理科专业基础课(71100201)

《代　数　与　几　何》

主讲人: 吕新民

第五章 二次型

- 二次型与对称矩阵
- 二次型的标准形
- 复、实二次型的规范形
- 实二次型的正定性

第1节 二次型与矩阵

- **二次型与矩阵**

定义 系数在数域P中的n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + \cdots + \cdots \\
&\quad + a_{nn}x_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji})
\end{aligned}
$$

称为数域P上的n元二次型.

记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

这里$a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 则二次型的表达式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX.$$

对于任意一个二次型f，依据上述方式，可唯一决定一个对称矩阵A. 反过来，任给一个对称矩阵

A，可唯一决定一个二次型$f = X'AX$. 对称矩阵A称为二次型f对应的矩阵. 一个二次型与一个对称矩阵之间具有一一对应的关系. 通常，称矩阵A的秩为二次型$f = X'AX$的秩，记作rank(f).

• 线性替换与合同

定义 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$与$y_1, y_2, \cdots, y_n$是两组变量，系数在数域P中的关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由$x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$的一个线性替换.

若记$C=(c_{ij})$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，则上述线性替换可用矩阵形式记为$X=CY$. 特别地，若$|C|\neq 0$，称该线性替换为非退化的.

下面考查一个二次型$f = X'AX$所对应的矩阵A在经过一个非退化的线性替换$X=CY$后所得的二次型$f=Y'BY$所对应的矩阵B之间的关系.

$$f = X'AX = (CY)'A(CY) = Y'(C'AC)Y.$$

由二次型与对称矩阵之间的一一对应性，知$B = C'AC$. 为讨论问题的方便起见，引入

定义 数域P上的两个n阶方阵A, B称为合同的，如果存在n阶可逆方阵C，使得$B = C'AC$.

合同是矩阵之间的又一种关系. 直接验证知合同关系具有:

(1) 反身性：即对于任意n阶方阵A，A与A合同.

(2) 对称性：若A与B合同，则B与A合同.

(3) 传递性：若A与B合同，B与C合同，则A与C合同.

【例 1】写出二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_3-2x_2x_4$$

所对应的矩阵，并求rank(f).

解： 二次型f所对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

因为rank$(A)=4$，所以rank$(f)=4$.

第2节 二次型的标准形

- **二次型的标准形**

定义 仅含平方项的二次型称为二次型的标准形. 一个二次型的标准形的一般形式为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2.$$

其中d_i是可以为0.

定理 任意一个二次型$f = X'AX$均可经过非退化的线性替换化为仅含平方项的标准形.

证明： 对n作归纳. 当$n = 1$时，$f(x_1) = a_{11}x_1^2$，结论自然成立. 假定结论对$n-1$元二次型成立. 现考察n元二次型，分三种情形：

(1) a_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ **中至少有一个不为零，不妨设**$a_{11} \neq 0$，**这时**

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j)^2 \\
&\qquad\qquad -a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

其中

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j = -a_{11}^{-1}(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

是关于$x_2, \cdots, x_n$的$n-1$元二次型. 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j \\ y_2 = x_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n = x_n \end{cases}，即 \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}y_j \\ x_2 = y_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

这是一个非退化的线性替换，它使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}y_iy_j$$

由归纳假定，对$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j$有非退化的线性替换

$$\begin{cases} z_2 = c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + \cdots + c_{2n}y_n \\ z_3 = c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + \cdots + c_{3n}y_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ z_n = c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

能使$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j$变成平方和

$$d_2z_2^2 + d_3z_3^2 + \cdots + d_nz_n^2$$

于是非退化线性替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + \cdots + c_{2n}y_n \\ z_3 = c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + \cdots + c_{3n}y_n \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ z_n = c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

就使$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$变成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 + \cdots + d_n z_n^2$$

结论成立.

(2) 所有$a_{ii} = 0$，但至少有一个$a_{1j} \neq 0 (j > 1)$，不妨设$a_{12} \neq 0$，令

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = z_n \end{cases}$$

它是非退化的线性替换，且使$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个关于$z_1, z_2, \cdots, z_n$的二次型，且z_1^2的系数不为零，利用(1)的结论，定理成立.

