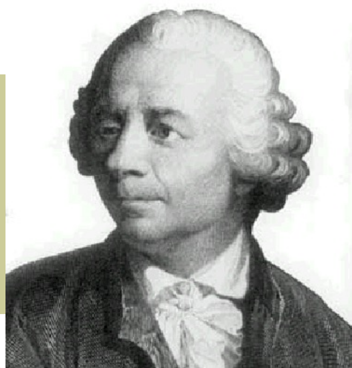
南京大學

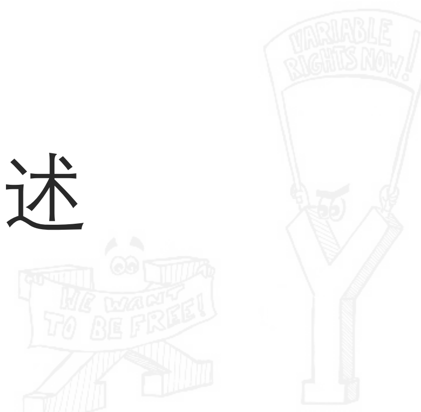
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学

Discrete Mathematics

第四讲：证明方法概述



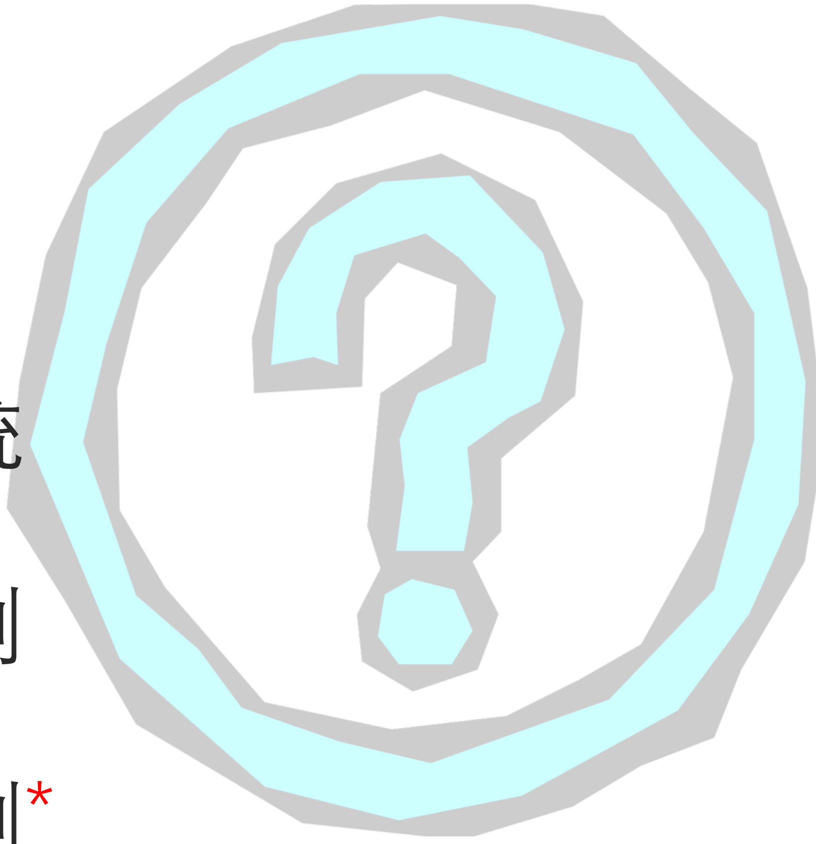
吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2021 年 10 月 12 日

