第一章函数 极限 连续

§1 函数

1．解：(1) 当$\dfrac{x}{x-2}>0$且$-1\le\dfrac{x}{3}\le 1$时，函数有意义，所以定义域为：$[-3,0)$，$(2,3]$.

(2) 当$x\le 3$时$\sqrt{3-x}$有意义；又当$x\neq 0$时$\arctan\dfrac{1}{x}$有意义，故函数的定义域为：

$(-\infty,0)$、$(0,3]$.

2．　$x\le 1$时，$f[g(x)]=-x^3, x>1$时，$f[g(x)]=2x+2.$

3．解：$e^{-1}\le x\le 1$。

4 解：令$x=\dfrac{1}{t}$得，$2f(\dfrac{1}{t})+3\dfrac{1}{t}f(t)=4t$，即$2f(\dfrac{1}{x})+3\dfrac{1}{x}f(x)=4x$，

和原式联立得：$f(x)=\frac{12}{5}x^2-\frac{8}{5x}$。

5 解：(1) 由$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$得$2^x=\dfrac{y}{1-y}$，即$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，反函数为$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(2) 当$x\ge 0$时$y\ge 1; x<0$时，$y<0$.反函数为：$y=\begin{cases}x-1, x\ge 1,\\ \sqrt[3]{x}, \quad x<0.\end{cases}$

6．解：(1) $y=u^3, u=\sin v, v=1+2x.$

(2) $y=10^u, u=v^2, v=2x-1$；

(3) $y=\arctan u, u=v^2, v=\tan(a^2+w), w=e^x.$

7.证：当$|x|\ge 1$时，$x^2\le x^4$，因此$\left|\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\right|\le 1$；当$|x|<1$时，$\left|\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\right|\le 1+x^2\le 2$；所以对任意

$x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|\le 2$，即$f(x)$有界。

8.解：$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\dfrac{2v}{r}$。

§2　　数列极限定义及性质

1．解：(1)（错）例如$x_n=1+\frac{(-1)^n n}{2n+1}, a=\frac{3}{2}$;　(2)（对）　(3)（对）.

2．(1) 证：$\because \left|\frac{2n-1}{4n+3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2(4n+3)}<\frac{5}{8n}<\frac{1}{n}$

$\therefore$任给$\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,当$n>N$时，有$\left|\frac{2n-1}{4n+3}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$.由定义:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{4n+3}=\frac{1}{2}$.

(2) 证：

$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$,$\therefore$ **任给$\varepsilon>0$,取$N=[\frac{1}{\varepsilon^2}]$,当$n>N$时，**

$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon.\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$

3．证：$\because \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\therefore$任给$\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，又$\big||x_n|-|a|\big|\le$ $|x_n-a|<\varepsilon(n>N$时$)$,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.反之不一定成立，如$x_n=(-1)^n$。

4．证：$\because \lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，$\therefore$存在$M>0$,有$|x_n|\le M(n=1,2,\cdots)$. 又$\because \left|n\sin\frac{x_n}{n^2}\right|\le\frac{|x_n|}{n}\le\frac{M}{n}$.

$\therefore$任给$\varepsilon>0$,取$N=[\frac{M}{\varepsilon}]$,当$n>N$时，有$\left|a\sin\frac{x_n}{n^2}-0\right|\le\frac{M}{n}<\varepsilon$,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{x_n}{n^2}=0$.

5. 证:$\because \{x_n\}$有界,$\therefore$存在$M>0$,使得$|x_n|\le M(n=1,2,\cdots)$.又$\because \lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,$\therefore$任给$\varepsilon>0$, 存在$N>0$,当$n>N$时有$|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,而$|x_ny_n|=|x_n||y_n|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

（二）数列极限运算法则及存在准则

1．解：(1)（对）

(2)（错）例如：$x_n=\frac{1}{n},y_n=\sin n,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=0$存在.

(3)（错）例如：$u_n=\frac{1}{n^2+1},v_n=\frac{1}{n},u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$,但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

2．解：(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n+1}{2n^3+3n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}}=2.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n[(-\frac{2}{3})^n+1]}{3^{n+1}[(-\frac{2}{3})^{n+1}+1]}=\frac{1}{3}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})}=1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{3n}=e^{-3}$.

(6)记 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,则 $2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

$\therefore S_n=2S_n-S_n=1+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})+(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2})+\cdots+(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}.\therefore\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$

3．证：$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a\neq0,\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{u_n}{v_n}}=\frac{1}{a},\therefore\left\{\frac{v_n}{u_n}\right\}$有界，而 $v_n=\frac{v_n}{u_n}\cdot u_n$ 由数列极限的定义及性质和上节习题 5 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$。

4．证 $x_n\uparrow,0<x_1<2$，设 $x_n<2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$，$\therefore$数列 x_n 有界,.. $\{x_n\}$ 有极限，设极限为 a,则 $a=\sqrt{2+a}$,解得 $a_1=2,a_2=-1$（舍去），$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2.$

5．解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{narctgnx}{\sqrt{n^2+n}}=\begin{cases}\frac{\pi}{2},x>0,\\0,x=0,\\-\frac{\pi}{2},x<0.\end{cases}$

6．解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\begin{cases}1, x>0,\\0, x=0,\\-1, x<0.\end{cases}$

7．证：$\{x_n\}$单调增加，且 $x_n=\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n+1}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=$

$\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}<1.\therefore\{x_n\}$单调增加有上界，故有极限.

§3　　函数极限的定义及性质

1．解：（1）任给$\varepsilon>0$，取$M=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当$x>M$时，

$\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\cos x|}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$成立.$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}=0$;

（2）$\because\left|\sqrt{x}-3\right|=\dfrac{|x-9|}{\sqrt{x}+3}<\dfrac{|x-9|}{3}$，$\therefore$任给$0<\varepsilon<1$取$\delta=3\varepsilon$，当$0<|x-9|<\delta$时，

有$\left|\sqrt{x}-3\right|<\dfrac{|x-9|}{3}<\varepsilon.\therefore\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=3$;

2．证：

$\because\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<0$，由极限定义，取$\varepsilon=-\dfrac{A}{2}$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$|f(x)-A|<-\dfrac{A}{2}$，即：$\dfrac{3A}{2}=A+\dfrac{A}{2}<f(x)<A-\dfrac{A}{2}<0,\therefore f(x)<0.(0<|x-x_0|<\delta)$.

3．解：$\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1$，而$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}0=0$，$\therefore\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在，图略.

§4 无穷小量与无穷大量

1．B

2．0

3．$x\to-1$.

4．D

§5　函数极限运算法则

1　$DBDDB$

2. 解：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^{70}(8x-1)^{30}}{(5x+2)^{100}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3+\frac{1}{x})^{70}(8-\frac{1}{x})^{30}}{(5+\frac{2}{x})^{100}}=\dfrac{3^{70}8^{30}}{5^{100}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x+1)}{(2x^2-1)(2x+1)}=\dfrac{1}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}\sin x}{1-\frac{1}{x}\cos x}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{t\to1}(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{2}{1-t^2})=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-1}{1-t^2}=-\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{2}{3}$.

3. $\because\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0\ \therefore\lim\limits_{x\to-1}(x^3-ax^2-x+4)=-1-a+1+4=0, a=4$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-5x+4)}{x+1}=10, m=10$.

4.解： $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+2x-1)=-1$.

$\therefore\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在..

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+2x-1)=2, \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2, \therefore\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

§6　极限存在准则　两个重要极限

1． 解：(1) $\because\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}<\dfrac{n}{n+\sqrt{1}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{1}}=1, \therefore\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}})=1$.

（2）$\because \frac{1}{2}=\frac{\sqrt[n]{1}}{2}\le\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\le\frac{\sqrt[n]{3}}{2}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}}{2}=\frac{1}{2}$, $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}$.

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=2$ 。

（4）$\lim\limits_{x\to0+0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{\pi}{x}}$ $\lim\limits_{x\to0+0}\left(1+(\cos\sqrt{x}-1)\right)^{\frac{\pi}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0+0}\pi\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$。

（5）令$1-x=t$,则$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\sec\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}$.

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x+6})^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x+6})^{\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

（7）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}=$

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x.\cos x}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{4}$

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}x\csc\frac{1}{x}\ln(1-\frac{2}{x^2})=-2$

§7　　无穷小的比较

1． 解：（1）$\because\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}-3x^3+x^2+\sin x}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-3x^{8/3}+x^{5/3}+x^{2/3})=1$,

$\therefore x\to0$时原式是x的$\frac{1}{3}$阶无穷小；

（2）$\because\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\frac{1}{2}$,$\therefore x\to0$时原式是$x$的3阶无穷小；

2． 解：（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2}=2$；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x^2}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2}=\frac{3}{4}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=0$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3}}{x^2}=\frac{1}{3}$；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{a}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\ln a}{n}=0$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{(5^x-1)\arcsin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{2x\ln 5\cdot x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)\cdot(\tan x+\sin x)}{2\ln 5\cdot x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2\ln 5\cdot x^3}\cdot\frac{\tan x+\sin x}{x}=\frac{1}{2\ln 5}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(e^{x^2}-1)}{\tan^3 x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)^2}{2x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}$.

3.解： $\because\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim\limits_{x\to 1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3.$

$\therefore$无穷小$1-x$是$1-\sqrt[3]{x}$的同阶无穷小.

4.解：

$\because\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}-1\right)=0,\therefore\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+f\left(x\right)\sin 2x}-1\right)=0,\therefore\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)\sin 2x=0$

$\therefore 2=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f\left(x\right)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f\left(x\right)\sin 2x}{3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right),\therefore\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=6$

5.解：当$x=0$时，原式=1，

当$x\neq 0$时，原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$。

§8　连续及连续函数的性质

（一）

1． 解：（1）函数无定义的点为$x=0,x=\pm1,\because \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=1,\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=-1$

$\therefore x=0$为第一类间断点。

又$\because \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore x=1$为可去间断点，补充定义$y(1)=\dfrac{1}{2}$，

则函数在$x=1$处连续，而$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\infty$，故$x=-1$为第二类间断点.

（2）函数无定义的点$x=2,\because \lim\limits_{x\to2^+}\arctan\dfrac{1}{2-x}=-\dfrac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{\pi}{2},\therefore x=2$为第一类间断点(跳跃)

（3）$x=0,\because$原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-x)}{\pi x}=\dfrac{1}{\pi}$,是可去间断点；

$x=1,\because$原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-x)}{\pi(1-x)}=\dfrac{1}{\pi}$,是可去间断点；

x是整数时（且不为0或1),为第二类间断点；

（4）函数在$x=0$与$x=1$无定义,$\because \lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty,\therefore x=0$为第二类间断点，又$\because$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1,\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0,\therefore x=1$为第一类间断点(跳跃).

2．解：$f(0-0)=k-1$，$f(0+0)=-2$，

$\therefore$当$k=f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$时，$f(x)$在点$x=0$处连续。

3.解：$f(0-0)=-\dfrac{a}{2},f(0+0)=b$，$f(1-0)=a+b$，$f(1+0)=\dfrac{\pi}{2}$，

因为连续，所以$b=-\dfrac{a}{2},a+b=\dfrac{\pi}{2}$，所以$a=\pi,b=-\dfrac{\pi}{2}$。

4.解：当$|x|<1$时，f(x)=$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$，当 x=1 时 f(x)=$\dfrac{1+a+b}{2}$，

当 x=-1时 f(x)=$\dfrac{-1+a-b}{2}$，当 $|x|>1$ 时 f(x)=$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\dfrac{1}{x}$

由分段函数在分段点处连续性讨论可得 a=0, b=1。

（二）

1.证明：设$f(x)=x\cdot 2^x-1$,则$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=-1<0,f(1)=1>0$

$f(1)=e-1>1>0$,由介值定理，存在$\zeta\in(\frac{1}{2},1)$ 使$f(\zeta)=0$,即$\zeta 2^{\zeta}=1$,也即ζ为方程的根。下证唯一性：

显然，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调增加（严格），故若$x<\zeta$时，$f(x)=f(x)-f(\zeta)$

$<0,x>\zeta$时，$f(x)=f(x)-f(\zeta)>0$,即当$x\neq\zeta$时，$f(x)\neq 0$,即方程无异于ζ的根.

