17.4 狭义相对论的动力学基础

惯性系中的坐标变换遵循LT, GT仅是低速近似, 而经典力学规律也仅是低速情况下的, 满足GT. 但到高速情况, 这些规律将不满足LT, 故需对一些量修正定义, 比如质量, 动量, 能量. 使力学规律满足①LT, ②低速下回归到经典力学形式.

一. 质量与速度的关系

质点的动量 $\vec{p} = m\vec{v}$ 无外力作用 $\vec{p} = \Sigma m_i \vec{v}_i = cons$

经典力学:m不变, v 遵循GT

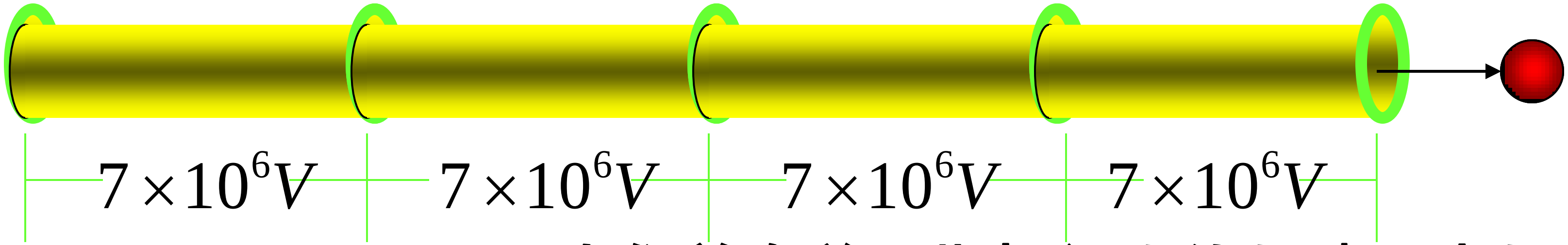
相对论: 若m仍不变, v 遵循LT, 则动量守恒不协变.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

经典力学中物体的质量与运动无关

若m不变,则超光速成为可能

$$v_t = v_0 + at$$



1英里 =**1.609344**千米

人们曾在美国斯坦福直线加速器中加速电子，加速器全长2英里，每米加以七百万伏电压，依经典理论电子速度达到

$$v = 8.6\times10^{10}\,m/s >> c$$

而实测值为:$v = 0.999,999,9997c < c$

斯坦福加速器全貌

斯坦福加速器内貌

结论：牛顿力学必须改造

如何改造呢？应满足：

1）在“LT”下具有协变性---满足相对性要求及光速不变原理。（各种物理规律包括动量守恒及能量守恒在不同惯性系中具有相同的形式）

2）满足渐进性要求-- $v << c \rightarrow$ 牛顿定律

可证 $\boxed{m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\gamma m_0}$ m_0为静质量

①物体质量随物体运动速率增大而增大；

② 实物粒子$m_0 \neq 0$，$v \to c$, $m \to \infty$, $a \to 0$;

③ $\dfrac{v}{c} \to 0, m \to m_0$ 低速回归经典力学形式

④ $m_0=0$,（光子, 中微子） $v=c$, m 为定值.

