# 作业 #4

**（提交日期：2023/11/28）**

1. 红星日用化工厂为发运产品，下一年度需 6 种不同容积的包装箱。每种包装箱的需求量及生产一个的可变费用如下表。

| 包装箱代号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 容积（$m^3$） | 0.08 | 0.1 | 0.12 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
| 需求量（个） | 500 | 550 | 700 | 900 | 450 | 400 |
| 可变费用（元/个） | 5.0 | 8.0 | 10.0 | 12.1 | 16.3 | 18.2 |

由于生产不用容积包装箱时需进行专门准备、下料等，生产某一容积包装箱的固定费用均为 1200 元。又若某一容积包装箱数量不够时，可以用比它容积大的代替。试问该化工厂应订做哪几种代号的包装箱各多少个使费用最节省。(建立线性规划模型即可，无需求解)

**解：** 设 $x_i\left(i=1,\cdots,6\right)$ 为代号 $i$ 的包装箱的订做数量，

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{订做第}i\text{种包装箱}\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

$$\min\quad z=1200\sum_{i=1}^{6}y_i+5x_1+8x_2+10x_3+12.1x_4+16.3x_5+18.2x_6$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{6}x_i=3500\\ x_6\ge 400\\ x_5+x_6\ge 850\\ x_4+x_5+x_6\ge 1750\\ x_3+x_4+x_5+x_6\ge 2450\\ x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\ge 3000\\ x_i\le My_i\left(i=1,\cdots,6\right)\\ x_i\ge 0\text{且为整数}\end{cases}$$

2. 某城市有 6 个区，要确定在哪些区修建消防站。要求保证至少有一个消防站在每个区的 15 分钟（行驶时间）车程内，并希望修建的消防站最少。下表给出了在该城市的各区之间行驶所需要的时间（单位：分钟）。请为该问题建立整数线性规划模型，无需求解。

| 出发 \ 到达 | 区 1 | 区 2 | 区 3 | 区 4 | 区 5 | 区 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 区 1 | 0 | 12 | 15 | 30 | 30 | 20 |
| 区 2 | 12 | 0 | 25 | 35 | 20 | 10 |
| 区 3 | 15 | 25 | 0 | 15 | 30 | 20 |
| 区 4 | 30 | 35 | 15 | 0 | 15 | 25 |
| 区 5 | 30 | 20 | 30 | 15 | 0 | 12 |
| 区 6 | 20 | 10 | 20 | 25 | 12 | 0 |

**解**：对于每个区来说，要确定是否在那里修建消防站，设 0-1 型变量：

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{如果在区}i\text{修建消防站} \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

目标函数：min $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

约束条件：下表说明了哪些位置可以在 15 分钟内达到每个区。

| 区 | 在 15 分钟车程内的区 | 区 | 在 15 分钟车程内的区 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 3 | 4 | 3, 4, 5 |
| 2 | 1, 2, 6 | 5 | 4, 5, 6 |
| 3 | 1, 3, 4 | 6 | 2, 5, 6 |

为保证至少有一个消防站在区 $i$ 的 15 分钟车程内，加入约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 \ge 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \ge 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 \ge 1 \end{cases}$$

3. 分别用割平面法和分支定界法解下列整数规划：

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

**解：【割平面法】**

| $c_j$ | | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 0 | $x_3$ | 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $x_4$ | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $x_5$ | 21 | [6] | 2 | 0 | 0 | 1 |
| $\sigma_j$ | | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $x_3$ | 3/2 | 0 | [2/3] | 1 | 0 | -1/6 |
| 0 | $x_4$ | 7/2 | 0 | 4/3 | 0 | 1 | 1/6 |
| 2 | $x_1$ | 7/2 | 1 | 1/3 | 0 | 0 | 1/6 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 1/3 | 0 | 0 | -1/3 |
| 1 | $x_2$ | 9/4 | 0 | 1 | 3/2 | 0 | -1/4 |
| 0 | $x_4$ | 1/2 | 0 | 0 | -2 | 1 | 1/2 |
| 2 | $x_1$ | 11/4 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 1/4 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | -1/2 | 0 | -1/4 |

