大学物理R(热学加强)内容安排

南京理工大学
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

大学物理(I)	大学物理(II)
第1章 质点力学基础;	第9章 真空中的静电场;
第2章 质点力学中的守恒定律;	第10章 静电场中的导体和电介质;
第3章 刚体的转动;	第11章 真空中的稳恒磁场;
第4章 机械振动;	第12章 磁介质;
第5章 机械波;	第13章 电磁感应;
第6章 狭义相对论基础;	第14章 麦克斯韦方程组及电磁波;
第7章 气体动理学理论;	第15章 光的干涉;
第8章 热力学基础.	第16章 光的衍射;
	第17章 光的偏振;
	第18章 量子光学;
	第19章 原子的量子理论.

5 中学物理与大学物理的区别

数学方法上：

中学物理: 主要处理常量、标量问题.

大学物理: 运用高等数学方法（微积分、矢量运算、概率统计），可以处理更一般的问题.

匀加速运动 ⟺ 变加速运动

研究对象上：

中学物理: 主要讨论质点

大学物理: 质点 质点系 刚体 大量质点

大学物理		后续课程及相关学院
力学(上册) (质点、刚体、振动和波、相对论)	⟺	工程力学、理论力学、机械原理、兵器美学 (力学、土木、机械、兵器、探测、航天、知产)
热学(上册)	⟺	工程热力学、物理化学 (化工、能动、材料、兵器、探测、知产)
电磁学(下册) (电学、磁学、电磁感应、电磁波)	⟺	工程电磁学、电磁场与电磁波 (电光、自动化、计算机、兵器、探测、航天、知产)
光学(下册) (干涉、衍射、偏振)	⟺	物理光学 (电光、自动化、计算机、兵器、探测、知产)
量子理论(下册) (量子光学、原子额量子理论)	⟺	激光、量子通信、量子信息、量子计算、量子化学、催化、炸药、核能、高新技术 (电光、计算机、自动化、能动、化工、材料、兵器、探测、知产)

第一篇：力学基础

机械运动: 一个物体相对于另一物体的位置变化, 或一个物体各部分之间的位置变化, 称为机械运动, 简称运动. 经典力学(牛顿力学)研究机械运动的规律.

机械运动的基本运动形式:

1. 平动— 物体上任一直线始终保持平行的运动;
2. 定轴转动—各点绕一固定轴作圆周运动的运动;

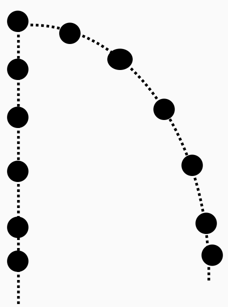
两个模型:	质点、刚体

力学

- 运动学: 只描述物体的运动，不研究引起运动和改变运动的原因.
- 动力学: 研究运动与相互作用间的关系.
- 静力学: 研究物体在相互作用下的平衡问题 (不介绍, 是后续理论力学、工程力学的重要内容).

1. 对运动的描述是相对的

毛主席的诗：“坐地日行八万里，巡天遥看一千河”



车厢内的人：竖直下落

地面上的人：抛物运动

2. 参照系

为描述物体的运动而选取的参考物，称为参照系.

常用参照系：地面参照系或实验室参照系、质心参照系、太阳参照系(天体问题).

地心说与日心说之争: 不过是参照系不同.

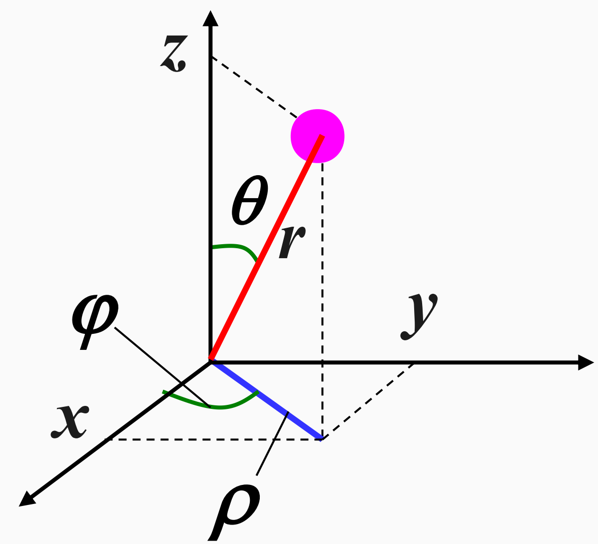
3. 坐标系

建立在参照系上的计算系统，是参照系的具体化，用于定量描述物体的运动。

常用的坐标系：

- ▲ 直角坐标系（x , y , z）
- ▲ 球极坐标系 （r, θ, φ）
- ▲ 柱坐标系（ρ, φ, z）
- ▲ 自然坐标系 (s)

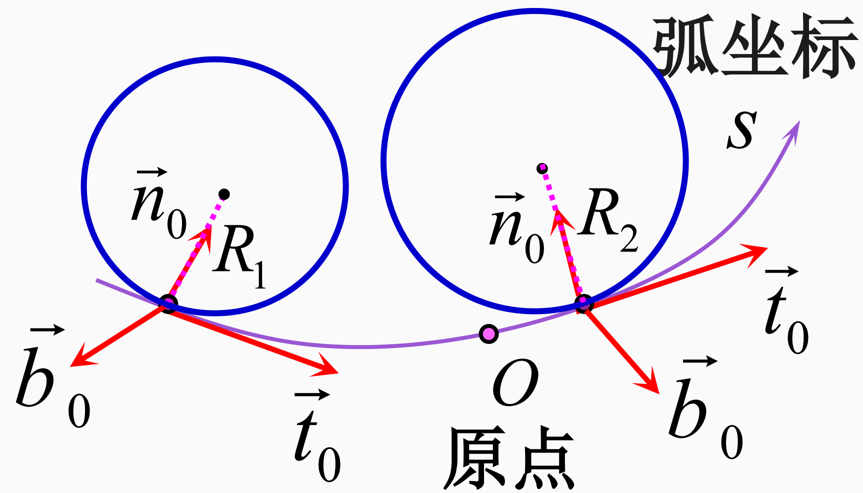
二维退化为极坐标系



▲ 自然坐标系 (s)

建立在质点运动轨迹上的, 以弧长(弧坐标) s 作为自然坐标，以轨迹的切线 $\vec{t}_0$、主法线 $\vec{n}_0$ 为坐标轴.

沿运动方向 s 为正, 反向 s 为负.



$\vec{t}_0$ 切向单位矢量，指向质点运动方向.

$\vec{n}_0$ 正法向单位矢量，与切向垂直，指向轨道凹侧.

轨迹已知的情况下　如变速圆周运动

二. 质点

1. 质点: 当物体的形状和大小可以忽略，物体看成一个只有质量、没有大小和形状的几何点。

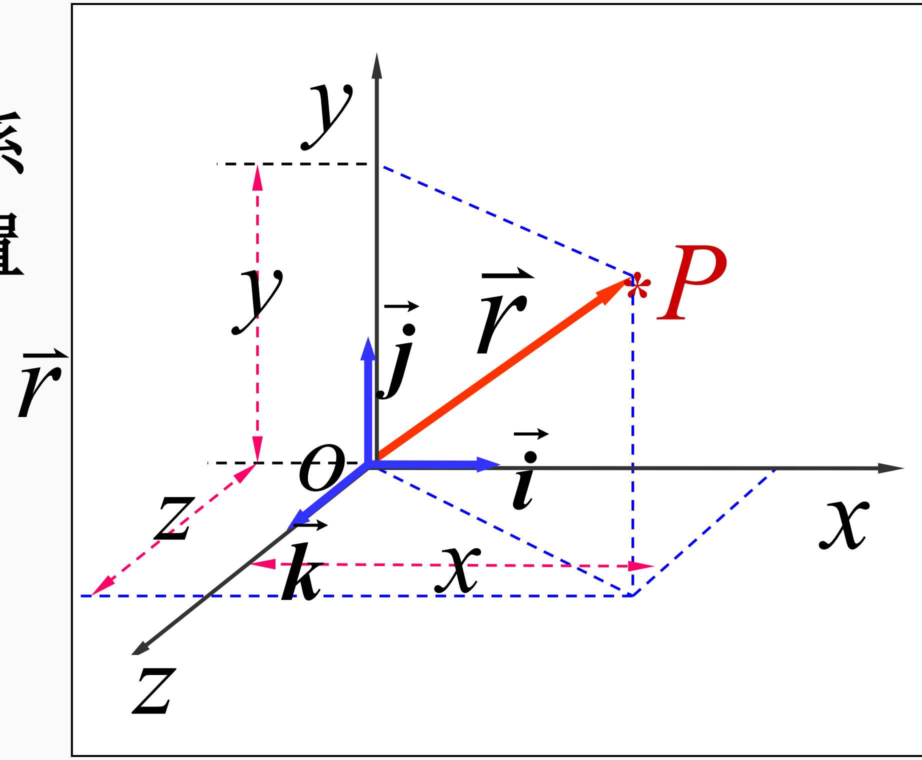
注意： 物体能否看作质点，标准是看物体的形状、大小与所研究的问题是否无关。

例1： 地球绕太阳公转时，地球可视一个质点。

例2： 物体平动时，物体上的运动轨迹都相同，可用一个点的运动来代替整个物体的运动。

三. 位置矢量（位矢、矢径）

确定质点 P 某一时刻在坐标系里的位置的物理量，称为位置矢量, 简称位矢，或矢径.

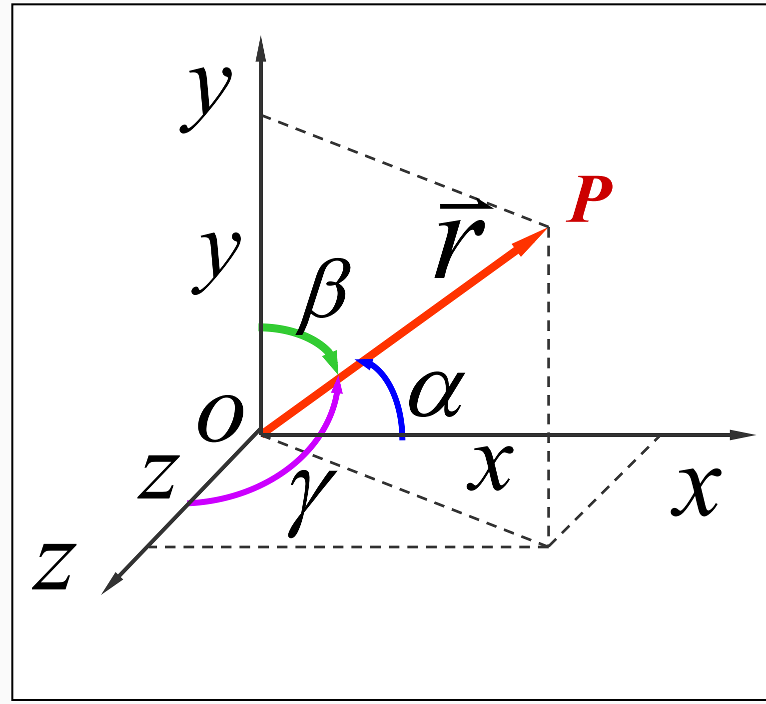


$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

式中 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 分别为 x、y、z 方向的单位矢量.

位矢 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

式中$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 分别为 x、y、z 方向的单位矢量.



位矢 $\vec{r}$ 的大小为

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢$\vec{r}$的方向余弦(方位角)

$$\begin{cases} \cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r \end{cases}$$

(本课程基本只涉及二维平面运动，只有一个方位角，即位矢与 x 或 y 轴的夹角)

此三个角满足关系： $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

- 矢量有两种表示方法:

(1) 写成矢量形式;

(2) 先求出矢量的大小, 再用文字或方位角说明其方向(教材例1-1).

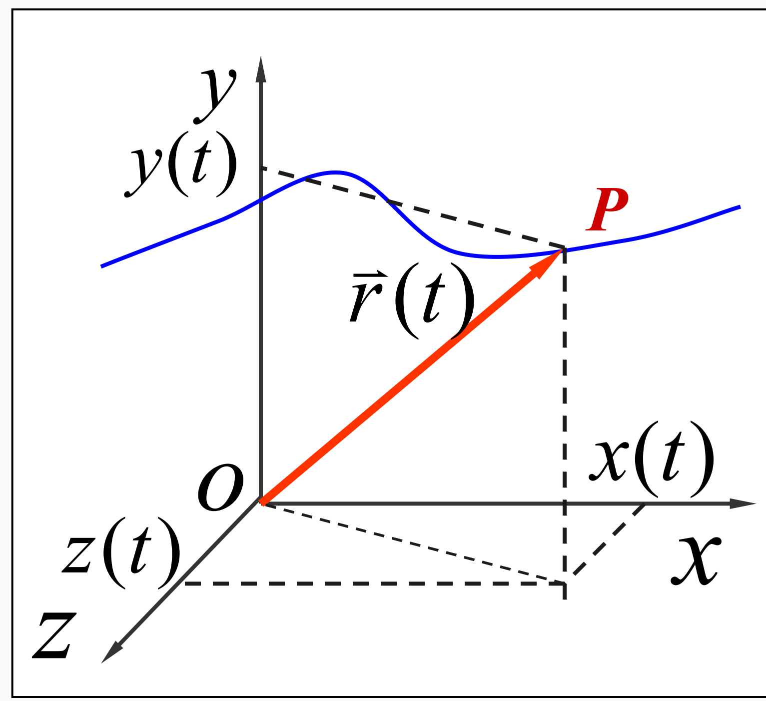
- 一维矢量通常用代数量表示, 方向由正负号决定, 不必写成矢量式. 如一维直线运动(教材例1-2)

四. 运动方程

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (1)$$

分量式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ **(2)**



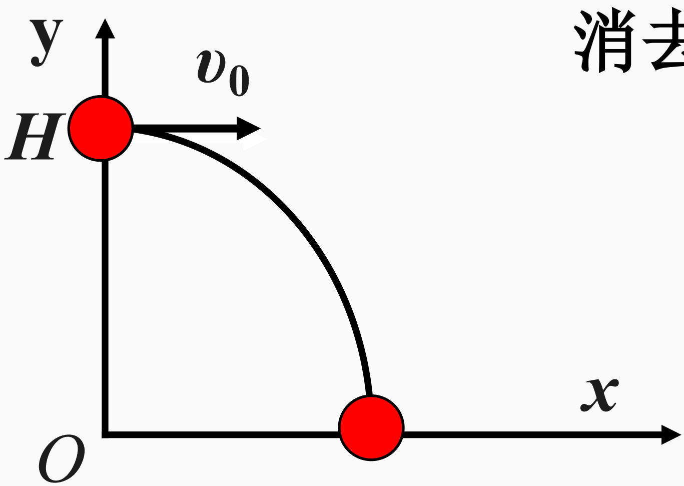
自然坐标系: 运动方程 $s = s(t)$.

从运动方程分量式 (2) 中消去参数 t，便得轨迹(轨道)方程.

例1： 高度为 H 的露台上，足球运动员以速度 v_0 把一足球踢出，足球作平抛运动，求足球下落的运动方程和轨道方程.

解： 运动方程分量式

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t \\ y = H - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



消去 t 便得轨迹方程：

$$y = H - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\upsilon_0^2}$$

其轨迹(轨道)为一条抛物线.

例2： 在 xy 平面上一曲棍球的运动方程为：

$$\vec{r}=15t^2\vec{i}+(4-20t^2)\vec{j}\ \ (\mathrm{cm})$$ 求其轨道方程。

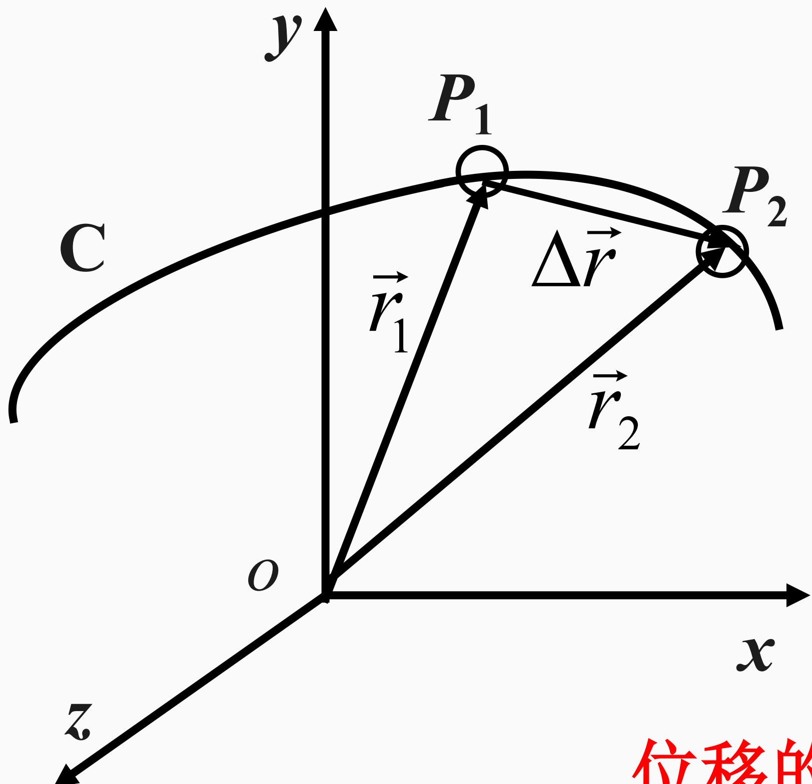
解： 运动方程分量式 $\begin{cases} x=15t^2 \\ y=4-20t^2 \end{cases}$

消去时间 t, 得轨道方程：

$$3y+4x-12=0$$

其轨迹(轨道)是一条直线。

一. 位移 — 描述质点位置变化的物理量.



