

§ 2 线性变换的运算

- 一、 线性变换的乘积
- 二、 线性变换的和
- 三、 线性变换的数量乘法
- 四、 线性变换的逆
- 五、 线性变换的多项式

一、线性变换的乘积

1. 定义

设 σ, τ 为线性空间 V 的两个线性变换，定义它们的**乘积** $\sigma\tau$ 为： $(\sigma\tau)(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha))$, $\forall \alpha \in V$
则 $\sigma\tau$ 也是 V 的线性变换.

$$\begin{aligned} \text{事实上, } (\sigma\tau)(\alpha + \beta) &= \sigma(\tau(\alpha + \beta)) = \sigma(\tau(\alpha) + \tau(\beta)) \\ &= \sigma(\tau(\alpha)) + \sigma(\tau(\beta)) = (\sigma\tau)(\alpha) + (\sigma\tau)(\beta), \\ (\sigma\tau)(k\alpha) &= \sigma(\tau(k\alpha)) = \sigma(k\tau(\alpha)) = k\sigma(\tau(\alpha)) = k(\sigma\tau)(\alpha) \end{aligned}$$

2. 基本性质

(1) 满足结合律: $(\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta)$

(2) $E\sigma = \sigma E = \sigma$, E 为单位变换

(3) 交换律一般不成立, 即一般地,

$$\sigma\tau \neq \tau\sigma.$$

例1. 线性空间 $R[x]$ 中, 线性变换

$$D(f(x)) = f'(x)$$

$$J(f(x)) = \int_0^x f(t) dt$$

$$(DJ)(f(x)) = D\left(\int_0^x f(t) dt\right) = f(x), \quad \text{即 } DJ = E.$$

而,

$$(JD)(f(x)) = J(f'(x)) = \int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$$

$$\therefore DJ \neq JD.$$

例2. 设 $A, B \in P^{n \times n}$ 为两个取定的矩阵, 定义变换

$$\sigma(X) = AX,$$

$$\forall X \in P^{n \times n}$$

$$\tau(X) = XB,$$

则 σ, τ 皆为 $P^{n \times n}$ 的线性变换, 且对 $\forall X \in P^{n \times n}$, 有

$$(\sigma\tau)(X) = \sigma(\tau(X)) = \sigma(XB) = A(XB) = AXB,$$

$$(\tau\sigma)(X) = \tau(\sigma(X)) = \tau(AX) = (AX)B = AXB.$$

$$\therefore \sigma\tau = \tau\sigma.$$

二、 线性变换的和

1. 定义

设 σ, τ 为线性空间 V 的两个线性变换，定义它们的和 $\sigma + \tau$ 为： $(\sigma + \tau)(\alpha) = \sigma(\alpha) + \tau(\alpha), \forall \alpha \in V$
则 $\sigma + \tau$ 也是 V 的线性变换。

$$\begin{aligned} \text{事实上, } (\sigma + \tau)(\alpha + \beta) &= \sigma(\alpha + \beta) + \tau(\alpha + \beta) \\ &= \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) + \tau(\alpha) + \tau(\beta) = (\sigma + \tau)(\alpha) + (\sigma + \tau)(\beta), \\ (\sigma + \tau)(k\alpha) &= \sigma(k\alpha) + \tau(k\alpha) = k\sigma(\alpha) + k\tau(\alpha) \\ &= k(\sigma(\alpha) + \tau(\alpha)) = k(\sigma + \tau)(\alpha). \end{aligned}$$

2. 基本性质

(1) 满足交换律: $\sigma + \tau = \tau + \sigma$

(2) 满足结合律: $(\sigma + \tau) + \delta = \sigma + (\tau + \delta)$

(3) $0 + \sigma = \sigma + 0 = \sigma$, 0 为零变换.

(4) 乘法对加法满足左、右分配律:

$$\sigma(\tau + \delta) = \sigma\tau + \sigma\delta$$

$$(\tau + \delta)\sigma = \tau\sigma + \delta\sigma$$

3. 负变换

设 σ 为线性空间 V 的线性变换，定义变换 $-\sigma$ 为：

$$(-\sigma)(\alpha) = -\sigma(\alpha), \quad \forall \alpha \in V$$

则 $-\sigma$ 也为 V 的线性变换，称之为 σ 的**负变换**.

注： $(-\sigma) + \sigma = 0$

三、 线性变换的数量乘法

1. 定义

设 σ 为线性空间 V 的线性变换, $k \in P$, 定义 k 与 σ 的**数量乘积** $k\sigma$ 为:

$$(k\sigma)(\alpha) = k\sigma(\alpha), \quad \forall \alpha \in V$$

则 $k\sigma$ 也是 V 的线性变换.

