离散数学

（第 3 版）

2024@nju

目录

目录

2.1 有序对与笛卡儿积

定义 1.1.1

由两个元素 x 和 y(允许 $x = y$)按照一定顺序排列成的二元组称作一个*有序对*或*序偶*,记作 $\langle x, y\rangle$,其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素.

2.1 有序对与笛卡儿积

定义 1.1.1

由两个元素 x 和 y(允许 $x = y$)按照一定顺序排列成的二元组称作一个*有序对*或*序偶*,记作 $\langle x, y\rangle$,其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素.

有序对 $\langle x, y\rangle$ 具有以下性质.

1. 当 $x \neq y$ 时,$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$.
2. $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$.

2.1 有序对与笛卡儿积

定义 1.1.1

由两个元素 x 和 y(允许 $x = y$)按照一定顺序排列成的二元组称作一个*有序对*或*序偶*，记作 $\langle x, y\rangle$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素.

有序对 $\langle x, y\rangle$ 具有以下性质.

1. 当 $x \neq y$ 时，$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$.
2. $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$.

例 1.1.1

已知 $\langle x+2, 4\rangle = \langle 5, 2x+y\rangle$，求 x 和 y.

2.1 有序对与笛卡儿积

定义 1.1.1

由两个元素 x 和 y(允许 $x = y$)按照一定顺序排列成的二元组称作一个*有序对*或*序偶*,记作 $\langle x, y\rangle$,其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素.

有序对 $\langle x, y\rangle$ 具有以下性质.

1. 当 $x \neq y$ 时,$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$.
2. $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$.

例 1.1.1

已知 $\langle x+2, 4\rangle = \langle 5, 2x+y\rangle$,求 x 和 y.

解

由有序对相等的充要条件有 $\begin{cases} x+2=5, \\ 2x+y=4, \end{cases}$ 解得 $x = 3, y = -2$.

笛卡尔积

定义 1.1.2

设 A, B 为集合，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的 笛卡儿积，记作 $A \times B$.

笛卡儿积 $A \times B$ 的描述法表示为

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle | x \in A \land y \in B\}.$$

笛卡尔积

定义 1.1.2

设 A,B 为集合,用 A 中元素为第一元素,B 中元素为第二元素构成有序对,所有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的 笛卡儿积,记作 $A\times B$.

笛卡儿积 $A\times B$ 的描述法表示为

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle|x\in A\wedge y\in B\}.$$

例如,设 $A=\{a,b\},B=\{0,1,2\}$,则

$$A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\},$$
$$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}.$$

由排列组合的知识不难证明,如果 $|A|=n,|B|=m$,那么 $|A\times B|=mn$.

笛卡尔积的性质

命题 1.1.1

1. 对任意集合 A,有 $A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$.

笛卡尔积的性质

命题 1.1.1

1. 对任意集合 A,有 $A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$.
2. 一般地说,笛卡儿积运算不满足交换律,即

$$A \times B \neq B \times A \quad (\text{当 } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B \text{ 时}).$$

笛卡尔积的性质

命题 1.1.1

1. 对任意集合 A,有 $A\times\emptyset=\emptyset, \emptyset\times A=\emptyset$.
2. 一般地说,笛卡儿积运算不满足交换律,即
$$A\times B\neq B\times A \quad (\text{当 } A\neq\emptyset\wedge B\neq\emptyset\wedge A\neq B \text{ 时}).$$
3. 笛卡儿积运算不满足结合律,即
$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (\text{当 } A\neq\emptyset\wedge B\neq\emptyset\wedge C\neq\emptyset \text{ 时}).$$

笛卡尔积的性质

命题 1.1.1

1. 对任意集合 A,有 $A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$.
2. 一般地说,笛卡儿积运算不满足交换律,即
$$A \times B \neq B \times A \quad (\text{当 } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B \text{ 时}).$$
3. 笛卡儿积运算不满足结合律,即
$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad (\text{当 } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset \text{ 时}).$$
4. 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律,即
$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\ (B \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A), \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C), \\ (B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A). \end{aligned}$$

笛卡尔积的性质

命题 1.1.1

1. 对任意集合 A,有 $A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$.
2. 一般地说,笛卡儿积运算不满足交换律,即
$$A \times B \neq B \times A \quad (\text{当 } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B \text{ 时}).$$
3. 笛卡儿积运算不满足结合律,即
$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad (\text{当 } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset \text{ 时}).$$
4. 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律,即
$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\ (B \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A), \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C), \\ (B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A). \end{aligned}$$
5. 若 $A \subseteq C, B \subseteq D$,则 $A \times B \subseteq C \times D$.

笛卡尔积的性质(续)

证明.

这里只证明 (4) 中第一个等式,即 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

任取 $\langle x, y \rangle$,若 $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$,则有 $x \in A, y \in B \cup C$,即 $x \in A, y \in B$ 或 $x \in A, y \in C$,亦即 $\langle x, y \rangle \in A \times B$ 或 $\langle x, y \rangle \in A \times C$. 于是有 $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$, 故 $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

笛卡尔积的性质(续)

证明.

这里只证明 (4) 中第一个等式,即 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
任取 $\langle x, y \rangle$,若 $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$,则有 $x \in A, y \in B \cup C$,即 $x \in A, y \in B$ 或 $x \in A, y \in C$,亦即 $\langle x, y \rangle \in A \times B$ 或 $\langle x, y \rangle \in A \times C$. 于是有 $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$, 故 $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.
反过来,对任意 $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$,我们有 $\langle x, y \rangle \in A \times B$ 或 $\langle x, y \rangle \in A \times C$,从而知 $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$,故 $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.
综上,我们证明了 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. $\square$

笛卡尔积的性质(续)

注 1.1.1

性质 (5) 的证明和性质 (4) 类似,该证明留给读者思考.

注意性质 (5) 的逆命题一般不成立,即假设 $A \times B \subseteq C \times D$,未必有 $A \subseteq C, B \subseteq D$. 我们分以下情况讨论.

笛卡尔积的性质(续)

注 1.1.1

性质 *(5)* 的证明和性质 *(4)* 类似,该证明留给读者思考.

注意性质 *(5)* 的逆命题一般不成立,即假设 $A \times B \subseteq C \times D$,未必有 $A \subseteq C, B \subseteq D$. 我们分以下情况讨论.

1. 当 $A = B = \emptyset$ 时,显然有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立.

笛卡尔积的性质(续)

注 1.1.1

性质 *(5)* 的证明和性质 *(4)* 类似,该证明留给读者思考.
注意性质 *(5)* 的逆命题一般不成立,即假设 $A \times B \subseteq C \times D$,未必有 $A \subseteq C, B \subseteq D$. 我们分以下情况讨论.

1. 当 $A = B = \emptyset$ 时,显然有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立.
2. 当 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 时,也有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立. 事实上,对任意 $x \in A$,由于 $B \neq \emptyset$,所以必存在 $y \in B$ 使得 $\langle x, y \rangle \in A \times B \subseteq C \times D$,即 $\langle x, y \rangle \in C \times D$,故 $x \in C, y \in D$,于是有 $A \subseteq C$. 同理可证 $B \subseteq D$.

笛卡尔积的性质(续)

注 1.1.1

性质 *(5)* 的证明和性质 *(4)* 类似,该证明留给读者思考.

注意性质 *(5)* 的逆命题一般不成立,即假设 $A \times B \subseteq C \times D$,未必有 $A \subseteq C, B \subseteq D$. 我们分以下情况讨论.

1. 当 $A = B = \emptyset$ 时,显然有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立.
2. 当 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 时,也有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立. 事实上,对任意 $x \in A$,由于 $B \neq \emptyset$,所以必存在 $y \in B$ 使得 $\langle x, y \rangle \in A \times B \subseteq C \times D$,即 $\langle x, y \rangle \in C \times D$,故 $x \in C, y \in D$,于是有 $A \subseteq C$. 同理可证 $B \subseteq D$.
3. 当 $A = \emptyset$ 而 $B \neq \emptyset$ 时,有 $A \subseteq C$ 成立,但不一定有 $B \subseteq D$ 成立. 可以考虑反例:$A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{3\}, D = \{4\}$.

笛卡尔积的性质(续)

注 1.1.1

性质 *(5)* 的证明和性质 *(4)* 类似，该证明留给读者思考.

注意性质 *(5)* 的逆命题一般不成立，即假设 $A \times B \subseteq C \times D$，未必有 $A \subseteq C, B \subseteq D$. 我们分以下情况讨论.

1. 当 $A = B = \emptyset$ 时，显然有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立.
2. 当 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 时，也有 $A \subseteq C$ 和 $B \subseteq D$ 成立. 事实上，对任意 $x \in A$，由于 $B \neq \emptyset$，所以必存在 $y \in B$ 使得 $\langle x, y \rangle \in A \times B \subseteq C \times D$，即 $\langle x, y \rangle \in C \times D$，故 $x \in C, y \in D$，于是有 $A \subseteq C$. 同理可证 $B \subseteq D$.
3. 当 $A = \emptyset$ 而 $B \neq \emptyset$ 时，有 $A \subseteq C$ 成立，但不一定有 $B \subseteq D$ 成立. 可以考虑反例：$A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{3\}, D = \{4\}$.
4. 当 $A \neq \emptyset$ 而 $B = \emptyset$ 时，有 $B \subseteq D$ 成立，不一定有 $A \subseteq C$ 成立. 反例略.

例 1.1.2

设 $A = \{1, 2\}$,求 $P(A) \times A$.

例 1.1.2

设 $A=\{1,2\}$,求 $P(A)\times A$.

解

易知 $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,故

$$\begin{aligned}P(A)\times A=&\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\times\{1,2\}\\=&\{\langle\emptyset,1\rangle,\langle\emptyset,2\rangle,\langle\{1\},1\rangle,\langle\{1\},2\rangle,\\&\langle\{2\},1\rangle,\langle\{2\},2\rangle,\langle\{1,2\},1\rangle,\langle\{1,2\},2\rangle\}.\end{aligned}$$

$\square$

例 1.1.3

设 A, B, C, D 为任意集合,判断下列陈述是否正确,并说明理由.

1. 若 $A \times B = A \times C$,则 $B = C$.
2. $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$.
3. 若 $A = B, C = D$,则 $A \times C = B \times D$.
4. 存在集合 A,使得 $A \subseteq A \times A$.

例 1.1.3

设 A, B, C, D 为任意集合，判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 若 $A \times B = A \times C$，则 $B = C$.
2. $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$.
3. 若 $A = B, C = D$，则 $A \times C = B \times D$.
4. 存在集合 A，使得 $A \subseteq A \times A$.

解

1. 不一定正确，考虑反例 $A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{2\}$，此时有 $A \times B = \emptyset = A \times C$，但 $B \neq C$.
2. 不一定正确. 例如，当 $A = B = \{1\}, C = \{2\}$ 时有
$$A - (B \times C) = \{1\} - \{\langle 1, 2\rangle\} = \{1\},$$
$$(A - B) \times (A - C) = \emptyset \times \{1\} = \emptyset$$
3. 正确. 由等量代入的原理可证.
4. 正确. 当 $A = \emptyset$ 时，$A \subseteq A \times A$ 成立.

