南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

第四章 整数规划

- 整数规划建模
- 整数规划求解
  - ✓ 割平面法
  - ✓ 分支定界法
- 指派问题

第四章 整数规划

1. 整数规划建模

1.1 整数规划的定义及分类

➢ 定义

- 一部分或全部决策变量是整数的规划问题称为整数规划（Integer Programming，简记为IP）
- 不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该IP的松弛问题（Slack Problem）
- 若松弛问题是一个线性规划，则称该IP为整数线性规划

➢ 分类

- 所有决策变量都取整数的规划称为纯整数规划(Pure IP)
- 部分决策变量取整数的规划称为混合整数规划(Mixed IP)
- 决策变量只能取0或1的规划称为0-1型整数规划(0-1 IP)

例1. 背包问题

有一只背包，最大装载重量为w公斤，现有k种物品，每种物品的数量无限。第i种物品每件重量为w_i公斤，价值为v_i元。每种物品各取多少件装入背包，使其中物品的总价值最高？

假设取第 i 种物品 x_i 件 $(i = 1,2,\cdots,k)$，则：

$$\max\ z = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_kx_k$$

$$s.t.\begin{cases} w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_k\,x_k \le w \\ x_1, x_2, \cdots, x_k \ge 0 \\ x_1, x_2, \cdots, x_k\text{为整数} \end{cases}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

例2. 投资问题

设现有资金总额为B，可供选择的投资项目有n个，项目j所需投资额和预测收益分别为a_j和$c_j(j=1,2,\ldots,n)$。由于种种原因，有三个附加条件：第一，若选择项目1，就必须同时选择项目2。反之，则不一定；第二，项目3和4中至少选择一个；第三，项目5，6 和7中恰好选择两个。请问应当怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大？

假设 $x_j=\begin{cases}1 & \text{投资项目}j\\ 0 & \text{不投资项目}j\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots,n)$

1.2 整数规划问题举例

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B \\ x_2 \ge x_1 \\ x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_j = 0\text{或}1; \ \ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

例3-1. 选址问题

设某商品有n个销地，各销地的需求量为b_j吨/天；现拟在m个地点中选址建生产厂，一个地方最多只能建一个工厂；若选 i 地建厂，生产能力为a_i吨/天，固定费用为d_i元/天；已知 i 址至销地 j 的运价为c_{ij}元/吨。如何选址和安排调运，总费用最小？

假设：

- $y_i=1$，选择第i址建厂
- $y_i=0$，不选择第 i 址建厂
- 从厂址i至销地 j 运量为 x_{ij}

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}d_iy_i$$

能力约束：$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_iy_i, i=1,2,\cdots,m$

需求约束：$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=1,2,\cdots,n$

非负约束：$x_{ij}\ge 0$

整数约束：$y_i=0$或1

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

例3-2. 选址问题

假设现需要新建一系列的设施点以服务若干的顾客点。候选设施点形成的集合记为F，顾客点形成的集合记为D（假设每个顾客点仅有一名顾客）。假设在j点新建设施，其建设费用为f_j，该设施点至多能满足u_j个顾客。当设施点j服务顾客点i的顾客时可获得收益c_{ij}。请建立合适的选址决策模型，使设施方获得的总净收益最大。

假设：

- $x_j = \begin{cases} 1 & \text{选择第}j\text{个候选点建设施点} \\ 0 & o.w. \end{cases}, \ j \in F$
- $y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第}j\text{个候选点服务第}i\text{个顾客点的顾客} \\ 0 & o.w. \end{cases}, \ i \in D, \ j \in F$

$$\max \sum_{i\in D}\sum_{j\in F} c_{ij}y_{ij} - \sum_{j\in F} f_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i\in D} y_{ij} \le u_j x_j \\ \sum_{j\in F} y_{ij} = 1 \end{cases}$$

例4. 固定费用问题

高压容器公司制造小、中、大三种尺寸的金属容器，所用资源为金属板、劳动力和机器设备，制造一个容器所需的各种资源的数量如下表所示。不考虑固定费用，每种容器售出一只所得的利润分别为4万元、5万元、6万元，可使用的金属板有500吨，劳动力有300人，机器有100台，此外不管每种容器制造的数量是多少，都要支付一笔固定的费用：小号是100万元，中号为150万元，大号为200万元。现在要制定一个生产计划，使获得的利润为最大。

资源	小号容器	中号容器	大号容器
金属板（吨）	2	4	8
劳动力（人）	2	3	4
机器设备（台）	1	2	3

1.2 整数规划问题举例

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

假设：

- x_1, x_2, x_3分别为小号、中号和大号容器的生产数量
- $y_i = 1$，生产第 i 种容器
- $y_i = 0$，不生产第 i 种容器

$$\max\ z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100 \\ 0 \le x_i \le My_i,\ i = 1,2,3,\ M\text{充分大} \\ y_i \ge 0,\ y_i\text{为0−1变量},\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

- 两个条件只满足其中一个：

工序B的原加工方式每周工时约束条件为：

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120$$

而新加工方式每周工时约束条件为：

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150$$

若两者只能选其一，应如何表达？

$$y = \begin{cases} 0 & \text{若工序B采用原加工方式} \\ 1 & \text{若工序B采用新加工方式} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120 + My \\ 0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150 + M(1-y) \end{cases}$$

