第四章　随机变量的数字特征

4.1 随机变量的数学期望

例1. 甲、乙两人进行打靶，所射中环数分别记为 X_1、X_2, 它们的频律分别为:

X_1	8	9	10	X_2	8	9	10
p_k	0.3	0.1	0.6	p_k	0.2	0.5	0.3

试评定他们射击技术的好坏.

若使两个射手各射N枪，则他们打中的环数大约是：

甲： $8\times 0.3N+9\times 0.1N+10\times 0.6N=9.3N;$

乙： $8\times 0.2N+9\times 0.5N+10\times 0.3N=9.1N.$

他们平均射中的环数约为

$$\text{甲：}\ \bar{x}\approx 8\times\frac{0.3N}{N}+9\times\frac{0.1N}{N}+10\times\frac{0.6N}{N}=9.3$$

$$\text{乙：}\ \bar{y}\approx 8\times\frac{0.2N}{N}+9\times\frac{0.5N}{N}+10\times\frac{0.3N}{N}=9.1$$

平均起来甲每枪射中 9.3环，乙射中9.1环，因此，甲的技术要好些。

➢ 受此问题启发，在上式中用概率代替频率引入如下定义:

定义: 设离散型 r.v. X 的分布律为: $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量的数学期望(也叫做平均值), 记作$\mathrm{E}(X)$, 即 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.

当$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i$发散时，则说$X$的数学期望不存在 。

- 例2. 设 X 为投掷一颗骰子时出现的点数，则 X 的分布律为

$$P\{X=i\}=1/6,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6;$$

于是，X 的数学期望为：

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{6}\times2+\cdots+\frac{1}{6}\times6=\frac{7}{2}$$

➢ 离散型随机变量的期望值：

1) (0-1) 分布

设 X 服从(0-1)分布，分布律为：

$$P\{X=1\}=p,\ P\{X=0\}=q,\ 0<p<1,\ q=1-p$$

X 的数学期望为 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p$

2) 二项分布: 设 $X \sim b(n,p)$, $P\{X=k\}=C_n^k\, p^k q^{n\text{-}k},\ k=0,1,\cdots,n.$

解: $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k\, p^k q^{n\text{-}k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n\text{-}k}$$

$k=0$, 对均值的贡献为0;

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k\text{-}1}q^{(n\text{-}1)\text{-}(k\text{-}1)}$$

$$=np\sum_{k'=0}^{n-1}\underbrace{\frac{(n-1)!}{k'![(n-1)-k']!}}_{C_{n-1}^{k'}}p^{k'}q^{(n\text{-}1)\text{-}k'}\ (令k'=k-1)$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np.$$

3) 泊松分布: 设$X \sim \pi(\lambda)$, 即 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0, 1, 2, \cdots \quad \lambda>0.$

解： $$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k'=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k'}}{k'!}$$

$$=e^{-\lambda}\times\lambda\times e^{\lambda}=\lambda$$

4) 几何分布 $p_k = q^{k-1}p, k=1,2,\cdots$ 第一次成功发生在第 k 次试验的概率

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k=\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p(1+2q+3q^2+\cdots)$$

$$= p(q+q^2+q^3+\cdots)'$$

$$= p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

例3：随机变量X的分布率为$P\{X=x_k\}=\dfrac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$，其中$x_k=(-1)^k\dfrac{2^k}{k}$.

显然级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}=-\ln 2,$

但由于$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$，因此$X$的期望不存在

➢ 连续型随机变量的数学期望：

设 $f(x)$ 为连续型随机变量 X 的概率密度，对 X 的取值区间作一分割，有：

$P\{x_i < X \le x_{i+1}\} \approx f(x_i)\Delta x_i$，当 $\Delta x_i \to 0^+$ 时，近似地有

$$\mathrm{E}(X) \approx \sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i \to \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

定义: 设连续型 $r.v.X$ 的概率密度为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为 $\mathrm{r.v.}X$ 的数学期望, 记为 $\mathrm{E}(X)$. 即

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

数学期望简称期望, 又称为均值.

➢ 下面计算常用连续型变量的数学期望：

1^0 均匀分布: 设r.v. X服从区间$[a, b]$ 上的均匀分布，即 X 的密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

则 $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$, 是区间 $[a, b]$ 的中点；

2^0 **指数分布:** 设r.v.X服从参数为λ的指数分布，则其密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0,\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx \overset{令t=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[-te^{-t}-e^{-t}\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda},$$

✓ 指数分布是最常用的“寿命分布”之一，期望表明 λ 值越小，产品平均寿命越长。

3^0 正态分布: 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\text{令} t = x - \mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)\cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \mu\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

$\therefore E(X) = \mu.$

第一项被积函数为奇函数,因而积分为0, 而第二项后一部分为1

例4. 设X服从柯西分布，其密度为$f(x)=\dfrac{1}{\pi\cdot(1+x^2)}, -\infty<x<+\infty$. 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\infty$$

因此，柯西分布的数学期望不存在.

$$\left(\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)'=\frac{x}{(1+x^2)}$$

例5. 设X概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$

$$\text{则}\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{0}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{2}[-1+1]=0$$

$\left(x\mathrm{e}^{x}\right)'=x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}$，$\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)'=-x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}$ (伽马函数)

➢ 随机变量函数的数学期望公式:

定理: 设Y是r.v.X的函数, $Y = g(X)$ (g是连续函数)

(i) X是离散型r.v., 它的分布律为 $p_k = P\{X = x_k\}, k = 1,2, \cdots,$

若$\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛,则 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k.$

(ii) X是连续型r.v., 它的概率密度为$f(x)$, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$

绝对收敛, 则$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$

➢ 说明:

- 1. 在已知 Y 是 X 的连续函数前提下, 当我们求 $\mathrm{E}(Y)$ 时不必知道 Y 的分布, 只需知道 X 的分布就可以了.

- 2. 上述定理可以推广到多维 r.v.函数.

若(X,Y)为离散型$r.v.$ 其分布律为$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij}$,

$i,j=1,2,3,\cdots$, 则有 (假设级数绝对收敛):

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left[g(X,Y)\right]=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij} \qquad (4.2)$$

(X,Y)为连续型$r.v.$，$Z=g(X,Y)$(g是连续函数) 是 $r.v.\ X,Y$ 的函数，若(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，则 $r.v.Z$ 的期望为(假设积分绝对收敛):

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (4.1)$$

例6. 设$X\sim N(0,1)$，求$\mathrm{E}(X^2)$.

解法1：求得$Y=X^2$的密度 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y^{1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$

$$\text{则}\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\underline{\left(\frac{y}{2}\right)^{3/2-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}y\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=1$$

- $\lambda=1/2,\ p=n/2$的伽马分布(n为正整数)称为自由度为n的卡方分布；标准正态分布的平方是自由度为1的卡方分布；

例6. 设$X\sim N(0,1)$，求$E(X^2)$.

解法2：由定理 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$=-\left[x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1$$

例8. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度如下，求：XY 的数学期望.

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0,\ 其它, \end{cases}$$

解： 由式(4.1)可得

$$\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (4.1)$$

例9. 已知(X,Y)的联合分布律为$P\{X=i,Y=j\}=p^2q^{j-2}, i=1,2,\cdots j-1,$

$j=2,3\cdots,\quad 0<p<1, q=1-p,$ 求：(1) $E(XY)$；(2) $E(\frac{X}{Y})$.

解：$$E(XY)=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1} ijP\{X=i,Y=j\}=\sum_{j=2}^{\infty} j\cdot\frac{j(j-1)}{2}p^2q^{j-2}$$

$$j^2(j-1)=(j+1)j(j-1)-j(j-1)$$

$$=\frac{1}{2}p^2[(\sum_{j=2}^{\infty}q^{j+1})'''-(\sum_{j=2}^{\infty}q^{j})'']=\frac{1}{2}p^2(\frac{6}{p^4}-\frac{2}{p^3})=\frac{2+q}{p^2}$$

$$E(X/Y)=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{j}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(j-1)}{2}p^2q^{j-2}$$

$$=\frac{1}{2}p^2(\sum_{j=2}^{\infty}q^{j-1})'$$

$$\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{j}P\{X=i,Y=j\}=p^2q^{j-2}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1}i$$

$$=\frac{1}{2}p^2(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{2}$$

➢均值的性质（能证明吗？）：

(1) $E(c)=c$; (c为常数)

(2) $E(cX)=cE(X)$;(c为常数)

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

(4) 设 X、Y 相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$;

(5) $|E(XY)|^2 \le E(X^2)E(Y^2)$. (许瓦尔兹不等式)

说明: i. 性质 (3) 和 (4) 可以推广到有限个 r.v. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的情况

.

ii. 对于“和”, 不要求$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立; 对于“积”要求$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立.

2) **二项分布:** 设 $X \sim b(n,p)$, $P\{X=k\}=C_n^k\, p^k q^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n.$

解： $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k\, p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$k=0$, 对均值的贡献为0；

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k'=0}^{n-1}\underbrace{\frac{(n-1)!}{k'![(n-1)-k']!}}_{C_{n-1}^{k'}}p^{k'}q^{(n-1)-k'}\quad(令 k'=k-1)$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np.$$

例10. 二项分布的均值的计算:

设 $X \sim b(n, p)$,引入 r.v. X_i (i=1, 2, …, n), 它们是相互独立的且都服从0--1分布: P{X_i=1}=p, P{X_i=0}=q; X 表示 n 次独立重复试验中A发生的次数, X_i 表示第 i 次试验的结果: X_i=1表示 A 发生, X_i=0表示A不发生, 所以

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad 故\ \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = np.$$

➢ 说明: 将 X 分解成数个 r.v.之和, 然后利用 r.v.和的数学期望等于r.v. 的数学期望之和来求解. 这个方法具有一定的普遍意义.

例11.一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以X 表示停车的次数，求$\mathrm{E}(X)$（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）

解：引入随机变量$X_i = \begin{cases} 0, \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases}$ $i = 1, 2, \cdots, 10$

易知$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,现在来求$\mathrm{E}(X)$;

按题意，任一旅客在第i站不下车的概率为0.9，因此,20 位旅客都不在第i 站下车的概率为0.9^{20} ,在第i 站有人下车的概率为$1-0.9^{20}$ ，也就是:

$$P\{X_i=0\}=0.9^{20},.\quad P\{X_i=1\}=1-0.9^{20}, i=1,2,\cdots,10$$

由此$E(X_i)=1-0.9^{20}, i=1,2,\cdots 10.$

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$

$$=10(1-0.9^{20})=8.784(\text{次})$$

例 12 –某种季节性销售的产品，如果每卖出一件商品，可获得纯利润 b 元，如果季节末仍未卖出，则每件商品将损失 l 元.

