# § 6 重因式(因式分解问题的继续)

- 重因式定义

- 重因式的判定与性质

- 消除重因式

## 1. 重因式定义

- 定义　$p(x)$为不可约多项式, 如果$p^k(x)|f(x)$, 而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$, 称$p(x)$为多项式$f(x)$的$k$重因式.

若$k=0$, $p(x)$根本不是$f(x)$的因式;

若$k=1$, $p(x)$称为$f(x)$的单因式;

若$k>1$, $p(x)$称为$f(x)$的重因式.

许多问题中, 要求所讨论的多项式没有重因式, 多项式的近似求根法也要求所考虑的多项式没有重根. 因此判别多项式有无重因式、求其重因式及去掉重因式是我们必须要考虑的问题.

## 2.重因式的判别

### (1)微商(导数)的概念

定义：设有多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0$$

其微商(导数)规定为

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+ia_ix^{i-1}+\cdots+2a_2x+a_1 .$$

性质

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

$$(cf(x))'=cf'(x)$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$(f^m(x))=mf^{m-1}(x)f'(x)$$

微商$f'(x)$称为$f(x)$的一阶微商，$f'(x)$的微商$f''(x)$称为$f(x)$的二阶微商，等等. $f(x)$的$k$阶微商记为$f^{(k)}(x)$.

一个$n(n \geq 1)$次多项式的微商是一个$n-1$次多项式，它的$n$阶微商是一个常数，它的$n+1$阶微商等于零.

## (2)重因式的判定

**定理** 如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的$k$重因式($k\geq 1$)，则它是微商$f'(x)$的$k-1$重因式. 反之不然.

$f(x)=x^2+1$, $f'(x)=2x$, x是$f'(x)$的因式, 但不是$f(x)$的因式.

**证明** $p(x)$是$f(x)$的$k$重因式, 故有

$$f(x)=p^k(x)g(x)$$

其中$p(x)\nmid g(x)$. 由

$$f'(x)=(p^k(x)g(x))'=(p^k(x))'g(x)+p^k(x)g'(x)$$

$$=kp^{k-1}(x)p'(x)g(x)+p^k(x)g'(x)$$

$$=p^{k-1}(x)[kg(x)p'(x)+p(x)g'(x)]$$

知$p^{k-1}(x)\mid f'(x)$. 令

$$h(x)=kg(x)p'(x)+p(x)g'(x)$$

因$p(x)\mid p(x)g'(x)$， $p(x)\nmid g(x)p'(x)$，

故$p(x)\nmid h(x)$.

此即证明了$p^k(x)\nmid f'(x)$. 即$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式.

·推论1　如果不可约因式$p(x)$是$f(x)$的$k$ ($k\geq 1$) 重因式，那么$p(x)$分别是$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$的$k-1, k-2, \ldots, 1$重因式，而不是$f^{(k)}(x)$的因式.

特别地，$f(x)$的单因式不再是$f'(x)$的因式.

·推论2　不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式的$\Leftrightarrow p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式.

·推论3　多项式$f(x)$没有重因式$\Leftrightarrow$是$f(x)$与$f'(x)$互素.

判断一个多项式有无重因式——辗转相除法.

**例1** 求下述多项式的重因式.

$$f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$$

**解** $f'(x)=4x^3+3x^2-6x-5$

利用辗转相除法，求得

$$(f(x),f'(x))=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

所以 $x+1$为$f(x)$的三重因式.

$$f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2=(x+1)^3(x-a)$$

$$=x^4+(3-a)x^3+(3-3a)x^2+(1-3a)x-a$$

解得$a=2$,由此得$f(x)$的标准分解式

$$f(x)=(x+1)^3(x-2)$$

## 3. 消除重因式

$$g(x)=\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$$

是一个没有重因式的多项式，且它与$f(x)$具有完全相同的不可约因式.

事实上，设$f(x)$有如下分解式:

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

则 $$(f(x),f'(x))=p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x)$$

从而

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

**例2** 判断下述多项式有无重因式.若有，求出与其有相同因式但无重因式的多项式.

$$f(x)=x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$$

**解** $f'(x)=5x^4-24x^3+48x^2-48x+20$

利用辗转相除法，求得

$$(f(x),f'(x))=x^2-2x+2$$

$f(x)=(x^2-2x+2)^2(x-a)$

$=x^5-6x^4+16x^3-4x^2+20x-8$

比较常数项得$-4a=-8$,故

$a=2.$

所以$x^2-2x+2$为$f(x)$的二重因式.由此可得$f(x)$的标准分解式:

$$f(x)=(x^2-2x+2)^2(x-2)$$

与其有相同因式但无重因式的多项式为:

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=x^3-4x^2+6x-4.$$

## 思考练习

1. 设$f(x)= x^4-2x^3+3x^2-4x+2$. 求出与其有相同因子但无重因式的多项式$g(x)$及$f(x)$在$\mathbf{R}[x]$中的标准分解式.

