hw　05

一、作业

1.

解　离散型随机变量的分布律要符合规范性 $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$，因此

(1) $\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} ck = 1 \Rightarrow c = \dfrac{2}{n(n+1)}$；

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{c\lambda^k}{k!} = c(\mathrm{e}^{\lambda}-1) = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}$.

2.

解　X 的可能取值为 3，4，5.

事件 $\{X=3\}$ 表示取出的3个球中最大号码是3，即3个球的号码必定是1，2和3. 因此由古典概型概率求解方法可得

$$P(X=3) = \frac{1}{\binom{5}{3}} = 0.1;$$

事件 $\{X=4\}$ 表示取出的 3 个球中最大号码是 4，即 3 个球的号码中有一个号码一定是 4，其余两个号码可以在 1，2 或 3 中任取 2 个号码. 因此由古典概型概率求解方法可得

$$P(X=4) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = 0.3;$$

事件 $\{X=5\}$ 表示取出的 3 个球中最大号码是 5，即 3 个球的号码中有一个号码一定是 5，其余两个号码可以在 1，2，3 或 4 中任取 2 个号码. 因此由古典概型概率求解方法可得

$$P(X=5) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = 0.6;$$

综上分析可整理得 X 的分布律如下所示

X	3	4	5
概率	0.1	0.3	0.6

3.

（1）首先要明确在这一小题中是放回型抽样，每次取到正品的概率为$\frac{10}{13}$，直到取得正品为止所需次数 X 服从参数为$\frac{10}{13}$的几何分布，因此直到第 k 次才抽到正品的概率

$$P(X=k)=\frac{10}{13}\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1},\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

（2）在这一小题中是不放回型抽样. X 的可能取值为 1，2，3，4. 事件$\{X=1\}$表示第一次就取到正品，因此 $P(X=1)=\frac{10}{13}$. 事件$\{X=2\}$表示第一次取到次品第二次取到正品，因此 $P(X=2)=\frac{3}{13}\times\frac{10}{12}=\frac{5}{26}$. 以此类推，$P(X=3)=\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{143}$，$P(X=4)=\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{286}$，因此 X 的分布律为

X	1	2	3	4
概率	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

（3）在这一小题中抽样方式是特别的：每次取出一件产品后总是放回一件正品. X 的可能取值为 1，2，3，4. 事件$\{X=1\}$表示第一次就取到正品，因此 $P(X=1)=\frac{10}{13}$. 事件$\{X=2\}$表示第一次取出一个次品并放回一个正品，第二次取到正品，因此$P(X=2)=\frac{3}{13}\times\frac{11}{13}=\frac{33}{13^2}$. 以此类推，$P(X=3)=\frac{3}{13}\times\frac{2}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{72}{13^3}$，$P(X=4)=\frac{3}{13}\times\frac{2}{13}\times\frac{1}{13}\times\frac{13}{13}=\frac{6}{13^3}$，因此 X 的分布律为

X	1	2	3	4
概率	$\frac{10}{13}$	$\frac{33}{13^2}$	$\frac{72}{13^3}$	$\frac{6}{13^3}$

4.

解 根据题意可知$X\sim B(4,\ 0.4)$，则分布律$P(X=i)=\binom{4}{i}0.4^i0.6^{4-i}$，$i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$，计算可得如下 X 的分布律表

X	0	1	2	3	4
p	0.1296	0.3456	0.3456	0.1536	0.0256

X 的分布函数可通过如下计算得到

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ P(X=0)=0.1296, & 0\leqslant x<1,\\ P(X=0)+P(X=1)=0.4752, & 1\leqslant x<2,\\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0.8208, & 2\leqslant x<3,\\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0.9744, & 3\leqslant x<4,\\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$

5,

解 由期望定义及随机变量函数的期望公式得

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i=-2\times0.3+0\times0.2+1\times0.5=-0.1,$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{\ 2}p_i=(-2)^2\times0.3+0^2\times0.2+1^2\times0.5=1.7,$$

$$E(3X^2+5)=\sum_{i=1}^{\infty}(3x_i^{\ 2}+5)p_i$$

$$=[3\times(-2)^2+5]\times0.3+[3\times0^2+5]\times0.2+[3\times1^2+5]\times0.5=10.1.$$

6.

