§2 线性空间的定义与简单性质

一、线性空间的定义

二、线性空间的简单性质

引例1

在第三章§2中，我们讨论了数域P上的n维向量空间P^n，定义了两个向量的加法和数量乘法：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n),\quad k\in P$$

而且这两种运算满足一些重要的规律, 如

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad 1\alpha=\alpha$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \qquad k(l\alpha)=(kl)\alpha$$

$$\alpha+0=\alpha \qquad (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$$

$$\alpha+(-\alpha)=0 \qquad k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$$

$$\forall \alpha,\beta,\gamma\in P^n,\quad \forall k,l\in P$$

引例2

数域P上的一元多项式环P[x]中，定义了两个多项式的加法和数与多项式的乘法，而且这两种运算同样满足上述这些重要的规律，即

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

$$f(x)+0=f(x)$$

$$f(x)+(-f(x))=0 \qquad \forall f(x),g(x),h(x)\in P[x],$$

$$1f(x)=f(x) \qquad \forall k,l\in P$$

$$k(l)f(x)=(kl)f(x)$$

$$(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x)$$

$$k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$$

一. 线性空间的定义

设V是一个非空集合，P是一个数域，在集合V中定义了一种代数运算，叫做**加法**：即对 $\forall \alpha, \beta \in V$，在V中都存在唯一的一个元素 γ 与它们对应，称 γ 为 α 与 β 的**和**，记为 $\gamma = \alpha + \beta$；在P与V的元素之间还定义了一种运算，叫做**数量乘法**：即 $\forall \alpha \in V, \forall k \in P$，在V中都存在唯一的一个元素δ与它们对应，称δ为 k 与 α 的**数量乘积**，记为 $\delta = k\alpha$. 如果加法和数量乘法还满足下述规则，则称V为数域P上的**线性空间**：

加法满足下列四条规则： $\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$

① $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

② $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

③ 在V中有一个元素0，对$\forall \alpha \in V$，有 $\alpha+0=\alpha$

（具有这个性质的元素0称为V的**零元素**）

④ 对 $\forall \alpha \in V$, 都有V中的一个元素β，使得

$\alpha+\beta=0$；（β称为α的**负元素**）

数量乘法满足下列两条规则：

⑤ $1\alpha=\alpha$　　⑥ $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

数量乘法与加法满足下列两条规则：

⑦ $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$　　⑧ $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

注：

1． 凡满足以上八条规则的加法及数量乘法称为**线性运算**.

2．线性空间的元素也称为**向量**，线性空间也称**向量空间**．但这里的向量不一定是有序数组.

3．线性空间的判定：

若集合对于定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算封闭但不满足八条规则中的任一条，则此集合就不能构成线性空间.

例1 引例1, 2中的 P^n, $\mathrm{P}[x]$ 均为数域 P上的线性空间.

例2 数域 P上的次数小于 n 的多项式的全体，再添上零多项式作成的集合，按多项式的加法和数量乘法构成数域 P上的一个线性空间，常用 $P[x]_n$表示.

$$P[x]_n = \{ f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in P \}$$

例3 数域 P上 $m \times n$矩阵的全体作成的集合, 按矩阵的加法和数量乘法，构成数域 P上的一个线性空间，用$P^{m\times n}$表示.

例4 令 $V=\left\{f(A)\,\middle|\,f(x)\in R[x],A\in R^{n\times n}\right\}$

即n 阶方阵A的实系数多项式的全体，则V关于矩阵的加法和数量乘法构成实数域R上的线性空间.

证：根据矩阵的加法和数量乘法运算可知

$$f(A)+g(A)=h(A),\quad kf(A)=d(A)$$

其中，$k\in R$，$h(x),d(x)\in R[x]$

又V中含有A的零多项式，即零矩阵0，为V的零元素.

以$f(x)$的各项系数的相反数为系数作成的多项式记为$-f(x)$，则$f(A)$有负元素$-f(A)$. 由于矩阵的加法与数乘满足其他各条，故V为实数域R上的线性空间.

例5

记全体正实数的集合为R^+,在其中定义加法与数乘如下：

对$\alpha,\beta\in R^+,\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$；对$\alpha\in R^+,k\in R,k\circ\alpha=\alpha^k$.求证：

R^+构成线性空间.

证明：首先，对$\forall\alpha,\beta\in R^+,\alpha\oplus\beta=\alpha\beta\in R^+$

对$\forall\alpha\in R^+$，$\forall k\in R$，$k\circ\alpha=\alpha^k\in R^+$

即知R^+对加法与数乘封闭.　又

$$1)\alpha\oplus\beta=\alpha\beta=\beta\alpha=\beta\oplus\alpha$$

$$2)(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma=(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$$

$3)1\oplus\alpha=1\cdot\alpha=\alpha$,则知1为$R^+$的零元素

$4)\alpha\oplus\dfrac{1}{\alpha}=\alpha\dfrac{1}{\alpha}=1$（零元素）,则知$\alpha$存在负元素$\dfrac{1}{\alpha}$

$$5)\ 1\circ\alpha=\alpha^1=\alpha$$

$$6)\ k\circ(l\circ\alpha)=k\circ(\alpha^l)=(\alpha^l)^k=\alpha^{kl}=(kl)\circ\alpha$$

$$7)\ (k+l)\circ\alpha=\alpha^{k+l}=\alpha^k\alpha^l=\alpha^k\oplus\alpha^l=(k\circ\alpha)\oplus(l\circ\alpha)$$

$$8)\ k\circ(\alpha\oplus\beta)=k\circ(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^k=\alpha^k\beta^k$$

$$=\alpha^k\oplus\beta^k=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)$$

因此，R^+确实构成线性空间.