图之树
习题课及作业

2024, 5, 23

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-无向树

无向树的定义

定义 7.1.1 连通无回路的无向图称作*无向树*，或简称为*树*．每个连通分支都是树的无向图称作*森林*．平凡图称作*平凡树*．在无向树中，悬挂顶点称作*树叶*，度数大于等于 2 的顶点称作*分支点*．

说明：定义中的回路是指初级回路或简单回路．

无向树的判别

定理 7.1.1 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图，则下列各命题是等价的．

(1) G 是树．

(2) G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径．

(3) G 中无回路且 $m=n-1$．

(4) G 是连通的且 $m=n-1$．

(5) G 是连通的且任何边均为桥．

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得的图中有唯一的一个含新边的圈．

定理 7.1.2 设 T 是 n 阶非平凡的无向树，则 T 中至少有两片树叶．

称只有一个分支点，且分支点的度数为 $n-1$ 的 $n(\geq 3)$ 阶无向树为*星形图*，称其唯一的分支点为*星心*．

内容提要-生成树

无向图 G 的生成树

定义 7.1.2 如果无向图 G 的生成子图 T 是树,那么称 T 是 G 的生成树. 设 T 是 G 的生成树,G 的在 T 中的边称作 T 的树枝,不在 T 中的边称作 T 的弦. 称 T 的所有弦的导出子图为 T 的余树,记作 $\overline{T}$.

定理 7.1.3 无向图 G 有生成树当且仅当 G 是连通图.

推论 7.1.1 设 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图,则 $m \geqslant n-1$.

定理 7.1.4 设 T 为无向连通图 G 中的一棵生成树,e 为 T 的任意一条弦,则 $T \cup e$ 中存在 G 中只含一条弦 e,其余边均为树枝的圈,而且不同的弦对应的圈也不同.

定义 7.1.3 设 T 是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的一棵生成树,设 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_{m-n+1}$ 为 T 的弦,$C_r, r=1,2,\cdots,m-n+1$,为 T 添加弦 e'_r 产生的 G 中由弦 e'_r 和树枝构成的圈,称 C_r 为 G 的对应弦 e'_r 的基本回路或基本圈. 称 $\{C_1, C_2, \cdots, C_{m-n+1}\}$ 为 G 对应 T 的基本回路系统,称 $m-n+1$ 为 G 的圈秩,记作 $\xi(G)$.

定理 7.1.5 设 T 是连通图 G 的一棵生成树,e 为 T 的树枝,则 G 中存在只含树枝 e,其余边都是弦的割集,且不同的树枝对应的割集也不同.

定义 7.1.4 设 T 是 n 阶连通图 G 的一棵生成树,$e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 为 T 的树枝,$S_i, i=1,2,\cdots,n-1$,是由树枝 e_i 和弦构成的割集,则称 S_i 为 G 的对应树枝 e_i 的基本割集. 称 $\{S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}\}$ 为 G 对应 T 的基本割集系统,称 $n-1$ 为 G 的割集秩,记作 $\eta(G)$.

最小生成树

定义 7.1.5 设无向连通带权图 $G=\langle V, E, W\rangle$,T 是 G 的一棵生成树,T 的各边权之和称为 T 的权,记作 $W(T)$. G 的所有生成树中权最小的生成树称为 G 的最小生成树.

避圈法(Kruskal 算法).

设 n 阶无向连通带权图 $G=\langle V, E, W\rangle$ 有 m 条边. 不妨设 G 中没有环(否则,可以将所有的环先删去),将 m 条边按权从小到大顺序排列,设为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$.

将 e_1 加入 T 中,然后依次检查 $w_2, e_3, \cdots, e_m$. 若 $e_j, j \geqslant 2$, 与已在 T 中的边不能构成回路,则将 e_j 加入 T 中,否则放弃 e_j.

算法停止时得到的 T 为 G 的最小生成树.

内容提要-根树及其应用

根树

定义 7.1.6 若有向图的基图是无向树,则称这个有向图为有向树. 一个顶点的入度为 0,其余顶点的入度为 1 的有向树称作根树. 入度为 0 的顶点称作树根,入度为 1 出度为 0 的顶点称作树叶,入度为 1 出度不为 0 的顶点称作内点,内点和树根统称作分支点. 从树根到任意顶点 v 的路径的长度(即路径中的边数)称作 v 的层数,所有顶点的最大层数称作树高.

