使用微分方程模型研究高压油管内部压力的控制

一 模型假设

1.喷油器每秒工作次数在该秒内均匀分布.把喷油器每秒工作 10 次视为每 0.1 秒 1 次.

2.燃油始终充满高压油管内部，进出油不会引起管内燃油体积变化，只影响燃油密度变化.

3.忽略管内燃油密度达到均匀状态所需的时间，即进出油瞬间管内燃油已达到均匀状态.

4.忽略进出油期间管内燃油的密度变化. 即管内燃油密度在进出油期间不变化，在进出油结束后瞬间变化.

5.当题目要求管内燃油压力稳定在某值时，假定管内燃油压力始终维持在该值.

二 符号说明

符号	意义
L_i	高压油管内腔长度
d_i	高压油管内直径
d_A	供油口 A 处小孔直径
V_i	高压油管内腔总体积
v_B	喷油嘴 B 处喷油速率
V_B	喷油嘴 B 每次工作喷出的燃油体积
P_i	高压油管内部压力
$E(P)$	弹性模量随压力变化的拟合式
$\rho(P)$	压力为 P MPa 时的燃油密度
T_o	单向阀每次开启时长

三 问题分析

3.1 问题 1 的分析

3.1.1 问题 1.1 的分析

该题要求计算出单向阀每次开启的时长，使得高压油管内压力维持在其初始100 MPa左右. 已知每次喷油的周期为 100 ms,思路是使得喷油和进油的周期相同，且每个周期内喷油质量和进油质量相等. 根据质量守恒等式解出单向阀每次开启的时长. 注意到喷油的周期内实际喷油时间只有 2.4 ms，这里为了使得高压油管内的压力尽量维持稳定，选择在喷油期间同时进油的方案.

质量守恒的等式由题目注 1 和注 2 给出的公式容易得到. 弹性模量E关于压力P的关系根据附件 3 给出的数据进行拟合，燃油密度ρ在不同压力P下的值通过公式变换计算得到.

3.1.2 问题 1.2 的分析

在问题 1.1 的基础假设上，通过控制单向阀开关进油使得分别经过不同时间后高压油管内的压力从初始值 100 MPa 升高并稳定在 150 MPa 附近.令喷油和进油的周期相同，均为 100 ms.利用初始状态(100 MPa)和最终状态(150 MPa)的燃油质量差Δm进行分析，使得每个周期进出油后，管内燃油质量的变化均相等且等于$\Delta m/K$，其中 K 为时间段内进出油周期次数.给出维持 150 MPa 时的每周期单向阀开启时长.

3.2 问题 2 的分析

问题 2 在问题 1 的基础上将恒压供油泵改为了由凸轮驱动的柱塞泵， 同时给出了喷油嘴的具体几何结构和工作规律.

需要通过建模给出维持高压油管压力在 100MPa 下凸轮转动的角速度. 该问题与问题 1 的不同之处在于柱塞腔内的压强是随柱塞腔的有效容积与通过单向阀的油量变化的， 因此需要建立柱塞腔内的压强随时间的函数. 之后根据维持压力稳定需满足供油质量与喷油质量相等的原则，计算供油时间和凸轮的角速度。

3.3 问题 3 的分析

问题 3 在问题 2 的基础上增加了一个和问题 2 中喷油嘴完全相同的新喷油嘴， 并在第一步要求给出此时的新的喷油和供油策略. 为使高压油管内压力更加稳定,使两喷油管交错工作， 即将 100 ms 平分为前后两部分， 前半部分喷油嘴 B 工作， 后半部分喷油嘴 C 工作. 之后题目在高压油管内新增加了一个减压阀， 以便于更加好地控制管内压力. 借助这个减压阀的帮助,凸轮匀角速度转动，将每个周期内多供的油量通过减压阀排出.

