

南京大学数学试卷

2022.6.13

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

2. 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 计算 $((A^*)^T)^*$.

3. 求使得方阵 $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$ 正定的所有实数对 (x, y) 在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

4. 求 $\alpha_1 = (0, 2, 1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (3, 4, 2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0, 7, 2)^T, \alpha_4 = (1, 0, 0, 2, 1)^T$ 的一组极大无关组, 并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

二、 (本题12分) 利用分块矩阵计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, (n \geq 1)$.

三. (本题12分) 设线性方程组 $AX = B$ 中 $r(A) = 2$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其解向量, 满足 $4\alpha_1 - 3\alpha_2 = (1, 0, 2, 1)^T$, $2\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 3, 9, 3)^T, \alpha_1 + 3\alpha_3 = (0, 0, 4, 4)^T$. 求 $AX = B$ 的通解.

四. (本题12分) 用正交变换将实二次型 $f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$ 化成一个标准形并求 $f(x, y, z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

五. (本题12分) 线性空间 \mathbf{R}^3 中有两组基 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 2)^T, \alpha_3 = (2, 0, 0)^T$, 和 $\beta_1 = (3, 2, 2)^T, \beta_2 = (0, 2, 0)^T, \beta_3 = (-2, 2, 4)^T$. 试用 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性组合表达 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实系数对称正交方阵.

- (1) 证明 A 的特征值为1或-1.
- (2) 证明可以找到 n 个两两正交的单位列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$ 使得 $A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-m)$.

七. (本题12分) (1) 计算 n 阶上三角实方阵全体和 n 阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间 V 和 W 的维数.
 (2) 计算实线性空间 $V \cap W$ 和 $V + W$ 的维数.

一、简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值.

$$\text{解: } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a^2 - b^2) - b^2(a^2 - b^2) = (a + b)^2(a - b)^2.$$

$$\text{解法二: } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & a+b \\ 0 & a+b & a+b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^2(a-b)^2.$$

2. 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 计算 $((A^*)^T)^*$.

$$\text{解: } ((A^*)^T)^* = ((A^*)^T)^T = (|A|A)^T = |A|A^T = -109 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

解法二: 由 $|A| = -109$ 得 $A^* = |A|A^{-1}$, 故 $B = (A^*)^T = |A|(A^T)^{-1}$, 则 $|B| = |A|^3|(A^T)^{-1}| = |A|^2$.

$$\text{于是 } ((A^*)^T)^* = B^* = |B|B^{-1} = |A|^2|A|^{-1}A^T = |A|A^T = -109 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 求使得方阵 $\begin{pmatrix} 3 & x & 0 \\ x & 4 & y \\ 0 & y & 5 \end{pmatrix}$ 正定的所有实数对 (x, y) 在平面直角坐标系中所构成的区域面积.

解: 该方阵正定当且仅当 $12 - x^2 > 0$ 且 $60 - 5x^2 - 3y^2 > 0$. 所有满足这两个不等式的实数对 (x, y) 的集合为椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{20} < 1$. 其面积为 $\pi \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{20} = 4\sqrt{15}\pi$.

4. 求 $\alpha_1 = (0, 2, 1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (3, 4, 2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0, 7, 2)^T, \alpha_4 = (1, 0, 0, 2, 1)^T$ 的一组极大无关组, 并将其余向量表达为极大无关组的线性组合.

$$\text{解: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一组极大无关组, $\alpha_4 = -\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3$. (极大无关组选取不唯一)

二、(本题12分) 利用分块矩阵计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, ($n \geq 1$).

解: 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 我们有 $A^2 = E, AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 因此

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{pmatrix}.$$

因此, 当 n 为偶数时 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 1 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 当 n 为奇数时 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2n & 3n \\ 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解法二: 易知 $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix}$.

其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 且有 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}, A^2 = E$.

于是 $K^n = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} E & D \\ O & E \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & O \\ O & A^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & nD \\ O & E \end{pmatrix}$.

故当 n 为偶数时, 有 $K^n = \begin{pmatrix} E & nD \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 1 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

当 n 为奇数时, 有 $K^n = \begin{pmatrix} A & nAD \\ O & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2n & 3n \\ 1 & 0 & 3n & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

三. (本题12分) 设线性方程组 $AX = B$ 中 $r(A) = 2$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其解向量, 满足 $4\alpha_1 - 3\alpha_2 = (1, 0, 2, 1)^T$, $2\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 3, 9, 3)^T, \alpha_1 + 3\alpha_3 = (0, 0, 4, 4)^T$. 求 $AX = B$ 的通解.

解: 由于 $r(A) = 2$, 未知数个数为4, $AX = \theta$ 的解空间维数为2.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX = B$ 的解向量, 从而

$$4\alpha_1 - 3\alpha_2 = (1, 0, 2, 1)^T, \frac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 1, 3, 1)^T, \frac{1}{4}(\alpha_1 + 3\alpha_3) = (0, 0, 1, 1)^T \text{ 是 } AX = B \text{ 的解,}$$

从而 $(1, 0, 2, 1)^T - (0, 1, 3, 1)^T = (0, -1, -1, 0)^T, (0, 1, 3, 1)^T - (0, 0, 1, 1)^T = (0, 1, 2, 0)^T$ 是 $AX = \theta$ 的两个解. 注意到这两个解线性无关, 从而 $AX = \theta$ 的通解为 $k_1(1, -1, -1, 0)^T + k_2(0, 1, 2, 0)^T, (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$.

因此 $AX = B$ 的通解为 $(1, 0, 2, 1)^T + k_1(1, -1, -1, 0)^T + k_2(0, 1, 2, 0)^T, (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$.

