空间和灰度分辨率

- 空间分辨率
  - 图像中可辨别的最小细节的度量
  - 单位距离线对数(line pairs per unit distance)
  - 单位距离点数(dots per unit distance)
    - 单位英尺点数(dots per inch, dpi）
    - 报纸 75 dpi，杂志 133 dpi，书 2044 dpi
- 空间单位很重要
  - 图像的像素大小并不能表示清晰程度
  - 像素大小可以用来反映设备的成像能力

空间和灰度分辨率

- 灰度分辨率
  - 灰度级别中可体现的最小变化
    - 灰度级别通常是2的整数次幂，如$2^8 = 256$
  - 用比特数表示灰度分辨率
    - 256个灰度级别意味着8比特灰度分辨率
- 真正可辨别的灰度变化
  - 噪声
  - 饱和度
  - 人类感知能力

举例

- 空间分辨率

1250 dpi

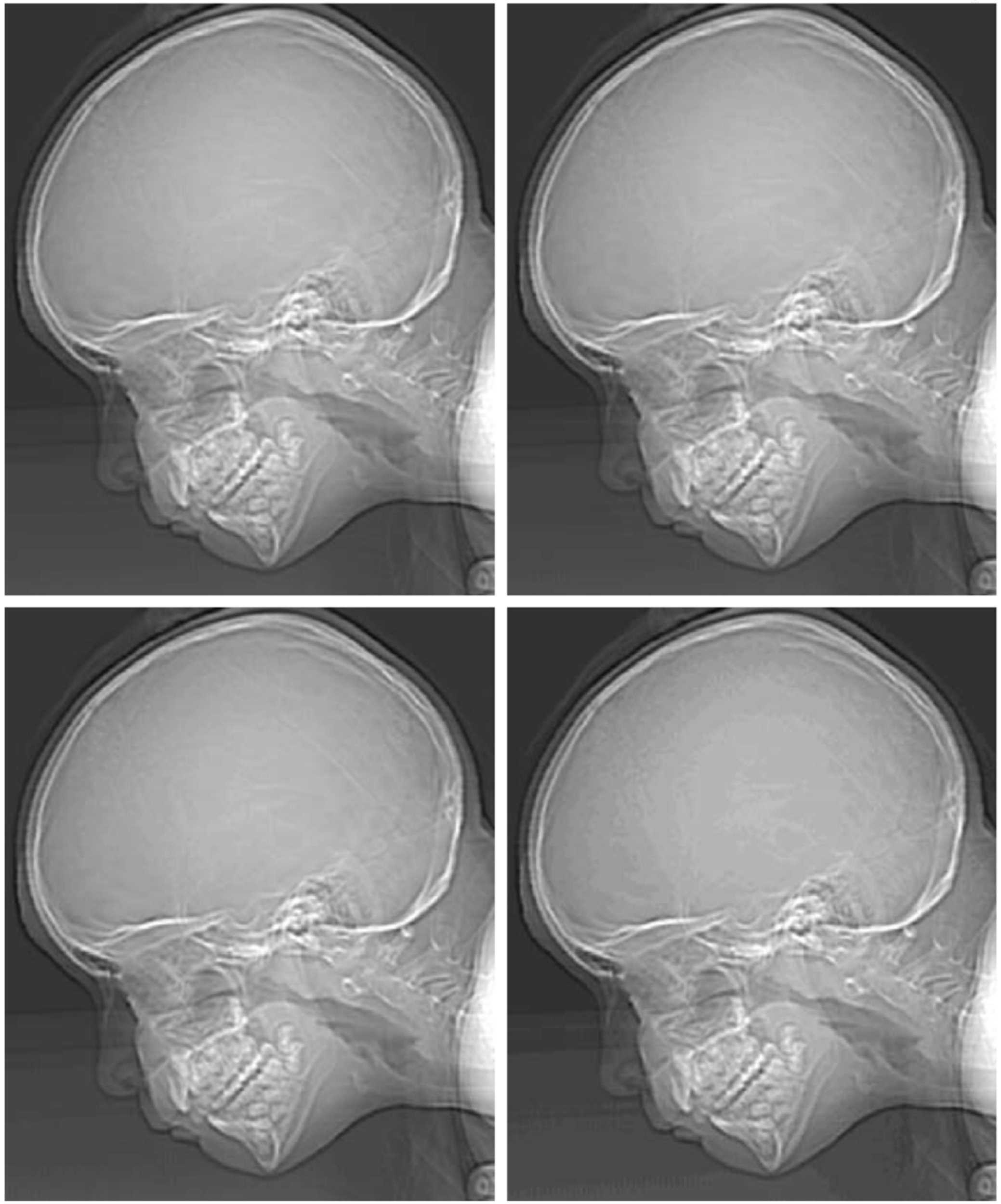
300 dpi

150 dpi

72 dpi

举例

- 灰度分辨率



256 灰度级

128 灰度级

64 灰度级

32 灰度级

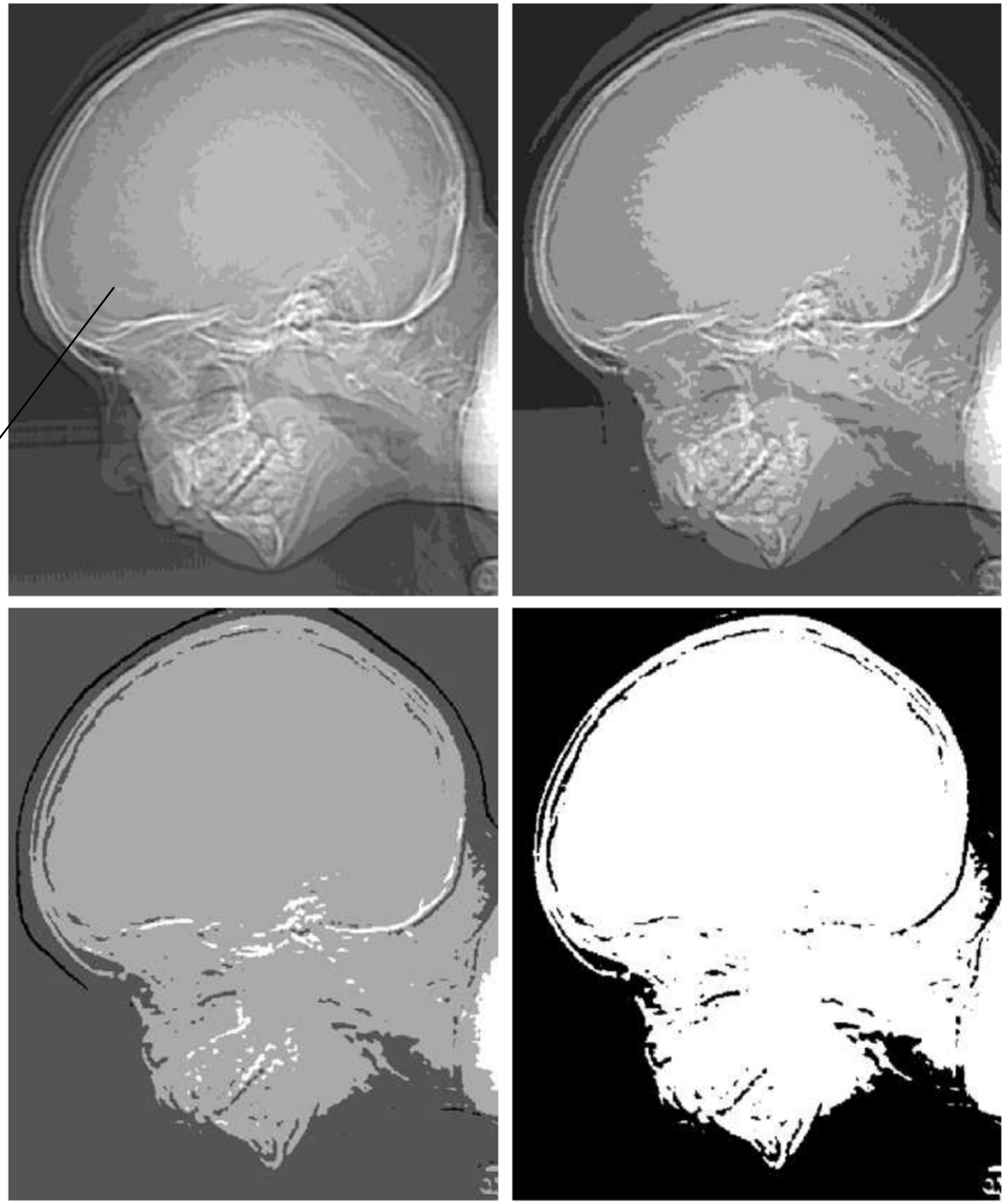
举例

- 灰度分辨率

伪轮廓

16
灰度级

8
灰度级



4
灰度级

2
灰度级

联合影响

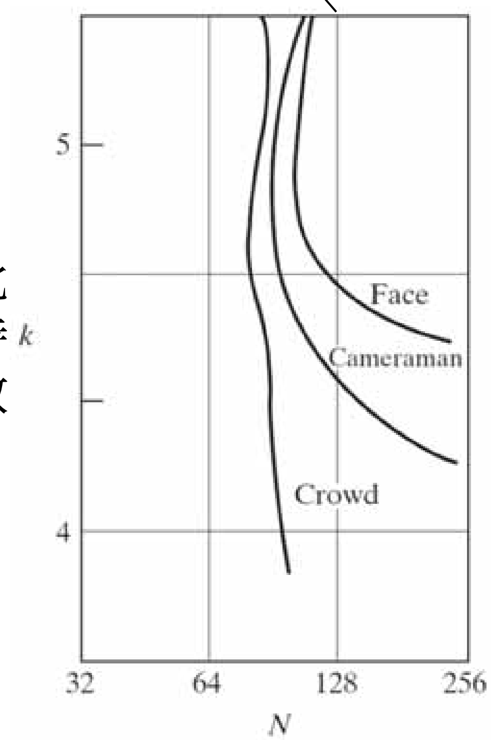
1. 图像细节越多，需要的比特数越少
2. 增加空间分辨率，可适当降低比特数

少量细节

中等细节

大量细节

比特数



图像大小

等偏爱曲线

最佳量化

- 最佳量化：使量化误差最小的量化方法
  - 使用均方误差评价量化质量
- 计算过程
  - Z和q分别代表图像灰度和其量化值
  - $p(Z)$为像素灰度概率密度函数
  - Z的取值范围$[H_1, H_2]$，量化层数为K
  - 均方误差
    $$\delta^2 = \sum_{k=1}^{K} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (Z - q_k)^2 p(Z) dZ$$
    - 属于$[Z_k, Z_{k+1}]$的灰度被量化为q_k，$k = 1, \ldots, K$

最佳量化

- 优化问题

$$\min_{Z_1,\dots,Z_{K+1},q_1,\dots,q_K} \delta^2 = \sum_{k=1}^{K} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (Z-q_k)^2 p(Z)dZ$$

- 假设$P(Z)$为均匀分布

$$\delta^2 = p(Z) \sum_{k=1}^{K} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (Z-q_k)^2 dZ$$

$$= p(Z)\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{K}[(Z_{k+1}-q_k)^3-(Z_k-q_k)^3]$$

