Mathematical modeling

第八讲 统计回归模型(2)

周毓明

zhouyuming@nju.edu.cn

南京大学计算机科学与技术系

课程内容

1. 数学概念与模型
2. 实际案例与分析
3. 计算机典型应用

2. 实际案例与分析

① 牙膏的销售量

② 程序员的薪金

③ 投资额的问题

牙膏的销售量

问题

建立牙膏销售量与价格、广告投入之间的模型

预测在不同价格和广告费用下的牙膏销售量

收集了30个销售周期本公司牙膏销售量、价格、广告费用，及同期其它厂家同类牙膏的平均售价

销售周期	本公司价格(元)	其它厂家价格(元)	广告费用(百万元)	价格差（元）	销售量(百万支)
1	3.85	3.80	5.50	-0.05	7.38
2	3.75	4.00	6.75	0.25	8.51
…	…	…	…	…	…
29	3.80	3.85	5.80	0.05	7.93
30	3.70	4.25	6.80	0.55	9.26

牙膏的销售量

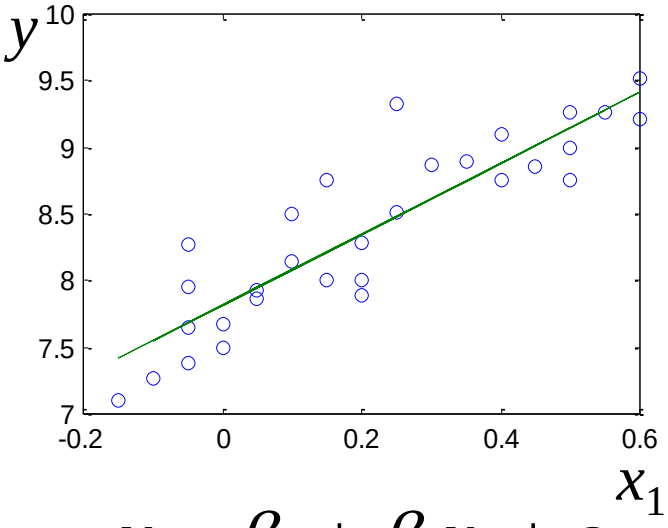
基本模型

y ~公司牙膏销售量

x_1~其它厂家与本公司价格差

x_2~公司广告费用

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$



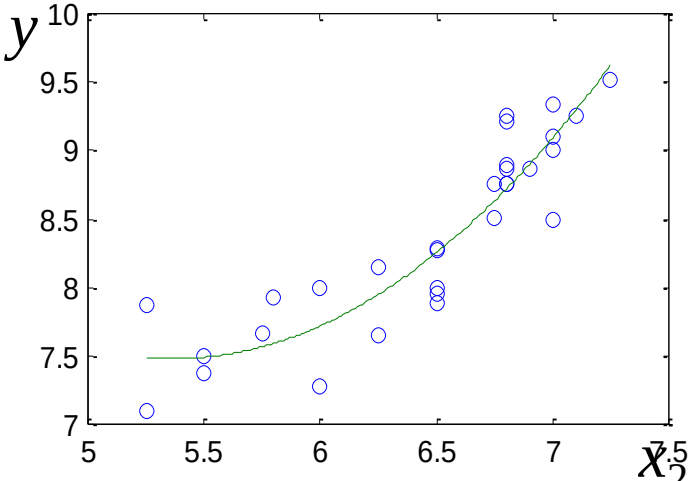
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

y~被解释变量（因变量）

x_1, x_2~解释变量(回归变量, 自变量)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ~回归系数

ε~随机误差（均值为零的正态分布随机变量）



$$y = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 + \varepsilon$$

模型求解　　MATLAB 统计工具箱

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$　　由数据 y, x_1, x_2 估计 β

[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,x,alpha)

输入

y~n维数据向量

x= $[1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_2^2]$ ~n×4数据矩阵, 第1列为全1向量

alpha(置信水平,0.05)

输出

b~β的估计值

bint~b的置信区间

r ~残差向量y-xb

rint~r的置信区间

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282　28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829　1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989　0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379　0.6594]
R^2=0.9054　　F=82.9409　　p=0.0000		

Stats~

检验统计量

R^2, F, p

牙膏的销售量

结果分析

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
R^2=0.9054	F=82.9409	p=0.0000

y的90.54%可由模型确定

F远超过F检验的临界值

p远小于α=0.05

模型从整体上看成立

β_2的置信区间包含零点(右端点距零点很近)

x_2对因变量y 的影响不太显著

x_2^2项显著

可将x_2保留在模型中

牙膏的销售量

销售量预测 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2$

价格差x_1=其它厂家价格x_3 – 本公司价格x_4

估计x_3　调整x_4 ⇨ 控制x_1 ⇨ 通过x_1, x_2预测y

控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=650万元

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 = 8.2933 \text{ (百万支)}$$

销售量预测区间为 [7.8230，8.7636]（置信度95%）

上限用作库存管理的目标值　　下限用来把握公司的现金流

若估计x_3=3.9，设定x_4=3.7，则可以95%的把握知道销售额在 7.8320×3.7≈ 29（百万元）以上

模型改进

x_1和x_2对y的影响独立

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
R^2=0.9054 F=82.9409 p=0.0000		

x_1和x_2对y的影响有交互作用

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_1 x_2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	29.1133	[13.7013 44.5252]
β_1	11.1342	[1.9778 20.2906]
β_2	-7.6080	[-12.6932 -2.5228]
β_3	0.6712	[0.2538 1.0887]
β_4	-1.4777	[-2.8518 -0.1037]
R^2=0.9209 F=72.7771 p=0.0000		

牙膏的销售量

两模型销售量预测比较

控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=6.5百万元

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2$$

$\hat{y}=8.2933$ (百万支)

区间 [7.8230，8.7636]

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$

$\hat{y}=8.3272$ (百万支)

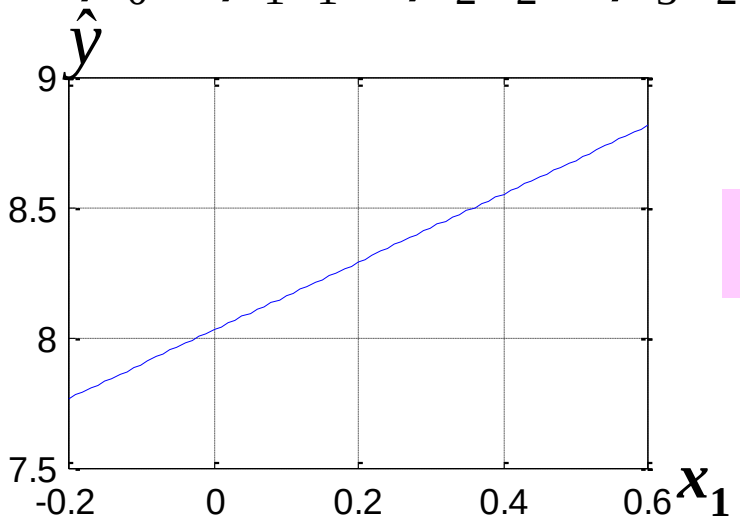
区间 [7.8953，8.7592]

