数字图像处理

第四讲

频率域滤波

提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现

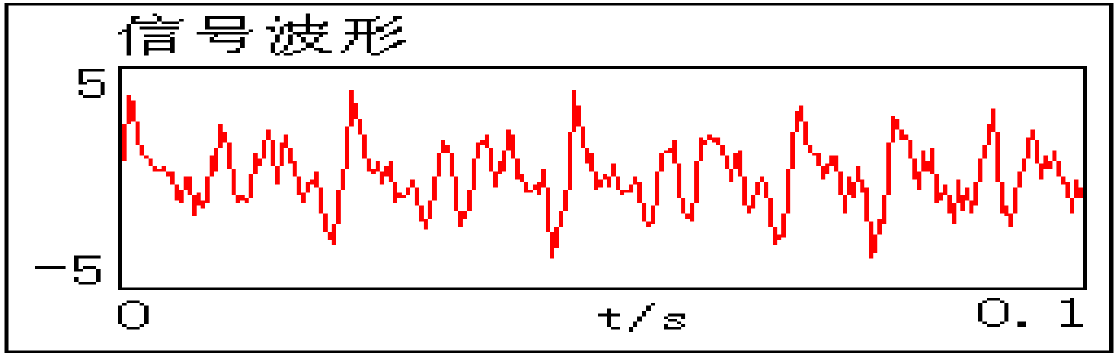
图像变换

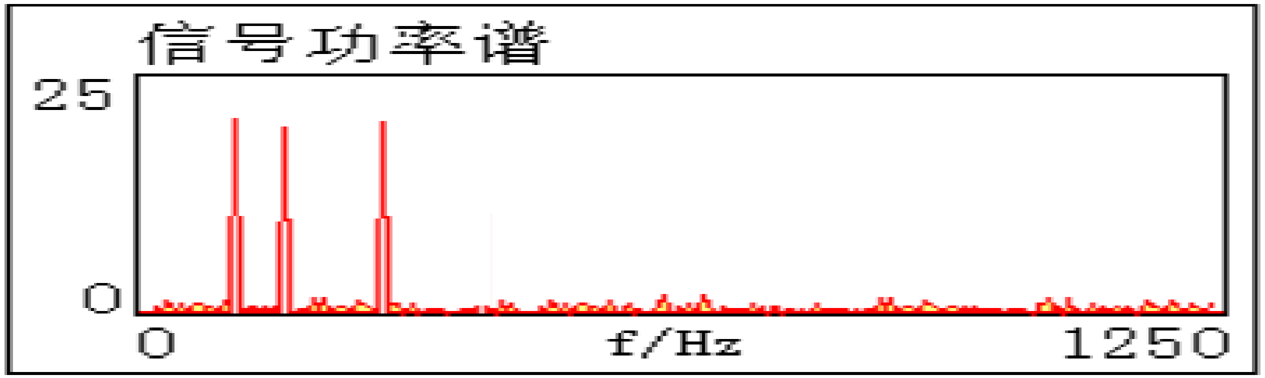
- 空间域（spatial domain）
  - 直接对图像的像素进行操作
- 变换域（transform domain）
  - 将图像从空间域变换到新的域
  - 在变换域对图像进行操作
  - 利用反变换返回空间域
- 频率域（frequency domain）
  - 一种特殊的变换域
  - 以傅里叶变换为基础

