(蓝色为力学模块加强内容)

教学要求

◆掌握功的概念, 会计算变力的功.

◆理解保守力作功的特点及势能的概念, 会计算万有引力、重力和弹性力的势能 .

◆掌握动能定理、功能原理和机械能守恒定律, 掌握运用守恒定律分析问题的思想和方法 .

◆理解动量、冲量概念, 掌握动量定理和动量守恒定律 .

◆了解完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞的特点 .

力的积累效应

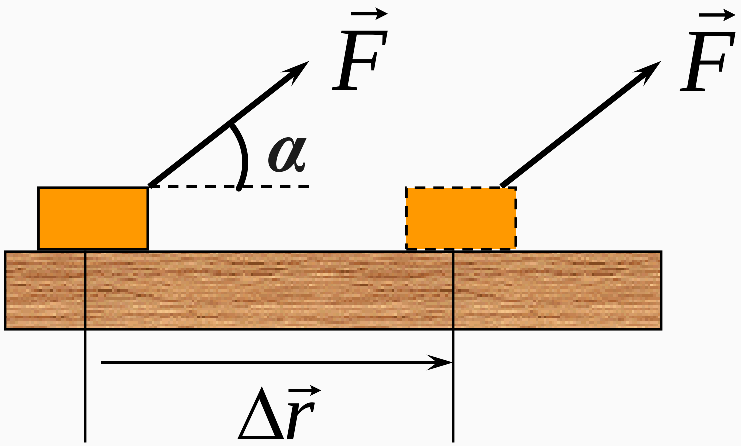
- 力对空间的积累—功，动能定理，机械能守恒定律
- 力对时间的积累—冲量，动量定理，动量守恒定律

一、功 （力在空间的积累）

1、恒力的功

$$A = F\Delta r\cos\alpha = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

意义: 力对质点做的功, 等于力沿质点位移方向的分量与位移大小的乘积.



◆ **功的定义式中的**位移, 是指力所作用的那个质点的位移, 此含义不仅适用于质点, 也适用于质点系, 如刚体.

◆ 教材中说, $\Delta\vec{r}$ 是"力的作用点的位移", 文献中对两种观点进行了辨析, 结论是应为 "质点的位移", 才与动能定理一致.

如摩擦力功

2、变力的功

$\vec{F}$ 在元位移 $d\vec{r}$ 上的功： $dA = F\cos\alpha\, dr = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

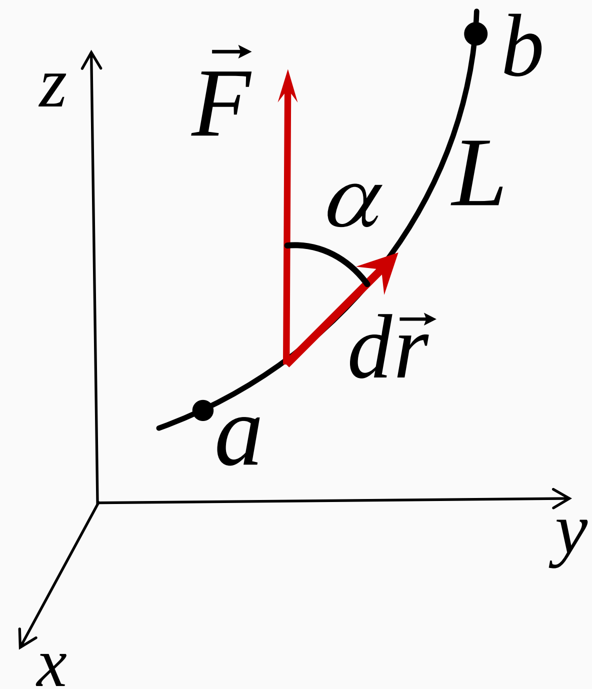
沿路径从 **a** 到 **b** 的总功： $A = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (曲线积分)

◆ 直角坐标系中：

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$A = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$



◆ 自然坐标系中：

$$\vec{F} = F_t\vec{t}_0 + F_n\vec{n}_0, \quad d\vec{r} = ds\,\vec{t}_0$$

$$A = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b F_t ds$$ 自然坐标系中只有切向分力作功

◆ 合力的功等于各分力功的代数和：

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot d\vec{r}$$

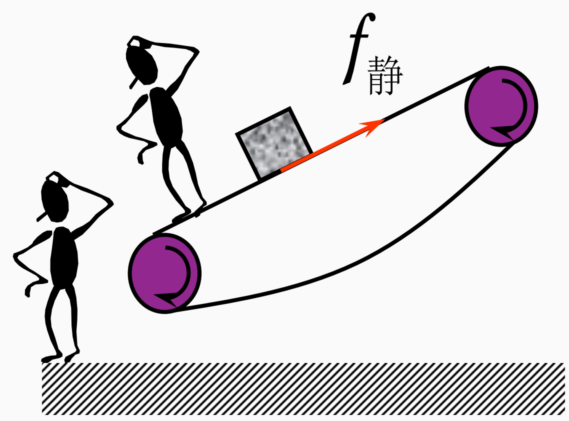
$$=\int_a^b\vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_a^b\vec{F}_2\cdot d\vec{r}+\cdots+\int_a^b\vec{F}_n\cdot d\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

◆功是标量，但有正负

◆功是过程量，是能量变化的度量，其大小与路径有关（保守力场除外）

◆作功与参照系有关(∵位移与参照系有关)



◆单位：焦耳 (J)，电子伏特 (eV)，$1\text{eV}=1.6\times10^{-19}\text{J}$

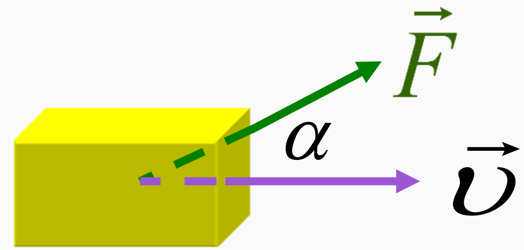
二、功率:表示做功快慢的物理量

- 平均功率 $\bar{P}=\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

【注意】只有状态量才能定义微分：$dx = x_2 - x_1$；功 A 不是状态量，不能写成 $dA = A_2 - A_1$，故 dA 不是微分，dA/dt 不是求导数.

- 瞬时功率 $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta A}{\Delta t}=\dfrac{dA}{dt}$

$$\because dA=\vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \therefore P=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=F\upsilon\cos\alpha$$



- 单位：瓦特(W)
- 计算功的第二种方法：

$$A=\int dA=\int_{t_1}^{t_2}P\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\,dt$$

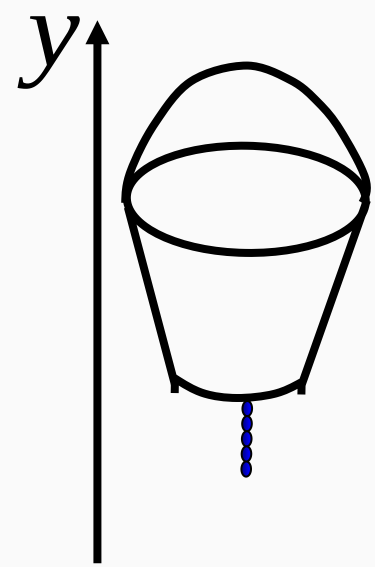
它实质上是以 t 为参变量，将对 x, y, z 的积分化为对参变量 t 的积分.

- P一定，$F\uparrow, \upsilon\downarrow$； $F\downarrow, \upsilon\uparrow$. 汽车变速箱：

例1、一人从10.0m深的井中提水，起始时桶中装有10.0 kg的水，由于水桶漏水，每升高1.0m要漏掉0.2kg的水。求水桶被匀速从井中提到井口的过程中，人所做的功。

解：匀速，任一时刻拉力等于水桶重力

$$F = m_0 g - \alpha y g, \quad \alpha = \frac{dm}{dy} = 0.2\,\mathrm{kg/m}$$



$$A = \int_0^{10} (m_0 g - \alpha y g) dy$$

$$= 10 m_0 g - 50 \alpha g$$

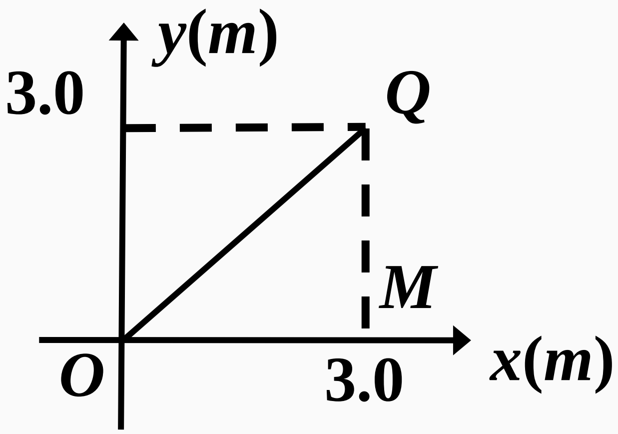
$$= (10 \times 10 - 50 \times 0.2) \times 9.8$$

$$= 882\,(\mathrm{J})$$

例2、一质点受变力 $\vec{f}=4y\vec{i}+5x\vec{j}$ 作用，求(1)质点沿 *OQ* 运动时变力所作的功; (2)质点沿 *OMQ* 运动时变力所作的功。

解：(1) $A_{OQ}=\int_{OQ}\vec{f}\cdot d\vec{r}=\int_{OQ}(f_x dx+f_y dy)$

$$=\int_O^Q 4ydx+5xdy$$



【注意】功是过程量, 不同的路径, 积分结果不同. 积分时要利用积分路径的轨道方程，将 *y* 代换成 *x*, 即 *y* = *y*(*x*), 或将 *x* 代换成 *y*, 即 *x* = *x*(*y*), 从而将对两个变量的积分转换成对一个变量的积分.

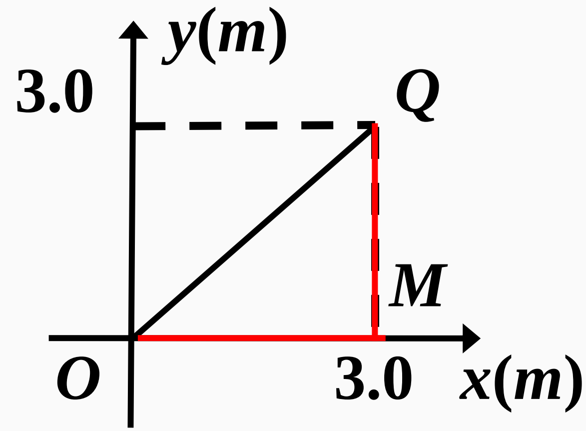
***OQ* 段：** $y=x$(轨道方程), $\therefore dy=dx$

$$\therefore A_{OQ}=\int_O^Q 4xdx+5xdx=\int_0^3 9xdx=\frac{9}{2}x^2\Big|_0^3=40.5J$$

(2) $A_{OMQ} = \int_{OMQ} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{OMQ} (f_x dx + f_y dy)$

$= \int_{OM} (4ydx + 5xdy)$

$+ \int_{MQ} (4ydx + 5xdy)$



$\vec{f} = 4y\vec{i} + 5x\vec{j}$

OM 段： $y = 0$(轨道方程), $\therefore dy = 0$

MQ 段： $x = 3$(轨道方程), $\therefore dx = 0$

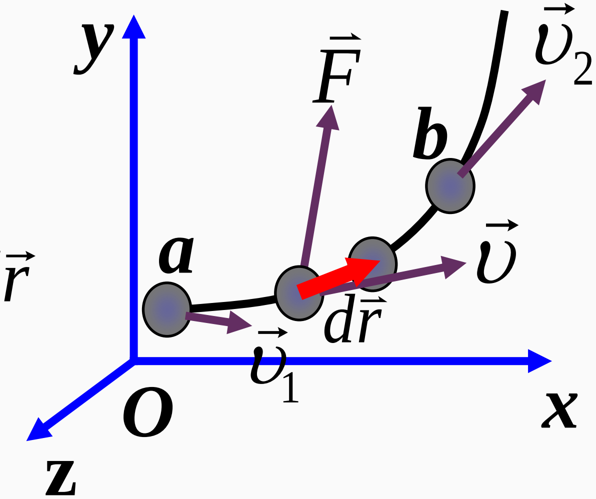
$\therefore A_{OMQ} = 0 + \int_0^3 (0 + 5 \times 3\, dy)$

$= 0 + 15\int_0^3 dy = 45\,(\mathrm{J})$

比较： $A_{OQ} = 40.5J$

功是过程量

一、质点的动能定理



◆ 微小过程:

由牛二: $\vec{F}=m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ 两边同时点乘 $d\vec{r}$

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

$$=m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}=m\upsilon d\upsilon=d(\frac{1}{2}m\upsilon^2)=dE_k$$ (质点动能定理微分形式)

◆ 有限过程:

$$A=\int_a^b dA=\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} d(\frac{1}{2}m\upsilon^2)=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=\Delta E_k$$ (质点动能定理积分形式)

质点的动能定理: 合外力对质点作的功等于质点动能的增量.

◆ **动能定理与牛顿定律间的关系: 动能定理是牛顿第二定律的空间积分形式, 它与牛顿第二定律的切向分量等价(力的法向分量不做功, 无动能定理).**

二、质点系的动能定理

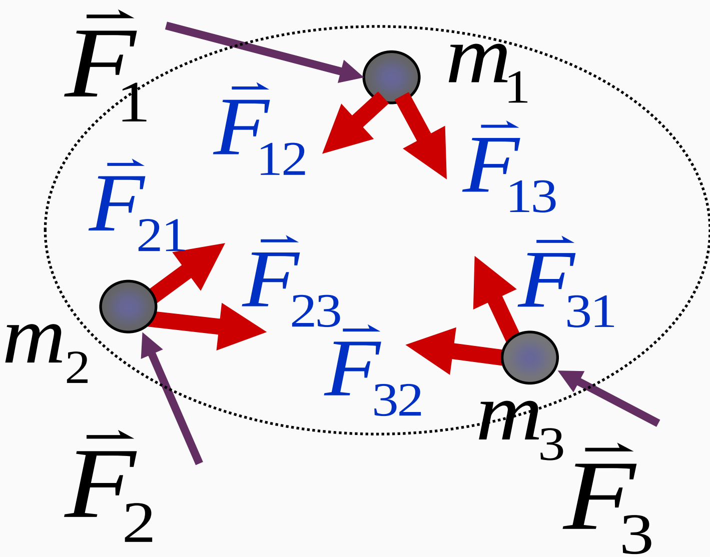
对质点1：$A_{\vec{F}_1} + A_{\vec{F}_{12}} + \vec{A}_{\vec{F}_{13}} = E_{k2}^{(1)} - E_{k1}^{(1)} = \Delta E_k^{(1)}$

对质点2：$A_{\vec{F}_2} + A_{\vec{F}_{21}} + \vec{A}_{\vec{F}_{23}} = E_{k2}^{(2)} - E_{k1}^{(2)} = \Delta E_k^{(2)}$

对质点3：$A_{\vec{F}_3} + A_{\vec{F}_{31}} + \vec{A}_{\vec{F}_{32}} = E_{k2}^{(3)} - E_{k1}^{(3)} = \Delta E_k^{(3)}$

相加，有:

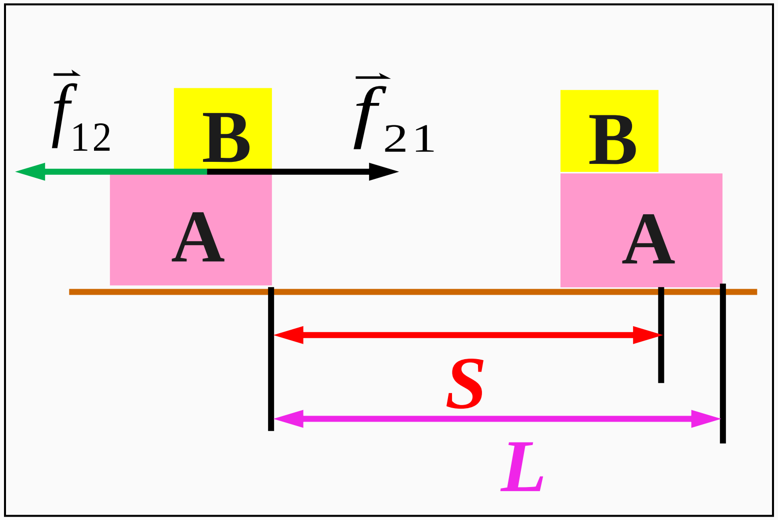
$$A = \sum_i A_i = \sum_i A_{i外} + \sum_i A_{i内} = \Delta E_k$$



质点系的动能定理: 所有外力和内力对质点系作的总功等于质点系的总动能的增量.

