理科专业基础课(71100201)

《代 数 与 几 何》

主讲人: 吕新民

第二章 行列式

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 行列式的展开式定理
- Cramer法则

第1节 行列式的定义

• 二、三阶行列式的定义

定义 二阶行列式，记作D_2，由四个元素$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$组成，这四个元素排成两行两列，规定:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

定义 三阶行列式，记作D_3，由九个元素$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}.a_{32}, a_{33}$组成，这九个元素排成三行三列，规定:

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \ & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

二、三阶行列式的上述定义方法称为对角线法则. 从四阶行列式开始，没有所谓的对角线法则.

- **排列的性质**

由$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组称为一个n级排列. n级排列的总数共有$n!$个，其中排列$12\cdots n$称为

自然排列.

在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，称它们为一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数. 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

如在6级排列513462中，$51, 53, 54, 52, 32, 42, 62$均为逆序，因此这个排列的逆序数为7，记作$\tau(513462) = 7$，这是一个奇排列.

定义 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，这样一个变换称为一个对换.

引理 对换改变排列的奇偶性.

证明： 分两种情形讨论.

(1) 先考察相邻对换的情形，即

$$\cdots jk \cdots \Longrightarrow \cdots kj \cdots .$$

如果$j < k$，经过对换，逆序数增加一个，否则减少一个. 不论是增加一个还是减少一个，排列逆序数的奇偶性都变了.

(2) 再考察一般对换情形，即

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \Longrightarrow \cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots .$$

先把k与i_s对换，再与i_{s-1}对换，$\cdots$，经过s次相邻

对换即变为$\cdots jki_1i_2\cdots i_s\cdots$. 然后，$j$经过$s+1$次相邻对换即变为$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots$. 这样一来，总共经过了$2s+1$相邻对换. 利用前面的结果易知：排列的奇偶性发生了变化.

引理 在全部的$n\ (n\geq 2)$ 级排列中，奇，偶排列的个数相等，各有个$\frac{n!}{2}$.

证明： 设在全部n级排列中共有s个奇排列，t个偶排列，则$s+t=n!$.

现将s个奇排列中的前两个数字对换，得到s个偶排列，由于全部n级排列中只有t个偶排列，于是有

$s \leq t$. 同样地，$t \leq s$. 故$s = t = \frac{n!}{2}$.

• 行列式的定义

三阶行列式的运算具有如下规律:

(1) 三阶行列式中的每一项均是取自不同行不同列的3个元素的乘积.

(2) 三阶行列式共有$3!$项，若行标按自然排列，而列标刚好是三级排列中的一个.

(3) 展开式中带正负号的项刚好各半，且正负号取决于列标排列的奇偶性，偶正奇负.

现在定义一般n阶行列式.

定义 n阶行列式，记为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

依据上述规律，定义为

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的n级排列求和.

上述定义是将行标按自然排列，然后对列标的所有排列求和. 在一个行列式中，行与列的地位是平等的. 因此，定义中也可先将列标按自然排列，然后再对行标的所有排列求和. 即有

$$D_n=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

上述行列式可简单记作$D_n=|a_{ij}|$.

行列式的本质是一种运算，但直接利用行列式定义计算是相当困难的，尤其是当n很大时，如$n=6$，则由定义知D_6此时是720项乘积的代数和. 如何计算一般行列式，先看一个例子.

【例 1】计算n级行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：直接由定义可得

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

上述行列式通常称为上三角行列式. 类似可得下三角行列式也有相同的结果:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注: 上(下)三角行列式的计算结果是非常明显的. 下面我们将利用行列式的性质，将一般行列式转化为上(下)三角行列式，这即是所谓的三角化法.

第2节 行列式的性质

行列式的性质是计算行列式的重要依据，要想熟练掌握行列式运算，必须首先熟练掌握行列式的性质.

由于行列式的行与列地位平等. 因此易得

性质1 行列互换，行列式不变.

性质1表明所有对行成立的结果对列依然成立. 直接利用定义易得

性质2 用一个数乘行列式的某一行等于用这个数乘此行列式，换而言之，行列式某一行的公因子可以提到行列式外.

利用上述性质易得

推论 若行列式某一行为零，则此行列式为零.

性质3 互换行列式某两行，行列式反号.

