

离散数学 — Problem 18A

如无特意说明，以后各题只考虑有限个顶点的图。

Problem 1

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

Problem 2

令 G 是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳

- a) 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加
- b) 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少

Problem 3

度序列：一个图的度序列是由图的各个顶点度按非递增序排列的序列（书 P.561）

判断下列序列是否能作为简单图的度序列。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

- a) 7,6,5,4,3,2,1,0
- b) 3,3,3,3
- c) 5,4,2,1,1,1
- d) 5,4,3,2,2

Problem 4

设无向图 G 有 ν 个顶点， ε 条边， $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的顶点的度，证明 $\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{\nu} \leq \Delta(G)$ 。（其中 $\frac{2\varepsilon}{\nu}$ 称为图的**顶点平均度**）

Problem 5

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无自环的无向图。

- a) 证明: G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a , 当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$;
- b) 证明或反驳: 如果 $a > 0$, 那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

Problem 6

有 n 支球队 ($n \geq 4$), 已经比赛完了 $n+1$ 场, 证明一定有一个球队比赛了至少 3 场

Problem 7

证明: 不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图, 其边数 m 必满足 $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。