

# § 2 标准正交基

一、正交向量组

二、标准正交基

三、正交矩阵

# 一、正交向量组(系)

定义：

设  $V$  为欧氏空间，非零向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V$ ，  
如果它们两两正交，则称之为**正交向量组(系)**。

注：

① 正交向量组必是线性无关向量组。

证：设非零向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V$  两两正交.

令  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0, \quad k_i \in R,$

$$\text{则 } (\alpha_i, \sum_{j=1}^m k_j \alpha_j) = \sum_{j=1}^m k_j (\alpha_i, \alpha_j) = k_i (\alpha_i, \alpha_i) = 0$$

由  $\alpha_i \neq 0$  知  $(\alpha_i, \alpha_i) > 0,$

$\therefore k_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$

故  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

③ 欧氏空间中线性无关向量组未必是正交向量组.

例如:  $R^3$  中  $\alpha_1 = (1,1,0)$ ,  $\alpha_2 = (1,0,1)$  线性无关.

但  $\alpha_1, \alpha_2$  不是正交向量组.

$$\because (\alpha_1, \alpha_2) = 1 \neq 0.$$

③  $n$  维欧氏空间中正交向量组所含向量个数  $\leq n$ .

## 二、标准正交基

### 1. 几何空间 $R^3$ 中的情况

在直角坐标系下

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

是由单位向量构成的正交向量组，即

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = 0,$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  是  $R^3$  的一组基.

设  $\alpha = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ ,  $\beta = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \in R^3$

① 从  $(\alpha, \vec{i}) = x_1$ ,  $(\alpha, \vec{j}) = y_1$ ,  $(\alpha, \vec{k}) = z_1$

得  $\alpha = (\alpha, \vec{i}) \vec{i} + (\alpha, \vec{j}) \vec{j} + (\alpha, \vec{k}) \vec{k}$

②  $(\alpha, \beta) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

③  $|\alpha| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

④  $\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

即在基  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  下,  $R^3$  中的与内积有关的度量性质有简单的表达形式.

## 2. 标准正交基的定义

$n$  维欧氏空间中，由  $n$  个向量构成的正交向量组称为**正交基**；

由单位向量构成的正交基称为**标准正交基**。

**注：**

① 由正交基的每个向量单位化，可得到一组标准正交基。

②  $n$  维欧氏空间  $V$  中的一组基  $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$  为标准正交基

$$\iff (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (1)$$

③  $n$  维欧氏空间  $V$  中的一组基  $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$  为标准正交基

当且仅当其度量矩阵  $A = [a_{ij}] = [(\varepsilon_i, \varepsilon_j)] = E_n$ .

④  $n$  维欧氏空间  $V$  中标准正交基的作用:

设  $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$  为  $V$  的一组标准正交基, 则



(i) 设  $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \in V$

由(1),  $(\alpha, \varepsilon_i) = x_i$ .

有  $\alpha = (\alpha, \varepsilon_1)\varepsilon_1 + (\alpha, \varepsilon_2)\varepsilon_2 + \cdots + (\alpha, \varepsilon_n)\varepsilon_n$  (2)

(ii)  $(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i$  (3)

这里  $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n.$$

(iii)  $|\alpha| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

### 3. 标准正交基的构造

#### —施密特(Schmidt)正交化过程

1)

(定理1)  $n$  维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

证：设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  欧氏空间  $V$  中的正交向量组，  
对  $n - m$  作数学归纳法.

当  $n - m = 0$  时， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  就是一组正交基了.

假设  $n - m = k$  时结论成立, 即此时可找到向量

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$$

使  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$

成为一组正交基.

现在来看  $n - m = k + 1 (\geq 1)$  的情形.

因为  $m < n$ ,

所以必有向量  $\beta$  不能被  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出,

作向量  $\alpha_{m+1} = \beta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \dots - k_m\alpha_m \quad (\neq 0)$

$k_i \in R$  待定.

从正交向量组的性质知

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = (\beta, \alpha_i) - k_i(\alpha_i, \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

于是取  $k_i = \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$

可得  $(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$

即  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  为正交向量组.

由归纳法假设知, 对这  $m+1$  个向量构成的正交组可扩充得正交基. 于是定理得证.

2)

(定理2) 对于 $n$  维欧氏空间中任一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$   
都可找到一组标准正交基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , 使

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

证: (基本方法—逐个构成出满足要求的  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ .)

