆盖**, 并称 v **覆盖** e . 设 V^* 是 G 的点覆盖, 若 V^* 的任何真子集都不是点覆盖, 则称 V^* 为 **极小点覆盖**. G 的顶点个数最少的点覆盖称为 G 的 **最小点覆盖**; 最小点覆盖中的顶点个数称作 G 的 **点覆盖数**, 记作 $\alpha_0(G)$, 简记为 α_0 .

点覆盖集

定义 1.1.3

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$, 若 $\forall e \in E, \exists v \in V^*$, 使得 v 与 e 相关联, 则称 V^* 为 G 的 **点覆盖集**, 简称为 **点覆盖**, 并称 v **覆盖** e . 设 V^* 是 G 的点覆盖, 若 V^* 的任何真子集都不是点覆盖, 则称 V^* 为 **极小点覆盖**. G 的顶点个数最少的点覆盖称为 G 的 **最小点覆盖**; 最小点覆盖中的顶点个数称作 G 的 **点覆盖数**, 记作 $\alpha_0(G)$, 简记为 α_0 .

在图 1.1.1(a) 中, $\{v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}, \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ 等都是极小点覆盖, 其中 $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ 是最小点覆盖, $\alpha_0 = 4$.

图 1.1.1(b) 中, $\{v_0\}, \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ 都是极小点覆盖, 其中 $\{v_0\}$ 是最小点覆盖, $\alpha_0 = 1$.

图 1.1.1(c) 中, $\{v_0, v_1, v_3, v_4\}, \{v_0, v_1, v_3, v_5\}$ 等都是极小点覆盖, 也都是最小点覆盖, $\alpha_0 = 4$.

定理 1.1.2

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, $V^* \subseteq V$, 则 V^* 为 G 的点覆盖当且仅当 $\overline{V^*} = V - V^*$ 为 G 的点独立集.

定理 1.1.2

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, $V^* \subseteq V$, 则 V^* 为 G 的点覆盖当且仅当 $\overline{V^*} = V - V^*$ 为 G 的点独立集.

证明.

必要性. 若存在 $v_i, v_j \in \overline{V^*}$ 相邻, 即 $(v_i, v_j) \in E$, 则这条边的两个端点 v_i, v_j 都不在 V^* 中, 与 V^* 为点覆盖矛盾, 所以 $\overline{V^*}$ 为点独立集.

充分性. 由于 $\overline{V^*} = V - V^*$ 是点独立集, 因而任意一条边的两个端点至少有一个在 V^* 中, 因而 V^* 是 G 的点覆盖. □

定理 1.1.2

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, $V^* \subseteq V$, 则 V^* 为 G 的点覆盖当且仅当 $\overline{V^*} = V - V^*$ 为 G 的点独立集.

证明.

必要性. 若存在 $v_i, v_j \in \overline{V^*}$ 相邻, 即 $(v_i, v_j) \in E$, 则这条边的两个端点 v_i, v_j 都不在 V^* 中, 与 V^* 为点覆盖矛盾, 所以 $\overline{V^*}$ 为点独立集.

充分性. 由于 $\overline{V^*} = V - V^*$ 是点独立集, 因而任意一条边的两个端点至少有一个在 V^* 中, 因而 V^* 是 G 的点覆盖. □

推论 1.1.1

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无孤立点的 n 阶无向图, $V^* \subseteq V$, 则 V^* 是 G 的极小(最小)点覆盖当且仅当 $\overline{V^*} = V - V^*$ 是 G 的极大(最大)点独立集, 从而有

$$\alpha_0 + \beta_0 = n.$$

9.2 边覆盖集与匹配

定义 1.2.1

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, $E^* \subseteq E$, 若对 $\forall v \in V, \exists e \in E^*$, 使得 v 与 e 相关联, 则称 E^* 为 **边覆盖集**, 简称为 **边覆盖**, 并称 e **覆盖** v . 设 E^* 为边覆盖, 若 E^* 的任何真子集都不是边覆盖, 则称 E^* 为 **极小边覆盖**. G 的边数最少的边覆盖称为 G 的 **最小边覆盖**. 最小边覆盖中的边数称作 G 的 **边覆盖数**, 记作 $\alpha_1(G)$, 简记为 α_1 .

9.2 边覆盖集与匹配

定义 1.2.1

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, $E^* \subseteq E$, 若对 $\forall v \in V, \exists e \in E^*$, 使得 v 与 e 相关联, 则称 E^* 为 **边覆盖集**, 简称为 **边覆盖**, 并称 e **覆盖** v . 设 E^* 为边覆盖, 若 E^* 的任何真子集都不是边覆盖, 则称 E^* 为 **极小边覆盖**. G 的边数最少的边覆盖称为 G 的 **最小边覆盖**. 最小边覆盖中的边数称作 G 的 **边覆盖数**, 记作 $\alpha_1(G)$, 简记为 α_1 .

显然当图有孤立点时不存在边覆盖. 在图 1.2.1(a) 中, $\{e_1, e_4, e_7\}, \{e_2, e_5, e_6, e_7\}$ 等都是极小边覆盖, 其中 $\{e_1, e_4, e_7\}$ 是最小边覆盖, $\alpha_1 = 3$. 在图 1.2.1(b) 中, $\{e_1, e_3, e_6\}, \{e_2, e_4, e_8\}$ 等都是极小边覆盖, 也都是最小边覆盖, $\alpha_1 = 3$.

