第2章 行列式

行列式是高等代数的一个重要组成部分。它是研究矩阵、线性方程组、特征多项式、二次型等问题的重要工具. 本章介绍了n级行列式的定义、性质及计算方法，最后给出了它的一个简单应用——克拉姆法则.

第2章 行列式

- n级行列式的定义
- 行列式的性质与计算
- 行列式按一行（列）展开
- 克拉姆法则——行列式的一个简单应用

§ 2.1~2.3　n级行列式的定义

　　本节从二、三级行列式出发，给出n级行列式的概念.

基本内容:

- 二级与三级行列式
- 排列及其逆序数
- n级行列式定义

1.二级与三级行列式

(1)二级行列式

考虑含有两个未知量x_1,x_2的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

为求得上述方程组的解，可利用加减消元得到：

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

上式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得。为便于记忆，引进如下记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称其为二级行列式．据此，解中的分子可分别记为：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ 当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组的解可表为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

例1 解二元线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5 \\ 4x_1 + 3x_2 = -5 \end{cases}$

解: 方程组未知量的系数所构成的二级行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-3) \times 4 = 15 \quad \neq 0$$

方程组有唯一解.又

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -30 \quad , D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 15$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-30}{15} = -2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{15}{15} = 1.$$

(2)三级行列式

主对角线法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三级行列式。数$a_{ij}(i,j=1,2,3)$称为它的元素。

'—'三元素乘积取"+"号；

'…'三元素乘积取"−"号。

例2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解:由主对角线法，有

$$D = 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$
$$-(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4$$
$$=-4-6+32-24-8-4$$
$$=-14$$

例3 解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 26 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

解：系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

方程组有唯一解.又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 55, D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 20, D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -15$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{55}{5} = 11, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{5} = 4, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-15}{5} = -3.$$

2.排列及其逆序数

(1)排列 由自然数1,2,…,n,组成的一个有序数组$i_1 i_2 \ldots i_n$

称为一个n级排列.（总数为 n!个）

如：由1,2,3可组成的三级排列有3！=6个：

123　132　213　231　312　321

注意:上述排列中只有第一个为自然顺序(小→大),其它则或多或少地破坏了自然顺序(元素大小与位置相反)——构成逆序.

(2)排列的逆序数

- **定义：** 在一个n 级排列$i_1 i_2 \ldots i_n$中，若某两数的前后位置与大小顺序相反,即$i_s > i_t (t>s)$,则称这两数构成一个逆序.排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记为$\tau(i_1 i_2 \ldots i_n)$.

例4 $\tau(2413) = 3$ $\tau(312) = 2$

- **奇偶排列：** 若排列$i_1 i_2 \ldots i_n$的逆序数为奇（偶）数,称它为奇（偶）排列.

例5 $\tau(n(n-1)\ldots 321) = 0+1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$

$\tau(135\ldots(2n-1)(2n)(2n-2)\ldots 42) = 2+4\ldots+(2n-2) = n(n-1)$

• **对换：** 在一个排列$i_1 \ldots i_s \ldots i_t \ldots i_n$中，若其中某两数$i_s$和$i_t$互换位置, 其余各数位置不变得到另一排列$i_1 \ldots i_t \ldots i_s \ldots i_n$,这种变换称为一个对换, 记为$(i_s i_t)$.

例6 $$3421 \xrightarrow{(31)} 1423 \xrightarrow{(42)} 1243 \xrightarrow{(43)} 1234$$

$$\tau = 5 \qquad \tau = 2 \qquad \tau = 1 \qquad \tau = 0$$

结论：

①对换改变排列的奇偶性.

②全部n级排列中,奇偶排列各半(各有$n!/2$) .

③任意一个n级排列与标准排列$12 \ldots n$都可以经过一系列对换互变, 且所作对换的个数与该排列有相同的奇偶性.

