复变函数知识补充

定义 1 对任何实数x, y，称$z=x+iy$或$z=x+yi$为复数，x和y分别称为z的实部和虚部.

记作 $x=\mathrm{Re}(z)$ (real),

$y=\mathrm{Im}(z)$ (imaginary);

当$x=0$时，$z=iy$称为纯虚数；

当$y=0$时，$z=x$为实数。

注：

1. 由定义知，复数是实数的推广；

2. 两个复数相等，当且仅当其实部和虚部分别相等；

3. z=0等价于x=0且y=0;

4. 两个复数不能比较大小。

复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

1. 加减法:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

2. 乘法:

$$z_1 \times z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

3. 除法:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

说明：四则运算满足结合律、

交换律、分配律

例 1 $z_1 = 2+3i \quad z_2 = 1-i$

则：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2+3i}{1-i}$

$$= \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+5i}{2}$$

2、共轭复数：

定义：称x-iy为x+iy的共轭复数

共轭复数的性质：

（1） $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

（2） $\overline{\overline{z}} = z$

（3） $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ $\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

（4） $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

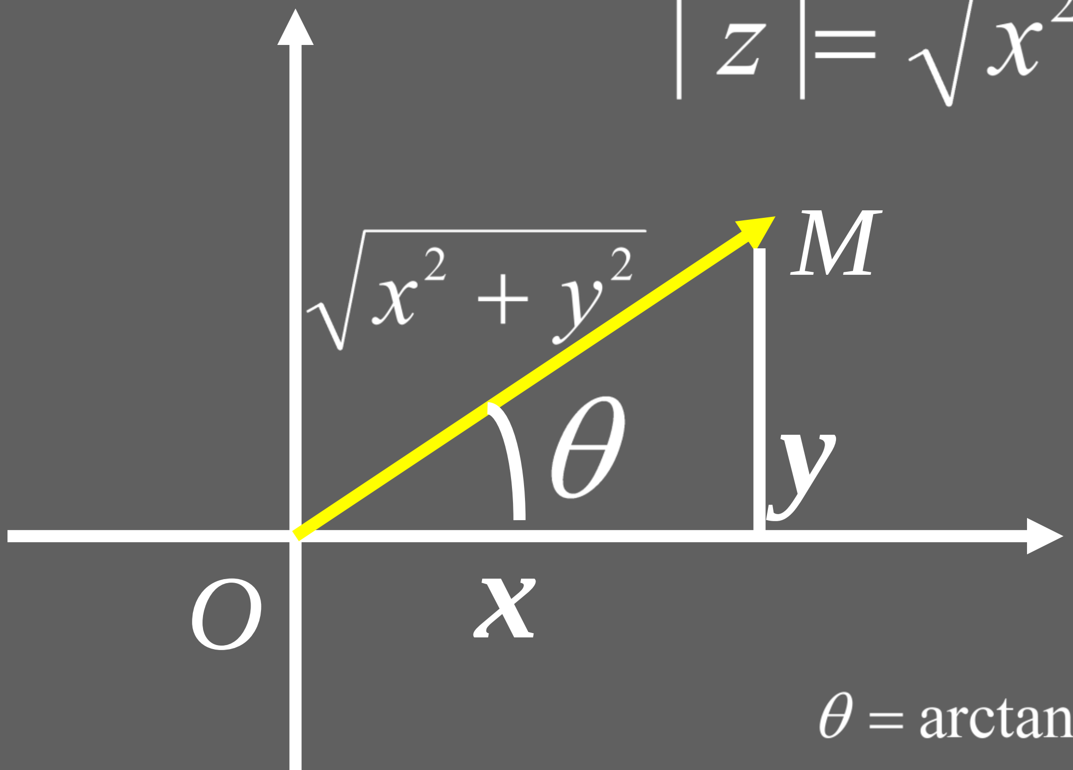
$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$$

(2)向量表示法　复数z可以用以原点为起点，以$M(x, y)$为终点的向量$\overrightarrow{OM}$表示；

$\overrightarrow{OM}$的长度称为复数的模，记作$|z|$。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

（3） 三角和指数表示法：

令 $x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta$

则 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$为三角表示法

由欧拉公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

得：$z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$为指数表示法

各种表示法可以互相转化

例3　将$z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$化为三角和指数表示法。

解：$z=\sqrt{1+3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，　$\theta=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$

所以$z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$

为指数和三角表示法。

通过两点的直线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

因此，它的复数形式的参数方程是

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

1.导数定义：

设函数$w=f(z)$在区域D上有定义。

z_0为D中的一点，$z_0+\Delta z\in D$,若

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$存在。

则称 $f(z)$在z_0可导，此极限值称为$f(z)$在z_0的导数，记作$f'(z_0)$，即

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

例 1 求 $f(z) = z^2$ 的导数

解： $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = 2z$$

所以 $f'(z) = 2z$

解析函数

定义　若 $f(z)$在z_0的某个邻域内可导，则我们称$f(z)$在z_0点解析。若$f(z)$在D内处处解析，则我们称$f(z)$在D内解析。不解析点称为奇点。

