第 2 章 插值法

姚遥

南京大学智能科学与技术学院

本章目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

如果插值节点等距，则前面插值公式皆可进一步简化

- 假设函数 $y=f(x)$ 在等距节点 $x_k=x_0+kh\ (k=0,1,\dots,n)$ 上的值 $f_k=f(x_k)$ 为已知，这里 h 为常数，称为步长

定义2.4 偏差

$$\Delta f_k=f_{k+1}-f_k \qquad (2.5.1)$$

$$\nabla f_k=f_k-f_{k-1} \qquad (2.5.2)$$

$$\delta f_k=f(x_k+h/2)-f(x_k-h/2)=f_{k+\frac{1}{2}}-f_{k-\frac{1}{2}} \qquad (2.5.3)$$

- 分别称为 $f(x)$ 在 x_k 处以 h 为步长的向前差分、向后差分及中心差分。符号Δ，∇，δ 称为向前差分算子、向后差分算子及中心差分算子。（一阶差分）

插值法 | 差分

- 利用一阶差分可定义二阶差分

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

- 一般地，可定义 m 阶差分

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k,\quad \nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$

- 一阶中心差分
  - 前面定义用到的 $f_{k+1/2}$ 和 $f_{k-1/2}$ 不在函数表中
  - 新形式 $\delta f_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+1} - f_k,\quad \delta f_{k-\frac{1}{2}} = f_k - f_{k-1}$
- 二阶中心差分 $\delta^2 f_k = \delta f_{k+\frac{1}{2}} - \delta f_{k-\frac{1}{2}} = f_{k+1} + f_{k-1} - 2 f_k$

插值法 | 不变算子和移位算子

- 不变算子 I 和移位算子 E，定义如下

$$\mathrm{I}f_k = f_k, \qquad \mathrm{E}f_k = f_{k+1}$$

- 因此

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = \mathrm{E}f_k - \mathrm{I}f_k = (\mathrm{E} - \mathrm{I})f_k$$

- 可得

$$\Delta = \mathrm{E} - \mathrm{I}$$

- 同理

$$\nabla = \mathrm{I} - \mathrm{E}^{-1}, \qquad \delta = \mathrm{E}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{E}^{-\frac{1}{2}}$$

插值法 | 不变算子和移位算子

性质1 各阶差分均可用函数值表示

$$\Delta^n f_k = (\mathrm{E}-\mathrm{I})^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \mathrm{E}^{n-j} f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_{n+k-j} \tag{2.5.4}$$

$$\nabla^n f_k = (\mathrm{I}-\mathrm{E}^{-1})^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathrm{E}^{j-n} f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{k+j-n} \tag{2.5.5}$$

- 其中$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$为二项式展开系数

性质2 函数值也可用各阶差分表示，例如，可用向前差分表示f_{n+k}

$$f_{n+k} = \mathrm{E}^n f_k = (\mathrm{I}+\Delta)^n f_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta^j f_k \tag{2.5.6}$$

性质3 差商与差分有如下关系

- 向前差分

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k$$

- 一般地

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \quad (m = 1,2,\cdots,n) \qquad (2.5.7)$$

- 向后差分

$$f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m f_k \qquad (2.5.8)$$

性质3 差商与差分有如下关系

- 结合式(2.5.7)及式(2.4.5)

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \quad (m = 1,2,\cdots,n) \tag{2.5.7}$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] \tag{2.4.5}$$

- 可得差分与导数的关系

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi) \tag{2.5.9}$$

其中$\xi \in (x_k, x_{k+n})$

插值法 | 差分表

- 计算差分可列差分表，下表是向前差分表

x_k	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\vdots$
f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\vdots$	
f_3	Δf_3	$\vdots$		
f_4	$\vdots$			
$\vdots$				

插值法 | Newton前插公式

- 回顾Newton插值公式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (2.4.6)$$

用差分代替差商

- 设有节点$x_k = x_0 + kh\ (k = 0,1, \dots, n)$
- 要计算 x_0 附近点 x 的函数值 $f(x)$，令$x = x_0 + th$，$0 \leq t \leq 1$，得到

$$\omega_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^{k}(x - x_j) = t(t-1)\cdots(t-k)h^{k+1}$$

插值法 | Newton前插公式

- 将上式和下式 (2.5.7) 代入(2.4.6)

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \quad (m = 1,2,\cdots,n) \qquad (2.5.7)$$

Newton前插公式

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad (2.5.10)$$

- 插值余项由式(2.2.14)得到

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.2.14)$$

$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in (x_0, x_n) \qquad (2.5.11)$$

插值法 | Newton后插公式

- 要计算在 x_n 附近点 x 的函数值 $f(x)$，此时将插值点按$x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$的次序排列

$$N_n(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_n, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1})$$
$$+ \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_n) \cdots (x - x_1)$$

- 作变换$x = x_n + th\ (-1 \le t \le 0)$，利用式(2.5.8)

$$f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m f_k \qquad (2.5.8)$$

Newton后插公式

$$N_n(x_n + th) = f_n + t\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \quad (2.5.12)$$

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x_n + th) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n)h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \xi \in (x_0, x_n)$$

插值法 | Newton前后插值

- 利用**Newton前插公式**(2.5.10)计算函数值 $f(x)$ 时，由于 x 在 $\boldsymbol{x_0}$ 附近，其系数就是 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 的各阶**向前差分**

- 利用**Newton后插公式**(2.5.12)计算函数值 $f(x)$ 时，由于 x 在 $\boldsymbol{x_n}$ 附近，其系数就是 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{x_n}$ 的各阶**向后差分**

插值法 | Why等距差分?

等距节点插值公式有不少实际应用，例如，很多工程设计计算都需要查各种函数表，用计算机计算时就必须解决计算机查表问题

- 如果把整个函数表存入内存，往往占用单元太多
- 如果用一个解析表达式近似该函数，又可能达不到精度要求
- 因此，采用存放大间隔函数表，并用插值公式计算函数近似值，是一种可行的方案

插值法 | 函数表插值例子

例2.4 在微电机设计计算中需要查磁化曲线表，下面给出的表是磁密B每间隔500高斯磁路每厘米长所需安匝数at的值，下面要解决B从4000至11000区间的查表问题

- 从差分表中看到三阶差分近似于0，因此计算时只需用二阶差分
- 也就是使用3个点实现插值，即$n = 2$

a	B_k	$at_k = f(B_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	4 000	1.38	0.10	0	0.01
1	4 500	1.48	0.10	0.01	0
2	5 000	1.58	0.11	0.01	0
3	5 500	1.69	0.12	0.01	0.02
4	6 000	1.81	0.13	0.03	−0.01
5	6 500	1.94	0.16	0.02	0.02
6	7 000	2.10	0.18	0.04	0
7	7 500	2.28	0.22	0.04	0
8	8 000	2.50	0.26	0.04	0.01
9	8 500	2.76	0.30	0.05	0.02
10	9 000	3.06	0.35	0.07	0.01
11	9 500	3.41	0.42	0.08	0.02
12	10 000	3.83	0.50	0.10	
13	10 500	4.33	0.60		
14	11 000	4.93			

插值法 | 函数表插值例子

- 当$4000 \le B \le 10500$，使用Newton前插公式
- 例如，求$f(5200)$时取$B_0 = 5000$，$f_0 = 1.58$，$\Delta f_0 = 0.11$，$\Delta^2 f_0 = 0.01$，$h = 500$，$B = 5200$，$t = 0.4$，于是由式(2.5.10)，取$n = 2$，可得

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \qquad (2.5.10)$$

$$f(5200) \approx 1.58 + 0.4\times 0.11 + \frac{0.4\times(-0.6)}{2}\times 0.01 \approx 1.62$$

- 当$10500 < B \le 11000$，因前插缺少信息，故使用Newton后插公式

本章目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

Hermite插值多项式：不少实际问题不仅要求在节点上函数值相等，而且还要求导数值相等，甚至高阶导数值也相等

- 讨论函数值与导数值个数相等的情况，设在节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上，$y_j = f(x_j)$，$m_j = f'(x_j)(j = 0,1,\dots,n)$，插值多项式 $H(x)$ 满足条件

$$H(x_j) = y_j\ ,\ H'(x_j) = m_j\ \ (j = 0,1,\dots,n) \qquad (2.6.1)$$

- 一个节点2个条件，一共$2n+2$个条件，可唯一确定次数不超过$2n+1$的多项式

插值法 | Hermite插值：思路

如何求解？

- 1. 确立插值多项式的形式：

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

- 1.1. 根据上一页的条件(2.6.1)来确定$2n+2$个系数：理论可行但计算复杂

- 2.采用类似Lagrange插值多项式的基函数方法

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \qquad (2.2.11)$$

其中n次插值基函数为：

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} (k=0,1,\ldots,n)$$

如何构造基函数？

对节点值与节点倒数值分别处理

- 设置$2n+2$个插值基函数：$\alpha_j(x)$ 和 $\beta_j(x)$，都是$2n+1$次多项式，且满足

$$\alpha_j(x_k)=\delta_{jk},\quad \alpha_j'(x_k)=0\ (j,k=0,1,\cdots,n)$$

$$\beta_j'(x_k)=\delta_{jk},\quad \beta_j(x_k)=0\ (j,k=0,1,\cdots,n)$$

$$\delta_{jk}=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 1, & j=k,\end{cases}\qquad (2.6.2)$$

Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[y_j\alpha_j(x)+m_j\beta_j(x)\right]\qquad (2.6.3)$$

- 显然满足条件：$H_{2n+1}(x_k)=y_k$，$H_{2n+1}{}'(x_k)=m_k\ \ (k=0,1,\dots,n)$

插值法 | Hermite插值：基函数求解

如何求解基函数？

- $\alpha_j(x)$：Hermite插值基函数，2n+1次经过 $x_0, x_1 \dots x_{j-1}, x_{j+1}, x_n$ 点的函数
- $l_j(x)$：Lagrange插值基函数，n次经过 $x_0, x_1 \dots x_{j-1}, x_{j+1}, x_n$ 点的函数

尝试：
$$\alpha_j(x) = (ax+b)l_j^2(x)$$

- 对第 k ($k \neq j$) 个节点 x_k, 满足$\alpha_j(x) = 0$
- 对第 j 个节点 x_j, 由上一页条件(2.6.2)可得

$$\alpha_j(x_j) = \left(ax_j + b\right)l_j^2(x_j) = 1$$

$$\alpha_j'(x_j) = l_j(x_j)\left[al_j(x_j) + 2\left(ax_j + b\right)l_j'(x_j)\right] = 0$$

如何求解基函数？

- 利用条件$l_j(x_j)=1$，$l_j(x_k)=0\ (k\neq j)$得 $\begin{cases} ax_j+b=1 \\ a+2l_j'(x_j)=0 \end{cases}$
- 解得$a=-2l_j'(x_j),\ b=1+2x_jl_j'(x_j)$
- 下面求 $l_j'(x_j)$，对 $l_j(x)$ 两边求对数，可得

$$\log l_j(x)=\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\left[\log(x-x_k)-\log\left(x_j-x_k\right)\right]$$

- 两边求导得

$$\frac{l_j'(x)}{l_j(x)}=\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\frac{1}{x-x_k}\Rightarrow l_j'(x_j)=\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\frac{1}{x_j-x_k}$$

如何求解基函数？

- 利用条件$l_j(x_j)=1$，$l_j(x_k)=0\ (k\neq j)$得 $\begin{cases} ax_j+b=1 \\ a+2l_j'(x_j)=0 \end{cases}$
- 解得$a=-2l_j'(x_j),\ b=1+2x_jl_j'(x_j)$
- 下面求 $l_j'(x_j)$，对 $l_j(x)$ 两边求对数，可得

$$\log l_j(x)=\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\left[\log(x-x_k)-\log\left(x_j-x_k\right)\right]$$