2.2 二元关系

定义 1.2.1

如果一个集合满足以下条件之一:

1. 集合非空,且它的元素都是有序对;
2. 集合是空集.

那么称该集合为一个 *二元关系* ,记作 R. 二元关系也可简称为 *关系* . 对于二元关系 R,若 $\langle x, y\rangle \in R$,则记作 xRy;若 $\langle x, y\rangle \notin R$,则记作 $x \not R y$.

2.2 二元关系

定义 1.2.1

如果一个集合满足以下条件之一:

1. 集合非空,且它的元素都是有序对;
2. 集合是空集.

那么称该集合为一个 二元关系 ,记作 R. 二元关系也可简称为 关系 . 对于二元关系 R,若 $\langle x, y\rangle \in R$,则记作 xRy;若 $\langle x, y\rangle \notin R$,则记作 $x \not R y$.

例如,$R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle a, b\rangle\}$, $R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, a, b\}$,则 R_1 是二元关系;
R_2 不是二元关系,只是一个集合,除非将 a 和 b 定义为有序对.
根据上面的记法可以写 $1R_1 2, aR_1 b, b \not R_1 a$ 等.

二元关系(续)

定义 1.2.2

设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作*从 A 到 B 的二元关系*, 特别当 $A = B$ 时称作*A 上的二元关系*.

二元关系(续)

定义 1.2.2

设 A, B 为集合,$A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作*从 A 到 B 的二元关系*,特别当 $A = B$ 时称作*A 上的二元关系*.

例如,取 $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3\}$,那么

$$R_1 = \{\langle 0, 2\rangle\}, R_2 = A \times B, R_3 = \emptyset, R_4 = \{\langle 0, 1\rangle\}$$

都是从 A 到 B 的二元关系,而 R_3 和 R_4 同时也是 A 上的二元关系.

二元关系(续)

定义 1.2.2

设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作*从 A 到 B 的二元关系*, 特别当 $A = B$ 时称作 *A 上的二元关系*.

例如, 取 $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3\}$, 那么

$$R_1 = \{\langle 0, 2\rangle\}, R_2 = A \times B, R_3 = \emptyset, R_4 = \{\langle 0, 1\rangle\}$$

都是从 A 到 B 的二元关系, 而 R_3 和 R_4 同时也是 A 上的二元关系.
如果 $|A| = n$, 那么 $|A \times A| = n^2$, $A \times A$ 的子集就有 2^{n^2} 个, 所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

特殊的二元关系

对于任何集合 A,空集 $\emptyset$ 是 $A \times A$ 的子集,称作 A 上的空关系. 下面定义 A 上的全域关系 E_A 和恒等关系 I_A.

定义 1.2.3

对任意集合 A, A 上的全域关系 E_A 和恒等关系 I_A 分别定义为

$$E_A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \land y \in A\} = A \times A,$$
$$I_A = \{\langle x, x\rangle | x \in A\}.$$

特殊的二元关系

对于任何集合 A,空集 $\emptyset$ 是 $A \times A$ 的子集,称作 A 上的空关系. 下面定义 A 上的全域关系 E_A 和恒等关系 I_A.

定义 1.2.3

对任意集合 A,A 上的全域关系 E_A 和恒等关系 I_A 分别定义为

$$E_A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in A\} = A \times A,$$
$$I_A = \{\langle x, x\rangle | x \in A\}.$$

例如,若 $A = \{1, 2\}$,则

$$E_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\},$$
$$I_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}.$$

特殊的二元关系(续)

设 A 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, A 上的小于等于关系 L_A 定义为
$L_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \leqslant y\}$.

特殊的二元关系(续)

设 A 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, A 上的小于等于关系 L_A 定义为
$L_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \leqslant y\}$.
设 A 是非零整数集 $\mathbb{Z} - \{0\}$ 的子集, A 上的整除关系 D_A 定义为
$D_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x|y\}$, 其中 “$|$” 表示 x 是 y 的因子.

特殊的二元关系(续)

设 A 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集,A 上的小于等于关系 L_A 定义为
$L_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \leqslant y\}$.
设 A 是非零整数集 $\mathbb{Z} - \{0\}$ 的子集,A 上的整除关系 D_A 定义为
$D_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x|y\}$, 其中 "|" 表示 x 是 y 的因子.
设 $\mathcal{A}$ 是一个集族,$\mathcal{A}$ 上的包含关系 $R_\subseteq$ 定义为
$R_\subseteq = \{\langle X, Y\rangle | X, Y \in \mathcal{A}, X \subseteq Y\}$.

特殊的二元关系(续)

设 A 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集,A 上的小于等于关系 L_A 定义为

$L_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \leqslant y\}$.

设 A 是非零整数集 $\mathbb{Z} - \{0\}$ 的子集,A 上的整除关系 D_A 定义为

$D_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x|y\}$, 其中 "|" 表示 x 是 y 的因子.

设 $\mathcal{A}$ 是一个集族,$\mathcal{A}$ 上的包含关系 $R_\subseteq$ 定义为

$R_\subseteq = \{\langle X, Y\rangle | X, Y \in \mathcal{A}, X \subseteq Y\}$.

例如,当 $A = \{1, 2, 3\}$,有

$$L_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\},$$
$$D_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}.$$

特殊的二元关系(续)

设 A 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, A 上的小于等于关系 L_A 定义为
$L_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \leqslant y\}$.
设 A 是非零整数集 $\mathbb{Z} - \{0\}$ 的子集, A 上的整除关系 D_A 定义为
$D_A = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x|y\}$, 其中 "|" 表示 x 是 y 的因子.
设 $\mathcal{A}$ 是一个集族, $\mathcal{A}$ 上的包含关系 $R_{\subseteq}$ 定义为
$R_{\subseteq} = \{\langle X, Y\rangle | X, Y \in \mathcal{A}, X \subseteq Y\}$.
例如, 当 $A = \{1, 2, 3\}$, 有

$$\begin{aligned} L_A &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}, \\ D_A &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}. \end{aligned}$$

考虑 $B = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 则 $\mathcal{A}$ 上的包含关系为

$$\begin{aligned} R_{\subseteq} = \{&\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle\emptyset,\{a\}\rangle, \langle\emptyset,\{b\}\rangle, \langle\emptyset,\{a,b\}\rangle, \langle\{a\},\{a\}\rangle, \langle\{a\},\{a,b\}\rangle, \\ &\langle\{b\},\{b\}\rangle, \langle\{b\},\{a,b\}\rangle, \langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle\}. \end{aligned}$$

类似地, 还可以定义大于等于关系、小于关系、大于关系、真包含关系等.

例 1.2.1

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 下面各式定义的 R 都是 A 上的关系, 试用列举法表示 R.

1. $R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x$ 是 y 的倍数$\}$.
2. $R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, (x - y)^2 \in A\}$.
3. $R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, \frac{x}{y}$ 是素数$\}$.
4. $R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \neq y\}$.

例 1.2.1

设 $A=\{1,2,3,4\}$，下面各式定义的 R 都是 A 上的关系，试用列举法表示 R.

1. $R=\{\langle x,y\rangle | x,y\in A, x$ 是 y 的倍数$\}$.
2. $R=\{\langle x,y\rangle | x,y\in A,(x-y)^2\in A\}$.
3. $R=\{\langle x,y\rangle | x,y\in A,\frac{x}{y}$ 是素数$\}$.
4. $R=\{\langle x,y\rangle | x,y\in A,x\neq y\}$.

解

1. $R=\{\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$.
2. $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$.
3. $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.
4. $R=E_A-I_A=$
$\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$.

□

二元关系的表示

表示一个二元关系的常见方法有 3 种:集合表达式、关系矩阵和关系图. 例 1.2.1 中的关系就是用集合表达式给出的. 对于有穷集 A 上的关系还可以用其他两种方式来表示.

设 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, R 是 A 上的关系.

对所有 $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 令

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_i R x_j, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

则

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

是 R 的关系矩阵, 记作 $\boldsymbol{M}_R$.

二元关系的表示

表示一个二元关系的常见方法有 3 种:集合表达式、关系矩阵和关系图. 例 1.2.1 中的关系就是用集合表达式给出的. 对于有穷集 A 上的关系还可以用其他两种方式来表示.

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, R 是 A 上的关系.

对所有 $i,j=1,2,\cdots,n$,令

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } x_iRx_j,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

则

$$(r_{ij})=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{pmatrix}$$

是 R 的关系矩阵,记作 $\boldsymbol{M}_R$.

例如, $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$, 则 R 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

二元关系的表示(续)

设 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,$R$ 是 A 上的关系,R 的关系图,记作 G_R,如下构造:G_R 有 n 个顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$;如果 $\langle x_i, x_j \rangle \in R$,那么在 G_R 中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

在上面的例子 $A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$ 中,R 的关系图 G_R 如图 1.2.1 所示.

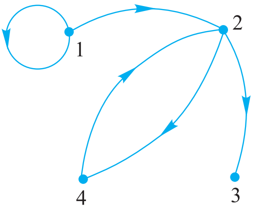


图 1.2.1

不难发现,对于有穷集 A 上的关系而言,关系矩阵 M_R、关系图 G_R 分别与关系 R 是一一对应的.

2.3 关系的运算

定义 1.3.1

设 R 是二元关系.

1. R 中所有有序对的第一元素构成的集合称作 R 的 定义域 ,记作 $\operatorname{dom} R$,形式化表示为 $\operatorname{dom} R = \{x | \exists y \text{ 使得} \langle x, y\rangle \in R\}$.
2. R 中所有有序对的第二元素构成的集合称作 R 的 值域 ,记作 $\operatorname{ran} R$,形式化表示为 $\operatorname{ran} R = \{y | \exists x \text{ 使得} \langle x, y\rangle \in R\}$.
3. R 的定义域和值域的并集称作 R 的 域 ,记作 $\operatorname{fld} R$,形式化表示为

$$\operatorname{fld} R = \operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R.$$

2.3 关系的运算

定义 1.3.1

设 R 是二元关系.

