集合操作

像素坐标

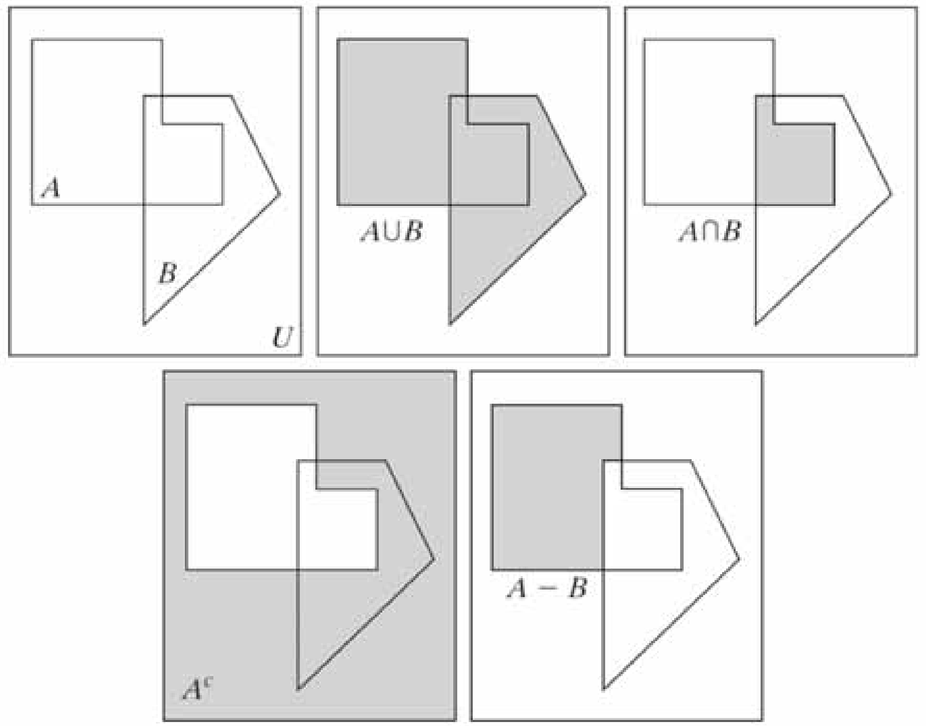
- $a = (a_1, a_2)$是A的元素：$a \in A$
- a不是A的元素：$a \notin A$
- 空集：$\emptyset$
- 全集：U
- A是B的子集：$A \subseteq B$
- 集合A和B的并集：$A \cup B$
- 集合A和B的交集：$A \cap B$
- 集合A和B互斥：$A \cap B = \emptyset$

适用于二值图像
(把值1坐标取下来
进行集合操作)

集合操作

- 集合A的补集：$A^c = \{w|w \notin A\} = U - A$
- 集合A和B的差：

$$A - B = \{w|w \in A, w \notin B\} = A \cap B^c$$



灰度图像的集合操作

- 灰度图像集合A
- 元素为三元组(x, y, z)
  - x和y是空间坐标， z是灰度
- 集合A的补集（大小不变），结构不变，改变灰度值

颜色互补

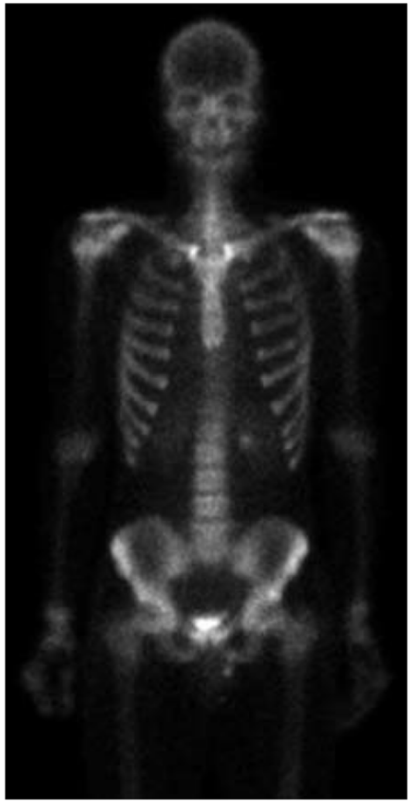
$$A^c = \{(x, y, K - z) | (x, y, z) \in A\}$$