–设某百货商店在某个季节的销售量为一随机变量,其分布律为 $p(i),\ \ i \ge 0$.

–商店决定销售旺季前要囤货，请问它要囤多少件才能使得期望利润最大化.

解: 令 X 表示季节销售量，如果囤货数量为s，记利润为$\pi(s)$, $\pi(s)$可表示为：

$$\begin{aligned} \pi(s) &= bX-(s-X)l \qquad \text{若} X \le s \\ &= sb \qquad \text{若} X > s \end{aligned}$$

－期望利润为：

$$X \le s \qquad\qquad X > s$$

$$\mathrm{E}\left[\pi(s)\right]=\sum_{i=0}^{s}[bi-(s-i)l]p(i)+\sum_{i=s+1}^{\infty}sbp(i)$$

$$=(b+l)\sum_{i=0}^{s}ip(i)-sl\sum_{i=0}^{s}p(i)+sb[1-\sum_{i=0}^{s}p(i)]$$

$$=(b+l)\sum_{i=0}^{s}ip(i)-(b+l)s\sum_{i=0}^{s}p(i)+\mathrm{sb}$$

$$=sb+(b+l)\sum_{i=0}^{s}(i-s)p(i)$$

- 为得到最佳的s值，考虑当s增加一个单位时期望利润的变化值；
- 利用上述公式得到，当 s 增加一个单位时，期望利润为

$$\mathrm{E}[\pi(s+1)] = b(s+1) + (b+l)\sum_{i=0}^{s+1}(i-s-1)p(i)$$
$$= b(s+1) + (b+l)\sum_{i=0}^{s}(i-s-1)p(i)$$

$$\mathrm{E}[\pi(s)] = bs + (b+l)\sum_{i=0}^{s}\left(i-s\right)p(i)$$

- 因此， $\mathrm{E}[\pi(s+1)]-\mathrm{E}[\pi(s)]=b-(b+l)\sum_{i=0}^{s}p(i)$
- 只要下列条件满足，那么囤货数量为 $s+1$ 得到的期望利润会大于囤货数量为 s 的情形：

$$\sum_{i=0}^{s}p(i)<\frac{b}{b+l}$$

$$\sum_{i=0}^{s} p(i) < \frac{b}{b+l} \qquad (4.2)$$

- 由于(4.2)式的左边随着s的增加而增加, 而右边为一常数, 因此不等式对所有的 $s \le s^*$ 总是成立的, 其中s^*为满足(4.2)式的最大值.
- 因为：$\mathrm{E}[\pi(0)] < \cdots \mathrm{E}[\pi(s^*)] < \mathrm{E}[\pi(s^*+1)] > \mathrm{E}[\pi(s^*+2)] > \cdots$
- 这样, 囤货数量为s^*+1时将会使得期望利润达到最大.

- **条件概率：** 设A, B是两个事件, 且 $P(A)>0$, 称$P(B|A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **条件分布：**
  - ✓ 分布律：$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\quad i=1,2,\cdots$
  - ✓ 分布函数：$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x\mid Y=y\}$
  - ✓ 密度函数：$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

4.2 条件期望

➢ 定义（离散分布）：

– 当 X 和 Y 的联合分布为离散分布时，对于 $P\{Y=y\}>0$ 的 y 值，给定 Y=y 之下，X 的条件分布列由下式定义为：

$$p_{X|Y}(x|y)=P\{X=x|Y=y\}=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

– 因此，很自然地定义，对于所有满足 $p_Y(y)>0$ 的 y，X 在给定 Y=y 之下的条件期望为：

$$\mathrm{E}(X|Y=y)=\sum_x xP\{X=x|Y=y\}=\sum_x xp_{X|Y}(x|y)$$

➢ 定义（连续分布的条件期望）：

➢ 设 X 和 Y 的联合分布连续，其联合密度函数为 $f(x, y)$, 对于给定的 $Y=y$, 只要 $f_Y(y)>0$, X 的条件密度函数定为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (f_Y(y)>0)$$

➢ 给定 $Y=y$ 的条件下, X 的条件期望由下式给出：

$$\mathrm{E}[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

- **注释**：正如条件概率满足概率的所有性质，条件期望也满足通常期望的性质，例如以下公式仍然成立：

$$\mathrm{E}(g(x)|Y=y)=\begin{cases}\sum\limits_{x} g(x)p_{X|Y}(x|y) & \text{离散情形}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x & \text{连续情形}\end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i|Y=y)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i|Y=y)$$

- 事实上，给定 $Y=y$ 条件下的条件期望可以看成是减小的样本空间中的普通的期望，这个减小的样本空间由满足$\{Y=y\}$条件的那些样本点组成。

例1 设父亲的身高为 X 英寸，儿子的身高服从均值为 $X+1$，方差为 4 的正态分布。假设父亲的身高为6英尺，那么其儿子成年以后的身高的最优预测值是多少？（1英尺=12英寸）

解：设父亲身高为 X，儿子身高为 Y，两者关系可表示为 $Y=X+1+e$（其中 e 为正态随机变量，独立于 X，并且期望为 0, 方差为 4）

对于 6 英尺的父亲，其儿子身高的最优预测为 $\mathrm{E}(Y\mid \mathrm{X}=72)$，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X=72) &= \mathrm{E}(X+1+e|X=72) \\
&= 73+\mathrm{E}\left(e|X=72\right) \\
&= 73+\mathrm{E}\left(e\right)
\end{aligned}
$$

例 2 设 X 和 Y 是独立同分布的二项分布随机变量，其参数为(n, p). 计算在 $X+Y=m$ 的条件下 X 的条件期望.

解：首先计算在给定$X+Y=m$的条件下，X的条件分布列

- 对于 $k \le \min\{n, m\}$

$$P\{X=k \mid X+Y=m\} = \frac{P\{X=k, X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}$$

$$P\{X=k|X+Y=m\}=\frac{P\{X=k,X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}$$

$$=\frac{P\{X=k,Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}$$

$$=\frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}}$$

$$=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$$

- 因此, 在给定$X+Y=m$的条件下，X 的条件分布为超几何分布.

$$P\{X=k|X+Y=m\}=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$$

- 因此, 在给定$X+Y=m$的条件下，X 的条件分布为超几何分布：$2n$ 件产品，有n 件正品，n 件次品，取m 件，刚好取到 k 件次品的概率；

- 我们得到：（X 也可以理解成 m 重伯努利试验的结果）

$$\mathrm{E}(X|X+Y=m)=\mathrm{E}(Y|X+Y=m)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X+Y|X+Y=m)=\frac{m}{2}$$

例 3 设 X 和 Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, 0<x<\infty,$ $0<y<\infty$，计算 $E(X|Y=y)$；

解 – 先计算条件密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x}=\frac{(1/y)\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}}{\int_0^{\infty}(1/y)\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{(1/y)\mathrm{e}^{-x/y}}{\int_0^{\infty}(1/y)\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}x}=\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-x/y}$$

– 因此，X 在给定$Y=y$之下的条件分布刚好是均值为y的指数分布.

– 所以 $E(X|Y=y)=\int_0^{\infty}\frac{x}{y}\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}x=y$

例 3 设 X 和 Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, 0<x<\infty,$ $0<y<\infty$，计算 $E(X|Y=y)$；

$$E(X|Y=y)=\int_0^{\infty}\frac{x}{y}e^{-x/y}dx=y$$

利用条件计算期望

- 记 $E(X|Y)$ 表示随机变量 Y 的函数，它在 $Y=y$ 处的值为 $E(X|Y=y)$, 注意 $E(X|Y)$ 本身是一个随机变量. 下面给出的命题是条件期望一个极其重要的性质:

- **命题**

$$E(X) = E(E(X|Y)) \qquad (1)$$

$$E(X) = \sum_{y} E(X|Y=y)P\{Y=y\} \qquad (2a)$$

– 如果 Y 是连续型随机变量，密度函数为 $f_Y(y)$，则公式(1)变成

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y) f_Y(y)\mathrm{d}y \qquad (2b)$$

➢ 式（1）在 X 和 Y 均为离散型随机变量时的证明.

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) \qquad (1)$$

- 我们只需证明：$\mathrm{E}(X)=\sum_y \mathrm{E}(X|Y=y)P\{Y=y\}$ (2a)
- 等式(2a)的右边可以写为：

$$\begin{aligned}\sum_y \mathrm{E}(X|Y=y)P\{Y=y\}&=\sum_y\sum_x xP\{X=x|Y=y\}P\{Y=y\}\\&=\sum_y\sum_x x\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}P\{Y=y\}\\&=\sum_y\sum_x xP\{X=x,Y=y\}=\sum_x x\sum_y P\{X=x,Y=y\}\\&=\sum_x xP\{X=x\}=\mathrm{E}[X]\end{aligned}$$

命题证毕.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{y} \mathrm{E}(X \mid Y = y) P\{Y = y\} \quad (2)$$

- (2) 式的解释:
  - 期望值 $\mathrm{E}[X]$ 可以看成条件期望 $\mathrm{E}[X \mid Y = y]$ 的加权平均，而权重刚好是事件 $\{Y = y\}$ 的概率.
  - 这个结果对计算随机变量的期望是极其重要的，它可以让我们很容易地计算某随机变量在给定条件之下的条件期望，然后再对条件期望求平均。
- 下面的例子说明了这个公式的用处!

例 3

- 一个矿工在井下迷了路，迷路的地方有三个门，
- 若从第一个门出来，经过 3 个小时后，可到达安全之处.
- 若从第二个门出去，经过 5 个小时后，他会回到原地.
- 若从第三个门出来，经过 7 个小时后才会到原地.
- 假定工人在任何时候都是随机地选择一个门.
- 问这个工人为了走到安全之处，平均需要多少时间.

解 设 X 表示该矿工为到达安全之处所需的时间(单位：小时)，又设 Y 为他选择的门的号码，则

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X|Y=1)P\{Y=1\} + \mathrm{E}(X|Y=2)P\{Y=2\} + \mathrm{E}(X|Y=3)P\{Y=3\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\mathrm{E}(X|Y=1) + \mathrm{E}(X|Y=2) + \mathrm{E}(X|Y=3)\right)$$

然而，

$$\mathrm{E}(X|Y=1) = 3$$

$$\mathrm{E}(X|Y=2) = 5 + \mathrm{E}(X) \qquad (3)$$

$$\mathrm{E}(X|Y=3) = 7 + \mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{E}[X|Y=1]=3$$

$$\mathrm{E}[X|Y=2]=5+\mathrm{E}[X] \qquad (3)$$

$$\mathrm{E}[X|Y=3]=7+\mathrm{E}[X]$$

➢ (3)式解释：

- 例如E[X|Y=2]：如果矿工选择第二个门，他花5个小时后又回到了原地，但回到原地，问题与刚开始时一样，他到达安全地点所需时间为E[X]，因此E[X|Y=2]=5+ E[X]；
- 其余各等式的解释类似；
- 因此 $\mathrm{E}[X]=\dfrac{1}{3}(3+5+\mathrm{E}[X]+7+\mathrm{E}[X])$
- 从而 E[X]=15.

