

# 离散数学作业 Problem Set 8

## Problem 1

判断下面定义的几个  $f$  是否为从  $\mathbb{Z}$  到  $\mathbb{R}$  的函数。

a)  $f(n) = \pm n$                       b)  $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$                       c)  $f(n) = 1/(n^2 - 4)$

## Problem 2

判断下列各函数是否为从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的双射函数。

a)  $f(n) = 2x + 1$                       b)  $f(n) = x^2 + 1$   
c)  $f(n) = x^3$                       d)  $f(n) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

## Problem 3

令函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ 。求

a)  $f^{-1}(\{1\})$                       b)  $f^{-1}(\{x | 0 < x < 1\})$   
c)  $f^{-1}(\{x | x > 4\})$

## Problem 4

设函数  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f((x, y)) = x + y + 1$ 。请分别回答下列问题:

a)  $f$  是否为单射? 满射? 双射? 为什么?

b) 令  $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ 且 } f((x, y)) = 3\}$ , 求  $A$ .

c) 令  $B = \{f((x, y)) | x, y \in \{1, 2, 3\} \text{ 且 } x = y\}$ , 求  $B$ .

## Problem 5

设函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(x) = (x, x + 1)$ . 请分别回答下列问题:

a)  $f$  是否为单射? 满射? 为什么?

b)  $f$  的反函数是否存在? 如果存在请求出反函数  $f^{-1}$ , 如果不存在, 请说明理由.

c) 求  $f$  的值域.

## Problem 6

设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ , 其中对任意的  $b \in B, g(b) = \{x | x \in A \text{ 且 } f(x) = b\}$ , 证明: 当  $f$  为满射时,  $g$  为单射.

## Problem 7

假定  $f$  是从  $Y$  到  $Z$  的双射函数,  $g$  是从  $X$  到  $Y$  的双射函数。证明复合函数  $f \circ g$  的反函数可由下式给出  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 。

## Problem 8

a) 证明如果  $S$  是  $m$  元集,  $m$  为正整数, 则在集合  $S$  与集合  $\{1, 2, \dots, m\}$  之间存在一个双射函数。

b) 证明如果  $S, T$  均为  $m$  元集,  $m$  为正整数, 则在集合  $S$  与集合  $T$  之间存在一个双射函数。

## Problem 9

假设  $f$  和  $g$  是函数，证明  $f \cap g$  也是函数。

---