理科专业基础课(71100201)

《代 数 与 几 何》

主讲人: 吕新民

第三章 矩阵

- 矩阵的概念与运算
- 矩阵的逆
- 初等变换与初等方阵
- 分块矩阵及其应用
- 矩阵的秩

第1节 矩阵的概念与运算

• 矩阵的概念

矩阵的引入源于解线性方程组，起初只是为了简化求解过程. 然而，随着对矩阵认识的逐步深入，其作用日益强大，已成为高等代数研究的核心.

定义 由$m \times n$个数a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$排成$m$行$n$列的如下数据表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个$m \times n$矩阵，记作A. 有时为了方便起见也简记为$A = (a_{ij})_{m\times n}$.

先对上述定义作一些说明:

(1) 若A中每个元素$a_{ij} \in \mathbb{R}$，称A是一个实矩阵. 若未作特别注明，一般情况下默认A是复矩阵，或简称矩阵.

(2) 当$m = 1$，称A是一个行矩阵. 当$n = 1$，称A是一个列矩阵. 若A中每个元素$a_{ij} = 0$，称A是一个零矩阵，记作0. 称$(-a_{ij})_{m\times n}$是A的负矩阵，记作$-A$，即$-A = (-a_{ij})_{m\times n}$.

(3) 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$. 如果$m=s,n=t$，称A与B是同型矩阵. 对于两个同型矩阵A与B，规定

$$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij},$$

对于所有的$1\le i\le m,1\le j\le n$.

(4) 当$m=n$时，称A是一个n阶方阵. 对于一个方阵A，如果A中除a_{ii}外其它元素均为零，称A是一个对角矩阵，记作$A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 特别地，当$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=c$时，称$A=\mathrm{diag}(c,c,\cdots,c)$是一个数量矩阵. 当$c=1$时，称$A$是单位矩阵，单位矩阵通常用$E$或$I$表示.

(5) 设A是一个n阶方阵. 称

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个上三角矩阵. 类似可定义下三角矩阵.

(6) 设A是一个n阶方阵, 称A是对称的, 如果$a_{ij} = a_{ji}$; 称A是反对称的, 如果$a_{ij} = -a_{ji}$.

- **矩阵的运算**

加法 设$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$. 定义

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

显然，加法运算满足；

(1) 交换律: $A + B = B + A$.

(2) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(3) $A + 0 = A$.

(4) $A + (-A) = 0$.

利用矩阵的加法运算和负矩阵可以定义矩阵的减法运算如下：

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}.$$

数乘 设$A = (a_{ij})_{m\times n}$，k是一个数. 定义

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

显然，数乘运算满足：

(1) $1A = A$.

(2) $(k\ell)A = k(\ell A) = \ell(kA)$，其中$k, \ell \in P$.

(3) $k(A+B) = kA + kB$，其中$k \in P$.

(4) $(k+\ell)A = kA + \ell A$，其中$k, \ell \in P$.

矩阵的加法和数乘运算统称为矩阵的线性运算.

乘法 设$A = (a_{ik})_{m\times n}$，$B = (b_{kj})_{n\times p}$，即第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数. 定义$C = AB$，这里$C = (c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

即C中元素c_{ij}是第一个矩阵A的第i行元素与第二个矩阵B第j列对应元素乘积的和.

直接利用定义可以验证

定理 矩阵的乘法运算满足以下运算规律:

(1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$.

(2) 分配律: $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$.

(3) 设$A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则$E_m A = AE_n = A$.

注: E在矩阵乘法中的作用类似于1在数的乘法中的作用一样.

如果A是一个方阵，记$A^2 = AA$. 一般地，记$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n}$. 显然，对于任何正整数$k, \ell$,

$$①(A^k)^\ell = A^{k\ell}. \qquad ②A^kA^\ell = A^{k+\ell}.$$

应该特别强调地是，矩阵的乘法运算不同于普通意义上数的乘法运算，数的乘法运算中有一些运算规律对矩阵的乘法运算不再适用.

(1) 矩阵的乘法不满足交换律. 即$AB \neq BA$.

【例 1】设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2\\2&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$AB=\begin{pmatrix}-1&4\\4&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\2&0&4\\0&2&0\end{pmatrix}.$$

从上述计算可以看出$AB\neq BA$.

