理科专业核心基础课(11223202)

《代 数 与 几 何》 10

主讲人: 吕新民

第十章 双线性函数

- 线性函数的定义与性质
- 对偶空间
- 双线性函数的定义与性质
- 对称与反对称双线性函数

第1节　线性函数的定义与性质

定义　设V是数域P上的线性空间，$f: V \to P$是V到P的一个映射，如果对任意$\alpha, \beta \in V$及任意$k \in P$，

(1) $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.

(2) $f(k\alpha) = kf(\alpha)$.

则称f为V上的一个线性函数.

由定义可以推出线性函数具有如下简单性质.

性质　设f是数域P上线性空间V上的线性函数，

则

(1) $f(0)=0$； $f(-\alpha)=-f(\alpha)$.

(2) 若$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$， 则$f(\beta) = k_1 f(\alpha_1) + k_2 f(\alpha_2) + \cdots + k_s f(\alpha_s)$.

考察几个实例.

【例 1】 (1) 在P^n中， 取定$a_1, a_2, \cdots, a_n \in P$. 对任意$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in P^n$， 规定

$$f(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

则f是P^n上的一个线性函数.

(2) 在$P^{n\times n}$中，对任意$A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$，规定

$$f(A)=\mathrm{tr}(A),$$

则f是$P^{n\times n}$的一个线性函数.

(3) 在$P[x]$中，取定$t\in P$，对任意$f(x)\in P[x]$，规定

$$\varphi(f(x))=f(t),$$

则φ是$P[x]$的一个线性函数.

定理 设V是数域P上一个n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，而$a_1,a_2,\cdots,a_n$

是数域P中的任意n个数，则存在唯一的V上的线性函数f，使得$f(\varepsilon_i)=a_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

证明： 存在性. 对任意$\alpha\in V$，令$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$. 定义

$$f(\alpha)=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n$$

显然f是V上的线性函数，且$f(\varepsilon_i)=a_i$.

唯一性. 设g是V上另一个线性函数，且$g(\varepsilon_i)=a_i$. 对任意$\alpha\in V$，令$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$，则

$$f(\alpha)=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n=g(\alpha)$$

故$f=g$，唯一性得证.

显然，对于V上的任何两个线性函数f,g，$f=g \Leftrightarrow f(\varepsilon_i)=g(\varepsilon_i)$，$i=1,2,\cdots,n$.

【例2】设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是数域$P$上线性空间$V$的一组基，且$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=1, f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=-1, f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-3$，求$f(x_1\varepsilon_1)+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)$.

解：依题意，

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=1 \\ f(\varepsilon_2)-2f(\varepsilon_3)=-1 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=-3 \end{cases}，\text{解之得}\begin{cases} f(\varepsilon_1)=4 \\ f(\varepsilon_2)=-7 \\ f(\varepsilon_3)=-3 \end{cases},$$

故$f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=4x_1-7x_2-3x_3$.

第2节　对偶空间

- **定义**

设V是数域P上的一个n维线性空间，用$L(V,P)$表示V上的全体线性函数所构成的集合，即

$$L(V,P)=\{f|\ f:V\to P\text{的线性函数}\}.$$

在$L(V,P)$中定义加法和数乘运算如下：对于任意的$f,g\in L(V,P)$，及$\alpha\in V$，$k\in P$，规定

(1) 加法：$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$.

(2) 数乘：$(kf)(\alpha)=kf(\alpha)$.

显然，$L(V,P)$关于上述定义的加法和数乘运算封闭，且满足线性空间的八条运算规律. 因此，$L(V,P)$构成数域P上的线性空间. 通常，称$L(V,P)$为线性空间V的对偶空间.

- **对偶基**

若V是数域P上的一个n维线性空间，则它的对偶空间$L(V,P)$是几维的呢? 如何寻求$L(V,P)$的基呢? 下面探讨这一问题.

