2010-2011 学年第一学期第一层次期中考试试卷 2010.11.28

一、计算下列各题：每小题 6 分，共 48 分）

1. 用“$\varepsilon - K$”语言证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{x+1}=2$． 2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\csc x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导,且 $f(a)\neq 0$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

4. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{\sin^3 x}$． 5. 求出 $f(x)=\mathrm{sgn}(\cos x)$ 的间断点，并指出其类型.

6. 设 $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$ ，求 $y^{(n)}$. 7. 设 $\begin{cases} x = 2\arctan t \\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$,求 y' , y''.

8. 设隐函数 $y(x)$ 由 $x^2y-e^{2x}=\sin y$ 确定，试求 dy.

二、设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.（8 分）

三、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left[\dfrac{k}{n^2}-\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{(n+i)^2}\right]$（$k$ 为一确定的正整数）（8 分）

四、设 $x\to 0$ 时函数 $f(x)=\sin 3x+ax+bx^3$ 为 x^3 的高阶无穷小，试求常数 a,b（8 分）

五、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 问当 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 点连续？求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性。（12 分）

六、设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且在 $(0,\pi)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$,，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.（8 分）

七、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $0<f(x)<1, f'(x)\neq 1$，求证方程 $f(x)-x=0$ 在 $(0,1)$ 内恰有一个解 .（8 分）

2011-2012 学年第一学期第一层次期中考试试卷 2011.11.12

一、（12 分，每小题 6 分）用极限定义证明下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}=0$（$\varepsilon-N$ 语言）；　　（2） $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2+x}=2$（$\varepsilon-\delta$ 语言）.

二、（24 分，每小题 6 分）求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)(a>0)$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0+}(\csc x)^{\frac{1}{\ln x}}$；　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

三、（6 分）求 $x-\arctan x$ 关于基准无穷小 x 的无穷小主部.

四、（18 分，每小题 6 分）计算下列各题：

（1）设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

（2）设 $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$，求 $y^{(n)}(n>1)$；　（3）设 $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，求 dy.

五、（10 分）设 $x_1=10,x_{n+1}=-\sqrt{6+x_n},n=1,2,\cdots,$ 求其极限，并论证极限的存在性.

六、（12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1.$

（1）欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值；

（2）在（1）的条件下，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0,\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)=1.$

(1) 证明存在 $c\in(0,1),$ 使得 $f(c)=c;$

(2) 证明存在 $\xi\in(0,1),(\xi\neq c)$ 使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1.$

八、（8 分）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a,b 的值.

微积分 I（第一层次）期中试题 2012.11.24

一、（7 分）用极限定义（$\varepsilon-\delta$ 语言）证明函数的极限：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}$.

二、（8 分）指出函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}$ 的间断点，并讨论其类型 .

三、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$.

四、（21 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]$；

（2）设 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}+2^{\sin x}$ ，求 dy 以及 $dy|_{x=2}$ ；

（3）过 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求该切线方程以及对应的法线方程 .

五、（10 分）设 $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{2x_n+1}{x_n+2}$. 论证数列 $\{x_n\}$ 极限的存在性并求之.

六、（10 分）设 $f(x)=e^x\ln(1+x)+\sin x+ax^2+bx+c, f(x)=o(x^2)$，求 a,b,c ，并求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数，指出其无穷小主部 .

七、（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上二阶可导，$f(0)=0, f(1)=2, f(\dfrac{\pi}{2})=1$.

（1）求证：$\exists\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ ，使得 $f'(\xi)=0$.

（2）求证：$\exists\eta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ ，使得 $f'(\eta)+f''(\eta)\tan\eta=0$.

八、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x<0;\\ x^2, \quad ,x\ge 0.\end{cases}$，求 $f'(x)$ ，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性 .

九、（14 分）讨论函数 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点以及渐近线，绘制函数的简图 .

微积分 I（第一层次）期中试题 2013.11.16

一、（8 分）用极限定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明数列的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$.

二、（8 分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+x-2}$ 的间断点，并指出其类型（说明理由）.

三、（8 分）在 $x\to 0$ 时，求函数 $\arcsin x - x$ 关于 x 的无穷小的阶以及无穷小主部.

四、（35 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arcsin\dfrac{2013}{n}-\arcsin\dfrac{2013}{n+1})$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}[(2+x)e^{3/x}-x]$；

（3）设 $y=2^{\arctan\frac{1}{x}}$，求 dy；

(4) 设 $y=\dfrac{1}{x^2+8x+7}$，求 $y^{(n)}$；

（5）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=8$，求 $f'(0)$.

五、（10 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\dfrac{1}{n})^{5\csc^2\frac{1}{n}}$.

六、（10 分）设 $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,\cdots$. 论证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、（13 分）设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0;\\ 0, \qquad x=0.\end{cases}$

（1）求 $f'(x)$ ，（2）讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

八、（8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $f(a)=1, f(b)=0$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)\,(\xi\neq\eta)$，使得 $1/f'(\xi)+2/f'(\eta)=3(a-b)$.

2014-2015 学年第一学期微积分 I（第一层次）期中试题　2014.11.22

一、（12 分，每小题 6 分）用极限定义证明下列极限：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}=1$；　　2、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$．

二、（12 分，每小题 6 分）计算下列各题：

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x(5^x-1)\ln(1-3x)}{\arcsin x(\cos x-1)\arctan x}$；

2、设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)$，求 $f'(0)$　．

三、（16 分，每小题 8 分）计算下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$；　　2、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$．

四、（8 分）设 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x^2-3x+2)}$，求 $f(x)$ 的间断点，并指出间断点的类型.

五、（8 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定，求 dy．

六、（12 分）设 $x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}\ (c>1),\ n=1,2,3,\cdots$，讨论该数列 $\{x_n\}$ 的收敛性. 如果数列收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

七、（10 分）求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$．

八、（10 分）　设 $f(x)=e^x\ln(1+x)+\sin x+ax^2+bx+c,\ f(x)=o(x^2)$，求 a,b,c, 并求 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

九、（12 分）证明：（1）可导的奇函数的导数为偶函数，可导的偶函数的导数为奇函数；

（2）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f(1)=1$．证明：

① 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$. ②存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

微积分 I（第一层次）期中试题 2015.11.14

一、（8 分×2=16 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^2+1}=\dfrac{1}{3}$ ；　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

二、（8 分）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，并指明间断点的类型.

