提纲

- 背景知识
- 基本灰度变换函数
- 直方图处理
- 空间滤波基础
- 平滑空间滤波器
- 锐化空间滤波器
- 混合空间增强法

直方图处理（子目录）

- 灰度直方图
- 直方图均衡
- 直方图匹配
- 局部直方图处理
- 在图像增强中使用直方图统计

灰度直方图

- 直方图

$$h(r_k) = n_k$$

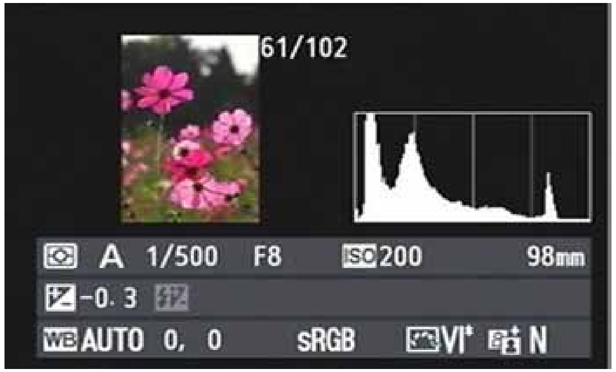
  - $r_k \in [0, L-1]$表示图像的第k个灰度值
  - n_k表示r_k在图像中出现的次数

