第四章 数字特征与特征函数

第一节　　数学期望
第二节　　方差、相关系数、矩
第三节　　母函数(略)
第四节　　特征函数
第五节　　多元正态分布(略)

§4.1 数学期望

一、数学期望的概念

数字特征是由随机变量决定的一些常数，期望与方差是其中最重要的两个特征，它们只能刻画随机变量的部分性质。

数学期望(Mathematical Expectation)是一个随机变量的平均取值，是它所有可能取值的加权平均，权是这些可能值相应的概率。

例4.1.1　一位射击教练将从两个候选人中挑选一人作为他的队员，甲还是乙的成绩更好？

成绩(环数)	8	9	10
甲的概率	0.1	0.3	0.6
乙的概率	0.2	0.5	0.3

解. 以 ξ、η 分别表示甲、乙射击一次的结果，

ξ 的数学期望(甲射击一次的平均成绩)是

$E\xi = 8\times0.1 + 9\times0.3 + 10\times0.6 = 9.5$ (环)，

同理，乙射击一次的平均成绩是

$E\eta = 8\times0.2 + 9\times0.5 + 10\times0.3 = 9.1$ (环)。

□

二. 离散随机变量的数学期望

如果ξ 的分布律为

$$P(\xi = x_i) = p_i \qquad i = 1, 2, \cdots$$

若级数$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p_i$收敛，则称级数$\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p_i$的值为随机变量$\xi$的数学期望，记为$E(\xi)$，即有$E(\xi)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p_i$.

级数绝对收敛的条件是为了保证期望不受求和顺序的影响。

数学期望反映了随机变量取值的中心趋势。

几种重要的离散型分布的期望：

(1)（0—1）分布：

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$$E(X) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

(2) 二项分布：$X\sim b(n,p)$.

$$p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots,n$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np.$$

(3) 泊松分布：$X\sim P(\lambda)$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0,1,2,\cdots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

(4) 几何分布：$P\{X=k\} = q^{k-1}p, k = 1,2,\cdots$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)' = p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'$$

$$= p(\frac{q}{1-q})' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

从上面的例子可以看出，其中重要的离散型分布的参数都可由数学期望算得，因此它是一个重要的概念。

例 随机变量 ξ 取值 $x_k=(-1)^k\frac{2^k}{k}$, $k=1,2,\cdots$，对应的概率为 $p_k=\frac{1}{2^k}$， 则由于 $p_k\ge 0$, $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$ ，因此它是概率分布，而且

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}=-\ln 2.$$

但是

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

因此，ξ 的数学期望不存在。

例4.1.3 某人有 10 万元，如果投资于一项目将有 30%的可能获利 5 万，60% 的可能不赔不赚，但有10%的可能损失全部 10 万元；同期银行的利率为 2% ，问他应该如何决策？

解. 以 ξ 记这个项目 的投资利润。

利润	5	0	- 10
概率	0.3	0.6	0.1

平均利润为：

$E\xi = 5\times 0.3 + 0\times 0.6 + (-10)\times 0.1 = 0.5$，

而同期银行的利息是 $10\times 0.02 = 0.2$ ，

因此从期望收益的角度应该投资这个项目。

三．连续随机变量的数学期望

如果ξ 的密度函数 $p(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|xp(x)|\,dx<\infty,$$

则连续随机变量ξ 的数学期望是积分：

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx,$$

否则称为这个随机变量的期望不存在

几种常用连续型分布的期望：

(1) 均匀分布

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}.$$

(2) 指数分布 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}xp(x)dx+\int_{0}^{+\infty}xp(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}xd(e^{-\lambda x})=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

(3) 柯西分布 (期望不存在)

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty,$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=\infty,$

故数学期望不存在。

(4) 正态分布

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad x\in R$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令$t=\dfrac{(x-\mu)}{\sigma}$ $$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

(5) Gamma分布

$$X \sim \Gamma(r,\lambda),$$

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^r e^{-\lambda x}d(\lambda x)$$

$$=\frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\Gamma(r)}=\frac{r}{\lambda}.$$

四. 一般场合：适合一切随机变量的数学期望的定义

若随机变量ξ的分布函数为$F(x)$，类似于连续型的场合，作很密的分割 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ ，则ξ落在$[x_i,x_{i+1})$中的概率等于 $F(x_{i+1})-F(x_i)$，因此

ξ与以概率 $F(x_{i+1})-F(x_i)$ 取值 x_i 的离散型随机变量近似，而后者的数学期望为

$$\sum_i x_i\cdot[F(x_{i+1})-F(x_i)]$$

注意到上式是Stieltjes积分 $\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x)$ 的渐近和式。

数学期望的一般定义：

如果ξ 的分布函数 $F(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,dF(x)<+\infty,$$

则ξ 的数学期望定义成Stieltjes 积分：

$$\mathrm{E}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF(x).$$

否则称这个随机变量的期望不存在.

