

作业 #3

(提交日期: 2023/11/7)

1. 公司决定使用 1000 万元新产品开发基金开发 A, B, C 三种新产品。经预测估计, 开发 A, B, C 三种新产品的投资利润率分别为 5%, 7%, 10%。由于新产品开发有一定风险, 公司研究后确定了下列优先顺序目标:

- (1) A 产品至少投资 300 万元;
- (2) 为分散投资风险, 任何一种新产品的开发投资不超过开发基金总额的 35%;
- (3) 应至少留有 10% 的开发基金, 以备急用;
- (4) 使总的投资利润最大。

试建立投资分配方案的目标规划模型。

解: 设分配给 A, B, C 三种新产品的开发投资额分别为 x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} \min \quad & P_1 d_1^- + P_2 (d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3 d_5^- + P_4 d_6^- \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000 \\ x_1 + d_1^- - d_1^+ = 300 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 350 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 350 \\ x_3 + d_4^- - d_4^+ = 350 \\ 1000 - (x_1 + x_2 + x_3) + d_5^- - d_5^+ = 100 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.1x_3 + d_6^- - d_6^+ = 100 \\ x_i \geq 0, i=1, 2, 3; d_j^-, d_j^+ \geq 0, j=1, \dots, 6 \end{cases} \end{aligned}$$

2. 已知单位牛奶、牛肉、鸡蛋中的维生素及胆固醇含量等有关数据见下表。

如果只考虑这三种食物, 并且设立了下列三个目标:

第一, 尽量满足三种维生素的每日最小需求量;

第二, 使每日摄入的胆固醇尽可能少;

第三, 使每日购买食品的费用尽可能少。

请建立问题的目标规划模型。

项目	牛奶 (500g)	牛肉 (500g)	鸡蛋 (500g)	每日最小需求量 /mg
维生素 A/mg	1	1	10	1
维生素 C/mg	100	10	10	30
维生素 D/mg	10	100	10	10

胆固醇/单位	70	50	120	
费用/元	1.5	8	4	

解：设三种食物的每日摄入量分别为 x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} \min \quad & P_1(d_1^- + d_2^- + d_3^-) + P_2d_4^+ + P_3d_5^+ \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + d_1^- - d_1^+ = 1 \\ 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 + d_2^- - d_2^+ = 30 \\ 10x_1 + 100x_2 + 10x_3 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\ 70x_1 + 50x_2 + 120x_3 + d_4^- - d_4^+ = 0 \\ 1.5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + d_5^- - d_5^+ = 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3; d_j^-, d_j^+ \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

3. 下表中给出了一个运输问题及它的一个解，试问：

- (1) 表中给出的解是否为最优解？请用位势法进行检验。
- (2) 若价值系数 c_{24} 由 1 变为 3，所给的解是否仍为最优解？若不是，请求出最优解。
- (3) 若所有价值系数均增加 1，最优解是否改变？为什么？
- (4) 若所有价值系数均乘以 2，最优解是否改变？为什么？
- (5) 写出该运输问题的对偶问题，并给出其对偶问题的最优解。

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	5	3	6	8
A_2	8	1	2	6	10
A_3	3	7	3	5	4
销量	8	5	6	3	22

解：(1) 采用位势法计算其检验数，结果如下：

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u
A_1	(4)	5	3	(6)	8	0

A_2	8	1	(0)	2	(1)	6	2	1	10	1
A_3	(2)	3	(5)	7	3	5	1	1	4	1
销量	8		5		6		3		22	
v	0		1		4		0			

所有检验数非负，因此是最优解。

(2) 当价值系数 c_{24} 由 1 变为 3 时，重新计算其检验数，结果如下：

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u
A_1	(6) 4	5 1	3 4	(6) 6	8	0
A_2	8 1	(-2) 2	(-1) 6	2 3	10	3
A_3	(4) 3	(5) 7	3 5	1 1	4	1
销量	8	5	6	3	22	
v	-2	1	4	0		

有负的检验数，因此不是最优解。采用闭回路调整，得：

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u
A_1	(4) 4	3 1	5 4	(6) 6	8	0
A_2	8 1	2 2	(1) 6	(2) 3	10	1
A_3	(2) 3	(5) 7	1 5	3 1	4	1
销量	8	5	6	3	22	
v	0	1	4	0		

此时检验数全部非负，得到最优解：

$$x_{12} = 3, x_{13} = 5, x_{21} = 8, x_{22} = 2, x_{33} = 1, x_{34} = 3$$

(3) 最优解不变。

(4) 最优解不变。

(5) 对偶问题为：

$$\max w = 8u_1 + 10u_2 + 4u_3 + 8v_1 + 5v_2 + 6v_3 + 3v_4$$

$$\text{s.t. } u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i=1,2,3; j=1,2,3,4)$$

