普通物理期中小结

2024 年 10 月 21日考试

1. **绪论**

量纲： 牛顿力学的三个基本物理量：长度 L, 时间 T, 质量 m；量纲的概念（注意量纲与单位的区别）；简单的量纲分析方法

矢量分析： 矢量的概念、矢量的几个重要的运算：求模、求角度、数乘、点乘、叉乘

2. **运动的描述**

质点： 无大小、无形状、有质量的抽象概念

如何描述质点的位置： 参考系; 坐标系（将参考系定量化）; 维度（确定位置需要的独立参数）; 三维直角坐标系 (x, y, z); 基失:$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; 位失 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

描述质点的位置变化： 速度 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$; 加速度 $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}$

质点运动学的两类问题： 1、知道轨迹函数，求每个时刻的速度、加速度（微分）; 2、知道速度、加速度、初始状态，求轨迹（积分）; 一维情况几个重要公式：$v = v_0 + at; s = v_0t + \frac{1}{2}at^2; v^2 - v_0^2 = 2as$

两个重要的具体运动： 1、抛体运动：轨迹函数、射程、最高点；2、圆周运动：自然坐标系，切向基失 $\boldsymbol{e_t}$、法向基失 $\boldsymbol{e_n}$；速度：只有切向速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e_t}$，加速度：$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e_t} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e_n}$; 角速度大小 ω, $v = R\omega$, $a_n = \frac{v^2}{R} = v\omega = R\omega^2$

相对运动： 相对位失：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{r}'$；相对速度：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{v}'$; 相对加速度：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a}'$

3. **牛顿运动定律**

牛顿三大运动定律： 第一定律：惯性定律；第二定律：$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 或者 $\boldsymbol{F}=\frac{dp}{dt}$; 第三定律：$\boldsymbol{F_{12}}=-\boldsymbol{F_{21}}$

几种常见力： 重力 $m\boldsymbol{g}$; 万有引力 $F_G=G\frac{mM}{r^2}$：弹力 $F_T=-k\Delta x$（弹簧振子周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$）；静摩擦力、动摩擦力 $f=\mu F_N$

非惯性系： 惯性系与非惯性系；惯性力：$\boldsymbol{F_i}=-m\boldsymbol{a_0}$; 惯性离心力：$\boldsymbol{F_i}=-m\omega^2 r\boldsymbol{e_n}$; 科里奥利力：产生原因、方向判断

4. **动量与能量**

质点系： 质点系；质点系的内力和外力；质心坐标：$\boldsymbol{r_C}=\frac{\Sigma m_i\boldsymbol{r_i}}{m}$; 质心运动定理：内力不改变质心位置，合外力与质心坐标满足牛顿第二定律：$\Sigma\boldsymbol{F_i}=m\boldsymbol{a_C}$

动量定理： 冲量：力的时间积累（过程量）$\boldsymbol{I}=\int\boldsymbol{F}dt$; 动量 (状态量)$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$；动量定理：$\boldsymbol{I}=\Delta\boldsymbol{p}$

动量守恒定律： 质点系的合外力为 0 时，体系的总动量保持不变

角动量守恒定律： 角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$; 力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$; 角动量定理：$\boldsymbol{M}=\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$; 角动量守恒定律：$\boldsymbol{M}=0$ 时，体系的角动量保持不变

功与能量： 做功：力的空间积累（过程量）$W=\int\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$; 功率 $P=\frac{dW}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$; 动能（状态量）：$E_k=\frac{1}{2}mv^2$; 动能定理：合外力对体系做功 $W=\Delta E_k$

保守力做功： 保守力的概念；常见保守力：重力、引力、弹力；势能：重力势能 $E_p=mgh$; 引力势能 $E_p=-G\frac{mm^{'}}{r}$; 弹性势能 $E_p=\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$; 指导势能函数求受力：$F_x=-\frac{dE_p}{dx}$

机械能守恒定律： 机械能：E_k+E_p; 机械能守恒定律：体系只有外力和保守内力做功时，机械能保持不变

5. **刚体的定轴转动**

刚体模型及参数： 刚体：特殊的质点系，每个质元间的距离保持不变；刚体的定轴转动：转轴、转动平面；角速度矢量：大小、方向 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$;刚体定轴转动的转动惯量：$J=\int r^2dm$