三、（8 分）设 x 为基准无穷小，试求出无穷小 $\arcsin x-x$ 关于 x 的阶和无穷小主部.

四、（8 分×5=40 分）计算下列各题：

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=-1$，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[n(e^{1/n}-1)\right]^{\frac{1}{1-f(1/n)}};$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3}$；

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$；

4.设 $y=x\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{x^3+8}}+(5+\sin x)^{\cos x}$，求 y' 以及 dy ；

5. 设 $y=\cos^4 x-\sin^4 x$，求 $y^{(n)}$.

五、（8 分）设 a_1,a_2,a_3 为正数，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为实数，满足 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明：方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$ 在区间 $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$ 内各有一个根.

六、（10 分）设 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性，并求之.

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=0$. 设常数 $a>0, b>0$，证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$；

（2）存在 $\eta,\mu\in(0,1),\eta\neq\mu$，使得 $a\left(\dfrac{1}{f'(\eta)}+1\right)+b\left(\dfrac{1}{f'(\mu)}+1\right)=0$.

微积分 I（第一层次）期中试题 2016.11.12

一、（6 分×2=12 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+1}=0$ ； 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}=2$.

二、（8 分）讨论函数 $y=|x(x^2-1)|\sin x$ 的可导性 .

三、（8 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

四、（8 分×5=40 分）计算下列各题：

1. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $e^y-e^{-x}+xy=0$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 点处的切线方程 .

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

4.设函数 $y=\ln(\sin x)+x^{x^a}+\dfrac{5^{3x}}{2^x}(a\in R)$ ，求 y' 以及 dy .

5. 设 $f(x)=\ln(e^{\sin 2x}(x-1))$ ，求 $f^{(n)}(x)$.

五、（12 分）已知 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ ，

1. 证明： $\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$, 其中$k$为正整数.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

六、（12 分）设 $f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$ ，并设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$ 存在且不为零，求常数 a,b 及此极限值.

七、（8 分） $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数， a 是一个实数，试证明存在 $\xi\in[0,1]$ 内，使得 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

微积分 I（第一层次）期中试题 2017.11.18

一、（本题共有两小题，每小题 6 分，共 12 分）用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0$，　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

二、（本题共有三小题，每小题 6 分，共 18 分）计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$；　2. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\pi-2\arctan x)$；　3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

三、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}e^{\sin ax}-1, & x\ge 0,\\ b\ln(1+x), x<0\end{cases}$ ，其中参数 $a,b\ne 0$，如果 $f''(0)$ 存在，求 a,b.

四、（10 分）当 $x\to 0$ 时，以 x 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、（10 分）求方程 $x^3+y^3-3axy=0\,(a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y''.

六、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1,$ 证明：存在 $\eta\in(0,1),$ 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、（10 分）求参数方程 $\begin{cases}x=4\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta\end{cases}(0\le\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线方程和法线方程.

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x), f(0)=1,$ 证明：对任意的正整数 $k,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^k f(x)=0$.

九、（10 分）设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，其中 a,b,c,d 为常数且 $a\ne 0$，证明 $f(x)$=0 有三个不相等的实根的必要条件为 $b^2-3ac>0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷 (2018.11.17)

一、简答题：(5分×8 = 40 分)

1. 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$.
4. 设 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求 $\mathrm{d}y$.
5. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n\Big((1+\dfrac{1}{n})^n-e\Big)$.
6. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.
7. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)$.
8. 设 x 为基准无穷小，求 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的主部.

二、(7分) 设 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

三、(7分) 证明方程 $\cos x-\dfrac{1}{x}=0$ 有无穷多个正根.

四、(7分) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5a \end{cases}$ 所确定(其中 a 为常数)，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(8分) 设 $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$, 其中 $x>-1$.

(1) 证明：$f(x)$ 是常数函数；　(2) 求 $\arctan(2-\sqrt{3})$ 的值.

六、(8分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+\ln(1+x^2), & x>0; \\ ax\sin x, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. 试求 a 的值以及 $f''(0)$.

七、(8分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$, 试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

八、(8分) (1) 对任意的正整数 n, 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$;

(2) 令 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=1, f(1)+2f(2)=3$. 试证明：$\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x+(\arctan x)^{\tan x}}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$，其中 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性.

6. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设 $f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$, 求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小，求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(10分) 确定函数 $f(x)$ 的间断点，并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a)=f(b)$, 证明对一切 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<f(a)=f(b)$.

四、(10分) 求由方程 $e^{x+y}-xy-e=0$ 确定的曲线在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$, 又 $f(a)=1$, $f(b)=0$, 证明

(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$;

(2) 存在 $\xi_2,\xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$.

六、(10分) 设 $f(x)=|x|^n g(x)$, 其中 n 为奇数，$g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数？

微积分 I (第一层次)期中试卷(2020.11.21)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{x}=1$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}\sin x, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

4. 设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n\ (n\geqslant 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求该极限.

5. 求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=\ln 2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

6. 求曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

8. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1}-\arctan\dfrac{2020}{n+1}\right)$ 是不为零的常数, 求 α 以及该极限值.

二、(10分) 确定以下函数的间断点，并说明是哪种类型的间断点.

$$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

三、(12分) 当 $x\to0$ 时，求 $1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

四、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$, $f(2)=1$, 计算 $f'''(2)$.

五、(10分) 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, 求 $f(x)$ 的各阶导函数.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$, $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明：在 $[0,1]$ 上，$f(x)\equiv0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷 (2021.11.20)

一、简答题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}$.

3. 以 x 为基准无穷小，当 $x\to 0$ 时，求 $5^x-1-\ln(1+x\ln 5)$ 的无穷小主部.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan x+\mathrm{e}^y+xy=0$ 给出，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

5. 设 $x_1\in\mathbb{R}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sin x_n$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $t=1$ 对应点处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

7. 设 $y=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{-x}$，求 $y^{(99)}$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_i>0,\ i=1,2,3,4$.