1. R 中所有有序对的第一元素构成的集合称作 R 的定义域,记作 $\operatorname{dom} R$,形式化表示为 $\operatorname{dom} R = \{x | \exists y \text{ 使得} \langle x, y\rangle \in R\}$.
2. R 中所有有序对的第二元素构成的集合称作 R 的值域,记作 $\operatorname{ran} R$,形式化表示为 $\operatorname{ran} R = \{y | \exists x \text{ 使得} \langle x, y\rangle \in R\}$.
3. R 的定义域和值域的并集称作 R 的域,记作 $\operatorname{fld} R$,形式化表示为

$$\operatorname{fld} R = \operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R.$$

例 1.3.1

设 $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$,则

$$\operatorname{dom} R = \{1, 2, 4\}, \operatorname{ran} R = \{2, 3, 4\},$$
$$\operatorname{fld} R = \{1, 2, 3, 4\}.$$

关系的运算(续)

定义 1.3.2

设 R 为二元关系,R 的逆关系 ,简称为 R 的逆,记作 R^{-1},定义为

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in R\}.$$

关系的运算(续)

定义 1.3.2

设 R 为二元关系,R 的逆关系,简称为 R 的逆,记作 R^{-1},定义为

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in R\}.$$

定义 1.3.3

设 F 和 G 均为二元关系,F 和 G 的复合(也称作 G 对 F 的右复合),记作 $F \circ G$,定义为

$$F \circ G = \{\langle x, z\rangle | \exists y \text{ 使得} \langle x, y\rangle \in F, \langle y, z\rangle \in G\}.$$

关系的运算(续)

定义 1.3.2

设 R 为二元关系,R 的逆关系,简称为 R 的逆,记作 R^{-1},定义为

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in R\}.$$

定义 1.3.3

设 F 和 G 均为二元关系,F 和 G 的复合(也称作 G 对 F 的右复合),记作 $F \circ G$,定义为

$$F \circ G = \{\langle x, z\rangle | \exists y \text{ 使得} \langle x, y\rangle \in F, \langle y, z\rangle \in G\}.$$

例 1.3.2

设 $F = \{\langle 3, 3\rangle, \langle 6, 2\rangle\}, G = \{\langle 2, 3\rangle\}$,则

$$F^{-1} = \{\langle 3, 3\rangle, \langle 2, 6\rangle\},$$
$$F \circ G = \{\langle 6, 3\rangle\}, G \circ F = \{\langle 2, 3\rangle\}.$$

类似地，也可以定义关系的左复合，即

$$F \circ G = \{\langle x, z\rangle | \exists y \text{ 使得} \langle x, y\rangle \in G \wedge \langle y, z\rangle \in F\}.$$

如果把二元关系看作一种作用，$\langle x, y\rangle \in R$ 可以解释为 x 通过 R 的作用变到 y，那么右复合 $F \circ G$ 与左复合 $F \circ G$ 都表示两个作用的连续发生．所不同的是：右复合 $F \circ G$ 表示在右边的 G 是复合到 F 上的第二步作用，而左复合 $F \circ G$ 恰好相反，其中 F 是复合到 G 上的第二步作用．本书采用右复合的定义．

定义 1.3.4

设 R 是一个二元关系，A 是一个集合．

1. R 在 A 上的限制，记作 $R \upharpoonright A$，定义为

$$R \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle | \langle x, y\rangle \in R, x \in A\}.$$

2. A 在 R 下的像，记作 $R[A]$，定义为

$$R[A] = \operatorname{ran}(R \upharpoonright A).$$

不难看出，R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 是 R 的子关系，而 A 在 R 下的像 $R[A]$ 是 $\operatorname{ran} R$ 的子集．

关系的运算(续)

例 1.3.3

设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$, 则

$$
\begin{aligned}
& R \restriction \{1\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}, \\
& R \restriction \emptyset=\emptyset, \\
& R \restriction \{2,3\}=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}, \\
& R[\{1\}]=\{2,3\}, \\
& R[\emptyset]=\emptyset, \\
& R[\{3\}]=\{2\}.
\end{aligned}
$$

□

关系运算的性质

定理 1.3.1

设 F 是任意二元关系，则

1. $(F^{-1})^{-1} = F$.
2. $\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F, \operatorname{ran} F^{-1} = \operatorname{dom} F$.

关系运算的性质

定理 1.3.1

设 F 是任意二元关系，则

1. $(F^{-1})^{-1} = F$.
2. $\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F, \operatorname{ran} F^{-1} = \operatorname{dom} F$.

证明.

1. 任取 $\langle x, y\rangle$，由逆关系的定义知，$\langle x, y\rangle \in (F^{-1})^{-1}$ 当且仅当 $\langle y, x\rangle \in F^{-1}$，后者等价于 $\langle x, y\rangle \in F$. 因此有 $(F^{-1})^{-1} = F$.
2. 我们仅证 $\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F$；$\operatorname{ran} F^{-1} = \operatorname{dom} F$ 的证明类似.
   任取 x，有 $x \in \operatorname{dom} F^{-1}$ 当且仅当存在 y，使得 $\langle x, y\rangle \in F^{-1}$，即 $\langle y, x\rangle \in F$，这等价于 $x \in \operatorname{ran} F$. 故有 $\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F$.

□

关系运算的性质(续)

定理 1.3.2

设 F, G, H 是任意的关系，则

1. $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.
2. $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

关系运算的性质(续)

定理 1.3.2

设 F, G, H 是任意的关系,则

1. $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.
2. $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

证明.

(1) 对任意 $\langle x, y\rangle$,若 $\langle x, y\rangle \in (F \circ G) \circ H$,则存在 t,使得 $\langle x, t\rangle \in F \circ G$ 且 $\langle t, y\rangle \in H$. 由前者知,存在 s,使得 $\langle x, s\rangle \in F$ 且 $\langle s, t\rangle \in G$. 由 $\langle s, t\rangle \in G, \langle t, y\rangle \in H$ 得 $\langle s, y\rangle \in G \circ H$. 又因为 $\langle x, s\rangle \in F$, 所以 $\langle x, y\rangle \in F \circ (G \circ H)$. 这表明 $(F \circ G) \circ H \subseteq F \circ (G \circ H)$. 反包含类似可证,所以 $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

(2) 对任意 $\langle x, y\rangle$,我们有 $\langle x, y\rangle \in (F \circ G)^{-1}$ 当且仅当 $\langle y, x\rangle \in F \circ G$,即存在 t,使得 $\langle y, t\rangle \in F$ 且 $\langle t, x\rangle \in G$,亦即存在 t,使得 $\langle x, t\rangle \in G^{-1}$ 且 $\langle t, y\rangle \in F^{-1}$. 这等价于 $\langle x, y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$. 故 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$ 成立. □

关系运算的性质(续)

定理 1.3.3

设 R 为 A 上的关系,则

$$R \circ I_A = R = I_A \circ R.$$

关系运算的性质(续)

定理 1.3.3

设 R 为 A 上的关系,则

$$R \circ I_A = R = I_A \circ R.$$

证明.

我们仅证 $R \circ I_A = R$;同理可证 $I_A \circ R = R$.

对任意 $\langle x, y \rangle$,若 $\langle x, y \rangle \in R \circ I_A$,则存在 t,使得 $\langle x, t \rangle \in R$ 且 $\langle t, y \rangle \in I_A$. 由恒等关系的定义,得 $t = y$,故 $\langle x, y \rangle \in R$,于是有 $F \circ I_A \subseteq R$.

反过来,对任意 $\langle x, y \rangle \in R$,自然有 $\langle y, y \rangle \in I_A$,因此 $\langle x, y \rangle \in R \circ I_A$,这就证明了 $R \subseteq R \circ I_A$.

综上,我们证明了 $R \circ I_A = R$. □

关系运算的性质(续)

定理 1.3.4

设 F, G, H 为任意关系，则

1. $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$.
2. $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$.
3. $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$.
4. $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$.

关系运算的性质(续)

定理 1.3.4

设 F, G, H 为任意关系，则

1. $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$.
2. $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$.
3. $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$.
4. $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$.

证明.

我们仅证 3. 对任意 $\langle x, y\rangle \in F \circ (G \cap H)$，由定义，存在 t，使得 $\langle x, t\rangle \in F$ 且 $\langle t, y\rangle \in G \cap H$，即存在 t，使得 $\langle x, t\rangle \in F$，$\langle t, y\rangle \in G$ 且 $\langle t, y\rangle \in H$. 由此可得 $\langle x, y\rangle \in F \circ G$ 且 $\langle x, y\rangle \in F \circ H$，这就证明了 $\langle x, y\rangle \in F \circ G \cap F \circ H$. 所以有 $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$. □

关系运算的性质(续)

由数学归纳法不难证明，定理 1.3.4 的结论对于有限多个关系的并和交也是成立的，即有

$$
\begin{aligned}
R \circ (R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n) &= R \circ R_1 \cup R \circ R_2 \cup \cdots \cup R \circ R_n, \\
(R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n) \circ R &= R_1 \circ R \cup R_2 \circ R \cup \cdots \cup R_n \circ R, \\
R \circ (R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) &\subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2 \cap \cdots \cap R \circ R_n, \\
(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \circ R &\subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R \cap \cdots \cap R_n \circ R.
\end{aligned}
$$

定理 1.3.5

设 F 为关系, A, B 为集合, 则

1. $F \restriction (A \cup B) = F \restriction A \cup F \restriction B.$
2. $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B].$
3. $F \restriction (A \cap B) = F \restriction A \cap F \restriction B.$
4. $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B].$

定理 1.3.5

设 F 为关系, A, B 为集合, 则

1. $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.
2. $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$.
3. $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$.
4. $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

证明.

我们仅证 (1) 和 (4), 其余留作练习.

(1) 对任意 $\langle x, y\rangle$, 由定义知, 若 $\langle x, y\rangle \in F \upharpoonright (A \cup B)$, 则有 $\langle x, y\rangle \in F$ 且 $x \in A \cup B$. 进一步, 分两种情况讨论: 如果 $x \in A$, 那么有 $\langle x, y\rangle \in F \upharpoonright A$; 如果 $x \in B$, 那么有 $\langle x, y\rangle \in F \upharpoonright B$. 因此, 总有 $\langle x, y\rangle \in F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$, 故 $F \upharpoonright (A \cup B) \subseteq F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$. 反过来, 易证 $F \upharpoonright A \subseteq F \upharpoonright (A \cup B)$ 和 $F \upharpoonright B \subseteq F \upharpoonright (A \cup B)$, 因此有 $F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B \subseteq F \upharpoonright (A \cup B)$, 所以有 $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$. $\square$

定理1.3.5(续)

设 F 为关系, A, B 为集合, 则

1. $F \restriction (A \cup B) = F \restriction A \cup F \restriction B$.
2. $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$.
3. $F \restriction (A \cap B) = F \restriction A \cap F \restriction B$.
4. $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

证明.

接着证明 (4).

(4) 对任意 $y \in F[A \cap B]$, 由定义知, 存在 x, 使得 $\langle x, y \rangle \in F$ 且 $x \in A \cap B$. 由 $\langle x, y \rangle \in F$ 和 $x \in A$ 知 $y \in F[A]$; 而由 $\langle x, y \rangle \in F$ 和 $x \in B$ 知 $y \in F[B]$. 因此有 $y \in F[A] \cap F[B]$, 所以有 $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$. □

关系的幂运算

在右复合运算的基础上,我们可以如下定义关系的幂运算.

定义 1.3.5

设 R 为 A 上的关系,n 为自然数,则 R 的 *n 次幂 R^n* 定义为

1. $R^0 = \{\langle x, x\rangle | x \in A\} = I_A$;
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$.

由以上定义可知,对于 A 上的任何关系 R_1 和 R_2 都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A.$$

也就是说,A 上任何关系的 0 次幂都相等,都等于 A 上的恒等关系 I_A.
此外,对 A 上的任何关系 R,都有 $R^1 = R$,因为

$$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R.$$

关系的幂运算(续)

给定 A 上的关系 R 和自然数 n,怎样计算 R^n 呢? 若 n 是 0 或 1,则结果是很简单的.