质点从 P_1 点运动到 P_2 点，位置矢量的改变 $\Delta\vec{r}$，称为位移.

在直角坐标系中,

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$

$$=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

$$=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$$

位移的大小: $|\Delta\vec{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$

位移的方向: 初位置→末位置

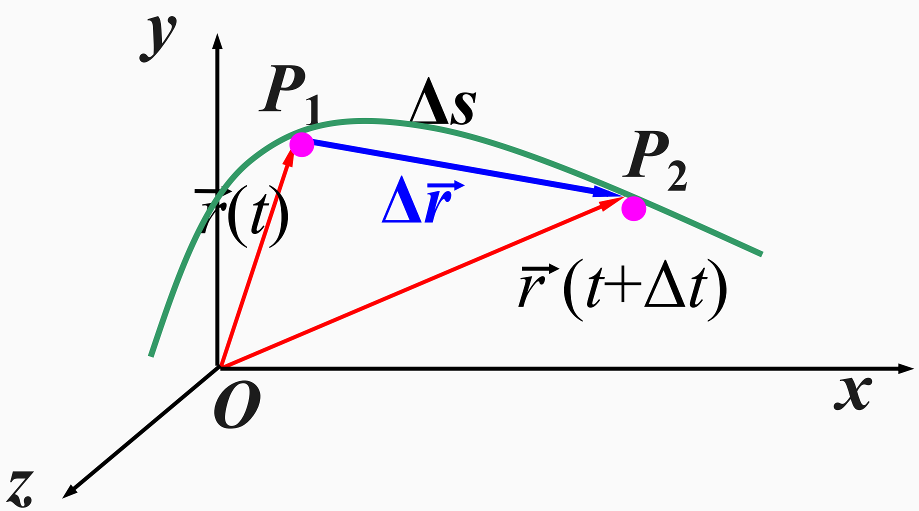
位移: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

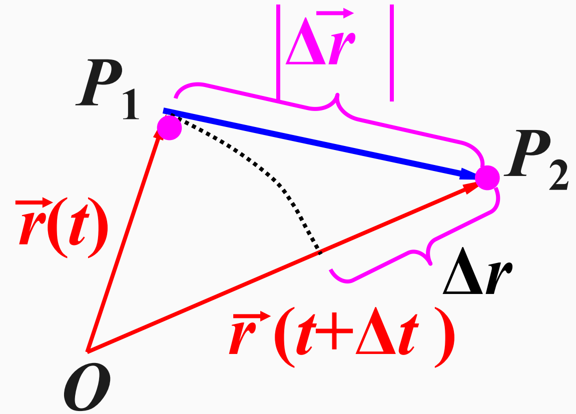
位移大小: $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

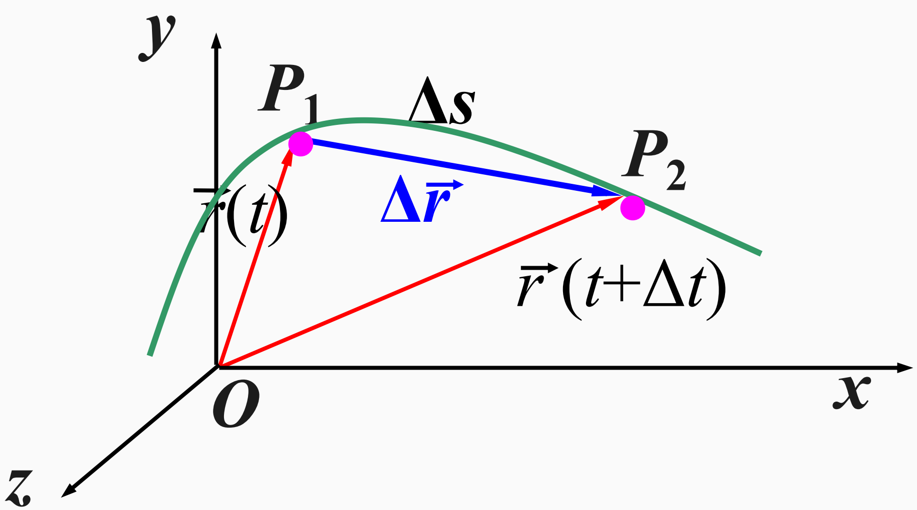
注意: 位移与路程的区别

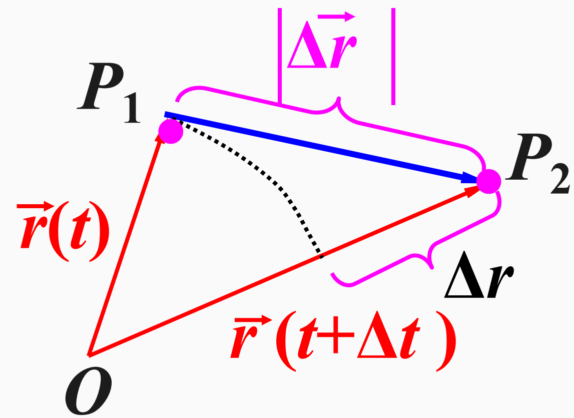
◆位移描述质点的位置变化，是矢量；

路程是质点实际运动路径的长度，用Δs 表示，是标量。









一般 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$, 什么情况下相等? $\begin{cases} \text{单向直线运动;} \\ ds = |d\vec{r}|; \end{cases}$

当$\Delta t \to 0$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\Delta\vec{r}| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s$, 即 $|d\vec{r}| = ds$

要分清 Δr、 $|\Delta\vec{r}|$ 的几何意义:

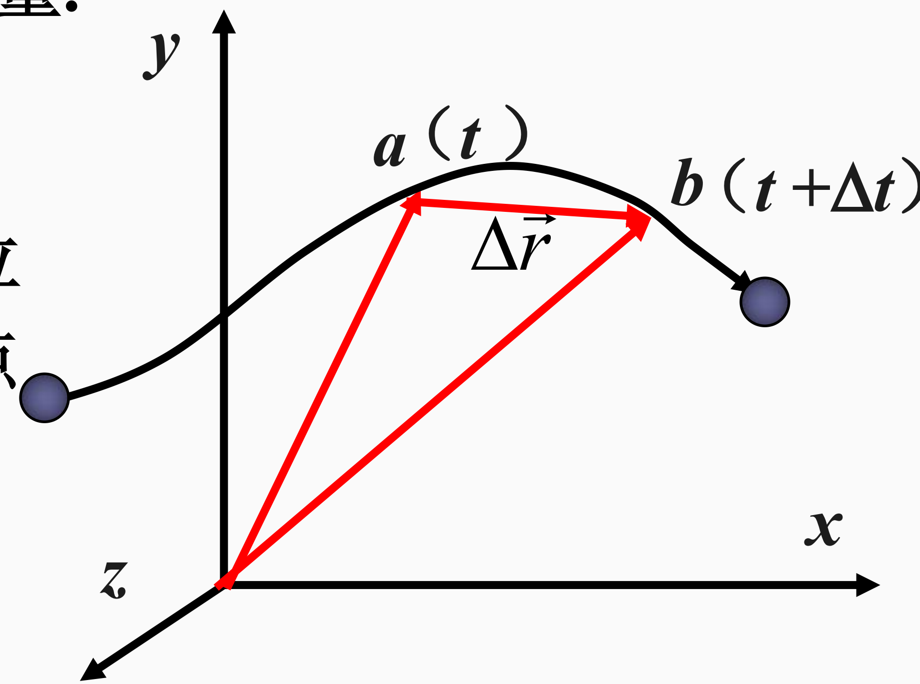
$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \neq \Delta r = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1|$ (质点到原点距离的变化, 圆周运动的例子)

◆位移与路程的单位都是长度单位.

二. 速度

描述质点位置变化快慢的物理量.

◆平均速度



定义：在 Δt 时间内，质点的位移和时间 Δt 的比值，称为质点在这段时间内的平均速度.

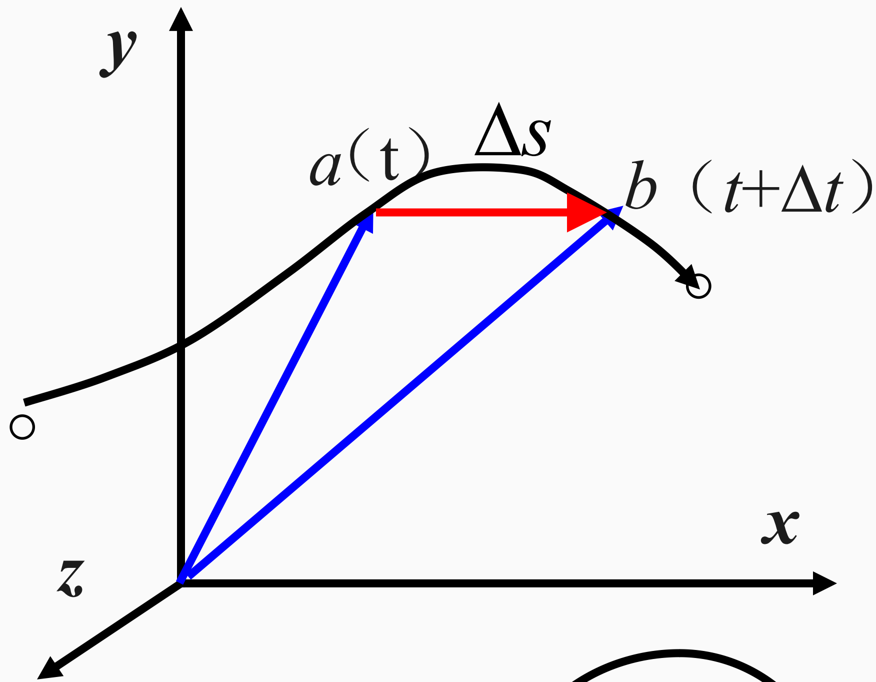
$$\overline{\vec{\upsilon}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

大小：$\left|\overline{\vec{\upsilon}}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

方向：与位移相同.

◆**平均速率**：质点运动的路程与经历的时间Δt 的比值

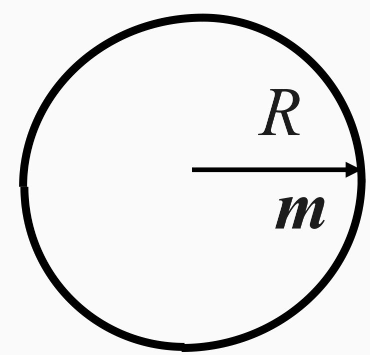
$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



通常：$\left|\bar{\vec{\upsilon}}\right| \neq \bar{\upsilon}$

例：圆周运动

考虑质点运行一周的平均速度和平均速率：

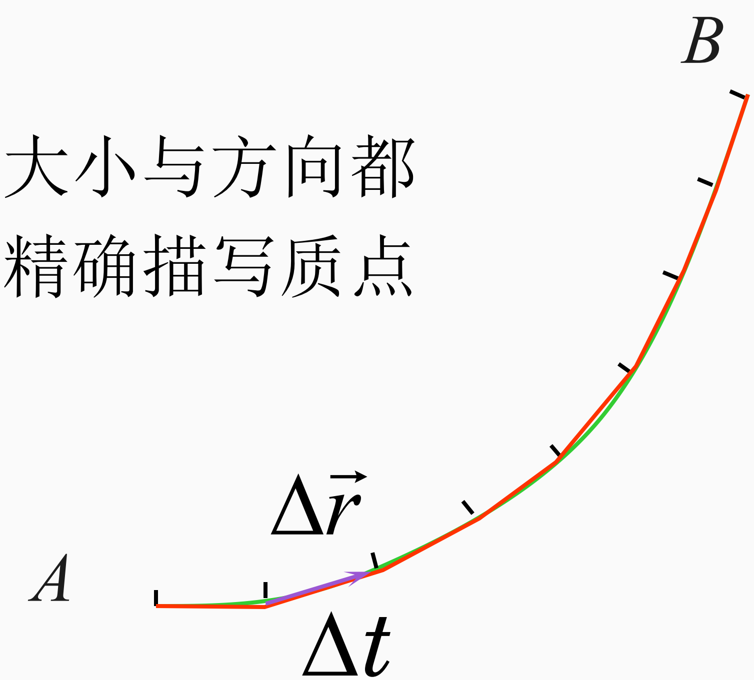


$$\bar{\vec{\upsilon}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{0}{T} = 0, \quad \bar{\upsilon} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \neq 0$$

但，对单向直线运动，有 $\left|\bar{\vec{\upsilon}}\right| = \bar{\upsilon}$

◆瞬时速度(简称速度)

对于变速曲线运动的物体，速度大小与方向都在随时间改变，用平均速度不能精确描写质点瞬时的运动情况。



平均速度 $\overline{\upsilon}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

令 $\Delta t\to 0$ 取极限，

(瞬时)速度 $\vec{\upsilon}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

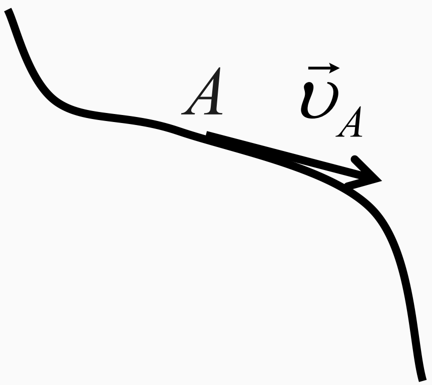
质点在某时刻的瞬时速度，等于在该时刻位置矢量对时间的一阶导数。

◆ (瞬时)速度 $\vec{\upsilon} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

方向：沿运动轨迹的切线，并指向质点的运动方向。

大小：$|\vec{\upsilon}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \dfrac{|d\vec{r}|}{dt}$　　单位：米/秒 (m/s)

在直角坐标系中，$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$$

其中：$\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$， $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$， $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$

速度大小 $|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$

◆**瞬时速率：** 路程对时间的变化率，υ

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\because\ ds = |d\vec{r}|, \qquad \therefore \upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\vec{\upsilon}|$$

可见： 瞬时速度的大小等于瞬时速率.

注意： 平均速度的大小一般不等于平均速率.

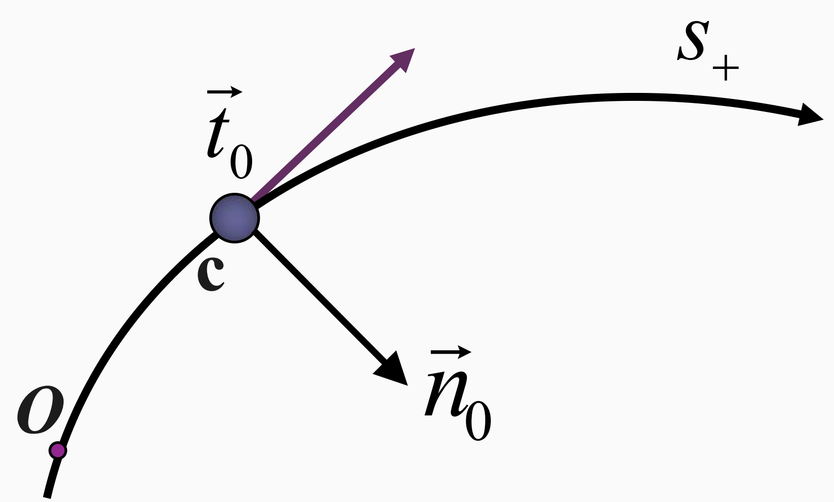
我们通常所说的速度和速率，是指某一时刻的瞬时速度和瞬时速率.

