第 3 章 函数逼近与计算

姚遥

南京大学智能科学与技术学院

本章目录

函数逼近 | 引言

对于求已知函数 $f(x)$ 函数值的问题，我们希望求出便于计算且计算量省的公式来近似 $f(x)$

- 例如，Taylor展开式的部分和

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

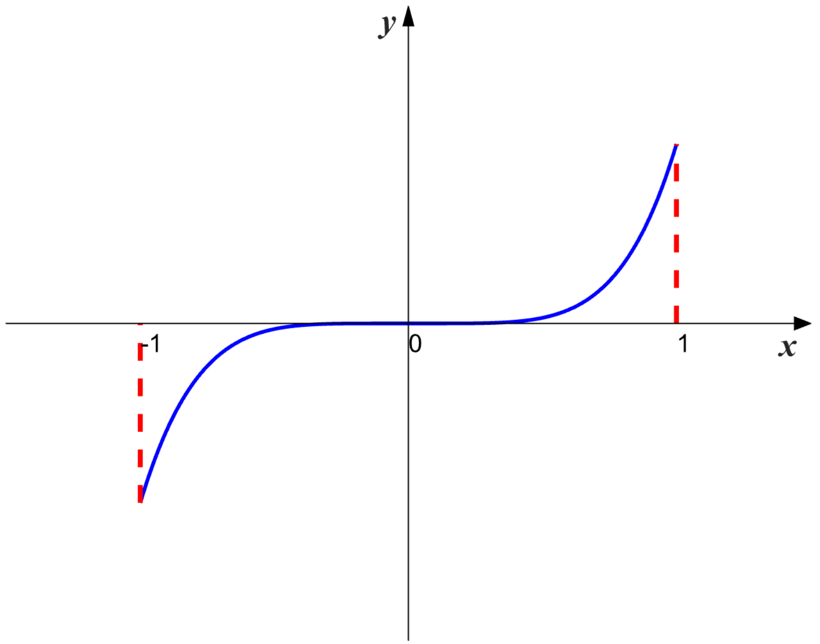
就是一种近似公式，在x_0附近的误差较小

- 例如，$f(x) = e^x$在$[-1,1]$ 上近似为

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

函数逼近 | 引言

- 误差：　$R_4(x) = e^x - P_4(x) = \frac{1}{120}x^5 e^{\varepsilon},\qquad \varepsilon \in (-1,1)$
- 误差限：　$|R_4(x)| \le \frac{e}{120}|x^5| \qquad \max_{-1\le x\le 1}|R_4(x)| \le \frac{e}{120} \approx 0.0226$
- 误差分布如下图所示，它在整个区间上误差较大



如精度要求较高，则需取很多项，这样既费时又多占存储单元

函数插值：给定插值节点$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 及条件，找穿过节点的函数

函数逼近：给定已知函数 $f(x)$，求计算次数少的近似公式

定义 对于函数类 A 中给定的函数 $f(x)$，要求在另一类较简单且便于计算的函数类 B 中，求函数 $P(x) \in B \subseteq A$，使 $P(x)$ 与 $f(x)$ 之差在某种度量意义下最小

- 函数类A通常是区间$[a,b]$上的连续函数，记作$C[a,b]$
- 函数类B通常为代数多项式、分式有理函数或三角多项式等

函数逼近｜度量标准

- 一致逼近或均匀逼近

$$\|f(x)-P(x)\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|$$

- 均方逼近或平方逼近

$$\|f(x)-P(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)-P(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

- 本章主要研究在这两种度量标准下用代数多项式 $P_n(x)$ 逼近 $f(x)\in C[a,b]$
  - 最佳一致逼近多项式
  - 最佳平方逼近多项式

对于 $f(x) \in C[a,b]$ ，是否存在多项式 $P_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$?

