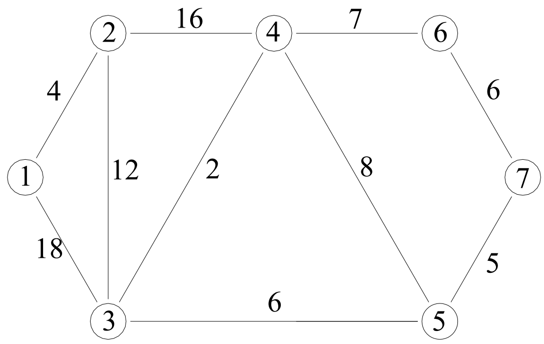
作业 #6

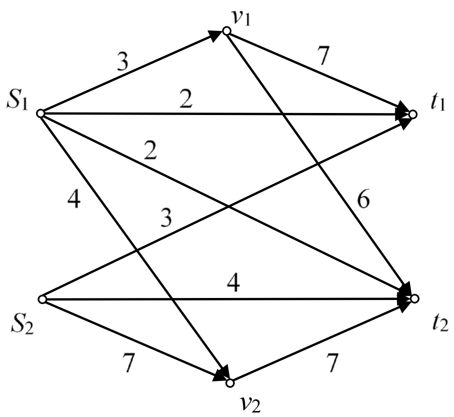
（提交日期：2023/12/25）

1. **[7.4]** 某公司要给一个快餐店配送原料，从仓库到快餐店的交通图如下，图中①表示仓库，⑦表示快餐店。旁边数字表示开车送原料经过这段路所需要的时间。请问应按什么路线才能使送货时间最短？

