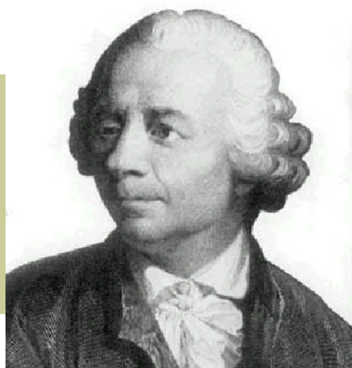
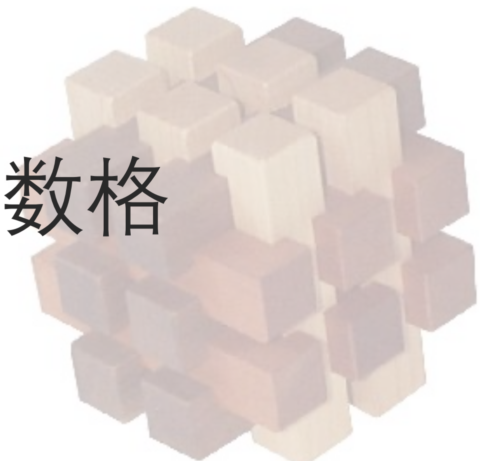
南京大學 NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学

Discrete Mathematics



第十六讲：偏序格与代数格

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

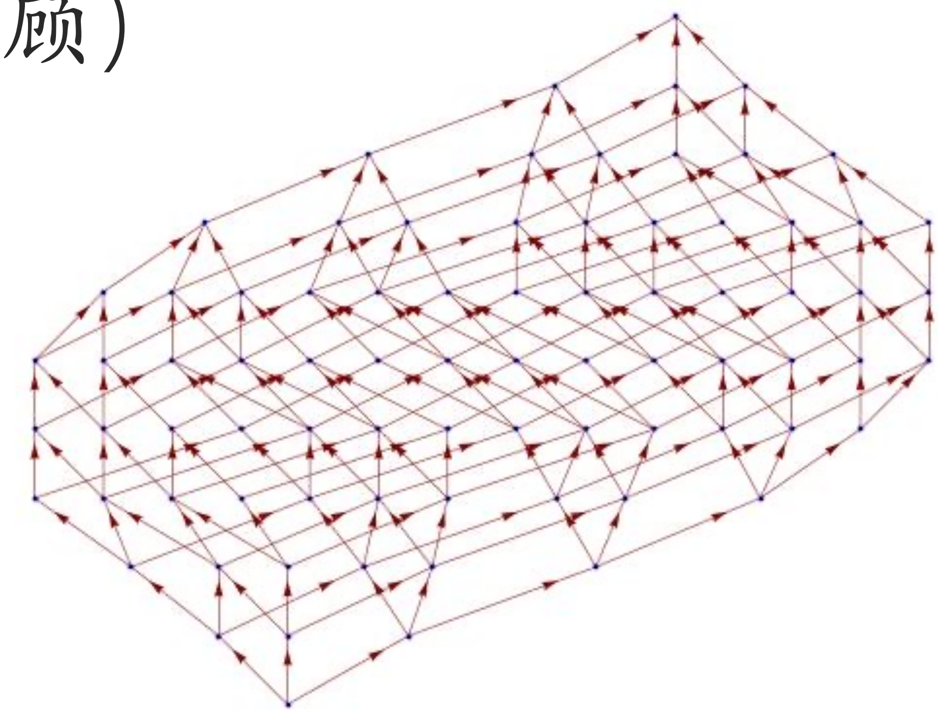
2021 年 12 月 2 日

前情提要

- 循环群与生成元
- 循环群的子群
- 群的同构与同态
- 无限循环群的同构群
- 有限循环群的同构群

本讲主要内容

- 偏序集与格（回顾）
- 格的对偶原理
- 格的性质
- 代数格
- 代数格与偏序格的等价性



偏序集与格

- 格（lattice）作为一个代数系统可以通过两种方式进行定义：
  - (1) 通过偏序集与偏序关系定义（第十五讲）
  - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 对立与统一：本讲我们分别研究格的两种不同的定义与呈现方式以及它们的统一

偏序关系与格（续）

- 格作为偏序集的定义：设$(S,\preccurlyeq)$为偏序集，若$\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$皆有上确界和下确界，则称集合S关于偏序$\preccurlyeq$构成（偏序）格

格导出的代数系统

- 若$(L,\preccurlyeq)$构成格，则称$\langle L,\wedge,\vee\rangle$为偏序格$L$导出的代数系统
- $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 满足以下公理：
  - **Ax.1** 交换律：$a\wedge b=b\wedge a, a\vee b=b\vee a$
  - **Ax.2** 结合律：$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c),(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$
  - **Ax.3** 幂等律： $a\wedge a=a, a\vee a=a$
- 满足上述三条公理的代数系统称为半格，记为：$\langle L,\wedge\rangle$和$\langle L,\vee\rangle$；吸收律公理将两个半格统一为格：
  - **Ax.4** 吸收律：$a\wedge(a\vee b)=a, a\vee(a\wedge b)=a$

格中偏序的性质

- 定理（**格中元素的基本性质**）：设L是格，则$\forall a,b \in L$，有：

$$\boxed{a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b}$$

  - **证明：** (1)先证$a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$：由$a \preccurlyeq a$和$a \preccurlyeq b$可知$a$是$\{a,b\}$的下界，因此$a \preccurlyeq a \wedge b$；又因$a \wedge b \preccurlyeq a$，由反对称性得$a \wedge b = a$；(2)再证$a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$：根据吸收律和交换律，有$b = b \vee (a \wedge b)$，由$a \wedge b = a$和上式得$b = b \vee a$，即$a \vee b = b$；(3)最后证$a \vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$：由$a \preccurlyeq a \vee b$得$a \preccurlyeq a \vee b = b$. □

