《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2015. 1. 7

一、填空（本题满分 7×3=21 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\arctan(at)dt}{x^6}=2$，则 $a=$ ________ ；

2. 设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$，则 $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=$ ________ ；

3. $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}dx=$ ____ ；

4. 设一平面过原点及 $M(6,-3,2)$ 且与 $4x-y+2z=8$ 垂直，则该平面的方程为_______ ；

5. 已知三点 $A(1,0,2),B(2,1,-1),C(0,2,1)$，则三角形 ABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=$ ________ ；

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-7x+5})=$ ________ ；

7. 已知广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^k x}$ 收敛，则 k 的最大取值范围为________ .

二、计算下列各题（本题满分 8×5=40 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$ ；

2. 设直线 L 的方程为：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{5}$，平面 Π 的方程为: $3x+y+2z+20=0$，求直线 L 与平面 Π 的夹角和交点 M；

3. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+x^2\int_0^1 f(x)dx+x^3\int_0^2 f(x)dx$，求 $f(x)$；

4. 计算积分 $\int_0^1\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx$；　　5. 求曲线 $y=x(1-x^2)$ 与 x 轴所围平面图形的面积;

6. 设 $y=\dfrac{x}{1-x}$，求 $y^{(n)}$；

7. 设 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量，$|\vec{b}|=1,<\vec{a},\vec{b}>=\pi/3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$；

8. 计算积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

三、（本题满分 15 分）讨论函数 $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图.

四、（本题满分 10 分）求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线以及直线

$x=1, x=e^2$所围成的图形面积最小.

五、(本题满分 8 分)设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶的连续导数，并且 $f(0)=f(1)=0$，当 $x\in[0,1]$ 时，$|f''(x)|\le M$. 证明：当 $x\in[0,1]$ 时，有 $|f'(x)|\le M/2$.

六、(本题满分 6 分)设函数 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的可微函数，并且满足 $f(1)=1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x^2+[f(x)]^2}$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在并且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$.

《微积分 I》(第一层次)期末试卷 2016.1.5

一. 计算下列各题(本题满分 10 分×5=50 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x^2}$.

2. 计算积分 $\int x^2(\ln x)^2 dx$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt}{x^2}$.

4. 计算积分 $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

5. 求过原点且经过两平面 $\begin{cases}2x-y+3z=8;\\ x+5y-z=2\end{cases}$ 的交线的平面方程 .

6. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n+k}$.

8. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长 .

9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$，求 $f^{(n)}(x)$.

10. 已知 $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=1, <\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{3}$. 求 $\vec{A}=2\vec{a}+\vec{b}, \vec{B}=-\vec{a}+3\vec{b}$ 的夹角 .

二、设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx$. (10 分)

三、(本题满分 10 分)已知当 $x\to 0$ 时，$e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 是关于 x 的 3 阶无穷小，求常数 a,b 之值.

四、（本题满分 14 分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，并作出草图.

五、（本题满分 10 分）设 $S(x)=\int_0^x |\cos t|\,dt$，

1. 当 n 为正整数，且 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时证明不等式 $2n \le S(x) \le 2(n+1)$；

2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

六、（本题满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且存在 $M>0$ 使得 $|f'(x)|\le M$. 设 n 是正整数，证明：$\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(k/n)}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|\le \dfrac{M}{2n}$.

《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2016.12.28

一、填空（每小题 3 分，共 8 题，计 24 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$____________；

2. 设参数方程为 $\begin{cases} x=te^t, \\ y=2t+t^2; \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$____________；

3. 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$ 的单调增加区间为____________；

4. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 较 $x\cdot\sin x^n$ 为高阶无穷小，而 $x\cdot\sin x^n$ 较 $e^{x^2}-1$ 为高阶无穷小，则正整数 $n=$____________；

5. 已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,\ 0)$ 处的切线相同，则 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处的法线方程为____________；

6. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x+2}{x-3}}-1}$，则 $x=3$ 是 $f(x)$ 的____________间断点；

7. 设向量 $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, 则向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=$______；

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=$____________.

二、计算下列各题（每小题 6 分，共 6 题，计 36 分）

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}$.　　2. 求$I=\int_0^{\pi}x\cos^6 x\sin x dx$

3. 求过点$M(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases}x=-t+2\\ y=3t-4\\ z=t-1\end{cases}$垂直的平面方程.

4. 计算$\int\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$.　　5. 计算$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}}$.

6. 计算$\int_0^1 x^2 f(x)dx$，其中$f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$.

三、(本题 10 分)设$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$为常数），求$\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

四、(本题 12 分)讨论函数$y=x^2+\dfrac{1}{x}$的定义域，单调增减区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数的图像.

五、(本题 10 分)设函数$y=f(x)$具有二阶导数且$f''(x)<0$，直线L_t是曲线$y=f(x)$上任一点$\left(t,f(t)\right)$处的切线（$t\in[0,1]$）. 记直线L_t与曲线$y=f(x)$以及直线$x=0,x=1$所围成的图形的面积为$A(t)$. 证明：$A(t)$的最小值$\min\limits_{0\le t\le1}A(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\int_0^1 f(x)dx$.

