理科专业核心基础课(11223202)

《代 数 与 几 何》 11

主讲人: 吕新民

第十一章 解析几何

- 向量代数
- 平面与直线
- 距离
- 柱面、锥面和旋转曲面
- 二次曲面

第1节 向量代数

• 定义与线性运算

向量是一个既有大小也有方向的量. 通常用字母$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示. 在几何上，向量可以用一条有方向(箭头)的线段来表示. 该线段的长度称为向量的模，用$|\alpha|$表示. 模为零的向量称为零向量，记为$\mathbf{0}$. 模为1的向量称为单位向量.

数学上研究的向量是自由向量，即如果一个向量能够由另一个向量经平行移动而得到，则认为这两个向量相等.

设α是一个向量，与α的模相等但方向相反的向量称为α的负向量，记为$-\alpha$.

向量的线性运算包括：加法与数乘.

加法 设α,β是两个向量，作有向线段$\overrightarrow{AB}=\alpha$，$\overrightarrow{AC}=\beta$，则以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$为邻边的平行四边形记为$ABCD$，把$\overrightarrow{AD}$表示的向量$\gamma$称为向量$\alpha$与$\beta$的和，记作$\gamma=\alpha+\beta$.

向量的加法符合平行四边形法则或三角形法则.依据定义，向量的加法满足以下规律：

(1) 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) 结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) 对任意向量α，$0+\alpha=\alpha$；

(4) 对任意向量α，$\alpha+(-\alpha)=0$.

数乘 实数k与向量α的数乘，记作$k\alpha$，是这样一个向量，其大小由$|k\alpha|=|k||\alpha|$决定，当$k>0$时，$k\alpha$的方向与α的方向一致；当$k=0$时，$k\alpha=0$；当$k<0$时，$k\alpha$的方向与α的方向相反.

依据定义，向量的数乘满足以下规律：

(1) $1\alpha = \alpha$;

(2) $(k\ell)\alpha = k(\ell\alpha)$，其中$k, \ell \in \mathbb{R}$;

(3) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$，其中$k \in \mathbb{R}$;

(4) $(k + \ell)\alpha = k\alpha + \ell\alpha$，其中$k, \ell \in \mathbb{R}$.

因此，几何空间中的向量关于上述定义的加法与数乘运算作成一个线性空间，记作$\mathbb{R}^3$.

设$0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^3$，因为$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$是与向量$\alpha$方向相同的单位向量，称$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$是向量$\alpha$的单位化.

在空间$\mathbb{R}^3$中，任何不共面的三个向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$可以构成$\mathbb{R}^3$的一个基底. 有了基底以后，空间中任何一个向量$\alpha$都可通过基底$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$唯一线性表示，即

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3,$$

称(x_1, x_2, x_3)为向量α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的坐标. 这样一来，$\mathbb{R}^3$中的任何一个向量$\alpha$与一个有序三数组$(x_1, x_2, x_3)$之间建立了一一对应的关系. 为方便起见，记$\alpha = (x_1, x_2, x_3)$.

有了坐标后，向量的运算变得简单.

设$\alpha=(x_1,y_1,z_1),\beta=(x_2,y_2,z_2)$，则

(1) 加法：$\alpha+\beta=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

(2) 数乘：$k\alpha=(kx_1,ky_1,kz_1)$.

- **数量积**

定义 设α,β是两个向量，它们的数量积记为$\alpha\cdot\beta$或$\alpha\beta$，定义

$$\alpha\cdot\beta=|\alpha||\beta|\cos\theta,$$

其中θ为向量α与向量β的夹角.

关于数量积，应注意以下几点:

(1) 若α, β中有一个是零向量，则$\alpha \cdot \beta = 0$. 若$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$，则$\cos\theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}$.

(2) 如果α, β中有一个单位向量，如β是一个单位向量，则$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cos\theta$，此时$\alpha \cdot \beta$表示向量$\alpha$在向量$\beta$上的投影$\mathrm{Prj}_{\beta}\alpha$. 一般地，$\mathrm{Prj}_{\beta}\alpha = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\beta|}$. 利用这一性质，可以方便求距离.

