图论之支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色习题课及作业

2024, 5, 30

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-支配集、点独立集与点覆盖集

支配集与支配数

定义 9.1.1 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$, $V^*\subseteq V$, 若 $\forall v_i\in V-V^*$, $\exists v_j\in V^*$ 使得 $(v_i,v_j)\in E$, 则称 V^* 为 G 的一个支配集, 并称 v_j 支配 v_i. 设 V^* 是 G 的支配集, 且 V^* 的任何真子集都不是支配集, 则称 V^* 为极小支配集. G 的顶点数最少的支配集称作 G 的最小支配集, 最小支配集中顶点的个数称作 G 的支配数, 记作 $\gamma_0(G)$, 简记为 γ_0.

点独立集与点独立数

定义 9.1.2 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$, $V^*\subseteq V$, 若 V^* 中任何两个顶点均不相邻, 则称 V^* 为 G 的点独立集, 简称为独立集. 若 V^* 再加入任何其他的顶点都不是独立集, 则称 V^* 为极大点独立集; G 的顶点数最多的点独立集称作 G 的最大点独立集; 最大独立集的顶点数称作 G 的点独立数, 记作 $\beta_0(G)$, 简记为 β_0.

定理 9.1.1 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$ 没有孤立点, 则 G 的极大点独立集都是极小支配集.

点覆盖集与点覆盖数

定义 9.1.3 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$, $V^*\subseteq V$, 若 $\forall e\in E$, $\exists v\in V^*$, 使得 v 与 e 相关联, 则称 V^* 为 G 的点覆盖集, 简称为点覆盖, 并称 v 覆盖 e. 设 V^* 是 G 的点覆盖, 若 V^* 的任何真子集都不是点覆盖, 则称 V^* 为极小点覆盖. G 的顶点个数最少的点覆盖称为 G 的最小点覆盖; 最小点覆盖中的顶点个数称作 G 的点覆盖数, 记作 $\alpha_0(G)$, 简记为 α_0.

定理 9.1.2 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$ 没有孤立点, $V^*\subseteq V$, 则 V^* 为 G 的点覆盖当且仅当 $\overline{V^*}=V-V^*$ 为 G 的点独立集.

推论 9.1.1 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是无孤立点的 n 阶无向图, $V^*\subseteq V$, 则 V^* 是 G 的极小 (最小) 点覆盖当且仅当 $\overline{V^*}=V-V^*$ 是 G 的极大(最大)点独立集, 从而有

$$\alpha_0+\beta_0=n.$$

边覆盖集与边覆盖数

定义 9.1.4 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$ 没有孤立点，$E^*\subseteq E$，若对 $\forall v\in V,\exists e\in E^*$，使得 v 与 e 相关联，则称 E^* 为边覆盖集，简称为边覆盖，并称 e 覆盖 v. 设 E^* 为边覆盖，若 E^* 的任何真子集都不是边覆盖，则称 E^* 为极小边覆盖. G 的边数最少的边覆盖称为 G 的最小边覆盖. 最小边覆盖中的边数称作 G 的边覆盖数，记作 $\alpha_1(G)$，简记为 α_1.

匹配与匹配数

定义 9.1.5 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$，$E^*\subseteq E$，若 E^* 中任何两条边均不相邻，则称 E^* 为 G 的边独立集，也称作 G 的匹配. 若在 E^* 中再加任意一条边后，所得集合都不是匹配，则称 E^* 为极大匹配. G 的边数最多的匹配称作最大匹配，最大匹配中的边数称作边独立数或匹配数，记作 $\beta_1(G)$，简记为 β_1.

内容提要-边覆盖集与匹配

定义 9.1.6 设 M 为图 $G=\langle V,E\rangle$ 的一个匹配，

(1) 称 M 中的边为匹配边，不在 M 中的边为非匹配边.

(2) 称与匹配边相关联的顶点为饱和点，不与匹配边相关联的顶点为非饱和点.

(3) 若 G 中每个顶点都是饱和点，则称 M 为 G 的完美匹配.

(4) G 中由匹配边和非匹配边交替构成的路径称作交错路径，起点和终点都是非饱和点的交错路径称作可增广的交错路径，G 中由匹配边和非匹配边交替构成的圈称作交错圈.

定理 9.1.3 设 n 阶图 G 中无孤立点.

