第8章 解线性方程组的迭代法

张利军
zlj@nju.edu.cn
http://cs.nju.edu.cn/zlj

目录

- 引言
- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel迭代法
- 迭代法的收敛性
- 解线性方程组的超松弛迭代法

迭代法

- 考虑线性方程组，其中$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{8.1.1}$$

  - 当$\boldsymbol{A}$为低阶稠密矩阵时，第7章所讨论的选主元素消去法解式(8.1.1)的有效方法
  - 但是，对于由工程技术中产生的大型稀疏矩阵方程组（$\boldsymbol{A}$ 的阶数n很大，但零元素较多，例如$n \geq 10^4$），利用迭代法求解式(8.1.1)是合适的
  - 在计算机内存和运算两方面，迭代法都可利用$\boldsymbol{A}$中有大量零元素的特点

例8.1

- 求解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \tag{8.1.2}$$

- 记作 $$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
  其中
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 33 \\ 36 \end{bmatrix}$$

- 方程组的精确解是
$$\boldsymbol{x}^* = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$$

例8.1（续）

- 现将式(8.1.2)

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \tag{8.1.2}$$

改写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20) \\ x_2 = \dfrac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33) \\ x_3 = \dfrac{1}{12}(-6x_1 - 3x_2 + 36) \end{cases} \tag{8.1.3}$$

例8.1（续）

- 记为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$

  其中

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \frac{20}{8} \\ \frac{33}{11} \\ \frac{36}{12} \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- 一般推导：

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

例8.1（续）

- 任取初始值，例如取$\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，将这些值代入式(8.1.3)右端，得到新的值

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})^{\mathrm{T}}=(3.5,3,3)^{\mathrm{T}}$$

  - ✓ 若式(8.1.3)为等式即求得方程组的解

- 再将$\boldsymbol{x}^{(1)}$分量代入式(8.1.3)右端，得到$\boldsymbol{x}^{(2)}$

- 反复利用这个计算程序，得到一向量序列

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\x_3^{(0)}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{bmatrix},\ldots,\quad \boldsymbol{x}^{(k)}=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{bmatrix},\ldots$$

例8.1（续）

和一般计算公式（迭代公式）

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20\right)/8 \\ x_2^{(k+1)} = \left(-4x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 33\right)/11 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 36\right)/12 \end{cases} \tag{8.1.4}$$

- 简写为 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B_0}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$

  其中k $(k = 0, 1, 2, \dots)$表示迭代次数

- 迭代到第10次有

逐步逼近方程组的精确解$\boldsymbol{x}^*$

$$\boldsymbol{x}^{(10)} = (3.000032, 1.999838, 0.9998813)^{\mathrm{T}}$$

$$||\boldsymbol{\varepsilon}^{(10)}||_\infty = 0.000187 \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(10)} = \boldsymbol{x}^{(10)} - \boldsymbol{x}^*\right)$$

迭代法的收敛性

- 对于任何一个方程组：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$，按迭代法作出的向量序列$\boldsymbol{x}^{(k)}$是否一定逐步逼近方程组的解$\boldsymbol{x}^*$呢？
  - $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$是由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$变形得到的等价方程组

- 回答是不一定
  - 考虑用迭代法解下述方程组

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 5 \\ x_2 = 3x_1 + 5 \end{cases}$$

迭代法的收敛性（续）

- 对于给定方程组$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$，设有唯一解$\boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f} \tag{8.1.5}$$

- 又设$\boldsymbol{x}^{(0)}$为任取的初始向量，按下述公式构造向量序列

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{f} \\ \quad\cdots \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \end{cases} \tag{8.1.6}$$

  - k表示迭代次数

迭代法的收敛性（续）

定义8.1

1. 对于给定的方程组$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$，用式(8.1.6)逐步代入求近似解的方法称为迭代法（或称一阶定常迭代法，这里$\boldsymbol{B}$与k无关）

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(0)}+\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)}+\boldsymbol{f} \\ \qquad\cdots \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f} \end{cases} \tag{8.1.6}$$

2. 如果$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}$存在（记作$\boldsymbol{x}^*$），称此迭代法收敛，显然$\boldsymbol{x}^*$就是方程组的解，否则称此迭代法发散

迭代法的收敛性（续）

- 为了研究$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$的收敛性，引进误差向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{*}$$

- 由式(8.1.6)减去(8.1.5)，得

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{*}+\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\quad (k=0,1,2\cdots)$$

- 递推得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)}=\cdots=\boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$$

- 要考察$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$的收敛性，就要研究$\boldsymbol{B}$在什么条件下有$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\rightarrow \boldsymbol{0}\ (k\rightarrow\infty)$，亦即要研究$\boldsymbol{B}$满足什么条件时有$\boldsymbol{B}^{(k)}\rightarrow \boldsymbol{O}$（零矩阵）$(k\rightarrow\infty)$

