Ch 3 离散型随机变量

回顾前一次课

独立性：两个事件、多个事件相互独立性

相互独立性　　两两独立性

事件的独立　　事件的互斥（互不相容）

独立性的性质，以及如何判断独立性

小概率原理：若事件A在一次试验中发生的概率非常小, 但经过多次独立地重复试验, 事件A的发生是必然的

应用案例：1) 判断多项式$f(x) = g(x)$?

2) 判断矩阵乘法$AB = C$?

3) 隐私调查

4）概率化方法

试验结果数值化

有些随机试验的结果本身就是数值

- 抛一枚骰子的点数：$1, 2, \ldots, 6$
- 国家一年出生的婴儿数：$1, 2, \ldots, n, \ldots$

有些试验结果看起来与数值无关, 但可以用数值来表示

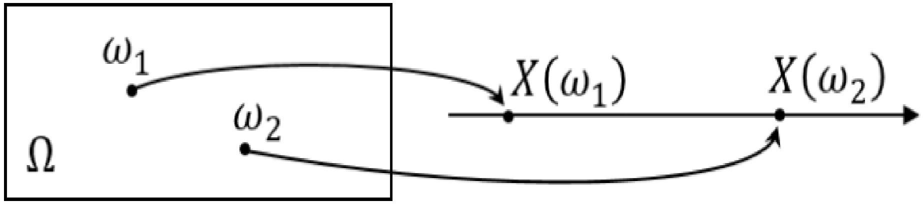
- 抛一枚硬币, 正面朝上用0表示, 正面朝下用1表示
- 针对一般事件A，可以定义

$$X = \begin{cases} 1 & \text{事件}A\text{发生} \\ 0 & \text{事件不}A\text{发生} \end{cases}$$

试验结果用数值表示, 引入变量来表示随机事件 —— **随机变量**

随机变量

设Ω是一个样本空间，如果对每个基本事件$\omega \in \Omega$，都对应于一个实数$X(\omega)$，称这样的**单射**实值函数$X(\omega): \Omega \to \mathrm{R}$为**随机变量**(random variable), 一般简写为X



随机变量与普通函数存在着本质的不同：

- $X(\omega)$ 随样本点ω的不同而取不同的值, 具有一定的随机性
- 各试验结果的出现具有一定的概率, X的取值具有统计规律性

通过随机变量来描述随机现象或随机事件, 可以利用各种数学分析工具, 通过对随机变量的研究来揭示随机现象.

随机变量

一般用大写字母X, Y, Z表示各种随机变量

不可能事件：$\{X \le -\infty\}$ 必然事件：$\{X \le +\infty\}$

离散型随机变量：随机变量的取值是有限的、或无限可列的

非离散型随机变量：随机变量的取值无限不可列的

连续型随机变量：后面讲

- 抛一枚骰子, 用随机变量X表示出现的点数, 则随机变量$X \in [6]$.
  - 出现的点数不超过 4 的事件可表示为 $\{X \le 4\}$
  - 出现偶数点的事件可表示为 $\{X=2，4，6\}$
- 用随机变量X表示一盏电灯的寿命, 其取值为 $[0, +\infty)$, 电灯寿命不超过500的事件可表示为 $\{X \le 500\}$

离散型随机变量

设随机变量X所有的取值为$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 事件$X = x_k$的概率为

$$p_k = P(X = x_k) \qquad k = 1, 2, \cdots$$

称之为随机变量X的**概率分布列**或**概率分布**，简称**分布列**

分布列包含随机变量的取值和概率，完全刻画其概率属性

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

性质 随机变量X分布列$P(X = x_k) = p_k$ 满足$p_k \geq 0$且$\sum_k p_k = 1$

例题

若随机变量X的分布列$P(X = k) = c/4^k \ \ (k \geq 0)$, 求$P(X = 1)$

给定常数$\lambda > 0$, 随机变量X的分布列$p_i \ = \ c\lambda^k/k! \ \ (k \geq 0)$, 求$P(X > 2)$

