

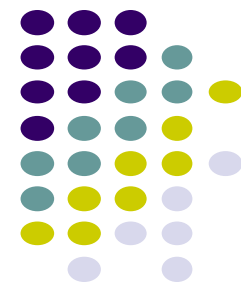
# 谓词逻辑初步

---

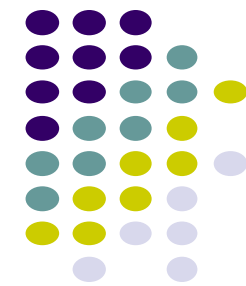
**2024年3月14日**

**南京大学计算机科学与技术系**

# 内容提要



- 为什么需要谓词逻辑?
  - 命题逻辑的局限性
- 什么是谓词?
- 量词及谓词表达式
- 一阶谓词逻辑



# 无能为力的命题逻辑

- 常见的推理过程和结论如何形式化？如何进行自然推演？
  - 人，都是要死的
  - 苏格拉底是人
  - 所以，苏格拉底是要死的！
- 形式化：
  - $P$ ：人都是要死的；  $Q$ ：苏格拉底是人；  $R$ ：苏格拉底要死
  - $P \wedge Q \Rightarrow R$ ?

问题出在哪里？



## 另一方面

- 如何揭示 “张三和李四是同学” 的内涵？
  - 令P：张三和李四是同学
  - P只是陈述了这个事实，但无法表达以下后续推演所需的事实：
    - 同学是学同一专业的
    - 张三是计算机专业的
    - 所以，李四是计算机专业的
- “ $x$  大于2”(如果 $x$ 是整数)不是命题,但是：
  - If  $x > 2$  then  $x := x + 1$
  - 仍然需要我们去形式刻画：当 $x=3$ 时，程序如何去执行

# 一阶逻辑命题



命题逻辑具有一定的局限性,甚至无法判断一些常见的简单推理. 例如,考虑下面的推理:

凡偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除.

这个推理是数学中的真命题,但在命题逻辑中却无法判断它的正确性.

在命题逻辑中只能将推理中出现的 3 个简单命题依次符号化为  $p, q, r$ , 将推理的形式结构符号化为

$$(p \wedge q) \rightarrow r.$$

由于上式不是重言式,所以不能由它判断推理的正确性.

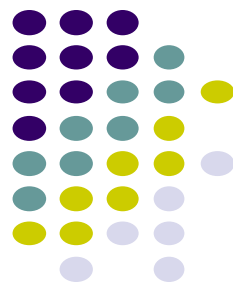
问题出在“凡”字,在命题逻辑中不能很好地描述“凡偶数都能被 2 整除”的本意,只能把它作为一个简单命题.

为克服命题逻辑的这种局限性,需要引入量词,以期达到表达出个体与总体之间的内在联系和数量关系,这就是一阶逻辑所研究的内容. 一阶逻辑也称作一阶谓词逻辑或谓词逻辑.

个体词、谓词和量词是一阶逻辑命题符号化的 3 个基本要素.



# 1 个体词



个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体.

例如,小王,小李,中国, $\sqrt{2}$ ,3 等都可作为个体词.

将表示具体或特定的客体的个体词称作个体常项,一般用小写英文字母  $a, b, c$  等表示,而将表示抽象或泛指个体词称作个体变项,常用  $x, y, z$  等表示.

称个体变项的取值范围为个体域(或称作论域).

个体域可以是有穷集合,例如,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$  等,也可以是无穷集合,如自然数集合  $\mathbb{N}$ 、实数集合  $\mathbb{R}$  等.

有一个特殊的个体域,它是由宇宙间一切事物组成的,称作全总个体域.

作为一种约定,本课程在论述或推理中若没有特别指明所采用的个体域,则都是使用全总个体域.

## 2 谓词



**谓词**是用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词,常用  $F, G, H$  等表示. 考虑下面 4 个陈述句.

- ①  $\sqrt{2}$  是无理数.
- ②  $x$  是有理数.
- ③ 小王与小李同岁.
- ④  $x$  与  $y$  具有关系  $L$ .

在 (1) 中,  $\sqrt{2}$  是个体常项, “... 是无理数”是谓词, 记为  $F$ . 整个陈述句可以表示成  $F(\sqrt{2})$ .

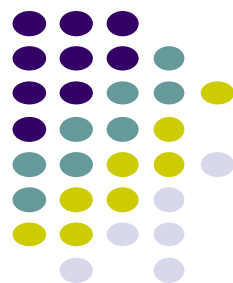
在 (2) 中,  $x$  是个体变项, “... 是有理数”是谓词, 记作  $G$ . 这个陈述句可以表示成  $G(x)$ .

在 (3) 中, 小王, 小李都是个体常项, “... 与 ... 同岁”是谓词, 记作  $H$ . 这个陈述句可符号化为  $H(a, b)$ , 其中  $a$  表示小王,  $b$  表示小李.

在 (4) 中,  $x, y$  为两个个体变项,  $L$  是谓词, 这个陈述句的符号化形式为  $L(x, y)$ .



## 2 谓词



同个体词一样,谓词也有常项与变项之分.表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项.无论是谓词常项或变项都用大写英文字母  $F, G, H$  等表示,要根据上下文区分.

上面 4 个陈述句中,(1),(2),(3) 中谓词  $F, G, H$  是常项,(4) 中谓词  $L$  是变项.

一般地,含  $n(\geq 1)$  个个体变项  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的谓词  $P$  称作  $n$  元谓词,记作  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

当  $n = 1$  时,  $P(x_1)$  表示  $x_1$  具有性质  $P$ ;当  $n \geq 2$  时,  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  表示  $x_1, x_2, \dots, x_n$  具有关系  $P$ .

$n$  元谓词是以个体域为定义域,以  $\{0, 1\}$  为值域的  $n$  元函数或关系.

有时将不带个体变项的谓词称作 0 元谓词.

例如,  $F(a), G(a, b), P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  等都是 0 元谓词.

当  $F, G, P$  为谓词常项时,0 元谓词为命题.反之,任何命题均可以表示成 0 元谓词,因而可以将命题看成特殊的谓词.