2. 基本性质

$$(1) \quad (kl)\sigma = k(l\sigma)$$

$$(2) \quad (k + l)\sigma = k\sigma + l\sigma$$

$$(3) \quad k(\sigma + \tau) = k\sigma + k\tau$$

$$(4) \quad 1\sigma = \sigma$$

注： 线性空间V上的全体线性变换所成集合对于线性变换的加法与数量乘法构成数域P上的一个线性空间，记作 $L(V)$.

四、 线性变换的逆

1. 定义

设 σ 为线性空间 V 的线性变换，若有 V 的变换 τ 使

$$\sigma\tau = \tau\sigma = E$$

则称 σ 为可逆变换，称 τ 为 σ 的逆变换，记作 σ^{-1} .

2. 基本性质

(1) 可逆变换 σ 的逆变换 σ^{-1} 也是 V 的线性变换.

证：对 $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k \in P,$

$$\sigma^{-1}(\alpha + \beta) = \sigma^{-1}\left(\left(\sigma\sigma^{-1}\right)(\alpha) + \left(\sigma\sigma^{-1}\right)(\beta)\right)$$

$$= \sigma^{-1}\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(\alpha) + \sigma^{-1}(\beta)\right)\right)$$

$$= \left(\sigma^{-1}\sigma\right)\left(\sigma^{-1}(\alpha) + \sigma^{-1}(\beta)\right)$$

$$= \sigma^{-1}(\alpha) + \sigma^{-1}(\beta)$$

$$\sigma^{-1}(k\alpha) = \sigma^{-1}\left(k\left(\sigma\sigma^{-1}\right)(\alpha)\right) = \sigma^{-1}\left(k\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right)\right)\right)$$

$$= \sigma^{-1}\left(\sigma\left(k\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right)\right)\right) = k\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right) = k\sigma^{-1}(\alpha)$$

$\therefore \sigma^{-1}$ 是 V 的线性变换.

(2) 线性变换 σ 可逆 \Leftrightarrow 线性变换 σ 是一一对应.

五、线性变换的多项式

1. 线性变换的幂

设 σ 为线性空间 V 的线性变换, n 为自然数, 定义

$$\sigma^n = \underbrace{\sigma \cdots \sigma}_n,$$

称之为 σ 的 n 次幂.

当 $n = 0$ 时, 规定 $\sigma^0 = E$ (单位变换) .

注:

① 易证 $\sigma^{m+n} = \sigma^m \sigma^n$, $(\sigma^m)^n = \sigma^{mn}$, $m, n \geq 0$

② 当 σ 为可逆变换时, 定义 σ 的负整数幂为

$$\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n$$

③ 一般地, $(\sigma\tau)^n \neq \sigma^n \tau^n$.

2. 线性变换的多项式

设 $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$,

σ 为 V 的一个线性变换, 则

$$f(\sigma) = a_m \sigma^m + \cdots + a_1 \sigma + a_0 E$$

也是 V 的一个线性变换, 称 $f(\sigma)$ 为线性变换 σ 的
多项式.

注：① 在 $P[x]$ 中，若

$$h(x) = f(x) + g(x), \quad p(x) = f(x)g(x)$$

则有， $h(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma)$,

$$p(\sigma) = f(\sigma)g(\sigma)$$

② 对 $\forall f(x), g(x) \in P[x]$ ，有

$$f(\sigma) + g(\sigma) = g(\sigma) + f(\sigma)$$

$$f(\sigma)g(\sigma) = g(\sigma)f(\sigma)$$

线性变换的多项
式的乘法可交换

即线性变换的多项式满足加法和乘法交换律。

例1. 设 σ 是 P^4 的一个线性变换:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_2, x_3)$$

并设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

求 (1) $\sigma^k, k \geq 1$; (2) $f(\sigma)$.

解: (1)由 σ 的定义,有

$$\begin{aligned}\sigma^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \sigma(\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)) \\ &= \sigma(0, x_1, x_2, x_3) \\ &= (0, 0, x_1, x_2);\end{aligned}$$

$$\sigma^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, x_1);$$

$$\sigma^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0);$$

故 $\sigma^k = 0, k=4, 5, \dots$.;

$$\begin{aligned} (2) \quad f(\sigma) &= a_m \sigma^m + a_{m-1} \sigma^{m-1} + \dots + a_1 \sigma + a_0 I \\ &= a_3 \sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + a_0 I, \end{aligned}$$

