例 5.10 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在观察到 $X = x$ 的条件下随机变量 $Y \sim U(x,1)$, 求随机变量 Y 的概率密度.

解 随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在随机变量 $X = x$ 的条件下 $Y \sim U(x,1)$, 于是当 $x > 0$ 时有

$$f_{Y|X}(y|x) = 1/(1-x) \ .$$

根据条件概率乘积公式有

$$f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/(1-x) & 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

积分区域如图 5.5(b) 所示, 当 $y > 0$ 时随机变量 Y 的边缘分布

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y) \ .$$

5.6 多维随机变量函数的分布

已知二维随机向量 (X,Y) 的概率分布, 如何求解随机变量函数 $Z = g(X,Y)$ 的概率分布. 下面分离散型和连续型随机变量两种情况进行讨论.

5.6.1 二维离散型随机向量函数

已知二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布列, 求函数 $Z = g(X,Y)$ 的分布列相对简单. 首先针对 X, Y 的各种取值, 计算随机变量 Z 的值, 然后对相同的 Z 值合并, 对应的概率相加. 下面研究两个相互独立的离散型随机变量之和, 即离散型随机变量的卷积公式:

定理 5.6 设离散型随机变量 X 与 Y 相互独立、且它们的分布列分别为 $a_i = P(X = i)$ 和 $b_j = P(Y = j)$ $(i, j = 0, 1, \cdots)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的分布列为

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \ .$$

证明 对任意非负整数 i 和 j, 根据独立性可知

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j) = a_i b_j \ .$$

因此随机变量 Z 的分布列为

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X + Y = k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k-i) = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \ , \end{aligned}$$

定理得证.

基于定理 5.6, 可以得到一系列推论:

推论 5.1 若随机变量 $X \sim B(n_1, p)$ 和 $Y \sim B(n_2, p)$ 相互独立, 则随机变量

$$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p) \ .$$

证明 根据二项分布的定义, 当 $i = 0, 1, \cdots, n_1$ 和 $j = 0, 1, \cdots, n_2$ 有

$$P(X = i) = \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1 - i} \quad \text{和} \quad P(X = j) = \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2 - j} \ .$$

对 $k = 0, 1, \cdots, n_1 + n_2$, 根据定理 5.6 有

$$\begin{aligned} P[Z = k] &= \sum_{i=0}^{k} P[X = i] P[Y = k - i] = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1 - i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2 - (k-i)} \\ &= p^k (1-p)^{n_1 + n_2 - k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1 + n_2 - k} \ . \end{aligned}$$

利用归纳法和推论 5.1, 若相互独立的随机变量 $X_i \sim \mathrm{Ber}(p) = B(1, p)$ $(i \in [n])$, 则随机变量

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \ \sim \ B(n, p) \ .$$

即随机变量 $X \sim B(n, p)$ 可以看作 n 个相互独立的服从参数为 p 的伯努利分布随机变量之和.

推论 5.2 若随机变量 $X \sim P(\lambda_1)$ 和 $Y \sim P(\lambda_2)$ 相互独立, 则随机变量

$$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2) \ .$$

证明 根据泊松分布的定义, 对任意非负整数 i 和 j 有

$$P(X = i) = \lambda_1^i e^{-\lambda_1} / i! \quad \text{和} \quad P(Y = j) = \lambda_2^j e^{-\lambda_2} / j! \ .$$

对任意非负整数 k, 根据定理 5.6 有

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k \ . \end{aligned}$$

5.6.2 二维连续型随机向量函数

已知二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度, 一般先求解分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(g(x,y)\leqslant z)=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z} f(x,y)dxdy\ ,$$

再对分布函数 $F_Z(z)$ 求导得到密度函数

$$f_Z(z)=F_Z^{'}(z)\ .$$

例 5.11 设服从标准正态分布的两个随机变量 X 和 Y 相互独立, 求随机变量 $Z_1=\sqrt{X^2+Y^2}$ 和 $Z_2=X^2+Y^2$ 的密度函数.

解 根据独立性有随机变量 X 和 Y 的联合密度函数

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=e^{-(x^2+y^2)/2}/2\pi \qquad (x,y\in\mathbb{R})\ .$$

当 $z_1\leqslant 0$ 时, 根据 $Z_1=\sqrt{X^2+Y^2}$ 很显然有分布函数 $F_{Z_1}(z_1)=0$; 当 $z_1>0$ 时有

$$F_{Z_1}(z_1)=P(Z_1\leqslant z_1)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z_1\right)=\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant z_1^2} e^{-(x^2+y^2)/2}/2\pi dxdy\ ,$$

利用极坐标积分变换 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$ 有

$$F_{Z_1}(z_1)=\int_0^{2\pi}\int_0^{z_1}\frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}d\theta dr=\int_0^{z_1} re^{-r^2/2}dr=1-e^{-z_1^2/2}\ .$$

由此得到随机变量 Z_1 的密度函数为

$$f_{Z_1}(z_1)=\begin{cases} z_1e^{-z_1^2/2} & z_1>0 \\ 0 & z_1\leqslant 0\ . \end{cases}$$

上述分布称为 **瑞利分布** (Rayleigh distribution), 该分布常用于通信等领域. 同理可证随机变量 $Z_2\sim e(1/2)$, 即

$$f_{Z_2}(z_2)=\begin{cases} z_2e^{-z_2/2}/2 & z_2>0 \\ 0 & z_2\leqslant 0\ . \end{cases}$$

5.6.2.1 和的分布 $Z=X+Y$

引理 5.2 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$, 则有 $Z=X+Y$ 的密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx \quad \text{或} \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy\ .$$

解 首先求解 $Z=X+Y$ 的分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint_{x+y\leqslant z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy\ ,$$

这里考虑的积分区域为 $\{(x,y)\colon x+y\leqslant z\}$, 如图 5.6(a) 所示. 利用变量替换 $u=y+x$ 并积分换序有

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)dx\right)du\ ,$$

两边同时对 z 求导数可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx\ .$$

同理可证 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$.

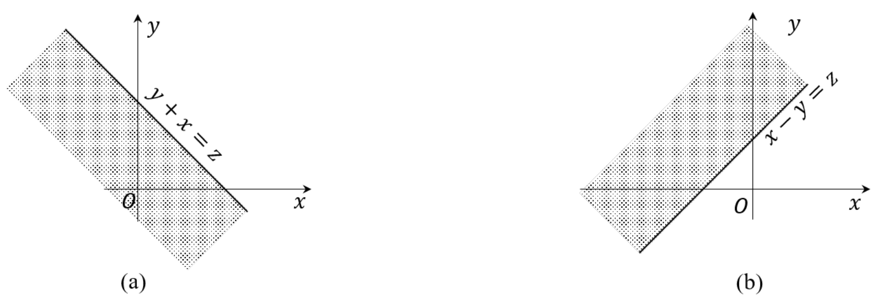

图 5.6 函数 $Z=X+Y$ 和 $Z=X-Y$ 的积分区域

类似考虑随机变量 $Z=X-Y$, 其积分区域 $\{(x,y)\colon x-y\leqslant z\}$ 如图 5.6(b) 所示, 得到 $Z=X-Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx \quad \text{或} \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+y,y)dy\ .$$

若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. 结合引理 5.2 给出下面著名的定理:

定理 5.7 (卷积公式) 若连续型随机变量 X 与 Y 相互独立, 且它们的密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy\ .$$

推论 5.3 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ 相互独立, 则随机变量

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)\ .$$

根据上面的推论很容易得到 $X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$. 该结论可以推广到 n 个随机变量, 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立、且 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, 则随机变量

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)\ .$$

证明 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, 则根据正太分布的性质有

$$X' = X - \mu_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2) \qquad \text{和} \qquad Y' = Y - \mu_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2)\ .$$

因此只需证明 $Z = X' + Y' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. 根据卷积公式有

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2 - \frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) dx \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \times \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\ ,
\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为正太分布的规范性.

例 5.12 设随机变量 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim U(0,1)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 根据卷积公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

根据区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 当 $x \in [0,1]$ 时有 $f_X(x) = 1$; 当 $z - x \in [0,1]$ 时有 $f_Y(z-x) = 1$. 由此可得非零的积分区域为 $\{x \in [0,1], z - x \in [0,1]\}$, 如图 5.7(a) 所示. 当 $z \leqslant 0$ 或 $z \geqslant 2$ 时有 $f_Z(z) = 0$; 当 $z \in (0,1)$ 时有

$$f_Z(z) = \int_0^z 1dz = z\ ;$$

当 $z \in [1,2)$ 时有

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 dx = 2 - z\ .$$

综上所述, 随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases} z & z\in[0,1] \\ 2-z & z\in[1,2] \\ 0 & \text{其它} . \end{cases}$$

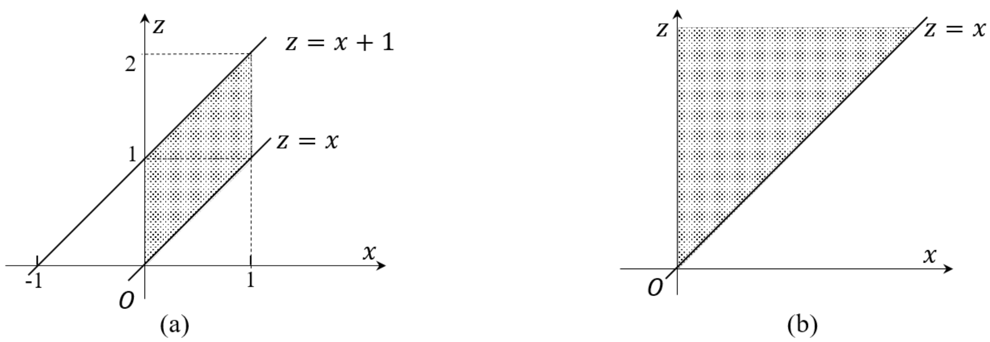

图 5.7 例 5.12 和 5.13 中积分区域示意图

例 5.13 设随机变量 $X\sim e(\lambda)$ 和 $Y\sim e(\lambda)$ 相互独立, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由卷积公式可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \ .$$

根据指数分布的定义, 当 $x\geqslant 0$ 时有 $f_X(x)=\lambda\exp(-\lambda x)$; 当 $z-x\geqslant 0$ 时有 $f_Y(z-x)=\lambda\exp(-\lambda(z-x))$, 因此积分区域 $\{x\in[0,+\infty), z-x\in[0,+\infty)\}$ 如图 5.7(b) 所示. 当 $z\geqslant 0$ 时有

$$f_Z(z)=\lambda^2\int_0^z \exp(-\lambda x)\exp(-\lambda(z-x))dx=\lambda^2 z\exp(-\lambda z) \ .$$

5.6.3 随机变量的乘/除法分布

定理 5.8 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则随机变量 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx \ ;$$

随机变量 $Z=Y/X$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx \ .$$

证明　这里给出随机变量 $Z=Y/X$ 的概率密度详细证明, 同理给出 $Z=XY$ 的概率密度. 首先考虑分布函数

$$\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P(Y/X\leqslant z)=\iint_{y/x\leqslant z} f(x,y)dxdy \\
&= \iint_{x<0,y\geqslant zx} f(x,y)dxdy+\iint_{x>0,y\leqslant zx} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0}dx\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy+\int_{0}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{xz} f(x,y)dy \ ,
\end{aligned}$$

如图 5.8 所示, 这里考虑积分区域为 $\{(x,y)\colon x>0,y<xz\}\cup\{(x,y)\colon x<0,y>xz\}$. 变量替换 $t=y/x$ 有

$$\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= \int_{-\infty}^{0}dx\int_{z}^{-\infty} xf(x,tx)dt+\int_{0}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z} xf(x,tx)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}(-x)f(x,tx)dtdx+\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,tx)dtdx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z}|x|f(x,tx)dtdx=\int_{-\infty}^{z}dt\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,tx)dx \ ,
\end{aligned}$$

对分布函数求导即可完成证明.

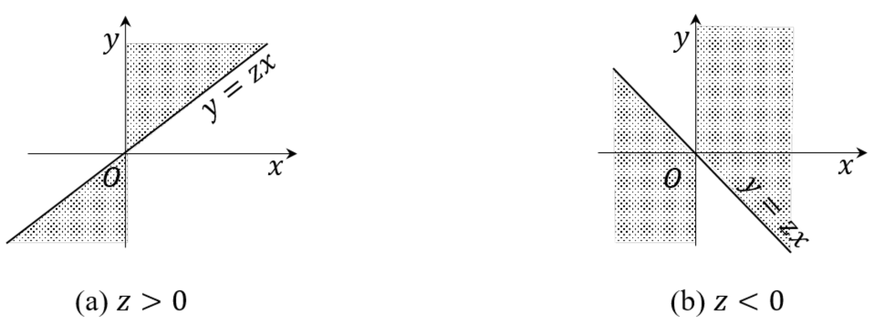

图 5.8　随机变量 $Z=Y/X$ 的积分区域

推论 5.4　若标准正太分布的随机变量 X 和 Y 相互独立, 则随机变量 $Z=Y/X$ 服从柯西分布.

证明　根据独立性和定理 5.8, 对任意实数 z 有

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-x^2(1+z^2)/2}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2(1+z^2)/2}dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{e^{-x^2(1+z^2)/2}}{1+z^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+z^2)} ,$$

推论得证.

5.6.4 最大值和最小值的分布

定理 5.9 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立、且其分布函数分别为 $F_{X_1}(x_1), \cdots, F_{X_n}(x_n)$, 则随机变量 $Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y) ,$$

以及随机变量 $Z = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = 1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z)) .$$

证明 根据独立性, 随机变量 $Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leqslant y) = P(X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y, \cdots, X_n \leqslant y) \\ &= P(X_1 \leqslant y)P(X_2 \leqslant y)\cdots P(X_n \leqslant y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y) . \end{aligned}$$

随机变量 $Z = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leqslant z) = 1 - P(\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \cdots X_n > z) = 1 - P(X_1 > z)P(X_2 > z)\cdots P(X_n > z) \\ &= 1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z)) , \end{aligned}$$

定理得证.

根据定理 5.9 有

推论 5.5 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量, 其分布函数和密度函数分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$, 则随机变量 $Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y) = (F(y))^n \qquad 和 \qquad f_Y(y) = n(F(y))^{n-1}f(y) ,$$

以及随机变量 $Z = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Z(z) = 1-(1-F(z))^n \qquad 和 \qquad f_Z(z) = n(1-F(z))^{n-1}f(z) .$$

例 5.14 假设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且有 $X \sim e(\alpha)$ 和 $Y \sim e(\beta)$, 求随机变量 $Z_1 = \max(X,Y)$ 和 $Z_2 = \min(X,Y)$ 的概率密度.

解 根据指数随机变量的定义可知随机变量 X 和 Y 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

于是得到随机变量 Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z_1) = F_X(z_1)F_Y(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f_X(t)dt \int_{-\infty}^{z_1} f_Y(t)dt \ .$$

当 $z_1 \leqslant 0$ 时由 $F_{Z_1}(z_1) = 0$; 当 $z_1 > 0$ 时

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_0^{z_1} f_X(t)dt \int_0^{z_1} f_Y(t)dt = \int_0^{z_1} \alpha e^{-\alpha t}dt \int_0^{z_1} \beta e^{-\beta y}dt = (1 - e^{-\alpha z_1})(1 - e^{-\beta z_1}) \ .$$

两边对 z_1 求导可得其概率密度为

$$f_{Z_1}(z_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z_1} + \beta e^{-\beta z_1} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_1} & z_1 > 0 \\ 0 & z_1 \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

同理可得随机变量 Z_2 的分布函数和概率密度分别为

$$F_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2 > 0 \\ 0 & z_2 \leqslant 0 \end{cases} \qquad f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2 > 0 \\ 0 & z_2 \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

5.6.5 随机变量的联合分布函数

已知随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 随机变量 U 和 V 是 X 和 Y 的函数, 如何求解 (U,V) 的联合分布. 具体而言, 设

$$\begin{cases} U = u(X,Y) \\ V = v(X,Y) \ . \end{cases}$$

这里二元函数 $u(\cdot,\cdot)$ 和 $v(\cdot,\cdot)$ 具有连续的偏导, 并满足

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad \text{存在唯一的反函数} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \ . \end{cases}$$

我们有如下定理: