理科专业基础课(71100201)

《代 数 与 几 何》

主讲人: 吕新民

《代数与几何》(II)教学计划

章节	内容	主讲	测验	解析
第六章	线性空间	8课时	3课时	3课时
第七章	线性变换	12课时	3课时	3课时
第八章	$\lambda-$矩阵	4课时	0课时	0课时
第九章	欧氏空间	6课时	3课时	3课时
第十章	双线性函数	9课时	3课时	3课时
第十一章	解析几何	9课时	3课时	3课时

注：80学时，课堂教学78学时，期末复习答疑2学时.

第六章 线性空间

- 线性空间的定义与性质
- 维数、基与坐标
- 线性子空间
- 子空间的交、和与直和
- 线性空间的同构

第1节 线性空间的定义与性质

- **定义**

定义 设V是一个非空集合，P是一个数域，称V是P上的一个线性空间，如果满足：

(1) V对加法运算封闭，即对于任意的$\alpha, \beta \in V$，$\alpha+\beta \in V$;

(2) V对数乘运算封闭，即对于任意的$\alpha \in V$，$k \in P$，$k\alpha \in V$;

(3) V关于加法和数乘运算满足八条运算规律:

①$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

②$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③存在向量0，使得对于任意向量α，$0+\alpha=\alpha$;

④对于任意向量α，存在向量β，使得$\alpha+\beta=0$;

⑤$1\alpha=\alpha$;

⑥$(k\ell)\alpha=k(\ell\alpha)$，其中$k,\ell\in P$;

⑦$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，其中$k\in P$;

⑧$(k+\ell)\alpha=k\alpha+\ell\alpha$，其中$k,\ell\in P$.

线性空间中的元素统称为向量. 从这个意义上而言，向量的含义是非常广泛的.

【例 1】(1) 数域P上的一元多项式全体$P[x]$，关于多项式的加法和数乘运算构成数域P上的线性空间.

(2) 数域P上的$m \times n$矩阵全体$P^{m\times n}$，关于矩阵的加法和数乘运算构成数域P上的线性空间.

(3) 数域P上的n维向量全体P^n，关于向量的加法和数乘运算构成数域P上的线性空间.

(4) 实数域$\mathbb{R}$上的实函数全体，关于函数的加法和数乘运算构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

(5) 数域P关于普通数的加法和乘法运算构成数域P上的线性空间.

- **性质**

定理 设V是P上的一个线性空间，则

(1) 零元素是唯一的.

(2) 一个元素的负元素是唯一的.

(3) $0 \cdot \alpha = 0$； $k \cdot 0 = 0$； $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$.

(4) 若$k\alpha = 0$，则$k = 0$或$\alpha = 0$.

证明：(1) 设$0_1, 0_2$是V的两个零元，由零元的定义知$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. 故零元素是唯一的.

(2) 设α有两个负元β与γ，即$\alpha + \beta = 0, \alpha + \gamma = 0$. 于是$\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = (\alpha +$

$\beta) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma$. 故负元素是唯一的.

(3) 仅证$0\alpha = 0$，其余类似可证. 因为$\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = \alpha$，等式两端加上$-\alpha$，可得$0\alpha = 0$.

(4) 若$k \neq 0$，则$\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}0 = 0$.

第2节 维数、基与坐标

- **维数、基与坐标**

首先，我们将普通意义下向量之间的线性关系平行移到一般的线性空间中.

定义 设V是数域P上的一个线性空间.

(1) 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$，称$\alpha\in V$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出，若存在$k_1,\cdots,k_s\in P$，使得$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$.

(2) 设$A=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$与$B=\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$是$V$中的两个向量组，若$A$可由$B$线性表出，同时$B$也可由$A$线性表出，则称$A$与$B$等价.

(3) 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$，称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是线性相关的，如果存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_s\in P$，使得$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$；否则，称为线性无关的. 即如果$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则$k_1=\cdots=k_s=0$.

(4) 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是V中向量组A的一个部分组，称$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是A的一个极大线性无关组，如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，且A中的任何一个向量可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出.

在线性空间中，我们可以引入

定义 设V是数域P上的一个线性空间.

(1) V的一个极大线性无关组称为V的一组基.

(2) V的一个极大线性无关组所含向量的个数称为V的维数，记作$\dim(V)$. 若$\dim(V)<\infty$，称V是有限维的，否则称V是无限维的.