代数格

- 定义（代数格）：设$\langle L,*,\circ\rangle$是代数系统，其中$*$和$\circ$是二元运算，且满足交换律、结合律、吸收律，则称$\langle L,*,\circ\rangle$是代数格。以下论证代数格与偏序格的等价性

- 引理1：代数格满足幂等律：$\forall a \in L, a * a = a,\ a \circ a = a$
  - 根据吸收律：$a = \big(a \circ (a * a)\big) = \big(a * (a \circ a)\big)$,
    $\therefore a * a = a * \big(a \circ (a * a)\big) = a, a \circ a = a \circ \big(a * (a \circ a)\big) = a$

- 引理2：$a \circ b = b$ 当且仅当 $a * b = a$
  - $\Rightarrow$：若$a \circ b = b$，则$a * b = a * (a \circ b) = a$
  - $\Leftarrow$：若$a * b = a$，则$a \circ b = (a * b) \circ b = b \circ (b * a) = b$

代数格（续）

- **引理3**：设$\langle L,*,\circ\rangle$是代数格，定义L上的关系$\boldsymbol{R}$如下：

$$\forall a,b\in L, a\boldsymbol{R}b \Leftrightarrow a\circ b=b$$

则$\boldsymbol{R}$是偏序关系

  - **自反性**：注意$\circ$满足幂等律（引理1）；
  - **反对称性**：若$a\boldsymbol{R}b$且$b\boldsymbol{R}a$，则$a\circ b=b$，$b\circ a=a$，但$a\circ b=b\circ a$，$\therefore a=b$；
  - **传递性**：若$a\boldsymbol{R}b, b\boldsymbol{R}c$，则$a\circ b=b$，$b\circ c=c$，则$a\circ c=a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c=b\circ c=c$，即$a\boldsymbol{R}c$.

代数格（续）

- **引理4：** 偏序格中的确界可由代数格中的运算体现
- $a \circ b$即$\{a, b\}$的上界
  - 由引理1、3，$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b \therefore a\boldsymbol{R}(a \circ b)$
  - 由引理1、3，$b \circ (a \circ b) = (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b) = a \circ b$

    $\therefore b\boldsymbol{R}(a \circ b)$
- $a \circ b$即$\{a, b\}$的最小上界
  - 对$c \in L$，若c也是$\{a, b\}$的上界，则$a \circ c = c$，$b \circ c = c$
  - 于是：$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$，即$(a \circ b)\boldsymbol{R}c$

代数格（续）

- 注意：由引理2，$a \circ b = b$当且仅当$a * b = a$，因此

$$\forall a, b \in L, a\boldsymbol{R}b \Leftrightarrow a * b = a$$

- $a * b$即$\{a, b\}$的下界
  - $\because (a * b) * a = a * (a * b) = (a * a) * b = a * b$

    $\therefore (a * b)\boldsymbol{R}a$
  - $\because (a * b) * b = a * (b * b) = a * b \quad \therefore (a * b)\boldsymbol{R}b$
- $a * b$即$\{a, b\}$的最大下界
  - 任给$c \in L$，若c也是$\{a, b\}$的下界，则$c * a = c, c * b = c$
  - 于是：$c * (a * b) = (c * a) * b = c * b = c$, 即$c\boldsymbol{R}(a * b)$

偏序格与代数格的等价性

- $(L,\boldsymbol{R})$即偏序格

- $*$和$\circ$即相应的求下确界和上确界运算

- 代数格$\langle L,*,\circ\rangle$即$(L,\boldsymbol{R})$的导出代数系统

偏序格与代数格的等价性（续）

- 偏序格与代数格的对应关系：

$$(L, \preccurlyeq)$$

（偏序格：$(L,\preccurlyeq)$是偏序集，任意2个元素皆有上下确界）

$$\Downarrow$$

$$\langle L, \wedge, \vee \rangle$$

（格导出的代数系统：*i.e.* 格公理：∧和∨满足交换律、结合律、吸收律和幂等律等4条公理）

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\langle L, *, \circ \rangle$$

（代数格：二元运算∗和∘满足交换律、结合律和吸收律等3个代数算律）

子 格

- 子格（sub lattice）是格的子代数。设$\langle L,\wedge,\vee\rangle$是格，非空集合$S\subseteq L$，若$S$关于$L$中的运算$\wedge,\vee$仍构成格，称$\langle S,\wedge,\vee\rangle$是$L$的子格

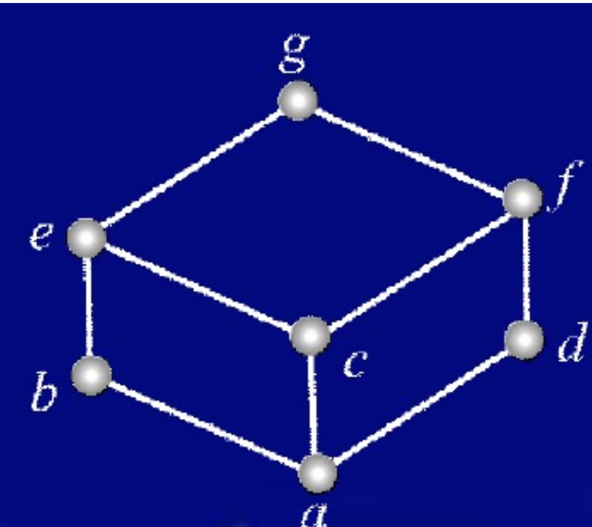
例 13.5 设格 L 如图 3 所示. 令

$$S_1=\{a, e, f, g\}, S_2=\{a, b, e, g\}$$

S_1 不是 L 的子格, 因为

$$e, f\in S_1 \text{ 但 } e\wedge f=c\notin S_1.$$

S_2 是 L 的子格.



