§8.线性空间的同构

一、同构映射的定义

二、同构的有关结论

引入

我们知道，在数域P上的n维线性空间V中取定一组基后，V中每一个向量 α 有唯一确定的坐标 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，向量的坐标是P上的n元数组，因此属于P^n. 这样一来，取定了V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 对于V中每一个向量 α，令 α 在这组基下的坐标 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 α 对应，就得到V到P^n的一个单射

$$\sigma: \ V \to P^n, \ \alpha \mapsto (a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

反过来，对于P^n中的任一元素 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $\alpha=\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n$ 是V中唯一确定的元素，并且 $\sigma(\alpha)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 即$\sigma$ 也是满射.
因此，σ 是V到P^n的一一对应.

这个对应的重要性表现在它与运算的关系上.

任取 $\alpha, \beta \in V$,设

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n, \quad \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n$$

则 $\sigma(\alpha) = (a_1, a_2 \cdots, a_n)$, $\quad \sigma(\beta) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

从而 $\sigma(\alpha + \beta) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \cdots, a_n + b_n)$

$$= (a_1, a_2 \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$$

$$\sigma(k\alpha) = (ka_1, ka_2 \cdots, ka_n) \qquad \forall k \in P$$

$$= k(a_1, a_2 \cdots, a_n) = k\sigma(\alpha),$$

这就是说，V中的向量用P^n坐中的坐标表示后，它们的运算可以归结为它们的坐标的运算.

一、同构映射的定义

设V,V'都是数域P上的线性空间，如果映射

σ: $V \to V'$ 具有以下性质：

i) σ为双射

ii) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta), \quad \forall \alpha,\beta \in V$

iii) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha), \quad \forall k \in P, \forall \alpha \in V$

则称σ是V到V'的一个**同构映射**，并称线性空间

V与V'**同构**，记作 $V \cong V'$.

例1、V为数域P上的n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

为V的一组基，则前面V到P^n的一一对应

$$\sigma:\ V\to P^n,$$

$$\alpha\mapsto(a_1,a_2,\cdots,a_n)\qquad\forall\alpha\in V$$

这里$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$**为**α**在**$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$**基下的坐标，**

就是一个V到P^n**的同构映射，所以** $V\cong P^n$.

二、同构的有关结论

1、数域P上任一n维线性空间都与P^n同构.

2、设V, V'是数域P上的线性空间，σ是V到V'的同构映射，则有

1） $\sigma(0)=0,\ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha).$

2） $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)$

$$=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r),$$

$$\alpha_i\in V,\ \ k_i\in P,\quad i=1,2,\cdots,r.$$

3）V中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关（线性无关）的充要条件是它们的象 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关（线性无关）.

4） $\dim V=\dim V'$.

5）σ: $V\to V'$ 的逆映射 σ^{-1} 为 V'到V 的同构映射.

6） 若W是V的子空间，则W在 σ 下的象集

$$\sigma(W)=\{\sigma(\alpha)\,|\,\alpha\in W\}$$

是的 V'子空间，且 $\dim W=\dim\sigma(W)$.

证： 1）在同构映射定义的条件iii) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

中分别取 $k=0$与$k=-1$, 即得

$$\sigma(0)=0,\ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$$

2）这是同构映射定义中条件ii)与iii)结合的结果.

3）因为由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

可得 $k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$

反过来，由 $k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$

可得 $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=0.$

而 σ 是一一对应，只有 $\sigma(0)=0.$

所以可得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0.$

因此，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关（线性无关）

$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关（线性无关）.

4）设 $\dim V=n$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V 中任意一组基.

由2）3）知，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 为 σ 的一组基.

所以 $\dim V'=n=\dim V.$

5）首先 $\sigma^{-1}: V' \to V$ 是1－1对应，并且

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = I_{V'}, \quad \sigma^{-1} \circ \sigma = I_V, \quad \text{I为恒等变换.}$$

任取 $\alpha', \beta' \in V'$， 由于σ 是同构映射，有

$$\sigma(\sigma^{-1}(\alpha' + \beta')) = \sigma \circ \sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \alpha' + \beta'$$

$$= \sigma \circ \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma \circ \sigma^{-1}(\beta') = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha')) + \sigma(\sigma^{-1}(\beta'))$$

$$= \sigma(\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta'))$$

再由 σ 是单射，有 $\sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta')$

同理，有 $\sigma^{-1}(k\alpha') = k\sigma^{-1}(\alpha'), \quad \forall \alpha' \in V', \forall k \in P$

所以，σ^{-1}为 V'到V 的同构映射.