图像是连续信号的量化采样

- 信号通常包括丰富的频域信息

图例：受噪声干扰的多频率成分信号





怎么把信号投影到频域空间？

- 傅里叶，法国数学家、物理学家（1768-1830）

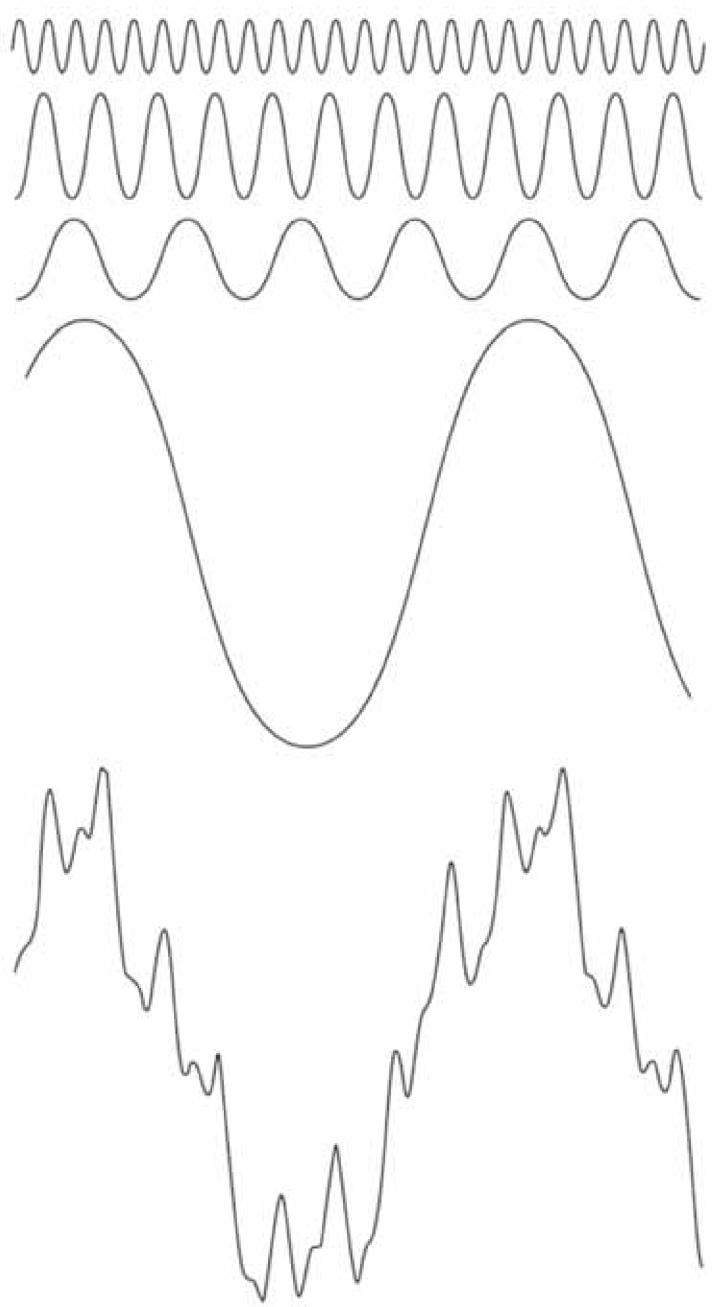
- 《热分析理论》

傅里叶级数

任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦函数和/或余弦函数加权之和

示例

四个波形
的叠加



怎么把信号投影到频域空间？

- 傅里叶，法国数学家、物理学家（1768-1830）

- 《热分析理论》

傅里叶变换

非周期函数也可以表示为不同频率的正弦函数和/或余弦函数加权之后的积分

傅里叶变换的意义

- 解决了频域信息如何表示
  - 没有信息损失
- 最早用于热扩散领域
  - 推广到整个工业界和学术界
- 带来了“信号处理领域”的一场革命
  - 1960 计算机、快速傅里叶变换

