刘扬 171850524 计算机系 本科

1. (a) 由 $\sqrt{\frac{8a-1}{3}}$ 可知，要求 $a \geq \frac{1}{8}$

(b) 令 $a=\frac{1}{8}$，方程1的值为1

(c) 视 $a=\frac{1}{2}$ 为殊殊值，此时 $\sqrt{\frac{8a-1}{3}}=1$，方程1的值为1

猜想当 $a \geq \frac{1}{8}$ 时，方程1的值恒为1

(d) 在matlab中，结果为 $f=1.2182+0.1260i$

(e) 使用nthroot函数代替^(1/3)进行开三次方

得到正确结果 $f=1$

给a赋不同值，$f=1$ 一直成立，支持方程1的值为常数1的猜想

(f) $\forall a \geq \frac{1}{8}$，$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1$ 恒成立

证明：构造一元三次方程 $x^3+(2a-1)x-2a=0$

~~判别式~~ $\cancel{D=-108\left(\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}\right)^2}$

判别式 $D=-108(a+1)^2(8a-1)$

当 $a>\frac{1}{8}$ 时，判别式 $D<0$

根据卡丹公式，此时方程有1个实根与两个共轭虚根

$x^3+(2a-1)x-2a=(x-1)(x^2+x+2a)=0$

$\therefore x=1$ 是方程实根

在 $D<0$ 时卡丹公式指出方程实根为 $\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$

$\therefore \sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1$ 在 $a>\frac{1}{8}$ 时成立

当 $a=\frac{1}{8}$ 时，可直接验证上式成立

$\therefore$ 当 $a \geq \frac{1}{8}$ 时 $\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1$ 恒成立

(g) 令 $a=2$，原式 $=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$

(h) 根据卡丹公式，一元三次方程 $x^3+px+q=0$

在 $D=-108\left(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right)<0$ 时只有一个实根 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$

对比此实根与题目中的方程

可知题目所给方程是 $x^3+(2a-1)x-2a=0$ 在 $a>\frac{1}{8}$ 时的唯一实根

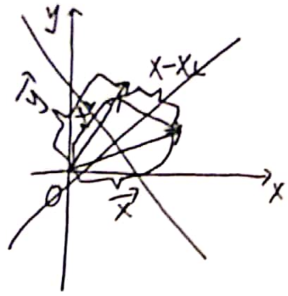
$x^3+(2a-1)x-2a=0$ 存在实根 $x=1$

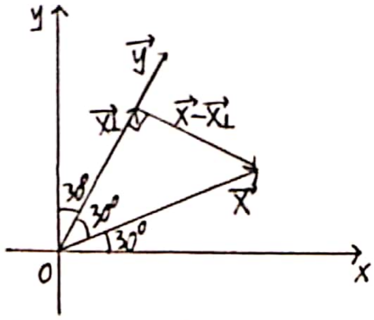
可知 $\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1$

2.(1) $x_\perp = \frac{x^T y}{\|y\|^2}\cdot y = \frac{\sqrt{3}}{2}(1,\sqrt{3})^T = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})^T$

(2) $y^T(x-x_\perp) = (1,\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})^T = 0$，由内积为0可知 y与$(x-x_\perp)$正交

(3)





(4) $\|x-x_\perp\| = 1$，$\|x-\lambda y\| = \sqrt{(2\lambda-\sqrt{3})^2+1}$

$\forall\lambda\in R$，$(2\lambda-\sqrt{3})^2 \geq 0$

$\therefore \sqrt{(2\lambda-\sqrt{3})^2+1} \geq 1$

即 $\|x-x_\perp\| \leq \|x-\lambda y\|$

3.(a) 实对称矩阵是正定矩阵的充要条件为特征值全部为正数

已知4个特征值为正数

$\therefore$ $x>0$ 是矩阵X为正定矩阵的充要条件

(b) $\det(X) = 1\times1\times3\times4\times x$

即 $12x = 72$

$\therefore$ $x=6$

4.(a)① $E(x) = \int_0^{+\infty}\beta x e^{-\beta x}dx = -\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} -\beta x e^{-\beta x}d\beta x$

令 $y=\beta x$，$E(x) = -\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} -ye^{-y}dy = -\frac{1}{\beta}(y+1)e^{-y}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\beta}$

② $Var(x) = E[x^2]-(E[x])^2$

$E[x^2] = \int_0^{+\infty}\beta x^2 e^{-\beta x}dx = \frac{1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}(\beta x)^2 e^{-\beta x}d\beta x$

令 $y=\beta x$，$E[x^2] = \frac{1}{\beta^2}(-y^2-2y-2)e^{-y}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\beta^2}$

$\therefore Var(x) = \frac{1}{\beta^2}$

(b) $x<0$时，$F(x)=0$

$\because F(x)$连续 $\therefore F(0)=0$

$x>0$时，$F(x) = F(0)+\int_0^x \beta e^{-\beta x}dx = 1-e^{-\beta x}$

$\therefore F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\beta x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

(c) $Pr(X\geq a+b \mid X\geq a) = \frac{Pr(X\geq a+b)}{Pr(X\geq a)} = \frac{1-Pr(X<a+b)}{1-Pr(X<a)} = \frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-\beta a}} = e^{-\beta b}$

$Pr(X\geq b) = 1-Pr(X<b) = e^{-\beta b}$

$\therefore Pr(X\geq a+b \mid X\geq a) = Pr(X\geq b)$

(d) 预期寿命 $=\frac{1}{\beta} = 1000\,h$；根据指数分布的无记忆性，使用2000h的灯泡剩余寿命期望仍是1000h

5. (a) $f''(x)=a^2e^{ax}$

$\forall x$, ~~是~~ $a\in R$, $a^2\geqslant 0$, $e^{ax}>0$

$\therefore f''(x)\geqslant 0$ 恒成立

$\therefore f(x)$ 是凸函数

(b) $g''(x)=-\frac{1}{x^2}$

$\forall x>0$, $g''(x)<0$ 成立

$\therefore g(x)$ 是凹函数

(c) $h''(x)=\frac{1}{x}$

$\forall x>0$, $h''(x)>0$

$\therefore h''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凸函数

令 x_1 为大于0的实数, $x_2=0$

$\forall\lambda\in[0,1]$

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=f(\lambda x_1)=\lambda x_1\ln(\lambda x_1)$

$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=\lambda f(x_1)=\lambda x_1\ln x_1$

$\because\lambda\in[0,1]$ $\therefore\lambda x_1\ln(\lambda x_1)\leqslant\lambda x_1\ln x_1$

$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是凸函数

(d) 令 $L(p_1,\cdots,p_n,\lambda)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i+\lambda(\sum_{i=1}^{n}p_i-1)$

令 $\frac{\partial L}{\partial p_1}=\lambda-(\log_2 p_i+\frac{1}{\ln 2})=0$

$\vdots$

$\frac{\partial L}{\partial p_n}=\lambda-(\log_2 p_i+\frac{1}{\ln 2})=0$

$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}p_i-1=0$

解得 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$, $\lambda=\log_2\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore H=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$ 的最大值为 $\log_2 n$

此时 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$