

# 离散数学作业 Problem Set 16

## Problem 1

令 $\langle D_{12}, | \rangle$ 表示12的所有正因子组成的偏序集。

- (1) 证明 $\langle D_{12}, | \rangle$ 是一个偏序格，并由此定义运算 $*$ 和 $\circ$ ，证明 $\langle D_{12}, *, \circ \rangle$ 是对应的代数格
- (2) 按照(1)的定义，说明 $\langle D_{12}, *, \circ \rangle$ 是否是一个有补格
- (3) 按照(1)的定义，说明 $\langle D_{12}, *, \circ \rangle$ 是否是一个分配格

## Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格。

- (1)  $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;
- (2)  $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$ ;
- (3)  $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ ;
- (4)  $L = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\}$ .

### Problem 3

设 $L$ 是格，求以下公式的对偶式：

$$(1) a \wedge (a \vee b) \preceq a;$$

$$(2) a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

$$(3) b \vee (c \wedge a) \preceq (b \vee c) \wedge a.$$

### Problem 4

设 $L$ 是格， $a, b, c \in L$ ，且 $a \preceq b \preceq c$ ，证明 $a \vee b = b \wedge c$ 。

### Problem 5

证明：证明：设 $\langle L, \preceq \rangle$  为一个有补分配格，则 $L$ 中所有元素的补元唯一。

### Problem 6

设 $\langle L, \preceq \rangle$ 是格，任取 $a \in L$ ，令 $S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$ ，证明 $\langle S, \preceq \rangle$ 是 $L$ 的子格。

### Problem 7

令 $I$ 是格 $L$ 的非空子集，若满足 $\forall a, b \in I, a \vee b \in I$ 和 $\forall a \in I, \forall x \in L, x \preceq a \Rightarrow x \in I$ ，则 $I$ 是 $L$ 的一个理想。

证明： $L$ 的任意理想 $I$ 是 $L$ 的子格

### Problem 8

令 $\langle A, \preceq \rangle$ 表示一个有限全序集。证明：

- (1)  $A$ 是一个格并且是有界格
- (2) 若 $A$ 的元素超过两个，那么它不可能是有补格。
- (3)  $A$ 是分配格

## Problem 9

证明在任意格中，均有

$$(1) \ x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$(2) \ x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$