



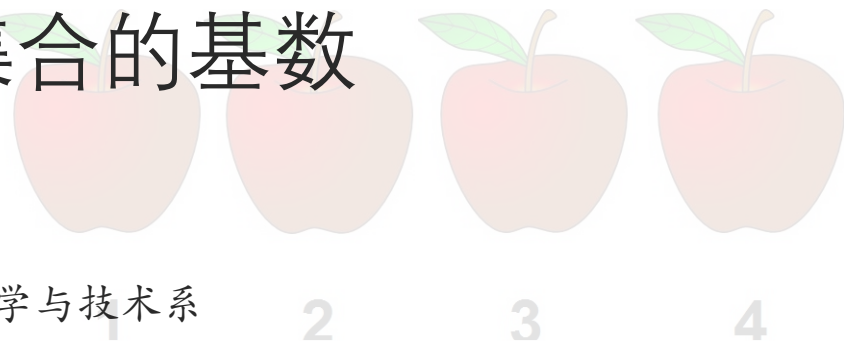
离散数学

Discrete Mathematics

第九讲：集合的基数

吴楠

南京大学计算机科学与技术系



2021 年 11 月 2 日



前情提要



- 函数的定义
- 函数的性质
 - 满射、单射、双射
- 函数的复合
- 反函数





本讲主要内容



- 自然数与无穷公理
- 有限集与无穷集
- 集合的基数
- 集合的等势关系
- Cantor 定理
- 集合的优势关系



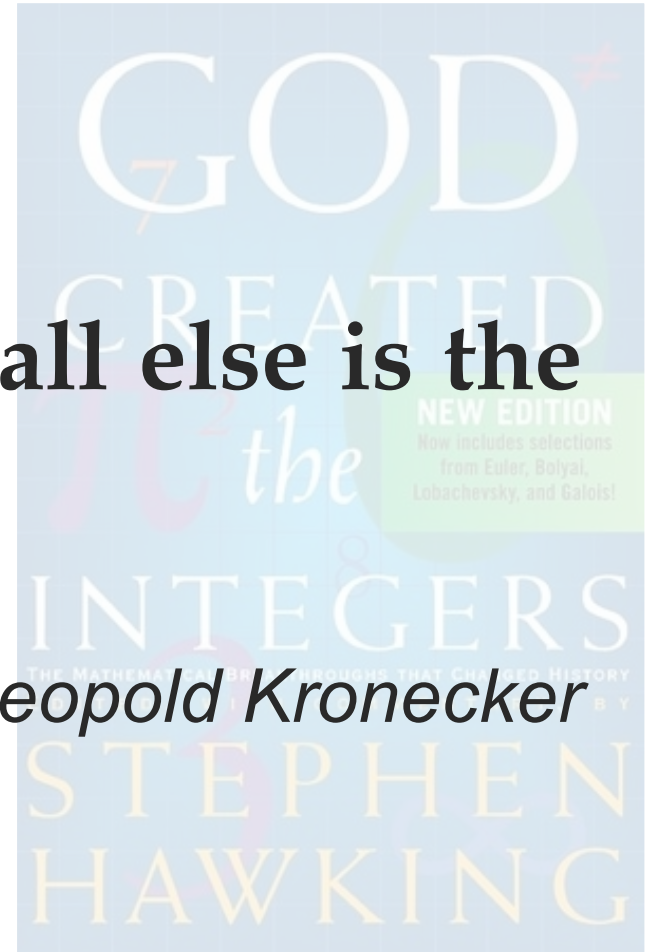
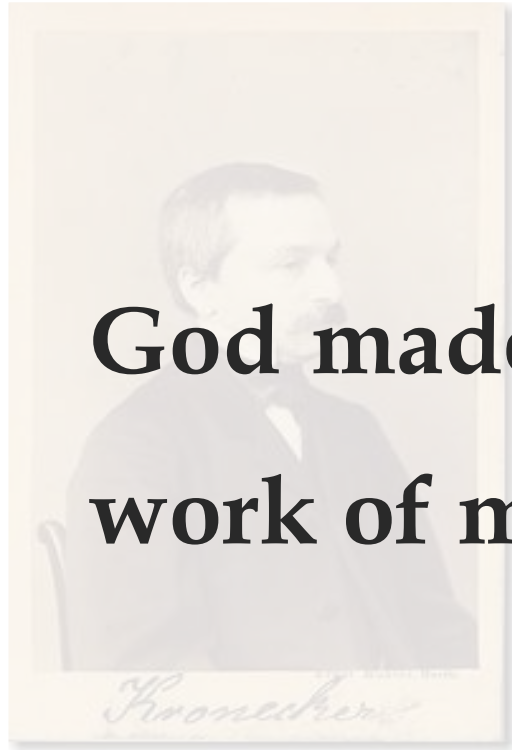