设V是数域P上的一个n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基. 现在，我们在$L(V,P)$中定义$n$个

元如下：

$$f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}$$

因为每个f_i在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$上的作用是唯一确定的. 因此，这$n$个线性函数是唯一确定的.

先证：$f_1,f_2,\cdots,f_n$线性无关. 令

$$c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n=0$$

依次让上式两端作用于$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$上，可得$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$.

再证：对任意$f \in L(V,P)$，f可用$f_1, f_2, \cdots, f_n$线性表出. 首先，对任意$\alpha \in V$，令$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \varepsilon_i$，则$f_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} k_j f_i(\varepsilon_j) = k_i$，故$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\varepsilon_i$. 下证$f = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) f_i$. 因为

$$\text{右} = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) f_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} k_i f(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} f(k_i \varepsilon_i) = f(\alpha) = \text{左}.$$

故结论证毕.

综上所述，$f_1, f_2, \cdots, f_n$构成$L(V,P)$的一组基.

由此引入

定义 设V是数域P上的一个n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是V的一组基，由上述方式决定的$L(V,P)$的基$f_1,f_2,\cdots,f_n$称为$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的对偶基.

【例3】 求P^3中的基$\alpha_1=(1,-1,3),\alpha_2=(0,1,-1),\alpha_3=(0,3,-2)$的对偶基$f_1,f_2,f_3$.

解： 任取$\alpha=(x_1,x_2,x_3)\in P^3$，设$f(\alpha_1)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$. 利用条件$f_1(\alpha_1)=1,f_1(\alpha_2)=0,f_1(\alpha_3)=0$得

$$
\begin{cases} a_1 - a_2 + 3a_3 = 1 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ 3a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases},
$$

解得$a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$. 故$f_1(\alpha) = x$.

同理可求得$f_2(\alpha) = 7x_1 - 2x_2 - 3x_3$，$f_3(\alpha) = -2x_1 + x_2 + x_3$. 故$f_1(\alpha) = x, f_2(\alpha) = 7x_1 - 2x_2 - 3x_3, f_3(\alpha) = -2x_1 + x_2 + x_3$即为所求的对偶基.

注: 欲求一个线性空间V的一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$的对偶基，首先应弄清$L(V, P)$中元的形式，然后在借助于条件$f_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$确定每个$f_i$即可.

下面考察V的两组基所决定的对偶基之间的关系.

设V是数域P上的n维线性空间,

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n \text{与} \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$$

是V的两组基，它们的对偶基分别为

$$f_1,f_2,\cdots,f_n \text{与} g_1,g_2,\cdots,g_n.$$

又

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

及

$$(g_1,g_2,\cdots,g_n)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)B$$

其中$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$

由题设

$$\eta_i = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n$$

及

$$g_j = b_{1j}f_1 + b_{2j}f_2 + \cdots + b_{nj}f_n$$

因此,

$$g_j(\eta_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}f_k(a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n)$$

$$= b_{1j}a_{1i} + b_{2j}a_{2i} + \cdots + b_{nj}a_{ni}$$

$$=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.$$

即$B^{'}A=E$，故$B=(A^{'})^{-1}$.

由此可得

定理 设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$及$\eta_1,\cdots,\eta_n$是$V$的两组基，它们的对偶基分别是$f_1,\cdots,f_n$ 与$g_1,\cdots,g_n$. 设从基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$到基$\eta_1,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵为$A$，从基$f_1,f_2,\cdots,f_n$到基$g_1,g_2,\cdots,g_n$过渡矩阵为$B$，则$B=(A^{'})^{-1}$.

【例4】设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是线性空间$V$的一组基，$f_1, f_2, f_3$是它的对偶基.

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \alpha_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$V$的一组基，并求它的对偶基.

解：因为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

且上述矩阵的行列式$\neq 0$，故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$V$的一组基.

设g_1, g_2, g_3是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的对偶基，则

$$
\begin{aligned}
(g_1, g_2, g_3) &= (f_1, f_2, f_3)(A')^{-1} \\
&= (f_1, f_2, f_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

故$g_1 = f_2 - f_3, g_2 = f_1 - f_2 + f_3, g_3 = -f_1 + 2f_2 - f_3$.

