期中模拟考试参考答案

一．（每题 3 分，共 27 分）

1\. $\underline{\ 2\ }$ 2. $\begin{cases} z^2+5z+2y+9=0 \\ x=0 \end{cases}$ 3. $x^2+z^2-2y^2=1$

4\. $2\sqrt{3}$ 5. $x-4y+6z=21$ 6. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$

7\. 20π 8. $\int_0^1 dx\int_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} dy\int_0^{\frac{1}{3}(1-x-2y)} f(x,y,z)dz$ 9. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

二．（每题 3 分，共 9 分） 1．C， 2．B， 3．C

三．（8 分）解：因直线 L 与直线 $L_1: x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 相交，由直线 L_1 的参数方程：$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$，

可设直线 L 与 L_1 的交点 P 坐标为 $(t_0,2t_0,3t_0)$。

则由点 P 和点 P_0 的坐标，可知直线 L 的方向向量可表示为 $\vec{s}=\{t_0-1,2t_0-1,3t_0-1\}$.

因直线 L 与直线 L_2 垂直，且直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\{2,1,4\}$，可知：

$\vec{s}\bullet\vec{s}_2=2(t_0-1)+(2t_0-1)+4(3t_0-1)=0$，可得 $t_0=\dfrac{7}{16}$，

带入交点 P 的坐标，可得 $P(\dfrac{7}{16},\dfrac{7}{8},\dfrac{21}{16})$。由直线 L 过点 P 和点 P_0，可得 L 直线的方程为：

$$\frac{x-1}{\frac{9}{16}}=\frac{y-1}{\frac{1}{8}}=\frac{z-1}{-\frac{5}{16}} \quad \text{或} \quad \frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5}。$$

四．（8 分）解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}f_1'+2x\sin yf_2'$； $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f_1'+x^2\cos yf_2'$；

故 $du=(\dfrac{1}{y}f_1'+2x\sin yf_2')dx+(-\dfrac{x}{y^2}f_1'+x^2\cos yf_2')dy$.

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}f_1'+2x\sin yf_2'$，两边对 y 求导，可得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f_1'+\frac{1}{y}(-\frac{x}{y^2}f_{11}''+x^2\cos yf_{12}'')+2x\cos yf_2'+2x\sin y(-\frac{x}{y^2}f_{21}''+x^2\cos yf_{22}'')$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_1'+2x\cos yf_2'-\frac{x}{y^3}f_{11}''+\frac{x^2}{y}\cos yf_{12}''-\frac{2x^2}{y^2}\sin yf_{21}''+x^3\sin 2yf_{22}''$$

五．(8 分)解：由$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 6x - 36 = 0 \\ z'_y = -\dfrac{3}{2}y^2 + 3y = 0 \end{cases}$ 可得驻点为$(-3,0), (-3,2), (2,0), (2,2)$.

因为$z''_{xx} = 12x + 6,\ z''_{xy} = 0,\ z''_{yy} = -3y + 3,$ 所以

在$(-3,0)$点处，$A = -30, B = 0, C = 3$，$AC - B^2 < 0$，

在$(-3,2)$点处，$A = -30, B = 0, C = -3$，$AC - B^2 > 0$，$A < 0$，

在$(2,0)$点处，$A = 30, B = 0, C = 3$，$AC - B^2 > 0$，$A > 0$，

在$(2,2)$点处，$A = 30, B = 0, C = -3$，$AC - B^2 < 0$，

所以，$z(-3,2) = 83$为极大值，$z(2,0) = -44$为极小值。

六．(16 分，每题 8 分) 1．解：积分区域如图所示，交换积分次序

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \iint_D \frac{\tan x}{x} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln(\cos x)\Big|_0^1$$
$$= -\ln(\cos 1)$$

2．解：由题意可知，区域$\Omega:\begin{cases} (x,y) \in D_z \\ 2 \le z \le 8 \end{cases}$，其中$D_z:\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2z} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$. 用截面法，

$$I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2) dv = \int_2^8 dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr$$

$$= 2\pi \int_2^8 z^2 dz = 336\pi$$

七．(8 分)解：因为立体Ω关于yoz面对称，函数$\rho_1(x,y,z) = xy$关于变量x是奇函数，所以物体的质量

$$M = \iiint_\Omega (xy + z) dv = \iiint_\Omega xy dv + \iiint_\Omega z dv = 0 + \iiint_\Omega z dv = \iiint_\Omega z dv.$$

联立方程$z = \sqrt{x^2 + y^2}$，$z = 4$，可知Ω在xoy面上的投影域为$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 16$，

故在柱坐标系下，$\Omega:\begin{cases} \rho \le z \le 4 \\ 0 \le \rho \le 4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$，所以

$$M = \iiint_\Omega z dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \int_\rho^4 z dz = 2\pi \int_0^4 (8\rho - \frac{1}{2}\rho^3) d\rho = 64\pi$$

八．(9 分)解：设平面$x + y + z = 1$上的任一点为$P(x,y,z)$，则

$|PP_1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$， $|PP_2|=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+z^2}$，那么由题意可知，需要求$u(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2+z^2$在条件下的最小值。令

$F(x,y,z,\lambda)=u(x,y,z)+\lambda(x+y+z-1)$，

则由$\begin{cases} F_x'=2(x-1)+2(x-2)+\lambda=0 \\ F_y'=2y+2(y-1)+\lambda=0 \\ F_z'=2(z-1)+2z+\lambda=0 \\ F_\lambda'=x+y+z-1=0 \end{cases}$ 可得唯一驻点为$(1,0,0)$.

根据题意可知，点$(1,0,0)$就是与两定点P_1、P_2的距离的平方和最小的点.

九．(7 分)解：由$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$可得：$\frac{\partial z}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi.$

将上式两边同乘以ρ，得：$\rho\frac{\partial z}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\varphi=xf_x'+yf_y'$.

于是有$I=\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{1}{\rho^2}\rho\frac{\partial z}{\partial\rho}\rho d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\varepsilon^1\frac{\partial z}{\partial\rho}d\rho$

$=\int_0^{2\pi}f(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\varphi,\varepsilon\sin\varphi)d\varphi=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\varphi,\varepsilon\sin\varphi)d\varphi$

由积分中值定理，$I=-2\pi f(\varepsilon\cos\varphi_1,\varepsilon\sin\varphi_1)$，其中$0\le\varphi_1\le2\pi$，故

$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy=-\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}f(\varepsilon\cos\varphi_1,\varepsilon\sin\varphi_1)=-f(0,0)=1$.