6.3 理想气体的压强和温度公式

一. 理想气体的微观模型

1、关于分子力学性质的假设

1）与分子间距相比，分子可看成大小不计的质点；

直径 $d \sim 10^{-10}\,\mathrm{m}$，间距 $r \sim 10^{-9}\,\mathrm{m}$，$d << r$

2）除碰撞瞬间，分子间无相互作用力（自由运动）；

3）每个分子的运动仍遵从经典力学的规律.

4）碰撞时分子可看成弹性小球(完全弹性碰撞)，

满足动量守恒和能量守恒定律；

理想气体可以看作是大量的、自由的、无规则运动着的弹性小球的集合.

2、关于分子热运动的统计假设

(1) 无外场时，平衡态下，分子的空间分布处处均匀.

$$n = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V} = \frac{N}{V} = \text{恒定}$$

(2) 无外场时，平衡态下，分子各方向运动概率均等, 没有哪个方向的运动占优势.

沿各方向的分子数 $N_{+x} = N_{-x} = N_{+y} = N_{-y} = N_{+z} = N_{-z} = N/6$

分子运动的速度 $\vec{\upsilon}_i = \upsilon_{ix}\vec{i} + \upsilon_{iy}\vec{j} + \upsilon_{iz}\vec{k}$

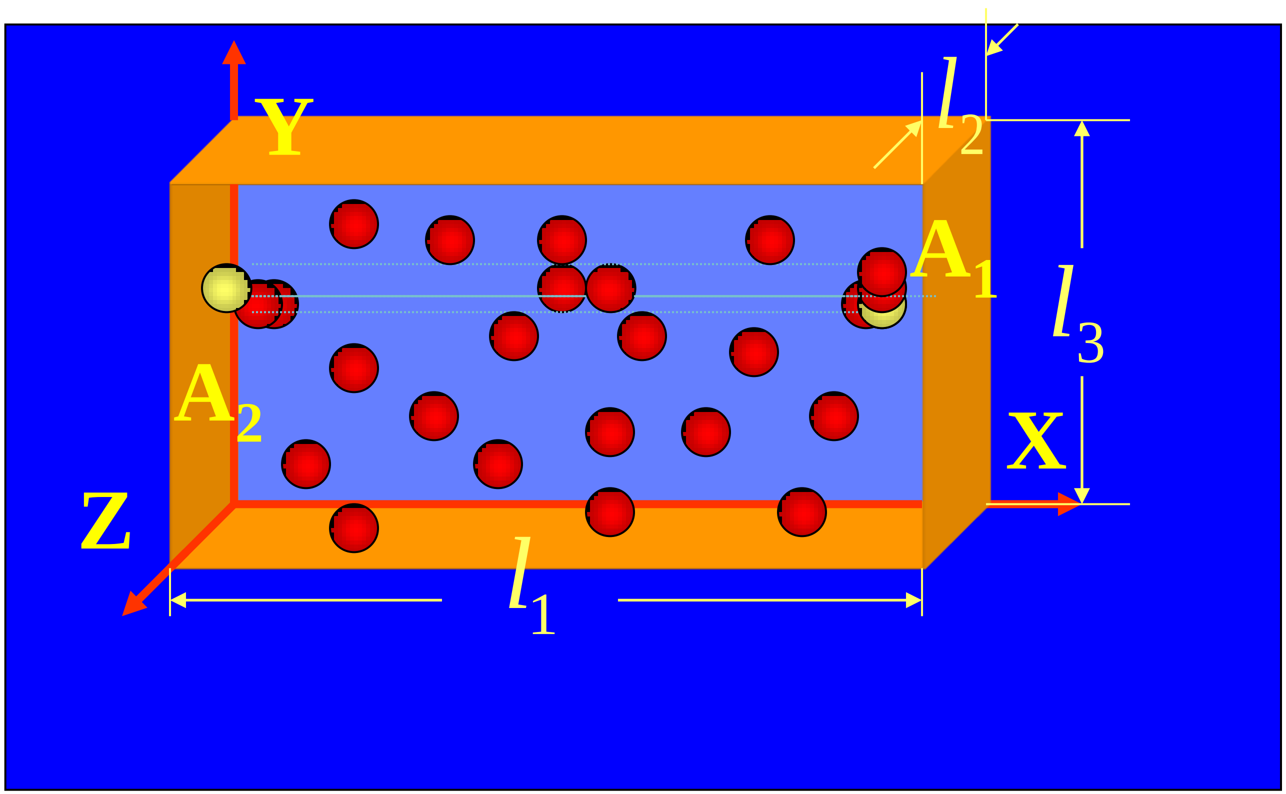
x 方向速度平方的平均值 $\overline{\upsilon_x^2} = \frac{1}{N}\sum_i \upsilon_{ix}^2$