质速曲线

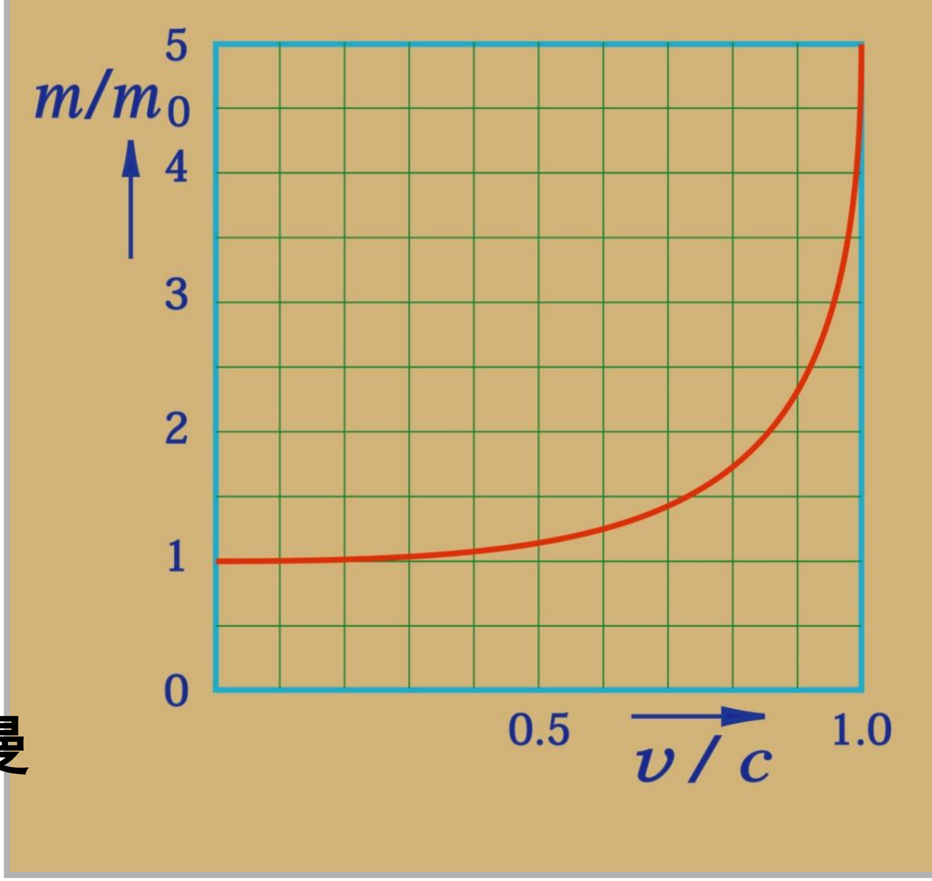
当 $\upsilon << c$ 时，$\beta \to 0$，$m = m_0$

当 $\upsilon = 0.1\,c$　　**m 增加 0.5%**

当 $\upsilon = 0.866\,c$　　$m = 2m_0$

当 $\upsilon \to c$　　$m \to \infty$

当 $\upsilon = c$　　$m_0 = 0$



事实上，质速关系早在1905年考夫曼从放射性镭放出的高速电子的实验中发现。相对论问世后再次由考夫曼、1909年由彼歇勒、1915年由盖伊拉范采由实验证实。

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$

相对论动量

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon} = m_0\vec{\upsilon} / \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$

可证，该公式保证动量守恒定律在LT下，对任何惯性系都保持不变性

二、相对论动力学方程

相对论中仍然保持了牛顿定律的原来框架。

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\frac{dm}{dt}}$$

其中 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}}$　　$\vec{\upsilon}$ 为质点的速度

注意：1）$\upsilon<<c$时$m=m_0=const$

$$\vec{F}=m_0\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=m_0\vec{a}$$

2）方程虽保持了原牛顿定律的框架但内容却有别

注意：2）方程虽保持了原牛顿定律的框架但内容却有别

	经典力学	相对论力学
力的作用	产生 $\vec{a}$ 改变速度的大小、方向	改变速度、改变质量
F长时间作用	$\vec{\upsilon} \to \infty$	$\vec{\upsilon}\uparrow m\uparrow, \upsilon < c$ $m \to \infty$
力的方向	决定于 $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ $\vec{F}$与$d\vec{\upsilon}$一致	决定于 $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \vec{\upsilon}\dfrac{dm}{dt}$ 的合矢量方向

改造牛顿力学, 使它在洛伦兹变换下不变.

