

微积分 I (第一层次) 期末试卷 2018.1.10

一、计算下列各题(6分×3=18分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{1}{t} \ln(1+xt) dt}{x^2}$.

2. 求不定积分 $I_1 = \int \cos(\ln x) dx$. 3. 求不定积分 $I_2 = \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$.

二、计算下列各题(6分×3=18分)

1. 求定积分 $I_3 = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

2. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求曲线 $y = \ln(1 - x^2)$ 上相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

三、计算下列各题(6分×3=18分)

1. 求广义积分 $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

2. 设 $(a+3b) \perp (7a-5b)$, $(a-4b) \perp (7a-2b)$, 求向量 a 与向量 b 的夹角 γ .

3. 求点 $P(1, 2, 3)$ 到直线 $L: \begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 的距离.

四、(10分) 设 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{1}{x_n^2})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

五、(10分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并绘出草图.

七、(10分) 设直线 $L: \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$, 平面 Π 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a, b, c 均不等于 0, 且 $b = c$, 平面 Π 过直线 L , 求平面 Π 的方程.

八、(6分, 本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶连续可导, $f(0)=0, f(1)=0$, 且 $\forall x \in (0, 1)$, 有 $f(x) \neq 0$. 求证: $\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4$.

九、(6分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 求证:

$$\int_a^b f(x) dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

微积分 I (第一层次) 期末试卷 2019.1.2

一、计算下列各题(6分×4=24分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2 \right).$

2. $y = x^2 e^{3x}$, 求 $y^{(10)}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(xt) dt}{x^3}.$

4. 求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线方程.

二、计算下列各题(6分×4=24分)

1. 求积分 $\int x \ln(2+x) dx.$

2. 计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^5 + x^3 + x^2 + x + \sin x}{1+x^2} dx.$

3. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

4. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq 2$), 求 $F(x)$.

三、(10分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \frac{n+1}{n}}{n+1} + \frac{\ln \frac{n+2}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\ln \frac{2n}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right).$

四、(10分) 求曲线 $y = \ln x$ 的一条切线, 使得这条切线与原曲线以及直线 $x = 1, x = e^2$ 所围成的图形面积最小.

五、(12分) 讨论函数 $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并绘出草图.

六、(12分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数.

(1) 如果 $f''(x) > 0$ ($x \in [-a, a]$), 证明: $\int_{-a}^a f(x) dx \geq 2af(0)$;

(2) 如果 $f(0) = 0$, 证明: 在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 ζ , 使得 $a^3 f''(\zeta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, 满足 $f^2(x) \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0, 1]$. 证明: $f(x) \leq 1 + x$, $x \in [0, 1]$.

微积分(I)期末试卷 2019.12.30

一、求下列不定积分(6分×3=18分)

$$1. I_1 = \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \cdot \sin(2x) dx.$$

$$2. I_2 = \int (\arcsin x)^2 dx.$$

$$3. I_3 = \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx.$$

二、计算下列各题(6分×3=18分)

$$1. \text{求定积分 } I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx.$$

2. 求由 $y^2 = -4(x-1)$ 与 $y^2 = -2(x-2)$ 所围平面图形的面积.

3. 求心脏线 $\rho = a(1 - \sin \theta)$ ($a > 0$) 的全长 s .

三、计算下列各题(6分×3=18分)

$$1. \text{求广义积分 } I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+1} dx.$$

2. 已知三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 3, |\mathbf{c}| = 4$, 且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

3. 设有两条直线 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}, L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, 证明它们是异面直线.

四、(10分) 设 $f(x)$ 是连续函数, 又 $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

五、(10分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)}}{n}$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并作出图像.

七、(10分) 求一条直线 L , 使得 L 过点 $P(2, 3, 4)$, 且与平面 $\Pi: 2x + y - 2z + 7 = 0$ 平行, 又与直线 $L_1: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-1}$ 相交.

八、(6分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

微积分I(第一层次)期末试卷参考答案2018.1.10

一、 1. 1; 2. $I_1 = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$. 3. $I_2 = \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C$.

二、 1. $\frac{\pi a^4}{16}$. 2. $\frac{16}{3}p^2$. 3. $\ln 3 - \frac{1}{2}$. 三、 1. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. $\sqrt{\frac{223}{13}}$. 四、1. 五、 $\frac{2}{\pi}$.

六、定义域 $x \neq 1$; 单调减区间 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, 单调增区间 $(-1, 1)$; 极小值 $f(-1) = -\frac{1}{4}$, 下凹区间 $(-\infty, -2)$, 上凹区间 $(-2, 1)$, $(1, +\infty)$; 拐点 $(-2, -\frac{2}{9})$; $x=1$ 是铅直渐近线; $y=0$ 是水平渐近线.

七、 $7x - 2y - 2z + 1 = 0$.

