



离散数学

Discrete Mathematics

第六讲：二元关系

吴楠

南京大学计算机科学与技术系



2021 年 10 月 19 日



前情提要



- 数学基础的危机与公理化集合论
- 集合的概念
- 子集、空集与幂集
- 集合的运算与集合代数
- 集合公式的几种基本证明方式

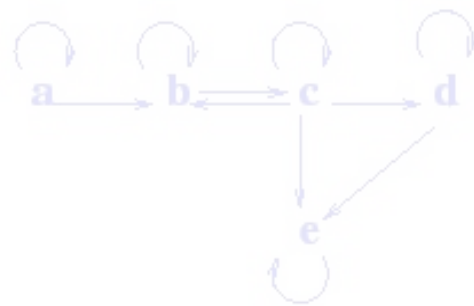
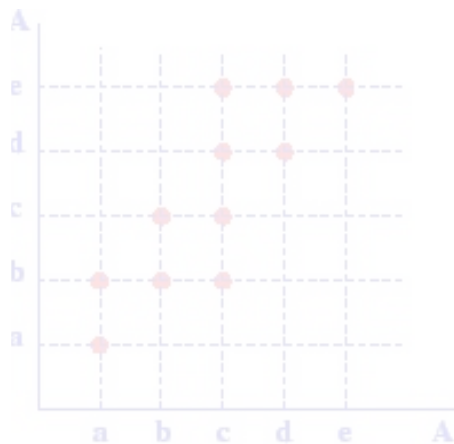




本讲主要内容



- 引子：集合与关系
- 有序对
- 笛卡尔积
- 二元关系
- 关系的运算





引子：集合与关系



- 由于集合模型中元素的无序性，“序”的刻划是无法直接实现的，但现实世界中存在着大量的有序关系，这就需要在集合论的基础上建立一种描述“序”的模型：

关系
(RELATION)



有序对



- **序** (order) 是一个非常重要和基础的数学概念，它刻划出对象的可比性。最简单的序关系可通过**有序对** (ordered pair, 或称序偶) 来定义
- **定义**：设 a, b 为对象，二元运算 (a, b) 称为 a 与 b 的有序对指 $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$ 。这里称 a 为 (a, b) 的第一分量，称 b 为 (a, b) 的第二分量
- 集合论作为数学的基础，可以构造数学的其它内容。如何利用集合构造有序对呢？



有序对 (续)



- 定义 (Kuratowski, 1921) : a, b 为集合,

$$\text{令 } (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

- 命题 : 在上述有序对的集合定义下, 有 :

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

- 证明* :

“ \Leftarrow ” , 即 $(a = c \wedge b = d) \Rightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ 易见,



有序对 (续)



“ \Rightarrow ” :

$$\text{令} \begin{cases} \Pi_1 Z = U \cap Z \\ \Pi_2 Z = U(UZ - \cap Z) \end{cases}$$

$$\text{故} \begin{cases} \Pi_1(a, b) = a \\ \Pi_2(a, b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{当 } a = b \\ b, & \text{当 } a \neq b \end{cases} \end{cases}$$

设 $(a, b) = (c, d)$, 则 $\Pi_1(a, b) = \Pi_1(c, d)$,

从而 $a = c$, 且 $(a, b) = (a, d)$,

下面证 $b = d$

Case1 : $a = b$

从而 $(a, b) = (a, d) \Rightarrow \{a, b\} = \{a, d\} \Rightarrow \{a\} = \{a, d\} \Rightarrow d \in \{a\} \Rightarrow d = a \Rightarrow d = b$

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$





有序对 (续)



Case2 : $a \neq b$

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

若 $c = d$ 则 $a = b$ (证明同 Case1) 故设 $c \neq d$

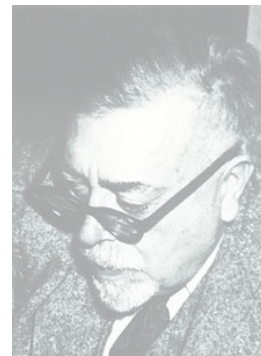
$$b = \Pi_2(a, b) = \Pi_2(c, d) = d$$

$$\therefore b = d \quad \square$$

易见 $\{a, b\}$ 不能成为有序对, $\{x, \{y\}\}$ 也不行。

- 有序对最早的集合定义 (Wiener, 1914) :

$$a, b \text{ 为集合} : (a, b) = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$$





笛卡尔积



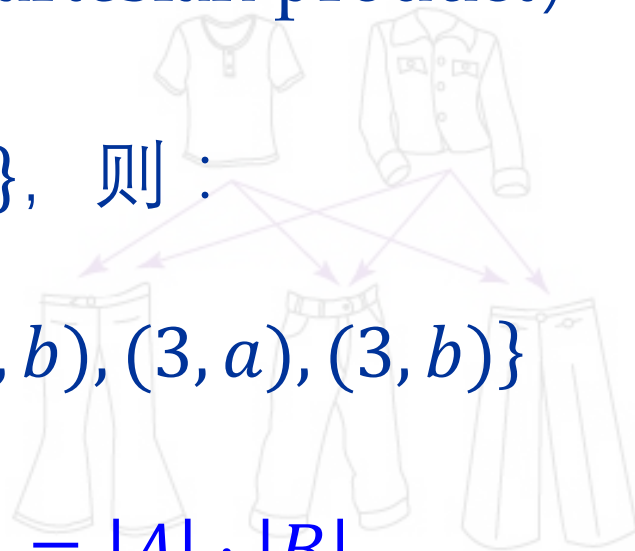
- 任给集合 A 与 B ，令 $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$,

$A \times B$ 称为 A 与 B 的笛卡尔积 (Cartesian product)

- 例：设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ ，则：

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

- 若 A 与 B 是有限集合，则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$





关于笛卡尔积的若干命题



■ (1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

■ (2) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow [(A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)]$

■ (3) 分配律 : $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$



关于笛卡尔积的若干命题 (续)



- 证明(1)：对于任意集合 A ，由笛卡尔积的定义， $A \times \emptyset = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in \emptyset\} = \emptyset$ ，同理可证 $\emptyset \times A = \emptyset$. \square
- 证明(2)：“ \Leftarrow ” : *Trivial* ; “ \Rightarrow ” : 欲证 $A \times B = B \times A \Rightarrow [(A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)]$ ，只需证 $[(A \neq \emptyset) \wedge (B \neq \emptyset) \wedge (A \neq B)] \Rightarrow A \times B \neq B \times A$.
 $\therefore A \neq B \quad \therefore A - B \neq \emptyset \vee B - A \neq \emptyset ;$



关于笛卡儿积的性质问题 (续)



- 证明(2)(续)：不妨设 $A - B \neq \emptyset$ ，且取 $a \in A - B$ ， $b \in B$ 并假设 $(a, b) \in A \times B = B \times A$ ，即有 $(a, b) \in B \times A$ ，故有 $a \in B$ ，与 $a \in A - B$ 矛盾，故假设错误， $A \times B \neq B \times A$. \square
- 证明(3)：
$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(a, b) | a \in A \wedge b \in (B \cap C)\} \\ &= \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B \wedge b \in C\} \\ &= \{(a, b) | (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \in C)\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C), \text{ 其余同理可证. } \quad \square \end{aligned}$$



二元关系 (Binary Relation)



- 定义 (关系) : 集合 R 为关系指 :

$$(\forall r \in R)(\exists x, y)(r = (x, y))$$

- 定义 (二元关系) : 设 A, B 为集合, 若 $R \subseteq A \times B$,
称 R 为从 A 到 B 的二元关系, 当 $A = B$ 时, 称 R 为 A
上的二元关系, 在无歧义时一般可简称关系



二元关系 (续)



■ 相关记号：设 $R \subseteq A \times B$

- (1) $(a, b) \in R$ 可简记为 aRb
- (2) $(a, b) \notin R$ 可简记为 $a \nR b$ 或 $\neg aRb$
- (3) $aRb \wedge bRc$ 可简记为 $aRbRc$

■ 例： $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

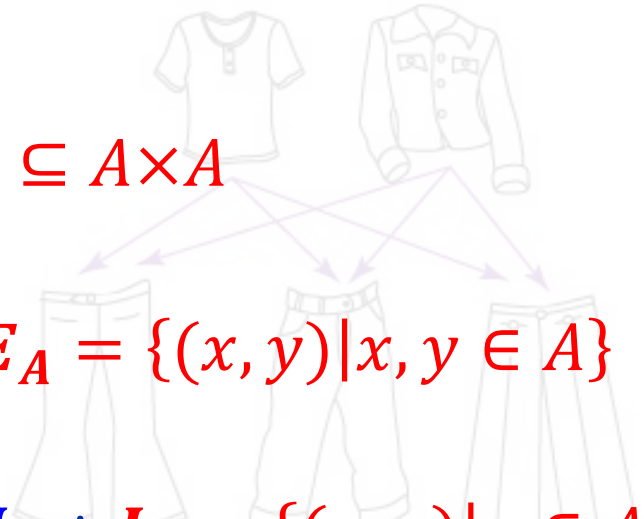
- $R = \{(1, 3), (2, 3), (1, 5)\}$ 为 A 到 B 的二元关系，每个关系元素可写为 $1R3, 2R3, 1R5$ ，而 $(1, 4) \notin R$ ，故 $1 \nR 4$



