

概率统计课程第十三次作业

1. 设总体 $X \sim N(\mu, a^2)$, 从总体中抽两组样本, 容量为 m 和 n . 求两样本均值之差的绝对值小于 ϵ 的概率.
2. 随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda), Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且 X 和 Y 独立. 求证 $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.
3. 证明: 若 $X \sim N(0, 1)$, 则 $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$, 以及

$$\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} (k-1)!! & k \text{ 为偶数} \\ 0 & k \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

4. 设 $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ 是总体 $N(0, a^2)$ 的样本.

$$Z = a(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)^2 + b(Y_m + 2Y_{m-1} + \dots + mY_1)^2.$$

求 a, b 为何值时, Z 服从 χ^2 分布, 并求其分布.

5. 设 X_1, \dots, X_n 和 Y_1, \dots, Y_n 是总体 $X \sim N(0, n)$ 的两样本. 求

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}$$

的分布.

6. 设 X_1, \dots, X_n 是总体 $X \sim N(\mu, 1/4)$ 的样本. 若 μ 未知, 求

$$\Pr \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \geq \epsilon \right].$$

7. 设 X_1, \dots, X_n 是总体 $X \sim N(12, \sigma^2)$ 的样本. 若 σ^2 未知, 但已知样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. 求

$$\Pr \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon \right].$$

分布,第二阶段所需时间服从均值为 0.3 的指数分布,且与第一阶段独立.现有 20 台机器需要修理,求他在 8 h 内完成的概率.

7. 食品店有三种蛋糕出售,由于售出哪一种蛋糕是随机的,因而售出一只蛋糕的价格是一个随机变量,它取 1 元、1.2 元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3、0.2、0.5.若售出 300 只蛋糕.

(1) 求收入至少 400 元的概率.

(2) 求售出价格为 1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率.

8. 一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成,在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10.为了使整个系统起作用,至少必须有 85 个部件正常工作,求整个系统起作用的概率.

9. 已知在某十字路口,一周事故发生数的数学期望为 2.2,标准差为 1.4.

(1) 以 \bar{X} 表示一年(以 52 周计)此十字路口事故发生数的算术平均,试用中心极限定理求 \bar{X} 的近似分布,并求 $P\{\bar{X} < 2\}$.

(2) 求一年事故发生数小于 100 的概率.

10. 某种小汽车氧化氮的排放量的数学期望为 0.9 g/km,标准差为 1.9 g/km,某汽车公司有这种小汽车 100 辆,以 \bar{X} 表示这些车辆氧化氮排放量的算术平均,问当 L 为何值时 $\bar{X} > L$ 的概率不超过 0.01.

11. 随机地选取两组学生,每组 80 人,分别在两个实验室里测量某种化合物的 pH 值.各人测量的结果是随机变量,它们相互独立,服从同一分布,数学期望为 5,方差为 0.3,以 \bar{X}, \bar{Y} 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均.

(1) 求 $P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\}$.

(2) 求 $P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\}$.

12. 公寓有 200 户住户,一户住户拥有汽车辆数 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.1	0.6	0.3

问需要多少车位,才能使每辆汽车都具有一个车位的概率至少为 0.95.

13. 某种电子器件的寿命(小时)具有数学期望 μ (未知),方差 $\sigma^2 = 400$.为了估计 μ ,随机地取 n 只这种器件,在时刻 $t=0$ 投入测试(测试是相互独立的)直到失效,测得其寿命为 X_1, X_2, \dots, X_n ,以 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 作为 μ 的估计,为使 $P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} \geq 0.95$,问 n 至少为多少?

14. 某药厂断言,该厂生产的某种药品对于医治一种疑难血液病的治愈率为 0.8,医院任意抽查 100 个服用此药品的病人,若其中多于 75 人治愈,就接受此断言,否则就拒绝此断言.

(1) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8.问接受这一断言的概率是多少?

(2) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率为 0.7,问接受这一断言的概率是多少?