# 第 2 章 插值法

姚遥

南京大学智能科学与技术学院

# 本章目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

# 插值法 | 引言

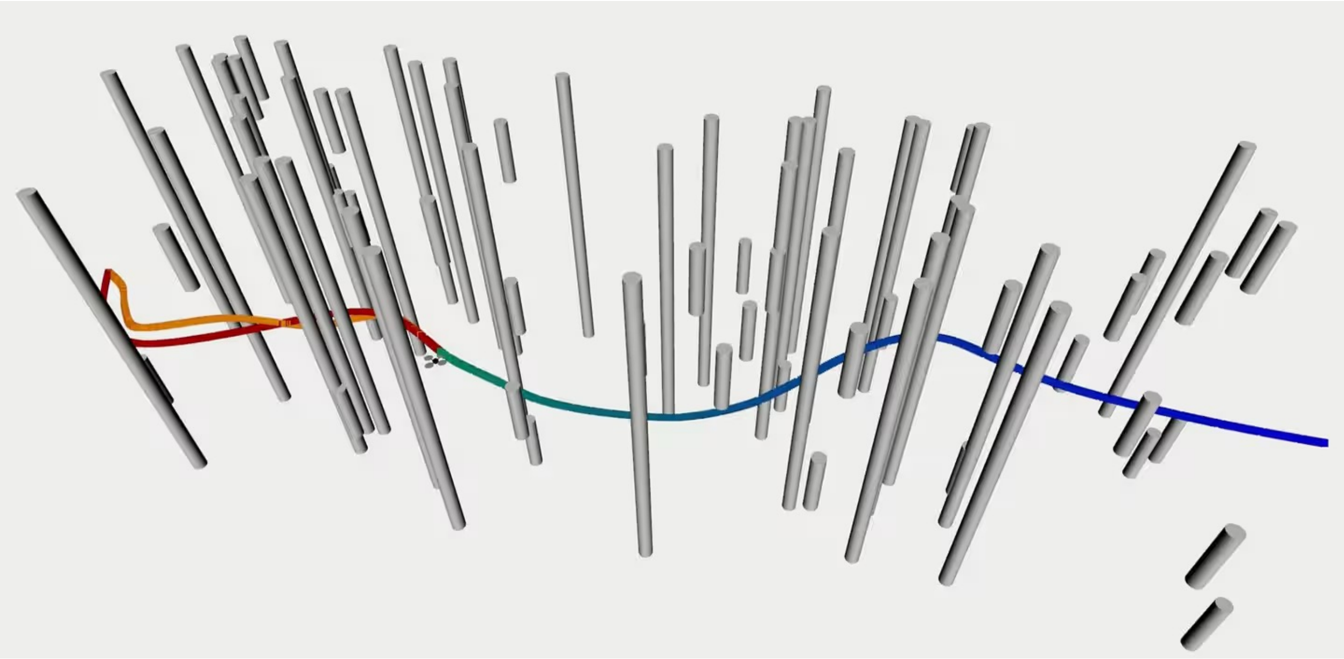
## 实际问题需要通过函数 $y = f(x)$ 来表示某种内在规律的数量关系

- 部分函数是通过实验或观测得到，只能给出函数在一系列点 $x_i$ 的函数值 $y_i = f(x_i)\ (i = 0, 1, \dots, n)$
- 部分函数有解析式但计算复杂，只能建立函数表，如三角函数、对数函数

## 给定f(x)的观测值/函数表，希望构建函数 P(x)，满足

- 既能反映函数 $f(x)$ 特性、又便于计算，可用$P(x)$近似$f(x)$
- $P(x_i) = f(x_i)$，对于$i = 0,1,\dots,n$成立

# 插值法 | 举个例子



路径规划：https://zhuanlan.zhihu.com/p/599498341

机械设计与制造

# 插值法 | 引言

**定义2.1** 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，且已知在点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的值 $y_0, y_1, \ldots, y_n$，若存在简单函数 $P(x)$ 使下式成立

$$P(x_i) = y_i \ \ (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{2.1.1}$$

则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 称为插值节点，包含插值节点的区间 $[a, b]$ 称为插值区间，求 $P(x)$ 的方法称为插值法。

# 插值法 | 引言

若$P(x)$是次数不超过$n$的代数多项式，即

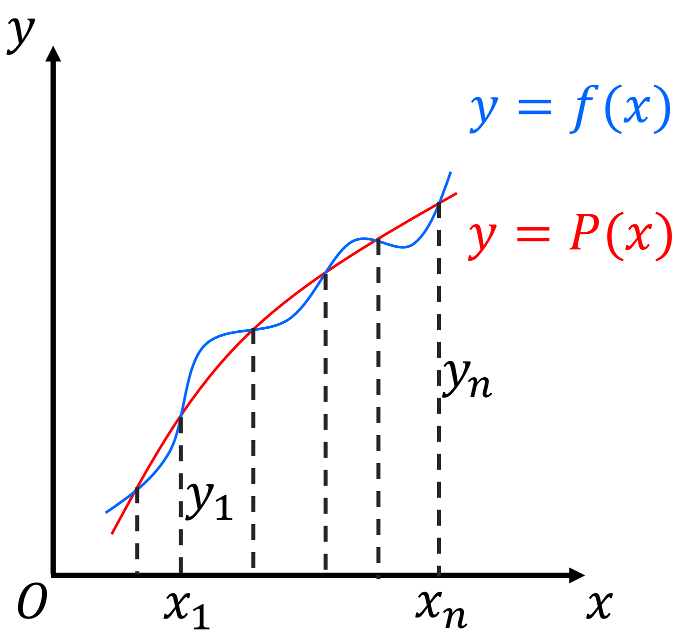
$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad (2.1.2)$$

其中 $a_i$ 为实数，称 $P(x)$ 为插值多项式，相应的插值法称为多项式插值

- 若 $P(x)$ 为分段多项式，就称之为分段插值
- 若 $P(x)$ 为三角多项式，就称之为三角插值

# 插值法 | 引言

- 插值法就是求曲线$y = P(x)$，使其通过给定的$n+1$个点$(x_i, y_i)$，$i = 0,1,\ldots,n$，并用它近似已知曲线$y = f(x)$




**历史发展：**

- 早在一千多年前，我国科学家在研究历法中就应用了线性插值与二次插值
- 基本理论和结果却是在微积分产生以后才逐步完善的
- 计算机广泛使用以后，由于航空、造船、精密机械加工等实际问题的需要，插值法得到进一步发展

# 本章目录

## 插值多项式的存在唯一性

- 设 $P(x)$ 是如下插值多项式，$H_n$ 代表所有次数不超过 $n$ 的多项式集合，$P(x) \in H_n$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad (2.1.2)$$

- 由 $P(x_i) = y_i \ (i = 0,1,\ldots,n)$ 可得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}, \qquad (2.2.1)$$

- 此为 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 的 $n+1$ 元线性方程组

要证明插值多项式有唯一性，

即证明该线性方程组有唯一解

# 插值法 | Lagrange插值

- 方程组 (2.2.1) 的系数行列式为，称为Vandermonde行列式

$$V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \qquad (2.2.2)$$

- 利用行列式性质可得

？？？

$$V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j)$$

数学归纳法

- 又因 $i \neq j$ 时插值节点$x_i \neq x_j$，故 $V_n \neq 0$，故矩阵满秩，故方程组有唯一解

**定理2.1 满足式 (2.1.1) 的插值多项式唯一**

# 插值法 | Lagrange插值

- 方程组 (2.2.1) 的系数行列式为，称为Vandermonde行列式

$$V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \qquad (2.2.2)$$

- 利用行列式性质可得

？ ？ ？

$$V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j)$$

数学归纳法

- 又因 $i \neq j$ 时插值节点$x_i \neq x_j$，故 $V_n \neq 0$，故矩阵满秩，故方程组有唯一解

**定理2.1 满足式 (2.1.1) 的插值多项式唯一**

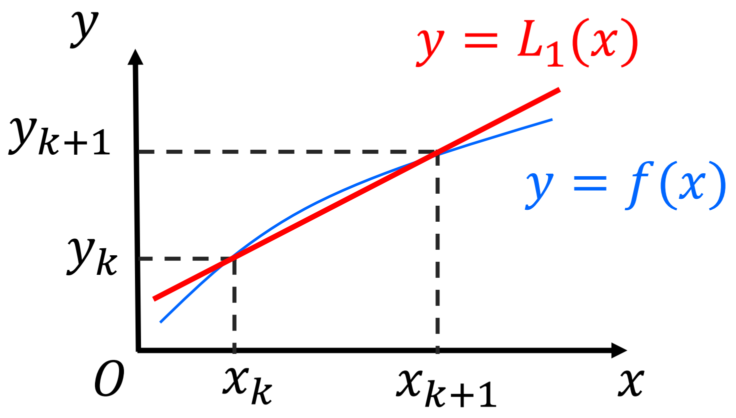
# 插值法 | 线性插值

通过求解方程组 (2.2.1) 得到 $P(x)$ 不仅计算复杂，而且难以得到的简单表达式

## 考虑分段并采用n = 1，即为两点线性插值

- 已知区间$[x_k, x_{k+1}]$的端点处的函数值$y_k = f(x_k)$，$y_{k+1} = f(x_{k+1})$，要求线性插值多项式$L_1(x)$满足：

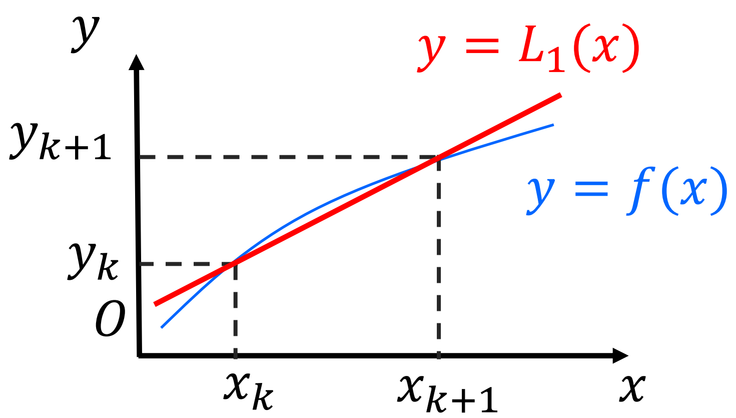
$$L_1(x_k) = y_k,\quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}$$