(3) 两个向量α与β垂直$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 0$

由定义可以验证向量的数量积满足如下运算规律：

(1) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$;

(3) $(k\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(k\beta)=k(\alpha\cdot\beta)$;

(4) $\alpha^2=\alpha\cdot\alpha\geq 0$，且$\alpha^2=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

在空间中，取定坐标系$\{O:\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$，则对于任意$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^3$，令

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3，\ \beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3，$$

则

$$\alpha\cdot\beta=(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)(y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1y_1\varepsilon_1^2 + x_1y_1\varepsilon_1\varepsilon_2 + x_1y_3\varepsilon_1\varepsilon_3 \\
&\quad + x_2y_1\varepsilon_2\varepsilon_1 + x_2y_2\varepsilon_2^2 + x_2y_3\varepsilon_2\varepsilon_3 \\
&\quad + x_3y_1\varepsilon_3\varepsilon_1 + x_3y_2\varepsilon_3\varepsilon_2 + x_3y_3\varepsilon_2^2
\end{aligned}
$$

记$A = (a_{ij})$，其中$a_{ij} = \varepsilon_i\varepsilon_j$，又令$X = (x_1, x_2, x_3)', Y = (y_1, y_2, y_3)'$，则

$$\alpha \cdot \beta = X'AY.$$

若$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是标准正交基，则$A = E$. 此时，

$$\alpha \cdot \beta = X'Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

这即是通常意义下数量积的形式.

【例 1】已知α,β,γ 均为单位向量，且满足$\alpha+\beta+\gamma=0$，求$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha$.

解： 在等式$\alpha+\beta+\gamma=0$两端分别用α,β,γ作内积，得

$$\begin{cases}\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma=-1\\ \alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma=-1\\ \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma=-1\end{cases}，\text{解之得}\begin{cases}\alpha\cdot\beta=-\frac{1}{2}\\ \beta\cdot\gamma=-\frac{1}{2}\\ \alpha\cdot\gamma=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

故$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha=-\frac{3}{2}$.

- **向量积**

定义 设α, β是两个向量，它们的向量积是一个向量，记为$\alpha \times \beta$，定义

(1) $\alpha \times \beta$的方向既与向量α垂直，也与向量β垂直，且$\alpha, \beta, \alpha \times \beta$符合右手系；

(2) $|\alpha \times \beta| = |\alpha||\beta| \sin \theta$，

其中θ为向量α与向量β的夹角.

关于向量积，应注意以下几点：

(1) 若α, β中有一个是零向量，则$\alpha \times \beta = 0$. 若$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$，则$\sin \theta = \frac{|\alpha \times \beta|}{|\alpha||\beta|}$.

(2) 两个向量α,β的向量积的模$|\alpha\times\beta|$在几何上表示以α,β为邻边的平行四边形的面积或以α,β为边的三角形面积的2倍.

(3) 两个向量α与β平行$\Leftrightarrow \alpha\times\beta=0$

由定义可以验证向量的向量积满足如下运算规律:

(1) $\alpha\times\beta=-\beta\times\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma$ (待证);

(3) $(k\alpha)\times\beta=\alpha\times(k\beta)=k(\alpha\times\beta)$.

在空间中，取定坐标系$\{O:\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}$ (即空间直角坐标系)，则对于任意$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^3$，令

$$\alpha=x_1\overrightarrow{i}+x_2\overrightarrow{j}+x_3\overrightarrow{k},\quad \beta=y_1\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+y_3\overrightarrow{k},$$

则

$$\begin{aligned}\alpha\times\beta&=(x_1\overrightarrow{i}+x_2\overrightarrow{j}+x_3\overrightarrow{k})\times(y_1\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+y_3\overrightarrow{k})\\&=x_2y_3\overrightarrow{i}+x_3y_1\overrightarrow{j}+x_1y_2\overrightarrow{k}\\&\qquad-x_3y_2\overrightarrow{i}-x_1y_3\overrightarrow{j}-x_2y_1\overrightarrow{k}\\&=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

【例2】设向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$满足$|\overrightarrow{a}| = 1$，$|\overrightarrow{b}| = 2$，$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. 若以$\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$及$\overrightarrow{B} = \lambda\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$为邻边的平行四边形的面积为6，求$\lambda$.

