

# 微积分 I 期末试卷 2021.1.4

一、计算下列各题(6分×3=18分)

1. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{5}{n^2} + \cos \frac{5}{n} \right)^{3n^2}$ .
2. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$ .
3. 求函数  $y = (x + 3)e^{\frac{1}{x}}$  的渐近线.

二、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1.  $I_1 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x - \cos^4 x} dx.$
2.  $I_2 = \int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$
3.  $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + x^7 \cos^{10} x}{1+x^2} dx.$

三、计算下列各题 (6分× 2=12分)

1. 已知三个单位向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , 且  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ .
2. 将直线的一般式方程  $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$  化为点向式方程.

四、(10分) 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^{\sin x} - x^{\sin x}}{\sin^2 x \arcsin x}.$

五、(10分) 设  $f(x)$  在  $R$  上可导且  $f(0) = 0, f'(x) \geq 0$ . 证明  $\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2 \int_0^x t f^2(t) dt$ .

六、(10分) 求由曲线  $y = \ln x$  在  $(e, 1)$  处的切线与  $y = \ln x$  以及  $x$  轴所围成的平面图形  $D$  的面积  $S$ ,  $D$  分别绕  $x$  轴、 $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V_x, V_y$ .

七、(14分) 讨论函数  $y = x \arctan x$  的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并作出函数图像.

八、(8分) 已知函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上具有连续的二阶导数, 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ .

求证:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi).$

# 微积分 I 期末试卷 2022.1.4

一、计算下列各题 (6 分  $\times 3 = 18$  分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

2. 设  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

3. 设  $f(x)$  在  $a$  的一个邻域内二阶连续可导,  $f'(a) = \sqrt{2}, f''(a) = 2$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x - a)f'(x)} \right).$$

二、计算下列各题 (6 分  $\times 3 = 18$  分)

1. 计算积分  $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} dx$ ;

2. 计算积分  $\int x^2 (\ln x)^2 dx$ .

3. 计算积分  $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ .

三、计算下列各题 (6 分  $\times 3 = 18$  分)

1. 求与直线  $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$  及  $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$  都平行且与它们等距的平面方程.

2. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$ .

3. 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$  所围图形面积  $S$ .

四、(6分) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x) > 0$ , 求方程  $\int_a^x f(t) dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)} dt = 0$  在  $(a, b)$  内根的个数.

五、(12分) 讨论函数  $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$  的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图。

六、(10分) 1. 证明  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ .      2. 计算  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

七、(10分) 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上二次可微, 并且  $f''(x) > 0$ . 设  $L_t$  为曲线  $C: y = f(x)$  在点  $(t, f(t))$  的切线,  $A(t)$  为曲线  $C$  与直线  $L_t, x = a, x = b$  所围图形的面积. 问  $A(t)$  在哪些点取到最小值? 说明你的理由.

八、(8分) 设函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上有三阶连续导数.

证明: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| k \left( f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(-\frac{1}{k}\right) \right) - 2f'(0) \right|$  存在.

# 微积分 I 期末试卷 2023.2.21

一、计算下列各题 (6 分  $\times 3 = 18$  分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{5}{x^2}}.$
2. 设  $f(x) = x^2 \ln(1-x)$ , 求  $f^{(10)}(0).$
3. 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c te^{2t} dt$ , 求  $c$  的值.

二、计算下列各题 (6 分  $\times 3 = 18$  分)

1. 计算  $\int_{-1}^1 \frac{1+x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} dx;$
2. 计算  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$
3. 计算  $\int \frac{x}{x^2+2x+3} dx.$

三、计算下列各题 (6 分  $\times 3 = 18$  分)

1. 设直线  $L$  的方程为  $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{5}$ , 平面  $\Pi$  的方程为  $3x+y+2z+20=0$ , 求直线  $L$  与平面  $\Pi$  的夹角  $\theta$  与交点  $M$ .
2. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \ln(n+i) - \ln n \right).$
3. 计算由曲线  $y = \sin x, y = \cos x, x = \frac{\pi}{2}$  所围的最小的平面图形的面积.