2.证明：设$F(x)=x-f(x)$则由题设$F(x)$在$[0,1]$上连续，$F(0)=-f(0)\le 0,F(1)=$

$1-f(1)\ge 0$若$F(0)=0$或$F(1)=0$，则可取$\zeta=0$或$\zeta=1$结论成立；否则$F(0)<0$,

$F(1)>0$,又连续函数介值定理，存在$\zeta\in(0,1)$使得$F(\zeta)=0$,即$f(\zeta)=\zeta$.

3．证明：设$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$,取$\varepsilon=1$,由极限定义，存在$0<\delta<b-a$,使当$0<b-x<\delta$,

即$x\in(b-\delta,b)$时，$|f(x)-A|<\varepsilon=1$，

从而$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|$，又因f(x)在闭区间$[a,b-\delta]$上连续，从而有界，设在$[a,b-\delta]$上，$|f(X)|\le M$，记N=max $\{M,|A|+1\}$

则当$x\in[a,b)$时，恒有$|f(x)|\le N$。

4．证明：设$F(x)=f(x)-f(x+a)$,则$F(x)$在$[0,a]$上连续且$F(0)=f(0)-f(a)=$

$f(2a)-f(a),F(a)=f(a)-f(2a)=-F(0)$.若$F(0)=0,\zeta=0$即为所求，若$F(0)\neq 0$,

则$F(0)F(a)=-F^2(0)<0$,故由介值定理，存在$\zeta\in(0,a)$使$F(\zeta)=0$即$f(\zeta)=f(\zeta+a)$.

5.解：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$；

又$\because\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\sin(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})=\sin(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})=0$,

而$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le 1$,故$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan(\ln\frac{4x^2+1}{x^2+4x})=\tan\left[\ln(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1}{x^2+4x})\right]=\tan(2\ln 2).$

6. 证明：当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\le\ln(1+x)$，从而，当 $x\in(0,1)$ 时，$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\frac{\ln(1+x)}{x}$，

$\lim\limits_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$，

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to0^+}\left|\frac{a_1\ln(1+x)}{x}+\frac{a_2\ln(1+2x)}{x}+\ldots+\frac{a_n\ln(1+nx)}{x}\right|=|a_1+2a_2+\ldots+na_n|$

$\therefore|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\le1$

第二章　　导数及其运算（一）

§1 导数概念

1．（1）$S(1)=10-\frac{1}{2}g,S(1+\Delta t)=10+10\Delta t-\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2,$

$\Delta S=S(1+\Delta t)-S(1)=10\Delta t-g\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2.\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=10-g-\frac{1}{2}g\Delta t.$

（2）瞬时速度 $v(1)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=10-gt.$

$\Delta S=S(1+\Delta t)-S(1)=10(1+\Delta t)-\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2-10+\frac{1}{2}g=10\Delta t-g\Delta t-$

$\frac{1}{2}g(\Delta t)^2,\therefore$ 平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=10-g-\frac{1}{2}g\Delta t.$

瞬时速度 $v(1)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=10-g.$

2. 充要条件.

3. f (x)在 x=1 可导，则 $f'(1)$存在，亦即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(\frac{1}{\Delta x})^a\cos\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\Delta x)^{-(1+a)}\cos\frac{1}{\Delta x}$ 存在， $\therefore$ a+1<0　即 a<−1.

4.解：$b=f(0)=1$，

$\because f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0-}\frac{e^{ax}-1}{x}=a,\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0+}\frac{1-x^2-1}{x}=0,$

所以，$a=0$。

5.解: 设 f(x) 在点(1,1) 处, 切线为 y=ax+b 则 1=a+b $a=f'(1)=n$，当 y=0 时,

$$\xi_n=-\frac{b}{a}=-\frac{1-n}{n}，\quad 故\lim_{n\to\infty}f\left(\xi_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

6. 解：$f'(1)=2018$。

7.（1）$y'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$$

$\therefore y=|\sin x|$在$x=0$处不可导，但$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}|\sin x|=\sin 0=0$

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}|\sin x|=0 \quad \therefore y=|\sin x|$在$x=0$处连续;

（2）$y'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0,\therefore$函数在$x=0$处可导，从而必定连续。

8. $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$。

9. $$f_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x^2+x+1)=3,$$

$$f_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2-x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(-1-x)=-2.$$

10. 解：为切点为x_0，则在切点处函数值相等，导数值（斜率）相等，即有

$$ax_0=\ln x_0,a=\frac{1}{x_0},\therefore ax_0=1,即\ln x_0=1,故x_0=e,a=\frac{1}{e}.$$

11.解：$$\lim_{A\to0}\frac{f(a+nh)-f(a-mh)}{h}=\lim_{A\to0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{h}-\lim_{A\to0}\frac{f(a-mh)-f(a)}{h}=$$

$$n\lim_{A\to0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{nh}+m\lim_{A\to0}\frac{f(a-mh)-f(a)}{-mh}=(n+m)f'(a).$$

12．解：$-1<x<1$时，$y'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$，$x>1$时，$y'=1, x<-1$时，$y'=-1$,

$$y'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

$$y'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}=-\frac{\pi}{2},$$所以$y'(1)$不存在。

$$y'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x+1}=\frac{\pi}{2},$$

$$y'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1-x}{x+1}=\infty,$$所以$y'(-1)$不存在。

13.解：$f(0)=0, f'(0)=(\sin x)'\big|_{x=0}=1$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}nf(\frac{2}{n})=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0}=2f'(0)=2$。

§2　导数的运算法则

1．（1）$y'=\ln x+1+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

（2）$y'=a^x\cdot x^a\ln a+a^{x+1}x^{a-1}$

（3）$y'=\dfrac{\sec^2x(1+\cos x)+\sin x tgx}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\sec^2x+\sec x+\sin^2x\sec x}{(1+\cos x)^2}$.

（4）$y'=\dfrac{(2ax+b)(x^n+1)-nx^{n-1}(ax^2+bx+c)}{(x^n+1)^2}$

（5）$y'=\sin x+x\cos x\ln x+\sin x\ln x$.

（6）$y'=(1+x)e^x\csc x-(xe^x-1)\csc x tgx$.

（7）$y'=2^x\ln2(x\cos x+\sin x)+2^x(\cos x-x\sin x+\cos x)$

$=2^x[(x\cos x+\sin x)\ln2+2\cos x-x\sin x]$.

二　复合函数求导法则

1．（1） $y'=\frac{4}{2\sqrt{3+4x}}=\frac{2}{\sqrt{3+4x}}$.　　　（2） $y'=\cos(\sin x)\cos x$.

（3） $y'=\frac{1}{\tan x}\sec^2 x=\frac{1}{\sin x\cos x}$.

（4） $y'=3\sec^2 3x\sec 3x tg3x\cdot 3=9\sec^3 3x tg3x$.

（5） $y'=\frac{1}{\arccos 2x}\frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2=-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}$.

（6） $y'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$.　　　（7） $y'=e^{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

（8） $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{2t}{x})^x=te^{2t}$， $f'(t)=(1+2t)e^{2t}$

2．解： $f'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$

$$\because\quad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x}=1,$$

$\therefore$　$f'(0)$不存在。

3.（1） $y=e^{\sin x\ln x}$,

$$y'=e^{\sin x\ln x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}).$$

(2) $y=e^{\cos x\ln(\sin x)}$,

$$y'=e^{\cos x\ln(\sin x)}(-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x})=(\sin x)^{\cos x}(-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}).$$

（3） $y'=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}+4\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}=2\sqrt{4-x^2}.$

（4） $$\begin{aligned}y'&=\cos(\ln 2x)+\sin(\ln 2x)-\sin(\ln 2x)+\cos(\ln 2x)\\&=2\cos(\ln 2x).\end{aligned}$$

（5） $y'=(\ln x)^x(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x})$

（6） $y'=\sec x.$

（7） $\ln y=\dfrac{1}{2}[\ln(3x-2)-\ln(5-2x)-\ln(x-1)],$

两边求导得： $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{2}[\dfrac{3}{3x-2}-\dfrac{-2}{5-2x}-\dfrac{1}{x-1}],$

$\therefore y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3x-2}{(5-2x)(x-1)}}[\dfrac{3}{3x-2}+\dfrac{2}{5-2x}-\dfrac{1}{x-1}].$

（8） $\ln y=2\ln(x-3)+\ln(2x-1)-3\ln(x+1),$

$\therefore y'=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}[\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{x+1}].$

4. $\dfrac{du}{dx}=1+\cos x,\therefore\dfrac{dy}{du}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{du}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\dfrac{(a+x)(x+\sin)^2}{1+\cos x}.$

5．解： D

6.（1） $y'=2\sin x\cos xf'(\sin^2 x)-2\cos x\sin xf'(\cos^2 x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$

（2） $y'=e^x f(e^x)+e^{f(x)}f'(x)$

7.（1） $y'=e^x\arcsin x\ln x+\dfrac{e^x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{x}e^x\arcsin x.$

（2）$y' = 2x\arctan x + 1.$

8．依题设条件可知 $f(2)=1, \therefore f'(2) = -\sqrt{3}.$

五 隐函数求导法与参数方程所确定的函数求导法

1． 解：（1）解：先取对数：$x\ln(\cos y) = y\ln(\sin x)$, 求导得：

$$\ln(\cos y) + x\frac{-\sin y}{\cos y}y' = y'\ln(\sin x) + y\frac{\cos x}{\sin x},\text{解得，} y' = \frac{\ln(\cos y) - yctgx}{xtgy + \ln(\sin x)}.$$

（2）解：求导得： $2^x\ln 2 + 2^y\ln 2\cdot y' = 2^{x+y}\ln 2\cdot(1+y'),$

解得：$y' = \dfrac{2^x - 2^{x+y}}{2^{x+y} - 2^y} = 1 - 2^y.$

(3) 求导得：$y' + 2xy^3 + x^2 3y^2 y' + y'e^x + ye^x = 0$，

当 $x=0$ 时，$y = -\dfrac{1}{2}$，所以 $y'(0) = \dfrac{1}{4}$。

(4) 求导得：$e^{x+y}(1+y') + \cos xy(y + xy') = 0$，

所以：$y' = -\dfrac{e^{x+y} + y\cos xy}{e^{x+y} + x\cos xy}$，

当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0) = -1$。

2． 解： $e^{x+y}(2+y') + \sin xy(y + xy') = 0$

令 $x=0$，$y=1$，所以 $y'(0) = -2$，

切线： $y - 1 = -2(x-0)$，

法线：$y - 1 = \dfrac{1}{2}(x-0)$。

3.解：（1）$k = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \left.\dfrac{-2\sin 2t}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -4\sin t\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}$，

切线方程：$y = -2\sqrt{2}(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2})$。

法线方程：$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$。

（2） 解：$\frac{dx}{dt}=e^t(\sin t+\cos t),\frac{dy}{dt}=e^t(-\sin t+\cos t),$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

4.解：$x'(t)=\frac{1}{1+t^2}$，

$2y'-y^2-2tyy'+e^t=0$，所以$y'(t)=\frac{y^2-e^t}{2-2ty}$，

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2-2ty}$。

5.解：将曲线方程化为参数方程：$\begin{cases}x=5(1-\cos\theta)\cos\theta\\ y=5(1-\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{5\cos\theta-5\cos 2\theta}{5\sin 2\theta-5\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+1$.所求的切线方程为：$y=(\sqrt{2}+1)x+\frac{5\sqrt{2}}{2}-5$.