- 动能定理表明：功是能量变化的量度—功的真正内涵。
- 动能定理只适用于惯性系。

【讨论】



- 内力之和为零, 内力做功之和 不一定为零

$$\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21} \qquad \sum \vec{f}=0$$

$$A_1=-f_{12}L \qquad A_2=f_{21}S$$

$$\sum A=-f_{12}(L-S)$$

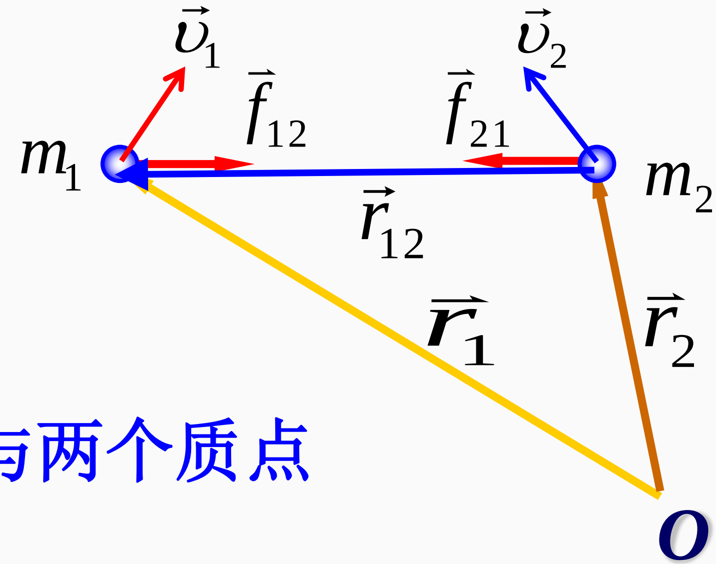
- 内力的功也能改变系统的动能。如炸弹爆炸过程, 内力之和为零，但内力做功转化为弹片的动能。

◆ 什么情况下，内力做功之和为零?

$$dA_{内力} = \vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2$$

$$= \vec{f}_{12}\cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$= \vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_{12}$$

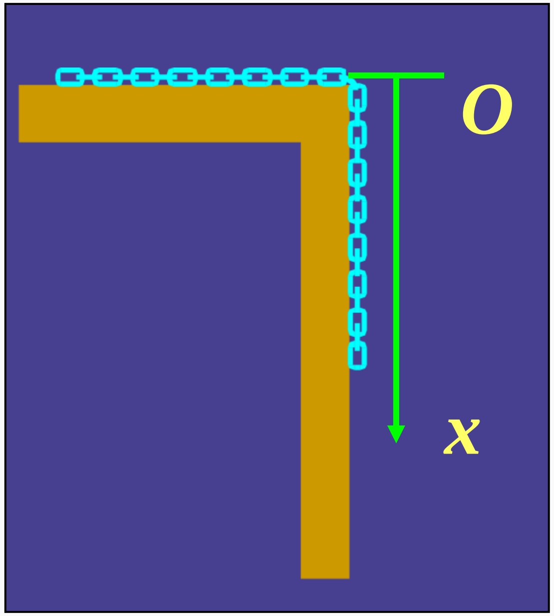


结论：一对内力的功等于内力与两个质点间的相对位移的乘积.

➢ 特例1: 一对保守内力的功等于保守内力与两个质点间相对位移的乘积. 下一节计算三种保守力(重力、万有引力、弹性力)的功时, 质点的位移实际上都应理解为相对位移, 计算的内力对单个质点做的功实际上等于一对保守内力做功之和.

例1、长为 L 的均质链条，部分置于水平面上，另一部分自然下垂, 已知链条与水平面间静摩擦系数为 μ_0, 滑动摩擦系数为 μ，求：(1)满足什么条件时，链条将开始滑动? (2) 若下垂长度为 l 时，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少?

解：(1)设下垂长度为 l_0 时，处于临界状态



$$\lambda l_0 g - \mu_0 \lambda (L - l_0) g = 0$$

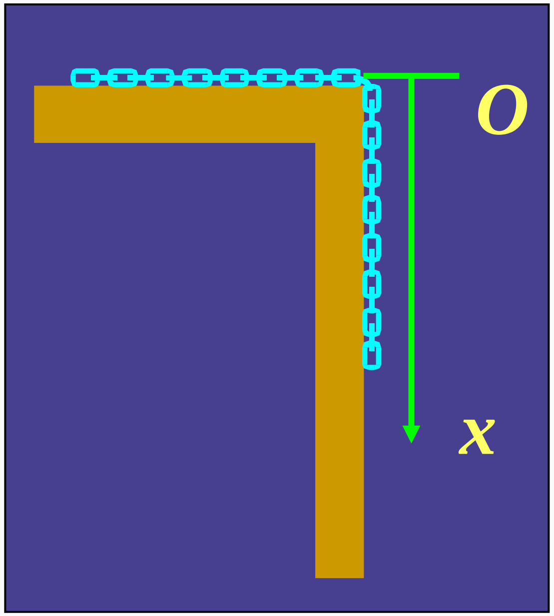
$$\therefore l_0 = \frac{\mu_0 L}{1+\mu_0}$$

当 $x > l_0$ 时，链条将开始滑动.

(2) 以整个链条为研究对象，应用动能定理求解.

$$A_{重力}=\int_l^L \lambda xg dx=\frac{1}{2}\lambda g(L^2-l^2)$$

$$A_{摩擦}=\int_l^L -\mu\lambda (L-x) g dx=-\frac{1}{2}\mu\lambda g(L-l)^2$$



动能定理：

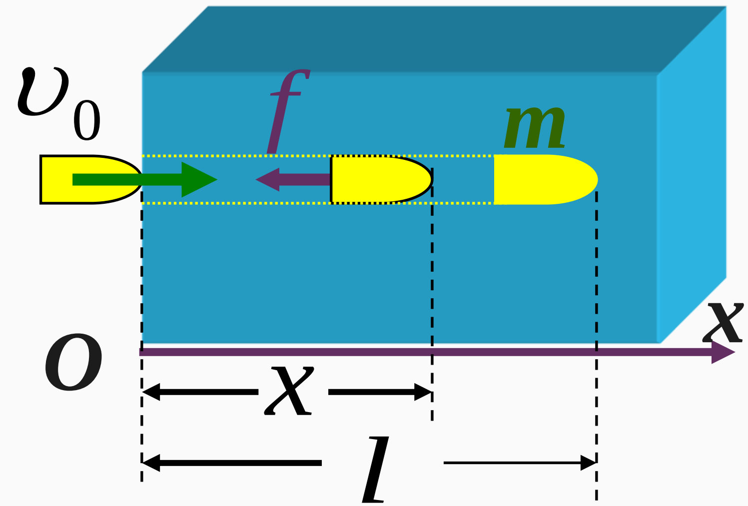
$$\frac{1}{2}\lambda g(L^2-l^2)-\frac{1}{2}\mu\lambda g(L-l)^2=\frac{1}{2}\lambda L\upsilon^2-0$$

$$\therefore\ \upsilon=\sqrt{\frac{g}{L}[(L^2-l^2)-\mu(L-l)^2]}$$

例2、一个质量为15g 的子弹，以200米/秒的速度射入一固定的木板内，如阻力与射入木板的深度成正比，即 $f=-kx$，且$k=5.0\times10^5$ N/cm, 求子弹射入木板的深度。

解：(1) 用动能定理求解

以子弹为研究对象



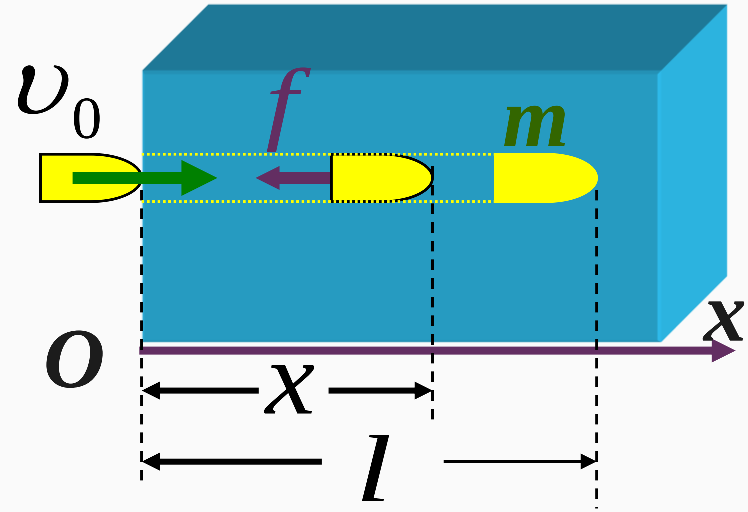
$$dA = f\,dx = -kx\,dx$$

$$A = \int_0^l -kx\,dx = -\frac{1}{2}kl^2$$

由动能定理：$A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$

$$-\frac{1}{2}kl^2 = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2, \quad \therefore l = \sqrt{\frac{m\upsilon_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{15\times10^{-3}\times200^2}{5\times10^5}} = 3.46(\mathrm{mm})$$

(2) 用牛顿定律求解



$$f=-kx=m\frac{d\upsilon}{dt}$$

做变换 $$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

$$\therefore -kx=m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

分离变量并积分 $$\int_0^l -kxdx=\int_{\upsilon_0}^0 m\upsilon d\upsilon$$

$$-\frac{1}{2}kl^2=0-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

射入深度 $$l=\sqrt{\frac{m\upsilon_0^2}{k}}=3.46\times10^{-3}(\mathrm{m})$$

一、 摩擦力、 万有引力、 重力、 弹性力作功的特点

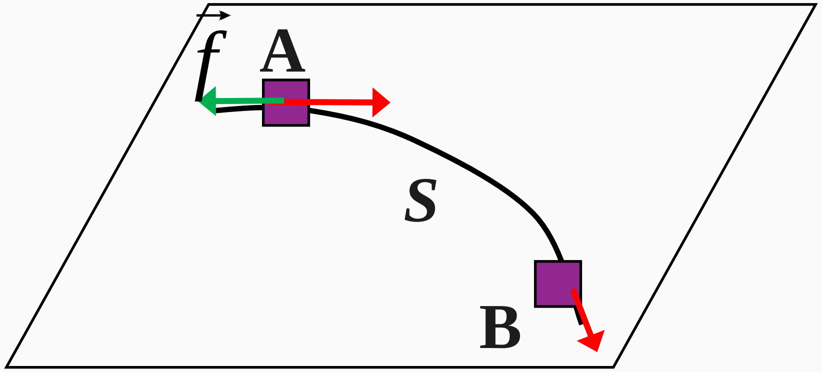
1、摩擦力作功的特点

建立自然坐标系

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\mu mg \cdot ds$$

$$A = -\int_A^B dA = \int_0^S = -\mu mg \cdot ds$$

$$= -\mu mgS$$



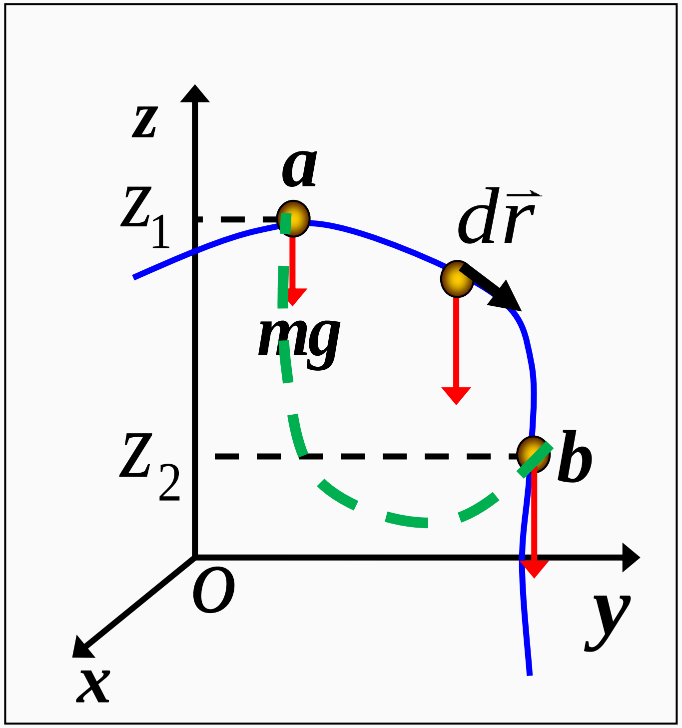
摩擦力做功与路径有关

2、重力作功的特点

$$\vec{G} = -mg\vec{k}, \quad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$A = \int_a^b \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz$$

$$= mgz_1 - mgz_2$$



- 重力做功只与始、末态位置有关，与路径无关。
- 从 ***a*** 点出发经任意闭合路径回到***a***点, 重力做的总功为零

$$A_{a\to b\to a} = \oint \vec{G}\cdot d\vec{r} = 0$$

3、万有引力作功的特点

太阳为参考系，地球所受万有引力 $\vec{F}=-G\dfrac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$

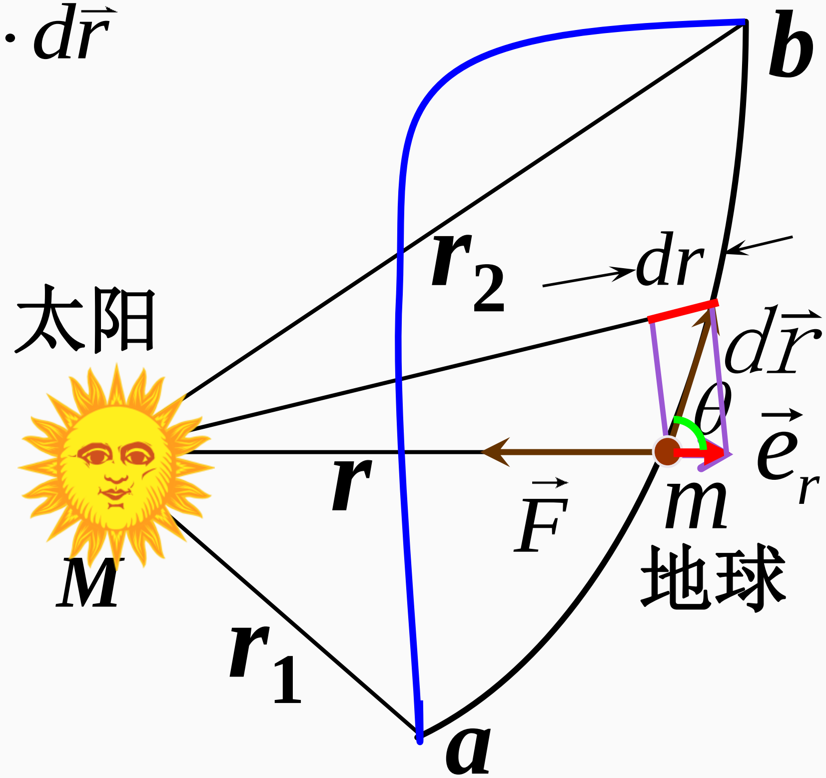
$$A=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{e}_r\cdot d\vec{r}=1\cdot|d\vec{r}|\cos\theta$$

$$=|d\vec{r}|\cos\theta=dr$$

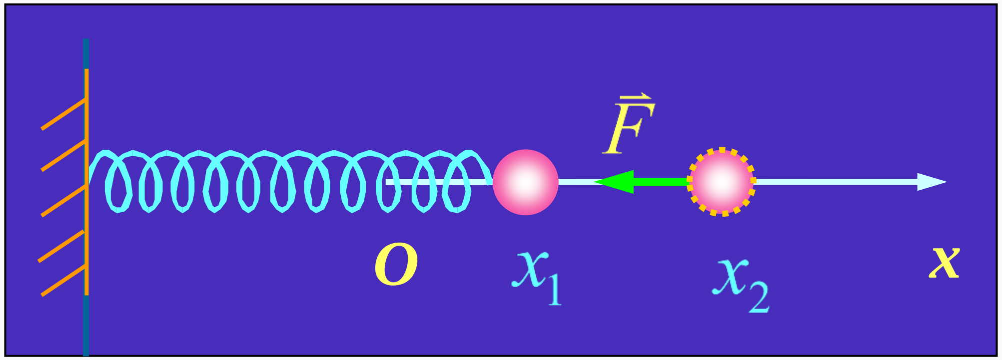
$$A=\int_{r_1(L)}^{r_2}-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}\,r$$

$$=GmM(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1})$$



- 万有引力做功，只与始、末态位置有关，与路径无关
- 沿任意闭合路径运动一周，作功为零.

4、弹性力作功的特点



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} -kx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

- 弹性力做功只与始、末位置有关，与路径无关
- 沿任意闭合路径运动一周，作功为零.

