7 向量到子空间的距离 最小二乘法

一. 向量到子空间的距离

二. 最小二乘法

一. 向量到子空间的距离

1. 向量间的距离

(1) 定义：长度 $|\alpha-\beta|$ 称为向量 α 和 β 的距离，记为

$$d(\alpha,\beta).$$

(2) 基本性质

① $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$

② $d(\alpha,\beta)\geq 0$,并且仅当 $\alpha=\beta$ 的等号才成立;

③（三角形不等式） $d(\alpha,\beta)\leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta).$

2.向量到子空间的距离

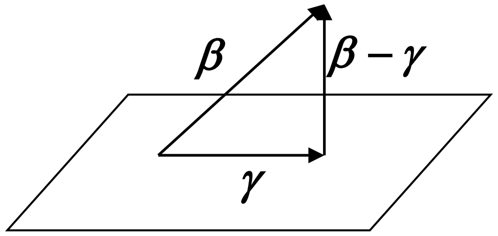
(1) 固定向量 α ，如果与子空间 W 中每个向量垂直，

称 α 垂直于子空间W记 $\alpha \perp W$.

如果 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$,则

$$\alpha \perp W \Leftrightarrow \alpha \perp \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, k.$$

(2) 向量到子空间中的各向量的距离以垂线为最短.



如图所示，对给定的β，设γ是W中的满足$\beta - \gamma \perp W$的向量，要证明

对$\forall \delta \in W$有 $|\beta-\gamma| \le |\beta-\delta|$ （1）

证明：$\beta-\delta=(\beta-\gamma)+(\gamma-\delta)$,因是子空间$W$，

$\gamma \in W, \delta \in W$，则 $\gamma-\delta \in W$,故$\beta-\gamma \perp \gamma-\delta$

由勾股定理 $|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\delta|^2=|\beta-\delta|^2$

即（1）成立.

二. 最小二乘法

1.问题提出，实系数线性方程组

$$Ax=b, A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times s}, b=\left[b_1,b_2,\cdots,b_n\right]^T \qquad （2）$$

可能无解，即任意 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 都可能使

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{is}x_s-b_i\right)^2 \qquad （3）$$

不等于零，设法找实数组 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_s^0$ 使（3）最小

这样的 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_s^0$ 方程组（2）的最小二乘解，

此问题叫最小二乘法问题.

2.问题的解决

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_s)'$ ，再令

$$y=\left[\sum_{j=1}^{s}a_{1j}x_j,\sum_{j=1}^{s}a_{2j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^{s}a_{nj}x_j,\right]^T=Ax.\quad（4）$$

用距离的概念，（3）就是 $|y-b|^2$.

由（4）知

$$y=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s, A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$$

找 x 使（3）最小，等价于找子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

中向量 y 使 b 到它的距离($|y-b|$)比到 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

中其它向量的距离都短.

设 $C=b-y=b-Ax$, 为此必 $C\perp L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

这等价于 $(C,\alpha_1)=(C,\alpha_2)=\cdots=(C,\alpha_s)=0,$ （5）

即 $\alpha_1^TC=0,\alpha_2^TC=0,\cdots,\alpha_s^TC=0,$

这样（5）等价于 $A^T\left(b-Ax\right)=0$ 或 $A^TAx=A^Tb$（6）

（6）就是最小二乘解所满足的代数方程.

例. 已知某种材料在生产过程中的废品率 y 与某种化学成份 x有关.下列表中记载了某工厂生产中 y与相应的 x 的几次数值：

$y(\%)$	1.00	0.9	0.9	0.81	0.60	0.56	0.35
$x(\%)$	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2

我们想找出 y 对x 的一个近似公式.

解 把表中数值画出图来看，发现它的变化趋势近于一条直线.因此我们决定选取 x 的一次式 $ax+b$ 来表达.当然最好能选到适当的 a,b 使得下面的等式

$$3.6a+b-1.00=0,\quad 3.7a+b-0.9=0$$

$$3.8a+b-0.9=0,\quad 3.9a+b-0.81=0,$$

$$4.0a+b-0.60=0,\quad 4.1a+b-0.56=0,$$

$$4.2a+b-0.35=0$$

都成立.实际上是不可能的。任何a,b代入上面各式都发生些误差.于是想找到 a,b 使得上面各式的误差的平方和最小，即找 a,b 使

$$(3.6a+b-1.00)^2+(3.7a+b-0.9)^2+(3.8a+b-0.9)^2$$
$$+(3.9a+b-0.81)^2+(4.0a+b-0.60)^2+(4.1a+b-0.56)^2$$
$$+(4.2a+b-0.35)^2$$

最小.易知

$$A=\begin{pmatrix}3.6 & 1\\ 3.7 & 1\\ 3.8 & 1\\ 3.9 & 1\\ 4.0 & 1\\ 4.1 & 1\\ 4.2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1.00\\ 0.90\\ 0.90\\ 0.81\\ 0.60\\ 0.56\\ 0.35\end{pmatrix}$$

最小二乘解 a,b 所满足的方程就是

$$A^T A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}-A^T B=0,$$

即为
$$\begin{cases}106.75a+27.3b-19.675=0\\ 27.3a+7b-5.12=0\end{cases}$$

解得

$$a=-1.05, b=4.81$$ **（取三位有效数字）.**

线性最小二乘问题的求解步骤：

1.由测定的数据描图；

2.根据图形建立数学模型（多项式、多元函数模型、非线性模型、周期三角函数模型等）；

3.得到矩阵A和右端向量b;

4.解法方程组$A^T Ax=A^T b.$