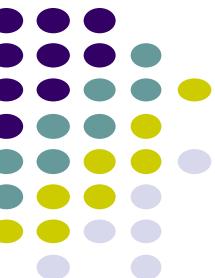


组合数学-基本的组合计数公式

习题课及作业

2024, 4, 15

南京大学计算机科学与技术系



内容提要-基本概念

加法法则

设事件 A 有 m 种产生方式, 事件 B 有 n 种产生方式, 当 A 与 B 产生的方式不重叠时, “事件 A 或 B ”有 $m+n$ 种产生方式. 加法法则适用的条件是产生方式不重叠, 用于分类处理.

乘法法则

设事件 A 有 m 种产生方式, 事件 B 有 n 种产生方式, 当 A 与 B 产生的方式彼此独立时, “事件 A 与 B ”有 mn 种产生方式. 乘法法则适用的条件是产生方式彼此独立, 用于分步处理.

排列与组合的定义

定义 10.1.1 设 S 为 n 元集,

- (1) 从 S 中有序选取的 r 个元素称作 S 的一个 r 排列. S 的不同 r 排列总数记作 $P(n, r)$. $r = n$ 时的排列称作 S 的全排列. 元素依次排成一个圆圈的排列称作环排列.
- (2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称作 S 的一个 r 组合. S 的不同 r 组合总数记作 $C(n, r)$.

n 元集的 r 排列数公式

$$P(n, r) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!}, & r \leq n, \\ 0, & r > n. \end{cases}$$

n 元集的 r 环排列数公式

$$P(n, r)/r = \frac{n!}{(n-r)!r}, \quad r \leq n.$$

n 元集的 r 组合数公式

$$C(n, r) = \begin{cases} \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, & r \leq n, \\ 0, & r > n. \end{cases}$$

多重集排列与组合的定义

定义 10.1.2 设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 为多重集, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 表示 S 中元素的总数.

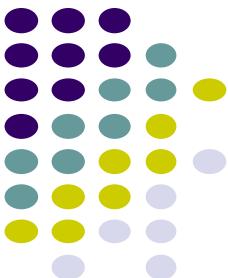
- (1) 从 S 中有序选取的 r 个元素称作多重集 S 的一个 r 排列. $r = n$ 的排列称作 S 的全排列.
- (2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称作多重集 S 的一个 r 组合.

多重集 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 的全排列数公式

$$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

多重集 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 的 r 组合数公式

$$C(k+r-1, r), \text{ 其中 } r \leq n_i, i = 1, 2, \dots, k.$$



内容提要-二项式定理和组合恒等式

10.1.2 二项式定理和组合恒等式

定理 10.1.1 (二项式定理) 设 n 是正整数, 对一切实数 x 和 y , 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

定理 10.1.2 (多项式定理) 设 n 为正整数, x_i 为实数, $i = 1, 2, \dots, t$, 那么有

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum_{\substack{\text{满足 } n_1 + \dots + n_t = n \\ \text{的非负整数解}}} \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t},$$

这里 $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$, 称作 **多项式系数**.

组合恒等式

$$(1) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n, k \in \mathbb{N}, k \leq n. \quad (10.1.1)$$

$$(2) \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-1}{k-1}, \quad n, k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n. \quad (10.1.2)$$

$$(3) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad n, k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n. \quad (10.1.3)$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.4)$$

$$(5) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.5)$$

$$(6) \quad \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n, k \in \mathbb{N}. \quad (10.1.6)$$

$$(7) \quad \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}, \quad k \leq r \leq n, k, r, n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.7)$$

$$(8) \quad \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}, \quad m, n, r \in \mathbb{N}, r \leq \min(m, n). \quad (10.1.8)$$

$$(9) \quad \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (10.1.9)$$



内容提要-组合计数模型

选取模型

集合的有序选取——集合排列.

集合的无序选取——集合组合.

多重集的有序选取——多重集的排列.

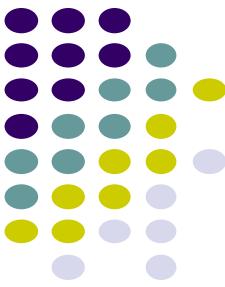
多重集的无序选取——多重集的组合.

不定方程

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$, x_i 为非负整数, $i = 1, 2, \dots, k$. 它的解的个数是 $C(k+r-1, r)$.

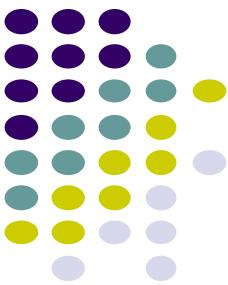
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$, x_i 为正整数, $i = 1, 2, \dots, k$. 它的解的个数是 $C(r-1, k-1)$.

当把 r 个相同个体分到 k 个不同的组时, 可能会用到不定方程的计数模型. 这种组合配置所关心的仅仅是每组被分配的个体数量, 而不是分配了哪一个个体.