Riemann积分的推广: Stieltjes积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x).$$

(1) F(x)在x_k处具有跳跃度p_k时,化为级数

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

(2) F(x)存在导数$p(x)$时,化为Riemann 积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p(x)dx,$$

五、随机变量函数的期望

1. 单个变量函数的期望

设随机变量ξ，g(x) 为一元Borel 函数，定义随机变量 η =g(ξ)，则

$$E\eta=Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}y\mathrm{d}F_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}F_\xi(x)$$

不必计算新的随机变量的分布。

这个结果的证明要用到测度论，超出了本课程的范围。

离散型场合，上述公式化为

$$Eg(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p(x_i)$$

这是因为：ξ 的分布列为

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots\end{pmatrix}$$

则η =g(ξ) 的分布列可由下得到

$$\begin{pmatrix}g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_n) & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots\end{pmatrix}$$

连续型场合，若ξ具有密度函数$p(x)$，则

$$Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)p(x)dx$$

事实上，不妨只考虑g严格单调增加且可导情形，此时η =g(ξ) 的密度为

$$q(y)=p(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]'$$

$$Eg(\xi)=E\eta=\int_{-\infty}^{\infty}yq(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}yp(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]'dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)p(x)\mathrm{d}x$$

2. 随机向量函数的期望

设随机向量$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ 的联合分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$为n元Borel函数，定义随机变量 $\eta=g(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$，则

$$Eg(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n)$$

特别地，

$$E\xi_1=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\mathrm{d}F(x_1).$$

EX 设X服从N(0,1)分布，求$E(X^2),E(X^3),E(X^4)$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}=3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=3$$

例 设随机变量(X, Y)的分布律如下，求E(XY)

X \ Y	1	2
0	0.15	0.15
1	0.45	0.25

解：$E(XY)=0\times1\times0.15+0\times2\times0.15$

$$+1\times1\times0.45+1\times2\times0.25$$

$$=0.95$$

例 已知二维r.v.(X,Y)的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：E(XY).

解： $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy$$

$$=\frac{1}{3}$$

六、数学期望的基本性质

性质1 若 $a \le \xi \le b$，则 $a \le E(\xi) \le b$.特别地，$E(C) = C$，这里C是常数.

性质2（线性性质）对任意常数 $c_i, i = 1, \cdots, n$ 及 b，有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E\xi_i + b$$

3. 和的期望等于期望的和

对任意n个随机变量 ξ_1、…、ξ_n，都有：

$E(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_n$

4. 独立乘积的期望等于期望的乘积

如果 ξ_1、…、ξ_n 相互独立，则有：

$E(\xi_1 \times \xi_2 \times \ldots \times \xi_n) = E\xi_1 \times E\xi_2 \times \ldots \times E\xi_n$

注意：该性质不是充要条件。

◆ 利用性质求期望

例4.1.8 计算正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的期望.

解. 因为正态分布 ξ 可转化为

$\xi = \mu + \sigma\xi_0$，其中 $\xi_0 \sim N(0,1)$

显然有，

$$E(\xi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

因此，$E\xi = \mu + \sigma E(\xi_0) = \mu$，

即正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的期望就是参数 μ。 □

例4.1.9 计算二项分布及超几何分布的期望

$$b(k; n, \frac{M}{N}) = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}, \ 0 \le k \le n;$$

$$h_k = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \ 0 \le k \le \min(n, M).$$

解. 定义n 个随机变量 ξ_1、…、ξ_n，

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第i 次取到的是次品，} \\ 0, & \text{第i 次取到的是合格品} \end{cases}$$

每个 ξ_i 同分布于参数 M/N 的Bernoulli分布

$$P\{\xi_i = 1\} = \frac{M}{N}, P\{\xi_i = 0\} = 1 - \frac{M}{N}, E(\xi_i) = \frac{M}{N}.$$

有放回抽样时它们相互独立，即

$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ 服从二项分布；

无放回抽样时它们不独立，而

$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ 服从超几何分布；

注意到，每个 ξ_i 的期望都是 M/N，因此

（1）二项分布 $B(n,p)$ 的期望为 $np = nM/N$；

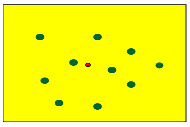
（2）超几何分布 $HG(n,N,M)$ 的期望为 nM/N。

□

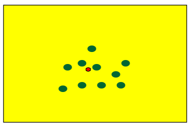
§4.2 方差，相关系数，矩

一 、方差
二、 切比雪夫不等式
三、 相关系数
四、 矩

例如：炮落点距目标的位置如图，哪门炮效果好一些？



甲炮射击结果



乙炮射击结果

一、方差

定义 设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称$E\{[X-E(X)]^2\}$为X的方差. 记为D(X)或Var(X).

方差的算术平方根$\sqrt{D(X)}$称为均方差或标准差。记为$\sigma(X)$.

注：方差实际上就是X的函数$g(X)=[X-E(X)]^2$的期望.

方差反映了随机变量的取值与平均值的偏离程度.

常用计算公式：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

证明：
$$
\begin{aligned}
D(X) &= E[X-E(X)]^2\\
&= E[X^2-2X\cdot E(X)+(E(X))^2]\\
&= E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+(E(X))^2\\
&= E(X^2)-[E(X)]^2
\end{aligned}
$$

推论：
$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$$
$$E(X^2)\ge[E(X)]^2$$

例4.2.2 射击教练将从他的两名队员中选择一人参加比赛，应该是甲还是丙更合适？

成绩(环数)	8	9	10
甲的概率	0.1	0.3	0.6
丙的概率	0.2	0.1	0.7

解. 这里甲、丙两人的平均成绩都是
$$E\xi=E\eta=9.5$$
需要比较方差，简单计算后可以得到：
$$D\xi=0.45,\quad D\eta=0.65$$
因此, 应该选择甲队员去参加比赛。

几种常见分布的方差：

(1)（0—1）分布：

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$
$$EX=p, DX=p(1-p).$$

(2) 二项分布：$X\sim b(n,p)$.
$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$
$$E(X)=np, D(X)=np(1-p).$$

(3) 泊松分布：$X\sim P(\lambda)$
$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$
$$E(X)=\lambda,$$
$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$
$$=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda(E(X)+1)=\lambda^2+\lambda$$
$$\therefore D(X)=\lambda$$

(4) 均匀分布：$X \sim U(a,b)$

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx$$
$$=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$
$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$
$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\therefore E(X)=\frac{a+b}{2},D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

