

# 插值法

#### 温丹苹

邮箱: dpwen@nju.edu.cn

办公室:工管院协鑫楼306

# 7.2.3 Lagrange插值举例



例:已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
ln(x)	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 线性插值 和 抛物线插值 计算 ln(0.54) 的近似值。

插值节点的选取:为提高计算精度,通常选取所需插值的点x邻近的节点

解: (1) 线性插值,取 x<sub>0</sub>=0.5, x<sub>1</sub>=0.6 得

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 0.1823x - 1.6046$$

将 *x*=0.54 代入可得:

$$ln(0.54) \approx L_1(0.54) = -0.6202$$

(2) 抛物线插值,取  $x_0$ =0.4,  $x_1$ =0.5,  $x_2$ =0.6, 可得

$$ln(0.54) \approx L_2(0.54) = -0.6153$$

- ln(0.54)的精确值为:
   -0.616186...
- 抛物线插值的误差比线 性插值要小一些。

Demo\_7\_1\_ Interp\_Lagrange.m



例:已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

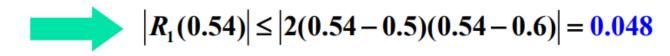
x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
ln(x)	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试估计用 线性插值 和 抛物线插值 计算 ln(0.54) 时的误差。

解: (1) 线性插值余项

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2}(x - x_0)(x - x_1), \qquad x_0 = 0.5, \ x_1 = 0.6, \ \xi_x \in (0.5, 0.6)$$

$$\left|f^{(2)}(\xi_x)\right| = \left|-\xi_x^{-2}\right| \le 4$$





(2) 抛物线插值余项

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6, \ \xi_x \in (0.4, 0.6)$$
  $\left|f^{(3)}(\xi_x)\right| \le \left|2\xi_x^{-3}\right| = 31.25$ 

$$|R_2(0.54)| \le \frac{31.25}{3!} |(0.54 - 0.4)(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)| = 0.00175$$

- \* 対比:  $|R_1(0.54)| \le |2(0.54-0.5)(0.54-0.6)| = 0.048$
- \* 抛物线插值通常优于线性插值, 但绝不是次数越高就越好!



例: 函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  , 插值区间 [-5, 5], 取等距插值节点,

试画出插值多项式  $L_n(x)$  的图像。

Demo\_7\_2\_ Interp\_Lagrange.m

龙格(Runge)现象:插值次数越高,插值结果 越偏离原函数的现象。



例: 设 $f(x) \in C^2[a,b]$  (二阶连续可导),证明:

$$\max_{a \le x \le b} \left| f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] \right| \le \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2$$

其中

$$M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

证明: 易知  $L_1(x) \triangleq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ 

是f(x) 关于点 $x_0=a, x_1=b$  的线性插值多项式,由插值余项公式可知

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2} (x - a)(x - b) \right| \le \frac{1}{2} M_2 |(x - a)(b - x)| \le \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2$$

$$x \in [a, b]$$

# 插值与拟合



- ◆ Q & A
- ◆ 谢谢

