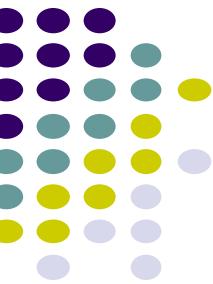


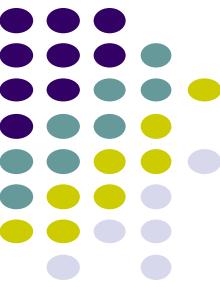
谓词逻辑初步

2024年3月14日
南京大学计算机科学与技术系



内 容 提 要

- 为什么需要谓词逻辑?
 - 命题逻辑的局限性
- 什么是谓词?
- 量词及谓词表达式
- 一阶谓词逻辑



无能为力的命题逻辑

- 常见的推理过程和结论如何形式化？如何进行自然推演？
 - 人，都是要死的
 - 苏格拉底是人
 - 所以，苏格拉底是要死的！
- 形式化：
 - P: 人都是要死的； Q: 苏格拉底是人； R: 苏格拉底要死
 - $P \wedge Q \Rightarrow R?$

问题出在哪里？



另一方面

- 如何揭示 “张三和李四是同学” 的内涵?
 - 令P: 张三和李四是同学
 - P只是陈述了这个事实，但无法表达以下后续推演所需的事实：
 - 同学是学同一专业的
 - 张三是计算机专业的
 - 所以，李四是计算机专业的
- “ x 大于2”(如果 x 是整数)不是命题,但是:
 - If $x > 2$ then $x := x + 1$
 - 仍然需要我们去形式刻画：当 $x=3$ 时，程序如何去执行



一阶逻辑命题

命题逻辑具有一定的局限性,甚至无法判断一些常见的简单推理.例如,考虑下面的推理:

凡偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除.

这个推理是数学中的真命题,但在命题逻辑中却无法判断它的正确性.

在命题逻辑中只能将推理中出现的 3 个简单命题依次符号化为 p, q, r , 将推理的形式结构符号化为

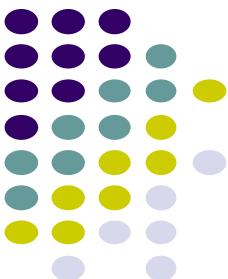
$$(p \wedge q) \rightarrow r.$$

由于上式不是重言式,所以不能由它判断推理的正确性.

问题出在“凡”字,在命题逻辑中不能很好地描述“凡偶数都能被 2 整除”的本意,只能把它作为一个简单命题.

为克服命题逻辑的这种局限性,需要引入量词,以期达到表达出个体与总体之间的内在联系和数量关系,这就是一阶逻辑所研究的内容. 一阶逻辑也称作一阶谓词逻辑或谓词逻辑.

个体词、谓词和量词是一阶逻辑命题符号化的 3 个基本要素.



1 个体词

个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体.

例如, 小王, 小李, 中国, $\sqrt{2}$, 3 等都可作为个体词.

将表示具体或特定的客体的个体词称作个体常项, 一般用小写英文字母 a, b, c 等表示, 而将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项, 常用 x, y, z 等表示.

称个体变项的取值范围为个体域(或称作论域).

个体域可以是有穷集合, 例如, $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ 等, 也可以是无穷集合, 如自然数集合 \mathbb{N} 、实数集合 \mathbb{R} 等.

有一个特殊的个体域, 它是由宇宙间一切事物组成的, 称作全总个体域.

作为一种约定, 本课程在论述或推理中若没有特别指明所采用的个体域, 则都是使用全总个体域.



2 谓词

谓词是用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词, 常用 F, G, H 等表示. 考虑下面 4 个陈述句.

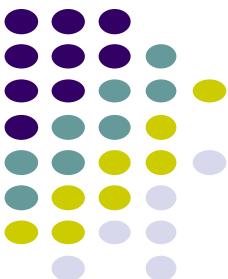
- ① $\sqrt{2}$ 是无理数.
- ② x 是有理数.
- ③ 小王与小李同岁.
- ④ x 与 y 具有关系 L .

在 (1) 中, $\sqrt{2}$ 是个体常项, “…是无理数”是谓词, 记为 F . 整个陈述句可以表示成 $F(\sqrt{2})$.

在 (2) 中, x 是个体变项, “…是有理数”是谓词, 记作 G . 这个陈述句可以表示成 $G(x)$.

在 (3) 中, 小王, 小李都是个体常项, “…与…同岁”是谓词, 记作 H . 这个陈述句可符号化为 $H(a, b)$, 其中 a 表示小王, b 表示小李.

在 (4) 中, x, y 为两个个体变项, L 是谓词, 这个陈述句的符号化形式为 $L(x, y)$.



2 谓词

同个体词一样,谓词也有常项与变项之分. 表示具体性质或关系的谓词称作 **谓词常项**; 表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称作 **谓词变项**. 无论是谓词常项或变项都用大写英文字母 F, G, H 等表示, 要根据上下文区分.

上面 4 个陈述句中,(1),(2),(3) 中谓词 F, G, H 是常项,(4) 中谓词 L 是变项.

一般地, 含 $n(\geq 1)$ 个个体变项 x_1, x_2, \dots, x_n 的谓词 P 称作 **n 元谓词**, 记作 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

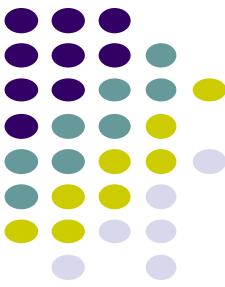
当 $n = 1$ 时, $P(x_1)$ 表示 x_1 具有性质 P ; 当 $n \geq 2$ 时, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 具有关系 P .

n 元谓词是以个体域为定义域, 以 $\{0, 1\}$ 为值域的 n 元函数或关系.

有时将不带个体变项的谓词称作 **0 元谓词**.

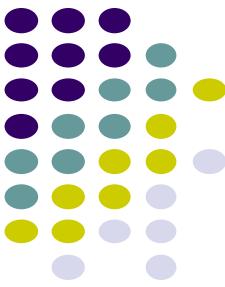
例如, $F(a), G(a, b), P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 等都是 0 元谓词.