解： 由向量积的几何意义知，

$$6 = |\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = |(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\lambda\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})|$$

$$= |2-\lambda||\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = 2|2-\lambda|,$$

故$\lambda = -1$或5.

- **混合积**

定义 设α, β, γ是三个向量，它们的混合积记为

(α,β,γ)，**定义**

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma.$$

关于混合积，应注意以下几点:

(1) 若α,β,γ中有一个是零向量，则$(\alpha,\beta,\gamma)=0.$

(2) 三个向量α,β,γ的混合积的绝对值在几何上等于以α,β,γ为棱的平行六面体的体积或以α,β,γ为棱的四面体体积的6倍.

(3) 三个向量α,β,γ共面$\Leftrightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=0.$

证明：”$\Rightarrow$” 设α,β,γ共面，若α与β共线，则$\alpha\times$

$\beta = 0$，从而$(\alpha,\beta,\gamma) = 0$；若$\alpha$与$\beta$不共线，则$\alpha \times \beta$垂直于$\alpha,\beta$所在的平面，因而$\alpha\times\beta \perp \gamma$，于是$(\alpha\times\beta)\cdot\gamma = 0$，故$(\alpha,\beta,\gamma) = 0$.

"$\Leftarrow$" 设$(\alpha,\beta,\gamma) = 0$. 若$\alpha \times \beta = 0$，则$\alpha$与$\beta$共线，故$\alpha,\beta,\gamma$共面；若$\alpha \times \beta \neq 0$，有$\alpha \times \beta \perp \gamma$，又因为$\alpha \times \beta$垂直于$\alpha$及$\beta$，从而$\alpha,\beta,\gamma$共面.

由定义可以验证向量的混合积满足如下运算规律：

(1) $(\alpha,\beta,\gamma) = (\beta,\gamma,\alpha) = (\gamma,\alpha,\beta)$;

(2) $(\alpha,\beta,\gamma) = -(\beta,\alpha,\gamma)$;

(3) $(k\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,k\beta,\gamma)=(\alpha,\beta,k\gamma)=k(\alpha,\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha_1+\alpha_2,\beta,\gamma)=(\alpha_1,\beta,\gamma)+(\alpha_2,\beta,\gamma)$.

在空间中，取定坐标系$\{O:\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}$(即空间直角坐标系)，则对于任意$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^3$，令

$$
\begin{aligned}
\alpha&=x_1\overrightarrow{i}+x_2\overrightarrow{j}+x_3\overrightarrow{k},\\
\beta&=y_1\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+y_3\overrightarrow{k},\\
\gamma&=z_1\overrightarrow{i}+z_2\overrightarrow{j}+z_3\overrightarrow{k},
\end{aligned}
$$

则

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma$$

$$=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}\cdot(z_1\overrightarrow{i}+z_2\overrightarrow{j}+z_3\overrightarrow{k})$$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}.$$

【例3】 已知空间中的四点

$$A(1,1,1),B(4,4,4),C(3,5,5),D(2,4,7),$$

求四面体$ABCD$的体积.

解：由混合积的几何意义知四面体$ABCD$的体积V等于以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体体积的$\frac{1}{6}$，因为$\overrightarrow{AB}=(3,3,3),\overrightarrow{AC}=(2,4,4),\overrightarrow{AD}=(1,3,6)$，所以

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}3&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{vmatrix}=18$$

故所求四面体的体积为$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\times 18=3.$

【例4】 证明：$\alpha \times (\beta+\gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$.

证明：令δ是任何一个向量，由性质有

$$\begin{aligned}\delta \cdot [\alpha \times (\beta+\gamma)] &= (\delta \times \alpha) \cdot (\beta+\gamma) \\ &= (\delta \times \alpha) \cdot \beta + (\delta \times \alpha) \cdot \gamma \\ &= \delta \cdot (\alpha \times \beta) + \delta \cdot (\alpha \times \gamma).\end{aligned}$$

移项后整理可得

$$\delta \cdot [\alpha \times (\beta+\gamma) - \alpha \times \beta - \alpha \times \gamma] = 0.$$

因δ任意，所以$\alpha \times (\beta+\gamma) - \alpha \times \beta - \alpha \times \gamma = 0$，
即$\alpha \times (\beta+\gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$.

