考试科目名称 离散数学（A 卷参考答案）

考试方式：闭 卷　考试日期 2016 年 7 月 3 日 教师____

系（专业）计算机科学与技术系　年级____ 班级____

学号________ 姓名________ 成绩____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分 数									

得 分	

一、（本题满分 12 分）

用谓词逻辑演算描述以下推理过程：

前提：①所有的狗都不吃鱼．②没有一只猫不吃鱼．③大黄吃了一条鱼．

结论：没有一只狗是猫，且大黄不是狗．

解：（未用量词和/或谓词者本题最多得 2 分）

令$P(x)$表示x是狗；$Q(x)$表示x吃鱼；$R(x)$表示x是猫；c 表示大黄（2 分）；

则前提可形式地表示为

① $\forall x\big(P(x)\to\neg Q(x)\big)$．②$\neg\exists x\big(R(x)\wedge\neg Q(x)\big)$．③$Q(\mathrm{c})$．　（2 分）

而结论则为

$\neg\exists x\big(P(x)\wedge R(x)\big)\wedge\neg P(\mathrm{c})$　（2 分）

推理过程

(1) $\neg\exists x\big(R(x)\wedge\neg Q(x)\big)$　前提②

(2) $\forall x\neg\big(R(x)\wedge\neg Q(x)\big)$　(1)逻辑等价

(3) $\neg\big(R(a)\wedge\neg Q(a)\big)$　(2)全称例示

(4) $\neg R(a)\vee\neg\neg Q(a)$　(3)德摩根律

(5) $\forall \mathrm{x}\big(\mathrm{P}(\mathrm{x})\to\neg\mathrm{Q}(\mathrm{x})\big)$　前提①

(6) $P(a)\to\neg Q(a)$　(5)全称例示

(7) $\neg P(a)\vee\neg Q(a)$　(6)逻辑等价

(8) $\neg P(a)\vee\neg R(a)$　(4)(7)消解

(9) $\neg\big(P(a)\wedge R(a)\big)$　(8)德摩根律

(10) $\forall x\neg\big(P(x)\wedge R(x)\big)$　(9)存在生成

(11) $\neg\exists x\big(P(x)\wedge R(x)\big)$　(10)逻辑等价

(12) $P(\mathrm{c}) \to \neg Q(\mathrm{c})$ (5)全称例示

(13) $Q(c)$ 前提③

(14) $\neg P(c)$ (12)(13)否定后件 *modus Tollens*

(15) $\neg\exists x\big(P(x) \wedge R(x)\big) \wedge \neg P(\mathrm{c})$ (11)(14)合取引入

（6 分，可能有部分等价证明形式，若不全酌情给部分分；可以不写解释）

得 分	

二、（本题满分 12 分）

有限集合A上的一个封闭的二元运算$\circ$可看作一个函数：$\circ: A \times A \to A$，也可看作定义在A上的一个运算表．设A为n元集，试求：

(1) A上有多少个可交换的封闭二元运算？

(2) A上有多少个幂等的封闭二元运算？（若$\forall x \in A$, $x \circ x = x$, 则称运算$\circ$幂等）

(3) A上有多少个既不可交换又不幂等的封闭二元运算？

解：（计算错误酌情扣分，用其它计数方式计算只要答案正确就给全分）

考虑运算的封闭性，定义在n元集上的每个二元运算可以看作一个值皆A内的的运算表(它是一个$n \times n$的矩阵),则二元运算的性质可由上述矩阵的性质表征。

(1) 可交换的二元运算对应的运算表（矩阵）是关于主对角线对称的（主对角线上元素任意），主对角线上共有n个元素，上三角（主对角线右上方）元素有$\frac{n^2-n}{2}$个元素，上述每个元素的取值皆有n种可能，故关于主对角线对称的n阶方阵共有$n^{n+\frac{n^2-n}{2}} = n^{\frac{n^2+n}{2}}$个,对应于可交换的二元运算个数亦为此；（4 分）

(2) 幂等的二元运算对应的矩阵性质为主对角线元素确定，其余元素任意，故这样的n阶方阵共有n^{n^2-n}个，对应于幂等的二元运算个数亦为此；（4 分）

(3) 因为交换和幂等的运算可能有交集,故首先计算即可交换又幂等的二元运算,共有$n^{\frac{n^2-n}{2}}$个，由容斥原理，既不可交换又不幂等的二元运算共有$n^{n^2} - \left(n^{\frac{n^2+n}{2}} + n^{n^2-n}\right) + n^{\frac{n^2-n}{2}}$个（可不化简）．（4 分）

得 分	

三、（本题满分 10 分）

试证明：群G的所有子群在子群关系下构成偏序格.

