根据性质 6.3, 我们有 $E[(X-EX)(Y-EY)]E(X-EX)E(Y-EY)=0$, 由此完成证明.

例 6.1 设随机变量 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ 相互独立, 求 $E[\max(X,Y)]$.

解 根据独立性定义可得随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

考虑区域 $D_1=\{(x,y)\colon x\geqslant y\}$ 和 $D_2=\{(x,y)\colon x<y\}$, 如图 6.1 所示. 于是得到

$$\begin{aligned}
E[\max(X,Y)] &= \int\int_{D_1} xf(x,y)dxdy+\int\int_{D_2} yf(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xf(x,y)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}yf(x,y)dy \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xf(x,y)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$.

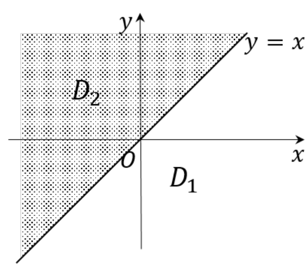

图 6.1 例 6.1 的积分区域 D_1 和 D_2.

例 6.2 某水果超市在每星期一进货一定数量的新鲜水果, 假设一周内出售水果的件数 $X\sim U(10,20)$. 若这一周内出售一件水果获利 10 元, 若不能出售则因为水果过期而每件亏损 4 元, 求水果超市的最优进货策略.

解 不妨假设水果超市每周进货 n 件 ($10\leqslant n\leqslant 20$), 则它的周利润为

$$Y=\begin{cases}10n & X\geqslant n\\ 10X-4(n-X) & X<n\ .\end{cases}$$

由于周利润 Y 是关于 X 的随机变量, 只能考虑在期望下的最优策略

$$E[Y] = \sum_{i=10}^{n-1}(10i-4(n-i))P(X=i)+\sum_{i=n}^{20}10nP(X=i)$$

$$= \sum_{i=10}^{n-1} \frac{14i-4n}{10} + \sum_{i=n}^{20} n = (-7n^2+243n+630)/10 \ .$$

上式对 n 求一阶导数并令其等于零, 求解可得 $n = 17.36$, 最后取 $n = 17$.

6.2 协方差

随机变量的期望或方差仅涉及变量自身的统计信息, 没有刻画变量之间的统计信息. 本节引入一个新的统计特征: 协方差, 用于描述随机变量 X 和 Y 相互关系的数字特征.

定义 6.1 设二维随机向量 (X,Y) 的期望$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 存在, 则称其为 X 和 Y 的 **协方差**, 记为

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y) \ .$$

协方差是两个随机变量与它们各自期望的偏差之积的期望, 由于偏差可正可负, 因此协方差可正可负. 根据协方差的定义容易发现

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) \quad \text{和} \quad \mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y) \ .$$

下面进一步研究协方差的性质:

性质 6.5 对任意随机变量 X,Y 和常数 c 有

$$\mathrm{Cov}(X,c) = 0 \qquad \text{和} \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X) \ .$$

性质 6.6 对任意随机变量 X,Y 和常数 a,b 有

$$\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\mathrm{Cov}(X,Y) \quad \text{和} \quad \mathrm{Cov}(X+a,Y+b) = \mathrm{Cov}(X,Y) \ .$$

证明 根据协方差的定义有

$$\mathrm{Cov}(aX,bY) = E[(aX-E(aX))(bY-E(bY))] = abE[(X-E(X))(Y-E(Y))] \ ,$$

以及

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+a,Y+b) &= E[(X+a-E(X+a))(Y+b-E(Y+b))] \\ &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \ .\end{aligned}$$

性质 6.7 对任意随机变量 X_1, X_2, Y 有

$$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)\ .$$

证明 根据协方差的定义有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) &= E[(X_1 + X_2 - E(X_1) - E(X_2))(Y - E(Y))] \\
&= E[(X_1 - E(X_1))(Y - E(Y))] + E[(X_2 - E(X_2))(Y - EY)] \\
&= \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)\ .
\end{aligned}$$

可将性质 6.7 推广到多个随机变量: 对随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$和$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ 有

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_i^n X_i, \sum_j^m Y_j\right) = \sum_i^n \sum_j^m \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)\ ,$$

以及进一步有

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\ .$$

性质 6.8 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 则有 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, 但反之不成立.

证明 若 X 与 Y 相互独立, 则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 于是得到

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0\ .$$

但反方向并不成立, 即若随机变量 X 与 Y 满足 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, 并不能得到 X 与 Y 相互独立. 下面来看一个反例, 设随机变量 X 的分布列为

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3\ ,$$

很容易得到 $E(X) = 0$. 引入一个新的随机变量 Y

$$Y = \begin{cases} 0 & X \neq 0 \\ 1 & X = 0\ , \end{cases}$$

可以发现 $E(XY) = 0$, 最后得到

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E(X)E(Y) = 0\ .$$

但随机变量 X 与 Y 显然不是相互独立的, 因为

$$P(X=0,Y=0)=0 \quad 而 \quad P(X=0)P(Y=0)=2/9 \ .$$

由此完成证明.

性质 6.9 对任意随机变量 X 与 Y 有

$$(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y) \ ,$$

等式成立的充要条件是 $Y=aX+b$ 几乎处处成立, 即 X 与 Y 几乎处处存在线性关系.

