

数理逻辑（2025 春）作业 - 03

I Lean 4 编程题

注意，以下定义都要用递归的方式完成，即要包含 base case 以及 induction step.

I.1 满二叉树的性质

递归定义“正规二叉树”（proper binary tree，即每个节点要么没有孩子，要么就有两个孩子），并用结构归纳法证明任意正规二叉树的非叶子节点与叶子节点个数相差为 1.

I.2 字符串的递归定义

用递归的方式定义下面几类二进制字符串（只包含 0 与 1）:

1. 101 开头且长度为偶数的二进制字符串；
2. 长度模 5 余 2 的二进制字符串；
3. 拥有偶数个 0 的二进制字符串；

证明一个二进制字符串要么有奇数个 0，要么有偶数个 0.

2 证明题（想用 Lean 4 来证明也可以）

令 S 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的一个子集，递归定义如下：

- $(0, 0) \in S$
- 若 $(x, y) \in S$ ，那么 $(x, y + 1) \in S \wedge (x + 2, y + 1) \in S$

试证明 $\forall (x, y) \in S, x \leq 2y$.