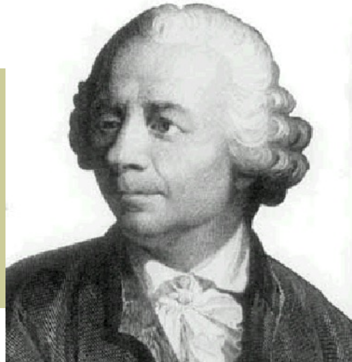
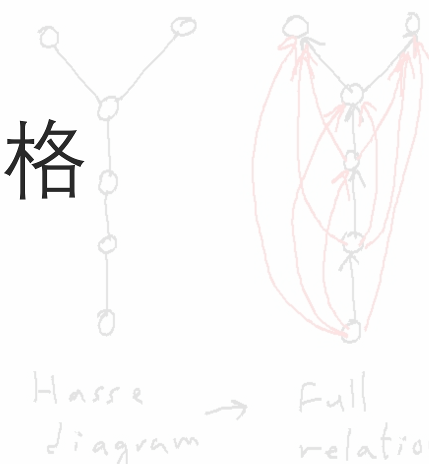
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学

Discrete Mathematics

第十五讲：偏序与偏序格



吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

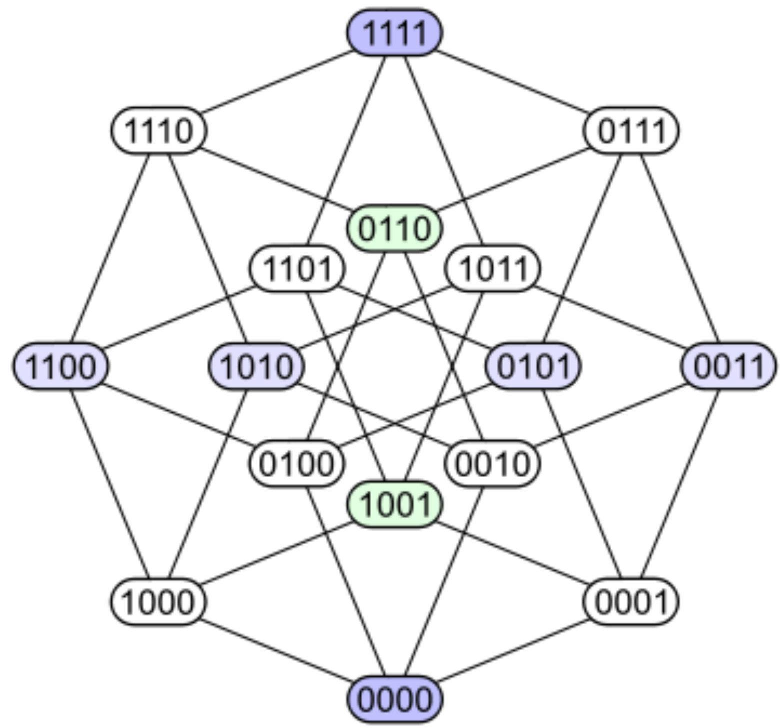
2021 年 11 月 25 日

前 情 提 要

- 循环群与生成元
- 循环群的子群
- 群的同构与同态
- 无限循环群的同构群
- 有限循环群的同构群

本讲主要内容

- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素
- 特殊元素的性质
- 偏序格



偏序关系(partially ordered relation)

- 定义（偏序关系）：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系称为A上的偏序关系，记为：$\preccurlyeq$
- 设$\preccurlyeq$为偏序关系，若$(a,b) \in \preccurlyeq$，则记为$a \preccurlyeq b$，读作“a小于或等于b”

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

偏序关系（续）

定义： 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$x,y\in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$.

任取两个元素 x 和 y，可能有下述几种情况发生：

$x\prec y$(或 $y\prec x$)，$x=y$，x 与 y 不是可比的.

定义： R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$\forall x,y\in A$, x 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义： $x,y\in A$，如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$，则称 y 覆盖 x.

例如{1,2,4,6}集合上的整除关系，2 覆盖 1，4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

偏序集

- 定义（偏序集）：集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起称为偏序集（partially ordered set, poset），记作$(A,\preccurlyeq)$
- 例：
  - 整数集$\mathbb{Z}$同小于等于关系构成偏序集$(\mathbb{Z},\leq)$
  - 集合A之幂集$\mathcal{P}(A)$同集合包含关系构成偏序集$(\mathcal{P}(A),\subseteq)$

偏序集（续）

例：证明$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$为全序当且仅当$|A| \leq 1$

证明：(1) “$\Leftarrow$”：

Case 1:$|A| = 0$, $P(A) = \{\emptyset\}$, $(P(A), \subseteq)$为全序

Case 2:$|A| = 1$,设$A = \{a\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $(P(A), \subseteq)$为全序