- 两边求导得

$$\frac{l_j'(x)}{l_j(x)}=\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\frac{1}{x-x_k}\Rightarrow l_j'(x_j)=\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\frac{1}{x_j-x_k}$$

插值法 | Hermite插值：基函数求解

如何求解基函数？

- 得到a, b的表达式，进而可得

$$\alpha_j(x) = \left[1 - 2(x - x_j) \sum_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}\right] l_j^2(x) \qquad (2.6.4)$$

- 同理可推导

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x) \qquad (2.6.5)$$

Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)\right] \qquad (2.6.3)$$

插值法 | Hermite插值：唯一性

满足条件(2.6.1)的插值多项式是唯一的，采用反证法

- 假设$H_{2n+1}(x)$及$\overline{H}_{2n+1}(x)$均满足(2.6.1)
- 定义函数

$$\varphi(x) = H_{2n+1}(x) - \overline{H}_{2n+1}(x)$$

- 该函数在每个节点x_k上均有二重根，即$\varphi(x)$有$2n+2$重根
- $\varphi(x)$是不高于$2n+1$次的多项式，故$\varphi(x) \equiv 0$
  - 可以查阅Fundamental theorem of algebra

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内的 $2n+2$ 阶导数存在，则其插值余项满足

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \qquad (2.6.6)$$

- $\xi \in (a,b)$ 与 x 有关
- 证明可仿照例2.5，与Lagrange插值余项类似

插值法 | Hermite插值：两点三次插值多项式

- 最常用、最重要特例：$n = 1$的情况
- 取节点 x_k 和 x_{k+1}，插值多项式 $H_3(x)$ 满足

$$\begin{cases} H_3(x_k) = y_k, \quad & H_3(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ H_3'(x_k) = m_k, \quad & H_3'(x_{k+1}) = m_{k+1} \end{cases} \tag{2.6.7}$$

- 基函数$\alpha_k(x), \beta_k(x), \alpha_{k+1}(x), \beta_{k+1}(x)$应满足

$$\alpha_k(x_k) = 1,\ \alpha_k(x_{k+1}) = 0,\ \alpha_k'(x_k) = \alpha_k'(x_{k+1}) = 0$$

$$\alpha_{k+1}(x_k) = 0,\ \alpha_{k+1}(x_{k+1}) = 1,\ \alpha_{k+1}'(x_k) = \alpha_{k+1}'(x_{k+1}) = 0$$

$$\beta_k(x_k) = \beta_k(x_{k+1}) = 0,\ \beta_k'(x_k) = 1,\ \beta_k'(x_{k+1}) = 0$$

$$\beta_{k+1}(x_k) = \beta_{k+1}(x_{k+1}) = 0,\ \beta_{k+1}'(x_k) = 0,\ \beta_{k+1}'(x_{k+1}) = 1$$

插值法 | Hermite插值：两点三次插值多项式

- 根据式(2.6.4)及式(2.6.5)，可得

$$\begin{cases} \alpha_k(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \alpha_{k+1}(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases} \quad (2.6.8)$$

$$\begin{cases} \beta_k(x) = (x - x_k)\left(\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1})\left(\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases} \quad (2.6.9)$$

- 满足条件(2.6.7)的插值多项式为

$$H_3(x) = y_k\alpha_k(x) + y_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x) \quad (2.6.10)$$

- 余项$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$，由式(2.6.6)可得

$$R_3(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2$$

例2.5 求满足 $P(x_j) = f(x_j)(j = 0,1,2)$ 及 $P'(x_1) = f'(x_1)$ 的插值多项式及其余项表达式

- 3+1个等式，故可确定次数不超过3的插值多项式
- 该多项式通过点$(x_0, f(x_0))$，$(x_1, f(x_1))$及$(x_2, f(x_2))$，故可写成

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

- ➢ 前两项：类似于Newton差商插值多项式(2.4.6)的形式
- ➢ 第三项：A为待定常数

插值法 | Hermite插值：例子

例2.5 求满足 $P(x_j)=f(x_j)(j=0,1,2)$ 及 $P'(x_1)=f'(x_1)$ 的插值多项式及其余项表达式

- 利用条件$P'(x_1)=f'(x_1)$，可得

$$P'(x_1)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x_2](x_1-x_0)+A(x_1-x_0)(x_1-x_2)=f'(x_1)$$

$$A=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

- 下面计算余项$R(x)=f(x)-P(x)$，假设

$$R(x)=f(x)-P(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

  - $K(x)$为待定函数
  - 容易验证$R(x)$满足$R(x_j)=0$ $(j=0,1,2)$，并且$R'(x_1)=P'(x_1)-f'(x_1)=0$

例2.5 求满足 $P(x_j) = f(x_j)(j = 0,1,2)$ 及 $P'(x_1) = f'(x_1)$ 的插值多项式及其余项表达式

- 构造函数： $\varphi(t) = f(t) - P(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1)^2(t - x_2)$
- 显然 $\varphi(x_j) = 0(j = 0,1,2)$, $\varphi'(x_1) = 0$, $\varphi(x) = 0$
- 因此 $\varphi(t)$ 在 (a, b) 有 5 个零点（重根算2个）
- Rolle定理可得$\varphi^{(4)}(t)$在(a, b)至少有1个零点ξ，故$\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!\,K(x) = 0$
- 于是余项表达式

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)}{4!}$$

➢ 其中ξ位于x_0，x_1，x_2和x所界定的范围内

本章目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

插值法 | 分段低次插值

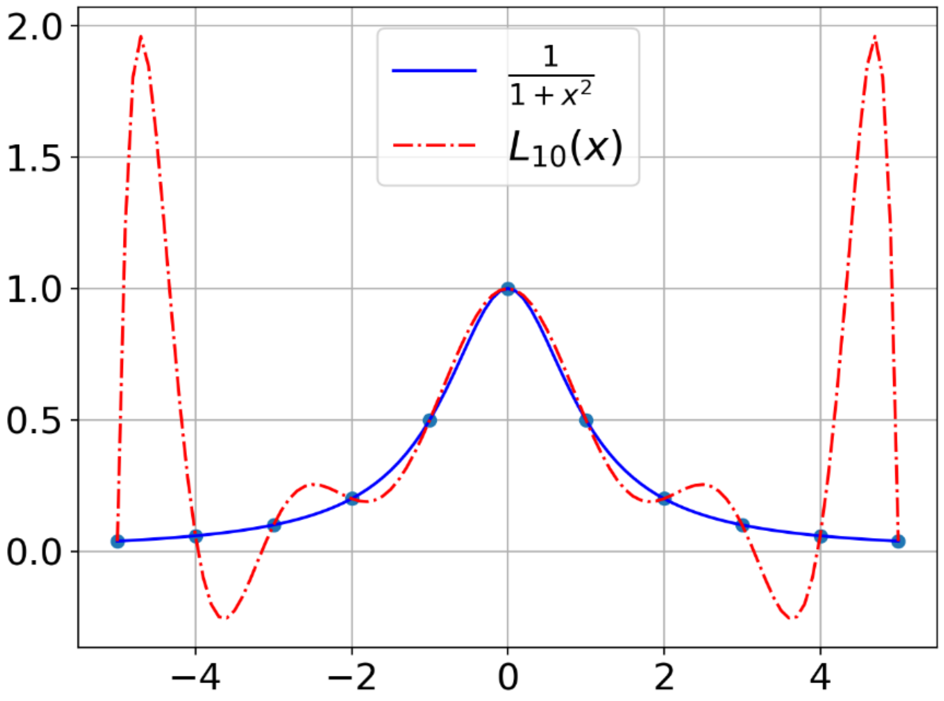
- 根据区间$[a,b]$上给出的节点构造插值多项式$L_n(x)$近似$f(x)$时，次数n越高逼近程度越好？
  - ✗ 对于任意的插值节点，当$n\to\infty$，$L_n(x)$未必收敛

Runge（龙格）现象

- 函数$f(x)=1/(1+x^2)$，在$[-5,5]$上各阶导数均存在
- 在$[-5,5]$上取等距节点$x_k=-5+10\dfrac{k}{n}\quad(k=0,1,\dots,n)$，构造Lagrange插值多项式
- 当$n\to\infty$时只在$|x|\le 3.63$内收敛，而在该区间外发散

Runge（龙格）现象

- 函数$f(x) = 1/(1 + x^2)$，在$[-5,5]$上取等距节点$x_k = -5 + 10\frac{k}{n} \quad (k = 0,1,\ldots,n)$
- 取 $n = 10$，画出 $y = L_{10}(x)$ 及 $y = 1/(1 + x^2)$ 在 $[-5,5]$ 上的图形



- 在$x = \pm5$附近两个函数的差距较大，说明高次插值的效果并不好
- 如果把$y = 1/(1 + x^2)$在节点$x = 0$，±1，±2，±3，±4，±5处用折线连起来逼近效果更好，这正是下面要讨论的分段低次插值的出发点

插值法 | 分段线性插值

分段线性插值：将插值点用折线段连接起来逼近 $f(x)$，已知节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值 f_0，f_1，…，f_n，记 $h_k = x_{k+1} - x_k$，$h = \max_k h_k$， 称$I_h(x)$为分段线性插值函数，如果满足

- $I_h(x) \in C[a,b]$；（ $C[a,b]$ 表示$[a,b]$上连续的函数集合）
- $I_h(x_k) = f_k \ (k = 0,1,\dots,n)$；
- $I_h(x_k)$在每个区间$[x_k, x_{k+1}]$上是线性函数。

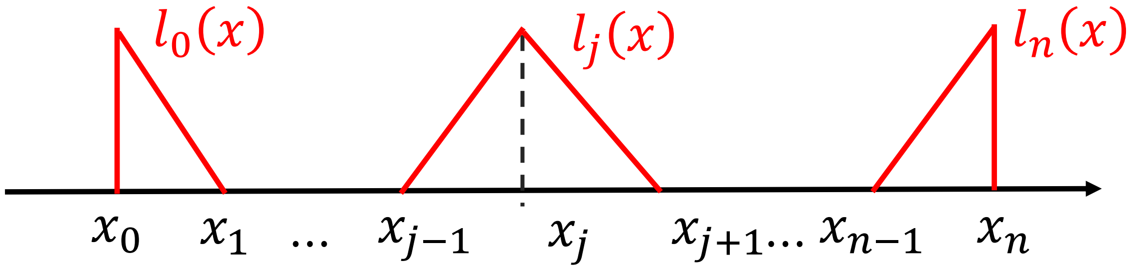
- 由定义，$I_h(x)$在区间$[x_k, x_{k+1}]$上可表示为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1} \ (x_k \le x \le x_{k+1}) \quad (2.7.1)$$

插值法 | 分段线性插值

- 用插值基函数表示 $$I_h(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x) \tag{2.7.2}$$
- $l_j(x)$ 满足条件 $l_j(x_k)=\delta_{jk}\ (j,k=0,1,\dots,n)$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j\ (j=0\ \text{略去})\\ \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1}\ (j=n\ \text{略去})\\ 0, & x\in[a,b], x\notin\left[x_{j-1},x_{j+1}\right]\end{cases} \tag{2.7.3}$$