当 F, G, P 为谓词常项时, 0 元谓词为命题. 反之, 任何命题均可以表示成 0 元谓词, 因而可以将命题看成特殊的谓词.



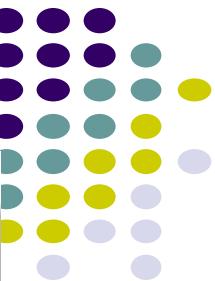
谓词 (Predicate)

- 如果 x 是整数，“ x 大于2” 不是命题，它的真值依赖于 x 的取值
 - 可以将 “ x 大于2”表示为 $P(x)$ 。 //论域为实数
- 一元谓词 $P(\cdot)$ ：给定 x , $P(x)$ 要么为真，要么为假.
 - 如 $p(x)$: x is a prime number // x 是变量， 论域为正整数
- 二元(多元)谓词 $Q (\cdot, \cdot)$
 - 如 $Q(x, y)$: x 和 y 是同学 // 2个变量， x,y 的论域是全体人
 - 如 $uncle(z, x)$: z is uncle of x //论域?



由谓词产生的命题

- $P(x)$: **x 大于2, 论域为自然数**
 - $P(2)$ 为FALSE, $P(3)$ 为TRUE
- $Q(x)$: **x 是人, 论域为?**
 - 人?
 - 全总个体域
 - $P(\text{苏格拉底})$ 为TRUE; $P(\text{馆3-103})$ 为?
- $R(x,y)$: **$x=y+3$, 论域为实数集**
 - $R(1,4)$ 和 $R(4,1)$ 分别是?



一阶逻辑谓词符号化

例 18.1.1

将下列命题在一阶逻辑中用 0 元谓词符号化，并讨论它们的真值.

- ① 仅当 2 是素数，4 才是素数.
- ② 若 5 大于 4，则 4 大于 6.

解

(1) 设 1 元谓词 $F(x)$: x 是素数，命题可符号化为

$$F(4) \rightarrow F(2).$$

由于此蕴涵式的前件为假，所以命题为真.

(2) 设 2 元谓词 $G(x, y)$: $x > y$ ，命题可符号化为

$$G(5, 4) \rightarrow G(4, 6).$$

由于 $G(5, 4)$ 为真，而 $G(4, 6)$ 为假，所以命题为假.



3 量词

表示个体常项或变项之间数量关系的词称作 **量词**. 有两种量词.

(1) 全称量词. 日常生活和数学中常用的“一切的”“所有的”“每一个”“任意的”“凡”“都”等词统称作 **全称量词**, 用符号“ \forall ”表示, $\forall x$ 表示个体域里的所有个体 x , 其中个体域是事先约定的.

例如, $\forall xF(x)$ 表示个体域里所有个体 x 都有性质 F , $\forall x\forall yG(x, y)$ 表示个体域里的所有个体 x 和 y 有关系 G , 其中 F 和 G 是谓词.

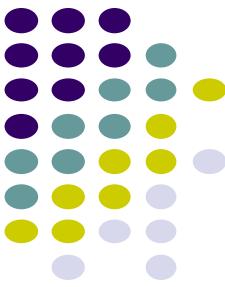
(2) 存在量词. 日常生活和数学中常用的“存在”“有一个”“有的”“至少有一个”等词统称作 **存在量词**, 用符号“ \exists ”表示. $\exists x$ 表示个体域里有一个个体 x .

例如, 用 $\exists xF(x)$ 表示在个体域里存在个体 x 具有性质 F , $\exists x\exists yG(x, y)$ 表示在个体域里存在个体 x 和 y 有关系 G .

全称量词和存在量词可以联合使用.

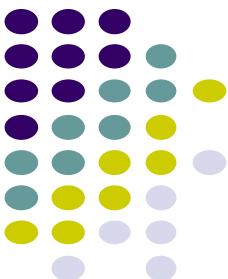
例如 $\forall x\exists yG(x, y)$ 表示对个体域里所有个体 x , 存在 y 使得 x 和 y 有关系 G ;

而 $\exists x\forall yG(x, y)$ 表示个体域里存在个体 x , 使得该 x 和所有的个体 y 有关系 G .



谓词表达式中的量词(谓词的量化)

- 表达论域内， 谓词成立的范围(程度)
- $\forall x$ (**全称量词**)
 - $\forall x P(x)$ 为真 iff 对所有的 $x, P(x)$ 为真 //论域， domain of discourse
- $\exists x$ (**存在量词**)
 - $\exists x P(x)$ 为真 iff 存在某个 $x, P(x)$ 为真 //论域
 - $\forall x(x>2)$ 为假， $\exists x(x>2)$ 为真 //论域为实数
 - $\forall x \exists y(y>x)$ 为真， $\exists y \forall x (y>x)$ 为假 //论域为实数



习题1：一阶谓词逻辑符号化

例 18.1.2

在个体域分别限制为 (a) 和 (b) 条件时, 将下面两个命题符号化.

- ① 凡人都呼吸.
- ② 有的人用左手写字.

其中: (a) 个体域 D_1 为人类集合; (b) 个体域 D_2 为全总个体域.

解

(a) 令 $F(x)$: x 呼吸. $G(x)$: x 用左手写字. 在 D_1 中除人外, 再无别的东西, 因而 (1) 符号化为

$$\forall x F(x). \quad (18.1.1)$$

(2) 符号化为

$$\exists x G(x). \quad (18.1.2)$$

(b) D_2 中除有人外, 还有万物, 因而在符号化时必须考虑将人先分离出来. 为此引入谓词 $M(x)$: x 是人. 在 D_2 中, 把

(1), (2) 说得更清楚些: (1) 对于宇宙间一切个体而言, 若个体是人, 则他呼吸.
(2) 在宇宙间存在用左手写字的人(或者更清楚地, 在宇宙间存在这样的个体, 该个体是人且用左手写字).

于是, (1), (2) 的符号化形式应分别为

$$\forall x(M(x) \rightarrow F(x)), \quad (18.1.3)$$

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)), \quad (18.1.4)$$

其中 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的含义同 (a). □

由例 18.1.2 可知, 命题 (1), (2) 在不同的个体域中符号化的形式可能不一样. 当使用全总个体域 D_2 时, 为了将人与其他事物区别出来, 引进了谓词 $M(x)$. 这样的谓词称作**特性谓词**. 换言之, 特性谓词是用来限制个体域的, 它将个体变元限制在满足该谓词代表的性质或关系的范围内.