“$\Rightarrow$”：只需证$|A| \geqslant 2$时，$(P(A), \subseteq)$非全序

$\because |A| \geqslant 2 \quad \therefore$可取$a, b \in A, a \neq b$

$\because$非$\{a\}\square\{b\} \quad \therefore (P(A), \subseteq)$非全序

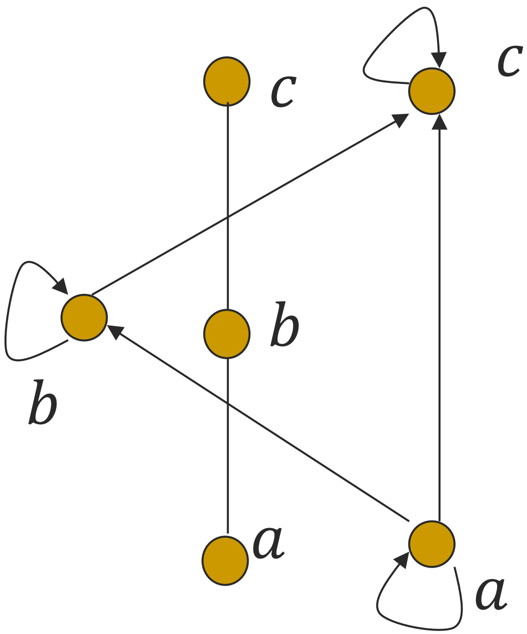
偏序集（续）

- 例：字典序（lexicographic order）与偏序集
- 设字母表为Σ，给定偏序集$(\Sigma, \preccurlyeq_\Sigma)$，其中偏序关系$\preccurlyeq_\Sigma$为字母表上的顺序，在Σ×Σ上定义新关系“$\preccurlyeq$”：$(a, b) \preccurlyeq (a', b') \Leftrightarrow$在Σ中有$a \prec_\Sigma a'$或者有$a = a'$且$b \preccurlyeq_\Sigma b'$
- 易证$\preccurlyeq$为Σ×Σ上的偏序关系；上述构造为两个字母组成单词的情况，可扩展到其它情况

偏序集（续）

- 例：在字典中“*part*”和“*park*”两个单词的顺序如何?
- 定义全序集（小写字母表）$S=\{a,b,c,\cdots,z\}$，元素满足线序关系$a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c, \cdots, y \preccurlyeq z$，令$S^4 = S\times S\times S\times S$，易见，$(p,a,r,t) \in S^4$，$(p,a,r,k) \in S^4$；根据字典序，$park$先于$part$