# 插值法丨线性插值解析式

- **点斜式**

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \qquad (2.2.3)$$




- **两点式**

$$L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \qquad (2.2.4)$$

- 两点式中，$L_1(x)$ 可视为由两个线性函数的线性组合得到的：

$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x) \qquad (2.2.5)$$

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

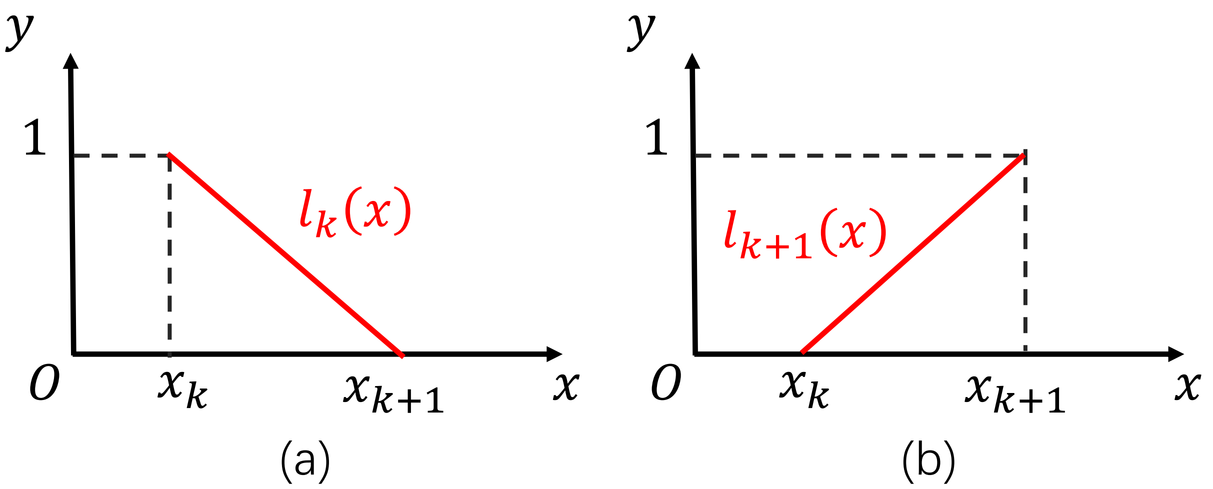
# 插值法 | 一次插值基函数

- $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 也是线性插值多项式，并且满足

$$l_k(x_k) = 1,\quad l_k(x_{k+1}) = 0$$

$$l_{k+1}(x_k) = 0,\quad l_{k+1}(x_{k+1}) = 1$$

- 被称为一次插值基函数或线性插值基函数



# 插值法丨二次（抛物）插值

## 考虑三个点之间插值（$n=2$）：

- 插值节点 $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$，求二次插值多项式 $L_2(x)$

$$L_2(x_j) = y_j \quad (j = k-1, k, k+1)$$

- $y = L_2(x)$ 是通过三点 $(x_{k-1}, y_{k-1})$，$(x_k, y_k)$，$(x_{k+1}, y_{k+1})$ 的抛物线

- 同样可采用基函数方法，基函数$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$是二次函数且满足

$$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1}) = 1, \quad l_{k-1}(x_j) = 0 & (j = k, k+1) \\ l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_j) = 0 & (j = k-1, k+1) \\ l_{k+1}(x_{k+1}) = 1, \quad l_{k+1}(x_j) = 0 & (j = k-1, k) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

# 插值法 | 二次（抛物）插值

## 考虑三个点之间插值（$n=2$）：

- $l_{k-1}(x)$有两个零点$x_k$ , $x_{k+1}$ ，可表示为

$$l_{k-1}(x)=A(x-x_k)(x-x_{k+1})$$

- $A$为待定系数，由条件 $l_{k-1}(x_{k-1})=1$ 求出$A=\frac{1}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$， 因此

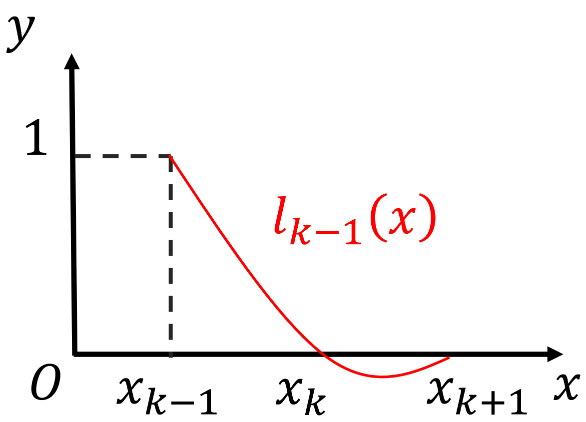
$$l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$$

- 同理可得

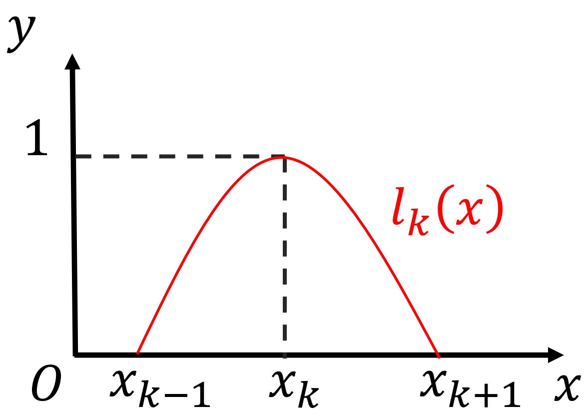
$$l_k(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} \qquad l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

