命题逻辑（续1）

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

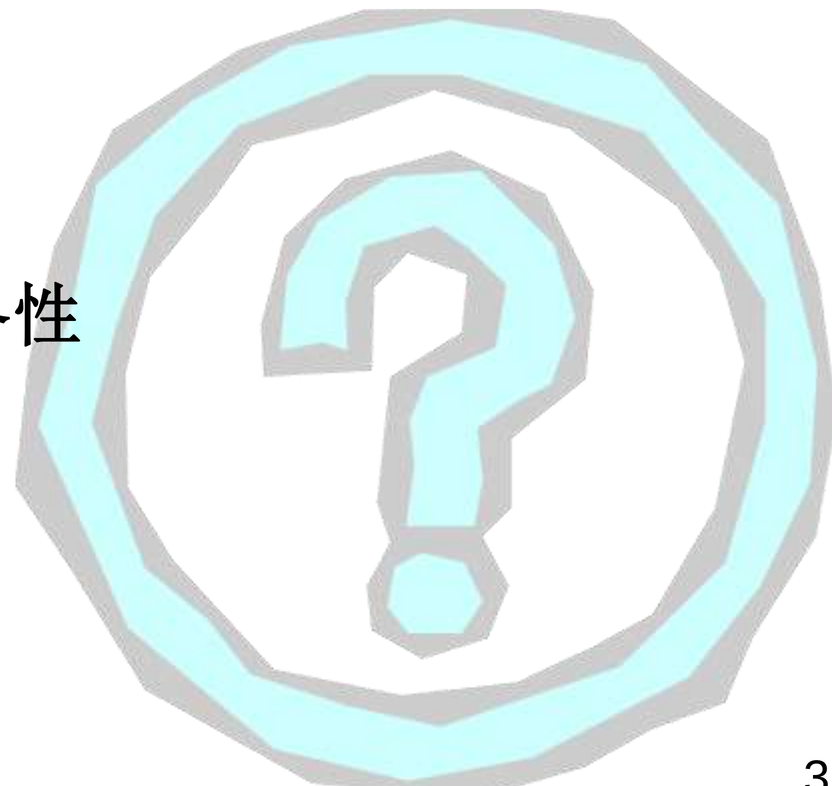
致谢：部分内容改编自北京大学曹永知老师、中科大肖明军老师和南大陶先平老师的《离散数学》slides。

前情回顾

- 数理逻辑（符号逻辑）
- 命题，逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 语义蕴含

内容提要

- 语意蕴含与逻辑等价
- 命题逻辑的推理
- 命题逻辑公式的范式
- 自然演绎规则及论证
- 命题逻辑的正确性及完备性



命题逻辑的推理理论--推理的形式结构

数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理.

所谓推理是指从前提出发推导出结论的思维过程，而前提是已知的命题公式集合，结论是从前提出发应用推理规则推导出的命题公式.

定义 17.1.1

设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 B 都是命题公式，若对于 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 B 中出现的命题变项的任意一组赋值，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为假，或者当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为真时 B 也为真，则称由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推导出结论 B 的推理是有效的或正确的，并称 B 为有效的结论.

关于定义 17.1.1 还需做以下几点说明.

命题逻辑的推理理论--推理的形式结构

注 17.1.1

1. 由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推导出结论 B 的推理是否正确与诸前提的排列次序无关，前提是一个有限的公式集合．设前提为集合 Γ，将由 Γ 推导出 B 的推理记为 $\Gamma \vdash B$．若推理是正确的，则记为 $\Gamma \models B$，否则记为 $\Gamma \not\models B$．这里称 $\Gamma \vdash B$ 或 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B$ 为推理的形式结构．

2. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, B$ 中共出现 n 个命题变项，对任一组赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，其中 $\alpha_i = 0$ 或 1，$i = 1, 2, \cdots, n$，前提和结论的取值情况有以下 4 种．
   1. $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 0，B 为 0；
   2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 0，B 为 1；
   3. $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 1，B 为 0；
   4. $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 1，B 为 1．

   由定义 17.1.1 可知，只要不出现情况 (c)，推理就是正确的，因而判断推理是否正确，就是判断是否会出现情况 (c)．

3. 由上面的讨论可知，推理正确并不能保证结论 B 一定成立，因为前提可能就不成立．这与人们通常对推理的理解是不同的，通常认为只有在正确的前提下推导出正确的结论才是正确的推理．而在这里，如果前提不正确，不论结论正确与否，都说推理正确．

习题1：推理的形式结构

例 17.1.1

判断下列推理是否正确.

