代数结构-格与布尔代数
习题课及作业

2024, 5, 13

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-格的定义及性质

格的偏序集定义

定义 14.1.1　设 $\langle S,\preccurlyeq\rangle$ 是偏序集，如果 $\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$ 都有最小上界和最大下界，那么称 S 关于偏序 $\preccurlyeq$ 构成一个格.

格的代数刻画

定理 14.1.1　设 $\langle S,*,\circ\rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统，且 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义 S 中的偏序 $\preccurlyeq$，使得 $\langle S,\preccurlyeq\rangle$ 构成一个格，且 $\forall a,b\in S$ 有 $a\wedge b=a*b,a\vee b=a\circ b$.

格的实例

集合的幂集格、正整数的正因子格、群的子群格.

对偶原理

定义 14.1.2　设 p 是含有格中元素以及符号 $=,\preccurlyeq,\succcurlyeq,\vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 p^* 是将 p 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$，$\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$，$\vee$ 替换成 $\wedge$，$\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题，则称 p^* 为 p 的对偶命题.

设 p 是含有格中元素以及符号 $=,\preccurlyeq,\succcurlyeq,\vee$ 和 $\wedge$ 等的命题. 若 p 对一切格为真，则 p 的对偶命题 p^* 也对一切格为真.

格的运算性质

设 $\langle L,\preccurlyeq\rangle$ 是格，则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

(1) $\forall a,b\in L$ 有 $a\vee b=b\vee a,\ a\wedge b=b\wedge a$.

(2) $\forall a,b,c\in L$ 有 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c),\ (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$.

(3) $\forall a\in L$ 有 $a\vee a=a,\ a\wedge a=a$.

(4) $\forall a,b\in L$ 有 $a\vee(a\wedge b)=a,\ a\wedge(a\vee b)=a$.

偏序与运算的关系

设 L 是格，则 $\forall a,b\in L$ 有 $a\preccurlyeq b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b$.

保序性质

设 L 是格，$\forall a,b,c,d\in L$. 若 $a\preccurlyeq b$ 且 $c\preccurlyeq d$，则 $a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d,a\vee c\preccurlyeq b\vee d$.

子格的定义

定义 14.1.3　设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格，S 是 L 的非空子集，若 S 关于 L 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 仍构成格，则称 S 为 L 的子格.

子格判别

S 非空，且 S 关于格 L 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 封闭.

内容提要-分配格、有界格和有补格

分配格的定义

定义 14.1.4 设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格，若 $\forall a,b,c\in L$ 有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$
$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

成立，则称 L 为分配格.

分配格的判别

(1) 根据定义判别：注意在证明 L 为分配格时，只需证明其中的一个等式即可.

(2) 设 L 是格，则 L 是分配格当且仅当 L 不含有与钻石格或五角格同构的子格.

(3) 格 L 是分配格当且仅当 $\forall a,b,c\in L$，若 $a\wedge b=a\wedge c$ 且 $a\vee b=a\vee c$，则有 $b=c$.

有界格

定义 14.1.5 设 L 是格，若存在 $a\in L$ 使得 $\forall x\in L$ 有 $a\preccurlyeq x$，则称 a 为 L 的全下界. 若存在 $b\in L$ 使得 $\forall x\in L$ 有 $x\preccurlyeq b$，则称 b 为 L 的全上界.

由于全下界和全上界的唯一性，一般将格 L 的全下界记为 0，全上界记为 1.

定义 14.1.6 设 L 是格，若 L 存在全下界和全上界，则称 L 为有界格，并将 L 记作 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$.

有补格

定义 14.1.7 设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界格，$a\in L$，若存在 $b\in L$ 使得

$$a\wedge b=0 \text{ 和 } a\vee b=1$$

成立，则称 b 为 a 的补元.

定理 14.1.2 设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界分配格，若 $a\in L$，且对于 a 存在补元 b，则 b 是 a 的唯一补元.

定义 14.1.8 设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界格，若 $\forall a\in L$，a 在 L 中都存在补元，则称 L 为有补格.

布尔代数

布尔代数的定义

定义 14.1.9 如果一个格是有补分配格，那么称它为布尔格或布尔代数.

布尔代数也有下述等价定义.

