集合论-习题课

2023,3,18

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-基本概念

集合与元素

集合是一个不能精确定义的基本概念. 直观地说, 把一些事物汇集到一起组成一个整体就称作集合, 而这些事物就是这个集合的元素或成员.

在本书所采用的体系中规定元素和集合之间的关系是隶属关系, 即属于或不属于, 属于记作 $\in$, 不属于记作 $\notin$.

集合的表示法

列举法、描述法.

集合间的关系

定义 1.1.1 设 A, B 为集合, 若 B 中的每个元素都是 A 中的元素, 则称 B 是 A 的子集合, 简称为子集. 这时也称 B 包含于 A, 或 A 包含 B, 记作 $B \subseteq A$.

定义 1.1.2 设 A, B 为集合, 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 那么称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

若 A 与 B 不相等, 则记作 $A \neq B$.

定义 1.1.3 设 A, B 为集合, 如果 $B \subseteq A$, 但 $B \neq A$, 那么称 B 是 A 的真子集, 记作 $B \subset A$.

若 B 不是 A 的真子集, 则记作 $B \not\subset A$.

特殊集合

自然数集 $\mathbb{N}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$、复数集 $\mathbb{C}$.

定义 1.1.4 不含任何元素的集合称作空集, 记作 $\varnothing$.

定义 1.1.5 设 A 为集合, 称 A 的全体子集构成的集合为 A 的幂集, 记作 $P(A)$ 或 2^A.

定义 1.1.6 在一个具体问题中, 若所涉及的集合都是某个集合的子集, 则称这个集合为全集, 记作 E.

重要结果

- 空集是任何集合的子集, 且空集是唯一的.
- 如果 $|A| = n$, 那么 $|P(A)| = 2^n$.

内容提要-基本运算

集合初级运算

定义 1.1.7　设 A, B 为集合，A 与 B 的并集 $A\cup B$，交集 $A\cap B$，B 对 A 的相对补集 $A-B$ 分别定义如下：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\},$$
$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}.$$

定义 1.1.8　设 A, B 为集合，A 与 B 的对称差 $A\oplus B$ 定义为

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A).$$

对称差运算的另一种等价定义是

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B).$$

在给定全集 E 以后，E 的子集 A 的绝对补集 $\sim A$ 定义如下.

定义 1.1.9　$\sim A=E-A=\{x \mid x\in E \wedge x\notin A\}$.

集合的广义运算

定义 1.1.10　设 $\mathcal{A}$ 为一个集族，$\mathcal{A}$ 中全体元素的元素组成的集合称作 $\mathcal{A}$ 的广义并，记作 $\cup\mathcal{A}$；描述法表示为

$$\cup\mathcal{A}=\{x \mid \exists A\in\mathcal{A}\text{使得}x\in A\}.$$

定义 1.1.11　设 $\mathcal{A}$ 为一个集族，$\mathcal{A}$ 中全体元素的公共元素组成的集合称作 $\mathcal{A}$ 的广义交，记作 $\cap\mathcal{A}$；描述法表示为

$$\cap\mathcal{A}=\{x \mid \forall A\in\mathcal{A}\text{均有}x\in A\}.$$

注意

- 当集族 $\mathcal{A}$ 是空族，即 $\mathcal{A}=\varnothing$ 时，$\cup\mathcal{A}=\varnothing$，$\cap\mathcal{A}=E$.
- 广义运算在某些情况下可以转换成初级运算.

$$\cup\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$
$$\cap\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

运算的优先权规定

一类运算（广义运算、幂集和绝对补运算）由右向左进行；二类运算（相对补、对称差和初级运算）优先顺序由括号确定；一类运算优先于二类运算.

内容提要-集合恒等式

集合运算的主要算律

交换律	$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A,\ A\oplus B=B\oplus A.$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\ (A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C).$
幂等律	$A\cup A=A,\ A\cap A=A.$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$ $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C).$
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A.$
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing,\ A\cup\sim A=E.$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup E=E.$
同一律	$A\cup\varnothing=A,\ A\cap E=A.$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C),$ $\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C,\ \sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C.$
双重否定律	$\sim\sim A=A.$

意，我们仍然
证明结论为真

内容提要-有穷集合元素的计数

计数方法

文氏图或包含排斥原理. 集合之间的关系和初级运算可以用文氏图(Venn diagram), 也称维恩图, 给予形象的描述.

