南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

插值法

温丹苹

邮箱：dpwen@nju.edu.cn

办公室：工管院协鑫楼306

目录

7.3.1 差商及性质

- **差商定义**

给定函数$f(x)$在$[a,b]$上$n+1$个互异节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$处的函数值$f(x_i)$，$i=0,1,2,\ldots,n$，称

$$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

为$f(x)$关于点x_i和x_j的**一阶差商**，

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$$

为$f(x)$关于点x_i、x_j和x_k的**二阶差商**。

* 注：一阶差商：表示过曲线$y=f(x)$上两点$(x_i,f(x_i))$，$\left(x_j,f\left(x_j\right)\right)$的割线的斜率。

* 二阶差商：一阶差商的差商。

7.3.1 差商及性质

- 类似的，

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}]-f[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k]}{x_0-x_k}$$

为$f(x)$的***k*阶差商**。

* 为了符号统一，定义$f(x)$在节点x_i处的**零阶差商**$f[x_i]=f(x_i)$

7.3.1 差商及性质

- **差商的基本性质**

①k阶差商可表示为函数值$f(x_0), f(x_1),\ldots, f(x_k)$的线性组合，即

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_k)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{w'_{k+1}(x_j)}$$

数学归纳法证明

注：性质①表明，差商与节点顺序排列次序无关，即**差商具有对称性**。

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k]=f[x_1,x_0,x_2,\ldots,x_k]=\ldots=f[x_1,x_2,\ldots,x_k,x_0]$$

②由性质1及k阶差商定义可得，**差商的等价定义**：

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

7.3.1 差商及性质

- **差商的基本性质**

③若$f(x)$在[a,b]上存在n阶导数，且节点$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k \in [a,b]$，则$n$阶差商与导数关系为：

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\varepsilon)}{k!}, \varepsilon \in [a,b].$$

回顾性质①，使用罗尔定理证明

***k*阶差商可表示为函数值$\boldsymbol{f(x_0)}$, $\boldsymbol{f(x_1)}$,…, $\boldsymbol{f(x_k)}$的线性组合**，即

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_k)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{w'_{k+1}(x_j)}$$

7.3.1 差商及性质

- 差商的计算——差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	$\cdots$	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

7.3.1 差商及性质

- 差商计算举例

Demo_7_3_1_DQ.m

例：已知 $y = f(x)$ 的函数值表，试计算其各阶差商

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

解：差商表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

7.3.2 Newton插值

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

把x看做[a,b]上一点

由差商的定义可得

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

将后一项依次代入前一项

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$f[x,x_0,\dots,x_{n-1}]=f[x_0,\dots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\dots,x_n] \quad \cdots \quad (n-1)$$

$$(1)+(x-x_0)\times(2)+\dots\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\times(n-1)$$

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}_{N_n(x)}$$

$$\underbrace{+f[x,x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}_{R_n(x)}$$

7.3.2 Newton插值

- 上述公式可写成：

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

$$N_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$ Newton差商插值多项式

$$R_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x)$$ Newton差商插值余项

其中 $a_0 = f(x_0),\ a_i = f[x_0, \cdots, x_i],\ i = 1, 2, \cdots, n$ 差商值

$$\omega_{(n+1)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$R_n(x_i) = 0 \Rightarrow N_n(x_i) = f(x_i),\ \ i = 0, 1, 2, \dots, n$

$\Downarrow$

$N_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式

7.3.2 Newton插值

- **Newton插值余项 Vs. Lagrange 插值余项**

$f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 的 n 次插值多项式存在唯一！

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$ 且余项相同

$$f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

n阶差商与导数关系

＊ 区别在于其构造方法不同，导致表示形式不同。

7.3.2 Newton插值

- **Newton插值 Vs. Lagrange 插值**

* 拉格朗日插值多项式是用拉格朗日插值基函的线性组合表示。

* 牛顿插值多项式是**多项式族**1， $x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ 的线性组合表示，其系数就是差商表中从左上到右下的对角线上的各阶差商值。