格同态

- 定义（**格同态**）：设L_1和L_2是格，函数$f: L_1 \to L_2$若满足$\forall a, b \in L_1$，

$$\boxed{\begin{aligned} f(a \wedge b) &= f(a) \wedge f(b), \\ f(a \vee b) &= f(a) \vee f(b) \end{aligned}}$$

同时成立，则称函数f是格L_1到格L_2的同态映射，简称格同态

格同态的保序性

- 定理（格同态保序）：设f是格L_1到L_2的映射，
  - (1) 若f为格同态映射，则f保序，即

$$(\forall x, y \in L_1)(x \preccurlyeq y \rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y))$$

  - (2) 若f为双射，则f为格同构；其满足

$$(\forall x, y \in L_1)(x \preccurlyeq y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y))$$

格同态的保序性（续）

例　设 $L_1 = <S_{12}, D>$, $L_2 = <S_{12}, \leq>$是格，其中：

S_{12} 是 12 的所有正因子构成的集合,

D 为整除关系, $\leq$为通常数的小于或等于关系.

令

$$f: S_{12} \to S_{12}, f(x) = x$$

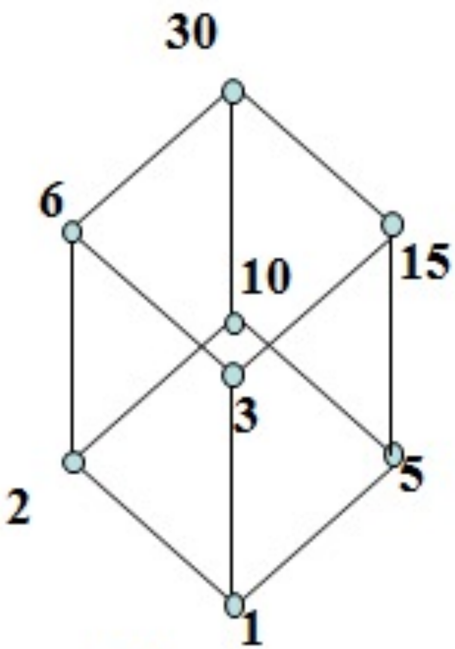
f 是双射，但不是格 L_1 到 L_2 的同构映射.

因为 $f(2) \leq f(3)$，但 2 不整除 3.