(5) 指数分布：$X\sim \text{Exp}(\lambda)$

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$=-\int_0^{\infty}x^2d(e^{-\lambda x})=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}d(x^2)$$
$$=2\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}d(x)=\frac{2}{\lambda}E(X)=\frac{2}{\lambda^2}$$
$$\therefore D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

(6) 正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$
$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2p(x)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2/2}dz$$
$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=\sigma^2.$$
$$\therefore E(X)=\mu\,,D(X)=\sigma^2$$

特别，当 $X\sim N(0,1), E(X)=0, D(X)=1.$

常见分布的数学期望与方差列表：

(1) 二项分布，	$E\xi=np$，	$D\xi=npq$；
Bernoulli 分布：	$E\xi=p$，	$D\xi=pq$；
(2) Pascal分布，	$E\xi=r/p$，	$D\xi=rq/p^2$；
(3) Poisson分布，	$E\xi=\lambda$，	$D\xi=\lambda$；
(4) 均匀分布，	$E\xi=(a+b)/2$，	$D\xi=(b-a)^2/12$；
(5) Gamma分布，	$E\xi=\alpha/\lambda$，	$D\xi=\alpha/\lambda^2$；
指数分布：	$E\xi=1/\lambda$，	$D\xi=1/\lambda^2$；
卡方分布：	$E\xi=n$，	$D\xi=2n$；
(6) 正态分布，	$E\xi=\mu$，	$D\xi=\sigma^2$。

◆ 方差的基本性质

1. 设C是常数,则 $D(C)=0$；

2. 随机变量线性变换的方差公式:
设 a、b 是两个常数，则有$D(a+b\xi)=b^2D\xi$.

注：与数学期望的性质比较:

$$E(a+b\xi)=a+b\,E\xi$$

平移改变随机变量期望，但不会改变方差.

3、$D(X)=0 \iff P\{X=C\}=1$

证明：见后面“Chebyshev不等式”部分。

4.独立和的方差等于方差的和：
若X与Y独立，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

注：这条性质同样不是一个充要条件。

推广：若$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 则

$$D[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n D(X_i), D[\sum_{i=1}^n C_iX_i]=\sum_{i=1}^n C_i^2D(X_i).$$

比较：

1. 如果ξ_1、…、ξ_n 相互独立，则有：

$$D(\xi_1 \pm \xi_2 \pm \dots \pm \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n$$

2. 任意随机变量和的期望等于期望的和：

$$E(\xi_1 \pm \xi_2 \pm \dots \pm \xi_n) = E\xi_1 \pm E\xi_2 \pm \dots \pm E\xi_n$$

3. 独立随机变量乘积的期望等于期望的乘积：

$$E(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = E\xi_1 E\xi_2 \dots E\xi_n$$

5. 若 $c \neq E\xi$，则 $D\xi < E(\xi - c)^2$。

证明：因为

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E[(\xi - c) + (c - E\xi)]^2$$
$$= E[(\xi - c)]^2 + E[(c - E\xi)]^2 + 2E[(\xi - c)(c - E\xi)]$$
$$= E[(\xi - c)]^2 + (c - E\xi)^2 + 2(c - E\xi)(E\xi - c)$$
$$= E[(\xi - c)]^2 - (c - E\xi)^2$$

注：这个性质表明数学期望具有一个重要的极值性质：在 $E[(\xi - c)]^2$ 中，当$c = E\xi$时达到极小；这也说明在 $D\xi$ 的定义中取$c = E\xi$的合理性。

例2、已知$X \sim b(n,p)$，求$D(X)$。

解：$X_i = \begin{cases} 1 & 如第i次试验成功, \\ 0 & 如第i次试验失败, \end{cases} i = 1, 2, \cdots, n.$

则$X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$，且$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立。

易见$X_i \sim b(1, p)$，则$D(X_i) = p(1-p)$，

所以，$D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$.

注：利用方差和的性质时要注意相互独立的条件。

◆ 随机变量的标准化：

假设随机变量ξ的期望$E\xi$及方差$D\xi$都存在，且$D\xi>0$，则称

$$\xi^* = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$$

为ξ 的标准化随机变量。

“标准化” 的目的是通过线性变换把一个随机变量的期望转化为 0，方差转化为 1.

二. Chebyshev不等式

对于任何具有有限期望与方差的随机变量ξ，都有

$$P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

其中ε 是任一正数。

证明：若 $F(x)$是ξ的分布函数，则显然有

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 \mathrm{d}F(x) \geq \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} (x - E\xi)^2 \mathrm{d}F(x)$$
$$\geq \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 \mathrm{d}F(x) = \varepsilon^2 P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\}.$$

Chebyshev不等式还常写成下面的形式：

$$P\{|\xi - E\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

或

$$P\left\{\left|\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right| < \delta\right\} \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Chebyshev不等式的意义：利用随机变量ξ的数学期望及方差对 ξ的概率分布进行估计。它断言不管ξ 的分布是什么，ξ落在$(E\xi - \sigma\delta, E\xi + \sigma\delta)$ 中的概率均不小于$1 - 1/\delta^2$.

