教学要求

◆**掌握**描述简谐运动的各个物理量(特别是相位)的物理意义及各量间的关系。

◆**掌握**描述简谐运动的图线表示法和旋转矢量法，并会用于简谐运动规律的讨论和分析。

◆**掌握**简谐运动的基本特征，能建立一维简谐运动的微分方程，能根据给定的初始条件写出一维简谐运动的运动方程，并理解其物理意义。

◆**理解**同方向、同频率简谐运动的合成规律，及同方向频率略有差异两谐振动的合成规律。

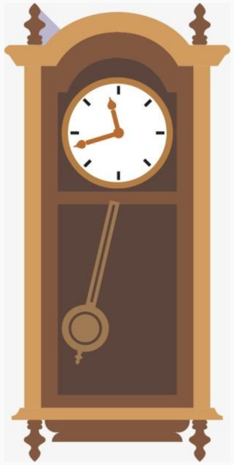
一、简谐振动

1. 机械振动

◆ 定义：机械运动是一个物体相对于另一物体的(宏观)位置变化, 或一个物体各部分之间的(宏观)位置变化.

机械振动是物体在某一平衡位置附近来回往复的运动(周期性的位置变化).

◆ 实例：心脏的跳动、钟摆、乐器、海浪起伏、地震等



2. 简谐振动 (谐振动)

物体振动时，如果离开平衡位置的位移 x (或角位移 θ) 随时间 t 变化可表示为余弦函数或正弦函数

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

(本课程标准形式)

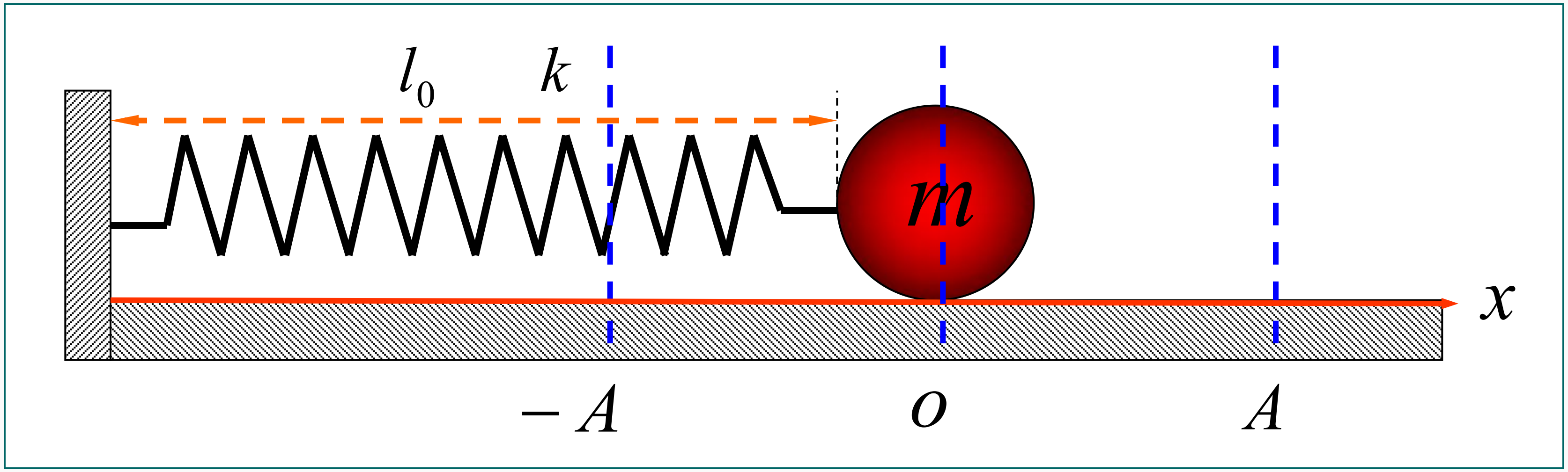
◆ 最简单、最基本的振动。作简谐振动的物体, 称为**谐振子**.

$$\boxed{\text{简谐运动}} \xleftrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}} \boxed{\text{复杂振动}}$$

【概念辨析】从概念上来说，物体的状态, 必须用状态量来描述, 而不能用过程量来描述, 而位移是过程量, 为什么能用它描述?

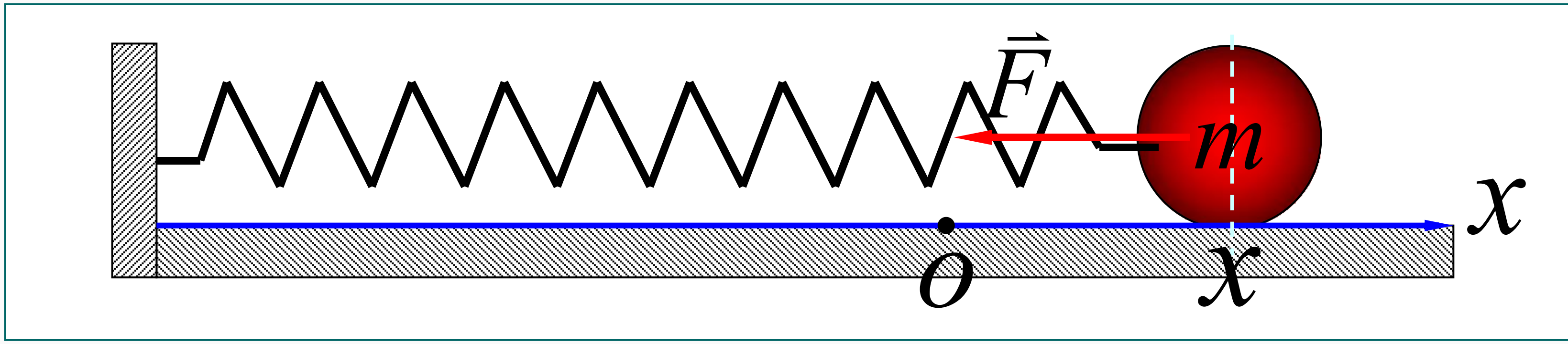
振动方程中的位移, 特指相对于平衡位置的位移，而不是任意两点之间的位移. 通常将平衡位置选为原点, 则位移与位置重合. 因此, 振动方程中的位移，本质上指的是位置.

3. 弹簧振子的运动分析



◆弹簧振子：弹簧—物体系统

◆平衡位置：振动物体所受回复力为零(回复力=合外力沿运动方向的分量)的位置.



由胡克定律： $F=-kx$ 动力学特征方程

由牛顿定律： $-kx=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$

得： $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0$ 令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \quad (1)$$ 谐振动微分方程

其通解为： $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ (2) 谐振动运动方程

（1）（2）两式均为物体作谐振动的特征表述。

简谐振动定义（判据）：

1 运动方程为 $q = A\cos(\omega t+\phi)$ (q= x, y, z, 或 θ)

(又称振动方程、振动表达式、位移表达式)

2 描述运动的物理量遵从微分方程

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2 q=0$$ (q= x, y, z, 或 θ)

3 物体所受力为负线性回复力 $\vec{F}=-k\vec{x}$ 动力学特征

【说明】对单摆, 线性回复力变成线性回复力矩 $M = -k\theta$. 南理工教材称上式为谐振动的动力学特征方程, 程守洙教材称为动力学特征, 其他教材就称为线性回复力.

◆ 满足以上三式中的任意一式，即可判定为简谐振动。

4. 单摆

$\theta < 5^\circ$时， $\sin\theta \approx \theta$

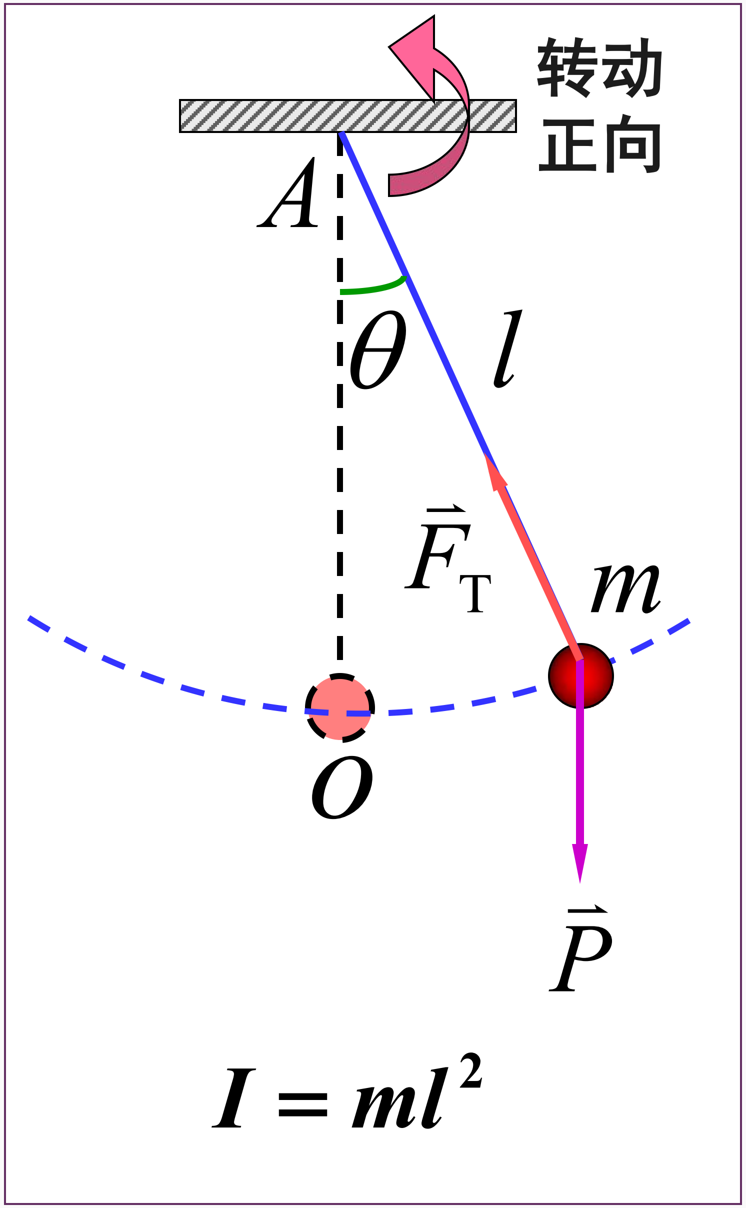
$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

$$-mgl\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad I = ml^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad \text{令}\ \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$ → 谐振动