各方向运动概率均等 $\overline{\upsilon_x} = \overline{\upsilon_y} = \overline{\upsilon_z} = 0$

$$\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_z^2} = \frac{1}{3}\overline{\upsilon^2}$$

二. 理想气体压强公式

1. 气体压强的微观机制：压强是大量分子对容器壁发生碰撞， 从而对容器壁产生冲力的宏观效果。



应用程序

出发点:

- 气体压强是大量分子不断碰撞容器壁的结果
- 压强等于大量分子在单位时间内施加在器壁单位面积上的平均冲量

$$\boxed{p=\frac{dF}{dS}=\frac{dI}{dt\,dS}}$$

- 单个分子服从经典力学定律
- 大量分子整体服从统计规律

单个分子对器壁的碰撞：偶然性 、不连续性

大量分子碰撞的总效果：恒定的、持续的力的作用

2. 理想气体压强公式 (另一推导，清华: 张三慧 p38-40)

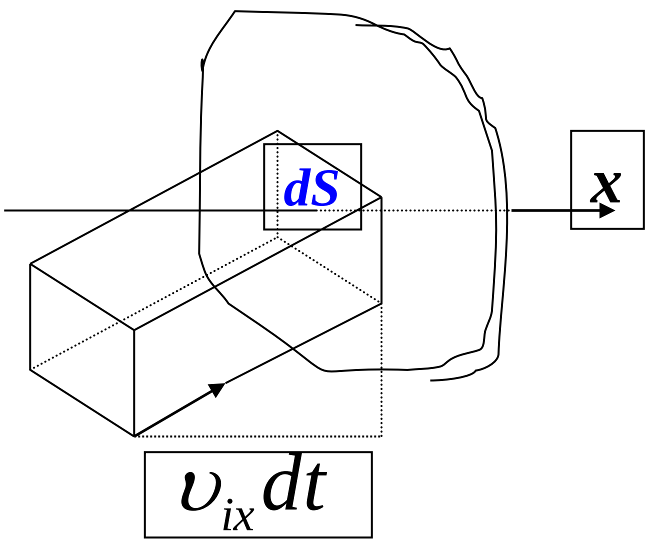
为讨论方便，将分子按速度分组，第 i 组分子的速度为 $\vec{\upsilon}_i$（严格说在 $\vec{\upsilon}_i$ 附近）分子数为 N_i，分子数密度为 $n_i = N_i / V$，并有 $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_i + \ldots = \sum n_i$.

