第六章　线性空间(下)

- 线性子空间
- 子空间的交与和
- 子空间的直和
- 线性空间的同构

一、线性子空间

1、线性子空间的定义

设V是数域P上的线性空间，集合 $W \subseteq V(W \neq \varnothing)$

若W对于V中的两种运算也构成数域P上的线性空间,

则称W为V的一个**线性子空间**，简称为**子空间**.

注： ① 线性子空间也是数域P上一线性空间，它也有基与维数的概念.

② 任一线性子空间的维数不能超过整个空间的维数.

2、线性子空间的判定

定理：设V为数域P上的线性空间，集合 $W \subseteq V$ $(W \neq \varnothing)$，若W对于V中两种运算封闭，即

$$\forall \alpha, \beta \in W，有 \ \alpha + \beta \in W;$$

$$\forall \alpha \in W, \forall k \in P，有 \ k\alpha \in W$$

则W是V的一个子空间.

可以证明：W为数域P上的线性空间，则W中的向量一定满足线性空间定义中的八条规则.

推论：V为数域P上的线性空间 $W \subseteq V (W \neq \varnothing)$，则W是V的子空间的充要条件是

$$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in W, \forall a, b \in P, a\alpha + b\beta \in W.$$

例1 设V为数域P上的线性空间，只含零向量的子集合 $W=\{0\}$ 是V的一个线性子空间，称之为V的**零子空间**．线性空间V本身也是V的一个子空间.

这两个子空间有时称为**平凡子空间**，而其它的子空间称为**非平凡子空间**.

例2 设V为所有实函数所成集合构成的线性空间，则R[x]为V的一个子空间.

例3 $P[x]_n$是$P[x]$的的线性子空间.

例4 n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

的全部解向量所成集合W对于通常的向量加法和数量乘法构成的线性空间是n维向量空间P^n的一个子空间，称W为方程组$(*)$的**解空间**.

注① $(*)$的解空间W的维数$=n-$秩(A)，$A=(a_{ij})_{s\times n}$；

② $(*)$的一个基础解系就是解空间W的一组基.

二、一类重要的子空间
——生成子空间

定义： V为数域P上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in V$,

则子空间

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r \mid k_i\in P, i=1,2,\cdots,r\}$$

称为V的由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **生成的子空间**，

记作 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的一组 **生成元**.

例6 在P^n 中，

$$\varepsilon_i=(0,\cdots,0,\underset{i}{1},0\cdots,0),\quad i=1,2,\cdots,n$$

为P^n的一组基，$\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in P^n$

有 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$

故有 $P^n=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$

即P^n 由它的一组基生成.

事实上，任一有限维线性空间都可由它的一组基生成.

类似地，还有

$$P[x]_n=L(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})$$
$$=\left\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\,\middle|\,a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in P\right\}$$

有关结论

1、 设W为n维线性空间V的任一子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是W的一组基，则有 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

2、（定理3）

1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为线性空间V中的两组向量，则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

2）生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的维数

＝向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩.

证：1）若 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

则对 $\forall\alpha_i, i=1,2,\cdots,r$，有 $\alpha_i\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,

从而 α_i 可被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出；

同理每一个 β_i 也可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

反之，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

$\forall\alpha\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，$\alpha$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，

从而可被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，即 $\alpha\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,

$\therefore\ L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\subseteq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

同理可得，$L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

故，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

2）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩＝t，不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ $(t\le r)$ 为它的一个极大无关组.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 等价，所以,

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$. 由§3定理1，

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的一组基，

所以，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$的维数＝$t$.

推论： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间V中不全为零的一组向量，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\ (r\le s)$ 是它的一个极大无关组，则

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})$$

3、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为P上n维线性空间V的一组基，A为P上一个$n\times s$ 矩阵，若

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

则 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$的维数＝秩$(A)$.

