Ch 2 条件概率与独立性

十二重计数

问题简述：将n只球放入m个箱子, 有多少种不同的放法

n只球	m个箱子	无任何限制	每个箱子至多1球	每个箱子至少1球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!\,S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases}1 & n \le m \\ 0 & n > m\end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases}1 & n \le m \\ 0 & n > m\end{cases}$	$p(n,m)$

条件概率

前面概率的讨论均是在整个样本空间上进行, 无任何额外因素或条件. 现考虑**在一定条件下某一事件发生的概率** – 条件概率

例：随意投掷一枚骰子,用事件A表示观察到奇数点，用事件B表示观察到3点，用事件C表示观察到2点

一个随机事件发生的概率可能随着条件的改变而改变

条件概率形式化定义

定义： 设(Ω, Σ, P) 是一个概率空间，事件$A \in \Sigma$且$P(A) > 0$，对任意事件$B \in \Sigma$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生的条件下事件B发生的概率, 简称 **条件概率**

任何事件的概率可看作必然事件的条件概率$P(A) = P(A|\Omega)$

若出现条件概率$P(B|A)$，一般默认$P(A) > 0$

条件概率是概率

对任何给定的事件A满足$P(A) > 0$, 其条件概率:

非负性: 对任意事件B有$P(B|A) \geq 0$;

规范性: 对样本空间Ω有$P(\Omega|A) = 1$;

可列可加性: 若$B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$是可列无穷个互不相容的事件, 即$B_iB_j = \emptyset \ (i \neq j)$, 有

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots |A) = P(B_1|A) + \cdots + P(B_n|A) + \cdots$$

条件概率是一种概率

条件概率的性质

容斥原理：对随机事件A, B_1和B_2且满足$P(A) > 0$, 有

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$

对随机事件A和B且满足$P(A) > 0$, 有$P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$

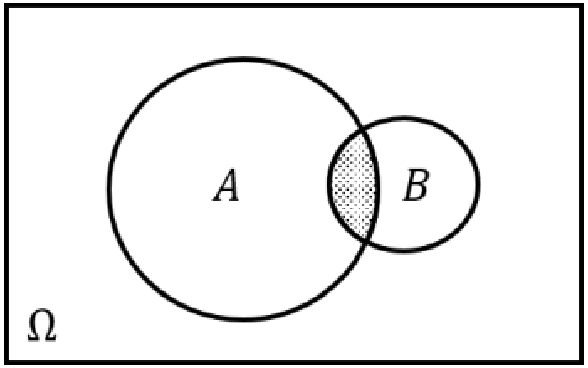
条件概率的本质：空间缩减法

任何事件的概率可看作必然事件的条件概率

事件A发生的条件下考虑事件B发生的概率, 可将A看作新的样本空间, 忽略以前的样本空间Ω, 由此可以发现：

条件概率的本质是缩小了有效的样本空间

计算条件概率的方法：**样本空间缩减**, 在新样本空间A下考虑事件B的发生



例

盒子中有4只不同的产品，其中3只一等品，1只二等品．从盒子中不放回随机取两次产品．用A表示第一次拿到一等品的事件，用B表示第二次取到一等品的事件, 求条件概率$P(B|A)$.

例

一个箱子中有a个红球和b个白球，依次任意无放回地取出n个球 ($n \le a + b$), 其中包括k个白球 ($k \le b$), 求在此情形下第一次取出白球的概率.

乘法公式

对概率非零的事件A和B, 根据条件概率的定义可

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

定理： 对随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$且满足$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$, 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例

有n把钥匙, 只有一把能打开门, 不放回地随机取出一把开门, 求第k次打开门的概率.

匹配问题

假设有n对夫妻参加活动, 被随机分成n组, 每组一男一女, 求

1) n对夫妻恰好两两被分到一组的概率

2) n对夫妻恰好至少有一对夫妻被分到一组的概率

例

第一个箱子里有n个不同的白球, 第二个箱子里有有m个不同的红球, 从第一个箱子任意拿走一球, 再从第二个箱子里任意拿走一球放入第一个箱子, 依次进行, 直至第一、第二个箱子都为空, 求第一个箱子最后一次取走的球是白球的概率

例

箱子里有m个红球和n个白球，随机取出一球后放回，并加入c个与取出球同色的球, 求前两次取出红球、后两次取出白球的概率

全概率公式

全概率公式是概率论中最基本的公式之一, 将一个复杂事件的概率计算分解为若干简单事件的概率计算.