(1) 设 M 为 G 的一个最大匹配，对 G 中每个 M-非饱和点均取一条与其关联的边，组成边集 N，则 $W=M\cup N$ 为 G 的最小边覆盖.

(2) 设 W_1 为 G 的一个最小边覆盖，若 W_1 中存在相邻的边就移去其中的一条，设移去的边集为 N_1，则 $M_1=W_1-N_1$ 为 G 的最大匹配.

(3) G 的边覆盖数 α_1 与匹配数 β_1 满足：$\alpha_1+\beta_1=n$.

推论 9.1.2 设图 G 无孤立点，M 是 G 的一个匹配，W 是 G 的一个边覆盖，则 $|M|\leqslant|W|$，且当等号成立时，M 是 G 的完美匹配，W 是 G 的最小边覆盖.

定理 9.1.4 设 M 是图 G 的一个匹配，则 M 为 G 的最大匹配当且仅当 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径.

内容提要-二部图中的匹配

二部图中的完备匹配

定义 9.1.7 设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为二部图，$|V_1|\leqslant|V_2|$，若 M 为 G 的一个匹配且 $|M|=|V_1|$，则称 M 为 V_1 到 V_2 的完备匹配.

二部图的完备匹配是最大匹配，但最大匹配不一定是完备匹配. 当 $|V_2|=|V_1|$ 时，完备匹配是完美匹配. 下面定理中二部图有完备匹配的充要条件常称作"相异性条件".

定理 9.1.5 (Hall 定理) 设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中 $|V_1|\leqslant|V_2|$，则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 k，$1\leqslant k\leqslant|V_1|$，个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.

下面定理给出二部图有完备匹配的一个充分条件，该条件也称作 t 条件.

定理 9.1.6 设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，如果存在正整数 t，使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边，而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边，那么 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

着色

点着色

定义 9.1.8 设无向图 G 无环，对 G 的每个顶点涂一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色，称作图 G 的一种点着色，简称为着色. 若能用 k 种颜色给 G 的顶点着色，则称 G 为 k-可着色的. 若 G 是 k-可着色的，但不是 $(k-1)$-可着色的，则称 G 的色数为 k. 图 G 的色数记作 $\chi(G)$，简记作 χ.

定理 9.1.7 对于任意的无环图 G，均有

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

定理 9.1.8 (Brooks 定理) 设 $n \geqslant 3$，若连通图 G 不是完全图 K_n，也不是奇圈，则

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G).$$

地图着色与平面图的点着色

连通无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称作地图，地图的面称作"国家". 若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是相邻的.

定义 9.1.9 对地图 G 的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称作对地图 G 的面着色. 若能够用 k 种颜色给 G 的面着色，则称 G 为 k-可面着色的. 若 G 为 k-可面着色的，但不是 $(k-1)$-可面着色的，则称 G 的面色数为 k. G 的面色数记作 $\chi^*(G)$，简记作 χ^*.

定理 9.1.9 地图 G 是 k-可面着色的当且仅当它的对偶图 G^* 是 k-可着色的.

定理 9.1.10 (四色定理) 任何平面图都是 4-可着色的.

边着色

定义 9.1.10 对图 G 的每条边着一种颜色，使相邻的边着不同的颜色，称作对图 G 的边着色. 若能用 k 种颜色给 G 的边着色，则称 G 为 k-可边着色的. 若 G 为 k-可边着色的，但不是 $(k-1)$-可边着色的，则称 G 的边色数为 k. G 的边色数记作 $\chi'(G)$，简记作 χ'.

定理 9.1.11 (Vizing 定理) 设 G 为简单图，则

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

Vizing 定理表明，简单图的边色数只可能取两个值：Δ 或者 $\Delta + 1$.

定理 9.1.12 二部图的边色数等于 Δ.

基本要求

- 1. 深刻理解支配集、点覆盖集、边覆盖集、点独立集、匹配（边独立集）、点着色、点色数、边着色、边色数、地图的面着色、地图的面色数及与它们相关的诸多概念和相关定理.
- 2. 能够求出阶数 n 较小或一些特殊的图的参数 $\gamma_0, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \chi, \chi', \chi^*$.
- 3. 会用二部图中的匹配，点着色与边着色解决实际问题.
- 4. 了解四色定理

题型一：求支配集、点独立集、覆盖集、匹配及相关参数

无向图 G 如图 9.3.1 所示.