(3) 若$a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$，由对称性，$a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$. 这时，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

是一个$n-1$元二次型，由归纳假定，结论成立.

上述方法通常称为配方法.

一个二次型对应着一个对称矩阵，而一个二次型的标准形对应着一个对角矩阵. 把一个二次型化成标准形的过程等价于把一个对称矩阵化为对角矩阵的过程. 定理用矩阵的语言可以叙述为

定理 数域P上的任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

【例 2】用配方法将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_3x_1$$

化为标准形，并写出可逆线性替换.

解：令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_1y_3 - 3y_2y_3 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 \\ &= 2(y_1 + \tfrac{7}{4}y_3)^2 - 2(y_2 - \tfrac{1}{4}y_3)^2 - 6y_3^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{7}{4}y_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}，\text{即} \begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{7}{4}z_3 \\ y_2 = z_2 + \frac{1}{4}z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

故所求标准形为

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 6z_3^2.$$

所作的可逆线性替换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - \frac{3}{2}z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - 2z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}.$$

【例3】设$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵$C$，使得$C'AC$为对角矩阵.

解： 对称矩阵A对应的二次型为

$$f=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3.$$

利用配方法易得

$$f=2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2 \\ y_2=\quad\quad x_2+2x_3 \\ y_3=\quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} x_1=y_1+y_2-2y_3 \\ x_2=\quad\quad y_2-2y_3 \\ x_3=\quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}.$$

故

$$C=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}，使得C'AC=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

第3节 复、实二次型的规范形

- **复数域$\mathbb{C}$上二次型的规范形**

任意一个二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，经过非退化的线性替换$X=CY$，均可化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,$$

其中$r=\mathrm{rank}(A)$，且$d_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,r)$. 一般情

况下，标准形不是唯一的．因为标准形中的系数d_i按照标准化的过程不是唯一确定的．

在复数域$\mathbb{C}$上，继续作非退化的线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

可将标准形化为

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

称这种形式为复二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的规范性. 显然，复二次型的规范形被其秩所唯一决定.

定理 任一复系数的二次型，经过适当的非退化线性替换可变成规范形，且规范形是唯一的.

若用矩阵的语言的叙述，则为

定理 任何一个复对称矩阵A都合同于一个形如$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的对角矩阵，这里$r=$rank$(A)$.

- **实数域$\mathbb{R}$上二次型的规范形**

任意一个二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$，经过非退化的线性替换$X=CY$，均可化为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2,$$

其中r =rank(A)，且$d_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, r)$.

在实数域$\mathbb{R}$上，继续作非退化的线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

可将标准形化为

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

称该形式为实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的规范性.

实二次型的规范形是否具有唯一性，取决于表达式中的p是否唯一. 为此证下列结果.

定理 任一实系数的二次型，经过适当的非退化的线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的.

证明： 定理的前一半在上面已证，下面仅证唯一性. 设实二次型$f = X'AX$经过非退化线性替换$X = BY$化成规范形

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

而经过非退化线性替换$X = CZ$化成规范形

$$f = z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

于是

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 = z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2, \qquad (1)$$

且二者之间可以通过关系式$Z = C^{-1}BY$转化.

假定$p > q$. 令

$$G = C^{-1}B = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2),$$

即

$$\begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n \\ z_2 = g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \cdots + g_{2n}y_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ z_n = g_{n1}y_1 + g_{n2}y_2 + \cdots + g_{nn}y_n \end{cases}$$

现考虑如下齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ g_{q1}y_1 + g_{q2}y_2 + \cdots + g_{qn}y_n = 0 \\ y_{p+1} = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

该方程组有n个未知量，而含有

$$q+(n-p)=n-(p-q)<n$$

个方程. 于是方程组必有非零解. 令

$$(y_1,\cdots,y_p,y_{p+1},\cdots,y_n)=(k_1,\cdots,k_p,k_{p+1},\cdots,k_n)$$

是其中一个非零解. 显然，$k_{p+1}=\cdots=k_n=0$. 先将其代入(1)式左端，得到的值为

$$k_1^2+\cdots+k_p^2>0$$

再通过(2)式转化代入(1)式右端，因为它是(3)的解，故有$z_1=\cdots=z_q=0$，所以得到的值为

$$-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2\leq 0$$

这是一个矛盾. 故假定不成立.