6）首先，$\sigma(W)\subseteq\sigma(V)=V'$

且$\because$ $0=\sigma(0)\in\sigma(W)$，$\therefore$ $\sigma(W)\neq\varnothing$

其次，对$\forall\alpha',\beta'\in\sigma(W)$，有$W$中的向量 α,β

使 $\sigma(\alpha)=\alpha',\sigma(\beta)=\beta'.$

于是有 $\alpha'+\beta'=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\sigma(\alpha+\beta)$

$$k\alpha'=k\sigma(\alpha)=\sigma(k\alpha),\ \forall k\in P$$

由于W为子空间，所以 $\alpha+\beta\in W$，$k\alpha\in W.$

从而有 $\alpha'+\beta'\in\sigma(W)$，$k\alpha'\in\sigma(W).$

所以 $\sigma(W)$ 是 V' 的子空间.

显然，σ 也为W到 $\sigma(W)$ 的同构映射，即

$$W \cong \sigma(W)$$

故 $\dim W = \dim \sigma(W).$

注

由2可知，同构映射保持零元、负元、线性组合及线性相关性，并且同构映射把子空间映成子空间.

3、两个同构映射的乘积还是同构映射.

证：设 σ：$V\to V'$，$\tau:V'\to V''$ 为线性空间的同构映射，则乘积 $\tau\circ\sigma$ 是 V 到 V'' 的1－1对应.

任取 α，$\beta\in V$，$k\in P$，有

$$\tau\circ\sigma(\alpha+\beta)=\tau\big(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)\big)$$

$$=\tau\big(\sigma(\alpha)\big)+\tau\big(\sigma(\beta)\big)=\tau\circ\sigma(\alpha)+\tau\circ\sigma(\beta)$$

$$\tau\circ\sigma(k\alpha)=\tau\big(\sigma(k\alpha)\big)=\tau\big(k\sigma(\alpha)\big)$$

$$=k\tau\big(\sigma(\alpha)\big)=k\tau\circ\sigma(\alpha)$$

所以，乘积 $\tau\circ\sigma$ 是 V 到 V'' 的同构映射.

注

同构关系具有：

反身性： $V \overset{I_V}{\cong} V$

对称性： $V \overset{\sigma}{\cong} V' \Rightarrow V' \overset{\sigma^{-1}}{\cong} V$

传递性：$V \overset{\sigma}{\cong} V'$，$V' \overset{\tau}{\cong} V'' \Rightarrow V \overset{\tau\circ\sigma}{\cong} V''$

4、数域P上的两个有限维线性空间 V_1, V_2同构

$$\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

证："$\Rightarrow$" 若 $V_1 \cong V_2$,由性质2之4）即得

$$\dim V_1 = \dim V_2.$$

"$\Leftarrow$" 若 $\dim V_1 = \dim V_2$,

由性质1，有 $V_1 \cong P^n$，$V_2 \cong P^n$

$$\therefore V_1 \cong V_2.$$

例2、把复数域看成实数域R上的线性空间，

证明：$C \cong R^2$

证：证维数相等.

首先，$\forall x \in C$，x 可表成 $x = a1 + bi$，$a, b \in R$

其次，若 $a1 + bi = 0$，则 $a = b = 0$.

所以，1，i 为C的一组基，$\dim C = 2$.

又，$\dim R^2 = 2$

所以，$\dim C = \dim R^2$. 故，$V_1 \cong V_2$.

例3、全体正实数R^+关于加法$\oplus$与数量乘法$\circ$：

$$a \oplus b = ab,\quad k \circ a = a^k$$

作成实数域R上的线性空间.

把实数域R看成是自身上的线性空间.

证明：$R^+ \cong R$，并写出一个同构映射.

证：作对应 $\sigma: R^+ \to R,\ \sigma(a) = \ln a,\ \forall a \in R^+$

易证σ为R^+到R的1－1对应.

且对 $\forall a, b \in R^+,\ \forall k \in R$，有

$$\sigma(a \oplus b) = \sigma(ab) = \ln ab = \ln a + \ln b = \sigma(a) + \sigma(b)$$

$$\sigma(k \circ a) = \sigma(a^k) = \ln a^k = k \ln a = k\sigma(a)$$

所以，σ 为R^+到R 的同构映射.　故 $R^+ \cong R$.

方法二：作对应$\tau : R \to R^+, \tau(x) = e^x$，$\forall x \in R$

易证：τ 为R到R^+ 的1－1对应，而且也为同构映射.

事实上，τ 为σ的逆同构映射.