六高阶导数

1. 解：（1）$y'=2e^{2x}\sin 3x+3e^{2x}\cos 3x=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x),$

$y''=e^{2x}(4\sin 3x+6\cos 3x+6\cos 3x-9\sin 3x)=e^{2x}(12\cos 3x-5\sin 3x)$。

（2）$y=2x^2+x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{x}\arctan x, y'=4x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{4}{x^2}\arctan x+\frac{4}{x(1+x^2)},$

$$y''=4+\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}-4(-\frac{2\arctan x}{x^3}+\frac{1}{x^2(1+x^2)})-\frac{4(1+3x^2)}{(x+x^3)^2}.$$

（3）$y=e^{x\ln x}, y'=e^{x\ln x}(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$

$y''=e^{x\ln x}[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}], y''=x^x[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}].$

2. 解：$y'=f'(\frac{1}{x^2})(-2x^{-3}), y''=f''(\frac{1}{x^2})(-2x^{-3})^2+f'(\frac{1}{x^2})6x^{-4}$

3. 解：$f(x)=\begin{cases}4x^2, & x\ge 0,\\ 2x^2, & x<0,\end{cases}$ $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x^2-0}{x}=0$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2-0}{x}=0$

所以 $f'(0)=0$，$f'(x)=\begin{cases}8x, & x\ge 0,\\ 4x, & x<0,\end{cases}$

因为 $f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{8x-0}{x}=8, f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4x-0}{x}=4$，所以 $f''(0)$ 不存在，从而 $n=1$。

4. 因 f(x)=$-f(-x)$，两边对 x 求导得 $f'(x)=f'(-x), f''(x)=-f''(-x)$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$-x\in(0,+\infty)$，此时 $f'(x)=f'(-x)>0, f''(x)=-f''(-x)<0$

填 (C)

5.解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t, \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dt})\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2) \qquad (t\ne 0).$。

6. 解：方程两边对 x 求导 $e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'(y)y'=e^y y'$，

从而 $y'=\dfrac{e^{f(y)}}{e^y-xe^{f(y)}f'(y)}=\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$，$\quad y''=-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f'(y}{x^2[1-f(y)]^3}$。

7. 解：$y'=\dfrac{x+y}{x-y}, y''=\dfrac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\dfrac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$

8．解：$y^{(15)}=(x^2+x+1)(\cos 2x)^{(15)}+C_{15}^1(2x+1)(\cos 2x)^{(14)}+C_{15}^2 2(\cos 2x)^{(13)}$

$=(x^2+x+1)\cdot 2^{15}\cdot\cos(2x+\dfrac{15}{2}\pi)+15(2x+1)\cdot 2^{14}\cdot\cos(2x+7\pi)+15\times 14\cdot 2^{13}\cos(2x+\dfrac{13}{2}\pi)$

$=2^{15}(x^2+x+1)\sin 2x-2^{14}(30x+15)\cos 2x-210\cdot 2^{13}\sin 2x$。

9.解：$y^{(10)}(0)=-90\times 7!$。

10：（1）$y'=\dfrac{1}{x-2}, y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=(-1)^{(n-1)}(n-1)!(x-2)^{-n}$.

（2）$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}, y^{(n)}=(-1)^n n!\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-$

$(-1)^n n!\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}=(-1)^n n![\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}]=$

$$(-1)^n n!\frac{(x-1)^n+(x-1)^{n-1}(x-2)+(x-1)^{n-2}(x-2)^2+\cdots+(x-2)^n}{(x^2-3x+2)^{n+1}}.$$

（3）$y=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}\left(1-\cos 4x\right)$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,\qquad y^{(n)}=\frac{1}{4}.4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

（4）$y=\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]$,

$$\therefore y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^n\sin[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}]+(a-b)^n\sin[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}]\right\}.$$

11.解：$f(0)=0$，因为$\frac{x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x^3+x}{x}$，

所以由夹逼准则：$f'(0)=1$。

12.解：$y'=f'(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，因为$f'(x)=\frac{1-x}{1+x}$，

所以$y'=f'(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

所以$y'|_{x=0}=1$。

13 解：因为$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}$，$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$，

所以$\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{y=f(0)}=-\frac{1}{9}$。

14 解：建立直角坐标系，直线 OA 方程为$h(t)=2R(t)$，在时刻t，容器中水的体积为：

$V=\frac{1}{3}\pi R^2(t)h(t)=\frac{1}{12}\pi h^3(t)$,两端对$t$求导有：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi h^2(t)}{4}h'(t),\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=5}=\frac{25\pi}{4}h'(t)|_{h=5},$$

§3 微分及其应用

1．解：$\Delta y=5(x_0+\Delta x)+(x_0+\Delta x)^2-5x_0-{x_0}^2=5\Delta x+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$，

$\Delta y\big|_{x_0=2,\Delta x=0.001}=5\times 0.001+2\times 2\times 0.001+(0.001)^2=0.009001.$

$dy\big|_{x_0=2,\Delta x=0.001}=(5+2\times 2)\times 0.001=0.009.$

2. (1) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+c$　(2) ln(1+x)+c

(3) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+c$　(4) $2\sqrt{x}+c$　(5) $\dfrac{1}{3}tg3x+c$

3. 解：设圆半径为R,其增量$\Delta R=1$,圆面积$S=\pi R^2, dS=2\pi R\Delta R,$

故$R=\dfrac{dS}{2\pi\Delta R}=\dfrac{6\pi}{2\pi\cdot 1}=3$(厘米).

4．解：（1）$dy=\dfrac{\dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}=\dfrac{-xdx}{|x|\sqrt{1-x^2}}(x\neq 0);$

（2）两边取微分得：$\dfrac{d(\frac{y}{x})}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2},$

$$\frac{\dfrac{xdy-ydx}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2},\therefore dy=\frac{x+y}{x-y}dx.$$

（3）$dy=2\sin(1+2x^2)\cdot\cos(1+2x^2)\cdot 4xdx=4x\sin(2+4x^2)dx;$

（4）两边取微分得：$\sec^2 y\cdot dy=dx+dy$　　$\therefore dy=c\tan^2 y\cdot dx$

5．解：（1）$dy=\cot^2 ydx$；（2）$dy=\dfrac{x+y}{x-y}dx.$

6. 解：（1）$\dfrac{d(\sin x^2)}{dx}=\dfrac{\cos x^2\cdot 2xdx}{dx}=2x\cos x^2.$

$\dfrac{d(\sin x^2)}{d(x^2)}=\dfrac{\cos x^2\cdot 2xdx}{2xdx}=\cos x^2$.或$\dfrac{d(\sin x^2)}{d(x^2)}=\dfrac{\cos x^2 d(x^2)}{d(x^2)}=\cos x^2$

（2）$$\frac{dy}{d(x^3)}=\frac{(\sin 2x)^{x^3}(3x^2\ln\sin 2x+\frac{2x^3\cos 2x}{\sin 2x})dx}{3x^2dx}$$

$$=(\sin 2x)^{x^3}(\ln\sin 2x+\frac{2x\cot 2x}{3})。$$

7. 解：扇形面积$S=\frac{1}{2}\alpha R^2$,当$R=100,\alpha=\frac{\pi}{3},\Delta\alpha=-\frac{\pi}{360}$时，

$\Delta S\approx dS=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha=\frac{1}{2}\times 10000\times(-\frac{\pi}{360})=-\frac{125}{9}$(厘米^2).

当$R=100,\alpha=\frac{\pi}{3},\Delta R=1$时，$\Delta S\approx dS=\alpha RdR=\frac{\pi}{3}\times 100\times 1=\frac{100\pi}{3}$(厘米^2).

第三章 §1 微分中值定理

1．解：$\because y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6})=\ln\frac{1}{2}, y'=\frac{1}{\sin x}\cos x=\cot x.$

$\therefore y=\ln\sin x$在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上满足罗尔定理的条件.令$y'=0$,得$x=\frac{\pi}{2}$,$\therefore \xi=\frac{\pi}{2}.$

2．解：$\because f(1-0)=f(1+0)=f(1)=2$,$\therefore f(x)$在$x=1$处连续.$\therefore f(x)$在区间

$[\frac{1}{e},3]$上满足拉格朗日定理的条件.又$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & \frac{1}{e}\le x<1,\\ -\frac{1}{x^2}, & 1<x\le 3,\end{cases}$ 而

$$\frac{f(3)-f(\frac{1}{e})}{3-\frac{1}{e}}=\frac{-5e}{3(3e-1)}=\frac{-5e}{9e-3},\text{令}f'(x)=\frac{-5e}{9e-3},\text{解得：}x_1=\frac{9e-3}{5e},x_1=\sqrt{\frac{9e-3}{5e}},$$

$x_1=\frac{9e-3}{5e}$（舍去）,故$\xi=\sqrt{\frac{9e-3}{5e}}$,

3.证明：设 F(x)=$\frac{f(x)}{x}$，由题设知，F(x)在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

又 F(a)=$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=F(b)$，由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$使$F'(\xi)=0$

即 $\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$

4．证明：f (x) 在$[a,c]$,$[c,b]$上满足拉格朗郎日中值定理，因此，至少分别存在一点

$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$ 使得$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$,$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$,

由 A,B,C 三点位于同一直线上，因此$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$,不妨设$\xi_1<\xi_2$,在$[\xi_1,\xi_2]$上,

$f'(x)$满足罗尔定理条件，故至少存在一点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得$f''(\xi)=0$

5 证明：（1）令$f(x)=\ln(1+x)$,则$f'(x)=\frac{1}{1+x}$,在[0，x]上应用拉格朗日中值定理，

得：$$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}x,\zeta\in(0,x).$$

$\because 1+x>1+\xi>1, \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x, \therefore \dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

（2）令$f(x)=\arctan x$,则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理，得：

$\arctan b-\arctan a=\dfrac{1}{1+\xi^2}(b-a), \xi\in(a,b) \quad \because \dfrac{1}{1+\xi^2}<1, \left|\dfrac{1}{1+\xi^2}(a-b)\right|<|a-b|$

$\therefore |\arctan a-\arctan b|<|a-b|$.当$a=b$时，显然等号成立.

6 由$f(2)=f(1)=0$得$F(2)=f(1)=0$，并且$F(x)$满足罗尔定理，所以

存在$\xi_1\in(1,2)$使得$F'(\xi_1)=0$

又$F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$，显然$F'(1)=0$，并且$F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$满足

罗尔定理，所以存在$\xi\in(1,\xi_1)$使得$F''(\xi)=0$。

7 证明：对$e^x, f(x)$用柯西中值定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{e^\xi}{f'(\xi)}=\dfrac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}$，

对$f(x)$用拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(a,b)$，使得对$f(b)-f(a)=f'(\eta)(b-a)$，

由上述两式，得 $\dfrac{f'(\eta)}{f'(\xi)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\xi}$。

8..证明：当$a>0$时，对$f(x)$在[0，a]上应用拉格朗日中值定理，得：

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\zeta_1)$,即$\dfrac{f(a)}{a}=f'(\zeta_1), \zeta_1\in(0,a)$.对$f(x)$在$[b,a+b]$上应用拉格朗

日中值定理,得：$\dfrac{f(a+b)-f(b)}{(a+b)-b}=f'(\zeta_2)$,即$\dfrac{f(a+b)-f(b)}{a}=f'(\zeta_2), \zeta_2\in(b,a+b)$

显然ζ_1,ζ_2均在[0，c]上单调下降，$0<\zeta_1<a\le b<\zeta_2<a+b\le c$.又因为$f'(x)$在

[0，c]上单调下降，$\therefore f'(\zeta_1)\le f'(\zeta_2)$.即$\dfrac{f(a)}{a}\ge\dfrac{f(a+b)-f(b)}{a}$,

$f(a+b)\le f(a)+f(b)$.当$a=0$时，不等式变为等式。

§2 洛必达法则

1. （1）解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

（2）解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{-\dfrac{x^3}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sin x})}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$

（3）解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^2\cdot x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x+x}{x}\cdot\dfrac{\tan x-x}{x^3})=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{x^2}=\dfrac{2}{3}.$

（4）解：原式=$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}$ $\qquad (x=\dfrac{1}{t})$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{2t(1+t)}=\dfrac{1}{2}.$

（5）解：

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{\sin x-x}{x})^{\frac{x}{\sin x-x}\frac{\sin x-x}{\tan x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\tan x(1-\cos x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sin x-x)}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\cos x-1)}{3x^2}}=e^{\frac{-1}{3}}$$

（6）解：原式=$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}}=e^{-1}.$

（7）解：原式=$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

（8）解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}.$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0, \therefore \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}f'(x)=0.$$

2．解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)=3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^3.$$

3．证明：由已知，$g(x)$连续，且当$x\neq 0$时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

而$g'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}-f''(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$.当$x\neq 0$时，$g'(x)$显然连续

而 $\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$.$\therefore g'(x)$在点$x=0$连续，从而 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$内是连续函数.