常见错误: 不能正确地使用 \rightarrow 与 \wedge . 例如, 在 D_2 中错误地将 (1) 符号化为下面形式

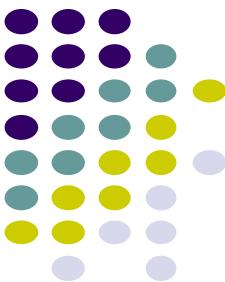
$$\forall x(M(x) \wedge F(x)). \quad (18.1.5)$$

若将它翻译成自然语言, 则应该是“宇宙间的所有个体都是人并且都呼吸”, 这显然不是 (1) 的原意. 另一方面, 还有人错误地将 (2) 符号化为

$$\exists x(M(x) \rightarrow G(x)). \quad (18.1.6)$$

将它翻译成自然语言应该为“在宇宙间存在个体, 如果这个个体是人, 那么他用左手写字”, 这显然也不是 (2) 的原意.

当 F 是谓词常项时, $\forall xF(x)$ 是一个命题. 如果把个体域中的任一个体 a 代入, $F(a)$ 都为真, 那么 $\forall xF(x)$ 为真; 否则 $\forall xF(x)$ 为假. $\exists xF(x)$ 也是一个命题. 如果个体域中存在一个个体 a , 使得 $F(a)$ 为真, 那么 $\exists xF(x)$ 为真; 否则 $\exists xF(x)$ 为假.



习题2 一阶谓词符号化

例 18.1.3

在个体域限制为 (a) 和 (b) 条件时, 将下列命题符号化, 并给出它们的真值.

- ① 对于任意的 x , 均有 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.
- ② 存在 x , 使得 $x + 5 = 3$.

其中: (a) 个体域 $D_1 = \mathbb{N}$; (b) 个体域 $D_2 = \mathbb{R}$.

解

(a) 令

$$F(x) : x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

$G(x) : x + 5 = 3$. 命题 (1) 的符号化形式为

$$\forall x F(x). \quad (18.1.7)$$

命题 (2) 的符号化形式为

$$\exists x G(x). \quad (18.1.8)$$

显然 (1) 为真命题, 而 (2) 为假命题.

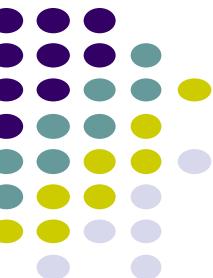
(b) 在 D_2 内, (1) 与 (2) 的符号化形式还分别是式(18.1.7)和式(18.1.8), (1) 仍然是真命题, 而此时 (2) 也为真命题.

□

注 18.1.1

从例 18.1.2 和例 18.1.3 可以看出:

- ① 在不同个体域内, 同一个命题的符号化形式可能不同, 也可能相同.
- ② 同一个命题, 在不同个体域中的真值也可能不同.



例18.1.4解(续)

(2) 令 $G(x) : x$ 登上过月球. 命题 (2) 符号化形式为

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)). \quad (18.1.10)$$

设 a 是 1969 年登上月球完成阿波罗计划的美国宇航员阿姆斯特朗,
 $M(a) \wedge G(a)$ 为真, 所以式 (18.1.10) 为真.

(3) 令 $H(x) : x$ 登上过木星. 命题 (3) 符号化形式为

$$\neg \exists x(M(x) \wedge H(x)). \quad (18.1.11)$$

到目前为止, 还没有人登上过木星, 所以对任何个体 a , 要么 $M(a)$ 为假(a 不是人), 要么 $H(a)$ 为假(a 没有登上过木星), 故 $M(a) \wedge H(a)$ 均为假, 因而
 $\exists x(M(x) \wedge H(x))$ 为假, 式 (18.1.11) 为真.

(4) 令 $F(x) : x$ 是在美国留学的学生, $G(x) : x$ 是亚洲人. 命题 (4) 符号化形式为

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \quad (18.1.12)$$

此命题为真. □



习题2 一阶谓词符号化

注18.1.2(续)

(4) 命题的符号化形式不唯一. 例如, 在例 18.1.5 中,(3) 还可以符号化为

$$\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)); \quad (18.1.19)$$

(4) 还可以符号化为

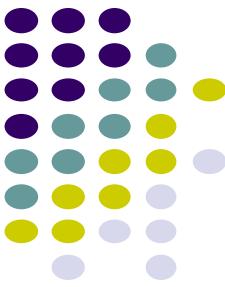
$$\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge N(x, y) \rightarrow \neg L(x, y)). \quad (18.1.20)$$

第 19 章可以证明式 (18.1.15) 和式 (18.1.19)、式 (18.1.16) 与式 (18.1.20) 是等值的.

由于引进了个体词、谓词和量词的概念, 现在可以将本章开始时讨论的推理“凡偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除.”在一阶逻辑中符号化为

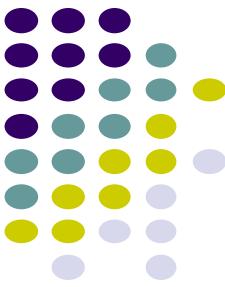
$$(\forall x(F(x) \rightarrow G(x))) \wedge F(6) \rightarrow G(6), \quad (18.1.21)$$

其中, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 能被 2 整除. 第 19 章可以证明式 (18.1.21) 是永真式, 即恒真.



