理科专业基础课(71100201)

《代 数 与 几 何》

主讲人: 吕新民

第四章 线性方程组

- n维向量空间
- 向量组的线性相关性
- 极大线性无关组与秩
- 线性方程组

第1节 n维向量空间

- n维向量的定义

定义 数域P上一个n维向量即是数域P中的n个数组成的有序数组：$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，其中$a_i$称为向量$\alpha$的第$i$个分量.

分量全为零的向量称为零向量，记为0. 称向量$(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$为$\alpha$的负向量，记作$-\alpha$. 数域$P$上全体$n$维向量所构成的集合记作$P^n$.

设$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in P^n$.

规定：$\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$.

- **n维向量的运算**

定义 设$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in P^n$，$k \in P$. 规定：

(1) 加法：$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$;

(2) 数乘：$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$.

显然，向量的加法运算和数乘运算满足：

①加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

②加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

③存在向量0，使得对于任意向量α，$0+\alpha=\alpha$.

④对于任意向量α，$\alpha+(-\alpha)=0$.

⑤$1\alpha=\alpha$;

⑥对于任意的数k,ℓ，$(k\ell)\alpha=k(\ell\alpha)$.

⑦对于任意的数k，$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

⑧对于任意的数k,ℓ，$(k+\ell)\alpha=k\alpha+\ell\alpha$.

数域上P的全体n维向量所成的集合P^n，关于向量的加法和数乘运算封闭，且满足上述八条运算规律，称P^n为数域P上的n维向量空间.

定义 设V是P^n的一个非空子集，若V关于P^n中的加法和数乘运算封闭，称V是P^n的子空间.

【例 1】设P是一个数域，证明：

$$V=\{(a_1,a_2,a_3)\in P^3|\ a_1=a_2\}$$

是P^3的子空间.

证明：显然，$(0,0,0)\in V$，即V非空. 任取$\alpha,\beta\in P^3$，记$\alpha=(a_1,a_2,a_3),\beta=(b_1,b_2,b_3)$，则$a_1=a_2,b_1=b_2$. 因为

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),$$

且$a_1+b_1=a_2+b_2$. 故$\alpha+\beta\in V$.

同理可证，对于任意的$k\in P$，$k\alpha\in V$. 因此V是P^3的子空间.

【例2】 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$P^n$中的向量. 证明:

$$\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s|\ k_i\in P,i=1,2,\cdots,s\}$$

是P^n的子空间.

证明： 记$V=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s|\ k_i\in P,i=1,2,\cdots,s\}$. 显然$0\in V$，即$V$非空. 任取$\alpha,\beta\in V$，记$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，$\beta=\ell_1\alpha_1+\ell_2\alpha_2+\cdots+\ell_s\alpha_s$. 因为

$\alpha+\beta=(k_1+\ell_1)\alpha_1+(k_2+\ell_2)\alpha_2+\cdots+(k_s+\ell_s)\alpha_s\in V$.
同理可证，对于任意的$k\in P$，$k\alpha\in V$. 故V是P^n的子空间.

上述子空间通常称为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的子空间，记作$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

第2节 向量组的线性相关性

- **向量组的线性关系**

定义 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\in P^n$.

(1) 称$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$是向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的一个线性组合，其中每个$k_i\in P$.

(2) 如果存在$k_i\in P$，使得$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$，称$\beta$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出.

显然，对于任意$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in P^n$，$\alpha$可由向量组$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$ 线性表出，且$\alpha=a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$.

定义 设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$是两个向量组. 若第一个向量组中的每个向量可由第二个向量组线性表出，同时第二个向量组中每个向量

也可由第一个向量组线性表出，则称这两个向量组等价，记作$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\simeq\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$.

直接验证知向量组之间的等价具有以下性质：

(1) 反身性：$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\simeq\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$.

(2) 对称性：$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\simeq\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}\Rightarrow\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}\simeq\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$.

(3) 传递性：$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\simeq\{\beta_1,\cdots,\beta_t\},\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}\simeq\{\gamma_1,\cdots,\gamma_r\}\Rightarrow\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\simeq\{\gamma_1,\cdots,\gamma_r\}$.

定义 称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，如果存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

否则，称为线性无关，即若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

为理解方便，对上述定义作一些说明.

(1) 一个向量构成向量组$\{\alpha\}$线性无关$\Leftrightarrow \alpha\neq 0$.

