第一次习题课补充题

liangs

September 2024

1 赌徒破产问题

令 $f(n)$ 表示当赌徒有 n 个筹码时最后输掉的概率，那么由全概率公式，有(**递推公式**)

$$f(n) = pf(n+1) + qf(n-1)$$

以及**边界条件**

1. $f(0) = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$(注意这个假设蕴含了$q < p$)　(**或者**$f(N) = 0$)

由递推公式，我们可以得到 $f(n)$ 的**通项公式**

$$\begin{aligned}
& f(n) = pf(n+1) + qf(n-1) \\
\Leftrightarrow\ & pf(n) + qf(n) = pf(n+1) + qf(n-1) \\
\Leftrightarrow\ & p(f(n+1) - f(n)) = q(f(n) - f(n-1)) \\
\Leftrightarrow\ & f(n+1) - f(n) = \frac{q}{p}(f(n) - f(n-1)) \\
\Rightarrow\ & f(n+1) - f(n) = \left(\frac{q}{p}\right)^n (f(1) - f(0))\,(\textbf{差分}) \\
\Rightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(f(i) - f(i-1)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}(f(1) - f(0))(\textbf{求和}) \\
\Leftrightarrow\ & f(n) - f(0) = \begin{cases} n(f(1) - 1), \frac{q}{p} = 1 \\ \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}(f(1) - 1), \frac{q}{p} \neq 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & f(n) = \begin{cases} 1 + n(f(1) - 1), \frac{q}{p} = 1 \\ 1 + \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}(f(1) - 1), \frac{q}{p} \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

现在只需要利用**边界条件**求出 $f(1)$ 即可得 $f(n)$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(n) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 + n\left(f(1) - 1\right)\right], \frac{q}{p} = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}\left(f(1) - 1\right)\right], \frac{q}{p} \neq 1 \end{cases}$$

解得

$$f(1) = \frac{q}{p} \quad \text{注意，在}\lim_{n\to\infty} f(n) = 0\text{的设定下，只能}\frac{q}{p} < 1$$

回代即得

$$f(n) = \left(\frac{q}{p}\right)^n, \quad \frac{q}{p} < 1$$

2. $f(N) = 0$

$$0 = f(N) = \begin{cases} \left[1 + N\left(f(1) - 1\right)\right], \frac{q}{p} = 1 \\ \left[1 + \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\frac{q}{p}}\left(f(1) - 1\right)\right], \frac{q}{p} \neq 1 \end{cases}$$

解得

$$f(1) - 1 = \begin{cases} -\frac{1}{N}, \frac{q}{p} = 1 \\ -\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, \frac{q}{p} \neq 1 \end{cases}$$

回代即得

$$f(n) = \begin{cases} \begin{cases} 1 - \frac{n}{N}, \frac{q}{p} = 1 \\ 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, \frac{q}{p} \neq 1 \end{cases} & , n \leq N \\ 0, n > N \end{cases}$$