结论（1）的证明

对换在相邻两数间发生，即

设排列

$$\cdots jk \cdots \qquad (1)$$

经j,k对换变成

$$\cdots kj \cdots \qquad (2)$$

这样排列(1)、(2)中j,k与其他数构成逆序的情况没有变化；而j与k两数构成逆序的情况有变化：

若(1)中jk构成逆序，则（2）中不构成逆序(逆序数减少1）；若(1)中jk不构成逆序，则（2）中构成逆序(逆序数增加1).

一般情形

设排列

$$\cdots j i_1 \cdots i_s k \cdots \qquad (3)$$

经j,k对换变成

$$\cdots k i_1 \cdots i_s j \cdots \qquad (4)$$

易知(4)可由（3）经一系列相邻对换得到:

在（3）中对k经$s+1$次相邻对换成为

$$\cdots kji_1\cdots i_s\cdots \tag{5}$$

在（5）中对j经s次相邻对换成为(4).

也就是说由（3）经$2s+1$次相邻对换后就成为（4).相邻对换改变排列的奇偶性，奇数次这样的对换后排列的奇偶性改变. ||

3. n级行列式定义

- 分析：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

(i)每一项均是取自不同行、不同列的三个元素的乘积构成，除符号外可写为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$

(ii)符号为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}$ “+” 123 231 312 （偶排列）

(iii)项数为 3！=6 “−” 321 213 132 （奇排列）

推广之，有如下n 级行列式定义

- 定义： n级行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \overset{\text{记}}{=} \det(a_{ij})$$

是所有取自不同行、不同列n个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 并冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 的项的和.

(i) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是取自不同行、不同列的n个元素的乘积

(ii)行标按自然顺序排列，列标排列的奇偶性 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 决定每一项的符号；

(iii) $\sum$ 表示对所有的 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 构成的$n!$ 个排列求和.

例4 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义, $D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

和式中仅当 $j_1=n, j_2=n-1, \cdots, j_{n-1}=2, j_n=1$时,

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$$

$$\therefore D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例5 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证： 由定义 $D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

和式中,只有当 $j_n=n, j_{n-1}=n-1,\cdots,j_2=2,j_1=1$时，

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$$

所以 $D=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ‖

结论:上三角行列式的值等于其主对角线上各元素的乘积.

由于数的乘法满足交换律，故而行列式各项中 n 个元素的顺序可以任意交换.一般，可以证明

- **定理:** n级行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的项可以写为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 和 $j_1 j_2 \ldots j_n$ 都是n级排列 .

- **推论:** n级行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的值为

另一定义形式

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

另一定义形式

或

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

思考练习（n级行列式定义）

1.用定义计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

2.写出4级行列式中含有因子$a_{23}a_{41}$并带有负号的项.

答案

1. $D=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}1\times 2\times\cdots\times n$

$=(-1)^{n-1}n!$

2. $-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$

Review 2.1

- n阶行列式定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \overset{\text{记}}{=} Det(a_{ij})$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

例如$n=3$,则一定有$n!=6$个3级排列：

123,　132,　213,　231,　312,　321

$\tau(123)=0$,　$\tau(132)=1$,　$\tau(213)=1$,　$\tau(231)=2$,　$\tau(312)=2$

$\tau(321)=3$

因此共有6项：$a_{11}a_{22}a_{33}$，$-a_{11}a_{23}a_{32}$，$-a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$，$-a_{13}a_{22}a_{31}$

- 上三角行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

§ 2.4 ~2.5 n级行列式的性质与计算

前面我们已经讲到，一个n级的行列式是有n^2个数排成n行n列组成的一个数表，其结果是一个值.这个值由$n!$项组成，而每一项是由行列式的n个元素相乘得到，而每个元素都处在行列式的不同行、不同列.即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \square \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_2}$$

考虑

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将它的行依次变为相应的列，得

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称D^T为D的转置行列式(transposed determinant).

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的元素满足 $(D)_{ij}=(D^T)_{ji}, i.j=1,2,3$

性质1 行列式与它的转置行列式相等.（D=D^{T}）

证： 事实上,若记 $D^T=\det(b_{ij})$,则 $b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$

$$\therefore D^T=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D \qquad \|$$

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

解 $D=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

性质2 互换行列式的两行($r_i \leftrightarrow r_j$)或列($c_i \leftrightarrow c_j$)，行列式的值变号．

按定义二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

交换行列式两行得到$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$，按定义

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

因此

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$，也就是交换两列后行列式的值变号.

