Ch 2-2 全概率公式和贝叶斯公式

回顾前一次课

条件概率: $P(B|A) = P(AB)/P(A)$

乘法公式: $P(A_1A_2\cdots\ A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

全概率公式：若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个划分, 对任意事件B有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

例

随意抛n次均匀的硬币, 证明正面朝上的次数是偶数 (或奇数)的概率为1/2

例

假设有n个箱子, 每个箱子里有a只白球和b只红球, 现从第一个箱子取出一个球放入第二个箱子, 第二个箱子取出一个球放入第三个箱子, 依次类推, 求从最后一个箱子取出一球是红球的概率.

贝叶斯公式

贝叶斯公式：概率论中另一个重要的公式，研究在一种结果已发生的情况下是何种原因导致该结果

贝叶斯公式：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个分割, 且事件B满足$P(B) > 0$. 对任意$1 \le i \le n$有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

特别地

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

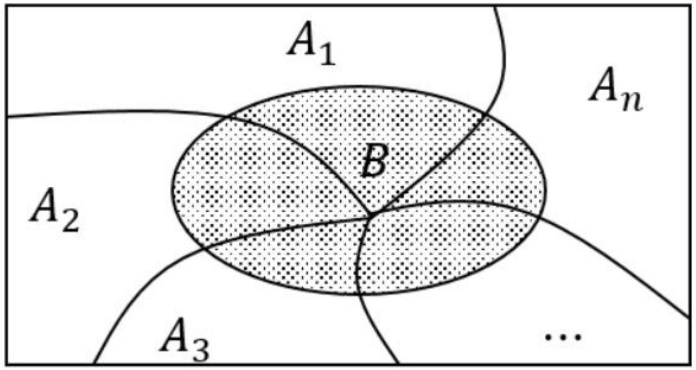
贝叶斯公式

直觉解释: 将事件B看作结果, 将$A_1, A_2, \cdots, A_n$看作产生结果的若干种原因, 如果

i) 每一种原因发生的概率$P(A_i)$ 已知;

ii) 每一种原因A_i对结果B的影响已知, 即概率$P(B|A_i)$已知

则可求事件B由第i种原因引起的概率$P(A_i|B)$



全概率公式和贝叶斯公式

将事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$看作事件B发生的原因，而事件B是伴随着原因$A_1, A_2, \cdots, A_n$而发生的结果

全概率公式和贝叶斯公式应用条件是相同的, 解决的问题不同:

- 若知道各种原因$P(A_i)$，以及在该原因下事件B发生的概率$P(B|A_i)$, 此时利用全概率公式计算概率$P(B)$
- 若知道各种原因$P(A_i)$，以及在该原因下事件B发生的概率$P(B|A_i)$，若结果事件B已经发生，利用贝叶斯公式探讨是由某原因A_i导致该结果的概率$P(A_i|B)$

例：贝叶斯公式用于决策

小明参加一次竞赛, 目前排名不理想, 分析其原因: 方法不够新颖的概率为50%，通过设计新方法后取得理想排名的概率为50%; 程度代码有误的概率为30%，通过纠正代码后取得理想排名的概率为60%; 数据不充分的概率为20%，通过采集更多数据后取得理想排名的概率为80%. 因为时间有限，小明只能选择三种策略(设计新方法、纠正代码、采集更多数据)中一种，想要取得理想排名, 小明应该选择哪一种方案.

例

犯人a, b, c均被判为死刑, 法官随机赦免其中一人, 看守知道谁被赦免但不会说. 犯人a问看守: b和c谁会被执行死刑? 看守的策略:
i) 若赦免b, 则说c;

ii) 若赦免c, 则说b;

iii) 若赦免a, 则以1/2的概率说b或c.

看守回答a: 犯人b会被执行死刑. 犯人a兴奋不已, 因为自己生存的概率为1/2. 犯人a将此事告诉犯人c, c同样高兴, 因为他觉得自己的生存几率为2/3. 那么谁才是正确的呢?

先验与后验概率

假定$A_1, A_2, \cdots, A_n$是导致结果事件B的原因

概率$P(A_i)$被称为**先验(prior)概率**, 反映了各种原因的可能性大小, 一般都是根据先前的经验总结而成.

若现在试验产生了事件B, 这个信息有助于探讨事件发生的原因, 条件概率$P\ (A_i|B)$被称**后验(posterior)概率**, 反映了试验之后对各种原因发生可能性的新知识.