第2节 平面与直线

- **平面**

定义 设与平面π垂直的向量$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$称为平面$\pi$的法向量.

已知平面π过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，且$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$是$\pi$的法向量. 可以唯一确立$\pi$的方程. 其方法如下：任取$P_0 \neq P(x, y, z) \in \pi$，则$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. 因为$\overrightarrow{n} \perp \pi$，所以$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$，从而$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$，即

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

显然，平面π上的任何点(包括P_0)的坐标均满足上述方程．反过来，满足上述方程的点一定在平面π上．上述方程即为所求平面π的方程．通常，称这个方程为平面π的点法式方程.

除了点法式方程外，还有如下两种形式：

(1) 一般方程：$Ax + By + Cz + D = 0$，这里向量$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$为平面$\pi$的法向量，而$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

(2) 三点式方程：若$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$是平面$\pi$上不共线的三点，则过这三点的平面$\pi$的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

两个平面的位置关系: 已知两个平面的方程分别为

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

从几何上看，它们可能相交，平行或重合. 借助于各自的法向量易知:

(1) π_1与π_2相交$\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$;

(2) π_1与π_2平行$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;

(3) π_1与π_2重合$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

- **直线**

定义 与直线ℓ平行的向量$\vec{v} = (m, n, p)$称为直线ℓ的方向向量

已知直线ℓ过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，$\vec{v} = (m, , n, p)$是ℓ的方向向量，可以唯一确立ℓ的方程. 其方法如下：任取$P_0 \neq P(x, y, z) \in \ell$，则$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. 因为$\vec{v} \parallel \ell$，所以$\vec{v} \parallel \overrightarrow{P_0P}$，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

显然，直线ℓ上的任何点(包括P_0)的坐标均满足上述方程. 反过来，满足上述方程的点一定在直线ℓ上. 上述方程即为所求直线ℓ的方程. 通常，称这个方程为直线ℓ的点向式方程.

除了点向式方程外，还有如下三种形式：

(1) 参数方程：若$\overrightarrow{v}=(m,n,p)$是直线$\ell$的方向向量，$P_0(x_0,y_0,z_0)\in\ell$，则直线$\ell$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_0+tn \\ z=z_0+tp \end{cases}.$$

(2) 两点式方程：若$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$是直线$\ell$上的两个不同的点，则直线$\ell$的方程为$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

(3) 一般方程：一条直线ℓ可以看作是两个不平行平面的交线，即

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

该方程称为ℓ的一般方程.

两条直线的位置关系: 已知两条直线方程分别为

$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1};$$

$$\ell_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

记$\vec{v}_1, \vec{v}_2$分别为直线ℓ_1与直线ℓ_2的方向向量，$P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$，则：

(1) π_1与π_2异面$\Leftrightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}) \neq 0$;

(2) π_1与π_2共面$\Leftrightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}) = 0$. 除此之外，

(i) π_1与π_2相交$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$;

(ii) π_1与π_2垂直$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$;

(iii) π_1与π_2平行$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \nparallel \overrightarrow{P_1P_2}$;

(v) π_1与π_2重合$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$.

直线与平面的位置关系：已知直线与平面的方程分别为

$$\ell : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p};$$
$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

则

(1) ℓ与π平行$\Leftrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$且$P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$;

(2) ℓ在π上$\Leftrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$且$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

(3) ℓ与π垂直$\Leftrightarrow \overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{n}$;

(4) ℓ与π相交$\Leftrightarrow$把直线方程改写为参数方程代入平面方程解唯一.

【例5】 求过直线$\ell_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$，且与直线$\ell_2: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}$平行的平面的方程.

