

# 凸优化 第二次作业

1. 用定义验证下列各集合是凸集:

$$\begin{aligned}(1) S &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 \geq 1, x_1 - x_2 \geq 1\}; \\(2) S &= \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq |x_1|\}; \\(3) S &= \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 10\}.\end{aligned}$$

2. 设  $C \subset \mathbb{R}^p$  是一个凸集,  $p$  是正整数. 证明下列集合  $S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集:

$$S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = \mathbf{A}\rho, \rho \in C\}$$

其中  $\mathbf{A}$  是给定的  $n \times p$  实矩阵.

3. 判别下列函数是否为凸函数:

$$\begin{aligned}(1) f(x_1, x_2) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 \\(2) f(x_1, x_2) &= x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2; \\(3) f(x_1, x_2) &= (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 + e^{x_1+x_2}; \\(4) f(x_1, x_2) &= x_1 e^{-(x_1+x_2)}; \\(5) f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_3.\end{aligned}$$

4. 设  $f(x_1, x_2) = 10 - 2(x_2 - x_1^2)^2$ ,  $S = \{(x_1, x_2) \mid -11 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2)$  是否为  $S$  上的凸函数?

5. 设  $f$  是定义在  $\mathbb{R}^n$  上的凸函数,  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$  是  $\mathbb{B}^n$  中的点,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是非负数, 且满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$ , 证明:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \dots + \lambda_k x^{(k)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}) + \dots + \lambda_k f(x^{(k)}).$$

《Convex Optimization》 3.1, 3.3, 3.4, 3.13, 3.17, 3.23, 3.32, 3.47, 3.57