# Ch 1-4 组合计数

# 回顾前一次课

- 古典概型：试验结果只有有限种可能、每种结果发生的可能性相同
  - 计数原理、排列组合
  - 各种例题：产品抽样、生日驳论、抽签、匹配
- 几何概型：样本空间无限可测、基本事件等可能性
  - 测度计算（长度、面积、体积）、蒙特卡洛采样
  - 例题：公交车规划、见面问题、贝特朗奇论

# 十二重计数

概率的计算往往与组合计数密切相关, 且组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用

十二重计数 ［**The twelvefold way, G.-C. Rota(1932-1999)**］

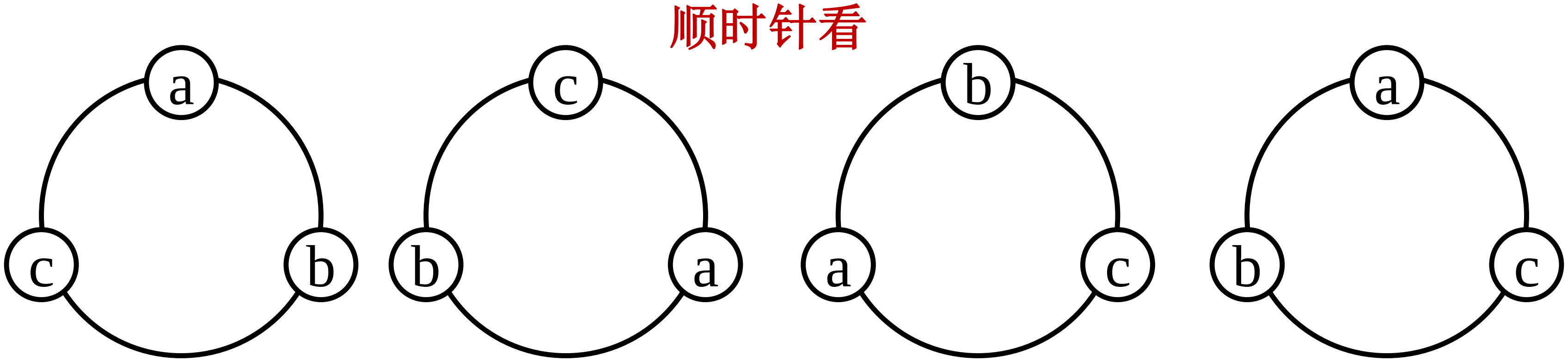
问题简述：将$n$只球放入$m$个箱子, 有多少种不同的放法

| $n$只球 | $m$个箱子 | 无任何限制 | 每个箱子至多1球 | 每个箱子至少1球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | ? | ? | ? |
| 相同 | 不同 | ? | ? | ? |
| 不同 | 相同 | ? | ? | ? |
| 相同 | 相同 | ? | ? | ? |

# 环排列

排列：$n$个不同的元素中无放回取出$r$个元素进行排列, 有$(n)_r$种不同的排法，若$r = n$ 称全排列, 有$n!$种不同的排法

环排列：$n$个不同的元素中无放回地取出$r$个元素排成一个圆环




- 每一个环排列对应于$r$种不同的直线排列
- 不同的环排列的直线排列互不相同

# 环排列

**定义：** 从$n$个不同的元素中无放回地取出$r$个元素排成一个圆环, 有$(n)_r/r$种不同的排法, 称为 **环排列数**

特别地, $n$个不同元素的环排列数为$(n-1)!$.

**例：** 将$n$对夫妻安排在一张圆桌，任何夫妻两人需安排在一起，有多少种不同的安排方法.

# 多重组合

组合：$n$个不同的元素中无放回地取出$r$个元素, 有$\binom{\mathrm{n}}{r}$种

多重组合: 将$n$个不同的元素分成$k$组, 组内元素无顺序关系, 每组分别有$r_1, r_2, \cdots, r_k$个元素, 即$n = r_1 + \cdots + r_k$, 则有

$$\binom{\mathrm{n}}{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \binom{\mathrm{n}}{r_1}\binom{\mathrm{n} - r_1}{r_2}\binom{\mathrm{n} - r_1 - r_2}{r_3}\cdots\binom{r_k}{r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots\, r_k!}$$

种不同的分组方法, 称$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \cdots, \boldsymbol{r_k}}$为 多重组合数

组合数本质上也属于多重组合数

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k} \binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

# 多重排列

多重集：集合中的元素可以重复, 且重复的元素之间不可分辨

例如，多重集 A={1,1,1,2,2,2,3,3,4}

多重集$A$有$k$类不同的元素, 每类元素的个数分别为$r_1, r_2, \cdots r_k$, 即$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$. 将多重集$A$中的所有元素排列成一排

- 从$n$个位置中选取出$r_1$个位置放第一类元素,
- 再从剩下的从$n - r_1$个位置中选取出$r_2$个位置放第二类元素
- …
- 最后$r_k$个位置放第$k$类元素

因此该多重集$A$有

$$\binom{\mathrm{n}}{r_1, r_2, \cdots, r_k}$$

种不同的排列方法, 即多重组合数

# 十二重计数

问题简述：将$n$只球放入$m$个箱子, 有多少种不同的放法

| $n$只球 | $m$个箱子 | 无任何限制 | 每个箱子至多1球 | 每个箱子至少1球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | | | ? |
| 相同 | 不同 | ? | | ? |
| 不同 | 相同 | ? | ? | ? |
| 相同 | 相同 | ? | ? | ? |

# 整数的有序分解

**问题：考虑将$n$只完全相同不可分辨的球放入$m$个不同的箱子**

转化：第一个箱子有$x_1$个球，第二个箱子有$x_2$个球，$\cdots$，第$m$个箱子有$x_m$个球, 其中$x_1, x_2, \cdots, x_m$为非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

$n$只相同的球放入$m$个不同的箱子等价于方程非负的整数解

# 整数的有序分解

**定理：** 方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解的个数为

$$\binom{\mathrm{n} + m - 1}{m - 1}$$

将10只完全相同的球放入3个不同的箱子，有多少种不同的放法

# 整数的有序分解

**推论：**方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的正整数解的个数为

$$\binom{\mathrm{n}-1}{m-1}$$

**练习：**方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ 非负整数解、正整数解的个数

# 例题

在多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?