- p 个条件只满足 q 个：

一般地，若需要从 p 个约束条件中恰好选择 q 个：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = 1,2,\cdots,p)$$

$$y_i = \begin{cases} 0 & 若选择第i个约束条件 \\ 1 & 若不选择第i个约束条件 \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,p)$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + M_i y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i = p - q \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,p)$$

1.2 整数规划问题举例

- 除0, 1以外，若遇到变量可以取多个整数值的问题，如何表达？

例：若x可取0到9之间的任意整数？

$$x = 2^0x_0 + 2^1x_1 + 2^2x_2 + 2^3x_3 \leq 9$$

其中，x_0, x_1, x_2, x_3均为0-1变量。

1.3 指派问题的数学模型

指派问题的标准形式（以人和事为例）：设有n个人和n件事，已知第i人做第j件事的费用为$c_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$；

要求一个人和事之间一一对应的指派方案，使完成这n件事的总费用最少。

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

称C为指派问题的系数矩阵(coefficient matrix)。

1.3 指派问题的数学模型

为了建立标准指派问题的数学模型，引入n^2个0-1变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第}i\text{人去做第}j\text{事时}\\ 0 & \text{当不指派第}i\text{人去做第}j\text{事时}\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

问题的数学模型可写成：

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & i=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}=0\text{或}1 & i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

比较
运输问题

例

某航空公司使用上海作为中转枢纽，以最少的航班数满足国内北方城市和南方城市之间的航空出行需求。从上午10点到11点有四架分别来自哈尔滨、长春、吉林、沈阳的波音747客机将在上海虹桥机场降落。这些飞机上的乘客将分别去往福州、广州、深圳、厦门。飞机的离场时间为11点30分到12点30分。表中列出了各个航班的乘客去往各目的地的情况表，即转机情况表。例如，来自哈尔滨的飞机，若飞往厦门则有38人不转机，剩下的去福州、广州和深圳等城市的都需要转机。此外，表中航班的出发地和目的地都是按时间的先后顺序排列的。例如，福州在广州之前表示去往福州的飞机将先于去往广州的飞机起飞。表格中标记为“–”的两个格子表示，由于来自沈阳的飞机到中转站（上海）的时间最迟，已经来不及在去福州和广州的城市的飞机起飞前完成到这两地的转机流程。请问应如何安排各航班离开虹桥机场后的目的地，以使得在虹桥机场转机的乘客数最少？

例

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

表 不同航班之间的旅客换乘情况

来自＼去往	福州	广州	深圳	厦门
哈尔滨	25	23	16	38
长春	45	8	9	24
吉林	12	8	22	28
沈阳	-	-	14	39

假设：

- $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{指派从北方城市}i\text{飞来的飞机飞往南方城市}j \\ 0 & o.w.\end{cases}$
- c_{ij}为从北方城市i到南方城市j的线路上不转机的人数

$$\max\ z=\sum_{\text{所有可行弧}} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=1\\ \sum_{i=1}^{4}x_{ij}=1\\ x_{ij}=0\text{或}1\end{cases}$$

最优解：

- 哈尔滨到广州
- 长春到福州
- 吉林到深圳
- 沈阳到厦门

129人无需转机

思考题 数独（The Sudoku Game）

Sudoku game is played on 9×9 grid which is subdivided into 9 blocks of 3×3 contiguous cells. The grid must be filled with numbers 1,2,..9, so that all the numbers between 1 and 9 appear in each row, in each column and in each of nine blocks. A game consists of an initial assignment of numbers in some cells. How to fill the other numbers?

8				2	6			
						7		4
			7					5
			1				3	6
	1			8			4	
9	8				3			
3					1			
7		5						
			2	5				8

7	8		4			1	2	
6				7	5			9
			6		1		7	8
		7		4		2	6	
		1		5		9	3	
9		4		6				5
	7		3				1	2
1	2				7	4		
	4	9	2		6			7

第四章 整数规划

2. 整数规划求解

2.1 整数规划解的特点

- 为了满足整数要求，是否可以把线性规划的小数最优解进行“舍入化整”，以得到与最优解相近的整数解？

例：

资源＼产品	甲	乙	现有量
A	2	1	9
B	5	7	35
单台利润	6	5	

- 问如何安排甲、乙两产品的产量，使利润为最大？

$$\max\ z = 6x_1 + 5x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 9 \\ 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2\text{为整数} \end{cases}$$