自然数与无穷集合



**God made the integers; all else is the
work of man.**

—— *Leopold Kronecker*





回顾：从集合构造自然数



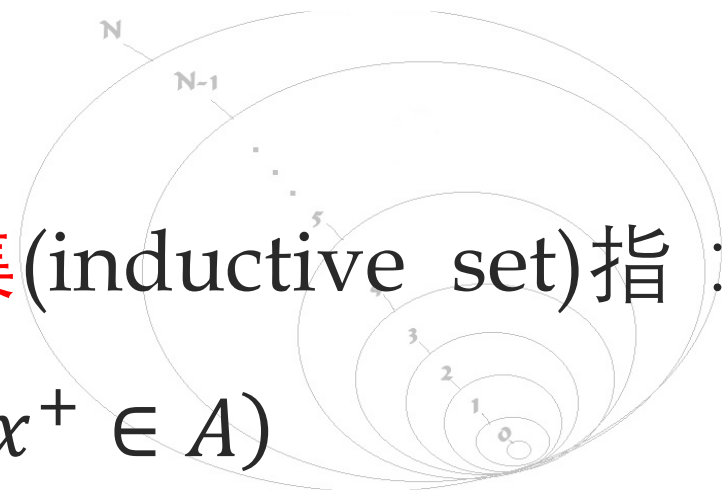
- 设 x 为集合， x 的**后继**(successor) x^+ 指 $x \cup \{x\}$,

令 $0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 0^{++}, \dots, n = \overbrace{0^{+ \dots +}}^n$, 这

是von Neumann的定义

- 设 A 为集合，称 A 为**归纳集**(inductive set)指：

$$\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A)$$





无穷公理



- **无穷公理** (Axiom of Infinity, **ZFC.7**) :

$$\exists A(\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A))$$

- 以往按照 von Neumann 的定义, $0 = \emptyset$, $n + 1 = n^+$, 从而可以定义出单个的自然数, 但不能说明全体自然数集合 \mathbb{N} 的存在性, 而由无穷公理可以定义 \mathbb{N}
- 在集合论中 (**PA.5**) : $\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{A | A \text{ 为归纳集}\}$



自然数的Peano公理系统



- Peano算术系统的公理 (*i.e.* 自然数五公设) 为：
 - **Ax.1** $0 \in \mathbb{N}$
 - **Ax.2** $n \in \mathbb{N} \rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$
 - **Ax.3** $n^+ = m^+ \rightarrow n = m$
 - **Ax.4** $0 \neq n^+$
 - **Ax.5** $0 \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A) \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N})(x \in A)$
- 由此可由集合构造Peano算术(PA) : $\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$



有关自然数的若干命题



- 对于自然数的 von Neumann 定义，可定义：

$m \leq n \stackrel{\text{def}}{=} m \subseteq n$ ，于是有以下命题成立：

- (1) $n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- (2) $n \in n + 1$
- (3) $n \leq n$
- (4) $n \leq m \leq 1 \rightarrow n \leq 1$; $n \leq m \leq n \rightarrow n = m$
- (5) $m \leq n \vee n \leq m$



