

§7.子空间的直和

一、直和的定义

二、直和的判定

三、多个子空间的直和

引入

设 V_1, V_2 为线性空间 V 的两个子空间，由维数公式

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

有两种情形：

$$1) \quad \dim(V_1 + V_2) < \dim V_1 + \dim V_2$$

此时 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$,

即， $V_1 \cap V_2$ 必含非零向量.

$$2) \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

此时 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0,$

$$V_1 \cap V_2 \text{ 不含非零向量, 即 } V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

情形2) 是子空间的和的一种特殊情况

—— 直和(直接和)

一、直和的定义

设 V_1, V_2 为线性空间 V 的两个子空间，若和 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V$$

是唯一的，和 $V_1 + V_2$ 称为**直和（直接和）**，记作 $V_1 \oplus V_2$ 。

注：① 分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 唯一的，意即

若有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2$

则 $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$ 。

② 分解式唯一的不是在任意两个子空间的和中都成立. 例如, \mathbb{R}^3 的子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad V_2 = L(\varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad V_3 = L(\varepsilon_3)$$

这里, $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$

在和 $V_1 + V_2$ 中, 向量的分解式不唯一, 如

$$(2, 2, 2) = (2, 3, 0) + (0, -1, 2) = (2, 1, 0) + (0, 1, 2)$$

所以和 $V_1 + V_2$ 不是直和.

而在和 $V_1 + V_3$ 中，向量 $(2,2,2)$ 的分解式是唯一的，

$$(2,2,2) = (2,2,0) + (0,0,2)$$

事实上，对 $\forall \alpha = (a_1, a_2, a_3) \in V_1 + V_3$,

都只有唯一分解式： $\alpha = (a_1, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$.

故 $V_1 + V_3$ 是直和.

二、直和的判定

1、(定理8) 和 $V_1 + V_2$ 是直和的充要条件是零向量分解式唯一，即若 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$ 则必有 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

证：必要性. $\because V_1 + V_2$ 是直和,
 $\therefore \forall \alpha \in V_1 + V_2, \alpha$ 的分解式唯一.

若 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$

而0有分解式 $0 = 0 + 0$,

$\therefore \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

充分性. 设 $\alpha \in V_1 + V_2$, 它有两个分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_1, \beta_1 \in V_1, \quad \alpha_2, \beta_2 \in V_2$$

$$\text{于是 } (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 0$$

$$\text{其中 } \alpha_1 - \beta_1 \in V_1, \quad \alpha_2 - \beta_2 \in V_2$$

由零向量分解成唯一, 且 $0 = 0 + 0$,

$$\text{有 } \alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0.$$

$$\text{即 } \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 \quad \therefore \alpha \text{ 的分解式唯一.}$$

故 $V_1 + V_2$ 是直和.

2、和 $V_1 + V_2$ 是直和 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

证: “ \Leftarrow ” 若 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$.

则有 $\alpha_1 = -\alpha_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$\therefore \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 即 $V_1 + V_2$ 是直和.

“ \Rightarrow ” 任取 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 于是零向量可表成

$$0 = \alpha + (-\alpha), \quad \alpha \in V_1, \quad -\alpha \in V_2.$$

由于 $V_1 + V_2$ 是直和, 零向量分解式唯一,

$\therefore \alpha = -\alpha = 0$. 故 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

3、和 $V_1 + V_2$ 是直和

$$\Leftrightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

证：由维数公式

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

有， $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$$\Leftrightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow V_1 + V_2 \text{ 是直和. (由2、得之)}$$

总之，设 V_1, V_2 为线性空间 V 的子空间，则下面四个条件等价：

- 1) $V_1 + V_2$ 是直和
- 2) 零向量分解式唯一
- 3) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
- 4) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

4、(定理10) 设 U 是线性空间 V 的一个子空间，
则必存在一个子空间 W ，使 $V = U \oplus W$ 。

称这样的 W 为 U 的一个余(补)子空间。

证：取U的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

把它扩充为V的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$

令 $W = L(\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n)$, 则 $V = U \oplus W$.

注意：

余子空间 一般不是唯一的 (除非U是平凡子空间).

如，在 \mathbb{R}^3 中， 设

$$\alpha_1 = (1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (1, 0, 0), \quad \beta_1 = (0, 1, 1), \quad \beta_2 = (0, 0, 1)$$

$$\text{令 } U = L(\alpha_1, \alpha_2), \quad W_1 = L(\beta_1), \quad W_2 = L(\beta_2),$$

$$\text{则 } \mathbb{R}^3 = U \oplus W_1 = U \oplus W_2, \quad \text{但 } W_1 \neq W_2$$

5、 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 分别是线性子空间 V_1, V_2 的一组基, 则 $V_1 + V_2$ 是直和 $\Leftrightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 线性无关.

证: 由题设, $V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r), \dim V_1 = r$

$$V_2 = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s), \dim V_2 = s$$

$$\therefore V_1 + V_2 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s).$$

若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 线性无关,

则它是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 从而有

$$\dim(V_1 + V_2) = r + s = \dim V_1 + \dim V_2$$

$\therefore V_1 + V_2$ 是直和.

反之, 若 $V_1 + V_2$ 直和, 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = r + s$$

从而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 的秩为 $r + s$.

所以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 线性无关.

三、推广——多个子空间的直和

1、定义

V_1, V_2, \dots, V_s 都是线性空间 V 的子空间，若和

$\sum_{i=1}^s V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s, \alpha_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, s$$

是唯一的，则和 $\sum_{i=1}^s V_i$ 就称为直和，记作

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

2、判定

设 V_1, V_2, \dots, V_s 都是线性空间 V 的子空间, 则下面四个条件等价:

1) $W = \sum_{i=1}^s V_i$ 是直和

2) 零向量分解式唯一, 即

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = 0, \alpha_i \in V_i, \text{ 必有 } \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, s$$

3) $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}, i = 1, 2, \dots, s$

4) $\dim W = \sum_{i=1}^s \dim V_i$

例1 设 V_1 、 V_2 分别是齐次线性方程组① 与②的解空间：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad \text{①}$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad \text{②}$$

证明： $P^n = V_1 \oplus V_2$

证： 解齐次线性方程组①，得其一个基础解系

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \cdots, \varepsilon_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

\therefore 取 $V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1})$.

再解齐次线性方程组②.

由 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 - x_n = 0 \\ x_2 - x_n = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases}$$

得②的一个基础解系 $\varepsilon = (1, 1, \dots, 1)^T$

$\therefore V_2 = L(\varepsilon)$.

考虑向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon$

$$\text{由于 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon$ 线性无关, 即它为 P^n 的一组基.

$$\begin{aligned} \therefore P^n &= L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) + L(\varepsilon_n) \\ &= V_1 + V_2 \end{aligned}$$

$$\text{又 } \dim V_1 + \dim V_2 = (n-1) + 1 = n = \dim P^n$$

$$\therefore P^n = V_1 \oplus V_2$$