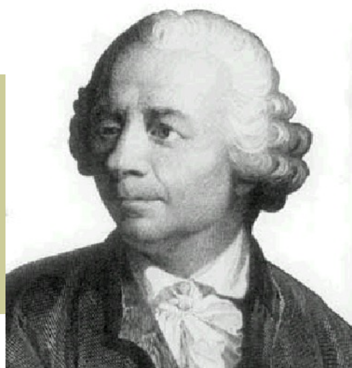
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

第五讲：集合论导引

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2021 年 10 月 12 日

前情提要

- 证明的本质
- 逻辑推理的形式结构
- 常用的证明方法与证明策略
  - 直接证明法，间接证明法
  - 归谬法（反证法），穷举法
  - 空证明法，平凡证明法
  - 构造性证明法，反例证明法

本讲主要内容

- 引子：数学基础的危机
- 集合的概念
- 子集、空集与幂集
- 集合的运算与集合代数
- 集合公式的几种基本证明方式

引子：数学基础的危机

- 19世纪早期，发现数学存在缺陷
  - Н.И. Лобаче́вский，G. Riemann：非欧几何
  - A. Cauchy等：分析(微积分及其扩展)的基础
- 19世纪后期的公理化运动：去除基于直觉或经验的朴素概念所带来的模糊，使数学严密化
  - G. Peano，D. Hilbert：算术与几何的公理化

数学基础的危机（续）

- 1900年国际数学大会
  - H. Poincaré：“借助集合论可以建造整个数学大厦……今天我们可以宣称绝对的严密已经实现了！”
- 随后有人发现了Cantor集合论中的一些严重问题，如1901年发现的罗素悖论
- G. Frege评论：当大厦竣工时基础却动摇了

数学基础的危机（续）

危机的解决：

公 理 化 集 合 论

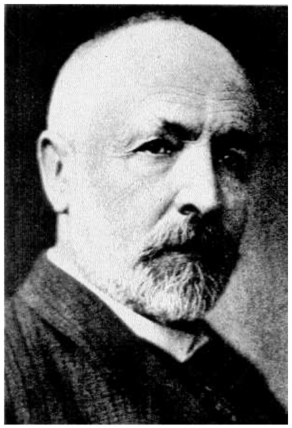
集合的概念

■ 集合没有明确的定义，G. Cantor给出了一种刻划：

“吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。

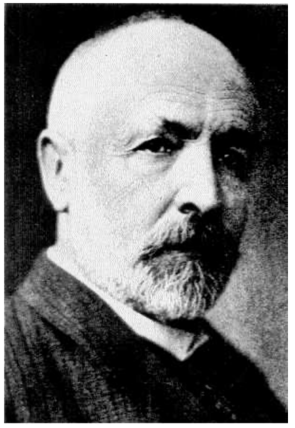
“通常用大写字母表示集合，如A、B、C等，用小写字母表示元素，如a、b、c 等。若集合A系由a、b、c等诸元素所组成，则表如$A=\{a,b,c,\cdots\}$，而a为A之元素，亦常用$a\in A$之记号表之者，a非A之元素，则记如$a\notin A$。”

（肖文灿译于1939年，《集合论初步》，商务印书馆）



集合的概念（续）

- 例：{1,2,3}为集合，“1”为集合，“自然数之全体”为集合；但诸如“甚大之数”或“与P点接近之点”则不能为集合，因其界限不清
- 集合中的元素互异，我们把元素的重复看作一次出现，如$\{2,2,3,3\} = \{2,3\}$
- Cantor提到的“总括之全体”之“总括”，可由集合的外延公理和概括原则来描述



集合的外延公理与概括原则

- **(ZF.1)** 外延公理：集合由其元素完全确定

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

故证明集合$A = B$只需证明$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

- **(NST.1△ — Ax. of Abstraction)** Cantor概括原则：对于人们直观或者思维之对象x的任一性质$P(x)$，存在集合S的元素恰为具有性质P的那些对象，记为$S = \{x|P(x)\}$。从而对任何a，$a \in S \leftrightarrow P(a)$，例如$\{1,2,3\} = \{x|x = 1 \lor x = 2 \lor x = 3\}$