二、(10分) 求函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x+2)}{x^2+x-2}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

三、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0, \\ 1+x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 的连续性;　　(2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

四、(8分) 设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)\mathrm{e}^{f(x)}$, $f'(x)=\sin x+x$, 且 $f(0)=1$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

五、(8 分) 当 $x>0$ 时，证明不等式：$0<\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}<x(\mathrm{e}^x-1)$.

六、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$ 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值.

证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$.

七、(8分) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}$.

微积分 I (第一层次)期中试卷 (2022.11.12)

一、证明下列各题（每题 6 分，共 12 分）

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon-\delta$ 语言) 证明 $\lim\limits_{x\to1}(x+2\sqrt{x})=3$.

2. 用数列极限定义 ($\varepsilon-N$ 语言) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3q^n=0$, $(|q|<1,\ q\neq0)$.

二、计算下列各题（每题 6 分，共 36 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.

3. 设 $x\geqslant0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^n}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=1$. 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5. 求 $y=\dfrac{5}{x^2-x-6}$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

6. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\cos t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

三、(8分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$ 的连续性，并判断其间断点的类型.

四、(8分）设函数 $f(x)=\tan x-\sin x+\mathrm{e}^x+ax^2+bx+c$, 满足 $f(x)=o(x^2)$, 求 a,b,c, 并求 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

五、(10分）设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n+6}{x_n+2}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

六、(6分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(f(x))=x$ 有实根，求证 $f(x)=x$ 亦有实根.

七、(10分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=0$, $f(2)=2$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $f(\xi)=2-\xi$;

(2) 存在 $\eta,\zeta\in(0,2)$, $(\eta\neq\zeta)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

八、(10分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(a\ln(1+x)+b\cos x-b), & x<0,\\ 1+\sin x, & x\geqslant0.\end{cases}$ 试求：

(1) a, b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

(2) 在 (1) 成立的前提下，复合函数 $F(x)=f(f(x))$ 在 $x=0$ 处是否可导？若可导，求出其在 $x=0$ 处的导数值.

微积分 I (第一层次) 期中试卷 (2023.11.12)

一、计算或证明下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon-\delta$ 语言) 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=1$.

2. 当 $x\to 0$ 时, 以 x 为基准无穷小, 求 $1-\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\cos x$ 的无穷小主部.

3. 设 $f(x)=(x^2+11x+12)\sin x$, 求 $f^{(23)}(x)$.

4. 设 $y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}+\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$, 求 $\mathrm{d}y$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x-x\cos x}{\arctan x\cdot\arcsin^2 x}$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0, f'(0)=2$. 设 n 是自然数, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(f(\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n}+1\Big)^n$.

7. 已知 $u=g(\sin y)$, 这里 g 是一个可导函数, $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2}, ab\neq 0)$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

8. 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^{\frac{1}{y}}=x$ 确定 $(0<y<1)$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(8分) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明对任何正实数 α 和 β, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(\xi).$$

三、(8分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$ 证明 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导.

四、(10分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 4\arctan x+1, & x\geqslant 0,\\ -x^2+bx+c, & x<0.\end{cases}$

(1) b, c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导?

(2) 在 (1) 成立的前提下, 求 $(f^{-1})'(1)$.

五、(8分) 设 a,b,c 是三个实数，证明 $\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$ 的实根数目 $\leqslant 3$.

六、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\big(f(x)+1\big)x^2}{x-\sin x}=2$, 求 $f'(0)$.

七、(10分) 证明方程 $\cos x-x=0$ 有唯一根, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\cos\cos\cos\ldots\cos}_{n\text{个}}x$ 恰为此根.

2010 级参考答案：

一、 （2）e^{-1}． (3) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$． 4. 1/3． 5. $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\,(k\in Z)$ 为跳跃间断点 ．

6． $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{3}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$． 7. $y'=t$， $y''=\frac{1+t^2}{2}$．

8． $dy=\frac{2(xy-e^{2x})}{\cos y-x^2}dx$．

二、$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$． 三、$k(k+1)$

四、$a=-3, b=9/2$.

五、$a=1/2$ $f'(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{(e^x-1)^2}-\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ -\frac{1}{12}, & x=0,\end{cases}$ ， $f'(x)$ 在 $x=0$ 点也连续.

六、设 $F(x)=f(x)\sin x$， $x\in[0,\pi]$，

七、$F(x)=f(x)-x, x\in[0,1]$

2011 级参考答案：

二、(1) $\ln a$. (2) $\frac{1}{2}$. (3) $1/e$. (4) $1/\sqrt{e}$. 三、无穷小主部为 $\frac{1}{3}x^3$

四、(1) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$. (2) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{3}[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}]$.

(3) $dy=-\frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$.

五、$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$.

六、(1) $a=0$. (2) $f'(x)=\begin{cases}\frac{xg'(x)+xe^{-x}-g(x)+e^{-x}}{x^2}, x\neq 0,\\ \frac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

七、(1) 设 $F(x)=f(x)-x, x\in[0,1]$, 用闭区间上连续函数的零点定理.

(2) 设 $G(x)=e^{-x}(f(x)-x), x\in[0,c]$，用洛尔定理

八、$a=1, b=-1$.

2011 级参考答案：

一、略

二、$f(x)$ 的间断点为 0，±1 . 0 为可去间断点 . 1 为无穷间断点或第二类间断点 .

-1 为跳跃间断点 .

三、$\exp(\frac{f''(0)}{2})$.

四、（1）$\frac{1}{2}$；（2）$dy=\left(\frac{1}{1+x^2}+2^{\sin x}\ln 2\cos x\right)dx$，$dy|_{x=2}=(\frac{1}{5}+2^{\sin 2}\ln 2\cos 2)dx$.

(3)切线方程为：$x-2y-1=0.$，对应的法线方程为：$2x+y-7=0$.

五、$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

六、 $c=0, b=-2, a=-1/2$. 且 $f(x)$ 的无穷小阶数为 3，无穷小主部为 $\frac{x^3}{6}$.