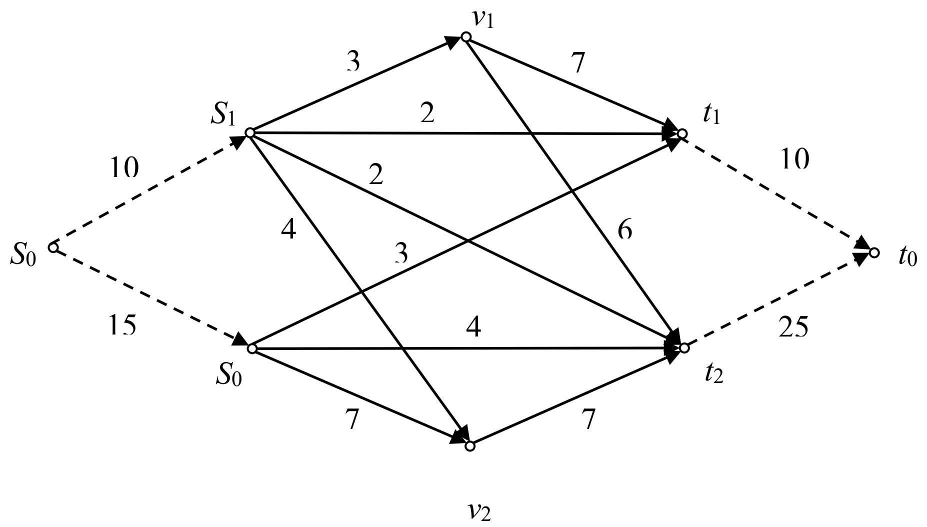


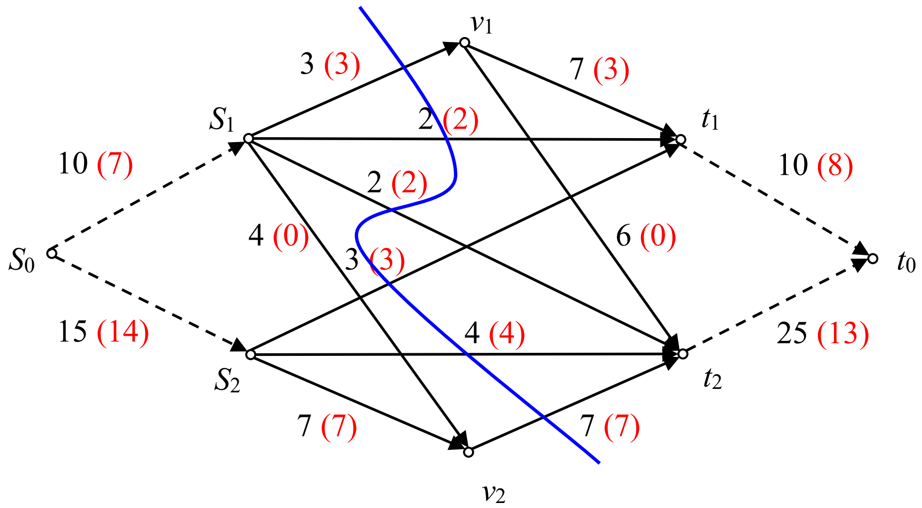
解：时间最短路线为：1→2→3→5→7，时长为 27。

2. **[补充题]** 如图，发点S_1，S_2分别可供应 10 和 15 个单位，收点t_1，t_2可以接受 10 和 25 个单位，求最大流，边上数为c_{ij}。



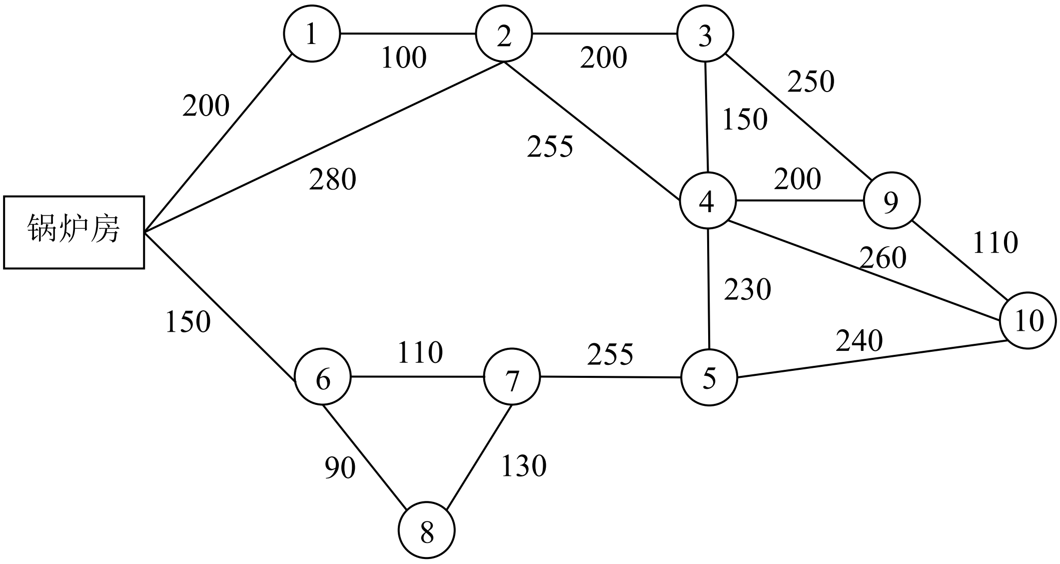
解：设一个虚拟总发点为S_0，一个虚拟总收点为t_0（如下图），问题等价于求从$S_0 \to t_0$的最大流。