同理可证$p < q$也不成立. 从而$p = q$. 这就证明了实二次型的规范形是唯一的.

上述定理称为惯性定理，其中正平方项的个数p称为正惯性指数，而负平方项的个数$r - p$称为负惯性指数，它们的差$p - (r - p) = 2p - r$称为符号差.

若用矩阵的语言的叙述，则为

定理 任何一个实对称矩阵A都合同于一个形如

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$的对角矩阵，这里$r=$rank(A)，而p是A对应的二次型的正惯性指数.

规范形不仅形式唯一，而且由于其形式简单，在考察二次型的取值符号上具有相当的优势.

【例4】设A为一个n阶实对称矩阵，且$|A|<0$. 证明：存在实n维向量$X\neq 0$，使得$X'AX<0$.

证明：记$f=X'AX$. 因为$|A|\neq 0$，存在可逆的线性替换$X=CY$，使得

$$f = X'AX = Y'(C'AC)Y = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_n^2.$$

因为$|A| < 0$，则$p < n$. 取

$$Y = (y_1, \cdots, y_p, y_{p+1}, \cdots, y_n) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0).$$

显然$Y \neq 0$，而C可逆，从而相应的$X = CY \neq 0$，且$X'AX = Y'(C'AC)Y = -1 < 0$.

【例5】 设$f = X'AX$是一个实二次型，若有实n维向量X_1, X_2，使得$X_1'AX_1 > 0, X_2'AX_2 < 0$. 证明：存在实$n$维向量$X_0 \neq 0$，使得$X_0'AX_0 = 0$.

证明： 依题意，存在可逆的线性替换$X = CY$，使得

$$f = X'AX = Y'(C'AC)Y = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

这里$r =$rank(A). 由题设知$0 < p < n$. 取

$$Y = (y_1, \cdots, y_p, y_{p+1}, \cdots, y_r, \cdots, y_n) = (1, \cdots, 0, 1, \cdots, 0, \cdots, 0).$$

显然$Y \neq 0$，而C可逆，从而相应的$X = CY \neq 0$，且$X'AX = Y'(C'AC)Y = 1 - 1 = 0$.

第4节 实二次型的正定性

- **实二次型的正定性**

定义 实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为正定的，如

果对于任意的一组不全为零的实数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，都有$f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$.

显然，实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$是正定的. 一般地，有下列结果：实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2 \text{正定} \Leftrightarrow \text{每个} d_i > 0.$$

定理 任意一个实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^{'}AX$经过非退化的线性替换$X = CY$保持正定性不变.

证明： 设正定二次型$f(X) = X^{'}AX$经非退化线性替换$X = CY$后所得二次型设为$g(Y) = Y^{'}BY$.

对任意$0 \neq Y \in \mathbb{R}^n$，因$C$可逆，则$X \neq 0$. 于是

$$0 < f(X) = X'AX = (CY)'A(CY) = Y'(C'AC)Y = Y'BY = g(Y).$$

故二次型$g(Y) = Y'BY$正定.

由此可得如下推论：

推论1 设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$是一个$n$元实二次型，则以下条件彼此等价:

(1) 二次型正定.

(2) 正惯性指数$p = n$.

(3) A与E合同.

(4) 存在可逆矩阵C，使得$A = C'C$.

进而可得

推论2 设二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^{'}AX$正定，则$|A| > 0$.

- **实对称矩阵的正定性**

定义 实对称矩阵A称为正定的，如果二次型$f = X^{'}AX$正定.

为了利用行列式建立一个实对称矩阵正定的判定条件，引入

定义 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$是一个n阶方阵，称行列式

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

为矩阵A的第i个顺序主子式.

定理 实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 正定的充要条件是A的所有顺序主子式全大于零.

证明： 必要性：对于每个k，$1 \le k \le n$，

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$$

是一个k元二次型. 对于任意一组不全为零的实数

$c_1, c_2, \cdots, c_k$，有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_i c_j = f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0$$

因此，$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k)$是正定的，从而由推论2知$f_k$对应的矩阵的行列式$P_k$大于零.

