组合数学-递推方程与生成函数习题课及作业

2024, 4, 22

南京大学计算机科学与技术系

内容提要-递推方程的定义及解法

递推方程的定义

定义 11.1.1 设序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，简记为 $\{a_n\}$，一个把 a_n 与某些个 $a_i, i < n$，联系起来的等式称作关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程.

k 阶常系数线性递推方程的定义

定义 11.1.2 设递推方程满足

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2 H(n-2) - \cdots - a_k H(n-k) = f(n), \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \cdots, H(k-1) = b_{k-1}, \end{cases} \tag{11.1.1}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为常数，$a_k \neq 0$，这个方程称作 k 阶常系数线性递推方程. $b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$ 为 k 个初值. 当 $f(n) = 0$ 时称这个递推方程为齐次方程.

递推方程的公式解法

适用于常系数线性递推方程(11.1.1). 求解步骤：

(1) 根据 $f(n)$ 设定特解的形式（含待定常数），代入原方程确定其中待定常数的值，从而得到方程的一个特解 $H^*(n)$. 注意特征根为 1 时的特解设定.

(2) 求解特征方程 $x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$，确定所有不相等的特征根 $q_1, q_2, \cdots, q_t$ 及其重数 $m_1, m_2, \cdots, m_t$，其中 $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$.

(3) 写出通解 $H(n) = \overline{H(n)} + H^*(n)$，其中

$$\overline{H(n)} = \sum_{i=1}^{t} (c_{i1} + c_{i2} n + \cdots + c_{im_i} n^{m_i - 1}) q_i^n$$

是齐次通解.

(4) 把初值代入 $H(n)$，确定其中的任意常数.

换元法

将原来关于某个变元的递推方程通过函数变换转变成关于其他变元的常系数线性递推方程，然后使用公式法求解.

迭代归纳法

用递推方程右边的公式不断替换左边等值的函数项，直到初值为止. 接着对这些项的序列求和，从而得到递推方程的解.

迭代归纳法适用于一阶递推方程. 对某些非一阶递推方程可以先用差消法转换成一阶递推方程.

递归树——迭代归纳法的图形表示. 初始的递归树只有一个顶点，就是递推方程左部的函数. 每次迭代都把递归树中标记为函数的叶子顶点用与这个函数相等的递推方程的右部对应的子树替换，直到所有的函数叶子顶点变成初值为止. 最后对树中所有的项求和.

生成函数法

利用递推方程导出对应的生成函数所满足的方程，通过求解这个方程得到生成函数的表达式，然后把表达式展开得到序列的通项(递推方程的解).

内容提要-递推方程与递归算法

递归算法分析依赖于递推方程的求解，常见的递推方程是

$$\begin{cases} T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + d(n), & n = b^k, \\ T(1) = 1, \end{cases}$$

其中，a 表示递归求解的子问题个数，$\frac{b}{n}$ 表示子问题的输入规模，$d(n)$ 表示分解问题和组合子问题的解所需要的工作量.

当 $d(n) = c$ 时，方程的解为

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}), & a \neq 1, \\ O(\log n), & a = 1. \end{cases}$$

当 $d(n) = cn$ 时，方程的解为

$$T(n) = \begin{cases} O(n), & a < b, \\ O(n \log n), & a = b, \\ O(n^{\log_b a}), & a > b. \end{cases}$$

内容提要-生成函数及其应用

生成函数的定义

序列 $\{a_n\}$ 的生成函数是下述形式幂级数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

常用的幂级数的展开式

$$(1+x)^{-m}=\frac{1}{(1+x)^m}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^n.$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n.$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2k-2}{k-1}x^k.$$

生成函数的应用

(1) 求解递推方程.

(2) 计算多重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的 r 组合数,生成函数为

$$G(y)=(1+y+\cdots+y^{n_1})(1+y+\cdots+y^{n_2})\cdots(1+y+\cdots+y^{n_k}).$$

(3) 确定不定方程

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k=r,\ \text{其中}p_1,p_2,\cdots,p_k\text{为正整数},l_i\leqslant x_i\leqslant n_i,i=1,2,\cdots,k,$$

的整数解的个数,生成函数为

$$G(y)=(y^{p_1l_1}+y^{p_1(l_1+1)}+\cdots+y^{p_1n_1})(y^{p_2l_2}+y^{p_2(l_2+1)}+\cdots+y^{p_2n_2})\cdots(y^{p_kl_k}+y^{p_k(l_k+1)}+\cdots+y^{p_kn_k}).$$

(4) 计数正整数的拆分方案个数.

