1. 用谓词逻辑演算描述出以下推理过程：

"没有一个女学生没有通过离散数学考试，每个足够认真而又聪明的学生都能通过离散数学考试，学生小明很聪明，但是没有通过离散数学考试，所以小明一定不是女生且不够认真。"

解：令$\mathrm{F(x)}$代表学生 x 是女生，$\mathrm{P(x)}$代表 x 通过了离散数学考试，$\mathrm{H(x)}$代表学生 x 足够认真，$\mathrm{C(x)}$代表学生 x 聪明，a 表示学生小明， 则题中前提可表示为

前提 1：$\neg\exists\mathrm{x}\big(\mathrm{F(x)}\wedge\neg\mathrm{P(x)}\big)$，

前提 2：$\forall\mathrm{x}(\mathrm{H(x)}\wedge\mathrm{C(x)}\to\mathrm{P(x)})$，

前提 3：$\mathrm{C(a)},\neg\mathrm{P(a)}$，

结论可表示为：$\neg\mathrm{F(a)}\wedge\neg\mathrm{H(a)}$

推理过程如下

(1) $\forall\mathrm{x}(\neg\mathrm{F(x)}\vee\mathrm{P(x)})$	前提 1 的逻辑等价
(2) $\neg\mathrm{F(a)}\vee\mathrm{P(a)}$	(1)的全称例示
(3) $\mathrm{H(a)}\wedge\mathrm{C(a)}\to\mathrm{P(a)}$	前提 2 的全称例示
(4) $\neg\mathrm{P(a)}$	前提 3
(5) $\neg(\mathrm{H(a)}\wedge\mathrm{C(a)})$	(3)(4)拒取式
(6) $\neg\mathrm{H(a)}\vee\neg\mathrm{C(a)}$	(5)的逻辑等价
(7) $\mathrm{C(a)}$	前提 3
(8) $\neg\mathrm{H(a)}$	(6)(7)消解
(9) $\neg\mathrm{F(a)}$	(2)(4)的消解
(10) $\neg\mathrm{F(a)}\wedge\neg\mathrm{H(a)}$	(8)(9)的合取引入

2. 令R为A上的一个关系。试证明：R是一个等价关系当且仅当

存在一个集合B及一个函数$f: A \to B$使得$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

证明：

必要性：若R是一个等价关系，可令$B = A/R$，定义 f为$f(x) = [x]_R$，于是有$xRy \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$，即 $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

充分性：若存在一个集合B及一个函数$f: A \to B$使得$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$，现证明$R$是自反的、对称的、传递的：

自反性：对于任意的$x \in A$，因为$f(x) = f(x)$，所以xRx;

对称性：对于任意的$x, y \in A$，若xRy，则$f(x) = f(y)$，于是$f(y) = f(x)$所以yRx;

传递性：对于任意的$x, y, z \in A$，若xRy且yRz，则$f(x) = f(y)$且$f(y) = f(z)$，于是$f(x) = f(z)$，所以xRz;

证毕。

3. Fermat 素数为 $F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \geq 0$.

a) 试用数学归纳法证明：$\prod_{r=0}^{n-1} F_r = F_n - 2 \quad (n > 0)$.

b) 试基于上述结论证明：对于任意两个不同的自然数 $m < n$，总有$\gcd(F_m, F_n) = 1$.

a) 证明：

基础步骤：$\prod_{r=0}^{0} F_r = 2^{2^0} + 1 = 3 = 2^{2^1} + 1 - 2 = F_1 - 2$;

归纳步骤：假设该式对于$n = k$成立，现证明其对于$n = k + 1$成立。

$$\prod_{r=0}^{n} F_r = \prod_{r=0}^{n-1} F_r \cdot F_n = (F_n - 2)F_n = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$$
$$= 2^{2^{n+1}} - 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 - 2 = F_{n+1} - 2$$