解 根据题意可知 $X\sim Ge(12,\ 0.6)$，因此 X 的分布律为

$$P(X=k)=\binom{11}{k-1}0.6^{12}\times0.4^{k-12},\ k=12,\ 13,\ \cdots.$$

7.

解 根据题意可知

X	-2	-1	0	1	2
概率	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$Y=X-1$	-3	-2	-1	0	1
$Z=X^2$	4	1	0	1	4
$W=\|X\|$	2	1	0	1	2

因此整理可得

(1) Y 的分布律为

Y	-3	-2	-1	0	1
p	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

(2) Z 的分布律为

Z	0	1	4
p	0.2	0.4	0.4

(3) W 的分布律为

W	0	1	2
p	0.2	0.4	0.4

8.

解 根据题意可知 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{8^k}{k!}e^{-k}$，$k=0, 1, 2, \cdots$

(1) $P(X=6)=\frac{8^6}{6!}e^{-8}\approx 0.1221$；

(2) $P(X\leqslant 5)=\sum_{k=0}^{5}P(X=k)=\sum_{k=0}^{5}\frac{8^k}{k!}e^{-8}\approx 0.1912.$

9.

解 $P(X=1)=\binom{n}{1}p\,(1-p)^{n-1}=P(X=n-1)=\binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p)\Rightarrow p=\frac{1}{2}$，

因此 $P(X=2)=\binom{n}{2}p^2\,(1-p)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2^{n+1}}.$

二、课后提升

1.

解 离散型随机变量的分布律要符合规范性 $\sum_{i=1}^{+\infty}p_i=1$，因此

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1\Rightarrow c=\frac{8}{15}.$$

(1) $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=0.2$；

(2) $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)=P(X=1)+P(X=2)=0.4$；

2.

解 一元二次方程 $3t^2+2Xt+(X+1)=0$ 有实数根，即有

$$\Delta=(2X)^2-4\times 3\times(X+1)\geqslant 0\Rightarrow X\leqslant\frac{3-\sqrt{21}}{2}\text{ 或 }X\geqslant\frac{3+\sqrt{21}}{2},$$

$$P\left(X\leqslant\frac{3-\sqrt{21}}{2}\text{ 或 }X\geqslant\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)=P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=4)=0.4.$$

3.

解 由已知得 $X \sim B(10, 0.6)$，则

$$E(X)=np=10\times 0.6=6,\ D(X)=np(1-p)=6\times 0.4=2.4,$$

所以

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=2.4+6^2=38.4.$$

由期望的性质得

$$E(2X^2+3)=2E(X^2)+3=2\times 38.4+3=79.8.$$

4.

解 记 $q=1-p$，X 的概率分布为 $P(X=i)=q^{i-1}p$，$i=1, 2, \cdots$

X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}p=p\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)'=p\left(\sum_{i=1}^{\infty}q^i\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{1}{p},$$

因为

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty} i^2q^{i-1}p=p\left[q\left(\sum_{i=1}^{\infty}q^i\right)'\right]'=p\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]'=\frac{2-p}{p^2},$$

所以 X 的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

5.

解 设随机变量 X 表示发生故障需维修的车床数，根据题意可知 X 服从二项分布 $B(600, 0.005)$.

(1) 车床发生故障后都能得到及时维修表示发生故障需维修的车床数不超过工人数 4 名，即 $P(X\leqslant 4)=\sum_{k=0}^{4}\binom{600}{k}0.005^k\,0.995^{600-k}\approx 0.8157.$

(2) 设至少应配备 a 名维修工人，才能保证车床发生故障后都能得到及时维修的概率不小于 0.96.

这里求解的是满足条件的最少工人数，即要满足两个条件：

① 当有 a 名维修工人，车床发生故障后都能得到及时维修的概率不小于 0.96；

② 若少一名工人，只有 $a-1$ 名维修工人时，车床发生故障后都能得到及时维修的概率就小于 0.96.

整理可得

$$\begin{cases} P(X\leqslant a)=\sum_{k=0}^{a}\binom{600}{k}0.005^k\times 0.995^{600-k}\geqslant 0.96, \\ P(X\leqslant a-1)=\sum_{k=0}^{a-1}\binom{600}{k}0.005^k\times 0.995^{600-k}<0.96. \end{cases}$$

求解可得 $a=6$.