◆自然坐标系中速率和速度的表达式：

运动方程为 $s = s(t)$

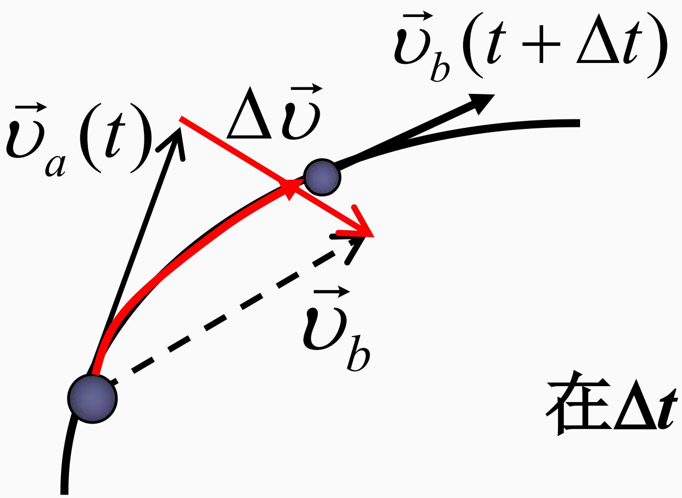
速率 $\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$

速度 $\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{t}_0 = \dfrac{ds}{dt}\vec{t}_0$



三. 加速度 —描写质点速度变化快慢的物理量。

◆平均加速度



定义：在Δt时间内质点运动速度的增量 $\Delta\vec{\upsilon}$ 与时间间隔 Δt 之比，称为质点在这一段时间内的平均加速度。

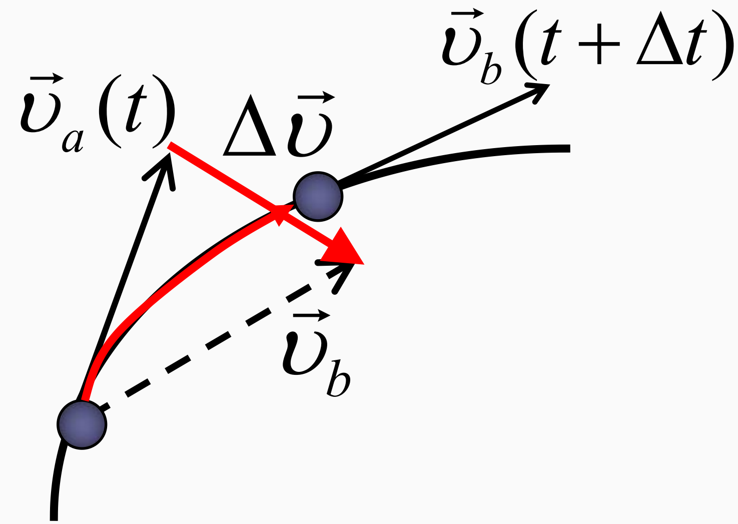
在Δt时间内速度变化量为：$\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_b-\vec{\upsilon}_a$

平均加速度：$\bar{\vec{a}}=\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ $\quad |\bar{\vec{a}}|=\left|\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\right|$

大小：$|\bar{\vec{a}}|=\left|\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\right|$ 方向：$\Delta\vec{\upsilon}$ 的方向。

◆ 瞬时加速度（简称加速度）

瞬时加速度：$\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$



由 $\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

加速度为速度对时间的一阶导数，或位置矢量对时间的二阶导数。

含义：反映质点在任一瞬间速度改变的快慢程度。

单位：米/秒² (m/s²)

方向：$\Delta t\to 0$ 时速度增量的极限方向，在曲线运动中，总是指向曲线的凹侧。

在直角坐标系中： 由 $\vec{\upsilon}=\upsilon_x\vec{i}+\upsilon_y\vec{j}+\upsilon_y\vec{k}$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j}+\frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{d\upsilon_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

注意

- 加速度是描写速度变化的物理量；
- 质点的速度大，加速度不一定大；
- 质点的加速度大，速度不一定大。

四*. 急动度(加加速度) —描写质点加速度变化快慢的物理量.

曾经有同学问：加速度的时间变化率—加加速度, 有什么意义?

近年来，高级轿车设计师在设计轿车时发现：轿车的加速度变化率影响乘客的舒适度，加速度变化率越小，乘坐轿车的人感觉越舒适.

急动度(加加速度), 也叫力变率, 英文jerk, 以 j 表示,

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{F}}{dt}$$

质点运动学两类基本问题

◆由质点的**运动方程**可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

◆ 已知质点的**加速度以及初始速度和初始位置**, 可求质点速度及其运动方程 .

$$\boxed{\vec{r}(t)} \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \boxed{\vec{v}(t)} \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \boxed{\vec{a}(t)}$$

- 由运动方程，利用微分法求速度和加速度；
- 已知加速度，利用积分法和初始条件求速度和运动方程。

分四种情况：

(1) a=常量

(2) $a=a(t)$

(3) $a=a(\upsilon)$

(4) $a=a(x)$

对情形(4), 须作如下变换：

$$a(x)=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

例1. 一质点在 xoy 平面内运动，运动方程为 $x=4t^2-2$，

$y=2t$（m），求

（1）$t=1$s，$t=2$s 时的位置；

（2）质点在第 2 秒内的位移及平均速度；

（3）$t=1$s，$t=2$s 的速度和加速度.

解：(1) $t=1$s，$t=2$s 时的位置；

质点任意时刻的位置矢量为:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}=(4t^2-2)\vec{i}+2t\vec{j}\ (\mathrm{m})$$

$$t=1s:\ \vec{r}(1)=2\vec{i}+2\vec{j}\ \ (\mathrm{m})$$

$$t=2s:\ \vec{r}(2)=14\vec{i}+4\vec{j}\ \ (\mathrm{m})$$

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}=(4t^2-2)\vec{i}+2t\vec{j}\ (\mathrm{m})$$

$$t=1s,\quad \vec{r}=2\vec{i}+2\vec{j}\,(\mathrm{m})$$

$$t=2s:\ \vec{r}(2)=14\vec{i}+4\vec{j}\ \ (\mathrm{m})$$

(2) 质点在第 2 秒内的位移及平均速度:

质点在第 2 秒内的位移

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(2)-\vec{r}(1)=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}=12\vec{i}+2\vec{j}\ \ (\mathrm{m})$$

质点在第 2 秒内的平均速度:

$$\overline{\vec{\upsilon}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{12\vec{i}+2\vec{j}}{1}=12\vec{i}+2\vec{j}\ \ (\mathrm{m/s})$$

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}=(4t^2-2)\vec{i}+2t\vec{j}\ (\mathrm{m})$$

(3)质点在 t=1s、t = 2s 时的速度和加速度:

速度: $$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}=8t\vec{i}+2\vec{j}\ \ (\mathrm{m/s})$$

$$t=1s:\ \vec{\upsilon}(1)=8\vec{i}+2\vec{j}\ \ (\mathrm{m/s})$$

$$t=2s:\ \vec{\upsilon}(2)=16\vec{i}+2\vec{j}\ \ (\mathrm{m/s})$$

加速度: $$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}=8\vec{i}\ \ (\mathrm{m/s^2})$$

$$\vec{a}(1)=\vec{a}(2)=8\vec{i}\ \ (\mathrm{m/s^2})$$

例2. 一质点沿 x 轴运动，$t=0$ 时，$x=x_0$, 已知 $\upsilon=-kx$，求 $x(t)$，$a(t)$.

解：(1) $$\upsilon=\frac{dx}{dt}=-kx$$ 分离变量 $$\Rightarrow \frac{dx}{x}=-kdt$$

$$\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{x}=-k\int_0^t dt \qquad \Rightarrow \ln\frac{x(t)}{x_0}=-kt$$

$$\therefore\ x(t)=x_0e^{-kt}$$

(2) 求 $a(t)$ $$a(t)=\frac{d^2x}{dt^2}\Rightarrow a(t)=k^2x_0e^{-kt}$$

或由 $$\upsilon(t)=-kx(t)=-kx_0e^{-kt}$$

$$a(t)=\frac{d\upsilon(t)}{dt}=k^2x_0e^{-kt}$$

例3. 一小轿车在水平公路上以速度 υ_0 做匀速直线运动，忽然发现前面有一障碍物开始刹车，刹车过程中其加速度与速度成正比，即 $a=-k\upsilon$，k为正的常数，试求：

（1）刹车后轿车的速度随时间的关系；

（2）刹车后轿车最多能行进多远？

解：(1) $a=\dfrac{d\upsilon}{dt}=-k\upsilon,$ 分离变量 $\Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{\upsilon}=-kdt$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon(t)}\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-k\int_0^t dt \qquad \upsilon(t)=\upsilon_0 e^{-kt}$$

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}=\upsilon_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow dx=\upsilon_0 e^{-kt}dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t \upsilon_0 e^{-kt} dt$$

$$x(t) = \frac{\upsilon_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-kt}$$

$$t \to \infty, \upsilon = 0, \qquad x = \frac{\upsilon_0}{k}$$

例5. 质点沿 x 轴正向运动，$t=0$ 时，$x=x_0$, $\upsilon=\upsilon_0$, 且运动过程中满足 $a=-kx$，求速度与位置间的关系.

解：对于 $a=a(x)$ 情形, 要作下列变换:

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}.\frac{dx}{dt}=\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

$a=-kx$

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}=-kx$$

分离变量 $\Rightarrow \upsilon d\upsilon=-kxdx$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=\int_{x_0}^{x}-kxdx\ ;\qquad \frac{1}{2}(\upsilon^2-\upsilon_0{}^2)=-\frac{1}{2}k(x^2-x_0{}^2)$$

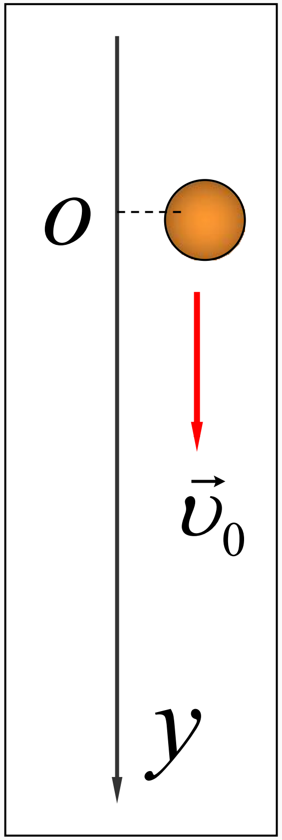
$$\upsilon^2=\upsilon_0{}^2-k(x^2-x_0{}^2)$$

例6. 有一个球体在某液体中竖直下落,其初速度为 $\vec{\upsilon}_0 = 10\vec{j}\,(m/s)$, 它的加速度为 $\vec{a} = -\upsilon\vec{j}\,(m/s^2)$。

问 (1) 经过多少时间后可以认为小球已停止运动?

(2) 此球体在停止运动前经历的路程有多长?

解: 以小球起始点为原点，向下为 y 轴正向



$$\therefore\ a = \frac{d\upsilon}{dt} = -\upsilon, \qquad \upsilon_0 = 10\ (\mathrm{m/s})$$

$$\Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -dt, \qquad \int_{10}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \upsilon = 10e^{-t}\ (\mathrm{m/s})$$

$$\upsilon=\frac{dy}{dt}\quad\Rightarrow y=\int_0^t 10\,e^{-t}dt=10\,(1-e^{-t})\ (\mathrm{m})$$

$$\upsilon=10\,e^{-t}\ (\mathrm{m/s}),\quad y=10\,(1-e^{-t})\ (\mathrm{m})$$

问（1）经过多少时间后可以认为小球已停止运动?

（2）此球体在停止运动前经历的路程有多长?

υ	$v_0/10$	$v_0/100$	$v_0/1000$	$v_0/10000$
$t(s)$	2.3	4.6	6.9	9.2
$y(m)$	8.9974	9.8995	9.9899	9.9990

$$t=9.2\mathrm{s},\quad v\approx 0,\quad y\approx 10\mathrm{m}$$

平面曲线运动: 质点的运动轨迹在同一个平面内的运动。

一、匀变速直线运动

质点作匀变速直线运动, 其加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量, 有

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=C \xrightarrow{\text{初始条件}} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon=\int_0^t a dt$$

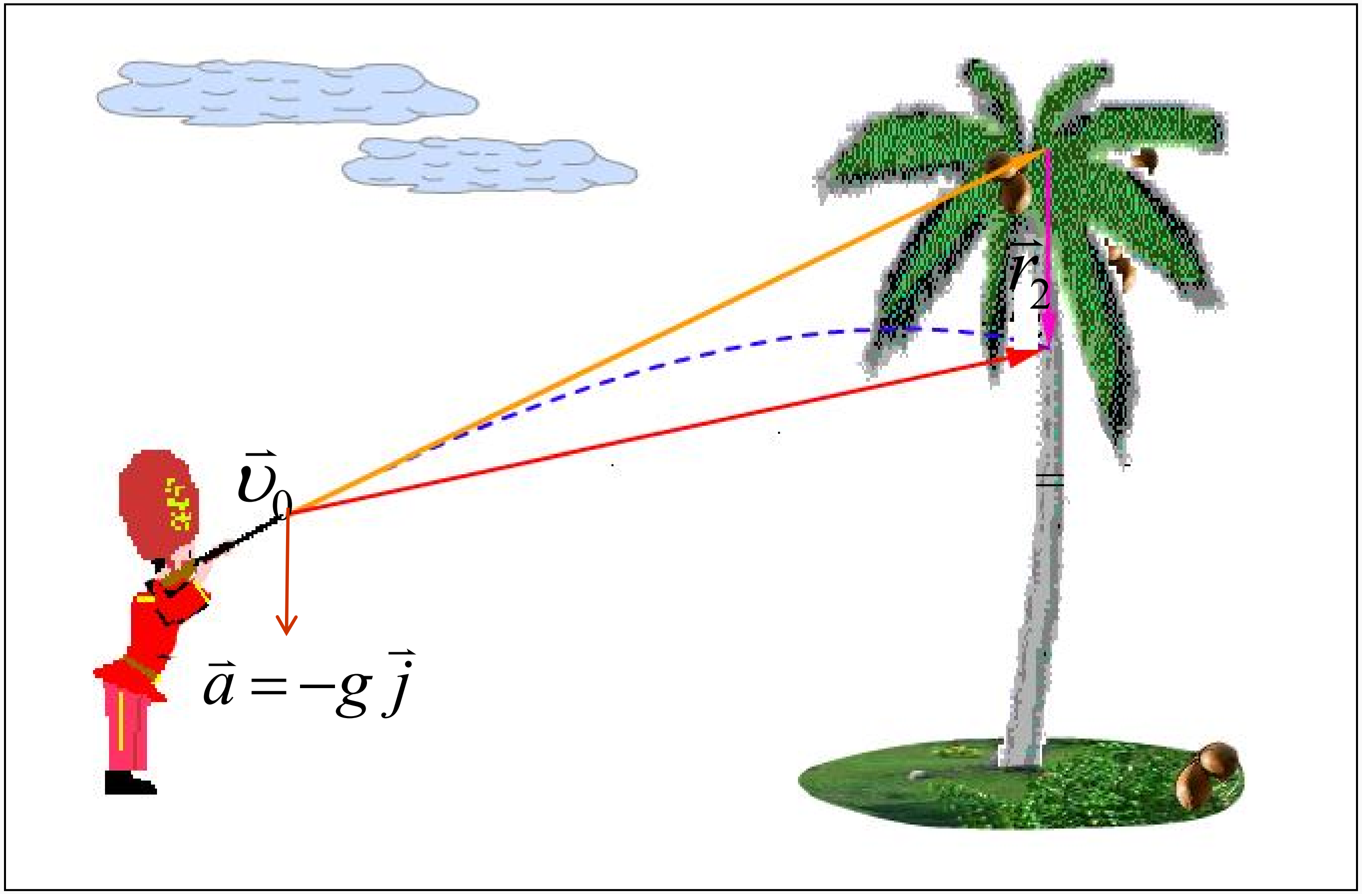
$$\Rightarrow \upsilon=\upsilon_0+at$$

由 $\upsilon=\dfrac{dx}{dt}=\upsilon_0+at \xrightarrow{\text{初始条件}} \int_{x_0}^{x} dx=\int_0^t(\upsilon_0+at)dt$