- 用插值法或Taylor展开求$f(x) \in C[a,b]$的逼近多项式，在某些点上可能没有误差，但在整个区间$[a,b]$上误差可能很大，例如Runge现象

定理3.1(Weierstrass定理) 设$f(x) \in C[a,b]$，则对于任何 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个代数多项式 $P(x)$ ，使

$$\|f(x) - P(x)\|_\infty < \varepsilon$$

在$[a,b]$上一致成立

函数逼近 | 一致逼近的存在性

Bernstein给出一种构造性证明，他根据函数整体逼近的特性造出Bernstein多项式

$$\begin{cases} B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x) \\ P_k(x) \quad = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

- 证明了 $\lim_{n\to\infty} B_n(f,x) = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致成立
- 若$f(x)$在$[0,1]$上m阶导数连续，则

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(m)}(f,x) = f^{(m)}(x)$$

- **证明过程见链接**

函数逼近 | 一致逼近的存在性

- 对于$B_n(f,x)$，可以证明

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

只需要根据二项式展开，令$y = 1 - x$就可得到

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- 当$x \in [0,1]$时还有$P_k(x) \geq 0$，于是

$$\sum_{k=0}^{n} |P_k(x)| = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) = 1$$

是有界的

函数逼近丨一致逼近的存在性

- 因而只要 $|f(x)| \leq \delta$ 对于任意$x \in [0,1]$成立，则

$$|B_n(f,x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \sum_{k=0}^{n} |P_k(x)| \leq \delta$$

有界，故$B_n(f,x)$是稳定的，有良好的逼近性质

- 作为对比，Lagrange插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x), \qquad \sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1, \qquad \text{但} \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)| \text{ 无界}$$

故 $L_n(x)$ 不能保证高阶插值的稳定与收敛

- 但 $B_n(f,x)$ 收敛太慢，比三次样条逼近效果差得多，实际中很少使用

函数逼近 | 范数

区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数组成一个空间，记作 $C[a,b]$ ，范数定义：

- $f \in C[a,b]$的 L_1 范数： $\|f(x)\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$
- $f \in C[a,b]$的 L_2 范数： $\|f(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\, \mathrm{d}x}$
- $f \in C[a,b]$的 L_∞ 范数： $\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$

- 范数 $\|\cdot\|$ 满足条件：
  - $\|f\| \geq 0$，当且仅当 $f \equiv 0$ 时才有 $\|f\| = 0$；
  - 对于任意 $f \in C[a,b]$ 和 $a \in \mathbb{R}$，$\|af\| = |a|\|f\|$；
  - 三角不等式：对于任意 $f,g \in C[a,b]$，有 $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (3.1.7)

函数逼近 | 函数距离

空间 $C[a,b]$ 可与向量空间类比，函数 $f \in C[a,b]$ 可看成向量

- 当 $f,g \in C[a,b]$时，定义 f 与 g 的距离：

$$D(f,g) = \|f-g\|_\infty \tag{3.1.8}$$

- 同时，由式(3.1.7)可得

$$D(f,g) \le D(f,h) + D(h,g) \tag{3.1.9}$$

$$\big|\|f\|_\infty - \|g\|_\infty\big| \le \|f-g\|_\infty \tag{3.1.10}$$

本章目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法

函数逼近 | 最佳一致逼近

研究动机

- 定理3.1中的存在性并没有约束 n 的值
- n 太大的话，函数复杂，难以计算
- 我们希望：固定 n ，寻求最优的逼近

多项式集合定义

- 记次数不大于 n 的多项式集合为 H_n ，$H_n \subseteq C[a,b]$
- 记 $H_n = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$ ，其中$1, x, \dots, x^n$是$[a,b]$上一组线性无关的函数组，是H_n中的一组基
- H_n 中的元素 $P_n(x)$ 可表示为 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ，其中 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为任意实数

最佳一致逼近或Chebyshev逼近问题

- 在 H_n 中求 $P_n^*(x)$ 逼近 $f(x) \in C[a,b]$，使其误差为

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n^*(x)| = \min_{P_n\in H_n}\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)|$$

即

$$\|f(x)-P_n^*(x)\|_\infty = \min_{P_n\in H_n}\|f(x)-P_n(x)\|_\infty$$

定义3.1 $P_n(x) \in H_n$，$f(x) \in C[a,b]$，称 $\Delta(f,P_n)$ 为 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**偏差（距离）**

$$\Delta(f,P_n) = D(f,P_n) = \|f-P_n\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)|$$

- $\Delta(f,P_n) \ge 0$，$\Delta(f,P_n)$的全体组成一个集合，记作$\{\Delta(f,P_n)\}$，它有下界0

函数逼近 | 最佳一致逼近

- 最小偏差即为集合$\{\Delta(f,P_n)\}$的下确界

$$E_n = \inf_{P_n \in H_n} \{\Delta(f,P_n)\} = \inf_{P_n \in H_n} \max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n(x)| \qquad (3.2.2)$$