七、（1） 由题意，对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上使用 Lagrange 定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2>0$，在 $[1,\frac{\pi}{2}]$ 上使用 Lagrange 定理，存在 $\xi_2\in(1,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi_2)=\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(1)}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{-2}{\pi-2}<0$. 又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，所以由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=0$

注： 在[0,1]上使用介值定理，存在一个 $d\in(0,1), s.t. f(d)=1$. 然后在 $[d,\frac{\pi}{2}]$ 上使用 Rolle Th. 结论得证.

（2）令 $F(x)=\sin x f'(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上连续，在 $(0,\xi)$ 内可导，且 $F(0)=0$，$F(\xi)=0$，由 Rolle 定理 $\exists\eta\in(0,\xi)\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $F'(\eta)=0$，而 $F'(x)=\cos xf'(x)+\sin xf''(x)$，所以有 $\cos\xi f'(\xi)+\sin\xi f''(\xi)=0$，因为 $\cos\xi\neq0$，

所以 $f'(\eta)+f''(\eta)\tan\eta=0$. 证毕.

八、 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x<0,\\ 2x, & x>0.\end{cases}$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，左不连续（或 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续）.

九、函数的定义域为 $x\neq 0$， $x=0$ 为函数的垂直渐近线. 斜渐近线： $y=x+3$.

函数的增区间为：$x<-1, x>0$，函数的减区间为：$(-1,0),(0,2)$，在 $x=-1$ 处取得极大值 $y(-1)=1/e$，在 $x=2$ 处函数取得极小值 $y(2)=4\sqrt{e}$.

函数的上凹区间为 $(-\frac{2}{5},0),(0,+\infty)$，函数的下凹区间为 $(-\infty,-2/5)$，拐点为 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$. 图省略

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案16.11.12

一、 证明：1. $\left|\dfrac{2n+1}{n^2+1}-0\right|=\dfrac{2n+1}{n^2+1}<\dfrac{4n}{n^2}=\dfrac{4}{n}$,

$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$ 时，总有$\left|\dfrac{2n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$.

2. $\left|\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}-2\right|=|\sqrt{x}-1|=\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}+1}\le|x-1|$ （设$0<|x-1|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{1,\varepsilon\}$, 则当$0<|x-1|<\delta$时，总有$\left|\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}-2\right|<\varepsilon$.

二、 解：$f(x)=\begin{cases}x(x^2-1)\sin x, & x\ge1 \text{ 或 } -1<x\le0;\\ x(1-x^2)\sin x, & 0<x<1 \text{ 或 } x\le-1.\end{cases}$

显然$f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$内可导；

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x^2-1)\sin x}{x-1}=2\sin1$;

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(1-x^2)\sin x}{x-1}=-2\sin1$;

同理， $f'_+(-1)=-2\sin1,\ f'_-(-1)=2\sin1$; $f'_+(0)=0,\ f'_-(0)=0$;

$f'_+(1)\ne f'_-(1),\ f'_+(-1)\ne f'_-(-1), f'_+(0)=f'_-(0)=0$, 故$f(x)$在$x=\pm1$处不可导，在$x=0$处可导；

综上，$f(x)$在$x=\pm1$处不可导，在其他点可导。

三、原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}\cdot\dfrac{\sin x}{\ln(1+f(x)-1)}=f'(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-0}{f(x)-f(0)}=\dfrac{1}{f'(0)}=1$.

四、1. 解：把y看成x的函数，方程$e^y-e^{-x}+xy=0$两边对x求导得$e^yy'+e^{-x}+y+xy'=0$, 即$y'=\dfrac{-y-e^{-x}}{e^y+x}$, $x=0$时$y=0$, 代入上式得$y'(0)=-1$, 所以切线方程为$y=-x$.

2. 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\frac{x}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

4. 解：$y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}+x^{x^a}(x^a\ln x)'+\dfrac{3\cdot5^{3x}\ln5\cdot2^x-5^{3x}\cdot2^x\ln2}{2^{2x}}=\cot x+x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1)+\dfrac{5^{3x}(3\ln5-\ln2)}{2^x}$;

$\mathrm{d}y=\left(\cot x+x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1)+\dfrac{5^{3x}(3\ln5-\ln2)}{2^x}\right)\mathrm{d}x$.

5. 解：$f(x)=\sin2x+\ln(x-1)$, $f'(x)=2\cos2x+\dfrac{1}{x-1}$, $f^{(n)}(x)=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x-1)^n}$.

五、 1. 证明：设$f(x)=\ln(1+x)$, 则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 当$x>0$时，由拉格朗日中指定理 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$, 即$\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$ $(0<\xi<x)$, 而$\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, 所以$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $(x>0)$. 取$x=\dfrac{k}{n}$即得$\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$.

2. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)=\exp\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right)$

所以 $a_n < \exp\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\Big) < \exp\Big(\frac{n(n+1)}{2n^2}\Big)$;

$$a_n > \exp\Big(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\Big) > \exp\Big(\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\Big);$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\exp\Big(\frac{n(n+1)}{2n^2}\Big) = \lim\limits_{n\to\infty}\exp\Big(\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\Big) = e^{\frac{1}{2}}$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{2}}$.

六、解： $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5), \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$,代入 $f(x)$ 的表达式得

$f(x) = x-\Big(ax+bx-\frac{bx^3}{3!}+\frac{bx^5}{5!}+o(x^5)\Big)\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\Big) = (1-a-b)x+\Big(\frac{a}{2}+\frac{2b}{3}\Big)x^3-\Big(\frac{a}{24}+\frac{2b}{15}\Big)x^5+o(x^5)$,

所以 $1-a-b=0, \frac{a}{2}+\frac{2b}{3}=0$, 解得$a=4, b=-3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5} = -\Big(\frac{a}{24}+\frac{2b}{15}\Big) = \frac{7}{30}$.

