南京大學

地址：南京市仙林大道163号　邮编：210046
网址：http://www.nju.edu.cn

P1. $\forall x(P(x)\wedge R(x))$

$\therefore \forall x P(x),\ \forall x R(x)$

又 $\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\wedge S(x)))$

$\therefore \forall x(Q(x)\wedge S(x))$

$\therefore \forall x\, S(x)$

$\therefore \forall x(R(x)\wedge S(x))$

P2. $\exists x\, \neg P(x)$

$\therefore \neg P(c)$

$\because \forall x(P(x)\vee Q(x))$

$\forall x(\neg Q(x)\vee S(x))$

$\forall x(R(x)\rightarrow \neg S(x))$

$\therefore P(c)\vee Q(c)$

$\neg Q(c)\vee S(c)$

$R(c)\rightarrow \neg S(c)$

$\therefore P(c)\vee S(c)$ $\because \neg P(c)$

$\therefore S(c)$

$\therefore \neg R(c)$

$\therefore \exists x\, \neg R(x)$

P3. 反证法：设有整数 a, b (只需讨论 $a, b \geq 0$ 即可).

使得 $4m+3=a^2+b^2$

① a, b 恒为奇或偶，显然不成立

② a, b 一奇一偶，

$(2n_1)^2+(2n_2+1)^2=4m+3$

$\therefore m=n_1^2+n_2^2+n_2-\frac{1}{2}$

显然 m 不是自然数

$\therefore$ 不存在 a, b, 使得 $a^2+b^2=4m+3$

综上，原命题得证.

P4. 设 $x=2n$, $y=2m+1$ (n. m为

则 $5x+5y=10n+10m+5$

$=2(5n+5m+2)+1$

$\therefore 5x+5y$ 是一个奇整数

P5. 猜想 $\frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

（x、y为不同正实数）

证：当 $x、y>0$ 且 $x \neq y$ 时

$x^2+y^2 \geq 2xy$

$\therefore \frac{1}{4}(x^2+y^2) \geq \frac{1}{2}xy$

$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)+\frac{1}{4}(x^2+y^2)$

$> \frac{1}{4}(x^2+y^2+2xy)$

$= \frac{1}{4}(x+y)^2$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} > \frac{x+y}{2}$

P6. 用穷举法：（只需讨论 x、y 时大于0 即可）等于

$\because 2x^2+5y^2=14$

$\therefore x^2 \leq 7,\ y^2 \leq \frac{14}{5}$

$\therefore x=0,1,2 \quad ,y=0,1$

① $y=0$，$x^2=7$（舍）

② $y=1$，$x^2=\frac{9}{2}$（舍）

因此，$2x^2+5y^2=14$ 没有 x 和 y 的整数解.

P7. 证：设 a 为有理数

b 为无理数，不妨取（$a<b$）

对于 $c=\frac{a+b}{2}$，则 c 为无理数

可知 $a<\frac{a+b}{2}=c<b$

∴ ~~有理数 a~~

即有理数 a 和无理数 b 之间存在一个无理数 c.

∴ 命题得证.

P8. 设存在有理数 $r=\frac{p}{q}$（p、q 互素）.

使得 $(\frac{p}{q})^3+\frac{p}{q}+1=0$

则 $p^3+pq^2+q^3=0$

若 p、q 全为奇，则奇+奇+奇 ≠ 0

若 p 为奇，q 为偶，则奇+偶+偶 ≠ 0

若 p 为偶，q 为奇，则偶+偶+奇 ≠ 0

若 p、q 全为偶，则可存在 $p^3+pq^2+q^3=0$

但又与 p、q 互素矛盾

因此，不存在有理数，使得 $r^3+r+1=0$

P9. 反证法：

若 $\sqrt[3]{2}$ 有理数.

则 $\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}$（p、q 互素）

$p^3=2q^3 \Rightarrow$ p 为偶

$q^3=\frac{1}{2}p^3 \Rightarrow$ q 为偶

与 p、q 互素矛盾

所以 $\sqrt[3]{2}$ 为无理数.

P10. 驳斥：

取 $a=2,\ b=\frac{1}{2}$

则 $a^b=\sqrt{2}$ 为无理数.