



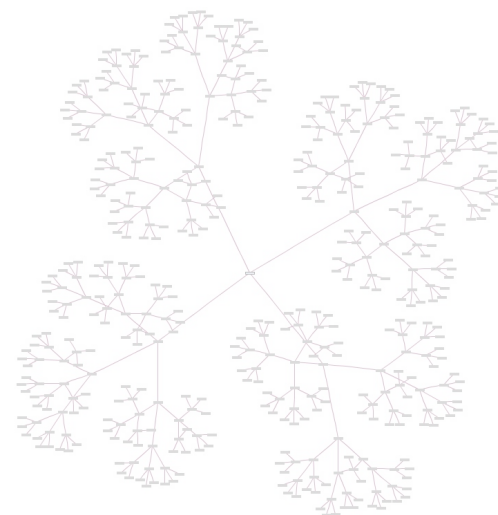
离散数学

Discrete Mathematics

第二十一讲：树

吴楠

南京大学计算机科学与技术系



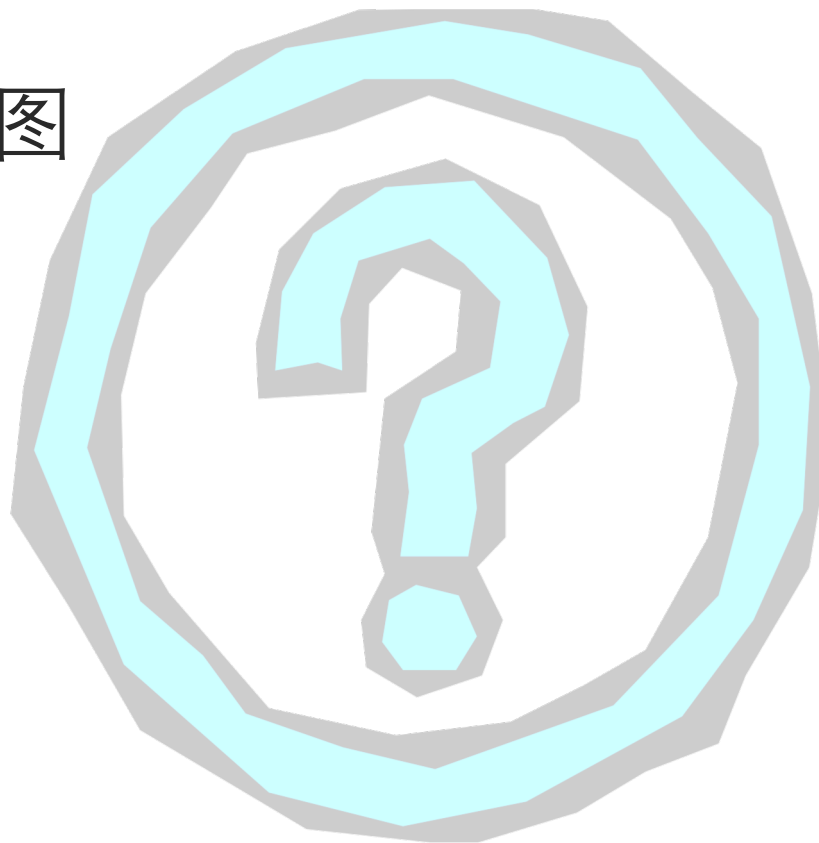
2021 年 12 月 23 日



前情提要



- 有向图及其连通性
- 有向欧拉图与哈密顿图
- 匹 配
- 最大匹配和完美匹配
- 二部图中的匹配
- Hall 定理
- 二部图匹配的应用

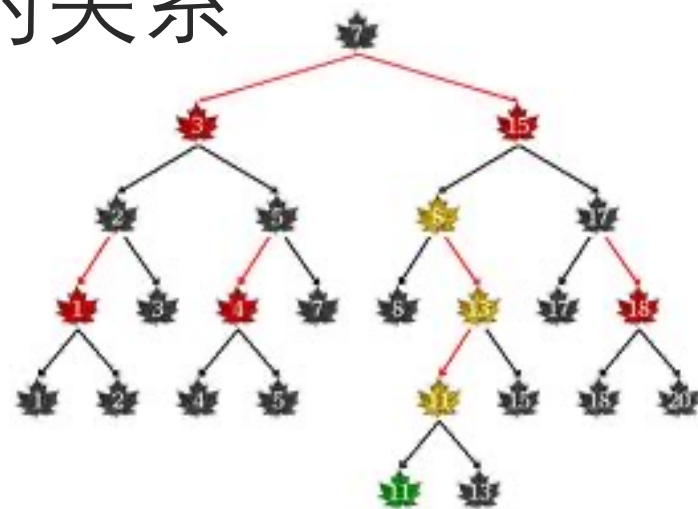
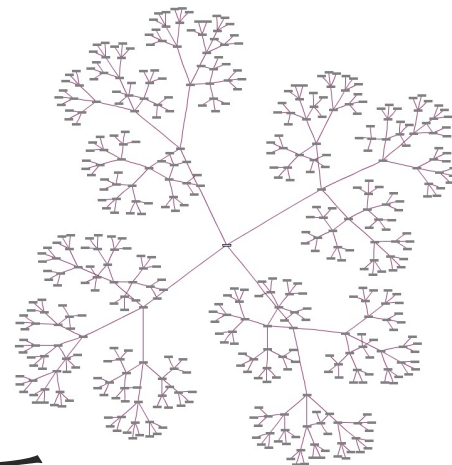