$\hat{y}$ 略有增加

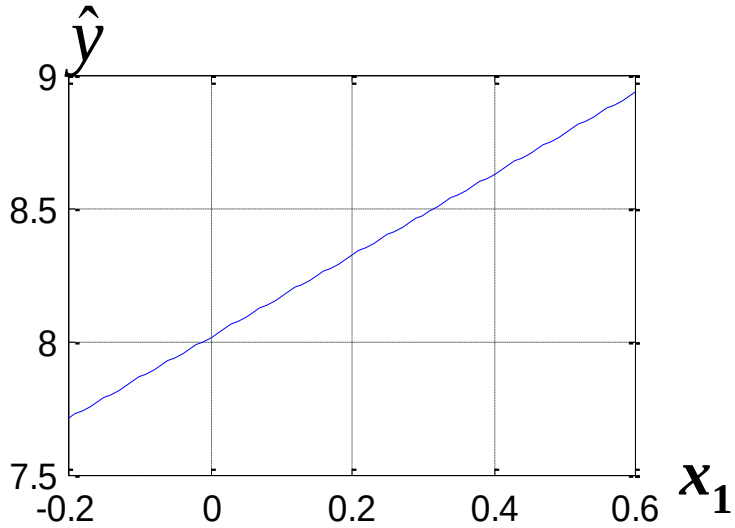
预测区间长度更短

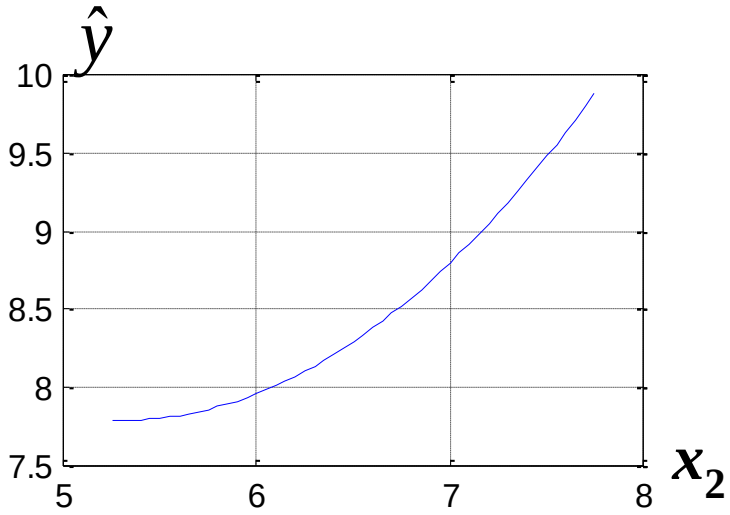
两模型$\hat{y}$ 与x_1,x_2关系的比较

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2 \qquad \hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$

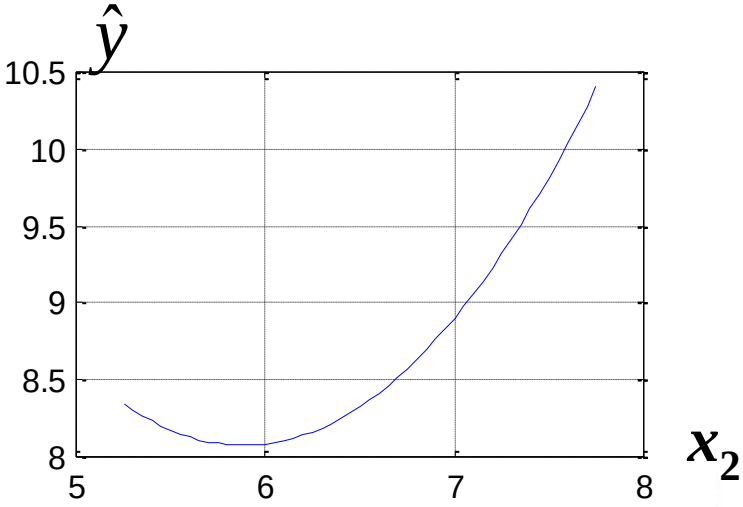


x_2=6.5





x_1=0.2



交互作用影响的讨论

$$\hat{y} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 + \hat{\beta}_4 x_1 x_2$$

价格差 x_1=0.1

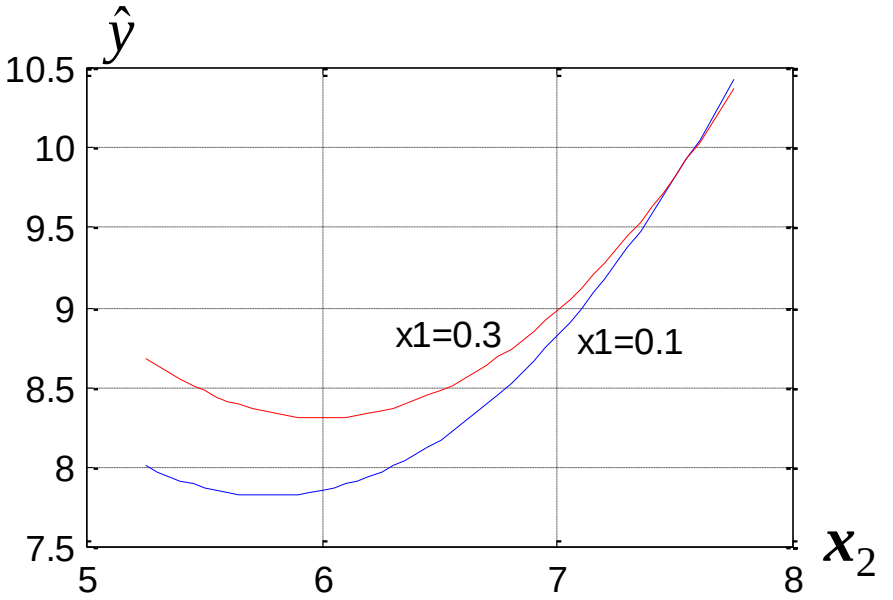
$$\hat{y}\big|_{x_1=0.1} = 30.2267 - 7.7558 x_2 + 0.6712 x_2^2$$

