第五章 二次型

- 二次型的矩阵表示
- 标准形
- 唯一性
- 正定二次型

问题的引入：

解析几何中

中心与坐标原点重合的有心二次曲线

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

选择适当角度 θ，逆时针旋转坐标轴

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\cos\theta + y'\sin\theta \end{cases}$$

$$f = a'x'^2 + c'y'^2$$

(标准方程)

代数观点下

二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

作适当的非退化线性替换 $\downarrow$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

只含平方项的多项式

(标准形)

二次型的矩阵表示

一、n元二次型

1、定义：设P为数域， $a_{ij}\in P, i,j=1,2,\cdots,n,$

n个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\
+a_{22}x_2^2+\cdots\cdots\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\
+a_{33}x_3^2+\cdots+2a_{3n}x_3x_n\\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
\qquad ①
$$

称为数域P上的一个n元二次型.

注意

1) 为了计算和讨论的方便,式①中 $x_{ij}(i<j)$ 的系数写成 $2a_{ij}$.

2) 式① 也可写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$$

2、二次型的矩阵表示

1） 约定①中$a_{ij}=a_{ji}$，$i<j$，由 $x_ix_j=x_jx_i$，有

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\,a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad ②
\end{aligned}
$$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $(A\in p^{n\times n})$

则矩阵A称为**二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵**.

2) 令 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，由

$$X'AX=(x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

$$= x_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + x_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + \cdots + x_n\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

于是有 $\underline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX}$.

注意:

1）二次型的矩阵总是对称矩阵,即 $A' = A$.

2）二次型与它的矩阵相互唯一确定，即

若 $X'AX = X'BX$ 且 $A' = A$，$B' = B$，则

$A = B$.

（这表明在选定文字 $x_1, x_2, \ldots, x_n$下，二次型

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX$ 完全由对称矩阵A决定.)

正因为如此，讨论二次型时矩阵是一个有力的工具.

例1　1）实数域R上的2元二次型 $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$

2）实数域R上的3元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 3x_2x_3 + 7x_3^2$$

3）复数域C上的4元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = ix_1x_2 + \sqrt{3}x_1x_4 + 5x_2^2 + (3+i)x_2x_3$$

它们的矩阵分别是：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3/2 \\ 3 & 3/2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ i/2 & 5 & (3+i)/2 & 0 \\ 0 & (3+i)/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

二、非退化线性替换

1、定义： $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是两组文字，

$c_{ij}\in P, i,j=1,2,\dots n$ ，关系式

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases} \qquad ③$$

称为由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$到$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个线性替换；

若系数行列式$|c_{ij}|\neq 0$, 则称③为非退化线性替换.

2、线性替换的矩阵表示

令 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$

则③可表示为**X=CY** ④

若|C| ≠0，则④为非退化线性替换.

注 1）③或④为非退化的 $\Leftrightarrow C=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$ 为可逆矩阵 .

2）若X＝CY为非退化线性替换，则有非退化线性替换 $Y=C^{-1}X$.

3、二次型经过非退化线性替换仍为二次型

事实上，

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX \xlongequal[|C|\neq 0]{X=CY} (CY)'A(CY)$$

$$=Y'(C'AC)Y \xlongequal{令B=C'AC} Y'BY=g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

又 $B'=(C'AC)'=C'A'C=C'AC=B$

即，B为对称矩阵.

$\therefore\ Y'BY=g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$是一个 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 二次型.

三、矩阵的合同

1、定义：设 $A,B\in P^{n\times n}$，若存在可逆矩阵 $C\in P^{n\times n}$，使 $B=C'AC$，则称A与B**合同**.

注: 1）合同具有

反身性： $A=E'AE$

对称性： $B=C'AC,|C|\neq 0\Rightarrow A=(C^{-1})'B(C^{-1})$

传递性： $B=C'_1AC_1, D=C'_2BC_2,|C_1|\neq 0,|C_2|\neq 0$

$$\Rightarrow D=C'_2(C'_1AC_1)C_2=(C_1C_2)'A(C_1C_2)$$

$|C_1C_2|=|C_1||C_2|\neq 0$，即$C_1C_2$可逆.

2）合同矩阵具有相同的秩.

$$B = C'AC,\ C\text{可逆} \Rightarrow \text{秩}(B) = \text{秩}(A)$$

3）与对称矩阵合同的矩阵是对称矩阵.

$$A' = A, B = C'AC,\ C\text{可逆}$$

$$\Rightarrow B' = (C'AC)' = C'A'C = C'AC = B$$

2、经过非退化线性替换，新二次型矩阵与原二次型矩阵是合同的.

进而，有：若$A' = A$，$B' = B$，

二次型X´AX可经非退化线性替换化为二次型Y´AY

$\Longleftrightarrow$ A与B合同.

例1　证明：矩阵A与B合同，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\lambda_{i1} & & & \\ & \lambda_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{in}\end{pmatrix},$$

$i_1, i_2, \cdots, i_n$是1,2,…,n的 一个排列.

证：作二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX = \lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 x_2{}^2 + \cdots + \lambda_n x_n{}^2$$

对 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = x_{i_1} \\ y_2 = x_{i_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_{i_n} \end{cases}$$

则二次型化为（注意 x_{i_j} 的系数为 λ_{i_j}）

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX = \lambda_{i_1} y_1{}^2 + \lambda_{i_2} y_2{}^2 + \cdots + \lambda_{i_n} y_n{}^2$$

$$= Y'BY$$

故矩阵A与B合同.

练习 写出下列二次型的矩阵

1. $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

2. $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\\7&8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

3. $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$

4. $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，其中 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.

答案

1. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 6 \\ 5/2 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} n-1/n & -1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1/n & n-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1/n & -1/n & -1/n & \cdots & n-1/n \end{pmatrix}$

4. 解：$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\tfrac{2}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2+\tfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\tfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

—

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\tfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j)$$

$$=\tfrac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\tfrac{2}{n}\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

四、 小结

基本概念

n元二次型：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX$

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\quad A'=A$$

非退化线性替换：

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$

，或X=CY， |C| ≠0.

矩阵的合同：$B=C'AC$，$C\in P^{n\times n}$可逆.

基本结论

1、二次型经过非退化线性替换仍为二次型.

2、二次型X′AX可经非退化线性替换化为二型Y′BY

$\Leftrightarrow$ A与B合同，即存在可逆$C \in P^{n\times n}$,使 $B = C'AC$

3、矩阵的合同关系具有反身性、对称性、传递性.