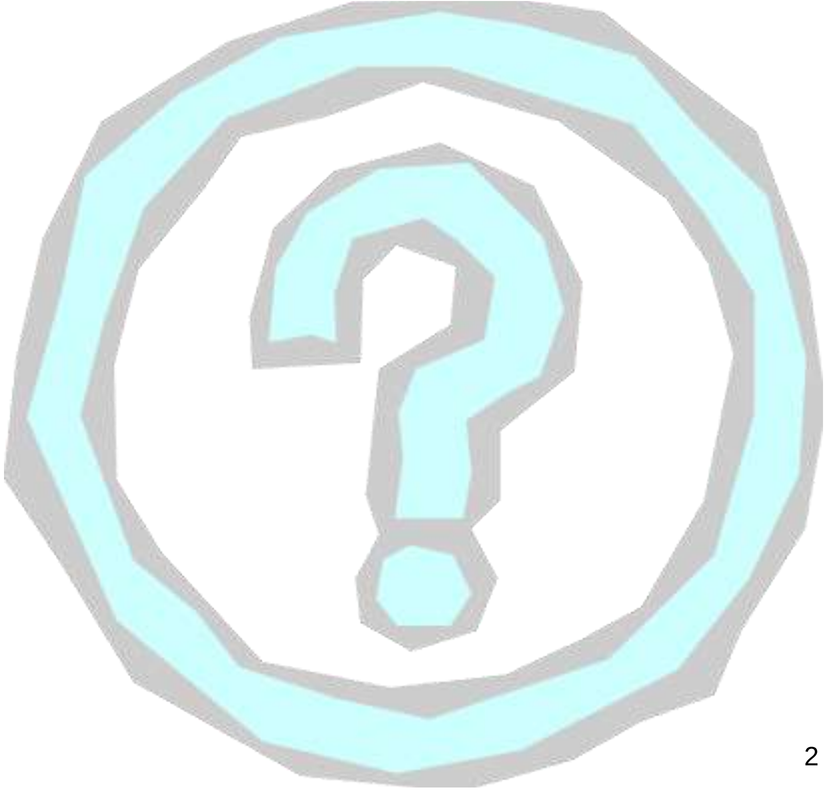
命题逻辑

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 引言
- 逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 语意蕴含



引言—编程语言中的布尔表达式

- **Java程序设计语言中的布尔运算符**
  - **&&, ||, !**
- 举例
  - **(a >= 5) && (a <= 10)**
  - **p || !q**

if x<0 then abs:=-x
else abs:=x

- 程序验证需要考察有关不变式
  - 条件/循环语句
- 程序分析时需要考虑布尔表达式的可满足性

引言—搜索引擎中的布尔检索

- 布尔逻辑检索
  - 利用布尔逻辑运算符进行检索项的逻辑组配，用以表达检索者的查询。
    - **(" Xiaoxing Ma" OR "马晓星") AND "Software Engineering"**
    - **…… NOT "Ontology"// 有的使用 "-" 替代 "NOT"**
- 布尔运算符
  - 与，合取，**Conjunction (AND) (∧, &, ·)**
  - 或，析取，**Disjunction (OR) (∨)**
  - 非，否定，**Negation (NOT) (¬, ~, -)**

引言—逻辑迷题

- 泥巴孩谜题
  - 一个男孩和一个女孩玩耍回来，看不见自己的额头，父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”。父亲问孩子“你知道你额头上有没有泥？”

p：男孩的额头上有泥

q：女孩的额头上有泥

$p \vee q$ 为真

引言—日常生活中的逻辑

- 父子对话
  - 子：爸爸，我要玩游戏
  - 父：不做完作业不能玩游戏 （除非…, 否则不允许…. ）
- 如果以p表示“做完作业”， q表示“玩游戏”
  - 常理： $p \to q$
  - 数学：$\neg p \to \neg q$（等价命题：$q \to p$）

引言一日常生活中的推理

- 老张宴请好友，他和老钱先到目的地，等了好久小刘还没到。老张说道："哎，该来的还没有来。"
- 问题：
  - 如何理解"该来的还没有来"。
  - 老钱如何进行推理：他该不该来？

