3.1 刚体的定轴转动

3.2 转动动能 转动惯量

3.3 力矩 转动定律

3.4 力矩的功 转动动能定理

3.5 角动量和角冲量 角动量守恒定律

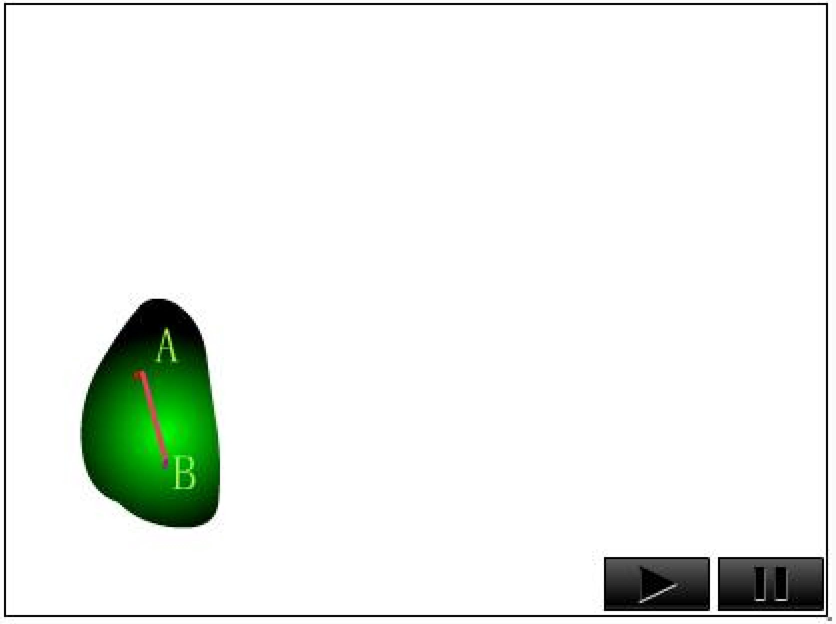
教学基本要求

- **理解**描写刚体定轴转动的物理量，并掌握角量与线量的关系。
- **理解**转动惯量，转动动能和力矩的功的概念，掌握刚体绕定轴转动的动能定理，能在有刚体绕定轴转动的问题中正确地应用机械能守恒定律。
- **理解**力矩的概念，掌握刚体定轴转动的转动定律。
- **理解**刚体角动量概念，掌握质点在平面内运动以及刚体绕定轴转动情况下的角动量守恒定律的应用。

刚体： 在外力作用下，形变可以忽略的物体．（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）

刚体的基本运动形式： 平动、转动．

平动： 若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线．

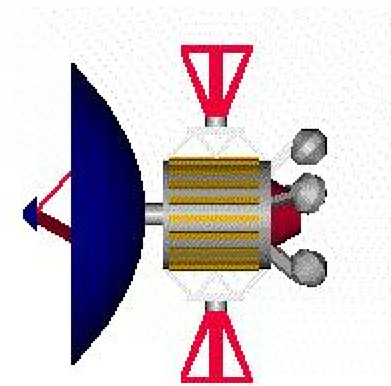


刚体平动 ⟶ 质点运动

地球绕太阳的公转, 看起来像是转动, 其实是平动, 这是因为地球绕太阳公转时, 地球上任意两点的连线在不同时刻都能保持着平行状态.

【参考文献】刘浩, 魏永亮. 引潮力及其展开式的教学研究[J]. 科技风, 2019(26): 37.

➢ 转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动．转动又分定轴转动和非定轴转动．



➢ 刚体的平面运动．

一　刚体转动的角速度和角加速度

定轴转动的特点

1） 每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；

2） 任一质点运动$\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ 均相同，但 $\vec{v}, \vec{a}$ 不同；

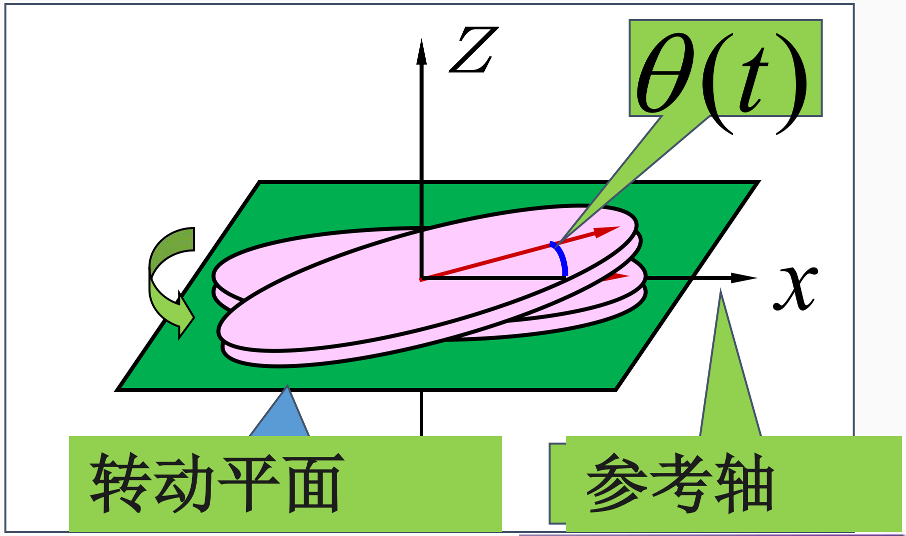
3） 运动描述仅需一个坐标： 角坐标 $\theta = \theta(t)$

约定

$\vec{r}$沿逆时针方向转动
角位移大于0

角位移

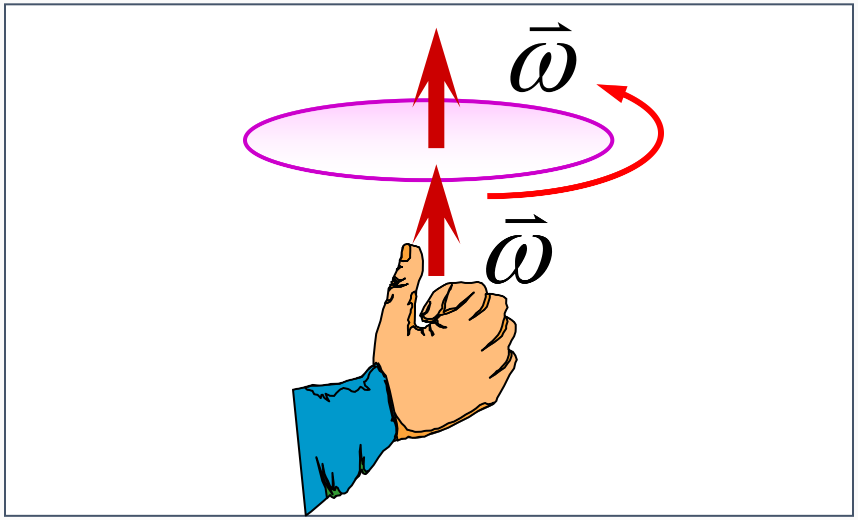
$$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$



角速度矢量

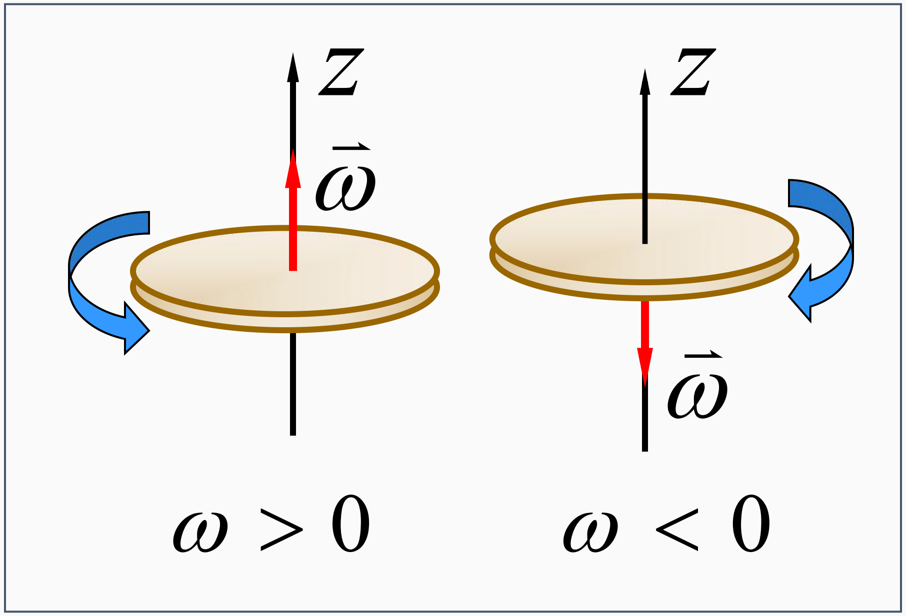
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- $\vec{\omega}$ 方向：右手螺旋方向



刚体定轴转动(一维转动)的转动方向可以用角速度的正负来表示.

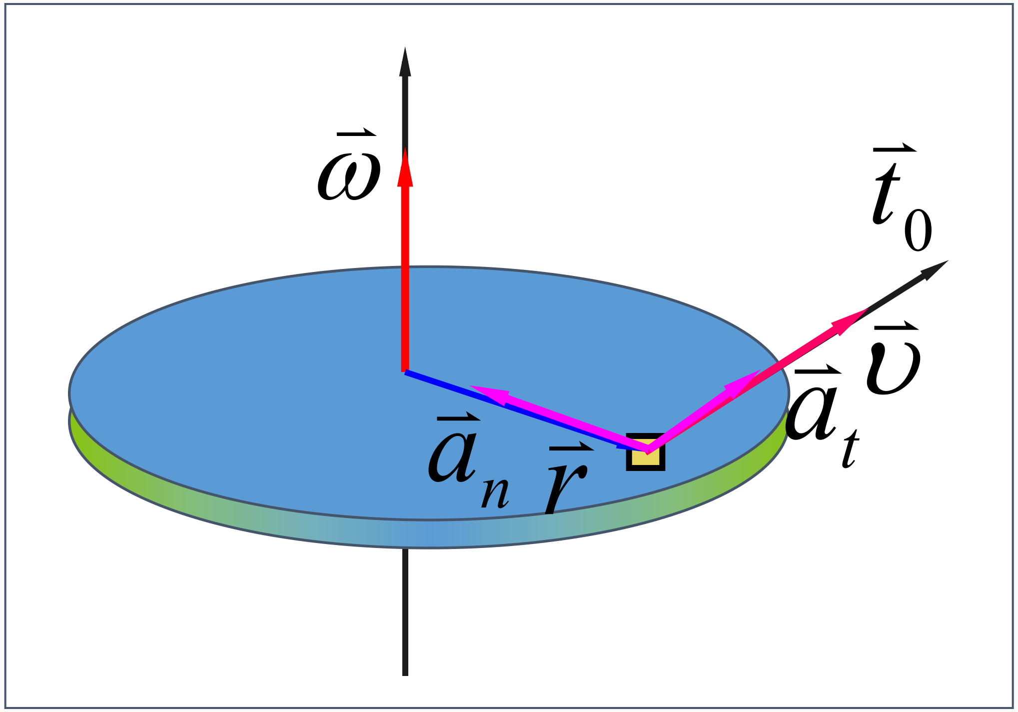
角加速度 $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$



角量与线量的关系

$$\boxed{\upsilon = \omega r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_t &= \alpha r \\ a_n &= \omega^2 r \end{aligned}}$$

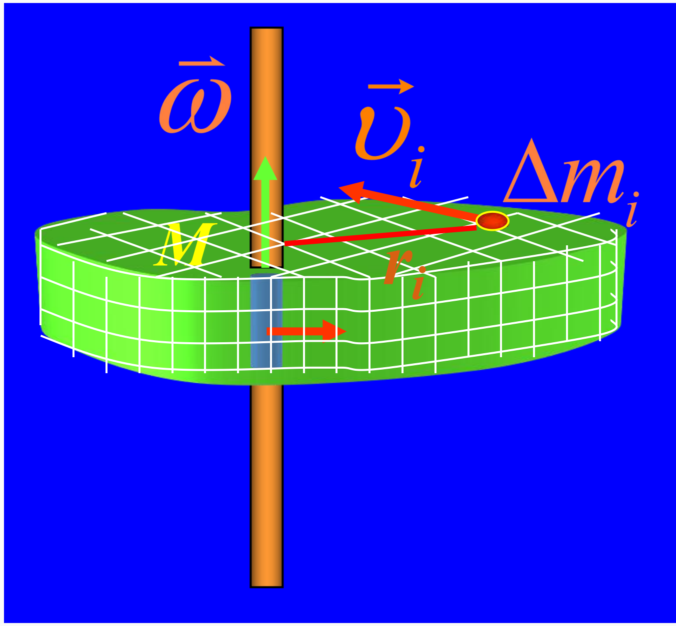


二　转动动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

设刚体以角速度ω绕定轴旋转.

将刚体分割成很多小质点$\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots, \Delta m_i \ldots, \Delta m_n$，刚体的转动动能应为各质点动能之和.



任取一质点Δm_i，距转轴 r_i，则该质点的动能：

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\Delta I_i\omega^2$$

故刚体的转动动能：

$$E_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

三 转动惯量

$$\boxed{I=\sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2}$$

$$\boxed{I=\int r^2 dm}$$

➢ 物理意义：转动惯性的量度．

转动惯量的计算方法

➢ 质量离散分布刚体的转动惯量 $\Delta I_i=\Delta m_i \cdot r_i^2$

$$I=\sum_i \Delta m_i r_i^2=\Delta m_1 r_1^2+\Delta m_2 r_2^2+\cdots$$

➢ 质量连续分布刚体的转动惯量 $dI=r^2 dm$

$$I=\int r^2 dm$$

dm ：质量元

- 质量连续分布刚体的转动惯量 $I=\int r^2 dm$

  dm: 质量元

- 对质量体分布的刚体：

  质量体密度 $\rho=\dfrac{dm}{dV}$, $I=\int r^2 dm=\int_V r^2 \rho dV$

  (volume mass density)

- 对质量面分布的刚体：

  质量面密度 $\rho_S(\text{或}\,\sigma)=\dfrac{dm}{dS}$, $I=\int r^2 dm=\int_S r^2 \rho_S dS$

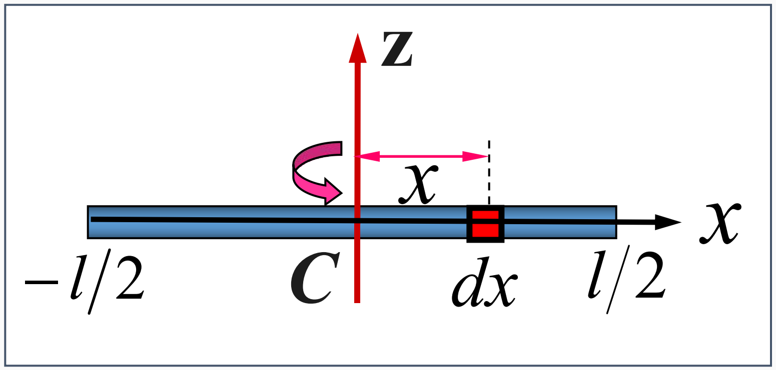
  (surface mass density)

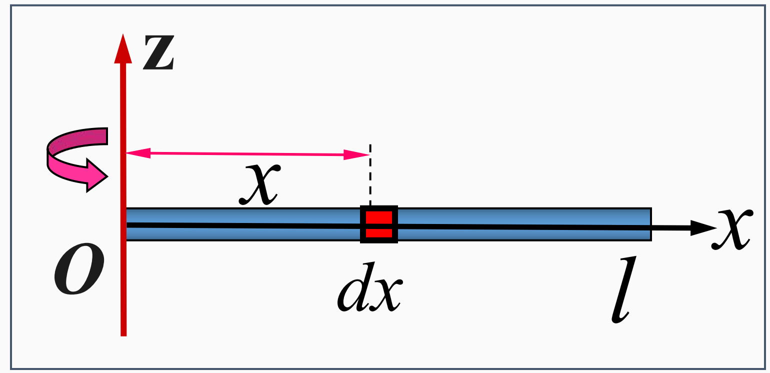
- 对质量线分布的刚体：

  质量线密度 $\rho_l(\text{或}\,\lambda)=\dfrac{dm}{dl}$, $I=\int r^2 dm=\int_L r^2 \rho_l dl$

  (linear mass density)

例1、一质量为 m、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量 .





解：设棒的线密度为 ρ_l，取一距离转轴为 x 处的质量元 $dm = \rho_l\, dx$， $dI = x^2 dm = \rho_l\, x^2 dx$

$$I_C = \rho_l \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12}\rho_l l^3$$

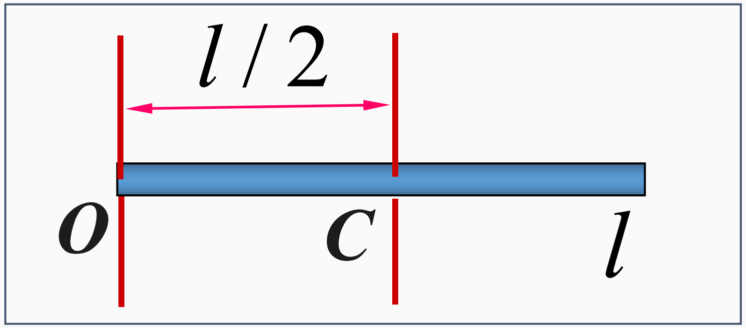
$$\boxed{= \frac{1}{12} m l^2}$$

注意：x 表示质元位置，故 x 可正可负，但 dx 表示质元宽度，故积分中要保证 $dx > 0$.

如转轴过端点 O 垂直于棒

$$I_O = \rho_l \int_0^l x^2 dx \boxed{= \frac{1}{3} m l^2}$$

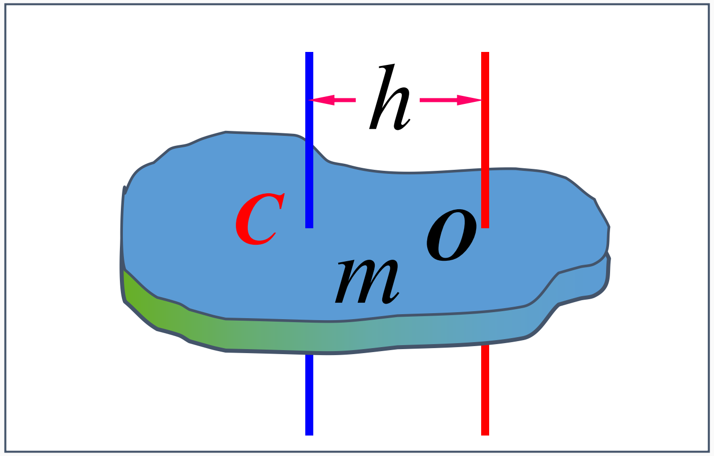
$$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$



◆ 平行轴定理

质量为 m 的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 I_C，则对任一与该轴平行，相距为 h 的转轴的转动惯量

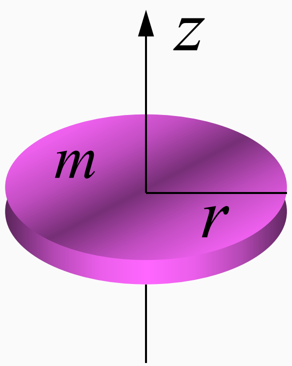
$$\boxed{I_O = I_C + mh^2}$$



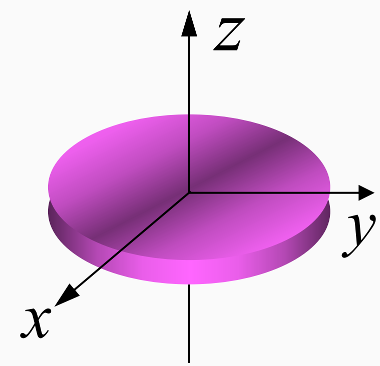
◆ 垂直轴定理（仅适用于薄板）

一平面刚体绕垂直于其平面的转轴的转动惯量，等于绕平面内与垂直轴相交的任意两个正交轴的转动惯量之和。

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$



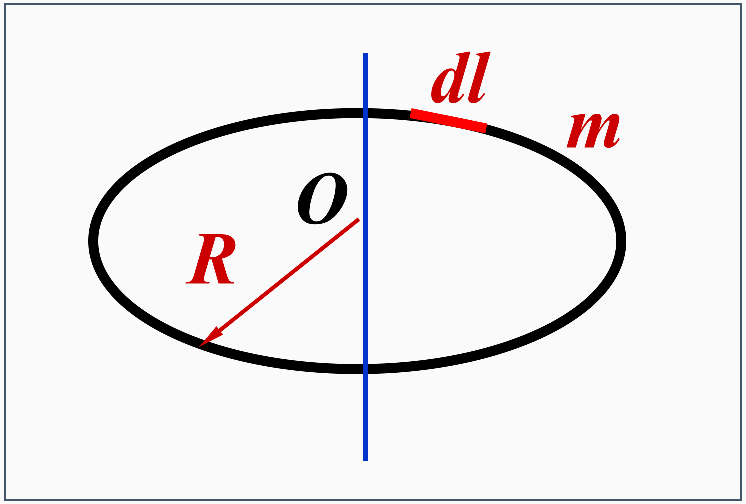
$$I_z = \frac{1}{2}mr^2$$

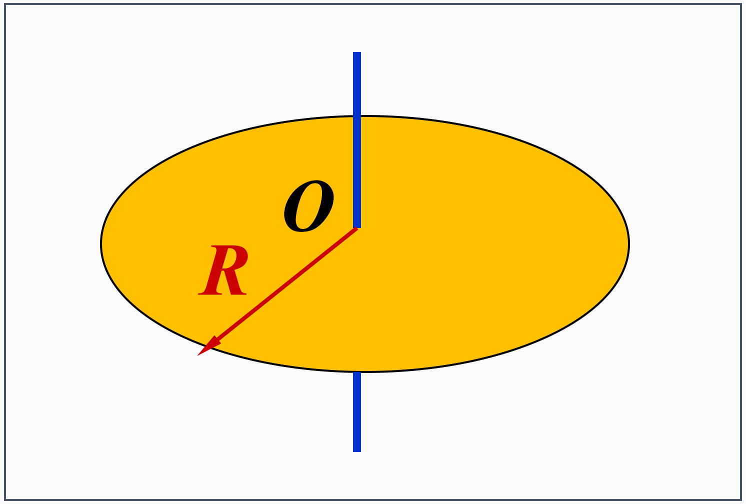


$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$$

圆盘对Z 轴的转动惯量： $I_z = I_x + I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{4}mr^2$

例2、一质量为 m 、半径为 R 的均匀细圆环和薄圆盘，求通过盘中心 O 并与圆面垂直的轴的转动惯量 .

