

作业 #5

(提交日期: 2024/12/10)

1. [5.1] 已知 f 是凸集 S 上的凸函数, 证明水平集 $T = \{x \in S | f(x) \leq k\}$ 对任意实数 k 是凸集。

2. [5.2(1)(4)] 判断以下函数是否为凸函数:

$$(1) f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad (4) f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1+x_2)}$$

3. [5.4] 考虑无约束极值问题:

$$\min f(\mathbf{x}) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29$$

(1) 求其所有稳定点;

(2) 稳定点是否是局部极小点? 该问题是否有全局极小点?

4. [5.5] 考虑无约束极值问题:

$$\min f(\mathbf{x}) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

(1) 求其所有局部极小点;

(2) 若迭代求解从 $\mathbf{x}_0 = (1, -1)^T$ 开始, 请问 $\mathbf{p}_0 = (-1, 1)^T$ 是否为下降方向?

5. 假设 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正定矩阵, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 求二次函数 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$ 的一阶和二阶导数。

6. [5.6] 假设 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正定矩阵, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 对二次函数 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$,

证明其沿射线 $\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ 的一维精确线搜索极小值为 $\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T \mathbf{p}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{G} \mathbf{p}_k}$ 。

7. [5.11] 考虑约束极值问题:

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

检验 $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0)^T$ 和 $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 1)^T$ 是否为 K-T 点。