

凸优化 第二次作业

1. 用定义验证下列各集合是凸集:

$$(1) S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 \geq 1, x_1 - x_2 \geq 1\};$$

$$(2) S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq |x_1|\};$$

$$(3) S = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 10\}.$$

2. 设 $C \subset \mathbb{R}^p$ 是一个凸集, p 是正整数. 证明下列集合 S 是 \mathbb{R}^n 中的凸集:

$$S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = \mathbf{A}\rho, \rho \in C\}$$

其中 \mathbf{A} 是给定的 $n \times p$ 实矩阵.

3. 判别下列函数是否为凸函数:

$$(1) f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$$

$$(2) f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2;$$

$$(3) f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 + e^{x_1+x_2};$$

$$(4) f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1+x_2)};$$

$$(5) f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_3.$$

4. 设 $f(x_1, x_2) = 10 - 2(x_2 - x_1^2)^2$, $S = \{(x_1, x_2) \mid -11 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$, $f(x_1, x_2)$ 是否为 S 上的凸函数?

5. 设 f 是定义在 \mathbb{R}^n 上的凸函数, $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ 是 \mathbb{R}^n 中的点, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是非负数, 且满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, 证明:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \dots + \lambda_k f(x^{(k)}).$$

《Convex Optimization》 3.1, 3.3, 3.4, 3.13, 3.17, 3.23, 3.32, 3.47, 3.57