证明 根据题意可得 $E[X_i]=0$, 以及 $\mathrm{Var}(X_i)=E[X_i^2]=i^{1/2}$, 根据 Chebysheve 不等式和独立性有

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant\epsilon\right]\leqslant\frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^{1/2}\leqslant\frac{1}{\epsilon^2\sqrt{n}}$$

再根据

$$\sum_{i=1}^{n}i^{1/2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{i}^{i+1}i^{1/2}dx\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{i}^{i+1}x^{1/2}dx=\int_{1}^{n+1}x^{1/2}dx=2((n+1)^{3/2}-1)/3$$

由此可得当 $n\to+\infty$ 时有

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqslant\epsilon\right]\leqslant\frac{2((n+1)^{3/2}-1)/3}{\epsilon^2n^2}\to 0$$

大数定律小结:

- Markov 大数定律: 若随机变量序列 $\{X_i\}$ 满足 $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_n)/n^2\to 0$, 则满足大数定律;
- Chebyshev 大数定律: 若独立随机变量序列 $\{X_i\}$ 满足 $\mathrm{Var}(X_i)\leqslant c$, 则满足大数定律;
- Khintchine 大数定律: 若独立同分布随机变量序列 $\{X_i\}$ 期望存在, 则满足大数定律;
- Bernoulli 大数定律: 对二项分布 $X_n\sim\mathrm{B}(n,p)$, 有 $X_n/n\xrightarrow{P}p$.

8.2 中心极限定理

对独立的随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$, 我们考虑标准化后随机变量

$$Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}$$

的极限分布是否为服从正态分布. 首先介绍依分布收敛.

定义 8.2 设随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\Pr(Y\leqslant y)$, 以及随机变量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 的分布函数分别为 $F_{Y_n}(y)=\Pr(Y_n\leqslant y)$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\Pr[Y_n\leqslant y]=\Pr[Y\leqslant y],\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}F_{Y_n}(y)=F_Y(y),$$

则称随机变量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 依分布收敛于 Y, 记 $Y_n\xrightarrow{d}Y$.

下面介绍独立同分布中心极限定理, 又被称为林德贝格-勒维 (Lindeberg-Lévy) 中心极限定理":

定理 8.6 设独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 的期望 $E(X_1) = \mu$ 和方差 $Var(X_1) = \sigma^2$, 则

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

前面介绍标准正态分布的分布函数为 $\Phi(x)$, 则上述中心极限定理等价于

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[Y_n \leqslant y] = \Phi(y).$$

随机变量 Y_n 是随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的标准化, 其极限服从标准正态分布. 当 n 足够大时近似有 $Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, 中心极限定理的变形公式为

$$\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2), \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

大数定律给出了当 $n \to \infty$ 时随机变量平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 的趋势, 而中心极限定理给出了 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 的具体分布.

例 8.2 设一电压接收器同时接收到 20 个独立同分布的信号电压 V_k ($k \in [20]$), 且 $V_k \sim U(0,10)$, 求电压和大于 105 的概率.

解 根据题意可知独立同分布的随机变量 $V_1, V_2, \ldots, V_{20}$ 服从均匀分布 $U(0,10)$, 于是有 $E(V_k) = 5$ 和 $\mathrm{Var}(V_k) = 100/12 = 25/3$. 设 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$, 则有

$$E(V) = 100 \qquad \mathrm{Var}(V) = 500/3.$$

根据中心极限定理近似有

$$\frac{V - E(V)}{\sqrt{\mathrm{Var}(V)}} = \frac{V - 100}{\sqrt{500/3}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

根据标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 有

$$\Pr(V \geqslant 105) = \Pr\left(\frac{V-100}{\sqrt{500/3}} \geqslant \frac{105-100}{\sqrt{500/3}}\right) = \Pr\left(\frac{V-100}{\sqrt{500/3}} \geqslant 0.387\right) = 1 - \Phi(0.387).$$

查表完成证明.

例 8.3 某产品装箱, 每箱重量是随机的, 假设其期望是 50 公斤, 标准差为 5 公斤. 若最大载重量为 5 吨, 问每车最多可装多少箱能以 0.997 以上的概率保证不超载?