6.

解 根据题意可知 $X\sim H(10000,4000,2000)$，因此 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\binom{4000}{k}\binom{6000}{2000-k}}{\binom{10000}{2000}},\ k=0,1,\cdots,2000.$$

7.

解 根据题意可知 X 服从参数为 0.4 的几何分布，因此 X 的分布律为

$$P(X=k)=0.6^{k-1}\times 0.4,\ k=1,2,3,\cdots;$$

$$P(X\text{ 取偶数})=\sum_{k=0}^{\infty}0.4\times 0.6^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}0.4\times 0.6\times 0.36^{k}=0.375.$$

8.

解 设随机变量 X 表示在 3 次相互独立试验中事件 A 出现的次数，不妨设事件 A 在 1 次试验中出现的概率为 p，显然 $X\sim B(3,p)$，则事件 A 在 3 次独立事件中至少出现 1 次的概率为 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^3=\frac{19}{27}$，于是 $p=\frac{1}{3}$.

9.

解 设随机变量 X 表示该学生答对的题目数，根据题意可知 X 服从二项分布 $B\left(10,\frac{1}{4}\right)$，于是有

$$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^{10},$$

$$P(X\geqslant 6)=\sum_{k=6}^{10}P(X=k)=\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}\approx 0.0197.$$

10.

解 (1) 根据题意可知相邻两周内发生地震的次数 $N(2)\sim P(2\lambda)$，则

$$P(N(2)\geqslant 3)=1-\sum_{k=0}^{2}P(N(2)=k)=1-(1+2\lambda+2\lambda^2)\mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

(2) 设随机变量 $N_2(8)$ 表示后 8 周内发生地震的次数，根据题意可知 $N_2(8)\sim P(8\lambda)$.

根据题意可知，在任意两个不相交的时间段内发生的地震次数相互独立. 因此未来 8 周内地震发生次数不受到前连续 8 周地震数的影响，因此即为 $P(N_2(8)=0)=\mathrm{e}^{-8\lambda}$.

三、思考题

1.

解答:

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$(1-p+xp)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r (1-p)^r p^{n-r} x^{n-r}$

令$n-r=k, r=n-k$

把r**代入得**$C_n^{n-k}(1-p)^{n-k}p^k x^k=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

hw 06

一、作业

1.

解 X 的密度函数

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ xe^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$P(X\leqslant 1)=F(1)=1-2e^{-1},$$

$$P(X>2)=1-P(X\leqslant 2)=1-F(2)=3e^{-2}.$$

2.

解 （1）一个随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 要满足规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$. 结合题干中给出的密度函数可得 $\int_0^1 f(x)\,dx=1\Rightarrow c=4$.

（2）$P\left(-1<X<\dfrac{1}{2}\right)=\int_0^{0.5}4x^3\,dx=\dfrac{1}{16}$.

（3）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$；当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}4t^3\,dt=x^4$.

整理可得，

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^4, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

3.

解 由数学期望的定义及随机变量函数的期望公式得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{3}{2},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{12}{5},$$

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}[x]_0^2=\frac{3}{4}.$$

4.

解 因为 $X\sim E(\lambda)$，有 $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$. 则

$$P(X>\sqrt{D(x)})=P\left(X>\frac{1}{\lambda}\right)=1-F\left(\frac{1}{\lambda}\right)=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}})=\mathrm{e}^{-1}.$$

5.

证明 $X_1\sim N(0,\ 1)$，$p_1=P(-2\leqslant X_1\leqslant 2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$，

$X_2\sim N(0,\ 2^2)$，$p_2=P(-2\leqslant X_2\leqslant 2)=\Phi\left(\dfrac{2}{2}\right)-\Phi\left(-\dfrac{2}{2}\right)=2\Phi(1)-1$，

$X_3\sim N(0,\ 3^2)$，$p_3=P(-2\leqslant X_3\leqslant 2)=\Phi\left(\dfrac{2}{3}\right)-\Phi\left(-\dfrac{2}{3}\right)=2\Phi\left(\dfrac{2}{3}\right)-1$，

由标准正态分布的分布函数特征，得到 $p_1>p_2>p_3$，故得证.

6.

