2025年微积分Ⅱ（第一层次）期末考试 2025.6.11

一、填空题

1. **求微分方程 $y''+2y'+5y=e^{-x}$ 的通解**

解：判为二阶常系数非齐次线性微分方程，求“齐次通解 + 非齐次特解”

对应齐次方程的特征方程为：$\lambda^2+2\lambda+5=0$ 解得 $\lambda_{1,2}=-1\pm 2\mathrm{i}$

根据复根形式 $\lambda=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ ，齐次方程通解为

$$
\begin{aligned}
Y&=K_1e^{(\alpha+\beta\mathrm{i})\mathrm{x}}+K_2e^{(\alpha-\beta\mathrm{i})\mathrm{x}}=e^{\alpha\mathrm{x}}(K_1e^{\beta\mathrm{ix}}+K_2e^{-\beta\mathrm{ix}})\\
&=e^{\alpha x}(K_1(\cos\beta\mathrm{x}+i\sin\beta\mathrm{x})+K_2(\cos\beta\mathrm{x}-i\sin\beta\mathrm{x}))=e^{\alpha\mathrm{x}}(\mathrm{C}_1\cos\beta\mathrm{x}+C_2\sin\beta\mathrm{x})
\end{aligned}
$$

本题即 $=e^{-\mathrm{x}}(\mathrm{C}_1\cos2\mathrm{x}+C_2\sin2\mathrm{x})$

步骤 2：求非齐次方程的特解 y^*

非齐次项 e^{-x}，属于 $e^{\lambda x}$ 型（可待定型，但如 $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ 或 $\csc x$ . . 则常数变易法）。

由于 $\lambda=-1$ 不是齐次方程的特征根（特征根为 $\lambda_{1,2}=-1\pm2\mathrm{i}$，实部为-1 但含虚部）

设特解形式：$y^*=Ae^{-x}$（A 为待定系数）. 将一阶导 $y^{*\prime}$、二阶导 $y^{*\prime\prime}$ 代入原方程，

$y^{*\prime\prime}+2y^{*\prime}+5y^*=Ae^{-x}+2(-Ae^{-x})+5Ae^{-x}=4Ae^{-x}$ 让两边成为恒等式的 A 满足：

$4A=1$ **. 因此原非齐次方程的通解=**

$y=Y+y^*=e^{-x}\left(C_1\cos2x+C_2\sin2x\right)+\dfrac{1}{4}e^{-x}$ 。

2. **求微分方程 $y'-y=xy^3$ 的通解**

解：伯努利方程的标准形式为：$y'+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq0,1)$

识别本题为伯努利方程，$P(x)=-1$，$Q(\mathrm{x})=x,n=3$

故令 $z=y^{1-n}=y^{-2}$（需 $\mathrm{y}\neq0$，漏奇解 $\mathrm{y}=0$），即 $y=z^{-1/2}$，$y'_x=-\dfrac{1}{2}z^{-3/2}\cdot z'_x$ 。

原方程化为 z’、z 和 x 的微分方程：$-\dfrac{1}{2}z^{-3/2}z'-z^{-1/2}=x\cdot(z^{-1/2})^3$. 这是一阶线性微分方程：$z'+2z=-2x$

用通解公式：

$$z(\mathrm{x})=e^{-\int2dx}(\mathrm{C}+\int-2xe^{\int2dx}dx)=e^{-2x}(\mathrm{C}-xe^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x})=-x+\frac{1}{2}+\mathrm{C}\,e^{-2x}$$

再回代 $z = y^{-2}$，整理为显式（隐式也得分），原方程通解：$y^2 = \dfrac{1}{Ce^{-2x} - x + \dfrac{1}{2}}$

C 为任意常数，如令 C'=2C 简化分母，形式不唯一）奇解 $y=0$

3. **求** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^3} - e^{x^2} - e^{y^3} + 1}{\tan(x^4+y^4)}$

注意到分子 $AB - A - B + 1 = (A-1)(B-1)$ 故 $e^{x^2+y^3} - e^{x^2} - e^{y^3} + 1 = (e^{x^2}-1)(e^{y^3}-1)$