提纲

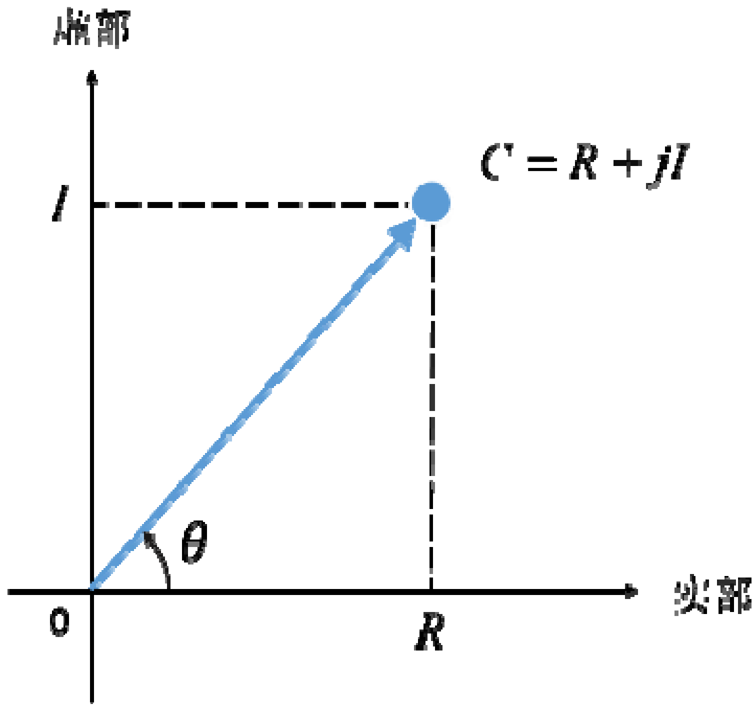
- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现

复数

- 复数C

$$C = R + jI$$

  - R和I是实数、$j = \sqrt{-1}$是虚数

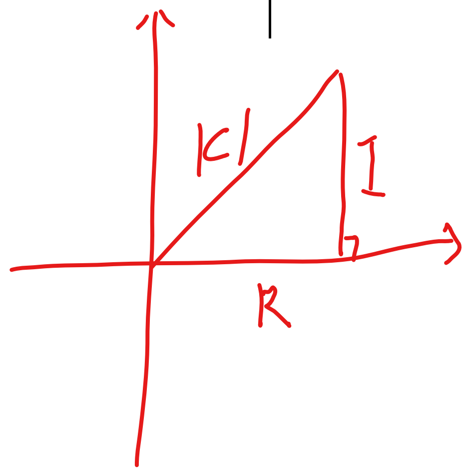


复数

- 复数C

$$C = R + jI$$

  - R和I是实数、$j = \sqrt{-1}$是虚数



- 极坐标表示

$$C = |C|(\cos\theta + j\sin\theta) = |C|\cos\theta + j|C|\sin\theta$$
$$= R + jI$$

  - $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$为长度
  - θ为夹角

复数

- 欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

  https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula

- 极坐标表示

$$C = |C|(\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$= |C|e^{j\theta}$$ // 欧拉公式

  - $1 + j2 = \sqrt{5}e^{j\theta}$， $\theta = 1.1$

- C的共轭C^*

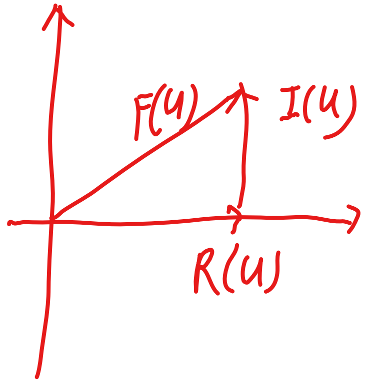
$$C^* = R - jI$$

复函数

- 复函数

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

  - 幅值 $|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2}$
  - 角度 $\theta = \arctan[I(u)/R(u)],\ [-\pi, \pi]$



- 复共轭函数

$$F(u) = R(u) - jI(u)$$

共轭

连续冲激与采样

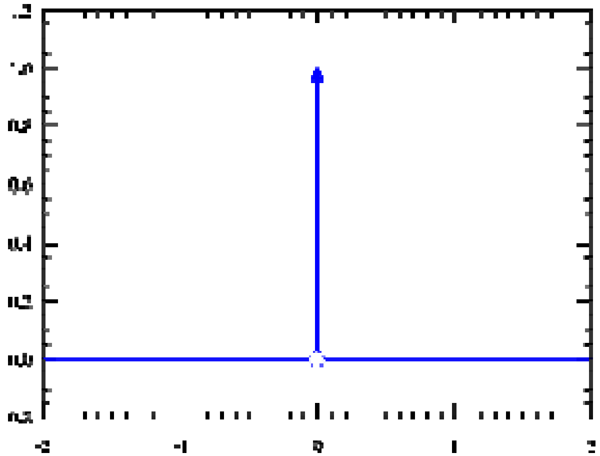
- 在0处的连续单位冲激

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- 长度为0
- 高度为∞
- 面积为1



连续冲激与采样

- 在0处的连续单位冲激

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

$$f(t)\delta(t) = \begin{cases} f(0)\cdot\infty, & t=0 \\ 0, & t\neq 0 \end{cases}$$