自然数的定义方式

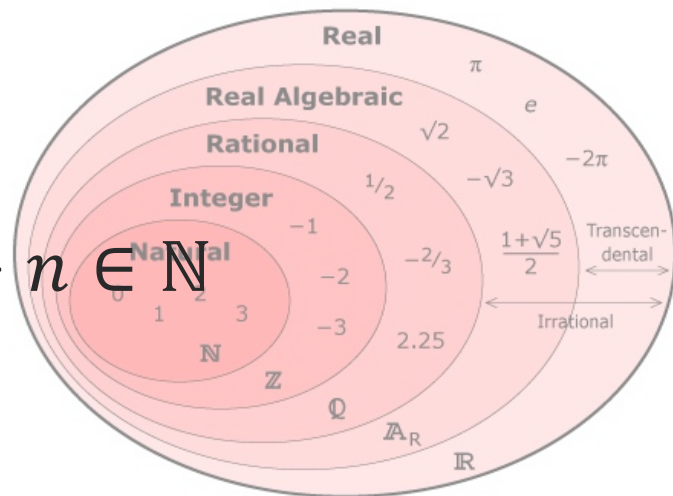


■ 总言之，有两种方法定义自然数：

○ I. 归纳定义： \emptyset 为自然数；若 n 为自然数，则

n^+ 也为自然数；

○ II. 集合定义： n 为自然数 $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$





集合的基数



■ 定义（集合的基数）：

- 集合 A 中所包含元素的个数称为集合 A 的**基数**

（cardinal numbers，简称为cardinals），

或称 A 的**势**（cardinality），记为**card** A ，也

可记为 **$|A|$** （von Neumann 记号）





集合的等势关系



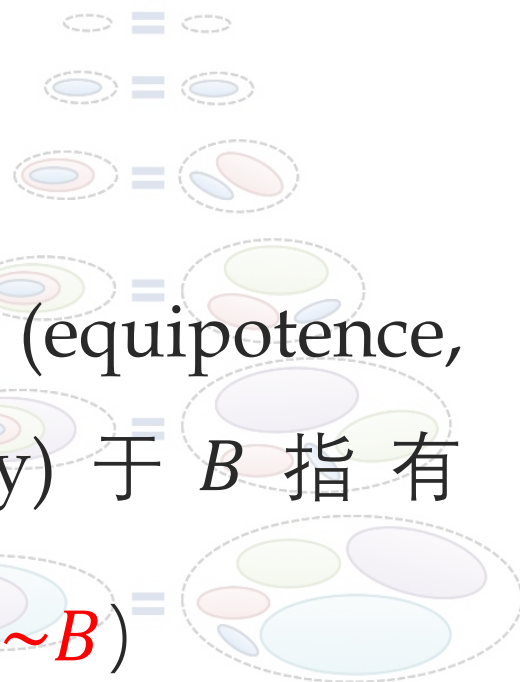
- 有限集合的基数等于该集合中元素的个数

- 如何度量无穷集合的大小呢？

- 定义（等势）：

○ 设 A, B 为集合， A 等势 (equipotence, equipollence 或 equinumerosity) 于 B 指有



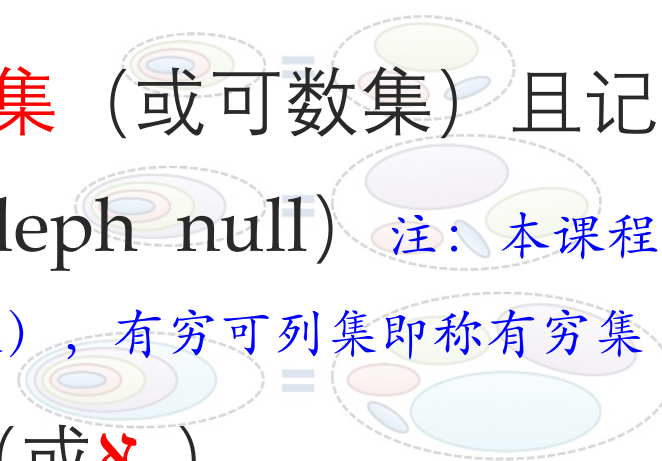
$f: A \xrightarrow{1-1, \text{onto}} B$ ，记为 $A \approx B$ （或 $A \sim B$ ）





有限集与无穷集的基数定义



- 定义（有限集，无穷集，可列集）： A 为集合，
 - (1) 若有自然数 n 使得 $A \approx n$ ，则称 A 为有限集，且记 A 的基数为 $|A| = n$ 
 - (2) 若 A 非有限集则称 A 为无穷集
 - (3) 若 $A \approx \mathbb{N}$ ，则称 A 为可列集（或可数集）且记 A 的基数为 $|A| = \aleph_0$ （读作aleph null）
注：本课程中可列集特指无穷可列集（无穷可数集），有穷可列集即称有穷集
 - (4) 若 $A \approx \mathbb{R}$ ，则记 $|A| = \aleph$ （或 \aleph_1 ）



关于无穷集的讨论：自然数集



■ 证明：自然数集 \mathbb{N} 是无穷集

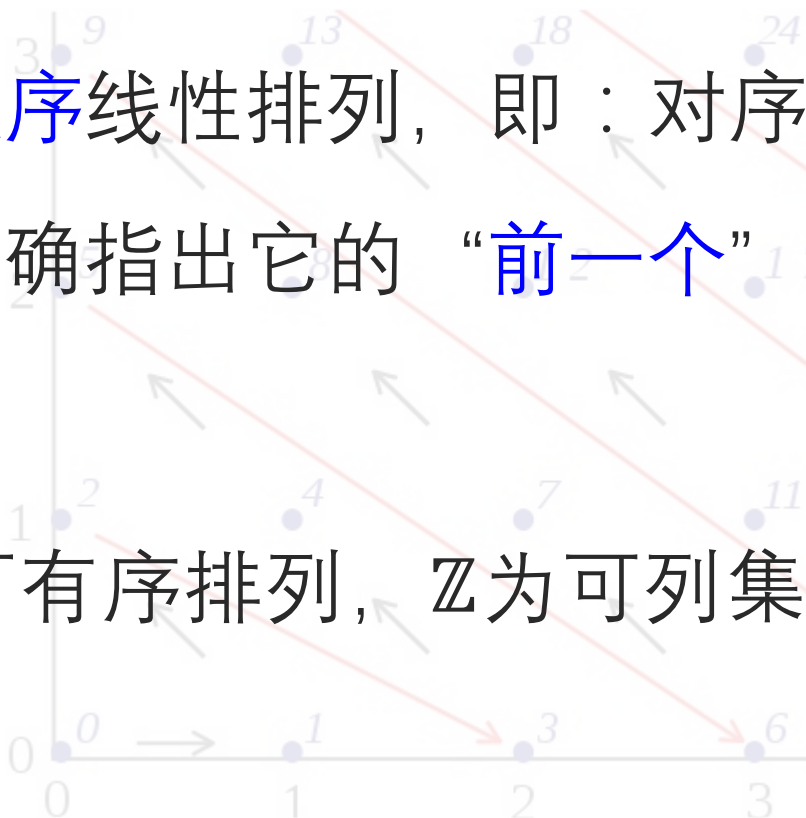
反设 \mathbb{N} 有穷，从而存在 n 以及双射函数 $f: n \rightarrow \mathbb{N}$ ，因为 $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ，令 $m = f(0) + f(1) + \dots + f(n-1) + 1$ ，由PA易见 $m \in \mathbb{N}$ ，从而有 $\forall x \in n$, $f(x) \neq m$ ，故 f 非满射，矛盾！故 \mathbb{N} 为无穷集. \square



关于无穷集的讨论：可列集



- 上述定义中，**可列集**的直观概念可以看作集合的元素可以按**确定的顺序**线性排列，即：对序列中任一元素，可以明确指出它的“**前一个**”元素和“**后一个**”元素
- **例如**：整数集的元素可有序排列， \mathbb{Z} 为可列集：
 $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, \dots$





关于无穷集的讨论：可列集（续）



- 证明：构造如下 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ，易见 f 为双射。

将 \mathbb{Z} 中元素以下列顺序排列并与 \mathbb{N} 中元素对应：

\mathbb{Z} : 0 -1 1 -2 2 -3 3 ...

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

\mathbb{N} : 0 1 2 3 4 5 6 ...

则这种对应所表示的函数是：

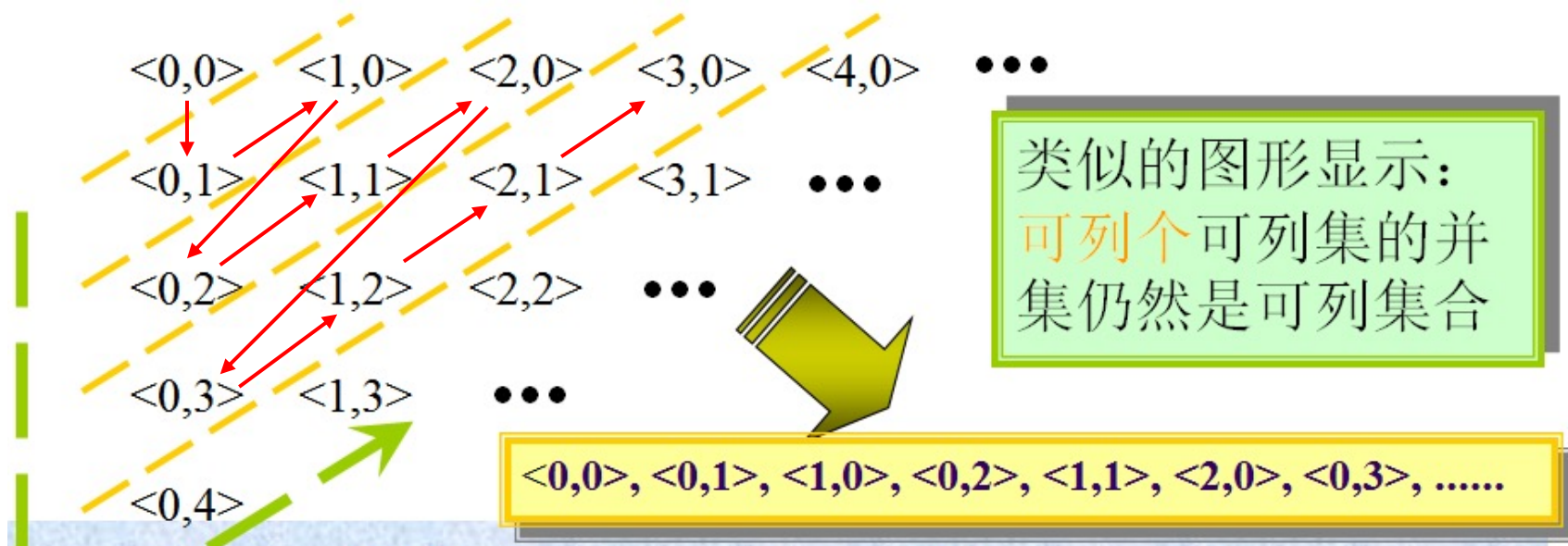
$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



关于无穷集的讨论：可列集（续）



- 自然数集的笛卡尔积是可列集：所有的自然数序偶构成的集合与自然数集等势



$$f(\langle m, n \rangle) = \sum_{i=1}^{m+n} i + (m+1) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + (m+1)$$



关于无穷集的讨论：等势与集合相等



- 等势的涵义是两个集合元素的个数 “一样多”
- 整体一定大于部分吗？
- Galileo佯谬(Galileo's paradox, 1638) :
 - (1) 令 $N^{(2)} = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$, 显然: $N^{(2)} \subset N$;
但G. Galileo发现 $N^{(2)}$ 与 N 中的元素一一对应:
令 $f: N \rightarrow N^{(2)}$ 如下: $f(x) = x^2$, 易见 f 是双射,
故 $N \approx N^{(2)}$
 - (2) 令 $N^* = \{0, 1^1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5, \dots\}$, 易见 $N \approx N^*$



关于无穷集的讨论：等势与集合相等(续)



■ Hilbert 佯谬 (Paradox of the Grand Hotel) :

$$\{0, 1, 2, \dots\} \approx \{1, 2, 3, \dots\}$$

“宇宙旅馆”



客满了？没关系，
让现在住在 k 号房
间的客人移到 $k+1$
号。新来的客人就
住进第1号房间吧！



与自然数有关的若干命题



- (1) 自然数 n 的任何真子集为有限集
- (2) 任何自然数不等势于其真子集
- (3) 若集合 A 有穷，则 A 不与其任何真子集等势
- (4) 若集合 A 与其某个真子集等势，则 A 无穷
- 其中(2)即为“鸽笼原理”



典型的等势



- 对于互异的 $a, b \in \mathbb{R}$ 和互异的 $c, d \in \mathbb{R}$, 有 :

$$[a, b] \approx [c, d], (a, b) \approx (c, d)$$

建立的一一对应如下所示:

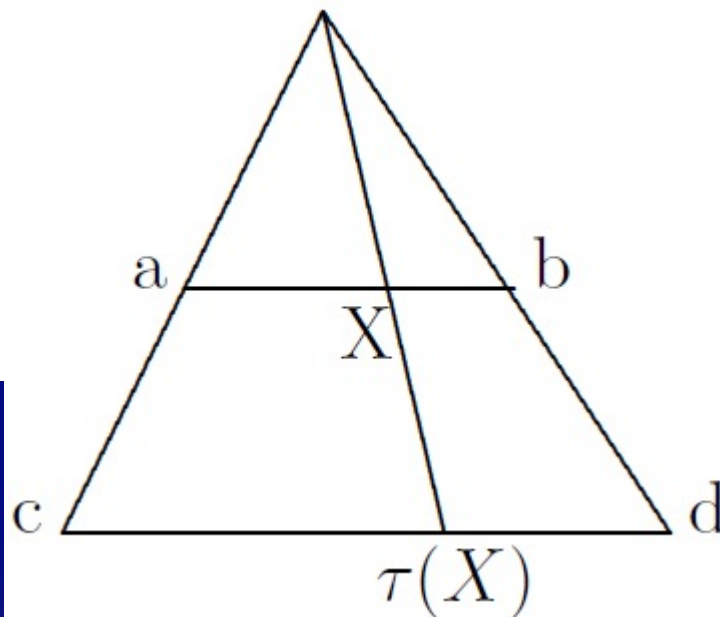
$$\tau: [a, b] \rightarrow [c, d]$$

易见 τ 为 1-1 and onto.

对任何 $a, b \in \mathbb{R}, a < b, [0, 1] \approx [a, b]$.

双射函数 $f: [0, 1] \rightarrow [a, b], f(x) = (b-a)x + a$

类似地可以证明, 对任何 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 有 $(0, 1) \approx (a, b)$.

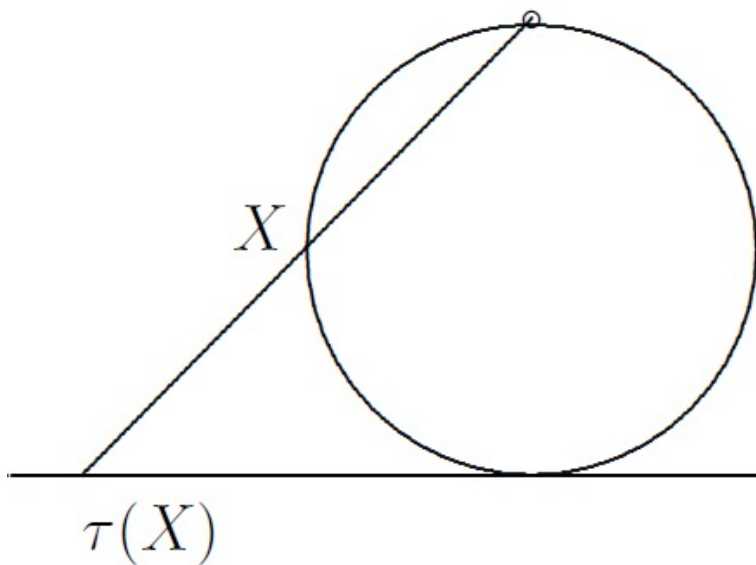




典型的等势 (续)



- 命题 (Riemann) : 设 $a \neq b$, 则 $(a, b) \approx \mathbb{R}$
- 构造 $\tau: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 如下所示:



(a, b) 与缺一点的圆周等势
而其通过 τ 与 \mathbb{R} 等势。

$(0,1) \approx \mathbb{R}$. 其中实数区间 $(0,1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1\}$. 令
双射函数 $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan \pi \frac{2x-1}{2}$



实数集不是可列集



- 命题：实数集非可列集
- 证明 (Cantor's diagonalization argument, 1891) :

由于 $\mathbb{R} \approx [0,1]$ ，故只需要说明实数集之真子集 $[0,1]$ 不可列即可。首先约定实数 $x \in [0,1]$ ，令 $x = 0.x_1x_2x_3 \cdots$ ($0 \leq x_i \leq 9$)，对于无限循环小数 $0.249999 \cdots$ 与 $0.250000 \cdots$ 统一只采用后者的表示方式；



实数集不是可列集 (续)



■ 证明 (Cantor's diagonalization argument) (续):

假设 $[0,1]$ 区间内用上述方法表示的实数~~可列~~，则 $[0,1]$ 上的值可列举为：

$$0.\textcolor{red}{b}_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\cdots$$

$$0.b_{21}\textcolor{red}{b}_{22}b_{23}b_{24}\cdots$$

$$0.b_{31}b_{32}\textcolor{red}{b}_{33}b_{34}\cdots$$

$$0.b_{41}b_{42}b_{43}\textcolor{red}{b}_{44}\cdots$$

⋮

今取实数 $y \in [0,1]$ ，将其表为 $0.\textcolor{red}{b}_1\textcolor{red}{b}_2\textcolor{red}{b}_3\cdots$ ，并令 $\textcolor{blue}{b}_i \neq \textcolor{blue}{b}_{ii}$ ($i = 1, 2, 3, \cdots$)。易见， y 与上表中任何一个值均不等，上述假设错误。即实数集 \mathbb{R} 是不可列集。□



实数集不是可列集 (续)