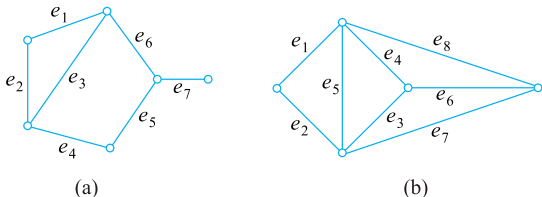


图 1.2.1

匹配

定义 1.2.2

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $E^* \subseteq E$, 若 E^* 中任何两条边均不相邻, 则称 E^* 为 G 的 **边独立集**, 也称作 G 的 **匹配**.

若在 E^* 中再加任意一条边后, 所得集合都不是匹配, 则称 E^* 为 **极大匹配**.
 G 的边数最多的匹配称作 **最大匹配**, 最大匹配中的边数称作 **边独立数** 或 **匹配数**, 记作 $\beta_1(G)$, 简记为 β_1 .

匹配

定义 1.2.2

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $E^* \subseteq E$, 若 E^* 中任何两条边均不相邻, 则称 E^* 为 G 的 **边独立集**, 也称作 G 的 **匹配**.

若在 E^* 中再加任意一条边后, 所得集合都不是匹配, 则称 E^* 为 **极大匹配**.
 G 的边数最多的匹配称作 **最大匹配**, 最大匹配中的边数称作 **边独立数** 或 **匹配数**, 记作 $\beta_1(G)$, 简记为 β_1 .

在图 1.2.1(a) 中, $\{e_2, e_6\}$, $\{e_3, e_5\}$, $\{e_1, e_4, e_7\}$ 等都是极大匹配, 其中 $\{e_1, e_4, e_7\}$ 是最大匹配, $\beta_1 = 3$.

在图 1.2.1(b) 中, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_4, e_7\}$ 等都是极大匹配, 同时也都是最大匹配, $\beta_1 = 2$.

定义 1.2.3

设 M 为图 $G = \langle V, E \rangle$ 的一个匹配,

- ① 称 M 中的边为 **匹配边**, 不在 M 中的边为 **非匹配边**.
- ② 称与匹配边相关联的顶点为 **饱和点**, 不与匹配边相关联的顶点为 **非饱和点**.
- ③ 若 G 中每个顶点都是饱和点, 则称 M 为 G 的 **完美匹配**.
- ④ G 中由匹配边和非匹配边交替构成的路径称作 **交错路径**, 起点和终点不同, 且都是非饱和点的交错路径称作 **可增广的交错路径**, G 中由匹配边和非匹配边交替构成的圈称作 **交错圈**.

定义 1.2.3

设 M 为图 $G = \langle V, E \rangle$ 的一个匹配,

- ① 称 M 中的边为 **匹配边**, 不在 M 中的边为 **非匹配边**.
- ② 称与匹配边相关联的顶点为 **饱和点**, 不与匹配边相关联的顶点为 **非饱和点**.
- ③ 若 G 中每个顶点都是饱和点, 则称 M 为 G 的 **完美匹配**.
- ④ G 中由匹配边和非匹配边交替构成的路径称作 **交错路径**, 起点和终点不同, 且都是非饱和点的交错路径称作 **可增广的交错路径**, G 中由匹配边和非匹配边交替构成的圈称作 **交错圈**.

在图 1.2.1(a) 中, $M = \{e_1, e_4, e_7\}$ 为完美匹配, 它也是最小边覆盖.

而在图 1.2.1(b) 中, $M = \{e_2, e_4\}$ 是最大匹配, 但不是完美匹配, 最右边的顶点是非饱和点, 添加一条覆盖这个顶点的边, $M \cup \{e_6\}$, $M \cup \{e_8\}$, $M \cup \{e_7\}$ 都是图的最小边覆盖. 反之, 给定一个最小边覆盖, 如 $W = \{e_1, e_3, e_6\}$, 从中移去一条相邻的边, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_1, e_6\}$ 都是图的最大匹配.

定理 1.2.1

设 n 阶图 G 中无孤立点.

- ① 设 M 为 G 的一个最大匹配, 对 G 中每个 M -非饱和点均取一条与其关联的边, 组成边集 N , 则 $W = M \cup N$ 为 G 的最小边覆盖.
- ② 设 W_1 为 G 的一个最小边覆盖, 若 W_1 中存在相邻的边就移去其中的一条, 设移去的边集为 N_1 , 则 $M_1 = W_1 - N_1$ 为 G 的最大匹配.
- ③ G 的边覆盖数 α_1 与匹配数 β_1 满足: $\alpha_1 + \beta_1 = n$.

定理 1.2.1

设 n 阶图 G 中无孤立点.

- ① 设 M 为 G 的一个最大匹配, 对 G 中每个 M -非饱和点均取一条与其关联的边, 组成边集 N , 则 $W = M \cup N$ 为 G 的最小边覆盖.
- ② 设 W_1 为 G 的一个最小边覆盖, 若 W_1 中存在相邻的边就移去其中的一条, 设移去的边集为 N_1 , 则 $M_1 = W_1 - N_1$ 为 G 的最大匹配.
- ③ G 的边覆盖数 α_1 与匹配数 β_1 满足: $\alpha_1 + \beta_1 = n$.

证明.