平衡态下，器壁各处压强相等，取直角坐标系，在垂直于 x 轴的器壁上任取一小面积 dS，计算其所受的压强（如右图）

(1) 跟踪一个分子

某一时刻速度为 $\vec{\upsilon}_i$ 的分子在 x 方向的分量为 υ_{ix}，

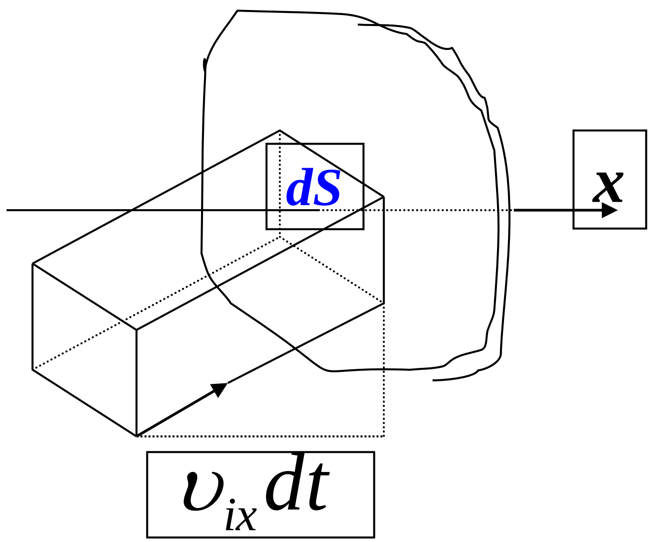
此分子以 υ_{ix} 与 dS 面碰撞，并以 $-\upsilon_{ix}$ 弹回，故单个分子受 dS 面的冲量：



$$I_{ix} = -m\upsilon_{ix} - \left(m\upsilon_{ix}\right) = -2m\upsilon_{ix}$$

单个分子受 **dS** 面的冲量：

$$I_{ix} = -m\upsilon_{ix} - (m\upsilon_{ix}) = -2m\upsilon_{ix}$$



单个分子在对 **dS** 的一次碰撞中施于 **dS** 的冲量为 $2m\upsilon_{ix}$

(2) 大量分子的总冲量

在全部速度为 $\vec{\upsilon}_i$ 的分子中，在 **dt** 时间内，能与 **dS** 相碰的只是那些位于以**dS**为底，以 $\upsilon_{ix}dt$ 为高，以 $\vec{\upsilon}_i$ 为轴线的柱体内的分子。分子数为

$$n_i\upsilon_{ix}dtdS.$$

dt 时间内, 与 **dS** 面相碰的第 ***i*** 组分子施于**dS** 的冲量为：

$$dI_i = 2m\upsilon_{ix} \bullet n_i\upsilon_{ix}dtdS = 2mn_i\upsilon_{ix}^{\ 2}dtdS$$

$$dI_i = 2m\upsilon_{ix} \bullet n_i\upsilon_{ix} dtdS = 2mn_i\upsilon_{ix}{}^2 dtdS$$

dt时间内，与 **dS** 面相碰的所有分子施于 **dS** 的冲量为：

$$dI = \sum_{i(\upsilon_{ix}>0)} dI_i = \sum_{i(\upsilon_{ix}>0)} 2mn_i\upsilon_{ix}^2 dtdS$$

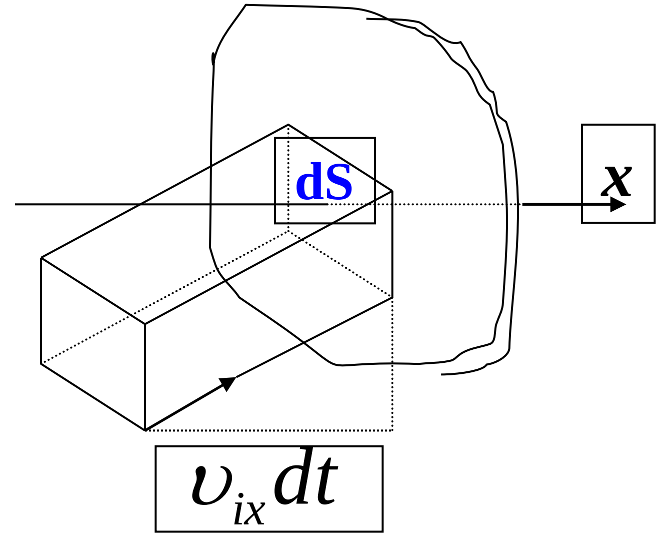
注意：只有 $\upsilon_{ix} > 0$ 的分子才能与**dS** 碰撞.