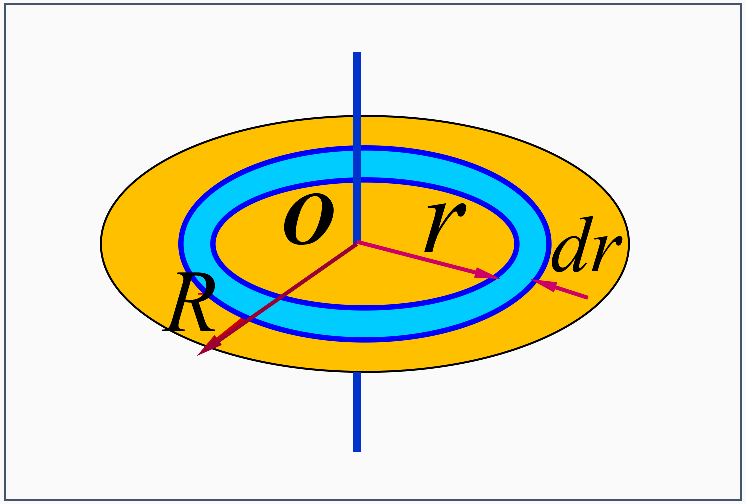




解 设细圆环线密度为ρ_l，在环上取长度为dl的一段圆弧： $dm = \rho_l dl$， $dI = r^2 dm = R^2 dm$

$$I_C = \int R^2 dm = \int_L R^2 \rho_l dl = R^2 \rho_l \oint_L dl = R^2 \rho_l 2\pi R = mR^2$$

对圆盘：设圆盘面密度为ρ_S，在盘上取半径为r，宽为dr的圆环



圆环质量 $dm = \rho_S 2\pi r dr$

圆环对轴的转动惯量

$$dI = dm \cdot r^2 = 2\pi \rho_S r^3 dr$$

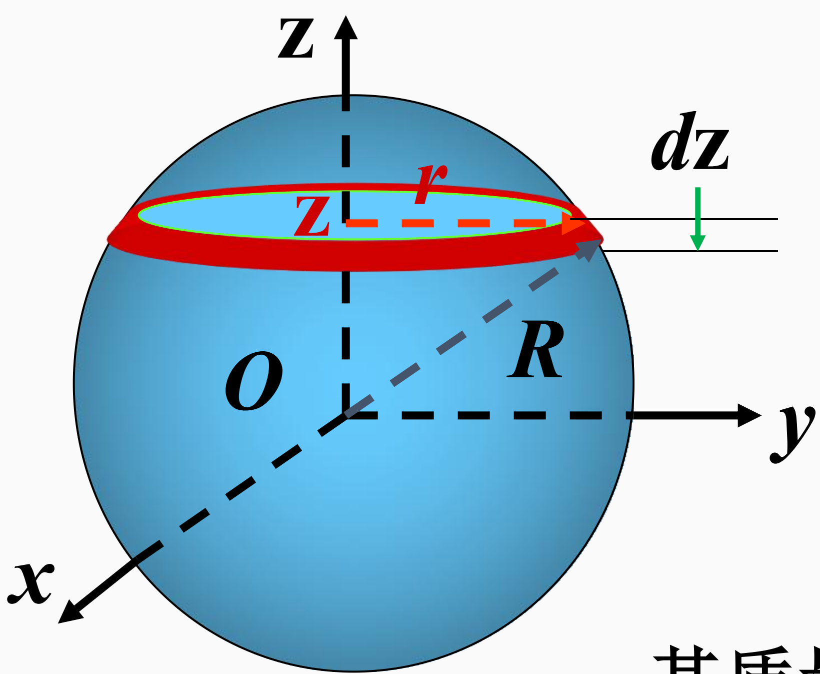
$$I = \int_0^R 2\pi \rho_S r^3 dr = \frac{\rho_S}{2} \pi R^4$$

所以 $I = \dfrac{1}{2} m R^2$

而 $\rho_S = m / \pi R^2$

南京理工大学 NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

例3、求一质量为 m 的均匀实心球对其一条直径为轴的转动惯量。



解：一球绕 z 轴旋转，离球心 z 高处切一厚为 dz 的薄圆盘。其半径为

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

其体积：

$$dV = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz$$

其质量：$dm = \rho dV = \rho\pi(R^2 - Z^2)dz$

其转动惯量：$dI = \dfrac{1}{2}r^2 dm = \dfrac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz$

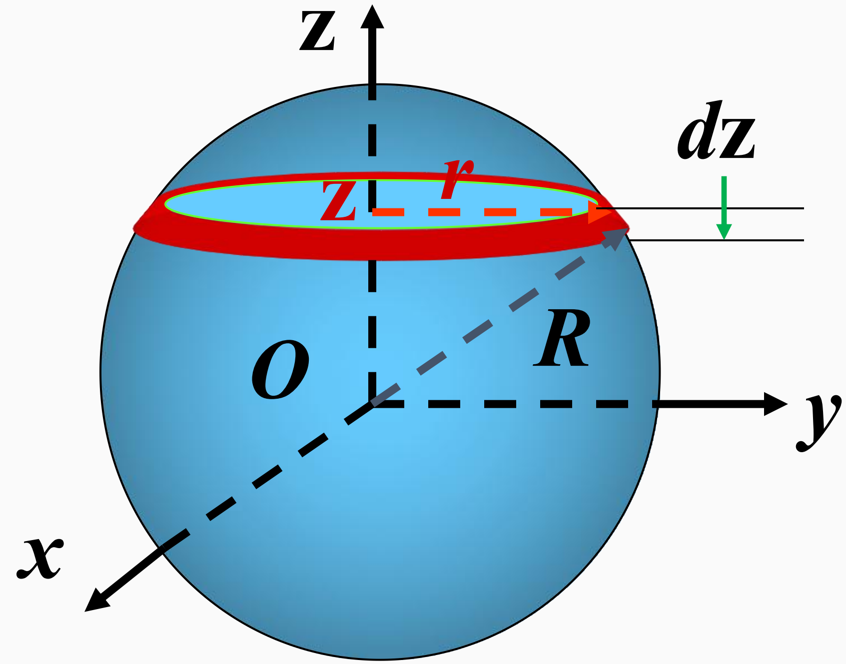
$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz$$

$$\therefore\ I = \int dI$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz$$

$$= \frac{8}{15}\rho\pi R^5 = \frac{2}{5}mR^2$$

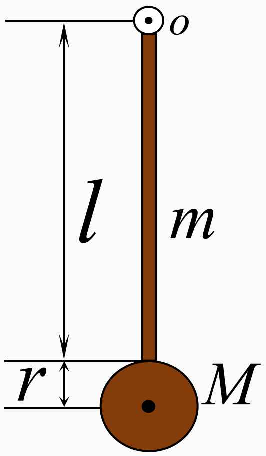


$$m = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

南京理工大学 NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

例4、一钟摆模型，由均匀细杆和均匀薄圆盘组成，如图所示。设细杆长度为 l，质量为 m，薄圆盘半径为 r，质量为 M。钟摆模型在竖直平面内可绕水平轴 O 摆动，求其转动惯量。

解：$I_{杆}=\dfrac{1}{3}ml^2$　　$I_{圆盘}=\dfrac{1}{2}Mr^2+M(l+r)^2$

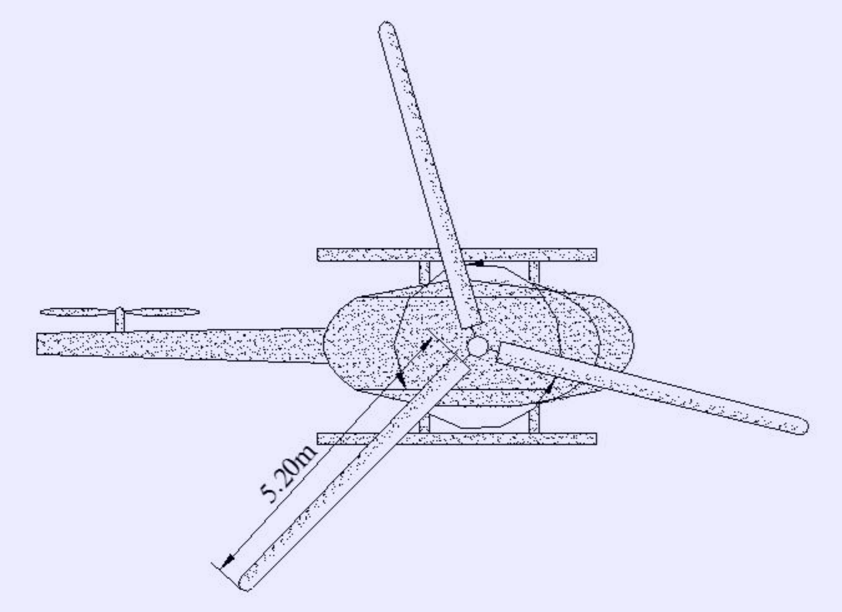


系统　$I_{系统}=\dfrac{1}{3}ml^2+\dfrac{1}{2}Mr^2+M(l+r)^2$

例5、直升飞机的螺旋桨是由三根长为 5.20 m, 质量为 240 kg 叶片组成, 如图所示。如果螺旋桨正以350 rev/min 转动。试求:

（1） 螺旋桨绕轴的转动惯量;

（2） 螺旋桨的转动动能。



解：（1）把螺旋桨的每个叶片等效为一细杆，则每个叶片绕其一端的转动惯量为：

$$I=\frac{1}{3}ml^2$$

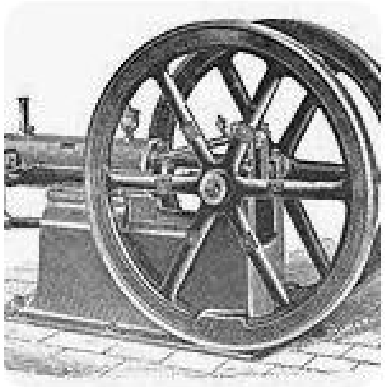
整个螺旋桨的转动惯量：$I_{总}=3I=ml^2=240\times(5.20)^2=6.49\times10^3(\mathrm{kg\cdot m^2})$

（2）螺旋桨的转动动能。

$$E_k=\frac{1}{2}I_{总}\omega^2=\frac{1}{2}\times6.49\times10^3\times\left(\frac{2\pi\times350}{60}\right)^2=4.36\times10^6(\mathrm{J})$$

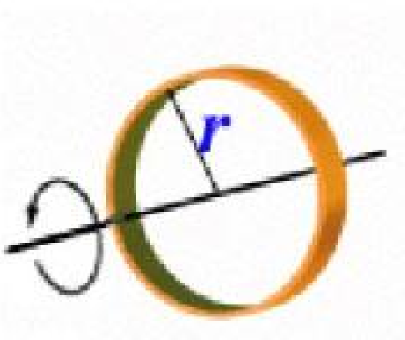
总结 转动惯量的大小取决于刚体的**总质量**、**形状大小**、**质量分布及转轴的位置**.

飞轮（英语：flywheel）是在旋转运动中用于储存旋转动能的一种机械装置。飞轮倾向于抵抗转速的改变，当动力源对旋转轴作用有一个变动的力矩时（例如往复式发动机），或是应用在间歇性负载时（例如活塞或冲床），飞轮可以减小转速的波动，使旋转运动更加平顺。一个工业飞轮 一个古老机械中使用的飞轮，位在德国的维滕。



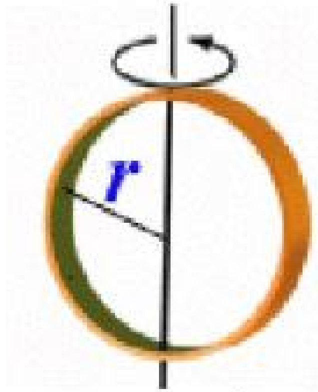
飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？

常见刚体的转动惯量



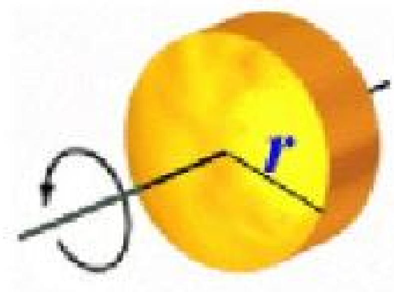
$J = mr^2$

(圆环)



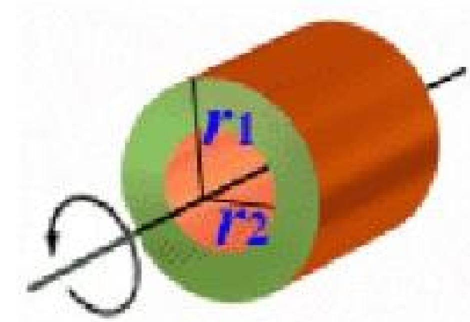
$J = mr^2/2$

(圆环)



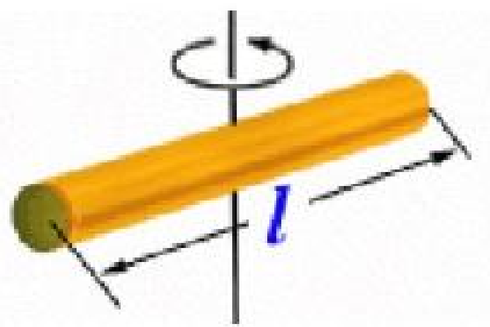
$J = mr^2/2$

(圆盘)



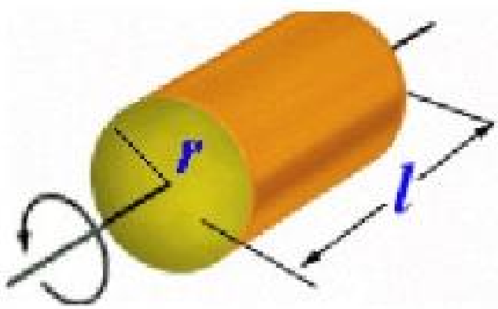
$J = m(r_1^2 + r_2^2)/2$

(空心圆柱体)



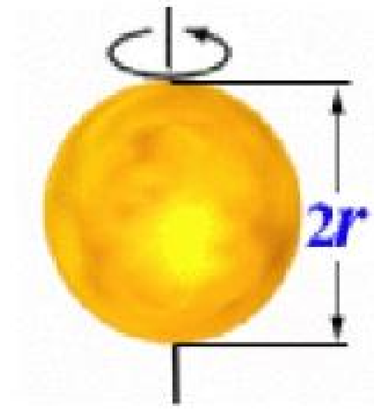
$J = ml^2/12$

(细杆)



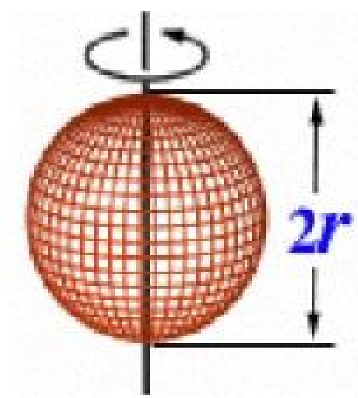
$J = mr^2/2$

(实心圆柱体)



$J = 2mr^2/5$

(实心球体)

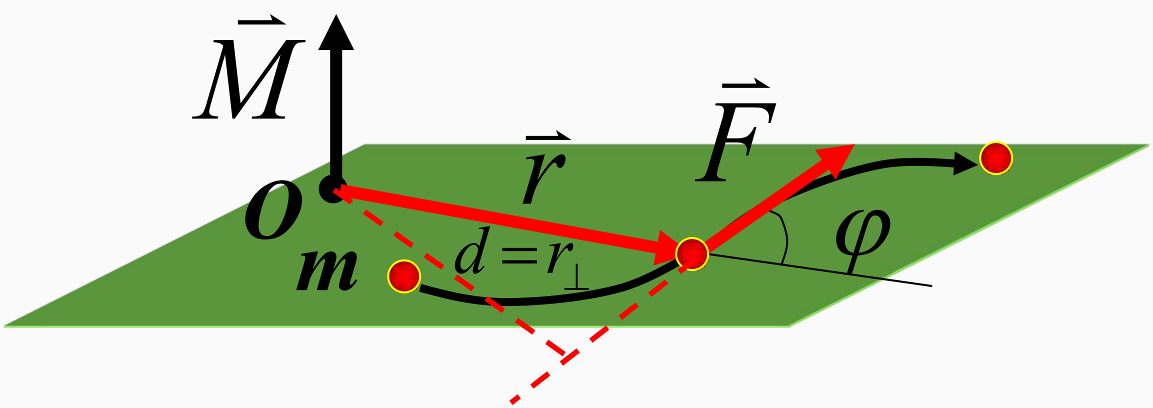


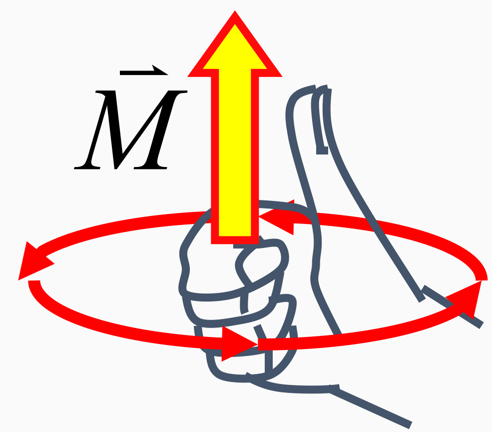
$J = 2mr^2/3$

(球壳)

一、力对固定点(参考点)的力矩

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$





注意：

1）大小　$M=rF\sin\varphi=Fd$

2）方向：右手螺旋法则;

3）单位：牛顿·米 (N·m)

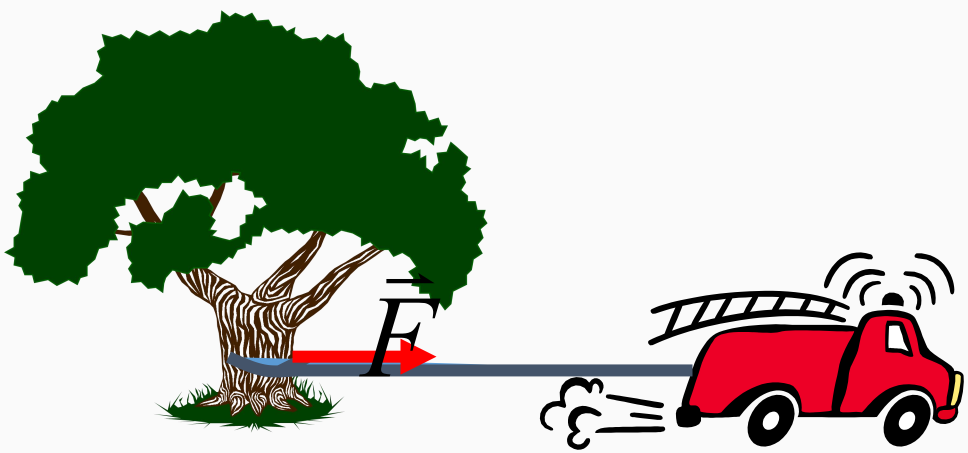
$d=r_{\perp}=r\cdot\sin\varphi$为力 F 的延长线到参考点的垂直距离，称为力臂.

