第一次作业

张运吉 211300063

Problem1

证:
a)由Cauchy-Schwarz inequality: $|x^\top y| \le \|x\|\|y\|$, 得:

$$x^\top y + y^\top x \le 2\|x\|\|y\|$$

$$x^\top x + x^\top y + y^\top x + y^\top y \le x^\top x + y^\top y + 2(x^\top x)^{\frac{1}{2}}(y^\top y)^{\frac{1}{2}}$$

$$(x+y)^\top(x+y) \le [(x^\top x)^{\frac{1}{2}} + (y^\top y)^{\frac{1}{2}}]^2$$

开根号，得到:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

得证。
b) 欲证

$$\|x+y\|^2 \le (1+\epsilon)\|x\|^2 + (1+\frac{1}{\epsilon})\|y\|^2$$

只需证

$$x^\top x + y^\top y + x^\top y + y^\top x \le \|x\|^2 + \epsilon\|x\|^2 + \|y\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|y\|^2$$

即

$$x^\top y + y^\top x \le \epsilon\|x\|^2 + +\frac{1}{\epsilon}\|y\|^2$$

因为

$$\epsilon\|x\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|y\|^2 \ge 2(\epsilon\|x\|^2\frac{1}{\epsilon}\|y\|^2)^{\frac{1}{2}} = 2\|x\|\|y\| \ge x^\top y + y^\top x$$

所以成立，证毕。

Problem2

a) 是凸集，证:

$\forall x_1, x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \leq 1\}, x_{11} \leq y_{12}, x_{21} \leq y_{22},$

设 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 = (x,y)$, 则

$$\frac{x}{y} = \frac{\theta x_{11} + (1-\theta)x_{21}}{\theta y_{12} + (1-\theta)y_{22}} \leq \frac{\theta y_{12} + (1-\theta)y_{22}}{\theta y_{12} + (1-\theta)y_{22}} = 1$$

所以

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \leq 1\}$$

证毕。

b) 是凸集， 证:

$\forall x_1, x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \geq 1\}, x_{11} \geq y_{12}, x_{21} \geq y_{22},$

设 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 = (x,y)$, 则

$$\frac{x}{y} = \frac{\theta x_{11} + (1-\theta)x_{21}}{\theta y_{12} + (1-\theta)y_{22}} \geq \frac{\theta y_{12} + (1-\theta)y_{22}}{\theta y_{12} + (1-\theta)y_{22}} = 1$$

所以

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \geq 1\}$$

证毕。

c) 不是凸集， 反例:

令$x_1 = (\frac{1}{2}, 2), y_1 = (2, \frac{1}{2}), \theta = \frac{1}{2},$

则 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 = (\frac{5}{4}, \frac{5}{4}) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | xy \leq 1\}$

d)是凸集， 证:

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | xy \geq 1\}, x_1 y_1 \geq 1, x_2 y_2 \geq 1$

$\forall 0 < \theta < 1$，设$(x_3, y_3) = \theta(x_1, y_1) + (1-\theta)(x_2, y_2)$, 则

$$\begin{aligned} x_3 y_3 &= [\theta x_1 + (1-\theta)x_2][\theta y_1 + (1-\theta)y_2] = \theta^2 x_1 y_1 + (1-\theta)x_2 y_2 + \theta(1-\theta)x_1 y_2 + \theta(1-\theta)x_2 y_1 \\ &\geq \theta^2 + (1-\theta)^2 + 2\sqrt{\theta(1-\theta)x_1 y_2 \theta(1-\theta)x_2 y_1} = \theta^2 + (1-\theta)^2 + 2\theta(1-\theta) = 1 \end{aligned}$$

所以$(x_3, y_3) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | xy \geq 1\}$
证毕。

e) 不是凸集。反例:

Problem3

a)证:

$\forall x_1, x_2 \in P$,有 $Ax_1 \leqslant b$ 和 $Ax_2 \leqslant b$.

$\forall 0 \leq \theta \leq 1, A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \leqslant \theta b + (1-\theta)b = b$

所以 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in P$

所以 P 是一个凸集.

b) 证:

$\because S$ 是凸集.

$\therefore \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$

$\therefore \forall Ax_1, Ax_2 \in A(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \in A(S)$

由于x_1, x_2的任意性我们知道，Ax_1, Ax_2也是$A(S)$中的任意元素，所以相当于

$\forall y_1, y_2 \in A(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in S$

$\therefore A(S)$ 是凸集.

证毕。

c). 证:

$\because S$ 是凸集.

$\therefore \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 我们有 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$

令 $x_1 = Ay_1, x_2 = Ay_2$，$\therefore y_1, y_2 \in A^{-1}(S)$

$\forall Ay_1, Ay_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta Ay_1 + (1-\theta)Ay_2 = A(\theta y_1 + (1-\theta)y_2) \in S$

$\therefore \forall y_1, y_2 \in A^{-1}(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in A^{-1}(S)$

证毕。

Problem4

a). 证:
$\because K^* = \{y | x^T y \geqslant 0, \forall x \in K\}$

$\therefore \forall y_1, y_2 \in S, x^T y_1 \geqslant 0, x^T y_2 \geqslant 0, \forall x \in K$

$\therefore \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta x^T y_1 + (1-\theta)x^T y_2 = x^T(\theta y_1 + (1-\theta)y_2) \geqslant 0$

$\therefore \theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in K^*$

$\therefore K^*$ 是一个凸锥.

b) 证:

欲证此结论，只需证明$\forall y \in V^*$,只有$x^T y = 0, \forall x \in V$，不可能出现$x^T y > 0, \forall x \in V$的情况。

若是$x^Ty>0,\forall x\in V$，则$-x\in V$(因为V是子空间)，$y^T(-x)=-y^Tx<0$

这与V^*的定义矛盾

所以$V^*=V^+=\{y|y^\top v=0,\forall v\in V\}$

证毕。

c) 非负象限的对偶锥就是它本身。

证：记非负象限为A, $A^*=\{y|x^Ty\geq 0,\forall x\in A\}$,

$\forall y\in A^*$, 取$x_i=(0,0,...,1,...,0)\in A, i=1,2,...,n$($x_i$的第i位为1，其余为0)

由$x_i^Ty\geq 0$, 得$y_i\geq 0$(y_i是y的第i个分量)

所以A^*就是非负象限。

Problem5

a). 证:

$\because K^*=\{y|x^Ty\geqslant 0,\forall x\in K\}$

$\therefore \forall y_1,y_2\in S, x^Ty_1\geqslant 0, x^Ty_2\geqslant 0,\forall x\in K$

$\therefore \forall 0\leqslant\theta\leqslant 1, \theta x^Ty_1+(1-\theta)x^Ty_2=x^T(\theta y_1+(1-\theta)y_2)\geqslant 0$

$\therefore \theta y_1+(1-\theta)y_2\in K^*$

$\therefore K^*$ 是一个凸锥.

b). 证:

$\forall y\in K_2^*, x^Ty_{\geq}0,\forall x\in K_2$

$\because K_1\subseteq K_2\therefore\forall x\in K_1, x\in K_2$

$\therefore \forall x\in K_1, x^Ty_{\geq}0$($y$是第一行中的$y$)

即$\forall y\in K_2^*, y\in K_1^*$

$\therefore K_2^*\subseteq K_1^*$

证毕。