



南京大學  
NANJING UNIVERSITY

工程管理学院  
SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

# 插值法

温丹苹

邮箱: [dpwen@nju.edu.cn](mailto:dpwen@nju.edu.cn)

办公室: 工管院协鑫楼306

# 7.3.1 差商及性质

## • 差商计算举例

Demo\_7\_3\_1\_DQ.m

例：已知  $y = f(x)$  的函数值表，试计算其各阶差商

$i$	0	1	2	3
$x_i$	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

解：差商表如下

$x_i$	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

## 7.3.2 Newton插值

- Newton插值计算步骤:

1. 首先根据插值节点和节点处函数值计算差商表;
2. 利用牛顿插值多项式估算  $f(x)$ 。

例: 已知函数  $y = \ln(x)$  的函数值如下

$x$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 Newton 线性和抛物线插值计算  $\ln(0.54)$  的近似值

## 7.3.2 Newton插值

解：取节点 **0.5, 0.6, 0.4** 作差商表

$$N_1(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5)$$

→  $N_1(0.54) = -0.6202$

$x_i$	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	<b>-0.6931</b>		
0.6	-0.5108	<b>1.8230</b>	
0.4	-0.9163	2.0275	<b>-2.0450</b>

$$N_2(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5) - 2.0450(x-0.5)(x-0.6)$$

→  $N_2(0.54) = -0.6153$

[Demo\\_7\\_3\\_2\\_Interp\\_newton.m](#)

- \* 只需使用差商表对角线上的值
- \* 节点根据需要排序，不必按大小顺序

## 7.3.2 Newton插值

- 作业

\* 给出 $f(x)$ 的函数值表，求2次和3次牛顿插值多项式，并计算 $f(0.9)$ 的近似值。

$x_k$	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶
-2	<u>17</u>			
0	1	<u>-8</u>		
1	2	1	<u>3</u>	
2	19	17	8	<u>1.25</u>



## 7.3.2 Newton插值

\* 给出  $f(x)$  的函数值表，求2次和3次牛顿插值多项式，并计算  $f(0.9)$  的近似值。

**解：**取节点  $-2, 0, 1$ ，得到2次牛顿插值多项式为

$$\begin{aligned} N_2(x) &= f(-2) + f[-2, 0](x + 2) + f[-2, 0, 1](x + 2)(x - 0) \\ &= 17 - 8(x + 2) + 3(x + 2)x \end{aligned}$$

$$f(0.9) \approx N_2(0.9) = 1.63$$

取节点  $-2, 0, 1, 2$ ，计算3次牛顿插值多项式，只需要在  $N_2(x)$  的基础上加上  $f[-2, 0, 1, 2](x + 2)(x - 0)(x - 1)$

$$\begin{aligned} \text{此时, } f(0.9) &\approx N_3(0.9) = 1.63 + 1.25(0.9 + 2)0.9(0.9 - 1) = \\ &1.3038 \end{aligned}$$

## 7.4 Hermite插值

### • 三点三次Hermite插值举例

例：函数  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ ，插值条件如下

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}, f(1) = 1, f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{27}{8}, f'(1) = \frac{3}{2}$$

试给出三次 Hermite 插值多项式，并写出余项。


解：作差商表

$x_i$	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
1/4	1/8		
1	1	7/6	
9/4	27/8	19/10	11/30

$$\rightarrow p(x) = \frac{1}{8} + \frac{7}{6}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{11}{30}\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1) + \alpha\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)\left(x - \frac{9}{4}\right)$$

将  $p'(1) = f'(1) = 3/2$  代入可得：  $\alpha = -\frac{14}{225}$

## 7.4 Hermite插值


$$p(x) = -\frac{14}{225}x^3 + \frac{263}{450}x^2 + \frac{233}{450}x - \frac{1}{25}$$

余项  $R(x) = f(x) - p(x)$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(x - \frac{1}{4}\right)(x-1)^2 \left(x - \frac{9}{4}\right)$$

$$= \frac{9\xi^{-5/2}}{4! \times 16} \left(x - \frac{1}{4}\right)(x-1)^2 \left(x - \frac{9}{4}\right)$$