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)$$



二、 简谐振动的振动曲线，速度和加速度

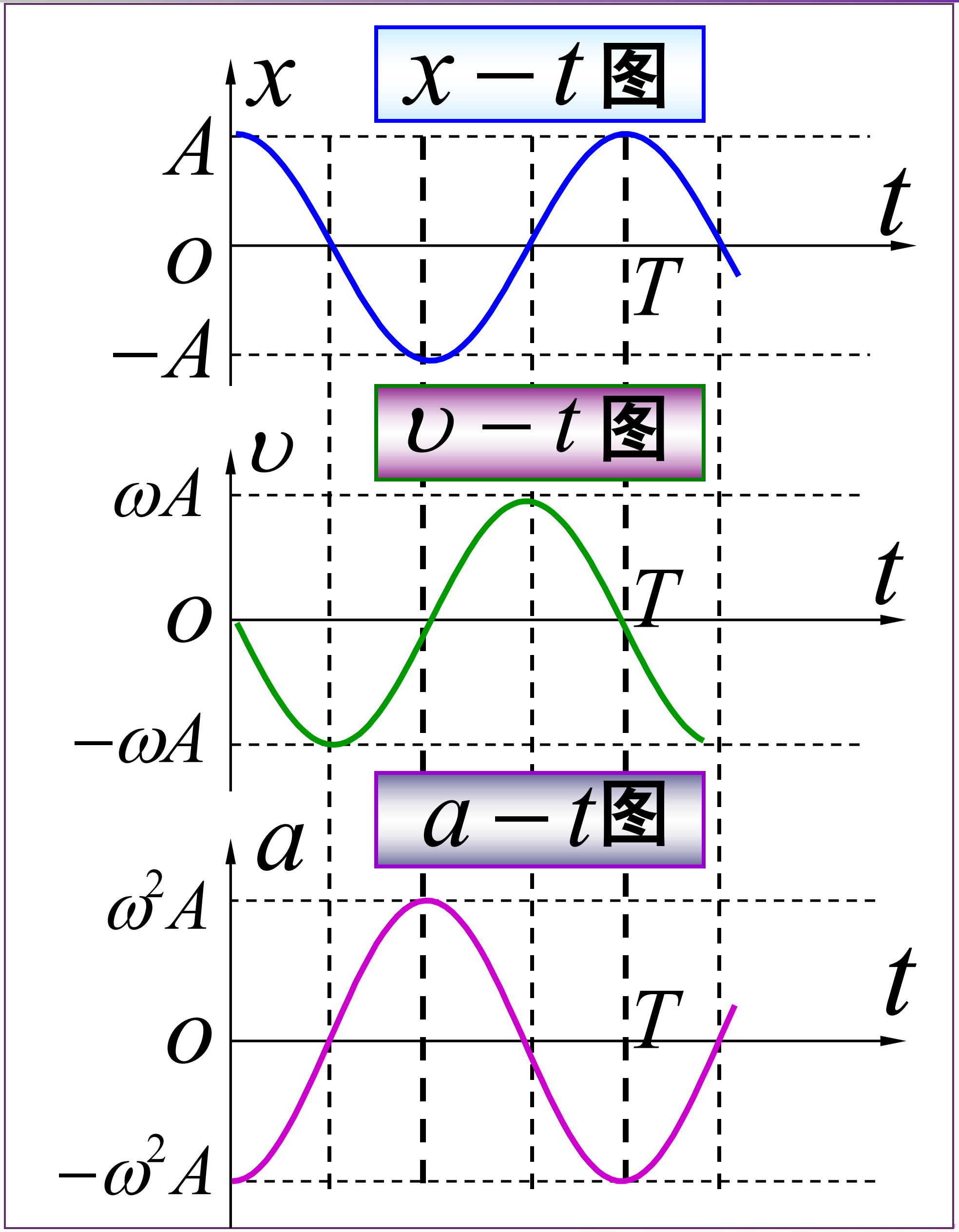
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

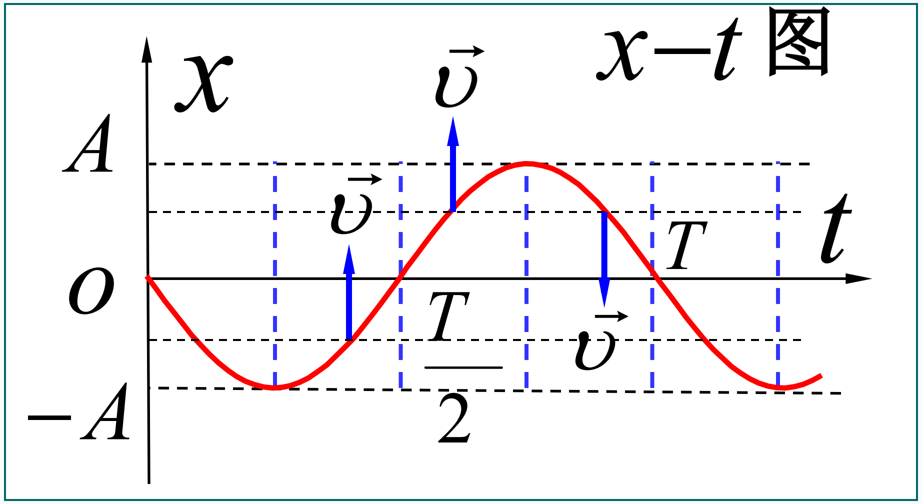
$$= \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



简谐运动中，x 和 υ 之间不存在一一对应的关系.



$$\begin{cases} x = A\cos(\boxed{\omega t+\varphi}) \\ \upsilon = -\omega A\sin(\boxed{\omega t+\varphi}) \end{cases}$$

相位(又称相角) $\boxed{\omega t+\varphi}$

1） $\omega t+\varphi \rightarrow (x,\upsilon)$ 存在一一对应的关系；

2）相位在 $0\sim 2\pi$ 内变化时，质点无相同的运动状态；

相位相差$2n\pi$ (n为整数)，质点运动状态全同.（周期性）

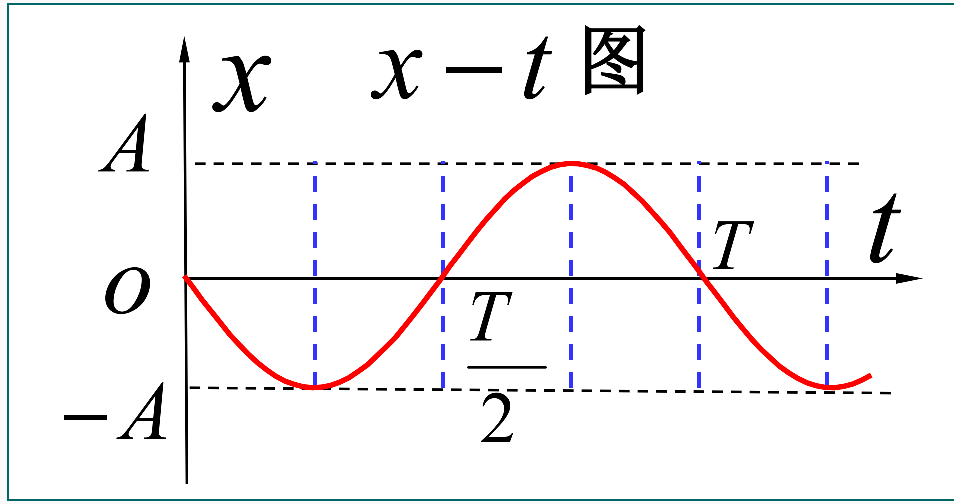
3）初相位 $\varphi(t=0)$ 描述质点初始时刻的运动状态.

（φ 取 $[-\pi \rightarrow \pi]$ 或 $[0 \rightarrow 2\pi]$ ）

三、 描述简谐振动的特征量(三要素)

1. 振幅

$$A = |x_{max}|$$



2. 周期、频率、角频率

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- 周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- 频率 $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$
- 角频率 $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

弹簧振子周期

注意

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关

3. 相位(又称相角) $\boxed{\omega t + \varphi}$

4 常数 A 和 φ 的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ \upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

(1) 初始条件：$t = 0,\ x = x_0,\ \upsilon = \upsilon_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ \upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = \dfrac{-\upsilon_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$

- 振动系统的三要素中，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

例1、已知 $t=0,\ x=0,\ \upsilon<0$, 求 φ

解：设 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

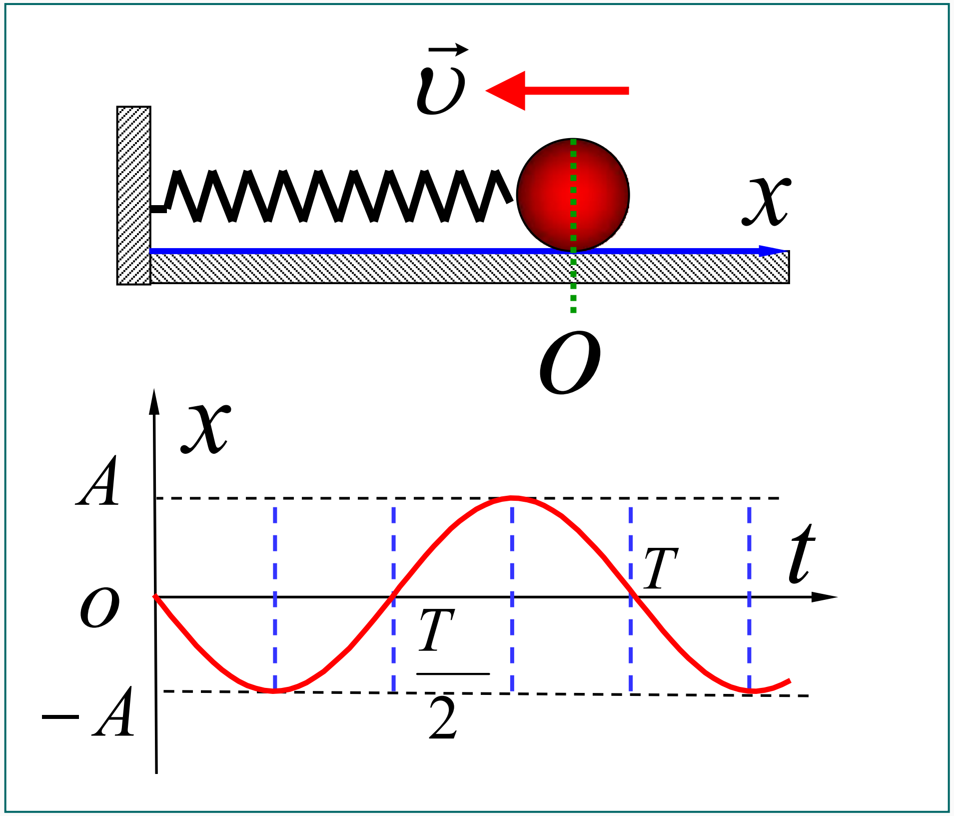
则 $\upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$t=0$ 时, $\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi = 0 \\ \upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi < 0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi > 0 \end{cases}$