前 情 提 要

- 谓词与量词
- 谓词逻辑
- 谓词逻辑的推理系统
- 谓词逻辑的推理实例
- 谓词逻辑的应用举例*



本讲主要内容

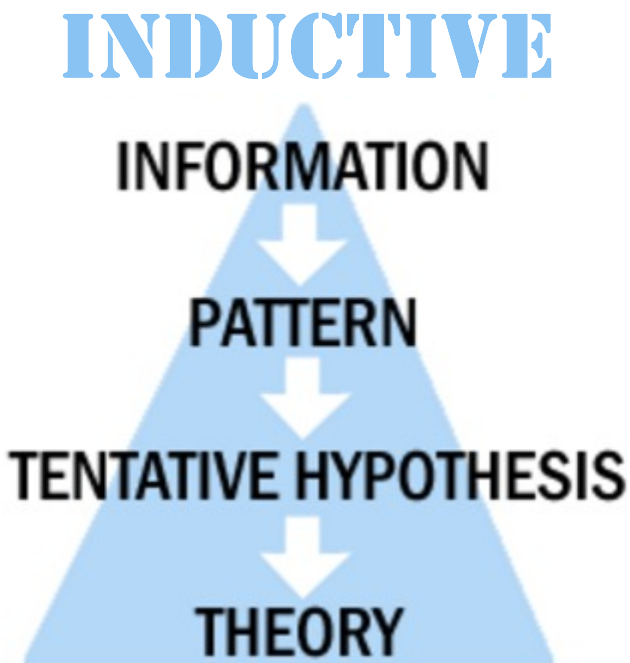
- 证明的本质
- 逻辑推理的形式结构
- 常用的证明方法与证明策略
  - 直接证明法，间接证明法
  - 归谬法（反证法），穷举法
  - 空证明法，平凡证明法
  - 构造性证明法，反例证明法

什么是证明（proof）？

- 证明的本质是“保证真实性”，其涵义根据领域的不同有所差异：
  - 实验科学中的“证明”指利用归纳推理（inductive reasoning）去证实（prove）某个假设（hypothesis）
  - 人们将大量特定的信息收集（归纳）起来并根据自身的知识和经验去观察，并推断（推理）哪些是真实的
  - 此类“证明”不产生定论（mathematical certainty）

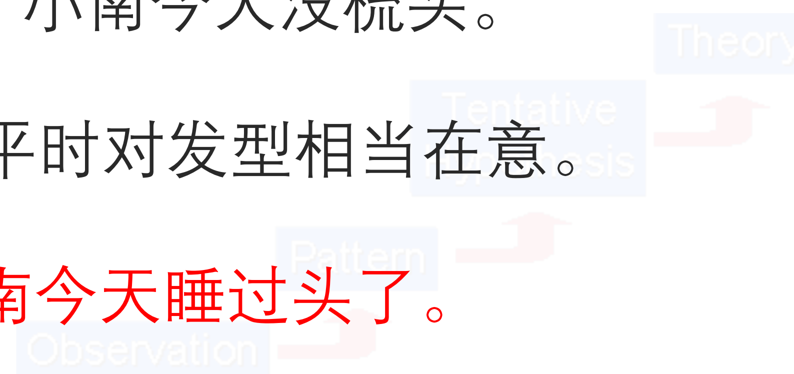
归纳推理的证明方式

- 归纳推理（*i.e.* 推测、推证）的逻辑过程



归纳推理的证明方式（续）

- 日常生活中“证明”的例子：
  - （premise）我们观察到：小南今早上课迟到了。
  - （premise）我们观察到：小南今天没梳头。
  - （premise）经验： 小南平时对发型相当在意。
  - （conclusion）结论：小南今天睡过头了。



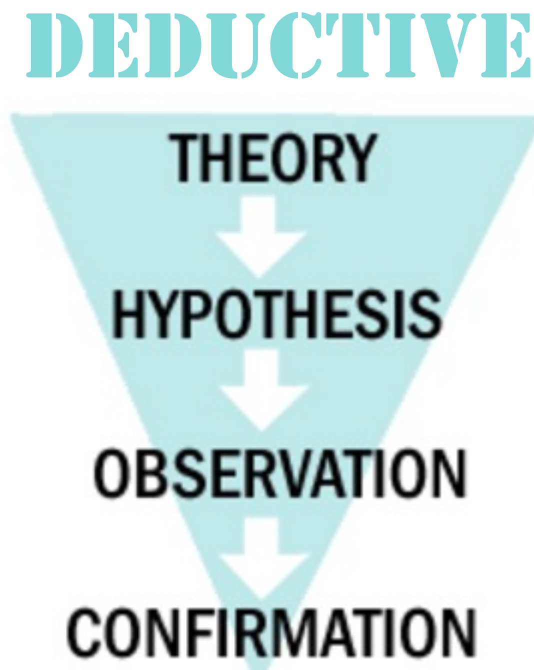
- 这类“证明”一般在数学中用于提出假设

演绎推理的证明方式

- 证明的本质是“保证真实性”，其涵义根据领域的不同有所差异：
  - 数学中的“证明”指利用演绎推理（deductive reasoning）和逻辑规则去推证某个命题
  - 数学证明中每一步推理过程都根据某些前提条件（premise）展示出一个结论——称为逻辑推论
  - 所有的证明过程必须是严密的（rigorous），在前提真实的情况下每一步都必须提供确信的证据来支持中间结论，最终的逻辑推论称为系统中的定理（theorem）