2.1 整数规划解的特点

- ✓ 不考虑整数约束是一个LP问题，称为原整数规划的松弛问题。

  松弛问题的最优解为：$x_1^* = 28/9, x_2^* = 25/9, z^* = 293/9$

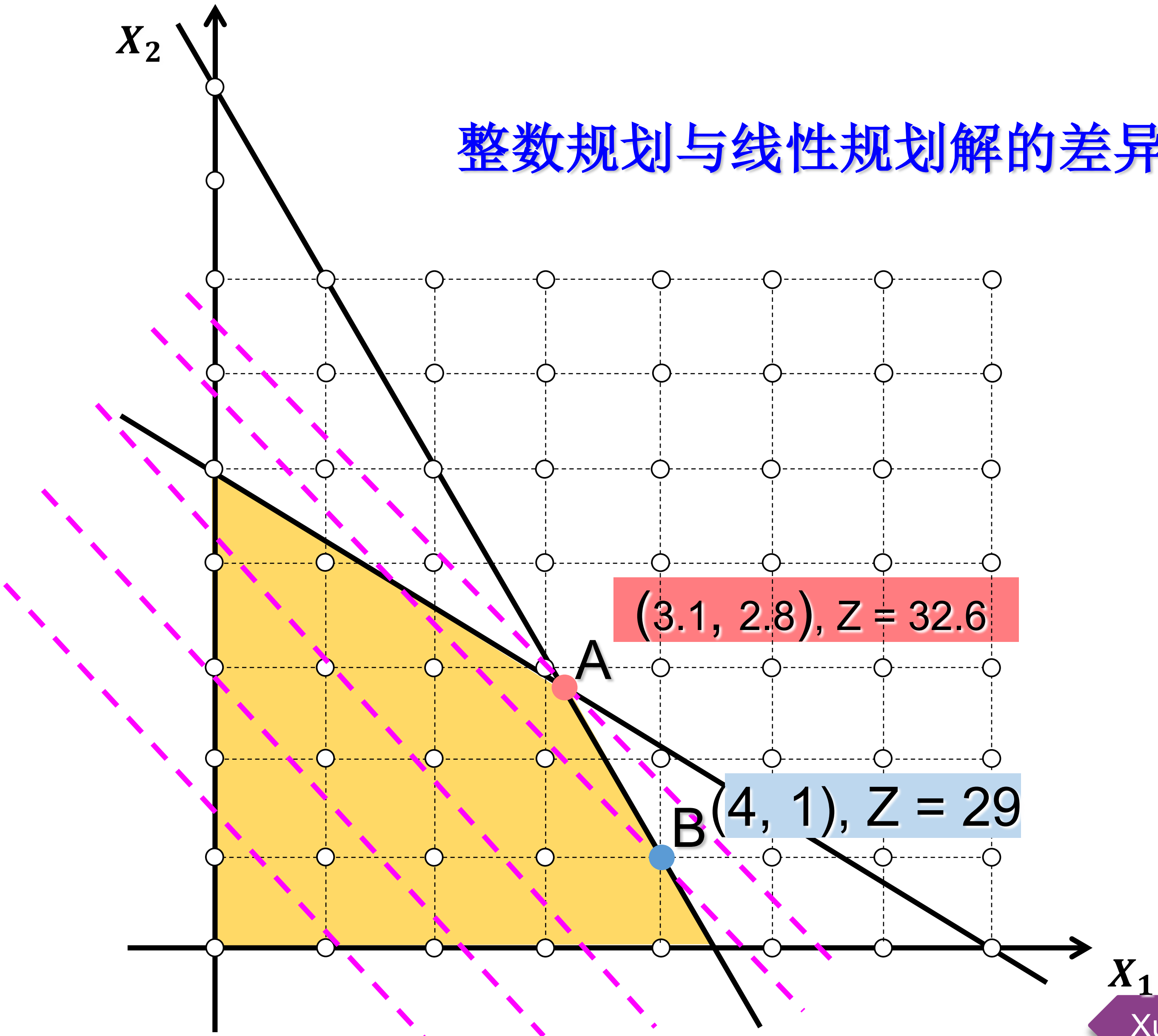
- 舍入化整

  - ✓ 四舍五入：$x_1 = 3, x_2 = 3, z = 33$，不满足约束条件 $5x_1 + 7x_2 \le 35$，非可行解；
  - ✓ 向下取整：$x_1 = 3, x_2 = 2, z = 28$，满足约束条件，是可行解，但不是最优解；
  - ✓ $x_1 = 4, x_2 = 1, z = 29$，满足约束条件，才是最优解。