定理 1.1.1 (包含排斥原理) 设 S 为有穷集, $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 n 个性质. 集合 S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i, 或者不具有性质 P_i, 两种情况必居其一. 令 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, 则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的元素个数为

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

推论 1.1.1 集合 S 中至少具有一条性质的元素个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

错位排列数 $D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$

基本要求

1. 熟练掌握集合的两种表示法.
2. 能够判别元素是否属于给定的集合.
3. 能够判别两个集合之间是否存在包含、相等、真包含等关系.
4. 熟练掌握集合的基本运算(幂集运算、初级运算和广义运算),并能够化简集合表达式.
5. 能够使用包含排斥原理进行有穷集合的计数.
6. 掌握证明集合等式或者包含关系的基本方法.

题型一：判断元素与集合、集合与集合的关系

1. 判断下列命题是否为真.

(1) $\{x\} \subseteq \{x\}$.

(2) $\{x\} \in \{x\}$.

(3) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$.

(4) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$.

(5) $x \in \{x\} - \{\{x\}\}$.

(6) $X \subseteq \{X\} \cup X$.

(7) 若 $x \in A, A \in P(B)$,则 $x \in P(B)$.

(8) 若 $X \subseteq A, A \subseteq P(B)$,则 $X \subseteq P(B)$.

2. 设 $A = \{\varnothing\}, B = P(P(A))$,问下列陈述是否正确.

(1) $\varnothing \in B, \varnothing \subseteq B$.

(2) $\{\varnothing\} \in B, \{\varnothing\} \subseteq B$.

(3) $\{\{\varnothing\}\} \in B, \{\{\varnothing\}\} \subseteq B$.

(4) $\{\{\varnothing\}, \varnothing\} \subseteq B$.

4

(5) $\{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\} \subseteq B$.

- 1. (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(8) 为真，其余为假. 判断元素 a 与集合 A 的隶属关系是否成立的基本方法如下：
  - 把 a 作为一个整体，检查它在 A 中是否出现，注 意这里的 a 可能是集合表达式. 判断集合包含 $A \subseteq B$ 一般可以使用以下 4 种方法.
  - 方法一 若 A, B 是用列举方式定义的，则依次检查 A 的每个元素是否在 B 中出现.
  - 方法二 若 A, B 是用描述法定义的，且 A, B 中元素性质分别为 P 和 Q，则 "如果 P，那么 Q"意味着 $A \subseteq B$， "P 当且仅当 Q"意味着 $A = B$.
  - 方法三 通过集合运算判断 $A \subseteq B$，即若 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A - B = \emptyset$ 三个等式中有一个成立，则 $A \subseteq B$.
  - 方法四 可以通过文氏图判断集合的包含（注意这里是判断，而不是证明）. 注意在判断前应该先化简集合公式. 例如 (5) 的右部的集合公式是 $\{x\} - \{\{x\}\}$，化简后等于 $\{x\}$，因此不难 看出 (5) 为真.
  - 此外，包含关系有传递性，但是属于关系不具有传递性. 因此 (7) 为假而 (8) 为真.
- 2.先计算 B. $B = P(P(A)) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. 从而不难看出 (1)、(2)、(3)、(4) 正确； (5) 错误.

题型二：集合的基本运算

1. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{x|x=n^3, n\in\mathbb{N}, x<15\}$，求

   (1) $A\cup C$.

   (2) $B-A$.

   (3) $P(B)$.

2. 设 A 为任意集合，求 $(A\oplus A)-A$.

3. 求 $\cup\{\{k\}|k\in\mathbb{R}\}$，其中 $\mathbb{R}$ 为实数集.

解答与分析

1. (1) $\{0,1,2,3,4,5,6,8\}$.

   (2) $\varnothing$.

   (3) $\{\varnothing,\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\}\}$.

2. $\varnothing$.

3. $\mathbb{R}$.

题型三：集合运算性质分析

1. 设 A, B, C 为任意集合，判断下列命题的真假.

(1) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

(2) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

(3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup C$.