演绎推理的证明方式（续）

- 演绎推理（*i.e.* 证明）的逻辑过程



形式化证明（formal proof）

- 用于数学的证明方式称为形式化证明或推导（derivation）
- 定义（**形式化证明**）：对一个命题的基于**公理化系统**的一系列逻辑演绎的有限过程
- 例：欧几里德平面几何的公理集合
  - **公理1.** 任意两点可以通过一条直线连接。
  - **公理2.** 任意线段可无限延伸为一条直线。
  - **公理3.** 给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆。
  - **公理4.** 所有直角都全等。
  - **公理5.** 若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交。

形式化证明（formal proof）

- 对于本课程所涉及的所有形式化证明，其基于的公理化系统均为ZFC系统（即含选择公理(C)的策梅洛(Z)—弗兰克尔(F)公理化集合论系统，将在第五讲介绍），其演绎推理过程可描述为一个一般的逻辑证明结构

逻辑推理的形式结构

- 逻辑推理的形式化结构为：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

当上式为永真式（*i.e.* 蕴含重言式）时，可写为：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$$

此时称为“推理有效”或者“推理正确”，亦称B为前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$的有效（逻辑）结论；否则称推理不正确

	A	B	$A \rightarrow B$
(1)	0	0	1
(2)	0	1	1
(3)	1	0	0
(4)	1	1	1

(1), (2), (4)推理正确
(3) 推理不正确
(1) 中B是A的逻辑结论,但不是正确结论; (2)和(4)中B既是逻辑结论, 又是正确结论.

逻辑推理的形式结构（续）

- (1) “若A，则B”：

$$A \rightarrow B$$

- (2) “A当且仅当B”：

$$A \leftrightarrow B$$

- (3) “证明B”：

 $\Longrightarrow B$

- 以上三种形式皆可归结为形式(1)

直接证明法

- 证明方法：证明“若A为真，则B为真”
- 理论依据：“若A为真，则B为真”$\Leftrightarrow$“$A \rightarrow B$为真”
- 例：

证明：若n是奇数，则n^2也是奇数.

证： 因为$\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k + 1$，于是有：

$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$，故$n^2$是奇数. □

间接证明法

- 证明方法：证明逆否命题“$\neg B \to \neg A$”为真
- 理论依据：“$A \to B$为真”$\Leftrightarrow$“$\neg B \to \neg A$”为真
- 例：

证明：若n^2是奇数，则n也是奇数.

证：只需证**若$\boldsymbol{n}$是偶数，则$\boldsymbol{n^2}$也是偶数**. 假设$\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$，于是有：$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$，故n^2亦为偶数，从而原命题得证. $\square$

归谬法（反证法）

- 证明方法：假设A真且$\neg B$真，推出矛盾，即$A \wedge \neg B \Rightarrow \perp$
- 理论依据：“$A \wedge \neg B \rightarrow \perp$”为真$\Leftrightarrow$“$A \wedge \neg B$”为假$\Leftrightarrow$

  “$\neg(A \wedge \neg B)$”为真$\Leftrightarrow$“$\neg A \vee B$”为真$\Leftrightarrow$“$A \rightarrow B$为真”
- 例1：

  证明：若$3n+2$是奇数，则n也是奇数.

  证： 反设在题设条件下n为偶数，即$\exists k \in \mathbb{N}$，$n = 2k$，于是有：$3n+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$，故$3n+2$亦为偶数，矛盾！从而原命题得证. $\square$

归谬法（续）

- 例2：

证明：$\sqrt{2}$是无理数.