- 上式分别对Z_k和q_k求导，并令等于0

最佳量化

- 目标函数

$$\sum_{k=1}^{K}[(Z_{k+1}-q_k)^3-(Z_k-q_k)^3]$$

  - 例如对Z_2求导

$$0=-3(Z_2-q_2)^2+3(Z_2-q_1)^2$$

$$Z_2=\frac{1}{2}(q_1+q_2)$$

  - 以此类推

$$Z_k=\frac{1}{2}(q_{k-1}+q_k),\qquad k=2,3,\ldots,K$$

    - Z_k位于q_{k-1}和q_k的中间

最佳量化

- 目标函数

$$\sum_{k=1}^{K}[(Z_{k+1}-q_k)^3-(Z_k-q_k)^3]$$

  - 例如对q_2求导

$$0=-3(Z_3-q_2)^2+3(Z_2-q_2)^2$$

$$q_2=\frac{1}{2}(Z_3+Z_2)$$

  - 以此类推

$$q_k=\frac{1}{2}(Z_{k+1}+Z_k),\qquad k=2,3,\ldots,K$$

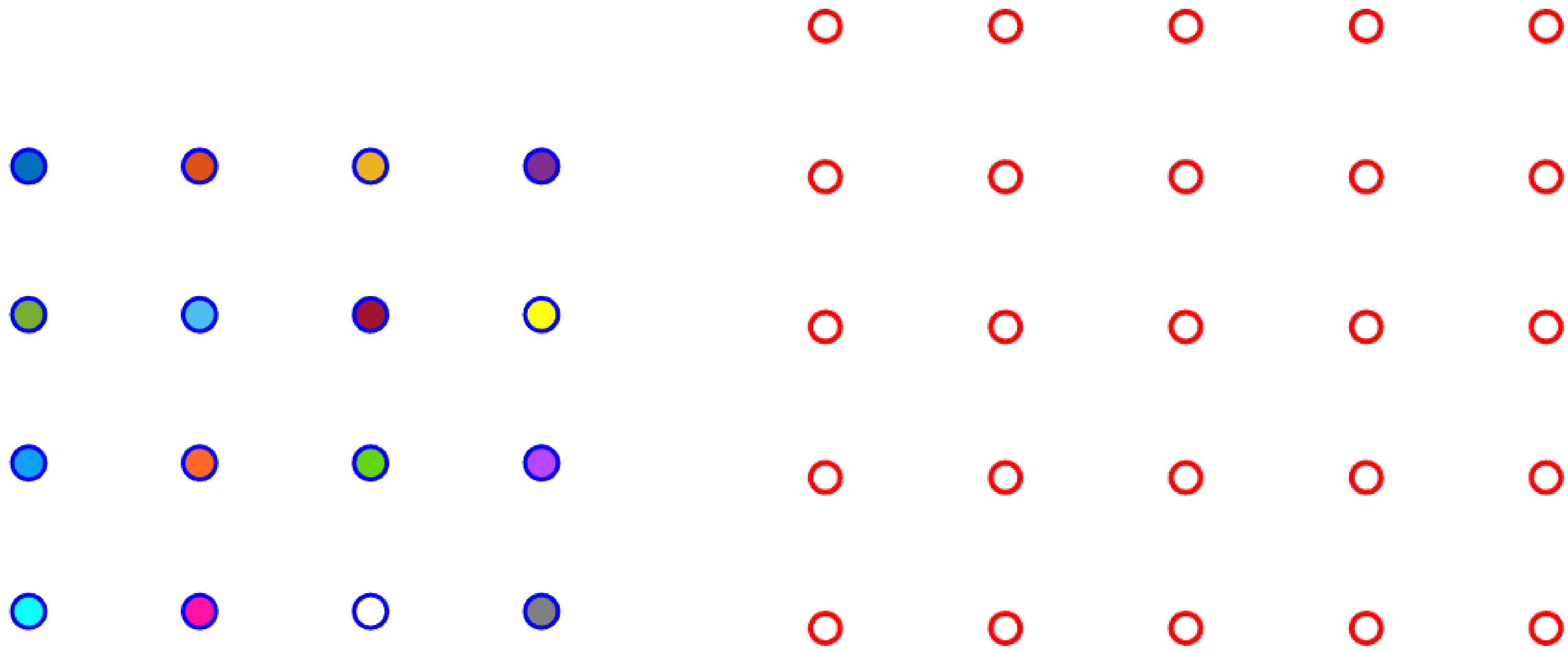
    - q_k位于Z_k和Z_{k+1}的中间

最佳量化

- 结论
  - Z_k位于q_{k-1}和q_k的中间，q_k位于Z_k和Z_{k+1}的中间
  - 将区间$[H_1, H_2]$分为连续的K等份
    - $\left[Z_1 = H_1, Z_2 = H_1 + \frac{H_2-H_1}{K}\right]$
    - $\left[Z_2 = H_1 + \frac{H_2-H_1}{K}, Z_3 = H_1 + \frac{2(H_2-H_1)}{K}\right], \ldots,$
    - $\left[Z_K = H_1 + \frac{(K-1)(H_2-H_1)}{K}, Z_{K+1} = H_2\right]$
  - 将q_k设置为区间$[Z_k, Z_{k+1}]$的中心
    - $q_k = \frac{1}{2}(Z_{k+1} + Z_k), \quad k = 2,3, \ldots, K$
  - 量化误差：$\frac{(H_2-H_1)^2}{12K^2}$

