

## 最优化导论 第三次作业

1.  $f(\mathbf{x})$  为凸函数的充要条件是对任意的  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , 一元函数  $\varphi(\alpha) = f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})$  是关于  $\alpha$  的凸函数.
2. 利用凸函数二阶条件证明如下结论:  $\ln\text{-sum-exp}$  函数:  $f(x) = \ln \sum_{k=1}^n \exp x_k$  是凸函数;
3. 设  $D$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个非空凸集,  $f$  是定义在  $D$  上的凸函数,  $\alpha$  是一个实数, 则水平集  $D_\alpha = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D, f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$  是凸集.
4. 求下列函数的共轭函数: 最大值函数:  $f(x) = \max x_i$ .
5. (1) 证明有限个凸集的交集仍然是凸集.  
(2) 设  $D_1 = \{x \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0\}$ ,  $D_2 = \{x \mid x_1 - x_2 \geq 0, x_1 \leq 0\}$ . 令  $D = D_1 \cup D_2$ . 证明  $D_1, D_2$  均是凸集, 但  $D$  却不是凸的, 由此得出凸集的并集未必是凸集.
6. 设  $c_i(x) (i = 1, 2, \dots, m)$  为  $\mathbb{R}^n$  上的凹函数,  $f(x)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的凸函数, 证明函数

$$P(x) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log c_i(x)$$

在集合  $D = \{x \mid c_i(x) > 0\}$  上是凸函数. ( $\mu > 0$ )

课本习题: 《Convex Optimization》 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11, 3.12, 3.16