图之平面图
习题课及作业

2024, 5, 27

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-平面图的基本概念

平面图的定义及性质

定义 8.1.1 若能将无向图 G 画在平面上使得除顶点处外无边相交，则称 G 为可平面图，简称为平面图. 画出的无边相交的图称作 G 的平面嵌入. 无平面嵌入的图称作非平面图.

定理 8.1.1 平面图的子图都是平面图，非平面图的母图都是非平面图.

定理 8.1.2 设 G 是平面图，则在 G 中加平行边或环后所得的图还是平面图.

平面图的面与次数

定义 8.1.2 给定平面图 G 的平面嵌入，G 的边将平面划分成若干个区域，每个区域都称作 G 的一个面，其中有一个面的面积无限，称作无限面 或外部面，其余面的面积有限，称作有限面 或内部面. 包围每个面的所有边组成的回路组称作该面的边界，边界的长度称作该面的次数.

常记外部面为 R_0，内部面为 $R_1, R_2, \cdots, R_k$，面 R 的次数记作 $\deg(R)$.

定理 8.1.3 平面图所有面的次数之和等于边数的两倍.

极大平面图

定义 8.1.3 设 G 为简单平面图，若在 G 的任意两个不相邻的顶点之间加一条边，所得图为非平面图，则称 G 为极大平面图.

定理 8.1.4 极大平面图是连通的，并且当阶数大于等于 3 时没有割点和桥.

定理 8.1.5 设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶简单连通的平面图，则 G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3.

极小非平面图

定义 8.1.4 若在非平面图 G 中任意删除一条边，所得的图为平面图，则称 G 为极小非平面图.

内容提要

-欧拉公式

定理 8.1.6 (欧拉公式) 设连通平面图 G 的顶点数、边数和面数分别为 n, m 和 r，则有

$$n - m + r = 2.$$

定理 8.1.7 (欧拉公式的推广) 对于有 $k(\geqslant 2)$ 个连通分支的平面图 G，有

$$n - m + r = k + 1,$$

其中 n, m, r 分别为 G 的顶点数、边数和面数.

定理 8.1.8 设 G 是连通的平面图，且每个面的次数至少为 $l(\geqslant 3)$，则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系：

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2).$$

推论 8.1.1 K_5 和 $K_{3,3}$ 都是非平面图.

定理 8.1.9 设平面图 G 有 $k(\geqslant 2)$ 个连通分支，各面的次数至少为 $l(\geqslant 3)$，则边数 m 与顶点数 n 应有如下关系：

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-k-1).$$

定理 8.1.10 设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶 m 条边的极大平面图，则

$$m = 3n - 6.$$

推论 8.1.2 设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶 m 条边的简单平面图，则

$$m \leqslant 3n - 6.$$

定理 8.1.11 设 G 是简单平面图，则 G 的最小度 $\delta \leqslant 5$.

内容提要-平面图的判断

定义 8.1.5 设 $e=(u,v)$ 为图 G 的一条边，在 G 中删除 e，增加新的顶点 w，使 u,v 均与 w 相邻，称作在 G 中**插入 2 度顶点 w**. 设 w 为 G 中的一个 2 度顶点，w 与 u,v 相邻，删除 w，增加新边 (u,v)，称作在 G 中**消去 2 度顶点 w**.

若两个图 G_1 与 G_2 同构，或通过反复插入、消去 2 度顶点后同构，则称 G_1 与 G_2 **同胚**.

定理 8.1.12 (库拉托夫斯基 (Kuratowski) 定理 1) 图 G 是平面图当且仅当 G 中既不含与 K_5 同胚的子图，也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

定理 8.1.13 (库拉托夫斯基 (Kuratowski) 定理 2) 图 G 是平面图当且仅当 G 中既没有可以收缩到 K_5 的子图，也没有可以收缩到 $K_{3,3}$ 的子图.

平面图的对偶图

对偶图的定义

定义 8.1.6 设 G 是一个平面图的平面嵌入,构造图 G^* 如下:在 G 的每一个面 R_i 中放置一个顶点 v_i^*. 设 e 为 G 的一条边,若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上,则作边 $e^*=(v_i^*,v_j^*)$ 与 e 相交,且不与其他任何边相交. 若 e 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上,则作以 v_i^* 为端点的环 $e^*=(v_i^*,v_i^*)$. 称 G^* 为 G 的对偶图.

对偶图的性质

定理 8.1.14 设平面图 G 是连通的,G^* 是 G 的对偶图,n^*,m^*,r^* 和 n,m,r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数,则

(1) $n^*=r$.

(2) $m^*=m$.

(3) $r^*=n$.

(4) 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中,则 $d_{G^*}(v_i^*)=\deg(R_i)$.

定理 8.1.15 设平面图 G 有 $k(\geqslant 1)$ 个连通分支,G^* 是 G 的对偶图,n^*,m^*,r^* 和 n,m,r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数,则

(1) $n^*=r$.

(2) $m^*=m$.

(3) $r^*=n-k+1$.

(4) 设 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中,则 $d_{G^*}(v_i^*)=\deg(R_i)$.

定义 8.1.7 设 G^* 是平面图 G 的对偶图.若 $G^*\cong G$.则称 G 为自对偶图.

轮图

设 $n\geqslant 4$,在 $n-1$ 边形 C_{n-1} 内放置一个顶点,连接这个顶点与 C_{n-1} 上的所有顶点,所得的 n 阶简单图称作 n 阶轮图,记作 W_n. 特别地,n 为奇数的轮图称作奇阶轮图,n 为偶数的轮图称作偶阶轮图.

基本要求

- 1. 深刻理解本章的主要概念，如平面图、平面嵌入、面、面的次数、极大平面图、极小非平面图、对偶图等.
- 2. 记住并理解极大平面图的性质和判别定理.
- 3. 熟记并会使用欧拉公式及其推广.
- 4. 熟记并会使用库拉托夫斯基定理.
- 5. 记住并理解平面图与它的对偶图的阶数、边数、面数之间的关系.

题型一：平面图的基本概念

1. 平面图 G 如图 8.3.1所示.
   (1) 画 G 的一个平面嵌入.
   (2) 求 G 的各面的次数,并验证其和为边数的 2 倍.

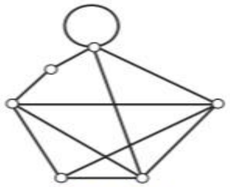


图 8.3.1

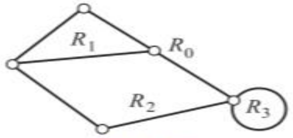
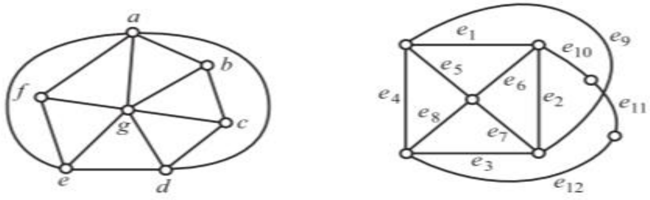


图 8.3.2

2. 平面图 G 如图 8.3.2 所示,重新画它的平面嵌入,使其外部面的次数分别为 1,3,4.
3. (1) 证明图 8.3.3(a) 所示的平面图 G 不是极大平面图.
   (2) 证明图 8.3.3(b) 所示的图 G 是极小非平面图.



(a) (b)

图 8.3.3

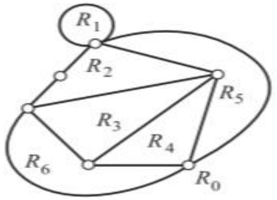
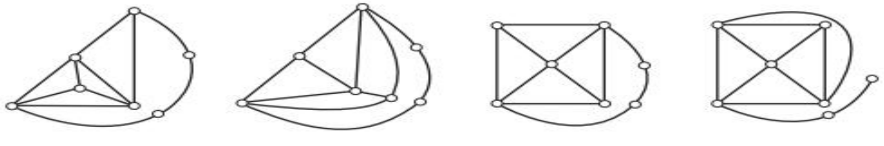


图 8.3.4

(2) <u>方法一</u>　已知 K_5 是极小非平面图,并且 2 度顶点不影响图的平面性,因而与 K_5 同胚的图也都是极小非平面图. 消去图 8.3.3(b) 所示的图 G 中 e_{10} 与 e_{11}, e_{11} 与 e_{12} 的公共端点,得到 K_5,即图 8.3.3(b) 所示的图 G 与 K_5 同胚,所以它是极小非平面图.

<u>方法二</u>　根据定义证,即证图 8.3.3(b) 所示的图 G 是非平面图,且从图中删除任何一条边后,所得图均为平面图. 消去两个 2 度顶点,该图变成 K_5. 由库拉托夫斯基定理,它是非平面图. 由对称性,可以不用验证删除每条边. 在 e_1, e_2, e_3, e_4 中,取代表元 e_1;在 e_5, e_6, e_7, e_8 中,取代表元 e_5;在 e_{10}, e_{11}, e_{12} 中,取代表元 e_{10}. 于是,只需验证删除 e_1, e_5, e_9, e_{10} 中的任何一条边,所得图均为平面图即可. 删除 e_1, e_5, e_9, e_{10} 后所得图分别由图 8.3.6(a)、(b)、(c)、(d) 给出,它们全是平面图.