目录

- 引言
- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel迭代法
- 迭代法的收敛性
- 解线性方程组的超松弛迭代法

Jacobi（雅可比）迭代法

- 设有方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

- 记作 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (8.2.1)

  $\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵且$a_{ii} \neq 0\ (i = 1, 2, \dots, n)$

- 将$\boldsymbol{A}$分裂为$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$，其中

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代法（续）

$$\boldsymbol{L} = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- 将$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$第$i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$个方程用a_{ii}去除再移项，得到等价方程组

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j\right) (i = 1,2, \ldots, n) \qquad (8.2.2)$$

Jacobi迭代法（续）

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$$

- 简记作
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B_0}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$$
  - 其中 $\boldsymbol{B_0} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})$

    $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$
- 对方程组(8.2.2)应用迭代法，得到解式(8.2.1)的Jacobi迭代公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \text{ (初始向量)} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum\limits_{i=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) \end{cases} \quad (8.2.3)$$

  - 其中$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$为第$k$次迭代向量

Jacobi迭代法（续）

- 显然迭代公式(8.2.3)的矩阵形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(0)} & \text{(初始向量)} \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \end{cases} \tag{8.2.4}$$

  - 其中$\boldsymbol{B}_0$称为Jacobi方法迭代矩阵

- Jacobi迭代法公式简单
  - 每迭代一次只需计算一次矩阵和向量乘法
  - 在用计算机计算时，需要两组工作单元，以存储$\boldsymbol{x}^{(k)}$及$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$

目录

- 引言
- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel迭代法
- 迭代法的收敛性
- 解线性方程组的超松弛迭代法

Gauss-Seidel（高斯-赛德尔）迭代法

- 由Jacobi方法迭代公式(8.2.4)可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(0)} & (\text{初始向量}) \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \end{cases} \tag{8.2.4}$$

  - 迭代的每一步计算过程，都是用$\boldsymbol{x}^{(k)}$的全部分量来计算过$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$的所有分量
  - 显然在计算第i个分量工的时，已经计算出的最新分量$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$没有被利用
  - 从直观上看，最新计算出的分量可能比旧的分量要好些。因此，对这些最新计算出来的第$k+1$次近似$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$的分量$x_j^{(k+1)}$加以利用，就得到所谓解方程组的Gauss-Seidel迭代法（简称G-S方法）

Gauss-Seidel迭代法（续）

□ Gauss-Seidel迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \quad \text{(初始向量)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; i = 1,2, \dots, n), \qquad (8.2.5)$$

□ Jacobi迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{i=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

Gauss-Seidel迭代法（续）

□ Gauss-Seidel迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \quad (\text{初始向量})$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots; i = 1,2, \ldots, n), \qquad (8.2.5)$$

- 第2个式子利用了最新计算出的分量$x_1^{(k+1)}$
- 第i个式子利用了计算出的最新分量$x_j^{(k+1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, i-1)$

Gauss-Seidel迭代法（续）

□ Gauss-Seidel迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \quad \text{(初始向量)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; i = 1,2, \dots, n), \qquad (8.2.5)$$

- 可写成

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i \quad (k = 0,1,2,\cdots; i = 1,2,\cdots,n) \\ \Delta x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代法（续）

- 矩阵形式

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{L} = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- Jacobi迭代公式

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{B}_0 &= \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) \\ \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

Gauss-Seidel迭代法（续）

- 矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

$$\Rightarrow (D-L)x^{(k+1)} = b + Ux^{(k)}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

  - 假设$(D-L)^{-1}$存在

- 可改写为

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f \qquad (8.2.6)$$

$$G = (D-L)^{-1}U, \qquad f = (D-L)^{-1}b$$

- Jacobi迭代公式

$$x^{(k+1)} = B_0x^{(k)} + f$$

Gauss-Seidel迭代法（续）

- 应用Gauss-Seidel迭代法解式(8.2.1)就是对方程组 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ 应用迭代法
  - $\boldsymbol{G}$称为Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵

- Gauss-Seidel迭代法的一个明显的优点是，在用计算机计算时，只需一组工作单元，以便存放近似解，此外，每迭代一步只需计算一次矩阵与向量的乘法

$$\Delta x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

例8.2

□ 用Gauss-Seidel迭代法解例8.1

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \tag{8.1.2}$$

- 取$\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$，迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right)/8 \\ x_2^{(k+1)} = \left(33 - 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right)/11 \\ x_3^{(k+1)} = \left(36 - 6x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}\right)/12 \end{cases}$$