▸ **拉格朗日插值：**

优点：形式简单，便于计算

缺点：当增加插值节点时，原先所作的计算没有利用价值，需从头再计算。

▸ **牛顿插值：**

缺点：要先计算差商表

优点：灵活增加节点，即当新增加一个插值节点时，只需在原插值多项式后面再增加一项，即有递推式

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

原有的计算结果能充分利用。

7.3.2 Newton插值

- **Newton插值计算步骤：**

  1. 首先根据插值节点和节点处函数值计算差商表；

  2. 利用牛顿插值多项式估算 f（x）。

例：已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 Newton 线性和抛物线插值计算 ln(0.54) 的近似值

7.3.2 Newton插值

解：取节点 0.5, 0.6, 0.4 作差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

$$N_1(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5)$$

$$\Rightarrow N_1(0.54) = -0.6202$$

$$N_2(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5) - 2.0450(x-0.5)(x-0.6)$$

$$\Rightarrow N_2(0.54) = -0.6153$$

Demo_7_3_2_Interp_newton.m

* 只需使用差商表对角线上的值

* 节点根据需要排序，不必按大小顺序

7.3.2 Newton插值

- 作业

＊ 给出$f(x)$的函数值表，求2次和3次牛顿插值多项式，并计算$f(0.9)$的近似值。

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶
-2	17			
0	1	-8		
1	2	1	3	
2	19	17	8	1.25

7.3.2 Newton插值

* 给出$f(x)$的函数值表，求2次和3次牛顿插值多项式，并计算$f(0.9)$的近似值。

解： 取节点$-2,0,1$，得到2次牛顿插值多项式为

$$N_2(x) = f(-2) + f[-2,0](x+2) + f[-2,0,1](x+2)(x-0)$$
$$= 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x$$

$$f(0.9) \approx N_2(0.9) = 1.63$$

取节点$-2,0,1,2$，计算3次牛顿插值多项式，只需要在$N_2(x)$的基础上加上$f[-2,0,1,2](x+2)(x-0)(x-1)$

此时，$f(0.9) \approx N_3(0.9) = 1.63 + 1.25(0.9+2)0.9(0.9-1) = 1.3038$

- **为什么Hermite插值？**

在许多实际应用中，不仅要求**函数值相等**，而且要求**若干阶导数也相等**， 如机翼设计等。

$$f(x) \approx p(x) \quad \Longleftrightarrow \quad p(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

$$p'(x_i) = f'(x_i)$$

$$p^{(2)}(x_i) = f^{(2)}(x_i)$$

$$\vdots$$

$$p^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i)$$

* 满足**函数值相等且若干导数也相等**的插值方法**称为 Hermite（埃尔米特）插值；**
* **函数值相等且若干导数也相等的插值条件的多项式，称为Hermite多项式。**

7.4 Hermite插值

- **回顾差商的性质3：**

③若$f(x)$在[a,b]上存在n阶导数，且节点$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$，则$n$阶差商与导数关系为：

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\varepsilon)}{k!}, \varepsilon \in [a, b].$$

重节点差商

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

$$f[x_0, x_0, x_0] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2!} f''(x_0)$$

一般地，n阶重节点差商定义为

$$\boxed{f[x_0, \dots, x_0] = \lim_{x_i \to x_0} f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)}$$

* 本节只考虑对一阶导数有要求的情形。

7.4 Hermite插值

在 Newton 插值公式中，令 $x_i \to x_0$，$i = 1, \ldots, n$，则

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Taylor 插值

余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

* **Taylor 插值就是在一个节点 x_0 上的 n 次 Hermite 插值**

两个典型的 Hermite 插值

三点三次 Hermite 插值

- 插值节点：x_0，x_1，x_2
- 插值条件：$p(x_i)=f(x_i)$，$i=0, 1, 2$，$p'(x_1)=f'(x_1)$

两点三次 Hermite 插值

- 插值节点：x_0，x_1
- 插值条件：$p(x_i)=f(x_i)$，$p'(x_i)=f'(x_i)$，$i=0, 1$

- **三点三次Hermite插值**

插值节点：x_0，x_1，x_2

插值条件：$p(x_0)=f(x_0)$， $p(x_1)=f(x_1)$， $p(x_2)=f(x_2)$，$p'(x_1)=f'(x_1)$

可设

$$
\begin{aligned}
p(x)=&f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)\\
&+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&+\alpha(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}
$$

