计算方法 **Spring 2023**

Homework 3

Instructor: Lijun Zhang *Name:* 张运吉, *StudentId:* 211300063

第六章

第 1 题

由题意可得：

$$f(x) = x^2 - x - 1, f(1) = -1 < 0, f(2) = 1 > 0$$

故 $[1, 2]$ 是 $f(x)$ 的有根区间.

$$f'(x) = 2x - 1$$

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单调递减.
当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单调递增.
$f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} < 0, f(0) = -1 < 0.$
由单调性知 $f(x)$ 存在唯一正根.
若要使误差小于 0.05, 则：

$$\frac{1}{2^{k+1}} < 0.05, \text{ 解得: } k > 4.322$$

所以至少二分 5 次.
具体计算过程如下表:

表 1:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	1	2	1.5	-
1	1.5	2	1.75	+
2	1.5	1.75	1.625	+
3	1.5	1.625	1.5625	-
4	1.5625	1.625	1.59375	-
5	1.59375	1.625	1.609375	-

即：

$$x^* \approx x_5 = 1.609375$$

.

第 4 题

(1) 二分法计算过程如下:

表 2:

k	a_k	b_k	x_k	$sign$	$\frac{1}{2^{k+1}}$
0	0	1	0.5	+	0.5
1	0	0.5	0.25	+	0.25
2	0	0.25	0.125	+	0.125
3	0	0.125	0.0625	-	0.0625
4	0.0625	0.125	0.09375	+	0.03125
5	0.0625	0.09375	0.078125	-	0.015625
6	0.078125	0.09375	0.0859375	-	0.0078125
7	0.0859375	0.09375	0.08984375	-	0.00390625
8	0.08984375	0.09375	0.091796875	+	0.001953125
9	0.08984375	0.091796875	0.090820312	+	0.000976562
10	0.08984375	0.090820312	0.090332031	-	0.000488281
11	0.08984375	0.090820312	0.090332031	-	0.00024414
12	0.090332031	0.090576171	0.090454101	-	0.00012207
13	0.090454101	0.090576171	0.090515136	-	0.000061035
14	0.090515136	0.090576171	0.090545653	+	0.000030517

当 $k = 14$ 时, $x_{14} = 0.090545653 = 9.0545653 \times 10^{-2}$.

$|x_{14} - x^*| \leqslant \frac{1}{2^{15}} = 0.000030517 < \frac{1}{2} \times 10^{-2-3+1} = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 所以此时 $x^* \approx x_{14}$ 具有三位有效数字.

(2) 当 $x \in [0, 0.5]$ 时, $\varphi(x) \in [0, 0.5], |\varphi'(x)| = \frac{1}{10}|-\mathrm{e}^x| \leqslant L = 0.825$, 所以此迭代公式收敛. 迭代过程如下表:

表 3:

k	x_k
1	0.1
2	0.089482908
3	0.090639135
4	0.090512616
5	0.090526468
6	0.090524951

当 $k = 6$ 时，$x_6 = 0.090524951 = 9.0524951 \times 10^{-2}$.

$|x_6 - x^*| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_6 - x_5| \leqslant 0.00000720 < \frac{1}{2} \times 10^{-2-3+1} = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$，所以 $x^* \approx x_6$ 有三位有效数字。

第 7 题

因为根的准确值 $x^{*}=1.87938524\cdots$, 所以想要得到具有四位有效数字的精确解:

$$|x-x^{*}|\leq\frac{1}{2}\times10^{0-4+1}=\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$f(1)<0,f(2)>0,f'(x)=3x^{2}-3=3\left(x^{2}-1\right)\geqslant0,$$
$$f''(x)=6x>0,\forall x\in[1,2]$$

(1) 使用牛顿迭代法：
$x_{k+1}=x_{k}-\frac{x_{k}^{3}-3x_{k}-1}{3x_{k}^{2}-3}=\frac{2x_{k}^{3}+1}{3\left(x_{k}^{2}-1\right)}$
得到：$x_{1}=1.8889,x_{3}=1.8794,|x_{3}-x^{*}|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$
$\therefore x^{*}\approx x_{3}=1.8794$

