欧拉图与哈密顿图
习题课及作业

2024, 5, 23

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-欧拉图

欧拉图的定义

定义 6.1.1 通过图(无向图或有向图)中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称作*欧拉通路*. 通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称作*欧拉回路*. 具有欧拉回路的图称作*欧拉图*. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称作*半欧拉图*.

欧拉图的判别法

定理 6.1.1 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图且没有奇度顶点.

定理 6.1.2 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

定理 6.1.3 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度等于出度.

定理 6.1.4 有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的且恰有两个奇度顶点,其中一个顶点的入度比出度大 1,另一个顶点的出度比入度大 1,而其余顶点的入度等于出度.

定理 6.1.5 G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且是若干个边不重的圈的并.

求欧拉回路的算法

Fleury 算法

输入:欧拉图 G.

1 任取 $v_0 \in V(G)$,令 $P_0 = v_0, i = 0$.

2 $P_i = v_0e_1v_1e_2\cdots e_iv_i$,若 $E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边,则计算停止;否则按下述条件从 $E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中任取一条边 e_{i+1}:

(a) e_{i+1} 与 v_i 相关联;

(b) 除非无别的边可供选择,否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i = G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中的桥.

设 $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$,把 $e_{i+1}v_{i+1}$ 加入 P_i 得到 P_{i+1}.

3 令 $i = i+1$,返回 2.

内容提要-哈密顿图

哈密顿图的定义

定义 6.1.2 经过图(有向图或无向图)中所有顶点一次且仅一次的通路称作哈密顿通路. 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作哈密顿回路. 具有哈密顿回路的图称作哈密顿图,具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称作半哈密顿图.

规定:平凡图是哈密顿图.

哈密顿图的必要条件与充分条件

定理 6.1.6 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是哈密顿图,则对于任意 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$,均有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|,$$

其中,$p(G-V_1)$ 为 $G-V_1$ 的连通分支数.

推论 6.1.1 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是半哈密顿图,则对于任意的 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$,均有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|+1.$$

定理 6.1.7 设 G 是 n 阶无向简单图,若对于 G 中任意不相邻的顶点 u,v,均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n-1, \tag{6.1.1}$$

则 G 中存在哈密顿通路.

推论 6.1.2 设 G 为 $n(\geqslant 3)$ 阶无向简单图,若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 u,v 均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n, \tag{6.1.2}$$

则 G 中存在哈密顿回路.

定理 6.1.8 设 u,v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点,且 $d(u)+d(v)\geqslant n$,则 G 为哈密顿图当且仅当 $G\cup(u,v)$ 为哈密顿图,其中 (u,v) 是加的新边.

定理 6.1.9 $n(\geqslant 2)$ 阶竞赛图中都有哈密顿通路.

内容提要-最短路问题

带权图及距离

定义 6.1.3 设图 $G=\langle V,E\rangle$(无向图或有向图),给定 $W:E\to\mathbb{R}$,对 G 的每一条边 e,称 $W(e)$ 为边 e 的权. 把这样的图称作带权图,记作 $G=\langle V,E,W\rangle$. 当 $e=(u,v)$ 或 $e=\langle u,v\rangle$ 时,把 $W(e)$ 记作 $W(u,v)$.

设 P 是 G 中的一条通路,P 中所有边的权之和称作 P 的长度,记作 $W(P)$,即 $W(P)=\sum\limits_{e\in E(P)}W(e)$. 类似地,可以定义回路 C 的长度 $W(C)$.

设带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$(无向图或有向图),其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数. $\forall u,v\in V$,当 u 和 v 连通(u 可达 v)时,称从 u 到 v 长度最短的路径为从 u 到 v 的最短路径,称其长度为从 u 到 v 的距离,记作 $d(u,v)$. 约定:$d(u,u)=0$;当 u 和 v 不连通(u 不可达 v)时,$d(u,v)=+\infty$.

Dijkstra 标号法

输入:带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 和 $s\in V$,其中 $|V|=n$,$\forall e\in E,W(e)\geqslant 0$.

输出:s 到 G 中每一点的最短路径及距离.

