

凸优化 第四次作业

1. 定义：给定一个函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 其共轭函数（也称作对偶函数）定义为：

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle y, x \rangle - f(x))$$

其中 $\langle y, x \rangle$ 是 y 和 x 的内积。计算函数 $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ 的共轭函数 $f^*(y)$ 。

2. 将下列非标准的几何规划问题转化为标准的几何规划问题：

$$\begin{aligned} \min f_0(x, y) &= x/y \\ \text{subject to } &1 \leq x \leq 4, \\ &x^2 \leq y^2, \\ &x/y^3 = 3. \end{aligned}$$

3. 用线性规划来描述下列问题：

- (a) 给定 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$,

$$\min \sum_{i=1}^m \max\{0, a_i^T x + b_i\},$$

其中变量 $x \in \mathbb{R}^n$ 。

- (b) 给定 $p+1$ 个矩阵 $A_0, A_1, \dots, A_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 寻找向量 $x \in \mathbb{R}^p$ 来最小化

$$\max_{\|y\|_1=1} \|(A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_p A_p)y\|_1.$$

4. 请使用线性规划来解决以下问题：给定两个多面体

$$\mathcal{P}_1 = \{x | Ax \leq b\}, \mathcal{P}_2 = \{x | Cx \leq d\},$$

试证明 $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ 或者找到一个在 \mathcal{P}_1 但不在 \mathcal{P}_2 中的点。矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 向量 $c \in \mathbb{R}^m$ 和 $d \in \mathbb{R}^p$ 是给定的。