罗素悖论与公理集合论

- ~~Cantor概括模式（NST.1△ ASc.）~~：对所有谓词$P(x)$，均存在集合$\{x|P(x)\}$
- 然而$\{x|P(x)\}$未必产生集合，B. Russell在1901年给出反例，即著名的罗素悖论：令$R=\{x|x\notin x\}$，则若R为集合，有$R\in R\leftrightarrow R\notin R$，矛盾，故$R$不为集合

罗素悖论与公理化集合论

- 例：罗素自指涉谓词$x \in x$可规约为罗素悖论

根据朴素集合论，$\bar{R} = \{x | x \in x\}$，$R = \{x | x \notin x\}$，则若$R \in \bar{R}$，必有$R \in R$；根据罗素悖论，$R \in R \to R \notin R$；因为$\bar{R}$中的元素均以自身为元素，故而$R \notin R \to R \notin \bar{R}$，因此可得$R \in \bar{R} \to R \notin \bar{R}$，反之亦然.

因此罗素自指涉谓词可规约为罗素悖论，即谓词$x \in x$亦无法产生集合.

罗素悖论与公理化集合论

- 罗素悖论是迄今为止最著名的悖论之一，虽形式简单却意义深远。自此人们重新审视朴素集合论，用形式化方法讨论集合论，用新的公理替代Cantor概括原则，最终形成了公理化集合论

- ☞进一步阅读：公理化集合论*

  https://zh.wikipedia.org/wiki/公理化集合论

子集

- A 为 B 之子集（记为 $A \subseteq B$ ）指 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$， A为B之真子集（记为$A \subset B$ ）指$A \subseteq B$且$A \neq B$。$A \not\subset B$是指$\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$
- 例：$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$，$A \subseteq A$，$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$
- 命题：

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

该命题也常被用来证明集合相等

空集

- 集合论系统有二种：一种承认有原子（即本身不含元素但能作为别的集合的元素），另一种不承认有原子，认为一切皆为集合。本课程采用后者，这样便导致最初之元素为没有任何元素的集合，从这种集合出发构成集合世界，因此它是任何集合的子集
- **(ZF.3)** 空集公理：存在一个集合其没有任何元素，称这种集合为空集（null set），记作∅，其为任何集合（包含空集本身）之子集

空集（续）

- 命题：空集是唯一的
  - 证明：设 $\emptyset_1, \emptyset_2$ 皆为空集，则根据空集的定义，有 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \wedge \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$，根据集合相等的定义有$\emptyset_1 = \emptyset_2$
- 空集本身是一个集合，也可以做为另一个集合的元素或子集，故：$\emptyset \in \{\emptyset\}$，$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$；但因为空集不含任何元素，故$\emptyset \notin \emptyset$，$\emptyset \neq \{\emptyset\}$
- 定义：若集合A含有n个元素，则称A为n元集，记为$|A| = n$；易见，$\emptyset$是0元集，$\{\emptyset\}$是1元集

由集合定义自然数

- 在公理集合论中，集合是自然数的基础
  - **定义**：设a为集合，称$a \cup \{a\}$为a的后继，记作a^+
  - **定义** (von Neumann)：

$$令\ 0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 0^{++}, \cdots, n = 0^{\overbrace{+\cdots+}^{n}}$$

  - **定义**：设A是集合，称A为归纳集 (inductive set)指：

$$\emptyset \in A \land (\forall x \in A)(x^+ \in A)$$

归纳集是否存在？

- 若存在归纳集 A，则 $\emptyset \in A, \emptyset^+ \in A, \emptyset^{++\cdots+} \in A$，从而 A 是无穷集
- Russell说：“事实上，在这个世界中是否有无穷集合，我们还不能确定。”
- 据此，还不能确定归纳集是否存在。大多数人认为宇宙是无穷的（Hilbert 则否），为了保证归纳集的存在，ZFC中引入无穷公理