(2) 与交换性相关的一系列公式(运算有意义)均不成立. 如

①$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$,

②$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,

③$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$,

④$(A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2) = A^3 \pm B^3$

等. 这些公式成立$\Leftrightarrow AB = BA$.

(3) $AB = 0$不能推出$A = 0$或$B = 0$.

【例 2】设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然，$AB = 0$，但$A \neq 0$且$B \neq 0$.

(4) 消去律不成立. 即若$AB = AC$，且$A \neq 0$，不能推出$B = C$.

转置 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为A的转置，记作A'或A^T.

定理 矩阵的转置运算满足以下运算规律:

(1) $(A')' = A$.

(2) $(kA)' = kA'$.

(3) $(A+B)' = A' + B'$.

(4) $(AB)' = B'A'$.

证明： (1)(2)(3)是显然的，以下仅证(4). 设$A = (a_{ik})_{m\times n}, B = (b_{kj})_{n\times p}$. 由定义，$AB$中第$i$行第$j$列元素为$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. 从而$(AB)'$中第$i$行第$j$列元素为

$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$. 因为$B$的第$i$行第$k$列元素为$b_{ik}$，于是$B'$的第$i$行第$k$列元素为$b_{ki}$，又$A$中第$k$行第$j$列元素为$a_{kj}$，于是$A'$中第$k$行第$j$列元素为$a_{jk}$. 由乘法的运算法则，$B'A'$中第$i$行第$j$列元素为

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}.$$

故$(AB)' = B'A'$.

【例3】设$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 计算

AB，BA及$(AB)^{100}$.

解：$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, BA = -1.$

由乘法运算满足结合律可得

$$\begin{aligned} (AB)^{100} &= (AB)(AB)\cdots(AB)(AB) \\ &= A(BA)^{99}B = (BA)^{99}AB \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

【例 4】设A是一个n阶实方阵，且$AA'=0$，证明: $A=0$.

解：令$A=(a_{ij})$，这里每个$a_{ij}\in\mathbb{R}$，则

$$0=AA'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 & * & \cdots & * \\ * & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 \end{pmatrix}$$

即 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0\ (i = 1, 2 \cdots, n)$. 因为每个$a_{ij} \in \mathbb{R}$，从而每个$a_{ij} = 0$，故$A = 0$.

第2节 矩阵的逆

- **方阵乘积的行列式**

设$A = (a_{ij})$是一个方阵，称$|A| = |a_{ij}|$为方阵A的行列式，也记作$\det(A)$.

为研究矩阵的逆，我们需要关于方阵乘积的行列式的一个性质. 首先，对s或t作数学归纳法结合行列式展开式定理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1s} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{ts} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}$$

特别地，若$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$，**则**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A||B|$$

现考察上述左端行列式，利用左下角的n个-1，重复利用行列式的性质，将左上角的a_{ij}全部变为0，这时右上角恰好变为$C = AB$，此时由性质知行列式的值没有发生变化，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

再考察上述右端行列式，将第1与第$n+1$列，将第2与第$n+2$列，$\cdots$，第n列与第$2n$列互换，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{nn} & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

再次利用上述结果可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n(-1)^n|C| = |AB|$$

由此可得

定理 设A, B是数域P上的两个n阶方阵，则$|AB| = |A||B|$.

注: 利用数学归纳法易知，上述结论可以推广到任意有限多个情形.

- **矩阵的逆**

定义 n阶方阵A称为可逆的，如果存在n阶方阵B，使得$AB = BA = E$.

满足关系式$AB = BA = E$的矩阵B是唯一的. 这是因为若还存在矩阵C也满足$AC = CA = E$，则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

此时称B是A的逆阵，记作$B = A^{-1}$.

给定一个矩阵A，如何寻找B，使得$AB = BA = E$. 为此引入

定义 设$A = (a_{ij})$是一个n阶方阵，A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，称矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的伴随矩阵，记作A^*，则$A^* = (A_{ij})'$.