- “舍入化整”一般是不可行的

2.1 整数规划解的特点

南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING



2.2 整数规划的割平面法

The cutting plane algorithm

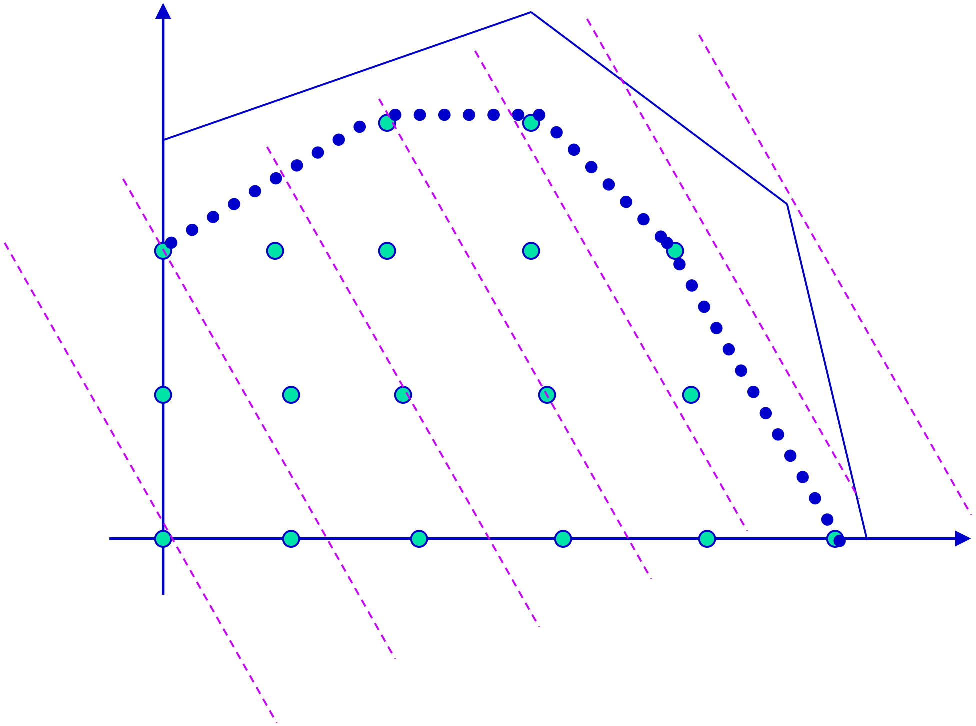
- 割平面法在整数规划问题中依次引进线性约束条件（称为割平面），使问题的可行域逐步缩小。
- 每次切割只割去问题的部分非整数解。
- 直到使问题的目标函数值达到最优的整数点成为缩小后可行域的一个顶点，这样就可以用求解线性规划的方法找出这个最优解。

2.2 整数规划的割平面法

- 由放松问题的可行域向整数规划的可行域逼近

Gomory's Cutting Plane Method

Ralph E. Gomory (1929–)



"Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs"
Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 64, pp. 275-278, 1958

南京大學 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

割平面的生成

- 条件 -- 保留整数解 删除最优解

x_B	x_N	
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b \geq 0$
$\sigma_B = 0$	σ_N	$c_B^T B^{-1} b$

$$x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i,\ i \in B$$

$$x_j^* = \begin{cases} \bar{b}_j & j \in B \\ 0 & j \in N \end{cases}$$

若 $\bar{b}_r$ 不是整数 $\longrightarrow$ $x_r + \sum_{j \in N} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r$

2.2 整数规划的割平面法

割平面的生成

$$x_r + \sum_{j \in N} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r$$

$$\bar{a}_{rj} = \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor + f_{rj} \qquad \bar{b}_r = \lfloor \bar{b}_r \rfloor + f_r$$

$$0 \leq f_{rj} < 1, \ \ \bar{a}_{rj} \geq \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor \qquad \bar{b}_r > \lfloor \bar{b}_r \rfloor, \ \ 0 < f_r < 1$$

$$x_r + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor x_j = \lfloor \bar{b}_r \rfloor + \left(f_r - \sum_{j \in N} f_{rj} x_j \right)$$

整数可行解

$$x_r + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_r \rfloor$$

最优基可行解

$$x_r + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor x_j > \lfloor \bar{b}_r \rfloor$$

割平面的生成

$$\min\ c^T x$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, x\text{为整数} \end{cases}$$

$$\min\ c^T x$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x_r + \sum_{j\in N} \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor x_{rj} \leq \lfloor \bar{b}_r \rfloor \\ x \geq 0, x\text{为整数} \end{cases}$$

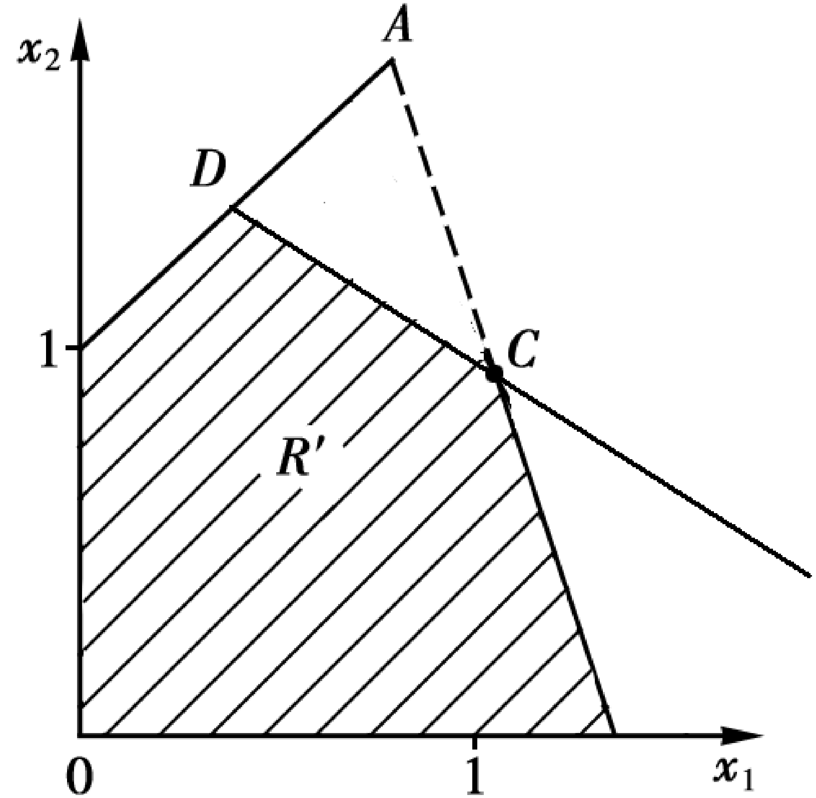
$$\min\ c^T x$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x_r + \sum_{j\in N} \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor x_{rj} + s_r = \lfloor \bar{b}_r \rfloor \\ x \geq 0, x\text{为整数} \end{cases}$$