无穷公理

- **(ZFC.7)** 无穷公理（Axiom of Infinity）：

$$\exists A\big(\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A)\big)$$

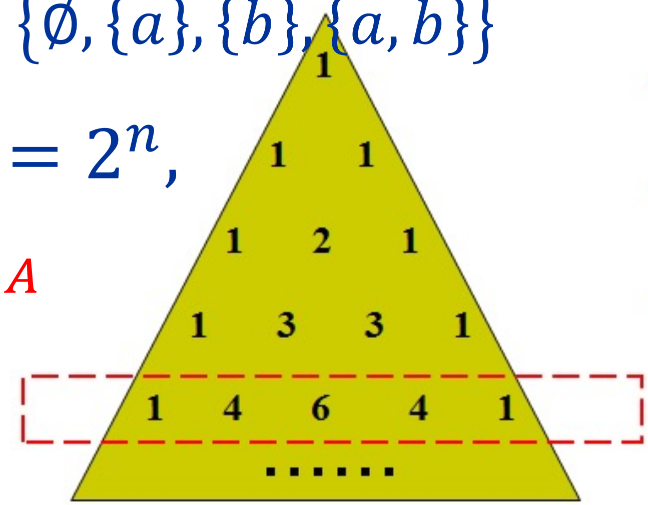
- 以往按照von Neumann的定义，$0 = \emptyset$，$n + 1 = n^+$，从而可以定义出单个的自然数，但不能说明全体自然数集合$\mathbb{N}$的存在性，而由无穷公理可以定义$\mathbb{N}$

- 定义：$\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=} \bigcap\{A|A为归纳集\} =$

$$\Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}, \cdots\Big\}$$

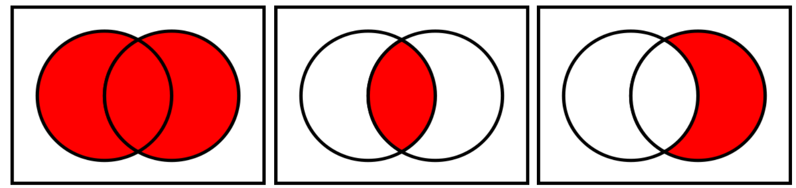
幂集

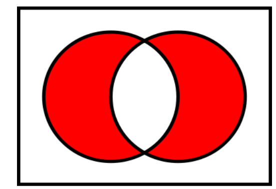
- **(ZF.8)** 幂集公理：集合A的幂集$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$
  即由集合A的全体子集构成的集合
  - 例： $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ， $PP(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ， $PPP(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$， $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- 若$|A| = n$， 则$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$，
  故集合A的幂集的另一种记法为2^A
- 若$P(A) \in P(B)$， 则$A \in B$



集合运算

- 为了由已有集合产生新的集合，除幂集运算外还引入一些集合上的运算：



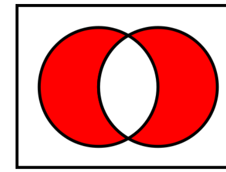


- 定义：
  - **(ZF.5)** 集合的并：$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
  - 集合的交：$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  - 集合的相对补：$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
  - 集合的对称差：

$$A \oplus B = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$
$$= (A - B) \cup (B - A)$$

集合运算（续）

- **例**：观察文氏图，试证明对称差$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$



证明： 根据对称差定义，$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$，任取$x \in A \oplus B$，即$x \in (A - B)$或$x \in (B - A)$.

- 1. 假设$x \in (A - B)$，根据相对补定义，有$x \in A$且$x \notin B$，故而$x \in (A \cup B)$但$x \notin (A \cap B)$，根据相对补定义，有$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$；
- 2. 假设$x \in (B - A)$，根据相对补定义，有$x \in B$且$x \notin A$，故而$x \in (A \cup B)$但$x \notin (A \cap B)$，根据相对补定义，亦有$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$.

