



南京大學
NANJING UNIVERSITY

工程管理学院
SCHOOL OF MANAGEMENT & ENGINEERING

插值法

温丹苹

邮箱: dpwen@nju.edu.cn

办公室: 工管院协鑫楼306

7.2.3 Lagrange插值举例

例：已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 线性插值 和 抛物线插值 计算 $\ln(0.54)$ 的近似值。

插值节点的选取：为提高计算精度，通常选取所需插值的点 x 邻近的节点

解：(1) 线性插值，取 $x_0=0.5, x_1=0.6$ 得

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 0.1823x - 1.6046$$

将 $x=0.54$ 代入可得：

$$\ln(0.54) \approx L_1(0.54) = -0.6202$$

(2) 抛物线插值，取 $x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6$ ，可得

$$\ln(0.54) \approx L_2(0.54) = -0.6153$$

- $\ln(0.54)$ 的精确值为：
-0.616186...
- 抛物线插值的误差比线性插值要小一些。

Demo_7_1_Interp_Lagrange.m

7.2.4 误差估计

例：已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试估计用 线性插值 和 抛物线插值 计算 $\ln(0.54)$ 时的误差。

解：(1) 线性插值余项

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2}(x-x_0)(x-x_1), \quad x_0=0.5, x_1=0.6, \xi_x \in (0.5, 0.6)$$

$$|f^{(2)}(\xi_x)| = |-\xi_x^{-2}| \leq 4$$

$$\rightarrow |R_1(0.54)| \leq |2(0.54-0.5)(0.54-0.6)| = 0.048$$

7.2.4 误差估计

(2) 抛物线插值余项

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6, \xi_x \in (0.4, 0.6) \longrightarrow |f^{(3)}(\xi_x)| \leq |2\xi_x^{-3}| = 31.25$$

$$\longrightarrow |R_2(0.54)| \leq \frac{31.25}{3!} |(0.54 - 0.4)(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)| = \mathbf{0.00175}$$

$$\ast \text{ 对比: } |R_1(0.54)| \leq |2(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)| = \mathbf{0.048}$$

\ast 抛物线插值通常优于线性插值，但绝不是次数越高就越好！

7.2.4 误差估计

例：函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，插值区间 $[-5, 5]$ ，取等距插值节点，

试画出插值多项式 $L_n(x)$ 的图像。

[Demo_7_2_Interp_Lagrange.m](#)

龙格（Runge）现象：插值次数越高，插值结果越偏离原函数的现象。

7.2.4 误差估计

例：设 $f(x) \in C^2[a,b]$ (二阶连续可导)，证明：

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] \right| \leq \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2$$

其中

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

证明：易知 $L_1(x) \triangleq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$

是 $f(x)$ 关于点 $x_0=a, x_1=b$ 的线性插值多项式，由插值余项公式可知

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2} (x - a)(x - b) \right| \leq \frac{1}{2} M_2 |(x - a)(b - x)| \leq \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2$$

$$x \in [a, b]$$

◆ Q & A

◆ 谢谢

WDP