1. $\{p, p \to q\} \vdash q$.
2. $\{p, q \to p\} \vdash q$.

解

如下表所示，写出前提的合取式与结论的真值表.

(1) 表中没有出现前提合取式为真，结论为假的情况，因而推理正确，即 $\{p, p \to q\} \models q$.

(2) 表中当赋值为 10 时，前提的合取式为真，而结论为假，因而推理不正确，即 $\{p, q \to p\} \not\models q$.

p	q	$p \wedge (p \to q)$	q	$p \wedge (q \to p)$	q
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

根据定理 17.1.1, 由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推导出 B 的推理的形式结构

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B \tag{17.1.1}$$

等同于蕴涵式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B, \tag{17.1.2}$$

其中推理前提的合取式成了蕴涵式的前件, 结论成了蕴涵式的后件. 推理正确

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \models B \tag{17.1.3}$$

等同于

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B, \tag{17.1.4}$$

其中 $\Rightarrow$ 同 $\Leftrightarrow$ 一样是一种元语言符号, 表示蕴涵式为重言式.
今后把推理的形式结构写成

$$\begin{aligned} &\text{前提}: A_1, A_2, \cdots, A_k. \\ &\text{结论}: B. \end{aligned} \tag{17.1.5}$$

并且也把式 (17.1.2) 称作推理的形式结构, 通过判断式 (17.1.2) 是否为重言式来确定推理是否正确.

推理的形式结构

根据前面两章的讨论，判断式 (17.1.2) 是否为重言式有下面 3 种方法.

1. 真值表法.
2. 等值演算法.
3. 主析取范式法.

现在可以将例 17.1.1 中的两个推理写成式 (17.1.5) 的形式.

(1)

前提：$p, p \to q$.

结论：q.

推理的形式结构：$(p \wedge (p \to q)) \to q$

(2)

前提：$p, q \to p$.

结论：q.

推理的形式结构：$(p \wedge (q \to p)) \to q$

由例 17.1.1 已知，(1) 正确，即 $(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$；
而 (2) 不正确，记为 $(p \wedge (q \to p)) \nRightarrow q$.

习题2：推理的形式结构

例 17.1.2

判断下面推理是否正确.

1. 若 a 能被 4 整除，则 a 能被 2 整除. a 能被 4 整除. 所以，a 能被 2 整除.
2. 若 a 能被 4 整除，则 a 能被 2 整除. a 能被 2 整除. 所以，a 能被 4 整除.
3. 下午马芳或去看电影或去游泳. 她没去看电影. 所以，她去游泳了.
4. 若下午气温超过 30°C，则王小燕必去游泳. 若她去游泳，她就不去看电影了. 所以，若王小燕没去看电影，下午气温必超过了 30°C.

解

解上述类型的推理问题，首先应将简单命题符号化. 然后分别写出前提、结论、推理的形式结构，接着进行判断.

(1) 设

p : a 能被 4 整除.

q : a 能被 2 整除.

前提：$p \to q, p$.

结论：q.

推理的形式结构：$(p \to q) \wedge p \to q$. (3.1.6)

由例 3.1.1 已知此推理正确，即

$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$.

例3.1.2解(续)

用主析取范式法判断式 (3.1.9) 是否为重言式.

$$
\begin{aligned}
& ((p \to q) \wedge (q \to \neg r)) \to (\neg r \to p) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (r \vee p) \\
\Leftrightarrow\ & ((p \wedge \neg q) \vee (q \vee r)) \vee (r \vee p) \\
\Leftrightarrow\ & p \vee r \qquad \text{（用两次吸收律）} \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \\
& \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7. \qquad \text{（重排序）}
\end{aligned}
$$

可见式 (3.1.1) 不是重言式(主析取范式中缺 2 个极小项 m_0 和 m_2), 所以推理不正确. □

推理定律—重要的蕴含式

有一些重要的重言蕴涵式，称作推理定律. 下面给出 9 条推理定律：

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难
$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难 (特殊形式)
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$	破坏性二难

其中 A, B, C, D 等是元语言符号，表示任意的命题公式.