解 方程有实根，即

$\Delta=X^2-4\geqslant 0\Rightarrow X\leqslant -2,\ X\geqslant 2,\ P(X\leqslant -2)+P(X\geqslant 2)=0+\int_2^6 0.2\,\mathrm{d}x=0.8.$

7.

解 由 $|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ 0 & \lambda+2 & X\\ 0 & -1 & \lambda\end{bmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+X)$，而其特征值全为实数的概率

$P\{2^2-4X\geqslant 0\}=P\{X\leqslant 1\}=0.5$，可见当 X 服从$[0,2]$上均匀分布时成立.

8.

证 仅对连续随机变量 X 加以证明. 记 $p(x)$ 为 X 的密度函数，则

$$P(X>\varepsilon)=\int_\varepsilon^\infty p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_\varepsilon^\infty\frac{g(x)}{g(\varepsilon)}p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^\infty\frac{g(x)}{g(\varepsilon)}p(x)\,\mathrm{d}x=\frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}.$$

二、练习

1.

解 (1) 当 $F(x)$ 为连续函数时有

$$\begin{cases} F(-1)=0, \\ F(1)=1, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a-\dfrac{\pi}{2}b=0, \\ a+\dfrac{\pi}{2}b=1, \end{cases}$$

计算可得 $\begin{cases} a=0.5, \\ b=\dfrac{1}{\pi}. \end{cases}$

$$(2) P\left(|X|<\frac{1}{2}\right)=P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)$$

$$=P\left(-\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}.$$

$$(3) f(x)=F'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

2.

解 (1) 由数学期望的定义得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\sin\frac{x}{2}$$

$$=\left[x\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\pi+\left[2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}=\pi-2.$$

(2) 由题意得 $Y\sim B(4, p)$，其中

$$p=P\left(X>\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\left[\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2},$$

由二项分布的期望得

$$E(Y)=np=2.$$

3.

解 因为 $X\sim N(0,\sigma^2)$，所以

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\sigma^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\frac{x^2}{2\sigma^2}$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

$$D(|X|)=E(|X|^2)-[E(|X|)]^2=E(X^2)-[E(|X|)]^2$$

$$=D(X)+[E(X)]^2-[E(|X|)]^2=\sigma^2-\frac{2}{\pi}\sigma^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2.$$

4.

解 易得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{6}x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) $P(X\leqslant 7)=F(7)=1-e^{-\frac{7}{6}}$；

(2) $P(X\leqslant 7\mid X>3)=\dfrac{P(3<X\leqslant 7)}{P(X>3)}=\dfrac{F(7)-F(3)}{1-F(3)}=1-e^{-\frac{2}{3}}$.

5.

解 (1) $P(X\leqslant 60)=\Phi\left(\dfrac{60-50}{\sqrt{100}}\right)=\Phi(1)=0.8413$；

(2) $P(X\leqslant 60\mid X>30)=\dfrac{P(30<X\leqslant 60)}{P(X>30)}=\dfrac{\Phi\left(\frac{60-50}{\sqrt{100}}\right)-\Phi\left(\frac{30-50}{\sqrt{100}}\right)}{1-\Phi\left(\frac{30-50}{\sqrt{100}}\right)}=0.8376$；

(3) 设随机变量 Y 表示一周 5 个工作日内迟到的天数，根据题意可知 $Y\sim B(5,0.1587)$，$P(Y=0)=(1-0.1587)^5=0.4215$.

6.

解 (1) $P(X\leqslant 3)=F_X(3)=1-e^{-1.2}$；

(2) $P(X\geqslant 4)=1-P(X<4)=1-F_X(4)=e^{-1.6}$；

(3) $P(3\leqslant X\leqslant 4)=F_X(4)-F_X(3)=e^{-1.2}-e^{-1.6}$；

(4) $P(X=2.5)=0$；

(5) $f(x)=F_X'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.4e^{-0.4x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

7.

解　易得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

$$P(Y\leqslant a+1\mid Y>a)=\frac{P(a<Y\leqslant a+1)}{P(Y>a)}=\frac{F(a+1)-F(a)}{1-F(a)}=1-e^{-1}.$$

8.

解　$f(x)=Ae^{-x^2+x}=Ae^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=Ae^{\frac{1}{4}}e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\Rightarrow\begin{cases}Ae^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\\ 2\sigma^2=1\\ \mu=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}}}.$$

9.

