§4 特征值与特征向量

对于n维线性空间V的线性变换σ, 它在不同基下的矩阵一般不同(是相似的).为了利用矩阵研究线性变换, 自然希望找到一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 使σ在该基下的矩阵有较简单的形式. 对角矩阵形式简单, 问题转化为: 是否存在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 使

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

成立.此即

$\sigma(\varepsilon_i)=\lambda_i\varepsilon_i$，$i=1,2,\ldots,n$. 研究表明：这并非总能办到！但上述分析过程启发我们:线性变换的矩阵“化简”问题与寻找满足条件$\sigma(\xi)=\lambda\xi$ 的数λ和向量ξ相联系.

1. 特征值与特征向量概念

(1)特征值与特征向量定义

设σ是数域P上线性空间V的一个线性变换,如果对于$\lambda_0 \in P$，存在非零向量ξ，使

$$\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$$

则称数λ_0为σ的一个特征值(eigenvalue),而ξ为σ的属于特征值λ_0的一个特征向量(eigenvector).

注：①几何上看，特征向量ξ 经过线性变换后与其像σ(ξ)共线；

②属于同一特征值的特征向量不惟一：$\sigma(k\xi)=\lambda_0(k\xi)$；

③一个特征向量只能属于一个特征值：若$\sigma(\xi)=\lambda_1\xi$且$\sigma(\xi)=\lambda_2\xi$，必有$\lambda_1=\lambda_2$.

将线性变换σ的属于同一特征值λ_0的所有特征向量再添上零向量的集合记为 V_{λ_0}，即

$$V_{\lambda_0}=\{\xi \mid \sigma(\xi)=\lambda_0\xi,\xi\in V\}$$

则它是V的子空间—σ的属于特征值λ_0的特征子空间.

(2)特征矩阵 特征多项式

设A是数域P上的n级矩阵,λ是一个文字. 矩阵$\lambda E-A$称为A的特征矩阵, 而行列式$|\lambda E-A|$称为A的特征多项式.这里

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}\overset{\text{记为}}{=} f(\lambda) \quad .$$

(3)特征值与特征向量求法

设σ是数域P上n维线性空间V的线性变换, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是V的一组基.已知

$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$ ， $\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$， 且

分析

$$\xi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \sigma(\xi) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

由$\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$，得特征向量的坐标满足等式

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{即} (\lambda_0 E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

特征向量的坐标为齐次线性方程组

$$(\lambda_0 E - A)x = 0$$

的非零解,而该齐次线性方程组有非零解⇔是系数矩阵的行列式$|\lambda_0 E - A|=0$，即σ的特征值λ_0为A的特征多项式的根.

求特征值与特征向量步骤如下

(i)在线性空间V中取一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,写出线性变换σ在该基下的矩阵A;

(ii)求出A的特征多项式$|\lambda E - A|$在数域P中的全部根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,即为σ的全部特征值;

(iii)对每个λ_i,求齐次线性方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$的所有非零解，即为σ的属于特征值λ_i的全部特征向量的坐标.

(4)矩阵A特征值与特征向量定义

设A为数域P上n阶方阵，如果对于$\lambda_0 \in P$,存在非零向量ξ，使

$$A\xi = \lambda_0 \xi$$

则称数λ_0为矩阵A的特征值，ξ为A的属于特征值λ_0的特征向量.

类似地,可定义矩阵A的属于特征值λ_0的特征子空间.而求A特征值与特征向量的步骤与求线性变换σ的特征值与特征向量的步骤类似.

例1　设 V是数域P上的线性空间，线性变换σ在基ε_1, ε_2下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}$, 求σ的特征值和特征向量.

解 (i) 由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+3)$

得σ的特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-3$;

(ii) 当$\lambda_1=1$时，解$(1E-A)x=0$.

由 $E-A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$得$x_1=-2x_2$,基础解系为$\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$.

σ的属于特征值1的线性无关特征向量为$\xi_1=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2$;

σ的属于特征值1的全部特征向量为 $k_1\xi_1$ $(k_1\neq 0,k_1\in P)$.

当$\lambda_2=-3$时，解$(-3E-A)x=0$.

由$-3E-A=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$得$x_1=0$，基础解系为$\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

σ的属于特征值-3的线性无关特征向量为$\xi_2=\varepsilon_2$;

σ的属于特征值-3的全部特征向量为

$$k_2\xi_2(k_2\neq 0, k_2\in P).$$

例2 线性变换σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$，求$\sigma$的特征值和特征向量.

解(i) 由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ 4 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

得σ的特征值$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$;

(ii) 当$\lambda_1=-1$时，解$(-E-A)x=0$.

$$\text{由} -E-A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & -1 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得$\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=0\end{cases}$，基础解系为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

σ的属于特征值-1的线性无关特征向量为$\xi_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3$;

σ的属于特征值-1的全部特征向量为

$$k_1\xi_1\ (k_1\neq 0, k_1\in P).$$

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时，解$(2E - A)x = 0$.