从Chebyshev不等式还可以看出,当方差愈小时,事件

$$\{|\xi-E\xi|\ge\varepsilon\}$$

的概率也愈小，从这里可以看出方差是描述随机变量与其期望值离散程度的一个量。

特别地,若$D\xi=0$,则对于任意的$\varepsilon>0$，恒有

$$P\{|\xi-E\xi|\ge\varepsilon\}=0,$$

因此,$P\{\xi\ne E\xi\}=0$, 即 $P\{\xi=E\xi\}=1$

所以方差为零的随机变量是常数。

在不等式中分别取 $\varepsilon=\sigma$，2σ，3σ

$P\{|\xi-\mu|\le\sigma\}\ge 0$

$P\{|\xi-\mu|\le2\sigma\}\ge 0.75$

$P\{|\xi-\mu|\le3\sigma\}\ge 0.8889$

比较正态分布的结果:

$P\{|\xi-\mu|\le\sigma\}=0.6826$，

$P\{|\xi-\mu|\le2\sigma\}=0.9544$，

$P\{|\xi-\mu|\le3\sigma\}=0.9974$。

已知某种股票每股价格X的平均值为1元，标准差为0.1元，求a,使股价超过1+a元或低于1-a元的概率小于10%。

解：由切比雪夫不等式

$$P\{|X-1|\ge a\}\le\frac{0.01}{a^2};$$

令 $$\frac{0.01}{a^2}\le 0.1$$

$$\Rightarrow a^2\ge 0.1\quad\Rightarrow a\ge 0.32$$

三、相关系数

对于随机向量,我们除了关心它的各个分量的情况外,还希望知道各个分量之间的联系,于是引进了协方差和相关系数的概念。

定义 设(X,Y)为二维随机变量，若

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

存在，则称它为X与Y的协方差，cov(X,Y).

即：$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.

◆ 常用计算公式:

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

◆ 协方差的概率意义:

协方差实际上是两个随机变量中心化以后乘积的数学期望，是它们关系的一种度量。

协方差为正说明ξ、η 具有相同变化趋势，即平均来说 ξ 相对于 $E\xi$ 变大(或变小时) η 也相对于$E\eta$ 增加(或减少); 反之协方差为负则说明ξ 、η 具有相反的变化趋势。

◆协方差的性质

1. $\mathrm{cov}(X,X)=D(X)$.

2. $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$

3. $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{cov}(Y,X)$，$a,b$为常数

4. $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$

5. 若X,Y独立， 则 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$

   特别地，$\mathrm{cov}(C,X)=0$, C为常数.

◆ 和的方差公式：

(1) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)$

(2) $D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i,j}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$

$$=\sum_{i=1}^{n}DX_i+\sum_{i\neq j}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$$

◆协方差矩阵：

设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为n维随机向量，记

$$\sigma_{ij}=\mathrm{cov}(X_i,X_j),i,j=1,2,\cdots,n.$$

称矩阵 $\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\cdots&\sigma_{1n}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&\cdots&\sigma_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \sigma_{n1}&\sigma_{n2}&\cdots&\sigma_{nn}\end{bmatrix}$为$(X_1,\cdots,X_n)$的协方差矩阵，

简记作***DX***.

Remark:

1、$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，所以Σ是一个对称矩阵。

2、对角线上元素就是X_i的方差。

3、协方差矩阵是一个非负定矩阵。

事实上，对任何实数 $t_j(j=1,2,\cdots,n)$ 有

$$\sum_{j,k}\sigma_{jk}t_jt_k=\sum_{j,k}\mathrm{cov}(t_jX_j,t_kX_k)=D(\sum_{j=1}^{n}t_jX_j)\ge 0.$$

因而，对于协方差矩阵 Σ有：$\det\Sigma\ge 0.$

EX:设随机变量X~B(12,0.5),Y~N(0,1),Cov(X,Y)=-1,分别求V=4X+3Y+1与W=-2X+4Y的方差及V和W的协方差。

答 : $D(X)=3,D(Y)=1$

$D(V)=16D(X)+9D(Y)+24Cov(X,Y)=33$

$D(W)=4D(X)+16D(Y)-16Cov(X,Y)=44$

$Cov(V,W)=Cov(4X+3Y,-2X+4Y)$

$=-8D(X)+16Cov(X,Y)-6Cov(Y,X)+12D(Y)$

$=-22$

◆ 相关系数：

更常用的是如下“标准化”了的协方差.

定义. 称 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为***X***与***Y***的相关系数。

这里当然要求***DX, DY***为正。以后补充定义常数与任何随机变量的相关系数为零。

相关系数就是标准化的随机变量$\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 与 $\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$ 的协方差。

下面研究相关系数的性质,先证明一条常用的不等式。

定理(Cauchy-Schwarz不等式)

对任意的随机变量ξ与η，如果 $E\xi^2<+\infty,E\eta^2<+\infty$, 则有

$$|E\xi\eta|^2\le E\xi^2\cdot E\eta^2$$

等式成立当且仅当 $P\{\eta=t_0\xi\}=1$,

这里t_0是某一个常数。

证明:对任意的实数t，定义

$$u(t)=E(t\xi-\eta)^2=t^2E\xi^2-2tE\xi\eta+E\eta^2$$

显然对一切 $t, u(t)\ge 0$，因此二次方程 $u(t)=0$ 或者没有实根或者有一个重根。所以

$$[E\xi\eta]^2-E\xi^2\cdot E\eta^2\le 0$$

此外，方程 $u(t)=0$ 有一个重根 t_0 存在的充要条件是

$$[E\xi\eta]^2-E\xi^2\cdot E\eta^2=0$$

这时，$E(t_0\xi-\eta)^2=0$，因此 $P\{t_0\xi-\eta=0\}=1.$

把柯西-施瓦兹不等式应用到 $\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}$ 及 $\frac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}}$，可以得到相关系数的如下重要性质。

性质1 对于ξ与η的相关系数ρ，$|\rho|\le 1.$

而 ρ = 1，当且仅当 $P\{\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}=\frac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}}\}=1$

而 ρ = -1，当且仅当 $P\{\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}=-\frac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}}\}=1$

性质1表明，当 $\rho=\pm 1$ 时，ξ与η 存在着线性关系．有线性关系是一个极端，ρ = 0又是一个极端。

定义 若随机变量ξ与η的相关系数 ρ = 0，则我们称ξ与η(线性)不相关。

性质2 对随机变量ξ与η，下面的事实等价：

(1) $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$;　(2) ξ与η不相关；

(3) $E\xi\eta=E\xi E\eta$;　(4) $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta.$