解　(1) $P(X<3)=\Phi\left(\dfrac{3-(-1)}{4}\right)=\Phi(1)=0.8413$;

(2) $P(X>-3)=1-P(X<-3)=1-\Phi\left(\dfrac{-3-(-1)}{4}\right)=1-\Phi(-0.5)=\Phi(0.5)=0.6915$;

(3) $P(X<-5)=\Phi\left(\dfrac{-5-(-1)}{4}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=0.1587$;

(4) $P(-5<X<2)=\Phi\left(\dfrac{2-(-1)}{4}\right)-\Phi\left(\dfrac{-5-(-1)}{4}\right)=\Phi(0.75)-[1-\Phi(1)]=0.6147$;

(5) $P(|X|<2)=\Phi\left(\dfrac{2-(-1)}{4}\right)-\Phi\left(\dfrac{-2-(-1)}{4}\right)=\Phi(0.75)-\Phi(-0.25)=0.3721$;

(6) 确定使得 $P(X<a)=\Phi\left(\dfrac{a-(-1)}{4}\right)=0.95$，$\dfrac{a-(-1)}{4}=u_{0.95}=1.645$，计算可得 $a=5.58$.

10.

解　二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根，则

$$\Delta=4^2-4X<0,\qquad 即\ 4<X$$

因为 $P\{4<X\}=\dfrac{1}{2}$

故 $\mu=4$

三、思考题

1.

解答:

对于证明$P(X\geq\epsilon)\leq h(\epsilon)$这类题型一般思路有两种, $p(x)$为$P(X)$的概率密度函数

第一种：

令$F(\epsilon)=P(X\geq\epsilon)-h(\epsilon)$

求出$F(\epsilon)$的单调区间, 证明$F(\epsilon)_{max}\leq 0$即可

第二种：

找到一个$g(x)$来进行放缩.

$g(x)$需要满足非负的, 同时是非减的两个条件,

这样就有$P(X\geq\epsilon)\leq\int_\epsilon^\infty\frac{g(x)}{g(\epsilon)}p(x)\,dx=\frac{1}{g(\epsilon)}\int_\epsilon^\infty g(x)p(x)\,dx$

$\int_\epsilon^\infty g(x)p(x)\,dx$应该是能求出来的式子, 具体来说,

如果题目中都是抽象的函数, 没有具体值, 比如$E(u(x))$, 且u非负非减, 那么我们就应该令

$g(x)=u(x),\int_\epsilon^\infty g(x)p(x)\,dx=E(u(x))$,

即能够表示出来, 比如$hw06$的第一部分第八题就是这样

如果题目中都是具体的函数, 比如本题, 那就应该找到$g(x)$能够使得

$\int_\epsilon^\infty g(x)p(x)\,dx$积分被算出来。

综上需要满足三个条件$g(x)$非负, $g(x)$非增, $\int_\epsilon^\infty g(x)p(x)\,dx$可以求出来

(1)解法一:

$F(\epsilon)=P(X\geq\epsilon)-\frac{1}{2}e^{\frac{-\epsilon^2}{2}}$

$F'(\epsilon)=-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-\epsilon^2}{2}}+\frac{1}{2}\epsilon e^{\frac{-\epsilon^2}{2}}$

所以$F(\epsilon)$在(ϵ,∞)先减后增, 而$F(0)=F(+\infty)=0$, 所以$F(\epsilon)\leq 0$

(1)解法二:

现在我们需要找到一个$g(x)$, 它能使得$\int_\epsilon^\infty g(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$是可以被算出来的

能想到的有两个, 一个是$g(x)=x$, 这样原函数能直接求出来,

还有一个就是正态函数关于y轴两边对称, 即任意一边积分为0,

那么我们只需要将标准正态函数向右平移ϵ个单位即可,

即$g(x)e^{\frac{-x^2}{2}}$为标准正态分布函数向右平移ϵ个单位的函数,

即$g(x)e^{\frac{-x^2}{2}}=e^{\frac{-(x-\epsilon)^2}{2}},g(x)=e^{\epsilon x-\frac{\epsilon^2}{2}}$

两个函数分别对应(2)和(1)问。

取$g(x)=e^{\epsilon x-\frac{\epsilon^2}{2}}$, $P(X\geq\epsilon)\leq\int_\epsilon^\infty\frac{g(x)}{g(\epsilon)}p(x)dx=\frac{1}{2}e^{\frac{-\epsilon^2}{2}}$

(2)取$g(x)=x$,

$2P(X\geq\epsilon)\leq 2\int_\epsilon^\infty\frac{g(x)}{g(\epsilon)}p(x)dx=(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\epsilon}e^{-\frac{-\epsilon^2}{2}}$

由概率分布函数性质：$P(|X|\geq\epsilon)\leq 1$

补充题

1.