# 谓词 (Predicate)

- 如果 $x$ 是整数, “ $x$  大于2” 不是命题, 它的真值依赖于 $x$ 的取值
  - 可以将 “ $x$ 大于2”表示为  $P(x)$ 。//论域为实数
- 一元谓词 $P(\cdot)$  : 给定 $x$ ,  $P(x)$  要么为真, 要么为假.
  - 如  $p(x)$ :  $x$  is a prime number //  $x$ 是变量, 论域为正整数
- 二元(多元)谓词 $Q(\cdot, \cdot)$ 
  - 如  $Q(x, y)$  :  $x$ 和 $y$ 是同学 // 2个变量,  $x, y$ 的论域是全体人
  - 如  $uncle(z, x)$  :  $z$  is uncle of  $x$  //论域?



## 由谓词产生的命题

- $P(x)$ :  $x$ 大于2, 论域为自然数
  - $P(2)$ 为FALSE,  $P(3)$ 为TRUE
- $Q(x)$ :  $x$ 是人, 论域为?
  - 人?
  - 全总个体域
  - $P(\text{苏格拉底})$ 为TRUE;  $P(\text{馆3-103})$ 为?
- $R(x,y)$ :  $x=y+3$ , 论域为实数集
  - $R(1,4)$ 和 $R(4,1)$ 分别是?

# 一阶逻辑谓词符号化



## 例 18.1.1

将下列命题在一阶逻辑中用 0 元谓词符号化, 并讨论它们的真值.

- ① 仅当 2 是素数, 4 才是素数.
- ② 若 5 大于 4, 则 4 大于 6.

解

(1) 设 1 元谓词  $F(x)$ :  $x$  是素数, 命题可符号化为

$$F(4) \rightarrow F(2).$$

由于此蕴涵式的前件为假, 所以命题为真.

(2) 设 2 元谓词  $G(x, y)$ :  $x > y$ , 命题可符号化为

$$G(5, 4) \rightarrow G(4, 6).$$

由于  $G(5, 4)$  为真, 而  $G(4, 6)$  为假, 所以命题为假.



### 3 量词



表示个体常项或变项之间数量关系的词称作 **量词**。有两种量词。

(1) 全称量词。日常生活和数学中常用的“一切的”“所有的”“每一个”“任意的”“凡”“都”等词统称作 **全称量词**，用符号“ $\forall$ ”表示， $\forall x$  表示个体域里的所有个体  $x$ ，其中个体域是事先约定的。

例如， $\forall xF(x)$  表示个体域里所有个体  $x$  都有性质  $F$ ， $\forall x\forall yG(x, y)$  表示个体域里的所有个体  $x$  和  $y$  有关系  $G$ ，其中  $F$  和  $G$  是谓词。

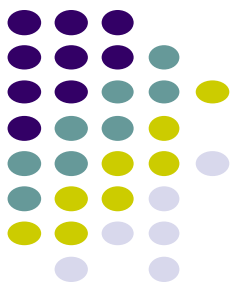
(2) 存在量词。日常生活和数学中常用的“存在”“有一个”“有的”“至少有一个”等词统称作 **存在量词**，用符号“ $\exists$ ”表示。 $\exists x$  表示个体域里有一个个体  $x$ 。

例如，用  $\exists xF(x)$  表示在个体域里存在个体  $x$  具有性质  $F$ ， $\exists x\exists yG(x, y)$  表示在个体域里存在个体  $x$  和  $y$  有关系  $G$ 。

全称量词和存在量词可以联合使用。

例如  $\forall x\exists yG(x, y)$  表示对个体域里所有个体  $x$ ，存在  $y$  使得  $x$  和  $y$  有关系  $G$ ；

而  $\exists x\forall yG(x, y)$  表示个体域里存在个体  $x$ ，使得该  $x$  和所有的个体  $y$  有关系  $G$ 。

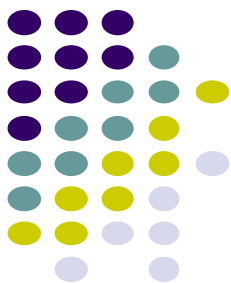


# 谓词表达式中的量词(谓词的量化)

- 表达论域内，谓词成立的范围(程度)
- $\forall x$  (全称量词)
  - $\forall x P(x)$  为真 iff 对所有的 $x$ ,  $P(x)$ 为真 //论域, domain of discourse
- $\exists x$  (存在量词)
  - $\exists x P(x)$ 为真 iff 存在某个 $x$ ,  $P(x)$ 为真 //论域
- $\forall x(x>2)$ 为假,  $\exists x(x>2)$ 为真 //论域为实数
- $\forall x \exists y(y>x)$ 为真,  $\exists y \forall x (y>x)$ 为假 //论域为实数



# 习题1：一阶谓词逻辑符号化



## 例 18.1.2

在个体域分别限制为 (a) 和 (b) 条件时,将下面两个命题符号化.

- ① 凡人都呼吸.
- ② 有的人用左手写字.

其中:(a) 个体域  $D_1$  为人类集合;(b) 个体域  $D_2$  为全总个体域.

## 解

(a) 令  $F(x):x$  呼吸.  $G(x):x$  用左手写字. 在  $D_1$  中除人外,再无别的东西,因而 (1) 符号化为

$$\forall xF(x). \quad (18.1.1)$$

(2) 符号化为

$$\exists xG(x). \quad (18.1.2)$$

(b)  $D_2$  中除有人外,还有万物,因而在符号化时必须考虑将人先分离出来. 为此引入谓词  $M(x):x$  是人. 在  $D_2$  中,把

(1),(2) 说得更清楚些:(1) 对于宇宙间一切个体而言,若个体是人,则他呼吸.

(2) 在宇宙间存在用左手写字的人(或者更清楚地,在宇宙间存在这样的个体,该个体是人且用左手写字).

于是,(1),(2) 的符号化形式应分别为

$$\forall x(M(x) \rightarrow F(x)), \quad (18.1.3)$$

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)), \quad (18.1.4)$$

其中  $F(x)$  与  $G(x)$  的含义同 (a).  $\square$



由例 18.1.2 可知,命题 (1),(2) 在不同的个体域中符号化的形式可能不一样. 当使用全总个体域  $D_2$  时,为了将人与其他事物区别出来,引进了谓词  $M(x)$ . 这样的谓词称作 **特性谓词**. 换言之,特性谓词是用来限制个体域的,它将个体变元限制在满足该谓词代表的性质或关系的范围内.