综上，对于任意$x \in A \oplus B$，皆有$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$，反之亦然（需要加入证明内容）。由集合相等定义，$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$. □

广义交与广义并

- 上面介绍的是两个集合的交与并，现将其推广：
- 定义（广义交与广义并）：
  - 集合的广义并：设 A 为集合，A 的所有元素的并称为集合A的广义并，记为：$\bigcup A=\{x|\exists y(y\in A\wedge x\in y)\}$
  - 集合的广义交：设 A 为非空集合，A 的所有元素的交称为集合A的广义交，记为：

$$\bigcap A=\{x|\forall y(y\in A\rightarrow x\in y)\}$$

  - 思考：为什么规定广义交的对象不能为$\emptyset$?

集合代数

- 在集合的运算中，满足以下规律：
- 定理：设A, B, C为任意集合
  - 交换律：$A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A$
  - 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - 幂等律：$A \cap A = A \cup A = A$
  - 空集性质：$A \cap \emptyset = \emptyset, \ A \cup \emptyset = A$

集合代数（续）

- 在集合的运算中，满足以下规律（续）：
- 定理（续）：设A, B, C为任意集合
  - De Morgan 律：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

    $$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

  - 幂集性质：$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

    $$P(A\cup B)\supseteq P(A)\cup P(B)$$

集合公式的基本证明方式

- 方法一：直接使用集合包含或相等的定义
  - **例**：$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$
  - **分析**：待证结论为$A \subseteq B$，即$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$，因此，证明框架如下：

> 对任意x，假设$x \in A$，{…适当内容…}
> 因此，$x \in B$，故$A \subseteq B$. □

  - **证明**：对任意x，假设$x \in A$，根据集合并的定义有$x \in A \cup B$，由已知条件$A \cup B = B$，因此$x \in B$，故$A \subseteq B$. □

集合公式的基本证明方式（续）

- 方法二：利用运算定义作逻辑等值式推演
  - 例：试证 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明： $A-(B\cup C)=\{x|x\in A, but\ x\notin B\cup C\}$

$=\{x|x\in A, but\ (x\notin B\wedge x\notin C)\}$

$=\{x|(x\in A, but\ x\notin B)\wedge(x\in A, but\ x\notin C)\}$

$=(A-B)\cap(A-C)$

另一种等价的描述方式： $x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow (x\in A)\wedge\big(x\notin(B\cup C)\big)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow \big(x\in(A-B)\big)\wedge\big(x\in(A-C)\big)$

$\Leftrightarrow x\in\big((A-B)\cap(A-C)\big)$

集合公式的基本证明方式（续）

- 方法三：利用已知恒等式或等式作集合代数推演
  - **例1：** $A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
  - **例2：** $A \cup (A \cap B) = A$
  - **例3：** 已知$A \oplus B = A \oplus C$，证明$B = C$

证明： $A - B = A \cap \sim B = (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim A)$

$= A \cap (\sim B \cup \sim A)$

$= A \cap \sim(A \cap B)$

$= A \cap \sim A = \emptyset$

证明（设E为全集）**：**

$A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B) = A \cap (E \cup B) = A \cap E = A$

证明： $B = \emptyset \oplus B = (A \oplus A) \oplus B = A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C) = (A \oplus A) \oplus C = \emptyset \oplus C = C$