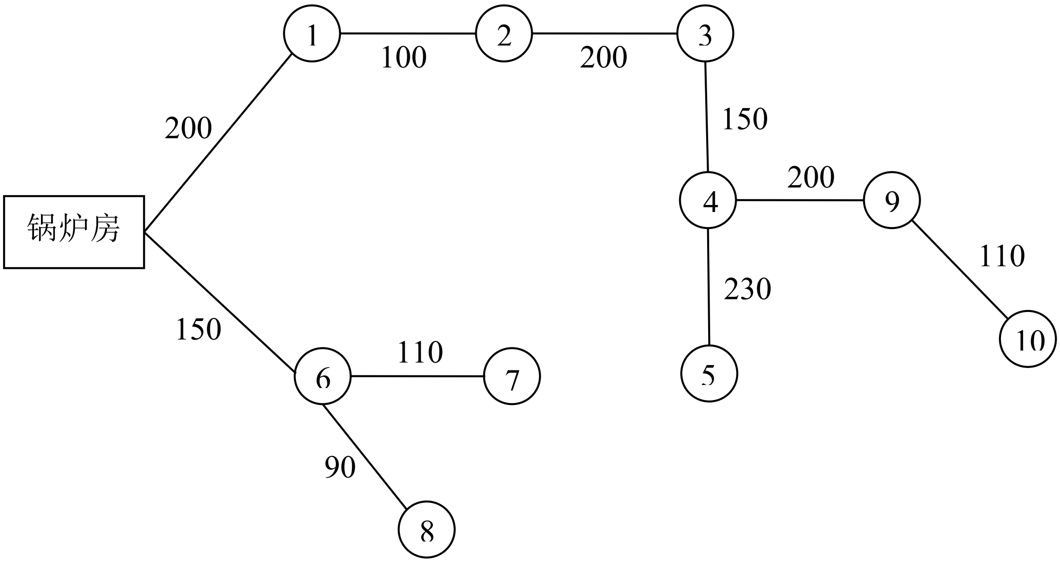


最大流为 21。

3. **[补充题]** 设计如图所示的锅炉房到各座楼铺设暖气管道的路线，使管道总长度最小（单位：m）。



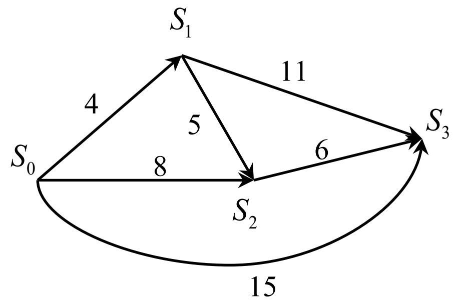
解：即求最小生成树：



4. **[补充题]** 某工厂准备购置一台新机器来扩大生产，新机器使用期为 3 年，在此之后不再使用。然而在工作的 3 年内，由于负荷较大，所以随时间增长，运行和保修费用将有较大幅度的增加。因此在机器使用 1 年或 2 年后再购置一台新机器来代替它可能更经济。下表给出了第 i 年年底购进一台新机器并在第 j 年底将其卖掉所花费的总费用。试用图论的方法，将其描述为最短路问题并求解给出设备更新的最佳方案。

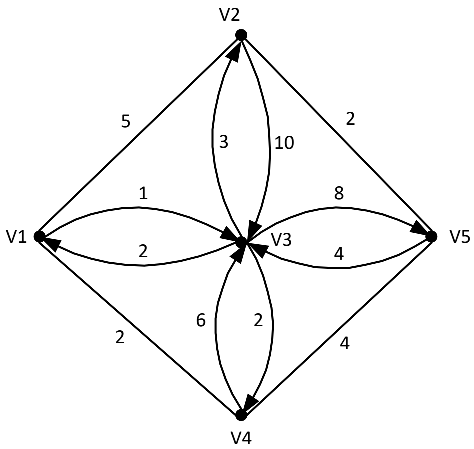
i \ j	1	2	3
0	4	8	15
1		5	11
2			6

解：令第 1 年初为S_0，第 1 年底为S_1，第 2 年底为S_2，第 3 年底为S_3，则设备更新路线图如下：



用标号法求得最短线路径为：$S_0 \to S_2 \to S_3$，路长 14（千元）。

5. **[补充题]** 若下图中，$v_1, v_2, \cdots, v_5$ 分别代表 5 个村子，已知各村学生人数分别为 40, 50, 10, 20, 25 人。现准备合建一所小学，问小学应设于哪一个村，使学生上下学走的路最短。



解：首先运用 Floyd 法出求图中任两点间的最短路，如下：

$$D^{(0)}=\begin{pmatrix}0&5&1&2&\infty\\5&0&10&\infty&2\\2&3&0&2&8\\2&\infty&6&0&4\\\infty&2&4&4&0\end{pmatrix},\ D^{(1)}=\begin{pmatrix}0&5&1&2&\infty\\5&0&6&7&2\\2&3&0&2&8\\2&7&3&0&4\\\infty&2&4&4&0\end{pmatrix},\ D^{(2)}=\begin{pmatrix}0&5&1&2&7\\5&0&6&7&2\\2&3&0&2&5\\2&7&3&0&4\\7&2&4&4&0\end{pmatrix}$$

$$D^{(3)}=\begin{pmatrix}0&4&1&2&6\\5&0&6&7&2\\2&3&0&2&5\\2&6&3&0&4\\6&2&4&4&0\end{pmatrix},\ D^{(4)}=\begin{pmatrix}0&4&1&2&6\\5&0&6&7&2\\2&3&0&2&5\\2&6&3&0&4\\6&2&4&4&0\end{pmatrix},\ D^{(5)}=\begin{pmatrix}0&4&1&2&6\\5&0&6&6&2\\2&3&0&2&5\\2&6&3&0&4\\6&2&4&4&0\end{pmatrix}$$