八、证明: 因为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 且 $f(x) \neq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内不变号, 不妨设 $f(x) > 0$. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由最值定理, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有最大值 M . 设 $f(x_0) = M > 0$, $x_0 \in (0, 1)$. 由拉格朗日中值定理, $\exists \alpha \in (0, x_0), \beta \in (x_0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(1) - f(x_0) &= f'(\beta)(1 - x_0), \text{ 即 } f'(\beta) = -\frac{M}{1 - x_0}; \quad f(x_0) - f(0) = f'(\alpha)(x_0 - 0), \text{ 即 } f'(\alpha) = \frac{M}{x_0} \\ \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &> \frac{1}{M} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{M} \int_\alpha^\beta |f''(x)| dx \geq \frac{1}{M} \left| \int_\alpha^\beta f''(x) dx \right| = \frac{1}{M} |f'(\beta) - f'(\alpha)| \\ &= \frac{1}{M} \left| -\frac{M}{1 - x_0} - \frac{M}{x_0} \right| = \frac{1}{x_0(1 - x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - x_0)^2} \geq 4. \end{aligned}$$

九、证明: 函数 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 展开成泰勒公式

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 > f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

$$\text{两边积分得 } \int_a^b f(x) dx > \int_a^b \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

微积分I(第一层次)期末试卷参考答案2019.1.2

一、 1. $\frac{2}{3}$; 2. $y^{(10)} = 3^8 e^{3x}(9x^2 + 60x + 90)$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$.

二、 1. $\frac{1}{2}x^2 \ln(2+x) - \frac{1}{4}x^2 + x - 2\ln(x+2) + C$; 2. $2 - \frac{\pi}{2}$; 3. $\frac{\ln 2}{4}$; 4. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

三、 $2\ln 2 - 1$. 四、切线方程为 $y - \ln \frac{1+e^2}{2} = \frac{2}{1+e^2}x - 1$.

五、单调增区间 $(-\infty, -4)$, $(0, +\infty)$, 单调减区间 $(-4, -1)$, $(-1, 0)$; 极大值 $f(-4) = -\frac{256}{27}$, 极小值 $f(0) = 0$; 下凹区间 $(-\infty, -1)$, 上凹区间 $(-1, +\infty)$; 没有拐点; 铅直渐近线 $x=-1$; 斜渐近线 $y=x-3$.

六、(1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \geq f(0) + f'(0)x \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx \geq \int_{-a}^a (f(0) + f'(0)x) dx = 2af(0)$.

$$(2) f(x) = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f'(0)x dx + \int_{-a}^a \frac{f''(\xi)}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx,$$

设 $M = \max_{x \in [-a, a]} f''(x)$, $m = \min_{x \in [-a, a]} f''(x)$, 则 $m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx \leq M$. 对 $f''(x)$ 用介值定理即得.

七、证明: 设 $u(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 则 $u(0) = 1, u'(x) = 2f(x) \leq 2\sqrt{u(x)}$, 而 $\sqrt{u(x)} - 1 =$

$$\int_0^x \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} dt \leq \int_0^x dt = x, \text{ 所以 } f(x) \leq \sqrt{u(x)} \leq 1+x.$$

微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案2019.12.30

一、 1. $I_1 = -\frac{2}{9}(1+3\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} + C$; 2. $I_2 = x(\arctan x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$;

$$3. I_3 = -\int \frac{x}{\cos x} d\frac{1}{x \sin x + \cos x} = -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{x \sin x + \cos x} d\frac{x}{\cos x}$$

$$= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C$$

二、 1. $e^{\frac{\pi}{2}}$; 2. $\frac{8}{3}$; 3. $8a$. 三、 1. 0; 2. $-\frac{29}{2}$.

四、 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ $g'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0, \\ \frac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$ $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

五、 原式 $= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}\right) = \exp\left(\int_0^1 \ln(1+x) dx\right) = \frac{4}{e}$.

六、 定义域 $(0, +\infty)$; 单调增区间 $(0, e)$, 单调减区间 $(e, +\infty)$; 极大值 $f(e) = \frac{1}{e}$, 下凹区间 $(0, e^{\frac{3}{2}})$, 上凹区间 $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$; 拐点 $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$; $x=0$ 是铅直渐近线; $y=0$ 是水平渐近线.

七、 $\frac{x-2}{15} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z-4}{8}$.

八、 证明: 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = f'(x)$, $F'''(x) = f''(x)$, 且 $F(a) = 0$.

$F(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f''(\xi_1)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (1)$$

其中 ξ 在 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间. 在 (1) 中分别令 $x=a$ 和 $x=b$, 得

$$0 = F\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{4} - \frac{1}{6}f''(\xi_2)\frac{(b-a)^3}{8}, \quad a < \xi_2 < \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{6}f''(\xi_3)\frac{(b-a)^3}{8}, \quad \frac{a+b}{2} < \xi_3 < b \quad (3)$$

(3) - (2) 得

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{48}(f''(\xi_2) + f''(\xi_3))$$

由 $f''(x)$ 的连续性可知 $f''(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_3]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 再由介值定理, $\exists \xi \in [\xi_2, \xi_3] \subset (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{2}(f''(\xi_2) + f''(\xi_3))$, 所以

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$