例8.2（续）

- 迭代到第5次时，有

$$\boldsymbol{x}^{(5)} = (2.999843, 2.000072, 1.000061)^{\mathrm{T}}$$

$$||\boldsymbol{\varepsilon}^{(5)}||_{\infty} = 0.00157$$

- 从此例看出，Gauss-Seidel迭代法比Jacobi迭代法收敛快（达到同样的精度所需的迭代次数较少）

- 但这个结论在一定条件下才是对的，甚至有这样的方程组，Jacobi方法收敛，而Gauss-Seidel迭代法却是发散的

例8.3

- 方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

- 能够说明解此方程组的Jacobi迭代法收敛而Gauss-Seidel迭代法发散

目录

- 引言
- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel迭代法
- 迭代法的收敛性
- 解线性方程组的超松弛迭代法

矩阵收敛

- **定义8.2** 设有矩阵序列$\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}(k=1,2,\cdots)$及$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，如果

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

成立，则称$\{\boldsymbol{A}_k\}$收敛于$\boldsymbol{A}$，记作$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}$

- **例8.4** 矩阵序列

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^k\end{pmatrix},\ldots,$$

当$|\boldsymbol{\lambda}|<1$时， $\boldsymbol{A}^k\to\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$（当$k\to\infty$时）

矩阵收敛（续）

- 矩阵序列极限的概念可以用任何矩阵范数来描述

- **定理8.1** $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}$的充要条件是$\|\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{A}\|\to 0\ (k\to\infty)$

- 由8.1节知，要考虑序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$的收敛性，就要研究$\boldsymbol{B}$在什么条件下误差向量趋于零向量，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\to\boldsymbol{0}\quad(k\to\infty)$$

迭代法收敛的充要条件

- **定理8.2** 设$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则$\boldsymbol{B}^k\to\boldsymbol{O}(k\to\infty)$的充要条件是$\rho(\boldsymbol{B})<1$
  - 由矩阵$\boldsymbol{B}$的Jordan标准形，存在非奇异矩阵$\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_r\end{bmatrix}\equiv\boldsymbol{J}\qquad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

其中λ_i为第i个特征值，$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$

https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_normal_form

定理8.2证明

- 显然$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PJP}^{-1}$，故

$$\boldsymbol{B}^k = (\boldsymbol{PJP}^{-1})^k = \boldsymbol{PJ}^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中

$$\boldsymbol{J}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1^k & & & \\ & \boldsymbol{J}_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_r^k \end{bmatrix} (k = 1,2,\ldots)$$

- 于是

$$\boldsymbol{B}^k \to \boldsymbol{O} \quad (k \to \infty) \Leftrightarrow \boldsymbol{J}^k \to \boldsymbol{O} \quad (k \to \infty)$$

$$\boldsymbol{J}^k \to \boldsymbol{O}(k \to \infty) \Leftrightarrow \boldsymbol{J}_i^k \to \boldsymbol{O}(k \to \infty) \quad (i = 1,2,\cdots,r)$$

定理8.2证明（续）

- 引进记号

$$\boldsymbol{E}_{tk} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad 0}}^{k\text{个}}} & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{t\times t} \end{array} \quad (\text{其中} t = {\color{red} n_i})$$

- 可以证明当$k < t$时，$(\boldsymbol{E}_{t1})^k = \boldsymbol{E}_{tk}$； 当$k \geq t$时$(\boldsymbol{E}_{t1})^k = \boldsymbol{E}_{tk} = \boldsymbol{O}$

定理8.2证明（续）

- 显然

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_i \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_{t1}$$

- 可得

$$\boldsymbol{J}_i^k = (\lambda_i \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_{t1})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\boldsymbol{E}_{t1})^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} \boldsymbol{E}_{tj}$$

（当 $k \geq t$ 时 $\boldsymbol{E}_{tk} = \boldsymbol{O}$ ） $= \sum_{j=0}^{t-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} \boldsymbol{E}_{tj}$

定理8.2证明（续）

- 进而

$$J_i^k = (\lambda_i I + E_{t1})^k = \sum_{j=0}^{t-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} E_{tj}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \cdots & \binom{k}{t-1}\lambda_i^{k-(t-1)} \\ & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{t-2}\lambda_i^{k-(t-2)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

其中 $\binom{k}{j} = \dfrac{k!}{j!\,(k-j)!} = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$

定理8.2证明（续）

- 利用极限$\lim\limits_{k\to\infty} k^r c^k = 0\ (0 < c < 1, r \geq 0)$，得到

$$\binom{k}{j}\lambda^{k-j} \to 0\ (k \to \infty) \Leftrightarrow |\lambda| < 1$$

✓ 注意到

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!\,(k-j)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$$

- 所以$\boldsymbol{J}_i^k \to \boldsymbol{O}\ (k \to \infty)$充要条件是$|\lambda_i| < 1\ (i = 1,2,\ldots,r)$，即$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$

