§4 基变换与坐标变换

一、向量的形式书写法

二、基变换

三、坐标变换

引入

我们知道，在n维线性空间V中，任意n个线性无关的向量都可取作线性空间V的一组基．V中任一向量在某一组基下的坐标是唯一确定的，但是在不同基下的坐标一般是不同的．因此在处理一些问题是时，如何选择适当的基使我们所讨论的向量的坐标比较简单是一个实际的问题．为此我们首先要知道同一向量在不同基下的坐标之间有什么关系，即随着基的改变，向量的坐标是如何变化的.

一、向量的形式书写法

1、V为数域 P上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V中的一组向量，$\beta\in V$ ，若

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

则记作

$$\beta = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2、V为数域 P 上 n 维线性空间， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **；**

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ **为V中的两组向量，若**

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

则记作

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

注：在形式书写法下有下列运算规律

1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V, a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in P$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$$

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

2） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$; $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为V中的两组向量，

矩阵 $A,B\in P^{n\times n}$，则

$$((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(AB);$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B$$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B);$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A$$
$$=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A;$$

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B\Leftrightarrow A=B$$

二、基变换

1、定义

设V为数域P上n维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$；

$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 为V中的两组基，若

$$\begin{cases} \varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon_2' = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases} \qquad ①$$

即，

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad ②$$

则称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

为由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的**过渡矩阵**;

称 ① 或 ② 为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$

的**基变换公式**.

2、有关性质

1）过渡矩阵都是可逆矩阵；反过来，任一可逆矩阵都可看成是两组基之间的过渡矩阵.

证明：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$； $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为V的两组基，

且由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为A，

即 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ ③

又由基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也有一个过渡矩阵，

设为B，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B$ ④

比较③ 、④两个等式，有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)BA$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AB$$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 都是线性无关的,

$\therefore$ $AB=BA=E$. 即，A是可逆矩阵, 且$A^{-1}=B$.

反过来，设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为P上任一可逆矩阵，

任取V的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,

令$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\alpha_i$， $j=1,2,\cdots,n$

于是有，$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$

由A可逆，有 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A^{-1}$

即，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$也可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出.

$\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$等价.

故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关，从而也为V的一组基.

并且A就是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

2）若由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$过渡矩阵为A，

则由基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$过渡矩阵为$A^{-1}$.

3）若由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$过渡矩阵为A,
由基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$到基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$过渡矩阵为B，则
由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$过渡矩阵为AB.

事实上, 若 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B$$

则有，$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A)B$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AB$$

三、坐标变换

1、定义：V为数域P上n维线性空间 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$；

$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 为V中的两组基，且

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ⑤$$

设 $\xi\in V$且ξ在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$与基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$

下的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，

即，$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 与 $\xi=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$

则
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}\qquad ⑥$$

或
$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad ⑦$$

称⑥或⑦为向量ξ在基变换⑤下的**坐标变换公式**.

例1 在P^n中，求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵及由基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的过渡矩阵．其中

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$$

$$\eta_1=(1,1,\cdots,1),\eta_2=(0,1,\cdots,1),\cdots,\eta_n=(0,\cdots,0,1)$$

并求向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的坐标.

解：$\because$

$$\begin{cases}\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n\\ \eta_2=\qquad\ \varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_n=\qquad\qquad\qquad\ \ \varepsilon_n\end{cases}$$

$$\therefore\ (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

而， $$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

故，由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标就是

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

设α在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2-a_1 \\ \vdots \\ a_n-a_{n-1} \end{pmatrix}$$

所以α在基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的坐标为

$$(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1})$$

例2　在P^4中，求由基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$到基$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$的过渡矩阵，其中

$$\eta_1=(1,2,-1,0) \qquad \xi_1=(2,1,0,1)$$

$$\eta_2=(1,-1,1,1) \qquad \xi_2=(0,1,2,2)$$

$$\eta_3=(-1,2,1,1) \qquad \xi_3=(-2,1,1,2)$$

$$\eta_4=(-1,-1,0,1) \qquad \xi_4=(1,3,1,2)$$

解：设 $\varepsilon_1=(1,0,0,0),\ \ \varepsilon_2=(0,1,0,0),$

$$\varepsilon_3=(0,0,1,0),\ \ \varepsilon_4=(0,0,0,1)$$

则有

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

或

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

从而有 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$

$$=\left((\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\right)\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\left(\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}\right)$$

$$
=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

∴由基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 到基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 的过渡矩阵为

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$