(3) 若$\dim(V) = n$，且$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是$V$的一组基，则对任意$\alpha \in V$，存在$a_1, a_2, \cdots, a_n \in P$，使得

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

(这样$a_1, a_2, \cdots, a_n$是唯一的)，称n维向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标.

【例2】对于线性空间$P^{m\times n}$，符号E_{ij}表示位于第i行第j列的元素为1，其余元素均为0的矩阵. 显然，E_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 是$P^{m\times n}$的一组基，于是$\dim(P^{m\times n}) = mn$. 对任意$A = (a_{ij}) \in P^{m\times n}$，$A$在这组基下的坐标为

$$(a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn})$$

是一个mn维向量(不是一个矩阵！且坐标与基的排列顺序密切相关)，通常称每个E_{ij}为矩阵单位.

- **基变换公式与坐标变换公式**

在一个线性空间中，基的选取不是唯一的，两组基之间具有何种关系呢?

设V是数域P上的n维线性空间，令$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$与$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是$V$的两组基，则$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$可由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$线性表出，令

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \eta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \eta_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

也即

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,$$

这里$A = (a_{ij})$ (以每个η_i的坐标为列构作的矩阵). 称A是从基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$到基$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$的过渡矩阵.

与此同时，利用过渡矩阵，下面我们将建立同一个向量在不同基下坐标之间的关系.

对任意$\xi \in V$，令

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

及

$$\xi = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \cdots + y_n\eta_n = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

则

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

因为$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是线性无关的，则$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，这即是$\xi$在两组基下的坐标变换公式.

【例 3】在$\mathbb{R}^3$中有两组基:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求

(1) 从基ξ_1,ξ_2,ξ_3到基η_1,η_2,η_3的过渡矩阵.

(2) 求$\alpha=(1,3,0)$在基ξ_1,ξ_2,ξ_3下的坐标.

解：(1) 设过渡矩阵为C，即

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)C.$$

于是

$$C=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{-1}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

(2) 令α在基ξ_1,ξ_2,ξ_3下的坐标为$x=(x_1,x_2,x_3)'$，则

$$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

解方程组得$x_1=2,x_2=5,x_3=-1$. 故α在基ξ_1,ξ_2,ξ_3下的坐标$x=(2,5,-1)'$.

第3节 线性子空间

定义 设V是数域P上的线性空间，V的一个非空子集W称为V的一个子空间，如果W关于V中的两

种运算也构成数域P上的线性空间.

一个线性空间V的子空间W本身是一个线性空间. 因此，W也有维数，记作$\dim(W)$. 直接验证易得

定理 设V是数域P上的线性空间，W是V的一个非空子集，则W构成V的一个子空间$\Leftrightarrow$ W对于V中两种运算封闭.

【例 4】(1) 在线性空间P^n中，令

$$W=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|\ a_1+a_2+\cdots+a_n=0,\ a_i\in P\}.$$

W为V的一个子空间，且$\dim(W)=n-1$.

(2) 在线性空间$P^{n\times n}$中，令

$$W=\{A\in P^{n\times n}|\ A'=A\}.$$

则W为V的一个子空间，且$\dim(W)=\frac{n(n+1)}{2}$.

(3) 设V是数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$. 令

$$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s|\ k_i\in P\}.$$

则W为V的一个子空间，且$\dim(W)=$rank$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$. 通常，称$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$是由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的子空间.

定理 (基的扩充性定理) 设V是数域P上的n维线性空间，W是V的一个m维子空间，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是W的一组基，则这组基必可扩充为V的一组基，即在V中存在$n-m$个向量$\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$，使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$构成$V$的一组基.

证明： 对$n-m$作归纳. 当$n-m=0$时，结论自然成立. 假定结论对$n-m=k$时成立，现考察$n-m=k+1$时情形.

因为$n-m=k+1\geq 1$，所以$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$不是V的一组基，于是存在$\alpha_{m+1}\in V$不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出，从而$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$必线性无关，故

$$\dim(L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})) = m + 1.$$

因$n - (m + 1) = k$，由归纳假设，$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1})$的基可扩充为$V$的一组基. 即存在$n - (m + 1)$个向量$\alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n$，使得$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 构成V的一组基. 故知结论成立.

