第一次作业

张运吉 211300063

Problem1

证:

a)由Cauchy-Schwarz inequality: $|x^{ op}y| \leq \|x\| \|y\|$, 得:

$$egin{aligned} x^ op y + y^ op x & \leq 2\|x\|\|y\| \ x^ op x + x^ op y + y^ op x + y^ op y & \leq x^ op x + y^ op y + 2(x^ op x)^rac{1}{2}(y^ op y)^rac{1}{2} \ & (x+y)^ op (x+y) & \leq [(x^ op x)^rac{1}{2} + (y^ op y)^rac{1}{2}]^2 \end{aligned}$$

开根号,得到:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

得证。

b) 欲证

$$\|x+y\|^2 \leq (1+\epsilon)\|x\|^2 + (1+rac{1}{\epsilon})\|y\|^2$$

只需证

$$x^{\top}x + y^{\top}y + x^{\top}y + y^{\top}x \leq \|x\|^2 + \epsilon \|x\|^2 + \|y\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \|y\|^2$$

即

$$x^ op y + y^ op x \leq \epsilon \|x\|^2 + + rac{1}{\epsilon} \|y\|^2$$

因为

$$\epsilon \|x\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \|y\|^2 \geq 2(\epsilon \|x\|^2 \frac{1}{\epsilon} \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \|x\| \|y\| \geq x^\top y + y^\top x$$

所以成立, 证毕。

Problem2

a) 是凸集,证:

 $orall x_1, x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \le 1\}, \, x_{11} \le y_{12}, x_{21} \le y_{22},$

设 $heta x_1 + (1- heta) x_2 = (x,y)$, 则

$$rac{x}{y} = rac{ heta x_{11} + (1 - heta) x_{21}}{ heta y_{12} + (1 - heta) y_{22}} \leq rac{ heta y_{12} + (1 - heta) y_{22}}{ heta y_{12} + (1 - heta) y_{22}} = 1$$

所以

$$heta x_1 + (1- heta) x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \leq 1\}$$

证毕。

b) 是凸集, 证:

$$orall x_1, x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \geq 1 \}$$
, $x_{11} \geq y_{12}, x_{21} \geq y_{22}$,

设
$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 = (x, y)$$
, 则

$$rac{x}{y} = rac{ heta x_{11} + (1 - heta) x_{21}}{ heta y_{12} + (1 - heta) y_{22}} \geq rac{ heta y_{12} + (1 - heta) y_{22}}{ heta y_{12} + (1 - heta) y_{22}} = 1$$

所以

$$heta x_1 + (1- heta) x_2 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | x/y \geq 1\}$$

证毕。

c) 不是凸集, 反例:

$$\Rightarrow x_1 = (\frac{1}{2}, 2), y_1 = (2, \frac{1}{2}), \theta = \frac{1}{2},$$

则
$$heta x_1 + (1- heta) x_2 = (rac{5}{4},rac{5}{4})
otin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | xy \leq 1\}$$

d)是凸集, 证:

$$orall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} | xy \geq 1\}, x_1y_1 \geq 1, x_2y_2 \geq 1$$

$$orall 0 < heta < 1$$
,设 $(x_3,y_3) = heta(x_1,y_1) + (1- heta)(x_2,y_2)$,则

$$egin{aligned} x_3y_3 &= [heta x_1 + (1- heta)x_2][heta y_1 + (1- heta)y_2] = heta^2 x_1y_1 + (1- heta)x_2y_2 + heta(1- heta)x_1y_2 + heta(1- heta)x_2y_1 \ &\geq heta^2 + (1- heta)^2 + 2\sqrt{ heta(1- heta)x_1y_2 heta(1- heta)x_2y_1} = heta^2 + (1- heta)^2 + 2 heta(1- heta) = 1 \end{aligned}$$

所以 $(x_3,y_3)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}|xy\geq 1\}$ 证毕。

e) 不是凸集。反例:

Problem3

a)证:

 $\forall x_1, x_2 \in P,$ $\exists Ax_1 \leqslant b \exists Ax_2 \leqslant b.$

$$orall 0 \leq heta \leq 1, A(heta x_1 + (1- heta)x_2) = heta Ax_1 + (1- heta)Ax_2 \leqslant heta b + (1- heta)b = b$$

所以 $heta x_1 + (1- heta) x_2 \in P$

所以 P 是一个凸集.