由矩阵乘法的定义结合行列式展开式定理得

$$AA^* = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & & & \\ & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix} = |A|E.$$

即$AA^* = |A|E$. 同样地，$A^*A = |A|E$，于是$AA^* = A^*A = |A|E$. 由此可建立一个方阵可逆的判定条件及在可逆的条件下如何求其逆阵.

定理 一个n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0$. 特别地，在可逆的条件下，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

证明：$\Rightarrow$ 若A可逆，由定义，$AA^{-1}=E$. 于是，$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1$. 故$|A|\neq 0$.

$\Leftarrow$ 若$|A|\neq 0$，由$AA^*=A^*A=|A|E$可得

$$A(\frac{1}{|A|}A^*)=(\frac{1}{|A|}A^*)A=E,$$

故A可逆，且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

利用上述定理，可逆的判定可以简化为

推论 n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow AB=E$或$BA=E$.

注: 无疑$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$提供了求一个可逆矩阵逆的方法，但只适用于低阶($n\leq 3$)方阵求逆. 高阶方阵逆的求法需借助于初等变换法.

可逆矩阵具有如下性质

定理 设A, B是两个n阶方阵，$0 \neq k \in P$，则

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

证明：仅证(4)，其余类似可证. 因为

$$A'(A^{-1})' = (A^{-1}A)' = E' = E,$$

故$(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

【例5】设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-2\end{pmatrix}$，且$X=AX+B$，求矩阵$X$.

解： 由题设$X=AX+B$，得$(E-A)X=B$. 又

$$|E-A|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{vmatrix}=3\neq 0$$

即$E-A$可逆，且$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. 故

$$X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-\frac{2}{3}\\2&\frac{2}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

【例6】设A是一个3阶方阵，且$|A| = -2$，计算$|4A^{-1}+A^*|$.

解：因为$|A| = -2$，所以A可逆，于是

$$
\begin{aligned}
|4A^{-1}+A^*| &= |A^{-1}A||4A^{-1}+A^*| \\
&= |A^{-1}||A(4A^{-1}+A^*)| \\
&= |A^{-1}||4E+|A|E| \\
&= |A^{-1}||2E| \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 2^3 = -4.
\end{aligned}
$$

注: 若A是一个n阶方阵，k是一个数，则(1) $|kA| = k^n|A|$；(2) 若A可逆，则$|A^{-1}| = |A|^{-1}$；(3) 计算中当涉及A^*或A^{-1}时要善于利用关系式$AA^* = |A|E, AA^{-1} = E$简化计算.

第3节 初等变换与初等矩阵

- **定义**

定义 矩阵的初等行变换是指以下三类变换:

(1) 用一个非零的数c乘矩阵的某一行;

(2) 将某一行的k倍加到另一行;

(3) 互换某两行的位置.

相应地, 列变换也有三类. 行变换与列变换统称为初等变换.

定义 单位矩阵E经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等矩阵.

对应于初等行变换而言，初等矩阵有如下三种，分别记作：

(1) 用一个非零的数c乘矩阵的第i行所得到的初等矩阵记为$E(i(c))$;

(2) 将第i行的k倍加到第j行所得到的初等矩阵为记为$E(i(k)+j)$;

(3) 互换第i行与第j行所得到的初等矩阵记为$E(i,j)$.

初等矩阵具有如下性质：

(1) 初等矩阵均可逆，因为

$|E(i(c))| = c$，$|E(i(k)+j)| = 1$，$|E(i,j)| = -1$.

(2) 初等矩阵的逆阵为

$$E(i(c))^{-1} = E(i(\tfrac{1}{c})),$$

$$(E(i(k)+j))^{-1} = E(i(-k)+j),$$

$$(E(i,j))^{-1} = E(i,j).$$

即初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵.

直接验证可知：二者具有如下关系.

定理 设A是一个$m \times n$矩阵.

(1) 对矩阵A作一次初等行变换相当于在A的左端乘上一个相应的m阶初等矩阵；

(2) 对矩阵A作一次初等列变换相当于在A的右端乘上一个相应的n阶初等矩阵.

【例 7】设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13}-2a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}-2a_{21} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33}-2a_{31} \end{pmatrix},$$

且$|A|=3$，求A^*B.