独立性和不相关性都是随机变量间联系“薄弱”的一种反映，自然希望知道这两个概念之间的联系。

性质3 若ξ 与η 独立，则ξ与 η不相关。

其逆不成立，请看下面的例子。

例4 设 θ 服从 $[0,2\pi]$ 中的均匀分布，

$$\xi=\cos\theta, \eta=\cos(\theta+a),$$

这里a是定数。试判断ξ与η的独立性与相关性。

解：$E\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0, E\eta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t+a)dt=0.$

$$E\xi^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}, E\eta^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(t+a)dt=\frac{1}{2}.$$

$$E\xi\eta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\cos(t+a)dt=\frac{1}{2}\cos a,$$

因而，ξ与η 的相关系数为

$$\rho=\frac{E\xi\eta-E\xi E\eta}{\sqrt{E\xi^2-(E\xi)^2}\sqrt{E\eta^2-(E\eta)^2}}=\cos a.$$

于是，

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } a=0 \text{ 时}, \rho=1, \xi=\eta\\ \text{当 } a=\pi \text{ 时}, \rho=-1, \xi=-\eta\end{array}\right\}\text{ 存在线性关系。}$$

但是，当 $a=\frac{\pi}{2}$ 或 $a=\frac{3\pi}{2}$ 时，$\rho=0$，这时ξ与η不相关。

但是这时却有 $\xi^2+\eta^2=1$，因此ξ与η不独立。

Remark:

相关系数 ρ_{XY} 是X与Y之间线性关系的一种度量.

当 $|\rho_{XY}|\to 1$，X与Y的线性关系越显著；

当 $|\rho_{XY}|\to 0$，X与Y的线性关系越不显著；即使两个随机变量不相关，它们之间可能存在其它关系。

不相关性是就线性关系而言的，而独立性是就一般关系而言的。但是如果它们服从二元正态分布，那么它们之间的独立性和不相关性是等价的。

性质4 对于二元正态分布，不相关性与独立性等价.

这个结果可推广到多元场合。

性质5 若ξ与η 都是取二值随机变量，则不相关性与独立性等价.

四、 矩

数学期望, 方差, 协方差是随机变量常用的数字特征，它们都是某种矩。

矩是最广泛使用的一种数字特征，在概率论和数理统计种占有重要地位。常用的矩有两种：原点矩和中心矩

定义. 对正整数 k ，称 $m_k = E\xi^k$ 为 k 阶原点矩.

数学期望是一阶原点矩。

定义. 对正整数 k，称 $c_k = E(\xi - E\xi)^k$ 为 k 阶中心矩.

方差是二阶中心矩。

定理. 中心矩和原点矩可相互表达。

证明：事实上，

$$c_k = E(\xi - E\xi)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-E\xi)^{k-i}E(\xi^i) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-m_1)^{k-i}m_i.$$

$$m_k = E\xi^k = E[(\xi - m_1) + m_1]^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}E(\xi - m_1)^{k-i}m_1^i = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}c_{k-i}m_1^i.$$

证毕.

此外对正整数 k，还可以定义 k 阶原点绝对矩 $E|\xi|^k$ 及 k 阶中心绝对矩 $E|\xi - E\xi|^k$，它们较少使用。

对于多维随机变量，可以定义各种混合矩，例如

$$E(\xi - E\xi)^k(\eta - E\eta)^l$$

称为k+l 阶混合中心矩。协方差是二阶混合中心矩，是其中最重要的一种。

例7 设 ξ 为服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，求其 k 阶原点矩和 k 阶中心矩。

解：密度函数为 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$， $E\xi = 0$,

故原点矩和中心矩相同。

$$m_k = c_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}dx$$

显然， 当k为奇数时，$c_k = 0$ ；当k为偶数时，

$$c_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x^k}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\int_0^{\infty} z^{\frac{k-1}{2}}e^{-z}dz$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2}) = \sigma^k(k-1)(k-3)\cdots 3\cdot 1$$

- 推广：若 ξ为服从正态分布**N(**μ**,** σ^2**)**，

其 **k** 阶中心矩:

当k为奇数时， $c_k = 0$;

当k为偶数时， $c_k = \sigma^k(k-1)(k-3)\cdots 3\cdot 1.$

k 阶原点矩:

$$m_k = E\xi^k = E[(\xi - m_1) + m_1]^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}c_{k-i}\mu^i.$$

§ 4.5 特征函数

一 、特征函数的定义

二、 特征函数的性质

三、 逆转公式与唯一性定理

四、 分布函数的再生性

一、特征函数的定义

分布函数及其密度无疑是描述随机变量概率规律的有力工具，可方便地解决许多与随机变量有关的概率问题。但是，在今后的某些问题中，分布函数又表现出某些不足。例如:

（1）分布函数本身的分析性质不太好，它只是一个单边连续的有界非降函数。

（2）独立随机变量和的分布函数等于各分布函数的卷积，这在计算上带来不少麻烦。

另一方面, 数字特征也只反映了概率分布的某些侧面。一般并不能通过它来确定分布函数。下面介绍的特征函数，即能完全决定分布函数，又具有良好的分析性质。

定义　如果 ξ 与 η 都是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量，则称 $\zeta=\xi+i\eta$ 为复随机变量.

对复随机变量的研究本质上是对二维随机变量的研究.