2. $t$取何值时， $f(x)= x^3-3x+t$ 有重因式.

答案:

1. $(f(x), f'(x))= x-1$

$g(x)= x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)$

$f(x)= (x-1)^2(x^2+2)$

2. $t^2-4=0$时，$(f(x), f'(x))\neq1$，即此时有重因式.

# §7　多项式函数

到目前为止，只是形式地讨论多项式. 本节以函数的观点进行考察.

- 多项式函数的有关概念
- 余数定理及其应用

## 1.多项式函数的有关概念

**(1)多项式的值**　设

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_i x^i+\cdots+a_1 x+a_0\in P[x]$$

$\alpha$是数域$P$中的一个数，上式中以$\alpha$代$x$所得的数

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_i\alpha^i+\cdots+a_1\alpha+a_0$$

称为$f(x)$当$x=\alpha$时的值，记为 $f(\alpha)$ .

显然$f(\alpha)$也是数域P中的数.

**(2)多项式函数**　由一个多项式定义的函数，称为数域P上的多项式函数.

**(3)根 (零点)**

如果$f(x)$当$x=\alpha$时的函数值 $f(\alpha)=0$，称$\alpha$为$f(x)$的一个根或零点.

## 2.余数定理及其应用

**(1)余数定理** 用一次多项式$x-\alpha$去除多项式$f(x)$,所得余式为一常数，其数值为 $f(\alpha)$.

证 用$x-\alpha$去除多项式$f(x)$,得

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)+c$$

以$\alpha$代$x$，得 $f(\alpha)=c$. 证毕.

**推论1**　$(x-\alpha)\mid f(x) \Leftrightarrow$ 是 $f(\alpha)=0$.

**推论2**　$\alpha$ 是 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x-\alpha)\mid f(x)$.

**(2)重根**

**定义**　如果 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重因式,称 $\alpha$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重根.

**定理1**　$P[x]$ 中 $n$ 次多项式 $(n\geq 0)$ 在数域P中的根不可能多于 $n$ 个，重根按重数计算.

**证明**　若 $\partial(f(x))=0$，定理显然成立.

设 $\partial(f(x))>0$. 将 $f(x)$ 分解为不可约多项式的乘积：

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

由推论2及根的重数的定义,知 $f(x)$ 在数域P中根的个数等于分解式中一次因式的个数 $k$,而 $k\leq n$.

**定理2** 若多项式$f(x),g(x)$的次数都不超过n,且对$n+1$个不同的数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$有相同的值，即

$$f(\alpha_i)=g(\alpha_i) \quad , \quad i=1,2,\ldots,n+1$$

则$f(x)=g(x)$.

**证明** 依条件，有

$$f(\alpha_i)-g(\alpha_i)=0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,n+1$$

即多项式 $f(x)-g(x)$有$n+1$个不同的根.

若$f(x)\neq g(x)$，则$f(x)-g(x)$为一个次数都不超过n的多项式.与前一定理矛盾，因此$f(x)=g(x)$.

该定理表明：不同多项式定义不同的函数

**例1** 求$f(x)=x^n+a^n$被$x+a$除所得的余式.

**解** 由余数定理, $f(x)=(x+a)q(x)+r$

$$r=f(-a)=(-a)^n+a^n=\begin{cases}2a^n, & n\text{为偶数}\\ 0\ , & n\text{为奇数}\end{cases}$$

**例2** 求多项式$f(x)=x^3+px+q$有重根的条件.

**解** $f(x)=x^3+px+q$有重根$\Leftrightarrow (f(x), f'(x))\neq 1$.

$$f'(x)=3x^2+p$$

(i) $p=0$时， $f(x)$与$f'(x)$只有当q=0时有公因式$x^2$

此时，$f(x)=x^3$(有三重根0).