---

1 令 $l(s)\leftarrow(s,0),l(v)\leftarrow(s,+\infty)\quad(v\in V-\{s\}),i\leftarrow 1$,
  $l(s)$ 是永久标号,其余标号均为临时标号,$u\leftarrow s$
2 **for** 与 u 关联的临时标号的顶点 v **do**
3   **if** $l_2(u)+W(u,v)<l_2(v)$ **then** 令 $l(v)\leftarrow(u,l_2(u)+W(u,v))$;
4 计算 $l_2(t)=\min\{l_2(v)|v\in V$ 且有临时标号$\}$,
  把 $l(t)$ 改为永久标号
5 **if** $i<n$ **then** 令 $u\leftarrow t,i\leftarrow i+1$,转 2;

中国邮递员问题

给定一个带权无向图,其中每条边的权为非负实数,求每一条边至少经过一次的最短回路.

货郎担问题

设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 为一个 n 阶完全带权图,各边的权 $W(e)$ 非负且可以为 $+\infty$,求 G 中一条最短的哈密顿回路.

基本要求

- 1. 深刻理解欧拉图与半欧拉图的定义及判别定理，对于给定的图（无向的或有向的），能应用定理 6.1.1–定理6.1.5 准确地判断出它是否为欧拉图.
- 2. 会用 Fleury 算法求出欧拉图中的欧拉回路.
- 3. 深刻理解哈密顿图及半哈密顿图的定义.
- 4. 理解两点之间的最短路径和距离的概念，熟练应用 Dijkstra 标号法解带非负权图的最短路问题.
- 5. 分清哈密顿图的必要条件和充分条件．会用哈密顿图的必要条件（如定理 6.1.6）证明某些图不是哈密顿图，会用观察法找一条哈密顿回路或用哈密顿图的充分条件（如定理 6.1.7）证明某些图是哈密顿图.
- 6. 理解中国邮递员问题与欧拉回路问题的关系，会解中国邮递员问题.
- 7. 会用穷举法求阶数很小的图中的最短哈密顿回路.

题型一：判断欧拉图，求欧拉回路

1. 在图 6.3.1 所示的 3 个图中，哪些不是欧拉图并说明理由，哪些是欧拉图并用 Fleury 算法对其求一条欧拉回路.

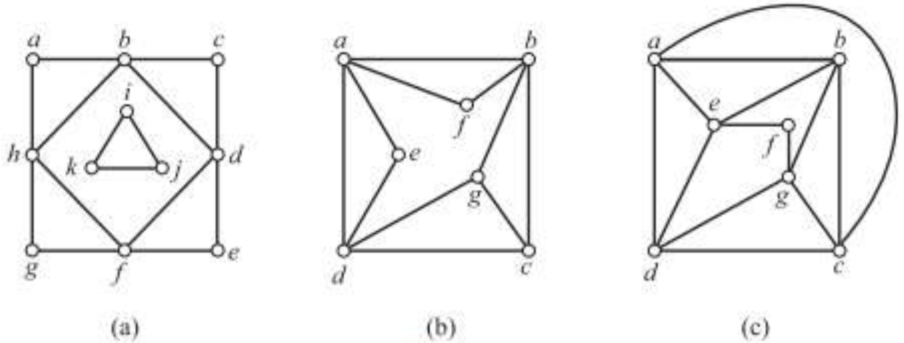


图 6.3.1

2. 把图 6.3.1 中的欧拉图表示成若干条边不重的圈之并.
3. 在哥尼斯堡七桥问题中，至少再架几座桥，游人就可以从陆地的某一点出发经过每座桥一次且仅一次，最后回到出发地点?

解答与分析

1. (a) 不是欧拉图，因为它不连通(虽然图中无奇度顶点).

   (b) 不是欧拉图，因为它有 2 个奇度顶点 c 和 g. 但它是半欧拉图，$gbfaedgcbadc$ 是一条欧拉通路.

   (c) 是欧拉图(它连通并且无奇度顶点)，$abcdacgbefgdea$ 为其中的一条欧拉回路.
2. 答案不是唯一的. 图 6.3.2 所示的为 3 个边不重圈之并，是其中的一种情况.
3. 哥尼斯堡七桥问题如图 6.3.3(a) 中实线所示，(b) 是对应的图. 在 (b) 中 4 个顶点均为奇度顶点，故至少要添加 2 条新边才能使它成为欧拉图，如 (b) 添加虚线边后的图. 对应新架的 2 座桥如 (a) 中虚线所示.

