

## 作业 #2

(提交日期: 2023/10/24)

1. [2.1(2)(4)] 写出下列线性规划问题的对偶问题:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 6 \\ 10x_1 - 9x_2 + 6x_3 \leq 12 \\ x_1, x_3 \geq 0, x_2, x_4 \text{ 无约束} \end{cases} \\
 (2) \quad \min \quad & z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

解: (1) 其对偶问题为:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w = 5y_1 + 6y_2 + 12y_3 \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2y_1 + 6y_2 + 10y_3 \geq 2 \\ y_1 + 5y_2 - 9y_3 = 2 \\ -3y_1 - y_2 + 6y_3 \geq -5 \\ -3y_1 + 5y_2 = 2 \\ y_1 \text{ 无约束}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(2) 其对偶问题为:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & w = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \\
 \text{s.t.} \quad & u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

2. [2.2] 设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , 已知线性规划的原问题为

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(1) 写出上述线性规划对应的对偶问题;

(2) 如果  $\mathbf{y}^*$  为对偶问题的最优解, 并且假设原问题约束条件右端项  $\mathbf{b}$  用  $\bar{\mathbf{b}}$  替换之后其最优解为  $\bar{\mathbf{x}}$ , 试证明  $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{y}^*$ 。

解: (1) 对偶问题为:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(2) 原问题  $\mathbf{b}$  被  $\bar{\mathbf{b}}$  替换后对应的对偶问题变为:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}$$

显然，可行域没有变化，故  $\mathbf{y}^*$  仍是新问题的对偶问题的可行解。又  $\bar{\mathbf{x}}$  是新问题的可行解，由弱对偶性有： $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{y}^*$ 。或者，

$$\bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{y}^* \geq (\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{y}^* = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}^* \geq \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}。$$

3. 给出线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 写出其对偶问题；(2) 利用对偶问题性质证明原问题目标函数值  $z \leq 1$ 。

解：（1）对偶问题为：

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2y_1 + y_2 + 2y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{ 无约束}, y_3 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

（2）因为  $Y = (0, 1, 0)^T$  是对偶问题的一个可行解，其对应的目标函数值为 1，所以由弱对偶性，原问题的目标函数值  $z \leq 1$ 。

4. 考虑如下线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 用对偶单纯形法求解原问题；

(2) 用单纯形法求解其对偶问题，并对比(1)与(2)中每步计算得到的结果。

解：（1）其对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & w = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 60 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 40 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 80 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 用对偶单纯形法求解原问题：

$c_j$			-60	-40	-80	0	0	0
$c_B$	$x_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
0	$x_4$	-2	-3	-2	-1	1	0	0
0	$x_5$	-4	[-4]	-1	-3	0	1	0
0	$x_6$	-3	-2	-2	-2	0	0	1
$c_j - z_j$			-60	-40	-80	0	0	0
0	$x_4$	1	0	-5/4	5/4	1	-3/4	0
-60	$x_1$	1	1	1/4	3/4	0	-1/4	0
0	$x_6$	-1	0	[-3/2]	-1/2	0	-1/2	1
$c_j - z_j$			0	-25	-35	0	-15	0
0	$x_4$	11/6	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6
-60	$x_1$	5/6	1	0	2/3	0	-1/3	1/6
-40	$x_2$	2/3	0	1	1/3	0	1/3	-2/3
$c_j - z_j$			0	0	-80/3	0	-20/3	-50/3

(3) 用单纯形法求解其对偶问题：

$c_j$			2	4	3	0	0	0
$c_B$	$y_B$	$b$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
0	$y_4$	60	3	[4]	2	1	0	0
0	$y_5$	40	2	1	2	0	1	0
0	$y_6$	80	1	3	2	0	0	1
$c_j - z_j$			2	4	3	0	0	0
4	$y_2$	15	3/4	1	1/2	1/4	0	0
0	$y_5$	25	5/4	0	[3/2]	-1/4	1	0
0	$y_6$	35	-5/4	0	1/2	-3/4	0	1
$c_j - z_j$			-1	0	1	-1	0	0
4	$y_2$	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	$y_3$	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	$y_6$	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
$c_j - z_j$			-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