家族树

常将根树看成家族树,家族中成员之间的关系由下面的定义给出.

定义 7.1.7 设 T 为一棵非平凡的根树,$\forall v_i, v_j \in V(T)$,若 v_i 可达 v_j,则称 v_i 为 v_j 的祖先,v_j 为 v_i 的后代;若 v_i 邻接到 v_j,即 $\langle v_i, v_j\rangle \in E(T)$,则称 v_i 为 v_j 的父亲,而 v_j 为 v_i 的儿子. 若 v_j, v_k 的父亲相同,则称 v_j 与 v_k 是兄弟.

有序树

设 T 为根树,若将 T 中层数相同的顶点都标定次序,则称 T 为有序树.

根据根树 T 中每个分支点儿子数以及是否有序,可以将根树分成下列各类.

(1) 若 T 的每个分支点至多有 r 个儿子,则称 T 为 r 叉树;又若 r 叉树是有序的,则称它为 r 叉有序树.

(2) 若 T 的每个分支点都恰好有 r 个儿子,则称 T 为 r 叉正则树;又若 T 是有序的,则称它为 r 叉正则有序树.

(3) 若 T 是 r 叉正则树,且每个树叶的层数均为树高,则称 T 为 r 叉完全正则树;又若 T 是有序的,则称它为 r 叉完全正则有序树.

根子树

定义 7.1.8 设 T 为一棵根树,$\forall v \in V(T)$,称 v 及其后代的导出子图 T_v 为 T 的以 v 为根的根子树.

2 叉正则有序树的每个分支点的两个儿子导出的根子树分别称作该分支点的左子树和右子树.

最优 2 叉树

定义 7.1.9 设 2 叉树 T 有 t 片树叶 $v_1, v_2, \cdots, v_t$,权分别为 $w_1, w_2, \cdots, w_t$,称 $W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为 T 的权,其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数. 在所有有 t 片树叶,带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的 2 叉树中,权最小的 2 叉树称作最优 2 叉树.

求最优 2 叉树的算法——Huffman 算法.

Huffman 算法

给定实数 $w_1, w_2, \cdots, w_t$.

1 作 t 片树叶,分别以 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 为权.
2 在所有入度为 0 的顶点(不一定是树叶)中选出两个权最小的顶点,添加一个新分支点,它以这 2 个顶点为儿子,其权等于这 2 个儿子的权之和.
3 重复 2,直到只有 1 个入度为 0 的顶点为止.

$W(T)$ 等于所有分支点的权之和.

2 元前缀码

定义 7.1.10 设 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n$ 是长为 n 的符号串, 称其子串 $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \cdots, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为该符号串的前缀. 设 $A = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 是一个符号串集合,若 A 的任意两个符号串都互不为前缀,则称 A 为前缀码. 由 0-1 符号串构成的前缀码称作2 元前缀码.

周游

对一棵根树的每个顶点都访问一次且仅一次称作行遍或周游一棵树.

对于 2 叉有序正则树有以下 3 种周游方式.

(1) 中序行遍法(可还原算式). 访问的次序为:左子树、树根、右子树.

(2) 前序行遍法(可产生波兰符号法表达式). 访问的次序为:树根、左子树、右子树.

(3) 后序行遍法(可产生逆波兰符号法表达式). 访问的次序为:左子树、右子树、树根.

基本要求

- 1. 深刻理解无向树的定义，熟练掌握无向树的主要性质，并能够灵活地应用它们.
- 2. 熟练地求解无向树，准确地画出阶数较小的所有非同构的无向树.
- 3. 深刻理解基本回路、基本回路系统、基本割集、基本割集系统，并且能够熟练地求出给定的生成树.
- 4. 熟练地应用 Kruskal 算法求最小生成树.
- 5. 理解根树及其分类的概念.
- 6. 能够画出阶数 n 较小的所有非同构的根树.
- 7. 熟练掌握 Huffman 算法，能够熟练地用它求最佳前缀码.
- 8. 掌握波兰符号法及逆波兰符号法的算法.