将 $p'(x_1)=f'(x_1)$ 代入可得

$$
\alpha=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2](x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}
$$

- 三点三次Hermite插值余项

由于 x_0, x_1, x_2 是 $R(x)$ 的零点，且 x_1 是二重零点，故可设

$$R(x) \triangleq f(x) - p(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

与 Lagrange 插值余项公式的推导过程类似，利用罗尔定理，可得

$$\boxed{R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}$$

其中 ξ_x 位于 由 x_0, x_1, x_2 和 x 所界定的区间 内。

* 类似于取插值节点 x_0, x_1, x_1, x_2。

- 三点三次Hermite插值举例

例：函数 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$，插值条件如下

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8},\ f(1)=1,\ f\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{27}{8},\ f'(1)=\frac{3}{2}$$

试给出三次 Hermite 插值多项式，并写出余项。

解：作差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
1/4	1/8		
1	1	7/6	
9/4	27/8	19/10	11/30

$$\Rightarrow p(x)=\frac{1}{8}+\frac{7}{6}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{30}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)+\alpha\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)\left(x-\frac{9}{4}\right)$$

将 $p'(1)=f'(1)=3/2$ 代入可得：$\alpha=-\dfrac{14}{225}$

$$p(x) = -\frac{14}{225}x^3 + \frac{263}{450}x^2 + \frac{233}{450}x - \frac{1}{25}$$

余项 $R(x) = f(x) - p(x)$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4})$$

$$= \frac{9\xi^{-5/2}}{4!\times 16}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4}) \qquad \xi \in \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

• 两点三次Hermite插值

插值节点：x_0，x_1

插值条件：$p(x_i)=f(x_i)=y_i$，$p'(x_i)=f'(x_i)=m_i$，$i=0,1$

仿照 Lagrange 多项式的思想，设插值多项式为

引入基函数

$$H_3(x)=a_0\alpha_0(x)+a_1\alpha_1(x)+b_0\beta_0(x)+b_1\beta_1(x)$$

其中 $\alpha_0(x),\alpha_1,\beta_0(x),\beta_1(x)$ 均为 3 次多项式，且满足

$$\begin{aligned}&\alpha_j(x_i)=\delta_{ji},\quad \alpha_j'(x_i)=0,\\ &\beta_j(x_i)=0,\quad \beta_j'(x_i)=\delta_{ji}\end{aligned}\qquad i,\ j=0,1$$

$$\delta_{ji}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

由插值条件可知

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+m_0\beta_0(x)+m_1\beta_1(x)$$

7.4 Hermite插值

如何确定 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 的表达式?

$\alpha_0(x)$

$$\alpha_0(x_0)=1,\quad \alpha_0'(x_0)=0,\quad \alpha_0(x_1)=0,\quad \alpha_0'(x_1)=0$$

$$\alpha_0(x_1)=0,\quad \alpha_0'(x_1)=0$$

说明$\alpha_0(x)$含有$(x-x_1)^2$因子，可假设

$$\alpha_0(x)=(ax+b)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

待定系数法

$$\alpha_0(x_0)=1,\quad \alpha_0'(x_0)=0$$

$$a=\frac{2}{x_1-x_0},\quad b=\frac{x_1-3x_0}{x_1-x_0}=1-\frac{2x_0}{x_1-x_0}$$

	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0	0	0
$\alpha_1(x)$	0	1	0	0
$\beta_0(x)$	0	0	1	0
$\beta_1(x)$	0	0	0	1

7.4 Hermite插值

整理后可得

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

同理可得

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

相类似地，可以求出

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

- **两点三次Hermite插值**

所以，满足插值条件

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0,\ p'(x_0)=f'(x_0)=m_0$$
$$p(x_1)=f(x_1)=y_1,\ p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

的三次 Hermite 插值多项式为

$$H_3(x)=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$
$$+\ m_0(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+m_1(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