说明：

1、函数在区域内解析与函数在区域内可导等价。

2、函数在某点可导,不能推出函数在该点解析；

3、解析是整体概念，可导是点概念。

函数解析的充要条件

定理 1

设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$

在区域D **内有定义，则**

$f(z)$**在**D **内一点,**$z=x+\mathrm{i}y$

可导的充要条件是：

1、$u(x,y)$和$v(x,y)$ 在点(x,y)可微；

2、$u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x,y)满足

柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

例 1 判定下列函数在何处可导，在何处解析?

$$1.\ f(z)=\bar{z}$$

$$2.\ f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

解 1

因为 $u = x,\ v = -y$

所以 $u_x = 1,\ u_y = 0$

$v_x = 0,\ v_y = -1$

柯西-黎曼方程不满足,

所以 $f(z)=\bar{z}$ 在复平面内

处处不解析。

2. 因为

$$u = \mathrm{e}^x \cos y, \quad v = \mathrm{e}^x \sin y$$

$$u_x = \mathrm{e}^x \cos y, \quad u_y = -\mathrm{e}^x \sin y$$

$$v_x = \mathrm{e}^x \sin y, \quad v_y = \mathrm{e}^x \cos y$$

从而$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$

并且四个偏导都连续，

$f(z)$ 在复平面内处处解析。

函数解析的充要条件

定理2　函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在其定义域D内解析的充要条件是:$u(x,y)$与$v(x,y)$在D内可微并且满足柯西-黎曼方程

复变函数的积分

一、复积分的概念

定义1 设函数w在区域D内有定义，C是D内起点为A、终点为B的一条光滑的有向曲线，

记作：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

若 C 为闭曲线，

则记为： $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

特别，当 C 为参数方程时，

$$C \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

这时，$z=x(t)+\mathrm{i}y(t)$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

3. $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 则:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

$$(4)\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$$

特别地，设C的长度为L，若$f(z)$在C上满足：$|f(z)| \le M$,则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \le ML$$

