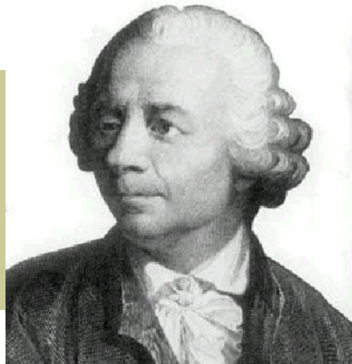


离 散 数 学
Discrete Mathematics

第一讲：命题逻辑初步

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2021 年 9 月 23 日

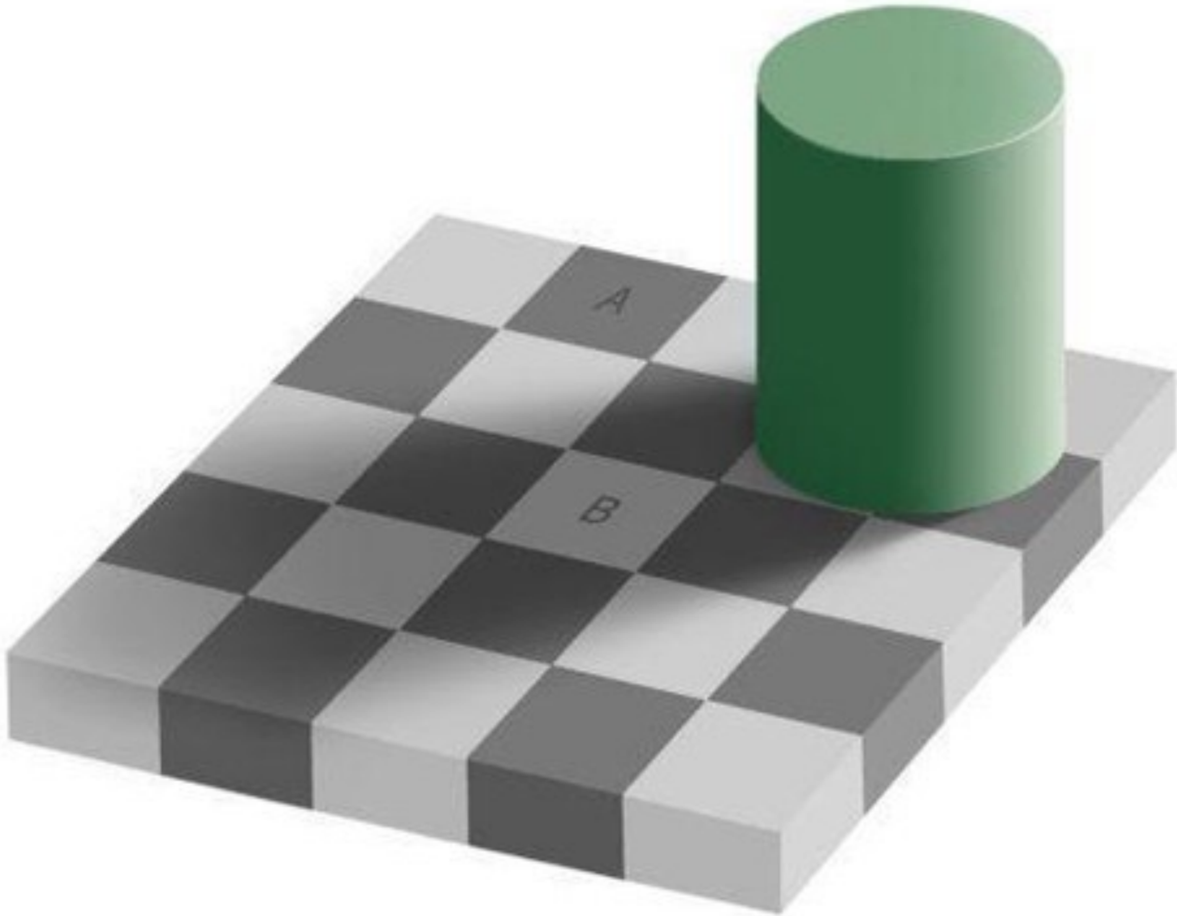
本讲主要内容

- 逻辑与命题
- 命题联结词
- 逻辑等价
- 命题逻辑等值演算
- 范 式
- 命题逻辑的可判定性

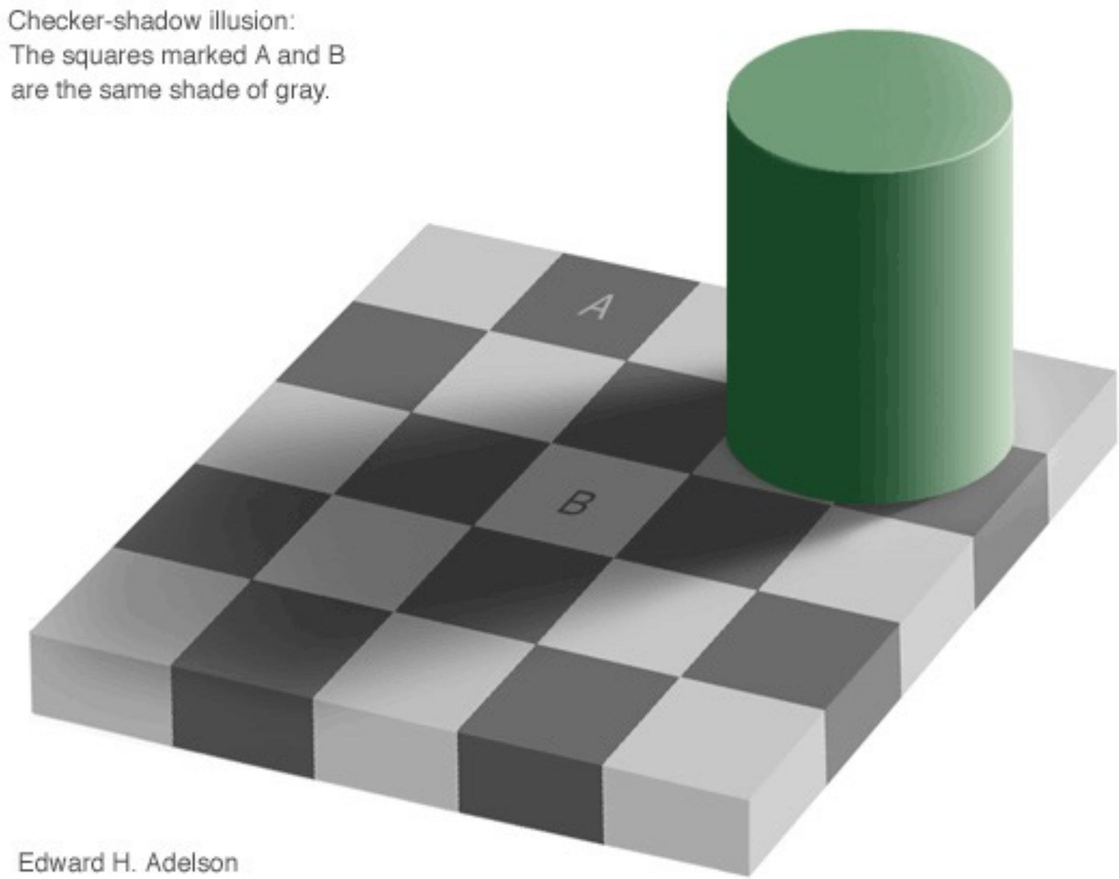
命题逻辑初步

- 什么是逻辑？
  - 在数学里，逻辑是指研究某个形式语言的有效推论
- 逻辑有什么作用？
  - 逻辑引导人们通过推理获得事物的本质
  - 逻辑让描述变得严谨、无歧义

直觉会欺骗我们



直觉会欺骗我们


Checker-shadow illusion:
The squares marked A and B
are the same shade of gray.
A
B
Edward H. Adelson

直觉会欺骗我们（续）

自然语言的歧义性

命题与命题的值

- 命题（proposition）是无法严格定义的，一般可用如下解释

- “命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者为真或者为假。

——罗 素

命题与命题的值（续）

- 例：
  - (1)“罗素是人。”和“罗素不是人。”都是命题
  - (2)“你是计算机系的学生吗？”因为不能分辨真假，故不是命题
  - (3)“明天是艳阳天。”是命题，虽然我们要等到明天才能知真假
- 命题表达的陈述或真或假，但不可兼具，这时也称命题取真或取假。称真值可以变化的命题为命题变元，用小写字母p,q,r等表示

命题与命题的值（续）

- 判断下列句子是否为命题
  - ✓ $1+1=2$
  - ✓ 李明是学生。
  - ✓ 今天是星期五。
  - ✗ 你会说英语吗？
  - ✗ $3-x=5$
  - ✗ 我们走吧！
  - ✓ 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✗ 他是个多好的人呀！
  - ✗ “我现在说的是假话。”

命题与命题的值（续）

- 一般用 “T” 表示真， “F” 或 “⊥” 表示假；在古典的二值逻辑中，命题只有这两种取值。但近代逻辑中还有多值系统的理论。
- 在通常的语言表达中，需要用简单命题复合成复杂命题，这需要用到命题联结词（connective），常用的命题联结词有5个：否定、合取、析取、蕴涵、双蕴涵

