## 习题

**5.1** 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数为 $F(x,y)$, 求概率 $P(X>x,Y>y)$.

**5.2** 设随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y} & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

求 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布函数和边缘密度函数.

**5.3** 设连续非负的随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立, $X$ 的边缘分布函数为 $F_X(x)$, $Y$ 的边缘密度函数为 $f_Y(y)$, 证明

$$P(X<Y)=\int_0^{+\infty}F_X(x)f_Y(x)dx\ .$$

**5.4** 设随机变量 $(X,Y)$ 的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}ce^{-y} & 0\leqslant x<y<+\infty\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

求 $X$ 和 $Y$ 的边缘密度函数.

**5.5** 设相互独立的随机变量 $X\sim e(\lambda_1)$ 和 $Y\sim e(\lambda_2)$, 其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$. 求 $P(X<Y)$.

**5.6** 给定 $\alpha>0$, 设随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})y & x\geqslant 0,0\leqslant y\leqslant 1\\ 1-e^{-\alpha x} & x\geqslant 0,y>1\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

求 $X$ 和 $Y$ 的独立性.

**5.7** 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+axy & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

求 $P(X+Y\geqslant 1)$.

**5.8** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

求 $P(X \leqslant 1/2)$.

**5.9** 若多维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_r) \sim M(n, p_1, p_2, \cdots, p_r)$, 则每个随机变量 $X_i$ $(i \in [r])$ 的边缘分布为二项分布 $B(n, p_i)$. (利用联合分布函数的定义证明)

**5.10** 设随机变量 $X, Y, Z$ 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布且相互独立, 求概率 $P(X \geqslant YZ)$.