引言—合理表述的重要性

- 不合理表述的后果会很严重
  - 该来的没来
    - 老钱走了
  - 不该走的走了
    - 留下的人也走了

知识表示与推理

Knowledge Representation and Reasoning, KR&R

命题

- 命题是一个陈述语句，即一个陈述事实的句子
  - 要么真，要么假
  - 不能既真又假
- 判断下列句子是否为命题
  - ✓ 税收下降了
  - ✓ 我的收入上升了
  - ✓ 今天是星期五
  - ✗ 你会说英语吗?
  - ✗ 3-x=5
  - ✗ 我们走吧!
  - ✓ 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✗ 他是个多好的人呀！
  - ✗ “我现在说的是假话。”

命题逻辑

数理逻辑是研究推理的数学分支，推理由一系列的陈述句组成．例如，因为 $3>2$，所以 $3\neq 2$．这里“$3>2$”和“$3\neq 2$”是两个陈述句，整个“因为 $3>2$，所以 $3\neq 2$”也是一个陈述句．这 3 个陈述句都成立，即为真．这种非真即假的陈述句称作*命题*．

作为命题的陈述句所表达的判断结果称作命题的*真值*，真值只取两个值：*真*或*假*．真值为真的命题称作*真命题*，真值为假的命题称作*假命题*．任何命题的真值都是唯一的．

命题“因为 $3>2$，所以 $3\neq 2$”由两个更简单的命题“$3>2$”和“$3\neq 2$”组成．“$3>2$”和“$3\neq 2$”不能再分解成更简单的命题了．这种不能被分解成更简单的命题称作*简单命题*或*原子命题*．
但在各种论述和推理中，所出现的命题多数不是简单命题，如上面的“因为 $3>2$，所以 $3\neq 2$”．由简单命题通过联结词联结而成的命题，称作*复合命题*．

判断给定句子是否为命题，应该分两步：
首先判定它是否为陈述句，其次判断它是否有唯一的真值．

原子命题与复合命题

复合命题是否为真，取决于：

作为复合成分的子命题的真假

逻辑运算符（联接词）的语义

- 复合命题
  - 并非外面在下雨。
  - 张挥与王丽都是三好学生。
  - 张晓静不是江西人就是安徽人。
  - 如果2+3=6，则π是有理数。
  - $\sqrt{3}$是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

习题1:命题定义

例 15.1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数.
2. $\sqrt{5}$ 是无理数.
3. x 大于 y,其中 x 和 y 是任意的两个数.
4. 火星上有生物.
5. 2050 年元旦北京是晴天.
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗?
7. 请不要吸烟!
8. 这朵花真美丽啊!
9. 我正在说假话.

解

(6) 是疑问句,(7) 是祈使句,(8) 是感叹句,这 3 个都不是命题. 剩下 6 个都是陈述句,但 (3), (9) 不是命题. (3) 的真值不确定,根据 x 和 y 的不同取值情况它可真可假,即无唯一的真值,因而不是命题.
若 (9) 为真,即"我正在说假话"是真的,则我正在说真话,故 (9) 的真值应为假,矛盾;反之,若 (9) 为假,即"我正在说假话"是假的,则我正在说假话,故 (9) 的真值应为真,同样矛盾. 因而 (9) 既不能为真,也不能为假,不是命题.
本例中,(1),(2),(4),(5) 是命题. (1) 为假命题,(2) 为真命题. 虽然至今还不知道火星上是否有生物,但火星上是否有生物是客观存在的,并且要么是有、要么是没有,只是现在人类还不知道而已. 也就是说,(4) 的真值是客观存在的,而且是唯一的,因此它是命题. 同理,(5) 也是命题. □

命题符号化

作为命题，是否知道它的真值是不重要的，重要的是它有唯一的真值.
像例15.1.1(9) 这样由真能推导出假、又由假能推导出真，从而既不能为真，也不能为假的陈述句称作 悖论． 悖论不是命题.
在本书中，用小写英文字母表示命题，用“1”表示真，用“0”表示假，于是命题的真值为 0 或 1.

下面用 p, q, r, s 分别表示例 15.1.1 中 (1), (2), (4), (5) 的命题.

p : 4 是素数.

q : $\sqrt{5}$ 是无理数.

r : 火星上有生物.

s : 2050 年元旦北京是晴天.

它们称为这些命题的符号化，其中，p 的真值为 0，q 的真值为 1，r 和 s 的真值现在还不知道. 这 4 个命题都是简单命题.