(2) 如果一个向量组的部分组线性相关，则该向量组必线性相关.

(3) 含零向量的向量组必线性相关.

【例3】已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，试判断

(1) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;

(2) $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$.

各自线性相关性.

解： (1) 线性相关. 因为

$$1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)+1\cdot(\alpha_2-\alpha_3)+1\cdot(\alpha_3-\alpha_1)=0.$$

(2) 线性无关. 设

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

即

$$(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases},$$

因系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以方程组只有零解，即$k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 故$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

- **线性相关性的基本定理**

定理1 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(n \geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$其中有一个向量可由其余的向量线性表出.

证明：$\Rightarrow$ 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，则存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$$

不失一般性令$k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s.$$

即α_1可由$\alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出.

$\Leftarrow$ 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中有一个向量可由其余的

向量线性表出，不妨设$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$，则

$$1 \cdot \alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_s\alpha_s = 0,$$

故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关.

定理2 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出，且表法唯一.

证明： 因$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$线性相关，则存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s, k$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0.$$

假定$k = 0$，则

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$$

因$k_1, k_2, \cdots, k_s, k$是一组不全为零的数，则$k_1, k_2, \cdots, k_s$是一组不全为零的数，从而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，矛盾. 故$k \neq 0$，于是

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s.$$

若β有两种表示，分别设为

$$\beta = p_1\alpha_1 + \cdots + p_s\alpha_s = q_1\alpha_1 + \cdots + q_s\alpha_s.$$

于是，

$$(p_1 - q_1)\alpha_1 + \cdots + (p_s - q_s)\alpha_s = 0.$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，从而$p_i-q_i=0\ (i=1,2,\cdots,s)$，即$p_i=q_i$. 故表法唯一.

定理3 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in P^m$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\in P^n$. 令

$$\gamma_i=(\alpha_i,\beta_i)\in P^{m+n}\ (i=1,2,\cdots,s),$$

则若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 必线性无关.

证明：考察下列两个齐次线性方程组

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \qquad (1)$$

及

$$k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_s\gamma_s=0 \qquad (2)$$

因为(2)的前m个方程即是(1)的所有的方程，从而

方程组(2)的解$\subseteq$方程组(1)的解.

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，(1)只有零解，故(2)也只有零解，从而$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$必线性无关.

注: 上述定理可简单叙述为无关组添加分量仍无关.

定理4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是两个向量组，满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出;

(2) $r > s$.

则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$必线性相关.

证明： 由条件(1)，$\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{s} t_{ji}\beta_j$， $i = 1, 2, \cdots, r$.

欲证结论，即证存在不全为零的数$x_1, x_2, \cdots, x_r$，使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r = 0$$

于是，左端即为

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} x_i(\sum_{j=1}^{s} t_{ji}\beta_j) = \sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r} t_{ji}x_i)\beta_j$$

若 存 在 不 全 为 零 的 数$x_1, x_2, \cdots, x_r$， 使得$\sum\limits_{i=1}^{r} t_{ji}x_i = 0$，结论获证.

由条件(2)，$r > s$蕴涵着下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1r}x_r = 0 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2r}x_r = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \cdots + t_{sr}x_r = 0 \end{cases}$$

有非零解. 由此结论成立.

作为上述定理的两个直接结果，有

推论1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是两个向量组，满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出.

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关.

则$r \leq s$.

推论2 任意$n+1$个n维向量必线性相关.

【例4】设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，向量$\beta_1$可由它线性表出，但向量$\beta_2$不能由它线性表出，证明：对于任意数$\ell$，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \ell\beta_1 + \beta_2$线性无关.

证明：令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k(\ell\beta_1+\beta_2)=0.$$

假定$k\neq 0$，**则**

$$\beta_2=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\cdots-\frac{k_s}{k}\alpha_s-\ell\beta_1.$$

由题设，向量β_1**可由**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性表出，从而向量**$\beta_2$**可由**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性表出，与题设矛盾.故**$k=0$，**于是**

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性无关，从而**$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$. **故**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\ell\beta_1+\beta_2$**线性无关.**

第3节 极大线性无关组

- **定义**

定 义 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量组$A$的一个部分组，如果满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) A中每个向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表出.

称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量组$A$的一个极大线性无关组.

由定义知:

(1) 一个向量组与它的任何一个极大线性无关组是等价的.