证毕。

c) 证明：由于$m < n$，有$F_m | \prod_{r=0}^{n-1} F_r$；又根据结论 a)，有$F_n = \prod_{r=0}^{n-1} F_r + 2$，于是$F_m$除$F_n$余 2；根据 Euclid 辗转相除法，有

$$\gcd(F_m, F_n) = \gcd(2, F_m) = \gcd(2, 2^{2^m} + 1) = 1$$

证毕。

4. 某人玩一个掷一对骰子的游戏，其玩法如下：初始得分为 0。每一轮掷两个骰子，计算点数之乘积，若大于 20，则游戏结束；否则把这轮所得的积加入得分。问：

a） 游戏结束时得分为 0 的概率是多少？
b） 游戏第一轮得分的期望值是多少？
c） 游戏结束时得分的期望值是多少？

解：a) 得分为 0 意味着第一轮就掷出点数之乘积大于 20 的情况。所有 36 种结构中出现(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), 和 (6,6)这 6 种结果才会积大于 20；其概率为$6/36 = 1/6$.

b) 首先计算第一轮的得分期望值$\frac{1}{36}\Sigma_{i=1}^{6}\Sigma_{j=1}^{6}\mathrm{ij}[\mathrm{ij} \le 20]$，其中

$$[\mathrm{ij} \le 20] = \begin{cases} 1, & \mathrm{ij} \le 20 \\ 0, & \mathrm{ij} > 20 \end{cases}$$

计算该值为 $(\sum_1^3 i)(\sum_1^6 j) + 4\sum_1^5 j + 5\sum_1^4 j + 6\sum_1^3 j = 272$；

于是第一轮的得分期望为 272/36=68/9；

c) 令所求之游戏结束时得分的期望值为S；注意到每一轮之后，若游戏未结束，以后得分的期望值也为S，于是有

$$S = \frac{68}{9} + \frac{5}{6}S$$

可解得$S = \frac{136}{3}$ 。

5. 群论问题：

a） 试证明有理数群$(\mathbb{Q}, +)$不是循环群。

b） 令$(\{e, a, b, ab\}, \cdot)$为 Klein 四元群。请给出$\langle a \rangle$的各个陪集。

a) 证明：假设其为循环群，记其生成元素为q，$\frac{q}{2} \in \mathbb{Q}$，但不存在$n \in \mathbb{Z}$ 使得$q^n = \frac{q}{2}$ (注意这里q^n 是该加法群的幂次运算，即n个q做+运算，即nq；不是有理数幂运算)。

证毕。

b) 解：该循环子群$\langle a \rangle = \{e, a\}$，其各陪集为 $\langle a \rangle$和$\{b, ab\}$；

(可注意到：该群是交换群；$a\langle a \rangle$=$\langle a \rangle$; $b\langle a \rangle = \{b, ab\}$; $ab\langle a \rangle = \{b, ab\}$)

6. 假设P是连通图G中的一条最长的初级通路（点不重复）。证明P的端点不是图G的割点。（10 分）

证明： 反证法，假设u是P的端点，而u是图G的割点。（2 分）

删除顶点u之后，产生 2 个或者多个连通分支，因为u是P的端点，所以，P中顶点除了u之外均来自某一个连通分支。（4）

u到其他连通分支有边相连，从而有更长的初级通路， 这与"P是连通图G中的一条最长的初级通路"矛盾。（4 分）

得证。

//如果图G是平凡图，结论显然。（如果有这样的陈述，可以酌情给 1 分）

P的端点u不能有边连接到不在P中的顶点v，否则可将P通过这条边延长到v，这与P是最长初级通路矛盾。（4 分）

考虑到u是P的端点，删除该端点不影响P中其余顶点间的连通性，而u又没有其它相邻节点，可知它不是割点。（6 分）

证毕。

7. 令 $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为一正整数序列，且 $n\geq 2$ 。（12 分）

a） 若D恰好是某个树T的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

b） 反过来，试证明：若D满足上式，则存在一个树T，使得D恰好是T的各个顶点的度数序列。

c） 假设D满足上式。试证明：可将D中各整数划分为两个序列S_1, S_2, 使得S_1中正整数之和与S_2中正整数之和相等。

a) 证明：树T的边的数目为$n-1$。由握手定理可知$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$。（4 分）证毕。

b) 证明： 对n进行归纳。（1 分）

基础步骤：当$n=2$时该命题显然成立。（1 分）

递归步骤：假设对于$2\leq n=k-1$时该命题成立。现证明该命题

对$n = k$时也成立。D中必存在$d_i = 1$（否则$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$）;亦必有$d_j > 1$（否则$\sum_{i=1}^{n} d_i < 2(n-1)$）。考虑$D' = \left(D - \{d_i, d_j\}\right) \cup \{d_j - 1\}$，易见$D'$满足归纳假设条件，即存在一颗树$T$的各个顶点的度数序列恰是$D'$。今在$T$中添加一个节点，并将其连接到对应于$d_j - 1$的节点上。易见$D$恰好是这个新的树的顶点的度数序列。（2 分）