如建在v_1，$d=(5+4)\times 50+(2+1)\times 10+(2+2)\times 20+(6+6)\times 25=860$

如建在v_2，$d=(4+5)\times 40+(3+6)\times 10+(6+6)\times 20+(2+2)\times 25=790$

如建在v_3，$d=(1+2)\times40+(6+3)\times50+(3+2)\times20+(4+5)\times25=895$

如建在v_4，$d=(2+2)\times40+(6+6)\times50+(2+3)\times10+(4+4)\times25=1010$

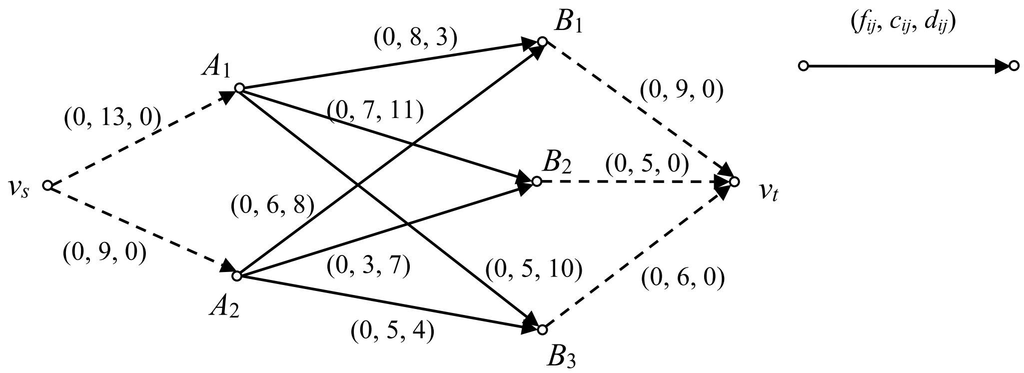
如建在v_5，$d=(6+6)\times40+(2+2)\times50+(5+4)\times10+(4+4)\times20=930$

所以，小学应该建在v_2村使得学生上下学路程最短。

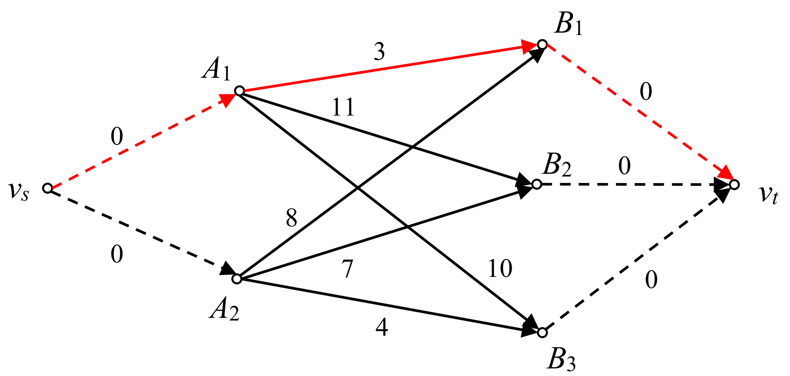
6. **[补充题]** 某种货物由 2 个仓库A_1，A_2运送到 3 个配货中心B_1，B_2，B_3。A_1，A_2的库存量分别为每天 13t, 9t; B_1，B_2，B_3每天需求分别为 9t, 5t, 6t。各仓库到配货中心的运输能力、单位运费如下表，求运费最省的运输方案。

运程	运量限制（t/d）	运费（百元/t）
$A_1\to B_1$	8	3
$A_1\to B_2$	7	11
$A_1\to B_3$	5	10
$A_2\to B_1$	6	8
$A_2\to B_2$	3	7
$A_2\to B_3$	5	4