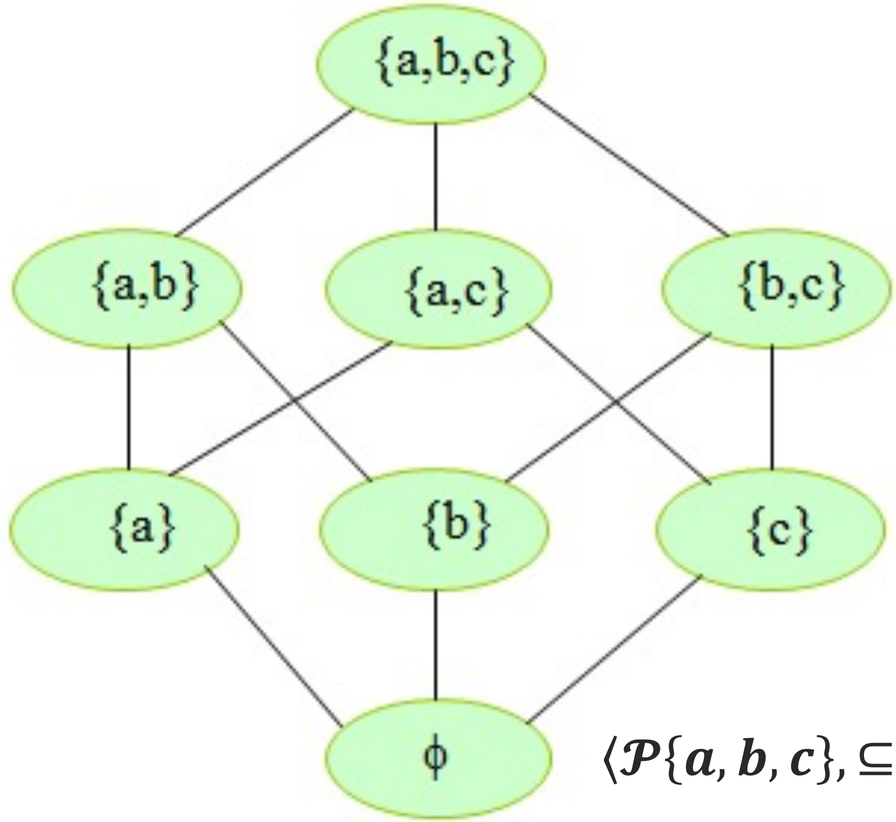
根据上述定理可知 f 不是同构映射

格同构的直观特征

- 观察以下2个格的哈斯图：

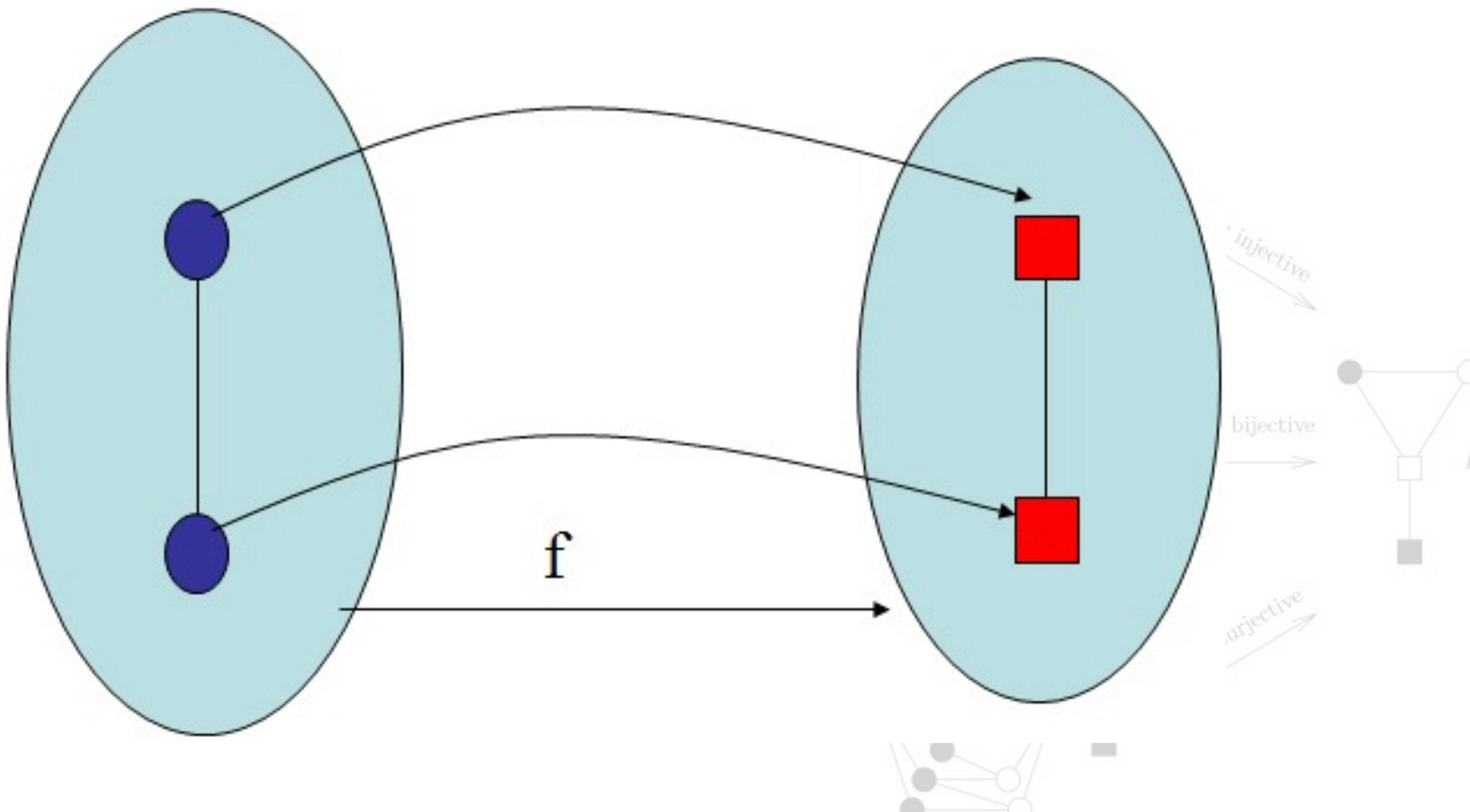


$\langle D_{30}, | \rangle$

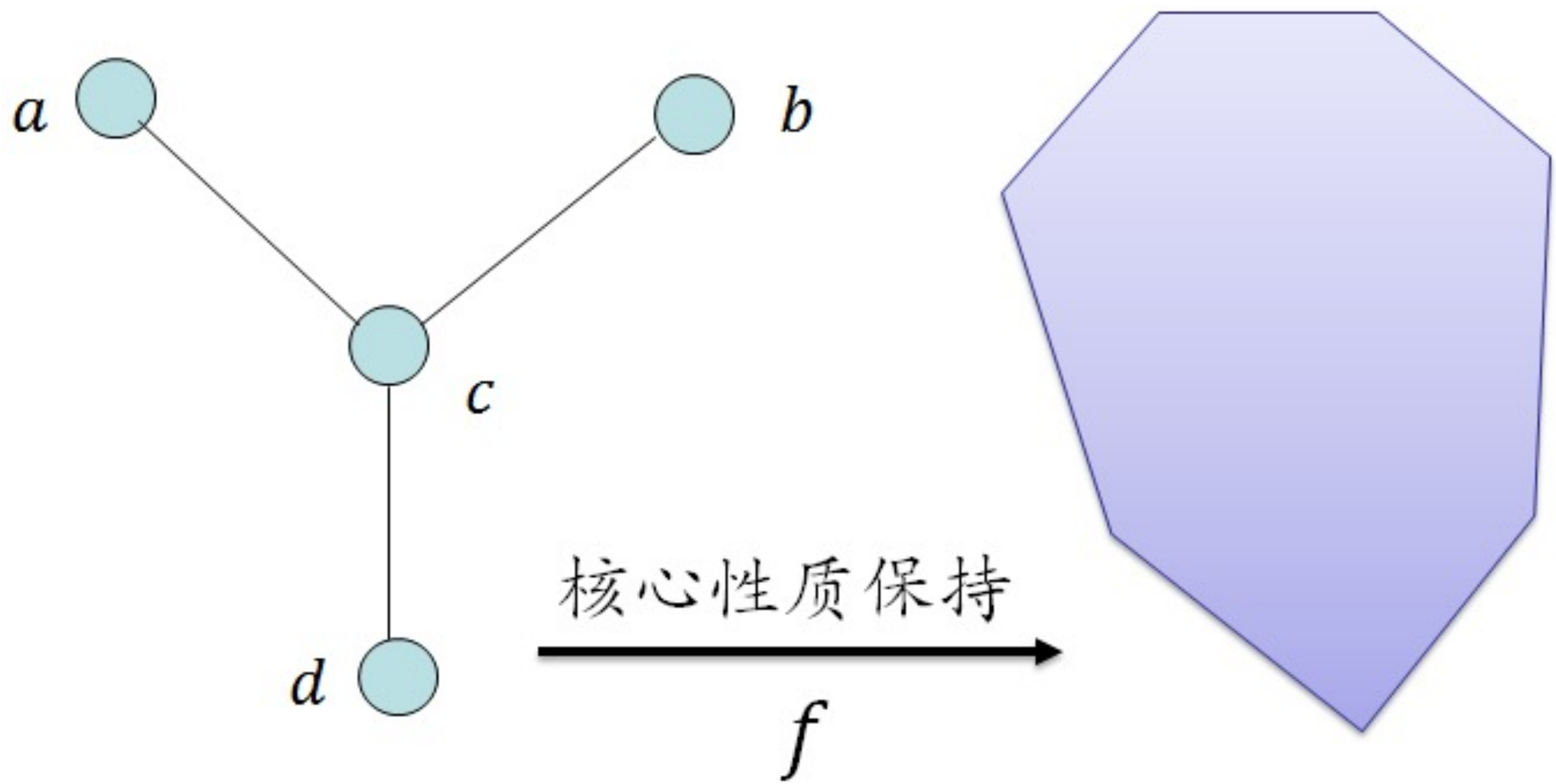


$\langle \mathcal{P}\{a, b, c\}, \subseteq \rangle$

格同构的直观特征（续）



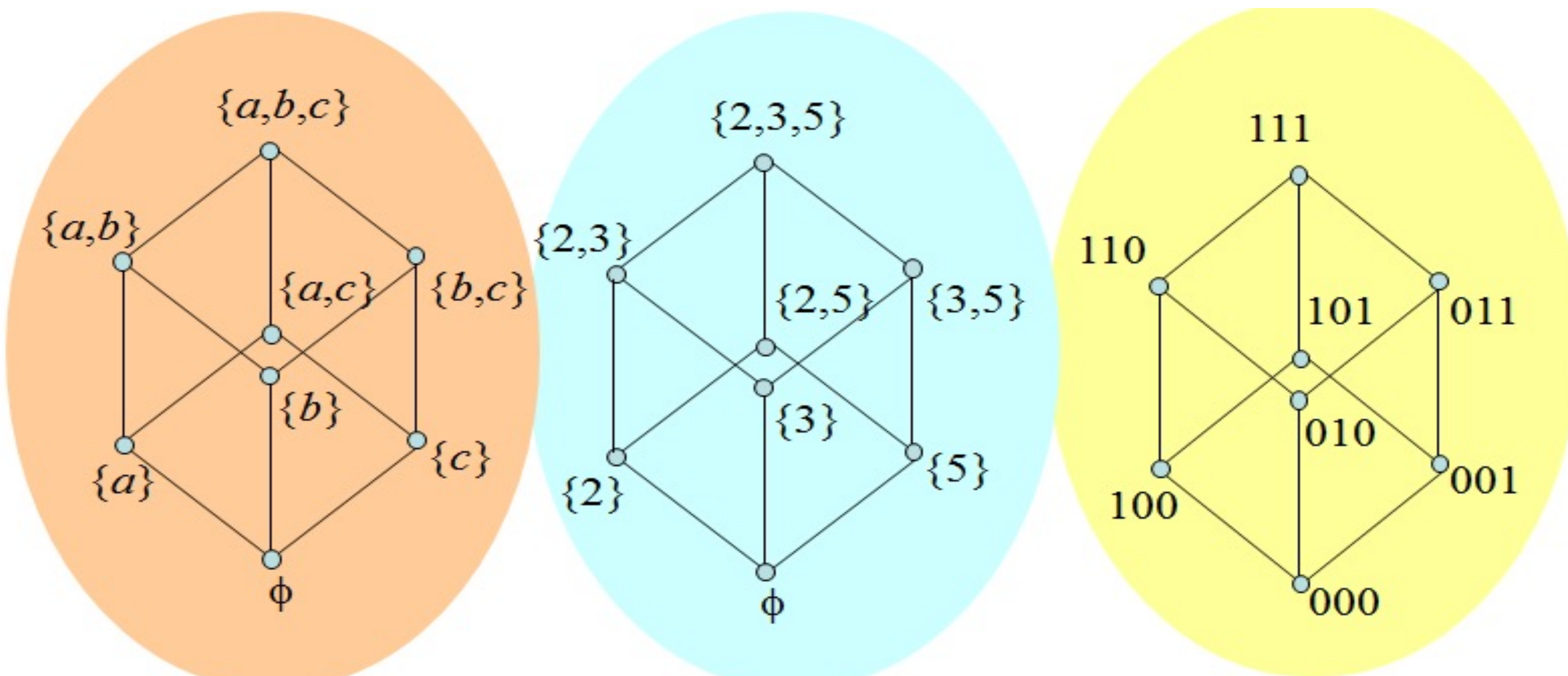
格同构的直观特征（续）



格同构的直观特征（续）

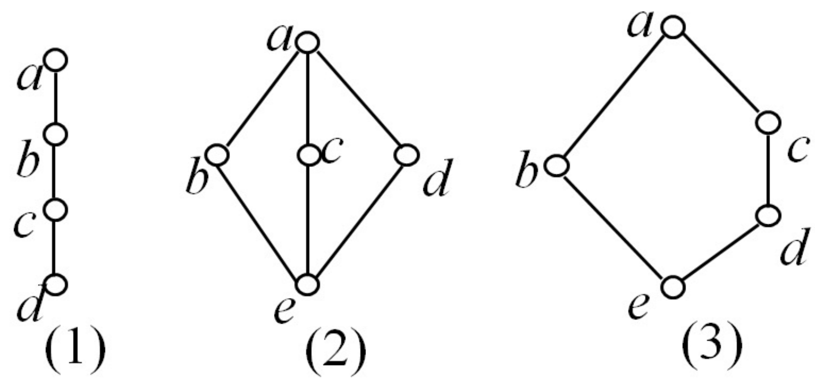
- Iso ⇒ same
- Morph ⇒ shape

⇒ Isomorphic lattices have same Hasse diagrams' shape



几种典型的格

- 定义（三种特殊的格）：
  - (1) 链（chain）
  - (2) 钻石格（diamond lattice, M_3）
  - (3) 五角格（pentagon lattice, N_5）