2.2 整数规划的割平面法 — 例题

目标函数：$\max z = x_1 + x_2$ ①

约束条件：

$$-x_1 + x_2 \le 1 \quad ②$$
$$3x_1 + x_2 \le 4 \quad ③$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0 \quad ④$$
$$x_1,\ x_2 \text{ 整数} \quad ⑤$$



如不考虑条件⑤，容易求得相应的线性规划的最优解：

$$x_1 = \frac{3}{4},\quad x_2 = \frac{7}{2}$$

$$z^* = \frac{5}{2}$$

在原问题的前两个不等式中增加非负松弛变量 x_3，x_4，使两式变成等式约束：

$$-x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1 \qquad ⑥$$
$$3x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4 \qquad ⑦$$

不考虑条件⑤，用单纯形表解题。

		c_j		1	1	0	0
	$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	b	x_1	x_2	x_3	x_4
初始计算表	0	x_3	1	−1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
	$c_j - z_j$		0	1	1	0	0
最终计算表	1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
	$c_j - z_j$		−5/2	0	0	−1/2	−1/2

可从最终计算表中得到非整数变量对应的关系式：

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$
$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

$$x_1 + (-1 + 3/4)x_3 + 1/4x_4 = 0 + 3/4$$
$$x_2 + 3/4x_3 + 1/4x_4 = 1 + 3/4$$

$$\underbrace{x_1 - x_3}_{\text{整数}} = \underbrace{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)}_{\leq 0}$$
$$\underbrace{x_2 - 1}_{\text{整数}} = \underbrace{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)}_{\leq 0}$$

$$\boxed{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq 0}$$

$$-3x_3 - x_4 \leq -3 \quad ⑧$$

切割约束

2.2 整数规划的割平面法 — 例题

	c_j		1	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	−3	0	0	−3 ✓	−1	1
$c_j - z_j$		−5/2	0	0	−1/2	−1/2	0

需要用对偶单纯形法继续进行计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right)$$

$$= \min \left(\frac{-1/2}{-3}, \frac{-1/2}{-1} \right) = \frac{1}{6}$$

2.2 整数规划的割平面法 — 例题

	c_j		1	1	0	0	0
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	1	1	0	0	1/3	−1/12
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
0	x_3	1	0	0	1	1/3	−1/3
$c_j - z_j$		2	0	0	0	−1/3	−1/6

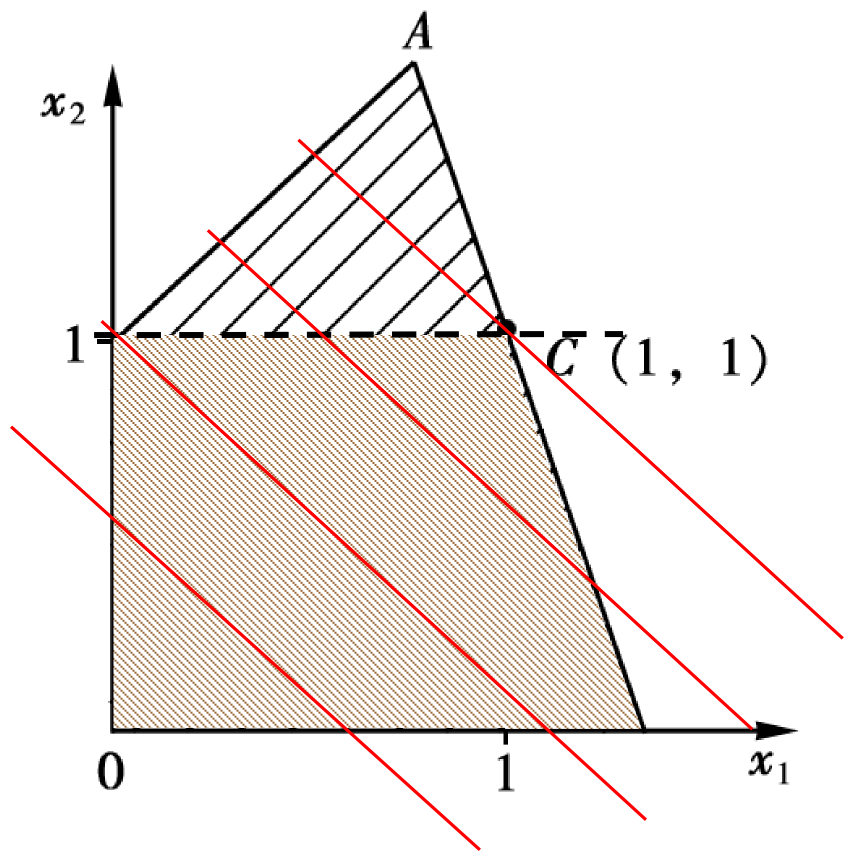
注意：新得到的约束条件 ⑧ $-3x_3 - x_4 \le -3$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1 \quad ⑥ \\
3x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 4 \quad ⑦
\end{aligned}
$$

