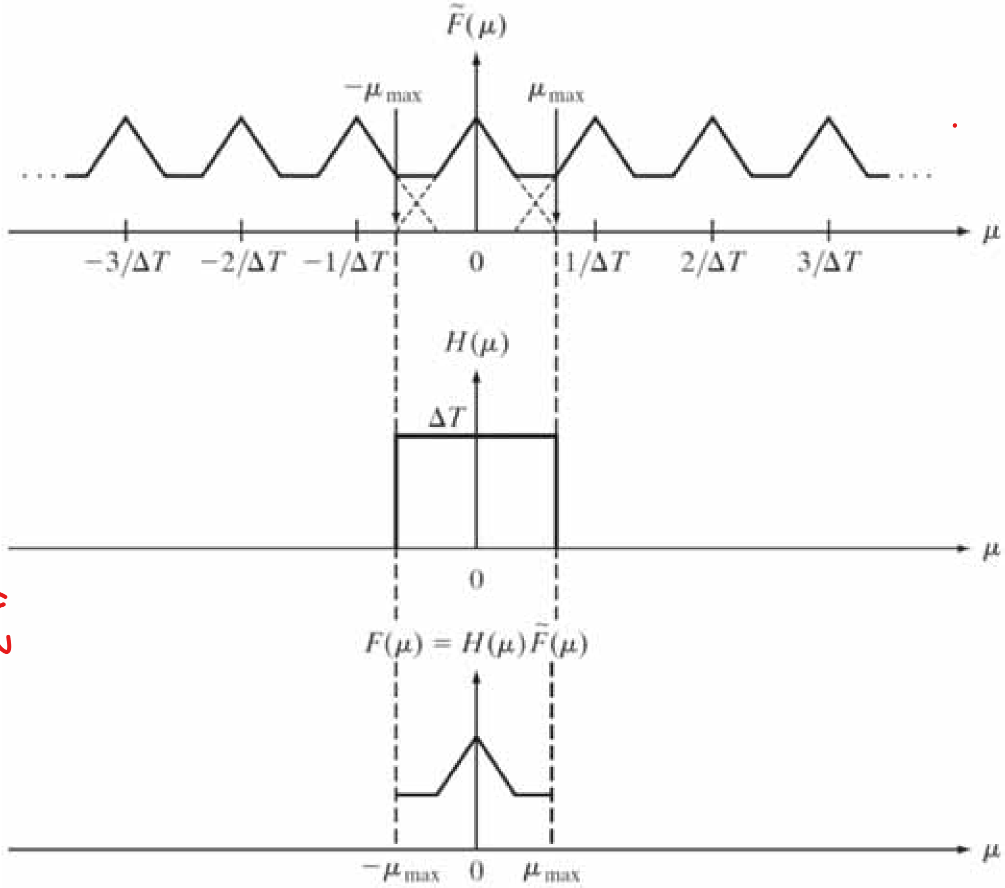
混淆 (不能事后补救)

带限函数 $f(t)$:
$f(t)$在 $[-\mu_{max}, \mu_{max}]$之外部分的
傅立叶变换为0

- 欠采样
  - 带限函数以低于奈奎斯特频率采样
- 无法分离
- 无法补救

信息不够,无法得
知函数的完整形式



混淆

- 在实际中，可以避免吗？

采样定理

如果以超过函数最高频率的两倍采样率来获得样本，连续的带限函数可以完美地从它的样本集来恢复。

- 即使原函数是带限的，仍然难以避免！
  - 采样是有限的 (实际中只能存储有限个样本)

    采样定理冲激串 $n\in(-\infty,+\infty)$，是无限采样
- 有限长度采样
  - 引入无限频率分量

有限长度采样

- 采样时间限制在$[0, T]$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 函数已经发生变换

有限采样(等价乘盒状函数)