常见错误:不能正确地使用  $\rightarrow$  与  $\wedge$ . 例如,在  $D_2$  中错误地将 (1) 符号化为下面形式

$$\forall x(M(x) \wedge F(x)). \quad (18.1.5)$$

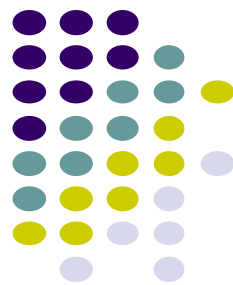
若将它翻译成自然语言,则应该是“宇宙间的所有个体都是人并且都呼吸”,这显然不是 (1) 的原意. 另一方面,还有人错误地将 (2) 符号化为

$$\exists x(M(x) \rightarrow G(x)). \quad (18.1.6)$$

将它翻译成自然语言应该为“在宇宙间存在个体,如果这个个体是人,那么他用左手写字”,这显然也不是 (2) 的原意.

当  $F$  是谓词常项时,  $\forall xF(x)$  是一个命题. 如果把个体域中的任一个体  $a$  代入,  $F(a)$  都为真,那么  $\forall xF(x)$  为真;否则  $\forall xF(x)$  为假.  $\exists xF(x)$  也是一个命题. 如果个体域中存在一个个体  $a$ ,使得  $F(a)$  为真,那么  $\exists xF(x)$  为真;否则  $\exists xF(x)$  为假.

# 习题2 一阶谓词符号化



## 例 18.1.3

在个体域限制为 (a) 和 (b) 条件时,将下列命题符号化,并给出它们的真值.

- ① 对于任意的  $x$ , 均有  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ .
- ② 存在  $x$ , 使得  $x + 5 = 3$ .

其中: (a) 个体域  $D_1 = \mathbb{N}$ ; (b) 个体域  $D_2 = \mathbb{R}$ .

解

(a) 令

$$F(x) : x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

$G(x) : x + 5 = 3$ . 命题 (1) 的符号化形式为

$$\forall x F(x). \quad (18.1.7)$$

命题 (2) 的符号化形式为

$$\exists x G(x). \quad (18.1.8)$$

显然 (1) 为真命题, 而 (2) 为假命题.

(b) 在  $D_2$  内, (1) 与 (2) 的符号化形式还分别是式 (18.1.7) 和式 (18.1.8), (1) 仍然是真命题, 而此时 (2) 也为真命题.

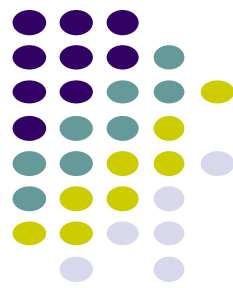
□

## 注 18.1.1

从例 18.1.2 和例 18.1.3 可以看出:

- ① 在不同个体域内, 同一个命题的符号化形式可能不同, 也可能相同.
- ② 同一个命题, 在不同个体域中的真值也可能不同.





### 例18.1.4解(续)

(2) 令  $G(x) : x$  登上过月球. 命题 (2) 符号化形式为

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)). \quad (18.1.10)$$

设  $a$  是 1969 年登上月球完成阿波罗计划的美国宇航员阿姆斯特朗,  $M(a) \wedge G(a)$  为真, 所以式 (18.1.10) 为真.

(3) 令  $H(x) : x$  登上过木星. 命题 (3) 符号化形式为

$$\neg \exists x(M(x) \wedge H(x)). \quad (18.1.11)$$

到目前为止, 还没有人登上过木星, 所以对任何个体  $a$ , 要么  $M(a)$  为假( $a$  不是人), 要么  $H(a)$  为假( $a$  没有登上过木星), 故  $M(a) \wedge H(a)$  均为假, 因而  $\exists x(M(x) \wedge H(x))$  为假, 式 (18.1.11) 为真.

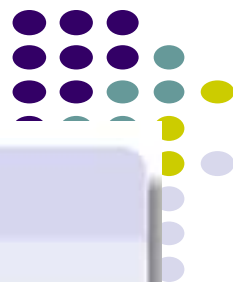
(4) 令  $F(x) : x$  是在美国留学的学生,  $G(x) : x$  是亚洲人. 命题 (4) 符号化形式为

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \quad (18.1.12)$$

此命题为真. □



## 习题2 一阶谓词符号化



### 注18.1.2(续)

(4) 命题的符号化形式不唯一. 例如, 在例 18.1.5 中, (3) 还可以符号化为

$$\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)); \quad (18.1.19)$$

(4) 还可以符号化为

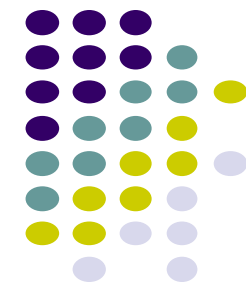
$$\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge N(x, y) \rightarrow \neg L(x, y)). \quad (18.1.20)$$

第 19 章可以证明式 (18.1.15) 和式 (18.1.19)、式 (18.1.16) 与式 (18.1.20) 是等值的.

由于引进了个体词、谓词和量词的概念, 现在可以将本章开始时讨论的推理“凡偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除.”在一阶逻辑中符号化为

$$(\forall x (F(x) \rightarrow G(x))) \wedge F(6) \rightarrow G(6), \quad (18.1.21)$$

其中,  $F(x)$ :  $x$  是偶数,  $G(x)$ :  $x$  能被 2 整除. 第 19 章可以证明式 (18.1.21) 是永真式, 即恒真.