因为 M 为最大匹配, $|M| = \beta_1$, 所以 G 有 $n - 2\beta_1$ 个 M -非饱和点. 所得到的 $W = M \cup N$ 显然为 G 中的边覆盖, $|W| = |M| + |N| = \beta_1 + n - 2\beta_1 = n - \beta_1$. M_1 显然是 G 的一个匹配. 由 W_1 是最小边覆盖可知, W_1 中任何一条边的两个端点不可能都与 W_1 中的其他边相关联, 因而在由 W_1 构造 M_1 时, 每移去相邻两条边中的一条时, 产生且只产生一个 M_1 -非饱和点, 于是 $|N_1| = |W_1| - |M_1| = M_1$ 的非饱和点数 $= n - 2|M_1|$. 整理后得 $\alpha_1 = |W_1| = n - |M_1|$. 又因为 M_1 是匹配, W 是边覆盖, 有 $|M_1| \leq \beta_1$, $|W| \geq \alpha_1$. 于是 $\alpha_1 = n - |M_1| \geq n - \beta_1 = |W| \geq \alpha_1$, 因而上式中各项均相等. 得证: (1) $|M_1| = \beta_1$, 即 M_1 是最大匹配; (2) $|W| = \alpha_1$, 即 W 是最小边覆盖; (3) $\alpha_1 + \beta_1 = n$. □

推论 1.2.1

设图 G 无孤立点, M 是 G 的一个匹配, W 是 G 的一个边覆盖, 则 $|M| \leq |W|$, 且当等号成立时, M 是 G 的完美匹配, W 是 G 的最小边覆盖.

推论 1.2.1

设图 G 无孤立点, M 是 G 的一个匹配, W 是 G 的一个边覆盖, 则 $|M| \leq |W|$, 且当等号成立时, M 是 G 的完美匹配, W 是 G 的最小边覆盖.

证明.

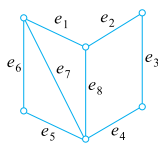
由定理 1.2.1(1), 有 $\beta_1 \leq \alpha_1$. 于是, $|M| \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \leq |W|$. 当等号成立时, 说明 M 是最大匹配, W 是最小边覆盖. 再由定理 1.2.1(3), G 的顶点数 $n = \alpha_1 + \beta_1 = 2\beta_1$, 这说明 G 中无 M -非饱和点, 故 M 是完美匹配. \square

推论 1.2.1

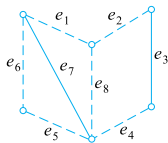
设图 G 无孤立点, M 是 G 的一个匹配, W 是 G 的一个边覆盖, 则 $|M| \leq |W|$, 且当等号成立时, M 是 G 的完美匹配, W 是 G 的最小边覆盖.

证明.

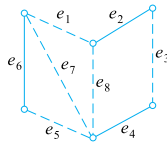
由定理 1.2.1(1), 有 $\beta_1 \leq \alpha_1$. 于是, $|M| \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \leq |W|$. 当等号成立时, 说明 M 是最大匹配, W 是最小边覆盖. 再由定理 1.2.1(3), G 的顶点数 $n = \alpha_1 + \beta_1 = 2\beta_1$, 这说明 G 中无 M -非饱和点, 故 M 是完美匹配. \square



(a)



(b)



(c)

在上图中, $M_1 = \{e_3, e_7\}$ (如 (b) 中实线边所示) 是图 (a) 的一个匹配, 但不是最大匹配. $\Gamma = e_2 e_3 e_4 e_7 e_6$ 是关于 M_1 的可增广的交错路径. 将 Γ 中的匹配边变成非匹配边, 非匹配边变成匹配边, 得到 $M_2 = \{e_2, e_4, e_6\}$ (图 (c) 中实线边所示), 它仍是一个匹配且比 M_1 多一条边. 这就是“可增广的”含义.

定理 1.2.2

设 M 是图 G 的一个匹配, 则 M 为 G 的最大匹配当且仅当 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径.

定理 1.2.2

设 M 是图 G 的一个匹配, 则 M 为 G 的最大匹配当且仅当 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径.

证明.

必要性. 设 M 为 G 中最大匹配, 若 G 中存在 M 的可增广的交错路径 Γ , 在 Γ 中匹配边比非匹配边少 1, 将 Γ 中的非匹配边变成匹配边, 匹配边变成非匹配边, 得到 M' , 即 $M' = (M \cup E(\Gamma)) - (M \cap E(\Gamma)) = M \oplus E(\Gamma)$. M' 中的边彼此不相邻且比 M 多 1 条边, 即 M' 是比 M 多 1 条边的匹配, 这与 M 是最大匹配相矛盾, 所以 M 不含可增广的交错路径.

充分性见后.

定理1.2.2. 设 M 是图 G 的一个匹配, 则 M 为 G 的最大匹配当且仅当 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径.

定理1.2.2. 设 M 是图 G 的一个匹配, 则 M 为 G 的最大匹配当且仅当 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径.

证明(续)

充分性. 设 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径, M_1 是 G 的最大匹配, 要证明 $|M| = |M_1|$. 为此, 考虑 M_1 和 M 的对称差的导出子图, 设 $H = G[M_1 \oplus M]$. 当 $H = \emptyset$ (空图) 时, $M = M_1$, 于是 M 为 G 中最大匹配. 若 $H \neq \emptyset$, 由于 M, M_1 都是匹配, 所以 H 中任一点 v , 与 M 中至多一条边相连, 与 M_1 中至多一条边相连, 即 $d_H(v) \leq 2, \Delta(H) \leq 2$. 考虑 H 各连通分支, 属于 M 的边构成的交错路径不可增广, 属于 M_1 的交错路径亦不可增广, 因而 H 各连通分支要么是由 M 和 M_1 中的边组成的交错圈, 在交错圈上 M 和 M_1 中的边数相等, 要么为由 M 和 M_1 中的边组成的交错路径. 由已知条件可知 M 不含可增广的交错路径, M_1 是最大匹配, 由必要性可知, M_1 中也无可增广的交错路径, 于是在由 M 和 M_1 组成的交错路径上, M 和 M_1 的边数也相等, 总之 M 与 M_1 的边数相同, 所以 M 为最大匹配.