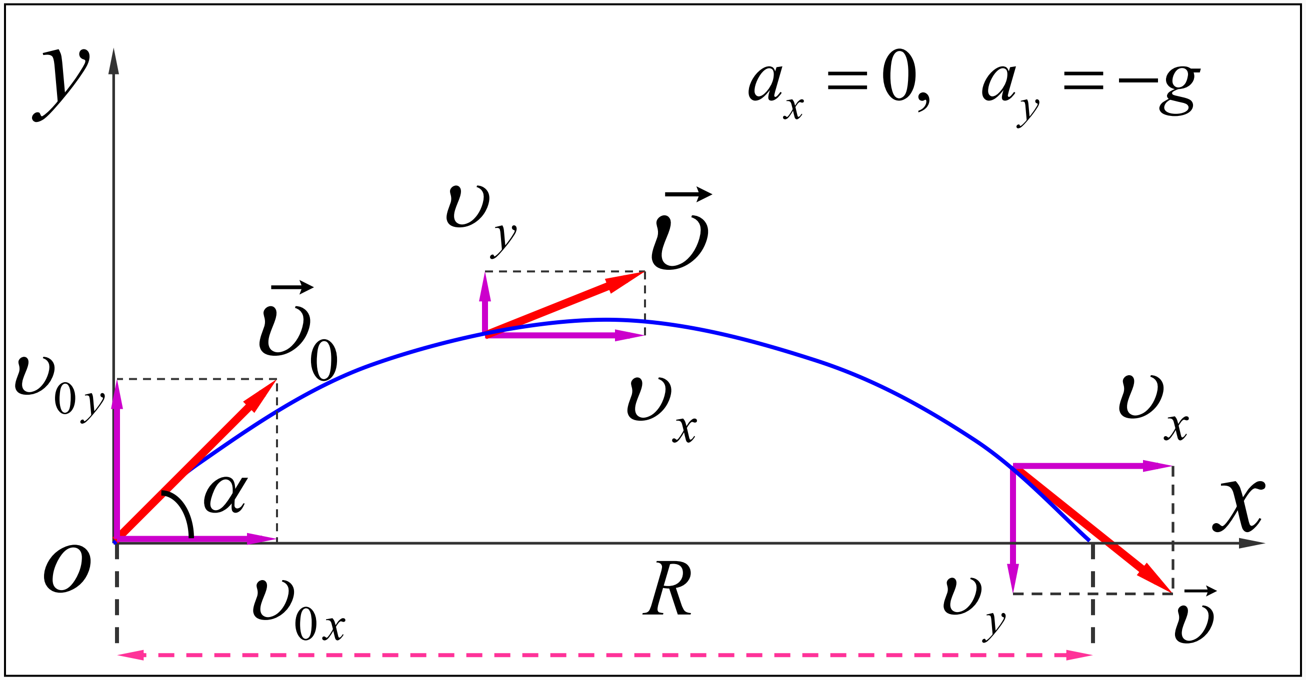
$$\Rightarrow x=x_0+\upsilon_0 t+\frac{1}{2}at^2$$

二式结合，消去 t $\Rightarrow \upsilon^2=\upsilon_0{}^2+2a(x-x_0)$

二. 抛体运动（斜抛、平抛、上抛、下抛）



当子弹从枪口射出时，椰子刚好从树上由静止自由下落，解释为什么子弹总可以射中椰子？



抛体运动可分解成 x、y 方向的直线运动：

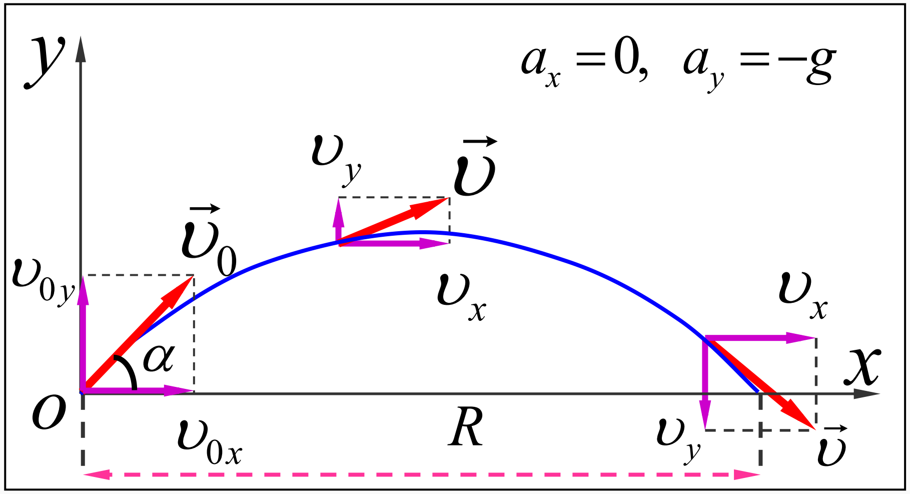
$$a_x = 0,\quad a_y = -g$$

初始条件： $t = 0$时 $\begin{cases} x_0 = 0, & \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha, \\ y_0 = 0, & \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha \end{cases}$

运动方程：
$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

运动方程：

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



讨论：求斜抛运动的轨迹方程和最大射程.

轨迹方程： $y = x\tan\alpha - \dfrac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}x^2$ 是一条抛物线

射程： 令 $y = x\tan\alpha - \dfrac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}x^2 = 0$

$$\Rightarrow R = x_m = \frac{2\upsilon_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha$$ 与发射角有关

$$\Rightarrow R = x_m = \frac{2\upsilon_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha$$ 与发射角有关

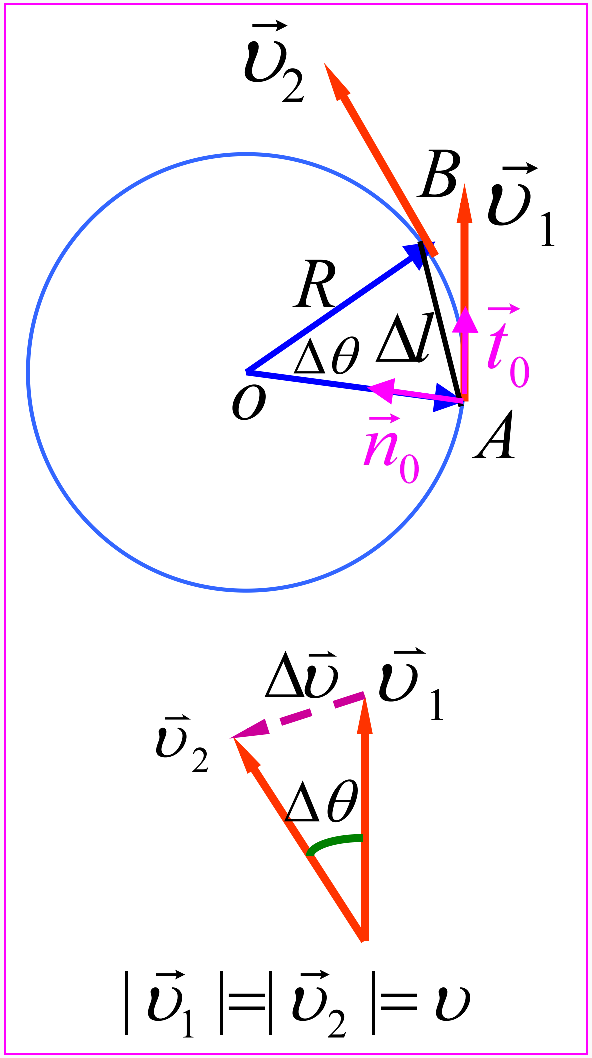
最大射程： 什么发射角，射程最大?

求极值： $$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{2\upsilon_0^2}{g}\cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

最大射程 $$R_{\mathrm{m}} = \frac{\upsilon_0^2}{g}$$

三.圆周运动

1. 匀速率圆周运动



特点：速度大小不变，方向不断变化.

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$$

大小：$$|\vec{a}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{\upsilon}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\upsilon\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\upsilon\Delta l}{R\Delta t}=\frac{\upsilon dl}{Rdt}=\frac{\upsilon^2}{R}$$

方向：

$\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\vec{\upsilon}$ 的极限方向，垂直于 $\vec{\upsilon}_1$ 指向圆心，即 $\vec{n}_0$.

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_n=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}_0}$$

2.变速率圆周运动

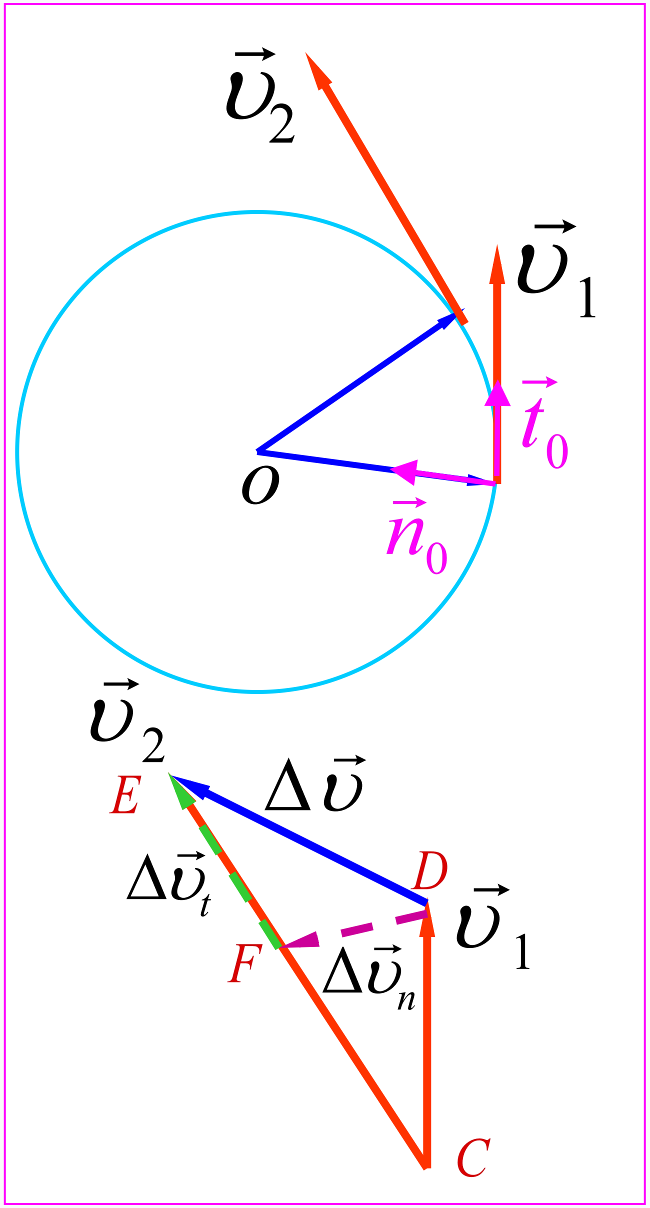
质点在圆周上各点处速度的大小和方向都随时间变化.

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{\upsilon}=\Delta\vec{\upsilon}_n+\Delta\vec{\upsilon}_t$$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_t}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}=\vec{a}_n,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_t}{\Delta t}=\vec{a}_t$$



$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}=\vec{a}_n,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_t}{\Delta t}=\vec{a}_t$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}_n\right|=\frac{\upsilon^2}{R}$$

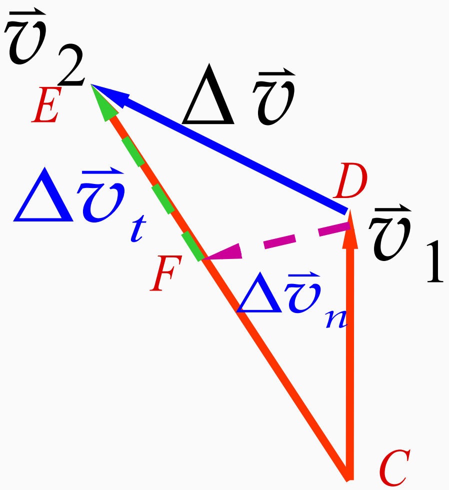
法向加速度(方向改变)

方向: 指向圆心

$$\left|\vec{a}_t\right|=\frac{d\upsilon}{dt}$$

切向加速度(大小改变)

方向: 该点的切线方向



总加速度: $\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_t=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}_0+\frac{d\upsilon}{dt}\vec{t}_0$

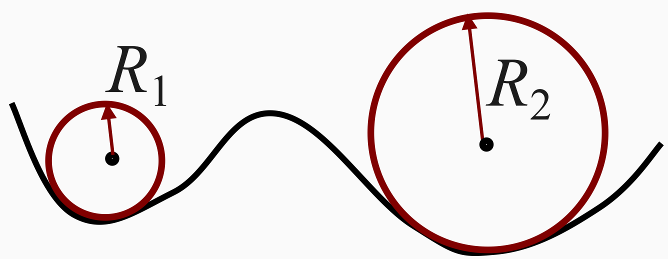
大小: $a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{(\frac{\upsilon^2}{R})^2+(\frac{d\upsilon}{dt})^2}$

法向加速度改变速度方向，切向加速度改变速度大小

对于一般平面曲线运动， $\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_t=\dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n}_0+\dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{t}_0$

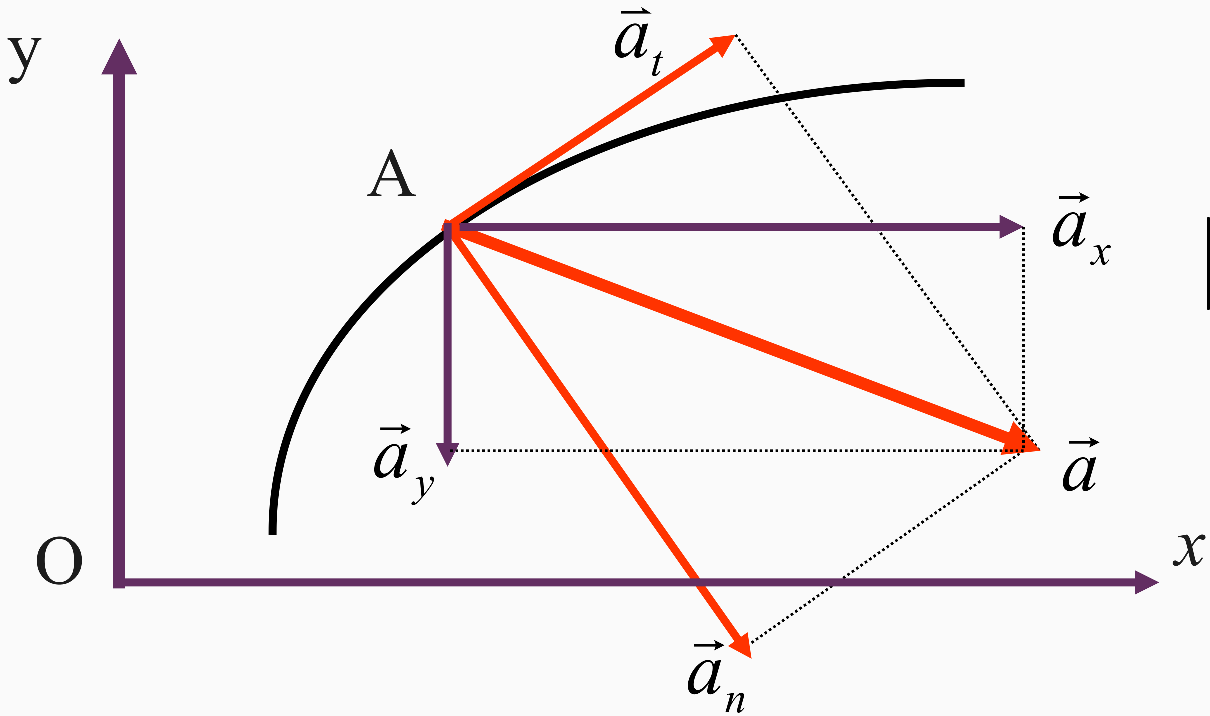
R表示质点所在处轨道的曲率半径。

曲率圆，其中心叫曲率中心，半径叫曲率半径，曲率半径的倒数叫曲率.



t tangential 切向
n normal 法向

注意：同一质点的加速度，无论在直角坐标系还是自然坐标系中，总加速度 $\vec{a}$ 只能是同一个值.



$$|\vec{a}_t| = \frac{d\upsilon}{dt}$$

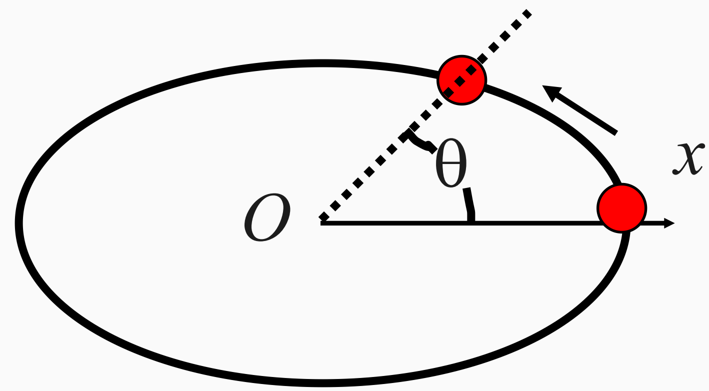
$$\vec{a} = a_n \vec{n}_0 + a_t \vec{t}_0 = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

四.圆周运动的角量描述

1、角坐标(角位置) θ　（先规定参考方向Ox）

—角坐标是圆心到质点所在位置的连线与参考方向之间的夹角.