# 量化公式中的变元

- 约束变元
  - $\forall x \exists y (y > x)$  是  $\forall x (\exists y (y > x))$  简写,  $x$  和  $y$  都是约束变元
  - $\exists y (y > x) \wedge \exists z (x > z)$ ,  $y$  和  $z$  都是约束变元
  - 量词作用域
    - 量词绑定的约束变元的应用范围
    - $\exists y (y > x) \wedge (x + 2 > y) \equiv \exists z (z > x) \wedge (x + 2 > y)$ 
      - $\exists y$  和  $\exists z$  的作用域?
- 自由变元
  - $\exists y (y > x) \wedge \exists z (x > z)$ ,  $x$  是自由变元
  - $\exists y (y > x) \wedge (x + 2 > y)$ ,  $x$  是自由变元, 后面那个  $y$  也是自由变元
  - 自由变元通常被认定为全称量词约束

# 多个量词嵌套



- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

举例：  $P(x, y)$  表示  $x+y=y+x$ 。论域为实数集

- $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

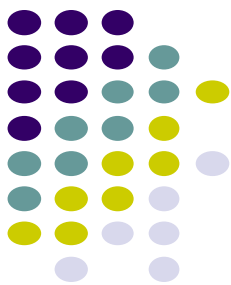
举例：  $P(x, y)$  表示  $x=y+1$ 。

- $\forall x \exists y P(x, y)$  与  $\exists y \forall x P(x, y)$  不一定等价

- 往往不等价

举例：  $P(x, y)$  表示 “ $y > x$ ”。





# 逻辑公式 (formula)

原子陈述:

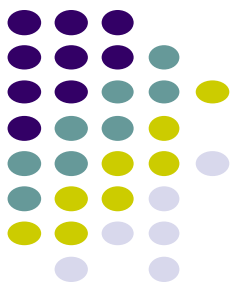
- $P(t_1, \dots, t_n)$ , 其中 $P$ 是 $n$ 元谓词,  $t_i$ 是常量、变量或函数取值

逻辑公式 (有时称为 “陈述” ) :

- 原子陈述是逻辑公式;
- 若 $P$ 是逻辑公式,  $x$ 是自由变元, 则 $\exists xP$ 和 $\forall xP$ 是逻辑公式;
- 若 $P$ 和 $Q$ 是逻辑公式, 则  $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$ 是逻辑公式。
- 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是逻辑公式

备注: 量词的优先级高于其它逻辑连接符

举例:  $\forall x (x \leq 0 \vee \exists y (y > 0 \wedge x = y^2))$



# 谓词逻辑公式的否定

- 量词的德摩根定律

表 2 量词的德·摩根律

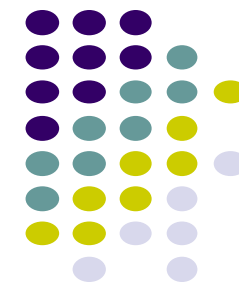
否定	等价语句	何时为真	何时为假
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	对每个 $x$ , $P(x)$ 为假	有 $x$ , 使 $P(x)$ 为真
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	有 $x$ 使 $P(x)$ 为假	对每个 $x$ , $P(x)$ 为真

- 嵌套量词的否定

- 反复使用单量词德摩根定律

- 例:  $\forall w \neg \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$  的否?

# 谓词表达式的真值判定



- 全称量词公式 $\forall x P(x)$ 的真值判定：
  - 如果论域是有限集合：枚举所有元素 $a_i$ 
    - $\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots P(a_n)$
  - 如果论域是无限集合：
    - 为真：数学证明
    - 为假：找到反例
- 存在量词公式 $\exists x P(x)$ 的真值判定
  - 如果论域是有限集合：枚举所有元素 $a_i$ 
    - $\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots P(a_n)$
  - 如果论域是无限集合：
    - 为真：举出（构造）一个实例
    - 为假：数学证明





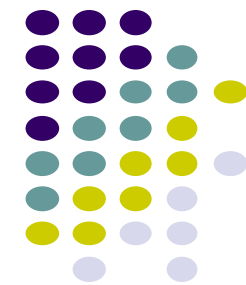
# 谓词公式的真值判定

**一阶逻辑公式的永真性判定有相当的难度!**

$$\forall n(even(n) \wedge (n > 2) \rightarrow \exists m \exists k(p(m) \wedge p(k) \wedge (n = m + k)))$$

哥德巴赫猜想（1740s年），就是这个逻辑公式，至今无法判定其真假

变量的论域（domain of discourse）：**无限**与有限，天壤之别

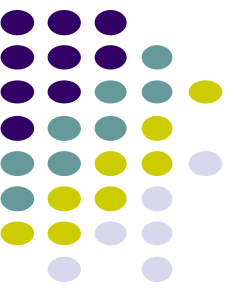


# 谓词逻辑的应用

- 知识表示

- $\forall n (odd(n) \rightarrow odd(n^2))$
- $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$   
*// z is uncle of x*
- $father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)$

上述知识无法用命题逻辑表达！



# Prolog (Programming in Logic)

- 若 $z$ 是 $y$ 的兄弟, 且 $y$ 是 $x$ 的父亲, 则 $z$ 是 $x$ 的叔叔。

- $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$

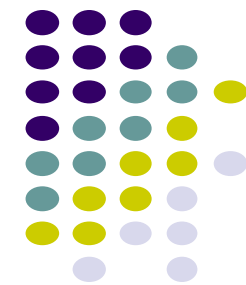
$uncle(z, x) \text{ :- } brother(z, y), father(y, x)$

- 事实

- $brother(Klopp, Karl)$
- $brother(Klinsmann, Karl)$
- $brother(Karl, Loew)$
- $father(Karl, Neuer)$

- 查询: ?  $uncle(z, Neuer)$





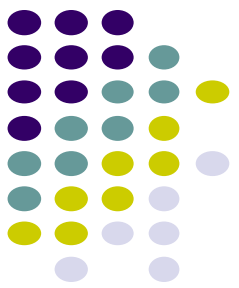
# 谓词逻辑的应用

- 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
  - $\forall n(even(n) \wedge (n > 2) \rightarrow \exists m \exists k(p(m) \wedge p(k) \wedge (n = m + k)))$

*even(n)* : *n* is a even number

*p(x)*: *x* is a prime number

这个猜想的内涵无法用命题逻辑表达！（命题逻辑的局限性）



# 将自然语言翻译成逻辑公式

- 任意实数的平方都是正数
  - $\forall x P(x)$ , 其中  $P(x)$  表示  $x^2 > 0$ , 论域为实数
- 所有美国人都吃汉堡包
  - $\forall x C(x)$ , 其中  $C(x)$  表示 “ $x$ 吃汉堡包”, 论域为美国人
  - $\forall x (A(x) \rightarrow C(x))$  // 论域为人类
  - $A(x)$  表示 “ $x$ 是美国人”,  $C(x)$  表示 “ $x$ 吃汉堡包”

# 将自然语言翻译成逻辑公式



这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$ :  $x$ 是这个班上的学生

$C(x)$ :  $x$ 学过微积分课程

$\forall x (S(x) \rightarrow C(x))$

这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

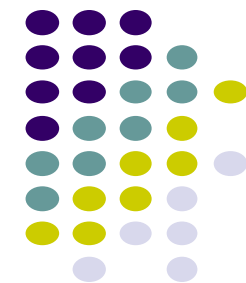
$S(x)$ :  $x$ 是这个班上的学生

$V(x, y)$ 表示 “ $x$ 访问过（去过） $y$ ”

其中， $c$ 代表“加拿大”， $m$ 代表“墨西哥”

$\forall x (S(x) \rightarrow V(x, c) \vee V(x, m))$





# 自然语言的形式化

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  不存在

由于“ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  不存在”意味着对全体实数  $L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ , 这个语句可以表达为

$$\forall L \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon)$$

最后一个语句表示, 对每个实数  $L$ , 存在实数  $\epsilon > 0$  使得对每个实数  $\delta > 0$ , 都存在实数  $x$  使得  $0 < |x - a| < \delta$  但是  $|f(x) - L| \geq \epsilon$ 。



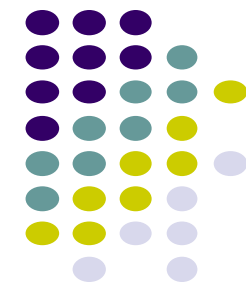
# 存在量词形式化过程中的“困惑”

- 有的政治家是诚实的
  - $P(x)$ 表示“ $x$ 是政治家”， $H(x)$ 表示“ $x$ 是诚实的”
  - 如果论域是政治家：
    - $\exists x H(x)$
  - 如果论域是人：
    - $\exists x (P(x) \wedge H(x))$  //外层的()不能缺
      - $\exists x (P(x) \rightarrow H(x))$ 的真值情况，能否与前者语言等价吗？
      - 如果所有的政治家都是诚实的，那么前者为真，后者为真。
        - $P(\text{陶先平})$ 为真
        - 而  $P(\text{陶先平}) \rightarrow H(\text{陶先平})$  为真

我们为什么用  
合取连接符？

# 谓词逻辑推理

- 常用逻辑等价式
- 基于规则的推理

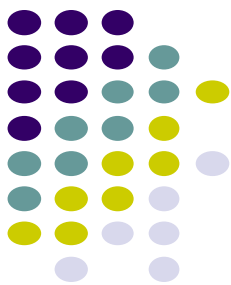


# 常用逻辑等价式



- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\forall x P(x)$ : **对所有实数** $x$ , 其平方是正数 //  $P(x)$ 表示 $x^2 > 0$
- 否定: **存在某个实数**  $x$ , 其平方**不是**正数。
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- $\exists x P(x)$ : **存在实数** $x$ ,  $x$ 的平方是正数.
- 否定: **对任意实数** $x$ , 其平方**不是**正数





# 常用逻辑等价式

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall xP(x)) \wedge (\forall xQ(x))$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists xP(x)) \vee (\exists xQ(x))$

反向蕴涵×：是奇数或偶数

- $(\forall xP(x)) \vee (\forall xQ(x)) \not\models \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\models (\exists xP(x)) \wedge (\exists xQ(x))$
  
- $\forall x(P(x) \vee R) \equiv (\forall xP(x)) \vee R$
- $\exists x(P(x) \wedge R) \equiv (\exists xP(x)) \wedge R$



# 常用逻辑等价式（可以证明）

- $\forall x(R \rightarrow P(x)) \equiv R \rightarrow \forall xP(x)$   $\forall x(\neg R \vee P(x)) \equiv \neg R \vee (\forall xP(x))$
- $\exists x(R \rightarrow P(x)) \equiv R \rightarrow \exists xP(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\exists xP(x)) \rightarrow R$
- $\exists x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\forall xP(x)) \rightarrow R$

$$\exists x(\neg P(x) \vee R) \equiv (\exists x \neg P(x)) \vee R \equiv \neg(\forall xP(x)) \vee R$$

注意：这里 $x$ 不在 $R$ 中出现

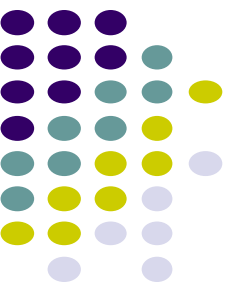


# 前束范式 (Prenex Normal Form)

$\forall x (x \leq 0 \vee \exists y (y > 0 \wedge x = y^2))$  //不是前束范式

$\forall x \exists y (x \leq 0 \vee (y > 0 \wedge x = y^2))$  //前束析取范式

有通用方法，把任意一阶逻辑公式转化为PNF (PDNF/PCNF)

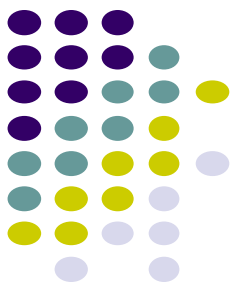


# 转化为前束范式（举例说明）

$$\begin{aligned} & \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) && \text{(消去 } \rightarrow \text{)} \\ \equiv & \neg \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \vee \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) && \text{(内移 } \neg \text{)} \\ \equiv & \forall z(\forall x \neg Q(x, z) \wedge \forall x \neg P(x)) \vee (\exists x P(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z, x)) && \text{(简化)} \\ \equiv & \forall z \forall x (\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists x (P(x) \vee \forall z \neg Q(z, x)) && \text{(重命名)} \\ \equiv & \forall z \forall x (\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists y (P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y)) && \text{(前移量词)} \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y ((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y)) && \text{(前移量词)} \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) && \text{(合取分配)} \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y))) \end{aligned}$$

前束合取范式PCNF





## 前束合取范式（举例说明）

$$\forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((\neg B(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee U(z, x)) \wedge (\neg F(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee G(z, x)))$$

$$brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$$

$$father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)$$



# 量词相关的“自然演绎规则”

$\forall x P(x)$

---

$\therefore P(c)$

全称例示

$\forall-$  规则

$P(c)$ 对任意的 $c$

---

$\therefore \forall x P(x)$

全称生成

$\forall+$  规则

$\exists x P(x)$

---

$\therefore P(c)$ 对于某个 $c$

存在例示

$\exists-$  规则

$P(c)$ 对某个 $c$

---

$\therefore \exists x P(x)$

存在生成

$\exists+$  规则.