(ii) $p\neq 0$时，对$f(x)$与$f'(x)$用辗转相除法，有

$$q_2(x)=\frac{9}{2p}x-\frac{27q}{4p^2}$$

$$f'(x)$$

$$3x^2 \qquad +p$$

$$3x^2+\frac{9q}{2p}x$$

$$-\frac{9q}{2p}x+p$$

$$-\frac{9q}{2p}x-\frac{27q^2}{4p^2}$$

$$r_2(x)=p+\frac{27q^2}{4p^2}$$

$$f(x)$$

$$x^3 \quad +px+q$$

$$x^3 \quad +\frac{p}{3}x$$

$$r_1(x)=\frac{2}{3}px+q$$

$$q_1(x)=\frac{x}{3}$$

因$f(x)$与$f'(x)$有公因式，故$r_2(x)=0$.即当$4p^3+27q^2=0$时， $f(x)$有重根.

**例3** 求$t$，使$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根，并求出相应的重根及重数

**解** $f'(x)=3x^2-6x+t$ ，由辗转相除法得

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)f'(x)+(\frac{1}{3}t-1)(2x+1),$$

$$\text{故}(f(x),f'(x))=(f'(x),(\frac{1}{3}t-1)(2x+1))$$

$$\text{若}t=3,\text{则}\quad (f(x),f'(x))=\frac{1}{3}f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$$\text{若}t\neq 3,\text{则}\ (f(x),f'(x))=(f'(x),(\frac{1}{3}t-1)(2x+1))=(3x^2-6x+t,2x+1)$$

$$=\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, & t=-\frac{15}{4} \\ x=1, & t=3 \end{cases}$$

**故当$t$=3时， $f(x)$有3重根1**
**t=−15/4 时,有2重根−1/2.**

以下给出一种求以一次多项式$x-\alpha$除$f(x)$所得商及余式的简单方法——综合除法.并以此考察多项式的根的情况及将多项式表示为$x-\alpha$的幂次等问题.

## (3) 综合除法

为说明综合除法的理论依据，考察$f(x)$被$x-\alpha$除所得商$q(x)$及余式$r$与$f(x)$的系数之间的关系.

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$

则有 $f(x)=(x-\alpha)\,q(x)+r$

$$=(x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)+r$$

比较同次项的系数，得

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} - \alpha b_{n-1} = a_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_0 - \alpha b_1 = a_1 \\ r - \alpha b_0 = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\ r = a_0 + \alpha b_0 \end{cases}$$

为求出商$q(x)$及余式$r$,只须求出$b_{n-1}, b_{n-2},\ldots, b_1, b_0$及$r$.采用下述综合除法：将 $a_n, a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$写在第1行,$\alpha$写在左边,按照上面的递推关系逐次算出$b_i$及$r$:

$$\begin{array}{c|ccccc} \alpha & a_n & a_{n-1} & \cdots\cdots & a_1 & a_0 \\ & & \alpha b_{n-1} & \cdots\cdots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\ \hline & a_n & a_{n-1}+\alpha b_{n-1} & \cdots\cdots & a_1+\alpha b_1 & a_0+\alpha b_0 \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots\cdots & b_0 & r \end{array}$$

**例4** 求$k$，使$f(x)= x^4 - 5x^3+5x^2+kx +3$以3为根.

**解:** $f(x)$以3为根$\Leftrightarrow f(3)=0$.

(法1) $f(3)= 3^4 - 5\times3^3+5 \times 3^2+k \times 3 +3=0 \Rightarrow k=2$.

(法2)综合除法求$f(3)$

$$
\begin{array}{r|ccccc}
3 & 1 & -5 & 5 & k & 3 \\
 & & 3 & -6 & -3 & 3k-9 \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & k-3 & 3k-6
\end{array}
$$

$f(3)=3k-6$.故当$k=2$时，$f(x)$以3为根.

**例5** 将4次多项式$f(x)=x^4-3x^2+3$表成一次多项式$(x-1)$的方幂的和.

- 分析：若 $f(x)$已经表成一次多项式$(x-1)$的方幂的和的形式：

$$f(x)=d_4(x-1)^4+d_3(x-1)^3+d_2(x-1)^2+d_1(x-1)+d_0$$
$$=[\underbrace{d_4(x-1)^3+d_3(x-1)^2+d_2(x-1)+d_1}_{q_1(x)}](x-1)+d_0$$
$$=[[\underbrace{d_4(x-1)^2+d_3(x-1)+d_2}_{q_2(x)}](x-1)+d_1](x-1)+d_0$$
$$=[[[\underbrace{d_4(x-1)+d_3}_{q_3(x)}](x-1)+d_2](x-1)+d_1](x-1)+d_0$$

即： $d_0$是$f(x)$被$(x-1)$除所得余数;$d_1$是商$q_1(x)$被$(x-1)$除所得余数;……逐次用$(x-1)$去除所得商，就得到一系列系数$d_1, d_2, d_3, d_4$.因此，可以利用综合除法这一目标实现.