(2) 若一个向量组线性无关，则它的极大线性无关组即是它自身.

(3) 一个向量组的极大线性无关组不是唯一.

虽然一个向量组的极大线性无关组在表达形式上不是唯一的，但下面的定理将表明一个向量组的极大线性无关组所含向量的个数是不变的.

定理 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是向量组$A$的两个极大线性无关组，则$r = s$.

证明： 由题设，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 等价. 从而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出.

又由题设，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关. 由推论知$r \leq s$. 同理可证$r \geq s$. 故$r = s$.

定义 一个向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的极大线性无关组中所含向量的个数称为这个向量组的秩，记作$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

- **矩阵的秩与向量组的秩**

对于一个$m \times n$矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

一般地，一个矩阵A既可以认为是由m个n维行向量组成的，也可以认为矩阵A是由n个m维列向量组成的. 矩阵的行秩就是矩阵行向量组的秩. 矩阵的列秩就是矩阵列向量组的秩.

一个矩阵的行秩、列秩及秩具有如下关系：

定理 对于一个矩阵A，A的行秩=A的列秩=$\mathrm{rank}(A)$.

注：上述结果为求向量组的秩与极大线性无关组提供了简单的方法：以每个α_i为列构造矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，对$A$施行初等行变换将其阶梯化，则矩阵$A$的秩即是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩，矩阵$A$的最高阶非零子式所在的列即是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组.

【例5】设向量组$\alpha_1=(1+a,1,1,1)',\alpha_2=(2,2+a,2,2)',\alpha_3=(3,3,3+a,3)',\alpha_4=(4,4,4,4+a)'$.

(1) 问a为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关?

(2) 当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时，求它的一个极大线性无关组.

解：(1) 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4+a\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1+a & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4+a\\ 0 & a & 0 & -a\\ 0 & 0 & a & -a\\ 0 & 0 & 0 & a(a+10)\end{pmatrix}.$$

当$a=0$或-10时，向量组线性相关.

(2) 当$a=0$时,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时α_1即是所求的极大线性无关组.

当$a=-10$时,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$即是所求极大线性无关组.

【例6】设

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \end{cases}$$

其中$m > 1$，证明：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$具有相同的秩.

证明：依题意，向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示，且

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m = (m-1)\alpha_1 + (m-1)\alpha_2 + \cdots + (m-1)\alpha_m.$$

于是

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=\frac{1}{m-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m),$$

进而

$$\alpha_i=\frac{1}{m-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-\beta_i,$$

即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$也可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示，从而它们等价，故它们具有相同的秩.

注: 两个矩阵等价$\Leftrightarrow$它们具有相同的秩. 但两个向量组之间的等价不具有这个关系. 一般地，两个向量组等价$\Rightarrow$这两个向量组等秩，但反之不成立. 因此欲证两个向量组具有相同的秩，可以转化为证明它们等价. 但欲证两个向量组等价，不能转化为证明它们具有相同的秩.

第4节 线性方程组

- **齐次线性方程组**

一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

上述方程组变为$AX=0$.

直接验证易得

性质1 若ξ_1,ξ_2是齐次线性方程组$AX=0$的两个解，则$\xi_1+\xi_2$也是$AX=0$的解.

性质2 若ξ是齐次线性方程组$AX=0$的解，则对于任意的常数k，$k\xi$也是$AX=0$的解.

性质表明：若$AX=0$有非零解，则它必有无穷多个解. 为了将这无穷多个解表示出来，引入

定义 方程组$AX=0$的一组解$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$称为它的一个基础解系，如果

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$线性无关;

(2) 方程组的任一解可由$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$线性表出.

下面给出求基础解系的一般方法.

定理 设A是一个$m \times n$矩阵，对于齐次线性方程组$AX = 0$，

(1) 若$\mathrm{rank}(A) = n$，则方程组$AX = 0$只有零解.

(2) 若$\mathrm{rank}(A) = r < n$，则方程组$AX = 0$的基础解系含有$n - r$个向量.

证明： 若$\mathrm{rank}(A) = r$，方程组$AX = 0$通过Gauss消元法与下列方程组

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=0\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
c_{rr}x_r+c_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=0
\end{cases}
$$

同解，其中$c_{ii}\neq 0$，$i=1,2,\cdots,r$. 进而有

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1+\cdots+c_{1r}x_r=-c_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
c_{rr}x_r=-c_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n
\end{cases}
$$

这里$x_{r+1},\cdots,x_n$为自由变量，即任意给定$x_{r+1},\cdots,x_n$的一组数值，可得方程组$AX=0$的一个解.