$$\xi \in \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$$



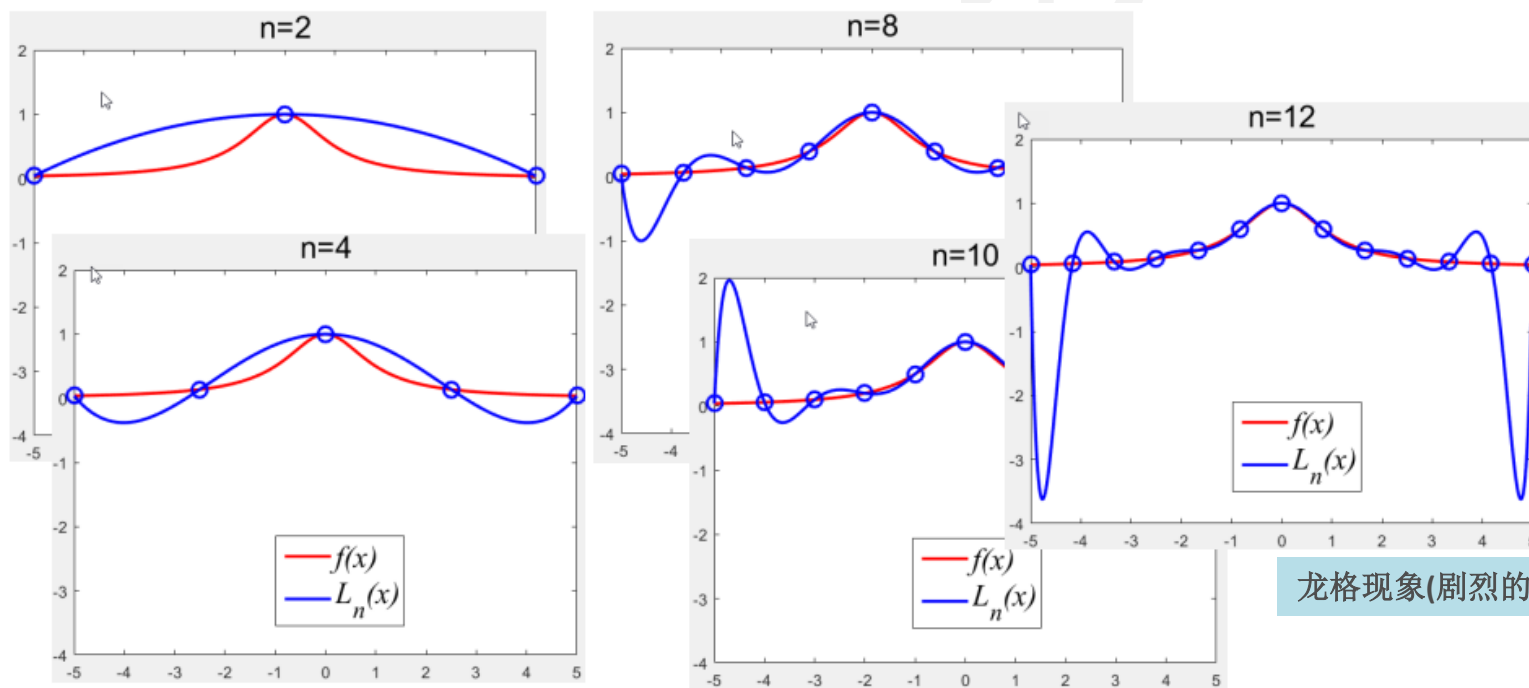
# 7.5 分段低次插值

## \* 插值误差举例

例：函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，插值区间  $[-5, 5]$ ，取等距插值节点，

试画出插值多项式  $L_n(x)$  的图像。

Demo\_7\_2\_Interp\_Lagrange.m

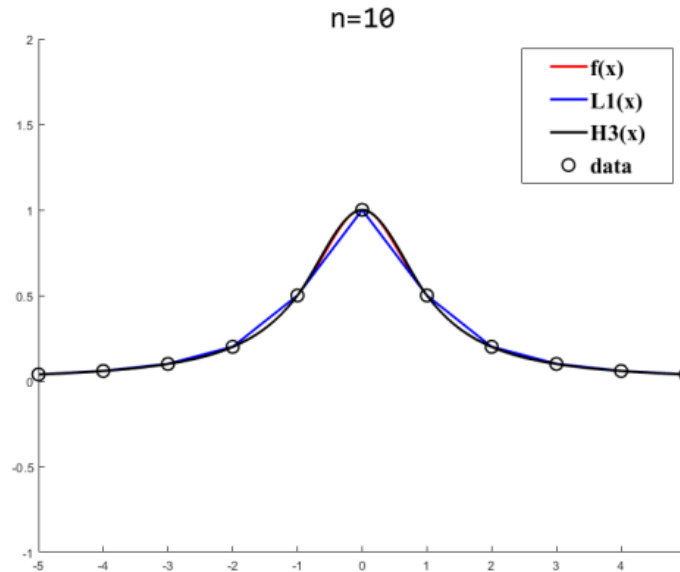


龙格现象(剧烈的震荡)

# 7.5 分段低次插值

## \* 插值举例

例：函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，插值区间  $[-5, 5]$ ，取等距节点（10 等分），试分别用分段线性插值和分段三次Hermite插值画出  $f(x)$  的近似图像。



Demo\_7\_3\_3\_Interp\_piecewise\_poly.m

# 第七章 插值与拟合



◆ Q & A

◆ 谢谢

WDP