注意：

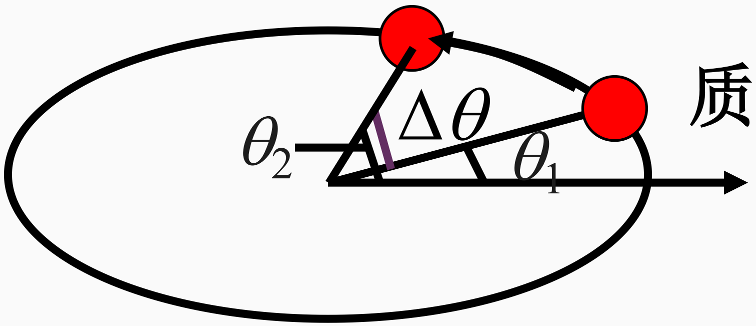
◆一般规定逆时针转动的角坐标为正值；

◆角坐标的单位：弧度(rad)；

◆当质点在圆周上转动时，θ 为时间的函数 $\theta=\theta(t)$

—为角量描述圆周运动的运动方程.

2、角位移 $\Delta\theta$

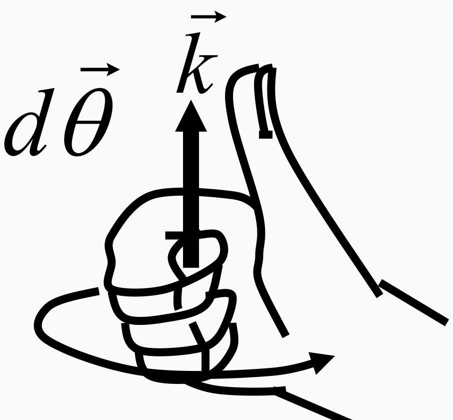


质点在 Δt 时间内转过的角度

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

注意：◆ $\Delta\theta$ 的单位为弧度(rad)

◆可以证明，当$\Delta\theta \to 0$ 时，$d\theta$ 服从矢量叠加的交换律和平行四边形法则，因而可以定义一个矢量：$d\vec{\theta} = d\theta\,\vec{k}$



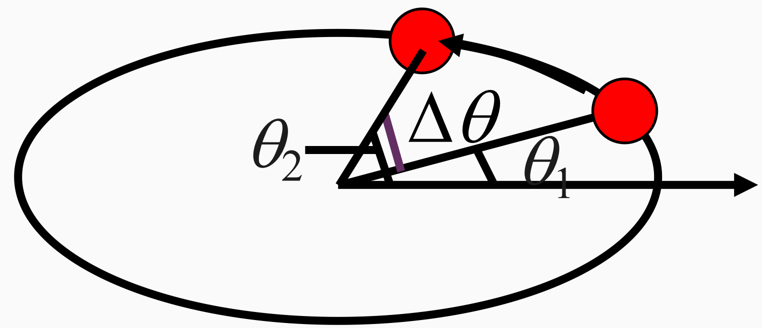
$\vec{k}$ 是沿转轴方向的单位矢量.

$d\vec{\theta}$ 与转动方向符合右手螺旋关系

【讨论】对于有限大的角位移 $\Delta\theta$，即使像 $d\theta$ 那样定义矢量 $\Delta\vec{\theta} = \Delta\theta\,\vec{k}$，它也不服从矢量叠加的交换律和平行四边形法则，因而没有实际的物理意义.

3、角速度

1）平均角速度 $\overline{\omega}$

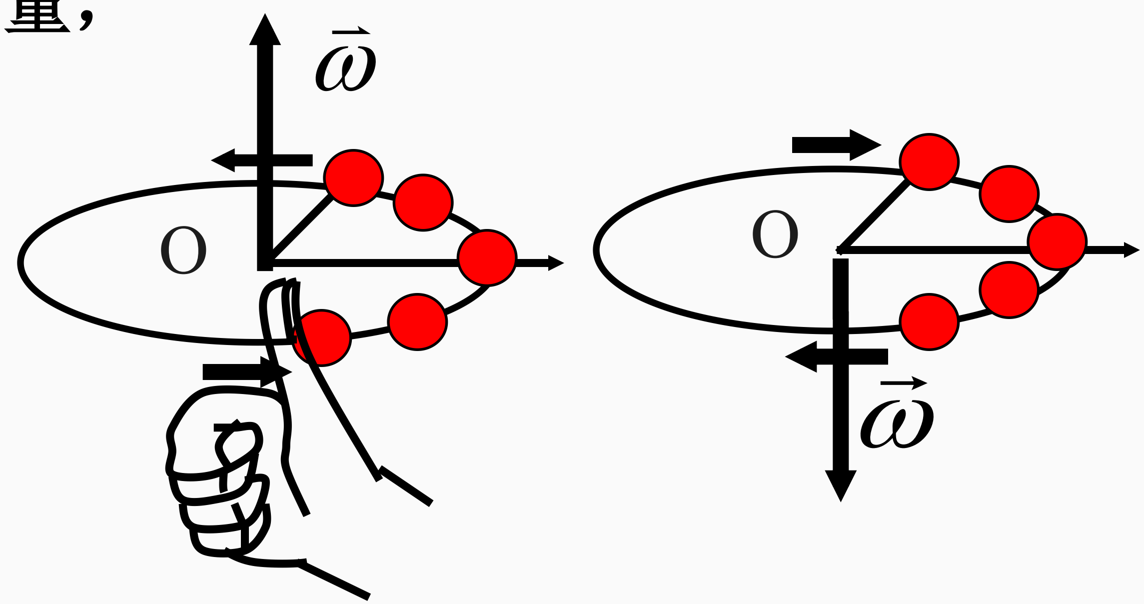


定义：$\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

注意：平均角速度是标量，不是矢量

2）瞬时角速度 $\vec{\omega}$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$



矢量式： $\vec{\omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{k} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt}$

◆$\vec{\omega}$是矢量, 其方向与转动方向成右手螺旋关系

◆单位： 弧度/秒 **(rad/s)**

◆有时角速度用转数n来表示，单位：转/分。

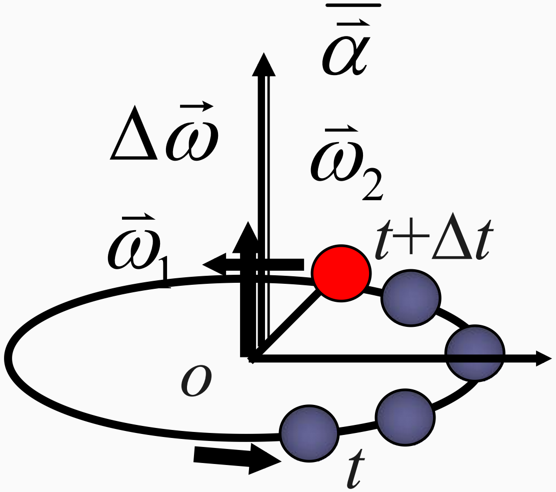
二者关系： $\omega = \dfrac{2\pi n}{60}$

4）角加速度 $\vec{\alpha}$

◆平均角加速度（$\overline{\vec{\alpha}}$）

定义：$\overline{\vec{\alpha}} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ 是矢量

$$\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$$



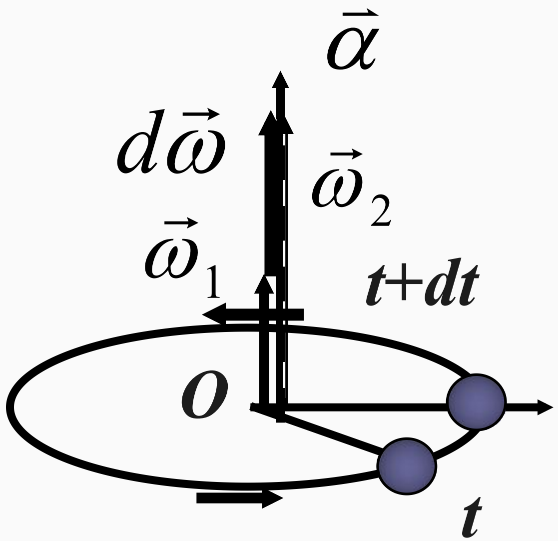
含义：反映一段时间内角速度变化快慢。

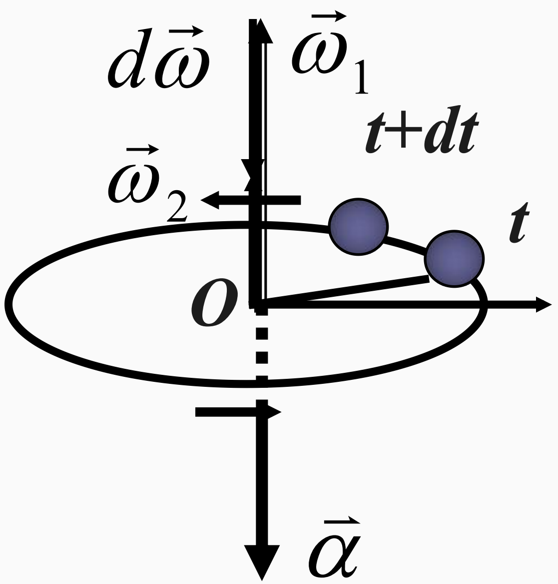
◆瞬时角加速度（$\vec{\alpha}$）

定义： $\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

◆单位： 弧度/秒² (rad/s²)

方向： $\Delta\vec{\omega}$ 的极限方向





引入了角位置，角位移，角速度，角加速度，它们与位矢，位移，速度，加速度一一对应。

线量	$\vec{r}$	$\Delta\vec{r}$	$\vec{\upsilon}$	$\vec{a}$
角量	θ	$\Delta\theta$	$\vec{\omega}$	$\vec{\alpha}$

匀变速率圆周运动中：

$$\alpha = \text{常数}，\quad t = 0\text{时}，\quad \omega = \omega_0,\ \theta = \theta_0$$

$$d\omega = \alpha dt, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt, \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$d\theta = \omega dt, \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) dt, \quad \boldsymbol{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

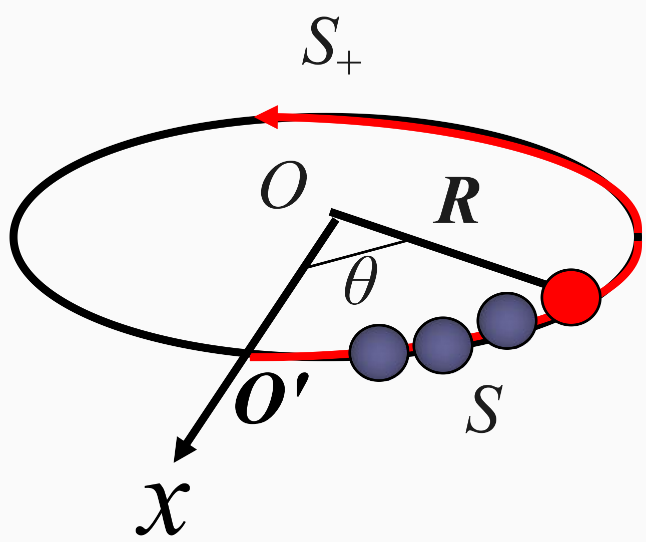
5. 角量和线量的关系

1）角量、线量之间的数量关系

设质点作圆周运动

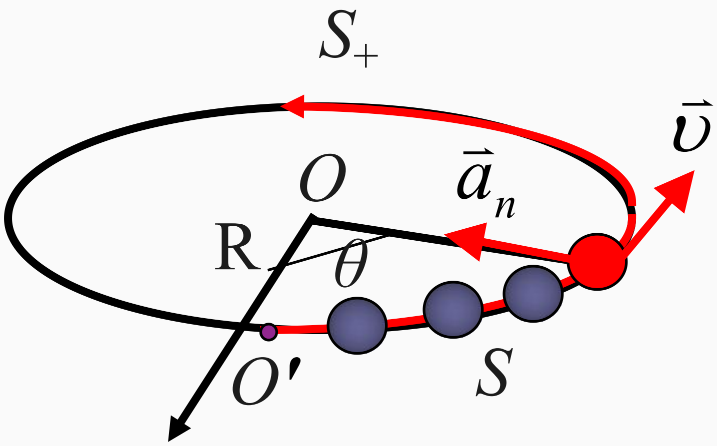
规定参考方向沿 Ox 轴

以参考方向与轨迹交点O'作为自然坐标系的原点



◆路程与角位移的关系

$$S = R\theta \qquad (1)$$



◆线速度与角速度大小间的关系

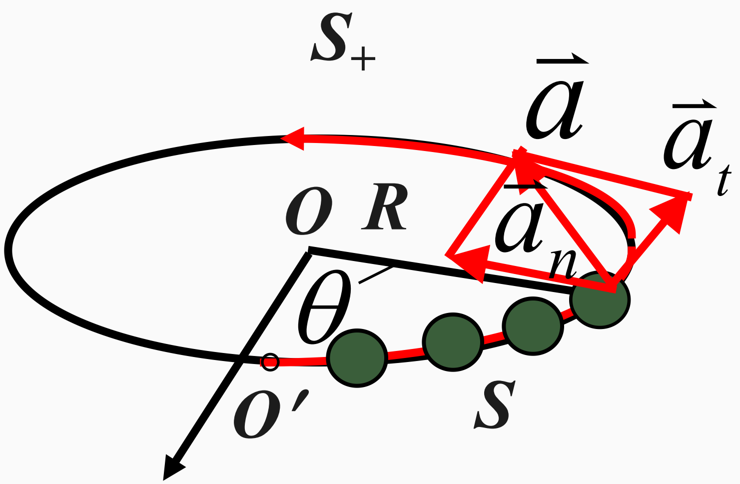
$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = \omega R \qquad (2)$$

◆线加速度与角加速度大小间的关系

线加速度：a_n，a_t；　角加速度：α

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \omega\upsilon \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R \qquad (3)$$



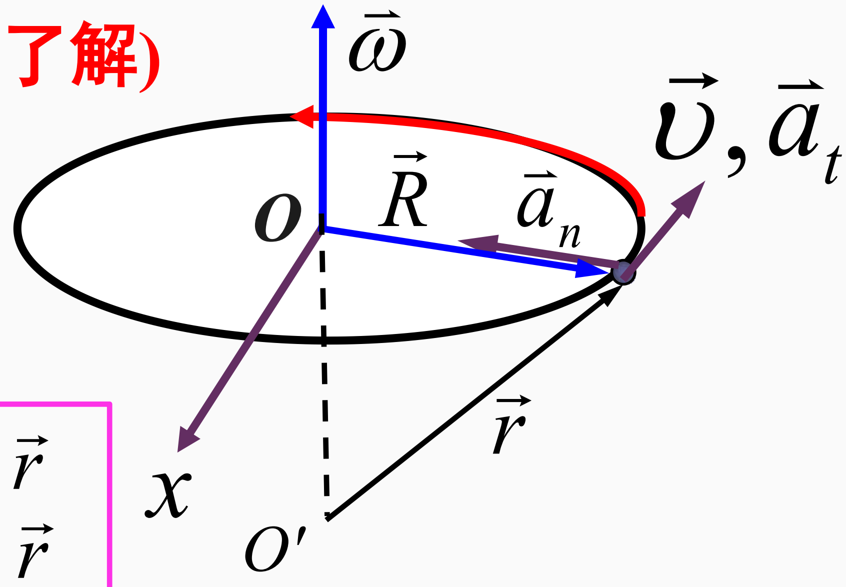
$$\boxed{\upsilon = \omega R}$$

$$a_t = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R \qquad (4)$$

$$\therefore a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \alpha^2 R^2}$$

$$= \sqrt{\omega^4 + \alpha^2}\, R \qquad (5)$$

2）角量和线量之间的矢量关系(了解)



数量关系：

$$\upsilon = \omega R,$$
$$a_t = \alpha R$$
$$a_n = \omega^2 R = \omega\upsilon$$

矢量关系：

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\upsilon} &= \vec{\omega}\times\vec{R} = \vec{\omega}\times\vec{r} \\ \vec{a}_t &= \vec{\alpha}\times\vec{R} = \vec{\alpha}\times\vec{r} \\ \vec{a}_n &= -\omega^2\vec{R} = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon} \end{aligned}}$$

平面运动

直线
抛体
圆周 （角量 与线量的关系）

对于一般平面曲线运动， $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n}_0 + \dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{t}_0$

轨迹已知，自然坐标系下，常问a_n和a_t是多少

t tangential 切向
n normal 法向

例1 现代战斗机驾驶员常常担心飞行时的急转弯，当飞行员的头向着曲率中心，身体经历向心加速度时，其头部中的血压会降低而使大脑失去正常功能。当向心加速度为 2g 或 3g 时，飞行员会感到身体很重。当向心加速度为 4g 时，飞行员的视觉会变成黑白，视界变窄而进入“隧道视觉”。如果向心加速度再增加的话，飞行员的视觉将停止，很快失去知觉。战斗机若以716m/s的速率通过一半径为5.80km圆弧运动，其驾驶员将处于一种何种状态？