容器中气体无整体运动，平均来讲 $\upsilon_{ix} > 0$ 的分子数与 $\upsilon_{ix} < 0$ 的分子数相等.

$$\therefore\ dI = \frac{1}{2}\left[\sum_i 2mn_i\upsilon_{ix}^2 dtdS\right] = \sum_i mn_i\upsilon_{ix}^2 dtdS$$

此式不限制$\upsilon_{ix} > 0$.

$$dI = \sum_i m n_i \upsilon_{ix}^2 dt dS$$



(3) 压强

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{dI}{dt dS} = m \sum_i n_i \upsilon_{ix}^2$$

又 $\overline{\upsilon_x^2} = \dfrac{\sum_i N_i \upsilon_{ix}^2}{N} = \dfrac{\sum_i n_i \upsilon_{ix}^2}{n}$ 所以 $p = mn\overline{\upsilon_x^2}$

平衡态下，分子速度按方向的分布是均匀的，

$$\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_z^2} = \frac{1}{3}\overline{\upsilon^2}$$

$$\therefore p = \frac{1}{3} mn\overline{\upsilon^2}$$

压强公式

压强的物理意义

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{\upsilon^2}$$

分子平均平动动能 $$\bar{E}_t=\frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2}$$

统计关系式 $$p=\frac{2}{3}n\bar{E}_t$$

宏观可测量

微观量的统计平均值

◈ 压强是由于大量气体分子碰撞器壁产生的，它是对大量分子统计平均的结果，对单个分子没有压强的概念.

◈ 压强公式建立起宏观量压强 p 与微观气体分子运动之间的关系.

三. 理想气体温度公式

由 $\begin{cases} p=\dfrac{2}{3}n\overline{E}_t & \text{（统计力学）} \\ p=nkT & \text{（热力学）} \end{cases}$ 得

分子平均平动动能

$$\boxed{\overline{E}_t}=\frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2}=\frac{3}{2}k\boxed{T}$$

微观量的统计平均值

宏观可测量

温度的统计意义：温度是分子平均平动动能的量度，反映了物体内部分子无规则运动的剧烈程度.

温度 T 的物理意义

$$\overline{E}_t = \frac{1}{2}m\overline{\upsilon^2} = \frac{3}{2}kT$$

1） 温度是分子平均平动动能的量度 $\overline{E}_t \propto T$，反映了分子热运动 (无规则运动) 的剧烈程度.

2）温度是大量分子的集体表现，谈论个别分子的温度无意义.

3）在同一温度下，各种气体分子的平均平动动能都相等.

注意

热运动与宏观运动的区别：温度所反映的是分子的无规则运动 (热运动)，它和物体的整体运动无关，物体的整体运动是其中所有分子的一种有规则运动的表现.

方均根速率 υ_{rms}：

$$\because \bar{E}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2} m \overline{\upsilon^2} = \frac{3}{2} kT \qquad \therefore \overline{\upsilon^2} = \frac{3kT}{m}$$

$$\therefore \upsilon_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$k = \frac{R}{N_0}$$

例1. 理想气体体积为 V，压强为 p，温度为 T，一个分子的质量为 m，k 为玻尔兹曼常量，R 为摩尔气体常量，则该理想气体的分子数为：

（A）pV/m

★（B）$pV/(kT)$

（C）$pV/(RT)$

（D）$pV/(mT)$

解

$$p = nkT$$

$$N = nV = \frac{pV}{kT}$$

例2. 一瓶氦气和一瓶氮气的质量密度相同，分子平均平动动能相同，而且它们都处于平衡状态，则它们

（A）温度相同、压强相同。

（B）温度、压强都不同。

★（C）温度相同，但氦气的压强大于氮气的压强.

（D）温度相同，但氦气的压强小于氮气的压强.