哈斯图（Hasse diagrams）

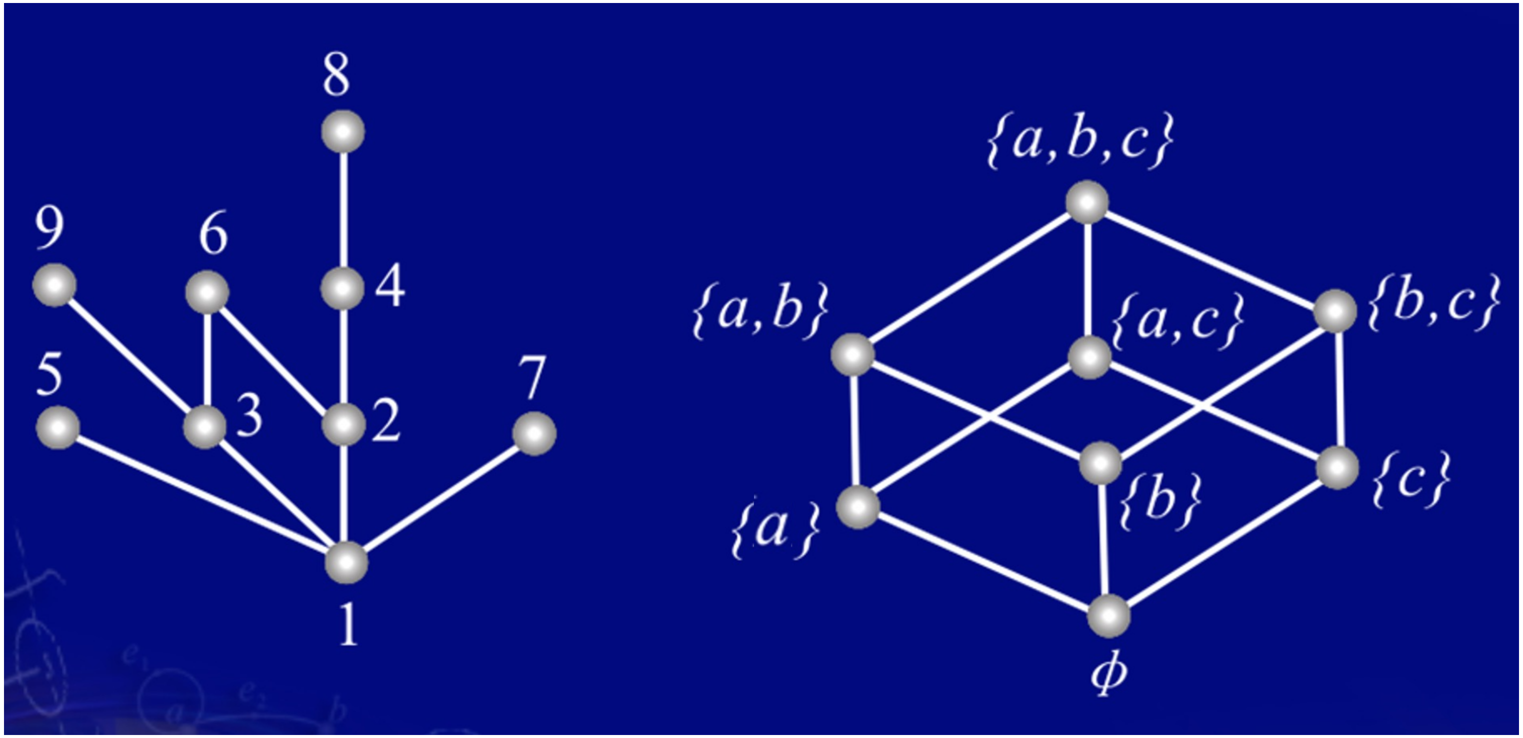


将偏序关系简化为哈斯图：

- 隐去所有顶点上的环
- 隐去所有因传递关系引出的边
- 根据箭头的方向自下而上重新排列所有的顶点，然后将所有的有向边替换为无向边

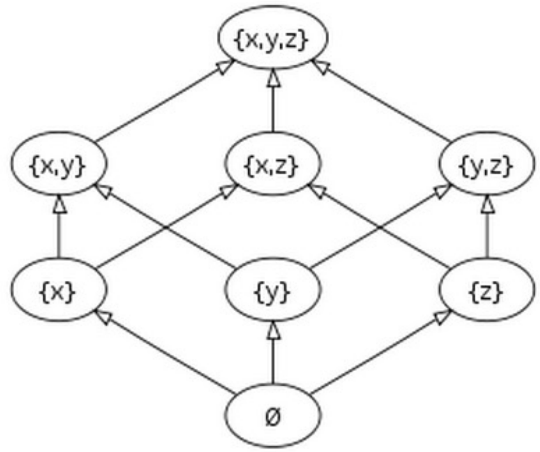
哈斯图（续）

- 例：画出偏序集({1,2,3,4,5,6,7,8,9}, 整除)和$(\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$的哈斯图

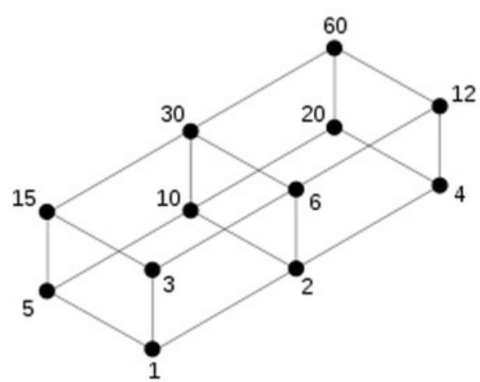


哈斯图（续）

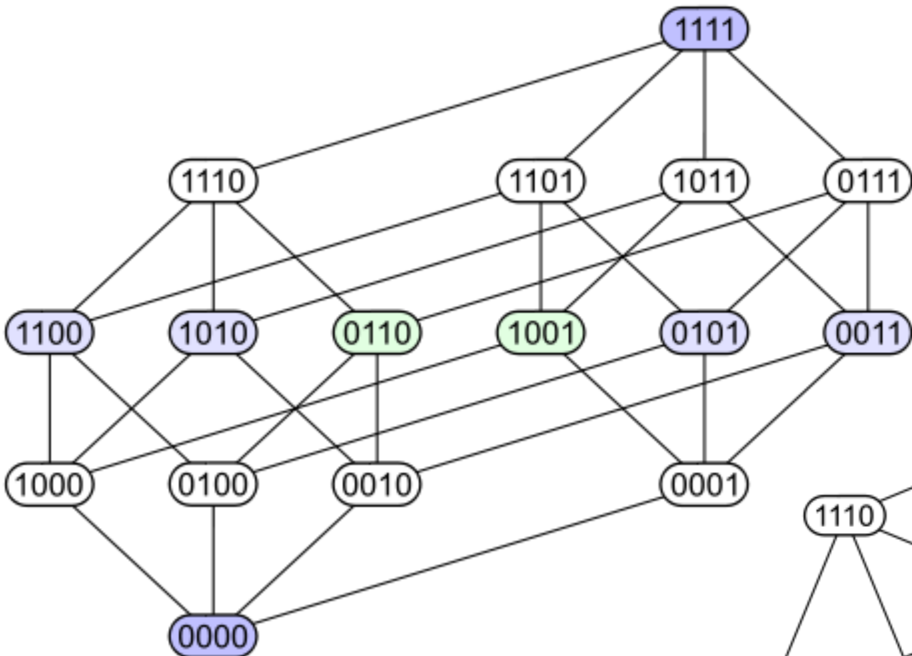
- The power set of { *x*, *y*, *z* } partially ordered by inclusion, has the Hasse diagram:



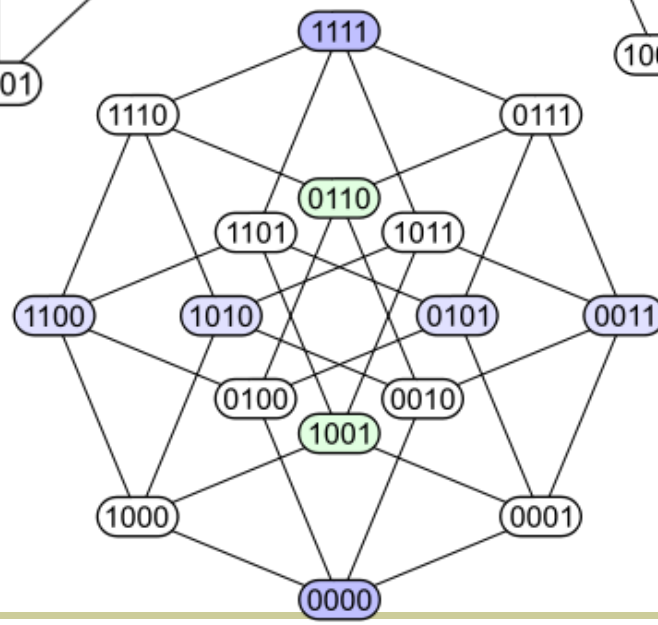
- The set *A* = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 } of all divisors of 60, partially ordered by divisibility, has the Hasse diagram:



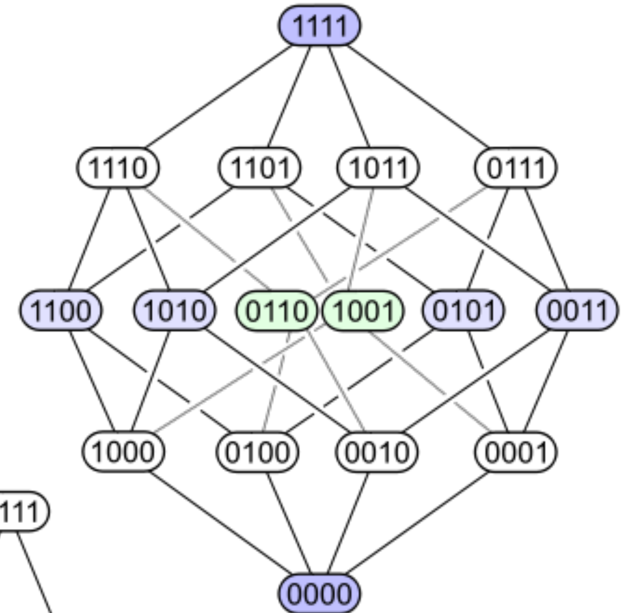
哈斯图（续）



1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000

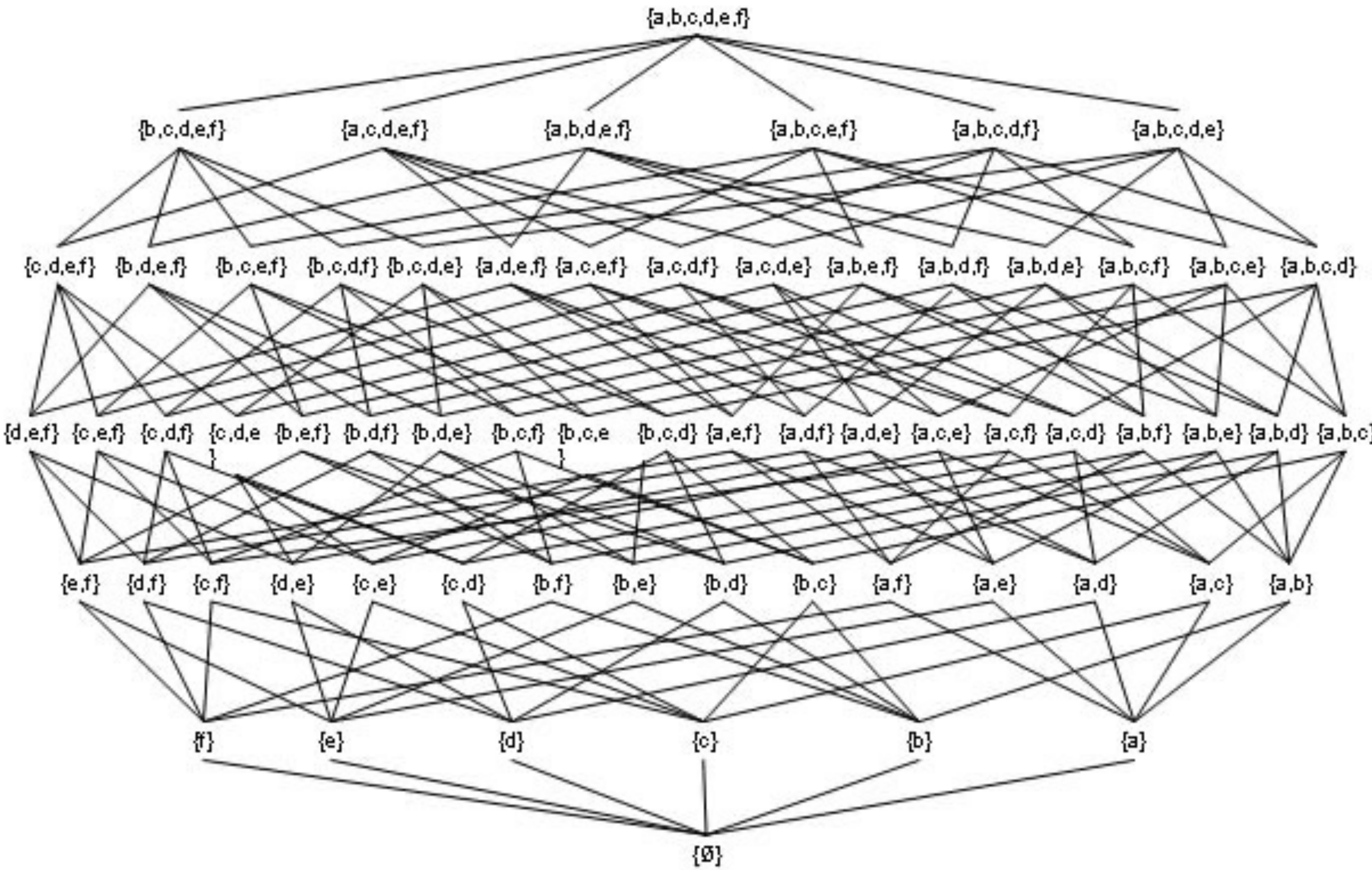


1111
1110
0111
0110
1101
1011
1100
1010
0101
0011
0100
0010
1001
1000
0001
0000



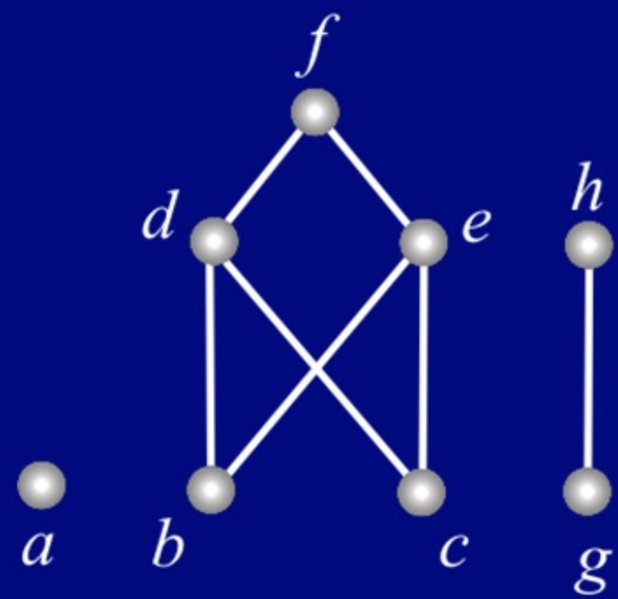
1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000

哈斯图（续）


{a,b,c,d,e,f}
{b,c,d,e,f} {a,c,d,e,f} {a,b,d,e,f} {a,b,c,e,f} {a,b,c,d,f} {a,b,c,d,e}
{c,d,e,f} {b,d,e,f} {b,c,e,f} {b,c,d,f} {b,c,d,e} {a,d,e,f} {a,c,e,f} {a,c,d,f} {a,c,d,e} {a,b,e,f} {a,b,d,f} {a,b,d,e} {a,b,c,f} {a,b,c,e} {a,b,c,d}
{d,e,f} {c,e,f} {c,d,f} {c,d,e} {b,e,f} {b,d,f} {b,d,e} {b,c,f} {b,c,e} {b,c,d} {a,e,f} {a,d,f} {a,d,e} {a,c,e} {a,c,f} {a,c,d} {a,b,f} {a,b,e} {a,b,d} {a,b,c}
{e,f} {d,f} {c,f} {d,e} {c,e} {c,d} {b,f} {b,e} {b,d} {b,c} {a,f} {a,e} {a,d} {a,c} {a,b}
{f} {e} {d} {c} {b} {a}
{Ø}

哈斯图（续）

例 已知偏序集(A,R)的哈斯图如下图所示. 试求出集合A和关系R的表达式.



解 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$R=\{(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(d,f),(e,f),(g,h)\}\cup I_A$

偏序集中的特殊元素及其性质

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义：设$(A,\preccurlyeq)$为偏序集，$B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极小元.

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极大元.

性质：

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

2．下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义：设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立，则称 y 为 B 的上界.

(2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立，则称 y 为 B 的下界.

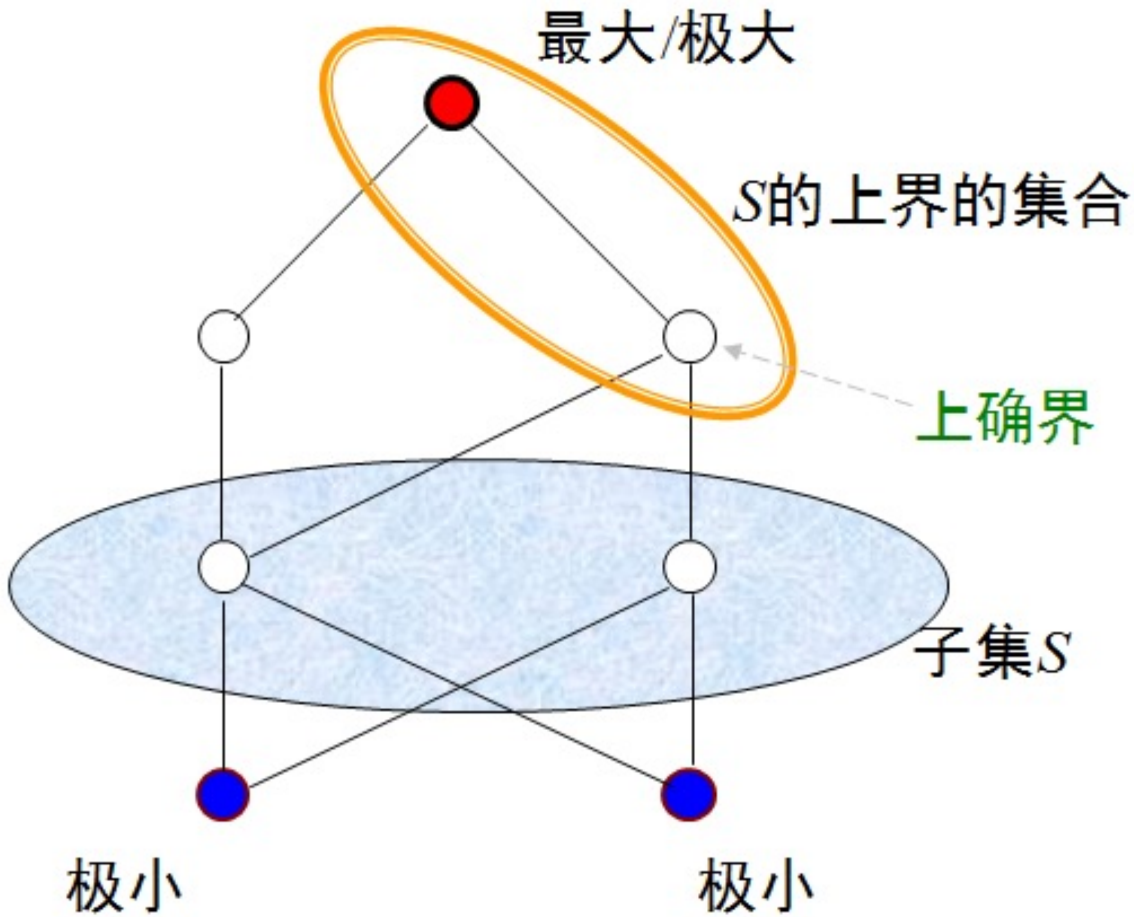
(3) 令 $C = \{y \mid y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.