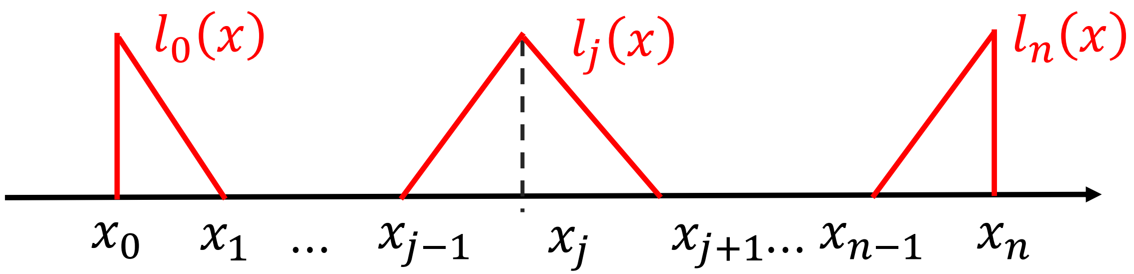
插值法丨分段线性插值

- 分段线性插值基函数 $l_j(x)$ 只在 x_j 附近不为零，其他地方均为零，该性质称为局部非零性质

➢ 当$x \in [x_k, x_{k+1}]$时

$$1 = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) = l_k(x) + l_{k+1}(x), \quad f(x) = [l_k(x) + l_{k+1}(x)]f(x)$$

➢ 此时，根据局部非零性质：$I_h(x) = f_k l_k(x) + f_{k+1} l_{k+1}(x)$



插值法 | 分段线性插值：收敛性

- **证明** $\lim_{h \to 0} I_h(x) = f(x)$，考虑$x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|f(x) - I_h(x)| = |[l_k(x) + l_{k+1}(x)]f(x) - f_k l_k(x) - f_{k+1} l_{k+1}(x)|$$

$$\leq l_k(x)|f(x) - f_k| + l_{k+1}(x)|f(x) - f_{k+1}|$$

$$\leq [l_k(x) + l_{k+1}(x)]\omega(h_k) = \omega(h_k) \leq \omega(h)$$

- 其中 $\omega(h)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的连续模
  - ➢ 对任意两点 x'，$x'' \in [a, b]$，只要 $|x' - x''| \leq h$，有 $|f(x') - f(x'')| \leq \omega(h)$

- 当 $f(x) \in C[a, b]$ 时，有 $\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$ ，故 $\lim_{h \to 0} I_h(x) = f(x)$

插值法丨分段三次Hermite插值

分段线性插值：导数间断，函数连续但不光滑

改进方向：除了节点函数值，也考虑节点导数值

给定节点 $x_k\ (k=0,1,\dots,n)$ ，各点函数值f_k ，各点导数值$f_k'=m_k$ ，可构造一个导数连续的分段插值函数$I_h(x)$，满足：

- $I_h(x)\in C^1[a,b]$；（$C^1[a,b]$ 表示$[a,b]$上一阶导数连续的函数集合）
- $I_h(x_k)=f_k$，$I_h'(x_k)=f_k'$ $(k=0,1,\dots,n)$；
- $I_h(x_k)$ 在每个区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上是三次多项式。

插值法 | 分段三次Hermite插值

- 根据两点三次Hermite插值多项式(2.6.10)，$I_h(x)$在区间$[x_k, x_{k+1}]$上的表达式为

$$I_h(x) = \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) f_k + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) f_{k+1}$$
$$+ \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 (x - x_k) f_k' + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 (x - x_{k+1}) f_{k+1}' \qquad (2.7.5)$$

- 在整个区间 $[a, b]$ 上定义一组分段三次插值基函数 $\alpha_j(x)$ 及 $\beta_j(x)$ $(j = 0,1, \dots, n)$

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[f_j \alpha_j(x) + f_j' \beta_j(x)\right] \qquad (2.7.6)$$

插值法丨分段三次Hermite插值

- $\alpha_j(x), \beta_j(x)$ 依式(2.6.8)和式(2.6.9)可表示为下述三次函数

$$\alpha_j(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j}\right) & x_{j-1}\le x\le x_j\ (j=0\text{ 略去})\\ \left(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right) & x_j\le x\le x_{j+1}\ (j=n\text{ 略去})\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{2.7.7}$$

$$\beta_j(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^2(x-x_j) & x_{j-1}\le x\le x_j\ (j=0\text{ 略去})\\ \left(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\right)^2(x-x_j) & x_j\le x\le x_{j+1}\ (j=n\text{ 略去})\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{2.7.8}$$

插值法丨分段三次Hermite插值：收敛性

- $\alpha_j(x)$，$\beta_j(x)$的局部非零性质：当$x \in [x_k, x_{k+1}]$时，只有$\alpha_k(x)$，$\alpha_{k+1}(x)$，$\beta_k(x)$，$\beta_{k+1}(x)$不为零，于是(2.7.6)可表示为

$$I_h(x) = f_k\alpha_k(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + f_k'\beta_k(x) + f_{k+1}'\beta_{k+1}(x) \quad (x_k \le x \le x_{k+1}) \quad (2.7.9)$$

证明收敛性

- 计算误差

$$|f(x) - I_h(x)|$$

$$= |[\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)]f(x) - [f_k\alpha_k(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + f_k'\beta_k(x) + f_{k+1}'\beta_{k+1}(x)]|$$

- 需要了解 $\alpha_k(x)$，$\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)$，$\beta_k(x)$，$\beta_{k+1}(x)$

插值法 | 分段三次Hermite插值：收敛性

- $\alpha_k(x)$，$\beta_k(x)$，$\beta_{k+1}(x)$：根据式(2.7.7)中$\alpha_j(x)$的定义，可知

$$0 \le \alpha_j(x) \le 1, \tag{2.7.10}$$

$$\begin{cases} |\beta_k(x)| \le \dfrac{4}{27} h_k \\ |\beta_{k+1}(x)| \le \dfrac{4}{27} h_k \qquad ??? \end{cases} \tag{2.7.11}$$