$$f(t) \Rightarrow f(t)h(t)$$

不再是带限函数

- $f(t)h(t)$通常是无限带宽

无限频率

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

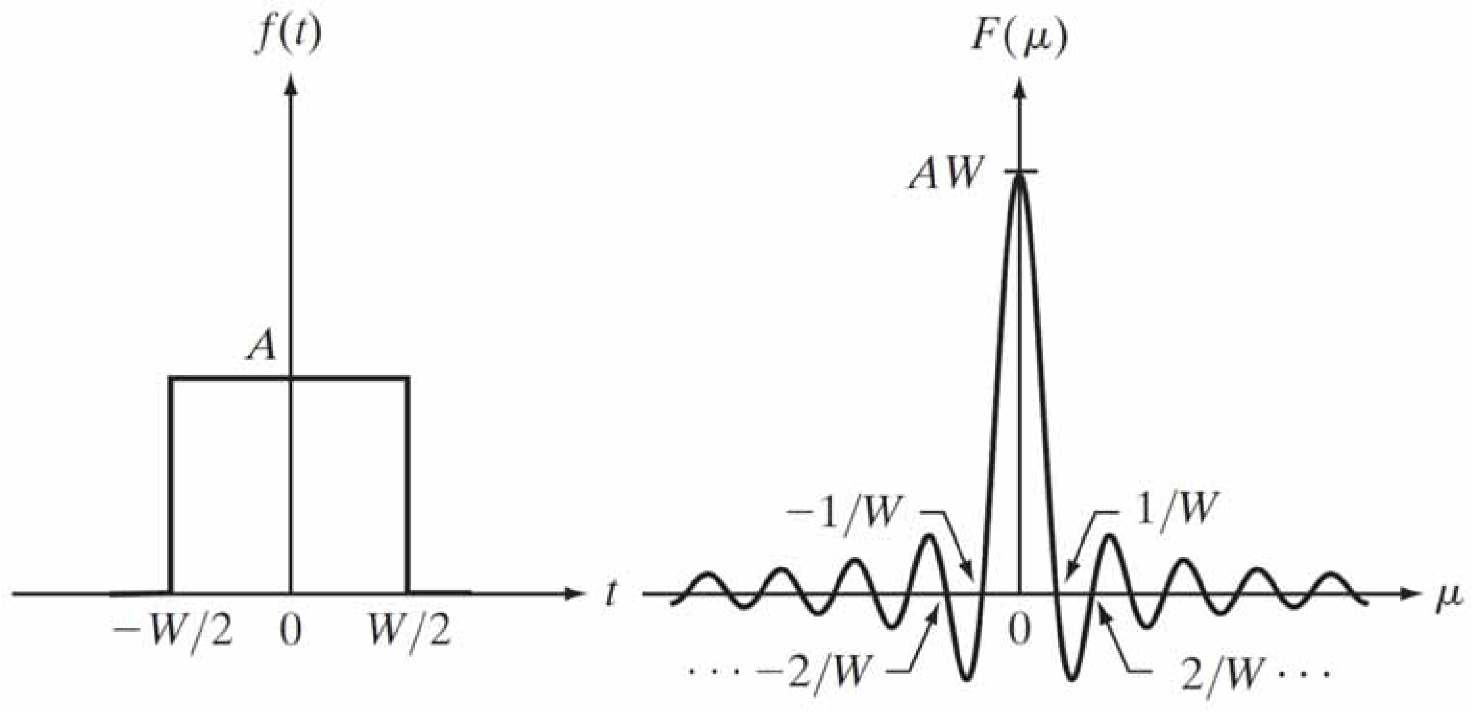
即使有限频率

  - $H(\mu)$有无限频率 （？）

why: $h(t)$是盒状函数, FT后频率是无限的 ,卷积后无限频率

举例

- 盒状函数的傅里叶变换



抗混淆

傅立叶变换后 频率无限

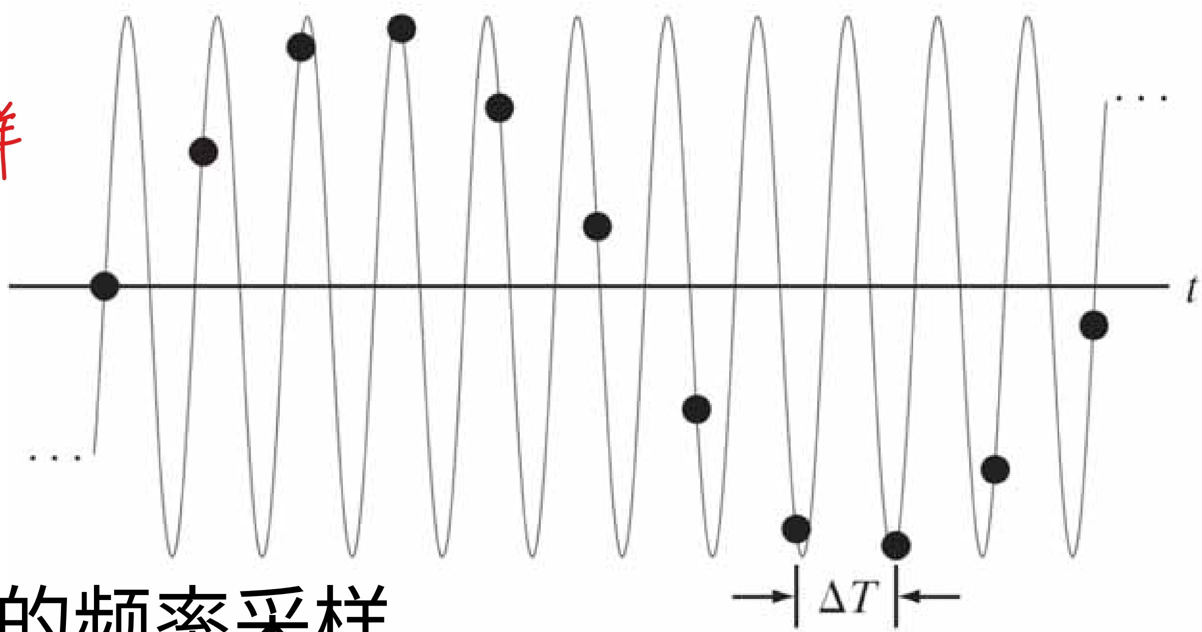
- 没有有限持续时间的函数是带限的。
- 一个带限函数一定是从$-\infty$扩展到∞。(反例即上述盒状函数)
- 有限长度的采样，混淆是不可避免的。

- 抗混淆
  - 事先防止或减轻混淆 (不能事后补救)
  - 平滑输入函数，减少高频分量
    - 图像散焦

示例

- 带限函数——正弦波$\sin(\pi t)$
  - 周期是$2s$，频率为$1/2$赫兹
  - 欠采样

图中黑点欠采样



  - 以1赫兹的频率采样
    - $\cdots\sin(-\pi), \sin(0), \sin(\pi), \sin(2\pi), \cdots$

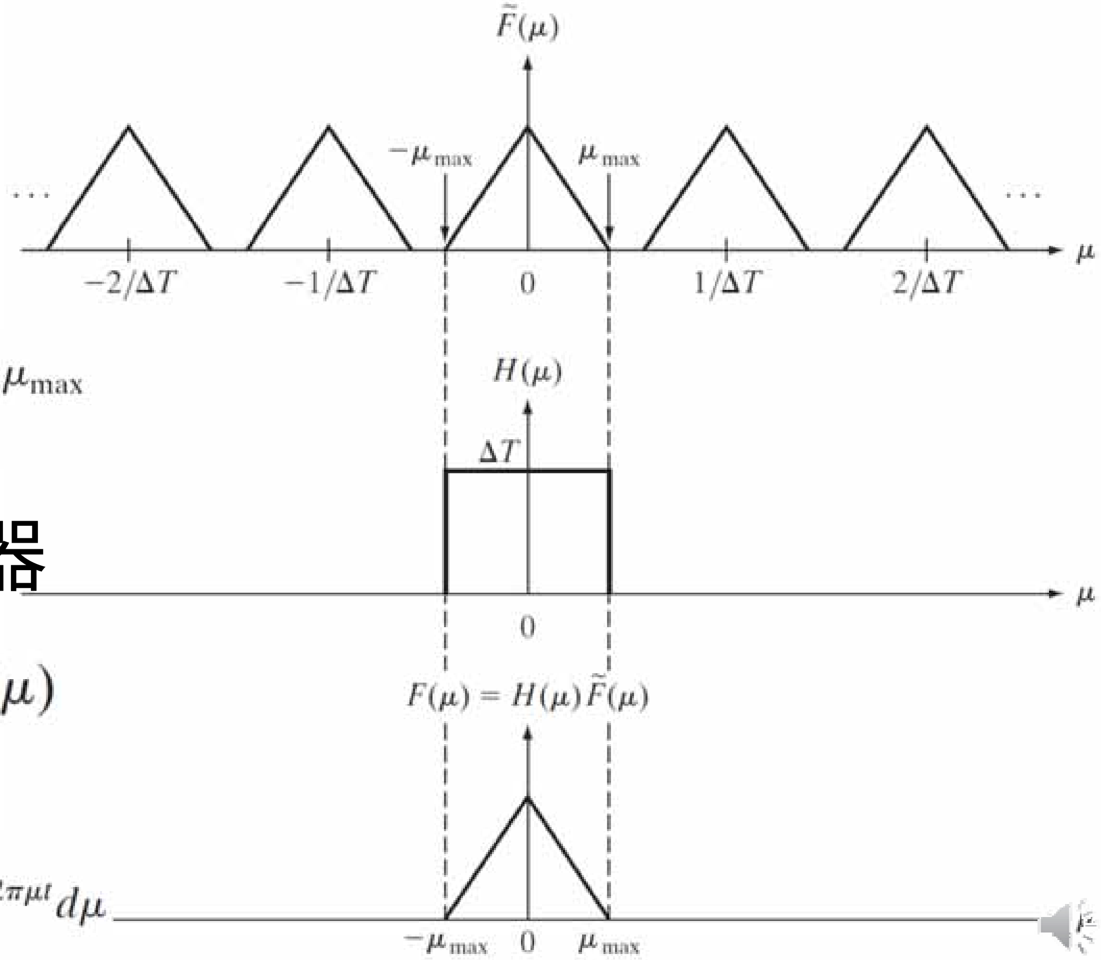
0, 0, 0, ⋯

示例

- 略高于奈奎斯特频率采样
- 定义函数

$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & -\mu_{\max} \le \mu \le \mu_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  - 理想低通滤波器
- 相乘 $F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$
- 恢复 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$



由样本恢复原函数

- 频率域操作　　理想低通滤波器

$$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$$

保留中间低频部分

- 空间域操作

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}\,d\mu$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \Im^{-1}\{F(\mu)\} \\ &= \Im^{-1}\{H(\mu)\tilde{F}(\mu)\} \\ &= h(t) \star \tilde{f}(t) \end{aligned}$$

