习题课

内容提要

- ❑ 偏序与偏序格
- ❑ 偏序格与代数格
- ❑ 布尔代数引论
- ❑ 图论导引

讲义结构

我们会分章节来讲解习题，穿插着一些重要的知识点，并且对每一次作业的情况做一些简单的评价，如果我们认为还有需要补充的习题，会补充讲一些简单的习题.

偏序与偏序格

作业选讲

第 15 次作业，大部分的题目都比较基础，只需要掌握好基本概念，细心一些就可以写出，不过需要注意的就是证明题的证明逻辑需要表达的更加流畅一些. 注重证明需要**强调重点**，将证明过程中最重要的思想表达清楚，这一点在最后的**期末考试**的答题中是十分重要的.

问题 0.1 证明：一个有穷偏序集可以从它的覆盖关系重新构造出来。提示：证明偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包.

证明 设 $(S,\preceq)$ 是一个有穷偏序集，需要说明的就是这个有穷偏序集合是它的覆盖关系的自反传递闭包，需要证明两个方向:[1]

1. 对于 $(S,\preceq)$ 中的任意一对元素 (a,b)，都属于它的覆盖关系的自反传递闭包
2. 对于覆盖关系的自反传递闭包中的任意一对元素 (a,b) 都属于 $(S,\preceq)$.

首先证明1.，$\forall(a,b)\in(S,\preceq)$

- 若 $a=b$，则显然 $(a,a)=(a,b)$ 属于它的覆盖关系的自反传递闭包.
- 若 $a\prec b$，且不存在 z，使得 $a\prec z\prec b$，由覆盖关系的定义显然 (a,b) 属于它的覆盖关系的自反传递闭包.
- 若 $a\prec b$，且存在一系列的元素 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 使得 $a\prec a_1\prec a_2\prec\cdots\prec a_n\prec b$，那么显然由这样的传递性可以知道,$(a,b)$ 属于它的覆盖关系的自反传递闭包.

综上，我们证明了1.成立.

下面我们再来证明2.，对于覆盖关系的自反传递闭包中的任意一对元素 (a,b).

- 若 $a=b$，则 $(a,a)=(a,b)\in(S,\preceq)$ 是显然的.
- 若 $a\prec b$，也就是 b 对 a 有覆盖关系的时候，根据定义，显然 $(a,b)\in(S,\preceq)$.
- 若 $a\prec a_1\prec a_2\prec\cdots\prec a_n\prec b$，因为 $\preceq$ 具有传递性，所以 $(a,b)\in(S,\preceq)$.

也就是2.也成立，故而我们证明了上面命题的正确性. Q.E.D.

问题 0.2 证明：一个格的每个有限非空子集有最小上界和最大下界. [2]

证明 基本思路，对于只有一个元素的格，这个结论显然成立，两个也不难推出，考虑使用数学归纳法.

基本情况：当格的子集取为 $\{x\}$，也就是只有一个元素的情况的时候，显然成立，且 $\mathrm{lub}(\{x\})=x,\mathrm{glb}(\{x\})=x$.

[1]这里需要注意的是，证明两个集合相等一定要从两个方向入手!

[2]请注意区分格和全序集之间的关系，格不一定是全序集!

递归步骤: 假设对于一个格中的 k 个元素的集合, 存在最小上界和最大下界, 现在证明 $k+1$ 个元素的集合也成立.

假设 $S=S'\cup x, S'$ 中含有 k 个元素. 因为 k 个元素的集合, 上述结论成立, 不妨设 $\text{lub}(S')=a, \text{glb}(S')=b$. 因为 a,x 均为格中的元素, 所以他们两个之间存在最小上界 $m=\text{lub}(a,x)$, 这说明 $a\preceq m$. 从而 $\forall w\in S', w\preceq m$, 也就是说 m 是 S 的上界.