- $\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)$：当$x \in [x_k, x_{k+1}]$，存在以下关系

$$\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x) = \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)$$

$$= \cdots = \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{h_k^2} = 1 \tag{2.7.12}$$

插值法丨分段三次Hermite插值：收敛性

- 计算误差

$$
\begin{aligned}
&|f(x)-I_h(x)| \\
&\quad =|[\alpha_k(x)+\alpha_{k+1}(x)]f(x)-[f_k\alpha_k(x)+f_{k+1}\alpha_{k+1}(x)+f_k'\beta_k(x)+f_{k+1}'\beta_{k+1}(x)]| \\
&\quad \le \alpha_k(x)|f(x)-f_k|+\alpha_{k+1}(x)|f(x)-f_{k+1}|+\frac{4}{27}h_k[|f_k'|+|f_{k+1}'|] \\
&\quad \le [\alpha_k(x)+\alpha_{k+1}(x)]\omega(h)+\frac{8h}{27}\max\{|f_k'|,|f_{k+1}'|\}
\end{aligned}
$$

- 对于$x\in[a,b]$，可得

$$
|f(x)-I_h(x)|\le\omega(h)+\frac{8h}{27}\max_{0\le k\le n}|f_k'| \qquad (2.7.13)
$$

- 所以当$f(x)\in C[a,b]$，$\lim\limits_{h\to 0} I_h(x)=f(x)$，即算法收敛

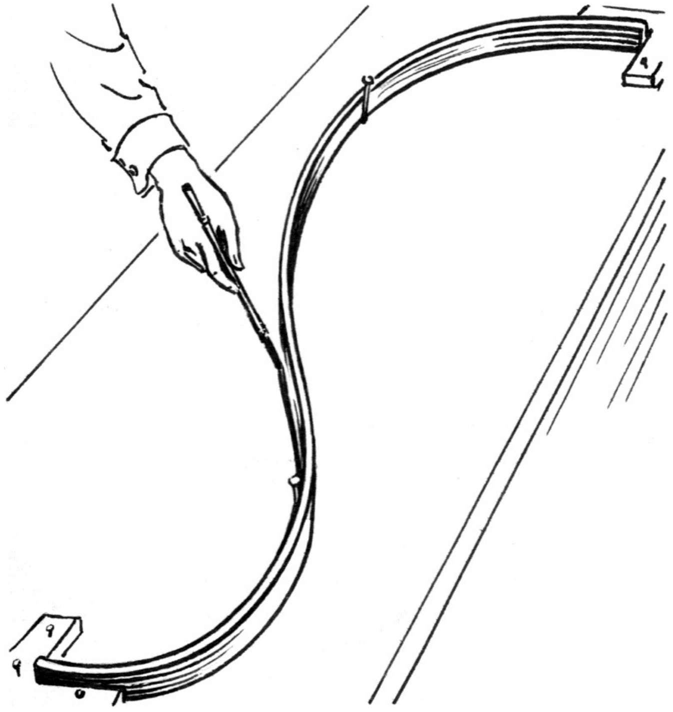
本章目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

插值法 | 样条曲线

分段低次插值

- 函数一致收敛，但光滑性较差
- 需知道各节点导数值



早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（样条）用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，然后画下长条的曲线，称为样条曲线

- 分段三次曲线并接而成，在连接点上二阶导数连续

插值法 | 三次样条曲线

定义2.5 若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式，其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是给定节点，则称 $S(x)$ 是节点 x_0，x_1，…，x_n 上的三次样条函数。

若在节点x_j上给定函数值$y_j = f(x_j)\ (j = 0,1,\dots,n)$，且

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\dots,n) \tag{2.8.1}$$

成立，则称$S(x)$是三次插值样条函数。

插值法丨三次样条曲线的条件

由于 $S(x)$ 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式，所以要确定 4 个系数；一共有 n 个小区间，故要确定 $4n$ 个参数

- $S(x)$在$[a,b]$上二阶导数连续，故在节点 x_j $(j=1,2,\dots,n-1)$ 处要满足连续性条件

$$S(x_j-0)=S(x_j+0),\quad S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$$

$$S''(x_j-0)=S''(x_j+0) \tag{2.8.2}$$

共有 $3n-3$ 个条件

- $S(x)$满足插值条件(2.8.1)有 $n+1$ 个条件，共$4n-2$个条件
- 此外还需要 2 个条件才能确定 $S(x)$

插值法 | 三次样条曲线的条件

添加边界条件：

- 已知两端的一阶导数值，即 $\begin{cases} S'(x_0) = f_0' \\ S'(x_n) = f_n' \end{cases}$ (2.8.3)

- 已知两端的二阶导数值，即 $\begin{cases} S''(x_0) = f_0'' \\ S''(x_n) = f_n'' \end{cases}$ (2.8.4)

- 无已知条件，假设自然边界条件 $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (2.8.4)′

- 假设 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的函数，则 $S(x)$ 也是周期函数，此时边界条件为

$$\begin{cases} S(x_0 + 0) = S(x_n - 0) \\ S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0) \\ S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0) \end{cases} \quad (2.8.5)$$

- 这样的$S(x)$称为周期样条函数
- 注意，此时还是 2 个条件

插值法 | 三转角方程

求解

1. 假定 $S'(x)$ 在节点 x_j 处的值为 $S'(x_j) = m_j$ （实际未知），由分段三次Hermite插值式(2.7.6)可得

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n} [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)] \qquad (2.8.6)$$

- 其中 $\alpha_j(x)$ 和 $\beta_j(x)$ 是插值基函数，分别由式(2.7.7)和式(2.7.8)表示
- 式(2.8.6)中 $S(x)$ 和 $S'(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 上连续，且满足式(2.8.1)