(2) 使用弦截法，取 $x_{0}=2,x_{1}=1.9:$
$x_{k+1}=x_{k}-\frac{(x_{k}-x_{k-1})f(x_{k})}{f(x_{k})-f(x_{k-1})}$
得到: $x_{2}=1.9811,x_{3}=1.8794,|x_{3}-x^{*}|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$.
$\therefore\quad x^{*}\approx x_{3}=1.8794$

(3) 使用抛物线法：$x_{0}=1,x_{1}=3,x_{2}=2$
抛物线法的迭代公式为：

$$\begin{cases}x_{k+1}=x_{k}-\frac{2f(x_{k})}{\omega+\operatorname{sign}(\omega)\sqrt{\omega^{2}-4f(x_{k})f[x_{k},x_{k-1},x_{k-2}]}}\\ \omega=f\left[x_{k},x_{k-1}\right]+f\left[x_{k},x_{k-1},x_{k-2}\right]\left(x_{k}-x_{k-1}\right)\end{cases}$$

得到:$x_{3}=1.953967549,x_{4}=1.87801539,x_{5}=1.879386866,|x_{5}-x^{*}|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$
$\therefore\quad x^{*}\approx x_{5}=1.879386866$

第 8 题

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x-tan(x)<0$.
当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$x-tan(x)>0$.
所以 $x-tan(x)=0$ 的最小正根在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内.

(1) 设 $f(x)=x-\tan x,x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$
$\because f(4)>0,f(4.6)<0,\therefore[4,4.6]$ 是有根区间.
二分法的计算过程如下表:
$|x_{9}-x^{*}|<\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<10^{-3}$.

表 4:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	4.0	4.6	4.3	+
1	4.3	4.6	4.45	+
2	4.45	4.6	4.525	-
3	4.45	4.525	4.4875	+
4	4.4875	4.525	4.50625	-
5	4.4875	4.50625	4.496875	-
6	4.4875	4.496875	4.4921875	+
7	4.4921875	4.496875	4.49453125	-
8	4.4921875	4.49453125	4.493359375	+
9	4.493359375	4.49453125	4.493445313	-

(2) 使用牛顿迭代法:

$\because f'(x) = -(\tan x)^2 < 0, f''(x) = -2\tan x \frac{1}{\cos^2 x} < 0. \therefore$ 牛顿法收敛.

迭代公式为:$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \tan x_k}{-(\tan x_k)^2}$.

取 $x_0 = 4.6$, 具体迭代过程如下表所示:

表 5:

k	x_k
1	4.545732122
2	4.506145588
3	4.494171630
4	4.493412197
5	4.493409458
6	4.493409458

$\therefore x - \tan x = 0$ 的最小正根 ≈ 4.493409458.

第 12 题

由题意：

$$f(x) = x^3 - a, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$$

相应的牛顿迭代公式为：

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\begin{cases} x > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0 \\ x < 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0 \end{cases}$$

- $a > 0$ 时：
  $x_0 \in (\sqrt[3]{a}, +\infty)$, $f(x_0) f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.
  $x_0 \in (0, \sqrt[3]{a})$, $x_1 - \sqrt[3]{a} = \frac{2x_0^3 + a}{3x_0^2} - \sqrt[3]{a} = \frac{\left(\sqrt[3]{a} - x_0\right)^2}{3x_0^2} (\sqrt[3]{a} + 2x_0) > 0$.
  $\therefore x_1 > \sqrt[3]{a}$. 从 x_1 起，牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.
  $x_0 \in (-\infty, 0)$, $f(x_0) f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.
- $a < 0$ 时：
  $x_0 \in (-\infty, \sqrt[3]{a})$, $f(x_0) f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.
  $x_0 \in (\sqrt[3]{a}, 0)$, $x_1 - \sqrt[3]{a} = \frac{\left(\sqrt[3]{a} - x_0\right)^2}{3x_0^2} (\sqrt[3]{a} + 2x_0) < 0$.
  $\therefore x_1 < \sqrt[3]{a}$. 从 x_1 起，牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.
  $x_0 \in (0, +\infty)$, $f(x_0) f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.
- $a = 0$ 时：
  $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3}{3x_k^2} = \frac{2}{3} x_k$, 此迭代公式对任意 $x \in R$ 都收敛