七、证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以在 $[0,1]$ 上有最大值和最小值。设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为$f(c_1) = M$，最小值为 $f(c_2) = m$, 则由周期性可知，M和m分别是$f(x)$的最大值和最小值，即 $f(c_2) \le f(x) \le f(c_1), \forall x \in (-\infty,+\infty)$. 设 $F(x) = f(x+a)-f(x)$, 则$F(x)$在 $[0,1]$ 上连续，且$F(c_1) = f(c_1+a)-f(c_1) \le 0, F(c_2) = f(c_2+a)-f(c_2) \ge 0$, 由零点定理，存在$\xi \in [0,1]$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi+a) = f(\xi)$.

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案17.11.18

一、 证明：1. $\Big|\frac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\Big| = \frac{\sqrt{n}+1}{2n-5} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}\ (n>5)$, $\forall\varepsilon>0$, 要使$\Big|\frac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\Big| < \varepsilon$, 只需要$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$, 取$N = \max\{\Big[\frac{4}{\varepsilon^2}\Big]+1, 5\}$, 则当$n > N$ 时，总有$\Big|\frac{2n+1}{n^2+1}-0\Big| < \varepsilon$.

2. $\Big|\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\Big| = \frac{|x-1|}{2(x+1)} \le |x-1|$ （设$0<|x-1|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta = \min\{1,\varepsilon\}$, 则当$0<|x-1|<\delta$时，总有$\Big|\frac{x^2-x-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\Big| < \varepsilon$.

二、 1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}} = e$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1+x^2} = 2$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 2-\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 2$.

三、解：$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin ax}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x} = a$;

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{b\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{bx}{x} = b$;　　所以 $a=b$；

$$f'(x) = \begin{cases} a\cos(ax)e^{\sin ax}, & x>0; \\ a, & x=0; \\ \frac{a}{1+x}; & x<0. \end{cases}$$

$f''_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a\cos axe^{\sin ax}-a}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-a^2\sin(ax)e^{\sin ax}+a^2\cos^2(ax)e^{\sin ax}}{1} = a^2$;

$f''_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{a}{1+x}-a}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-b}{(1+x)^2} = -a$;　　所以 $a^2=-a$, 解得 $a=b=-1$.

四、解：$(\cos x-1)\ln(1+x)\sim -\dfrac{x^2}{2}\cdot x=-\dfrac{x^3}{2}$, 所以无穷小主部是 $-\dfrac{x^3}{2}$.

五、解：把 y 看作 x 的函数，方程两边对 x 求导得 $3x^2+3y^2\cdot y'-3ay-3ax\cdot y'=0$ (1), 可得 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.
(1) 式化简得 $x^2+y^2y'-ay-axy'=0$, 两边继续对 x 求导得 $2x+2y(y')^2+y^2y''-2ay'-axy''=0$,

$$\text{解得 } y''=\frac{2ay'-2y(y')^2-2x}{y^2-ax}=\frac{2a(ay-x^2)(y^2-ax)-2y(ay-x^2)^2-2x(y^2-ax)^2}{(y^2-ax)^3}.$$

六、 证明：设 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1=F(0)$, 故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)=1$, 由洛尔定理可得, $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $F'(\eta)=\dfrac{\eta f'(\eta)-f(\eta)}{\eta^2}=0$, 即 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、解：$x=2$ 时 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 切线的斜率 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{\cos\theta}{-4\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$,

切线方程为 $y=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{12}(x-2)$, 法线方程为 $y=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+4\sqrt{3}(x-2)$.

八、证明：设 $F(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$, 则 $F'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}f(x)+e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(f'(x)+xf(x))=0$, 故 $F(x)=C=F(0)=1$, 即 $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=1$, 所以 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^kf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

九、证明：方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根，设为 x_1,x_2,x_3, 不妨设 $x_1<x_2<x_3$.
$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，$f(x_1)=f(x_2)=0$, 由洛尔定理，$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\xi_1)=0$; 同理，$\exists\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得 $f'(\xi_2)=0$; 即 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，故 $\Delta=4b^2-12ac>0$, 即 $b^2-3ac>0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案18.11.17

一、 1. 证明：$\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|=\dfrac{|(x-2)(x+2)|}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}\le 5|x-2|$ （设$0<|x-2|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$, 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，总有 $\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|<\varepsilon$.

2. 解：$4\le\sqrt[n]{n^4+4^n}\le\sqrt[n]{n^4\cdot4^n}=4(\sqrt[n]{n})^4$, $\lim\limits_{n\to\infty}4=\lim\limits_{n\to\infty}4(\sqrt[n]{n})^4=4$, 由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}=4$.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^4=\mathrm{e}^4$.

4. $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left((1+\dfrac{1}{x})^x-\mathrm{e}\right)\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1\right]}{t}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$,
所以原式 $=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}.$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x\ln(1+\ln(1+x))}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln(1+\ln(1+x))}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+x)}{x}=2.$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\arctan x}{cx^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{(1+x)(1+x^2)ckx^{k-1}}\xlongequal{k=2}-\dfrac{1}{2c}=1,$

所以 $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$, 无穷小主部为 $-\dfrac{x^2}{2}$.

二、$f(x)=\dfrac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, 所以 $f^n(x)=(-1)^n n!\Big(\dfrac{2}{(1+x)^{n+1}}+\dfrac{1}{2(x-\frac{1}{2})^{n+1}}\Big).$

三、证明：令 $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{x}$, $n\in N^*$, $f(2n\pi)=1-\dfrac{1}{2n\pi}>0$, $f((2n+1)\pi)=-1-\dfrac{1}{(2n+1)\pi}<0$, 由零点定理可知，存在 $\xi\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$, 使得 $f(\xi)=0$. n 取所有正整数，所以 $f(x)=0$ 有无穷多个正根.

四、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$

五、(1) $f'(x)\equiv0$, 所以 $f(x)$ 是常值函数 $(x>-1)$. 令 $x=1$ 得 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$, 所以 $\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\pi}{4}.$

(2) 由 (1) 知 $\arctan(2-\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{4}+\arctan\dfrac{2-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}+1}=\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{12}.$

六、解 $f'(x)=\begin{cases}2x+\frac{2x}{1+x^2}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ a\sin x+ax\cos x, & x<0,\end{cases}$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+\frac{2x}{1+x^2}}{x}=4;$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a\sin x+ax\cos x}{x}=2a;$

所以 $a=2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f''(0)=4$.