(4) 令 $D = \{y \mid y$ 为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

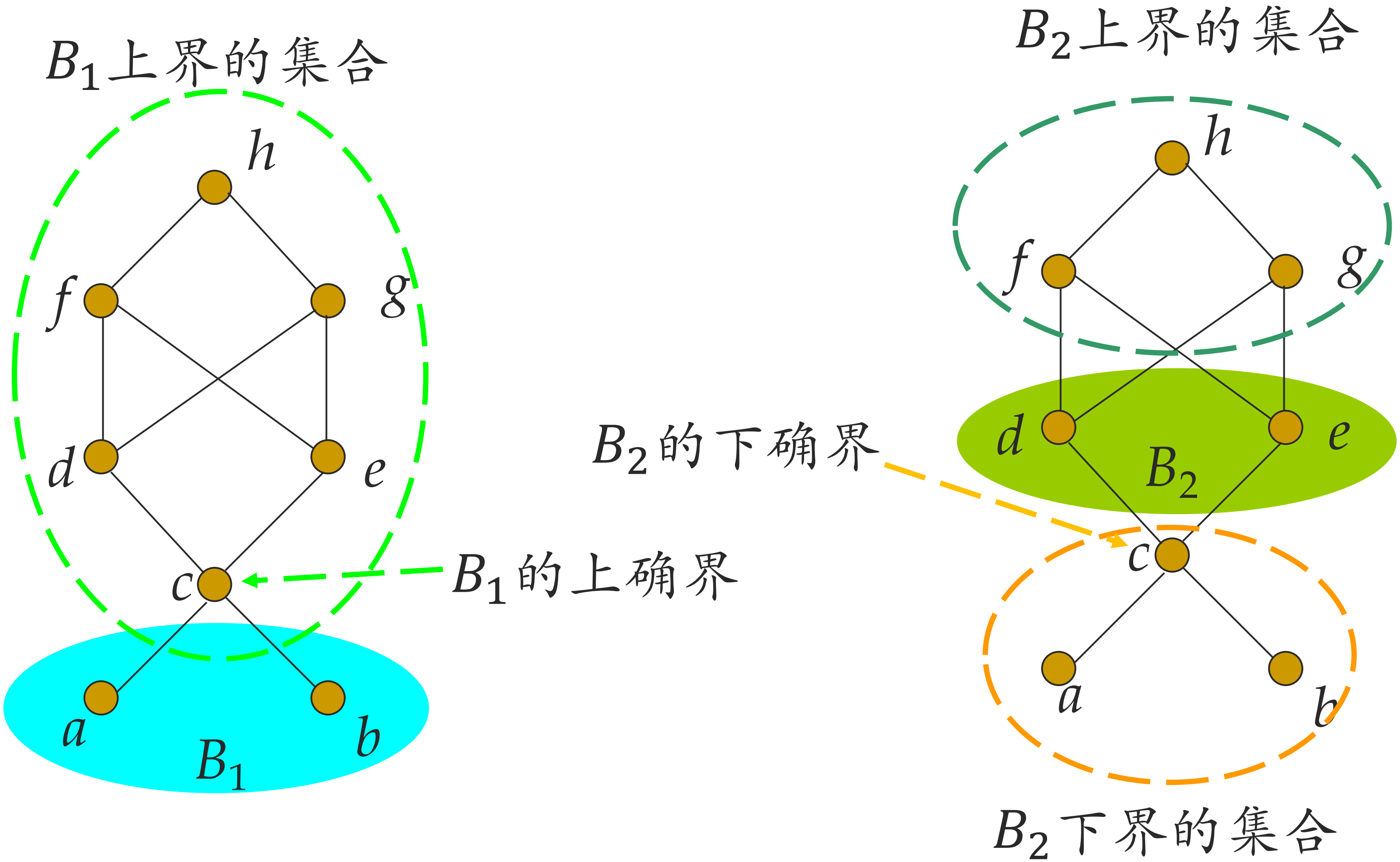
性质：

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

从哈斯图看特殊元素



从哈斯图看特殊元素（续）

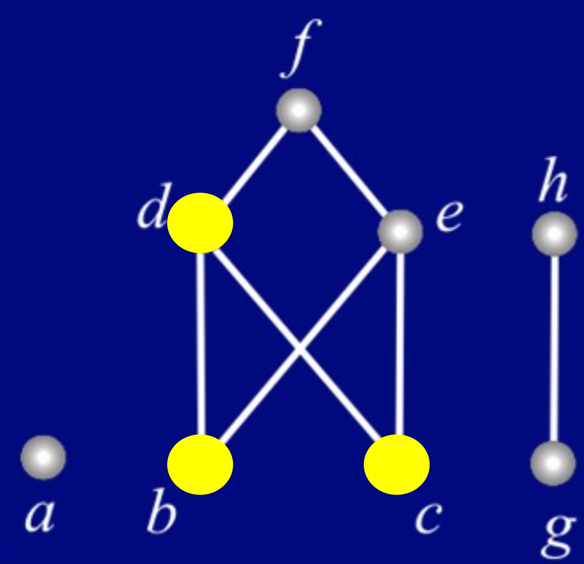


偏序集中的特殊元素及其性质（续）

例 设偏序集$(A,\preccurlyeq)$如下图所示，

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B=\{b,c,d\}$，求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



解 极小元：a, b, c, g；　极大元：a, f, h；没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f，最小上界为 d.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

例 设 X 为集合，$A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$，且 $A\neq\varnothing$. 若 $|X|=n$, $n\geq 2$. 问：

(1) 偏序集（$A, R_{\subseteq}$）是否存在最大元？

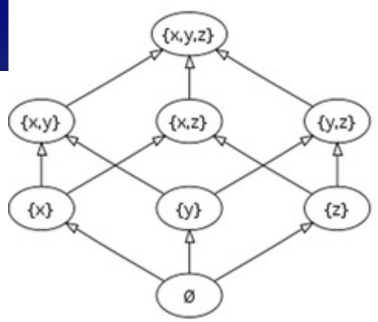
(2) 偏序集（$A, R_{\subseteq}$）是否存在最小元？

(3) 偏序集（$A, R_{\subseteq}$）中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由.

解（$A, R_{\subseteq}$）不存在最小元和最大元，因为 $n\geq 2$.

（$A, R_{\subseteq}$）的极小元就是 X 的所有单元集，即 $\{x\}, x\in X$.

（$A, R_{\subseteq}$）的极大元恰好比 X 少一个元素，即 $X-\{x\}, x\in X$.



偏序集中的特殊元素及其性质（续）

4. 设偏序集（A, R）的哈斯图如图所示.

(1) 写出 A 和 R 的集合表达式

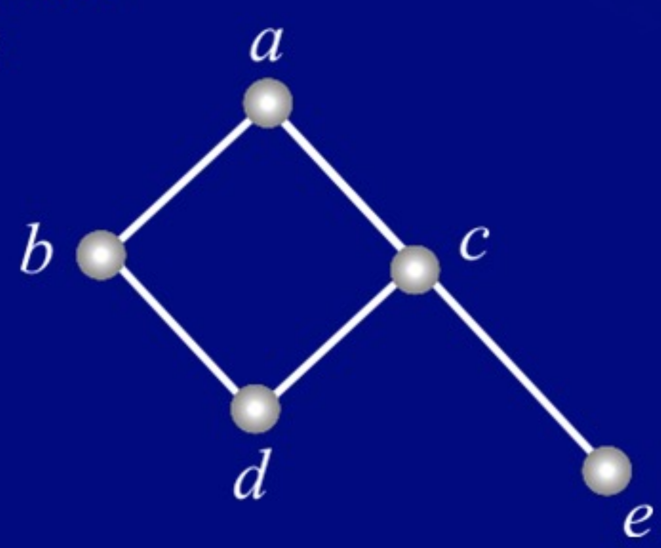
(2) 求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元