分配格

- 定义（分配格）：设$\langle L,\wedge,\vee\rangle$为格，若

$\forall a,b,c \in L$，有

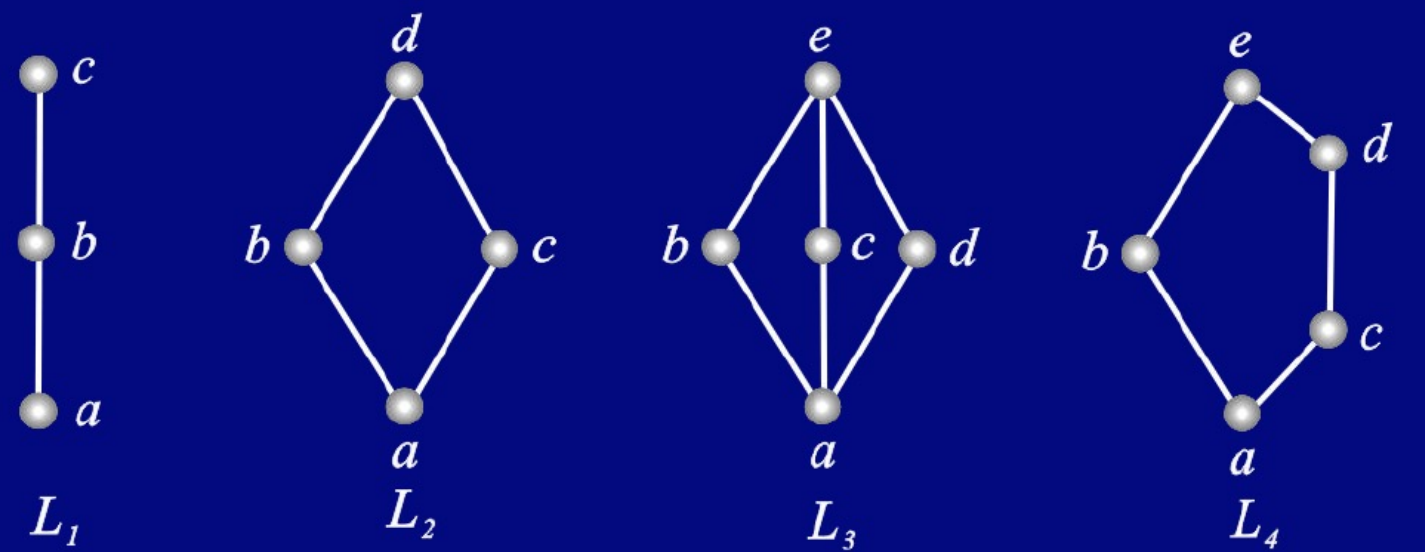
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称L为分配格（distributive lattice）

分配格（续）

例　参见下图



L_1 和 L_2 是分配格，L_3 和 L_4 不是分配格.

在 L_3 中，　$b\wedge(c\vee d)=b\wedge e=b$，$(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=a\vee a=a$

在 L_4 中，　$c\vee(b\wedge d)=c\vee a=c$，$(c\vee b)\wedge(c\vee d)=e\wedge d=d$

分配格的判定定理

- 定理（**分配格判定定理一**）：设L为格，则L是分配格当且仅当L不含有与$\boldsymbol{M_3}$（钻石格）或$\boldsymbol{N_5}$（五角格）同构的子格
- 推论：
  - (1) 小于五元的格皆为分配格
  - (2) 任何链皆为分配格

(a) A distributive lattice L　(b) $M(L)$

分配格的判定定理（续）

例　说明图 6 中的格是否为分配格，为什么？

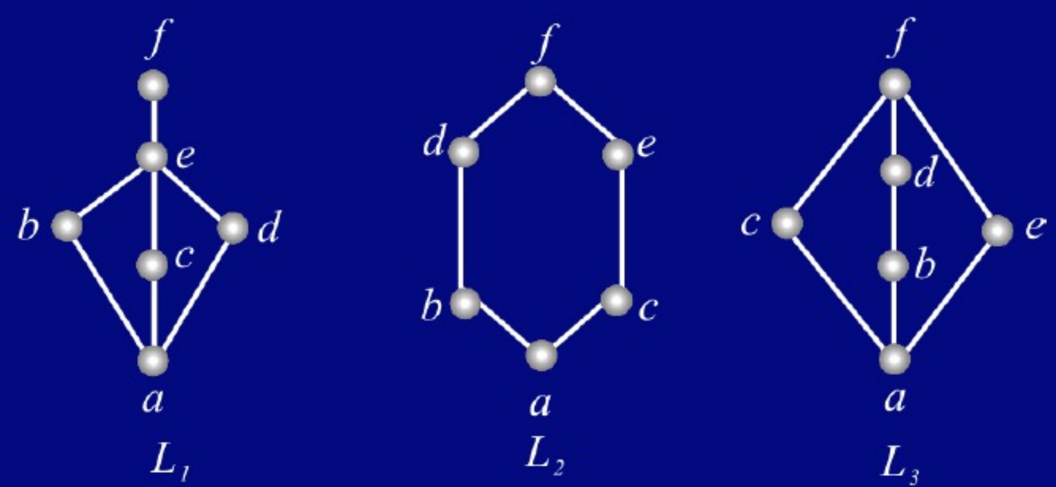


图 6

解　L_1, L_2 和 L_3 都不是分配格.

$\{a, b, c, d, e\}$ 是 L_1 的子格，并且同构于钻石格；

$\{a, b, c, e, f\}$ 是 L_2 的子格，并且同构于五角格；

$\{a, c, b, e, f\}$ 是 L_3 的子格，也同构于钻石格.