- 归一化直方图

$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

  - 表示r_k在图像中出现的概率
  - 显然

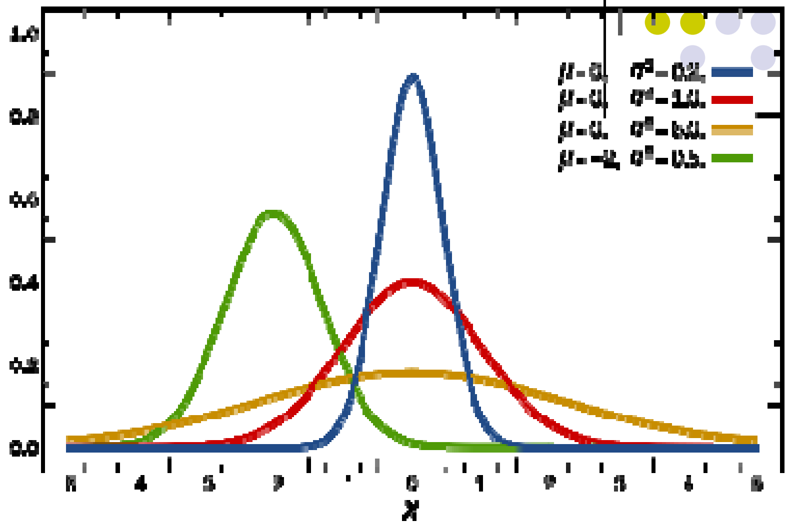
$$\sum_{k=0}^{L-1} p(r_k) = 1$$



概率

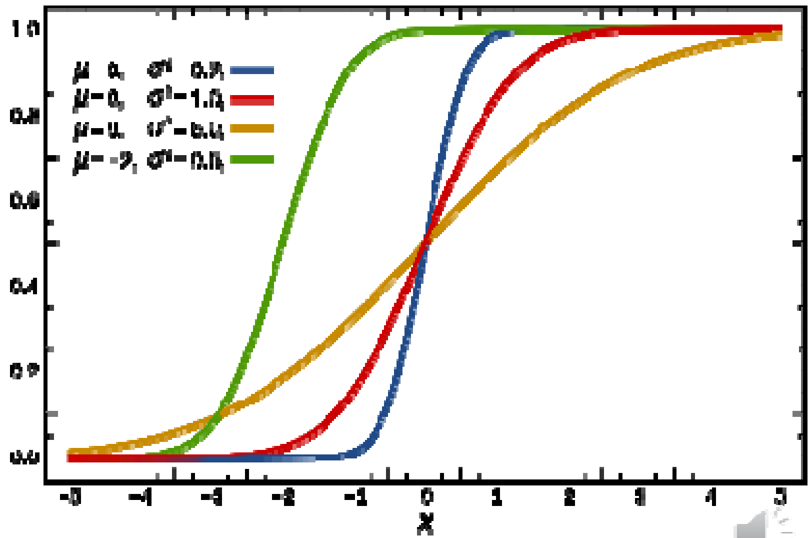
- 概率密度函数（PDF）

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



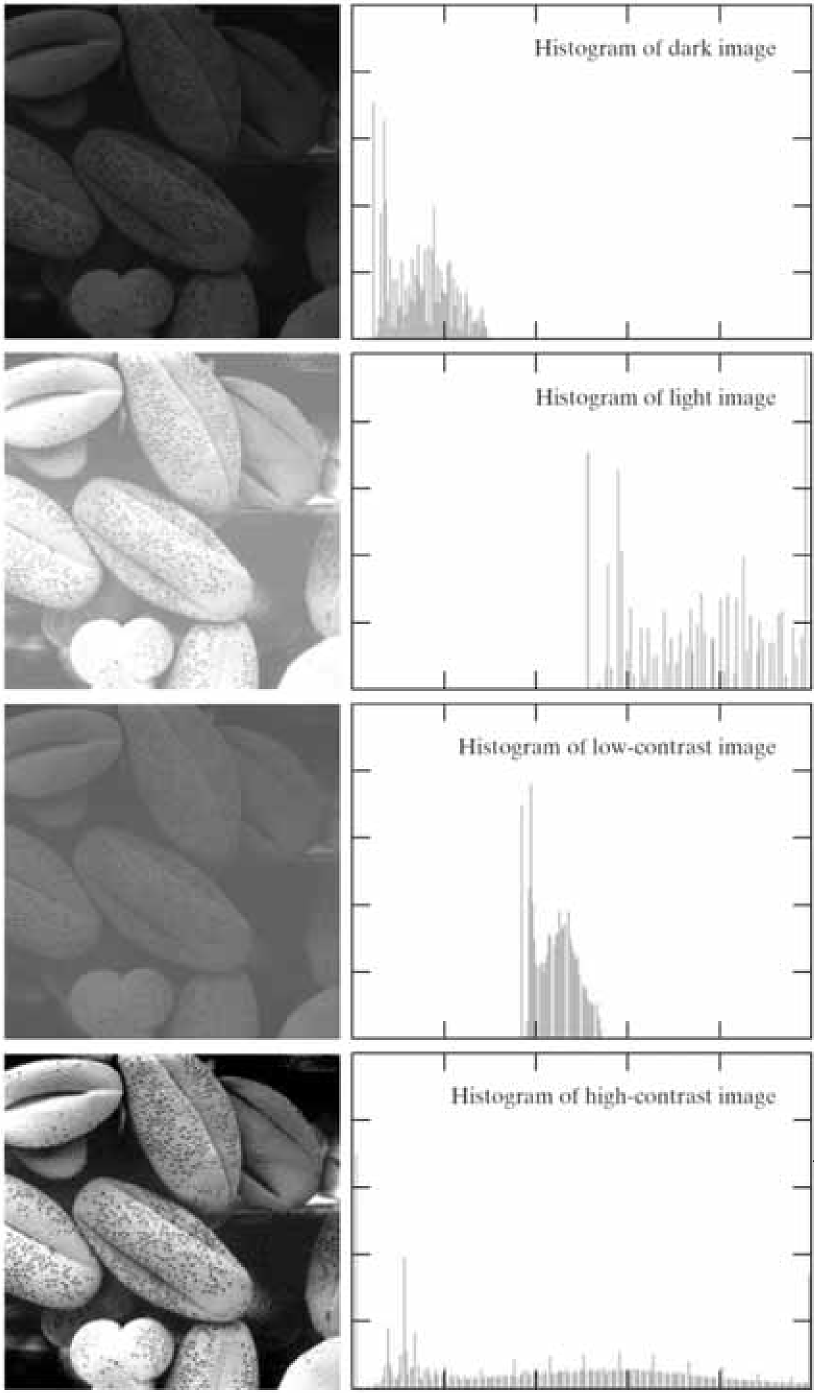
- 累计分布函数（CDF）

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulative_distribution_function