充分性：对n作归纳. 当$n = 1$时，$f(x_1) = a_{11}x_1^2$，结论成立. 假定结论对$n-1$元二次型成立，现考察n元二次型的情形.

记

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix},\ \alpha = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1\,n} \end{pmatrix},$$

则$A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$. 因为$A$的顺序主子式全大于零，所以$A_1$的顺序主子式全大于零. 由归纳假定，$A_1$是正定的，即存在可逆矩阵$G$，使得$G'A_1G=E_{n-1}$. 令$C_1=\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$C_1'AC_1=\begin{pmatrix} G' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & G'\alpha \\ \alpha'G & a_{nn} \end{pmatrix}$$

再令$C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，经过计算可得

$$C_2'C_1'AC_1C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha'GG'\alpha \end{pmatrix}$$

令$C=C_1C_2, a_{nn}-\alpha'GG'\alpha=a$，则有

$$C'AC = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

两边取行列式知$a > 0$. 于是由

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

知矩阵A与单位矩阵E合同，故矩阵A正定，即二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$正定.

最后，简单介绍半正定、负定、半负定及不定的含义.

定义 设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$是一个实二次型.

(1) 若对任意$0 \neq X \in \mathbb{R}^n$，$f(X) \geq 0$，称二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$半正定.

(2) 若对任意$0 \neq X \in \mathbb{R}^n$，$f(X) < 0$，称二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$负定.

(3) 若对任意$0 \neq X \in \mathbb{R}^n$，$f(X) \leq 0$，称二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$半负定.

(4) 若$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$既不是半正定，也不是半负定，称该二次型是不定的.

关于半正定性，有与正定性类似的结论.

定理 设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$是一个实二次

型，以下条件彼此等价：

(1) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$半正定.

(2) 正惯性指数$p =$rank(A).

(3) 存在可逆矩阵C，使得$C'AC =$diag$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，其中每个$d_i \geq 0$.

(4) 存在实矩阵C，使得$A = C'C$.

注：显然，一个实对称矩阵A负定$\Leftrightarrow -A$正定. 因此负定性的判断可以转化为正定性的判断. 同样，一个实对称矩阵A半负定$\Leftrightarrow -A$半正定. 因此半负定性的判断可以转化为半正定性的判断. 利用行列式判断一个实对称矩阵负定的方法如下：实对称矩阵A负定$\Leftrightarrow A$的奇数阶顺序主子式小于0，而偶数阶顺序主子式大于0.

【例6】求参数t的范围，使得二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2tx_1x_2-2tx_1x_3-2tx_2x_3$$

正定.

解：f对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 2 & -t & -t \\ -t & 2 & -t \\ -t & -t & 2 \end{pmatrix}$. 为使二次型正定，只需

$$P_1=2>0，P_2=\begin{vmatrix} 2 & -t \\ -t & 2 \end{vmatrix}=4-t^2>0，$$

$$P_3=|A|=(2-2t)(2+t)^2>0.$$

故所求范围为$-2 < t < 1$.

【例7】A是n阶正定矩阵，证明：A^{-1}与A^*均是正定矩阵.

证明：先证A^{-1}正定. 因为A正定，存在可逆方阵C，使得$A = C'C$. 于是$A^{-1} = C^{-1}(C')^{-1} = [(C')^{-1}]'(C')^{-1}$. 从而$A^{-1}$正定.

再证A^*正定. 首先，由A正定知$|A| > 0$. 任取$X \neq 0$，注意到A^{-1}正定，进而

$$X'A^*X = X'(\frac{1}{|A|}A^{-1})X = \frac{1}{|A|}(X'A^{-1}X) > 0,$$

故A^*正定.

【例8】设A是一个$m\times n$实矩阵，且$\mathrm{rank}(A)=n$.
证明：$A'A$正定.

证明：因为$\mathrm{rank}(A)=n$，所以齐次线性方程组$AX=0$只有零解. 任取$0\neq X\in\mathbb{R}^n$，则$AX\neq 0$，令$AX=(k_1,k_2,\cdots,k_m)'$，这里$k_i\in\mathbb{R}$. 于是

$$X'(A'A)X=(AX)'(AX)=\sum_{i=1}^{m}k_i^2>0,$$

故$A'A$正定.