这就容易用等价无穷小：$e^{g(x)} - 1 \overset{g(x)\to 0}{\sim} g(x)$ 、$\tan(h(x,y)) \overset{h(x,y)\to 0}{\sim} h(x,y)$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^3} - e^{x^2} - e^{y^3} + 1}{\tan(x^4+y^4)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{x^2}-1)(e^{y^3}-1)}{\tan(x^4+y^4)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$$

虽不是齐次式，但分子次数=5>分母次数 4，用极坐标证明极限与任意趋近路径 θ 无关且为 0。

$$原式 = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^5 \cos^2\theta \sin^3\theta}{r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)} = \lim_{r\to 0^+} r \cdot \frac{\cos^2\theta\sin^3\theta}{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)} = \lim_{r\to 0^+} r \cdot \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} 0 \times 有界量 = 0$$

4. u **和** v **是方程组** $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\sin v \end{cases}$ **确定的隐函数，求** $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ **和** $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 。

法 1 直接求导：明确 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 自变量因变量，方程两边（链式法则）同求偏导，解线性方程组。

将 u, v 视为 x, y 的函数，对 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \ldots(1) \\ y = e^u - u\sin v \ldots(2) \end{cases}$,(1)(2)关于 x 求偏导：

对 (1) 两边求 x 的偏导,y 固定：$1 = (e^u + \sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\cos v \dfrac{\partial v}{\partial x} \ldots(3)$

对 (2) 两边求 x 的偏导,y 固定：$0 = (e^u - \sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\cos v \dfrac{\partial v}{\partial x} \ldots(4)$

俩方程俩未知数，**解方程组 (3)(4)**，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2e^u}=\frac{1}{x+y}$（可消元 or 克莱姆法则,详参《线性代数》。）

类似地，对 (1)(2) 两边关于 y 求偏导，x 固定：

$$0=(e^u+\sin v)\frac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\quad(5)\quad;\quad 1=(e^u-\sin v)\frac{\partial u}{\partial y}-u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\ldots(6)$$

解得：$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{e^u+\sin v}{2ue^u\cos v}(u\cos v\neq 0)$,其中u, v由原方程确定$\begin{cases}u=u(\mathrm{x},\mathrm{y})\\ v=v(\mathrm{x},\mathrm{y})\end{cases}$。

[法 2:雅可比矩阵*:隐函数存在;利用反函数定理,通过正雅可比矩阵的逆求解偏导数.答案。

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix}-1 & u\cos v\\ 0 & -u\cos v\end{vmatrix}=-\frac{1}{-2ue^u\cos v}\times u\cos v=\frac{1}{2e^u};\\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=-\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix}e^u+\sin v & 0\\ e^u-\sin v & -1\end{vmatrix}=-\frac{e^u+\sin v}{2ue^u\cos v}(u\cos v\neq 0)\end{cases}$$]

5. **常系数线性齐次常微分方程基础解组为：$1,e^x\sin x,e^x\cos x$，最高阶项系数为 1，求原微分方程。**

解:步骤 1 确定微分方程的阶数。基础解组中解的个数=微分方程阶数。基础解组有 3 个解$1,e^x\sin x,e^x\cos x$因此原方程是三阶的。

步骤 2：分析特征根与解的对应关系 解 1 可写为$1=e^{0\cdot x}$，对应单实根$r_1=0$。

解 2、3 $e^x\sin x,e^x\cos x$是一对共轭复根$r_2=1+i$ 、$r_3=1-i$对应的解 。

【证明:
$$\begin{aligned}&Y=C_1\cdot e^x\sin x+C_2\cdot e^x\cos x=C_1\cdot e^x\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+C_2\cdot e^x\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\&=\frac{C_1}{2i}e^{(1+i)x}-\frac{C_1}{2i}e^{(1-i)x}+\frac{C_2}{2}e^{(1+i)x}+\frac{C_2}{2}e^{(1-i)x}=C_1'e^{(1+i)x}+C_2'e^{(1-i)x}\end{aligned}$$
】

步骤 3：求特征方程。它是 r 的三次多项式，其中

特征根为 $r_1=0$、$r_2=1+i$、$r_3=1-i$，$a_3(r-r_1)(\mathrm{r}-\mathrm{r}_2)(\mathrm{r}-\mathrm{r}_3)=0$ 题干限定最高阶系数为 1，对应特征方程唯一，　为:

$$1(r-r_1)(\mathrm{r}-\mathrm{r}_2)(\mathrm{r}-\mathrm{r}_3)=(r-0)(\mathrm{r}-(1+i))(\mathrm{r}-(1-i))=r[\mathrm{r}^2-((1+i)+(1-i))\,\mathrm{r}+(1+i)(1-i)]$$
$$=\mathrm{r}^3-2\,\mathrm{r}^2+2r=0$$

因此，原微分方程为 $y'''-2y''+2y'=0$　。

6. **级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n+2}{n+1}$，求确定级数收敛的 p 的最大范围。**

首先 $\mathrm{a}_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\cdot\ln\frac{n+2}{n+1}>0(\forall\,\mathrm{n}=1,2,...)$ 正项级数才适用比较判别法。

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n+2}{n+1}}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})^p\cdot\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})^p\cdot n\cdot\ln(1+\frac{1}{n+1})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1})^p\cdot\frac{n}{n+1}=(\frac{1}{2})^p\text{为正常数}$$

$$\therefore\text{由比较判别法}\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n+2}{n+1}\text{与}\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\text{同敛散}$$

使级数收敛的 p 的最大范围即 $\frac{\mathrm{p}}{2}+1>1$，即 p>0　。【可验证 $\mathrm{p}\le 0$ 时发散】

7. **已知 $(2x\cos y+y^2\cos x)\,\mathrm{dx}+(2\,\mathrm{ysinx}-\mathrm{x}^2\mathrm{siny})\,\mathrm{dy}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上某函数**

$u(\mathrm{x},\mathrm{y})(\mathrm{u}(0,0)=0)$ 的全微分，求 $u(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

解：注意到取 $u(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{x}^2\cos y+y^2\sin x$（满足 $\mathrm{u}(0,0)=0$），有

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\ (2x\cos y+y^2\cos x)\,\mathrm{dx}+(2\,\mathrm{ysinx}-\mathrm{x}^2\mathrm{siny})\,\mathrm{dy}$$

也可选取折线，积分求解。

8. **求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数。**

解：首先收敛域(ROC)：[-1,1]

$\because \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ **裂项** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$。当 x=0 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ =0.

当 x∈[-1,1]但 x≠0 时原级数=$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\dfrac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ 这俩级数都熟悉。设第一个部分

$S(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=x+\ldots$ ，逐项求导 $S'(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x},ROC:|\mathrm{x}|<1,$

由第一项知 $S(0)=0$． $S(\mathrm{x})-\mathrm{S}(0)=\int_0^x S'(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{dt}=-\int_0^x \mathrm{d}(\ln|1-\mathrm{t}|)=-\ln(1-x)$

$\mathrm{x}\in(-1,1]\because \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\overset{n'=n+1}{=}\sum_{n'=2}^{\infty}\dfrac{x^{n'}}{n'}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\text{第一项}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\mathrm{x}$ **（常用技巧）**

原式$=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\dfrac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=S(\mathrm{x})-\dfrac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\mathrm{x})=S(\mathrm{x})-\dfrac{1}{x}(S(\mathrm{x})-\mathrm{x})$

$=-\ln(1-x)-\dfrac{1}{x}(-\ln(1-x)-\mathrm{x})=\dfrac{(1-\mathrm{x})\ln(1-x)+x}{x}$ $,ROC:\mathrm{x}\neq 0,|\mathrm{x}|<1$

特殊点验证（补充严谨性）

（1）当 x=0 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}=0$，这等于 $\dfrac{(1-\mathrm{x})\ln(1-x)+x}{x}$ 趋于 0 的极限，故连续。