如果二维随机变量 (ξ_1,η_1) 与 (ξ_2,η_2) 相互独立，则称复随机变量 $\zeta_1=\xi_1+i\eta_1$ 与 $\zeta_2=\xi_2+i\eta_2$ 相互独立。

定义复随机变量 $\zeta=\xi+i\eta$ 的数学期望为

$$E\zeta=E\xi+iE\eta$$

对于复随机变量，可平行的定义或建立一系列结果。例如：

若 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ 是相互独立的，则

$$E\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n=E\zeta_1E\zeta_2\cdots E\zeta_n.$$

又如，若 $g(x)$ 是一个博雷尔可测函数，$\eta=g(\xi)$，则

$$Ee^{it\eta}=Ee^{itg(\xi)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itg(x)}\mathrm{d}F_\xi(x)$$

这里，$e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

定义　若随机变量 ξ 的分布函数为 $F_\xi(x)$，则称

$$f_\xi(t)=Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\mathrm{d}F_\xi(x)$$

为 ξ 的特征函数。

特征函数是一个实变量的复值函数，由于 $|e^{itx}|=1$，所以它对一切实数t都有意义。

显然特征函数只与分布函数有关，因此又称某一分布函数的特征函数。

对于离散型随机变量，若其分布列为：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

则其特征函数为：

$$f(t)=Ee^{it\xi}=\sum_{j=1}^{\infty}p_je^{itx_j}.$$

对于连续型随机变量，若其分布密度为**$p(x)$**，则其特征函数为：

$$f(t)=Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p(x)\mathrm{d}x$$

这时，特征函数是密度函数**$p(x)$的Fourier**变换。

◆ 一些重要分布的特征函数

例1　退化分布 $I_c(x)$ 的特征函数

$$f(t)=e^{itc}.$$

例2　二项分布 $B(n,p)$ 的特征函数

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}e^{itk}=(pe^{it}+q)^n.$$

例3　泊松分布 $P(\lambda)$ 的特征函数为

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}e^{itk}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

例4　Γ分布 $\Gamma(r,\lambda)$ 的特征函数：

$$f(t)=\int_0^\infty e^{itx}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda(1-\frac{it}{\lambda})x}\mathrm{d}x$$

$$=(1-it/\lambda)^{-r}\int_0^\infty\frac{[\lambda(1-it/\lambda)]^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda(1-it/\lambda)x}\mathrm{d}x$$

$$=(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}$$

特别地，指数分布**Exp(λ)**：$f(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$

卡方分布 $\chi^2(n)$：$f(t)=(1-2it)^{-n/2}$

二 、特征函数的性质

性质1 特征函数$f(t)$有如下性质：

$$|f(t)| \le f(0)=1,\ \ f(-t)=\overline{f(t)}.$$

证明：$|f(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|\,\mathrm{d}F(x)=1=\int_{-\infty}^{\infty} 1\mathrm{d}F(x)=f(0).$

$$f(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\mathrm{d}F(x)=\overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mathrm{d}F(x)}=\overline{f(t)}.$$

性质2 特征函数在$(-\infty,\infty)$上一致连续。

证明：$|f(t+h)-f(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i(t+h)x}-e^{itx})dF(x)\right|$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}(e^{ihx}-1)|dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{ihx}-1|dF(x)$$

而 $|e^{ihx}-1|=|\cos hx-1+i\sin hx|$

$$=\sqrt{(\cos hx-1)^2+(\sin hx)^2}=\sqrt{2(1-\cos hx)}=2\left|\sin\frac{hx}{2}\right|$$

因此，

$$|f(t+h)-f(t)| \le 2\int_{|x|\ge A}\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}|e^{ihx}-1|\,\mathrm{d}F(x)$$

$$\le 2\int_{|x|\ge A}\mathrm{d}F(x)+2\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)$$

注意上式右边已与 **t** 无关。

可选足够大的 A 使右边的第一项任意小，然后选充分小的$|h|$可使第二个积分也任意小，从而证明了定理的结论。

性质3 对于任意的正整数 n 及任意的实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$及复数$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$，成立

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}\ge 0.$$

证明：$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_k-t_j)x}\mathrm{d}F(x)\right\}\lambda_k\overline{\lambda_j}$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e^{i(t_k-t_j)x}\lambda_k\overline{\lambda_j}\right\}\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{it_kx}\lambda_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}e^{-it_jx}\overline{\lambda_j}\right)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}e^{it_kx}\lambda_k\right|^2\mathrm{d}F(x)\ge 0$$

性质4 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数之积。

证明：设ξ_1与ξ_2是两个相互独立的随机变量，

由ξ_1与ξ_2的独立性不难推得复随机变量$e^{it\xi_1}$与$e^{it\xi_2}$也是独立的，则

$$Ee^{it(\xi_1+\xi_2)}=Ee^{it\xi_1}\cdot Ee^{it\xi_2}.$$

性质4可以推广到 **n** 个独立随机变量之和的场合.

$$f_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}f_{\xi_i}(t).$$

正是由于性质4，才使特征函数在概率论中占有重要地位.

性质5 设随机变量ξ的**n**阶矩存在，则它的特征函数可微分 n 次，且当 $k\le n$时：

$$f^{(k)}(0)=i^kE\xi^k.$$

证明：

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}(e^{itx})\right|=|i^kx^ke^{itx}|\le|x|^k$$

利用性质5，我们可以方便地求随机变量的各阶矩。

由于 ξ 的n 阶矩存在，故$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,\mathrm{d}F(x)<\infty$，因而可作下列积分号下的微分

$$f^{(k)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^k}{dt^k}(e^{itx})\mathrm{d}F(x)=i^k\int_{-\infty}^{\infty}x^ke^{itx}\mathrm{d}F(x)$$

取 $t=0$，即得结论成立。

推论. 设随机变量ξ 的 **n** 阶矩存在，则它的特征函数可作如下展开：

$$f(t)=1+(it)E\xi+\frac{(it)^2}{2!}E\xi^2+\cdots+\frac{(it)^n}{n!}E\xi^n+o(t^n)$$

性质6 设$\eta=a\xi+b$，这里a,b 为常数，则

$$f_\eta(t)=e^{ibt}f_\xi(at).$$

证明：$f_\eta(t)=Ee^{it\eta}=Ee^{it(a\xi+b)}$

$$=e^{ibt}Ee^{ita\xi}=e^{ibt}f_\xi(at).$$

例5 求正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的特征函数.

