Ch 10 参数估计

回顾前一次课

极大似然估计：最大化似然函数$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$，出现观测值$X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n$出现的概率最大

- 计算对数似然函数$\ln\left(L(x_1,x_2,\cdots,x_m;\theta)\right)$
- 求对数似然函数中参数θ的一阶偏导, 令其等于零
- 求解方程组得到最大似然估计量$\hat{\theta}$

最大似然估计的不变性：已知$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计, $\mu=\mu(\theta)$为θ的函数且存在反函数，则$\hat{\mu}=\mu\left(\hat{\theta}\right)$是$\mu$的最大似然估计

估计量的评价标准: **无偏性、有效性、一致性**

无偏估计：$E_{X_1,X_2,\cdots,X_n}\left[\hat{\theta}\right]=E_{X_1,X_2,\cdots,X_n}\left[\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right]=\theta$

θ_1比θ_2有效:$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_1\right)\leq\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_2\right)$

Rao-Crammer不等式

随机变量X的概率密度为$f(x;\theta)$或分布函数为$F(x;\theta)$, 令

$$\mathrm{Var}_0(\theta)=\left[nE\left(\frac{\partial\ln f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]^{-1}\quad \mathrm{Var}_0(\theta)=\left[nE\left(\frac{\partial\ln F(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]^{-1}$$

对任意的无偏估计量$\hat{\theta}$有

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta})\geq\mathrm{Var}_0(\theta),$$

称$\mathrm{Var}_0(\theta)$为估计量$\hat{\theta}$方差的下界.

当$\mathrm{Var}(\hat{\theta})=\mathrm{Var}_0(\theta)$时称$\hat{\theta}$为达到方差下界的无偏估计量,
此时$\hat{\theta}$为**最有效估计量**, 简称**有效估计量**

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本, 且X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

证明: θ的最大似然估计为有效估计量.

一致性

设$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n)$是$\theta$一个估计量，当$n \to \infty$时有$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$成立，即对任意$\epsilon > 0$有

$$\lim_{n\to\infty} P[|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon] = 0$$

则称$\hat{\theta}_n$为θ的**一致估计量**

一致性刻画了在足够多样本情形下估计量$\hat{\theta}$能有效逼近真实值θ

一致性是对估计的基本要求, 不满足一致性估计量一般不予考虑

一致性的充分条件

定理： 设$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$\theta$的一个估计量，若满足以下两个条件:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{\theta}_n\right] = \theta \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_n\right) = 0$$

则$\hat{\theta}_n$为θ的一致估计量.

一致性的函数不变性

已知$\hat{\theta}_{n_1},\hat{\theta}_{n_2},\cdots,\hat{\theta}_{n_k}$分别为$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$满足一致性的估计量,

对连续函数$g\colon \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，有函数$\hat{\eta}_n = g(\hat{\theta}_{n_1},\hat{\theta}_{n_2},\cdots,\hat{\theta}_{n_k})$是$\eta = g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$满足一致性的估计量

估计量的评价标准

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本, 且X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则样本均值$\bar{X}_n=\sum_{i=1}^{n}X_i/n$为$\theta$的无偏、有效、一致估计量.

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim U(0, \theta)$的样本，证明：θ的最大似然估计量是一致估计量.

Ch 10.3 参数区间估计

区间估计

区间估计问题：设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本，θ为总体X的分布函数$F(x, \theta)$的未知参数，根据样本估计

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \text{ 和 } \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

使得以较大的概率保证有$\theta \in \left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$成立，称为**参数估计问题**

具体而言，对任意给定$\alpha \in (0,1)$，有

$$P\left[\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right] \geq 1 - \alpha$$

置信区间与置信度

设$X_1, X_2 \cdots, X_n$是来自总体X的样本，总体的分布函数含未知参数θ, 求统计量$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$使得

$$P\left[\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta \ < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right] \geq 1 - \alpha$$

则称**$1 - \alpha$为置信度**, $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$为$\theta$的置信度为$1 - \alpha$的**置信区间**

置信区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$是随机区间，$1 - \alpha$为该区间包含$\theta$的概率或可靠程度. 若$\alpha = 0.05$, 则置信度为95%.

通常采用95%的置信度, 有时也可99%或90%等

置信区间与置信度

设$X_1, X_2 \cdots, X_n$是来自总体X的样本，总体的分布函数含未知参数θ, 求统计量$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$使得

$$P\left[\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta \ < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right] \geq 1 - \alpha$$

则称**$1-\alpha$为置信度**, $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的**置信区间**

- $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$反映了估计精度: 长度越小精度越大.
- α反映了估计的可靠度: α越小可靠度越高.
- 给定α, 区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$的选取并不唯一确定, 通常选长度最小的一个区间.

置信区间的求解方法

枢轴变量法

- 先找一样本函数$W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$包含待估参数$\theta$，但不含其它参数, 且函数$W$分布已知, 称为枢轴变量.
- 给定置信度$1-\alpha$，根据W的分布找出临界值a和b，使得$P[a < W < b] = 1-\alpha$成立.
- 根据$a < W < b$解出$\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$，则 $\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right]$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

正态总体, 方差已知, 求期望的区间估计

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，若方差σ^2已知. 给定$\alpha \in (0,1)$, 确定置信度为$1-\alpha$下μ的置信区间 $\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right]$

正态总体, 方差未知, 求期望的区间估计

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，若方差σ^2未知.
给定$\alpha \in (0,1)$, 确定置信度为$1-\alpha$下μ的置信区间 $\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right]$.

正态总体, 求方差的置信区间

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，考虑方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

五大正态分布的抽样分布定理

- 设$X_1,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本, 则有$\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$
- 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,其样本均值$\bar{X}$和修正样本方差S^2相互独立, 且$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
- 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,其样本均值$\bar{X}$和修正样本方差S^2, 且$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim t(n-1)$
- 设$X_1,\cdots,X_m$和$Y_1,\cdots,Y_n$分别来自总体$N(\mu_X,\sigma_X^2)$和$N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$的样本, 修正样本方差分别为S_X^2和S_Y^2, 则$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}\sim F(m-1,n-1)$.
- 设$X_1,\cdots,X_m$和$Y_1,\cdots,Y_n$分别来自总体$N(\mu_X,\sigma^2)$和$N(\mu_Y,\sigma^2)$的样本，其样本均值分别$\bar{X}$和$\bar{Y}$，修正样本方差分别为S_X^2和S_Y^2，则

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$$

双正态总体

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$分别来自总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本, 求$\sigma_1^2/\sigma_2^2$的置信度为$1-\alpha$的区间估计.

双正态总体

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$分别来自总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本, 方法$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$未知，求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为$1-\alpha$的区间估计.

单侧置信区间

对某些实际问题，我们往往只关心置信区间的上限或下限，例如，次品率只关心上限，产品的寿命只关心下限，由此引入单侧置信区间及其估计

单侧置信区间:给定$\alpha \in (0,1)$，若样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的统计量$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$满足

$$P\left[\theta > \hat{\theta}_1\right] \geq 1 - \alpha,$$

则称$\left(\hat{\theta}_1, +\infty\right)$为$\theta$的置信度为$1 - \alpha$的单侧置信区间，$\hat{\theta}_1$称为单侧置信下限.

例题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，若方差σ^2已知，求μ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限和上限.

例题

从一批出厂的灯泡中随机抽取10盏灯泡, 测试其寿命分别为: 1000, 1500, 1250, 1050, 950, 1000, 1150, 1050, 950, 1000 (单位: 小时).

假设这批灯泡的寿命服从正态分布, 求这批灯泡平均寿命的置信度为95%的单侧置信下限.