把具体的命题公式代入某条推理定律后就得到该推理定律的一个代入实例. 例如，$p \Rightarrow p \vee q$，$p \to q \Rightarrow (p \to q) \vee r$，$p \Rightarrow p \vee q \vee r$ 等都是附加定律的代入实例.

推理定律的每个代入实例都是重言式，可使用这些推理定律证明推理正确.

另外，本节给出的 24 个等值式中的每个都能产生出两条推理定律.

例如，$A \Leftrightarrow \neg\neg A$ 产生推理定律 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$.

命题逻辑的“自然演绎”规则

$$\frac{p \qquad p\to q}{\therefore q}$$

假言推理

$$\frac{\neg q \qquad p\to q}{\therefore \neg p}$$

取拒式

$$\frac{p\to q \qquad q\to r}{\therefore p\to r}$$

假言三段论

$$\frac{p\vee q \qquad \neg p}{\therefore q}$$

析取三段论

$$\frac{p}{\therefore p\vee q}$$

附加

$$\frac{p\wedge q}{\therefore p}$$

化简

$$\frac{p \qquad q}{\therefore p\wedge q}$$

合取引入

$$\frac{p\vee q \qquad \neg p\vee r}{\therefore q\vee r}$$

消解

用推理规则建立论证

- “今天下午不出太阳并且比昨天冷”，“只有今天下午出太阳，我们才去游泳”，“若我们不去游泳，则我们将乘独木舟游览”，“若我们乘独木舟游览，则我们将在黄昏时回家”，结论“我们将在黄昏时回家”。
- p: 今天下午出太阳，q: 今天比昨天冷，r: 我们将去游泳，
- s: 我们将乘独木舟游览，t: 我们将在黄昏时回家。
  - $\neg p \wedge q$
  - $r \rightarrow p$
  - $\neg r \rightarrow s$
  - $s \rightarrow t$

$\neg p$ 化简

$\neg r$ 取拒式

s 假言推理

t 假言推理

自然推理系统

本节将对由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推导出结论 B 的正确推理的证明给出严格的形式描述.

证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论(中间结论或推理中的结论).

定义 17.2.1

一个形式系统 I 由下面 4 个部分组成.

1. 非空的字母表 $A(I)$.
2. $A(I)$ 中符号构造的合式公式集 $E(I)$.
3. $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集 $A_X(I)$.
4. 推理规则集 $R(I)$.

将 I 记为 4 元组 $\langle A(I), E(I), A_X(I), R(I)\rangle$，其中 $\langle A(I), E(I)\rangle$ 是 I 的形式语言系统，而 $\langle A_X(I), R(I)\rangle$ 为 I 的形式演算系统.

自然推理系统

形式系统一般分为两类.

一类是 自然推理系统 ,它的特点是从任意给定的前提出发,应用系统中的推理规则进行推理演算,最后得到的命题公式是推理的结论(它是有效的结论,可能是重言式,也可能不是重言式).

另一类是 公理推理系统 ,它只能从若干条给定的公理出发,应用系统中的推理规则进行推理演算,得到的结论是系统中的重言式,称为系统中的 定理 .

定义 17.2.2

自然推理系统 P 定义如下.

1. 字母表

1. 命题变项符号:$p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$,其中 $i \geqslant 1$.
2. 联结词符号:$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
3. 括号与逗号:$(,), ,$.

2. 合式公式

同定义 *15.2.1.*

3. 推理规则

推理规则（续）

定义17.2.2推理规则(续)

(1) *前提引入规则*：在证明的任何步骤都可以引入前提.

(2) *结论引入规则*：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提.

(3) *置换规则*：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式. 由 9 条推理定律和结论引入规则可以导出以下各条推理规则.