题型一：画非同构的无向树、生成树和根树

1. 下面给出的 3 组数列都可作为无向简单图的度数列，其中哪个(些)可以成为无向树的度数列？并对每个这样的度数列至少画出 3 棵非同构的无向树.

   (1) (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4).

   (2) (1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3).

   (3) (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3).

2. 无向图 G 如图 7.3.1 所示，试求出 G 的所有非同构的生成树.

3. 画出由图 7.3.2 中的无向树派生的所有非同构的根树.

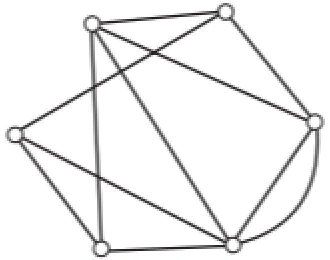

图 7.3.1

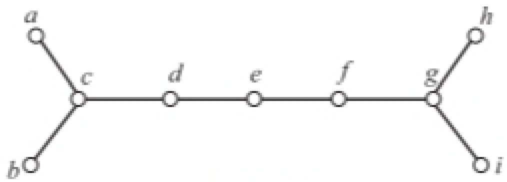

图 7.3.2

1. 求解本题的依据是无向树的性质，主要是阶数 n 与边数 m 的关系，即 $m=n-1$. 另外还要使用握手定理. 所给 3 个数列的长度都是 8，因而所对应的无向图的阶数 $n=8$. 如果数列能够充当无向树的度数列，必有边数 $m=n-1=7$. 设数列中元素为 $d_1, d_2, \cdots, d_8$，由握手定理必有

$$\sum_{i=1}^{8} d_i = 2m = 14.$$

(1) $\sum_{i=1}^{8} d_i = 20 \neq 14$，故数列 (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4) 不能作为无向树度数列.

(2) $\sum_{i=1}^{8} d_i = 14$，以这个数列 (1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3) 为度数列能画出 5 棵非同构的无向树，如图 7.3.3 所示.

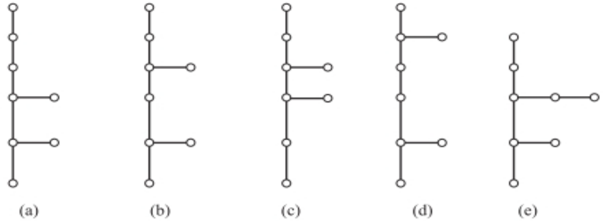

图 7.3.3

(3) $\sum_{i=1}^{8} d_i = 14$，可画出 4 棵非同构的无向树以数列 (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3) 为度数列，如图 7.3.4 所示.

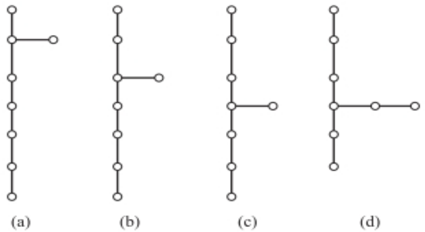

图 7.3.4

2. 图 7.3.1 所示的无向图 G 为 6 阶图，因而它的生成树都是 6 阶树，6 个顶点的度数之和等于 10. 将 10 分配给 6 个顶点只可能有下述 5 种方案.

(1) 1, 1, 1, 1, 1, 5.

(2) 1, 1, 1, 1, 2, 4.

(3) 1, 1, 1, 1, 3, 3.

(4) 1, 1, 1, 2, 2, 3.

(5) 1, 1, 2, 2, 2, 2.

删去平行边后，G 的最大度数为 4，因而 G 不可能有对应 (1) 的生成树. (4) 对应两棵非同构的树，(2)、(3)、(5) 各对应一棵非同构的树，共有 5 棵非同构的生成树，如图 7.3.5 所示，其中，(a) 对应 (2)，(b) 对应 (3)，(c) 与 (d) 都对应 (4)，(e) 对应 (5).