二元关系 (续)



- 以下三种关系是 A 上特别的二元关系，用特有的符号记之（且一般写为粗体）：
 - 空关系 (empty relation) $\emptyset : \emptyset \subseteq A \times A$
 - 全关系 (entire relation) $E_A : E_A = \{(x, y) | x, y \in A\}$
 - 恒同关系 (identical relation) $I_A : I_A = \{(x, x) | x \in A\}$





二元关系 (续)

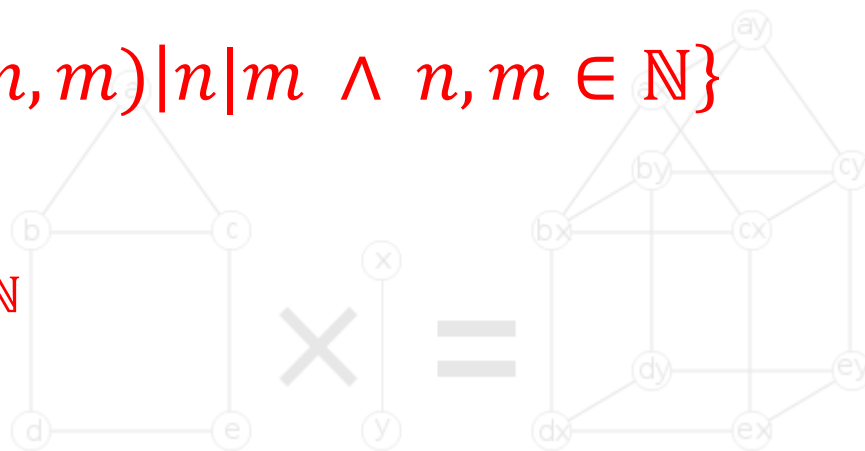


■ 自然数集 \mathbb{N} 上常见的关系：

○ 小于关系： $< \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) | n < m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

○ 整除关系： $| \stackrel{\text{def}}{=} \{(n, m) | n | m \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$

○ 相等关系： $= \stackrel{\text{def}}{=} I_{\mathbb{N}}$

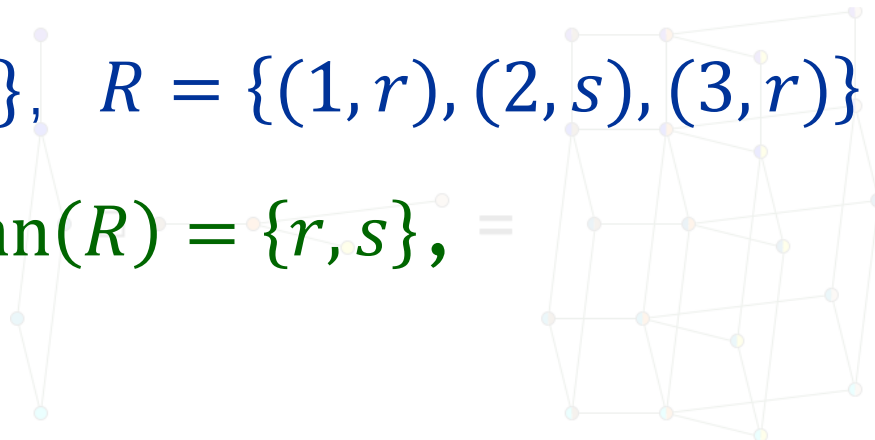




二元关系 (续)



- 以下定义与关系 R 有关的3个重要集合, 设 $R \subseteq A \times B$:
 - R 的定义域 $\text{Dom}(R) = \{x | (\exists y \in B)(x, y) \in R\}$
 - R 的值域 $\text{Ran}(R) = \{y | (\exists x \in A)(x, y) \in R\}$
 - R 的域 $\text{Fld}(R) = \text{Dom}(R) \cup \text{Ran}(R)$
- 例 : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{r, s\}$, $R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$
则 : $\text{Dom}(R) = \{1, 2, 3\}$, $\text{Ran}(R) = \{r, s\}$,
 $\text{Fld}(R) = \{1, 2, 3, r, s\}$