现在以三级行列式为例，依定义

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_1c_1 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

交换其第2、第3行，依定义得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 - a_1b_1c_1 - a_3b_1c_2 - a_2b_3c_1$$

$$= -(a_1b_1c_1 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)$$

也就是 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

从二级、三级行列式可以看出，交换一次两行元素，行列式的值变号.

利用上述方法，根据归纳法原理可以证明：任何级的行列式交换任意两行，行列式的值变号.

事实上，任何级的行列式交换任意两列，行列式的值变号. 因此有性质：

互换行列式的两行($r_i \leftrightarrow r_j$)或列($c_i \leftrightarrow c_j$)行列式的值变号.

如果行列式D的两行元素对应相等，则互换这两行元素，值不变，即$D=-D$,因此$D=0$.也就是

推论 若行列式D的两行（列）完全相同,则$D=0.$

由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k(\sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质3 行列式某一行（列）的所有元素都乘以数 k，等于数k乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 **(1) D中一行(列)所有元素为零，则D=0；**

(2) D的两行(列)对应元素成比例，则D=0

性质4 若行列式 某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同 .即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左边 $= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$+ \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \quad = \text{右边} \ \|$$

性质5 行列式D的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变,即

$$(D \overset{r_i+kr_j}{=} D)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i+kr_j}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质（综合）

性质1. 行列式与其转置行列式的值相同（行列互换，其值不变）.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^T$$

性质2. 行列式的任意两行（列）交换，其值变号；

性质3. 用常数k乘行列式的任意一行（列）的各元素，等于用k乘这个行列式；

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质4. 若行列式中任意两行（列）元素成比例，则行列式的值为零；

性质5. 加法定理 若两个行列式只有某一行(列)元素不同，其它元素都相同，则这两个行列式值之和为这不同元素行（列）的对应元素相加，而其它元素不变组成的行列式的值；

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6. 行列式中的一行（列）元素加上另一行（列）元素的常数倍，则行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i+kr_j}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

思考题（1-3）

1.D的两行(列)对应元素成比例，则$D=0$，为什么？

2. 为什么说：行列式中的一行（列）元素加上另一行（列）元素的常数倍，则行列式的值不变？

3.设由行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} \text{是不是等于} A+B\,?$$

为什么！

例2 计算行列式

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\5&1&4\end{vmatrix}\qquad(2)\quad D=\begin{vmatrix}-2&3&2&4\\1&-2&3&2\\3&2&3&4\\0&4&-2&5\end{vmatrix}\qquad(3)\ \begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

解

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\5&1&4\end{vmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-5r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&-9&-11\end{vmatrix}\overset{r_3-9r_2}{=}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&0&34\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times34=-34$$

解

(2)
$$D=\begin{vmatrix}-2&3&2&4\\1&-2&3&2\\3&2&3&4\\0&4&-2&5\end{vmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=}-\begin{vmatrix}1&-2&3&2\\-2&3&2&4\\3&2&3&4\\0&4&-2&5\end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2+2r_1}{=}}-\begin{vmatrix}1&-2&3&2\\0&-1&8&8\\0&8&-6&-2\\0&4&-2&5\end{vmatrix}\underset{r_4+4r_2}{\overset{r_3+8r_2}{=}}-\begin{vmatrix}1&-2&3&2\\0&-1&8&8\\0&0&58&62\\0&0&30&37\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-\frac{30}{58}r_3}{=}-\begin{vmatrix}1&-2&3&2\\0&-1&8&8\\0&0&58&62\\0&0&0&\frac{143}{29}\end{vmatrix}=-[1\times(-1)\times58\times\frac{143}{29}]=286$$

解

(3) $$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overset{r_1+\sum_{i=2}^{4}r_i}{=}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3,4}{\overset{r_i-r_1}{=}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times(1\times2\times2\times2)=48$$