解：令$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$B=AP_1P_2$，于是

$$A^*B=A^*AP_1P_2=|A|P_1P_2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

• 矩阵的标准形

为建立矩阵的标准形，首先引入

定义 矩阵A与B称为等价，如果B是由A经过有限次初等变换得到. 记作$A \simeq B$.

等价是矩阵间的一种关系，具有如下性质：

(1) 反身性：$A \simeq A$.

(2) 对称性：$A \simeq B \Longrightarrow B \simeq A$.

(3) 传递性：$A \simeq B, B \simeq C \Longrightarrow A \simeq C$.

任何一个矩阵A，经过适当的初等变换，均可变为如下形式的矩阵.

定理 任何一个$m \times n$矩阵A都与一形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵等价，这里$r \leq \min\{m, n\}$，该形式称为矩阵A的标准形.

- **求逆矩阵的初等变换法**

显然，一个n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A \simeq E$. 因此，若$A$

是一个n阶可逆方阵，则A可经过一系列初等行变换变成E，即存在初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$，使得

$$P_1P_2\cdots P_sA = E, \qquad (*)$$

两端右乘A^{-1}可得

$$P_1P_2\cdots P_sE = A^{-1}. \qquad (**)$$

$(*)$式表明：如果对A施行一系列初等行变换将A化为E，那么从$(**)$式可以看出：将A化为E所施行的这一系列的初等行变换就将E变成A^{-1}. 这一事实产生了一种求可逆矩阵的逆的方法：

$$(A, E)_{n\times 2n} \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})_{n\times 2n}.$$

【例 8】设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且$A^2X+E=X+A$，求$X$.

解：由题设得$(A^2-E)X=A-E$，即

$$(A-E)(A+E)X=A-E.$$

因为$|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1$，故$A-E$可逆，从而$(A+E)X=E$.

由定义知$A+E$可逆，且$X=(A+E)^{-1}$. 于是

$$X=(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

第4节 矩阵的分块及其应用

- **分块矩阵的运算**

分块的思想：把一个矩阵M用若干条横线和若干条纵线分成若干个小块M_{ij}，以M_{ij}为元素的矩阵称为M的分块矩阵，记作$M=(M_{ij})$.

分块矩阵的运算与普通数字矩阵的运算一致.

(1) 加法：设A与B是同型矩阵，且它们具有完全相同的分法，即若$A=(A_{ij})$，$B=(B_{ij})$，则$A+B=(A_{ij}+B_{ij})$.

(2) 数乘：设$A=(A_{ij})$，k是一个常数，则$kA=(kA_{ij})$.

(3) **乘法：** 设A是一个$m\times n$矩阵，B是一个$n\times p$矩阵，若$A=(A_{ij})_{t\times\ell}$与$B=(B_{jk})_{\ell\times r}$，且每个$A_{ij}$是$s_i\times n_j$矩阵，每个$B_{ij}$是$n_i\times m_j$，则$C=AB=(C_{ik})_{t\times r}$，这里

$$C_{ik}=A_{i1}B_{1k}+A_{i2}B_{2k}+\cdots+A_{is}B_{sk}=\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk}.$$

(4) **转置：** 若A的分块矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\A_{r1}&A_{r2}&\cdots&A_{rs}\end{pmatrix},$$

则

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{r1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{r2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{rs} \end{pmatrix}.$$

- **准对角矩阵**

定义 若方阵A的分块矩阵具有如下形式

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

其中每个A_i均是方阵，称A为准对角矩阵，记作$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)$.

准对角矩阵具有如下性质

定理 设$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)$是一个准对角矩阵，则

(1) $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

(2) A可逆$\Leftrightarrow$每个A_i均可逆，且在可逆的条件下，

$$A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1})$$

- **分块矩阵的初等变换和初等矩阵**

仅考虑形如$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$的分块矩阵.

定义 对M所作的如下变换，称为分块矩阵的初等变换:

(1) 用可逆矩阵P乘M的某一行(列);

(2) 用矩阵Q乘矩阵M的某一行(列)加到矩阵M的另一行(列);

(3) 互换矩阵M的两行(列).

与普通数字矩阵一样，分块矩阵也有初等矩阵.

定义 将单位矩阵E依据M的分块作相应的分块

$$E=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

E经过一次初等变换而得到的矩阵称为分块矩阵的初等矩阵.