## 考虑三个点之间插值（$n = 2$）：

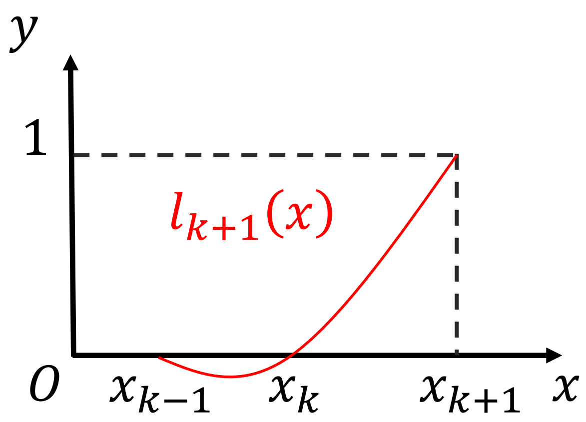
- 函数$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$称为二次插值基函数或抛物插值基函数



(a)



(b)



(c)

# 插值法 | 抛物插值表达式

- 利用二次插值基函数$l_{k-1}(x), l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x) \qquad (2.2.7)$$

$$= y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} + y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} + y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

- 显然插值节点在表达式上

$$L_2(x_j) = y_j \quad (j = k-1, k, k+1)$$

# 插值法丨Lagrange插值多项式

- 线性插值
- 二次插值
- 多次插值？

Lagrange插值多项式

**考虑 $n+1$个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 的 $n$ 次插值多项式**

$$L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\dots,n) \qquad (2.2.8)$$

**定义2.2** 若 $\mathrm{n}$ 次多项式 $\mathrm{l_j(x)}$ $(\mathrm{j} = 0, 1, \dots, \mathrm{n})$ 在$\mathrm{n}+1$个节点 $\mathrm{x_0} < \mathrm{x_1} < \cdots < \mathrm{x_n}$上满足

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (j,k = 0, 1, \dots, n) \qquad (2.2.9)$$

称这 $n+1$ 个 $n$ 次多项式 $l_j(x)$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ 为节点 $x_j$ 上的 $n$ 次插值基函数

# 插值法 | Lagrange插值多项式

- 仿照之前的推导，$n$次插值基函数

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} (k=0,1,\ldots,n)$$

- Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \qquad (2.2.11)$$

- 代入 $l_k(x)$ 可验证

$$L_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j) = y_j \quad (j=0,1,\cdots,n)$$

# 插值法 | Lagrange插值多项式

- 引入 $\omega_{n+1}(x)$ ：

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad (2.2.12)$$

- 可得：

$$\omega_{n+1}'(x_k) = (x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$$

- 式 (2.2.11) 可改写为：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega_{n+1}'(x_k)} \qquad (2.2.13)$$

$n$ 次插值多项式 $L_n(x)$ 一定是次数为$n$的多项式？ <= n, 例如三点共线

- 用$L_n(x)$近似$f(x)$，截断误差也称插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

**定理2.2** 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 $(a,b)$ 内存在，节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，$L_n(x)$ 是满足条件式 (2.2.8) 的插值多项式，则对于任何$x \in [a,b]$，插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.2.14)$$

这里 $\xi \in (a,b)$ 且依赖于 $x$

# 插值法 | 插值余项

- $R_n(x)$ 在节点 $x_k$ $(k=0,1,\dots,n)$ 上为零，即

$$R_n(x)=0 \quad (k=0,1,\dots,n)$$

- 因此可以写成如下形式

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x)$$

  - 其中 $K(x)$ 是与 $x$ 有关的待定函数

- 把 $x$ 看成 $[a,b]$ 上的一个固定点，定义函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

  - $\varphi(t)$在点$x_0$，$x_1$，…，$x_n$及$x$处均为零
  - $\varphi(t)$在$[a,b]$上有$n+2$个零点

# 插值法 | 插值余项

**Rolle定理** 如果函数 $f(x)$ 满足如下条件：

- $f(x)$在闭区间$[a\,,b]$上连续；
- $f(x)$在开区间$(a,b)$ 内可导；
- $f(x)$在区间端点的函数值相等，即$f(a)=f(b)$

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ 使得函数f(x) 在该点的导数等于零，即 $f'(\xi)=0$

已知$\varphi(t)$在$[a,b]$上有$n+2$个零点

- $\varphi'(t)$在 $(a,b)$ 上至少有$n+1$个零点
- $\varphi''(t)$再应用Rolle定理，可知 $\varphi''(t)$ 在 $(a,b)$ 上至少有 $n$ 个零点
- 依此类推，$\varphi^{(n+1)}(t)$在$(a,b)$上至少有1个零点，记为$\xi\in(a,b)$，使$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$

# 插值法 | 插值余项

$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 $(a,b)$ 上至少有1个零点:

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,K(x) = 0$$

可得

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

可得余项公式：

$$R_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

# 插值法 | 插值余项：讨论

余项表达式只有在$f(x)$的高阶导数存在时才能应用，$\xi$在$(a,b)$内的位置通常未知

如果已知$\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$，那么

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \qquad (2.2.16)$$

- $n = 1$，线性插值余项为

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1), \quad \xi \in [x_0, x_1]$$

- $n = 2$，抛物插值余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi \in [x_0, x_2]$$

# 插值法丨插值余项：例2.1

**例2.1** 已知$\sin 0.32 = 0.314567$，$\sin 0.34 = 0.333487$，$\sin 0.36 = 0.352274$，用线性插值及抛物插值求$\sin 0.3367$，并估计截断误差

$x_0 = 0.32$，$x_1 = 0.34$，$x_2 = 0.36$

$y_0 = 0.314567$，$y_1 = 0.333487$，$y_2 = 0.352274$

- 用**线性插值**计算做**内插**，取$x_0 = 0.32$及$x_1 = 0.34$，由式(2.2.3)得

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(0.3367 - x_0)$$

$$= 0.314567 + \frac{0.01892}{0.02} \times 0.0167 = 0.330365$$

# 插值法 | 插值余项：例2.1

**例2.1** 已知$\sin 0.32=0.314567$，$\sin 0.34=0.333487$，$\sin 0.36=0.352274$，用线性插值及抛物插值求$\sin 0.3367$，并估计截断误差

- 上式的截断误差可由线性插值余项得到

$$|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|$$

$$M_2=\max_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|=\max_{x_0\le x\le x_1}|\sin x|=\sin x_1\le 0.3335$$

- 可得

$$|R_1(0.3367)|=|\sin 0.3367-L_1(0.3367)|$$

$$\le\frac{0.3335}{2}\times 0.0167\times 0.0033\le 0.92\times 10^{-5}$$

# 插值法 | 插值余项：例2.1

**例2.1** 已知$\sin 0.32 = 0.314567$，$\sin 0.34 = 0.333487$，$\sin 0.36 = 0.352274$，用线性插值及抛物插值求$\sin 0.3367$，并估计截断误差

- 还用**线性插值**，但取$x_1 = 0.34$及$x_2 = 0.36$，做**外推**

$$\sin 0.3367 \approx \tilde{L}_1(0.3367) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0.3367 - x_1)$$
$$= 0.333487 + \frac{0.018787}{0.02}\times(-0.0033) = 0.330387$$

- 截断误差：

$$\left|\tilde{R}_1(x)\right| = \frac{M_2}{2}|(x - x_1)(x - x_2)|,$$
$$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_2}|f''(x)| \le 0.3523$$

$$\left|\tilde{R}_1(0.3367)\right| = \left|\sin 0.3367 - \tilde{L}_1(0.3367)\right| \le \frac{0.3523}{2}\times 0.0033\times 0.0233 \le 1.36\times 10^{-5}$$

# 插值法 | 插值余项：例2.1

**例2.1** 已知$\sin 0.32=0.314567$，$\sin 0.34=0.333487$，$\sin 0.36=0.352274$，用线性插值及抛物插值求$\sin 0.3367$，并估计截断误差

- 用**抛物插值**计算$\sin 0.3367$ ，由式(2.2.7)得

$$\sin 0.3367 \approx y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=L_2(0.3367)$$

$$=0.314567\times\frac{0.7689\times10^{-4}}{0.0008}+0.333487\times\frac{3.89\times10^{-4}}{0.0004}+0.352274\times\frac{-0.5511\times10^{-4}}{0.0008}$$

$$=0.330374$$

与六位有效数字的正弦函数表完全一样

# 插值法 | 插值余项：例2.1

**例2.1** 已知$\sin 0.32 = 0.314567$，$\sin 0.34 = 0.333487$，$\sin 0.36 = 0.352274$，用线性插值及抛物插值求$\sin 0.3367$，并估计截断误差

- 用**抛物插值**截断误差：

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{6}|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$$

$$M_3 = \max_{x_0 \le x \le x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 \le 0.828$$

- 可得： $$|R_2(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)|$$

$$\le \frac{0.828}{6} \times 0.0167 \times 0.0033 \times 0.0233 \le 0.178 \times 10^{-7}$$

高次插值通常优于低次插值

# 本章目录

# 插值法 | Lagrange插值优缺点

## Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \qquad (2.2.11)$$

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} (k = 0,1,\dots,n)$$

- 简单直观、容易实现
- 无法增量计算：如增加插值节点，则原来计算结果均不能用，须重新计算

## 逐次线性插值得到高次插值

- 增量式计算，重用之前的结果

# 插值法 | Lagrange插值优缺点

- **抛物插值**计算 $\sin 0.3367$

$$L_2(0.3367) = 0.314567 \times \frac{0.7689 \times 10^{-4}}{0.0008} + 0.333487 \times \frac{3.89 \times 10^{-4}}{0.0004}$$

$$+0.352274 \times \frac{-0.5511 \times 10^{-4}}{0.0008} = 0.330374$$

- $L_2$ **亦可由** $\mathrm{L}_1(0.3367)$ **和** $\tilde{\mathrm{L}}_1(0.3367)$ **按照类似线性插值的方法计算**

$$L_2(0.3367) = L_1(0.3367) + \frac{\tilde{L}_1(0.3367) - L_1(0.3367)}{0.36 - 0.32} \times (0.3367 - 0.32)$$

$$= 0.330365 + \frac{0.000022}{0.04} \times 0.0167 = 0.330374$$

# 插值法 | Aitken（艾特肯）逐次线性插值

**令$I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(x)$ 表示函数 $f(x)$ 关于节点 $x_{i_1}$，$x_{i_2}$，…，$x_{i_n}$ 的 $n-1$ 次插值多项式，$i_1$，$i_2$，…，$i_n$均为非负整数，例：**