解 $f(x)=x^4-3x^2+3$

$$= d_4(x-1)^4+ d_3(x-1)^3+ d_2(x-1)^2+ d_1(x-1) + d_0$$

由

$$\begin{array}{r|l}
1 & 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \\
 & \quad\;\; 1 \quad 1 \quad -2 \quad -2 \\
\hline
 & 1 \quad 1 \quad -2 \quad -2 \quad 1(=d_0) \\
 & \quad\;\; 1 \quad 2 \quad 0 \\
\hline
 & 1 \quad 2 \quad 0 \quad -2(=d_1) \\
 & \quad\;\; 1 \quad 3 \\
\hline
 & 1 \quad 3 \quad 3(=d_2) \\
 & \quad\;\; 1 \\
\hline
 & 1(=d_4)\,4(=d_3)
\end{array}$$

有 $f(x)= (x-1)^4+ 4(x-1)^3+ 3(x-1)^2-2(x-1) + 1.$

# §8　复系数与实系数多项式的因式分解

对于复数域我们有下列重要定理

代数基本定理　每个次数≥1的复系数多项式, 在复数域中总有一个根.

①每个次数≥1的复系数多项式, 在复数域中总有一个一次因式.

②复数域上所有次数大于1的多项式都是可约的, 或复数域上不可约多项式只有一次的.

复系数多项式因式分解定理: 每个次数≥1的复系数多项式都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

因此，**复系数多项式具有标准分解式**

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_i x^i+\cdots+a_1 x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

$$=a_n(x-\beta_1)^{l_1}(x-\beta_2)^{l_2}\cdots(x-\beta_s)^{l_s}$$

其中$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是不同的复数，$l_1,l_2,\cdots,l_s$是正整数.

且$l_1+l_2+\cdots+l_s=n$. 标准分解式说明了每个$n$次复系数多项式恰有$n$个复根（重根按重数计算）.

关于复系数多项式的根和系数的关系，

我们有下列定理.

**定理(*Vieta*定理）**

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$

$$=a_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$$

其中$\beta_1$，$\beta_2$,$\cdots$，$\beta_n$是$f(x)$的$n$个根，则

$$\begin{cases} a_{n-1}/a_n=-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n) \\ a_{n-2}/a_n=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\cdots+\beta_1\beta_n+\beta_2\beta_3+\cdots+\beta_{n-1}\beta_n \\ \cdots \\ a_0/a_n=(-1)^n\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n \end{cases}$$

证明　由于

$$f(x)=a_n\left(x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}\right)$$

于是有

$$x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}$$

$$=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$$

将上式右端乘开来，比较两端同次项系数，就可得*Vieta*公式.

例　多项式$f(x)=-2x^3+3x+4$的三个根$x_1, x_2, x_3$满足下列关系

$$x_1+x_2+x_3=0$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{-3}{2}$$

$$x_1x_2x_3=2$$

# 实系数多项式因式分解

**我们知道实系数多项式在复数域考虑，其根并不总是实的。**

**首先证明实系数多项式根的一个重要性质：**

引理（根的共轭性）设$\alpha$是实系数多项式$f(x)$的一个根，则其共轭数$\bar{\alpha}$也一定是$f(x)$的一个根.

证明 设 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$

式中系数$a_n$，$a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$都是实数.

因为$\alpha$是$f(x)$的一个根，所以

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0,$$

而系数$a_i\,(i=n,n-1,\cdots,0)$是实数，

$$f(\bar{\alpha})=a_n\bar{\alpha}^n+a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_1\bar{\alpha}\ \ +a_0$$

$$=\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha\ \ +a_0}=\bar{0}=0$$

即$f(\bar{\alpha})=0$，也就是$\bar{\alpha}$是$f(x)$的根.

但复系数多项式的复根并不一定成对出现.

**推论** 奇次实系数多项式至少有一个实根.

**实系数多项式因式分解定理** 每个次数≥1的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

证明 定理对一次多项式显然成立.

假设定理对次数 $<n$ 的多项式已经证明.

