

一、简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 20 & 22 & 0 & 0 \\ 22 & 20 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 1 & 4 \\ 30 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 求与向量 $\alpha = (1, 1, 1)^T, \beta = (2, 0, 1)^T$ 均正交且长度为3的向量.

3. 3阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1, 1, 3$. 求二次型 $f(x, y, z) = (x, y, z)A^*(x, y, z)^T$ 的正惯性指数和负惯性指数, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{R}^3 的子空间 $V = \{ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3 \}$ 的维数.

二、(本题12分) 求向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T, \alpha_4 = (1, -1, 2, 0)^T, \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)^T$ 的秩, 找到它的一个极大线性无关组并将其余向量表达为这组极大线性无关组的线性组合.

三、(本题12分) 设 A, B, C 是三个 n 阶实方阵, 满足 $r(AB) = r(B)$. 试证明 $r(ABC) = r(BC)$.

四、(本题12分) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c, d 是两两不等的正实数.

(1) 计算 A^2, A^3, A^4 ; (2) 求 B 的所有特征值及其重数.

五、(本题12分) 线性空间 \mathbf{R}^4 中有两组基底 $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1)^T, \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1)^T, \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1)^T$ 和 $\eta_1 = (1, 1, 0, 1)^T, \eta_2 = (2, 1, 3, 1)^T, \eta_3 = (1, 1, 0, 0)^T, \eta_4 = (0, 1, -1, -1)^T$.

(1) 求从基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵 P ;

(2) 求 $\zeta = (1, 0, 0, 2)^T$ 在基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

六、(本题12分) 令 A 为 n 阶实对称矩阵.

- (1) 证明对于任意的正整数 k , 必然存在实对称矩阵 B 使得 $B^{2k+1} = A$;
- (2) 若存在实矩阵 C 满足 $A = C^2$, 是否可以说明 A 是半正定矩阵? 若是, 给出证明. 若不是, 给出例子.

七、(本题12分) 具有待定系数 $a > 0$ 的二次型 $f(x, y, z) = 2x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 2ayz$ 经过正交变换可变为标准形 $g(u, v, w) = 8u^2 + 2v^2 + 18w^2$. 求 a 并找出一个这样的正交变换.

一、简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 20 & 22 & 0 & 0 \\ 22 & 20 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 1 & 4 \\ 30 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解: $\begin{vmatrix} 20 & 22 & 0 & 0 \\ 22 & 20 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 1 & 4 \\ 30 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 22 \\ 22 & 20 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (20^2 - 22^2)(1^2 - 4^2) = 1260.$

2. 求与向量 $\alpha = (1, 1, 1)^T, \beta = (2, 0, 1)^T$ 均正交且长度为3的向量.

解: 符合条件的向量 $(a, b, c)^T$ 满足 $\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 2a + c = 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9. \end{cases}$

解得 $(a, b, c)^T = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6})^T$ 或 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})^T$.

解法二: 设满足正交的向量为 x , 则有 $\begin{pmatrix} \alpha^T x \\ \beta^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \theta$.

解得基础解系为 $(-1, -1, 2)^T$, 单位化为 $\frac{\sqrt{6}}{6}(-1, -1, 2)^T$, 所求向量为 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})^T$.

3. 3阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1, 1, 3$. 求二次型 $f(x, y, z) = (x, y, z)A^*(x, y, z)^T$ 的正惯性指数和负惯性指数, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

解: $|A| = (-1) \times 1 \times 3 = -3 \neq 0$, 故有 $A^* = |A|A^{-1} = -3A^{-1}$, 则 A^* 的三个特征值为 $3, -3, -1$.

又 $(A^*)^T = (-3A^{-1})^T = -3(A^T)^{-1} = -3A^{-1} = A^*$, 故 A^* 是实对称矩阵, 为二次型 $f(x, y, z)$ 的矩阵, 且有特征值 $3, -3, -1$, 所以二次型 $f(x, y, z)$ 的正惯性指数为1, 负惯性指数为2.

解法二: 实对称 A 有特征值 $-1, 1, 3$, 故有正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(-1, 1, 3) = B$, 即 $A = Q B Q^T$.

$|A| = (-1) \times 1 \times 3 = -3 \neq 0$, 故 $A^* = |A|A^{-1} = -3A^{-1} = -3(QB^{-1}Q^T) = Q \text{diag}(3, -3, -1)Q^T$,

令 $(x, y, z)^T = Q(u, v, w)^T$, 则有 $f(x, y, z) = (u, v, w) \text{diag}(3, -3, -1)(u, v, w)^T = 3u^2 - 3v^2 - w^2$, 即二次型正惯性指数为1, 负惯性指数为2.

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{R}^3 的子空间 $V = \{ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3 \}$ 的维数.

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $r(A) = 2$. 故 $V = \{ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3 \}$ 的维数 $= A$ 的列秩 $= r(A) = 2$.