共同定出 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

振动方程：$x = A\cos(\omega t+\pi/2)$



【注意】有的解答仅从$\cos\varphi=0$, 就得出 $\varphi=\pi/2$, 这是不完整的解法, 如果初始条件是$\upsilon_0>0$, 就得到错误答案. 必须将$\cos\varphi$与$\sin\varphi$ 联立, 才能唯一确定初相位. 否则, 只由一个三角函数确定初相位, 在(0, 2π)或(-π, π)范围应有两个解, 然后代入初始条件去确定哪一个解合理. 由$\tan\varphi$确定初相位时, 也是这样. 练习十(1), (2), (3), (5), 都有这样的问题. 完成作业时应注意将解法完善.

例2(教材例4-2)、定滑轮半径为 R, 转动惯量为 I , 一长度不变的轻绳一端与固定的劲度系数为 k 的轻弹簧相连, 另一端与质量为 m 的物体相连, 绳子与滑轮间无相对滑动, 忽略轮轴摩擦. 现将物体从平衡位置拉下一小段距离后释放, 证明物体作谐振动并求其振动周期.

证法1：设物体平衡时弹簧伸长l_0, 则：$mg = kl_0$

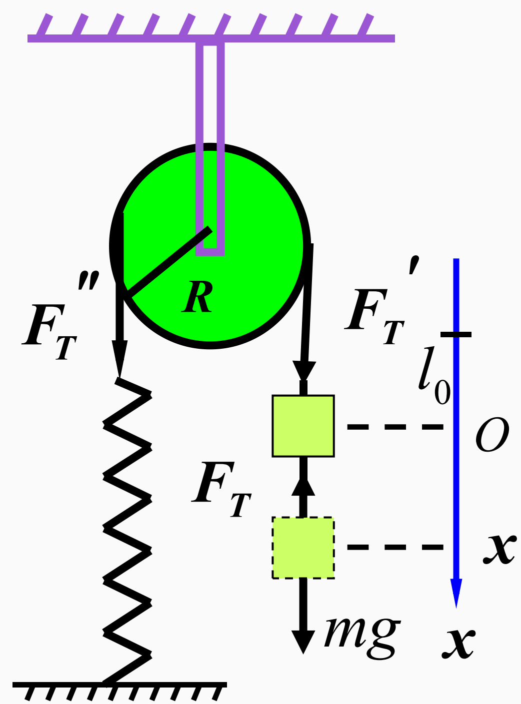
以物体的平衡位置为坐标原点, 向下为正.

物体在任一位置 x 处：$mg - F_T' = ma$

对滑轮有：$F_T'R - F_T''R = I\alpha$

联系：$F_T'' = k(x + l_0), a = \alpha R$

联立求解, 得 $a = -\dfrac{k}{m + \dfrac{I}{R^2}}x$, 令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m + \dfrac{I}{R^2}}$



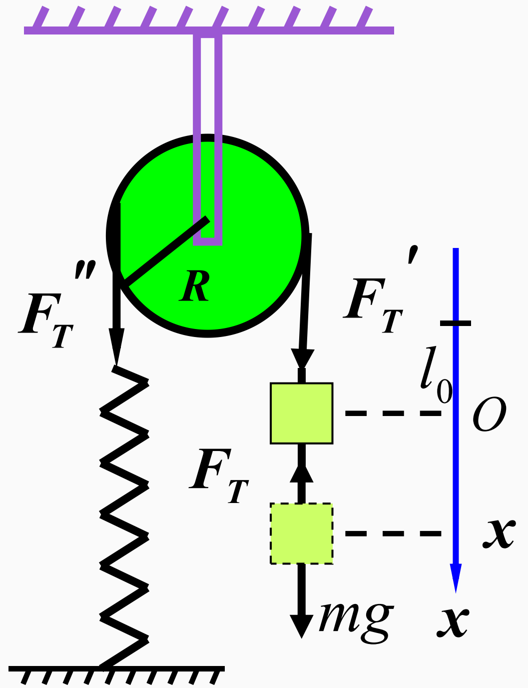
得：$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

这正是谐振动的运动学特征方程, 可见物体做简谐振动.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + I/R^2}{k}}$$

证法2：系统机械能守恒，选物体平衡位置为势能零点

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}k(x+l_0)^2-mgx=C$$



对时间求导，得

$$m\upsilon a+I\omega\alpha+k(x+l_0)\upsilon-mg\upsilon=0$$

$$\because\ \omega=\frac{\upsilon}{R},\ \alpha=\frac{a}{R},\quad \therefore m\upsilon a+I\frac{\upsilon}{R}\frac{a}{R}+kx\upsilon=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m+\frac{I}{R^2}}x=0,\quad 令\ \omega^2=\frac{k}{m+\frac{I}{R^2}}$$

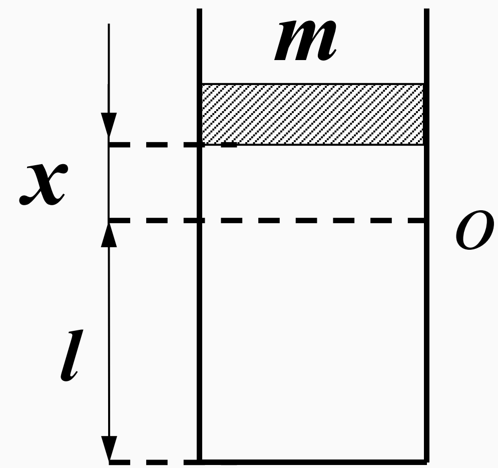
$$得\ \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0,\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+I/R^2}{k}}$$

【注意1】本题中物体应理解为质点，其位置应指其质心位置，教材画在物体顶部，易引起误解.

【注意2】求解振动问题，务必以平衡位置为坐标原点，这样得到的振动方程才具有谐振动的标准形式. 否则，应该取相对于平衡位置的位移为振动的坐标变量，得到的振动方程才具有标准形式，如练习九(7)涉及两个物体的位移，不可能将它们的平衡位置都取为原点.

例3(教材例4-3)、空气弹簧是在一个密封的汽缸中充入压缩空气，利用气体可压缩性实现其弹性作用。空气弹簧作为性能优良的防振设备，被广泛应用于工业设备的防振、减震，比如汽车的空气悬架系统，空气弹簧就是其最重要部分之一。

现设空气(可视为理想气体)密封于汽缸内，活塞质量为 m，面积为 S，能在竖直方向无摩擦地滑动。设外界大气压强为 p_0，平衡时汽缸内气体压强为 p，体积为 $V=Sl$，现把活塞上拉一小位移后释放，任其作微振动，设气体温度不变，证明活塞作谐振动，并求振动周期。



解：活塞平衡时有：$mg+p_0S=pS$

以活塞平衡位置为坐标原点, 向上为正.

活塞在任一位置 x 处：$p'S-mg-p_0S=(p'-p)S=ma$

汽缸压缩可视为等温过程

$$pV=p'V',\quad p'-p=-p\cdot\frac{V'-V}{V'}=-\frac{pSx}{S(l+x)}\approx-\frac{px}{l}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{pS}{ml}x=0,\quad 令\ \omega^2=\frac{pS}{ml},\ 则\ \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0,\quad T=2\pi\sqrt{\frac{ml}{pS}}$$

4.2 谐振动的能量

以弹簧振子为例 $F=-kx$ $\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ \upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$

一、动能和势能

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

二、总能量

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2$$

（振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

由机械能守恒和初始条件决定振幅：$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$，$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k}\upsilon_0^2 + x_0^2} = \sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{\omega^2} + x_0^2}$

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ (本课程标准形式)