如用x_1，x_2表示，由⑥、⑦式得：

$$3(1 + x_1 - x_2) + (4 - 3x_1 - x_2) \ge 3 \implies x_2 \le 1$$

这就是(x_1, x_2) 平面内形成新的可行域，即包括平行于x_1轴的直线$x_2 = 1$和这直线下的可行区域，整数点也在其中，没有切割掉。



Branch and Bound Method

基本思想：

- 先求出整数规划相应的LP(即不考虑整数限制)的最优解；
- 若求得的最优解符合整数要求，则是原IP的最优解；
- 若不满足整数条件，则任选一个不满足整数条件的变量来构造新的约束，在原可行域中剔除部分非整数解；
- 然后，再在缩小的可行域中求解新构造的线性规划的最优解，这样通过求解一系列线性规划问题，最终得到原整数规划的最优解。

2.3 整数规划的分支定界法

分支的方法

x_B	x_N	
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b \geq 0$
$\sigma_B = 0$	σ_N	$c_B^T B^{-1} b$

$$x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, \; i \in B$$

$$x_j^* = \begin{cases} \bar{b}_j & j \in B \\ 0 & j \in N \end{cases}$$

$$x_r = \bar{b}_r \notin Z$$

$$\lfloor \bar{b}_r \rfloor < x_r < \lceil \bar{b}_r \rceil \Longrightarrow \begin{array}{l} x_r \leq \lfloor \bar{b}_r \rfloor \\ x_r \geq \lceil \bar{b}_r \rceil \end{array}$$

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

分支的方法

$$\min\ c^T x$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, x\text{为整数} \end{cases}$$

$$\min\ c^T x$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x_r \leq \lfloor \bar{b}_r \rfloor \\ x \geq 0, x\text{为整数} \end{cases}$$

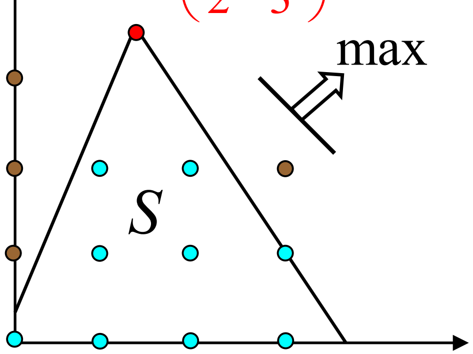
$$\min\ c^T x$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x_r \geq \lfloor \bar{b}_r \rfloor + 1 \\ x \geq 0, x\text{为整数} \end{cases}$$

2.3 整数规划的分支定界法 — 例题

例： $\max\ z = x_1 + x_2$

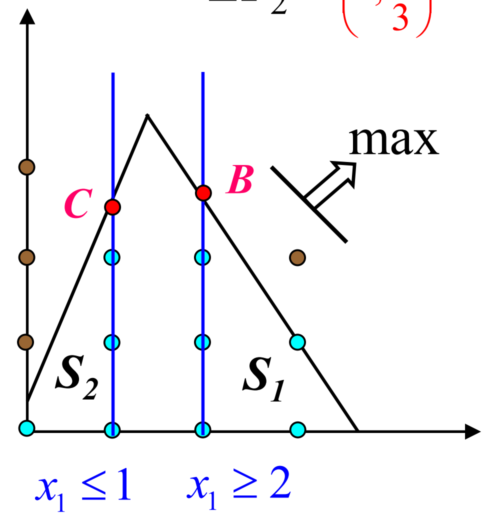
$$s.t.\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{取整数} \end{cases}$$

LP $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{10}{3}\right)$ $\max\ z = 29/6$