解法二: 因为 $|A| = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, 故 $r(A) = 2$, 故 $V = \{ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3 \}$ 的维数 $= A$ 的列秩 $= r(A) = 2$.

解法三: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 α_1, α_2 可以作为列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

的一个极大无关组, 即 $V = \{ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3 \} = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的一组基, 故 $\dim(V) = 2$.

解法四: 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则易知向量 α_1, α_2 线性无关, 且有 $\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$,

故 α_1, α_2 是 $V = \{ Ax \mid x \in \mathbf{R}^3 \} = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的一组基, 于是 $\dim(V) = 2$.

解法五: $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 4)$, A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$, 对应特征向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关. 对 \mathbf{R}^3 的任意向量 x 有 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, 则 $Ax = k_2\lambda_2\xi_2 + k_3\lambda_3\xi_3 \in \text{span}\{\xi_2, \xi_3\}$,

故 $V \subseteq \text{span}\{\xi_2, \xi_3\}$, 又对任意 $y = k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ 有 $x = \frac{k_2}{\lambda_2}\xi_2 + \frac{k_3}{\lambda_3}\xi_3, Ax = y$, 故 $V \supseteq \text{span}\{\xi_2, \xi_3\}$.

故 $V = \text{span}\{\xi_2, \xi_3\}$, $\dim(V) = 2$.

二、(本题12分) 求向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T, \alpha_4 = (1, -1, 2, 0)^T, \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)^T$ 的秩, 找到它的一个极大线性无关组并将其余向量表达为这组极大线性无关组的线性组合.

$$\text{解: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

向量组的秩为3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是向量组的一个极大线性无关组. $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$.

三、(本题12分) 设 A, B, C 是三个 n 阶实方阵, 满足 $r(AB) = r(B)$. 试证明 $r(ABC) = r(BC)$.

证: 只要证明 $ABCx = \theta$ 与 $BCx = \theta$ 同解.

显然若 x 满足 $BCx = \theta$, 则有 $ABCx = A\theta = \theta$, 即 x 也满足 $ABCx = \theta$.

反之若 x 满足 $ABCx = \theta$, 令 $\xi = Cx$, 则 ξ 满足 $AB\xi = \theta$.

易知 $By = \theta$ 的解空间是 $ABy = \theta$ 的解空间的子集,

由 $r(AB) = r(B)$ 知 $ABy = \theta$ 与 $By = \theta$ 解空间维数相同, 故 $By = \theta$ 与 $ABy = \theta$ 同解,

于是由 $AB\xi = \theta$ 可得 $B\xi = BCx = \theta$, 即 x 满足 $BCx = \theta$.

故 $ABCx = \theta$ 与 $BCx = \theta$ 同解, 从而有 $r(ABC) = r(BC)$.

证法二: 我们有 $r(ABC) \leq r(BC)$.

$$\begin{aligned} \text{又 } r(AB) + r(BC) &= r \begin{pmatrix} AB & O \\ O & BC \end{pmatrix} \leq r \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} = r \left(\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} \right) = r \begin{pmatrix} O & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix} \\ &= r \left(\begin{pmatrix} O & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -C \\ O & E \end{pmatrix} \right) = r \begin{pmatrix} O & -ABC \\ B & O \end{pmatrix} = r(B) + r(-ABC) = r(B) + r(ABC). \end{aligned}$$

故有 $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B) = r(BC)$, 于是 $r(ABC) = r(BC)$.

证法三: 先证明当 $B = \text{diag}(E_r, O)$ 时有 $r(ABC) = r(BC)$.

令 $B = \text{diag}(E_r, O), A = (A_1, A_2), A_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}, A_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-r)}$,

则由 $AB = (A_1, O)$ 知 $r(AB) = r(A_1) = r(B) = r$, 即 A_1 为列满秩,

于是存在可逆矩阵 P 使得 $PA_1 = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$, 从而有 $P(A_1, O) = \text{diag}(E_r, O)$.

故 $r(ABC) = r((A_1, O)C) = r(P(A_1, O)C) = r(\text{diag}(E_r, O)C) = r(BC)$.

当 B 为任意 n 阶矩阵时, 令 $r(B) = r$, 则有 $B = P\text{diag}(E_r, O)Q$, 其中 P, Q 为 n 阶可逆矩阵.

于是由上面的结论, 有

$$r(ABC) = r((AP)\text{diag}(E_r, O)(QC)) = r(\text{diag}(E_r, O)QC) = r(P\text{diag}(E_r, O)QC) = r(BC).$$

四、(本题12分) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c, d 是两两不等的正实数.