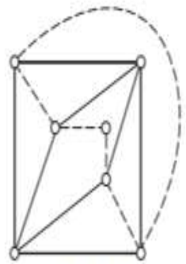


图 6.3.2

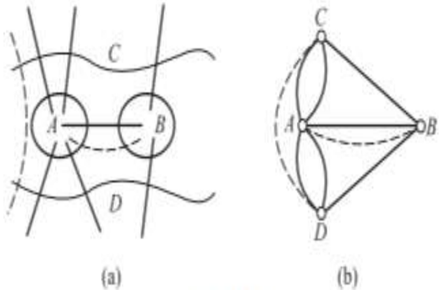


图 6.3.3

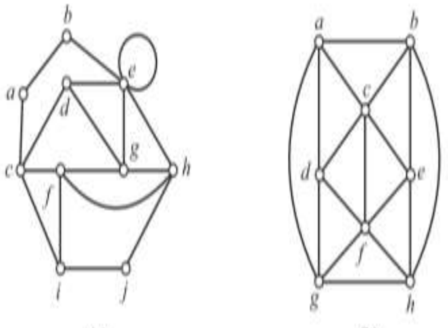
题型二：判断哈密顿图，求哈密顿回路

1. 证明图 6.3.4 所示的两个图都是哈密顿图.

2. (1) 证明：当 $r \geqslant 2, s \geqslant 2, r \neq s$ 时，完全二部图 $K_{r,s}$ 不是哈密顿图.

   (2) 证明：设 $r \geqslant 2$，则完全二部图 $K_{r,r}$ 为哈密顿图.

3. 证明图 6.3.5 所示的图不是哈密顿图，但为半哈密顿图.



(a) (b)

图 6.3.4

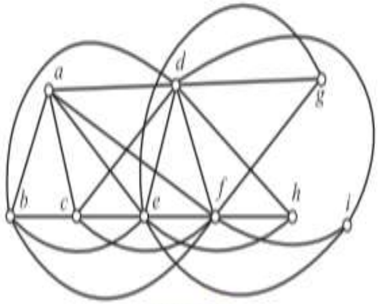


图 6.3.5

解答与分析

1. 仔细观察发现，图 6.3.4(a) 中存在哈密顿回路，例如 $abedghjifca$ 为其中的一条，所以它是哈密顿图.

   图 6.3.4(b) 为简单图，阶数 $n = 8, \delta = 4$，从而任意两个顶点的度数之和大于等于 n. 由定理 6.1.7 的推论6.1.2，它是哈密顿图. 其实也可以用观察法找到它的一条哈密顿回路，如 $abcefhgda$.

2. (1) 设 $K_{r,s} = \langle V_1, V_2, E\rangle, |V_1| = r, |V_2| = s$，不妨设 $r < s$. 易知

$$p(K_{r,s} - V_1) = |V_2| = s > r.$$

   由定理 6.1.6 可知 $K_{r,s}$ 不是哈密顿图.

   (2) 设 $K_{r,r}$ 的互补顶点子集为 $V_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}, V_2 = \{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$.

   方法一　$K_{r,r}$ 中任何两个顶点度数之和为 $2r$（等于阶数 n），由定理 6.1.7 的推论6.1.2，得证 $K_{r,r}$ 是哈密顿图.

   方法二　容易给出 $K_{r,r}$ 中的哈密顿回路：$a_1b_1a_2b_2\cdots a_rb_ra_1$，所以 $K_{r,r}$ 是哈密顿图.

   (3) 设图 6.3.5 所示的无向图为 G，G 是阶数 $n = 9$，边数 $m = 24$ 的简单连通图. G 中顶点 a, b, c 均为 5 度顶点，并且它们除彼此相邻外，又均与顶点 d, e, f 相邻. 而 d, e, f 均为 8 度顶点，它们彼此相邻外，又均与 a, b, c 以及 g, h, i 相邻. 再看 g, h, i，它们都是 3 度顶点，彼此不相邻，而均与 d, e, f 相邻，且均不与 a, b, c 相邻. 设 $V_1 = \{d, e, f\}$，于是，$G - V_1$ 由 a, b, c 为顶点的 K_3 和 3 个孤立点 g, h, i 构成，从而

$$p(G - V_1) = 4 > |V_1| = 3.$$

   根据定理 6.1.6 可知，G 不是哈密顿图.

   通过仔细观察能够找到一条哈密顿通路 $gdacbehfi$，因而 G 为半哈密顿图.

题型三：最短路问题、中国邮

1. 求解图 6.3.6 所示的完全带权图 K_5 中的货郎担问题(即求图中的最短哈密顿回路).
2. 用 Dijkstra 标号法求图 6.3.7 所示的带权图中从顶点 a 到其余各点的最短路径与距离.
3. 清扫车负责清扫的街道如图 6.3.8 所示，街道长度的单位是百米. 清扫车从 a 出发最后回到 a. 试设计清扫车的行进路线(含空行)使得整个行程最短.