价格差 x_1=0.3

$$\hat{y}\big|_{x_1=0.3} = 32.4535 - 8.0513 x_2 + 0.6712 x_2^2$$

$$x_2 < 7.5357 \Rightarrow \hat{y}\big|_{x_1=0.3} > \hat{y}\big|_{x_1=0.1}$$

⇨ **价格优势会使销售量增加**



加大广告投入使销售量增加

（x_2大于6百万元）

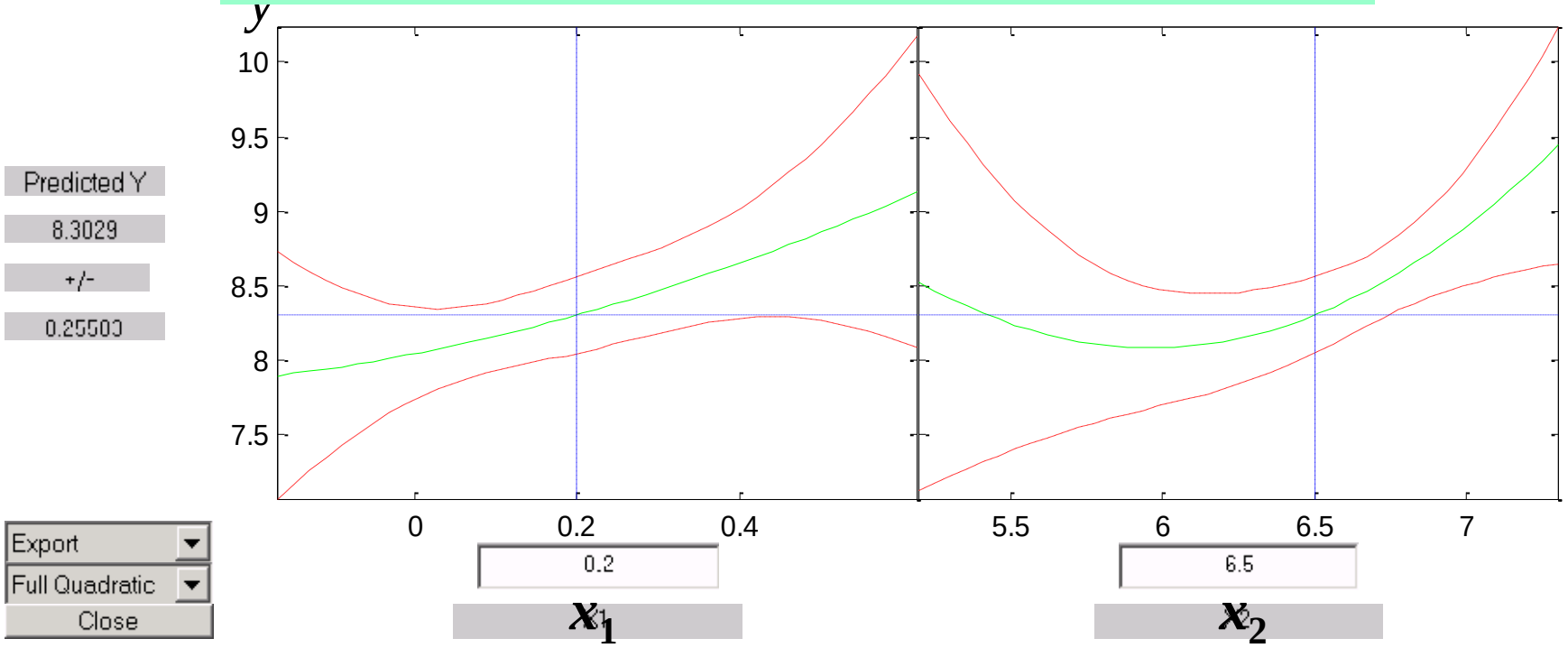
价格差较小时增加的速率更大 ⇨ **价格差较小时更需要靠广告来吸引顾客的眼球**

牙膏的销售量

完全二次多项式模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \varepsilon$$

MATLAB中有命令rstool直接求解



从输出 Export 可得 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5)$

程序员的薪金

建立模型研究薪金与资历、管理责任、教育程度的关系

分析人事策略的合理性，作为新聘用人员薪金的参考

46名软件开发人员的档案资料

编号	薪金	资历	管理	教育
01	13876	1	1	1
02	11608	1	0	3
03	18701	1	1	3
04	11283	1	0	2
…	…	…	…	…

编号	薪金	资历	管理	教育
42	27837	16	1	2
43	18838	16	0	2
44	17483	16	0	1
45	19207	17	0	2
46	19346	20	0	1

资历～从事专业工作的年数；管理～1=管理人员，0=非管理人员；教育～1=中学，2=大学，3=更高程度

程序员的薪金

分析与假设

y~ 薪金，x_1~资历（年）

$x_2=1$~ 管理人员，$x_2=0$~ 非管理人员

教育

1=中学

2=大学

3=更高

$$x_3=\begin{cases}1, & \text{中学}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$x_4=\begin{cases}1, & \text{大学}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

⇨ 中学：$x_3=1, x_4=0$；大学：$x_3=0, x_4=1$；更高：$x_3=0, x_4=0$

资历每加一年薪金的增长是常数；

管理、教育、资历之间无交互作用

线性回归模型

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+\varepsilon$$

$a_0, a_1, \ldots, a_4$是待估计的回归系数，ε是随机误差

模型求解

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11032	[10258 11807]
a_1	546	[484 608]
a_2	6883	[6248 7517]
a_3	-2994	[-3826 -2162]
a_4	148	[-636 931]
R^2=0.957	F=226	p=0.000

资历增加1年薪金增长546

管理人员薪金多6883

中学程度薪金比研究生的少2994

大学程度薪金比研究生多148

a_4置信区间包含零点，解释不可靠!

$R^2, F, p \rightarrow$ 模型整体上可用

x_1~资历(年)

$x_2 = 1$~ 管理，$x_2 = 0$~ 非管理

中学：x_3=1, x_4=0;

大学：x_3=0, x_4=1;

研究生：x_3=0, x_4=0.

结果分析　残差分析方法

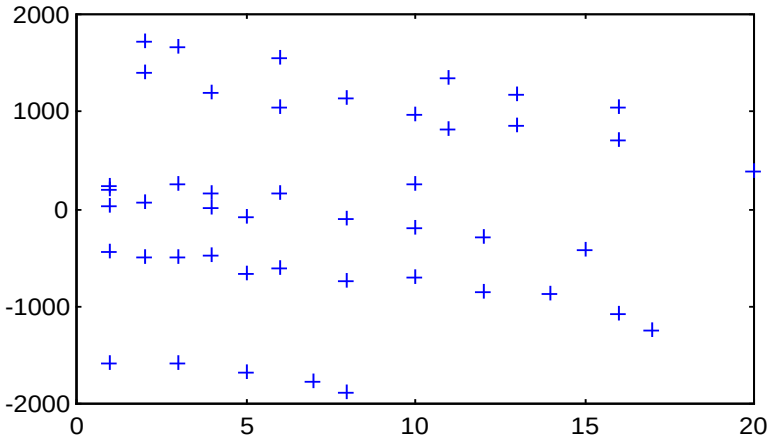
$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3 + \hat{a}_4 x_4$$