(1) 计算 A^2, A^3, A^4 ; (2) 求 B 的所有特征值及其重数.

$$\text{解: (1) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = E.$$

(2) $|\lambda E - B|$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b & -c & -d \\ -d & \lambda - a & -b & -c \\ -c & -d & \lambda - a & -b \\ -b & -c & -d & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a - c & -b - d & \lambda - a - c & -b - d \\ -b - d & \lambda - a - c & -b - d & \lambda - a - c \\ -c & -d & \lambda - a & -b \\ -b & -c & -d & \lambda - a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a - c & -b - d & 0 & 0 \\ -b - d & \lambda - a - c & 0 & 0 \\ -c & -d & \lambda - a + c & -b + d \\ -b & -c & b - d & \lambda - a + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a - c & -b - d \\ -b - d & \lambda - a - c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda - a + c & -b + d \\ b - d & \lambda - a + c \end{vmatrix} \\ &= ((\lambda - a - c)^2 - (b + d)^2)((\lambda - a + c)^2 - (b - d)^2) \\ &= (\lambda - a - c - b - d)(\lambda - a - c + b + d)(\lambda - a + c - (b - d)i)(\lambda - a + c + (b - d)i) = 0, \end{aligned}$$

故特征值 $\lambda = a + c + b + d, a + c - b - d, a - c + (b - d)i, a - c - (b - d)i$, 均为一重特征值.

(2) 的解法二: 易知 $B = aE + bA + cA^2 + dA^3$,

令 $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 则 $B = f(A)$, 于是 $\lambda(B) = f(\lambda(A))$.

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1 = 0, \text{ 可得 } A \text{ 的特征值 } \lambda = 1, -1, i, -i.$$

于是 $\lambda(B) = f(\lambda(A)) = a + b + c + d, a - b + c - d, a - c + (b - d)i, a - c - (b - d)i$, 均为一重特征值.

五. (本题12分) 线性空间 \mathbf{R}^4 中有两组基底 $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1)^T, \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1)^T, \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1)^T$ 和 $\eta_1 = (1, 1, 0, 1)^T, \eta_2 = (2, 1, 3, 1)^T, \eta_3 = (1, 1, 0, 0)^T, \eta_4 = (0, 1, -1, -1)^T$.

(1) 求从基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵 P ;

(2) 求 $\zeta = (1, 0, 0, 2)^T$ 在基底 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

解: (1) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)P$, $P = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 设所求坐标为 x , 则有 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)x = \zeta$, 于是有

$$x = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^{-1}\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ -1.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

解法二: (1) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)P$, 解矩阵方程

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 | \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 7/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \end{array} \right),$$

$$\text{解得 } P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 设所求坐标为 x , 则有 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)x = \zeta$, 解方程组

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \zeta) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array} \right), \text{ 得 } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实对称矩阵.

(1) 证明对于任意的正整数 k , 必然存在实对称矩阵 B 使得 $B^{2k+1} = A$;

(2) 若存在实矩阵 C 满足 $A = C^2$, 是否可以说明 A 是半正定矩阵? 若是, 给出证明. 若不是, 给出例子.

证: (1) A 实对称, 则有正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D$, 其中 D 是实对角矩阵.

令 $B = Q \text{diag}(\sqrt[2k+1]{\lambda_1}, \sqrt[2k+1]{\lambda_2}, \dots, \sqrt[2k+1]{\lambda_n}) Q^T$, 易知 B 实对称.

且有 $B^{2k+1} = Q(\text{diag}(\sqrt[2k+1]{\lambda_1}, \sqrt[2k+1]{\lambda_2}, \dots, \sqrt[2k+1]{\lambda_n}))^{2k+1} Q^T = Q D Q^T = Q(Q^T A Q) Q^T = A$.

(2) 不是. 取反对称矩阵 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是实对称矩阵, 但不是半正定矩阵.

(2) 解法二: 不是. 设实矩阵 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 则实对称矩阵 $A = C^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2 + bc \end{pmatrix}$.

故有 $(a+d)b = (a+d)c$, 不妨取 $a+d=0$, 则 $A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$.

可取 a, b, c 的值使得 $a^2 + bc < 0$, 比如取 $a = d = 0, b = 1, c = -1$, 则 $A = -E$ 不是半正定矩阵.

七. (本题12分) 具有待定系数 $a > 0$ 的二次型 $f(x, y, z) = 2x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 2ayz$ 经过正交变换

可变为标准形 $g(u, v, w) = 8u^2 + 2v^2 + 18w^2$. 求 a 并找出一个这样的正交变换.

解: 二次型 $f(x, y, z)$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & a \\ 0 & a & 13 \end{pmatrix}$,

经过正交变换得到的标准形 $g(u, v, w)$ 的矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$.

故 A 正交相似于 B . 于是 $|A| = 2(13^2 - a^2) = |B| = 8 \times 2 \times 18$, 因为 $a > 0$, 故解得 $a = 5$.

对于 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, 正交相似于 B , 故 A 有特征值 $\lambda = 8, 2, 18$.

对应于 $\lambda = 8, 2, 18$ 的单位特征向量为 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则 P 是正交矩阵, 正交变换为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.