■ 一个例子:

$$r_1 = 0.5105110 \dots$$

$$r_2 = 0.4132043 \dots$$

$$r_3 = 0.8245026 \dots$$

$$r_4 = 0.2330126 \dots$$

$$r_5 = 0.4107246 \dots$$

$$r_6 = 0.9937838 \dots$$

$$r_7 = 0.0105135 \dots$$

...



$$r_1 = 0.\underline{5}105110 \dots$$

$$r_2 = 0.4\underline{1}32043 \dots$$

$$r_3 = 0.82\underline{4}5026 \dots$$

$$r_4 = 0.233\underline{0}126 \dots$$

$$r_5 = 0.4107\underline{2}46 \dots$$

$$r_6 = 0.99378\underline{3}8 \dots$$

$$r_7 = 0.010513\underline{5} \dots$$

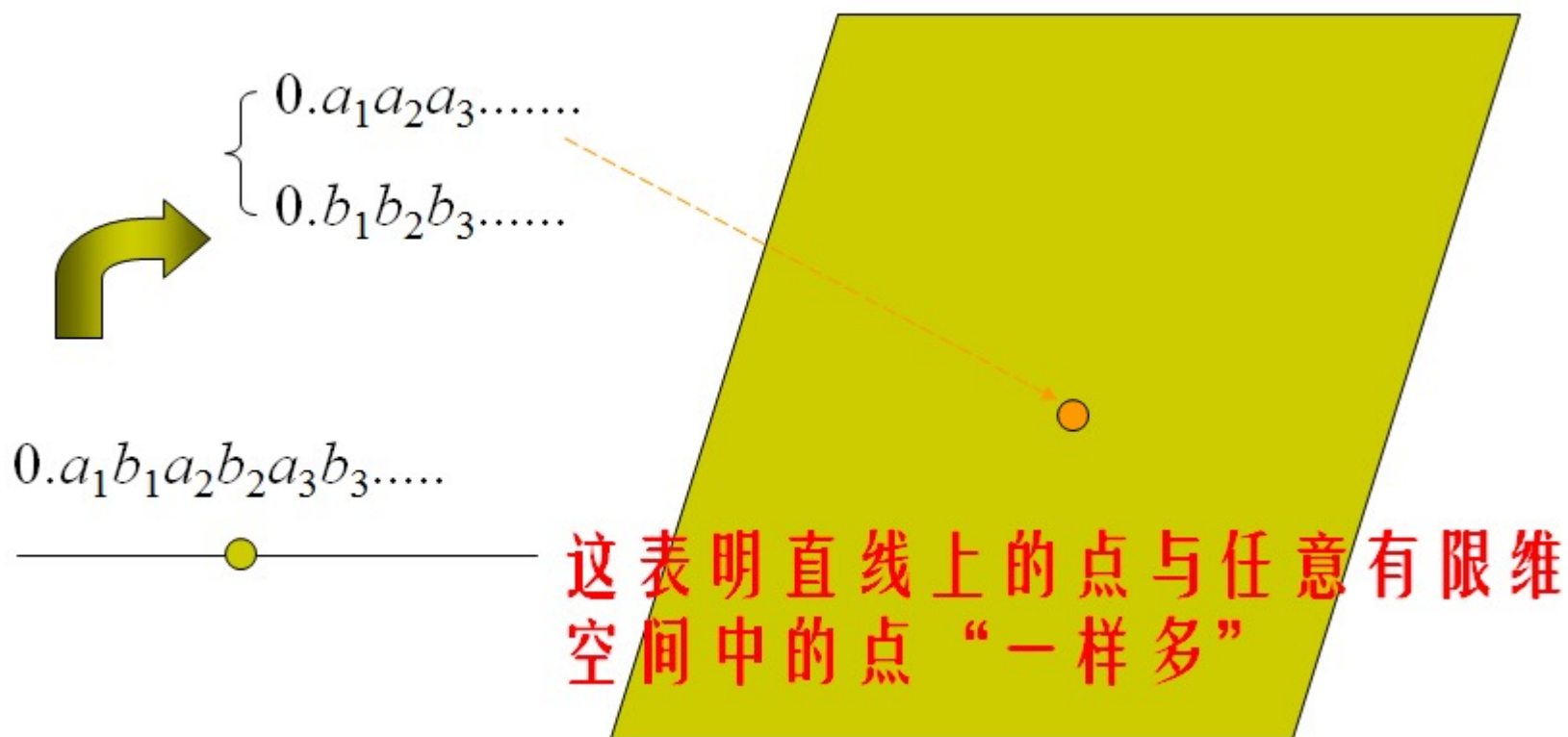
...