# 谓词假言推理示例

- A classic inference, dating back to ancient Greece:

$P(x)$ :  $x$  is a man;     $Q(x)$ :  $x$  will die;

Every man will die:  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$

Socrates is a Man:  $P(s)$

-----

Conclusion: Socrates will die:  $Q(s)$

$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$

$P(s) \Rightarrow Q(s)$

$P(s)$

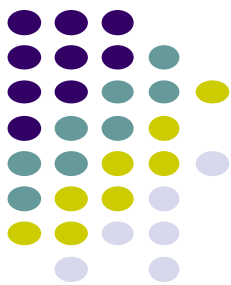
---

$Q(s)$



# 基于规则的推理（举例）

- **前提**
  - 在这个班上的某个学生没有读过这本书
  - 班上的每个人都通过了第一门考试
- **结论：通过第一门考试的某个人没有读过这本书**
- $C(x)$ :  $x$ 在这个班上
- $B(x)$ :  $x$ 读过这本书了
- $P(x)$ :  $x$ 通过了第一门考试
  - $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
  - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
  - $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$



## 基于规则的推理（举例）

$$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x)), \forall x(C(x) \rightarrow P(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$$

因为  $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$  //这是前提

根据存在例示，有某个  $a$ ， $C(a) \wedge \neg B(a)$  成立。

根据化简，得到  $C(a)$  成立， $\neg B(a)$  成立。

因为  $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$  //这是前提

根据全称例示，得到  $C(a) \rightarrow P(a)$

根据假言推理，得到  $P(a)$

根据合取律，得到  $P(a) \wedge \neg B(a)$

根据存在生成，得到  $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$





# What's Wrong?

Somebody proves the expression:

$$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$$

as follows:

- |   |         |
|---|---------|
| 1. $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ | 前提      |
| 2. $\exists xA(x)$                      | 化简, 1   |
| 3. $\exists xB(x)$                      | 化简, 1   |
| 4. $A(c)$                               | 存在例示, 2 |
| 5. $B(c)$                               | 存在例示, 3 |
| 6. $A(c) \wedge B(c)$                   | 合取, 4,5 |
| 7. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$        | 存在生成, 6 |

**Is it correct?**

# 习题课-题型一:

1. 设个体域为自然数集  $\mathbb{N}$ ,  $F(x):x$  是偶数,  $G(x):x$  是素数, 真假.

- (1) 2 是偶素数.
- (2) 若 2 是素数, 则 4 不是素数.
- (3) 只有 2 是素数, 6 才能是素数.
- (4) 除非 6 是素数, 否则 4 是素数.
- (5) 5 是素数当且仅当 6 是素数.
- (6) 5 不是素数当且仅当 6 是素数.

2. 设个体域  $D = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ , 将下列命题符号化.

- (1)  $D$  中所有元素都是整数.
- (2)  $D$  中有的元素是偶数.
- (3)  $D$  中所有的偶数都能被 2 整除.
- (4)  $D$  中有的偶数是 4 的倍数.

3. 设个体域为  $D = \{x|x \text{ 为人}\}$ , 将下列命题符号化.

- (1) 人都生活在地球上.
- (2) 有的人长着黑头发.
- (3) 中国人都用筷子吃饭.
- (4) 有的美国人不住在美国.

4. 将下列命题符号化.

- (1) 人都生活在地球上.
- (2) 有的人长着黑头发.
- (3) 并不是所有的实数都能表示成分数.
- (4) 没有能表示成分数的无理数.

5. 将下列命题符号化.

- (1) 任意的偶数  $x$  和  $y$  都有大于 1 的公因数.
- (2) 存在奇数  $x$  和  $y$  没有大于 1 的公因数.
- (3) 说所有火车比所有汽车都快是不对的.
- (4) 说有的火车比所有汽车都快是正确的.

(4)  $\neg G(6) \rightarrow G(4)$  (或  $\neg G(4) \rightarrow G(6)$ ), 由于蕴涵式的前件为真, 后件为假, 故复合命题  $\neg G(6) \rightarrow G(4)$  为假命题.

(5)  $G(5) \leftrightarrow G(6)$ , 假命题.

(6)  $\neg G(5) \leftrightarrow G(6)$ , 真命题.

2. 本题 (1)、(2) 不引入特性谓词, 而 (3)、(4) 要引入特性谓词.

(1)  $\forall x F(x)$ , 其中  $F(x):x$  是整数.

(2)  $\exists x G(x)$ , 其中  $G(x):x$  是偶数.

(3)  $\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$ , 其中  $G(x):x$  是偶数,  $H(x):x$  能被 2 整除,  $G(x)$  在这里是特性谓词.

(4)  $\exists x(G(x) \wedge R(x))$ , 其中  $G(x):x$  是偶数,  $R(x):x$  是 4 的倍数, 这里  $G(x)$  是特性谓词.

3. (1) 与 (2) 不用引入特性谓词, 而 (3) 与 (4) 要引入特性谓词.

(1)  $\forall x F(x)$ , 其中  $F(x):x$  生活在地球上.

(2)  $\exists x G(x)$ , 其中  $G(x):x$  长着黑头发.

(3)  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ , 其中  $F(x):x$  为中国人,  $G(x):x$  用筷子吃饭.

(4)  $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$ , 其中  $F(x):x$  是美国人,  $G(x):x$  住在美国.