第3节 双线性函数

定 义 设V是数域P上一个线性空间，$f(\alpha, \beta)$是V上的二元函数，如果$f(\alpha, \beta)$满足

(1) $f(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1 f(\alpha, \beta_1 + k_2 f(\alpha, \beta_2)$.

(2) $f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1 f(\alpha_1, \beta) + k_2 f(\alpha_2, \beta)$.

这里$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \in V$，$k_1, k_2 \in P$，则称$f(\alpha, \beta)$为$V$上的一个双线性函数.

【例 5】 (1) 设V是数域P上的线性空间，f_1, f_2均为V上的线性函数，定义

$$f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha) f_2(\beta),\quad \alpha, \beta \in V$$

则f是V上的一个双线性函数.

(2) 在P^4中，对任意$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$，$Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in P^4$，定义

$$f(X,Y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$$

则f是V一个双线性函数.

下面我们将考查n维线性空间V上的双线性函数的一般形式.

设V是数域P上的一个n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是它的一组基. 对任意$\alpha,\beta\in V$，令$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$，$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y$. 若$f$是$V$上的一个双线性函数，则

$$f(\alpha,\beta)=f(\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^n y_j\varepsilon_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j.$$

若记$A=(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))$，则$f(\alpha,\beta)=X'AY$.

反过来，在P^n中，对任意$X,Y \in P^n$，令$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$f(X,Y)=X'AY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$

是V上的一个双线性函数.

定义 设$f(\alpha,\beta)$是数域P上n维线性空间V上的一个双线性函数，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是它的一组基，称

$$A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

是$f(\alpha,\beta)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵.

在一个线性空间中，基的选取不是唯一的. 以下考察同一个双线性函数在不同基下的度量矩阵之间的关系：

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$及$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是数域$P$上$n$维线性空间$V$的两组基，且

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C$$

对于任意的$\alpha,\beta\in V$，令

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X_1$$

及

$$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Y_1$$

则$X=CX_1$，$Y=CY_1$.

如果双线性函数$f(\alpha,\beta)$在上述两组基下的度量矩阵分别为A,B，即

$$f(\alpha,\beta)=X'AY=X_1'BY_1$$

则

$$f(\alpha,\beta)=X'AY=(CX_1)'A(CY_1)=X_1'(C'AC)Y_1.$$

故$B=C'AC$，即同一个双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的.

定义 设$f(\alpha,\beta)$是线性空间V上的一个双线性函数，如果$f(\alpha,\beta)=0$对于任意的$\beta\in V$，可推导出$\alpha=0$，称f是非退化的.

显然，f是非退化的$\Leftrightarrow f$的度量矩阵A可逆.

【例6】 设$V=P[x]_n$，在V上定义一个二元函数如下:

$$\varphi(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx,\text{其中}f(x),g(x)\in V.$$

(1) 证明：φ是V上的一个双线性函数.

(2) 若$n=4$，求φ在基$1,x,x^2,x^3$下的度量矩阵.

(3) 证明：φ是非退化的.

解：(1) 直接验证易知φ是V上的双线性函数.

(2) 因为

$$\varphi(x^i,x^j)=\int_{-1}^{1}x^ix^jdx=\begin{cases}\frac{2}{i+j+1}, & \text{当}\quad i+j\text{为偶数}\\ 0, & \text{当}\quad i+j\text{为奇数}\end{cases},$$

所以当$n=4$时，φ在基$1,x,x^2,x^3$下的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}&0\\0&\frac{2}{5}&0&\frac{2}{7}\end{pmatrix}.$$

(3) 对于任意的$g(x)\in V$，设$\varphi(f(x),g(x))=0$，取$g(x)=f(x)$，则

$$0=\varphi(f(x),f(x))=\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx\Rightarrow[f(x)]^2=0\Rightarrow f(x)=0.$$

故φ是非退化的.

