§3 同构

一、欧氏空间的同构

二、同构的基本性质

一、欧氏空间的同构

定义： 实数域R上欧氏空间V与V'称为**同构**，

如果由V到V'有一个1－1对应σ，适合

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$, $\quad \forall\alpha,\beta\in V,\quad \forall k\in R$

3) $\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)=(\alpha,\beta)$,

这样的映射σ称为欧氏空间V到V'的**同构映射**.

二、同构的基本性质

1、若σ是欧氏空间V到V'的同构映射，则σ也是线性空间V到V'同构映射.

2、如果σ是有限维欧氏空间V到V'的同构映射，则

$$\dim V = \dim V'.$$

3、任一n维欧氏空间V必与R^n同构.

证： 设V为 n 维欧氏空间， $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组标准正交基，在这组基下，V中每个向量 α 可表成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \qquad x_i \in R$$

作对应 $\sigma: V \to R^n$， $\sigma(\alpha) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

易证 σ 是V到 R^n 的 $1-1$ 对应.

且 σ 满足同构定义中条件1）、2）、3），

故 σ 为由V到 R^n 的同构映射，从而V与 R^n 同构.

4、同构作为欧氏空间之间的关系具有：

①反身性；②对称性；③传递性.

① 单位变换E_V是欧氏空间V到自身的同构映射.

② 若欧氏空间V到V'的同构映射是σ，则σ^{-1} 是欧氏空间V'到V的同构映射.

事实上，σ 首先是线性空间的同构映射.

其次，对 $\forall \alpha,\beta \in V'$，**有**

$$(\alpha,\beta)=\left(\sigma(\sigma^{-1}(\alpha)),\sigma(\sigma^{-1}(\beta))\right)=\left(\sigma^{-1}(\alpha),\sigma^{-1}(\beta)\right)$$

$\therefore$ σ^{-1} **为欧氏空间V'到V的同构映射.**

③ 若σ,τ分别是欧氏空间V到V'、V'到V''的同构映射，

则 $\tau\sigma$是欧氏空间V到V''的同构映射.

事实上，首先，$\tau\sigma$是线性空间V到V''的同构映射.

其次，对 $\forall\alpha,\beta\in V$，有

$$
\begin{aligned}
\left(\tau\sigma(\alpha),\tau\sigma(\beta)\right) &=\left(\tau(\sigma(\alpha)),\tau(\sigma(\beta))\right) \\
&=\left(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\right) \\
&=(\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\tau\sigma$ **为欧氏空间V到V''的同构映射.**

5、两个有限维欧氏空间V与V'同构

$$\Longleftrightarrow \dim V = \dim V'.$$