简谐振动定义（判据）：

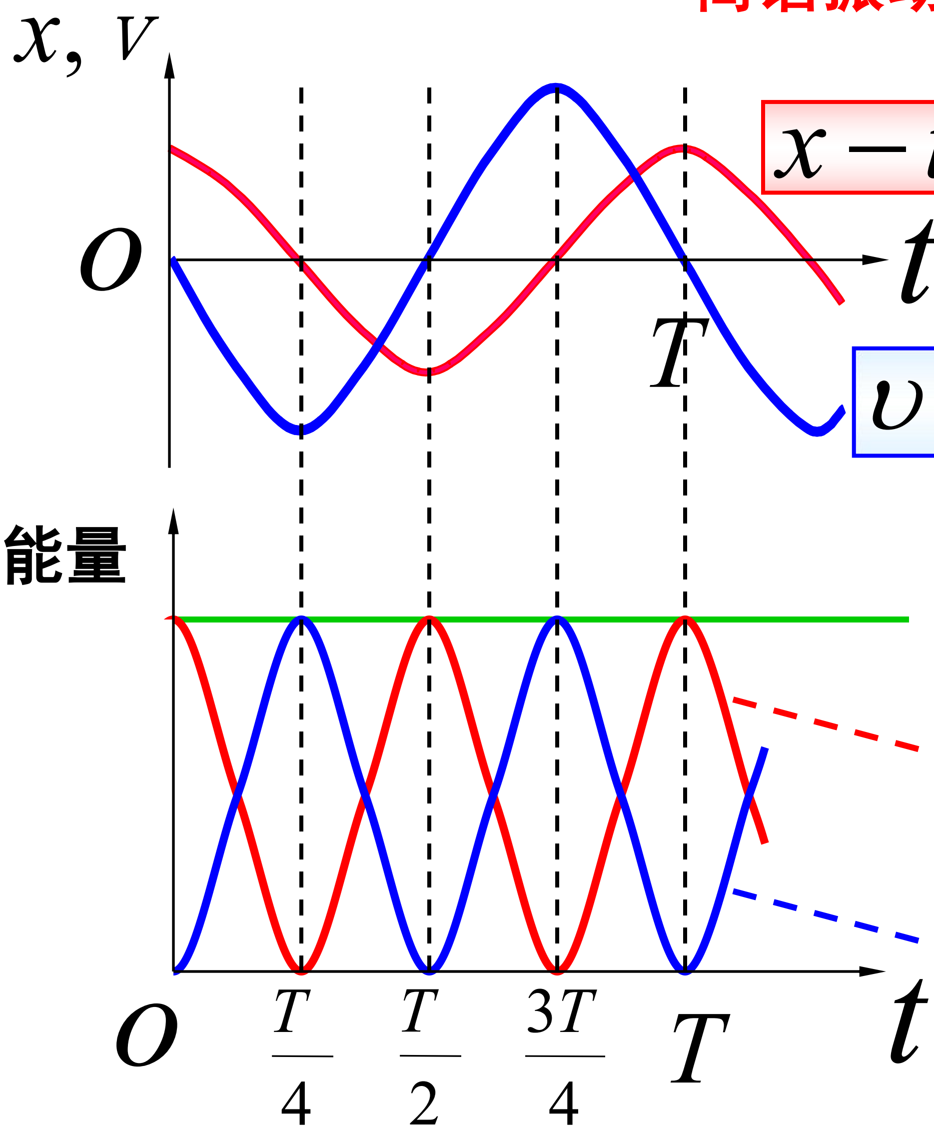
1 运动方程为 $q = A\cos(\omega t + \phi)$ ($q = x, y, z$, 或 θ)

2 描述运动的物理量遵从微分方程

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$ ($q = x, y, z$, 或 θ)

3 物体所受力为负线性回复力 $\vec{F} = -k\vec{x}$

简谐振动能量图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$\upsilon = -\omega A\sin\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t$$

三、平均能量

$$x = A\cos(\omega t+\varphi),\ \upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\overline{E}_k = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}m\upsilon^2 dt = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)dt$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}[1-\cos 2(\omega t+\varphi)]dt$$

$$= \frac{1}{4}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}E_{总}$$

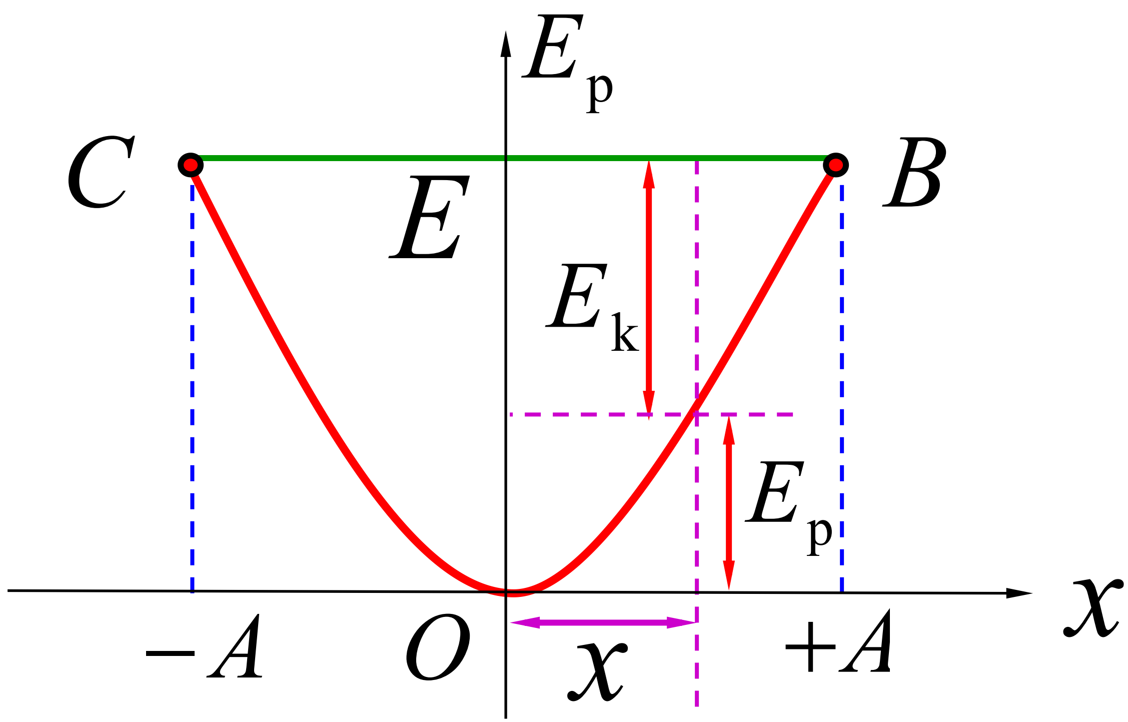
$$\overline{E}_p = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kx^2 dt = \frac{1}{2}kA^2\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)dt$$

$$= \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E_{总}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐振动能量守恒，振幅不变

简谐振动势能曲线



4.2 谐振动的能量

能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐振动方程

弹簧谐振子

$$E=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}kx^2=C$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt}+kx\cancel{\frac{dx}{dt}}=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

单摆

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2+mgl(1-\cos\theta)=C$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I\omega^2+mgl(1-\cos\theta)\right]=0$$

$$I\cancel{\omega}\frac{d\omega}{dt}+mgl\sin\theta\cancel{\frac{d\theta}{dt}}=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

例1、质量为0.10kg的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 作简谐振动，其最大加速度为 $4.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，求：

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

$$x = A\cos(\omega t + \phi),$$

$$v = \omega A\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \phi + \pi)$$

解：（1）

$$a_{\max} = \omega^2 A$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = 20\mathrm{s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\mathrm{s}$$

（2） $E_{\mathrm{k,max}} = \dfrac{1}{2} m \upsilon_{\max}^2 = \dfrac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$

（3） $E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$

（4） $E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时，

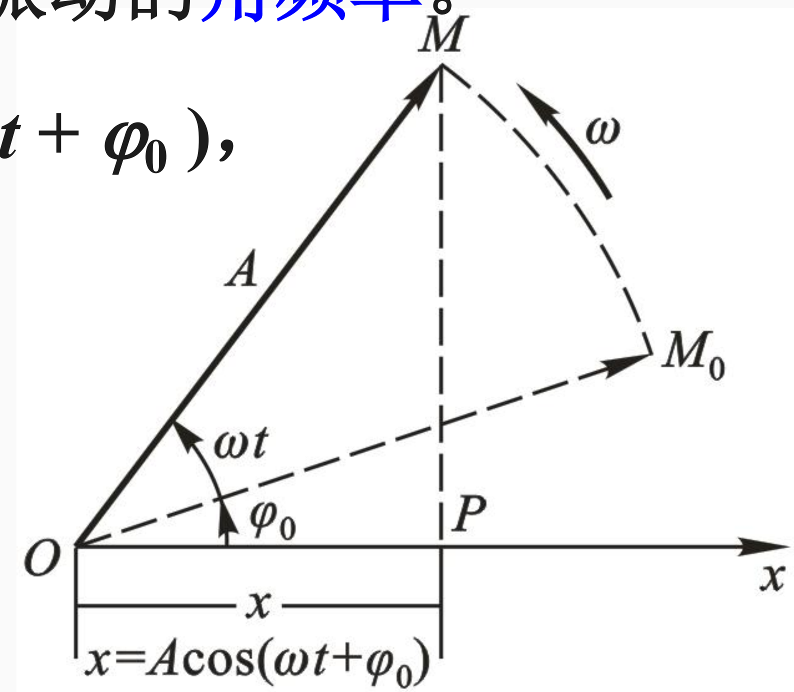
由 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} E = \dfrac{1}{4} k A^2$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = \pm 0.707 \times 10^{-2}\ (\mathrm{m}) = \pm 0.707\ (\mathrm{cm})$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

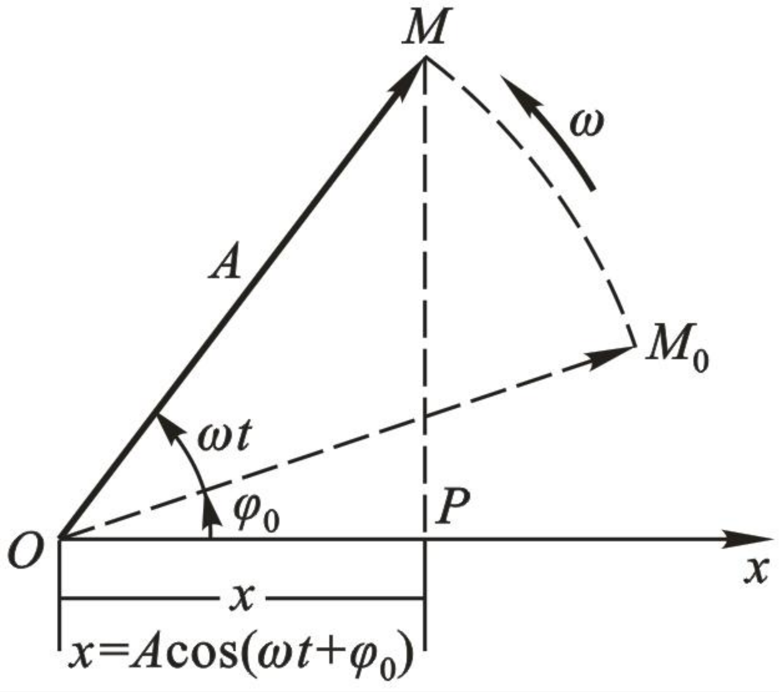
旋转矢量 $\vec{A}$ 绕原点逆时针方向旋转

- 旋转矢量 $\vec{A}$ 的模即为简谐振动的振幅。
- 旋转矢量 $\vec{A}$ 的角速度 ω 即为振动的角频率。
- 旋转矢量 $\vec{A}$ 与 x轴的夹角($\omega t + \varphi_0$)，为简谐振动的相位。
- $t=0$ 时，$\vec{A}$ 与x轴的夹角 φ_0 即为简谐振动的初相位。