卷积定理

由样本恢复原函数

- 化简

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

卷积

$$\underbrace{h(t) = \frac{\sin(\pi t/\Delta T)}{\pi t/\Delta T}}_{\text{sinc函数}}$$

H(u)是盒状函数
盒状函数反变换

- 函数内插

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\,\mathrm{sinc}\big[(t - n\Delta T)/\Delta T\big]$$

t=kΔT时, f(t)=f(kΔT)
为样本点,

t≠kΔT时, f(t)
由sinc加权和
得到(内插)

- $t = k\Delta T, f(t) = f(k\Delta T)$ (t=kΔT时, $\frac{t-n\Delta T}{\Delta T}$ 为整数, sinc(0)=1, sinc(其他整数)=0)
- 无限个样本的内插（实际中只能近似，如灰度内插）

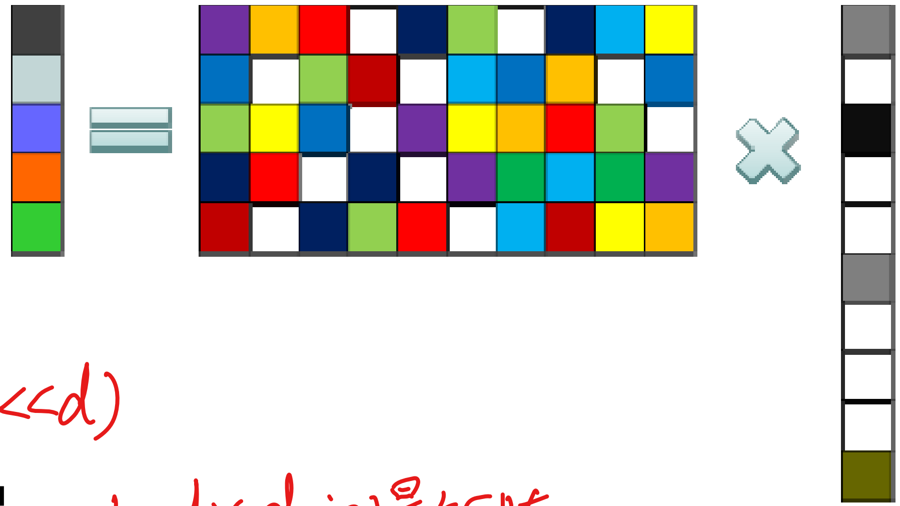
有限个样本内插

低采样率 还原函数信号

扩展：超越采样定理

当矩阵可逆时 可还原出

D×1　D×d　d×1



- 压缩感知
  - 稀疏
  - d维
  - s个非零项 $(s \ll d)$
  - $s \log d$个测量　$s\log d \times d$ 测量矩阵

