

数理逻辑（2025 春）作业 - 09

1 [Enderton, 第 99 页, 第 1 题]

证明: (a) $\Gamma; \alpha \models \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models (\alpha \rightarrow \varphi)$; (b) $\varphi \models \psi$ 当且仅当 $\models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ 。

2 [Enderton, 第 99 页, 第 4 题]

证明: 若 x 在 α 中没有自由出现, 则有 $\alpha \models \forall x \alpha$ 。

3 [Enderton, 第 99 页, 第 6 题]

证明: 公式 θ 是有效的, 当且仅当 $\forall x \theta$ 是有效的。

4 [Enderton, 第 99 页, 第 7 题]

重新表述 “ \mathfrak{A} 在赋值 s 下满足 φ ” 的定义: 递归定义一个函数 \bar{h} , 使得 \mathfrak{A} 在赋值 s 下满足 φ 当且仅当 $s \in \bar{h}(\varphi)$ 。

5 [Enderton, 第 100 页, 第 9 题]

假设语言中包含等号和一个二元谓词符号 P 。对于下列每个条件, 找出一个句子 σ , 使得结构 \mathfrak{A} 是 σ 的模型当且仅当满足该条件: (a) $|\mathfrak{A}|$ 恰好有两个元素。(b) $P^{\mathfrak{A}}$ 是一个从 $|\mathfrak{A}|$ 到 $|\mathfrak{A}|$ 的函数。(这里的“函数”指一种单值关系, 即每个输入恰好对应一个输出。若 f 是从 A 到 B 的函数, 则 f 的定义域为 A 的全体元素, 而值域是 B 的一个子集, 不一定是真子集。) (c) $P^{\mathfrak{A}}$ 是 $|\mathfrak{A}|$ 上的一个置换, 即 $P^{\mathfrak{A}}$ 是一个双射, 其定义域和值域均为 $|\mathfrak{A}|$ 。