解： 已知直线ℓ_1与ℓ_2的方向向量分别为$\overrightarrow{v}_1 = (2,-1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0,1,-1)$，由题设，所求平面的法向量可取为

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,2).$$

又点$(0,0,2)$在所求平面上，故所求平面的方程为$x - 2y - 2z + 4 = 0$.

【例6】 求过点$M(-1,2,3)$，垂直于直线$\ell:\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$，且平行于平面$\pi:7x+8y+9z+10=0$的直线方程.

解： 已知直线ℓ的方向向量为$\overrightarrow{v}_1=(4,5,6)$，平面$\pi$的法向量为$\overrightarrow{n}=(7,8,9)$. 由题设，所求直线的方向向量可取为

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}_1\times\overrightarrow{n}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=(-3,6,-3).$$

故所求直线的的方程为$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-3}$.

第3节 距离

• 点到平面的距离

已知平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$及平面外一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，求点P_0到平面π的距离.

其解法如下：平面π的法向量为$\vec{n}=(A,B,C)$. 从点P_0作平面π的垂线，令Q为垂足. 取定$P_1(x_1,y_1,z_1)\in\pi$，则点P_0到平面π的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- **点到直线的距离**

已知直线$\ell:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$及直线外一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，求点$P_0$到直线$\ell$的距离.

其解法如下：直线ℓ的方向向量为$\overrightarrow{v}=(m,n,p)$. 取定$P_1(x_1,y_1,z_1)\in\ell$，则点$P_0$到平面$\pi$的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}.$$

- **异面直线的距离**

已知直线$\ell_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$与直线$\ell_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}$

$=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$是两条异面直线，求它们的距离.

其解法如下：由定义两条异面直线的距离即是它们公垂线的距离. 因为公垂线既垂直于ℓ_1的方向向量$\overrightarrow{v_1}=(m_1,n_1,p_1)$，也垂直于直线$\ell_2$的方向向量$\overrightarrow{v_2}=(m_2,n_2,p_2)$，因此公垂线的方向可以取作$\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$. 故所求两异面直线的距离即是$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$在公垂线方向的投影，即

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}|}|=\frac{1}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}|}|(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{P_1P_2})|.$$

【例 7】已知两条直线的方程分别为

$$\ell_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda} \text{与} \ell_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$$

(1) 若这两条直线相交，求λ的值.

(2) 若$\lambda = 2$，问这两条直线是否异面? 若异面，求这两条异面直线的距离.

解：(1) 直线ℓ_1过点$A(1,-1,1)$且方向向量为$\overrightarrow{v_1} = (1,2,\lambda)$，$\ell_2$过点$B(-1,-1,0)$且方向向量$\overrightarrow{v_2} = (1,1,1)$，$\overrightarrow{AB} = (-2,0,-1)$. 若两直线相交，则$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}$共面，即它们的混合积为零，即

$$0=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2\lambda-3，\text{从而}\lambda=\frac{3}{2}.$$

(2) 当$\lambda=2$时，$(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{AB})=1$. 故两直线此时异面. 为计算距离，先计算

$$\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},$$

故这两直线的距离为$\frac{1}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}|}|(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{AB})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

第4节 柱面、锥面和旋转曲面

设空间中有曲面S，如果S上的每一个点的坐标(x, y, z)都满足方程$F(x, y, z) = 0$；反之，任何满足方程的数组(x, y, z)一定是曲面S上的点，那么方程就称为曲面S的方程，而曲面S就称为方程对应的曲面.

- **柱面**

定义 空间中的一条直线ℓ沿着一条曲线C平行移动时所产生的曲面称为柱面，其中直线ℓ称为母线，而曲线C称为准线.

对于一个柱面而言，它的准线是不唯一，但母线的方向是唯一的.

设柱面的准线C方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

而母线的方向为$\overrightarrow{v}=(\ell,m,n)$，以下我们来求柱面的方程.

点$M(x,y,z)$在所求柱面上当且仅当M在某一条母线上，即准线C上有一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，使得M在过点M_0且方向为$\overrightarrow{v}$的直线上. 因此有

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0 \\ x=x_0+\ell u \\ y=y_0+mu \\ z=z_0+nu \end{cases},$$

消去x_0,y_0,z_0，得

$$\begin{cases} F_1(x-\ell u,y-mu,z-nu)=0 \\ F_2(x-\ell u,y-mu,z-nu)=0 \end{cases},$$

再消去参数u，得到关于x,y,z的方程，这即是所求的柱面的方程.