(4) *假言推理规则*(或*分离规则*)：若证明的公式序列中已出现过 $A \to B$ 和 A，则由假言推理定律 $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 可知，B 是 $A \to B$ 和 A 的有效结论. 由结论引入规则可知，可以将 B 引入命题序列. 用图示表示为如下形式.

$$\begin{array}{r} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

以下各条推理规则直接以图示给出，不再加以说明.

推理规则（续1）

定义17.2.2推理规则(续)

(5) 附加规则：

$$\frac{A}{A \vee B}$$

(6) 化简规则：

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

(7) 拒取式规则：

$$\frac{\begin{array}{r} A \to B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

(8) 假言三段论规则：

$$\frac{\begin{array}{r} A \to B \\ B \to C \end{array}}{A \to C}$$

(9) 析取三段论规则：

$$\frac{\begin{array}{r} A \vee B \\ \neg B \end{array}}{A}$$

(10) 构造性二难推理规则：

$$\frac{\begin{array}{r} A \to B \\ C \to D \\ A \vee C \end{array}}{B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则：

$$\frac{\begin{array}{r} A \to B \\ C \to D \\ \neg B \vee \neg D \end{array}}{\neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则：

$$\frac{\begin{array}{r} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

论证

- 一个论证（*argument*）是一个命题序列。序列中除了最后一个命题之外的其它命题都称为前提（*premises*），最后一个命题称为结论（*conclusion*）。若所有前提为真则蕴含结论为真则称改论证是成立的（*valid*）。

"如果我是马云，那么我给各位每人发一辆法拉利。"

"我是马云。"

∴"我给各位每人发一辆法拉利。"

论证形式

- 命题逻辑中的一个论证形式（ *argument form* ） 是一系列包含命题变元的命题公式。一个论证形式成立（*valid*），则不管用什么命题替换其中变元，只要替换后各前提命题都为真则结论命题也为真。

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

所以，你现在能理解什么叫做“形式化（formalization）”。

注意书写论证的格式

Show that the premises "If you send me an e-mail message, then I will finish writing the program," "If you do not send me an e-mail message, then I will go to sleep early," and "If I go to sleep early, then I will wake up feeling refreshed" lead to the conclusion "If I do not finish writing the program, then I will wake up feeling refreshed."

Solution: Let p be the proposition "You send me an e-mail message," q the proposition "I will finish writing the program," r the proposition "I will go to sleep early," and s the proposition "I will wake up feeling refreshed." Then the premises are $p \to q$, $\neg p \to r$, and $r \to s$. The desired conclusion is $\neg q \to s$. We need to give a valid argument with premises $p \to q$, $\neg p \to r$, and $r \to s$ and conclusion $\neg q \to s$.

This argument form shows that the premises lead to the desired conclusion.

Step	**Reason**
1. $p \to q$	Premise
2. $\neg q \to \neg p$	Contrapositive of (1)
3. $\neg p \to r$	Premise
4. $\neg q \to r$	Hypothetical syllogism using (2) and (3)
5. $r \to s$	Premise
6. $\neg q \to s$	Hypothetical syllogism using (4) and (5)

证明

设前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，结论 B 和公式序列 $C_1, C_2, \cdots, C_l$. 如果每一个 C_i, $i = 1, 2, \cdots, l$, 是某个 A_j，或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到，并且 $C_l = B$，那么称公式序列 $C_1, C_2, \cdots, C_l$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推导出 B 的证明.

(1) 证明:

①	$p \to s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg p$	①②拒取式
④	$p \vee q$	前提引入
⑤	q	③④析取三段论
⑥	$q \to r$	前提引入
⑦	r	⑤⑥假言推理
⑧	$r \wedge (p \vee q)$	⑦④合取引入

此证明的序列长为 8，最后一步为推理的结论，所以推理正确，$r \wedge (p \vee q)$ 是有效的结论.

(2) 证明:

①	$\neg p \vee q$	前提引入
②	$p \to q$	①置换
③	$r \vee \neg q$	前提引入
④	$q \to r$	③置换
⑤	$p \to r$	②④假言三段论
⑥	$r \to s$	前提引入
⑦	$p \to s$	⑤⑥假言三段论

得证 $p \to s$ 是有效结论.

自然推理系统中的证明

可以在自然推理系统 P 中构造数学和日常生活中的一些推理，所得结论都是有效的. 当所有前提为真时，结论必为真.

例 17.2.2

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

若数 a 是实数，则它不是有理数就是无理数. 若 a 不能表示成分数，则它不是有理数. a 是实数且它不能表示成分数. 所以 a 是无理数.

解

设简单命题

p : a 是实数.

q : a 是有理数.

r : a 是无理数.

s : a 能表示成分数.

前提: $p \to (q \vee r), \neg s \to \neg q, p \wedge \neg s$.

结论: r.

证明:

①	$p \wedge \neg s$	前提引入
②	p	①化简
③	$\neg s$	①化简
④	$p \to (q \vee r)$	前提引入
⑤	$q \vee r$	②④假言推理
⑥	$\neg s \to \neg q$	前提引入
⑦	$\neg q$	③⑥假言推理
⑧	r	⑤⑦析取三段论

构造证明方法1：附加前提证明法

设推理的形式结构具有如下形式

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B), \tag{17.2.1}$$

其结论也为蕴涵式. 此时可以将结论中的前件也作为推理的前提，使结论为 B，即把推理的形式结构改写为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B. \tag{17.2.2}$$

两者的等价性证明如下.

$$\begin{aligned}(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B) &\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B)\\ &\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B\\ &\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B.\end{aligned}$$

因为式 (17.2.1) 与式 (17.2.2) 是等值的，因而若能证明式 (17.2.2) 是重言式，则式 (17.2.1) 也是重言式. 在证明式 (17.2.1) 时采用形式结构式 (17.2.2)，称作附加前提证明法，并将 A 称作附加前提.

例 17.2.3

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

如果小张和小王去看电影,则小李也去看电影;小赵不去看电影或小张去看电影;小王去看电影. 所以,当小赵去看电影时,小李也去.

解

设简单命题

p: 小张去看电影.

q: 小王去看电影.

r: 小李去看电影.

s: 小赵去看电影.

前提:$(p \wedge q) \rightarrow r, \neg s \vee p, q$.

结论:$s \rightarrow r$.

证明:用附加前提证明法.

①	s	附加前提引入
②	$\neg s \vee p$	前提引入
③	p	①②析取三段论
④	$(p \wedge q) \rightarrow r$	前提引入
⑤	q	前提引入
⑥	$p \wedge q$	③⑤合取引入
⑦	r	④⑥假言推理

构造证明方法2：归谬法

在构造形式结构为

$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \to B$$

的推理证明中，若将 $\neg B$ 作为前提能推导出矛盾来，比如说得出 $(A \land \neg A)$，则说明推理正确. 其原因如下.

$$\begin{aligned}(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \to B &\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \lor B \\ &\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land \neg B).\end{aligned}$$

若 $(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land \neg B)$ 为矛盾式，则说明 $(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \to B$ 为重言式，即

$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \Rightarrow B.$$

故推理正确.

这种将结论否定式作为附加前提引入并推导出矛盾式的证明方法称作*归谬法*.

数学上经常使用的反证法就是归谬法.

例 17.2.4

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

如果小张守第一垒并且小李向 B 队投球,则 A 队取胜;或者 A 队未取胜,或者 A 队成为联赛第一名;A 队没有成为联赛的第一名;小张守第一垒. 因此,小李没向 B 队投球.

解

设简单命题 p : 小张守第一垒;q : 小李向 B 队投球;r : A 队胜利;s : A 队成为联赛第一名.

前提:$(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s, p$.

结论:$\neg q$.

证明:用归谬法

① q 结论的否定引入

② $\neg r \vee s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③析取三段论

⑤ $(p \wedge q) \to r$ 前提引入

⑥ $\neg(p \wedge q)$ ④⑤拒取式

⑦ $\neg p \vee \neg q$ ⑥置换

⑧ p 前提引入

⑨ $\neg q$ ⑦⑧析取三段论

⑩ $q \wedge \neg q$ ①⑨合取

由于最后一步 $q \wedge \neg q \Rightarrow 0$, 即

$(((p \wedge q) \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s \wedge p) \wedge q \Rightarrow 0$,

所以推理正确.

