大学数学试卷　　2019.12.30

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维列向量，记三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，
$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，若 $|A|=-3$，计算 $|B|$.

2. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(\lambda,1,1)^{\mathrm{T}}$，若 $A\alpha$ 与 α 线性相关，求常数 λ.

3. λ 取何值时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

4. 设 A 为二阶方阵，α_1,α_2 是线性无关的二维列向量，且 $A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的所有特征值.

二、 (**本题12分**) 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1 & +\lambda x_2 & +\mu x_3 & +x_4 & =0\\2x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & =0\\3x_1 & +(2+\lambda)x_2 & +(4+\mu)x_3 & +4x_4 & =1\end{cases}$，
若 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解，求：(1) 方程组的通解；(2) 方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

三. (**本题12分**) 确定常数 k，使得向量组 $\alpha_1=(1,1,k)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,k,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(k,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组
$\beta_1=(1,1,k)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,k,4)^{\mathrm{T}},\beta_3=(-2,k,k)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

四. (**本题12分**) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是解，即 $A\beta\neq 0$，
证明：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_n$ 线性无关.

五. (**本题12分**) 设 A,C 为 n 阶正定矩阵，若 B 是关于 Z 的矩阵方程 $AZ+ZA=C$ 的唯一解，
证明：B 是正定矩阵.

六. (**本题12分**) 设线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}$.
(1) 求 T 在基 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$ 下的矩阵；
(2) 若向量 $x=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3,y=\beta_1-\beta_2+\beta_3$，求 Tx,Ty 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

七. (**本题12分**) 设 A 为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，
且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$.
(1) 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；
(2) 求矩阵 A 的特征值；
(3) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.