四、(10分) (1) 设  $f(x), g(x)$  在  $[-a, a]$  上连续,  $g(x)$  是偶函数,  $f(x) + f(-x) \equiv A$  ( $A$  为常数), 证明:

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx.$$

(2) 利用 (1) 的结论求  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(e^x) dx.$

五、(12分) 讨论函数  $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$  的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图.

六、(8分) 求曲线  $y = \ln x$  的一条切线, 使得这条切线与原曲线, 以及直线  $x=1, x=e^2$  所围成的图形面积最小.

七、(8分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上有连续的一阶导数, 证明  $\forall x \in [0, 1]$ , 有

$$|f(x)| \leq \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|) dt.$$

八、(8分) 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有二阶连续导数, 且  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 都有  $f(x) \geq 0, f'(x) \leq 0$ . 又存在正数  $M$  使得  $|f''(x)| \leq M$  ( $x \in (0, +\infty)$ ). 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在, 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

(注: 此题中的条件  $|f''(x)| \leq M$  与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在, 二者只需一个成立即可)

# 微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案 2021.1.4

一、 1.  $e^{-\frac{45}{2}}$ ; 2. e; 3.  $x = 0$  是铅直渐近线,  $y = x + 4$  是斜渐近线.

二、 1.  $I_1 = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C$ . 2.  $I_2 = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$ ; 3.  $I_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$ .

三、 1.  $-\frac{3}{2}$ . 2.  $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3}$ . 四、  $-\frac{1}{6}$

五、 设  $F(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 - 2 \int_0^x t f^2(t) dt$ , 则

$$F'(x) = 2 \int_0^x f(t) dt \cdot f(x) - 2x f^2(x) = 2f(x) \cdot x \cdot f(\xi) - 2x f^2(x) = 2x f(x)(f(\xi) - f(x)),$$

其中  $\xi$  在 0 与  $x$  之间. 因为  $f'(x) \geq 0$ , 所以  $f(x)$  单调增加.

当  $x > 0$  时,  $f(x) \geq f(\xi) \geq f(0) = 0$ , 故  $F'(x) \leq 0$ ,  $F(x)$  单调减少, 因此  $F(x) \leq F(0) = 0$ ;

当  $x < 0$  时,  $f(x) \leq f(\xi) \leq f(0) = 0$ , 故  $F'(x) \geq 0$ ,  $F(x)$  单调增加, 因此  $F(x) \leq F(0) = 0$ ;

综上所述,  $F(x) \leq 0$ , 即  $\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2 \int_0^x t f^2(t) dt$ .

六、  $S = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \left( e^y - \frac{ey^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$ .

$$V_x = \frac{1}{3}\pi e - \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \frac{1}{3}\pi e - \pi(x \ln^2 x - 2x(\ln x - 1)) \Big|_1^e = 2\pi(1 - \frac{e}{3}).$$

$$V_y = \pi \int_0^1 (e^{2y} - e^2 y^2) dy = \pi \left( \frac{1}{2}e^{2y} - \frac{1}{3}e^2 y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(e^2 - 3).$$

七、 定义域  $(-\infty, +\infty)$ ; 偶函数;

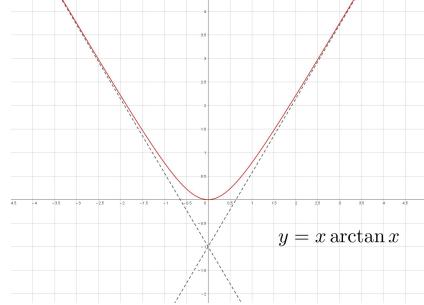
$$y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2},$$

单调增区间  $(0, +\infty)$ , 单调减区间  $(-\infty, 0)$ ;

极小值  $y(0) = 0$ ;

$$y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \text{ 上凹区间 } (-\infty, +\infty); \text{ 无拐点};$$

$$\text{渐近线 } y = \frac{\pi}{2}x - 1, y = -\frac{\pi}{2}x - 1.$$



八、 令  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 则  $F'(x) = f(x)$ ,  $F''(x) = f'(x)$ ,  $F'''(x) = f''(x)$ , 且  $F(a) = 0$ ,  $F''(a) = F''(b) = 0$ .

