

南京大学数学系试卷

2019/2020 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 数值计算方法 (B 卷)
 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____
 考试时间 2020.8.12 任课教师 _____ 考试成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. 填空题 (22' = 2' × 3 + 4' × 4 分)

1. 设 $f(x) = 2^x$, 步长 $h = 1$, 则 $\Delta^3 f(n) = \underline{2^n}$.
2. 设 x_0, x_1, \dots, x_n 为 $n+1$ 个相异的插值节点, $l_i(x)(i=0, 1, \dots, n)$ 为 Lagrange 基本多项式, 则 $\sum_{i=0}^n l_i(x) = \underline{1}$.
3. 假设函数 $f(x) \in C^6[a, b]$, 且 $x_i = a + (i-1)h, h = (b-a)/n, i = 1, 2, \dots, n+1$, 且 $f'(a) = f'(b)$. 则利用复合梯形公式计算 $\int_a^b f(x)dx$ 的误差余项为 $O(h^\eta)$, 其中 $\eta = \underline{4}$.
4. 利用复合梯形公式计算积分时, $h = \frac{b-a}{2^{m-1}}$, 若把区间 $[a, b]$ 分别进行 2^{m-1} 等分和 2^{m-2} 等分可得到积分结果 $T_{m,1}$ 和 $T_{m-1,1}$, 则通过 Romberg 积分法可进一步提高精度, 即取 $T_{m,2} = \frac{4T_{m,1}-T_{m-1,1}}{3}$, 记此时离散误差为 $O(h^\eta), \eta = \underline{4}$
5. 设 $f(x) = 7x^7 + 5x^5 + 4$, 则 $f[2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^7] = \underline{7}, f[2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^7, 2^8] = \underline{0}$.
6. 设 I 为 n 阶单位方阵, 则其从属范数 $\|I\| = \underline{1}$. 谱半径 $\rho(A)$ 是 $C^{n \times n}$ 中矩阵范数 $\|A\|$ 的 下确界.
7. 非奇异矩阵一定存在 LU 分解吗? 如果一定存在, 给出理由, 如果不一定存在, 请举出反例.

不一定, 例如 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 既不存在 Doolittle 分解, 也不存在 Crout 分解.

二. (10 分) 应用 Gauss 按比例列主元消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

解:

$$S_1 = 2, S_2 = 4, S_3 = 10, \frac{|a_{11}|}{S_1} = \frac{1}{2}, \frac{|a_{21}|}{S_2} = \frac{3}{4}, \frac{|a_{31}|}{S_3} = \frac{1}{5},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} l_{21} = \frac{1}{3}, l_{31} = \frac{2}{3} \text{ 消元} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 2 \\ 2/3 & 22/3 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$\frac{|a_{22}|}{S_2} = \frac{1}{4}, \frac{|a_{32}|}{S_3} = \frac{11}{15}$, 故第三行为第二次消元的主行,

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 22/3 & 4 & 8 \\ 2/3 & 2/3 & 1 & 2 \end{bmatrix} l_{32} = \frac{1}{11} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 22/3 & 4 & 8 \\ 2/3 & 1/11 & 7/11 & 14/11 \end{bmatrix},$$

回代得 $x_3 = 2, x_2 = 0, x_1 = 1$.

三. (10 分) 在 $-4 \leq x \leq 4$ 上给出 $f(x) = e^x$ 的等距节点函数表, 若用分段二次插值求 $f(x_i)$ 的近似值, 要使截断误差不超过 $\frac{\sqrt{3}e^4}{216}$, 问使用函数表的步长 h 应满足什么条件?

解: 以 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 为节点做二次插值多项式, 则插值余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

式中 $x = x_i + th$ 则 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 分别对应于 $t = -1, 0, 1$, 且 $(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) = (t-1)t(t+1)h^3$ 则

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \left| \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \\ &\leq \frac{e^4}{6} \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})| \\ &\leq \frac{e^4}{6} h^3 \max_{-1 \leq t \leq 1} |(t-1)t(t+1)| \\ &\leq \frac{e^4}{6} h^3 \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e^4}{9\sqrt{3}} h^3 \end{aligned}$$

令 $\frac{e^4}{9\sqrt{3}} h^3 \leq \frac{\sqrt{3}e^4}{216}$, 则 $h \leq 0.5$

四. (10 分) 判断能否使用有限个节点 Gauss 积分方法计算得到 $\int_1^2 \frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}} dx$ 的精确解, 并给出理由或者计算过程.