1. 求出 G 的全部极小支配集，指出其中哪些不是最小支配集，并求支配数 γ_0.
2. 求出 G 的全部极大点独立集，指出其中哪些不是最大点独立集，并求点独立数 β_0.
3. 求出 G 的全部极小点覆盖集，指出其中哪些不是最小点覆盖集，并求点覆盖数 α_0.
4. 求出 G 中分别含边 e_1 和含边 e_5 的所有极大匹配，指出其中哪些是最大匹配，并求匹配数 β_1.

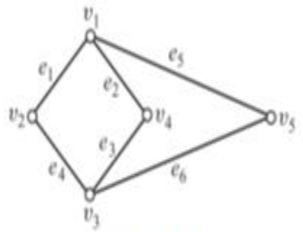

图 9.3.1

5. 求出 G 中含边 e_1 和 e_3 的所有极小边覆盖集，指出其中哪些是最小边覆盖集，并求边覆盖数 α_1.

解答与分析

1. G 中共有 8 个极小支配集：$\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_1,v_5\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_3,v_5\},\{v_2,v_4,v_5\}$，其中 $\{v_2,v_4,v_5\}$ 不是最小支配集，其余的 7 个全是最小支配集，其支配数 $\gamma_0=2$.
2. G 中有 2 个极大点独立集：$\{v_1,v_3\},\{v_2,v_4,v_5\}$，其中 $\{v_1,v_3\}$ 不是最大点独立集，$\{v_2,v_4,v_5\}$ 是最大点独立集，点独立数 $\beta_0=3$.
3. G 中有 2 个极小点覆盖集：$\{v_1,v_3\},\{v_2,v_4,v_5\}$，其中 $\{v_2,v_4,v_5\}$ 不是最小点覆盖集，$\{v_1,v_3\}$ 是最小点覆盖集，点覆盖数 $\alpha_0=2$.
4. $\{e_1,e_3\},\{e_1,e_6\}$ 为含 e_1 的极大匹配，$\{e_5,e_3\},\{e_5,e_4\}$ 为含 e_5 的极大匹配．它们都是最大匹配，匹配数 $\beta_1=2$.
5. 含边 e_1 和 e_3 的极小边覆盖集有 2 个：$\{e_1,e_3,e_5\}$ 与 $\{e_1,e_3,e_6\}$．G 是 5 阶图，G 不可能有 2 条边的边覆盖集，因而以上 2 个边覆盖集都是最小边覆盖集，边覆盖数 $\alpha_1=3$.

题型二：γ0, α0, β0, α1, β1 之间的关系

1. 命题"若 V^* 为无向图 G 的最大点独立集，则 V^* 也是 G 的最小支配集"为真吗？为什么？
2. 已知 10 阶无向图 G 中无孤立点，点独立数 $\beta_0 = 4$，试求 G 的点覆盖数 α_0，并给出一个这样的无向图 G.
3. 已知 $n(\geqslant 2)$ 阶无向图 G 中无孤立点，匹配数(即边独立数) $\beta_1 = 1$，试求边覆盖数 α_1，并给出一个这样的连通简单无向图 G.

解答与分析

1. 命题不为真. 定理 9.1.1 说 G 的极大点独立集都是 G 的极小支配集，但最大点独立集不一定是最小支配集，β_0 不一定等于 γ_0. 图 9.3.2 给出一棵 8 阶树，此类树也称星形图. 图中有 2 个极大点独立集：$V_1^* = \{v_1, v_2, \cdots, v_7\}$，$V_2^* = \{v_8\}$，其中 V_1^* 是最大点独立集，但不是最小支配集，它只是极小支配集；V_2^* 是最小支配集，但只是极大点独立集，而不是最大点独立集. $\beta_0 = 7$，$\gamma_0 = 1$.
2. 由定理 9.1.2 的推论 9.1.1知，$\alpha_0 + \beta_0 = n$，故 $\alpha_0 = 10 - 4 = 6$. 图 9.3.3 的阶数 $n = 10$，$\beta_0 = 4$，$\alpha_0 = 6$. 请在图中找出一个最大点独立集，它的补即为最小点覆盖集.
3. 由定理 9.1.3 可知，

$$\alpha_1 = n - \beta_1 = n - 1.$$

$n(\geqslant 4)$ 阶星形图满足要求. 在图 9.3.2 所示的 8 阶星形图中 $\beta_1 = 1$，$\alpha_1 = 7$.