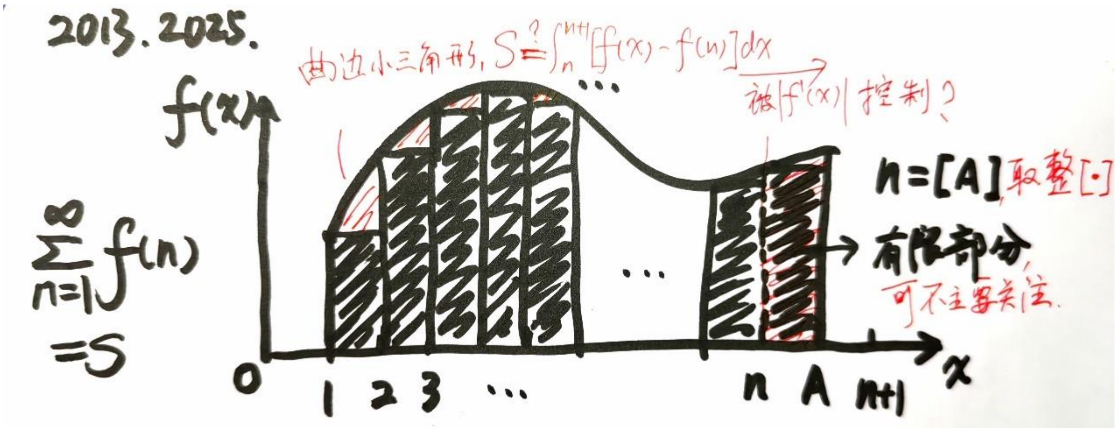
（2）当 x=1 时 原级数 $=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=1$。这等于 $\dfrac{(1-\mathrm{x})\ln(1-x)+x}{x}$ 趋于 1^-的极限，一致。（3）当 x=-1 时原级数绝对收敛。

综上 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ **和函数为** $S(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,1),x\neq 0\\ 0, & x=0\\ 1 & x=1\end{cases}$

二、设 $f(\mathrm{x})\in C^1[0,+\infty)$ **且** $\int_1^{+\infty}|f'(\mathrm{x})|dx$ **收敛。**

证明若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)$ **收敛，则广义积分** $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ **收敛.**

解：画图，定积分几何意义是理解本题的关键！



六、证明：因为 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\Big(\int_1^{[A]} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

$$= \lim_{A\to+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{[A]-1}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

要证广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，只需证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

因为 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - f(1)$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$\min_{x\in[[A],A]} f(x)\cdot(A-[A]) \le \int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x \le \max_{x\in[[A],A]} f(x)\cdot(A-[A]),$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]} f(x) = \lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]} f(x) = 0$. 而 $|A-[A]|\le 1$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

这表明 A 的小数部分“尾巴”积分的极限存在且为 0。

另一方面分段估计小曲边三角形面积即误差 a_n，用 $\int|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ 控制（有时用中值定理）：

令 $a_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$,

$$|a_n| = \Big|\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)\Big| = \Big|\int_n^{n+1}(f(x)-f(n))\,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_n^{n+1}\Big(\int_n^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x\Big|$$

$$\le \int_n^{n+1}\Big(\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| = \sum\limits_{k=1}^{n}\Big|\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(k)\Big| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 有上界，

部分和数列有上界，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + f(n)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

三、设 $S^2: x^2+y^2+z^2=1$，f 连续，证明当 a,b,c 不全为 0 时，

等式：$\iint_{S^2} f(\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{cz})\,\mathrm{dS}=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du$ 恒成立。

【注:此 S^2 指三维空间中的(2 维)单位球面。S^n 表示 n 维单位球面嵌入 n+1 维空间。】

*例 8.4.3 证明:泊松(Poisson)公式

$$\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\mathrm{d}u,$$

其中 Σ 是单位球面.

证 方法一: 令 $\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$, 再在平面 $ax+by+cz=0$ 内取两个相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$, 例如 $\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,-a,0)$, $\boldsymbol{w}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}(ac,bc,-a^2-b^2)$, 则

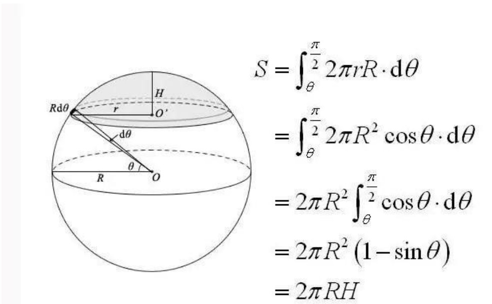
$$\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0\\ \frac{ac}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} & \frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} & \frac{-(a^2+b^2)}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