二、保守力(工科《理论力学》教材称之为有势力、势力)

- **保守力**：力所做的功与路径无关，而只决定于物体的始末态的相对位置，这样的力称保守力。

  或者：沿**任意**闭合路径运动一圈时，力所做的功等于零，这样的力叫保守力。

  $$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

  如:重力、万有引力、弹性力、静电场力

- **非保守力**：力所作的功与路径有关。

  如：摩擦力、磁场力、涡旋电场力

三、势能

重力的功 $$A = mgz_1 - mgz_2 = -mg(z_2 - z_1)$$

万有引力的功 $$A = GmM(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) = -[(-\frac{GmM}{r_2}) - (-\frac{GmM}{r_1})]$$

弹性力的功 $$A = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$$

左边是保守力的功，右边是与质点始末态位置有关的两个位置函数之差，既然功是能量变化的量度，可以定义右面代表某种能量的变化. **这种由相对位置决定的能量，称为物体的势能(位能).**

◆ 保守力的功 $$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$

微元过程： $$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

意义: 保守力的功等于势能增量的负值(或势能的减少量).

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=-(E_{pb}-E_{pa})=-\Delta E_p$$

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=-dE_p$$

- 由上式可见，真正有意义的是势能差，而不是势能的绝对值。
- **可以规定某一位置的势能为零,以便给出其它点的势能值.势能零点又称为参考点.**

例如：规定 b 点势能为零　　$E_{pb}=0$

则 a 点的势能　$E_{pa}=A_{a\to 零点}=\int_a^{零点}\vec{F}_{保守力}\cdot d\vec{r}$

意义：质点在某点的势能, 在量值上等于将质点从该点移动到势能零点的过程中, 保守力做的功.

- 势能具有相对性，其大小与零点的选取有关。势能差是绝对的，其大小与零点选取无关。
- 势能零点选取：原则上可以任意选取。弹性势能常选平衡位置，万有引力势能常选无穷远处为零点。
- 势能属于相互作用的物体系统所共有，它就是系统内物体间的相互作用能. “共有”是指势能定义中，“保守力做的功” 应理解为 “一对保守力做功之和”，而不是保守力对其中一个质点做的功, “某物体的势能” 只是习惯说法.

$$dA_{保内} = \vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2 = \vec{f}_{12}\cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_{12} = -dE_p$$

- 只有保守力，才有势能的概念. 对于摩擦力等非保守力，不能引入势能概念.

四、势能计算

$$E_{pa}=A_{a\to 零点}=\int_a^{零点}\vec{F}_{保守力}\cdot d\vec{r}$$

◆ 重力势能

$$E_p=\int_z^0\vec{G}\cdot d\vec{z}=-\int_0^z\vec{G}\cdot d\vec{z}$$

$$=-\int_0^z(-mg)\cdot dz=mgz$$

(当积分下限>下限时, 可颠倒上下限, 不容易出错)

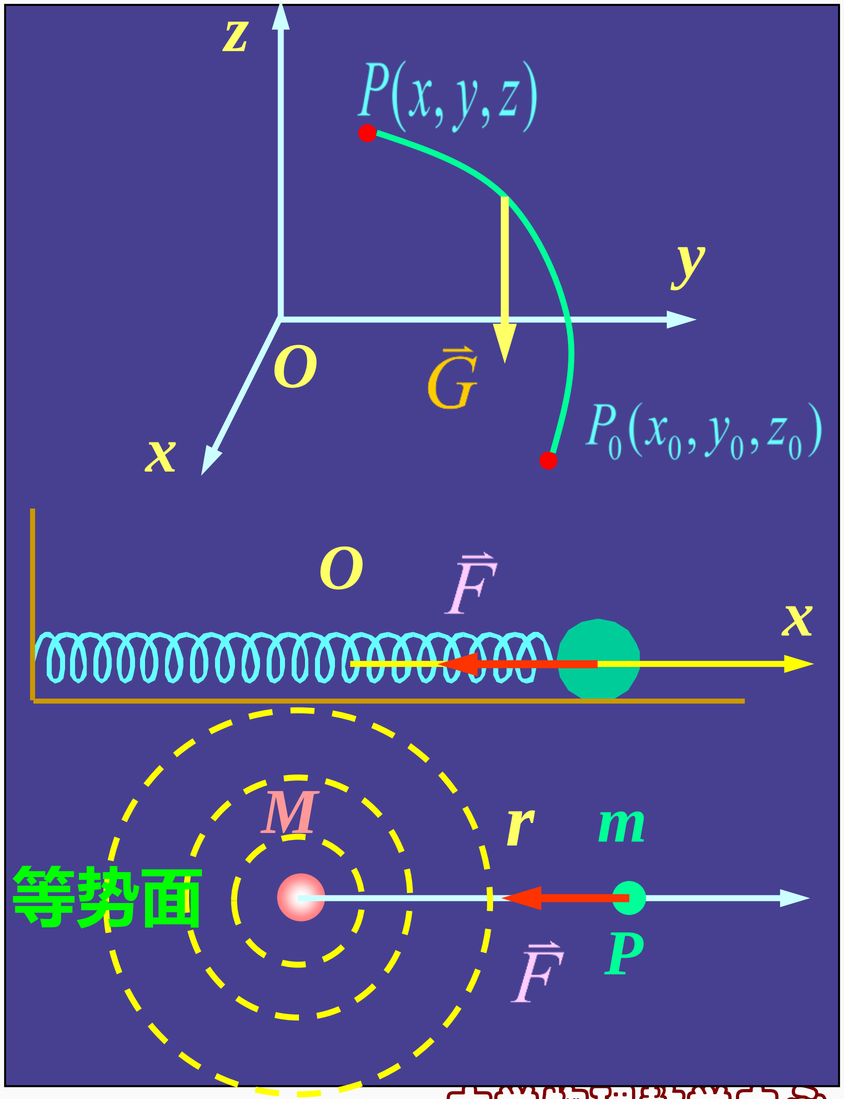
◆ 弹性势能

$$E_p=-\int_0^x(-kx)\,dx=\frac{1}{2}kx^2$$

◆ 万有引力势能

$$E_p=\int_r^\infty(-G\frac{mM}{r^2})dr$$

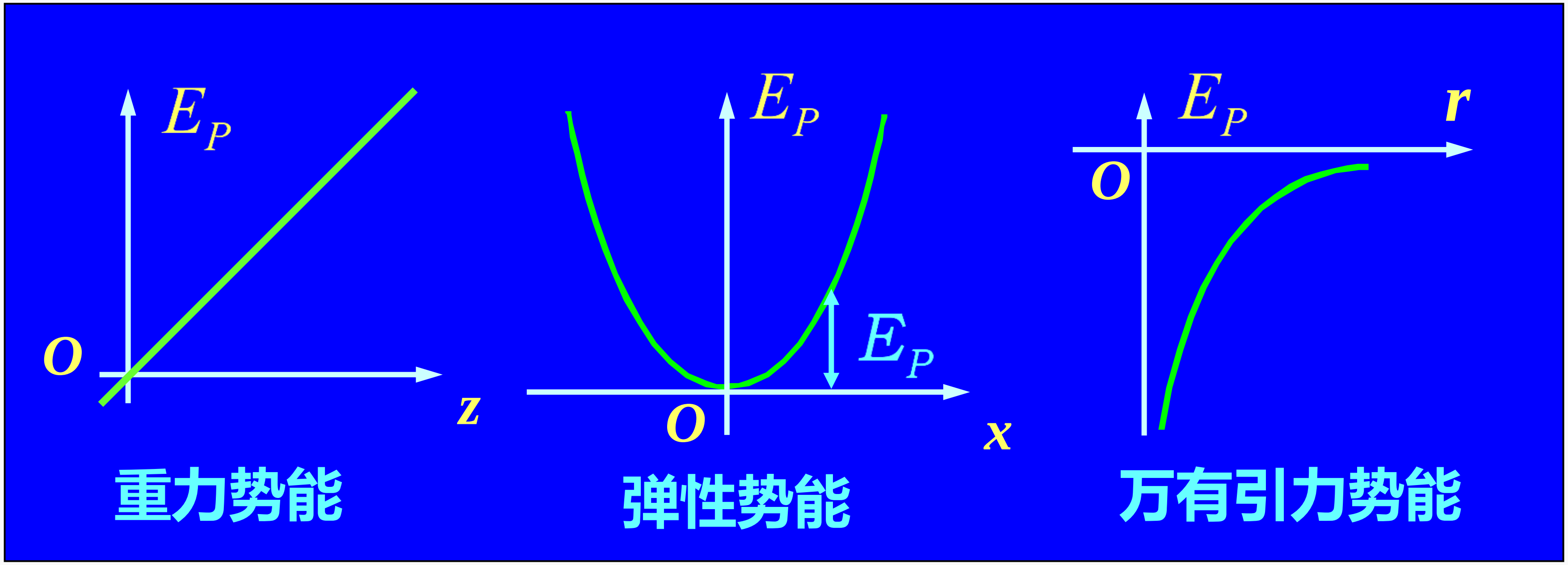
$$=-G\frac{mM}{r}$$



五、一维势能曲线

一维情况：$E_p(x)$ ， $Fdx=-dE_p \Rightarrow F=-\dfrac{dE_p}{dx}$

势能曲线



$E_p=mgz$ $\quad E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$ $\quad E_p=-G\dfrac{mM}{r}$

势能曲线上某点斜率的负值，等于该处的保守力。

六、保守力和势能关系

◆ 积分关系（由保守力求势能）$E_{pa} = \int_a^{零点} \vec{F}_{保守力} \cdot d\vec{r}$

◆ 微分关系（由势能求保守力）

保守力做功等于势能增量的负值：

$$A_{a\to b} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$

元过程： $dA = -dE_p$

$$E_p = E_p(x,y,z) \Rightarrow \underline{dE_P} = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\underline{dE_p}$$

$$\Rightarrow \quad F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

梯度算符 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ **(▽读作del或nabla)**

$$\boxed{\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_p}$$

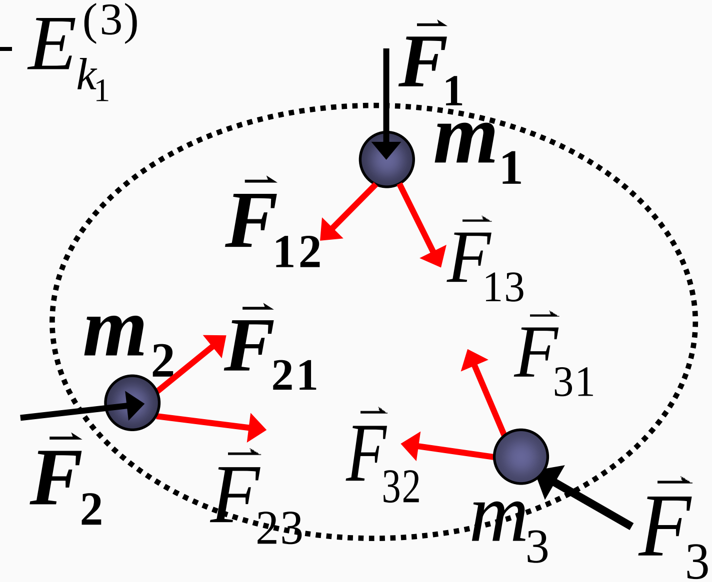
一维： $F = -\frac{dE_p}{dx}$

七、功能原理 （引入势能后质点系动能定理的变形。）

第1个质点：$A_{\vec{F}_1} + A_{\vec{F}_{12}} + A_{\vec{F}_{13}} = E_{k_2}^{(1)} - E_{k_1}^{(1)}$

第2个质点：$A_{\vec{F}_2} + A_{\vec{F}_{21}} + A_{\vec{F}_{23}} = E_{k_2}^{(2)} - E_{k_1}^{(2)}$

第3个质点：$A_{\vec{F}_3} + A_{\vec{F}_{31}} + A_{\vec{F}_{32}} = E_{k_2}^{(3)} - E_{k_1}^{(3)}$



$$A_{合} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{合}\begin{cases}\text{外力功} \\ \text{内力功}\begin{cases}\text{保守内力功} \\ \text{非保守内力功}\end{cases}\end{cases}$$

$$A_{合}=A_{外力}+\underline{A_{保守内力}}+A_{非保守内力}=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k$$

$$=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_p$$

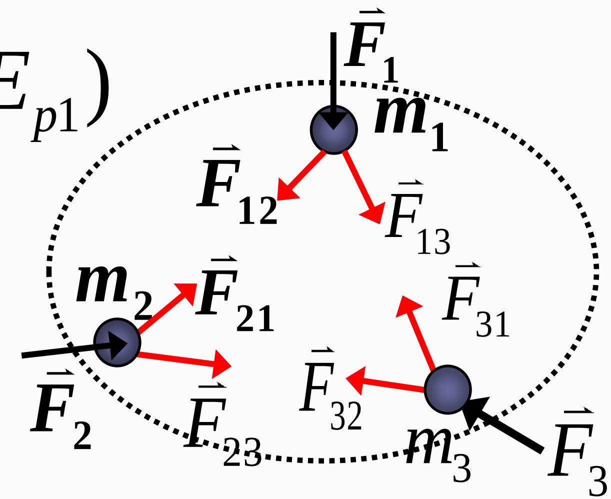
$$A_{外力}+A_{非保守内力}-(E_{p2}-E_{p1})=(E_{k2}-E_{k1})$$

“同一状态的量”合并

$$A_{外力}+A_{非保守内力}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

令 $E_k+E_p=E$ --系统的机械能

$$\boxed{A_{外力}+A_{非保守内力}=E_2-E_1=\Delta E}$$



功能原理： 外力与非保守内力做功的总和，等于系统的机械能的增量.

◆只有外力及非保守内力才能改系统的机械能，而保守力只会引起动能与势能的转换，系统的机械能不变。

例： 提高杠铃的机械能靠外力，

而马达的停止转动是靠非保守内力—摩擦力。

◆做功为零的外力, 也能改变系统的运动状态. 它不能改系统的机械能, 但能起到能量转换的杠杆作用。

◆功能原理与动能定理并无本质差别。

功能原理引入了势能概念，而无需计算保守力的功。

动能定理则应计算包括保守内力在内的所有力的功。

功能原理：$A_{外}+A_{非保守力}=E_2-E_1$（机械能增量）

动能定理：$A_{外}+A_{非保守力}+A_{保守力}=E_{k2}-E_{k1}$（动能增量）

$$\boxed{A_{外力} + A_{非保守内力} = E_2 - E_1 = \Delta E}$$

八、机械能守恒定律

$$\boxed{若\ A_{外力} = 0,\ A_{非保守内力} = 0,\ 则\ E_k + E_p = 恒量}$$

若一个系统只有保守内力做功，**外力及非保守内力在整个过程(的每一微元过程)都不作功**，则该系统的动能与势能可以相互转化，但机械能的总量保持不变，这一结论称为机械能守恒定律

【说明】舒幼生《力学》：机械能守恒强调的是对内、对外两个方向都没有(由非保守力引起的)能量转换，因此守恒的条件不能写成 $A_{外力} + A_{非保守内力} = 0$

- 机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的特例：

普遍的能量守恒定律：在孤立系统中，不论发生什么过程，系统各种运动形式的总能量保持不变，能量不能产生，也不能消灭，只能从一种形式转化为另一种形式，是自然界的普遍规律.

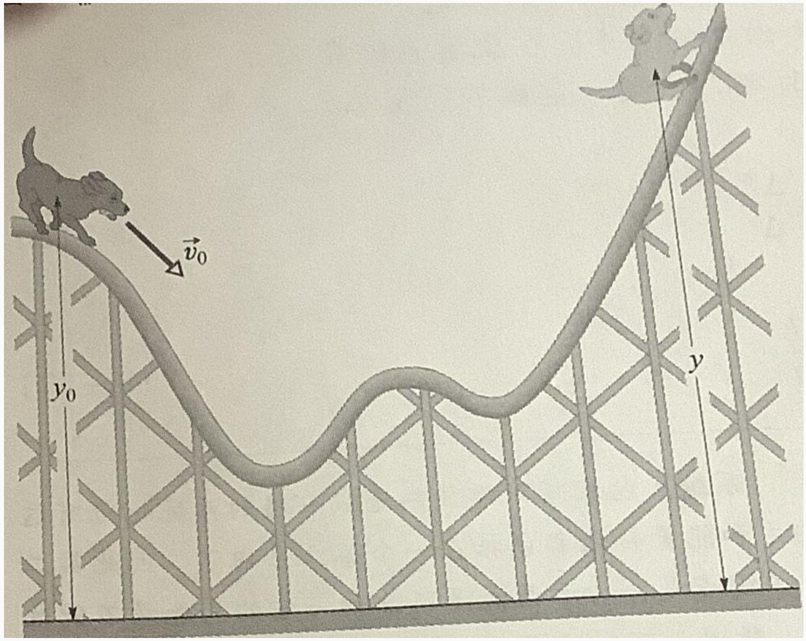
例1、一只质量 m=6.0kg 的马戏团小狗，以 v_0=7.8m/s 的速率跑上距地面高 y_0=8.5m 的弯曲坡道的左端。然后滑向右边并到达距地面高度为 y=11.1m 处瞬时停下。坡道不是光滑的。那么，由于滑动，小狗和坡道的热能增加了多少？

解：由于存在摩擦力，小狗的机械能不守恒，损失的机械能转化为热能(内能的俗称)

$$\Delta E = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgy$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0)$$

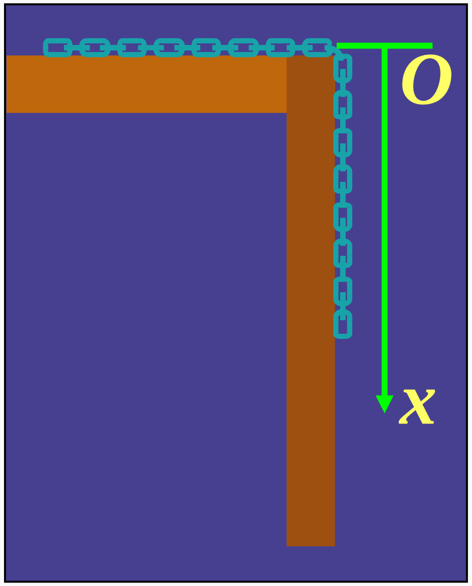
$$= 29.6\text{J}$$



孤立系统中发生的过程机械能守恒吗？

- 炮弹爆炸：非保守内力作功转化为弹片的动能（化学能转化为机械能）
- 子弹射入光滑桌面上的木块：非保守内力作功使得机械能减少（机械能转化为内能，热能）

例2、长为 L 的均质链条，部分置于水平面上，另一部分自然下垂, 已知链条与水平面间滑动摩擦系数为 μ, 若下垂部分长度为 l 时，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少?