迭代法基本定理

- **定理8.3** 设有方程组

$$x = Bx + f \tag{8.3.1}$$

对于任意初始向量$x^{(0)}$及任意f，解此方程组的迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

收敛的充要条件是$\rho(B) < 1$

- 充分性
  - 设$\rho(B) < 1$，由定理7.18，$A = I - B$为非奇异矩阵。因此，$Ax = (I - B)x = f$有唯一解，记作

$$x^* = Bx^* + f \tag{8.3.2}$$

定理8.3证明

- 误差向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*$$

- 由于$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$，应用定理8.2，有$\boldsymbol{B}^k \to \boldsymbol{O}\ (k \to \infty)$.
- 于是对于任意$\boldsymbol{x}^{(0)}$及$\boldsymbol{f}$，有$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \to \mathbf{0}\ (k \to \infty)$，即$\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}^* (k \to \infty)$

必要性

- 设对于任意$\boldsymbol{x}^{(0)}$及任意$\boldsymbol{f}$，皆有$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^*$，其中$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$

定理8.3证明（续）

- 显然，

1. 极限$\boldsymbol{x}^*$是方程组$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$的解
2. 对于任意$\boldsymbol{x}^{(0)}$及任意$\boldsymbol{f}$，有

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\to\boldsymbol{0}\quad(k\to\infty)$$

- 由第2点可知，$\boldsymbol{B}^k\to\boldsymbol{O}\ (k\to\infty)$
- 再次应用定理8.2，即得$\rho(\boldsymbol{B})<1$

例8.5

- 考察用Jacobi方法解例8.1方程组的收敛性

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \qquad (8.1.2)$$

- Jacobi方法 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B_0}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$

其中

$$\boldsymbol{B_0} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

例8.5（续）

- 迭代矩阵$\boldsymbol{B}_0$的特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_0) = \lambda^3 + 0.034090909\lambda + 0.039772727 = 0$$

- 解得 $\lambda_1 = -0.3082$

$$\lambda_2 = 0.1541 + \mathrm{i}0.3245$$

$$\lambda_3 = 0.1541 - \mathrm{i}0.3245,$$

- 可知

$$|\lambda_1| < 1, \qquad |\lambda_2| = |\lambda_3| = 0.3592 < 1$$

即$\rho(\boldsymbol{B}_0) < 1$，所以用Jacobi迭代法是收敛的

例8.6

- 考察用迭代过程的收敛性。

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \ (k = 0,1,2,\dots)$$

- 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

  - 特征方程为

  $$\det(\lambda I - B) = \lambda^2 - 6 = 0$$

  - 特征根$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$，即$\rho(B) > 1$
  - 说明此迭代过程不收敛

迭代法的收敛速度

- 考察误差向量$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}^k\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$
  - 设$\boldsymbol{B}$有n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$，相应的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
  - 由于线性无关假设，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i$，得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{B}^k\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i^k\boldsymbol{u}_i$$

  - 可以看出，当$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$愈小时，$\lambda_i^k \to 0\ (i = 1,2,\dots,n; k \to 0)$愈快，即$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \to \boldsymbol{0}$愈快，故可用量$\rho(\boldsymbol{B})$来刻画迭代法的收敛快慢

迭代法的收敛速度（续）

- 现在依据给定精度要求来确定迭代次数$\boldsymbol{k}$，即使

$$[\rho(\boldsymbol{B})]^k \leq 10^{-s} \tag{8.3.3}$$

- 取对数得

$$k \geq \frac{s\ln 10}{-\ln\rho(\boldsymbol{B})}$$

- **定义8.3** 称$R(\boldsymbol{B}) = -\ln\rho(\boldsymbol{B})$为迭代法的收敛速度
  - 可以看出$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$愈小，$-\ln\rho(\boldsymbol{B})$就愈大，式(8.3.3)成立所需迭代次数就愈少

迭代矩阵的特征值

- 矩阵特征值的重要性
  - 定理8.3表明迭代法收敛的充要条件是$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$
  - 收敛速度由$R(\boldsymbol{B}) = -\ln\rho(\boldsymbol{B})$决定

- 一般当n较大时，矩阵特征值计算比较困难
  - 定理8.3的条件比较难验证，所以最好建立与矩阵元素直接有关的条件来判别迭代法的收敛性
  - 由于$\rho(\boldsymbol{B}) \leq \|\boldsymbol{B}\|_v (v = 1,2,\infty$或$F)$，所以可用$\|\boldsymbol{B}\|_v$来作为$\rho(\boldsymbol{B})$上界的一种估计

迭代法收敛的充分条件

- **定理8.4** 如果方程组$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$ 的迭代公式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$$