无序拆分:$N=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$,若不允许重复,生成函数是

$$G(y)=(1+y^{a_1})(1+y^{a_2})\cdots(1+y^{a_n});$$

若允许重复,生成函数是

$$G(y)=\frac{1}{(1-y^{a_1})(1-y^{a_2})\cdots(1-y^{a_n})}.$$

有序拆分:N 可重复地拆分成 r 个部分,方案数是 $C(N-1,r-1)$.

指数生成函数的定义

序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数是

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{x^n}{n!}.$$

指数生成函数的应用

求解多重集的 r 排列数. 设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 为多重集,则 S 的 r 排列数的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\cdots f_{n_k}(x),$$

其中

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!},\ i=1,2,\cdots,k.$$

常用的计数符号

组合数(二项式系数)

n 元集的 r 组合数

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

排列数

n 元集的 r 排列数

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

多项式系数

多重集 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的全排列数

$$\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

错位排列数

$$D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right].$$

Fibonacci 数

递推方程 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, f_0=f_1=1$ 的解

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Catalan 数

凸 $n+1$ 边形的三角划分的方案数.

$$\begin{cases} h_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n\geqslant 2,\\ h_1=1. \end{cases}$$

$$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

第一类 Stirling 数

203

多项式 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ 的展开式中 x^r 系数的绝对值.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} n\\ r\end{bmatrix}=(n-1)\begin{bmatrix} n-1\\ r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1\\ r-1\end{bmatrix}, & n>r\geqslant 1,\\ \begin{bmatrix} n\\ 0\end{bmatrix}=0,\ \begin{bmatrix} n\\ 1\end{bmatrix}=(n-1)!. \end{cases}$$

第二类 Stirling 数

n 个不同的球恰好放到 r 个相同盒子的方案数.

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} n\\ r\end{Bmatrix}=r\begin{Bmatrix} n-1\\ r\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} n-1\\ r-1\end{Bmatrix}, & n>r\geqslant 1,\\ \begin{Bmatrix} n\\ 0\end{Bmatrix}=0,\ \begin{Bmatrix} n\\ 1\end{Bmatrix}=1. \end{cases}$$

基本的计数模型

选取问题

不重复选取：集合的排列（有序选取）与组合（无序选取）公式.

无序重复选取：生成函数为

$$A(y)=(1+y+y^2+\cdots+y^{n_1})(1+y+y^2+\cdots+y^{n_2})\cdots(1+y+y^2+\cdots+y^{n_k}),$$

N 是 $A(y)$ 的展开式中 y^r 的系数.

当 $\forall i=1,2,\cdots,k$, 均有 $n_i\geqslant r$ 时, $N=C(r+k-1,r)$.

有序重复选取：指数生成函数为

$$A_e(y)=\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{n_2}}{n_2!}\right)\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{n_k}}{n_k!}\right),$$

N 是 $A_e(y)$ 的展开式中 $\frac{y^r}{r!}$ 的系数.

当 $\forall i=1,2,\cdots,k$, 均有 $n_i\geqslant r$ 时, $A_e(y)=e^{ky}=\sum_{r=0}^{+\infty}k^r\frac{y^r}{r!}$, $N=k^r$.

当 $r=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 时, $N=\binom{r}{n_1\,n_2\cdots n_k}=\frac{r!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$.

不定方程的整数解问题

一般使用生成函数计数（见生成函数的应用）.

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数解的个数为 $C(r+k-1,r)$, 正整数解的个数为 $C(r-1,k-1)$.

非降路径问题

(a,b) 点到 (m,n) 点的非降路径数是 $\binom{m+n-a-b}{m-a}$.

从 (a,b) 点经过 (c,d) 点到 (m,n) 点的非降路径数按照分步处理的方法计数.

如果对路径加上限制条件，那么可以采用一一对应的方法转换成基本的非降路径的计数.

正整数的拆分问题

一般使用生成函数（见生成函数的应用）.

对于限制条件的拆分方案的计数，可以采用 Ferrers 图来建立一一对应.

放球问题

把 n 个球放入 m 个盒子，计数模型和结果如表 11.1.1 所示.

基本要求

- 1. 能够使用递推方程求解计数问题
- 2. 能够使用生成函数或指数生成函数求解计数问题.
- 3. 掌握 Fibonacci 数、Catalan 数、两类 Stirling 数的定义、组合意义以及相关的公式.