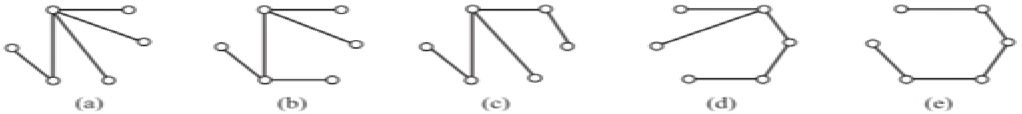

图 7.3.5

3. 只需注意，以 a, b, h, i 为根生成的根树都是同构的，同样，以 c 和 g 为根生成的根树都是同构的、以 d 和 f 为根生成的根树也是同构的，因而共可生成 4 棵非同构的根树，如图 7.3.6 所示.

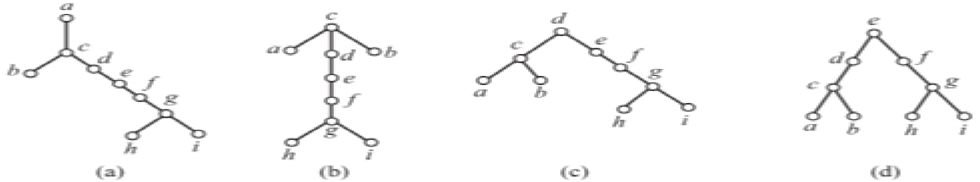

图 7.3.6

题型二：解无向树与生成树

1. 设无向树 T 中，有 2 个 2 度顶点，2 个 3 度顶点，1 个 4 度顶点，其余的顶点均为树叶. 试求 T 的阶数 n、边数 m、树叶数 t.

2. 设 T 是 6 阶无向简单图 G 的一棵生成树. 讨论下列问题.

   (1) 当 G 的边数 $m=9$ 时，T 的余树 $\bar{T}$ 还有可能是 G 的生成树吗?

   (2) 当 G 的边数 $m=12$ 时，T 的余树 $\bar{T}$ 还有可能是 G 的生成树吗?

   (3) 当 G 的边数 $m=10$ 时，T 的余树 $\bar{T}$ 可能有哪几种情况?

解答与分析

1. 解本题的关键步骤是利用 $m=n-1$ 和握手定理. 由 $m=n-1$ 及握手定理可得

$$2m=2n-2=2\times2+3\times2+1\times4+(n-5)\times1=9+n.$$

解得 $n=11, m=10, t=11-5=6$.

2. (1) 当 G 的边数 $m=9$ 时，$\bar{T}$ 不可能为 6 阶图的生成树. 因为 T 的边数是 $6-1=5$，因而 $\bar{T}$ 的边数为 $9-5=4$，而 4 条边构不成 6 阶树.

   (2) 当 G 的边数 $m=12$ 时，$\bar{T}$ 也不可能成为 G 的生成树. 由于 T 的边数是 5，$\bar{T}$ 的边数为 7，因而 $\bar{T}$ 不可能是 G 的生成树.

   (3) 当 G 的边数 $m=10$ 时，$\bar{T}$ 有以下 3 种情况.

   (3.1) $\bar{T}$ 也是 G 的生成树，如图 7.3.7(a) 所示，其中实线边构成 T，虚线边构成 $\bar{T}$.

   (3.2) $\bar{T}$ 中含圈，不是树，如图 7.3.7(b) 所示.

   (3.3) $\bar{T}$ 为 G 的非连通子图，也不是树，如图 7.3.7(c) 所示.

由此可见，任意图 G 的生成树 T 的余树 $\bar{T}$ 可能是 G 的生成树，也可能含圈、还有可能不连通，从而不是树.

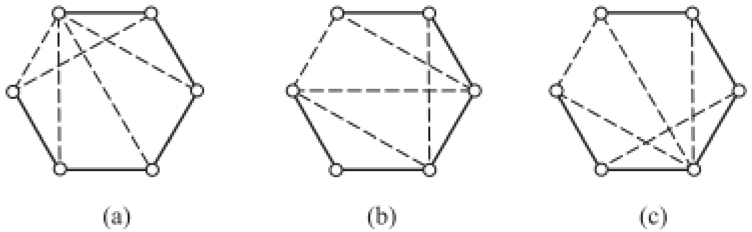

图 7.3.7

题型三：基本回路与基本割集

在图 7.3.8 所示的无向图 G 中，实线边的导出子图为 G 的生成树 T.

(1) 求 G 对应 T 的基本回路与基本回路系统.