证：反设$\sqrt{2}$为有理数，则其可写为$\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N} \wedge (p, q) = 1)$的形式，且$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$；那么有：$p^2 = 2q^2 \to p^2$为偶$\to p$亦为偶$\to p^2$为4的倍数$\to q^2$为偶$\to q$为偶$\to p$与$q$有公约数2：这与$(p, q) = 1$矛盾，故假设错误，原命题得证. $\square$

广义归谬法

- 证明方法：假设$A_1, A_2, \cdots, A_k$真且$\neg B$真，推出矛盾，即

  $A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land \neg B \Longrightarrow \bot$

- 理论依据：$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land \neg B \Rightarrow \bot \iff A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \Longrightarrow B$

- 广义归谬法为人工智能中“归结反演”技术的理论基础

穷举法（分情形证明法）

- 证明目标：$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k \to B$为真
- 证明方法：证明$A_1 \to B$，$A_2 \to B$，…，$A_k \to B$皆为真
- 理论依据：$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k \to B \Leftrightarrow \neg(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k) \vee B \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \cdots \wedge \neg A_k) \vee B \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee B) \wedge (\neg A_2 \vee B) \wedge \cdots \wedge (\neg A_k \vee B) \Leftrightarrow (A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B) \wedge \cdots \wedge (A_k \to B)$
- 例：

证明： $\max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$.

证： 见下表.

穷举法（续）

- **证明：** $\max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$.

证： 见下表.

情　况	$u = \max(b, c)$	$\max(a, u)$	$v = \max(a, b)$	$\max(v, c)$
$a \le b \le c$	c	c	b	c
$a \le c \le b$	b	b	b	b
$b \le a \le c$	c	c	a	c
$b \le c \le a$	c	a	a	a
$c \le a \le b$	b	b	b	b
$c \le b \le a$	b	a	a	a

构造性证明法

- **证明目标**：证明$A \to B$为真，其中B具有某种性质的对象
- **证明方法**：在保证A为真的条件下构造出具有这种性质的对象
- **例**：

证明： 对于每个正整数n，存在n个连续的正合数.

证： 令$x = (n+1)!$，则$2|(x+2)$，$3|(x+3)$，$\cdots n|(x+n)$，$(n+1)|(x+n+1)$ 这n个连续的正整数为合数，命题得证. $\square$

空证明法（前件假证明法）

- 证明方法：要证“$A \to B$为真”，可证“A为矛盾式”
- 理论依据：“A为矛盾式”$\Longrightarrow$“$A \to B$永真”
- 例：

证明： 空集$\emptyset$是任何集合的子集.

证： 根据子集的定义$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$，令

$A = \emptyset$，则对于任意集合B，$\emptyset \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \to x \in B)$

$\Leftrightarrow \forall x(\bot \to x \in B) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$，命题得证. $\square$

	A	B	$A \to B$
(1)	0	0	1
(2)	0	1	1
(3)	1	0	0
(4)	1	1	1

平凡证明法（后件真证明法）

- 证明方法：要证“$A \to B$为真”，可证“B为永真式”
- 理论依据：“B为永真式”$\Longrightarrow$“$A \to B$永真”
- 例：

  证明： 若$a \le b$，则$a^0 \le b^0$.

  证： 因为$a^0 \le b^0$恒为真，故命题得证. $\square$

	A	B	$A \to B$
(1)	0	0	1
(2)	0	1	1
(3)	1	0	0
(4)	1	1	1

- 这种证明方式常在归纳证明的“奠基”中出现

命题为假的证明——举反例

- 证明方法：要证"$\forall x P(x)$为假"，可找一个使"$\neg P(x)$为真"的特例
- 理论依据："$\neg \forall x P(x)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists x \neg P(x)$"
- 例：

证明："每个正整数都是三个整数的平方和."为假命题.

证： 根据题设，正整数7无法表为3个整数的平方和，故原命题为假命题. □

命题为假的证明（续）

- 数学证明要求每一步均严格按照规则去推理，不要忽略隐式的规则
  - 例：

$a = b$ 假设a和b是两个相等的正整数

$a^2 = ab$ 两边乘以a

$a^2 - b^2 = ab - b^2$ 两边减去b^2

$(a-b)(a+b) = b(a-b)$ 分解

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ 两边同除以$a-b$

$2b = b$

$\therefore 2 = 1$ 两边同除以b

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 1.7 – 1.8节
- 课后习题：
  - Problem Set 4
- 提交时间：10月19日 14 : 00 之前
- 提交方式：拍照提交至本科教学平台