四 建模与求解

4.1 问题 1 的建模求解

4.1.1 问题 1.1 的建模求解

首先，题目给出了v_B在喷油期间内变化的函数图像如下：

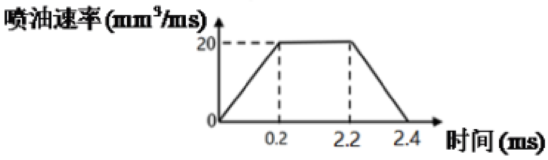


图 4-1-1-1：v_B在喷油期间内变化关系图

对曲线下面积积分，得到喷油嘴每次工作喷出的燃油总体积有：

$$V_B = (2.0 + 2.4) \times \frac{20}{2} = 44\, mm^3$$

结合注 2 给出的流量公式$Q = CA\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}(mm^3/ms)$，其中 C 为流量系数，$A$为小孔面积，$\Delta P$为小孔两边的压力差，$\rho$为高压侧燃油密度．由进油和出油质量相等,得到如下表达式：

$$V_B\rho(100) = QT_o\rho(160) = CA\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(160)}}T_o\rho(160) \qquad (4-1-1-1)$$

为求解T_o，需确定其中未知量$\rho(160)$.

由注 1，得到如下公式：

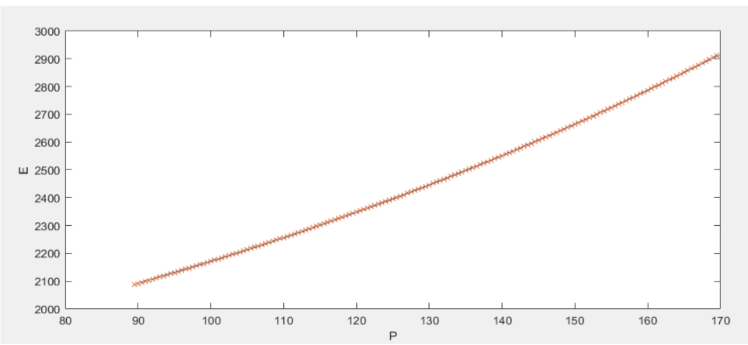
$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho} \qquad (4-1-1-2)$$

通过对式(4-1-1-2)进行变换从而确定未知量$\rho(160)$：

首先，通过拟合确定E(P)表达式. 对附件 3 中 P 在[90, 170]范围内的数据使用多项式拟合．拟合结果如下：

$$E(P) = 0.0366P^2 + 0.7356P + 1731.3 \quad P \in [90, 170] \qquad (4-1-1-3)$$

拟合曲线和数据散点对比图如下：



得到E(P)表达式后，考虑在 P 变化的极小区间考虑式(4-1-1-2)，将其重写为：

$$\frac{\mathrm{dP}}{d\rho}=\frac{E(P)}{\rho}$$

分离变量有：

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dP}{E(P)}$$

两边求积分有：

$$\ln\frac{\rho(160)}{\rho(100)}=\int_{100}^{160}\frac{1}{E(P)}dP \qquad (4-1-1-4)$$

其中$\rho(100)=0.850$ 由题目给出，将式(4-1-1-3)代入求解可得：

$$\rho(160)=0.871$$

最后，将$\rho(160)$代入式(4-1-1-1)，有：

$$\mathrm{V}_B\rho(100)=CA\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(160)}}T_o\rho(160)$$

化简有：

$$T_o=\frac{\mathrm{V}_B\rho(100)}{CA\sqrt{2\Delta P\rho(160)}} \qquad (4-1-1-5)$$

其中有$V_B=44, C=0.85, A=1.4, \rho(100)=0.850, \Delta P=60, \rho(160)=0.871.$

代入表达式计算得到：

$$T_o=2.796\ ms$$

最后，给出一个周期内进出油速率对比图像，其中折线是题目给出的喷油速率，水平线是进油速率：

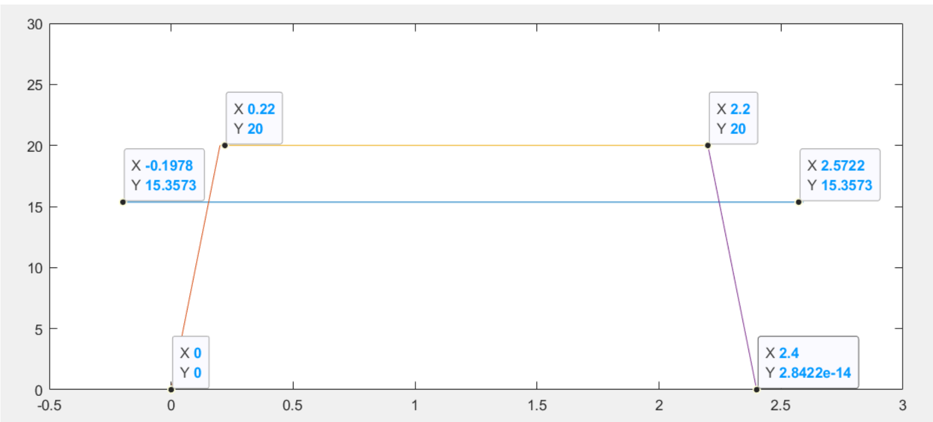


图 4-1-1-3：进出油速率曲线对比图

4.1.2 问题 1.2 的建模求解

首先定义初状态为管内压力为 100 MPa 的状态，末状态为管内压力为 150 MPa 的状态. 为得到初末状态管内燃油质量差Δm，我们类似地改写式(4-1-1-4)，有:

$$\ln\frac{\rho(150)}{\rho(100)}=\int_{100}^{150}\frac{1}{E(P)}dP$$

得到$\rho(150)=0.868$.

之后得出初末状态管内燃油质量差表达式为:

$$\Delta m=\rho(150)V_i-\rho(100)V_i \qquad (4-1-2-1)$$

由圆柱体体积公式，得到:

$$V_i=\pi\left(\frac{d_i}{2}\right)^2 L_i \qquad (4-1-2-2)$$

令初末状态转换所需总时长为t(单位:s)，进行分析如下:

首先，我们计算周期总数N如下:

$$N=\frac{t}{0.1} \qquad (4-1-2-3)$$

这里题目数据保证计算得到的N为正整数.

不妨令P_k,m_k,T_k分别为第$k(1\le k\le N)$个周期时高压油管内的压力、高压油管内的燃油质量和单向阀开启时长，通过以下分析给出一个迭代算法对每个周期的T_k进行求解:

在第k个进出油周期内，为使管内燃油总质量增量为$\frac{\Delta m}{N}$，不难得到该周期的进油质量要等于该周期管内燃油质量增量与该周期出油质量的和，转换为表达式即:

$$\rho(160)QT_k=\frac{\Delta m}{N}+V_B\rho(P_k)$$

将Q展开有:

$$\rho(160)CA\sqrt{\frac{2}{\rho(160)}}\sqrt{160-P_k}T_k=\frac{\Delta m}{N}+V_B\rho(P_k) \qquad (4-1-2-4)$$

在第k个进出油周期结束后，管内燃油的总质量增加了$\frac{\Delta m}{N}$，这会导致管内燃油的压力和密度均产生变化.

通过管内燃油质量除以管内体积来得到每个进出油周期管内燃油的密度，列式表达如下:

$$m_k=m_1+\frac{k-1}{N}\Delta m \qquad (4-1-2-5)$$

$$\rho(P_k)=\frac{m_k}{V_i} \qquad (4-1-2-6)$$

改写式(4-1-1-4)有:

$$\ln\frac{\rho(P_{k+1})}{\rho(P_k)}=\int_{P_k}^{P_{k+1}}\frac{1}{E(P)}dP \qquad (4-1-2-7)$$

已知$\rho(100)=0.850$.

以 0.1 为间隔，利用式(4-1-2-7)产生 P 均匀分布在$[100,150]$区间内的(P,ρ)散点对. 由于P与ρ在该局部区间内的关系是单调的，交换散点对为(ρ,P)，并对其进行多项式拟合，拟合结果如下：

$$P(\rho)=14358\rho^2-21882\rho+8326.5 \qquad (4-1-2-8)$$

在管内燃油压力升高到 150 MPa 后，改写式(4-1-1-5)，得到维持 150 MPa 稳态时单向阀的开启时长T_{end}有：

$$T_{end}=\frac{V_B\rho(150)}{CA\sqrt{2\Delta P\rho(160)}}=6.992\text{ ms}$$

最后，利用上述迭代算法分别计算每种情况下每个周期内单向阀开启时长.

4.2 问题 2 的建模求解

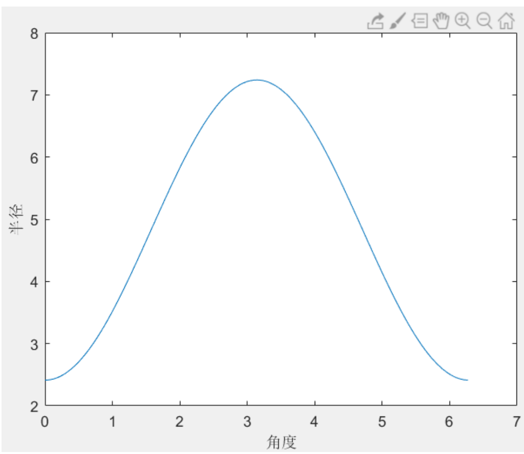
对于问题 2，进油速率与凸轮运动规律有关，而出油速率与针阀运动规律有关，首先根据附件 1 与附件 2 给出的数据，分别拟合出极坐标下凸轮极径关于极角表达式$r(\theta)$与针阀底部距离其初始位置的高度随时间的表达式$h(t)$. 下文都只采用一个周期进行说明.

依然使用多项式对散点数据进行拟合，得到结果如下：

$$\begin{aligned}r(\theta)=&-0.00249\theta^6+0.04578\theta^5-0.26288\theta^4\\&+0.29758\theta^3+0.93798\theta^2+0.09588\theta+2.4043\end{aligned} \qquad (4-2-1)$$

$$h(t)=\begin{cases}-12.048t^3+24.319t^2-3.6579t+0.0923 & t\in[0,0.44]\\ 2 & t\in[0.44,2]\\ 11.481t^3-60.403t^2+92.858t-33.676 & t\in[2,2.46]\\ 0 & t\in[2.46,100]\end{cases} \qquad (4-2-2)$$

图像分别如下：



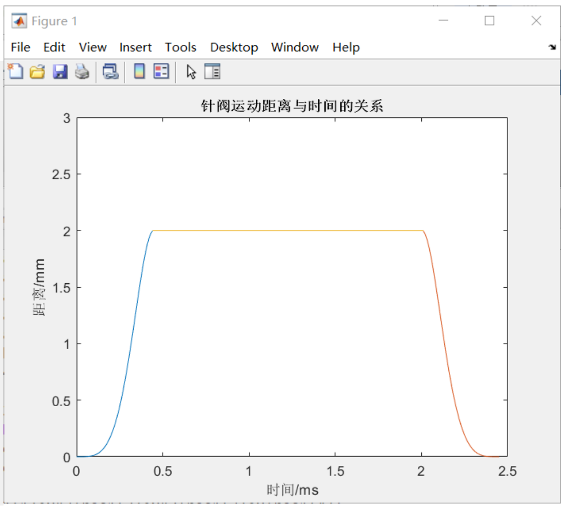


图 4-2-1:一个周期内极径随极角的变化图　　图 4-2-2:针阀运动距离与时间的关系

得到表达式后,首先计算出油端出油速率表达式$Q_{出}(t)$:

改写注 2 公式为:

$$Q_{出}(t)=CA(t)\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(100)}} \qquad (4-2-3)$$

特别地,将喷油嘴外界气压视为大气压，由于大气压相对于高压油管内的压强很小，这里忽略不计．同时我们这里通过对喷油过程进行分析，得到$A(t)$表式：

$$A(t)=\min\{\pi\left(\frac{d_{下}}{2}\right)^2,S_{环}(t)\}$$

将该表达式代入式(4-2-3)，即可确定$Q_{出}(t)$的表达式.进一步对$Q_{出}(t)$在一个周期内的曲线下面积进行积分，得到喷油嘴一个出油周期内的出油体积$V_{出}$:

$$V_{出}=\int_0^{2.46}Q_{出}(t)dt=38\,mm^3 \qquad (4-2-4)$$

为维持高压油管内的压力稳定在 100 MPa,使得凸轮旋转一周的时长等于喷油嘴工作一次的出油周期，同时该时段内进入高压油管的燃油体积等于排出高压油管的燃油体积，即维持高压油管内燃油质量不变.

由题目信息已知从r_{low}到$r_{上}$之间的运动过程中单向阀未开启，换言之即该过程内高压油泵中燃油质量未改变，可以得到如下等式:

$$\rho(0.5)\left[\pi R^2\left(r_{high}-r_{low}\right)+V_{残}\right]=\rho(100)\left[\pi R^2\left(r_{high}-r_{上}\right)+V_{残}\right] \qquad (4-2-5)$$

为从等式(4-2-5)中解出$r_{上}$，需要求出r_{high},r_{low}和$\rho(0.5)$.

其中r_{high}和r_{low}可以从附件 1 给出的数据中直接看出，分别为:

$$r_{high}=7.239\,mm,r_{low}=2.413\,mm$$

对于参数$\rho(0.5)$，类似于问题 1.1 中的求法，改写式(4-1-2-7)，有:

$$\ln\frac{\rho(0.5)}{\rho(100)}=\int_{100}^{0.5}\frac{1}{E(P)}dP \qquad (4-2-6)$$

为了提高计算的精度,利用附件 3 中 P 在[0,100]范围内的散点数据重新对E(P)的表达式进行多项式拟合．拟合过程类似于问题 1.1 中的拟合过程，此处不再赘述.

拟合结果如下:

$$E(P)=0.0167P^2+4.612P+1540.6 \quad P\in[0,100] \qquad (4-2-7)$$

将(4-2-7)代入(4-2-6)，类似地求得:

$$\rho(0.5) = 0.804$$

将所需数据代入式(4-2-5)，解出:

$$r_{上} = 2.726\,mm$$

同时，为维持高压油管内部压力稳定在 100 MPa，认为一个进出油周期内进油质量等于出油质量，得到如下等式:

$$\pi R^2 \left(r_{下} - r_{上}\right)\rho(100) = V_{出}\rho(100) \tag{4-2-8}$$

将所需数据代入上式，解出:

$$r_{下} = 6.685\,mm$$

得到$r_{上}$和$r_{下}$之后，根据已得到的$r(\theta)$表达式(5-2-1)，建立如下方程:

$$\begin{cases} r\left(\theta_{上}\right) = r_{上} \\ r\left(\theta_{下}\right) = r_{下} \end{cases} \tag{4-2-9}$$

观察一个周期内$r(\theta)$表达式对应的图 4-2-1，一个周期内$r(\theta)$表达式是有竖直对称轴的，也就意味着对于$\theta_{上}$和$\theta_{下}$在一个周期内分别均有两个解. 这里由高压油泵的运动过程，得出，$\theta_{上}$需要取竖直对称轴左边的解，$\theta_{下}$需要取竖直对称轴右边的解.得到的解如下:

$$\begin{cases} \theta_{上} = 0.514 \\ \theta_{下} = 4.761 \end{cases}$$

这里认为整个单向阀开启时间段内的角速度恒定，为$\omega_{开}$；且整个单向阀关闭时间段内角速度也恒定，为$\omega_{关}$. 可建立如下等式:

$$\Delta\theta = \theta_{下} - \theta_{上} = \omega_{开} t_{开} \tag{4-2-10}$$

$$\omega_{关} = \frac{2\pi - \Delta\theta}{T - t_{开}} \tag{4-2-11}$$

其中$t_{开}$是一个周期内单向阀开启的时长，是待求量；T 是一个进出油周期的时长，是已知量且有$T = 100\,ms$.

下面求$t_{开}$. 在活塞向上运动到压力为 100 MPa 后，取一极小时间间隔Δt，由$\rho = \frac{m}{V}$建立微分方程有:

$$\rho + \Delta\rho = \frac{m - \Delta m}{V_{上} - \Delta V} = \frac{m - Q_{进}\Delta t \rho}{V_{上} - \pi R^2 \Delta r} \tag{4-2-12}$$

其中$V_{上}=\pi R^2\left(r_{high}-r_{上}\right)+V_{残}$，指活塞向上运动到压力为 100 MPa 后，高压油泵内的燃油体积.

化简式(4-2-12)，有:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t}=\frac{\rho\pi R^2}{V_{上}}\frac{\Delta r}{\Delta t}-\frac{CA\sqrt{2(P(\rho)-100)\rho}}{V_{上}} \qquad (4-2-13)$$

将极小时间间隔Δt视作微分dt，改写上式有:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\rho\pi R^2}{V_{上}}\frac{dr}{dt}-\frac{CA\sqrt{2(P(\rho)-100)\rho}}{V_{上}} \qquad (4-2-14)$$

同时有:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=r(\dot{\theta})\omega$$

$$\theta=\omega t$$

将上述两式代入(4-2-14)，有:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\rho\pi R^2}{V_{上}}r(\dot{\omega t})\omega-\frac{CA\sqrt{2(P(\rho)-100)\rho}}{V_{上}} \qquad (4-2-15)$$

其中$r(\dot{\omega t})$可由式(4-2-1)给出的$r(\theta)$表达式求得，$P(\rho)$由式$(4-1-2-8)$给出的$P(\rho)$拟合式确定.

得到式(4-2-15)规定的常微分方程后，利用 matlab 求$\rho=100$时的微分方程数值解$root_1$和$root_2$，有

$$\begin{cases} root_1=0 \\ root_2=0.206 \end{cases}$$

得到:

$$t_{开}=root_2-root_1=0.206$$

将上面结果代入式(4-2-10)和式(4-2-11)，解出:

$$\begin{cases} \omega_{开}=20.616 \\ \omega_{关}=0.0204 \end{cases} \qquad (4-2-16)$$

将单向阀开启时刻作为 0 时刻，将式(4-2-16)的结果在一个进出油周期T内统一表示，得到问题 2 的解为:

$$w=\begin{cases} 20.616, & t\in[0,0.206] \\ 0.0204, & t\in(0.206,100] \end{cases}$$

4.3 问题 3 的建模求解

对于问题 3，题目首先要求给出喷油嘴数量翻倍条件下，新的供油和出油方案. 对于出油方案，为了更好地维持高压油管内压力恒定，采用的设计为两个喷油嘴交替工作. 具体而言，将原来单个喷油嘴的工作周期 100 ms 平分为前后两部分，前半部分喷油嘴 B 工作，后半部分喷油嘴 C 工作. 即这里相对于第二问喷油频率翻倍，喷油周期减半.

在此情况下，进油方案也要作出相应调整,凸轮旋转一圈的周期为 50 ms. 由于每个周期只有一个喷油嘴在工作,进油质量依然等于问题 2 中一个周期的出油质量. 结合问题 2 中计算得到的结果，这里不难得到新的角速度ω如下:

$$w = \begin{cases} 20.616, & t \in [0,0.206] \\ 0.0409, & t \in (0.206,50] \end{cases}$$

之后，问题 3 又在高压油管内新增加了一个单向减压阀，单向减压阀出口是一个直径$d_{出}$为 1.4 mm 的圆，打开后高压油管内的燃油可以在压力下回流到外部低压油路中. 通过单向减压阀，可以使高压油管内的压力更好地稳定在 100 MPa 附近. 在问题 2 中，忽略了凸轮角速度增减的过程，这里的思路是使得整个周期内凸轮匀角速度旋转，周期内多进的燃油通过减压阀排出. 即凸轮转动的角速度ω为:

$$\omega = \frac{2\pi}{50} = 0.126\, rad/ms$$

接下来，分析说明该方案的可行性:

首先，来计算减压阀排出油的流量$Q_{减}$，暂时假定高压油管内

的压力恒为 100 MPa，由注 2 公式，得到:

$$Q_{减} = CA\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = C\pi\left(\frac{d_{出}}{2}\right)^2\sqrt{\frac{2(100-0.5)}{\rho(100)}} = 20.021\, mm^3/ms \qquad (4-3-1)$$

之后，对单个周期内进出油过程进行分析. 首先要明确的是，这里不再假定高压油管内压力恒定在 100 MPa，而是采用更符合实际的观点，即高压油管内的压力在周期内随时间变化而变化. 类似于问题 2 式(4-2-15)，建立微分方程组如下:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho_{内}}{dt} = \dfrac{CA}{\mathrm{V}_i}\sqrt{2\rho_{外}(P\left(\rho_{外}\right) - P(\rho_{内})} \\ \dfrac{d\rho_{外}}{dt} = \dfrac{\rho_{外}\pi R^2}{V_{上}} r(\dot{\omega t})\omega - \dfrac{CA\sqrt{2\rho_{外}(P\left(\rho_{外}\right) - P(\rho_{内})}}{V_{上}} \end{cases} \qquad (4-3-2)$$

其中$\rho_{内}$,$\rho_{外}$分别指管内燃油密度和管外(高压油泵)燃油密度.

结合(4-3-2)给出的微分方程组，只需求出$\rho_{外} > \rho_{内}$时该方程组的数值解$root_1$和$root_2$，它们差的现实意义即为单向阀开启时长，也即单个周期内进油总时长. 利用matlab，解得:

$$\begin{cases} root_1 = 0 \\ root_2 = 18.455 \end{cases}$$

同时不难得到:

$$t_{开} = root_2 - root_1 = 18.455\,ms$$

由问题 2 式(4-2-4)，可以得到单个喷油嘴工作一次排出的燃油体积为:

$$V_{出} = 38\,mm^3$$

同时类似于问题 2 利用始末状态求进油质量，求得:

$$m_{进} = \pi R^2 \left(r_{下} - r_{上}\right) \rho(100) = 73.381\,mg$$

通过计算得到一个周期内要通过减压阀排出的燃油体积是:

$$V_{排} = \frac{m_{进}}{\rho(100)} - V_{出} \qquad (4-3-3)$$

结合式(4-3-1),得到一个周期内减压阀需要开启的时长为

$$t_{减} = \frac{V_{排}}{Q_{减}} = 2.371\,ms$$

由于以上动作均可以在一个周期(50 ms)内完成，故方案是可行的.

综上所述,方案为，进油的同时开启减压阀和喷油嘴，减压阀开启时长由$t_{减}$给出，进油时长由$t_{开}$指出，喷油嘴运动规律题目已经规定，整个周期凸轮以角速度ω匀速转动.

[参考文献]

[1]张文光,王大镇,袁静云,应帅,刘辑.弧面分度凸轮建模方法及有限元分析研究[J].制造技术与机床,2019(08):68-72.

[2]巴延博,刘大伟,曾春峰,谷丹丹.基于非圆齿轮驱动的恒流量高阶椭圆凸轮泵设计[J].机械设计,2019,36(05):30-34.

[3]刘海波.基于凸轮驱动的高压柱塞泵问题研究[J].内燃机与配件,2019(08):82-84.

[4]吴庆林. 柴油机高压共轨系统喷油量的控制方法研究[D].重庆理工大学,2012.

[5]蔡梨萍. 基于 MATLAB 的柴油机高压喷油过程的模拟计算[D].华中科技大学,2005.