**第四章 生产函数**

1.下面是一张一种可变生产要素的短期生产函数的产量表：

1. 在表中填空。
2. 该生产函数是否表现出边际报酬递减？如果是，是从第几单位的可变要素投入量开始的？

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 可变要素的数量 | 可变要素的总产量 | 可变要素的平均产量 | 可变要素的边际产量 |
| 1 |  | 2 |  |
| 2 |  |  | 10 |
| 3 | 24 |  |  |
| 4 |  | 12 |  |
| 5 | 60 |  |  |
| 6 |  |  | 6 |
| 7 | 70 |  |  |
| 8 |  |  | 0 |
| 9 | 63 |  |  |

解答：（1）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 可变要素的数量 | 可变要素的总产量 | 可变要素的平均产量 | 可变要素的边际产量 |
| 1 | 2 | **2** | **2** |
| 2 | 12 | 6 | **10** |
| 3 | **24** | 8 | 12 |
| 4 | 48 | **12** | 24 |
| 5 | **60** | 12 | 12 |
| 6 | 66 | 11 | **6** |
| 7 | **70** | 10 | 4 |
| 8 | 70 | 35/4 | **0** |
| 9 | **63** | 7 | -7 |

(2)该生产函数表现出边际报酬递减。是从第5个单位的可变要素投入量开始，此时，平均产量开始大于边际产量。

2.用图说明短期生产函数Q＝f(L，)的TPL曲线，APL曲线和MPL曲线的特征及其相互之间的关系。

(1)总产量线TP，边际产量线MP和平均产量线AP都是先呈上升趋势，达到本身的最大值以后，再呈下降趋势。参考第4题图。

(2) 首先，总产量与边际产量的关系：

① MP=TP′(L, K)，TP= ∫MP。

②MP等于TP对应点的斜率，边际产量线是总产量线上各点的斜率值曲线。斜率值最大的一点，即边际产量线拐点。

③MP＝0时， TP最大；边际产量线与横轴相交。MP >0 时， TP递增； MP <0 时， TP递减。



其次，平均产量与边际产量关系。

①若MP＞AP，则AP递增；平均产量上升的部分，边际产量一定高于平均产量；

②若MP＜AP，则AP递减；平均产量线下降的部分，边际产量线一定低于平均产量线。

③若MP＝AP，则AP 最大。MP交AP的最高点。

最后，总产量与平均产量的关系。

①AP=TP/L

②原点与TP上一点的连线的斜率值等于该点的AP。

③从原点出发与TP相切的射线，切点对应AP最大。

Q D

C TPL

第Ⅰ阶段 第Ⅱ阶段 第Ⅲ阶段

B

B′

C′ APL

O L2 L3 L4 MPL  L

3.已知生产函数Q＝f(L，K)=2KL- 0.5L2-0.5K2，假定厂商目前处于短期生产，且K＝10，求：

(1)写出在短期生产中该厂商关于劳动的总产量TPL函数、劳动的平均产量APL函数和劳动的边际产量MPL函数。

(2)分别计算当总产量TPL、劳动平均产量APL和劳动边际产量MPL各自达到极大值时的厂商劳动的投入量。

(3)什么时候APL＝MPL？它的值又是多少？

**3. 解：**（1）把K=10代入生产函数得短期关于劳动的总产量函数为：



劳动的平均产量函数为：

劳动的边际产量函数为：

（2）当时，即时，达到极大值 。

当时，即，时，达到极大值。

，说明 始终处于递减阶段，所以L=0时，MP最大。

（3），把 代入AP和MP函数得：

 ， ，即 时，达到极大值，。

**4.**区分边际报酬递增、不变和递减的情况与规模报酬递增、不变和递减的情况。

解答：边际报酬变化是指在生产过程中一种可变要素投入量每增加一个单位时所引起的总产量的变化量，即边际产量的变化，而其他生产要素均为固定生产要素，固定要素的投入数量是保持不变的。边际报酬变化具有包括边际报酬递增、不变和递减的情况。很显然，边际报酬分析可视为短期生产的分析视角。

规模报酬分析方法是描述在生产过程中全部生产要素的投入数量均同比例变化时所引起的产量变化特征，当产量的变化比例分别大于、等于、小于全部生产要素投入量变化比例时，则分别为规模报酬递增、不变、递减。很显然，规模报酬分析可视为长期生产的分析视角。

区别：①前提条件不同，边际报酬变化生产要素分为不变和可变生产要素，生产要素比例发生变化；规模报酬分析研究生产要素同比例变动。②考察时间长短不同。边际报酬变化分析的是短期生产规律；规模报酬研究长期生产规律。③指导意义不同。边际报酬变化指出要按比例配置生产要素；规模报酬指出要保持企业的适度规模。④由于前提条件不同，二规律独立发挥作用，不存在互为前提，互为影响关系。