解:先讨论 $N(0,1)$ 的场合:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

由于正态分布的一阶矩存在,可对上式求导,得

$$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-x)\sin tx\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\cdot \mathrm{d}(e^{-\frac{x^2}{2}})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sin tx\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\cos tx\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=0-tf(t)=-tf(t)$$

因此, $\frac{d}{dt}\ln f(t)=-t,\quad \ln f(t)=-\frac{t^2}{2}+c$

由于 $f(0)=1$,所以 $c=0$,从而

$$f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

对于 $N(\mu,\sigma^2)$ 的场合,利用性质6可得:

$$f(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}.\qquad \boxed{\xi=\sigma\frac{\xi-\mu}{\sigma}+\mu}$$

例. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,由特征函数求其期望与方差。

解:X的特征函数为

$$f(t)=e^{it\mu-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

从而

$$f'(t)=(i\mu-\sigma^2t)e^{it\mu-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

$$f''(t)=-\sigma^2e^{it\mu-\frac{(\sigma t)^2}{2}}+(i\mu-\sigma^2t)^2e^{it\mu-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

所以 $E(X)=\frac{f'(0)}{i}=\mu$

$$D(X)=-f''(0)+(f'(0))^2=\sigma^2.$$

三、逆转公式与唯一性定理

特征函数和分布函数是相互唯一确定的,由分布函数决定特征函数是显然的,剩下来的是证明可由特征函数唯一决定分布函数。

引理 设 $x_1<x_2$,

$$g(T,x,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^T\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]dt$$

则

$$\lim_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x<x_1\text{或}x>x_2,\\ 1/2, & x=x_1\text{或}x=x_2,\\ 1 & x_1<x<x_2.\end{cases}$$

证明: 从数学分析中知道狄利克雷积分

$$D(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\mathrm{d}t=\begin{cases}1/2, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0.\\ -1/2, & \alpha<0\end{cases}$$

而

$$\lim_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)=D(x-x_1)-D(x-x_2).$$

$$=\begin{cases}-0.5-(-0.5)=0, & x<x_1\\ 0-(-0.5)=0.5, & x=x_1\\ 0.5-(-0.5)=1, & x_1<x<x_2\\ 0.5-0=0.5, & x=x_2\\ 0.5-0.5=0, & x>x_2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<x_1\text{或}x>x_2\\ 1/2, & x=x_1\text{或}x=x_2\\ 1 & x_1<x<x_2\end{cases}$$

定理(逆转公式)

设分布函数 $F(x)$ 的特征函数为 $f(t)$,又 x_1,x_2 是 $F(x)$ 的连续点,则

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)\mathrm{d}t$$

证明: 不妨设 $x_1<x_2$,记

$$I_T=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{itx}\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t\qquad(*)$$

因为对 $\alpha>0$，有

$$|e^{i\alpha}-1|=\left|\int_0^{\alpha}e^{ix}dx\right|\le\int_0^{\alpha}|e^{ix}|\,dx=|\alpha|$$

对 $\alpha\le 0$，取共轭即知上式也成立。 因此，

$$\left|\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{itx}\right|=\left|\frac{e^{it(x-x_2)}(e^{it(x_2-x_1)}-1)}{it}\right|\le x_2-x_1.$$

交换(*)中两积分的积分顺序得到：

$$I_T=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{itx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_{-T}^{0}+\int_0^T\right)\frac{e^{it(x-x_1)}-e^{it(x-x_2)}}{it}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\frac{e^{-it(x-x_1)}-e^{-it(x-x_2)}}{-it}\mathrm{d}t+\int_0^T\frac{e^{it(x-x_1)}-e^{it(x-x_2)}}{it}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\frac{e^{it(x-x_1)}-e^{-it(x-x_1)}-e^{it(x-x_2)}+e^{-it(x-x_2)}}{it}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x)$$

由前面的引理知：$|g(T,x,x_1,x_2)|$有界，因此由勒贝格控制收敛定理并利用引理的结果可知：

$$\lim_{T\to\infty}I_T=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\lim_{\delta\to0+}\left(\int_{-\infty}^{x_1-\delta}+\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}+\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta}+\int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta}+\int_{x_2+\delta}^{\infty}\right)$$

$$=0+0.5[F(x_1+)-F(x_1)]+[F(x_2)-F(x_1+)]$$

$$+0.5[F(x_2+)-F(x_2)]+0$$

$$=\frac{F(x_2+)+F(x_2)}{2}-\frac{F(x_1+)+F(x_1)}{2}$$

若x_1,x_2是$F(x)$的连续点，则

$$\lim_{T\to\infty}I_T=F(x_2)-F(x_1).$$

定理（唯一性定理） 分布函数由其特征函数唯一确定.