David Donoho

Emmanuel Candès

Terence Tao

扩展：超越采样定理

- 矩阵补全
  - 低秩
  - 秩为r $\ll \min\{m,n\}$
  - $rn\log^2 n$个观测

每列观察 $r\log^2 n$ 次

n列

m行

$$M = \begin{bmatrix} \blacksquare & & \blacksquare & & & \blacksquare & \\ & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare \\ \blacksquare & & & \blacksquare & & \blacksquare & \\ & & \blacksquare & & \blacksquare & & \\ & \blacksquare & & \blacksquare & & & \blacksquare \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

应用：推荐系统

Emmanuel Candès

提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现

采样后函数的傅里叶变换

- 采样后函数

不连续 $$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 卷积定理

连续 $$\tilde{F}(\mu) = \Im\{\tilde{f}(t)\} = \Im\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(\mu) \star S(\mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)S(\mu - \tau)\,d\tau = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right)d\tau = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

  - 周期函数、连续函数

$f(t)$ 未知 $F(\mu)$ 未知
不能实用

采样后函数的傅里叶变换

- 采样后函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 傅里叶变换

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

交换积分与求和

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

t

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T} \qquad [f_n = f(n\Delta T)]$$

可计算形式

第n个采样

离散傅里叶变换（DFT）

周期并不是
$\left[-\frac{1}{2\Delta T},\frac{1}{2\Delta T}\right]$

实际中只能离散采样

- 考虑M个样本构造的$\tilde{F}(\mu)$

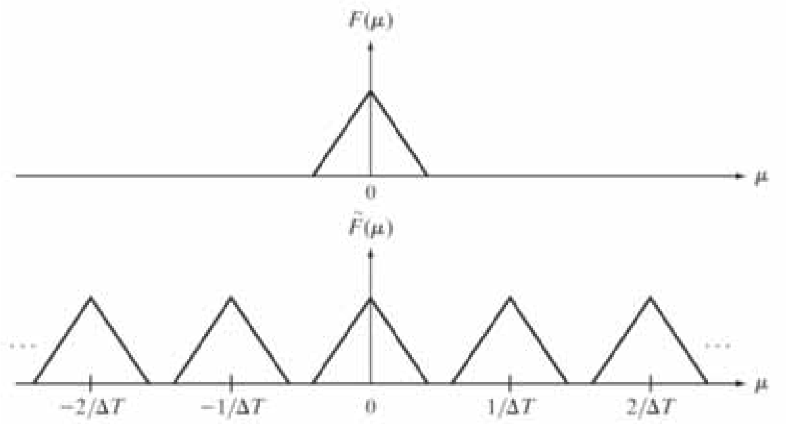
$$\tilde{F}(\mu)=\sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

用M个f_n

- 对$\tilde{F}(\mu)$的一个周期$[0,1/\Delta T]$采样

等分周期

$$\mu=\frac{m}{M\Delta T}\qquad m=0,1,2,\ldots,M-1$$



离散傅里叶变换（DFT）

周期并不是
$\left[-\frac{1}{2\Delta T}, \frac{1}{2\Delta T}\right]$

- 考虑M个样本构造的$\tilde{F}(\mu)$

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

- 对$\tilde{F}(\mu)$的一个周期$[0,1/\Delta T]$采样

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

- 离散傅里叶变换（DFT）

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

F-点 由 M点 构造产生

离散傅里叶变换对

- 离散傅里叶变换（DFT）

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

- 离散傅里叶反变换（IDFT）

$$f_n = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{\,j2\pi mn/M} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

与△T无关

- 表达式不依赖采样间隔、频率间隔
- 适用于任何均匀取样的有限离散样本集

离散傅里叶变换对（新符号）

- 离散傅里叶变换（DFT）

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \qquad u = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

  - u是整数

- 离散傅里叶反变换（IDFT）

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

  - x是整数

离散傅里叶变换

- 无限周期、周期为M

$$F(u) = F(u + kM) \qquad f(x) = f(x + kM)$$

- 离散卷积

$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x - m)$$

  - $x = 0,1,2,\cdots,M - 1$
  - 周期函数，也被称为循环卷积
  - 与之前的卷积不一样，主要区别是x
  - 卷积定理依然成立

卷积定理

- 空间域卷积的傅里叶变换⇔傅里叶变换在频率域的乘积

$$f(t)\star h(t) \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

- 空间域乘积的傅里叶变换⇔傅里叶变换在频率域的卷积

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu)\star F(\mu)$$