证毕。

c) 证明：根据 b)，存在一个树T，使得D恰好是T的各个顶点的度数序列。（2 分）

该树可依据各顶点距离某一给定顶点的距离的奇偶性划分为二部图，于是其两部分中各顶点的度数序列即对应于所求的S_1，S_2。（2 分）

证毕。

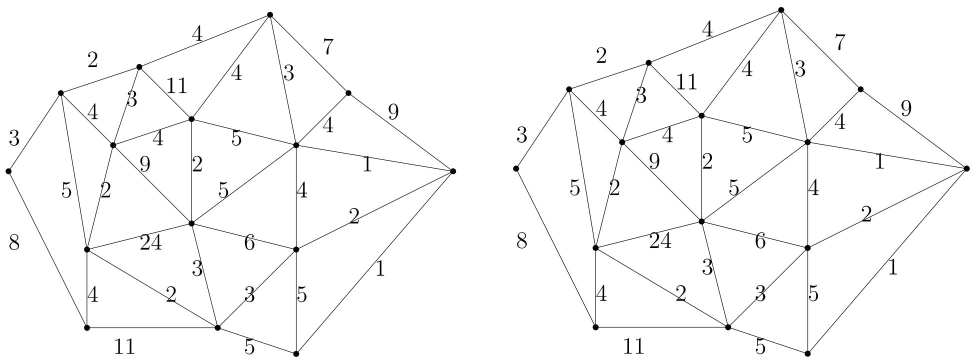
8. 假设P是连通图G中的一条最长的初级通路（点不重复）。证明P的端点不是图G的割点。

证明：P的端点u不能有边连接到不在P中的顶点v，否则可将P这通过条边延长到v，这与P是最长初级通路矛盾。

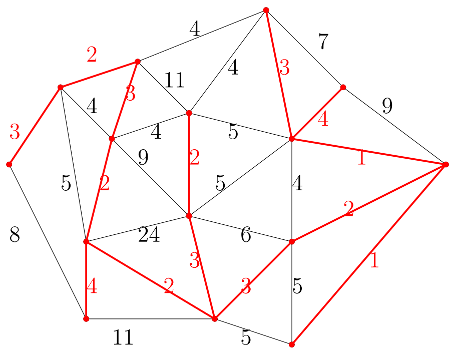
考虑到u是P的端点，删除该端点不影响P中其余顶点间的连通性，而u又没有其它相邻节点，可知它不是割点。

证毕。

9. 画出下图的最小生成树，并给出其权重（左图可作为草稿，答案画在右图上，把所选的边描粗）。



解：一个可能的最小生成树如图所示。权重为 35.



10. 今有布尔代数$(B,+,\cdot,\bar{\ },0,1)$，试证明对于任意的$x,y\in B$, 以下四个命题等价：

a） $x\cdot y=x$

b） $x+y=y$

c） $x\cdot\bar{y}=0$

d） $\bar{x}+y=1$

证明:

a)→b): $x+y=x\cdot y+y=(x+1)\cdot y=1\cdot y=y$ ；

b)→c): $x\cdot\bar{y}=x\cdot\overline{(x+y)}=x\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y})=(x\cdot\bar{x})\cdot\bar{y}=0\cdot\bar{y}=0$ ；

c)→d): $\bar{x} + y = \bar{x} + \bar{\bar{y}} = \overline{x \cdot \bar{y}} = \bar{0} = 1$

d)→a): $x \cdot y = 0 + (x \cdot y) = (x \cdot \bar{x}) + (x \cdot y) = x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot 1 = x$

证毕。