量化公式中的变元

- 约束变元
 - $\forall x \exists y (y > x)$ 是 $\forall x (\exists y (y > x))$ 简写， x 和 y 都是约束变元
 - $\exists y (y > x) \wedge \exists z (x > z)$ ， y 和 z 都是约束变元
 - 量词作用域
 - 量词绑定的约束变元的应用范围
 - $\exists y (y > x) \wedge (x + 2 > y) \equiv \exists z (z > x) \wedge (x + 2 > y)$
 - $\exists y$ 和 $\exists z$ 的作用域？
- 自由变元
 - $\exists y (y > x) \wedge \exists z (x > z)$ ， x 是自由变元
 - $\exists y (y > x) \wedge (x + 2 > y)$ ， x 是自由变元，后面那个 y 也是自由变元
 - 自由变元通常被认定为全称量词约束



多个量词嵌套

- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

举例： $P(x, y)$ 表示 $x+y=y+x$ 。 论域为实数集

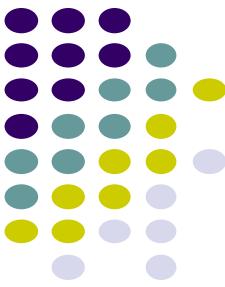
- $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

举例： $P(x, y)$ 表示 $x=y+1$ 。

- $\forall x \exists y P(x, y)$ 与 $\exists y \forall x P(x, y)$ 不一定等价

• 往往不等价

举例： $P(x, y)$ 表示 “ $y>x$ ”。



逻辑公式 (formula)

原子陈述:

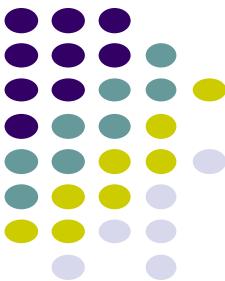
- $P(t_1, \dots, t_n)$, 其中 P 是 n 元谓词, t_i 是常量、变量或函数取值

逻辑公式 (有时称为 “陈述”) :

- 原子陈述是逻辑公式;
- 若 P 是逻辑公式, x 是自由变元, 则 $\exists xP$ 和 $\forall xP$ 是逻辑公式;
- 若 P 和 Q 是逻辑公式, 则 $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ 是逻辑公式。
- 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是逻辑公式

备注: 量词的优先级高于其它逻辑连接符

举例: $\forall x (x \leq 0 \vee \exists y (y > 0 \wedge x = y^2))$



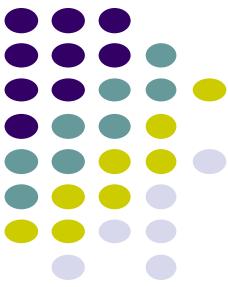
谓词逻辑公式的否定

- 量词的德摩根定律

表 2 量词的德·摩根律

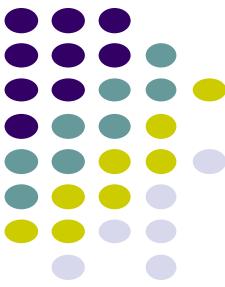
否定	等价语句	何时为真	何时为假
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	对每个 x , $P(x)$ 为假	有 x , 使 $P(x)$ 为真
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	有 x 使 $P(x)$ 为假	对每个 x , $P(x)$ 为真

- 嵌套量词的否定
 - 反复使用单量词德摩根定律
- 例: $\forall w \neg \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$ 的否?



谓词表达式的真值判定

- 全称量词公式 $\forall x P(x)$ 的真值判定：
 - 如果论域是有限集合：枚举所有元素 a_i
 - $\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$
 - 如果论域是无限集合：
 - 为真：数学证明
 - 为假：找到反例
- 存在量词公式 $\exists x P(x)$ 的真值判定
 - 如果论域是有限集合：枚举所有元素 a_i
 - $\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$
 - 如果论域是无限集合：
 - 为真：举出（构造）一个实例
 - 为假：数学证明



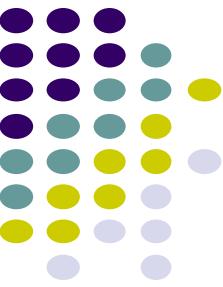
谓词公式的真值判定

一阶逻辑公式的永真性判定有相当的难度！

$$\forall n (even(n) \wedge (n > 2) \rightarrow \exists m \exists k (p(m) \wedge p(k) \wedge (n = m + k)))$$

哥德巴赫猜想（1740s年），就是这个逻辑公式，至今无法判定其真假

变量的论域（domain of discourse）：无限与有限，天壤之别

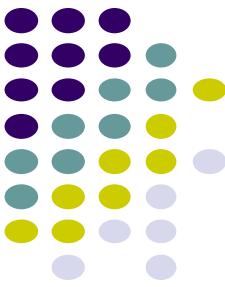


谓词逻辑的应用

- 知识表示

- $\forall n \ (odd(n) \rightarrow odd(n^2))$
- $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$
// z is uncle of x
- $father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)$

上述知识无法用命题逻辑表达！

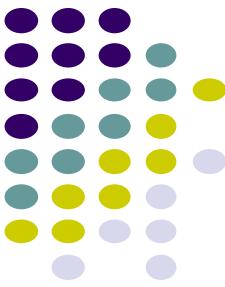


Prolog (Programming in Logic)

- 若 z 是 y 的兄弟，且 y 是 x 的父亲，则 z 是 x 的叔叔。
 - $\text{brother}(z, y) \wedge \text{father}(y, x) \rightarrow \text{uncle}(z, x)$

$\text{uncle}(z, x) :- \text{brother}(z, y), \text{father}(y, x)$

- 事实
 - $\text{brother}(\text{Klopp}, \text{Karl})$
 - $\text{brother}(\text{Klinsmann}, \text{Karl})$
 - $\text{brother}(\text{Karl}, \text{Loew})$
 - $\text{father}(\text{Karl}, \text{Neuer})$
- 查询： ? $\text{uncle}(z, \text{Neuer})$



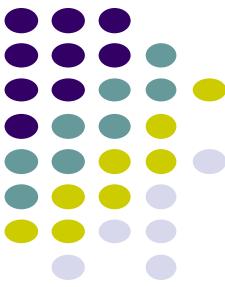
谓词逻辑的应用

- 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
 - $\forall n (even(n) \wedge (n > 2) \rightarrow \exists m \exists k (p(m) \wedge p(k) \wedge (n = m + k)))$

even(n) : n is a even number

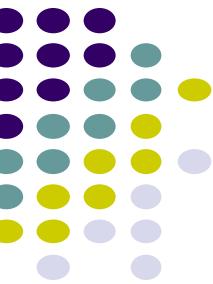
p(x): x is a prime number

这个猜想的内涵无法用命题逻辑表达！（命题逻辑的局限性）



将自然语言翻译成逻辑公式

- 任意**实数**的平方都是正数
 - $\forall x P(x)$, 其中 $P(x)$ 表示 $x^2 > 0$, 论域为实数
- 所有**美国人都吃汉堡包**
 - $\forall x C(x)$, 其中 $C(x)$ 表示 “ x 吃汉堡包”, 论域为美国人
 - $\forall x(A(x) \rightarrow C(x))$ //论域为人类
 - $A(x)$ 表示 “ x 是美国人”, $C(x)$ 表示 “ x 吃汉堡包”



将自然语言翻译成逻辑公式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: x 是这个班上的学生

$C(x)$: x 学过微积分课程

$\forall x (S(x) \rightarrow C(x))$

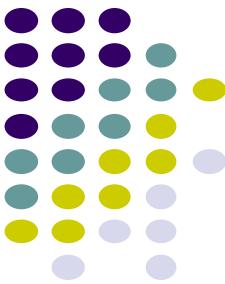
这个班上的每个学生都或去过加拿大， 或去过墨西哥.