对应于初等变换(行变换或列变换)，同样决定相应的初等矩阵. 与普通数字矩阵一样，分块矩阵的初等变换与初等矩阵也具有同样的关系.

注: 由于分块矩阵的运算及初等变换与普通数字矩阵的运算及初等变换形式上一致. 因此，在处理涉及分块矩阵的问题时，我们可以形式上将分块矩阵的元素视为普通数字，这样为研究分块矩阵的问题带来便利.

【例 9】设A,B,C均为n阶方阵，且A,C可逆，问矩阵$M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$是否可逆? 若可逆，求其逆.

解： 因为$|A|\neq 0, |C|\neq 0$，所以$|M|=|A||C|\neq 0$，故M可逆. 为求其逆，构作$(M\vdots E)$，对其作初等行变换.

$$(M\vdots E)=\begin{pmatrix} A & B & E & 0 \\ 0 & C & 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} A & 0 & E & -BC^{-1} \\ 0 & C & 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} E & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & E & 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

故$M^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

【例10】设A,B,C,D均为n阶方阵，且A可逆. 如果$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

(1) 证明：$|M|=|A||D-CA^{-1}B|$.

(2) 若$AC=CA$，证明：$|M|=|AD-CB|$.

证明：(1) 用$-CA^{-1}$左乘M 的第一行加到第二行就可使M变成上三角矩阵，即有

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两端取行列式即可得所需要的结果.

(2) 由(1)结合方阵乘积的行列式性质可得

$$|M| = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B|$$
$$= |AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|.$$

【例11】 设A, B是两个n阶方阵，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$

证明： 因为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

两端取行列式即得所证结论.

【例 12】设A是$m \times n$矩阵，B是$n \times m$矩阵.

(1) 证明：$|E_m - AB| = |E_n - BA|$.

(2) 对于任意$0 \neq \lambda \in P$，证明：$|\lambda E_n - BA| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - AB|$.

证明：(1)构造一个矩阵$\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$. 用$-B$乘该矩阵的第一行再加到第二行即可化为上三角阵，即

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n-BA \end{pmatrix}$$

同样地也有

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m-AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

对上述两个等式两端分别取行列式可得所证结论.

(2) 对于任意$0\neq\lambda\in P$,

$$|\lambda E_n-BA|=\lambda^n|E_n-\frac{1}{\lambda}BA|=\lambda^n|E_m-\frac{1}{\lambda}AB|$$

$$=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|.$$

第5节 矩阵的秩

- **秩的定义**

定义 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，在A中任意选定k行k列，位于选定的行和列的交叉点上的k^2个元素按原来的次序组成的k阶行列式，称为A的一个k阶子式.

A的k阶子式共有$C_m^k C_n^k$ $(1\le k\le \min\{m,n\})$个.

定义 一个$m\times n$矩阵A的最高阶非零子式的阶数r称为矩阵A的秩，记作$\mathrm{rank}(A)=r$.

由定义，$\mathrm{rank}(A)=r \Leftrightarrow A$至少有一个非零的$r$阶子式，而所有的$r+1$阶子式均为零.

一个矩阵的最高阶非零子式不是唯一的，但最高阶非零子式的阶数是唯一的. 直接由定义易知:

(1) 若$A=0$，则rank$(A)=0$.

(2) $0\le$rank$(A)\le\min\{m,n\}$.

(3) rank$(A)=$rank(A').

(4) 设A是一个n阶方阵，则rank$(A)=n\Leftrightarrow|A|\ne 0$.

(5) rank$(kA)=\begin{cases}0, & k=0\\ rank(A), & k\ne 0\end{cases}$

(6) 设B是矩阵A的子矩阵，则rank$(B)\le$rank(A).

- **秩的计算**

求一个矩阵的秩即是寻求它的一个最高阶非零子式的阶数. 显然，如果一个矩阵是如下阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

且$a_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,r)$，则$\mathrm{rank}(A)=r$.

显然，任何一个矩阵经过初等变换可以化为上述阶梯形矩阵. 一个很自然的问题，即是初等变换是否保持矩阵的秩不变呢? 有下面的结论:

定理 初等变换不改变矩阵的秩.