4. 在本题中没有指明个体域, 因而使用全总个体域. 在使用全总个体域时, 第 3 题 (1) 与 (2) 中的命题在本题中也要使用特性谓词, 将人从宇宙间的所有事物中分离出来.

(1)  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ , 其中  $F(x):x$  是人,  $G(x):x$  生活在地球上.

(2)  $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ , 其中  $F(x):x$  是人,  $G(x):x$  长着黑头发.

(3)  $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$  或  $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$ , 其中  $F(x):x$  为实数,  $G(x):x$  能表示成分数.

(4)  $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x))$  或  $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$ , 其中  $F(x):x$  是无理数,  $G(x):x$  能表示成分数.

学完第 19 章之后, 可以验证 (3)、(4) 中两种符号化形式是等值的.

5. 本题中仍然应该使用全总个体域.

(1)  $\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \rightarrow H(x, y))$ , 其中  $F(x):x$  是偶数,  $H(x, y):x$  和  $y$  有大于 1 的公因数.

(2)  $\exists x \exists y(G(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$ , 其中  $G(x):x$  是奇数,  $H(x, y):x$  和  $y$  有大于 1 的公因数.

(3)  $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$  或  $\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$ , 其中  $F(x):x$  是火车,  $G(y):y$  是汽车,  $H(x, y):x$  比  $y$  快.

(4)  $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y)))$ , 其中  $F(x):x$  为火车,  $G(y):y$  为汽车,  $H(x, y):x$  比  $y$  快.

## 题型二：一阶逻辑中数学命题符号化



1. 设个体域为整数集  $\mathbb{Z}$ , 将下列问题符号化.

(1) 对于任意的  $x$  和  $y$ , 存在  $z$ , 使得  $x + y = z$ .

(2) “存在  $x$ , 对于任意的  $y$  和  $z$ , 均有  $y - z = x$ ”是不成立的.

2. 设个体域为非 0 有理数集  $\mathbb{Q}^*$ , 将下列命题符号化.

(1) 对于任意的  $x$ , 存在  $y$ , 使得  $x \cdot y = 1$ .

(2) “对于任意的  $x$  和  $y$ , 存在  $z$ , 使得  $x^2 + y^2 = z^2$ ”不为真.

3. 设个体域为实数集  $\mathbb{R}$ , 将下列命题符号化.

(1) 对于任意的  $x$  和  $y$ , 存在  $z$ , 使得  $x^2 + y^2 = z^2$ .

(2) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 均有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

解本题型时, 数学公式不再重新符号化.

1. (1)  $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$ .

(2)  $\neg(\exists x \forall y \forall z (y - z = x))$  或  $\forall x \exists y \exists z (y - z \neq x)$ .

2. (1)  $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$ .

(2)  $\neg(\forall x \forall y \exists z (x^2 + y^2 = z^2))$  或  $\exists x \exists y \forall z (x^2 + y^2 \neq z^2)$ .

3. (1)  $\forall x \forall y \exists z (x^2 + y^2 = z^2)$ .

(2)  $\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta (\delta > 0 \wedge (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))))$ .

此命题是函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  点连续的定义.



# 题型三：在有限个体域内消去公式中量词

1. 设个体域  $D = \{a, b, c\}$ , 消去下列公式中的量词.

(1)  $\exists x F(x) \rightarrow \forall y G(y)$ .

(2)  $\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y))$ .

(3)  $(\forall x F(x) \wedge \exists y G(y)) \rightarrow H(y)$ .

2. 设个体域  $D = \{a, b\}$ , 消去下列公式中的量词.

(1)  $\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$ .

(2)  $\forall x \exists y (F(x, y) \rightarrow G(x, y))$ .

3. 设个体域  $= \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $F(x)$ :  $x$  是 2 的倍数.  $G(x)$ :  $x$  是奇数. 将命题  $\forall x (F(x) \rightarrow \neg G(x))$  讨论命题的真值.

## 解答与分析

1. (1)  $\exists x F(x) \rightarrow \forall y G(y) \Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \rightarrow (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c))$ .

(2) 方法一 对公式不做变化, 直接消量词.

$$\begin{aligned}\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y)) &\Leftrightarrow \forall x ((F(x) \rightarrow G(a)) \wedge (F(x) \rightarrow G(b)) \wedge (F(x) \rightarrow G(c))) \\ &\Leftrightarrow ((F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(a) \rightarrow G(b)) \wedge (F(a) \rightarrow G(c))) \wedge \\ &\quad ((F(b) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b)) \wedge (F(b) \rightarrow G(c))) \wedge \\ &\quad ((F(c) \rightarrow G(a)) \wedge (F(c) \rightarrow G(b)) \wedge (F(c) \rightarrow G(c))).\end{aligned}$$

方法二 先缩小量词辖域, 然后再消量词.

$$\begin{aligned}\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y)) &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow \forall y G(y)) \\ &\Leftrightarrow \exists x F(x) \rightarrow \forall y G(y) \\ &\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \rightarrow (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c)).\end{aligned}$$

可见, 方法二要好得多. 因此, 当能够缩小量词辖域时, 应先缩小量词辖域, 然后再消量词.

(3)  $(\forall x F(x) \wedge \exists y G(y)) \rightarrow H(y) \Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \wedge (G(a) \vee G(b) \vee G(c)) \rightarrow H(y)$ .

注意, 消去量词后, 仍然含自由出现的个体变项  $y$ , 因为  $H(y)$  不在任何量词的辖域中.

2. (1)

$$\begin{aligned}\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y)) &\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \\ &\Leftrightarrow \exists x F(x) \rightarrow \exists y G(y) \\ &\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b)) \rightarrow (G(a) \vee G(b)).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\forall x \exists y (F(x, y) \rightarrow G(x, y)) &\Leftrightarrow \forall x ((F(x, a) \rightarrow G(x, a)) \vee (F(x, b) \rightarrow G(x, b))) \\ &\Leftrightarrow ((F(a, a) \rightarrow G(a, a)) \vee (F(a, b) \rightarrow G(a, b))) \wedge \\ &\quad ((F(b, a) \rightarrow G(b, a)) \vee (F(b, b) \rightarrow G(b, b))).\end{aligned}$$

在 (1) 中, 量词辖域可以缩小, 因而先缩小量词辖域, 再消量词. 但在 (2) 中, 因为全称量词与存在量词均约束  $F$  与  $G$  中的个体变量  $x$  和  $y$ , 因而它们的辖域不能缩小, 消去量词后所得公式也不易化得更简单.