2. 求解 m_j $(j = 0,1, \ldots, n)$，可利用分段二阶导数相等以及某种边界条件

插值法丨三转角方程

2. 求解 m_j $(j=0,1,\dots,n)$，可利用分段二阶导数相等以及某种边界条件

- 考虑 $S(x)$ 在 $[x_j,x_{j+1}]$ 上的表达式

$$S(x)=\frac{\left(x-x_{j+1}\right)^2\left[h_j+2\left(x-x_j\right)\right]}{h_j^3}y_j+\frac{\left(x-x_j\right)^2\left[h_j+2\left(x_{j+1}-x\right)\right]}{h_j^3}y_{j+1}$$
$$+\frac{\left(x-x_{j+1}\right)^2\left(x-x_j\right)}{h_j^2}m_j+\frac{\left(x-x_j\right)^2\left(x-x_{j+1}\right)}{h_j^2}m_{j+1}\qquad(2.8.7)$$

其中$h_j=x_{j+1}-x_j$

- 对 $S(x)$ 求二阶导，可得

$$S''(x)=\frac{6x-2x_j-4x_{j+1}}{h_j^2}m_j+\frac{6x-4x_j-2x_{j+1}}{h_j^2}m_{j+1}+\frac{6\left(x_j+x_{j+1}-2x\right)}{h_j^3}\left(y_{j+1}-y_j\right)$$

插值法 | 三转角方程

- 可得 $S''(x_j+0) = -\dfrac{4}{h_j}m_j - \dfrac{2}{h_j}m_{j+1} + \dfrac{6}{h_j^2}(y_{j+1}-y_j)$
- 同理，可得 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的表达式

$$S''(x_j-0) = \frac{2}{h_{j-1}}m_{j-1} + \frac{4}{h_{j-1}}m_j - \frac{6}{h_{j-1}^2}(y_j - y_{j-1})$$

- 由条件$S''(x_j-0) = S''(x_j+0)$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$，可得 m_j 满足

$$\frac{1}{h_{j-1}}m_{j-1} + 2\left(\frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j}\right)m_j + \frac{1}{h_j}m_{j+1} = 3\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j^2} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}^2}\right)$$

$$(j=1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.8)$$

插值法 | 三转角方程

- 化简为： $$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j \ (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.9)$$

  其中： $$\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \quad \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \ (j = 1,2,\cdots,n-1) \quad (2.8.10)$$

  $$g_j = 3\left(\lambda_j f\left[x_{j-1}, x_j\right] + \mu_j f\left[x_j, x_{j+1}\right]\right) \ (j = 1,2,\cdots,n-1) \quad (2.8.11)$$

- (2.8.9)是关于 $n+1$ 个未知数 $m_0, m_1, \ldots, m_n$ 的 $n-1$ 个方程
- 再利用边界条件的 2 个方程

选择边界条件(2.8.3)：$m_0 = f_0'$, $m_n = f_n'$

- 结合方程 (2.8.9)：$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j \ (j = 1,2,\cdots,n-1)$ 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n' \end{bmatrix} \quad (2.8.12)$$

插值法丨三转角方程

选择边界条件(2.8.4)： $S''(x_0)=f_0''$ ， $S''(x_n)=f_n''$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0+m_1=3f[x_0,x_1]-\dfrac{h_0}{2}f_0''=g_0 \\ m_{n-1}+2m_n=3f[x_{n-1},x_n]+\dfrac{h_{n-1}}{2}f_n''=g_n \end{cases} \tag{2.8.13}$$

选择边界条件(2.8.4)′： $S''(x_0)=S''(x_n)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0+m_1=3f[x_0,x_1]=g_0 \\ m_{n-1}+2m_n=3f[x_{n-1},x_n]=g_n \end{cases} \tag{2.8.13$'$}$$

- 同理矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \tag{2.8.14}$$

选择边界条件为周期性条件式(2.8.5)

$$m_0 = m_n$$

$$\frac{1}{h_0}m_1 + \frac{1}{h_{n-1}}m_{n-1} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right)m_n = \frac{3}{h_0}f[x_0, x_1] + \frac{3}{h_{n-1}}f[x_{n-1}, x_n]$$

- 化简为

$$\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n$$

$$\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad g_n = 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n])$$

- 结合(2.8.9)得矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (2.8.15)$$

插值法 | 三转角方程：解方程组

- 这里得到的方程组(2.8.12)、(2.8.14)及式(2.8.15)中，每个方程都联系三个 m_j ，m_j在力学上解释为细梁在x_j截面处的转角，故称之为三转角方程

- 这些方程系数矩阵对角元素均为2，非对角元素 $\mu_j + \lambda_j = 1$ ，故系数矩阵具有强对角优势，方程组(2.8.12)、(2.8.14)及(2.8.15)都有唯一解，可用追赶法求解，从而得到 $S(x)$

插值法 | 三弯矩方程

- 三次样条插值函数$S(x)$有多种表达方式，有时用二阶导数 $S''(x_j) = M_j$ $(j = 0,1,\dots,n)$ 更方便

- M_j在力学上解释为细梁在x_j截面处的弯矩，并且与两个相邻的弯矩有关，故称为三弯矩方程

- 由于$S(x)$在区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，故$S''(x)$在区间$[x_j, x_{j+1}]$上是线性函数，可写成

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j} \qquad (2.8.16)$$

插值法 | 三弯矩方程

- 对 $S''(x)$ 积分两次并利用 $S(x_j)=y_j$ 及 $S(x_{j+1})=y_{j+1}$，可确定积分常数，得到

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}$$

$$+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j}\quad (j=0,1,\cdots,n-1)\qquad (2.8.17)$$

- 对 $S(x)$ 求导：$S'(x)=-M_j\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_j}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j\quad (2.8.18)$

- 由此可得

$$S'(x_j+0)=-\frac{h_j}{3}M_j-\frac{h_j}{6}M_{j+1}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}$$

$$S'(x_j-0)=\frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1}+\frac{h_{j-1}}{3}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

插值法 | 三弯矩方程

- 根据 $S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \ (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.19)$$