命题联结词

- 1、否定联结词：若p为命题，则p的否定“非p”也为命题，记为$\neg p$（或$\bar{p}$）。复合命题的真值可由其构件命题的真值表示，一般用所谓的真值表表示。否定联结词的真值表如下：

p	¬ p
T	⊥
⊥	T

命题联结词（续）

- 2、合取联结词：若p, q为命题，则p与q的合取“p且q”也为命题，记为$p \wedge q$。真值表如下：

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

命题联结词（续）

- 3、析取联结词：若p,q为命题，则p与q的析取“p或q”也为命题，记为$p \vee q$。真值表如下：

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

命题联结词（续）

- 4、蕴涵联结词：若p, q为命题，则p与q的蕴涵式"若p则q"（或"p蕴涵q"）也为命题，记为$p \to q$（或$p \supset q$）。真值表如下：

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

命题联结词（续）

- 5、双蕴涵联结词：若p,q为命题，则“p双蕴涵q”（或“p等价于q”）也为命题，记为$p \leftrightarrow q$。真值表为：

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

命题表达式

- 定义（**命题表达式**）：
  - (1) 命题变元 $p, q, \cdots$ 为命题表达式（或命题公式）；
  - (2) 若p, q为命题表达式，则$\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$,
    $p \leftrightarrow q$皆为命题表达式；
  - (3) 命题表达式仅限于此。

将自然语言翻译为命题表达式

- 将自然语言中的陈述性成分抽出来作为命题变元，然后选择适当的命题联结词构成符合原句含义的命题表达式
- 此为自然语言处理（natural language processing）技术最难处理的部分之一

将自然语言翻译为命题表达式（续）

- 例：“如果你主修计算机科学或不是新生，你就可以从校园网访问因特网。”
  - p：你可以从校园网访问因特网
  - q：你主修计算机科学
  - r：你是新生
- 上句可翻译为：$(q \vee \neg r) \rightarrow p$

将自然语言翻译为命题表达式（续）

- 例：父子对话
  - 儿子："爸爸，我要玩游戏。"
  - 父亲："**你不做完作业就不能玩游戏。**"
    - p：你做完了作业
    - q：你可以玩游戏
- 上句可翻译为：$\neg p \rightarrow \neg q$
- 思考：儿子做完作业后是不是就可以玩游戏了？

自然语言命题的符号化

- 目的：用逻辑推理的方法解决实际问题
- 方法：首先确定复合命题中的“原子命题”，将其用命题变元代替，再观察复合命题中的逻辑关系（“和”、“或”、“否”、“若…则…”等），然后用命题联结词联结各原子命题。注意分辨自然语言中细微的逻辑差异
- 例：“只有计算机系的老师或学生，才能参加本次迎新晚会。”

命题表达式的值

- 命题表达式（公式）$(\neg p \wedge q) \to \neg r$的值

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \to \neg r$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	[illegible]	[illegible]	1
0	1	0	1	[illegible]	[illegible]	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

该公式的一种“成真指派”

该命题公式的所有指派

命题表达式的值（续）

- 命题表达式$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\big)$的值

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

永真式、矛盾式和可能式

- 永真式（重言式，tautology）：无论其中出现的命题变元如何取值，表达式总取真。如：$p \vee \neg p$
- 矛盾式（永假式，absurdity）：无论其中出现的命题变元如何取值，表达式总取假。如：$p \wedge \neg p$
- 可能式（可满足式，contingency）：上述情况以外的其它命题表达式。比如：$\neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

逻辑等价

- 若在所有情况下命题p与q均具有相同的真值，即$p \leftrightarrow q$永真，则称p与q逻辑等价，记为$p \equiv q$（或$p \Leftrightarrow q$，注意逻辑等价并非命题联结词）

- 例：$(p \leftrightarrow q) \equiv \big((p \to q) \wedge (q \to p)\big)$；$p \wedge \neg p \equiv \boldsymbol{F}$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

常用的逻辑等价

名　称	等价形式
双重否定律	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$
幂等律	$A\Leftrightarrow A\vee A$, $A\Leftrightarrow A\wedge A$
交换律	$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$
结合律	$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$ $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$
分配律	$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
德摩根律	$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$ $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$
吸收律	$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$ $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

名　称	等价形式
支配律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
恒等律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A \Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A \Leftrightarrow 0$
蕴含等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg B\leftrightarrow\neg A$
归缪论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

蕴涵的等值式

- 两个重要的蕴涵等值式：

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$（蕴涵等值）

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$（假言易位）

- 这两个等值式常被用于逻辑等价的证明

命题逻辑的等值演算

- 练习1：证明$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$
- 证明：$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \lor q) \equiv \neg(\neg p) \land \neg q \equiv p \land \neg q$
- 练习2：证明$p \land q \to p \lor q$是重言式
- 证明：$p \land q \to p \lor q \equiv \neg(p \land q) \lor (p \lor q)$