六、(本题非商学院的学生做，满分 8 分)设$f(x)$在$[0,1]$上连续且非负，(1)试证存在$x_0\in(0,1)$，使得$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积，等于$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积；(2)又设$f(x)$在$(0,1)$内可导， 且$f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明(1)中的x_0是唯一的.

七、(本题商学院的学生做，满分 8 分)设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上可导，且$f(0)=0,\ f(1)=1$，试证：(1)存在$\xi\in(0,1)$，使$f(\xi)=1-\xi$；(2)存在两个不同的点$\eta_1,\eta_2\in(0,1)$，使$f'(\eta_1)\cdot f'(\eta_2)=1$.

参考答案：

14 级：一、1. 6；2. $e^{-1}-1$；3. $-\dfrac{1}{2}(x\csc^2 x+\cot x)+C$；4. $2x+2y-3z=0$；5. $\sqrt{50}/2$；

6. -5；7. $(1,+\infty)$

二、1. $4/e$；2. $\pi/3, M(-5,3,-4)$；3. $f(x)=x+\dfrac{3}{8}x^2-x^3$；4. $\dfrac{e}{2}-1$；5. $\dfrac{1}{2}$；

6. $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$；7. $\frac{1}{2}$；8. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$. 三、略.

四、切线方程为：$y=\frac{2}{e^2+1}x+\ln\frac{e^2+1}{2}-1$.

五、设 $x_0\in[0,1]$，由泰勒公式有：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\varsigma)}{2}(x-x_0)^2$，其中 ς 在 x 与 x_0 之间. 将 $x=0,x=1$ 分别代人上式，得

$$0=f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{f''(\xi_1)}{2}{x_0}^2,\ \xi_1\in(0,x_0)\quad(1)$$

$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2,\ \xi_2\in(x_0,1)\quad(2)$$

(2)−(1) 得 $f'(x_0)=\frac{f''(\xi_1)}{2}{x_0}^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2, |f'(x_0)|\le\frac{M}{2}[{x_0}^2+(1-x_0)^2]\le\frac{M}{2}$.

六、因为 $f'(x)=\frac{1}{x^2+[f(x)]^2}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为严格单调增加函数，当 $x>1$ 时，

$f(x)>f(1)=1$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x^2+[f(x)]^2}<\frac{1}{x^2+1}$，而 $f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)dt$

$<1+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt<1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=1+\frac{\pi}{4}$. 故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为单调增加有界函数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在并且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\le1+\frac{\pi}{4}$.

15 级：

一、$1.e^3;2.\frac{1}{3}x^3\ln^2x-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2}{27}x^3+C;3.1;4.\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1;$

$5.2x+21y-7z=0;6.\frac{\pi}{2}-1;7.\pi\ln2;8.8a;9.(-1)^n\frac{n!}{6}(\frac{1}{(x-4)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}});$

$10.\arccos\frac{-19}{\sqrt{73\times13}}$. 二、$x-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+C$; 三、$a=0.5,b=-0.5$

四、定义域 $x\ne1$, 单调增区间为 $(-\infty,1),(3,+\infty)$, 减区间为 $(1,3)$, 极小值 $f(3)=27/4$;
凹区间为 $(0,1),(1,+\infty)$, 凸区间为 $(-\infty,0)$, 拐点 $(0,0)$, 渐近线 $x=1$, $y=x+2$. 图略

五、(1) $\because|\cos t|\ge0,\int_0^{n\pi}|\cos t|dt\le\int_0^x|\cos t|dt\le\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt$,

而 $\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2n$.

(2)由夹逼定理得，$2/\pi$.

六、$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(k/n)}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(k/n)}{n}-\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(x)dx\right)\right|$

$\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|f(\frac{k}{n})-f(x)|dx\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|f'(\xi_n)(x-\frac{k}{n})|dx$

$\le M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}(x-\frac{k}{n})dx=\frac{M}{2n}.$

16 级:

一、1.1；2. 2；3. $(0,\frac{2}{5})$；4. 2；5. $y=-x$；6.第一类跳跃；7. $\pi/2$；8. $1/2$.

二、1. $\pi/6$；2. $\pi/7$；3. $x-3y-z+4=0$; 4. $x-3y-z+4=0$

5. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+\ln x}+C$; 6. $\pi/(4e^2)$; 7. $\frac{1}{3e}-\frac{1}{6}$. 三、略

四、定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.令 $y'=0$，得$x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$；令 $y''=0$，得$x=-1$，

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$
y′	−	−	−		−	0	+
y′′	+	0	−		+	+	+
y	凹、减	拐点	凸、减		凹、减	极小	凹、增

有一条垂直渐近线$x=0$，图形无水平、斜渐近线.图形上的点$(-1,0),\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$. 图略.

五、略; 六、略; 七、(1) 令$F(x)=f(x)-1+x$

(2) 提示：在$(0,\ \xi),(\xi,\ 1)$使用拉格朗日公式.