  - 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, dt = f(0)$$

长为0
高为$f(0)\cdot\infty$
面积为$f(0)$

连续冲激与采样

- 在t_0处的连续单位冲激

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & \text{if } t=t_0\\ 0 & \text{if } t\neq t_0\end{cases}$$

  - 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)$$

离散冲激与采样

- 在0处的离散单位冲激

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

  - 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1 = \underset{-\infty}{0} + 0 + \cdots + 0 + \underset{0}{\delta(0)} + 0 + \cdots + 0 + \underset{+\infty}{\cdots}$$

- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) = f(0) = \underset{-\infty}{0} \cdots 0 \; \underset{0}{f(0)} \; 0 \cdots \underset{+\infty}{0}$$

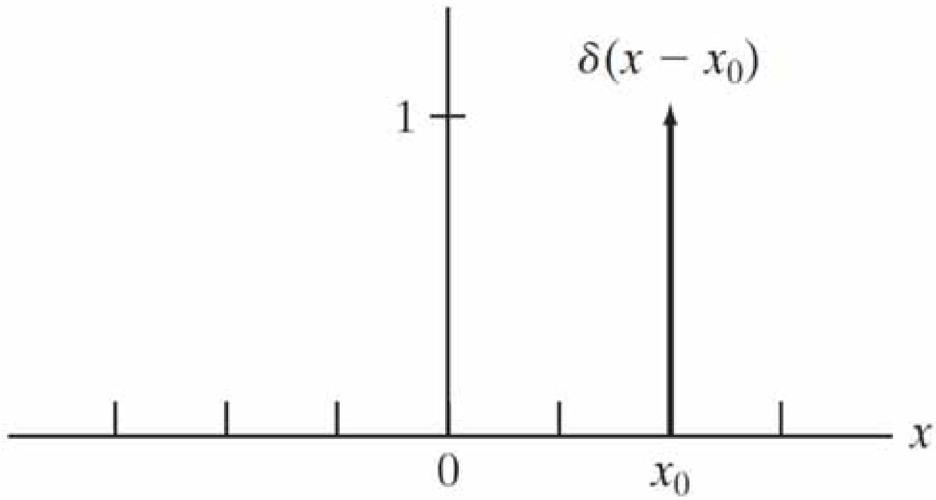
离散冲激与采样

- 在x_0处的离散单位冲激

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}1 & \text{if } x=x_0\\ 0 & \text{if } x\neq x_0\end{cases}$$

- 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)=1$$



离散冲激与采样

- 在x_0处的离散单位冲激

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0 \\ 0 & \text{if } x \neq x_0 \end{cases}$$

