教学要求

◆掌握描述简谐波的各物理量及各量间的关系。

◆理解机械波产生的条件； 掌握由已知质点的简谐运动方程求解平面简谐波的波函数的方法；理解波函数的物理意义；了解波的能量传播特征及能流、能流密度概念。

◆了解惠更斯原理和波的叠加原理。理解波的相干条件，能应用相位差或波程差分析相干波叠加后振幅的合成情况。

◆理解驻波及其形成，了解驻波和行波的区别。

◆了解机械波的多普勒效应及其产生的原因。能计算纵向多普勒频移。

◆理解声波、超声波、次声波。

一、波动：一定的扰动的传播。

◆ 机械波：机械振动在介质(又称媒质)中的传播;

◆ 电磁波：变化的电磁场在空间的传播(由电荷加速运动引起);

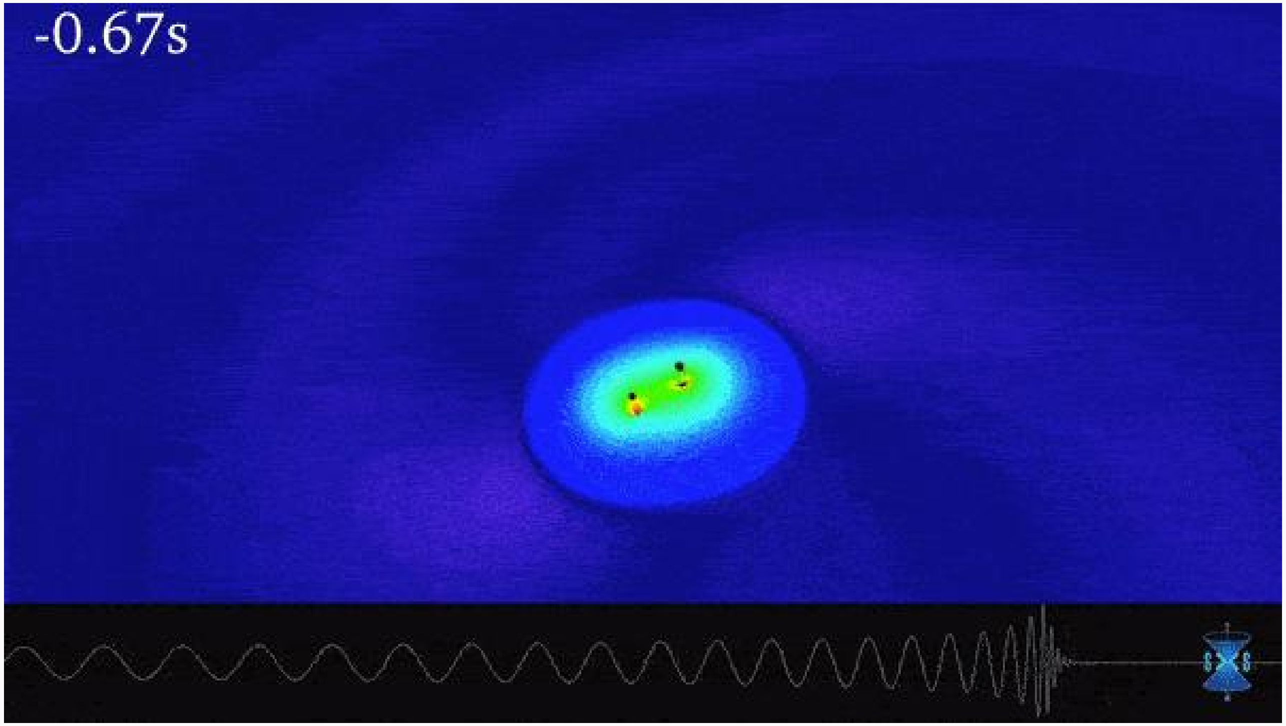
◆ 引力波：时空弯曲结构的涟漪(由大质量天体加速运动引起, 2015年9月14日人类首次直接探测到, 黑洞合并、中子星碰撞等都会产生引力波);

◆ 物质波(德布罗意波)：微观粒子在空间出现的概率波.

二、四类波的异同

◆ 同：都有反射、折射、干涉、衍射等波动特性；机械波、电磁波、引力波都有能量传播;

◆ 异：机械波传播需要介质，电磁波、引力波传播不需要介质(可在真空中传播)



引力波是时空弯曲结构的涟漪. 2016年2月11日LiGO合作组宣布：他们于2015年9月14日首次直接探测到引力波: 上图为两个黑洞碰撞最后合并成一个黑洞的过程中所产生的引力波.

像所有波浪一样, 引力波的强度随距离而减小，经许多亿光年才传播到我们地球, 已经逐渐衰减为极其微弱的震荡。

5.1 机械波的产生及其特征量

一、机械波的形成

- 机械波的定义：机械振动在介质中的传播
- 形成条件：波源+连续弹性介质

☆ 波是波源的振动状态(或振动相位)的传播，介质中的质点并不随波传播，只在各自的平衡位置附近振动.

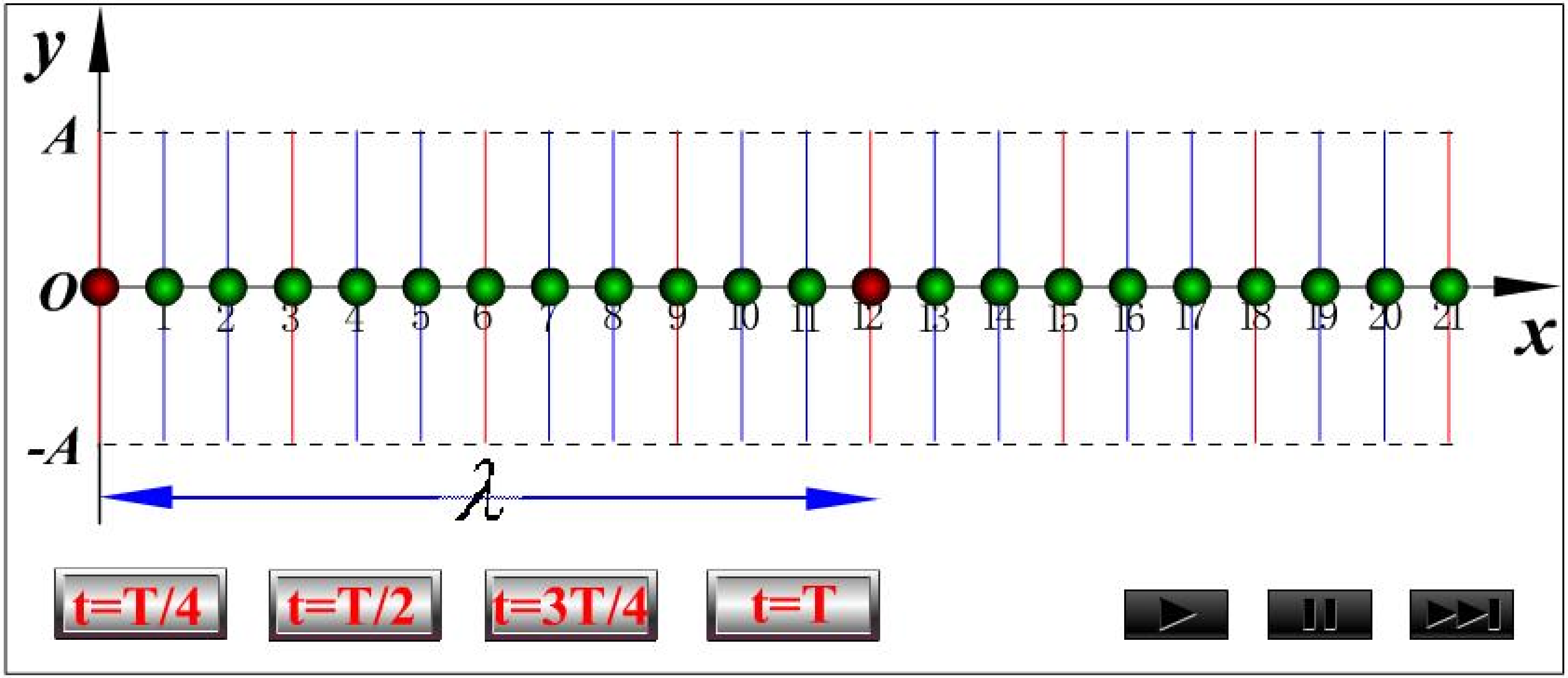
☆ 后面质点重复前面质点的振动状态. 即后面质点的相位落后于前面质点的相位.

二、机械波的种类

按质点振动方向与波的传播方向之间的关系分为

- 横波：波源运动方向与波的传播方向垂直
- 纵波：波源运动方向与波的传播方向平行
- ……

◆ 横波：质点振动方向与波的传播方向垂直



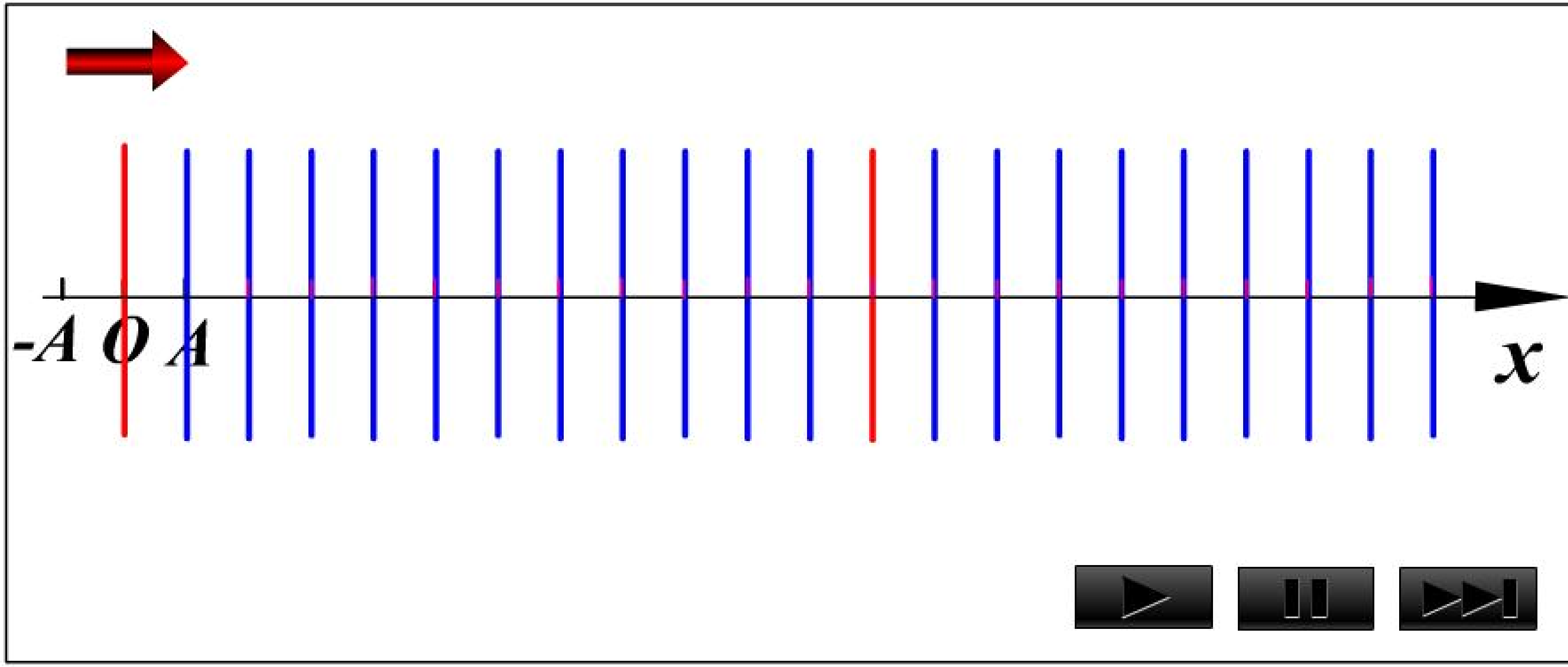
☆波源振动状态传播根源：介质切变

传播介质：机械横波只能在固体中传播, 不能在理想液体和气体中传播.

弦线(细绳)上的波、电磁波也都是横波.

5.1 机械波的产生及其特征量

◆ 纵波：质点振动方向与波的传播方向平行

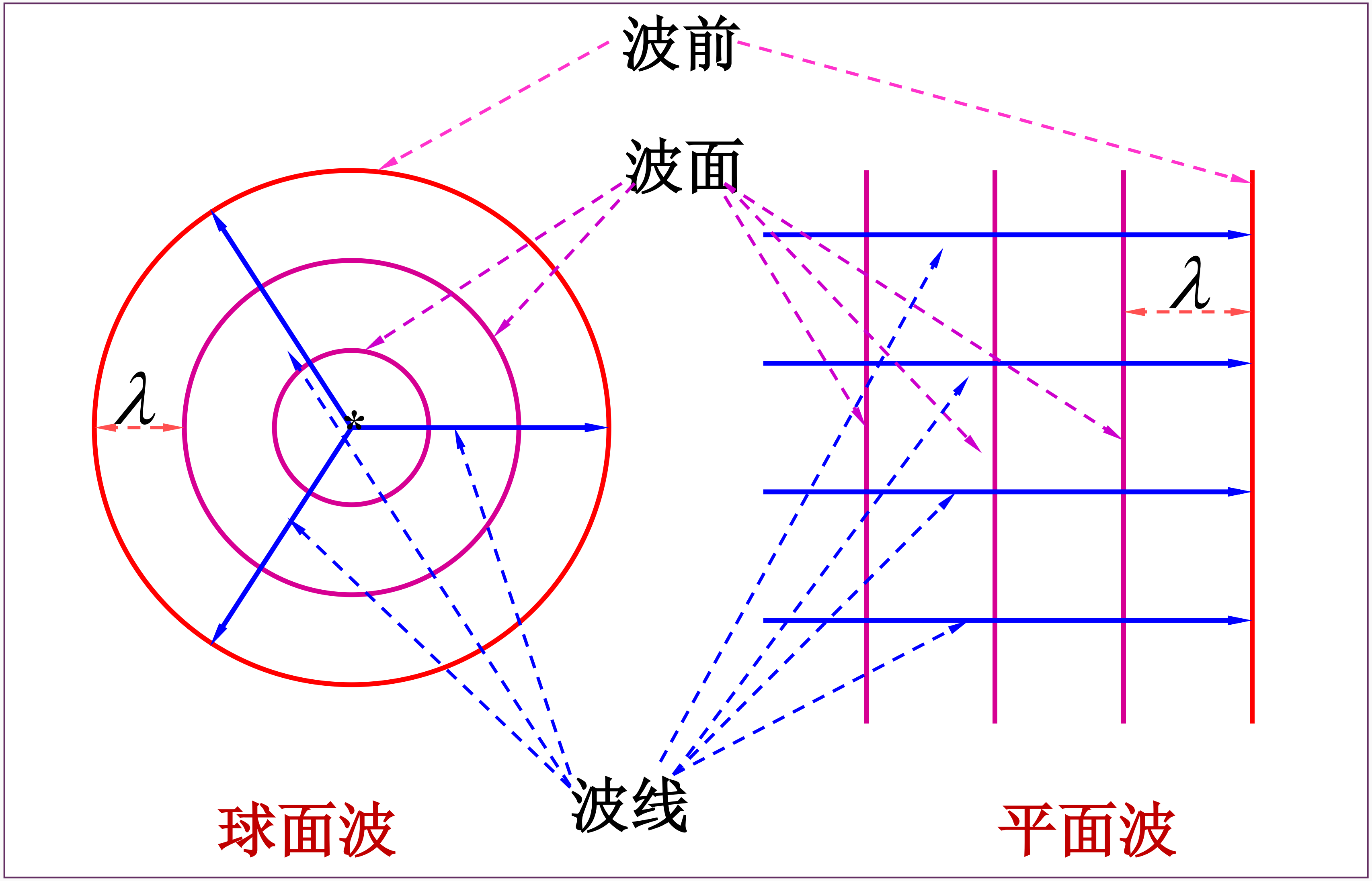


☆波源振动状态传播根源：介质容变

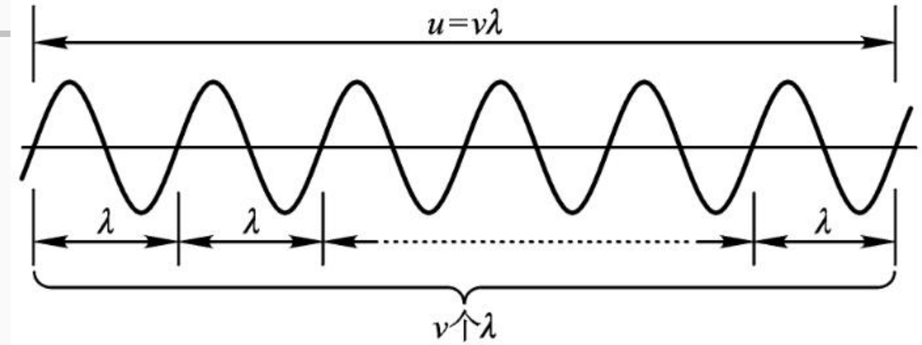
传播介质：可以在固体、液体、气体等弹性介质中传播

例如：空气中的声波，弹簧波为纵波.

三、波线、波面、波前



描述波动的特征量



1. **波长λ**：沿波的传播方向两相邻同相位点之间的距离

2. **周期T**：波前进一个波长的距离所需的时间

。 等于波源的振动周期。

频率： $$\nu=\frac{1}{T}$$ **角频率**： $$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}$$

3. **波速 u** (相速)：振动状态或相位在空间的传播速度。

$$u=\frac{\lambda}{T}=\nu\lambda$$

波速由弹性介质性质（弹性和惯性）决定

- 绳索或弦线中的(横波)波速

$$u=\sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

F为张力，ρ_l为线密度。

- 固体中

横波：$$u=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G为切变模量，ρ为固体密度。

纵波：$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E为弹性模量（杨氏模量）。

声音传播速度：空气 $u = 343\ \text{m/s}$；混凝土：$u = 4000\ \text{m/s}$

- 纵波在流体内传播的波速

$$u=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$$ K为体积模量，ρ为流体密度。

理想气体中的声速

$$u=\sqrt{\frac{K}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

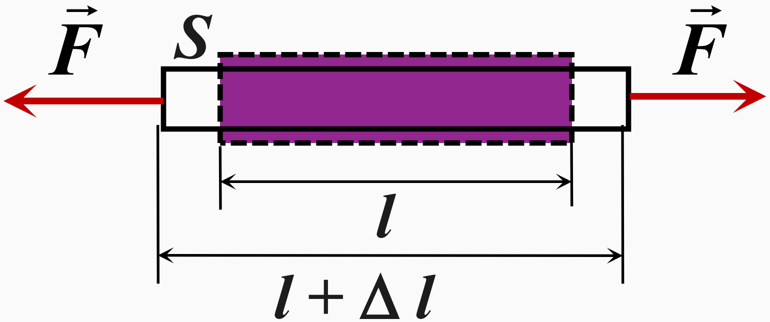
流体内只能传播纵波，不能传播横波。

波在不同介质中传播，频率不变。由于波速改变，波长也变。

1. 线变

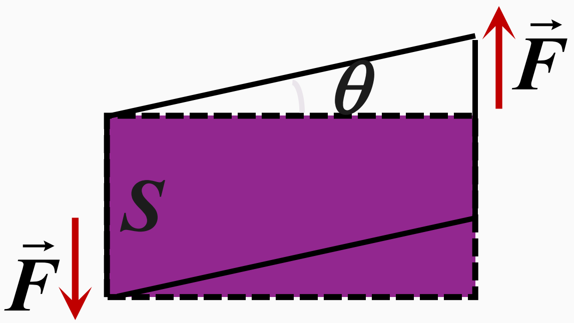
正应力： F/S　线应变： $\Delta l/l$

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$



弹性模量： E

2. 切变

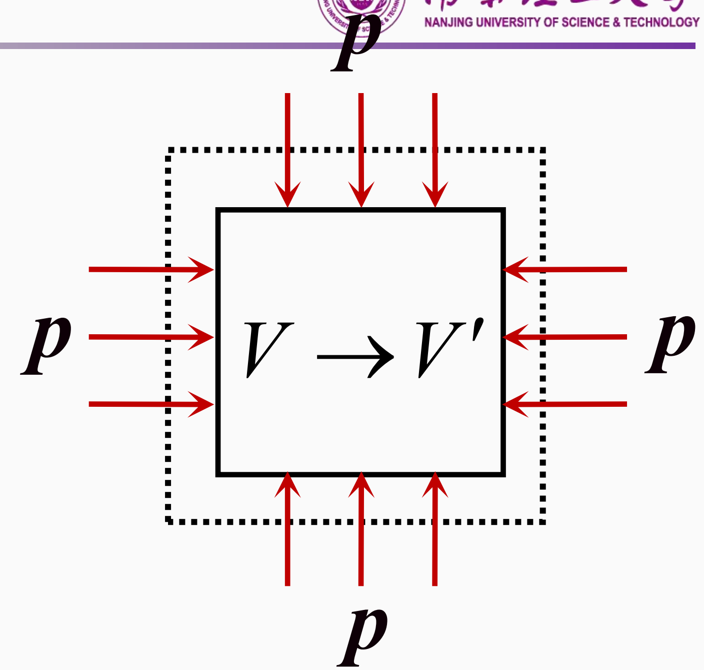


$$\frac{F}{S} = G\theta$$

切变角： θ

切变模量： G

3. 体变



压强为p时，体积为V;

压强为$p+\Delta p$时，体积为$V+\Delta V$

。

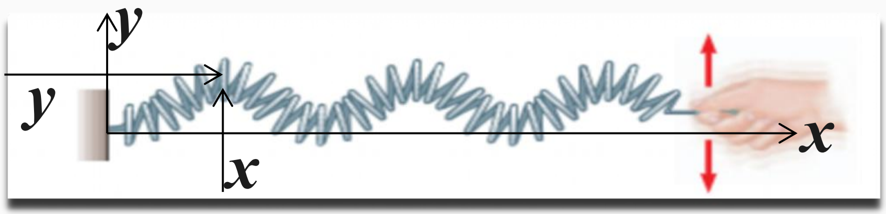
体应变: $\dfrac{\Delta V}{V}$

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V}$$ 体积模量： K

$$\Delta p > 0, \Delta V < 0; \quad \Delta p < 0, \Delta V > 0$$

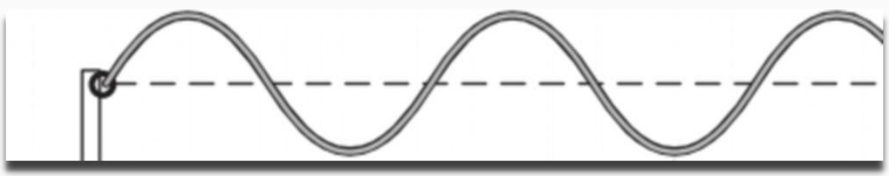
一、平面简谐波的波函数

◆**波函数：** 介质中任一质点相对于其平衡位置(坐标为 x)的位移(坐标为 y)随时间的变化关系 $y(x, t)$, 称为波函数(又称波动方程).