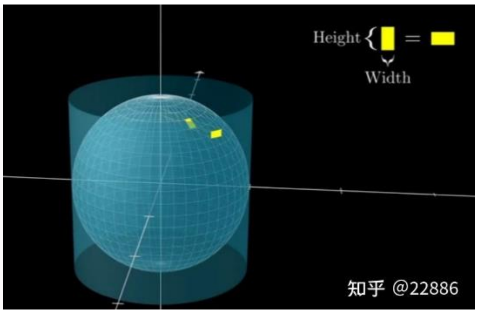
$x^2+y^2+z^2=1$ 变为 $u^2+v^2+w^2=1$, 且 $|J(u,v,w)|=1$. 记平面 $u=u$ 截球面 Σ 所得部分球面为 Σ_u, 则 $S(\Sigma_u)=\begin{cases} 2\pi(1-|u|), & -1\leqslant u\leqslant 0,\\ 4\pi-2\pi(1-|u|), & 0<u\leqslant 1,\end{cases}$ 即

$$S(\Sigma_u)=2\pi(1+u),\ -1\leqslant u\leqslant 1.$$

因此结论成立.

评：①必须熟悉球冠的定义，球冠的面积公式。





②方法一的坐标变换是正交变换，因变换矩阵由标准正交基构成。

核心意义：利用正交变换的保形性和对称性，将复杂的球面曲面积分转化为单变量积分，体现了正交变换在简化对称问题中的关键作用。

方法二: 令 $ax+by+cz=t$, 由柯西不等式和 $x^2+y^2+z^2=1$, 得

$$-\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant t \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

记平面 $ax+by+cz=t$ 截球面 Σ 所得部分球面为 Σ_t, 由球冠面积的计算公式[1], 得 $S(\Sigma_t)=2\pi\left(1+\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)\left(-\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant t \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$. 于是

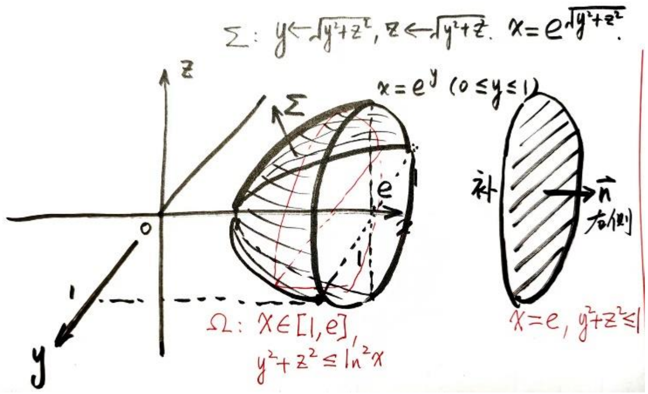
$$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\int_{-\sqrt{a^2+b^2+c^2}}^{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} f(t)\mathrm{d}(S(\Sigma_t))=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\mathrm{d}u. \quad \square$$

[1] 设球的半径为 R, 球冠的高为 h, 则球冠的面积为 $2\pi Rh$.

四、**计算曲面积分：**

$$I=\iint_{\Sigma} 2(1-z^2)\,\mathrm{dydz}+8\,\mathrm{xydzdx}-4\,\mathrm{xzdxdy}$$

其中 $\sum$ 为曲线 $x=e^y\,(0\le \mathrm{y}\le 1)$ 绕 x 轴旋转一周而成的曲面的外侧。



补面 $\sum_1$（右侧），$\sum\cup\sum_1$ 构成一个闭合区域 Ω 的外侧。

对曲面围成 Ω 用高斯公式，I 再等于再减去补面上的 2 类曲面积分：

$$I=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1} 2(1-z^2)\,\mathrm{dydz}+8\,\mathrm{xydzdx}-4\,\mathrm{xzdxdy}-\iint_{\Sigma_1} 2(1-z^2)\,\mathrm{dydz}+8\,\mathrm{xydzdx}-4\,\mathrm{xzdxdy}$$

