§6 实对称矩阵的标准形

一、实对称矩阵的一些性质

二、对称变换

三、实对称矩阵可正交相似于实对角矩阵

四、实二次型的主轴问题

一、实对称矩阵的一些性质

引理1 设A是实对称矩阵，则A的特征值皆为实数.

证： 设 λ_0 是A的任意一个特征值，则有非零向量

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

满足 $A\xi = \lambda_0 \xi.$

令 $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$， 其中 $\bar{x}_i$ 为 x_i 的共轭复数，

又由A实对称，有 $\bar{A} = A,\ A' = A,\quad \overline{A\xi} = A\bar{\xi}$

$$\therefore\quad \lambda_0 \bar{\xi}' \xi = \bar{\xi}' (\lambda_0 \xi) = \bar{\xi}' (A\xi) = (\bar{\xi}' A)\xi$$

$$= (\bar{\xi}' A')\xi = (A\bar{\xi})' \xi = (\overline{A\xi})' \xi$$

$$= (\overline{\lambda_0 \xi})' \xi = (\bar{\lambda}_0 \bar{\xi})' \xi = \bar{\lambda}_0 \bar{\xi}' \xi$$

考察等式，$\lambda_0 \overline{\xi}' \xi = \overline{\lambda}_0 \overline{\xi}' \xi$

由于ξ是非零复向量，必有

$$\overline{\xi}' \xi = \overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \cdots\cdots + \overline{x}_n x_n \neq 0$$

故 $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0$. $\quad \therefore \quad \lambda_0 \in R$.

注记：若A为实对称矩阵，则其特征值都是实数，故必存在对应的实特征向量.

引理2 设A是实对称矩阵，在n维欧氏空间R^n上定义一个线性变换σ如下：

$$\sigma(\alpha) = A\alpha, \qquad \forall \alpha \in R^n$$

则对任意$\alpha,\beta \in R^n$，有

$$\big(\sigma(\alpha),\beta\big)=\big(\alpha,\sigma(\beta)\big),$$

或

$$\beta'(A\alpha)=\alpha'(A\beta).$$

证：取R^n的一组标准正交基，

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

则σ在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为A，即

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)A$$

任取 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in R^n,$

即 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_n\varepsilon_n \triangleq (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)x,$

$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + ... + y_n\varepsilon_n \triangleq (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)y,$

于是

$\sigma(\alpha) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)Ax,$

$= (\alpha, \sigma(\beta))$

$\sigma(\beta) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)y = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)Ay,$

又 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$是标准正交基,

$\therefore \ (\sigma(\alpha), \beta) = (Ax)^T y = (x^T A^T) y = x^T Ay$

$= x^T (Ay)$

又注意到在R^n中 $\alpha = x,\quad \beta = y,$

即有 $\beta'(A\alpha) = \big(\beta, \sigma(\alpha)\big) = \big(\sigma(\alpha), \beta\big)$

$$= \big(\alpha, \sigma(\beta)\big) = \alpha'(A\beta).$$

二、对称变换

1. 定义

设σ为欧氏空间V中的线性变换，如果满足

$$\big(\sigma(\alpha), \beta\big) = \big(\alpha, \sigma(\beta)\big), \qquad \forall \alpha, \beta \in V,$$

则称σ为**对称变换**.

2. 基本性质

1）n维欧氏空间V的对称变换与n级实对称矩阵在标准正交基下是相互确定的：

① 实对称矩阵可确定一个对称变换.

事实上，设 $A \in R^{n\times n}$, $A' = A$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ **为V的一组标准正交基. 定义V的线性变换** σ：

$$\sigma(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)A$$

则 σ **即为V的对称变换.**

② 对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵.

事实上，设 σ为n维欧氏空间V上的对称变换，

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$**为V的一组标准正交基，** $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

为 σ 在这组基下的矩阵，即

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

或

$$\sigma(\varepsilon_i)=a_{1i}\varepsilon_1+a_{2i}\varepsilon_2+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\varepsilon_k,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

于是 $\left(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\varepsilon_k,\varepsilon_j\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(\varepsilon_k,\varepsilon_j)$

$$=a_{ji}(\varepsilon_j,\varepsilon_j)=a_{ji}$$

$$\left(\varepsilon_i,\sigma(\varepsilon_j)\right)=\left(\varepsilon_i,\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\varepsilon_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(\varepsilon_i,\varepsilon_k)$$

$$=a_{ij}(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=a_{ij}$$

由σ是对称变换，有 $\left(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j\right)=\left(\varepsilon_i,\sigma(\varepsilon_j)\right)$

即 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji},\qquad i,j=1,2,\cdots\cdots n,$

所以A为对称矩阵.

2）（引理3）对称变换的不变子空间的正交补也是它的不变子空间.

证明：设 σ 是对称变换，W为 σ 的不变子空间.

对 $\forall \alpha \in W^{\perp}$，要证 $\sigma(\alpha) \in W^{\perp}$，即证 $\sigma(\alpha) \perp W$.

