理科专业基础课(71100201)

《代 数 与 几 何》

主讲人: 吕新民

第八章 $\lambda-$矩阵

- $\lambda-$矩阵的定义与运算
- $\lambda-$矩阵的标准形
- 行列式因子、不变因子与初等因子
- 矩阵相似的判定

第1节 $\lambda-$矩阵的定义与运算

- **定义与运算**

定义 设P是一个数域，λ是一个文字. 如果一个矩阵中的元素是关于λ的多项式，则称该矩阵为λ-矩阵. 通常，用$A(\lambda), B(\lambda), \cdots$表示.

λ-矩阵的运算与普通数字矩阵的运算一致，且满足相应的运算规律.

对于一个n阶λ-矩阵$A(\lambda)$，可定义行列式运算$|A(\lambda)|$. 有了行列式的概念后，同样可以定义λ-矩阵的秩，即λ-矩阵最高阶非零子式的阶数.

- $\lambda-$矩阵的逆

定义 一个n阶λ-矩阵$A(\lambda)$称为可逆的，如果存在n阶λ-矩阵$B(\lambda)$，使得$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$.

显然，满足$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$的矩阵$B(\lambda)$是唯一的，称$B(\lambda)$是$A(\lambda)$的逆阵，记作$B(\lambda) = A(\lambda)^{-1}$.

设n阶λ-矩阵$A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$，$A_{ij}(\lambda)$表示元素$a_{ij}(\lambda)$的代数余子式，称矩阵$A(\lambda)^* = (A_{ij}(\lambda))'$为$A(\lambda)$的伴随矩阵.

同样地，λ-矩阵的可逆有如下判定定理.

定理 一个n阶λ-矩阵$A(\lambda)$可逆$\Leftrightarrow |A(\lambda)|$是一个非零常数. 特别地，在可逆的条件下，$A(\lambda)^{-1} = \frac{1}{|A(\lambda)|}A(\lambda)^*$.

注: 对于λ-矩阵，可逆蕴涵满秩，反之不成立.

【例 1】 问

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

是否可逆的? 若可逆，求其逆.

解： 因为

$$|A(\lambda)| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = -2$$

故$A(\lambda)$可逆，且

$$A(\lambda)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^3-\lambda & \lambda \\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+1 & -1 \\ -\lambda^3-\lambda+4 & \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

第2节 λ-矩阵在初等变换下的标准形

- $\lambda-$矩阵的初等变换

定义 下面三类变换称为λ-矩阵的初等变换:

(1) 用一个非零的数乘矩阵的某一行(列).

(2) 将某一行(列)的$\varphi(\lambda)$倍加到另一行(列).

(3) 互换某两行(列)的位置.

同样地，λ-矩阵也有类似的初等矩阵.

定义 单位矩阵E经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等矩阵.

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵具有与普通数字矩阵同样的关系.

定义 矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$称为等价，如果$B(\lambda)$是由$A(\lambda)$经过一系列初等变换得到. 记作$A(\lambda) \simeq B(\lambda)$.

等价是λ-矩阵间的一种关系，具有如下性质：

(1) 反身性：$A(\lambda) \simeq A(\lambda)$.

(2) 对称性：$A(\lambda) \simeq B(\lambda) \Longrightarrow B(\lambda) \simeq A(\lambda)$.

(3) 传递性：$A(\lambda) \simeq B(\lambda), B(\lambda) \simeq C(\lambda) \Longrightarrow A(\lambda) \simeq C(\lambda)$.

为考察λ-矩阵的标准形，先证下列结果.

引理 设λ-矩阵$A(\lambda)$的左上角元素$a_{11}(\lambda)\neq 0$，并且$A(\lambda)$中至少有一个元素不能被它除尽，那么一定可以找到一个与$A(\lambda)$ 等价的矩阵$B(\lambda)$，它的左上角元素也不为零，但是次数比$a_{11}(\lambda)$的次数低.

证明：根据$A(\lambda)$中不能被$a_{11}(\lambda)$除尽的元素所在的位置，分三种情形来讨论:

① 若在$A(\lambda)$的第一列中有一个元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，由带余除法

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

其中余式$r(\lambda)\neq 0$，且次数比$a_{11}(\lambda)$的次数低.

现把$A(\lambda)$的第i行减去第一行的$q(\lambda)$倍，得:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

再将此矩阵的第一行与第i行互换，得:

$$A(\lambda)\to\begin{pmatrix} r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}=B(\lambda)$$

$B(\lambda)$的左上角元素$r(\lambda)$符合引理的要求，故$B(\lambda)$即为所求的矩阵.