证明：设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中D_1是交换D的i,j两行的到的. 即当$k\neq i,j$时，$b_{kp}=a_{kp}$，而$b_{jp}=a_{ip}, b_{ip}=a_{jp}$，其中$p=1,2,\cdots,n$. 不妨设$i<j$，由定义得

$$D_1=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$$

其中$1\cdots i\cdots j\cdots n$是自然排列. 因为$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}$，于是

$$D_1=-\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

推论1 若行列式某两行对应元素相同，则行列式为零.

推论2 若行列式某两行对应元素成比例，则行列式为零.

直接由行列式的定义有

性质4
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

进而可得

推论 将某一行的k倍加到另一行，行列式不变.

注: 性质1与性质4的推论是行列式计算经常使用的两个性质，应注意灵活把握.

【例2】计算$D_4=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$.

解：由行列式的性质可得

$$D_4=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 312.$$

【例 3】计算$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解：将第2**列至第**n**列均加到第**1**列，提出第**1**列公因子**$x+(n-1)a$，**得**

$$D_n = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

第3节 行列式的展开式定理

定义 在一个n级行列式$D_n = |a_{ij}|$中，划去a_{ij}所在的第i行与第j列，剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的位置构成一个$n-1$阶行列式，记作M_{ij}，称M_{ij}为a_{ij}的余子式，而称$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式.

引理 如果一个n级行列式$D_n = |a_{ij}|$的第i行除a_{ij}外其余元素均为零，则$D_n = a_{ij}A_{ij}$.

证明：先证特殊情况. 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由定义易得

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} M_{11} = a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} = a_{11} A_{11}.$$

再证一般情况. 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将D_n的第i行依此与前$i-1$行逐行对换，再将第j列依此与左边的$j-1$列逐列对换，这样共经过$(i-1)+(j-1)$次对换，将a_{ij}换到第1行第1列的位置上，所得行列式记为D_n'.

由性质知

$$D_n' = (-1)^{i+j-2} D_n = (-1)^{i+j} D_n.$$

因为a_{ij}在D_n'中的余子式仍然是a_{ij}在D_n中的余子式，从而

$$D_n = (-1)^{i+j} D_n' = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

若$D_n = |a_{ij}|$，先将行列式变为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再用上述引理，可得

行列式展开式定理 一个n阶级行列式$D_n = |a_{ij}|$等于它的任意一行的所有元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D_n = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}$$

这里$k = 1, 2, \cdots, n$.

推论 n阶级行列式$D_n = |a_{ij}|$中某一行的所有元素与另一行相应元素对应的代数余子式乘积的和等于零，即

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0\ (i \neq k).$$

证明：考虑将行列式D_n中第k行元素用第i行元

素取代后所得到的行列式

$$T_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将T_n按第k行展开可得

$$T_n = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn}.$$

由行列式的性质，$T_n = 0$. 故

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0\ (i \neq k).$$

注: 行列式展开式定理建立了一个行列式与其代数余子式之间的关系. 因此，一旦涉及行列式的代数余子式的问题，行列式展开式定理往往是最有力的工具之一.

【例4】设$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & f \\ b_1 & b_2 & f \\ c_1 & c_2 & f \end{vmatrix}$，求$A_{11}+A_{21}+A_{31}$.

解： ①若$f=0$，由定义$A_{11}=A_{21}=A_{31}=0$，从而$A_{11}+A_{21}+A_{31}=0$;

②若$f\neq 0$，由展开式定理的推论知$fA_{11}+fA_{21}+fA_{31}=0$. 因为$f\neq 0$，所以$A_{11}+A_{21}+A_{31}=0$.

【例5】设$\alpha \neq \beta$，计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

解：先按第1列展开得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

再将上述第二个行列式按第1行展开得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

于是可得$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$. 依此递推可得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

因为

$D_1 = \alpha+\beta, D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2,$

所以$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$.

同样地，$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n$. 故$(\alpha-\beta)D_n = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}$，即$D_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

【例6】计算$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} (a_i \neq 0)$.

解：利用行列式展开式定理将原来行列式增加一行一列得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

从最后一列开始，第$i+1$列乘$\frac{1}{a_i}$分别加到第1列得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n.$$

【例 7】证明：范德蒙德行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

证明： 对n作数学归纳法即可.

当$n=2$时，$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$，结论成立.

