

刘扬 171850524 计算机系 本科

1. (a) 由 $\sqrt{\frac{8a-1}{3}}$ 可知, 要求 $a \geq \frac{1}{8}$

(b) 令 $a = \frac{1}{8}$, 方程1的值为1

(c) 视 $a = \frac{1}{8}$ 为特殊值, 此时 $\sqrt{\frac{8a-1}{3}} = 0$, 方程1的值为1

猜想当 $a > \frac{1}{8}$ 时, 方程1的值恒为1

(d) 在matlab中, 结果为 $f = 1.2182 + 0.1260i$

(e) 使用nthroot函数代替 $^{1/3}$ 进行开三次方
得到正确结果 $f = 1$

给a赋不同值, $f=1$ 一直成立, 支持方程1的值为常数1的猜想

(f) $\forall a > \frac{1}{8}, \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1$ 恒成立

证明: 构造一元三次方程 $X^3 + (2a-1)X - 2a = 0$

$$\text{判别式 } D = -108 \left(\frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}} \right)^2$$

$$\text{判别式 } D = -108 (a+1)^2 (8a-1)$$

当 $a > \frac{1}{8}$ 时, 判别式 $D < 0$

根据卡丹公式, 此时方程有1个实根与两个共轭虚根

$$X^3 + (2a-1)X - 2a = (X-1)(X^2 + X + 2a) = 0$$

$\therefore X=1$ 是方程实根

$$\text{在 } D < 0 \text{ 时, 卡丹公式指出方程实根为 } \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$$

$$\therefore \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ 在 } a > \frac{1}{8} \text{ 时成立}$$

当 $a = \frac{1}{8}$ 时, 可直接验证上式成立

$$\therefore \text{当 } a > \frac{1}{8} \text{ 时, } \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ 恒成立}$$

$$(g) \text{ 令 } a=2, \text{ 原式 } = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$$

(h) 根据卡丹公式, 一元三次方程 $X^3 + PX + Q = 0$

$$\text{在 } D = -108 \left(\frac{P^3}{27} + \frac{Q^2}{4} \right) < 0 \text{ 时 只有一个实根 } \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{P^3}{27} + \frac{Q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{P^3}{27} + \frac{Q^2}{4}}}$$

对比此实根与题目中的方程

可知题目所给方程是 $X^3 + (2a-1)X - 2a = 0$ 在 $a > \frac{1}{8}$ 时的唯一实根

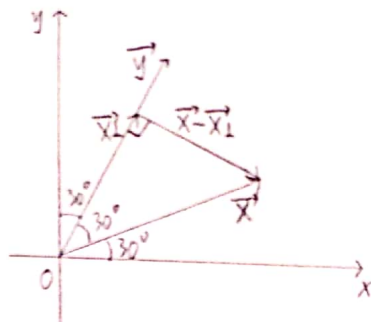
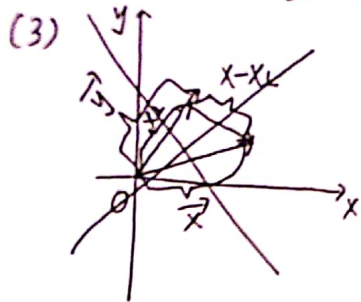
$$X^3 + (2a-1)X - 2a = 0 \text{ 存在实根 } X=1$$

$$\text{可知 } \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1$$



$$2. (1) x_1 = \frac{x^T y}{\|y\|^2} \cdot y = \frac{\sqrt{3}}{2} (1, \sqrt{3})^T = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$$

$$(2) y^T (x - x_1) = (1, \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T = 0, \text{由内积为0可知 } y \text{ 与 } (x - x_1) \text{ 正交}$$



$$(4) \|x - x_1\| = 1, \|x - \lambda y\| = \sqrt{(2\lambda - \sqrt{3})^2 + 1}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (2\lambda - \sqrt{3})^2 \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{(2\lambda - \sqrt{3})^2 + 1} \geq 1$$

$$\text{即 } \|x - x_1\| \leq \|x - \lambda y\|$$

3. (a) 实对称矩阵是正定矩阵的充要条件为特征值全部为正数
已知4个特征值为正数

$\therefore X > 0$ 是矩阵 X 为正定矩阵的充要条件

$$(b) \det(X) = |x| \times 3 \times 4 \times x$$

$$\text{即 } 12x = 72$$

$$\therefore x = 6$$

$$4. (a) (1) E(x) = \int_0^{+\infty} \beta x e^{-\beta x} dx = -\frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} -\beta x e^{-\beta x} d\beta x$$

$$\text{令 } y = \beta x, E(x) = -\frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} -y e^{-y} dy = -\frac{1}{\beta} (y+1) e^{-y} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\beta}$$

$$(2) \text{Var}(x) = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$E[x^2] = \int_0^{+\infty} \beta x^2 e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} (\beta x)^2 e^{-\beta x} d\beta x$$

$$\text{令 } y = \beta x, E[x^2] = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} (y^2 - 2y + 2) e^{-y} dy = \frac{2}{\beta^2}$$

$$\therefore \text{Var}(x) = \frac{1}{\beta^2}$$

$$(b) x < 0 \text{ 时, } F(x) = 0$$

$$\because F(x) \text{ 连续 } \therefore F(0) = 0$$

$$x > 0 \text{ 时, } F(x) = F(0) + \int_0^x \beta e^{-\beta x} dx = 1 - e^{-\beta x}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$(c) \Pr(X \geq a+b | X \geq a) = \frac{\Pr(X \geq a+b)}{\Pr(X \geq a)} = \frac{1 - \Pr(X < a+b)}{1 - \Pr(X < a)} = \frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-\beta a}} = e^{-\beta b}$$

$$\Pr(X \geq b) = 1 - \Pr(X < b) = e^{-\beta b}$$

$$\therefore \Pr(X \geq a+b | X \geq a) = \Pr(X \geq b)$$



5. (a) $f''(x) = a^2 e^{ax}$

$\forall x, a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0, e^{ax} > 0$

$\therefore f''(x) \geq 0$ 恒成立

$\therefore f(x)$ 是凸函数

(b) $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\forall x > 0, g''(x) < 0$ 成立

$\therefore g(x)$ 是凹函数

(c) $h''(x) = \frac{1}{x}$

$\forall x > 0, h''(x) > 0$

$\therefore h''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是凸函数

令 x_1 为大于 0 的实数, $x_2 = 0$

$\forall \lambda \in [0, 1]$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(\lambda x_1) = \lambda x_1 \ln(\lambda x_1)$

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \lambda f(x_1) = \lambda x_1 \ln x_1$

$\because \lambda \in [0, 1] \therefore \lambda x_1 \ln(\lambda x_1) \leq \lambda x_1 \ln x_1$

$\therefore h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 是凸函数

(d) 令 $L(p_1, \dots, p_n, \lambda) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right)$

令 $\frac{\partial L}{\partial p_1} = \lambda - \left(\log_2 p_1 + \frac{1}{\ln 2} \right) = 0$

\vdots

$\frac{\partial L}{\partial p_n} = \lambda - \left(\log_2 p_n + \frac{1}{\ln 2} \right) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n p_i - 1 = 0$

解得 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}, \lambda = \log_2 \frac{1}{n} + \frac{1}{\ln 2}$

$\therefore H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$ 的最大值为 $\log_2 n$

此时 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$