证明：设 S 是群G的所有子群构成的集合，≤是群之间的子群关系。

（1）易见：（S，≤）是偏序集。（1 分）

（2）设G_1和G_2是G的任意两个子群。

易证：$G_1 \cap G_2$ 非空（包含单位元），且是G的子群（运算封闭、有逆元）。(3 分)
易证：$G_1 \cap G_2$ 即是G_1和G_2的下确界。(1 分)
令 W={ H∈S | $G_1 \le$H，且$G_2 \le$H}
见$G \in$W，因此 W 非空。
易证： ∩W 非空（包含单位元），且是G的子群（运算封闭、有逆元）。(3 分)
易见：∩W是G_1和G_2的上界，且是上确界。(2 分)

得 分	

四、(本题满分 14 分)

在前n个正整数的某个排列中，一个逆序（inversion）是指有序对(i,j)满足$i<j$，但j在该排列中位于i之前. 例如在排列$3,5,1,4,2$中总共存在 6 个逆序，它们分别为：(1,3), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (4,5).

(1) 试给出排列$1,2,3,6,5,4$的所有逆序；
(2) 对前n个正整数做随机排列，其有序对$(1,n)$为逆序的概率是多少？
(3) 试求前n个正整数的排列中逆序个数的数学期望.

解：

(1) 所求的所有逆序为：(4,5), (4,6), (5,6)；（3 分，写对一个得 1 分，除此 3 个之外每多写 1 个扣 1 分）

(2) 在一个随机排列中数字 1 和数字n的位置哪个出现在前是等可能的，而有序对$(1,n)$为逆序当且仅当数字n出现在数字 1 之前. 因此有序对$(1,n)$为逆序的概率是 1/2；(4 分，也可自设随机变量求解，参见教材 p.330 例 7)

(3) 根据（2）的分析，对任意有序对(i,j)为逆序的概率同样为 1/2（2 分），在前n个正整数的随机序列中，共存在$\binom{n}{2}$个有序对（2 分），根据期望的线性特征（1 分），表征序列中逆序个数的随机变量X的期望值为：

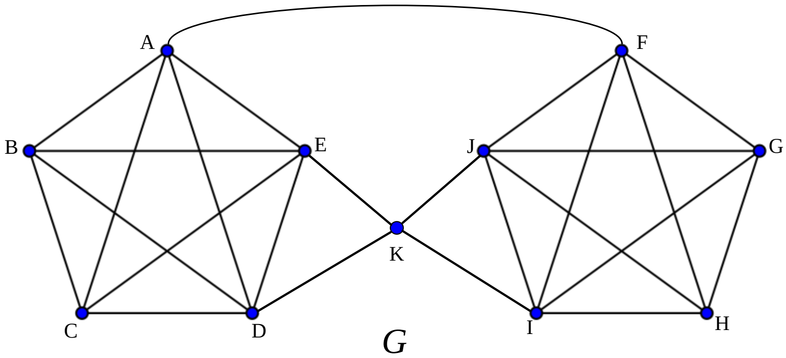
$E(X)=\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n(n-1)}{4}$ （2 分）

注：第（3）小题如不用期望的线性特征直接“硬算”答案正确也可给全分

得 分	

五、（本题满分 10 分）

试求下图G的点连通度$\kappa(G)$，边连通度$\lambda(G)$和最小度$\delta(G)$，并简要说明理由.