本讲主要内容



- 树的定义
- 树的连通性质
- 树中边和顶点数量之间的关系
- 生成树与最小生成树
- 求最小生成树的算法

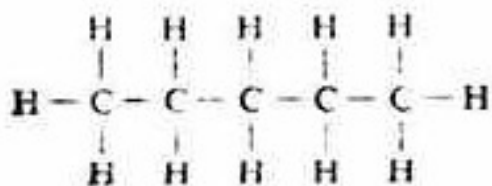




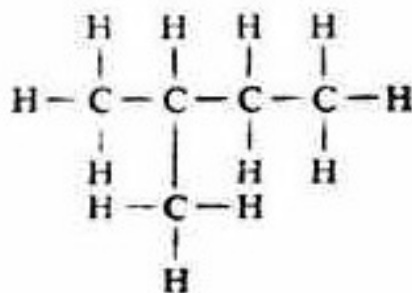
树的定义



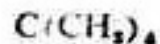
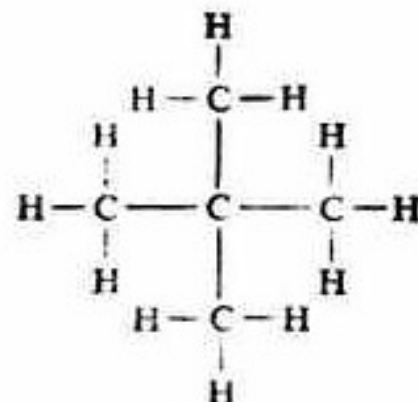
- **树**(tree)是一种特殊的图，滥觞于19世纪中叶，最初由Cayley提出并用于描述饱和烃的同分异构体



正戊烷
熔点 -130°C
沸点 36.1°C



异戊烷
 -160°C
 28°C



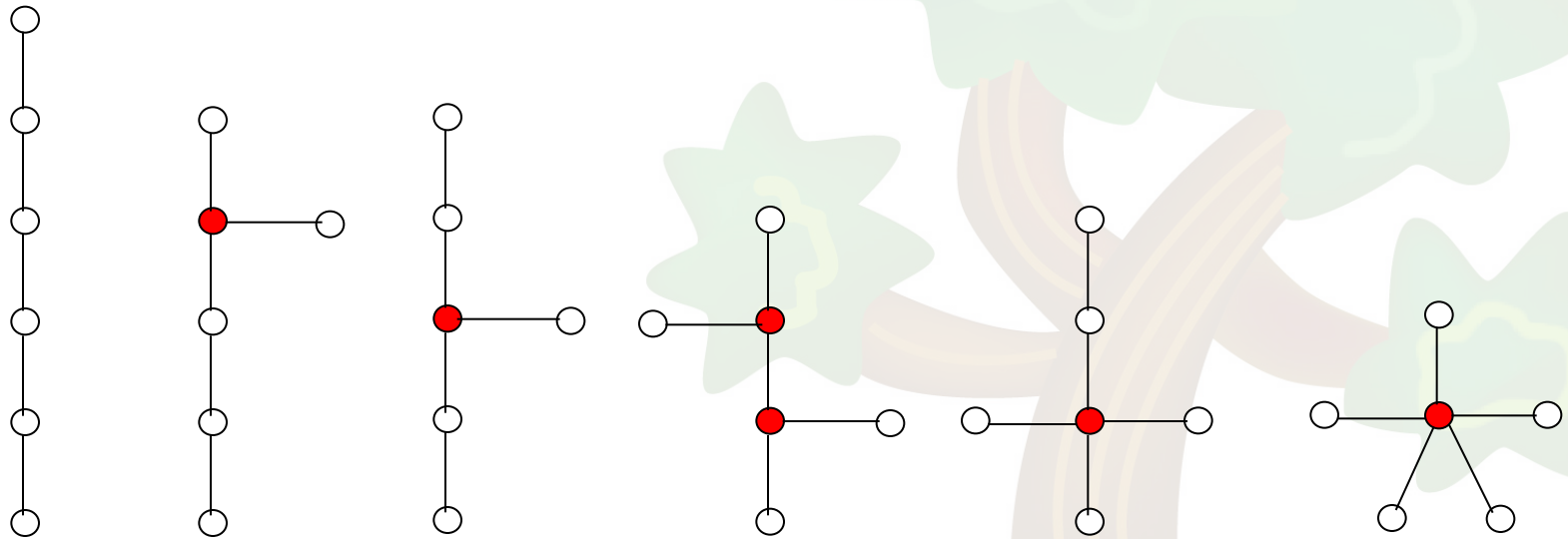
新戊烷
 -17°C
 9.5°C



树的定义 (续)



- **定义** (**树**) : 不含回路的连通简单图称为树
 - 以下列出**所有不同构的**6个顶点的树





有关树的概念



定义

- (1) 无向树——连通无回路的无向图
- (2) 平凡树——平凡图
- (3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成
- (4) 树叶——1 度顶点
- (5) 分支点——度数 ≥ 2 的顶点

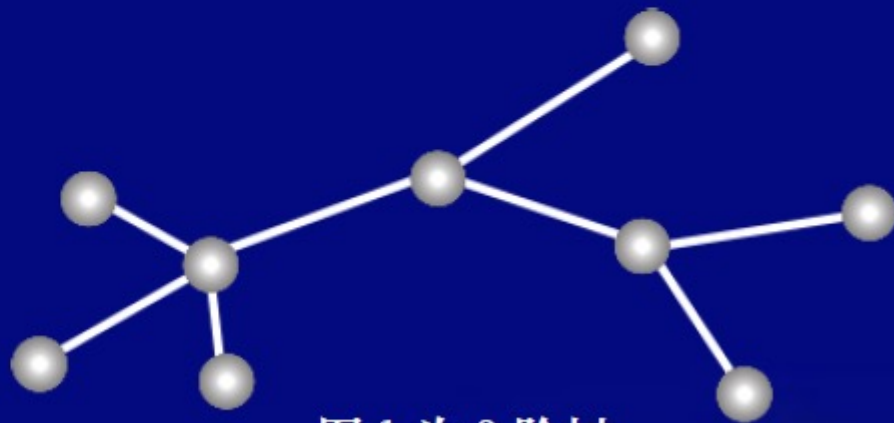


图 1 为 9 阶树.



