

## § 4 正交变换

一、一般欧氏空间中的正交变换

二、 $n$ 维欧氏空间中的正交变换

# 一、一般欧氏空间中的正交变换

## 1. 定义

欧氏空间 $V$ 的线性变换  $\sigma$  如果保持向量的内积不变，  
即，

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

则称  $\sigma$  为**正交变换**.

**注：** 欧氏空间中的正交变换是几何空间中保持长度不变的正交变换的推广.

## 2. 欧氏空间中的正交变换的刻划

(**定理4**) 设  $\sigma$  是欧氏空间  $V$  的一个线性变换.

下述命题是等价的:

1)  $\sigma$  是正交变换;

2)  $\sigma$  保持向量长度不变, 即

$$|\sigma(\alpha)| = |\alpha|, \quad \forall \alpha \in V;$$

3)  $\sigma$  保持向量间的距离不变, 即

$$d(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = d(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

证明：首先证明1)与2)等价.

1) $\Rightarrow$  2): 若  $\sigma$  是正交变换, 则

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\alpha, \alpha), \quad \forall \alpha \in V$$

即,  $|\sigma(\alpha)|^2 = |\alpha|^2$

两边开方得,  $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|, \quad \forall \alpha \in V,$

2) $\Rightarrow$  1): 若  $\sigma$  保持向量长度不变, 则对  $\forall \alpha, \beta \in V$

有  $(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$  (1)

$$(\sigma(\beta), \sigma(\beta)) = (\beta, \beta), \quad (2)$$

$$(\sigma(\alpha + \beta), \sigma(\alpha + \beta)) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta), \quad (3)$$

把(3)展开得,

$$\begin{aligned} & (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) + 2(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) + (\sigma(\beta), \sigma(\beta)) \\ &= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \end{aligned}$$

再由(1)(2)即得,

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$$

$\therefore \sigma$  是正交变换.

再证明2)与3)等价.

$$2) \Rightarrow 3): \quad \because \sigma(\alpha) - \sigma(\beta) = \sigma(\alpha - \beta),$$

$$\begin{aligned} \therefore d(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) &= |\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| \\ &= |\sigma(\alpha - \beta)| = |\alpha - \beta| \quad (\text{根据 2}) \\ &= d(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

故 3) 成立.

$$3) \Rightarrow 2): \quad \text{若 } d(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = d(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

$$\text{则有, } d(\sigma(\alpha), \sigma(0)) = d(\alpha, 0), \quad \forall \alpha \in V$$

$$\text{即, } |\sigma(\alpha)| = |\alpha|, \quad \forall \alpha \in V. \quad \text{故 2) 成立.}$$

## 二、 $n$ 维欧氏空间中的正交变换

1.  $n$ 维欧氏空间中的正交变换是保持标准正交基不变的线性变换.

1). 若  $\sigma$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的正交变换,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是  $V$  的标准正交基, 则  $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$  也是  $V$  的标准正交基.

**事实上, 由正交变换的定义及标准正交基的性质**

**即有,** 
$$\left(\sigma(\varepsilon_i), \sigma(\varepsilon_j)\right) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2). 若线性变换  $\sigma$  使  $V$  的标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  变成标准正交基  $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$ ，则  $\sigma$  为  $V$  的正交变换.

证明：任取  $\alpha, \beta \in V$ ，设

$$\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$$

$$\beta = y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \dots + y_n \varepsilon_n,$$

由  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  为标准正交基，有

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$



$$\text{又 } \sigma(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i \sigma(\varepsilon_i), \quad \sigma(\beta) = \sum_{j=1}^n y_j \sigma(\varepsilon_j)$$

由于  $\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \dots, \sigma(\varepsilon_n)$  为标准正交基, 得

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\therefore (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$$

故  $\sigma$  是正交变换.

## 2. $n$ 维欧氏空间 $V$ 中的线性变换 $\sigma$ 是正交变换

$\iff \sigma$  在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明: " $\Rightarrow$ " 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  为  $V$  的标准正交基, 且

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) &= (\sigma\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_2, \dots, \sigma\varepsilon_n) \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A\end{aligned}$$

当  $\sigma$  是正交变换时, 由 1 知,  $\sigma\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_2, \dots, \sigma\varepsilon_n$  也是  $V$  的标准正交基, 而由标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  到标准正交基  $\sigma\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_2, \dots, \sigma\varepsilon_n$  的过渡矩阵是正交矩阵.

所以,  $A$  是正交矩阵.

" $\Leftarrow$ " 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  为  $V$  的标准正交基, 且

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) A$$

$$\text{即, } (\sigma\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_2, \dots, \sigma\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) A$$

由于当  $A$  是正交矩阵时,  $\sigma\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_2, \dots, \sigma\varepsilon_n$  也是  $V$  的标准正交基, 再由 1 即得  $\sigma$  为正交变换.

**3.** 欧氏空间 $V$ 的正交变换是 $V$ 到自身的同构映射.  
因而有,

1) 正交变换的逆变换是正交变换;

**(由同构的对称性可得之)**

2) 正交变换的乘积还是正交变换.

**(由同构的传递性可得之)**

#### 4. $n$ 维欧氏空间中正交变换的分类:

设  $n$  维欧氏空间  $V$  中的线性变换  $\sigma$  在标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的矩阵是正交矩阵  $A$ , 则  $|A| = \pm 1$ .

- 1) 如果  $|A| = 1$ , 则称  $\sigma$  为**第一类的** (**旋转**);
- 2) 如果  $|A| = -1$ , 则称  $\sigma$  为**第二类的**.

**例**、在欧氏空间中任取一组标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ,  
定义线性变换  $\sigma$  为:

$$\sigma\varepsilon_1 = -\varepsilon_1$$

$$\sigma\varepsilon_i = \varepsilon_i, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

则  $\sigma$  为第二类的正交变换，也称之为**镜面反射**.