余项

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

$$\xi_x\in\left(\min\{x_0,x_1\},\ \max\{x_0,x_1\}\right)$$

- **为什么分段低次插值 ？**

  高次多项式插值的病态性质：

  $n \to \infty$ 时 $L_n(x)$ 不一定收敛于 $f(x)$

* 插值多项式的次数并非越高越好！

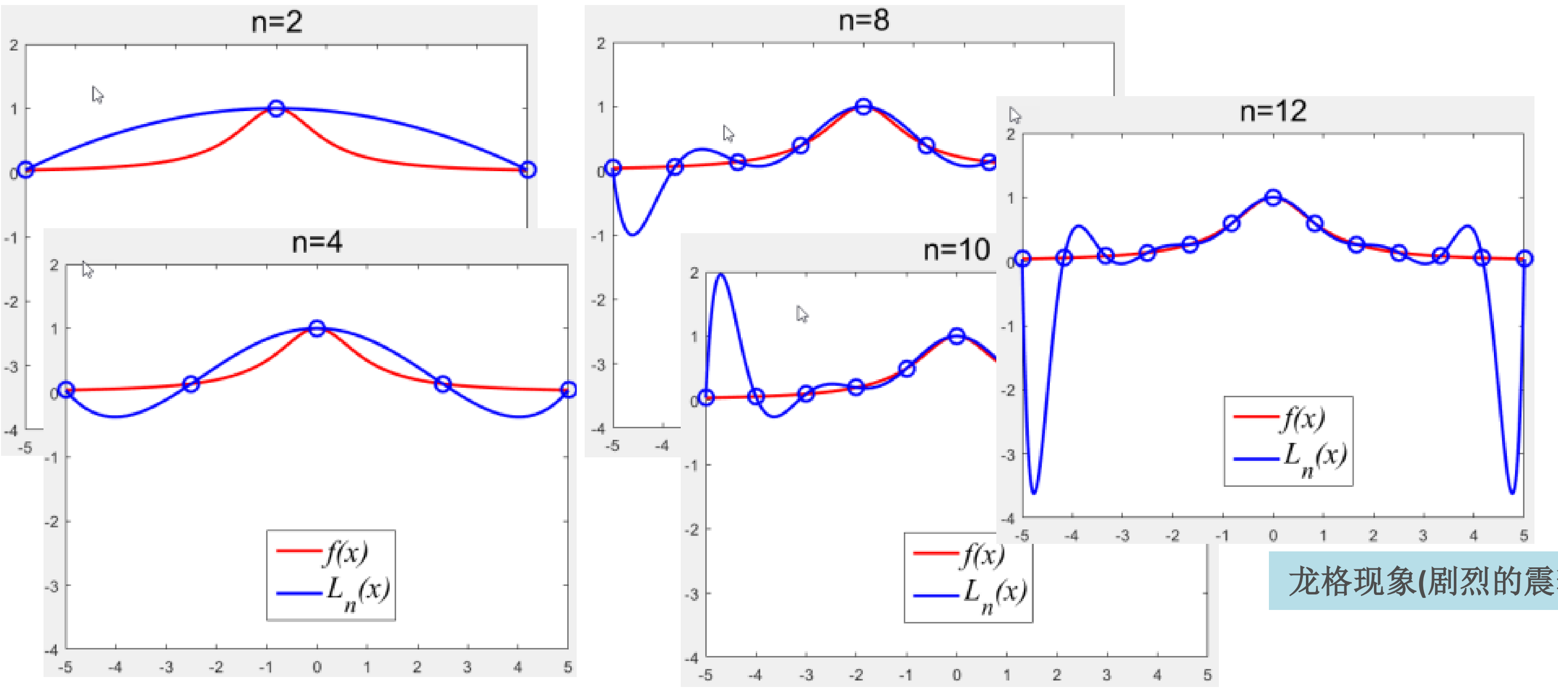
* 高次多项式插值可能还会存在**稳定性、大幅度震荡等**方面的问题， 实际应用中一般较少使用。

7.5 分段低次插值

* 插值误差举例

例：函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ，插值区间 [-5, 5]，取等距插值节点，

试画出插值多项式 $L_n(x)$ 的图像。 Demo_7_2_ Interp_Lagrange.m



龙格现象(剧烈的震荡)

