高等代数第四次习题课

2021.11.9

作业讲评

- 作业注意事项：
    - 作业本姓名和学号都要写好
    - 题目一定要写全（如果每道题目认真完成，即使做错也不会扣分；少题漏题会扣分）
    - 题目要写过程，不能只写答案

作业讲评

- 作业四涉及主要知识点:
  - 重因式
  - 复系数与实系数多项式的因式分解
  - 有理系数多项式的因式分解

1. 设$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x+2$. 求出与其有相同因子但无重因式的多项式$g(x)$及$f(x)$在$\mathbf{R}[x]$中的标准分解式.

解:

$$(f(x),f'(x))=x-1$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=x^3-x^2+2x-2$$

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+2)$$

知识点：消除重因式

$$g(x)=\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$$

是一个没有重因式的多项式，且它与$f(x)$具有完全相同的不可约因式.

注意是分解成实系数多项式，有同学分解成了复系数多项式。

2. t取何值时，$f(x)=x^3-3x+t$ 有重因式.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，因此$x+1$或$x-1$是$f(x)$的因式时，$f(x)$有重因式。
易知$t=-2$时， $x+1 \mid f(x)$； $t=2$时$x-1 \mid f(x)$。
因此$t=\pm 2$时， $f(x)$有重因式。

16. 判别下列多项式有无重因式：

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$.

1) $f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$，$\left(f(x),f'(x)\right)=(x-2)^2$，所以$f(x)$有三重因式$x-2$。
2) $f'(x)=4x^3+8x-4$, $\left(f(x),f'(x)\right)=1$，所以$f(x)$无重因式。

- **推论2** 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式的$\Leftrightarrow p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式.

- **推论3** 多项式$f(x)$没有重因式$\Leftrightarrow$是$f(x)$与$f'(x)$互素.

17．求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根．

不失一般性，令$f(x)=(x-a)^2(x-b)$，比较系数有：

$$\begin{cases}-3=-2a-b\\ t=a^2+2ab\\ -1=-a^2b\end{cases}$$

联立1、3两式解得：$\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=4\end{cases}$

代入2式得：$t=3$或$t=-\frac{15}{4}$

因此$t=3$时，$f(x)$有3重根$x=1$， $t=-\frac{15}{4}$时， $f(x)$有2重根$x=-\frac{1}{2}$

20. 证明：$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根.

$f'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$，所以$f(x)=f'(x)+\frac{1}{n!}x^n$，

于是$\left(f(x),f'(x)\right)=\left(f'(x)+\frac{1}{n!}x^n,f'(x)\right)=\left(\frac{1}{n!}x^n,f'(x)\right)=1$，

从而$f(x)$无重根。

22. 证明：x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

必要性：x_0是$f(x)$的k重根$\Leftrightarrow$ $(x-x_0)$是$f(x)$的k重因式。再由下面推论可证。

· **推论1** 如果不可约因式$p(x)$是$f(x)$的k ($k\geq 1$) 重因式，那么$p(x)$分别是$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$的$k-1, k-2, \ldots, 1$重因式，而不是$f^{(k)}(x)$的因式.

充分性：$f^{k-1}(x_0)=0, f^{k}(x_0)\neq 0 \Longrightarrow (x-x_0)$是$f^{k-1}$的1重因式。同时，我们有$(x-x_0)$是$f, f', \ldots, f^{k-2}$的因式。由下面的命题递推可证。

命题：若不可约多项式$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$ $(k\geq 1)$重因式，并且$p(x)$是$f(x)$的因式，则$p(x)$是$f(x)$的k重因式。

思考练习1

求一个次数尽可能低的实系数（复系数）多项式，使其以$1,0,i,i,1-i$为根

实系数：$f(x)=x(x-1)(x^2+1)^2(x^2-2x+2)$

复系数：$f(x)=x(x-1)(x-i)^2(x-1+i)$

知识点：

引理（根的共轭性）设α是实系数多项式$f(x)$的一个根，

则其共轭数$\bar{\alpha}$也一定是$f(x)$的一个根.

思考练习2（26）

将多项式x^n-1在复数范围内和在实数范围内因式分解

- 复数范围内:

解：由复系数多项式的因式分解定理知，只须找出

$f(x)=x^n-1$的所有根.

将1表示成三角表示式：$1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$.

事实上，由*Eular*公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,以及$x^n=1$

$$x=1^{\frac{1}{n}}=(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)^{\frac{1}{n}}=(e^{i2k\pi})^{\frac{1}{n}}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

因此$f(x)=x^n-1$的所有根为：

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

于是有

$$f(x)=\prod_{k=0}^{n-1}[x-(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})].$$

思考练习2（26）

将多项式x^n-1在复数范围内和在实数范围内因式分解

- 实数范围内：

为将其分解为实系数不可约多项式的乘积,只须区别根是实根还是复根,且对复根要找出其共轭根.易知

$$x_k\text{为实根} \Leftrightarrow \sin\frac{2k}{n}\pi = 0$$

所以，n为奇数时，只有一个实根x_0=1（k=0）；

n为偶数时，有两个实根 $x_0=1, x_{\frac{n}{2}}=-1\ (k=0, k=\frac{n}{2})$

x的共轭复根

$$\bar{x}_k = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

$$(x-x_k)(x-\bar{x}_k) = x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1 \Longrightarrow$$

这里应为$x^2-2cos\frac{2k\pi}{n}x+1$

因此所求分解式为

$$n\text{为奇数，} x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}[x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1]$$

$$n\text{为偶数，} x^n - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}[x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1].$$

思考练习3

设P是数域，$f(x) \in P[x]$，如果存在$0 \neq a \in P$，使得$f(x) = f(x+a)$，证明$f(x)$是常数。

方法1：（反证法）假设$f(x)$不是常数。
设$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，那么$g(x) = f(x+a) = a_n(x+a)^n + a_{n-1}(x+a)^{n-1} + \cdots + a_1(x+a) + a_0$。
如果$n = 1$，$f(x) = a_1 x + a_0$，$g(x) = a_1 x + a_1 a + a_0 \implies a_1 a = 0$，与$a \neq 0, a_1 \neq 0$矛盾。
如果$n > 1$，x^{n-1}在$f(x)$ 中的系数为a_{n-1}，在$g(x)$中的系数为$a_{n-1} + naa_n$，因此有$naa_n = 0$，与$a \neq 0$，$a_n \neq 0$矛盾。
综上所述，$f(x)$是常数。

方法2：（反证法）假设$f(x)$不是常数。
由$f(x) = f(x+a)$可得$f(x) = f(x+a) = f(x+2a) = \cdots = f(x+ka) = \cdots$
设$f(x_0) = C$，令$g(x) = f(x) - C$，那么$\{x_0 + ka\}_{k \in N}$都是$g(x)$的根，而$g(x)$的根应该是有限个，矛盾。
因此，$f(x)$是常数。

27. 求下列多项式的有理根：

1) $x^3-6x^2+15x-14$;

2) $4x^4-7x^2-5x-1$;

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

知识点：

定理 12 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是一个整系数多项式，而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根，其中 r,s 互素，那么必有 $s\mid a_n, r\mid a_0$. 特别地，如果 $f(x)$的首项系数 $a_n=1$，那么 $f(x)$的有理根都是整根，而且是 a_0 的因子.

由定理可知，若此多项式有有理根$\frac{r}{s}$，必有：$s|4$，$r|-1$，可知$s=\pm1,\pm2,\pm4$，$r=\pm1$。

所以有理根可能为$\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4}$，代入可得$-\frac{1}{2}$为多项式的有理根。

$4x^4-7x^2-5x-1=2(x+\frac{1}{2})(2x^3-x^2-3x-1)$

对于$2x^3-x^2-3x-1$，同理可得其理根可能为$\pm1,\pm\frac{1}{2}$

代入可得$-\frac{1}{2}$为多项式的有理根。

$2x^3-x^2-3x-1=2(x+\frac{1}{2})(x^2-x-1)$

容易验证x^2-x-1无有理根。

因此原多项式有2重有理根$-\frac{1}{2}$。

注意：很多同学这里只求出有有理根$-\frac{1}{2}$，但是没有写出有两个有理根$-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

28. 判断下列多项式在有理数域上是否可约？

1）x^2+1；

2）$x^4-8x^3+12x^2+2$；

3）x^6+x^3+1；

4）x^p+px+1，p 为奇素数；

5）$x^4+4kx+1$，k 为整数.