命题逻辑的正确性与完备性

- 自然演绎规则是正确的，完备的

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi \text{ is valid } \textit{iff } \phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \phi \text{ holds}$$

基于自然演绎规则的推导	基于真值表的语义蕴涵

用推理规则及逻辑等价建立论证

- 已知$(p\wedge q)\vee r$和 $r\rightarrow s$, $p\vee s$ 是否为真?
  - $(p\wedge q)\vee r \equiv (p\vee r)\wedge(q\vee r)$
  - $r \rightarrow s \equiv \neg r\vee s$

$(p\vee r)\wedge(q\vee r) \vdash p\vee r$ 化简

$p\vee r, \neg r\vee s \vdash p\vee s$ 消解

So $(p\vee r)\wedge(q\vee r), \neg r\vee s \vdash p\vee s$

So $(p\wedge q)\vee r, r\rightarrow s \vdash p\vee s$

用语义蕴涵进行推理

- 已知$(p\wedge q)\vee r$和 $r\rightarrow s$, $p\vee s$ 是否为真?

$$(p\wedge q)\vee r\,,\ r\rightarrow s \ \vDash\ p\vee s$$

问题转化为:

$$((p\wedge q)\vee r)\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow(p\vee s)$$ 是否永真?

把这个命题表达式转化为CNF（合取范式），即可判断

习题课-题型一：等值演算法判断推理

用等值演算法判断下列推理是否正确.

(1) 若今天不下雨,我就不去图书馆. 今天下雨. 所以,我去图书馆.

(2) 若今天不是星期六,明天就不是星期一. 明天是星期一. 所以,今天是星期六.

(1) 令 p: 今天下雨, q: 我去图书馆, 则推理的形式结构为

$$(\neg p \to \neg q) \wedge p \to q.$$

对式 (17.3.1) 进行等值演算:

$$\begin{aligned}(\neg p \to \neg q) \wedge p \to q &\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge p \to q \\ &\Leftrightarrow p \to q. \qquad \text{(吸收律)}\end{aligned}$$

演算到此,已知式 (17.3.1) 不是重言式,10 为式 (17.3.1) 的成假赋值,所以推理不正确.

这里应该指出,用等值演算法判断不正确的推理,其实是通过等值演算将推理形式结构化简,使其容易观察

(2) 令 p: 今天是星期六, q: 明天是星期一, 则推理的形式结构为

$$(\neg p \to \neg q) \wedge q \to p. \tag{17.3.2}$$

对式 (17.3.2) 进行等值演算

$$\begin{aligned}(\neg p \to \neg q) \wedge q \to p &\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge q \to p \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q) \to p \qquad \text{(矛盾律与同一律)} \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p \\ &\Leftrightarrow 1.\end{aligned}$$

这说明式 (17.3.2) 为重言式,所以推理正确. 其实,本题中推理的形式结构即为拒取式推理定律.

题型二：主析取范式法判断推理

用主析取范式法判断下列推理是否正确.

(1) n 不是偶数或 m 不是奇数. n 是偶数. 所以,m 不是奇数.

(2) 一到晚上 7 点钟,我就看电视新闻. 没到晚上 7 点钟. 所以,我没看电视新闻.

(1) 设 p : n 是偶数,q : m 是奇数,则推理的形式结构为

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge p \rightarrow \neg q.$$

下面求式 (17.3.3) 的主析取范式.

$$\begin{aligned}(\neg p \vee \neg q) \wedge p \rightarrow \neg q &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg q \\ &\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3.\end{aligned}$$

由于式 (17.3.3) 的主析取范式含全部 $2^2=4$ 个极小项,所以式 (17.3.3) 为重言式,故推理正确.
其实,$\neg p \vee q \vee \neg q \Leftrightarrow \neg p \vee 1 \Leftrightarrow 1$,也可知式 (17.3.3) 为重言式.

(2) 设 p: 到晚上 7 点钟,q: 我看电视新闻,则推理的形式结构为

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q. \tag{17.3.4}$$

下面求式 (17.3.4) 的主析取范式.

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q \\ &\Leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q \qquad \text{(吸收律)} \\ &\Leftrightarrow p \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3.\end{aligned}$$

由于式 (17.3.4) 的主析取范式没有含全部 4 个极小项,只含其中的 3 个,所以式 (17.3.4) 不是重言式,故推理不正确.

题型三：自然推理系统 P中直接证明推理

在自然推理系统 P 中用直接证明法证明下列推理.

(1) 前提：$p \to (q \to r), p \wedge q$.

结论：$\neg r \to s$.

(2) 前提：$(p \wedge q) \to r, r \to s, \neg s \wedge p$.

结论：$\neg q$.

(1) 证明：

① $p \to (q \to r)$	前提引入
② $p \wedge q$	前提引入
③ p	②化简
④ q	②化简
⑤ $q \to r$	①③假言推理
⑥ r	⑤④假言推理
⑦ $r \vee s$	⑥附加
⑧ $\neg\neg r \vee s$	⑦置换
⑨ $\neg r \to s$	⑧置换

注意，证明的方法是不唯一的，如下的证明步骤更少些.

证明：

① $p \to (q \to r)$	前提引入
② $p \wedge q \to r$	①置换
③ $p \wedge q$	前提引入
④ r	②③假言推理
⑤ $r \vee s$	④附加
⑥ $\neg\neg r \vee s$	⑤置换
⑦ $\neg r \to s$	⑥置换

(2) 证明：

① $r \to s$	前提引入
② $\neg s \wedge p$	前提引入
③ $\neg s$	②化简
④ $\neg r$	①③拒取式

⑤ $(p \wedge q) \to r$	前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$	④⑤拒取式
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ p	②化简
⑨ $\neg q$	⑦⑧析取三段论

① $(p \wedge q) \to r$	前提引入
② $r \to s$	前提引入
③ $(p \wedge q) \to s$	①②假言三段论
④ $\neg s \wedge p$	前提引入
⑤ $\neg s$	④化简
⑥ $\neg(p \wedge q)$	③⑤拒取式
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ p	④化简
⑨ $\neg q$	⑦⑧析取三段论

题型四：自然推理系统 P 中用附加前提法证明推理

在自然推理系统 P 中用附加前提证明法证明下列推理.

(1) 前提：$\neg p \vee (q \to r), \neg s \vee p, q$.

结论：$s \to r$.

(2) 前提：$p \vee q, p \to r, q \to s$.

结论：$\neg r \to s$.

(1) 证明：

① $\neg s \vee p$	前提引入
② s	附加前提引入
③ p	①②析取三段论
④ $\neg p \vee (q \to r)$	前提引入
⑤ $q \to r$	③④析取三段论
⑥ q	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理

本题也可以直接证明：

① $\neg p \vee (q \to r)$	前提引入
② $p \to (q \to r)$	①置换
③ $\neg s \vee p$	前提引入
④ $s \to p$	③置换
⑤ $s \to (q \to r)$	④②假言三段论
⑥ $q \to (s \to r)$	⑤置换
⑦ q	前提引入
⑧ $s \to r$	⑥⑦假言推理

一般说来，当结论是蕴涵式时，用附加前提证明法比较方便.

① $\neg r$	附加前提引入
② $p \to r$	前提引入
③ $\neg p$	①②拒取式
④ $p \vee q$	前提引入
⑤ q	③④析取三段论
⑥ $q \to s$	前提引入
⑦ s	⑤⑥假言推理

题型五：自然推理系统 P 中用归谬法证明推理

在自然推理系统 P 中用归谬法证明下列推理.

(1) 前提：$p\to r, p\vee q$.

结论：$\neg r\to q$.

(2) 前提：$p\to\neg q, r\to q, r$.

结论：$\neg p$.

(1) 证明：

① $\neg(\neg r\to q)$	结论否定引入
② $\neg(r\vee q)$	①置换
③ $\neg r\wedge\neg q$	②置换
④ $p\vee q$	前提引入
⑤ $\neg q$	③化简
⑥ p	④⑤析取三段论
⑦ $p\to r$	前提引入
⑧ r	⑥⑦假言推理
⑨ $\neg r$	③化简
⑩ $r\wedge\neg r$	⑧⑨合取

由于 $r\wedge\neg r$ 为矛盾式，所以推理正确.