定义3.2 假定 $f(x) \in C[a,b]$，若存在

$$P_n^*(x) \in H_n, \qquad \Delta(f,P_n^*) = E_n$$

则称 $P_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最佳一致逼近多项式**、最小偏差逼近多项式、**最佳逼近多项式**

定理3.2 若 $f(x) \in C[a,b]$，总存在 $P_n^*(x) \in H_n$，使$\|f(x) - P_n^*(x)\|_\infty = E_n$

定义3.3 设 $f(x) \in C[a,b]$，$P(x) \in H_n$，若在 $x = x_0$ 上有

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| = \mu$$

则称 x_0 是 $P(x)$ 的**偏差点**

- 若 $P(x_0) - f(x_0) = \mu$，则称x_0为“正”偏差点
- 若 $P(x_0) - f(x_0) = -\mu$，则称x_0为“负”偏差点
- 函数 $P(x) - f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，因此至少存在一个点$x_0 \in [a,b]$，使得

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \mu$$

函数逼近丨最佳逼近多项式：偏差点性质

定理3.3 若 $P(x) \in H_n$ 是 $f(x) \in C[a,b]$ 的最佳逼近多项式，则 $P(x)$

同时存在正、负偏差点

用反证法来证明：假定只有正偏差点，没有负偏差点（反之亦然）

- 对所有$x \in [a,b]$都有：

$$P(x) - f(x) > -E_n$$

- 因 $P(x) - f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，用$-E_n + 2h$ 表示最小值（ $h > 0$ ）

  因此：$$-E_n + 2h \leq P(x) - f(x) \leq E_n$$

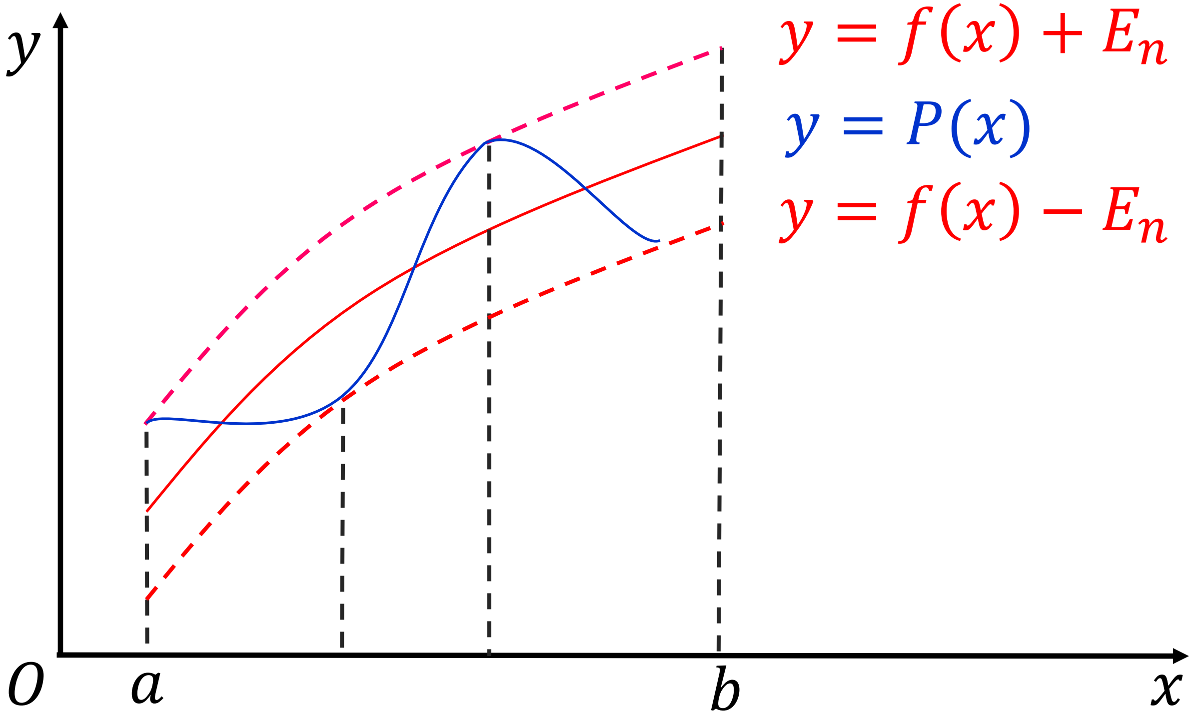
  因此：$$|[P(x) - h] - f(x)| \leq E_n - h$$