首先, 可取 
$$\eta_1 = \frac{1}{|\varepsilon_1|} \varepsilon_1.$$

一般地，假定已求出  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  是单位正交的，且

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

当  $m < n$  时，因为有  $\varepsilon_{m+1} \notin L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ ,

由(4)知  $\varepsilon_{m+1}$  不能被  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  线性表出.

按定理1证明中的方法，作向量

$$\xi_{m+1} = \varepsilon_{m+1} - k_1 \eta_1 - k_2 \eta_2 - \dots - k_m \eta_m, \quad k_i = \frac{(\varepsilon_{m+1}, \eta_i)}{(\eta_i, \eta_i)}$$

$$\text{即} \quad \xi_{m+1} = \varepsilon_{m+1} - \sum_{i=1}^m (\varepsilon_{m+1}, \eta_i) \eta_i \quad (5)$$

则  $\xi_{m+1} \neq 0$  且  $(\xi_{m+1}, \eta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

再设  $\eta_{m+1} = \frac{1}{|\xi_{m+1}|} \xi_{m+1}.$

可知  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}$  是单位正交向量组.

从(4)和(5)知  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}$  与  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}$

是等价向量组, 因此, 有

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m+1}) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+1})$$

由归纳原理, 定理2得证.

注:

① 由  $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$

知, 若  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)T,$

则过渡矩阵  $T = (t_{ij})$  是上三角形 (即  $t_{ij} = 0, \quad i > j$  )

且  $t_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$



## ② Schmidt正交化过程:

1° 先把线性无关的向量组  $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$

化成正交向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ .

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

$$\beta_j = \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i, \quad j = 2, 3, \cdots, m;$$

2° 再单位化得标准正交向量组  $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ .

$$\eta_i = \frac{1}{|\beta_i|} \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

**例1.** 把  $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$ ,  
 $\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)$   $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$

变成单位正交的向量组.

正交化

解: 令  $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \alpha_4 - \frac{(\alpha_4, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_4, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \frac{(\alpha_4, \beta_3)}{(\beta_3, \beta_3)} \beta_3 \\ &= (1, -1, -1, 1) \end{aligned}$$

再单位化

$$\eta_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{|\beta_3|} \beta_3 = \left( -\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}} \right)$$

$$\eta_4 = \frac{1}{|\beta_4|} \beta_4 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  即为所求.

**例2** 试把线性无关的向量组  $1, x, x^2, x^3$  变为  $[-1, 1]$  上的正交多项式, 在此内积定义为

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

**解** 取  $y_1 = 1$ , 利用施密特正交化表达式有

$$y_2 = x - \frac{(x, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x - \int_{-1}^1 x dx / \int_{-1}^1 1 dx = x$$

$$y_3 = x^2 - \frac{(x^2, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 - \frac{(x^2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$y_4 = x^3 - \frac{(x^3, y_3)}{(y_3, y_3)} y_3 - \frac{(x^3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 - \frac{(x^3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x^3 - \frac{3x}{5}$$

将它们通分整理后得到的一组多项式

$$1, x, \frac{1}{3}(3x^2 - 1), \frac{1}{5}(5x^2 - 3x)$$

便是在 $[-1, 1]$ 上的正交多项式组.实际上, 它们是勒让德 (*Legendre*) 多项式  $P_n(x)$  中的前4个(常数因子不同) :

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

## 4. 标准正交基间的基变换

设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  中的两组标准正交基, 它们之间过渡矩阵是  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,

$$\text{即 } (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$$

$$\text{或 } \eta_i = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \dots + a_{ni}\varepsilon_n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由于  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是标准正交基, 所以

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

由公式 (6) , 有

$$(\eta_i, \eta_j) = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (7)$$

把A按列分块为  $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

由 (7) 有

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \cdots, a_n) = E_n \quad (8)$$

(8)式说明两组标准正交基之间的过渡矩阵是**正交矩阵**.

## 三、正交矩阵

### 1. 定义

设  $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ , 若  $A$  满足  $A^T A = E$

则称  $A$  为**正交矩阵**.

### 2. 简单性质

1)  $A$  为正交矩阵  $\Rightarrow |A| = \pm 1$ .

2) 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵.



3) 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是标准正交基,  $A$  为正交矩阵, 若

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$$

则  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  也是标准正交基.

4)  $A \in R^{n \times n}$  为正交矩阵

$\iff A$  的列向量组是欧氏空间  $R^n$  的标准正交基.

5)  $A \in R^{n \times n}$  为正交矩阵  $\iff A^{-1} = A^T$ .

6)  $A \in R^{n \times n}$  为正交矩阵

$\iff A$  的行向量组是欧氏空间  $R^n$  的标准正交基.