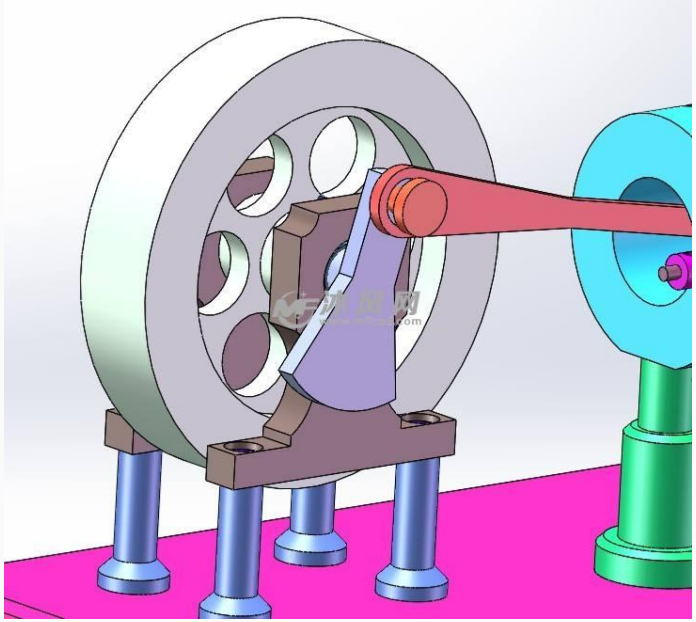
解： $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \dfrac{716^2}{5800} = 9g$ 驾驶员失去知觉

例2 为了稳定轧辊在轧钢时的转速，通常装有飞轮，利用飞轮的惯性带动曲柄连杆循环工作。飞轮的半径为*R*，边缘一点按规律 $s = \upsilon_0 t - bt^2/2$ 运动，υ_0、b 都是正的常量。求：

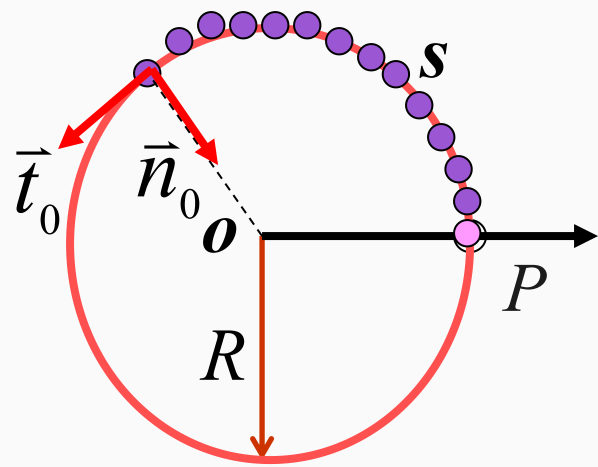
(1) t 时刻该点的总加速度的大小；

(2) t 为何值时，总加速度的大小为b；

(3) 当总加速度大小为b 时，该点沿圆周运行了多少圈。



解: (1) $\upsilon=\dfrac{ds}{dt}=\upsilon_0-bt,\qquad a_n=\dfrac{\upsilon^2}{R}=\dfrac{(\upsilon_0-bt)^2}{R},$



$$a_t=\frac{d\upsilon}{dt}=-b,\quad a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{\frac{(\upsilon_0-bt)^4}{R^2}+b^2}$$

(2) $t=\dfrac{\upsilon_0}{b}$时，$a=|a_t|=b,$

(3) 在 $t=\dfrac{\upsilon_0}{b}$时，$\qquad s=\upsilon_0 t-\dfrac{b}{2}t^2=\dfrac{\upsilon_0^2}{2b},$

圈数 $N=\dfrac{s}{2\pi R}=\dfrac{\upsilon_0^2}{4\pi Rb}$

例3 一个可看作质点的小球在牵引力F作用下做半径为0.1 m的圆周运动，其运动学方程为 $\theta(t)=2+4t^3$ rad

求 (1) 当t =2s 时，质点运动的 a_n 、a_t 及 a 的大小

(2) 当θ=? 时，质点的加速度与半径成45°角？

解: (1) 质点转动问题, 可以用角量求, 也可以转化为线量求。

用角量求:
$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2,\qquad \alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=24t$$

$$\therefore a_n=\omega^2R=14.4t^4,\qquad a_t=\alpha R=2.4t$$

当t =2s 时，$a_n=230.4\ \mathrm{m/s^2}$， $a_t=4.8\ \mathrm{m/s^2}$

$$a=\sqrt{a_n^{\ 2}+a_t^{\ 2}}=230.5\ \mathrm{m/s^2}$$

用线量求: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 12t^2$, **转化为线量:** $\upsilon = \omega R = 1.2t^2$,

$$\therefore a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 14.4t^4, \qquad a_t = \frac{d\upsilon}{dt} = 2.4t$$

当t =2s 时，$a_n = 230.4 \ \text{m/s}^2$, $a_t = 4.8 \ \text{m/s}^2$

$$a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_t^{\ 2}} = 230.5 \ \text{m/s}^2$$

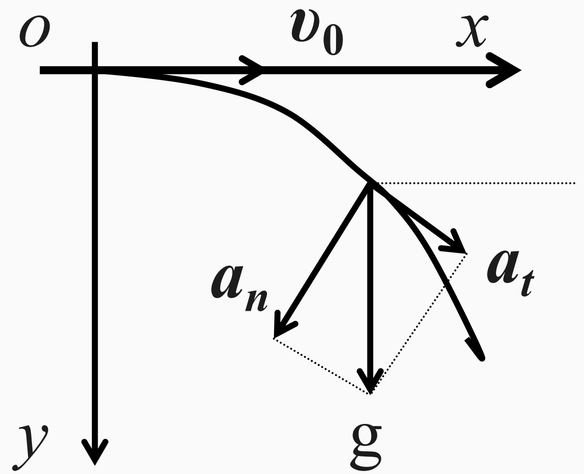
(2) 设t'时刻，质点的加速度与半径成45°角，则

$$a_t = a_n, \quad \omega^2 R = \alpha R \qquad \therefore 144t'^4 = 24t'$$

$$\Rightarrow t' = 0.55 \text{ s},$$

$$\therefore \theta = 2 + 4t'^3 = 2.67 \text{ rad}$$

例4 某特警为解救人质，由对面楼窗口以水平初速度υ_0射出一发子弹，取枪口为原点，υ_0沿 x 轴，向下为 y 轴。求：(1)子弹在任一时刻 t 的位置坐标及轨道方程；(2)子弹在 t 时刻的速度，切向加速度和法向加速度。



解：(1) $x=\upsilon_0 t,\quad y=\dfrac{1}{2}gt^2,\ \Rightarrow y=\dfrac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$

(2) $\upsilon_x=\upsilon_0,\quad \upsilon_y=gt$

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{\upsilon_0^2+g^2t^2},\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{gt}{\upsilon_0}\right)$$ (与 x 轴的夹角)

$$a_t=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{g^2t}{\sqrt{\upsilon_0^2+g^2t^2}},\quad a_n=\sqrt{g^2-a_t^2}=\frac{\upsilon_0 g}{\sqrt{\upsilon_0^2+g^2t^2}}$$

例5. 已知质点在水平面内运动，运动方程为：

$$\vec{r}=5t\,\vec{i}+(15t-5t^2)\,\vec{j}$$

求 t=1s 时的法向加速度、切向加速度和轨道曲率半径。

解： 由 $\vec{r}=5t\vec{i}+(15t-5t^2)\vec{j}$, 得

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=5\vec{i}+(15-10t)\vec{j},\qquad \vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-10\vec{j}$$

$$\upsilon=\sqrt{25+(15-10t)^2},\qquad a_t=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{-10(3-2t)}{\sqrt{1+(3-2t)^2}}$$

t=1s时，$\upsilon=5\sqrt{2}\ (\mathrm{m/s})$，$a=10\ (\mathrm{m/s^2})$，$a_t=-5\sqrt{2}\ (\mathrm{m/s^2})$

$$a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=?\qquad 由\ a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}\qquad 得\ a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=5\sqrt{2}\ (\mathrm{m/s^2})$$

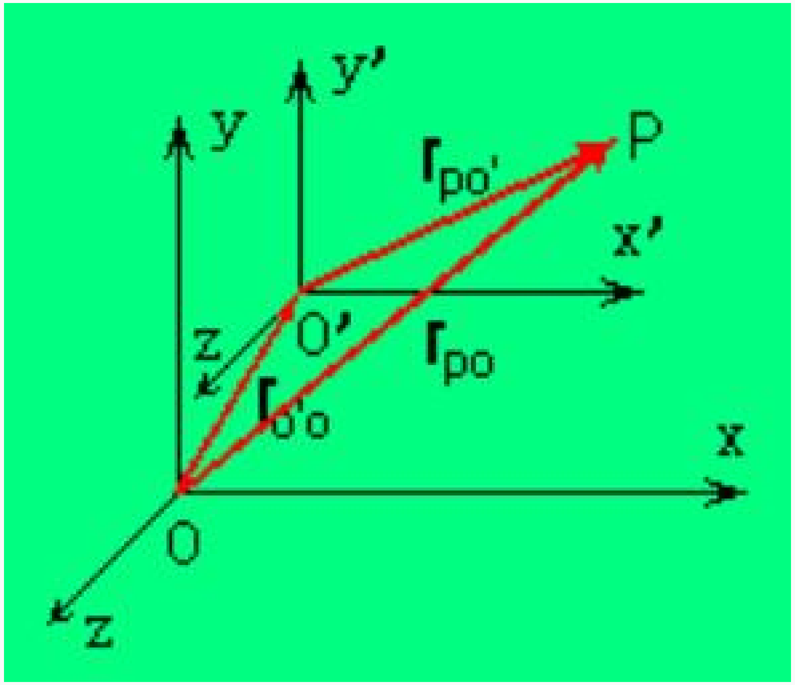
$$再由\ a_n=\frac{\upsilon^2}{R}\qquad \Rightarrow R=\frac{\upsilon^2}{a_n}=5\sqrt{2}\ (\mathrm{m})$$

船上一女孩向上抛一个小球,发现小球做竖直运动，那岸上小男孩观察小球做何种运动?

球相对于岸的运动是抛物线(竖直运动+水平运动).

不同参照系对同一个运动描述的结果不同，其结果之间是否有某种联系呢？

设有两个相互平动的参照系O和O'. 在O系中建立直角坐标系(x, y, z)，在O'系中建立直角坐标系(x', y', z').

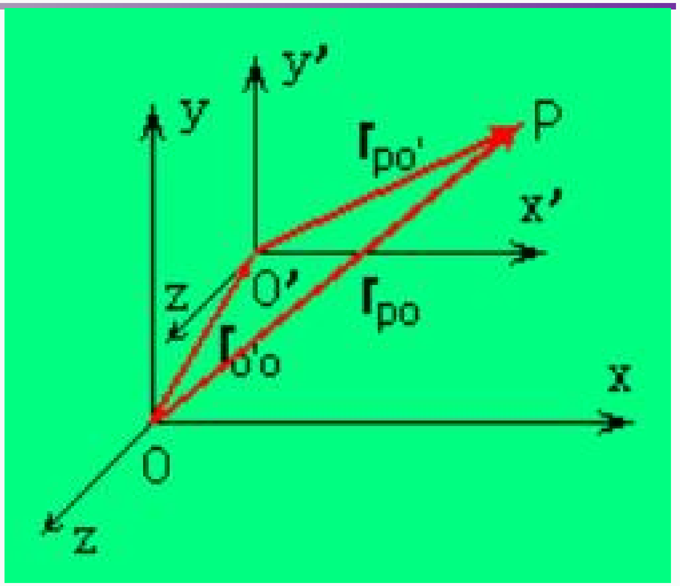


设质点P在空间运动， t时刻：

P点相对于O系的位矢为：$\vec{r}_{PO}$

P点相对于O'系的位矢为：$\vec{r}_{PO'}$

1、位矢的相对性



位矢变换式 $\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O}$

对于两个沿Ox轴以速度 u 作相对运动的惯性参照系, 上式化为

$$x = x' + ut, \quad y = y', \ z = z'$$

—伽利略坐标变换 (适用惯性系).

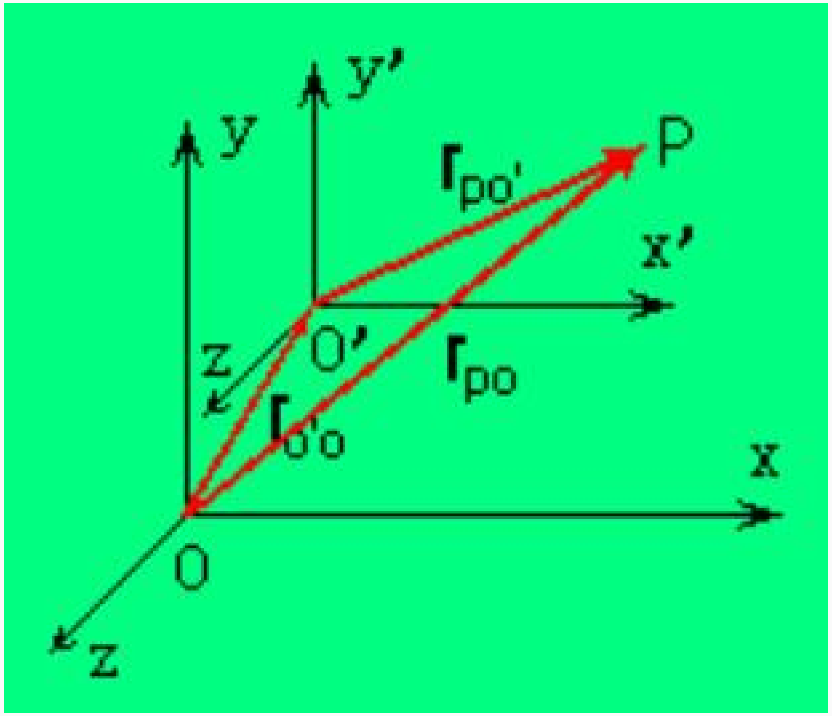
2、位移的相对性

t 时刻: $\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{r}_{O'O}$

$t+\Delta t$ 时刻: $\vec{r}\,'_{PO} = \vec{r}\,'_{PO'} + \vec{r}\,'_{O'O}$

位移变换式: $\Delta\vec{r}_{PO} = \Delta\vec{r}_{PO'} + \Delta\vec{r}_{O'O}$

3、速度的相对性



将位矢变换式 $\vec{r}_{PO}=\vec{r}_{PO'}+\vec{r}_{O'O}$

对时间求导,

得速度变换式

$$\vec{\upsilon}_{PO}=\vec{\upsilon}_{PO'}+\vec{\upsilon}_{O'O}$$

对于两个沿ox轴以速度u做相对运动的惯性参照系, 上式化为

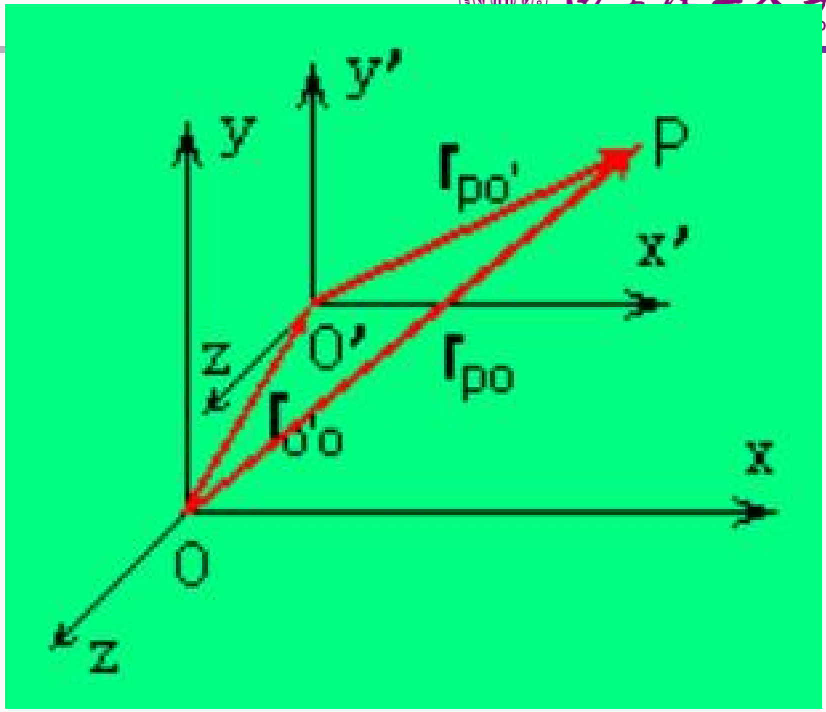
$$\upsilon=\upsilon'+u$$

--伽利略速度变换 (适用于惯性系之间).