例4　计算n级行列式

$$(1)\ D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解（1）注意到行列式各行(列)元素之和等于$x+(n-1)a$,有

$$D_n \overset{c_1+c_i}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{x+(n-1)a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x-a} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{x-a} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}}$$

$$(2)\ D_n = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}$$

解（2） 注意到行列式各行元素之和等于

$$x + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$D_n \overset{c_1+c_i}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} = (x+\sum_{i=1}^{n} a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=}} (x+\sum_{i=1}^{n} a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+\sum_{i=1}^{n} a_i) x^{n-1}$$

(3)计算箭形行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解 (3)

箭形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1-\frac{1}{a_i}c_i} \begin{vmatrix}1-(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}) & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i})a_2\cdots a_n$$

列变换化箭形行列式为上三角行列式

例4 证明

$$(1)\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = 4abcdef$$

证

$$(1)\text{ 左边} = abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}} abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} -abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcdef = \text{右边}$$

$$(2)\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

证 (2) 左边 $\underset{i=2,3,4}{\overset{c_i - c_1}{=}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\underset{c_4-3c_2}{\overset{c_3-2c_2}{=}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

思考练习 （行列式的性质）

1.计算行列式

$$(1)\ D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (2)\ D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix} (n\geq 2)$$

2.证明

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

思考练习 （行列式的性质）

3. $$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \qquad (a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n)$$

习题

1.(2); 3. 5. 6.; 8.(3);

10.; 13.(2);(4); (5); (6);

14.

思考练习（行列式性质答案）

$$1.(1)D_4 \overset{c_1\leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_4-r_1}{\overset{r_2+r_1,r_3-2r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4+r_2}{\overset{r_3-2r_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_4+r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 1\times(-3)\times 3 = -9$$

$$(2)\ D_n \underset{i=2,3,\cdots,n}{\overset{c_i-c_1}{=}} \begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & \cdots & n-1 \\ a_2+1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+1 & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1-a_2, & \text{当} n=2 \\ 0, & \text{当} n>2 \end{cases}$$

思考练习（行列式性质答案）

$$
2.\text{左边}=\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_1}{=} \begin{vmatrix} a+b & c-a & c+a \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{c_3+c_2}{=} \begin{vmatrix} a+b & c-a & 2c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & 2c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & 2c_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+b & c-a & c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & c_2 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{c_2-c_3}{=} 2\begin{vmatrix} a+b & -a & c \\ a_1+b_1 & -a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & -a_2 & c_2 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2}{=} 2\begin{vmatrix} b & -a & c \\ b_1 & -a_1 & c_1 \\ b_2 & -a_2 & c_2 \end{vmatrix} \overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}
$$

=右边

解

箭形行列式

$$3.\ D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+\frac{a_1}{a_i}c_i} \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i})a_2\cdots a_n = a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

§2.6 行列式按行（列）展开

1.行列式按一行（列）展开

余子式与代数余子式 在n级行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列，余下的元素按原来的顺序构成的n-1级行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij};而$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式.

例1 求出行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

中，元素a_{23}的余子式及代数余子式的值.

解

$$M_{23}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=15-2=13,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-13$$

考察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\ \boxed{A_{11}}\ + a_{12}\ \boxed{A_{12}}\ + a_{13}\ \boxed{A_{13}}$$

三阶行列式可以表示为某一行(列)元素与其对应的代数余子式的乘积之和

行列式按一行（列）展开定理　　n级行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n)$

证 (i)元素a_{ij}位于第1行、第1列,而该行其余元素均为零,即 $a_{ij}= a_{11}$， $a_{1j}=0$ （$j=2,3,\ldots,n$)；此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{由定义}}{=} \sum_{j_1=1}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1\neq 1}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11}\sum_{(j_2 j_3\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$ (上式中第二项得零）

$$= a_{11}M_{11}$$

而 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,故$D= a_{11}A_{11}$ ；

(ii)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将D中第i行依次与前i-1行对调,调换i-1次后位于第1行