证明：仅对初等行变换证明即可.

对于互换两行，变换前后对应的各阶子式至多相差一个符号. 因此互换两行不改变矩阵的秩.

对于用一个非零数k去乘某一行，变换前后对应的各阶子式至多相差k倍. 因此不改变矩阵的秩.

对于用一个数去乘某一行加到另一行. 设

$$A=(a_{ij})\to A_1=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ ca_{i1}+a_{j1} & \cdots & ca_{in}+a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix},$$

且$\mathrm{rank}(A)=r$. 先证$\mathrm{rank}(A)\geq\mathrm{rank}(A_1)$. 考虑$A_1$的任一$r+1$阶子式$D_{r+1}$.

(1) 当D_{r+1}不含A_1的第j行元时，D_{r+1}即是A的一个$r+1$阶子式，故$D_{r+1}=0$.

(2) 当D_{r+1}含A_1的第j行元时，分两种情况:

① D_{r+1}不含A_1的第i行元，D_{r+1}可以分解成A的一个$r+1$阶子式与A的另一个$r+1$阶子式的c倍之和，故$D_{r+1}=0$;

② D_{r+1}含A_1的第i行元，D_{r+1}可以分解成A的一个$r+1$阶子式与另一个$r+1$阶子式的c倍之和，而后一$r+1$阶子式两行相同，故$D_{r+1}=0$.

综上所述，$\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{rank}(A_1)$. 同理可证$\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}(A_1)$. 故$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_1)$.

上述定理为具体求一个矩阵的秩提供了非常切实可行的方法.

因为一个可逆矩阵可以表示成一系列初等矩阵的乘积，而一个初等矩阵乘上一个矩阵等价于对这个矩阵作了一次初等变换. 由上述定理易得如下推论.

推 论 设A是一个$m \times n$矩阵，P是一个m阶可逆矩阵，Q是一个n阶可逆矩阵，则$\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(A)$.

对于一个$m \times n$矩阵A，如果$\mathrm{rank}(A) = m$，称A是行满秩矩阵; 如果$\mathrm{rank}(A) = n$，称A是列满秩矩阵; 如果$m = n$，且$\mathrm{rank}(A) = n$，称A是满秩矩阵.

推论 设A是一个$m \times n$矩阵，且$\mathrm{rank}(A) = r$，则存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使得$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

注: 上述形式即为矩阵A的标准形. 显然，一个矩阵的标准形被其秩唯一决定.

- **秩的性质**

性质1 $\text{rank}(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) = \text{rank}(A)+\text{rank}(B)$.

证明： 令$\text{rank}(A) = r$，$\text{rank}(B) = s$，则存在可逆矩阵P_1, P_2, Q_1, Q_2，使得

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$，显然$P, Q$可逆，且

$$P\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此知$r+s$阶非零子式$\begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_s \end{vmatrix}$是$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$的最高阶非零子式. 故$\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

性质2 $\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

证明： 对$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$作初等变换

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

故

$$\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(\begin{pmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{pmatrix})$$

$$=\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) = \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B).$$

性质3 $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A),\ \mathrm{rank}(B)\}.$

证明： 令$\mathrm{rank}(A) = r$，则存在可逆矩阵P, Q，使得$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 于是,

$$PAB = PAQQ^{-1}B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}B.$$

记$Q^{-1}B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$，其中$C_1$是$Q^{-1}B$的前$r$行矩阵，$C_2$是$Q^{-1}B$除前$r$行剩余行所构成的矩阵，则

$$PAB = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(PAB) = \text{rank}\left(\begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\leq r = \text{rank}(A).$$

同 理 可 证 $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(B)$.

故 $\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A),\ \mathrm{rank}(B)\}$.

性质4 $\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\right) \ge \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$.

证明： 显然 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的最高阶非零子式必是 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 的一个非零子式，故

$$\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\right) \ge \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B).$$

性质5 $\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A, B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明： 因为A与B均是矩阵(A, B)的子矩阵，从而$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, B)$，$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A, B)$，故$\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A, B)$. 又因为

$$(A, B) = (E, E)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

故$\text{rank}(A, B) \leq \text{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

性质6 设A是一个$m \times n$矩阵，B是一个$n \times s$矩

阵，则rank(AB) $\geq$rank(A)+rank$(B) - n$. 特别地，若$AB = 0$，则rank(A)+rank$(B) \leq n$.