- $I_2(x)$ 是经过 $x_2$ 的零次多项式，记 $I_{i_k}(x)=f\left(x_{i_k}\right)$
- $I_{0,1,\ldots,k}(x)$是经过$x_1$，$x_2$，…，$x_k$ 的 $k$ 次多项式

**两个 $k$ 次插值多项式可通过线性插值得到 $k+1$ 次插值多项式**

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x)=I_{0,1,\ldots,k}(x)+\frac{I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)-I_{0,1,\ldots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k) \quad (2.3.1)$$

- $I_{0,1,\ldots,k}(x)$ 和 $I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)$ 有 1 个插值节点不同
- 当 $k=0$ 时为线性插值；当 $k=1$ 时为抛物线插值（上一页的例子）

# 插值法 | Aitken（艾特肯）逐次线性插值

**该式子是关于节点 $x_0,\ldots,x_k,x_l$ 的插值多项式**

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x)=I_{0,1,\ldots,k}(x)+\frac{I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)-I_{0,1,\ldots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k) \quad (2.3.1)$$

**验证一下：**

- 对于$x=x_i$，$i=0,1,\ldots,k-1$，$I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x_i)-I_{0,1,\ldots,k}(x_i)=0$，因此

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x_i)=I_{0,1,\ldots,k}(x_i)=f(x_i)$$

- 对于$x=x_k$，$x-x_k=0$，因此

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x_k)=I_{0,1,\ldots,k}(x_k)=f(x_k)$$

- 对于$x=x_l$，$I_{0,1,\ldots,k,l}(x_l)=I_{0,1,\ldots,k}(x_l)+\frac{f(x_l)-I_{0,1,\ldots,k}(x_l)}{x_l-x_k}(x_l-x_k)=f(x_l)$

# 插值法 | Aitken（艾特肯）逐次线性插值

## 由 $k=0$ 到 $k=n-1$ 逐次求得所需的插值多项式

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)=I_0$ | | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)=I_1$ | $I_{0,1}$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)=I_2$ | $I_{0,2}$ | $I_{0,1,2}$ | | |
| $x_3$ | $f(x_3)=I_3$ | $I_{0,3}$ | $I_{0,1,3}$ | $I_{0,1,2,3}$ | |
| $x_4$ | $f(x_4)=I_4$ | $I_{0,4}$ | $I_{0,1,4}$ | $I_{0,1,2,4}$ | $I_{0,1,2,3,4}$ |

- 每增加一个节点就计算一行
- 斜线上是1次到4次插值多项式的值
- 如精度不满足要求，再增加节点，前面计算有效

# 插值法 | Neville（内维尔）逐次线性插值

## Aitken逐次线性插值公式

$$I_{0,1,\dots,k,l}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{0,1,\dots,k-1,l}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_l - x_k}(x - x_k) \quad (2.3.1)$$

- 由 $I_{0,1,\dots,k}(x)$ 和 $I_{0,1,\dots,k-1,l}(x)$ 组合得到

## 等价形式： Neville（内维尔）逐次线性插值

$$I_{0,1,\dots,k+1}(x) = I_{0,1,\dots,k}(x) + \frac{I_{1,2,\dots,k+1}(x) - I_{0,1,\dots,k}(x)}{x_{k+1} - x_0}(x - x_0) \quad (2.3.2)$$

- 由$I_{0,1,\dots,k}(x)$ 和$I_{1,\dots,k+1}(x)$组合得到，下标连续
- 与2.3节开始的例子一致

# 插值法 | Neville（内维尔）逐次线性插值

## 由 $k=0$ 到 $k=n-1$ 逐次求得所需的插值多项式

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)=I_0$ | | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)=I_1$ | $I_{0,1}$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)=I_2$ | $I_{1,2}$ | $I_{0,1,2}$ | | |
| $x_3$ | $f(x_3)=I_3$ | $I_{2,3}$ | $I_{1,2,3}$ | $I_{0,1,2,3}$ | |
| $x_4$ | $f(x_4)=I_4$ | $I_{3,4}$ | $I_{2,3,4}$ | $I_{1,2,3,4}$ | $I_{0,1,2,3,4}$ |

- 每增加一个节点就计算一行
- 斜线上是1次到4次插值多项式的值
- 如精度不满足要求，再增加节点，前面计算有效

## 例2.2 已知 $f(x)=\mathrm{sh}\,x$ 的值，用Aitken插值求$\mathrm{sh}\,0.23$的近似值

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 插值结果 |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | |
| 0.20 | 0.20134 | |
| 0.30 | 0.30452 | |
| 0.50 | 0.52110 | |
| 0.60 | 0.63665 | |

$$I_{0,1,\ldots,k,l}(x)=I_{0,1,\ldots,k}(x)+\frac{I_{0,1,\ldots,k-1,l}(x)-I_{0,1,\ldots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k)\quad(2.3.1)$$

