数理逻辑（2025 春）作业答案 - 06

1　证明题（Hao et. al., pp. 55）

一个常见的命题逻辑公理系统是 Łukasiewicz 的 L_3，它拥有 3 条公理：

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

其推理规则仍然只有一条，即 MP 规则。该公理系统的语言使用了 $\to$ 与 $\neg$ 两种连词。事实上，还存在只有一种连词的命题逻辑公理系统。

我们令 $\mathcal{L}_1$ 为只包含 $\to$ 连词的命题逻辑语言，并将 L_3 中的公理 3 替换为 Pierce's Law 后我们可以得到 Tarski-Bernays 系统 $\mathscr{L}_1$：

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

MP 规则仍然是它唯一的推理规则。请证明：

- 语言 $\mathcal{L}_1$ 是功能非完备的（functionally incomplete），即它的语言无法表达所有布尔函数；
- 系统 $\mathscr{L}_1$ 是语法完备的（syntactically complete），即用 $\mathcal{L}_1$ 能表达的语言式均可用 $\mathscr{L}_1$ 证明。我们用 $\vdash_1 \alpha$ 表示 α 是系统 $\mathscr{L}_1$ 中的一个定理。那么请证明：若 $\mathcal{L}_1$ 中的公式 α 是重言式，则 $\vdash_1 \alpha$。

证明解答

问题一

Theorem 1.1. *$\mathcal{L}_1$ 无法表达所有布尔函数。*

证明. (思路：根据归纳原理证明 $\mathcal{L}_1$ 无法表达 $\neg$。)

令 α 是 $\mathcal{L}_1$ 中的任一合式公式, $P(\alpha)$ 表示如果真值指派 v 将 α 中出现的命题符号都赋予真值 T, 则 α 必取真值 T.

(1) 对语言 $\mathcal{L}_1$ 中的所有命题符号 A_i, 性质 $P(A_i)$ 显然成立。

(2) 假设对长度小于 n 的公式，性质 P 均成立。对于长度为 n 的公式 α, 它的表示形如 $\beta \to \gamma$ 。由归纳假设，$P(\beta)$ 和 $P(\gamma)$ 均成立。由逻辑联词 $\to$ 的真值表可知，$\bar{v}(\beta) = T, \bar{v}(\gamma) = T$ 可得 $\bar{v}(\beta \to \gamma) = T$ 。因此，$P(\alpha)$ 成立。

因此，$\mathcal{L}_1$ 中的任一合式公式都不与 $\neg A_i$ 重言等价。 □

问题二

定义 1.2. 称一个公式集 Σ 是**一致的**，如果存在一个公式 α ，使得 $\Sigma \nvdash_1 \alpha$。称 Σ 是**不一致的**，如果它不是一致的。

定义 1.3. 称一个公式集 Σ 是**极大一致的**，如果 Σ 是一致的，且对任意公式 $\alpha \notin \Sigma$ ，$\Sigma \cup \{\alpha\}$ 可以推出任意公式。

定义 1.4. 称一个公式集 Σ 是 **α -极大的**，如果 $\Sigma \nvdash_1 \alpha$ ，并且对所有的 $\beta \notin \Sigma$ ，$\Sigma \cup \{\beta\} \vdash_1 \alpha$ 。

引理 1.5. $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash_1 \alpha \to \gamma$

证明.

1. $\alpha \to \beta$
2. $\beta \to \gamma$
3. $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ [公理 1]
4. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ [1,2]
5. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ [公理 2]
6. $\alpha \to \gamma$ [4,1]

□

引理 1.6. $\alpha \to \gamma, (\alpha \to \beta) \to \gamma \vdash_1 \gamma$

证明.
令公式集 $\Delta = \{\alpha \to \gamma, (\alpha \to \beta) \to \gamma\}$
考虑公式集 $\Sigma = \{\alpha \to \gamma, (\alpha \to \beta) \to \gamma, \gamma \to \beta\}$

1. $\Sigma \vdash_1 \alpha \to \beta$ [Lemma 1.5]
2. $\Sigma \vdash_1 \gamma$
3. $\Delta \vdash_1 (\gamma \to \beta) \to \gamma$ [演绎定理]
4. $\Delta \vdash_1 \gamma$ [公理 3]

□

引理 1.7. 每一个 α-极大的公式集都是极大一致的。

证明.