树中的通路



■ **定理**（**树中路径的唯一性**）：设 T 是树，则

$\forall u, v \in V(T)$ ， T 中存在**唯一的** uv -路径

■ **证明**：由定义， T 是连通图，故 $\forall u, v \in V(T)$ ， T 中存在 uv -路径。假设 T 中有两条不同的 uv -路径 P_1, P_2 。不失一般性，存在 $e = (x, y)$ 满足： $e \in P_1$ 且在路径 P_1 上 x 比 y 靠近 u ，但 $e \notin P_2$ ，令 $T^* = T - \{e\}$ ，则 T^* 中包含 P_2 ，于是：
 $(P_1$ 中的 xu -段) + P_2 + $(P_1$ 中的 vy -段)是 T^* 中的 xy -通路，所以 T^* 中含 xy -路径（记为 P' ），则 $P' + e$ 是 T 中的**回路**，与树的定义矛盾。 □

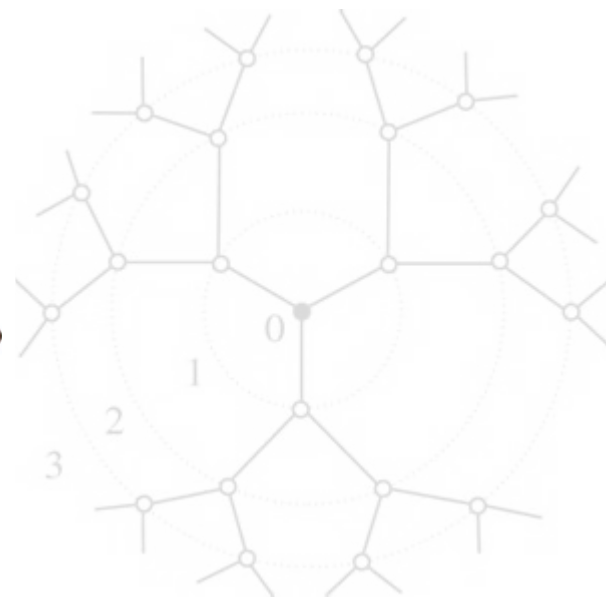
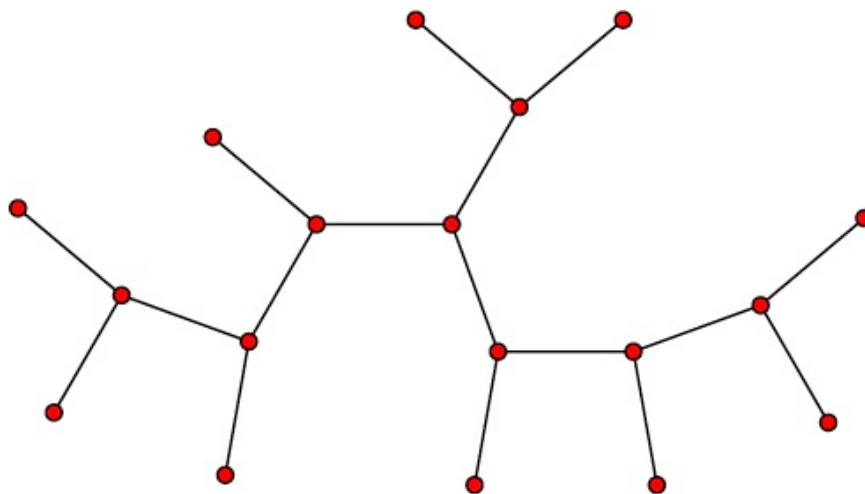


树中边的极限性



■ 树的边数从两个方面分别达到极限：

- 树是边最少的连通图
- 树是边最多的无回路图

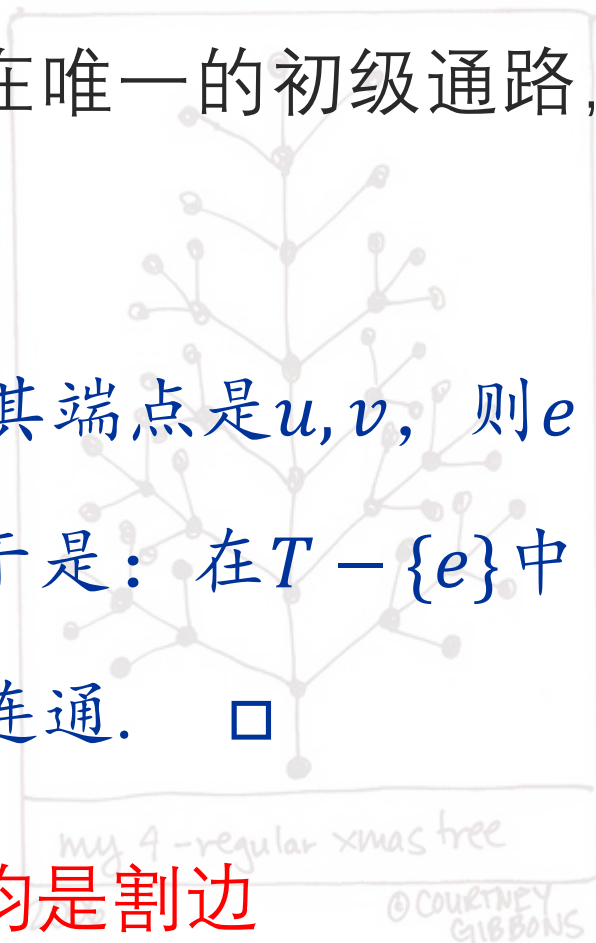




树是边最少的连通图



- **定理**：设图 T 的任意两顶点存在唯一的初级通路，则 $\forall e \in E(T)$, $T - \{e\}$ 不连通
- **证明**：设 e 是 T 中任意一条边，其端点是 u, v ，则 e 即 u, v 之间唯一的初级通路，于是：在 $T - \{e\}$ 中不存在 uv -通路， $\therefore T - \{e\}$ 不连通. \square
- 这个定理这意味着**树中每条边均是割边**