例

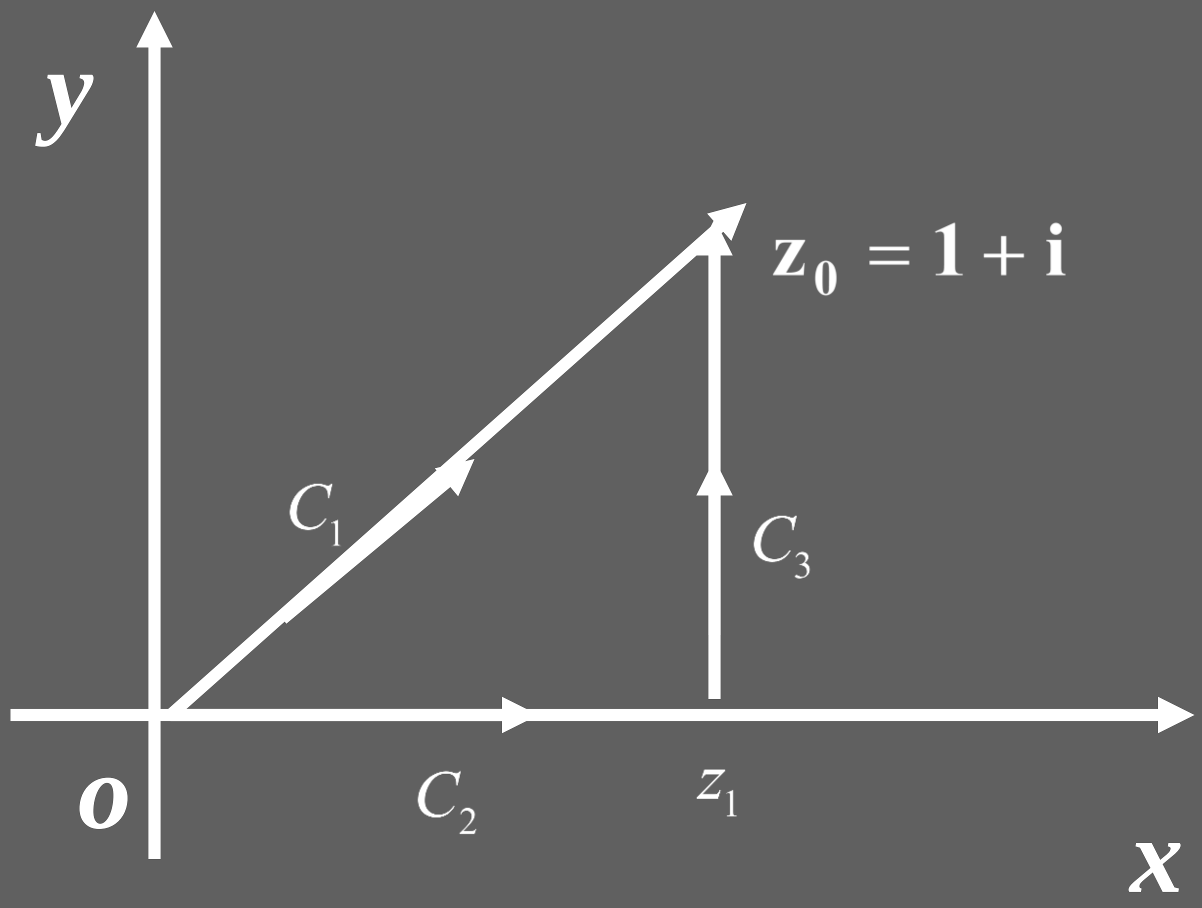
计算： $\int_C \bar{z}dz$ 其中 C：

1. 从 (0, 0) 到 (1, 1) 的直线段
2. 从 (0, 0) 到 (1, 0) 再到 (1, 1) 的折线段

解：（1）　C的方程为：

$z=x+\mathrm{i}\,y=t+\mathrm{i}\,t$，　$0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-\mathrm{i})t(1+\mathrm{i})\mathrm{d}t = 1$$


y
$z_0 = 1 + i$
C_1
C_3
o
C_2
z_1
x

（2） C的方程为：$C=C_1+C_2$

C_1： $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}$ $\quad 0\le t\le 1$

C_2： $\begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases}$

$$\int_{C_1} \bar{z}\,dz = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_2} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (1 - it)\,i\,dt = i + \frac{1}{2}$$

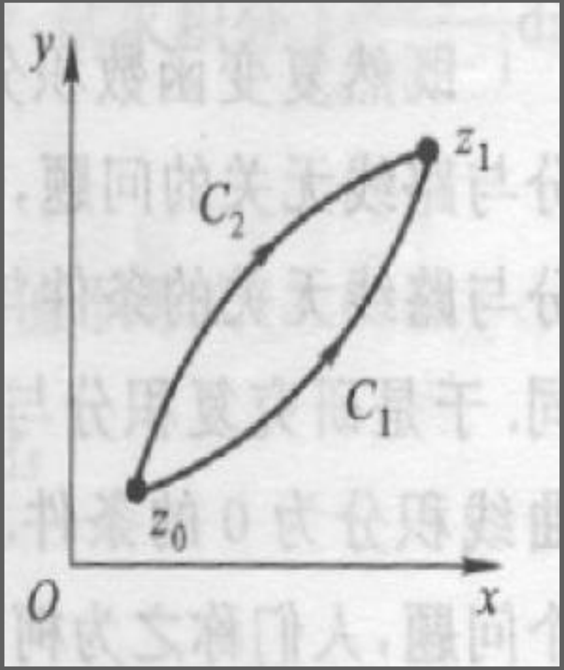
$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{C_1} \bar{z}\,dz + \int_{C_2} \bar{z}\,dz = 1 + i$$

积分与路线有关！

定理　设函数$f(z)$在单连通区域D内解析，z_0与z_1为D内任意两点，C_1与C_2为连结z_0与z_1的积分路线，C_1，C_2都含于D（图3.3)，则

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z,$$

即当f为D的解析函数时积分与路线无关，而仅由积分路线的起点z_0与终点z_1来确定。



图

例　计算积分$\int_C \sin z dz$，其中C是圆周$|z-1|=1$的上半周，走向从0到2。

解：因$\sin z$是全平面上的解析函数，由柯西定理，它的积分与路线无关。于是，可以换一条路线，例如取C_1为沿实轴从0到2。这样便有

$$\int_C \sin z dz = \int_{C_1} \sin z dz$$

$$= \int_0^2 \sin x dx = 1 - \cos 2$$

定理　如果函数 $f(z)$在单连通域 D 内处处解析，$G(z)$是$f(z)$的一个原函数，

则 $$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1)-G(z_0)$$

解析函数的高阶导数

定理 解析函数$f(z)$的导数仍然是解析函数，它的n阶导数为：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\cdots$$

其中C为$f(z)$解析区域D内围绕z的任一正向简单闭曲线，且它的内部全属于D

泰勒级数

1. 定理

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析， z_0 为 D 内一点， R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，

那么，当$|z-z_0|<R$时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$成立，其中，

$$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots$$

2　几个基本展开式：

1. $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

2. $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3. $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$