(2) 求 G 对应 T 的基本割集与基本割集系统.

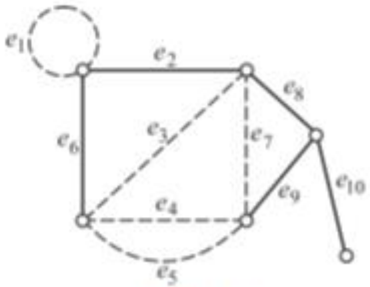

图 7.3.8

解答与分析

对应每一条弦有一条基本回路，每一条基本回路中只含一条弦，其余的边全为树枝. 对应每一条树枝有一个基本割集，每一个基本割集中只含一条树枝，其余的边全为弦. 注意回路与割集的不同表示法.

(1) 对应弦 e_1 的基本回路为 $C_1 = e_1$.

对应弦 e_3 的基本回路为 $C_2 = e_3e_2e_6$.

对应弦 e_4 的基本回路为 $C_3 = e_4e_9e_8e_2e_6$.

对应弦 e_5 的基本回路为 $C_4 = e_5e_9e_8e_2e_6$.

对应弦 e_7 的基本回路为 $C_5 = e_7e_9e_8$.

基本回路系统为 $C_{基} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$.

(2) 对应树枝 e_6 的基本割集为 $S_1 = \{e_6, e_3, e_4, e_5\}$.

对应树枝 e_2 的基本割集为 $S_2 = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

对应树枝 e_8 的基本割集为 $S_3 = \{e_8, e_7, e_4, e_5\}$.

对应树枝 e_9 的基本割集为 $S_4 = \{e_9, e_7, e_4, e_5\}$.

对应树枝 e_{10} 的基本割集为 $S_5 = \{e_{10}\}$.

基本割集系统为 $S_{基} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$.

题型四：求最小生成树

对图 7.3.9 所示的无向带权图 G 求一棵最小生成树 T，并计算出 T 的权 $W(T)$.

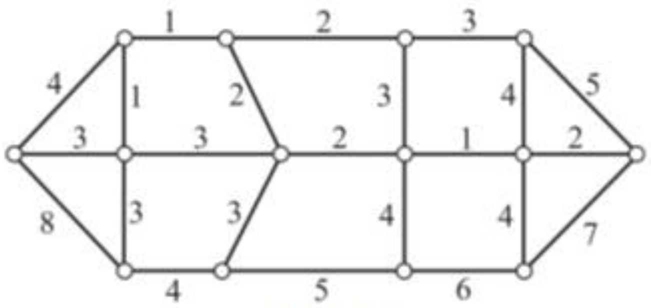

图 7.3.9

解答与分析

按 Kruskal 算法，细心地寻找最小生成树的边. 所得的最小生成树如图 7.3.10 所示，$W(T)=31$.

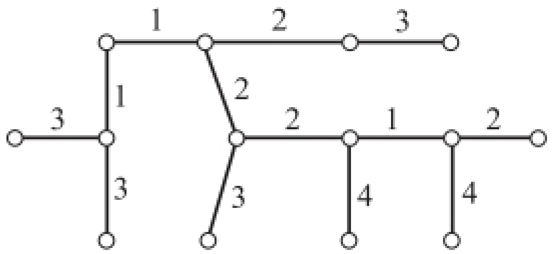

图 7.3.10

题型五：根树

1. 高为 h 的 $r(\geqslant 2)$ 叉正则树至多有多少片树叶? 至少呢?
2. 根树 T 如图 7.3.11 所示.
   (1) T 是几叉树? 要将 T 变成正则树至少要加几个顶点,几条边?
   (2) T 有几个内点? 分别是哪些顶点?
   (3) T 有几个分支点? 分别是哪些顶点?
   (4) T 的树高 $h(T)$ 为几?