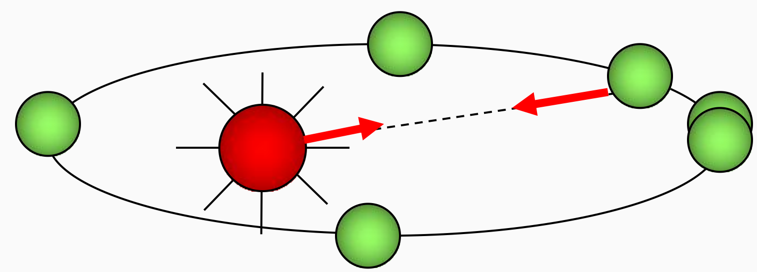
4）当 $\vec{F} \neq 0$ 时

有两种情况，　$\vec{M} = 0$

A）　$\vec{r} = 0$

B）力的方向沿矢径的方向（$\sin\varphi = 0$）





有心力的力矩为零

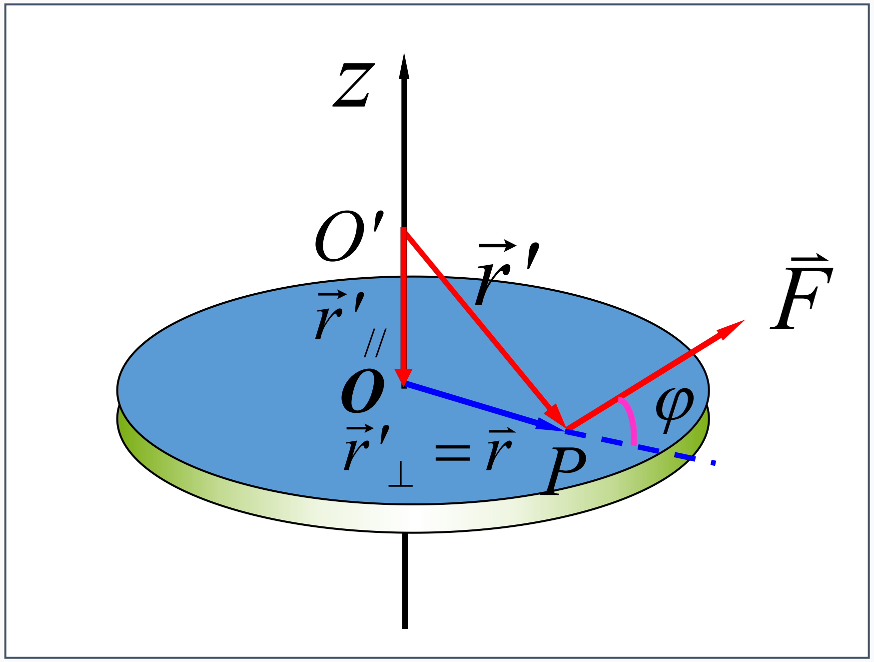
二、力对固定转轴的力矩

刚体是特殊的质点系，原则上，其力矩也要对某个固定点(参考点)来定义.

(1) 力垂直于转轴 (力在转动平面内)

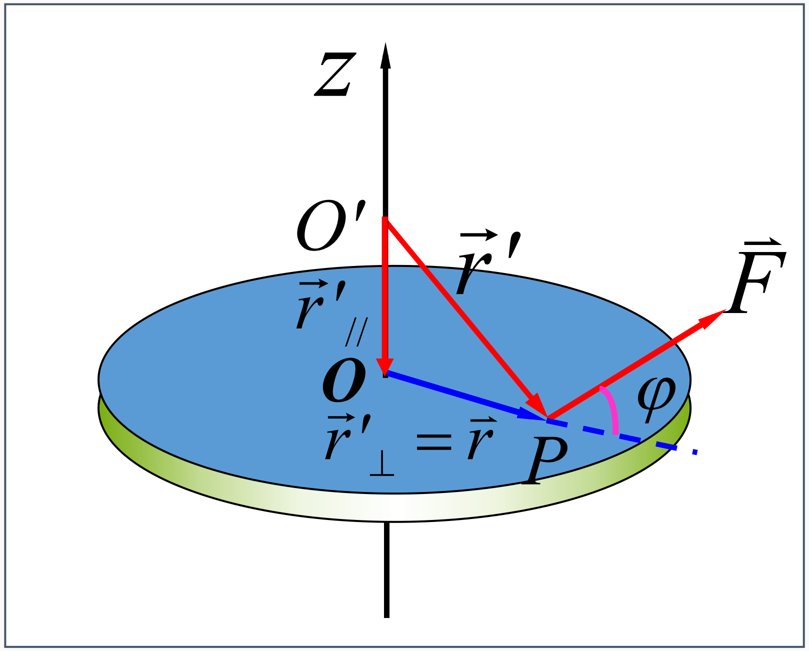
在转轴上任选一点 O' 做参考点，则作用在刚体上 P 点的力 $\vec{F}$ 对参考点O'的力矩：

$$\vec{M}'=\vec{r}'\times\vec{F}=\vec{r}'_{//}\times\vec{F}+\vec{r}'_{\perp}\times\vec{F}$$



第一项是力矩垂直于转轴的分量, 对于定轴转动, 这一分量不产生转动效果, 不必考虑.

$$\vec{M}'=\vec{r}'\times\vec{F}=\vec{r}'_{//}\times\vec{F}+\vec{r}'_{\perp}\times\vec{F}$$



第二项是沿转轴方向的力矩分量，这一分量才能改变刚体的转动状态，且其大小和方向都与参考点在转轴上的位置无关，因此可将参考点改为力所在的转动平面内的O点，将力矩沿转轴的分量称为力 $\vec{F}$ 对转轴的力矩(参考点 → 参考轴):

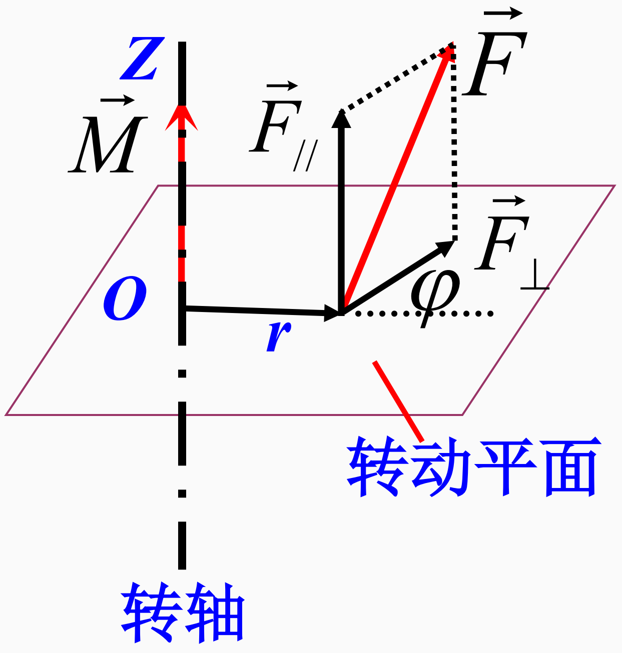
$$\boxed{\vec{M}=\vec{M}'_{//}=\vec{r}'_{\perp}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

刚体上不同的力的作用点所在的转动平面不同，力矩的参考点就相应于转轴上的不同位置. 因此，整个转轴都成为参考点，故称为力对转轴的力矩.

其参考点为力所在的转动平面的圆心 O 点.

(2) 力与转轴不垂直 (力不在转动平面内)

可以把力分解为平行于转轴和垂直于转轴两个分量.



平行于转轴的分量 $\vec{F}_{//}$ 不产生转动效果，对转轴的力矩为零.

只有垂直于转轴的分量 $\vec{F}_{\perp}$ 才能产生转动效果，改变刚体的转动状态.

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}}$$

大小： $M = rF_{\perp}\sin\varphi$

方向：沿转轴方向.

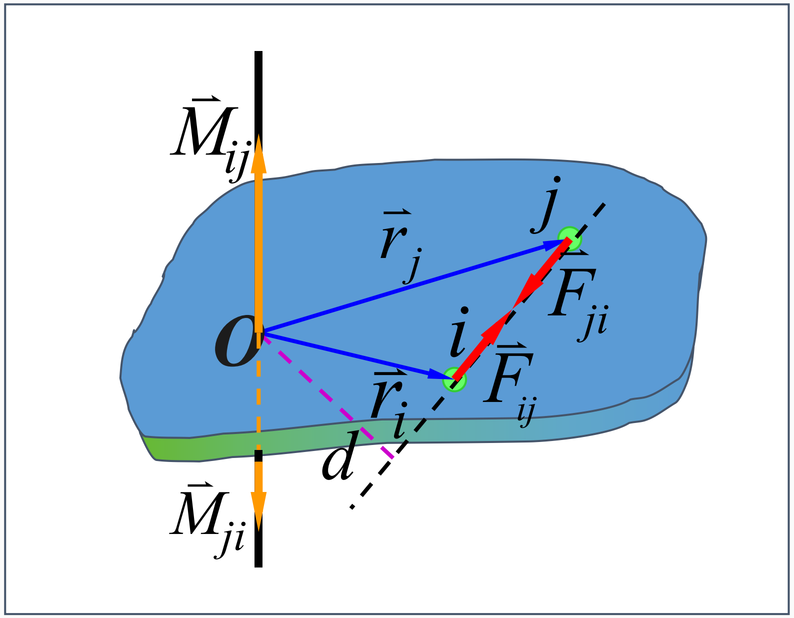
讨论

1) 合力矩等于各分力矩的矢量和

$$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\vec{M}_3+\cdots$$

2) 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消，即内力矩的总和等于零.

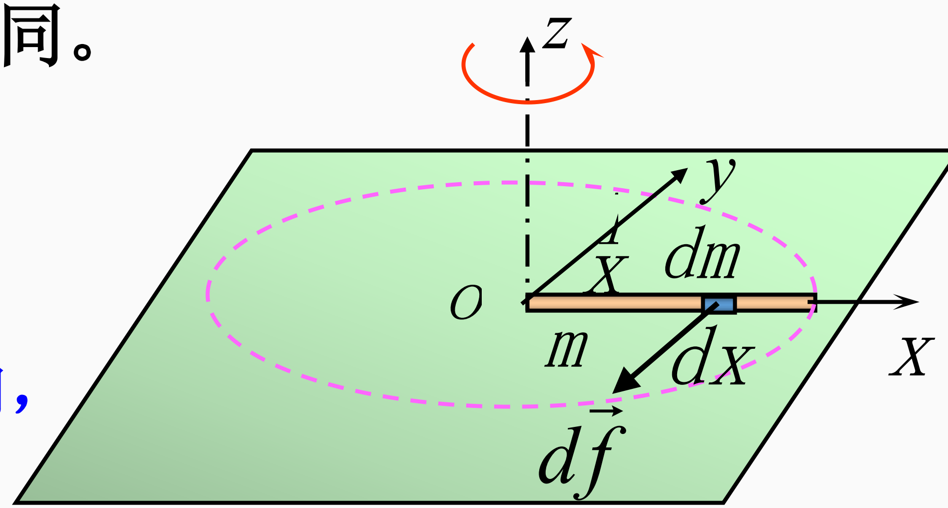
$$\vec{M}_{ij}=-\vec{M}_{ji}$$



3) 刚体的重力矩, 等于刚体的重力集中于质心的力矩.

例1. 一匀质细杆，长为 l，质量为 m，在摩擦系数为 μ 的水平桌面上转动，求摩擦力的力矩 $M_{阻}$.

解：摩擦力沿杆连续分布，杆上各质元均受摩擦力的作用，但各质元受到的摩擦阻力矩不同。



1) 如图建立坐标系, 分割质元.

$$dm = \lambda\, dx = \frac{m}{L} dx,$$

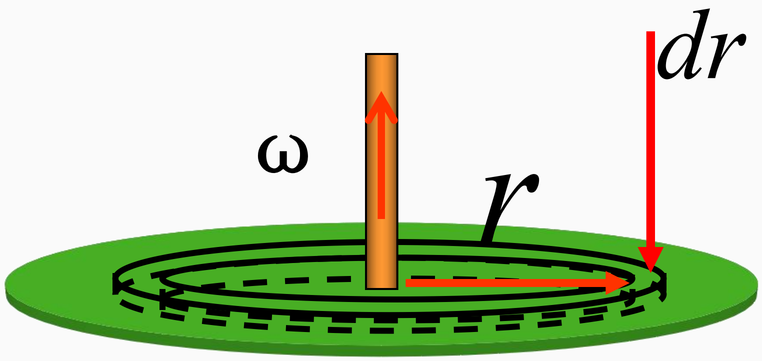
2) 规定逆时针方向为转轴正方向，质元受到的摩擦阻力及阻力矩：

$$d f = \mu\, dm \cdot g = \mu \lambda g\, dx,$$

$$dM_{阻} = -x\, d f = -\mu \lambda g\, x\, dx$$ 方向与规定正向相反(沿-z 轴)

总摩擦力矩：$$M_{阻} = -\int_0^l \mu \lambda g x dx = -\frac{1}{2} \mu \lambda g l^2 = -\frac{1}{2} \mu m g l$$

例2. 有一匀质圆盘, 半径为 R, 质量为 m, 在摩擦系数为 μ 的水平面内以角速度 ω 转动，求摩擦力产生的力矩.



解: 取细圆环为质元，向上为转轴正方向

$$dm = \sigma dS = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

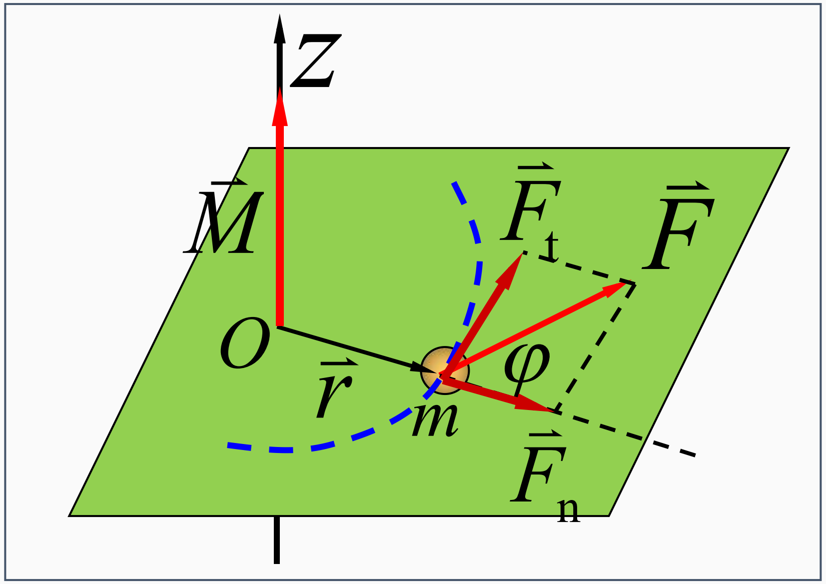
$$dM = -r d f = -r \cdot \mu dm \cdot g = -\mu \frac{mg}{\pi R^2} 2\pi r^2 dr$$

$$M = \int dM = \int_0^R -\mu \frac{mg}{\pi R^2} 2\pi r^2 dr = -\frac{2}{3}\mu mgR$$

力矩方向垂直向下

三、转动定律

1) 单个质点 m 与转轴刚性连接



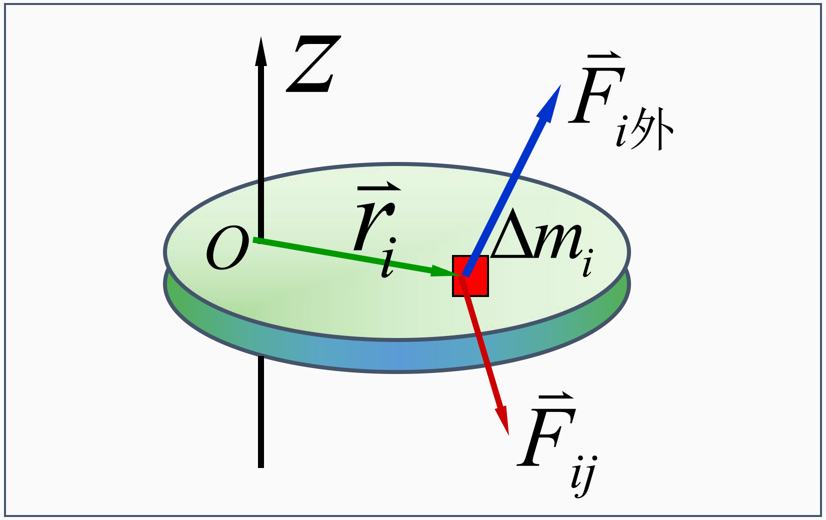
$$M = rF\sin\varphi = rF_t$$

$$\because F_t = ma_t = m\alpha r$$

$$\therefore M = rF_t = mr^2\alpha$$

$$\vec{M} = mr^2\vec{\alpha} = I\vec{\alpha}$$

2) 刚体



质量元受外力$\vec{F}_{i外}$，内力 $\vec{F}_{ij}$

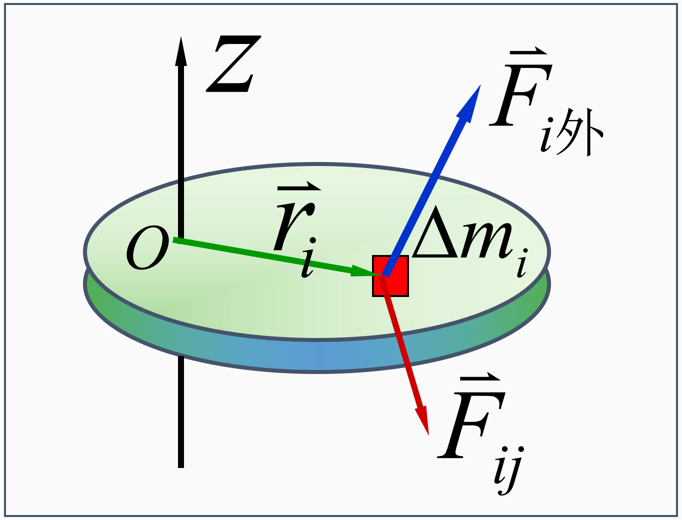
$$M_{i外} + \sum_j M_{ij} = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

外力矩　　内力矩

$$\sum_i M_{i外} + \sum_{ij} M_{ij} = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

$$\because M_{ij} = -M_{ji} \qquad \therefore \sum_{ij} M_{ij} = 0$$

$$M_{合外} = \sum_i M_{i外} = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)\alpha$$



转动惯量 $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \qquad I = \int r^2 dm$

- 转动定律　$\boxed{\vec{M}_{合外} = I\vec{\alpha} = I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}}$

比较：质点

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

转动定律： 刚体定轴转动的角加速度，与刚体所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比．

刚体的转动定律： 绕某定轴转动的刚体，所受合外力矩等于刚体对该轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向沿转轴，与角加速度方向相同.

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

说明：

- 转动定律的地位与牛顿第二定律相当。
- 转动定律中，M 与 α 是瞬时对应关系；
- M, I, α 应是对同一转轴而言的.
- 应用转动定律时应先规定转轴正方向, 它就是力矩M 及角量θ, $\Delta\theta$, ω, α 的正方向.