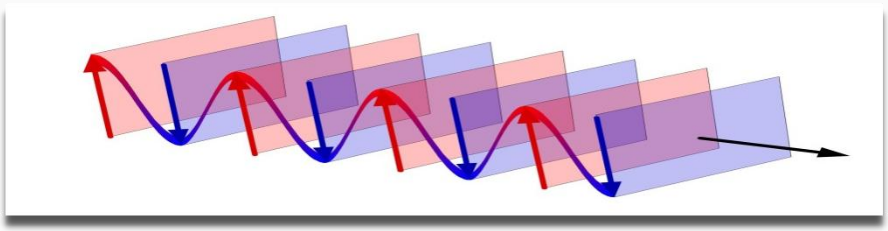
波线上任意质点 x 的振动方程, 就是波动方程, 亦即波函数.

◆**简谐波：** 波源运动为简谐振动+均匀无吸收弹性介质



简谐波传播过程中, 各个质元也作与波源同频率的(受迫)简谐振动.

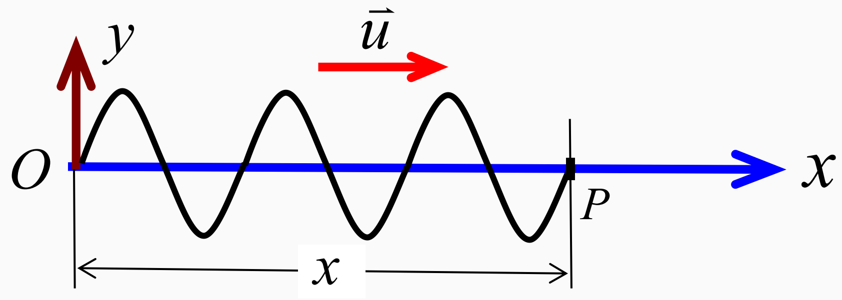
◆**平面简谐波：** 波阵面为平面的简谐波



◆右行平面简谐波的波函数 $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

时间推迟(延后)法

已知：右行波在原点 O 处的振动方程 $y_0(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$



在波的传播方向(即波线)上任取媒介中一质点P，并求出波从波源传到 P 点所需时间 Δt

$$\Delta t=\frac{x}{u}$$

写出任意质点 P 的振动方程，即波函数(波动方程)。

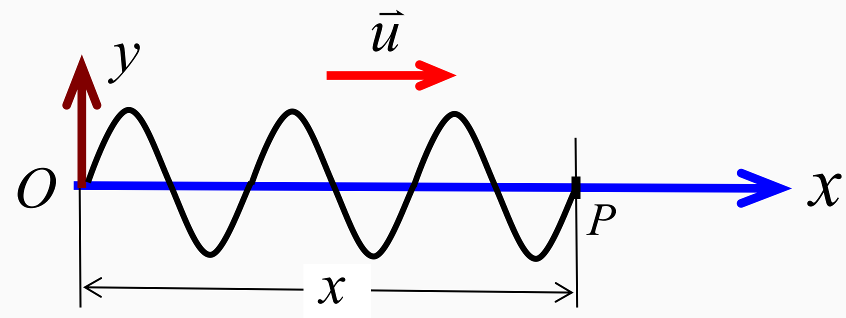
$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi_0]$$

$$=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

◆右行平面简谐波的波函数 $$y(x,t)=A\cos(\omega t+\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

相位落后法

已知: 右行波在原点*O*处的振动方程 $$y_0(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$



在波的传播方向(即波线)上任取媒介中一质点***P***，并求出波从波源传到 ***P*** 点相位的落后 $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}x$$

写出任意质点 ***P*** 的振动方程，即波函数(波动方程)。

$$y(x,t)=A\cos[\omega t+\varphi_0-\Delta\varphi]$$
$$=A\cos(\omega t+\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

◆ 若已知 x_0 处的振动方程, 求右行平面简谐波的波函数.

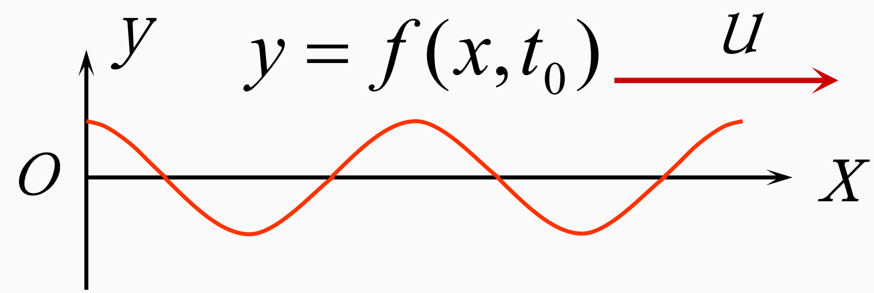
已知：右行波在 x_0 处的振动方程 $y_{x_0}(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

则时间推迟或相位落后为： $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{u} = \dfrac{x - x_0}{u}$, $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \dfrac{2\pi}{\lambda}(x - x_0)$

波函数为： $y(x,t) = A\cos[\omega(t - \dfrac{x - x_0}{u}) + \varphi_0] = A\cos[\omega t + \varphi_0 - \dfrac{2\pi}{\lambda}(x - x_0)]$

◆ 若已知右行平面简谐波在 $t=t_0$ 时刻的波形图，求波函数

a) 根据波形图, 可由旋转矢量法求得原点 O 在 $t=t_0$ 时刻的相位 φ_{t0}, 进而求得 $t=0$ 时刻的相位 φ_0, 关系为 $\varphi_{t0}=\varphi_0+\omega t_0$.



b) 写出原点 O 的振动方程：

$$y_0(t)=\begin{cases}A\cos(\omega t+\varphi_0) \quad \text{或} \\ A\cos[\omega(t-t_0)+\varphi_{t_0}]\end{cases}$$

c) 写出波函数(右行波)：

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

或：$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-t_0-\frac{x}{u})+\varphi_{t_0}]$$

◆ 特征量间的关系及平面简谐波波函数的其它形式

时间推迟法： $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi_0]=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

相位落后法： $y(x,t)=A\cos(\omega t+\varphi_0-\Delta\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}x)$

$\because\ \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu,\quad u=\frac{\lambda}{T},\quad \therefore\ \frac{\omega}{u}=\frac{2\pi}{\lambda}=k$ (波矢)

$$\boxed{\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}x=\frac{\omega}{u}x}$$

可见：上述两种波函数表达式，是等价的.

波函数的各种等价表达式(前两种为基本形式)：

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]=A\cos(\omega t+\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

(量子力学常这样表达)

◆ 介质质点的运动：振动速度，加速度

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$\upsilon = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

二、波函数的物理意义

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

1) 当 $x=x_0$ 一定时， 波函数表示 x_0 点的简谐振动方程，并给出 t 时刻 x_0 点与 O 点的振动之间的相位差.

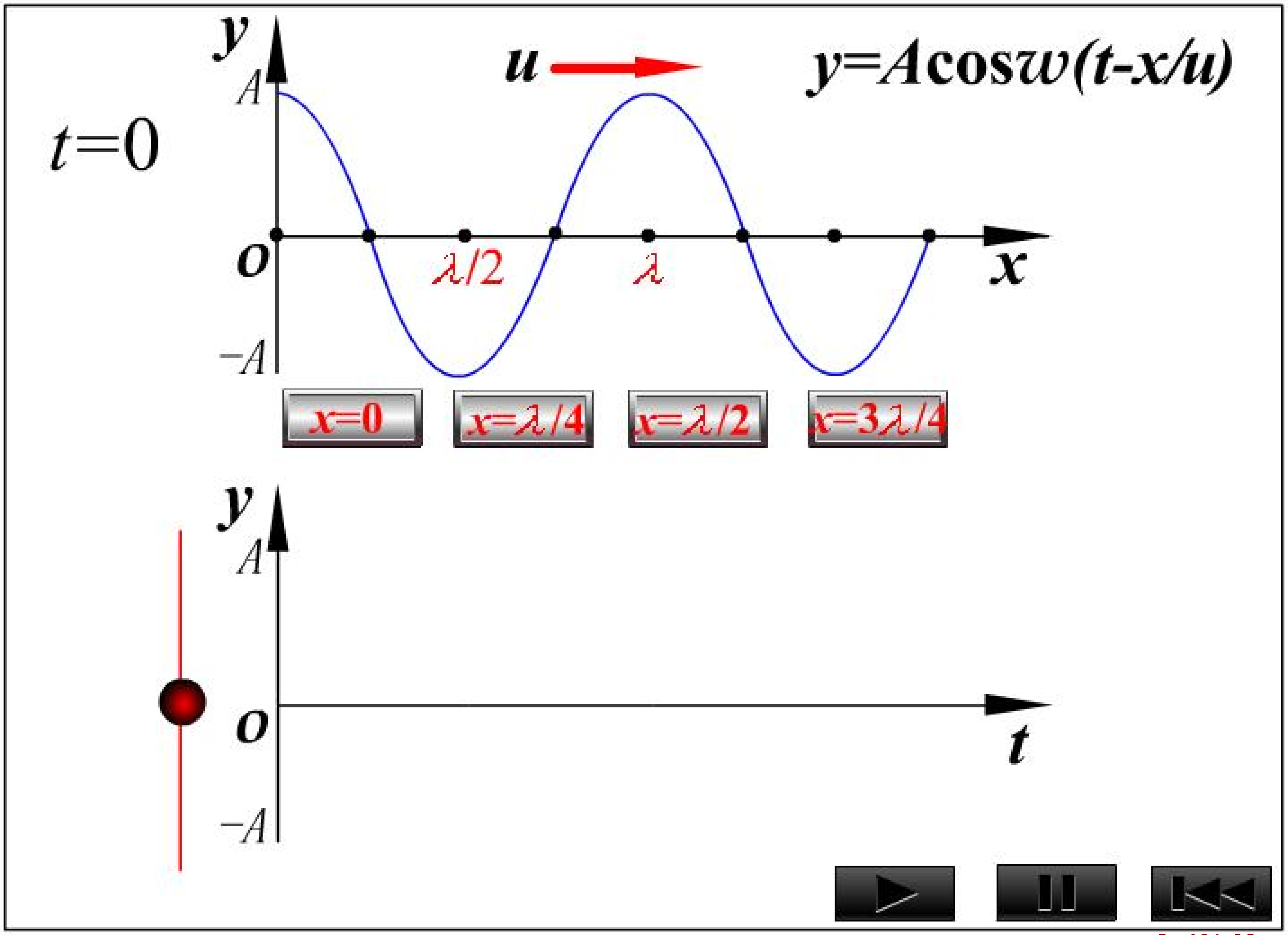
$$y_{x_0}(t)=A\cos[\omega(t-\frac{x_0}{u})+\varphi_0]=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_0}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y_0(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)=A\cos(2\pi\frac{t}{T}+\varphi_0)$$

$$\Delta\varphi=\varphi_0-\varphi_{x_0}=\frac{\omega}{u}x_0=\frac{2\pi}{\lambda}x_0$$

$$y(x_0,t)=y(x_0,t+T)$$ （波具有时间周期性)

波线上各点的简谐振动图



$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

2) 当 $t=t_0$ 一定时，波函数表示 t_0 时刻波线上各点相对于其平衡位置的位移，即 t_0 时刻的波形(wave form)，并给出 t_0 时刻，同一波线上任意两点 x_1、x_2 间的相位差.

$$y(x,t_0)=y(x+\lambda,t_0)$$ (波具有空间周期性)

$$\varphi_1=\omega(t_0-\frac{x_1}{u})+\varphi_0=2\pi(\frac{t_0}{T}-\frac{x_1}{\lambda})+\varphi_0$$

$$\varphi_2=\omega(t_0-\frac{x_2}{u})+\varphi_0=2\pi(\frac{t_0}{T}-\frac{x_2}{\lambda})+\varphi_0$$

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\frac{\omega}{u}(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)$$

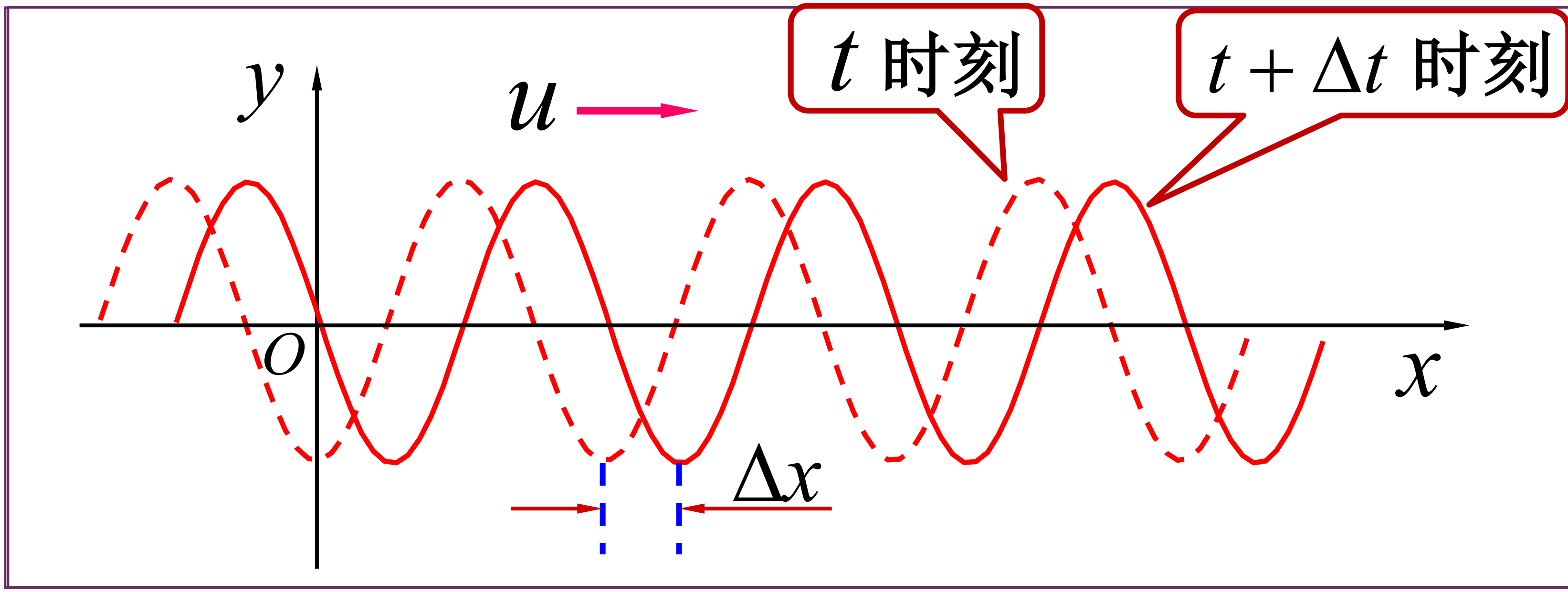
波线上两点间的波程差：

$$\boxed{\Delta x=x_2-x_1}$$

波线上两点间的相位差：

$$\boxed{\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x}$$

3) 若 x, t 均变化，波函数表示波形沿传播方向的运动情况 (行波).



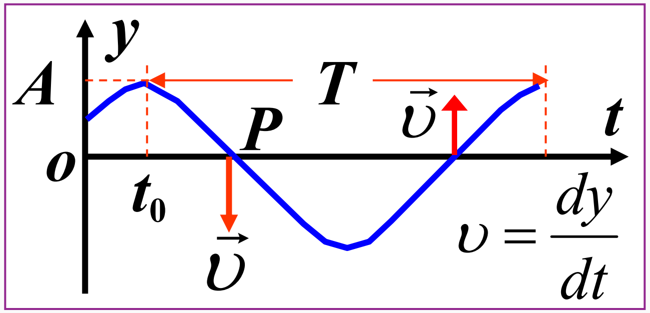
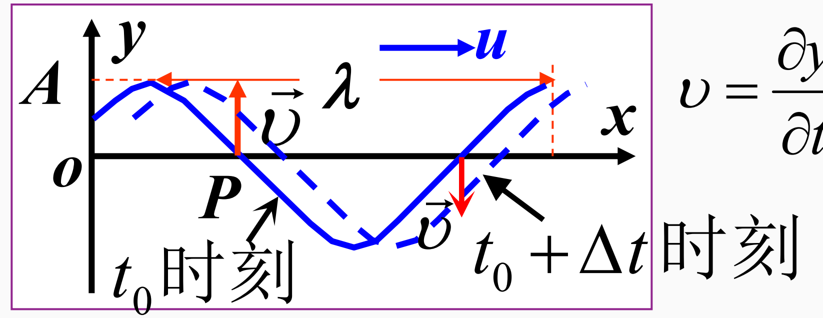
$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0],$$

令 $\phi(x, t) = C$

$$\omega(t - \frac{x}{u}) = \mathrm{C}$$

波的相位以波速 u 传播

5.2 平面简谐波

	振动曲线	波形曲线
图形		
研究对象	波线上某质点的位移 y 随时间 t 变化的规律.	波线上各质点在 t_0 时刻的位移 y 随平衡位置 x 变化的规律.
物理意义	(1) 由振动曲线可知: 振幅A，周期T，初相φ_0. (2) t 时刻质点的振动方向: (a)看振动曲线的斜率; (b)看下一时刻质点的位移.	(1) 由波形曲线可知: 振幅A, 波长λ , t_0 时刻所有质点的位移和相位. 只有t =0 时刻的波形才能提供初相. (2) t_0 时刻各质点的振动方向: (a)看前面(先振动点)近邻质点的振动; (b)看下一时刻的波形(沿波速方向平移);
特征	对给定质点, 曲线形状一定.	波形 (曲线形状) 随 t 向前平移.

例1、 已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y=(5\text{cm})\cos\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x].$$

解：比较系数法：与波动方程的标准形式对比.

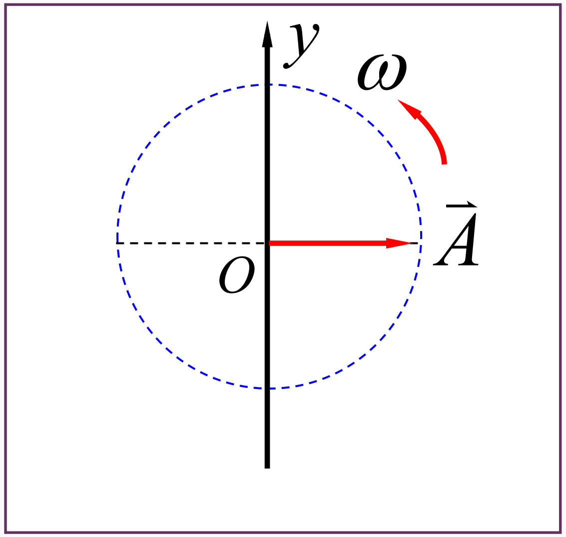
把波动方程改写成标准形式 $y = A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0]$

有：$y=0.05\cos\pi(2.50t-x)=0.05\cos 2.50\pi(t-\dfrac{x}{2.50})$

得 $\omega=2.50\,\pi\,(\text{rad}/\text{s}),\quad u=2.50\,(\text{m}/\text{s})$

$$\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2.5\pi}=0.8\,(\text{s}),\qquad \lambda=uT=2.50\times0.8=2\,(\text{m}),$$

例2、一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，（横波，振动方向为y方向）已知振幅 $A=1.0\text{m}$, $T=2.0\text{s}$，$\lambda=2.0\text{m}$. 在 $t=0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动． 求 1) 波动方程



【注意】波动旋转矢量图的参考轴为 y 轴, 不是 x 轴.

解： 1)设波动方程为(写出波动方程的标准形式)

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u}) + \boxed{\varphi_0}]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi(\text{rad/s}), \qquad u = \frac{\lambda}{T} = 1(\text{m/s})$$

$$t=0\text{时}, \begin{cases} y_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \\ \upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0 \end{cases}$$

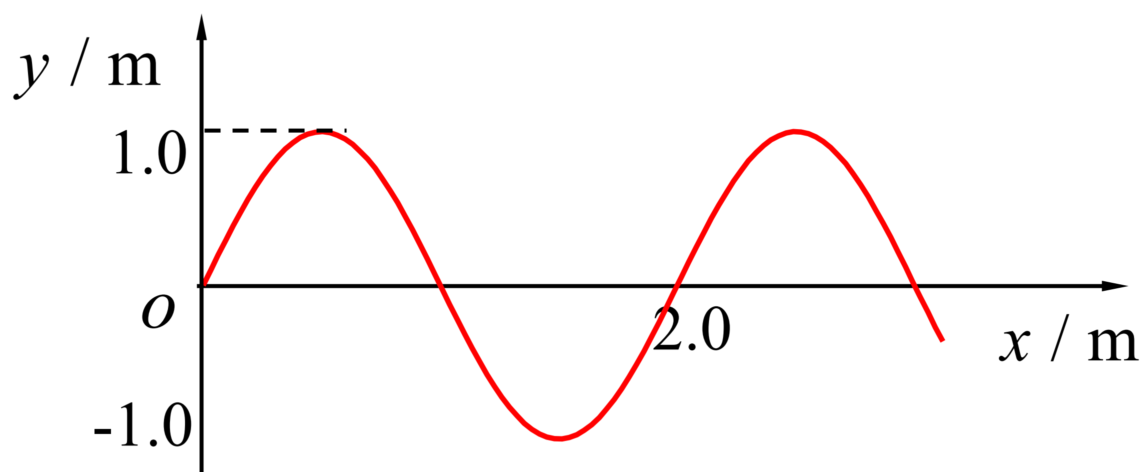
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi_0 = 0 \\ \sin\varphi_0 < 0 \end{cases} \quad \therefore\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{波动方程}\ y = 1.0\cos[\pi(t-x) - \frac{\pi}{2}]$$

由旋转矢量法, 同样可定出 φ_0.