证：设秩(A)＝r，不失一般性，设A的前r列线性无关，并将这r 列构成的矩阵记为A_1，其余s-r列构成的矩阵记为A_2， 则A＝(A_1, A_2)，且

秩(A_1)＝秩(A)＝r， $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A_1$

下证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots k_r\beta_r=0$, 即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=0,$$

从而 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A_1\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=0$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V的一组基，

$\therefore$ $A_1\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=0$ ②

又秩(A_1)＝r，∴方程组②只有零解，即

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0,$$

$\therefore$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

任取 $\beta_j(j=r+1,r+2,\cdots,s)$,

将**A**的第j列添在$\mathbf{A}_1$的右边构成的矩阵记为$\mathbf{B}_j$，则

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r,\beta_j)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B_j$$

设 $l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_r\beta_r+l_{r+1}\beta_j=0,$

即 $$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_j)\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_r \\ l_{r+1} \end{pmatrix}=0,$$

则有 $$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B_j\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_r \\ l_{r+1} \end{pmatrix}=0$$

从而有 $B_j\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_r \\ l_{r+1} \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ ③

而秩(B_j)＝r，∴ ③ 有非零解，故有不全为零的数

$l_1,l_2,\cdots,l_r,l_{r+1}$，使

$$l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_r\beta_r+l_{r+1}\beta_j=\mathbf{0},$$

∴ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_j$ 线性相关.

故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的极大无关组，

所以 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的维数＝r＝秩(A).

注：

由证明过程可知，若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为V的一组基，

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

则向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$与矩阵$A$的列向量组具有相同线性相关性. 所以可对矩阵A作初等行变换化阶梯阵来求向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个极大无关组，从而求出生成子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$的维数与一组基.

例7 在P^4中求由向量α_i (i=1,2,3,4)生成的子空间的基与维数.

$$\begin{cases} \alpha_1 = (2,1,3,1)^T \\ \alpha_2 = (1,2,0,1)^T \\ \alpha_3 = (-1,1,-3,0)^T \\ \alpha_4 = (1,1,1,1)^T \end{cases}$$

解：由

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知向量组α_i (i=1,2,3,4)的秩为3, 且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关,

因此 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$;

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基.

例8　试求向量系

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\1\end{bmatrix},\qquad a_2=\begin{bmatrix}4\\9\\5\\4\end{bmatrix},\qquad a_3=\begin{bmatrix}3\\7\\4\\3\end{bmatrix}$$

所生成的R^4的子空间的基和维数.

解　设　$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$

即
$$\begin{cases}k_1+4k_2+3k_3=0\\3k_1+9k_2+7k_3=0\\2k_1+5k_2+4k_3=0\\k_1+4k_2+3k_3=0\end{cases}$$

解此线性方程组得

$$k_2 = 2k_1, \quad k_3 = -3k_1$$

于是有

$$a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0,$$

故a_1, a_2, a_3线性相关，又显见a_1与a_2（或a_2与a_3,或a_1与a_3）线性无关，因此所论子空间维数是2，即

$$\dim L(a_1, a_2, a_3) = 2$$

基底由a_1与a_2（或a_2与a_3,或a_1与a_3）所组成.

4、定理4（基扩充定理）

扩基定理

设W为 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为W的一组基，则这组向量必定可扩充为V的一组基．即在V中必定可找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$，使 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为V的一组基．

证明：对 $n-m$ 作数学归纳法．

当 $n-m=0$ 时，即 $n=m$，

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 就是V的一组基． 定理成立．

假设当 $n-m=k$ 时结论成立．

下面我们考虑 $n-m=k+1$ 的情形.

既然 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 还不是V的一组基，它又是线性无关的，那么在V中必定有一个向量 α_{m+1} 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，把它添加进去，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 必定是线性无关的.

由定理3，子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})$ 是 $m+1$ 维的.

因 $n-(m+1)=(n-m)-1=(k+1)-1=k$,

由归纳假设，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 可以扩充为整个空间V的一组基. 由归纳原理得证.

例7 求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$的维数与一组基，并把它扩充为$P^4$的一组基，其中

$$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T,$$

$$\alpha_4=(1,-1,2,0)^T,\ \alpha_5=(2,1,5,6)^T$$

解：对以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列向量的矩阵A作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

由B知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

故，维 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的一组基.

$$又\quad \because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} 可逆.$$

令 $\gamma = (0,0,1,0)$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \gamma$ 线性无关，从而为P^4的一组基.