例4 （随机个随机变量和的期望）假设在某一天进入百货商店的人数是一个随机变量，其平均值为50。

进一步假定这些顾客在店里花费的钱数是独立且同分布的随机变量，均值为8元，并且假定顾客的花钱数与进入百货店的人数也是相互独立的。

试求在这一天百货店营业额的期望值是多少？

解： 记N为进入百货店的顾客人数，X_i是顾客i在店内的消费额，则百货店内消费总量可以表示成 $\sum_{i=1}^{N} X_i$，所以有

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right)$$

但，$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right)=\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ 由X_i与N的独立性

$=n\mathrm{E}(X)$ 其中$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(X_i)$

由此可得，$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right) = N\mathrm{E}(X)$

从而，$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{E}(N\mathrm{E}(X)) = \mathrm{E}(N)\mathrm{E}(X)$

因此，当天百货店营业额的期望值为$50 \times 8 = 400$元。

例 6 考虑 n 次独立重复试验，每次试验的结果为 $1, 2, \cdots, k$ ，相应的概率为 $p_1, \cdots, p_k$ ，$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ ；令 N_i 表示试验中结果 i 出现的次数. $i = 1, 2, \cdots, k$. 对任意 $i \neq j$ ，计算

$(a)\mathrm{E}(N_j \mid N_i > 0)$ ； $(b)\mathrm{E}(N_j \mid N_i > 1)$

例 6 考虑n次独立重复试验，每次试验的结果为$1, 2, \cdots, k$，相应的概率为 $p_1, \cdots, p_k$，$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$；令 N_i 表示试验中结果 i 出现的次数. $i = 1, 2, \cdots, k$. 对任意$i \neq j$，计算 $(a)\mathrm{E}(N_j \mid N_i > 0)$；$(b)\mathrm{E}(N_j \mid N_i > 1)$

解：对于 (a)，令 $\mathrm{I} = \begin{cases} 0, & N_i = 0 \\ 1, & N_i > 0 \end{cases}$；

那么$E(\mathrm{N}_j)$可以写成：

$$E(N_j) = \mathrm{E}(N_j \mid \mathrm{I} = 0)\,\mathrm{P}\{\mathrm{I} = 0\} + \mathrm{E}(N_j \mid \mathrm{I} = 1)\,\mathrm{P}\{\mathrm{I} = 1\}$$

或等价地：

$$E(N_j) = \mathrm{E}(N_j \mid N_i = 0)\,\mathrm{P}\{N_i = 0\} + \mathrm{E}(N_j \mid N_i > 0)\,\mathrm{P}\{N_i > 0\}$$

$$E(N_j)=\mathrm{E}(N_j\mid N_i=0)\,\mathrm{P}\{N_i=0\}+\mathrm{E}(N_j\mid N_i>0)\,\mathrm{P}\{N_i>0\}$$

- 接下来分析给定$N_i = r$ 的条件下， N_j 的期望；
- 因为 N_j 的无条件分布是参数为 $(n,\ p_j)$ 的二项分布，设 $N_i = r$ 给定，则其余的 $N - r$ 次试验的结果不会是 i。
- 在给定$N_i = r$ 的条件下，其余的 $N - r$ 次试验同样可以看成是二项分布，每次实验中 j 出现的概率是多少？

$$P(\text{实验结果是}j\mid\text{实验结果不是}i)=\frac{p_j}{1-p_i}$$

$$E(N_j) = \mathrm{E}(N_j \mid N_i = 0)\,\mathrm{P}\{N_i = 0\} + \mathrm{E}(N_j \mid N_i > 0)\,\mathrm{P}\{N_i > 0\}$$

- 因此，在给定$N_i = r$ 的条件下N_j的条件分布为二项分布，参数为$\left(n-r, \dfrac{p_j}{1-p_i}\right)$。

- 上面E[N_j]的等式变成：

$$np_j = n\frac{p_j}{1-p_i}(1-p_i)^n + \mathrm{E}(N_j \mid N_i > 0)(1-(1-p_i)^n)$$

- 从而 $\mathrm{E}(N_j \mid N_i > 0) = np_j \dfrac{1-(1-p_i)^{n-1}}{1-(1-p_i)^n}$

回 顾

- 数学期望的性质（是否要求独立？）
- 条件分布 ⟶ 条件期望；
  - ✓ 离散分布的条件期望；（更新随机变量的分布律）
  - ✓ 连续分布的条件期望；（更新随机变量的密度函数）
- 利用条件计算期望：$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y))$

利用条件计算期望

- 记 $\mathrm{E}(X|Y)$ 表示随机变量 Y 的函数，它在 $Y=y$ 处的值为 $\mathrm{E}(X|Y=y)$, 注意 $\mathrm{E}(X|Y)$ 本身是一个随机变量. 下面给出的命题是条件期望一个极其重要的性质:

- **命题** $$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) \quad (1)$$

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{y}\mathrm{E}(X|Y=y)P\{Y=y\} \quad (2a)$$

– 如果 Y 是连续型随机变量，密度函数为 $f_Y(y)$，则公式(1)变成

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}(X|Y=y)f_Y(y)\mathrm{d}y \quad (2b)$$

例：设 (X, Y) 的分布律为:

$X \backslash Y$	5	7	13	18	20
1	0.08	0.01	0	0.02	0.14
2	0.11	0.10	0.09	0.01	0.04
3	0.03	0.07	0.15	0.06	0.09

（1）求在 $X=2$ 时 Y 的条件分布律.

（2）求在 $X=2$ 时 Y 的条件期望；

（3）对X 取条件计算Y的数学期望；

（4）通过 Y 的边缘分布律计算数学期望；

（1） X=2 时 Y 的条件分布律，用表格形式表示为:

k	5	7	13	18	20
$P\{Y=k\|X=2\}$	11/35	10/35	9/35	1/35	4/35

k	5	7	13	18	20
$P\{Y=k\}$	0.22	0.18	0.24	0.09	0.27

（2） X=2 时 Y 的条件期望：

$$\mathrm{E}(Y|X=2)=\sum_{y} yP\{Y=y|X=2\}$$

$$= 5*11/35+7*10/35+13*9/35+18*1/35+20*4/35$$

$$= 340/35$$

（3）对X 取条件计算Y 的数学期望：

$E(Y|X=1) = 363/25$； $E(Y|X=2) = 340/35$； $E(Y|X=3) = 547/40$；

$P(X=1) = 0.25$； $P(X=2) = 0.35$； $P(X=3) = 0.4$；

$$E(Y) = 363/25 * 0.25 + 340/35 * 0.35 + 547/40 * 0.4$$
$$= 12.5$$

（4）通过 Y 的边缘分布律计算数学期望：

$$E(Y) = 5*0.22+7*0.18+13*0.24+18*0.09+20*0.27$$
$$= 12.5$$

k	5	7	13	18	20
$P\{Y=k\}$	0.22	0.18	0.24	0.09	0.27

例 7 假设有 r 个玩家在赌博，玩家 i 最初拥有 n_i 单位赌资，$n_i>0$, $i=1,\ldots,r$；

在每一个阶段，两名玩家来玩一局，赢家从输家那里赢得一单位赌资. 当玩家的财富值变为 0 时该玩家就被淘汰，游戏继续直到只有一个玩家拥有所有赌资 $n\equiv\sum_{i=1}^{r}n_i$ 时，那名玩家就是胜利者；

假设每场对局是独立的并且每局两名玩家获胜的机会是相等的，那么只有一名玩家得到所有的 n 单位赌资时的平均赌博局数是多少？

解：首先假设起初只有2名玩家，玩家1和玩家2的最初的赌资分别为 j 和 n-j 个单位赌资；

记 X_j 表示将要进行的对局数，$m_j = \mathrm{E}(X_j)$，对 $j=1,\ldots,n-1$ 有

$$X_j = 1 + A_j$$

A_j 是在第一局之后还需要附加的对局数，取期望后得

$$m_j = 1 + \mathrm{E}(A_j)$$

- 在给定第一局的结果为条件时，得到：

$$m_j = 1 + \mathrm{E}\left(A_j \middle| \text{玩家1赢了第一局}\right) \times \frac{1}{2} + \mathrm{E}\left(A_j \middle| \text{ 玩家2赢了第一局}\right) \times \frac{1}{2}$$

- 如果玩家1赢了第1局，情况就与假设玩家1初始时拥有 j +1单位赌资而玩家2初始时拥有n-(j +1)单位赌资的情形相同；

- 所以： $\mathrm{E}\left(A_j \middle| \text{玩家1赢了第一局}\right) = m_{j+1}$

$$\mathrm{E}\left(A_j \middle| \text{玩家1赢了第一局}\right) = m_{j+1}$$

- 类似地，$\mathrm{E}\left(A_j \middle| \text{玩家2赢了第一局}\right) = m_{j-1}$
- 所以， $m_j = 1 + \frac{1}{2} m_{j+1} + \frac{1}{2} m_{j-1}$
- 或者等价地，$m_{j+1} = 2m_j - m_{j-1} - 2 \qquad j = 1, \cdots, n-1 \qquad (5.4)$
- 利用$m_0 = 0$，由上式可得

$$m_2 = 2m_1 - 2$$
$$m_3 = 2m_2 - m_1 - 2 = 3m_1 - 6 = 3(m_1 - 2)$$
$$m_4 = 2m_3 - m_2 - 2 = 4m_1 - 12 = 4(m_1 - 3)$$

$$m_2 = 2m_1 - 2$$
$$m_3 = 2m_2 - m_1 - 2 = 3m_1 - 6 = 3(m_1 - 2)$$
$$m_4 = 2m_3 - m_2 - 2 = 4m_1 - 12 = 4(m_1 - 3)$$

- 因此，猜想下式可能成立

$$m_i = i(m_1 - i + 1) \qquad i = 1, \cdots, n \qquad （5.5）$$

- 下面，利用数学归纳法证明上式；
  - 因为已经得到上式在$i = 1, 2$ 的时候是正确的，归纳假设当 $i \le j < n$ 的时候等式也是成立的.
  - 下面只需要验证在 $j + 1$的情况下，结论是正确的.

$$m_{j+1}=2m_j-m_{j-1}-2;\quad j=1,\cdots,n-1\ (\text{推导出的结论})\qquad (5.4)$$

$$m_i=i(m_1-i+1);\quad i=1,\cdots,n\,(\text{猜想})\qquad (5.5)$$

- 证明：当$i<=j$时（5.5）成立，则$i=j+1$时（5.5）成立；
- 利用（5.4）可得

$$\begin{aligned}m_{j+1}&=2m_j-m_{j-1}-2\\&=2j(m_1-j+1)-(j-1)(m_1-j+2)-2\ \ (\text{由归纳假设})\\&=(j+1)m_1-2j^2+2j+j^2-3j+2-2\\&=(j+1)m_1-j^2-j=(j+1)(m_1-j)\end{aligned}$$

- 这就完成了式（5.5）的归纳证明.