2) 求 $t=1.0$ s 的波形图.

将 $t=1.0\,\mathrm{s}$ 代入波动方程， $y=1.0\cos[\pi(t-x)-\dfrac{\pi}{2}]$

得波形方程 $y=1.0\cos(\dfrac{\pi}{2}-\pi x)=1.0\sin(\pi x)$

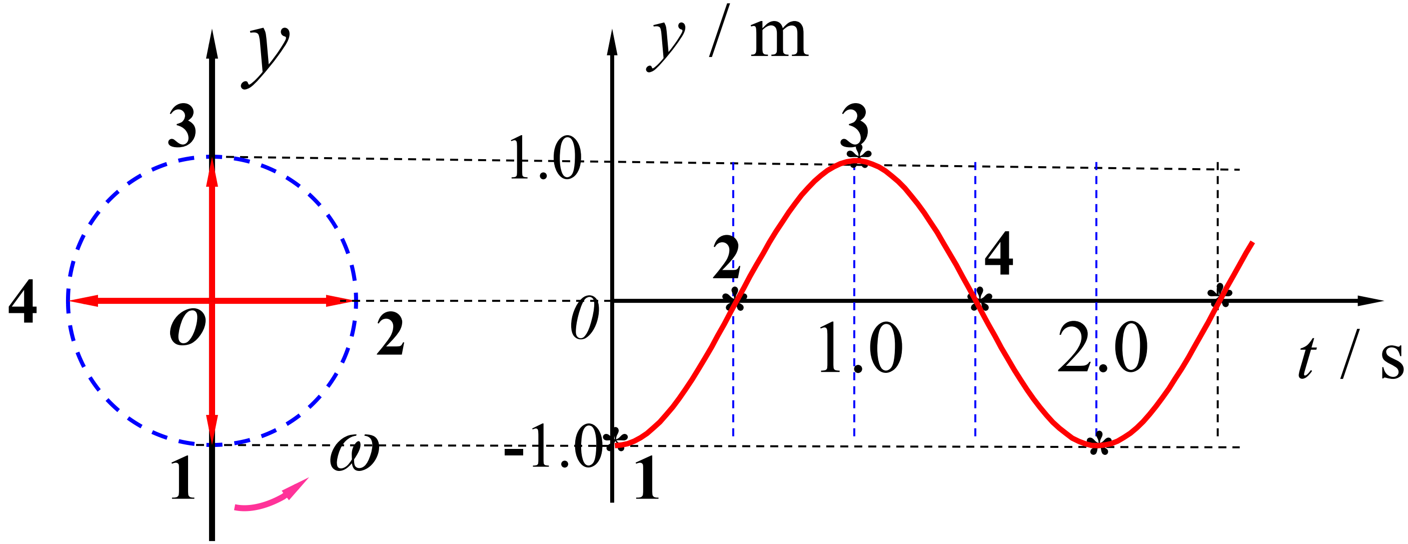


$t=1.0$ s 时刻波形图

3）$x = 0.5$m处质点的振动规律并做图．

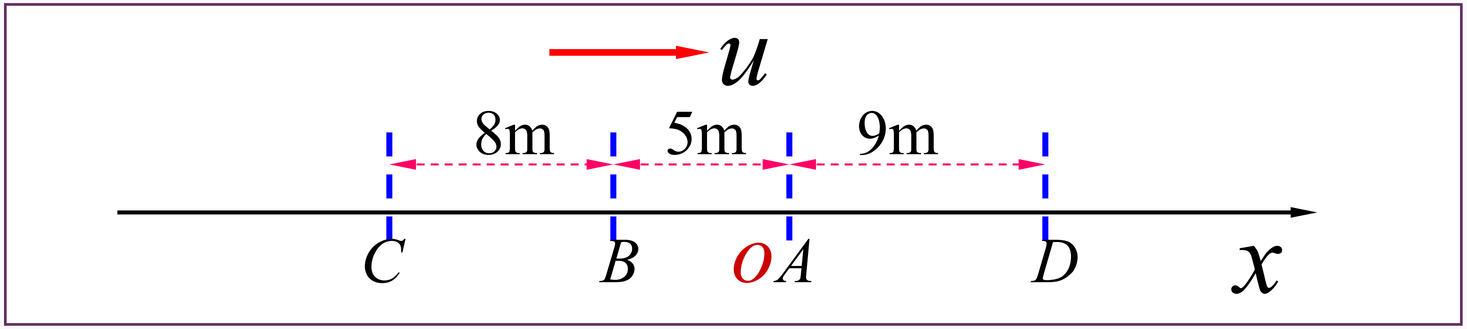
将 $x = 0.5$ m 代入波动方程， $y = 1.0\cos[\pi(t - x) - \frac{\pi}{2}]$

得 $x = 0.5$m 处质点的振动方程 $y = 1.0\cos(\pi t - \pi)$



$x = 0.5$ m 处质点的振动曲线

例3、 一平面简谐波以速度 $u=20\mathrm{m/s}$ 沿直线传播, 波线上点 A 的简谐运动方程 $y_A=(3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$



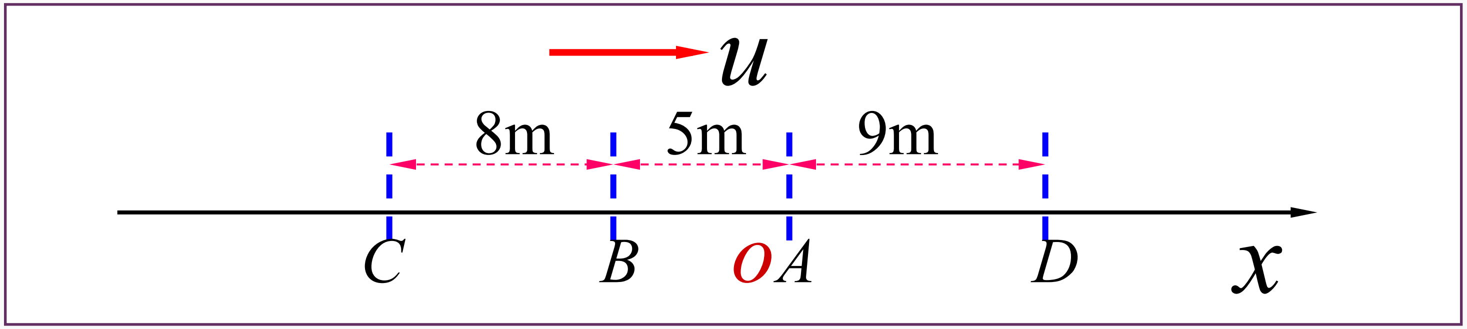
1) 以 A 为坐标原点，写出波动方程.

2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程.

3) 写出传播方向上C点、D点的简谐运动方程.

4) 分别求出 BC， CD 两点间的相位差.

例3、 一平面简谐波以速度 $u=20\text{m}/\text{s}$ 沿直线传播，波线上点 A 的简谐运动方程 $y_A=(3\times10^{-2}\text{m})\cos(4\pi\text{s}^{-1})t$



1) 以 A 为坐标原点，写出波动方程.

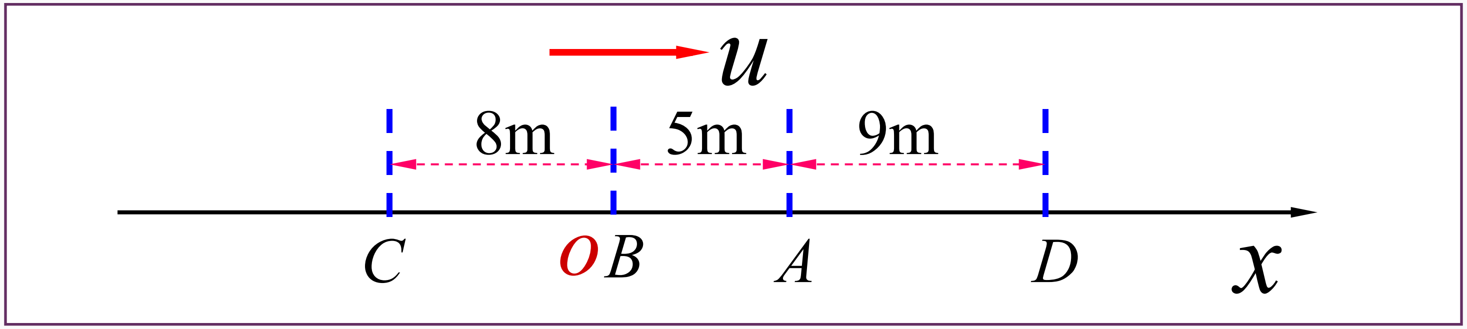
解：已知 O 点振动方程 $y_0(t)=y_A=3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$

$$\lambda=uT=u\cdot\frac{2\pi}{\omega}=20\cdot\frac{2\pi}{4\pi}=10(\text{m}),$$

由相位落后法，得波动方程 $y(x,t)=3\times10^{-2}\cos(4\pi t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$

$$y(x,t)=3\times10^{-2}\cos(4\pi t-\frac{2\pi}{10}x)$$

2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程. 已知 $y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$

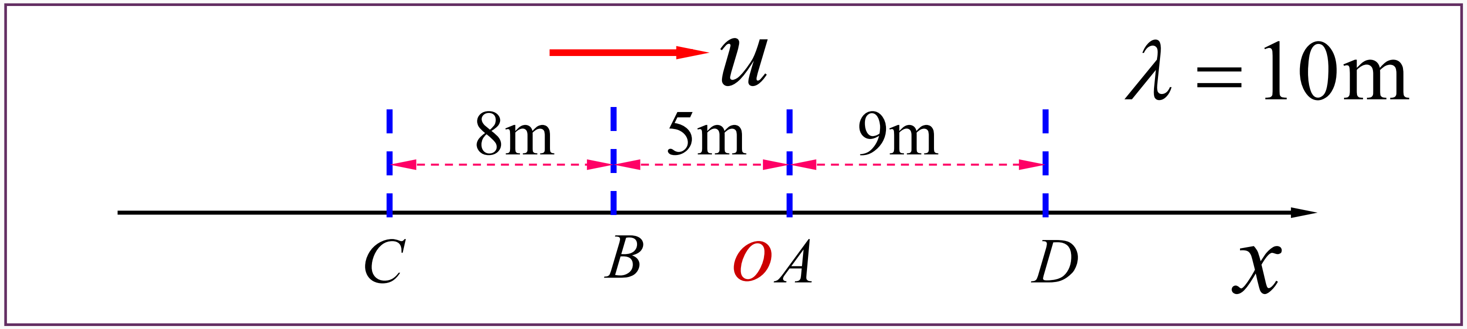


已知 x_0 =5m处振动方程 $y_{x_0}(t) = y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$

由相位落后法，得波动方程

$$y(x,t) = 3\times10^{-2}\cos\left[4\pi t - 2\pi\frac{x-5}{10}\right] = 3\times10^{-2}\cos\left[4\pi t - \frac{\pi x}{5} + \pi\right]$$

3) 写出传播方向上C点、D点的简谐运动方程. $y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$



解法1： C点相位比 A点超前 $y_C(t) = 3\times10^{-2}\cos\left(4\pi t + \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x_{AC}\right)$

$$y_C(t) = 3\times10^{-2}\cos\left[4\pi t + \frac{2\pi}{10}\times(8+5)\right] = 3\times10^{-2}\cos\left(4\pi t + \frac{13}{5}\pi\right)$$

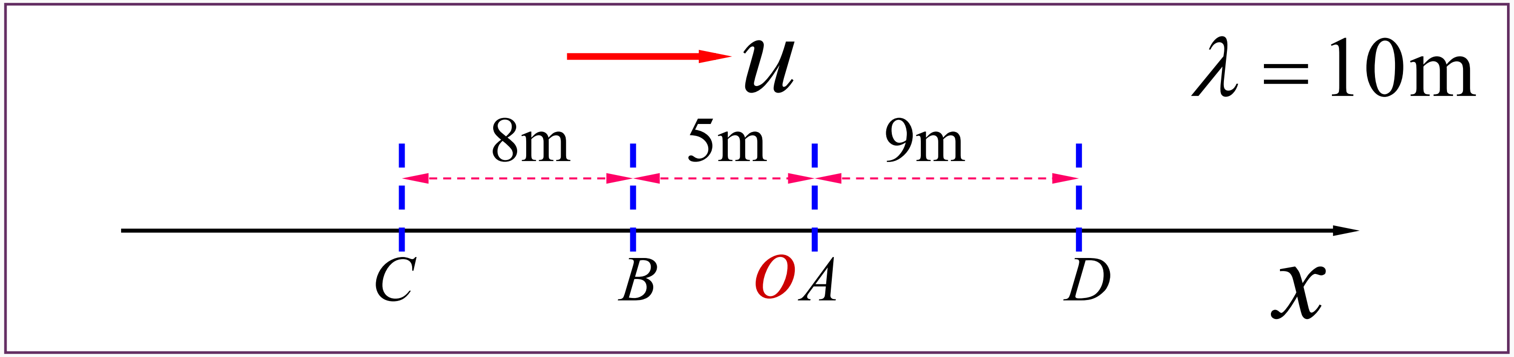
D点相位比 A点落后 $y_D(t) = 3\times10^{-2}\cos\left(4\pi t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x_{AD}\right)$

$$y_D(t) = 3\times10^{-2}\cos\left(4\pi t - \frac{2\pi}{10}\times 9\right) = 3\times10^{-2}\cos\left(4\pi t - \frac{9}{5}\pi\right)$$

解法2： 将C点和D点坐标代入前面第 1 或第 2 问求得的波动方程中，同样可得 C 点和 D 点的简谐运动方程.

4) 分别求出 BC，CD 两点间的相位差.

$$y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$$



B点相位比 C点落后:

$$\varphi_B - \varphi_C = \frac{2\pi}{\lambda}(x_C - x_B) = \frac{2\pi}{10}\times(-8) = -1.6\pi$$

C点相位比 D点超前:

$$\varphi_C - \varphi_D = \frac{2\pi}{\lambda}(x_D - x_C) = \frac{2\pi}{10}\times(8+5+9) = 4.4\pi$$

例4、1) 给出下列波函数表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位.

$$(a)\ y=-A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda});\qquad (b)\ y=-A\cos\omega(-t-\frac{x}{u})$$

解：将波函数改写成标准形式

$$(a)\ y=-A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\pi]$$

可见，波沿 x 轴正向传播，初相位 $\varphi_0=\pi$.

$$(b)\ y=-A\cos\omega(-t-\frac{x}{u})=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\pi]$$

可见，波沿 x 轴负向传播，初相位 $\varphi_0=\pi$.

2) 平面简谐波的波函数为 $y = A\cos(Bt-Cx)$，式中 A, B, C 为正常数，求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差.

解：将波函数改写成标准形式 $y = A\cos\omega(t-\dfrac{x}{u})$

$$y = A\cos(Bt - Cx) = A\cos B(t - \frac{C}{B}x)$$

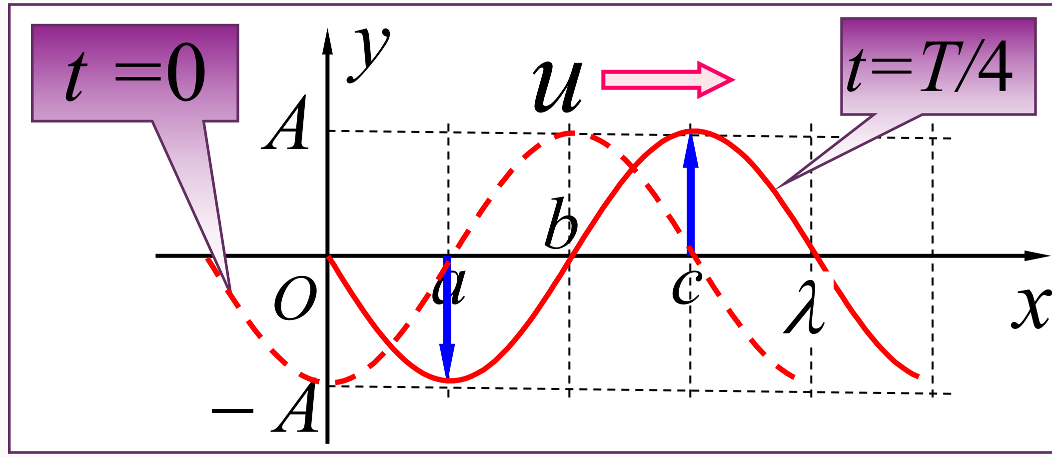
可见， $\omega = B$， $u = \dfrac{B}{C}$,

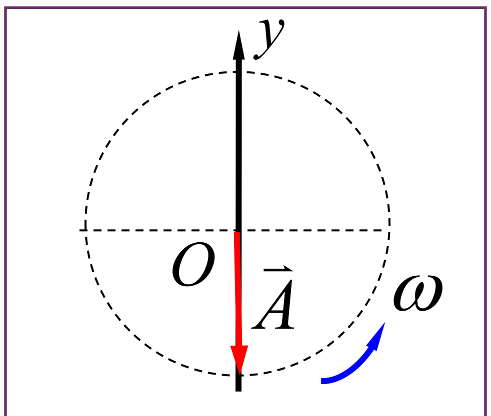
$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{B}, \qquad \lambda = uT = \frac{2\pi}{C},$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d = Cd$$

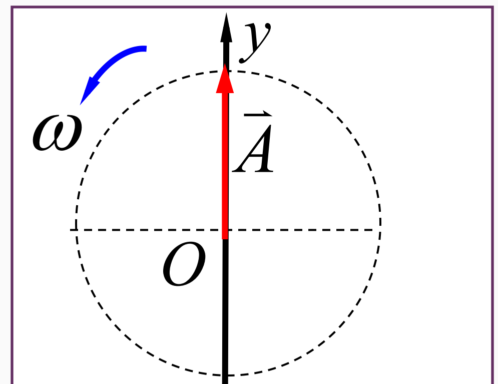
3) 如图简谐波以余弦函数表示，求 ***O***、***a***、***b***、***c*** 各点振动初相位.

$$\varphi(-\pi \sim \pi)$$

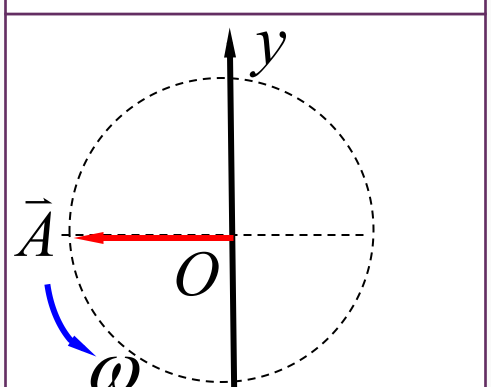




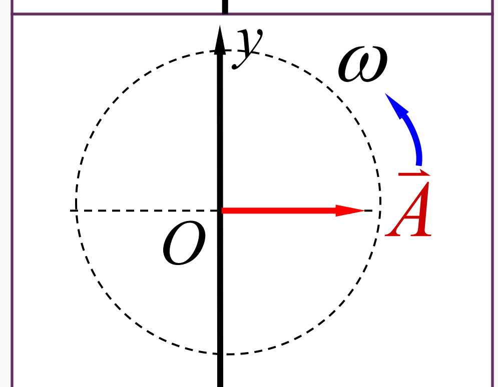
$$\varphi_o = \pi$$



$$\varphi_b = 0$$



$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}$$



$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

四、 波动能量的传播

◆ 波动的能量

介质中质点在平衡位置附近振动，具有振动动能.

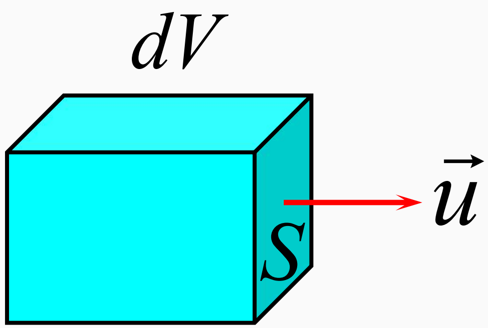
介质发生弹性形变，因而具有弹性势能.

波动过程实际上是通过介质的弹性力做功传递能量的过程.

以固体棒中传播的纵波为例分析波动能量的传播.