D中第j列依次与前j-1列对调,调换j-1次后位于第1列

经(i-1)+(j-1)= i+j-2次对调后, a_{ij} 位于第1行、第1列,即

$$D\overset{\text{由 (i)}}{=}(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

(iii) 一般地

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{由(ii)}}{=} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}$$

同理有 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj}$ ‖

我们考虑另一种情况，例如行列式的第1列和第3列对应元素相同,我们以第3列展开

$$0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}a_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{3+3}a_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{4+3}a_{41}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}[(-1)^{1+3}M_{13}]+a_{21}[(-1)^{2+3}M_{23}]+a_{31}[(-1)^{3+3}M_{33}]+a_{41}[(-1)^{4+3}M_{43}]$$

$$=a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}+a_{41}A_{43}$$

也就是说，第1列的元素分别乘第3列对应元素的代数余子式值为零.

推论 n级行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应的代数余子式的乘积之和为零，即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0 \quad (i\neq s)$$

或 $$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0 \quad (j\neq t)$$

证　考虑辅助行列式

$$0 = D_1 = \begin{array}{c} \left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{2n} \end{matrix}\right| \\ \qquad j\text{列} \qquad\qquad t\text{列} \qquad\qquad \end{array}$$

按第 t 列展开

$$= a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} \quad (j \neq t).$$

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&0\\2&3&1\end{vmatrix}$

解 $\boxed{\text{法1}}$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&0\\2&3&1\end{vmatrix}\overset{\text{按第1行展开}}{=}1\cdot A_{11}+2\cdot A_{12}+3\cdot A_{13}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&2\\2&3\end{vmatrix}$$

$$=1\times2+2\times0+3\times(-4)\ =-10$$

选取“0”多
的行或列

$\boxed{\text{法2}}$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&0\\2&3&1\end{vmatrix}\overset{\text{按第2行展开}}{=}0\cdot A_{21}+2\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}$$

$$=2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=2\times(-5)=-10$$

例3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$

解

$$D\overset{r_i-r_{i-1}}{\underset{i=4,3,2}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&6&12\\0&4&18&48\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&6&12\\4&18&48\end{vmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-4r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&6\\0&10&36\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&6\\10&36\end{vmatrix}=72-60=12$$

计算时，性质与按行（列）展开定理结合使用.

例4 计算n级行列式

$$(1)D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \qquad (2)D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$(1)D_n \overset{\text{按第 1 列展开}}{=} a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

$$=x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

$$(2)D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

按第1列展开

$$=\quad a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

$$=(-1)^{n+1}n\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-2&0\\0&0&\cdots&0&n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n!$$

例5 证明范得蒙行列式（*Vandermonde*)

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \qquad (n\ge 2)$$

其中$\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$表示所有可能的$(x_i-x_j)(j<i)$的乘积.

证 用数学归纳法

$n=2$时,$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$,结论正确;

假设对n-1级范得蒙行列式结论成立，以下考虑 n 级情形.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=n,n-1,\cdots,2}{\overset{r_i-x_1r_{i-1}}{=}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2^2-x_2x_1 & x_3^2-x_3x_1 & \cdots & x_n^2-x_nx_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1}-x_2^{n-1}x_1 & x_3^{n-1}-x_3^{n-2}x_1 & \cdots & x_n^{n-1}-x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\
0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)
\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{\text{按第1列展}}{\underset{\text{提取公因子}}{=}} \prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \qquad \|
$$

例6 计算行列式

$$(1)D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$$

解

$$D\overset{\substack{ar_2-r_1\\ a^2r_3-r_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ b+a & c+a\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(b-c)$$

$$(2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$$

解

$$D\ \overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2\\r_2-r_1}}{=}\ \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&6&12\\0&4&18&48\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&6&12\\4&18&48\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-4r_2}}{=}\ \begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&6\\0&10&36\end{vmatrix}=12$$

$$(3)\ D=\begin{vmatrix}3&1&1&5\\0&a&b&c\\0&a^2&b^2&c^2\\0&a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$$

解

$$D=3\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=3abc\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-ar_1\\r_3-a^2r_1}}{=}3abc\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}=3abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\b+a&c+a\end{vmatrix}$$

$$=3abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

例 7 已知4级行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

求$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$及$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}$的值.其中$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式.