◆ 转动定律说明了I 是物体转动惯性大小的量度。

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}, \quad M\text{一定时}, I\uparrow \cdots \alpha\downarrow, \quad I\downarrow \cdots \alpha\uparrow$$

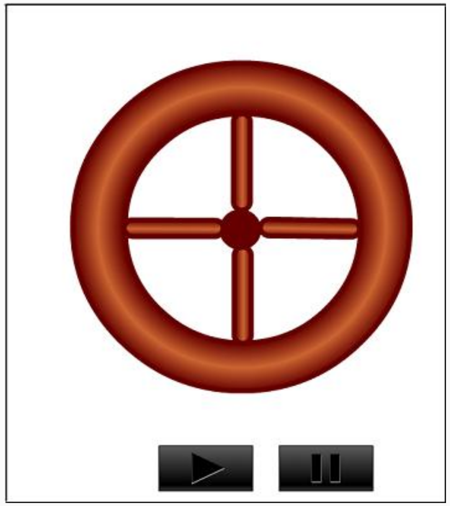
即物体的I 越大，转动惯性就越大；反之，I 越小，转动惯性越小.

例如: 一个外径和质量相同的实心圆柱与空心圆筒，若受力和力矩一样, 谁转动得更快呢?

$$\alpha = \frac{M}{I}$$

定轴转动刚体的转动定律与牛顿定律的对比

转动定律	牛顿定律
$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$	$\vec{F}$
$I=\int r^2 dm$	m
$\vec{M}=I\vec{\alpha}=\dfrac{d(I\vec{\omega})}{dt}$	$\vec{F}=m\vec{a}=\dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$
$\vec{L}=I\vec{\omega}$	$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$
$\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$



飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？

飞轮是一种惯性装置，也是一种储能装置．拖拉机的飞轮是安装在机器回转轴上的轮状蓄能器，飞轮在高速运转的过程中，会产生巨大的动量和动能，所以能够克服一定的阻力维持原有的运动．正在运行的机械，当机器转速增高时，飞轮的动能增加，将能量储存起来；在机器转速降低时，飞轮将储存的能量释放出来，以此来实现机器的平稳转动．

顶竿

由刚体转动定律 $M = I\alpha$

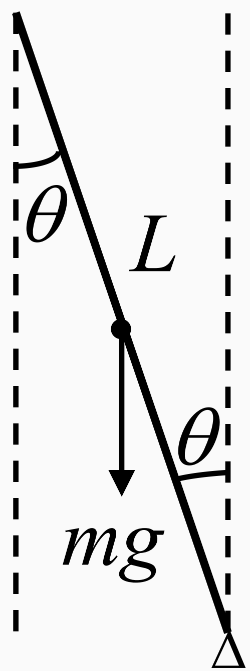
取逆时针转动为转轴正方向.

设竿子倾斜θ 角，则

$$M_{外} = mg\frac{L}{2}\sin\theta \propto L$$

$$I = \frac{1}{3}mL^2 \propto L^2$$

$$\therefore \alpha = \frac{3g}{2L}\sin\theta \propto \frac{1}{L}$$



竿越长, 转动惯量越大, 角加速度越小, 顶竿者才有充分时间恢复平衡.

看杂技——走钢丝

新疆“高空王”阿迪力广州无保护走钢丝蒙眼跨越珠江.

阿迪力手持长约6米的平衡杆，不系任何保险带.

看杂技——走钢丝

江西 4 岁半女孩32米高空走钢丝,仅靠一双小手保持身体平衡.

在杂技表演中，走钢丝的演员为何要紧握一根长而重的竹竿?

平衡原理：不管任何物体, 要保持平衡, 物体的重力作用线 (位于重心处, 方向朝下) 必须经过支撑面(物体与支撑物的接触面), 否则, 这个物体就要倒下来.

平衡条件：

$$\boxed{\vec{F}_{合外}=0,\ \ \vec{M}_{合外}=0}$$

根据平衡原理，杂技演员走钢丝时，始终要使自己身体的重力作用线通过支撑面——钢丝。钢丝很细，给人的支撑面极小，使身体重心恰巧落在钢丝绳上方就很难。由于重心在支撑面的上面，这是一种不稳定平衡，重力的作用线稍稍偏离支撑面，即可产生一个倾覆力矩，演员就有掉下来的危险。

杂技演员手中长长的竹竿，或者花伞、彩扇等，这些东西起着“延长手臂”的作用，以增加转动惯性(转动惯量)，降低偏离的角加速度，使杂技演员有充分时间调整平衡。

转动惯量～质量×长度的平方。因此，杆子越长越重，转动惯量就越大，越容易保持平衡的稳定性.

解题步骤：

1) 选取研究对象. 对相互关联的物体, 要运用隔离法, 将系统内力转化为隔离体的外力, 相应的内力矩转化为隔离体的外力矩；

2) 对各隔离体进行受力分析；

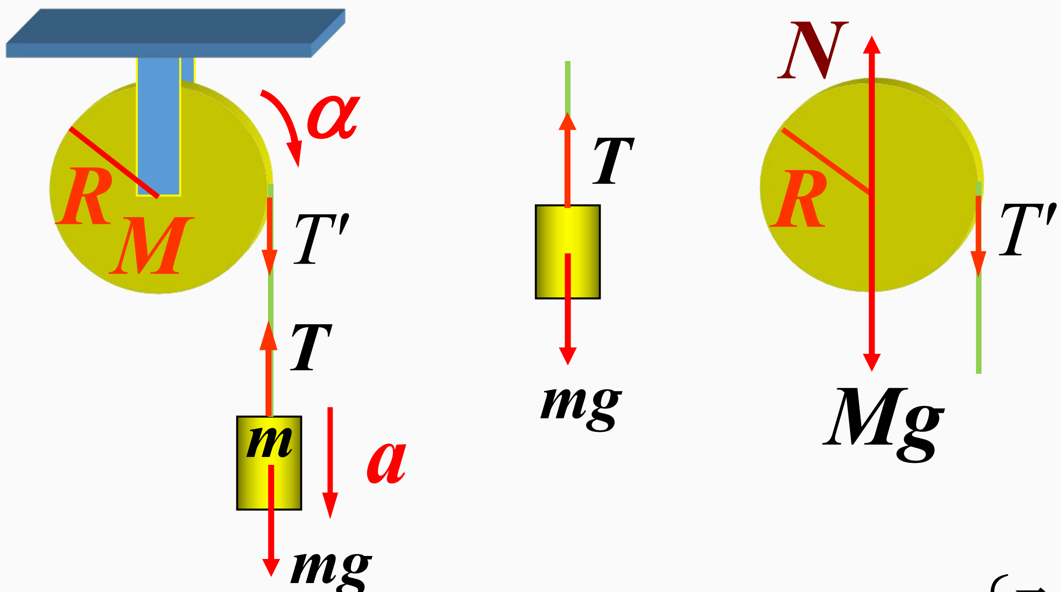
3) 规定转轴的正方向, 它就是角坐标、角位移、角速度、角加速度和力矩的正方向；

4) 根据转动定律，对各个隔离体列方程： $\vec{M}=I\vec{\alpha}$

5) 若 $M=M(\theta)$ 或 $\alpha=\alpha(\theta)$, 需做变换 $\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d\omega}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$

6) 同时涉及到刚体和质点的组合运动时, 采用隔离法进行受力分析; 对刚体应用转动定律, 对质点应用牛顿定律列出运动方程; 根据刚体边界上一点既随刚体转动 (角量)又随质点平动 (线量) 的特点, 将角量和线量联系起来 .

例1[练习五(4)]: 质量为 m 的物体, 绕在质量为 M、半径为 R 的定滑轮上, 由静止开始, 求物体落地前 t 时刻的加速度, 速度和下降的距离, 及绳中的张力(忽略绳的质量与轴上的磨擦力).



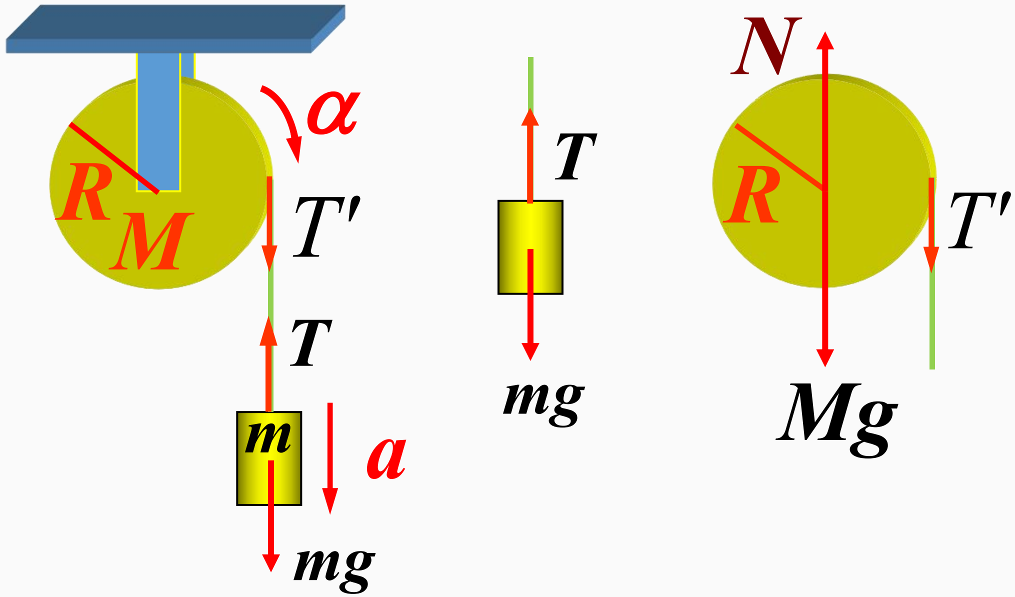
解：以定滑轮 M 与物体 m 为研究对象，选取顺时针方向为圆盘转动正方向, 及重物运动的正方向.

隔离物体，进行受力分析. 对滑轮, 转轴处的力与转动无关, 可略去不画.

对质点和滑轮分别应用牛顿第二定律和转动定律列方程, 得

$$
\begin{cases}
\text{对}m: \quad mg - T = ma \ldots\ldots\ldots(1) \\
\text{对}M: \quad T'R = I\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\
\text{联系:} \quad T = T',\ a = \alpha R \ldots\ldots(3)
\end{cases}
$$

滑轮的转动惯量 $I = \dfrac{1}{2}MR^2$



$$\begin{cases} \text{对}m: \quad mg - T = ma \ldots\ldots(1) \\ \text{对}M: \quad T'R = I\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ \text{联系:} \quad T = T',\ a = \alpha R \ldots(3) \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

联立求解方程(1)~(3)，得到

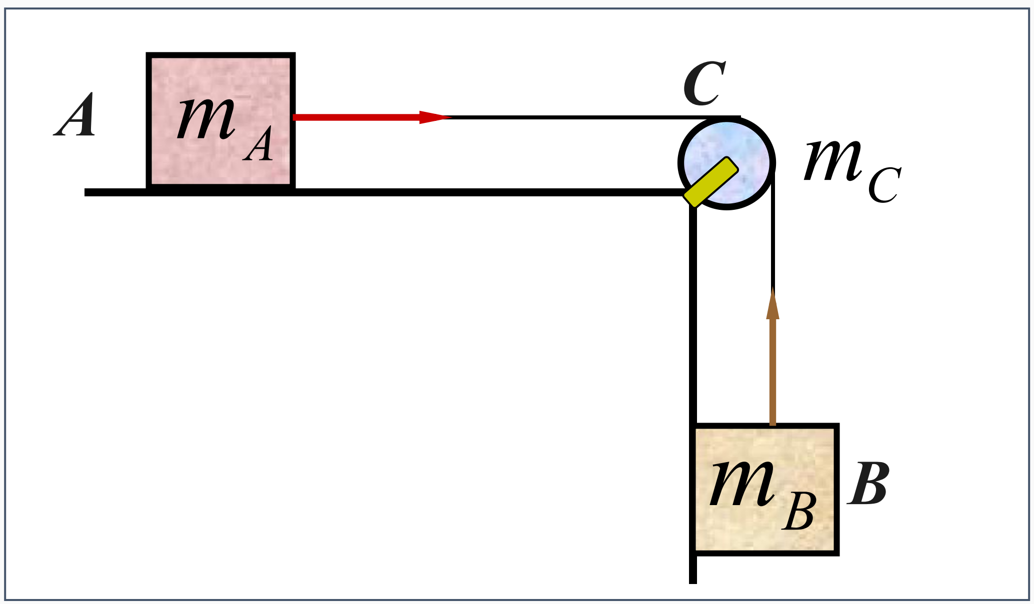
物体的加速度 $$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}$$

绳中张力 $$T = \frac{\frac{M}{2}}{m + \frac{M}{2}}mg < mg$$

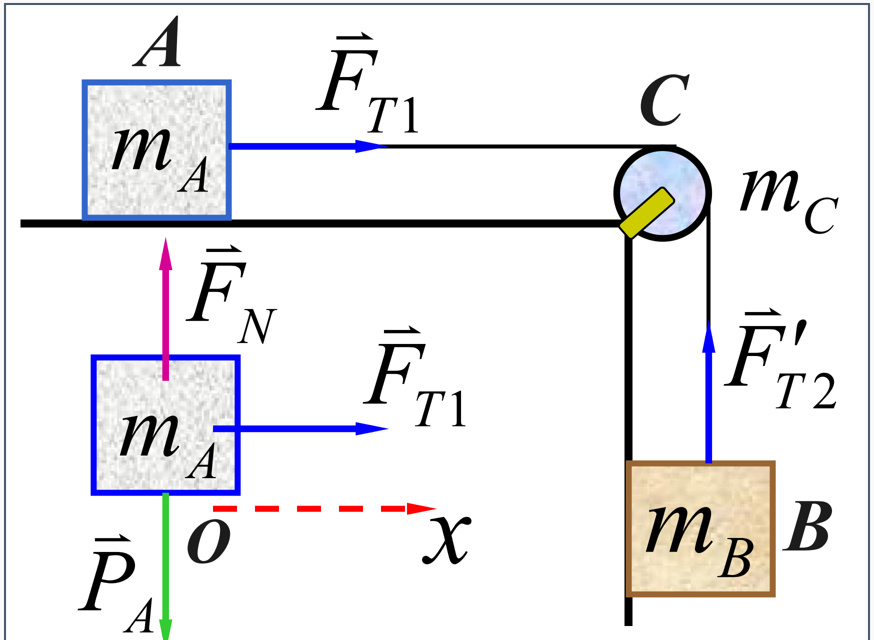
因为 a =常数, 故物体做匀加速运动, 利用匀加速运动公式得:

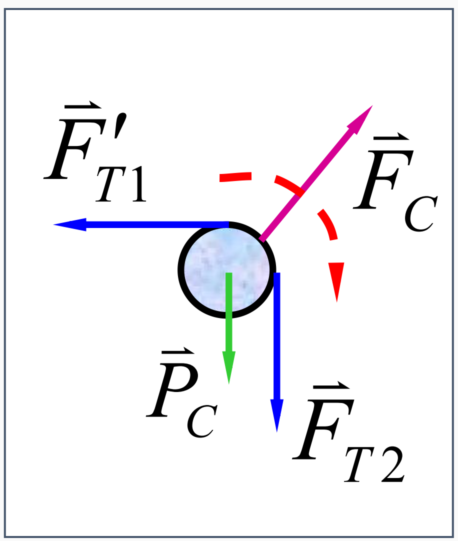
$$\upsilon = at = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}t, \qquad h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{m + \frac{M}{2}}t^2$$

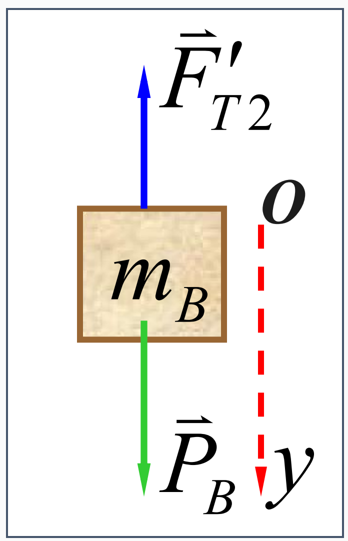
例2、质量为 m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上，与一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为 R、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C，并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上. 滑轮与绳索间没有滑动， 且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计. (1) 两物体的加速度为多少? 水平和竖直两段绳索的张力各为多少？ (2) 物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？



(3) 若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为 M_f，再求线加速度及绳的张力.

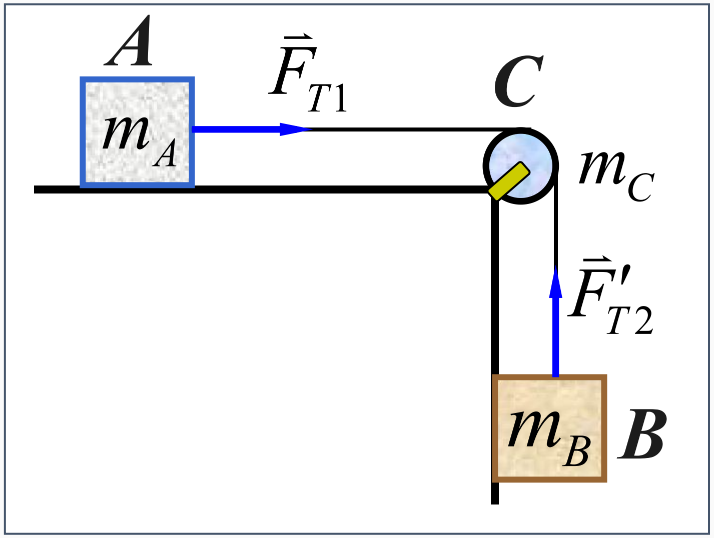






解. (1)隔离物体, 分别对物体 A、B 及滑轮作受力分析. 选取顺时针方向为滑轮转动正方向, 对质点和刚体分别运用牛顿第二定律和转动定律列方程.

$$
\begin{cases}
\text{对}\, m_A:\ F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\
\text{对}\, m_B:\ m_B g - F_{T2} = m_B a \\
\text{对}\, m_C:\ RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} = I\alpha \\
\text{联系:}\ a = \alpha R,\ I = \frac{1}{2} m_C R^2
\end{cases}
$$



解得:

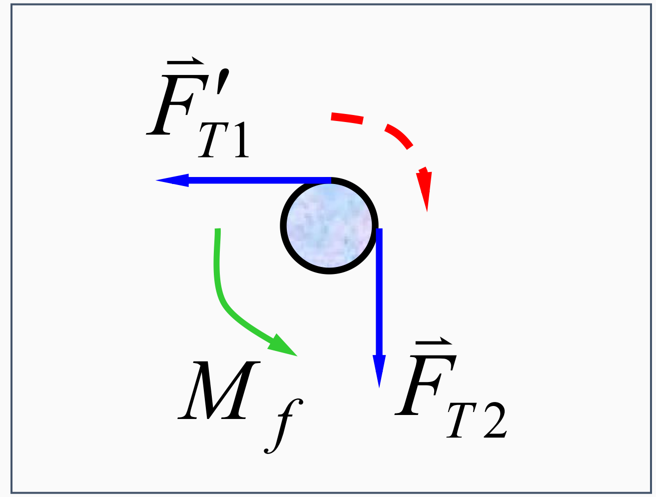
$$\begin{cases} a=\dfrac{m_B g}{m_A+m_B+\dfrac{I}{R^2}}=\dfrac{m_B g}{m_A+m_B+\dfrac{m_C}{2}} \\ F_{T1}=m_A a=\dfrac{m_A m_B g}{m_A+m_B+\dfrac{m_C}{2}} \\ F_{T2}=m_B(g-a)=\dfrac{m_B\left(m_A+\dfrac{m_C}{2}\right)g}{m_A+m_B+\dfrac{m_C}{2}} \end{cases}$$

【讨论】对轻滑轮($I=0$ 或 $m_C=0$)，可得 $F_{T1}=F_{T2}=\dfrac{m_A m_B g}{m_A+m_B}$

(2) *B* 由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

由 $\upsilon^2=\upsilon_0^2+2ay$, 得 $\upsilon=\sqrt{2ay}=\sqrt{\dfrac{2m_B g y}{m_A+m_B+m_C/2}}$

(3)考虑滑轮与轴承间的摩擦力矩 M_f，**重新对质点和刚体分别**运用牛顿第二定律、转动定律列方程



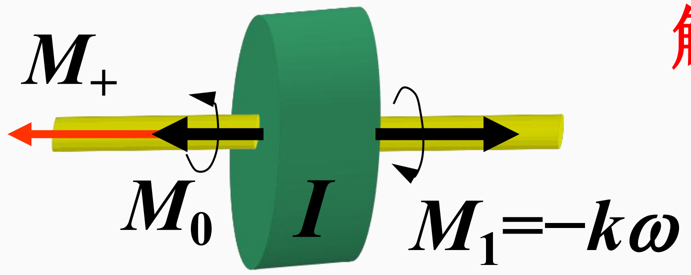
$$\begin{cases} 对m_A：\ F_{T1}=m_A a \\ 对m_B：\ m_B g-F_{T2}=m_B a \\ 对m_C：RF_{T2}-RF_{T1}-M_f=I\alpha \\ 联系：\ a=\alpha R，\ I=\dfrac{1}{2}m_C R^2 \end{cases}$$

解得:

$$a=\frac{m_B g-\dfrac{M_f}{R}}{m_A+m_B+\dfrac{I}{R^2}}=\frac{m_B g-\dfrac{M_f}{R}}{m_A+m_B+\dfrac{m_C}{2}},$$

$$F_{T1}=m_A a=\frac{m_A(m_B g-\dfrac{M_f}{R})}{m_A+m_B+\dfrac{m_C}{2}},\quad F_{T2}=m_B(g-a)=\frac{m_B(m_A g+\dfrac{m_C}{2}g+\dfrac{M_f}{R})}{m_A+m_B+\dfrac{m_C}{2}}$$

例3、一刚体受到一大小为 M_0 的恒力矩作用，从静止开始转动, 同时又引起一阻力矩M_1，其大小与刚体转动的角速度成正比, 即$M_1=-k\omega$ (k为常数). 已知刚体对转轴的转动惯量为 I, 试求刚体角速度变化的规律.