1.共有m个白球,每次随机抽取一个球进行染红,染红后放回,问所有的球全部染红所需次数的期望.

解答:

设E_i表示已经染红i个球的情况下,剩余全部染红所需次数的期望(即染红剩余的$m-i$个白球所需次数期望)

已经染红i个球情况下,再抽一个球,若抽到的是白球,将其染红,则剩余全部染红所需次数期望为E_{i+1}.若抽到的是红球,则剩余全部染红所需次数期望为E_i.抽到白球概率为$\frac{m-i}{m}$,红球概率为$\frac{i}{m}$.

所以$E_i = 1 + \frac{i}{m}E_i + \frac{m-i}{m}E_{i+1}$

,整理得到$E_i = \frac{m}{m-i} + E_{i+1}, E_m = 0$,由递推关系式,结合数学归纳法

$E_{m-k} = m(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k})$

$E_0 = m(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m})$,最终结果为$E_0$

2.

2.设X为仅取非负整数的离散随机变量,若其数学期望存在,证明:

(1)$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) = \frac{1}{2}[E(X^2) - E(X)]$

(1)证明:由定义$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} -kP(X \geq k+1) + kP(X \geq k)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} -kP(X \geq k+1) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P(X \geq k+1)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} -kP(X \geq k+1) + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)P(X \geq k+1) + P(X \geq 1)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k+1) + P(X \geq 1)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} kP(X = i)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i)\frac{i(i-1)}{2}$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}i^2 P(X = i) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}iP(X = i)$

$= \frac{1}{2}E(X^2) - \frac{1}{2}E(X)$

3.

设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，且数学期望存在，证明：

$$E(X)=\int_0^{\infty}[1-F(x)]\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}F(x)\,\mathrm{d}x.$$

证

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}xp(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x.$$

将第一个积分改写为二次积分，然后改变积分次序，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}xp(x)\,\mathrm{d}x&=-\int_{-\infty}^{0}\left(\int_x^0\mathrm{d}y\right)p(x)\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{y}p(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_{-\infty}^{0}F(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

第二个积分亦可改写为二次积分，然后改变积分次序，可得

$$\int_0^{\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\left(\int_0^x\mathrm{d}y\right)p(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\left(\int_y^{\infty}p(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}[1-F(y)]\,\mathrm{d}y.$$

这两个积分之和恰好是所要求证明的等式.

4.

甲、乙两人进行象棋比赛，每局甲胜的概率为 p，乙胜的概率为 $q=1-p$. 比赛进行到有一人连胜两局为止，求平均比赛局数.

解 设 X 为决定胜负所需的局数，X 可取 $2,3,\cdots$ 等正整数值，事件 $\{X\geqslant k\}$ 表示"到第 $k-1$ 局时没有一人连胜两局，总是两人轮流胜"，所以

$$\begin{aligned}&P(X\geqslant 1)=1,\\&P(X\geqslant 2k)=p^kq^{k-1}+p^{k-1}q^k=(pq)^{k-1},\qquad k=1,2,\cdots,\\&P(X\geqslant 2k+1)=2p^kq^k,\qquad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geqslant k)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(pq)^{k-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}(pq)^k\\&=1+\frac{1}{1-pq}+\frac{2pq}{1-pq}=\frac{2+pq}{1-pq}.\end{aligned}$$

又因为对任意的 $p(0<p<1)$，总有 $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$，故由 $E(X)$ 是 pq 的严格单调增函数可得

$$E(X)\leqslant\frac{2+1/4}{1-1/4}=3.$$

这表明：这种象棋比赛决定最终胜负的平均局数不超过3局，它在两选手势均力敌（$p=\frac{1}{2}$）时达到上界.