题型三：极大匹配、最大匹配、完美匹配

1. 无向图 G 如图 9.3.4 所示.

(1) 给出 G 的一个非最大匹配的极大匹配 M_1.

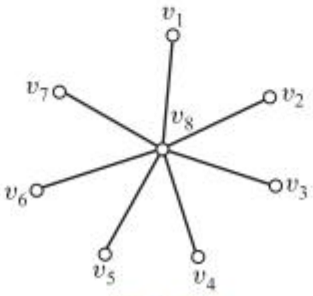

图 9.3.2

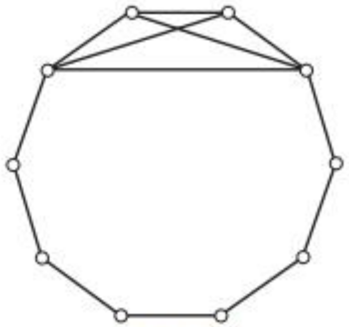

图 9.3.3

(2) 求 (1) 中给出的 M_1 的一条可增广的交错路径 Γ.

(3) 由 (2) 中给出的 Γ 产生一个边数更多的匹配 M.

(4) G 中存在完美匹配吗? 为什么?

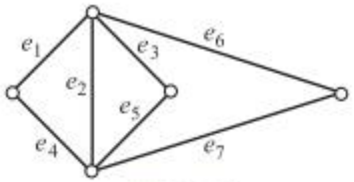

图 9.3.4

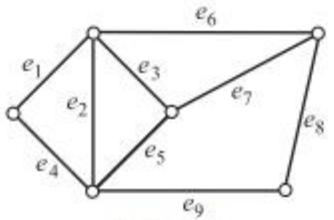

图 9.3.5

2. 无向图 G 如图 9.3.5 所示,求 G 中一个最大匹配.

解答与分析

1. (1) $M_1=\{e_2\}$ 为 G 中的一个极大匹配,但它不是最大匹配.

(2) $\Gamma=e_1e_2e_5$(或 $e_1e_2e_7$ 等)是 M_1 的一条可增广的交错路径.

(3) Γ 上不在 M_1 中的边 e_1,e_5 组成的集合 $M=\{e_1,e_5\}$ 是 G 中的匹配,它比 M_1 多一条边. 事实上,M 是 G 的最大匹配.

(4) G 中无完美匹配. G 中存在完美匹配的一个必要条件是 G 的阶数 n 为偶数,此题中 $n=5$,故无完美匹配.

2. 按下述步骤求最大匹配.

(1) 取 $M_1=\{e_2,e_8\}$(或 $\{e_2,e_7\}$)为 G 中一个极大匹配.

(2) 找到 M_1 的一条可增广的交错路径 $\Gamma=e_1e_2e_9e_8e_7$,因而 M_1 不是最大匹配.

(3) 由 Γ 中不属于 M_1 的边构成的集合 $M=\{e_1,e_9,e_7\}$ 是 G 中多一条边的匹配,不再有 M 可增广的交错路径,故 M 是最大匹配.

由于 G 只有 6 个顶点,M 也是完美匹配.

题型四：二部图中的匹配

1. 求二部图中边不重的完备匹配.

   (1) $K_{2,3}$ 中有多少个边不重的完备匹配?

   (2) $K_{3,3}$ 中有多少个边不重的完美匹配?

2. 设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E\rangle$, $|V_1| \leqslant |V_2|$, M 为 G 中一个匹配, Γ 为一条 M 可增广的交错路径, M 能是 G 中 V_1 到 V_2 的完备匹配吗? 为什么?

3. 作满足要求的二部图.

(1) 作二部图 $G_1 = \langle V_{11}, V_{12}, E_1\rangle$, $|V_{11}| = 4$, $|V_{12}| = 6$, 使其满足 $t = 3$ 的 t 条件, 从而 G_1 中存在从 V_{11} 到 V_{12} 的完备匹配, 并给出一个完备匹配.

(2) 作二部图 $G_2 = \langle V_{21}, V_{22}, E_2\rangle$, $|V_{21}| = 3$, $|V_{22}| = 5$, 使其不满足任何 t 条件, 但满足相异性条件, 从而存在从 V_{21} 到 V_{22} 的完备匹配, 并给出一个完备匹配.