第4节 子空间的交、和与直和

- **子空间的交与和**

定义 设V是数域P上的线性空间，V_1, V_2是V的两个子空间.

(1) 称$V_1 \cap V_2 = \{\alpha \in V | \alpha \in V_1$，且$\alpha \in V_2\}$是$V_1$与$V_2$的交.

(2) 称$V_1 + V_2 = \{\alpha \in V | \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$是$V_1$与$V_2$的和.

利用子空间的判定定理易得

定理 设V是数域P上的线性空间，V_1, V_2是V的两个子空间，则它们的交与和均是V的子空间.

【例 5】 (1) 在线性空间$\mathbb{R}^3$中，令$V_1 = x$轴，$V_2 = y$轴，则V_1, V_2是$\mathbb{R}^3$的两个子空间，且

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}，V_1 + V_2 = xoy\text{平面}.$$

南京理工大学 Nanjing University of Science and Technology
访问主页
标题页
目录页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 22 页 共 50 页
返回
全屏显示
关闭
退出

(2) 在线性空间P^n中，设V_1是方程组$AX=0$的解空间，V_2是方程组$BX=0$ 的解空间，则

$$V_1\cap V_2=\{X\in P^n|\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}\}.$$

(3) 若V是数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in V$，则

$$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2).$$

- **维数公式**

定理 如果V_1,V_2是线性空间V的两个子空间，则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

证明： 设$\dim(V_1) = n_1, \dim(V_2) = n_2, \dim(V_1 \cap V_2) = m$，取$V_1 \cap V_2$的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. 因为$V_1 \cap V_2$是$V_1$的子空间，先将其扩充为$V_1$的一组基：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}.$$

又因为$V_1 \cap V_2$也是V_2的子空间，再将其扩充为V_2的一组基：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}.$$

下证

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}.$$

是$V_1 + V_2$的一组基即可. 因为

访问主页
标题页
目录页
第 24 页 共 50 页
返回
全屏显示
关闭
退出

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}),$$

$$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}),$$

则

$$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}).$$

因此，为证结论成立，只需证明：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$$

线性无关即可. 令

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{n_1-m}\beta_{n_1-m} + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = 0$$

又令

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}$$
$$= -q_1\gamma_1 - \cdots - q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}$$

则$\alpha \in V_1 \cap V_2$，即α可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出，令

$$\alpha = \ell_1\alpha_1 + \cdots + \ell_m\alpha_m,$$

则

$$\ell_1\alpha_1 + \cdots + \ell_m\alpha_m + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = 0$$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$线性无关，则

$$\ell_1 = \cdots = \ell_m = q_1 = \cdots = q_{n_2-m} = 0,$$

即$\alpha = 0$. 进而

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{n_1-m}\beta_{n_1-m} = 0$$

又$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}$线性无关，则

$$k_1 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0.$$

故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$ 线性无关. 故结论证毕.

注：维数公式的证明过程反映了解决与维数相关问题的一般思路：即先选取最小子空间的一组基，然后将其扩充成中间子空间的基. 在此基础上，确定最大子空间的基，将问题最后转化为证明基即可.

作为上述定理的直接结果有

推论 如果n维线性空间V的两个子空间V_1, V_2的维数之和大于n，则$V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.

以下通过实例看如何求两个子空间的交与和.

【例6】 设$\alpha_1 = (1,2,1,0)$，$\alpha_2 = (-1,1,1,1)$，$\beta_1 = (2,-1,0,1)$，$\beta_2 = (1,-1,3,7)$,，且令$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2), V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$. 求

(1) $V_1 \cap V_2$的一组基与维数.

(2) $V_1 + V_2$的一组基与维数.

解： (1) 任取$\gamma \in V_1 \cap V_2$，则

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2.$$

即

$$\begin{cases} k_1 - k_2 - 2\ell_1 - \ell_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + \ell_1 + \ell_2 = 0 \\ k_1 + k_2 - 3\ell_2 = 0 \\ k_2 - \ell_1 - 7\ell_2 = 0 \end{cases}.$$

考察上述方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因$\mathrm{rank}(A) = 3$，所以方程组的解空间的维数为$1.$ 故$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$. 任取一非零解$(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) =$

$(-1,4,-3,1)$，可得交子空间的一组基为

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = (-5,2,3,4).$$

(2) 因为

$$V_1 + V_2 = L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2),$$

由维数公式知$\dim(V_1 + V_2) = 3$. 又由(1)知$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$为$V_1+V_2$的一组基.