◇ 振动动能

介质中取小质元: 体积为dV, 质量为dm,

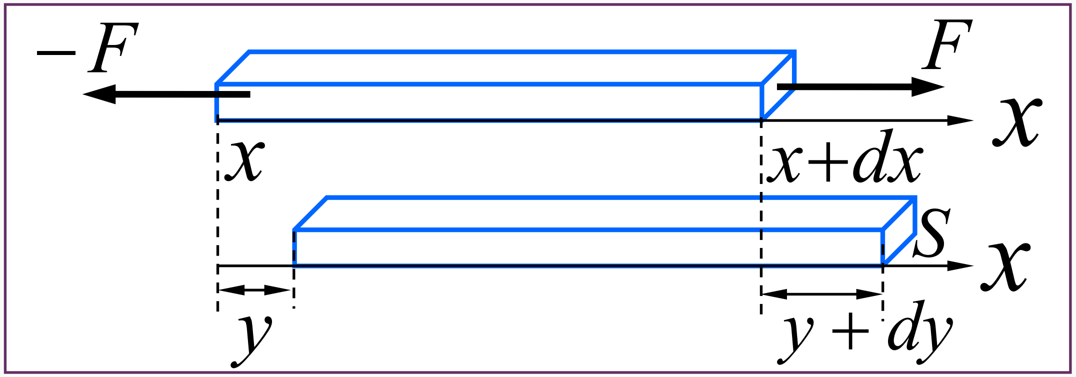


$$dE_k=\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon^2=\frac{1}{2}\rho dV\,\upsilon^2=\frac{1}{2}\rho dV\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0],\qquad \upsilon=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$dE_k=\frac{1}{2}\rho\,dV\,\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

◇ 弹性势能



小质元长为dx，伸长dy

$$dE_p=\frac{1}{2}k(dy)^2$$

胡克定律：$\frac{F}{S}=-Y\frac{dy}{dx}$，　$\Rightarrow F=-\frac{YS}{dx}dy$，　$k=\frac{YS}{dx}$

$$dE_p=\frac{1}{2}k(dy)^2=\frac{1}{2}YSdx(\frac{dy}{dx})^2=\frac{1}{2}YdV(\frac{dy}{dx})^2,\qquad u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$=\frac{1}{2}\rho dV u^2(\frac{\partial y}{\partial x})^2,\qquad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\omega}{u}A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$=\frac{1}{2}\rho dV\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho dV \omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

小质元的总机械能

$$dE = dE_k + dE_p = \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

物理意义

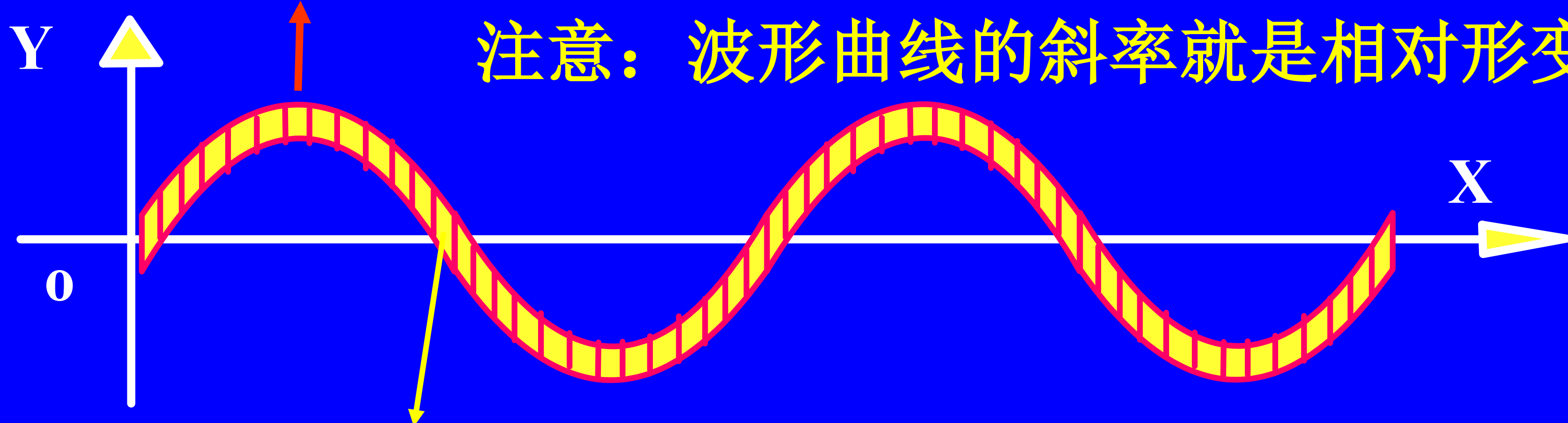
1) 波动过程中，任一小质元的动能、势能、总机械能均随(x, t) 作周期性变化，且变化是同相位的.

dE_k、dE_p、dE $\begin{cases} \text{同时达到最大} & \text{（平衡位置处）} \\ \text{同时变为零} & \text{（位移最大处）} \end{cases}$

$$dE_k \propto \upsilon^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2, \qquad dE_p \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

最大位移处，小质元的速度为零，相对形变也为零.

注意：波形曲线的斜率就是相对形变.



平衡位置处，小质元的速度最大，相对形变也最大.

$$dE = \rho dV\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

2) 任一小质元都在不断地接收和放出能量(dE_k、dE_P、dE 均随时间周期性变化)，即不断地传播能量，其机械能不守恒．波动是能量传递的一种方式.

【讨论】关于波动中各质元的动能与势能随其振动位移的变化规律, 只须记住波动的以下两个特征:

- 波动中每个质元的动能与位移关系，与单个质点振动的动能与位移关系相似：平衡位置处, 动能最大; 最大位移处, 动能为零.
- 波动中每个质元的势能与动能同相位变化, 即同时达到最大, 同时减小到零. 因此，对于波动中的每个质元，平衡位置时，动能最大，势能也最大；最大位移时，动能为零，势能也为零.

◇ 能量密度：介质中单位体积的波动能量. 单位：J/m³.

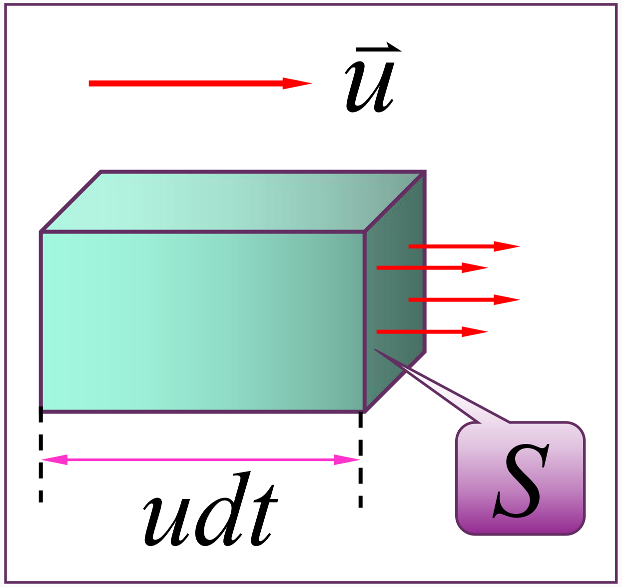
$$w=\frac{dE}{dV}=\rho\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0],\qquad w_{\max}=\rho\omega^2A^2$$

◇ 平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值.

$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T wdt=\frac{1}{T}\int_0^T\rho\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]dt=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2=\frac{1}{2}w_{\max}$$

◆ 波的能流和能流密度

◇ 能流：单位时间内通过与传播方向垂直的某一横截面积的能量. 单位: W (瓦特).



$$P=\frac{dE}{dt}=\frac{w\cdot udt\cdot S}{dt}=wuS$$

$$=\rho\omega^2A^2uS\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0],\ P_{\max}=\rho\omega^2A^2uS$$

◇ 平均能流：$\overline{P}=\overline{w}uS=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2uS=\frac{1}{2}P_{\max}$

◇ 能流密度: 通过与传播方向垂直的单位横截面积的能流. 单位: W/m².

$$I=\frac{P}{S}=wu=\rho\omega^2A^2u\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0],\quad I_{\max}=\rho\omega^2A^2u$$

◇ 平均能流密度(波的强度)：通常说的能流密度, 是指平均能流密度 $\bar{I}$, 简记为 I, 又称"波的强度(Intensity)". 声学中的声强, 光学中的光强, 以及电磁波的强度, 都定义为平均能流密度.

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u=\frac{1}{2}I_{\max}$$

意义：波的强度 I 描述波的能量传递的强弱.

$$\boxed{I\propto A^2}$$

◇ 能流密度矢量(坡印廷矢量)：平均能流密度是一个矢量, 其方向与波速方向相同.

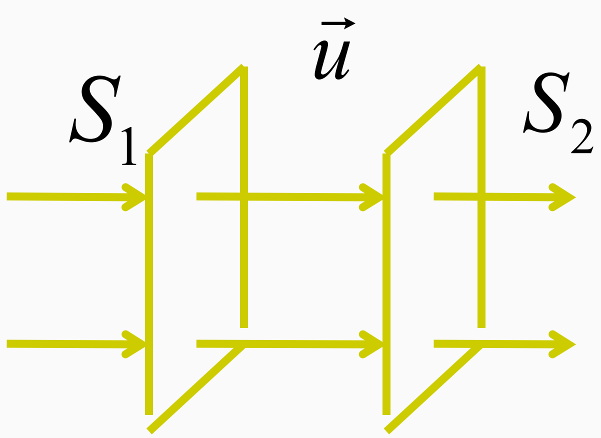
$$\boxed{\vec{I}=\overline{w}\vec{u}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\vec{u}}$$

例1、 分析平面波和球面波的振幅

试证明在均匀不吸收能量的介质中传播的平面波在行进方向上振幅不变，球面波的振幅与离波源的距离成反比。

证明： 对平面波：

介质无吸收，通过 S_1 和 S_2 面的平均能流应该相等



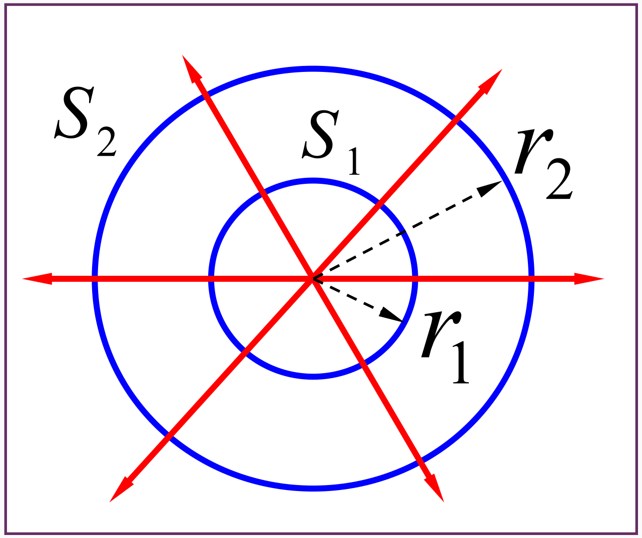
$$I_1 S_1 = I_2 S_2,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\rho\omega^2 A_1^2 u S_1 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A_2^2 u S_2$$

$$S_1 = S_2 = S$$

$\Rightarrow A_1 = A_2$，所以, 平面波振幅相等。

对球面波：介质无吸收，通过球面S_1和S_2的平均能流应该相等



$$I_1S_1 = I_2S_2,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\rho\omega^2A_1^2uS_1 = \frac{1}{2}\rho\omega^2A_2^2uS_2$$

$$S_1 = 4\pi r_1^2; \qquad S_2 = 4\pi r_2^2$$

$$\Rightarrow \ A_1r_1 = A_2r_2$$

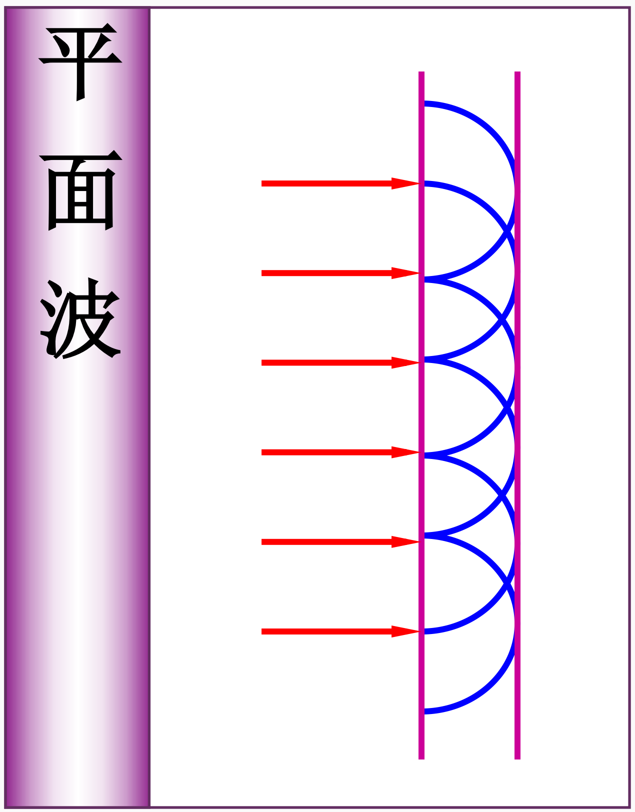
所以，球面波的振幅与到波源的距离成反比。如果距离波源单位距离的振幅为 A，则距波源 r 处的振幅为 A/r.

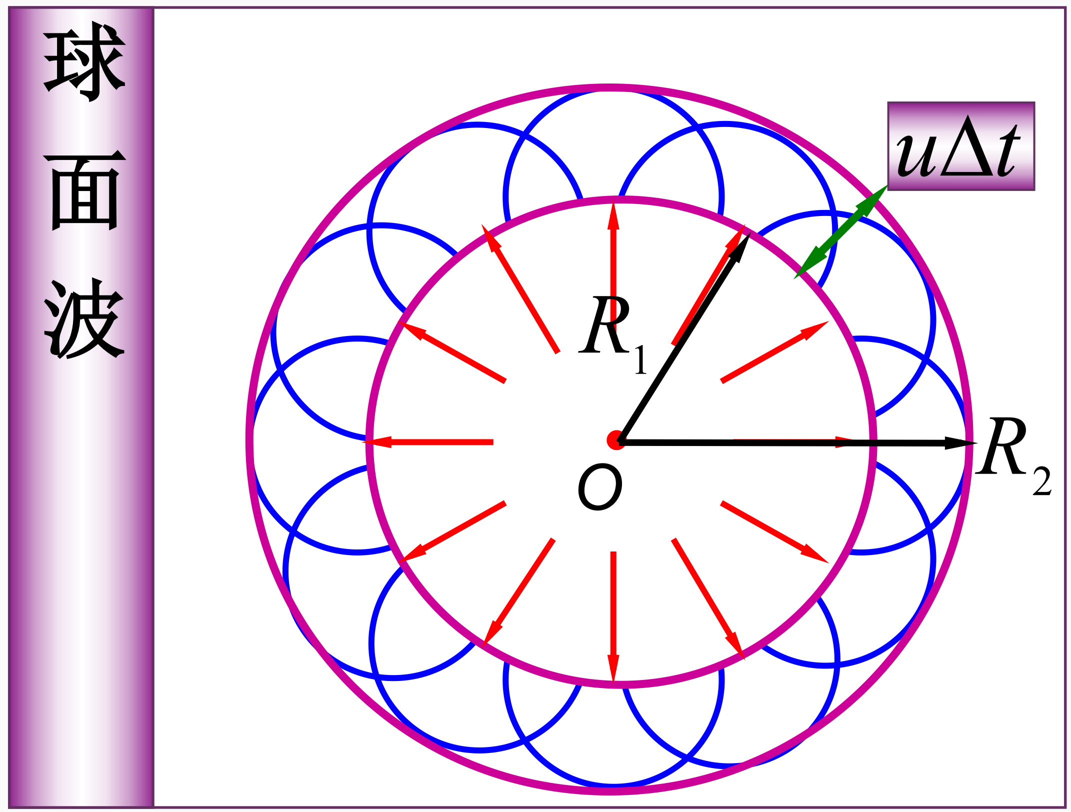
由于振动的相位随距离的增加而落后的关系，与平面波类似，球面简谐波的波函数：

$$y = \frac{A}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_0]$$

一、惠更斯原理

介质中波动传播到的各点都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻，这些子波的包络就是新的波前.（只解决方向，未解决强度）

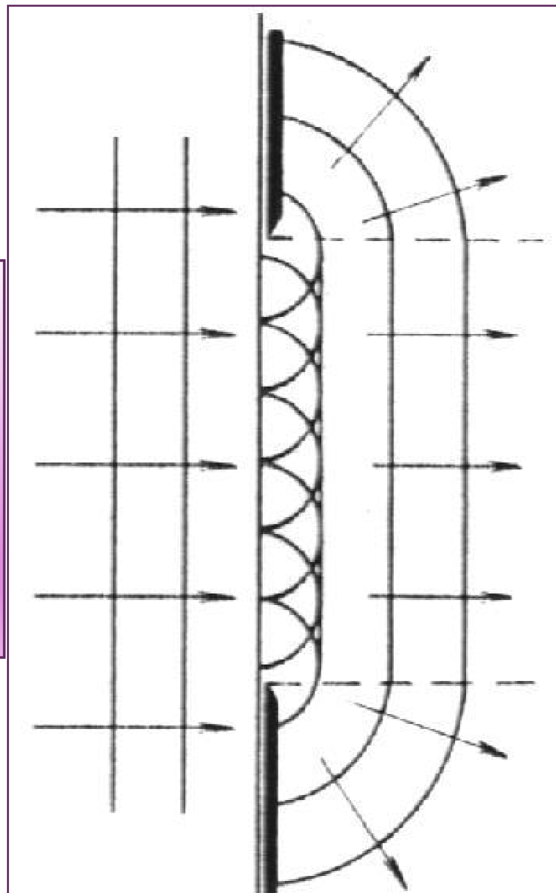




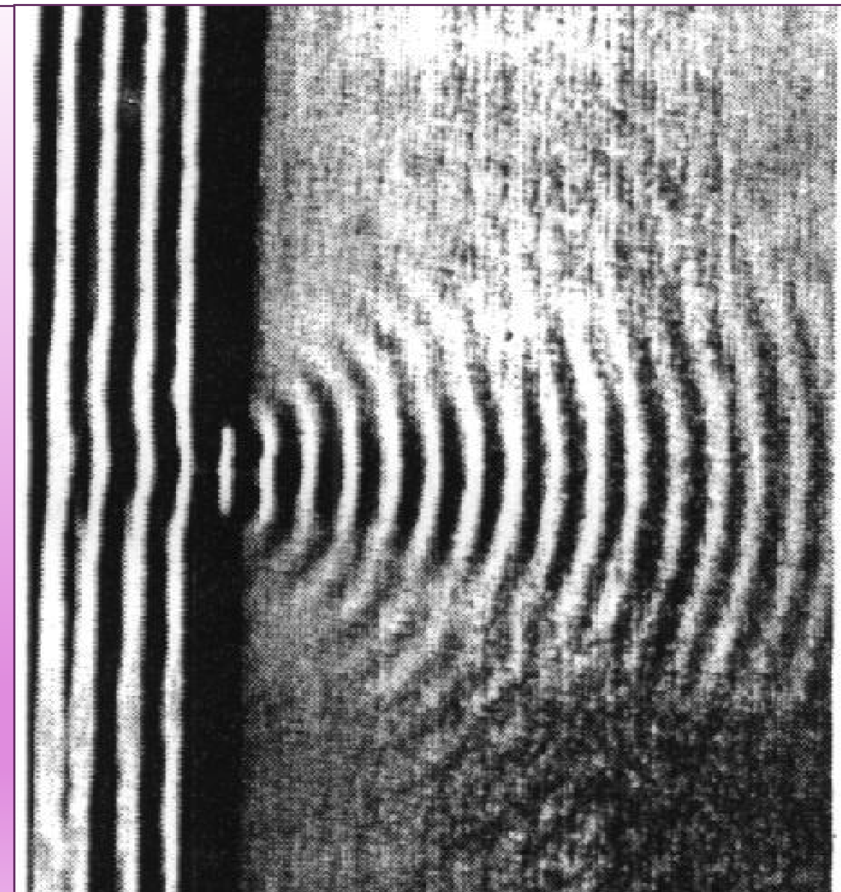
二、波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播.

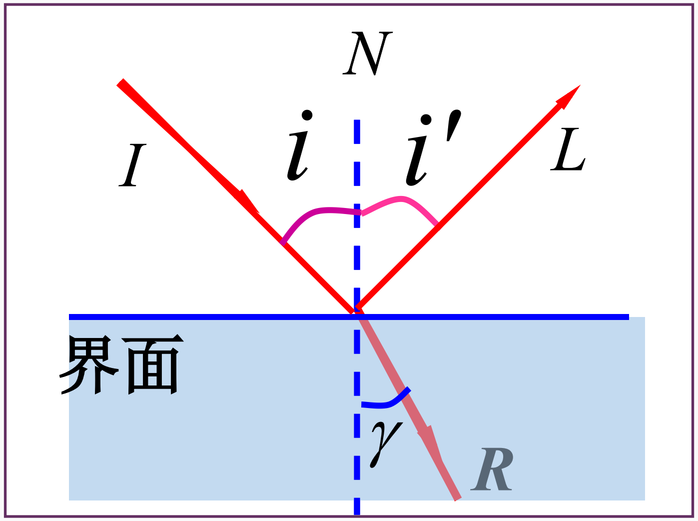
波的衍射



水波通过狭缝后的衍射



三、波的反射和折射

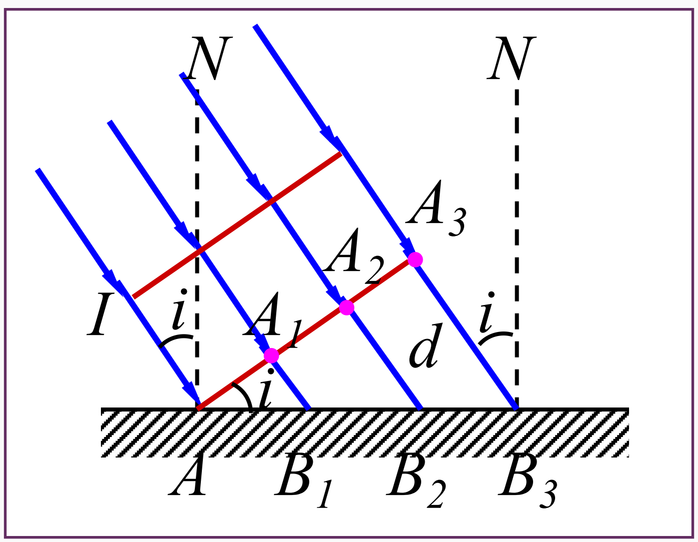


反射定律：

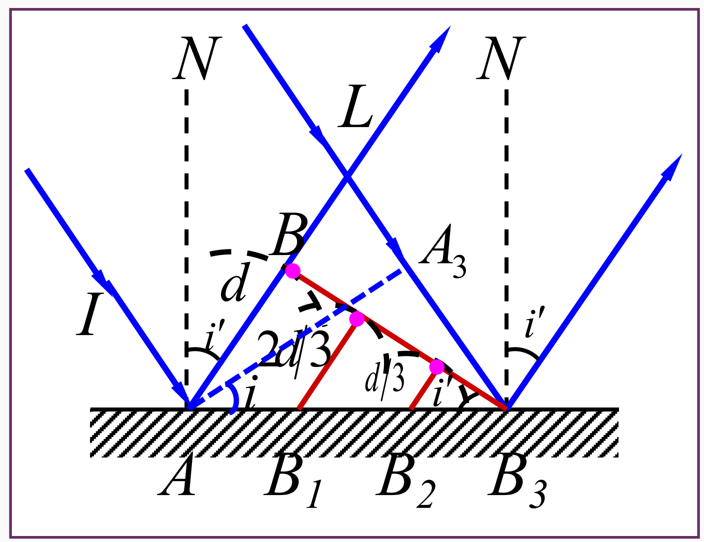
1）反射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

2）$i = i'$

用惠更斯原理证明.