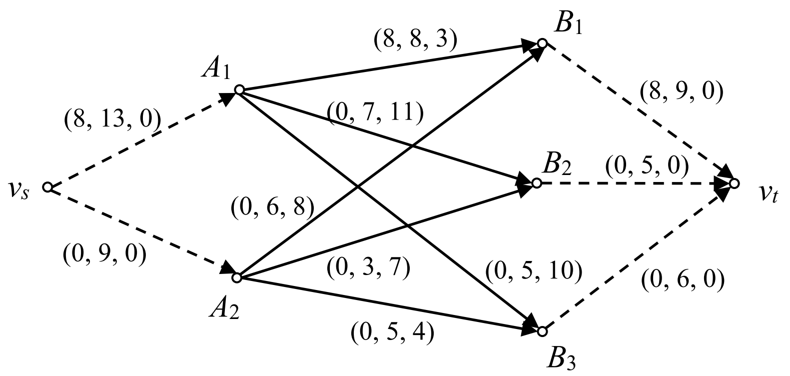
解：



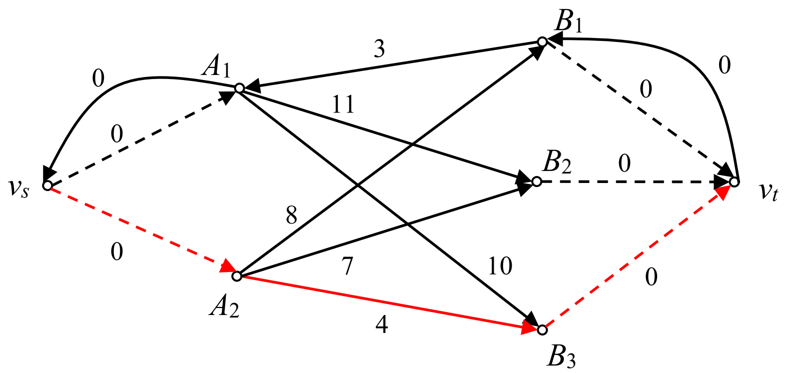
对应的剩余网络为：



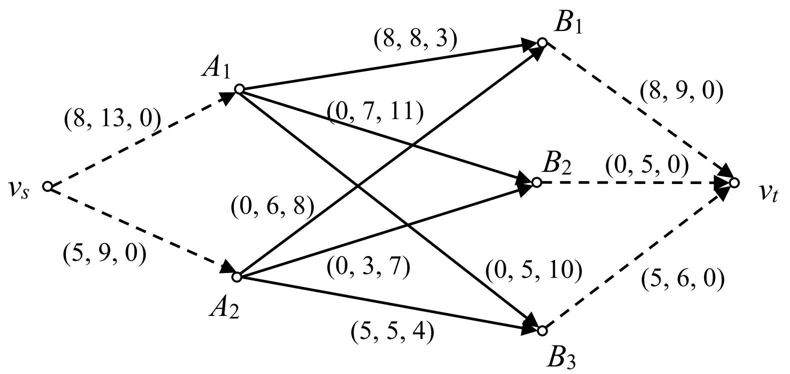
$\min\{13,8,9\}=8$，所以最小费用增广链上相应流量增加 8。



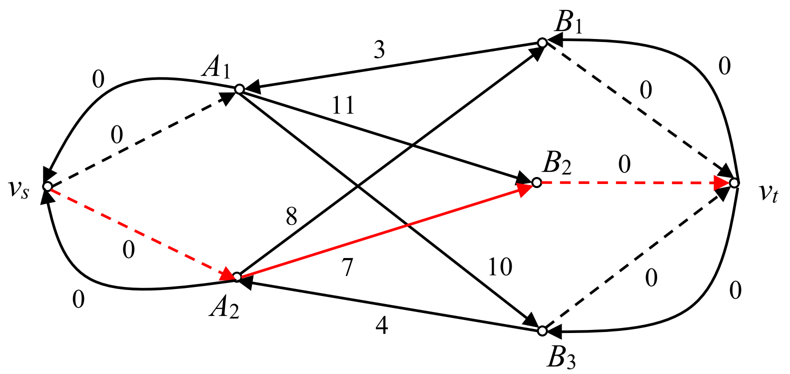
对应的剩余网络为：



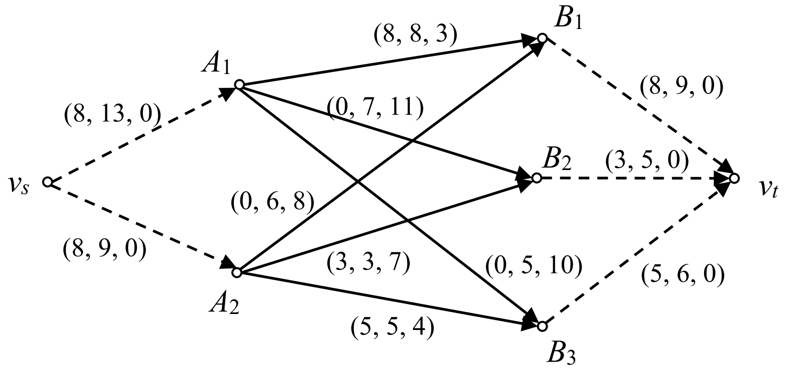
$\min\{9,5,6\}=5$，所以最小费用增广链上相应流量增加 5。



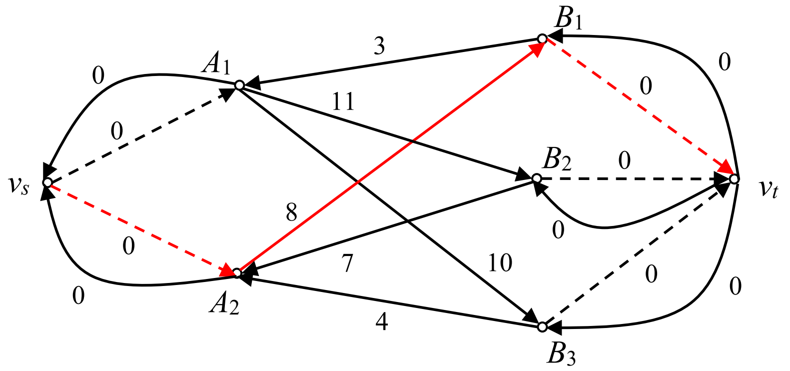
对应的剩余网络为：



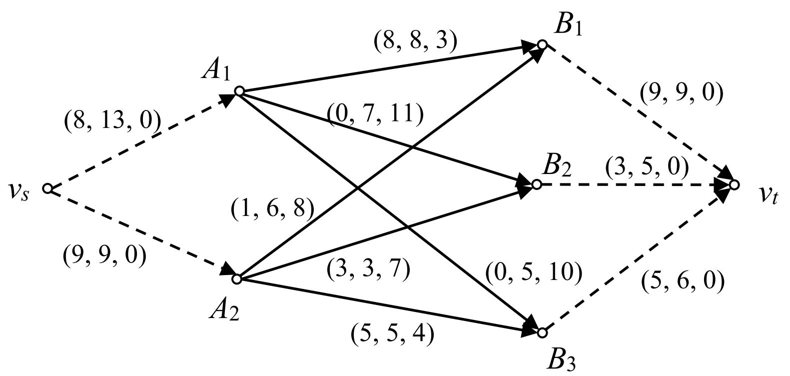
$\min\{4,3,5\}=3$，所以最小费用增广链上相应流量增加 3。



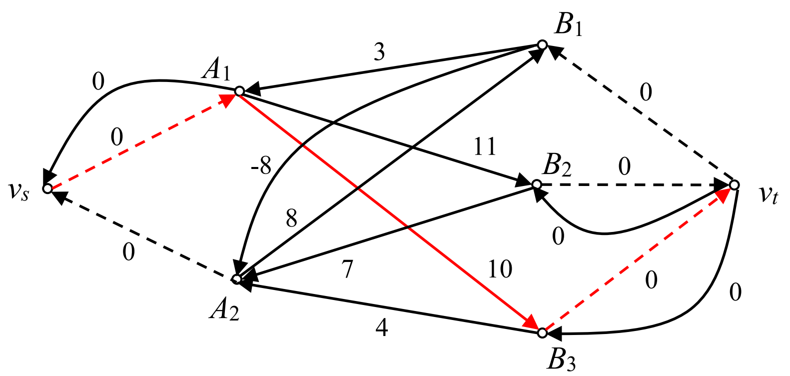
对应的剩余网络为：



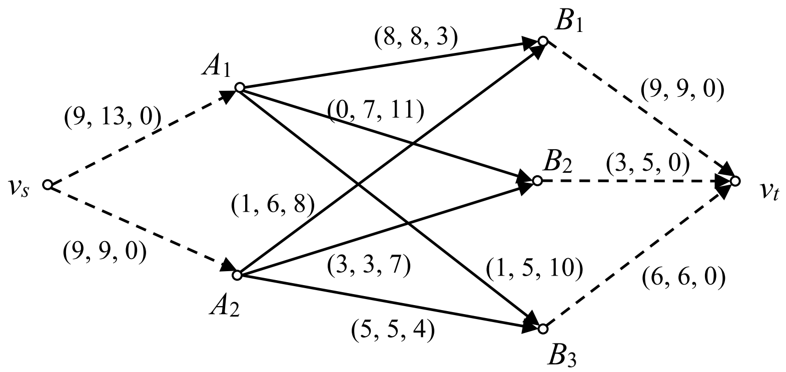