➢ 在式（5.5）中令$i=n$，并利用 $m_n=0$，可得 $m_1=n-1$

$$m_i = i(m_1 - i + 1) \qquad i = 1, \cdots, n \qquad （5.5）$$

$$m_1 = n - 1$$

- 再次利用式（5.5），可以得到：$m_i = i(n-i)$
- 所以，在只有两名玩家的情况下，平均对局数就是最初他们各自持有的赌资单位 i 和 n-i 的乘积；
- 因为两名玩家参与了所有的阶段，所以这也是所有有玩家1参与的对局数的平均值.

- 利用条件期望计算出，在只有两名玩家的情况下，平均对局数就是最初他们各自持有的赌资单位 的乘积：$i(n-i)$；

- 现在让我们回到包含 r 个玩家的问题，他们的初始赌资为 $n_i,\ i=1,\cdots,r,\ \sum_{i=1}^{r} n_i = n.$

令 X 表示获得一次胜利所需要的对局数，令X_i表示包含玩家i 的对局数.

$$X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} X_i$$

- 对玩家 i 来说，初始拥有 n_i 单位赌资后一直对局，每局胜出的机会都是独立且均等的，直到他的财富是 n 或者 0.
- 所以他的对局数和当他只有一个初始财富为 $n-n_i$ 的对手时的对局数是一样的；
- 于是，由前面的结论可知：

$$\mathrm{E}\left(X_i\right)=n_i\left(n-n_i\right)$$

- 所以

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} n_i\left(n - n_i\right) = n^2 - \sum_{i=1}^{r}\left(n_i\right)^2$$

- 但是因为每个对局包含两名玩家，所以有：

$$X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} X_i$$

- 上式两边取期望后得到：

$$\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{1}{2}\left(n^2 - \sum_{i=1}^{r} n_i^{\ 2}\right)$$

通过取条件计算概率

- 取条件期望的方法不仅可以用于计算一个随机变量的期望，还可以用于计算概率.
- 设 E 为一随机事件，令 X 为 E 的示性变量，即

$$X=\begin{cases}1 & \text{若}E\text{发生}\\ 0 & \text{若}E\text{不发生}\end{cases}$$

- 显然，$\mathrm{E}(X)=P(E)$;
- 对于任意随机变量 Y, $\mathrm{E}(X|Y=y)=P(E|Y=y)$

$$\mathrm{E}\left(X \mid Y=y\right)=P\left(E \mid Y=y\right)$$

➢ 利用式(2a)与(2b) $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y))$，进一步可得：

$$P(E)=\begin{cases}\sum_{y} P\left(E \mid Y=y\right) P\left(Y=y\right) & Y\text{为离散型随机变量}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(E \mid Y=y\right) f_{Y}(y)\mathrm{d}y & Y\text{为连续型随机变量}\end{cases} \quad (5.8)$$

$$P(E)=\begin{cases}\sum_{y}P(E|Y=y)P(Y=y) & Y\text{为离散型随机变量}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}P(E|Y=y)f_Y(y)\mathrm{d}y & Y\text{为连续型随机变量}\end{cases} \tag{5.8}$$

➢ 注意，如果 Y 是离散型随机变量，且取值为 $y_1,\cdots y_n$，定义事件 $F_i=\{Y=y_i\}$，则式（5.8）变成

$$P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(E|F_i)P(F_i)$$

➢其中 $F_1,\cdots,F_n$ 为互不相容的事件，且这些事件的并集构成一个样本空间.

$$P(E)=\begin{cases}\sum_y P(E|Y=y)P(Y=y) & Y\text{为离散型随机变量}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(E|Y=y)f_Y(y)\mathrm{d}y & Y\text{为连续型随机变量}\end{cases} \tag{5.8}$$

➢ 注意，如果 Y 是连续型随机变量：$\mathrm{E}(X|Y=y)=P(E|Y=y)$,

而：$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{E}(X|Y=y)\,f_Y(y)\mathrm{d}y$

$$P(E)=\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{E}(X|Y=y)\,f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}P(\mathrm{E}|Y=y)\,f_Y(y)\mathrm{d}y$$

或者把$P(E|Y)$看成是Y的函数，对$\mathrm{E}(X|Y)=P(E|Y)$等式两边取期望，有：

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y))=\mathrm{E}(P(E|Y=y));$$

例11 设 X 和 Y 为两个相互独立的随机变量，其密度分别为 f_X 和 f_Y. 计算$P\{X<Y\}$

解: 对 y 的值取条件可得：（定义事件E：$X<Y$）

$$P\{X<Y\}=\int_{-\infty}^{\infty}P\{X<Y|Y=y\}f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}P\{X<y|Y=y\}f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}P\{X<y\}f_Y(y)dy \qquad \text{由独立性}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F_X(y)f_Y(y)dy$$

$$P(E)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}P(E|Y=y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

例12 设 X 和 Y 为相互独立的连续随机变量，求 $X+Y$ 的分布.

解：对 y 的值取条件可得：

$$P\{X+Y<a\}=\int_{-\infty}^{\infty} P\{X+Y<a|Y=y\} f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} P\{X+y<a|Y=y\} f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} P\{X<a-y\} f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y)dy$$

（定义事件E：$X+Y<a$）

$$P(E)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty} P(E|Y=y) f_Y(y)\mathrm{d}y$$

例5 掷骰子的"*Craps*"游戏是这样的，每次掷两枚均匀的骰子，开始时：

1) 如果得到的点数之和是2, 3或12，则玩家输；

2) 若得到7或11，则玩家赢；

3) 若得到的是其他点数i，则需继续玩下去，一直到掷出7或 i 为止。

若最后得到的点数为7，则玩家输，若最后得到的点数为i，则玩家赢。记 R 为掷骰子的次数，求：

(a) $\mathrm{E}(R)$； (b) $\mathrm{E}(R \mid \text{玩家赢})$； (c) $\mathrm{E}(R \mid \text{玩家输})$.

解：如果令P_i表示每次掷骰子得到两枚骰子点数之和为 i 的概率，则有：

$$P_i = P_{14-i} = \frac{i-1}{36} \quad i = 2, 3, \cdots, 7$$

– 为求 $E[R]$，记 S 为第一次掷出点数，则给定 S 的条件下，有：

$$\mathrm{E}(R|S=i) = \begin{cases} 1 & i = 2, 3, 7, 11, 12 \\ 1 + \dfrac{1}{P_i + P_7} & \text{其他} \end{cases}$$

第一次得到的点数之和是2, 3或12，则玩家输；

- 在上式中，若第一次得到 i ,$i \neq 2,3,7,11$或12 ，则玩家必须继续进行；

- 直到出现 i 或7为止，此时所需掷骰子的次数服从几何分布，参数为 P_i+P_7；

- 所以，掷骰子的期望次数为 $\frac{1}{P_i+P_7}+1$，其中+1表示加上第一次掷骰子，因此有：

$$E(R)=E\left(R \mid S=i\right) P(S=i)$$

$$=1+\sum_{i=4}^{6} \frac{P_i}{P_i+P_7}+\sum_{i=8}^{10} \frac{P_i}{P_i+P_7}=1+2(3/9+4/10+5/11)=3.376$$

$$E(R|S=i)=\begin{cases} 1 & i=2,3,7,11,12 \\ 1+\dfrac{1}{P_i+P_7} & \text{其他} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(R|\text{赢})=\sum_i \mathrm{E}(R|\text{赢}, S=i)Q_i \quad Q_i = P\{S=i|\text{赢}\}$$

- 为求$\mathrm{E}(R|\text{玩家赢})$，先计算玩家赢的概率 p；
- 给定第一次掷骰子的结果 S 的条件下，有

$$p=\sum_{i=2}^{12} P\{\text{玩家赢}|S=i\}P_i$$

$$=P_7+P_{11}+\sum_{i=4}^{6}\frac{P_i}{P_i+P_7}P_i+\sum_{i=8}^{10}\frac{P_i}{P_i+P_7}P_i$$

$$=0.493$$

i 在7之前出现的概率为 $P_i/(P_i+P_7)$

若第一次得到7或11，则玩家赢；
最后得到的点数为 i，则玩家赢；

- 现在需要确定在玩家赢的条件下 S 的条件概率，记 $Q_i = P\left\{S = i \middle| 赢\right\}$

$$Q_i = \frac{P\left\{S = i, 赢\right\}}{P\left\{赢\right\}} = \frac{P_i P\left\{赢 \middle| S = i\right\}}{p}$$

- 对于 $i = 4,5,6,8,9,10$, $Q_i = \dfrac{P_i^2}{p(P_i + P_7)}$

$$Q_2 = Q_3 = Q_{12} = 0,\quad Q_7 = P_7 / p,\quad Q_{11} = P_{11} / p$$

- 对第一次掷出的点数和取条件可得：

$$\mathrm{E}(R|赢) = \sum_i \mathrm{E}(R|赢, S = i) Q_i$$

- 已知 $S=i$ 的条件之下，需要掷多少次骰子与最后的结果是赢或输是相互独立的；

- 可以这样来看这个事实，在需要掷的次数为 R 的条件下, 是赢是输的概率与已经掷了几次是无关的；

- 再利用事件独立性的对称特性，即事件A独立于事件 B, 则事件B 也独立于事件 A，可以推出在输赢已知的条件下，R 的分布与输赢也是无关的；

- 因此有：

$$\mathrm{E}(R|\text{赢})=\sum_i \mathrm{E}(R|\text{赢}, S=i)Q_i=\sum_i \mathrm{E}(R|S=i)Q_i$$

$$\mathrm{E}(R|\text{赢}) = \sum_i \mathrm{E}(R|\text{赢}, S=i)Q_i = \sum_i \mathrm{E}(R|S=i)Q_i$$

$$\mathrm{E}(R|S=i) = \begin{cases} 1 & i = 2,3,7,11,12 \\ 1+\dfrac{1}{P_i+P_7} & \text{其他} \end{cases}$$

- 对于 $i = 4,5,6,8,9,10,\ Q_i = \dfrac{P_i^2}{p(P_i+P_7)}$

$$Q_2 = Q_3 = Q_{12} = 0,\quad Q_7 = P_7/p,\quad Q_{11} = P_{11}/p$$

- 因此有：$\mathrm{E}\left(R|\text{赢}\right) = \sum_i \mathrm{E}\left(R|S=i\right)Q_i$

$$= \sum_i Q_i + \sum_{i=4}^{6}\frac{Q_i}{P_i+P_7} + \sum_{i=8}^{10}\frac{Q_i}{P_i+P_7}$$

$$= 2.938$$

- 尽管可以仿照 $E\left(R \middle| \text{玩家赢}\right)$ 的计算方法来求 $E\left(R \middle| \text{玩家输}\right)$，但是还有一个更简单的方法，就是利用：

$$\mathrm{E}(R) = \mathrm{E}(R|\text{赢})p + \mathrm{E}(R|\text{输})(1-p)$$

- 由此可得：

$$\mathrm{E}(R|\text{输}) = \frac{\mathrm{E}(R) - \mathrm{E}(R|\text{赢})p}{1-p} = 3.801$$

例8 设 $U_1, U_2 \cdots$ 为一列相互独立的（0,1）均匀随机变量序列，

令 $N = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}$，计算 $\mathrm{E}(N)$；

解：通过求解更一般的结果得到 $\mathrm{E}[N]$ 的值，对于 $x \in [0,1]$，

令：$N(x) = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > x\right\}$，$m(x) = \mathrm{E}[N(x)]$

- 即 $N(x)$ 是部分和 $\sum_{i=1}^{n} U_i$ 超过 x 的最小指标 n，$m(x)$ 是 $N(x)$ 的期望值. 将 U_i 作为条件，利用公式（5.1b），得到

$$m(x) = \int_0^1 \mathrm{E}[N(x) | U_1 = y] \mathrm{d}y \qquad (5.6)$$

连续型随机变量 Y 的密度函数为 $f_Y(y)$，则：

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X | Y = y) f_Y(y) \mathrm{d}y \qquad (5.1\mathrm{b})$$

$$m(x)=\int_0^1 \mathrm{E}\left[N(x)\middle|U_1=y\right]\mathrm{d}y \qquad (5.6)$$

- 对于条件期望 $\mathrm{E}\left[N(x)\middle|U_1=y\right]$，有：

$$\mathrm{E}\left[N(x)\middle|U_1=y\right]=\begin{cases}1 & y>x\\ 1+m(x-y) & y\le x\end{cases} \qquad (5.7)$$

- 将式（5.7）代入式（5.6），得到

$$m(x)=1+\int_0^x m(x-y)\mathrm{d}y=1+\int_0^x m(u)\mathrm{d}u \qquad (\text{作变量代换}u=x-y)$$

$$\boxed{N(x)=\min\left\{n:\sum_{i=1}^{n}U_i>x\right\}},\quad m(x)=\mathrm{E}\left[N(x)\right]$$

$$m(x)=1+\int_0^x m(x-y)\mathrm{d}y=1+\int_0^x m(u)\mathrm{du} \quad (作变量代换 u=x-y)$$

- 上式求导得到 $m'(x)=m(x)$ ，或等价地，$\dfrac{m'(x)}{m(x)}=1$
- 再对上式求积分，得 $\ln[m(x)]=x+c$ 或 $m(x)=ke^x$
- 由 $m(0)=1$，得 $k=1$，这样 $m(x)=\mathrm{e}^x$；
- 要满足 $N=\min\left\{n:\sum_{i=1}^{n}U_i>1\right\}$ ，平均需要的最少随机变量序列个数 $m(1)$ 等于 e.

$$\boxed{N(x)=\min\left\{n:\sum_{i=1}^{n}U_i>x\right\} \quad m(x)=\mathrm{E}[N(x)]}$$

4.3 方差

方差描述了r.v.对其数学期望的离散程度，在概率论和数理统计中十分重要.

➢ 定义：

设X为一r.v., 若$\mathrm{E}\left\{\left[X-\mathrm{E}(X)\right]^2\right\}$存在, 则称它为 X 的方差, 记作

$\mathrm{D}(X)$或$\mathrm{Var}(X)$,即

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left\{\left[X-\mathrm{E}(X)\right]^2\right\}$$

称$\sqrt{\mathrm{D}(X)}$为X的均方差或标准差.

例1. 甲、乙两人进行打靶，所射中环数分别记为 X_1、X_2, 它们的频律分别为:

X_1	8	9	10	X_2	8	9	10
p_k	0.3	0.1	0.6	p_k	0.2	0.5	0.3

试评定他们射击技术的好坏.（均值：甲9.3，乙9.1）

$$\mathrm{D}(X_1)=\mathrm{E}(X_1-\mathrm{E}(X_1))^2=0.3\times(8-9.3)^2+0.1\times(9-9.3)^2+0.6\times(10-9.3)^2=1.11$$

$$\mathrm{D}(X_2)=\mathrm{E}(X_2-\mathrm{E}(X_2))^2=0.2\times(8-9.1)^2+0.5\times(9-9.1)^2+0.3\times(10-9.1)^2=0.49$$

可见甲的技术不够“稳定”，乙方差小较“稳定”.

若 X 为离散型 $r.v.$ 其分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$, k=1,2,…, 则

$$D(X)=\sum_k\left[x_k-E(X)\right]^2\cdot p_k,$$

若X为连续型$r.v.$,其密度函数为$f(x)$, 则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

➢ 方差的计算公式:

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X-\mathrm{E}(X))^2=\mathrm{E}\left(X^2-2X\cdot\mathrm{E}(X)+(\mathrm{E}(X))^2\right)$$

$$=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2$$

例2. 设r.v.X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}1+x\,, & -1\le x<0,\\ 1\text{-}x, & 0\le x<1,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$ 求: $\mathrm{D}(X)$.

解： $\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\mathrm{d}x=0,$

$$\mathrm{E}(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

于是, $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)\text{-}[\mathrm{E}(X)]^2=\frac{1}{6}$.

- 下面计算一些常见分布的方差：

1. 设随机变量 X 具有 (0-1) 分布，其分布律为 $P\{X=0\}=1-p$, $P\{X=1\}=p$, 则

$$E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p = p$$

$$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p = p$$

故 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p-p^2 = p(1-p)$.

2. 二项分布: 设$X \sim b(n, p)$, $P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0, 1, \cdots n.$

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k}+\sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[k(k-1)+k] C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k}+\mathrm{E}(X) \quad (\text{令} k'=k-2)$$

$$=n(n-1) p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k'!(n-2-k')!} p^{k'} q^{n-2-k'}+\mathrm{E}(X)$$

$$=n(n-1) p^2+\mathrm{E}(X)=n(n-1) p^2+n p$$

故$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=n p q.$

3. 泊松分布: 设$X\sim\pi(\lambda)$, 即 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots\ \lambda>0.$

解: $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda=\lambda.$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1+1)\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}\cdot\lambda^2}{(k-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda^2+\lambda,$$

$$\therefore \mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\lambda.$$

1. 均匀分布: 设r.v. X服从区间$[a, b]$ 上的均匀分布, 即X的密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0\ , & otherwise.\end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\tfrac{1}{3}(b^2+ab+a^2),$$

$$\therefore \mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. 指数分布: 设r.v. X服从参数为λ 的指数分布, 则其密

度函数为: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0,\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$ $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ $\Gamma(n)=(n-1)!$

解: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx \overset{t=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} t^2\cdot e^{-t}dt =\frac{2}{\lambda^2},$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

3. 正态分布: 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad (令 t = x-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt \quad (令 u = \frac{t^2}{2\sigma^2})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{0}^{+\infty} 2\sigma^2 u \cdot e^{-u} \cdot \sigma\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$t = \sigma\sqrt{2u}$$

$$dt = \sigma\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \quad = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2.$$

回 顾

- 利用条件计算期望：$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y))$
- 方差的定义：方差是一种特殊的数学期望；

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left\{\left[X-\mathrm{E}(X)\right]^2\right\}$$；

- 方差的计算公式：$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2$
- 几个典型分布的方差：
    - 0-1分布，二项分布，泊松分布，均匀分布，指数分布，正态分布；

例 3（几何分布的方差）设有一独立重复试验序列，每次试验成功的概率为 P，记 N 为取得第一次成功所需的试验次数. 求 $\mathrm{Var}(N)$

解 若第一次试验成功，令 $Y=1$；否则，$Y=0$；

利用公式 $\mathrm{Var}(N)=\mathrm{E}[N^2]-(\mathrm{E}[N])^2$，只需计算 $E[N^2]$.

在给定 Y 的条件下，有 $\mathrm{E}[N^2]=\mathrm{E}[\mathrm{E}[N^2\mid Y]]$

然而，$\mathrm{E}[N^2\mid Y=1]=1$，$\mathrm{E}[N^2\mid Y=0]=\mathrm{E}[(1+N)^2]$

- 上述两式成立是因为：
  - ✓ 一方面，若第一次实验成功，则有 $N=1$,从而 $N^2=1$
  - ✓ 另一方面，若 Y=0，即第一次试验失败，则试验相当于重新开始，因此第一次成功所需实验次数变成 N+1.
- 因为后者与 N 同分布，我们得到 $\mathrm{E}[N^2 \mid Y=0]=\mathrm{E}[(1+N)^2]$；
- 因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[N^2] &= \mathrm{E}[N^2 \mid Y=1]P\{Y=1\}+\mathrm{E}[N^2 \mid Y=0]P\{Y=0\} \\ &= p+(1-p)\mathrm{E}[(1+N)^2] \\ &= 1+(1-p)\mathrm{E}[2N+N^2]\end{aligned}$$

- $E[N]=1/p$，因此有

$$E[N^2]=1+\frac{2(1-p)}{p}+(1-p)E[N^2]$$

- 由上式解得

$$E[N^2]=\frac{2-p}{p^2}$$

- 从而

$$Var(N)=E[N^2]-(E[N])^2=\frac{2-p}{p^2}-(\frac{1}{p})^2=\frac{1-p}{p^2}$$

➢ 方差的性质:

1. 设 C 是常数，则 $D(C)=0$;

2. 设 X 是 r.v.，C 是常数，则有 $D(CX) = C^2D(X)$;

3. 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量，则有
$D(X \pm Y) = D(X)+D(Y)$;

4. $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数C,
即 $P\{X=C\}=1$. 这里 $C=E(X)$

➢ 性质3的证明:

$$D(X\pm Y)=E((X\pm Y)-E(X\pm Y))^2$$

$$=E[(X-EX)^2\pm 2(X-EX)(Y-EY)+(Y-EY)^2]$$

$$=D(X)+D(Y)\pm 2E(X-E(X))(Y-E(Y))$$

当X,Y独立时，$E(X-E(X))(Y-E(Y))$

$$=E(XY-X\cdot E(Y)-E(X)\cdot Y+E(X)E(Y))$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

命题得证。

推论：$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，则

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$$

$$D(c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n)=c_1^2D(X_1)+\cdots+c_n^2D(X_n)$$

例1. 设 $X \sim b(n, p)$，分解 X，求其方差 $D(X)$.

解：$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，其中

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{第}i\text{次试验}A\text{不发生} \\ 1, & \text{第}i\text{次试验}A\text{发生} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

易知 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同服从(0--1)分布，因此

$$D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

$$= pq + pq + \cdots + pq = npq$$

例2. **证明：** 若$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$，且相互独立，$k_1,k_2,\cdots,k_n$不全为零, 则

$$\sum_{i=1}^{n} k_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} k_i^2\sigma_i^2\right)$$

.

证明：有限个独立的正态随机变量之线性组合仍服从正态分布，

可知$\sum_{i=1}^{n} k_i X_i$服从正态分布。再由期望与方差的性质可得

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(k_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i$$

$$\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}(k_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \mathrm{D}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2$$

所以结论成立.

例3. 对任一随机变量X，若其期望 $E(X)$,方差 $D(X)$ 均存在，且$D(X)>0$，则称 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$为$X$的标准化随机变量。

试证：$E(X^*)=0,\ D(X^*)=1.$

证： $E(X^*)=E[\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\dfrac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=0$

$$D(X^*)=E(X^{*2})-[E(X^*)]^2=E[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]^2$$

$$=\frac{1}{D(X)}E(X-E(X))^2$$

$$=\frac{1}{D(X)}\cdot D(X)=1$$

性质4的证明:

4. $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数C, 即 $P\{X=C\}=1$.

这里 $C=E(X)$

充分性证明： $P\{X=C\}=1$，则$P\{X^2=C^2\}=1$，即$E(X^2)=C^2$；

$$D(X)= E(X^2) - [E(X)]^2 = 0 \ ;$$

必要性证明： 利用切比雪夫不等式；

➢ 切比雪夫(Chebyshev)不等式:

设r.v.X具有数学期望$E(X)=\mu$, 方差$D(X)=\sigma^2$，则对$\forall\varepsilon>0$,

有不等式 $P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 或$P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \geq 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

这一不等式称为Chebyshev不等式.

证：设X的概率密度为$f(x)$,则 $P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} = \displaystyle\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$

$$\leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \left(\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}\right) f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

如取 $\varepsilon=2\sigma$ 或 3σ 可得 $P\{|X-\mu|<2\sigma\}\geq 0.7500,$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}\geq 0.8889$$

这个估计的精度不高，但具有普遍适用性（随机变量的分布）。

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$时 $P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.9544,$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=0.9974$$

4. $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数C，即 $P\{X=C\}=1$，$C=E(X)$

必要性证明： 假设 $D(X)=0$，$P\{X=C\}<1$；

则对 $\forall \varepsilon > 0, P\left\{|X - C| \geq \varepsilon\right\} > 0$

由切比谢夫不等式，$P\left\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} = 0$

矛盾，假设不成立，因此 $P\{X = C\}=1$；

4.4 条件方差

- 正如我们定义 $Y=y$ 之下 X 的条件期望一样，也可以定义 $Y=y$ 之下 X 的条件方差为：

$$\mathrm{Var}\left(X\,|Y\right)=\mathrm{E}\left[\left(X-\mathrm{E}\left(X\,|Y\right)\right)^2|Y\right]$$

- 即 $\mathrm{Var}(X\,|Y)$ 是 X 和它的条件期望之差的平方的（条件）期望值.

- 换句话说，$\mathrm{Var}(X\,|Y)$ 通常的方差的定义完全一样，不过求期望换成了求在 Y 已知的条件下的条件期望.

➢ 条件方差 $\mathrm{Var}(X|Y)$ 和无条件方差 $\mathrm{Var}(X)$ 之间具有某种很有用的关系，人们通常利用这种关系计算一个随机变量的方差.

➢ 首先，与普通方差的公式 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\left(\mathrm{E}\left(X\right)\right)^2$ 一样，条件方差也有

$$\boxed{\mathrm{Var}\left(X|Y\right)\equiv\mathrm{E}\left(X^2|Y\right)-\left[\mathrm{E}\left(X|Y\right)\right]^2}$$

是随机变量吗？
是函数吗？

两边求期望，得到：

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)]=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X^2|Y)]-\mathrm{E}[(\mathrm{E}(X|Y))^2]$$

$$=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)^2\right] \qquad (5.9)$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)]=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X^2|Y)]-\mathrm{E}[(\mathrm{E}(X|Y))^2]=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)^2\right] \quad (5.9)$$

同时：
$$\mathrm{Var}(\mathrm{E}(X|Y))=\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)^2\right]-\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)\right)^2$$
$$=\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)^2\right]-\left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \quad (5.10)$$

将（5.9）与式（5.10）相加，我们得到如下命题：

命题 (条件方差公式):

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left[\mathrm{Var}(X|Y)\right]+\mathrm{Var}\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)$$

例1 设对任意时间 t ，在 $(0, t)$ 内到达某火车站的人数是一个泊松随机变量，均值为 λt. 现设火车在 $(0,T)$ 这个区间内随机到达，即到达时间 t 是 $(0, T)$ 上的均匀分布，并且与旅客到达火车站的时间独立。求火车到达时，上火车的旅客人数的期望和方差.

解: 对任意 $t\geq 0$，令 $N(t)$ 表示 t 以前到达车站的人数，Y 表示火车到达时间，$N(Y)$ 表示上火车的人数. 给定 Y 的条件下有

$$E[N(Y)|Y=t]=E[N(t)|Y=t]=E[N(t)]$$ 由 Y 与 $N(t)$ 的独立性

$$=\lambda t$$ $N(t)$ 是均值为 λt 的泊松随机变量

因此， $E[N(Y)|Y]=\lambda Y$

两边取期望可得：$E[N(Y)]=\lambda E(Y)=\dfrac{\lambda T}{2}$ ；

$$\boxed{\mathrm{Var}(X)=E\left[\mathrm{Var}(X|Y)\right]+\mathrm{Var}\left(E(X|Y)\right)}$$

- 为了计算 $\mathrm{Var}(N(Y))$，我们利用条件方差公式

$$\mathrm{Var}(N(Y)\,|\,Y=t)=\mathrm{Var}(N(t)\,|\,Y=t)=\mathrm{Var}(N(t))=\lambda t$$

- 因此，有：

$$\mathrm{Var}(N(Y)\,|\,Y)=\lambda Y, \qquad E[N(Y)\,|\,Y]=\lambda Y$$

- 再由条件方差公式，得：

$$\mathrm{Var}(N(Y))=\mathrm{E}(\lambda Y)+Var(\lambda Y)=\lambda\frac{T}{2}+\lambda^2\frac{T^2}{12}$$

- 上式利用了 $\mathrm{Var}(Y)=T^2/12$ 的事实

例2（随机个随机变量之和的方差）设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一系列独立同分布的随机变量，N 是一取非负整数的随机变量，并且独立于序列 $X_i,\ i\geq 1$，为计算 $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{N} X_i)$，

- 先固定 N 的值作为条件

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right) = N\mathrm{E}(X), \qquad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right) = N\,\mathrm{Var}(X)$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}(X|Y)\right] + \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)}$$

- 由前面已经得到的结果可知，对于给定的N，$\sum_{i=1}^{N} X_i$是固定个数的独立随机变量的和。

- 故它的期望和方差刚好是相应的期望和方差之和：

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N\right) = N\mathrm{E}(X), \qquad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N\right) = N\,\mathrm{Var}(X)$$

- 再利用条件方差公式可得

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{E}(N)\mathrm{Var}(X) + \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \mathrm{Var}(N)$$

4.5 条件期望及预测

- 在实际问题中，有时会遇到这种情况，即某人观察到随机变量 X 的值，然后基于X 的观察值，要对第二个随机变量Y的值进行预测。

- 令 $g(x)$ 表示预测值，即当观测到 X 的值 x 以后， $g(x)$ 就是 Y 的值的预测值： $Y= g(X)+\varepsilon.$

- 显然，我们希望选择 g 使 $g(X)$接近 Y，选择 g 的准则是什么？

极小化 $\mathrm{E}\left[(Y-g(X))^2\right]$! !

4.5 条件期望及预测

- 选择 g 使 $g(X)$接近 Y，准则是极小化 $\mathrm{E}\left[(Y-g(X))^2\right]$。
- 下面我们指出在这个准则之下，y 的最好的预测值为

$g(X)=\mathrm{E}\left(Y\mid X\right)$ ；

$$g(X)=\mathrm{E}\left(Y\mid X\right) \Longrightarrow \mathrm{E}\left[(Y-g(X))^2\right]\text{最小化}$$

命题6.1 $\mathrm{E}\left((Y-g(X))^2\right) \geq \mathrm{E}\left[(Y-\mathrm{E}(Y|X))^2\right]$

证明： $\mathrm{E}\left[(Y-g(X))^2|X\right] = \mathrm{E}\left[\left(Y-\mathrm{E}(Y|X)+\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)^2|X\right]$

$$= \mathrm{E}\left[\left(Y-\mathrm{E}(Y|X)\right)^2|X\right] + \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)^2|X\right]$$

$$+ \underbrace{2\mathrm{E}\left[\left(Y-\mathrm{E}(Y|X)\right)\left(\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)|X\right]}_{=0}$$

然而，对于给定的 X 值 $\mathrm{E}(Y|X)-g(X)$ 就是一个常数，

于是： $\mathrm{E}\left[\left(Y-\mathrm{E}(Y|X)\right)\left(\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)|X\right]$

$$= \left(\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)\mathrm{E}\left[Y-\mathrm{E}(Y|X)|X\right]$$

$$= \left(\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)\left(\mathrm{E}(Y|X)-\mathrm{E}(Y|X)\right) = 0$$

这样，$\mathrm{E}\left[\left(Y-g(X)\right)^2 \middle| X\right]=\mathrm{E}\left[\left(Y-\mathrm{E}(Y|X)+\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)^2 \middle| X\right]$

$$=\mathrm{E}\left[\left(Y-\mathrm{E}(Y|X)\right)^2 \middle| X\right]+\underbrace{\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}(Y|X)-g(X)\right)^2 \middle| X\right]}_{\geq 0}$$

易得，$\mathrm{E}\left[(Y-g(X))^2 \middle| X\right] \geq \mathrm{E}\left[\left(Y-E(Y|X)\right)^2 \middle| X\right]$

