理科专业基础课(71100201)

《代 数 与 几 何》

主讲人: 吕新民

第九章 欧几里得空间

- 内积
- 标准正交基
- 正交矩阵与正交变换
- 正交子空间
- 实对称矩阵的正交对角化
- 欧氏空间的同构

第1节 内 积

- **定义**

定义 设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，在V上定义了一个二元实函数，称为内积，记作(α,β)，如果

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$.

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$.

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$.

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$，且$(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$\alpha=0$.

其中$\alpha,\beta,\gamma\in V$，而$k\in\mathbb{R}$.

具有内积的线性空间V称为欧几里得空间.

【例 1】(1) 在$\mathbb{R}^n$中，记$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

是$\mathbb{R}^n$中的内积.

(2) 在$C_{[a,b]}$中，对任意函数$f(x),g(x)$，定义

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

是$C_{[a,b]}$中的内积.

设$\alpha \in V$，非负实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$称为α的长度，记作$|\alpha|$. 长度为1的向量称为单位向量. 如果$\alpha \neq 0$，则$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$是一个单位向量，称将α的单位化.

定理 (柯西–布涅柯夫斯基不等式) 对于任意的向量α,β，有$|(\alpha,\beta)| \leq |\alpha||\beta|$，等号成立当且仅当$\alpha,\beta$线性相关.

证明： 若$\beta = 0$，结论显然成立. 若$\beta \neq 0$，构作$\gamma = \alpha + t\beta$. 由内积的性质知

$$0 \leq (\gamma,\gamma) = (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta)t + (\beta,\beta)t^2.$$

于是，$\triangle \le 0$，即$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|$. 若$\alpha,\beta$线性相关，等号显然成立. 反过来，若等号成立，则$\gamma = 0$，即$\alpha,\beta$线性相关.

有了上述不等式，可以定义非零向量α,β的夹角$\langle\alpha,\beta\rangle$的余弦为$\cos\langle\alpha,\beta\rangle = \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$，这里$0 \le \langle\alpha,\beta\rangle \le \pi$.

- **正交向量组**

定义 如果向量α,β的内积为零，即$(\alpha,\beta) = 0$，称α,β是正交的，记作$\alpha \perp \beta$. 如果向量组中每个向

量非零，且任何两个不同的向量正交，则称该向量组为正交向量组.

定理 设V是一个n维欧氏空间，$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$是它的一组基，则

(1) V的正交向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$必线性无关.

(2) 令$X = (x_1, \cdots, x_n)', Y = (y_1, \cdots, y_n)'$分别是$\alpha, \beta \in V$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标，则

$$(\alpha, \beta) = X'AY,$$

这里$A = ((\varepsilon_i, \varepsilon_j))$，称$A$为$V$在基$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$下的度量矩阵.

证明：(1)令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

两端用α_i作内积，结合正交性得$k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$. 因$(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0$，所以$k_i=0$，这里$i=1,2,\cdots,s$. 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性无关.

(2) 由内积的性质，得

$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j=X'AY.$$

【例2】设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维欧氏空间$V$的一组向量，而

$$\triangle=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}.$$

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow|\triangle|\neq 0.$

证明：令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0.$$

两端用α_i作内积，得线性方程组

$$k_1(\alpha_i, \alpha_1) + k_2(\alpha_i, \alpha_2) + \cdots + k_n(\alpha_i, \alpha_n) = 0,$$

其中$i = 1, 2, \cdots, n$. 于是,

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关

$\Leftrightarrow$上述方程组只有零解

$\Leftrightarrow$ 方程组的系数行列式不为零，即$|\triangle| \neq 0$.

第2节 标准正交基

- **标准正交基的定义**

定 义 设V是n维 欧 氏 空 间 ，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$称为$V$的一组标准正交基，如果

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是正交向量组.

(2) 每个ε_i均是单位向量.

对标准正交基，作以下说明.

(1) n维欧氏空间V的标准正交基不是唯一的. 如在$\mathbb{R}^2$中，

$$(1,0),(0,1)\text{与}(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

均是$\mathbb{R}^2$的标准正交基.