注：求两个子空间$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$的交需借助于交的定义转化为求齐次线性方程组的基础解系，进而获得交的维数与基；求两个子空间的和可以利用公式$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t) = L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),\beta_1,\cdots,\beta_t)$转化为求一个向量组的秩和极大线性无关组.

- **子空间的直和**

定义 设V是数域P上的线性空间，V_1, V_2是V的两个子空间. 如果和$V_1 + V_2$中每个向量α的分解式$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$是唯一的，称这个和为直和，记作$V_1 \oplus V_2$.

关于子空间的直和，有如下一些判别条件.

定理 设V是数域P上的线性空间，V_1, V_2是V的子空间，$W = V_1 + V_2$，则以下条件彼此等价：

(1) W是V_1, V_2的直和.

(2) 分解式$0 = \alpha_1 + \alpha_2$是唯一的，$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$

(3) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(4) $\dim(W) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

证明： $(1) \Rightarrow (2)$及$(3) \Rightarrow (4)$均是显然的.

$(2) \Rightarrow (3)$ 假定$V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$，取$0 \neq \alpha \in V_1 \cap V_2$，则$0 = 0 + 0 = \alpha - \alpha$，与题设矛盾.

$(4) \Rightarrow (1)$ 由维数公式，知$\dim(V_1 \cap V_2) = 0$，即$V_1 \cap V_2 = \{0\}$. 对任意$\alpha \in V$. 令$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$，这里$\alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2$，则

$$\alpha_1 - \beta_1 = -\alpha_2 + \beta_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\},$$

即$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$. 即分解式$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$唯一. 故$V$是$V_1, V_2$的直和.

【例 7】设V_1与V_2分别是齐次线性方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$与$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间. 证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

证明： 先证$P^n=V_1+V_2$. 任取$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in P^n$，记$a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$，则

$$(a_1,\cdots,a_n)=(a_1-a,\cdots,a_n-a)+(a,\cdots,a).$$

前者属于V_1，后者属于V_2. 故$P^n=V_1+V_2$.

再证$V_1\cap V_2=0$. $V_1\cap V_2$即是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ x_1=x_2=\cdots=x_n \end{cases}.$$

的解. 显然，方程组只有零解. 故$V_1 \cap V_2 = 0.$

综上所述，可得$P^n = V_1 \oplus V_2$.

第5节 线性空间的同构

- **单射、满射与双射**

定义 设A与B是两个集合，$f : A \to B$是从A到B的一个映射.

(1) 称f是单射，如果$a_1, a_2 \in A$，且$a_1 \neq a_2$，则$f(a_1) \neq f(a_2)$.

(2) 称f是满射，如果对于任意的$b \in B$，存在$a \in$

A，使得$b=f(a)$.

(3) 称f是双射，如果f既是单射，也是满射.

【例8】(1) 设P是一个数域，定义$f: P\to P^{n\times n}$如下：对于任意的$a\in P$，$f(a)=aE$，则f是从P到$P^{n\times n}$的一个单射.

(2) 设P是一个数域，定义$f: P^{n\times n}\to P$如下：对于任意的$A\in P^{n\times n}$，$f(A)=|A|$，则f是从$P^{n\times n}$到P的一个满射.

(3) 设$\mathbb{R}$是实数集，$\mathbb{R}^+$表示正实数集. 定义$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$如下：对于任意的$x\in\mathbb{R}$，$f(x)=2^x$，则$f$是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}^+$的一个双射.

• 同构的定义与性质

定义 设V与V'是数域P上的两个线性空间，称V与V'同构，记作$V \cong V'$，如果存在一个双射$f: V \to V'$，使得对任意$\alpha, \beta \in V$及任意$k \in P$，有

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),\quad f(k\alpha)=kf(\alpha).$$

直接验证可得

性质 设f是数域P上的两个线性空间V与V'之间的同构映射，则

(1) $f(0)=0$.

(2) $f(-\alpha)=-f(\alpha)$.

(3) $f(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1f(\alpha_1)+\cdots+k_sf(\alpha_s)$.

(4) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$线性相关$\Leftrightarrow f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_s)$线性相关.