$x_1 = 11/4$有最大小数部分$3/4$，因此选择该行产生割平面：$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_5 \le -\frac{3}{4}$。

| $c_j$ | | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 1 | $x_2$ | 9/4 | 0 | 1 | 3/2 | 0 | -1/4 | 0 |
| 0 | $x_4$ | 1/2 | 0 | 0 | -2 | 1 | 1/2 | 0 |
| 2 | $x_1$ | 11/4 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 1/4 | 0 |
| 0 | $x_6$ | -3/4 | 0 | 0 | -1/2 | 0 | [-1/4] | 1 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | -1/2 | 0 | -1/4 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | -1 |
| 0 | $x_4$ | -1 | 0 | 0 | [-3] | 1 | 0 | 2 |
| 2 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | $x_5$ | 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -4 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 1 | $x_2$ | 7/3 | 0 | 1 | 0 | 2/3 | 0 | 1/3 |
| 0 | $x_3$ | 1/3 | 0 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | -2/3 |
| 2 | $x_1$ | 7/3 | 1 | 0 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 |
| 0 | $x_5$ | 7/3 | 0 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -8/3 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

$x_2 = 7/3$有小数部分$1/3$，因此选择该行产生割平面：$-\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6 \le -\frac{1}{3}$。

| $c_j$ | | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
| 1 | $x_2$ | 7/3 | 0 | 1 | 0 | 2/3 | 0 | 1/3 | 0 |
| 0 | $x_3$ | 1/3 | 0 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | -2/3 | 0 |
| 2 | $x_1$ | 7/3 | 1 | 0 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 | 0 |
| 0 | $x_5$ | 7/3 | 0 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -8/3 | 0 |
| 0 | $x_7$ | -1/3 | 0 | 0 | 0 | [-2/3] | 0 | -1/3 | 1 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | $x_3$ | 1/2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1/2 | -1/2 |
| 2 | $x_1$ | 5/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | -1/2 |
| 0 | $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | 1 |
| 0 | $x_7$ | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | -3/2 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |

$x_1 = 5/2$ 有小数部分 $1/2$，因此选择该行产生割平面：$-\frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7 \le -\frac{1}{2}$。

| $c_j$ | | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
| 1 | $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $x_3$ | 1/2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1/2 | -1/2 | 0 |
| 2 | $x_1$ | 5/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | -1/2 | 0 |
| 0 | $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | 1 | 0 |
| 0 | $x_7$ | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | -3/2 | 0 |
| 0 | $x_8$ | -1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1/2 | [-1/2] | 1 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| 0 | $x_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 2 | $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| 0 | $x_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | 0 | 2 |
| 0 | $x_7$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | -3 |
| 0 | $x_8$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -2 |
| $\sigma_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |

由此，得最优解为 $x_1^* = 3,\ x_2^* = 1$，目标函数值为 7。

**【分支定界法】**

（1）松弛问题（LP）为：

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{cases}$$

最优解为：$x^* = \left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 7.75。定界：$0 \le z^* \le 7.75$。

（2）取 $x_1 = \frac{11}{4}$ 进行分支，得如下两个 LP 问题：

$$\text{(LP1)} \quad \max \quad z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \le 2 \end{cases} \qquad \text{(LP2)} \quad \max \quad z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$

LP1 的最优解为：$x^* = (2,2)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 6。LP2 的最优解为：$x^* = \left(3, \frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 7.5。定界：$6 \le z^* \le 7.5$。

（3）取 $x_2 = \frac{3}{2}$ 对 LP2 进行分支，得如下两个 LP 问题：

$$\text{(LP21)} \quad \max \quad z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 1 \end{cases} \qquad \text{(LP22)} \quad \max \quad z = 2x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

LP21 的最优解为：$x^* = \left(\frac{19}{6}, 1\right)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 $\frac{22}{3}$。LP22 无可行解。定界：$6 \le z^* \le \frac{22}{3}$。

（4）取 $x_1 = \frac{19}{6}$ 对 LP21 进行分支，得如下两个 LP 问题：

$$
\text{(LP211)}\quad \begin{aligned} &\max \quad z = 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 \le 3 \end{cases} \end{aligned}
\qquad
\text{(LP212)}\quad \begin{aligned} &\max \quad z = 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 4 \end{cases} \end{aligned}
$$

LP211 的最优解为：$x^* = (3,1)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 7。LP212 无可行解。定界：$7 \le z^* \le 7$。

所以该整数规划的最优解即为：$x^* = (3,1)^{\mathrm{T}}$，目标函数值为 7。

4. 需要分派 5 人做 5 项工作，每人做各项工作的能力评分见下表。应如何分派，才能使总的得分最大？试分别用表上作业法和匈牙利法求解。

| 业务 / 人员 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1.3 | 0.8 | 0 | 0 | 1.0 |
| $A_2$ | 0 | 1.2 | 1.3 | 1.3 | 0 |
| $A_3$ | 1.0 | 0 | 0 | 1.2 | 0 |
| $A_4$ | 0 | 1.05 | 0 | 0.2 | 1.4 |
| $A_5$ | 1.0 | 0.9 | 0.6 | 0 | 1.1 |