若一个柱面的母线平行于z轴，则它的方程中不含z；反之，一个三元方程如果不含z，则它一定表示一个母线平行于z轴的柱面.

常见的柱面方程：

1. $x^2+y^2=1$：母线平行于z轴的圆柱面；

2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$：母线平行于$z$轴的椭圆柱面；

3. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$：母线平行于$z$轴的双曲柱面；

4. $x^2=2py$：母线平行于z轴的抛物柱面.

【例8】 求母线平行于直线$x = y = z$，准线为$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解： 设$M(x,y,z)$是所求柱面上的任一点，该点所在的母线与Γ相交的点记为$M_1(a,b,c)$. 因为$\overrightarrow{MM_1} \parallel \overrightarrow{v} = (1,1,1)$，于是

$$\frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{1} = \frac{z-c}{1}.$$

又点M_1在Γ上，所以有

$$a^2+b^2+c^2=1,\ \ a+b+c=0.$$

消去a, b, c，得

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{3}{2},$$

即是所求柱面的方程.

- **锥面**

定义 空间中过一定点M_0且与定曲线C相交的动直线ℓ所产生的曲面称为锥面，其中定点M_0称为锥面的顶点，定曲线C称为准线，动直线ℓ称为母线.

设锥面的顶点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，准线C方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

以下我们来求锥面的方程.

点$M(x,y,z)$在所求锥面上当且仅当M在某一条母线上，即准线C上有一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，使得M_1在直线M_0M上. 因此有

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0 \\ x_1=x_0+(x-x_0)u\ , \\ y_1=y_0+(y-y_0)u \\ z_1=z_0+(z-z_0)u \end{cases}$$

消去x_1,y_1,z_1，得

$$\begin{cases} F_1(x_0-(x-x_0)u, y_0-(y-y_0)u, z_0-(z-z_0)u)=0 \\ F_2(x_0-(x-x_0)u, y_0-(y-y_0)u, z_0-(z-z_0)u)=0 \end{cases},$$

再消去参数u，得到关于x,y,z的方程，这即是所求的锥面的方程.

常见的锥面方程: 如果锥面有一对称轴，它的每条母线与对称轴所夹的锐角都相等，则称此锥面为圆锥面，母线与对称轴所夹的锐角称为圆锥面的半顶角. 下面我们将建立圆锥面的方程.

选取圆锥面的顶点O为坐标原点，圆锥面的对称轴为z轴建立右手直角坐标系. 点$M(x,y,z)$在圆锥

面上当且仅当$\overrightarrow{OM}$与z轴的坐标向量$e_3=(0,0,1)$的夹角为半顶角θ，于是得

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|}，\text{即}\tan^2\theta z^2=x^2+y^2,$$

这即是所求圆锥面的方程.

【例9】 求以$M_0(1,1,1)$为顶点，以曲线C : $\begin{cases} y^2=4x \\ z=0 \end{cases}$为准线的锥面方程.

解： 设$M(x,y,z)$是所求锥面上任何点，母线M_0M与C相交于点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，则

$$\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ z_1 = 0 \\ x_1 = 1 + (x-1)t \\ y_1 = 1 + (y-1)t \\ z_1 = 1 + (z-1)t \end{cases},$$

消去x_1, y_1, z_1, t，得到关于x, y, z的方程

$$(z-y)^2 = 4(z-x)(z-1),$$

这即是所求锥面的方程.

- **旋转曲面**

定义 一条曲线C绕一条直线ℓ旋转所产生的曲面

称为旋转面，其中曲线C称为母线，而直线ℓ称为旋转轴，母线上的点旋转所得的圆称为纬圆，过ℓ的半平面与旋转面的交线称为经线.

设轴ℓ过点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，方向向量$\vec{v} = (\ell, m, n)$，母线C的方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

以下我们来求以ℓ为轴，C为母线的旋转面S的方程.

