第九章 欧几里得空间

- 定义与基本性质
- 标准正交基
- 同构
- 正交变换
- 子空间
- 实对称矩阵的标准形
- 向量到子空间的距离·最小二乘法
- 酉空间介绍

欧几里得空间，Euclidean Space,简称欧氏空间.

欧几里得（Euclid ,约公元前330年-前275年）,古希腊数学家,是几何学的奠基人,被称为“几何之父”,他最著名的著作“几何原本”.

§1 定义与基本性质

一、欧氏空间的定义

二、欧氏空间中向量的长度

三、欧氏空间中向量的夹角

四、n维欧氏空间中内积的矩阵表示

五、欧氏子空间

问题的引入：

1、线性空间中，向量之间的基本运算为线性运算，其具体模型为几何空间 R^2、R^3，但几何空间的度量性质(如长度、夹角)等在一般线性空间中没有涉及.

2、在解析几何中，向量的长度，夹角等度量性质都可以通过内积反映出来：

长度： $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$

夹角 $<\alpha,\beta>$ ： $\cos<\alpha,\beta> = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}$

3、几何空间中向量的内积具有比较明显的代数性质.

一、欧氏空间的定义

1. 定义

设V是实数域 R上的线性空间，对V中任意两个向量 α 、β，定义一个二元实函数，记作 (α,β)，若 (α,β) 满足性质：$\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$，$\forall k \in R$

1° $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ （对称性）

2° $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$ （数乘）

3° $(\alpha+\beta,\gamma)=\left(\alpha,\gamma\right)+(\beta,\gamma)$ （可加性）

4° $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$. （正定性）

则称(α,β)为α和β的**内积**，并称这种定义了内积的

实数域 R上的线性空间V为**欧氏空间,有时也称实内积空间（Inner product space）.**

注： 欧氏空间 V是特殊的线性空间

1. V为实数域 R上的线性空间，是定义了内积的实的线性空间;

2. V除向量的线性运算外，还有“内积”运算;

3. 内积性质中的2^0(数乘）和3^0（可加性）等价于对

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in V, \forall k,l \in R,\quad (k\alpha + l\beta,\gamma) = k(\alpha,\gamma) + l(\beta,\gamma)$$

4. $(\alpha,\beta) \in R.$

例1. 在 R^n 中，对于向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

1）定义 $$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \qquad (1)$$

1^0 对称性: $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$$=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=(\beta,\alpha)$$

2^0 数乘 : $(k\alpha,\beta)=ka_1b_1+ka_2b_2+\cdots+ka_nb_n=k(\alpha,\beta)$

3^0 可加性：设 $\forall\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, 则

$$(\alpha+\beta,\gamma)=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+\cdots+(a_n+b_n)c_n$$

$$=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+\cdots+a_nc_n+b_nc_n=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$$

4^0 正定性 $(\alpha,\alpha)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq 0,$

$$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$$

所以，$\forall\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$，$\beta=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$

定义 $$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \qquad （1）$$

为α,β 的内积，满足定义中的性质 1°～4°.

所以(α,β)为内积.

这样R^n对于内积 (α,β)就成为一个欧氏空间.

当 $n=3$ 时，即为几何空间R^3中的内积,也就是两向量的点乘，或者数量积

$$(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\beta.$$

譬如，α与β都是R^3中过原点的两个向量，则

$$（\alpha，\beta)=\alpha\bullet\beta=|\alpha||\beta|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

其中θ是α与β的夹角,$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$分别为$\alpha$与$\beta$的坐标.

2) 定义

$$(\alpha,\beta)'=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+ka_kb_k+\cdots+na_nb_n$$

显然有

$$(\alpha,\beta)'=(\beta,\alpha)',\qquad (k\alpha,\beta)'=k(\alpha,\beta)',$$

$$（\alpha,\alpha)'\geq 0;\quad （\alpha,\alpha)=0\ \Leftrightarrow\alpha=0$$

对于可加性，设$\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in R^n$,则

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),$$

根据定义

$$(\alpha+\beta,\gamma)'=(a_1c_1+b_1c_1)+2(a_2c_2+b_2c_2)+\cdots+n(a_nc_n+b_nc_n)$$
$$=(\alpha,\gamma)'+(\beta,\gamma)'$$

因此 $(\alpha,\beta)'$ 满足定义中的性质 $1^\circ\sim 4^\circ$.

所以 $(\alpha,\beta)'$ 也为内积.

从而 R^n 对于内积 $(\alpha,\beta)'$ 也构成一个欧氏空间.

注意： 由于对 $\forall\alpha\cdot\beta\in V$, 未必有 $(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)'$

所以1），2）是两种不同的内积.

从而 R^n 对于这两种内积就构成了不同的欧氏空间.

例2. $C(a,b)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数所成线性空间，对于函数 $f(x), g(x)$ ，定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad （2）$$

则 $C(a,b)$ 对于（2）作成一个欧氏空间.

证：$\forall f(x), g(x), h(x)\in C(a,b),\quad \forall k\in R$

$$1^\circ.\ (f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx=(g,f)$$

$$2^\circ.\ (kf,g)=\int_a^b kf(x)g(x)\,dx=k\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$$=k(f,g)$$

$$3^\circ.\ (f+g,h)=\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)h(x)\,dx+\int_a^b g(x)h(x)\,dx$$

$$=(f,h)+(g,h)$$

$$4^\circ.\ (f,f)=\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$\because\ \ f^2(x)\geq 0,\qquad \therefore\ \ (f,f)\geq 0.$

且若 $f(x)\neq 0$, 则 $f^2(x)>0$, 从而 $(f,f)>0$.

故 $(f,f)=0 \Leftrightarrow f(x)=0.$

因此，(f,g) 为内积， $C(a,b)$为欧氏空间.

2. 内积的简单性质

V为欧氏空间， $\forall \alpha,\beta,\gamma\in V,\forall k\in R$

1) $(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta),\quad (k\alpha,k\beta)=k^2(\alpha,\beta)$

2) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$

推广：

$$(\alpha,\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)+\cdots+(\alpha,\beta_s)$$

3) $(0,\beta)=0$

4) $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j(x_i,y_j)$

二、欧氏空间中向量的长度

1. 引入长度概念的可能性

1）在 R^3 向量 $\alpha=(x,y,z)$ 的长度（模）

$$|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}\,.$$

2) 欧氏空间V中，$\forall\alpha\in V$，$(\alpha,\alpha)\geq 0$

使得 $\sqrt{\alpha\cdot\alpha}$ 有意义.

2. 向量长度的定义

$\forall\alpha,\in V$，$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为向量 α 的**长度**.

特别地，当 $|\alpha|=1$时，称 α为**单位向量**.

3. 向量长度的简单性质

1) $|\alpha| \geq 0$; $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

2) $|k\alpha| = |k||\alpha|$ （3）

3）非零向量 α 的单位化：$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$.

三、欧氏空间中向量的夹角

1. 引入夹角概念的可能性与困难

1）在 R^3 中向量 α 与 β 的夹角

$$<\alpha,\beta>= arc\cos\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha||\beta|} \qquad (4)$$

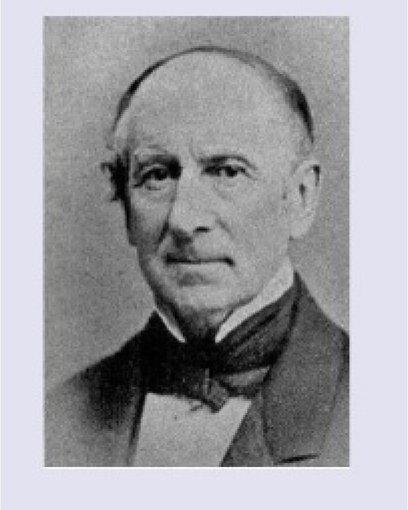
2）在一般欧氏空间中推广（4）的形式，首先

应证明不等式： $\left|\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\right|\leq 1$

此即，

2. 柯西—布涅柯夫斯基不等式

柯西：法国数学家（1789-1857年），其主要贡献在微积分、复变函数和微分方程方面，许多定理和公式均以他的名字命名.



柯西(Cauchy)

施瓦兹是德国数学家、布涅柯夫斯基是俄国数学家，他们各自都发现了如下的结论.故历史上一般称为柯西-施瓦兹不等式、柯西-布涅柯夫斯基不等式，或者柯西-施瓦兹-布涅柯夫斯基不等式.

对欧氏空间V中任意两个向量 α、β，有

$$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta| \qquad （5）$$

当且仅当α、β线性相关时等号成立.

证：当 $\beta = 0$时， $(\alpha,0) = 0$, $|\beta| = 0$

$\therefore \quad (\alpha,\beta) = |\alpha||\beta| = 0.$ 结论成立.

当 $\beta \neq 0$ 时，作向量 $\gamma = \alpha + t\beta,\qquad t \in R$

由内积的正定性，对 $\forall t \in R$，皆有

$$(\gamma,\gamma)=(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)$$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)t^2 \geq 0 \qquad （6）$$

取 $t=-\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 代入（6）式，得

$$(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}+(\beta,\beta)\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)^2}\geq 0$$

即 $(\alpha,\beta)^2 \leq (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

两边开方，即得 $\left|(\alpha,\beta)\right| \leq |\alpha||\beta|.$

其实，由（6）式.回忆初等代数中的知识，即如果实系数二次三项式

$$at^2 + 2bt + c, \qquad a > 0,$$

对于任意实数t它都取非负值,则其系数之间必有判别式

$$\Delta = b^2 - ac \le 0,$$

取 $a = (y, y), b = (x, y), c = (x, x)$, 得

$$(x, y)^2 \le |x|^2 |y|^2 \Rightarrow |(x, y)| \Rightarrow |x| |y|$$

当α、β 线性相关时，不妨设 $\alpha = k\beta$

于是，$\left|(\alpha,\beta)\right| = \left|(k\beta,\beta)\right| = \left|k(\beta,\beta)\right| = |k||\beta|^2$.

$$|\alpha||\beta| = |k\beta||\beta| = |k||\beta|^2$$

$\therefore$ $\left|(\alpha,\beta)\right| = |\alpha||\beta|$. (5)式等号成立.

