1. 证：设集合P_i（$i\in N$）为包含 i 个命题符的命题集合.

· Base：$i=1$时，$P_1=PS$

$\therefore |P_1|=|PS|=\aleph_0$

I.H.：设$i<n$时，均有$|P_i|=\aleph_0$

I.Step：$i=n$时，$P_n=\{P \mid P=p_i * P_{n-i}\ (p_i\in PS,\ P_{n-i}\in P_{n-i};\ *\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\})\}$

由于"¬"只作用于一个命题，所以可以不考虑

$|P_n|=\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$

$\therefore$ 对任意$i\in N$，均有$|P_i|=\aleph_0$

$\therefore |PROP|=|P_1|+|P_2|+\cdots+|P_n|+\cdots=\aleph_0$

Q.E.D.

2. 证：设集合P_i（$i\in N$）为包含 i 个命题符的命题集合

Base：$i=1$时，$P_1=PS$

$\forall p\in PS$，此时左括号个数等于右括号个数.

I.H.：设$i<n$时，均有 ~~圈~~ $\forall p\in P_i$

左括号个数=右括号个数.

I.step：$i=n$时，$P_n=\{P_1*P_{n-1}\}\cup\{P_2*P_{n-2}\}\cup\cdots\cup\{P_{[\frac{n}{2}]}*P_{[\frac{n}{2}]}\}$

由归纳假设，P_1、P_{n-1}、P_2、P_{n-2}、…，$P_{[\frac{n}{2}]}$、$P_{[\frac{n}{2}]}$ 均满足

$\therefore P_n$ 也满足.

$\therefore \forall i\in N$，$P_i$都满足括号引理

又 $PROP=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_n\cup\cdots$

$\therefore \forall A\in PROP$

A中左括号个数等于右括号个数. Q.E.D.

3. (a) $A\to A \Leftrightarrow \neg A \vee A \Leftrightarrow T$ Q.E.D

(b) 构造真值表:

A	B	C	$A\to B$	$B\to C$	$A\to C$	$((A\to B)\wedge(B\to C))\to(A\to C)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

易见原式永真 Q.E.D.

(c) 原式 $\Leftrightarrow (\neg A\vee\neg B)\to(\neg A\vee\neg B) \Leftrightarrow T$ (由(a)知) Q.E.D

(d) 原式 $\Leftrightarrow \neg(A\wedge B)\to\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow T$ 由(a)知 Q.E.D

(e) 原式 $\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B)\to(\neg A\wedge\neg B) \Leftrightarrow T$ 由(a)知 Q.E.D

(f) 原式 $\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B)\to(\neg A\wedge\neg B) \Leftrightarrow T$ 由(a)知 Q.E.D.

4. (a) ABC分别取 011

则 $(A\to B)\wedge C = T$

$\therefore$ 可满足 Q.E.D.

(b) A.B.C分别取 111

则 $(A\vee B)\to C = T$

$\therefore$ 可满足 Q.E.D.

5. (a) $(\neg((P\to\neg Q)\to R)) \Leftrightarrow \neg[\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee R]$

$\Leftrightarrow \neg((P\wedge Q)\vee R)$

$\Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)\wedge\neg R$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q)\wedge\neg R$ $(\wedge\vee\text{-}nf)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$ $(\vee\wedge\text{-}nf)$

(b) 原式 $\Leftrightarrow \neg(\neg(R\wedge Q)\wedge P)$

$\Leftrightarrow (R\wedge Q)\vee\neg P$ （$\vee\wedge$-nf）

$\Leftrightarrow (R\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg P)$ （$\wedge\vee$-nf）

8. (a) 列真值表

A	B	$A\wedge B$	$B\wedge A$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

$\therefore A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$ Q.E.D

(b) 列真值表

A	B	$A\vee B$	$B\vee A$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$\therefore A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$ Q.E.D

(c) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

列真值表

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
0	1	0
1	0	1

$\therefore \neg\neg A \Leftrightarrow A$ Q.E.D

(d) $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow (\neg A)\wedge(\neg B)$

列真值表

A	B	$\neg(A\vee B)$	$(\neg A)\wedge(\neg B)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

$\therefore \neg(A\vee B) \Leftrightarrow (\neg A)\wedge(\neg B)$ Q.E.D

(e) $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow (\neg A)\vee(\neg B)$

列真值表

A	B	$\neg(A\wedge B)$	$(\neg A)\vee(\neg B)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\therefore \neg(A\wedge B) \Leftrightarrow (\neg A)\vee(\neg B)$ Q.E.D.

(f) $(A\to B) \Leftrightarrow (\neg B\to\neg A)$

列真值表

A	B	$A\to B$	$\neg B\to\neg A$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$\therefore (A\to B) \Leftrightarrow (\neg B\to\neg A)$ Q.E.D

DATE

9. 证: 1、$\neg L$: v反驳结论 $\Rightarrow$ $\Gamma, \neg A, \Delta$ 为真, Λ为假 $\Rightarrow$ Γ, Δ 真, Λ, A 假 $\Rightarrow$ 前提 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A$ [illegible]

$\neg R$: v反驳结论 $\Rightarrow$ Γ真, $\Lambda, \neg A, \Theta$假 $\Rightarrow$ 当Λ假, $\neg A$假时, Γ, A真, Λ, Θ假 $\Rightarrow$ $\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta$ 假

$\vee L$: v反驳结论 $\Rightarrow$ $\Gamma, A \vee B, \Delta$ 真, Λ假 $\Rightarrow$ 当A为真时, Γ, A, Δ真, Λ假 $\Rightarrow$ v反驳前提 $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda$

$\vee R$: v反驳结论 $\Rightarrow$ Γ真, $\Lambda, A \vee B, \Theta$假 $\Rightarrow$ Γ真, Λ, A, B, Θ假 $\Rightarrow$ v反驳前提 $\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta$

$\wedge L$: v反驳结论 $\Rightarrow$ $\Gamma, A \wedge B, \Delta$ 真, Λ假 $\Rightarrow$ Γ, A, B, Δ真, Λ假 $\Rightarrow$ v反驳前提 $\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda$

$\wedge R$: v反驳结论 $\Rightarrow$ Γ真, $\Lambda, A \wedge B, \Theta$假 $\Rightarrow$ Λ, A, Θ 假 $\Rightarrow$ v反驳前提 $\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta$

$\rightarrow L$: v反驳结论 $\Rightarrow$ $\Gamma, A \rightarrow B, \Delta$ 真, Λ假 $\Rightarrow$ Γ, Δ真, A, Λ假 $\Rightarrow$ v反驳前提 $\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda$

$\rightarrow R$: v反驳结论 $\Rightarrow$ Γ真, $\Lambda, A \rightarrow B, \Theta$假 $\Rightarrow$ 取A真, 则 Γ, A真, Λ, B, Θ假 $\Rightarrow$ v反驳前提 $\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta$

1和2互为逆否命题, 自然2也成立. Q.E.D.
命3　　命3

12. (a) 永真式　(b) 矛盾式　(c) 矛盾式　(d) 不是永真也不是矛盾式