二元关系 (续)



- 对于 $R \subseteq A \times B$ ，我们以集合表示之，当 R 为有穷集时，还可使用矩阵或有向图来表示二元关系
- 定义：设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 与 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 分别为 m 元与 n 元集， $R \subseteq A \times B$ 为 A 到 B 的二元关系，可由 $m \times n$ 的矩阵 M_R 表示关系 R ， $M_R = [m_{ij}]_{m \times n}$ 定义如下，称为关系矩阵：

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (a_i, b_j) \in R \\ 0, & \text{若 } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$





二元关系 (续)



- 例： $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{r, s\}$, $R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$,

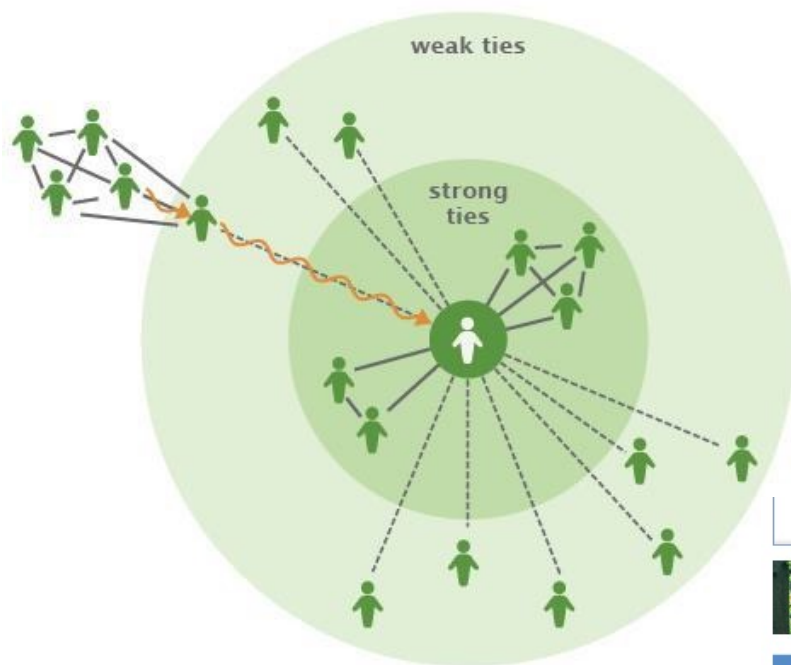
则用关系矩阵表述关系 R 为：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 通常由 M_R 可方便地验证 R 是否具备某性质，同时通过 M_R 可对关系 R 进行代数处理和机器处理



关系的运算



Wu Nan 搜索朋友 首页

今天是 Lily Feng 的生日
创建活动

你可能认识的人 显示全部

- Wuman Luo**
5 个共同的朋友
加为好友
- Linghao Zhang**
29 个共同的朋友
加为好友
- Yan-Chao Zhao**
25 个共同的朋友
加为好友

$$M_{TR} = \sum_{n=1}^{\infty} M_T^n$$

人人网 renren.com

吴楠 VIP 5 4天

新鲜事

- 日志 发表
- 相册 上传
- 音乐 听歌
- 分享
- 小站 new
- 小组

状态 照片

英语四六级，你过了吗？

n天前: Happy Holy New Year!

新留言及回复 (1)

程刚 给你留言了

新鲜事 好友原创 特别

张志伟 PnsW: 【劲爆！！机场安检，男子出示“



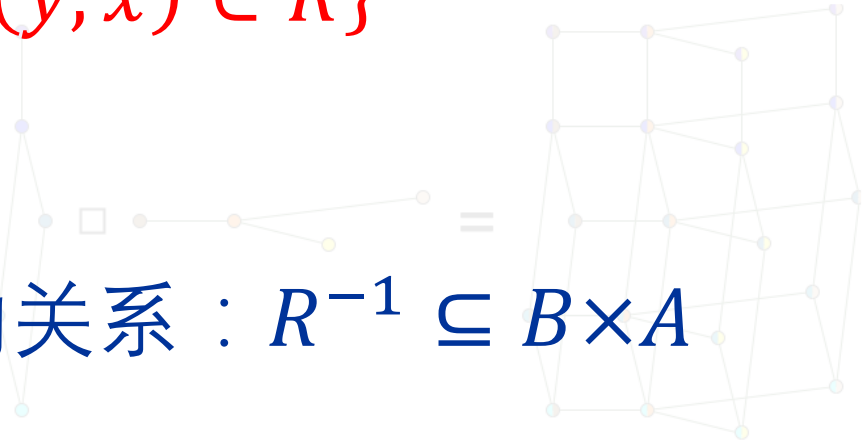
关系的运算 (续)



- 定义：设 $R \subseteq A \times B$ ， R 的逆 (inverse) 为

$$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$$

易见， R^{-1} 为从 B 到 A 的关系： $R^{-1} \subseteq B \times A$





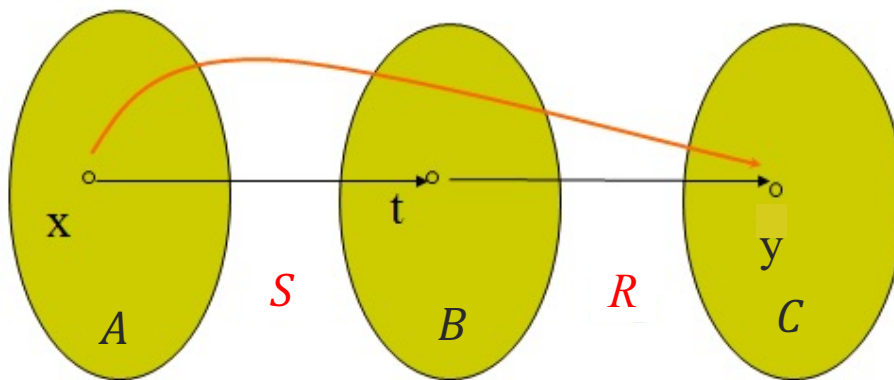
关系的运算 (续)



■ 定义：设 $S \subseteq A \times B, R \subseteq B \times C$, R 与 S 的复合为

$$R \circ S = \{(x, y) \mid (\exists t \in B)((x, t) \in S \wedge (t, y) \in R)\}$$

事实上, $x(R \circ S)y \iff \exists t(xStRy)$ 或 $x(R \circ S)y = xS \square Ry$, $R \circ S$ 为从 A 到 C 的关系





关系的运算 (续)



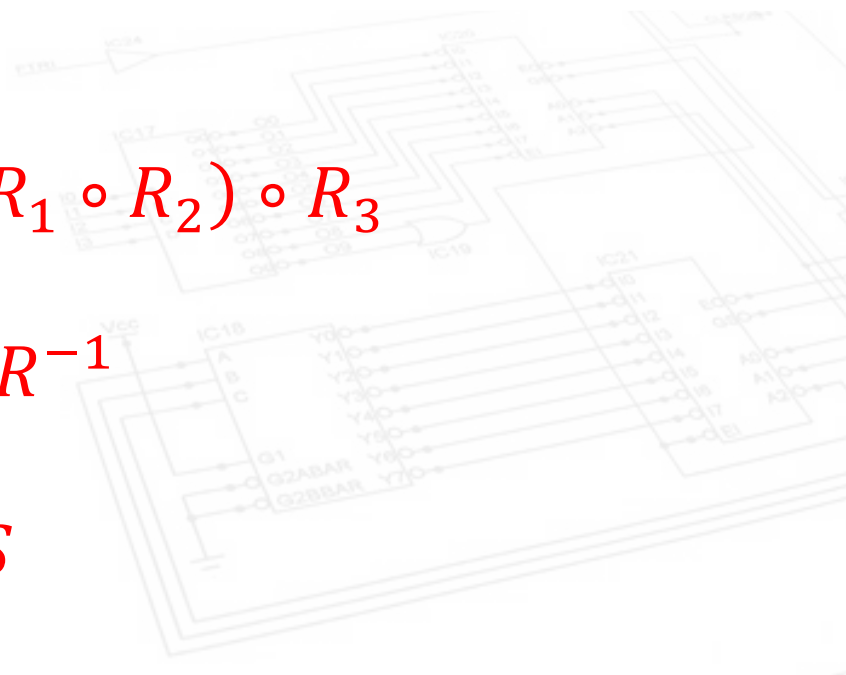
■ 设 $S \subseteq A \times B$, $R \subseteq B \times C$, 则:

○ (1) $(R^{-1})^{-1} = R$

○ (2) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

○ (3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

○ (4) $I_B \circ S = S \circ I_A = S$





关系的运算 (续)