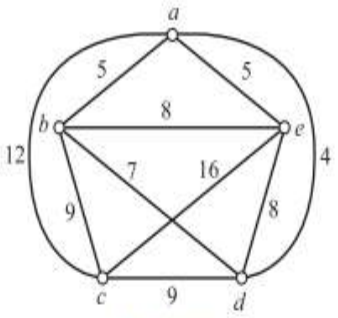


图 6.3.6

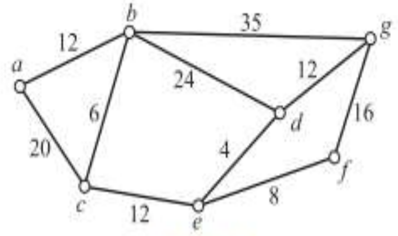


图 6.3.7

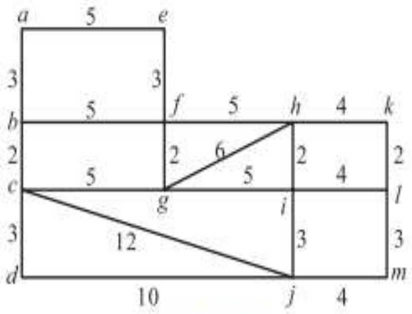


图 6.3.8

表 6.3.1

顶点	步骤						
	1	2	3	4	5	6	7
a	$(a,0)^*$						
b	$(a,+\infty)$	$(a,12)^*$					
c	$(a,+\infty)$	$(a,20)$	$(b,18)^*$				
d	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(b,36)$	$(b,36)$	$(e,34)^*$		
e	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(c,30)^*$			
f	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(e,38)$	$(e,38)^*$	
g	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(b,47)$	$(b,47)$	$(b,47)$	$(d,46)$	$(d,46)^*$

a 到 e 的最短路径：$abce$，距离：30.

a 到 f 的最短路径：$abcef$，距离：38.

a 到 g 的最短路径：$abcedg$，距离：46.

3. 这是中国邮递员问题. 图 6.3.8 中有 2 个奇度顶点 b 和 l，不难求出它们之间的一条最短路 $bfhkl$. 在图中复制最短路上的每一条边，得到一个欧拉图. 这个欧拉图中的任何一条从 a 开始的欧拉回路都是最短的行进路线. 用 Fleury 算法求得一条欧拉回路：$aefbcgfhgihklijcdjmlkhfba$，其长度是街道的总长度 + 最短路的长度：

$$(5\times5+3\times5+2\times4+4\times3+6+10+12)+(5+5+4+2)=104\ (\text{百米}).$$

解答与分析

1. 在定义意义下，完全图 K_n 中共有 $(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路. 在完全带权图 K_n 中，设顶点分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，回路 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_nv_1$ 与回路 $v_1v_nv_{n-1}\cdots v_2v_1$ 的权相同，因而共要考虑 $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 条哈密顿回路. 当 $n=5$ 时，共有 12 条. 计算这 12 条回路的权，从中找出最短的哈密顿回路. 设：

$C_1=abcdea$，其权 $W(C_1)=36$，

$C_2=abceda$，其权 $W(C_2)=42$，

$C_3=abdcea$，其权 $W(C_3)=42$，

$C_4=abdeca$，其权 $W(C_4)=48$，

$C_5=abedca$，其权 $W(C_5)=42$，

$C_6=abecda$，其权 $W(C_6)=42$，

$C_7=acbdea$，其权 $W(C_7)=41$，

$C_8=acbeda$，其权 $W(C_8)=41$，

$C_9=acdbea$，其权 $W(C_9)=41$，

$C_{10}=acebda$，其权 $W(C_{10})=47$，

$C_{11}=adbcea$，其权 $W(C_{11})=41$，

$C_{12}=adcbea$，其权 $W(C_{12})=35$.

从以上结果可知，最短哈密顿回路为 $C_{12}=adcbea$，其权为 35.

至今还没有找到求解货郎担问题的快速算法(而且普遍相信不存在这样的算法)，当 n 较大时，计算量会迅速地增大.

2. 计算如表 6.3.1 所示.

表 6.3.1 中的 * 表示在这一步确定的永久标号.

a 到 b 的最短路径：ab，距离：12.

a 到 c 的最短路径：abc，距离：18.

a 到 d 的最短路径：$abced$，距离：34.