解 假设最多可装 n 箱不超重, 用 X_i 表示第 i 箱重量 ($i \in [n]$), 有 $E(X_i) = 50$ 和 $\mathrm{Var}(X_i) = 25$. 设总重量 $X = \sum_{i=1}^n X_i$, 则有 $E(X) = 50n$ 和 $\mathrm{Var}(X) = 25n$. 由中心极限定理近似有

$$(X - 50n)/\sqrt{25n} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

根据标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 有

$$\Pr(X \leqslant 5000) = \Pr\left(\frac{X-50n}{\sqrt{25n}} \leqslant \frac{5000-50n}{\sqrt{25n}}\right) = \Phi\left(\frac{5000-50n}{\sqrt{25n}}\right) > 0.977 = \Phi(2).$$

根据分布函数的单调性有

$$\frac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2 \Longrightarrow 1000n^2 - 2000n + 1000^2 > 4n.$$

求解可得 $n > 102.02$ 或 $n < 98.02$, 根据由题意可知 $n = 98$.

下面介绍另一个中心极限定理: 棣莫弗-拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 中心极限定理:

推论 8.1 设随机变量 $X_n \sim B(n,p)$, 则

$$Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

由此中心极限定理可知: 当 n 非常大时随机变量 $X_n \sim B(n,p)$ 满足 $X_n \overset{近似}{\sim} \mathcal{N}(np, np(1-p))$, 从而有如下近似估计:

$$\Pr[X_n \leqslant y] = \Pr\left[\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \approx \Phi\left(\frac{y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

针对上式, 可以考虑三种问题: i) 已知 n 和 $\Pr[X_n \leqslant y]$, 求 y; ii) 已知 n 和 y, 求 $\Pr[X_n \leqslant y]$; iii)已知 y 和 $\Pr[X_n \leqslant y]$, 求 n. 下面看三个例子:

例 8.4 车间有 200 台独立工作的车床, 每台工作的概率为 0.6, 工作时每台耗电 1 千瓦, 至少供电多少千瓦才能以 99.9% 的概率保证正常生产.

解 设工作的车床数为 X, 则 $X \sim B(200, 0.6)$. 设至少供电 y 千瓦. 根据棣莫弗-拉普拉斯中心定理近似有 $X \sim \mathcal{N}(120, 48)$, 进一步有

$$\Pr(X \leqslant y) \geqslant 0.999 \quad \Rightarrow \quad \Pr\left(\frac{X-120}{\sqrt{48}} \leqslant \frac{y-120}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y-120}{\sqrt{48}}\right) \geqslant 0.999 = \Phi(3.1).$$

所以有 $\frac{y-120}{\sqrt{48}} \geqslant 3.1$, 求解可得 $y \geqslant 141$.

例 8.5 系统由 100 个相互独立的部件组成, 每部件损坏率为 0.1, 至少 85 个部件正常工作系统才能运行, 求系统运行的概率.

解 设 X 是损坏的部件数, 则 $X \sim B(100, 0.1)$, 有 $E(X) = 10$ 和 $\mathrm{Var}(X) = 9$. 根据棣莫弗-拉普拉斯中心定理近似有 $X \sim \mathcal{N}(10, 9)$, 求系统运行的概率为

$$\Pr(X \leqslant 15) = \Pr\left(\frac{X-10}{\sqrt{9}} \leqslant \frac{15-10}{\sqrt{9}}\right) \approx \Phi(5/3).$$

例 8.6 一次电视节目调查中调查 n 人, 其中 k 人观看了电视节目, 因此收看比例 k/n 作为电视节目收视率 p 的估计, 要以 90% 的概率有 $|k/n - p| \leqslant 0.05$ 成立, 需要调查多少对象?

