大学数学试卷 2023.6.14

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\2&4&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&-1\\0&0&5\end{pmatrix}, C=AB$，计算行列式 $|C|$ 的值.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}$，求齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系.

3. 设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2$，计算二次型的正负惯性指数.

4. 设 T 为3维实线性空间 V 上的线性变换，$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 为 V 上的一组基，V 中的3个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 有关系 $T\alpha_1=\alpha_3, T\alpha_2=\alpha_1, T\alpha_3=-\alpha_2$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的坐标为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(-1,2,0)^{\mathrm{T}},(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，求 T 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的矩阵 A.

二、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，其中 k 为参数.

(1) 若 $\beta=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求参数 k 的范围使得 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性相关.

(2) 若 A 有特征值 $1,2,5$，求参数 k 的范围.

三、(本题12分) 设 $A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为对应特征向量.

(1) 计算 $B=2E+A$ 的特征值和特征向量.

(2) 若 $C\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 有关系 $C\alpha_1=(1+\lambda_1)\alpha_1, C\alpha_2=(2+\lambda_2)\alpha_2, C\alpha_3=(3+\lambda_3)\alpha_3$，计算矩阵 C.

四、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

五、(本题12分) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为实二次型，其中 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}, A^{\mathrm{T}}=A$, $x\in\mathbf{R}^n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^n$ 为线性无关的列向量组.

(1) 证明若二次型 $f(x)$ 为正定二次型，则有 $f(\alpha_i)>0, i=1,2,\cdots,n$.

(2) 举出反例说明由 $f(\alpha_i)>0, i=1,2,\cdots,n$ 不能得出 $f(x)$ 是正定二次型.

六、(本题12分) 设 W_1,W_2,W_3 为 $\mathbf{R}^4$ 上的子空间，其中 $\alpha_1=(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,-5,6)^{\mathrm{T}}$ 为 W_1 的一组基，$\beta_1=(1,-1,-2,4)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 为 W_2 的一组基，$\gamma_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=(2,1,2,-4)^{\mathrm{T}}$ 为 W_3 的一组基.

(1) 求子空间 W_1+W_2 的一组基.

(2) 求子空间 $(W_1+W_2)\cap W_3$ 的一组基.

七、(本题12分) (1) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足$|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots n\\ j\neq i}}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，证明$Ax=\theta$只有零解.

(2) 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$s=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|$，利用(1)的结论证明矩阵 $C=sE+B$ 可逆.

线性代数试卷 答案 2023.6.14

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\2&4&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&-1\\0&0&5\end{pmatrix}, C=AB$，计算行列式 $|C|$ 的值.

解：$|C|=|A|\cdot|B|=-2\times 30=-60$.

解法二：$|C|=\begin{vmatrix}4&5&3\\6&9&4\\4&14&-10\end{vmatrix}=-60$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}$，求齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系.

解：$A=\begin{pmatrix}8&1&-2&33\\-3&-3&6&-15\\5&4&-8&24\\12&3&-6&51\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故基础解系为 $\alpha_1=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-4,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解法二：设 $A=BC$，易知 B列满秩，故 $Ax=BCx=By=\theta$ 得等价方程组 $Cx=y=\theta$.

$C=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$，故基础解系为 $\alpha_1=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-4,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解法三：初等行变换 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故基础解系为 $\alpha_1=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-4,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

3. 设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2$，计算二次型的正负惯性指数.

解：$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&2&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+0.5r_3]{c_2+0.5c_3}\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{c_1+c_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，故正惯性指数为3，负惯性指数为0.

解法二：$f=(2x_3-x_2)^2+(x_2-x_1)^2+2x_1^2=y_1^2+y_2^2+2y_3^2$，故正惯性指数为3，负惯性指数为0.

4. 设 T 为3维实线性空间 V 上的线性变换，$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 为 V 上的一组基，V 中的3个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 有关系 $T\alpha_1=\alpha_3, T\alpha_2=\alpha_1, T\alpha_3=-\alpha_2$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的坐标为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(-1,2,0)^{\mathrm{T}},(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，求 T 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的矩阵 A.

解：令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)P$，$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，

$|P|\neq 0$，知 P 为基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵，B 为 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵，

于是 $B=P^{-1}AP$，故 $A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&6\\-1&-0.5&-2\end{pmatrix}$.

二、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，其中 k 为参数.

(1) 若 $\beta=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求参数 k 的范围使得 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性相关.

(2) 若 A 有特征值 $1,2,5$，求参数 k 的范围.

解：(1) $|\beta,A\beta,A^2\beta|=\begin{vmatrix}1&k+3&k^2+3k+11\\2&6&k+20\\1&5&k+19\end{vmatrix}=3k^2-8k+4=0$，解得 $k=2$ 和 $k=2/3$.

(2) 因为有 $\mathrm{tr}(A)=k+4=1+2+5$，故得 $k=4$.

三、(本题12分) 设 $A\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为对应特征向量.

(1) 计算 $B=2E+A$ 的特征值和特征向量.