§3 泰勒公式

1 解：$p(x)=x^4-2x^3+1, p'(x)=4x^3-6x^2, p''(x)=12x^2-12x, p'''(x)=24x-12,$

$p^{(4)}(x)=24, p^{(5)}(x)=0, x_0=1.$

$p(1)=0, p'(1)=-2, p''(1)=0, p'''(1)=12, p^{(4)}(1)=24, p^{(5)}(1)=0, p^{(6)}(1)=\cdots p^{(n)}(1)=0.$

$$\therefore p(x)=x^4-2x^3+1=p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{p^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$+0=0-2(x-1)+0+2(x-1)^3+(x-1)^4$,即：

$x^4-2x^3+1=-2(x-1)+2(x-1)^3+(x-1)^4$

2：$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}, x_0=0, f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(\theta x)}{3!}x^3.$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x)=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{2})(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f'''(x)=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{2})(-\dfrac{3}{2})(1+x)^{-\frac{5}{2}},$

$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=-\frac{1}{4}, f'''(\theta x)=\frac{3}{8}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}$

$\therefore (1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}(0<\theta<1)$

3y (4)=2, $y'(4)=\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4}=\frac{1}{4}$, $y''(4)=\left.-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right|_{x=4}=-\frac{1}{32}$, $y'''(4)=\left.\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right|_{x=4}=\frac{3}{256}$,

$y^{(4)}=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}=-\frac{15}{16}\frac{1}{\sqrt{x^7}}$,

$\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{5}{128}\frac{(x-4)^4}{[4+\theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}},(0<\theta<1)$

4 解：$f(x)=xe^x, x_0=0, f'(x)=e^x+xe^x, f''(x)=2e^x+xe^x, f'''(x)=3e^x+xe^x$,

$\cdots, f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x, f^{(n+1)}=(n+1)e^x+xe^x. f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2$

$f'''(0)=3,\cdots, f^{(n)}(0)=n, f^{(n+1)}(\theta x)=(n+1)e^{\theta x}+(\theta x)e^{\theta x}=(n+1+\theta x)e^{\theta x}$.

$\therefore xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{(n+1+\theta x)}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}(0<\theta<1)$.

5：$f(x)=\frac{1}{x+2}, f(-1)=\frac{1}{-1+2}=1; f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}, f'(-1)=-1; f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$

$f''(-1)=2.\therefore f(x)=\frac{1}{x+2}$在$x_0=-1$处的泰勒公式为：

$\frac{1}{x+2}=1-(x+1)+(x+1)^2+R_2(x)$.从而$R_2(x)=\frac{1}{x+2}-1+(x+1)-(x+1)^2=-\frac{(x+1)^3}{x+2}$.

故$\frac{1}{x+2}=1-(x+1)+(x+1)^2-\frac{(x+1)^3}{x+2}$.与$\frac{1}{x+2}=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+R_2(x)$

比较可得：$a_0=1, a_1=-1, a_2=1, R_2=-\frac{(1+x)^3}{x+2}$.

6：$f(x)$在$[a,b]$上具有n阶导数，$\therefore$将$f(x)$在$x_0=b$处展开成$(n-1)$阶 泰勒公式

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-b)^n$$

ζ在x与b之间. 令$x=a, f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2+\cdots+$

$\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(a-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(a-b)^n.$

$\because f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0, a\neq b. \therefore f^{(n)}(\xi)=0(a<\xi<b).$

7 用泰勒展开得到$f(x)=(a+1)+(b+c+1)x+\frac{1}{6}(7-b-4c)x^3+\frac{x^4}{4}+o(x^4)$

所以$a+1=0, b+c+1=0, 7-b-4c=0$，即$a=-1, b=-\frac{11}{3}, c=\frac{8}{3}$

8 由$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$，得$f(0)=0, f'(0)=0$，

由$Taylor$ 公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，

$f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，

$1=f(1)=\frac{1}{2}f''(\xi)$，$f''(\xi)=2$.

9.解：$\sin18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{10})^5+\cdots+R_{2n}(x).$

$$|R_{2n}(x)|=\left|\frac{\sin(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\leq\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{(\frac{\pi}{10})^{2n+1}}{(2n+1)!}<\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}<10^{-4}(x=\frac{\pi}{10}).$$

取$n=3$,有$\frac{1}{2^7 7!}=\frac{1}{128\times5040}<\frac{1}{128\times5000}=\frac{1}{5}\times10^{-5}<10^{-4}$.

$\therefore\sin18^\circ\approx\frac{\pi}{10}+\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{10})^5\approx0.30902.$。

§4 函数的单调性、极值、最值

1. $y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$y'\geq0$可得$x\geq3 or\ x\leq1$。$y'\leq0$可得$3\geq x\geq1$

所以单调增加区间为$(-\infty,1],[3,+\infty)$，单调递减区间为$[1,3]$

$x \geq 3$ 时 $y' \geq 0$ 并且 $3 \geq x \geq 1$ 时 $y' \leq 0$，所以有极大值为 $y|_{x=3} = 13$

$x \leq 1$ 时 $y' \geq 0$ 并且 $3 \geq x \geq 1$ 时 $y' \leq 0$，所以有极小值为 $y|_{x=1} = 7$

2. $y' = 0$ 可得 $x = 2$，并且 $x = 1$ 为不可导点

在 $x = 1$ 的邻域内 $y \leq \frac{2}{3} = f(1)$，由定义得到在 $x = 1$ 取极大值 $y|_{x=1} = \frac{2}{3}$。

$y' = \frac{2(\sqrt[3]{x-1}-1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$，当 $x > 2$ 时，$y' > 0$，且 $1 < x < 2$ 时，$y' < 0$

所以所求极值为极小值 $y|_{x=2} = \frac{1}{3}$

3. $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}, x = 0$ 为驻点，n 为奇数时，$x < 0$ 时, $f'(x) > 0; x > 0$ 时 $f'(x) < 0$

$\therefore x = 0$ 为极大值点，极大值为 1. n 为偶数时，$f'(x) \leq 0, \therefore$ 函数无极限.

4 解：令 $f(x) = x^x$ 由3题知 $x = e$ 时取极大值 e^e, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上递增，在 $[e, +\infty)$ 上递减，

因而 $f(1) < f(2), f(3) > f(4) > f(5) \cdots, f(2) = \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3} = f(3)$,

$\therefore$ 最大项为 $x_3 = \sqrt[3]{3}$.

5. 解：$f(\frac{\pi}{2}) = a - \frac{b}{3} = 1, a = 1 + \frac{b}{3}, f'(\frac{\pi}{3}) = (1 + \frac{b}{3})\frac{1}{2} - b = 0, b = \frac{3}{5}, a = \frac{6}{5}$,

$f''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{5}\sqrt{3} < 0, x = \frac{\pi}{3}$ 是极大值点，极大值为 $\frac{3}{5}\sqrt{3}$.

6、作 $f(x) = xe^{-x} - a$，由 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 1$，并且有最大值 $f(1) = e^{-1} - a$，

（1），$a > e^{-1}$ 时，$f(x)$ 的最大值 $f(1) < 0$，故 $f(x) \leq f(1) < 0$，从而方程无根。

（2），$a < e^{-1}$ 时，$f(1) > 0$，又 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) < 0$，故又且仅有两个实根。

（3），$a = e^{-1}$ 时，$f(1) = 0$，又 $x < 1$ 时，$f(1) < f(1) = 0$，且 $x > 1$ 时，$f(1) < f(1) = 0$，故又且仅有一个根。

7. 解：$\because \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0, \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$,曲线在 (x_0, y_0) 处的切线方程

为$Y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(X-x_0)$,化简为$\frac{X}{\sqrt{x_0}}+\frac{Y}{\sqrt{y_0}}=1$,它在两坐标轴上的截距分别为

$\sqrt{x_0}$和$\sqrt{y_0}$.三角形面积为$\frac{1}{2}\sqrt{x_0y_0}=\frac{1}{2}\sqrt{x_0}(1-\sqrt{x_0})=s$,$\frac{ds}{dx_0}=\frac{1}{4\sqrt{x_0}}-\frac{1}{2}$.当

$x_0\in(0,\frac{1}{4})$时,$\frac{ds}{dx_0}>0$,$x_0\in(\frac{1}{4},1)$时,$\frac{ds}{dx_0}<0$.

$\therefore x_0=\frac{1}{4}$时，$s$取最大值因此所求切点为$(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

8．令$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$,则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续而且$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x$

$=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}>0(x>0)$,因而$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，$x>0$时，

$f(x)>f(0)$,所以$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>0(x>0)$,因而$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}(x>0)$.

9.证明：令$f(x)=x^p+(1-x)^p \qquad x\in(0,1)$.

由$f'(x)=0$,即$p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]=0$解得驻点$x=\frac{1}{2}$.又$f(0)=1,f(1)=1,f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}$.

$\therefore f(x)$在$[0,1]$上的最大值为1，最小值为$\frac{1}{2^{p-1}}$.

故有：$\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1 \qquad (0\le x\le 1,p>1)$.

§5 函数图形的凹凸性，拐点及函数图形的描绘

1．$y''=0$得$x=-6$，$x=0$，$x=6$

$y''\ge 0$得到 $(-6,0)$, $(6,+\infty)$.为下凸区间

$y''\le 0$得到$(-\infty,-6)$, $(0,6)$.为下凹区间

拐点为$(-6,-\frac{9}{2})$、$(0,0)$、$(6,\frac{9}{2})$

斜渐近线为$y=x$

2．解：$f^{(5)}(x)$在x_0的某一邻域内不变号，$f'(x_0)=\dfrac{1}{4!}f^{(5)}(\zeta)(x-x_0)^4$在$x_0$的某一邻域内不变号，$x=x_0$不是极值点.

$f''(x)=\dfrac{1}{3!}f^{(5)}(\zeta_1)(x-x_0)^3$, x由x_0左边移到x_0右边时$f''(x)$变号，因而$(x_0,f(x_0))$是拐点.

3.证明：令$f(x)=x^n$则$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$,因而函数$y=f(x)$的图形在$(0,+\infty)$上是下凸的，$\therefore \dfrac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$,即 $\dfrac{x^n+y^n}{2}>(\dfrac{x+y}{2})^n$.

4.解：由题设知驻点和拐点都在曲线上，从而有$-8a+4b-2c+d=44$, (1), $a+b+c+d=10$, (2), $y'=3ax^2+2bx+c$ ，$y''=6ax+2b$ 由驻点和拐点条件可得 $12a-4b+c=0$,(3),$6a+2b=0$, (4), 由 (1) (2) (3) (4): $a=1,b=-3,c=-24,d=16$

5.解：(1) $(-\infty,0),(2,+\infty)$ 为增区间，（0，2）为减区间

(2) 因 $y''=\dfrac{24}{x^4}>0$, 故 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 下凸区间，无拐点，

(3)因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$，a=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^3}=1$ b=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4}{x^2}-x\right)=0$

$\therefore x=0$ 为垂直渐近线， y=x 为斜渐近线

6．解：$y=\dfrac{x}{\ln x}$ 的定义域为$(1,+\infty)\cup(0,1)$. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$,渐近线为$x=1$, $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$,

$y''=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$,曲线通过$(\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{e}),(e,e),(e^2,\dfrac{e^2}{2})$.