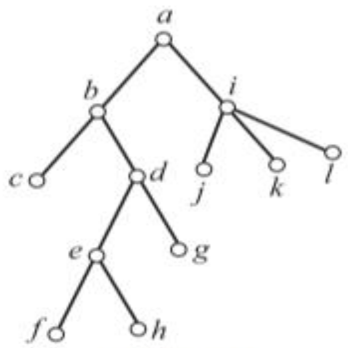

图 7.3.11

解答与分析

1. r 叉正则树,当它为 r 叉完全正则树时,树叶最多. 树高为 h 的 r 叉正则树的树叶数为 r^h. 树高为 h 的 r 叉正则树,当第 1 层到第 $h-1$ 层上均有 $r-1$ 片树叶和一个分支点,第 h 层上有 r 片树叶(没有分支点)时树叶数最少,此时树叶数为 $(r-1)(h-1)+r$. 当 $r=3, h=3$ 时,树叶数 $t=7$,如图 7.3.12 所示.
2. (1) T 是 3 叉树. T 有 4 个分支点(即 a, b, d, e)是 2 度的,故要将 T 变成 3 叉正则树至少要加 4 个顶点和 4 条边.
   (2) T 有 4 个内点,分别为 b, i, d, e.
   (3) T 有 5 个分支点,除了 (2) 中的 4 个内点外,还有树根 a.
   (4) $h(T)=4$.

7.3.6 题型六：证明题

1. 设 G 为 n 阶 m 条边的无向简单连通图,已知 $m \geqslant n$,证明:G 中必含圈.
2. 设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是 n 个正整数,$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2, n \geqslant 2$,证明:存在无向树 T 以 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 为度数列.

解答与分析

1. 本题在学习树的概念及性质前后可以有不同的证明方法.

方法一　归结为扩大路径法.

(1) 修改图 G. 若 G 中有悬挂顶点,则删除它们,得 G_1;若 G_1 还有悬挂顶点,再将它们删除,继续这一过程,最后得无悬挂顶点图 G_r. 由于删除悬挂顶点,均删除且只删除了它关联的悬挂边,因而在 G_r 中仍有 $m_r \geqslant n_r$,其中 m_r 和 n_r 分别为 G_r 的边数和阶数,且 $\delta(G_r) \geqslant 2$. 显然,删除悬挂顶点及其关联的边不会影响图是否有圈,故只需证明 G_r 中有圈即可.

(2) 用扩大路径法找圈. 易知 G_r 依然连通且为简单图,又 $\delta(G_r) \geqslant 2$. 设 $\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_l$ 为 G_r 中的一条极大路径,则 $l-1 \geqslant 2$,即 $l \geqslant 3$. 由于 v_1 不与 Γ 外顶点相邻,要达到 $d(v_1) \geqslant 2$,v_1 除与 v_2 相邻外,还必存在 $v_s, 2 < s \leqslant l$,与 v_1 相邻. 于是 $v_1 v_2 \cdots v_s v_1$ 为 G_r 中长度大于等于 3 的圈,此圈当然在 G 中.

方法二　用树的性质 $m = n-1$ 证明.

反证法. 假设 G 中无初级回路,由 G 的连通性可知,G 为树,因而 $m = n-1$,这与已知 $m \geqslant n$ 相矛盾,所以 G 中必含圈.

2. 首先叙述一个命题:设 $n \geqslant 3$,当 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ 时,

(2.1) $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中至少有一个 1. (否则,$\sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant 2n$.)

(2.2) $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中至少有一个大于等于 2. (否则,$\sum_{i=1}^{n} d_i = n$.)

下面对 n 做归纳证明.

$n=2$ 时,由于 $d_1 + d_2 = 4-2 = 2$ 且 $d_i \geqslant 1$,因而 $d_1 = d_2 = 1$,此时存在无向树 K_2 以 $(1,1)$ 为度数列.

假设 $n = k(\geqslant 2)$ 时结论为真,要证明 $n = k+1$ 时结论也为真. 由(2.1)可设 $d_{k+1} = 1$,又由(2.2)可设 $d_k \geqslant 2$. 先考虑 $d_1, d_2, \cdots, d_{k-1}, d_k - 1$,这是 k 个正整数,且

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1} + d_k - 1 = 2(k+1) - 2 - 1 - 1 = 2k - 2.$$

由归纳假设可知,存在 T_k 以 $(d_1, d_2, \cdots, d_{k-1}, d_k - 1)$ 为度数列,设其顶点分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_k$,这里 $d(v_i) = d_i, i = 1, 2, \cdots, k-1, d(v_k) = d_k - 1$.