(2) V在任何一组标准正交基下的度量矩阵是一

个单位矩阵，即$A=E$.

(3) 记$X=(x_1,\cdots,x_n)'$,$Y=(y_1,\cdots,y_n)'$分别是$\alpha,\beta\in V$在标准正交基下的坐标，则

$$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

- **Schmidt正交单位化**

定理 n维欧氏空间V中的任何一个正交的向量组均可扩充成一组正交基.

证明： 令$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是V的一正交向量组. 对$n-m$作归纳. 当$n-m=0$时，结论成立. 假定$n-m=k$时定理成立，即可找到向量$\beta_1,\cdots,\beta_k$，使得$\alpha_1,$

$\cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_k$为$V$的正交向量组.

现考察$n-m=k+1$情形. 因为$m<n$，必存在向量$\beta\in V$，它不能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出. 令

$$\alpha_{m+1}=\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_m\alpha_m.$$

两端用α_i作内积，得

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1})=(\beta, \alpha_i)-k_i(\alpha_i, \alpha_i), \quad i=1,2,\cdots,m.$$

取

$$k_i=\frac{(\beta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}, \quad i=1,2,\cdots,m,$$

使得$(\alpha_i, \alpha_{m+1})=0$，$i=1,2,\cdots,m$. 由$\beta$的选择可

知，$\alpha_{m+1} \neq 0$. 因此，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 是正交向量组. 根据归纳假定，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$可以扩充成一正交基. 于是定理得证.

定理的证明过程实际上给出了从任何一个非零向量出发，扩充成正交向量组的方法. 如果进一步单位化，就可以得到一组标准正交基. 以下我们将给出如何从一组基获取标准正交基的方法.

给定n维欧氏空间V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

第一步. Schmidt正交化过程: 令

$$\beta_1 = \alpha_1;$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}.$$

可得正交向量组：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.

第二步. 单位化过程: 再令

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1;\ \gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2;\ \cdots;\gamma_n = \frac{1}{|\beta_n|}\beta_n.$$

可得n维欧氏空间V的一组标准正交基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$.

【例 3】在$\mathbb{R}[x]_4$中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

试从$1,x,x^2,x^3$出发求$\mathbb{R}[x]_4$的一组标准正交基.

解： 令$\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2,\alpha_4=x^3$. 先采用Schmidt正交化过程:

$$\beta_1=\alpha_1;$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=x;$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=x^2-\frac{1}{3}.$$

$$\beta_4 = \alpha_4 - \frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3 = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

再将其单位化:

$$\eta_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\eta_3 = \frac{1}{|\beta_3|}\beta_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$$

$$\eta_4 = \frac{1}{|\beta_4|}\beta_4 = \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x).$$

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$**即是所求**$\mathbb{R}[x]_4$**的一组标准正交基.**

第3节　正交矩阵与正交变换

- **正交矩阵**

有了标准正交基以后，从标准正交基到标准正交基的过渡矩阵会有什么样的变化呢?

设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$与$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是$n$维欧氏空间$V$的两组标准正交基，$A = (a_{ij})$是从$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$到$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$的过渡矩阵，即

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A.$$

因$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是标准正交基，所以

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases}.$$

因为$(\eta_i, \eta_j) = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj}$，从而

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases},$$

即$A'A = E$.

定义 n阶实矩阵A称为正交矩阵，如果$A'A = E$.

- **正交变换**

定义 欧氏空间V的线性变换$\mathcal{A}$称为正交变换，如

果对于任意的$\alpha,\beta\in V$，$(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta))=(\alpha,\beta)$.

下面将给出正交变换的一些等价刻画.

定理 设$\mathcal{A}$是n维欧氏空间V的一个线性变换，以下条件彼此等价:

(1) $\mathcal{A}$是正交变换.

(2) 对于任意的$\alpha\in V$，$|\mathcal{A}(\alpha)|=|\alpha|$.