9.3 二部图中的匹配

定义 1.3.1

设 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 为二部图, $|V_1| \leq |V_2|$, 若 M 为 G 的一个匹配且 $|M| = |V_1|$, 则称 M 为 V_1 到 V_2 的完备匹配.

9.3 二部图中的匹配

定义 1.3.1

设 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 为二部图, $|V_1| \leq |V_2|$, 若 M 为 G 的一个匹配且 $|M| = |V_1|$, 则称 M 为 V_1 到 V_2 的 **完备匹配**.

显然, 二部图的完备匹配是最大匹配, 但最大匹配不一定是完备匹配.

当 $|V_2| = |V_1|$ 时, 完备匹配是完美匹配.

在图 1.3.1 中, (a), (b) 中的实线边是完备匹配, 而 (c) 中的实线边是最大匹配, 但不是完备匹配.

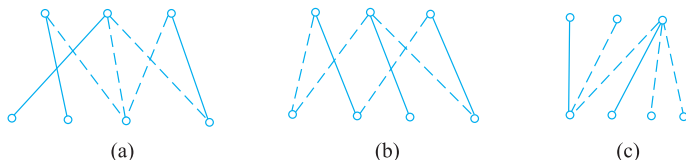


图 1.3.1

下述定理给出二部图有完备匹配的充要条件, 该条件常称作 **相异性条件**.

定理 1.3.1

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 其中 $|V_1| \leq |V_2|$, 则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 $k, 1 \leq k \leq |V_1|$, 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.

下述定理给出二部图有完备匹配的充要条件,该条件常称作 **相异性条件**.

定理 1.3.1

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 其中 $|V_1| \leq |V_2|$, 则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 $k, 1 \leq k \leq |V_1|$, 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.

证明.

定理的必要性显然,下面证明充分性. 设 M 为 G 的最大匹配,若 M 不是完备匹配,必存在非饱和点 $v_x \in V_1$. 根据相异性条件,必存在 $e \in E_1 = E - M$ 与 v_x 关联,并且 V_2 中与 v_x 相邻的顶点都是饱和点,否则与 M 是最大匹配矛盾. 考虑从 v_x 出发的尽可能长的所有交错路径,由于 M 是最大匹配,又由定理 1.2.2 可知这些交错路径都不是可增广的,因此每条路径的另一个端点一定是饱和点,从而这些端点全在 V_1 中. 令

$$S = \{v | v \in V_1 \text{ 且 } v \text{ 在从 } v_x \text{ 出发的交错路径上}\},$$

$$T = \{v | v \in V_2 \text{ 且 } v \text{ 在从 } v_x \text{ 出发的交错路径上}\}.$$

注意到,除 v_x 外, S 和 T 中的顶点都是饱和点,且由匹配边给出两者之间的一一对应,因而 $|S| = |T| + 1$. 这说明 V_1 中有 $|T| + 1$ 个顶点只与 V_2 中 $|T|$ 个顶点相邻,与相异性条件矛盾. 因此, V_1 中不存在非饱和点,故 M 是完备匹配. \square

图 1.3.1(c) 中, V_1 中有两个顶点只与 V_2 中的一个顶点相邻, 不满足相异性条件, 因而图 1.3.1(c) 不存在完备匹配. 而图 1.3.1(a), (b) 均满足相异性条件, 都有完备匹配.

图 1.3.1(c) 中, V_1 中有两个顶点只与 V_2 中的一个顶点相邻, 不满足相异性条件, 因而图 1.3.1(c) 不存在完备匹配. 而图 1.3.1(a), (b) 均满足相异性条件, 都有完备匹配.

定理 1.3.2

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 如果存在正整数 t , 使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 那么 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

图 1.3.1(c) 中, V_1 中有两个顶点只与 V_2 中的一个顶点相邻, 不满足相异性条件, 因而图 1.3.1(c) 不存在完备匹配. 而图 1.3.1(a), (b) 均满足相异性条件, 都有完备匹配.

定理 1.3.2

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 如果存在正整数 t , 使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 那么 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

证明.

由定理中的条件可知, V_1 中任意 $k, 1 \leq k \leq |V_1|$, 个顶点至少关联 kt 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 所以这 kt 条边至少关联 V_2 中 k 个顶点. 这说明 G 满足相异性条件, 因而 G 中存在完备匹配. \square

图 1.3.1(c) 中, V_1 中有两个顶点只与 V_2 中的一个顶点相邻, 不满足相异性条件, 因而图 1.3.1(c) 不存在完备匹配. 而图 1.3.1(a), (b) 均满足相异性条件, 都有完备匹配.

定理 1.3.2

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 如果存在正整数 t , 使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 那么 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

证明.

由定理中的条件可知, V_1 中任意 $k, 1 \leq k \leq |V_1|$, 个顶点至少关联 kt 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 所以这 kt 条边至少关联 V_2 中 k 个顶点. 这说明 G 满足相异性条件, 因而 G 中存在完备匹配. \square

常称定理 1.3.2 中的条件为 t 条件. t 条件是二部图有完备匹配的充分条件, 但不是必要条件. 图 1.3.1(a) 不满足 t 条件, 但有完备匹配.

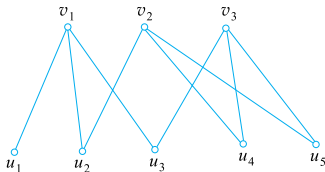
例 1.3.1

某公司招聘了 3 名大学毕业生 A, B, C . 公司部门 1-5 需要人, 部门领导与毕业生们进行了交谈. 不考虑单向的意愿, 他们交谈之后的结果(毕业生愿意去这个部门, 这个部门也同意接受这名毕业生)如下表所示, 表中符号 * 表示双向均有意愿. 如果每个部门只能接收一名毕业生, 问: 这 3 名毕业生都能到他满意的部门工作吗? 试给出分配方案.