分配格的判定定理（续）

- 定理（**分配格判定定理二**）：设L为格，

  则L是分配格当且仅当

  $$(\forall a,b,c\in L)(a\wedge b=a\wedge c \text{ 且 } a\vee b=a\vee c)$$

  $$\rightarrow b=c$$

以下证明必要性，充分性的证明留作思考题

分配格的判定定理（续）

证 必要性. $\forall a,b,c \in L$, 有

$$
\begin{aligned}
b &= b \vee (a \wedge b) && \text{(吸收律,交换律)} \\
&= b \vee (a \wedge c) && \text{(已知条件代入)} \\
&= (b \vee a) \wedge (b \vee c) && \text{(分配律)} \\
&= (a \vee c) \wedge (b \vee c) && \text{(已知条件代入,交换律)} \\
&= (a \wedge b) \vee c && \text{(分配律)} \\
&= (a \wedge c) \vee c && \text{(已知条件代入)} \\
&= c && \text{(交换律,吸收律)}
\end{aligned}
$$

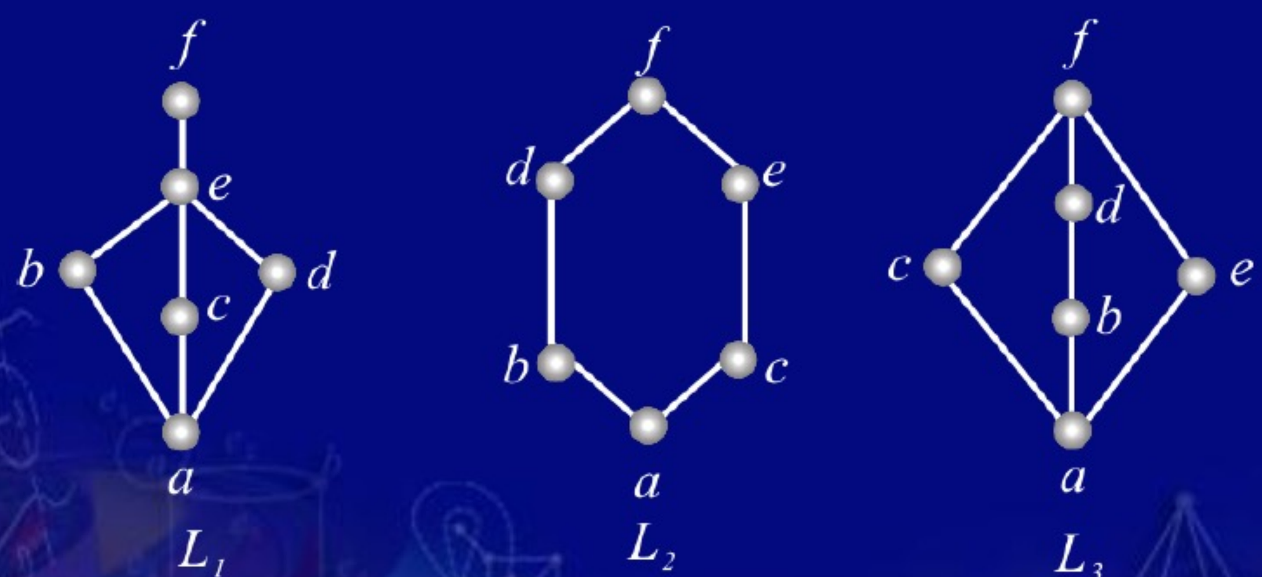
分配格的判定定理（续）

例　以下三个格都不是分配格.

在 L_1 中有 $b\vee c=b\vee d, b\wedge c=b\wedge d$, 但 $c\neq d$

在 L_2 中有 $b\wedge c=b\wedge e, b\vee c=b\vee e$, 但 $c\neq e$

在 L_3 中有 $c\wedge b=c\wedge d, c\vee b=c\vee d$, 但 $b\neq d$



有界格

- 定义（**有界格**）：设L为格，
  - 若存在$b \in L$，使得$\forall x \in L$有$b \preccurlyeq x$，则称元素b是格L的全下界（bottom）
  - 若存在$t \in L$，使得$\forall x \in L$有$x \preccurlyeq t$，则称元素t是格L的全上界（top）

此时格 L 称为有界格（bounded lattice）

有界格（续）

- 注意：
  - 若格L中存在全下界或全上界，则一定唯一
  - 一般将格L的全下界记为$\mathbf{0}$，全上界记为$\mathbf{1}$
  - 有界格L一般记为$\langle L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$
  - 有界格$\langle L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$满足同一律，即$\forall a\in L$：

$$a\wedge\mathbf{0}=\mathbf{0},a\vee\mathbf{0}=a;\ a\wedge\mathbf{1}=a,a\vee\mathbf{1}=\mathbf{1}$$

有界格（续）

- 事实：
  - 有限格皆为有界格，设$L=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则

    $a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n$是$L$的全下界

    $a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$是$L$的全上界
  - **0**是关于∧运算的零元，∨运算的单位元；**1**是关于∨运算的零元，∧运算的单位元
  - 求涉及有界格的命题之对偶命题，须将全下界与全上界对换