解：以桌面为势能零点

$$E_{p_1}=-\lambda l\cdot g\cdot\frac{l}{2}=-\frac{1}{2}\lambda g l^2,\qquad E_{p_2}=-\lambda L\cdot g\cdot\frac{L}{2}=-\frac{1}{2}\lambda g L^2$$

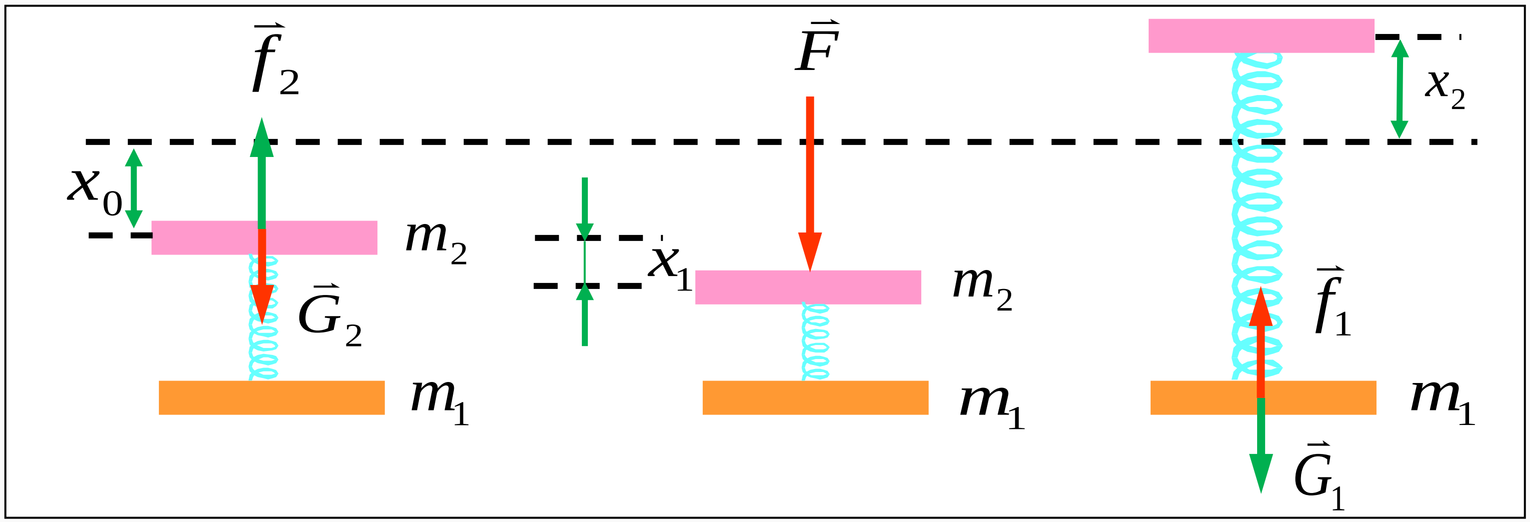
$$A_{摩擦}=\int_l^L-\mu\lambda(L-x)g\,dx=-\frac{1}{2}\mu\lambda g(L-l)^2$$

功能原理 $A_{摩擦}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$

$$-\frac{1}{2}\mu\lambda g(L-l)^2=(\frac{1}{2}\lambda L\upsilon_L^{\ 2}-\frac{1}{2}\lambda g L^2)-(0-\frac{1}{2}\lambda g l^2)$$

$$\upsilon_L=\sqrt{\frac{g}{L}[(L^2-l^2)-\mu(L-l)^2]}$$

例3、弹簧连接两个木板m_1、m_2，弹簧压缩x_0. 求给m_2上加多大的压力，能使力突然撤去后，恰能使下面的木块m_1离开桌面？



解: $x_0 = \dfrac{m_2 g}{k}$, $x_1 = \dfrac{F}{k}$, $x_2 = \dfrac{m_1 g}{k}$

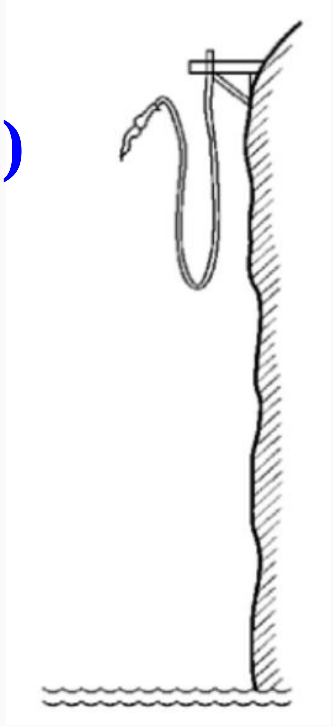
弹簧原长处为弹性势能零点，相应的m_2位置为重力势能零点

$$\frac{1}{2}k(x_0+x_1)^2 - m_2 g(x_0+x_1) = \frac{1}{2}kx_2^{\ 2} + m_2 g x_2, \qquad \therefore F = (m_1+m_2)g$$

例4、质量为72kg的人跳蹦极。弹性蹦极带原长20m，劲度系数为60N/m。忽略空气阻力。（1）此人自跳台跳出后，落下多高时速度最大？此最大速度是多少？（2）已知跳台高于下面的水面60m，此人跳下后会不会触到水面？

解：(1) 重力> 弹性力时，加速；重力< 弹性力时，减速；

重力 = 弹性力时, 速度最大: $mg = kl$



自跳台下落的高度 $h = l_0 + l = 20 + \dfrac{mg}{k} = 31.8$ (m)

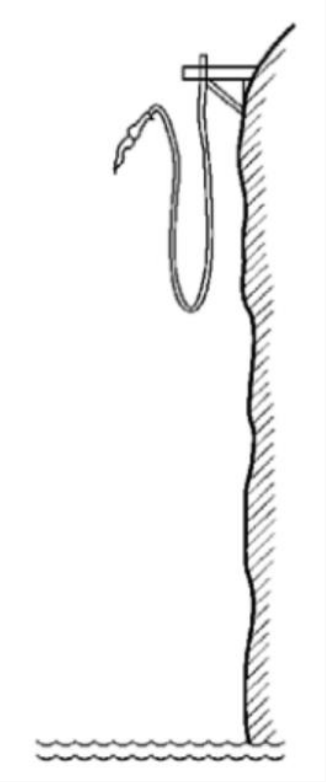
以跳台所在水平面为零势能面，机械能守恒，

$$-mgh + \frac{1}{2}kl^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

$$v = \sqrt{2gh - \frac{k}{m}l^2} = 22.5 \quad \text{(m/s)}$$

（2）降落到最低点时，速度为零，机械能守恒

$$-mg(l_0+l')+\frac{1}{2}kl'^2=0$$



$$l'^2-23.52l'-470.4=0$$

$$\Rightarrow\quad l'=36.43\ \mathbf{(m)}$$

$$l'+l_0=56.43<60$$ 不会触到水面

例5、求第二宇宙速度（逃逸速度）

解：第一宇宙速度(环绕速度)：地面附近 $\dfrac{m\upsilon_1^2}{R_e}=G\dfrac{mM_e}{R_e^2}\approx mg$,

$$\Rightarrow \upsilon_1=\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}\approx\sqrt{gR_e}=\sqrt{9.8\times 6400\times 10^3}=7.9(\mathrm{km/s})$$

第二宇宙速度(物体逃离地球的最小速度)：

由机械能守恒 $\dfrac{1}{2}m\upsilon_2^2-G\dfrac{mM_e}{R_e}=0$ (末态动能及势能均为零)

$$\Rightarrow \upsilon_2=\sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}\approx\sqrt{2gR_e}=\sqrt{2\times 9.8\times 6400\times 10^3}=11.2(\mathrm{km/s})$$

对任一质量为M, 半径为 R 的星体，逃逸速度 $\upsilon=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

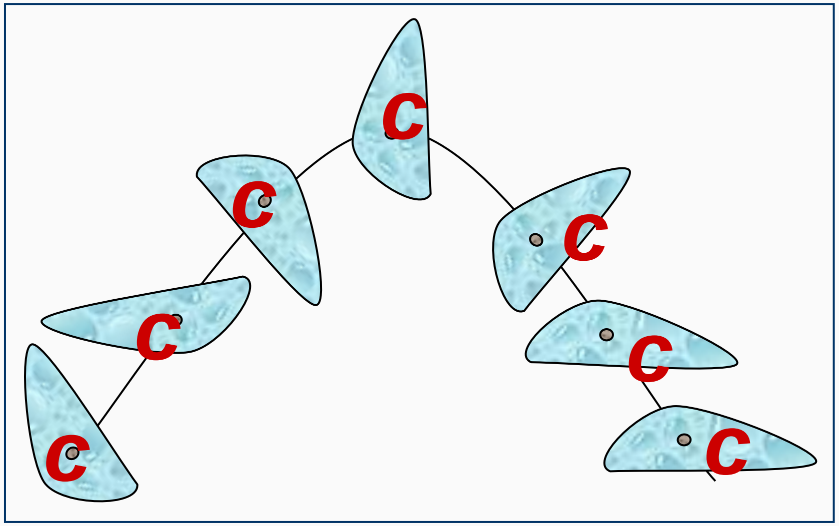
若 $\upsilon\geq c$ (光速)，则任何物体都不能逃逸——黑洞

$$\Rightarrow R=R_g=\frac{2GM}{c^2}$$

黑洞的(最大)半径(史瓦西半径), 即黑洞的作用范围, 因逃逸速度达到或超过光速, 物体(包括光子)进入此范围就再也无法逃脱, 因此看起来漆黑一片, 故名黑洞.

一、质心

- 质心：质点系的质量中心，以质量为权重取平均的特殊点.
- 质心反映质点系整体的运动
- 板的质心C点的运动轨迹是抛物线，**其余点的运动 = 随质心的平动 + 绕质心的转动.**



2.4 质心 质心运动定理

- 质心的运动就像一个质点的运动

1-6甩手榴弹

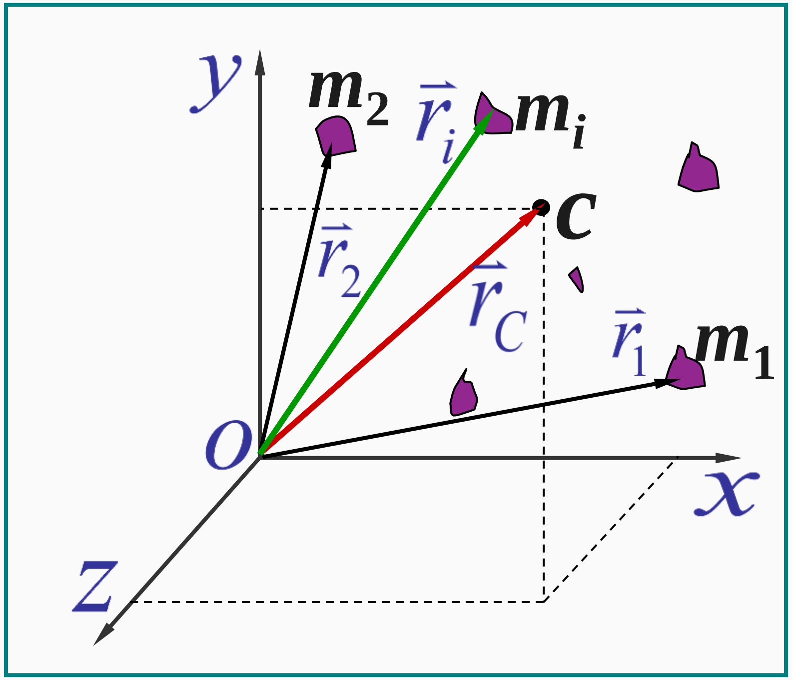
- 内力不能改变质心的运动状态

- 力偶不能改变质心的运动状态(力偶只能引起质点系绕质心的转动，而不能引起质心的平动)

力偶不能改变

二、质心的定义

$$\vec{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{m}$$



$$m=\sum_{i=1}^{n}m_i$$ 质点系的总质量

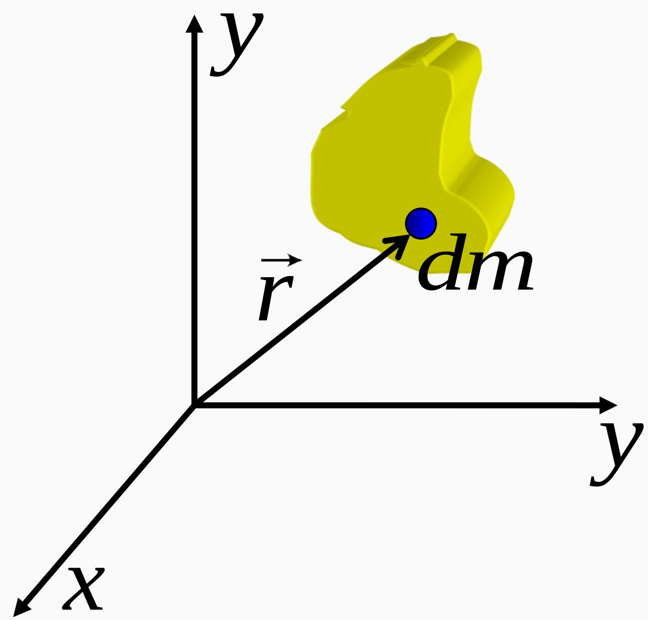
◆ 直角坐标系中：

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{m},\quad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{m},\quad z_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{m}$$

- 质量连续分布的物体

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\rho dV}{\int \rho dV}$$

$$= \frac{\int \vec{r}dm}{m} = \frac{\int \vec{r}\rho dV}{m}$$



直角坐标系中

$$x_c = \frac{\int xdm}{m}, \quad y_c = \frac{\int ydm}{m}, \quad z_c = \frac{\int zdm}{m}$$

- 质心是各质点的位矢对质量分布的加权平均，对于质量均匀分布的物体，质心就在其几何中心.

$$\vec{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m} \vec{r}_i=\frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i V_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i V_i} \xrightarrow{\rho=\text{常数}} \vec{r}_{C,\text{几何}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

权重

- 质心与重心不同

$$\vec{r}_G=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i g_i}$$

若物体各部分所处的重力加速度相同，则质心与重心重合.

当物体远离地球时，重力消失，重心失去意义，但质心仍有意义.