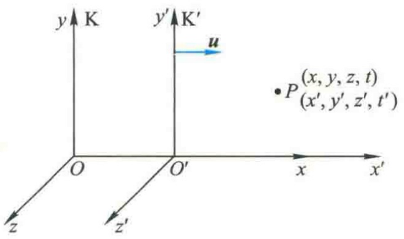
刚体定轴转动定理： 刚体定轴转动角动量大小：$L=J\omega$; 定轴转动定

理：$M = \frac{dL}{dt} = J\frac{d\omega}{dt}$ 刚体转动角动量守恒定律

刚体定轴转动动能：力矩做功（过程量）：$W = \int M d\theta$；转动动能（状态量）：$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$; 刚体转动动能定理：$W = \Delta E_k$

相对论

一、洛伦兹变换



$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\qquad y'=y\qquad z'=z\qquad t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

或

$$x=\frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\qquad y=y'\qquad z=z'\qquad t=\frac{t'+\frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

可见 $u\to 0$ 时，$x'=x-ut$，$x=x'+ut$，即伽利略表达式。

这里"+"、"-"的确定看的是相对速度 u 是沿 $x(x')$ 正方向还是负方向。

例（套公式）甲乙两人所乘飞行器沿 Ox 轴作相对运动。甲测得两个事件的时空坐标为 $x_1=6\times10^4$ m，$y_1=z_1=0$，$t_1=2\times10^{-4}$ s；$x_2=12\times10^4$ m，$y_2=z_2=0$，$t_2=1\times10^{-4}$ s，如果乙测得这两个事件同时发生于 t' 时刻，问：(1) 乙对于甲的运动速度是多少？(2) 乙所测得的两个事件的空间间隔是多少？

解：(1) $t_1'=\dfrac{t_1-\frac{ux_1}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$，$t_2'=\dfrac{t_2-\frac{ux_2}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$

由题意得 $t_1'=t_2'$

$\Rightarrow t_1-\frac{ux_1}{c^2}=t_2-\frac{ux_2}{c^2}$

$\therefore t_1-t_2=\frac{u(x_1-x_2)}{c^2}$

$1\times10^{-4}=\frac{-u\times6\times10^4}{c^2}$

$\Rightarrow u=-\frac{1\times10^{-4}\times c}{6\times10^4}$

$=-\frac{3\times10^4c}{6\times10^4}=-\frac{1}{2}c.$

(2) $x_1'=\dfrac{x_1-ut_1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$

$x_2'=\dfrac{x_2-ut_2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$

$\therefore x_2'-x_1'=\dfrac{x_2-x_1+u(t_1-t_2)}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\dfrac{6\times10^4-1.5\times10^8\times1\times10^{-4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\dfrac{4.5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times10^4$

$=3\sqrt{3}\times10^4$ m.

二、相对论速度变

$$v_x'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx-udt}{dt-\frac{u}{c^2}dx}=\frac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\qquad v_x=\frac{v_x'+u}{1+\frac{u}{c^2}v_x'}$$

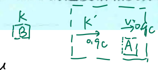
$$v_y'=\frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\qquad v_y=\frac{v_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{u}{c^2}v_x'}$$

$$v_z'=\frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\qquad v_z=\frac{v_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{u}{c^2}v_x'}$$

同样地，这里"+"、"-"的确定看的是相对速度 u 沿 $x(x')$ 正方向还是负方向。

可见 $u\to 0$ 时，$v_x'\sim v_x$，$v_y'\sim v_y$，$v_z'\sim v_z$.

例. 在地面上测到有两个飞船 A、B 分别以 +0.9c 和 −0.9c 的速度沿相反方向飞行，如图 4-2 所示. 求飞船 A 相对于飞船 B 的速度有多大.



令飞船B为参考系K，地面为参考系K'.

则从飞船 B看来（K系），$V_x'=\dfrac{V_x+u}{1+\frac{u}{c^2}V_x}$

$=\dfrac{0.9c+0.9c}{1+0.81c}=0.994c.$

三、时间延缓效应

$$t=\frac{t_0}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

t_0 为静止参考系中测得的固有时.

四、长度收缩效应

$$l'=l\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}$$

l 为静止参考系中测得的长度.

五、狭义相对论动力学基础

1. $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$，则 $F=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\vec{V}\right)$

式中的 m_0 是质点在相对静止的惯性系中测出的质量，叫做**静质量**（static mass）. 而 m 则是质点对观察者有相对速度 v 时的质量，叫做**相对论性质量**（relativistic mass），简称相对论质量，亦称**动质量**.