3.  $\forall x (F(x) \rightarrow \neg G(x)) \Leftrightarrow (F(1) \rightarrow \neg G(1)) \wedge (F(2) \rightarrow \neg G(2)) \wedge (F(3) \rightarrow \neg G(3)) \wedge (F(4) \rightarrow \neg G(4))$ .

因为, 在  $(F(1) \rightarrow \neg G(1))$  和  $(F(3) \rightarrow \neg G(3))$  中, 前件与后件均为假, 所以这两个蕴涵式均为真. 在  $(F(2) \rightarrow \neg G(2))$  和  $(F(4) \rightarrow \neg G(4))$  中, 前件与后件均为真, 因而蕴涵式也均为真, 故此命题在以上解释下

# 题型四：自然推理系统构造自然语言描述的推理证明

- 1. 实数不是有理数就是无理数. 无理数都不是分数. 所以, 若有分数, 则必有有理数 (个体域为实数集  $R$ ).
- 2. 人都喜欢吃蔬菜. 但不是所有的人都喜欢吃鱼. 所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人

1. 设  $F(x)$ :  $x$  是有理数,  $G(x)$ :  $x$  是无理数,  $H(x)$ :  $x$  是分数.  
前提:  $\forall x(F(x) \vee G(x)), \forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$ .  
结论:  $\exists x H(x) \rightarrow \exists x F(x)$ .  
证明:

① $\forall x(F(x) \vee G(x))$	前提引入
② $F(y) \vee G(y)$	① $\forall-$
③ $\neg F(y) \rightarrow G(y)$	② 置换
④ $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$	前提引入
⑤ $G(y) \rightarrow \neg H(y)$	④ $\forall-$
⑥ $\neg F(y) \rightarrow \neg H(y)$	③⑤ 假言三段论
⑦ $H(y) \rightarrow F(y)$	⑥ 置换
⑧ $H(y) \rightarrow \exists x F(x)$	⑦ $\exists+$
⑨ $\exists y H(y) \rightarrow \exists x F(x)$	⑧ $\exists-$
⑩ $\exists x H(x) \rightarrow \exists x F(x)$	⑨ 置换

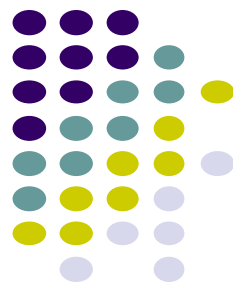
2. 因为本题没指明个体域, 因而使用全总个体域.  
令  $F(x)$ :  $x$  为人,  $G(x)$ :  $x$  喜欢吃蔬菜,  $H(x)$ :  $x$  喜欢吃鱼.  
前提:  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$ .  
结论:  $\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$ .  
证明: 用归谬法.

① $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$	结论否定引入
② $\forall x \neg(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$	① 置换
③ $\neg(F(y) \wedge G(y) \wedge \neg H(y))$	② $\forall-$
④ $G(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$	③ 置换
⑤ $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	前提引入
⑥ $F(y) \rightarrow G(y)$	⑤ $\forall-$
⑦ $F(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$	④⑥ 假言三段论
⑧ $F(y) \rightarrow H(y)$	⑦ 置换
⑨ $\forall y(F(y) \rightarrow H(y))$	⑧ $\forall+$
⑩ $\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	⑨ 置换
⑪ $\neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	前提引入
⑫ $\forall x(F(x) \rightarrow H(x)) \wedge \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	⑩⑪ 合取

注意, 先将  $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$  开头的  $\neg$  内移化成前束范式后, 才能消量词.



# 作业



## 1. 填空题(6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分).

(1)  $\neg \exists x \forall y F(x, y)$  的前束范式为\_\_\_\_\_.

(2) 由量词分配等值式,  $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow$ \_\_\_\_\_.

(3) 缩小量词的辖域,  $\forall x(F(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow$ \_\_\_\_\_.

(4) 公式  $((\forall x \neg G(x) \wedge \forall x F(x)) \wedge \exists y G(y)) \rightarrow \forall x F(x)$  的类型为\_\_\_\_\_.

(5) 取解释  $I$  为: 个体域为  $D = \{a\}$ ,  $F(x): x$  具有性质  $F$ , 在  $I$  下  $\forall x F(x) \leftrightarrow \exists x F(x)$  的真值为\_\_\_\_\_.

(6) 前提:  $\forall x \exists y F(x, y)$ .

结论:  $\exists y F(y, y)$ .

以上推理是错误的, 某学生却给出了如下证明:

①  $\forall x \exists y F(x, y)$

前提引入

②  $\exists y F(y, y)$

① $\forall$ -

此证明错在\_\_\_\_\_.

## 2. 在有限个体域内消去量词(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

(1) 个体域  $D = \{1, 2, 3\}$ , 公式为

$$\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y)).$$

(2) 个体域  $D = \{a, b\}$ , 公式为

$$\forall x \exists y (F(x, y) \rightarrow G(y, x)).$$

## 3. 求前束范式(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

(1)  $\forall x (F(x, y) \rightarrow \forall y (G(x, y) \rightarrow \exists z H(x, y, z)))$ .

(2)  $(\exists x F(x, y) \rightarrow \forall y G(x, y, z)) \rightarrow \exists z H(z)$ .

## 4. 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造下列推理的证明(2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分).

(1) 前提:  $\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y)), F(a)$ .

结论:  $\exists x G(x)$ .

(2) 前提:  $\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (G(y) \wedge H(x))), \exists x F(x)$ .

结论:  $\exists x (F(x) \wedge G(x) \wedge H(x))$ .

## 5. 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造下面用自然语言描述的推理(10 分).

火车都比汽车快, 汽车都比轮船快,  $a$  是火车,  $b$  是汽车,  $c$  是轮船. 所以,  $a$  比  $b$  快,  $b$  比  $c$  快.