大学数学试卷　　2021.6.22

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 求关于 x 的一元四次方程 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$ 的根，其中 a 为一个实数.

2. 求 a 的范围使得矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为对称正定方阵.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是否相似，请说明理由？

4. $n \times n$ $(n > 1)$ 方阵 A, B 满足 $|A| = 2, |B| = 3$，求 $2A^{-1}B^*$ 的行列式的值.

二、 (本题12分) A, B, C, D 是4个 $n \times n$ 方阵，其中 A 可逆且 $AC = CA$，求证：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

三、 (本题12分) 设 A 是一个 $m \times 4$ 矩阵，b 是一个m维列向量. 已知 A 的 秩 为 2. 线性方程组 $AX = b$ 有三个解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 1, 3, 2)^{\mathrm{T}}, 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = (4, -1, 4, 8)^{\mathrm{T}}, 3\alpha_1 + \alpha_3 = (0, -1, 3, 5)^{\mathrm{T}}$. 求线性方程组 $AX = b$ 的通解.

四、 (本题12分) 在 $\mathbf{R}^3$ 中取两组基 $\begin{cases} \alpha_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} \\ \alpha_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \beta_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}} \\ \beta_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}} \\ \beta_3 = (3, 4, 3)^{\mathrm{T}} \end{cases}$. 试求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵以及从基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

五、 (本题12分) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 + x_3^2 - 4x_2x_3$ 是否为正定二次型？将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准二次型.

六、 (本题12分) 令 X 为一个 n 维 ($n \geq 2$) 实向量，满足 $XX^{\mathrm{T}} = 1$. 令 λ 为一个实数，试证明

(1) X^{T} 是 $n \times n$ 矩阵 $E - \lambda X^{\mathrm{T}}X$ 的一个特征向量，并求特征值.

(2) 令 P 是一个 $n \times n$ 正交矩阵并且以 X^{T} 为其第一列. 证明 $E - \lambda X^{\mathrm{T}}X$ 可通过 P 对角化.

(3) 当 λ 为何值时，$E - \lambda X^{\mathrm{T}}X$ 能成为一个对称正交矩阵？

七、 (本题12分) 一个实系数 $n \times n$ 方阵 A 满足 $A^3 = A$. 证明 A 可以对角化.