G

（第五题图）

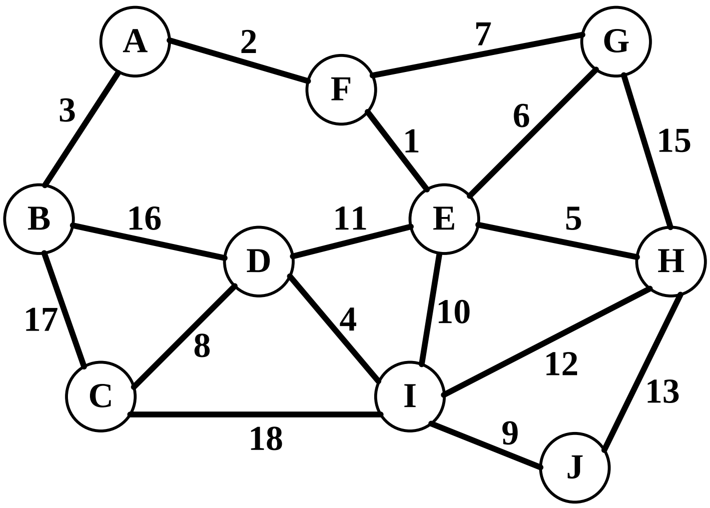
答：观察得知子图K_5中点连通度较大，但若去掉点 K 则存剩余图中存在一个桥，去掉桥的任意一个顶点便成为分离图，因此$\kappa(G)=2$；观察得知图中的其中一个最小边割集为$\{\overline{AF}, \overline{EK}, \overline{DK}\}$，故$\lambda(G)=3$；观察每个顶点的度数易得$\delta(G)=4$.

（每给出一个正确结果得 2 分，可用任何方式解释。简单解释得 4 分，无解释只有结果最多 6 分）

得 分	

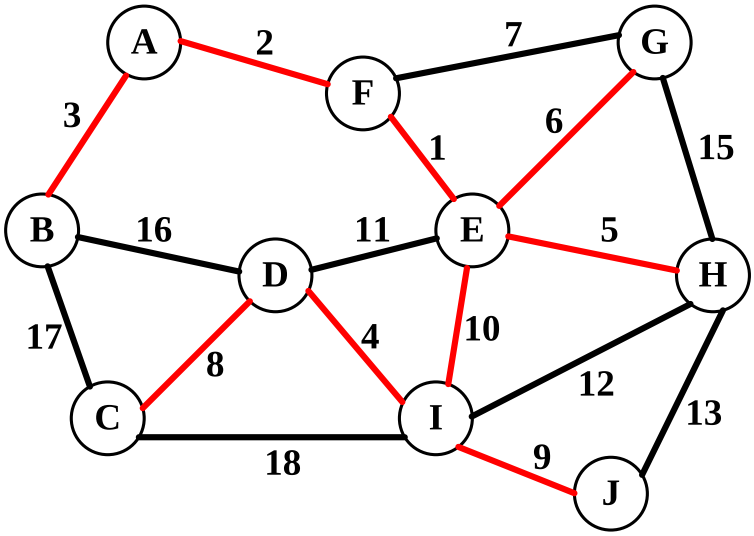
六、（本题满分 10 分）

试求以下无向带权图的最小生成树T（请直接将图中所求最小生成树的边加粗），并求此最小生成树的权值$W(T)$.



（第六题图）

答:



（8 分）

$$W(T) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 = 48$$ （2 分）

得 分	

七、（本题满分 10 分）

设$G = (V, E)$为无向简单图，令$n = |V|$，$m = |E|$.

试证明：若$m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$，则$G$为哈密顿图.

（提示：考虑哈密顿图的充分条件，即若图G中任意不相邻的顶点对v_1, v_2满足$d(v_1) + d(v_2) \geq n$，则G为哈密顿图）

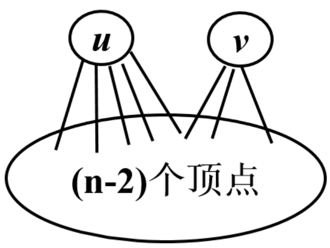
证明:根据哈密顿图的充分条件,下面只需证明:对G中不相邻的顶点 u 和 v, d(u)+ d(v) ≥ n. （2 分）