(a) (b) (c) (d)

图 8.3.6

解答与分析

1. 图 8.3.1 所示的平面图,阶数 $n = 6$,边数 $m = 11$.
   (1) 从图中移出 2 条边可得到一种平面嵌入,如图 8.3.4 所示.
   (2) 各面的次数如下:

$\deg(R_1) = 1$,

$\deg(R_2) = 4$,

$\deg(R_3) = \deg(R_4) = \deg(R_5) = \deg(R_6) = 3$,

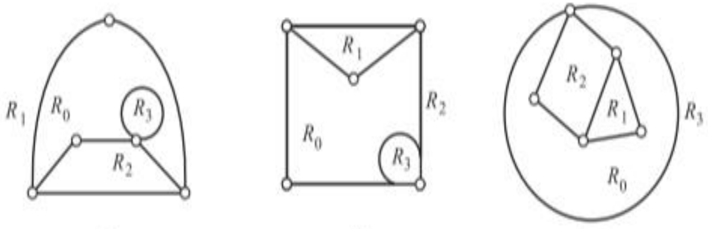
$\deg(R_0) = 5$.

各面的次数之和

$$\sum_{i=0}^{6} \deg(R_i) = 22 = 2 \times 11 = 2m.$$

2. 平面图的平面嵌入的外部面可以由它的任何面充当.

在图 8.3.2 所示的平面图中,外部面记为 R_0,则有 $\deg(R_0) = 6$, $\deg(R_1) = 3$, $\deg(R_2) = 4$, $\deg(R_3) = 1$. 让 R_1, R_2, R_3 分别充当外部面,所得的平面嵌入如图 8.3.5(a)、(b)、(c) 所示. 外部面的次数分别为 3,4,1.



(a) (b) (c)

图 8.3.5

3. (1) <u>方法一</u>　用定义证. 图 8.3.3(a) 所示的平面图 G 中 a 与 c、b 与 d 均不相邻,在 a 与 c 之间或 b 与 d 之间加一条边(只加一条)不破坏平面性,由极大平面的定义可知,图 8.3.3(a) 所示的平面图 G 不是极大平面图.

<u>方法二</u>　用定理证明. 容易看出,圈 $abcda$ 围成的面的次数为 4. 由定理 8.1.5,图 8.3.3(a) 所示的平面图 G 不是极大平面图.

题型二：欧拉公式及其相关定理

1. 已知连通平面图 G 的阶数 $n=5$，边数 $m=7$，求它的面数 r.
2. 已知非连通平面图 G 的阶数 $n=10$，边数 $m=8$，面数 $r=3$，求 G 的连通分支个数 k.
3. 设 G 为 8 阶极大平面图，求 G 的面数 r.
4. 设 G 是 n 阶 m 条边的简单连通平面图，证明：当 $n=7, m=15$ 时，G 为极大平面图.

解答与分析

1. 由欧拉公式知，$n-m+r=2$，解得 $r=2+m-n=2+7-5=4$.
2. 由欧拉公式的推广知，$n-m+r=k+1$，解得 $k=n+r-m-1=10+3-8-1=4$.
3. 由定理 8.1.5，G 的每个面的次数均为 3，所以 $2m=3r$. 解得 $m=\frac{3}{2}r$. 由极大平面图的连通性，n,m,r 满足欧拉公式

$$n-m+r=2.$$

将 $n=8$ 代入，并且由 m 与 r 的关系可得

$$8-\frac{3}{2}r+r=2.$$

解得 $r=12$.

4. 根据定理 8.1.5，只需证明每个面的次数均为 3. G 为连通平面图，将 $n=7, m=15$ 代入欧拉公式 $n-m+r=2$，解得 $r=10$.

设 G 的面为 $R_1, R_2, \cdots, R_{10}$. 由于 G 为 7 阶简单连通平面图，所以 $\deg(R_i) \geqslant 3, i=1,2,\cdots,10$. 再由定理 8.1.3，有

$$2m=30=\sum_{i=1}^{10}\deg(R_i).$$

每个都大于等于 3 的 10 个数之和等于 30，则每个数必都为 3，即 $\deg(R_i)=3, i=1,2,\cdots,10$. 由定理 8.1.5 得证 G 为极大平面图.

