Ch 5.6 多维随机变量函数的分布

回顾前一次课

X和Y的联合密度函数$f(x,y)=h(x)g(y)$，则X和Y相互独立

设$(X,Y)\sim N\left(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho\right)$, 则X与Y独立的充要条件$\rho=0$

离散随机变量的条件分布列$P\left(X=x_i \middle| Y=y_j\right)=p_{ij}/p_{\cdot j}$、性质

条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)=f(x,y)/f_Y(y)$、非负性、规范性

- 乘法公式 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$
- 独立的随机变量X和Y有$f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$
- 正太分布的条件分布仍是正太分布

离散随机向量函数

已知二维随机向量(X,Y)的概率分布, 求随机变量

$$Z = g(X,Y)$$

的概率分布, 分离散和连续两种情况讨论.

已知离散型随机向量(X,Y)的联合分布列, 随机变量$Z = g(X,Y)$的分布列

- 根据X,Y的各种取值, 计算随机变量Z的取值
- 对相同的Z值合并, 对应的概率相加

离散变量的卷积公式

定理: 若离散随机变量X与Y独立，其分布列为$a_i = P(X = i)$和$b_j = P(Y = j)$ $(i, j = 0,1,\cdots)$, 则随机变量$Z = X + Y$的分布列为

$$P(Z = X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

二项分布之和是二项分布

定理： 若随机变量$X \sim B(n_1, p)$和$Y \sim B(n_2, p)$独立, 则

$$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$

推论: 若相互独立随机变量$X_i \sim \mathrm{Ber}(p) = B(1, p)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$$

泊松分布之和是泊松分布

定理： 若随机变量$X \sim P(\lambda_1)$和$Y \sim P(\lambda_2)$相互独立, 则

$$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

连续随机向量函数

设二维连续型随机向量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，求随机变量$Z=g(X,Y)$的概率密度

- 先计算分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(x,y)\le z)=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

- 对分布函数$F_Z(z)$求导得到密度函数

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

例题

设随机变量X和Y相互独立、且服从标准正态分布, 求随机变量$Z_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$和$Z_2 = X^2 + Y^2$的密度函数

和的分布$Z = X + Y$

引理： 设随机向量(X, Y)的联合密度为$f(x, y)$，则随机变量$Z = X + Y$的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)dy$$

连续随机变量的卷积公式

卷积公式： 若连续随机变量X与Y相互独立，其概率密度函数分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则随机变量$Z = X + Y$的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\,dy$$

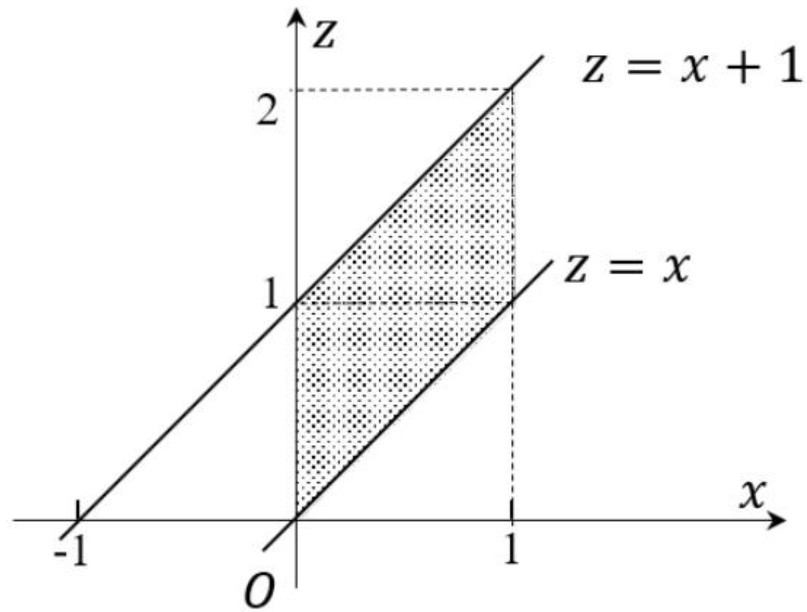
正态分布之和是正态分布

定理： 若随机变量$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$相互独立, 则

$$X + Y \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

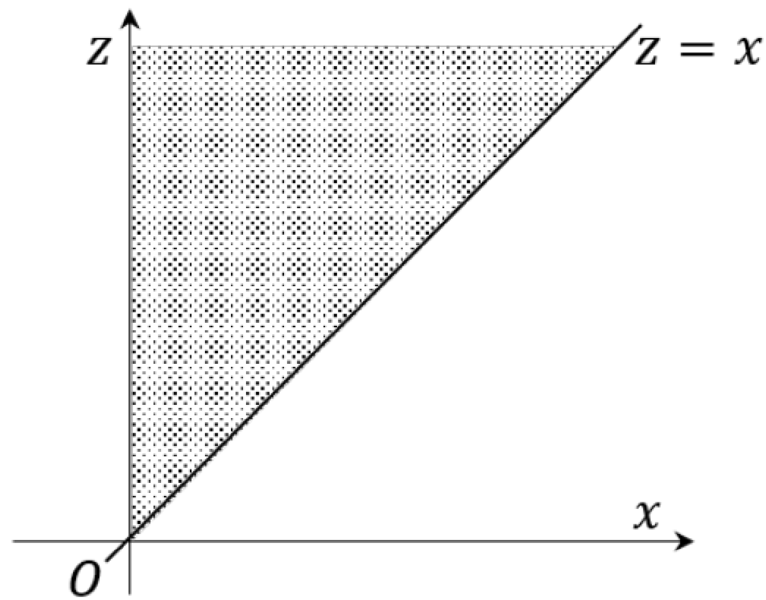
例题

设随机变量$X \sim U(0,1)$和$Y \sim U(0,1)$相互独立，求$Z = X + Y$的概率密度.



例题

若随机变量$X \sim e(\lambda)$和$Y \sim e(\lambda)$ 相互独立，求$Z = X + Y$的分布函数和概率密度.



随机变量的乘/除法分布

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则随机变量$Z=XY$的概率密度为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

随机变量$Z=Y/X$的概率密度为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx$$

例题

若标准正太分布的随机变量X和Y相互独立，则随机变量$Z = Y/X$服从柯西分布

最大值和最小值的分布

定理：设$X_1,\cdots,X_n$相互独立、分布函数为$F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_n}(x_n)$, 则随机变量$Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为

$$F_Y(y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y)$$

以及随机变量$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=1-\left(1-F_{X_1}(z)\right)\left(1-F_{X_2}(z)\right)\cdots\left(1-F_{X_n}(z)\right)$$

例题

设随机变量X与Y相互独立，且有$X \sim e(\alpha)$和$Y \sim e(\beta)$，求随机变量$Z_1 = \max(X, Y)$和$Z_2 = \min(X, Y)$的概率密度