- 求证： $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ (设 $R_2 \subseteq A \times B$, $R_1 \subseteq B \times C$)

- 证明：只要证明等号左右两个集合相等即可。

$(x, y) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists t(t \in B \wedge (y, t) \in R_2 \wedge (t, x) \in R_1) \Leftrightarrow \exists t(t \in B \wedge (t, y) \in R_2^{-1} \wedge (x, t) \in R_1^{-1}) \Leftrightarrow (x, y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ 。根据集合相等的定义，命题得证。 \square



关系的运算 (续)



■ 定义(关系的幂):

设 $R \subseteq A \times A$, 以下归纳定义关系 R 的 n 次幂:

$$R^0 = I_A, R^{n+1} = R \circ R^n$$

- 一般来说, 计算关系的高次幂 R^n 是比较复杂的, 然而我们可以方便地通过关系矩阵 M_R 来计算 M_{R^n} (在第15讲中介绍)



关系的运算 (续)



■ 关于关系的幂的定理：设 R 为集合 A 上的关系

- (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}$
- (2) $(R^m)^n = R^{mn}$, $m, n \in \mathbb{N}$
- (3) 若存在 $S \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{N}^+$ 使 $R^S = R^{S+T}$, 则:
 - ① $(\forall k \geq S)(R^k = R^{k+T})$
 - ② $(\forall k \geq S)(\forall n \in \mathbb{N})(R^k = R^{k+nT})$
 - ③ $\{R^0, R^1, \dots, R^{S+T-1}\} = \{R^0, R^1, \dots, R^n, \dots\}$
- (4) 若 $|A| = n$, 则 $(\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \leq s < t \leq 2^{n^2})$



关系的运算 (续)



■ 证明：(1)(2)：对 n 归纳即可；(3)：设 $R^S = R^{S+T}$

○ (3.1) 设 $k \geq S, R^k = R^{S+(k-S)} = R^S \circ R^{k-S} = R^{S+T} \circ$

$$R^{k-S} = R^{S+T+k-S} = R^{k+T}$$

$$\{R^0, R^1, \dots, R^{S+T-1}\} = \{R^0, R^1, \dots, R^n, \dots\}$$

○ (3.2) $R^k = R^{k+T} = R^{k+T+T} = R^{k+\overbrace{T+\dots+T}^n} = R^{k+nT}$

○ (3.3) 由(3.2)容易看出， T 为 R 复合的周期。该式说明有穷集上的关系有周期，但无穷集上关系未必有周期



关系的运算 (续)



■ 证明(4) : $|A| = n \Rightarrow (\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \leq s < t \leq 2^{n^2})$

设 $R \subseteq A \times A$, $\because |A| = n \Rightarrow |A \times A| = n^2 \Rightarrow$

$|P(A \times A)| = 2^{n^2}$, $\therefore R^0, R^1, \dots, R^{2^{n^2}}$ 共有 $2^{n^2} + 1$ 个关系在 $P(A \times A)$ 中, 由鸽笼原理, $(\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \leq s < t \leq 2^{n^2})$. \square

○ 鸽笼原理: “If $n + 1$ objects are put into n boxes, then at least one box contains two or more of the objects.” — **Pigeonhole Principle** (Das Schubfachprinzip) 由 Peter Gustav Lejeune Dirichlet 于 1834 年首提, 他用这一原理证明数论中的定理



笛卡尔 (Descartes, 1596 – 1650)



- 绅士、军人和数学家
- “（解析几何学）使笛卡尔的名字不朽，它构成了人类在精确科学的进步史上所曾迈出的最伟大的一步。”
—John Stuart Mill
- “我只要求安宁和平静。”，他一生中经常不得不在军营里寻找安宁，寻找在孤独中冥思的平静。
- 笛卡尔生在重建宗教和政治的阵痛中陷于战火中的欧洲。但在非物质的、永恒的一面，情况要好得多。笛卡尔所处的时代是文明史上最伟大的智力时期之一。费马和帕斯卡是他数学上的同代人；莎士比亚辞世时笛卡尔20岁；笛卡尔比伽利略多活8年，笛卡尔卒年牛顿8岁；密尔顿出生时笛卡尔12岁，而哈维比笛卡尔多活了7年

资料来源：E. T. Bell 《数学精英》





本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 2.1.6节，9.1节
- 课后习题：
 - Problem Set 6
- 提交时间：10月26日（线下提交）