举例



暗图像

亮图像

什么是理想的
直方图形状？

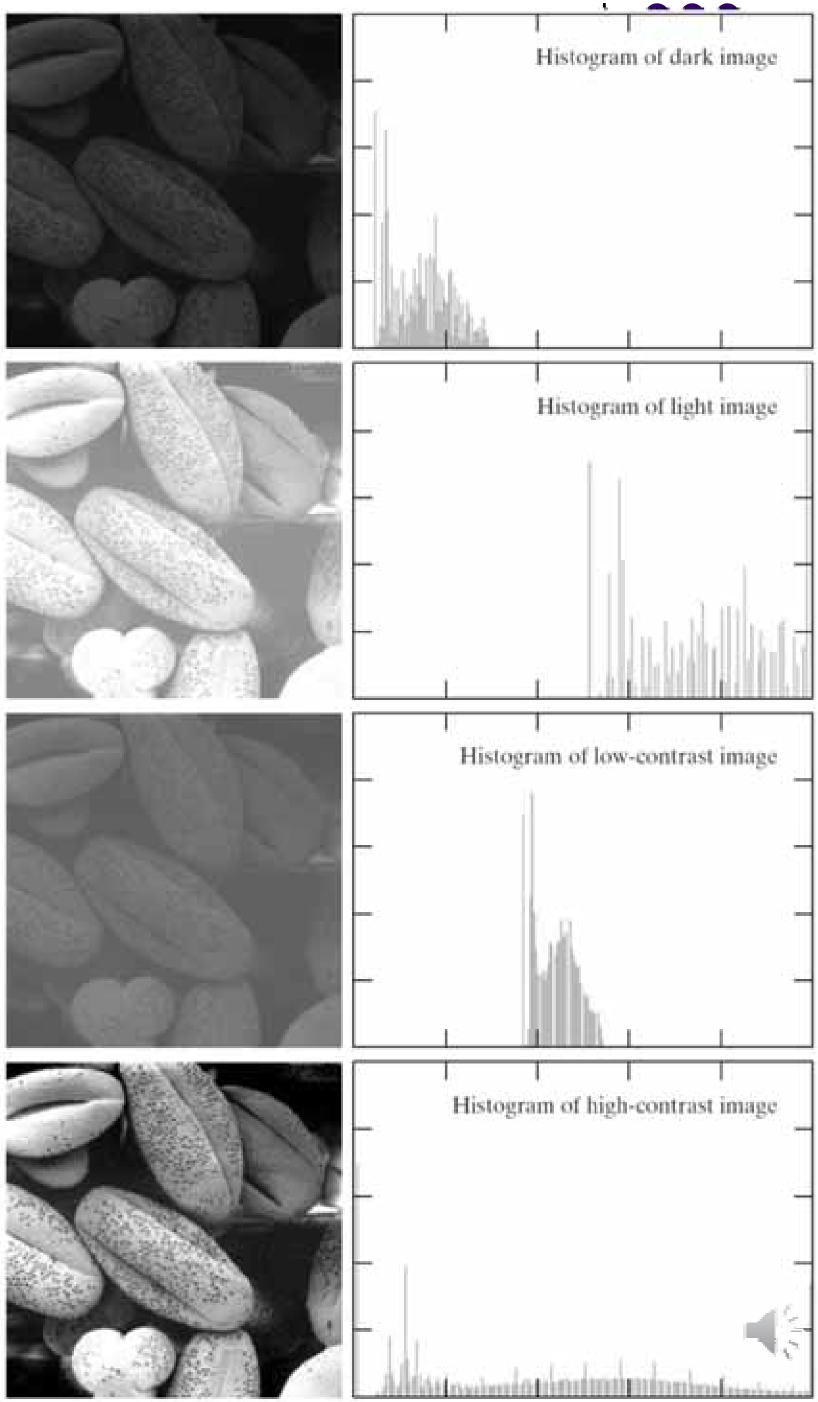
低对比度

均衡的直方图

高对比度

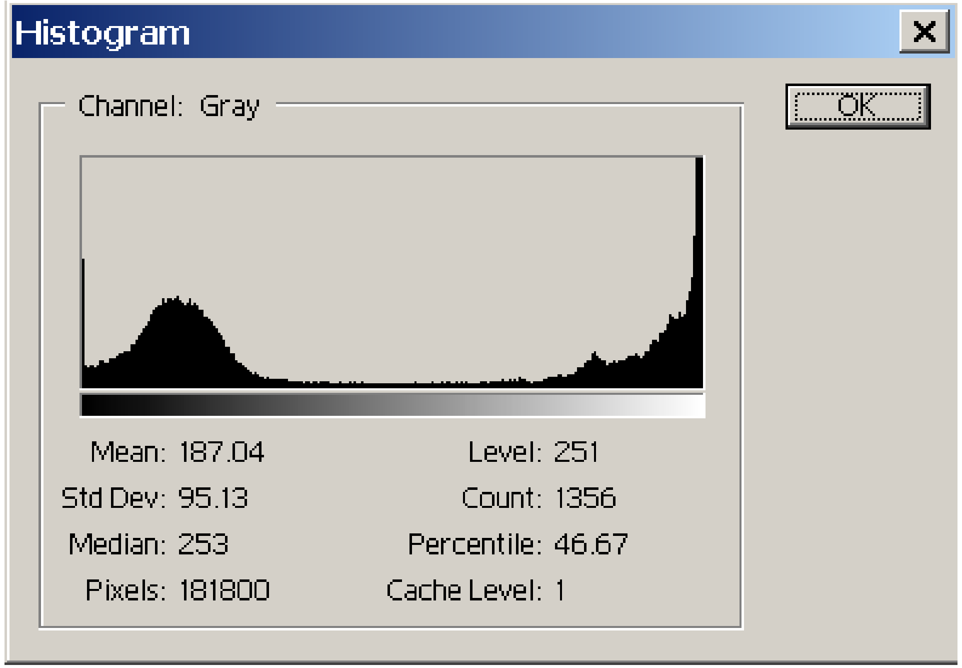
直方图的简单应用

- 检测图像的质量
  - 检查灰度范围
  - 计算方差
  - 计算与均匀分布的距离



直方图的简单应用

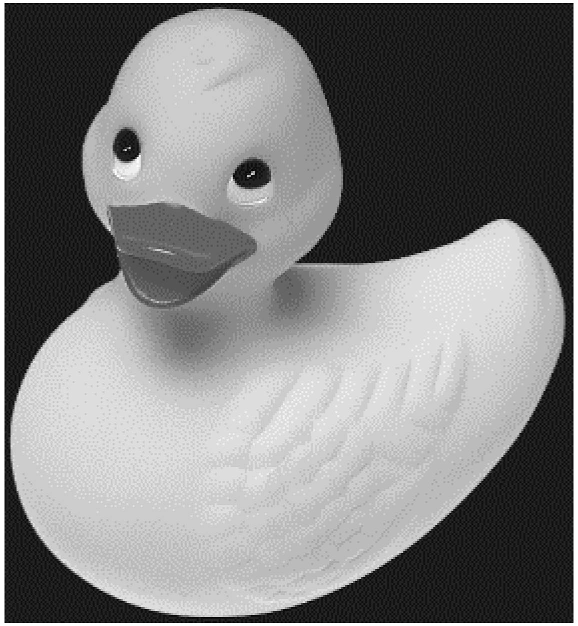
- 分割图像前景和背景

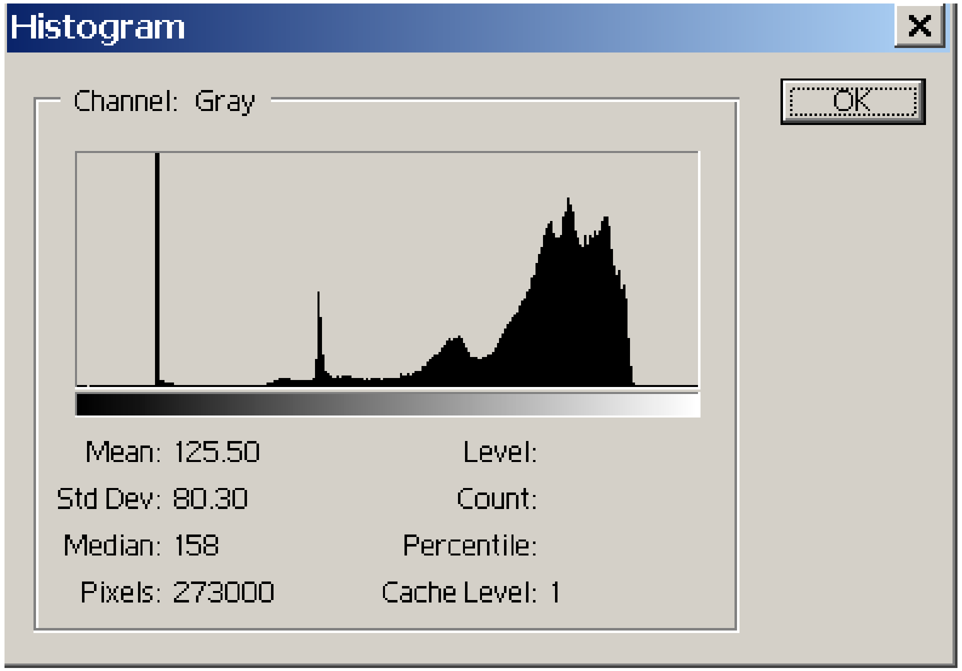


- 从直方图内寻找合适的阈值

直方图的简单应用

- 计算物体面积





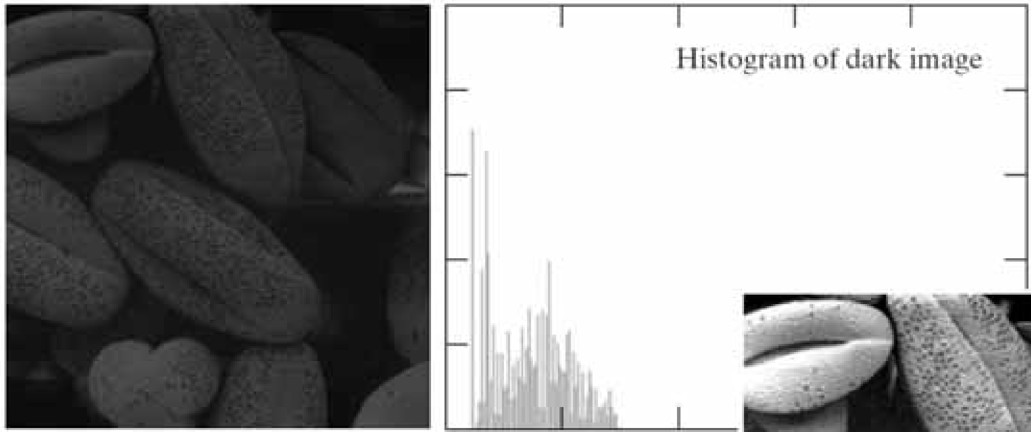
- 对直方图进行积分

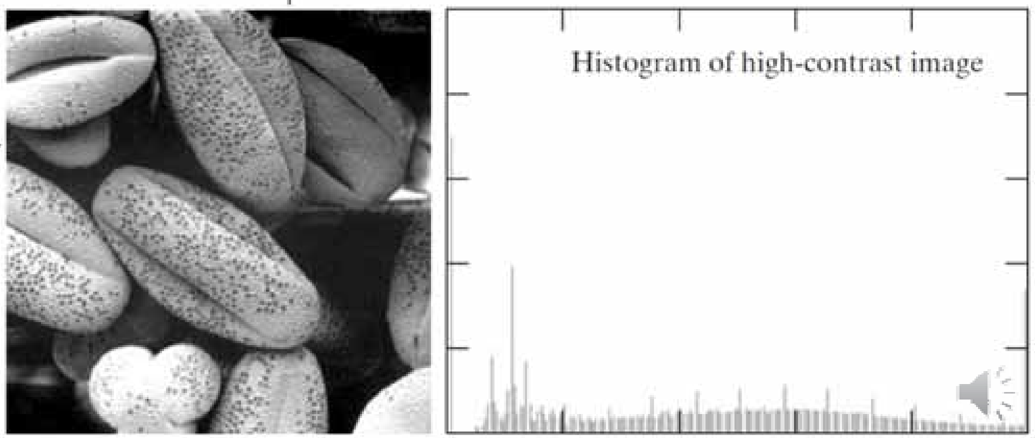
直方图均衡

- 通过灰度变换

$$s = T(r)$$

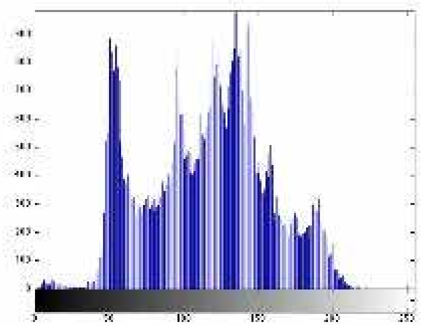
得到均衡的直方图



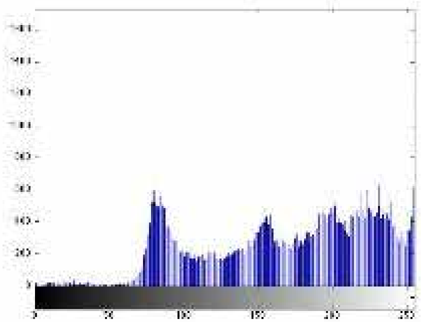


线性变换

原图

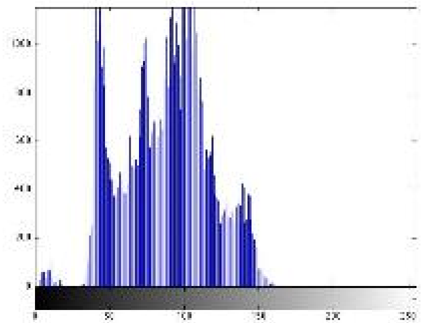


$s = 1.5 \times r$



$$s = T(r)$$
$$= a \times r + b$$

$s = 0.8 \times r$



核心问题

- 刻画灰度变换函数与直方图的关系
  - 假设有一幅输入图像A，经过灰度变换函数 $s = T(r)$，产生了输出图像B
  - 输入图像的直方图 $p_r(r)$ 和灰度变换函数 T，如何计算输出图像B的直方图 $p_s(s)$
- 单调递增变换函数
  - $r_2 > r_1 \Rightarrow T(r_2) \geq T(r_1)$
- 严格单调递增变换函数
  - $r_2 > r_1 \Rightarrow T(r_2) > T(r_1)$

单调连续函数

- $r \in [0, L-1]$

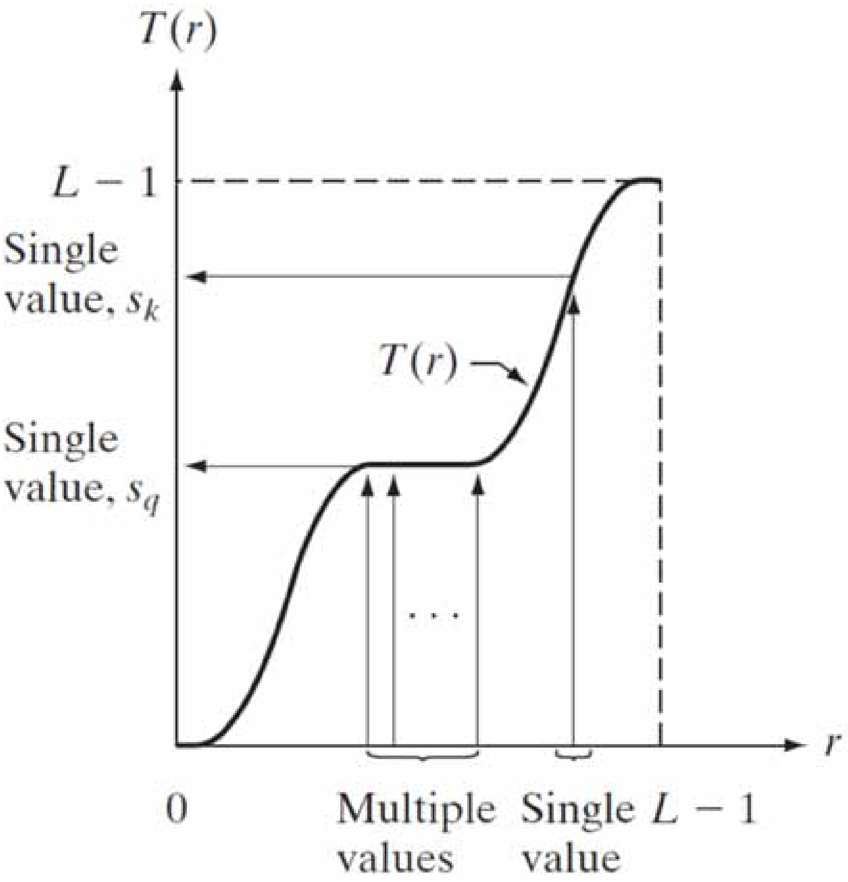
$$s = T(r)$$

  - $T(r)$在区间$[0, L-1]$为单调递增函数
  - 当$0 \le r \le L-1$时， $0 \le T(r) \le L-1$

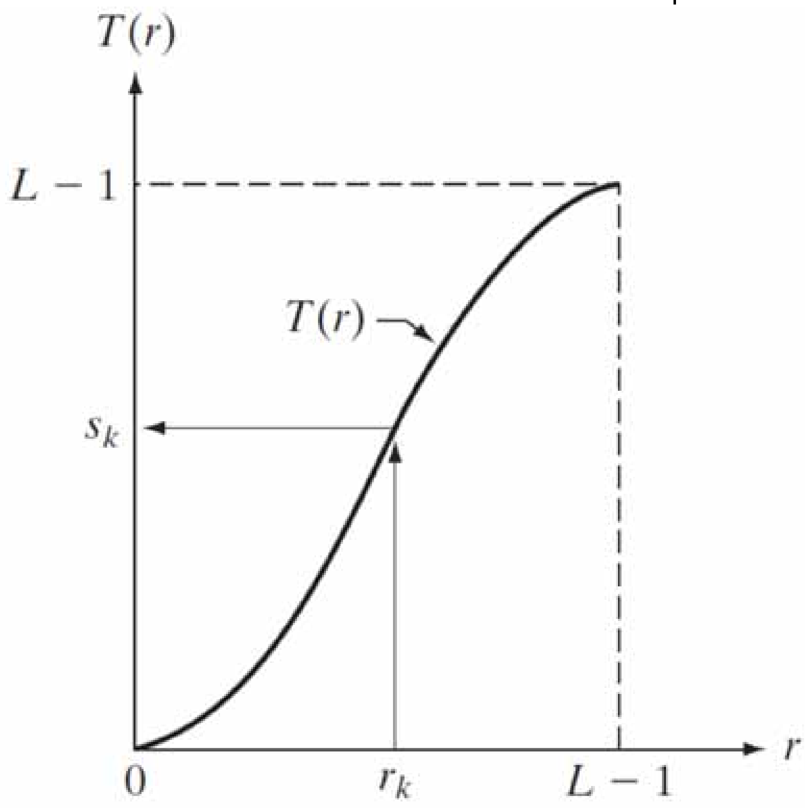
- 更强的假设
  - $T(r)$在区间$[0, L-1]$为严格单调递增函数

$$r = T^{-1}(s)$$

举例



单调递增



严格单调递增

概率密度公式

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 变换函数$s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度$p_s(s)$?

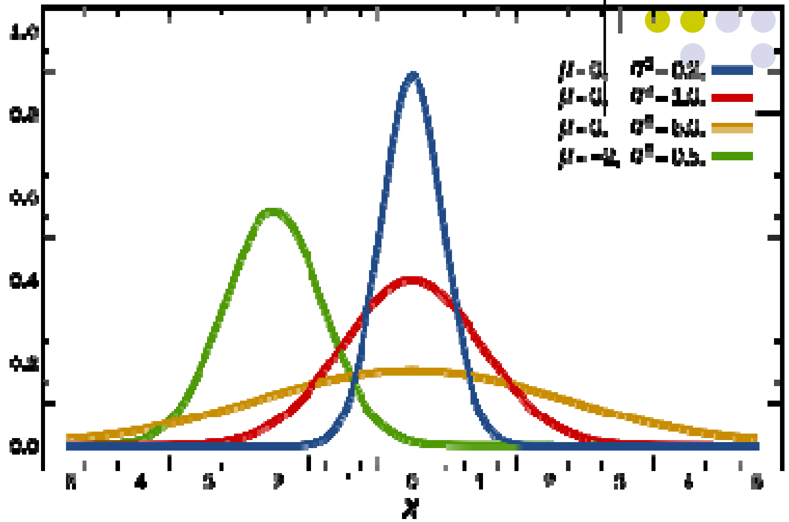
$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right|$$

$$= p_r\big(T^{-1}(s)\big)\frac{1}{\left|T'\big(T^{-1}(s)\big)\right|}$$

概率

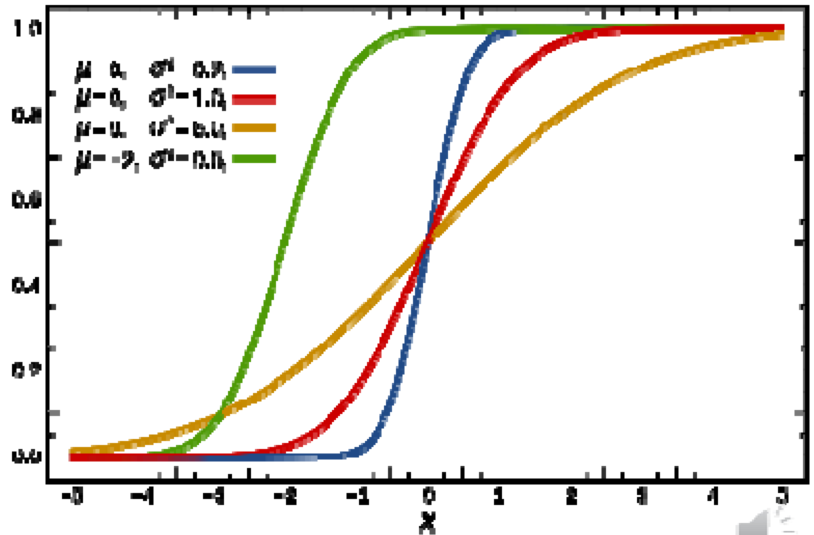
- 概率密度函数（PDF）

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



- 累计分布函数（CDF）

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulative_distribution_function

证明过程 $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

- https://en.wikibooks.org/wiki/Probability/Transformation_of_Probability_Densities
  - 单调递增

$$p_s(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[S \le s] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[T(R) \le s]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[R \le T^{-1}(s)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P[R \le r]$$

$$= \frac{\mathrm{d}P[R \le r]}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = p_r(r) \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$$

  - 单调递减

小测试

线性运算

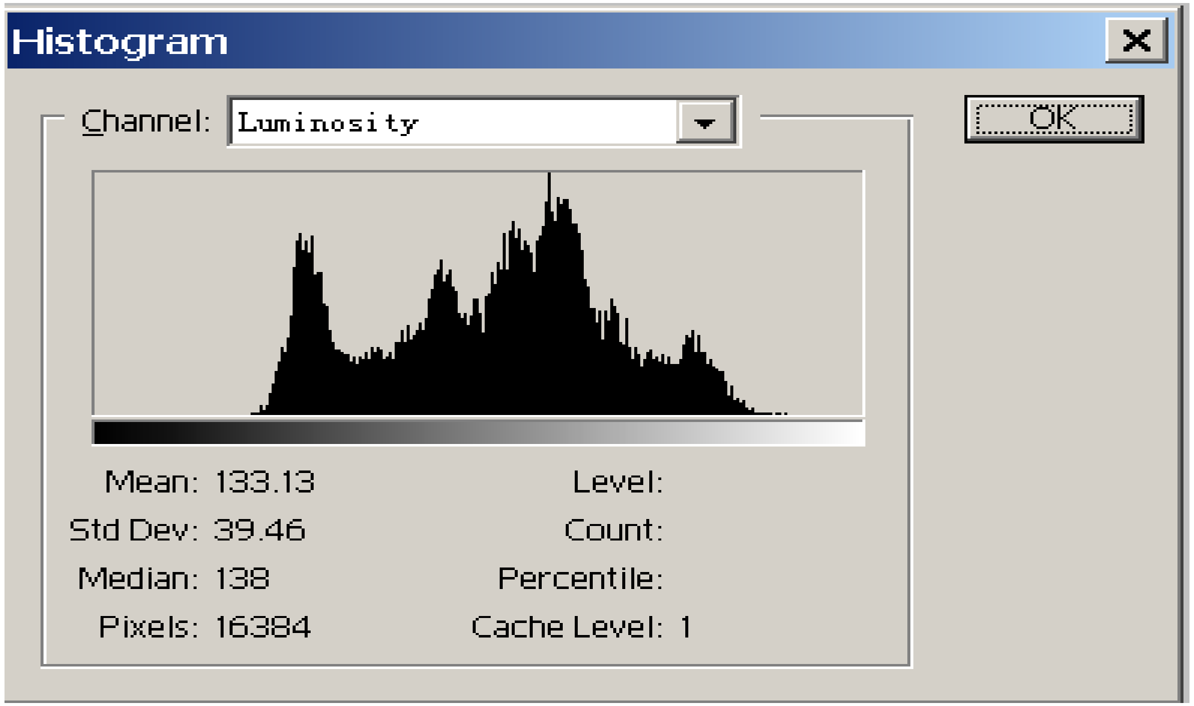
$$s = T(r) = a \times r + b$$

计算$p_r(r)$经线性运算后的直方图$p_s(s)$:

$$p_s(s) = p_r\left(T^{-1}(s)\right)\frac{1}{\left|T'\left(T^{-1}(s)\right)\right|} = \frac{1}{a}p_r\left(\frac{s-b}{a}\right)$$

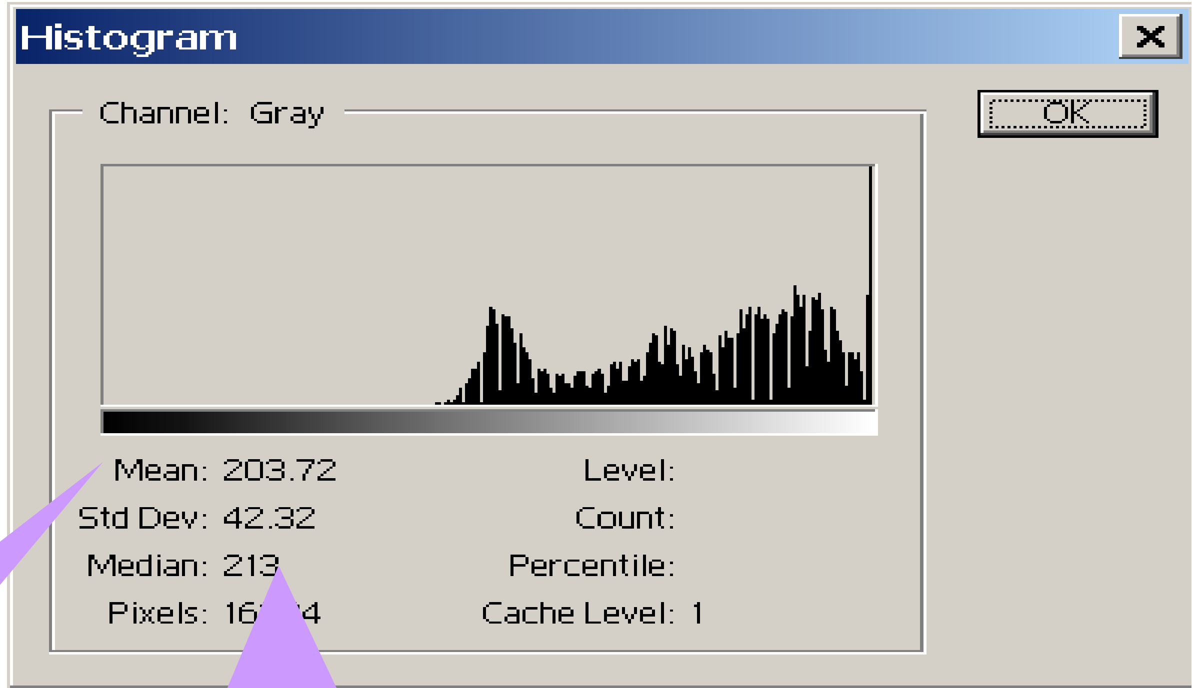
举例

$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$



举例

$$s = T(r) = 1.2 \times r + 50$$



均值：203.72 ≈ 1.2*133.13+50

中值：213≈1.2*138+50

直方图均衡化

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$
- 变换函数$s = T(r)$
- 输出图像灰度值概率密度$p_s(s)$

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right|$$

- 如何设计$T(r)$使得$p_s(s)$成为均匀分布？

直方图均衡化

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- 变换函数

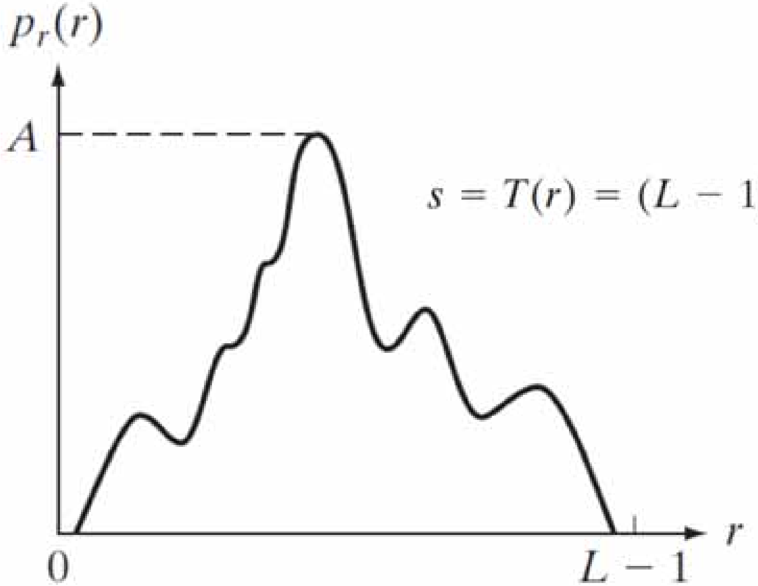
$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw$$

  - 单调递增
  - 属于区间$[0, L-1]$
- 效果

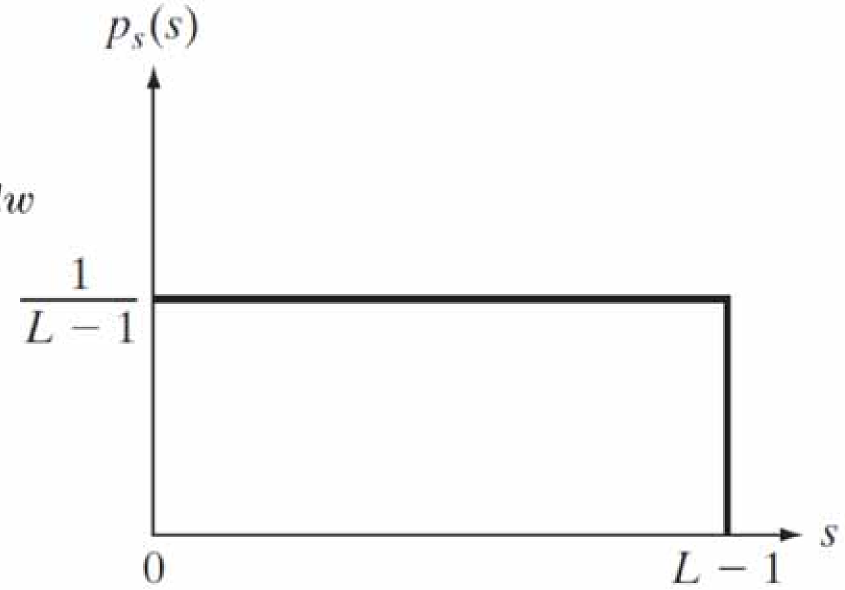
$$\begin{aligned}\frac{ds}{dr} &= \frac{dT(r)}{dr} \\ &= (L-1)\frac{d}{dr}\left[\int_0^r p_r(w)\,dw\right] \\ &= (L-1)p_r(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_s(s) &= p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| \\ &= p_r(r)\left|\frac{1}{(L-1)p_r(r)}\right| \\ &= \frac{1}{L-1} \qquad 0 \le s \le L-1\end{aligned}$$

图形示意



$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw$$



举例

- 输入图像灰度值的概率密度

$$p_r(r) = \begin{cases} \dfrac{2r}{(L-1)^2} & \text{for } 0 \le r \le L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 变换函数

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw = \frac{2}{L-1}\int_0^r w\,dw = \frac{r^2}{L-1}$$

- 输出图像灰度值的概率密度

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{d}{dr}\frac{r^2}{L-1}\right]^{-1}\right|$$

$$= \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\frac{(L-1)}{2r}\right| = \frac{1}{L-1}$$