时刻 t



时刻 $t+\triangle t$

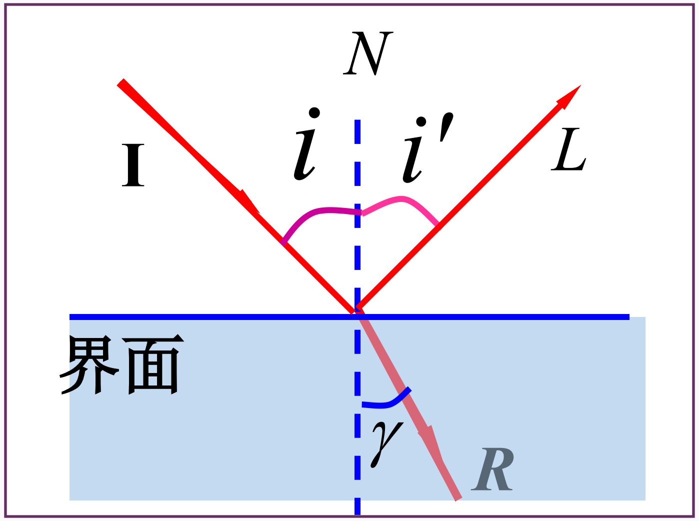
$$\because AB = A_3B_3 = u\Delta t$$

$$\angle ABB_3 = \angle AA_3B_3 = 90^\circ$$

$$\therefore \Delta ABB_3 = \Delta AA_3B_3$$

$$\therefore i = i'$$

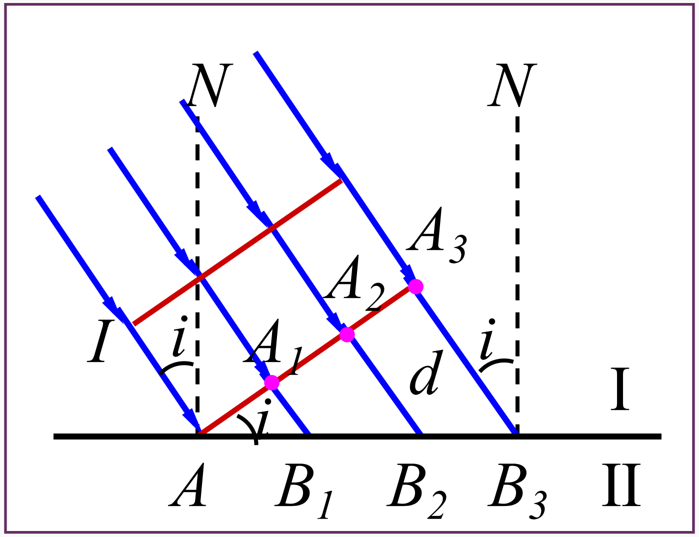
波的折射



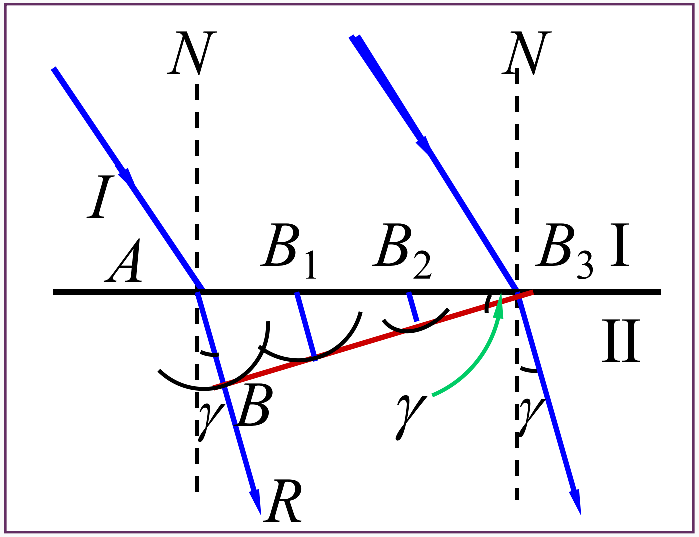
1）折射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

2）$$\frac{\sin i}{\sin \gamma}=\frac{u_1}{u_2}$$

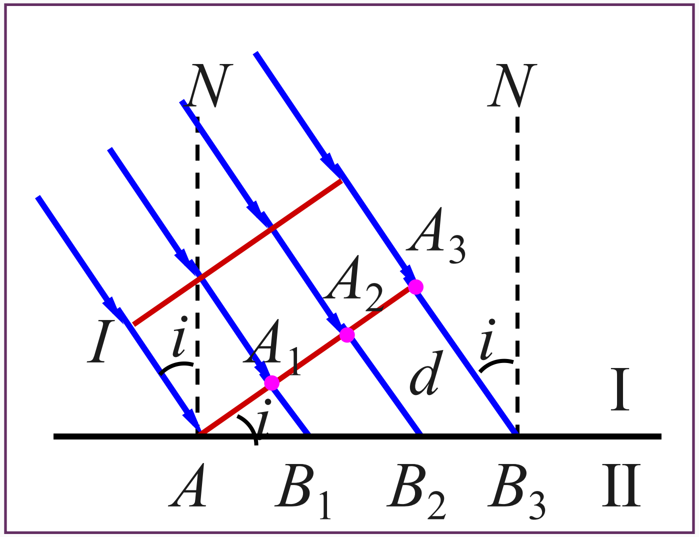
用惠更斯原理证明.



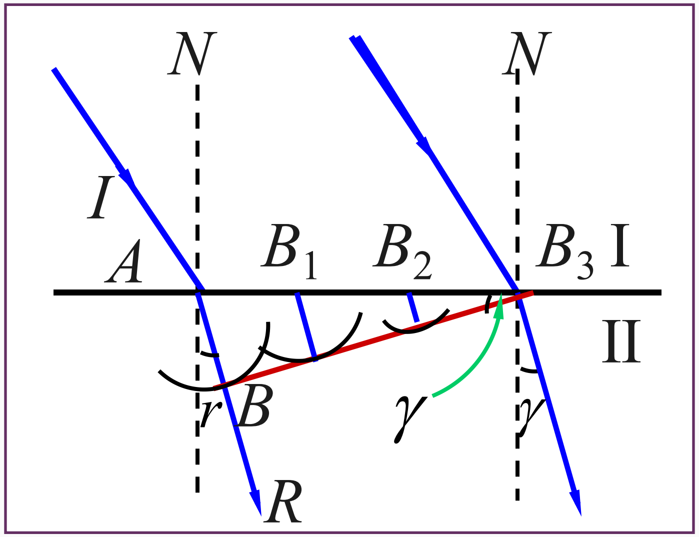
时刻 t



时刻 $t+\triangle t$



时刻 t



时刻 $t+\triangle t$

$$A_3B_3 = u_1\Delta t$$

$$AB = u_2\Delta t$$

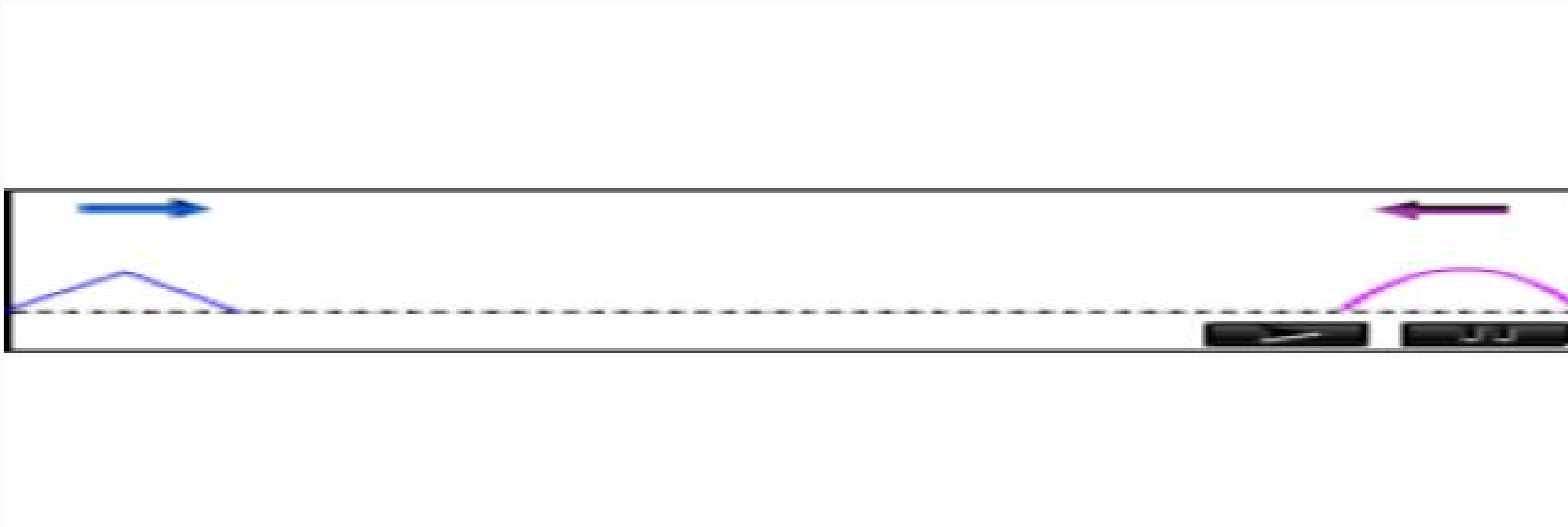
$$\angle A_3AB_3 = i$$

$$\angle BB_3A = \gamma$$

所以 $$\frac{\sin i}{\sin\gamma} = \frac{A_3B_3}{AB} = \frac{u_1}{u_2}$$

5.4 波的叠加原理　波的干涉

一、波的叠加原理



1）**波的独立性原理：**几列波相遇之后， 仍然保持它们各自原有的特征（频率、波长、振幅、振动方向等）不变，并按照原来的方向继续前进，好象没有遇到过其他波一样.

2）**波的叠加原理：**在相遇区域内任一点的振动，为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和.

现象： 红、绿光束空间交叉相遇 (红仍是红、绿仍是绿)

听乐队演奏 (仍可辨出不同乐器的音色、旋律)

空中无线电波很多 (仍能分别接收不同的电台广播)

波的叠加原理是由波动方程是线性方程所决定的：

波动方程：
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

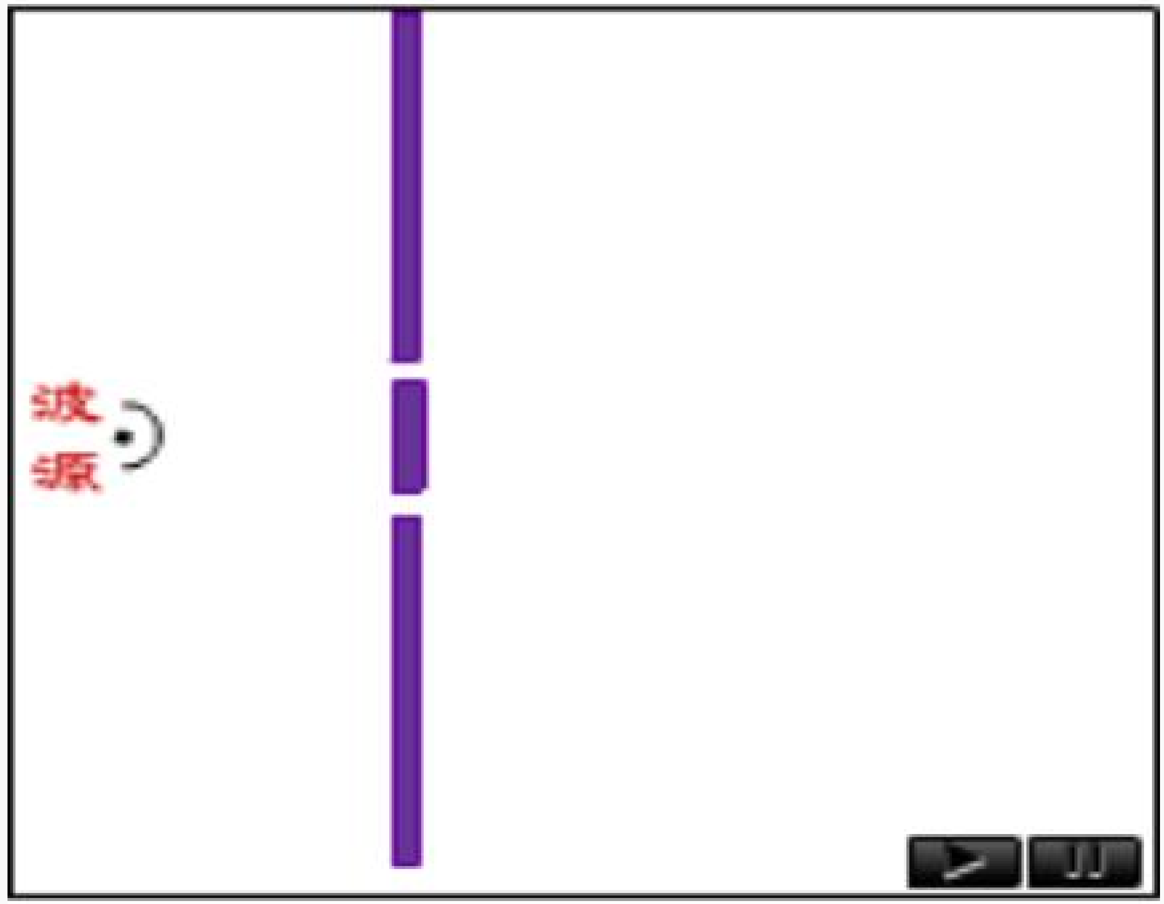
线性：方程中各项都是 y 及其导数的一次方.

若 y_1，y_2 分别是波动方程的解, 则 $c_1y_1+c_2y_2$ (叠加后的波) 也是波动方程的解, 即上列波动方程遵从叠加原理.

当波强度很大时(如爆炸产生的冲击波、强激光等), 形变与弹力间不再是线性关系, 波动方程不再是线性的, 叠加原理也不再成立.

二、波的干涉

◆ 干涉现象：两列波在空间相遇后，某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象，称为波的干涉现象.

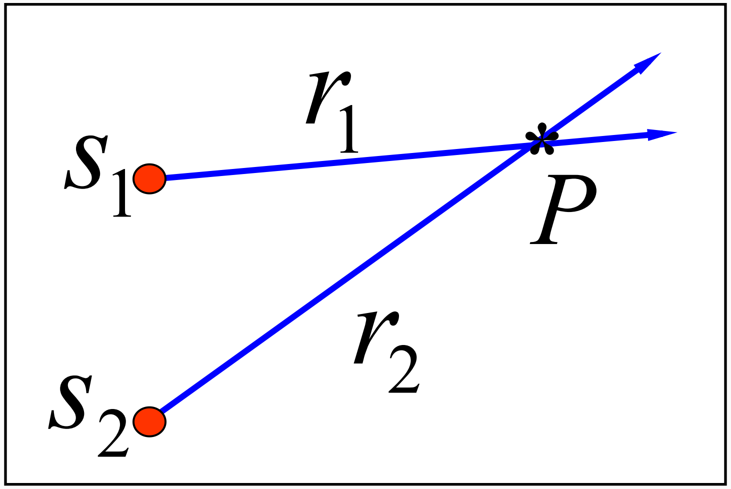


- 相干条件

1）频率相同；

2）振动方向相同；

3）相位差恒定.



波源振动

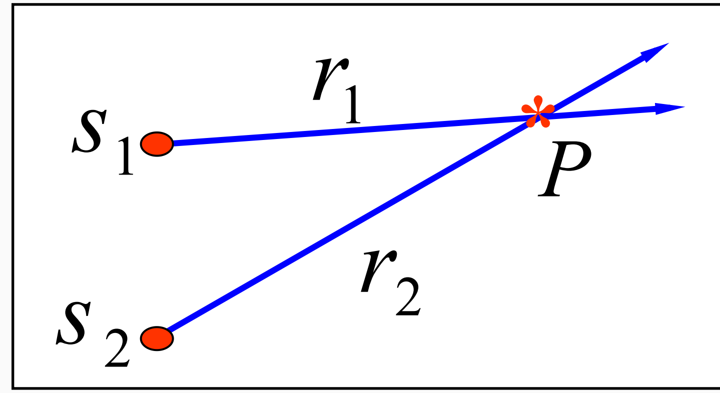
$$\begin{cases} y_{10} = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_{20} = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

P点的两个分振动

$$\begin{cases} y_{1p} = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_1 - \dfrac{2\pi}{\lambda}r_1\right) \\ y_{2p} = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_2 - \dfrac{2\pi}{\lambda}r_2\right) \end{cases}$$

P 点的两个分振动

$$\begin{cases} y_{1p} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \dfrac{2\pi}{\lambda} r_1) \\ y_{2p} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \dfrac{2\pi}{\lambda} r_2) \end{cases}$$



$$y_p = y_{1p} + y_{2p} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin(\varphi_1 - \dfrac{2\pi\, r_1}{\lambda}) + A_2 \sin(\varphi_2 - \dfrac{2\pi\, r_2}{\lambda})}{A_1 \cos(\varphi_1 - \dfrac{2\pi\, r_1}{\lambda}) + A_2 \cos(\varphi_2 - \dfrac{2\pi\, r_1}{\lambda})}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$　常量

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \\ \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \end{cases}$$

合振动的强度定义为：$I = A^2, \quad \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$

干涉相长相消条件:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \pm 2k\pi, \quad (k = 0,1,2,\cdots) \\ \quad A = A_1 + A_2 \ \text{振动始终加强(干涉相长)} \\ \Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, \quad (k = 0,1,2,\cdots) \\ \quad A = |A_1 - A_2| \ \text{振动始终减弱(干涉相消)} \\ \Delta\varphi = \text{其他}, \quad |A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2 \end{cases}$$

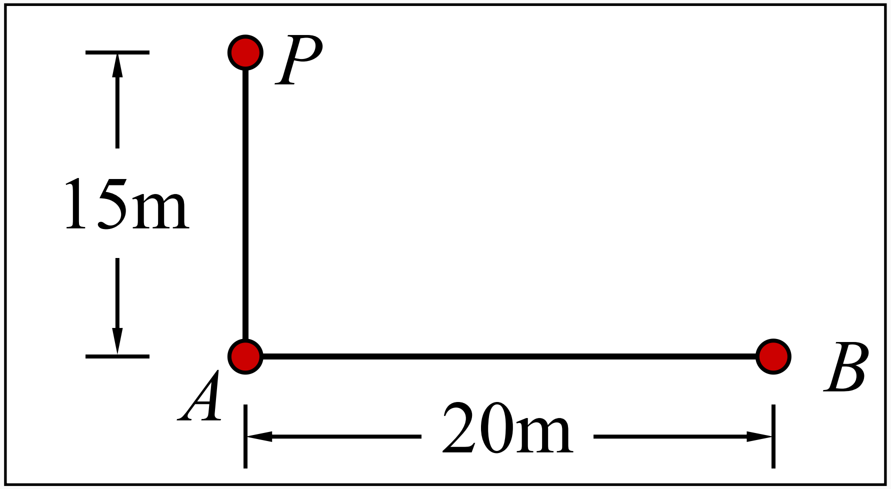
$$\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \\ \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1) \end{cases}$$

若 $\varphi_1=\varphi_2$ 则 $\Delta\varphi=-\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta,$ 波程差 $\delta=r_2-r_1$

干涉相长相消条件:

$$\begin{cases} \delta=\pm k\lambda, \quad (k=0,1,2,\cdots) \\ \quad A=A_1+A_2 \quad \text{振动始终加强(干涉相长)} \\ \delta=\pm(k+1/2)\lambda, \quad (k=0,1,2,\cdots) \\ \quad A=|A_1-A_2| \quad \text{振动始终减弱(干涉相消)} \\ \delta=\text{其他}, \quad |A_1-A_2|<A<A_1+A_2 \end{cases}$$

例1、如图所示，A、B 两点为同一介质中两相干波源. 其振幅皆为5cm，频率皆为100Hz，当 A点为波峰时，B点恰为波谷. 设波速为10m/s，试写出由A、B发出的两列波传到点P 时干涉的结果.