(3) 如果$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是标准正交基，则$\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathcal{A}(\varepsilon_n)$也是标准正交基.

(4) $\mathcal{A}$在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明： (1)⇔(2) 若$\mathcal{A}$是正交变换，对于任意的$\alpha \in V$，$|\mathcal{A}(\alpha)| = |\alpha|$是自然的. 反过来，对于任意的$\alpha,\beta \in V$，由题设，$(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\alpha)) = (\alpha,\alpha)$，$(\mathcal{A}(\beta),\mathcal{A}(\beta)) = (\beta,\beta)$，于是$(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\mathcal{A}(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta,\alpha+\beta)$，即

$$(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\alpha)) + 2(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta)) + (\mathcal{A}(\beta),\mathcal{A}(\beta)) = (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

即$(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta)) = (\alpha,\beta)$，故$\mathcal{A}$是正交变换.

(1)⇔(3)若$\mathcal{A}$是正交变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是一组标准正交基，则

$$(\mathcal{A}(\varepsilon_i), \mathcal{A}(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

故$\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$也是标准正交基.

反过来，若$\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$是标准正交基，对于任意的$\alpha, \beta \in V$，令$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$，则$\mathcal{A}(\alpha) = x_1\mathcal{A}(\varepsilon_1) + x_2\mathcal{A}(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\varepsilon_n)$，$\mathcal{A}(\beta) = y_1\mathcal{A}(\varepsilon_1) + y_2\mathcal{A}(\varepsilon_2) + \cdots + y_n\mathcal{A}(\varepsilon_n)$. 于是，

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)).$$

故$\mathcal{A}$是正交变换.

(3)⇔(4)设$\mathcal{A}$在标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为A，则

$$(\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A.$$

若$\mathcal{A}$ 是正交变换，则A是正交矩阵，从而$\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$是一组标准正交基.

反过来，若$\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$是一组标准正交基，则$A$就是从标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$到标准正交基$\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$的过渡矩阵，从而$A$是正交矩阵，故$\mathcal{A}$是正交变换.

若A是正交矩阵，即$A'A = E$，从而$|A| = \pm 1$.

(1) 若$|A|=1$，此类变换称为第一类正交变换.

(2) 若$|A|=-1$，此类变换称为第二类正交变换.

【例 4】 设η是欧氏空间中的一个单位向量，定义$\mathcal{A}(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$.

(1) 证明: $\mathcal{A}$是正交变换.

(2) 证明: $\mathcal{A}$是第二类的.

证明： (1) 直接验证易知$\mathcal{A}$是一个线性变换. 又

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=[\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta]$$

$$=(\alpha,\beta)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)+4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta)$$

注意到$(\eta,\eta)=1$，故$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta)$，即$\mathcal{A}$是一

个正交变换.

(2)由于η是单位向量，将其扩充成一组标准正交基$\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，则

$$\begin{cases} \mathcal{A}\eta=\eta-2(\eta,\eta)\eta=-\eta \\ \mathcal{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i-2(\eta,\varepsilon_i)\eta=\varepsilon_i \end{cases},\quad i=2,\cdots,n$$

即

$$\mathcal{A}(\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

所以$\mathcal{A}$是第二类的.

第4节　正交补子空间

• 正交补的定义

定义　设V_1与V_2是欧氏空间V的两个子空间.

(1) 称V_1与V_2是正交的，记作$V_1 \perp V_2$，如果对任意$\alpha \in V_1$，$\beta \in V_2$，$(\alpha, \beta) = 0$.

(2) 称V_2是V_1的正交补，如果$V_1 \perp V_2$，且$V = V_1 + V_2$.

下面我们考察n维欧氏空间V的任何一个子空间V_1是否存在正交补? 若存在，是否唯一?

定理 n维欧氏空间V的任何一个子空间V_1都有唯一的正交补. 特别地，V_1正交补是由所有与V_1正交的向量组成.

