大学数学试卷　2021.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $A^2B+A=B+E$，求矩阵 B 及行列式 $|B|$.

2. 设 $\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求常数 a,b 的值.

3. α 为 n 维实单位列向量，$A=E-k\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵，求实数 k 的取值范围.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$，证明 A 与 B 合同，即存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{\mathrm{T}}AP$.

二、 (本题12分) 已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 经正交变换可化为标准形 $f=2y_1^2+y_3^2$，试求 a,b.

三、 (本题12分) 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为2，向量 $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.
(1) 求 A 的全部特征值与特征向量; (2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角阵; (3) 求矩阵 A.

四、 (本题12分) 设 n 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性无关，又 $\alpha_n=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}$. 令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.
(1) 证明：方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多组解; (2) 求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

五、 (本题12分) 设 A 为三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.
(1) 证明 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关; (2) 若 $A^3\beta=A\beta$，求秩 $\mathrm{r}(A-E)$ 及行列式 $|A+2E|$.

六、 (本题12分) 已知线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&0&3\\3&-2&2\end{pmatrix}.$$

试求：(1) 基 β_1,β_2,β_3; (2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下具有相同坐标的全部向量.

七、 (本题12分) (1) 已知矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=1$，证明：存在非零列向量 α 和 β，使得 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.
(2) 已知矩阵 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$，其中列向量 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 也线性无关，证明：$\mathrm{r}(A)=2$.