综上所述，牛顿迭代公式 1 对任意 $a \in R, x_0 \in R$ 都收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

第七章

第 7 题

(1) $a_{ii} = (\mathbf{Ae_i}, \mathbf{e_i}) = \mathbf{e_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ae_i}, i \in [n]$, 其中 $\mathbf{e_i} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ 是第 i 个单位向量.
显然上式是关于 $\mathbf{e_i}$ 的二次型，$\mathbf{A}$ 又是正定的.
根据正定二次型的定义, $\forall x_i \in \mathbb{R}^n, x^\top \mathbf{A} x > 0$, 因此我们有 $a_{ii} > 0$.

(2) 由 $\mathbf{A}$ 的正定性以及消元公式：

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, \quad i, j = 2, \cdots, n$$

故 $\mathbf{A}_2$ 是对称矩阵.
由矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A} \quad 其中:\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{L}_1$ 非奇异，因此 $\forall x \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{L}_1 x \neq \mathbf{0}$.

$$\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}\right) = \left(\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A} \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > 0 \quad (由于\ \boldsymbol{A}\ 的正定性)$$

所以: $\boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵.
因为:

$$\boldsymbol{A}\ 是对称矩阵并且 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A}$$

所以：

$$\boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$$

而 $a_{11} > 0$, 故 $\boldsymbol{A}_2$ 正定.

(3) 由消元公式:

$$a_{ii}^{(2)} = a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ii} - \frac{a_{i1}^2}{a_{11}}$$

因为 $a_{11} > 0$, 所以 $a_{ii}^{(2)} \leqslant a_{ii} \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$.

(4) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 划去任意 k 行 k 列所得矩阵仍是对称正定矩阵.
假设 $\boldsymbol{A}$ 划去除了第 i，j 以外的所有行和列, 得到:

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

所以 $\det(\boldsymbol{A}') = a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$. 即 $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj} (i, j = 1, 2, \ldots, n$ 并且$i \neq j)$.
由此可知 $\boldsymbol{A}$ 的绝对值最大的元素必然在对角线上，否则与上述结论矛盾.

(5) 首先，由 (2)(4) 知，$\boldsymbol{A}_2$ 的绝对值最大的元素在对角线上, 即:

$$\max_{2\leqslant i,j\leqslant n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| = \max_{2\leqslant i\leqslant n}\left|a_{ii}^{(2)}\right|$$

再由 (3) 知,

$$\max_{2\leqslant i\leqslant n}\left|a_{ii}^{(2)}\right| \leq \max_{2\leqslant i\leqslant n}|a_{ii}| = \max_{2\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$$

综上, $\max_{2\leqslant i,j\leqslant n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| \leqslant \max_{2\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$.

(6) 由 (5) 的证明易得:

$$\forall k\in[n], \max_{k\leqslant i,j\leqslant n}\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leqslant \max_{k-1\leqslant i,j\leqslant n}\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| \leqslant \cdots \leqslant \max_{2\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}| \leq 1$$

对于除了 $a_{ij}^{(k)}, k\leqslant i,j\leqslant n$ 外的其他元素，$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}$.
由 (2) 可得，$\max_{i,j\notin[k,n]}\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| = \max_{k-1\leqslant i\leqslant n}\left|a_{ii}^{(k-1)}\right| \leq a_{ii} < 1$.
综上, 对于所有 k, $\left|a_{ij}^{(k)}\right| < 1$.