(4) $\sim (A - B) = \sim (B - A)$.

(5) $\sim (A \cap B) \subseteq A$.

(6) $(A \cap B) \cup (B - A) \subseteq A$.

(7) $A \cup B = A \Leftrightarrow B = \varnothing$.

2. 确定下列集合等式成立的充分必要条件.

(1) $A \cap B = A \cup B$.

(2) $(A - C) \cup B = (A \cup B) - C$.

解答与分析

1. 只有 (1) 和 (2) 是真命题，其余都是假命题.

解决这类问题的基本过程是：

1) 先将等式化简或恒等变形.

2) 查找集合运算的相关算律，如果与算律相符，那么结果为真.

3) 注意一些等式成立的充要条件，如

$$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing,$$

$$A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

如果与条件相符，那么命题为真，否则为假. 例如 (7) 中的 $A \cup B = A$ 的充分必要条件应该是 $B \subseteq A$，而不是 $B = \varnothing$.

4) 如果不符合算律，也不符合上述条件，那么可以用文氏图表示集合，看看命题是否成立. 如果成立，再给出证明. 例如 (2) 中的等式可以证明如下.

$$(A - B) \cap (B - A) = A \cap \sim B \cap B \cap \sim A = (A \cap \sim A) \cap (B \cap \sim B) = \varnothing.$$

5) 试着举出反例，证明命题为假. 例如 (3) 的反例如下：$A = \varnothing, B = \{1\}, C = \{2\}$. 在给出反例时应该对公式中出现的所有集合指定元素，而不是只指定一部分集合. 当然反例不是唯一的，应该尽可能选择简单的集合.

2. 怎样找出集合等式成立的充分必要条件？一般有两种方法：

<u>方法一</u>　直接利用已知的充分必要条件.

<u>方法二</u>　先推导出必要条件，然后再验证这个条件的充分性.

(1) 的充分必要条件是 $A = B$. 充分性是显然的，下面推导出必要性. 由 $A \cap B = A \cup B$ 得

$$A \cup (A \cap B) = A \cup (A \cup B),$$

化简得 $A = A \cup B$，从而有 $A \subseteq B$. 类似可以证明 $B \subseteq A$.

(2) 的充分必要条件是 $B \cap C = \varnothing$. 由 $(A - C) \cup B = (A \cup B) - C$ 得必要条件：

$$((A - C) \cup B) \cap C = ((A \cup B) - C) \cap C,$$

即

$$((A - C) \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \sim C \cap C,$$

亦即 $B \cap C = \varnothing$.

下面验证充分性. 如果 $B \cap C = \varnothing$，那么有 $B \subseteq \sim C$，从而得到

$$\begin{aligned}(A - C) \cup B &= (A \cap \sim C) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (\sim C \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap \sim C \\ &= (A \cup B) - C.\end{aligned}$$

题型四：集合间关系的证明

1. 设 A,B,C 为任意集合，$A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=A\cap C$，证明：$B=C$.

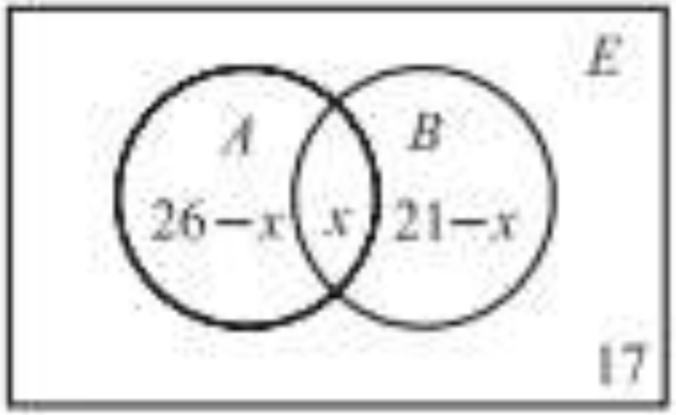
2. 证明：$A-B=A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

3. 设 $\mathcal{A}\neq\varnothing$，证明：$P(\cap\mathcal{A})=\cap\{P(A)|A\in\mathcal{A}\}$.