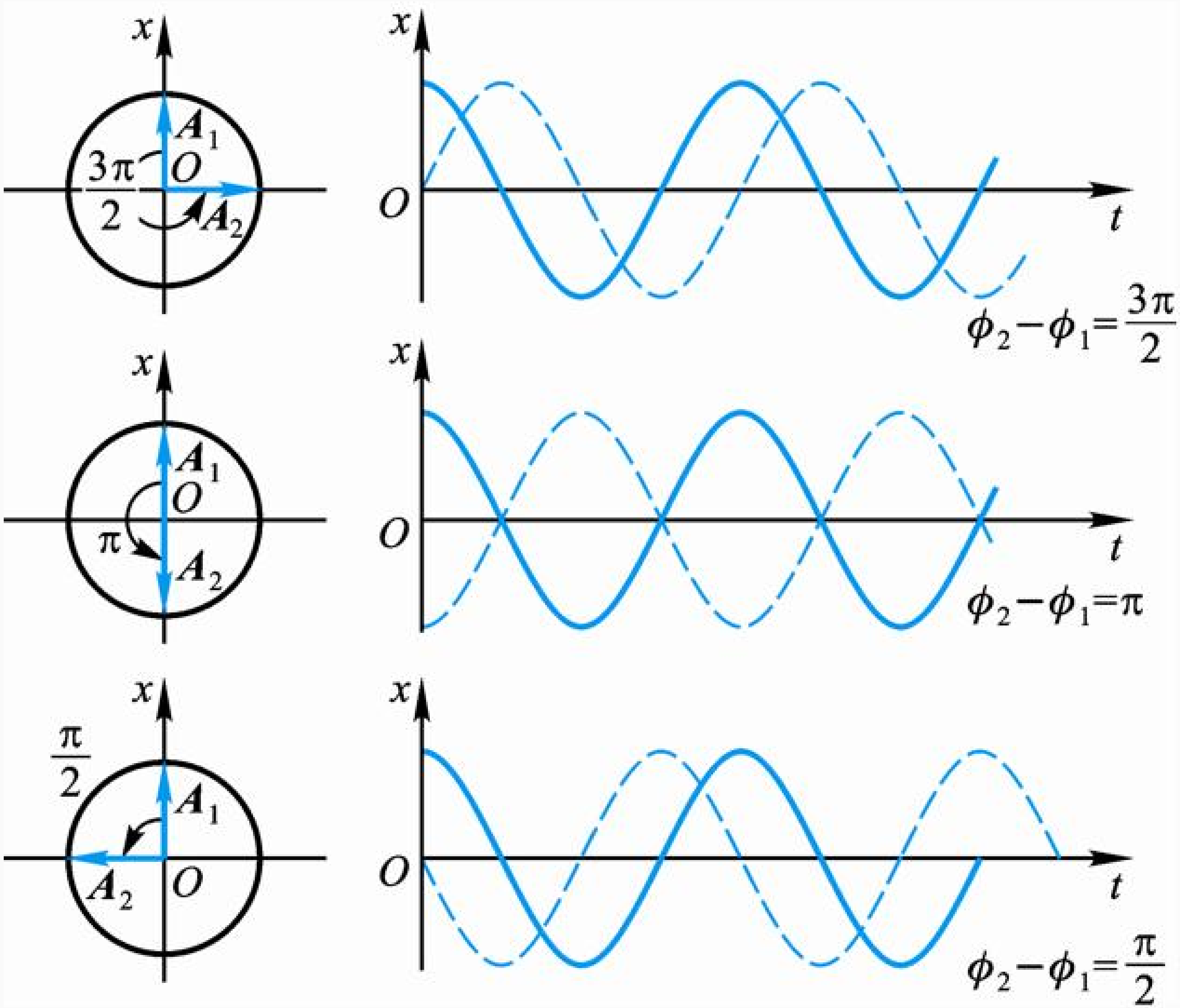


旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在x轴上的投影点P的位移：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



- 投影点P的运动为简谐振动。



两简谐振动同频率同振幅初相位不同

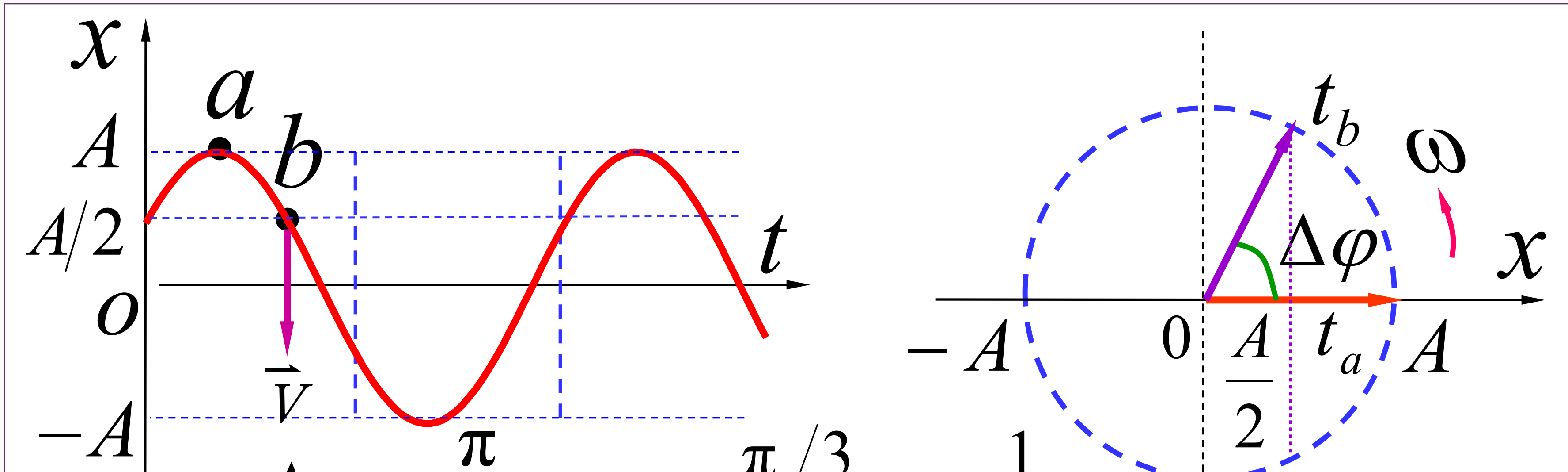
讨论

➢ 相位差：表示两个相位之差 .

1) 对同一简谐运动，(不同时刻的)相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间. $\Delta\varphi=(\omega t_2+\varphi)-(\omega t_1+\varphi)=\omega\Delta t$

$$x_1 = A\cos(\omega t_1+\varphi)$$
$$x_2 = A\cos(\omega t_2+\varphi)$$

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T}$$



$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad \Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi}T = \frac{1}{6}T$$

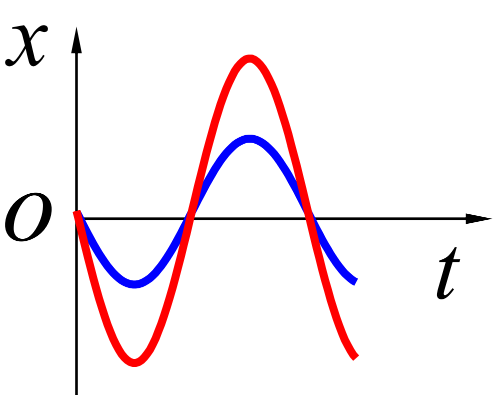
4.3 简谐振动的旋转矢量投影表示法

2) 对于两个同频率的简谐运动，(同一时刻的)相位差表示它们间步调上的差异.（解决振动合成问题）

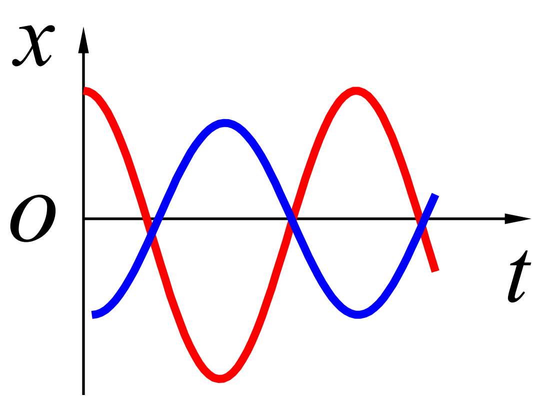
$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1) \qquad \boxed{\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1}$$