由 $2E - A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得$x_3 = 4x_1 - x_2$, 基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

σ的属于特征值2的线性无关特征向量为$\begin{cases} \xi_2 = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_3 \\ \xi_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{cases}$;

σ的属于特征值2的全部特征向量为

$$k_2\xi_2 + k_3\xi_3 \ (k_2, k_3\text{不全为零}, k_i \in P, i = 2,3).$$

例3线性变换σ在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

求σ的特征值和特征向量.

解 (i) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

得σ的特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$;

(ii) 当$\lambda_1=2$时，解$(2E-A)x=0$.

由 $2E-A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$，基础解系为$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

σ的属于特征值2的线性无关特征向量为$\xi_1 = \varepsilon_3$;

σ的属于特征值2的全部特征向量为

$$k_1\xi_1 (k_1 \neq 0, k_1 \in P);$$

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$时，解$(E - A)x = 0$.

由 $E - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$，

例2与例3中，重特征值所对应的线性无关特征向量的个数是不相同的.

σ的属于特征值1的线性无关特征向量为

$$\xi_2 = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

σ的属于特征值1全部特征向量为$k_2\xi_2\ (k_2 \neq 0, k_2 \in P)$.

例4 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.若将A看作实数域R上的矩阵，A有没有特征值？若将A 看作复数域C上的矩阵，求A的特征值和特征向量.

解: 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)$

知A无实的特征值，即A在R上无特征值；

在复数域C上，A的特征值为$\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=1-i$.

当$\lambda_1=1+i$时，解$[(1+i)E-A]x=0.$

由 $(1+i)E-A=\begin{bmatrix}i & 1\\ -1 & i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}i & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$得$x_2=-ix_1$,基础解系为$\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$.

A的属于特征值$1+i$的全部特征向量为

$$k_1\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\ (k_1\neq 0,k_1\in C).$$

当$\lambda_1 = 1 - i$时，解$[(1-i)E - A]x = 0$.

由$(1-i)E - A = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$得$x_2 = ix_1$,

基础解系为$\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$.

A的属于特征值$1-i$的全部特征向量为

$$k_2\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}(k_2 \neq 0, k_2 \in C).$$

2.特征值与特征多项式的性质

(1)特征值的性质

- 定理1 设σ是数域P上n维线性空间V的线性变换，

σ 在V的基$\varepsilon_1, \varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为A.若$\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n$为σ的n个特征值，则

(i) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$;

(ii) $\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A)$.

证 (i)根据多项式因式分解与方程根的关系，有

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

令$\lambda=0$，得$|-A|=(-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n)=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots,\lambda_n$

即

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots,\lambda_n.$$

(ii)略.

- 定理2　若λ为线性变换σ的特征值，则

  (i) λ^k为σ^k(k为正整数)的一个特征值;

  (ii) 若$f(x)$为x的多项式,则$f(\lambda)$为$f(\sigma)$的一个特征值;

  (iii)若σ可逆,则λ^{-1}为σ^{-1}的一个特征值.

证明:**若λ为σ的一个特征值,ξ为对应的特征向量，则**

$\sigma(\xi)=\lambda\xi$,从而

$$(I)\ \sigma^k(\xi)=\sigma^{k-1}\sigma(\xi)=\sigma^{k-1}(\lambda\xi)=\lambda\sigma^{k-1}(\xi)=\cdots=\lambda^k\xi$$

即λ^k为σ^k的一个特征值;$(a\sigma)(\xi)=a(\sigma(\xi))=a(\lambda\xi)=(a\lambda)\xi$

即$a\lambda$为$a\sigma$的一个特征值;

(II)由(I)即得;

(III)当σ可逆时,$\lambda\neq 0$,在$\sigma(\xi)=\lambda\xi\Rightarrow\sigma^{-1}\sigma(\xi)=\sigma^{-1}(\lambda\xi)$

$\Rightarrow\xi=\lambda\sigma^{-1}(\xi)\Rightarrow\sigma^{-1}(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}\xi$,即$\dfrac{1}{\lambda}$为$\sigma^{-1}$的一个特征值.

例3 已知3阶方阵A的特征值为1，2， -3.求

(1) 2A的特征值；(2) A^{-1}的特征值; (3)tr(A),|A|;

(4) A^2的特征值;

(5) $B=A^2-2A+E$的特征值及|B|.

解 由特征值的性质， 得

(1) 2A的特征值为2， 4， -6;

(2) A^{-1}的特征值为1， 1/2， $-1/3$;

(3) $tr(A)=1+2+(-3)=0$, $|A|=1\times 2\times(-3)=-6$;

(4) A^2的特征值为1， 4， 9;

(5) $B=A^2-2A+E$的特征值为$\lambda^2-2\lambda+1$ 即0, 1, 16;

$|B|=0$.

2.特征多项式的性质

- 定理3 相似矩阵有相同的特征多项式.