(1) 若$\mathrm{rank}(A)=n$，方程组$AX=0$只有零解.

(2) 若$\mathrm{rank}(A)=r<n$，取

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

可得方程组$AX=0$的$n-r$个解，设为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \eta_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \eta_{n-r} = \begin{pmatrix} d_{1n-r} \\ \vdots \\ d_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由性质知：$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$是方程组$AX=0$的$n-r$个线性无关的解.

现令$\beta = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$是方程组$AX = 0$的任意一个解，令

$$\gamma = \ell_{r+1}\eta_1 + \ell_{r+2}\eta_2 + \cdots + \ell_n\eta_{n-r} - \beta$$

则$\gamma = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，由于$\gamma$也满足上述简化方程组，从而

易得$d_1 = \cdots = d_r = 0$，即$\gamma = 0$，从而

$$\beta = \ell_{r+1}\eta_1 + \ell_{r+2}\eta_2 + \cdots + \ell_n\eta_{n-r}.$$

故$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$是方程组$AX = 0$的基础解系.

【例 7】问t为何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+tx_3=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \\ -x_1+tx_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解，并求此时方程组的一般解.

解：对系数矩阵A进行初等行变换.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 2 & t-2 \\ 0 & t-1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 2 & t-2 \\ 0 & 0 & (t+1)(t-4) \end{pmatrix}.$$

故当$t=-1$或4时，$\mathrm{rank}(A)=2<3$. 此时方程组有非零解.

①当$t=-1$时,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

令$x_3=2$，可得$\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，此时方程组的一般解为$k_1\eta_1$，这里$k_1$为任意常数.

②当$t=4$时,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

令$x_3=1$，可得$\eta_2=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$，此时方程组的一般解为$k_2\eta_2$，这里$k_2$为任意常数.

- **非齐次线性方程组**

一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

在一般情况下，一个非齐次线性方程组未必总是有解的. 因此，首先考查一个非齐次线性方程组在什么条件下是有解的. 记

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

上述方程组变为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta. \ (*)$$

定理 线性方程组(*)有解的充要条件是

$$\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} = \mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta\}.$$

证明：必要性. 若方程组(*)有解，则存在$x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

由此知$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$等价，故rank$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ =rank$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta\}$.

充分性. 若rank$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ =rank$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta\}$，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$等价，从而$\beta$ 可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出，存在$x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$，即方程组(*)有解.

向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$的秩即是方程组系数矩阵$A = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$的秩，而向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta\}$的秩即是矩阵$(A,\beta) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta)$的秩. 矩阵$(A,\beta)$即是系数矩阵$A$增加了方程组的常数项列所得到的矩阵，通常称矩阵$(A,\beta)$为方程组的增广矩阵. 如果用矩阵的语言描述，上述结果即为

定理 线性方程组(*)有解$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A,\beta)$，即系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.

为讨论非齐次线性方程组解的结构，记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

上述方程组变为$AX=\beta$，而称$AX=0$为方程组$AX=\beta$的导出组.

直接验证易得

性质1 若ξ_1,ξ_2是方程组$AX=\beta$的两个解，则$\xi_1-\xi_2$必是其导出组$AX=0$的一个解.

性质2 若ξ是方程组$AX=\beta$的一个解，η是其导

出组$AX=0$的一个解，则$\xi+\eta$必是方程组$AX=\beta$的解.

现在考查方程组$AX=\beta$解的结构：令ξ_0是方程组$AX=\beta$的一个解，而ξ是方程组$AX=\beta$的任一个解，由性质，$\xi-\xi_0$必是其导出组$AX=0$的解. 若令$\mathrm{rank}(A)=r$，且$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是导出组$AX=0$的基础解系，则

$$\xi-\xi_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},$$

即

$$\xi=\xi_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

反过来，任何具有上述形式的向量必是方程组$AX=\beta$的解. 故方程组$AX=\beta$的通解由两部分构成：即$AX=\beta$的一个特解及导出组$AX=0$的通解.

【例8】 当k取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+kx_3=3 \\ x_1+kx_2+3x_3=2 \end{cases}$$

无解，有唯一解或有无穷多解? 并在有无穷多解时，写出方程组的通解.