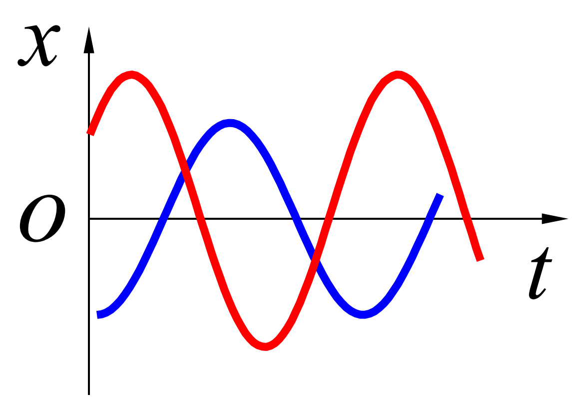
$\Delta\varphi = 0$ 同步



$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相



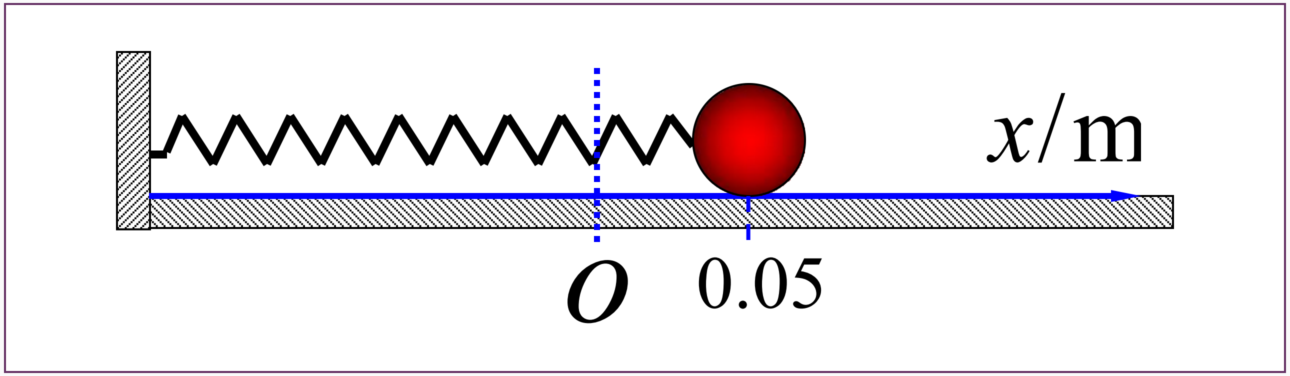
$\Delta\varphi$为其它 $\begin{cases}\text{超前}\\ \text{落后}\end{cases}$



例1、如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数$k=0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，物体的质量$m=20\mathrm{g}$.

（1）把物体从平衡位置向右拉到 $x=0.05\mathrm{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\dfrac{A}{2}$ 处时的速度；



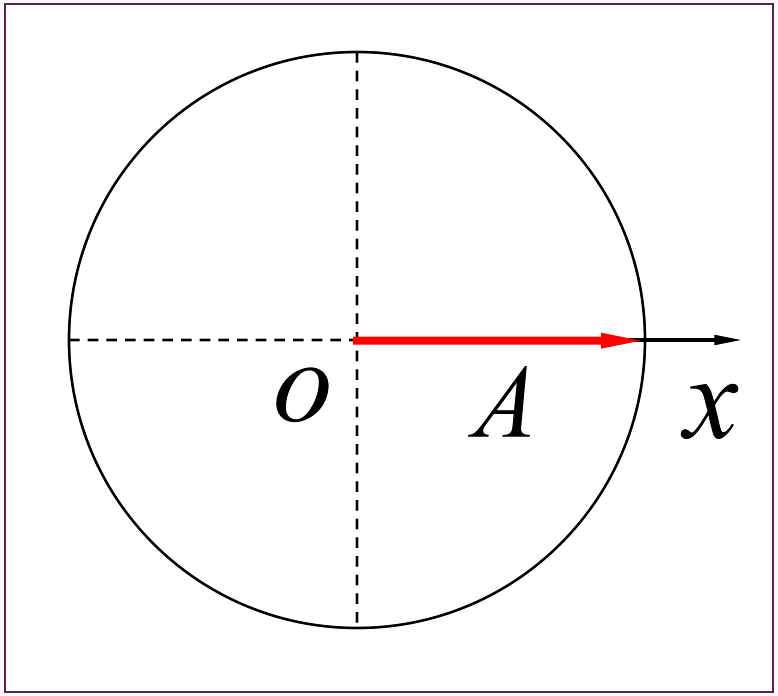
解： （1）求简谐运动方程

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{0.72}{0.02}}=6.0\mathrm{s}^{-1}$$

$t=0$ 时, $x_0=0.05\mathrm{m}$， $\upsilon_0=0$

$$\because E=\frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2+\frac{1}{2}kx_0{}^2=\frac{1}{2}kx_0{}^2=\frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore A=x_0=0.05\mathrm{m}$$



由旋转矢量法可知 $\varphi=0$

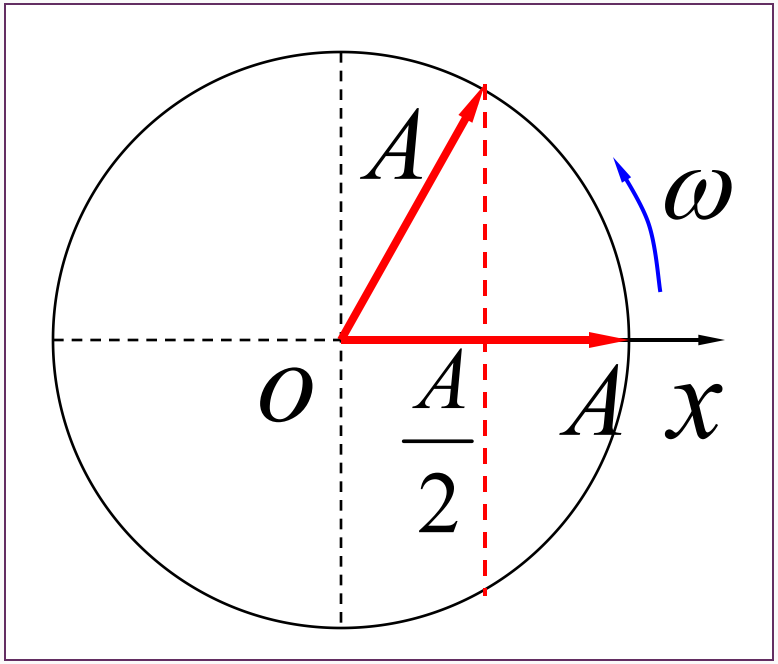
$$\therefore x=A\cos(\omega t+\varphi)=0.05\cos 6.0t\ (\mathrm{m})$$

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

解：$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t) = \frac{A}{2}$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$



由旋转矢量图可知 $\omega t = \frac{\pi}{3}$

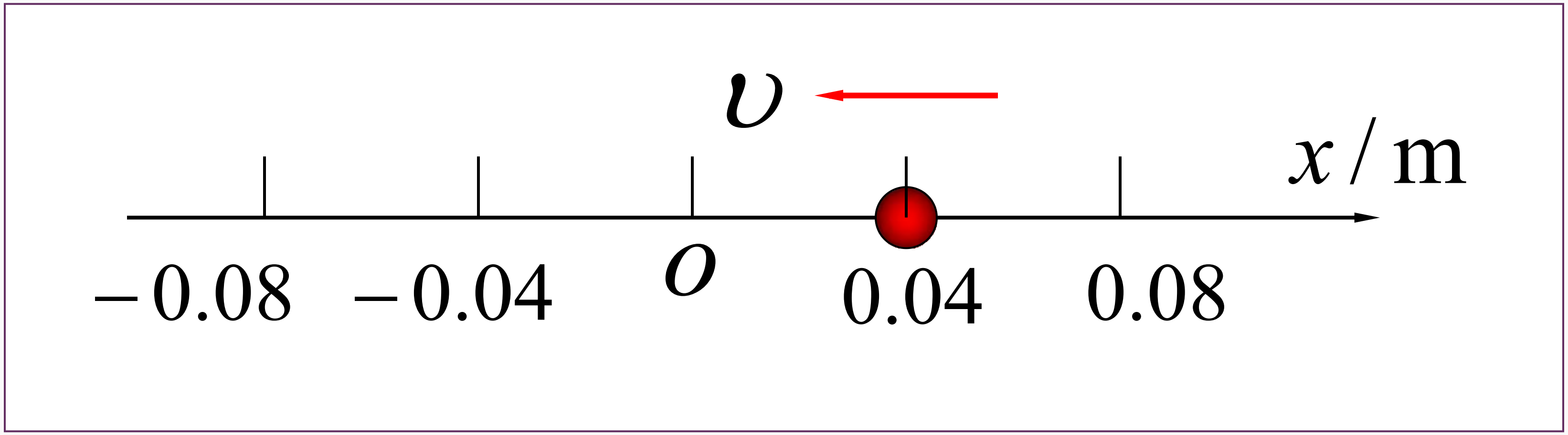
$$\upsilon = -\omega A \sin \omega t$$

$$= -0.26\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$ （负号表示速度沿 Ox 轴负方向）

例2、一质量为 0.01kg 的物体作简谐运动，其振幅为 **0.08m**，周期为 **4s**，起始时刻物体在 $x = 0.04$m 处，向 Ox 轴负方向运动（如图）. 试求

（1）$t = 1.0$s 时，物体所处的位置和所受的力；

（2）由起始位置运动到 x=-0.04m 处所需的最短时间.



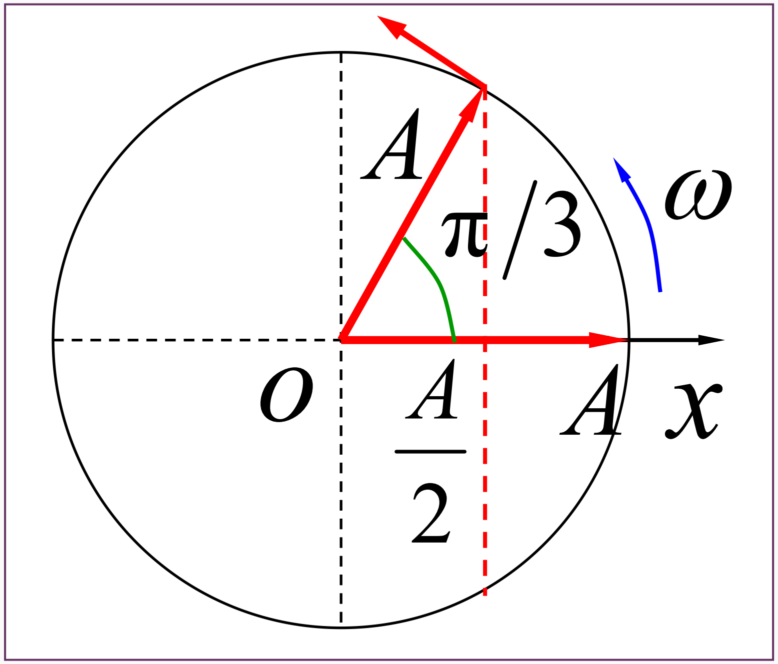
解 $A = 0.08\text{m}$ $\qquad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$

$$A = 0.08\text{m} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$$

$$t = 0, x = 0.04\text{m}$$ 代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$0.04 = 0.08\cos\varphi$$ 得： $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$

$$\because \upsilon_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$



$$x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) \ \ (\text{m})$$

$$x = 0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\mathrm{m})$$

$t = 1.0\mathrm{s}$ 代入上式得

$$x = -0.069\mathrm{m}$$

$$F = -kx = -m\omega^2 x$$

$$= -0.01 \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times (-0.069)$$

$$= 1.70 \times 10^{-3}\ (\mathrm{N})$$

（2）由起始位置运动到 x=-0.04m 处所需要的最短时间.