例 1.3.1

某公司招聘了 3 名大学毕业生 A, B, C . 公司部门 1-5 需要人, 部门领导与毕业生们进行了交谈. 不考虑单向的意愿, 他们交谈之后的结果(毕业生愿意去这个部门, 这个部门也同意接受这名毕业生)如下表所示, 表中符号 * 表示双向均有意愿. 如果每个部门只能接收一名毕业生, 问: 这 3 名毕业生都能到他满意的部门工作吗? 试给出分配方案.

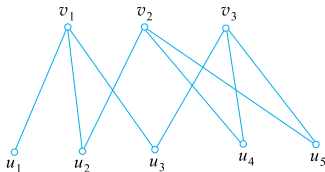
	1	2	3	4	5
A	*	*	*		
B		*		*	*
C			*	*	*



例 1.3.1

某公司招聘了 3 名大学毕业生 A, B, C. 公司部门 1-5 需要人, 部门领导与毕业生们进行了交谈. 不考虑单向的意愿, 他们交谈之后的结果(毕业生愿意去这个部门, 这个部门也同意接受这名毕业生)如下表所示, 表中符号 * 表示双向均有意愿. 如果每个部门只能接收一名毕业生, 问: 这 3 名毕业生都能到他满意的部门工作吗? 试给出分配方案.

	1	2	3	4	5
A	*	*	*		
B		*		*	*
C			*	*	*



解

表中关系可用上面的二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 表示, 其中 $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ 表示 3 名毕业生, $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_5\}$ 表示 5 个部门. 一个分配方案就是 G 的一个匹配. 由于 v_1, v_2, v_3 都关联 3 条边, 而 u_1, u_2, \dots, u_5 都至多关联 2 条边, G 满足 t 条件, $t = 3$. 根据定理 1.3.2, G 有完备匹配, 从而 A, B, C 都能到满意的部门工作. 例如, A 到 1, B 到 2, C 到 3; A 到 3, B 到 2, C 到 5 等.

例 1.3.2

视频检索. 一段视频通常称作“片断”, 每个片断由一串连续的“镜头”构成, 每个镜头可以看作由若干“帧”构成的序列, 而每个帧就是一幅图像. 因此, 视频检索从上层到下层可以分为片断检索、镜头检索与图像检索.

例 1.3.2

视频检索. 一段视频通常称作“片断”, 每个片断由一串连续的“镜头”构成, 每个镜头可以看作由若干“帧”构成的序列, 而每个帧就是一幅图像. 因此, 视频检索从上层到下层可以分为片断检索、镜头检索与图像检索.

考虑镜头检索. 给定镜头 X , 假定它由连续的 n 个帧 x_1, x_2, \dots, x_n 构成. 在视频库中存有许多镜头, 假设镜头 Y 由 m 个帧 y_1, y_2, \dots, y_m 构成. 对于帧 x_i 和 y_j , 通过图像识别可以得到 x_i 与 y_j 的相似值 w_{ij} , $0 \leq w_{ij} \leq 1$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

例 1.3.2

视频检索. 一段视频通常称作“片断”, 每个片断由一串连续的“镜头”构成, 每个镜头可以看作由若干“帧”构成的序列, 而每个帧就是一幅图像. 因此, 视频检索从上层到下层可以分为片断检索、镜头检索与图像检索.

考虑镜头检索. 给定镜头 X , 假定它由连续的 n 个帧 x_1, x_2, \dots, x_n 构成. 在视频库中存有许多镜头, 假设镜头 Y 由 m 个帧 y_1, y_2, \dots, y_m 构成. 对于帧 x_i 和 y_j , 通过图像识别可以得到 x_i 与 y_j 的相似值 w_{ij} , $0 \leq w_{ij} \leq 1$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

构造带权的完全二部图 $G = \langle X, Y, E, W \rangle$, 其中 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, $W = \{w_{ij} | i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$.

设 M 是 G 的一个匹配, M 的权值定义为 $W(M) = \sum_{(i,j) \in M} w_{ij}$.

定义镜头 X 与 Y 的相似度 $D(X, Y)$ 是 G 的带最大权的匹配, 即

$$D(X, Y) = \max\{W(M) | M \text{ 是 } \langle X, Y, E, W \rangle \text{ 的匹配}\}.$$

所谓视频检索, 就是在视频库中找到与给定镜头 X 具有最大相似度的镜头 Y .

9.4 着色

图着色问题的研究起源于四色猜想,着色问题包含点着色、边着色和地图着色等,其中点着色和边着色都是对无环的无向图进行的.

9.4 着色

图着色问题的研究起源于四色猜想,着色问题包含点着色、边着色和地图着色等,其中点着色和边着色都是对无环的无向图进行的.

定义 1.4.1

设无向图 G 无环,对 G 的每个顶点涂一种颜色,使相邻的顶点涂不同的颜色,称作图 G 的一种点着色,简称为着色.

若能用 k 种颜色给 G 的顶点着色,则称 G 为 k -可着色的.

若 G 是 k -可着色的,但不是 $(k-1)$ -可着色的,则称 G 的色数为 k . 图 G 的色数记作 $\chi(G)$,简记作 χ .

9.4 着色

图着色问题的研究起源于四色猜想,着色问题包含点着色、边着色和地图着色等,其中点着色和边着色都是对无环的无向图进行的.