• 同构定理

定理 设V与V'是数域P上的两个有限维线性空间，则$V\cong V'\Leftrightarrow \dim(V)=\dim(V')$. 特别地，若$\dim(V)=n$，则$V\cong P^n$.

证明： 仅证前半部分，剩余部分显然可得.

$\Rightarrow$ 若$V\cong V'$，设f是从V到V'的同构映射. 令

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是$V$的一组基，只需证明$f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n)$ 是V'的一组基即可. 由性质知，$f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n)$线性无关.

又对任意$\alpha' \in V'$，因f是满射，存在$\alpha \in V$，使得$\alpha' = f(\alpha)$. 记$\alpha = \ell_1\varepsilon_1 + \ell_2\varepsilon_2 + \cdots + \ell_n\varepsilon_n$. 则

$$\alpha' = f(\alpha) = \ell_1 f(\varepsilon_1) + \ell_2 f(\varepsilon_2) + \cdots + \ell_n f(\varepsilon_n).$$

故$f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n)$构成$V'$的一组基. 因此$\dim(V) = \dim(V')$.

$\Leftarrow$ 若$\dim(V) = \dim(V')$，令$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，与$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$分别是$V$与$V'$的基. 对任意$\alpha \in V$，记

$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$. 构作$V$到$V^{'}$的映射$f$如下:

$$f : V \to V^{'} \text{ 定义为} f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i.$$

直接验证知f是V到$V^{'}$的同构映射. 故$V \cong V^{'}$.

【例 9】 设$V = \{(a, a+b, a-b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. 问$V \cong \mathbb{R}^2$? 请给出理由.

解： 同构. 因为$\dim(V) = 2, \dim(\mathbb{R}^2) = 2$，所以$V \cong \mathbb{R}^2$.

习题讨论课六

一、填空题

1. 设线性空间$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a,b\in\mathbb{R}\right\}$，则$\dim V =$______.

2. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$与$\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1$是线性空间$V$的两组基，则从基$\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_1$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的过度矩阵为______.

3. 已知$\varepsilon_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$是线性空间$P^{2\times 2}$的一组基，则$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$在这组基下的坐标为______.

4. 设有P^4的两个子空间$V_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|2x_1+x_2=0,x_1+2x_3=0\}$，$V_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2-2x_3=0\}$，则$\dim(V_1\cap V_2)=$______.

5. 设V_1是由$\alpha_1=(2,1,3,1),\alpha_2=(1,2,01)$生成的子空间，$V_2$是由$\beta_1=(-1,1,-3,0),\beta_2=(1,1,11)$生成的子空间，则$\dim(V_1+V_2)=$_______.

二、解答与证明题.

6. 在$\mathbb{R}^4$中两组基分别为(I): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$; (II): $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4$.

(1) 求从基(II)到基(I)的过渡矩阵.

(2) 求在基(I)和基(II)下有相同坐标的向量.

7. 设有P^4的两个子空间$V_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+2x_2-x_4=0\}$和$V_2=L(\alpha_1,\alpha_2)$，其中$\alpha_1=(1,-1,0,1),\alpha_2=(1,0,2,3)$，求$V_1+V_2$与$V_1\cap V_2$的一组基和维数.

8. 给定$\mathbb{R}^{n\times n}$的两个子空间$W_1=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|\ A'=A\}$与$W_2=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|\ A'=-A\}$，证明：$\mathbb{R}^{n\times n}=W_1\oplus W_2$.

9. 设V_1是由$\alpha_1=(1+a,1,1,1)',\alpha_2=(2,2+a,2,2)'$生成的子空间，$V_2$是由$\beta_1=(3,3,3+a,3)',\beta_2=(4,4,4,4+a)'$生成的子空间. 若$\dim(V_1\cap V_2)=1$，求$a$的值，并求此时$V_1\cap V_2$的一组基.

10. 设A为n阶方阵，令$V_1=\{X\in P^n|(A-E)X=0\},V_2=\{X\in P^n|(A+E)X=0\}$. 证明：$A^2=E$的充分必要条件是$P^n=V_1\oplus V_2$.

习题讨论课六参考解答

1. **解**：显然$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是$V$的一组基，故$\dim V = 2.$

2. **解**： 因为

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_1) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

故所求过度矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. **解：** **令** $A = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4$，**则**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 4 \\ \qquad\qquad\quad x_4 = 2 \end{cases}，\text{解之得} \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 2 \end{cases},$$

故A**在这组基下的坐标为**$(-8, 1, 2, 2)$.