任取 $\beta \in W$， 由W是σ－子空间，有 $\sigma(\beta) \in W$，

因此 $\left(\sigma(\alpha), \beta\right) = \left(\alpha, \sigma(\beta)\right) = 0$

即 $\sigma(\alpha) \perp W$， $\therefore$ $\sigma(\alpha) \in W^{\perp}$.

故 $W^{\perp}$ 也为 σ 的不变子空间.

三、实对称矩阵的正交相似对角化

1. （引理4）实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的.

证：设实对称矩阵A为 R^n上对称变换 σ 的在标准正交基下的矩阵， λ,μ 是A的两个不同特征值，α,β 分别是属于 λ,μ 的特征向量.

则 $\sigma(\alpha)=\lambda\alpha=A\alpha,\quad \sigma(\beta)=\mu\beta=A\beta,$

由 $\left(\sigma(\alpha),\beta\right)=\left(\alpha,\sigma(\beta)\right)$

有 $(\lambda\alpha,\beta)=(\alpha,\mu\beta)$,

即 $\lambda(\alpha,\beta)=\mu(\alpha,\beta)$.

又 $\lambda\neq\mu$, $\therefore$ $(\alpha,\beta)=0$

即 α,β 正交.

2.

(定理7) 对 $A\in R^{n\times n}$, $A'=A$, 总有正交矩阵T，使

$$T'AT=T^{-1}AT=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

证：设A为 R^n上对称变换 σ 在标准正交基下的矩阵.

由实对称矩阵和对称变换互相确定的关系，只需证

σ有n个特征向量作成的标准正交基即可.

对 R^n 的维数n用归纳法.

n=1时，结论是显然的.

假设n－1时结论成立，对R^n, 设其上的对称变换 σ

有一单位特征向量 α_1，其相应的特征值为λ_1 ，即

$$\sigma(\alpha_1)=\lambda_1\alpha_1, \qquad |\alpha_1|=1$$

设子空间 $L(\alpha_1)=W$， 显然W是 $\sigma-$子空间，

则 $W^{\perp}$ 也是 $\sigma-$子空间，且

$$W\oplus W^{\perp}=R^{n},\qquad \dim W^{\perp}=n-1$$

又对 $\forall \alpha,\beta\in W^{\perp}$， 有

$$\left(\sigma|_{W^{\perp}}(\alpha),\beta\right)=\left(\sigma(\alpha),\beta\right)=\left(\alpha,\sigma(\beta)\right)=\left(\alpha,\sigma|_{W^{\perp}}(\beta)\right)$$

所以 $\sigma|_{W^{\perp}}$ 是 $W^{\perp}$ 上的对称变换.

由归纳假设知 $\sigma|_{W^{\perp}}$ 有n－1 个特征向量 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$

构成 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 就是 R^n 的一组标准正交基，

又都是 R^n 的特征向量．　即结论成立．

3．实对称矩阵正交相似实对角矩阵步骤

设　$A\in R^{n\times n}$，　$A'=A$

(i) 求出A的所有不同的特征值：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in R$,

其重数 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 必满足 $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ ；

(ii) 对每个 λ_i ，解齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)X = 0$$

求出它的一个基础解系： $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in}$

它是A的属于特征值λ_i的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基.

把它们按 *Schmidt* 正交化过程化成 V_{λ_i} 的一组标准

正交基 $\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{in}$.

(iii) 因为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_r$ 互不相同，所以 $V_{\lambda_i}\perp V_{\lambda_j}$ $(i\neq j)$

且 $$\sum_{i=1}^{r}\dim W_{\lambda_i}=n\,,$$

$\therefore$ $\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1n_1},\cdots\cdots,\eta_{r1},\eta_{r2},\cdots,\eta_{rn_r}$ 就是V的一组

标准正交基.

将 $\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1n_1},\cdots\cdots,\eta_{r1},\eta_{r2},\cdots,\eta_{rn_r}$ 的分量依次作

矩阵T的第1，2，…，n列， 则T是正交矩阵，且

使 $T'AT = T^{-1}AT$ 为对角形.

例1．设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一正交矩阵T使 $T'AT$ 成对角形.

解：先求A的特征值.

$$\because\ |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

A的特征值为 $\lambda_1 = 1$（三重），$\lambda_2 = 3$.

其次求属于$\lambda_1=1$ 的特征向量，即求解方程组

$$(E-A)X=0$$

$$\because\ E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得其基础解

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,1,0,0)\\ \alpha_2=(1,0,1,0)\\ \alpha_3=(-1,0,0,1)\end{cases}$$

把它正交化，得

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 = (1,1,0,0) \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0) \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = (-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1) \end{cases}$$

再单位化，得

$$\begin{cases} \eta_1 = \dfrac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \\ \eta_2 = \dfrac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = (\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, 0) \\ \eta_3 = \dfrac{1}{|\beta_3|}\beta_3 = (-\dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{3}{\sqrt{12}}) \end{cases}$$

这是特征值 $\lambda_1 = 1$ (三重)的三个单位正交特征向量，也即是特征子空间 V_{λ_1} 的一组标准正交基.