三、质心速度与质心动量

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i$$

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_C = \vec{P}_C$$

即：质点系的总动量 = 质心动量

质点系动量

四、质心加速度

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

即：$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

五、质心运动定理

$$\boxed{m\vec{a}_C=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_i}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{a}_1&=\vec{F}_1+\vec{f}_{12}+\vec{f}_{13}+\cdots+\vec{f}_{1n}\\ m_2\vec{a}_2&=\vec{F}_2+\vec{f}_{21}+\vec{f}_{23}+\cdots+\vec{f}_{2n}\\ &\cdots\\ m_n\vec{a}_n&=\vec{F}_n+\vec{f}_{n1}+\vec{f}_{n2}+\cdots+\vec{f}_{n(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad m\vec{a}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\vec{F}_{合外}$$

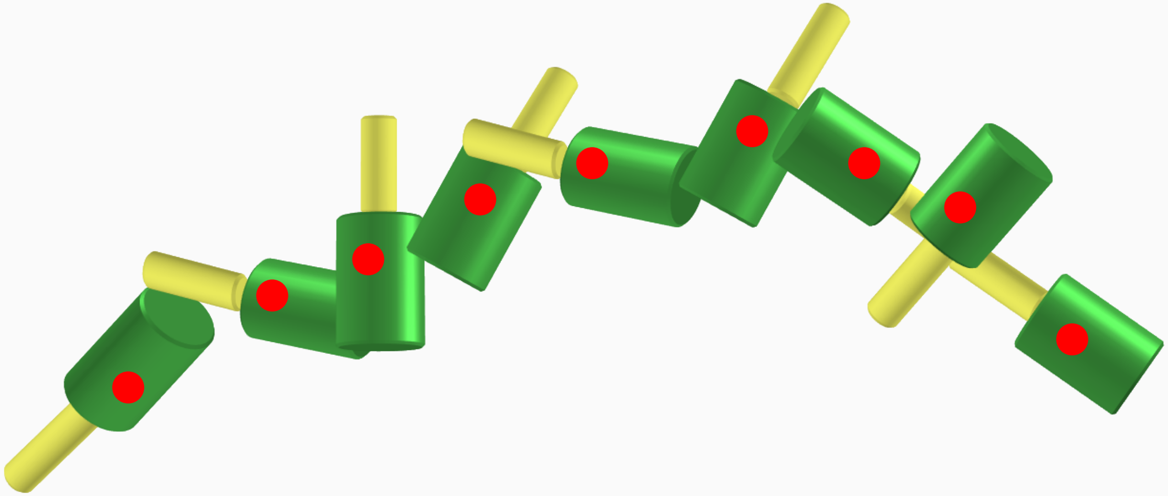
质心运动定理

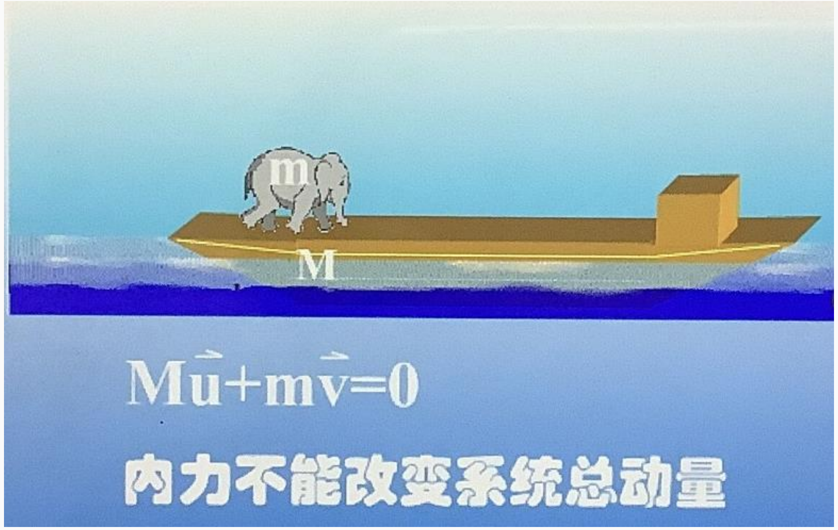
◆ 质心运动定理：不管物体的质量如何分布，也不管外力作用在物体的什么地方，质心C的运动，就像全部质量集中在质心，所有外力也集中在质心时，一个质点的运动.

◆ 注意：质点间的内力不影响质心的运动状态.

$$\vec{F}_{合外}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=m\vec{a}_C=m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt}=\frac{d\vec{P}_C}{dt}\quad\Rightarrow\vec{F}_{合外}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\frac{d\vec{P}}{dt}$$ **(质点系的牛顿运动定律)**

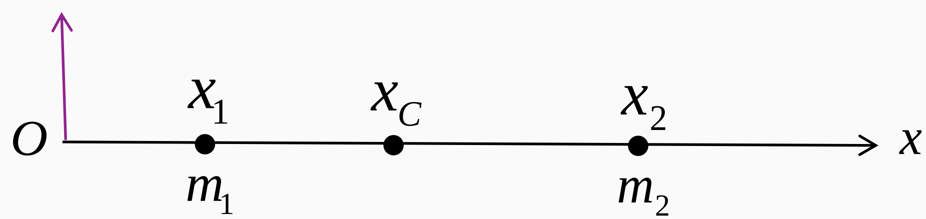
前面例题中对整根链条应用牛顿第二定律, 实际上应看成是对质点系或其质心应用牛顿运动定律.




m
M
$M\vec{u}+m\vec{v}=0$
内力不能改变系统总动量

例1、两个滑冰运动员，质量分别为60kg和40kg，每人各执绳索的一头。体重者手执绳端不动，体轻者用力收绳。俩人最终在何处相遇？

答：两个滑冰运动员和绳子构成的系统，不受外力，根据质心运动定理，质心保持静止。在绳长$2:3$处相遇。

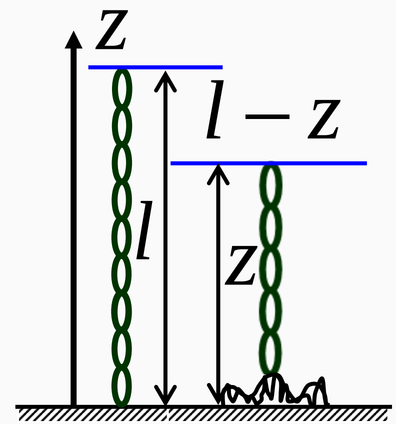


$$x_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}=\frac{60x_1+40x_2}{60+40}=\frac{6x_1+4x_2}{10}=C,$$

$$\Rightarrow \frac{x_C-x_1}{x_2-x_C}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

例2、一质量为M，长为l的完全柔软绳子竖直地悬挂着，其下端刚刚与地面接触. 此时放开它，使之自静止状态下落. 求下落到所剩长度为 z 时地面对这段绳子的作用力. 设绳子质量均匀分布.

解：以整根链条为研究对象, 下落过程中其质心位置



$$z_C=\frac{1}{M}\int_0^z z'\cdot\frac{M}{l}dz'=\frac{z^2}{2l},\qquad \upsilon_c=\frac{dz_c}{dt}=\frac{z}{l}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\upsilon=-\sqrt{2g(l-z)}$$

(链条很柔软, 始终以自由落体下落)

$$a_c=\frac{d\upsilon_c}{dt}=\frac{\upsilon^2}{l}+\frac{z}{l}\frac{d\upsilon}{dt},\qquad \frac{d\upsilon}{dt}=-g\qquad \therefore a_c=2g-\frac{3gz}{l}$$

质心运动定理 $f-Mg=Ma_c\qquad \therefore f=3Mg-\dfrac{3Mgz}{l}$

【讨论】本题实质上是已知运动(假设为自由落体), 求力的问题, 如果力与运动都未知, 则无法求解.

六、柯尼希定理

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$$

- 质点系的总动量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_C = \vec{P}_C$$

质心可看作整个质点系的代表点，系统的全部质量和动量都集中于其上.

- 质点系的重力势能

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} m_i g z_i = mgz_C$$

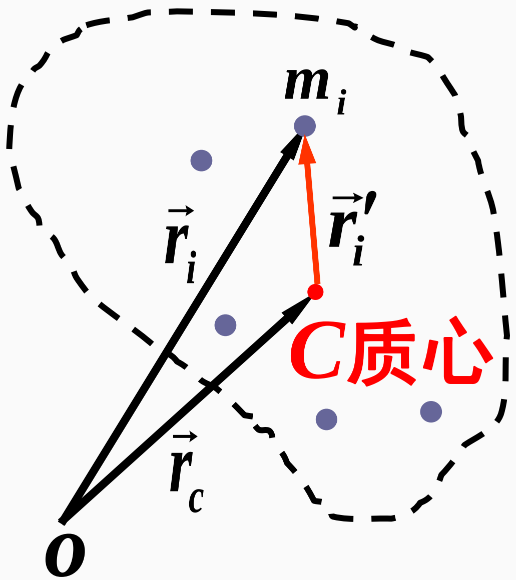
质点系的重力势能等于质点系的重力集中于质心的势能.

◆ 质心参考系（质心系）

质心静止的平动参考系称为质心系。通常总是选质心为坐标原点。不一定是惯性系。

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}'_i = m\vec{\upsilon}'_C = 0$$

质心系中，质点系的总动量为零，质心系是“零动量系”。

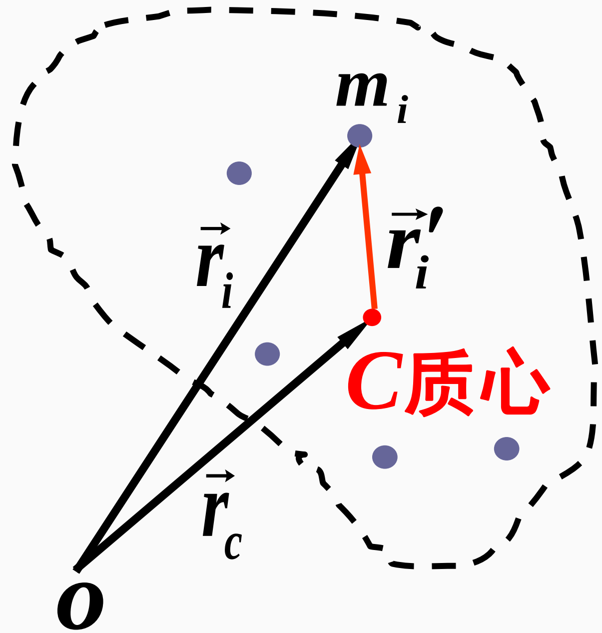


◆ 柯尼希定理

S'（质心系）： $E_k' = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2$

S（惯性系）： $E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2$

伽利略速度变换 $\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_C$



$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_C)\cdot(\vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_C)$$

$$= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2}_{E_k'} + \underbrace{\boxed{(\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i')}}_{=\text{零}} \cdot \vec{\upsilon}_C + \underbrace{\frac{1}{2}(\sum_i m_i)\upsilon_C^2}$$

随质心平动的动能 $E_{kC} = \frac{1}{2} m \vec{\upsilon}_C^2$

$$\boxed{E_k = E_k' + E_{kC}}$$

柯尼希定理：**质点系的动能=随质心平动的动能 (质心动能) +相对于质心运动的动能.**

◆ 两质点系统：

实验室系中的速度$\vec{\upsilon}_1$，$\vec{\upsilon}_2$，质心系中的速度 $\vec{\upsilon}_1'$，$\vec{\upsilon}_2'$

质心速度 $\vec{\upsilon}_c = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$

伽利略速度变换 $\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_c = \dfrac{m_2(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)}{m_1 + m_2}$

$$\vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_c = \frac{m_1(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)}{m_1 + m_2}$$

柯尼希定理 $E_k = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_c^2 + \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$

$$= \frac{1}{2}m\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$E_k=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2(\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2)^2}{(m_1+m_2)^2}+\frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2(\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1)^2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}$$

折合(约化)质量(reduced mass) $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

资用能

相对速度 $\vec{u}=\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2$ $\therefore E_k=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\boxed{\frac{1}{2}\mu u^2}$

质心动能 $\frac{1}{2}m\upsilon_c^2$ 不参与粒子间反应，真正有用的能量是资用能。 E_k 给定，怎么降低质心动能?

高能粒子撞静止靶 ⇨ 对撞机

一、动量

定义： $\vec{p} = m\vec{v}$

- 描述运动量的大小。
- 矢量，瞬时性，状态量，相对性.
- 单位：千克·米/秒（kg·m/s）

二、冲量

定义： $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ (力对时间的积累作用)

- 矢量，过程量. 单位:牛顿·秒 (N·s)

➢ **dt** 时间间隔 $d\vec{I} = \vec{F} dt,$

➢ 恒力 $\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1)$

外力作用在物体上一段时间后会改变物体的运动状态

合外力 $\rightarrow$ 加速度 +作用时间 $\rightarrow$ 速度变化 $\rightarrow$ 动量变化

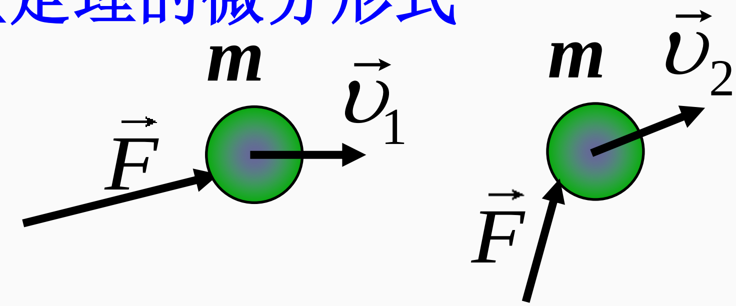
动量定理建立起过程量(冲量)与状态量(动量)变化之间的关系.

三、质点动量定理

牛顿运动定律 $\vec{F}=\dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ 两边同时乘以 ***dt***

$$\boxed{dI=\vec{F}dt=d(m\vec{\upsilon})=d\vec{p}}$$

动量定理的微分形式



有限过程，$t_1 \rightarrow t_2$ 时间内：

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=m\vec{\upsilon}_2-m\vec{\upsilon}_1=\Delta\vec{p}}$$

动量定理的积分形式

质点动量定理:质点所受合外力的冲量,等于质点动量的增量.

- 动量是状态量； 冲量是过程量，是力对时间的累积.

$$\vec{p}=m\vec{\upsilon} \qquad\qquad \vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

- 冲量的方向与速度的增量方向相同.

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=m\vec{\upsilon}_2-m\vec{\upsilon}_1=\Delta\vec{p}}$$

- 实际应用中，常用动量定理的分量式：

$$\int_{t_1}^{t_2}F_x dt=m\upsilon_{2x}-m\upsilon_{1x}$$

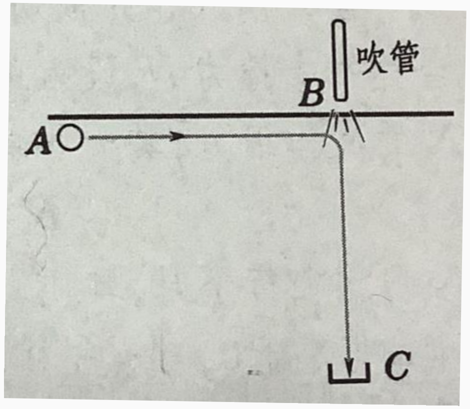
$$\int_{t_1}^{t_2}F_y dt=m\upsilon_{2y}-m\upsilon_{1y}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}F_z dt=m\upsilon_{2z}-m\upsilon_{1z}$$

某一方向的冲量只改变该方向的动量.

- **动能定理是牛顿第二定律的空间积分形式, 而动量定理是牛顿第二定律的时间积分形式, 二者各反映牛顿第二定律的一个侧面, 合在一起, 才与牛顿第二定律完全等价.**

例1、两个小朋友玩乒乓球，小明从桌角 *A* 处发射一个乒乓球，小强在桌边 *B* 处用一只吹管将球吹进桌上 *C* 处的球门。小强将吹管对准 *C* 拼命吹，球就是不进。试分析小强失败的原因。



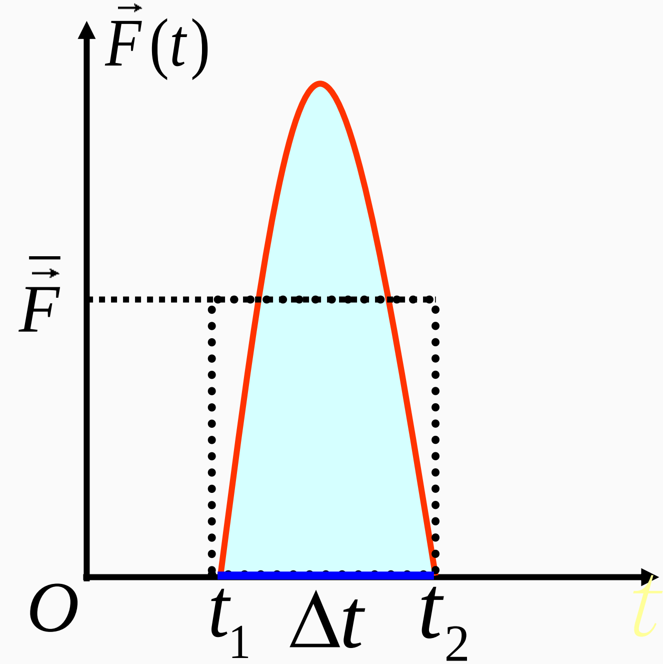
答：球到达 *B* 处时，有向右方向的动量，小强从 *B* 向 *C*吹球，不会改变向右方向的动量，球仍向右运动，也就进不了球门.

要让球进门，吹管应该向左前方斜着吹气，水平向左的分力消除向右方向的动量，向前的分力产生向前方向的动量，球才可能进球门.

- **碰撞过程**：物体间相互作用**时间很短**，而动量改变很大，这时相互作用**力很大**，这种力称为冲击力.