当有外力$\vec{F}$ 作用于质点时，有:

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0\vec{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right]=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

——相对论动力学方程

系统的动量守恒定律:

$$\sum\vec{p}_i=\sum m_i\vec{v}_i=\sum\frac{m_{0i}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\vec{v}_i=\mathrm{cons}$$

当质点 $v/c<<1$

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m_0\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m_0\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m_0\vec{a}$$

——牛顿第二定律

$$\sum\vec{p}_i=\sum m_i\vec{v}_i=\sum\frac{m_{0i}}{(1-\beta^2)^{1/2}}\vec{v}_i=\sum m_{0i}\vec{v}_i=\mathrm{cons}$$

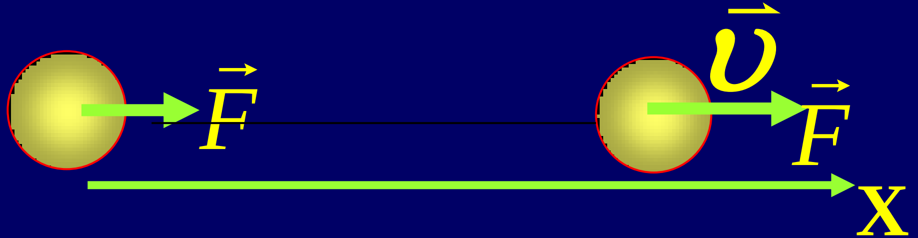
——经典力学的动量守恒

三、相对论动能、质能关系

1、相对论动能

经典力学中一速度为 $\vec{\upsilon}$ 的粒子的动能为

$$E_k = \int_0^{\upsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \upsilon^2$$



相对论中的动能定义仍然一样： $E_k = \int_0^{\upsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

为简单，设一力F沿X轴作用于一静止的质点上，速度由0增到 $\vec{\upsilon}$ 则其动能：

$$E_k = \int_0^{\upsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\upsilon} F_x dx = \int_0^{\upsilon} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right) dx$$

$$= \int_0^{\upsilon} \frac{dx}{dt} d\left(\frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right) = \int_0^{\upsilon} \upsilon d\left(\frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\right)$$

$$= \frac{m_0 \upsilon^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - \int_0^{\upsilon} \left(\frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right) d\upsilon$$

$$= \left(\frac{m_0 \upsilon^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - m_0 c^2 \sqrt{1-(\upsilon/c)^2} \right)_0^{\upsilon}$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

mc^2为总能　　　m_0c^2为静能

讨论：ⅰ）$\upsilon << c$时

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}=\left[1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^4\cdots$$

$$E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}-1\right]$$

$$=m_0c^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^4-1\right]$$

$$=m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]=\frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

回到了经典物理

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - m_0c^2$$

¡¡ $\upsilon \to c \quad E_k \to \infty$

说明将一个静质量不等于零的粒子加速到光速须作无穷大的功。或者说实物粒子速度有一极限速度C

在能量问题上可以说爱因斯坦独具慧眼。

2、质能公式:

将动能公式变化一下：

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \rightarrow \boxed{mc^2 = E_k + m_0c^2}$$

