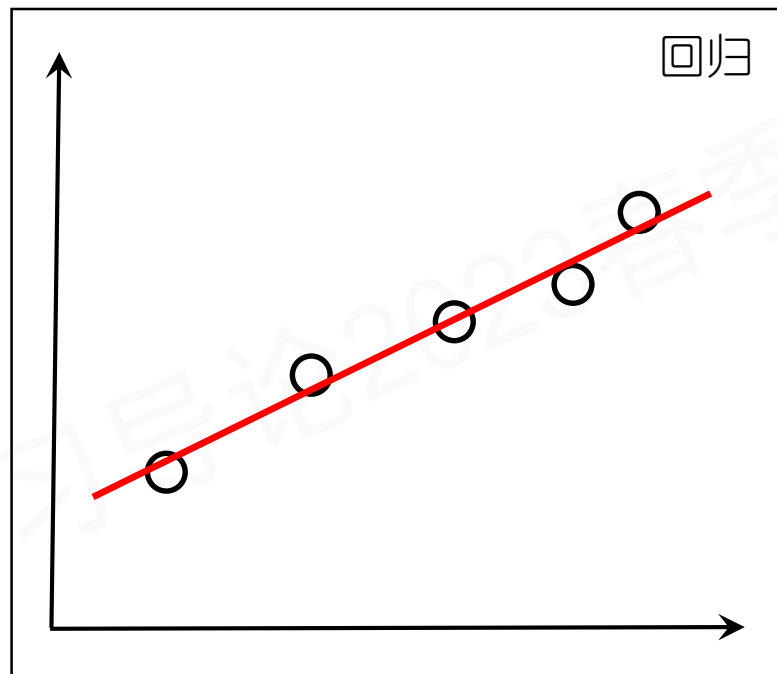
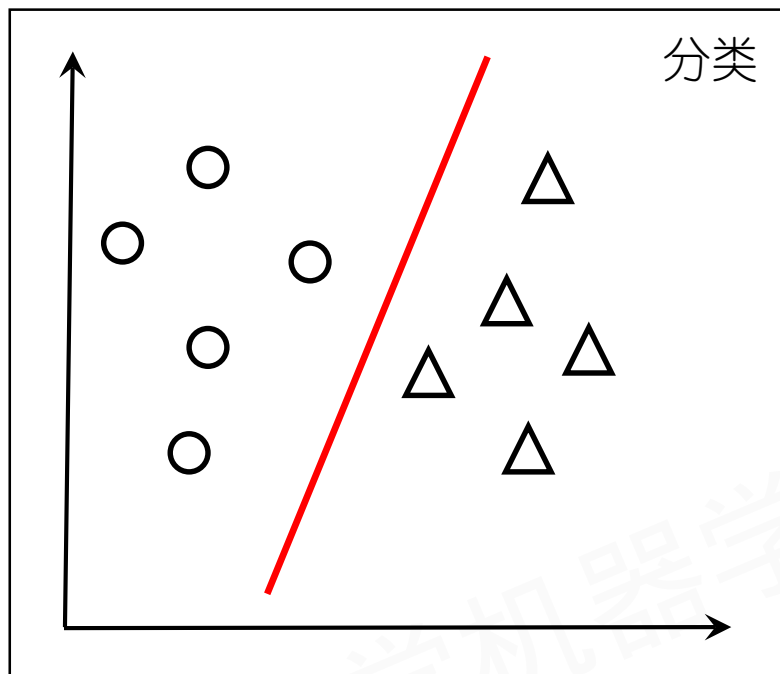