其中$\boldsymbol{x}^{0}$ 为任意初始向量，且迭代矩阵的某一范数$\|\boldsymbol{B}\|_{v}=q<1$，则：

1. 迭代法收敛
2. $\left\|\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v}\le\frac{q}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|_{v}$
3. $\left\|\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v}\le\frac{q^{k}}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\right\|_{v}$

定理8.4证明

- 根据定理8.3和$\rho(\boldsymbol{B}) \le \|\boldsymbol{B}\|_v$，第1点显然成立
- 由
$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$
可得
$$\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\right) \tag{8.3.4}$$
- 根据范数性质，可得
$$\left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k+1)}\right\|_v = \left\|\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\right)\right\|_v$$
$$\le \|\boldsymbol{B}\|_v \left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_v = q\left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_v \tag{8.3.6}$$
$$(k = 1,2,\cdots)$$

$$\left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k+1)}\right\|_v \leq q\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_v \tag{8.3.6}$$

定理8.4证明（续）

- 类似可得，

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right)$$

- 因此，

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_v \leq q\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|_v \tag{8.3.5}$$

- 另一方面，

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_v &= \left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)} - \left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k+1)}\right)\right\|_v \\ &\geq \left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_v - \left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k+1)}\right\|_v \\ &\geq (1-q)\left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_v\end{aligned}$$

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v} \leq q\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|_{v} \qquad (8.3.5)$$

定理8.4证明（续）

- 结合 $\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v} \leq q\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|_{v}$

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v} \geq (1-q)\left\|\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v}$$

可证明第2点成立：

$$\left\|\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v} \leq \frac{q}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|_{v}$$

- 对上式重复利用(8.3.5)，可得第3点成立：

$$\left\|\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{v} \leq \frac{q^{k}}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\right\|_{v}$$

例8.7

- 任然考察例8.1，Jacobi方法

$$x = B_0 x + f \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

- 迭代矩阵B_0的∞-范数为

$$\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}| = \max\left\{\frac{5}{8}, \frac{5}{11}, \frac{9}{12}\right\} = \frac{9}{12} < 1$$

- 所以对例8.1应用Jacobi迭代方法是收敛的

例8.8

- 设有迭代过程$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}\ (k = 0,1,2,\ldots)$，其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  - 可得
$$\|\boldsymbol{B}\|_\infty = 1.1, \qquad \|\boldsymbol{B}\|_1 = 1.2$$
$$\|\boldsymbol{B}\|_2 = 1.021, \qquad \|\boldsymbol{B}\|_F = \sqrt{1.54}$$

  - 虽然$\boldsymbol{B}$的这些范数都大于1，但$\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.8$，由定理8.3知，此迭代过程还是收敛的

定理8.4的应用

- 由定理8.4可知，$\|\boldsymbol{B}\| = q < 1$愈小，迭代法收敛愈快
- 当$\boldsymbol{B}$的某一种范数$\|\boldsymbol{B}\| < 1$时，如果相邻两次迭代

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\| < \varepsilon_0$$

ε_0为给定的精度要求，则

$$\left\|\boldsymbol{x}^{*} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|_v \le \frac{q}{1-q}\varepsilon_0$$

所以在用计算机计算时通常利用$\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\| < \varepsilon_0$来作为控制迭代的终止条件

定理8.4的应用（续）

- 不过要注意，当$q \approx 1$时，$\frac{q}{1-q}$大，尽管$\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|$已非常小，但误差向量的模$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right\| = \left\|\boldsymbol{x}^{*} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|$可能较大，迭代法收敛将是缓慢的

- 定理8.4中结论3的估计可以用来事先确定需要迭代多少次才能保证$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right\| < \varepsilon_0$

$$\left\|\boldsymbol{x}^{*} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_v \le \frac{q^k}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\right\|_v$$

Gauss-Seidel迭代法的收敛性

- **定理8.5** 解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的Gauss-Seidel迭代法收敛的充要条件是$\rho(\boldsymbol{G})<1$，其中$\boldsymbol{G}$为Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵

  - Gauss-Seidel迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f} \tag{8.2.6}$$

  - 对式(8.2.6)应用定理8.3

特殊系数矩阵

- 在实际应用中常遇到一些线性代数方程组，其系数矩阵具有某些性质
  - 系数矩阵的对角元素占优
  - 系数矩阵可约、不可约
  - 系数矩阵为对称正定等

- 充分利用这些性质往往可使判定迭代法收敛的问题变得简单

对角占优矩阵

- **定义8.4**（对角占优阵）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$

1. 如果矩阵$\boldsymbol{A}$满足条件

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|\ (i=1,2,\dots,n)$$

即$\boldsymbol{A}$的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和，则称$\boldsymbol{A}$为严格对角占优阵

2. 如果$|a_{ii}|\geq\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|\ (i=1,2,\dots,n)$且至少有一个不等式严格成立，称$\boldsymbol{A}$为弱对角占优阵