- 它表示多项式 $P(x) - h$ 与 $f(x)$ 的偏差小于 E_n，与 E_n 是最小偏差的假定矛盾

几和意义：曲线 $y = P(x)$ 位于下面两条曲线间的带状区域

$$y = f(x) + E_n, \qquad y = f(x) - E_n$$

- $P(x)$的图形应当与这两条曲线至少各接触一次
- 否则，可把曲线$y = P(x)$稍微移动，得到更好的近似



定理3.4 $P(x) \in H_n$ 是 $f(x) \in C[a,b]$ 的最佳逼近多项式的充要条件是 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+2$ 个轮流为“正”、“负”的偏差点，即有 $n+2$ 个点$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \le b$，使

$$P(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \|P(x) - f(x)\|_\infty \tag{3.2.4}$$

$$\sigma = \pm 1, \qquad k = 1,2,\ldots,n+2$$

这样的点组称为Chebyshev交错点组

- **只证充分性**：假定在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个点使式(3.2.4) 成立，要证明 $P(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳逼近多项式，用反证法求证

函数逼近 | 最佳逼近多项式：Chebyshev定理

- 若存在$Q(x) \in H_n$，$Q(x) \neq P(x)$使

$$\|f(x) - Q(x)\|_\infty \leq \|f(x) - P(x)\|_\infty$$

- 可以推断（画图）

$$P(x) - Q(x) = [P(x) - f(x)] - [Q(x) - f(x)]$$

在点 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ 上的符号与 $P(x_k) - f(x_k)(k = 1, \ldots, n + 2)$ 一致

➢ 因为$Q(x) - f(x)$的值小，不足以影响符号

- 因此，故 $P(x) - Q(x)$ 也在 $n + 2$ 个点上轮流取符号“+”、“−”
- 由连续函数性质，$P(x) - Q(x)$ 在(a, b)内有 $n + 1$ 个零点
- 与 $P(x) - Q(x) \neq 0$ 是不超过 n 次的多项式相悖，故充分性得证

推论1 若$f(x) \in C[a,b]$，则在 H_n 中存在**唯一**的最佳逼近多项式

- 若 H_n 中有两个最佳逼近多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$，则对于所有 $x \in [a,b]$，都有

$$-E_n \le P(x) - f(x) \le E_n \qquad -E_n \le Q(x) - f(x) \le E_n$$

- 于是

$$-E_n \le \frac{P(x)+Q(x)}{2} - f(x) \le E_n$$

故 $R(x) = \frac{P(x)+Q(x)}{2}$ 也是H_n中的最佳逼近多项式

- 因此，$R(x) - f(x)$ 的 $n+2$ 个交错点组 $\{x_k\}$ 满足

$$R(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma E_n (k = 1, \dots, n+2)$$

函数逼近 | 最佳逼近多项式：Chebyshev定理推论

- 同时

$$E_n = |R(x_k) - f(x_k)| = \left|\frac{P(x_k) - f(x_k)}{2} + \frac{Q(x_k) - f(x_k)}{2}\right|$$

- 又由于 $|P(x_k) - f(x_k)| \le E_n$，$|Q(x_k) - f(x_k)| \le E_n$，故当且仅当

$$\frac{P(x_k) - f(x_k)}{2} = \frac{Q(x_k) - f(x_k)}{2} = \pm\frac{E_n}{2}$$

时，式(3.2.5)才能成立

- 于是 $P(x_k) = Q(x_k)(k = 1, \dots, n + 2)$ 从而表明 $P(x) - Q(x)$ 有 $n + 2$ 个根，这个矛盾说明 $Q(x) \equiv P(x)$，故唯一性得证

函数逼近丨最佳逼近多项式：Chebyshev定理推论

推论2 若 $f(x) \in C[a,b]$，则其最佳逼近多项式 $P_n^*(x) \in H_n$ 就是 $f(x)$ 的一个Lagrange插值多项式

- 由定理3.4可知，$P_n^*(x) - f(x)$ 在 $[a,b]$ 上要么恒为零，要么有 $n+2$ 个轮流取 “正”、 “负 " 的偏差点
- 于是存在 $n+1$ 个点 $x_k \le \overline{x_k} \le x_{k+1}(k = 1,2,\dots,n+1)$ 使 $P_n^*(\overline{x_k}) - f(\overline{x_k}) = 0$，所以 $P_n^*(x)$ 是以 $\overline{x_k}$ 为插值节点的Lagrange插值多项式

➢ 插值多项式的唯一性

函数逼近 | 最佳逼近多项式：一次多项式

定理3.4 给出了最佳逼近多项式 $P(x)$ 的特性，但要求出 $P(x)$ 却相当困难

简单起见，考虑 $n = 1$ 的情形：假定 $f(x) \in C^2[a,b]$，且 $f''(x)$ 在 (a,b) 内不变号，要求最佳一次逼近多项式 $P_1(x) = a_0 + a_1 x$

- 根据定理3.4可知，至少有 3 个点 $a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$，使

$$P_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |P_1(x) - f(x)| \qquad (\sigma = \pm 1, k = 1,2,3)$$

- 根据函数连续性，$P_1(x) - f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 2 个零点
- 根据Rolle定理，$P_1'(x) - f'(x) = a_1 - f'(x)$ 在 (a,b) 内至少有 1 个零点
- 由于 $f''(x)$ 在 (a,b) 不变号，故 $f'(x)$ 单调，$a_1 - f'(x)$ 在 (a,b) 只有 1 个零点

函数逼近 | 最佳逼近多项式：一次多项式

- 因此，$P_1'(x) - f'(x)$的变化趋势为“$+\ 0\ -$”或者“$-\ 0\ +$”，必然导致
  - x_2 处梯度为 0：

$$P_1'(x_2) - f'(x_2) = a_1 - f'(x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_2) = a_1$$

  - x_1 和 x_3 位于区间端点 $x_1 = a, x_3 = b$

$$\Rightarrow P_1(a) - f(a) = P_1(b) - f(b) = -[P_1(x_2) - f(x_2)]$$

  - 由此得到 $\begin{cases} a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \\ a_0 + a_1 a - f(a) = f(x_2) - (a_0 + a_1 x_2) \end{cases}$

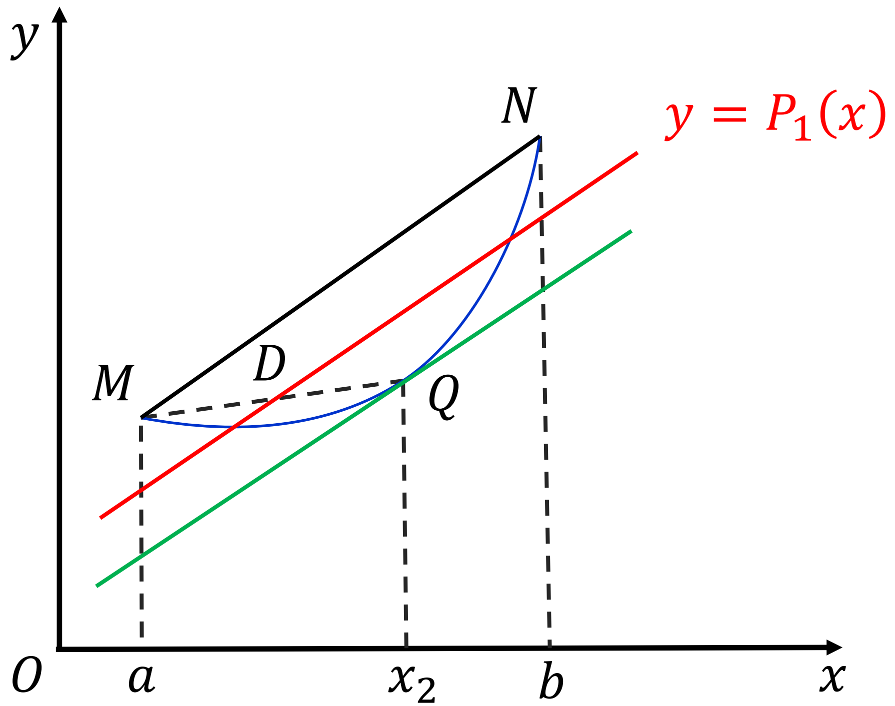
解得 $a_1 = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad a_0 = \dfrac{f(a) + f(x_2)}{2} - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\dfrac{a + x_2}{2}$