解: 令 $x = \frac{y+3}{2}$, 将积分区间变换到 $[-1, 1]$,

$$\int_1^2 \frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{y^3+y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

令权函数 $w(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, 则 $f(y) = y^3 + y^2$ 为三次函数, 因此本题只需取二次 Chebyshev 多项式的零点作为 Gauss 点进行 Gauss 积分即可得到精确解。

由 Chebyshev 多项式零点公式: $y_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$, $k = 0, 1, \dots$ 得

$$y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{则 } \int_{-1}^1 \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \approx A_0 f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + A_1 f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A_0 = A_1 = \frac{\pi}{2} \text{ 则 } \int_{-1}^1 \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \approx \frac{\pi}{2} \left[f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]$$

$$\text{因此原积分} = \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right] = \frac{\pi}{4}$$

五. (12 分) 已知 $x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$ 。推导以这三个点为求积节点在 $[0, 1]$ 上的插值型求积公式；分析求积公式的代数精度。

解：

过这三点的插值多项式为

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$\text{则 } \int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 L_2(x)dx = \sum_{k=0}^2 A_k f(x_k), \text{ 其中}$$

$$A_0 = \int_0^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = -\frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_0^1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx = \frac{2}{3}$$

所以求积公式为

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$$

上述积分公式至少具有二次精度，将 $f(x) = x^3, x^4$ 分别代入验证，可得对 $f(x) = x^3$ 精确成立，对 $f(x) = x^4$ 数值积分与精确积分不能严格相等，故积分公式具有三次代数精度。

六. (12 分) 确定下列求积公式中的参数使其精度尽量高，并且指出其代数精度。并基于此积分公式给出复合型积分公式。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \alpha(b-a)^2[f'(a) - f'(b)]$$

解：求积公式中只有一个待定参数 α ，当 $f(x) = 1$ ，左边 = $b-a$ = 右边；

当 $f(x) = x$ ，左边 = $\frac{b^2-a^2}{2}$ = 右边；

故令 $f(x) = x^2$ 时求积公式准确成立，即

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b-a}{2}(a^2+b^2) + \alpha(b-a)^2(2a-2b)，解得$$

$$a = \frac{1}{12}.$$

将 $f(x) = x^3$ 代入上述求积公式，有

左边 = $\frac{b^4-a^4}{4}$ = 右边；

当 $f(x) = x^4$ ，左边 = $\frac{b^5-a^5}{5} \neq$ 右边；

所以代数精度为 3。

将 $[a, b]$ 作 n 等分，记 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih, 0 \leq i \leq n$ ，复化求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h^2}{12} [f'(x_i) - f'(x_{i+1})] \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h^2}{12} [f'(a) - f'(b)]$$

七. (10 分) 设 $f(x) = e^{x^2}$ 。任取 $a < b$ ，证明应用梯形公式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所得结果比准确值大，并说明几何意义。

证明： $f''(x) = (e^{x^2} \cdot 2x)' = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} > 0, \forall x$

梯形公式 $I_1(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

其离散误差为

$$E_1(f) = I(f) - I_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

由 $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ，故有 $I(f) - I_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) < 0, \quad \xi \in [a, b]$

即梯形公式计算结果比实际结果大。

$f(x)$ 为上凹函数，利用直边代替曲边计算由 $x = a, b$ 和曲线以及 x 轴围成的面积时，计算结果大于实际面积。

八. (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式 $H_3(x)$ ，使其满足插值条件，

$$H_3(a) = f(a), H'_3(a) = f'(a), H''_3(a) = f''(a), H'''_3(b) = f'''(b),$$

并求其余项 $f(x) - H_3(x)$ 的表达式。

解：

设 $H_3(x) = N_2(x) + A(x-a)^3$ ，其中 $N_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$ ，

显然 $H_3(a) = f(a)$, $H'_3(a) = f'(a)$, $H''_3(a) = f''(a)$,

又 $H'''_3(x) = f'''(a) + 6A(x-a)$ ，将 $H'''_3(b) = f'''(b)$ 代入得 $A = \frac{1}{6} \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b-a}$ ，

从而得

$$H_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b-a} (x-a)^3,$$

设 $r(x) = f(x) - H_3(x)$ ， a 为三重根，

记 $w(x) = (x-a)^3(x-c)$ ，设 $w''(b) = 0$ ，则可得 $c = 2b-a$ ，

于是 $r(x) = k(x)w(x)$ ，作辅助函数 $g(t) = f(t) - H_3(t) - k(x)w(t)$ ，

显然 $g(a)$, $g'(a)$, $g''(a)$, $g(x)$, $g''(b)$ 均为零，

反复应用 Roll 定理得 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $g^{(4)}(\xi) = 0$ ，

从而推出 $r(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x-a)^3(x-2b+a)$ 。

