唯一性

问题的产生

1、二次型的标准形是不是唯一的？与所作的非退化线性替换有关.

如：二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_2$

作非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}$

得标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$

作非退化线性替换 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

得标准形 $$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{2}{3}z_3^2$$

结论是：二次型的标准形是不唯一的，与所作的非退化替换有关.

2、二次型经过非退化线性替换所得的标准形中，系数不为零的平方项的个数是不是唯一确定的？与所作的非退化线性替换有关吗？

这是因为若 $f(x_1,\cdots,x_n)=x^T Ax$ 作非退化线性替换 $X=Cy$ 化为标准形 $y^T Dy$，则有 $D=C^T AC$,

$$秩(D)=秩(C^T AC)=秩(A)$$

而秩(D) 等于D 的主对角线上不为零的元素的个数.

定义

二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x$ 的秩（rank）等于矩阵A的秩，即秩 f ＝秩（A）。

结论是：二次型经过非退化线性替换所得的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关

3、问题

如何在一般数域P上，进一步“规范”平方项非零系数的形式？（这样产生了唯一性的问题）

一、复数域上的二次型的规范形

（定理3）任一复二次型经过适当的非退化线性替换可化为规范形，且规范形唯一.

证： 设复二次型 $f(x)=x^T Ax, A^T=A\in \mathbb{C}^{n\times n}$

经过非退化线性替换 $x=Cy$，$C\in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆，得

标准形 $f(x)=y^T(C^T AC)y=d_1y_1^2+\cdots+d_ry_r^2$

$d_i\neq 0$，$i=1,2\cdots r$，这里 $r=$ 秩 $f=$ 秩（A）.

再作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r , \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

或 $y = Dz,$

$$D = diag(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 1, \cdots, 1)$$

则 $f(x) = z^T(D^T C^T ACD)z = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$

称之为复二次型 $f(x)$ 的**规范形（gauge form）**.

显然，复二次型的规范形完全被原二次型的矩阵的秩所决定，因此有：

定理 任意一个复系数的二次型，经过一个适当的非退化线性替换可以变成规范形，并且规范形是唯一的.

这个定理的另一种说法就是：任何一个复对称矩阵都与下列形式的矩阵合同

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

注意

1. 复二次型的规范形中平方项的系数只有1和0两种.

2. 复二次型的规范形是唯一的，由秩 f 确定.

推论1 任一复对称矩阵A合同于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$r=$秩(A).

推论2 两个复对称矩阵A、B合同 $\Leftrightarrow$ 秩$(A)=$秩(B).

二、实数域上的二次型的规范形

（定理4 惯性定理inertia law）任一实二次型可经过适当的非退化线性替换化成规范形，且规范形是唯一.

证：设实二次型 $f(x)=x^T Ax$，$A^T=A\in \mathrm{R}^{n\times n}$ 经过

非退化线性替换 $x=Cy$，$C\in \mathrm{R}^{n\times n}$ 可逆，得标准形

$$f(x)=y^T(C^T AC)y$$

$$=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2,$$

其中，$d_i>0$，$i=1,2\cdots r$，$r=$ 秩 $f=$ 秩(A).

再作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \quad \cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad \cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$ 或 $y = Dz,$ (同前)

$$D = diag\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{d_r}}, 1, \cdots, 1\right)$$

则 $D^T C^T ACD = diag(\overbrace{1, \cdots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \cdots, -1}^{r-p}, 0, \cdots, 0)$

即 $f(x) = z^T (D^T C^T ACD) z = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$

称之为实二次型 $f(x)$ 的**规范形**.

下证唯一性.

设实二次型 $f(x)=x^T Ax$ 经过非退化线性替换

$x=By$ 化成规范形

$$\boldsymbol{f(x)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\ \cdots\ -y_r^2} \qquad ①$$

经过非退化线性替换 $\boldsymbol{x=Cz}$ 化成规范形

$$\boldsymbol{f(x)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2} \qquad ②$$

只需证 $\boldsymbol{p=q}$

用反证法，设 $p > q$,

由①、②，有

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 = z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2 \qquad ③$$