- b) 证:
- ∵ *S* 是凸集.

$$\therefore \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S$$

$$\therefore \forall Ax_1, Ax_2 \in A(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \in A(S)$$

由于 x_1, x_2 的任意性我们知道, Ax_1, Ax_2 也是A(S)中的任意元素,所以相当于

$$\forall y_1,y_2 \in A(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in S$$

∴ *A*(*S*) 是凸集.

证毕。

- c). 证:
- ∵ S 是凸集.

$$\therefore \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$
, 我们有 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$

$$\Leftrightarrow x_1 = Ay_1, x_2 = Ay_2, \therefore y_1, y_2 \in A^{-1}(S)$$

$$orall Ay_1, Ay_2 \in S, 0 \leqslant heta \leqslant 1, heta Ay_1 + (1- heta)Ay_2 = A(heta y_1 + (1- heta)y_2) \in S$$

$$\therefore \forall y_1, y_2 \in A^{-1}(S), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta y_1 + (1 - \theta)y_2 \in A^{-1}(S)$$

证毕。

Problem4

- a). 证:
- $\therefore K^* = \{y|x^Ty \geqslant 0, \forall x \in K\}$
- $\therefore orall y_1, y_2 \in S$, $x^T y_1 \geqslant 0, x^T y_2 \geqslant 0$, $orall x \in K$

$$\therefore \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \theta x^T y_1 + (1-\theta) x^T y_2 = x^T (\theta y_1 + (1-\theta) y_2) \geqslant 0$$

- $\therefore heta y_1 + (1- heta) y_2 \in K^*$
- ∴ *K** 是一个凸锥.
- b) 证:

欲证此结论,只需证明 $\forall y \in V^*$,只有 $x^Ty = 0, \forall x \in V$,不可能出现 $x^Ty > 0, \forall x \in V$ 的情况。

若是 $x^Ty>0, orall x\in V$,则 $-x\in V$ (因为V是子空间), $y^T(-x)=-y^Tx<0$

这与 V^* 的定义矛盾

所以 $V^* = V^+ = \{y|y^ op v = 0, orall v \in V\}$

证毕。

c) 非负象限的对偶锥就是它本身。

证:记非负象限为 $A, A^* = \{y | x^T y \ge 0, \forall x \in A\},$

 $\forall y \in A^*,$ 取 $x_i = (0,0,...,1,...,0) \in A, i = 1,2,...,n$ $(x_i$ 的第i位为1,其余为0)

由 $x_i^T y \geq 0$, 得 $y_i \geq 0$ (y_i 是y的第i个分量)

所以 A^* 就是非负象限。

Problem5

a). 证:

$$\because K^* = \{y|x^Ty \geqslant 0, orall x \in K\}$$

$$\therefore orall y_1, y_2 \in S$$
, $x^T y_1 \geqslant 0, x^T y_2 \geqslant 0$, $orall x \in K$

$$\therefore orall 0 \leqslant heta \leqslant 1$$
 , $heta x^T y_1 + (1- heta) x^T y_2 = x^T (heta y_1 + (1- heta) y_2) \geqslant 0$

$$\therefore heta y_1 + (1- heta) y_2 \in K^*$$

∴ K* 是一个凸锥.

b). 证:

$$orall y \in K_2^*, x^Ty_{\geq}0, orall x \in K_2$$

$$\therefore K_1 \subseteq K_2 \therefore \forall x \in K_1, x \in K_2$$

$$\therefore \forall x \in K_1, x^T y_{\geq} 0 (y$$
是第一行中的 $y)$

即
$$orall y \in K_2^*, y \in K_1^*$$

$$\therefore K_2^* \subseteq K_1^*$$

证毕。