树是边最多的无回路图



- **定理**：假设图 T 是每条边均为割边的连通图，则 T 中无回路，但在任意不相邻的两点之间加一条边，得到的图中恰含一个回路

- **证明**：(1) T 中不含回路

假设 T 中有回路 C ， $e = (u, v)$ 是 C 上任意一条边， $\because e$ 是割边， $\therefore T^* = T - \{e\}$ 是非连通图， $\therefore u, v$ 处于不同的连通分支，但 $C - \{e\}$ 是 T^* 中的 uv -通路，矛盾！

- (2) 在任意两个不相邻的顶点之间加一条边，则产生回路

T 中至少有3个顶点。设 x, y 是不相邻的顶点， $\because T$ 连通， \therefore 存在 xy -通路 P ，则 $P + (x, y)$ 是 $T + (x, y)$ 中的回路。

- (3) $T + (x, y)$ 的回路是唯一的

假设另有回路 $C' \neq P + (x, y)$ ， $\because T$ 中原无回路， $\therefore (x, y) \in C'$ ，而 $C' - (x, y) \neq P$ ，因此， x, y 之间有两条不同的初级通路， $\therefore T$ 中含回路，矛盾。 \square



有关树的几个等价命题

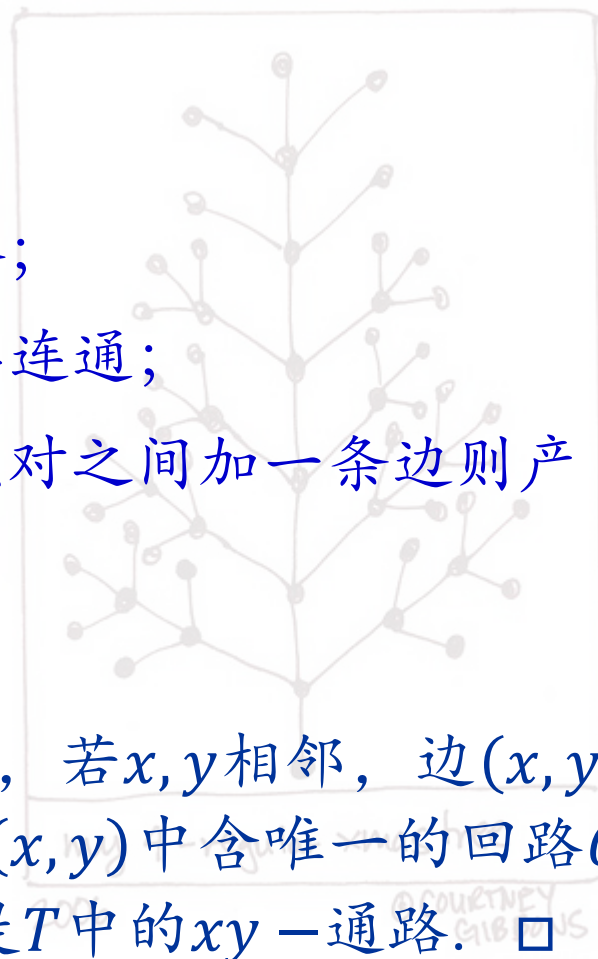


■ 下列四个命题等价：

- (1) T 是不含回路的简单连通图；
- (2) T 中任意两点之间有唯一初级通路；
- (3) T 连通，但删除任意一条边则不再连通；
- (4) T 无回路，但在任意不相邻的顶点对之间加一条边则产生唯一的回路

■ 这里只需再证明(4) \Rightarrow (1)

只需证明连通性：对任意顶点对 x, y ，若 x, y 相邻，边 (x, y) 即 xy -通路，若 x, y 不相邻，则 $T + (x, y)$ 中含唯一的回路 C ，显然 (x, y) 在 C 中，因此： $C - (x, y)$ 是 T 中的 xy -通路。 \square





树中边和点的数量关系



- **定理**：设 T 是树，令 $n = |V(T)|$ ， $m = |E(T)|$ ，则：

$$m = n - 1$$

- **证明**：对顶点数 n 进行归纳：

- **Basis**: 当 $n = 1$ ， T 是平凡图，结论显然成立；
- **I.H.**: 假设当 $n \leq k$ 结论成立；
- **Ind. Steps**: 若 $n = k + 1$ ，因为 T 中每条边都是割边，任取 $e \in E(T)$ ， $T - \{e\}$ 含两个连通分支，设其为 T_1, T_2 ，并设它们边数分别是 m_1, m_2 ，顶点数分别是 n_1, n_2 ，根据归纳假设： $m_1 = n_1 - 1$ ， $m_2 = n_2 - 1$ ，注意： $n_1 + n_2 = n$ ， $m_1 + m_2 = m - 1$ ，故而 $m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1$. \square



连通图边数的下限



■ **定理** (连通图的必要条件) : 连通图的必要

条件是: $m \geq n - 1$

○ 对于树: $m = n - 1$, 因此树是边最少的连通图

■ **证明**: 对 n 进行归纳: **Basis**: 当 $n = 2$ 时结论显然成立;

I.H.: 假设 $n \leq k$ 时结论成立; **Ind. Steps**: 若 G 是满足 $n = k + 1$ 的连通图, 考虑 $G' = G - v (v \in V(G))$, 令 $|V(G')| = n', |E(G')| = m'$:

(1) 若 G' 仍连通, 由归纳假设: $m' \geq n' - 1$, 注意: $n' = n - 1$, $m' \leq m - 1$ ($\because G$ 连通 \therefore 被删除的点至少关联一条边), 所以: $m \geq m' + 1 \geq n' - 1 + 1 = n - 1$