用 $E=mc^2$ 表示总能 —质能关系

静能m_0c^2：物体内部能量的总和. 包括分子的内能、势能、原子的电磁能、质子中子的结合能等。

式中 m 称为总质量 m_0 称为静质量

而将 $$m_k = m - m_0 = \frac{E_k}{c^2}$$ —称为动质量

则：$$m = m_0 + m_k$$

电子的静能： $m_0c^2 = 0.511\mathrm{MeV}$

1千克的物体所包含的静能 $9\times10^{16}\,\mathrm{J}$

1千克汽油的燃烧值 $4.6\times10^{7}\,J$

物质的质量就是能量的一种储藏 .如质量变化，能量也变化

$$\Delta E = (\Delta m)\,c^2$$

质量亏损:核反应前后静质量之差: $\Delta m = \dfrac{\Delta E}{c^2}$

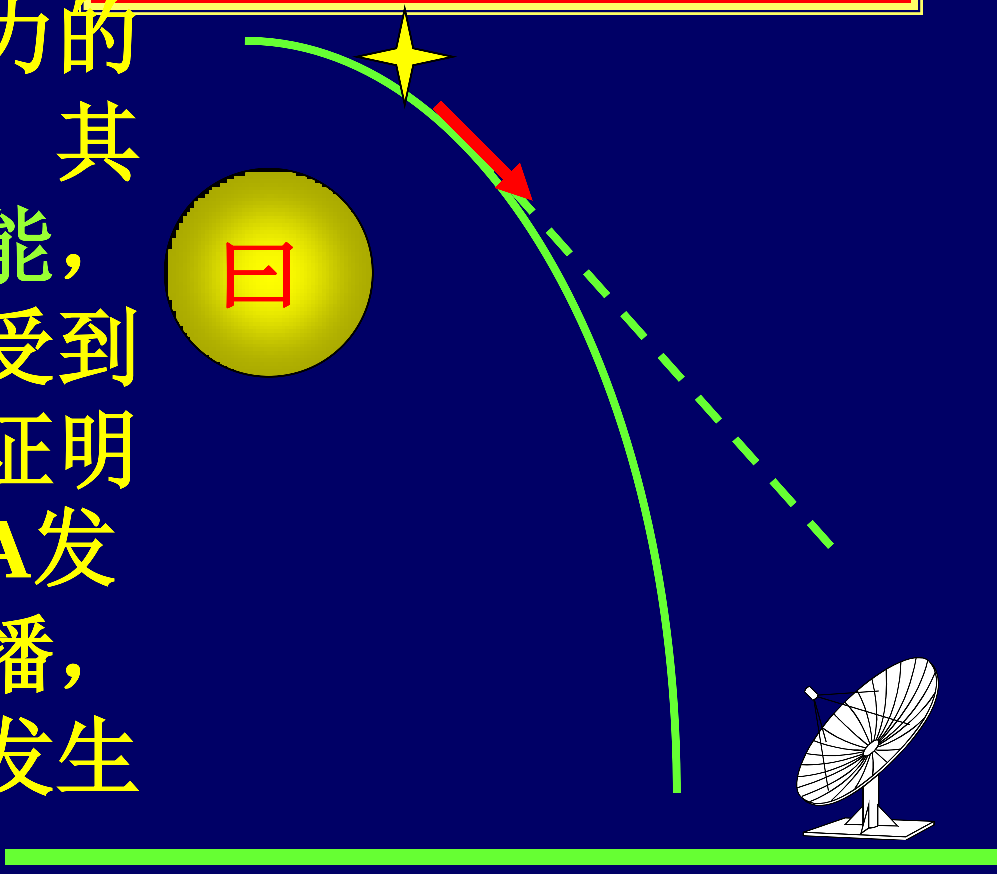
则：$m = m_0 + m_k$

$$m_k = m - m_0 = \frac{E_k}{c^2}$$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

即相对论总质量是由两部分组成。静质量、动质量

凡质量都有要受到引力的作用，有些物质如光子，其静质量为零，但具有动能，也就具有动质量，同样受到引力的作用，天文观察证明了这一点。如图从星星A发出的星光本应沿直线传播，但受太阳的引力作用而发生偏转。



则：$m = m_0 + m_k$

动质量对应一份能量，静质量呢？为此将上式两边边同乘以C^2

则：$mc^2 = m_0c^2 + m_kc^2$

上式各项都具有能量的量纲，爱因斯坦充分注意到了这一点,他预言有质量的地方必有能量。并定义：

物体相对论总能量 $E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$

物体相对论静止能量 $E_0 = m_0c^2$

物体相对论动能 $E_k = m_kc^2$

物体相对论总能量 $$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

物体相对论静止能量 $$E_0 = m_0 c^2$$

物体相对论动能 $$E_k = m_k c^2$$

三者的关系是： $$E = E_0 + E_k$$

独到之处是提出了物体静止质量也对应一份能量。原子弹的爆炸成功正是将静止能量开发出来的结果。也是对这一理论的有力证明。

几点说明： 1）静止能量实际上是物体的总内能

---分子的内能、势能、原子的电磁能、质子中子的结合能等。静止能量是相当可观的。

例一公斤的物体的静止能量

$$E_0 = m_0 c^2 = 1 \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{16} J$$