**解：匈牙利法：**

将系数矩阵转化为标准的最小化指派问题：

$$
\begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 1.4 & 1.4 & 0.4 \\ 1.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 1.4 \\ 0.4 & 1.4 & 1.4 & 0.2 & 1.4 \\ 1.4 & 0.35 & 1.4 & 1.2 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 & 1.4 & 0.3 \end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1.3 & 1.3 & 0.3 \\ 1.3 & 0.1 & 0 & 0 & 1.3 \\ 0.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 1.2 \\ 1.4 & 0.35 & 1.4 & 1.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 1.1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1.3 & 1.3 & 0.3 \\ 1.3 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 1.3 \\ 0.2 & 1.1 & 1.2 & 0 & 1.2 \\ 1.4 & 0.25 & 1.4 & 1.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 & 1.1 & \cancel{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} \phantom{0.1} & \phantom{0.25} & \phantom{1.4} & \phantom{1.2} & \checkmark \end{array} &
\end{array}
\rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1.3 & 1.3 & 0.4 \\ 1.3 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 1.4 \\ 0.2 & 1.1 & 1.2 & 0 & 1.3 \\ 1.3 & 0.15 & 1.3 & 1.1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 0.4 & 1 & \cancel{0} \end{bmatrix}
$$

所以最优指派方案为：$A_1 \to B_1$，$A_2 \to B_3$，$A_3 \to B_4$，$A_4 \to B_5$，$A_5 \to B_2$，总分为：$1.3+1.3+1.2+1.4+0.9=6.1$。

**表上作业法：**利用最大元素法寻找初始可行解，如下：

| 业务 / 人员 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **1** | (-0.4) | (-0.9) | (-0.3) | (-0.4) | 0 |
| $A_2$ | (-1.7) | (-0.4) | **1** | **(0.6)** | (-1.8) | 0.4 |
| $A_3$ | (-1.2) | (-2.1) | (-1.8) | **1** | (-2.3) | 0.9 |
| $A_4$ | (-1.3) | (-0.15) | (-0.9) | (-0.1) | **1** | 0 |
| $A_5$ | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | -0.3 |
| $v_j$ | 1.3 | 1.2 | 0.9 | 0.3 | 1.4 | |

有大于 0 的检验数，继续：

| 业务 / 人员 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **1** | (-0.4) | (-0.9) | (-0.9) | (-0.4) | 0 |
| $A_2$ | (-1.7) | (-0.4) | **1** | **0** | (-1.8) | 0.4 |
| $A_3$ | (-0.6) | (-1.5) | (-1.2) | **1** | (-1.7) | 0.3 |
| $A_4$ | (-1.3) | (-0.15) | (-0.9) | (-0.7) | **1** | 0 |
| $A_5$ | **0** | **1** | **0** | (-0.6) | **0** | -0.3 |
| $v_j$ | 1.3 | 1.2 | 0.9 | 0.9 | 1.4 | |

检验数全部≤0，因此已达到最优解。

**5.** 有甲、乙、丙、丁四人和 A、B、C、D、E 五项任务，每人完成任务的时间如下表所示。由于任务数多于人数，故规定其中有一人可兼完成两项任务，其余三人每人完成一项，请确定总时间最少的指派方案。

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 15 | 19 | 21 | 32 | 27 |
| 乙 | 29 | 28 | 16 | 10 | 23 |
| 丙 | 24 | 17 | 18 | 30 | 22 |
| 丁 | 14 | 32 | 26 | 13 | 35 |

**解：** 因为事多人少，添加一个人，得系数矩阵如下（匈牙利法求解）。

$$\begin{bmatrix} 15 & 19 & 21 & 32 & 27 \\ 29 & 28 & 16 & 10 & 23 \\ 24 & 17 & 18 & 30 & 22 \\ 14 & 32 & 26 & 13 & 35 \\ 14 & 17 & 16 & 10 & 22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 17 & 7 \\ 19 & 18 & 5 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 1 & 19 & 12 & 0 & 17 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 18 & 7 \\ 18 & 17 & 4 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 18 & 11 & 0 & 16 \\ 3 & 6 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 18 & 3 \\ 18 & 13 & 0 & 0 & 3 \\ 11 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 14 & 7 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

甲完成 B，乙完成 C、D，丙完成 E，丁完成 A。最少总时间为 19+16+10+22+14=81。