

一、简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式  $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$  的值.

2. 令  $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , 计算  $((A^*)^T)^*$ .

3. 求使得方阵  $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$  正定的所有实数对  $(x, y)$  在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

4. 求  $\alpha_1 = (0, 2, 1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (3, 4, 2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0, 7, 2)^T, \alpha_4 = (1, 0, 0, 2, 1)^T$  的一组极大无关组, 并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

二、(本题12分) 利用分块矩阵计算  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, (n \geq 1).$

三、(本题12分) 设线性方程组  $AX = B$  中  $r(A) = 2$ .  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是其解向量, 满足  $4\alpha_1 - 3\alpha_2 = (1, 0, 2, 1)^T$ ,  $2\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 3, 9, 3)^T, \alpha_1 + 3\alpha_3 = (0, 0, 4, 4)^T$ . 求  $AX = B$  的通解.

四、(本题12分) 用正交变换将实二次型  $f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$  化成一个标准形并求  $f(x, y, z)$  的正惯性指数和负惯性指数.

五、(本题12分) 线性空间  $\mathbf{R}^3$  中有两组基  $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 2)^T, \alpha_3 = (2, 0, 0)^T$ , 和  $\beta_1 = (3, 2, 2)^T, \beta_2 = (0, 2, 0)^T, \beta_3 = (-2, 2, 4)^T$ . 试用  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的线性组合表达  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

六、(本题12分) 令  $A$  为  $n$  阶实系数对称正交方阵.

(1) 证明  $A$  的特征值为1或-1.

(2) 证明可以找到  $n$  个两两正交的单位列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$  使得  $A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-m).$

七、(本题12分) (1) 计算  $n$  阶上三角实方阵全体和  $n$  阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间  $V$  和  $W$  的维数.  
(2) 计算实线性空间  $V \cap W$  和  $V + W$  的维数.

一、简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式  $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$  的值.

$$\text{解: } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a^2 - b^2) - b^2(a^2 - b^2) = (a+b)^2(a-b)^2.$$

$$\text{解法二: } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & a+b \\ 0 & a+b & a+b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^2(a-b)^2.$$

2. 令  $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , 计算  $((A^*)^T)^*$ .

$$\text{解: } ((A^*)^T)^* = ((A^*)^*)^T = (|A|A)^T = |A|A^T = -109 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

解法二: 由  $|A| = -109$  得  $A^* = |A|A^{-1}$ , 故  $B = (A^*)^T = |A|(A^T)^{-1}$ , 则  $|B| = |A|^3|(A^T)^{-1}| = |A|^2$ .

$$\text{于是 } ((A^*)^T)^* = B^* = |B|B^{-1} = |A|^2|A|^{-1}A^T = |A|A^T = -109 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 求使得方阵  $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$  正定的所有实数对  $(x, y)$  在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

解: 该方阵正定当且仅当  $12 - x^2 > 0$  且  $60 - 5x^2 - 3y^2 > 0$ . 所有满足这两个不等式的实数对  $(x, y)$  的集合为椭圆  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{20} < 1$ . 其面积为  $\pi \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{20} = 4\sqrt{15}\pi$ .

4. 求  $\alpha_1 = (0, 2, 1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (3, 4, 2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0, 7, 2)^T, \alpha_4 = (1, 0, 0, 2, 1)^T$  的一组极大无关组, 并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

$$\text{解: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为一组极大无关组,  $\alpha_4 = -\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3$ . (极大无关组选取不唯一)

二、(本题12分) 利用分块矩阵计算  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, (n \geq 1)$ .

解: 令  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . 我们有  $A^2 = E, AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . 因此

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{pmatrix}.$$

因此, 当  $n$  为偶数时  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 1 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 当  $n$  为奇数时  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2n & 3n \\ 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

解法二: 易知  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix}$ .

其中  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , 且有  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = E$ .

于是  $K^n = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & O \\ O & A^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & nD \\ O & E \end{pmatrix}$ .

