离散数学作业 Problem Set 7

Problem 1

确定所有 Web 页上的关系 R 是否为自反的，对称的，反对称的和传递的，其中 $(a,b) \in R$ 当且仅当：

a) 每个访问 Web 页 a 的人也访问了 Web 页 b

b) 在 Web 页 a 和 b 上没有公共链接 (公共链接：指向同一个网页的链接)

c) 在 Web 页 a 和 b 上至少有一条公共链接 (公共链接：指向同一个网页的链接)

d) 存在一个 Web 页包含了到 Web 页 a 和 Web 页 b 的链接

Problem 2

找出下面“定理证明”中的错误。

“定理”：设 R 是集合 A 上的对称的和传递的关系，则 R 是自反的。

“证明”：设 $a \in A$。取元素 $b \in A$ 使得 $(a,b) \in R$。由于 R 是对称的，所以有 $(b,a) \in R$。现在使用传递性，由 $(a,b) \in R$ 和 $(b,a) \in R$ 可以得出 $(a,a) \in R$。

Problem 3

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系。从集合 B 到集合 A 的**逆关系**，记作 R^{-1}，**补关系** $\bar{x}$ 是有序对 $\{(a,b)|(a,b) \notin R\}$ 的集合。

证明：集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的。

Problem 4

设 R 是集合 A 上的自反关系，证明对所有正整数 n，R^n 也是自反的。

Problem 5

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系，由以下矩阵表示。

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵。

a)$R_1 \cup R_2$　　b)$R_1 \cap R_2$　　c)$R_2 \circ R_1$

d)$R_1 \circ R_1$　　e)$R_1 \oplus R_2$

Problem 6

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的关系的传递闭包

a) $\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$

b) $\{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$

c) $\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$

d) $\{(a,e),(b,a),(b,d),(c,d),(d,a),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$

Problem 7

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系，$((a,b),(c,d)) \in R$ 当且仅当 $a+d=b+c$。证明 R 是等价关系。

Problem 8

设 R 和 S 是 A 上的对称关系，如果 $R \circ S = S \circ R$，请证明：$R \circ S$ 是对称关系。

Problem 9

设 R 是 A 上的等价关系，请证明：$R^2 = R$。

Problem 10

证明：一个关系的对称闭包的自反闭包和它的自反闭包的对称闭包是相同的。