2 质量与能量的关系

静能 $E_0=m_0c^2$

静能+动能 $E=mc^2$

$\therefore E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$

$=\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}+\cdots$

（$v\ll c$ 时，$E_k=\frac{1}{2}m_0v^2$）

3、能量与动能的关系

在经典力学中，动能和动量的关系

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}$$

这个关系式对洛伦兹变换不是不变的，所以不适用于高速运动. 为了求得一个相对于洛伦兹变换为不变的普遍关系式，我们可从 $E=mc^2$ 入手. 平方后得

$$E^2=m^2c^4=\frac{m_0^2c^4}{1-v^2/c^2}$$

即

$$m^2c^4-\underbrace{m^2v^2}_{p^2}c^2=m_0^2c^4$$

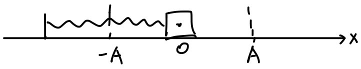
再将 $p=mv$ 及 $E=mc^2$ 代入并整理得

$$\boxed{E^2=c^2p^2+E_0^2=c^2p^2+m_0^2c^4}\qquad(4-15)$$

上式叫做**相对论能量-动量关系**（relativistic energy-momentum relation），它对洛伦兹变换保持不变.

机械振动

一、谐振动及其表达式



由 $F=-kx \Rightarrow ma=-kx$

$m\ddot{x}=-kx$

$\ddot{x}=-\frac{k}{m}x \quad (\ddot{x}=-\omega^2 x)$

$\Rightarrow -\omega^2=-\frac{k}{m}$

$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow \ddot{x}=-\omega^2 x$ 的解为 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，$A$、$\varphi_0$ 为常量，由振幅和初始状态决定

二、谐振动的特征量

1. 振幅 A

2. 周期与频率

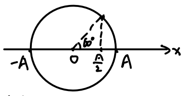
$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\omega=2\pi\nu \Rightarrow \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

3. 相位：$\omega t+\varphi_0$

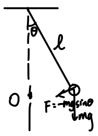
初相：φ_0

三、参考圆（略）



四、几种常见的谐振动

1. 单摆



由 $v=\omega l=\frac{d\theta}{dt}l=\dot{\theta}l$

则 $a=\dot{v}=\ddot{\theta}l$

由 $F=ma$ 可得

$-mg\sin\theta=m\ddot{\theta}l$

而 $\theta\sim\sin\theta$

$\therefore -g\theta=\ddot{\theta}l$

$\Rightarrow \ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta$

$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\therefore \theta=\theta_{max}\cos(\omega t+\varphi_0)$

2. 复摆

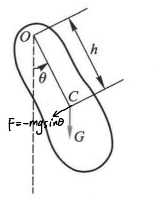


图 10-9 复摆

力矩 $M=-mg\sin\theta\, h=-mgh\theta$

由 $M=J\alpha=J\frac{d^2\theta}{dt^2}=J\ddot{\theta}$

$\Rightarrow J\ddot{\theta}=-mgh\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta}=-\frac{mgh}{J}\theta$

$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}}$

$\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$

五、谐振动的能量

① $E_总=\frac{1}{2}kA^2=②+③$

由 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow v=\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$

② $\Rightarrow E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2}\cancel{m}A^2\frac{k}{\cancel{m}}\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$

③ $\Rightarrow E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$

但对于单摆，$\theta=\theta_{max}\cos(\omega t+\varphi_0)$

则 $\omega=\dot{\theta}=-\theta_{max}\cdot\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$

$\Rightarrow E_k=\frac{1}{2}m(\omega l)^2=\frac{1}{2}ml^2\theta_{max}^2\cancel{\omega^2}^{\frac{g}{\cancel{l}}}\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2}mgl\theta_{max}^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$

$E_总=\frac{1}{2}mV_{平衡}^2$

$\Rightarrow E_p=\cdots\cdots$ （θ_{max} 其实也是由 $V_{平衡}$ 计算得出的）

六、阻尼振动

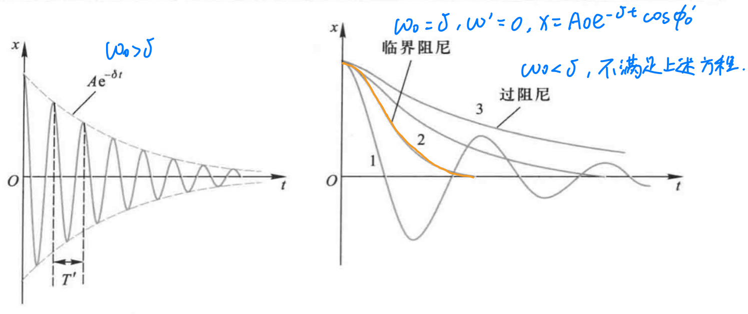
设阻力与物体的运动速度成正比，即 $f=-r\frac{dx}{dt}$（阻力系数），此时 $ma=-kx-r\frac{dx}{dt}$

令 $\omega_0^2=\frac{k}{m}$，$\frac{r}{m}=2\delta$ $\Rightarrow \ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$.