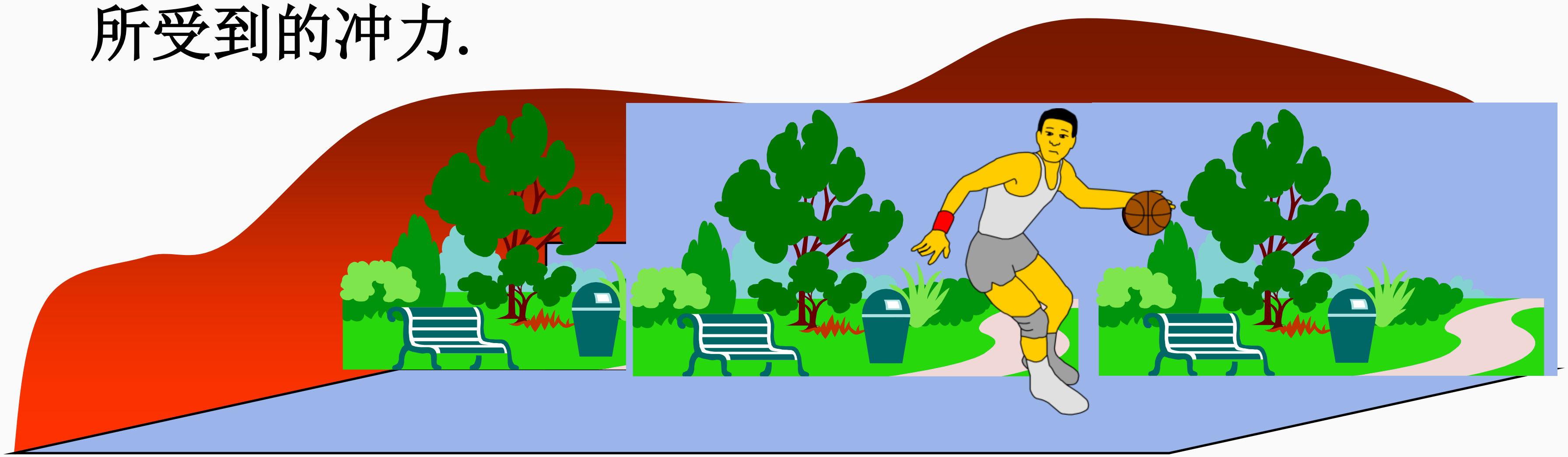
$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\bar{\vec{F}}\cdot\Delta t=\Delta\vec{p}$$

$\bar{\vec{F}}$ 平均冲击力



- 动量是物体的运动量大小的量度，质点动量的改变量由所受合外力的冲量决定.

  对于相同的动量改变量，可以通过延长作用时间来减小所受到的冲力.



- 钉钉子时，把锤子高高举起,而不是用锤子使劲压钉子.

  (增加冲击力)

- 蹦极人身上的绳子为何是有弹性的橡皮绳?

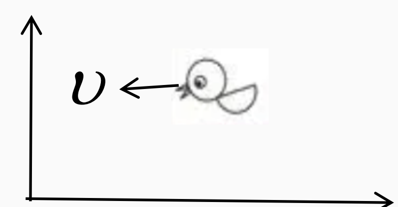
  (增加作用时间,减小冲击力)

- 飞机为何怕小小的飞鸟?

例2、飞机为何怕小小的飞鸟？一架以300 m/s的速率水平飞行的飞机(民航飞机的飞行速度一般为 800-1000 km/h, 即220-250 m/s),与一只身长为0.2m，质量为0.5kg的飞鸟相碰。假设碰撞后飞鸟与飞机具有相同的速度，而原来飞鸟对地面的速率很小，可以忽略不计。试估算飞鸟对飞机的冲击力。(碰撞时间可用飞鸟身长除以飞机速率来估算)

解：以飞机为参照系，飞鸟为研究对象，

动量定理 $\overline{F}\Delta t = 0 - m(-\upsilon) = m\upsilon,$

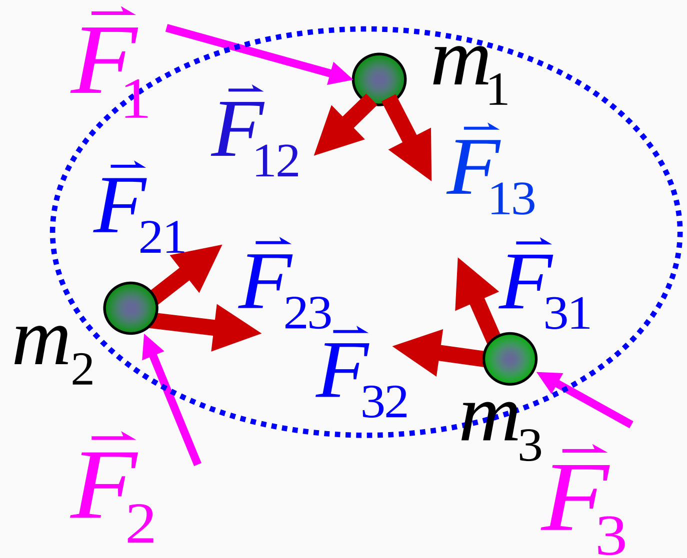


$$\overline{F} = \frac{m\upsilon}{\Delta t} = \frac{m\upsilon^2}{l} = 2.25\times10^5\,(\mathrm{N})$$

$$\Delta t = \frac{l}{\upsilon}$$

飞机所受冲击力 $\overline{F}' = -\overline{F} = -2.25\times10^5\,(\mathrm{N})$

四、质点系的动量定理



分别对每个质点应用动量定理，

$$d(m_1\vec{\upsilon}_1)=(\vec{F}_1+\underline{\vec{F}_{12}}+\underline{\vec{F}_{13}})dt$$

$$d(m_2\vec{\upsilon}_2)=(\vec{F}_2+\underline{\vec{F}_{21}}+\underline{\vec{F}_{23}})dt$$

$$d(m_3\vec{\upsilon}_3)=(\vec{F}_3+\underline{\vec{F}_{31}}+\underline{\vec{F}_{32}})dt$$

求和，得： $$\boxed{d(\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i)=\sum_i \vec{F}_i dt}$$

$$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i$$ t 时刻，质点系的总动量

有限过程，$t_1 \rightarrow t_2$ 时间内：

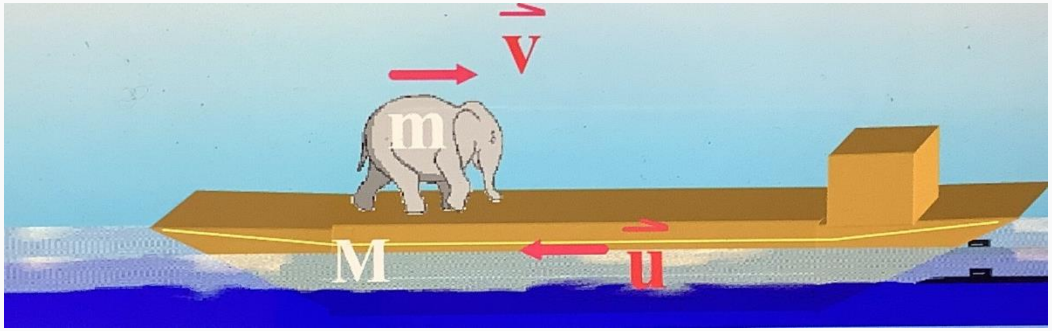
$$\boxed{\sum_i m_i\vec{\upsilon}_{i2}-\sum_i m_i\vec{\upsilon}_{i1}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=\sum_i \vec{I}_i}$$

$$\boxed{\sum_i m_i\vec{\upsilon}_{i2}-\sum_i m_i\vec{\upsilon}_{i1}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=\sum_i\vec{I}_i}$$

质点系的动量定理(积分形式): 质点系所受外力的总冲量等于质点系的总动量的增量。

◆ **注意:** 只有质点系的**外力**才能**改变**质点系的**总动量**.

例如:



质点系的动能定理 ----所有力(内力和外力)所做总功等于质点系总动能的增量。 即：内力的功也会改变系统的总动能。

五、动量守恒定律

$$\boxed{d(\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i) = \sum_i \vec{F}_i dt}$$

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow d\left(\sum m_i \vec{\upsilon}_i\right) = 0$

动量守恒定律 $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i =$ 常矢量

动量守恒定律的分量表述

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow P_x = \sum_i m_i \upsilon_{ix} = \text{常量}$$

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow P_y = \sum_i m_i \upsilon_{iy} = \text{常量}$$

$$F_z = 0 \quad \Rightarrow P_z = \sum_i m_i \upsilon_{iz} = \text{常量}$$

- 质点系所受的合外力在某方向的分量为零，则系统的总动量在该方向的分量守恒。总动量可能并不守恒

- 当内力>>外力, 且作用时间极短时，如碰撞、打击、爆炸等过程，可认为动量守恒.

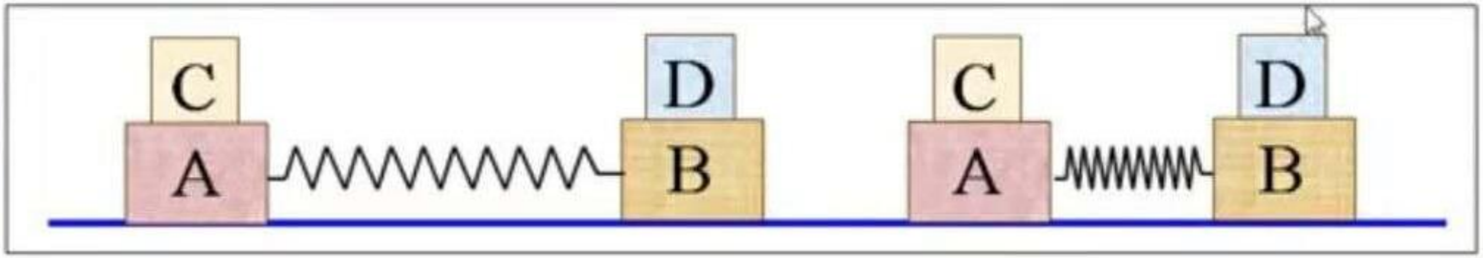
- 动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系.

- 动量守恒定律是普适规律，在微观或高速范围仍适用.

讨论

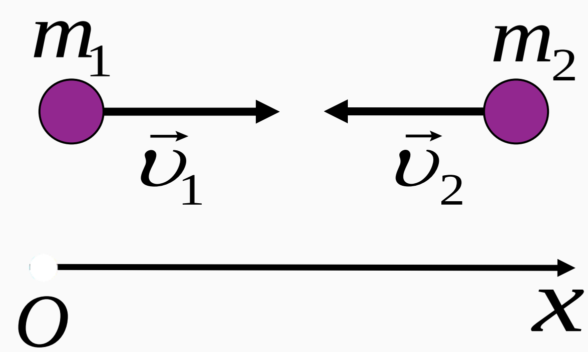
如图的系统，物体A，B置于光滑的桌面上，物体A和C，B和D之间摩擦因数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压A和B，使弹簧压缩，后拆除外力，则A和B弹开过程中，对A、B、C、D组成的系统

（A）动量守恒，机械能守恒．
（B）动量不守恒，机械能守恒．
（C）动量不守恒，机械能不守恒．
（D）动量守恒，机械能不一定守恒．



例4、在恒星系中，两个质量分别为 m_1 和 m_2 的星球，原来为静止，且相距为无穷远，后在引力的作用下，互相接近，到相距为 r 时，求它们之间的相对速率。

解：动量守恒，机械能守恒



$$m_1\upsilon_1 + m_2(-\upsilon_2) = 0$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2{}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = 0$$

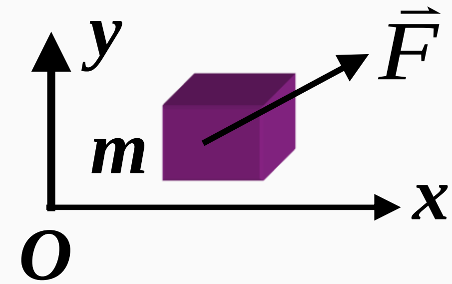
$$\upsilon_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}}, \qquad \upsilon_2 = m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}}$$

相对速率 $\upsilon_{12} = \upsilon_1 + \upsilon_2 = m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}} + m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}} = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{r}}$

例5、质量为10kg的物体，受到力 $\vec{F}=5t\vec{i}+2t\vec{j}$ (SI) 作用，在 $t=0$ 时，物体静止在原点．求：

（1）物体在 $t=10\text{s}$ 时刻的动量和动能；

(2) $t=0$ 到 10s 内作用力的冲量和所作的功.



解：根据动量定理,

$$\int_0^{10}\vec{F}dt=\Delta\vec{p}=\vec{p}-\vec{p}_0=\vec{p}$$

$$\vec{p}=\int_0^{10}(5t\vec{i}+2t\vec{j})dt=250\vec{i}+100\vec{j}\ (\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

$$E_k=\frac{p^2}{2m}=3625\,(\text{J})$$

动量定理: $\vec{I}=\int_0^{10}\vec{F}dt=\vec{p}$

动能定理: $A=E_k-E_{k0}=E_k=3625(\text{J})$

例6、 [作业练习四(6)]. 质量为m，长为 L 的柔软链条，手持上端，下端与地面的距离为 h；松手后，链条自由下落，当链条在地面上的长度为 l 的瞬间，求地面受到的压力.