再求属于$\lambda_2=-3$ 的特征向量，即解方程组

$$\left(-3E-A\right)X=0$$

$$\because\ -3E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&1\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\1&-1&-1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-4&-4&-4&-4\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\1&-1&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&2&0\\0&2&-2&0\\0&-2&0&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得其基础解 $\alpha_4=(1,-1,-1,1),$

再单位化得 $\eta_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

这样 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 构成 R^4 的一组标准正交基，它们

都是A的特征向量，正交矩阵

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

使得

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}.$$

注：

① 对于实对称矩阵A，使 $T'AT=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 成立的正交矩阵不是唯一的． 而且对于正交矩阵T,

还可进一步要求 $|T|=1.$

事实上，如果由上述方法求得的正交矩阵T

$$T'AT = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \quad |T| = -1$$

取正交矩阵 $S = diag(-1, 1, \cdots, 1)$,

则 $T_1 = TS$ 是正交矩阵且 $|T_1| = |T||S| = 1$,

同时有 $T_1' A T_1 = (TS)' A (TS) = S'(T'AT)S$

$$= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

② 如果不计较主对角线上元素的排列的次序，与实对称矩阵A正交相似的对角矩阵是唯一确定的.

③ 因为正交相似的矩阵也是互相合同的，所以可用实对称矩阵的特征值的性质刻画其正定性：

设 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$ 为实对称矩阵A的所有特征值

(i) A为正定的 $\Leftrightarrow \lambda_n > 0$

(ii) A为半正定的 $\Leftrightarrow \lambda_n \ge 0$

(iii) A为负定（半负定）的 $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0$ $(\lambda_1 \le 0)$

(iv) A为不定的 $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0$ 且 $\lambda_n < 0$

④ 实对称矩阵A的正、负惯性指数分别为正、负特征值的个数（重根按重数计）.

n－秩(A)是0为A的特征值的重数.

n级实对称矩阵A的特征值和特征向量的性质：

1. A的所有特征值都是实数；其各特征值的代数重数和几何重数相等；

2.A的相异特征值对应的特征向量是正交的，A一定存在n个标准正交特征向量组成n维实空间的一组基底，即A的特征向量系构成一个完备系.

四、实二次型的主轴问题

1．解析几何中主轴问题

将 R^2上有心 二次曲线或 R^3上有心二次曲面通过坐标的旋转化成标准形，这个变换的矩阵是正交矩阵.

2．任意n元实二次型的正交线性替换化标准形

1）正交线性替换

如果线性替换 $x = Cy$

的矩阵C是正交矩阵，则称之为**正交线性替换**.

2）任一n元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j,\quad \alpha_{ij}=\alpha_{ji},\quad \forall i,j$$

都可以通过正交的线性替换 $x=Cy$ 变成平方和，

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

由于$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x)=x^TAx$,

而$x=Cy\Rightarrow f(x)=y^TC^TACy$,故取$A$的$n$个标准正交特征向量

作为C的列向量，就使得$C^TAC=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

则$f(x)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$

其中平方项的系数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$就是$A$的特征值.

例2、在直角坐标系下，二次曲面的一般方程是

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

$$+2b_1x+2b_2y+2b_3z+d=0 \qquad （1）$$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

则（1）式可以写成

$$X'AX+2B'X+d=0. \qquad （2）$$

对（2）中的 $A^{'} = A \in R^{3\times 3}$ 有正交矩阵C（且$\left|C\right| = 1$）

确定的坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ 或 } X = CX_1$$

$$C^{'}AC = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

这样由（2）知道经过由 $X = CX_1$ 的坐标轴旋转，

曲面（1）的方程化成

$$\lambda_1 x_1^{\ 2} + \lambda_2 y_1^{\ 2} + \lambda_3 z_1^{\ 2} + 2b_1^{\ *} x_1 + 2b_2^{\ *} y_1 + 2b_3^{\ *} z_1 + d = 0$$

其中 $\left(b_1^*, b_2^*, b_3^*\right) = \left(b_1, b_2, b_3\right) C$

这时，再按 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是否为零，作适当的坐标轴的

平移或旋转可以将曲面的方程化成标准方程.

如当 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全不为零时，作平移

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \dfrac{b_1^*}{\lambda_1} \\ y_1 = y_2 - \dfrac{b_2^*}{\lambda_2} \\ z_1 = z_2 - \dfrac{b_3^*}{\lambda_3} \end{cases}$$

曲面方程（1）可以化为

$$\lambda_1 x_2{}^2 + \lambda_2 y_2{}^2 + \lambda_3 z_2{}^2 + d^* = 0,$$

其中 $d^* = d - \frac{b_1{}^*}{\lambda_1} - \frac{b_2{}^*}{\lambda_2} - \frac{b_3{}^*}{\lambda_3}.$