球区别	盒区别	是否空盒	模型	方案计数
有	有	有	选取	m^n
有	有	无	放球模型	$m!\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$
有	无	有		$\sum_{k=1}^{m}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$
有	无	无		$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$
无	有	有	不定方程	$C(n+m-1,n)$
无	有	无		$C(n-1,m-1)$
无	无	有	正整数拆分	$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$, x^n 的系数
无	无	无		$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$, x^n 的系数

题型一： 递推方程的概念和求解方法

1. 已知 $a_0=0,a_1=1,a_2=4,a_3=12$ 满足递推方程 $a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}=0$，求 c_1 和 c_2.
2. 求解递推方程

$$\begin{cases} na_n+(n-1)a_{n-1}=2^n,\ n\geqslant 1 \\ a_0=273. \end{cases}$$

解答与分析

1. 根据已知条件得

$$\begin{cases} a_3+c_1a_2+c_2a_1=0, \\ a_2+c_1a_1+c_2a_0=0. \end{cases}$$

代入 a_0,a_1,a_2,a_3 的值得到

$$\begin{cases} 12+4c_1+c_2=0, \\ 4+c_1=0. \end{cases}$$

解得 $c_1=-4,c_2=4$.

2. 用换元法. 令 $b_n=na_n$，代入原递推方程得

$$\begin{cases} b_n+b_{n-1}=2^n, \\ b_0=0. \end{cases}$$

用公式法解得

$$b_n=-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{2^{n+1}}{3}=\frac{2}{3}(-1)^{n+1}+\frac{2^{n+1}}{3}.$$

从而得到

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{3n}(-1)^{n+1}+\dfrac{2^{n+1}}{3n},\ n\geqslant 1, \\ a_0=273. \end{cases}$$

使用换元法时，对递推方程的初值也要换. 当用公式法解出 b_n 接着求 a_n 时，注意关于 a_n 的公式只对 $n\geqslant 1$ 成立. a_0 的值只能由原始的值 273 给定.

题型二：序列与生成函数或指数生成函数的对应

1. 确定序列 $\{a_n\}$ 的生成函数，其中 $a_n=\binom{n}{3}$.
2. 已知 $A(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ 是序列 $\{a_n\}$ 的生成函数，求 a_n.
3. 求序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数 $A_e(x)$，其中 $a_n=4m^n$，m 给定正整数.

解答与分析

1. 设 $\{a_n\}$ 的生成函数是 $A(x)$，则

$$\begin{aligned}A(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{3}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^n\\&=\frac{1}{6}x^3\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}\\&=\frac{1}{6}x^3B(x).\end{aligned}$$

为计算 $B(x)$，需要做下面的积分.

$$\int_0^x B(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\int_0^x(n-2)x^{n-3}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}=C(x),$$

$$\int_0^x C(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}n\int_0^x(n-1)x^{n-2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}=D(x),$$

$$\int_0^x D(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x nx^{n-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

然后依次求导得到

$$D(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$C(x)=D'(x)=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$B(x)=C'(x)=\frac{6}{(1-x)^4}.$$

最后得到

$$A(x)=\frac{1}{6}x^3B(x)=\frac{x^3}{(1-x)^4}.$$

2. 令

$$A(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{Ax+B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1+x},$$

其中 A,B,C 为待定系数，且满足如下方程组：

$$\begin{cases}B+C=1,\\A+C=0,\\A+B-2C=0.\end{cases}$$

解得 $A=-\frac{1}{4}$，$B=\frac{3}{4}$，$C=\frac{1}{4}$. 从而得到

$$A(x)=-\frac{x}{4(1-x)^2}+\frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{1}{4(1+x)}.$$

将上述基本生成函数展开得到

$$a_n=\frac{1}{4}[1+(-1)^n]+\frac{1}{2}(n+1)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}, & n\text{ 为奇数},\\[2mm]\dfrac{n+2}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

3. 根据指数函数的定义得

$$A_e(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}4m^n\frac{x^n}{n!}=4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(mx)^n}{n!}=4e^{mx}.$$

题型三：生成函数性质证明

设序列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 的生成函数分别为 $A(x),B(x)$ 和 $C(x)$，证明：

1. 若 $c_n=\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$，则 $C(x)=A(x)\cdot B(x)$.（习题11.4.1第19题(3)）
2. 若 $b_n=\begin{cases}0, & n<l\\ a_{n-l}, & n\geqslant l\end{cases}$，则 $B(x)=x^l A(x)$.（习题11.4.1第19题(4)）

解答与分析

1. 根据已知条件可以得到下列等式

$$c_0=a_0b_0,$$
$$c_1x=a_0b_1x+a_1b_0x,$$
$$c_2x^2=a_0b_2x^2+a_1b_1x^2+a_2b_0x^2,$$
$$\cdots\cdots$$

把以上各式左右两边分别相加，得到

$$\begin{aligned}C(x)&=a_0B(x)+a_1xB(x)+a_2x^2B(x)+\cdots\\&=A(x)\cdot B(x).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}B(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n=\sum_{n=l}^{+\infty} b_n x^n\\&=\sum_{n=l}^{+\infty} a_{n-l}x^n=x^l\sum_{n=l}^{+\infty} a_{n-l}x^{n-l}\\&=x^l\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m\\&=x^l A(x).\end{aligned}$$

注意，在第 2 题的证明中利用 $n-l=m$，把对 n 的求和替换成对 m 的求和. 替换时求和的上、下限也应该做相应的改变.

题型四：求解实际计数问题

1. 求下列 n 阶行列式的值 d_n.

$$d_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}.$$

2. 平面上有 n 条直线，它们两两相交且没有三线交于一点，问这 n 条直线把平面分成多少个区域.
3. 在市场经济中，商品价格随需求量增加而上涨，随供给量增加而下降，可以简单地用一个线性方程表示这种依赖关系.

   需求关系：$p=a-bq$，其中 p 为价格，q 为需求量，$a,b>0$ 为常数. 当 p 上涨时 q 将减少.

   供给关系：$p=kr$，其中 p 为价格，r 为供给量，$k>0$ 为常数. 当 p 上涨时，r 将增加.

   假设价格随需求量能够做到即时变化，而商品生产和流通需要时间，因此供给量随价格的变化需要 1 个单位时间的延迟. 假定每个时间的需求量都和供给量相等，考虑一个时间序列 $0,1,\cdots,n,\cdots$，设时间 0 的价格是 p_0，求时间 n 的价格 p_n.
4. 用 3 个 1，2 个 2，5 个 3 可以组成多少个不同的四位数？如果这个四位数是偶数，那么又有多少个？

解答与分析

1. 根据题意列出有关 d_n 的递推方程如下：

$$\begin{cases}d_n=2d_{n-1}-d_{n-2},\\d_1=2,d_2=3.\end{cases}$$

解上述递推方程得，$d_n=n+1$.

2. 设平面上已经有 $n-1$ 条直线. 当加入第 n 条直线时，它与平面上的前 $n-1$ 条直线交于 $n-1$ 个点. 这些点将第 n 条直线分割成 n 段，每段都增加一个区域，共增加 n 个区域，因此得到递推方程

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+n,\\a_1=2.\end{cases}$$

解这个递推方程得，$a_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$.

3. 设第 n 时间的价格为 p_n，需求量为 q_n，供给量为 r_n，那么有

$$\begin{cases}p_n=a-bq_n,\\p_n=kr_{n+1},\\r_n=q_n.\end{cases}$$

将后两个方程代入第一个方程得到

$$p_n+\frac{b}{k}p_{n-1}=a.$$

解得

$$p_n=c\left(-\frac{b}{k}\right)^n+\frac{ka}{k+b}.$$

代入 $n=0$ 的初值 p_0 得到

$$p_0=c+\frac{ka}{k+b},$$

故

$$c=p_0-\frac{ka}{k+b}.$$

于是有

$$p_n=\left(-\frac{b}{k}\right)^n\left(p_0-\frac{ka}{k+b}\right)+\frac{ka}{k+b}.$$

上述模型对分析给定常数 a,b,k 对价格的影响有一定的参考价值. 从这个结果不难看到：如果 $b<k$，那么当 $n\to+\infty$ 时，

$$\left(-\frac{b}{k}\right)^n\left(p_0-\frac{ka}{k+b}\right)\to 0.$$

于是序列 $\{p_n\}$ 趋于常数 $\frac{ka}{k+b}$，这时它是收敛的；当 $b=k$ 时，序列 $\{p_n\}$ 在值 p_0 与 $a-p_0$ 之间震荡，价格处于摇摆状态，但摇摆的幅度是不变的；而当 $b>k$ 时，$\{p_n\}$ 呈现出增幅震荡的情况，这时序列是发散的.

4. 指数生成函数为

$$A_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right),$$

其中 x^4 项为 $71\cdot\frac{x^4}{4!}$，因此 $a_4=71$.

若这个四位数为偶数，则末位为 2，那么对应的指数生成函数为

$$A_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right),$$

其中 x^3 项为 $20\cdot\frac{x^3}{3!}$，因此 $a_3=20$.

题型五：一些重要的组合计数

1. 设 m,n 是正整数,证明:对 Fibonacci 数有 $f_{n+m}=f_{m-1}f_{n+1}+f_{m-2}f_n$.
2. 用恰好 k 种可能的颜色做旗子,使得每面旗子由 $n(\geqslant k)$ 条彩带构成,且相邻的两条彩带的颜色都不相同. 证明:不同的旗子数是 $k!\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.

解答与分析

1. 归纳法. 当 $n=0$ 时等式左边为 f_m,右边为

$$f_{m-1}f_1+f_{m-2}f_0=f_{m-1}+f_{m-2},$$

显然等式成立.

假设对于小于 $n+1$ 的任意自然数等式成立,那么

$$\begin{aligned} f_{n+1+m}&=f_{n+m}+f_{n-1+m}\\ &=f_{m-1}f_{n+1}+f_{m-2}f_n+f_{m-1}f_n+f_{m-2}f_{n-1}\\ &=f_{m-1}(f_{n+1}+f_n)+f_{m-2}(f_n+f_{n-1})\\ &=f_{m-1}f_{n+2}+f_{m-2}f_{n+1}. \end{aligned}$$

注意:利用这个递推关系,可以证明某些关于 Fibonacci 序列的恒等式.

2. 方法一　组合分析方法.

先不考虑颜色编号,相当于将 n 个带编号的球恰好放入 k 个相同的盒子且不允许两个相邻编号的球放入同一个盒子的放球方法数. 先选定一个球,例如 a_1,对于以上的放球方案进行变换:如果 a_1 自己在一个盒子,那么将这个盒子拿走,得到 $n-1$ 个不同的球恰好放入 $k-1$ 个相同的盒子且相邻编号的球不落入同一个盒子的方法. 如果与 a_1 在同一个盒子的球有 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_l}$,那么将 a_{i_1} 放入 a_{i_1-1} 的盒子;a_{i_2} 放入 a_{i_2-1} 的盒子;$\cdots$;a_{i_l} 放入 a_{i_l-1} 的盒子;然后拿走含 a_1 的盒子,从而得到 $n-1$ 个不同的球恰好放到 $k-1$ 个盒子且至少有两个相邻标号的球落入同一盒子的方法. 综上所述,n 个不同的球放入 k 个相同盒子且不允许两个相邻编号的球落入同一盒子的方法数等于 $n-1$ 个不同的球恰好放入 $k-1$ 个相同盒子的方法数,即 $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.

再考虑盒子编号,则为 $k!\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.

方法二　数学归纳法. 当 $n=1$ 时,必有 $k=1$,这时有 $\left\{ 1-1 \atop 1-1 \right\}1!=1$,命题为真.

假设对一切 n 和所有的 $k(\leqslant n)$ 命题为真,考虑 $n+1$ 条彩带使用 $k(\leqslant n+1)$ 种颜色的涂色方案. 当 $k\leqslant n$ 时,若用 k 种颜色涂色前 n 条,最后一条有 $k-1$ 种选择,方法数为 $k!\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}(k-1)$. 若用 $k-1$ 种颜色涂色前 n 条,选择颜色的方式数为 k,涂色方法数为 $(k-1)!\left\{ n-1 \atop k-2 \right\}$,因此由乘法法则得 $k!\left\{ n-1 \atop k-2 \right\}$. 再根据加法法则,总方法数为

$$k!\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}(k-1)+k!\left\{ n-1 \atop k-2 \right\}=k!\left\{ n \atop k-1 \right\}.$$

当 $k=n+1$ 时,涂色的方法数为 $(n+1)!=(n+1)!\left\{ n \atop n \right\}$. 得证对 $n+1$ 和所有的 $k(\leqslant n+1)$ 命题成立. 根据归纳法命题成立.