§6 曲率

1.解：$y'=2x-4, y''=2$,顶点为$A(2,-1)$,

$$\therefore y'|_A=0, K_A=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_A=\frac{2}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=2, \therefore R=\frac{1}{2}.$$

2.解：$y^2=8x, A(2,4), y'=\dfrac{4}{y}, y''=-\dfrac{4y'}{y^2}, y'|_A=1, y''|_A=-\dfrac{1}{4}$.

$$\therefore K_A=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_A=\frac{\left|-\frac{1}{4}\right|}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{16}.\therefore R=\frac{1}{K}=8\sqrt{2}.$$

3.解：$\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{cases},t=\frac{\pi}{2}.y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\cos t}{-\sin t}=-2\cot t,$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=(\frac{2}{\sin^2 t})(\frac{1}{-\sin t})=-\frac{2}{\sin^3 t}.\text{当}t=\frac{\pi}{2}\text{时，}$$

$y''=0,y''=-2,\therefore K_A=2,R=\frac{1}{2}$

4.解：$y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2},y''=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{[1+(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.x\in(-\infty,+\infty).$$

$K'=0$得$e^x-e^{-x}=0,\therefore x=0,$当$x<0$时，$K'>0,x>0$时$,K'<0,\therefore$在$x=0$时$K$

取最大值，$K_{\max}=\frac{4}{2^2}=1.$

5.解：$y'=\cos x,y''=-\sin x,x\in(0,\pi),$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}},x\in(0,\pi).$$

由上式可知：当$x=\frac{\pi}{2}$时，K最大，即当$x=\frac{\pi}{2}$时曲率半径最小.

故曲线 y=sinx, $x\in(0,\pi)$在 $(\frac{\pi}{2},1)$点处曲率半径最小， 最小值 R=1

6.解：$y=\ln x,y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}.$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},K'=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

令$K'=0$,得$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.当$x\in(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$时，$K'\rangle 0$，$K\uparrow$.当$x\in(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$时，

$K'<0,K\downarrow,\therefore$在点 $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\ln 2}{2})$ 处有最大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

7．证明： $y=ach\frac{x}{a},y'=ash\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}=sh\frac{x}{a},y''=\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}.$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}}{(1+sh^2\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}}{(ch^2\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}}=\frac{a}{a^2ch^2\frac{x}{a}}=\frac{a}{y^2},$$

对任意点(x,y),$R=\frac{y^2}{a}$,$\therefore$结论成立.

8．$x=\frac{3}{2}(1+\cos 2\theta)$，$y=\frac{3}{2}\sin 2\theta$，所以$K=\frac{2}{3}$

故$R=\frac{3}{2}$

第四章　　　§1 不定积分的概念与性质

1．解：$f(x)=-2e^{-2x}$，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{h}=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}$

$=-2f'(x)=-8e^{-2x}$

2．解：(1) $\int\frac{\sqrt{x}-x^3c^x+x^2}{x^3}dx=\int(x^{-\frac{5}{2}}-e^x+\frac{1}{x})dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln x+c.$

(2) $\int(\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx=\ln x-3\arcsin x+c.$

（3）$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2})dx=-\frac{1}{x}+\arctan x+c.$

（4）$\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx=\int 3dx-2\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx=3x-\frac{2}{\ln\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^x+c.$

（5）$\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+c.$

（6）$\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int(1-\frac{1}{x^2})x^{\frac{3}{4}}dx=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+c.$

（7）$\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=-\frac{1}{x}-\arctan x+c.$

（8）$\int\frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx=\int\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}dx=\int(\sec x+\tan x)^2dx$

$$=\int(\sec^2 x+2\sec x\tan x+\sec^2 x-1)dx=2(\tan x+\sec x)-x+c.$$

（9）$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\cot x-\tan x+c.$

4．解：$\because f'(\sin^2 x)=\cos^2 x+ctg^2x=\cos^2 x+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=1-\sin^2 x+\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$=\frac{1}{\sin^2 x}-\sin^2 x$　　$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-x$　　$\therefore f(x)=\int(\frac{1}{x}-x)dx=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+c.$

5．解：由题意知 $f'(x)=x^2$,则$f(x)=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+c$，

由已知$x=3,y=2$,代入上式：$2=9+c$,得 $c=-7$ 故所求曲线方程为$y=\frac{1}{3}x^3-7$

6．解：设距离函数为$s=s(t)$,则有$s(t)=\int 3t^2dt=t^3+c$，由已知$t=0$，$s(t)=0$,

得$c=0$,故求出距离函数为$s=t^3$.

（1）$s(3)=3^3=27$（米）　　（2）$360=t^3,t=\sqrt[3]{360}$（秒）

7．解：当$x<0$时，$f(x)=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+c_1$

当$x>0$时，$f(x)=\int \sin x^2 dx=-\cos x+c_2$

$\because f(x)$在$x=0$可导，$\therefore f(x)$在$x=0$连续

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$即$c_1=-1+c_2$，记$c_1=c$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+c, & x\le 0\\ -\cos x+1+c, & x>0\end{cases}$$

§ 2.1 第一类换元积分法

1．解：(1) $\int \frac{1}{(2x+3)^9}dx=\frac{1}{2}\int (2x+3)^{-9}d(2x+3)=-\frac{1}{16}(2x+3)^{-8}+c.$

(2) $\int e^{2x^2+\ln x}dx=\frac{1}{4}\int e^{2x^2}d(2x^2)=\frac{1}{4}e^{2x^2}+c.$

(3) $\int \sin^2(3x+1)dx=\frac{1}{2}\int [1-\cos(6x+2)]dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\int \cos(6x+2)d(6x+2)$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\sin(6x+2)+c$$

(4) $\int \tan^4 x\sec^2 x d\tan x=\int \tan^4 x(1+\tan^2 x)d\tan x=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{7}\tan^7 x+c;$

(5) $\int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sin x/\sqrt{3})}{1+\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+c$

(6) $\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx=\int x(x+\sqrt{x^2-1})dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\int (x^2-1)^{\frac{1}{2}}d(x^2-1)$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+c$$

(7) $\int \tan^2 x\sec^4 x(\tan x\sec x dx)=\int (\sec^2 x-1)\sec^4 x d\sec x=\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{1}{5}\sec^5 x+c$

(8) $\int \frac{x}{\sqrt{2-4x^4}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2-4x^2}}dx^2=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(2x^2)^2}}d(2x^2)$

$$=\frac{1}{4}\arcsin\frac{2x^2}{\sqrt{2}}+c$$

（9）原式$\int\frac{x}{2+3x^2}dx-\int\frac{1}{2+3x^2}dx=\frac{1}{6}\int\frac{d(2+3x^2)}{2+3x^2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x)}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2}$

$$=\frac{1}{6}\ln(2+3x^2)-\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}x+c$$

10. $\int\frac{\sin\ln x\cos\ln x}{x}dx=\int\sin\ln x\cos\ln x d\ln x=\int\sin\ln x d\sin\ln x=\frac{1}{2}(\sin\ln x)^2+c$

2. 解：（1）$\int\frac{1+\ln x}{x}dx=\int(1+\ln x)d(1+\ln x)=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2+c$

（2）$\int\frac{x}{(1-x)^3}dx=\int\frac{1-(1-x)}{(1-x)^3}d(1-x)=\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}+c$

（3）$\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}=\int\frac{1}{1+\ln^2 x}d\ln x=\arctan(\ln x)+c$

（4）$\int\frac{dx}{x(x^{10}+2)}=\int\frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+2)}dx=\frac{1}{10}\int\frac{1}{x^{10}(x^{10}+2)}dx^{10}\overset{令t=x^{10}}{=}\frac{1}{10}\int\frac{1}{t(t+2)}dt$

$$=\frac{1}{20}\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2})dt=\frac{1}{20}\ln(\frac{t}{t+2})+c=\frac{1}{20}\ln(\frac{x^{10}}{x^{10}+2})+c$$

（5）$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{1}{1+(e^x)^2}d(e^x)=\arctan e^x+c$

（6）$\int\frac{x}{x^4-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2)^2-1^2}d(x^2)=\frac{1}{4}\ln(\frac{x^2-1}{x^2+1})+c$

（7）$\int\frac{dx}{e^x+2+e^{-x}}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+1}=\int\frac{1}{(1+e^x)^2}d(e^x+1)=-\frac{1}{1+e^x}+c$

（8）$\int\frac{x-1}{3+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+x^2}d(3+x^2)-\int\frac{1}{3+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln(3+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+c$$

（9）$\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=\int(\arcsin x)^{-2}d(\arcsin x)=-\frac{1}{\arcsin x}+c$

(10)

$$\int\frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 xdx}{4\tan^2 x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(2\tan x)^2}d(2\tan x)=\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)+c$$

(11)

$$\int\frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx+\int\frac{1}{1+\sin^2 x}d\sin x$$

$$=\int\frac{\csc^2 x}{1+\csc^2 x}dx+\arctan(\sin x)$$

$$=-\int\frac{1}{2+\cot^2 x}d\cot x+\arctan(\sin x)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\cot x}{2})+\arctan(\sin x)+c$$

(12) $\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx=\int\frac{d(x+\sin x)}{x+\sin x}=\ln|x+\sin x|+c$

(13) $\int f'(x)f''(x)dx=\int f'(x)df'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)]^2+c$ $\quad\because f(x)=e^{-x^2}$,

$\therefore f'(x)=-2xe^{-x^2}$ 故原式$=2x^2e^{-2x^2}+c$

§2.2 第二类换元积分法

解：1.（1）$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int\sin^2 t\cos^2 tdt$

$$\overset{x=\sin t}{=}\frac{1}{4}\int\sin^2 2tdt=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)+c$$

$$=\frac{1}{8}\arcsin t-\frac{1}{8}(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}+c$$

（2）$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\sec^2 tdt}{\tan t\sec t}=\int\csc tdt=\ln|\csc t-\cot t|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+c$

（3）$\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\tan^3 t\cdot\sec^2 t}{\sec^3 t}dt=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt=-\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}d(\cos t)$

$$=\frac{1}{\cos t}+\cos t+c=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

（4）$\int\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}=\int\frac{d\ln x}{\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}=\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{\ln x}-\frac{1}{\ln x}\right|+c$

说明：$\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ 解法见第（2）题.

（5）$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\overset{e^x=\tan^2 t}{=}\int\frac{2\tan t\cdot\sec^2 t}{\sec t\cdot\tan^2 t}dt=2\int\csc t dt=2\ln\left|\csc t-\cot t\right|+c$

$$=2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+c$$

（6）$\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\int\frac{3x+2}{\sqrt{(x+1)^2+2}}dx\overset{x+1=t}{=}\int\frac{3t-1}{\sqrt{t^2+2}}$

$$=\frac{3}{2}\int(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}d(t^2+2)-\int\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt=3(t^2+2)^{\frac{1}{2}}-\ln(t+\sqrt{t^2+2})+c$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+3}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+c$$

（7）$\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2)+2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$

$$=(x^2+2)^{\frac{1}{2}}+2\ln(x+\sqrt{x^2+2})+c$$

（8）$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin t}{=}\int\sin^5 t dt=-\int\sin^4 t d(\cos t)$

$$=-\int(1-\cos^2 t)^2 d(\cos t)=-\int(1-2\cos^2 t+\cos^4 t)d(\cos t)$$

$$=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t+c=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+c.$$

2.(1) 令 x=sint, $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t\cos t}dt=\int\frac{1}{\sin^2 t}=-(\cot)t+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$,

(2) 令

x=tant, $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{tg^2 t\sec t}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+c=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$

(3) 令 x=sect, $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\sec t.tgt}{\sec^2 t.tgt}=\int \cos tdt=\sin t+c=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

§3 分部积分法

1．解：(1) $\int x^2e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\int x^2de^{-3x}=-\frac{1}{3}(x^2e^{-3x}-2\int xe^{-3x}dx)$

$$=-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}-\frac{2}{9}\int xde^{-3x}=-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}-\frac{2}{9}(xe^{-3x}-\int e^{-3x}dx)$$

$$=-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}-\frac{2}{9}xe^{-3x}-\frac{2}{27}e^{-3x}+c$$

(2) $\int x3^x2^{2x}dx=\int x12^xdx=\frac{1}{\ln 12}\int xd(12^x)=\frac{1}{\ln 12}(x12^x-\int 12^xdx)$

$$=\frac{x12^x}{\ln 12}-\frac{12^x}{(\ln 12)^2}+c$$

(3) $\int x\sin x\cos dx=\frac{1}{2}\int x\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\int xd\cos 2x$

$$=-\frac{1}{4}(x\cos 2x-\int \cos 2xdx)=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+c$$

