

Homework 3

Instructor: Lijun Zhang

Name: 张运吉, StudentId: 211300063

第六章

第 1 题

由题意可得:

$$f(x) = x^2 - x - 1, f(1) = -1 < 0, f(2) = 1 > 0$$

故 $[1, 2]$ 是 $f(x)$ 的有根区间.

$$f'(x) = 2x - 1$$

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单调递减.当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单调递增.

$$f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} < 0, f(0) = -1 < 0.$$

由单调性知 $f(x)$ 存在唯一正根.

若要使误差小于 0.05, 则:

$$\frac{1}{2^{k+1}} < 0.05, \text{ 解得: } k > 4.322$$

所以至少二分 5 次.

具体计算过程如下表:

表 1:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	1	2	1.5	-
1	1.5	2	1.75	+
2	1.5	1.75	1.625	+
3	1.5	1.625	1.5625	-
4	1.5625	1.625	1.59375	-
5	1.59375	1.625	1.609375	-

即:

$$x^* \approx x_5 = 1.609375$$

第 4 题

(1) 二分法计算过程如下:

表 2:

k	a_k	b_k	x_k	$sign$	$\frac{1}{2^{k+1}}$
0	0	1	0.5	+	0.5
1	0	0.5	0.25	+	0.25
2	0	0.25	0.125	+	0.125
3	0	0.125	0.0625	-	0.0625
4	0.0625	0.125	0.09375	+	0.03125
5	0.0625	0.09375	0.078125	-	0.015625
6	0.078125	0.09375	0.0859375	-	0.0078125
7	0.0859375	0.09375	0.08984375	-	0.00390625
8	0.08984375	0.09375	0.091796875	+	0.001953125
9	0.08984375	0.091796875	0.090820312	+	0.000976562
10	0.08984375	0.090820312	0.090332031	-	0.000488281
11	0.08984375	0.090332031	0.090332031	-	0.00024414
12	0.090332031	0.090576171	0.090454101	-	0.00012207
13	0.090454101	0.090576171	0.090515136	-	0.000061035
14	0.090515136	0.090576171	0.090545653	+	0.000030517

当 $k = 14$ 时, $x_{14} = 0.090545653 = 9.0545653 \times 10^{-2}$.

$|x_{14} - x^*| \leq \frac{1}{2^{15}} = 0.000030517 < \frac{1}{2} \times 10^{-2-3+1} = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 所以此时 $x^* \approx x_{14}$ 具有三位有效数字.

(2) 当 $x \in [0, 0.5]$ 时, $\varphi(x) \in [0, 0.5]$, $|\varphi'(x)| = \frac{1}{10} |-e^x| \leq L = 0.825$, 所以此迭代公式收敛. 迭代过程如下表:

表 3:

k	x_k
1	0.1
2	0.089482908
3	0.090639135
4	0.090512616
5	0.090526468
6	0.090524951

当 $k = 6$ 时, $x_6 = 0.090524951 = 9.0524951 \times 10^{-2}$.

$|x_6 - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_6 - x_5| \leq 0.00000720 < \frac{1}{2} \times 10^{-2-3+1} = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 所以 $x^* \approx x_6$ 有三位有效数字.

第 7 题

因为根的准确值 $x^* = 1.87938524 \dots$, 所以想要得到具有四位有效数字的精确解:

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{0-4+1} = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} f(1) < 0, f(2) > 0, f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) \geq 0, \\ f''(x) &= 6x > 0, \forall x \in [1, 2] \end{aligned}$$

(1) 使用牛顿迭代法:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3x_k^2 - 3} = \frac{2x_k^3 + 1}{3(x_k^2 - 1)}$$

$$\text{得到: } x_1 = 1.8889, x_3 = 1.8794, |x_3 - x^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\therefore x^* \approx x_3 = 1.8794$$

(2) 使用弦截法, 取 $x_0 = 2, x_1 = 1.9$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$\text{得到: } x_2 = 1.9811, x_3 = 1.8794, |x_3 - x^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

$$\therefore x^* \approx x_3 = 1.8794$$

(3) 使用抛物线法: $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$

抛物线法的迭代公式为:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega + \text{sign}(\omega) \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}} \\ \omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1}) \end{cases}$$

$$\text{得到: } x_3 = 1.953967549, x_4 = 1.87801539, x_5 = 1.879386866, |x_5 - x^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\therefore x^* \approx x_5 = 1.879386866$$

第 8 题

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $x - \tan(x) < 0$.

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 时, $x - \tan(x) > 0$.

所以 $x - \tan(x) = 0$ 的最小正根在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 内.