三、线性模型

主讲教师：周志华

线性模型



线性模型(linear model)试图学得一个通过属性的线性组合来进行预测的函数

$$f(x) = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_dx_d + b$$

向量形式: $f(x) = w^T x + b$

简单、基本、可理解性好

线性回归 (linear regression)

$$f(x_i) = wx_i + b \text{ 使得 } f(x_i) \simeq y_i$$

离散属性的处理：若有“序”(order)，则连续化；
否则，转化为 k 维向量

$$\begin{aligned} \text{令均方误差最小化, 有 } (w^*, b^*) &= \arg \min_{(w, b)} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2 \\ &= \arg \min_{(w, b)} \sum_{i=1}^m (y_i - wx_i - b)^2 \end{aligned}$$

$$\text{对 } E_{(w, b)} = \sum_{i=1}^m (y_i - wx_i - b)^2 \text{ 进行最小二乘参数估计}$$

线性回归

分别对 w 和 b 求导：

$$\frac{\partial E_{(w,b)}}{\partial w} = 2 \left(w \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m (y_i - b) x_i \right)$$
$$\frac{\partial E_{(w,b)}}{\partial b} = 2 \left(mb - \sum_{i=1}^m (y_i - wx_i) \right)$$

令导数为 **0**，得到闭式(closed-form)解：

$$w = \frac{\sum_{i=1}^m y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^m x_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2} \quad b = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - wx_i)$$

多元(multi-variate)线性回归

$$f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \quad \text{使得} \quad f(\mathbf{x}_i) \simeq y_i$$

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}; x_{i2}; \dots; x_{id}) \quad y_i \in \mathbb{R}$$

把 \mathbf{w} 和 b 吸收入向量形式 $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}; b)$, 数据集表示为

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1d} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2d} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{md} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T & 1 \\ \mathbf{x}_2^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_m^T & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = (y_1; y_2; \dots; y_m)$$

多元线性回归

同样采用最小二乘法求解，有

$$\hat{\mathbf{w}}^* = \arg \min_{\hat{\mathbf{w}}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}})$$

令 $E_{\hat{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}})$ ，对 $\hat{\mathbf{w}}$ 求导：

$$\frac{\partial E_{\hat{\mathbf{w}}}}{\partial \hat{\mathbf{w}}} = 2\mathbf{X}^T (\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) \quad \text{令其为零可得 } \hat{\mathbf{w}}$$

然而，麻烦来了：涉及矩阵求逆！

□ 若 $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ 满秩或正定，则 $\hat{\mathbf{w}}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$

□ 若 $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ 不满秩，则可解出多个 $\hat{\mathbf{w}}$

此时需求助于归纳偏好，或引入 正则化 (regularization) → 第6、11章

线性模型的变化

对于样例 (x, y) , $y \in \mathbb{R}$, 若希望线性模型的预测值逼近真实标记, 则得到线性回归模型 $y = w^T x + b$

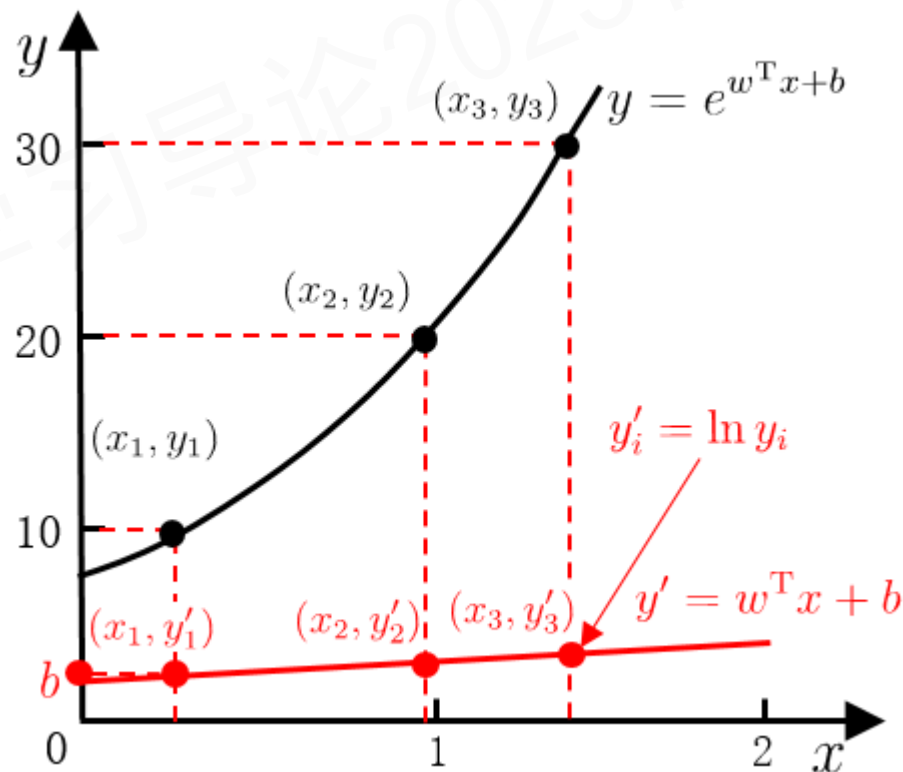
令预测值逼近 y 的衍生物?