函数逼近 | 最佳逼近多项式：一次多项式

- 这就得到最佳一次逼近多项式 $P_1(x)$，其方程为

$$P_1(x) = \frac{1}{2}[f(a) + f(x_2)] + a_1\left(x - \frac{a + x_2}{2}\right)$$

几何意义：直线 $y = P_1(x)$ 与弦MN平行，且通过MQ的中点D



例3.1 求 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的最佳一次逼近多项式

- 由 $a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 可算出

$$a_1=\sqrt{2}-1\approx 0.414$$

- 由于$f'(x_2)=a_1$，可得

$$\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=\sqrt{2}-1$$

- 解得

$$x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\approx 0.4554 \qquad f(x_2)=\sqrt{1+x_2^2}\approx 1.0986$$

例3.1 求 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的最佳一次逼近多项式

- 由 $a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 可得： $a_1=\sqrt{2}-1\approx 0.414$
- 由于$f'(x_2)=a_1$，可得 $\quad \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=\sqrt{2}-1$

$$\Rightarrow\ x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\approx 0.4554,\quad f(x_2)=\sqrt{1+x_2^2}\approx 1.0986$$

- 由式(3.2.8)得 $\quad a_0=\frac{1+\sqrt{1+x_2^2}}{2}-a_1\frac{x_2}{2}\approx 0.955$

函数逼近 | 最佳逼近多项式：一次多项式

- 得 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x)=0.955+0.414x$$

- 故

$$\sqrt{1+x^2}\approx 0.955+0.414x,\qquad 0\le x\le 1$$

- 误差限为

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{1+x^2}-P_1(x)\right|\le f(0)-0.955=0.045$$

- 在式(3.2.9)中若令$x=\frac{a}{b}\le 1$，得到近似求根公式

$$\sqrt{a^2+b^2}\approx 0.955a+0.414b$$

本章目录

- 引言与预备知识
- 最佳一致逼近多项式
- 最佳平方逼近
- 正交多项式
- 函数按正交多项式展开
- 曲线拟合的最小二乘法

函数逼近丨最佳平方逼近

若存在 $P_n^*(x) \in H_n$，使

$$\|f - P_n^*\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x) - P_n^*(x)]^2 \, \mathrm{d}x} = \inf_{P \in H_n} \|f - P\|_2$$

则 $\mathrm{P_n^*(x)}$ 是 $\mathrm{f(x)}$ 在 $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ 上的最佳平方逼近多项式

- 先介绍内积空间的预备知识

函数逼近 | 内积空间：权函数

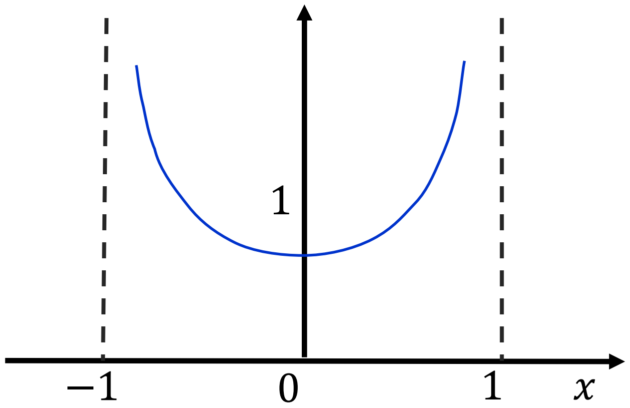
定义3.4 设在区间 (a,b) 内，非负函数 $\rho(x)$ 满足以下条件，就称 $\rho(x)$ 为区间 (a,b) 内的权函数：

- $\int_a^b |x|^n \rho(x)\,dx \ (n=0,1,2,\ldots)$ 存在
- 对于非负的连续函数$g(x)$，若

$$\int_a^b g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (3.3.2)$$

则在 (a,b) 内 $g(x)\equiv 0$

$\rho(x)$ **对** (a,b) **内的点赋予权重**　$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



函数逼近 | 内积空间：函数内积

定义3.5 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数，积分

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, \mathrm{d}x \qquad (3.3.3)$$

称为函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上的内积

可以验证这样定义的内积满足下列四条公理

- $(f,g) = (g,f)$
- $(cf,g) = c(f,g)$，c为常数
- $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
- $(f,f) \geq 0$，当且仅当$f = 0$ 时$(f,f) = 0$

