

# 离散数学作业 Problem Set 17

## Problem 1

设  $B$  是布尔代数,  $B$  中的表达式  $f$  是  $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$ .

- (1) 化简  $f$ ;
- (2) 求  $f$  的对偶式  $f^*$ .

## Problem 2

在布尔代数中, 证明:

- (1)  $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$  ;
- (2)  $\forall a, b \in B (a \preceq b \Leftrightarrow b' \preceq a')$ , 其中  $a'$  表示  $a$  的补元.

## Problem 3

设  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  是布尔代数, 在  $B$  上定义二元运算  $\oplus$ ,  $\forall x, y \in B$  有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

请回答:

- (1)  $\langle B, \oplus \rangle$  能否构成代数系统?
- (2)  $B$  在  $\oplus$  下是否有单位元? 有哪些元素有逆元?

## Problem 4

设  $B$  是布尔代数,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$ , 证明:

$$(1) (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \dots \wedge a_n'$$

$$(2) (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \dots \vee a_n'$$

## Problem 5

设  $B_1, B_2, B_3$  是布尔代数, 证明: 若  $B_1 \cong B_2, B_2 \cong B_3$ , 则  $B_1 \cong B_3$ .

## Problem 6

今有  $x, y, z$  三个布尔变元, 用  $xyz$  表示 0-7 之间的一个二进制数。定义布尔函数  $F$ : 当  $xyz$  是一个斐波那契数时  $F(x, y, z) = 1$ , 否则  $F(x, y, z) = 0$ 。

(1) 给出  $F$  的真值表。

(2) 以“布尔积之布尔和”的形式给出  $F$  的表达式 (无需化简)。

(3) 化简该表达式。

## Problem 7

在布尔代数中, 对一个包含若干运算 (不一定为二元运算) 的集合  $S$ , 若任意布尔函数都可以使用仅包含  $S$  中运算的公式表出, 称  $S$  是“完备集”。请证明:

(1)  $S = \{\wedge, \vee, '\}$  是完备集, 其中  $'$  为补运算;

(2)  $S = \{\wedge, \vee\}$  不是完备集;

(3) 存在基数为 1 的完备集。

## Problem 8

在布尔代数中，

- 对一条布尔表达式  $A$ ，可以通过对每一步运算增加括号，使其具有唯一明确的运算顺序，例如

$$x \vee y \wedge z \vee w = (x \vee (y \wedge z)) \vee w$$

在这样的表达式中，若将  $\wedge$  和  $\vee$  互换，将 0 和 1 互换，得到的表达式称为  $A$  的“对偶式”，记为  $A^*$ ；

- 对一条布尔表达式  $A$ ，记  $v$  为一种赋值方案，对出现在  $A$  中的所有变量确定一个真值，并记  $v(A)$  为对表达式  $A$  使用方案  $v$  进行赋值后表达式的值。对一种赋值方案  $v$ ，记  $v'$  为其相反赋值，即： $v'$  将  $v$  中赋值为 0 的变量赋值为 1，反之亦然。

请证明：

- (1) 若  $A$  和  $A^*$  互为对偶式，同时  $v$  和  $v'$  互为相反赋值，则  $v(A^*) = (v'(A))'$ ；（提示：用数学归纳法）
- (2) 若  $A \Leftrightarrow B$ ，则  $A^* \Leftrightarrow B^*$ 。（提示：用上一题的结论）