解：1)以刚体为研究对象, 分析受力矩;

2)以M_0方向为转轴正方向, 应用转动定律列方程:

$$M_0+M_1=I\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dt}=\frac{M_0-k\omega}{I},$$

分离变量并积分: $\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{M_0-k\omega}=\int_0^{t}\frac{dt}{I}$,

$$-\frac{1}{k}(\ln\frac{M_0-k\omega}{M_0})=\frac{t}{I},\qquad \frac{M_0-k\omega}{M_0}=e^{-\frac{kt}{I}},\qquad \omega=\frac{M_0}{k}(1-e^{-\frac{kt}{I}})$$

摩擦制动器(刹车盘)是利用两个运动表面相互接触时所产生的摩擦阻力，将汽车运动的动能转化为热能耗散掉，从而达到使汽车减速或停车的一种装置。

传统铁路机车以闸瓦抱住车轮进行制动, 功能与汽车的刹车盘类似. 高铁采用计算机控制的电空复合制动, 电制动优先, 电制动是将高铁运动的巨大动能转化为电能, 并送回电网再利用；空气制动是盘形摩擦制动，作为电制动的补充，同时还具有控制防滑、控制减速度、调节制动距离等功能. 一旦停电，空气制动就担负全部责任.

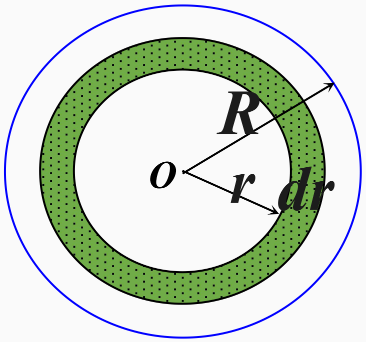
【参见】百家讲坛《铁道科学70年》第4集.

例4[练习六(6)]、质量为 m, 半径为 R 的匀质薄圆盘，水平放在水泥地面上. 开始时以角速度 ω_0 绕中心竖直轴转动, 设盘面与地面的滑动摩擦系数为 μ_k, 问经过多长时间，其转速减为原来一半?

解：在圆盘上取半径为 r, 宽度为 dr 的圆环，圆环的质量为

$$dm = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr$$



圆环所受摩擦力矩为

$$dM = -r df = -r \cdot \mu_k dm \cdot g$$

$$= -r \cdot \mu_k g \cdot \sigma 2\pi r dr = -2\pi \mu_k \sigma g \cdot r^2 dr$$

$$M=\int dM=\int_0^R -2\pi\mu_k\sigma g\cdot r^2 dr$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\mu_k\sigma g R^3=-\frac{2}{3}\mu_k m g R \qquad (1)$$

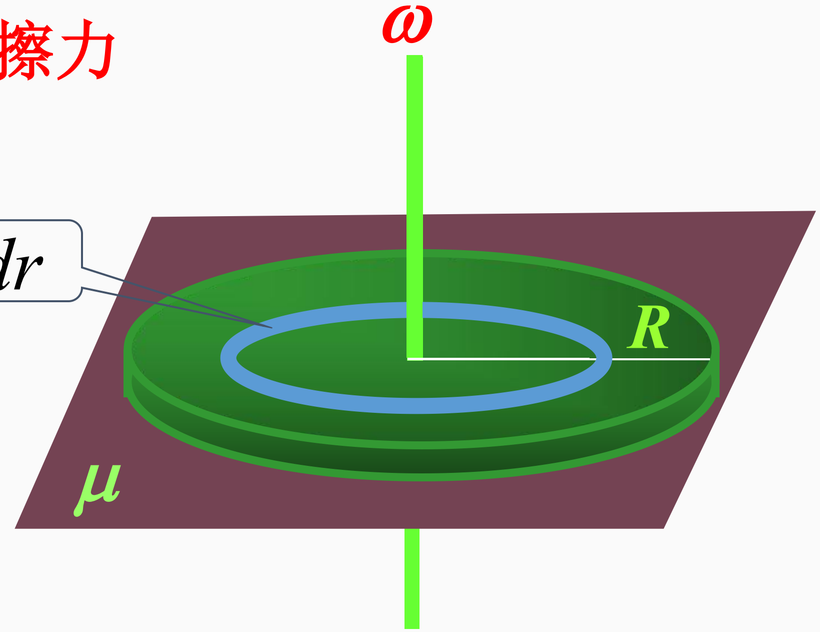
由转动定律 $M=I\alpha$ 得：$\alpha=\dfrac{M}{I}=-\dfrac{M}{\frac{1}{2}mR^2}=-\dfrac{4\mu_k g}{3R} \qquad (2)$

由匀角加速转动公式，有：$\omega=\omega_0+\alpha t=\dfrac{1}{2}\omega_0 \qquad (3)$

$$\therefore t=-\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{3}{8}\frac{\omega_0 R}{\mu_k g}$$

另解：直接对角加速度积分 $\dfrac{d\omega}{dt}=-\dfrac{4\mu_k g}{3R}$，$t=\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}-\frac{3R}{4\mu_k g}d\omega=\frac{3}{8}\frac{\omega_0 R}{\mu_k g}$

例5、圆盘以ω_0在桌面上转动, 受摩擦力而静止, 求到圆盘静止所需时间。



解：取一质元 $dm = \sigma dS = \sigma \cdot \boxed{2\pi r dr}$

$$dM = -rdf = -r \cdot \mu dm \cdot g$$

$$= -2\pi\mu\sigma g \cdot r^2 dr$$

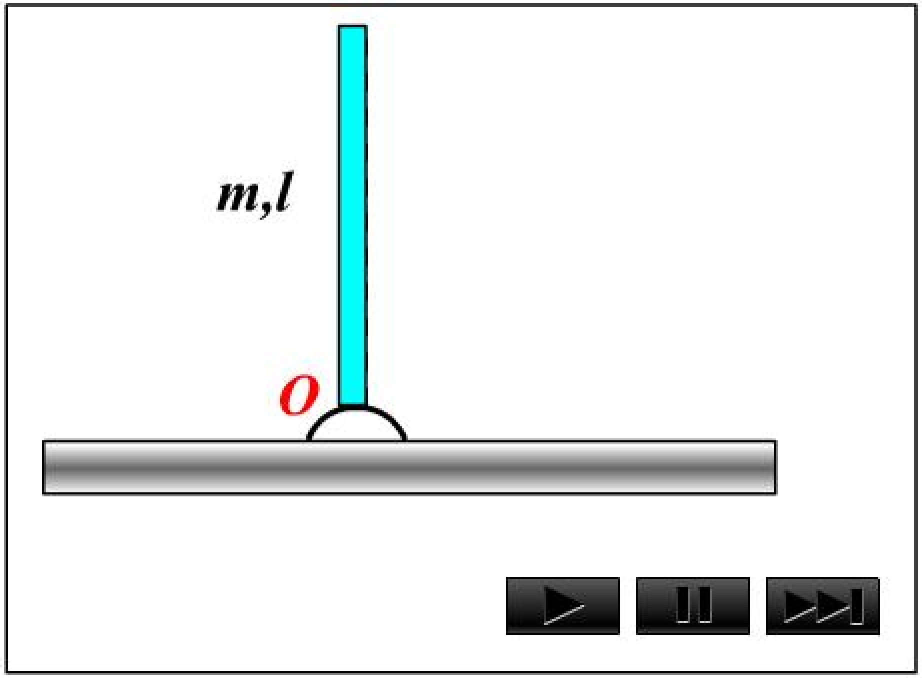
摩擦力矩 $M = \int dM = \int_0^R -2\pi\mu\sigma g \cdot r^2 dr = -\frac{2}{3}\mu mgR$

由转动定律 $M = I\frac{d\omega}{dt}$ ➡ $-\frac{2}{3}\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt}$

$$\int_0^t dt = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g}d\omega$$ ➡ $$t = \frac{3}{4}\frac{\omega_0 R}{\mu g}$$

(本方法就是直接对角加速度积分)

例6、一长为 l, 质量为 m 的匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动 .由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链O 转动. 试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度 .



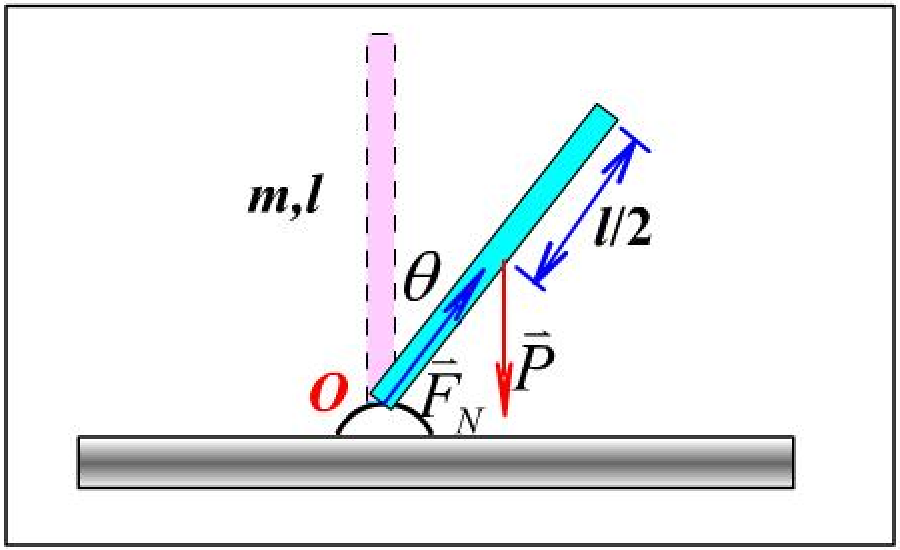
解： 细杆受重力和铰链对细杆的约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 作用，由转动定律得

$$mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\theta = I\alpha$$

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = I\alpha$$

式中　$I = \frac{1}{3}ml^2$

得　$\alpha = \frac{3g}{2l}\sin\theta$



做变换

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \qquad \therefore\ \omega d\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta d\theta$$

积分 $\int_0^{\omega}\omega d\omega = \frac{3g}{2l}\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta$　得 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

力的空间累积效应：

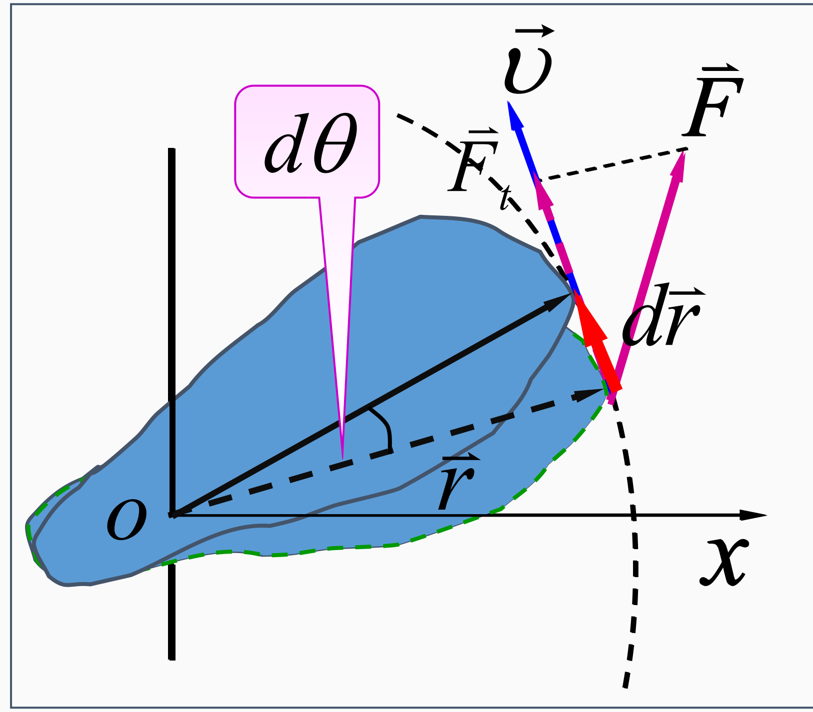
$\Rightarrow$ 力的功、动能定理。

力矩的空间累积效应：

$\Rightarrow$ 力矩的功、转动动能定理。

一、力矩的功

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=F_t ds=F_t r d\theta=Md\theta$$



力矩的功 $A=\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta$

说明

- 力矩的功就是力的功
- 所有外力矩的功之和等于

合外力矩的功 $A=\sum_i \int_{\theta_0}^{\theta} M_i d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta}\sum_i M_i d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta} M_{合外} d\theta$

- 内力矩作功之和为零，不必考虑 $A_{内}=\int M_{合内} d\theta=0$
- 力矩的功率：$N=\dfrac{dA}{dt}=M\dfrac{d\theta}{dt}=M\omega$
- 重力矩的功=重力的功 = 重力势能增量的负值.

$$\boxed{A_{重力矩}=A_{重力}=-\Delta E_p=-mg\Delta h_C}$$

二、 转动动能定理

由转动定律 $M = I\frac{d\omega}{dt}$ 两边同乘 $d\theta$，得

$$dA = M\,d\theta = I\omega d\omega = d(\frac{1}{2}I\omega^2) = dE_k$$

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \Delta E_k$$

与质点类似，刚体的转动动能定理是转动定律的空间积分形式.

转动动能定理：在定轴转动中，合外力矩对刚体作的功等于刚体转动动能的增量.

- 以上转动动能定理只适用于单个刚体和惯性系.
- 对于由多个刚体和质点组成的刚体系，可以采用隔离法，将内力转化为外力，然后对每个刚体或质点单独应用动能定理，加起来就得到整个刚体系的动能定理. 虽然单个刚体的内力不做功，但刚体系的内力可能做功.

◆也可将质点系的动能定理推广到刚体系，得到刚体系的动能定理：

$$\boxed{A_{外} + A_{非保内} + A_{保内} = \Delta E_k}$$

其中$A_{外}$为作用在刚体系上的所有外力及外力矩做功之和. 如果外力作用在刚体系的某个刚体上, 就是外力矩的功. 如果外力作用在刚体系的某个质点上, 就是外力的功. 这种方法的缺点是有时无法判断内力是否做功. 推荐采用隔离法 + 单个刚体或质点的动能定理.

◆刚体系的功能原理：$\boxed{A_{外} + A_{非保内} = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E}$

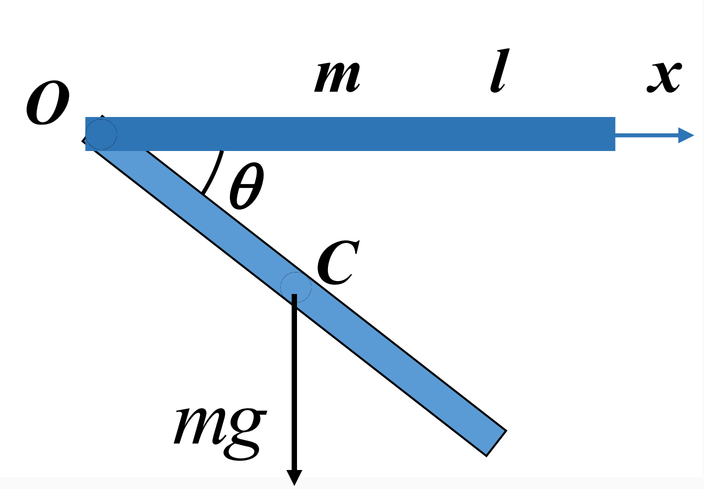
◆刚体的重力势能：$E_P = mgh_C$ 质心位置

◆刚体系的机械能守恒定律：若 $A_{外} = 0,\ A_{非保内} = 0$, 则 $\Delta E = 0$

刚体定轴转动的转动定律与牛顿定律的对比

转动定律	牛顿定律
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\vec{F}$
$I = \int r^2 dm$	m
$\vec{M} = I\vec{\alpha}$	$\vec{F} = m\vec{a}$
$\vec{L} = I\vec{\omega}$	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$
$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$
$dA = Md\theta$	$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$
$d\vec{H} = \vec{M}dt$	$d\vec{I} = \vec{F}dt$

例1、一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕 O 轴在竖直平面内转动，初始时它在水平位置，求它下摆 θ 角时的 ω.



解法1：由转动定律求解

$$M_{重力} = mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta = I\frac{d\omega}{dt},\qquad I=\frac{1}{3}ml^2$$

做变换 $$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

代入上式 $$mg\frac{l}{2}\cos\theta = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

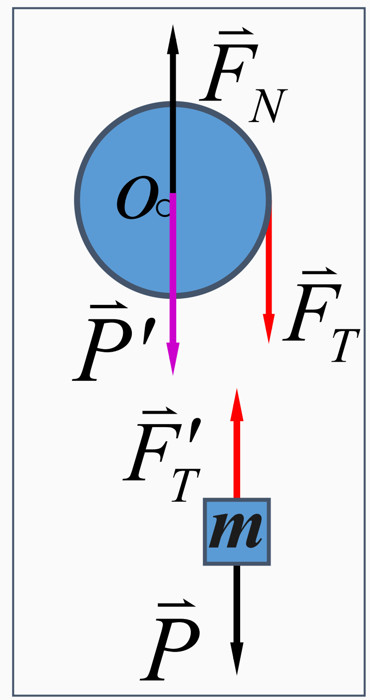
分离变量并积分 $$\int_0^{\omega}\omega d\omega=\frac{mgl}{2I}\int_0^{\theta}\cos\theta d\theta \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{mgl\sin\theta}{I}}=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

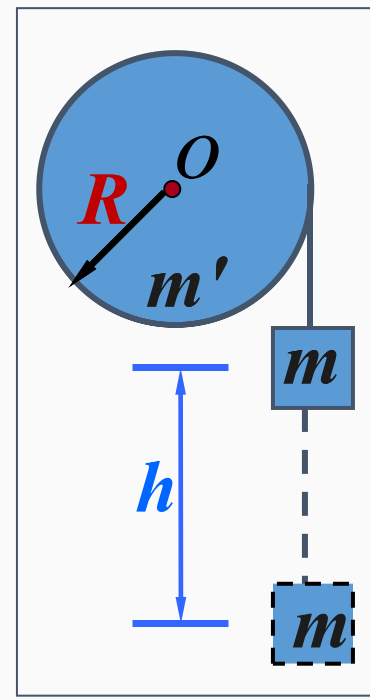
解法2：用机械能守恒定律求解

选水平位置为势能零点，$0=\frac{1}{2}I\omega^2-mg\cdot\frac{l}{2}\sin\theta \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$

例2、一质量为 m'、半径为 R 的圆盘，可绕一垂直通过盘心的无摩擦的水平轴转动．圆盘上绕有轻绳，一端挂质量为m 的物体. 问物体在静止下落高度 h 时，其速度的大小为多少? 设绳的质量忽略不计．

解：采用隔离法，将内力化为外力，然后对刚体和质点分别应用动能定理或功能原理.