定义 1.4.1

设无向图 G 无环,对 G 的每个顶点涂一种颜色,使相邻的顶点涂不同的颜色,称作图 G 的一种点着色,简称为着色.

若能用 k 种颜色给 G 的顶点着色,则称 G 为 k -可着色的.

若 G 是 k -可着色的,但不是 $(k-1)$ -可着色的,则称 G 的色数为 k . 图 G 的色数记作 $\chi(G)$,简记作 χ .

图着色应用场景 1: 有 n 项工作,每项工作需要一天的时间完成. 有些工作由于需要相同的人员或设备不能同时进行,问至少需要几天才能完成所有的工作.

用图描述如下:用顶点表示工作,如果两项工作需要相同的人员或设备就用一条边连接对应的顶点. 工作的时间安排对应于这个图的点着色:着同一种颜色的顶点对应的工作可以安排在同一天,所需的最少天数正好是这个图的色数.

图着色应用场景 2: 计算机有 k 个寄存器, 现正在编译一个程序, 要给每一个变量分配一个寄存器. 如果两个变量要在同一时刻使用, 那么不能把它们分配给同一个寄存器. 可以构造一个图, 每一个变量是一个顶点, 如果两个变量要在同一时刻使用, 那么用一条边连接这两个变量. 于是, 这个图的 k -着色对应给变量分配寄存器的一种安全方式: 给着不同颜色的变量分配不同的寄存器.

图着色应用场景 2: 计算机有 k 个寄存器, 现正在编译一个程序, 要给每一个变量分配一个寄存器. 如果两个变量要在同一时刻使用, 那么不能把它们分配给同一个寄存器. 可以构造一个图, 每一个变量是一个顶点, 如果两个变量要在同一时刻使用, 那么用一条边连接这两个变量. 于是, 这个图的 k -着色对应给变量分配寄存器的一种安全方式: 给着不同颜色的变量分配不同的寄存器.

图着色应用场景 3: 无线交换设备的波长分配. 有 n 台设备和 k 个发射波长, 要给每台设备分配一个波长. 若两台设备靠得太近, 则不能给它们分配相同的波长, 以防干扰. 以设备为顶点构造一个图, 若两台设备靠得太近, 则用一条边连接它们. 用一种颜色表示一个波长, 于是这个图的 k -着色给出一个波长分配方案.

图着色应用场景 2: 计算机有 k 个寄存器, 现正在编译一个程序, 要给每一个变量分配一个寄存器. 如果两个变量要在同一时刻使用, 那么不能把它们分配给同一个寄存器. 可以构造一个图, 每一个变量是一个顶点, 如果两个变量要在同一时刻使用, 那么用一条边连接这两个变量. 于是, 这个图的 k -着色对应给变量分配寄存器的一种安全方式: 给着不同颜色的变量分配不同的寄存器.

图着色应用场景 3: 无线交换设备的波长分配. 有 n 台设备和 k 个发射波长, 要给每台设备分配一个波长. 若两台设备靠得太近, 则不能给它们分配相同的波长, 以防干扰. 以设备为顶点构造一个图, 若两台设备靠得太近, 则用一条边连接它们. 用一种颜色表示一个波长, 于是这个图的 k -着色给出一个波长分配方案. 不难证明下述几条关于色数的性质.

例 1.4.1

- ① $\chi(G) = 1$ 当且仅当 G 是零图.
- ② $\chi(K_n) = n$.
- ③ 偶圈的色数为 2, 奇圈为 3, 奇阶轮图的色数为 3, 偶阶轮图的色数为 4.
- ④ 设 G 至少含一条边, 则 $\chi(G) = 2$ 当且仅当 G 为二部图.

定理 1.4.1

对于任意的无环图 G , 均有 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

定理 1.4.1

对于任意的无环图 G , 均有 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

证明.

对 G 的阶数 n 作归纳证明. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立, 设 $n = k \geq 1$ 时结论成立. 现考虑 $n = k + 1$ 的情况.

任取 G 的一个顶点 v , 令 $G' = G - v$, G' 的阶数为 k . 由归纳假设, 可用 $\Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ 种颜色给 G' 的顶点着色. 而 v 至多与 G' 的 $\Delta(G)$ 个顶点相邻, 在 G' 的点着色中, 这些顶点至多用了 $\Delta(G)$ 种颜色, 因此在这 $\Delta(G) + 1$ 种颜色中至少存在一种颜色可以给 v 着色, 使 v 与相邻顶点着不同颜色. 得证当 $n = k + 1$ 时结论也成立. □

定理 1.4.1

对于任意的无环图 G , 均有 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

证明.

对 G 的阶数 n 作归纳证明. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立, 设 $n = k \geq 1$ 时结论成立. 现考虑 $n = k + 1$ 的情况.

任取 G 的一个顶点 v , 令 $G' = G - v$, G' 的阶数为 k . 由归纳假设, 可用 $\Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ 种颜色给 G' 的顶点着色. 而 v 至多与 G' 的 $\Delta(G)$ 个顶点相邻, 在 G' 的点着色中, 这些顶点至多用了 $\Delta(G)$ 种颜色, 因此在这 $\Delta(G) + 1$ 种颜色中至少存在一种颜色可以给 v 着色, 使 v 与相邻顶点着不同颜色. 得证当 $n = k + 1$ 时结论也成立. □

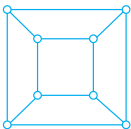
定理 1.4.1 中色数的上界当 G 是完全图 K_n , $n \geq 3$, 或奇圈时达到. 当不是完全图和奇圈时, 色数的上界可以改进, 见下述 Brooks 定理, 其证明略去.