  - 并且满足 $$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) = 1$$

- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)$$

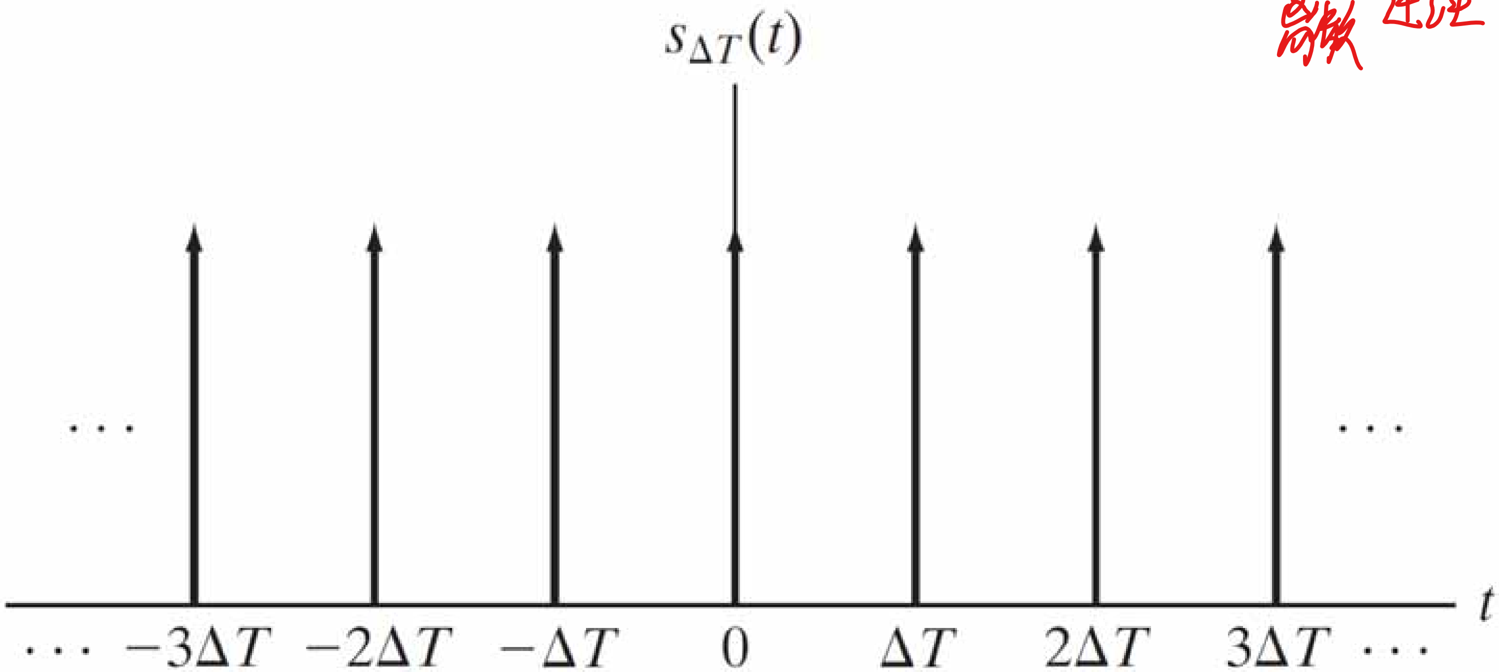
冲激串

- 无穷个以ΔT为间距的冲激之和
  - 连续
  - 离散

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

在$n\Delta T$处 值为$1/\infty$

离散 连续



提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现

连续傅里叶变换

- 连续函数$f(t)$的傅里叶变换

$$\Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

提积分变量

积分后变量只有μ

μ的函数

  - 其中μ是连续变量
- 表示成μ的函数

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

偶函数　　奇函数

  - 欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$e^{-j2\pi\mu t} = e^{j(-2\pi\mu t)} = \cos(-2\pi\mu t) + j\sin(-2\pi\mu t)$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)\right] dt$$

连续傅里叶变换

- 傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)\right] dt$$

正弦项频率由μ决定，
所以称傅立叶变换域为频率域

  - 通常是复数
  - μ出现在三角函数内，代表频率
  - t是秒、 μ是周/秒（赫兹）
  - t是米、 μ是周/米

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu(t_1-t)}d\mu = \frac{1}{-j2\pi(t_1-t)} e^{-j2\pi(t_1-t)\mu}\Big|_{+\infty}^{-\infty} = \begin{cases}\infty & t_1 = t \\ 0 & t_1 \neq t\end{cases}$$

$\delta(t_1 - t)$

傅里叶变换对

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu(t_1-t)}d\mu\right]dt_1$$

- 傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

- 傅里叶反变换

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\,e^{-j2\pi\mu t_1}dt_1\right]e^{j2\pi\mu t}d\mu$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\,e^{j2\pi\mu t}\,d\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\,d\mu$$

- 对比：傅里叶级数

$e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + j\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$

周期为T的周期函数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\,dt$$