解 (1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{(d,b), (d,a), (d,c), (e,c), (e,a), (b,a), (c,a)\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是 a，极小元是 d, e；没有最小元.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

6．设偏序集 (A,R) 和 (B,S)，定义 $A\times B$ 上二元关系 T:

$$(x,y)T(u,v) \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证 证明自反性 任取 (x,y),

$$(x,y)\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow (x,y)T(x,y)$$

证明反对称性 任取 $(x,y),(u,v)$

$$(x,y)T(u,v)\wedge(u,v)T(x,y) \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow (x,y)=(u,v)$$

证明传递性 任取 $(x,y),(u,v),(w,t)$

$$(x,y)T(u,v)\wedge(u,v)T(w,t) \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow (x,y)T(w,t)$$

偏序集与格

- 格（lattice）作为一个代数系统（第16讲介绍）可以通过两种方式进行定义：
  - (1) 通过偏序集与偏序关系定义
  - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 本讲我们仅从偏序的角度去定义格，并研究其中基于偏序关系的若干基本运算

偏序关系与格（续）

- 格作为偏序集的定义：

定义： 设$(S,\preccurlyeq)$是偏序集，如果$\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$都有最小上界和最大下界，则称S关于偏序$\preccurlyeq$作成一个格.

由于最小上界和最大下界的惟一性，可以把求$\{x,y\}$的最小上界和最大下界看成x与y的二元运算$\vee$和$\wedge$，即$x\vee y$和$x\wedge y$分别表示x与y的最小上界和最大下界.

注意：本章中出现的$\vee$和$\wedge$符号只代表格中的运算，而不再有其他的含义.