下面考虑 $n \geqslant 2$ 的情况. 如果 R 是用集合表达式给出的,那么可以通过 $n-1$ 次右复合计算得到 R^n.

关系的幂运算(续)

给定 A 上的关系 R 和自然数 n，怎样计算 R^n 呢? 若 n 是 0 或 1，则结果是很简单的.

下面考虑 $n \geqslant 2$ 的情况. 如果 R 是用集合表达式给出的，那么可以通过 $n-1$ 次右复合计算得到 R^n.

如果 R 是用关系矩阵 $\boldsymbol{M}$ 给出的，那么 R^n 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}^n$，即 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 之积. 与通常矩阵乘法不同的是，其中的相加是逻辑加，即

$$1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0.$$

关系的幂运算(续)

给定 A 上的关系 R 和自然数 n,怎样计算 R^n 呢? 若 n 是 0 或 1,则结果是很简单的.

下面考虑 $n \geqslant 2$ 的情况. 如果 R 是用集合表达式给出的,那么可以通过 $n-1$ 次右复合计算得到 R^n.

如果 R 是用关系矩阵 $\boldsymbol{M}$ 给出的,那么 R^n 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}^n$,即 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 之积. 与通常矩阵乘法不同的是,其中的相加是逻辑加,即

$$1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0.$$

如果 R 是用关系图 G 给出的,那么可以直接由图 G 得到 R^n 的关系图 G^n:G^n 的顶点集与 G 相同;考察 G 的每个顶点 x_i,若在 G 中从 x_i 出发经过 n 步长的路径到达顶点 x_j,则在 G^n 中加一条从 x_i 到 x_j 的边. 在把所有这样的边都找到以后,就得到图 G^n.

例 1.3.4

设 $A = \{a, b, c, d\}, R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$，求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示.

例 1.3.4

设 $A=\{a,b,c,d\}, R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示.

解

因为 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 R^2,R^3,R^4 的关系矩阵分别是

$$\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^3 = \boldsymbol{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^4 = \boldsymbol{M}^3\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{M}^4 = \boldsymbol{M}^2$,即 $R^4 = R^2$, 由此可以得到

$$R^2 = R^4 = R^6 = \cdots, \quad R^3 = R^5 = R^7 = \cdots.$$

而 R^0,即 I_A 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

至此,R 各次幂的关系矩阵就都得到了.

$A = \{a, b, c, d\}, R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}.$

用关系图的方法得到 R^0, R^1, R^2, R^3 等的关系图如图 1.3.1 所示.

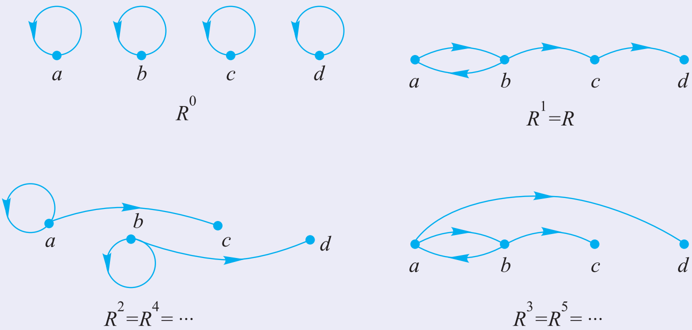


图 1.3.1

关系幂运算的性质

定理 1.3.6

设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在不相等的自然数 s 和 t，使得 $R^s = R^t$.

关系幂运算的性质

定理 1.3.6

设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在不相等的自然数 s 和 t，使得 $R^s = R^t$.

证明.

因为 R 为 A 上的关系，所以对任意自然数 k，R^k 都是 $A \times A$ 的子集. 又知 $|A \times A| = n^2, |P(A \times A)| = 2^{n^2}$，即 $A \times A$ 的不同的子集仅 2^{n^2} 个. 当列出 R 的各次幂 $R^0, R^1, R^2, \cdots, R^{2^{n^2}}, \cdots$ 等时，由鸽巢原理，必存在不相等的自然数 s 和 t，使得 $R^s = R^t$. □

该定理说明有穷集上只有有穷多个不同的二元关系. 当 t 足够大时，R^t 必与某个 $R^s, s < t$, 相等，如例 1.3.4 中的 $R^4 = R^2$.

定理 1.3.7

设 R 为 A 上的关系, $m, n \in \mathbb{N}$, 则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.
2. $(R^m)^n = R^{mn}$.

定理 1.3.7

设 R 为 A 上的关系, $m, n \in \mathbb{N}$, 则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.
2. $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明.

(1) 对于任意给定的 $m \in \mathbb{N}$, 对 n 用归纳法. 若 $n = 0$, 则有

$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$.

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n} \circ R = R^{m+n+1}$. 所以对一切 $m, n \in \mathbb{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

(2) 对于任意给定的 $m \in \mathbb{N}$, 对 n 用归纳法. 若 $n = 0$, 则有

$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$.

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = R^{mn} \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$. 所以对一切 $m, n \in \mathbb{N}$, 均有 $(R^m)^n = R^{mn}$. □

定理 1.3.8

设 R 为 A 上的关系，若存在自然数 $s, t, s < t$, 使得 $R^s = R^t$，则

1. 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$.
2. 对任何 $k, i \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t - s$.
3. 令 $S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q \in \mathbb{N}$ 有 $R^q \in S$.

定理 1.3.8

设 R 为 A 上的关系,若存在自然数 $s, t, s < t$, 使得 $R^s = R^t$,则

1. 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$.
2. 对任何 $k, i \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$,其中 $p = t - s$.
3. 令 $S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$,则对于任意的 $q \in \mathbb{N}$ 有 $R^q \in S$.

证明.

(1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$.

(2) 对 k 归纳. 若 $k = 0$,则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$.

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$,其中 $p = t - s$,则 $R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p = R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$. 由归纳法命题成立.

(3) 任取 $q \in \mathbb{N}$,若 $q < t$,则显然有 $R^q \in S$. 若 $q \geqslant t$,则存在自然数 k 和 i 使得 $q = s + kp + i$, 其中 $0 \leqslant i \leqslant p - 1$. 于是 $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$. 而 $s + i \leqslant s + p - 1 = s + t - s - 1 = t - 1$, 这就证明了 $R^q \in S$. □

通过定理 1.3.8 可以看出，有穷集 A 上的关系 R 的幂序列 $R^0, R^1, R^2, \cdots$ 等是一个呈现周期性变化的序列. 就像正弦函数一样，利用它的周期性可以将 R 的高次幂化简为 R 的低次幂.

例 1.3.5

设 $A = \{a, b, d, e, f\}, R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle, \langle f, d\rangle\}$. 求出最小的自然数 m 和 n，使得 $m < n$ 且 $R^m = R^n$.

通过定理 1.3.8 可以看出，有穷集 A 上的关系 R 的幂序列 $R^0, R^1, R^2, \cdots$ 等是一个呈现周期性变化的序列. 就像正弦函数一样，利用它的周期性可以将 R 的高次幂化简为 R 的低次幂.

例 1.3.5

设 $A = \{a, b, d, e, f\}, R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle, \langle f, d\rangle\}$. 求出最小的自然数 m 和 n，使得 $m < n$ 且 $R^m = R^n$.

解

由 R 的定义可以看出 A 中的元素可以分成两组，即 $\{a, b\}$ 和 $\{d, e, f\}$. 它们在 R 的右复合运算下有下述变化规律.

$$a \to b \to a \to b \to \cdots$$

$$d \to e \to f \to d \to e \to f \cdots$$

对于 a 或 b，每个元素的变化周期是 2. 对于 d, e, f，每个元素的变化周期是 3. 因此必有 $R^m = R^{m+6}$，其中 6 是 2 和 3 的最小公倍数. 取 $m = 0, n = 6$ 即满足题目要求. □

2.4 关系的性质

关系的性质主要有以下 5 种：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性.

定义 1.4.1

设 R 为 A 上的关系.

1. 若对任意 $x \in A$，均有 $\langle x, x\rangle \in R$，则称 R 为 A 上的自反关系.
2. 若对任意 $x \in A$，均有 $\langle x, x\rangle \notin R$，则称 R 为 A 上的反自反关系.

例如，A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 都是 A 上的自反关系.
小于等于关系 L_A，整除关系 D_B 分别为 A 和 B 上的自反关系.
包含关系 $R_{\subseteq}$ 是给定集合族 $\mathcal{A}$ 上的自反关系.
而小于关系和真包含关系都是给定集合或集合族上的反自反关系.

自反关系

例 1.4.1

设 $A=\{1,2,3\}, R_1, R_2$ 和 R_3 是 A 上的关系，其中

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}, \\
R_2 &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle\}, \\
R_3 &= \{\langle 1,3\rangle\}.
\end{aligned}
$$

说明 R_1, R_2 和 R_3 是否为 A 上的自反关系和反自反关系.

自反关系

例 1.4.1

设 $A = \{1, 2, 3\}, R_1, R_2$ 和 R_3 是 A 上的关系，其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\},$$
$$R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\},$$
$$R_3 = \{\langle 1, 3\rangle\}.$$

说明 R_1, R_2 和 R_3 是否为 A 上的自反关系和反自反关系.

解

R_2 是自反的.

R_3 是反自反的.

R_1 既不是自反的也不是反自反的. □

对称关系

定义 1.4.2

设 R 为 A 上的关系.

1. 若对任意 $\langle x, y\rangle \in R$,均有 $\langle y, x\rangle \in R$,则称 R 为 A 上的*对称关系*.
2. 若 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, x\rangle \in R$ 时,必有 $x = y$,则称 R 为 A 上的*反对称关系*.

例如,A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 和空关系 $\emptyset$ 都是 A 上的对称关系.
而 I_A 和 $\emptyset$ 也是 A 的上反对称关系,但 E_A 一般不是 A 上的反对称关系,除非 A 为单元集或空集.

对称关系(续)

例 1.4.2

设 $A = \{1, 2, 3\}, R_1, R_2, R_3$ 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\},\\
R_2 &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\},\\
R_3 &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\},\\
R_4 &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}.
\end{aligned}$$

说明 R_1, R_2, R_3 和 R_4 是否为 A 上对称和反对称的关系.

对称关系(续)

例 1.4.2

设 $A = \{1, 2, 3\}, R_1, R_2, R_3$ 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}, \\
R_2 &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}, \\
R_3 &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}, \\
R_4 &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}.
\end{aligned}
$$

说明 R_1, R_2, R_3 和 R_4 是否为 A 上对称和反对称的关系.

解

R_1 既是对称的也是反对称的.

R_2 是对称的但不是反对称的.

R_3 是反对称的但不是对称的.

R_4 既不是对称的也不是反对称的.

定义 1.4.3

设 R 为 A 上的关系，若当 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,z\rangle \in R$ 时，必有 $\langle x,z\rangle \in R$，则称 R 为 A 上的*传递关系*.