可以解出 $x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega' t + \phi_0')$ ，$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

衰减项

$T' = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ →周期变长了，振动变慢了



(a) 阻尼振动的位移与时间的关系　　(b) 不同阻尼下的阻尼振动和阻尼过大时的非周期运动

图 10-14　阻尼振动曲线

七、受迫振动与共振

在六的基础上，施加一驱动力 $F = F_0\cos\omega_d t$ ，ω_d 为驱动力的角频率

则 $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega_d t$$ 即 $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0\cos(\omega_d t)$

仍令 $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$，$\dfrac{\gamma}{m} = 2\delta$，则上式可写成

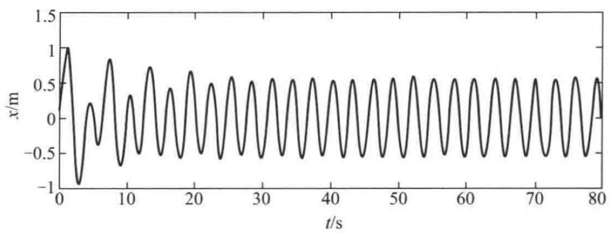
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$ 即 $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\cos\omega_d t$.

在δ较小的情况下，有 $x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t + \varphi_0') + A\cos(\omega_d t + \varphi_0)$

此解表示，在驱动力开始作用的阶段，系统的振动是非常复杂的(图 10-15)，可以看成是两个振动合成的，一个振动由式(10-23)中的第一项表示，它是一个减幅的振动；另一个振动由式(10-23)中的第二项表示，它是一个振幅不变的振动. 经过一段时间之后，第一项分振动将减弱到可以忽略不计，余下的就是受迫振动达到稳定状态后的等幅振动，其振动表达式为

$$\boxed{x = A\cos(\omega_d t + \phi)} \tag{10-24}$$

$A_0 e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\delta t} + \varphi_0')$ 在一定时间后→0，忽略



受迫振动的位移时间曲线($\delta = 0.1$，$\omega_0 = 1$，$\omega_d = 2.1$，$F_0/m = 2$)

图 10-15　受迫振动的位移时间曲线

应该指出，稳态时的受迫振动的表达式虽然和无阻尼自由振动的表达式相同，都是谐振动，但其实质已有所不同. (1) 受迫振动的角频率不是振子的固有角频率，而是驱动力的角频率；(2) 受迫振动的振幅 A 不是决定于振子的初始状态，而是依赖于振子的性质 ω_0、阻尼 δ 的大小和驱动力 F_0, ω_d 的特征. (3) 相位 ϕ 是稳态受迫振动的位移和驱动力的相位差，这也与初始条件无关. 根据理论计算可得

$\omega \neq \omega_0$，$\omega = \omega_d$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\delta^2\omega_d^2}} \tag{10-25}$$

$$\tan\phi = -\frac{2\delta\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \tag{10-26}$$

与初始条件无关.

在稳态时，振动物体的速度

$$v = \frac{dx}{dt} = v_m\cos\left(\omega_d t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{10-27}$$

式中

$$v_m = \frac{\omega_d F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\delta^2\omega_d^2}} \tag{10-28}$$

共振时，上式中的A→∞，令分母为0，则可求出 $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ →位移共振

阻尼很小时可认为 $\omega_d=\omega_0$. →速度共振.