添加一个顶点 v_{k+1},从 v_k 引出一条边与 v_{k+1} 相关联,记所得的树为 T_{k+1},则 T_{k+1} 的度数列为 $(d_1, d_2, \cdots, d_k, d_{k+1})$,从而 $n = k+1$ 时结论也为真.

题型七：应用题

已知在传输中，a,b,c,d,e,f,g,h 出现的频率分别为 30%，15%，15%，10%，10%，9%，6%，5%. 设计一个传输它们的最佳前缀码.

解答与分析

(1) 准备工作. 令 $w_i = 100p_i$，其中 p_i 为第 i 个字母出现的频率，$i = 1,2,\cdots,8$. 将权 w_i 按从小到大顺序排列.

$$5 < 6 < 9 < 10 = 10 < 15 = 15 < 30.$$

(2) 用 Huffman 算法求最优树 T，如图 7.3.13 所示.

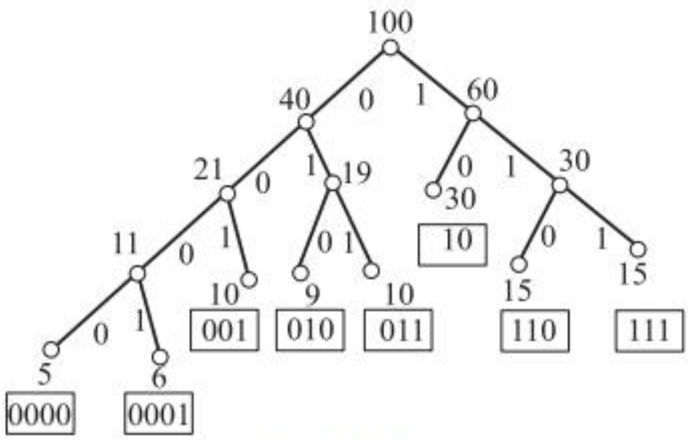

图 7.3.13

(3) 在 T 的每个分点的左分支上标 0，右分支上标 1. 在每个树叶处得二元码.

(4) 每个码字赋给对应的字母：

a—10， b—111， c—110， d—001， e—011， f—010， g—0001， h—0000.

(5) $W(T) = 281$（所有分支点的权之和），这说明传输 100 个按给定频率出现的字母用 281 个二进制数字.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

   (1) 6 阶无向连通图至多有________棵不同构的生成树.

   (2) n 阶 m 条边的无向连通图 G,对应它的生成树 T 有________个基本回路.

   (3) 设 T 是各边带权均为 1 的 n 阶带权图的一棵最小生成树,则 $W(T)=$________.

   (4) $n(\geqslant 3)$ 阶无向树 T 中,________$\leqslant \Delta(T) \leqslant$________.

   (5) 高为 h 的 2 叉正则树至少有________片树叶.

   (6) 波兰符号法的运算规则是________.

2. 简答题(5 小题,每小题 10 分,共 50 分).

   (1) 已知无向树 T 中,有 3 个 3 度顶点,2 个 4 度顶点,其余的顶点均为树叶,求 T 的树叶数.

   (2) 下面两组数中,哪个(些)能作为无向树的度数列? 若能,至少画出 3 棵非同构的无向树.

   (2.1) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3.

   (2.2) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5.

   (3) 无向图 G 如图 7.5.1 所示,其中实线边为 G 的一棵生成树 T. 求 G 对应 T 的基本回路系统.

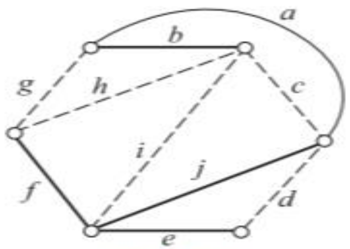

图 7.5.1

   (4) 求题 (3) 中 G 对应 T 的基本割集系统.

   (5) 求带权为 5, 5, 6, 7, 10, 15, 20, 30 的最优树 T,并求 $W(T)$.

3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

   (1) 设 T 为无向图 G 的一棵生成树,$\bar{T}$ 是 T 的余树,证明:$\bar{T}$ 中不含 G 的割集.

   (2) 设 T 是 r 叉正则树,i 是分支点数,t 是树叶数,证明:$(r-1)i=t-1$.