解： $p = nkT$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{V} = nm, \quad \therefore p = \rho \frac{k}{m} T$$

$$\because m(\mathrm{N}_2) > m(\mathrm{He}) \qquad \therefore p(\mathrm{N}_2) < p(\mathrm{He})$$

例3：下列各式中哪一种式子表示气体分子的平均平动动能？（式中 M 为气体的质量, m 为气体分子的质量, N 为气体分子总数目, n 为气体分子密度, N_0 为阿伏加德罗常数, μ为摩尔质量）

★ $(A)\ \dfrac{3m}{2M}pV;$ $(B)\ \dfrac{3M}{2\mu}pV;$

$(C)\ \dfrac{3}{2}npV;$ $(D)\ \dfrac{3\mu}{2M}N_0 pV.$

解：$\overline{E_t} = \dfrac{3}{2}kT,\ p = nkT = \dfrac{N}{V}kT,\quad N = \dfrac{M}{m} = \dfrac{M}{\mu}N_0$

$$\overline{E_t} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\frac{pV}{N} = \frac{3m}{2M}pV = \frac{3}{2}\frac{\mu}{MN_0}pV$$

例4. **p＝1 atm, T＝300K 氧气, 求 (1) 1 m^3 中有多少个分子；(2) 氧气的质量密度；(3) 每个氧气分子的质量；(4) 1 m^{3}中分子的总平均平动动能；(5) 分子间距；(6)v_{rms}**

解：(1) 分子数密度

$$\because p = nkT, \qquad \therefore n = \frac{p}{kT} = \frac{1.01\times10^5}{1.38\times10^{-23}\times300} = 2.44\times10^{25}(\mathrm{m}^{-3})$$

(2) 质量密度 $\rho = \dfrac{M}{V}$，**根据** $pV = \dfrac{M}{\mu}RT$

$$\therefore \rho = \frac{M}{V} = \frac{p}{RT}\mu = \frac{1.01\times10^5}{8.31\times300}\times32\times10^{-3} = 1.28\ (\mathrm{kg/m^3})$$

(3) 每个氧气分子的质量

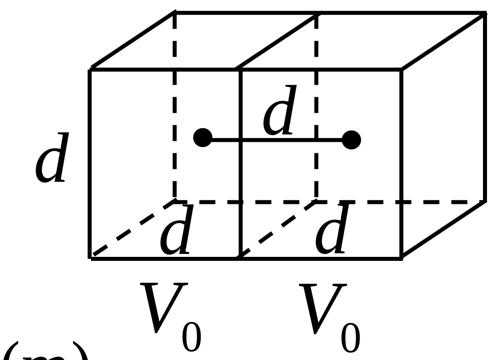
$$\mu = 32\times10^{-3}kg, \qquad m = \frac{\mu}{N_0} = \frac{32\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}} = 5.31\times10^{-26}(\mathrm{kg})$$

(4) 1 m^3中分子的总平均平动动能

每个分子的平均平动动能 $\overline{E}_t = \dfrac{3}{2}kT$

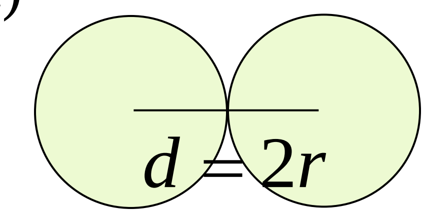
1m^3中， $\overline{E}_{t总} = n\overline{E}_t = \dfrac{3}{2}nkT = \dfrac{3}{2}p = 1.57\times10^5(\mathrm{J})$

(5) 分子间距＝分子中心间的平均距离*d*.



每个分子的平均体积 $V_0 = \dfrac{1}{n}$

分子间距：$V_0 = \dfrac{1}{n} = d^3 \quad \therefore d = \dfrac{1}{n^{1/3}} = 3.45\times10^{-9}(\mathrm{m})$



讨论: 也常采用球形模型

$$V_0 = \frac{1}{n} = \frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3 \quad \therefore d = (\frac{6}{n\pi})^{1/3} = 9.28\times10^{-9}(\mathrm{m})$$

两种模型得到的 *d* 量级一致

$$(6)\ \upsilon_{rms} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3\times8.31\times300}{32\times10^{-3}}} = 483\ m/s$$