七、0 是第二类间断点（无穷间断点），1 是第一类间断点（跳跃间断点）.

八、 提示：(1) 用函数的单调性证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 取 $x=\dfrac{1}{n}$ 即得；

(2) 由(1)可得 $a_n-a_{n-1}<0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调减；　又由(1)可得

$\ln(1+\dfrac{1}{1})=\ln2-\ln1<1,\quad \ln(1+\dfrac{1}{2})=\ln3-\ln2<\dfrac{1}{2},\quad\cdots,\quad \ln(1+\dfrac{1}{n-1})=\ln n-\ln(n-1)<\dfrac{1}{n-1},$

各式相加得 $\ln n<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}$, 即 $a_n>0$. 数列 $\{a_n\}$ 单调减有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、 提示：用介值定理证明 $\exists\eta\in[1,2]$, 使得 $f(\eta)=1$, 由拉格朗日中值定理可得 $\exists\xi\in(0,\eta)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 19.11.16

一、 1. $\forall\varepsilon>0$, 由$|\sqrt{1-\sin^3 x}-1|=\dfrac{|\sin^3 x|}{1+\sqrt{1-\sin^3 x}}\leqslant|x|^3<\varepsilon$, 取 $\delta=\varepsilon^{1/3}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时有 $|\sqrt{1-\sin^3 x}-1|<\varepsilon$.

2. $\forall\varepsilon>0$, 由$\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|=\dfrac{|\sqrt{1+n^2}-n|}{\sqrt{1+n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}(n+\sqrt{1+n^2})}\leqslant\dfrac{1}{n}$, 取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $n>N$ 时, $\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|<\varepsilon$.

3. 令 $y_1=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}$, $y_2=(\arctan x)^{\tan x}$, 则 $y'=y_1'+y_2'$, $\mathrm{d}y=(y'+y')\mathrm{d}x$, 其中

$$y_1'=y_1(\ln y_1)'=\frac{y_1}{2}\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{\cos x}{\sin x}\right],$$

$$y_2'=y_2(\ln y_2)'=y_2\left[\sec^2 x\ln\arctan x+\frac{\tan x}{(1+x^2)\arctan x}\right].$$

4. 当$ab=0$时，易见原式为0. 当$ab\neq0$时，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1}n\cdot\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)}=\exp\left\{\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}+\frac{b^{1/n}-1}{1/n}\right)\right\}=\sqrt{ab}.$$

5. 由于 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=0,\quad f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=1.$
则 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$, 故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导，从而不可微。

6. 首先由归纳法可有 $x_n>0$, 又由于 $0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$,故数列 x_n 单调递减有下界，故收敛，设极限是 A，则 $\ln(1+A)=A$，从而有$A=0$.

7. 由 $f(x)=o(x^2)$ 可得 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 即 $1+c=0$, 从而 $c=-1$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\ln(1+x)+\frac{\cos x-1}{x}+ax+b\right)=b=0;$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$,即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x+2ax}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+2a}{2}=\frac{1}{2}+a=0\Longrightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

(4)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x-\frac{1}{2}x^2-1}{x^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x-x}{kx^{k-1}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1}{k(k-1)x^{k-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

从而取 $k=3$, 得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$. 则 $x\to0$时, $f(x)$ 的无穷小阶数为3, 无穷小主部为 $-\dfrac{1}{2}x^3$.

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\frac{1}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t-1,\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(2t-1)'}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=2(1+t^2).$

二、函数在$x\neq0, x\neq1$ 的地方显然连续；由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}\frac{1-x}{x}x\sin\frac{1}{x}=-\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x},$$

不存在，所以 $x=0$ 是第二类间断点，且为振荡间断点。由于

$$\lim_{x\to1+}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\sin1,\qquad \lim_{x\to1-}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0,$$

所以 $x=1$ 是第一类间断点，且为跳跃间断点。

三、任给 $x\in(a,b)$, 由中值定理，存在$\xi_1\in(a,x)$, $\xi_2\in(x,b)$，$\xi_1<\xi_2$且

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

可推出$f(x)<f(a)$.

四、切线方程为$y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x+1$, 法线方程为$y=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}x+1$.

五、**证明**：(1) 由于$f(x)$在$[a,b]$可导，从而在$[a,b]$连续。又$f(b)=0<\dfrac{4}{5}<1=f(a)$, 由介值定理，存在$\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$.

(2) 由Lagrange中值定理，分别考虑区间$[a,\xi_1]$, $[\xi_1,b]$, 可得

$$f(\xi_1)-f(a)=f'(\xi_2)(\xi_1-a),\quad f(b)-f(\xi_1)=f'(\xi_3)(b-\xi_1)$$

注意到$f(a)=1, f(b)=0, f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}, f'(x)\neq 0$, 整理可得

$$-\frac{1}{5}\frac{1}{f'(\xi_2)}=\xi_1-a,\qquad -\frac{4}{5}\frac{1}{f'(\xi_3)}=b-\xi_1$$

两式相加得证。

六、解：由莱布尼兹公式可直接求出$f(x)$在$x\neq 0$处的 $k\ (0<k\leqslant n-1)$ 阶导数为

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}g(x)\mathrm{sgn}(x)+\sum_{i=0}^{k-1}F_{n-i}(x)g^{(k-i)}(x)\mathrm{sgn}(x)$$

其中 $F_{n-i}(x)$ 为 x 的 $n-i$ 次单项式。由导数的定义可有对任意 $0<k\leqslant n-1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 k 阶导数为零. 则 $f^{(n-1)}(x)$ 当 $g(0)=0$ 时可导，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 2020.11.21

一、1. 不妨设 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$,

当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt[3]{x}-1\right|=\dfrac{|x-1|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}<|x-1|<\varepsilon$.

2. 解：当n为偶数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{n}.$$

当n为奇数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}.$$

由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0$.

3. $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{2x}\sin x}{x}=1,\qquad f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1,$

所以 $f'(x)=\begin{cases}x^{2x}\left(2(1+\ln x)\sin x+\cos x\right), & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$.