解：地面上的长度为 l 时，（$L-l$）段的末端落地的速度

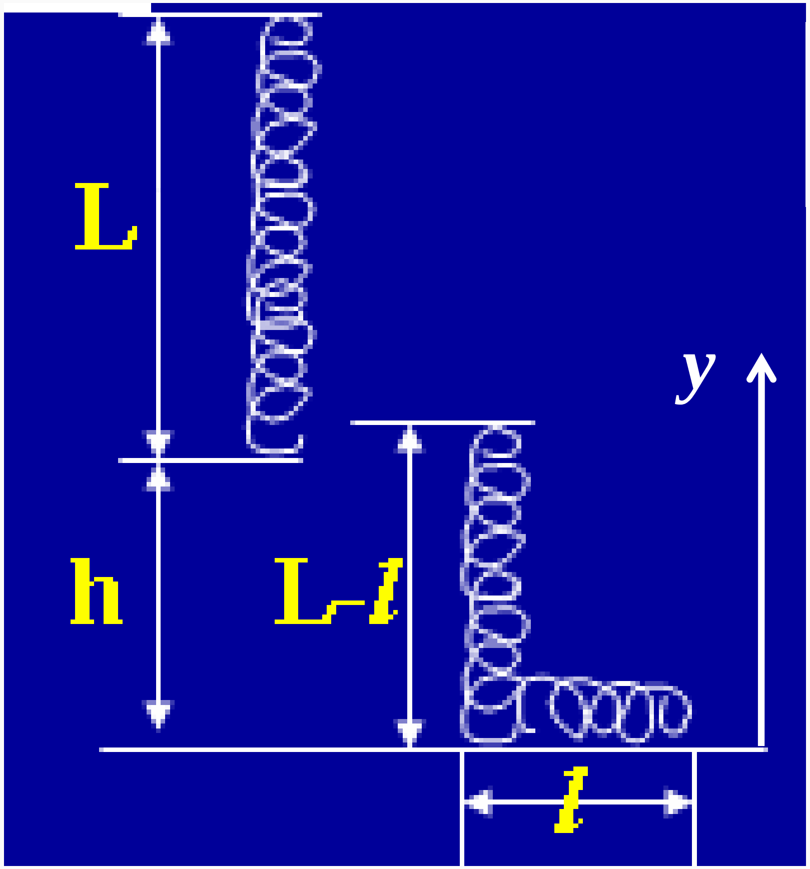
$$\upsilon=\sqrt{2g(l+h)}$$

$$fdt=0-(-\upsilon\cdot dm)=\upsilon\cdot\frac{m}{L}\cdot\upsilon\cdot dt$$

$$\therefore f=\frac{m}{L}\upsilon^2=\frac{2mg}{L}(l+h)$$

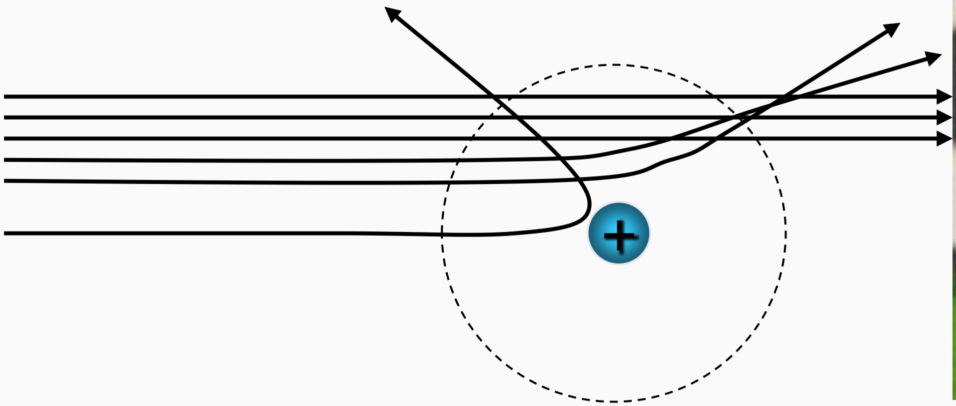
$$N=-f-\frac{m}{L}l\,g$$

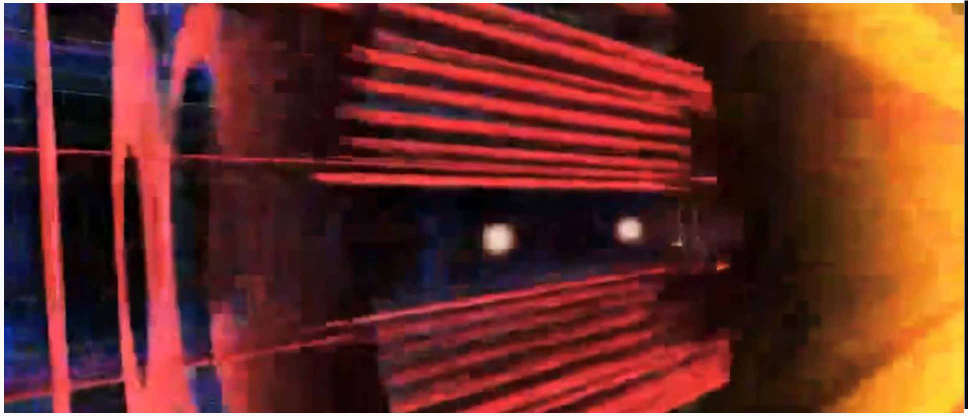
$$=-[\frac{mg}{L}(3l+2h)]$$



2.5 动量定理 动量守恒定律

2.7 碰撞



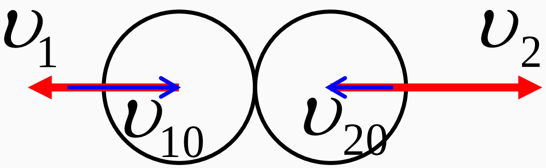


一、碰撞：两个物体或者质点相互接近时，在极短时间内产生强烈的相互作用。

二、碰撞特点：

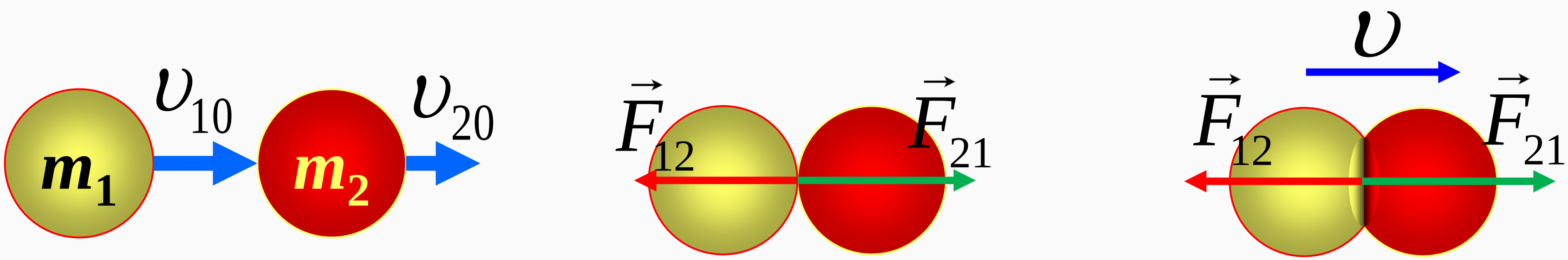
- 碰撞前后运动状态发生显著变化。
- 碰撞物体间的冲击力(内力）>> 外力（阻力、重力等）
- 碰撞时间极短，外力冲量可忽略，所以碰撞过程中系统的总动量守恒.

三、对心正碰：碰撞前后速度方向都在两球的中心连线上

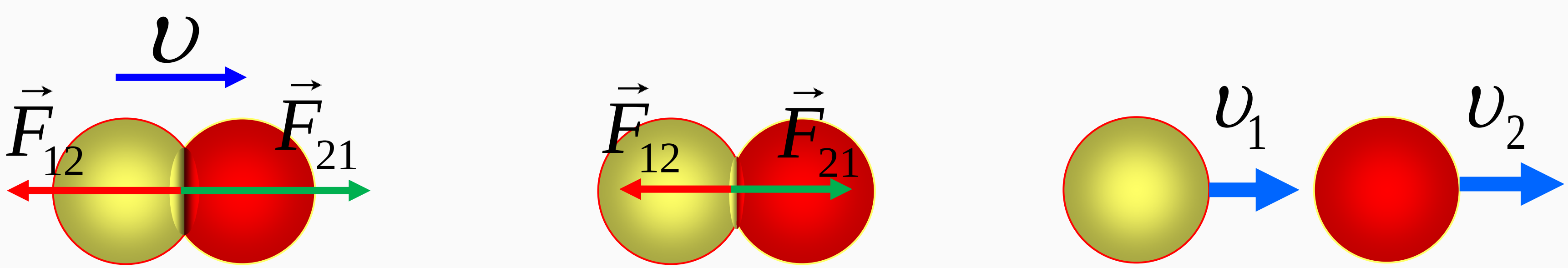


四、碰撞过程的两个阶段

压缩阶段：开始接触到接近速度降为零



恢复阶段：由于弹性而部分或完全恢复原来形状



五、碰撞的分类（从能量角度）

- 完全弹性碰撞（简称弹性碰撞）

  分开，两球完全复原，动量守恒，机械能守恒.

- 完全非弹性碰撞

  合为一体，动量守恒，机械能不守恒.

- 非(完全)弹性碰撞

  分开，形变不能完全恢复，动量守恒，机械能不守恒.

六、恢复系数 $e=\dfrac{\upsilon_2-\upsilon_1}{\upsilon_{10}-\upsilon_{20}}$

接近速度 $\upsilon_{10}-\upsilon_{20}$，　分离速度 $\upsilon_2-\upsilon_1$

恢复系数 *e* 只由碰撞物体的材料决定

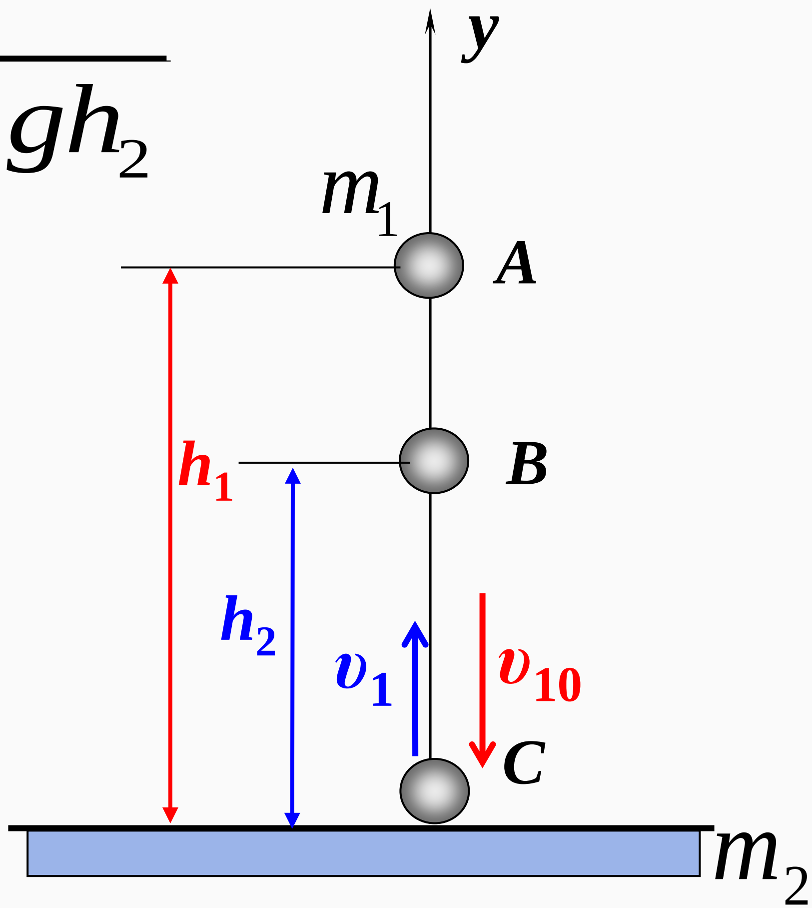
物体	*e*	物体	*e*
铁球--铅球	0.14	钢球--钢球	0.56
铅球--铅球/铝--铝	0.20	铁球--铁球	0.66
木球--胶皮球	0.26	象牙球--象牙球	0.89
木球--木球	0.50	玻璃球--玻璃球	0.94

七、恢复系数的测定

$$m_1 \ll m_2, \quad \upsilon_{20} = \upsilon_2 = 0$$

$$\upsilon_{10} = -\sqrt{2gh_1}, \quad \upsilon_1 = \sqrt{2gh_2}$$

$$e = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_{10} - \upsilon_{20}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$



八、三类碰撞的恢复系数

$$\boxed{e=\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{\upsilon_{10}-\upsilon_{20}}}$$

- 完全弹性碰撞：*e*=1

动量守恒 $m_1\upsilon_{10}+m_2\upsilon_{20}=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2$

$$\Rightarrow m_1(\upsilon_{10}-\upsilon_1)=m_2(\upsilon_2-\upsilon_{20}) \qquad (1)$$

机械能守恒 $\frac{1}{2}m_1\upsilon_{10}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{20}^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1({\upsilon_{10}}^2-{\upsilon_1}^2)=\frac{1}{2}m_2({\upsilon_2}^2-{\upsilon_{20}}^2) \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow \upsilon_{10}+\upsilon_1=\upsilon_2+\upsilon_{20}, \qquad \therefore e=1$$

- 完全非弹性碰撞：$e = 0$;
- 非(完全)弹性碰撞：$0 < e < 1$

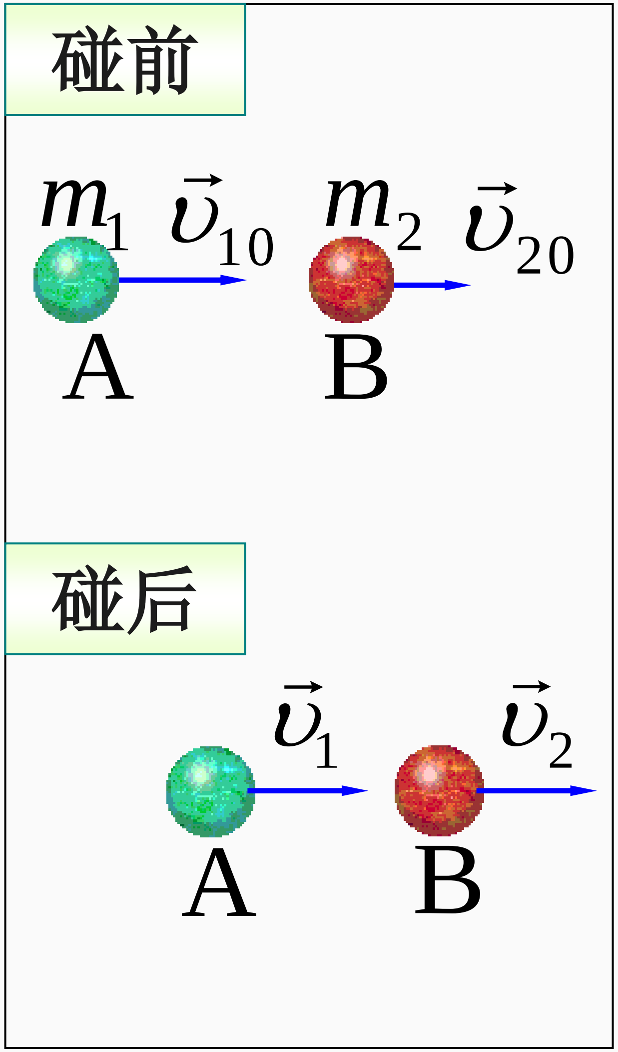
九、碰后速度

$$m_{10}\upsilon + m_2\upsilon_{20} = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$$

$$e = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_{10} - \upsilon_{20}}$$

$$\upsilon_1 = \frac{(m_1 - m_2 e)\upsilon_{10} + (1+e)m_2\upsilon_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$\upsilon_2 = \frac{(1+e)m_1\upsilon_{10} + (m_2 - m_1 e)\upsilon_{20}}{m_1 + m_2}$$



1）弹性碰撞后的速度

$$\upsilon_1=\frac{(m_1-m_2)\upsilon_{10}+2m_2\upsilon_{20}}{m_1+m_2},\qquad \upsilon_2=\frac{2m_1\upsilon_{10}+(m_2-m_1)\upsilon_{20}}{m_1+m_2}$$

- 如果 $m_2 >> m_1,\ \upsilon_{20}=0$ ⇒ $\upsilon_1\approx-\upsilon_{10},\quad \upsilon_2\approx 0$

  如果 $m_2 >> m_1,\ \upsilon_{20}\neq 0$ ⇒ $\upsilon_1\approx-\upsilon_{10}+2\upsilon_{20},\ \upsilon_2\approx\upsilon_{20}$

  (若υ_{20}与υ_{10}反向，则 $|\upsilon_1|>|\upsilon_{10}|$——球拍对球的反弹速度，引力弹弓效应)

- 如果 $m_2 << m_1,\ \upsilon_{20}=0$ ⇒ $\upsilon_1\approx\upsilon_{10},\quad \upsilon_2\approx 2\upsilon_{10}$
- 如果 $m_1=m_2,$ ⇒ $\upsilon_1=\upsilon_{20}\ ,\quad \upsilon_2=\upsilon_{10}$ (交换速度)

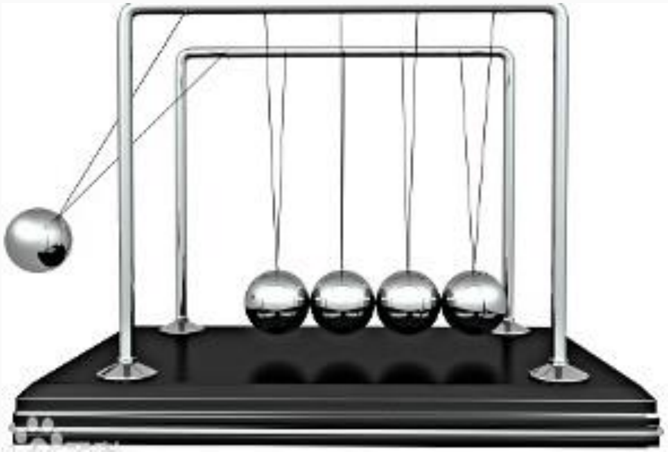
$$\boxed{\upsilon_1=\frac{(m_1-m_2e)\upsilon_{10}+(1+e)m_2\upsilon_{20}}{m_1+m_2}}\qquad \boxed{\upsilon_2=\frac{(1+e)m_1\upsilon_{10}+(m_2-m_1e)\upsilon_{20}}{m_1+m_2}}$$

（1）台球（正碰，不旋转） 一个台球和一个台球碰撞时交换速度

（2）人工放射性

小居里夫妇发现用 α 粒子轰击某些轻元素，产物具有放射性。费米用中子重复同样的实验时，发现银筒周围物质影响放射性，当把中子源放在石蜡块中时，放射性增强一百多倍。石蜡中有大量氢，氢核是质子，具有与中子同样的质量。中子连续与石蜡中的质子碰撞，碰撞时失去一部能量，正如一个台球和一个台球碰撞时交换速度，慢下来一样。中子的速度大大降低，这种慢中子被银原子俘获的机会大大增强。为了验证这一理论，他们又在水中做了实验，验证了这一解释。要使中子有效轰击核，就要让它先穿过一些原子序数小的物质-- 核反应堆中的减速剂（重水、石墨）

（3）牛顿摆

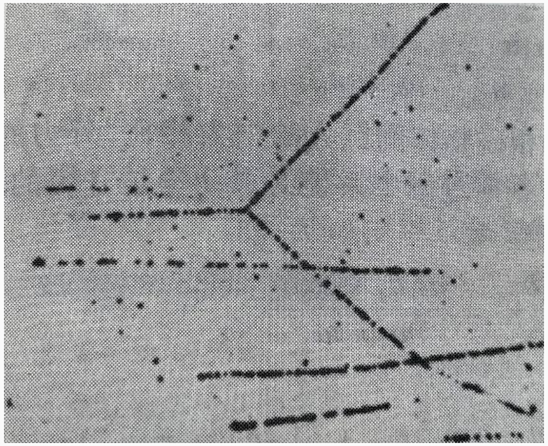


（4）台球中的斜碰（假设弹性碰撞）

$$m\vec{\upsilon}_{10} = m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 \quad \Rightarrow \upsilon_{10}^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\vec{\upsilon}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2$$

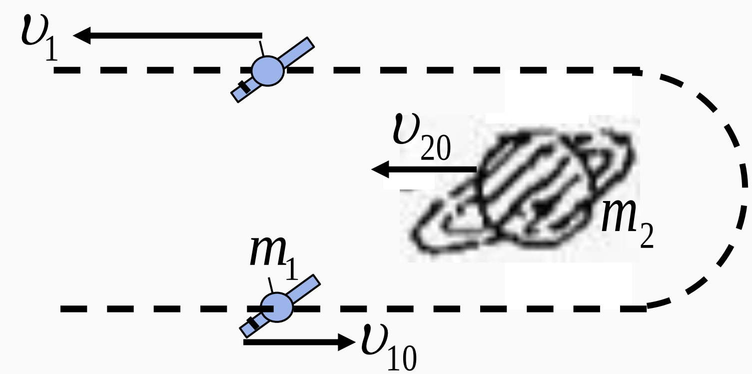
$$\frac{1}{2}m\upsilon_{10}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$$

$$\therefore \vec{\upsilon}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 = 0$$ 碰后两球速度相互垂直



一入射质子与照相乳胶中的静止质子作弹性碰撞时留下的径迹

例1、弹弓效应(引力助推). 土星质量m_2= 5.67x10^{26}kg, 以相对于太阳的速率 υ_{20}= 9.6km/s 运行; 探测器质量m_1 = 150kg, 以相对于太阳的速率υ_{10}=10.4km/s 迎向土星飞行. 由于土星引力, 探测器绕过土星沿与原来速度相反的方向离去, 求它离开土星后的速度. (张三慧, 例4.17)



解：无接触完全弹性碰撞, m_1<<m_2.