$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)P\left(B\middle|A_j\right)$被称为**证据 (evidence) 概率**

$P(B|A_i)$被称为似然度 (likelihood)

贝叶斯公式：$\text{后验概率} = \dfrac{\text{先验概率} \times \text{似然度}}{\text{证据概率}}$

主观概率

叶斯公式最存在争议之处：先验概率$P(A_i)$的选取

很多实际应用中根据以往的数据得先验，符合概率的频率解释，但需要以往大量的历史数据，在实际应用中通常难以满足

很多应用中先验概率可能由某一种主观的方式给出，例如对未来宏观经济形势、或对某人诚信度

主观概率：将概率解释为信任程度、明显带有主观性

例题

寓言故事狼来了：一个小孩每天到山上放羊，山里有狼出没，第一天他在山上喊“狼来了！狼来了！”，山下的村民们闻声便去打狼，到了山上发现没有狼；第二天仍是如此；第三天狼真来了，可无论小孩怎么喊叫，也没有人来救他.

假设村民们对这个小孩的印象一般，认为小孩说谎话和说真话的概率相同，均为1/2. 假设说谎话的小孩喊狼来了时狼真来的概率为1/3，而说真话的小孩喊狼来了时狼真来的概率为3/4. 若第一天、第二天上山均没有发现狼，请分析村民们的心理活动.

Ch 2-2 独立性

两事件的独立性

在一般情况下, 由条件概率定义知

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\neq P(B)$$

即事件A发生对事件B的发生有影响. 然而在有些情况下, 事件A的发生对事件B的发生可能没有任何影响——**独立性**

定义: 若事件A,B满足$P(AB)=P(A)P(B)$, 称事件$\boldsymbol{A}$**与**$\boldsymbol{B}$**相互独立**

- 任何事件与不可能事件 (或必然事件) 相互独立
- 对事件A和B满足P(A)P(B)>0, 有

$$P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$$

性质

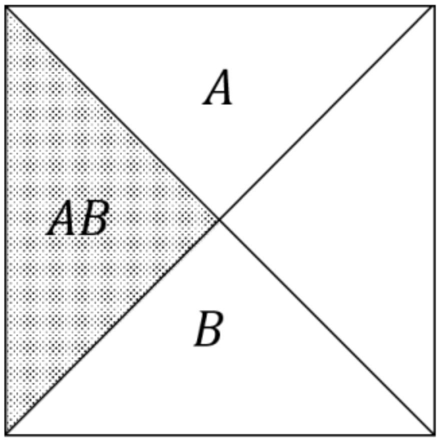
若事件A与B相互独立, 则A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B, $\bar{A}$与$\bar{B}$都互相独立

独立与互斥的关系

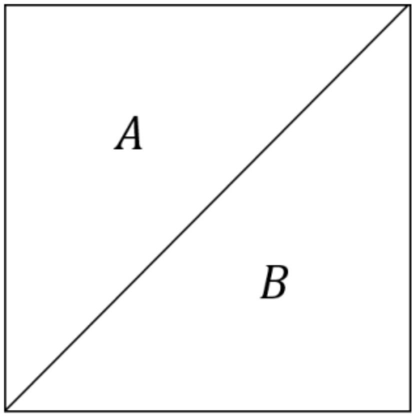
A与B相互独立： $P(AB) = P(A)P(B)$, 独立性与概率相关,
反映事件的概率属性

A与B互不相容：$AB = \emptyset$, 与事件运算关系相关, 与概率无关

独立与互斥反映事件不同的性质, 无必然联系



A与B独立, 但并不互斥



A与B互斥, 但并不独立

性质

事件A和B满足$P(A)P(B) > 0$, 若事件A和B独立则A和B不互斥;
若事件A和B互斥则A和B不独立.

若事件A和B互斥且$P(A)P(B) > 0$, 下面哪些说法正确?

a) $P(B|A) > 0$ b) $P(A|B) = 0$ c) A, B不独立 d) $P(A|B) = P(A)$

若事件A和B独立且$P(A)P(B) > 0$, 下面哪些说法正确?

a) $P(B|A) > 0$ b) $P(A|B) = P(A)$
c) $P(A|B) = 0$ d) $P(AB) = P(A)P(B)$