§6 子空间的交与和

一、子空间的交

二、子空间的和

三、子空间交与和的有关性质

一、子空间的交

1、定义

设V_1、V_2为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1 \cap V_2 = \{a \mid a \in V_1 \text{且} a \in V_2\}$$

也为V的子空间，称之为V_1与V_2的**交空间**.

事实上，$\because 0 \in V_1, 0 \in V_2$，$\therefore 0 \in V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$

任取$\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$，即 $\alpha, \beta \in V_1$，且$\alpha, \beta \in V_2$，

则有 $\alpha + \beta \in V_1, \alpha + \beta \in V_2$，$\therefore$ $\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$

同时有 $k\alpha \in V_1, k\alpha \in V_2$，$\therefore$ $k\alpha \in V_1 \cap V_2$，$\forall k \in P$

故 $V_1 \cap V_2$为V的子空间.

显然有，$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$,

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$$

2、推广——多个子空间的交

$V_1, V_2, \cdots, V_s$ 为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^{s} V_i = \{\alpha \mid \alpha \in V_i, i = 1,2,3,\cdots,s\}$$

也为V的子空间，称为 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 的交空间.

二、子空间的和

1、定义

设V_1、V_2为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1+V_2=\{a_1+a_2\mid a_1\in V_1, a_2\in V_2\}$$

也为V的子空间，称之为V_1与V_2的**和空间**.

事实上，$\because 0\in V_1, 0\in V_2$， $\therefore 0=0+0\in V_1+V_2\neq\varnothing$

任取 $\alpha,\beta\in V_1+V_2$， 设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \beta=\beta_1+\beta_2$，

其中，$\alpha_1,\beta_1\in V_1, \alpha_2,\beta_2\in V_2$，则有

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\\&=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)\in V_1+V_2\end{aligned}$$

$$k\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2)=k\alpha_1+k\alpha_2\in V_1+V_2,\quad \forall k\in P$$

例在三维几何空间R^3中，用V_1表示过坐标原点的x-y平面，V_2表示一个通过坐标原点并且垂直V_1的直线，那么$V_1 \cap V_2 = \{0\}$，$V_1 + V_2$是整个三维几何空间.

注意：

V的两子空间的并集未必为V的子空间．例如

$$V_1=\{(a,0,0)|\ a\in R\},\ V_2=\{(0,b,0)|\ b\in R\}$$

皆为R^3的子空间，但是它们的并集

$$V_1\bigcup V_2=\{(a,0,0),(0,b,0)|a,b\in R\}$$

$$=\{(a,b,0)|a,b\in R\text{且}a,b\text{中至少有一是}0\}$$

并不是R^3的子空间．因为它对R^3的运算不封闭，如

$$(1,0,0),\ (0,1,0)\in V_1\bigcup V_2$$

但是 $(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)\notin V_1\bigcup V_2$

三、子空间的交与和的有关性质

1、设 V_1,V_2,W 为线性空间V的子空间

1）若 $W\subseteq V_1, W\subseteq V_2$，则 $W\subseteq V_1\cap V_2$.

2）若 $V_1\subseteq W, V_2\subseteq W$，则 $V_1+V_2\subseteq W$.

2、设 V_1,V_2 为线性空间V的子空间，则以下三条件等价:

1) $V_1\subseteq V_2$

2) $V_1\cap V_2=V_1$

3) $V_1+V_2=V_2$

特别地有

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$$

这是由于

$$\begin{aligned}
&L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\\
&\qquad=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_i\in P, i=1,2,\cdots,s\}\\
&\qquad+\{l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t \mid l_j\in P, j=1,2,,\cdots,t\}\\
&\qquad=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t \mid k_i,l_j\in P,\\
&\qquad\qquad\qquad i=1,2,\cdots,s,\ j=1,2,\cdots,t\}\\
&\qquad=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)
\end{aligned}$$

就是说有:

3、 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\beta_{2,}\cdots,\beta_t$ 为线性空间V中两组向量，则

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_{2,}\cdots,\beta_t)$$

$$=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_{2,}\cdots,\beta_t)$$

4、维数公式

设 V_1,V_2为线性空间V的两个子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

或 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

定理7：设V_1,V_2是线性空间V的两个子空间，则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2) \qquad (*)$$

证明：设 $\dim(V_1)=n_1,\dim(V_2)=n_2,\dim(V_1\cap V_2)=m.$

(i)设$m\neq 0$,取$V_1\cap V_2$的一组基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，将其分别

扩充为V_1,V_2的基：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m} \quad (1)$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m} \quad (2)$$

以下证明

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m} \quad (3)$$

为V_1+V_2的一组基 .

由于 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m})$

$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m})$

有$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m})$.