4. **解：**$V_1 \cap V_2$**的维数即是方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解空间的维数. 因为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组解空间的维数$4-2=2$，故$\dim(V_1\cap V_2)=2$.

5. **解**：$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，因为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&1\\3&0&-3&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\dim(V_1+V_2)=3$.

6. **解**：(1) 因为

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},$$

故从基(II)到基(I)的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&1\end{pmatrix}$$

(2) 设向量α在基(I)和基(II)下的坐标分别为$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)',Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$，由坐标变换公式知$Y=PX$. 令$X=Y$，则$(P-E)X=0$，即得方程组

$$\begin{cases}-x_1=0\\-x_2=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$$

，解之得$x_1=x_2=x_3=0$，x_4可取任何数.

故方程组的一般解为$X=(0,0,0,k)'$. 故在两组基下有相同坐标的向量全体为$\alpha=k\alpha_4$，这里k为任何数.

7. **解**：显然方程$x_1+2x_2-x_4=0$的基础解系为

$$\beta_1=(-2,1,0,0),\beta_2=(0,0,1,0),\beta_3=(1,0,0,1),$$

于是$V_1 = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

因为$V_1 + V_2 = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2)$，为求$V_1 + V_2$的基与维数，以$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2$为列构作矩阵$A$，对$A$进行初等行变换，

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

知$V_1 + V_2$的维数为4，且$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1$为的一组基.

依据维数公式，$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 2 + 3 - 4 = 1$，依据上述结果知$\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + \alpha_1$，于是$\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \in V_1 \cap V_2$，故$\alpha_2 - \alpha_1 = (0, 1, 2, 2)$是$V_1 \cap V_2$的一组基.

8. **证明：** 先证$\mathbb{R}^{n\times n} = W_1 + W_2$. 任取$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，因为

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A') + \tfrac{1}{2}(A - A') \in W_1 + W_2,$$

故$\mathbb{R}^{n\times n} = W_1 + W_2$.

再证$W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 对任意$B \in W_1 \cap W_2$，有$B' = B$，同时$B' = -B$. 这就导致$B = 0$. 从而$W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

综上所述，$\mathbb{R}^{n\times n} = W_1 \oplus W_2$.

9. **解**：显然，当$a = 0$时，$V_1 = V_2 = L(\alpha_1)$，且此时$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$，从而满足，基为α_1.

任取$\gamma \in V_1 \cap V_2$，则

$$\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = -x_3\beta_1 - x_4\beta_2.$$

这也即是

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + 2x_2 + 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + (2+a)x_2 + 3x_3 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + (3+a)x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + (4+a)x_4 = 0 \end{cases}.$$

因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} = (10+a)a^3,$$

所以欲使$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$，则$\mathrm{rank}(A) = 3$，此时$a = -10$时.

当$a = -10$时，

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组的基础解系为$\gamma = (1,1,1,1)'$. 故$V_1 \cap V_2$的一组基为

$$1 \cdot (-9,1,1,1)' + 1 \cdot (2,-8,2,2)' = (-7,-7,3,3).$$

10. **证明：**$\Rightarrow$ 若$A^2 = E$，利用矩阵秩的性质可得$\mathrm{rank}(A+E)+\mathrm{rank}(A-E)=n$，从而

$$\dim V_1+\dim V_2=n-\mathrm{rank}(A-E)+n-\mathrm{rank}(A+E)=\dim P^n.$$

又对任意$X\in V_1\cap V_2$，因$AX=X, AX=-X$，所以$X=0$，于是$V_1\cap V_2=\{0\}$，故$P^n=V_1\oplus V_2$.

$\Leftarrow$ 对任意$X\in P^n$，则$X=X_1+X_2$，其中$X_1\in V_1, X_2\in V_2$，于是$(A-E)X_1=0,(A+E)X_2=0$，即$AX_1=X_1, AX_2=-X_2$，于是

$$A^2X=A\cdot A(X_1+X_2)=A(X_1-X_2)=X_1+X_2=X.$$

即$(A^2-E)X=0$. 由X的任意性知$A^2-E=0$，即$A^2=E$.