(3) 作二部图 $G_3 = \langle V_{31}, V_{32}, E_3\rangle$, $|V_{31}| = 5$, $|V_{32}| = 7$, 使其不满足相异性条件, 从而不存在从 V_{31} 到 V_{32} 的完备匹配.

解答与分析

1. (1) $K_{2,3}$ 中有 3 个边不重的完备匹配, 如图 9.3.6 所示. 其中图 9.3.6(a) 是 $K_{2,3}$, 图 9.3.6(b)、(c)、(d) 给出 3 个完备匹配 $M_1 = \{(v_1, u_1), (v_2, u_2)\}$, $M_2 = \{(v_1, u_2), (v_2, u_3)\}$, $M_3 = \{(v_1, u_3), (v_2, u_1)\}$, 它们的边不重.

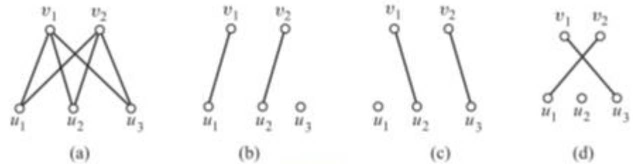

图 9.3.6

   (2) $K_{3,3}$ 中有 3 个边不重的完美匹配, 如图 9.3.7 所示, 其中图 9.3.7(a) 是 $K_{3,3}$, 3 个完美匹配分别由 (b)、(c)、(d) 给出, 它们的边不重.

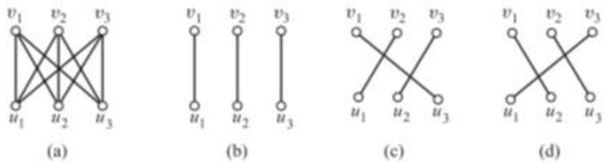

图 9.3.7

2. 因为含 M 可增广的交错路径, 由定理 9.1.4, M 不是最大匹配, 更不可能是完备匹配.
3. 根据定理 9.1.5 和定理 9.1.6 不难完成此题.

题型五：图的着色

1. 求图 9.3.8(a) 所示的无向图的点色数 χ 和边色数 χ'.

2. 通过求图 9.3.8(b) 所示的平面图 G 的对偶图 G^* 的点色数 $\chi(G^*)$,求 G 的面色数 $\chi^*(G)$.

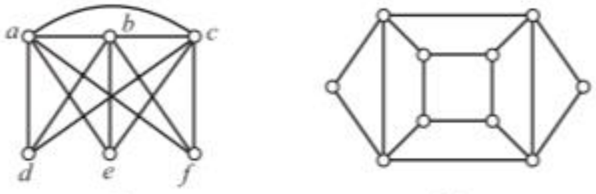

图 9.3.8

3. 设 G 是 3-正则的哈密顿图,证明:G 的边色数 $\chi' = 3$.

解答与分析

1. 图 9.3.8(a) 中,顶点 a,b,c 彼此相邻,必须用 3 种不同的颜色着色. d,e,f 都与 a,b,c 相邻,因而不能再用这 3 种颜色. 又因为 d,e,f 彼此不相邻,所以只需要再用一种颜色给它们着色,所以 $\chi = 4$.

由 Vizing 定理可知,$5 \leqslant \chi' \leqslant 6$. 而 G 由圈 $abca$ 和删去圈中的 3 条边后的子图 $K_{3,3}$ 组成,给 $K_{3,3}$ 和圈的边着色各需用 3 种颜色,且在 $K_{3,3}$ 中与 a,b,c 中每个顶点关联的 3 条边都必须着 3 种不同的颜色,从而圈上的边不能与 $K_{3,3}$ 的边用相同的颜色,因此至少要用 6 种颜色. 所以,$\chi' = 6$.

2. G 的对偶图 G^* 见图 9.3.9. 由于 G^* 中含三角形,所以 $\chi(G^*) \geqslant 3$. 又能用 3 种颜色给 G^* 点着色,如图 9.3.9 所示,因而 $\chi(G^*) = 3$. 由定理 9.1.9,$\chi^*(G) = 3$. 其实,直接给图 G 面着色,也可证明 $\chi^*(G) = 3$.