命题变元

- 常用小写字母表示命题变元，如： p, q, r
- 命题变元的取值范围为：{T, F}，{1, 0}
- 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
  - p: 今天是周五（p=0）
  - q: 2+2=4 （q =1）

习题2：命题符号化

例 15.1.2

先将下面各陈述句中出现的原子命题符号化，并指出它们的真值，然后再写出这些陈述.

1. $\sqrt{2}$ 是有理数是不对的.
2. 2 是偶素数.
3. 2 或 4 是素数.
4. 若 2 是素数，则 3 也是素数.
5. 2 是素数当且仅当 3 也是素数.

解

在 (1) 中"$\sqrt{2}$ 是有理数"是原子命题；(2)–(5) 中各有两个原子命题，它们分别是"2 是素数"和"2 是偶数"，"2 是素数"和"4 是素数"，"2 是素数"和"3 是素数"以及"2 是素数"和"3 是素数". 共有 5 个原子命题，将它们分别符号化为

p : $\sqrt{2}$ 是有理数.

q : 2 是素数.

r : 2 是偶数.

s : 3 是素数.

t : 4 是素数.

p, t 的真值为 0，其余的真值为 1. 将原子命题的符号代入，上述各陈述句可以表示成：

(1) 非 p(p 不成立)；(2) q 并且(与)r；(3) q 或 t； (4) 若 q，则 s； (5) q 当且仅当 s. □

联结词

上例中 5 个命题都是复合命题. 不妨称上述表述方式为半形式化的, 这种半形式化的表述形式不能令人满意.

数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化, 即构造各种符号语言来代替自然语言, 完全由符号构成的语言称为形式语言.

为此, 需要进一步抽象化, 即将联结词也符号化.

在例 15.1.2 中出现的联结词有 5 个: “非”“并且”“或”“若 ···, 则 ···”“当且仅当”, 这些联结词是自然语言中常用的联结词. 但自然语言中出现的联结词有的具有二义性, 因而在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义, 并且将它们符号化.

否定（运算符，联接词）

定义 15.1.1

设 p 为命题，复合命题"非 p"（或"p 的否定"）称作 p 的否定式，记作 $\neg p$. 符号 $\neg$ 称作否定联结词. 规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

由定义可知，$\neg p$ 的逻辑关系为 p 不成立，因而当 p 为真时，$\neg p$ 为假；反之当 p 为假时，$\neg p$ 为真.

在例 15.1.2 中，"非 p"可符号化为 $\neg p$. 由于 p 的真值为 0，所以 $\neg$ 的真值为 1.

1. $\sqrt{2}$ 是有理数是不对的.

$p : \sqrt{2}$ 是有理数.

(1) 非 p（p 不成立）；

否定（运算符，联接词）

$\neg p$: “非p”

$\neg p$的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

p所有可能的取值

练习题

下列各命题的否定是什么？

1. Jennifer 和 Teja 是朋友。

2. 面包师说的“一打”有 13 个

3. Abby 每天发送 100 多条短信

4. 121 是一个完全平方数。

合取（运算符，联接词）

定义 15.1.2

设 p, q 为两个命题，复合命题"p 并且 q"(或"p 与 q")称为 p 与 q 的合取式，记作 $p \wedge q$. $\wedge$ 称作合取联结词. 规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

由定义可知，$p \wedge q$ 的逻辑关系为 p 与 q 同时成立，因而只有当 p 与 q 同时为真时，$p \wedge q$ 才为真，其他情况 $p \wedge q$ 均为假.

在例 15.1.2 中，"q 并且 r"符号化为 $q \wedge r$. 由于 q 与 r 的真值全为 1，所以 $q \wedge r$ 的真值为 1.

2 2 是偶素数.

q : 2 是素数.

r : 2 是偶数.

(2) q 并且(与) r

使用联结词 $\wedge$ 需要注意两点：

其一是 $\wedge$ 的灵活性. 自然语言中的"既 $\cdots$，又 $\cdots$""不但 $\cdots$，而且 $\cdots$""虽然 $\cdots$，但是 $\cdots$""一面 $\cdots$，一面 $\cdots$"等都表示两件事情同时成立，因而可以符号化为 $\wedge$.

其二，不要见到"与""和"就使用联结词 $\wedge$.

小明和小强是同班同学

合取（运算符，联接词）

$p \wedge q$：“p 并且 q”

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \wedge q = 1$ iff

p和q均为1

(p,q) 所有可能的取值

习题3：合取命题符号化

例 15.1.3

将下列命题符号化.