# 插值法 | 逐次线性插值

## 例2.2 已知 $f(x)=\operatorname{sh}x$ 的值，用Aitken插值求$\operatorname{sh}0.23$的近似值

- $I_{0,1}=I_0+\frac{I_1-I_0}{x_1-x_0}(0.23-x_0)=0.231541$
- $I_{0,2}=I_0+\frac{I_2-I_0}{x_2-x_0}(0.23-x_0)=0.233465$

$I_{0,1,2}=I_{0,1}+\frac{I_{0,2}-I_{0,1}}{x_2-x_1}(0.23-x_1)=0.232118$

- $I_{0,3}=I_0+\frac{I_3-I_0}{x_3-x_0}(0.23-x_0)=0.239706$

$I_{0,1,3}=I_{0,1}+\frac{I_{0,3}-I_{0,1}}{x_3-x_1}(0.23-x_1)=0.232358$

$I_{0,1,2,3}=I_{0,1,2}+\frac{I_{0,1,3}-I_{0,1,2}}{x_3-x_2}(0.23-x_2)=0.232034$

- $I_{0,4}=I_0+\frac{I_4-I_0}{x_4-x_0}(0.23-x_0)=0.244049$

$I_{0,1,4}=I_{0,1}+\frac{I_{0,4}-I_{0,1}}{x_4-x_1}(0.23-x_1)=0.232479$

$I_{0,1,2,4}=I_{0,1,2}+\frac{I_{0,1,4}-I_{0,1,2}}{x_4-x_2}(0.23-x_2)=0.232024$

$I_{0,1,2,3,4}=I_{0,1,2,3}+\frac{I_{0,1,2,4}-I_{0,1,2,3}}{x_4-x_3}(0.23-x_3)=0.232024$

# 插值法 | 逐次线性插值

## 例2.2 已知 $f(x) = \mathrm{sh}\, x$ 的值，用Aitken插值求$\mathrm{sh}\, 0.23$的近似值

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 插值结果 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | | | | |
| 0.20 | 0.20134 | 0.231541 | | | |
| 0.30 | 0.30452 | 0.233465 | 0.232118 | | |
| 0.50 | 0.52110 | 0.239706 | 0.232358 | 0.232034 | |
| 0.60 | 0.63665 | 0.244049 | 0.232479 | 0.233024 | 0.233024 |

- 3次插值的两个结果相同，故可不用计算4次插值

# 本章目录

## 基于两点式方程的插值多项式

- 直线两点式方程

$$L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \tag{2.2.4}$$

- 推广得Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \tag{2.2.11}$$

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} (k = 0,1,\dots,n)$$

# 基于点斜式方程的插值多项式

- 直线点斜式方程

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

- 推广到 $n+1$ 个节点$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

其中 $a_0$ ，$a_1$ ， … ，$a_n$ 为待定系数

## 基于点斜式方程的插值多项式

- 当$x = x_0$时，$P_n(x_0) = a_0 = f_0$
- 当$x = x_1$时，$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$，推得

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- 当$x = x_2$时，$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_1(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$，推得

$$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

- 依此类推，可以得到$a_0$，$a_1$，…，$a_n$

**定义2.3**

$$f[x_0,x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 $x_0$，$x_k$ 的一阶差商，称

$$f[x_0,x_1,x_k]=\frac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$$

为函数 $f(x)$ 关于点 $x_0$，$x_1$，$x_k$ 的二阶差商。一般地，称

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}} \qquad (2.4.2)$$

为函数 $f(x)$ 的 $k$ 阶差商

# 插值法丨差商的性质

## k 阶差商可表示为函数值$f(x_0)$，$f(x_1)$，…，$f(x_k)$的线性组合

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)} \quad (2.4.3)$$

- 可用数学归纳法证明
- 表明差商与节点排列顺序无关，称为差商的对称性

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_1, x_0, x_2, \cdots, x_k] = \cdots = f[x_1, x_2, \cdots, x_k, x_0]$$

**由对称性及** (2.4.2)

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \qquad (2.4.2)$$

- 可得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (2.4.4)$$

**若$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在 $n$ 阶导数，且节点 $x_0, x_1, \cdots, x_k \in [a, b]$，则 $n$ 阶差商与导数关系为**

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] \qquad (2.4.5)$$

- 利用定理2.2、公式(2.4.7)，用$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$预测$x_n$的误差

# 插值法 | 差商的计算

| $x_k$ | $f(x_k)$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | 四阶差商 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $\underline{f(x_0)}$ | | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $\underline{f[x_0,x_1]}$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $f[x_1,x_2]$ | $\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$ | | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | $f[x_2,x_3]$ | $f[x_1,x_2,x_3]$ | $\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$ | |
| $x_4$ | $f(x_4)$ | $f[x_3,x_4]$ | $f[x_2,x_3,x_4]$ | $f[x_1,x_2,x_3,x_4]$ | $\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