证 设$A\sim B$，即有可逆矩阵X，使

$$B=X^{-1}AX$$

于是

$$\begin{aligned}|\lambda E-B| &= |\lambda E-X^{-1}AX| = |X^{-1}(\lambda E)X-X^{-1}AX| \\ &= |X^{-1}(\lambda E-A)X| = |X^{-1}||\lambda E-A||X| \\ &= |(\lambda E-A)| .\end{aligned}$$

- **定理4 (哈密顿-凯莱Hamilton-Caylay定理)**

设A是数域P上一个n×n矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$是A的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})A^{n-1}+\ldots+(-1)^n|A|E=O$$

准备工作

- 以λ的多项式为元素的矩阵，均可表为数字矩阵多项式，如

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-1 & \lambda^2-2\\ 2\lambda+5 & 3\lambda^3+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^3 & 0\\ 0 & 3\lambda^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \lambda^2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2\lambda & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\lambda^2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

证明：设B(λ)是矩阵$\lambda E-A$的伴随矩阵，则

$$B(\lambda)(\lambda E-A)=|\lambda E-A|E=f(\lambda)E$$

由于B(λ)的元素是$|\lambda E-A|$的元素的代数余子式,因此B(λ)的元素是次数不超过n-1的λ的多项式, 故B(λ)可写为

$$B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}$$

因此 $f(\lambda)E=B(\lambda)(\lambda E-A)$

$$=(\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1})(\lambda E-A)$$

$$=\lambda^{n}B_0+\lambda^{n-1}(B_1-B_0A)+\lambda^{n-2}(B_2-B_1A)$$

$$+\cdots+\lambda(B_{n-1}-B_{n-2}A)-B_{n-1}A \qquad (*)$$

由于$f(\lambda)=|\lambda E-A|$为n次多项式，可设

$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$，则

$f(\lambda)E = \lambda^n E + a_1\lambda^{n-1}E + a_2\lambda^{n-2}E + \cdots + a_{n-1}\lambda E + a_n E \quad (**)$

比较(*)与(**)两式，有

$$\begin{cases} B_0 = E \\ B_1 - B_0A = a_1E \\ B_2 - B_1A = a_2E \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-1} - B_{n-2}A = a_{n-1}E \\ -B_{n-1}A = a_nE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0A^n = A^n \\ B_1A^{n-1} - B_0A^n = a_1A^{n-1} \\ B_2A^{n-2} - B_1A^{n-1} = a_2A^{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-1}A - B_{n-2}A^2 = a_{n-1}A \\ -B_{n-1}A = a_nE \end{cases}$$

两端分别相加，左边为O，右边为f(A).故f(A)=O. ||

例6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E$.

解：A的特征多项式 $f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=\lambda^3-2\lambda+1$

令 $g(\lambda)=2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4\lambda$,

则 $g(\lambda)=f(\lambda)(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)$

$+(24\lambda^2-37\lambda+10)$

$\because \quad f(A)=0,$

$\therefore \quad 2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E=24A^2-37A+10E$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{pmatrix}$$

对于多项式 $f(x)\in P[x]$，则$f(A)$ 必有一个特征值为 $f(\lambda)$.

例7 (1)$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{bmatrix}, g(x)=x^{735}$,求$g(A)$;

(2)$A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}, g(x)=x^{593}-2x^{15}$,求$g(A)$.

次数比 f(x)低

解(1)

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -5\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2-9$$

以 $f(x)=x^2-9$除$g(x)$,利用带余除法，有

$$g(x)=f(x)q(x)+r(x)$$

即
$$x^{735}=(x^2-9)\,q(x)+a_1x+a_0 \quad (*)$$

依据哈密顿–凯莱定理，有$A^2-9E=O$,从而

$$A^{735}=a_1A+a_0E \qquad (**)$$

将A的特征值3、-3代入(*)式，有

$$\begin{cases} 3^{735} = 3a_1 + a_0 \\ (-3)^{735} = -3a_1 + a_0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = 0, a_1 = 3^{734}$$

代如(**)，得 $A^{735} = 3^{734} A.$

(2)

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -4 & -3 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda \Rightarrow \text{特征值为} 0, 1, -1;$$

利用带余除法，有

$$x^{593}-2x^{15}=(x^3-x)\, q(x)+a_2x^2+a_1x+ a_0 \quad (*)$$

将A的特征值代入(*)式，有

$$\begin{cases} 0 = a_0 \\ -1 = a_2 + a_1 + a_0 \\ 1 = a_2 - a_1 + a_0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = 0, a_1 = -1, a_2 = 0,$$

所以 $A^{593}-2A^{15}=-A.$

练习1： 已知 $A \in P^{n\times n}$，λ 为A的一个特征值，则

（1） $kA \quad (k \in P)$ 必有一个特征值为 $\underline{\quad k\lambda \quad}$；

（2） $A^m \quad (m \in Z^+)$必有一个特征值为 $\underline{\quad \lambda^m \quad}$；

（3）A可逆时，A^{-1}必有一个特征值为 $\underline{\quad \lambda^{-1} \quad}$；

（4）A可逆时，A^* 必有一个特征值为 $\underline{\quad \dfrac{|A|}{\lambda} \quad}$.

(若A^*为可逆矩阵A的伴随矩阵，则$A^* = |A|A^{-1}$)

练习2： 已知3阶方阵A的特征值为：1、－1、2，

则矩阵 $B = A^3 - 2A^2$ 的特征值为：$\underline{\quad -1,-3,0 \quad}$，

行列式 $|B| = \underline{\quad 0 \quad}$.