1. 吴颖既用功又聪明.
2. 吴颖不仅用功而且聪明.
3. 吴颖虽然聪明,但不用功.
4. 张辉与王丽都是三好学生.
5. 张辉与王丽是同学.

解

先给出 (1)–(4) 中的原子命题,并将其符号化.

p : 吴颖用功.

q : 吴颖聪明.

r : 张辉是三好学生.

s : 王丽是三好学生.

(1)–(4) 都是复合命题,它们使用的联结词表面看来各不相同,但都是合取的意思,分别符号化为

$p \wedge q, p \wedge q, q \wedge \neg p, r \wedge s.$

在 (5) 中,虽然也使用了"与",但这个"与"是联结该句主语中的两个人的,而整个句子仍是简单陈述句,所以 (5) 是原子命题,符号化为 t : 张辉与王丽是同学.

析取（运算符，联接词）

定义 15.1.3

设 p, q 为两个命题，复合命题"p 或 q"称作 p 与 q 的 析取式，记作 $p \vee q$. $\vee$ 称作 析取联结词. 规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

由定义可知，当 p 与 q 中有一个为真时，$p \vee q$ 为真. 只有当 p 与 q 同时为假时，$p \vee q$ 才为假.

在例 15.1.2 中，"q 或 t"符号化为 $q \vee t$. 由于 q 为真，所以 $q \vee t$ 为真.

3. 2 或 4 是素数. q : 2 是素数. t : 4 是素数. (3) q或t

以上定义的析取联结词 $\vee$ 与自然语言中的"或"不完全一样.

自然语言中的"或"具有二义性，用它有时具有相容性(即它联结的两个命题可以同时为真)，有时具有排斥性(即只有当一个为真、另一个为假时，才为真)，对应的"或"分别称作 相容或 和 排斥或 .

析取（运算符，联接词）

$p \vee q$：“p 或 q”

$p \vee q = 0$ iff

p和q均为0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

习题4：析取命题符合化

由题意可知，这个“或”应为排斥或. r, s 的取值有 4 种可能：同真，同假，一真一假(两种).

如果符号化为 $r \wedge s$，则当 r 和 s 都为真时为真，这意味着张晓静可能同时得到 202 和 203 两个房间，这不符合原意. 原意是张晓静只能挑选 202 和 203 中的一间.

如何达到只能挑选一个房间的要求呢？可以使用多个联结词，符号化为

$(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$.

不难验证，此复合命题为真当且仅当 r, s 中一个为真，一个为假，它准确地表达了原意. 当 r 为真 s 为假时，张晓静得到 202 房间；当 r 为假 s 为真时，张晓静得到 203 房间，其他情况下，都是不允许的.

(3) t：张晓静是江西人.

u：张晓静是安徽人.

这个“或”也应为排斥或. 和上面一样，可以形式化为 $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

但是，在这里张晓静不可能既是江西人又是安徽人，即 t 与 u 实际上不能同时为真，因而也可以符号化为 $t \vee u$. □

注15.1.1(续)

(2) 作为推理"若 p,则 q"的形式化,当 p 为真、q 为真时,$p \to q$ 显然为真;当 p 为真、q 为假时,$p \to q$ 显然为假. 问题是当 p 为假时,为什么规定无论 q 是真是假,$p \to q$ 均为真? 其实平常人们也会采用这种思维方式. 譬如,说"如果太阳从西边出来,我就不姓张."其实,不管"我"是否姓张,这句话都是对的,因为太阳不可能从西边出来. 也就是说,前件"太阳从西边出来"为假,不论后件"我就不姓张"是真是假,这句话都是对的.

(3) 在自然语言中,"若 p,则 q"的前件 p 与后件 q 往往具有某种内在联系,而数理逻辑是研究抽象的推理,p 与 q 可以无任何内在联系. 譬如,"因为 $2<3$,所以 $1+1=2$."在通常的意义下是不对的,或者认为它是毫无意义的. 但在数理逻辑中,设 $p:2<3, q:1+1=2$,这句话可形式化为 $p \to q$. 而且因为 p 和 q 都为真,故 $p \to q$ 为真. 由此可见,$p \to q$ 为真仅表示 p 与 q 的取值关系(当 p 为真时,q 必为真;当 q 为假时,p 必为假),而与 p 与 q 是否有什么内在联系无关.