  - $K = 2^k - 1$，其中k为比特数
- 集合A和B的并集 两幅图像相加，相同位置灰度取max

$$A \cup B = \left\{ \max_{z}(a, b)\ a \in A, b \in B \right\}$$

交集取min

举例



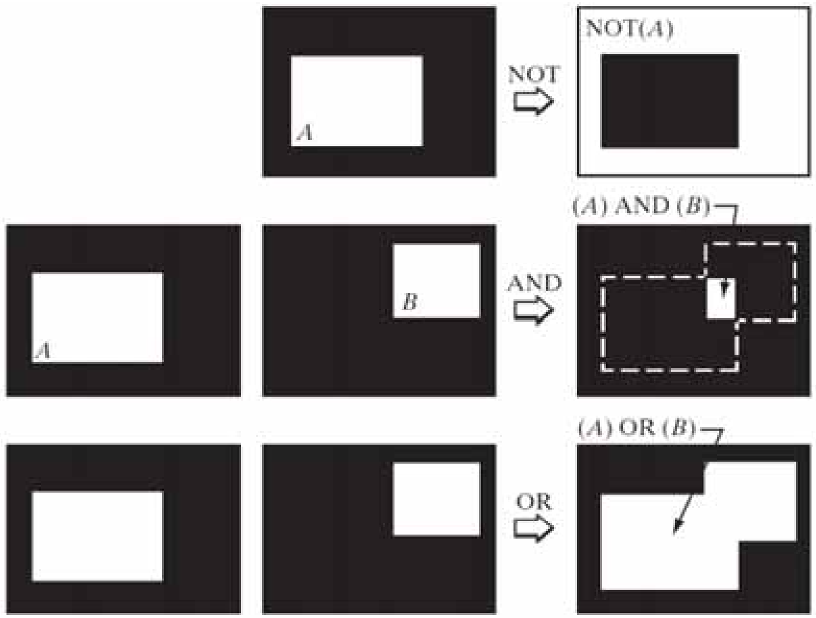
原图

补集操作
得到的负像

与常数图像
的并集

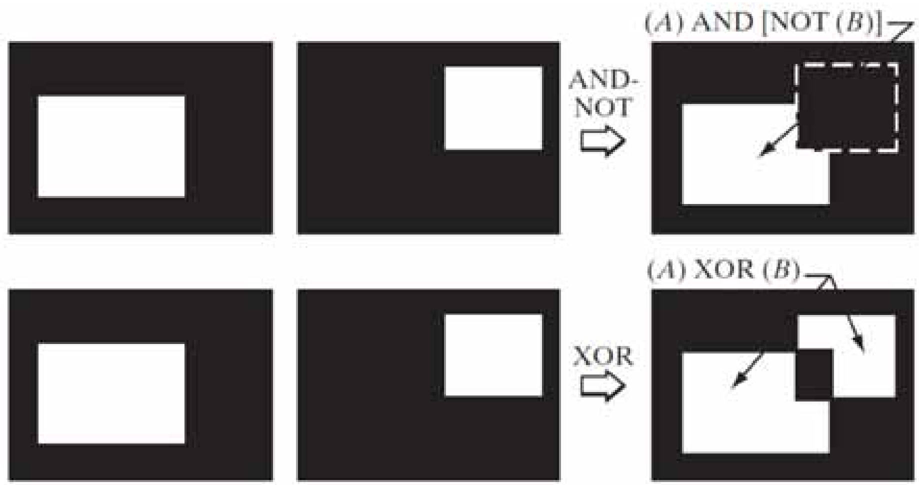
逻辑操作

- 二值图像
  - 前景（1值）、背景（0值）
- OR、AND、NOT逻辑操作
  - 集合的并、交和求补操作



逻辑操作

- 属于A不属于B操作
- XOR操作



- 功能完备操作
  - AND、OR和NOT

空间操作

- 直接在图像像素上进行的操作

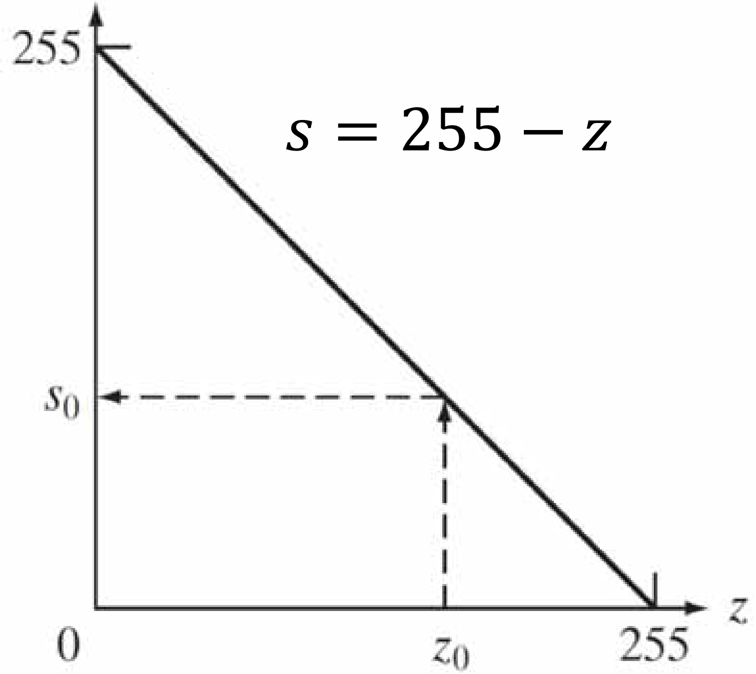
1. 单像素操作
2. 邻域操作
3. 几何空间变换

单像素操作

- 以灰度为基础改变单个像素的值

$$s = T(z)$$

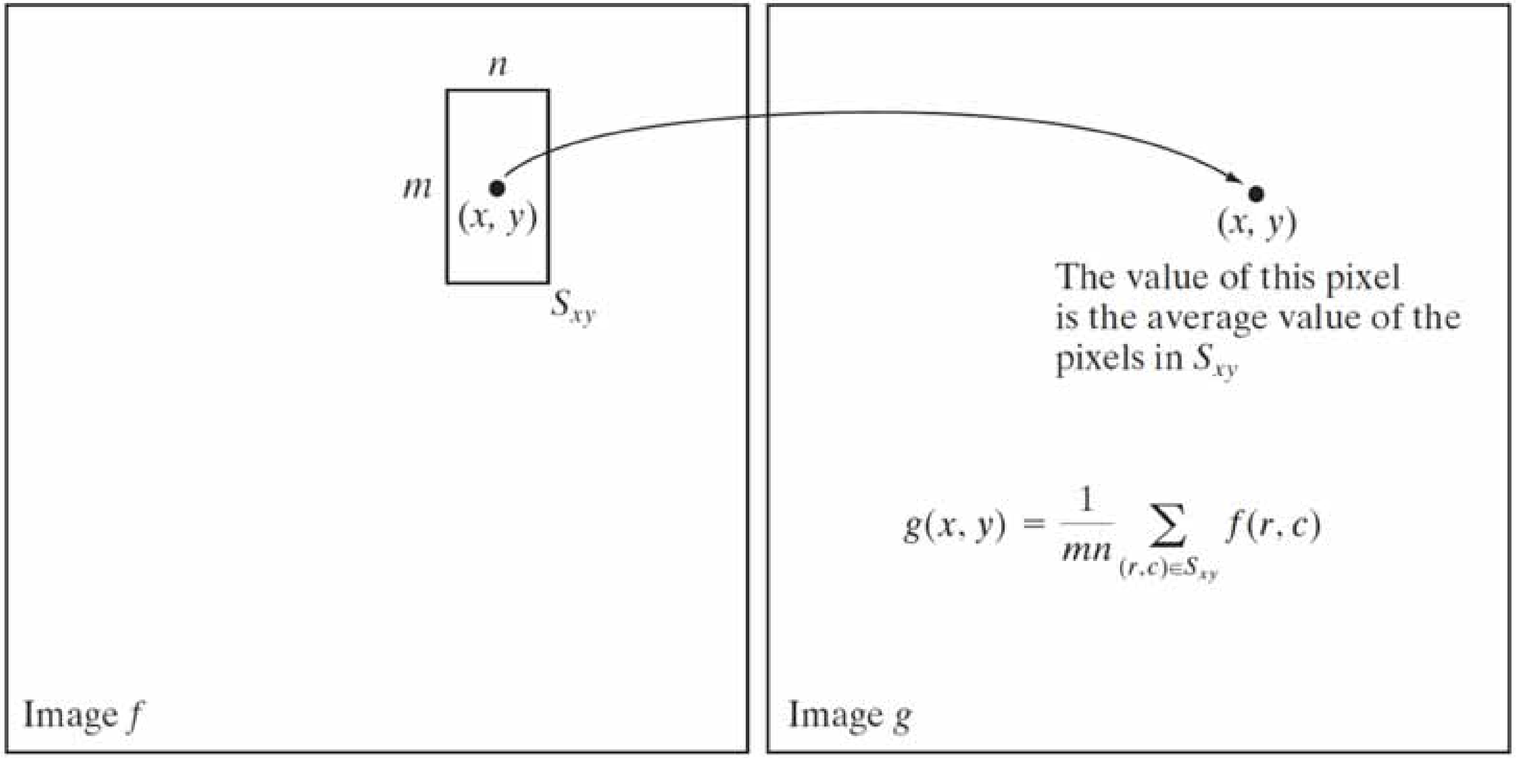
  - z是原像素的灰度，s是处理后的灰度



8比特灰度图像的负图像

邻域操作

- S_{xy}表示像素(x, y)邻域像素点的集合
- 使用S_{xy}中的所有像素计算一个输出



举例

- 图像模糊

主动脉造影图像

局部平均操作

几何空间变换

- 改变图像中像素间的空间关系
- 橡皮膜操作
  - 在橡皮膜上印刷一幅图像
  - 然后按照某规则拉伸橡皮膜

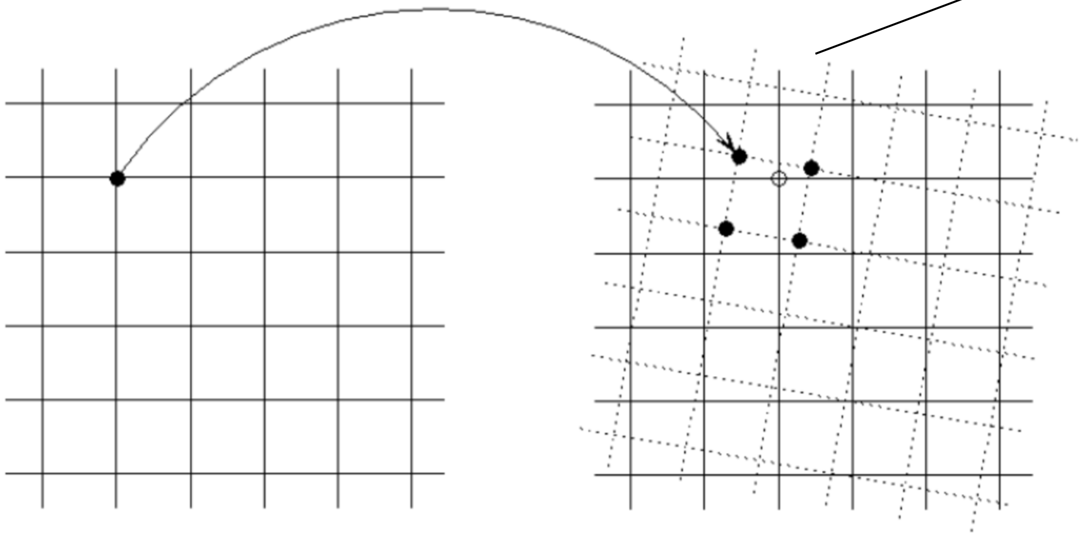
1. 坐标的空间变换
2. 灰度内插
   - 对变换后的像素赋灰度值

几何空间变换

- 坐标的空间变换

$$(x, y) = T\{(v, w)\}$$

  - (v, w)是原坐标，(x, y)为新的坐标

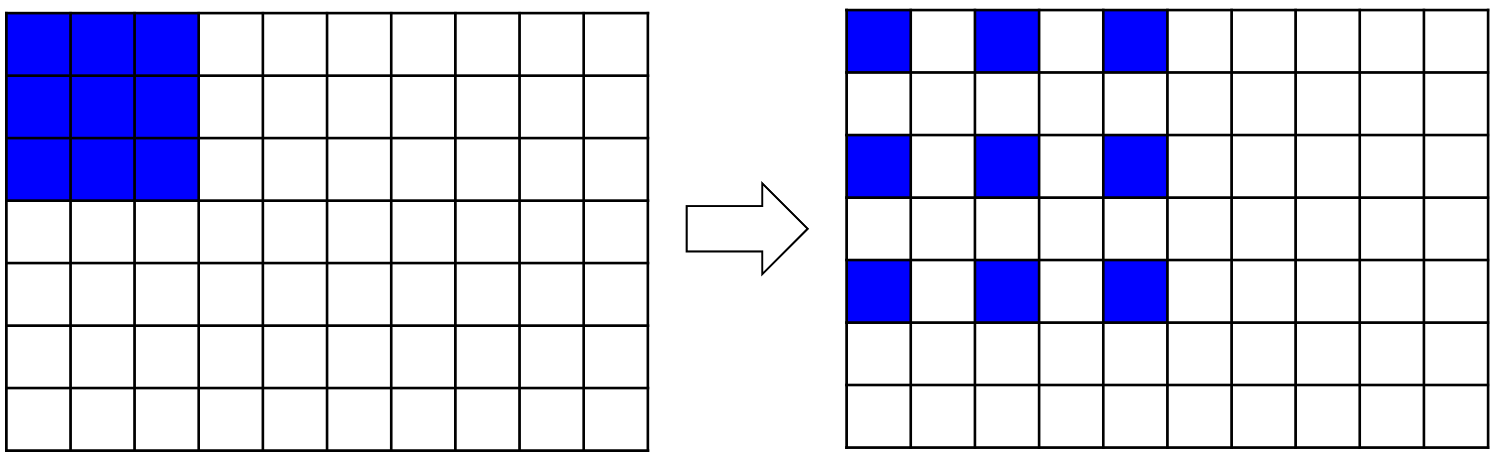


灰度内插是必要的

举例

- 图像放大

$$(x, y) = (2v, 2w)$$



仿射变换

- 包括了旋转、伸缩、平移、倾斜等变换

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

倾斜　伸缩　平移

- t_{31}和t_{32}刻画了平移量
- t_{11}和t_{22}刻画了伸缩比例
- t_{12}和t_{21}刻画了倾斜程度

仿射变换

- 包括了旋转、伸缩、平移、倾斜等变换

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

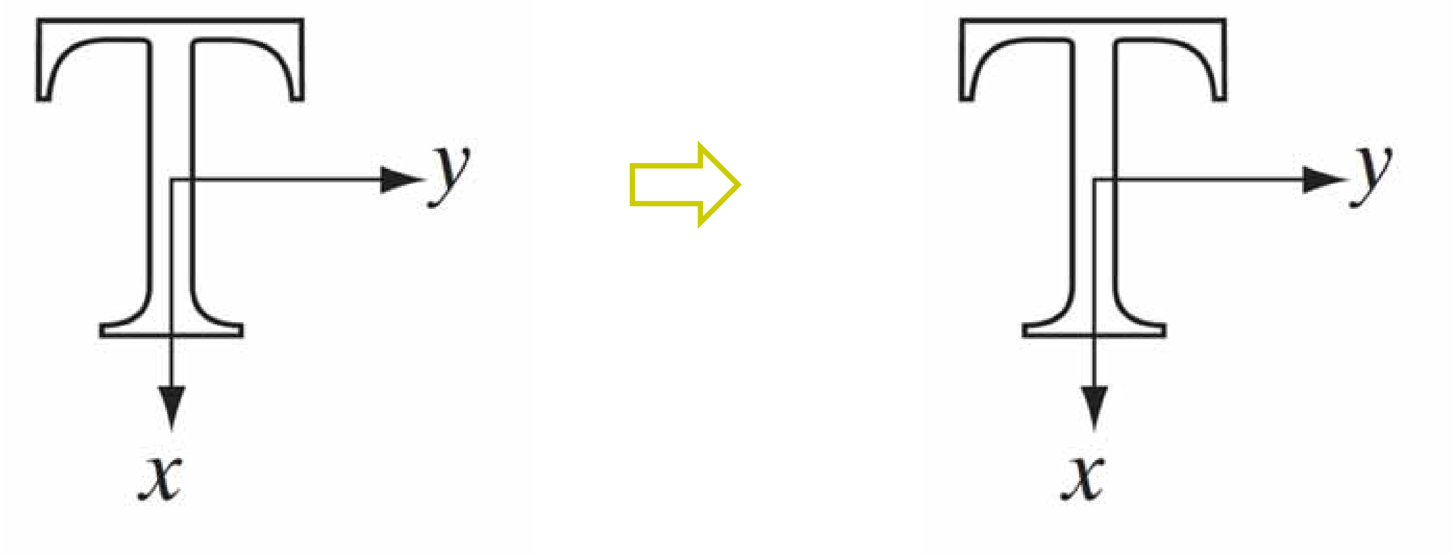
- 保持共线性（co-linearity）
  - 共线的点变换后依然共线
- 保持距离比例（ratios of distance）
  - 线的中心变换后依然是线的中心

恒等变换

- 坐标公式

$$x = v$$

$$y = w$$

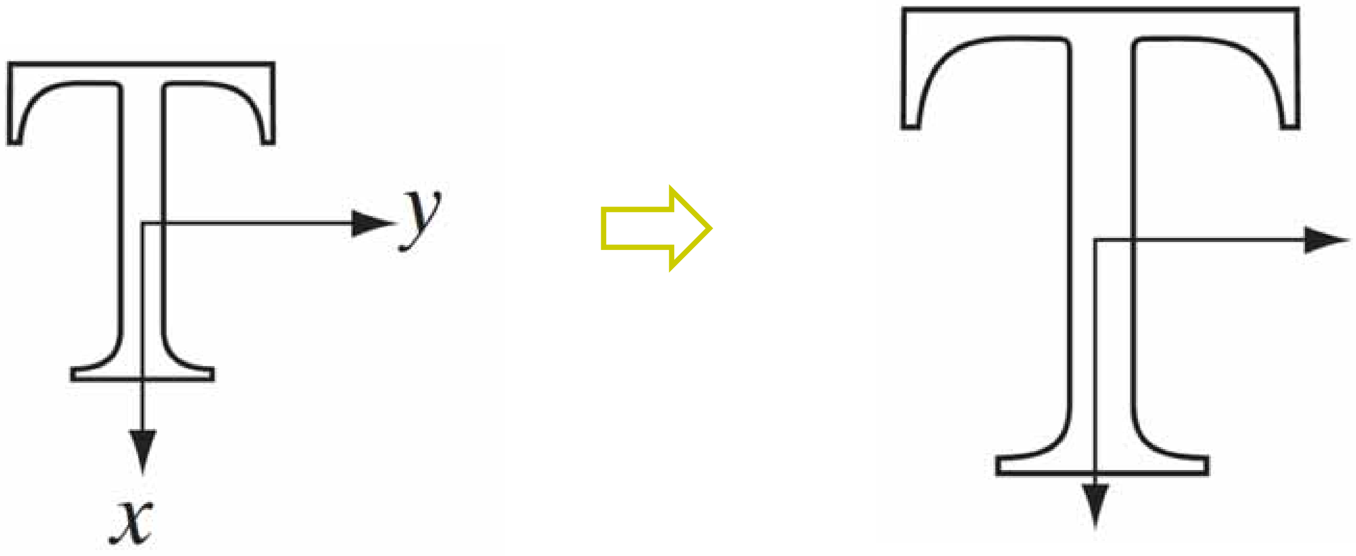


伸缩变换

- 坐标公式

$$x = c_x v$$

$$y = c_y w$$



旋转变换

- 坐标公式

$$x = v\cos\theta - w\sin\theta$$

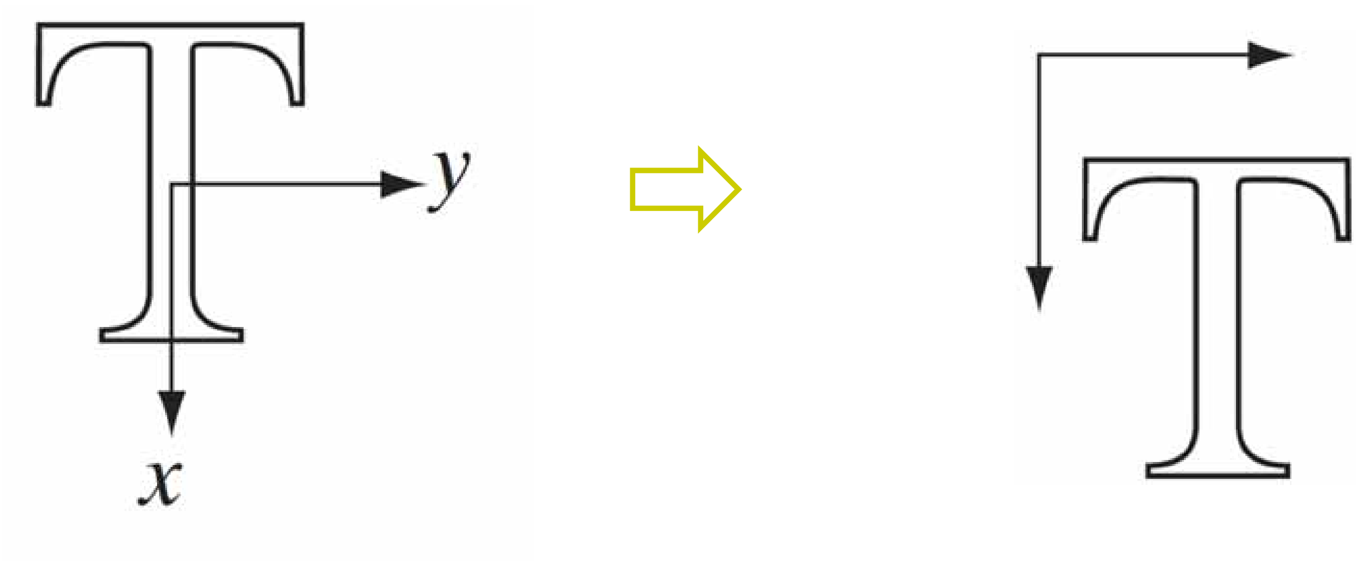
$$y = v\sin\theta + w\cos\theta$$

平移变换

- 坐标公式

$$x = v + t_x$$

$$y = w + t_y$$

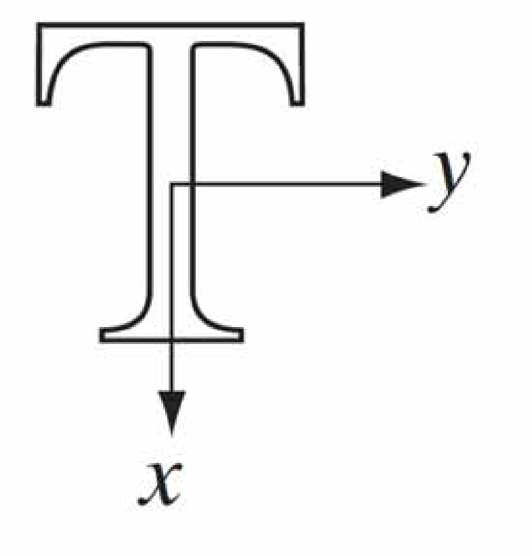


（垂直）倾斜变换

- 坐标公式

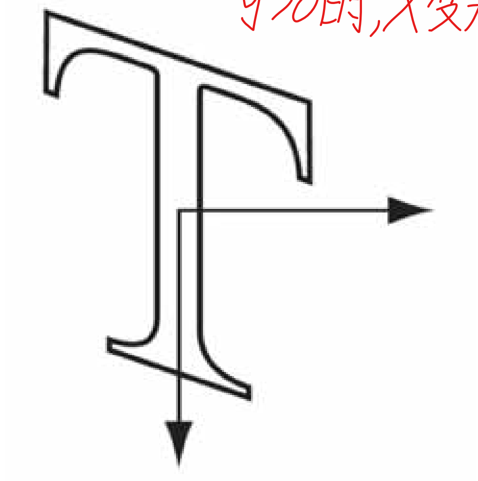
$$x = v + s_v w$$

$$y = w$$



y<0时,x变小

y>0时,x变大

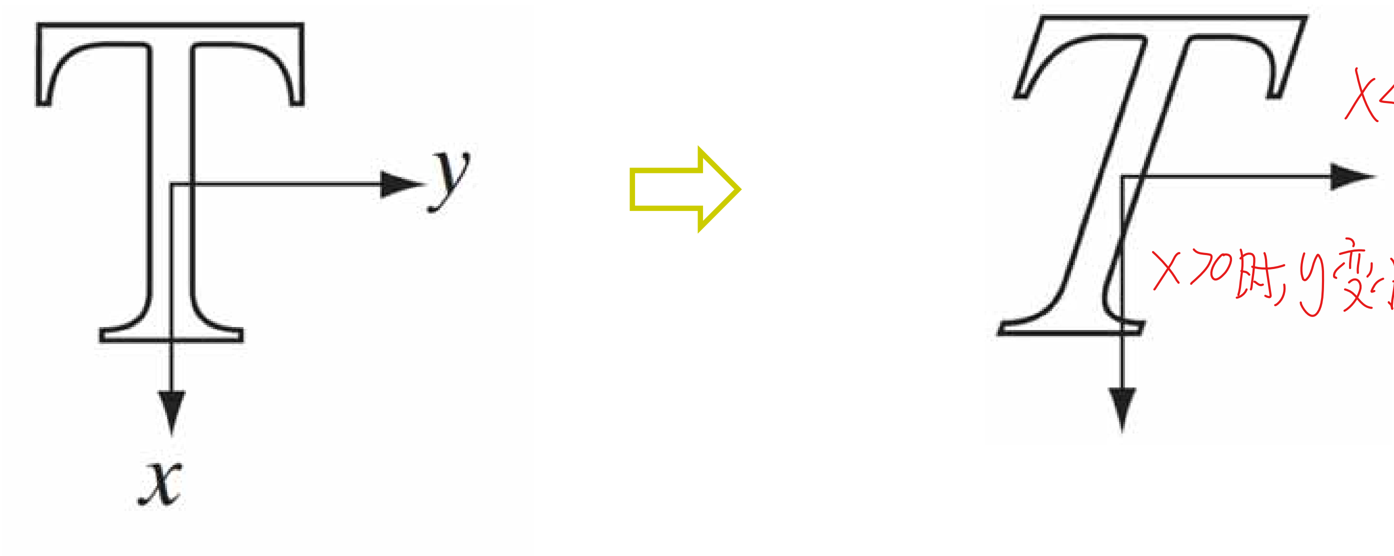


（水平）倾斜变换

- 坐标公式

$$x = v$$

$$y = s_h v + w$$



$x<0$时，y变大

$x>0$时，y变小

仿射变换

- 变换公式

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$

$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

- 矩阵形式

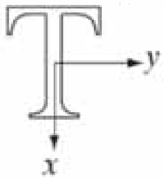
$$[x \quad y \quad 1] = [v \quad w \quad 1]\,\mathbf{T} = [v \quad w \quad 1]\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

仿射变换

恒等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

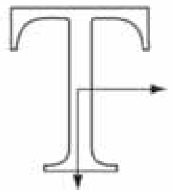
$$x = v \qquad y = w$$



伸缩变换

$$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

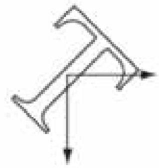
$$x = c_x v \qquad y = c_y w$$



旋转变换

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

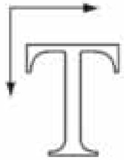
$$x = v\cos\theta - w\sin\theta \qquad y = v\sin\theta + w\cos\theta$$



平移变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

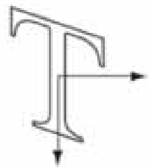
$$x = v + t_x \qquad y = w + t_y$$



（垂直）倾斜变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = v + s_v w \qquad y = w$$



（水平）倾斜变换

$$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = v \qquad y = s_h v + w$$

复杂仿射变换

- 通过一系列仿射变换操作完成
  - 因为仿射变换的组合还是仿射变换
- 矩阵形式

$$[x\ y\ 1] = [v\ w\ 1]\underbrace{T_1 T_2 \cdots}_{T}$$

  - T_i是基本放射变换
- 逆仿射变换
  - 假设仿射变换是可逆的$T = T_1 T_2 T_3$
  - 逆变换矩阵为$T^{-1} = T_3^{-1} T_2^{-1} T_1^{-1}$
  - 基本变换矩阵都是可逆矩阵

仿射变换的实现

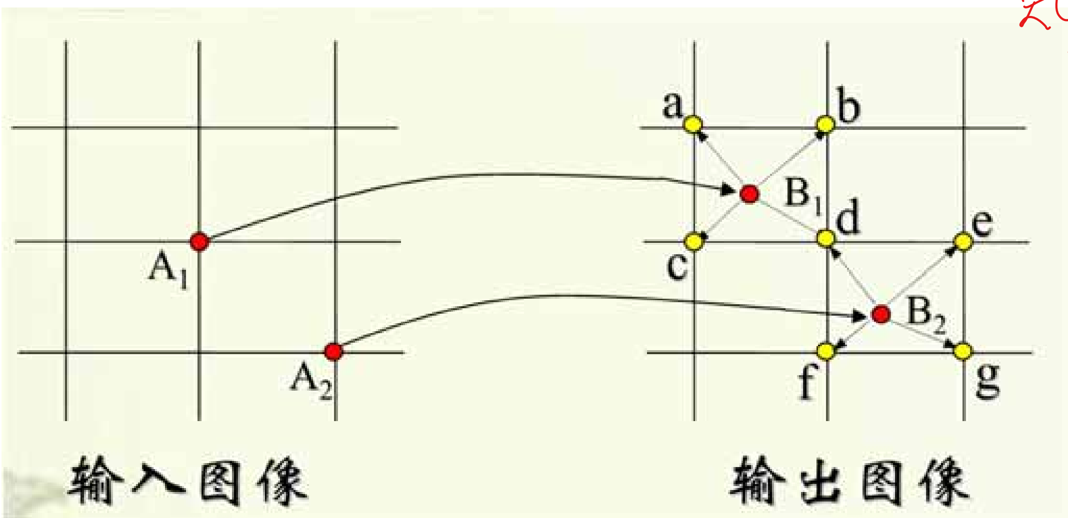
- 前向影射
  - 根据输入(v, w)，计算输出$(x, y) = T\{(v, w)\}$
  - 多个输入对应一个输出、空白输出

- 反向映射
  - 根据输出(x, y)，寻找输入$(v, w) = T^{-1}\{(\cancel{v, w})\}$
  - 更加有效

灰度内插

- 前向映射
  - 根据输入(v,w)，计算输出$(x,y) = T\{(v,w)\}$
  - 利用映射后的像素灰度值，计算输出图像像素的灰度值

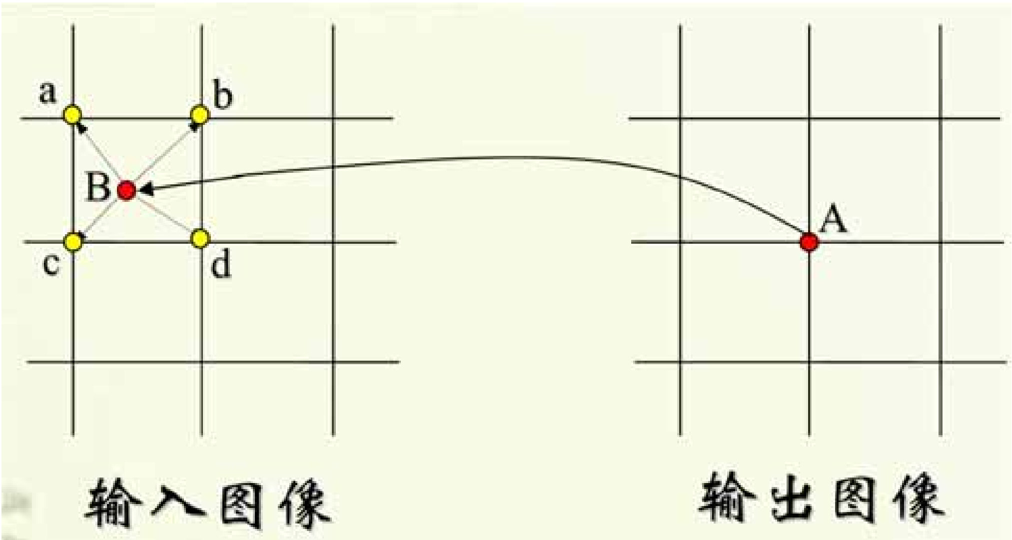
黄色点坐标为整数
需要内插



灰度内插

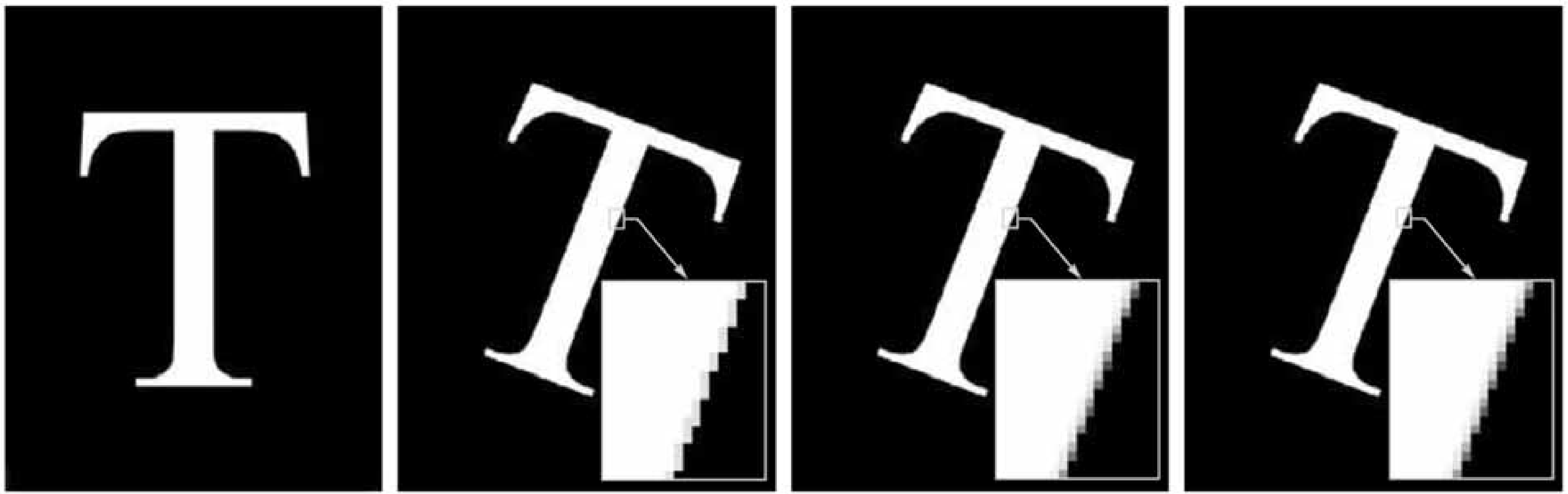
- 反向映射
  - 根据输出(x,y)，寻找输入$(v,w) = T^{-1}\{(v,w)\}$
  - 利用原图像内的像素灰度值，计算逆映射位置处的灰度值

计算B处内插
即变换后A
处灰度值



示例

- 图像旋转21°、反向映射



最近邻内插　　双线性内插　　双三次内插