习题讨论课五

一、填空题

1. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(ax_1+bx_2+cx_3)^2$所对应的矩阵为______.

2. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩为______.

3. 如果一个实二次型所对应的矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$，则它的规范形为______.

4. 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$为正定二次型，则$k$的取值范围是______.

5. 如果二次型$f(x_1,x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$是正定的，则二次型

$$g(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} a & b & y_1 \\ b & c & y_2 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}$$是_______.

二、解答与证明题.

6. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

(1) 写出f的矩阵;

(2) 用配方法将f化成标准形，并写出所施行的非退化的线性替换;

(3) 写出f的正、负惯性指数和符号差.

7. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_2 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_2+a_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},$$

其中每个a_i均为实数，若存在可逆矩阵C，使得$C'AC=B$，求矩阵C.

8. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2ax_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$$

经过可逆线性替换$X=PY$后的标准形为$f=y_1^2+y_2^2$，求常数a及可逆的线性替换$X=PY$.

9. 设A是n阶正定矩阵，B为n阶实反对称矩阵，证明：$A-B^2$为正定矩阵.

10. 设n元二次型

$$f=(x_1+a_1x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中a_i均为实数，问当$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足什么条件时，f正定.

习题讨论课五参考解答

1. **解：** 二次型对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

2. **解：** 二次型对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，直接计算可得$\mathrm{rank}(A)=2$，故二次型的秩为2.

3. **解：** 依题意，$f=X'AX=x_1^2+4x_2x_3$. 令$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_2-y_3 \end{cases}$，则$f=y_1^2+4y_2^2-4y_3^2$. 故所求规范形为$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

4. **解**：二次型对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-k\end{pmatrix}$，为使二次型正定，只需$P_1=|1|>0$，$P_2=\begin{vmatrix}1 & k\\ k & 2\end{vmatrix}>0$，$P_3=|A|>0$，解之得$-1<k<0$.

5. **解**：f对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$. 由题设，$f$正定，从而$P_1=|a|=a>0, P_2=|A|=ac-b^2>0$，即$a>0, ac-b^2>0$，进而$c>0$. 而$g$对应的矩阵为$B=\begin{pmatrix}-c & b\\ b & -a\end{pmatrix}$，而$B$的顺序主子式满足$P_1=|-c|=-c<0, P_2=ac-b^2>0$，故二次型$g(y_1,y_2)$是负定的.

6. **解**：(1) f的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

(2) $f=2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)-x_2^2-4x_2x_3$

$$=2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+4x_3^2,$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2-2y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，

于是f的标准形为

$$f=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2.$$

(3) f的正惯性指数为2，负惯性指数为1，符号差为1.

7. **解：** A对应的二次型为

$$f=a_1x_1^2+(a_1+a_2)x_2^2+(a_1+a_2+a_3)x_3^2+2a_1x_1x_2+2a_1x_1x_3+2(a_1+a_2)x_2x_3$$
$$=a_1(x_1+x_2+x_3)^2+a_2(x_2+x_3)^2+a_3x_3^2,$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}，$$

即$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，故$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. **解：二次型对应的矩阵为**$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，**对**$A$**作初等变换**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$$

由题设，$\mathrm{rank}(A) = 2$，故$a = 1$. 于是

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}，即 \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = \qquad y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}.$$

故所求可逆线性替换为$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$，使得$f = y_1^2 + y_2^2$.

9. **证明：** 因A为正定矩阵，则$A' = A$，又$B' = -B$，则

$$(A - B^2)' = A' - (B')^2 = A - (-B)^2 = A - B^2,$$

即$A - B^2$是实对称矩阵. 对于任意的$X \neq 0$，因

$$X'(A - B^2)X = X'(A + B'B)X = X'AX + (BX)'(BX) > 0,$$

故$A - B^2$正定.

10. **解**：显然实二次型半正定. 考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ x_2 + a_1 x_3 = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n + a_n x_1 = 0 \end{cases},$$

该方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_2 a_2 \cdots a_n,$$

当$D \neq 0$时，方程组只有零解. 因此，对任意$0 \neq X \in \mathbb{R}^n$，$f(X) > 0$，$f$正定.