



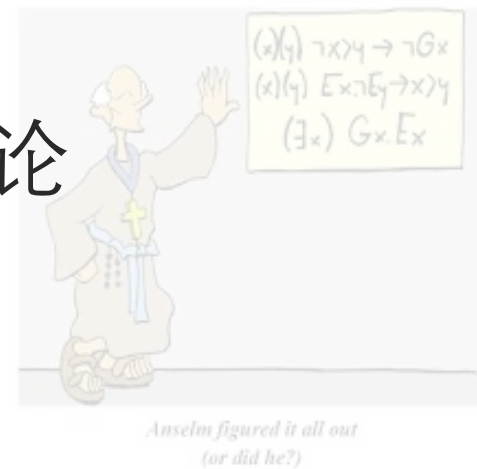
离散数学

Discrete Mathematics

第三讲：谓词逻辑引论

吴楠

南京大学计算机科学与技术系



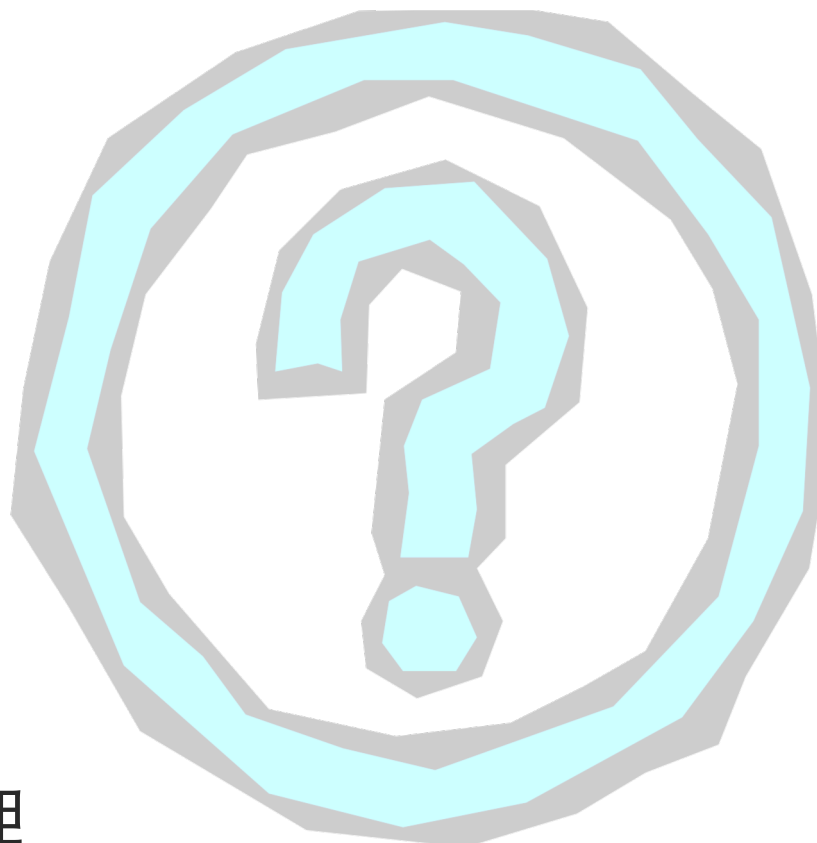
2021 年 10 月 9 日



前情提要



- 逻辑推理
- 命题演算的推理
- 公理推理系统*
- 自然推理系统
- 用命题逻辑进行推理

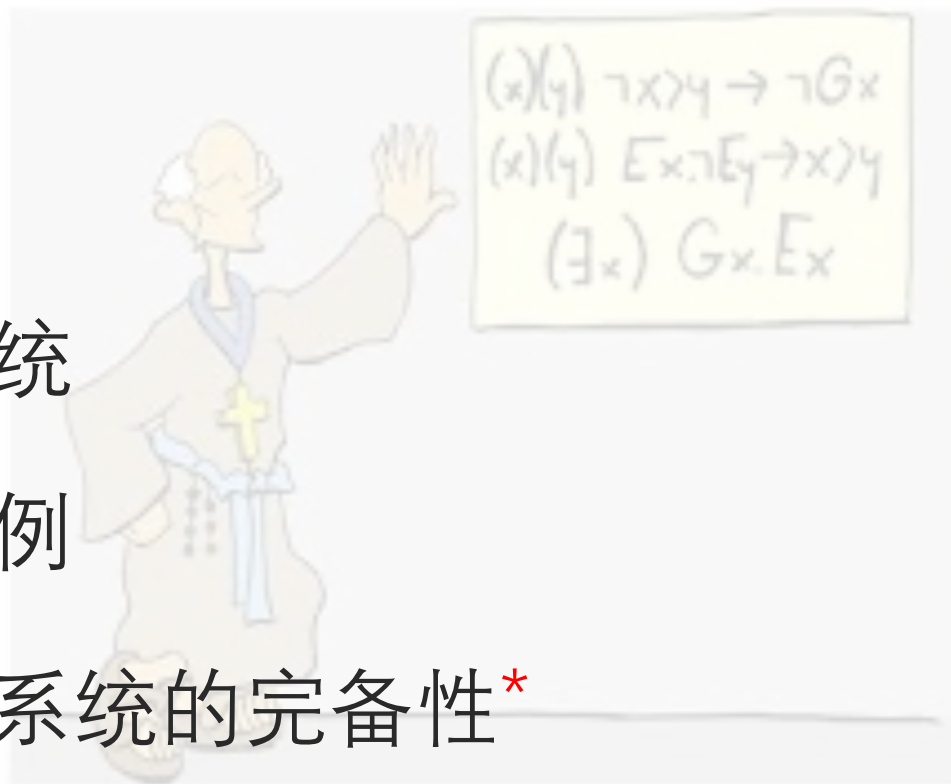




本讲主要内容



- 谓词与量词
- 谓词逻辑
- 谓词逻辑的推理系统
- 谓词逻辑的推理实例
- 一阶谓词逻辑推理系统的完备性*
- 谓词逻辑的应用举例*



*Anselm figured it all out
(or did he?)*



为什么引入谓词逻辑？



- 命题逻辑中的命题是以整个语句为最小单位的，这种“主宾式”的原子逻辑结构限制了逻辑系统的表达能力，故此有些句子无法用命题精确表达：
 - 含有变量的语句：如“ $3 + x = 5$ ”，“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”
 - 含有数量限定性定语的句子：如“所有学生今天都来上课了。”，“有的西瓜是黄瓢的。”



谓词逻辑



- 对于含有变量的语句，引入描述属性的逻辑形式——谓词（predicate）。谓词引入之后，便可以变量作为参数，命题作为其值来进行描述
- 定义（谓词）：函数 P 为呈型 $P(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ 的陈述句，且 P 在 (x_1, x_2, \dots, x_n) 处为一具体命题，称函数 P （即命题函项）为谓词，其中 x_1, x_2, \dots, x_n 称为个体（individual）。谓词描述了个体所具有的性质，或给出了个体之间的关系
- 例：谓词 $P(a, b, c)$ 指 $a^2 + b^2 = c^2$ ，则 $P(3, 4, 5)$ （注意：这已是一个命题）的值为真，而 $P(4, 5, 6)$ 的值为假



谓词逻辑 (续)



- 对于含有数量限定性定语的语句，引入量词 (quantifier) 来量化谓词在一定范围 (称为论域) 的事物上成立的程度
- **定义 (量词)** :
 - (1)**全称量词**: “ $P(x)$ 的全称化”记为 $\forall xP(x)$, 指命题“对所有论域中的 x , $P(x)$ 为真。”
