Ch 5.6 多维随机变量函数的分布

回顾前一次课

已知 (X,Y)的概率分布, 求随机变量$Z=g(X,Y)$的概率分布

设随机变量X和Y相互独立、且服从标准正态分布，求随机变量$Z_1=\sqrt{X^2+Y^2}$和$Z_2=X^2+Y^2$的密度函数

离散卷积公式：若X与Y独立，其分布列为$a_i=P(X=i)$和$b_j=P(Y=j)$ $(i,j=0,1,\cdots)$, 则$P(Z=X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}$

- 若$X\sim B(n_1,p)$和$Y\sim B(n_2,p)$独立, 则$X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$
- 若$X\sim P(\lambda_1)$和$Y\sim P(\lambda_2)$相互独立, 则$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

设 (X,Y)的联合密度为$f(x,y)$，则随机变量$Z=X+Y$的概率密度为$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$ (卷积公式)

- $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$相互独立, $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

随机变量的其它函数

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 则$Z=XY$的概率为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

$Z=Y/X$的概率密度为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx$$

- 标准正太分布的X和Y相互独立, 则$Z=Y/X$服从柯西分布

设$X_1,\cdots,X_n$相互独立、分布函数为$F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_n}(x_n)$，则随机变量$Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为

$$F_Y(y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y)$$

$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 分布为

$$F_Z(z)=1-\left(1-F_{X_1}(z)\right)\left(1-F_{X_2}(z)\right)\cdots\left(1-F_{X_n}(z)\right)$$

随机变量的联合分布函数

问题：随机变量(X,Y)的联合概率密度$f(x,y)$, 设(X,Y)的函数

$$U = u(X,Y) \qquad V = v(X,Y)$$

如何求(U,V)的联合分布？

这里二元函数$u(\cdot,\cdot)$和$v(\cdot,\cdot)$具有连续的偏导, 并满足

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad \text{存在唯一的反函数} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

定理 设$u = u(x,y)$和$v = v(x,y)$有连续偏导，反函数$x = x(u,v)$和$y = y(u,v)$. 若(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$， 则$U = u(X,Y)$和$V = v(X,Y)$的联合密度为

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|$$

其中J为变换的雅可比行列式, 即

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1}$$

上述结论可推广到一般的n维随机变量

二维正太分布

设X和Y是相互独立的标准正太分布随机变量，则有随机变量$R=X^2+Y^2$与$\theta=\arctan(Y/X)$相互独立，且有$R\sim e(1/2)$以及$\theta\sim U(0,2\pi)$

Ch 5.7 多维正太分布

多维向量的分布和密度函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为n维随机向量, 对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

称为**n维随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$**的**分布函数**，或**$X_1, X_2, \cdots, X_n$**的**联合分布函数**

若存在可积函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使得对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \cdots, u_n)du_1 du_2 \cdots du_n$$

则称$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为**连续型随机向量**，称$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为**n维** **联合密度函数**

性质

- 非负性: 对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$有$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$
- 规范性: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \cdots, u_n) du_1 du_2 \cdots du_n = 1$
- 设G是n维空间的一片区域, 则有

$$P((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in G) = \int \cdots \int_G f(u_1, u_2, \cdots, u_n) du_1 du_2 \cdots du_n$$

- 若$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处连续, 则有

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

边缘分布函数和边缘密度函数

n维随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$中任意k个向量所构成的随机向量，它的分布函数和密度函数被称为**k维边缘分布函数**和**k维边缘密度函数**

例如，随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$前k维随机向量的边缘分布函数和边缘密度函数分布为

$$F_{X_1,X_2,\cdots,X_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_k \leqslant x_k) = \lim_{\substack{x_{k+1}\to+\infty \\ \cdots \\ x_n\to+\infty}} F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1,\cdots,u_k,u_{k+1},\cdots,u_n)du_{k+1}\cdots du_n\ .$$

多维向量的独立性

若随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$满足

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称$\boldsymbol{X_1, X_2, \cdots, X_n}$**相互独立**

若随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的联合分布函数$F(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$满足

$$F(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = F_X(x_1, \cdots, x_m) F_Y(y_1, \cdots, y_n)$$

则称**随机向量$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$相互独立**

多维正态分布

给定一个向量$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$和正定矩阵$\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，对任意实数向量$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, 若随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$的密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left(-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2\right)$$

则称随机向量X服从参数为$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$的多维正态分布(multivariate normal distribution), 记

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

二维正太分布和标准正太分布

若$(X,Y)\sim N(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$, 可以写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_x\\ \mu_y\end{pmatrix} \qquad \text{和} \qquad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{pmatrix}$$

当$\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}_n$(全为零的$n$维向量)，以及$\boldsymbol{\Sigma}=I_n$($n\times n$单位阵)时，正太分布$N(0_n,I_n)$被称为***n*维标准正太分布**, 此时它的密度函数为

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}\right)$$

n维标准正太分布可以看作是相互独立的n个标准正太分布随机变量的联合分布

正太分布标准化

定理： 设n维随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，以及正定矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$的特征值分解$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{U}$, 则随机向量

$$Y = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \boldsymbol{U}(X - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}_n, I_n)$$

定理： 设随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 则有

$$Y = \boldsymbol{A}X + \boldsymbol{b} \sim N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^\top)$$

其中$|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$和$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

多维正太分布重要的性质

定理 5.13 设随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)^{\mathrm{T}}$, 以及

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{pmatrix}\right),$$

- 随机向量 X 和 Y 的边缘分布分别为 $X\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x,\boldsymbol{\Sigma}_{xx})$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y,\boldsymbol{\Sigma}_{yy})$;
- 随机向量 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\boldsymbol{\Sigma}_{xy}=(\mathbf{0})_{m\times n}$ (元素全为零的 $m\times n$ 矩阵);
- 在 $X=\boldsymbol{x}$ 的条件下随机向量 $Y\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y+\boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x),\boldsymbol{\Sigma}_{yy}-\boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{xy})$;
- 在 $Y=\boldsymbol{y}$ 的条件下随机向量 $X\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x+\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y),\boldsymbol{\Sigma}_{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx})$.

Ch 5.6 多维随机向量的数字特征

期望

离散随机变量(X,Y)的分布列为$p_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_j\right)$，则随机变量$\boldsymbol{Z=g(X,Y)}$**的期望**为

$$\boldsymbol{E[Z]=E[g(X,Y)]=\sum_{i,j}g\left(x_i,y_j\right)p_{ij}}$$

连续随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则随机变量$\boldsymbol{Z=g(X,Y)}$**的期望**为

$$\boldsymbol{E[Z]=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy}$$

性质

若随机变量$X \geq Y$, 则有$\boldsymbol{E[X] \geq E[Y]}$

对任意随机变量X, Y有$\boldsymbol{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$

对独立随机变量X和Y, 有$\boldsymbol{E[XY] = E[X]E[Y]}$

对任意随机变量X和Y, 有Cauchy-Schwartz不等式

$$|\boldsymbol{E[XY]}| \leq \sqrt{\boldsymbol{E[X^2]E[Y^2]}}$$

对独立随机变量X和Y, 有

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X} \pm \boldsymbol{Y}) = \mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) + \mathrm{Var}(\boldsymbol{Y})$$