第 13 题

令

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ -1 & \alpha_2 & & & \\ & -1 & \alpha_3 & & \\ & & -1 & \alpha_4 & \\ & & & -1 & \alpha_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & 1 & \beta_3 & \\ & & & 1 & \beta_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

由公式:

$$\begin{cases} \alpha_1 = b_1, \beta_1 = \frac{c_1}{\alpha_1} \\ \alpha_i = b_i - a_i\beta_{i-1} & (i=2,3,4,5) \\ \beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\beta_{i-1}} & (i=2,3,4) \end{cases}$$

解得:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \tfrac{3}{2}, \quad \alpha_3 = \tfrac{4}{3}, \quad \alpha_4 = \tfrac{5}{4}, \quad \alpha_5 = \tfrac{6}{5} \\ &\beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \beta_2 = -\tfrac{2}{3}, \quad \beta_3 = -\tfrac{3}{4}, \quad \beta_4 = -\tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

解方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & & \\ & & -1 & \frac{5}{4} & \\ & & & -1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得: $\boldsymbol{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6})^{\mathrm{T}}$.

解方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

得：$\boldsymbol{x} = (\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^{\mathrm{T}}$.

第 15 题

$\boldsymbol{A}$ 中 $\Delta_2 = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$, 所以不能分解. $\det(\boldsymbol{A}) = -10 \neq 0$, 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第 3 行, $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, 此时 $\boldsymbol{A}$ 可以 LU 分解并且分解唯一.

$\boldsymbol{B}$ 中 $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$, 故不能分解. 但:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

其中 a 为任意常数，且 $\boldsymbol{U}$ 奇异，所以分解不唯一.

$\boldsymbol{C}$, 因为 $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, 所以 $\boldsymbol{C}$ 可以 LU 分解并且分解唯一.

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

第 18 题

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{A}\|_\infty &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \textstyle\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1.1 \\ \|\boldsymbol{A}\|_1 &= \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \textstyle\sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 0.8 \\ \|\boldsymbol{A}\|_F &= \left(\textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.71} = 0.8426 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.33 \\ 0.33 & 0.34 \end{bmatrix}$$

求解 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的特征值, 得到 $\lambda_1 = 0.6853, \lambda_2 = 0.0247$. $\therefore \lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = 0.6853$.

$\therefore \|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})} = 0.825$.

第 19 题

(1) $\because \max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| \le n\max_{1\le i\le n}|x_i|$

$\therefore \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|$

(2) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Ax}\|_2^2 = (\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}) \ge 0.$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为非负实数.

所以:

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\|_2^2 &= \lambda_{\max}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\\
&\leqslant \lambda_1\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)+\lambda_2\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)+\cdots+\lambda_n\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}a_{i1}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{i2}^2+\cdots+\sum_{i=1}^{n}a_{in}^2\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2 = \|\boldsymbol{A}\|_F^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\|_2^2 &= \lambda_{\max}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\\
&\geqslant \frac{1}{n}\left[\lambda_1\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)+\lambda_2\left(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)+\cdots+\lambda_n\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\right]\\
&= \frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_F^2
\end{aligned}
$$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_F.$

第 31 题

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{bmatrix} \quad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 199 \quad \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 199
$$

$\therefore \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})_\infty = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 39601$

$$
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 19801 & 19602 \\ 19602 & 19405 \end{bmatrix}
$$

$\therefore \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})_2 = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}} = 39205.9745$

第 33 题

由矩阵范数的性质以及条件数的定义:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cond}(\boldsymbol{AB}) &= \left\|(\boldsymbol{AB})^{-1}\right\|\|\boldsymbol{A}\|\\
&\leqslant \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\left\|\boldsymbol{B}^{-1}\right\|\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|\\
&\leqslant \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\|\boldsymbol{A}\|\left\|\boldsymbol{B}^{-1}\right\|\|\boldsymbol{B}\|\\
&= \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\operatorname{cond}(\boldsymbol{B}).
\end{aligned}
$$