函数  $F(x)$  在  $x = a$  处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} F''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} F'''(\xi_1)(x-a)^3 = f(a)(x-a) + \frac{1}{6} f''(\xi_1)(x-a)^3$$

其中  $a < \xi_1 < x$ . 令  $x = b$ , 得  $\int_a^b f(x) dx = f(a)(b-a) + \frac{1}{6} f''(\xi_2)(b-a)^3$ , ( $a < \xi_2 < b$ ), (1)

函数  $F(x)$  在  $x = b$  处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x) = F(b) + F'(b)(x-b) + \frac{1}{2!} F''(b)(x-b)^2 + \frac{1}{3!} F'''(\eta_1)(x-b)^3 = \int_a^b f(x) dx + f(b)(x-b) + \frac{1}{6} f''(\eta_1)(x-b)^3$$

其中  $x < \eta_1 < b$ . 令  $x = a$ , 得  $\int_a^b f(x) dx = f(b)(b-a) + \frac{1}{6} f''(\eta_2)(b-a)^3$ , ( $a < \eta_2 < b$ ), (2)

$$(1)+(2) \text{ 得 } \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a) + \frac{1}{6}\left(\frac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2}\right)(b-a)^3,$$

因为  $f''(x)$  在区间  $[\xi_2, \eta_2]$  (或  $[\eta_2, \xi_2]$ ) 上连续, 由最值定理,  $f''(x)$  在区间  $[\xi_2, \eta_2]$  (或  $[\eta_2, \xi_2]$ ) 上有最大值  $M$  与最小值  $m$ , 而  $m \leq \frac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2} \leq M$ , 则由介值定理,  $\exists \xi \in [\xi_2, \eta_2] \subset (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2}$ , 于是  $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a) + \frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$ .

### 微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案 2022.1.4

一、1.  $e^{-1/2}$ . 2.  $(-1)^n \frac{n!}{6} \left( \frac{1}{(x-4)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{(n+1)}} \right)$ . 3.  $\frac{1}{2}$ .

二、1.  $\ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} + C$ ; 2.  $\frac{1}{3}x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$ . 3.  $\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$ .

三、1.  $5x + 2y + z + 1 = 0$ . 2.  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ . 3.  $\frac{3}{2}\pi a^2$ .

四、方程  $\int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)}dt = 0$  在  $(a, b)$  内有并且只有一个根.

五、定义域  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ;

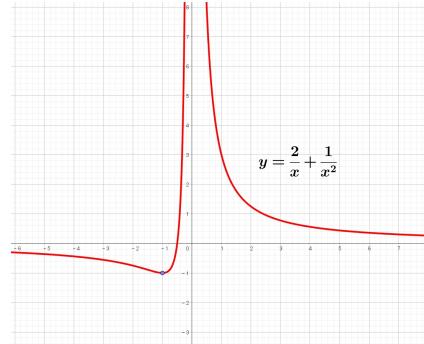
单调增区间  $(-1, 0)$ , 单调减区间  $(-\infty, -1), (0, +\infty)$ ;

极小值  $f(-1) = -1$ , 没有极大值;

下凹区间  $(-\infty, -\frac{3}{2})$ , 上凹区间  $(-\frac{3}{2}, 0), (0, +\infty)$ ;

拐点  $(-\frac{3}{2}, -\frac{8}{9})$ ;

$x = 0$  是铅直渐近线,  $y = 0$  是水平渐近线.



六、2.  $\frac{\pi^2}{4}$ .

七、 $f''(x) > 0$ , 曲线  $C$  是凹的,

$$A(t) = \int_a^b (f(x) - f(t) - f'(t)(x-t))dx = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(t) - \frac{b^2 - a^2}{2}f'(t) + (b-a)tf'(t).$$

$$A'(t) = f''(t)(b-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right). \text{ 令 } A'(t) = 0, \text{ 得 } t = \frac{a+b}{2}.$$

$a < x < \frac{a+b}{2}$  时,  $A'(t) < 0$ ,  $\frac{a+b}{2} < x < b$  时,  $A'(t) > 0$ , 所以  $A(t)$  在  $t = \frac{a+b}{2}$  取到最小值.