 - (2)**存在量词**: “ $P(x)$ 的存在化”记为 $\exists xP(x)$, 指命题“存在论域中的某个 x , 使 $P(x)$ 为真。”
- **例**: “对任何数, 总有一数比它大。”可表示为:

$$\forall x \exists y (y > x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Diagram illustrating the components of the formula $\forall x \exists y (y > x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$:

- \forall (red) is labeled 量词 (Quantifier).
- x (blue) is labeled 个体 (Individual).
- \exists (red) is labeled 量词 (Quantifier).
- y (blue) is labeled 个体 (Individual).
- $>$ (green) is labeled 谓词 (Predicate).
- $(x, y \in \mathbb{R})$ (brown) is labeled 论域 (Domain).



含量词公式的否定式



- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

- 例：对所有的 x ， x 的平方是正数

- 否定：存在某个实数 x ，其平方不是正数

- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

- 例：存在 x ，满足 $5x = x$

- 否定：对所有的 x ， $5x \neq x$



将自然语言翻译为谓词逻辑表达式



- **例1：**“这个班上的每个学生都学过微积分课程。”
 - $S(x)$: x 是这个班上的学生
 - $C(x)$: x 学过微积分课程
 - $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$
- **例2：**“这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥。”
 - $S(x)$: x 是这个班上的学生
 - $V(x, y)$: x 去过 y 地方
 - $\forall x(S(x) \rightarrow V(x, \text{加拿大}) \vee V(x, \text{墨西哥}))$