(1) 设 $f(x) = x - \tan x, x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

$\because f(4) > 0, f(4.6) < 0, \therefore [4, 4.6]$ 是有根区间.

二分法的计算过程如下表:

$$|x_9 - x^*| < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}.$$

表 4:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	4.0	4.6	4.3	+
1	4.3	4.6	4.45	+
2	4.45	4.6	4.525	-
3	4.45	4.525	4.4875	+
4	4.4875	4.525	4.50625	-
5	4.4875	4.50625	4.496875	-
6	4.4875	4.496875	4.4921875	+
7	4.4921875	4.496875	4.49453125	-
8	4.4921875	4.49453125	4.493359375	+
9	4.493359375	4.49453125	4.493445313	-

(2) 使用牛顿迭代法:

$\because f'(x) = -(\tan x)^2 < 0, f''(x) = -2 \tan x \frac{1}{\cos^2 x} < 0. \therefore$ 牛顿法收敛.

迭代公式为: $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \tan x_k}{-(\tan x_k)^2}$.

取 $x_0 = 4.6$, 具体迭代过程如下表所示:

表 5:

k	x_k
1	4.545732122
2	4.506145588
3	4.494171630
4	4.493412197
5	4.493409458
6	4.493409458

$\therefore x - \tan x = 0$ 的最小正根 ≈ 4.493409458 .

第 12 题

由题意:

$$f(x) = x^3 - a, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$$

相应的牛顿迭代公式为:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\begin{cases} x > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0 \\ x < 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0 \end{cases}$$

- $a > 0$ 时:

$x_0 \in (\sqrt[3]{a}, +\infty)$, $f(x_0)f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

$x_0 \in (0, \sqrt[3]{a})$, $x_1 - \sqrt[3]{a} = \frac{2x_0^3+a}{3x_0^2} - \sqrt[3]{a} = \frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0) > 0$.

$\therefore x_1 > \sqrt[3]{a}$. 从 x_1 起, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

$x_0 \in (-\infty, 0)$, $f(x_0)f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

- $a < 0$ 时:

$x_0 \in (-\infty, \sqrt[3]{a})$, $f(x_0)f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

$x_0 \in (\sqrt[3]{a}, 0)$, $x_1 - \sqrt[3]{a} = \frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0) < 0$.

$\therefore x_1 < \sqrt[3]{a}$. 从 x_1 起, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

$x_0 \in (0, +\infty)$, $f(x_0)f''(x_0) > 0$, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

- $a = 0$ 时:

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k$, 此迭代公式对任意 $x \in R$ 都收敛

综上所述, 牛顿迭代公式 1 对任意 $a \in R, x_0 \in R$ 都收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

第七章

第 7 题

- (1) $a_{ii} = (\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i, i \in [n]$, 其中 $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ 是第 i 个单位向量.

显然上式是关于 \mathbf{e}_i 的二次型, \mathbf{A} 又是正定的.

根据正定二次型的定义, $\forall x_i \in \mathbb{R}^n, x^T \mathbf{A} x > 0$, 因此我们有 $a_{ii} > 0$.

- (2) 由 \mathbf{A} 的正定性以及消元公式:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, \quad i, j = 2, \dots, n$$

故 \mathbf{A}_2 是对称矩阵.

由矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_1 \mathbf{A} \quad \text{其中: } \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & \dots & & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{L}_1 非奇异, 因此 $\forall x \neq \mathbf{0}, \mathbf{L}_1 x \neq \mathbf{0}$.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T \mathbf{x}) = (\mathbf{L}_1^T \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T \mathbf{x} > 0 \quad (\text{由于 } \mathbf{A} \text{ 的正定性})$$

所以: $\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T$ 是正定矩阵.

因为:

$$\mathbf{A} \text{ 是对称矩阵并且 } \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_1 \mathbf{A}$$

所以:

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$$

而 $a_{11} > 0$, 故 \mathbf{A}_2 正定.

- (3) 由消元公式:

$$a_{ii}^{(2)} = a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ii} - \frac{a_{i1}^2}{a_{11}}$$

因为 $a_{11} > 0$, 所以 $a_{ii}^{(2)} \leq a_{ii} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$.

- (4) 因为 \mathbf{A} 是对称正定矩阵, 所以 \mathbf{A} 划去任意 k 行 k 列所得矩阵仍是对称正定矩阵.

假设 \mathbf{A} 划去除了第 i, j 以外的所有行和列, 得到:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

所以 $\det(\mathbf{A}') = a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$. 即 $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj} (i, j = 1, 2, \dots, n \text{ 并且 } i \neq j)$.

由此可知 \mathbf{A} 的绝对值最大的元素必然在对角线上, 否则与上述结论矛盾.

(5) 首先, 由 (2)(4) 知, \mathbf{A}_2 的绝对值最大的元素在对角线上, 即:

$$\max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(2)}| = \max_{2 \leq i \leq n} |a_{ii}^{(2)}|$$

再由 (3) 知,

$$\max_{2 \leq i \leq n} |a_{ii}^{(2)}| \leq \max_{2 \leq i \leq n} |a_{ii}| = \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

综上, $\max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(2)}| \leq \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$.

(6) 由 (5) 的证明易得:

$$\forall k \in [n], \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}| \leq \max_{k-1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k-1)}| \leq \cdots \leq \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq 1$$

对于除了 $a_{ij}^{(k)}, k \leq i, j \leq n$ 外的其他元素, $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}$.

由 (2) 可得, $\max_{i, j \notin [k, n]} |a_{ij}^{(k-1)}| = \max_{k-1 \leq i \leq n} |a_{ii}^{(k-1)}| \leq a_{ii} < 1$.

综上, 对于所有 k , $|a_{ij}^{(k)}| < 1$.

第 13 题

令

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ -1 & \alpha_2 & & & \\ & -1 & \alpha_3 & & \\ & & -1 & \alpha_4 & \\ & & & -1 & \alpha_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & 1 & \beta_3 & \\ & & & 1 & \beta_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

由公式:

$$\begin{cases} \alpha_1 = b_1, \beta_1 = \frac{c_1}{\alpha_1} \\ \alpha_i = b_i - a_i \beta_{i-1} \quad (i = 2, 3, 4, 5) \\ \beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}} \quad (i = 2, 3, 4) \end{cases}$$

解得:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{4}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{5}{4}, \quad \alpha_5 = \frac{6}{5} \\ \beta_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{2}{3}, \quad \beta_3 = -\frac{3}{4}, \quad \beta_4 = -\frac{4}{5}$$

解方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & & \\ & & -1 & \frac{5}{4} & \\ & & & -1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得: $\mathbf{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6})^T$.

解方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

得: $\mathbf{x} = (\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^T$.

第 15 题

\mathbf{A} 中 $\Delta_2 = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$, 所以不能分解. $\det(\mathbf{A}) = -10 \neq 0$, 若交换 \mathbf{A} 的第一行与第 3 行, $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, 此时 \mathbf{A} 可以 LU 分解并且分解唯一.

\mathbf{B} 中 $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$, 故不能分解. 但:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

其中 a 为任意常数, 且 \mathbf{U} 奇异, 所以分解不唯一.

\mathbf{C} , 因为 $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, 所以 \mathbf{C} 可以 LU 分解并且分解唯一.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

第 18 题

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1.1$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 0.8$$

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.71} = 0.8426$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.33 \\ 0.33 & 0.34 \end{bmatrix}$$

求解 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的特征值, 得到 $\lambda_1 = 0.6853, \lambda_2 = 0.0247$. $\therefore \lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0.6853$.

$\therefore \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = 0.825$.

第 19 题

$$(1) \because \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\therefore \|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|$$

$$(2) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{Ax}\|_2^2 = (\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{Ax}, \mathbf{x}) \geq 0.$$

$\therefore \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的特征值为非负实数.

所以:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_2^2 &= \lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \\ &\leq \lambda_1(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \lambda_2(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \cdots + \lambda_n(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i1}^2 + \sum_{i=1}^n a_{i2}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n a_{in}^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2 \\ \|\mathbf{A}\|_2^2 &= \lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \\ &\geq \frac{1}{n} [\lambda_1(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \lambda_2(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \cdots + \lambda_n(\mathbf{A}^T \mathbf{A})] \\ &= \frac{1}{n} \|\mathbf{A}\|_F^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{A}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F.$$

第 31 题

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{A}\|_{\infty} = 199 \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} = 199$$

$$\therefore \text{cond}(\mathbf{A})_{\infty} = \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} \|\mathbf{A}\|_{\infty} = 39601$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 19801 & 19602 \\ 19602 & 19405 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{cond}(\mathbf{A})_2 = \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}} = 39205.9745$$

第 33 题

由矩阵范数的性质以及条件数的定义:

$$\begin{aligned} \text{cond}(\mathbf{AB}) &= \|(\mathbf{AB})^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \\ &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{B}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \\ &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}^{-1}\| \|\mathbf{B}\| \\ &= \text{cond}(\mathbf{A}) \text{cond}(\mathbf{B}). \end{aligned}$$