  $\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor (p \lor q) \equiv (\neg p \lor p) \lor (\neg q \lor q) \equiv \boldsymbol{T}$
- 注意：命题联结词的优先级自高到低分别为：¬，∧，∨，→，↔

命题逻辑的等值演算（续）

- 方法1：用真值表判定
- 方法2：利用已有的逻辑等值式进行等价替换

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

证明: $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$（蕴涵等价式）

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$（分配律）

$\equiv \neg(p \vee q) \vee r$（德摩根律）

$\equiv (p \vee q) \rightarrow r$（蕴涵等价式）

范式

- 命题公式的形式各异，为研究命题逻辑带来困难，能否将所有的命题公式转化为统一的标准形式？
  - 命题联结词可以通过等值演算进行转化，任何命题公式都可写为仅用$\{\neg,\wedge\}$或者$\{\neg,\vee\}$联结的形式
  - 总能够通过命题等值演算将任意命题公式转化为一系列命题变元（及其否定）的析取或者合取的形式

范式（续）

- 定义（范式）：
  - (1)命题变元及其否定总称为文字（literal）；
  - (2)有限文字组成的析取式或合取式称为简单析取式或简单合取式；
  - (3)由有限简单合取式组成的析取式称析取范式；
  - (4)由有限简单析取式组成的合取式称合取范式；
  - (5)析取范式与合取范式总称范式（normal form）

范式（续）

- 定理（**范式存在性定理**）：

任何命题公式都存在与之逻辑等价的析取范式与合取范式。

  - 证明（**构造法**）：用以下步骤构造任意命题公式的合取范式和析取范式：①消去联结词→和↔；②用双重否定律消去¬¬，用德摩根律内移¬；③使用分配律——求析取范式时用∧对∨的分配律，求合取范式时用∨对∧的分配律. □

命题逻辑的可判定性

- 能否判定一个命题公式永真或永假？
- 定理（简单析取式的永真性判定）：

　一个简单析取式是重言式当且仅当其同时含有某个命题变元及其否定式。

- 定理（简单合取式永假性判定）：

　一个简单合取式是矛盾式当且仅当其同时含有某个命题变元及其否定式。

命题逻辑的可判定性（续）

- 定理（***析取范式的永假性判定***）：

  一个析取范式是矛盾式当且仅当其每个简单合取式皆为矛盾式。

- 定理（***合取范式的永真性判定***）：

  一个合取范式是重言式当且仅当其每个简单析取式皆为重言式。

- 因为每个命题公式均可转化为析取范式或合取范式，因此命题逻辑是可判定（decidable）的

命题逻辑的可判定性（续）

- 例：

判定命题公式 $(q \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow p) \wedge \neg(q \rightarrow p)$

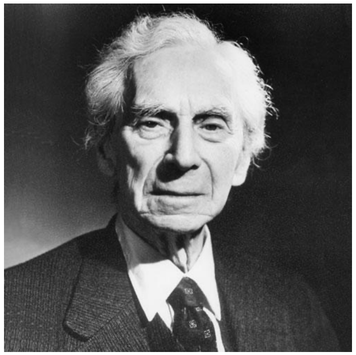
- **解：** 原式 $\equiv \left(\neg\left(q \wedge (\neg p \vee \neg q)\right) \vee p\right) \wedge \neg(\neg q \vee p)$

$\equiv (\neg q \vee (p \wedge q) \vee p) \wedge (q \wedge \neg p)$

$\equiv (\neg q \wedge q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge \neg p)$

故上析取范式为矛盾式，原式永假．　□

伯特兰·罗素



Bertrand Arthur William Russell（1872-1970）出生于古老而显赫的贵族家庭，他的祖父在维多利亚时代曾两度出任首相。祖母曾在他12岁生日时赠送给他一本《圣经》，书的扉页上题写着“勿随众人作恶”，这句话成为罗素一生道德上的座右铭。

罗素喜爱数学，少年时代便开始哲学思考，探求数学之完美与宗教之可疑的哲学根据。18岁那年，罗素考入剑桥大学三一学院，四年级时他的兴趣转向哲学，大学毕业的第二年，罗素获得了三一学院研究员的职位。1900至1910年间，他同怀特海合作撰写了《数学原理》。该书被人们看作是数学和逻辑发展史上的里程碑。1950年被授予诺贝尔文学奖。

1960年代筹建罗素和平基金会，曾参与调停古巴导弹危机、阿以冲突和中印边界冲突，反对美国的越南战争。1965年获得世界和平奖。98岁逝世，给后人留下了七十多部论著和几千篇论文，涉及哲学、数学、伦理、政治、历史、文学以及教育等诸多领域。

伯特兰·罗素

Tip: 罗素生平

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 1.1、1.2、1.3节
- 课后习题：
  - Problem Set 1
- 提交时间：10月9日（国庆节调休日）
- 提交方式：拍照提交至本科教学平台