(4) $\int x^{-3}\arctan xdx=-\frac{1}{2}\int \arctan xdx^{-2}=-\frac{1}{2}(x^{-2}\arctan x-\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx)$

$$=-\frac{1}{2x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\int (\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=-\frac{1}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\arctan x+c$$

(5) $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \arctan xd\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c$$

(6) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int \ln\sin xd\cot x=-(\cot x\ln\sin x-\int \cot x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos xdx)$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int (\csc^2 x-1)dx=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+c$$

(7) $\int x\tan^2(2x)dx=\frac{1}{2}\int x(\sec^2 2x-1)d(2x)=\frac{1}{2}\int xd\tan 2x-\int xdx$

$$=\frac{1}{2}(x\tan 2x-\int \tan 2xdx)-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x\tan 2x+\frac{1}{4}\ln(\cos 2x)-\frac{1}{2}x^2+c$$

(8) $\int\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int\ln(1+x)d(\frac{1}{2-x})=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)-\int\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$

$$=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)+\frac{1}{3}\ln|2-x|-\frac{1}{3}\ln(1+x)+c$$

(9) $\int\frac{x^2}{x^2+1}\arctan xdx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\arctan xdx=\int\arctan xdx-\int\arctan xd(\arctan x)$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$$

(10) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{3}}\ln xdx=\frac{3}{2}\int\ln xdx^{\frac{2}{3}}$

$$=\frac{3}{2}(x^{\frac{2}{3}}\ln x-\int x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x-\frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}}+c$$

2.解（1）$\int e^{-\sqrt{3x-2}}dx\overset{\sqrt{3x-2}=t}{=}\frac{2}{3}\int te^{-t}dt$

$$=-\frac{2}{3}\int tde^{-t}=-\frac{2}{3}(te^{-t}-\int e^{-t}dt)\quad=-\frac{2}{3}e^{-\sqrt{3x-2}}(\sqrt{3x-2}+1)+c$$

（2）$\int x^3\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int x^2\cos(x^2)dx^2\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{2}\int td\sin t$

$$=\frac{1}{2}t\sin t+\frac{1}{2}\cos t+c=\frac{1}{2}x^2\sin(x^2)+\frac{1}{2}\cos(x^2)+c$$

（3）$\int\frac{\ln\ln x}{x}dx=\int\ln\ln xd\ln x=\ln x\cdot\ln\ln x-\int\ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x(\ln\ln x-1)+c$

（4）$\int\frac{\cos x}{\sin^2 2x}dx=\int\frac{\cos x}{4\sin^2 2x\cos^2 2x}dx=\frac{1}{4}\int\csc^2 x\sec xdx=-\frac{1}{4}\int\sec xd\cot x$

$$=-\frac{1}{4}\sec x\cot x+\frac{1}{4}\int\cot x\sec x\tan xdx=-\frac{1}{4}\csc x+\frac{1}{4}\ln|\sec x+\tan x|+c$$

（5）

$$\int\frac{\sin x}{e^x}dx=\int e^{-x}\sin xdx=-\int e^{-x}d\cos x=-(e^{-x}\cos x+\int\cos xe^{-x}dx)$$

$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}d\sin x=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x-\int\sin xe^{-x}dx$$

移项可得： $\int \frac{\sin x}{e^{-x}}dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + c$

（6） $\int \frac{1+x}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx = -\int (1+\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x}) = -e^{\frac{1}{x}} - \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x})$

$\because \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x}) \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int tde^t = te^t - e^t + c = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} + c$，所以原式$= -\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + c.$

（7） $\int (1-2x^2)e^{-x^2}dx = \int e^{-x^2}dx - \int xe^{-x^2}d(x^2) = \int e^{-x^2}dx + \int xd(e^{-x^2})$

$$= \int e^{-x^2}dx + xe^{-x^2} - \int e^{-x^2}dx = xe^{-x^2} + c$$

（8） $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx = \frac{1}{2}\int (1+\tan\frac{x}{2})^2 e^x dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\sec^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2})e^x d = \int e^x d\tan\frac{x}{2} + \int \tan\frac{x}{2}de^x$$

$$= e^x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}de^x + \int \tan\frac{x}{2}de^x = e^x\tan\frac{x}{2} + c$$

3.解： $\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx$。

又 $f(x) = (\frac{\cos x}{x})' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}, \int f(x)dx = \frac{\cos x}{x} + c$

所以原式$= -\sin x - \frac{2\cos x}{x} + c$

§ 4.1 有理函数的积分

1．解：（1） $\int \frac{x^3}{x+3}dx = \int (x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3})dx$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 27\ln|x+3| + c.$$

（2） $\int \frac{3}{x^3+1}dx = \int \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}dx.$

设 $\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2-x+1}$

即 $$A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+D)=3$$

$(A+B)x^2+(B+D-A)x+A+D=3.$

比较系数得方程组：$\begin{cases}A+B=0\\B+D-A=0\\A+D=3\end{cases}$ 解得：$A=1,B=-1,D=2.$

$$\therefore\int\frac{3}{x^3+1}dx=\int\frac{1}{1+x}dx+\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$

（3）设$\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{D}{x+3}$

即 $A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+D(x+1)(x+2)=x.$

令$x=-1$，则$A\times1\times2=-1,A=-\dfrac{1}{2}$;令$x=-3$，则$B\times(-1)\times1=-2,B=2;$

令$x=-3$，则$D\times(-2)\times(-1)=-3,D=-\dfrac{3}{2}.$

$$\therefore\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+2\int\frac{1}{x+2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x+3|+c$$

（4）设 $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}$

即 $A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+D(x-1)=x^2+1$

令$x=1$，则$A=1+1,A=\dfrac{1}{2}$;令$x=-1$，则$-2D=2,D=-1;$

令$x=0$，则$A-B-D=1,B=\dfrac{1}{2}.$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

（5）设 $$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$$

即 $A(x^2+1)+(Bx+D)x=1,(B+A)x^2+Dx+A=1.$

令 $x=0$，则 $A=1,$ 比较系数得，$B+A=0,D=0,$ 则 $B=-1$

$$\therefore \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

（6）设 $$\frac{5x-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{5x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{1+x^2}$$

即 $A(1+x^2)+(Bx+D)(x-1)=5x-1,(A+B)x^2+(D-B)x+A-D=5x-1$

比较系数得：$\begin{cases} A+B=0 \\ D-B=5 \\ A-D=-1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ D=3 \end{cases}$

$$\therefore \int \frac{5x-1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{-2x+3}{x^2+1}dx = \ln\frac{(x-1)^2}{1+x^2} + 3arctgx + c$$

2．解：（1）$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \int \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(x^3)^2}d(x^3) = arctgx + \frac{1}{3}arctg(x^3)+c$$

（2）$$\int \frac{x}{x^8-1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{-(x^4-1)+(x^4+1)}{(x^4-1)(x^4+1)}d(x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x^2)^2-1}d(x^2) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x^2)^2+1}d(x^2) = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}arctg(x^2)+c.$$

§4。2§4。3 三角函数有理式及简单无理函数的积分

解：（1）令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\therefore \int\frac{1}{3+\cos x}dx=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2}{3(1+t^2)+(1-t^2)}dt$$

$$=\int\frac{1}{t^2+2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan g\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+c$$

（2）$\int\frac{1+\tan x}{\sin 2x}dx=\int\frac{1+\tan x}{2\tan x\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{\tan x}+1)d\tan x=\frac{1}{2}(\ln|\tan x|+\tan x)+c$

（3）$\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=}\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{1}{t+1}dt$

$$=\ln|t+1|+c=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

（4）$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}dx\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=}\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}dt=\int\frac{2(1-t)}{4t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{t}-t)dt=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}t^2+c=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+c$$

（5）$\int\frac{dx}{\sin 2x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}$

$$=\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+c$$

（6）$\int\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{2\tan x}{1+\tan^4 x}d\tan x$

$$=\int\frac{d(\tan^2 x)}{1+\tan^4 x}=\arctan(\tan^2 x)+c$$

（7）令 $\sqrt[4]{x}=u$，则 $dx=4u^3du$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{4u^3}{u^2+u}du = 4\int \frac{u^2}{u+1}du = 4\int \frac{u^2-1+1}{u+1}du$$

$$= 4\int (u-1+\frac{1}{u+1})du = 2u^2-4u+4\ln|u+1|+c = 2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+c$$

（8）令$\sqrt[3]{x+1}=u$，则$x=u^3-1, dx=3u^2du$

$$\therefore \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{3u^2}{1+u}du = 3\int (u-1+\frac{1}{u+1})du$$

$$= 3(\frac{u^2}{2}-u+\ln|u+1|)+c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+c$$

（9）令$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=u$，则$x=\frac{1-u^2}{1+u^2}, dx=\frac{4u}{(1+u^2)^2}du$

$$\therefore \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = \int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot[-\frac{4u}{(1+u^2)^2}]du = \int \frac{4u^2}{(u^2-1)(1+u^2)}du$$

$$= 2\int (\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{u^2+1}du = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+2\arctan u+c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+c$$

（10）令$\frac{1-x}{1+x}=u$，则$du=\frac{2}{(x+1)^2}dx$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}dx = \frac{1}{(x+1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4}}dx = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{4}{3}}du$$

$$= -\frac{3}{2}u^{-\frac{1}{3}}+c = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+c$$

第五章　定积分

§1 定积分概念

1. 解：因为$f(x)=e^x$在$[0,1]$上连续，所以可积，并且积分与区间$[0,1]$的分法及点ξ_i的取法无关，故不妨将区间$[0,1]n$等分，分点为$x_{i-1}=\frac{i-1}{n},x_i=\frac{i}{n},\Delta x_i=\frac{1}{n},i=1,\cdots,n,$

取$\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$，则$\int_0^1 e^x dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{2}{n}}}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e^{\frac{n}{n}})}{1-e^{\frac{1}{n}}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}=e-1。$$

2. 解：由积分中值定理知，$\exists\xi\in[x,x+3]$，使得：$\int_x^{x+3}t^2\sin\frac{2}{t^2}f(t)dt=3\xi^2\sin\frac{2}{\xi^2}f(\xi)$。

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+3}t^2\sin\frac{2}{t^2}f(t)dt=6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{2}{\xi^2}}{\frac{2}{\xi^2}}\lim\limits_{x\to+\infty}f(\xi)=12$。

3. 解：（1）记$f(x)=x-\ln(1+x),x\in[0,1]$，则$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0,x\in(0,1)$

$\therefore\ \ f(x)>f(0)=0,x\in(0,1]$，即$x>\ln(1+x),x\in(0,1]$

$\therefore\int_0^1 xdx>\int_0^1\ln(1+x)dx$。

（2）在区间$(0,\frac{\pi}{2}]$上，$x>\sin x$故$\int_1^{\frac{\pi}{2}}xdx>\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx;$

（3）在区间$(1,2)$上，$\ln x-(\ln x)^2=\ln x(1-\ln x)>0,$故$\int_1^2\ln xdx>\int_1^2(\ln x)^2dx$。

4. 解：易知$\sqrt{(x-a)(b-x)}=\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}$是以$\frac{a+b}{2}$为圆心，$\frac{b-a}{2}$为半径的上半圆，则上半圆的面积为$S=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{\pi}{2}(\frac{b-a}{2})^2=\frac{\pi(b-a)^2}{8}$。由定积分的几何意义

知$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$。

5. 解：$\because f(x)$ 在 $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ 上连续，由积分中值定理，存在 $c\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ 使得

$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = 3f(c)\cdot\dfrac{1}{3}$)，又 f(x)在$[0,c]$上满足罗尔定理条件，故在(0,c)$\subset$(0,1)内

至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$。

6. 解：设$\int_0^2 f(x)dx = a$，则原式变为$f(x)=x^2-ax$，两边同时取定积分，得

$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2dx - \int_0^2 axdx$，即$a=\dfrac{8}{3}-2a$，故$a=\dfrac{8}{9}$. 所以$f(x)=x^2-\dfrac{8}{9}x$。