点$M(x, y, z)$在S上当且仅当M在过母线C上某一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的纬圆上，因而M_0与M到轴ℓ的距

离相等(或到轴上一点M_1的距离相等)，且$\overrightarrow{M_0M}$与ℓ垂直. 于是

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ F_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ |\overrightarrow{MM_1}| = |\overrightarrow{M_0M_1}| \\ \ell(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0 \end{cases},$$

消去x_0, y_0, z_0，得到关于x, y, z的方程，这即是所求的S的方程.

常见的旋转曲面是以坐标轴为旋转轴的曲面.

【例 10】 求以坐标轴z轴为旋转轴，以曲线C :

访问主页
标题页
目录页
◀◀ ▶▶
◀ ▶

返回
全屏显示
关闭
退出

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$ 为母线的旋转面的方程.

解： 设$M(x,y,z)$是所求旋转面上任何点，则M在过母线C上某一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的圆上，则

$$\begin{cases} f(y_0,z_0)=0 \\ x_0=0 \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ z-z_0=0 \end{cases},$$

消去x_0,y_0,z_0，得到关于x,y,z的方程

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这即是所求旋转面的方程.

第5节 二次曲面

- **一般形式**

二次曲面的一般形式为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy$$
$$+2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,3$. 又令

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad B=(b_1,b_2,b_3),$$

则上述二次曲面用矩阵的形式可表为

$$X'AX+BX+c=0.$$

- **正交标准化**

因为A是实对称矩阵，所以存在正交变换$X=QY$，使得

$$Q'AQ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

于是，

$$Y'\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)Y + BQY + c = 0.$$

令$BQ = (d_1, d_2, d_3)$，上式即为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + d_1 x_1 + d_2 y_1 + d_3 z_1 + c = 0.$$

再作平移变换，就能将方程变为标准形了.

- **二次曲面的分类**

一个二次曲面经过正交变换后可以化为如下形式之一：

(1) 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

(2) 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

(3) 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$

(4) 椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z.$

(5) 双曲抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z.$

(6) 椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

(7) 双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

(8) 抛物柱面： $x^2 = 2py$.

(9) 直线： $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.

(10) 平面： $x^2 = 0$

【例 11】将下列二次曲面方程

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz - 2x + 2\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}z + 6 = 0.$$

化成标准形.

解：令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

及$B=(-2,2\sqrt{2},-6\sqrt{2})$，则上述二次曲面为

$$X^{'}AX+BX+5=0.$$

A的特征值及相应的特征向量为

$$\lambda_1=0,\ \ \xi_1=(0,1,1)^{'}$$

$$\lambda_2=1,\ \ \xi_2=(1,0,0)^{'}$$

$$\lambda_3=4,\ \ \xi_3=(0,1,-1)^{'}$$

于是，可得正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

从而有

$$Q'AQ = \mathrm{diag}(1,4,0).$$

作正交线性替换$X = QY$，其中$Y = (x_1, y_1, z_1)$，则

$$Y'Q'AQY + BQY + 5 = 0.$$

即

$$x_1^2 + 4y_1^2 - 2x_1 + 8y_1 - 4z_1 + 5 = 0.$$

经配方后可得

$$(x_1-1)^2 + 4(y_1+1)^2 = 4z_1.$$

再作平移变换，

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x_2 \\ y_1 + 1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases},$$

可得

$$x_2^2 + 4y_2^2 = 4z_2.$$

这是一个椭圆抛物面.

【例 12】已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$$

的秩为2.

(1) 求c的值及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出$f(x_1, x_2, x_3) = 1$表示何种曲面.

解：(1) f的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}.$$

因为$\mathrm{rank}(A) = 2$，所以$|A| = 4(6c - 18) = 0$，解之得$c = 0$.

A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

得A的特征值为$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9.$

(2) 因为A为实对称矩阵，所以存在正交变换$X = QY$，可将二次型化为

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$$

此曲面表示椭圆柱面.

注: 当需要借助于标准形判断二次型是何种曲面时，只能通过正交变换将二次型化为标准形进行判断，不能用配方法将二次型化为标准形进行判断.