Ch 5.3 二维连续随机变量

回顾前一次课

多维随机向量

二维联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$、性质

边缘分布函数：$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$，$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$

二维离散随机变量：联合分布列、边缘分布列

常用分布：多项分布

二维连续型随机变量

设二维随机变量的分布函数为$F(x,y)$，如果存在二元非负可积函数$f(x,y)$使得对任意实数(x,y)有

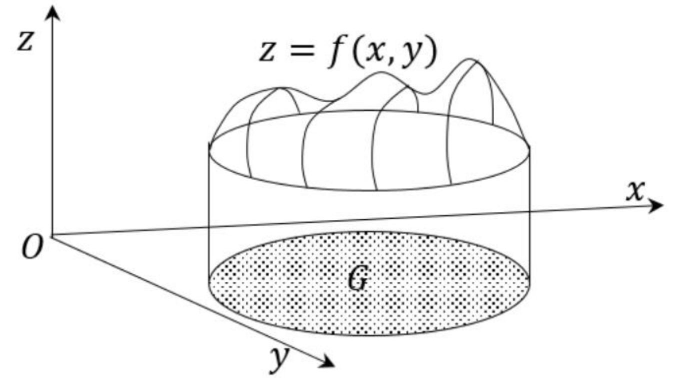
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量，称$\boldsymbol{f(x,y)}$**称为二维随机变量**$\boldsymbol{(X,Y)}$**的概率密度**, 或称为**随机变量**$\boldsymbol{X}$**和**$\boldsymbol{Y}$**的联合概率密度**

概率密度函数的性质

- 非负性：$f(x,y) \geq 0$;
- 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$
- 若$f(x,y)$ 在(x,y) 连续, 则$f(x,y) = \partial^2 F(x,y)/\partial x \partial y$
- 若G为平面上的一个区域, 则点(X,Y)落入G的概率为

$$P((X,Y) \in G) = \iint_{(x,y)\in G} f(x,y)dxdy$$



边缘概率密度

将随机变量X和Y分别看，依然为随机变量，根据随机变量X的边缘分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dt dy = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy \right) dt$$

由此可得随机变量X的边缘概率密度为

$$f_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

边缘概率密度

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 则随机变量X和Y的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

例题

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：1) 常数c, 2) 联合分布函数$F(x,y)$, 3) X和Y的边缘概率密度, 4) $P(X+Y\leq 2)$的值

均匀分布

设G为平面上的一个有界区域，其面积为A_G，若二维随机向量(X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A_G} & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的**二维均匀分布**

二维均匀分布是在区域G上每一点等可能发生，本质上就是(平面)几何概型的随机向量描述.

例题

在坐标原点为中心、半径为R的圆内等可能随机投点. 用 (X,Y)分别表示落点的横坐标和纵坐标, 求随机向量(X,Y)的联合密度函数, 边缘密度函数, 以及(X,Y)落入$X^2+Y^2 \le r^2$ $(0<r\le R)$ 的概率

二维正态分布

对任意实数x, y, 若随机向量(X, Y)的密度函数$f(x, y)$等于

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right)$$

其中常数$\mu_x, \mu_y \in (-\infty, +\infty)$，$\sigma_x, \sigma_y \in (0, +\infty)$和$\rho \in (-1,1)$，则称$(X, Y)$服从**二维正太分布**, 记$(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$

性质

定理：设二维随机变量$(X,Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$，则随机变量$X$和$Y$的边缘分布为

$$X \sim N\left(\mu_x, \sigma_x^2\right) \qquad Y \sim N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right)$$

Ch 5.4 随机变量的独立性

随机变量的独立性

随机事件的独立性：$P(AB) = P(A)P(B)$

设X, Y为二维随机变量，对任意实数x, y，若事件$X \le x$和$Y \le y$相互独立, 即$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$，等价于

$$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

则称随机变量***X*与*Y*相互独立**

随机变量X与Y相互独立等价于随机事件$\{X \le x\}$和$\{Y \le y\}$对任意实数x和y都相互独立; 常数c与任意随机变量相互独立.

离散型随机向量的独立性

设二维离散型随机向量(X,Y)的分布列为$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$
$(i,j=1,2,\cdots)$, 以及X和Y的边缘分布列为$p_{i\cdot}$和$p_{\cdot j}$, 则

$$X\text{和}Y\text{相互独立的充要条件是}p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

例题

设离散型随机变量X和Y相互独立且它们的取值均为$\{1,2,3\}$，已知$P(Y=1)=1/3, P(X=1,Y=1)=P(X=2,Y=1)=1/8$和$P(X=1,Y=3)=1/16$，求$X$和$Y$的联合和边缘分布列

连续随机变量的独立性

设二维连续型随机向量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$，以及X和Y的边缘密度函数分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$, 则

随机变量X和Y相互独立的充要条件是$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

性质

若随机变量X和Y相互独立，则对任意集合$A, B \subseteq \mathcal{R}$，事件$\{X \in A\}$和事件$\{Y \in B\}$相互独立

定理： 设随机变量X与Y相互独立，则$f(X)$与$g(Y)$相互独立（其中$f(x)$和$g(y)$是连续或分段连续函数）