采用反证法，假设存在不相邻的顶点 u 和 v，d(u)+ d(v) ＜ n. （2 分）

参见示意图，我们有

$$m \leq \mathrm{d(u)} + \mathrm{d(v)} + \frac{1}{2}(n-2)(\mathrm{n}-3) < \mathrm{n} + \frac{1}{2}(n-2)(\mathrm{n}-3) = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$$

从而 $m < \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$，矛盾！原命题得证. （6 分）



证法二（直接证明法）：

$\because$ 对于简单图，有$m \le \frac{n(n-1)}{2}$，　（2分）

$\therefore$ $\frac{n^2-3n+6}{2} \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$，即$n^2-3n+6 \le 2m \le n^2-n$　$(n \ge 3)$

注意上式中$2m$即为图中各顶点度数之和，令其为d，任取2个不相邻顶点

v_1, v_2，

$d = \sum_{i=3}^{n} d_i + d(v_1) + d(v_2)$　（3分）

对于除去2个不相邻顶点v_1, v_2的剩余顶点，其内部（不与v_1, v_2相关联的边上的度）最大度数和为$(n-2)(n-3) = n^2-5n+6$，而与v_1, v_2相关联的边上的度不大于$d(v_1)+d(v_2)$；故：

$d \le n^2-5n+6+2\big(d(v_1)+d(v_2)\big)$　（3分）

$\therefore$ $n^2-3n+6 \le n^2-5n+6+2\big(d(v_1)+d(v_2)\big)$

解得$n \le d(v_1)+d(v_2)$，此为H-图成立之充分条件，故为H-图.　（2分）

得 分	

八、（本题满分 12 分）

最优集合合并问题可描述为：将有穷多个集合两两合并，每次合并后产生的新集合的元素数为两个待合并的集合元素数目之和（假设集合两两之间皆无相同元素），每次合并所需的代价也为两个待合并的集合元素数目之和；求当最终将所有集合合并为一个集合时，合并的最小总代价.

例如，集合A，B和C分别有1个、2个和5个元素，先将集合A与集合B合并，代价为$1+2=3$，再将合并后的新集合与集合C合并，代价为$3+5=8$，因此合并这三个集合的总代价为$3+8=11$；但若先合并集合A和C，总代价就为14，若先合并集合B和C，总代价就为15. 故合并上述三个集合的最小总代价为11.

(1) 若待合并集合的元素数分别为14、27、6、13、5、35，求合并最小总代价；

(2) 试给出计算n个集合（给定各自元素数目）的**合并次序**，使合并总代价最小的算法（可用自然语言描述，也可用伪代码或流程图描述）.

解：

(1) 最小和并总代价为：（5+6）+（11+13）+（14+24）+（27+35）+（38+62）= 235　(4分)

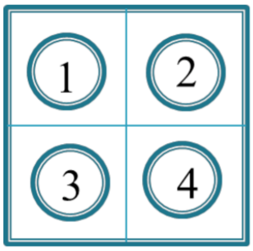
(2) 参考Huffman树（最优二叉树）的生成算法.（8分，只要描述清楚每次均取最小的两个集合元素合并，并将新的集合元素放回序列中继续进行，重复n-1次或直至合并为一个集合，依次输出合并次序即可，贪心算法）

得 分	

九、（本题满分 10 分）

对于下图所描绘的格局，可以施行如下三种操作：
A.两列互换；
B.两行互换；
C.两组对角元素同时互换.
可以用任意顺序执行上述操作任意有限多次.

(1) 对于上述操作序列，使得“结束时与开始时状态恰好完全一样”的充分必要条件是什么？
(2) 建立一个合适的可交换群模型来证明你的结论.



（第九题图）

解：

（1） 充要条件是：三种操作出现的次数要么均是偶数，要么均是奇数。(4 分)

（2） 证明：［要点］

以恒等变换 e，行交换 A，列交换 B，1-4/2-3 交换 C 为四个元素构成集合 T；以变换的复合为运算*，验证(T,*)为一交换群（运算封闭、结合律、单位元存在、所有元素逆元存在，交换律）。(4 分)

注意到除了单位元 e，元素都是二阶，且 A, B, C, 三者中任意二者做运算均得到另一元素，可知所求之充要条件为操作序列中 A, B, C 三者出现次数要么都是奇数，要么都是偶数。(2 分)