例8.9

- 显然

- $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$$为严格对角占优阵

- $$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$为弱对角占优阵

可约与不可约矩阵

- **定义 8.5**（可约与不可约矩阵） 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，当$n\geq 2$时，如果存在$n$阶置换阵$\boldsymbol{P}$使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} \qquad (8.3.8)$$

成立，其中$\boldsymbol{A}_{11}$为r阶子矩阵，$\boldsymbol{A}_{22}$为$n-r$阶子矩阵（$1\leq r\leq n$），则称$\boldsymbol{A}$是可约矩阵。如果不存在置换阵$\boldsymbol{P}$使式(8.3.8)成立，则称$\boldsymbol{A}$是不可约矩阵

可约与不可约矩阵（续）

- $\boldsymbol{A}$是可约矩阵，意味着$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$可经过若干行列重排，化为两个低阶方程组求解
  - 若$\boldsymbol{A}$经过两行交换的同时进行相应的两列的交换，称对$\boldsymbol{A}$进行一次行列重排
- 由$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$可化为$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，记

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{d}_2\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{d}_1$为$r$维向量

  - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$可化为求解 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{d}_2\end{bmatrix}$

可约与不可约矩阵（续）

- $\boldsymbol{A}$是可约矩阵，意味着$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$可经过若干行列重排，化为两个低阶方程组求解
  - 若$\boldsymbol{A}$经过两行交换的同时进行相应的两列的交换，称对$\boldsymbol{A}$进行一次行列重排
- 由$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$可化为$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，记

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{d}_2\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{d}_1$为$r$维向量

  - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$可化为求解 $\begin{cases}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{d}_2\end{cases}$

例8.10

- 在例8.9中矩阵$\boldsymbol{B}$是可约矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

  - 即存在置换阵$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_{13}$，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\left[\begin{array}{c:cc}2 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

对角占优定理

- **定理8.6** 如果$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$为严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵，则$\boldsymbol{A}$是非奇异矩阵

  - 设$\boldsymbol{A}$为严格对角占优阵，下面只就这种情况证明此定理
  - 若$\det\boldsymbol{A}=0$，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解，记作
  $$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$$
  - 又记$x_k=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|\ne 0$

对角占优定理（续）

- 由齐次方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的第$k$个方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0$$

可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

- 因此

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

与假设矛盾，故$\det\boldsymbol{A} \neq 0$，即$\boldsymbol{A}$非奇异阵

面向对角占优矩阵的收敛条件

- **定理8.7** 如果$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}^{n\times m}$严格对角占优阵或为不可约弱对角占优阵，则对于任意的$\boldsymbol{x}^{(0)}$，解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的Jacobi迭代法，Gauss-Seidel迭代法均收敛
  - 设$\boldsymbol{A}$为不可约弱对角占优阵，现证明Gauss-Seidel迭代法收敛
  - 对于方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，Gauss-Seidel迭代法为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$$

  - 迭代矩阵为

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$$

定理8.7证明

$$G=(D-L)^{-1}U$$

- 根据定理8.3，如果G的特征值小于1，则Gauss-Seidel迭代法收敛
- 令λ为G的特征值，则

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-G)&=\det(\lambda I-(D-L)^{-1}U)\\&=\det\left((D-L)^{-1}(\lambda(D-L)-U)\right)\\&=\det\left((D-L)^{-1}\right)\cdot\det(\lambda(D-L)-U)=0\end{aligned}$$

- 可得

$$\det(\lambda(D-L)-U)=0$$

- 接下来，将证明当$|\lambda|\geq 1$时$\det(\lambda(D-L)-U)\neq 0$

定理8.7证明（续）

- 根据$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{U}$的定义

$$\boldsymbol{C} = \lambda(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}) - \boldsymbol{U}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \lambda a_{31} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{n,n-1} & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} = (c_{ij})_{n\times n}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$\boldsymbol{L} = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

定理8.7证明（续）

- 由$\boldsymbol{A}$为不可约矩阵，则$\boldsymbol{C}$亦为不可约矩阵
- 由$\boldsymbol{A}$为弱对角占优阵得到（当$|\lambda| \geq 1$时）

$$|c_{ii}| = |\lambda||a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} \lambda|a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} \lambda|a_{ij}|$$

$$\geq \sum_{j=1}^{i-1} \lambda|a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j\neq i} |c_{ij}|$$

且至少有一不等式严格成立

- 因此，当$|\lambda| \geq 1$时，$\boldsymbol{C}$为不可约弱对角占优阵
- 根据定理8.6，此时$\boldsymbol{C}$是非奇异矩阵，即$\det \boldsymbol{C} \neq 0$