且 $z = C^{-1}x = C^{-1}(By) = (C^{-1}B)y$

令 $C^{-1}B = G = (g_{ij}) \in \mathrm{R}^{n\times n}$，则$G$可逆，且有

即 $z = Gy$ $$\begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + \cdots + g_{1n}y_n \\ z_2 = g_{21}y_1 + \cdots + g_{2n}y_n \\ \quad\vdots \\ z_n = g_{n1}y_n + \cdots + g_{nn}y_n \end{cases} \quad ④$$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}y_1 + \cdots + g_{1n}y_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{q1}y_1 + \cdots + g_{qn}y_n = 0 \\ y_{p+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0 \end{cases} \quad ⑤$$

方程组⑤中未知量的个数为**n**，方程的个数为

$q+(n-p)=n-(p-q)<n$, 所以⑤有非零解.

令 $y=(k_1,\cdots,k_p,k_{p+1},\cdots k_n)$ 为⑤的非零解,

由于$k_{p+1}=\cdots=k_n=0$, 而 $k_1,k_2\cdots k_p$ 不全为**0.**

将 y 代入③的左端,

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$
$$=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

得其值为 $k_1^2+\cdots+k_p^2>0$,

由 $\begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + \cdots + g_{1n}y_n \\ z_2 = g_{21}y_1 + \cdots + g_{2n}y_n \\ \qquad\vdots \\ z_n = g_{n1}y_1 + \cdots + g_{nn}y_n \end{cases}$ ④ 及 $\begin{cases} g_{11}y_1 + \cdots + g_{1n}y_n = 0 \\ \cdots \\ g_{q1}y_1 + \cdots + g_{qn}y_n = 0 \\ y_{p+1} = 0 \\ \cdots \\ y_n = 0 \end{cases}$ ⑤

得 $z = Gy = (0, \cdots 0, z_{q+1}, \cdots z_n)$

将其代入③的右端，得其值为 $-z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2 \le 0$

矛盾. 所以, $p \le q$.

同理可证 $q \le p$，故 $p = q$.

注意

1. 实二次型的规范形中平方项的系数只有1，－1，0.

2. 实二次型的规范形中平方项的系数中 **1** 的个数与**－1**的个数之和 **=** 秩f **=** 秩**(A)**是唯一确定的.

3.规范形是唯一的.

定义 实二次型 $f(x_1 \cdots x_n)$ 的规范形

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

正平方项的个数 **p** 称为f 的**正惯性指数**；

（positive index of inertia）

负平方项的个数 $r-p$ 称为 f 的**负惯性指数**；

（negative index of inertia）

它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为f 的**符号差**.

（signature）

推论1　任一实对称矩阵A合同于一个形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ 的对角矩阵 .

其中 ± 1 的个数 $r =$ 秩(A)，+1的个数 p 等于 $x^T Ax$ 的正惯性指数；－1的个数 $r-p$ 等于 $x^T Ax$ 的负惯性指数.

推论2 实二次型 f, g 具有相同的规范形

$\Leftrightarrow$ 秩f = 秩g，且 f 的正惯性指数= g的正惯性指数.

推论3 实对称矩阵A、B合同

$\Leftrightarrow$ 秩(A) = 秩(B)且二次型 $x^T Ax$与$x^T Bx$ 的正惯性指数相等.

三、小结

基本概念

1、*n*元复二次型 $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 的规范形

$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$ 这里，*r* ＝秩(*f*).

2、 *n*元实二次型 $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 的规范形

$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$

这里，*r*＝秩(*f*)，*p* 称为 *f* 的正惯性指数；$r-p$ 称为 *f* 的负惯性指数；$2p-r$ 称为 符号差.

基本结论

定理3 任意一个复系数二次型，经过一适当的非退化线性变换可变成规范形，且规范形是唯一的.

即，任一复对称矩阵A合同于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 其中r = 秩(A).$$

推论 两个复对称矩阵A、B合同 $\Leftrightarrow 秩(A) = 秩(B).$

定理4 任意一个实二次型，经过一适当的非退化线性变换可变成规范形，且规范形是唯一的.

即，任一实对称矩阵$\boldsymbol{A}$合同于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中± 1的个数等于矩阵A的秩.

推论 两个实对称矩阵A、B合同的充要条件是

秩$(A)=$秩(B), 且二次型 $x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 的正惯性指数相等.