联系：随着投入要素增加，产量一般都经历递增、不变和递减三个阶段。

5．已知生产函数为＝min()。求：（1）当＝36时，与值分别是多少？（2）如果生产要素的价格分别为=，=，则生产480单位产量时的最小成本是多少？

**解：**（1）生产函数为＝min()表示该函数是一个固定投入比例的生产函数，所以，厂商进行生产时，总有Q＝2L＝3K。

因为已知产量Q＝36,则 2L＝3K=36 ，所以，L＝18，K＝12。

（2）由Q＝2L＝3K=480，可得：L＝240，K＝160。

又因为PL＝2，PK＝5，所以有：TC＝PLL＋PKK＝2×240＋5×160＝1280。即生产480单位产量最小成本为1280。

**6.**假设某厂商的短期生产函数为 Q＝35L＋8L2－L3。求：

(1)该企业的平均产量函数和边际产量函数。

(2)如果企业使用的生产要素的数量为L＝6，是否处理短期生产的合理区间？为什么？

解答：(1)平均产量函数：AP(L)＝L＝35＋8L－L2

边际产量函数：MP(L)＝Q′(L)＝35＋16L－3L2

(2)首先需要确定生产要素L投入量的合理区间。

在生产要素L投入量的合理区间的左端，有AP＝MP，于是，有35＋8L－L2＝35＋16L－3L2。解得L＝0和L＝4。L＝0不合理，舍去，故取L＝4。

在生产要素L投入量的合理区间的右端，有MP＝0，于是，有35＋16L－3L2＝0。(5+3L)(7-L)=0，解得L＝－5/3和L＝7。L＝－5/3不合理，舍去，故取L＝7。

由此可得，生产要素L投入量的合理区间为[4,7]。因此，企业对生产要素L的使用量为6是处于短期生产的合理区间的。

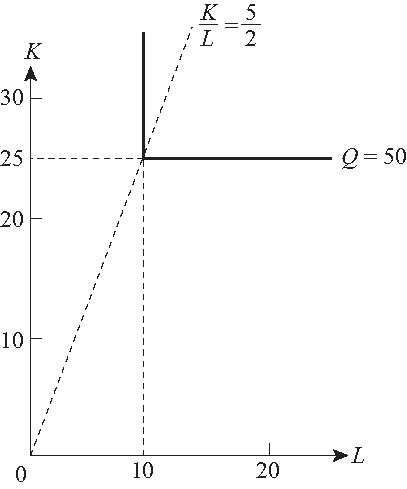
**7.**假设生产函数Q＝ *min*{5L,2K}。

(1)作出Q＝50时的等产量曲线。

(2)推导该生产函数的边际技术替代率函数。

(3)分析该生产函数的规模报酬情况。

解答：(1)生产函数Q＝min{5*L,*2*K*}是固定投入比例生产函数，其等产量曲线如图所示为直角形状，且在直角点两要素的固定投入比例为K:L=5：2。



当产量Q＝50时，有5L＝2K＝50，即L＝10，K＝25。相应的Q＝50的等产量曲线如图所示。

(2)由于该生产函数为固定投入比例，即L与K之间没有替代关系，所以，边际技术替代率MRTSLK＝0。

(3) 因为Q＝f(L，K)＝*min*{5L,2K}

f(λL，λK)＝*min*{5λL,2λK}＝λ*min*{5L,2K}

所以该生产函数呈现出规模报酬不变的特征。

8..已知柯布道格拉斯生产函数为Q＝ALαKβ。请讨论该生产函数的规模报酬情况。

解答：因为 Q＝f(L，K)＝ALαKβ

　　f(λL，λK)＝A(λL)α(λK)β＝λα＋βALαKβ

所以当α＋β>1时，该生产函数为规模报酬递增；当α＋β＝1时，该生产函数为规模报酬不变；当α＋β<1时，该生产函数为规模报酬递减。

9.已知生产函数为。

判断：（1）在长期生产中，该生产函数的规模报酬属于哪一种类型？

（2）在短期生产中，该生产函数是否受边际报酬递减规律的支配？

**解：**（1） 

 ,所以，在长期生产中，该生产函数属于规模报酬不变。

（2）假定资本的投入量不变，用表示，投入量可变，

所以，生产函数，这时，劳动的边际产量为

，说明：当资本使用量即定时，随着使用的劳动量的增加，劳动的边际产量递减。

同理，，，说明：当劳动使用量即定时，随着使用的资本量的增加，资本的边际产量递减。

综上，该生产函数受边际报酬递减规律的作用。

10．令生产函数f（L，K）=a0＋a1(LK)1/2＋a2K＋a3L，其中0≤ai≤1 i=0，1，2，3。

（1）当满足什么条件时，该生产函数表现出规模报酬不变的特征。

（2）证明：在规模报酬不变的情况下，相应的边际产量是递减的。

**解：**（1）根据规模报酬不变的定义f(λL，λK)=λf（L，K）于是有

f(λL，λK)＝a0＋a1(λL)(λK)1/2＋a2(λK)＋a3(λL)

＝a0＋λa1（LK)1/2＋λa2K＋λa3L

＝λ[a0＋a1(LK)1/2＋a2K＋a3L]＋（1－λ）a0

＝λf（L，K）＋（1－λ）a0

由上式可见：当a0＝0时，对于任何的λ＞0，有f(λL，λK)=λf（L，K）成立，

即当a0＝0时，该生产函数表现出规模报酬不变的特征。

（2）在规模报酬不变，即a0＝0时，生产函数可以写成

f（L，K）＝a1（LK)1/2＋a2 K＋a3L

相应地，劳动与资本的边际产量分别为：

MPL(L，K)＝＝a1L-1/2K1/2＋a3，

MPK(L，K)＝＝a1L1/2K-1/2＋a2，

可求：＝- a1L-3/2K1/2 <0 ， ＝- a1L1/2K1-3/2<0

显然，劳动和资本的边际产量是递减的。