证明：应用逆转公式，在$F(x)$的每一连续点 x 上，当 y 沿 $F(x)$ 的连续点趋向于$-\infty$时，有

$$F(x)=\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}f(t)\mathrm{d}t$$

而分布函数由其连续点上的值唯一决定。

由唯一性定理知特征函数可完整地描述随机变量。

特别当 $f(t)$是绝对可积函数时，有下列更强的结果。

定理 若特征函数 $f(t)$ 绝对可积，则相应的分布函数 $F(x)$ 的导数存在并连续，并且

$$F'(x)=p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)\mathrm{d}t$$

证明：由逆转公式，若 $x+\Delta x$ 及 x 是$F(x)$ 的连续点，则

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+\Delta x)}}{it\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

利用$|e^{i\alpha}-1|\le|\alpha|$，可得：

$$\left|\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+\Delta x)}}{it\Delta x}\right|=\left|\frac{e^{-itx}(1-e^{-it\Delta x})}{it\Delta x}\right|\le 1$$

由假设，$f(t)$ 绝对可积，因此有

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+\Delta x)}}{it\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

利用勒贝格控制收敛定理

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+\Delta x)}}{it\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)\mathrm{d}t.$$

因此，$p(x)=F'(x)$ 存在而且有界。

因此，在 $f(t)$绝对可积的条件下，分布密度 $p(x)$与特征函数 $f(t)$通过傅立叶变换来联系。

四、分布函数的再生性

在研究独立随机变量和的分布时，我们发现有的分布具有这样的性质：两个具有同一类型分布的独立随机变量之和的分布仍是这种类型的分布，且对应的参数等于两个随机变量相应参数之和。这就称为再生性。

例6 $B(n_1,p)+B(n_2,p)\sim B(n_1+n_2,p)$

因为 $(pe^{it}+q)^{n_1}\cdot(pe^{it}+q)^{n_2}=(pe^{it}+q)^{n_1+n_2}$

例7 $P(\lambda_1)+P(\lambda_2)\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

因为 $e^{\lambda_1(e^{it}-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$

例8 $N(\mu_1,\sigma_1^2)+N(\mu_2,\sigma_2^2)\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

因为 $e^{i\mu_1 t-\frac{1}{2}\sigma_1^2t^2}\cdot e^{i\mu_2 t-\frac{1}{2}\sigma_2^2t^2}=e^{i(\mu_1+\mu_2)t-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}$

例9 $\Gamma(r_1,\lambda)+\Gamma(r_2,\lambda)\sim\Gamma(r_1+r_2,\lambda)$

因为 $(1-\frac{it}{\lambda})^{-r_1}\cdot(1-\frac{it}{\lambda})^{-r_2}=(1-\frac{it}{\lambda})^{-(r_1+r_2)}$

◆ 分布函数的分解问题

若两个独立随机变量之和服从某一分布，问是否能断定这两个随机变量也分别服从这个分布？

这实际上是分布函数再生性问题的逆问题。

已经证明：对于正态分布和泊松分布，分解问题成立.

五、多元特征函数

若随机向量$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的分布函数为$F(x_1,\cdots,x_n)$，与随机变量相仿，我们可以定义它的特征函数.

$$f(t_1,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n)$$

可以类似于一元的场合，建立起**n**元特征函数的理论，由于方法完全相同，我们只叙述相关结论，证明一概从略。

性质1 $f(t_1,\cdots,t_n)$在$\mathbf{R}^n$中一致连续，并且

$$|f(t_1,\cdots,t_n)|\le f(0,\cdots,0)=1$$

$$f(-t_1,\cdots,-t_n)=\overline{f(t_1,\cdots,t_n)}$$

性质2 如果$f(t_1,\cdots,t_n)$是$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的特征函数，则$\eta=a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n$的特征函数为

$$f_\eta(t)=f(a_1t,\cdots,a_nt).$$

性质3 如果$E(\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n})$存在，则

$$E(\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n})=i^{-\sum_{j=1}^{n}k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=\cdots=t_n=0}$$

性质4 若$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的特征函数为$f(t_1,\cdots,t_n)$，则$k(k<n)$维随机向量的特征函数为

$$f_{1,2,\cdots,k}(t_1,\cdots,t_k)=f(t_1,\cdots,t_k,0,\cdots,0)$$

逆转公式 如果$f(t_1,\cdots,t_n)$是随机向量$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的特征函数，而$F(x_1,\cdots,x_n)$是它的分布函数，则

$$P\{a_k\le\xi_k<b_k,k=1,2,\cdots,n\}$$
$$=\lim_{\substack{T_j\to\infty\\ j=1,\cdots,n}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-T_1}^{T_1}\int_{-T_2}^{T_2}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-it_ka_k}-e^{-it_kb_k}}{it_k}\cdot f(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n$$

其中 a_k 和 b_k 都是任意实数，但满足唯一的要求：$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 落在平行体

$$a_k\le\xi_k<b_k,\ k=1,2,\cdots,n$$

的面上的概率为零。

唯一性定理 分布函数$F(x_1,\cdots,x_n)$由其特征函数唯一决定。

有了唯一性定理，可以进一步证明特征函数的如下两个性质，它们表征了独立性。

性质5 若$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的特征函数为$f(t_1,\cdots,t_n)$，而ξ_j的特征函数为$f_{\xi_j}(t),j=1,2,\cdots,n$，则随机变量$\xi_1,\cdots,\xi_n$相互独立的充要条件为

$$f(t_1,\cdots,t_n)=f_{\xi_1}(t_1)f_{\xi_2}(t_2)\cdots f_{\xi_n}(t_n)$$

性质6 若以 $f_1(t_1,\cdots,t_n), f_2(u_1,\cdots,u_m)$ 及 $f(t_1,\cdots,t_n,u_1,\cdots,u_m)$ 分别记随机向量 $(\xi_1,\cdots,\xi_n),(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ 及 $(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_m)$ 的特征函数, 则 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 与 $(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ 独立的充要条件是: 对一切实数 $t_1,\cdots,t_n$ 及 $u_1,\cdots,u_m$ 成立

$$f(t_1,\cdots,t_n,u_1,\cdots,u_m)=f_1(t_1,\cdots,t_n)f_2(u_1,\cdots,u_m)$$