假设公式集 Σ 是 α-极大的。由定义1.4，Σ 显然是一致的。对任意 $\beta_1, \beta_2 \notin \Sigma$ ，有 $\Sigma \cup \{\beta_1\} \vdash_1 \alpha$ ，由演绎定理，$\Sigma \vdash_1 \beta_1 \to \alpha$ 。

考察 $\beta_1 \to \beta_2$ 是否属于 Σ 。假设 $\beta_1 \to \beta_2 \notin \Sigma$ ，那么 $\Sigma \cup \{\beta_1 \to \beta_2\} \vdash_1 \alpha$ 。根据演绎定理，$\Sigma \vdash_1 (\beta_1 \to \beta_2) \to \alpha$ 。依据引理1.6，$\Sigma \vdash_1 \alpha$ ，与定义1.4矛盾。因此，$\beta_1 \to \beta_2 \in \Sigma$ 。

因为 $\beta_1, \beta_2 \notin \Sigma$ 是任意选择的，所以在 Σ 中添加任意一个新公式 α' 都将导致 $\Sigma \cup \{\alpha'\}$ 可以推导出所有公式。

因此，每一个 α-极大的公式集都是极大一致的。 □

引理 1.8. 对每一个 α-极大的公式集 Σ ，若 $\Sigma \vdash_1 \beta$ ，那么 $\beta \in \Sigma$ 。

证明.

显然。 □

引理 1.9. 任何一个 α-极大的公式集 Σ 都存在一个真值指派 v ，满足 $\bar{v}(\beta) = T$ 当且仅当 $\beta \in \Sigma$。

证明.

对 $\mathcal{L}_1$ 中的命题符号 $p_1, p_2, ...$ 定义真值指派 $v(p_i) = \begin{cases} T & \text{如果} p_i \in \Sigma \\ F & \text{如果} p_i \notin \Sigma \end{cases}$

根据归纳原理证明

(1) 对于命题符号，根据真值指派 v 的定义，结论显然成立。

(2) 假设长度小于 n 的公式，结论均成立。对与长度为 n 的公式 β ，让 $\beta = \gamma \to \delta$ 。

($\Leftarrow$) 考虑任意公式 $\beta \in \Sigma$ 。

若 $\delta \in \Sigma$ ，由归纳假设，$\bar{v}(\delta) = T$ ，那么 $\bar{v}(\gamma \to \delta) = \bar{v}(\beta) = T$ 。

若 $\delta \notin \Sigma$ ，由归纳假设，$\bar{v}(\delta) = F$ 。若 $\gamma \notin \Sigma$ ，由归纳假设，$\bar{v}(\gamma) = F$ ，$\bar{v}(\gamma \to \delta) = \bar{v}(\beta) = T$ 。

(注意，还剩下一种情况 $\gamma \in \Sigma, \delta \notin \Sigma$ ，此时 $\beta \notin \Sigma$ （可由引理1.8证明）且 $\bar{v}(\gamma \to \delta) = \bar{v}(\beta) = F$。)

($\Rightarrow$) 考虑任意公式 β ，满足 $\bar{v}(\beta) = T$ 。

若 $\bar{v}(\delta) = T$ ，由归纳假设，$\delta \in \Sigma$ ，由公理 1，$\beta \in \Sigma$ 。

若 $\bar{v}(\delta) = F$ ，那么 $\bar{v}(\gamma) = F$ 。由归纳假设，$\delta, \gamma \notin \Sigma$ ，那么 $\Sigma \vdash_1 \gamma \to \alpha$。根据引理1.7，$\Sigma \cup \{\gamma\}$ 可以推出一切的公式，$\Sigma \cup \{\gamma\} \vdash_1 \delta$ 。因此，$\Sigma \vdash \gamma \to \delta$ 。由引理1.8，$\beta = \gamma \to \delta \in \Sigma$ 。

□

Theorem 1.10. $\mathcal{L}_1$ 中的公式 α 是重言式，则 $\vdash_1 \alpha$ 。

证明. 假设 $\mathcal{L}_1$ 中的公式 α 是重言式，且 $\nvdash_1 \alpha$ 。

构造一个 α-极大公式集合 Σ 。固定一个 $\mathcal{L}_1$ 中所有公式的枚举 $\alpha_1, \alpha_2, ...$ 。递归定义一个公式集的序列 $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 。

$\Sigma_0 = \emptyset$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\alpha_{n+1}\} & \text{如果}\Sigma_n \cup \{\alpha_{n+1}\} \nvdash_1 \alpha \\ \Sigma_n & \text{如果}\Sigma_n \cup \{\alpha_{n+1}\} \vdash_1 \alpha \end{cases}$$

令 $\Sigma = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Sigma_n$ ，显然，Σ 是 α-极大的。

根据引理1.9，存在一个真值指派 v ，对任意公式 β ，$\bar{v}(\beta) = T$ 当且仅当 $\beta \in \Sigma$ ，因此 $\bar{v}(\alpha) = F$ 。另一方面，α 是重言式，$\bar{v}(\alpha) = T$ 。矛盾，假设不成立，$\vdash_1 \alpha$ 。 □