相当于20吨汽油燃烧的能量。

2）质能相互依存，且同增减

从质能公式 $E = mc^2$ 可知总能量正比于质量

即那儿有能量，那儿就有质量，而且那儿有质量的变化，那儿就有能量的变化。即：

$$\boxed{\Delta E = \Delta m c^2}$$

质能关系预言：物质的质量就是能量的一种储藏 .

相对论质能关系

$$E = mc^2$$

质能相互依存，且同增减

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

相对论能量和质量守恒是一个统一的物理规律。

物理意义

$$E = mc^2$$

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

- 惯性质量的增加和能量的增加相联系，质量的大小应标志着能量的大小，这是相对论的又一极其重要的推论 .

相对论的质能关系为开创原子能时代提供了理论基础，这是一个具有划时代的意义的理论公式 .

我国于 1958 年建成的首座重水反应堆

四、相对论动量、能量的关系

设一静质量为m_0，速度为 $\vec{\upsilon}$ 的粒子

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \cdots(1)$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \cdots(2)$$

两式大小相除：

$$\upsilon = \frac{c^2}{E}P \cdots(3) \quad \text{或：} \upsilon^2 = \frac{c^4}{E^2}P^2 \cdots(4)$$

$$\therefore E^2 = \frac{m_0{}^2c^4}{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{m_0c^4}{1-\frac{c^4}{E^2}P^2/c^2} \cdots(5)$$

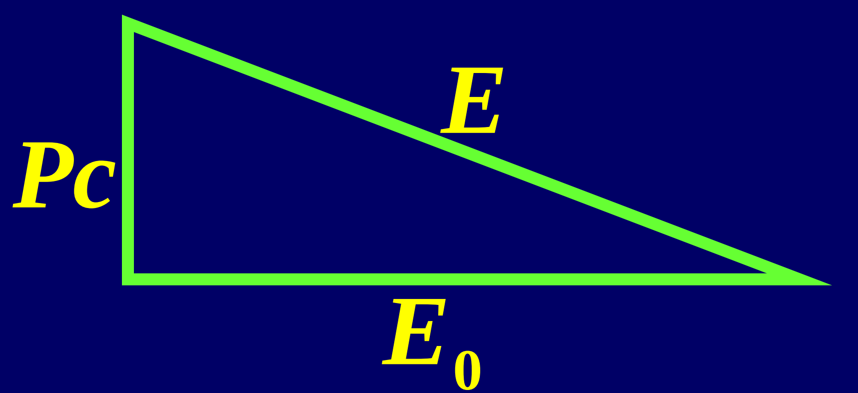
$$\upsilon = \frac{c^2}{E}P \cdots (3) \quad 或:\ \upsilon^2 = \frac{c^4}{E^2}P^2 \cdots (4)$$

$$\therefore E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{1-\frac{c^4}{E^2}P^2/c^2} \cdots (5)$$

整理: $E^2 = m_0^2 c^4 + P^2 c^2 \cdots (5)$

$$\boxed{E^2 = E_0^2 + (P\,c)^2 \cdots (6)}$$

利用三角形有助记忆:



五、静质量为零的粒子

发现有五种静质量为零的粒子--光子、电子型中微子、电子型反中微子、μ 型中微子、反中微子。

（近据报导：国外发现中微子质量不为零,这里以光子为例）$\because m_0 = 0 \therefore E_0 = 0$

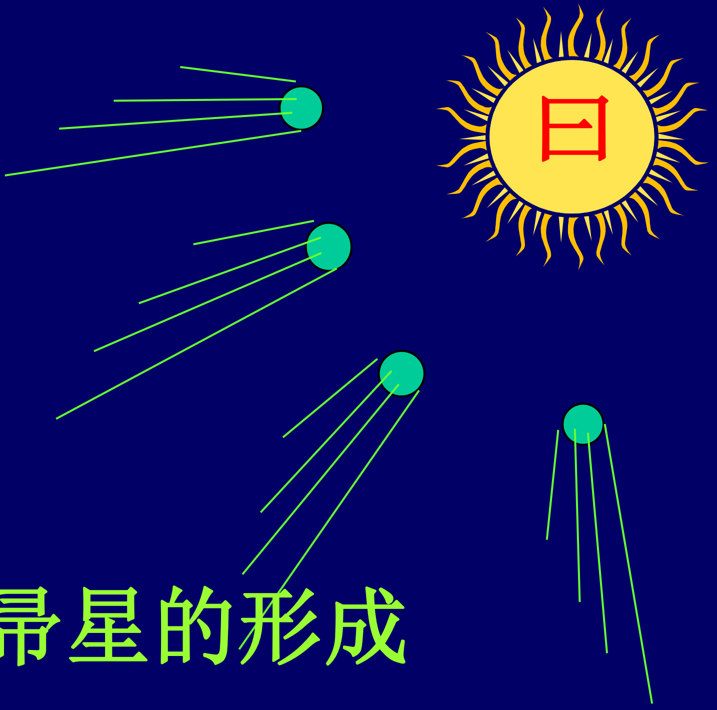
$$\boxed{E^2 = E_0^{\ 2} + (P\ c)^2}$$

故总能量：$E = E_k = P\ c$

能量为E的光子具有动量：

$$P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

总质量：$m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{P}{c}$



光子有动量
从天文上得到证实

扫帚星的形成

小结

1）动量 $\vec{P}=m\vec{\upsilon}=\dfrac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$

2）动力学方程 $\vec{F}=\dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\dfrac{dm}{dt}$

3）质速关系 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}}$

4）质能关系 $E=mc^2=m_0c^2+m_kc^2$

5）动量能量关系 $E^2=E_0^2+P^2c^2$

狭义相对论时空观

$$\beta = \frac{\upsilon}{c}$$

1、同时的相对性

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

2、长度收缩：

$$l = l'\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{l'}{\gamma}$$

3、时间膨胀：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t'$$

相对论动力学

1、质速关系 $$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}=\gamma m_0$$

2、动量 $$\vec{P}=m\vec{\upsilon}=\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}=\gamma m_0\vec{\upsilon}$$

3、动力学方程 $$\vec{F}=\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\frac{dm}{dt}$$

4、质能关系 $$E_{总}=mc^2=m_0c^2+m_kc^2=\gamma m_0c^2$$

静能：$E_0=m_0c^2$

动能：$E_k=m_kc^2=E_{总}-E_0=(\gamma-1)m_0c^2$

5、动量能量关系 $$E^2=E_0^2+P^2c^2$$

例1，某加速器把质子加速到76GeV的动能。求（1）加速后质子的质量；2）加速后质子的动量。

解：$m_0 = 1.67 \times 10^{-27}\, kg \qquad E_0 = m_0 c^2 = 938\, MeV$

(1) $E_k = 76\, GeV$

$$E = E_0 + E_k = 938\, MeV + 76 \times 10^3\, MeV$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{E_0 + E_k}{c^2} = m_0\left(1 + \frac{E_k}{c^2}\right) = 1.37 \times 10^{-25}\, kg$$