偏序关系与格（续）

2．格的实例

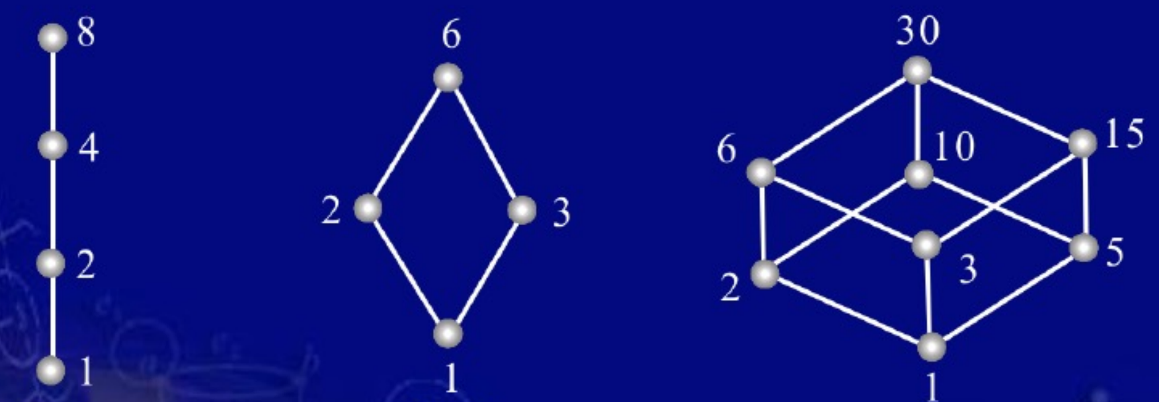
例　设 n 是正整数，S_n 是 n 的正因子的集合.

D 为整除关系，则偏序集 (S_n,D) 构成格.

$\forall x,y \in S_n$，$x \vee y$ 是 $\mathrm{lcm}(x,y)$，即 x 与 y 的最小公倍数.

$x \wedge y$ 是 $\gcd(x,y)$，即 x 与 y 的最大公约数.

下图给出了格 (S_8,D)，(S_6,D) 和 (S_{30},D).



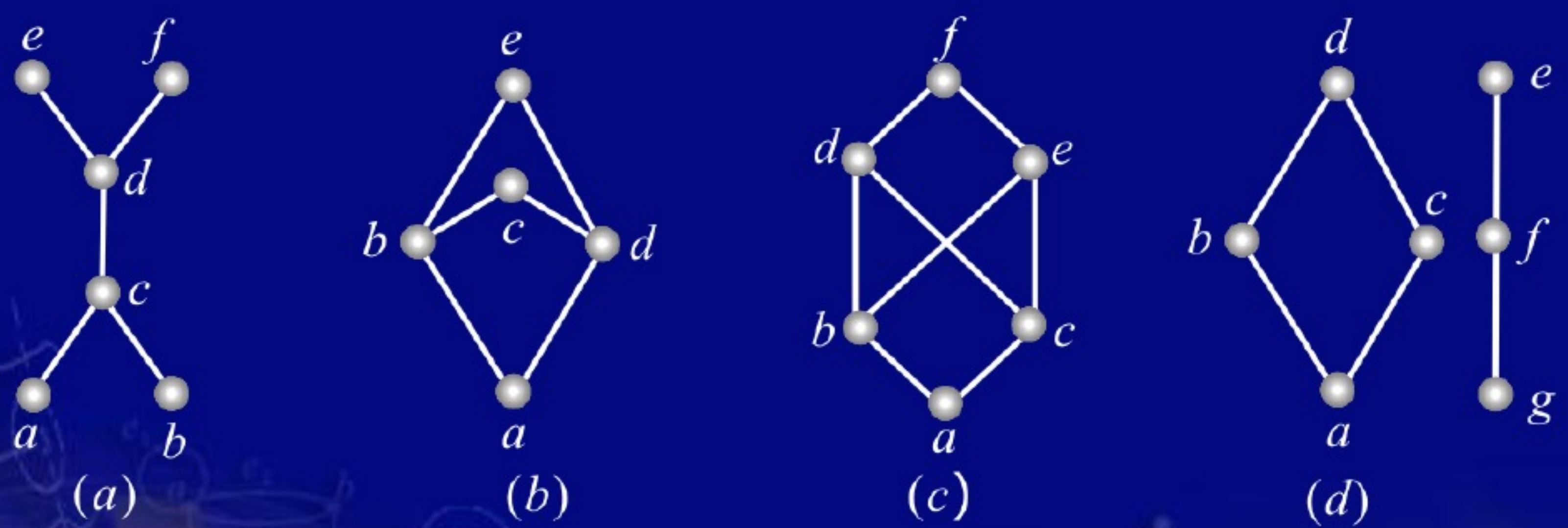
(S_8,D)　　(S_6,D)　　(S_{30},D)

例　判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

（1）$(P(B), \subseteq)$，其中 $P(B)$ 是集合 B 的幂集.

（2）$(Z, \leq)$，其中 Z 是整数集，$\leq$ 为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



格的对偶原理

对偶原理

(1) 对偶命题

定义 ： 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题.

例如, 在格中令

f 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$,

f^* 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

格的对偶原理（续）

(2) 格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号$=,\preccurlyeq,\succcurlyeq,\vee$和$\wedge$等的命题.

若 f 对一切格为真，则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

例如，如果对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\ a \wedge b \preccurlyeq a$$

那么对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\ a \vee b \succcurlyeq a$$

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 9.6 节
- 课后习题：
  - Problem Set 15
- 提交时间：12月7日