解：$BP=\sqrt{15^2+20^2}=25\,(\mathrm{m})$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{10}{100}=0.10\,(\mathrm{m})$$

设 A 的相位较 B 超前，则

$$\varphi_A-\varphi_B=\pi$$

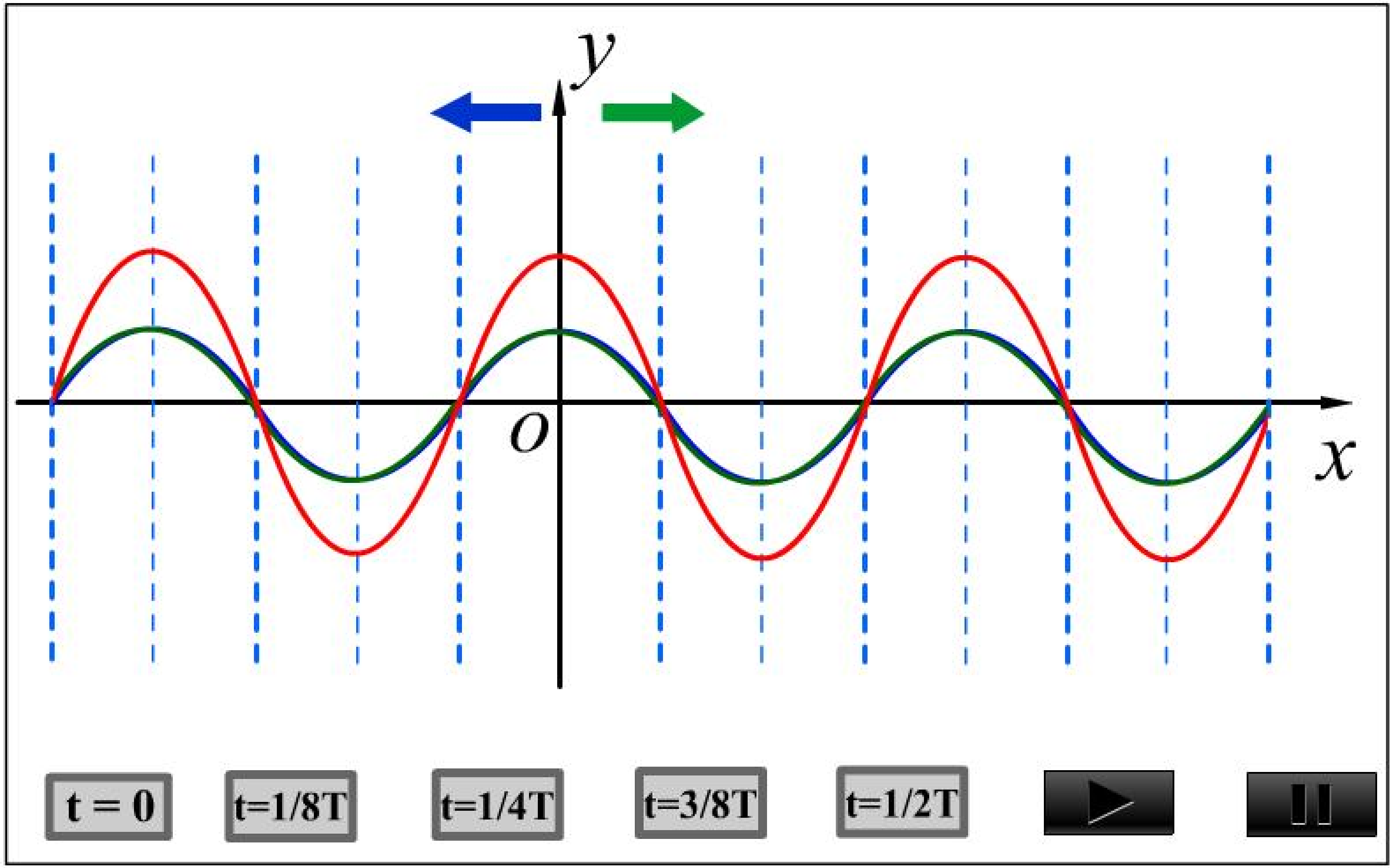
$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-\frac{2\pi}{\lambda}(r_{BP}-r_{AP})=-\pi-\frac{2\pi}{0.1}(25-15)=-201\pi$$

可见，**P**点干涉相消, 合振幅 $A=\left|A_1-A_2\right|=0$　？

一、驻波的产生

振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的一种特殊的干涉现象.

弦线上的波



二、驻波方程

正向 $$y_1 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

负向 $$y_2 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) + A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$= \boxed{2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x} \cdot \underline{\cos\omega t}$$

驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

☆ 驻波方程 $y = 2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$

1) 波腹：振幅最大的点.

令 $\left|\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1, \quad \Rightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda}x = \pm k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

波腹点位置：$x = \pm k\dfrac{\lambda}{2}, \ (k = 0,1,\cdots); \quad A_{\max} = 2A$

2) 波节：振幅为零的点.

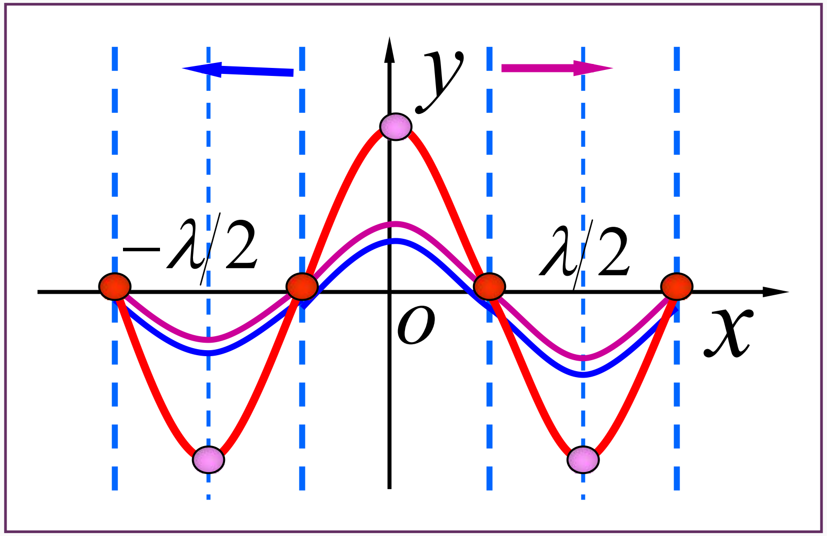
令 $\left|\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0, \quad \Rightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda}x = \pm(k + \dfrac{1}{2})\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

波节点位置：$x = \pm(k + \dfrac{1}{2})\dfrac{\lambda}{2}, \ (k = 0, 1, 2, \cdots); \quad A_{\min} = 0$

相邻波腹(节)间距 $= \lambda/2$， 相邻波腹和波节间距 $= \lambda/4$

3) 相邻两波节之间质点振动同相位，任一波节两侧振动相位相反，在波节处产生大小为 π 的相位突变．（与行波不同，驻波无相位的传播）．

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$$



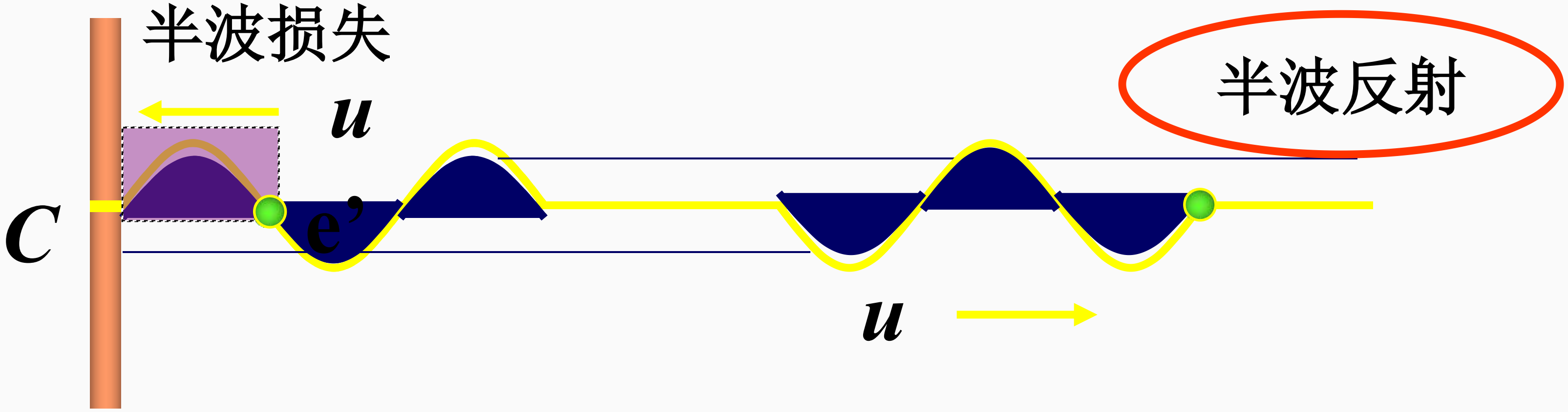
例 $x = \pm\dfrac{\lambda}{4}$ 为波节

$$-\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{4},\ \cos\frac{2\pi}{\lambda}x > 0, \qquad y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos(\omega t)$$

$$\frac{\lambda}{4} < x < \frac{3\lambda}{4},\ \cos\frac{2\pi}{\lambda}x < 0, \qquad y = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| \cdot \cos(\omega t + \pi)$$

三、半波反射和全波反射

实验1）：反射点为固定端

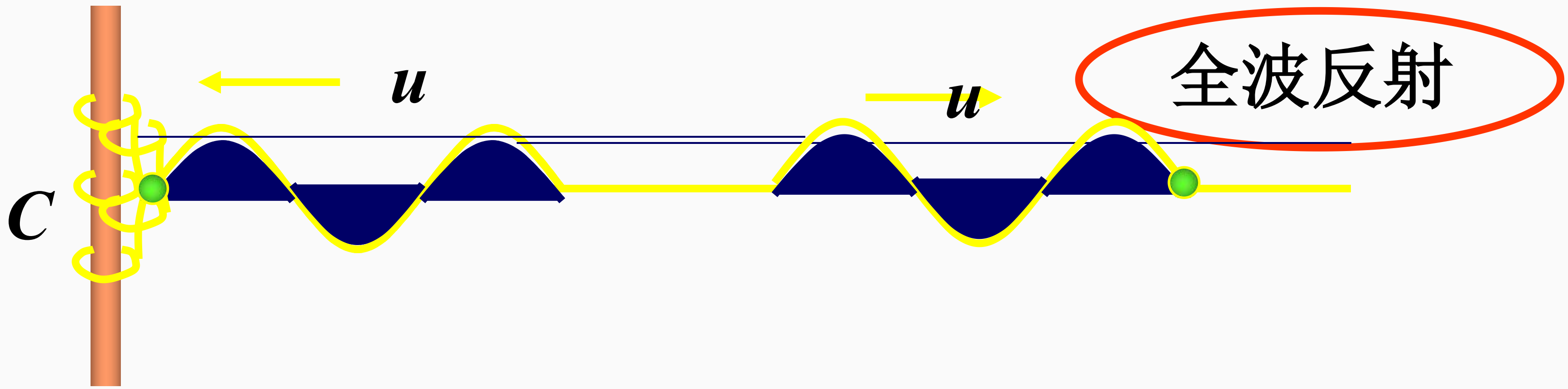


入射波在 C 点的振动方程： $y_{C入} = A\cos(\omega t + \varphi)$

反射波在 C 点的振动方程： $y_{C反} = A\cos(\omega t + \varphi \pm \pi)$

其实质是：入射波在C点引起的振动与反射波在C点引起的振动反相 (相位差π).

实验2）：反射点自由端（全波反射）

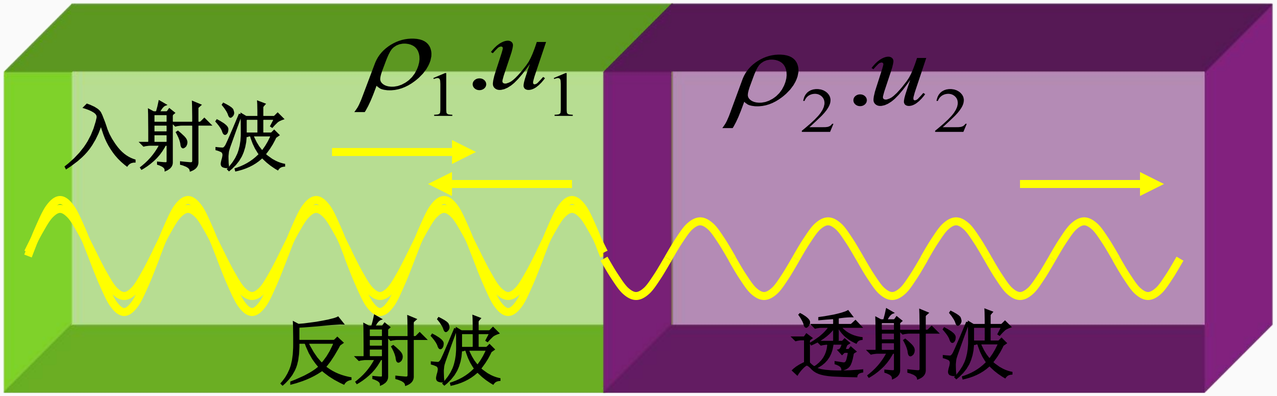


入射波在 C 点的振动方程：　$y_{C入}=A\cos(\omega t+\varphi)$

反射波在 C 点的振动方程：　$y_{C反}=A\cos(\omega t+\varphi)$

其实质是：入射波在C点引起的振动与反射波在C点引起的振动同相.

一般而言：当波在两种介质的界面反射时，



$z=\rho\cdot u$ 称为特性阻抗

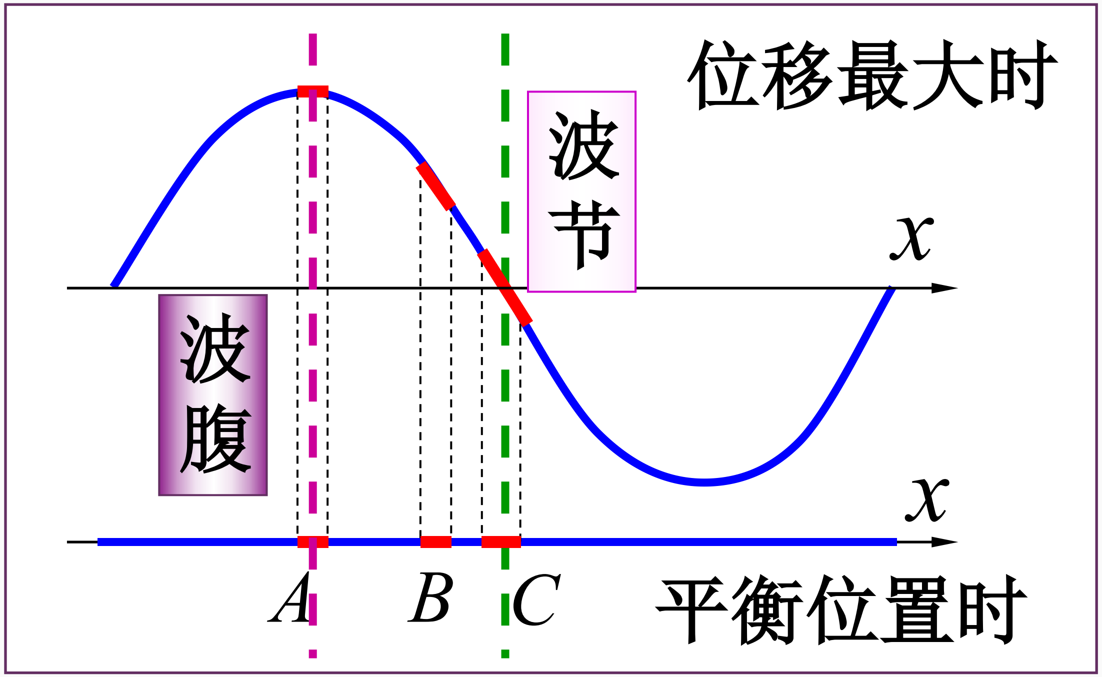
ρ_1，ρ_2, u_1, u_2分别为两种介质的密度和波速。

若 $\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2$ 波从波疏介质垂直(或掠射)进入波密介质，反射波有半波损失，称为半波反射.

若 $\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2$ 波从波密介质垂直(或掠射)进入波疏介质，反射波无半波损失，称为全波反射.

任何情况下，透射波均无半波损失.

四、驻波的能量



$$dE_p \propto (\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

$$dE_k \propto (\frac{\partial y}{\partial t})^2$$

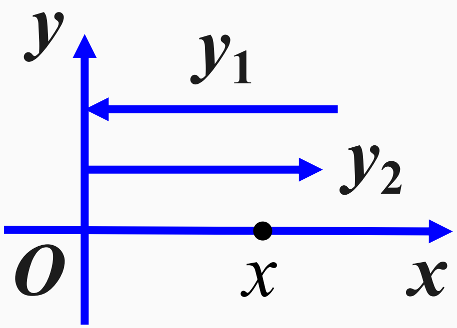
介质振动时，驻波的动能和势能不断转换. 动能主要集中在波腹，势能主要集中在波节. 驻波的能量在相邻的波腹和波节之间来回流动，但没有能量通过任何一个波节，也没有能量通过任何一个波腹. 因此，没有能量的定向传播，驻波的平均能流密度为 0.

例1[参见练习十三(2)]. 一入射波的波函数为 $y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$

在 $x=0$ 处发生反射, 若 $x=0$ 处为自由端, 求(1)反射波的波函数; (2)驻波的波函数; (3)波节与波腹点的位置. 若 $x=0$ 处为固定端, 求(4)反射波的波函数; (5)驻波的波函数; (6)波节与波腹点的位置; (7)该驻波的平均能流密度.

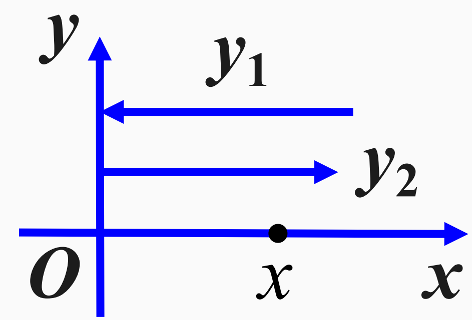
(1) 解法1(常规方法): 由于反射端为自由端, 反射波无半波损失, 入射波与反射波在反射点的振动方程相同:

$$y_{20}(t) = y_{10}(t) = A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$



由相位落后法, 得反射波的波函数:

$$y_2(x,t) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x) = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$



解法2(一步法). 可以将反射波看成入射波在反射点改变方向后的继续传播, 入射波与反射波在 任意 x 点的波程差 $\Delta x = 2x$,

由时间推迟法或相位落后法, 就可由入射波的波函数直接写出反射波的波函数:

$$y_1(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

相位落后法: $y_2(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\right] = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$

(2) 驻波的波函数

$$y(x,t) = y_1(x,t)+y_2(x,t) \quad = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$y(x,t)=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t$$

(3) 波节点位置：令 $|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x|=0$, 得 $\frac{2\pi}{\lambda}x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad (k=0,1,2,3\ldots)$

$$\therefore x_k=(2k+1)\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{4},\quad\frac{3\lambda}{4},\quad\frac{5\lambda}{4},\ldots\ldots$$

波腹点位置：令 $|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x|=1$, 得 $\frac{2\pi}{\lambda}x_k=k\pi,\quad (k=0,1,2,3\ldots)$

$$\therefore x_k=k\frac{\lambda}{2}=0,\quad\frac{\lambda}{2},\quad\lambda,\quad\frac{3\lambda}{2},\ \ldots\ldots$$

解法2: 可根据驻波的普遍性质, 直接得到波节和波腹点位置.

因为无半波损失, 故反射点为波腹点. 再利用驻波的如下普遍性质：相邻波腹之间或相邻波节之间的距离均为λ/2, 相邻波腹与波节间的距离为λ/4. 得到

波节点位置：$x_0=\frac{\lambda}{4},\quad x_1=\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}=\frac{3\lambda}{4},\quad x_2=\frac{3\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}=\frac{5\lambda}{4},\ \ldots,x_k=(2k+1)\frac{\lambda}{4}$

波腹点位置：$x_0=0,\quad x_1=\frac{\lambda}{2},\quad x_2=\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}=\lambda,\quad\ldots,x_k=k\frac{\lambda}{2}$

(4) 若反射点是固定端，则反射波有半波损失. $y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$

反射波在反射点的振动方程　　相位落后法得反射波的波函数

$$y_{20}(t) = A\cos(2\pi\frac{t}{T}+\pi), \qquad y_2(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\pi]$$

(5) 驻波的波函数：

$$y(x,t) = y_1(x,t)+y_2(x,t) = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\pi]$$

$$= A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})-A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) = -2A\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

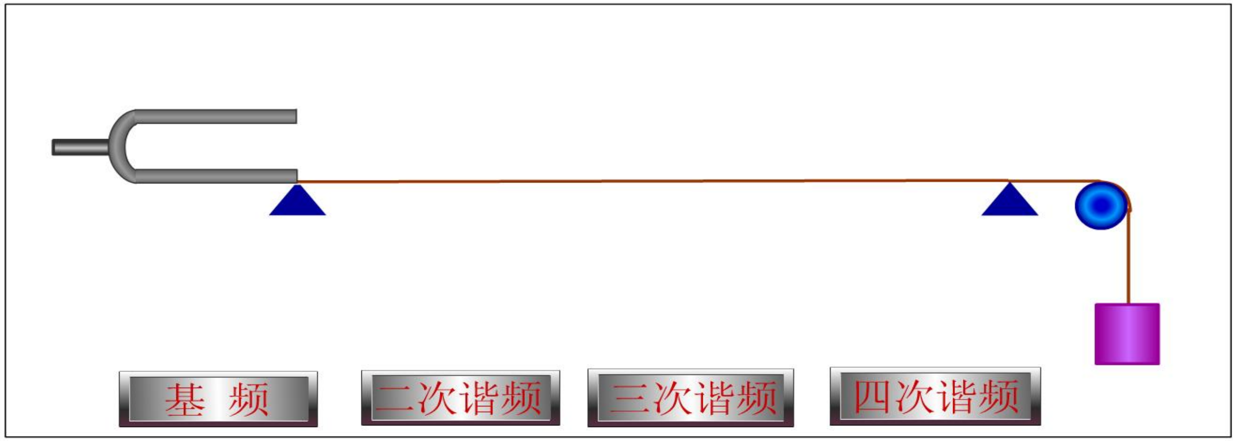
(6) 波节与波腹点位置：

波节：令 $|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}|=0$, 得 $2\pi\frac{x_k}{\lambda}=k\pi, (k=0,1,2,\ldots)$, $\therefore x_k = k\frac{\lambda}{2} = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \ldots$

波腹：令 $|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}|=1$, 得 $2\pi\frac{x_k}{\lambda}=\frac{\pi}{2}+k\pi, (k=0,1,2,\ldots)$, $\therefore x_k = (2k+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \ldots$

(7)该驻波的平均能流密度： $\bar{I} = \bar{I}_1+\bar{I}_2 = (\overline{w}_1-\overline{w}_2)u = 0$

五、弦的波动（振动的简正模式）



两端固定的弦线形成驻波时，波长 λ 和弦长 l 必须满足下列驻波条件：

$$\boxed{l = n\frac{\lambda}{2}}$$

(意义：固定端必须是波节)

形成的驻波才能稳定存在。$\Rightarrow \lambda_n = \dfrac{2l}{n},\quad \nu_n = \dfrac{u}{\lambda_n} = n\dfrac{u}{2l} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

仅当音叉频率与弦线的固有频率相等时，才能因共振产生强烈的驻波。弦线上的驻波波长是固有的，由弦线的长度决定，能调节的是其频率。实验上是通过调节砝码质量来调节弦线的张力，从而调节弦线的波速，最终达到调节弦线的固有频率的目的。

一端自由、一端固定的弦线形成驻波时, 波长 λ 和弦长 l 必须满足下列驻波条件:

$$\boxed{l = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{\lambda}{4}}$$

(意义: 自由端必须是波腹, 固定端必须是波节)

形成的驻波才能稳定存在.