定理 1.4.2

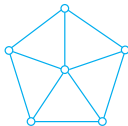
设 $n \geq 3$, 若连通图 G 不是完全图 K_n , 也不是奇圈, 则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

例 1.4.2

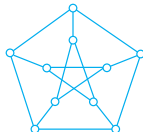
求下图所示的各图的色数.



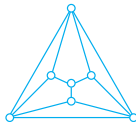
(a)



(b)



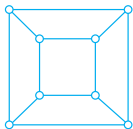
(c)



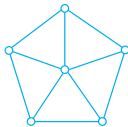
(d)

例 1.4.2

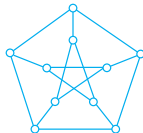
求下图所示的各图的色数.



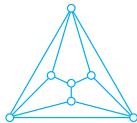
(a)



(b)



(c)



(d)

解

图 (a) 为二部图，由例 1.4.1(4), $\chi = 2$.

图 (b) 为 6 阶轮图 W_6 ，由例 1.4.1(3), $\chi = 4$.

图 (c) 是彼得松图， $\Delta = 3$ ，由 Brooks 定理， $\chi \leq 3$. 又因为图中有奇圈，由例 1.4.1(3), $\chi \geq 3$ ，故 $\chi = 3$.

对图 (d)，由 Brooks 定理， $\chi \leq \Delta = 4$. 又因为图中有奇圈，有 $\chi \geq 3$. 因而， $\chi = 3$ 或 4. 但不可能用 3 种颜色给它着色. 事实上，最外面的 3 个顶点必须用 3 种颜色；中间一层的 3 个顶点中每一个都与在最外面的 2 个相关联，从而也要用 3 种颜色；最里面的顶点与中间的 3 个顶点都关联，必须用第 4 种颜色. 因此， $\chi = 4$.

地图着色

连通无桥平面图的一个平面嵌入及其所有的面称作 **地图**，地图的面称作“**国家**”。若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是 **相邻** 的。

定义 1.4.2

对地图 G 的每个国家涂一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称作对地图 G 的 **面着色**。

若能够用 k 种颜色给 G 的面着色，则称 G 为 **k -可面着色的**。

若 G 为 k -可面着色的，但不是 $(k-1)$ -可面着色的，则称 G 的 **面色数** 为 k 。 G 的面色数记作 $\chi^*(G)$ ，简记作 χ^* 。

地图着色

连通无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称作 **地图**，地图的面称作“**国家**”。若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是 **相邻** 的。

定义 1.4.2

对地图 G 的每个国家涂一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称作对地图 G 的 **面着色**。

若能够用 k 种颜色给 G 的面着色，则称 G 为 **k -可面着色的**。

若 G 为 k -可面着色的，但不是 $(k-1)$ -可面着色的，则称 G 的 **面色数** 为 k 。 G 的面色数记作 $\chi^*(G)$ ，简记作 χ^* 。

地图是无桥的平面图，它的对偶图无圈。由于地图上的国家与它的对偶图的顶点一一对应，且两个国家相邻当且仅当对应的顶点相邻，因此可以把地图的面着色转化成它的对偶图的点着色。

地图着色

连通无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称作 **地图**，地图的面称作“**国家**”。若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是 **相邻** 的。

定义 1.4.2

对地图 G 的每个国家涂一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称作对地图 G 的 **面着色**。

若能够用 k 种颜色给 G 的面着色，则称 G 为 **k -可面着色的**。

若 G 为 k -可面着色的，但不是 $(k-1)$ -可面着色的，则称 G 的 **面色数** 为 k 。 G 的面色数记作 $\chi^*(G)$ ，简记作 χ^* 。

地图是无桥的平面图，它的对偶图无圈。由于地图上的国家与它的对偶图的顶点一一对应，且两个国家相邻当且仅当对应的顶点相邻，因此可以把地图的面着色转化成它的对偶图的点着色。

定理 1.4.3

地图 G 是 k -可面着色的当且仅当它的对偶图 G^* 是 k -可着色的。

四色猜想

由于平面图的对偶图是平面图, 根据定理 1.4.3, 地图着色(面着色)可以归结于平面图的点着色.

四色猜想: 任何地图都可以用 4 种颜色着色.

由于地图着色可以归结于平面图的点着色, 因而后来的提法是: 任何平面图都是 4-可着色的. 1976 年两位美国数学家阿佩尔和黑肯终于证明了它, 从而使得四色猜想成为下面的 **四色定理**.

四色猜想

由于平面图的对偶图是平面图,根据定理 1.4.3,地图着色(面着色)可以归结于平面图的点着色.

四色猜想:任何地图都可以用 4 种颜色着色.

由于地图着色可以归结于平面图的点着色,因而后来的提法是:任何平面图都是 4-可着色的. 1976 年两位美国数学家阿佩尔和黑肯终于证明了它,从而使得四色猜想成为下面的**四色定理**.

定理 1.4.4

任何平面图都是 4-可着色的.

阿佩尔和黑肯的证明是根据前人的证明思路,用计算机完成的. 他们证明,如果四色猜想不成立,那么存在一个反例,这个反例大约有 2000 种(后来有人简化到 600 多种)可能,然后他们用计算机分析了所有这些可能,都没有导致反例,从而证明四色猜想成立. 但是,对四色定理的研究并没有到此结束,他们的证明毕竟是用计算机完成的,寻找相对短的、能被人阅读和检查的证明仍是数学家追求的目标.

下面讨论边着色, 这里的图仍旧是无环的无向图.