错误做法1：利用定理说明，如果有有理根，根必然是1或−1，代入可知1或−1不是根，所以无有理根。

错误做法2：通过求导证明该多项式函数无零点，从而无有理根。

错误原因：

多项式无有理根 $\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ 多项式在有理数域不可约

如：$(x^2+1)(x^2+x+1)$没有有理根，但是在有理数域可约

28. 判断下列多项式在有理数域上是否可约?

1) x^2+1;

2) $x^4-8x^3+12x^2+2$;

3) x^6+x^3+1;

4) x^p+px+1, p 为奇素数;

5) $x^4+4kx+1$, k 为整数.

定理 13 (艾森斯坦(Eisenstein)判别法) 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是一个整系数多项式.如果有一个素数 p,使得

1) $p\nmid a_n$;

2) $p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$;

3) $p^2\nmid a_0$,

那么 $f(x)$在有理数域上是不可约的.

错误做法3：利用艾森斯坦判别法，找不到满足条件的素数p，所以$f(x)$在有理数域上可约。

错误原因：

艾森斯坦判别法不是充要条件（找到满足条件的素数p，则$f(x)$在有理数域上不可约；但是找不到满足条件的素数p，不能说明$f(x)$在有理数域上可约）

28. 判断下列多项式在有理数域上是否可约?

1) x^2+1;

2) $x^4-8x^3+12x^2+2$;

3) x^6+x^3+1;

4) x^p+px+1, p 为奇素数;

5) $x^4+4kx+1$, k 为整数.

知识点：艾森斯坦判别法

定理 13 (**艾森斯坦(Eisenstein)判别法**) 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是一个整系数多项式. 如果有一个素数 p, 使得

1) $p \nmid a_n$;

2) $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$;

3) $p^2 \nmid a_0$,

那么 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

正确做法：不能直接使用艾森斯坦判别法，而要先进行一定变换。

设原多项式为$f(x)$，令$x=y+1$，得到$g(y)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$。

易知$f(x)$可约等价于$g(y)$可约，因此我们对$g(y)$使用艾森斯坦判别法：

取$p=3$可知$g(y)$在有理数域不可约，故$f(x)$在有理数域也不可约。

课堂练习

1. 证明：若不可约多项式$\boldsymbol{p(x)}$是$\boldsymbol{f'(x)}$的$\boldsymbol{k-1}$ ($\boldsymbol{k \geqslant 1}$)重因式，并且$\boldsymbol{p(x)}$是$\boldsymbol{f(x)}$的因式，则$\boldsymbol{p(x)}$是$\boldsymbol{f(x)}$的$\boldsymbol{k}$重因式。
2. 设$f(x), g(x) \in C[x]$，证明：如果$f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$，并且$f^{-1}(1) = g^{-1}(1)$，则$f(x) = g(x)$。
3. 本章课后题28(4)(5)
4. 设p是一个素数，多项式$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$，证明：$f(x)$在$Q$上不可约。

28. 判断下列多项式在有理数域上是否可约？

1）$x^2 + 1$；

2）$x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 2$；

3）$x^6 + x^3 + 1$；

4）$x^p + px + 1$，p 为奇素数；

5）$x^4 + 4kx + 1$，k 为整数.

课堂练习解答

1. 证明：若不可约多项式$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$的$\boldsymbol{k-1}$ $(\boldsymbol{k}\geqslant\boldsymbol{1})$重因式，并且$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的因式，则$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的$\boldsymbol{k}$重因式。

设$f'(x)=g(x)p(x)^{k-1},\big(g(x),p(x)\big)=1$，$f(x)=h(x)p(x)^{t},\big(h(x),p(x)\big)=1$
对$f(x)$求导可得：$f'(x)=h'(x)p(x)^{t}+tp(x)^{t-1}p'(x)h(x)=p(x)^{t-1}[p(x)h'(x)+tp'(x)h(x)]$
因此$p(x)^{k-1}|\,p(x)^{t-1}[p(x)h'(x)+tp'(x)h(x)]$，那么$p(x)^{k-1}|\,p(x)^{t-1}\cdot tp'(x)h(x)$。
由于$p(x)$不可约，故$\big(p(x),p'(x)\big)=1$，所以$t\geq k$，即$p(x)^{k}|\,f(x)$。
而我们有$p(x)^{k+1}\nmid f(x)$，否则$p(x)^{k}|\,f'(x)$。
因此，$p(x)$是$f(x)$的k重因式。