第4节 对称与反对称双线性函数

定义 设$f(\alpha,\beta)$是线性空间V上的一个双线性函数，如果对任意$\alpha,\beta\in V$

(1) $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，称$f(\alpha,\beta)$是对称双线性函数.

(2) $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，称$f(\alpha,\beta)$是反对称双线性函数.

注: 显然，$f(\alpha,\beta)$是对称双线性函数$\Leftrightarrow f(\alpha,\beta)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵是对称的；$f(\alpha,\beta)$是反对称双线性函数$\Leftrightarrow f(\alpha,\beta)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵是反对称的.

依据前面已有的结论，可得

定理 设V是数域P上的n维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上对称双线性函数，则存在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使得$f(\alpha,\beta)$在这组基下的度量矩阵为对角矩阵. 特别地，

(1) 若V是复数域$\mathbb{C}$上的n维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上对称双线性函数，则存在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对任意$\alpha,\beta\in V$，若$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$，则

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ry_r,\quad 0\le r\le n.$$

(2) 若V是实数域$\mathbb{R}$上的n维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上对称双线性函数，则存在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对任意$\alpha,\beta\in V$，若$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$，则

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r,\ 0\le p\le r\le n.$$

上述(1)(2)两种形式分别称为复、实双线性函数的标准形. 利用双线性函数的标准形，类似于二次型的标准形一样，可以对双线性函数的取值情况进行研究.

【例 7】设V是复数域上的线性空间，其维数$n\geq 2$，$f(\alpha,\beta)$是V上的一个对称双线性函数.

(1) 证明：V中存在非零向量ξ使得$f(\xi,\xi)=0$.

(2) 如果$f(\alpha,\beta)$是非退化的，则必存在线性无关的向量ξ,η满足

$$f(\xi,\eta)=1, f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.$$

解：(1) 在线性空间V上找一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使得对于任意的$\alpha,\beta\in V$，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i$，$f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. 现在取$\xi=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$，则

$$f(\varepsilon_1+i\varepsilon_2,\varepsilon_1+i\varepsilon_2)=1+i^2=0.$$

(2) 取$\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\varepsilon_2$，$\eta=\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\varepsilon_2$，则

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.$$

习题讨论课十

一、填空题

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是数域$P$上线性空间$V$的一组基，且$f(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=4, f(\alpha_1+\alpha_3)=4, f(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=-2$，则$f(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=$_______.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是数域$P$上线性空间$V$的一组基，$f_1,f_2,f_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的对偶基，令$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3$，则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的对偶基(用$f_1,f_2,f_3$表示)为_______.

3. 在$\mathbb{R}^3$中定义如下双线性函数: $f(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$，$X,Y\in\mathbb{R}^3$，则$f(X,Y)$在基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(1,1,0),\varepsilon_3=(1,1,1)$下的度量矩阵为_______.

二、解答与证明题.

4. 在线性空间$\mathbb{R}[x]_n$中，取定$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$，定义

$$p_i(x)=\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

(1) 证明：$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$是$\mathbb{R}[x]_n$的一组基；

(2) 求$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$的对偶基.

5. 设V是一个线性空间，$f_1,f_2,\cdots,f_s$是V^*中的非零向量，证明: 存在$\alpha\in V$，使得$f_i(\alpha)\neq 0$ ($i=1,2,\cdots,s$).

6. 证明: 线性空间V上双线性函数$f(\alpha,\beta)$为反对称的充分必要条件是: 对于任意的$\alpha\in V$都有$f(\alpha,\alpha)=0$.

7. 设$A=(a_{ij})\in P^{2\times 2}$，在$P^{2\times 2}$上定义如下双线性函数

$$f(X,Y)=\mathrm{tr}(X'AY),\quad X,Y\in\in P^{2\times 2}.$$

(1) 求$f(X,Y)$在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的度量矩阵.

(2) 问$f(X,Y)$是否退化? 为什么?