目录

解线性方程组的超松弛迭代法

- 逐次超松弛迭代法（Successive Over Relaxation method，简称SOR方法）
  - 是Gauss-Seidel方法的一种加速方法
  - 是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一
  - 具有计算公式简单，程序设计容易，占用计算机内存较少等优点
  - 但需要选择好的加速因子（即最佳松弛因子）
- 设有方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8.4.1}$$

  - $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$为非奇异矩阵，且设$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$

逐次超松弛迭代法

- Gauss-Seidel方法

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \quad (初始向量)$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\, i = 1,2, \ldots, n), \qquad (8.2.5)$$

- 逐次超松弛迭代法
  - 设已知第k次迭代向量$\boldsymbol{x}^{(k)}$，及第$k+1$次迭代向量$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$的分量$x_j^{(k+1)}$ $(j = 1,2, \ldots, i-1)$，要求计算分量$x_i^{(k+1)}$

逐次超松弛迭代法（续）

- 首先用Gauss-Seidel迭代法定义辅助量

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$(i = 1,2,\dots,n) \qquad (8.4.3)$$

- 再把$x_i^{(k+1)}$取为$x_j^{(k)}$与$\tilde{x}_i^{(k+1)}$某个平均值（即加权平均）

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} \\ &= x_i^{(k)} + \omega\left(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right) \end{aligned} \qquad (8.4.4)$$

✓ ω为松弛因子，$\omega = 1$为Gauss-Seidel迭代法

逐次超松弛迭代法（续）

- 用式(8.4.3)中的$\tilde{x}_i^{(k+1)}$代人式(8.4.4)即得到解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的逐次超松弛迭代公式

$$
\begin{cases}
x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\
x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} \quad (k=0,1,\cdots;i=1,2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

- 可改写为

$$
\begin{cases}
x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i \quad (k=0,1,\cdots;i=1,2,\cdots,n) \\
\Delta x_i = \dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)
\end{cases}
$$

逐次超松弛迭代法（续）

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

- 在SOR方法中，迭代一次主要的运算量是计算一次矩阵与向量的乘法
- 在计算机上应用SOR方法解方程组时只需一组工作单元，以便存放近似解
- 在用计算机计算时，可用$|p_0| = \max_i |\Delta x_i| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$控制迭代终止
- 当$\omega < 1$时，称式(8.4.5)为低松弛法；当$\omega > 1$时，称式(8.4.5)为超松弛法

例8.11

- 用SOR方法解方程组

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

它的精确解为$x^* = (-1,-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$

- 取$x^{(0)} = \mathbf{0}$，迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \omega\left(1 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4 \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4 \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4 \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 4x_4^{(k)}\right)/4 \end{cases}$$

例8.11（续）

- 取$\omega = 1.3$，第11次迭代结果为

$$x^{(11)} = (-0.99999646, -1.00000310, -0.99999953, -0.99999912)^{\mathrm{T}}$$

$$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(11)}\right\|_2 \le 0.46 \times 10^{-5}$$

- 对ω取其他值，迭代次数如右表所示，从此例可以看到，松弛因子选择得好，会使SOR方法的收敛大大加速
- 本例中，$\omega = 1.3$是最佳松弛因子

ω	误差$< 10^{-5}$的迭代次数
1.0	22
1.1	17
1.2	12
<u>1.3</u>	11（最少迭代次数）
1.4	14
1.5	17
1.6	23
1.7	33
1.8	53
1.9	109

SOR迭代公式的矩阵形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

- 上述SOR迭代公式亦可写为

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$(i = 1,2,\dots,n) \qquad (8.4.7)$$

- 用$\boldsymbol{A}$的分解$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$，得

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\left(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

SOR迭代公式的矩阵形式（续）

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\left(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

- 等价于

$$(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \left((1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\boldsymbol{b}$$

- 显然对于任何一个ω值， $\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}$非奇异
  - ✓ 由假设$a_{ii} \neq 0; i = 1,2,\dots,n$，可知$\det(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}) \neq 0$
- 因此

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

- 换言之，SOR方法的迭代公式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{L}_\omega\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \qquad (8.4.8)$$

$$\boldsymbol{L}_\omega = (\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}], \qquad \boldsymbol{f} = \omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

SOR方法的收敛性

$$\boldsymbol{L}_\omega = (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}]$$

- $\boldsymbol{L}_\omega$称为SOR方法的迭代矩阵，这说明SOR方法相当于对方程组$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}_\omega\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$应用一般迭代法，于是关于一般迭代法的理论可应用到式(8.4.8)，到下述定理

- **定理8.8** 设有线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，且$a_{ii} \neq 0\ (i = 1,2,\dots,n)$，SOR方法收敛的充要条件是

$$\rho(\boldsymbol{L}_\omega) < 1$$

SOR方法的收敛性（续）

- 容易验证，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最优解$\boldsymbol{x}^*$满足