八、一维谐振动的合成

一、同一直线上两个同频率的谐振动的合成

$\omega_1=\omega_2$

设一质点在一直线上同时参与两个独立的同频率（亦即角频率 ω 相同）的谐振动. 如果取这一直线为 Ox 轴，以质点的平衡位置为原点，在任一时刻 t，这两个振动的位移分别为

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\phi_{01})$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\phi_{02})$$

式中 A_1、A_2 和 ϕ_{01}、ϕ_{02} 分别表示两个振动的振幅和初相位. 既然 x_1 和 x_2 都是表示在同一直线方向上、距同一平衡位置的位移，所以合位移 x 仍在同一直线上，而为上述两个位移的代数和，即

合成 $$x=x_1+x_2=A_1\cos(\omega t+\phi_{01})+A_2\cos(\omega t+\phi_{02})$$

应用三角函数的等式关系将上式展开，可以化成

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0) \tag{10-40a}$$

式中 A 和 ϕ_0 的值分别为

展开为

$$x=\underbrace{\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}}_{A}\cos\Big(\omega t+\underbrace{\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}}_{\varphi_0}\Big)$$

给出 A1、A2、A可求相位差 $\varphi_{02}-\varphi_{01}$

✓ $$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_{02}-\phi_{01})}} \tag{10-40b}$$

$$\boxed{\tan\phi_0=\frac{A_1\sin\phi_{01}+A_2\sin\phi_{02}}{A_1\cos\phi_{01}+A_2\cos\phi_{02}}} \tag{10-40c}$$

这说明合振动仍是谐振动，其振动方向和频率都与原来的两个振动相同.

二、同一直线上两个不同频率的谐振动的合成　拍

$\omega_1\neq\omega_2$

设一质点在一直线上同时参与两个不同频率的谐振动，其振动表达式为

$$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_{01})$$
$$x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\phi_{02})$$

根据叠加原理，合运动的位移为

$$x=x_1+x_2=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_{01})+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_{02})$$

这个合运动一般是比较复杂的运动. 现在讨论两个频率比较接近且 $|\omega_2-\omega_1|\ll\omega_1$ 或 ω_2 这种具有实用意义的情况. 为方便计算，设 $\underbrace{A_1=A_2=A}_{\text{振幅相同}}$，$\underbrace{\phi_{01}=\phi_{02}=\phi_0}_{\text{假设相位相同，即相位差}\Delta\varphi=0}$，则上式可化成

$$x=2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\phi_0\right) \tag{10-41}$$

由于 $|\omega_2-\omega_1|$ 远小于 ω_1 或 ω_2，式中第一项因子随时间作缓慢地变化，第二项因子是角频率近于 ω_1 或 ω_2 的简谐函数，因此合成运动可近似看成是角频率为 $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\approx\omega_1\approx\omega_2$、振幅为 $\left|2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$ 的谐振动. 这种两个频率较大且差值较小的谐振动合成时，其合振幅出现时强时弱周期性缓慢变化的现象叫做拍（beat）.

ω_1、ω_2较大　$|\omega_2-\omega_1|$较小

图 10-25 画出两个分振动以及合振动的图形. 从图中看出，在 t_1 时刻，两分振动的位相相同，合振幅最大；在 t_2 时刻，两分振动的位相相反，合振幅最小；在 t_3 时刻，振幅又最大，即合振动的振幅作缓慢的周期性变化. 由于振幅总是正值，而余弦函数的绝对值以 π 为周期，因而振幅变化周期 τ 可由 $\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right|\tau=\pi$ 决定，故振幅变化的频率即拍频（beat frequency）.

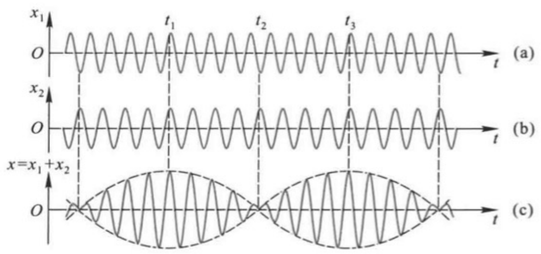


图 10-25　拍

$$\boxed{\nu_{拍}=\frac{1}{\tau}=\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}\right|=|\nu_2-\nu_1|} \tag{10-42}$$

拍频的数值等于两分振动频率之差.

机械波

一. 描述机械波的特征量

1. 波长 λ

波传播时，在同一波线上两个相邻的、相位差为 2π 的质元之间的距离，叫做波长，用 λ 表示，它是波源作一次完全振动，波前进一个完整波的距离.

2. 周期、频率 T, ν

波前进一个波长的时间叫做波的周期，用 T 表示.周期的倒数叫做频率，用 ν 表示.频率为单位时间内波前进距离中波的数目.波的频率由波源的振动频率决定.

3. 波速 u

单位时间内振动状态传播的距离，称为波速，用 u 表示，由于振动状态是由

$u=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu$

二. 平面简谐波的波函数.