实数集不是可列集 (续)



■ 直线点集与平面点集等势





幂集的基数



■ 命题： $\mathcal{P}(A) \approx \{0,1\}^A = \{f | f: A \rightarrow \{0,1\}\}$

证*：令 $\tau: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0,1\}^A$ 如下：设 $X \subseteq A$

$\tau(X): A \rightarrow \{0, 1\}$ 被定义为

$$\tau(X)_{(x)} = \begin{cases} 1 & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}, \text{ 即子集 } X \text{ 之特征函数,}$$

可验证 τ 为 1-1 and onto

故 $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$ i.e. $\mathcal{P}(A) \sim A_I$ \square



Cantor 定理 (续)



■ Cantor 定理 (1891) :

(1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$

(2) 对于任意集合 A , $A \not\approx \mathcal{P}(A)$

■ 证明: (1) 参见对角线法;

(2) 证明非 $A \sim \mathcal{P}(A)$,

反设 $f: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathcal{P}(A)$ 令 $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$, 显然 $B \in \mathcal{P}(A)$,
但 $B \notin \text{Ran}(f)$, 这是因为若 $B = f(a)$ 则 $a \in B \leftrightarrow a \notin f(a) \leftrightarrow a \notin B$ 矛盾!
故 f 非 onto 矛盾。 \square



集合的优势关系



- 设 A, B 为集合，若存在从 A 到 B 的**单射函数**，
则称集合 B **优势于**集合 A ，记做 **$A \preccurlyeq B$** ；**真优势**： **$A \prec B \Leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge A \not\approx B$** 。
- 优势关系下的Cantor定理： **$\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$** ，任意集合 **$A \prec \mathcal{P}(A)$**



一个问题



南京大学小百合站 -- 主题文章阅读 [讨论区: Pictures] [回帖预定]

添加标签 +

追踪此人

[本篇全文] [回复本文] [本篇作者: xuq(男生)] [本篇人气: 2251]

发信人: xuq (mossad), 信区: Pictures

标 题: 0到1之间有理数多还是无理数多

发信站: 南京大学小百合站 (Tue Mar 15 16:50:37 2011)

这是一个面试题, 我觉得是无理数多, 但不知道怎么解释. 求证明!





一个问题 (续)



其他答案

无法比较

回答人的补充 2009-10-12 22:32

不能啊，都是无数个的吧

[暗星](#) 回答采纳率:19.9% 2009-10-12 22:28

好:0 不好:0

一样多，两者都是不计其数

提问人的追问 2009-10-12 22:32

怎么可能是一样多呢？

回答人的补充 2009-10-12 22:33

对啊，整数和分数统称为有理数，无限不循环小数称为无理数，有理数和无理数不计其数。
0-1之间就有无数个，无限个数就可以分成无限组

提问人的追问 2009-10-12 22:39

不计其数不见得没法比较多少嘛~

回答人的补充 2009-10-12 22:54

不计其数就是无穷无尽，无穷无尽的比较下去可以让你天荒地老，海枯石烂也比不完

[乘风破浪!](#) 回答采纳率:25.8% 2009-10-12 22:29

好:0 不好:0

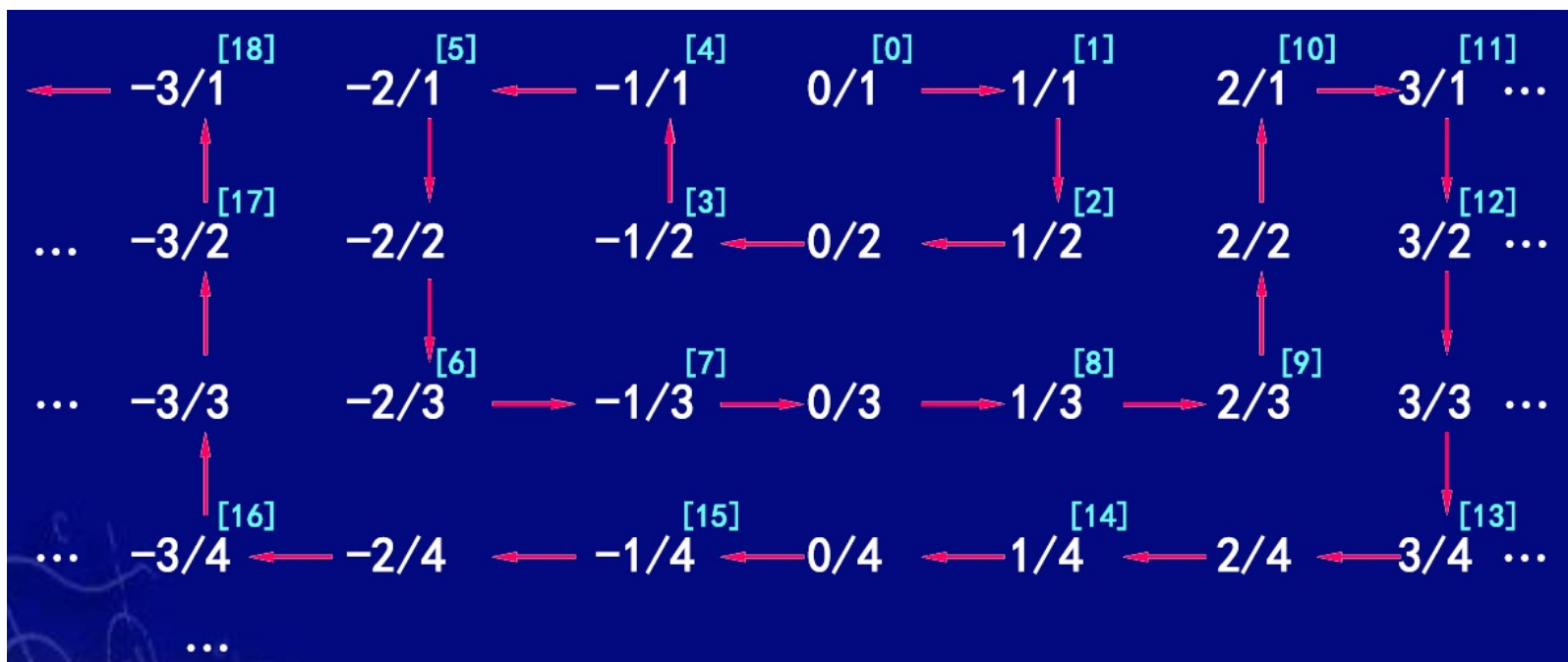


一个问题 (续)