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{L}_\omega \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

  - 因此， SOR方法一定收敛到$\boldsymbol{x}^*$

- 引进超松弛迭代法的想法是希望能选择松弛因子ω使得SOR方法收敛较快，也就是应选择因子ω使$\rho(\boldsymbol{L}_\omega)=\min\limits_{\omega}\rho(\boldsymbol{L}_\omega)$

- 下面研究，对于一般方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（$a_{ii}\neq 0; i=1,2,\dots,n$），松弛因子$\omega$在什么范围内取值，SOR方法才可能收敛

SOR方法收敛的必要条件

- **定理8.9** 设解式$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（$a_{ii}\neq 0;\ i=1,2,\dots,n$）的SOR方法收敛，则

$$0<\omega<2$$

- 由设SOR方法收敛，根据定理8.8

$$\rho(\boldsymbol{L}_\omega)<1$$

- 设$\boldsymbol{L}_\omega$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$，则

$$|\mathrm{det}\boldsymbol{L}_\omega|=|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|\leq\left(\rho(\boldsymbol{L}_\omega)\right)^n$$

$$\Rightarrow|\mathrm{det}\boldsymbol{L}_\omega|^{1/n}\leq\rho(\boldsymbol{L}_\omega)<1$$

定理8.9的证明

- 根据 $$\boldsymbol{L}_{\omega}=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}]$$
$$\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$$
- 可得
$$\det\boldsymbol{L}_{\omega}=\det\left((\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\right)\cdot\det\left((1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}\right)$$
$$=\frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}\cdot(1-\omega)^{n}\cdot a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$
$$=(1-\omega)^{n}$$
- 结合$|\det\boldsymbol{L}_{\omega}|^{1/n}<1$，可得
$$|1-\omega|<1\Leftrightarrow 0<\omega<2$$

SOR方法收敛的充分条件

- 定理8.9说明对于解一般方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$（$a_{ii} \neq 0;\ i = 1,2,\ldots,n$），SOR方法只有取松弛因子$\omega$在$(0,2)$范围内才能收敛

- 而当$\boldsymbol{A}$是对称正定矩阵时，若ω满足$0 < \omega < 2$，则SOR方法一定收敛

- **定理8.10** 如果$\boldsymbol{A}$为对称正定矩阵，且$0 < \omega < 2$，则解式$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的SOR方法收敛

最佳松弛因子理论

- 最佳松弛因子理论是由Young(1950年）针对一类椭圆型微分方程数值解得到的代数方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$所建立的理论，给出了最佳松弛因子公式

$$\omega_{\mathrm{opt}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(\boldsymbol{B}_0)}}$$

  - $\rho(\boldsymbol{B}_0)$是Jacobi方法迭代矩阵$\boldsymbol{B}_0$的谱半径
  - 一般来说，在实际应用中计算$\rho(\boldsymbol{B}_0)$较困难，对某些微分方程数值解问题可考虑用第9章求近似值的方法
  - 亦可由计算实践摸索出（近似）最佳松弛因子

SOR算法流程

- 用SOR方法解式$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{A}$为对称正定矩阵
  - 数组$\boldsymbol{x}$为一组工作单元，开始存放初始向量，然后存放近似值解$\boldsymbol{x}^{(k)}$，最后存放结果
  - 用

$$|p_0| = \max_{1\le i\le n} |\Delta x_i| = \max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon \quad (\text{精度要求})$$

  控制控制迭代终止，k表示迭代次数

1. $k \leftarrow 0$
2. $x_i \leftarrow 0 \ (i = 1,2,\ldots,n)$
3. $k \leftarrow k + 1$

SOR算法流程（续）

4. $p_0 \leftarrow 0$
5. 对于$i = 1,2,\ldots,n$，有

   (1) $p \leftarrow \Delta x_i = \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)/a_{ii}$

   (2) 如果$|p| > |p_0|$，则$p_0 \leftarrow p$

   (3) $x_i \leftarrow x_i + p$
6. 输出p_0
7. 如果$|p_0| > \varepsilon$，则转步3
8. 输出结果$\boldsymbol{x}, k$

总结

- 引言
  - 定义、迭代法收敛、发散
- Jacobi迭代法
  - Jacobi迭代公式、Jacobi方法迭代矩阵
- Gauss-Seidel迭代法
  - Gauss-Seidel迭代法
  - Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵

总结（续）

迭代法的收敛性

- 迭代法基本定理
- 迭代法收敛的充分条件
- 对角占优定理、面向对角占优矩阵的收敛条件

解线性方程组的超松弛迭代法

- 逐次超松弛迭代法
- SOR方法收敛的充要条件
- SOR方法收敛的必要条件
- SOR方法收敛的充分条件