定义 14.1.10 设 $\langle B, *, \circ \rangle$ 是代数系统，$*$ 和 $\circ$ 是二元运算. 若 $*$ 和 $\circ$ 运算满足：

(1) 交换律，即 $\forall a, b \in B$ 有

$$a * b = b * a, \ a \circ b = b \circ a;$$

(2) 分配律，即 $\forall a, b, c \in B$ 有

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c),$$
$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c);$$

(3) 同一律，即存在 $0, 1 \in B$ 使得 $\forall a \in B$ 有

$$a * 1 = a, \ a \circ 0 = a;$$

(4) 补元律，即 $\forall a \in B$，存在 $a' \in B$ 使得

$$a * a' = 0, \ a \circ a' = 1,$$

则称 $\langle B, *, \circ \rangle$ 为一个布尔代数.

布尔代数的性质

定理 14.1.3 设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数，则

(1) $\forall a \in B, \ (a')' = a$.

(2) $\forall a, b \in B, \ (a \wedge b)' = a' \vee b', \ (a \vee b)' = a' \wedge b'$. （德摩根律）

有限布尔代数的结构

定义 14.1.11 设 L 是格，$0 \in L, 0 \neq a \in L$. 若 $\forall b \in L$，当 $0 < b \preccurlyeq a$ 时，总有 $b = a$，则称 a 为 L 中的原子.

定理 14.1.4 (有限布尔代数的表示定理) 设 B 是有限布尔代数，A 是 B 的全体原子构成的集合，则 B 同构于 A 的幂集代数 $P(A)$.

推论 14.1.1

(1) 任何有限布尔代数的基数为 $2^n, n \in \mathbb{N}$.

(2) 任何等势的有限布尔代数都是同构的.

基本要求

- 1. 能够判别给定偏序集或者代数系统是否构成格.
- 2. 能够确定一个命题的对偶命题.
- 3. 能够证明格中的等式或不等式.
- 4. 能判别格 L 的子集 S 是否构成子格.
- 5. 能够判别给定的格是否为分配格、有补格.
- 6. 能够判别布尔代数并证明布尔代数中的等式.

题型一：格及其运算性质的判断

1. 考虑实数集 $\mathbb{R}$ 和通常的小于等于关系 $\leqslant$.
   (1) 说明 $(\mathbb{R},\leqslant)$ 是否构成格.
   (2) $\forall x,y\in\mathbb{R}$,求 $x\vee y, x\wedge y$.
2. 表 14.3.1 是一个关于格 $L=\{a,b,c,d,e,f\}$ 中 $\vee$ 运算的运算表,设 $\vee$ 运算是可交换和幂等的.
   (1) 完成该运算表.
   (2) 画出 L 的哈斯图.

解答与分析

1. (1) 构成格.
   (2) $x\vee y=\max(x,y)$, $x\wedge y=\min(x,y)$.
2. (1) 由于 运算是可交换的、幂等的,因此运算表是对称的,并且主对角线元素排列为 a,b,c,d,e,f,从而得到运算表如表 14.3.2 所示.

表 14.3.1

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a		a	a	e	e	a
b			a	d	e	b
c				e	e	c
d					e	d
e						e
f						

表 14.3.2

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	e	e	a
b	a	b	a	d	e	b
c	a	a	c	e	e	c
d	e	d	e	d	e	d
e	e	e	e	e	e	e
f	a	b	c	d	e	f

(2) 由运算表不难看出 e 是最大元,f 是最小元. a 是被 e 覆盖的元素(因为除了 e 和 d 以外,其他元素与 a 运算都等于 a,a 小于 e,a 与 d 不可比,但是 a 大于其他元素). 类似地,可以知道 d 也是被 e 覆盖的元素. 对于其他元素之间的关系也可以作出分析,最终得到的哈斯图如图 14.3.1 所示.

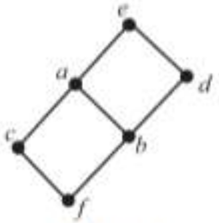

图 14.3.1

题型二：格中的等式或不等式的证明

证明：

(1) $(a\wedge b)\vee b=b$.

(2) $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\preccurlyeq(a\vee c)\wedge(b\vee d)$.

解答与分析

(1) $(a\wedge b)\vee b$ 是 $a\wedge b$ 与 b 的最小上界，根据最小上界的定义有 $(a\wedge b)\vee b\succcurlyeq b$. 类似地，$b$ 是 $a\wedge b$ 与 b 的上界，故有 $(a\wedge b)\vee b\preccurlyeq b$. 由于偏序的反对称性，等式得证.