SPANNING TREE POSE
2007 ©COURTNEY GIBBONS



连通图边数的下限 (续)



■ **定理** (连通图的必要条件) : 连通图的必要条件

是 : $m \geq n - 1$

■ **证明** (Ind. Steps 续) :

(2) 若 G' 不连通, 设 G' 有 $\omega(\omega > 1)$ 个连通分支 $G_1, G_2, \dots, G_\omega$, 且 G_i 的边数和顶点数分别是 m_i 和 n_i 。由归纳假设, $m_i \geq n_i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, \omega$)。注意: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\omega + 1$, $m \geq m_1 + m_2 + \dots + m_\omega + \omega$ (即每个连通分支中至少有一个顶点在 G 中与要删除的 v 相邻, 即 v 的度数不小于 ω) , 所以: $m \geq m_1 + m_2 + \dots + m_\omega + \omega \geq n_1 + n_2 + \dots + n_\omega - \omega + \omega = n - 1$. \square

2007

©COURTNEY GIBBONS



与边点数量关系有关的等价命题



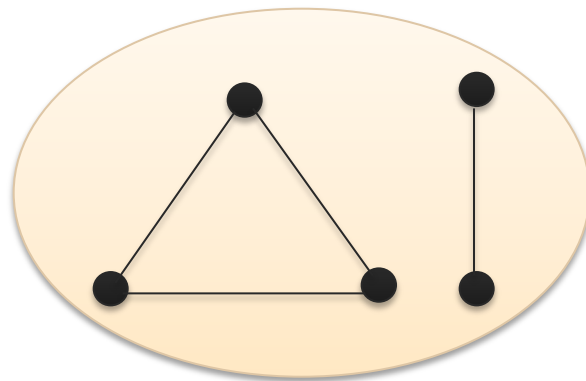
■ 注意：对任意图， $m = n - 1$ **不是** 树的充分条件

■ 下列三个命题等价：

(1) T 是树

(2) T 不含回路，且 $m = n - 1$

(3) T 连通，且 $m = n - 1$



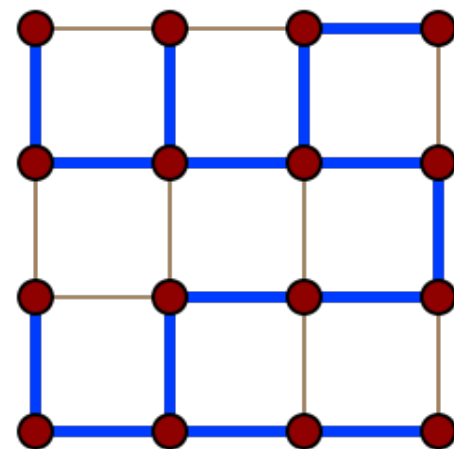
○ 证明：(1) \Rightarrow (2) 已证；(2) \Rightarrow (3)：若不连通，分支数 $\omega \geq 2$ 则 $m = n - \omega < n - 1$ ，矛盾；(3) \Rightarrow (1)：设 e 是 T 中任意一边，令 $G' = T - e$ ，且其边数和顶点数分别是 m' 和 n' ，则 $m' = m - 1 = n - 2 < n - 1$ ， $\therefore G'$ 是非连通图，即 T 的任意边均不在回路中， $\therefore T$ 中无回路。 \square



生成树 (spanning tree)



- **定义 (生成树)** : 若图 G 的生成子图是树, 则该子图称为 G 的**生成树**
- **定理 (生成树存在定理)** : 无向图 G 有生成树当且仅当 G **连通**
- **证明**: \Rightarrow : 显然成立;
 \Leftarrow : 若 G 是有回路的连通图, 删除回路上的一条边, G 中的回路一定减少——此为图论证明常用之“**破圈法**”——用“破圈法”总可以构造连通图的生成树. \square
- **推论**: 简单无向图 G 是树当且仅当 G 有**唯一**的生成树





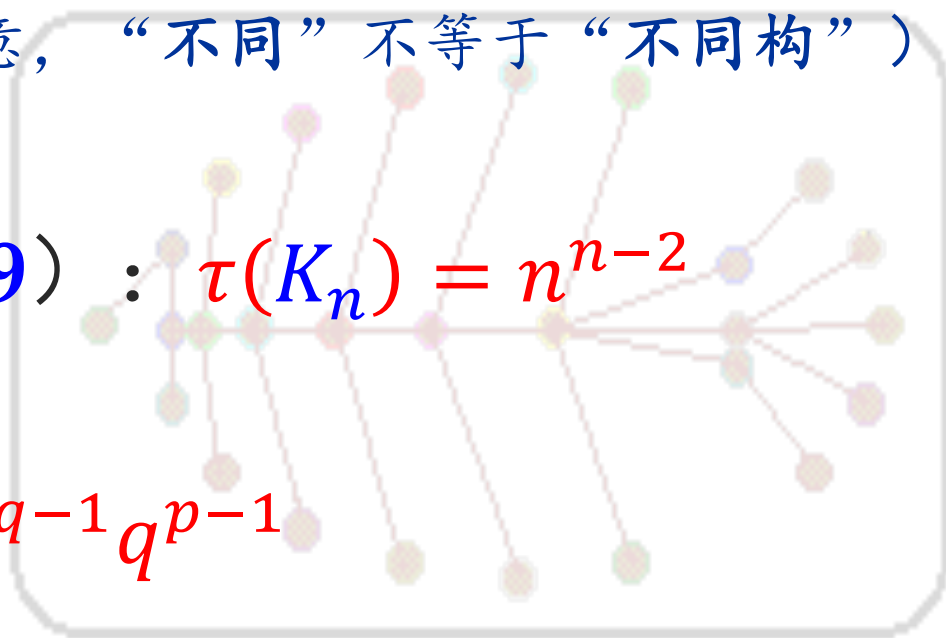
生成树的计数*



- **定义**：设 G 为无向连通图， $\tau(G)$ 为 G 的不同生成树的个数（注意，“不同”不等于“不同构”）

- **定理（Cayley 1889）**： $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- **定理**： $\tau(K_{p,q}) = p^{q-1} q^{p-1}$





求生成树的算法



- 求连通图 G （设其边集为 $\{e_1, \dots, e_m\}$ ）的生成树的算法可归为两类——“破圈法”和“避圈法”：

破圈法(G)

```
1   $T \leftarrow G$   
2  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$   
3      do if  $e_i$  在  $T$  的回路上  
4          then  $T \leftarrow T - e_i$ 
```

避圈法(G)

```
1   $T \leftarrow \emptyset$   
2  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$   
3      do if  $G[T \cup \{e_i\}]$  无回路  
4          then  $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$   
5           $T \leftarrow G[T]$   
6
```



最小生成树 (MST)



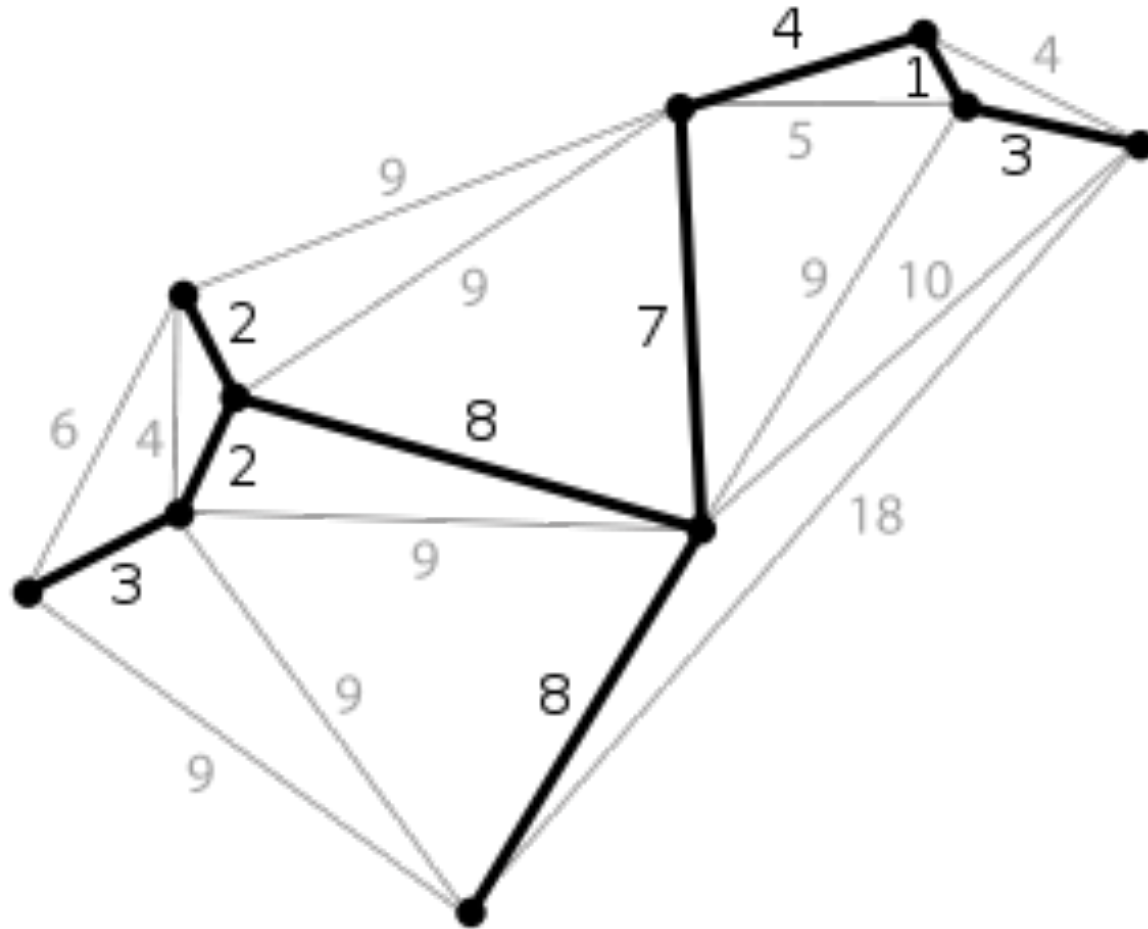
- **定义（子图的权）**：设 $G = \langle V, E, w \rangle$ 为带权无向图， $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ ，对于 $e \in E(G)$ ， $w(e)$ 为边 e 之权。设 S 为 G 之子图，定义 S 的权为：

$$w(S) = \sum_{e \in E(S)} w(e)$$

- **定义（最小生成树）**：设 T 为 G 之生成树，若对任何 G 的生成树 T' 有 $w(T') \geq w(T)$ ，则称 T 为**最小生成树**（minimum spanning tree, MST）

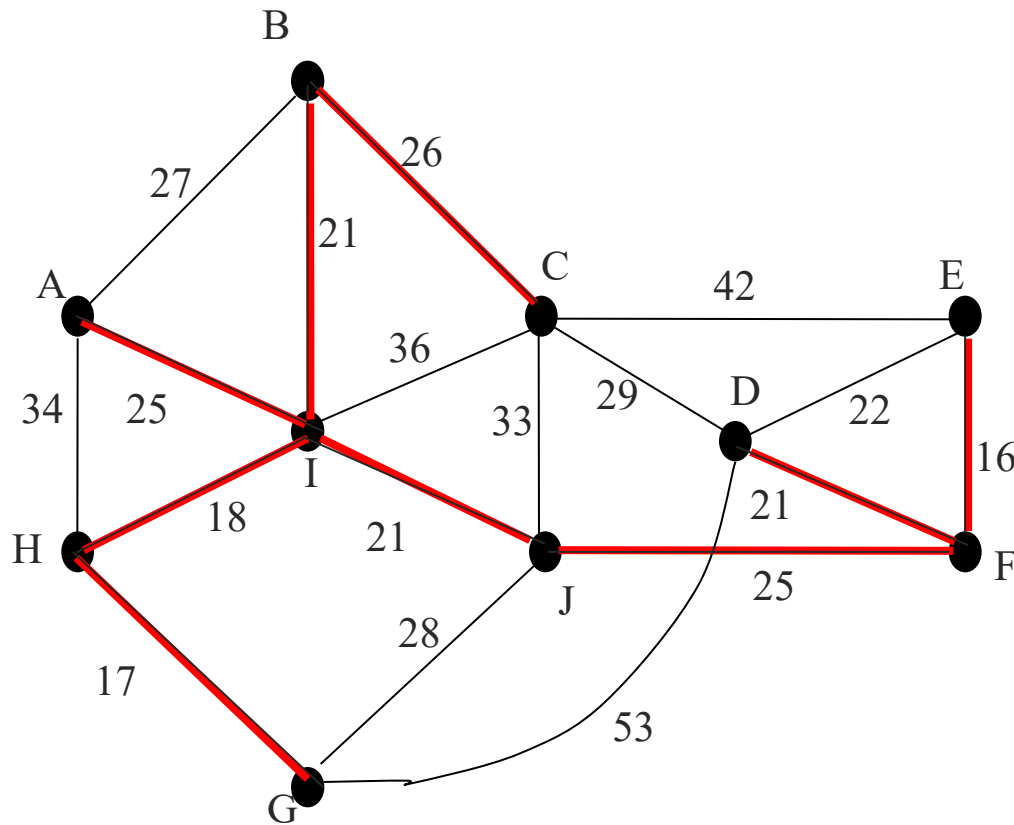


最小生成树 (续)





求最小生成树的Kruskal算法



算法：Kruskal (1956)

1. $E = \{\}$;
2. 从 E 以外选择权尽可能小，又不会与 E 中已有的边构成回路的边加入 E ;
3. 重复第2步，直到 E 中包含 $n - 1$ 条边;
4. 算法结束



求最小生成树的Kruskal算法 (续)



KRUSKAL ALGORITHM(E)

- 1 $T^* \leftarrow$ 空图
- 2 **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$
- 3 **do** $e_i \leftarrow e$ 其在 $E - \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$ 中极小且 $T^* + e_i$ 无回路
- 4 $T^* \leftarrow T^* + e_i$
- 5 **return** T^*



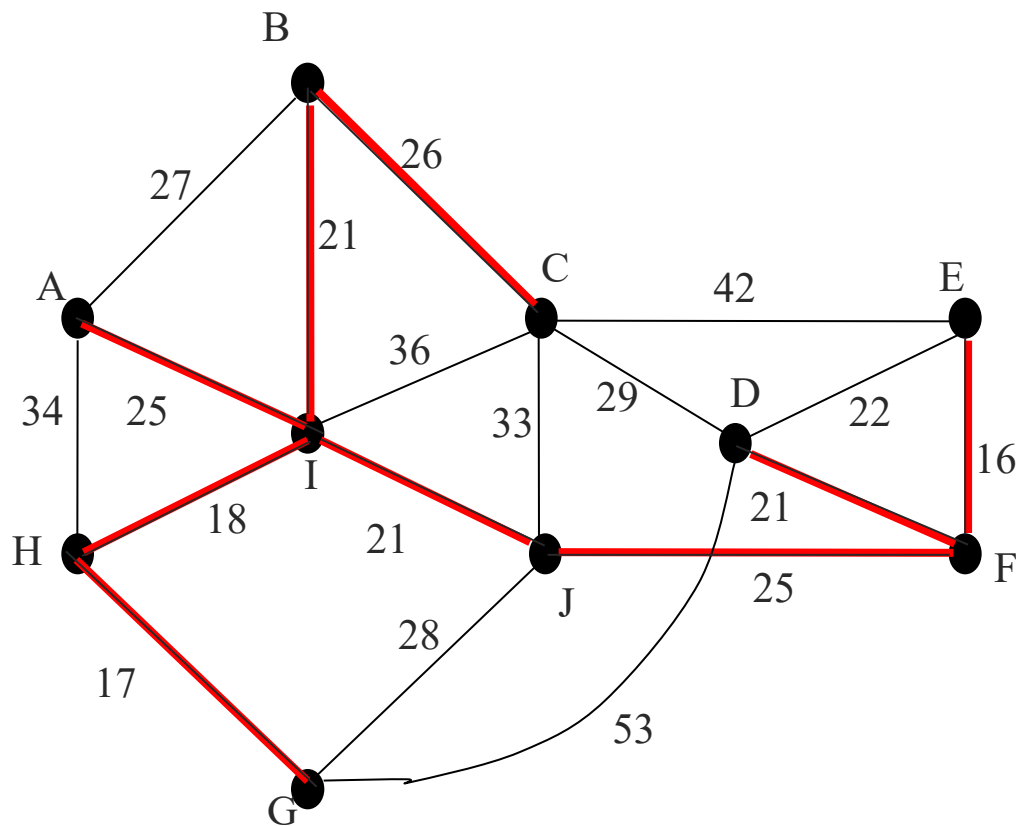
Kruskal算法的证明*



- (1) 显然 T 是生成树
- (2) 假设 T 不是最小生成树；按算法的加边顺序， T 中边是 $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k, \dots, e_{n-1}$ 。而 T' 是从开始与 T 有最多连续公共边的最小生成树 $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e'_k, \dots$ ； e_k 是第一个不在 T' 中的边。 $T' + e_k$ 含回路，且该回路上的 e'_k 不在 T 中，则 $T^* = T' - \{e'_k\} \cup \{e_k\}$ 也是生成树，而且 $w(T^*) = w(T') - w(e'_k) + w(e_k)$ ，根据算法的选边标准，必有 $w(e'_k) \geq w(e_k)$ ， $\therefore w(T^*) \leq w(T')$ ，即 T^* 也是最小生成树，但 T^* 从开始与 T 的连续公共边数多于 T' ，矛盾。□



求最小生成树的Prim算法*



算法：Prim (1957)

1. 选取一条极小权边 e_1
2. $T = \{e_1\}$
3. 从 T 以外选择与 T 中一点邻接且权尽可能小，又不会与 T 中已有边构成回路的边加入 T
4. 重复第2步，直到 E 中包含 $n - 1$ 条边
5. 算法结束



求最小生成树的Prim算法* (续)



PRIM ALGORITHM($G : n$ 阶无向连通带权图)

- 1 $e_1 \leftarrow$ 一条极小权边
- 2 $T \leftarrow \{e_1\}$
- 3 **for** $i \leftarrow 2$ **to** $n - 1$
- 4 **do** $e_i \leftarrow e$ 其为在 $E - \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ 中
- 5 使与 T 的一点邻接且 $T + e$ 无回路的具极小权的边
- 6 $T \leftarrow T + e_i$
- 7 **return** T



求最小生成树的破圈算法*



- 1975年我国数学家管梅谷（1934—）提出求最小生成树的破圈算法：其思想为在给定的图中任意找出一个回路，删去该回路中权最大的边。然后在余下的图中再任意找出一个回路，再删去这个新找出的回路中权最大的边，一直重复上述过程，直到剩余的图中没有回路。这个没有回路的剩余图便是最小生成树



Tips : 生成树的计数



Counting spanning trees

[edit]

The number $t(G)$ of spanning trees of a connected graph is an important [invariant](#). In some cases, it is easy to calculate $t(G)$ directly. It is also widely used in data structures in different computer languages. ^{[[citation needed](#)]} For example, if G is itself a tree, then $t(G)=1$, while if G is the [cycle graph](#) C_n with n vertices, then $t(G)=n$. For any graph G , the number $t(G)$ can be calculated using [Kirchhoff's matrix-tree theorem](#) (follow the link for an explicit example using the theorem).

Cayley's formula is a formula for the number of spanning trees in the [complete graph](#) K_n with n vertices. The formula states that $t(K_n)=n^{n-2}$. Another way of stating Cayley's formula is that there are exactly n^{n-2} labelled trees with n vertices. Cayley's formula can be proved using Kirchhoff's matrix-tree theorem or via the [Prüfer code](#).

If G is the [complete bipartite graph](#) $K_{p,q}$, then $t(G)=p^{q-1}q^{p-1}$, while if G is the n -dimensional [hypercube graph](#) Q_n , then $t(G)=2^{2^n-n-1} \prod_{k=2}^n k^{\binom{n}{k}}$. These formulae are also consequences of the matrix-tree theorem.

If G is a [multigraph](#) and e is an edge of G , then the number $t(G)$ of spanning trees of G satisfies the *deletion-contraction recurrence* $t(G)=t(G-e)+t(G/e)$, where $G-e$ is the multigraph obtained by deleting e and G/e is the [contraction](#) of G by e , where multiple edges arising from this contraction are not deleted.



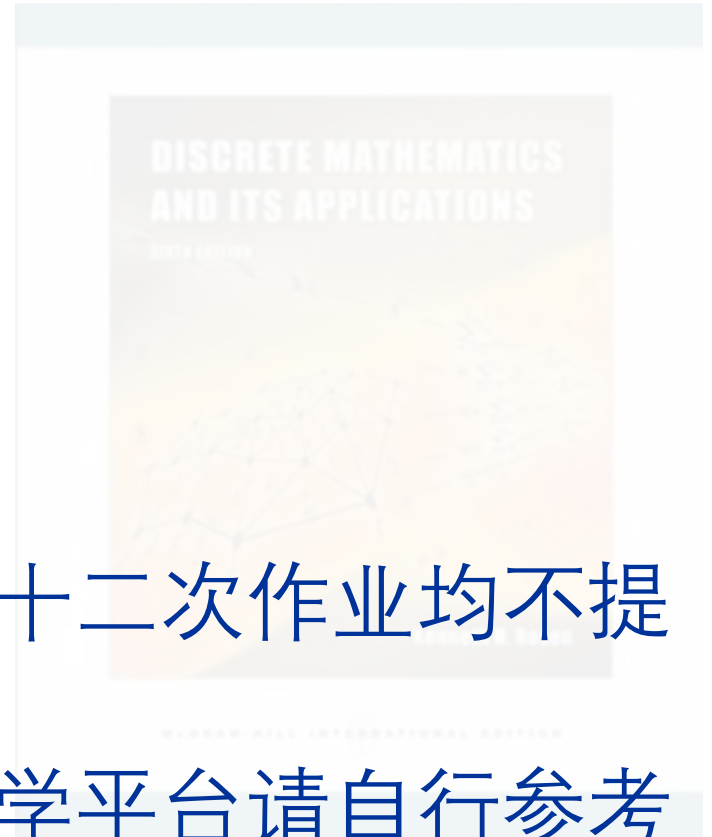
WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia



本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 11.1, 11.5 节
- 课后习题：
 - Problem Set 21
- 提交时间：第二十一、二十二次作业均不提交，参考解答将上传于教学平台请自行参考





补课通知



- **缘起**：因本学期常规教学时间安排较往年偏少，为保证课堂教学体系的完整性，安排补课时一次
- **时间**：12月25日（周六）下午4:00—6:00
- **地点**：计算机科学与技术楼111会议室（第三领域咖啡厅内）
- **内容**：第21讲（树）、第22讲（根树与二叉树）的部分内容