(本题通解表达式不唯一)

解法二: 易知 $(4\alpha_1 - 3\alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解得 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/21 & -2/21 \\ 9/7 & 12/7 & -3/7 \\ 27/7 & 94/21 & 1/21 \end{pmatrix}$, 故 $\alpha_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 36 \\ 94 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}$.

令 $\beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{21}(-5, 9, 13, 0)^T, \beta_2 = \alpha_3 - \alpha_1 = -\frac{4}{21}(2, 9, 20, 0)^T$.

显然 β_1, β_2 为 $AX = \theta$ 的无关解, 又由 $r(A) = 2$, 故 β_1, β_2 构成 $AX = \theta$ 的一个基础解系, 故 $AX = B$ 的通解为: $\alpha_1 + k_1\beta_1 + k_2\beta_2, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

四. (本题12分) 用正交变换将实二次型 $f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$ 化成一个标准形并求 $f(x, y, z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

解: 设 $X = (x, y, z)^T, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 我们有 $f(x, y, z) = X^T AX$. A 的特征值为1, 4, 7. 它们的一个特征向量分别为 $\alpha_1 = (-2, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 1, 2)^T, \alpha_3 = (-1, -2, 2)^T$. 由于这三个分量分属对称矩阵 A 的三个不同特征值, 所以它们两两正交, 经它们单位化, 得到正交矩阵 $U = \left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}, \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

我们有 $U^T AU = \text{diag}(1, 4, 7)$. 令 $(u, v, w)^T = U^T X$, 标准形为

$$f(u, v, w) = X^T A X = (u, v, w) U^T A U (u, v, w)^T = u^2 + 4v^2 + 7w^2.$$

正惯性指数为3, 负惯性指数为0. (本题中二次型化为标准形形式不唯一)

五. (本题12分) 线性空间 \mathbf{R}^3 中有两组基 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 2)^T, \alpha_3 = (2, 0, 0)^T$, 和 $\beta_1 = (3, 2, 2)^T, \beta_2 = (0, 2, 0)^T, \beta_3 = (-2, 2, 4)^T$. 试用 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性组合表达 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

解: 令 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)P$, 则有

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故有 } \alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3, \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3, \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3.$$

$$\text{解法二: } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 3/8 & -1/4 \end{array} \right).$$

$$\text{故有 } \alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3, \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3, \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3.$$

$$\text{解法三: 设 } \sum_{i=1}^3 k_{ij} \alpha_i = \beta_j (1 \leq j \leq 3). \text{ 解得 } \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_3 \\ \beta_3 = 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}.$$

$$\text{即 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{从而 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}, \text{ 即有 } \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_2 - \frac{1}{8}\beta_3 \\ \alpha_2 = \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{3}{8}\beta_3 \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3 \end{cases}.$$

六. (本题12分) 令 A 为 n 阶实系数对称正交方阵.

(1) 证明 A 的特征值为1或-1.

(2) 证明可以找到 n 个两两正交的单位列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$ 使得

$$A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-m).$$

证: (1) 由 A 的性质可得 $AA^T = E_n$ 且 $A = A^T$. 从而 $A^2 = E_n$. 因此 A 的任意特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 所以 A 的特征值为1或-1.

(2) 由于 A 是对称实数矩阵且特征值为 1 或 -1, 不妨设特征值 1 的重数为 m 而特征值 -1 的重数为 $n-m$. 那么存在正交矩阵 $U = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-m})$ 使得 $U^T AU = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & -E_{n-m} \end{pmatrix}$.

$$\text{从而 } (A\alpha_1, \dots, A\alpha_m, A\beta_1, \dots, A\beta_{n-m}) = AU = U \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & -E_{n-m} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, -\beta_1, \dots, -\beta_{n-m}),$$

即有 $A\alpha_i = \alpha_i, A\beta_j = -\beta_j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-m)$. 注意到 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-m}$ 是正交矩阵 U 的 n 个列向量, 所以是两两正交的单位向量.

证法二: (1) A 实对称且正交, 故有 $A^2 = A^T A = E$. 设 λ 为 A 的任一特征值, 对应特征向量为 ξ , 则有 $A\xi = \lambda\xi$. 故 $\xi = A^2\xi = \lambda A\xi = \lambda^2\xi$, 由 $\xi \neq 0$, 故 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = \pm 1$.

(2) A 实对称, 故可对角化. 设 A 有 m 个特征值 1, $n-m$ 个特征值 -1,

则对应于 1 有 m 个无关特征向量, 标准正交化后得到 m 个标准正交的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 即有 $A\alpha_i = \alpha_i, 1 \leq i \leq m$.

同理有对应于 -1 的标准正交的特征向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$, 有 $A\beta_j = -\beta_j, 1 \leq j \leq n-m$.

由于 α_i, β_j 对应不同的特征值, 故正交, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$ 是标准正交向量组.

七. (本题12分) (1) 计算 n 阶上三角实方阵全体和 n 阶下三角实方阵全体分别构成的实线性空间 V 和 W 的维数.

(2) 计算实线性空间 $V \cap W$ 和 $V + W$ 的维数.

解: (1) 令 $E_{ij} = e_i e_j^T$, 其中 $e_i \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$ 为 n 维列向量, 除了第 i 个分量为 1 其余都是 0.

则 $E_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = i, i+1, \dots, n$ 构成 V 的一组基，共有基向量 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个，
故 $\dim(V) = \frac{n(n+1)}{2}$.

同理 $E_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, i$ 构成 V 的一组基，有 $\dim(V) = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) 易知 $V+W = \mathbf{R}^{n \times n}$ ，故 $\dim(V+W) = n^2$ ，从而 $\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W) = n$.

(2) 解法二：易知 $V \cap W$ 为 n 阶对角矩阵构成的空间， $E_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$ 为一组基，故 $\dim(V \cap W) = n$ ，
则 $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = n^2$.