证明： 存在性. 若$V_1=\{0\}$，则它正交补为V. 假定$V_1\neq\{0\}$. 取V_1的一组正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$，并将其扩充成$V$的一组正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$. 令

$$V_2=L(\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n).$$

直接验证可得V_2即是V_1的正交补.

唯一性. 设V_2,V_3均是V_1正交补，即$V=V_1\oplus V_2=V_1\oplus V_3$. 对任意$\alpha\in V_2\subseteq V$，则$\alpha=\alpha_1+\alpha_3$，这里

$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_3 \in V_3$. 因为$(\alpha, \alpha_1) = 0$，则

$$0 = (\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1),$$

即$\alpha_1 = 0$. 于是$\alpha \in V_3$，故$V_2 \subseteq V_3$. 同理可证$V_3 \subseteq V_2$，从而$V_2 = V_3$.

上述定理表明n维欧氏空间V的任何一个子空间V_1的正交补是唯一的. 通常，我们用符号$V_1^{\perp}$表示V_1的正交补.

- **正交补的性质**

定理 设V_1, V_2是欧氏空间V的两个子空间，则

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp},(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}.$$

证明： 先证第一式. 任取$\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$，则$\alpha\perp V_1+V_2$. 对于任意的$\beta\in V_1$，因为$\beta=\beta+0\in V_1+V_2$，则$\alpha\perp\beta$，从而$\alpha\perp V_1$，即$\alpha\in V_1^{\perp}$. 同理可证$\alpha\in V_2^{\perp}$，于是$\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$. 故$(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

又任取$\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，则$\alpha\in V_1^{\perp}$，且$\alpha\in V_2^{\perp}$，即$\alpha\perp V_1$，$\alpha\perp V_2$. 任取$\beta\in V_1+V_2$，记$\beta=\beta_1+\beta_2$，这里$\beta_1\in V_1,\beta_2\in V_2$. 于是，

$$(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)=0.$$

所以，$\alpha\perp\beta$. 由β的任意性，$\alpha\perp(V_1+V_2)$，即$\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$. 从而$(V_1+V_2)^{\perp}\supseteq V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$. 故$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

再证第二式. 用$V_1^{\perp}$取代V_1，$V_2^{\perp}$取代V_2，利用上式可得

$$(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2.$$

故$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

【例5】设V_1,V_2是n维欧氏空间V的线性子空间，且V_1的维数小于V_2的维数，证明：V_2中必有一非零向量正交于V_1中一切向量.

证明： 设$\dim(V_1)=s$，$\dim(V_2)=t$. 由题设$s<t$，且$\dim(V_1^{\perp})=n-s$. 令$V_3=V_2\cap V_1^{\perp}$，欲证结论成立，只需证明$V_3\neq\{0\}$即可. 由维数公式得

$$\dim(V_2+V_1^{\perp})=\dim(V_2)+\dim(V_1^{\perp})-\dim(V_2\cap V_1^{\perp})$$

$$=t+(n-s)-\dim(V_3).$$

但$\dim(V_2+V_1^{\perp})\leq\dim(V)=n$，所以

$$t+(n-s)-\dim(V_3)\leq n.$$

故$\dim(V_3)\geq t-s>0$，即$V_2\cap V_1^{\perp}\neq\{0\}$，从而存在非零向量$\alpha\in V_2\cap V_1^{\perp}$，结论成立.

第5节 实对称矩阵的标准形

- **实对称矩阵的性质**

引理1 设A是n阶实对称矩阵，则A的特征值必是实数.

证明： 令λ是A的任一特征值，则存在非零向量$\xi = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，使得$A\xi = \lambda\xi$. 两边取共轭结合条件$A = \overline{A}$，得$A\overline{\xi} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\xi}$，于是

$$\lambda\overline{\xi}'\xi = \overline{\xi}'A(\xi) = (A\overline{\xi})'\xi = (\overline{A\xi})'\xi = \overline{\lambda} \cdot \overline{\xi}'\xi,$$

即$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{\xi}'\xi = 0$. 因为$\overline{\xi}'\xi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0$,

故$\lambda=\overline{\lambda}$，即$\lambda$必是实数.

引理2　设A是n阶实对称矩阵，则A的从属于不同特征值的特征向量必正交.

证明：　由数学归纳法，只需证明若λ,μ是A的两个不同的特征值，且$A\alpha=\lambda\alpha$，$A\beta=\mu\beta$，则$(\alpha,\beta)=0$即可. 因为

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha,\beta)&=(\lambda\alpha,\beta)=(A\alpha,\beta)=(A\alpha)'\beta\\&=\alpha'A\beta=\alpha'(\mu\beta)=\mu\alpha'\beta=\mu(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

即$(\lambda-\mu)(\alpha,\beta)=0$. 因为$\lambda\neq\mu$，所以$(\alpha,\beta)=0$，故结论成立.

- **实对称矩阵的对角化**

定理 对于任意一个n阶实对称矩阵A，必存在正交矩阵Q，使得$Q'AQ = Q^{-1}AQ$成对角形.

证明： 对n作归纳. 当$n = 1$时，结论显然. 假定结论对$n-1$成立. 现考察情形n. 令λ_1是A的一特征值，X_1是长度为1的属于λ_1的实特征向量. 将X_1扩充成为$\mathbb{R}^n$的标准正交基$X_1, X_2, \cdots, X_n$，则$Q_1 = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个正交矩阵，且有

$$AQ_1 = Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha' \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

这里$\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}, A_1$是一个$n-1$阶实矩阵. 于是,

$$A = Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha' \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_1'.$$

注意到

$$A' = Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha' \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}' Q_1' = Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \alpha & A_1' \end{pmatrix} Q_1'.$$

而A是实对称矩阵，从而

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \alpha & A_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha' \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

从而$\alpha = 0$，且$A_1' = A_1$. 即A_1是一个$n-1$阶实对称矩阵. 由归纳假定，存在$n-1$阶正交矩阵Q_2，使得

$$Q_2^{-1} A_1 Q_2 = \text{diag}(\lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

令$Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$，显然$Q$是一个正交矩阵，且

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} Q_1^{-1} A Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q_2^{-1}A_1Q_2 \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

由此定理得证.

Q的具体构作方法:

(1) 先求A的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$;

(2) 令$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是A的所有不同的特征值，重数分别为$r_1, r_2, \cdots, r_s$. 通过解方程组$(\lambda_i E - A)X = 0$得到λ_i 的r_i个线性无关的特征向量正交化;

(3) 先将λ_i 的r_i个线性无关的特征向量正交化，再将$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$正交化后的向量单位化，即得正

交矩阵Q.

如果将上述结果应用到实二次型，有

定理 设$f(X)=X'AX$是一个实二次型，则存在正交的线性替换$X=TY$，使得

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

这里$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值.

注: 对于一个实二次型$f(X)=X'AX$，既可用配方法化为标准形$f=d_1x_1^2+\cdots+d_rx_r^2$，$r=\mathrm{rank}(A)$；也可用正交变换化为标准形$f=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2$，$r=\mathrm{rank}(A)$. 前者主要研究二次型取值符号或正定性，标准形中的系数没有具体含义(非零元素的个数表示矩阵A的秩)，后者主要研究二次型的几何形态，标准形中的系数有明确含义(每个λ_i均为A的特征值.

【例 6】 设$1,1,-2$是三阶实对称阵A的特征值，对应于-2的特征向量是$\xi=(1,-1,-1)'$，求A.

解： 令$\eta=(x_1,x_2,x_3)$是对应于1的特征向量．由实对称阵的性质，η与ξ必正交，得线性方程组

$$x_1-x_2-x_3=0.$$

解这个方程组可得从属1的特征向量为

$$\xi_1=(1,1,0)',\ \xi_2=(1,-1,2)'.$$

显然它们已是正交的，再经单位化得正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}，使得P'AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

于是

$$A = P\Lambda P'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

【例 7】已知$f = 2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a > 0)$**通过正交变换化成标准形为**$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$**，求参数**$a$**及所用的正交变换阵.**

解： f所对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，从而$|A|=2(9-a^2)$. 利用特征值的性质有$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=10$，则$a=2$.

当$\lambda_1=1$时，由$(E-A)X=0$，得$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2=2$时，由$(2E-A)X=0$，得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

当$\lambda_3 = 5$时，由$(5E-A)X=0$得$\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

最后将各自单位化，即得所求的正交变换矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

第6节 欧氏空间的同构

定义 设V与V'是两个欧氏空间，称V与V'同构，

如果存在从V到V'的一个双射σ 满足

(1) σ是从V到V'的线性映射.

(2) σ保持内积不变，即对于任意的$\alpha,\beta \in V$，$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$.

类似于有限维线性空间同构的证明过程(只要取各自的标准正交基)，即有

定理 两个有限维欧氏空间同构的充要条件是它们的维数相等.

习题讨论课九

一、填空题

1. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是$\mathbb{R}^3$的一组基，这组基的度量矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，则$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| =$_______.

2. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基，$\alpha = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3, \beta = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$，则与$\alpha, \beta$都正交的全部向量为_______.

3. 设A为$n(\geq 2)$阶实对称矩阵，且$A^2 = A$，$\mathrm{rank}(A) = n - 1$，则$|2E - A| =$_______.

4. 已知实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = X'AX$经过正交变换$X = QY$化成标准形$y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$，则$|2A^{-1} - A^*| =$_______.

访问主页
标题页
目录页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 44 页 共 54 页
返回
全屏显示
关闭
退出

5. 设α是模为1的n维实列向量，如果$A = E - k\alpha\alpha'$是正交矩阵，则$k =$_______.

二、解答与证明题.

6. 在$\mathbb{R}^5$中，已知$\alpha_1 = (1,-2,1,-1,1), \alpha_2 = (2,1,-1,2,-3), \alpha_3 = (3,-2,-1,1,-2)$，求两个正交的向量$\gamma_1, \gamma_2$，使得它们都与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$正交.

7. 证明：若实对称矩阵A的所有特征值的模都是1，则A必是正交矩阵.

8. 设有二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \ (b > 0)$$

其中二次型的矩阵A的特征值的和为1，特征值的积为-12.

(1) 求a, b的值；

(2) 利用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

9. 已知A是三阶实对称矩阵，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X'AX$通过正交变换$X=QY$化为标准形$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 又设$A^*\alpha_1=\alpha_1$，其中$\alpha_1=(1,1,-1)'$

(1) 求正交矩阵Q；

(2) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的表达式.

10. 设A,B均为n阶实对称矩阵，且A的特征值均大于a，B的特征值均大于b，证明：$A+B$的特征值均大于$a+b$.

习题讨论课九参考解答

1. **解**：依据内积的表达式，得$(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2)=(1,1,0)A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1$，故$|\varepsilon_1+\varepsilon_2|=1$.

2. **解**： 所求向量令为$\gamma=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$，由题设得

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3=0\\x_1-2x_2=0\end{cases},$$

该方程组的基础解系为$(2,1,-2)$，故所求向量为$k(2\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$ (k为任意实数).

3. **解**：由题设$A^2=A$，知A的特征值只能为0或1，结合条件$\mathrm{rank}(A)=n-1$，知0是A的单特征值，1是A的$n-1$重特征值，从而存在正交矩阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=\Lambda,$$

故$|2E-A|=|2E-\Lambda|=2.$

4. **解：** 由标准形知A的特征值为$1,-1,2$，于是$|A|=1\times(-1)\times 2=-2$，进而$|A^*|=|A|^2=4$，故$|2A^{-1}-A^*|=|-2A^*|=(-2)^3|A^*|=(-8)\times 4=-32.$

5. **解：** 若A是正交矩阵，则$E=A'A=(E-k\alpha\alpha')'(E-k\alpha\alpha')=(E-k\alpha\alpha')(E-k\alpha\alpha')=E-2k\alpha\alpha'+k^2\alpha\alpha'\alpha\alpha'$. 依题意，$\alpha'\alpha=|\alpha|^2=1$，从而$k(k-2)=0$，故$k=0$或$k=2.$

6. **解：** 令(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交，则

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0\\2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0\\3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0\end{cases}.$$

方程组的基础解系为

$$\beta_1 = (1, 1, -1, -22, 0), \quad \beta_2 = (1, 0, 0, 5, 4).$$

再正交化即得所求向量

$$\gamma_1 = \beta_1; \qquad \gamma_2 = \beta_2 - \frac{(\gamma_2, \beta_1)}{(\gamma_1, \gamma_1)}\gamma_1 = (\frac{16}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{17}{7}, 4).$$

7. **证明：** 因A是实对称矩阵，所以存在正交矩阵Q，使得

$$A = Q' \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为$A$的全部特征值. 依题意，$|\lambda_i| = 1$. 因为实对称矩阵的特征值均为实数，因此$\lambda_i = 1$或$\lambda_i = -1$. 不妨设

$$A = Q' \begin{pmatrix} E_r & \\ & E_{n-r} \end{pmatrix} Q$$

因$Q, Q', \begin{pmatrix} E_r & \\ & E_{n-r} \end{pmatrix}$均是正交矩阵，故$A$必为正交矩阵.

8. **解**：(1) f的矩阵为$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，设$A$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，依题意，有$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1$，及

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b^2 = -12$$

解之得$a = 1, b = 2$.

(2) 因为A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

得A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$.

对于$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，解方程组$(2E - A)X = 0$，得基础解系$\xi_1 = (2, 0, 1)', \xi_2 = (0, 1, 0)'$，对于$\lambda_3 = -2$，解方程组$(-3E - A)X = 0$，得基础解系$\xi_3 = (1, 0, -2)'$. 显然$\xi_1, \xi_2, \xi_3$已经是正交向量组，因此只需将它们单位化：

$$\eta_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})', \eta_2 = (0, 1, 0)', \eta_3 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})',$$

令

$$Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

则Q为正交矩阵，在正交变换$X = QY$下，有

$$Q'AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

且二次型的标准形为$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

9. **解**：(1) A的特征值为$\lambda = 2, -1, -1$，于是$|A| = 2\times(-1)\times(-1) = 2$. 由$A^*\alpha_1 = \alpha_1$，结合$A^* = |A|A^{-1} = 2A^{-1}$，得$2A^{-1}\alpha_1 = \alpha_1$，即$A\alpha_1 = 2\alpha_1$，因此$A$的属于$\lambda = 2$的特征向量为$(1, 1, -1)'$.

由于A是实对称矩阵，则A的属于$\lambda = -1$的特征向量$(x_1, x_2, x_3)'$与α_1正交，从而有$x_1 + x_2 - x_3 = 0$，它的基础解系为$(1, -1, 0)', (1, 0, 1)'$. 故A的属于$\lambda = -1$的特征向量为$\alpha_2 = (1, -1, 0)', \alpha_3 = (1, 0, 1)'$. 先将$\alpha_2, \alpha_3$正交化：

$$\beta_2 = \alpha_2 = (1, -1, 0)', \quad \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)'$$

再将$\alpha_1, \beta_2, \beta_3$单位化：

$$\xi_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})', \xi_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)', \xi_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})'$$

故所求正交矩阵为$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

(2) 由于$Q'AQ = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，所以

$$A = Q\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}Q' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

故$f = X'AX = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

10. **证明：** 因为A, B的特征值分别大于a, b，所以矩阵$A-aE, B-bE$正定. 由正定矩阵的性质知

$$(A-aE)+(B-bE)=(A+B)-(a+b)E,$$

也正定. 设$A+B$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，依据特征值的性质知，$A+B-(a+b)E$的特征值为$\lambda_1-(a+b), \lambda_2-(a+b), \cdots, \lambda_n-(a+b)$. 因为$A+B-(a+b)E$正定，所以

$$\lambda_i-(a+b)>0，\text{即}\lambda_i>a+b，i=1,2,\cdots,n$$