4.8 电池的故障是电动汽车的核心问题, 设相继两次事故之间的时间 T 服从参数为 1/40 的指数分布, 求概率 $P(X > 45)$, 以及求最小的 τ 使得 $P(X > t) \geqslant 60\%$.

4.9 设乘客在一公交车站等待公交车的时间服从参数为 1/6 的指数分布, 某乘客若等待时间超过 10 分钟则换乘出租车离开. 该乘客一个月内有 10 天乘公交站 (每天是否乘出租车相互独立), 用 Y 表示该乘客因未等到公交车而换乘出租车的次数, 求 Y 的分布函数.

4.10 设随机变量 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \ , \end{cases}$$

求期望 $E(X)$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)$.

4.11 设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(4, 49)$, 问题: i) 求概率 $P(3 < X \leqslant 7)$, $P(|X| \leqslant 4)$ 和 $P > 6$; ii) 求常数 c 使得 $P(X > c) = P(X \leqslant c)$; iii) 求常数 a 至多有多大时满足 $P(X > d) \geqslant 0.9$.

4.12 设一批产品的寿命 $X \sim \mathcal{N}(180, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$, 要保证有 $P(140 < X \leqslant 220) \geqslant 0.9$ 成立, 则 σ 最大值是多少.

4.13 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\sigma.$$

4.14 若 $X \sim N(0,1)$,对任意实数 $\epsilon > 0$, 求证

$$P(X \geqslant \epsilon) \geqslant \frac{1}{3} e^{-\frac{(\epsilon+1)^2}{2}}$$

4.15 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = |X|$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

4.16 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 求随机变量 $Y = e^X$ 的密度函数.

4.17 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 求随机变量 $Y = X^2$ 和 $Z = 2X^2 + 1$ 的密度函数.

4.18 若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 求随机变量 $Y = aX$ $(a > 0)$ 的概率分布.

4.19 若随机变量 $X \sim U(0,1)$, 求随机变量 $Y = -\ln X$ 和 $Z = e^X$ 的概率分布.

4.20 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x/\pi & x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{其它} \ . \end{cases}$$

求 $Y = \sin X$ 的密度函数.

4.21 **大作业:** 编程生成 100000 在 $(0,1)$ 区间上均匀分布的随机数, 并以此生成伯努利分布、二项分布、泊松分布、几何分布、指数分布、正太分布的随机数, 需要将各种分布的参数作为输入变量, 最后查资料验证方法的正确性.