八、证明:  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}x^3$ .

$$|k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)| = |k(\frac{2f'(0)}{k} + \frac{f^{(3)}(\alpha_k)}{6k^3} + \frac{f^{(3)}(\beta_k)}{6k^3}) - 2f'(0)| \leq \frac{M}{3k^2},$$

其中  $M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(3)}(x)|$ .

设  $x_n = \sum_{k=1}^n |k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)|$ , 显然  $x_n$  是单调增加数列, 又

$$x_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{3k^2} < \frac{M}{3} \left( 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right) < M.$$

$x_n$  单调增加有上界，因此收敛，即极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)|$  存在。

## 微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2023.2.21

一、 1.  $e^{-10}$ ; 2.  $90 \times 7!$ ; 3.  $c = \frac{5}{2}$ .

二、 1.  $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ; 2.  $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2} + C$ ; 3.  $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$ .

三、 1.  $\theta = \frac{\pi}{3}, M(-5, 3, -4)$ . 2. 原式  $= \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$ . 3.  $\sqrt{2} - 1$ .

四、(2)  $\cos x$  是偶函数,  $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}$ , 所以原式  $= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\pi}{2}$ .

五、定义域  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ;

单调增区间  $(-\infty, -2), (1, +\infty)$ ,

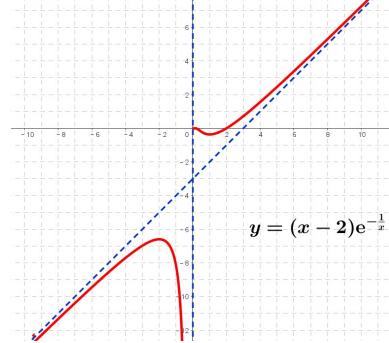
单调减区间  $(-2, 0), (0, 1)$ ;

极大值  $f(-2) = -4\sqrt{e}$ , 极小值  $f(1) = -\frac{1}{e}$ ;

下凹区间  $(-\infty, 0), (0, \frac{2}{5})$ , 上凹区间  $(\frac{2}{5}, +\infty)$ ;

拐点  $(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$ ;

$x=0$  是铅直渐近线,  $y=x-3$  是斜渐近线.



六、所求切线方程为  $y = \frac{2}{e^2+1}x + \ln \frac{e^2+1}{2} - 1$ .

七、方法一:  $f(t)$  连续, 则  $|f(t)|$  也连续, 由积分中值定理, 存在  $\zeta \in (0, 1)$ , 使得  $\int_0^1 |f(t)| dt = |f(\zeta)|$ .

又  $f(x) = f(\zeta) + \int_\zeta^x f'(t) dt$ , 所以  $|f(x)| \leq |f(\zeta)| + \int_0^1 |f'(t)| dt = \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|) dt$ .

八、方法一: 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在, 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A$ ; 又  $f'(x) \leq 0$  且  $f(x) \geq 0$ , 所以  $f(x)$  单调减少有下界, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$ . 由微分中值定理, 存在  $\xi \in (x, x+1)$ , 使得  $f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$ , 上式两边令  $x \rightarrow +\infty$  取极限可得  $B - B = A$ , 所以  $A = 0$ .

方法二: 由  $f'(x) \leq 0$  且  $f(x) \geq 0$ , 可知  $f(x)$  单调减少有下界, 故极限存在, 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

对于任意给定的常数  $\delta > 0$ , 有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{A - A}{\delta} = 0$ , 即  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists G > 0$ , 当  $x > G$  时, 总有  $\left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$  ( $\forall \delta > 0$ ).

由泰勒公式,  $f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{1}{2}f''(\xi)\delta^2$ , 则  $\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)\delta \implies |f'(x)| \leq \left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| + \frac{1}{2}\delta M$ ,

则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists G > 0$ , 当  $|x| > G$  时, 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , 总有  $|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , 即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .