正定二次型

一、正定二次型

1、定义：实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 若对任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 都有

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_n) > 0$$

则称 f 为**正定二次型**.

如，二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 是正定的；

因为只有当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

但另一方面二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$

就不是正定的. 为什么？

2、正定性的判定

1）实二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定

$$\Leftrightarrow \forall x \in R^n, 若x \neq 0, 则x^T A x > 0$$

2）设实二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

$$f \text{ 正定} \Leftrightarrow d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

证：充分性显然. 下证必要性，若 f 正定，取

$$x_0 = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)^T, i = 1, 2, \cdots, n$$

则 $f(x_0) = d_i x_i^2 > 0$, 所以 $d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$

3）非退化线性替换不改变二次型的正定性.

证明：设正定二次型 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x^T Ax,$

经过非退化线性替换 x＝Cy化成

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=y^T(C^T AC)y=g(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

任取一组不全为零的数 $k_1,k_2,\dots,k_n$， 令

$$y_0=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},\quad x_0=Cy_0=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

则，

$$f(c_1,c_2,\dots,c_n)=x_0^T Ax_0=y_0^T(C^T AC)y_0=g(k_1,k_2,\dots,k_n)$$

又由于C可逆，$y_0 \neq 0$，所以 $x_0 \neq 0$,

即 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 不全为0.

$\therefore \quad g(k_1,k_2,\ldots,k_n) = f(c_1,c_2,\ldots,c_n) > 0$

$\therefore \quad g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$正定.

反之，实二次型 $g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$可经过非退化

线性替换 $y = C^{-1}x$ 变到实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

同理，若 g 正定，则 f 正定.

所以，非退化线性替换不改变二次型的正定性.

4）（定理5）n元实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$正定

$\Leftrightarrow$秩 f =n= p（ f 的正惯性指数）.

证：设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$经非退化线性替换 $x=Cy$

变成标准形

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

由2)，f正定 $\Leftrightarrow d_i>0, i=1,2,\cdots,n$

即，f 的正惯性指数p=n=秩f .

5）正定二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的标准形为

$$d_1 y_1^{\,2} + d_2 y_2^{\,2} + \cdots + d_n y_n^{\,2}，\quad d_i > 0,\quad i = 1, 2, \cdots, n$$

规范形为

$$z_1^{\,2} + z_2^{\,2} + \cdots + z_n^{\,2}.$$

二、正定矩阵

1、定义： 设A为实对称矩阵，若二次型 $x^T Ax$ 是正定的，则称A为**正定矩阵**.

2、正定矩阵的判定

1）实对称矩阵A正定 $\Longleftrightarrow$ A与单位矩阵E合同.

$\because$ 正定二次型的规范形为 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = z^T Ez$

2） 实对称矩阵A正定

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵C，使$A = C^T C$.

可见，正定矩阵是可逆矩阵.

$\because$

A与E合同，即存在可逆矩阵C，使$A = C^T EC = C^T C$

这是从对称正定矩阵一定与单位矩阵合同，来证明对称正定矩阵$A \Leftrightarrow A = C^T C, C$是非退化线性替换矩阵.

事实上，若R是任一$n \times n$的非奇异矩阵，则矩阵$B = R^T R$一定是对称正定矩阵.这是由于

对$\forall x \neq 0 \in R^n$, $\quad x^T Bx = x^T R^T Rx = (Rx)^T (Rx) > 0 \quad ?$

故对任一n级非奇异矩阵$R, B = R^T R$一定是对称正定矩阵.

另一方面，若R是n级非奇异矩阵，则对n维非零向量x,

$$x^T (RR^T)x = (R^T x)^T (Rx) > 0$$

故若R是n级非奇异矩阵，则RR^T一定是对称正定矩阵

3）实对称矩阵A正定 $\Leftrightarrow$ A与任一正对角矩阵合同.

$\because$ 若 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$

为任一正对角矩阵，则

$$D=\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$$

即，D与E合同.

例1、设 A 为 n 阶正定矩阵，证明

（1）A^{-1}是正定矩阵；

（2）$kA(k>0)$是正定矩阵；

(3) A的伴随矩阵A^*是正定矩阵；

（4）A^m 是正定矩阵（m为任意整数）；

（5）若 B 亦是正定矩阵，则 A＋B 也是正定矩阵；

证:（1）由于 A 正定，则存在可逆矩阵 P，使

$P^T AP = E$，于是有，

$$(P^T AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^T = ((P^{-1})^T)^T A^{-1}(P^{-1})^T = E$$

令$Q = (P^{-1})^T$，则Q可逆，且$Q^T A^{-1}Q = E$，

即，A^{-1}与单位矩阵E合同.　　故，A^{-1}正定.

A对称正定，$\exists$非奇异矩阵C，$A = C^T C$，而$A^{-1} = C^{-1}C^{-T}$，A^{-1}正定

（2）由于A 正定，对$\forall x \in R^n, x \neq 0$，都有$x^T Ax > 0$，

因此有 $x^T(kA)x = kx^T Ax > 0$. 故，kA正定.

（3）A正定，则存在可逆矩阵C，使$A=C^TC$，于是

$|A|=|C^TC|=|C|^2>0$　　又$A^*=|A|A^{-1}$（$|A|>0$）

由（1）（2）即得 A^* 正定.

（4）由于 A 正定，知A^m为n阶可逆对称矩阵，

当$m=2k$时，$A^m=A^{2k}=A^kA^k=(A^k)^TEA^k$，

即，A^m与单位矩阵E合同，所以 A^m正定.

当 $m=2k+1$ 时，$A^m = A^{2k+1} = A^k A A^k = (A^k)^T A A^k$,

即，A^m与正定矩阵A合同，而 A与单位矩阵E合同，

所以 A^m与E合同，即 A^m 正定.

（5）由于A、B正定，对 $\forall x \in R^n, x \neq 0$, 都有

$$x^T A x > 0, \qquad x^T B x > 0$$

因此有 $x^T (A+B) x = x^T A x + x^T B x > 0.$

故，A＋B 正定.

3、正定矩阵的必要条件

1）实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定

$$\Rightarrow a_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n.$$

证：若A正定，则二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^TAx$

正定. 取 $x_i=(0,\ldots,0,\underset{第i◆}{1},0,\ldots,0)'$

则 $f(x_i)=x_i^TAx_i=a_{ii}>0,\ \ i=1,2,\cdots,n$

注意

反之不然. 即，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵，且

$a_{ii}>0,\ \ i=1,2,\cdots,n,$ 但A未必正定. 如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x_1,x_2)=x^T Ax=(x_1-x_2)^2,$$

当 $x_1=x_2=1$ 时，有 $f(x_1,x_2)=0.$

所以A不是正定的.

2） 实对称矩阵A正定 $\Rightarrow \det A = |A| > 0$

证：若A正定，则存在可逆矩阵C ，使 $A = C'C$,

从而 $|A| = |C^T C| = |C|^2 > 0.$

注意

反之不然. 即实对称矩阵A，且 $|A| > 0$, A未必正定.

如 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = 1 > 0$

但$x^T Ax = -x_1^2 - x_2^2$不是正定二次型.

4、顺序主子式、主子式

设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

1) $$A(1,2,\cdots,k)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}\in R^{k\times k}$$

称为A为第k阶**顺序主子矩阵**;

2) $$P_k=\det A(1,2,\cdots,k)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

称为A的第k阶**顺序主子式**.

3） k 级行列式

即行指标与列指标相同的k阶子式

$$|Q_k| = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

称为A的一个k 阶主子式.

问题：对一般的二次型，将其化为标准形非易事，能否直接利用二次型的矩阵A判别它是否正定？

A的顺序主子式定义

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,称子行列式$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$, $i=1,2,\cdots,n$

为矩阵的i阶顺序主子式.

$$设A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1阶顺序主子式

2阶顺序主子式

n阶顺序主子式

定理6 二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$正定(或$A>0$)的充分必要条件是A的各阶顺序主子式都大于零,即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots\cdots,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

证明 $(\Rightarrow)$设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$正定,

对每一个k $(1\le k\le n)$,令 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j$,

任取一组不全为零的实数$c_1,c_2,\cdots,c_k$,则

$$f_k(c_1,c_2,\cdots,c_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}c_ic_j=f(c_1,\cdots,c_k,0,\cdots 0)>0$$

从而二次型$f_k(x_1,\cdots,x_k)$ 正定，故其矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

即*A*的各级顺序主子式都大于零.

($\Leftarrow$) 就是当A的各级顺序子式都大于零时，证明A正定.

对n作数学归纳法.

n=1时，$f(x_1) = a_{11}x_1^2$,由条件a_{11}>0, 显然有$f(x_1)$正定.

假设对*n*-1元二次型结论成立,证*n*元的情形也成立.

令$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}$，有$A=\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}$.

由于A_1的所有顺序主子式即为A的1,2,…,n-1阶顺序主子式,从而A_1的所有顺序主子式均大于零，由归纳法假设 ……矩阵.故存在n-1级可逆矩阵G，使

与对角矩阵合同

$$G^TA_1G=E_{n-1}$$

令 $C_1=\begin{bmatrix} G & O \\ O & 1 \end{bmatrix}$,有

对称矩阵

$$C_1^TAC_1=\begin{bmatrix} G^T & O \\ O & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G & O \\ O & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{n-1} & G^T\alpha \\ \alpha^TG & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

再令$C_2=\begin{bmatrix} E_{n-1} & -G^T\alpha \\ O & 1 \end{bmatrix}$，有

$$C_2^TC_1^TAC_1C_2=\begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^TG & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{n-1} & G^T\alpha \\ \alpha^TG & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{n-1} & -G^T\alpha \\ O & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn}-\alpha^TGG^T\alpha \end{bmatrix}.$$

令$C=C_1C_2, a=a_{nn}-\alpha^TGG^T\alpha$,有$C^TAC=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{bmatrix}$.

两端取行列式，$|C|^2|A|=a$.依据条件$|A|>0$,得$a>0$.因此，

A与单位矩阵合同，故A为正定矩阵，即二次型

$f(x_1,\ldots,x_n) = x^TAx$为正定二次型. ‖

例2、判定下面二次型是否正定.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

解：$f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

其顺序主子式

$$P_1 = |5| > 0, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad P_3 = |A| > 0.$$

$\therefore f$ 正定.

2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ （习题7）

解：$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

A的第k阶顺序主子式P_k

$$P_k=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_i}{\underset{i=2,3,\cdots,k}{=}} \begin{vmatrix} \frac{k+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{k+1}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{k+1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

各行（列）元素之和

之和为1+（k-1)$\times\frac{1}{2}$

也就是$(k+1)/2$

$$\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,\cdots,k}{=}} \begin{vmatrix} \frac{k+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{k+1}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{k+1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{k+1}{2^k} > 0$$

$k=1,2,\cdots,n.$ 故f为正定二次型.

例3、证明：若实对称矩阵A正定，则A的任意一个 k 阶主子式

$$|Q_k| = \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix} > 0.$$

（习题9）

证：作二次型

$$g(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) = \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k} a_{i_si_t} x_{i_s} x_{i_t}$$

$$= (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) Q_k \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix}$$

对任意一不全为零的数 $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}$ ，有

$$x_0 = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \neq 0,$$

其中，$c_j = \begin{cases} c_{i_s}, & \text{当 } j = i_s,\ s = 1, 2, \cdots, k \\ 0, & \text{当 } j \neq i_s,\ s = 1, 2, \cdots, k \end{cases}$

由于 A 正定，有 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^T Ax$ 正定，即有

$x_0^T Ax_0 > 0,$ 从而，

$$g(c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_k}) = f(0, \cdots, 0, c_{i_1}, 0, \cdots, c_{i_2}, 0, \cdots, c_{i_k}, 0, \cdots, 0)$$

$$= x_0^T Ax_0 > 0$$

即，$g(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})$是正定二次型，因此其矩阵的

行列式大于零，即 $|Q_k| > 0.$

三、n元实二次型的分类

1. 定义

设n元二次型 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x^TAx, A^T=A\in R^{n\times n}$，

若对任意一组不全为零的实数$c_1,c_2,\dots,c_n$，都有

① $f(c_1,c_2,\dots,c_n)<0$，则 f 称为**负定二次型**.

② $f(c_1,c_2,\dots,c_n)\geq 0$，则$f$ 称为**半正定二次型**.

③ $f(c_1,c_2,\dots,c_n)\leq 0$，则 f 称为**半负定二次型**.

④ f 既不是半正定，也不是半负定，则 f 称为

不定二次型.

注：相应于此，***n*** 级实对称矩阵可分类为：

①正定矩阵　②负定矩阵　③半正定矩阵

④半负定矩阵　⑤不定矩阵

2、判定

1）实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$正定

$\Leftrightarrow -f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$负定；

实对称矩阵**A**正定 $\Leftrightarrow$ －**A**负定.

2）实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$半正定

$\Leftrightarrow -f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$半负定；

实对称矩阵**A**半正定 $\Leftrightarrow$－**A**半负定.

3）（定理7）设**n**元实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^TAx,$

$A^T=A\in R^{n\times n}$，则下列有条件等价：

① $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$半正定；

② A半正定；

③ 秩f =秩(A)= p（正惯性指数）;（见习题14）

④ A合同于非负对角阵，即存在可逆阵C，使

$$C^TAC=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},\quad d_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n$$

⑤ 存在 $G\in R^{n\times n}$，使$A=G^TG$；

由此可得，

A半正定$\Rightarrow |A|\geq 0$

⑥ A的所有主子式皆大于或等于零.（补充题9）

例4、证明：实对称矩阵A负定

$\Leftrightarrow$ A的一切偶数阶顺序主子式皆大于零，一切奇数阶主子式皆小于零.

证：设A的第k阶顺序主子式为P_k，则$-$A的第k阶顺序主子式为$(-1)^k P_k$，又

A负定 $\Leftrightarrow$ $-$A正定

$\Leftrightarrow$ $-$A的一切顺序主子式全大于零，

即，$(-1)^k P_k > 0.$

所以，当k为偶数时，$P_k > 0,$

当k为奇数时，$P_k < 0.$

例5、证明：$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$

为半正定二次型.（习题15）

证法一：

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

$$=\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2$$

对任意一组不全为0的数 $c_1,c_2,\dots,c_n$，有

$$f(c_1,c_2,\dots,c_n)=\sum_{1\le i<j\le n}(c_i-c_j)^2\ge 0$$

故，f 半正定.

证法二：令 $B=\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$,

则 $B'B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}$

考虑二次型 $g(y_1,y_2)=y^T(B'B)y=(By)^T(By)$,

则对 $\forall y_0\in R^2$，$y_0\neq 0$，有$y_0^T(B'B)y_0\geq 0$,

即$g(y_1, y_2)$半正定.

$$\therefore \quad \det B'B = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \geq 0.$$

故f半正定.

例6 设$A=[a_{ij}]_{n\times n}, x=(x_1,x_2.\cdots,x_n)^T$,则证明

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2\text{的秩}=A\text{的秩}.$$

证明 设$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_2 \end{bmatrix}$,则$A^T=[a_1^T,\cdots,a_n^T], A^TA=a_1^Ta_1+a_2^Ta_2+\cdots+a_n^Ta_n$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_ix)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x^Ta_i^Ta_ix=x^TA^TAx$$

下面要证明$rank(A)=rank(A^TA)$

考虑$Ax=0\Rightarrow \quad A^TAx=0$

另一方面。若 $A^TAx=0\Rightarrow \quad x^TA^TAx=0$

$(Ax)^T(Ax)=0$故 $\quad Ax=0.$

这说明，$Ax=0$与$A^TAx=0$同解，故根据其基础解系

所含向量线性无关的个数，$n-rank(A)=n-rank(A^TA)$,

所以$rank(A)=rank(A^TA)$，故结论得证.

事实上进一步有A^TA是半正定的.

例7、设A为实对称矩阵，证明：

（1）当实数t充分大时，矩阵tE＋A是正定矩阵；

（2）当实数s充分小时，矩阵E＋s A是正定矩阵.

证（1）设tE＋A的k阶顺序主子式为P_k，则

$$P_k = \begin{vmatrix} t+a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & t+a_{kk} \end{vmatrix} = t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k$$

取t_1，使得当$t \geq t_1$，$P_1 = t + a_{11} > 0$

取t_2，使得当$t \geq t_2$，$P_2 = \begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & t+a_{22} \end{vmatrix} > 0$

……………

取t_n，使得当 $t \geq t_n$，$P_n = |tE + A| > 0$

令 $t_0 = \max\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$

则当$t \geq t_0$时，$P_k > 0$，$k = 1, 2, \cdots, n$

故，tE＋A是正定矩阵.

（2）当 s 充分小时，$\dfrac{1}{s}$ 为充分大，由（1）

$\frac{1}{s}E + A$是正定矩阵，因此$s(\frac{1}{s}E + A) = E + sA$正定.

四、小结

基本概念

1、正定（负定、半正定、半负定、不定）二 次型;

正定（负定、半正定、半负定、不定）矩阵;

2、顺序主子式、主子式

基本结论

1、非退化线性替换保持实二次型的正定（负定、

半正定、半负定、不定）性不变.

2、实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$正定（半正定）

$\Leftrightarrow -f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$负定（半负定）.

3、实二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^T Ax}$ 正定

$\Leftrightarrow$ **A** 与单位矩阵 **E** 合同，即存在可逆矩阵**C**，使

$$\mathbf{A=C'C}$$

$\Leftrightarrow$ **A** 的各级顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow$ ***f*** 的正惯性指数 ***p*** 等于 ***n***

4、实对称矩阵 **A** 正定 $\Rightarrow |A|>0$

实对称矩阵 **A** 半正定 $\Rightarrow |A|\geq 0$

5、实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^TAx$ 半正定

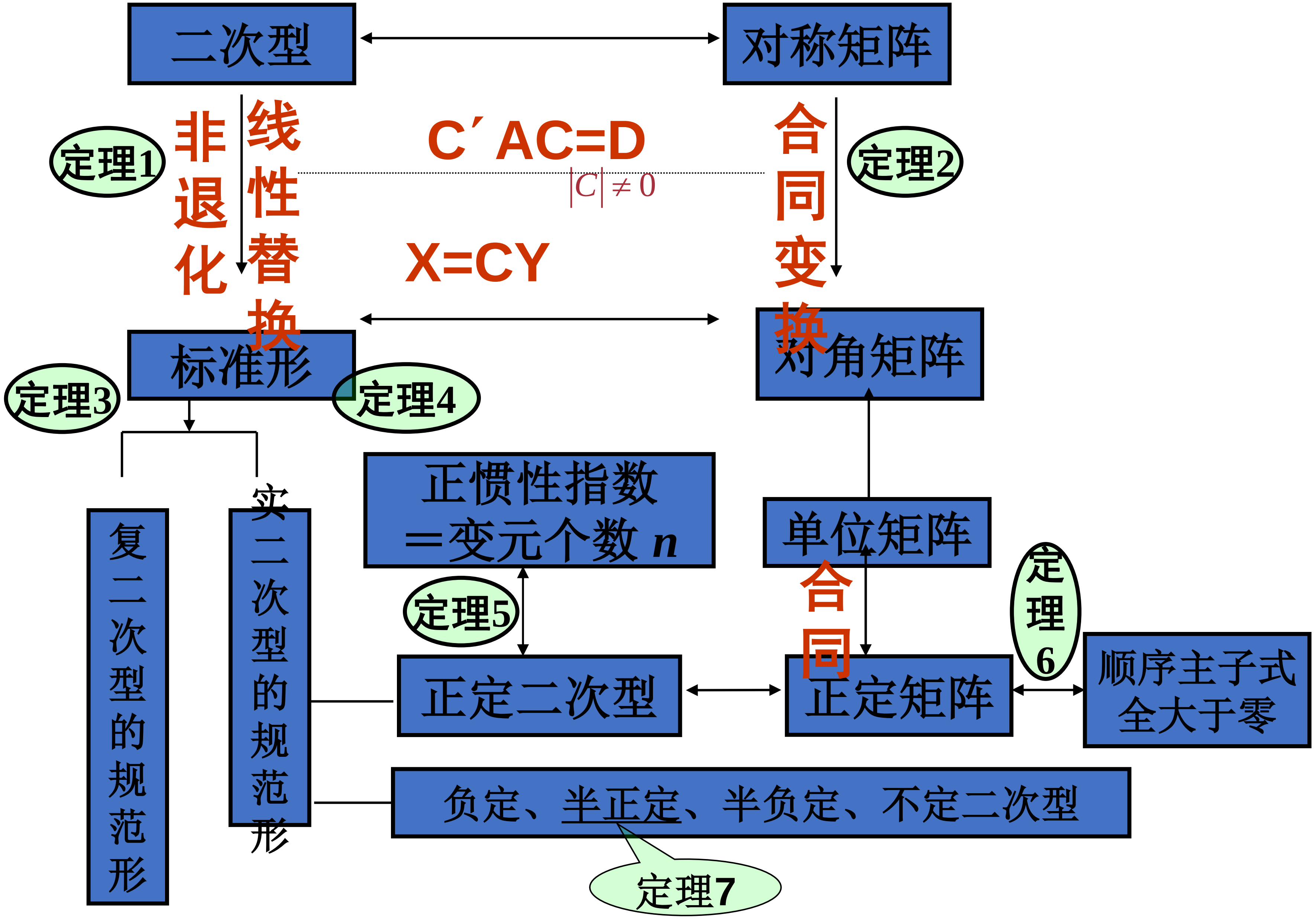
$\Leftrightarrow$秩 f =秩(A)= p（正惯性指数）

$\Leftrightarrow$ A 与非负对角阵合同，即存在可逆矩阵C，使

$$C^TAC=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, d_i \geq 0, i=1,2,\cdots,n$$

$\Leftrightarrow$ 存在 $C \in R^{n\times n}$, 使 $A=C^TC$

$\Leftrightarrow$ A 的所有主子式全大于或等于零.


二次型
对称矩阵
定理1
非退化
线性替换
C′AC=D
|C|≠0
X=CY
合同变换
定理2
标准形
对角矩阵
定理3
定理4
复二次型的规范形
实二次型的规范形
正惯性指数
＝变元个数 n
单位矩阵
定理5
合同
定理6
正定二次型
正定矩阵
顺序主子式
全大于零
负定、半正定、半负定、不定二次型
定理7