题型三：平面图的判断

1. 证明图 8.3.7 所示的 2 个图为平面图.
2. 证明图 8.3.8 所示的无向图为非平面图.

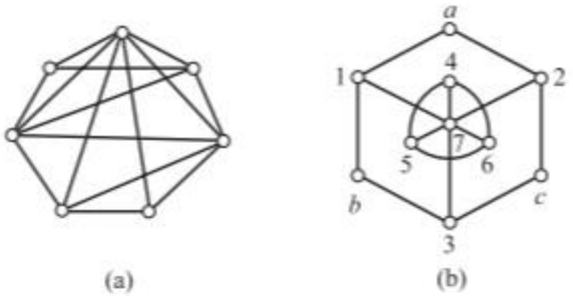


图 8.3.7

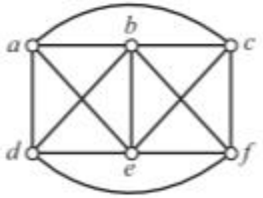


图 8.3.8

解答与分析

1. 用库拉托夫斯基定理证一个图是平面图,要证明它没有与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图,也没有可以收缩成 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图,这是很麻烦的. 最好的办法是画出它的平面嵌入.

对于图 8.3.7(a),只要移动一些边的位置就可以得到平面嵌入,而对于图 8.3.7(b),只移动边的位置还不行,还要重新安排顶点的位置,才能得到平面嵌入. 图 8.3.9(a)、(b) 分别为图 8.3.7(a)、(b) 的平面嵌入.

2. 库拉托夫斯基定理主要用来证明一个图不是平面图,此时只需找到与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图,或找到可以收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

图 8.3.10(a) 为图 8.3.8 的子图,它本身就是 $K_{3,3}$,互补顶点子集为 $V_1 = \{a,b,f\}, V_2 = \{c,d,e\}$. 图 8.3.10(b) 也是图 8.3.8 的子图,此图收缩边 e_1 后为 K_5. 由这两个子图中的任何一个都可以证明图 8.3.8 为非平面图.

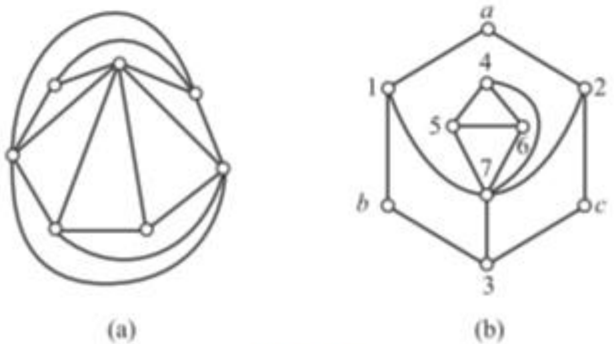


图 8.3.9

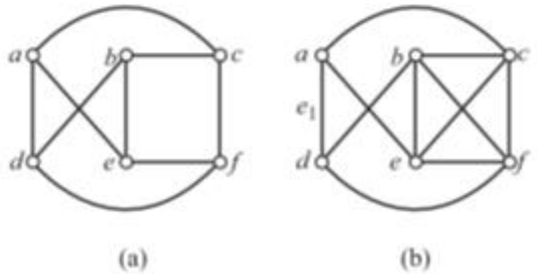


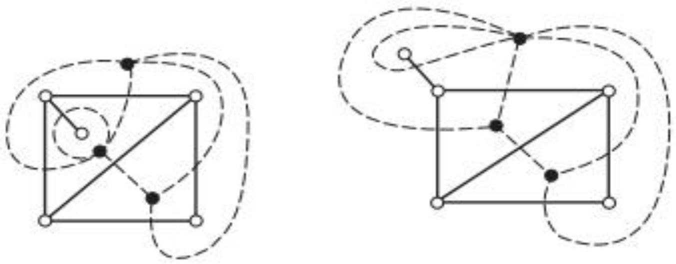
图 8.3.10

题型四：对偶图

1. 举例说明同构的两个图的对偶图不一定是同构的.
2. 设 G^* 是具有 $k(\geqslant 2)$ 个连通分支的平面图 G 的对偶图,已知 G 的边数 $m=10$,面数 $r=3$,求 G^* 的面数 r^*.
3. 证明:不存在具有 5 个面且每两个面的边界都恰好共享一条公共边的平面图.