解 用 X_n 表示 n 个调查对象中收看节目的人数, 则有 $X_n \sim B(n, p)$. 根据棣莫弗-拉普拉斯中心定理近似有 $(X_n - np)/\sqrt{np(1-p)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 进一步有

$$\begin{aligned}\Pr\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leqslant 0.05\right] &= \Pr\left[\frac{|X_n - np|}{n} \leqslant 0.05\right] = \Pr\left[\frac{|X_n - np|}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\end{aligned}$$

对于标准正太分布函数有 $\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$ 以及 $p(1-p) \leqslant 1/4$, 于是有

$$\Pr\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leqslant 0.05\right] = 2\Phi\left(\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 > 2\Phi\left(\sqrt{n}/10\right) - 1 > 0.9.$$

所以 $\Phi\left(\sqrt{n}/10\right) \geqslant 0.95$, 查表解得 $n \geqslant 271$.

对独立不同分布的随机变量序列, 有李雅普诺夫 (Lyapunov) 中心极限定理:

定理 8.7 设独立随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 的期望 $E[X_n] = \mu_n$ 和方差 $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2 > 0$. 记 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, 若存在 $\delta > 0$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E[|X_k - \mu_k|^{2+\delta}] \to 0$$

成立, 则有

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n E(X_k)}{\sqrt{Var(\sum_{k=1}^n X_k)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

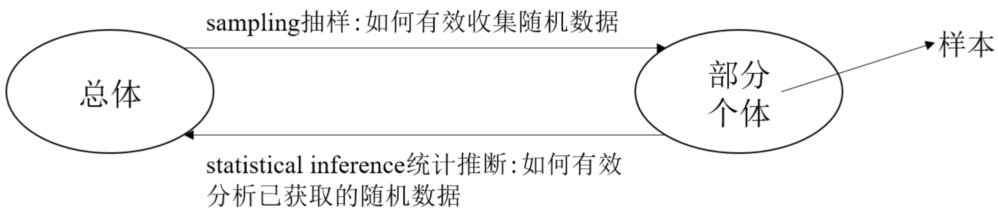
中心极限定理小结:

- 独立同分布中心极限定理: 若 $E[X_k] = \mu$ 和 $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2$, 则 $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$;
- 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理: 若 $X_k \sim B(k, p)$, 则 $X_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(np, np(1-p))$;
- 独立不同分布中心极限定理: 李雅普诺夫定理.

第 9 章 统计的基本概念

到 19 世纪末 20 世纪初, 随着近代数学和概率论的发展, 诞生了统计学.

统计学: 以概率论为基础, 研究如何有效收集研究对象的随机数据, 以及如何运用所获得的数据揭示统计规律的一门学科. 统计学的研究内容具体包括: 抽样、参数估计、假设检验等.



9.1 总体 (population) 与样本 (sample)

'总体' 是研究问题所涉及的对象全体; 总体中每个元素称为 '个体'. 总体分为有限或无限总体. 例如: 全国人民的收入是总体, 一个人的收入是个体.

在研究总体时, 通常关心总体的某项或某些数量指标, 总体中的每个个体是随机试验的一个观察值, 即随机变量 X 的值. 对总体的研究可转化为对随机变量 X 的分布或数字特征的研究, 后面总体与随机变量 X 的分布不再区分, 简称总体 X.

总体: 研究对象的全体 $\Rightarrow$ 数据 $\Rightarrow$ 随机变量 (分布未知).

样本: 从总体中随机抽取一些个体, 一般表示为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自总体 X 的随机样本, 其样本容量为 n.

抽样: 抽取样本的过程.

样本值: 观察样本得到的数值, 例如: $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$ 为样本观察值或样本值.

样本的二重性: i) 就一次具体观察而言, 样本值是确定的数; ii) 不同的抽样下, 样本值会发生变化, 可看作随机变量.

定义 9.1 (简单随机样本) 称样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的简单随机样本, 简称样本, 是指样本满足: 1) 代表性, 即 X_i 与 X 同分布; 2) 独立性, 即 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 之间相互独立.

本书后面所考虑的样本均为简单随机样本.

设总体 X 的联合分布函数为 $F(x)$, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i);$$

若总体 X 的概率密度为 $f(x)$, 则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

若总体 X 的分布列 $\Pr(X = x_i)$, 则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布列为

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i = x_i).$$

9.2 常用统计量

为研究样本的特性, 我们引入统计量:

定义 9.2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是关于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个连续、且不含任意参数的函数, 称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一个 **统计量**.