将自然语言翻译为谓词逻辑表达式(续)



- 请尝试使用谓词和量词翻译如下Чебышёв 定理：

“在正整数 n 与 $2n$ 之间必存在质数。” (定义谓

词 $N(x)$: x 是正整数; $y|x$: y 可整除 x)

- 一种表示 (论域为整数集)：

$$\forall n \left(N(n) \rightarrow \exists x \left(N(x) \wedge (x \geq n) \wedge (x \leq 2n) \wedge \forall y (y|x \rightarrow (y = 1 \vee y = x)) \right) \right)$$



含量词的推理规则



- 含量词的自然推理系统需增加以下4条推理规则：
 - 全称例示 (UI) : $\forall xP(x) \Rightarrow P(c)$
 - 全称生成 (UG) : 对任意 c , $P(c) \Rightarrow \forall xP(x)$
 - 存在例示 (EI) : $\exists xP(x) \Rightarrow$ 对某个 c , $P(c)$
 - 存在生成 (EG) : 对某个 c , $P(c) \Rightarrow \exists xP(x)$



谓词逻辑的公理系统*



- 谓词逻辑的公理系统在命题逻辑公理系统中增加以下4条量化公理：

- PRED-1 : $\forall xZ(x) \rightarrow Z(t)$
- PRED-2 : $Z(t) \rightarrow \exists xZ(x)$
- PRED-3 : $\forall x(W \rightarrow Z(x)) \rightarrow (W \rightarrow \forall xZ(x))$
- PRED-4 : $\forall x(Z(x) \rightarrow W) \rightarrow (\exists xZ(x) \rightarrow W)$



谓词逻辑推理实例



■ 一个例子（由 Lewis Carroll 提供）：

○ “All lions fierce.”

..... ①

○ “Some lions do not drink coffee.”

..... ②

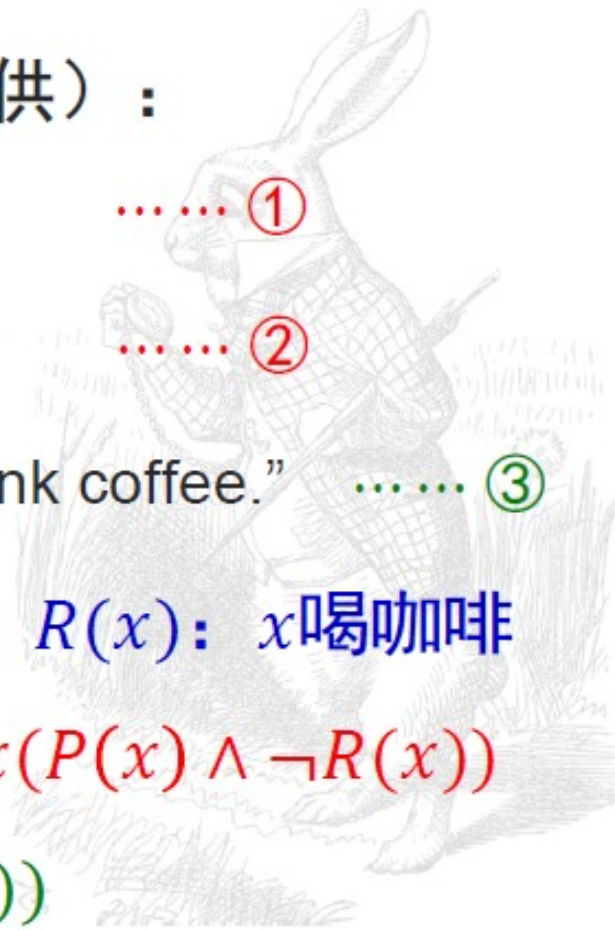
○ “Some fierce creatures do not drink coffee.”

..... ③

■ $P(x)$: x 是狮子; $Q(x)$: x 凶猛; $R(x)$: x 喝咖啡

①: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$; ②: $\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$

$\{①, ②\} \Rightarrow ③: \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$





谓词逻辑推理实例（续）



“在这个班上的某个学生没有读过这本书”，“班上的每个人都通过了第一门考试”，结论“通过第一门考试的某个人没有读过这本书”。

$C(x)$: x 在这个班上

$B(x)$: x 读过书了

$P(x)$: x 通过了第一门考试

- $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
- $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