若令 $\ln y = w^T x + b$

则得到对数线性回归

(log-linear regression)

实际是在用 $e^{w^T x + b}$ 逼近 y



广义(generalized)线性模型

一般形式: $y = g^{-1}(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} + b)$



单调可微的 联系函数 (link function)

令 $g(\cdot) = \ln(\cdot)$ 则得到 对数线性回归

$$\ln y = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} + b$$

...

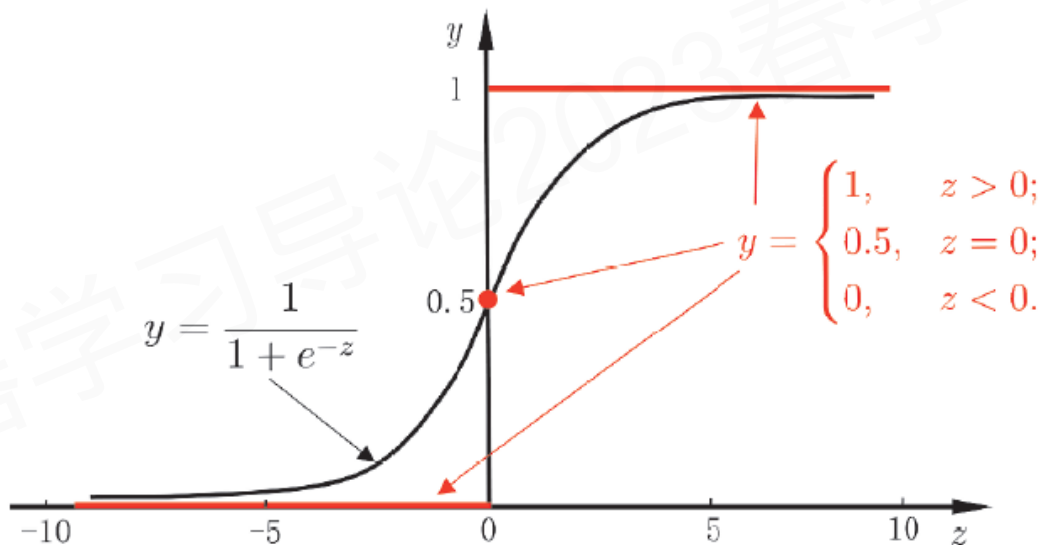
二分类任务

线性回归模型产生的实值输出 $z = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b$
期望输出 $y \in \{0, 1\}$

找 z 和 y 的
联系函数

理想的“单位阶跃函数”
(unit-step function)

$$y = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ 0.5, & z = 0; \\ 1, & z > 0, \end{cases}$$



性质不好,
需找“替代函数”
(surrogate function)

常用
单调可微、任意阶可导

$$y = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

对数几率函数
(logistic function)
简称“对率函数”

注意: Logistic与“逻辑”没有半毛钱关系!