$$=\iiint_{\Omega}(8\,\mathrm{x}-4\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\,dydz-\iint_{\Sigma_1} 2(1-z^2)\,\mathrm{dydz}+8\,\mathrm{xy}\,0-4\,\mathrm{xz}\,0$$

$$=\iiint_{\Omega} 4xdxdydz-\iint_{\Sigma_1} 2(1-z^2)\,\mathrm{dydz}$$

闭合区域上的三重积分，不太好算。躺着的旋转体，故用“躺着的”柱坐标代换。

Ω: $\{(\rho,\theta,x)\,|\,1\le x\le e, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le\ln x\}$

$$\iiint_{\Omega} 4xdV=4\int_1^e xdx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\ln x}\rho d\rho=4\int_1^e x\cdot 2\pi\cdot\frac{(\ln x)^2}{2}dx=4\pi\int_1^e x(\ln x)^2dx$$

再用两次分部积分计算：

$$\int x(\ln x)^2dx=\frac{x^2}{2}(\ln x)^2-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C$$

故 $\iiint_\Omega 4xdV = 4\pi[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}]\Big|_1^e = 4\pi[\left(\frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)] = \pi(e^2-1)$

补的曲面积分投影到 y0z 平面，再极坐标变换即可。

$$\iint_{\Sigma_1} 2(1-z^2)\,\mathrm{dydz} = \iint_{y^2+z^2\le 1} 2(1-z^2)dydz = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-\rho^2\sin^2\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho d\rho - \sin^2\theta\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta = 2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore I = \pi(e^2-1) - \frac{3\pi}{2} = \pi\left(e^2 - \frac{5}{2}\right)$$

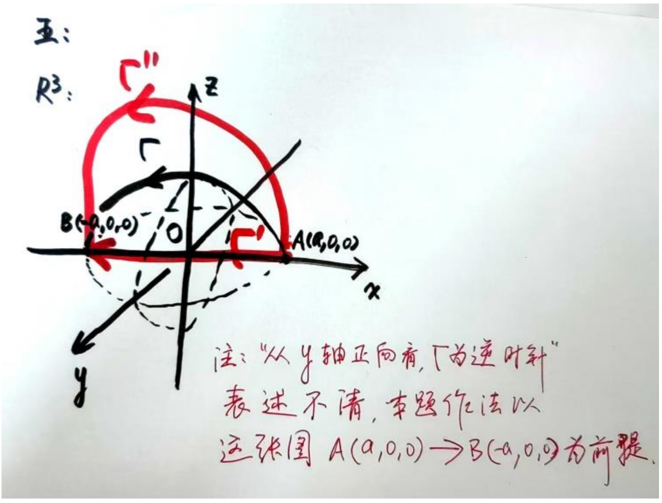
注本题和第六题，能用高斯公式尽量用高斯公式；**完整默写出高斯公式的表述**，就给分。如：

设三维空间中的区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 $\partial\Omega$ 所围成的有界闭区域，向量场 $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，且 $\partial\Omega$ 取外侧为正定向。

则：$\iint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{dydz} + Q\,\mathrm{dzdx} + R\,\mathrm{dxdy} = \iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dV$.　　给捞分√。但列出 I 而算不对，也不默写高斯公式，则不给分。

五、若 $\phi(x,y,z), \psi(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$，使积分 $\int_\Gamma e^{x+y^2}dx + \phi dy + \psi dz$ 与路径无关。Γ 为椭球面 $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ 上连接 (a,0,0)与(-a,0,0)的简单光滑曲线，从 y 正轴看为逆时针。

求 $I = \int_\Gamma e^{x+y^2}dx + \phi dy + \psi dz$



分析：

题设条件是“积分与路径无关”，无需算出具体 $\psi(\mathrm{x,y,z})$ 和 $\phi(\mathrm{x,y,z})$ 表达式，第 2 类线

积分对任意曲线$\Gamma\subset$R^3，其值“只看端点，不看路径”。
曲线Γ甚至可以取不在椭球面上的曲线，只需满足起点位于(a,0,0)而终点(-a,0,0).
椭球面 **是干扰信息**，目的是测试对“路径无关性”的理解（被几何载体迷惑）。