蕴含（运算符，联接词）

$p \to q$："若 p，则 q"（条件语句） p称为假设，q称为结论

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \to q = 0$ iff

p为1而q为0

关于蕴含

- $p \rightarrow q$：“若 p，则 q”（条件语句）
- “想得奖，仅当/只有考试得85分以上”
  - “得奖”$\rightarrow$“考试得85分以上”
  - 考不到85分以上，甭想得奖
- 不能玩游戏，除非做完作业（$\neg p$, 除非 c）
  - 没有做完作业，就不能玩（$\neg c \rightarrow \neg p$）

解

令 $p: 3+3=6$, p 的真值为 1.

q: 雪是白色的, q 的真值也为 1.

(1)–(4) 的符号化形式分别为 $p \to q, \neg p \to q, p \to \neg q, \neg p \to \neg q$. 这 4 个复合命题的真值分别为 $1, 1, 0, 1$. 这 4 个蕴涵式的前件与后件没有内在联系.

令 $r: a$ 能被 4 整除.

$s: a$ 能被 2 整除.

(5)–(9) 叙述的都是 a 能被 2 整除是 a 能被 4 整除的必要条件, 因而都符号化为 $r \to s$. 由于 a 是给定的正整数, 因而 r 与 s 的真值是客观存在的, 但是真是假与 a 的值有关, 现在并不知道. 可是 r 与 s 是有内在联系的, 当 r 为真(a 能被 4 整除)时, s 必为真(a 能被 2 整除), 于是 $r \to s$ 不会出现前件真后件假的情况, 因而 $r \to s$ 的真值为 1.

而 (10) 叙述的是 a 能被 4 整除是 a 能被 2 整除的必要条件, 因而应符号化为 $s \to r$, 它的真值与 a 的值有关. 通常认为 (10) 是错的, 这再一次提醒人们要正确地理解命题逻辑中的联结词, 不能简单地与自然语言中的联结词等同起来. 如何正确地表示我们通常理解的 (10), 这要到第 18 章一阶逻辑中介绍. □

双蕴含（运算符，联接词）

定义 15.1.5

设 p, q 为两个命题，复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价式，记作 $p \leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$ 称作等价联结词。规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假。

$p \leftrightarrow$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件。

在例 15.1.2 中，"q 当且仅当 s"应符号化为 $q \leftrightarrow s$。由于 q 与 s 同为真，所以 $q \leftrightarrow s$ 为真。

不难看出 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 与 $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系完全一样，即都表示 p 与 q 互为充分必要条件。

5. 2 是素数当且仅当 3 也是素数。

q : 2 是素数。

s : 3 是素数。

(5) q 当且仅当 s。

双蕴含（运算符，联接词）

$p \leftrightarrow q$： “p当且仅当 q” （双条件语句）

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

$p \leftrightarrow q$ =1 iff

p和q有相同的真值

例 15.1.6

将下列命题符号化,并讨论它们的真值.

1. $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲.
2. $2+3=5$ 的充要条件是 $\sqrt{3}$ 是无理数.
3. 若两圆 O_1, O_2 的面积相等,则它们的半径相等;反之亦然.
4. 当王小红心情愉快时,她就唱歌;反之,当她唱歌时,一定心情愉快.

解

(1) 令 $p: \sqrt{3}$ 是无理数,真值为 1.

q: 加拿大位于亚洲,真值为 0.

则 (1) 可符号化为 $p \leftrightarrow q$,其真值为 0.

(2) 令 $r: 2+3=5$,其真值为 1.

则 (2) 可符号化为 $r \leftrightarrow p$,真值为 1.

(3) 令 s: 两圆 O_1, O_2 面积相等.

t: 两圆 O_1, O_2 的半径相等.

则 (3) 可符号化为 $s \leftrightarrow t$. 虽然不知道 s, t 的真值,但知道当 O_1, O_2 的面积相等时,O_1, O_2 的半径也相等;当 O_1, O_2 的面积不相等时,O_1, O_2 的半径也不相等.

即当 s 为真时,t 也为真;当 s 为假时,t 也为假. 故 $s \leftrightarrow t$ 的真值为 1.

(4) 令 u: 王小红心情愉快.

v: 王小红唱歌.

则 (4) 可符号化为 $u \leftrightarrow v$,其真值要由具体情况而定,这里不再详述. □

联结词集

以上定义了 5 个基本、常用，也是重要的联结词，它们组成一个联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，其中 $\neg$ 为一元联结词，其余 4 个是二元联结词.