- 其中

$$\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \quad \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \ (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.10)$$

$$d_j = 6f\left[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\right] \ (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.20)$$

- 方程(2.8.19)和方程(2.8.9)完全类似
  - 取边界条件(2.8.3)：

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}\left(f[x_0, x_1] - f_0'\right), \quad M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}}\left(f_n' - f[x_{n-1}, x_n]\right)$$

  - 取边界条件(2.8.4)： $M_0 = f_0'', \quad M_n = f_n''$

同样可用追赶法求出三弯矩方程的解$M_j (j = 0,1,\ldots,n)$，代入式(2.8.17)得到$S(x)$

以方程(2. 8. 12)为例，说明在计算机上求S(x)的算法步骤

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n' \end{bmatrix} \quad (2.8.12)$$

以方程(2.8.12)为例，说明在计算机上求S(x)的算法步骤

- 输入初始数据 x_j，y_j $(j=0,1,\dots,n)$ 及 f_0'，f_n' 和 n
- j 从 0 到 $n-1$ 计算 $h_j=x_{j+1}-x_j$ 及 $f[x_j,x_{j+1}]$
- j 从 1 到 $n-1$ 由式(2.8.10)及式(2.8.11)计算 λ_j，μ_j，g_j
- 用追赶法（公式见7.4.3节）解方程(2.8.12)，求出 m_j $(j=1,2,\dots,n-1)$
- 计算 $S(x)$ 的系数或计算 $S(x)$ 在若干点上的值，并打印结果

插值法 | 计算步骤

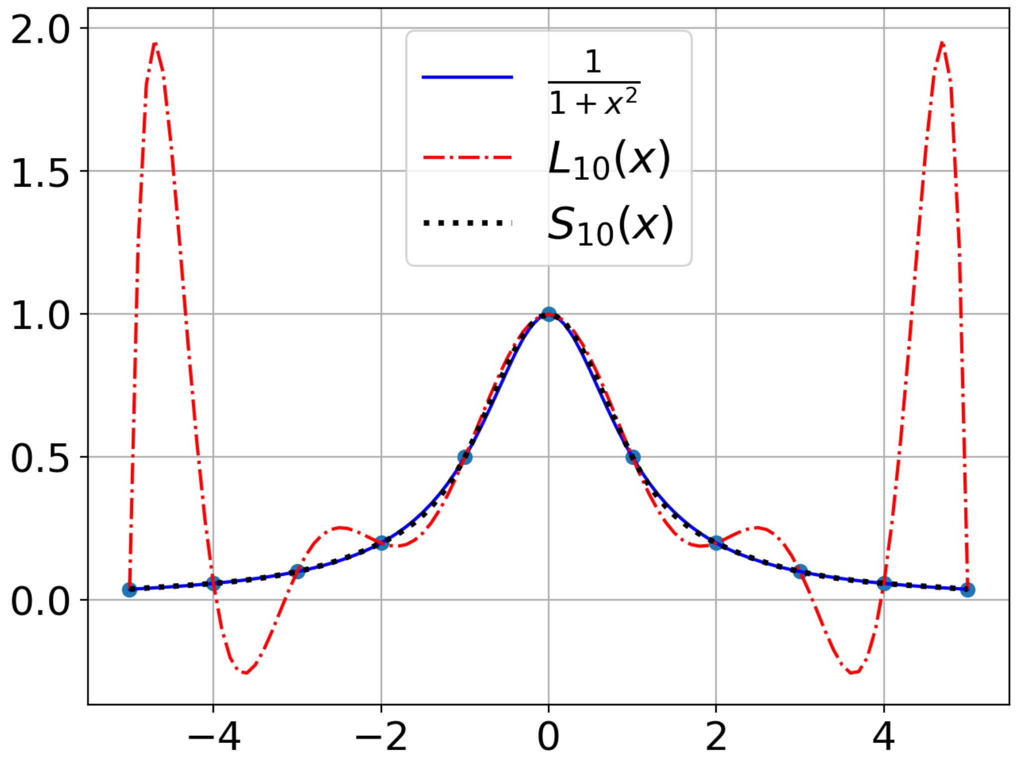
例 给定函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ，$x\in[-5,5]$，节点 $x_k=-5+k\ (k=0,1,\dots,10)$，用三次样条插值求 $S_{10}(x)$

- 取 $S_{10}(x_k)=f(x_k)\ (k=0,1,\dots,10)$及边界条件

$$S'_{10}(-5)=f'(-5),\quad S'_{10}(5)=f'(5)$$

- 利用上述步骤编制的程序计算 $S_{10}(x)$，并与Lagrange插值 $L_{10}(x)$ 比较

- $S_{10}(x)$ 能很好地逼近 $f(x)$，不会出现 $L_{10}(x)$ 的Runge现象



插值法 | 三次样条插值收敛性

定理2.3 若$f(x) \in C[a,b]$，$S(x)$是以$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$为节点，满足条件式(2.8.1)及式(2.8.4)'的三次样条插值函数，令

$$h_j = x_{j+1} - x_j, \quad h = \max_{0 \le j \le n-1} h_j, \quad \delta = \min_{0 \le j \le n-1} h_j$$

设$h/\delta < \infty$，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$

插值法 | 总结

- Lagrange插值：插值多项式的唯一性、n次插值基函数、差值余项
- 逐次线性插值：Atiken逐次线性插值公式、Neville算法
- 差商与Newton插值公式：差商的定义和性质、Newton差商插值多项式
- 差分与等距节点插值公式：差分的定义和性质、Newton前（后）插公式
- Hermite插值：插值多项式、基函数、两点三次Hermite插值多项式
- 分段低次插值：分段线性插值、分段三次Hermite插值、收敛性分析
- 三次样条插值：三次样条函数、三转角方程、三弯矩方程

第二章

习题 2：分别采用Lagrange、Newton插值

习题 7, 10, 17, 22