4、加速度的相对性

将速度变换式

$$\vec{\upsilon}_{PO}=\vec{\upsilon}_{PO'}+\vec{\upsilon}_{O'O}$$



对时间求导，

加速度变换式：

$$\vec{a}_{PO}=\vec{a}_{PO'}+\vec{a}_{O'O}$$

对于两个沿*Ox*轴以速度 ***u*** 作相对运动的惯性参照系，上式化为

$$a=a'$$

—伽利略加速度变换 (适用惯性系).

可将位矢、位移、速度、加速度的相对性变换公式统一表示为：

$$\boxed{\vec{M}_{AO} = \vec{M}_{AO'} + \vec{M}_{O'O}} \qquad \vec{M} = \vec{r}, \Delta\vec{r}, \vec{\upsilon}, \text{ 或 } \vec{a}.$$

说明: 成立条件是长度测量和时间测量均与参照系无关, 即牛顿的绝对时空观。

空间绝对性：不是指空间坐标、而是指空间间隔(即长度)的测量(要求同时测量物体两端)是绝对的, 与参照系无关. $\Delta l_O = \Delta l_{O'}$

时间绝对性：而是指时间间隔的测量是绝对的，与参照系无关.

$$\Delta t_O = \Delta t_{O'}$$

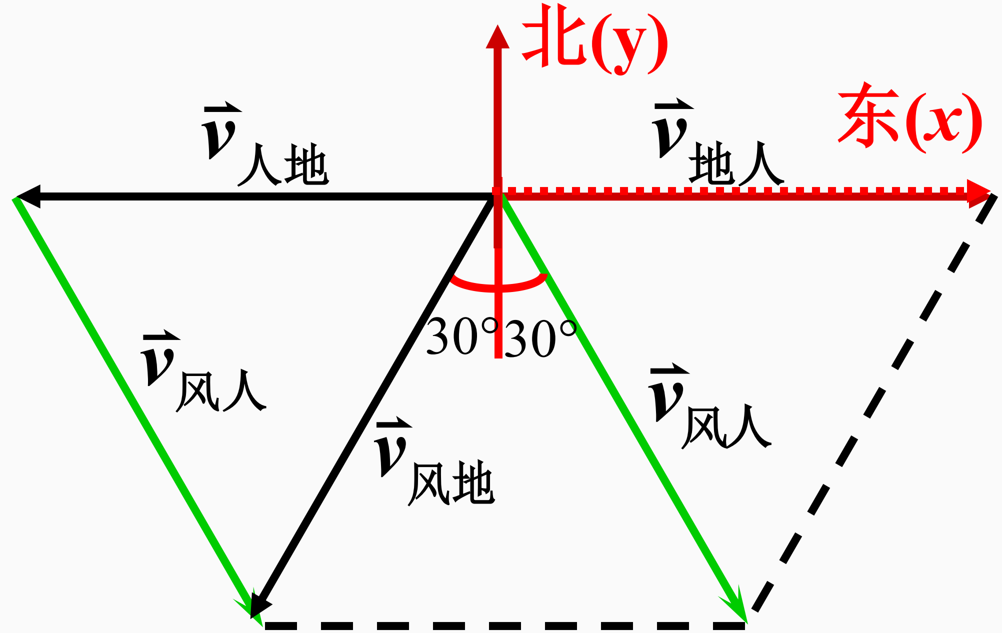
在弱引力场(不考虑空间弯曲)、低速运动(远低于真空中的光速)情况下，牛顿的绝对时空观与实验结果相符。

例1. 一人以速率 υ 向西行走，天气预报报道风正以相同速率 υ 从北偏东30° 方向吹来，问此人感受到的风向？

解： 以正东为 x 方向，正北为 y 方向建立坐标系

$$\vec{\upsilon}_{人地} = -\upsilon\vec{i}$$

$$\vec{\upsilon}_{风地} = -\upsilon\sin 30°\vec{i} - \upsilon\cos 30°\vec{j} = -\frac{\upsilon}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$$



$$\vec{\upsilon}_{风人} = \vec{\upsilon}_{风地} + \vec{\upsilon}_{地人} = \vec{\upsilon}_{风地} - \vec{\upsilon}_{人地} = \frac{\upsilon}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$$

答：人感到风从北偏西30° 方向吹来

例2. 河水自西向东流动，速度为10 km/h, 一轮船在水中航行，船相对于河水的航向为北偏西30º, 航速为20 km/h. 此时风向为正西，风速为10km/h。则在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向。（设烟离开烟囱后即获得与风相同的速度）

解： 以正东为 x 方向，正北为 y 方向建立坐标系

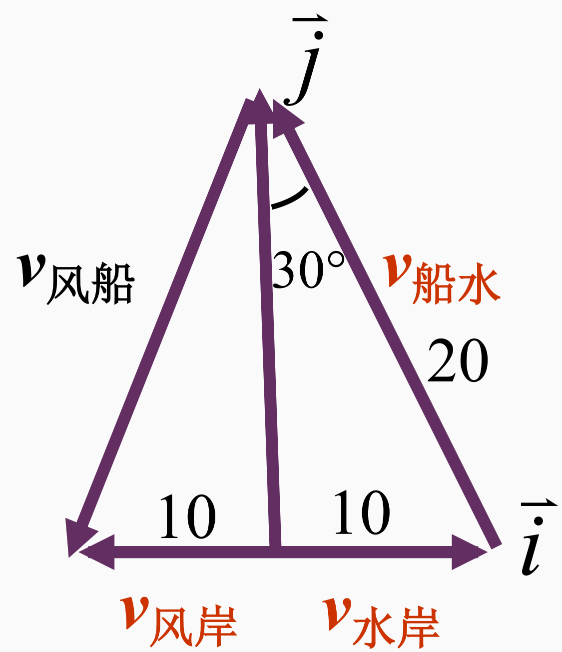
已知 $\vec{\upsilon}_{水岸} = 10\,\vec{i}$ 向东

$\vec{\upsilon}_{风岸} = -10\,\vec{i}$ 向西

$$\vec{\upsilon}_{船水} = 20(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})$$

$$= -10\vec{i} + 10\sqrt{3}\,\vec{j}$$ 北偏西30º

求 $\vec{v}_{风船} = ?$

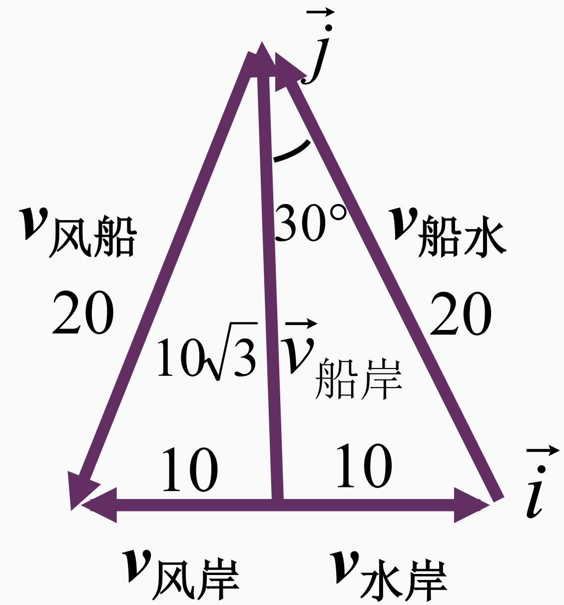


【注意】(1)风向为正西，不是西风，而是东风.

已知 $\vec{\upsilon}_{水岸} = 10\,\vec{i}$

$\vec{\upsilon}_{风岸} = -10\,\vec{i}$

$\vec{\upsilon}_{船水} = -10\vec{i} + 10\sqrt{3}\,\vec{j}$



$$\therefore \vec{\upsilon}_{风船} = \vec{\upsilon}_{风岸} + \vec{\upsilon}_{岸船}$$

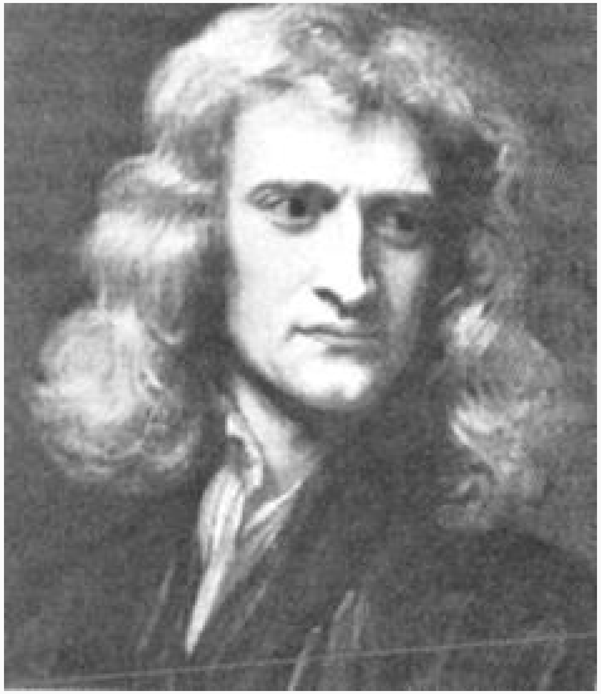
$$= \vec{\upsilon}_{风岸} - \vec{\upsilon}_{船岸}$$

$$= \vec{\upsilon}_{风岸} - (\vec{\upsilon}_{船水} + \vec{\upsilon}_{水岸})$$

$$= -10\vec{i} - (-\cancel{10\vec{i}} + 10\sqrt{3}\,\vec{j} + \cancel{10\vec{i}})$$

$$= -10\vec{i} - 10\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$\therefore \left|\vec{\upsilon}_{风船}\right| = 20$（km/h） 方向为南偏西30°



牛顿 Issac Newton

(1643.1.4－1727.3.31)

英国物理学家, 经典物理学的奠基人. 他对力学、光学 (微粒说)、热学(冷却定律)、天文学(万有引力定律, 反射望远镜, 潮汐)和数学(微积分, 二项式定理)等学科都有重大发现, 其代表作《自然哲学的数学原理》。 牛顿是近代自然科学奠基时期具有集前人之大成之贡献的伟大科学家，而且是第一位被授予英国皇家爵位的科学家.

一. 牛顿运动定律

1、牛顿第一定律（惯性定律）

任何物体都将保持其静止或匀速直线运动状态，除非有其他物体的作用力迫使它改变这种状态.

◆任何物体都具有惯性: 惯性是物体固有的保持运动状态不变的性质(或趋势), 故第一定律又称惯性定律。

◆惯性定律表明：运动不需要外力来维持, 惯性是维持物体运动状态的原因, 而外力是改变物体运动状态的原因。

◆定义了惯性参照系: 保持静止或匀速直线运动的参照系称为惯性系. 牛顿第一定律成立的参照系就是惯性系。

◆定性给出了力的概念: 力是物体间的相互作用, 是引起物体运动状态改变的原因.

◆第一定律对于“无外力”和“合外力为零”两种情况均适用.

2、牛顿第二定律

运动的变化(the change of motion) 与所施加的外力(motive force, 动力) 成正比, 并且发生在所施加的外力的方向上. 其中，运动 = 动量，变化 = 变化率.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \ldots(1)$$

（牛顿当年发表的形式）

$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ 是物体所受的合外力.

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ 是物体的动量.

★在经典力学范围($\upsilon << c$) , m =常数, 上式可改写为 $\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a} \ldots(2)$

★对高速运动物体($\upsilon \sim c$), 须考虑相对论效应, 物体的质量不再是常量, 而与速度 υ 有关, 此时(1)式仍适用, 而(2)式失效.

说明：

- 定量说明了力的效果—改变物体的运动状态(动量). 物体的动量变化率一定等于物体所受合外力.
- 定量说明了质量是物体惯性大小的量度.
- 只适用于惯性参照系.
- 瞬时性—力的作用与加速度是瞬时对应的.
- 要注意定律的矢量性—定律中的力和加速度都是矢量(具有叠加性).

具体求解牛顿方程时，要写成分量式：

直角坐标系

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

自然坐标系

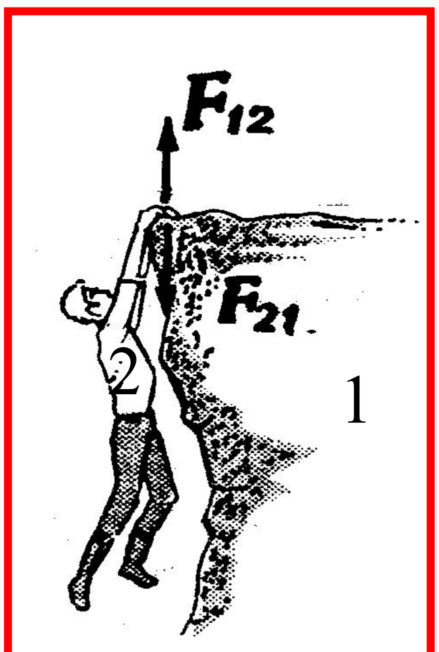
$$\begin{cases} F_n = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{R}\text{（法向）} \\ F_t = ma_t = m\dfrac{d\upsilon}{dt}\text{（切向）} \end{cases}$$

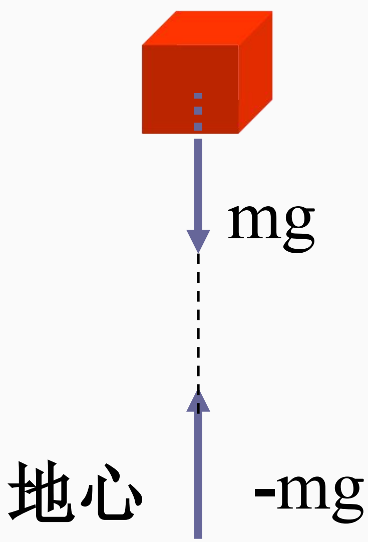
力的独立性(叠加)原理：某一方向的力只产生该方向的加速度，而与其它方向的受力及运动无关.

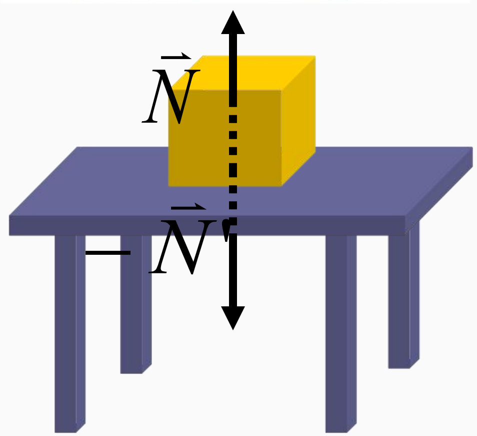
3、牛顿第三定律

两物体间的作用力和反作用力总是大小相等、方向相反、作用在同一条直线上.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$







说明：

1）牛顿第三定律对力的性质加以补充，说明了力的本质，力是物体间的相互作用.

2） 作用力与反作用力，同时存在、同时消失.

3）作用力与反作用力是作用在不同的物体上的，因此不会相互抵消.

4）作用力与反作用力是同性质的力。

5）牛顿第三定律适用于任何参照系.

6*) 牛顿第三定律只适用于直接接触物体间的相互作用或非接触物体间的超距作用. 对于以场为媒介的非接触物体间的相互作用(传播速度有限大), 牛顿第三定律失效, 应代之以更普适的动量守恒定律 (物体+场的总动量守恒!).

二. 牛顿运动定律的适用范围

◆宏观系统

物体运动的空间尺度 >> 原子尺度（10^{-10}m）

◆ 低速运动

物体运动的速度 $v \ll c$ (光速 $c = 3\text{x}10^8$ m/s)

◆惯性参照系

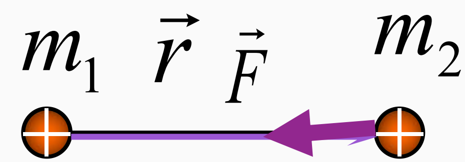
牛顿第一、二定律**只适用于惯性参照系，**牛顿第三定律适用于任何参照系.

实践表明：太阳等恒星是很好的惯性系，地球可近似为惯性系.

三. 力学中几种常见的力

1. 万有引力: 存在于一切物体间的相互作用力。

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$G = 6.672\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$$

重力：地面附近物体所受地球的吸引力。

$$P = mg = G\frac{mM}{R^2} \qquad \therefore\quad g = \frac{GM}{R^2} = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

2. 弹性力：发生形变的物体，由于力图恢复原状，对与它接触的物体产生的作用力.

如正压力、张力、拉力、支撑力、弹簧恢复力。

◆物体间的正压力(支撑力)总是垂直于接触点的切面指向对方.

◆轻绳中的张力(拉力) T 处处相同，指向绳子收缩方向.

◆弹簧中的恢复力 $F=-kx$, 指向弹簧原长处.