LP$_1$ $B\left(2, \dfrac{23}{9}\right)$ $\max\ z = 41/9$

LP$_2$ $C\left(1, \dfrac{7}{3}\right)$ $\max\ z = 10/3$



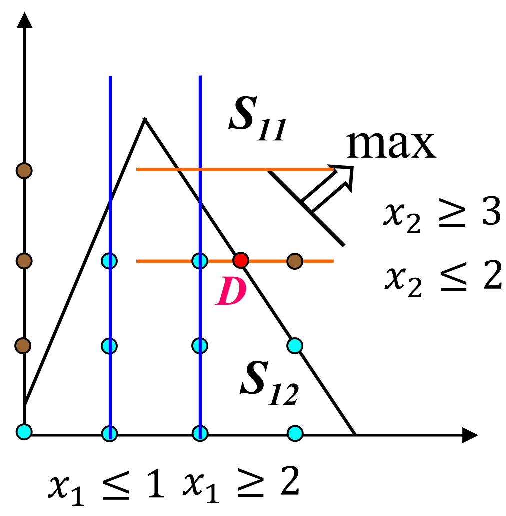
选 $x_1 = \dfrac{3}{2}$ 进行分支

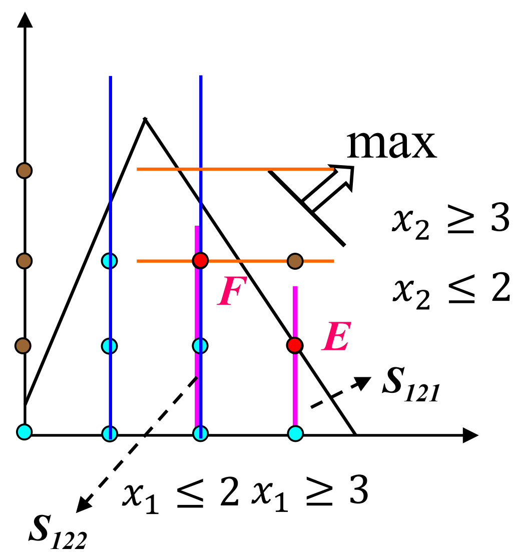
S: (LP) 的可行域

(LP) 的最优解不符合整数要求

选一个变量分支

由于 $\frac{41}{9} > \frac{10}{3}$，所以优先选择 S_1 分支





LP_{12} $D\left(\frac{33}{14}, 2\right)$ $\max z = 61/14$

LP_{121} $E(3,1)$ $\max z = 4$

LP_{122} $F(2,3)$ $\max z = 4$

由于 $\frac{61}{14} > \frac{10}{3}$，所以优先选择 S_{12} 分支

2.3 整数规划的分支定界法 — 例题

- S | **A:** $x_1 = 3/2$, $x_2 = 10/3$; $z = 29/6$
  - S_2 | **C:** $x_1 = 1$, $x_2 = 7/3$; $z = 10/3$
  - S_1 | **B:** $x_1 = 2$, $x_2 = 23/9$; $z = 41/9$
    - S_{12} | **D:** $x_1 = 33/14$, $x_2 = 2$; $z = 61/14$
      - S_{122} | **F:** $x_1 = 2$, $x_2 = 2$; $z = 4$
      - S_{121} | **E:** $x_1 = 3$, $x_2 = 1$; $z = 4$
    - S_{11} | *无可行解*

2.3 整数规划的分支定界法——步骤

将要求解的整数线性规划问题称为<u>问题A</u>，将它的松弛问题称为<u>问题B</u>。

(1) 解问题B，可能得到以下情况之一：

① B没有可行解，这时A也没有可行解，则停止。

② B有最优解，并符合问题A的整数条件，B的最优解即为A的最优解，则停止。

③ B有最优解，但不符合问题A的整数条件，记它的目标函数值为$\bar{z}_0$。

(2) 用观察法找问题A的一个整数可行解：

一般可取$x_j = 0, j = 1, \dots, n$ 试探，求得其目标函数值，并记作$\underline{z}_0$。

$$\underline{z}_0 \le z^* \le \bar{z}_0$$

分支与定界

- 分支 — 在B的最优解中任选一个不符合整数条件的变量x_j，其值为b_j，以$\lfloor b_j \rfloor$表示小于b_j的最大整数。构造两个约束条件:

$$x_j \le \lfloor b_j \rfloor \quad \text{和} \quad x_j \ge \lfloor b_j \rfloor + 1$$

- 将这两个约束条件，分别加入问题B，求两个后继线性规划问题B1和B2。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

- 定界 — 以每个后继问题为一分支标明求解的结果，与其他问题的解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界；从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界，若无可行解，$z = 0$。

2.3 整数规划的分支定界法——步骤

比较与剪支

- 各分支的最优目标函数中若有小于$\underline{z}$者，则剪掉这支（用打×表示），即以后不再考虑了；
- 各分支的最优目标函数中若大于$\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复“分支” 步骤；
- 一直到最后得到z^*为止，得最优整数解x_j^* $(j = 1, \dots, n)$。

注：用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题。它比穷举法优越。因为它仅在一部分可行的整数解中寻求最优解，计算量比穷举法小。

隐枚举法 (implicit enumeration)

第四章 整数规划

3. 指派问题

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

指派问题的标准形式（以人和事为例）：设有n个人和n件事，已知第i人做第j件事的费用为$c_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$；

要求一个人和事之间一一对应的指派方案，使完成这n件事的总费用最少。

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

称C为指派问题的系数矩阵(coefficient matrix)。

4.1 指派问题的数学模型

为了建立标准指派问题的数学模型，引入n^2个0-1变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第}i\text{人去做第}j\text{事时}\\ 0 & \text{当不指派第}i\text{人去做第}j\text{事时}\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

问题的数学模型可写成：

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & i=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}=0\text{或}1 & i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

比较
运输问题

✓ 匈牙利法

指派问题有以下性质：

若从系数矩阵 C 的任何一行（列）各元素中分别减去一个常数 K 得到新矩阵 D，则以 D 为系数矩阵的指派问题与原问题有相同的解。

应用匈牙利法的条件：

$min,\ i=j,\ c_{ij}\geq 0$ ⟶ 标准的指派问题

4.2 指派问题标准型的求解

匈牙利法的主要步骤：

- 第一步：变换系数矩阵，使在各行各列都出现零元素；
  - 从矩阵 C 的每行元素中减去该行的最小元素
  - 再从所得矩阵的每列元素中减去该列最小元素
- 第二步：用“圈零法”寻找不同行、不同列的独立零元素。
  - 在只有一个零元素的行（或列）中加圈
  - 每圈一个“0”，同时把位于同列（或同行）的其他零元素划去
  - 如此反复，直至系数矩阵中所有零元素都被圈去或划去