(4) 每次迭代的结果中，原问题的检验数行的相反数是对偶问题的可行解；原问题的变量对应于对偶问题的松弛变量。

5. [2.6] 已知线性规划问题 A 和 B 如下:

问题A	问题B
$\max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{影子价格}$	$\max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{影子价格}$
$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1 & y_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j = b_2 & y_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{3j} x_j = b_3 & y_3 \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{cases}$	$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n 3a_{1j} x_j = 3b_1 & \hat{y}_1 \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{3} a_{2j} x_j = \frac{1}{3} b_2 & \hat{y}_2 \\ \sum_{j=1}^n (a_{3j} + 3a_{1j}) x_j = b_3 + 3b_1 & \hat{y}_3 \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{cases}$

(1) 试写出  $y_i$  和  $\hat{y}_i$  ( $i=1,2,3$ ) 的关系式。

(2) 如果用  $x'_3 = \frac{1}{3}x_3$  替换问题 A 中的  $x_3$ , 请问影子价格  $y_i$  是否有变化?

解: (1) 问题 B 相当于对问题 A 左乘了矩阵  $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 因此由  $y^T = c_B^T B^{-1}$ ,

$$\text{得: } \hat{y}^T = c_B^T (PB)^{-1} = c_B^T B^{-1} P^{-1} = y^T P^{-1}, \text{ 即 } \hat{y}^T = y^T \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

展开:

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{3}y_1 - y_3, \quad \hat{y}_2 = 3y_2, \quad \hat{y}_3 = y_3.$$

或者:

$$y_1 = 3\hat{y}_1 + 3\hat{y}_3, \quad y_2 = \frac{1}{3}\hat{y}_2, \quad y_3 = \hat{y}_3.$$

(2) 没有变化。

6. [2.7] 先用单纯形法求解线性规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

再分析下列条件单独变化的情况下最优解的变化:

(1) 目标函数中变量  $x_3$  的系数变为 6;

(2) 约束条件右端项由  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  变为  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ;

(3) 增添一个新的约束  $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$ 。

解：最终单纯形表为：

			2	3	1	0	0
$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{b}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
2	$x_1$	1	1	0	-1	4	-1
3	$x_2$	2	0	1	2	-1	1
			0	0	-3	-5	-1

最优解为  $x^* = (1, 2, 0)^T$ 。

(1)  $\sigma'_3 = c_3 - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_3 = 6 - (5, 1) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = 2 > 0$ ，需继续按单纯形计算。

			2	3	6	0	0
$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{b}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
2	$x_1$	1	1	0	-1	4	-1
3	$x_2$	2	0	1	[2]	-1	1
			0	0	2	-5	-1
2	$x_1$	2	1	1/2	0	7/2	-1/2
6	$x_3$	1	0	1/2	1	-1/2	1/2
			0	-1	0	-4	-2

最优解变为  $x^* = (2, 0, 1)^T$ 。

(2) 由  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$ ，最优基不变。

(3) 将原最优解  $x^* = (1, 2, 0)^T$  代入新增约束，得： $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 + 4 + 0 = 5 > 4$ ，所以新增约束起作用，需重新计算。

			2	3	1	0	0	0
$c_B$	$x_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
2	$x_1$	1	1	0	-1	4	-1	0
3	$x_2$	2	0	1	2	-1	1	0
0	$x_6$	4	1	2	1	0	0	1
			0	0	-3	-5	-1	0
2	$x_1$	1	1	0	-1	4	-1	0
3	$x_2$	2	0	1	2	-1	1	0
0	$x_6$	-1	0	0	-2	-2	[-1]	1
			0	0	-3	-5	-1	0
2	$x_1$	2	1	0	1	6	0	-1
3	$x_2$	1	0	1	0	-3	0	1
0	$x_5$	1	0	0	2	2	1	-1
			0	0	-1	-3	0	-1