$S(x)$: x 是这个班上的学生

$V(x, y)$ 表示 “ x 访问过（去过） y ”

其中， c 代表 “加拿大” ， m 代表 “墨西哥”

$\forall x (S(x) \rightarrow V(x, c) \vee V(x, m))$



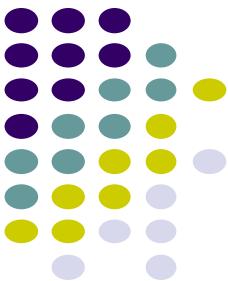
自然语言的形式化

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在

由于“ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在”意味着对全体实数 L , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$, 这个语句可以表达为

$$\forall L \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon)$$

最后一个语句表示, 对每个实数 L , 存在实数 $\epsilon > 0$ 使得对每个实数 $\delta > 0$, 都存在实数 x 使得 $0 < |x - a| < \delta$ 但是 $|f(x) - L| \geq \epsilon$ 。 ◀

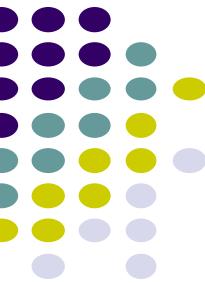


存在量词形式化过程中的“困惑”

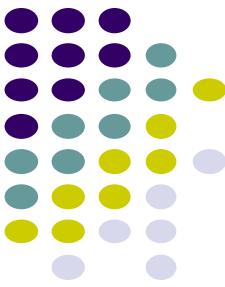
- 有的政治家是诚实的
 - $P(x)$ 表示“ x 是政治家”， $H(x)$ 表示“ x 是诚实的”
 - 如果论域是政治家：
 - $\exists xH(x)$
 - 如果论域是人：
 - $\exists x(P(x) \wedge H(x))$ //外层的()不能缺
 - $\exists x(P(x) \rightarrow H(x))$ 的真值情况一个一个算，和原语句等价吗？
 - 如果所有的政治家都是诚实的，那么 $\exists x(P(x) \wedge H(x))$ 为真

我们为什么用
合取连接符？

谓词逻辑推理

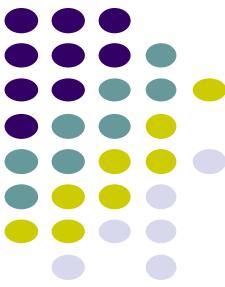


- 常用逻辑等价式
- 基于规则的推理



常用逻辑等价式

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\forall x P(x)$: 对所有实数 x , 其平方是正数 // $P(x)$ 表示 $x^2 > 0$
- 否定: 存在某个实数 x , 其平方不是正数。
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- $\exists x P(x)$: 存在实数 x , x 的平方是正数.
- 否定: 对任意实数 x , 其平方不是正数



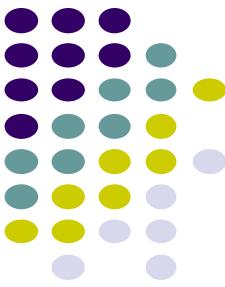
常用逻辑等价式

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall xP(x)) \wedge (\forall xQ(x))$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists xP(x)) \vee (\exists xQ(x))$

反向蕴涵：是奇数或偶数

- $(\forall xP(x)) \vee (\forall xQ(x)) \vDash \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vDash (\exists xP(x)) \wedge (\exists xQ(x))$

- $\forall x(P(x) \vee R) \equiv (\forall xP(x)) \vee R$
- $\exists x(P(x) \wedge R) \equiv (\exists xP(x)) \wedge R$

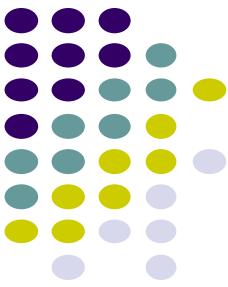


常用逻辑等价式 (可以证明)

- $\forall x(R \rightarrow P(x)) \equiv R \rightarrow \forall xP(x)$
- $\exists x(R \rightarrow P(x)) \equiv R \rightarrow \exists xP(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\exists xP(x)) \rightarrow R$
- $\exists x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\forall xP(x)) \rightarrow R$

$$\exists x(\neg P(x) \vee R) \equiv (\exists x \neg P(x)) \vee R \equiv \neg(\forall xP(x)) \vee R$$

注意：这里 x 不在 R 中出现

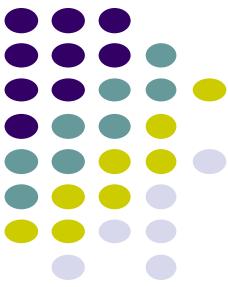


前束范式 (Prenex Normal Form)

$\forall x (x \leq 0 \vee \exists y (y > 0 \wedge x = y^2))$ //不是前束范式

$\forall x \exists y (x \leq 0 \vee (y > 0 \wedge x = y^2))$ //前束析取范式

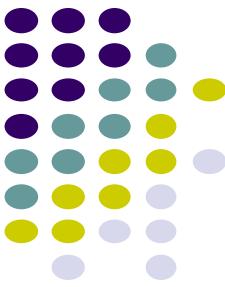
有通用方法，把任意一阶逻辑公式转化为PNF (PDNF/PCNF)