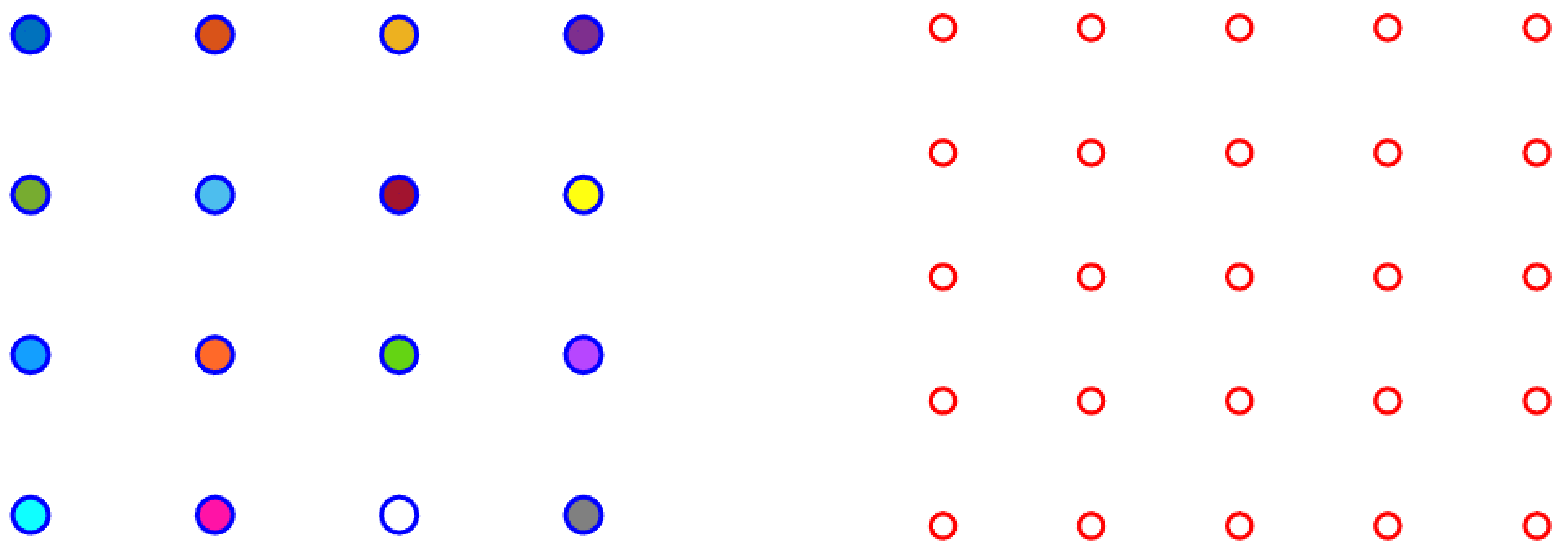
图像内插

- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正



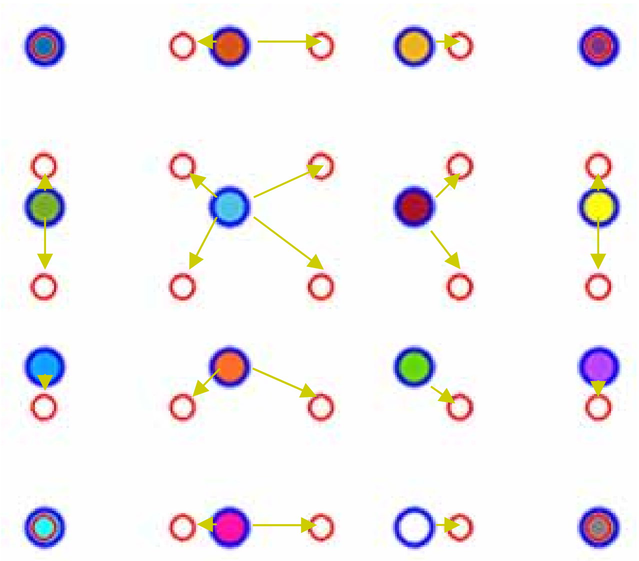
图像内插

- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正



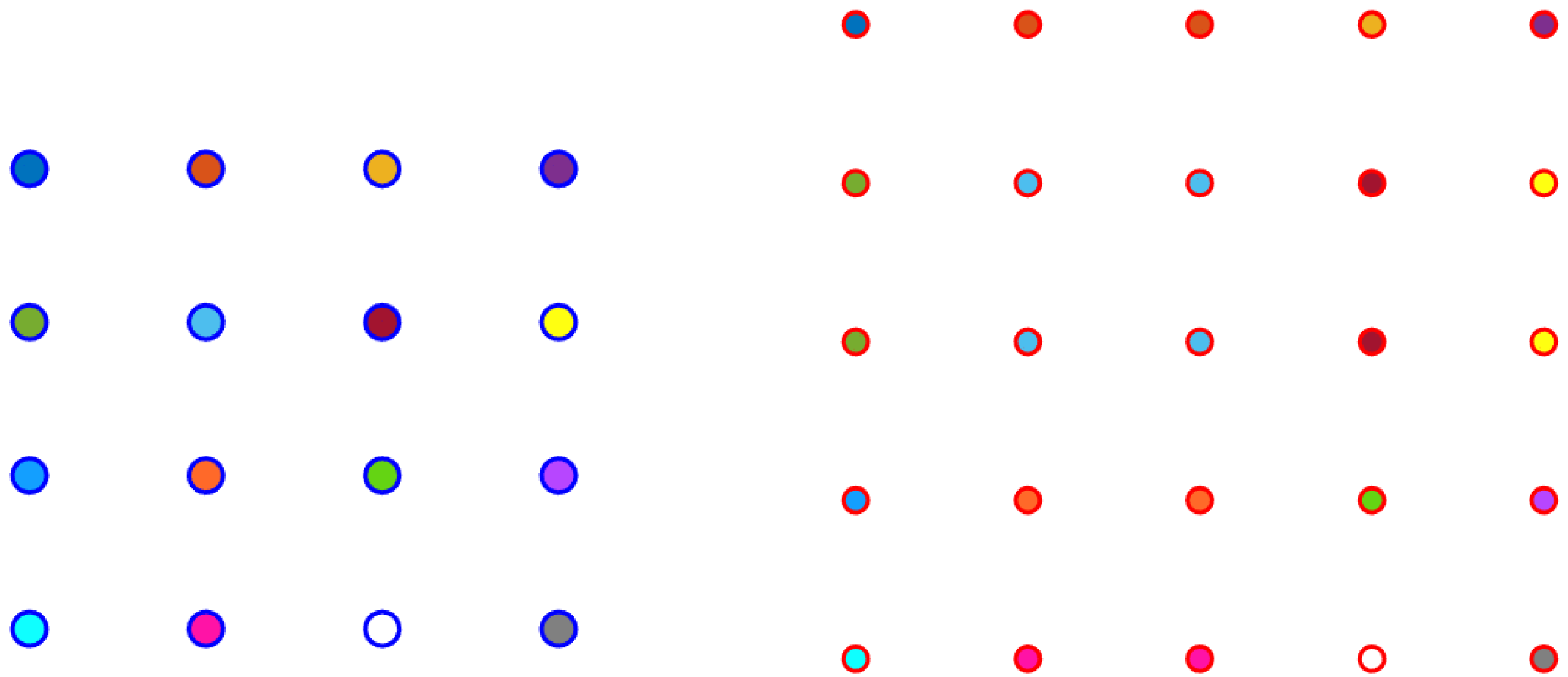
图像内插

- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正



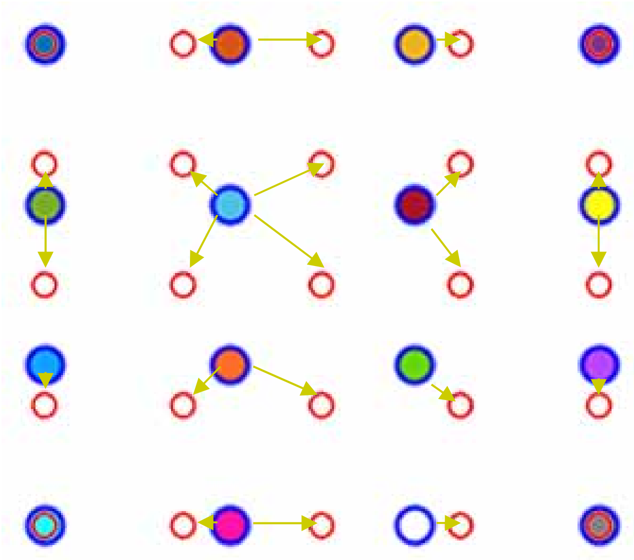
图像内插

- 用已知数据来估计未知位置的数值
  - 放大、缩小、旋转、几何校正



图像内插方法

1. 最近邻内插
   - 使用最近邻的像素进行赋值

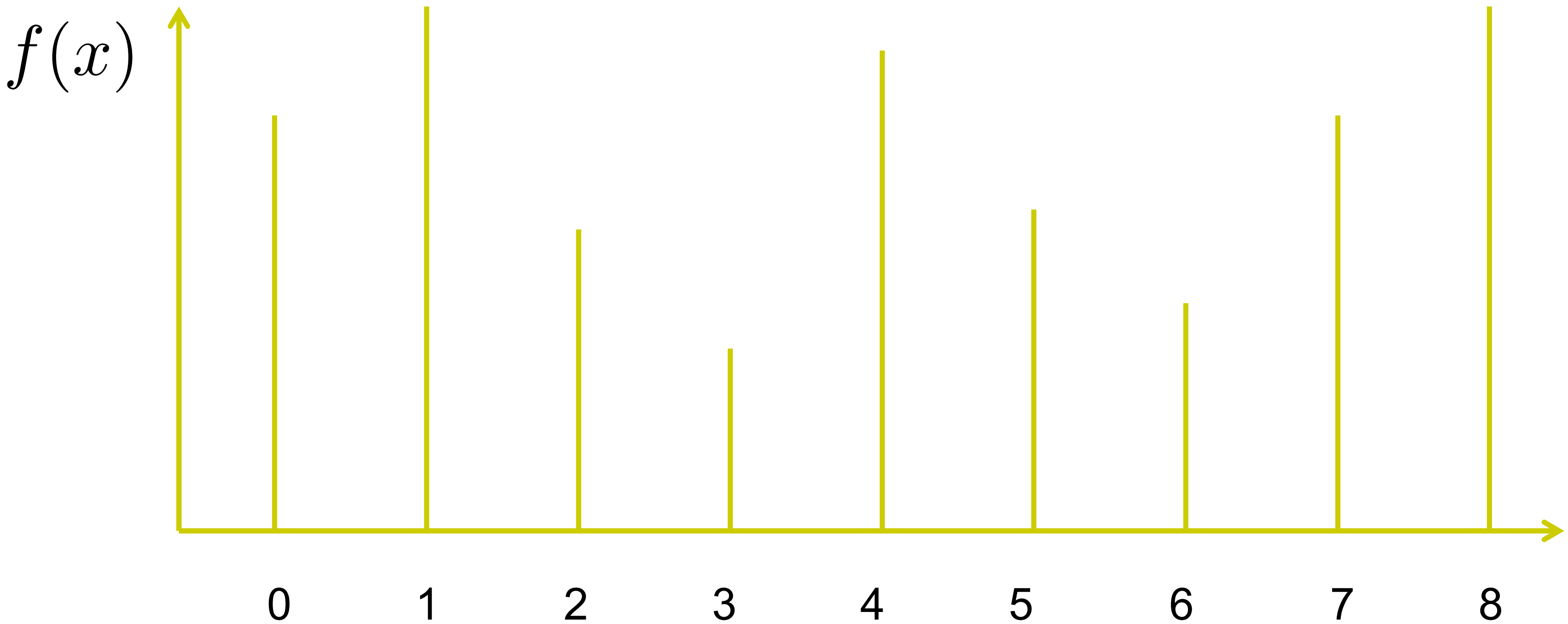


图像内插方法

1. 最近邻内插

$$f(0) = 10$$

$$f(1) = 12$$



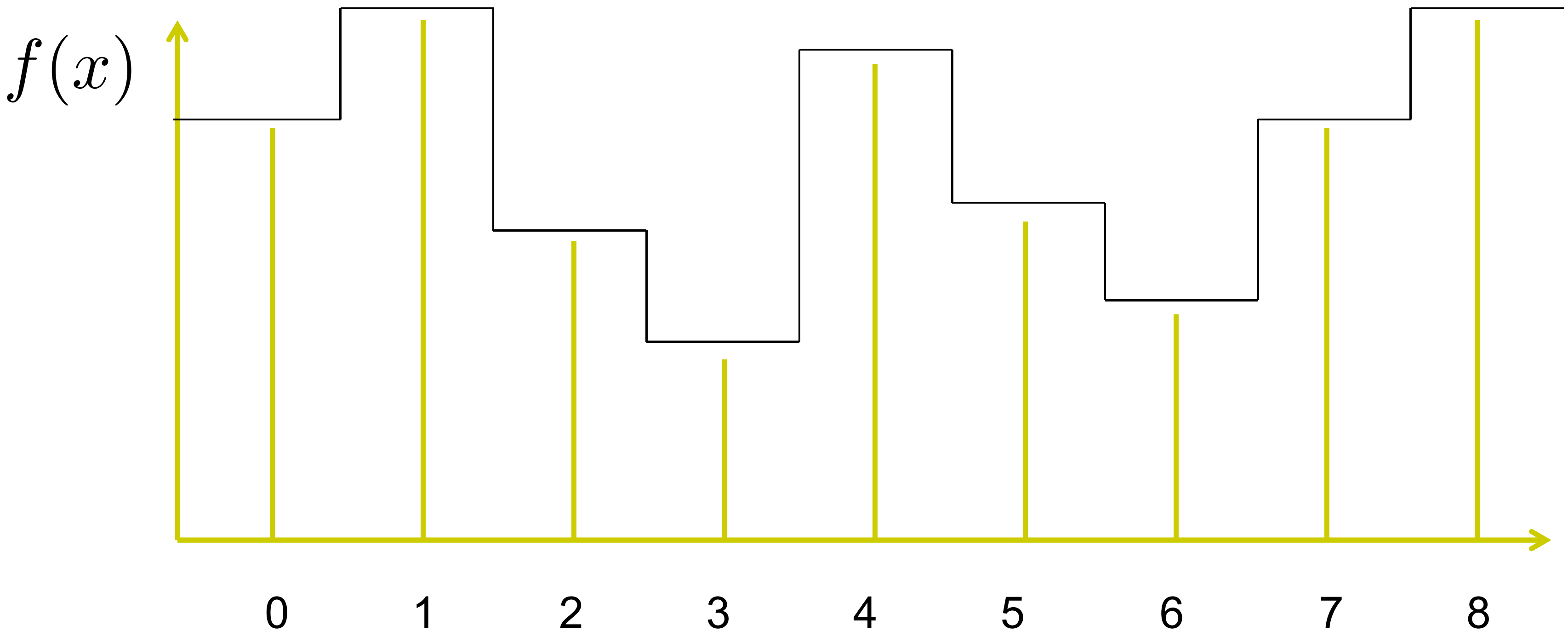
图像内插方法

1. 最近邻内插

$$f(0) = 10$$
$$f(1) = 12$$

不平滑、失真

$$f(0.4) = f(0), f(0.6) = f(1), f(0.5) = \ldots$$



图像内插方法

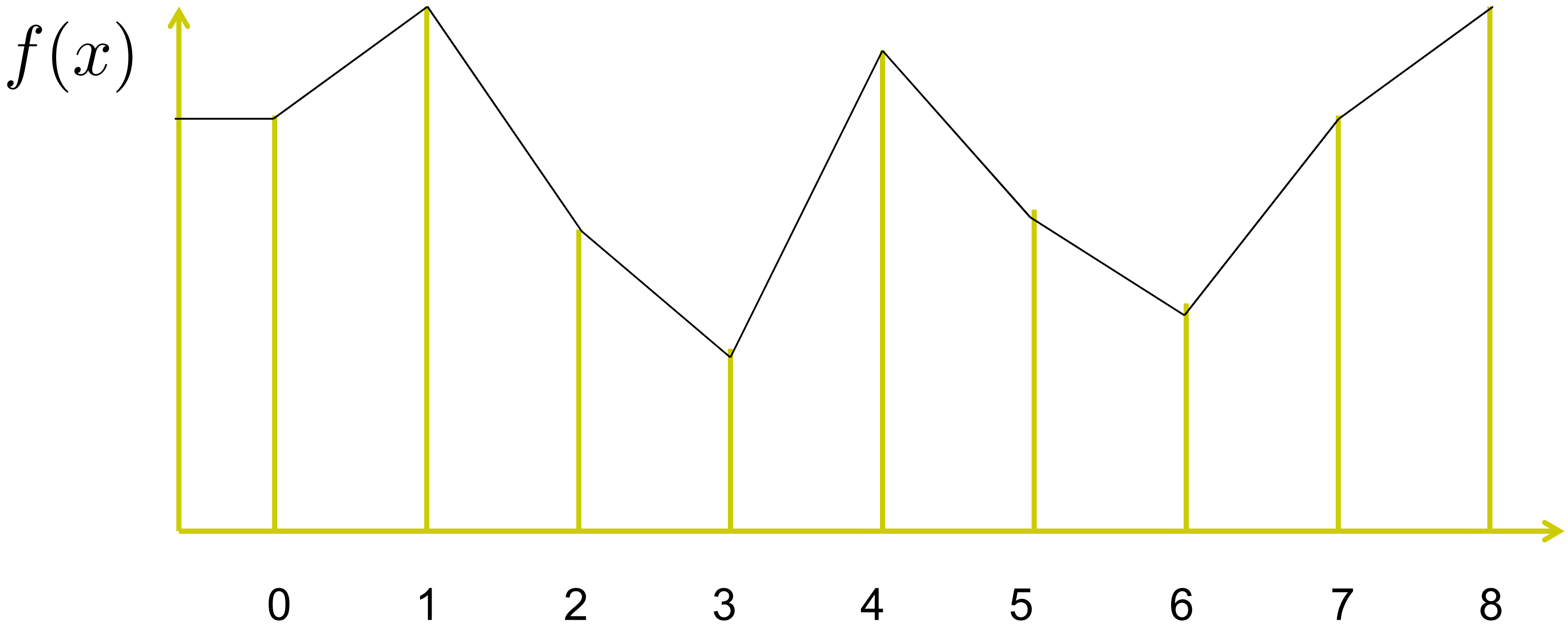
2. 双线性内插

- 线性内插

$$f(0) = 10, f(1) = 12$$

$$f(x) = 10 + x * 2$$

$$f(0.4) = 10.8$$



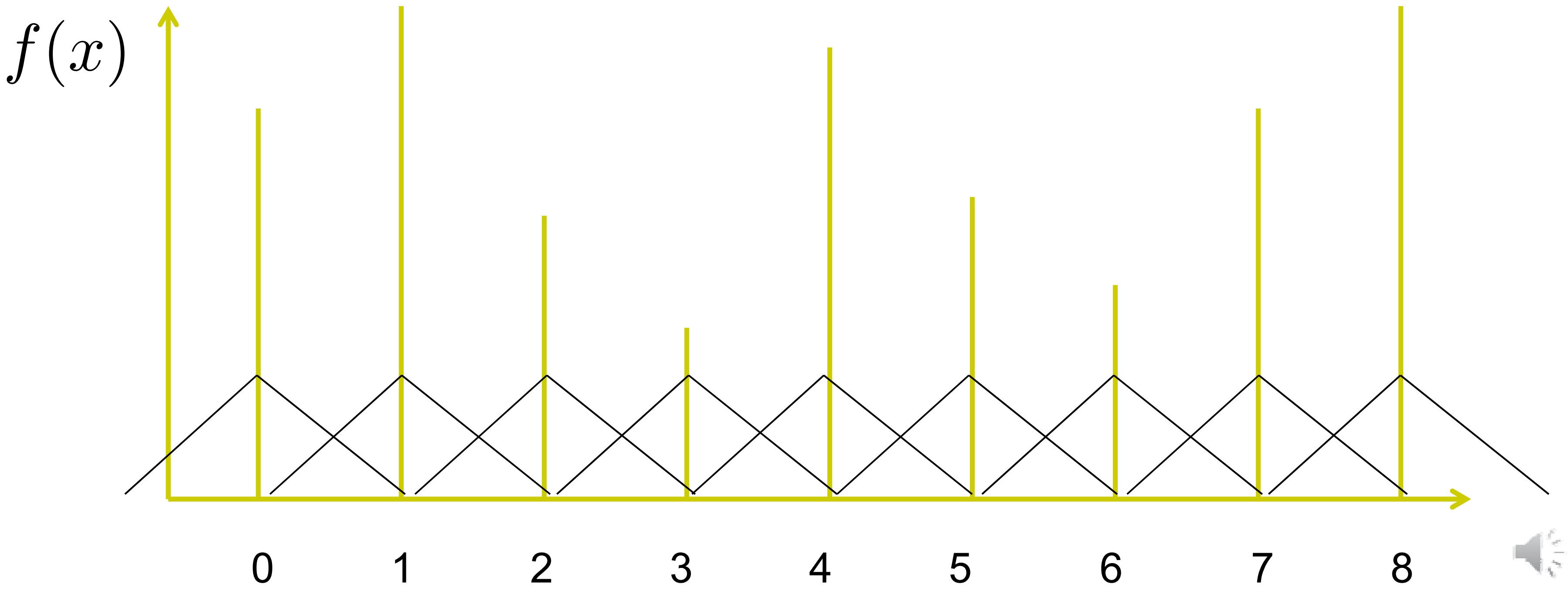
图像内插方法

2. 双线性内插
   - 线性内插

$$f(0) = 10, f(1) = 12$$

$$f(x) = 10 + x * 2$$

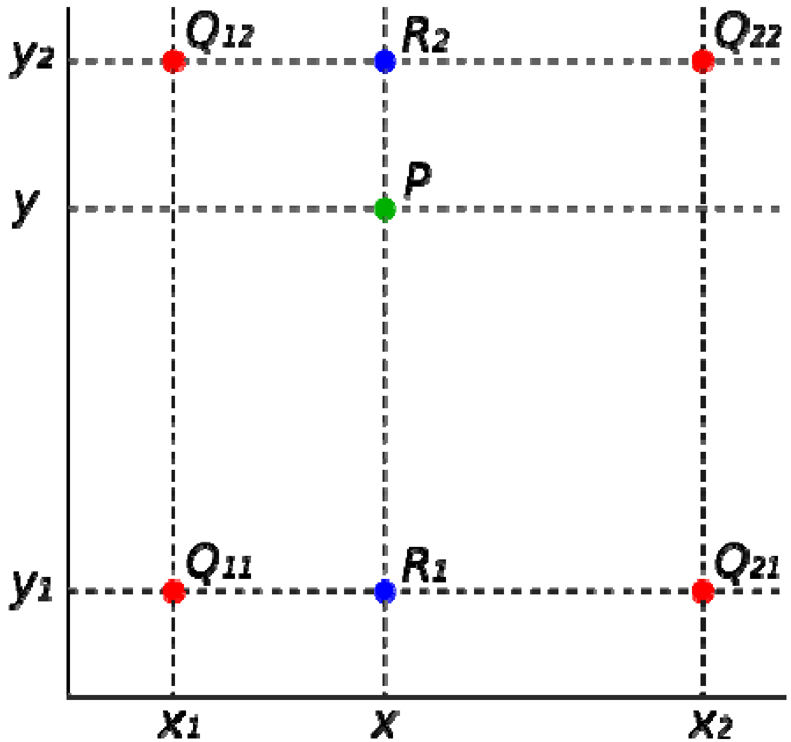
$$f(0.4) = 0.6 * 10 + 0.4 * 12 = 6 + 4.8 = 10.8$$



图像内插方法

2. 双线性内插

- $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$, $Q_{22} = (x_2, y_2)$, $P = (x, y)$
- 估计$f(x, y)$

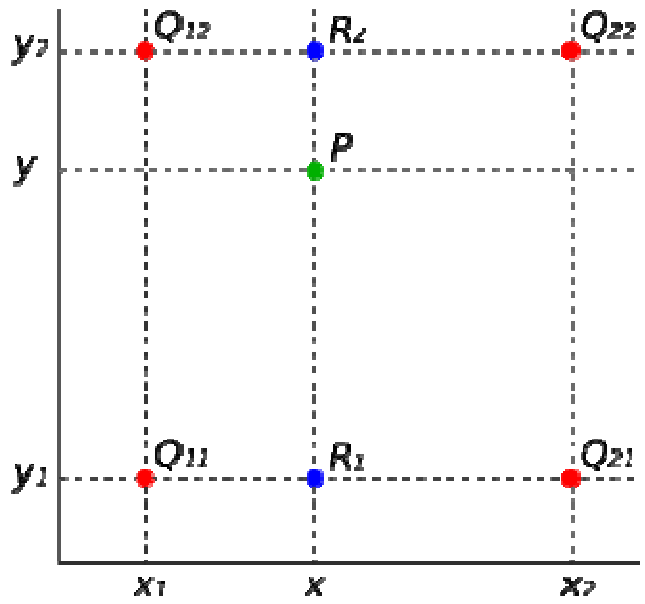