平面简谐波最为简单，也最为基本.下面我们讨论平面余弦波在理想的无吸收的均匀无限大介质中传播时的波函数.

如图 11-8 所示，设有一平面余弦行波，在无吸收的均匀无限大介质中沿 Ox 轴的正方向传播，波速为 u.取任意一条波线为 Ox 轴，并取 O 作为 Ox 轴的原点.假定 O 点处（即 $x=0$ 处）质元的振动表达式为

$$y_0(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)$$

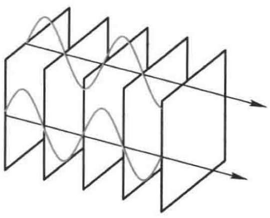


图 11-7　平面简谐波

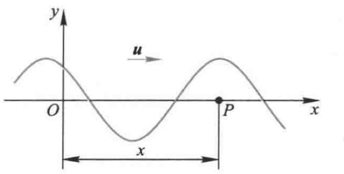


图 11-8　推导波动表达式用图

式中 y_0 是 O 点处质元在时刻 t 离开其平衡位置的位移.现在考察波线上另一任意点 P，该点离开 O 点的距离为 x，因为振动是从 O 点处传过来的，所以 P 点振动的相位将落后于 O 点.如果振动从 O 传到 P 所需的时间为 t'，那么，在时刻 t，P 点处质元的位移就是 O 点处质元在 $t-t'$ 时刻的位移（从相位来说，P 点将落后于 O 点，其相位差为 $\omega t'$）.由于所讨论的是平面波，而且在无吸收的均匀介质中传播，所以各质元的振幅相等（理由见下节），于是 P 点处质元在时刻 t 的位移为

$$y_P(t)=A\cos[\omega(t-t')+\phi_0]$$

若介质中的波速为 u，则 $t'=\frac{x}{u}$，代入上式并将下角标 P 省去得到

$$\boxed{y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]} \qquad (11-7)$$

即可根据一点的振动方程推出 y(x,t).

上式所表示的是波线上任一点（距原点为 x）处的质元任一瞬时的位移，这就是我们所需要的沿 Ox 轴方向前进的平面简谐波的波动表达式（或波函数）.

如果波沿 Ox 轴负方向传播，那么 P 点处质元的振动状态要比 O 点处质元早一段时间，P 点的相位比 O 点超前 $\omega\frac{x}{u}$，所以沿 Ox 轴负方向传播的平面余弦波的波函数为

$$\boxed{y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]} \qquad (11-8)$$

三. 平面波的波面方程

一、平面波的波动方程

将平面简谐波波函数 $y=A\cos\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$ 分别对 t 和 x 求二阶偏导数，得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-A\frac{\omega^2}{u^2}\cos\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

比较上列两式，即得

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad (11-11)$$

—平面波的波动方程

式(11-11)反映一切平面波的共同特征，称为平面波的波动方程. 任何物质运动，只要它的运动规律符合式(11-11)的形式，就可以肯定它是以 u 为传播速度的波动过程.

四. 波的叠加 . 干涉

现在用简谐波的表式对驻波进行定量描述. 为此，设两波的振幅都是 A，初相 $\varphi_{01}=\varphi_{02}=0$，把沿 Ox 轴的正方向传播的波写为

$$y_1=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

把沿 Ox 轴负方向传播的波写为

$$y_2=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

其合成波为

$$y=y_1+y_2=A\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

即

$$\boxed{y=\left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\frac{2\pi}{T}t} \quad (11-39)$$

由上式可看出，合成以后各点都在作同周期的谐振动，但各质元的振幅为 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$，即驻波的振幅与位置有关（与时间无关）. 振幅最大值发生在 $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|=1$ 的点，因此波腹的位置可由

$$\frac{2\pi}{\lambda}x=k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

来决定，即

$$\boxed{x=k\frac{\lambda}{2}} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \qquad (11-40)$$

这就是波腹的位置. 由此可见，相邻两个波腹间的距离为

$$x_{k+1}-x_k=\frac{\lambda}{2}$$

同样，振幅的最小值发生在 $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|=0$ 的点，因此，波节的位置可由

$$\frac{2\pi}{\lambda}x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

来决定，即

$$\boxed{x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \qquad (11-41)$$

这就是波节的位置. 可见相邻两个波节之间的距离也是 $\lambda/2$.

五. 多普勒效应