(2) 若 $C\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ 有关系 $C\alpha_1=(1+\lambda_1)\alpha_1,C\alpha_2=(2+\lambda_2)\alpha_2,C\alpha_3=(3+\lambda_3)\alpha_3$，计算矩阵 C.

解：(1) 易知 $B\alpha_i=(2E+A)\alpha_i=2\alpha_i+\lambda_i\alpha_i=(2+\lambda_i)\alpha_i,i=1,2,3$，故 B 的特征向量为 $3,4,5$，对应特征向量为 $k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,k_3\alpha_3,k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R},k_1,k_2,k_3\neq 0$.

(2) 易知 $C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(2\alpha_1,4\alpha_2,6\alpha_3)$，故有

$$C=(2\alpha_1,4\alpha_2,6\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}2&8&12\\4&4&0\\2&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&8\\4&4&-8\\0&-2&6\end{pmatrix}.$$

四、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+4)=0$，故 A 有特征值 $\lambda=2(2\text{重}),-4$.

$\lambda=2$ 时，有 $2E-A\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，标准正交化

得 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{30}}(-1,2,5)^{\mathrm{T}}$.

(或者标准正交化 α_2,α_1 得 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$)

$\lambda=-4$ 时，有 $-4E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得单位特征向量 $\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则有 Q 为正交矩阵，且有 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(2,2,-4)$.

五、(本题12分) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为实二次型，其中 $A\in\mathbf{R}^{n\times n},A^{\mathrm{T}}=A$, $x\in\mathbf{R}^n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^n$ 为线性无关的列向量组.

(1) 证明若二次型 $f(x)$ 为正定二次型，则有 $f(\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,n$.

(2) 举出反例说明由 $f(\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,n$ 不能得出 $f(x)$ 是正定二次型.

证：(1) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^n$ 为线性无关的列向量组，故 $\alpha_i\neq\theta,i=1,2,\cdots,n$.
于是由正定性得 $f(\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,n$.

(2) 反例：$A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
α_1,α_2 线性无关，且有 $f(\alpha_1)=1>0,f(\alpha_2)=1>0$，但是 $f(\beta)=-2<0$，故 $f(x)$ 非正定.

六、(本题12分) 设 W_1,W_2,W_3 为 $\mathbf{R}^4$ 上的子空间，其中 $\alpha_1=(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,-5,6)^{\mathrm{T}}$ 为 W_1 的一组基，$\beta_1=(1,-1,-2,4)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 为 W_2 的一组基，$\gamma_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=(2,1,2,-4)^{\mathrm{T}}$ 为 W_3 的一组基.

(1) 求子空间 W_1+W_2 的一组基.

(2) 求子空间 $(W_1+W_2)\cap W_3$ 的一组基.

解：(1) $W_1+W_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$，找 W_1+W_2 的基只要找向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的极大无关组即可.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\to\begin{pmatrix}1&0&0.5&0\\0&1&0.5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad (\text{或}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&2&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix})\quad \text{可取 } \alpha_1,\alpha_2,\beta_2 \text{ 作为一组基.}$$

(2) 设向量 $\xi\in(W_1+W_2)\cap W_3$，故有 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_2=x_4\gamma_1+x_5\gamma_5$.
即 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)x=\theta,x=(x_1,x_2,x_3,-x_4,-x_5)^{\mathrm{T}}$.

解方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-0.5\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1.5\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\eta=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-3\\2\end{pmatrix}$,

故 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=(-1,4,-7,2)^{\mathrm{T}}$ 可作为子空间 $(W_1+W_2)\cap W_3$ 的一组基.

七、(本题12分) (1) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足$|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots n\\ j\neq i}}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，证明$Ax=\theta$只有零解.

(2) 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$s=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|$，利用(1)的结论证明矩阵 $C=sE+B$ 可逆.

证：(1) 反证法，假设 $Ax=\theta$ 有非零解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\theta$，$x_k$ 满足 $|x_k|=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}|x_i|>0$，

看 $Ax=\theta$ 的第k个方程：$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kk}x_k+\cdots+a_{kn}x_n=0$，于是有

$|-a_{kk}x_k|=|\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ j\neq k}}a_{kj}x_j|\leq\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ i\neq k}}|a_{kj}x_j|\leq\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ i\neq k}}|a_{kj}|\cdot|x_k|\leq|x_k|(\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ i\neq k}}|a_{kj}|)<|x_k|\cdot|a_{kk}|$.

得出矛盾，故 $Ax=\theta$ 只有零解.

(2) 易知 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 有 $\begin{cases} c_{ij}=b_{ij}, & i\neq j,\\ c_{ij}=s+b_{ij} & i=j.\end{cases}$

故 $|c_{ii}|=|s+b_{ii}|\geq s-|b_{ii}|\geq 1+\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ j\neq i}}|b_{ij}|>\sum\limits_{\substack{j=1,2,\cdots,n\\ j\neq i}}|c_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$. 即 C 满足(1)的条件，得 $Cx=\theta$ 只有零解，故 C 可逆.