若已找到了n个独立零元素，则令与这n个独立零元素位置相应的$x_{ij}=1$，其它位置上的$x_{ij}=0$，即得问题的最优解；否则继续；

匈牙利法的主要步骤：

- 第三步：构造能覆盖所有零元素的最小直线集合；
  - 对没有圈0的行打“√” → 对已打“√”的行上所有含0元素的列打“√” → 对打“√”的列上有圈0的行打“√” → 重复前两步直至打不出新的“√” → 对没有打“√”的行划横线，对所有打“√”的列划直线
- 第四步：变换矩阵，使没有圈0的行增加零元素；
  - 在未被最小直线集合覆盖的元素中找出最小元素 → 对未被最小直线覆盖的行中，每个元素都减去这个最小元素 → 对已被最小直线覆盖的列中，每个元素都加上这个最小元素
  - 转第二步

4.2 指派问题标准型的求解

例：给出费用最小的停泊方案

泊位

船		1	2	3	4	5
	1	8	10	9	3	6
	2	7	8	11	2	9
	3	2	4	6	4	4
	4	7	7	5	2	7
	5	10	8	10	3	11

4.2 指派问题标准型的求解

找出行最小值，去减行中每一值

		泊位					
		1	2	3	4	5	最小值
	1	5	7	6	0	3	3
	2	5	6	9	0	7	2
船	3	0	2	4	2	2	2
	4	5	5	3	0	5	2
	5	7	5	7	0	8	3

找出列最小值，去减列中每一值

泊位

		1	2	3	4	5	最小值
船	1	5	7	6	0	3	
	2	5	6	9	0	7	
	3	0	2	4	2	2	
	4	5	5	3	0	5	
	5	7	5	7	0	8	
最小值		0	2	3	0	2	

用最少的线划去所有的零

泊位

船	1	2	3	4	5	最小值
1	5	5	3	0	1	✓
2	5	4	6	0	5	✓
3	0	0	1	2	0	
4	5	3	0	0	3	
5	7	3	4	0	6	✓
				✓		

独立零元素数为 3≠5 继续！

4.2 指派问题标准型的求解

没有划去的最小值为 1

泊位

船	1	2	3	4	5	最小值
1	5	5	3	0	1	
2	5	4	6	0	5	
3	0	0	1	2	0	
4	5	3	0	0	3	
5	7	3	4	0	6	

直线交叉元素加1，其余不在线上的减1

加1

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

用最少的线划去所有的零

泊位

船	1	2	3	4	5	最小值
1	4	4	2	0	0	
2	4	3	5	0	4	✓
3	0	0	1	3	0	
4	5	3	0	1	3	
5	6	2	3	0	5	✓
				✓		

独立零元素数为 4≠5
继续！

没有划去的最小值为 2

船 \ 泊位	1	2	3	4	5	最小值
1	4	4	2	0	0	
2	4	3	5	0	4	
3	0	0	1	3	0	
4	5	3	0	1	3	
5	6	2	3	0	5	

直线交叉元素加2，其余不在线上的减2

南京大学 NANJING UNIVERSITY 工程管理学院 SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

用最少的线划去所有的零

泊位

船		1	2	3	4	5	最小值
	1	4	4	2	2	0	
	2	2	1	3	0	2	
	3	0	~~0~~	1	5	~~0~~	
	4	5	3	0	3	3	
	5	4	0	1	~~0~~	3	

独立零元素
数为 5
结束循环

根据零的位置确定最优方案

泊位

船	1	2	3	4	5
1					6
2				2	
3	2				
4			5		
5		8			

最小成本：23

4.3 非标准形式的指派问题

非标准形式：

$$max，\ i \neq j，c_{ij} < 0，\ c_{ij}\text{缺省}$$

⟹ **标准形式**

（1）目标利润 max：$max \rightarrow min$

找出最大元素，分别用它去减每一个非缺省元素。新矩阵对应的目标即为 min，而且也使 $c_{ij} \geq 0$。

（2）c_{ij}的缺省：缺省意味着不胜任，因此在缺省处填上充分大的正数，使成本很大。

（3）$i \neq j$：添上一行（一列）零元素。

4.3 非标准形式的指派问题

例：将下表所示最大化指派问题标准化：

	甲	乙	丙	丁
A	3	2	-2	1
B	2	-2	0	
C		-1	1	0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & \\ & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & M \\ M & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & M \\ M & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

一个人可以做几件事的指派问题

若某个人可以做几件事，则将该人化作相同的几个“人”来接受指派。

例：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & \boldsymbol{B_6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} \mathbf{0} & A_1 \\ \mathbf{0} & A'_1 \\ \mathbf{0} & A_2 \\ \mathbf{0} & A'_2 \\ \mathbf{0} & A_3 \\ \mathbf{0} & A'_3 \end{array} \end{array}$$

允许每家公司承建一家或两家商店