上式两边再求期望即可得到命题的结论：

$$\mathrm{E}\left((Y-g(X))^2\right) \geq \mathrm{E}\left[(Y-\mathrm{E}(Y|X))^2\right]$$

命题6.1 $\mathrm{E}\left((Y-g(X))^2\right) \geq \mathrm{E}\left[(Y-\mathrm{E}(Y|X))^2\right]$

➢ 注释：

✓ 此处可以给出命题6. 1一个更加直观的证明，当然，在证明的严格性上要差一点。很容易证明 $\mathrm{E}[(Y-c)^2]$ 在 $c=\mathrm{E}(Y)$ 达到极小值；

✓ 因此在我们没有任何数据可用时，在均方误差最小的意义下，Y 的最优预测就是 $\mathrm{E}(Y)$，现在设得到了X 的观察值 x，此时预测问题与没有数据时的预测问题完全一样。只是原来Y 的期望改为事件$\{X=x\}$ 之下的条件期望；

✓ 因此, y 的最优预测是 Y 在 $X=x$ 之下的条件期望，于是命题6. 1得证。

最优预测的应用

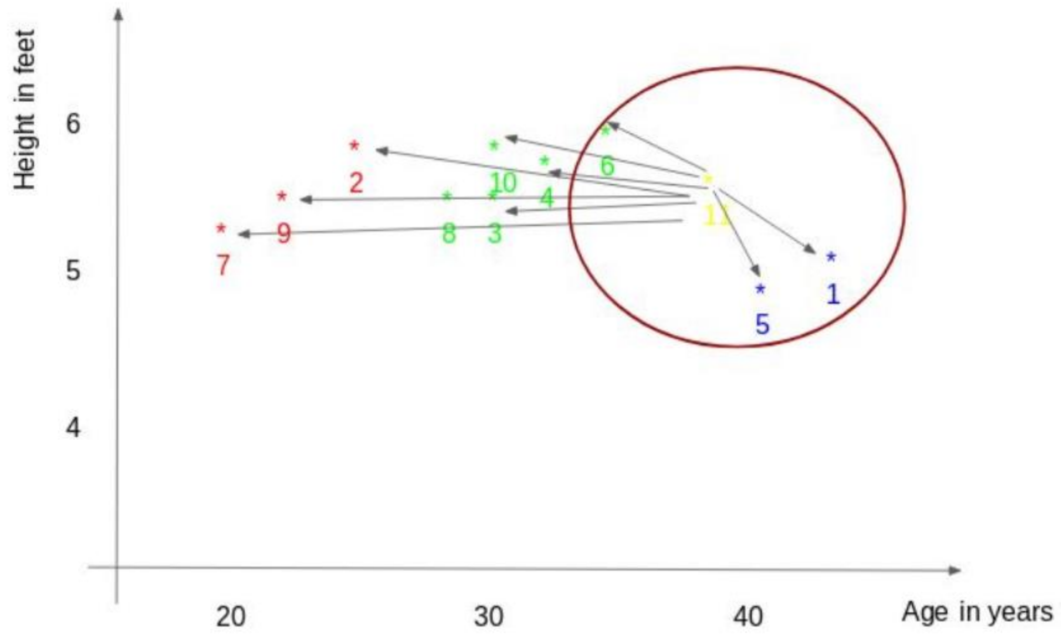
- 设 (x, y)为来自总体(X, Y)的观察值，最好的预测$\hat{f}(x)$
  - 令$\hat{f} = \arg\min \mathrm{E}(Y - f(X))^2$，则 $\hat{f}(x) = \mathrm{E}(Y|X = x)$
  - 已知(X, Y)的联合分布的情况下，可以求条件期望；
  - 如果不知道(X, Y)的联合分布呢？

➢ 数据如下表，其中包括10个人的身高、体重和年龄数据，如何预测第十一个人的体重？？

ID	Height	Age	Weight
1	5	45	77
2	5.11	26	47
3	5.6	30	55
4	5.9	34	59
5	4.8	40	72
6	5.8	36	60
7	5.3	19	40
8	5.8	28	60
9	5.5	23	45
10	5.6	32	58
11	5.5	38	?

- 核心想法： $f(X) = E(Y|X = x) \approx E(Y|N(x)) \approx \frac{y_{1+\cdots\ldots+}y_t}{t}$
  - $y_1\ldots\ldots y_t \in N(x)$，$N(x)$为$x$的一个领域；
- KNN：$N_k(x)$表示离 x 最近的 k 个观察值组成的集合
  - $\hat{f}(x) = \frac{1}{k}\sum_{x \in N_k(x)} Y_t$

- 计算待测点到已知点的距离；
- 选择距离待测点最近的 k 个点，k 值为人工设置的；在这个例子中，我们假设 k=3，即点1、5、6被选择。
- 将点1、5、6的值取平均值作为最终的预测结果。即11点的 Weight=(77+72+60)/3 = 69.66 kg



例6b.假设在A处发射一个强度为s的信号，在B处会接收到一个强度为R的信号，R是一个正态随机变量，参数为（s，1）。现在假设发射端发射的信号强度S服从正态分布，参数为（μ，σ^2）。当接收端收到的R的值为r时，求发送信号强度的最优估计？

解： 首先计算发射端发送信号强度S在给定R之下的条件密度

$$f_{S|R}(s|r)=\frac{f_{S,R}(s,r)}{f_R(r)}=\frac{f_S(s)f_{R|S}(r|s)}{f_R(r)}$$

$$=Ke^{-(s-\mu)^2/2\sigma^2}e^{-(r-s)^2/2}$$

不包含s, 包含r

$$\mathrm{E}\left(S|R=r\right)??$$

其中 K 不依赖于s。注意

$$\begin{aligned}\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}+\frac{(r-s)^2}{2}&=s^2\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+r\right)s+C_1\\&=\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}\left[s^2-2\left(\frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)s\right]+C_1\\&=\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}\left(s-\frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)^2+C_2\end{aligned}$$

➢ 其中，C_1, C_2 均不依赖于S, 因此条件密度为

$$f_{S|R}(s|r) = C\exp\left\{\frac{-(s-\frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2})^2}{2\left(\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)}\right\}$$

➢ 其中 C 与 S 无关，由上式可知，在给定 $R=r$ 下，S 的条件分布为正态分布，其期望和方差分别为

$$\mathrm{E}\left(S\middle|R=r\right) = \frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2}, \quad \mathrm{Var}\left(S\middle|R=r\right) = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}$$

- 再利用命题6.1, 在给定 $R=r$ 之下，在均方误差最小的意义下，S 的最优估计为:

$$E\left(S \middle| R=r\right)=\frac{1}{1+\sigma^2}\mu+\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}r$$

- 由上式看出:
  - 条件期望提供了关于S的信息，它是μ (信号的先验期望值)和 r（接受到信号）的加权平均。
  - 两个权值之比为1比σ^2，其中1代表信号s发出后接收到的信号的条件方差，σ^2表示发送信号的方差。

回 顾

- 方差的性质：
  - 切比雪夫不等式；
- 条件方差：$\mathrm{Var}\left(X|Y\right)=\mathrm{E}\left[\left(X-\mathrm{E}\left(X|Y\right)\right)^2|Y\right]$
  - $\mathrm{Var}\left(X|Y\right)\equiv\mathrm{E}\left(X^2|Y\right)-\left[\mathrm{E}\left(X|Y\right)\right]^2$
  - $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left[\mathrm{Var}(X|Y)\right]+\mathrm{Var}\left(\mathrm{E}(X|Y)\right)$
- 基于条件期望的最优预测：
  - $g(X)=\mathrm{E}\left(Y\mid X\right)$ ⟹ $\mathrm{E}\left[(Y-g(X))^2\right]$最小化
  - 应用：KNN

例4 当X，Y的联合分布为二元正态分布时，因为在给定 X 的条件下 Y 的条件期望为 X 的线性函数，因此Y关于X 的最优线性预测就是最优预测。

$$\mathrm{E}\left(Y \mid X=x\right)=\mu_{y}+\rho \frac{\sigma_{y}}{\sigma x}(x-\mu_{x})$$

（作业6第4题）

例4 当X，Y的联合分布为二元正态分布时，因为在给定 X 的条件下 Y 的条件期望为 X 的线性函数，因此Y关于X 的最优线性预测就是最优预测。

➢ 最优（线性）预测的均方误差为：

$$\mathrm{E}[(Y-\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_x))^2]$$

$$=\mathrm{E}[(Y-\mu_y)^2]+\rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\mathrm{E}[(X-\mu_x)^2]+2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mathrm{E}[(Y-\mu_y)(X-\mu_x)]$$

$$=\sigma_y^2+\rho^2\sigma_y^2-2\rho^2\sigma_y^2=\sigma_y^2(1-\rho^2)$$

当 ρ 接近于+1或-1时？？

4.6 协方差和相关系数

定义1: 设(X, Y)为二维r.v.，若 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则把它称作 X和 Y 的协方差，记作$\mathrm{Cov}(X, Y)$，即：

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

展开可得计算公式: $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

由方差性质证明知，对于任意的两个 r.v. X 和Y，有:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

➢ 协方差的性质:

1、$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathrm{Cov}\,(Y, X)$;

2、$\mathrm{Cov}\,(a_1X+b_1, a_2Y+b_2)=a_1a_2\mathrm{Cov}\,(X, Y)$, 其中$a_1, a_2, b_1, b_2$是常数;

3、$\mathrm{Cov}\,(X_1+X_2, Y) = \mathrm{Cov}\,(X_1, Y) + \mathrm{Cov}\,(X_2,Y)$;

4、 $\mathrm{Cov}\,(X, a)=0$, $\mathrm{Cov}\,(X, X) = D(X)$, a为常数;

5、 若 X, Y 相互独立, 则 $\mathrm{Cov}\,(X, Y)=0$.

6、$|\mathrm{Cov}\,(X,Y)|^2 \le D(X)\cdot D(Y)$; “=”成立当且仅当 X 与 Y 之间有严格的线性关系。($Y= aX + b$)

性质6证明： 对任$t \in R$都有 $\mathrm{E}(t(X-\mathrm{E}(X))+(Y-\mathrm{E}(Y)))^2 \geq 0$

展开为 $\mathrm{E}(t^2(X-\mathrm{E}(X))^2+2t(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))+(Y-\mathrm{E}(Y))^2)\geq 0$

即$t^2 \cdot \mathrm{D}(X)+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{D}(Y)\geq 0$

此不等式对应的方程无实根或有二重根, 故有

$\Delta = 4(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - 4\mathrm{D}(X)\mathrm{D}(Y) \leq 0$,即命题成立。

“$=$” 成立时方程有重根t_0，即 t_0 满足$t_0(X-\mathrm{E}(X))+(Y-\mathrm{E}(Y))=0$.
X与 Y有线性关系。（要使得该式子成立，须有$Y=-t_0X+b$ ）

定义2: 若$D(X)\neq 0$, $D(Y)\neq 0$, 则称$\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$为$X,Y$的相关系数，记为$\rho_{XY}$.