转化为前束范式（举例说明）

$$\begin{aligned} & \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) && (\text{消去}\rightarrow) \\ \equiv & \neg \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \vee \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) && (\text{内移}\neg) \\ \equiv & \forall z(\forall x \neg Q(x, z) \wedge \forall x \neg P(x)) \vee (\exists x P(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z, x)) && (\text{简化}) \\ \equiv & \forall z \forall x (\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists x (P(x) \vee \forall z \neg Q(z, x)) && (\text{重命名}) \\ \equiv & \forall z \forall x (\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists y (P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y)) && (\text{前移量词}) \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y ((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y)) && (\text{前移量词}) \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) && (\text{合取分配}) \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y))) \end{aligned}$$

前束合取范式PCNF



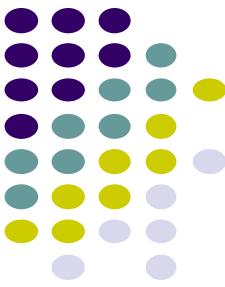
前束合取范式（举例说明）

$$\forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((\neg B(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee U(z, x)) \wedge (\neg F(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee G(z, x)))$$

brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)

father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)



量词相关的“自然演绎规则”

$$\forall x P(x)$$

$$\therefore P(c)$$

全称例示

 \forall - 规则
$$P(c) \text{ 对任意的 } c$$

$$\therefore \forall x P(x)$$

全称生成

 \forall + 规则
$$\exists x P(x)$$

$$\therefore P(c) \text{ 对于某个 } c$$

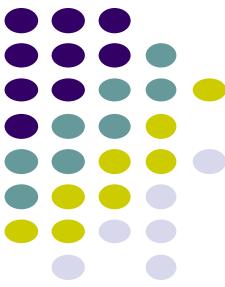
存在例示

 \exists - 规则
$$P(c) \text{ 对某个 } c$$

$$\therefore \exists x P(x)$$

存在生成

 \exists + 规则.



谓词假言推理示例

- A classic inference, dating back to ancient Greece:

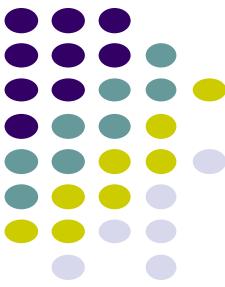
$P(x)$: **x is a man;** $Q(x)$: **x will die;**

Every man will die: $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$

Socrates is a Man: $P(s)$

Conclusion: Socrates will die: $Q(s)$

$$\frac{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad P(s) \Rightarrow Q(s) \quad P(s)}{Q(s)}$$



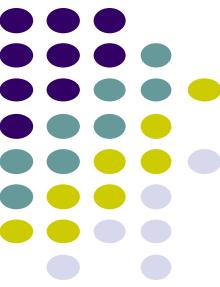
基于规则的推理（举例）

- **前提**

- 在这个班上的某个学生没有读过这本书
- 班上的每个人都通过了第一门考试

- **结论：通过第一门考试的某个人没有读过这本书**

- $C(x)$: x **在这个班上**
- $B(x)$: x **读过这本书了**
- $P(x)$: x **通过了第一门考试**
 - $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
 - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
 - **$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$**



基于规则的推理（举例）

$$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x)), \forall x(C(x) \rightarrow P(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$$

因为 $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ //这是前提

根据存在例示，有某个 a , $C(a) \wedge \neg B(a)$ 成立。

根据化简，得到 $C(a)$ 成立， $\neg B(a)$ 成立。

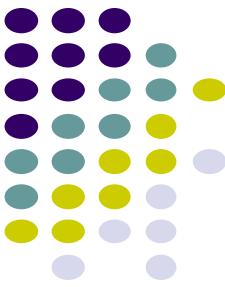
因为 $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ //这是前提

根据全称例示，得到 $C(a) \rightarrow P(a)$

根据假言推理，得到 $P(a)$

根据合取律，得到 $P(a) \wedge \neg B(a)$

根据存在生成，得到 $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$



What's Wrong?

Somebody proves the expression:

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$$

as follows:

1. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 前提

2. $\exists x A(x)$ 化简, 1

3. $\exists x B(x)$ 化简, 1

4. $A(c)$ 存在例示, 2

5. $B(c)$ 存在例示, 3

6. $A(c) \wedge B(c)$ 合取, 4,5

7. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 存在生成, 6

习题课-题型一：

1. 设个体域为自然数集 \mathbb{N} , $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是素数, 则

- (1) 2 是偶素数.
- (2) 若 2 是素数, 则 4 不是素数.
- (3) 只有 2 是素数, 6 才能是素数.
- (4) 除非 6 是素数, 否则 4 是素数.
- (5) 5 是素数当且仅当 6 是素数.
- (6) 5 不是素数当且仅当 6 是素数.

2. 设个体域 $D = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$, 将下列命题符号化.

- (1) D 中所有元素都是整数.
- (2) D 中有的元素是偶数.
- (3) D 中所有的偶数都能被 2 整除.
- (4) D 中有的偶数是 4 的倍数.

3. 设个体域为 $D = \{x \mid x \text{ 为人}\}$, 将下列命题符号化.

- (1) 人都生活在地球上.
- (2) 有的人长着黑头发.
- (3) 中国人都用筷子吃饭.
- (4) 有的美国人不在美国.

4. 将下列命题符号化.

- (1) 人都生活在地球上.
- (2) 有的人长着黑头发.
- (3) 并不是所有的实数都能表示成分数.
- (4) 没有能表示成分数的无理数.

5. 将下列命题符号化.

- (1) 任意的偶数 x 和 y 都有大于 1 的公因数.
- (2) 存在奇数 x 和 y 没有大于 1 的公因数.
- (3) 说所有火车比所有汽车都快是不对的.
- (4) 说有的火车比所有汽车都快是正确的.

(4) $\neg G(6) \rightarrow G(4)$ (或 $\neg G(4) \rightarrow G(6)$), 由于蕴涵式的前件为真, 后件为假, 故复合命题 $\neg G(6) \rightarrow G(4)$ 为假命题.

- (5) $G(5) \leftrightarrow G(6)$, 假命题.
- (6) $\neg G(5) \leftrightarrow G(6)$, 真命题.

2. 本题 (1)、(2) 不引入特性谓词, 而 (3)、(4) 要引入特性谓词.