将一个复杂事件分解为若干不相容的简单事件之和, 通过分别计算简单事件的概率, 利用概率的可加性得到复杂事件的概率.

若随机事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$满足:

i) 任意两事件是互不相容性的

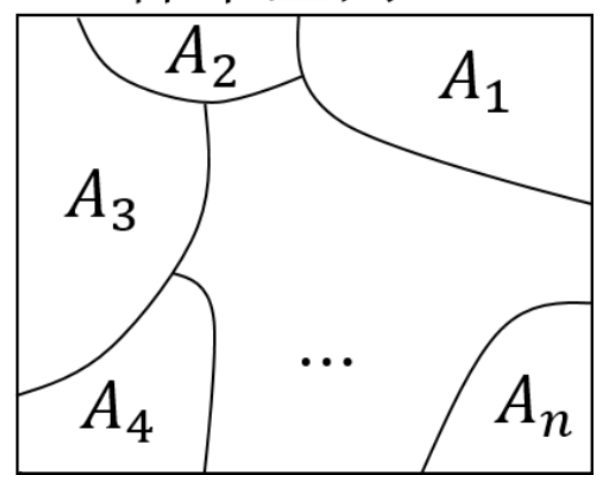
$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

ii) 完备性 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

称事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$为空间Ω的一个分割,

亦称 完备事件组

样本空间Ω

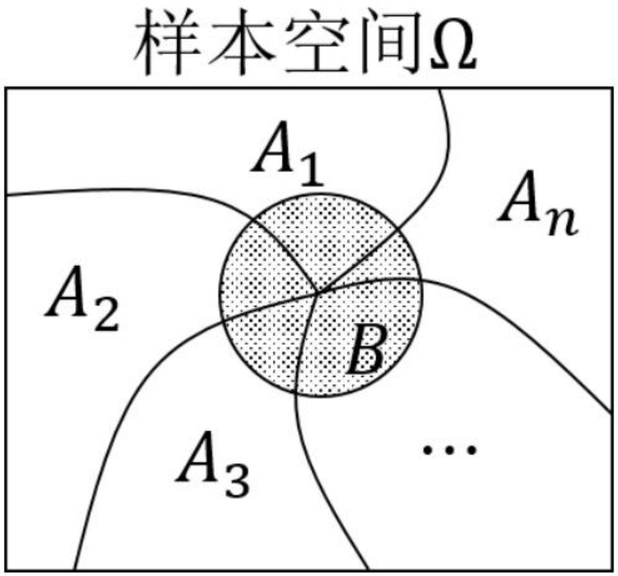


全概率公式

若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个分割, 对任意事件B有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

称之为 **全概率公式** (Law of total probability)



可以将事件B看作某一过程的结果, 将A_1, $A_2, \cdots, A_n$看作产生该结果的若干原因:

i) 每一种原因已知, 即$P(A)$ 已知

ii) 每一种原因对结果B的影响已知, 即$P(B|A_k)$ 已知

则$P(B)$可计算

例

小明参加一次竞赛, 目前排名不理想, 分析其原因: 方法不够新颖的概率为50%, 通过设计新方法后取得理想排名的概率为50%; 程度代码有误的概率为30%, 通过纠正代码后取得理想排名的概率为60%; 数据不充分的概率为20%, 通过采集更多数据后取得理想排名的概率为80%. 求小明最后取得理想排名的概率.

例

随意抛n次均匀的硬币, 证明正面朝上的次数是偶数 (或奇数) 的概率为1/2

例

假设有n个箱子, 每个箱子里有a只白球和b只红球, 现从第一个箱子取出一个球放入第二个箱子, 第二个箱子取出一个球放入第三个箱子, 依次类推, 求从最后一个箱子取出一球是红球的概率.