7. 已知某纺织厂生产三种针织产品，其下月的生产计划必须满足以下约束：

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq f$$

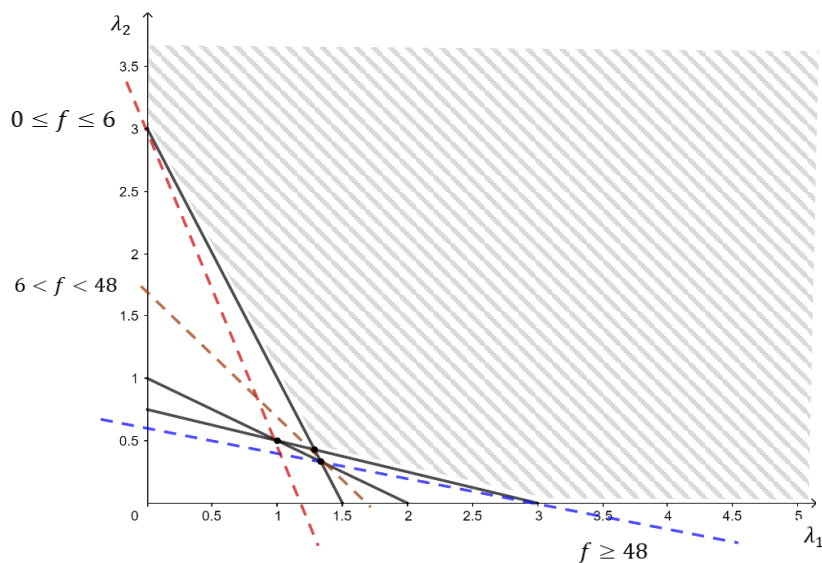
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$x_1, x_2, x_3$  是三种产品的产量，第一个约束是给定的设备工时约束，第二个约束是原料棉花的约束，取决于当月的棉花供应量  $f$ 。假设三种产品的单位净利润分别为 2, 3 和 3。请给出原料棉花的影子价格与其供应量  $f$  的关系  $\lambda_2(f)$ ，以及纺织厂总净利润与  $f$  的关系  $z(f)$ ，并绘制  $z(f)$  的图。

解：（法 1）该问题的对偶问题为：

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 12\lambda_1 + f\lambda_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 \geq 3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$f$  不同取值对应  $\lambda_2$  的关系如下：



图中阴影部分是可行域，红色线表示 $0 \leq f \leq 6$ 的情况，交点是 $(0, 3)$ ，因此能得到 $\lambda_2 = 3$ ；棕色线表示 $6 < f < 48$ 的情况，交点是 $(\frac{9}{7}, \frac{3}{7})$ ，因此能得到 $\lambda_2 = \frac{3}{7}$ ；蓝色线表示 $f \geq 48$ 的情况，交点是 $(3, 0)$ ，因此能得到 $\lambda_2 = 0$ 。

- 1) 若 $-\frac{12}{f} \geq -\frac{1}{4}$ ，即 $f \geq 48$ 时， $\lambda_1(f) = 3$ ， $\lambda_2(f) = 0$ ；
- 2) 若 $-2 < -\frac{12}{f} < -\frac{1}{4}$ ，即 $6 < f < 48$ 时， $\lambda_1(f) = \frac{9}{7}$ ， $\lambda_2(f) = \frac{3}{7}$ ；
- 3) 若 $-\frac{12}{f} \leq -2$ ，即 $0 \leq f \leq 6$ 时， $\lambda_1(f) = 0$ ， $\lambda_2(f) = 3$ 。

$$z(f) = w(f) = \begin{cases} 36, & f \geq 48 \\ \frac{3f + 108}{7} & 6 < f < 48 \\ 3f & 0 \leq f \leq 6 \end{cases}$$

(法 2, 也可使用单纯形法解对偶问题) 原问题标准型:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = f \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

用单纯形表求解:

$c_j$			2	3	3	0	0
$c_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
0	$X_4$	12	1	1	2	1	0
0	$X_5$	$f$	1	4	1	0	1
			2	3	3	0	0

(1)  $0 \leq f < 48$ 时

$c_j$			2	3	3	0	0
$c_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
0	$X_4$	$12 - \frac{f}{4}$	1/2	0	7/4	1	-1/4
3	$X_2$	$\frac{f}{4}$	1/2	1	1/4	0	1/4
			1/2	0	9/4	0	-3/4

a)  $0 \leq f \leq 6$  时

$c_j$			2	3	3	0	0
$c_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
0	$X_4$	$12 - 2f$	-3	-7	0	1	-2
3	$X_3$	$f$	2	4	1	0	1
			-4	-9	0	0	-3