有补格

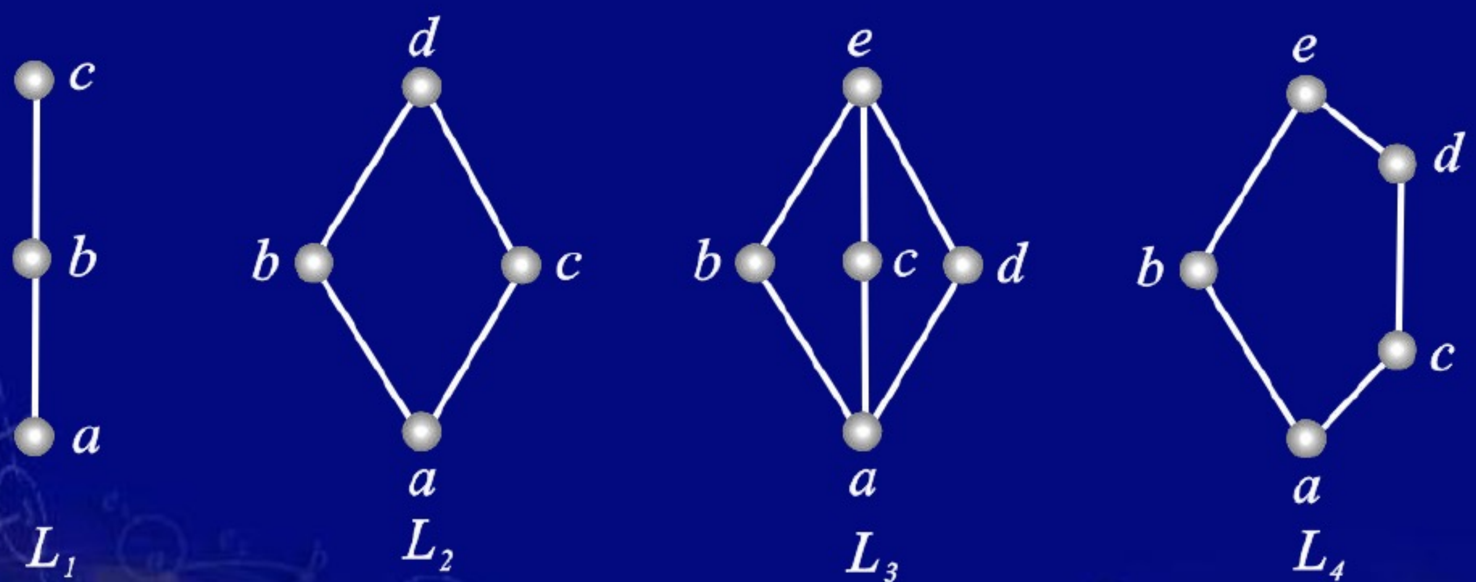
- 定义（**有界格的补元**）：设$\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$为有界格，若对$a \in L$存在$b \in L$使得

$$a \wedge b = \mathbf{0} \text{ 且 } a \vee b = \mathbf{1}$$

成立，则称元素b是a的补元（complement）

有补格（续）

例 考虑下图中的四个格. 针对不同的元素，求出所有的补元.



有补格（续）

- **定理**（**有界分配格的补元唯一**）：设$\langle L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$为有界分配格，若$a\in L$存在补元，则其补元唯一

- **证明：** 假设b,c皆为a之补元，则有：

  $$a\vee c=\mathbf{1},a\wedge c=\mathbf{0};\ \ a\vee b=\mathbf{1},a\wedge b=\mathbf{0}$$

  由于全上界和全下界唯一，从而有$a\vee c=a\vee b$，$a\wedge c=a\wedge b$，由于L是分配格，故$b=c$. □

有补格（续）

- 事实：
  - 任何有界格中，全上界**1**和全下界**0**互补
  - 对于一般元素，可能存在补元，也可能不存在补元
  - 补元若存在，则可能唯一，也可能有多个
  - 对于有界分配格，补元若存在则唯一

有补格（续）

- 定义（有补格）：设$\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$为有界格，若$L$中所有元素皆存在补元，则称$L$为有补格（complemented lattice）
- 例：钻石格$\boldsymbol{M_3}$和五角格$\boldsymbol{N_5}$皆为有补格

布尔代数引论

- 布尔代数是一种代数系统，与格一样，其也有两种定义方式，本引论中仅看其一：
- 定义（**布尔格**）：如果一个格为有补分配格，则称其为布尔格，或称布尔代数（Boolean algebra），可记为$\langle B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$

布尔代数之例

例 设

$$S_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$$

是 110 的正因子集合，

gcd 表示求最大公约数的运算，

lcm 表示求最小公倍数的运算，

问 $\langle S_{110}, \text{gcd}, \text{lcm} \rangle$ 是否构成布尔代数？为什么？

布尔代数之例

解（1）验证$<S_{110}, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$是格

容易验证 gcd 和 lcm 在 S_{110} 上封闭

$\mathrm{gcd}(x, y) = \mathrm{gcd}(y, x)$ (交换律)

$\mathrm{lcm}(x, y) = \mathrm{lcm}(y, x)$

$\mathrm{gcd}(\mathrm{gcd}(x, y), z) = \mathrm{gcd}(x, \mathrm{gcd}(y, z))$ (结合律)

$\mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(x,y), z) = \mathrm{lcm}(x, \mathrm{lcm}(y,z))$

$\mathrm{gcd}(x, \mathrm{lcm}(x, y)) = x$ (吸收律)

$\mathrm{lcm}(x, \mathrm{gcd}(x, y)) = x$

因此,$<S_{110}, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$构成格.

布尔代数之例（续）

（2）验证它是分配格.

易验证$\forall x, y, z \in S_{110}$ 有

$$\gcd(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\gcd(x, y), \gcd(x, z))$$

（3）验证它是有补格

1 作为 S_{110} 中的全下界, 110 为全上界,

1 和 110 互为补元, 2 和 55 互为补元,

5 和 22 互为补元, 10 和 11 互为补元,

从而证明了$<S_{110}, \gcd, \mathrm{lcm}>$为布尔代数.

布尔代数之例（续）

例 设 B 为任意集合，证明 B 的幂集格 $<P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B>$ 构成布尔代数，称为集合代数.

证 $P(B)$ 关于 $\cap$ 和 $\cup$ 构成格，因为 $\cap$ 和 $\cup$ 运算满足交换律，结合律和吸收律.

由于 $\cap$ 和 $\cup$ 互相可分配，因此 $P(B)$ 是分配格.

全下界是空集 $\varnothing$，全上界是 B.

根据绝对补的定义，取全集为 B, $\forall x \in P(B)$, $\sim x$ 是 x 的补元.

从而证明 $P(B)$ 是有补分配格，即布尔代数.

本次课后作业

- 教材内容：[屈婉玲] 11.1，11.2节
- 课后习题：
  - Problem Set 16
- 提交时间： 12月14日