基本要求

- 1. 能够应用上述计数模型求解简单的组合计数问题.
- 2. 能够用二项式定理（或多项式定理）展开二项式（或多项式）.
- 3. 能够证明组合恒等式.
- 4. 能够对含有组合数的公式求和.



题型一：基本的组合计数

1. 求 1400 的不同的正因子个数.
2. 把 10 个不同的球放到 6 个不同的盒子里, 允许空盒, 且前 2 个盒子球的总数至多是 4, 问有多少种方法.
3. 考虑由 m 个 A 和 n 个 B 构成序列, 其中 m, n 为正整数, $m \leq n$. 如果要求每个 A 后面至少紧跟着 1 个 B ,
问有多少个不同的序列.

解答与分析

1. 1400 的素因子分解式是

$$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7.$$

因此, 1400 的任何正因子都具有下述形式: $2^i \times 5^j \times 7^k$, 其中 $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 1$. 根据乘法法则,

1400 的正因子数是 i, j, k 的选法数:

$$N = (1+3) \times (1+2) \times (1+1) = 24.$$

2. 根据前两个盒子所含球数 k 对放法进行分类, 其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$. 对于给定的 k , 再用分步处理的思想计算放球的方法数. 这里的步骤是:

- (2.1) 先从 10 个球中选择放入前两个盒子的 k 个球, 有 $C(10, k)$ 种选法.
- (2.2) 把选好的 k 个球分到 2 个不同的盒子里, 每个球可以有 2 种选择, 有 2^k 种分法.
- (2.3) 剩下的 $10 - k$ 个球分到其他 4 个不同的盒子里有 4^{10-k} 种分法.

根据乘法法则, 使得前两个盒子含 k 个球的放法数是 $C(10, k) \cdot 2^k \cdot 4^{10-k}$.

最后使用加法法则对 k 求和, 就得到所求的方法数, 即

$$\sum_{k=0}^4 C(10, k) \cdot 2^k \cdot 4^{10-k} = 47\,579\,136.$$

3. 方法一 先放 n 个 B , 只有 1 种方法. 然后, 在每个 B 之间的 n 个位置中选择 m 个位置放 A , 有 $C(n, m)$ 种方法.

方法二 先放 m 个 AB , 只有 1 种方法. 把每个 AB 看作隔板, m 个隔板构成 $m+1$ 个空格, 在空格中放入 $n-m$ 个 B . 这相当于方程

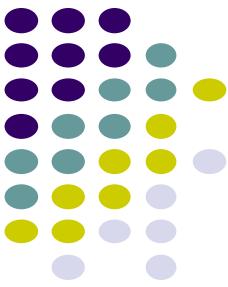
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - m$$

的非负整数解的个数, 因此

$$N = C(n - m + m + 1 - 1, n - m) = C(n, n - m) = C(n, m).$$

上述计数问题的求解往往使用选取问题、方程的非负整数解、非降路径模型. 应该注意的是:

- (1) 选择适当的组合计数模型.
- (2) 把问题分解, 这里需要使用分步处理和分类处理的思想. 例如, 上面第 1 题和第 3 题是分步处理, 第 2 题是先分类处理, 再分步处理.
- (3) 在分步处理时, 要考虑选取的顺序. 不同的次序可能会影响计算的复杂程度. 例如, 第 3 题, 先放 A 还是先放 B , 两种方法都可以用, 但是先放 B 的方法计算起来比较简单.
- (4) 在每一步或每一类的计数中, 特别要区分选取是否有序, 从而采用合适的组合计数公式(乘法法则、加法法则、排列、组合以及涉及多重集的计数公式).



题型二：二项式定理和多项式定理的应用

- 设 S 是 n 元集, N 表示满足 $A \subseteq B \subseteq S$ 的有序对 (A, B) 的个数, 用二项式定理证明 $N = 3^n$.
- 确定在 $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^8$ 的展开式中 $x_1^2 x_2^2 x_3 x_4^2$ 项的系数.

解答与分析

- 令 $|A| = k$, 按照 $k = 0, 1, \dots, n$ 对有序对 (A, B) 进行分类. 对于给定的 k , 先选 A , 方法数是 $C(n, k)$; 每个 B 都含有 A 的元素, 不同的 B 取决于剩下的 $n - k$ 个元素的选择. 每个元素都有“加入”或“不加入”2 种选法, 因此有 2^{n-k} 个不同的 B 集合. 由乘法法则, 这样的 (A, B) 有 $C(n, k) \cdot 2^{n-k}$ 个, 再使用加法法则和二项式定理, 从而得到

$$N = \sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot 1^k \cdot 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

这个问题的计数结果如此简单, 可能预示着存在更简单的计数方法. 确实如此. 如果不分步选取, 而是直接考虑对 (A, B) 的选择. S 中的每个元素可以有 3 种选法: 同时加入 A 和 B ; 不加入 A 但加入 B ; A 和 B 都不加入. 即只有“加入 A 但不加入 B ”的选法与题目条件不符. 因此, n 个元素总共有 3^n 种选法.