现将它们汇总如表 15.1.1 所示.

表 15.1.1 联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 的定义

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

作业1

1. 下列句子中，哪些是命题？在是命题的句子中，哪些是简单命题？哪些是真命题？哪些命题的真值现在还不知道？
   (1) 中国有四大发明.
   (2) $\sqrt{5}$ 是无理数.
   (3) 3 是素数或 4 是素数.
   (4) $2x+3<5$，其中 x 是任意实数.
   (5) 你去图书馆吗？
   (6) 2 与 3 都是偶数.
   (7) 刘红与魏欣是同学.
   (8) 这朵玫瑰花多美丽呀！
   (9) 吸烟请到吸烟室去！
   (10) 圆的面积等于半径的平方乘 π.
   (11) 只有 6 是偶数，3 才能是 2 的倍数.
   (12) 8 是偶数的充分必要条件是 8 能被 3 整除.
   (13) 2050 年元旦下大雪.
2. 将上题中的简单命题符号化.
3. 写出下列命题的否定式，并将原命题及其否定式都符号化，最后指出各否定式的真值.
   (1) $\sqrt{5}$ 是有理数.
   (2) $\sqrt{25}$ 不是无理数.
   (3) 2.5 是自然数.
   (4) $\ln 1$ 是整数.
4. 将下列命题符号化，并指出各命题的真值.
   (1) 2 与 5 都是素数.
   (2) 不但 π 是无理数，而且自然对数的底 e 也是无理数.
   (3) 虽然 2 是最小的素数，但 2 不是最小的自然数.
   (4) 3 是偶素数.
   (5) 4 既不是素数，也不是偶数.

作业2

5. 将下列命题符号化，并指出各命题的真值.

(1) 2 或 3 是偶数.

(2) 2 或 4 是偶数.

(3) 3 或 5 是偶数.

(4) 3 不是偶数或 4 不是偶数.

(5) 3 不是素数或 4 不是偶数.

6. 将下列命题符号化.

(1) 小丽只能从筐里拿一个苹果或一个梨.

(2) 这学期，刘晓月只能选学英语或日语中的一门外语课.

7. 设 p：王冬生于 1971 年，q：王冬生于 1972 年，说明命题"王冬生于 1971 年或 1972 年"既可以符号化为"$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$"，又可以符号化为"$p \vee q$"的理由.

8. 将下列命题符号化，并指出各命题的真值.

(1) 只要 $2<1$，就有 $3<2$.

(2) 若 $2<1$，则 $3 \geqslant 2$.

(3) 只有 $2<1$，才有 $3 \geqslant 2$.

(4) 除非 $2<1$，才有 $3 \geqslant 2$.

(5) 除非 $2<1$，否则 $3<2$.

(6) $2<1$ 仅当 $3<2$.

9. 设 p：俄罗斯位于南半球，q：亚洲人口最多. 将下面命题用自然语言表述，并指出各命题的真值.

(1) $p \rightarrow q$.

(2) $q \rightarrow p$.

(3) $\neg p \rightarrow q$.

(4) $p \rightarrow \neg q$.

(5) $\neg q \rightarrow p$.

(6) $\neg p \rightarrow \neg q$.

(7) $\neg q \rightarrow \neg p$.

10. 设 p：9 是 3 的倍数，q：英国与土耳其相邻. 将下列命题用自然语言表述，并指出各命题的真值.

(1) $p \leftrightarrow q$.

(2) $p \leftrightarrow \neg q$.

(3) $\neg p \leftrightarrow q$.

(4) $\neg p \leftrightarrow \neg q$.

11. 将下列命题符号化，并给出各命题的真值.

(1) 若 $2+2=4$，则地球是静止不动的.

(2) 若 $2+2=4$，则地球是运动不止的.

(3) 若地球上没有树木，则人类不能生存.

(4) 若地球上没有水，则 $\sqrt{3}$ 是无理数.

12. 将下列命题符号化，并给出各命题的真值.

(1) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$.

(2) $2+2=4$ 的充要条件是 $3+3 \neq 6$.

12. 将下列命题符号化，并给出各命题的真值.

(1) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$.

(2) $2+2=4$ 的充要条件是 $3+3 \neq 6$.