反之，若（5）式等号成立，由以上证明过程知

或者 $\beta = 0$，或者 $\alpha - \dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta = 0$

也即α、β 线性相关.

3. 柯西—布涅柯夫斯基不等式的应用

1）

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|$$

$$\le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \qquad (7)$$

$$a_i, b_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

柯西
不等式

2）

施瓦兹不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

证：在 $C(a,b)$ 中， $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积定义为

$$(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

由柯西－布涅柯夫斯基不等式有

$$|(f(x),g(x))| \le |f(x)||g(x)|$$

从而得证.

3）

三角不等式

对欧氏空间中的任意两个向量 α、β，有

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta| \qquad （7）$$

证：$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$

$$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$$\le |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = \left(|\alpha| + |\beta|\right)^2$$

两边开方，即得（7）成立.

不等式(7)还可推广到多个向量的情况，即

$$|x+y+\cdots+z|\le|x|+|y|+\cdots+|z|$$

（7）式又可派生出以下两个不等式

$$|x-y|\ge|x|-|y|;$$

$$|x-z|\le|x-y|+|y-z|$$

$|x-y|$称为x与y之间的距离.

4. 欧氏空间中两非零向量的夹角

定义1：设V为欧氏空间，α、β 为V中任意两非零向量，α、β 的**夹角**定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = arc\cos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$

$$\left(0 \le \langle \alpha, \beta \rangle \le \pi \right)$$

定义2：设α、β为欧氏空间中两个向量，若内积

$$(\alpha,\beta)=0$$

则称α与β **正交**或**互相垂直**，记作 $\alpha\perp\beta$.

注：

① 零向量与任意向量正交.

② $\alpha\perp\beta \Longleftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=0$.

5. 勾股定理

设V为欧氏空间， $\forall \alpha,\beta \in V$

$$\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

在$\boldsymbol{R}^2$中就是：直交三角形两直交边平方和等于斜边平方.

证：$\because$ $|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$

$$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$$\therefore \quad |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha \perp \beta .$$

推广： 若欧氏空间V中向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交，

即 $(\alpha_i,\alpha_j)=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,m$

则 $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2.$

证：若 $(\alpha_i,\alpha_j)=0,\quad i\neq j$

则 $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i,\sum_{j=1}^{m}\alpha_j)$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i,\alpha_i)+\sum_{i\neq j}^{m}(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i,\alpha_i)=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2$$

例3、已知 $\alpha=(2,1,3,2)$， $\beta=(1,2,-2,1)$

在通常的内积定义下，求 $|\alpha|,(\alpha,\beta),\langle\alpha,\beta\rangle,|\alpha-\beta|$.

解：$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$(\alpha,\beta)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0 \quad \therefore \quad \langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$

又 $\alpha-\beta=(1,-1,5,1)$

$\therefore \quad |\alpha-\beta|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

通常称 $|\alpha-\beta|$ 为 α 与 β 的距离，记作 $d(\alpha,\beta)$.

四、n维欧氏空间中内积的矩阵表示

设V为欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基，对V中任意两个向量

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$$

$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j \qquad （8）$$

令 $\quad a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j),\quad i,j=1,2,\cdots n.$

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \qquad (9)$$

则 $$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=x^TAy \qquad (10)$$

定义：矩阵 $$A=\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}$$

称为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的**度量矩阵**.

注：

①因为$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(\varepsilon_j,\varepsilon_i),(i,j=1,2,\cdots,n)$,所以有$a_{ij}=a_{ji}$,
$(i,j=1,2,\cdots,n)$,故A是实对称矩阵.

② 由内积的正定性，度量矩阵A还是正定矩阵.

事实上，对 $\forall\alpha\in V,\alpha\neq 0$，即 $x\neq 0$

有 $(\alpha,\alpha)=x^T Ax>0$

$\therefore$ A 为正定矩阵.

③ 由（10）知，在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下，向量的内积由度量矩阵A完全确定.

这就是说,内积的定义是和线性空间所选择的基底有关，因为基底决定度量矩阵A.

例1.1 在R^2中给出两种不同的内积定义：

$$(x,y)_1 = x^T y, \qquad \forall x,y \in R^2$$

$$(x,y)_2 = x^T A y, \qquad \forall x,y \in R^2$$

其中 $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

由于在同一个线性空间R^2里有两种不同的内积定义，因此产生了两个欧氏空间，分别记为R_1^2, R_2^2.

问：向量$x=(1,1)^T, y=(-1,1)^T$在这两个欧氏空间中是否正交？

解 由于

$$(x,y)_1=(1,1)(-1,1)^T=0,$$

$$(x,y)_2=(1,1)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}(-1,1)^T=1$$

因此x, y在R_1^2中正交，而在R_2^2中不正交.这说明向量的正交与否，与该欧氏空间的内积如何定义有关.

五、欧氏空间的子空间

欧氏空间V的子空间在V中所定义的内积之下也是一个欧氏空间，称之为V的**欧氏子空间**.