设 $f(x)$ 是 $n$ 次实系数多项式，如果 $\alpha$ 是 $f(x)$ 的一个实根，那么

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x),$$

其中 $f_1(x)$ 是 $n-1$ 次实系数多项式.如果 $\alpha$ 不是实数，那么 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根且 $\bar{\alpha}\neq\alpha$，于是

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})f_2(x).$$

显然$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}$是一个实系数二次不可约多项式.从而$f_2(x)$是$n-2$次实系数多项式.由归纳假设，$f_1(x)$、$f_2(x)$可以分解成一次因子与二次不可约多项式的乘积.因此定理得证.

**实系数多项式标准分解式：**

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$

**其中$c_1, c_2,\ldots, c_s, p_1, p_2,\ldots, p_r, q_1, q_2,\ldots, q_r$为实数； $l_1, l_2,\ldots, l_s, k_1, k_2,\ldots, k_r$是正整数; $p_i^2-4q_i^2<0$ ($i=1,\ldots, r$).**

例1 求复系数多项式$f(x)=x^n-1$的标准分解式.

解：由复系数多项式的因式分解定理知，只须找出$f(x)=x^n-1$的所有根.

将1表示成三角表示式：$1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$.

事实上，由*Eular*公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,以及$x^n=1$

$$x=1^{\frac{1}{n}}=(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)^{\frac{1}{n}}=(e^{i2k\pi})^{\frac{1}{n}}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

因此$f(x)=x^n-1$的所有根为：

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

于是有

$$f(x)=\prod_{k=0}^{n-1}[x-(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})].$$

例2 已知1-$i$是多项式$f(x)=x^4-4x^3+5x^2-2x-2$的一个根，求$f(x)$的所有根并写出它的标准分解式（实数域及复数域）.

解 由于实系数多项式的复根成对出现，而知$1+i$也是$f(x)$的根.

方法1

设$f(x)$的另两根为$\alpha,\beta$, 根据根与系数的关系, 有

$$\begin{cases}\alpha+\beta+(1-i)+(1+i)=-(-4)\\ \alpha\cdot\beta\cdot(1-i)\cdot(1+i)=(-1)^4(-2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\cdot\beta=-1\end{cases}$$

于是有 $\alpha=1+\sqrt{2},\beta=1-\sqrt{2}$.

所以$f(x)$的所有根为：$1-i,1+i,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}$.

$f(x)$的标准分解式（实数域及复数域）：

实数域因式分解：$f(x)=(x^2-2x+2)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

复数域因式分解：$f(x)=(x-1+i)(x-1-i)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$.

**(方法2)**

**解** 因$1-i$, $1+i$是$f(x)$ 的根,故$f(x)$可被

$$g(x)=(x-1+i)(x-1-i)=x^2-2x+2$$

整除. 易得$g(x)$除 $f(x)$ 所得商为

$$q(x)=x^2-2x-1=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$$

所以$f(x)$ 的所有根为：$1-i,1+i,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}$ .

$f(x)$的标准分解式（实数域及复数域）：

$$f(x)=(x^2-2x+2)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$$

$$f(x)=(x-1+i)(x-1-i)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}).$$

## 思考练习

**1.求一个次数尽可能低的实系数（复系数）多项式，使其以1,0,*i*, *i*, 1-*i*为根.**

**2.本章习题26.**

## 答案

1.实系数多项式的复根成对出现，由根与一次因式的关系有：

$$f(x)=(x-1)(x-0)(x-i)^2(x+i)^2(x-1+i)(x-1-i)$$

$$=x(x-1)(x^2+1)^2(x^2-2x+2)$$

及 $f(x)=x(x-1)(x-i)^2(x-1+i)$ .

2 . $f(x)=x^n-1$的n个复根为

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

为将其分解为实系数不可约多项式的乘积,只须区别根是实根还是复根,且对复根要找出其共轭根.易知

$$x_k\text{为实根} \Leftrightarrow \sin\frac{2k}{n}\pi = 0$$

所以，$n$为奇数时，只有一个实根$x_0=1$（$k=0$）；

$n$为偶数时，有两个实根 $x_0 = 1,\ x_{\frac{n}{2}} = -1\ (k = 0, k = \frac{n}{2})$

$x$的共轭复根

$$\overline{x}_k = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

$$(x - x_k)(x - \overline{x}_k) = x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1$$

因此所求分解式为

$n$为奇数，$x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}[x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1]$

$n$为偶数，$x^n - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}[x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1].$

# §9 有理系数多项式

对于有理数域上一元多项式的因式分解，同样有重要的结论：

每个次数$\geq 1$的有理系数多项式都能唯一地分解成不可约的有理系数多项式的乘积.

但与复系数、实系数情形不同. 在复数域上只有一次多项式才是不可约的，在实数域上只有一次的和某些二次的多项式是不可约的. 对于给定的一个有理系数多项式，这里的困难是往往很难判定它是否可约. 因此在这里我们不一般讨论它的分解定理，而只给出如下讨论：

①有理系数多项式的因式分解可归结为整系数多项式的因式分解问题；

②如何判别、求出有理系数多项式的有理根；

③举例说明存在$n$次不可约有理系数多项式.

系数互素

## 1. 本原多项式

(1)定义　设$g(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$是一个非零的整系数多项式. 如果它的各项系数$b_n$, $b_{n-1}$, …, $b_1$, $b_0$除去±1外没有其他的公因子, 则$g(x)$称为一个**本原多项式**.

例如，　$g(x)= x^4-4x^3+5x^2-2x-2$为一个本原多项式.

$$f(x)=\frac{4}{5}x^2-2x+\frac{2}{3}$$ 不是本原多项式.

本原多项式

但 $$f(x)=\frac{4}{5}x^2-2x+\frac{2}{3}=\frac{2}{15}(6x^2-15x+5)$$

有理数

一般地，有如下结论

**(2)定理** 任何一个非零的有理系数多项式$f(x)$都可表为一个有理数$r$与一个本原多项式的乘积, 且这种表示法除差一个正负号外是唯一的.

**证明** (存在性)设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0$$

是一有理系数多项式，选适当的数$c$可使$cf(x)$为整系数. 提取$cf(x)$各系数的公因子d，有

$cf(x)= dg(x)$，即 $f(x)=\dfrac{d}{c}g(x)=rg(x)$

这里$g(x)$的系数互素，$r$ 为有理数.

(唯一性) 设$f(x)= r_1g_1(x)= r_2g_2(x)$.因为$g_1(x)$, $g_2(x)$为本原多项式，有$r_1=\pm r_2$即$g_1(x)=\pm g_2(x)$. ‖

这个定理告诉我们任何一个非零的有理系数多项式$f(x)$都可表为一个有理数$r$与一个本原多项式的乘积, 且这种表示法除差一个正负号外是唯一的.

这个定理的重要性在于，任何一个非零的有理系数多项式$f(x)$的因式分解问题可以转化为一个本原多项式的因式分解问题.

## (3)本原多项式的性质

**Gauss引理** 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

**证明** 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

为本原多项式.

$$h(x) = f(x)g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0$$

用反证法.若$h(x)$不是本原多项式, 则 $d_{n+m}$, $d_{n+m-1}$,…,$d_1$ ,$d_0$ 有一异于±1的公因子,因此$d_{n+m}$ ,$d_{n+m-1}$ ,…,$d_1$ ,$d_0$就能被一素数$p$整除.

因$f(x)$是本原的,知$p$不能整除$f(x)$的所有系数.不妨设$a_i$ $(0 \le i \le n)$是第一个不能被$p$整除的数,即

证明（续）

$$p|a_0, p|a_1, \ldots, p|a_{i-1}, p\nmid a_i$$

同样地， $g(x)$是本原的,令$b_j$ $(0\le j\le m)$是第一个不能被$p$整除的数,即

$$p|b_0\ p|b_1, \ldots, p|b_{j-1}, p\nmid b_j$$

由乘法规则， $h(x)$中$x^{i+j}$的系数为$d_{i+j}$,而

$$d_{i+j}= a_ib_j+ a_{i+1}b_{j-1}+\ldots+ a_{i-1}b_{j+1}+ a_{i-2}b_{j+2}+\ldots$$

由上述假设, $p|d_{i+j}$且p整除等式右边除$a_ib_j$以外的每一项,但 $p\nmid a_ib_j$, 这是不可能的. 此即证明了$h(x)$是本原多项式.

**定理**　如果非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么**它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积**.