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{4l}{2n-1}, \quad \nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = (2n-1)\frac{u}{4l}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

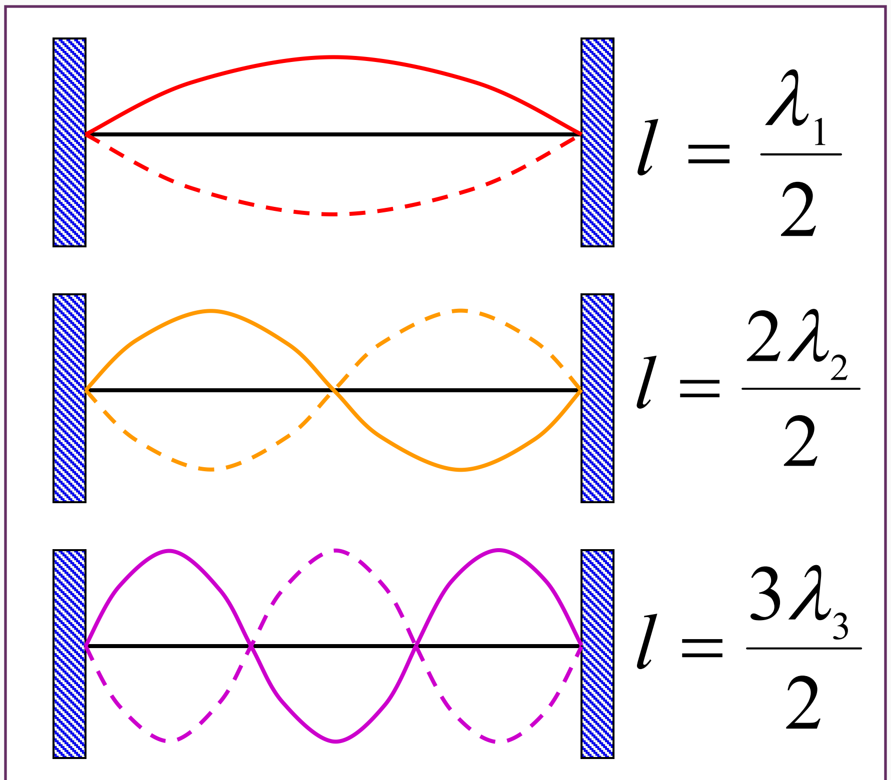
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

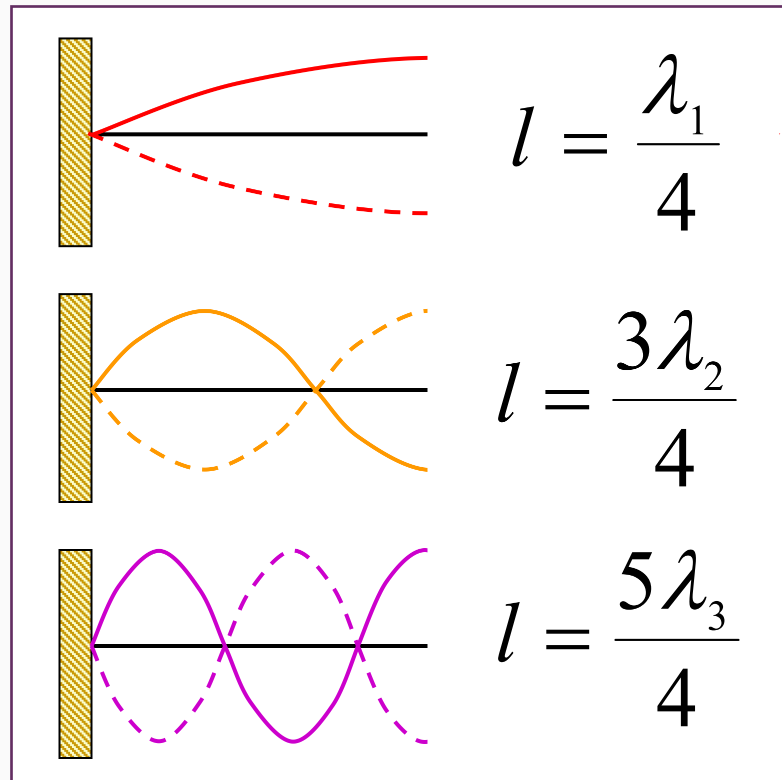
两端固定的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2}(n = 1,2,\cdots)$$

一端固定、一端自由的弦振动的简正模式

$$l = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}(n = 0,1,2,\cdots)$$





波速：

$$u=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T：弦线中的张力

μ：弦线单位长度的质量

对于两端固定的弦线:

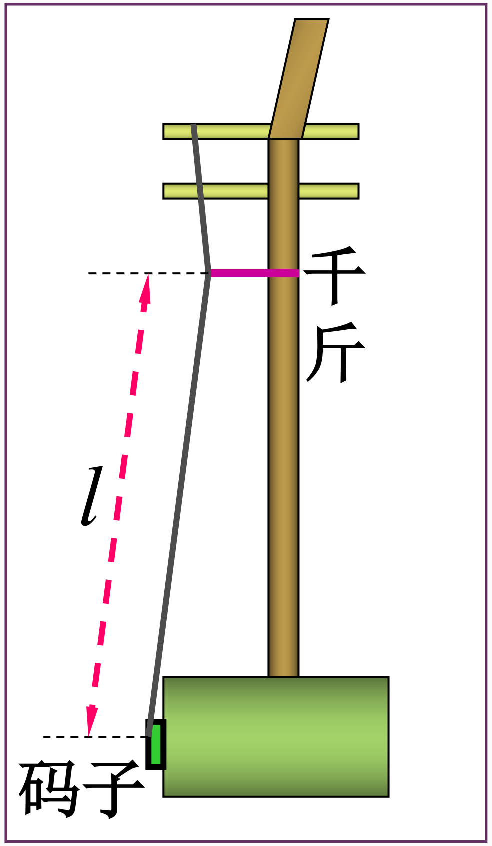
$$\nu_n=n\frac{u}{2l}=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}=n\nu_1,\quad (n=1,2,\cdots)$$ ：***n*** 次谐频

$$\nu_1=\frac{u}{2l}=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}},\quad n=1$$ ：基频，一次谐波

$$\nu_2=2\frac{u}{2l}=\frac{2}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}},\quad n=2$$ ：二倍频，二次谐波

…

例1、如图二胡弦长 $l = 0.3\ \mathrm{m}$，张力 $T = 9.4\mathrm{N}$ ，质量线密度 $\mu = 3.8\times10^{-4}\ \mathrm{kg/m}$。 求弦所发的声音的基频和谐频.



解：弦两端为固定点，是波节.

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$

频率 $\nu = \dfrac{u}{\lambda} = n\dfrac{u}{2l}$ 　　波速 $u = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

基频(基音) $n = 1,\ \nu_1 = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = 262\ (\mathrm{Hz})$

(音调, 主旋律)

谐频(倍频, 泛音) $n > 1,\ \nu_n = \dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = n\nu_1$

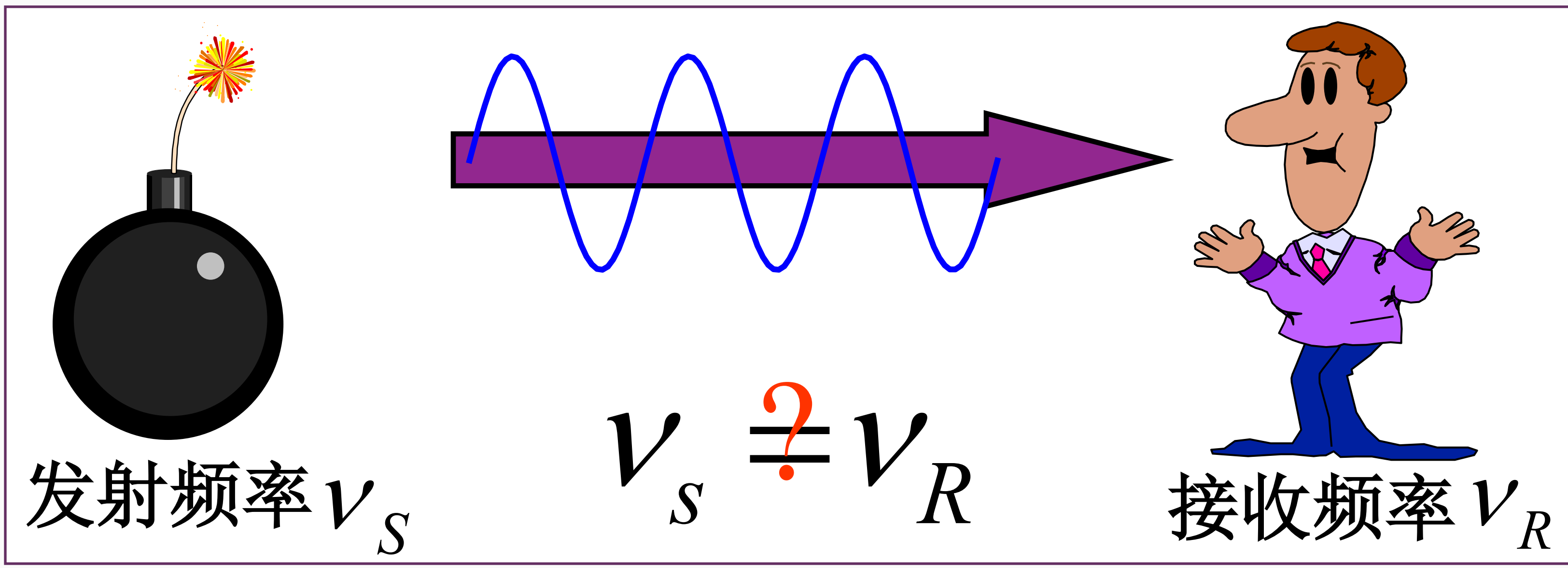
同济王少杰《新编基础物理学》：音调(音高)取决于声波的基频(基音), 音色取决于声波的谐频(泛音).

复合音=分音的集合=基音+泛音. 基音=第一分音, 第一泛音=第二分音, ... (见下页图)

虽然复合音包含多种频率, 但基音能量一般最强, 人耳只能辨别出基音, 因此, 基频决定了声音的音调.

讨论：人耳听到的声音的频率与声源的频率相同吗？

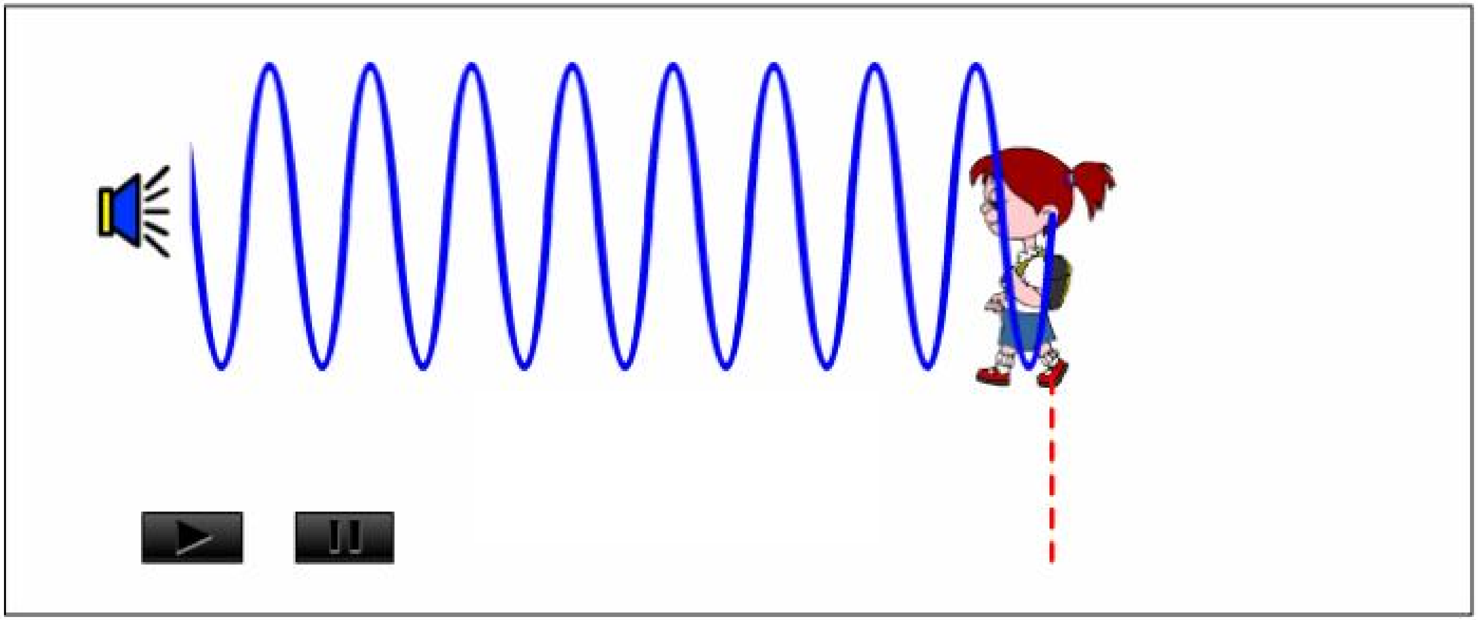
接收频率——单位时间内观测者接收到的完整波形(即一个波长的波形)的数目.



只有波源与观察者相对静止时才相等.

一、波源不动，观察者相对介质以速度 υ_R 运动

观察者运动的效果是造成波速变化



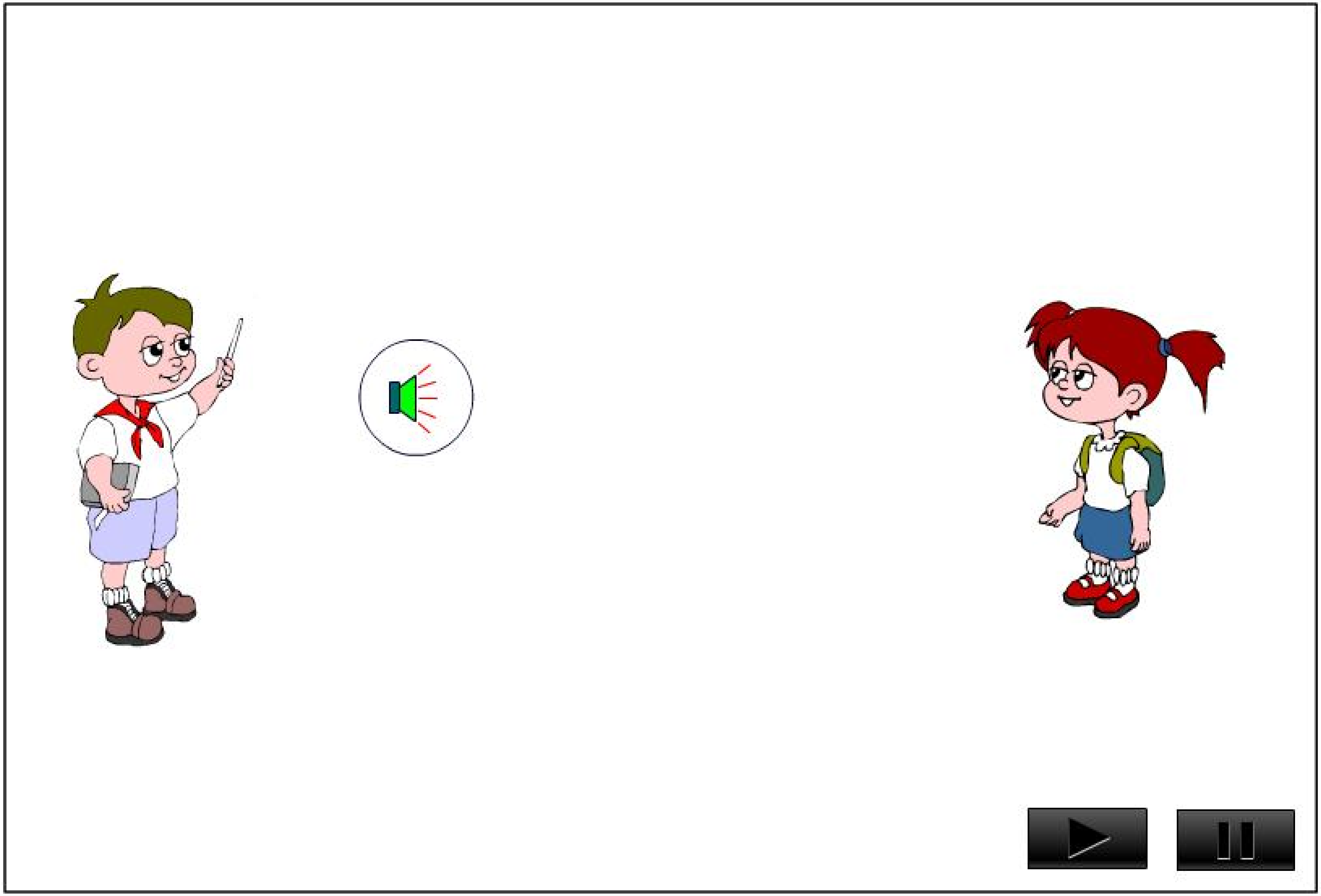
观察者接收的频率

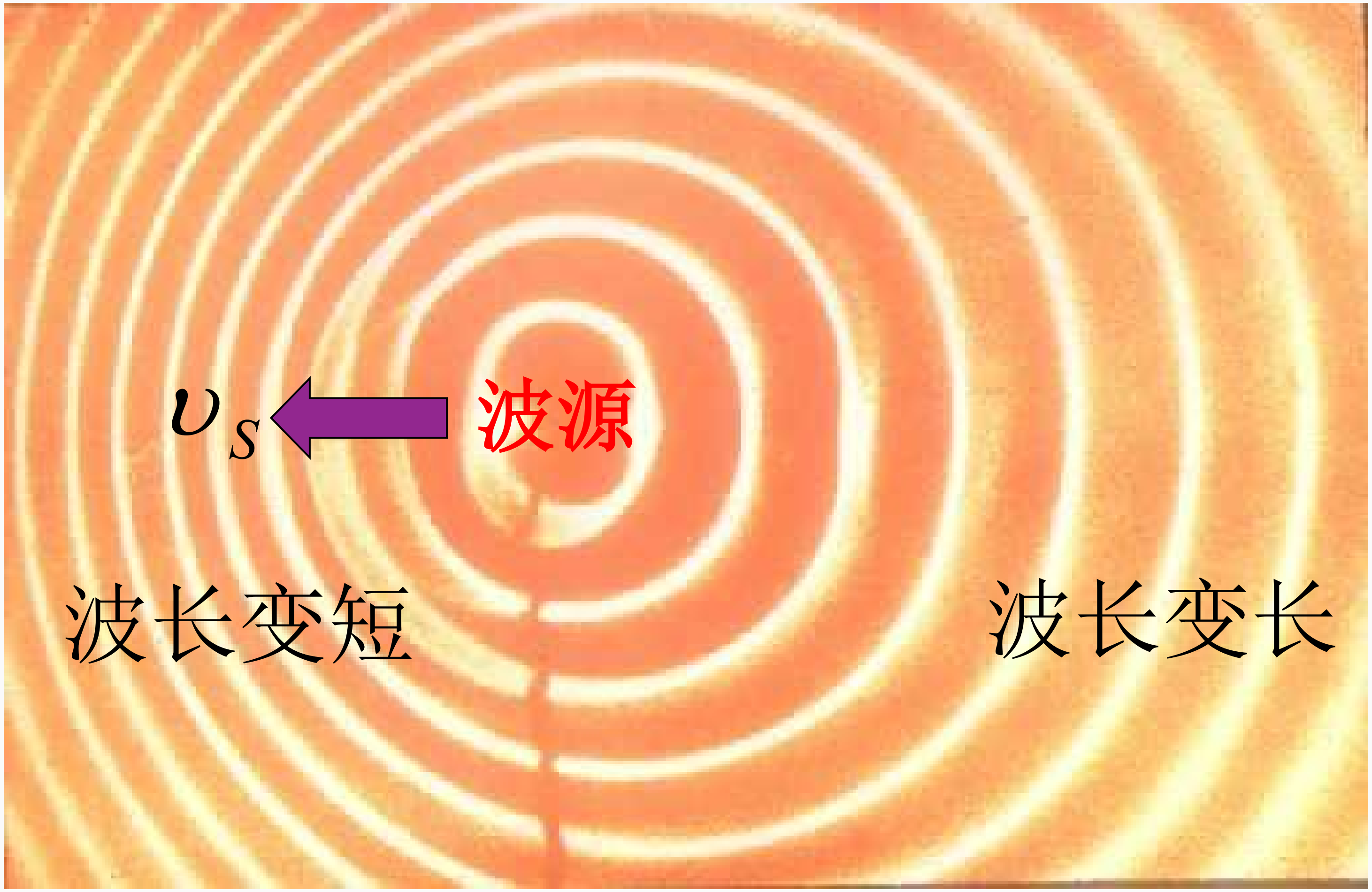
$$\nu_R = \frac{u+\upsilon_R}{u}\nu_S$$

若观察者向着波源运动，则υ_R取正，此时$\nu_R > \nu_S$；

若观察者远离波源运动，则υ_R取负，此时$\nu_R < \nu_S$.