- 使用多项式定理, 所求的系数为

$$\binom{8}{2312} = (-1)^3 \cdot 2^1 \cdot (-2)^2 = -8 \cdot \frac{8!}{2!3!1!2!} = -13\,440.$$

题型三：组合公式的证明与化简

1. 证明: $\sum_{k=0}^n (k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2).$

2. 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}.$

3. 求和 $\sum_{k=0}^m \binom{n-m+k}{k}.$

3. 根据 Pascal 公式逐步归并相邻的两项可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{n-m+k}{k} &= \binom{n-m+0}{0} + \binom{n-m+1}{1} + \cdots + \binom{n}{m} \\ &= \left[\binom{n-m+1}{0} + \binom{n-m+1}{1} \right] + \binom{n+m+2}{2} + \cdots + \binom{n}{m} \\ &= \left[\binom{n-m+2}{1} + \binom{n-m+2}{2} \right] + \binom{n-m+3}{3} + \cdots + \binom{n}{m} \\ &= \cdots \\ &= \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \\ &= \binom{n+1}{m}. \end{aligned}$$

对于某些问题可能存在多种证明方法,一般可以根据情况从下述方法中选择.

- (1) 已知恒等式代入并化简.
- (2) 使用二项式定理比较相同项的系数,或者进行级数的求导或者积分.
- (3) 数学归纳法.
- (4) 构造组合计数问题(如选取问题、非降路径问题等),使得等式两边都等于这个问题的计数结果.

求和或化简公式常用的方法一般有下述几种.

- (1) 利用 Pascal 公式不断归并相关的项.
- (2) 级数求和.
- (3) 观察和的计算结果,然后使用归纳法证明.
- (4) 利用已知的恒等式代入.

1. 根据主教材中例 10.3.1(1) 和式 (10.1.4), 分别有

$$\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

将上述两式相加得

$$\sum_{k=0}^n (k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2).$$

2. 方法一 由二项式定理, 有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

于是有,

$$\int_0^x (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^n \int_0^x \binom{n}{k} x^k dx,$$

即

$$\frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

在上式中令 $x = -1$ 得

$$\frac{-1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} (-1)^{k+1}.$$

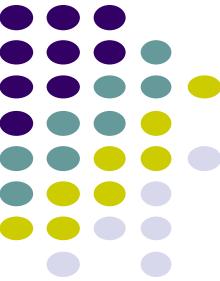
从而得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} - \binom{n}{0}(-1) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

方法二 利用习题十第 24 题 (4) 的结果 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \binom{n}{k} &= 1 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

作业



1. 填空题(6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分).

(1) 从 $S = \{1, 2, \dots, 20\}$ 中选出 2 个数使得其和是 3 的倍数, 则有 _____ 种方法.

(2) 满足不等式 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$ 的非负整数解的个数是 _____.

(3) 把 $2n$ 个不同的数分成 n 组, 2 个一组, 则有 _____ 种分法.

(4) 一个圆盘绕固定在圆心的轴转动. 把圆盘分成 3 个相等的扇形, 用 n 种颜色对扇形涂色, 且每个扇形的颜色都不相同, 则有 _____ 种不同的涂色方案.

(5) 方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ 满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2$ 的整数解的个数是 _____.

(6) 用红色、蓝色、黄色和绿色 4 种颜色涂色 1×10 的方格图形, 每个方格一种颜色. 如果要求红格和绿格各 3 个, 蓝格和黄格各有 2 个, 那么有 _____ 种涂色方案.

2. 简答题(4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分).

(1) 把字母 a, b, c, d, e, f 进行排列, 使得字母 b 总是紧跟在字母 e 的左边, 问有多少种排法. 若在排列中使得字母 b 总在字母 e 的左边, 则又有多少种排法?

(2) 求 $(x + 2y - 4z)^6$ 的展开式中 x^3y^2z 项的系数.

(3) 求和: $\sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n-k}$.

(4) $A = \{1, 2, \dots, n\}$, 其中 n 为给定正整数. 设 $S \subseteq A$, 若 S 的每个元素都不小于 S 的基数 $|S|$, 则称 S 是饱满的(这里认为空集是饱满的). 令 $N(n)$ 表示 A 的饱满子集的个数. 请导出关于 $N(n)$ 的公式.

3. 证明题(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

(1) $\binom{m}{0}\binom{m}{n} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1} + \dots + \binom{m}{n}\binom{m-n}{0} = 2^n \binom{m}{n}$.

(2) 给定正整数 n , 证明

$$\sum (-1)^{a+b} \binom{n}{a b c d} = 0,$$

其中, 求和是对方程 $a + b + c + d = n$ 的一切非负整数解来求和. 如何将以上命题一般化?

4. 应用题(10 分).

试证:任一整数是平方数的必要条件是它有奇数个正因子.