(2) $p = mv$

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2$$

$$E = E_0 + E_k$$

$$2E_0E_k + E_k^2 = (pc)^2$$

$$p = \frac{\sqrt{2E_0E_k + E_k^2}}{c} = 4.1 \times 10^{-17}\, kg \cdot m / s$$

例2，在一惯性系中一粒子具有动量6Mev/c（c为光速），若粒子总能量E＝10Mev，计算在该系中，（1）粒子的运动速度；2）粒子的运动动能。

$$(1)\ \begin{cases} p = mv \\ E = mc^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \Rightarrow v = \frac{p}{E}c^2 = 0.6c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = \frac{5}{4}$$

$$(2)\ E_k = E - E_0 = E\left(1 - \frac{E_0}{E}\right) = E(1 - \gamma)$$

$$= 0.2E = 2MeV$$

例3，一立方体，沿某边的方向以速度υ运动，若其静质量为m_0，静体积为V_0，求运动时质量密度？

若沿x方向有运动，$x=\dfrac{x_0}{\gamma}$，$y=y_0$，$z=z_0$

$$V=\frac{V_0}{\gamma} \qquad m=\gamma m_0$$

$$\rho=\frac{m}{V}=\gamma^2\frac{m_0}{V_0}=\frac{1}{1-\upsilon^2/c^2}\frac{m_0}{V_0}$$

例4、静止质量为m_0、静止体积为V_0的正方体，沿其一边的方向以速度$v_0=0.8c$（c为真空中的光速）相对于地面运动。试求：(1) 地面上测得其运动质量和运动密度分别为多少；(2) 总能量为多少；(3) 物体的动能为多少倍静能。

解：(1) $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{5}{3}$; $\Rightarrow m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\gamma m_0=\dfrac{5}{3}m_0$;

$$a=\frac{a_0}{\gamma}=a_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{3}{5}a_0\Rightarrow V=\frac{V_0}{\gamma}=\frac{3}{5}V_0\Rightarrow\rho=\frac{m}{V}=\frac{\frac{5}{3}m_0}{\frac{3}{5}V_0}=\frac{25}{9}\frac{m_0}{V_0}$$

(2) $E=\gamma E_0=\gamma m_0c^2=\dfrac{5}{3}E_0$

(3) $E_k=E-E_0=\dfrac{2}{3}E_0$

例5 把电子的速度由0.9c增加到0.99c. 所需能量为多少?这时电子的质量增加多少?若是由0.99c增加到0.999c呢?

解: $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0.9^2}} = 2.294$ $\quad \gamma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-0.99^2}} = 7.0888$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1)$$

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = m_0c^2(\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$=(7.0888-2.294)\times 9.1\times 10^{-31}\times 9\times 10^{16} \quad =3.93\times 10^{-13}\text{J}$$

$$\Delta m=(\gamma_2 - \gamma_1)m_0=4.37\times 10^{-30}\text{kg}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{1-0.999^2}} = 22.366$$

$$\Delta E_k' = E_{k3} - E_{k2} = m_0c^2(\gamma_3 - \gamma_2)$$

$$=(22.366-7.0888)\times 9.1\times 10^{-31}\times 9\times 10^{16} \quad =1.126\times 10^{-12}\text{J}$$

例6 某粒子的静止质量为 m_0 ，当其动能等于其静能时，

求 其质量和动量各等于多少?

解 动能： $$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$E_k = m_0c^2 \longrightarrow m = 2m_0$$

由质速关系 $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \longrightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

由此得，动量

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}} = \sqrt{3}m_0c$$

例7 设火箭的静止质量为 100 t ，当它以第二宇宙速度飞行时，

求 其质量增加了多少?

解 火箭的第二宇宙速度 $\upsilon = 11.2 \times 10^{3}$ m/s ，因此 $\upsilon << c$ ，所以火箭的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

火箭的质量的增加量为

$$\Delta m = m - m_0 = E_k / c^2 = \frac{1}{2}m_0(\upsilon / c)^2$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 1000 \times 10^3 \times \left(11.2 \times 10^3\right)}{9 \times 10^{16}} = 0.7 \times 10^{-3}\ \text{kg}$$

火箭质量可视为不变