解：对方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$(A,\beta)\to\begin{pmatrix}1&0&-k-3&0\\0&1&k+2&1\\0&0&k^2+k-6&k-2\end{pmatrix}.$$

①当$k=-3$时，$\mathrm{rank}(A)=2$，$\mathrm{rank}(\overline{A})=3$，方程组方程组无解；

②当$k=2$时，$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解，因增广矩阵为

$$(A,\beta)\to\begin{pmatrix}1&0&-5&0\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

其通解为

$$X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$$，其中k为任意常数；

③当$k\neq-3$且$k\neq 2$时，$\text{rank}(A)=\text{rank}(\overline{A})=3$，故方程组有唯一解

$$x_1=1, x_2=\frac{1}{k+3}, x_3=\frac{1}{k+3}.$$

【例9】已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-1\\3x_1+x_2+4x_3=1\\ax_1+bx_2+cx_3=d\end{cases}$$

有两个解

$$\xi_1=(0,1,0)',\xi_2=(-3,2,2)'.$$

求此方程组的一般解.

解： 由题设，$\mathrm{rank}(A)<3$. 又A中含非零二阶子式$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4$. 故$\mathrm{rank}(A)=2$. 于是方程组的导出组的基础解系所含解向量的个数为$3-\mathrm{rank}(A)=1$.

由性质知$\eta=\xi_1-\xi_2=(-3,1,2)'$为方程组的导出组的基础解系. 故原方程组的一般解为

$$X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$ 其中k为任意常数.

习题讨论课四

一、填空题

1. 若$\beta=(4,-1,-5,10)$不能由向量组$\alpha_1=(1,0,-1,2),\alpha_2=(2,-1,-2,6),\alpha_3=(3,1,t,4)$线性表出，则$t=$______.

2. 已知向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$B:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；$C:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$；$D:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$，且$\text{rank}(A)=\text{rank}(B)=3$，$\text{rank}(C)=4$，则$\text{rank}(D)=$______.

3. 已知方程组$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=1\\\lambda x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$有无穷多个解，则$\lambda$应满足的条件是______.

4. 设线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的系数矩阵为$A$，若存在三阶

非零方阵B使得$AB=0$，则$\lambda=$______.

5. 已知方程组$\begin{cases} x_1-\lambda x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1-\lambda x_2+x_3=1$具有唯一的公共解，则$\lambda$应满足的条件______.

二、解答与证明题.

6. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三个线性无关的3维列向量. 若向量组$\alpha_1+\lambda\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\alpha_3+\lambda\alpha_1$线性相关，求实数$\lambda$的值

7. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性表出，证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

8. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+ax_2+bx_3=0 \end{cases}$有两个不同的解.

(1) 求a,b的值；

(2) 求方程组的通解.

9. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 2 & a-1 & -2a \end{pmatrix}$.

(1) 求A的秩$\mathrm{rank}(A)$；

(2) 若$\mathrm{rank}(A)=2$，求方程组$A^*X=0$的通解.

10. 设3阶矩阵A的第一行是(a,b,c)，a,b,c不全为零，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$($k$为常数)，且$AB=0$，求线性方程组$AX=0$的通解.

习题讨论课四参考解答

1. **解：** 由题设，即方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$无解，现对矩阵$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\beta')$作初等行变换得

$$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\beta')=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\-1&-2&t&-5\\2&6&4&10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\0&0&3+t&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得当$t=-3$时，方程组无解.

2. **解：** 因为D包含线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，所以$\text{rank}(D)\geq 3$. 若$\text{rank}(D)=3$，因$\text{rank}(A)=3$，由向量组线性相关的性质知$\alpha_5-\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，又$\text{rank}(B)=3$知，$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，进而$\alpha_5$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，与$\text{rank}(C)=4$矛盾.

3. **解：** 对方程组的增广矩阵(A,β)作初等行变换得

$$(A,\beta)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 1-\lambda\end{pmatrix}.$$

当$\lambda=1$时，$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,\beta)=1<3$，方程组有无穷多个解.

4. **解：** 依题意，方程组$AX=0$有非零解，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0,$$

解之得$\lambda=1$.

5. **解：** 由题设，方程组$\begin{cases}x_1-\lambda x_2-x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\\ x_1-\lambda x_2+x_3=1\end{cases}$具有唯一解，因此系数行列式不等于零，由此可解得$\lambda\neq-1$.