故当  $n$  为偶数时, 有  $K^n = \begin{pmatrix} E & nD \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 1 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

当  $n$  为奇数时, 有  $K^n = \begin{pmatrix} A & nAD \\ O & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2n & 3n \\ 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

三. (本题12分) 设线性方程组  $AX = B$  中  $r(A) = 2$ .  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是其解向量, 满足  $4\alpha_1 - 3\alpha_2 = (1, 0, 2, 1)^T$ ,  $2\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 3, 9, 3)^T$ ,  $\alpha_1 + 3\alpha_3 = (0, 0, 4, 4)^T$ . 求  $AX = B$  的通解.

解: 由于  $r(A) = 2$ , 未知数个数为4,  $AX = \theta$  的解空间维数为2.

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $AX = B$  的解向量, 从而

$4\alpha_1 - 3\alpha_2 = (1, 0, 2, 1)^T$ ,  $\frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 1, 3, 1)^T$ ,  $\frac{1}{4}(\alpha_1 + 3\alpha_3) = (0, 0, 1, 1)^T$  是  $AX = B$  的解,

从而  $(1, 0, 2, 1)^T - (0, 1, 3, 1)^T = (0, -1, -1, 0)^T$ ,  $(0, 1, 3, 1)^T - (0, 0, 1, 1)^T = (0, 1, 2, 0)^T$  是  $AX = \theta$  的两个解. 注意到这两个解线性无关, 从而  $AX = \theta$  的通解为  $k_1(1, -1, -1, 0)^T + k_2(0, 1, 2, 0)^T$ , ( $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ ).

因此  $AX = B$  的通解为  $(1, 0, 2, 1)^T + k_1(1, -1, -1, 0)^T + k_2(0, 1, 2, 0)^T$ , ( $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ ).

(本题通解表达式不唯一)

解法二: 易知  $(4\alpha_1 - 3\alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

解得  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/21 & -2/21 \\ 9/7 & 12/7 & -3/7 \\ 27/7 & 94/21 & 1/21 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 故  $\alpha_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 27 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 36 \\ 94 \\ 21 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 1 \\ 21 \end{pmatrix}$ .

令  $\beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{21}(-5, 9, 13, 0)^T$ ,  $\beta_2 = \alpha_3 - \alpha_1 = -\frac{4}{21}(2, 9, 20, 0)^T$ .

显然  $\beta_1, \beta_2$  为  $AX = \theta$  的无关解, 又由  $r(A) = 2$ , 故  $\beta_1, \beta_2$  构成  $AX = \theta$  的一个基础解系, 故  $AX = B$  的通解为:  $\alpha_1 + k_1\beta_1 + k_2\beta_2$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ .

四. (本题12分) 用正交变换将实二次型  $f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$  化成一个标准形并求  $f(x, y, z)$  的正惯性指数和负惯性指数.

解: 设  $X = (x, y, z)^T$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ . 我们有  $f(x, y, z) = X^T A X$ .  $A$  的特征值为1, 4, 7. 它们的一个特征向量分别为  $\alpha_1 = (-2, 2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (-1, -2, 2)^T$ . 由于这三个分量分属对称矩阵  $A$  的三个不同特征值, 所以它们两两正交, 经它们单位化, 得到正交矩阵  $U = (\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}, \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

我们有  $U^T A U = \text{diag}(1, 4, 7)$ . 令  $(u, v, w)^T = U^T X$ , 标准形为

$f(u, v, w) = X^T A X = (u, v, w) U^T A U (u, v, w)^T = u^2 + 4v^2 + 7w^2$ .  
正惯性指数为3, 负惯性指数为0. (本题中二次型化为标准形形式不唯一)

五. (本题12分) 线性空间  $\mathbf{R}^3$  中有两组基  $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 2)^T, \alpha_3 = (2, 0, 0)^T$ ,  
和  $\beta_1 = (3, 2, 2)^T, \beta_2 = (0, 2, 0)^T, \beta_3 = (-2, 2, 4)^T$ . 试用  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的线性组合表达  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