此时最优解为  $(0, 0, f)$ ,  $z_{\max} = 3f$ ,  $y_2 = 0 * (-2) + 3 * 1 = 3$

b)  $6 < f < 48$  时

$c_j$			2	3	3	0	0
$c_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
3	$X_3$	$\frac{48 - f}{7}$	2/7	0	1	4/7	-1/7
3	$X_2$	$\frac{2f - 12}{4}$	3/7	1	0	-1/7	2/7
			-1/7	0	0	-9/7	-3/7

此时  $z_{\max} = (3f + 108)/7$ ,  $y_2 = 3 * (-1/7) + 3 * 2/7 = 3/7$

(2)  $f \geq 48$  时

$c_j$			2	3	3	0	0
$c_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
3	$X_2$	12	1	1	2	1	0
0	$X_5$	$f - 48$	-2	0	-7	-4	1
			-1	0	-3	-3	0

此时  $z_{\max} = 36$ ,  $y_2 = 3 * 0 + 0 * 1 = 0$

综上：

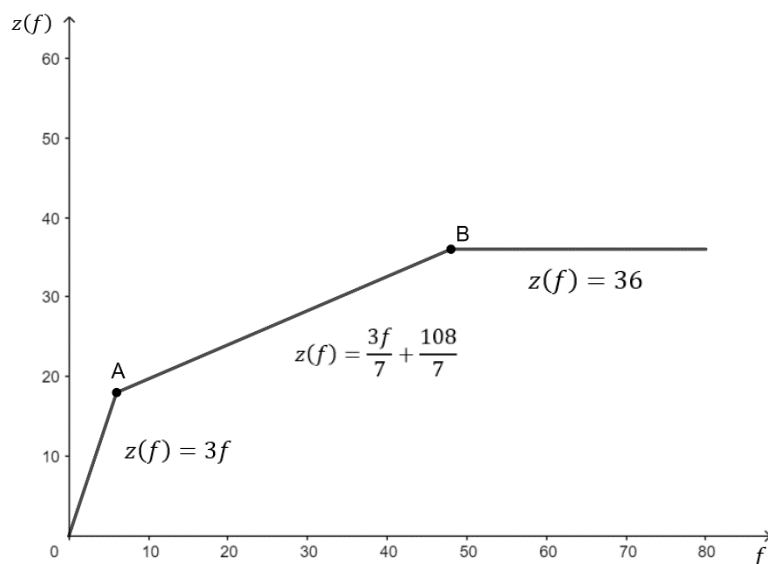
$$\lambda_2(f) = \begin{cases} 3, & 0 \leq f \leq 6 \\ \frac{3}{7}, & 6 < f < 48 \\ 0, & f \geq 48 \end{cases}$$



总净利润:

$$z(f) = w(f) = \begin{cases} 36, & f \geq 48 \\ \frac{3f + 108}{7} & 6 < f < 48 \\ 3f & 0 \leq f \leq 6 \end{cases}$$

纺织厂总净利润与  $f$  的关系如下:



8. 本章课件 PPT 最后一个练习的最后一问: (6) 若生产产品 A 的工艺发生改变, 生产产品 A 对甲, 乙原材料的需求分别为 2, 2, 单位产品的利润不变。问最优生产方案如何变化?

解:  $\bar{p}'_1 = B^{-1}\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\sigma}'_1 = c_1 - c_B B^{-1}\bar{p}_1 = 5 - (5 \ 8) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -5$

$c_j$			5	8	6	0	0
$c_B$	$x_B$	$b$	$x'_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
5	$x'_1$	4	2	0	0	2	-1
8	$x_2$	8	0	1	1	-1	1
$c_j - z_j$			-5	0	-2	-2	-3
5	$x'_1$	2	1	0	0	1	-1/2
8	$x_2$	8	0	1	1	-1	1
$c_j - z_j$			0	0	-2	3	-11/2
0	$x_4$	2	1	0	0	1	-1/2
8	$x_2$	10	1	1	1	0	1/2
$c_j - z_j$			-5	0	-2	0	-7/2

最优解为  $(0, 10, 0)^T$ ,  $z = 80$ 。