离散数学作业 Solution Set 21

Problem 1

(a)(b)(c) 是毛虫图，因为每个顶点要么在长度为 3 的通路中，要么与在该路径中一个顶点相邻。在第 (d) 部分中，很明显没有一条通路可以作为毛虫图的“脊梁”。

Problem 2

(1) 握手定理：度数之和=2 倍边数之和。设 4 度结点有 x 个，有 7*1+3*3+4x=2*(7+3+x-1) 解得 x=1

(2) 同上，设 T 中树叶有 x 个，有 x*1+3*3+2*4=2*(x+3+2-1)解得 x=9

(3) 设 T 中树叶有 x 个, 则 T 中的顶点数$\mathrm{n}=\sum_{i=2}^{k} n_i + x$, 边数$\mathrm{m}=\mathrm{n}-1=\sum_{i=2}^{k} n_i + x - 1$。由握手定理知

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2\mathrm{m} = 2\sum_{i=2}^{k} n_i + 2x - 2 \quad ①$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=2}^{k} i * n_i + x \quad ②$$

将②带入①，经过整理得

$$\mathrm{x} = \sum_{i=3}^{k} (i-2) * n_i + 2$$

Problem 3

a)"仅当"部分就是定理 2 和树的定义。假设 G 是连通简单图，那么有 n 个顶点和 $n-1$ 条边。如果 G 不是树，由练习 14，G 包含这样一条边，删除这条边产生一个图 G'，G' 仍连通。如果 G' 不是树，删除一条边产生连通图 G''。重复这个过程直到得出树为止。这至多需要 $n-1$ 步，因为只有 $n-1$ 条边。由定理 2，得出的图有 $n-1$ 条边，因为它有 n 个顶点。由于并没有删除边，所以 G 本身就是树。

b)假设 G 是树，根据 a)的结论，G 有 $n-1$ 条边，根据定义，G 没有简单回路。反过来，假设 G 没有简单回路并且有 $n-1$ 条边。令 c 等于 G 的分量的数目，每一个分量是一个有 n_i 个顶点的分量，且 $\sum_{i=1}^{c} n_i = n$，根据 a)的结论，G 中边的总数是 $\sum_{i=1}^{c}(n_i - 1) = n - c$。因为已知总数应为 $n-1$，因此 $c=1$，G 是连通的并且满足树的定义。

Problem 4

三顶点树的只有 S_2 一种结构 (即 $K_{1,2}$)，两个树不同构仅当度为 2 的点标记不同，共有 3 个不同的标记树；四顶点树有 S_3 和 P_4 两种情况，S_3 有 4 个不同的标记树，P_4 下 4 的全排列中有且仅有互为逆序的在同构下等价，共 $\frac{A(4)}{2} = 12$ 个不同的标记树，共计 16 个不同的标记树。

Problem 5

1. 上界：$\frac{81-1}{4} + 1 = 21$；下界：$e^{\frac{\ln 81}{4}} = 3$。
2. $m = 3$，由 $\lceil \log_m l \rceil = h$。