

离散数学作业 Problem Set 12

Problem 1

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群，独异点和群：

- (1) a 是正实数, $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, 运算是普通乘法。
- (2) \mathbb{Q}^+ 为正有理数, 运算是普通乘法。
- (3) \mathbb{Q}^+ 为正有理数, 运算是普通加法。(4) (5) 两小题中, 类似 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 这样的, 只有 x 一个变元, 系数均为实数的多项式, 叫做一元实系数多项式。
- (4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法。
- (5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法。
- (6) $U_n = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^n = 1\}$, n 为某个给定正整数, \mathbb{C} 为复数集合, 运算是复数乘法。

Problem 2

$S = \{a, b, c\}$, $*$ 是 S 上的二元运算, 且 $\forall x, y \in S, x * y = x$ 。

- (1) 证明 S 关于 $*$ 运算构成半群。

(2) 试判断 S 成为独异点的条件。

Problem 3

设 A 是一个非空集合, 定义: $a \circ b = a, \forall a, b \in A$ 。

试证明: $\langle A, \circ \rangle$ 是一个半群。

Problem 4

设 G 是一群, $a, b, c \in G$ 。证明:

$$xaxba = xbc$$

在 G 中有且仅有一个解。

Problem 5

证明: 设 a 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的幂等元, 则 a 一定是单位元。

Problem 6

设 G 为群, $a, b, c \in G$, 证明:

$$|abc| = |bca| = |cab|$$

Problem 7

证明偶数阶群必含 2 阶元。

Problem 8

设 G 为非 $Abel$ 群, 证明 G 中存在非单元 a 和 b , $a \neq b$, 且 $ab = ba$ 。

Problem 9

设 $i = \sqrt{-1}$, $S = \{1, -1, i, -i\}$, 证明 $\langle S, * \rangle$ 构成群, 其中 $*$ 为复数域上的乘法运算。

Problem 10

证明: G 为交换群当且仅当 $\forall a, b \in G$, 有 $(ab)^2 = a^2b^2$ 。