第七章 线性变换

§1 线性变换的定义

一、 线性变换的定义

二、 线性变换的简单性质

- 线性变换反映了线性空间中元素之间的一种最基本的联系，它是线性函数的推广.

- 本章主要讨论有限维线性空间的线性变换及其运算、线性变换的矩阵表示、线性变换的特征值与特征向量及线性变换的对角化等问题．通过学习认识到线性变换和矩阵是统一事物的两种表现形式，进一步体会到矩阵的重要性.

一、 线性变换的定义

设V为数域P上的线性空间，若变换 $\sigma: V \to V$

满足：$\forall \alpha, \beta \in V$，$k \in P$

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$$

则称 σ 为线性空间V上的**线性变换**.

注：几个特殊线性变换

单位变换（恒等变换）： $E: V \to V,\ \alpha \mapsto \alpha,\ \forall \alpha \in V$

零变换： $0: V \to V,\ \alpha \mapsto 0,\ \forall \alpha \in V$

由数k决定的**数乘变换：** $K: V \to V,\ \alpha \mapsto k\alpha,\ \forall \alpha \in V$

事实上，$\forall \alpha, \beta \in V,\ \forall l \in P,$

$$K(\alpha+\beta) = k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta = K(\alpha) + K(\beta),$$

$$K(l\alpha) = kl\alpha = lk\alpha = lK(\alpha).$$

例1. $V = R^2$(实数域上二维向量空间)，把V中每一向量绕坐标原点旋转 θ 角，就是一个线性变换，

用T_θ 表示，即

$$T_\theta : R^2 \to R^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

这里，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

易验证：$\forall \alpha, \beta \in R^2, \forall k \in R$

$$T_\theta(\alpha + \beta) = T_\theta(\alpha) + T_\theta(\beta)$$

$$T_\theta(k\alpha) = kT_\theta(\alpha)$$

例2．$V = P[x]$或$P[x]_n$上的求微商是一个 线性变换，

用D表示，即

$$D: V \to V，D(f(x)) = f'(x), \ \forall f(x) \in V$$

例4. 闭区间 $[a,b]$上的全体连续函数构成的线性空间

$C(a,b)$上的变换

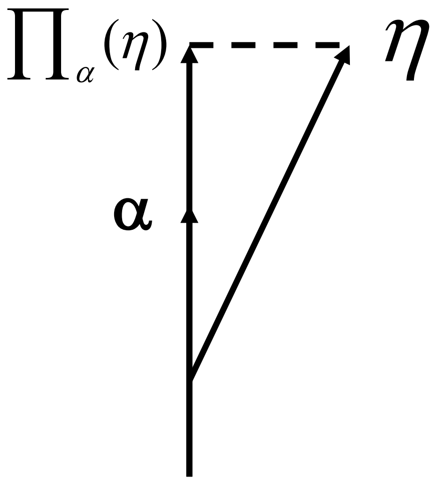
$$J: C(a,b) \to C(a,b)，J\left(f(x)\right) = \int_a^x f(t)dt$$

是一个线性变换.

例2 设α是几何空间中一个固定的非零向量, 将每个向量 η 变到它在α上的内射影的变换

$$\prod_{\alpha}(\eta) = \frac{(\alpha,\eta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \quad .$$

是一个线性变换.



二、 线性变换的简单性质

1．σ为V的线性变换，则

$$\sigma(0)=0,\ \ \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha).$$

2．线性变换保持线性组合及关系式不变，即

若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$,

则 $\sigma(\beta)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r).$

3．线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组. 即

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 也线性相关.

事实上，若有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

则由2即有，$k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0.$

注意： 3的逆不成立，即 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 未必线性相关.

事实上，线性变换可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组. 如零变换.

练习：下列变换中，哪些是线性变换？

1．在 R^3中，$\sigma\left(x_1,x_2,x_3\right)=(2x_1,x_2,x_2-x_3)$.

2．在$P[x]_n$中，$\sigma\left(f(x)\right)=f^2(x)$.

3．在线性空间V中，$\sigma\left(\xi\right)=\xi+\alpha$，$\alpha\in V$ 非零固定.

4．在 $P^{n\times n}$中，$\sigma\left(X\right)=AX$，$A\in P^{n\times n}$ 固定.

5．复数域C看成是自身上的线性空间，$\sigma(x)=\overline{x}$.

6．C看成是实数域R上的线性空间，$\sigma(x)=\overline{x}$.