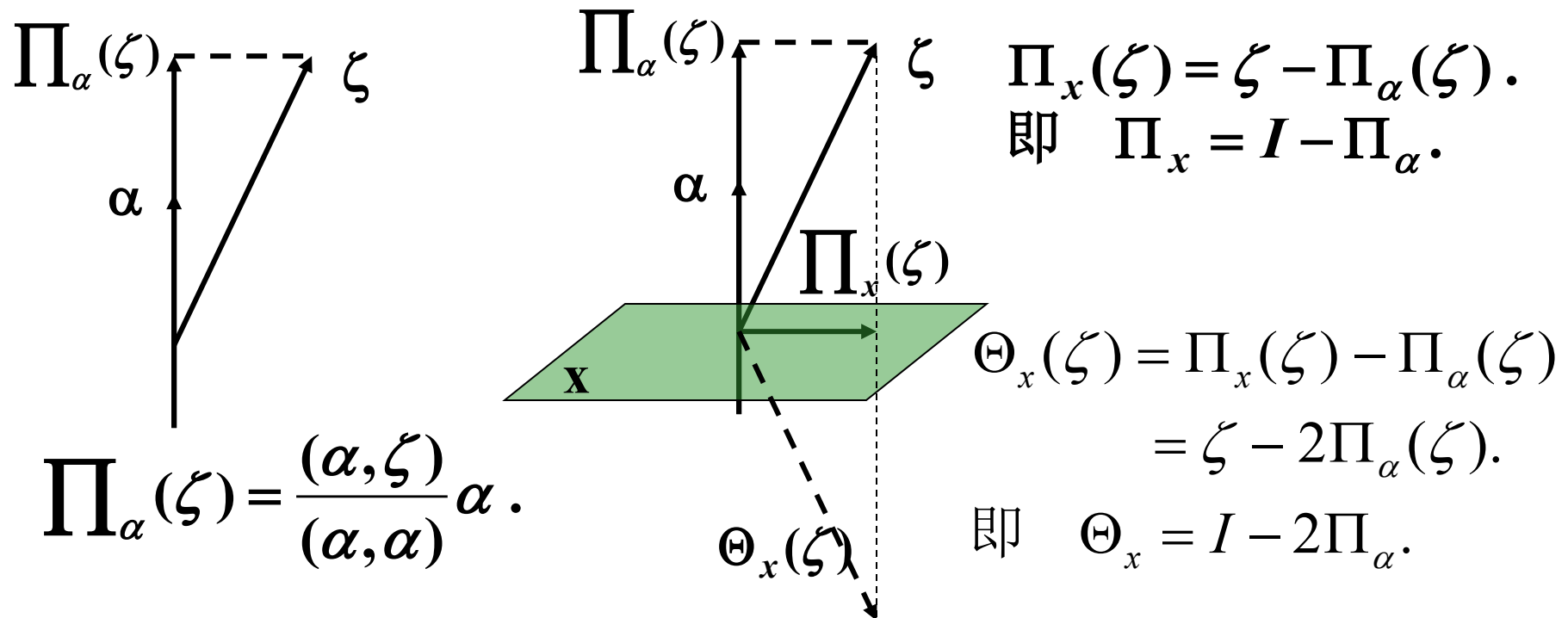
所以

$$\begin{aligned} &f(\sigma)(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (a_3 \sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + a_0 I)(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= a_3 (0, 0, 0, x_1) + a_2 (0, 0, x_1, x_2) + a_1 (0, x_1, x_2, x_3) \\ &\quad + a_0 (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (a_0 x_1, a_0 x_2 + a_1 x_1, a_0 x_3 + a_1 x_2 + a_2 x_1, \\ &\quad a_0 x_4 + a_1 x_3 + a_2 x_2 + a_3 x_1) \end{aligned}$$

此外,线性变换之间的一些关系可以通过线性变换的运算表示出来.

例2 几何空间中, 对某一向量 α 的内射影 Π_α 是一个线性变换(如图).

- (1) 求向量 ζ 在以 α 为法向量的平面 x 上的内射影 Π_x ;
- (2) 求向量 ζ 对于以 α 为法向量的平面 x 的反 Θ_x .



例3 在线性空间 $P[x]_n$ 中求微商运算及变数的平移

$$\sigma : f(x) \rightarrow f'(x)$$

$$\tau_a : f(x) \rightarrow f(x+a) \quad (a \in P)$$

均为 $P[x]_n$ 的线性变换.试用 σ 表示 τ_a .

解 依据Taylor公式, 有

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

因此

$$\tau_a = I + a\sigma + \frac{a^2}{2!} \sigma^2 + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \sigma^{n-1}.$$

$$f(x+a) = \tau_a(f(x))$$