§5 子空间

一、正交子空间

二、子空间的正交补

一、欧氏空间中的正交子空间

1．定义：

1) V_1与V_2是欧氏空间V中的两个子空间，如果对

$\forall \alpha \in V_1$， $\beta \in V_2$，恒有

$$(\alpha,\beta)=0,$$

则称子空间 V_1与 V_2为**正交的**，记作 $V_1 \perp V_2$.

2) 对给定向量$\alpha \in V$，如果对 $\forall \beta \in V_1$，恒有

$$(\alpha,\beta)=0,$$

则称向量α与子空间 V_1正交，记作 $\alpha \perp V_1$.

注：

① $V_1 \perp V_2$ 当且仅当 V_1 中每个向量都与 V_2 正交.

② $V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}.$

($\because$ $\forall \alpha \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow (\alpha,\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$)

③ 当 $\alpha \perp V_1$ 且 $\alpha \in V_1$ 时，必有 $\alpha = 0.$

2. 两两正交的子空间的和必是直和.

证明：设子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交，

要证明 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$， 只须证：

$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 中零向量分解式唯一.

设 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = 0$, $\alpha_i \in V_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$

$\because$ $V_i \perp V_j, i \neq j$

$\therefore$ $(\alpha_i, 0) = (\alpha_i, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s) = (\alpha_i, \alpha_i) = 0$

由内积的正定性，可知 $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, s.$

二、子空间的正交补

1. 定义：

如果欧氏空间V的子空间 V_1, V_2 满足 $V_1 \perp V_2$，并且

$V_1 + V_2 = V$，则称 V_2 为 V_1 的**正交补**.

2. n 维欧氏空间V的每个子空间 V_1 都有唯一正交补.

证明：当 $V_1 = \{0\}$ 时，V就是 V_1 的唯一正交补.

当 $V_1 \neq \{0\}$ 时，V_1 也是有限维欧氏空间.

取 V_1 的一组正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$,

由定理1，它可扩充成V的一组正交基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n,$$

记子空间 $L\left(\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n\right)=V_2.$

显然， $V_1+V_2=V.$

又对 $\forall\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_m\varepsilon_m\in V_1,$

$$\beta=x_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+x_n\varepsilon_n\in V_2,$$

$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{m}x_i\varepsilon_i,\sum_{j=m+1}^{n}x_j\varepsilon_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}x_ix_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$$

$\therefore\ V_1\perp V_2.$ 即 V_2 为 V_1 的正交补.

再证唯一性.　设V_2,V_3是V_1 的正交补，则

$$V = V_1 \oplus V_2 \qquad V = V_1 \oplus V_3$$

对 $\forall \alpha \in V_2 \subset V$，由上式知 $\alpha \in V_1 \oplus V_3$

即有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_3$，　$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_3 \in V_3$

又 $V_1 \perp V_2$，$V_1 \perp V_3$　$\therefore$ $\alpha_1 \perp \alpha_3, \alpha \perp \alpha_1$,

从而有 $(\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_3, \alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_1) = 0$$

由此可得 $\alpha_1 = 0$,　即有 $\alpha \in V_3$　$\therefore$ $V_2 \subseteq V_3$.

同理可证 $V_3 \subseteq V_2$，$\therefore$ $V_2 = V_3$.　唯一性得证.

注：① 子空间W的正交补记为 $W^{\perp}$. 即

$$W^{\perp}=\{\alpha\in V \mid \alpha\perp W\}$$

② n 维欧氏空间V的子空间W满足:

i) $(W^{\perp})^{\perp}=W$

ii) $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V=n$

iii) $W\oplus W^{\perp}=V$

iv) W的正交补 $W^{\perp}$必是W的余子空间.

但一般地，子空间W的余子空间未必是其正交补.

3. 内射(投)影

设W是欧氏空间V的子空间，由 $V = W \oplus W^{\perp}$,

对 $\forall \alpha \in V$，有唯一的 $\alpha_1 \in W$，$\alpha_2 \in W^{\perp}$, 使

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

称 α_1 为 α 在子空间W上的**内射(投）影**.