取直线段Γ_L=(a,0,0)→(-a,0,0)，y=dy=0,z=dz=0.这大幅化简被积函数：

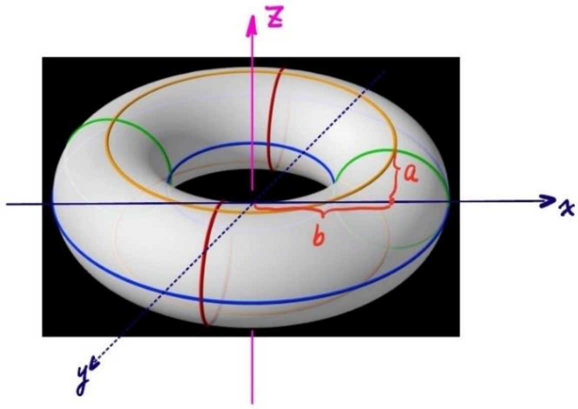
$$\therefore I=\int_{\Gamma_L}e^{x+y^2}dx+\phi dy+\psi dz=\int_a^{-a}e^{x+0^2}dx+\phi 0+\psi 0=\int_a^{-a}e^x dx=e^{-a}-e^a\text{。}$$

Remark:R^{2}上线积分$\int_\Gamma e^{x+y^2}dx+\phi dy$与路径无关，掺入未知函数$\phi(x,y)$，你会分析吗？

六、求$I=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$ ，

其中Σ 是$\{(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2\}$ 的外侧（$0<a<b$）

见到$(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2$莫慌。它是圆$(x-b)^2+z^2=a^2,y=0$再做代换$\sqrt{x^2+y^2}\to x$得到，故$\Sigma$ 是圆$(x-b)^2+z^2=a^2,y=0$绕 z 轴旋转一周得到。作图：



知$\sum$是曲环面(取外侧)。$\sum$围成截面为圆的环Ω。由$0<a<b$知转轴 z 在圆外。

P,Q,R 可微，$\sum$光滑，故$I=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_\Omega(1+1+1)dV=3\iiint_\Omega dV$

问曲环面$\begin{cases}x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\psi\end{cases}$ $(0<a\leqslant b)$所围立体的体积？

答:$V=2\pi^2a^2b$ 所以$I=6\pi^2a^2b$ 。

方法一：由帕普斯-古尔丁定理：“平面图形绕自身所在平面内不穿过图形的轴旋转，所得立体**体积等于图形自身面积乘以其形心所经圆周的长度**。”证明见**微元法,很容易**。

故$V=S$(小圆)$\times$小圆圆心转一圈扫过的长度$=\pi a^2\cdot 2\pi b=2\pi^2a^2b$．。

注：此方法值得记忆，可应用于**旋转体体积的二重积分法【武忠祥】。**

方法二：曲面参数方程法

$$\iiint\limits_V 1dxdydz=\iiint\limits_V \frac{\partial z}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_S zdxdy$$，由换元 $\begin{cases}x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\psi\end{cases}$

$$=\iint\limits_{D(\psi,\varphi)} a\sin\psi\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\psi}\\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\psi}\end{vmatrix}d\varphi d\psi$$

$$=\iint\limits_{D(\psi,\varphi)} a\sin\psi\begin{vmatrix}-(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (-a\sin\psi)\cos\varphi\\ (b+a\cos\psi)\cos\varphi & (-a\sin\psi)\sin\varphi\end{vmatrix}d\varphi d\psi$$

$$=\iint\limits_{D(\psi,\varphi)} a\sin\psi[(b+a\cos\psi)\sin\varphi(a\sin\psi)\sin\varphi+(b+a\cos\psi)\cos\varphi(a\sin\psi)\cos\varphi]d\varphi d\psi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}[\mathrm{a}^2\mathrm{b}\cdot\sin^2\psi+\mathrm{a}^3\cdot\sin^2\psi\cos\psi]d\psi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{a}^2\mathrm{b}\cdot\sin^2\psi d\psi$$

$$+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{a}^3\cdot\sin^2\psi\cos\psi d\psi=\mathrm{a}^2\mathrm{b}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\psi}{2}d\psi+\frac{1}{3}\mathrm{a}^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d[\sin^3\psi]$$

$$=\mathrm{a}^2\mathrm{b}\cdot 2\pi\cdot\pi+\frac{1}{3}\mathrm{a}^3\cdot 0=2\pi^2\,\mathrm{a}^2\mathrm{b}$$