4. 首先由归纳法可得$0<x_n<1$, 又由于$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0$, 因此数列x_n单调递增有上界，故收敛. 设极限是A，则$A^2=A$，由$\{x_n\}$ 单调递增可知$A=1$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}\,(x\neq y)$.　　6. 切线方程为$y=\dfrac{1}{2}x+1$, 法线方程为$y=-2x+1$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

8.

$$\arctan\frac{2020}{n-1}-\arctan\frac{2020}{n+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{2020}{n-1}-\frac{2020}{n+1}\right)\sim\frac{4040}{n^2},\quad 其中\xi\in\left(\frac{2020}{n+1},\frac{2020}{n-1}\right),$$

故 $\alpha = 2$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1} - \arctan\dfrac{2020}{n+1}\right) = 4040$.

二、当 $x_0 = k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，$f(x_0) = 0$, f 连续.

当 $x_0 \neq k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，取有理数序列 $\{x_{n,1}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n,1} = x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n,1}) = \sin\pi x_0$; 取无理数序列 $\{x_{n,2}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n,2} = x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n,2}) = 0$. 故函数在 $x = x_0$ 处不连续，且为第二类间断点.

三、解：当$a \neq -\dfrac{1}{2}$时，

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cos x+\frac{2ax}{1+x^2}}{2x} = \frac{1}{2}+a \neq 0.$$

当$a = -\dfrac{1}{2}$时，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^4} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cos x-\frac{x}{1+x^2}}{4x^3}\\
&\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)\cos^2 x-\sin(\sin x)\sin x+\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}}{12x^2}\\
&\overset{\frac{0}{0}}{=} -\frac{1}{12}+\lim_{x\to0}\frac{-\sin(\sin x)\cos^3 x-\cos(\sin x)\sin 2x+\frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3}}{24x} = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

因此，$a \neq -\dfrac{1}{2}$时无穷小主部为$\left(\dfrac{1}{2}+a\right)x^2$; $a = -\dfrac{1}{2}$时无穷小主部为$\dfrac{1}{24}x^4$.

四、$f'''(2) = 2e^3$.

五、$f(x) = x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$, 因此 $f'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$;

当 $n > 1$ 时，$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

六、解法一：若在 $[0,1]$ 上，$f(x)$ 不恒为零，设 $|f(x)|$ 在 $x_0 \in (0,1]$ 处达到最大值. 由中值定理，存在 $\xi \in (0,x_0) \subset (0,1]$, 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}$. 从而

$$|f'(\xi)| = \frac{|f(x_0)|}{x_0} \geqslant |f(x_0)| > \frac{1}{2}|f(x_0)| \geqslant \frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

因此假设不真，结论成立.

解法二：由中值定理，有 $f(x) = f(x) - f(0) = xf'(\xi_1)$, $0 < \xi_1 < x$. 由 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(x)|$, 得到

$$|f(x)| = |xf'(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{2}x|f(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)|.$$

在 $[0,\xi_1]$ 上再用拉格朗日中值定理，得 $f(\xi_1) = \xi_1 f'(\xi_2)$, $0 < \xi_2 < \xi_1$. 因此$|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(\xi_1)| \leqslant \dfrac{1}{4}|f(\xi_2)|$. 类似地，在 $[0,\xi_2],\cdots,[0,\xi_n]$ 上继续用拉格朗日中值定理，最终得到：

$$|f(x)| \leqslant \frac{f(\xi_n)}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}.$$

其中 M 为函数 $|f(x)|$ 的上界. 令 $n \to \infty$ 即得.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 (2021.11.20)

一、1. 不妨设 $|x-2|<\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\dfrac{x+2}{x-1}-4\right|=\dfrac{3|x-2|}{|x-1|}<6|x-2|$,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{6},\dfrac{1}{2}\right\}$, 使得 $0<|x-2|<\delta$ 时, 总有$\left|\dfrac{x+2}{x-1}-4\right|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$.

2. -1.　　3. 所以无穷小主部为 $(\ln 5)^2x^2$.　　4. $y'=-\dfrac{\frac{1}{1+x^2}+y}{x+\mathrm{e}^y}$.　　5. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

6. 在 $t=1$ 处，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}$,　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{2}$.　　7. $y^{(99)}=\mathrm{e}^{-x}(-x^2+195x-9406)$.　　8. $\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$.

二、解：函数在定义域$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1, x\neq -2, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}\}$ 上都是连续的; $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点; $x=-2$ 是第一类间断点中的可去间断点; $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}$ 都是第二类间断点.

三、(1) $f(x)$ 是定义域 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.　　(2) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 2x, & x<0\end{cases}$ 且 $f'(x)$ 连续.

四、$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=(\sin 1+1)\,\mathrm{e}$.　　　五、(略)

六、证：由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，得 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在且连续. 由 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，得存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$. 对 $f'(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理知：

$$f'(\xi)-f'(0)=f''(\eta_1)(\xi-0),\ \eta_1\in(0,\xi),\ \ f'(1)-f'(\xi)=f''(\eta_2)(1-\xi),\ \eta_2\in(\xi,1),$$

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)|&=|f'(\xi)-f'(0)|+|f'(1)-f'(\xi)|=|f''(\eta_1)(\xi-0)|+|f''(\eta_2)(1-\xi)|\\&=|f''(\eta_1)|\xi+|f''(\eta_2)|(1-\xi)|\leqslant M.\end{aligned}$$

七、法一: 数列单增, 有上界 (讲基本极限 e 时证过数列小于 3), 则极限存在.

固定 n, 则对任意的 $m>n$,　$(1+\dfrac{1}{m})^m\geqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}(1-\dfrac{1}{m})\cdots(1-\dfrac{k-1}{m})$;

由极限保号性, 令$m\to\infty$, $\mathrm{e}\geqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$,　则数列单增有上界进而收敛，且$\mathrm{e}\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$;

另一方面, $(1+\dfrac{1}{n})^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}(1-\dfrac{1}{n})\cdots(1-\dfrac{k-1}{n})<\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$;　令 $n\to\infty$, $\mathrm{e}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$;

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}$.