- (1) $\forall x F(x)$, 其中 $F(x)$: x 是整数.
- (2) $\exists x G(x)$, 其中 $G(x)$: x 是偶数.
- (3) $\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$, 其中 $G(x)$: x 是偶数, $H(x)$: x 能被 2 整除, $G(x)$ 在这里是特性谓词.
- (4) $\exists x(G(x) \wedge R(x))$, 其中 $G(x)$: x 是偶数, $R(x)$: x 是 4 的倍数, 这里 $G(x)$ 是特性谓词.

3. (1) 与 (2) 不用引入特性谓词, 而 (3) 与 (4) 要引入特性谓词.

- (1) $\forall x F(x)$, 其中 $F(x)$: x 生活在地球上.
- (2) $\exists x G(x)$, 其中 $G(x)$: x 长着黑头发.
- (3) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$, 其中 $F(x)$: x 为中国人, $G(x)$: x 用筷子吃饭.
- (4) $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$, 其中 $F(x)$: x 是美国人, $G(x)$: 住在美国.

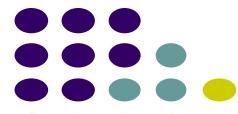
4. 在本题中没有指明个体域, 因而使用全总个体域. 在使用全总个体域时, 第 3 题 (1) 与 (2) 中的命题在本题中也要使用特性谓词, 将人从宇宙间的所有事物中分离出来.

- (1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$, 其中 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 生活在地球上.
- (2) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$, 其中 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 长着黑头发.
- (3) $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$, 其中 $F(x)$: x 为实数, $G(x)$: x 能表示成分数.
- (4) $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x))$ 或 $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$, 其中 $F(x)$: x 是无理数, $G(x)$: x 能表示成分数.

学完第 19 章之后, 可以验证 (3)、(4) 中两种符号化形式是等值的.

5. 本题中仍然应该使用全总个体域.

- (1) $\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \rightarrow H(x, y))$, 其中 $F(x)$: x 是偶数, $H(x, y)$: x 和 y 有大于 1 的公因数.
- (2) $\exists x \exists y(G(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$, 其中 $G(x)$: x 是奇数, $H(x, y)$: x 和 y 有大于 1 的公因数.
- (3) $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ 或 $\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$, 其中 $F(x)$: x 是火车, $G(y)$: y 是汽车, $H(x, y)$: x 比 y 快.
- (4) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y)))$, 其中, $F(x)$: x 为火车, $G(y)$: y 为汽车, $H(x, y)$: x 比 y 快.



题型二：一阶逻辑中数学命题符号化

1. 设个体域为整数集 \mathbb{Z} , 将下列问题符号化.

(1) 对于任意的 x 和 y , 存在 z , 使得 $x + y = z$.

(2) “存在 x , 对于任意的 y 和 z , 均有 $y - z = x$ ”是不成立的.

解本题型时, 数学公式不再重新符号化.

1. (1) $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$.

(2) $\neg (\exists x \forall y \forall z (y - z = x))$ 或 $\forall x \exists y \exists z (y - z \neq x)$.

2. (1) $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$.

(2) $\neg (\forall x \forall y \exists z (x^2 + y^2 = z^2))$ 或 $\exists x \exists y \forall z (x^2 + y^2 \neq z^2)$.

3. (1) $\forall x \forall y \exists z (x^2 + y^2 = z^2)$.

(2) $\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta (\delta > 0 \wedge (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))))$.

此命题是函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续的定义.

2. 设个体域为非 0 有理数集 \mathbb{Q}^* , 将下列命题符号化.

(1) 对于任意的 x , 存在 y , 使得 $x \cdot y = 1$.

(2) “对于任意的 x 和 y , 存在 z , 使得 $x^2 + y^2 = z^2$ ”不为真.

3. 设个体域为实数集 \mathbb{R} , 将下列命题符号化.

(1) 对于任意的 x 和 y , 存在 z , 使得 $x^2 + y^2 = z^2$.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

题型三：在有限个体域内消去公式中量词

解答与分析

1. (1) $\exists x F(x) \rightarrow \forall y G(y) \Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \rightarrow (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c)).$

(2) 方法一 对公式不做变化，直接消量词。

$$\begin{aligned}\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y)) &\Leftrightarrow \forall x ((F(x) \rightarrow G(a)) \wedge (F(x) \rightarrow G(b)) \wedge (F(x) \rightarrow G(c))) \\&\Leftrightarrow ((F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(a) \rightarrow G(b)) \wedge (F(a) \rightarrow G(c))) \wedge \\&\quad ((F(b) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b)) \wedge (F(b) \rightarrow G(c))) \wedge \\&\quad ((F(c) \rightarrow G(a)) \wedge (F(c) \rightarrow G(b)) \wedge (F(c) \rightarrow G(c))).\end{aligned}$$

方法二 先缩小量词辖域，然后再消量词。

$$\begin{aligned}\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y)) &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow \forall y G(y)) \\&\Leftrightarrow \exists x F(x) \rightarrow \forall y G(y) \\&\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \rightarrow (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c)).\end{aligned}$$

可见，方法二要好得多。因此，当能够缩小量词辖域时，应先缩小量词辖域，然后再消量词。

(3) $(\forall x F(x) \wedge \exists y G(y)) \rightarrow H(y) \Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \wedge (G(a) \vee G(b) \vee G(c)) \rightarrow H(y).$

注意，消去量词后，仍然含自由出现的个体变项 y ，因为 $H(y)$ 不在任何量词的辖域中。

2. (1)

$$\begin{aligned}\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y)) &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \\&\Leftrightarrow \exists x F(x) \rightarrow \exists y G(y) \\&\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b)) \rightarrow (G(a) \vee G(b)).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\forall x \exists y (F(x, y) \rightarrow G(x, y)) &\Leftrightarrow \forall x ((F(x, a) \rightarrow G(x, a)) \vee (F(x, b) \rightarrow G(x, b))) \\&\Leftrightarrow ((F(a, a) \rightarrow G(a, a)) \vee (F(a, b) \rightarrow G(a, b))) \wedge \\&\quad ((F(b, a) \rightarrow G(b, a)) \vee (F(b, b) \rightarrow G(b, b))).\end{aligned}$$