证 明： rank(A)+rank(B) $\leq$rank$\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}\right)$. 现对$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}$作初等变换

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix},$$

于是

$$\text{rank}(A)+\text{rank}(B) \leq \text{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}\right)$$

$$=\text{rank}(\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}) = \text{rank}(E_n)+\text{rank}(AB)$$

$$= n+\text{rank}(AB),$$

即$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A)+\text{rank}(B) - n$. 余下部分是显然的.

【例 13】设A是一个n阶方阵，证明:

$$\text{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & rank(A) = n \\ 1, & rank(A) = n-1 \\ 0, & rank(A) < n-1 \end{cases}.$$

证明: 因为$AA^* = |A|E$，两边取行列式得，$|A||A^*| = ||A|E| = |A|^n$.

(1) 若$\mathrm{rank}(A) = n$，则A可逆，从而$|A| \neq 0$，于是$|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$，即A^*可逆，故$\mathrm{rank}(A^*) = n$;

(2) 若$\mathrm{rank}(A) = n-1$，则A至少有一个$n-1$阶子式不等于零，于是$\mathrm{rank}(A^*) \geq 1$. 又$\mathrm{rank}(A) = n-1$，则$|A| = 0$，从而$AA^* = 0$. 由性质知$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A^*) \leq n$，即$\mathrm{rank}(A^*) \leq 1$，故$\mathrm{rank}(A^*) = 1$;

(3) 若$\mathrm{rank}(A) < n-1$，则A的所有$n-1$阶子式

全为零，即所有的$A_{ij} = 0$，于是$A^* = 0$. 故$\text{rank}(A^*) = 0$.

综上所述，结论成立.

【例14】设A是一个n阶方阵，则$A^2 = A \Leftrightarrow \text{rank}(A)+\text{rank}(A-E) = n$.

证明: $\Rightarrow$ 因为$A^2 = A$，则$A(A-E) = 0$，由性质，$\text{rank}(A)+\text{rank}(A-E) \leq n$. 又因为

$$\text{rank}(A)+\text{rank}(A-E) = \text{rank}(A)+\text{rank}(E-A)$$

$$\geq \text{rank}(A+(E-A)) = \text{rank}(E) = n.$$

故rank(A)+rank$(A-E)=n$.

$\Leftarrow$ 即证$A^2-A=0$，只需证rank$(A^2-A)=0$. 现对矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix}$作初等变换得

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ -A & A-E \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} A & A \\ -A & -E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

从而

$$n = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A-E) = \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rank}(E) + \mathrm{rank}(A-A^2)$$

$$= n + \mathrm{rank}(A-A^2).$$

即$\mathrm{rank}(A^2-A)=0$，故$A^2=A$.

习题讨论课三

一、填空题

1. 设α为3维列向量，且$\alpha\alpha' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则$\alpha'\alpha =$______.

2. 设A是3阶方阵，且$|A| = -1$，则$|(3A)^{-1} - A^*| =$______.

3. 设A, B是两个n阶方阵，且$|A| = |B| = 1$，则$\left| -2\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 2B^{-1} \end{pmatrix} \right| =$______.

4. 设A为3阶非零实方阵，且$A_{ij} = 5a_{ij}$ (A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式)，则$|A| =$______.

5. 已知将3阶可逆方阵A的第2行的2倍加到第3行得到矩阵B，则$AB^{-1} =$______.

二、解答与证明题.

6. 设A为n阶方阵，证明：若对任意n维向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，均有$AX=0$，则$A=0$.

7. 已知$A^*X=A^{-1}+2X$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

求矩阵X.

8. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

若X满足关系式$X(E-B^{-1}A)'B'=E$，求X.

9. 设A是$s\times n$实矩阵，证明：$\mathrm{rank}(E_n-A'A)-\mathrm{rank}(E_s-AA')=n-s$.

10. 设A是n阶方阵，且$A=A_1A_2A_3$，其中每个A_i均是幂等的，即$A_i^2=A_i$ $(i=1,2,3)$. 证明: $\mathrm{rank}(E-A)\leq 3[n-\mathrm{rank}(A)]$.