3. 摩擦力

两个相互接触的物体，在存在相对运动或相对运动趋势时，由于接触面粗糙而产生的阻碍运动（或运动趋势）的力。

方向：摩擦力的方向与物体相对运动或相对运动趋势的方向相反。

分类：静摩擦力、滑动摩擦力

静摩擦力 $F_s \le F_{smax}$

最大静摩擦力 $F_{smax} = \mu_0 N$

μ_0: 静摩擦系数

滑动摩擦力 $F_k = \mu_k N$

μ_k: 滑动摩擦系数

四. 牛顿定律的应用

◆依题意确定研究对象，选取坐标系；

◆进行受力分析，画出受力图；对连在一起的物体需作隔离分析，把内力转化为外力；

◆列出运动方程，分量式：

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases} \qquad \begin{cases} F_n = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{R}\text{（法向）} \\ F_t = ma_t = m\dfrac{d\upsilon}{dt}\text{（切向）} \end{cases}$$

◆分析讨论结果。

两类基本问题：已知运动求力**(牛顿当年的问题：已知运动方程, 由牛顿第二定律求力)**，已知力求运动。

相对运动

$$\vec{\upsilon}_{PO} = \vec{\upsilon}_{PO'} + \vec{\upsilon}_{O'O}$$

牛顿定律

直角坐标系

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

自然坐标系

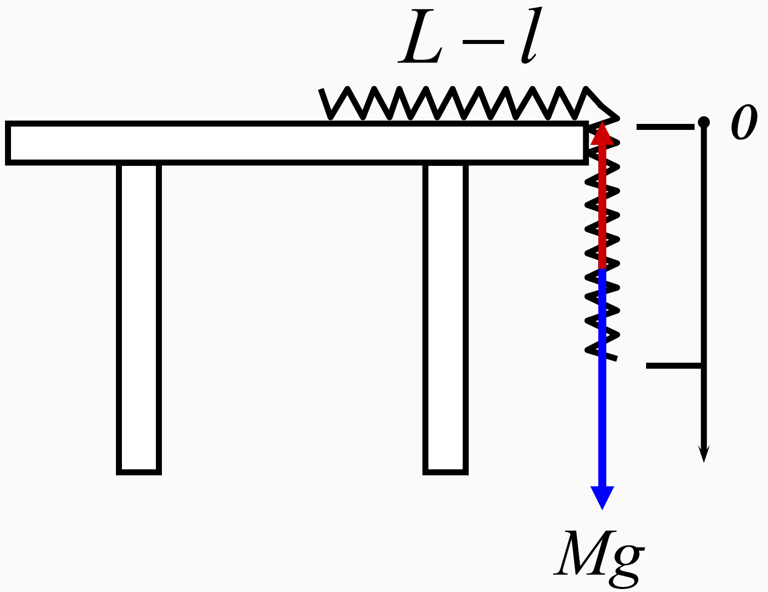
$$\begin{cases} F_n = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{R}\text{（法向）} \\ F_t = ma_t = m\dfrac{d\upsilon}{dt}\text{（切向）} \end{cases}$$

几种常见力： 万有引力 弹力 摩擦力

例1 一根长为L，质量为M的柔软链条，开始时链条静止，其中长为 $L-l$ 的部分放在光滑的桌面上, 长度为 l 的部分铅直下垂。(1) 求整个链条刚离开桌面时的速度；(2) 求链条由刚开始运动到完全离开桌面所需要的时间。

解:

(1) 设 t 时刻下垂部分长 x，则



$$\frac{M}{L}xg = M\frac{d\upsilon}{dt}$$

注意：本题属于 $a=a(x)$，需作下列变换

$$a(x)=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} \qquad \Rightarrow \frac{M}{L}xg = M\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

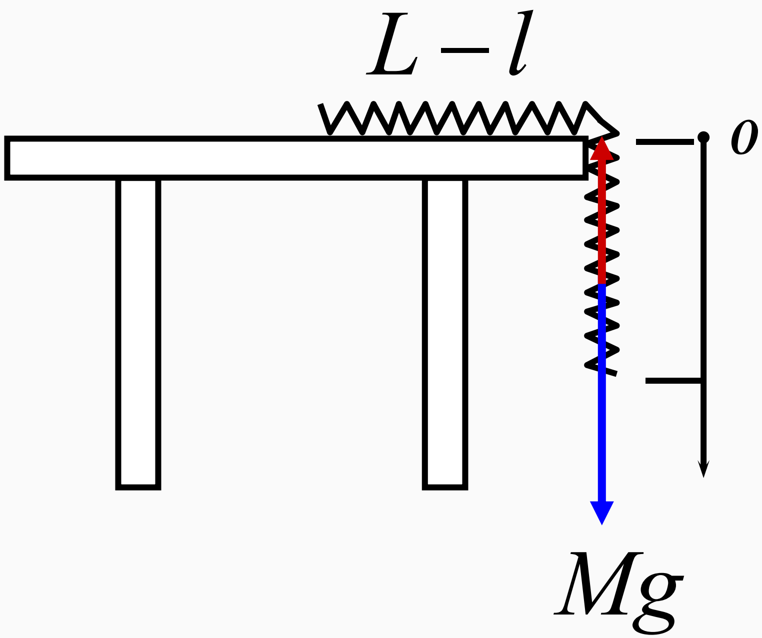
$$\frac{M}{L}xg = M\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

分离变量，积分得

$$\int_l^x gxdx = \int_0^\upsilon L\upsilon d\upsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}g(x^2 - l^2) = \frac{1}{2}L\upsilon^2$$

$$\Rightarrow \upsilon(x) = \sqrt{\frac{g}{L}(x^2 - l^2)}$$

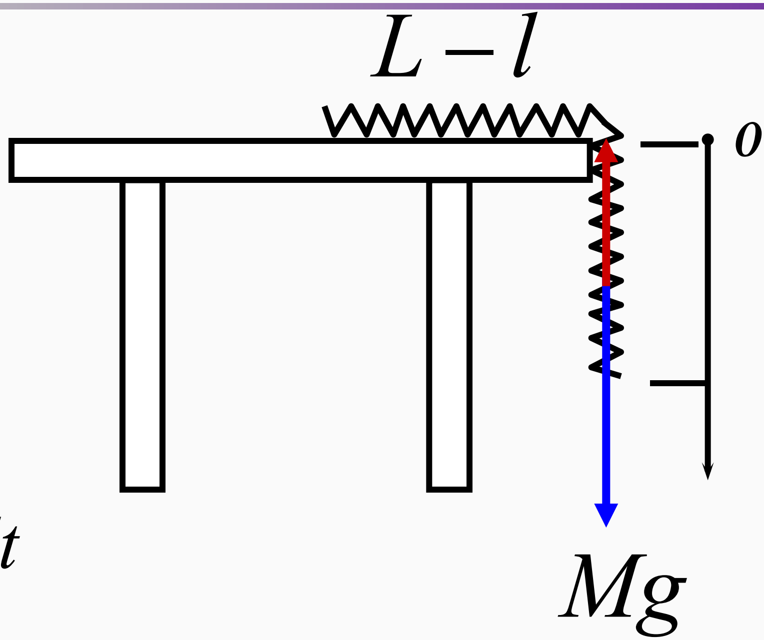


整个链条刚离开桌面时的速度：

此时$x = L$，故

$$\upsilon_L = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - l^2)}$$

(2) 链条由开始滑动到完全离开桌面所需要的时间。



$$\upsilon(x)=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{g}{L}(x^2-l^2)}$$

积分得 $$\int_l^L \frac{dx}{\sqrt{x^2-l^2}}=\int_0^{t_L}\sqrt{\frac{g}{L}}dt$$

$$\Rightarrow t_L=\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}$$

思考：若桌面不光滑(滑动摩擦系数为μ)，结果如何？

$$\boxed{\upsilon_L=\sqrt{\frac{g}{L}[(L^2-l^2)-\mu(L-l)^2]}}$$

例2 降落伞是利用空气阻力原理，使人或物从空中安全降落到地面的一种航空工具，主要由柔性织物制成。是空降兵作战训练、航天人员救生和训练、空投物资、回收飞行器等的设备器材。

一般来说，人从1.5m高处落下来着地是没有危险的，可以看作自由落体运动。假如一跳伞员和降落伞的总质量m=70kg，若跳伞员安全着陆，降落伞所需的最小面积？

已知阻力大小与伞表面积及光滑程度有关，即

$$F_f = c\rho A\upsilon^2 = b\upsilon^2.$$

c为阻力系数(0.45)，ρ为空气密度(1.25kg.m^{-3})。

解：人从1.5m高处自由落下, 着地没有危险,

因此, 人安全着陆的速度: $\upsilon=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9.8\times1.5}=5.4(\mathrm{m/s})$

可以取跳伞员落地时的终极速度 $\upsilon_{\infty}=5.0\ (\mathrm{m/s})$

跳伞员和降落伞总质量为*m*, 从静止降落, 受力 $F=mg-b\upsilon^2$

$$F=mg-b\upsilon^2=m\frac{d\upsilon}{dt} \qquad \Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=g-\frac{b}{m}\upsilon^2$$

当伞下落的速度达到匀速时 $\dfrac{d\upsilon}{dt}=0,\quad \Rightarrow\upsilon=\sqrt{\dfrac{mg}{b}}=\sqrt{\dfrac{mg}{c\rho A}}$

令 $\upsilon=\upsilon_{\infty},\qquad A_{\min}=\dfrac{mg}{c\rho\upsilon_{\infty}^{2}}=\dfrac{70\times9.8}{0.45\times1.25\times5.0^2}=48.8\,(\mathrm{m}^2)$

国产运动-2甲型降落伞的面积 $A=56.7\mathrm{m}^2$, 与上列估算值接近.

例3 伞塔跳伞是跳伞运动的基础训练项目，依据例2，测算跳伞塔的高度至少为多高?

* 取 $A = 56.7\text{m}^2$ (国产运动-2甲型降落伞的面积)
* 跳伞员的落地速度应达到 $0.99\upsilon_\infty$

解： 依据牛顿第二定律 $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = mg - b\upsilon^2$

$$\frac{m}{b}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{mg}{b} - \upsilon^2 = \upsilon_\infty^2 - \upsilon^2$$

为了求高度, 做变换 $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt} = \upsilon\dfrac{d\upsilon}{dy}$

$$\therefore \frac{m}{b}\cdot\upsilon\frac{d\upsilon}{dy} = \upsilon_\infty^2 - \upsilon^2,$$

分离变量并积分: $\displaystyle\int_0^\upsilon \frac{\upsilon\, d\upsilon}{\upsilon_\infty^2 - \upsilon^2} = \int_0^y \frac{b}{m}dy$

$$y=\frac{m}{2b}\ln\frac{\upsilon_\infty^2}{\upsilon_\infty^2-\upsilon^2}=\frac{m}{2c\rho A}\ln\frac{1}{1-(\frac{\upsilon}{\upsilon_\infty})^2}$$

为了保证模拟效果，跳伞员的落地速度应达到 **$0.99\upsilon_\infty$**

取 $A=56.7\mathrm{m}^2$ (国产运动-2甲型降落伞的面积)

$$y_{\min}=\frac{70}{2\times0.54\times1.25\times56.7}\ln\frac{1}{\left|1-0.99^2\right|}=5.2\,(\mathrm{m})$$

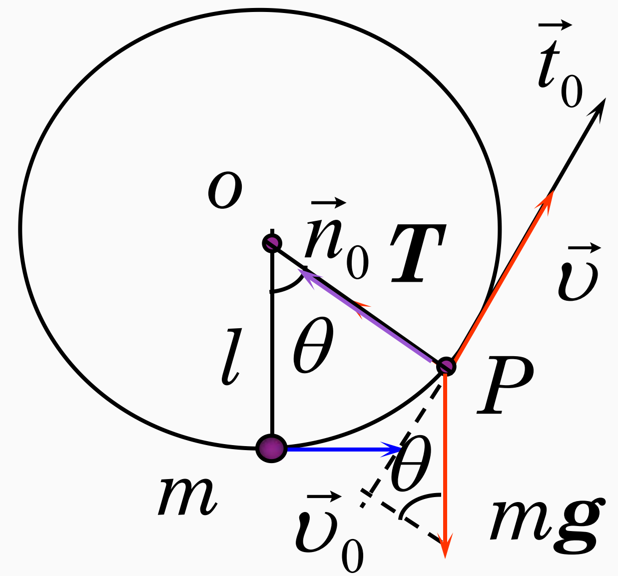
实际伞塔的高度远大于**5m**，现有伞塔高度一般为**25-85m**。

【参考文献】

[1]谈漱梅，余守宪．降落伞和跳伞塔，物理学原理在工程技术中的应用(马文蔚主编)．北京：高等教育出版社，1995. 27-29.

[2]余守宪, 胡颉. 跳伞塔跳伞和高空跳伞. 物理与工程, 2007, 17(2): 24-27.

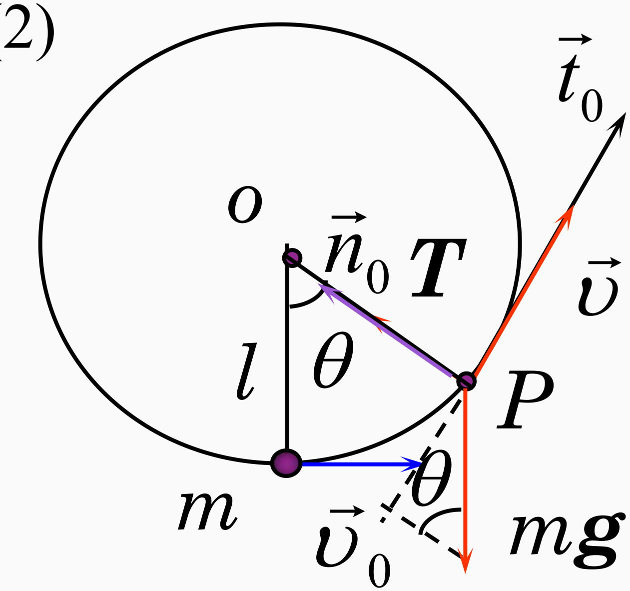
例4. 长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 O. 开始时小球处于最低位置. 若使小球获得如图所示的初速 v_0，小球将在铅直平面内作圆周运动. 求小球在任意位置的速率 v 及绳的张力 T.



解： 采用自然坐标系，根据牛顿第二定律，列出小球运动方程：

$$
\begin{cases}
-mg\sin\theta = ma_t = m\dfrac{d\upsilon}{dt} & (1) \\[2ex]
T - mg\cos\theta = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{l} & (2)
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = ma_t = m\dfrac{d\upsilon}{dt} & (1) \\ T - mg\cos\theta = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{l} & (2) \end{cases}$$



$$a_t(\theta) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\upsilon}{d\theta} = \frac{\upsilon}{l}\frac{d\upsilon}{d\theta}$$

$$(1) \Rightarrow \quad -mg\sin\theta = m\frac{\upsilon}{l}\frac{d\upsilon}{d\theta}$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = -gl\cdot\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gl(\cos\theta - 1)}$$

$$T = m\left(\frac{\upsilon_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

1. 国际单位制 （SI制）

基本单位:

物理量	长度	质量	时间	电流
单位名称	米	千克	秒	安培
符号	m	kg	s	A

导出单位：通过定义或物理定律等导出的单位.

如： 速度 $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ 米/秒 $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$

加速度 $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ 米/秒^2 $(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$

力 $\vec{F} = m\vec{a}$ 牛顿 $(1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}})$

功 $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 焦耳 $(1\mathrm{J} = 1\mathrm{N \cdot m})$

2. 量纲：

表示一个物理量由哪些基本物理量组成，通常用方括号表示。

基本量的量纲： [长度]=L， [质量]=M，

[时间]=T， [电流]=I

任一物理量 Q 的量纲：$[Q] = L^{p} M^{q} T^{r} I^{s}$

例： [v]=[长度]/ [时间]=$L\,T^{-1}$

[a]=[长度] /[时间²]=$L\,T^{-2}$

[p]=[质量]·[速度]= $M\,L\,T^{-1}$

[F]=[质量]·[加速度]=$M\,L\,T^{-2}$

3、量纲的用途

◆同一物理量不同单位间的换算(因为它们的量纲相同，可以列为等式，进行换算)

◆检验公式的正误 $\vec{F}\Delta t = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = m\Delta\vec{\upsilon}$

左边量纲 $[F\Delta t]=[F][\Delta t]=MLT^{-2}T=MLT^{-1}$

右边量纲 $[m\Delta v]=[m][\Delta v]=MLT^{-1}$

一个等式相等应满足：

量纲相同，数值相等，量性相同

在进行复杂公式推导时，可通过量纲分析，检验推导的正确性。

◆确定方程中比例系数的量纲和单位

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

量纲： $[G] = \dfrac{[F][r^2]}{[m_1][m_2]} = \dfrac{MLT^{-2} \cdot L^2}{M^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}$

单位： $\mathrm{m^3/kg.s^2}$

◆估计某些物理量的数量级