3. 使用广义交的定义．先证 $P(\cap A)\subseteq\cap\{P(A)|A\in \mathcal{A}\}$. 对任意 $X\in P(\cap\mathcal{A})$，有 $X\subseteq\cap\mathcal{A}$. 由广义交的定义，对任意 $A\in\mathcal{A}$，均有 $X\subseteq A$，即 $X\in P(A)$. 从而得到 $X\in\cap\{P(A)|A\in\mathcal{A}\}$，故 $P(\cap\mathcal{A})\subseteq\cap\{P(A)|A\in\mathcal{A}\}$. 反包含 $\cap\{P(A)|A\in\mathcal{A}\}\subseteq P(\cap\mathcal{A})$ 同理可证，

题型五：有穷集合的计数

- 某班有 50 个学生，在第一次考试中有 26 人得 100 分，在第二次考试中有 21 人得 100 分．如果两次考试中都没有得 100 分的有 17 人，那么两次考试都得 100 分的有多少人?



作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) $A=\{2,a,\{3\},4\}$, $B=\{\varnothing,4,\{a\},3\}$, 则 $A\oplus B=$______.

(2) 设 $A=\{\{\{1,2\}\},\{1\}\}$, 则 $P(A)=$______.

(3) 设 X,Y,Z 为任意集合, 且 $X\oplus Y=\{1,2,3\}$, $X\oplus Z=\{2,3,4\}$, 若 $2\in Y$, 则一定有______.

A. $1\in Z$　　B. $2\in Z$　　C. $3\in Z$　　D. $4\in Z$

(4) 下列命题中为真的是______.

A. $\{a,\{b\}\}\in\{\{a,\{b\}\}\}$　　B. $\varnothing\in P(\cup\{\varnothing,\{\varnothing\}\})$　　C. $\{a\}\subseteq X\Leftrightarrow a\in X$

D. $X\cup Y=Y\Leftrightarrow X=\varnothing$　　E. $X-Y=X\Leftrightarrow X\subseteq\sim Y$

(5) 设 $[0,1]$ 和 $(0,1)$ 分别表示实数集上的闭区间和开区间, 则下列命题中为真的是______.

A. $\{0,1\}\subseteq(0,1)$　　B. $\{0,1\}\subseteq[0,1]$　　C. $(0,1)\subseteq[0,1]$　　D. $[0,1]\subseteq\mathbb{Q}$　　E. $\{0,1\}\subseteq\mathbb{Z}$

(6) 设 $[a,b]$, (c,d) 代表实数区间, 那么 $([0,4]\cap[2,6])-(1,3)=$______.

2. 简答题(4 小题,每小题 10 分,共 40 分).

(1) 设 $E=\{1,2,\cdots,12\}$, $A=\{1,3,5,7,9,11\}$, $B=\{2,3,5,7,11\}$, $C=\{2,3,6,12\}$, $D=\{2,4,8\}$, 计算: $A\cup B$, $A\cap C$, $C-(A\cup B)$, $A-B$, $C-D$, $B\oplus D$.

(2) 设 $\mathcal{A}=\{\{a\},\{a,b\}\}$, 求 $\cup\mathcal{A}$, $\cap\mathcal{A}$.

(3) 设 A,B,C 为集合, 判断下列集合等式是否为恒等式, 并说明理由.

$$(A\cup B\cup C)-(A\cup B)=C,$$
$$A-(B-C)=(A-B)-(A-C).$$

(4) 找出下列集合等式成立的充分必要条件, 并简单说明理由.

$$(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing.$$

3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) 若 $A\subseteq B$, 则 $C-B\subseteq C-A$.

(2) $A\cup B=E\Leftrightarrow\sim A\subseteq B\Leftrightarrow\sim B\subseteq A$.

4. 应用题(10 分).

一个学校有 507, 292, 312 和 344 个学生分别选了微积分、离散数学、数据结构和程序设计语言课, 且有 14 人同时选了微积分和数据结构课, 213 人同时选了微积分和程序设计语言课, 211 人同时选了离散数学和数据结构课, 43 人同时选了离散数学和程序设计语言课, 没有学生同时选微积分和离散数学课, 也没有学生同时选数据结构和程序设计语言课. 问有多少学生在微积分、离散数学、数据结构或程序设计语言中选了课.