定义 1.4.3

对图 G 的每条边着一种颜色, 使相邻的边着不同的颜色, 称作对图 G 的 **边着色**. 若能用 k 种颜色给 G 的边着色, 则称 G 为 **k -可边着色的**.

若 G 为 k -可边着色的, 但不是 $(k-1)$ -可边着色的, 则称 G 的 **边色数** 为 k . G 的边色数记作 $\chi'(G)$, 简记作 χ' .

下面讨论边着色, 这里的图仍旧是无环的无向图.

定义 1.4.3

对图 G 的每条边着一种颜色, 使相邻的边着不同的颜色, 称作对图 G 的 **边着色**. 若能用 k 种颜色给 G 的边着色, 则称 G 为 **k -可边着色的**.

若 G 为 k -可边着色的, 但不是 $(k-1)$ -可边着色的, 则称 G 的 **边色数** 为 k . G 的边色数记作 $\chi'(G)$, 简记作 χ' .

下面的 Vizing 定理表明, 简单图的边色数只可能取两个值: Δ 或者 $\Delta + 1$.

定理 1.4.5

设 G 为简单图, 则 $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

证明略去. 虽然简单图的边色数只可能取两个值, 但什么情况下取 Δ , 什么情况下取 $\Delta + 1$, 至今还是一个没有解决的问题.

下面讨论边着色, 这里的图仍旧是无环的无向图.

定义 1.4.3

对图 G 的每条边着一种颜色, 使相邻的边着不同的颜色, 称作对图 G 的 **边着色**. 若能用 k 种颜色给 G 的边着色, 则称 G 为 **k -可边着色的**.

若 G 为 k -可边着色的, 但不是 $(k-1)$ -可边着色的, 则称 G 的 **边色数** 为 k . G 的边色数记作 $\chi'(G)$, 简记作 χ' .

下面的 Vizing 定理表明, 简单图的边色数只可能取两个值: Δ 或者 $\Delta + 1$.

定理 1.4.5

设 G 为简单图, 则 $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

证明略去. 虽然简单图的边色数只可能取两个值, 但什么情况下取 Δ , 什么情况下取 $\Delta + 1$, 至今还是一个没有解决的问题.

定理 1.4.6

二部图的边色数等于 Δ .

证明略去.

由定义及 Vizing 定理不难证明下述事实.

例 1.4.3

长度 ≥ 2 的偶圈的边色数等于 2; 长度 ≥ 3 的奇圈的边色数等于 3.

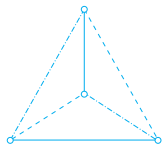
由定义及 Vizing 定理不难证明下述事实.

例 1.4.3

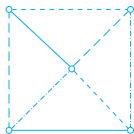
长度 ≥ 2 的偶圈的边色数等于 2; 长度 ≥ 3 的奇圈的边色数等于 3.

例 1.4.4

证明 $\chi'(W_n) = n - 1$, 其中 $n \geq 4$.



(a)



(b)

证明.

当 $n = 4$ 和 $n = 5$ 时, 不难用 3 种和 4 种颜色分别给 W_4 和 W_5 的边着色, 如左图所示. 又因为它们 Δ 分别为 3 和 4, 故由 Vizing 定理得证结论正确.

当 $n \geq 6$ 时, W_n 中间顶点关联的 $n - 1$ 条边用 $n - 1$ 种颜色着色, 而外圈上的每一条边都与 4 条边相邻, 总可以从这 $n - 1 \geq 5$ 种颜色中找到一种颜色给它着色, 所以 $\chi'(W_n) \leq n - 1$, 又由 Vizing 定理, $\chi'(W_n) \geq \Delta(W_n) = n - 1$, 得证 $\chi'(W_n) = n - 1$. □

例 1.4.5

证明: 当 $n (\neq 1)$ 为奇数时, $\chi'(K_n) = n$, 而当 n 为偶数时, $\chi'(K_n) = n - 1$.

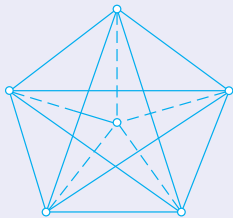
例 1.4.5

证明: 当 $n (\neq 1)$ 为奇数时, $\chi'(K_n) = n$, 而当 n 为偶数时, $\chi'(K_n) = n - 1$.

证明.

当 n 为奇数且 $n \neq 1$ 时, 由 Vizing 定理, $\chi'(K_n) \leq \Delta + 1 = n$. 下证 $\chi'(K_n) \geq n$.

画 K_n 如下: 先画正 n 边形 C_n , 将 C_n 上不相邻的顶点之间都连线段就得到 K_n . 在 K_n 中共有 n 组互相平行的边, 每组 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条边. $\frac{1}{2}(n-1)$ 条平行边关联 $n-1$ 个顶点, 因而在 K_n 的边着色中至多有 $\frac{1}{2}(n-1)$ 条边同色, 故 $\frac{1}{2}(n-1)\chi'(K_n) \geq \frac{1}{2}(n-1)n$, 得 $\chi'(K_n) \geq n$.



当 n 为偶数时, 由 Vizing 定理, $\chi'(K_n) \geq \Delta = n - 1$. 下面证明 $\chi'(K_n) \leq n - 1$.

K_n 可如下构造: 先画出 K_{n-1} , 在 K_{n-1} 的中心放置一个顶点, 连接中心点与 K_{n-1} 上的所有顶点. 当 $n = 6$ 时的情况如左图所示. 用 $\chi'(K_{n-1}) = n - 1$ 种颜色给 K_{n-1} 的边着色, 然后给与中心点关联的边着 K_{n-1} 中与它垂直的边的颜色, 就完成了 K_n 的边着色.