下面只需要说明 m 是 S 的最小上界即可, 假设存在一个元素 $n, n\preceq m$, 且 n 是 S 的最小上界, 因为 a 是 S' 的最小上界, 那么 $a\preceq n, x\preceq n$, 也就是 $\text{lub}(a,x)=m\preceq n$, 从而得到 $m=n$, 推出 m 是最小上界.

同样的, 最大下界的情况类似可以证明, 综上我们得到格中的每一个有限非空子集都有最小上界和最大下界.
Q.E.D.

补充习题

问题 0.3 设 L 为格, $\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in L$, 如果 $a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$, 证明: $a_1=a_2=\cdots=a_n$.
证明 对 $\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in L$,

$$a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n\leq a_i\leq a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$$

又因为两边相等, 推出

$$a_1=a_2=\cdots=a_n.$$

Q.E.D.

格中常用的不等式

- 偏序关系的自反性: $a\preceq a$
- 偏序关系的传递性: $a\preceq b, b\preceq c, \Rightarrow a\preceq c$
- 下界定义: $a\wedge b\preceq a, a\wedge b\preceq b$
- 上界定义: $b\preceq a$ 且 $c\preceq a\Rightarrow b\vee c\preceq a$
- 保序性: $a\preceq b$ 且 $c\preceq d\Rightarrow a\wedge c\preceq b\wedge d$ 且 $a\vee c\preceq b\vee d$

偏序格与代数格

作业选讲

第 16 次作业整体属于简单的程度, 大部分同学都是全对, 只要对课程 PPT 上的内容比较熟悉就没有问题.
问题 0.4 这一次作业没什么好讲的.

布尔代数引论

作业选讲

问题 0.5 设 B_1,B_2,B_3 是布尔代数, 证明: 若 B_1 到 B_2,B_2 到 B_3 均存在同构映射（同态映射且为双射）, 则 B_1 到 B_3 也存在同构映射.[3]
证明 根据题目的假设存在同构映射 $f:B_1\to B_2, g:B_2\to B_3$, 因此 $f\circ g:B_1\to B_3$ 也是双射, 下面只需要说明 $f\circ g$ 是同态映射即可.

[3]不能简单的说一下是双射就完事了, 一定要严格按照定义来!

$\forall x, y \in B_1$,

$$\begin{aligned} f \circ g(x \wedge y) = g(f(x \wedge y)) &= g(f(x) \wedge f(y)) \\ &= g(f(x)) \wedge g(f(y)) \\ &= f \circ g(x) \wedge f \circ g(y) \end{aligned}$$

同理可以说明

$$f \circ g(x \vee y) = f \circ g(x) \vee f \circ g(y)$$

而

$$f \circ g(x') = g(f(x')) = g(f(x)') = g(f(x))' = f \circ g(x)'$$

因此 $f \circ g$ 是 B_1 到 B_3 的同态映射, 又因为 $f \circ g$ 是双射, 所以 $f \circ g$ 是同构映射. Q.E.D.

问题 0.6 在布尔代数中，对一个包含若干运算（不一定为二元运算）的集合 S，若任意 n 元布尔函数都可以使用仅包含 S 中运算的 n 元布尔表达式表出，称 S 是“完备集”。请证明：

1. $S = \{\wedge, \vee, '\}$ 是完备集, 其中 $'$ 是补运算.
2. $S = \{\wedge, \vee\}$ 不是完备集.
3. 存在基数为 1 的完备集.

证明

1. 任意 n 元布尔函数都可以写出其真值表, 对于真值表中每一个使得函数值为 1 的行, 用 $'$ 来修饰这一行中取值为 0 的变量, 再用 $\wedge$ 将所有变量连接, 可以得到一条表达式, 将所有这样的表达式用 $\vee$ 连接, 即可得到与原布尔函数等价的表达式 (CNF, 析取范式), 也就是说任意布尔函数都可以用仅包含 S 中运算的 n 元布尔表达式表达出, 也就是说 $S = \{\wedge, \vee, '\}$ 是完备集.
2. 只需要举出一个布尔函数不能被集合 S 所表达的反例即可, 令一元布尔函数 $f(x) = 0$, 显然这样的函数 $S = \{\wedge, \vee\}$ 无法表达, 故而它不是完备集.
3. 这里通过说理的方法很难说清楚, 最直接的方法就是举出一个例子来, 同学们可以在网上找到很多这样的例子, 下面我们只举一个, $\downarrow$ (或非,NOR)

$$\begin{aligned} 0 \downarrow 0 &= 1 \\ 0 \downarrow 1 &= 0 \\ 1 \downarrow 0 &= 0 \\ 1 \downarrow 1 &= 0 \end{aligned}$$

容易验证

$$\begin{aligned} x' &= x \downarrow x \\ x \wedge y &= (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) \\ x \vee y &= (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) \end{aligned}$$

所以存在这样的基数为 1 的完备集.

Q.E.D.

图论导引

作业选讲

第 18 次作业分 A,B, 总得来说 A,B 都比较简单. 但是有的同学在基本概念上理解有错误.

问题 0.7 令 G 是至少有两个顶点的无向图, 证明或反驳:

(a) 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加

(b) 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少

证明

(a) 成立.

假设原图的平均度数为 θ, 顶点数为 n, 最大度为 x, 修改后的图平均度为 θ', 顶点数为 $n-1$, 去掉度最大的顶点之后, 因为一条边关联两个顶点, 所以原图损失了 $2x$ 的总度数, 也就是

$$(n-1)\theta' + 2x = n\theta$$

推出

$$\theta - \theta' = \frac{2x-\theta}{n-1}$$

因为 $2x-\theta \geq 0$, 所以 $\theta - \theta' \geq 0$, 原图的平均度不会增加.

(b) 不成立

对于一个完全图, 所有顶点的度数都是 n-1, 删掉一个顶点之后, 其余的顶点的度数都变成 n-2, 平均度减少.

问题 0.8 证明: 不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图, 其边数 m 一定满足 $m \leq n^2/4$.[4]

证明 取一个度最大的顶点 u,$N(u)$ 中顶点两两之间无边 (否则出现三角形), 且顶点的度数不会超过 $n-\Delta(G)$. 于是:

$$\begin{aligned}
m = \sum_{v\in V(G)} \deg(v) &= 1\cdot\Delta(G) + \sum_{v\in N(u)} \deg(v) + \sum_{v\in (V(G)\setminus N(u))} \deg(v) \\
&\leq \Delta(G) + \Delta(G)(n-\Delta(G)) + (n-\Delta(G)-1)\Delta(G) \\
&= 2(n-\Delta(G))\Delta(G) \\
&\leq 2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

问题 0.9 G 的围长是指 G 中最短回路的长, 若 G 没有回路, 则定义 G 的围长为 ∞.

证明: 围长为 4 的 k 正则图至少有 2k 个顶点, 且恰有 2k 个顶点这样的图 (同构意义下), 只有一个.

证明 设 u, v 是 G 中相邻顶点, $N(u), N(v)$ 分别代表 u, v 的邻居构成的集合, 则 $N(u)\cap N(v) = \emptyset$, 否则围长为 3, 产生矛盾, 因此 G 至少有 $2(k-1)+2$ 个顶点.

因为 G 是 k 正则图, 每个顶点应该连接 k 个顶点, 并且 $N(u), N(v)$ 的内部不能相连, 否则围长为 3, 因此只能将 $N(u)$ / $\{v\}$ 中的 k-1 个顶点与 $N(v)$ / $\{u\}$ 中的 k-1 个顶点相连, 这样每个顶点的度数都是 k, 这样就可以得到 2k 个顶点的围长为 4 的图, 此时 $G-(u,v)$ 是一个完全二部图, 这样的图 (同构意义下) 只有一个, 加上 (u,v) 后仍然只有一个. Q.E.D.

[4]这里要注意, 删去一个度数为 x 的顶点, 总的度数减少掉 $2x$