七、已知 $f(\mathrm{x})\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ 为 $T=2\pi$ 的周期函数，且 $f(\pi)=f(-\pi)=0$。

(1). **写出 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数.**

设 $f(x)\in C^2(\mathbb{R})$ 是周期 $T=2\pi$ 的函数，则其在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier **系数** 定义为：
$$\begin{cases}a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx\quad(n=1,2,\dots),\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx\quad(n=1,2,\dots).\end{cases}$$

由 Fourier 级数的定义，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right),$$

其中 "$\sim$" 表示 "Fourier 级数为"。由于 $f\in C^2(\mathbb{R})$，根据**Fourier 级数收敛定理**（如 Dirichlet-Jordan 定理），该级数 **一致收敛** 到 $f(x)$。

(2). **证明该级数绝对收敛。**

核心思路：

利用 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 的二阶可导性，通过 **分部积分** 证明 Fourier 系数 a_n, b_n 具有 $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 的衰减速度，再结合正项级数的**比较判别法**证明绝对收敛。

推导 a_n 的衰减性（分部积分），b_n 类似。

1. **第一次分部积分**：令 $u = f(x)$，$dv = \cos(nx)dx$，则 $du = f'(x)dx$，$v = \frac{\sin(nx)}{n}$。

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[f(x) \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx\right].$$

因 $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$，边界项为 0，故：$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx.$

2. **第二次分部积分**：令 $u = f'(x)$，$dv = \sin(nx)dx$，则 $du = f''(x)dx$，$v = -\frac{\cos(nx)}{n}$。

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\left[-f'(x) \cdot \frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx\right].$$

由于 f' 是周期 2π 的函数，$f'(\pi) = f'(-\pi)$，且 $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$，故边界项为 0，

得：$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx.$

3. **有界性估计**：设 $M = \sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f''(x)|$（因 f'' 连续，故有界），则：

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx \le \frac{2M\pi}{n^2\pi} = \frac{2M}{n^2},$$

即 $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$。

步骤 2：推导 b_n 的衰减性（类似分部积分）

1. **第一次分部积分**：令 $u = f(x)$，$dv = \sin(nx)dx$，则 $du = f'(x)dx$，$v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-f(x)\cdot\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx\right].$$

由题设 $f(\pi) = f(-\pi) = 0$，边界项为 0，故：$b_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx.$

2. **第二次分部积分**：令 $u = f'(x)$，$dv = \cos(nx)dx$，则 $du = f''(x)dx$，$v = \frac{\sin(nx)}{n}$。

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[f'(x)\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin(nx)\,dx\right].$$

因 $\sin(n\pi) = 0$，边界项为 0，得：$b_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin(nx)\,dx.$

3. **有界性估计**：同理，$|b_n| \leq \frac{2M}{n^2}$，即 $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$。

步骤 3：绝对收敛的证明

由三角不等式：$|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{C}{n^2} \quad (C = 4M \text{ 为常数}).$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是 p - **级数（$p = 2 > 1$）**，根据**比较判别法**，级数

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)|$

收敛，故 Fourier 级数 **绝对收敛**（且一致收敛）。

注：

光滑性降低的讨论

情况 1：$f \in C^1(\mathbb{R})$（一阶连续可导）

- **Fourier 系数衰减**：仅分部积分一次，可得 $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$（边界项仍可通过周期性或题设消去，但仅一次分部，无法进一步降阶）。
- **收敛性**：此时 $|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq O\left(\frac{1}{n}\right)$，而 $\sum\frac{1}{n}$ 是**调和级数（发散）**，故 **绝对收敛不成立**。但由**Dirichlet 判别法**（系数 $a_n, b_n \to 0$ 且单调，三角部分和有界），Fourier 级数 **本身收敛**

可见本题的关键是条件 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ **对应** a_n、b_n **的衰减性为** $0(n^{-2})$

不够光滑，如 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ **对应** a_n、b_n **的衰减性为** $0(n^{-1})$。