对刚体: $\int_0^\theta F_T R d\theta = \int_0^h F_T dy = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0$

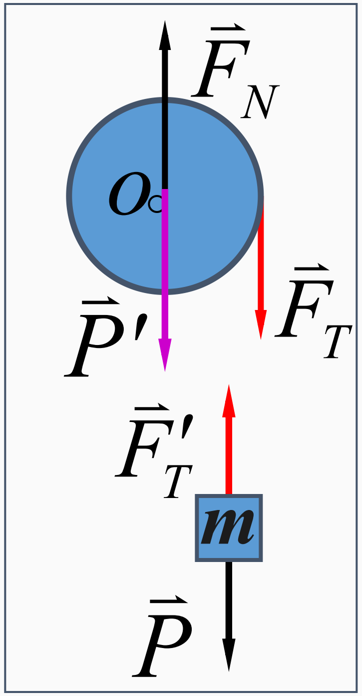
对质点：以初始位置为势能零点

$$-\int_0^h F_{\mathrm{T}} dy = \Delta E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - mgh$$

两式相加得 $\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 - mgh = 0$ 可见, 刚体与物体组成的系统的机械能守恒.

刚体系的机械能守恒：$\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2-mgh=0$

【结论】不打滑($dy=Rd\theta,\ \upsilon=\omega R,\ a=\alpha R$)情况下，绳中张力(内力)对刚体做正功，对质点做负功，合起来不做功.



圆盘的转动惯量为： $I=\frac{1}{2}m'R^2$

刚体不打滑 $\upsilon=\omega R$

解得 $\upsilon=\sqrt{\dfrac{2mgh}{m+\dfrac{I}{R^2}}}=\sqrt{\dfrac{2mgh}{m+\dfrac{m'}{2}}}=2\sqrt{\dfrac{mgh}{2m+m'}}$

【总结】在不打滑情况下，刚体与物体间的内力不做功，可以直接对系统应用机械能守恒定律求解.

例3、留声机的转盘绕通过盘心且垂直于盘面的转轴以角速率 ω 作匀速转动．放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动．设唱片的半径为 R，质量为 m，它与转盘间的摩擦系数为 μ，求：

(1)唱片与转盘间的摩擦力矩；

(2)唱片达到角速度 ω 时需要多长时间；

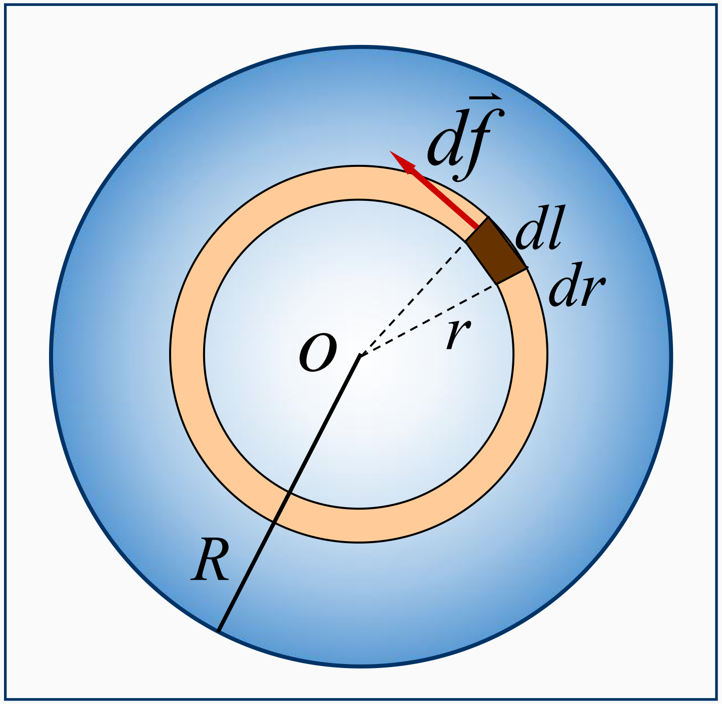
(3)在这段时间内，转盘的驱动力矩对唱片做了多少功？

【分析】由于惯性, 唱片在摩擦力矩带动下, 一开始与留声机的转盘并不同步, 而是要经历一段时间加速, 才与转盘同步转动. 同步以后, 唱片与转盘一同做匀速转动, 摩擦力消失. 注意本题摩擦力矩对唱片做正功, 它就是驱动唱片转动的驱动力矩.

解：(1) 在唱片上取半径为 *r*，宽度为 *dr* 的圆环，其质量为

$$dm = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr$$



圆环所受摩擦力矩为

$$dM = r df = r \cdot \mu dm \cdot g = r \cdot \mu \cdot \frac{2mg}{R^2} \cdot r dr$$

$$= \frac{2\mu mg}{R^2} r^2 dr$$

$$M = \frac{2\mu mg}{R^2} \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \mu mgR$$

(2) 由转动定律求 α，（唱片$I = mR^2/2$）

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{\frac{2}{3}\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{4\mu g}{3R}$$

（唱片作匀加速转动）

由 $\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t$ 可求得 $t = \dfrac{\omega}{\alpha} = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$

(3)由 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta = 2\alpha\theta$ 可得在 **0** 到 t 的时间内，唱片转过的角度为

$$\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{3\omega^2 R}{8\mu g}$$

驱动力矩对唱片做的功为 $W = \int_0^\theta M d\theta = M\theta = \dfrac{1}{4}m\omega^2 R^2$

或者：由转动动能定理可得 $W = \Delta E_k = \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{4}m\omega^2 R^2$

力的时间累积效应

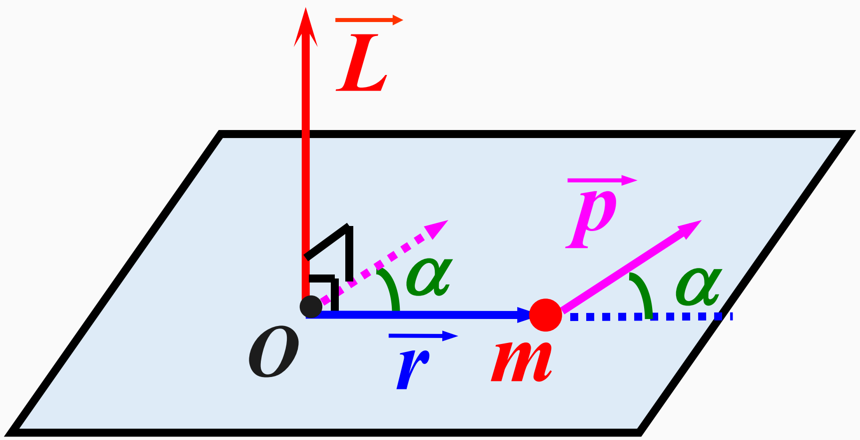
⟹ 冲量、动量定理。

力矩的时间累积效应

⟹ 角冲量(冲量矩)、角动量(动量矩)定理。

一、 质点对固定点(参考点)的角动量

角动量(也称动量矩)是质点(曲线)运动中的一个重要的物理量，在物理学的许多领域都有着十分重要的应用。

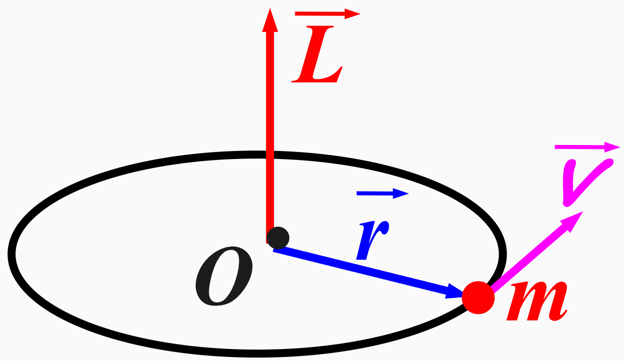


质点m对惯性系中的固定点O的角动量(动量矩)定义为：

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}}$$

◆大小：$L=rp\sin\alpha=rm\upsilon\sin\alpha$， 单位：**kg m²/s**

◆方向：垂直于$\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$ (或 $\vec{p}$)决定的平面(右手螺旋定则)



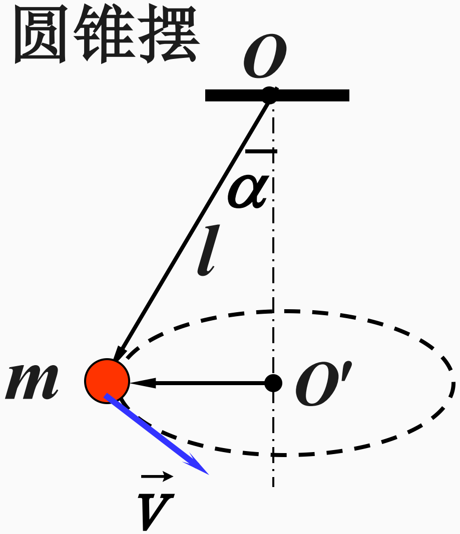
◆质点作匀速率圆周运动时，对圆心的角动量的大小为:

$$L = m\upsilon r = mr^2\omega = I\omega$$

方向：⊥圆面向上(沿转轴方向)。

◆同一质点的同一运动，其角动量却可以随固定点(参考点)的不同而改变。例如：

圆锥摆



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{om} \times m\vec{\upsilon} \quad \begin{cases} L_O = m\upsilon l \\ \text{方向变化} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{o'm} \times m\vec{\upsilon} \quad \begin{cases} L_{O'} = m\upsilon l \sin\alpha \\ \text{方向竖直向上不变} \end{cases}$$

二、质点的角动量定理

由牛顿第二定律 $\vec{F}_{合外} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ 两边同时又乘 $\vec{r}$

$$\vec{M}_{合外} = \vec{r}\times\vec{F}_{合外} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) - \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon},\quad \vec{\upsilon}\times\vec{p} = 0 \qquad \therefore \vec{M}_{合外} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{M}_{合外} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$ 或 $$\boxed{角冲量\quad d\vec{H} = \vec{M}_{合外}\,dt = d\vec{L}}$$

这两种形式，(大学物理及理论力学)教材都称为质点的角动量定理：质点所受的合外力矩等于质点的角动量对时间的变化率。或者：质点所受的合外力矩的角冲量(冲量矩)等于质点角动量的增量 (严格说来，前者应称为转动定律，后者才是角动量定理的微分形式).

◆质点的角动量定理 (微分形式) $\vec{M}\,dt = d\vec{L}$

◆质点的角动量定理 (积分形式) $\int_{t_0}^{t}\vec{M}\,dt = \vec{L}-\vec{L}_0$

◆定义：角冲量(冲量矩) $d\vec{H} = \vec{M}\,dt, \quad \vec{H} = \int_{t_0}^{t}\vec{M}\,dt$

——力矩对时间的积累效应

则 $d\vec{H} = \vec{M}dt = d\vec{L}, \quad \vec{H} = \int_{t_0}^{t}\vec{M}\,dt = \vec{L}-\vec{L}_0 = \Delta\vec{L}$

质点的角动量定理：质点所受的合外力矩的角冲量(冲量矩)等于质点角动量的增量.

【注意】角动量定理中的力矩和角动量，都要对同一个参考点定义, 否则没有意义.

三、质点系的角动量定理

$$\vec{M}_{i外}+\vec{M}_{i内}=\frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$\sum_i(\vec{M}_{i外}+\vec{M}_{i内})=\sum_i\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\frac{d}{dt}(\sum_i\vec{L}_i)=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L}=\sum_i\vec{L}_i$$ 质点系的总角动量

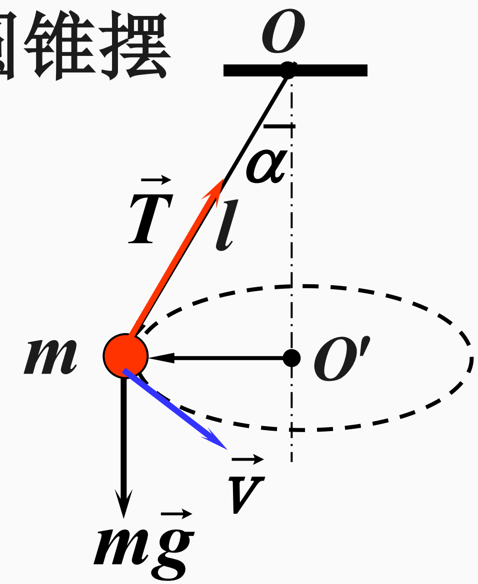
$$\because\ \vec{M}_{内}=\sum_i\vec{M}_{i内}=0,\qquad \therefore\ \vec{M}_{合外}=\sum_i\vec{M}_{i外}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$d\vec{H}=\vec{M}_{合外}dt=d\vec{L},\qquad \vec{H}=\int_{t_0}^{t}\vec{M}_{合外}\cdot dt=\vec{L}-\vec{L}_0=\Delta\vec{L}$$

质点系的角动量定理：质点系所受的合外力矩等于质点系的总角动量对时间的变化率。**或者：质点系所受的合外力矩的角冲量(冲量矩)等于质点系的总角动量的增量.**

圆锥摆的角动量

圆锥摆



◆对O点： $\vec{M}_{张力}=\vec{r}_{om}\times\vec{T}=0$

$$\vec{M}_{重力}=\vec{r}_{om}\times m\vec{g}=mgl\sin\alpha\,\vec{t}_0$$

合力矩不为零，角动量变化。

◆对O′点： $\vec{M}_{张力}=\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}=-r_{o'm}T\cos\alpha\,\vec{t}_0=-mg\,r_{o'm}\vec{t}_0\neq 0$

$$\vec{M}_{重力}=\vec{r}_{o'm}\times m\vec{g}=mg\,r_{o'm}\vec{t}_0=-\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}$$

合力矩为零，角动量大小、方向都不变。

(但合力不为零，动量改变！)

四、 质点或质点系的角动量守恒定律

若 $\vec{M}_{合外}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量 ——角动量守恒定律

说明 ◆角动量守恒是物理学基本定律之一，它不仅适用宏观系统，也适用微观系统，且在高速低速范围均适用。

◆通常对有心力：$\vec{F}$过参考点O，故 $M=0$，角动量守恒

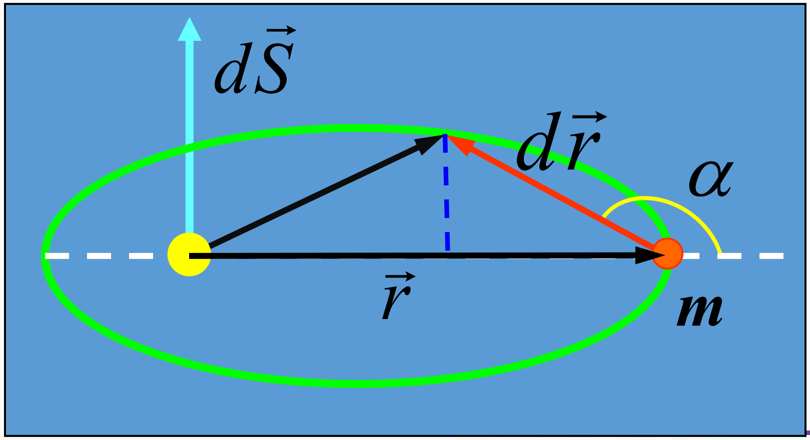
例如 由角动量守恒可导出行星运动的开普勒第二定律(面积定律)

$\boxed{\text{行星对太阳的位矢在相等的时间内扫过相等的面积}}$

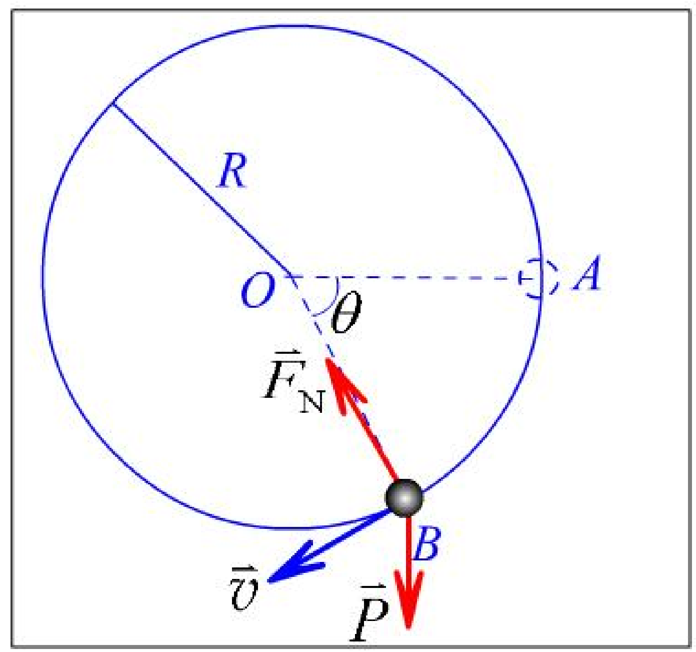
$$L=m\upsilon r\sin\alpha=m\frac{|d\vec{r}|}{dt}r\sin\alpha$$

$$=2m\frac{\frac{1}{2}|d\vec{r}|\,r\sin\alpha}{dt}=2m\frac{dS}{dt}$$

$$=\text{恒量}$$



例1、一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内. 一质量为 m 的小球穿在圆环上,并可在圆环上滑动. 小球开始时静止于圆环上的点 A (该点在通过环心 O 的水平面上), 然后从 A 点开始下滑. 设小球与圆环间的摩擦略去不计, 求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度。



解法1：小球受重力和支持力作用, 支持力的力矩为零, 重力矩垂直于纸面向里

$$M = mgR\cos\theta$$

由质点的角动量定理(转动定律另一形式)

$$mgR\cos\theta = \frac{dL}{dt}$$

$$mgR\cos\theta=\frac{dL}{dt}$$

其中 $L=m\upsilon R=mR^2\omega=I\omega,$

故 $$mgR\cos\theta=mR^2\frac{d\omega}{dt}$$

做变换 $$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

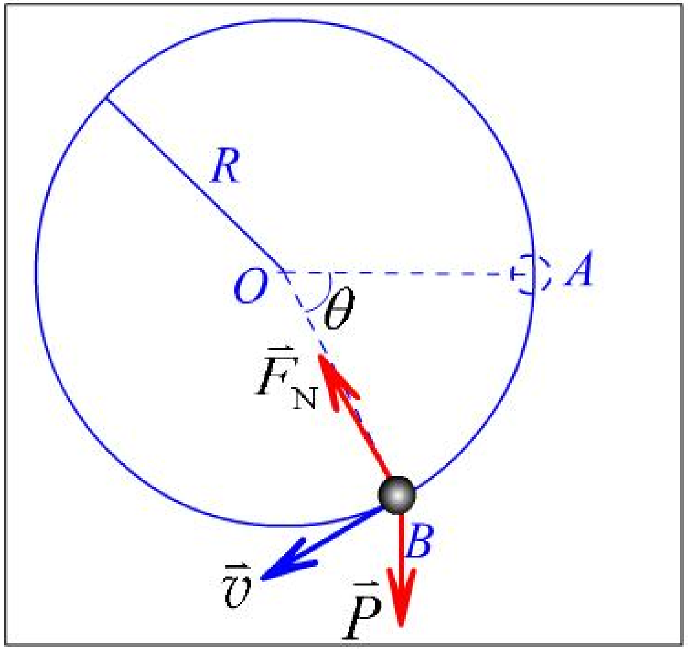
$$\Rightarrow g\cos\theta=R\frac{d\omega}{dt}=R\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

分离变量并积分

$$\int_0^{\omega}\omega d\omega=\int_0^{\theta}\frac{g}{R}\cos\theta d\theta$$

$$\therefore\ \omega=\sqrt{\frac{2g}{R}\sin\theta}$$

$$L=mR^2\omega=mR\sqrt{2gR\sin\theta}$$



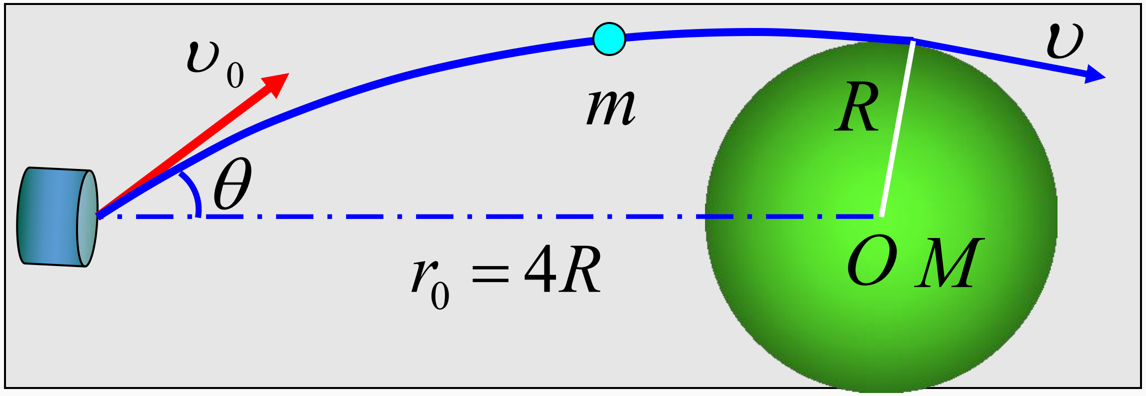
解法2: 由机械能守恒定律

$$0=\frac{1}{2}m\upsilon^2-mgR\sin\theta$$

$$\therefore\ \omega=\frac{\upsilon}{R}=\sqrt{\frac{2g}{R}\sin\theta}$$

$$L=mR^2\omega=mR\sqrt{2gR\sin\theta}$$

例2、发射一宇宙飞船去考察一质量为M、半径为 R 的行星，当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以速度 v_0 发射一质量为 m 的仪器。要使该仪器恰好掠过行星表面，求 θ 角及着陆滑行的初速度多大?