由(1)中所得检验数知，对偶问题的最优解为 $Y = (0, 1, 1, 0, 1, 4, 0)^T$ (对偶最优解不唯一)。

4. 某市有三个面粉厂，它们供应三个面食加工厂所需的面粉。各面粉厂的产量、各面食加工厂加工面粉的能力、各面食加工厂和各面粉厂之间的单位运价，均示于下表中。假定在第1、2和3面食加工厂制作单位面粉食品的利润分别为12、16和11，试确定使总效益最大的面粉分配计划(假定面粉厂和面食厂都属于同一个主管单位)。

食品厂 面粉厂	1	2	3	面粉厂产量
I	3	10	2	20
II	4	11	8	30
III	8	11	4	20
食品厂需量	15	25	20	

解：据题意所得的新运价表：

食品厂 面粉厂	1	2	3	Dummy	面粉厂产量
I	-9	-6	-9	0	20
II	-8	-5	-3	0	30
III	-4	-5	-7	0	20
食品厂需量	15	25	20	10	

用西北角法获得初始可行解：

食品厂 面粉厂	1	2	3	Dummy	面粉厂产量
I	15	5	(-5)	(-3)	20
II	(0)	20	10	(-4)	30
III	(8)	(4)	10	10	20
食品厂需量	15	25	20	10	

食品厂 面粉厂	1	2	3	Dummy	面粉厂产量
I	15	(5)	5	(2)	20
II	(-5)	25	5	(-4)	30
III	(3)	(4)	10	10	20
食品厂需量	15	25	20	10	

食品厂 面粉厂	1	2	3	Dummy	面粉厂产量
I	10	(0)	10	(2)	20
II	5	25	(5)	(1)	30
III	(3)	(-1)	10	10	20
食品厂需量	15	25	20	10	

食品厂 面粉厂	1	2	3	Dummy	面粉厂产量
I	0	(0)	20	(1)	20
II	15	15	(5)	(0)	30
III	(4)	10	(1)	10	20
食品厂需量	15	25	20	10	

总效益为： $20 \times 9 + 15 \times 8 + 15 \times 5 + 10 \times 5 = 425$ 。

由于有检验数为 0，所以本题有无穷多最优解。

食品厂 面粉厂	1	2	3	Dummy	面粉厂产量
I	0		20		20
II	15	5		10	30
III		20			20
食品厂需量	15	25	20	10	

总效益为： $20 \times 9 + 15 \times 8 + 5 \times 5 + 20 \times 5 = 425$ 。

5. [3.10] 甲、乙、丙三个城市每年需要的煤炭由鸡西、鹤岗两处煤矿负责供应。这两处煤矿的价格和质量都基本相同。鸡西、鹤岗两处煤矿的供应能

力分别为 400 万 t, 450 万 t, 由煤矿至各城市的单位运价 (万元 / 万 t) 如表所示。

表 煤矿运价与供需表

产地 \ 销地	甲城市	乙城市	丙城市	产量 (万 t)
鸡西煤矿	15	18	22	400
鹤岗煤矿	21	25	16	450
需求量 (万 t)	320	250	无上限	

由于供不应求, 三个城市申报需求分别为 320 万 t, 250 万 t 和无上限。经协商决定甲城市供应量可减少 30 万 t; 乙城市应全部满足, 丙城市不少于 270 万 t。试求总运费为最低的调运方案。

解: 据题意所得的新运价表:

产地 \ 销地	甲 1	甲 2	乙	丙 1	丙 2	产量 (万 t)
鸡西煤矿	15	15	18	22	22	400
鹤岗煤矿	21	21	25	16	16	450
虚拟产地	M	0	M	M	0	30
需求量 (万 t)	290	30	250	270	40	880

鸡西煤矿给甲公司 150 万 t, 乙公司 250 万 t; 鹤岗煤矿给甲公司 140 万 t, 丙公司 310 万 t。总调运费为 14650 万元。

6. [3.12] 某农业贸易公司从事谷物买卖, 现在农产品生产基地 A_1 、 A_2 、 A_3 分别购买了谷物 3 车皮、6 车皮、5 车皮。拟在 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 这 4 城市销售, 各地的需求分别为 2 车皮、4 车皮、3 车皮、3 车皮。所有货物都要经过中转地 T_1 或 T_2 运往目的地。相关线路的运输价格如下表 (单位: 千元/车皮)。

表 (1)

	中转地 T_1	中转地 T_2
农基地 A_1	8	6
农基地 A_2	3	8
农基地 A_3	9	3

表 (2)

	城市 B_1	城市 B_2	城市 B_3	城市 B_4
中转地 T_1	44	34	34	32
中转地 T_2	57	35	28	24

试利用计算机求出最优的运输方案。

解：（1）总供给 $S=14$ 车皮；总需求 $D=12$ 车皮；供过于求。

（2）总运输费用为 419 千元。农基地 A1 向中转地 T2 运 1 车皮；农基地 A2 向中转地 T1 运 6 车皮；中转地 T1 向城市 B1、B2 运 2、4 车皮；中转地 T2 向城市 B3、B4 运 3、3 车皮。