(3) $2+2 \neq 4$ 与 $3+3=6$ 互为充要条件.

(4) 若 $2+2 \neq 4$，则 $3+3 \neq 6$；反之亦然.

13. 将下列命题符号化，并讨论各命题的真值.

(1) 若今天是星期一，则明天是星期二.

(2) 只有今天是星期一，明天才是星期二.

(3) 今天是星期一当且仅当明天是星期二.

(4) 若今天是星期一，则明天是星期三.

14. 将下列命题符号化.

(1) 刘晓月跑得快，跳得高.

(2) 老王是山东人或河北人.

(3) 因为天气冷，所以我穿了羽绒服.

(4) 王欢与李乐组成一个小组.

(5) 李辛与李末是兄弟.

(6) 王强与刘威都学过法语.

(7) 他一边吃饭，一边听音乐.

(8) 如果天下大雨，他就乘班车上班.

(9) 只有天下大雨，他才乘班车上班.

(10) 除非天下大雨，否则他不乘班车上班.

(11) 下雪路滑，他迟到了.

(12) 2 与 4 都是素数，这是不对的.

(13) "2 或 4 是素数，这是不对的"是不对的.

15. 设 p：$2+3=5$.

q：大熊猫产在中国.

r：太阳从西方升起.

求下列复合命题的真值.

(1) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$.

(2) $(r \rightarrow (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p$.

(3) $\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r)$.

(4) $(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$.

16. 当 p, q 的真值为 0，r, s 的真值为 1 时，求下列公式的真值.

(1) $p \vee (q \wedge r)$.

(2) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s)$.

(3) $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r)$.

(4) $(\neg r \wedge s) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

作业3

17. 判断下面一段论述是否为真:“π 是无理数. 并且,若 3 是无理数,则 $\sqrt{2}$ 也是无理数. 另外,只有 6 能被 2 整除,6 才能被 4 整除.”

18. 在什么情况下,下面一段论述是真的:“说小王不会唱歌或小李不会跳舞是正确的,而说如果小王会唱歌,小李就会跳舞是不正确的.”

19. 用真值表判断下列公式的类型.

(1) $p \to (p \vee q \vee r)$.

(2) $(p \to \neg p) \to \neg q$.

(3) $\neg(q \to r) \wedge r$.

(4) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$.

(5) $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

(6) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.

(7) $(p \to q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$.

20. 求下列公式的成真赋值.

(1) $\neg p \to q$.

(2) $p \vee \neg q$.

(3) $(p \wedge q) \to \neg p$.

(4) $\neg(p \vee q) \to q$.

21. 求下列公式的成假赋值.

(1) $\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r$.

(2) $(\neg q \vee r) \wedge (p \to q)$.

(3) $(p \to q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$.

22. 已知公式 $\neg(q \to p) \wedge p$ 是矛盾式,求公式 $\neg(q \to p) \wedge p \wedge \neg r$ 的成真赋值和成假赋值.

23. 已知公式 $(p \wedge q) \to p$ 是重言式,求公式 $((p \wedge q) \to p) \vee r$ 的成真赋值和成假赋值.

24. 已知 $(p \to (p \vee q)) \wedge ((p \wedge q) \to p)$ 是重言式,试判断公式 $p \to (p \vee q)$ 及 $(p \wedge q) \to p$ 的类型.

25. 已知 $(\neg(p \to q) \wedge q) \vee (\neg(\neg q \vee p) \wedge p)$ 是矛盾式,试判断公式 $\neg(p \to q) \wedge q$ 及 $\neg(\neg q \vee p) \wedge p$ 的类型.

26. 已知 $p \to (p \vee q)$ 是重言式,$\neg(p \to q) \wedge q$ 是矛盾式,试判断 $(p \to (p \vee q)) \wedge (\neg(p \to q) \wedge q)$ 及 $(p \to (p \vee q)) \vee (\neg(p \to q) \wedge q)$ 的类型.

27. 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式,证明:$A \wedge B$ 是重言式当且仅当 A 与 B 都是重言式.

28. 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式,已知 $A \wedge B$ 是矛盾式,能得出 A 与 B 都是矛盾式的结论吗?为什么?

29. 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式,证明:$A \vee B$ 为矛盾式当且仅当 A 与 B 都是矛盾式.

30. 设 A, B 都是含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式,已知 $A \vee B$ 是重言式,能得出 A 与 B 都是重言式的结论吗?