例如，A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 和空关系 $\emptyset$ 都是 A 上的传递关系.
小于等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的传递关系.
小于关系和真包含关系仍旧是相应集合上的传递关系.

定义 1.4.3

设 R 为 A 上的关系，若当 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, z\rangle \in R$ 时，必有 $\langle x, z\rangle \in R$，则称 R 为 A 上的*传递关系*.

例如，A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 和空关系 $\emptyset$ 都是 A 上的传递关系.
小于等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的传递关系.
小于关系和真包含关系仍旧是相应集合上的传递关系.

例 1.4.3

设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2 和 R_3 是 A 上的关系，其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}, R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}, R_3 = \{\langle 1, 3\rangle\}.$$

说明 R_1, R_2 和 R_3 是否为 A 上的传递关系.

定义 1.4.3

设 R 为 A 上的关系,若当 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,z\rangle \in R$ 时,必有 $\langle x,z\rangle \in R$,则称 R 为 A 上的传递关系.

例如,A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 和空关系 $\emptyset$ 都是 A 上的传递关系.
小于等于关系,整除关系和包含关系也是相应集合上的传递关系.
小于关系和真包含关系仍旧是相应集合上的传递关系.

例 1.4.3

设 $A=\{1,2,3\}, R_1, R_2$ 和 R_3 是 A 上的关系,其中

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}, R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}, R_3=\{\langle 1,3\rangle\}.$$

说明 R_1, R_2 和 R_3 是否为 A 上的传递关系.

解

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系,R_2 不是 A 上的传递关系.

定理 1.4.1

设 R 为 A 上的关系，则

(1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$.

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$.

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$.

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

定理 1.4.1

设 R 为 A 上的关系,则

(1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$.

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$.

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$.

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

证明.

(1) 先证必要性. 设 R 在 A 上是自反的,则由定义,对任意 $x \in A$,均有 $\langle x, x \rangle \in R$,故 $I_A \subseteq R$.

下证充分性. 对任意 $x \in A$,有 $\langle x, x \rangle \in I_A \subseteq R$,即 $\langle x, x \rangle \in R$,因此 R 在 A 上是自反的.

定理1.4.1(续)

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$.

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$.

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

证明.

(2) 必要性(反证法). 假设 $R \cap I_A \neq \emptyset$,则必存在 $\langle x, y\rangle \in R \cap I_A$. 由于 I_A 是 A 上的恒等关系,从而有 $x \in A$ 且 $\langle x, x\rangle \in R$. 这与 R 在 A 上是反自反的矛盾.
充分性(反证法). 假设 R 在 A 上不是反自反的,则必存在 $x \in A$,使得 $\langle x, x\rangle \in R$,因此有 $\langle x, x\rangle \in R \cap I_A$,这与 $R \cap I_A = \emptyset$ 矛盾.
(3) 先证必要性. 对任意 $\langle x, y\rangle$,因为 R 在 A 上是对称的,所以 $\langle x, y\rangle \in R$ 当且仅当 $\langle y, x\rangle \in R$,后者等价于 $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$,所以 $R = R^{-1}$.
下证充分性. 任取 $\langle x, y\rangle$,由逆运算定义和 $R = R^{-1}$ 知,当 $\langle x, y\rangle \in R$ 时,有 $\langle y, x\rangle \in R^{-1} = R$,即 $\langle y, x\rangle \in R$,所以 R 在 A 上是对称的.

定理1.4.1(续)

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

证明.

(4) 先证必要性. 对任意 $\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$,有 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$,即有 $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R$. 因为 R 在 A 上是反对称的,所以必有 $x = y$,故 $\langle x, y\rangle \in I_A$,这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

下证充分性. 任取 $\langle x, y\rangle$,当 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, x\rangle \in R$ 时,有 $\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1} \subseteq I_A$,因此必然有 $x = y$,从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

(5) 先证必要性. 对任意 $\langle x, y\rangle \in R \circ R$,由定义,存在 t,使得 $\langle x, t\rangle \in R$ 且 $\langle t, y\rangle \in R$. 因为 R 在 A 上是传递的,所以有 $\langle x, y\rangle \in R$,这证明了 $R \circ R \subseteq R$.

下证充分性. 当 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, z\rangle \in R$ 时,有 $\langle x, z\rangle \in R \circ R \subseteq R$,即 $\langle x, z\rangle \in R$,所以 R 在 A 上是传递的.

例 1.4.4

设 A 是集合, R_1 和 R_2 是 A 上的关系, 证明:

1. 若 R_1, R_2 是自反的和对称的, 则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的和对称的.
2. 若 R_1 和 R_2 是传递的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

例 1.4.4

设 A 是集合，R_1 和 R_2 是 A 上的关系，证明：

1. 若 R_1, R_2 是自反的和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的和对称的.
2. 若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

证明.

(1) 由于 R_1 和 R_2 是 A 上的自反关系，故有 $I_A \subseteq R_1$ 和 $I_A \subseteq R_2$，从而得到 $I_A \subseteq R_1 \cup R_2$. 根据定理 1.4.1 可知 $R_1 \cup R_2$ 在 A 上是自反的.
再由 R_1 和 R_2 的对称性有 $R_1 = R_1^{-1}$ 和 $R_2 = R_2^{-1}$. 根据本章习题第 20 题的结果有 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$，从而证明了 $R_1 \cup R_2$ 也是对称的.
(2) 由 R_1 和 R_2 的传递性有 $R_1 \circ R_1 \subseteq R_1$ 和 $R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$. 再使用定理 1.3.4 得

$$
\begin{aligned}
(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2) &\subseteq R_1 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_2 \\
&\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \ \text{（将前面的包含式代入）} \\
&\subseteq R_1 \cap R_2,
\end{aligned}
$$

从而证明了 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的传递关系. □

关系的性质与关系矩阵、关系图

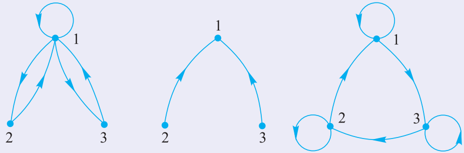
关系的性质不仅反映在它的集合表达式上，也明显地反映在它的关系矩阵和关系图上. 表 1.4.1 列出了 5 种性质在关系矩阵和关系图中的特点.

表 1.4.1

表示	性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$ 且 $i \neq j$，则 $r_{ji} = 0$	对 $\boldsymbol{M}^2$ 中 1 所在的位置，$\boldsymbol{M}$ 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，那么一定是一对方向相反的边（无单边）	如果两个顶点之间有边，那么一定是一条有向边（无双向边）	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，那么从 x_i 到 x_k 也有边

例 1.4.5

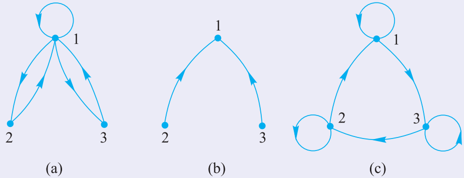
判断下图中关系的性质,并说明理由.



(a) (b) (c)

例 1.4.5

判断下图中关系的性质，并说明理由.



解

(a) 是对称的，因为无单向边. 不是自反的也不是反自反的，因为有的顶点有环，有的顶点没有环. 它不是反对称的，因为图中有双向边. 它也不是传递的，因为图中有边 $\langle 3, 1\rangle$ 和 $\langle 1, 3\rangle$，但没有从 3 到 3 的边，即通过 3 的环.

(b) 是反自反的但不是自反的，因为每个顶点都没有环. 它是反对称的但不是对称的，因为图中只有单向边. 它也是传递的.

(c) 是自反的但不是反自反的，因为每个顶点都有环. 它是反对称的但不是对称的，因为图中只有单向边. 但它不是传递的，因为 2 到 1 有边，1 到 3 有边，但 2 到 3 没有边.

关系的性质和运算之间的联系

设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系，它们都具有某些共同的性质. 在经过并、交、相对补，求逆或右复合运算以后，所得到的新关系 $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_1^{-1}$, $R_1 \circ R_2$ 等是否还能保持原来关系的性质呢？有关的结论见表 1.4.2，其中的 $\checkmark$ 和 $\times$ 分别表示"能保持"和"不一定能保持"的含义.

表 1.4.2

运算	原有性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$R_1 \cap R_2$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$R_1 \cup R_2$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
$R_1 - R_2$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
$R_1 \circ R_2$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

2.5 关系的闭包

设 R 是 A 上的关系，我们希望 R 具有某些有用的性质，如自反性. 如果 R 不具有自反性，那么可以通过在 R 中添加一部分有序对来改造 R，得到新的关系 R'，使得 R' 具有自反性，但又不希望 R' 与 R 相差太多. 换句话说，添加的有序对要尽可能少，满足这些要求的 R' 就称作 R 的自反闭包. 通过添加有序对来构造的闭包除自反闭包外还有对称闭包和传递闭包.

定义 1.5.1

设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的 *自反(对称或传递)闭包* 是 A 上的关系 R'，使得 R' 满足以下条件:

1. R' 是自反的(对称或传递的);
2. $R \subseteq R'$;
3. 对 A 上任何包含 R 的自反(对称或传递)关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$，对称闭包记作 $s(R)$，传递闭包记作 $t(R)$.

构造闭包的方法

定理 1.5.1

设 R 为 A 上的关系,则有

1. $r(R) = R \cup R^0$.
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$.
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

构造闭包的方法

定理 1.5.1

设 R 为 A 上的关系，则有

1. $r(R) = R \cup R^0$.
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$.
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

证明.

只证 (1) 和 (3)，(2) 留作练习.

(1) 由 $I_A = R^0 \subseteq R \cup R^0$ 可知 $R \cup R^0$ 是自反的，且满足 $R \subseteq R \cup R^0$.

设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系，则有 $R \subseteq R''$ 和 $I_A \subseteq R''$. 任取 $\langle x, y \rangle$，若 $\langle x, y \rangle \in R \cup R^0$，则有 $\langle x, y \rangle \in R \cup I_A \subseteq R'' \cup R'' = R''$，即 $\langle x, y \rangle \in R''$，从而证明了 $R \cup R^0 \subseteq R''$.

综上所述，$R \cup R^0$ 满足定义 1.5.1 的三个条件，所以 $r(R) = R \cup R^0$. □

定理1.5.1(续)

1. $r(R) = R \cup R^0$.
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$.
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

证明.

(3) 先证 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \subseteq t(R)$ 成立，为此只需证明对任意的正整数 n 有 $R^n \subseteq t(R)$ 即可. 用归纳法. 若 $n = 1$，则有 $R^1 = R \subseteq t(R)$.
假设 $R^n \subseteq t(R)$ 成立，那么对任意的 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$，由 $R^{n+1} = R^n \circ R$ 知，存在 t，使得 $\langle x, t\rangle \in R^n \subseteq t(R)$ 且 $\langle t, y\rangle \in R \subseteq t(R)$. 因为 $t(R)$ 是传递的，所以 $\langle x, y\rangle \in t(R)$. 这就证明了 $R^{n+1} \subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.
再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 成立，为此只需要证明 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 是传递的. 对任意 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cdots$，则存在 $t, s \in \mathbb{Z}^+$，使得 $\langle x, y\rangle \in R^t$, $\langle y, z\rangle \in R^s$. 因此 $\langle x, z\rangle \in R^{t+s} \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$，即
$\langle x, z\rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$，从而证明了 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 是传递的. □

推论 1.5.1

设 R 为有穷集上的关系，则存在正整数 r 使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^r$.