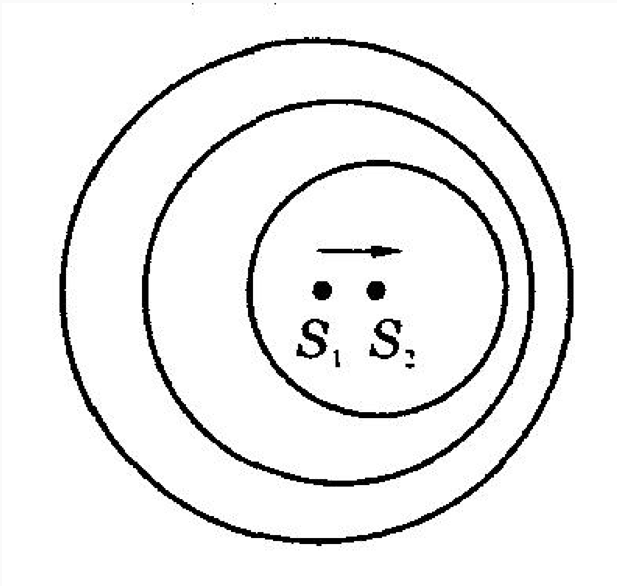
二、观察者不动，波源相对介质以速度 υ_S 匀速运动

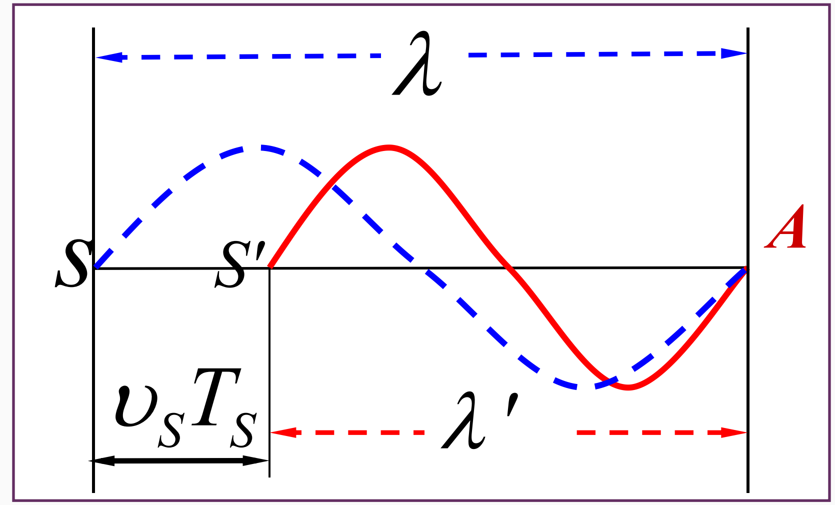




波源运动的效果是造成波长变化

5.6 多普勒效应





$$\lambda' = \lambda - \upsilon_S T_S = (u - \upsilon_S) T_S ,$$

波在介质中的传播速度 (波速) 仍为 u ——波速只与介质性质有关(介质仍静止) , 与波源的运动无关.

观察者接收的频率

$$\nu_R = \frac{u}{u - \upsilon_S} \nu_S$$

波源向着观察者运动, 则 υ_S 取正, 此时 $\nu_R > \nu_S$;

波源远离观察者运动, 则 υ_S 取负, 此时 $\nu_R < \nu_S$.

三、波源与观察者同时相对于介质运动 (υ_S, υ_R)

$$\nu_R = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u+\upsilon_R}{u-\upsilon_S}\nu_S$$

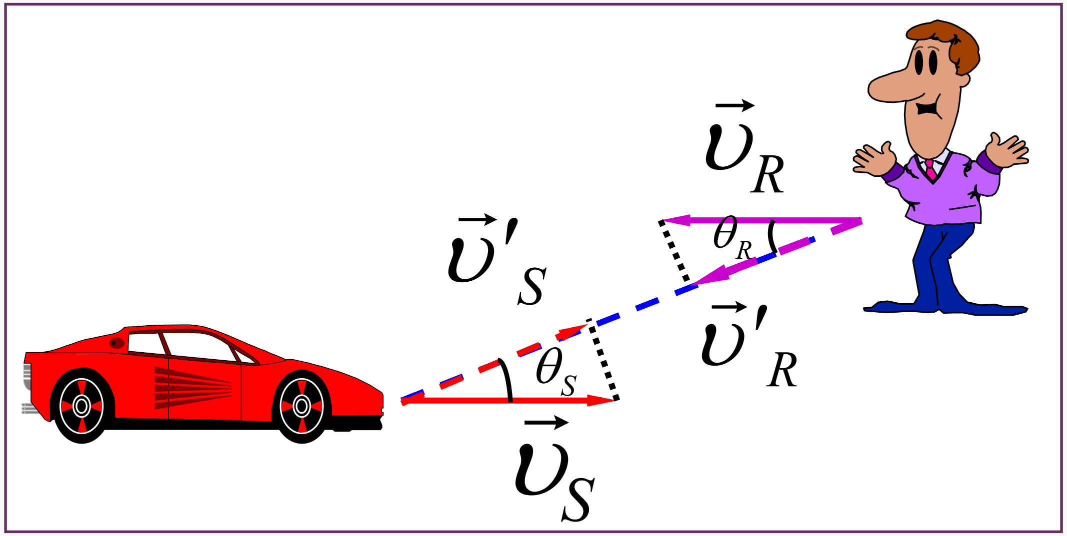
υ_R :观察者向着波源运动取正, 远离取负.

(假定波源不动)

υ_S :波源向着观察者运动取正, 远离取负.

(假定观察者不动)

四、波源与观察者不沿二者连线运动

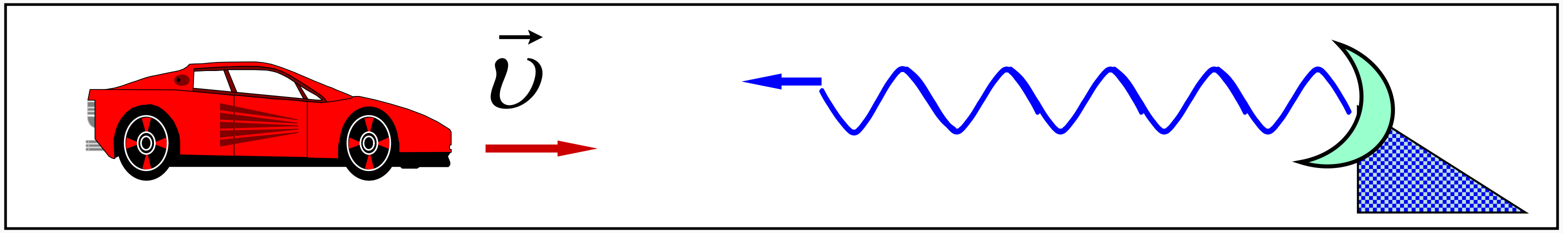


☆ 机械波只有纵向多普勒效应，无横向多普勒效应.

因此，只需考虑二者速度沿连线方向的分量.

$$\nu_R=\frac{u+\upsilon'_R}{u-\upsilon'_S}\nu_S=\frac{u+\upsilon_R\cos\theta_R}{u-\upsilon_S\cos\theta_S}\nu_S$$

例1、利用多普勒效应监测车速，固定波源发出频率为 $\nu = 100$ kHz 的超声波，当汽车向波源行驶时，与波源安装在一起的接收器接收到从汽车反射回来的波的频率为 $\nu'' = 110$ kHz 已知空气中的声速为 $u = 330\text{m/s}$ 求车速 .



$$\nu_R = \frac{u+\upsilon_R}{u-\upsilon_S}\nu_S$$

解：1) 车为接收器 $\nu' = \dfrac{u+\upsilon}{u}\nu$

2) 车为波源 $\nu'' = \dfrac{u}{u-\upsilon}\nu' = \dfrac{u+\upsilon}{u-\upsilon}\nu$

车速 $\upsilon = \dfrac{\nu''-\nu}{\nu''+\nu}u = 56.8\,(\text{km}/\text{h})$

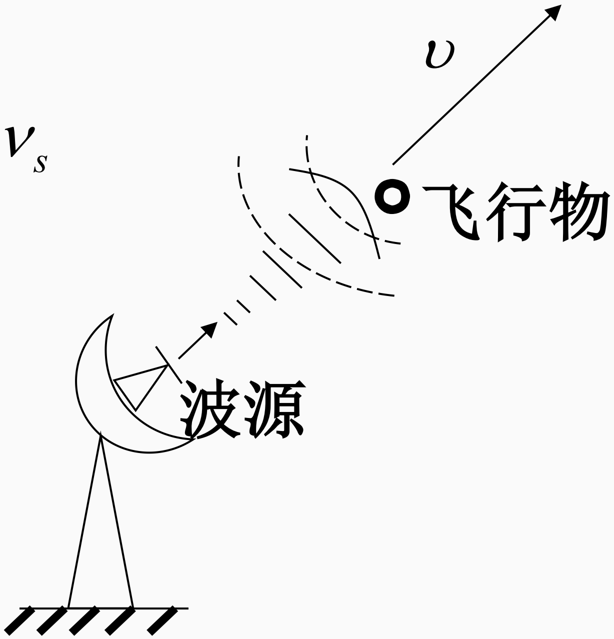
例2、一静止波源向一飞行物发射频率为 $\nu_S=30\ \mathrm{kHz}$ 的超声波，飞行物以速度 υ 离开波源飞出，站在波源处相对于波源静止的观察者测得波源发射波与飞行物反射波两振动合成的拍频为 $\nu_b=100\ \mathrm{Hz}$ ，已知声速 $u=340\mathrm{m/s}$ 。试推算飞行物的运动速度.

解: (1) 飞行物作为接收器

$$\nu'=\frac{u+(-\upsilon)}{u}\nu_s=\frac{u-\upsilon}{u}\nu_s$$

(2) 飞行物作为“波源”发出反射波

$$\nu''=\frac{u}{u-(-\upsilon)}\nu'=\frac{u}{u+\upsilon}\cdot\frac{u-\upsilon}{u}\nu_s=\frac{u-\upsilon}{u+\upsilon}\nu_s$$



(3) 波源发射波与飞行物反射波叠加,

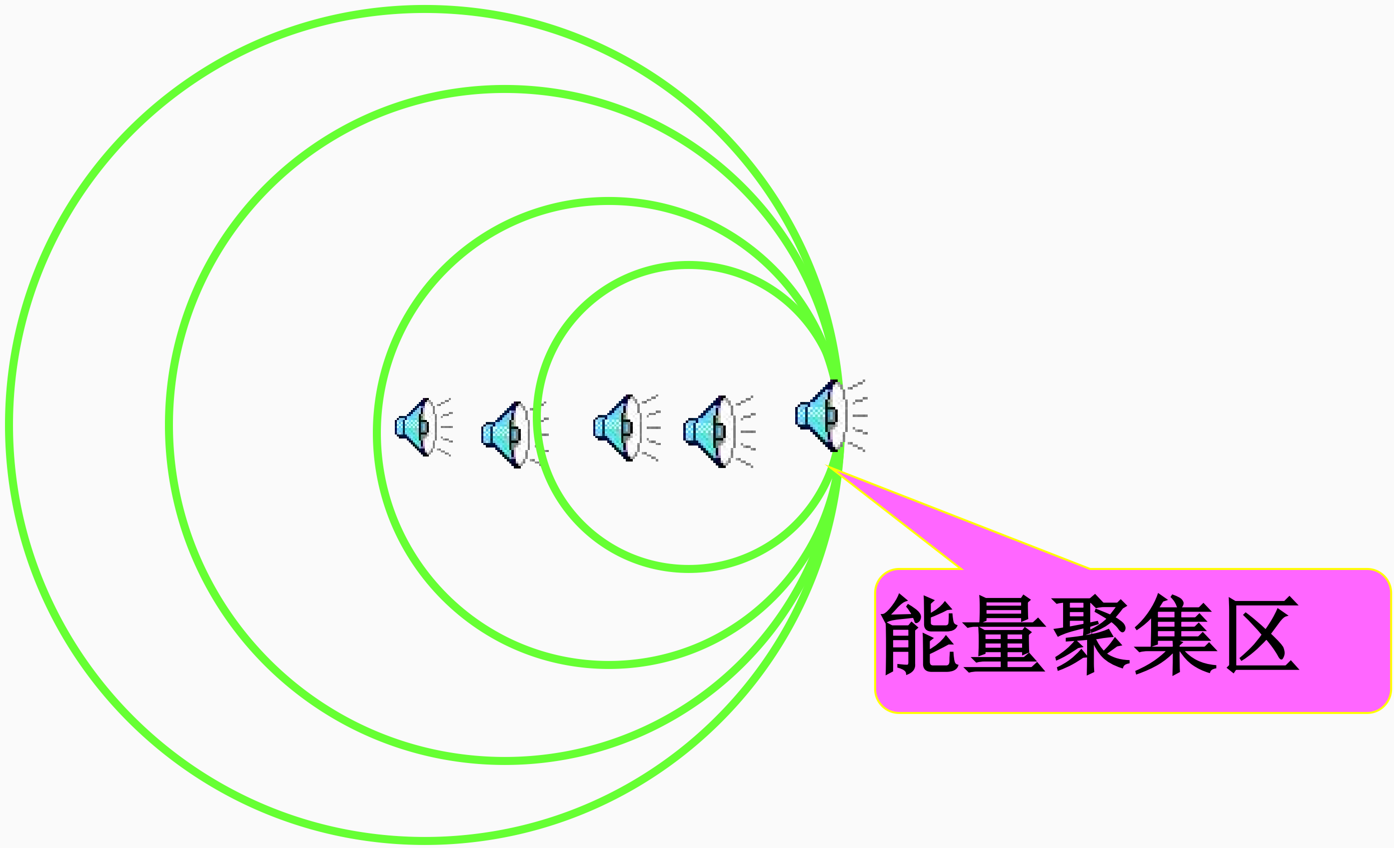
拍频 $\nu_b=|\nu_s-\nu''|=\nu_s-\frac{u-\upsilon}{u+\upsilon}\nu_s=\frac{2\upsilon}{u+\upsilon}\nu_s$

(4) 推算得飞行物速度:

$$\upsilon=\frac{\nu_b}{2\nu_s-\nu_b}u=0.57\ (\mathrm{m/s})$$

五、冲击波（激波）（或者自学）

如果波源的速度等于波的速度，波源总在波阵面上，形成声障.

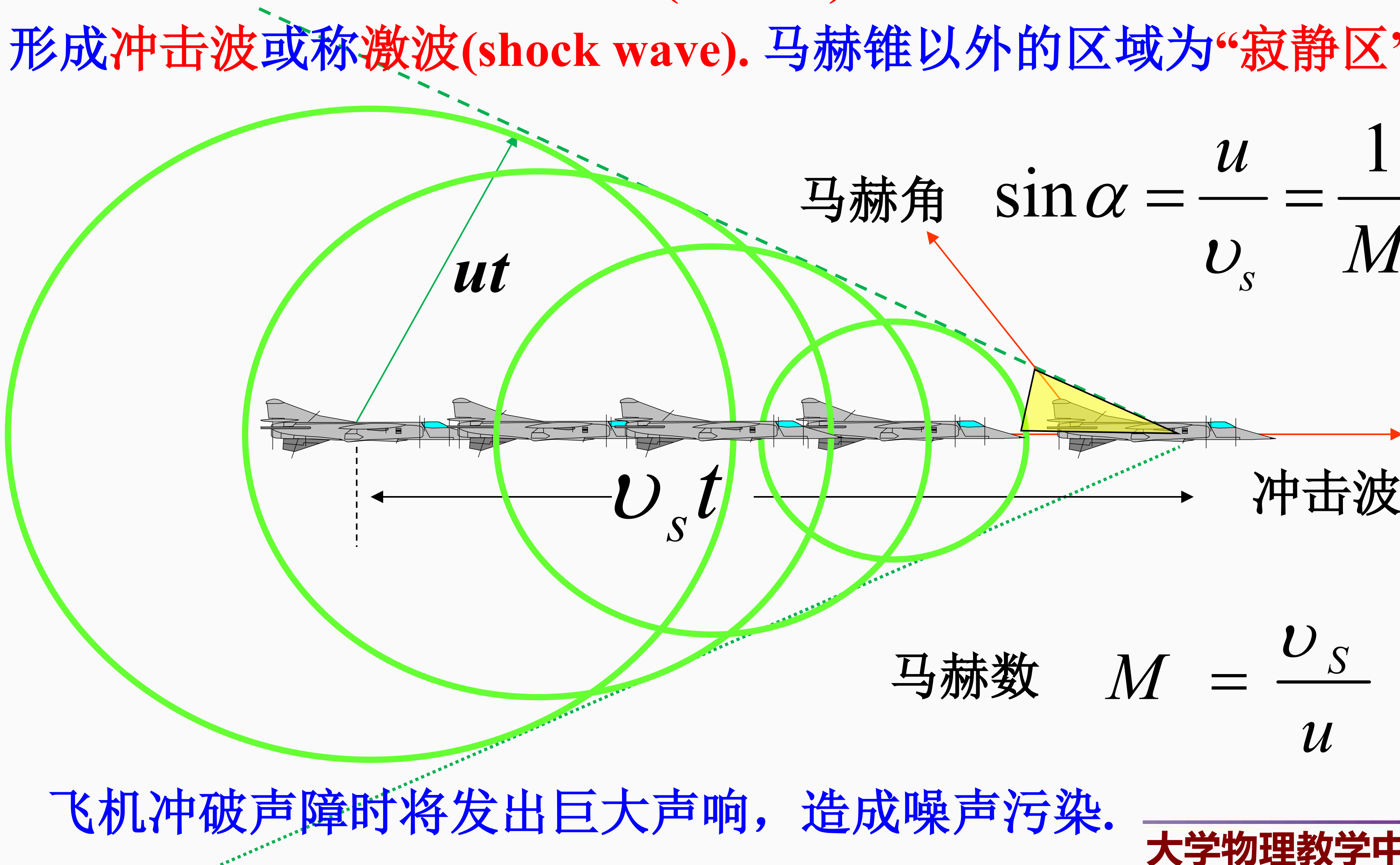


声障：在声速附近，空气被高度压缩，形成“空气墙壁”，从而对飞行器的飞行阻力突然增大的现象.

5.6 多普勒效应

如果波源的速度 v_S 大于波的速度 u，波源总在波阵面前面.

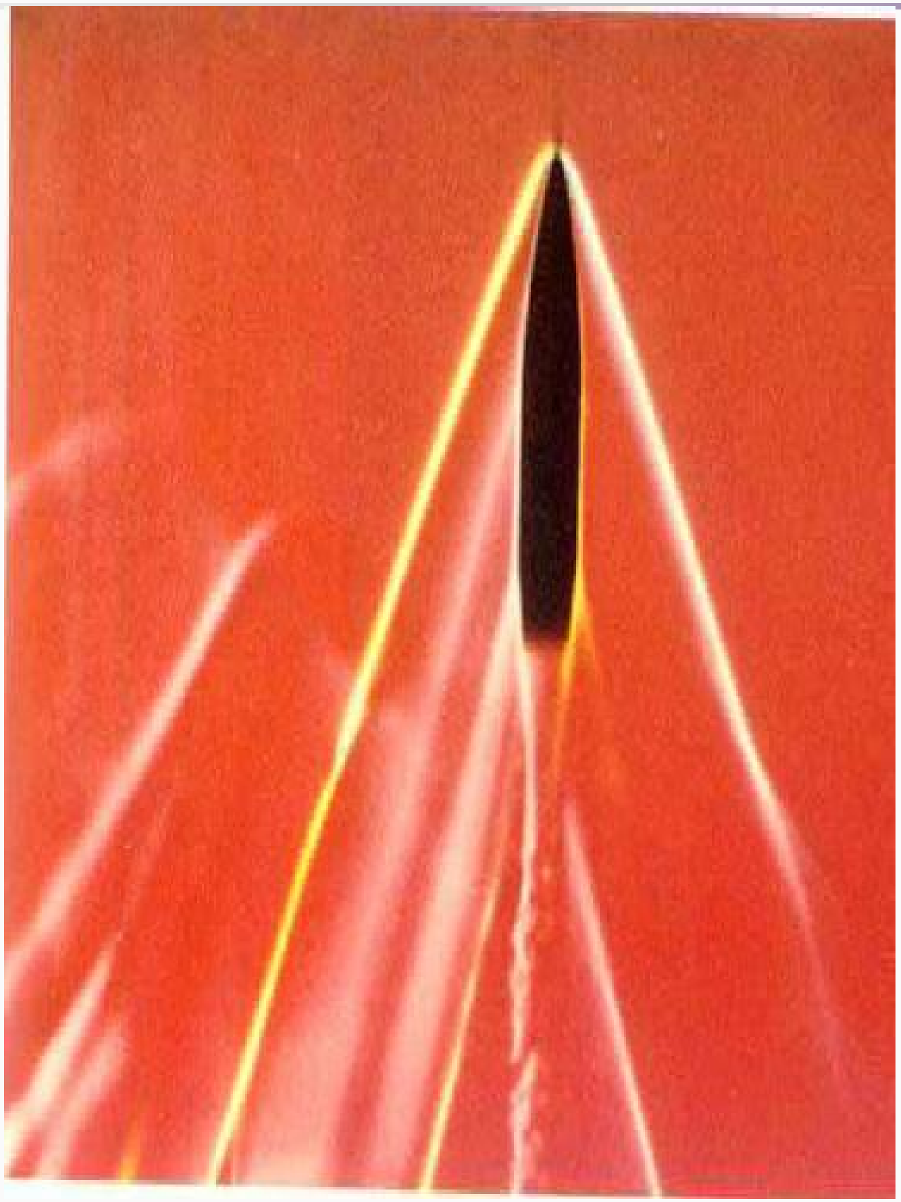
所有波前将聚集在一个**圆锥面(马赫椎)**上，波的能量高度集中，形成**冲击波**或称**激波(shock wave)**. 马赫锥以外的区域为“**寂静区**”.



马赫角 $\sin\alpha = \dfrac{u}{\upsilon_s} = \dfrac{1}{M}$

马赫数 $M = \dfrac{\upsilon_S}{u}$

飞机冲破声障时将发出巨大声响，造成噪声污染.



半波反射和全波反射

入射波在断点 *C* 点的振动方程：$y_{C入} = A\cos(\omega t + \varphi)$

C点固定　　半波反射

反射波在 *C* 点的振动方程：$y_{C反} = A\cos(\omega t + \varphi \pm \pi)$

C点自由　　全波反射

反射波在 *C* 点的振动方程：$y_{C反} = A\cos(\omega t + \varphi)$

如何根据入射波写反射波？

振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的一种特殊的干涉现象.

正向 $y_1 = A\cos(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}x)$

负向 $y_2 = A\cos(\omega t + \dfrac{2\pi}{\lambda}x)$

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) + A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$
$$= \boxed{2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x} \cdot \underline{\cos\omega t}$$

驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

两端固定的弦线形成驻波时, 波长 λ 和弦长 l 必须满足下列驻波条件:

$$\boxed{l = n\frac{\lambda}{2}}$$

多普勒效应　波源与观察者同时相对于介质运动 (υ_S, υ_R)

$$\nu_R = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u+\upsilon_R}{u-\upsilon_S}\nu_S$$

υ_R :观察者向着波源运动取正, 远离取负.

υ_S :波源向着观察者运动取正, 远离取负.