**证明**　设整系数多项式$f(x)$有分解式

$$f(x)=g(x)\,h(x)$$

其中$g(x),h(x)$是有理系数多项式, 且

$$\partial(g(x))<\partial(f(x)),\quad \partial(h(x))<\partial(f(x))$$

令
$$f(x)=af_1(x),\ g(x)=rg_1(x),\ h(x)=sh_1(x)$$

这里$f_1(x), g_1(x), h_1(x)$都是本原多项式,$a$是整数, $r, s$是有理数. 于是

$$af_1(x)=rsg_1(x)h_1(x)$$

由Gauss引理，　$g_1(x)h_1(x)$是本原多项式,从而

证明（续）

$$rs = \pm a$$

即$rs$为一整数.于是有

$$af_1(x) = (rsg_1(x))h_1(x)$$

其中 $rsg_1(x)$与$h_1(x)$都是整系数多项式，且次数都低于$f(x)$的次数. ||

**推论** 设$f(x)$、$g(x)$是整系数多项式, 且$g(x)$是本原的. 如果$f(x) = g(x)h(x)$,其中$h(x)$为有理系数多项式,则$h(x)$一定是整系数的.

**证明** $f(x) = af_1(x)$, $h(x) = rh_1(x)$

这里$f_1(x)$, $h_1(x)$都是本原的，$a$是整数，$r$是有理数.

下面证明$r$是整数.

证明（续）

由 $$f(x)=g(x)h(x)$$

及$g(x)$是本原多项式，有

$$af_1(x)=rg(x)h_1(x)$$

由Gauss引理， $g(x)h_1(x)$是本原多项式，故

$$a=\pm r$$

但$a$为整数, 因此$r$为整数. 是$h(x)=r\,h_1(x)$ 为整系数多项式. ‖

## 2. 有理根的求法及判别

定理　设

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是整系数多项式. 如果

$\frac{r}{s}$是它的一个有理根$(r,s$互素$)$

则必有 $s|a_n$，$r|a_0$ .特别地，如果$f(x)$的首项系数$a_n=1$,

则$f(x)$的有理根都是整根，而且是$a_0$的因子.

证明　因$\frac{r}{s}$是$f(x)$的一个有理根,故在有理数域上

$$(x-\frac{r}{s})\mid f(x)$$

即

$$(sx-r)\mid f(x)$$

由$s, r$互素，知$sx-r$ 为本原多项式.由上段推论，有

证明（续）

$$f(x)=(sx-r)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)$$

其中$b_{n-1},b_{n-2},\ldots,b_0$均为整数. 比较两端系数, 得

$$a_n= sb_{n-1}，\quad a_0=-rb_0$$

因此 $s|a_n$，$r|a_0$ .

特别地，若$a_n=1$,显然有$s=\pm 1$，$\frac{r}{s}=\pm r$是整数，而且是$a_0$的因子. ||

**例1** 求$f(x)=2x^4-2x^3-9x^2-8x-3$ 的有理根，并将其写为不可约因式的乘积.

**证** $f(x)$的有理根只可能$\pm1, \pm3, \pm1/2, \pm3/2$（$s=\pm1, \pm2$及$r=\pm1, \pm3$）.由综合除法检验知：$-1$和3是$f(x)$的有理根，且

$$2x^4-2x^3-9x^2-8x-3=(x+1)(x-3)(2x^2+2x+1).$$

详细过程如下：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 2 | −2 | −9 | −8 | −3 |
| | | −2 | 4 | 5 | 3 |
| 1 | 2 | −4 | −5 | −3 | 0 |
| | | 2 | −2 | −7 | |
| | 2 | −2 | −7 | −10 | |

$-1$是$f(x)$ 的根

1不是$f(x)$ 的根

**例1** (续)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 2 & -2 & -9 & -8 & -3 \\
 & & -2 & 4 & 5 & 3 \\
\hline
3 & 2 & -4 & -5 & -3 & 0 \\
 & & 6 & 6 & 3 & \\
\hline
 & 2 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

因此，$2x^4-2x^3-9x^2-8x-3=(x+1)(x-3)(2x^2+2x+1)$.

**例2** 求$f(x)$ 的有理根,其中 $f(x)=x^4+\frac{3}{2}x^3-3x^2+4x-\frac{3}{2}$.

解

$$f(x)=x^4+\frac{3}{2}x^3-3x^2+4x-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(2x^4+3x^3-6x^2+8x-3)=\frac{1}{2}f_1(x)$$

$f(x)$ 与$f_1(x)$ 有相同的有理根. 而$f_1(x)$有理根只可能±1, ±3, ±1/2, ±3/2（$s=\pm1,\pm2$及$r=\pm1,\pm3$）.由综合除法:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & 2 & 3 & -6 & 8 & -3 \\
 & & -6 & 9 & -9 & 3 \\
\hline
\frac{1}{2} & 2 & -3 & 3 & -1 & 0 \\
 & & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 2 & -2 & 2 & 0 &
\end{array}$$

知$f_1(x)$从而 $f(x)$的有理根为−3, 1/2.