解 $\boxed{\text{法1}}$ 直接计算$A_{i4}(i=1,2,3,4)$的值,然后相加（略）.

$\boxed{\text{法2}}$ 利用行列式的按列展开定理，简化计算.

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\3&1&8&0\\-2&1&4&3\\5&1&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&-5&-1&0\\0&5&10&3\\0&-9&-13&5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-5&-1&0\\5&10&3\\-9&-13&5\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}{=}\begin{vmatrix}-5&-1&0\\0&9&3\\1&-11&5\end{vmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_1}{=}-\begin{vmatrix}1&-11&5\\0&9&3\\-5&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+5r_1}{=}-\begin{vmatrix}1&-11&5\\0&9&3\\0&-56&25\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}9&3\\-56&25\end{vmatrix}=-393$$

思考练习 （按行展开定理）

习题 p.100

15(1),16(4),17(1)、(3),18(1)、(2)、(4),

计算行列式

$$1.D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$2.D_{n+1}=\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

思考练习（按行展开定理详解1）

$$1.D_n \overset{\text{按第1列展}}{=} a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{2n+1}a^{n-2} = a^n - a^{n-2}$$

思考练习（按行展开定理详解2）

$$2.D_{n+1} \overset{r_1+\sum_{i=2}^{n+1} r_i}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n+1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第1行展}}{=} (n+1)\cdot(-1)^{1+(n+1)} \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n$$

2. 拉普拉斯（Laplace）定理

- *k*级子式　在n级行列式中，任意选定*k*行、*k*列（$1\le k\le n$）位于这些行列交叉处的k^2个元素按原来顺序构成的一个*k*级行列式N，称为行列式D的一个*k*级子式.
- *k*级子式N的余子式及代数余子式　在D中划去*k*行、*k*列后，余下的元素按原来顺序构成的一个n-k级行列式M，称为*k*级子式N的余子式;而

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$$

为其代数余子式.这里$i_1,i_2,\ldots,i_k,j_1,j_2,\ldots,j_k$分别为 *k*级子式N的行标和列标.

定理 (拉普拉斯Laplace)

在n级行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，

任意取定k行$(1\le k\le n)$,由这k行元素组成的k级子式M_1, $M_2,\ldots,M_t$ $(t=C_n^k)$ 与它们的代数余子式的乘积之和等于D，即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$$

其中A_i是M_i的代数余子式

例7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&5&1\end{vmatrix}$

解

$$D\overset{\text{按第1、2行展}}{=}N_1A_1+N_2A_2+N_3A_3+N_4A_4+N_5A_5+N_6A_6$$

$$=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix}-1&3\\5&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\3&0\end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(1+3)}\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&0\\3&0\end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(1+4)}\begin{vmatrix}0&-1\\0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\4&0\end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(2+3)}\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}2&0\\4&0\end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(2+4)}\begin{vmatrix}0&-1\\3&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}(-1)^{(1+2)+(3+4)}\begin{vmatrix}0&0\\30&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&3\\5&1\end{vmatrix}+0+0+0+0+0=(4-6)\cdot(-1-15)=32.$$

一般地（P82例 3 ）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} & c_{r1} & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix}$$

下面我们讨论两个同级行列式的相乘.

例如我们以二级行列式为例：

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

因此

$$D_1 D_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1)$$

$$= a_1 b_2 c_1 d_2 - a_2 b_1 c_1 d_2 - a_1 b_2 c_2 d_1 + a_2 b_1 c_2 d_1$$

下面我们形成一个矩阵

$$C = \begin{vmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & a_1c_2 + a_2d_2 \\ b_1c_1 + b_2d_1 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1c_1 + a_2d_1)(b_1c_2 + b_2d_2) - (a_1c_2 + a_2d_2)(b_1c_1 + b_2d_1)$$

$$= a_1b_2c_1d_2 - a_2b_1c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 + a_2b_1c_2d_1$$

因此得到 $C = D_1D_2$

C的元素$c_{ij}(i, j = 1,2)$为D_1的第i行与D_2的第j列对应元素相乘，然后相加得到.