记 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$, $Y^*=\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$为 X,Y 的标准化随机变量

$$\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)=E(X^*Y^*)-E(X^*)E(Y^*)$$

$$=E\left(\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)\cdot\left(\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)\right)$$

$$=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\rho_{XY}$$

显然，相关系数是标准化了的协方差。

➢ 相关系数的性质:

1. $|\rho_{XY}| \le 1;$.

证：因为$\mathrm{D}(X^* \pm Y^*) = \mathrm{D}(X^*) + \mathrm{D}(Y^*) \pm 2\mathrm{Cov}(X^*, Y^*)$

$$=1+1\pm 2\rho_{XY} \ge 0$$

所以有 $|\rho_{XY}| \le 1.$

2. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow X$ 和Y以概率1线性相关, 即$P\{Y = aX + b\} = 1,$
其中a, b为常数, 且$a \ne 0$ (由协方差的性质6)

3. 若X, Y相互独立，则$\rho_{XY} = 0.$

（若 X, Y 相互独立, 则 Cov (X, Y)=0）

定义3： 若 $\rho_{XY}=0$, 则称 X 和 Y 是不相关的。

> ➢ 注意：相关系数 ρ_{XY} 刻划了 X, Y 之间的线性相关关系, 当ρ_{XY}=0时，称 X, Y 不相关是指它们之间没有线性相关关系. $\rho_{XY}=1$ 或 -1时，X 与 Y 有严格线性关系。

不相关与相互独立的逻辑关系:

a. 若X,Y相互独立，则X, Y不相关（ρ=0);

b. 上面的逆命题一般不真;

$$\left(\begin{array}{l}\text{反例, 二维r.v.}(X,\ Y)\text{的密度函数是} \\ \qquad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \\ \text{其}\rho_{XY}=0,\text{但}f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y).\end{array}\right).$$

c. 当 (X,Y) 服从二维正态分布时，X,Y独立 $\Leftrightarrow X,Y$不相关

例1. 设(X, Y) 服从二维正态分布, 求 X 和 Y 的相关系数.

解：前面在第三章的例子中已经知道 (X,Y) 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<x,y<+\infty,$$

故知 $\mathrm{E}(X)=\mu_1,\ \mathrm{E}(Y)=\mu_2,\ \mathrm{D}(X)=\sigma_1^2,\ \mathrm{D}(Y)=\sigma_2^2.$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

$$\text{而}\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

$$\left(\text{其中}\,t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\quad\text{故}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right)}_{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right)+$$

$$\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\underline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right)}$$

奇函数！

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}=\rho\sigma_1\sigma_2.$$

$$\therefore \rho_{XY}=\rho.$$

- 由第三章我们曾证明过的一个命题, 设 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 X, Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$. 知 X 与 Y 不相关与 X 和 Y 相互独立是等价的.

公式：Cov $(aX+bY, cX+dY) = ac\mathrm{D}(X) + (ad+bc)\,\mathrm{Cov}(X, Y) + bd\mathrm{D}(Y)$

例2. $X \sim N(2003, 1)$, $Y \sim N(2004, 1)$, 且 X 与 Y 独立，求 $3X-Y$ 与 $X+Y$ 的相关系数。

解：由于 X, Y 独立，则

$$\mathrm{Cov}(3X-Y, X+Y) = 3\mathrm{D}(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{D}(Y)=3-1=2$$

$$\mathrm{D}(3X-Y)=9\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)=10$$

$$\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)=2$$

相关系数为

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(3X-Y, X+Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(3X-Y)\mathrm{D}(X+Y)}} = \frac{2}{\sqrt{2\times 10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

最优线性预测

- 为求得 Y 的最优线性预测, 我们需要选择线性预测 $a+bx$ 的系数 a 和 b 使得, $\mathrm{E}\left[(Y-(a+bX))^2\right]$ 达到极小值
- 为此，先将 $\mathrm{E}\left[(Y-(a+bX))^2\right]$ 展成一个a, b的多项式

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[(Y-(a+bX))^2\right] \\
&=\mathrm{E}\left[Y^2-2aY-2bXY+a^2+2abX+b^2X^2\right] \\
&=\mathrm{E}(Y^2)-2a\mathrm{E}(Y)-2b\mathrm{E}(XY)+a^2+2ab\mathrm{E}(X)+b^2\mathrm{E}(X^2)
\end{aligned}
$$

求上式对a和b的偏导数，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}\mathrm{E}\left[\left(Y-a-bX\right)^2\right] &= -2\mathrm{E}(Y)+2a+2b\mathrm{E}(X) \\ \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{E}\left[\left(Y-a-bX\right)^2\right] &= -2\mathrm{E}\left(XY\right)+2a\mathrm{E}(X)+2b\mathrm{E}(X^2) \end{aligned} \qquad (3)$$

令偏导数为0，求解关于(a,b)的方程组(3)，得到

$$\begin{aligned} b &= \frac{\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x^2} = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\ a &= \mathrm{E}[Y]-b\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y]-\frac{\rho\sigma_y\mathrm{E}(X)}{\sigma_x} \end{aligned} \qquad (4)$$

- 其中ρ为 X,Y 的相关系数，$\sigma_x^2=\mathrm{Var}(X)$ $\sigma_y^2=\mathrm{Var}(Y)$
- 容易验证由 (4) 给出的 a,b 值使得 $\mathrm{E}[(Y-(a+bX))^2]$达到极小；
- 因此，在均方误差意义下，Y的最优线性预测为，

$$\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_x)$$

其中，μ_y=E(Y)，μ_x=E(X).

- 这个线性预测的均方误差为

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}[(Y-\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_x))^2] \\ &= \mathrm{E}[(Y-\mu_y)^2]+\rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\mathrm{E}[(X-\mu_x)^2]+2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mathrm{E}[(Y-\mu_y)(X-\mu_x)] \\ &= \sigma_y^2+\rho^2\sigma_y^2-2\rho^2\sigma_y^2=\sigma_y^2(1-\rho^2) \end{aligned} \tag{5}$$

- 由(5)看出，当 ρ 接近于+1或-1时，其最优线性预测的均方误差接近于0.

4.7 矩、协方差矩阵

一. 定义: 设 X 和 Y 是随机变量,

(1) 若$E(X^k)$, k=1, 2, …存在, 则称它为 X 的 k 阶原点矩.

(2) 若$E\{[X-E(X)]^k\}$, k=1, 2, …存在, 则称它为 X 的 k 阶中心矩.

(3) 若$E(X^k \bullet Y^l)$, k, l=1, 2, …存在, 则称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

(4) 若$E\{[X-E(X)]^k \bullet [Y-E(Y)]^l\}$, k, l=1, 2,…存在, 则称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

- 显然, $E(X)$, $E(Y)$为一阶原点矩, $D(X)$, $D(Y)$为二阶中心矩, $Cov(X,Y)$为二阶混合中心矩.

二、定义: 二维随机变量(X_1,X_2) 有四个二阶中心矩，分别记为

$$c_{11}=\mathrm{E}\{[X_1-\mathrm{E}(X_1)]^2\}$$
$$c_{12}=\mathrm{E}\{[X_1-\mathrm{E}(X_1)][X_2-\mathrm{E}(X_2)]\}$$
$$c_{21}=\mathrm{E}\{[X_2-\mathrm{E}(X_2)][X_1-\mathrm{E}(X_1)]\}$$
$$c_{22}=\mathrm{E}\{[X_2-\mathrm{E}(X_2)]^2\}$$

将它们排成矩阵形式 $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ 称这个矩阵为 (X_1, X_2) 的 协方差矩阵。

设n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的二阶中心矩及二阶混合中心矩 $c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$, 都存在, 则称矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的协方差阵.

- 由于$c_{ij}=c_{ji}$ $(i, j=1,2, \ldots, n)$，因此协方差矩阵是一个对称矩阵；

(由协方差的性质 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$, $c_{ij}= c_{ji}$可得)

三. 协方差阵的性质:

1 C是对称的;

2 c_{ii} =D(X_i), i =1, 2, 3, …, n.

3 $c_{ij}^2 \le c_{ii}\,c_{jj}$, i、j =1, 2, …, n. (由协方差的性质|Cov(X, Y)|$^2 \le$ D(X)D(Y))

4 C是非负定的, 即对任意的向量 $a =(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, 都有 $a^TCa \ge 0$.

四. n 维正态变量:

1. 定义: 设有n维r.v.$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 称以 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为密度函数的 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作n维正态变量, 记作 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim N(\boldsymbol{\mu},\mathbf{C})$.

其中$\boldsymbol{\mu}$为n维常向量, $\mathbf{C}$是n维对称正定矩阵,

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix} \mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix},$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left|\mathbf{C}\right|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\mathbf{C}^{-1}(X-\mu)}$$

2. 性质:

1、n 维正态变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的每一个分量 X_i 都是正态变量；反之，若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 都是正态变量，且相互独立，则$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维正态变量。

2、n 维 *r.v.* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的任一线性组合 $l_1X_1+l_2X_2+\dots+l_n X_n$ 服从一维正态分布.

3、若 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 设 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是 X_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ 的线性函数, 则 $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ 也服从多维正态分布.

4、若$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 则 "$X_1, X_2, \ldots, X_n$"相互独立与 "$X_1, X_2, \ldots, X_n$" 两两不相关是等价的.

练习

1. 有5个相互独立工作的电子装置, 它们的寿命 $X_k\,(k=1,\ \cdots,\ 5)$服从同一指数分布, 其概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x>0, \\ 0, \qquad x\le 0,\end{cases} \qquad \theta>0,$$

(i)若将这5个电子装置串联工作组成整机, 求整机寿命N的数学期望.

(ii)若将这5个电子装置并联工作组成整机, 求整机寿命M的数学期望.

2 设随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)$，求$\mathrm{E}X,\mathrm{E}Y$

$$f(x,y)=\begin{cases}1,|y|<x,0<x<1\\0,\text{其它}\end{cases}.$$

3. 将 n 个编号为1-n 的 n 个球随机放入 m 个盒子中去(盒子容量不限)，X 表示有球的盒子数，求 $\mathrm{E}X$

4. 已知$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求$\mathrm{E}|X-\mu|$.

5. 当 X 服从离散分布时，证明切比雪夫不等式。

6.已知$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y),0\le x\le 2,0\le y\le 1\\0,\text{其它}\end{cases}$，求$\rho_{XY}$