# 十二重计数

问题简述：将$n$只球放入$m$个箱子, 有多少种不同的放法

| $n$只球 | $m$个箱子 | 无任何限制 | 每个箱子至多1球 | 每个箱子至少1球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | $m^n$ | $(m)_n$ | ? |
| 相同 | 不同 | | $\binom{m}{n}$ | |
| 不同 | 相同 | ? | ? | ? |
| 相同 | 相同 | ? | ? | ? |

# 第二类Stirling数

**问题：考虑将$n$只不同的球放入$m$个完全相同不可分辨的箱子**

**定义：**将$n$个不同的元素分成$m$个非空的子集,不同的划分数称为 **第二类 Stirling 数**, 记为 $S(n,m)$

例：集合{1,2,3}不同的划分数

# 第二类Stirling数

记$S(0,0) = 1, S(n,1) = 1, S(n,n) = 1$

当 $m > n \geq 1$时有$S(n,m) = 0$

**定理:** 对 $n \geq 1, m \geq 1$ 有

$$S(n,m) = mS(n,m) + S(n-1,m-1)$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k = x^n$$

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

# 十二重计数

问题简述：将$n$只球放入$m$个箱子，有多少种不同的放法

| $n$只球 | $m$个箱子 | 无任何限制 | 每个箱子至多1球 | 每个箱子至少1球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | $m^n$ | $(m)_n$ | |
| 相同 | 不同 | $\binom{n+m-1}{m-1}$ | $\binom{m}{n}$ | $\binom{n-1}{m-1}$ |
| 不同 | 相同 | | | |
| 相同 | 相同 | ? | ? | ? |

# 整数的无序分拆

**问题：** 考虑将$n$只相同的球放入$m$个相同的箱子

**组合学表述：** 将正整数$n$划分成$m$个无序的正整数之和

**定义：** 将正整数$n$划分成$m$个无序的正整数之和，不同的划分数记为 $\boldsymbol{p(n,m)}$

例：考虑7的各种无序划分

| | | |
|---|---|---|
| $m=1$ | $7$ | $p(7,1)=1$ |
| $m=2$ | $6+1,\ 5+2,\ 4+3$ | $p(7,2)=3$ |
| $m=3$ | $5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$ | $p(7,3)=4$ |
| $m=4$ | $4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$ | $p(7,4)=3$ |
| $m=5$ | $3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$ | $p(7,5)=2$ |
| $m=6$ | $2+1+1+1+1+1$ | $p(7,6)=1$ |
| $m=7$ | $1+1+1+1+1+1+1$ | $p(7,7)=1$ |

# 整数的无序分拆

**问题：** 将正整数$n$划分成$m$个无序的正整数之和

**问题转化：** 将正整数$n$划分成$m$个无序的正整数之和，等价于

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \text{s.t.} \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 1$$

记$p(0,0) = 1, p(n,1) = 1, p(n,n) = 1$

当 $m > n \geq 1$时有$p(n,m) = 0$

# 递推关系

**定理:** 对 $n \geq 1, m \geq 1$ 有

$$p(n,m) = p(n-1,m-1) + p(n-m,m)$$

$$p(n,m) = \sum_{i=1}^{m} p(n-m,i)$$

# 整数的无序分拆

**性质：**对正整数$n \geq 1$和$m \geq 1$，有

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1} \leqslant p(n,m) \leqslant \frac{1}{m!}\binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}$$

给定$m \geq 1$，当$n$非常大或趋于无穷的极限中有

$$p(n,m) \approx \frac{n^{m-1}}{m!(m-1)!}.$$

# 十二重计数

问题简述：将$n$只球放入$m$个箱子, 有多少种不同的放法

| $n$只球 | $m$个箱子 | 无任何限制 | 每个箱子至多1球 | 每个箱子至少1球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | $m^n$ | $(m)_n$ | $m!\,S(n,m)$ |
| 相同 | 不同 | $\binom{n+m-1}{m-1}$ | $\binom{m}{n}$ | $\binom{n-1}{m-1}$ |
| 不同 | 相同 | $\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$ | $\begin{cases} 1 & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$ | $S(n,m)$ |
| 相同 | 相同 | | | |

# 十二重计数

问题简述：将$n$只球放入$m$个箱子, 有多少种不同的放法

| $n$只球 | $m$个箱子 | 无任何限制 | 每个箱子至多1球 | 每个箱子至少1球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | $m^n$ | $(m)_n$ | $m!\,S(n,m)$ |
| 相同 | 不同 | $\binom{n+m-1}{m-1}$ | $\binom{m}{n}$ | $\binom{n-1}{m-1}$ |
| 不同 | 相同 | $\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$ | $\begin{cases} 1 & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$ | $S(n,m)$ |
| 相同 | 相同 | $\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$ | $\begin{cases} 1 & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$ | $p(n,m)$ |