6. **解：** 由题设，存在不全为零的数k_1, k_2, k_3使得

$$k_1(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \lambda\alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \lambda\alpha_1) = 0,$$

即

$$(k_1 + \lambda k_3)\alpha_1 + (\lambda k_1 + k_2)\alpha_2 + (\lambda k_2 + k_3)\alpha_3 = 0.$$

由题设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，即方程组

$$\begin{cases} k_1 + \lambda k_3 = 0 \\ \lambda k_1 + k_2 = 0 \\ \lambda k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，故系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 = 0,$$

从而$\lambda = -1$.

7. **证明：考察如下两个向量组**

$$I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$$

$$II:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r.$$

由题设易知向量组I与向量组II等价，从而rank(I) =rank(II). 又组I中有r个线性无关的向量，则rank(II) =rank$(I)\geq r$，而组II只有r个向量，从而rank$(II)\leq r$. 故rank$(II)=r$，这表明向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

8. **解：**(1) 由题设，系数矩阵的秩<3，但系数矩阵含有非零的二阶子式，故系数矩阵的秩为2. 对方程组的增广矩阵做初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & a & b & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & a+b+2 & -\frac{8}{3}b+\frac{1}{3}a \end{pmatrix},$$

由此可得

$$\begin{cases} a+b+2=0 \\ -\frac{8}{3}b+\frac{1}{3}a=0 \end{cases}，解之得\begin{cases} a=8 \\ b=-10 \end{cases}.$$

(2) 与原方程组等价的方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_3=\frac{4}{3} \\ x_2-x_3=-\frac{1}{3} \end{cases},$$

该方程组有特解$(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},0)'$，而导出组的通解为$k(1,1,1)'$ (k为任意数)，故原方程组的通解为

$$X=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},0)'+k(1,1,1)'，其中k为任意常数.$$

9. **解**：(1) 对A作初等行变换，

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&a\\2&a-1&-2a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&1\\0&a+1&2(a+1)\\0&0&2(a+1)(a-1)\end{pmatrix}$$

由此可知当$a=-1$时，rank$(A)=1$； 当$a=1$时，rank$(A)=2$； 当$a\neq\pm1$，rank$(A)=3$.

(2) 若rank$(A)=2$，由(I)知$a=1$，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$. 因为$|A|=0$，所以$A^*A=|A|E=0$，即$A$的每一列均是方程组$A^*X=0$的解. 因为rank$(A)=2$，所以rank$(A^*)=1$，于是$A^*X=0$的基础解系含两个解向量，故$A^*X=0$ 的通解为$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2$为任意常数).

10. **解：** 因$AB=0$，则$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le 3$. 又$a,b,c$不全为零，则$\mathrm{rank}(A)\ge 1$. 当$k\ne 9$时，$\mathrm{rank}(B)=2$，此时$\mathrm{rank}(A)=1$；当$k=9$时，$\mathrm{rank}(B)=1$，此时$\mathrm{rank}(A)=1$或2.

(1) 当$k\ne 9$，由$AB=0$易得$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0, A\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}=0$. 由于$\eta_1=(1,2,3)^T,\eta_2=(3,6,k)^T$线性无关，故$\eta_1,\eta_2$为$Ax=0$的一个基础解系. 于是方程组$AX=0$的通解为$X=c_1\eta_1+c_2\eta_2$，其中$c_1,c_2$为任意常数.

(2) 当$k=9$时，分别就$\mathrm{rank}(A)=1$和$\mathrm{rank}(A)=2$两种情形考虑.

①若$\mathrm{rank}(A)=2$，则方程组$AX=0$的基础解系由一个向量构成. 又因为$A\eta_1=0$，所以方程组$AX=0$的通解为$X=c_3\eta_1$，其中c_3为任意常数.

②若$\text{rank}(A)=1$，则方程组$AX=0$的基础解系由两个向量构成. 因为A的第一行为(a,b,c)，a,b,c不全为零，所以$AX=0$等价于$ax_1+bx_2+cx_3=0$. 不失一般性，令$a\neq 0$，则

$$\eta_3=(-b,a,0)',\eta_4=(-c,0,a)'$$

是方程组$AX=0$的两个线性无关的解. 故方程组$AX=0$的通解为$X=c_4\eta_3+c_5\eta_4$，其中c_4,c_5是任意常数.