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量, 因此统计量 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一个随机变量. 而 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一次观察值. 下面研究一些常用统计量.

假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 定义 **样本均值** 为

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

根据样本的独立同分布性质有

引理 9.1 设总体 X 的期望为 $E[X] = \mu$, 方差 $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, 则有

$$E[\bar{X}] = \mu, \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n, \qquad \bar{X} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 定义 **样本方差** 为

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2.$$

引理 9.2 设总体 X 的期望为 $E[X] = \mu$, 方差 $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, 则有

$$E[S_0^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

证明 根据 $E[X_i^2] = \sigma^2 + \mu^2$ 有

$$E(\bar{X}^2) = E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2,$$

于是有

$$E(S_0^2) = E(X_i^2) - E(\bar{X}^2) = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

由此可知样本方差 S_0^2 与总体方差 σ^2 之间存在偏差.

进一步定义 **样本标准差** 为:

$$S_0 = \sqrt{S_0^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

定义 **修正后的样本方差** 为:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \text{即} \qquad S^2 = \frac{n}{n-1}S_0^2,$$

引理 9.3 设总体 X 的期望为 $E[X] = \mu$, 方差 $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, 则有

$$E[S^2] = \sigma^2.$$

证明 根据期望的性质有

$$E[S^2] = E\left[\frac{n}{n-1}S_0^2\right] = \frac{n}{n-1}E\left[S_0^2\right] = \sigma^2.$$

假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 定义 **样本 k 阶原点矩** 为:

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

定义 **样本 k 阶中心矩** 为:

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

例 9.1 设总体 $X \sim \mathcal{N}(20, 3)$, 从总体中抽取两独立样本, 容量分别为 10 和 15. 求这两个样本均值之差的绝对值大于 0.3 的概率.

解 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ 和 $X_1', X_2', \ldots, X_{15}'$ 分别为来自总体 $X \sim \mathcal{N}(20, 3)$ 的两个独立样本. 根据正态分布的性质有

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i \sim \mathcal{N}(20, 3/10), \qquad \bar{X}_2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}X_i' \sim \mathcal{N}(20, 1/5).$$

进一步根据正态分布的性质有 $\bar{X}_1-\bar{X}_2\sim\mathcal{N}(0,1/2)$, 于是可得

$$\Pr(|\bar{X}_1-\bar{X}_2|>0.3)=2-2\Phi(0.3/\sqrt{1/2}).$$

假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 定义 **最小次序统计量** 和 **最大次序统计量** 分别为:

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\qquad 和 \qquad X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},$$

以及定义 **样本极差** 为

$$R_n=X_{(n)}-X_{(1)}.$$

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, 则有

$$F_{X_{(1)}}(x)=\Pr(X_{(1)}\leqslant x)=1-\Pr(X_{(1)}>x)=1-(1-F(x))^n,\qquad F_{X_{(n)}}(x)=F^n(x).$$

定理 9.1 设总体 X 的密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的一个样本, 则第 k 次序统计量 $X_{(k)}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$\begin{aligned}F_k(x) &= \sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}[F(x)]^r[1-F(x)]^{n-r}\\ f_k(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x).\end{aligned}$$

证明 根据题意有第 k 次序统计量 $X_{(k)}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_k(x) &= \Pr[X_{(k)}\leqslant x]=\Pr[X_1,X_2,\cdots,X_n \text{ 中至少有 } k \text{ 个随机变量 } \leqslant x]\\ &= \sum_{r=k}^{n}\Pr[X_1,X_2,\cdots,X_n \text{ 中恰有 } r \text{ 个随机变量 } \leqslant x,\ n-r \text{ 个随机变量 } >x]\\ &= \sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}[F(x)]^r[1-F(x)]^{n-r}.\end{aligned}$$

利用恒等式

$$\sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt\quad (r\in[n],\ p\in[0,1])$$

由此可知

$$F_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{F(x)}t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt,$$

根据积分函数求导完成证明.