不过，本题用附加前提证明法更方便，证明如下.

① $\neg r$	附加前提引入
② $p\to r$	前提引入
③ $\neg p$	①②拒取式
④ $p\vee q$	前提引入
⑤ q	③④析取三段论

① p	结论否定引入
② $p\to\neg q$	前提引入
③ $\neg q$	①②假言推理
④ $r\to q$	前提引入
⑤ $\neg r$	③④拒取式
⑥ r	前提引入

322

⑦ $\neg r\wedge r$	⑤⑥合取

题型六：自然推理系统 P 中构造自然语言描述的推理

在自然推理系统 P 中，分别构造下列自然语言描述的推理.

(1) 若张超与李志都是计算机系学生，则王红是中文系学生. 若王红是中文系学生，则她爱看小说. 可是，王红不爱看小说，张超是计算机系学生. 所以，李志不是计算机系学生.

(2) 若 n 是偶数并且大于 5，则 m 是奇数. 只有 n 是偶数，m 才大于 6. n 大于 5. 所以，若 m 大于 6，则 m 是奇数.

(1) 设 p：张超是计算机系学生，q：李志是计算机系学生，r：王红是中文系学生，s：王红爱看小说.

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r, r\rightarrow s, \neg s, p$.

结论：$\neg q$.

证明：

① $(p\wedge q)\rightarrow r$	前提引入
② $r\rightarrow s$	前提引入
③ $(p\wedge q)\rightarrow s$	①②假言三段论
④ $\neg s$	前提引入
⑤ $\neg(p\wedge q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\vee\neg q$	⑤置换
⑦ p	前提引入
⑧ $\neg q$	⑥⑦析取三段论

(2) 设 p：n 是偶数，q：n 大于 5，r：m 是奇数，s：m 大于 6.

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r, s\rightarrow p, q$.

结论：$s\rightarrow r$.

证明：用附加前提证明法证明.

① s	附加前提引入
② $s\rightarrow p$	前提引入
③ p	①②假言推理
④ q	前提引入
⑤ $p\wedge q$	③④合取
⑥ $(p\wedge q)\rightarrow r$	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理

作业

1. 填空题(4 小题,每小题 5 分,共 20 分).

   (1) $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow$__________ 为拒取式推理定律.

   (2) $(A \vee \neg B) \wedge B \Rightarrow$__________ 为析取三段论推理定律.

   (3) $(\neg A \to B) \wedge (B \to \neg C) \Rightarrow$__________ 为假言三段论推理定律.

   (4) $(\neg A \to \neg B) \wedge \neg A \Rightarrow$__________ 为假言推理定律.

2. 判断下面推理是否正确,并证明之(方法不限)(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

   (1) 如果王红学过英语和法语,那么她也学过日语. 可她没学过日语,但学过法语. 所以,她也没学过英语.

   (2) 若小李是文科生,则他爱看电影. 小李不是文科生. 所以,他不爱看电影.

3. 在自然推理系统 P 中,用直接证明法构造下列推理的证明(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

   (1) 前提:$\neg(p \wedge \neg q), q \to \neg r, r$.

   结论:$\neg p$.

   (2) 前提:$p \to r, q \to s, p, q$.

   结论:$r \wedge s$.

4. 在自然推理系统 P 中,用附加前提证明法证明下列推理(10 分).

   前提:$\neg p \vee (q \to r), s \to p, q$.

   结论:$\neg r \to \neg s$.

5. 在自然推理系统 P 中,用归谬法证明下列推理(10 分).

   前提:$p \to (q \to r), p \wedge q$.

   结论:$r \vee s$.

6. 用消解证明法证明下列推理(10 分).

   前提:$p \to q, p \vee r, q \to s$.

   结论:$\neg r \to s$.

7. 在自然推理系统 P 中,构造下面用自然语言陈述的推理(10 分).

   若小张喜欢数学,则小李或小赵也喜欢数学. 若小李喜欢数学,则他也喜欢物理. 小张确实喜欢数学,可小李不喜欢物理. 所以,小赵喜欢数学.