法二: 由带拉格朗日余项的泰勒公式, 有 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}x^k+\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

则令 $x=1$ 有 $\Big|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\mathrm{e}\Big|\leqslant\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}\leqslant\frac{\mathrm{e}}{n+1}$. 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{n+1}=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}$.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 (2022.11.12)

一、1. (略)； 2. 证明：记 $a=\frac{1}{|q|}>1$. $\forall\varepsilon>0$, 注意到

$$|n^3q^n|=\frac{n^3}{a^n}=\frac{n^3a^3}{(1+a-1)^{n+3}}<\frac{n^3a^3}{C_{n+3}^4(a-1)^4}<\frac{4!a^3}{(a-1)^4}\frac{1}{n}$$

取 $N=\left[\frac{4!a^3}{(a-1)^4\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有 $|n^3q^n|<\varepsilon$, 所以 $\lim_{n\to\infty}n^3q^n=0$.

二、 1. e. 2. $\frac{3}{2}$. 3. 记 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}$, 则$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<4,\\ \frac{x^2}{4}, & x\geqslant 4.\end{cases}$

4. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. 5. $y^{(n)}=-\frac{n!}{(3-x)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+2)^{n+1}}$. 6. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\cos t(\cot t-t)$.

三、$x=0,x=1,x=2k(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为间断点, x为其它实数时 $f(x)$ 连续.

$x=0$ 为可去间断点, $x=1$ 为跳跃间断点, $x=2k$ 为第二类间断点(无穷间断点).

四、$a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=-1$. $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数为3，无穷小主部为 $\frac{2x^3}{3}$.

五、$|x_{n+1}-2|<\frac{1}{3^n}|x_1-2|$, 即 $|x_{n+1}-2|\to0(n\to\infty)$, 说明数列 x_n 收敛，且极限为2.

六、提示：对函数 $F(x)=f(x)-x$ 在区间 $[x_1,f(x_1)]$ 上连续用零点定理即可.

七、提示：(1) 对函数 $\phi(x)=f(x)+x-2$ 在 $[0,2]$ 上用零点定理;

(2) 对函数 $f(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 以及 $[\xi,2]$ 上使用拉格朗日中值定理.

八、(1) $a=1,b=-3$. (2) $f(f(x))$ 在 $x=0$ 处可导，且$F'(0)=\cos 1$.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 (2023.11.12)

一、1. 证明：$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$, $|\sqrt{1-x^2}-1|=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}+1}<x^2$, 要使 $|\sqrt{1-x^2}-1|<\varepsilon$,只需 $x^2<\varepsilon$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 则当 $0<|x-0|<\delta$时，有 $|\sqrt{1-x^2}-1|<\varepsilon$. 故 $\lim_{x\to0}\sqrt{1-x^2}=1$.

2. $1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\cos x$ 的无穷小主部为 $\frac{1}{3}x^3$.

3. $f^{(23)}(x)=-(x^2+11x+12)\cos x-23(2x+11)\sin x+23\cdot22\cos x=(-x^2-11x+494)\cos x-(46x+253)\sin x$.

4. $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\mathrm{d}x.$ 5. $\dfrac{2}{3}.$

6. **解**：$f(\dfrac{1}{n})=f(0)+f'(0)\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})=\dfrac{2}{n}+o(\dfrac{1}{n})$, 故 $f(\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n}+1=1+\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n}+1\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})}\cdot\left(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)n}=\mathrm{e}.$

7. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-g'(\sin y)\cdot\cos y\cdot\dfrac{b^2x}{a^2y}.$ 8. $y'=\dfrac{y^2}{x-x\ln y}.$ $y''\dfrac{(3-2\ln y)xy^3-xy^2(1-\ln y)^2}{(x-x\ln y)^3}.$

二、证明：若$f(a)=f(b)$, 结论显然成立. 若$f(a)\neq f(b)$, 不妨设$f(a)<f(b)$, 则$f(a)<\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}f(a)+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}f(b)<f(b)$. 由介值定理，存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}f(a)+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}f(b)$, 即$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(\xi)$.

三、证明：$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases}x, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ 故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$

另外，对任意的 $x\neq 0$：

1. 若 x 为有理数, 取一无理数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则有

$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

2. 若 x 为无理数, 取一有理数列 $\{y_n\}$, 其中 $y_n\neq 0\,\forall n\in\mathbb{N}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x$, 则有

$$\lim_{y_n\to x}\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}=\lim_{y_n\to x}\frac{y_n^2}{y_n-x}=\infty.$$

综上所述，$f(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导.

四、(1) $b=4,c=1$. (2) $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{4}.$

五、**证明**：否则，假设此方程实根数目$\geqslant 4$, 则$f(x):=\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+c)$的零点个数$\geqslant 4$. 据洛尔中值定理，$f'(x)$ 零点个数 $\geqslant 3$. 同理，$f''(x)$ 零点个数 $\geqslant 2$, $f'''(x)$ 零点个数 $\geqslant 1$. 但是 $f'''(x)=\mathrm{e}^x$, 无零点. 矛盾!

六、$f'(0)=\dfrac{1}{3}.$

七、**证明**：令 $f(x)=\cos x-x$, 则其连续，且 $f(0)=1>0, f(1)=\cos 1-1<0$, 故 f 在开区间 $(0,1)$ 内有零点. 在 $(0,1)$ 外 f 显然没有零点. 又由于 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内恒小于0，故 f 在 $(0,1)$ 内严格单调减. 所以f 只有一个零点，即方程 $\cos x-x=0$ 有唯一根. 记此根为a. 下证

$$\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\cos\cos\cos\ldots\cos x}_{n\text{个}}=a$$

记 $x_1=\cos x, x_2=\cos x_1,\cdots,x_{n+1}=\cos x_n,\cdots$, 则

$$0\leqslant|x_n-a|=|\cos x_{n-1}-\cos a|=|\sin\xi_n\cdot(x_{n-1}-a)|\leqslant\sin 1|x_{n-1}-a|\leqslant\cdots\leqslant(\sin 1)^{n-1}|x_1-a|\to 0,$$

其中 $\xi_n\in(0,1)$. 所以由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.