离散数学 — Problem Set 10

Problem 1

设 $P(n)$ 是命题：$n! < n^n$，其中 n 是大于 1 的整数。

a) 命题 $P(2)$ 是什么?

b) 证明 $P(2)$ 为真，完成基础步骤的证明。

c) 归纳假设是什么?

d) 在归纳步骤中你需要证明什么?

e) 完成归纳步骤。

f) 解释为什么只要 n 是一个大于 1 的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

Problem 2

用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

Problem 3

证明 (亦可不用数学归纳法):

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Problem 4

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式. 例如，$7 = 3 + 2 + 1 + 1$ 是 7 的拆分. 设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数.

a) 证明: $P_{m,m} = P_m$.

b) 证明: 下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的.

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{m} = 1 \\ 1 & \text{n} = 1 \\ P_{m,m} & \text{m} < \text{n} \\ 1 + P_{m,m-1} & \text{m} = \text{n} > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & \text{m} > \text{n} > 1 \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数。

Problem 5

给出下述集合的递归定义:

a) 正偶数集合.

b) 3 的正整数次幂的集合.

c) 整系数多项式的集合.

Problem 6

a) 对于表示十进制数字的非空字符串 s, 给出计算 s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义.

b) 用结构归纳法证明 $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$. (其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接)

Problem 7

求出阿克曼函数值 $A(3,4)$。阿克曼函数的定义为:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{m} = 0 \\ A(m-1,1) & \text{m} > 0, \text{n} = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{m} > 0, \text{n} > 0 \end{cases}$$

Problem 8

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.