函数逼近 | 内积空间：函数内积

类比欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的内积和范数

- 设 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，其内积定义为

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k$$

- $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$的模（范数）定义为

$$\|\boldsymbol{f}\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f})} = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 区别1：向量空间 -> 函数空间
- 区别2：引入权函数

函数逼近 | 内积空间：函数范数

定义3.6 $f(x) \in C[a,b]$，称

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (3.3.4)$$

为 $f(x)$ 的Euclid范数（满足范数的三条性质）

定理3.5 对于任何$f(x), g(x) \in C[a,b]$，下列结论成立：

- $|(f,g)| \le \|f\|_2 \|g\|_2$（Cauchy-Schwarz不等式）
- $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$（三角不等式）
- $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)$（平行四边形定律）

函数逼近 | 内积空间：正交函数

定义3.7 若 $f(x), g(x) \in C[a,b]$ 满足

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.3.7}$$

则称 f 与 g 在 $[a,b]$上带权 $\rho(x)$ 正交

若函数族 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$满足关系

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases} \tag{3.3.8}$$

则称 $\{\varphi_k\}$ 是$[a,b]$上带权 $\rho(x)$ 的正交函数族；若$A_k \equiv 1$，则称 $\{\varphi_k\}$为标准正交函数族

函数逼近 | 内积空间：正交函数

- 例如三角函数族

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

就是区间 $[-\pi, \pi]$ 上的正交函数族（权$\rho(x) \equiv 1$）：

$$(1,1) = 2\pi$$

$$(\sin nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (n, m = 1,2, \ldots)$$

$$(\cos nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (n, m = 1,2, \ldots)$$

$$(\cos nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (n, m = 1,2, \ldots)$$

函数逼近 | 内积空间：线性无关函数

定义3.8 设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，如果

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_{n-1}\varphi_{n-1}(x) = 0$$

当且仅当 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 时成立，称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上是线性无关的

若函数族$\{\varphi_k\}(k = 0,1, \dots)$中的任何有限个$\varphi_k$线性无关，则称$\{\varphi_k\}$为线性无关函数族

- $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ 就是 $[a,b]$ 上的线性无关函数族

- 若 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 是 $[a,b]$ 上的线性无关函数，且 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 是任意实数，则

$$S(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

的全体是 $C[a,b]$ 中的一个子集，记作

$$\Phi = \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$$

定理3.6 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关的充要条件是它的Cramer行列式 $G_{n-1} \neq 0$

$$G_{n-1} = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_{n-1}) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & (\varphi_{n-1}, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) \end{vmatrix}$$

函数逼近 | 最佳平方逼近

对$f(x) \in C[a,b]$，及 $C[a,b]$ 中的一个子集 $\Phi = span\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$，

若存在 $S^*(x) \in \Phi$，使

$$\|f - S^*\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \|f - S\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \, \mathrm{d}x \qquad (3.3.11)$$

则称$S^*(x)$是$f(x)$在Φ中的**最佳平方逼近函数**

- 求 $S^*(x)$ 等价于求以下多元函数的最小值

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) - f(x) \right]^2 \mathrm{d}x$$

函数逼近 | 最佳平方逼近

- 由于 $I(a_0, a_1, \dots, a_n)$ 是关于 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 的二次函数，利用多元函数极值的必要条件

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0(k = 0,1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0\ (k = 0,1, \dots, n)$$

- 于是有

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_k, \varphi_j)a_j = (f, \varphi_k)(k = 0,1, \dots, n)$$

  - 是关于 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 的线性方程组，称为法方程
  - 即 $\boldsymbol{Ha} = \boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{H}$ 表示Cramer行列式 G_n 对应的矩阵

函数逼近 | 最佳平方逼近

- 由于 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关，故系数行列式 $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$，于是方程组(3.3.13)有唯一解 $a_k = a_k^*(k = 0,1, \dots, n)$，从而得到

$$S^*(x) = a_0^*\varphi_0(x) + a_1^*\varphi_1(x) + \cdots + a_n^*\varphi_n(x)$$

- 下面验证 $S^*(x)$ 满足式(3.3.11)

$$\|f - S^*\|_2^2 = \inf_{S\in\Phi}\|f - S\|_2^2 = \inf_{S\in\Phi}\int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2\,\mathrm{d}x \qquad (3.3.11)$$