法一：解析法. 设由起始位置运动到处所需要的最短时间为 t

将 x=-0.04m代入运动方程,

$$-0.04=0.08\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3})$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi \text{ 或 } \frac{4}{3}\pi \qquad \Rightarrow t=\frac{2}{3}\text{s 或 } 2\text{s}$$

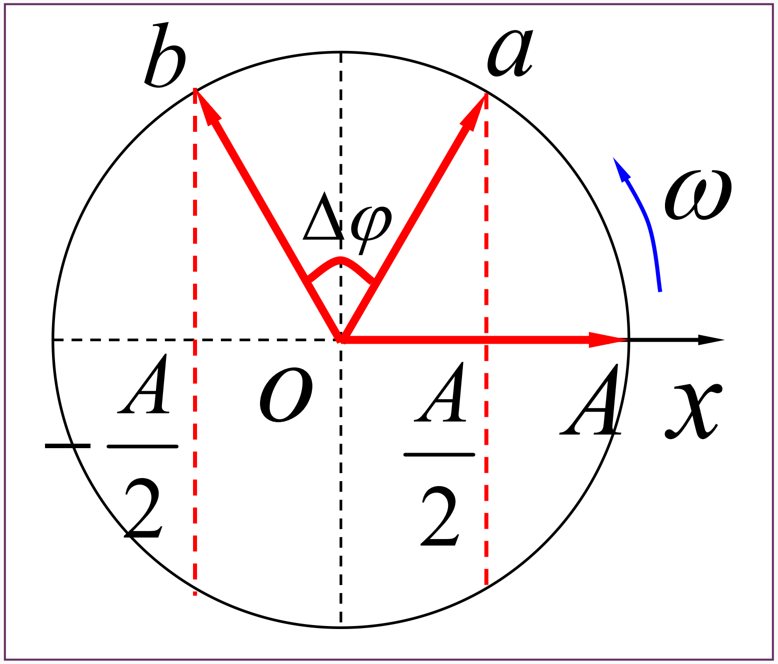
所以最短时间 $t=\frac{2}{3}s$

解法二

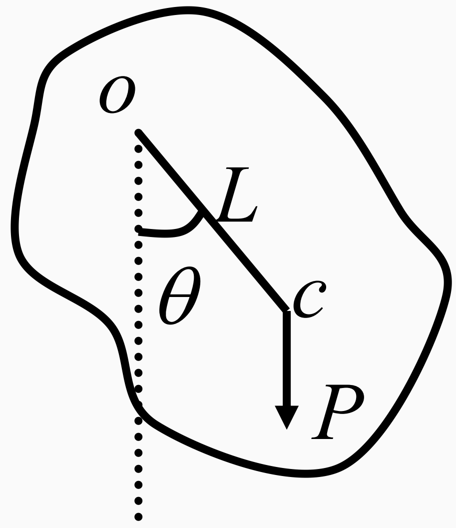
质点从x=0.04m运动到x=-0.04m最短的时间，由旋转矢量法可知对应的旋转矢量是从a运动到b，则所需时间满足

$$\omega t=\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}s$$



设一质量 m 的物体（如图所示、复摆），它能绕水平轴自由摆动，质心到转轴距离为 L，转动惯量为 I，（1）求它作小角度摆动时的振动周期。（2）若初始时刻物体在平衡位置处向左摆动，且最大摆角为 θ_m，设复摆逆时针转动为正方向求它的运动方程。



解:(1) $M=-mgL\sin\theta=-mgL\theta$

由转动定律 $M=I\alpha=I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgL}{I}\theta=0$$

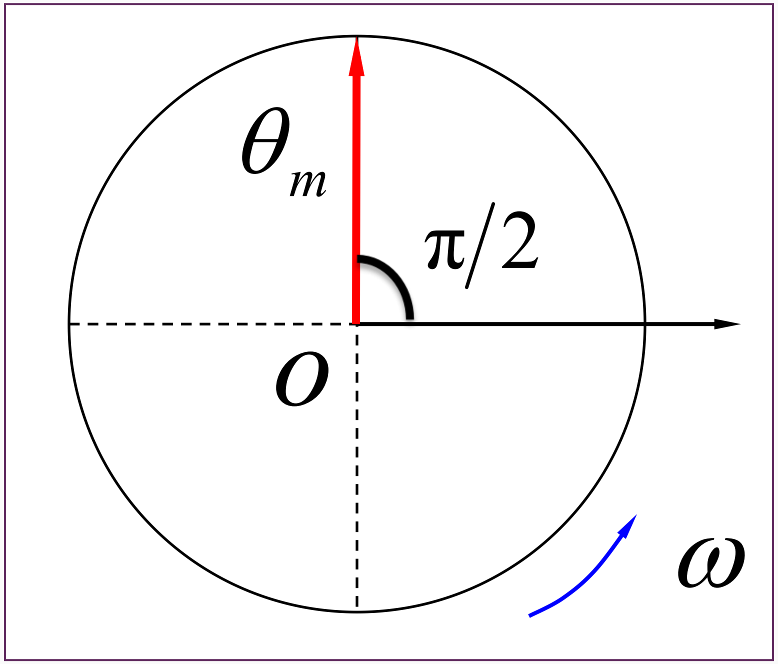
令 $\omega^2=\dfrac{mgL}{I}$ $\Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$

所以，其振动周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgL}}$

(2) 方程 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$ 的通解为：

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi),$$

垂直平面向外为转轴正方向，则初始时刻 $t=0$，$\theta=0$，$\omega_r<0$,



由旋转矢量投影法可知

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

所以运动方程为:

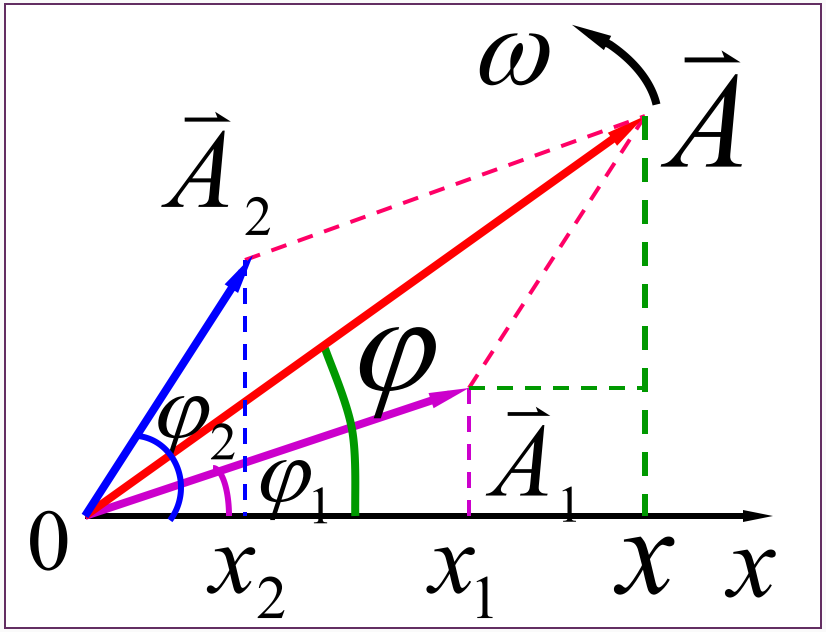
$$\theta=\theta_m\cos(\sqrt{\frac{mgL}{I}}t+\frac{\pi}{2})$$

一、 同方向、同频率两简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



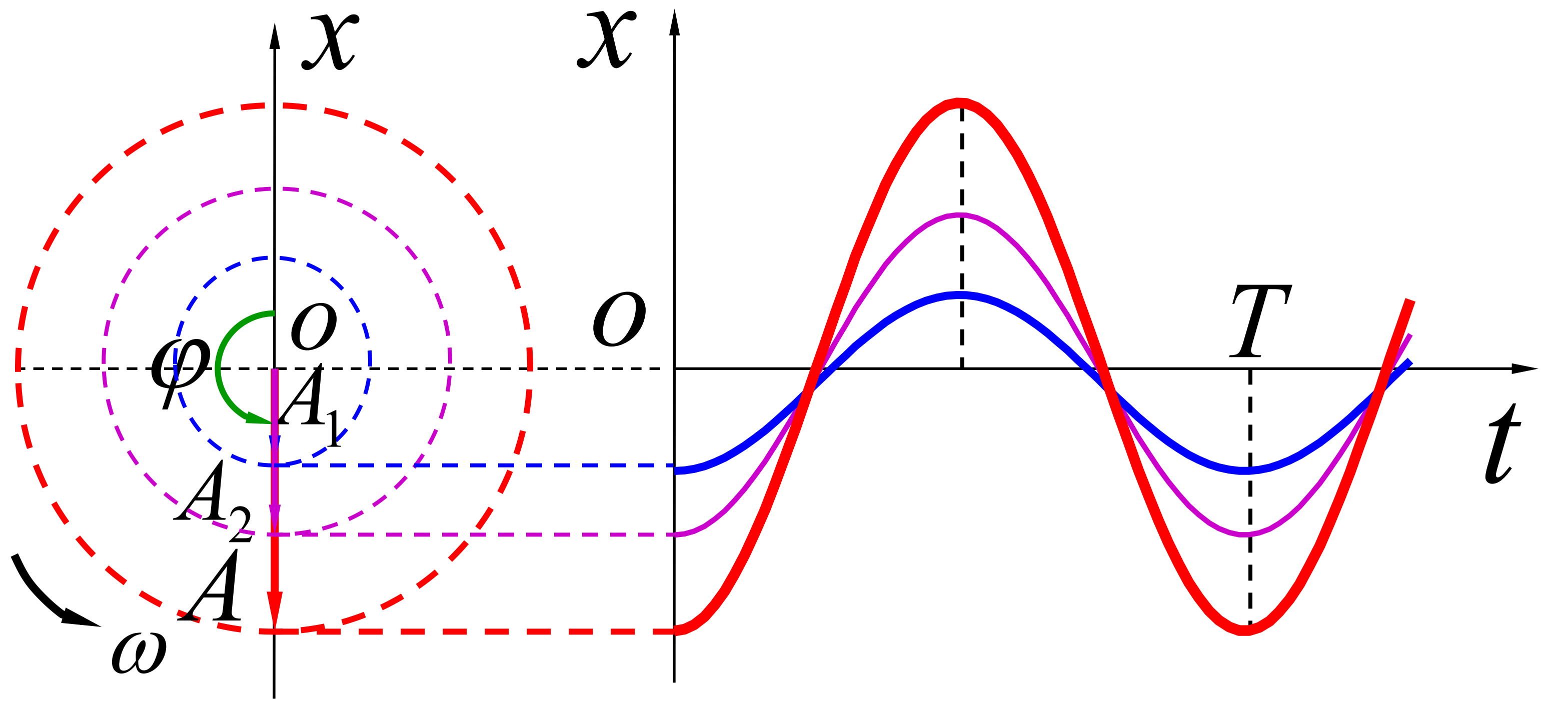
$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