习题讨论课十参考解答

1. **解：** 先求$f(\alpha_1)=3, f(\alpha_2)=0, f(\alpha_3)=1$，故$f(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)=3x_1+x_3$.

2. **解：** 设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，则$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

设g_1,g_2,g_3是β_1,β_2,β_3的对偶基，则

$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)(A')^{-1}=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

因此$g_1=f_1, g_2=f_2-f_1, g_3=f_3-f_2$.

3. **解：** $f(X,Y)$在基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(1,1,0),\varepsilon_3=(1,1,1)$下的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & f(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) & f(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_3, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_3, \varepsilon_2) & f(\varepsilon_3, \varepsilon_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. **解：** (1) 因为$\dim(V) = n$，只需证明$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$线性无关即可. 设

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + \cdots + k_n p_n(x) = 0.$$

取$x = a_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$. 易得$k_j = 0$. 故$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$线性无关，从而构成$\mathbb{R}[x]_n$的一组基.

(2) 设V^*是$\mathbb{R}[x]_n$的对偶空间，令$L_i \in V^*$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 现对于任意的$p(x) \in V$，定义

$$L_i(p(x)) = p(a_i)$$

则线性函数L_i满足

$$L_i(p_j(x)) = p_j(a_i) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

因此，由对偶基的定义知$L_1, L_2, \cdots, L_n$所求的对偶基.

5. **证明**：对s采用归纳. 当$s = 1$时，因$f_1 \neq 0$，必存在$\alpha \in V$，使得$f_1(\alpha) \neq 0$，此时命题成立. 假定当$s = k$时命题成立，即存在$\alpha \in V$，使得$f_i(\alpha) = a_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$. 现考察$s = k + 1$ 时情形.

若$f_{k+1}(\alpha) \neq 0$，则命题成立. 若$f_{k+1}(\alpha) = 0$，由题设$f_{k+1} \neq 0$，必存在$\beta \in V$，使得$f_{k+1}(\beta) = b \neq 0$. 现令$f_i(\beta) = d_i$，$i = 1, 2, \cdots, k$. 根据实数的性质易知：存在$c \neq 0$，使得$a_i + cd_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$. 令$\gamma = \alpha + c\beta$，显然，$\gamma \in V$，且$f_i(\gamma) = a_i + cd_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$，$f_{k+1}(\gamma) = cb \neq 0$，故命题成立.

6. **证明**：”$\Rightarrow$” 若$f(\alpha, \beta)$为反对称双线性函数，则$f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$，特别地令$\beta = \alpha$，有$f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha)$，即$f(\alpha, \alpha) = 0$.

"$\Leftarrow$" 若对任意$\alpha \in V$，$f(\alpha,\alpha)=0$，则对任意$\alpha,\beta \in V$有

$$f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)+f(\beta,\alpha)=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=0,$$

即$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，故$f(\alpha,\beta)$是反对称双线性函数.

7. **解**：(1) 直接计算易知:

$$f(E_{11},E_{11})=a_{11}, f(E_{11},E_{12})=0, f(E_{11},E_{21})=a_{12}, f(E_{11},E_{22})=0,$$

$$f(E_{12},E_{11})=0, f(E_{12},E_{12})=a_{11}, f(E_{12},E_{21})=0, f(E_{12},E_{22})=a_{12},$$

$$f(E_{21},E_{11})=a_{21}, f(E_{21},E_{12})=0, f(E_{21},E_{21})=a_{22}, f(E_{21},E_{22})=0,$$

$$f(E_{22},E_{11})=0, f(E_{22},E_{12})=a_{21}, f(E_{22},E_{21})=0, f(E_{22},E_{22})=a_{22},$$

故$f(X,Y)$在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的度量矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

(2) 因为$|B|=|A|^2$，从而当且仅当A非退化时，$f(X,Y)$非退化.

注: 先交换B的$2,3$两行，再交换$2,3$列即可观察出$|B|=|A|^2$.