假设结论对$n-1$阶范德蒙德行列式成立. 现考查n阶范德蒙德行列式. 从第n行起，每行减去前一行的a_1倍得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

由展开式定理结合行列式的性质可得

$$V_n = (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

再由归纳假设可得

$$V_n=(a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\le i<j\le n}(a_j-a_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

第4节 Cramer法则

Cramer法则主要解决一类特殊的线性方程组，即

方程的个数=未知量的个数

的方程组的求解问题，这样的方程组通常称为Cramer型方程组. 对于更具一般意义上的线性方程组的求解问题，在后面章节将会专门涉及.

Cramer法则 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组不仅有解，而且解是唯一的，唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中D_j是将D的第j列元素换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后而得到的行列式.

依据Cramer法则易得

推论 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$，那么它只有零解. 换而言之，如果方程组有非零解，则必有$D = 0$.

【例8】设线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$有非零解，求参数$\lambda$.

解：若齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5(\lambda-1)$$

必为零，即$5(\lambda-1)=0$. 故$\lambda=1$.

习题讨论课二

一、填空题

1. 已知$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则$\begin{vmatrix} 4x & 2x-3y & z \\ 12 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$______.

2. 若行列式$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$，则$x =$______.

3. 行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7-x^2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 15-x^2 \end{vmatrix} =$______.

4. 已知$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$，则$A_{31}+A_{32}-A_{33}-A_{34}=$______.

5. 设D是一个3阶行列式，如果D的每一列元素之和均为-6，且$A_{21}+A_{22}+A_{23}=6$，则$D=$______.

二、解答与证明题.

6. 计算$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$.

7. 计算$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

8. 设n阶行列式$D_n = |a_{ij}|$，其中$a_{ij} = \max\{i, j\}$，求D_n.

9. 计算$D_n = |a_{ij}|$，其中$a_{ij} = |i - j|$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$.

10. 计算$D_n = \begin{vmatrix} x_1+a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix}$，这里每个$a_i \neq 0$.

习题讨论课二参考解答

1. **解：** 先将第2列乘以-3，再将第1列乘以2加到第2列，最后第1列乘以4即得所求行列式，故所求行列式$=(-3)\times 4\times 1=-12.$

2. **解：** 因为

$$\text{原式}=(x+3a)\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 1 & x & a & a\\ 1 & a & x & a\\ 1 & a & a & x\end{vmatrix}=(x+3a)\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 0 & x-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & x-a & 0\\ 0 & 0 & 0 & x-a\end{vmatrix}$$

$$=(x+3a)(x-a)^3,$$

故$x=a$或$-3a.$

3. **解：** 由行列式的性质，当$x=\pm 2,\pm 3$时，行列式有两行元素一样，从而$D=0.$ 又由定义知行列式是关于x的四次多项式，且x^4的系数为$16-5=11$，故$D=11(x+2)(x-2)(x+3)(x-3).$

4. **解：** 由行列式展开式定理得$A_{31}+A_{32}-A_{33}-A_{34}=\frac{1}{2}(a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}+a_{24}A_{34})=0.$

5. **解：** 将D的第一行和第三行均加到第二行，则第二行元素全为-6，再将此行列式按第二行元素展开得$D=-6A_{21}-6A_{22}-6A_{23}=-36.$

6. **解：** 从第n列开始依次加到前一列，可得

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2}-1 & \frac{n(n+1)}{2}-3 & \cdots & 2n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

这是一个上三角行列式，故

$$D_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}(n+1)!.$$

7. **解：** 将第1行的-1倍分别加到第$2,3,\cdots,n$行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}.$$

①当$n\geq 3$时，由于上式行列式中至少有两行成比例，故$D_n=0$.

②当$n=1$时，$D_1=a_1+b_1$.

③当$n=2$时，直接计算易得$D_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$.

8. **解：** 依题意，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

从第2行到第n行均减去第1行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

再按第n列展开，得$D_n = (-1)^{n+1}n.$

9. **解**：由题设，

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

依次用第1行减去第2行，第2行减去第3行，$\cdots$，第$n-1$行减去第n行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

最后再将第1列分别加到2至n列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$$

10. **解**：利用行列式展开式定理将原来行列式增加一行一列得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1+a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2+a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix}.$$

将第1行的-1倍分别加到其他各行上得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_n \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

再从最后一列开始，第$i+1$ $(i=1,2,\cdots,n)$列乘上$\dfrac{1}{a_i}$分别加到第1列得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

故$D_n = (1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$.