课堂练习解答

2. 设$f(x), g(x) \in C[x]$，证明：如果$f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$，并且$f^{-1}(1) = g^{-1}(1)$，则$f(x) = g(x)$。

设$\max\{\deg f(x), \deg g(x)\} = n$，不妨设$\deg f(x) = n$，显然有$f^{-1}(0) \cap f^{-1}(1) = \emptyset$。
如果能证明$|f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)| \geq n+1$，那么有$f(x) = g(x)$。
设$f(x), f(x)-1$的标准分解式分别是$f(x) = a\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{r_i}$和$f(x)-1 = a\prod_{j=1}^{s}\left(x-d_j\right)^{t_j}, c_i, d_j \in C$
于是$\sum_{i=1}^{m} r_i = n = \sum_{j=1}^{s} t_j$，$m+s = |f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)|$, $\{\mathrm{c_i}\} \cap \{d_i\} = \emptyset$
由于$f'(x) = (f(x)-1)'$，因此c_i和d_j分别是$f'(x)$的$r_i - 1$重根和$t_j - 1$重根
即$f'(x) = (f(x)-1)' = \prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{r_i-1} \cdot \prod_{j=1}^{s}\left(x-d_j\right)^{t_j-1} \cdot h(x)$
其中$h(x)$不能被所有$x-c_i$整除，也不能被所有$x-d_j$整除。
于是$\sum_{i=1}^{m}(r_i-1) + \sum_{j=1}^{s}(t_j-1) \leq \deg f'(x) = n-1$
另一方面$\sum_{i=1}^{m}(r_i-1) + \sum_{j=1}^{s}(t_j-1) = \sum_{i=1}^{m} r_i - m + \sum_{j=1}^{s} t_j - s = 2n-m-s$
所以$2n-m-s \leq n-1$，由此得出$m+s \geq n+1$。

课堂练习解答

3.

28. 判断下列多项式在有理数域上是否可约？

1）x^2+1；

2）$x^4-8x^3+12x^2+2$；

3）x^6+x^3+1；

4）x^p+px+1，p 为奇素数；

5）$x^4+4kx+1$，k 为整数.

设$f(x)=x^p+px+1$，令$x=y-1$，

则$g(y)=f(y-1)=y^p-\binom{p}{1}y^{p-1}+\binom{p}{2}y^{p-2}-\cdots-\binom{p}{p-2}y^2+\left(\binom{p}{p-1}+p\right)y-p$

易知$f(x)$可约等价于$g(y)$可约

$\binom{p}{i}=\frac{p!}{i!(p-i)!}$，由于$p$是素数，故$p|\binom{p}{i}, i=1,2,\ldots,p-1$，$p\nmid 1, p^2\nmid p$

由艾森斯坦判别法可知：$g(y)$在有理数域不可约，故$f(x)$在有理数域也不可约。

设$f(x)=x^4+4kx+1$，令$x=y+1$，

则$g(y)=f(y+1)=y^4+4y^3+6y^2+(4k+4)y+4k+2$

易知$f(x)$可约等价于$g(y)$可约

取$p=2$，由艾森斯坦判别法可知：$g(y)$在有理数域不可约，故$f(x)$在有理数域也不可约。

课堂练习解答

4. 设p是一个素数，多项式$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$，证明$f(x)$在$Q$上不可约。

我们有$(x-1)f(x)=x^p-1$，令$y=x-1$，
则$yf(y+1)=(y+1)^p-1=y^p+\binom{p}{1}y^{p-1}+\cdots\binom{p}{k}y^{p-k}+\cdots+\binom{p}{p-1}y$
那么$g(y)=f(y+1)=y^{p-1}+\binom{p}{1}y^{p-2}+\cdots+\binom{p}{k}y^{p-k-1}+\cdots+p$
易知$f(x)$可约等价于$g(y)$可约
$\binom{p}{i}=\frac{p!}{i!(p-i)!}$，由于$p$是素数，故$p|\binom{p}{i}, i=1,2,\ldots,p-2,\ p\nmid 1, p^2\nmid p$
由艾森斯坦判别法可知：$g(y)$在有理数域不可约，故$f(x)$在有理数域也不可约。

谢谢！