标准形

二次型中非常简单的一种是只含平方项的二次型

$$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

它的矩阵是对角阵

$$diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

任意二次型能否经过适当非退化线性替换化成平方和的形式？若能，如何作非退化线性替换？

一、二次型的标准形

1、（定理1）数域P上任一二次型都可经过非退化线性替换化成平方和的形式.

证明： 略.(书P210)

2、二次型的标准形的定义

二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换所变成的平方和形式

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

称为 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的一个**标准形**.

注：1）由定理1任一二次型的标准形是存在的.

2）可应用配方法得到二次型的标准形.

例1、求 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 的标准形.

解：作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \quad \text{即，} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)-6(y_1-y_2)y_3$

$$+2(y_1+y_2)y_3$$

$$=2y_1^{\,2}-2y_2^{\,2}-4y_1y_3+8y_2y_3$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2y_3^{\,2}-2y_2^{\,2}+8y_2y_3$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$

即, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2{z_1}^2 - 2{z_2}^2 - 2{z_3}^2 + 8z_2z_3$

$$= 2{z_1}^2 - 2(z_2 - 2z_3)^2 + 8{z_3}^2 - 2{z_3}^2$$

$$= 2{z_1}^2 - 2(z_2 - 2z_3)^2 + 6{z_3}^2$$

最后令 $\begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = z_2 - 2z_3 \\ w_3 = z_3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z_1 = w_1 \\ z_2 = w_2 + 2w_3 \\ z_3 = w_3 \end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=2w_1^{\ 2}-2w_2^{\ 2}+6w_3^{\ 2}$

所作的非退化线性替换是

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

即 $$\begin{cases}x_1=w_1+w_2+3w_3\\x_2=w_1-w_2-w_3\\x_3=w_3\end{cases}$$

3、（定理2）数域P上任一对称矩阵合同于一个对角矩阵.

即 $\forall A \in P^{n\times n}$, 若 A′ ＝A， 则存在可逆矩阵 $C \in P^{n\times n}$

使C′AC为对角矩阵.

证：由定理1可得.

二、合同的变换法

1. 定义：合同变换是指下列三种变换

（1）互换矩阵的 i,j 两行，再互换矩阵的 i,j 两列;

（2）以数 ***k*** （$k\neq 0$ ）乘矩阵的第 ***i*** 行；再以数 ***k*** 乘矩阵的第 ***i*** 列.

（3）将矩阵的第***i***行的***k***倍加到第 j 行，再将第 i 列的***k***倍加到第 j 列（$i\neq j$).

2. 合同变换法化二次型为标准形

基本原理：

设对称矩阵A与对角矩阵D合同，则存在可逆矩阵C，使 D＝C′AC．

若 $C = Q_1 Q_2 \cdots Q_s$，Q_i为初等阵，则

$$C'AC = Q_s' \cdots Q_2' Q_1' A Q_1 Q_2 \cdots Q_s$$

$$= Q_s'(\cdots(Q_2'(Q_1' A Q_1) Q_2)\cdots) Q_s$$

又，$p(i,j)' = p(i,j)$，　$p(i(k))' = p(i(k))$，

$$p(i,j(k))' = p(j,i(k))$$

所以，$C'AC = Q'_s(\ldots Q'_2(Q'_1 A Q_1)Q_2)\ldots)Q_s$

$$= Q_s(\ldots Q_2(Q_1 A Q_1)Q_2)\ldots)Q_s = D$$

就相当于对A作s次合同变换化为D.

又注意到 $C = EQ_1Q_2\ldots Q_s$

所以，在**合同变换**化矩阵A为对角阵D的同时，

对E施行同样的**初等列变换**便可求得可逆矩阵C满足

$C'AC = D.$

基本步骤:

① 写出二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的矩阵A

即 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX,\quad A'=A$

D为对角阵,
且 $D=C'AC$

② $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对E仅作上述合同变换中的初等列变换得C}]{\text{对A作合同变换化为对角矩阵D}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$

③ 作非退化线性替换X=CY，则

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=Y'DY$ 为标准形.

注意：

合同变换化对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\neq 0$ 为对角阵D时

i）若$a_{11}\neq 0$，作合同变换：将A的第一行的 $\frac{-a_{j1}}{a_{11}}$ 倍加到第 j 行，再将所得矩阵的第一列的 $\frac{-a_{1j}}{a_{11}}$ 倍加到第 j 列，j=2,3,….n 则

$$A\to\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \dots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ii) 若$a_{11}=0$，而有某个$a_{ii}\neq 0$，作合同变换：互换1, i 两行，再互换1, i 两列，所得矩阵的第1行第1列处元素为$a_{ii}\neq 0$，转为情形i)，即

$$A \to \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ & & * & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

iii) 若$a_{ii}=0$, $i=1,2,\ldots n$.则必有某个$a_{ij}\neq 0(i\neq j)$，作合同变换：将第 j 行加到第 i 行，再将第 j 列加到第 i 列，所得矩阵第 i 行第 i 列处元素为$2a_{ij}\neq 0$.转为情形ii).

iv) 对 i）中A_1重复上述做法.

例2　用合同变换求下面二次型的标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$$ （同例1）

解：$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-3\\1&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_1+c_2]{}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&-3\\-2&-3&0\\1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&-\frac{1}{2}&-2\\0&-2&-2\\1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-2\\0&-2&-2\\1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&4\\0&-2&-2\\1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2c_2]{}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&4&-2\\1&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&0&6\\1&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&6\\1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

令 $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

则 $C'AC=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$,

作非退化线性替换**X=CY,** 则二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3)=2y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$$

说明:

①对A每施行一次合同变换后所得矩阵必仍为对称矩阵.（因为合同变换保持矩阵的对 称性——可利用这一点检查计算是否正确.）

②对A作合同变换时，无论先作行变换还是先作列变换，结果是一致的.

③可连续作n次初等行（列）变换后，再依次作n次相应的初等列（行）变换.

练习： 求下面二次型的标准形，并求出所作的非退化线性替换.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2^2$$
$$+2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2$$

答案： 作非退化线性替换

$$X = CY，其中 C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f 的标准形为 $y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$

详解：

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&2&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2-2c_1\\c_3-2c_1\\c_4-c_1}]{}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-2&-3&-1\\2&-3&-4&-1\\1&-1&-1&0\\1&-2&-2&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-2r_1\\r_3-2r_1\\r_4-r_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&-3&-1\\0&-3&-4&-1\\0&-1&-1&0\\1&-2&-2&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3-\frac{3}{2}c_2 \\ c_4-\frac{1}{2}c_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{3}{2}r_2 \\ r_4-\frac{1}{2}r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 - c_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2c_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $C'AC = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

作非退化线性替换**X=CY**，则 ***f*** 的标准形为

$$y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$$

三、小结

基本概念

1、二次型的标准形

2、合同变换

基本结论

定理1、任一数域P上的二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 都可经过一适当的非退化线性变换X＝CY化为标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

定理2、数域P上任一对称矩阵合同于一 个对角矩阵.