解：在行星的引力场中(有心力场)，质点的角动量守恒、机械能守恒.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \dfrac{GMm}{r_0} = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 - \dfrac{GMm}{R} \cdots\cdots(1) \\ m\upsilon_0 r_0 \sin\theta = m\upsilon R \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(1)得 $\upsilon = \upsilon_0\left(1+\dfrac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2}$，

由(2)得，

$$\sin\theta = \frac{m\upsilon R}{m\upsilon_0 r_0} = \frac{1}{4}\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2}$$

五、刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

◆ 刚体定轴转动的角动量

$$L=\sum_i \Delta m_i \upsilon_i r_i=(\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{\vec{L}=I\vec{\omega}}$$

◆ 刚体定轴转动的角动量定理

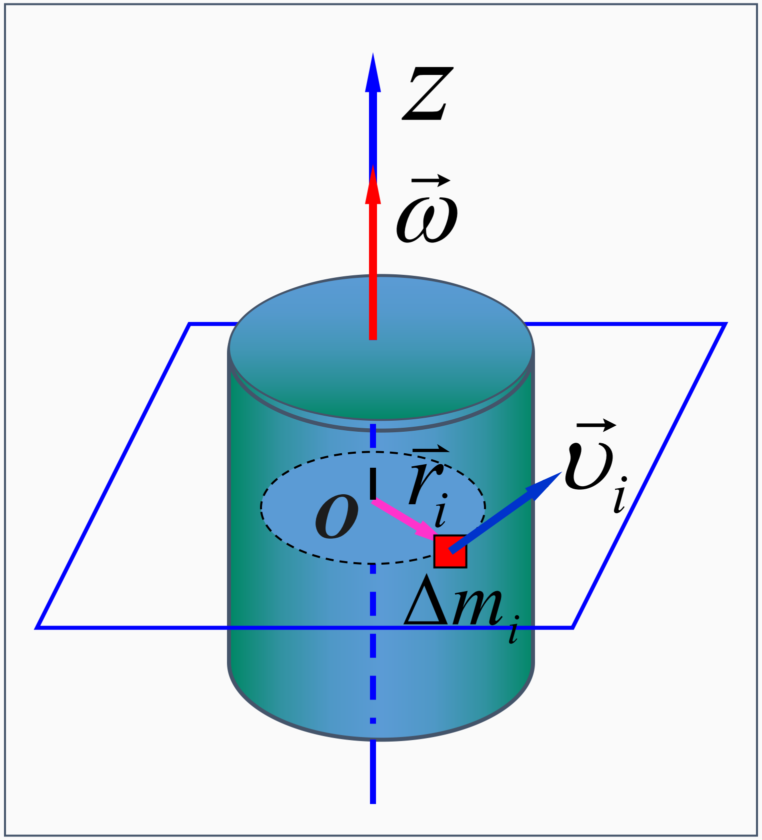
转动定律: $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d(I\vec{\omega})}{dt}$

角动量定理的微分形式:

$$\boxed{d\vec{H}=\vec{M}dt=d\vec{L}=Id\vec{\omega}}$$

角动量定理的积分形式:

$$\boxed{\vec{H}=\int_{t_0}^{t}\vec{M}dt=\vec{L}-\vec{L}_0=I\vec{\omega}-I\vec{\omega}_0}$$



刚体的角动量定理: 定轴转动刚体所受合外力矩的角冲量(冲量矩)等于刚体角动量的增量.

◆ 刚体系定轴转动的角动量定理

(*a*) 刚体系定轴转动的角动量:

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i I_i \vec{\omega}_i}$$ (必须对同一转轴定义)

(*b*) 刚体系定轴转动的角动量定理: 刚体系是特殊的质点系, 因此，质点系的角动量定理，对刚体系也成立.

$$\boxed{\vec{H} = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_{合外} dt = \vec{L} - \vec{L}_0 = \sum_i I_i \vec{\omega}_i - \sum_i I_{i0} \vec{\omega}_{i0}}$$

(*c*) 若刚体系各部分的角速度 ω 相同, 则

$$\vec{L} = (\sum_i I_i)\vec{\omega} = I\vec{\omega},$$

$$\vec{H} = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_{合外} dt = \vec{L} - \vec{L}_0 = I\vec{\omega} - I_0\vec{\omega}_0$$ (I 可变)

[教材p90的角动量定理(3-14b)式，实际上指的是刚体系]

刚体(系)定轴转动的角动量定理 $\boxed{\int_{t_0}^{t} \vec{M}_{合外} dt = \sum_i I_i \vec{\omega}_i - \sum_i I_{i0} \vec{\omega}_{i0}}$

◆ 刚体(系)定轴转动的角动量守恒定律

若 $\vec{M}_{合外} = 0$，则 $\boxed{\vec{L} = \sum_i I_i \vec{\omega}_i = 恒量}$

若刚体系各部分ω相同，则 $\vec{L} = (\sum_i I_i)\vec{\omega} = I\vec{\omega} = 恒量$

(*I* 可变)

说明

◆ 守恒条件 $\vec{M}_{合外} = 0$

◆ 内力矩不改变系统的角动量。

◆ 在冲击等问题中 $\because M_{内} >> M_{外} \quad \therefore \vec{L} \approx 常量$

◆ 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律。

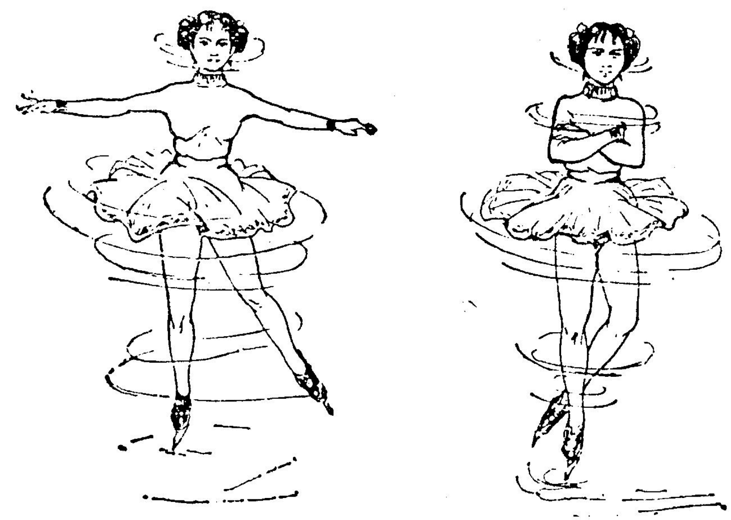
有许多现象都可以用角动量守恒来说明。

- 花样滑冰

应用程序

- 跳水运动员跳水

应用程序


(a) (b)
图 6.18 溜冰运动员减小转动惯量快速旋转

思考

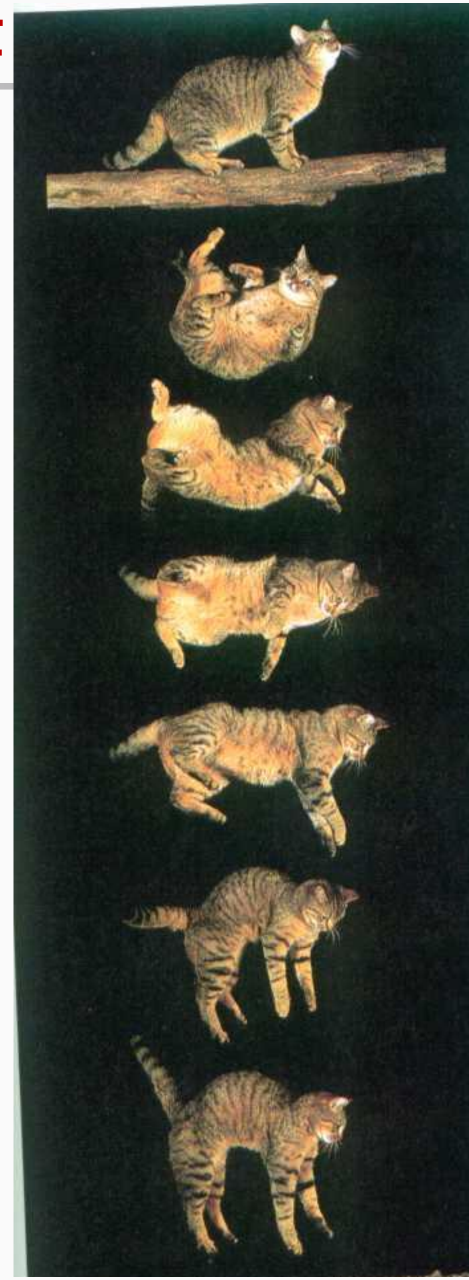
温室效应对地球自转的影响

自然界中存在多种守恒定律

- 动量守恒定律
- 电荷守恒定律
- 能量守恒定律
- 质量守恒定律
- 角动量守恒定律

观察表明，猫从高处掉下，受伤程度随高度增加而减少，据报导，有猫从32层楼掉下，也仅有胸腔和一颗牙齿有轻微损伤。为什么？

猫下落时，身体无转动，总角动量为零。尾巴一甩而具有角动量，据角动量守恒，身体须反转，产生反向角动量。另外猫很灵活，它在甩尾时能调节身体各部位，使身体快速转动，这样，四肢朝下先着地，不会伤害身体其它部位。

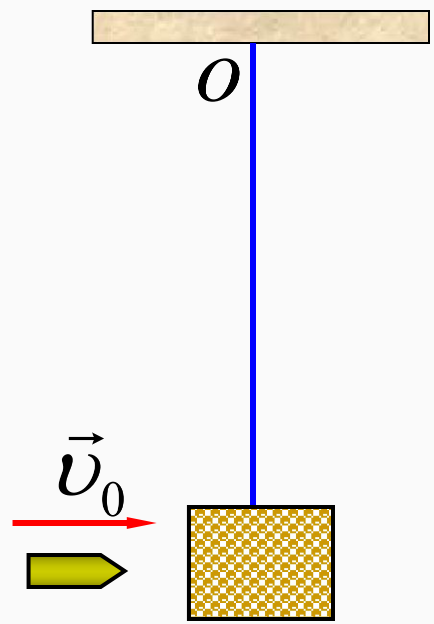


猫的下落(A)

猫的下落(B)

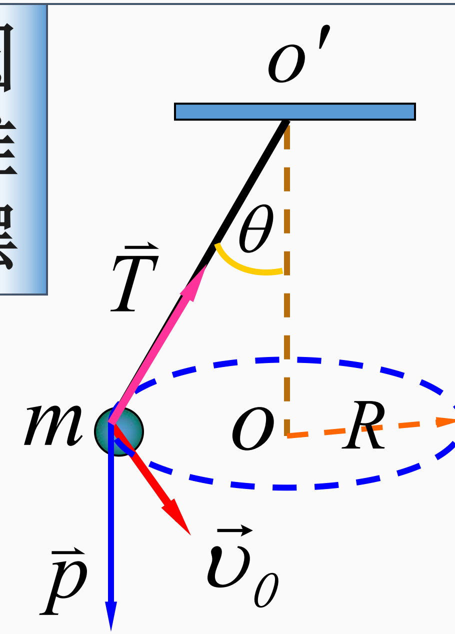
思考

子弹击入沙袋
细绳质量不计



子弹击入杆

圆锥摆



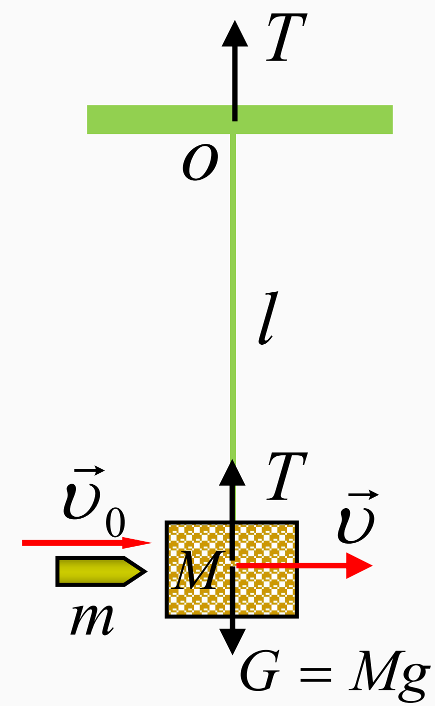
以子弹和沙袋为系统
动量守恒；
角动量守恒；
机械能不守恒.

以子弹和杆为系统
动量不守恒；
角动量守恒；
机械能不守恒.

圆锥摆系统
动量不守恒；
(对O)角动量守恒；
机械能守恒.

子弹与沙袋(或木块)发生完全非弹性碰撞

子弹击入沙袋 细绳质量不计



以子弹+沙袋(或木块)组成的系统为研究对象.

(1) 系统对转轴 O 的角动量守恒

$$m\upsilon_0 l = (m+M)\upsilon l$$

$$\boxed{\therefore \upsilon = \frac{m}{m+M}\upsilon_0}$$

(2)由角动量守恒, 可得动量守恒

$$\Rightarrow \ m\upsilon_0 = (m+M)\upsilon$$

水平方向动量守恒, 说明转轴对细绳没有水平方向作用力.

对质点系, 由角动量守恒可得动量守恒, 反之亦然, 通常选动量守恒.

(3) 系统的机械能不守恒

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m+M)\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)^2}\upsilon_0^2 < 0$$

机械能有损失!

子弹与木杆发生完全非弹性碰撞

以子弹+木杆组成的系统为研究对象.

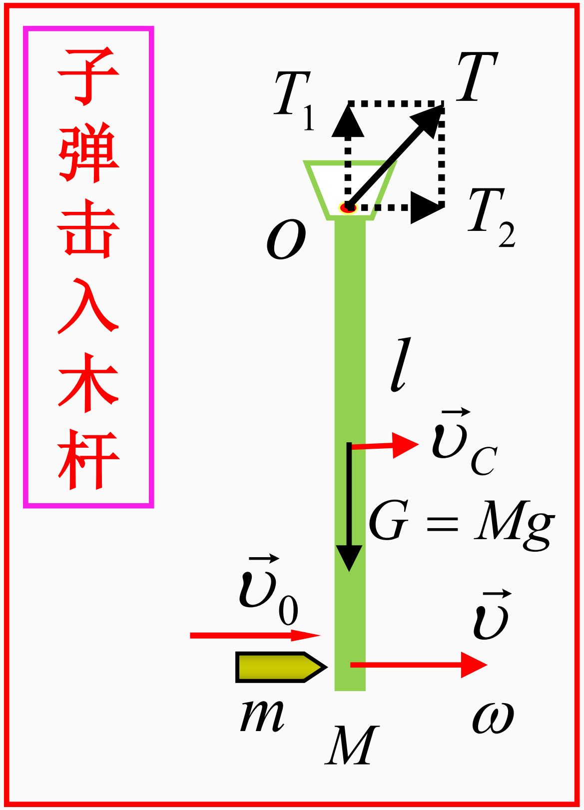
(1) 系统对转轴 *O* 的角动量守恒

质点用线量表示: $m\upsilon_0 l = m\upsilon l + I_{杆}\omega$

质点用角量表示: $ml^2\omega_0 = (ml^2 + I_{杆})\omega$

$\because \upsilon_0 = \omega_0 l$, $\upsilon = \omega l$, 故两种表示等价.

$$\Rightarrow \omega = \frac{ml^2}{ml^2 + I_{杆}}\omega_0 = \frac{3m}{(3m+M)} \cdot \frac{\upsilon_0}{l}$$



$$I_{杆} = \frac{1}{3}Ml^2$$

木杆末端的速度 $\upsilon = \omega l = \dfrac{3m}{(3m+M)}\upsilon_0$

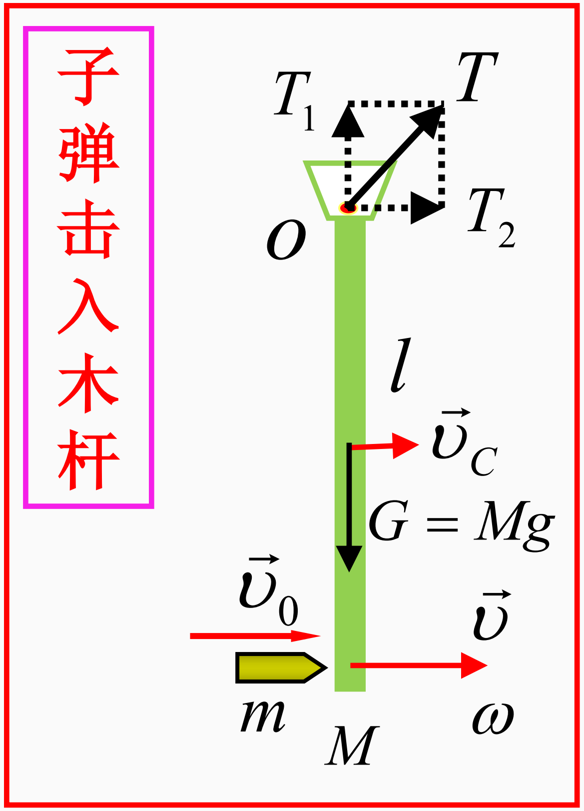
木杆质心的速度 $\upsilon_C = \omega\dfrac{l}{2} = \dfrac{3m}{(3m+M)} \cdot \dfrac{\upsilon_0}{2} = \dfrac{\upsilon}{2}$

(2) 系统的动量不守恒

质点系的总动量等于其质心动量(总质量 M 与质心速度 v_C 的乘积).

刚体(木杆)是特殊的质点系, 故

刚体的动量 $\vec{P}_{刚体}=\sum_i \Delta m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_C$



碰撞前后系统动量的增量为:

$$\Delta P=(mv+Mv_C)-mv_0=(m+\frac{M}{2})v-mv_0$$

$$=\frac{2m+M}{2}\frac{3m}{3m+M}v_0-mv_0=\frac{mM}{(3m+M)}\frac{v_0}{2}>0$$

$$v=2v_C=\frac{3m}{(3m+M)}v_0$$

出乎我们的意料, 碰撞后动量不是减少, 而是增加了! 说明转轴对细杆有水平方向的作用力 T_2, 而且方向向右!