https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation

图像内插方法

2. 双线性内插

$$f(x,y_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}),$$
$$f(x,y_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}).$$



$$\begin{aligned}
f(x,y) &\approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x,y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x,y_2)\\
&= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21})\right) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22})\right)\\
&= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}\big(f(Q_{11})(x_2 - x)(y_2 - y) + f(Q_{21})(x - x_1)(y_2 - y) + f(Q_{12})(x_2 - x)(y - y_1) + f(Q_{22})(x - x_1)(y - y_1)\big)\\
&= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}\begin{bmatrix} x_2 - x & x - x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(Q_{11}) & f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) & f(Q_{22}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 - y \\ y - y_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

图像内插方法

2. 双线性内插

- 书上的版本

$$f(x,y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

- 利用4个近邻构造方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(Q_{11}) \\ f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) \\ f(Q_{22}) \end{bmatrix}$$

  - 求解方程组

图像内插方法

2. 双线性内插

- 书上的版本

$$f(x,y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

- 利用4个近邻构造方差组

$$a_0 = \frac{f(Q_{11})x_2y_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{12})x_2y_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{21})x_1y_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{22})x_1y_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)},$$

$$a_1 = \frac{f(Q_{11})y_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{12})y_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{21})y_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{22})y_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)},$$

$$a_2 = \frac{f(Q_{11})x_2}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{12})x_2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{21})x_1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{22})x_1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)},$$

$$a_3 = \frac{f(Q_{11})}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} + \frac{f(Q_{12})}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{21})}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} + \frac{f(Q_{22})}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}.$$

图像内插方法

2. 双线性内插

- 其他形式

$$f(x,y) \approx b_{11} f(Q_{11}) + b_{12} f(Q_{12}) + b_{21} f(Q_{21}) + b_{22} f(Q_{22}),$$

- 根据前面的结果，可得

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \end{bmatrix}^{-1} \right)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{bmatrix}$$

图像内插方法

3. 双三次内插

- 函数f，一阶导数f_x和f_y，二阶导数f_{xy}
- 四个坐标点(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)
- 计算插值函数

$$p(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x^i y^j.$$

$$p_x(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}ix^{i-1}y^j,$$

$$p_y(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^i jy^{j-1},$$

$$p_{xy}(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}ix^{i-1}jy^{j-1}.$$

  - 共有16个系数
  - 仅利用f在四个坐标点上的信息

https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation

图像内插方法

3. 双三次内插

- 依据函数值建立等式

1. $f(0,0) = p(0,0) = a_{00}$,
2. $f(1,0) = p(1,0) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30}$,
3. $f(0,1) = p(0,1) = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03}$,
4. $f(1,1) = p(1,1) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}$.

- 依据一阶导数f_x建立等式

1. $f_x(0,0) = p_x(0,0) = a_{10}$,
2. $f_x(1,0) = p_x(1,0) = a_{10} + 2a_{20} + 3a_{30}$,
3. $f_x(0,1) = p_x(0,1) = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$,
4. $f_x(1,1) = p_x(1,1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij} i$,

图像内插方法

求解方程组，
得到系数

3. 双三次内插

- 依据一阶导数f_y建立等式

5. $f_y(0,0) = p_y(0,0) = a_{01}$,
6. $f_y(1,0) = p_y(1,0) = a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31}$,
7. $f_y(0,1) = p_y(0,1) = a_{01} + 2a_{02} + 3a_{03}$,
8. $f_y(1,1) = p_y(1,1) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}j.$

- 依据二阶导数f_{xy}建立等式

1. $f_{xy}(0,0) = p_{xy}(0,0) = a_{11}$,
2. $f_{xy}(1,0) = p_{xy}(1,0) = a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31}$,
3. $f_{xy}(0,1) = p_{xy}(0,1) = a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13}$,
4. $f_{xy}(1,1) = p_{xy}(1,1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}ij.$

图像内插方法

3. 双三次内插

- 离散情况下的导数近似

$$f_x(x,y) \approx \frac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h}$$
$$f_y(x,y) \approx \frac{f(x,y+k)-f(x,y-k)}{2k}$$
$$f_{xx}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y)-2f(x,y)+f(x-h,y)}{h^2}$$
$$f_{yy}(x,y) \approx \frac{f(x,y+k)-2f(x,y)+f(x,y-k)}{k^2}$$
$$f_{xy}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y-k)-f(x-h,y+k)+f(x-h,y-k)}{4hk}.$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference

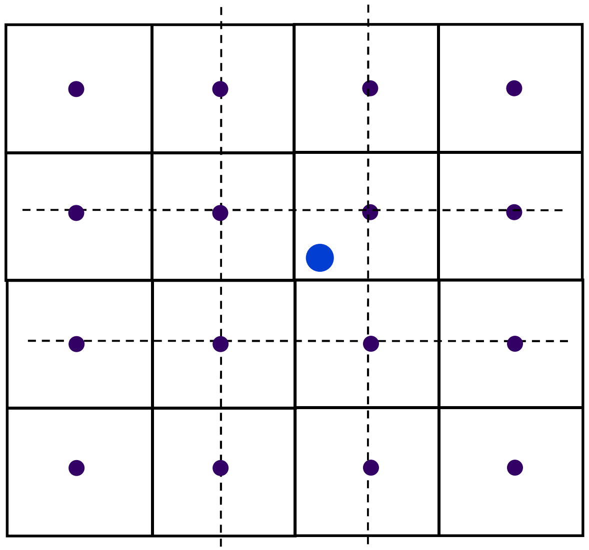
图像内插方法

3. 双三次内插

- 书上的版本

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j.$$

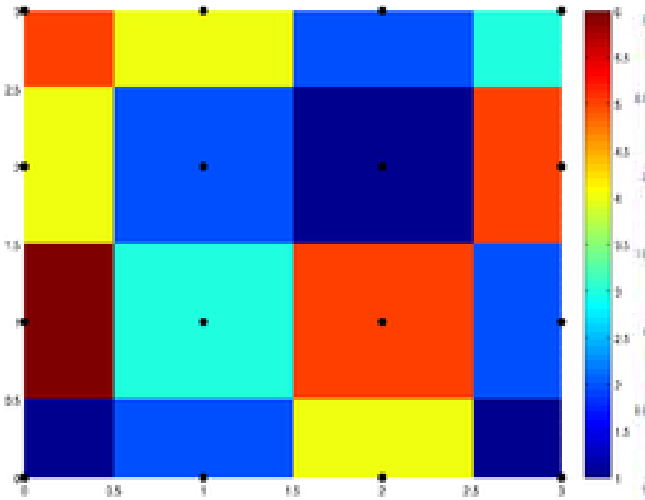
- 寻找16个近邻



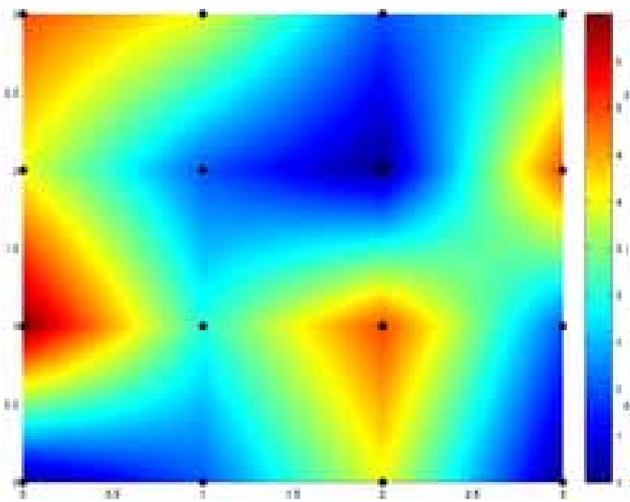
- 列出方程组，求解系数

举例

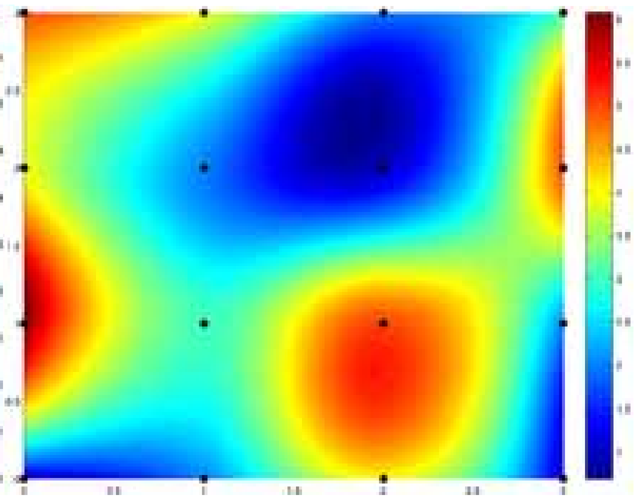
- 平滑程度



最近邻内插



双线性内插



双三次内插

举例

72
dpi

最近邻内插

双线性内插

双三次内插

举例

150
dpi

最近邻内插

双线性内插

双三次内插