动量守恒 $$m_1\upsilon_{10}+m_2\upsilon_{20}=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2$$

机械能守恒 $$\frac{m_1\upsilon_{10}^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_{20}^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}$$

$$\upsilon_1=\frac{(m_1-m_2)\upsilon_{10}+2m_2\upsilon_{20}}{m_1+m_2}$$

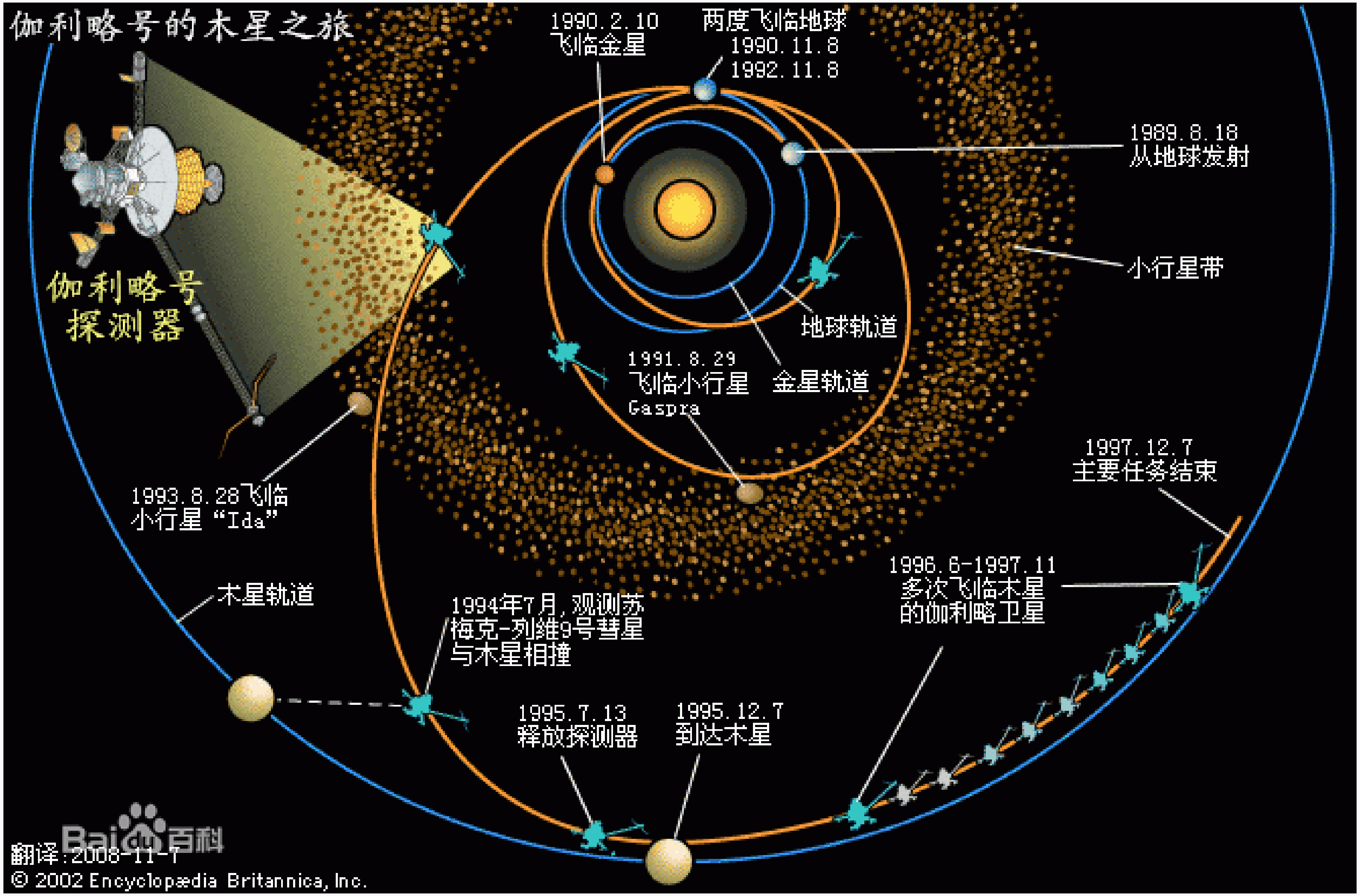
$$m_1\ll m_2,\ \upsilon_1=-\upsilon_{10}+2\upsilon_{20}$$

引力助推加速原理：弹性碰撞中探测器与土星碰撞前后的相对速度是不变的, 碰撞前反向, 碰撞后同向, 要保证相对速度不变, 探测器的速度就等于两倍的土星速度加上探测器的速度.

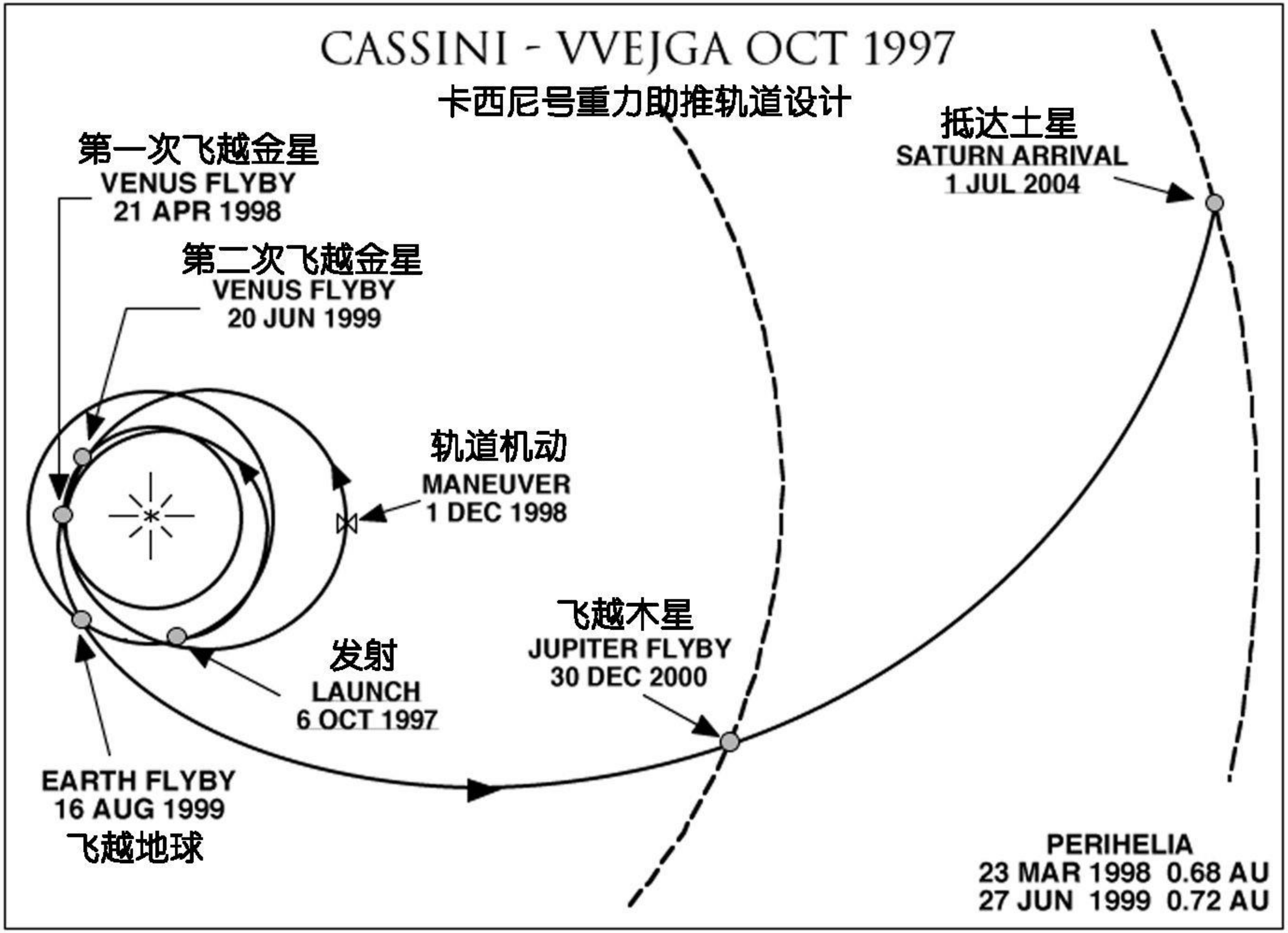
$$\upsilon_1=-10.4-2\times9.6=-29.6\text{km/s}$$ 引力助推

【参考文献】 [1]周建新, 刘黎红. 神秘的“弹弓效应”[J]. 物理教师, 2019(2): 81-84.
[2]秦月婷．浅议弹弓效应[J]. 大学物理, 2014, 33(2): 26-27．讨论了加速的条件.

1989年发射的伽利略木星探测器



1997年发射的卡西尼号土星探测器



2）完全非弹性碰撞后的速度

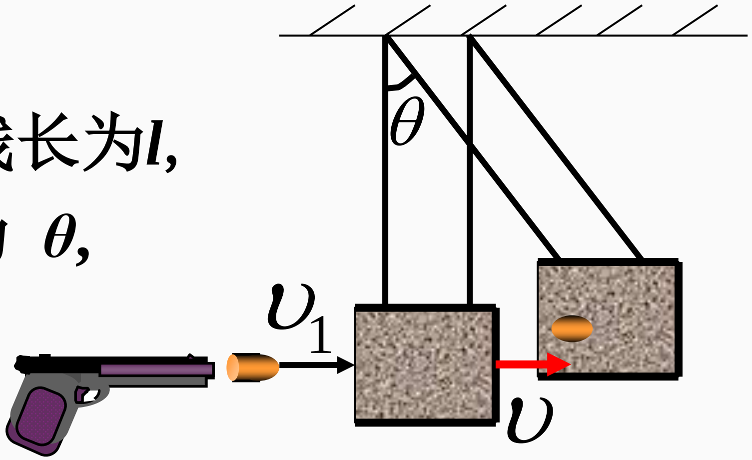
$$\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon=\frac{m_1\upsilon_{10}+m_2\upsilon_{20}}{m_1+m_2}$$

$$\boxed{\upsilon_1=\frac{(m_1-m_2e)\upsilon_{10}+(1+e)m_2\upsilon_{20}}{m_1+m_2}}$$

$$\boxed{\upsilon_2=\frac{(1+e)m_1\upsilon_{10}+(m_2-m_1e)\upsilon_{20}}{m_1+m_2}}$$

例2、测子弹出膛速度----冲击摆

木箱里装满沙子，质量为M，摆线长为l,
子弹质量为m，摆过的最大偏角为 θ,
求子弹的出膛速度υ_1.



解： 完全非弹性碰撞

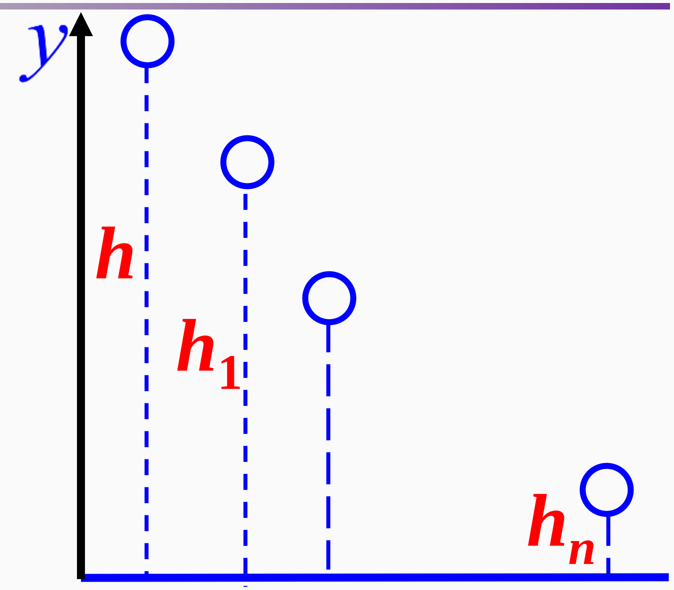
动量守恒：$m\upsilon_1=(m+M)\upsilon$

上摆过程中机械能守恒:

$$\frac{1}{2}(m+M)\upsilon^2=(m+M)gl(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \upsilon_1=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

例3、(教材习题2-21) 一小球从 h 高处自由下落，不计空气阻力，与水平桌面碰后又回弹到高度 h_1，问 n 次碰撞后小球能回弹到多大高度?



解： 每次碰撞中恢复系数都一样

$$\upsilon_{10}=-\sqrt{2gh},\quad \upsilon_{20}=0$$

$$\upsilon_1=\sqrt{2gh_1},\quad \upsilon_2=0$$

$$\therefore e=\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{\upsilon_{10}-\upsilon_{20}}=\sqrt{\frac{h_1}{h}}$$

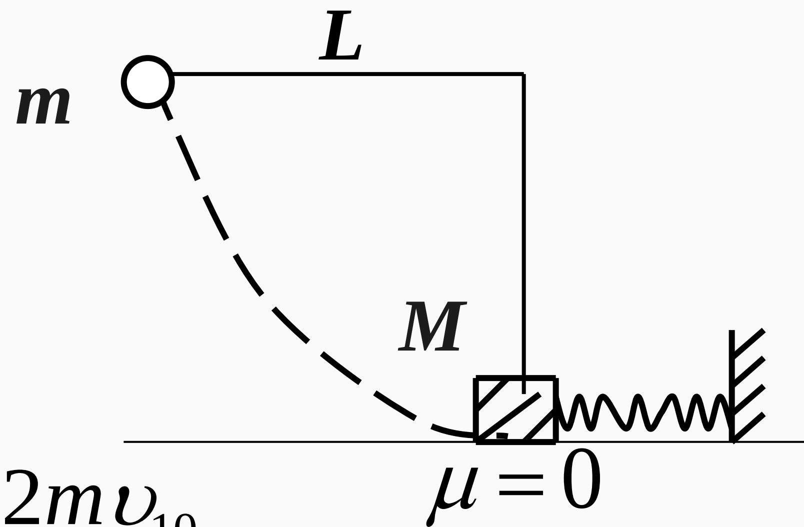
$$e^2=\frac{h_1}{h}=\frac{h_2}{h_1}=\ldots=\frac{h_n}{h_{n-1}}$$

上式 n 项相乘，$(e^2)^n=\dfrac{h_n}{h}$

$$\left(\frac{h_1}{h}\right)^n=\frac{h_n}{h}\Rightarrow h_n=\frac{h_1^n}{h^{n-1}}$$

例4、一小球*m*与物体*M* 作完全弹性碰撞，求弹簧的最大压缩量。

$m = 1$kg, $M = 5$kg, $L = 1$m, $k=2\text{x}10^3$ N/m.



解：向右速度为正

$$\upsilon_{10} = \sqrt{2gL}, \quad \upsilon_{20} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} m\upsilon_{10} &= -m\upsilon_1 + M\upsilon_2 \\ e &= \frac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{\upsilon_{10}} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2m\upsilon_{10}}{M+m}$$

$$\frac{1}{2}k x_m^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 \Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{M}{k}} \cdot \frac{2m\upsilon_{10}}{M+m} = \frac{\sqrt{5}}{30}$$

◆ 碰撞过程中质心动能不变

动量守恒 $m_1\upsilon_{10}+m_2\upsilon_{20}=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2 \Rightarrow$

$\therefore \upsilon_c$ 不变

$\frac{1}{2}m\upsilon_c^2$ 不变

$$\boxed{\vec{\upsilon}_C=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i}$$