

离散数学 - Problem Set 4

Problem 1

用推理规则证明：如果 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ 和 $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ 为真，则 $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ 为真。

Problem 2

用推理规则证明：如果 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 和 $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$ ， $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ 和 $\exists x\neg P(x)$ 为真，则 $\exists x\neg R(x)$ 为真。

Problem 3

证明所有正整数 $n = 4m + 3$ (m 为自然数) 都不能写成两个整数的平方和。

Problem 4

用不失一般性的概念证明当 x 和 y 是奇偶性相反的整数时， $5x + 5y$ 是一个奇整数。

Problem 5

两个实数 x 和 y 的平方均值是 $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ 。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

Problem 6

证明方程 $2x^2 + 5y^2 = 14$ 没有 x 和 y 的整数解。

Problem 7

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数。

Problem 8

用归谬法证明不存在有理数 r 使得 $r^3 + r + 1 = 0$ 。

Problem 9

证明 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。

Problem 10

证明或驳斥如果 a 和 b 是有理数，那么 a^b 也是有理数。