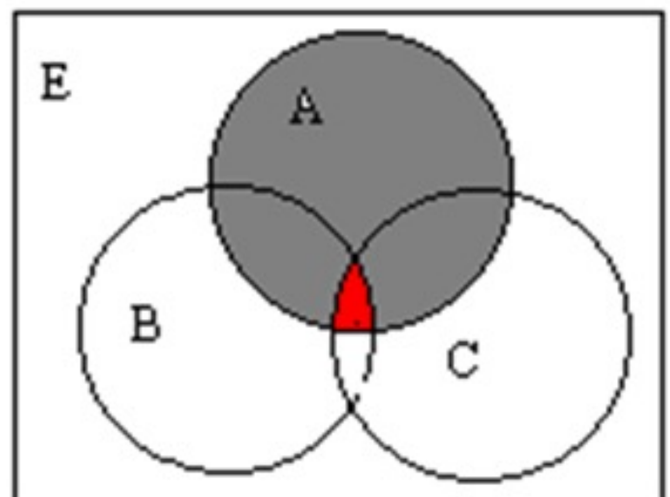
集合公式的基本证明方式（续）

- 方法四：循环证明一系列逻辑等值式
  - 例：试证$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
  - 证明路径：(1)→(2)→(3)→(4)→(1)
  - 只要完成上述证明，由循环关系就证明了上述诸多充分必要关系
  - 在以上例子的基础上，只要再证明$A - B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$
    - $A \cup B = (A \cup B) \cap E = (A \cup B) \cap (\sim B \cup B) = (A \cap \sim B) \cup B = (A - B) \cup B = B$

集合公式的基本证明方式（续）

- 其它证明方法：文氏图也可帮助推测结论（但不能代替证明的过程）
- **例：** $(A-B)\cup(A-C)=A$ 成立的充分必要条件？

充要条件：$A\cap B\cap C=\emptyset$



Georg Cantor

- 23岁获数学博士学位
- 集合论“公认为全部数学的基础”
- 关于无限的若干论断：
  - 集合论是一种“疾病”
  - “雾中之雾”、“疯子”
- 可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作。 ——罗素

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 2.1－2.2 节
- 课后习题：
  - Problem Set 5
- 提交时间：10月26日（上课前提交至讲台）

ZFC公理化集合系统*

- Ax. 1 外延公理
- Ax. 2 正则公理
- Ax. 3 分类公理
- Ax. 4 配对公理
- Ax. 5 并集公理
- Ax. 6 替代公理
- Ax. 7 无穷公理
- Ax. 8 幂集公理
- Ax. 9 选择公理（AC，或良序公理）

ZFC公理化集合系统*（续）

- **ZFC.1 外延公理**（Axiom of extensionality）
  - 如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的:
    $$\forall x \forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$$
- **ZFC.2 正则公理**（Axiom of regularity/foundation）
  - 任意非空集x包含一个成员y，x与集合y是不相交的:
    $$\forall x\big[\exists a(a \in x) \rightarrow \exists y\big(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in y \wedge z \in x)\big)\big]$$
- **ZFC. 3 分类公理**（Axiom schema of separation）
  - 对任意集合z和任意对z的元素x有定义的逻辑谓词$\phi(x)$，存在z的子集y，使$x \in y$当且仅当$x \in z$且$\phi(x)$为真:
    $$\forall z \forall w_1 \ldots w_n \exists y \forall x\big[x \in y \leftrightarrow \big(x \in z \wedge \phi(x)\big)\big]$$

ZFC公理化集合系统*（续）

- **ZFC. 4 配对公理**（Axiom of pairing）

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

- **ZFC. 5 并集公理**（Axiom of union ）

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x [(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \rightarrow x \in A]$$

- **ZFC. 6 替代公理**（Axiom schema of replacement）

$$\forall A \forall w_1 \ldots w_n \left[\forall x (x \in A \rightarrow \exists! \, y : \phi) \right.$$

$$\left. \rightarrow \exists B \forall x \left(x \in A \rightarrow \exists y \big(y \in B \wedge \phi(y)\big)\right)\right]$$

ZFC公理化集合系统*（续）

- ZFC. 7 无穷公理（Axiom of infinity ）

$$\exists X[\emptyset \in X \wedge \forall y(y \in X \to y^+ \in X)]$$

- ZFC. 8 幂集公理（Axiom of power set）

$$\forall x \exists y \forall z[z \subseteq x \to z \in y]$$

- ZFC. 9 选择公理（Axiom of choice ）
  - 任一非空集合族$(S_i)_{i \in I}$均存在元素族$(s_i)_{i \in I}, \forall i \in I. s_i \in S_i$
  - 或良序定理（Well-ordering theorem ）：

$$\forall X \exists R(R \text{ well} - \text{orders } X)$$