$\min\{1,6,1\}=1$，所以最小费用增广链上相应流量增加 1。



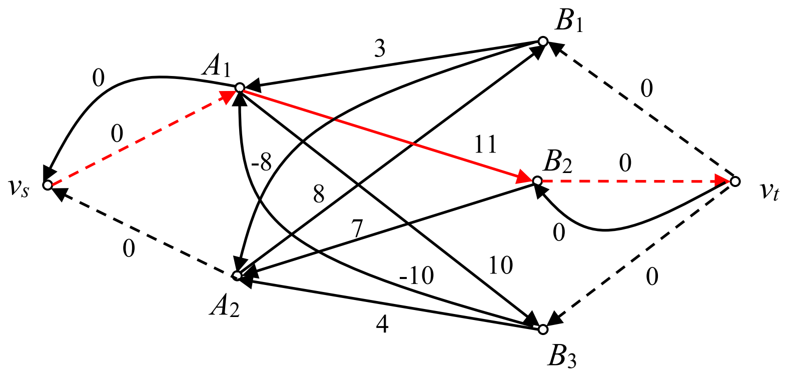
对应的剩余网络为：



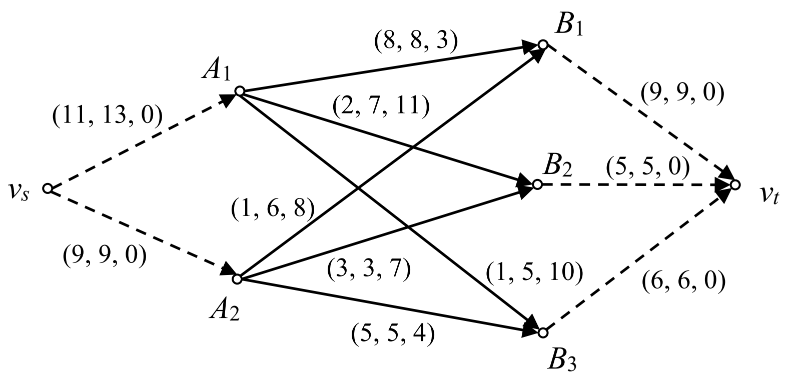
$\min\{5,5,1\}=1$，所以最小费用增广链上相应流量增加 1。



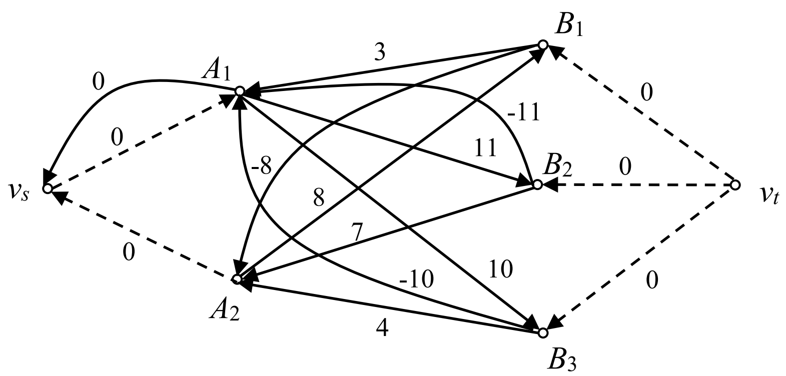
对应的剩余网络为：



$\min\{4,7,2\}=2$，所以最小费用增广链上相应流量增加 2。



对应的剩余网络为：



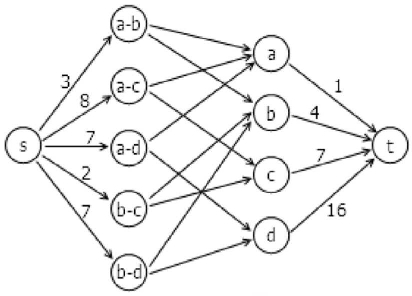
此时，已无增广链。最小费用为：$8\times3+2\times11+1\times10+1\times8+3\times7+5\times4=105$。

7. **[补充题]** 在美国职业棒球例行赛中，每个球队都要打 162 场比赛（对手包括但不限于同一分区里的其他队伍，和同一支队伍也往往会有多次交手），所胜场数最多者为该分区的冠军；如果出现并列第一，则用加赛决出冠军。在比赛过程中，如果发现某支球队无论如何都已经不可能以第一名或者并列第一名的成绩结束比赛，那么这支球队就提前被淘汰了（虽然它还要继续打下去）。