- 类似逐次线性多项式插值

## Newton插值公式

- 把 $x$ 看成 $[a,b]$ 上一点，根据一阶商差，可得：

$$f(x) = f(x_0) + f[x,x_0](x - x_0)$$

- 同时根据高阶商差，可得：

$$f[x,x_0] = f[x_0,x_1] + f[x,x_0,x_1](x - x_1)$$
$$\vdots$$
$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}] = f[x_0,x_1,\cdots,x_n] + f[x,x_0,\cdots,x_n](x - x_n)$$

## Newton插值公式

- 将后一式逐步代入前一式，可得

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})+f[x,x_0\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$

$$=N_n(x)+R_n(x)$$

- 其中 $$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (2.4.6)$$

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x) \qquad (2.4.7)$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad (2.2.12)$$

## Newton插值公式

- 式 (2.4.6) 确定的多项式$N_n(x)$显然满足插值条件，且次数不超过$n$
- $N_n(x)$ 就是本小节一开始 (2.4.1) 的多项式

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) = N_n(x) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k], \qquad k = 0,1 \ldots, n$$

## $N_n(x)$被称为Newton差商插值多项式

- 系数$a_k$就是差商表中加横线的各阶差商
- 比Lagrange插值节省计算量，便于程序设计

## Newton插值公式余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0 \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) \qquad (2.4.7)$$

- 插值多项式唯一，因此(2.4.7)等价(2.2.14)

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.2.14)$$

- 可得 $f[x, x_0 \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，以及 $f[x, x_0 \cdots, x_{n-1}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$
- 对于$f[x, x_0 \cdots, x_{n-1}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$，取 $x = x_n$可证性质3 (2.4.5)

**式 (2.4.7) 更具有一般性：$f$ 由离散点给出或 $f$ 不存在时的情形均适用**

**例2.3** 给出 $f(x)$ 函数表，求4次 Newton 插值多项式，并由此计算 $f(0.596)$ 近似值

| $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|
| 0.40 | 0.41075 |
| 0.55 | 0.57815 |
| 0.65 | 0.69675 |
| 0.80 | 0.88811 |
| 0.90 | 1.02652 |
| 1.05 | 1.25382 |

- 根据给定函数表计算差商表，一阶差商：

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{0.57815-0.41075}{0.55-0.40}=1.11600$$

$$f[x_1,x_2]=1.18600,\qquad f[x_2,x_3]=1.27573$$

$$f[x_3,x_4]=1.38410,\qquad f[x_4,x_5]=1.51533$$

- 二阶差商

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=0.28000$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=0.35893,\qquad f[x_2,x_3,x_4]=0.43348$$

$$f[x_3,x_4,x_5]=0.52493$$

# 插值法丨差商与Newton插值公式

**例2.3** 给出 $f(x)$ 函数表，求4次 Newton 插值多项式，并由此计算 $f(0.596)$ 近似值

| $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|
| 0.40 | 0.41075 |
| 0.55 | 0.57815 |
| 0.65 | 0.69675 |
| 0.80 | 0.88811 |
| 0.90 | 1.02652 |
| 1.05 | 1.25382 |

- 三阶差商：

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=0.19733$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=0.21300,\qquad f[x_2,x_3,x_4,x_5]=0.22863$$

- 四阶差商

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}=0.03134$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]=0.03126$$

- 五阶差商

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]-f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_0}=-0.00012$$

**例2.3** 给出 $f(x)$ 函数表，求4次 Newton 插值多项式，并由此计算 $f(0.596)$ 近似值

| $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|
| 0.40 | 0.41075 |
| 0.55 | 0.57815 |
| 0.65 | 0.69675 |
| 0.80 | 0.88811 |
| 0.90 | 1.02652 |
| 1.05 | 1.25382 |

- 最终差商表为

| $x_k$ | $f(x_k)$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | 四阶差商 | 五阶差商 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.40 | 0.41075 | | | | | |
| 0.55 | 0.57815 | 1.11600 | | | | |
| 0.65 | 0.69675 | 1.18600 | 0.28000 | | | |
| 0.80 | 0.88811 | 1.27573 | 0.35893 | 0.19733 | | |
| 0.90 | 1.02652 | 1.38410 | 0.43348 | 0.21300 | 0.03134 | |
| 1.05 | 1.25382 | 1.51533 | 0.52493 | 0.22863 | 0.03126 | −0.00012 |

# 插值法 | 差商与Newton插值公式

**例2.3** 给出 $f(x)$ 函数表，求4次 Newton 插值多项式，并由此计算 $f(0.596)$ 近似值

| $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|
| 0.40 | 0.41075 |
| 0.55 | 0.57815 |
| 0.65 | 0.69675 |
| 0.80 | 0.88811 |
| 0.90 | 1.02652 |
| 1.05 | 1.25382 |

- 四阶差商接近常数，故取4次插值多项式$N_4(x)$作为近似：

$$N_4(x) = 0.41075 + 1.116(x-0.4) + 0.28(x-0.4)(x-0.55)$$
$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$
$$+0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)$$

$$f(0.596) \approx N_4(0.596) = 0.63195$$

- 根据式(2.4.7)，截断误差

$$|R_4(x)| = f[x, x_0 \cdots, x_4]\omega_5(x), \qquad x = 0.596$$
$$\approx |f[x_0, x_1, \cdots, x_5]\omega_5(0.596)| \leq 3.63 \times 10^{-9}$$