**例3** 证明$f(x)= x^3-2x+2$ 在有理数域上不可约.

证　若$f(x)$可约，则$f(x)$可以分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，因为$\partial(f(x))=3$,所以$f(x)$必有一个一次有理因式，即有一有理根.

由定理知，$f(x)$ 的有理根只可能为$\pm1, \pm2$.直接验证知， $\pm1, \pm2$都不是$f(x)$ 的根，因此$f(x)$在有理数域上不可约.

最后， 给出一个整系数多项式为不可约多项式的充分条件. 依此举例说明：**存在任意次不可约的有理系数多项式.**

## 3.整系数多项式为不可约多项式的充分条件

**定理** 艾森斯坦（Eisenstein）判别法 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式. 如果有一个素数$p$，使得

(i) $p\nmid a_n$;

(ii) $p\mid a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$;

(iii) $p^2\nmid a_0$.

则$f(x)$在有理数域上不可约.

**证明** 若$f(x)$在有理数域上可约，则$f(x)$可分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积:

证明（续）

$$f(x)=(b_l x^l+a_{l-1}x^{l-1}+\ldots+b_1x+b_0)(c_m x^m+c_{m-1}x^{m-1}+\ldots+c_1x+c_0)$$

$(l、m<n\ l+m=n)$

于是 $a_n=b_l c_m$， $a_0=b_0 c_0$ .

因 $p|a_0 \Rightarrow p|b_0$ 或 $p|c_0$. 但$p^2 \nmid a_0 \Rightarrow p$不能同时整除$b_0$及$c_0$.

不妨设$p|b_0$ 但$p\nmid c_0$,又因$p\nmid a_n$， 知$p\nmid b_l$ .假设$b_j$ $(0\leq j\leq l)$

中第一个不能被$p$整除的数为$b_k$,即

$$p|b_0,\ \ldots,\ p|b_{k-1},\ p\nmid b_k$$

比较$f(x)$中$x^k$的系数，得

$$a_k= b_k c_0+ b_{k-1}c_1 +\ldots+ b_0 c_k$$

式中$a_k$，$b_{k-1}$，…，$b_0$均能被$p$整除,因此$b_k c_0$也能$p$整除.

由$p$为素数,有$b_k$与$c_0$中至少有一个被整除,矛盾. 因此

$f(x)$在有理数域上不可约.

**例3** (续)证明$f(x)= x^3-2x+2$ 在有理数域上不可约.

**证** $f(x)$是一个整系数多项式. 该多项式中$a_3=1$, $a_2=0$，$a_1=-2$ , $a_0=2$.

取$p=2$（素数）,显然

(i) $p\nmid a_3$;

(ii) $p\mid a_2, a_1, a_0$;

(iii) $p^2\nmid a_0$.

由Eisenstein判别法，$f(x)$在有理数域上不可约.

**例4** 证明$f(x)=x^n+2\ (n\geq 2)$在有理数域上不可约.

证　　该多项式中$a_n=1, a_{n-1}=a_{n-2}=a_1=0,\ a_0=2$

取$p=2$（素数）,显然

(i) $p \nmid a_n$;

(ii) $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$;

(iii) $p^2 \nmid a_0$.

由定理(Eisenstein判别法)知$f(x)$在有理数域上不可约.

该例表明：存在任意次不可约的有理系数多项式.

## 思考练习

**1.求多项式 $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$ 的有理根.**

**2.证明下列多项式在有理数域上不可约.**

**(1) $f(x)=5x^4-6x^3+12x+6$**

**(2) $f(x)=x^6+x^3+1$**

## 答案

**1.可能的有理根为±1, ±3，检验知−1，3是$f(x)$的根，而1，−3不是$f(x)$ 的根. 利用综合除法，得**

$$f(x)=(x+1)^4(x-3)$$

**即−1是$f(x)$的4重根， 3是$f(x)$的单根.**

**答案**

**2.(1)该多项式中$a_4=5, a_3=-6, a_2=0, a_1=12$ , $a_0=6$**
**取$p=3$（素数）,显然**

**(i) $p \nmid a_4$ ; (ii) $p \mid a_3, a_2, a_1, a_0$; (iii) $p^2 \nmid a_0$ .**

**由定理(Eisenstein判别法)知$f(x)$在有理数域上不可约.**

**(2)不能直接利用Eisenstein判别法,为此令$x=y+1$,有**

$$f(x)=g(y)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$$

**取$p=3$.由Eisenstein判别法，知$f(x)$在有理数域上不可约.**