一般地，我们不加证明给出下列结果.

定理 两个n级行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个n级行列式

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中c_{ij}是D_1的第i行元素分别与D_2的第j列的对应元素乘积的和：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

§2.7 克拉姆(Cramer)法则

下面以行列式为工具,研究含有n个未知量、n个方程的n元线性方程组的问题.

定理（克拉默法则） 如果n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots x_n = \frac{D_n}{D} \qquad (2)$$

其中D_j(j=1,2,…,n)是把系数行列式D中第j列的元素换成方程组的常数项$b_1,b_2,\ldots,b_n$所构成的n级行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理的结论有两层含义：①方程组（1）有解；

②解唯一且可由式(2)给出.

证明 首先证明方程组(1)有解.

将$x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 1, 2, \cdots, n)$代入第$i$个方程的左端.

将D_j按第j列展开.

$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}$$

$$=\frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1})+a_{i2}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2})$$

$$+\cdots+a_{in}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn})]$$

$$=\frac{1}{D}[b_1(a_{i1}A_{11}+a_{i2}A_{12}+\cdots+a_{in}A_{1n})+b_2(a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+\cdots+a_{in}A_{2n})$$

$$+\cdots+b_i(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})+\cdots+b_n(a_{i1}A_{n1}+a_{i2}A_{n2}+\cdots+a_{in}A_{nn})]$$

(这其中就是红式的这一项值为b_iD,其余的都为零）

$$=\frac{1}{D}b_iD=b_i$$

即(2)式是方程组的解.

下面证明解唯一.设$x_j=c_j(j=1,2,\ldots,n)$为方程组 (1) 的任意一个解，则

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=b_n \end{cases}$$

以D的第j列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j},\ldots, A_{nj}$依次乘以上式各等式,

得

$$\begin{cases}(a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n)A_{1j}=b_1A_{1j}\\(a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n)A_{2j}=b_2A_{2j}\\\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n)A_{nj}=b_nA_{nj}\end{cases}$$

然后相加，经整理的

$$(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj})c_1+\cdots+(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj})c_j+\cdots+(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj})c_n=(\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj})$$

从而 $Dc_j=D_j$, 由于 $D\neq 0$, 所以 $c_j=\dfrac{D_j}{D}\ (j=1,2,\cdots,n)$

这就证明了解的唯一性.

推论1　如果线性方程组(1)无解或有两个不同解，则D=0；

推论2　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$，则方程组只有零解;而若方程组有非零解，则$D=0$.

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 + a^3x_4 = 1 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 + b^3x_4 = 1 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 + c^3x_4 = 1 \\ x_1 + dx_2 + d^2x_3 + d^3x_4 = 1 \end{cases}$$ $(a,b,c,d$为互不相同的常数

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \neq 0$$

由克拉默法则,方程组有唯一解易得:

$$D_1 = D, D_2 = D_3 = D_4 = 0$$

方程组的唯一解: $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0.$

例2 若齐次线性方程组有非零解，求λ值.

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\lambda^2$$

方程组有非零解，则$D=0$.于是$\lambda=3$或$\lambda=0$.

例3 求平面上经过两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的直线方程.

解 设其方程为$ax+by+c=0$,(a,b不全为0)，若$P(x,y)$为直线上任一动点,则P、P_1、P_2三点的坐标满足：

$$ax+by+c=0，\quad ax_1+by_1+c=0，\quad ax_2+by_2+c=0,$$

可见方程组$\begin{cases} xt_1+yt_2+t_3=0 \\ x_1t_1+y_1t_2+t_3=0 \\ x_2t_1+y_2t_2+t_3=0 \end{cases}$有非零解$(a,b,c)$,

因此

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad ①$$

故曲线上的点(x,y)必满足方程①；易见,凡满足①式的点(x,y)也必然在该曲线上.故①即为所求

习题 P102　19（2）