解: 令  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)P$ , 则有

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故有 } \alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3, \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3, \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3.$$

$$\text{解法二: } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 3/8 & -1/4 \end{array} \right).$$

$$\text{故有 } \alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3, \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3, \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3.$$

$$\text{解法三: 设 } \sum_{i=1}^3 k_{ij}\alpha_i = \beta_j (1 \leq j \leq 3). \text{ 解得 } \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_3 \\ \beta_3 = 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}.$$

$$\text{即 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{从而 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}, \text{ 即有 } \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3 \\ \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3 \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3 \end{cases}.$$

六. (本题12分) 令  $A$  为  $n$  阶实系数对称正交方阵.

(1) 证明  $A$  的特征值为1或-1.

(2) 证明可以找到  $n$  个两两正交的单位列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$  使得

$$A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-m).$$

证: (1) 由  $A$  的性质可得  $AA^T = E_n$  且  $A = A^T$ . 从而  $A^2 = E_n$ . 因此  $A$  的任意特征值  $\lambda$  满足  $\lambda^2 = 1$ .  
所以  $A$  的特征值为1或-1.

(2) 由于  $A$  是对称实数矩阵且特征值为1或-1, 不妨设特征值1的重数为  $m$  而特征值-1的重数

为  $n-m$ . 那么存在正交矩阵  $U = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-m})$  使得  $U^T A U = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & -E_{n-m} \end{pmatrix}$ .

$$\text{从而 } (A\alpha_1, \dots, A\alpha_m, A\beta_1, \dots, A\beta_{n-m}) = AU = U \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & -E_{n-m} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, -\beta_1, \dots, -\beta_{n-m}),$$

即有  $A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-m)$ . 注意到  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-m}$  是正交矩阵  $U$  的  $n$  个列向量, 所以是两两正交的单位向量.

证法二: (1)  $A$  实对称且正交, 故有  $A^2 = A^T A = E$ . 设  $\lambda$  为  $A$  的任一特征值, 对应特征向量为  $\xi$ ,

则有  $A\xi = \lambda\xi$ . 故  $\xi = A^2\xi = \lambda A\xi = \lambda^2\xi$ , 由  $\xi \neq 0$ , 故  $\lambda^2 = 1$ , 即  $\lambda = \pm 1$ .

(2)  $A$  实对称, 故可对角化, 设  $A$  有  $m$  个特征值1,  $n-m$  个特征值-1,

则对应于1有  $m$  个无关特征向量, 标准正交化后得到  $m$  个标准正交的特征向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ,

即有  $A\alpha_i = \alpha_i, 1 \leq i \leq m$ .

同理有对应于-1的标准正交的特征向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$ , 有  $A\beta_j = -\beta_j, 1 \leq j \leq n-m$ .

由于  $\alpha_i, \beta_j$  对应不同的特征值, 故正交, 于是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$  是标准正交向量组.

七. (本题12分) (1) 计算  $n$  阶上三角实方阵全体和  $n$  阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间  $V$  和  $W$  的维数.

(2) 计算实线性空间  $V \cap W$  和  $V + W$  的维数.

解: (1) 令  $E_{ij} = e_i e_j^T$ , 其中  $e_i \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$  为  $n$  维列向量, 除了第  $i$  个分量为1其余都是0.

则  $E_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = i, i + 1, \dots, n$  构成  $V$  的一组基, 共有基向量  $\frac{n(n+1)}{2}$  个,

故  $\dim(V) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

同理  $E_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, i$  构成  $V$  的一组基, 有  $\dim(V) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

(2) 易知  $V+W = \mathbf{R}^{n \times n}$ , 故  $\dim(V+W) = n^2$ , 从而  $\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W) = n$ .

(2) 解法二: 易知  $V \cap W$  为  $n$  阶对角矩阵构成的空间,  $E_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$  为一组基, 故  $\dim(V \cap W) = n$ ,  
则  $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = n^2$ .