证明框架：

对于论域（某学校的全体学生）中的某个体 a ：

$C(a) \wedge \neg B(a)$... 存在例示
$C(a)$... 化简
$C(a) \rightarrow P(a)$... 全称例示
$P(a)$... 假言推理
$\neg B(a)$... 化简
$P(a) \wedge \neg B(a)$... 合取引入
$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$... 存在生成



一阶谓词逻辑推理系统的性质*



- 定理 (Gödel 完备性定理, *K. Gödel 1929*) : 一阶谓词逻辑推理系统 FOL 是完备的 (completeness), 即 FOL 中所有逻辑有效的公式均可在 FOL 中证明
- 定理 (FOL 的可靠性, *J. Herbrand 1930*) : 一阶谓词逻辑推理系统 FOL 是可靠的 (soundness), 即所有在 FOL 中可证的公式均在 FOL 中逻辑有效
- 定理 (FOL 的不可判定性, *A. Church 1936 & A. Turing 1937*) : 一阶谓词逻辑系统是不可判定的 (undecidable / semi-decidable)
- 证明均略



逻辑的应用：程序的逻辑验证



- 现代计算机程序规模巨大而且复杂，一些安全攸关（safe-critical）的代码一旦出错，将产生灾难后果，而这些代码仅凭测试很难证明其无错
 - 加拿大Therac-25辐射治疗机导致三死三重伤（1985）
 - 美国AT&T 电话网络大瘫痪（1990-01-15）
 - 法国Ariane-5运载火箭发射失败（1996-06-04）
 - NASA “火星极地登陆者” 探测器失踪（1999-12-03）
 - NASA “火星环球勘探者” 探测器失踪（2007-11-02）



程序的逻辑验证 (续)



```
view plain  copy to clipboard  print  ?

01.  network code()
02.  {
03.  switch (line) {
04.      case THING1:
05.          doit1();
06.          break;
07.      case THING2:
08.          if (x == STUFF) {
09.              do_first_stuff();
10.              if (y == OTHER_STUFF)
11.                  break;
12.              do_later_stuff();
13.          } /* coder meant to break to here... */
14.          initialize_modes_pointer();
15.          break;
16.      default:
17.          processing();
18.  } /* ...but actually broke to here! */
19.  use_modes_pointer(); /* leaving the modes_pointer
20.      uninitialized */
21.  }
```




程序的逻辑验证（续）



```
...
declare
  vertical_veloc_sensor: float;
  horizontal_veloc_sensor: float;
  vertical_veloc_bias: integer;
  horizontal_veloc_bias: integer;
...
begin
  declare
    pragma suppress(numeric_error, horizontal_veloc_bias);
  begin
    sensor_get(vertical_veloc_sensor);
    sensor_get(horizontal_veloc_sensor);
    vertical_veloc_bias := integer(vertical_veloc_sensor);
    horizontal_veloc_bias := integer(horizontal_veloc_sensor);
    ...
  exception
    when numeric_error => calculate_vertical_veloc();
    when others => use_irs1();
  end;
end irs2;
```

declare

```
...
horizontal_veloc_sensor: float;
...
horizontal_veloc_bias: integer;
...
```

begin

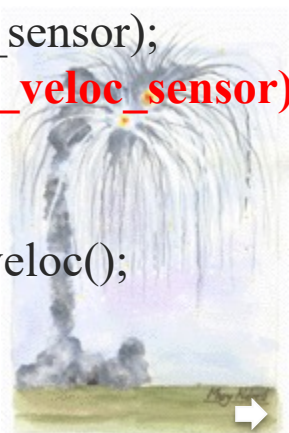
```
sensor_get(vertical_veloc_sensor);
sensor_get(horizontal_veloc_sensor);
vertical_veloc_bias := integer(vertical_veloc_sensor);
horizontal_veloc_bias := integer(horizontal_veloc_sensor)
```

...

exception

```
  when numeric_error => calculate_vertical_veloc();
  when others => use_irs1();
```

end;





程序的逻辑验证（续）



- 现代一般用逻辑的方法进行程序正确性证明或形式化验证。已经通过程序正确性证明的例子：
 - 中国火车控制系统（CTCS-2）核心（约1.4万行C代码）
 - 美军F-16战斗机控制系统核心（约2.8万行Ada代码）
 - 美国奋进号航天飞机主控系统核心（约4万行Ada代码）
 - 通用汽车发动机管理系统（EMS）（约8000行C代码）



本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 1.4—1.6节（1.5节请自学）
- 课后习题：
 - Problem Set 3
 - 注：如需要，可用符号 $\exists!$ 表示量词：“存在唯一的”
- 提交时间：10月12日 14:00 之前
- 提交方式：拍照提交至本科教学平台