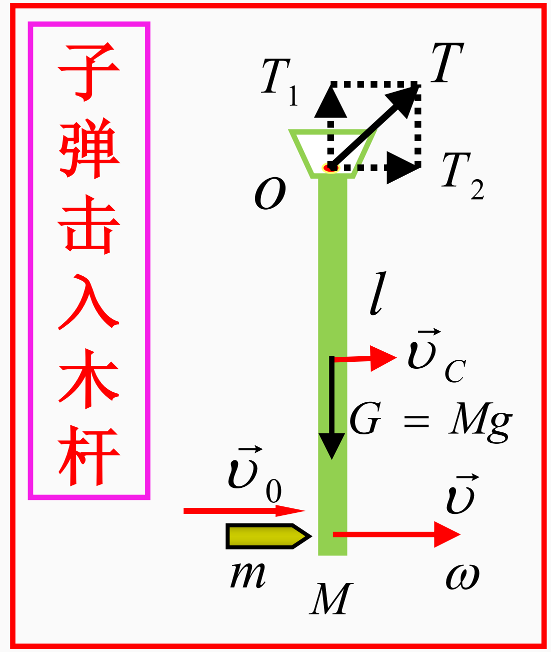
(3) 系统的机械能不守恒

$$\Delta E=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}I_{杆}\omega^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2$$

$$=\frac{1}{2}m[\frac{3m}{(3m+M)}\upsilon_0]^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2[\frac{3m}{(3m+M)}\frac{\upsilon_0}{l}]^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2$$

$$=-\frac{mM}{2(3m+M)}\upsilon_0^2<0$$

机械能有损失！



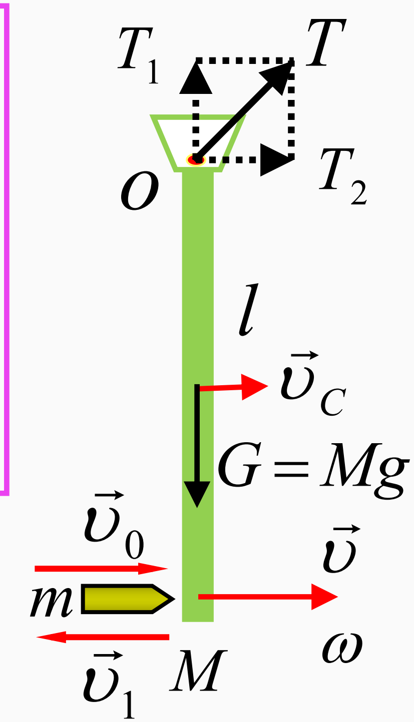
【总结】细绳与细杆的区别

细绳是柔软的, 只能传递沿细绳方向的纵向力, 不能传递与细绳垂直的横向力, 因而, 碰撞时转轴对细绳下端物体(质点)没有水平方向的作用力, 水平方向动量守恒.

细杆是坚硬的, 不仅能传递沿细杆方向的纵向力, 还能传递与细杆垂直的横向力, 因而碰撞时转轴对细杆下端物体(刚体)有水平方向的作用力(且为冲击力), 水平方向动量不守恒.

子弹与木杆发生完全弹性碰撞, 结果如何?

子弹击入木杆



$$I_{杆}=\frac{1}{3}Ml^2$$

(1) 系统对转轴 *O* 的角动量守恒

$$m\upsilon_0 l=-m\upsilon_1 l+I_{杆}\omega\ldots(1)$$

【说明】在 υ_1 方向未知时, 可以先假定它沿规定的正方向, 如果求出为负值, 就表示与规定的正方向相反.

(2) 系统的机械能守恒

$$\tfrac{1}{2}m\upsilon_0^{\,2}=\tfrac{1}{2}m\upsilon_1^{\,2}+\tfrac{1}{2}I_{杆}\omega^2\ldots(2)$$

为了消除平方项, 将二式 υ_1 项左移, 然后相除, 得

$$\upsilon_0-\upsilon_1=\omega l=\upsilon\ldots(3)$$ (细杆在碰撞点的速度)

联立(1)(3)式, 求得 (与教材例3-7结果相同)

$$\omega=\frac{6m}{3m+M}\frac{\upsilon_0}{l},\qquad \upsilon_1=-\frac{3m-M}{3m+M}\upsilon_0$$

(3) 系统的动量不守恒 (ΔP 是完全非弹性碰撞的 2 倍)

$$\Delta P_{弹}=(-m\upsilon_1+M\upsilon_C)-m\upsilon_0=-m\upsilon_1+\frac{M}{2}\upsilon-m\upsilon_0=\frac{mM}{3m+M}\upsilon_0=2\Delta P_{非弹}>0$$

【总结】与质点碰撞类似，小球与刚体间的碰撞也可分三类：

- 完全弹性碰撞(Elastic Collision):

特点：碰撞后刚体与小球或刚体与刚体分开，形状完全恢复，系统的形变能恢复成机械能. 碰撞过程中角动量守恒，机械能守恒，动量不守恒.

- 完全非弹性碰撞(Completely/Perfectly Inelastic Collision):

特点：碰撞后刚体与小球或刚体与刚体合为一体，系统的形变能不能恢复成机械能. 碰撞过程中角动量守恒，机械能不守恒，动量不守恒.

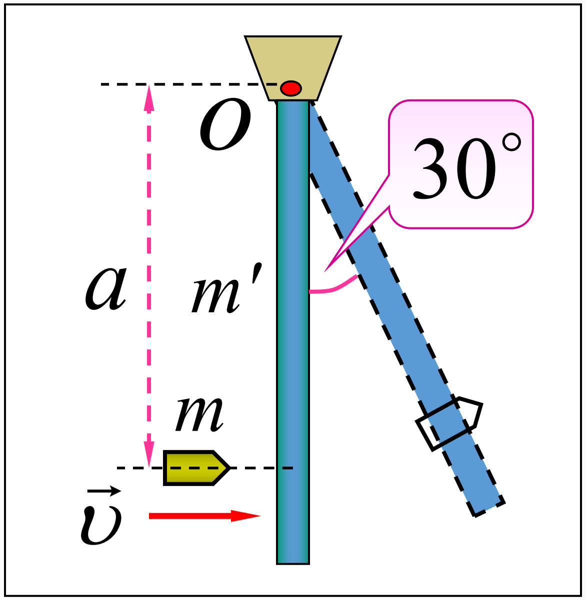
- 非完全弹性碰撞：

特点：碰撞后刚体与小球或刚体与刚体分开，但形变不能完全消失，系统的形变能不能完全恢复成机械能. 碰撞过程中角动量守恒，机械能不守恒，动量不守恒.

【注意】小球与刚体碰撞过程中，即使是完全弹性碰撞，动量也不守恒.

例3、一长为 l，质量为 m' 的竿可绕支点 O 自由转动．一质量为 m、速率为 v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为 30°。问子弹的初速率为多少？

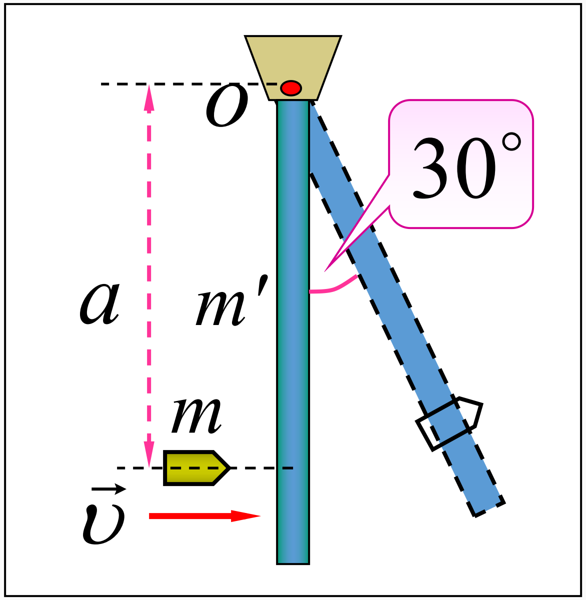
解：把子弹和竿看作一个系统，子弹射入竿的过程系统角动量守恒



$$m v a = \left(\frac{1}{3} m' l^2 + m a^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{3 m v a}{m' l^2 + 3 m a^2}$$

$$\omega = \frac{3m\upsilon a}{m'l^2 + 3ma^2}$$



射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒．

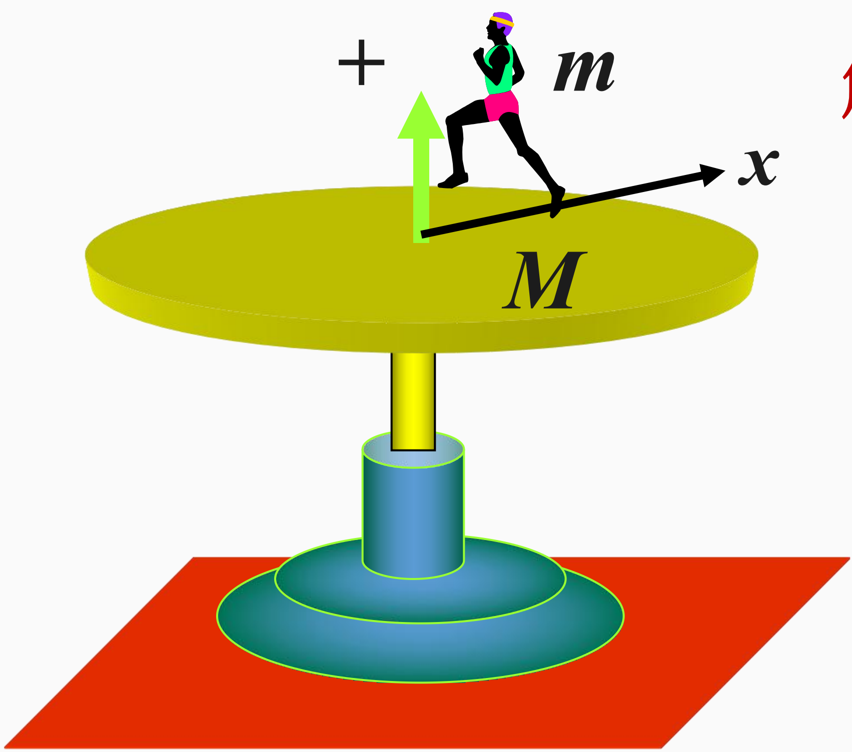
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2)\omega^2$$

$$= m'g\frac{l}{2}(1-\cos 30^\circ) + mga(1-\cos 30^\circ)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(m'l+2ma)(1-\cos 30^\circ)}{m'l^2+3ma^2}} = \sqrt{\frac{3g(2-\sqrt{3})(m'l+2ma)}{2(m'l^2+3ma^2)}}$$

$$\upsilon = \frac{m'l^2+3ma^2}{3ma}\omega = \frac{\sqrt{g(2-\sqrt{3})(m'l+2ma)(m'l^2+3ma^2)}}{\sqrt{6}ma}$$

例4、 质量为 M、半径为 R 的转台，可绕通过中心的竖直轴转动。质量为 m 的人站在边沿上，人和转台原来都静止。如果人沿台边缘奔跑一周，求对地而言，人和转台各转动了多少角度？

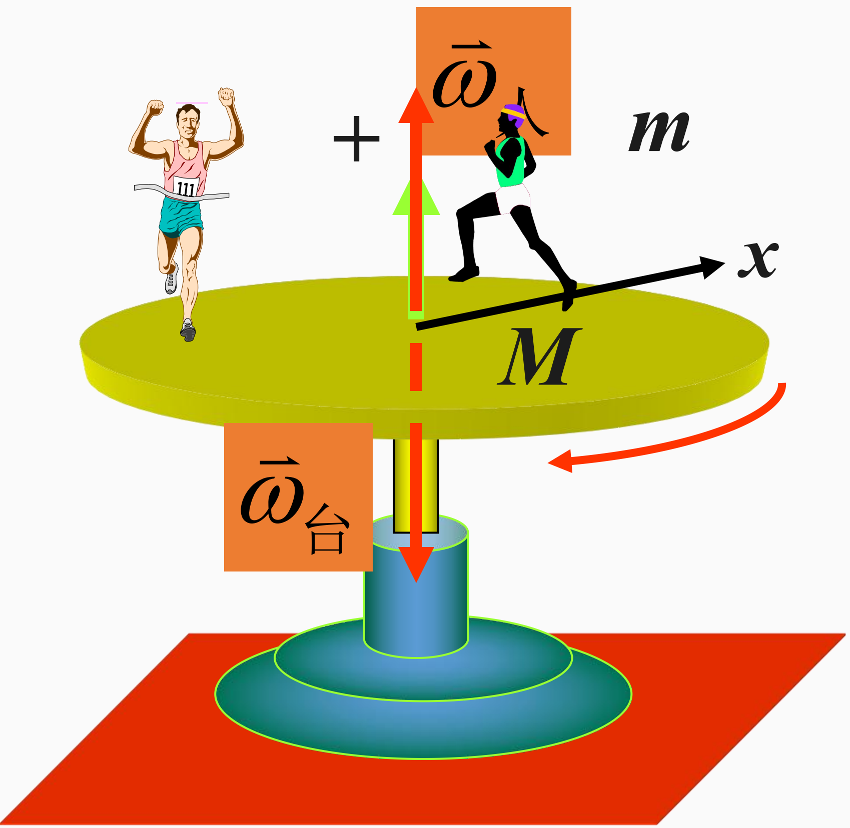


解： 以M，m为研究对象

$$\because \sum \vec{M}_{合外} = 0$$

故角动量守恒

以地面为参照系，建立轴的正方向如图



若人和转台的角速度分别为

$$\omega_{人}, \quad \omega_{台}$$

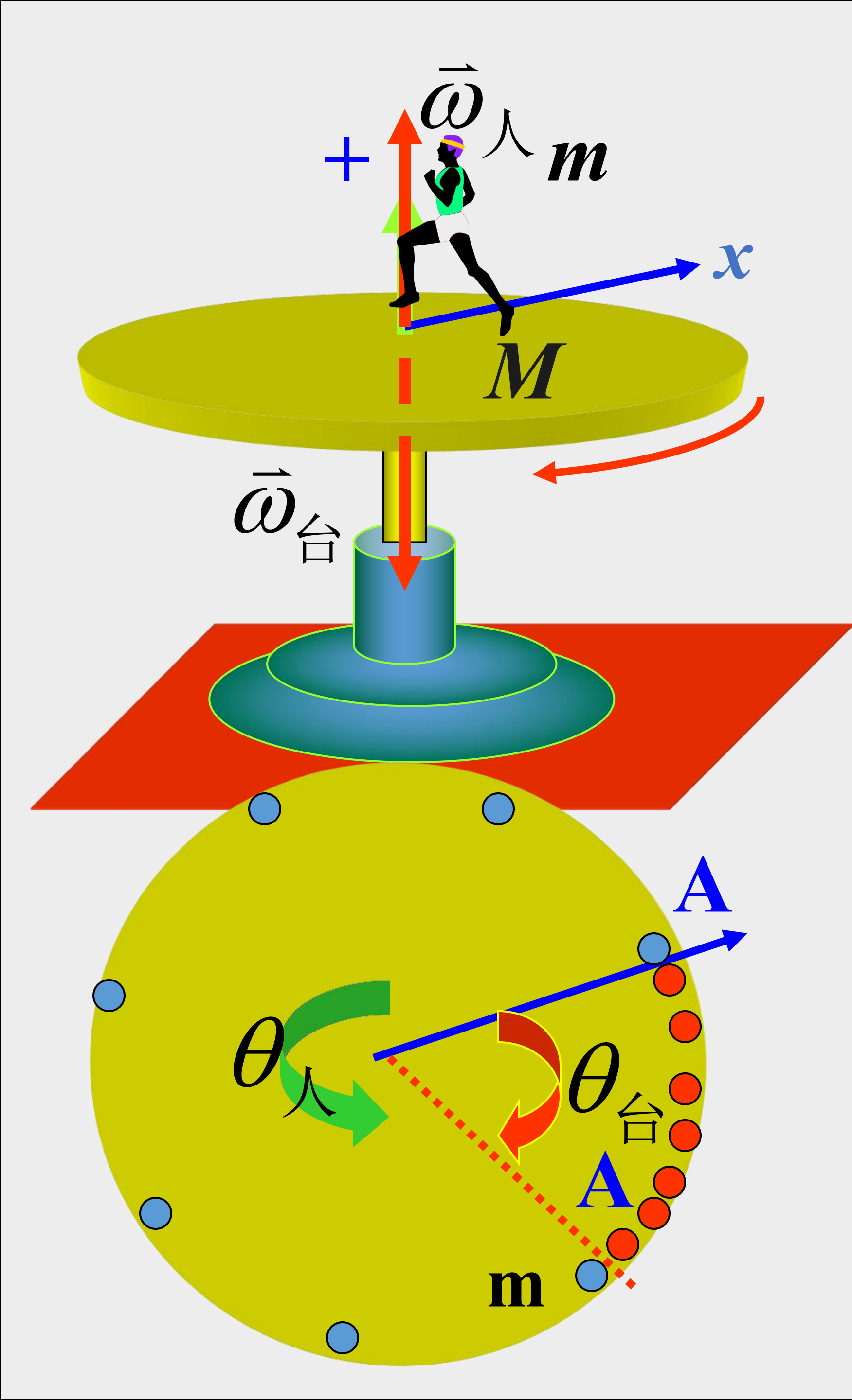
因人和台原来都静止, 由角动量守恒，得：

$$I_{人}\omega_{人} + I_{台}\omega_{台} = 0 \cdots (1)$$

$$mR^2\omega_{人} + \frac{1}{2}MR^2\omega_{台} = 0$$

$$\omega_{人} = -\frac{M}{2m}\omega_{台} \cdots (2)$$

（2）式×dt积分：$\int_0^t \omega_{人}\, dt = -\frac{M}{2m}\int_0^t \omega_{台} dt$



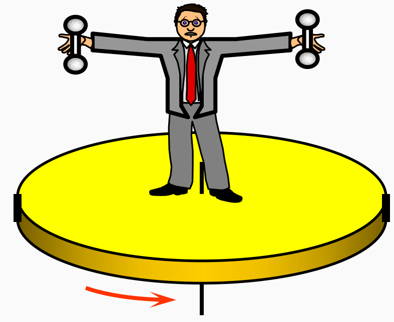
$$\int_0^t \omega_人 \, dt = -\frac{M}{2m}\int_0^t \omega_台 dt$$

$$\theta_人 = -\frac{M}{2m}\theta_台 \cdots (3)$$

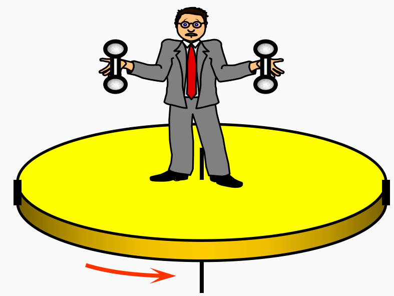
$$\theta_人 + |\theta_台| = \theta_人 - \theta_台 = 2\pi \cdots (4)$$

$$\begin{cases} \theta_台 = -\dfrac{4\pi m}{M+2m} \\ \theta_人 = \dfrac{2\pi M}{M+2m} \end{cases}$$

例5、人与转盘的转动惯量 $I_0=60\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, 伸臂时臂长为 1m，收臂时臂长为 0.2m。人站在摩擦可不计的自由转动的圆盘中心上，每只手抓有质量 m=5kg的哑铃。伸臂时转动角速度 $\omega_1=3$ rad/s, 求收臂时的角速度 ω_2 .



ω_1



ω_2

解：整个过程合外力矩为 0，角动量守恒

$$\boxed{I_1\omega_1=I_2\omega_2}$$

$$I_1=I_0+2ml_1^{\ 2}=60+2\times5\times1^2=70\,(\mathrm{kg\cdot m^2})$$

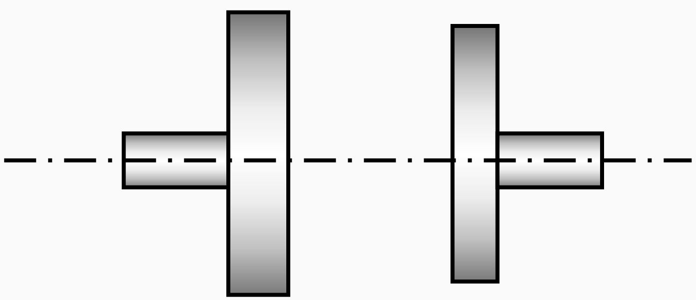
$$I_2=I_0+2ml_2^{\ 2}=60+2\times5\times0.2^2=60.4\,(\mathrm{kg\cdot m^2})$$

$$\omega_2=\frac{I_1\omega_1}{I_2}=\frac{3\times70}{60.4}=3.5\,(\mathrm{rad/s})$$

由于转动惯量减小，故角速度增加。

例6、两个共轴飞轮转动惯量分别为I_1、I_2，角速度分别为 ω_1、ω_2，求两飞轮啮 (niè) 合后共同的角速度 ω 及啮合过程的机械能损失。

解：两飞轮通过摩擦达到共同速度,合外力矩为0，系统的角动量守恒。



$$\boxed{L = L_0 = C}$$

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$

共同角速度 $$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

由于摩擦造成的啮合过程机械能损失：

$$\Delta E = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 - (\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2) = -\frac{I_1 I_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)} < 0$$