残差 $e = y - \hat{y}$

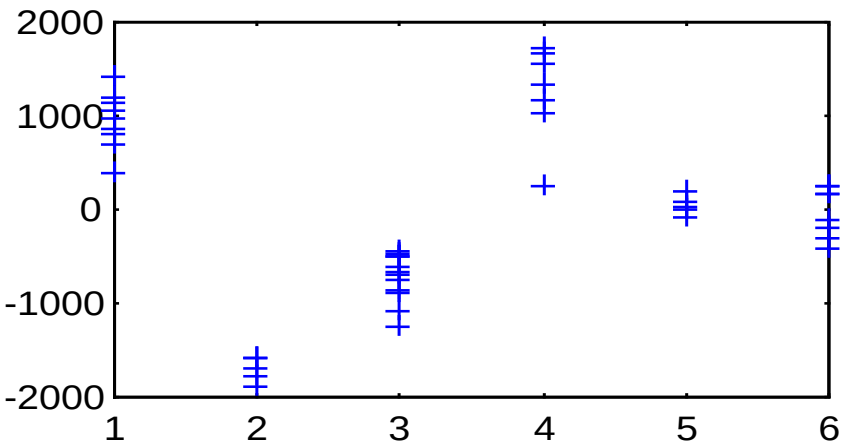
管理与教育的组合

组合	1	2	3	4	5	6
管理	0	1	0	1	0	1
教育	1	1	2	2	3	3

e 与资历 x_1 的关系



e 与管理—教育组合的关系



残差大概分成3个水平，6种管理—教育组合混在一起，未正确反映。

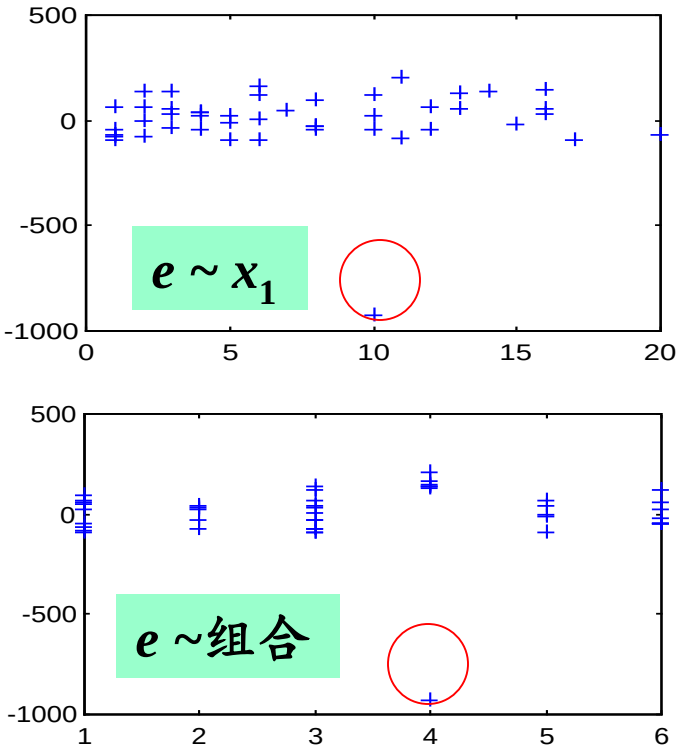
残差全为正，或全为负，管理—教育组合处理不当

应在模型中增加管理 x_2 与教育 x_3, x_4 的交互项

进一步的模型　增加管理x_2与教育x_3, x_4的交互项

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_2x_3 + a_6x_2x_4 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11204	[11044 11363]
a_1	497	[486 508]
a_2	7048	[6841 7255]
a_3	-1727	[-1939 -1514]
a_4	-348	[-545 –152]
a_5	-3071	[-3372 -2769]
a_6	1836	[1571 2101]
R^2=0.999	F=554	p=0.000



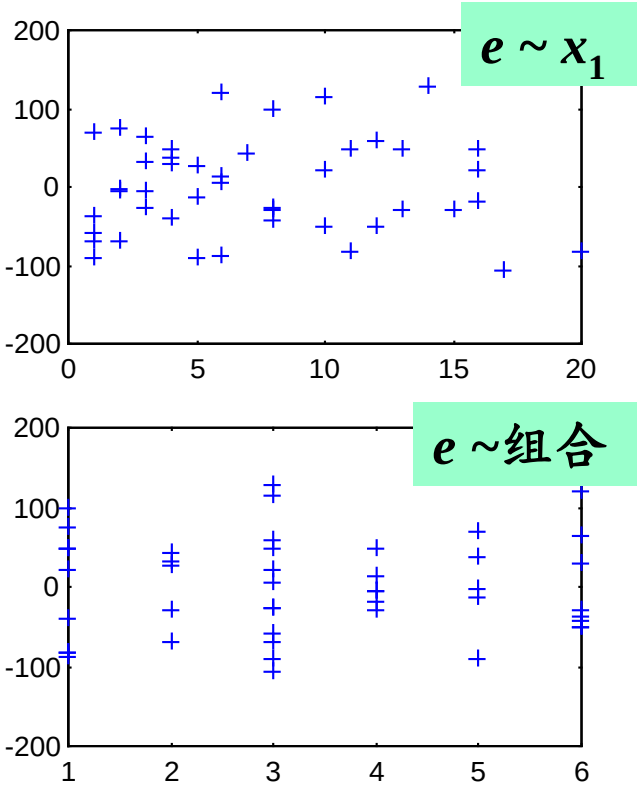
R^2,F有改进，所有回归系数置信区间都不含零点，模型完全可用

消除了不正常现象

异常数据(33号)应去掉

去掉异常数据后的结果

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11200	[11139 11261]
a_1	498	[494 503]
a_2	7041	[6962 7120]
a_3	-1737	[-1818 -1656]
a_4	-356	[-431 –281]
a_5	-3056	[-3171 –2942]
a_6	1997	[1894 2100]
R^2= 0.9998 F=36701 p=0.0000		



R^2: 0.957 → 0.999 → 0.9998

F: 226 → 554 → 36701

置信区间长度更短

残差图十分正常

最终模型的结果可以应用

模型应用

$$\hat{y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1x_1+\hat{a}_2x_2+\hat{a}_3x_3+\hat{a}_4x_4+\hat{a}_5x_2x_3+\hat{a}_6x_2x_4$$

制订6种管理—教育组合人员的“基础”薪金(资历为0)

$x_1=0$； $x_2=1$~ 管理，$x_2=0$~ 非管理

中学：$x_3=1, x_4=0$ ； 大学：$x_3=0, x_4=1$； 更高：$x_3=0, x_4=0$

组合	管理	教育	系数	“基础”薪金
1	0	1	a_0+a_3	9463
2	1	1	$a_0+a_2+a_3+a_5$	13448
3	0	2	a_0+a_4	10844
4	1	2	$a_0+a_2+a_4+a_6$	19882
5	0	3	a_0	11200
6	1	3	a_0+a_2	18241

大学程度管理人员比更高程度管理人员的薪金高

大学程度非管理人员比更高程度非管理人员的薪金略低

程序员的薪金

软件开发人员的薪金

对定性因素(如管理、教育)，可以引入0-1变量处理，0-1变量的个数应比定性因素的水平少1

残差分析方法可以发现模型的缺陷，引入交互作用项常常能够改善模型

剔除异常数据，有助于得到更好的结果

注：可以直接对6种管理—教育组合引入5个0-1变量

投资额的问题

问题

建立投资额模型，研究某地区实际投资额与国民生产总值 (GNP) 及物价指数 (PI) 的关系

根据对未来GNP及PI的估计，预测未来投资额

该地区连续20年的统计数据

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	11	229.8	1326.4	1.0575
2	97.4	637.7	0.7277	12	228.7	1434.2	1.1508
3	113.5	691.1	0.7436	13	206.1	1549.2	1.2579
4	125.7	756.0	0.7676	14	257.9	1718.0	1.3234
5	122.8	799.0	0.7906	15	324.1	1918.3	1.4005
6	133.3	873.4	0.8254	16	386.6	2163.9	1.5042
7	149.3	944.0	0.8679	17	423.0	2417.8	1.6342
8	144.2	992.7	0.9145	18	401.9	2631.7	1.7842
9	166.4	1077.6	0.9601	19	474.9	2954.7	1.9514
10	195.0	1185.9	1.0000	20	424.5	3073.0	2.0688