方法三　使用递推方程. 令 $n=+1$ 个球恰好落入 $k+1$ 个相同盒子且球编号不相邻的方法数为 S_n^k,将这些方法分成两类:其中第 $n+1$ 个球独占一个盒子的方法数为 S_{n-1}^{k-1};第 $n+1$ 个球不独占一个盒子的方法数为 kS_{n-1}^k,因为将前 n 个球放入 $k+1$ 个盒子有 S_{n-1}^k 种方法,再加入第 $n+1$ 个球,恰有 k 种方式(第 $n+1$ 个球与第 n 个球不能在同一个盒子里). 使用加法法则,得到下述递推方程

$$\begin{cases} S_n^k=S_{n-1}^{k-1}+kS_{n-1}^k,\\ S_1^1=1. \end{cases}$$

这个方程恰好与第二类 Stirling 数的递推方程一样,初值也一样,因此 $S_n^k=\left\{ n \atop k \right\}$. 考虑盒子的编号,于是得到 $n+1$ 个球恰好落入 $k+1$ 个不同的盒子,且球的编号不相邻的方法数为 $(k+1)!S_n^k=(k+1)!\left\{ n \atop k \right\}$,那么所求的方法数 $N=k!\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.

上面的组合分析方法使用了两种解题技巧. 第一,是在不同的计数问题之间建立一一对应的关系. 这里将所求的具有限制条件的放球方案与一般放球问题的方案对应起来,从而求得问题的解. 一一对应的思想是求解组合计数问题常用的技巧. 第二,是将有序问题分步处理:先在不考虑盒子区别的情况下进行计数,然后再考虑盒子的排序(编号). 这两种计数结果相差的倍数恰好等于盒子的全排列数.

作业

1. 填空题(6 小题,每小题 5 分,共 30 分).
   (1) 设序列 3,6,9,15,24,39,⋯ 的第 n 项是 $a_n, n=0,1,\cdots$,则 $\{a_n\}$ 的递推方程和初值是__________.
   (2) 递推方程
   $$\begin{cases} a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0, \\ a_0 = 1, a_1 = -2, \end{cases}$$
   的解是__________.
   (3) 设有递推方程:
   $$\begin{cases} \sqrt{a_n} = 2\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}}, \\ a_0 = 1, a_1 = 4, \end{cases}$$
   使用换元法将该方程转换成关于 b_n 的常系数线性递推方程,转换后的方程和初值是__________.
   (4) 设 b_n 表示将 n 元集划分成非空子集的方法数,称作 Bell 数. 如果用第二类 Stirling 数 $\left\{ n \atop k \right\}$ 来表示 b_n,那么 $b_n =$__________.
   (5) 对 10 做任意重复的有序拆分,则拆分方案数是__________.
   (6) $\sum_{k=1}^{n} \left[n \atop k \right] =$__________.
2. 简答题(4 小题,每小题 10 分,共 40 分).
   (1) 求解递推方程
   $$\begin{cases} a_n^2 - 2a_{n-1} = 0, \ n > 0, \\ a_0 = 4. \end{cases}$$
   (2) 某公司在基金项目上投资 100 万元,该项目每年的资金增益是 10%,问 5 年以后该公司的资金增长了多少.
   (3) 有 1 克砝码 2 个,2 克砝码 1 个,4 克砝码 2 个,问能称出哪些质量,以及每种质量的称重方案有多少种.
   (4) 一个编码系统用 8 进制数字串对信息编码,已知一个编码是有效的当且仅当它含有偶数个 7. 问长为 n 的有效编码有多少个?
3. 证明题(2 小题,每小题 10 分,共 20 分).
   (1) 令 $p(n)$ 表示在 n 的拆分中只允许奇数项重复的方案数,$q(n)$ 表示在 n 的拆分中允许重复,但任何项出现的次数都不大于 3 的方案数. 证明:对于任何正整数 n 有 $p(n) = q(n)$.
   (2) 设 m, n 是正整数,证明:$m^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{m}{k} \left\{ n \atop k \right\} k!$.
4. 应用题(10 分).
   设有 n 次多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$,下列算法计算 $P(x)$ 在 $x = c$ 点的值.
   Poly(a, c, n)

```
if n = 0 then return a_0;
else return (c * Poly(a, c, n - 1) + a_n);
```

   (1) 设上述 Poly 算法所做的乘法次数是 $T(n)$,计算 $T(n)$.
   (2) 如果按照传统的算法:对于 $n = 0, 1, \cdots, n$,分别计算 $a_k x^{n-k}$,然后把它们加起来,那么需要多少次乘法? 哪种算法效率更高? 为什么?