以定理 1.5.1 为基础可以得到通过关系矩阵和关系图求闭包的方法. 设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别为 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}_r, \boldsymbol{M}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_t$，则

$$\boldsymbol{M}_r = \boldsymbol{M} + E,\ \boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}',\ \boldsymbol{M}_t = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^3 + \cdots,$$

其中 E 是和 $\boldsymbol{M}$ 同阶的单位矩阵，$\boldsymbol{M}'$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的转置矩阵，等式中矩阵的元素相加时都使用逻辑加. 设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t，则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边外，按照下述方法添加新边.

考察 G 的每个顶点，若没有环就加上一个环，则最终得到的是 G_r.

考察 G 的每一条边，若有一条 x_i 到 x_j 的单向边，$i \neq j$，则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边. 最终得到 G_s.

考察 G 的每个顶点 x_i，找出从 x_i 出发的所有 2 步，3 步，$\cdots$，n 步长的路径(n 为 G 中的顶点数). 设路径的终点为 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_k}$. 如果没有从 x_i 到 x_{j_l}, $l = 1, 2, \cdots, k$, 的边，那么就加上这条边. 在检查完所有的顶点后就得到图 G_t.

例 1.5.1

设 $A = \{a, b, c, d\}, R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$，则 R 和 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图如图 1.5.1 所示，其中 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图就是使用上述方法直接从 R 的关系图得到的.

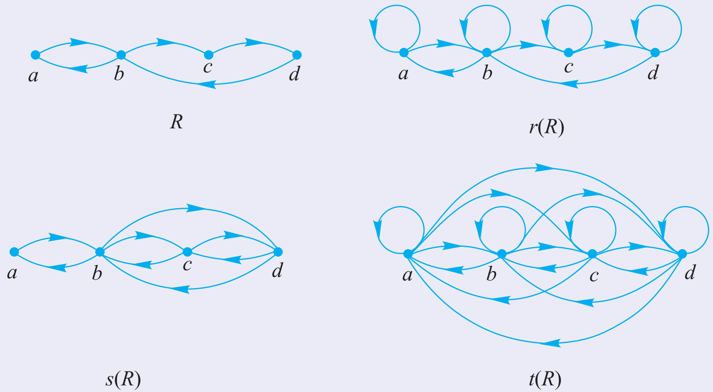


图 1.5.1

沃舍尔(Warshall)算法

一个更有效的方法是沃舍尔(Warshall)算法. 考虑 $n+1$ 个矩阵的序列 $\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{M}_1, \cdots, \boldsymbol{M}_n$,将矩阵 $\boldsymbol{M}_k$ 的 i 行 j 列的元素记作 $\boldsymbol{M}_k[i,j]$. 对于 $k=0,1,\cdots,n$, $\boldsymbol{M}_k[i,j]=1$ 当且仅当在 R 的关系图中存在一条从 x_i 到 x_j 的路径,并且这条路径除端点外中间只经过 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 中的顶点. 不难证明 $\boldsymbol{M}_0$ 就是 R 的关系矩阵,而 $\boldsymbol{M}_n$ 就对应了 R 的传递闭包. 沃舍尔算法从 $\boldsymbol{M}_0$ 开始,顺序计算 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \cdots,$ 直到 $\boldsymbol{M}_n$ 为止.

假设 $\boldsymbol{M}_k$ 已经计算完毕,如何计算 $\boldsymbol{M}_{k+1}$ 呢?这需要对于每组 i,j 确定 $\boldsymbol{M}_{k+1}[i,j]$ 是否为 1. $\boldsymbol{M}_{k+1}[i,j]=1$ 当且仅当在 R 的关系图中存在一条从 x_i 到 x_j 并且中间只经过 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$ 的路径. 可以将这种路径分成两类:第一类是只经过 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 的路径,这时 $\boldsymbol{M}_k[i,j]=1$;第二类是经过 x_{k+1} 的路径. 因为回路可以从路径中删除,因此只需考虑经过 x_{k+1} 一次的路径,这条路径可以分成两段,从 x_i 到 x_{k+1},再从 x_{k+1} 到 x_j,因此有 $\boldsymbol{M}_k[i,k+1]=1$ 和 $\boldsymbol{M}_k[k+1,j]=1$. 对于第二类路径的判别,可以利用下面的条件:

$$\boldsymbol{M}_{k+1}[i,j]=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{M}_k[i,k+1]=1 \text{且} \boldsymbol{M}_k[k+1,j]=1.$$

沃舍尔(Warshall)算法(续)

算法 Warshall

输入:$\boldsymbol{M}$ (R 的关系矩阵)

输出:$\boldsymbol{M}_T$ ($t(R)$ 的关系矩阵)

$\boldsymbol{M}_T \leftarrow \boldsymbol{M}$

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**

  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

      $\boldsymbol{M}_T[i,j] \leftarrow \boldsymbol{M}_T[i,j] + \boldsymbol{M}_T[i,k] \cdot \boldsymbol{M}_T[k,j]$

注意,上述算法中矩阵加法和乘法中的元素相加时都使用逻辑加.

沃舍尔(Warshall)算法(续)

考虑例 1.5.1 中的关系 R. 利用沃舍尔算法计算的矩阵序列如下,所得到的传递闭包实际上就是全域关系 E_A. 这和图 1.5.1 的结果是一致的.

$$\boldsymbol{M}_0=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{M}_4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

闭包的性质

定理 1.5.2

设 R 是非空集合 A 上的关系，则

1. R 是自反的当且仅当 $r(R) = R$.
2. R 是对称的当且仅当 $s(R) = R$.
3. R 是传递的当且仅当 $t(R) = R$.

闭包的性质

定理 1.5.2

设 R 是非空集合 A 上的关系，则

1. R 是自反的当且仅当 $r(R) = R$.
2. R 是对称的当且仅当 $s(R) = R$.
3. R 是传递的当且仅当 $t(R) = R$.

证明.

只证 (1)，其余留作练习.
只需证明必要性. 显然有 $R \subseteq r(R)$，又由于 R 是包含了 R 的自反关系，根据自反闭包定义有 $r(R) \subseteq R$. 从而得到 $r(R) = R$. □

闭包的性质(续)

定理 1.5.3

设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系,且 $R_1 \subseteq R_2$,则

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$.
2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$.
3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

证明留作练习.

闭包的性质(续)

定理 1.5.4

设 R 是非空集合 A 上的关系.

1. 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的.
2. 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的.
3. 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的.

闭包的性质(续)

定理 1.5.4

设 R 是非空集合 A 上的关系.

1. 若 R 是自反的,则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的.
2. 若 R 是对称的,则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的.
3. 若 R 是传递的,则 $r(R)$ 也是传递的.

证明.

只证 (2) ,其余留作练习. 由于 R 是 A 上的对称关系,所以 $R = R^{-1}$,同时 $I_A = I_A^{-1}$. 根据本章习题第 20 题得 $(R \cup I_A)^{-1} = R^{-1} \cup I_A^{-1}$. 从而得到 $r(R)^{-1} = (R \cup R^0)^{-1} = (R \cup I_A)^{-1} = R^{-1} \cup I_A^{-1} = R \cup I_A = r(R)$, 这就证明了 $r(R)$ 是对称的. □

定理1.5.4(续)

1. 若 R 是自反的,则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的.
2. 若 R 是对称的,则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的.
3. 若 R 是传递的,则 $r(R)$ 也是传递的.

证明.

为证明 $t(R)$ 是对称的,先证明下述命题.
若 R 是对称的,则 R^n 也是对称的,其中 n 是任何正整数.
用归纳法. 若 $n = 1$,则 $R^1 = R$ 显然是对称的.
假设 R^n 是对称的,则对任意的 $\langle x, y\rangle$,若 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$,则存在 t,使得 $\langle x, t\rangle \in R^n$ 且 $\langle t, y\rangle \in R$. 因为 R^n 和 R 均是对称的,所以 $\langle t, x\rangle \in R^n$ 且 $\langle y, t\rangle \in R$. 从而有 $\langle y, x\rangle \in R \circ R^n$,即 $\langle y, x\rangle \in R^{1+n} = R^{n+1}$,所以 R^{n+1} 是对称的. 由归纳法命题得证.
下面证明 $t(R)$ 的对称性. 任取 $\langle x, y\rangle$,若 $\langle x, y\rangle \in t(R)$,则存在 $n \in \mathbb{Z}^+$,使得 $\langle x, y\rangle \in R^n$. 因为 R^n 是对称的,所以有 $\langle y, x\rangle \in R^n \subseteq t(R)$,即 $\langle y, x\rangle \in t(R)$. 从而证明了 $t(R)$ 的对称性. □

自反、对称、传递闭包

定理 1.5.4 讨论了关系性质和闭包运算之间的联系.

如果关系 R 是自反的或对称的,那么经过求闭包的运算以后所得到的关系仍旧是自反的或对称的.

但是对于传递的关系则不然. 它的自反闭包仍旧保持传递性,而对称闭包就有可能失去传递性.

例如,$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,3\rangle\}$ 是 A 上的传递关系,R 的对称闭包

$$s(R)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}.$$

显然,$s(R)$ 不再是 A 上的传递关系.

从这里可以看出,如果计算关系 R 的自反、对称、传递闭包,为了不失去传递性,传递闭包运算应该放在对称闭包运算之后.

若令 $tsr(R)$ 表示 R 的自反、对称、传递闭包,则

$$tsr(R)=t(s(r(R))).$$

2.6 等价关系与划分

定义 1.6.1

设 R 为非空集合 A 上的关系. 若 R 是自反、对称和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 则称 x 等价于 y, 记作 $x \sim y$.

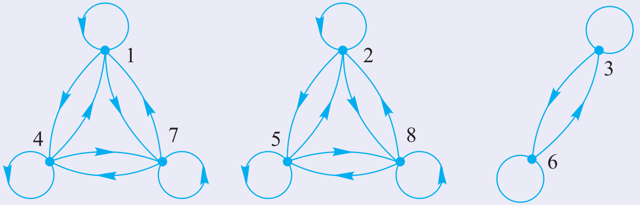
2.6 等价关系与划分

定义 1.6.1

设 R 为非空集合 A 上的关系. 若 R 是自反、对称和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 则称 x 等价于 y, 记作 $x \sim y$.

例 1.6.1

设 $A = \{1, 2, \cdots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R:
$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \equiv y \pmod 3\}$, 其中 $x \equiv y \pmod 3$ 称作 x 与 y 模 3 相等. 不难验证 R 为 A 上的等价关系. 该关系的关系图如下图所示.