投资额的问题

投资额与国民生产总值和物价指数

分析

许多经济数据在时间上有一定的滞后性

以时间为序的数据，称为时间序列

时间序列中同一变量的顺序观测值之间存在自相关

若采用普通回归模型直接处理，将会出现不良后果

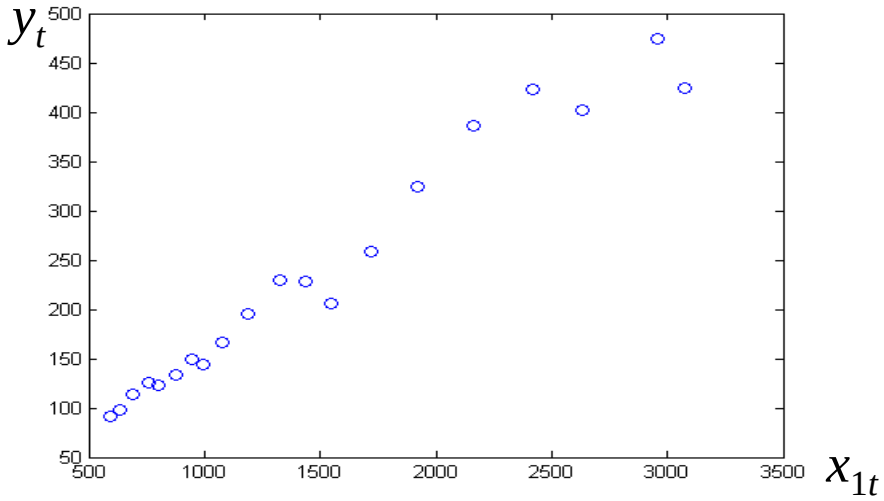
需要诊断并消除数据的自相关性，建立新的模型

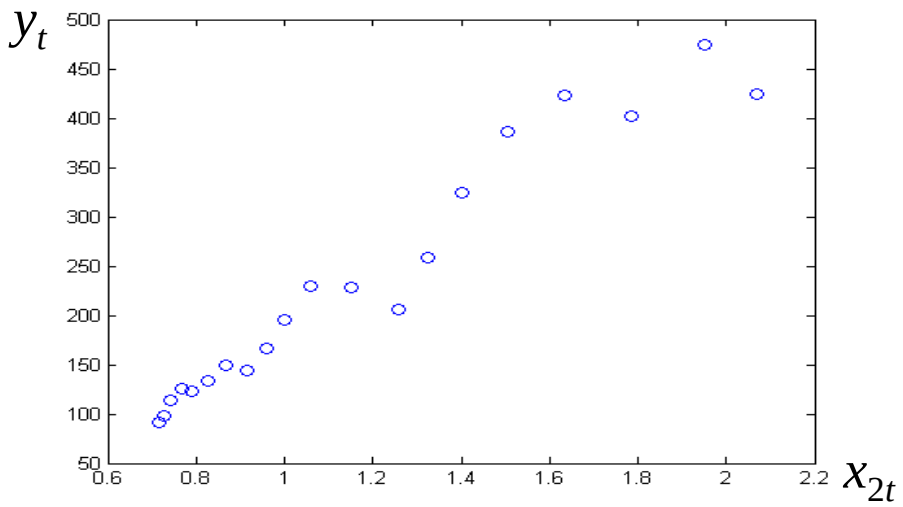
年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	11	229.8	1326.4	1.0575
2	97.4	637.7	0.7277	12	228.7	1434.2	1.1508
3	113.5	691.1	0.7436	13	206.1	1549.2	1.2579
4	125.7	756.0	0.7676	14	257.9	1718.0	1.3234
…	…	…	…	…	…	…	…

投资额的问题

基本回归模型

t ~年份， y_t ~ 投资额， x_{1t} ~ GNP, x_{2t} ~ 物价指数





投资额与 GNP及物价指数间均有很强的线性关系

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$$ $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ~回归系数

ε_t ~对t相互独立的零均值正态随机变量

投资额的问题

基本回归模型的结果与分析　　MATLAB 统计工具箱

参数	参数估计值	置信区间
β_0	322.7250	[224.3386　421.1114]
β_1	0.6185	[0.4773　0.7596]
β_2	-859.4790	[-1121.4757　-597.4823]
R^2= 0.9908　　F= 919.8529　　p=0.0000		

$$\hat{y}_t = 322.725 + 0.6185x_{1t} - 859.479x_{2t}$$

剩余标准差
s=12.7164

模型优点　　R^2=0.9908，拟合度高

模型缺点　　没有考虑时间序列数据的滞后性影响

可能忽视了随机误差存在自相关；如果存在自相关性，用此模型会有不良后果

投资额的问题

自相关性的定性诊断

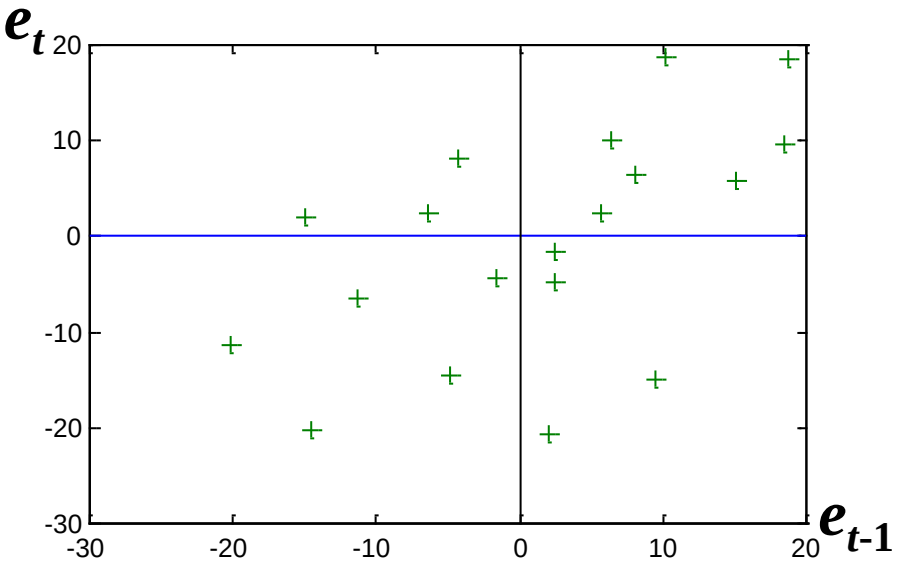
残差诊断法

模型残差 $e_t = y_t - \hat{y}_t$

e_t为随机误差ε_t的估计值

在MATLAB工作区中输出

作残差 e_t~e_{t-1} 散点图



大部分点落在第1, 3象限 ⇒ ε_t存在正的自相关

大部分点落在第2, 4象限 ⇒ ε_t存在负的自相关

自相关性直观判断 ⇒ 基本回归模型的随机误差项ε_t存在正的自相关

投资额的问题

自回归性的定量诊断　　D-W检验

自回归模型　$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ~回归系数　　ρ~自相关系数　　$|\rho| \leq 1$

u_t~对t相互独立的零均值正态随机变量

$\rho = 0$	⇨	无自相关性
$\rho > 0$	⇨	存在正自相关性
$\rho < 0$	⇨	存在负自相关性

如何估计ρ　⇔　D-W统计量

如何消除自相关性　⇔　广义差分法

D-W统计量与D-W检验

$$DW=\frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}e_t^2}\approx 2\left[1-\frac{\sum_{t=2}^{n}e_te_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}e_t^2}\right]$$

n较大

$$\hat{\rho}=\sum_{t=2}^{n}e_te_{t-1}/\sum_{t=2}^{n}e_t^2$$

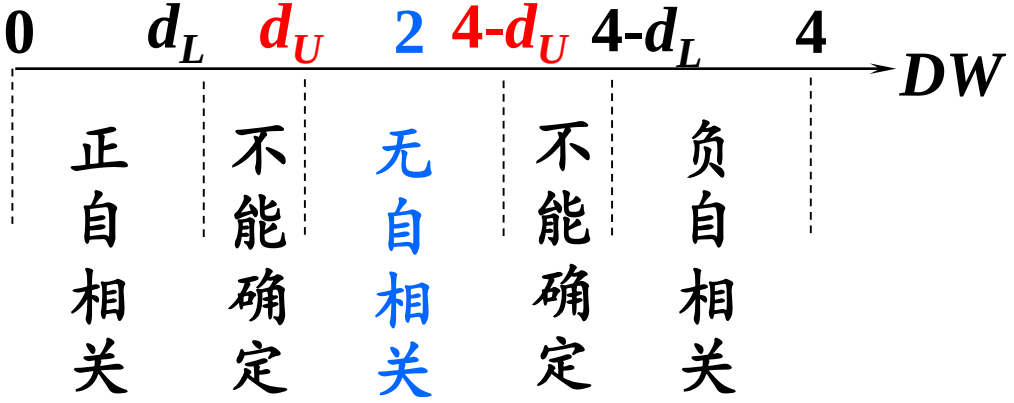
$$=2(1-\hat{\rho})$$

$$-1\le\hat{\rho}\le 1\rightarrow 0\le DW\le 4$$

$$\hat{\rho}=1\rightarrow DW=0$$

$$\hat{\rho}=-1\rightarrow DW=4$$

$$\hat{\rho}=0\rightarrow DW=2$$



检验水平,样本容量,回归变量数目

D-W分布表

检验临界值d_L和d_U

由*DW*值的大小确定自相关性

广义差分变换 $DW=2(1-\hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\rho}=1-\frac{DW}{2}$

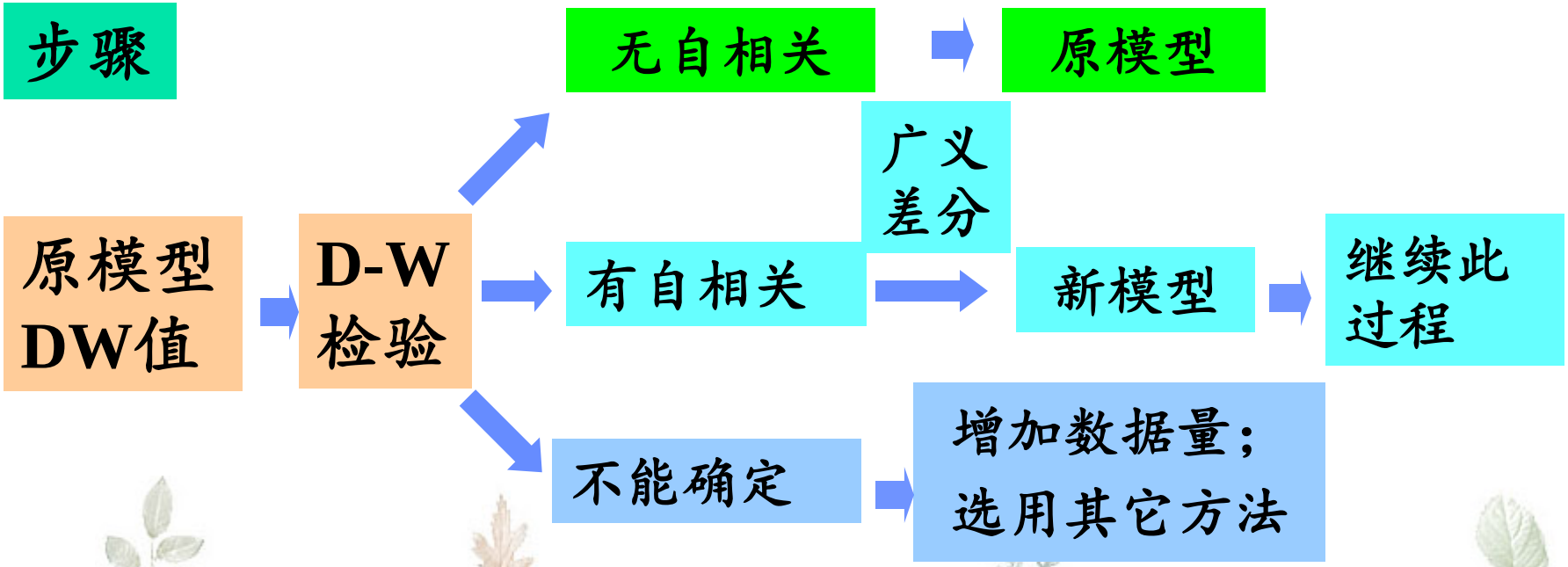
原模型 $y_t=\beta_0+\beta_1 x_{1t}+\beta_2 x_{2t}+\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$

变换 $y_t^*=y_t-\rho y_{t-1},\ x_{it}^*=x_{it}-\rho x_{i,t-1}, \quad i=1,2$

新模型 $y_t^*=\beta_0^*+\beta_1 x_{1t}^*+\beta_2 x_{2t}^*+u_t \quad \beta_0^*=\beta_0(1-\rho)$

以$\beta^*_0, \beta_1, \beta_2$为回归系数的普通回归模型

步骤



投资额新模型的建立

$$DW=\frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}e_t^2}$$

原模型　　DW_{old}=

残差e_t　　0.8754

样本容量n=20，回归变量数目k=3，α=0.05

查表

临界值d_L=1.10, d_U=1.54

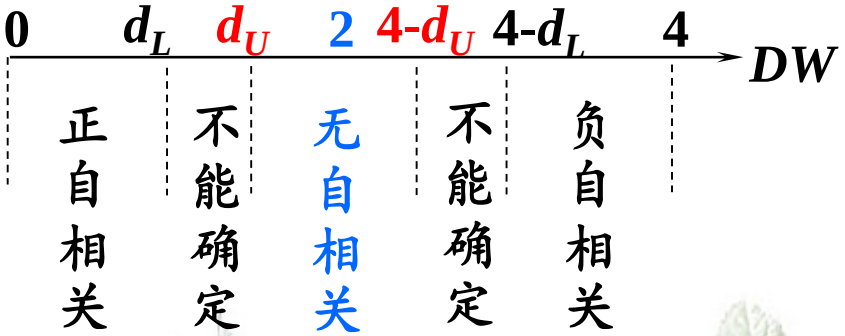
$DW_{old} < d_L$ ➡ 原模型有正自相关

$$\hat{\rho}=1-DW/2=0.5623$$

作变换

$$y_t^* = y_t - 0.5623y_{t-1}$$

$$x_{it}^* = x_{it} - 0.5623x_{i,t-1}, \quad i=1,2$$



投资额新模型的建立

$$y_t^* = y_t - 0.5623 y_{t-1} \qquad x_{it}^* = x_{it} - 0.5623 x_{i,t-1}, \quad i = 1,2$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_{1t}^* + \beta_2 x_{2t}^* + u_t$$

由数据 $y_t^*, x_{1t}^*, x_{2t}^*$ 估计系数 β_0^*， β_1， β_2

参数	参数估计值	置信区间
β_0^*	163.4905	[1265.4592 2005.2178]
β_1	0.6990	[0.5751 0.8247]
β_2	-1009.0333	[-1235.9392 -782.1274]
R^2= 0.9772	F=342.8988	p=0.0000

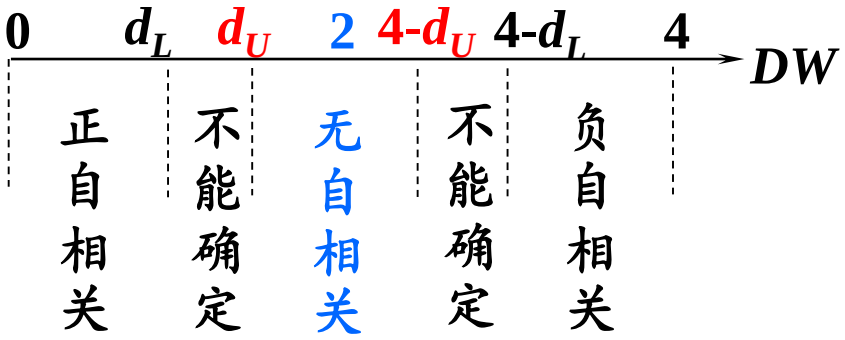
总体效果良好

剩余标准差

s_{new}= 9.8277 < s_{old}=12.7164

新模型的自相关性检验

新模型残差e_t → DW_{new}= 1.5751



样本容量n=19，回归变量数目k=3，α=0.05

查表 ⇩

临界值d_L=1.08, d_U=1.53

$d_U < DW_{new} < 4-d_U$

⇩

新模型无自相关性

新模型 $\hat{y}_t^* = 163.4905 + 0.699x_{1t}^* - 1009.033x_{2t}^*$

还原为原始变量

$$\hat{y}_t = 163.4905 + 0.5623y_{t-1} + 0.699x_{1,t} - 0.3930x_{1,t-1} - 1009.0333x_{2,t} + 567.3794x_{2,t-1}$$

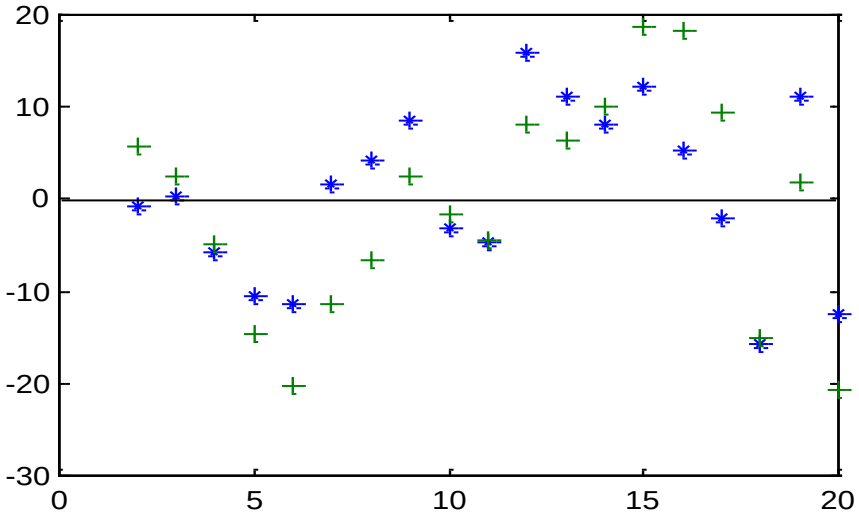
一阶自回归模型

模型结果比较

基本回归模型 $\hat{y}_t = 322.725 + 0.6185x_{1t} - 859.479x_{2t}$

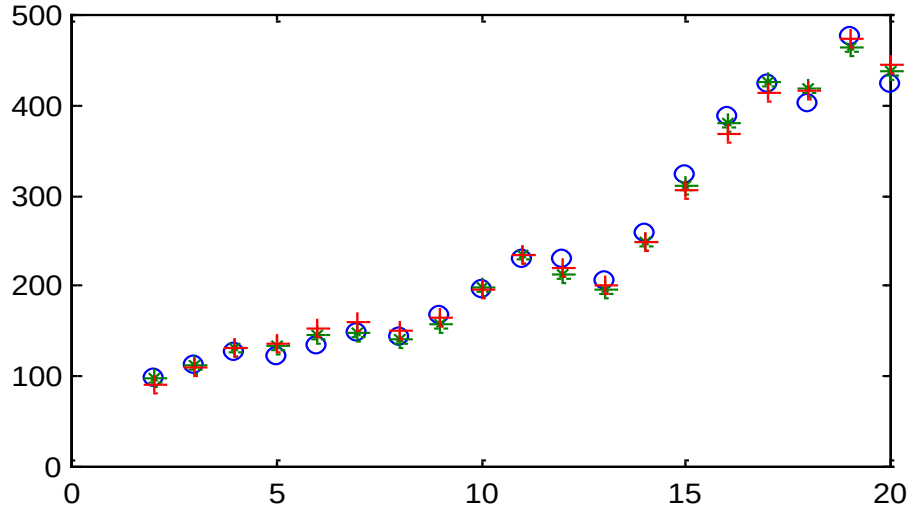
一阶自回归模型 $\hat{y}_t = 163.4905 + 0.5623y_{t-1} + 0.699x_{1,t} - 0.3930x_{1,t-1}$
$-1009.0333x_{2,t} + 567.3794x_{2,t-1}$

残差图比较



新模型 e_t~ *，原模型 e_t~ +

拟合图比较



新模型 $\hat{y}_t$ ~ *，新模型 $\hat{y}_t$ ~ +

一阶自回归模型残差e_t比基本回归模型要小

投资额的问题

投资额预测

对未来投资额y_t作预测，需先估计出未来的国民生产总值x_{1t}和物价指数x_{2t}

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	18	401.9	2631.7	1.7842
2	97.4	637.7	0.7277	19	474.9	2954.7	1.9514
3	113.5	691.1	0.7436	20	424.5	3073.0	2.0688

设已知 t=21时，x_{1t}=3312，x_{2t}=2.1938

基本回归模型 $\hat{y}_t = 485.6720$

一阶自回归模型 $\hat{y}_t = 469.7638$

$\hat{y}_t$较小是由于y_{t-1}=424.5过小所致

Thanks for your time and attention!

一元线性回归分析的应用：预测问题

一、$\hat{Y}_0$是条件均值$E(Y|X=X_0)$或个值Y_0的一个无偏估计

二、总体条件均值与个值预测值的置信区间

对于一元线性回归模型

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

给定样本以外的解释变量的观测值X_0，可以得到被解释变量的预测值$\hat{Y}_0$，可以此作为其**条件均值$E(Y|X=X_0)$**或**个别值Y_0**的一个近似估计。

注意：

严格地说，这只是被解释变量的预测值的估计值，而不是预测值。

原因：（1）参数估计量不确定；

（2）随机项的影响

一、$\hat{Y}_0$是条件均值$E(Y|X=X_0)$或个值Y_0的一个无偏估计

对总体回归函数$E(Y|X)=\beta_0+\beta_1X$，$X=X_0$时

$$E(Y|X=X_0)=\beta_0+\beta_1X_0$$

通过样本回归函数$\hat{Y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X$，求得的拟合值为

$$\hat{Y}_0=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_0$$

于是 $$E(\hat{Y}_0)=E(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_0)=E(\hat{\beta}_0)+X_0E(\hat{\beta}_1)=\beta_0+\beta_1X_0$$

可见，$\hat{Y}_0$是条件均值$E(Y|X=X_0)$的无偏估计。

对**总体回归模型**$Y=\beta_0+\beta_1X+\mu$，当$X=X_0$时

$$Y_0 = \beta_0 + \beta_1 X_0 + \mu$$

于是

$$E(Y_0) = E(\beta_0 + \beta_1 X_0 + \mu) = \beta_0 + \beta_1 X_0 + E(\mu) = \beta_0 + \beta_1 X_0$$

而 通过**样本回归函数** $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$， 求得拟合值

$$\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0$$

的期望为

$$E(\hat{Y}_0) = E(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0) = E(\hat{\beta}_0) + X_0 E(\hat{\beta}_1) = \beta_0 + \beta_1 X_0$$

$\hat{Y}_0$是个值Y_0的无偏估计。

二、总体条件均值与个值预测值的置信区间

1、总体均值预测值的置信区间

由于 $\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0$

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}) \qquad \hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}\sigma^2)$$

于是 $E(\hat{Y}_0) = E(\hat{\beta}_0) + X_0 E(\hat{\beta}_1) = \beta_0 + \beta_1 X_0$

$$Var(\hat{Y}_0) = Var(\hat{\beta}_0) + 2X_0 Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) + X_0^2 Var(\hat{\beta}_1)$$

可以证明 $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\sigma^2 \overline{X} / \sum x_i^2$

因此 $$Var(\hat{Y}_0)=\frac{\sigma^2\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}-\frac{2X_0\bar{X}\sigma^2}{\sum x_i^2}+\frac{X_0^2\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\left(\frac{\sum X_i^2-n\bar{X}^2}{n}+\bar{X}^2-2X_0\bar{X}+X_0^2\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\left(\frac{\sum x_i^2}{n}+(X_0-\bar{X})^2\right)=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right)$$

故 $$\hat{Y}_0\sim N\left(\beta_0+\beta_1X_0,\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right)\right)$$

将未知的σ^2代以它的无偏估计量$\hat{\sigma}^2$，可构造**t统计量**

$$t=\frac{\hat{Y}_0-(\beta_0+\beta_1X_0)}{S_{\hat{Y}_0}}\sim t(n-2)$$

其中 $$S_{\hat{Y}_0}=\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right)}$$

于是，在1-α的置信度下，**总体均值**$E(Y|X_0)$**的置信区间为**

$$\hat{Y}_0-t_{\frac{\alpha}{2}}\times S_{\hat{Y}_0}<E(Y\mid X_0)<\hat{Y}_0+t_{\frac{\alpha}{2}}\times S_{\hat{Y}_0}$$

2、总体个值预测值的预测区间

由 $Y_0=\beta_0+\beta_1X_0+\mu$ 知：

$$Y_0 \sim N(\beta_0+\beta_1X_0,\sigma^2)$$

于是 $$\hat{Y}_0-Y_0 \sim N(0,\sigma^2(1+\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{\sum x_i^2}))$$

将未知的σ^2代以它的无偏估计量 $\hat{\sigma}^2$，可构造t统计量

$$t=\frac{\hat{Y}_0-Y_0}{S_{\hat{Y}_0-Y_0}} \sim t(n-2)$$

式中：$$S_{\hat{Y}_0-Y_0}=\sqrt{\hat{\sigma}^2(1+\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\bar{X})^2}{\sum x_i^2})}$$

从而在1-α的置信度下，**Y_0的置信区间**为

$$\hat{Y}_0-t_{\frac{\alpha}{2}}\times S_{\hat{Y}_0-Y_0}<Y_0<\hat{Y}_0+t_{\frac{\alpha}{2}}\times S_{\hat{Y}_0-Y_0}$$

在上述**收入-消费支出**例中，得到的样本回归函数为

$$\hat{Y}_i = -103.172 + 0.777 X_i$$

则在 X_0=1000处， $\hat{Y}_0 = -103.172+0.777\times 1000=673.84$

而 $$Var(\hat{Y}_0) = 13402\left[\frac{1}{10} + \frac{(1000-2150)^2}{7425000}\right] = 3727.29$$

$$S(\hat{Y}_0) = 61.05$$

因此，**总体均值**E(Y|X=1000)的95%的置信区间为：

673.84-2.306×61.05< E(Y|X=1000) <673.84+2.306×61.05

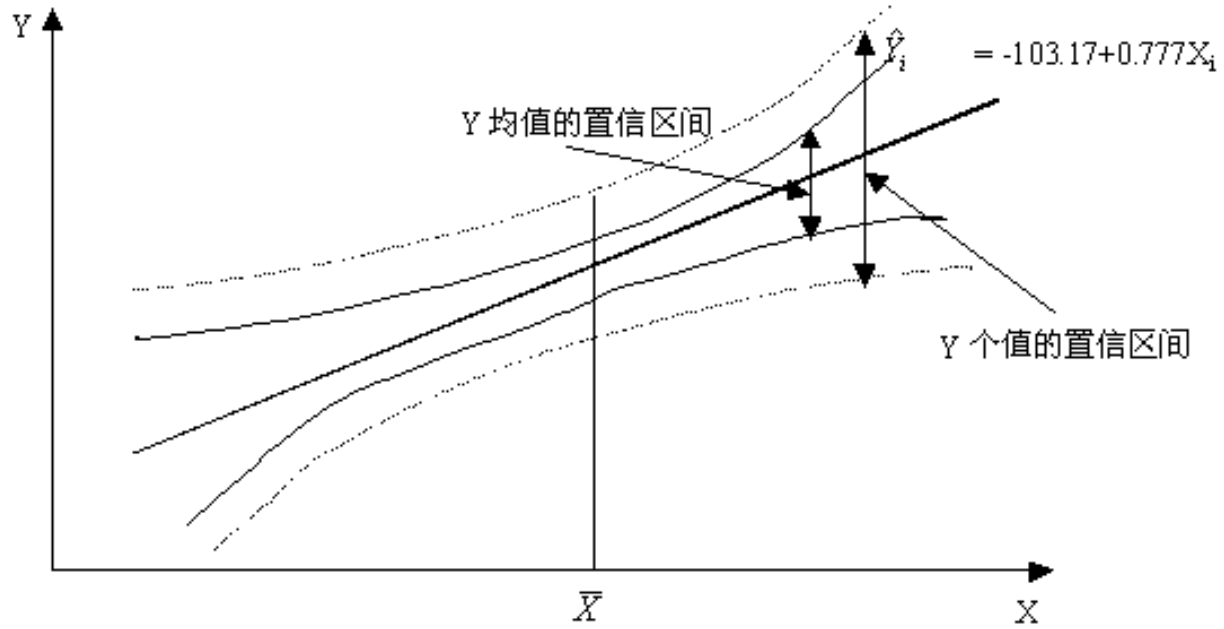
或 （533.05, 814.62）

同样地，对于Y在X=1000的**个体值**，其95%的置信区间为：

$$673.84 - 2.306\times130.88<Y_{x=1000}<673.84 + 2.306\times130.88$$

或 $$(372.03, 975.65)$$

- 总体回归函数的**置信带（域）**（confidence band）
- 个体的**置信带（域）**



对于Y的总体均值E(Y|X)与个体值的预测区间（置信区间）：

（1）样本容量n越大，预测精度越高，反之预测精度越低；

（2）样本容量一定时，置信带的宽度当在X均值处最小，其附近进行预测（插值预测）精度越大；X越远离其均值，置信带越宽，预测可信度下降。