题型四：应用举例

某次国际会议有 8 人参加，已知每人至少会与其余 7 人中的 4 人说相同的语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌周围就座，使每个人都能与两边的人交谈.

解答与分析

解此类问题，应将已知的条件或事物之间的关系用图来表示. 考虑无向图 $G=\langle V,E\rangle$，其中

$V=\{v|v$ 为与会者$\}$，

$E=\{(u,v)|u,v\in V,u\neq v$ 且 u 与 v 会说相同的语言$\}$.

G 为简单图，由题设，$\forall v\in V,d(v)\geqslant 4$，因而 $\forall u,v\in V$，有

$$d(u)+d(v)\geqslant 8=|V|+1.$$

由定理 6.1.7 的推论 6.1.2可知，G 中存在哈密顿回路. 设 $C=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_8}v_{i_1}$ 为 G 中一条哈密顿回路，回路中相邻的两个顶点所表示的与会者都会说相同的语言，因而服务员只要按 C 中的顺序安排他们的座位即可.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).

(1) 在完全图 $K_{2k}, k \geqslant 2$, 上至少加__________条边,才能使所得的图为欧拉图.

(2) 当 n 为__________时,完全图 K_n 既是欧拉图,又是哈密顿图.

(3) 设 $r, s \geqslant 2$ 且为偶数,则完全二部图 $K_{r,s}$ 中的欧拉回路共含__________条边.

(4) 设完全二部图 $K_{r,s}$ 为哈密顿图,则 r, s 应满足__________.

(5) 命题"强连通的有向图都是哈密顿图"的真值为__________.

(6) 命题"设 G 为 n 阶无向简单图,若 $\exists u, v \in V(G)$, u 与 v 不相邻,且满足 $d(u)+d(v) \leqslant n-1$, 则 G 不是哈密顿图"的真值为__________.

2. 简答题(4 小题,每小题 10 分,共 40 分).

(1) 在图 6.5.1 所示的 3 个图中,找出欧拉图和半欧拉图. 对欧拉图,用 Fleury 算法求一条欧拉回路.

(2) 对图 6.5.1 中的欧拉图,将其分解成若干个边不重的圈之并,要求给出两种不同的这种分解.

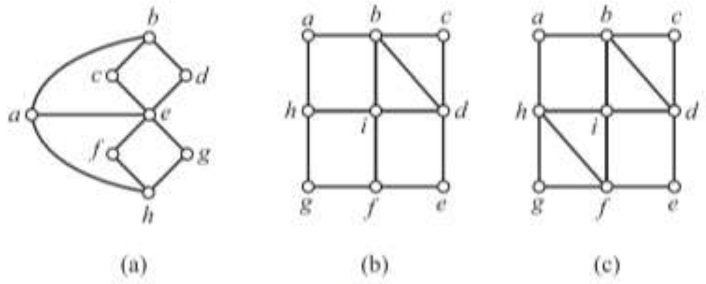


图 6.5.1

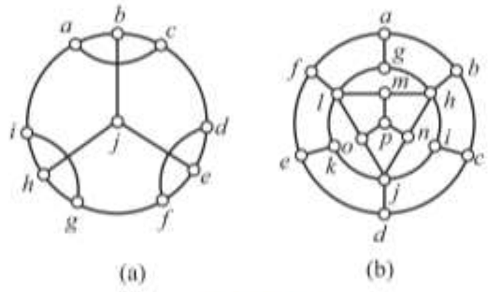


图 6.5.2

(3) 证明图 6.5.2(a) 为哈密顿图,并求一条哈密顿回路.

(4) 证明图 6.5.2(b) 不是哈密顿图.

3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).

(1) 证明:若无向图 G 为欧拉图,则 G 中无桥.

(2) 设 G 为无向连通图,C 为 G 中一条初级回路(圈),若从 C 上删除任何一条边后,C 中剩下的边构造的路径都是 G 中最长的路径,证明:C 为 G 中的哈密顿回路.

4. 应用题(10 分).

已知 a, b, c, d, e, f, g 这 7 人中,会讲的语言分别为:

a:英语、德语.

b:英语、汉语.

c:英语、意大利语、俄语.

d:汉语、日语.

e:意大利语、德语.

f:俄语、日语、法语.

g:德语、法语.

问能否将他们的座位安排在圆桌旁,使得每个人都能与他身边的人交谈.