解答与分析

1. 这样的例子很多. 图 8.3.11 中,(a)、(b) 中的两个实线边图 $G_1 \cong G_2$,但它们的对偶图(图中虚线边所示的图) $G_1^* \ncong G_2^*$.



(a)　　(b)

图 8.3.11

2. 解本题可以只用定义和欧拉公式求解. 也可以用定理 8.1.15 求解.

方法一　用定义及欧拉公式求解.

由对偶图的定义可知,$n^*=r=3, m^*=m=10$. 由于任何平面图的对偶图都是连通的平面图,因而 n^*, m^*, r^* 满足欧拉公式,$n^*-m^*+r^*=2$,解得 $r^*=2+m^*-n^*=2+10-3=9$.

方法二　用定理 8.1.15 求解.

由定理 8.1.15 知,$r^*=n-k+1$. 而由欧拉公式的推广形式有 $n-m+r=k+1$,于是

$$n=k+1+m-r=8+k.$$

代入 r^*,得 $r^*=8+k-k+1=9$.

3. 反证法. 若存在这样的平面图 G,G 有 5 个面. 由于每个面都恰好与另外 4 个面共享一条边,故次数均为 4. 考虑 G 的对偶图 G^*,G^* 有 5 个顶点,每个顶点的度数为 4,从而 G^* 是 5 阶 4-正则图,即 G^* 为 K_5. 而 K_5 不是平面图,这与平面图的对偶图为平面图矛盾.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

   (1) 设无向图 G 与 K_5 同胚,至少从 G 中删除__________条边才能使所得图为平面图.

   (2) 设 G 是由 3 个连通分支 K_1, K_2 和 K_3 组成的平面图,则 G 共有__________个面.

   (3) 命题"设 G 是任意 n 阶 m 条边的极大平面图,则 $m = 3n - 6$"的真值为__________.

   (4) 轮图 $W_n, n \geqslant 4$, 的对偶图为__________.

   (5) 设 6 阶连通的平面图的每个面的次数至少为 4,则它的边数小于等于__________.

   (6) 已知极大平面图 G 的面数 $r = 14$,则 G 的阶数 $n =$__________.

2. 简答题(5 小题,每小题 10 分,共 50 分).

   (1) 求图 8.5.1 所示的平面图各面的次数,并求该平面图的另一个平面嵌入,使 R_1 变成外部面.

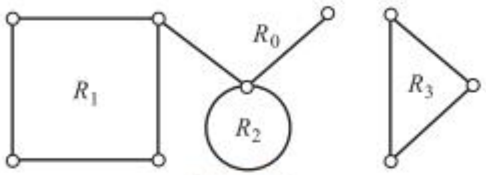


图 8.5.1

   (2) 设连通的简单平面图 G 有 7 个顶点、15 条边,求 G 的面数 r,并证明 G 为极大平面图,同时画出一个这样的极大平面图.

   (3) 证明:不存在非连通的 7 阶 15 条边的简单平面图.

   (4) 已知平面图 G 的阶数 $n = 8$,边数 $m = 8$,面数 $r = 4$,连通分支数 $k = 3$,求 G 的对偶图 G^* 的阶数 n^*、边数 m^*、面数 r^*.

   (5) 求 8 阶自对偶图 G 的边数 m 和面数 r.

3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

   (1) 证明图 8.5.2(a) 为平面图.

   (2) 证明图 8.5.2(b) 为非平面图.

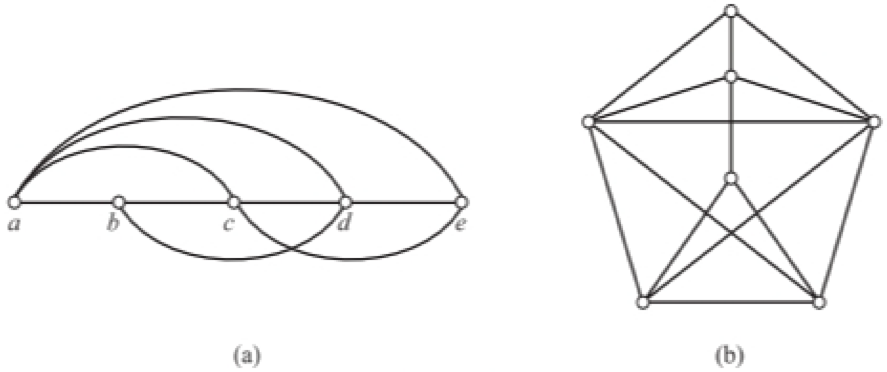


图 8.5.2