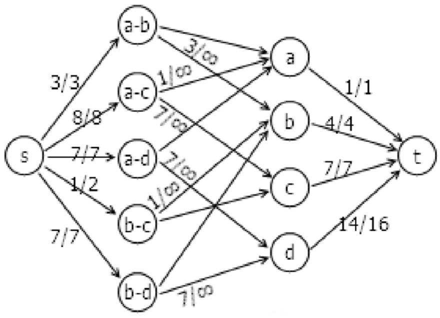
Team	胜	负	剩余	纽约	巴尔的摩	波士顿	多伦多	底特律
纽约	75	59	28	0	3	8	7	3
巴尔的摩	72	62	28	3	0	2	7	4
波士顿	69	66	27	8	2	0	0	0
多伦多	60	75	27	7	7	0	0	0
底特律	49	86	27	3	4	0	0	0

该表是某次美国联盟东区比赛的结果。在该小组分区中，纽约队暂时排名第一，总共胜 75 场，负 59 场，剩余 28 场比赛没打，其中和巴尔的摩还有 3 场比赛，和波士顿还有 8 场比赛，和多伦多还有 7 场比赛，和底特律还有 3 场比赛（还有 7 场与不在此分区的其他队伍的比赛）。底特律暂时只有 49 场比赛获胜，剩余 27 场比赛没打。如果剩余的 27 场比赛全都获胜的话，是有希望超过纽约队的；即使只有其中 26 场比赛获胜，也有希望与纽约队战平，并在加赛中取胜。然而，根据表里的信息已经足以判断，其实底特律已经没有希望夺冠了，请你不妨来分析推导一下（提示：考虑相应的网络最大流问题）。

解：对于底特律来说，最好的局面就是，剩余 27 场比赛全都赢了，并且其他四个队在对外队的比赛中全都输了。这样，底特律将会得到 76 胜的成绩，从而排名第一。但是，麻烦就麻烦在，剩下的四个队内部之间还会有多次比赛，其中必然会有一些队伍获胜。为了让底特律仍然排在第一，我们需要保证剩下的四个队内部之间比完之后都不要超过 76 胜的成绩。换句话说，在纽约、巴尔的摩、波士顿、多伦多之间的 $3+8+7+2+7+0=27$ 场比赛中，纽约最多还能胜 1 次，巴尔的摩最多还能胜 4 次，波士顿最多还能胜 7 次，多伦多最多还能胜 16 次。只要这 27 场比赛所产生的 27 个胜局能够按照上述要求分给这四个队，底特律就有夺冠的希望。



根据上图，利用 Ford－Fulkerson 算法寻找整个网络的最大流，若流量能够达到 27 ，这就说明我们能够仔细地安排四支队伍之间全部比赛的结果，使得它们各自获得的胜局数都在限制范围之内，从而把第一名的位置留给底特律；如果最大流的流量无法达到 27 ，这就说明四个队之间的比赛场数太多，无法满足各队获胜局数的限制，那么底特律也就不可能取胜了。



在图示的网络中，可能的最大流量是 26，没有达到 27 ，因而底特律必败无疑。