(2) 由 $a\wedge b\preccurlyeq a\preccurlyeq a\vee c$ 和 $a\wedge b\preccurlyeq b\preccurlyeq b\vee d$ 得到

$$a\wedge b\preccurlyeq(a\vee c)\wedge(b\vee d).$$

同理得到

$$c\wedge d\preccurlyeq(a\vee c)\wedge(b\vee d).$$

因此有

$$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\preccurlyeq(a\vee c)\wedge(b\vee d).$$

证明格中等式的基本方法就是证明等式的左边“小于等于”右边，同时等式的右边也“小于等于”左边. 然后利用偏序关系的反对称性，由这两个不等式得到需要的等式. 因此等式的证明可以归结为两个不等式的证明.

为证明格中的不等式可以使用如下结果：

$a\preccurlyeq a$.（偏序关系的自反性）

$a\preccurlyeq b$ 且 $b\preccurlyeq c\Rightarrow a\preccurlyeq c$.（偏序关系的传递性）

$a\wedge b\preccurlyeq a, a\wedge b\preccurlyeq b, a\preccurlyeq a\vee b, b\preccurlyeq a\vee b$.（下界定义与上界定义）

$a\preccurlyeq b$ 且 $a\preccurlyeq c\Rightarrow a\preccurlyeq b\wedge c$; $b\preccurlyeq a$ 且 $c\preccurlyeq a\Rightarrow b\vee c\preccurlyeq a$.（最大下界定义与最小上界定义）

题型三：子格判定

14.3.3 题型三：子格判定

求图 14.3.2 中格 L 的所有子格.

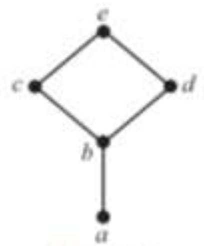

图 14.3.2

解答与分析

所有的子格按照元数分类如下.

1 元子格：$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$.

2 元子格：$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,e\}, \{d,e\}$.

3 元子格：$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\}, \{b,c,e\}, \{b,d,e\}$.

4 元子格：$\{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}, \{b,c,d,e\}$.

5 元子格：$\{a,b,c,d,e\}$.

子格的判定主要依据定义，就是判别给定子集关于原来格中的求最小上界、求最大下界运算是否封闭. 对于图 14.3.2 中的格，$\{a,c,d,e\}$ 不构成子格. 因为在原来的格里，$\{c,d\}$ 的最大下界是 b，而 b 不属于 $\{a,c,d,e\}$.

题型四：特殊格的判别

1. (1) 判断图 14.3.3 中的格是否为分配格.

(2) 针对图 14.3.3 中的格求出每个格的补元，并说明它们是否为有补格.

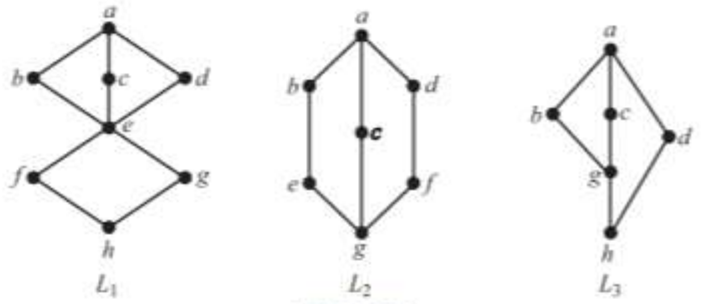

图 14.3.3

2. 判断下述代数系统是否为格，是否为布尔代数.

(1) $S=\{1,3,4,12\}$，任给 $x,y\in S$，

$$x\circ y=\mathrm{lcm}(x,y),\ x*y=\gcd(x,y),$$

其中，lcm 是求最小公倍数，gcd 是求最大公因数.

(2) $S=\{0,1,2\}$，$\circ$ 是模 3 加法，$*$ 是模 3 乘法.

(3) $S=\{0,1,\cdots,n\}$，其中 $n\geqslant 2$，任给 $x,y\in S$，$x\circ y=\max(x,y)$，$x*y=\min(x,y)$.

解答与分析

1. (1) L_1 不是分配格，因为它含有与钻石格同构的子格.

L_2 和 L_3 不是分配格，因为它们含有与五角格同构的子格.

(2) L_1 中，a 与 h 互为补元，其他元素没有补元.

L_2 中，a 与 g 互为补元；b 的补元为 c,d,f；c 的补元为 b,d,e,f；d 的补元为 b,c,e；e 的补元为 c,d,f；f 的补元为 b,c,e.

L_3 中，a 与 h 互为补元；b 的补元为 d；c 的补元为 d；d 的补元为 b,c,g；g 的补元为 d.

L_2 和 L_3 是有补格.

2. (1) 是布尔代数.

(2) 不是格.

(3) 是格，但不是布尔代数.

题型五：布尔代数中的化简或证明

设 $\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$ 是布尔代数，$a,b,c\in B$，化简下列公式.

(1) $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')\vee(a'\vee b)$.

(2) $(a\wedge b)\vee(a\wedge(b\wedge c)')\vee c$.

解答与分析

(1)

$$
\begin{aligned}
(a\wedge b)\vee(a\wedge b')\vee(a'\vee b) &= (a\wedge(b\vee b'))\vee(a'\vee b) \quad \text{（分配律）}\\
&= (a\wedge 1)\vee(a'\vee b)\\
&= a\vee(a'\vee b)\\
&= (a\vee a')\vee b\\
&= 1\vee b\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(a\wedge b)\vee(a\wedge(b\wedge c)')\vee c &= (a\wedge b)\vee(a\wedge(b'\vee c'))\vee c\\
&= (a\wedge b)\vee(a\wedge b')\vee(a\wedge c')\vee c\\
&= a\wedge(b\vee b')\vee(a\wedge c')\vee c \quad \text{（分配律）}\\
&= (a\wedge 1)\vee((a\vee c)\wedge(c\vee c'))\\
&= a\vee(a\vee c)\\
&= a\vee c.
\end{aligned}
$$

布尔代数的化简或者证明题的解答主要应用布尔代数中的算律，如结合律、交换律、幂等律、吸收律、分配律、德摩根律，还有关于单位元和补元的算律.

作业

1. 填空题(6 小题，每小题 5 分，共 30 分).

(1) 设 $X=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, $Y=\{2,3,6,12,24,36\}$, $W=\{1,2,3,6,18,54\}$, $T=\{2^n \mid n$ 为正整数$\}$，这些集合中关于整除关系构成格的有__________.

(2) 图 14.5.1 的哈斯图中构成分配格的有__________.

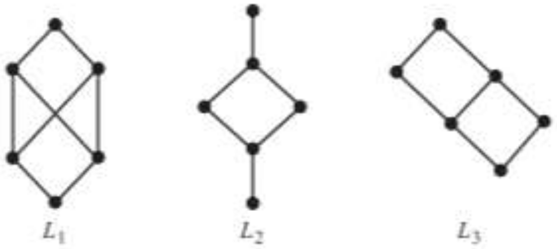

图 14.5.1

(3) 设 p 是命题 $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$，则 p 的对偶命题是__________.

(4) 设 L 为钻石格，则 L 有__________个 2 元子格.

(5) 设 n 为正整数，S_n 为 n 的正因子集，S_n 关于整除关系构成格，令 $n=1,2,3,4,5,6$，那么当 $n=$__________时，S_n 构成布尔格.

(6) 设 $\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$ 是布尔代数，同一律的表达式是__________.

2. 简答题(5 小题，每小题 10 分，共 50 分).

(1) 设 $A=\{1,2,5,10,11,22,55,110\}$，$A$ 关于整除关系构成格 L. 求 L 中所有有补元素的补元.

(2) 设 L 是模 12 加群 $\langle\mathbb{Z}_{12},\oplus\rangle$ 的子群格，给出 L 的所有 4 元子格.

(3) 在布尔代数中化简下列公式: $(a\wedge b')\vee(a\vee b)'$.

(4) 设 $\mathbb{R}$ 为实数集，$A_t=\{x\in\mathbb{R}\mid K_t\leqslant x\leqslant t+1\}$，其中 $K_0=K_2=0$, $K_1=K_3=-1$, $K_4=-2$. 令 $S=\{A_t\mid t=0,1,2,3,4\}$. 画出偏序集 $\langle S,\subseteq\rangle$ 的哈斯图并求它的极大元、极小元、最大元、最小元. 说明该偏序集构成什么格.

(5) 设 $G=\langle\mathbb{Z}_5,\oplus\rangle$. 令 G 上所有自同构构成的群为 $\mathrm{Aut}\,G$，给出 $\mathrm{Aut}\,G$ 的运算表并画出它的子群格 L 的哈斯图. 说明这个格是否为分配格、有补格、布尔格.

3. 证明题(2 小题，每小题 10 分，共 20 分).

(1) 设 I 是格 L 的非空子集，如果满足下述条件，那么称 I 为 L 的理想:

(i) $\forall a,b\in I$ 有 $a\vee b=I$;

(ii) $\forall a\in I,\forall x\in L$, 若 $x\preccurlyeq a$, 则 $x\in I$.

证明：理想 I 是 L 的子格.

(2) 在格 L 中，$\forall a,b,c\in L$ 有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ 成立. 证明：$\forall a,b,c\in L$ 有

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

成立.