2. 设个体域 $D = \{a, b\}$ ，消去下列公式中的量词。

(1) $\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y)).$

(2) $\forall x \exists y (F(x, y) \rightarrow G(x, y)).$

3. 设个体域 $= \{1, 2, 3, 4\}$, $F(x)$: x 是 2 的倍数. $G(x)$: x 是奇数. 将命题 $\forall x (F(x) \rightarrow \neg G(x))$ 讨论命题的真值。

在(1)中，量词辖域可以缩小，因而先缩小量词辖域，再消量词。但在(2)中，因为全称量词与存在量词均约束 F 与 G 中的个体变量 x 和 y ，因而它们的辖域不能缩小，消去量词后所得公式也不易化得更简单。

3. $\forall x (F(x) \rightarrow \neg G(x)) \Leftrightarrow (F(1) \rightarrow \neg G(1)) \wedge (F(2) \rightarrow \neg G(2)) \wedge (F(3) \rightarrow \neg G(3)) \wedge (F(4) \rightarrow \neg G(4)).$

因为，在 $(F(1) \rightarrow \neg G(1))$ 和 $(F(3) \rightarrow \neg G(3))$ 中，前件与后件均为假，所以这两个蕴涵式均为真。在 $(F(2) \rightarrow \neg G(2))$ 和 $(F(4) \rightarrow \neg G(4))$ 中，前件与后件均为真，因而蕴涵式也均为真，故此命题在以上解释下

题型四：自然推理系统构造自然语言描述的推理论证

- 1. 实数不是有理数就是无理数. 无理数都不是分数. 所以, 若有分数, 则必有有理数 (个体域为实数集 \mathbb{R}) .
- 2. 人都喜欢吃蔬菜. 但不是所有的人都喜欢吃鱼. 所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人

1. 设 $F(x)$: x 是有理数, $G(x)$: x 是无理数, $H(x)$: x 是分数.

前提: $\forall x(F(x) \vee G(x)), \forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$.

结论: $\exists xH(x) \rightarrow \exists xF(x)$.

证明:

- ① $\forall x(F(x) \vee G(x))$
- ② $F(y) \vee G(y)$
- ③ $\neg F(y) \rightarrow G(y)$
- ④ $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$
- ⑤ $G(y) \rightarrow \neg H(y)$
- ⑥ $\neg F(y) \rightarrow \neg H(y)$
- ⑦ $H(y) \rightarrow F(y)$
- ⑧ $H(y) \rightarrow \exists xF(x)$
- ⑨ $\exists yH(y) \rightarrow \exists xF(x)$
- ⑩ $\exists xH(x) \rightarrow \exists xF(x)$

- 前提引入
①
②
③
前提引入
④
⑤
③⑤假言三段论
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩

2. 因为本题没指明个体域,因而使用全总个体域.

令 $F(x)$: x 为人, $G(x)$: x 喜欢吃蔬菜, $H(x)$: x 喜欢吃鱼.

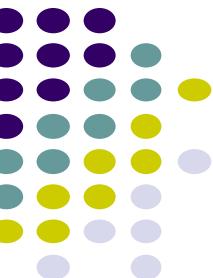
前提: $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$.

结论: $\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$.

证明:用归谬法.

- ① $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$
 - ② $\forall x \neg(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$
 - ③ $\neg(F(y) \wedge G(y) \wedge \neg H(y))$
 - ④ $G(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$
 - ⑤ $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$
 - ⑥ $F(y) \rightarrow G(y)$
 - ⑦ $F(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$
 - ⑧ $F(y) \rightarrow H(y)$
 - ⑨ $\forall y(F(y) \rightarrow H(y))$
 - ⑩ $\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$
 - ⑪ $\neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$
 - ⑫ $\forall x(F(x) \rightarrow H(x)) \wedge \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$
- 结论否定引入
①置换
② $\forall -$
③置换
前提引入
⑤ $\forall -$
④⑥假言三段论
⑦置换
⑧ $\forall +$
⑨置换
前提引入
⑩⑪合取

注意,先将 $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$ 开头的 \neg 内移化成前束范式后,才能消量词.



作业

1. 填空题(6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分).

- (1) $\neg \exists x \forall y F(x, y)$ 的前束范式为_____.
- (2) 由量词分配等值式, $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \text{_____}$.
- (3) 缩小量词的辖域, $\forall x(F(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \text{_____}$.
- (4) 公式 $((\forall x \neg G(x) \wedge \forall x F(x)) \wedge \exists y G(y)) \rightarrow \forall x F(x)$ 的类型为_____.
- (5) 取解释 I 为: 个体域为 $D = \{a\}$, $F(x)$: x 具有性质 F , 在 I 下 $\forall x F(x) \leftrightarrow \exists x F(x)$ 的真值为_____.
- (6) 前提: $\forall x \exists y F(x, y)$.
结论: $\exists y F(y, y)$.

以上推理是错误的, 某学生却给出了如下证明:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \forall x \exists y F(x, y) & \text{前提引入} \\ \textcircled{2} \exists y F(y, y) & \textcircled{1} \forall - \end{array}$$

此证明错在_____.

2. 在有限个体域内消去量词(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

- (1) 个体域 $D = \{1, 2, 3\}$, 公式为

$$\forall x \forall y(F(x) \rightarrow G(y)).$$

- (2) 个体域 $D = \{a, b\}$, 公式为

$$\forall x \exists y(F(x, y) \rightarrow G(y, x)).$$

3. 求前束范式(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

- (1) $\forall x(F(x, y) \rightarrow \forall y(G(x, y) \rightarrow \exists z H(x, y, z)))$.
- (2) $(\exists x F(x, y) \rightarrow \forall y G(x, y, z)) \rightarrow \exists z H(z)$.

4. 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造下列推理论的证明(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

- (1) 前提: $\forall x \forall y(F(x) \rightarrow G(y)), F(a)$.

结论: $\exists x G(x)$.

- (2) 前提: $\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \wedge H(x))), \exists x F(x)$.

结论: $\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge H(x))$.

5. 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造下面用自然语言描述的推理论(10 分).

火车都比汽车快, 汽车都比轮船快, a 是火车, b 是汽车, c 是轮船. 所以, a 比 b 快, b 比 c 快.