7. 解：原式$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}} = e^{\int_0^1 \ln x dx} = e^{-1}$

8. （1）证明：因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，故必能取得最大值 M,最小值 m,所以

$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$,两边积分 $\int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx$,即

$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$，于是$m\le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$，因为$f(x)$

在$[a,b]$上连续，由介值定理可知，至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，

即$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。

（2）解：$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$在$[0,1]$上连续，$g(x)=x^n>0$，由（1）可知：至少存在一点$\xi\in[0,1]$，

使得$0<\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx = \dfrac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{1+n}$ 由两边夹法则知$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx=0$。

§2 微积分基本定理

1. 解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-t^2$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{2t^2\ln t}$。

2. 解：将方程两边对 x 求导（y 看作 x 的函数）

$$\frac{d(\int_0^y e^t dt)}{dx}+\frac{d(\int_0^x \cos t dt)}{dx}=0, \qquad e^y\frac{dy}{dx}+\cos x=0。$$

$\because \int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$，即 $e^y-1+\sin x=0$。

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}=-\frac{\cos x}{1-\sin x}$。

3. 解：（1）该极限是“$\frac{0}{0}$”型，应用洛必达法则

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t(e^t-1)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{3x^2}=\frac{1}{3}$。

（2）该极限是“$\frac{\infty}{\infty}$”型，应用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\int_0^x e^{t^2}dt)e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

4. 解：

$$(1)\ =\frac{d}{dx}\left[x^2\int_0^{x^2}f(t)dt-\int_0^{x^2}tf(t)dt\right]=2x\int_0^{x^2}f(t)dt+x^2f(x^2)2x-x^2f(x^2)2x$$

$$=2x\int_0^{x^2}f(t)dt。$$

（2）令 $u=x-t$，则 t=0 时，u=x ; t=x 时，u=0; dt=-du.

原式$=\frac{d}{dx}[\int_x^0 f(u)(-du)]=\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du=f(x)$。

5. $I'(x)=xe^{-x^2}$，令 $I'(x)=0$，得驻点 $x=0$ 且

$I''(x)=e^{-x^2}(1-2x^2), I''(0)=1>0$，故当 $x=0$ 时，I 取最小值 $I(0)=0$。

6. 解：（1）$\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_0^1\frac{d(x+2)}{1+(x+2)^2}=\arctan(x+2)\big|_0^1=\arctan 3-\arctan 2$。

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos^2\theta}-1)d\theta=(tg\theta-\theta)\big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$。

（3）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\sqrt{\cos x}dx$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\sqrt{\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{\cos x}dx$$

$$=\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}。$$

(4) $\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}|\cos x|dx=\sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos xdx)$

$=2\sqrt{2}-1$。

7. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx$

$=\frac{1}{p+1}$。

8.解：$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2},(a\le\xi\le x)$

$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=\frac{f'(\eta)(x-\xi)}{x-a}\le 0,(f'(\eta)\le 0,x-\xi\ge 0,x-a>0)(\xi<\eta<x)$。

9. 解：当$x<0$时，$f(x)=0,\Phi(x)=\int_0^x 0dt=0$。

当$0\le x\le\pi$时，$f(x)=\frac{1}{2}\sin x,\Phi(x)=\int_0^x\frac{1}{2}\sin tdt=-\frac{1}{2}\cos t\big|_0^x=\frac{1}{2}(1-\cos x)$。

当$x>\pi$时，$f(x)=0,\Phi(x)=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin tdt+\int_{\pi}^x 0dt=\frac{1}{2}(-\cos t)\big|_0^{\pi}=1$。

$$\therefore \Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}(1+\cos x), & 0\le x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

10. 证：（1）$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}=\frac{f^2(x)+1}{f(x)}\ge\frac{2f(x)}{f(x)}=2$。

（2）$F(a)=\int_a^a f(t)dt+\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0$。

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_b^b\frac{1}{f(t)}dt=\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt>0。$$

由连续函数介值定理可知，在(a,b)内必有ζ使得$F(x)=0$，又因为$F'(x)>0$，故$F(x)$在$[a,b]$上单调增加，从而$F(x)=0$在(a,b)内必有且仅有一根。

§ 3.1 定积分换元积分法

解：（1）原式$=\int_1^e(1+\ln x)d(1+\ln x)=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\Big|_1^e=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$。

（2）令$t=x+\frac{\pi}{3}$,则当$x=\frac{\pi}{3}$时，$t=\frac{2\pi}{3}$，当$x=\pi$时，$t=\frac{4\pi}{3}$,$dt=dx$，故原式

$$=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\sin^2 tdt=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

（3）原式$\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos 2t}{2})^2dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt$

$$=\frac{1}{4}(t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}(\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$$

（4）原式$=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}d(x-1)=\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}dt\overset{t=\sin u}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2 udu=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{1+\cos 2u}{2}du$

$=\frac{\pi}{4}$。

（5）令$x=tgt$,则当$x=1$时，$t=\frac{\pi}{4}$，当$x=\sqrt{3}$时，$t=\frac{\pi}{3}, dx=\sec^2 tdt$。故，

$$原式=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 tdt}{tgt\sec t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin t}dt=\ln\left|\csc t-ctgt\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\ln\left|\csc\frac{\pi}{3}-ctg\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|\csc\frac{\pi}{4}-ctg\frac{\pi}{4}\right|=-\frac{1}{2}\ln 3-\ln\left|1-\sqrt{2}\right|。$$

（6）令$\sqrt{5-4x}=t$,则$x=-\frac{t^2-5}{4}$.

当$x=-1$时，$t=3$；当$x=1$时，$t=1, dx=-\frac{t}{2}dt$。故，

$$原式=\int_3^1\frac{\frac{5-t^2}{4}(-\frac{t}{2})dt}{t}=\int_3^1\frac{t^2-5}{8}dt=\frac{1}{8}(\frac{t^2}{3}-5t)\Big|_3^1=\frac{1}{6}.$$

（7）令$\sqrt{1-x}=t$,则$x=1-t^2, dx=-2tdt$.当$x=\frac{3}{4}$时，$t=\frac{1}{2}$；当$x=1$时，$t=0$,

$$故原式=\int_{\frac{1}{2}}^0\frac{-2tdt}{t-1}=-2\int_{\frac{1}{2}}^0(1+\frac{1}{t-1})dt=-2(t+\ln|t-1|)\Big|_{\frac{1}{2}}^0=1-2\ln 2.$$

（8）$$原式\overset{u=\sqrt{1-e^{2x}}}{=}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}u\cdot\frac{-u}{1-u^2}du=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-\frac{1}{1-u^2})du$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln(2+\sqrt{3})。$$

（9）令$u=\ln x$，

$$原式=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}=-\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{d\frac{1}{u}}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}=-\ln(\frac{1}{u}+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}})\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}=\ln(1+\frac{2}{\sqrt{3}})。$$

（10）$$原式=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos 3x+\cos x]dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xdx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$$

$$=\frac{1}{6}\sin 3x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

（11）原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\sqrt{2}-1)$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2}\,dx\overset{u=\frac{x}{2}}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u-\cos u|du$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos u-\sin u)du+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin u-\cos u)du$$

$$=2(\sin u+\cos u)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+2(-\cos u-\sin u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=4(\sqrt{2}-1)\text{。}$$

(12) $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=100\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin xdx$

$$=100\sqrt{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=200\sqrt{2}.$$

2.解：原式$=\int_{-1}^{1}\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\ 2\int_0^1\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx=4\arcsin x\Big|_0^1=2\pi$

3.证：左边$=\int_0^{2\pi}(x+\sin x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(x+\sin x)f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(x+\sin x)f(x)dx$

在第二项中令$x=\pi+t$，则$\int_{\pi}^{2\pi}(x+\sin x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(\pi+t-\sin t)f(t)dt$

代入原式可得：$\int_0^{2\pi}(x+\sin x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx$。

4. 解：$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx=\int_{\pi}^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx=\int_{\pi}^{3\pi}f(x-\pi)dx\overset{令t=x-\pi}{=}\int_0^{2\pi}f(t)dt$

$=\int_0^{\pi}f(t)dt+\int_{\pi}^{2\pi}f(t)dt=\int_0^{\pi}tdt+\int_{\pi}^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]dt=\frac{\pi^2}{2}-2+\int_{\pi}^{2\pi}f(t-\pi)dt$

$$\overset{令u=t-\pi}{=}\frac{\pi^2}{2}-2+\int_0^{\pi}f(u)du=\pi^2-2$$

5. 证明：$\because \int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx$

又 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx\overset{u=\pi-x}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f[\sin(\pi-u)](-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

$\therefore \int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$。

6. 解：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt$。

设 $a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$，则

$2a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos^2 x\right)dx=\frac{\pi-a}{2}$。$\therefore a=\frac{\pi-1}{4}$。

7.（1）证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，进而 $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积。从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n})=\int_0^1 \ln f(x)dx$。所以，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}}=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$。

（2）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+x^3}d(1+x^3)=\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$。

8. (1) 令 $x^2-t^2=u$ （x 为参数），则 $-2tdt=du$ F(x)=$\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)du$。

于是，$F'(x)=2x\frac{1}{2}f(x)^2=xf(x^2)$ 。

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)}{4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xf'\left(x^2\right)}{8x}=\dfrac{1}{4}f'(0)=\dfrac{1}{4}$ 。

§3.2-§4 定积分的分部积分法与广义积分

1．解：(1)原式$=\dfrac{1}{2}\int_1^e \ln x dx^2=\dfrac{1}{2}[x^2\ln x\big|_1^e-\int_1^e x^2\dfrac{1}{x}dx]=\dfrac{1}{2}[e^2-\int_1^e xdx]=\dfrac{1}{4}(e^2+1)$。

（2） 原式$=\dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} arctgxd\left(x^2\right)=\dfrac{1}{2}x^2 arctgx\big|_0^{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

（3）原式$=\int_0^1(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2\big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x\cdot2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\frac{\pi^2}{4}+2\int_0^1\arcsin xd\sqrt{1-x^2}\text{ 。}$$

上式中第二项令$\arcsin x=t$，代入上式$=\dfrac{\pi^2}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}td\cos t\overset{\text{分部积分公式}}{=}\dfrac{\pi^2}{4}-2$。

(4) 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\sin x=e^{2x}\sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin xdx=e^{\pi}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}d\cos x$

$$=e^{\pi}+2(e^{2x}\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx)=e^{\pi}+2(-1-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx).$$

移项得：原式$=\dfrac{1}{5}(e^{\pi}-2).$

(5) 原式$=x\sin(\ln x)\big|_1^e-\int_1^e xd\sin(\ln x)=e\sin1-\int_1^e x\cos(\ln x)\dfrac{1}{x}dx$

$$=e\sin1-\int_1^e\cos(\ln x)dx=e\sin1-x\cos(\ln x)\big|_1^e+\int_1^e xd\cos(\ln x)$$

$$=e\sin1-e\cos1+\cos1-\int_1^e x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx.$$

移项得：原式$=\dfrac{1}{2}[e(\sin1-\cos1)+1].$

（6）$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=-\int_0^1\ln(1+x)d\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{\ln(1+x)}{2-x}\Bigg|_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{(2-x)(1+x)}dx$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x})dx=\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2=\frac{1}{3}\ln 2。$$

2．解：原式$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)=\frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2xdx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2 d(x^2)=\frac{1}{2}(\cos 1-1)。$$

3．解：（1）原式$=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega tdt=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{p^2+\omega^2}e^{-pt}(-p\sin\omega t-\omega\cos\omega t)\Big|_0^b$

$$=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}。$$

（2） 原式$=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+2}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+2}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[arctg(x+1)]\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}[arctg(x+1)]\Big|_0^b$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\frac{\pi}{4}-arctg(a+1)]+\lim_{b\to+\infty}[arctg(b+1)-\frac{\pi}{4}]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi。$$