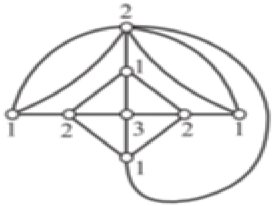

图 9.3.9

3. G 是 3-正则图,自然 $\Delta(G) = 3$. 由 Vizing 定理,$\chi'(G) \geqslant 3$. 下面证明 $\chi'(G) \leqslant 3$.

由于 G 为 3-正则图,由握手定理可知,$2m = 3n$,这里 n 为阶数,m 为边数,于是阶数 n 为偶数. 设 C 是 G 中的一条哈密顿回路,则 C 为 n 阶偶圈,因而可用 2 种颜色给 C 上的边着色. G 中不在 C 上的边彼此不相邻(否则相邻 2 条边的共同端点的度数大于等于 4),可用另外一种颜色给它们着色,所以 $\chi'(G) \leqslant 3$.

综上所述,$\chi'(G) = 3$.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) 在 4×4 的棋盘的每个方格内放置 1 个顶点,组成顶点集 V,令 $E=\{(u,v)|u,v\in V, u$ 与 v 在同一行或同一列或同一条对角线上$\}$,则 $G=\langle V,E\rangle$ 为 16 阶无向简单图,G 的支配数 $\gamma_0=$__________.

(2) 在无孤立点的无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$ 中,已知 V^* 为 G 的一个点独立集,则 $V-V^*$ 为 G 的__________.

(3) 设 G 为无孤立点的无向简单图, M 既是 G 中的最大匹配, 又是 G 中的最小边覆盖集, 则 M 应为__________匹配.

(4) 设 M 为无向图 G 中的一个匹配,C 为 G 中关于 M 的交错圈,已知 C 中有 $k(\geqslant 1)$ 条 M 中的边,则 C 中有__________条边在 G 中,而不在 M 中.

(5) 设 M 为无向图 G 中的一个匹配,Γ 为 G 中关于 M 的可增广的交错路径,则 Γ 中不在 M 中的边比在 M 中的边多__________条.

(6) 含完全图 K_n 作为子图的无向图 G 的点色数至少为__________.

2. 简答题(5 小题,每小题 10 分,共 50 分).

(1) 求彼得松图的 $\gamma_0,\beta_0,\beta_1,\alpha_0,\alpha_1$.

(2) 求图 9.5.1 所示的二部图的 $\gamma_0,\beta_0,\alpha_0,\beta_1,\alpha_1$.

(3) 二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 如图 9.5.2 所示. 证明 G 中存在完备匹配,并找出 G 中所有不同的完备匹配.

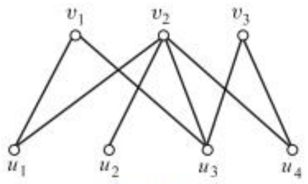

图 9.5.1

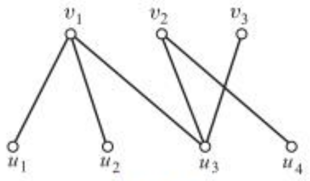

图 9.5.2

(4) 二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 如图 9.5.3 所示. 证明 G 中存在完备匹配,并找出一组边不重的完备匹配.

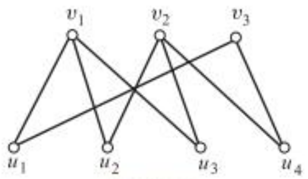

图 9.5.3

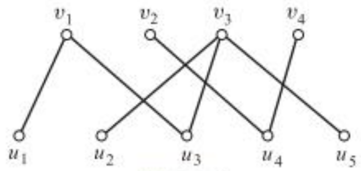

图 9.5.4

(5) 二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 如图 9.5.4 所示. 证明 G 中不存在完备匹配,找出 G 中的一个最大匹配,并求匹配数 β_1.

3. 证明题(10 分).

设 G 是不含 K_3 的连通的简单平面图,证明:

(1) $\delta(G)\leqslant 3$.

(2) G 是 4-可着色的.

4. 应用题(10 分).

某中学,张、王、李、赵 4 名教员下学期要承担他们都熟悉的 4 门课程:数学、物理、化学和英语.

(1) 试讨论学校安排他们授课的方案数.

(2) 在上述各方案中,有多少种是完全不同的方案(即每位教员所授课程都不相同的方案数)?