等价类

定义 1.6.2

设 R 为非空集合 A 上的等价关系,$\forall x \in A$,令

$$[x]_R = \{y | y \in A, \langle x, y \rangle \in R\},$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类,简称为 x 的等价类,简记为 $[x]$ 或 $\bar{x}$.

从以上定义可以知道,x 的等价类是 A 中所有与 x 等价的元素构成的集合. 例 1.6.1 中的等价类是:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\};$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\};$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}.$$

模 n 等价关系

设 x 是任意整数, n 为给定的正整数, 则存在唯一的整数 q 和 r, 使得

$$x = qn + r,$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant n-1$, 称 r 为 x 除以 n 的余数.
对于任意的整数 x 和 y, 定义模 n 同余关系 $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}.$$

不难验证它是整数集 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系.

模 n 等价关系

设 x 是任意整数, n 为给定的正整数, 则存在唯一的整数 q 和 r, 使得

$$x = qn + r,$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant n-1$, 称 r 为 x 除以 n 的 余数.
对于任意的整数 x 和 y, 定义模 n 同余关系 $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod n.$$

不难验证它是整数集 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系.
将 $\mathbb{Z}$ 中的所有整数根据它们除以 n 的余数分类如下.
余数为 0 的数, 其形式为 $nz, z \in \mathbb{Z}$.
余数为 1 的数, 其形式为 $nz+1, z \in \mathbb{Z}$.
$\ldots$
余数为 $n-1$ 的数, 其形式为 $nz+n-1, z \in \mathbb{Z}$.
以上构成了 n 个等价类, 使用等价类的符号可记为

$$[i] = \{nz + i | z \in \mathbb{Z}\}, i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

定理 1.6.1

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，则

1. $\forall x \in A, [x]$ 是 A 的非空子集.
2. $\forall x, y \in A$，如果 xRy，那么 $[x] = [y]$.
3. $\forall x, y \in A$，如果 $x \not R y$，那么 $[x] \cap [y] = \emptyset$.
4. $\cup\{[x] | x \in A\} = A$.

定理 1.6.1

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，则

1. $\forall x \in A, [x]$ 是 A 的非空子集.
2. $\forall x, y \in A$，如果 xRy，那么 $[x] = [y]$.
3. $\forall x, y \in A$，如果 $x \not R y$，那么 $[x] \cap [y] = \emptyset$.
4. $\cup\{[x] | x \in A\} = A$.

证明.

(1) 由等价类的定义可知，$\forall x \in A$ 有 $[x] \subseteq A$. 又由于等价关系的自反性有 $x \in [x]$，即 $[x]$ 非空.

(2) 任取 z，若 $z \in [x]$，则有 $\langle x, z\rangle \in R$. 因为 R 是对称的，所以 $\langle z, x\rangle \in R$. 由条件 xRy 及 R 是传递关系知，$\langle z, y\rangle \in R$. 再次由 R 是对称关系得，$\langle y, z\rangle \in R$. 从而证明了 $z \in [y]$，故 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了 $[x] = [y]$.

(3) 假设 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$，则存在 $z \in [x] \cap [y]$，从而有 $z \in [x]$ 且 $z \in [y]$，即有 $\langle x, z\rangle \in R$ 且 $\langle y, z\rangle \in R$ 成立. 根据 R 的对称性和传递性必有 $\langle x, y\rangle \in R$，与 $x \not R y$ 矛盾，即假设错误，故原命题成立. □

定理1.6.1(续)

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，则

1. $\forall x \in A, [x]$ 是 A 的非空子集.
2. $\forall x, y \in A$，如果 xRy，那么 $[x] = [y]$.
3. $\forall x, y \in A$，如果 $x \not R y$，那么 $[x] \cap [y] = \emptyset$.
4. $\cup\{[x] | x \in A\} = A$.

证明.

(4) 先证 $\cup\{[x] | x \in A\} \subseteq A$. 任取 y，如果 $y \in \cup\{[x] | x \in A\}$，那么存在 $x \in A$，使得 $y \in [x] \subseteq A$，故 $y \in A$，从而有 $\cup\{[x] | x \in A\} \subseteq A$.

再证 $A \subseteq \cup\{[x] | x \in A\}$. 任取 y，若 $y \in A$，则显然有 $y \in [y]$，因此 $y \in \cup\{[x] | x \in A\}$. 从而有 $A \subseteq \cup\{[x] | x \in A\}$ 成立.

综上所述得 $\cup\{[x] | x \in A\} = A$. □

商集

由非空集合 A 和 A 上的等价关系 R 可以构造一个新的集合——商集.

定义 1.6.3

设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集, 记作 A/R, 即

$$A/R = \{[x]_R | x \in A\}.$$

商集

由非空集合 A 和 A 上的等价关系 R 可以构造一个新的集合——商集.

定义 1.6.3

设 R 为非空集合 A 上的等价关系,以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集,记作 A/R,即

$$A/R = \{[x]_R | x \in A\}.$$

例 1.6.1 中的商集为

$$\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\};$$

而整数集 $\mathbb{Z}$ 上模 n 等价关系的商集是

$$\{\{nz+i|z\in\mathbb{Z}\}|i=0,1,\cdots,n-1\}.$$

与等价关系及商集有密切联系的概念是集合的划分. 下面给出划分的定义.

划分

定义 1.6.4

设 A 为非空集合，若 A 的子集族 $\pi \subseteq P(A)$ 满足下面的条件：

1. $\emptyset \notin \pi$;
2. $\forall X, Y \in \pi$，若 $X \neq Y$，则 $X \cap Y = \emptyset$;
3. $\cup\pi = A$,

则称 π 是 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块.

划分

定义 1.6.4

设 A 为非空集合，若 A 的子集族 $\pi \subseteq P(A)$ 满足下面的条件：

1. $\emptyset \notin \pi$;
2. $\forall X, Y \in \pi$，若 $X \neq Y$，则 $X \cap Y = \emptyset$;
3. $\cup \pi = A$,

则称 π 是 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块.

例 1.6.2

设 $A = \{a, b, c, d\}$，给定 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_6$ 如下：

$$\pi_1 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}; \pi_2 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}; \pi_3 = \{\{a\}, \{a, b, c, d\}\};$$
$$\pi_4 = \{\{a, b\}, \{c\}\}; \pi_5 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}; \pi_6 = \{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}.$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分，其他都不是 A 的划分. 因为 π_3 中的子集 $\{a\}$ 和 $\{a, b, c, d\}$ 有交，$\cup \pi_4 \neq A$，π_5 中含有空集，而 π_6 根本不是 A 的子集族. □

等价关系与划分的一一对应

把商集 A/R 和划分的定义相比较，易见商集就是 A 的一个划分，并且不同的商集将对应于不同的划分. 反之，任给 A 的一个划分 π，如下定义 A 上的关系 R:

$$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中}\},$$

则不难证明 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是 π.

由此可见，A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

等价关系与划分的一一对应

把商集 A/R 和划分的定义相比较，易见商集就是 A 的一个划分，并且不同的商集将对应于不同的划分. 反之，任给 A 的一个划分 π，如下定义 A 上的关系 R:

$$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中}\},$$

则不难证明 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是 π.

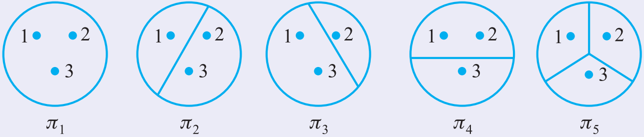
由此可见，A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

例 1.6.3

给出 $A = \{1, 2, 3\}$ 上所有的等价关系.

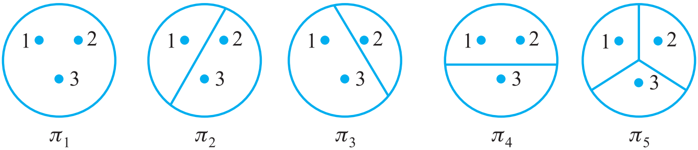
解

如下图所示，先给出 A 的所有划分.



例1.6.3(续)

给出 $A = \{1, 2, 3\}$ 上所有的等价关系.



这些划分与 A 上的等价关系之间的一一对应是:

π_1 对应于全域关系 E_A;

π_5 对应于恒等关系 I_A;

π_2, π_3 和 π_4 分别对应于等价关系 R_2, R_3 和 R_4,其中

$$R_2 = \{\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\} \cup I_A,$$
$$R_3 = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\} \cup I_A,$$
$$R_4 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \cup I_A.$$

2.7 偏序关系

定义 1.7.1

设 R 为非空集合 A 上的关系. 如果 R 是自反的、反对称的和传递的,那么称 R 为 A 上的*偏序关系*,记作 $\preccurlyeq$. 设 $\preccurlyeq$ 为偏序关系,若 $\langle x, y\rangle \in\preccurlyeq$,则记作 $x \preccurlyeq y$,读作 x"小于等于"y.

注意这里的"小于等于"不是指数的大小,而是指在偏序关系中的顺序性.

元素 x"小于等于"y 的含义是:依照这个序,x 排在 y 的前边或者 x 就是 y. 根据不同偏序的定义,对序有着不同的解释. 例如,整除关系是偏序关系 $\preccurlyeq$,$3 \preccurlyeq 6$ 的含义是 3 整除 6. 大于等于关系也是偏序关系,针对这个关系写 $5 \preccurlyeq 4$ 是说在大于等于关系中 5 排在 4 的前边,也就是说 5 比 4 大.

例如,集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系. 小于等于关系、整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系. 一般说来,全域关系 E_A 不是 A 上的偏序关系.

偏序关系(续)

定义 1.7.2

设 $\preccurlyeq$ 为非空集合 A 上的偏序关系, 对 $\forall x, y \in A$, 定义

1. $x \prec y$, 如果 $x \preccurlyeq y$ 且 $x \neq y$.
2. x 与 y 是可比的, 如果 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$.

上面定义中的 $x \prec y$ 读作 x"小于"y. 这里所说的"小于"是指在偏序中 x 排在 y 的前边. 在具有偏序关系 $\preccurlyeq$ 的集合 A 中任取两个元素 x 和 y, 可能有下列几种情况发生.

$$x \prec y(\text{或 } y \prec x), x = y, x \text{ 与 } y \text{ 不是可比的}.$$

例如, $A = \{1, 2, 3\}$, $\preccurlyeq$ 是 A 上的整除关系, 则有

$$1 \prec 2, 1 \prec 3;$$
$$1 = 1, 2 = 2, 3 = 3;$$
$$2 \text{ 和 } 3 \text{ 不是可比的}.$$

偏序集

定义 1.7.3

设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，若 $\forall x, y \in A$，x 与 y 都是可比的，则称 R 为 A 上的 *全序关系*（或 *线序关系*）.

例如，数集上的小于等于关系是全序关系，因为任何两个数总是可比大小的. 但整除关系一般说来不是全序关系，如集合 $\{1, 2, 3\}$ 上的整除关系就不是全序关系，因为 2 和 3 不可比.

偏序集

定义 1.7.3

设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，若 $\forall x, y \in A$，x 与 y 都是可比的，则称 R 为 A 上的全序关系（或线序关系）.

例如，数集上的小于等于关系是全序关系，因为任何两个数总是可比大小的. 但整除关系一般说来不是全序关系，如集合 $\{1, 2, 3\}$ 上的整除关系就不是全序关系，因为 2 和 3 不可比.

定义 1.7.4

集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起称作偏序集，记作 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$.

例如，整数集合 $\mathbb{Z}$ 和数的小于等于关系 $\leqslant$ 构成偏序集 $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$，集合 A 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 $R_{\subseteq}$ 构成偏序集 $\langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$.

哈斯图

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性可以简化一个偏序关系的关系图，得到偏序集的哈斯图.

为了说明哈斯图的画法，首先定义偏序集中顶点的覆盖关系.

定义 1.7.5

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，$\forall x, y \in A$，若 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 y *覆盖* x.

哈斯图

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性可以简化一个偏序关系的关系图，得到偏序集的哈斯图.
为了说明哈斯图的画法，首先定义偏序集中顶点的覆盖关系.

定义 1.7.5

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$\forall x, y \in A$，若 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 *y 覆盖 x*.

例如，集合 $\{1,2,4,6\}$ 上的整除关系有 2 覆盖 1；4 和 6 都覆盖 2；但是 4 不覆盖 1，因为有 $1 \prec 2 \prec 4$；6 也不覆盖 4，因为 $4 \prec 6$ 不成立.
在画偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图时，首先适当排列顶点的顺序，使得：
$\forall x, y \in A$，若 $x \prec y$，则将 x 画在 y 的下方.
对于 A 中的两个不同元素 x 和 y，如果 y 覆盖 x，就用一条线段连接 x 和 y.

哈斯图(续)

例 1.7.1

画出偏序集 $\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}}\rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq}\rangle$ 的哈斯图.

哈斯图(续)

例 1.7.1

画出偏序集 $\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}}\rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq}\rangle$ 的哈斯图.

解

两个哈斯图如图 1.7.1 所示.

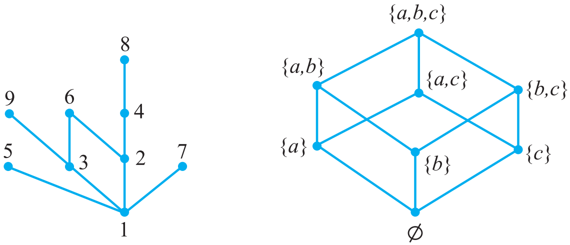


图 1.7.1

哈斯图(续)

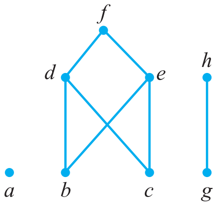


图 1.7.2

例 1.7.2

已知偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如图 *1.7.2* 所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式.

哈斯图(续)

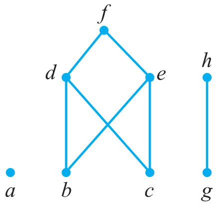


图 1.7.2

例 1.7.2

已知偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如图 *1.7.2* 所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式.

解

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$R = \{\langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle b, f\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle c, f\rangle, \langle d, f\rangle, \langle e, f\rangle, \langle g, h\rangle\} \cup I_A$. □

偏序集中的特殊元素

定义 1.7.6

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$.

1. 若对任意 $x \in B$, 均有 $y \preccurlyeq x$ 成立, 则称 y 为 B 的 最小元.
2. 若对任意 $x \in B$, 均有 $x \preccurlyeq y$ 成立, 则称 y 为 B 的 最大元.
3. 若对任意 $x \in B$, 当 $x \preccurlyeq y$ 时, 必有 $x = y$, 则称 y 为 B 的 极小元.
4. 若对任意 $x \in B$, 当 $y \preccurlyeq x$ 时, 必有 $x = y$, 则称 y 为 B 的 极大元.

从以上定义可以看出, 最小元与极小元是不一样的. 最小元是 B 中最小的元素, 它与 B 中其他元素都可比; 而极小元不一定与 B 中元素都可比, 只要没有比它小的元素, 它就是极小元.

对于有穷集 B, 极小元一定存在, 但最小元不一定存在.

最小元如果存在, 一定是唯一的, 但极小元可能有多个.

若 B 中只有一个极小元, 则它一定是 B 的最小元.

类似地, 极大元与最大元也有这种区别.

偏序集中的特殊元素(续)

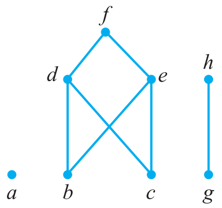


图 1.7.3

例 1.7.3

设偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 如图 *1.7.3* 所示，求 A 的极小元、最小元、极大元和最大元.

偏序集中的特殊元素(续)

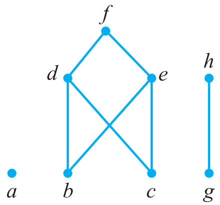


图 1.7.3

例 1.7.3

设偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 如图 *1.7.3* 所示,求 A 的极小元、最小元、极大元和最大元.

解

极小元: a, b, c, g.

极大元: a, f, h.

没有最小元和最大元. □

由这个例子可以知道,哈斯图中的孤立顶点既是极小元,也是极大元.

例 1.7.4

设 X 为集合, $A=(P(X)-\{\emptyset\})-\{X\}$, 且 $A\neq\emptyset$. 若 $|X|=n$, 问:

1. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 是否存在最大元?
2. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 是否存在最小元?
3. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

例 1.7.4

设 X 为集合，$A=(P(X)-\{\emptyset\})-\{X\}$，且 $A\neq\emptyset$. 若 $|X|=n$，问：

1. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 是否存在最大元？
2. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 是否存在最小元？
3. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由.

解

因为 $A\neq\emptyset$，所以 $|X|=n\geqslant 2$，此时 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 不存在最小元和最大元.
考察幂集 $P(X)$ 的哈斯图，最底层的顶点是空集，记作第 0 层. 由底向上，第 1 层是单元集，第 2 层是二元子集，$\cdots$，由 $|X|=n$ 知，第 $n-1$ 层是 X 的 $n-1$ 元子集，第 n 层，也就是最高层只有一个顶点 X. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 与 $\langle P(X), R_{\subseteq}\rangle$ 相比，恰好缺少第 0 层与第 n 层(因为 X 是 n 元集). 因此，$\langle A, R_{\subseteq}\rangle$ 的极小元就是 X 的所有单元集，即 $\{x\}, x\in X$；而极大元恰好比 X 少一个元素，即 $X-\{x\}, x\in X$. □

定义 1.7.7

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A, y \in A$.

1. 若对任意 $x \in B$，均有 $x \preccurlyeq y$ 成立，则称 y 为 B 的上界.
2. 若对任意 $x \in B$，均有 $y \preccurlyeq x$ 成立，则称 y 为 B 的下界.
3. 令 $C = \{y | \, y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.
4. 令 $D = \{y | \, y$ 为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

由以上定义可知，B 的最小元一定是 B 的下界，同时也是 B 的最大下界. 同样地，B 的最大元一定是 B 的上界，同时也是 B 的最小上界. 但反过来不一定正确，B 的下界不一定是 B 的最小元，因为它可能不是 B 中的元素. 同样地，B 的上界也不一定是 B 的最大元.

B 的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在. 如果存在，最小上界与最大下界是唯一的.

考虑图 1.7.3 中的偏序集. 令 $B = \{b, c, d\}$，则 B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f，最小上界为 d.

偏序集的应用

一般性的调度问题可以描述如下. 给定有穷的任务集 T 和 m 台相同的机器, T 上存在偏序关系 $\preccurlyeq$, 如果 $t_1 \prec t_2$, 那么任务 t_1 完成以后 t_2 才能开始工作. 对任意 $t \in T$, 用 $l(t)$ 表示完成任务 t 所需要的时间, $d(t)$ 表示任务 t 的截止时间, $l(t), d(t) \in \mathbb{Z}^+$. 设开始时间为 0, 用 $\sigma : T \to \{0, 1, \cdots\}$ 表示对任务集 T 的一个调度方案, 其中 $\sigma(t)$ 表示任务 t 的开始时间. $D = \max\{\sigma(t) + l(t) | t \in T\}$ 表示完成所有任务的最终时间. 假设每项任务都可以安排在任何一台机器上进行加工, 若 σ 满足下述 3 个条件, 则称 σ 为可行调度.

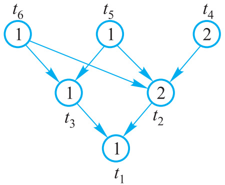
1. $\forall t \in T, \sigma(t) + l(t) \leqslant d(t)$;
2. $\forall i, 0 \leqslant i \leqslant D, |\{t \in T | \sigma(t) \leqslant i < \sigma(t) + l(t)\}| \leqslant m$;
3. $\forall t, t' \in T$, 若 $t \prec t'$, 则 $\sigma(t) + l(t) \leqslant \sigma(t')$.

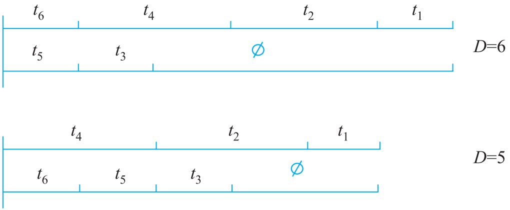
条件 1 表示每项任务都要在截止时间之前完成; 条件 2 表示任何时刻同时工作的机器台数不超过 m; 条件 3 表示任务安排必须满足任务集的偏序约束.

求使得 D 最小的可行调度.

例 1.7.5

设 $m = 2, T = \{t_1, t_2, \cdots, t_6\}$，每项任务的截止时间都等于 7. 去掉自反成分，$T$ 中的偏序约束如下图所示，每个任务结点中的数字表示完成该任务所用的时间. 下图中给出了两个可行的调度方案，其中 $D = 5$ 的方案是最优的方案，因为根据 t_1, t_2 和 t_4 的顺序关系，完成所有的任务至少需要 5 个单位的时间.





调度问题

对于一般性的调度问题，目前还没找到好的算法. 如果只有一台机器，并且每项任务的截止时间没有限制，那么问题将简化很多. 对于这种问题可以使用拓扑排序给出调度方案. 所谓拓扑排序，就是将原来的偏序集 $\langle A, R\rangle$ 扩张成一个对应的全序集 $\langle A, R'\rangle$，忽略了关系 R' 的自反性部分得到拓扑排序的序关系 T. 因此有 $R - I_A \subseteq T$.

图 1.7.4 给出了一个偏序集的哈斯图和两个不同的拓扑排序的结果，出现多个结果的原因是：在扩张成全序关系时，原来偏序集中不可比的元素之间的次序可以任意确定.

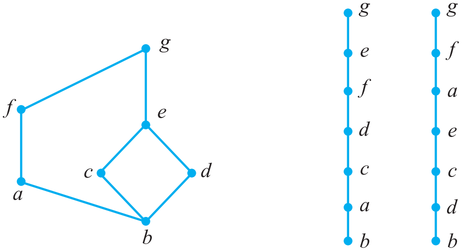


图 1.7.4