

刘扬 171850524 计算机系 本科

1. (a) 由 $\sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}$ 可知, 要求 $a > \frac{1}{8}$

(b) 令 $a = \frac{1}{8}$, 方程 1 的值为 1

(c) 令 $a = \frac{1}{2}$ 为特殊值, 此时 $\sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}} = 1$, 方程 1 的值为 1

猜想当 $a > \frac{1}{8}$ 时, 方程 1 的值恒为 1

(d) 在 matlab 中, 结果为 $f = 1.2182 + 0.1260i$

(e) 使用 `nthroot` 函数代替 `^(1/3)` 进行开三次方
得到正确结果 $f = 1$

给 a 赋不同值, $f = 1$ 一直成立, 支持方程 1 的值为常数 1 的猜想

(f) $\forall a > \frac{1}{8}, \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} = 1$ 恒成立

证明: 构造一元三次方程 $x^3 + (2a-1)x - 2a = 0$

$$\text{判别式 } D = -108 \left(\frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}} \right)^2$$

$$\text{判别式 } D = -108(a+1)^2(8a-1)$$

当 $a > \frac{1}{8}$ 时, 判别式 $D < 0$

根据卡丹公式, 此时方程有 1 个实根与两个共轭虚根

$$x^3 + (2a-1)x - 2a = (x-1)(x^2 + x + 2a) = 0$$

$\therefore x=1$ 是方程实根

$$\text{在 } D < 0 \text{ 时, 卡丹公式指出方程实根为 } \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}}$$

$$\therefore \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ 在 } a > \frac{1}{8} \text{ 时成立}$$

当 $a = \frac{1}{8}$ 时, 可直接验证上式成立

$$\therefore \text{当 } a > \frac{1}{8} \text{ 时, } \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ 恒成立}$$

$$(g) \text{ 令 } a = 2, \text{ 原式 } = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$

(h) 根据卡丹公式, 一元三次方程 $x^3 + px + q = 0$

$$\text{在 } D = -108 \left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \right) < 0 \text{ 时只有一个实根 } \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

对比此实根与题目中的方程

可知题目所给方程是 $x^3 + (2a-1)x - 2a = 0$ 在 $a > \frac{1}{8}$ 时的唯一实根

$$x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \text{ 存在实根 } x = 1$$

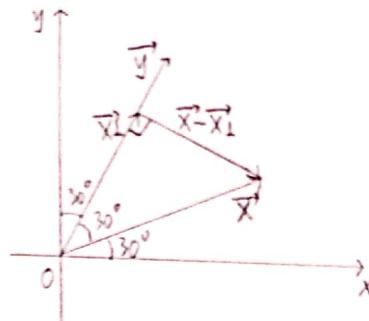
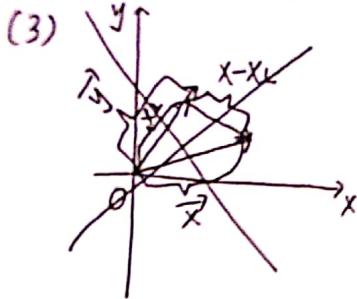
$$\text{可知 } \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt[3]{\frac{8a-1}{3}}} = 1$$



扫描全能王 创建

$$2.(1) \quad x_1 = \frac{x^T y}{\|y\|^2} \cdot y = \frac{\sqrt{3}}{2} (1, \sqrt{3})^T = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$$

$$(2) \quad y^T (x - x_1) = (1, \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T = 0, \text{由内积为0可知 } y \text{ 与 } (x - x_1) \text{ 正交}$$



$$(4) \quad \|x - x_1\| = 1, \|x - \lambda y\| = \sqrt{(2\lambda - \sqrt{3})^2 + 1}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (2\lambda - \sqrt{3})^2 \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{(2\lambda - \sqrt{3})^2 + 1} \geq 1$$

$$\text{即 } \|x - x_1\| \leq \|x - \lambda y\|$$

3. (a) 实对称矩阵是正定矩阵的充要条件为特征值全部为正数
已知4个特征值为正数

$X > 0$ 是矩阵 X 为正定矩阵的充要条件

$$(b) \det(X) = |X| \times 3 \times 4 \times x$$

$$\text{即 } 12x = 72$$

$$\therefore x = 6$$

$$4. (a) ① E(X) = \int_0^{+\infty} \beta x e^{-\beta x} dx = -\frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} -\beta x e^{-\beta x} d\beta x$$

$$\text{令 } y = \beta x, E(X) = -\frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} -y e^{-y} dy = -\frac{1}{\beta} (y+1) e^{-y} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\beta}$$

$$② \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \int_0^{+\infty} \beta x^2 e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} (\beta x)^2 e^{-\beta x} d\beta x$$

$$\text{令 } y = \beta x, E[X^2] = \frac{1}{\beta^2} (-y^2 - 2y - 2) e^{-y} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\beta^2}$$

$$\therefore \text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

$$(b) \quad x < 0 \text{ 时, } F(x) = 0$$

$$\because F(x) \text{ 连续} \quad \therefore F(0) = 0$$

$$x > 0 \text{ 时, } F(x) = F(0) + \int_0^x \beta e^{-\beta x} dx = 1 - e^{-\beta x}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad \Pr(X \geq a+b \mid X \geq a) = \frac{\Pr(X \geq a+b)}{\Pr(X \geq a)} = \frac{1 - \Pr(X < a+b)}{1 - \Pr(X < a)} = \frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-\beta a}} = e^{-\beta b}$$

$$\Pr(X \geq b) = 1 - \Pr(X < b) = e^{-\beta b}$$

$$\therefore \Pr(X \geq a+b \mid X \geq a) = \Pr(X \geq b)$$



扫描全能王 创建

$$5. (a) f'(x) = a^x e^{ax}$$

$$\forall x, \forall a \in \mathbb{R}, a^x \geq 0, e^{ax} > 0$$

$\therefore f''(x) \geq 0$ 恒成立

$\therefore f(x)$ 是凸函数

$$(b) g''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\forall x > 0, g''(x) < 0 \text{ 成立}$$

$\therefore g(x)$ 是凹函数

$$(c) h''(x) = \frac{1}{x}$$

$$\forall x > 0, h''(x) > 0$$

$\therefore h''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是凸函数

令 x_1 为大于 0 的实数, $x_2 = 0$

$$\forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(\lambda x_1) = \lambda x_1 \ln(\lambda x_1)$$

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \lambda f(x_1) = \lambda x_1 \ln x_1$$

$$\because \lambda \in [0, 1] \quad \therefore \lambda x_1 \ln(\lambda x_1) \leq \lambda x_1 \ln x_1$$

$\therefore h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 是凸函数

$$(d) \text{令 } L(p_1, \dots, p_n, \lambda) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial p_i} = \lambda - (\log_2 p_i + \frac{1}{\ln 2}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_n} = \lambda - (\log_2 p_n + \frac{1}{\ln 2}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n p_i - 1 = 0$$

$$\text{解得 } p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}, \lambda = \log_2 \frac{1}{n} + \frac{1}{\ln 2}$$

$\therefore H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$ 的最大值为 $\log_2 n$

$$\text{此时 } p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$$



扫描全能王 创建