Ch 3.2 离散型随机变量的期望

数字特征

针对一个具体的问题,不容易完全求解出概率分布列

不需要知道精确的概率分布列, 要掌握它的整体特征

- 在统计某个地区的工资水平时, 可能更关心该地区工资的平均水平、集中程度等特征, 而不是每个人的具体工资

刻画随机变量某些方面特征的数值称为 **随机变量的数字特征**

数字特征：宏观刻画随机变量的某些基本特性, 有助于总体理解

一些常用的随机变量, 一些数字特征就可以完全确定其概率分布

常用的数字特征：随机变量的期望、方差、相关系数和矩等

离散变量的期望

定义： 离散随机变量X的分布列为$P(X=x_k)=p_k\ (k\geq 1)$, 若级数$\sum_k p_k x_k$绝对收敛, 称级数和为随机变量X的**期望** (expectation), 又被称为**均值**(mean), 记为$E(X)$

$$E(X)=\sum_k p_k x_k$$

- 期望$E(X)$ 反映随机变量的平均值, 由随机变量的分布列决定, 是常量而不是变量, 根据随机变量的值x_i和概率p_i加权所得
- 级数的绝对收敛保证了级数和不随级数各项次序的改变而改变, 期望$E(X)$反映X可能值的平均值, 不会随次序改变而改变
- 除非特别说明, 通常直接利用定义计算期望, 不考虑绝对收敛性

例题

随机掷一枚骰子, X表示观察到的点数, 求$E[X]$

设随机变量X的分布列为$P(X=(-2)^k/k)=1/2^k \ \ (k=1,2,\cdots)$,
求期望$E(X)$

例题

有n把钥匙只有一把能打开门, 随机选取一把试开门, 若打不开则除去, 求打开门次数的平均数.

有4个盒子编号分别为1,2,3,4. 将3个不同的球随机放入4个盒子, 用X表示有球盒子的最小号码, 求$E(X)$

期望的性质

若随机变量$X \equiv c$, 则$E(c) = c$

对随机变量X和常数$a, b \in \mathrm{R}$, 有$E(aX + b) = aE(X) + b$

若离散型随机变量X的取值非负整数$\{0,1,2,\cdots\}$, 则

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X \geq i)$$

函数期望的计算

定理: 设X为离散型随机变量, 以及$g: R \to R$是函数, 若X的分布列为$P(X = x_k) = p_k\ (k \geq 1)$, 且$\sum_{k\geq 1} g(x_k)p_k$绝对收敛, 则有

$$E[g(X)] = \sum_{k\geq 1} g(x_k)p_k$$

求$\boldsymbol{Y = g(X)}$的期望, 不需$\boldsymbol{Y}$分布列, 而$\boldsymbol{X}$的分布列可计算$\mathbf{E}[\boldsymbol{Y}]$

函数期望的计算

设X为离散型随机变量, 以及函数$g_i: R \to \mathrm{R}(\mathrm{i} \in [\mathrm{n}])$是连续函数, 且$E\big(g_i(X)\big)$存在. 对任意常数$c_1, c_2, \ldots, c_n$有

$$E\left(c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X) + \cdots + c_n g_n(X)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E\big(g_i(X)\big)$$

$E(X^2 + X + sinX + 4)$=

凸函数

设函数$g: [a, b] \to \mathrm{R}$, 若对任意$x_1, x_2 \in [a, b]$ 和$\lambda \in [0,1]$, 有

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$$

成立, 称函数$g(x)$是定义在 $[a, b]$ 的凸函数

若对任意$x_1, x_2 \in [a, b]$和$\lambda \in [0,1]$, 有

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$$

成立, 称函数$g(x)$是定义在$[a, b]$的凹函数

Jensen不等式

X为$[a,b]$的随机变量, $g: [a,b] \to \mathrm{R}$是连续的凸函数, 有

$$g\big(E(X)\big) \leq E\big(g(X)\big)$$

设X为$[a,b]$的随机变量,若$g: [a,b] \to \mathrm{R}$是连续的凹函数, 则有

$$g\big(E(X)\big) \geq E\big(g(X)\big)$$

对任意离散型随机变量X, 根据Jensen不等式有

$$\big(E(X)\big)^2 \leq E\left(X^2\right)$$

$$e^{E(X)} \leq E\left(e^X\right)$$

$$\ln E(X) \geq E(\ln X)$$