7.5 分段低次插值

* 怎么处理这种情况？
  答：分段低次插值

* 基本思想：用**分段低次多项式**来逼近原函数 f(x) 。

常用的分段低次插值

- 分段线性插值
  —— 每个小区间上用线性多项式来逼近 $f(x)$
- 分段三次 Hermite 插值（两点三次）
  —— 每个小区间上用三次 Hermite多项式来逼近 $f(x)$
- 三次样条插值 （课外阅读：扩展学习）
  —— 要求插值函数在整个插值区间上 二阶连续可导

7.5 分段低次插值

什么是分段线性插值

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，$f(x)$ 在这些节点上的函数值为 $y_0, y_1, \dots, y_n$，记

$$\text{步长}\quad h_k = x_{k+1} - x_k, \quad h = \max_k \{h_k\}$$

求 分段函数 $I_h(x)$ 满足：

① $I_h(x) \in C[a,b]$，即函数整体连续

② $I_h(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数（一次多项式）

- ## 分段线性插值

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$I_h(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$， $k = 0, 1, \ldots, n-1$

＊ 这是插值函数在一个区间上的表达式，将所有区间上的表达式合起来才组成整个插值函数。

＊ 该插值函数不是多项式，而是分段多项式函数。

7.5 分段低次插值

- **分段三次 Hermite 插值**

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，且

$$y_k = f(x_k)\,,\ m_k = f'(x_k)\,,\quad k = 0, 1, \ldots, n$$

求 分段函数 $I_h(x)$ 满足：

① $I_h(x) \in C^1[a,b]$，即函数整体连续可导

② $I_h(x_k) = y_k,\quad I_h'(x_k) = m_k,\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

* 在每个小区间上进行两点三次多项式插值。

分段三次 Hermite 插值

7.5 分段低次插值

- **分段三次 Hermite 插值**

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$I_h(x) = y_k\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + y_{k+1}\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$
$$+\ m_k(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + m_{k+1}(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n\text{-}1$

误差估计：

$$\left|R(x)\right| = \left|f(x) - I_h(x)\right| \le \frac{M_4}{384}h^4$$

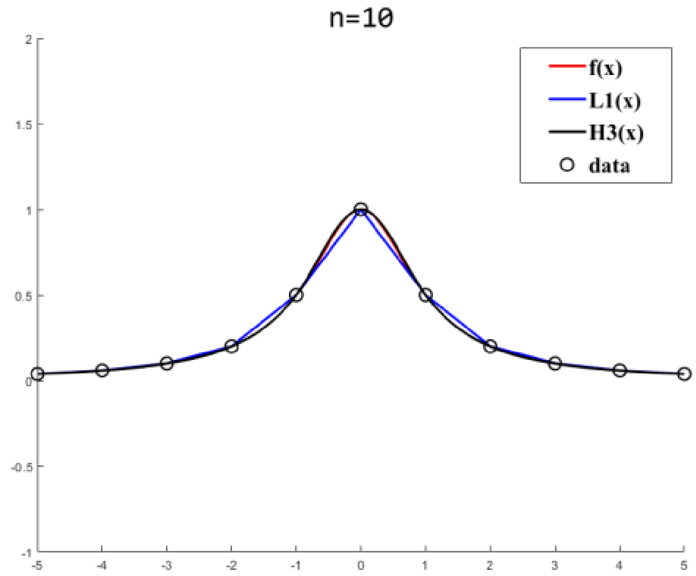
$$M_4 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$h = \max_{0\le k\le n-1}\left|x_{k+1} - x_k\right|$$

* 一致收敛，且收敛速度比分段线性插值快一倍。

7.5 分段低次插值

＊ 插值举例

例：函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 [-5, 5]，取等距节点（10 等分），试分别用分段线性插值和分段三次Hermite插值 画出 $f(x)$ 的近似图像。



Demo_7_3_3_Interp_piecewise_poly.m

7.5 分段低次插值

＊ 总结

基本思想：用分段低次多项式来代替单个多项式

具体作法：(1) 把整个插值区间分割成多个小区间

(2) 在每个小区间上作低次插值

(3) 将所有插值多项式拼接成一个插值函数

优点：公式简单、 运算量小、稳定性好、收敛性、 …

缺点：

（1）分段插值函数的光滑性不高

（2）分段三次 Hermite 插值比分段线性插值效果更好，但公式较复杂，且需要额外信息（导数）

- Q & A
- 谢谢