(3) 原式$=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}(-x^n e^{-x})\Big|_0^b+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b nx^{n-1}e^{-x}dx$；

$$=\lim_{b\to+\infty}(-nx^{n-1}e^{-x})\Big|_0^b+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b n(n-1)x^{n-2}e^{-x}dx$$

$$=\cdots=n!\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=n!.$$

（4）$\because x=1$为瑕点，且$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(\frac{1}{1-x})\Big|_0^{1-\varepsilon}=+\infty$，即广义积分$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}$发散，$\therefore$ 广义积分$\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$发散。

（5） 原式$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

$$\because \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x-1)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\text{。}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \therefore \text{原式} = \pi\text{。}$$

（6）$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^0 \frac{\frac{-1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

（7） 因为$I_{1008} = x(1-x^2)^{1008}\Big|_0^1 - \int_0^1 xd(1-x^2)^{1008} = -1008\int_0^1 x(1-x^2)^{1007}(-2x)dx$

$= 2016\int_0^1 x^2(1-x^2)^{1007}dx = -2016\int_0^1 (1-x^2)^{1008}dx + 2016\int_0^1 (1-x^2)^{1007}dx$

$= -2016I_{1008} + 2016I_{1007}$,

所以$I_{1008} = \dfrac{2016}{2017}I_{1007} = \cdots = \dfrac{2016}{2017}\dfrac{2014}{2015}\cdots\dfrac{2}{3}I_0 = \dfrac{2016!!}{2017!!}$。

4．解：$\because \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$。

而$\displaystyle\int_{-\infty}^a te^{2t}dt = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a te^{2t}dt = \lim_{b\to-\infty}\left[\frac{t}{2}e^{2t}\Big|_b^a - \frac{1}{4}e^{2t}\Big|_b^a\right] = \frac{e^{2a}}{2}(a-\frac{1}{2})$,

故可知$e^{2a} = \dfrac{e^{2a}}{2}(a-\dfrac{1}{2})$，$\therefore a = \dfrac{5}{2}$。

5．解：$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim_{b\to+\infty}[\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}]\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty}[\frac{1}{1-k}(\ln b)^{1-k} - \frac{1}{1-k}(\ln 2)^{1-k}].$

故当$k>1$时，$\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}(\ln b)^{1-k} = 0$,积分收敛于$\dfrac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$.

当$k\le 1$时，则积分发散，利用极值理论，易知当$k = 1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$时，积分取得最小值。

第六章 定积分应用

§1 定积分在几何上的应用

1．解：由$\begin{cases}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1\\x+y=1\end{cases}$, 求得交点$(0,1),(1,0)$. 所围图形的面积：

$$A=\int_0^1[1-x-(1-x^{\frac{1}{2}})^2]dx=\int_0^1(2x^{\frac{1}{2}}-2x)dx=\frac{1}{3}。$$

2．解：由对称性可知，所求的面积$A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}2a^2\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2$。

3．解：由$\begin{cases}\rho=1,\\\rho=2\cos\varphi\end{cases}$, 求得交点$(1,-\frac{\pi}{3}),(1,\frac{\pi}{3})$. 由对称性，所求面积

$$A=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\varphi d\varphi\right]=2\left[\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

4．解：曲线$y^2=2x$与$y^2=1-x$的交点为$(\frac{1}{3},\sqrt{\frac{2}{3}})$与$(\frac{1}{3},-\sqrt{\frac{2}{3}})$，因此所围图形的面积

为：$A=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}|\frac{y^2}{2}-1+y^2|dy=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}(1-\frac{3y^2}{2})dy=\frac{4}{9}\sqrt{6}$。

5．解：$\because y'(0)=4,y'(3)=-2$

$\therefore$ 曲线在$(0,-3)$处的切线方程为$y+3=4x$，即$y=4x-3$,

曲线在$(3,0)$处的切线方程为$y=-2(x-3)$，即$y=-2x+6$,

由$\begin{cases}y=4x-3\\y=-2x+6\end{cases}$得两切线的交点$(\frac{3}{2},3)$，则所求面积：

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]dx+\int_{\frac{3}{2}}^3[-2x+6-(-x^2+4x-3)]dx.$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^3(x^2-6x+9)dx=(\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\frac{3}{2}}+(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x)\Big|_{\frac{3}{2}}^3=\frac{9}{4}.$$

6. 解：$V=\int_0^{2\pi}\pi y^2dx=\int_0^{2\pi}\pi(1-\cos t)^3dt=16\pi\int_0^{\pi}\sin^6 tdt=32\pi\int_0^{\pi/2}\sin^6 tdt=5\pi^2$。

7. 解：(1) 绕 x 轴，$V_x=\pi\int_0^{\pi}y^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\dfrac{\pi^2}{2}.$

(2) 绕 y 轴，$V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin xdx=2\pi^2.$

(3) 积分变量选为 x，由对称性，积分区间取$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， 体积元素为薄圆环

$$dv=\pi\left[1^2-(1-y)^2\right]dx,\ \text{体积为：}V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1^2-(1-y)^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2y-y^2)dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-\sin^2 x)dx=4\pi-\frac{\pi^2}{2}.$$

8.解：$V(\zeta)=\pi\int_0^{\zeta}\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx=\dfrac{1}{2}\pi(-\dfrac{1}{1+x^2})\Big|_0^{\zeta}=\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{1}{1+\zeta^2}),$

$\lim\limits_{\zeta\to+\infty}V(\zeta)=\dfrac{\pi}{2}$，而$V(a)=\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{1}{1+a^2})$，故$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}(1-\dfrac{1}{1+a^2}),$

解得$a=-1$(舍去)，$a=1$。

9. 证明：设$y=\sin x(0\le x\le 2\pi)$弧长为s_1，则$s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$，设椭圆周长为$s_2$，

椭圆方程 $x^2+2y^2=2$ 可化为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，可知椭圆参数方程为 $x=\sqrt{2}\cos t$，

$y=\sin t$，则$s_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2 t+\cos^2 t}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}dt.$

令 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则$s_2=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\sin^2(\dfrac{\pi}{2}-x)}(-dx)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx=s_1.$

10. 解：$\overset{\frown}{AB}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$

$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tdt=\dfrac{3}{2}a.$ 设M点对应参数$t=t_0$，则

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}a=\overset{\frown}{AM}=\int_0^{t_0}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=3a\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{t_0}=3a\frac{\sin^2 t_0}{2}$$

所以$\dfrac{1}{4}=\sin^2 t_0$，解得$t_0=\dfrac{\pi}{6}$，故得M点的坐标为$(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}a,\dfrac{a}{8})$.

11.解：因要 cost≥0, 所以$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$，即$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx=4。$$

12. 解：过设切点为 $(c,\ln c)$ $(2\le c\le 4)$，则切线的方程为：$y=\frac{1}{c}x-1+\ln c$。

所以，$s(c)=\int_2^4(\frac{x}{c}-1+\ln c-\ln x)dx=\frac{6}{c}+2\ln c-6\ln 2$。从而，

$s'(c)=-\frac{6}{c^2}+\frac{2}{c}=0,\therefore c=3$。 $s''(3)=\frac{2}{9}>0$。因此，$c=3$时，面积最小。最小值点为 $(3,\ln 3)$。

13. 解：因抛物线过原点，$\therefore c=0$. $\because\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{4}{9}$，即$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，

$\therefore b=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}a$。旋转体的体积为$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^3)$。

因为$b=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}a$，所以$V=\pi(\frac{2}{135}a^2+\frac{4}{81}a+\frac{64}{243})$。$V'(a)=\pi(\frac{4}{135}a+\frac{4}{81})$，驻点为

$a=-\frac{5}{3}$。 而$V''(-\frac{5}{3})=\pi\cdot\frac{4}{135}>0$，故$a=-\frac{5}{3}$时，旋转体的体积最小，此时$b=2$。

§2 定积分在物理上的应用

1．解：功微元$dW=\pi y^2dx\cdot x=\pi(R^2-x^2)xdx$，$W=\int_0^R\pi x(R^2-x^2)dx=\frac{\pi}{4}R^4$。

2．解：取活塞运动方向为x轴，活塞移动到x处的气体压强为$p(x)$，气体的体积为

$V(x)=\pi(1-x)a^2$.由波义耳定律，在恒温条件下，气体压强与气体体积的乘积为常数。所以，

$$p(x)\cdot V(x)=p(0)\cdot V(0)=p\cdot l\pi a^2,p(x)=\frac{p(0)\cdot V(0)}{V(x)}=\frac{p\cdot l\pi a^2}{\pi(l-x)a^2}=\frac{lp}{l-x},$$

考虑活塞从x位移到$x+dx$所做的功$dW=p(x)\cdot\pi a^2dx=\frac{\pi a^2pl}{l-x}dx,$

于是活塞从 0 位移到$\frac{1}{3}l$所做的功为：$W=\pi a^2pl\int_0^{\frac{l}{3}}\frac{1}{l-x}dx=\pi a^2pl\ln\frac{3}{2}$。

3．解：去直径所在直线为x轴，方向向上，要计算把球心O点从$(-a,0)$移到$(a,0)$所作

的功.设球心移至$(x,0)$处所需做的功为$W(x)$，球所受的力$F(x)$是方向向下的重力F_1以及方向向上的浮力F_2的合力，其重力$F_1=\frac{4}{3}\pi a^3$，而

$$F_2=V(x)=\frac{4}{3}\pi a^2-\pi(a+x)^3[a-\frac{1}{3}(a+x)]=\frac{2}{3}\pi a^2-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3,$$

所以$F(x)=F_2-F_1=-\frac{2}{3}\pi a^2-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3$,在力$F(x)$作用下，球心从$(x,0)$位移到$(x+dx,0)$所作功的微元 $dW=F(x)dx=(-\frac{2}{3}\pi a^2-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3)dx,$

所以 $$W=\int_{-a}^{a}(-\frac{2}{3}\pi a^2-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3)dx=-\frac{4}{3}\pi a^3.$$

4．解：建立坐标系，使得AB的方程为：$y=\frac{3}{10}x-1$，

压力微元$dp=\rho(2ydx)x=2x\rho(\frac{3}{10}x-1)dx,$

$$\therefore \quad p=\rho\int_{10}^{20}2x(\frac{3}{10}x-1)dx=1100\rho(t).$$

5．解：（1）建立坐标系，AB的方程为：$\frac{h-x}{x}=\frac{y}{\frac{a}{2}}$， 即$y=\frac{a}{2h}(h-x)$。

压力微元为：$dp=\rho\cdot x\cdot 2ydx=\frac{ax\rho}{h}(h-x)dx$($\rho$为水的比重)。

所以，$p=\int_0^h\frac{ax\rho}{h}(h-x)dx=\frac{ah^2\rho}{6}$。

（2） 作一水平线$x=b$，使得闸门上，下两部分所受的压力相等，即

$$\int_0^b\frac{a\rho}{h}x(h-x)dx=\frac{p}{2}=\frac{ah^2\rho}{12}。$$

而 $$\int_0^b\frac{a\rho}{h}x(h-x)dx=\frac{a\rho}{h}(\frac{1}{2}hx^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^b=\frac{a\rho}{h}(\frac{hb^2}{2}-\frac{b^3}{3}),$$

由$\frac{a\rho}{h}(\frac{hb^2}{2}-\frac{b^3}{3})=\frac{ah^2\rho}{12}$，解得$b=\frac{h}{2}$，即等腰三角形水闸的中位线分上，下两部分所受的压力相等。

6．解：当c点坐标为x_0时，AB杠对c点的引力为：

$$F=-\int_0^l k\frac{Mm}{l(x_0-x)^2}dx=\frac{kMm}{l}(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0-l}),$$

因而 $$W=\frac{kMm}{l}\int_{r_1+l}^{r_2+l}(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0-l})dx_0=\frac{kMm}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}.$$

7．解：$\bar{y}=\frac{1}{2}\int_0^2 2xe^{-x}dx=\int_0^2 xe^{-x}dx=-\int_0^2 xde^{-x}=-(xe^{-x}+e^{-x})\Big|_0^2=1-3e^{-2}$

8．解：$W=\int_0^{10}[400+(30-3t)50+(2000-20t)]3dt=91500$。