习题讨论课三参考解答

1. **解：** 依题意，$\alpha'\alpha$是一个数. 令$\alpha'\alpha = k$，因为$(\alpha\alpha')^2 = k\alpha\alpha'$，注意到$(\alpha\alpha')^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，所以$\alpha'\alpha = 3$.

2. **解：** 因为$|A| = -1$，所以A可逆，且$A^* = |A|A^{-1} = -A^{-1}$，于是$|(3A)^{-1} - A^*| = |\frac{1}{3}A^{-1} + A^{-1}| = |\frac{4}{3}A^{-1}| = (\frac{4}{3})^3 \cdot (-1) = -\frac{64}{27}$.

3. **解：** 原式$= (-2)^{2n}\begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & 2B^{-1} \end{vmatrix} = 2^{2n}|A'||2B^{-1}| = 2^{3n}$.

4. **解：** 由题设，不妨令$a_{11} \neq 0$. 由行列式展开式定理，得

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 5(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0.$$

故$|A|\neq 0$. 由题设，$A^*=5A'$. 因为A是三阶方阵，所以

$$|A|^2=|A^*|=|5A'|=5^3|A'|=125|A|,$$

从而$|A|=125$.

5. **解**：依题意，$E(2(2)+3)A=B$，于是$AB^{-1}=E(2(2)+3)^{-1}=E(2(-2)+3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

6. **证明**：假定$A\neq 0$，不失一般性，令$a_{11}\neq 0$，现取$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，则$A\varepsilon_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ *\\\vdots\\ *\end{pmatrix}\neq 0$，与题设矛盾. 故$A=0$.

7. **解：** 由题设$A^*X=A^{-1}+2X$，两端左乘A后可得$AA^*X=E+2X$，即$(|A|E-2A)X=E$. 于是$X=(|A|E-2A)^{-1}$. 又$|A|=4$，故

$$X=(4E-2A)^{-1}=\left[4E-2\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

8. **解：** 由题设可得

$$E=X[B(E-B^{-1}A)]'=X(B-A)'.$$

故$X=((B-A)')^{-1}=(B'-A')^{-1}$，于是

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}.$$

9. **证明： 因为**

$$\begin{pmatrix} E_s & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ -A' & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_s-AA' & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

所以rank$\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix}$=rank$(E_s-AA')+n$. **又因为**

$$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ -A' & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & E_n-A'A \end{pmatrix},$$

所以rank$\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix}$=rank$(E_n-A'A)+s$.

两式相减可，得rank$(E_n-A'A)-$rank$(E_s-AA')=n-s$.

10. **证明：因为**

$$E-A=E-A_1A_2A_3=(E-A_1)+A_1(E-A_2)+A_1A_2(E-A_3),$$

利用矩阵和的秩的性质知

$$\mathrm{rank}(E-A)\le \mathrm{rank}(E-A_1)+\mathrm{rank}(A_1(E-A_2))+\mathrm{rank}(A_1A_2(E-A_3))$$

又利用矩阵积的秩的性质知

$$\mathrm{rank}(A_1(E-A_2))\le \mathrm{rank}(E-A_2),\quad \mathrm{rank}(A_1A_2(E-A_3))\le \mathrm{rank}(E-A_3)$$

可得

$$\mathrm{rank}(E-A)\le \mathrm{rank}(E-A_1)+\mathrm{rank}(E-A_2)+\mathrm{rank}(E-A_3)$$

注意到$A=A_1A_2A_3$，则$\mathrm{rank}(A)\le \mathrm{rank}(A_i)$ ($i=1,2,3$). 而每个A_i是幂等的，即$(E-A_i)A_i=0$，利用矩阵秩的性质得$\mathrm{rank}(E-A_i)\le n-\mathrm{rank}(A_i)$ ($i=1,2,3$).

故

$$\mathrm{rank}(E-A)\le (n-\mathrm{rank}(A_1))+(n-\mathrm{rank}(A_2))+(n-\mathrm{rank}(A_3))$$

$$\le 3[n-\mathrm{rank}(A)].$$