下证 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m}$
线性无关 .设

$$k_1\alpha_1 + \cdots k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots p_{n_1-m}\beta_{n_1-m} + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = 0$$

并令$\delta = k_1\alpha_1 + \cdots k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}$

$= -q_1\gamma_1 - \cdots - q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}$ （4）

知$\delta \in V_1$, $\delta \in V_2$,从而$\delta \in V_1 \cap V_2$，因$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是
$V_1 \cap V_2$ 的基，故δ可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出.令

$$\delta = l_1\alpha_1 + \cdots l_m\alpha_m$$

则由（4）$l_1\alpha_1+\cdots l_m\alpha_m+q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0$

由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$线性无关,得

$$l_1=\cdots=l_m=q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$$

因此 δ=0. 从而由（4）

$$k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=0$$

由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m}$线性无关，又得

$$k_1=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0$$

此即证明了式(3)线性无关,故而为V_1+V_2的基. 因此维数公式成立.

(ii)若m=0, 则$V_1\cap V_2=\{0\}$, 此时如果$\dim V_1$, $\dim V_2$至少有一个为{0},则式(*)显然成立;如果$\dim V_1$, $\dim V_2$均不为{0},则各取V_1, V_2的一组基，将它们合起来即为V_1+V_2的一组基，从而式(*)成立.

例4 在线性空间$P^{4\times4}$中, V_1为上三角矩阵全体构成的子空间,V_2为对称矩阵全体构成的子空间, V_3为反对称矩阵全体构成的子空间.

(1)求$V_1\cap V_2$, $V_1\cap V_3$, $V_2\cap V_3$;

(2)求V_1+V_2, V_1+V_3, V_2+V_3.

解:(1) $V_1\cap V_2$为全体对角矩阵; $\dim(V_1\cap V_2)=4$

$V_1\cap V_3$为零矩阵; $\dim(V_1\cap V_3)=0$

$V_2\cap V_3$为零矩阵; $\dim(V_1\cap V_3)=0$

(2) $V_1+V_2= P^{4\times4}$

$V_1+V_3= P^{4\times4}$

$V_2+V_3= P^{4\times4}$.　　$A=(A+A^T)/2+(A-A^T)/2$

例如$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix}$

注： 从维数公式中可以看到，子空间的和的维数往往比子空间的维数的和要小.

例如，在R^3中，设子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ V_2 = L(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

其中，$\varepsilon_1 = (1,0,0)$，$\varepsilon_2 = (0,1,0)$，$\varepsilon_3 = (0,0,1)$

则，$\dim V_1 = 2$，　$\dim V_2 = 2$

但，$V_1 + V_2 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + L(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = R^3$

$$\dim(V_1 + V_2) = 3$$

由此还可得到，$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$，$V_1 \cap V_2$ 是一直线.

推论： 设 V_1, V_2 为 n 维线性空间V的两个子空间，

若 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$，则 V_1, V_2 必含非零的公共

向量. 即 $V_1 \cap V_2$ 中必含有非零向量.

证：由维数公式有

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2)$$

又 $V_1 + V_2$ 是V的子空间，∴ $\dim(V_1 + V_2) \le n$

若 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$，则 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

故 $V_1 \cap V_2$ 中含有非零向量.

另一方面

$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

由前面的讨论知， 秩（$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$)=3,且$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$是其一个极大无关组，因此

$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$即为和空间的一组基.

例2、在 P^n 中，用 W_1,W_2 分别表示齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad ①$$

与

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases} \qquad ②$$

的解空间，则 $W_1 \cap W_2$ 就是齐次线性方程组③

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases} \qquad ③$$

的解空间.

证：设方程组①,②,③分别为

$$AX = 0, \qquad BX = 0, \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$$

设W为③的解空间，任取 $X_0 \in W$，有

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0, \quad \text{从而} \begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{即}$$

$$AX_0 = 0,\ BX_0 = 0.\ \therefore\ X_0 \in W_1 \cap W_2$$

反之，任 取，$X_0 \in W_1 \cap W_2$，则有

$$AX_0 = 0, BX_0 = 0,\ \text{从而} \begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0,$$

$$\therefore\ X_0 \in W$$

故 $W = W_1 \cap W_2$.

例3、在 P^4 中，设

$$\alpha_1=(1,2,1,0),\ \alpha_2=(-1,1,1,1)$$

$$\beta_1=(2,-1,0,1),\ \beta_2=(1,-1,3,7)$$

（1）求$L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的一组基和维数；

（2）求$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$的一组基和维数.

解：1) 任取 $\gamma \in L(\alpha_1,\alpha_2) \cap L(\beta_1,\beta_2)$

设 $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$,

则有 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$,

即 $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3y_2 = 0 \\ x_2 - y_1 - 7y_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

解 $(*)$ 得 $$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 4t \\ y_1 = -3t \\ y_2 = t \end{cases}$$ （t 为任意数）

$$\therefore \quad \gamma = t(-\alpha_1 + 4\alpha_2) = t(\beta_2 - 3\beta_1)$$

令 t=1，则得 $L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的一组基

$$\gamma = -\alpha_1 + 4\alpha_2 = (-5,2,3,4)$$

$$\therefore \quad L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2) = L(\gamma)$$ 为一维的.

2) $L(\alpha_1,\alpha_2) + L(\beta_1,\beta_2) = L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

对以 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为列向量的矩阵A作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -5 & -3\\ 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -6\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

由B知，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大无关组.

$\therefore\ L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1)$ 为3维的，

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为其一组基.