②若在$A(\lambda)$的第一行中有一个元素$a_{1i}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，证明与(1) 类似.

③若$A(\lambda)$的第一行与第一列的元素都可以被$a_{11}(\lambda)$除尽，但$A(\lambda)$中有另一个元素$a_{ij}(\lambda)$ ($i > 1, j > 1$)不能被$a_{11}(\lambda)$除尽. 令

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda).$$

对$A(\lambda)$做下述初等行变换:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda)+(1-\varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}=A_1(\lambda)$$

即$A_1(\lambda)$的第一行有元素$a_{ij}(\lambda)+(1-\varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda)$ 不

能被$a_{11}(\lambda)$除尽，这即是已证明了的情况(2).

利用引理可得本节的主要结果.

定理 任何一个非零的$m \times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$都等价于下列形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$r \geq 1$，$d_i(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r)$是首项系数为1的多项式，且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r-1)$.

【例2】求λ-矩阵$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$的标准形.

解： 对λ-矩阵作初等变换.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

即为所求的$A(\lambda)$的标准形.

第3节 行列式因子、不变因子及初等因子

定义 设λ-矩阵$A(\lambda)$的秩为r，对于正整数k，$1 \leq k \leq r$，$A(\lambda)$中必有非零的k阶子式. $A(\lambda)$中全部k阶子式的首项系数为1的最大公因式$D_k(\lambda)$称为$A(\lambda)$的k级行列式因子.

如何求行列式因子，先考察下列结果.

定理 初等变换既不改变λ-矩阵的秩，也不改变λ-矩阵的各阶行列式因子.

定理 λ-矩阵的标准形是唯一的.

证明： 设λ-矩阵$A(\lambda)$的标准形为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为$A(\lambda)$与上述标准形有相同的秩与相同的行列式因子，所以$A(\lambda)$的各级行列式因子为

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda),\quad i=1,2,\cdots,r.$$

于是，

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots,d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}.$$

这说明$A(\lambda)$的标准形的主对角线上的非零元素是被$A(\lambda)$的行列式因子唯一决定，故$A(\lambda)$ 的标准形是唯一的.

定义 λ-矩阵$A(\lambda)$的标准形的主对角线上的非零元素$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$称为$\lambda$-矩阵$A(\lambda)$的不变因子.

利用标准形可以求行列式因子. 有时也可以利用行列式因子求不变因子，进而求标准形.

【例3】求$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+3\end{pmatrix}$的标准形.

解： 显然，$A(\lambda)$的行列式因子分别为

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1, D_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

由此易得$A(\lambda)$的不变因子分别为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

故$A(\lambda)$的标准形为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\end{pmatrix}$.

定义 λ-矩阵$A(\lambda)$的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的首项为1 的一次因式方幂的乘积，所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数计算)称为矩阵$A(\lambda)$的初等因子.

【例4】设12阶λ-矩阵$A(\lambda)$的不变因子是

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9},(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$$

求$A(\lambda)$的初等因子.

解：依定义，$A(\lambda)$的初等因子有如下7个

$$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda+1),(\lambda-i)^2,(\lambda+i)^2$$

【例5】设λ-矩阵$A(\lambda)$是一个5阶方阵，其秩为4，初等因子是

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, (\lambda+1)^3,$$

求$A(\lambda)$的标准形.

解： 由题设，$A(\lambda)$不变因子是$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3, d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1), d_2(\lambda)=\lambda, d_1(\lambda)=1$. 故$A(\lambda)$的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

第4节 矩阵相似的判定

下面是有关两个数字矩阵相似的判定条件.

定理 设A, B是数域P上的两个$n \times n$矩阵，以下条件彼此等价:

(1) A与B相似;

(2) $\lambda E - A$与$\lambda E - B$等价;

(3) $\lambda E - A$与$\lambda E - B$具有相同的行列式因子;

(4) $\lambda E - A$与$\lambda E - B$具有相同的不变因子;

(5) $\lambda E - A$与$\lambda E - B$具有相同的初等因子.

【例6】证明：下列三个矩阵中任两个都不相似.

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

证明：因为

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{pmatrix},$$

所以A的初等因子为$\lambda-a,\lambda-a,\lambda-a$.

又

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix} \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-a)^2 \end{pmatrix},$$

所以B的初等因子为$\lambda - a, (\lambda - a)^2$.

而

$$\lambda E - C = \begin{pmatrix} \lambda - a & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^3 \end{pmatrix},$$

所以C的初等因子为$(\lambda - a)^3$.

由于$\lambda E - A, \lambda E - B, \lambda E - C$中任两个的初等因子都不相同，故$A, B, C$中任两个都不相似.