计算方法 **Spring 2023**

Homework 4

Instructor: Lijun Zhang *Name:* 张运吉, *StudentId:* 211300063

第八章

第 1 题

(1) 系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 5\\ 2 & -3 & 10\end{bmatrix}$$

是严格对角占优矩阵，所以雅可比迭代法与高斯-赛德尔迭代法均收敛.

(2)
- 雅可比迭代法
  迭代公式为：
  $$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5}\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)}+\frac{3}{10}\end{cases}$$
  取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 迭代 18 次后，有 $\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{\infty}<10^{-4}$, 此时
  $$\boldsymbol{x}^{(18)}=(-3.9999964,2.9999739,1.9999999)^{\mathrm{T}}$$

- 高斯-赛德尔迭代法
  $$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5}\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k+1)}+\frac{3}{10}x_2^{(k+1)}+\frac{3}{10}\end{cases}$$
  取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 迭代 8 次后，有 $\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{\infty}<10^{-4}$, 此时
  $$\boldsymbol{x}^{(8)}=(-4.000036,2.999985,2.000003)^{\mathrm{T}}$$

第 5 题

(1) • 雅可比法迭代法

迭代公式的矩阵形式:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

$|\lambda \boldsymbol{E} - \mathbf{B}| = (\lambda - 0.8)\left(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32\right)$, $\rho\left(\boldsymbol{B}\right) = 1.1 > 1$

$\therefore$ 雅可比迭代法不收敛.

• 高斯赛德尔迭代法

迭代公式的矩阵形式:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

其中

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix}$$

$\rho\left(\boldsymbol{G}\right) \leqslant \|\boldsymbol{G}\|_\infty = 0.8 < 1$

$\therefore$ 高斯-赛德尔迭代法收敛.

(2) • 雅可比法迭代法

迭代公式的矩阵形式:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$|\lambda \boldsymbol{E} - \mathbf{B}| = \lambda^3$, $\rho\left(\boldsymbol{B}\right) = 0 < 1$

$\therefore$ 雅可比迭代法收敛.

• 高斯赛德尔迭代法

迭代公式的矩阵形式:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

其中

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{G}|=\lambda(\lambda-2)^2, \quad \rho(\boldsymbol{G})=2>1$
$\therefore$ 高斯-赛德尔迭代法不收敛.

第 9 题

SOR 法迭代公式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\omega\left(\frac{1}{4}-x_1^{(k)}+\frac{1}{4}x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\omega\left(1+\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-x_2^{(k)}+\frac{1}{4}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\omega\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x_2^{(k+1)}-x_3^{(k)}\right) \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.
$\omega=1.03$, 迭代 5 次达到精度要求.

$$\boldsymbol{x}^{(5)}=(0.5000043, 0.1000002, -0.4999999)^{\mathrm{T}}$$

$\omega=1$, 迭代 6 次达到精度要求.

$$\boldsymbol{x}^{(6)}=(0.5000038, 0.1000002, -0.4999995)^{\mathrm{T}}$$

$\omega=1.1$, 迭代 6 次达到精度要求.

$$\boldsymbol{x}^{(6)}=(0.5000035, 0.9999989, -0.5000003)^{\mathrm{T}}$$

第 14 题

$\det(\boldsymbol{A})=2a^3-3a^2+1=(1+2a)(1-a)^2$.
当 $-\frac{1}{2}<a<1$ 时，$\det(\boldsymbol{A})>0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.
雅可比迭代矩阵:

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{G})| &= \begin{bmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ a & a & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3-3\lambda a^2+2a^3. \\ &= (\lambda-a)^2(\lambda+2a) \end{aligned}$$

$\rho(\boldsymbol{G})=|2a|$
$\therefore -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时，$\rho(\boldsymbol{G})<1$, 雅可比迭代法收敛.

第九章

第 4 题

特征不等式 $f(\lambda) = -(\lambda-4)^2(\lambda-2)$
原矩阵的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$, 所以可以使用幂等法求解.
取 $\boldsymbol{u}_0 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,4,4)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \max(\boldsymbol{v}_1) = 4 \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,4)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{u}_2 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \max(\boldsymbol{v}_2) = 4 \end{aligned}$$

所以与特征值 4 对应的特征向量为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.