■ 证明：

(1) 易构造如下双射 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$, 故 $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, 为可列集





一个问题 (续)



■ 证明 (续) :

(2) 用Cantor对角线法易证 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 不可列, 故

$$|\mathbb{R} - \mathbb{Q}| = \aleph$$

因此 $\mathbb{Q} < \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, 即 $[0,1]$ 内无理数的基数比有理数大.

□



集合优势关系的性质

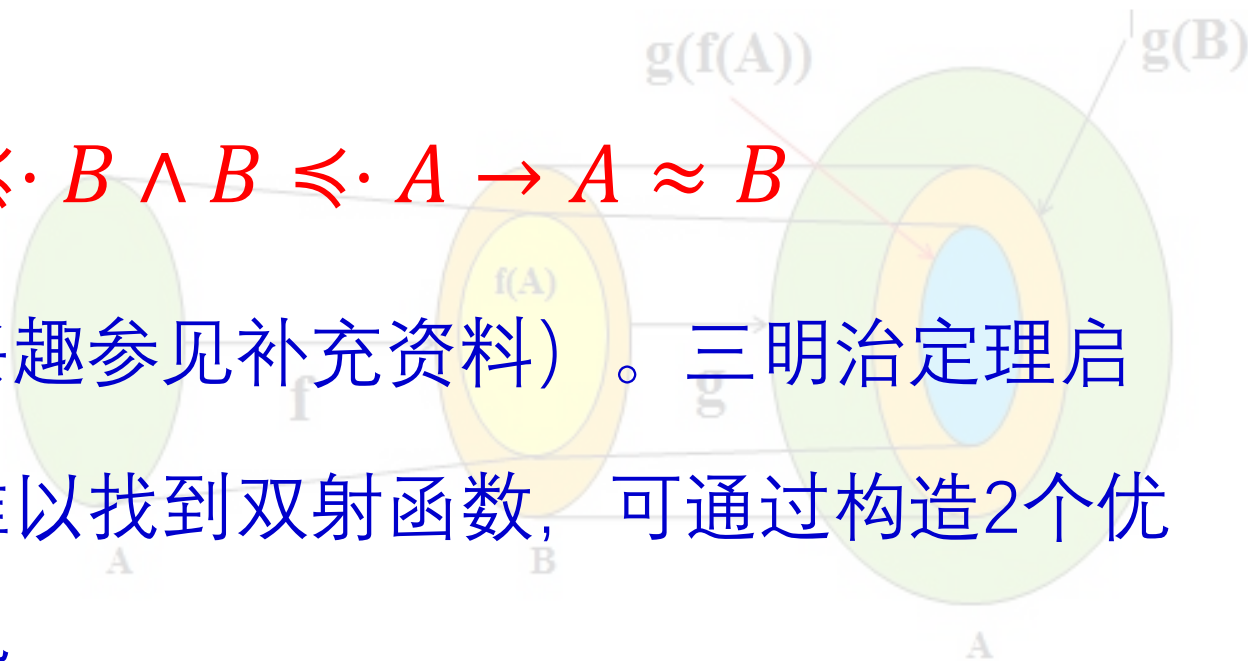


■ 定理 (Cantor-Bernstein-Schröder “三明治”

定理) :

$$A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \rightarrow A \approx B$$

- 证明略 (有兴趣参见补充资料)。三明治定理启发我们, 若难以找到双射函数, 可通过构造2个优势来证明等势





一些重要的等势与优势关系



- $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \approx [a, b] \approx (c, d) \approx (0, 1)$
- $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ (可由“三明治”定理证明)
- $\{0, 1\}^A \approx \mathcal{P}(A)$
- $\mathbb{N} < \cdot \mathbb{R}$
- $A < \cdot \mathcal{P}(A) < \cdot \mathcal{P}\mathcal{P}(A) < \cdot \cdots$



康托尔 (Georg Cantor, 1845-1918)



- “无限！再没有其它问题如此深刻地打动过人类的心灵。”
—— David Hilbert
- “由康托尔在1874—1895年创造地集合论的引起争论的题目，象征着19世纪有先见之明的预言家们认为是从物理科学到民主政府的一切事物中，极其合理的原则的总崩溃，这些预言家们预见到了一切，只是没有预见到这场大崩溃。”
- “悖论和自相矛盾开始同时出现，这些可能最终是康托尔的理论注定要对数学做出的最大贡献，因为它们就在围绕无穷的逻辑和数学推理的基础中意想不到地存在，是现在整个演绎推论中批判运动地直接启迪。我们希望从这里能得出一个更丰富、更“真实”——摆脱了不一致——的数学。”
—— 上述两段摘自 E.T.Bell 《数学精英》



本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 2.5 节
- 课后习题：
 - Problem Set 9
- 提交时间：11月9日