即对任何 $S \in \Phi$

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2\,\mathrm{d}x \qquad (3.3.14)$$

函数逼近 | 最佳平方逼近

- 为此只要考虑下式大于等于 0

$$D=\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\,\mathrm{d}x-\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)][f(x)-S^*(x)]\,\mathrm{d}x$$

- 由于$S^*(x)$的系数a_k^*满足

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)-f(x)\right]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=0\ (k=0,1,\dots,n)$$

- 因此

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\dots,n)$$

函数逼近 | 最佳平方逼近

- 为此只要考虑下式大于等于 0

$$D=\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\,\mathrm{d}x-\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)][f(x)-S^*(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \rho(x)[S(x)-S^*(x)][f(x)-S^*(x)]\,\mathrm{d}x=0$$

$S(x)-S^*(x)$ 可以写成 $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ 的线性组合

- 因此

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\dots,n)$$

函数逼近 | 最佳平方逼近

- 因此

$$D = \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)]^2 \, \mathrm{d}x + 2 \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)][f(x) - S^*(x)] \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \rho(x)[S(x) - S^*(x)]^2 \, \mathrm{d}x \geq 0$$

- 成功验证了 $S^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳平方逼近函数

函数逼近 | 最佳平方逼近：平方误差

分析平方误差

- 若令$\delta = f(x) - S^*(x)$，则平方误差为

$$\|\delta\|_2^2 = (f - S^*, f - S^*)$$

$$= (f, f - S^*) - (S^*, f - S^*)$$

- 由于

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0(k = 0,1,2,\dots,n)$$

- 可得 $(S, f - S^*) = 0$，因此

$$\|\delta\|_2^2 = (f, f) - (f, S^*) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^*(\varphi_k, f) \tag{3.3.15}$$

函数逼近 | 最佳平方逼近：平方误差

分析平方误差

- 若令$\delta = f(x) - S^*(x)$，则平方误差为

$$\|\delta\|_2^2 = (f - S^*, f - S^*)$$

$$= (f, f - S^*) - (S^*, f - S^*)$$

- 由于

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0(k = 0,1,2,\dots,n)$$

- 可得 $(S, f - S^*) = 0$，因此

$$\|\delta\|_2^2 = (f, f) - (f, S^*) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^*(\varphi_k, f) \qquad (3.3.15)$$

取 $\varphi_k(x) = x^k, \rho(x) \equiv 1, f(x) \in C[0,1]$，即要在 H_n 中求 n 次最佳平方逼近多项式

- 回顾法方程

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (f, \varphi_k) (k = 0,1, \dots, n) \tag{3.3.13}$$

- 计算可得

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 x^{k+j} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k + j + 1}$$

$$(f, \varphi_k) = \int_0^1 f(x) x^k \, \mathrm{d}x \equiv d_k$$

函数逼近 | 最佳平方逼近多项式

- 构造方程组 $\boldsymbol{Ha}=\boldsymbol{d}$，求解即可得到系数 a_k^*

  ➢ $\boldsymbol{H}$ 表示行列式 $G_n=G(1,x,x^2,\dots,x^n)$ 对应的矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \tag{3.3.16}$$

  $\boldsymbol{H}$ 称为Hilbert矩阵

  ➢ 此外

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\dots,d_n)^{\mathrm{T}} \tag{3.3.17}$$
$$d_k=\left(f,x^k\right)(k=0,1,\dots,n)$$

例3.2 求 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式

- 由式(3.3.17)可算出

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

- 构造方程组

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.147\\ 0.609\end{pmatrix}$$

例3.2 求 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式

- 求得$a_0=0.934,\ a_1=0.426$，故

$$S_1^*=0.934+0.426x$$

- 平方误差

$$\|\delta\|_2^2=(f,f)-(f,S_1^*)=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{1}a_k^*(\varphi_k,f)$$

$$=\int_0^1(1+x^2)\,\mathrm{d}x-0.426d_1-0.934d_0=0.0026$$

- 最大误差

$$\|\delta\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{1+x^2}-S_1^*(x)\right|=0.066$$

存在问题：$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 作基求最佳平方逼近多项式，当 n 较大时，系数矩阵式(3.3.16)是高度病态的，求解法方程舍入误差很大

$$\boldsymbol{Ha} = \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \tag{3.3.16}$$

解决方案：由无关正交多项式作基