1. Logistic 源自 Logit, 不是Logic; 2. 实数值, 并非“非0即1”的逻辑值

对率回归

以对率函数为联系函数：

$$y = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad \text{变为} \quad y = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b)}}$$

即：

$$\ln \frac{y}{1 - y} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b$$

“对数几率”

(log odds, 亦称 logit)

几率(odds), 反映了 \mathbf{x} 作为正例的相对可能性

“对数几率回归” (logistic regression)
简称 “对率回归”

- 无需事先假设数据分布
- 可得到 “类别” 的近似概率预测
- 可直接应用现有数值优化算法求取最优解

注意：它是
分类学习算法！

求解思路

若将 y 看作类后验概率估计 $p(y = 1 \mid \mathbf{x})$, 则

$$\ln \frac{y}{1-y} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b \quad \text{可写为} \quad \ln \frac{p(y = 1 \mid \mathbf{x})}{p(y = 0 \mid \mathbf{x})} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b$$

于是, 可使用 “极大似然法” \longrightarrow 第7章
(maximum likelihood method)

给定数据集 $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m$

最大化 “对数似然” (log-likelihood) 函数

$$\ell(\mathbf{w}, b) = \sum_{i=1}^m \ln p(y_i \mid \mathbf{x}_i; \mathbf{w}, b)$$

求解思路

令 $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{w}; b)$, $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}; 1)$, 则 $\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b$ 可简写为 $\boldsymbol{\beta}^T \hat{\mathbf{x}}$

$$\text{再令 } p_1(\hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) = p(y = 1 \mid \hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) = \frac{e^{\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b}}{1 + e^{\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b}}$$

$$p_0(\hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) = p(y = 0 \mid \hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) = 1 - p_1(\hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{1 + e^{\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b}}$$

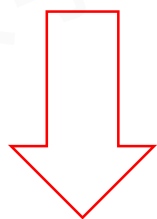
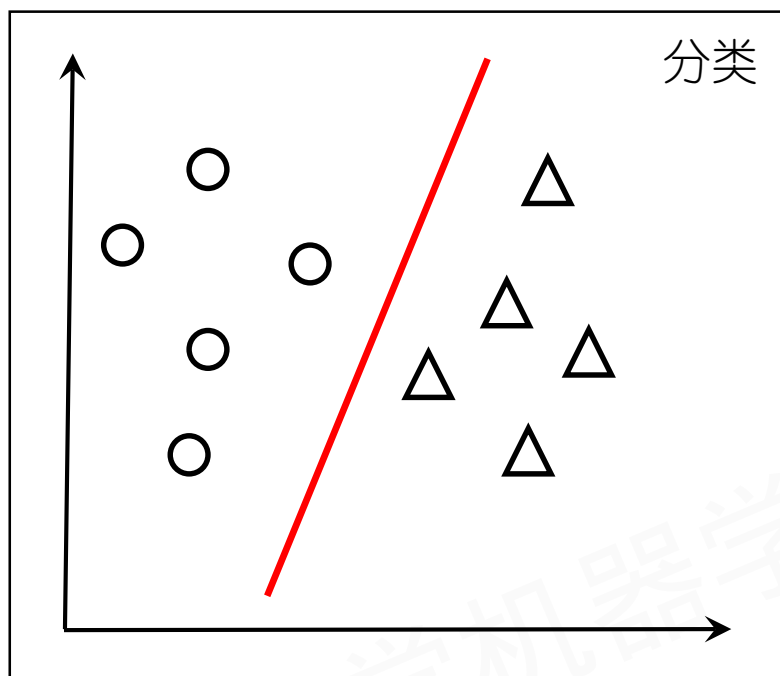
则似然项可重写为 $p(y_i \mid \mathbf{x}_i; \mathbf{w}_i, b) = y_i p_1(\hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) + (1 - y_i) p_0(\hat{\mathbf{x}}_i; \boldsymbol{\beta})$

$$\text{于是, 最大化似然函数 } \ell(\mathbf{w}, b) = \sum_{i=1}^m \ln p(y_i \mid \mathbf{x}_i; \mathbf{w}, b)$$

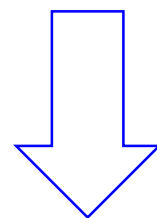
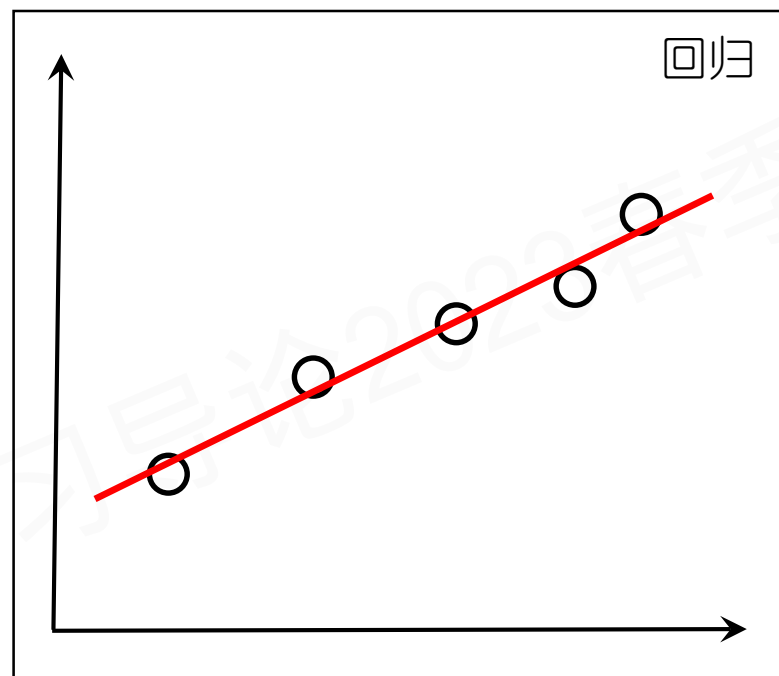
$$\text{等价于最小化 } \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m \left(-y_i \boldsymbol{\beta}^T \hat{\mathbf{x}}_i + \ln \left(1 + e^{\boldsymbol{\beta}^T \hat{\mathbf{x}}_i} \right) \right)$$

高阶可导连续凸函数, 可用经典的数值优化方法
如梯度下降法/牛顿法 [Boyd and Vandenberghe, 2004]

线性模型做“分类”



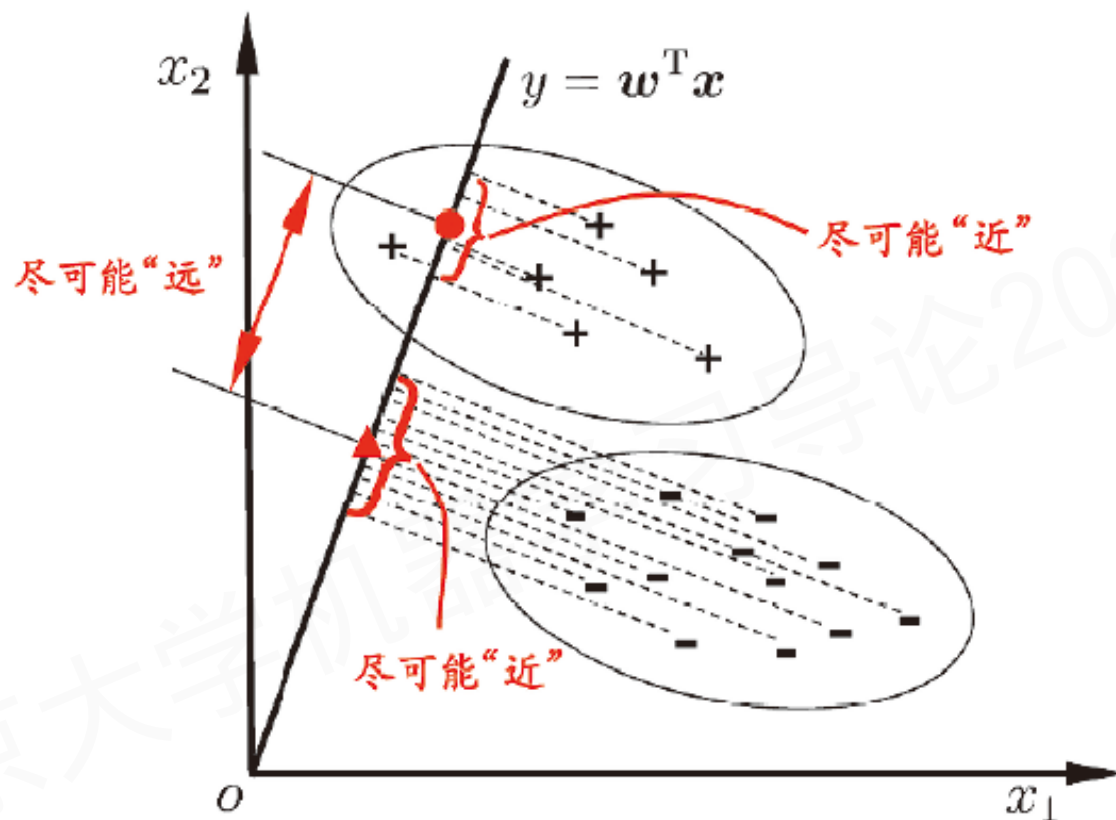
如何“直接”做分类？



广义线性模型；
通过“联系函数”

例如，对率回归

线性判别分析 (Linear Discriminant Analysis)



由于将样例投影到一条直线（低维空间），因此也被视为一种“监督降维”技术 降维 → 第10章

LDA的目标

给定数据集 $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m$

第 i 类示例的集合 X_i

第 i 类示例的均值向量 μ_i

第 i 类示例的协方差矩阵 Σ_i

两类样本的中心在直线上的投影: $\mathbf{w}^T \mu_0$ 和 $\mathbf{w}^T \mu_1$

两类样本的协方差: $\mathbf{w}^T \Sigma_0 \mathbf{w}$ 和 $\mathbf{w}^T \Sigma_1 \mathbf{w}$

同类样例的投影点尽可能接近 $\rightarrow \mathbf{w}^T \Sigma_0 \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \Sigma_1 \mathbf{w}$ 尽可能小

异类样例的投影点尽可能远离 $\rightarrow \|\mathbf{w}^T \mu_0 - \mathbf{w}^T \mu_1\|_2^2$ 尽可能大

于是, 最大化

$$J = \frac{\|\mathbf{w}^T \mu_0 - \mathbf{w}^T \mu_1\|_2^2}{\mathbf{w}^T \Sigma_0 \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \Sigma_1 \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}^T (\mu_0 - \mu_1) (\mu_0 - \mu_1)^T \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T (\Sigma_0 + \Sigma_1) \mathbf{w}}$$

LDA的目标

类内散度矩阵 (within-class scatter matrix)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_w &= \mathbf{\Sigma}_0 + \mathbf{\Sigma}_1 \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in X_0} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_0)^T + \sum_{\mathbf{x} \in X_1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \end{aligned}$$

类间散度矩阵 (between-class scatter matrix)

$$\mathbf{S}_b = (\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)^T$$

LDA的目标：最大化广义瑞利商 (generalized Rayleigh quotient)

$$J = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_b \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w}}$$

\mathbf{w} 成倍缩放不影响 J 值
仅考虑方向

求解思路

令 $\mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w} = 1$ ，最大化广义瑞利商等价形式为

$$\min_{\mathbf{w}} -\mathbf{w}^T \mathbf{S}_b \mathbf{w}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w} = 1$$

运用拉格朗日乘子法，有 $\mathbf{S}_b \mathbf{w} = \lambda \mathbf{S}_w \mathbf{w}$

$$\text{由 } \mathbf{S}_b \text{ 定义, 有 } \mathbf{S}_b \mathbf{w} = (\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{w}$$

注意到 $(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)^T \mathbf{w}$ 是标量，令其等于 λ

$$\text{于是 } \mathbf{w} = \mathbf{S}_w^{-1} (\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)$$

实践中通常是进行奇异值分解 $\mathbf{S}_w = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T$

$$\text{然后 } \mathbf{S}_w^{-1} = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T$$

→ 附录 A

推广到多类

假定有 N 个类

□ 全局散度矩阵 $\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T$

□ 类内散度矩阵 $\mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_{w_i} \quad \mathbf{S}_{w_i} = \sum_{\mathbf{x} \in X_i} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T$

□ 类间散度矩阵 $\mathbf{S}_b = \mathbf{S}_t - \mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu})^T$

多分类LDA有多种实现方法：采用 \mathbf{S}_b , \mathbf{S}_w , \mathbf{S}_t 中的任何两个

例如, $\max_{\mathbf{W}} \frac{\text{tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{S}_b \mathbf{W})}{\text{tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{S}_w \mathbf{W})} \implies \mathbf{S}_b \mathbf{W} = \lambda \mathbf{S}_w \mathbf{W}$

$$\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d \times (N-1)}$$

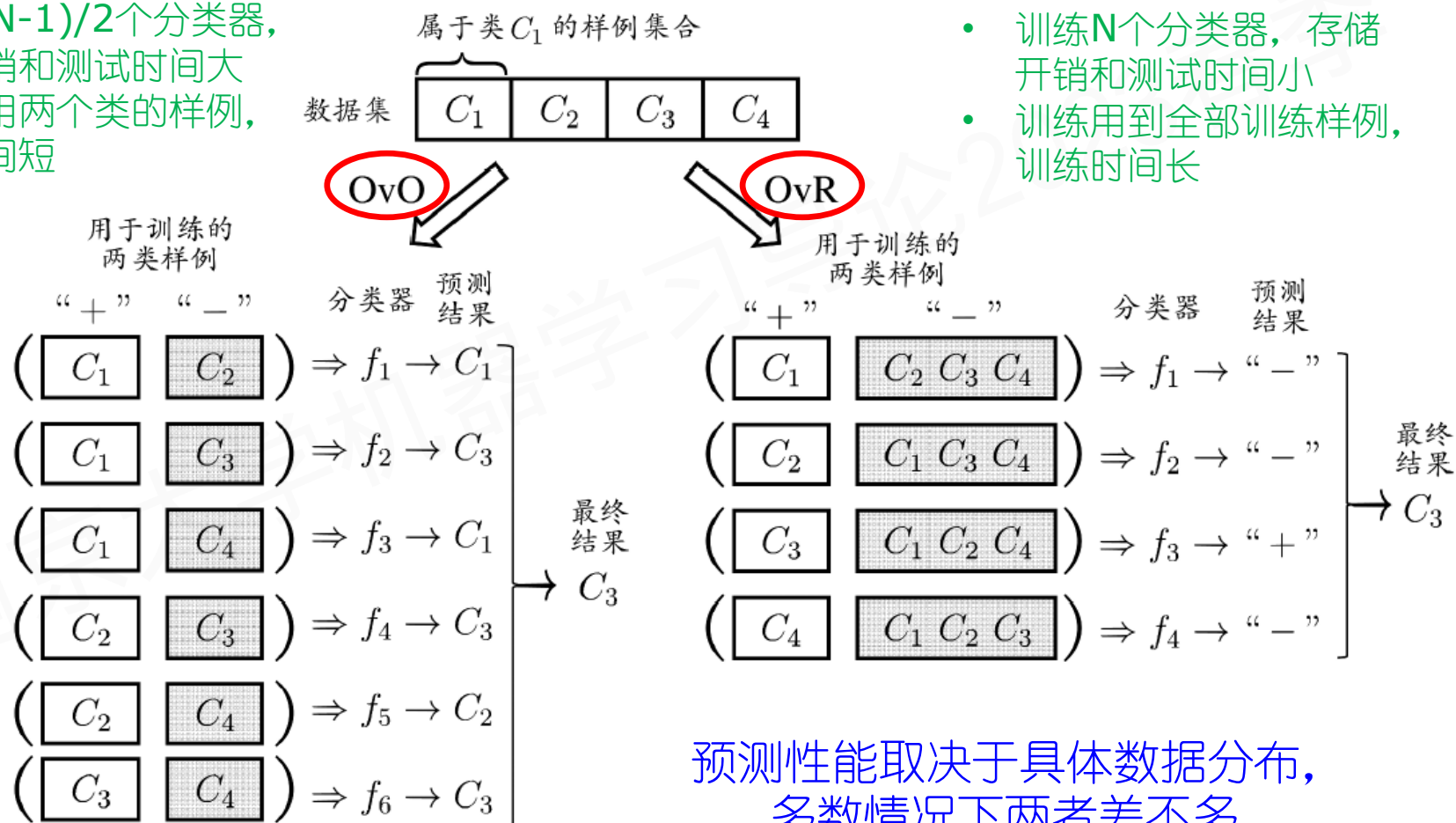
\mathbf{W} 的闭式解是 $\mathbf{S}_w^{-1} \mathbf{S}_b$ 的 $d' (\leq N-1)$ 个最大非零广义特征值对应的特征向量组成的矩阵

多分类学习

拆解法：将一个多分类任务拆分为若干个二分类任务求解

- 训练 $N(N-1)/2$ 个分类器，存储开销和测试时间大
- 训练只用两个类的样例，训练时间短

- 训练 N 个分类器，存储开销和测试时间小
- 训练用到全部训练样例，训练时间长

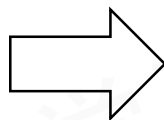


纠错输出码 (ECOC)

多对多(Many vs Many, MvM): 将若干类作为正类, 若干类作为反类

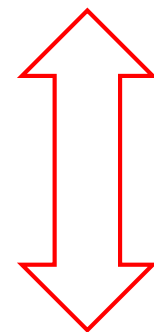
一种常见方法: 纠错输出码 (Error Correcting Output Code)

编码: 对 N 个类别做 M 次划分, 每次将一部分类别划为正类, 一部分划为反类

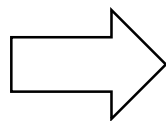


M 个二类任务;
(原)每类对应一个长为 M 的编码

距离最小的类为
最终结果



解码: 测试样本交给 M 个分类器预测



长为 M 的预测结果编码

纠错输出码

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	海明距离	欧氏距离
$C_1 \rightarrow$	-1	+1	-1	+1	+1	3	$2\sqrt{3}$
$C_2 \rightarrow$	+1	-1	-1	+1	-1	4	4
$C_3 \rightarrow$	-1	+1	+1	-1	+1	1	2
$C_4 \rightarrow$	-1	-1	+1	+1	-1	2	$2\sqrt{2}$
测试示例 \rightarrow	-1	-1	+1	-1	+1		

(a) 二元 ECOC 码

[Dietterich and Bakiri,1995]

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	海明距离	欧氏距离
$C_1 \rightarrow$	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	4	4
$C_2 \rightarrow$	-1	0	0	0	+1	-1	0	2	2
$C_3 \rightarrow$	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	5	$2\sqrt{5}$
$C_4 \rightarrow$	-1	+1	0	+1	-1	0	+1	3	$\sqrt{10}$
测试示例 \rightarrow	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1		

(b) 三元 ECOC 码

[Allwein et al. 2000]

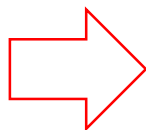
- ECOC编码对分类器错误有一定容忍和修正能力，编码越长、纠错能力越强
- 对同等长度的编码，理论上来说，任意两个类别之间的编码距离越远，则纠错能力越强

类别不平衡 (class-imbalance)

不同类别的样本比例相差很大；“小类”往往更重要

基本思路：

若 $\frac{y}{1-y} > 1$ 则 预测为正例.



若 $\frac{y}{1-y} > \frac{m^+}{m^-}$ 则 预测为正例.

基本策略

—— “再缩放” (rescaling)：

$$\frac{y'}{1-y'} = \frac{y}{1-y} \times \frac{m^-}{m^+}$$

然而，精确估计 m^-/m^+ 通常很困难！

常见类别不平衡学习方法：

- 过采样 (oversampling)
例如：SMOTE
- 欠采样 (undersampling)
例如：EasyEnsemble
- 阈值移动 (threshold-moving)

前往第四站.....