同方向、同频率的两谐振动, 合成后仍为谐振动

讨论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

1、**相位差** $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi,\quad (k=0,1,2,\cdots)$



$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1 \end{cases}$$

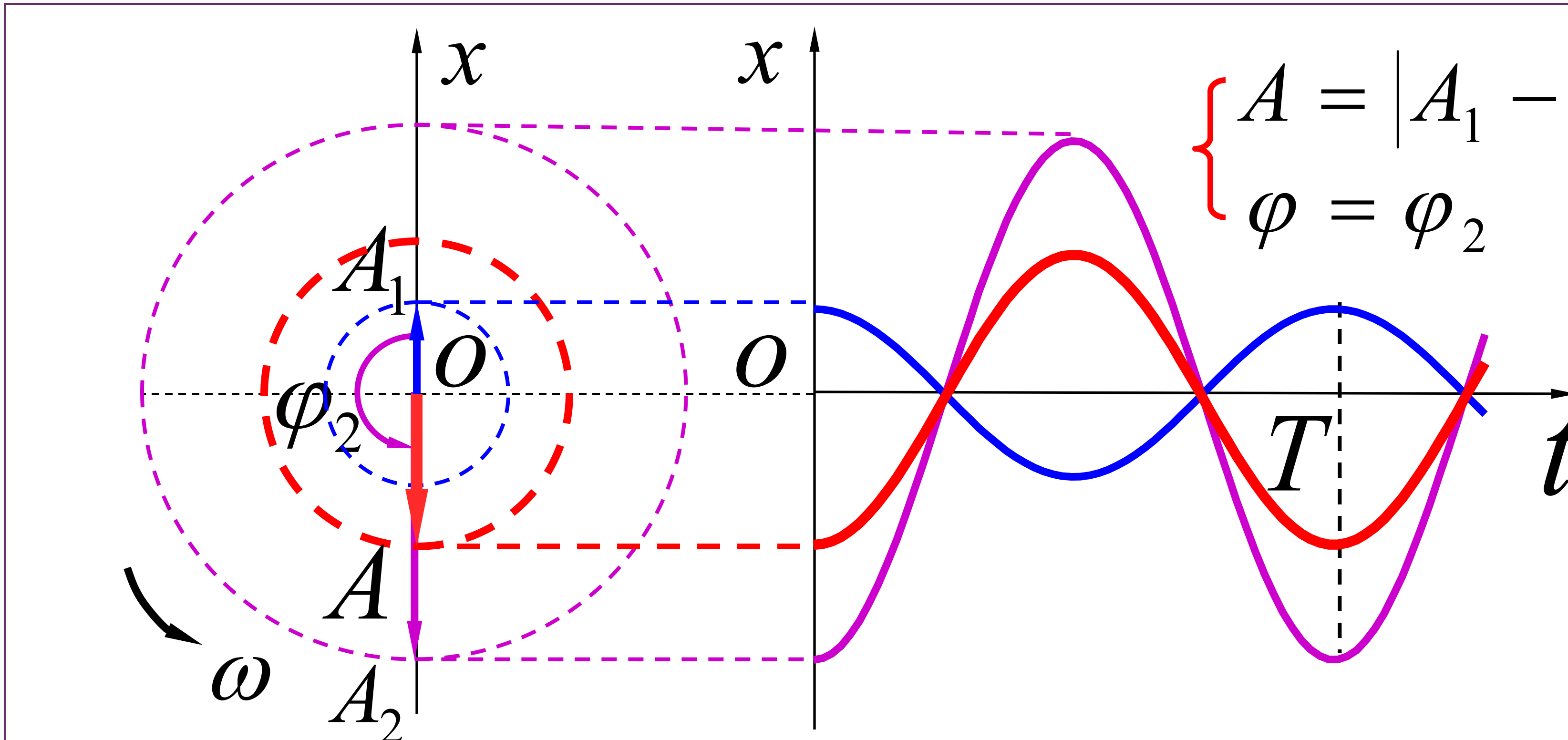
$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2、相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi,\quad (k=0,1,\cdots)$

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\omega t \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\pi) \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$



$$\begin{cases} A=\left|A_1-A_2\right| \\ \varphi=\varphi_2 \end{cases}$$

1、相位差 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi,\quad (k=0,1,\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$

相互加强

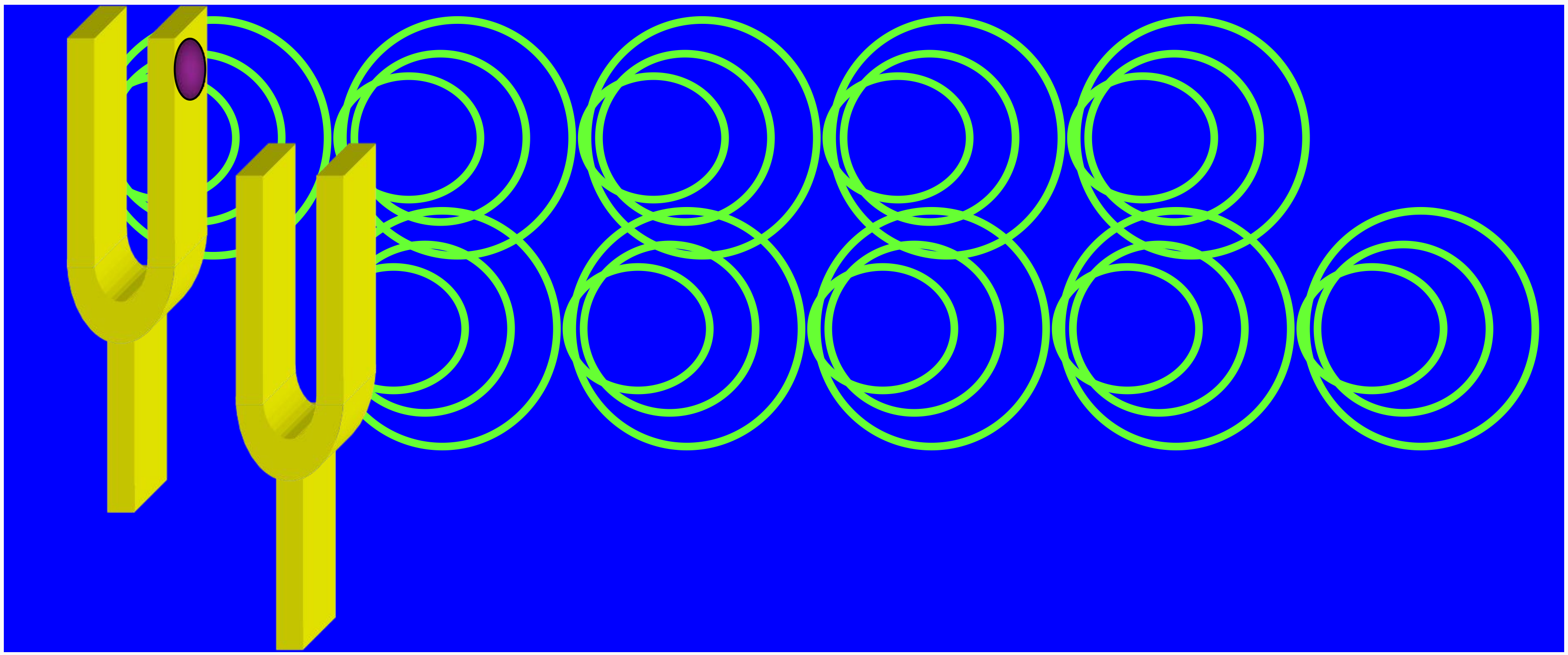
2、相位差 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi,\quad (k=0,1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

相互削弱

3、一般情况 $\left|A_1-A_2\right|<A<A_1+A_2$

二、 同方向、频率略有差异的两简谐振动的合成



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强、时而减弱的现象叫拍(beat).

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t = A\cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t = A\cos 2\pi\nu_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

讨论 $|\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2$ **的情况**

$$x = x_1 + x_2 = A\cos 2\pi\nu_1 t + A\cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = (2A\cos 2\pi\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}t)\cos 2\pi\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}t$$

振幅部分 **合振动频率**

"拍"现象的振幅 $A(t)=\left|2A_1\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$

由于余弦函数绝对值的周期为π，所以，拍频是振动 $\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)$ 的频率的两倍。即拍频为：

$$\nu=2\times\frac{1}{2\pi}\frac{|\omega_2-\omega_1|}{2}=|\nu_2-\nu_1|$$ (振幅变化的频率)