证明 根据 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$\begin{aligned} |\mathrm{Cov}(X,Y)| &= |E[(X-E(X))(Y-E(Y))]| \\ &\leqslant \sqrt{E[(X-E(X))^2]E[(Y-E(Y))^2]} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)} \ . \end{aligned}$$

下面证明等号成立的充要条件. 若 $Y=aX+b$ 几乎处处成立, 则有

$$\mathrm{Var}(Y)=a^2\mathrm{Var}(X) \qquad 和 \qquad \mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,aX+b)=a\mathrm{Var}(X) \ ,$$

由此直接验证 $(\mathrm{Cov}(X,Y))^2=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$. 另一方面, 可以考虑函数

$$\begin{aligned} f(t) &= E[t(X-EX)-(Y-EY)]^2 \\ &= t^2E[X-E(X)]^2-2tE[(X-E(X))(Y-E(Y))]+E[Y-E(Y)]^2 \ , \end{aligned}$$

根据方程的性质和条件 $(\mathrm{Cov}(X,Y))^2=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$ 有

$$\Delta=4(E[(X-EX)(Y-EY)])^2-4E(X-EX)^2E(Y-EY)^2=0 \ .$$

由此存在一个根 t_0 使得 $f(t_0)=0$ 成立, 即

$$f(t_0)=E[(t_0(X-EX)-(Y-EY))^2]=0 \ ,$$

由此可得 $Y=t_0(X-E(X))+E(Y)=aX+b$ 几乎处处成立.

定理 6.2 若随机向量 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$, 则有 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_x\sigma_y$.

证明 根据协方差的定义有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E((X-E(X)(Y-E(Y)))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f(x,y)dxdy \ ,$$

其中

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right)\ .$$

考虑变量变换

$$\begin{cases}u=(x-\mu_x)/\sigma_x\\ v=(y-\mu_y)/\sigma_y\end{cases}\qquad \text{于是有}\qquad \begin{cases}x=u\sigma_x+\mu_x\\ y=v\sigma_y+\mu_y\ .\end{cases}$$

容易得到其雅可比行列式为 $J=\sigma_x\sigma_y$, 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{\sigma_x\sigma_y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uv\exp\left(-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right)dudv\\ &= \frac{\sigma_x\sigma_y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}v\exp(-v^2/2)dv\int_{-\infty}^{+\infty}u\exp\left(-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right)du\\ &= \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho v^2\exp(-v^2/2)dv=\rho\sigma_x\sigma_y\ .\end{aligned}$$

其中第三个等式成立是因为利用正太分布 $\mathcal{N}(\rho v,1-\rho^2)$ 的期望, 而最后一个不等式成立是因为利用标准正太分布的方差.

结合定理 5.4 和定理 6.2 得到

推论 6.1 若随机向量 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$, 则 X 和 Y 相互独立的充要条件是协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

例 6.3 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且服从正太分布, 方差为 σ^2. 记 $\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i/n$, 讨论 $\bar{X}$ 和 $\bar{X}-X_i$ 的独立性.

解 根据正太分布的性质可以知道 $\bar{X}$ 和 $\bar{X}-X_i$ 都服从正太分布, 而正太分布的独立性可通过协方差来研究. 根据协方差的性质有

$$\mathrm{Cov}(\bar{X},\bar{X}-X_i)=\mathrm{Cov}(\bar{X},\bar{X})-\mathrm{Cov}(\bar{X},X_i)=\mathrm{Var}(\bar{X})-\mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^n\frac{X_j}{n},X_i\right)\ .$$

根据 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的相互独立性有

$$\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{\sigma^2}{n}\qquad \text{和}\qquad \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^n\frac{X_j}{n},X_i\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_i\right)=\frac{\sigma^2}{n}\ ,$$

于是得到 $\mathrm{Cov}(\bar{X},\bar{X}-X_i)=0$. 根据推论 6.1 得到 $\bar{X}$ 和 $\bar{X}-X_i$ 是相互独立的.

例 6.4 随机变量 (X,Y) 联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)/8 & 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0 & \text{其它}\ ,\end{cases}$$

求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 和 $\mathrm{Var}(X+Y)$.

解 根据协方差的定义有 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$, 需计算

$$E[X]=E[Y]=\int_0^2\int_0^2 x(x+y)/8dxdy=7/6 \quad \text{和} \quad E[XY]=\int_0^2\int_0^2 xy(x+y)/8dxdy=4/3\ ,$$

由此可得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-1/36$. 进一步计算

$$E[X^2]=E[Y^2]=\int_0^2\int_0^2 x^2(x+y)/8dxdy=5/3\ ,$$

由此可得 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=5/3-(7/6)^2=11/36$. 最后得到

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=11/18-1/18=5/9\ .$$

例 6.5 (匹配问题) 有 n 对夫妻参加一次聚会, 将所有参会人员任意分成 n 组, 每组一男一女, 用 X 表示夫妻两人被分到一组的对数, 求 X 的期望和方差.

解 用 X_i 表示第 i 对夫妻是否被分到一组, 即

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第}\ i\ \text{对夫妻被分到一组}\\ 0 & \text{否则}\ ,\end{cases}$$

则有 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$. 随机变量 X_i 的分布列为

$$P(X_i=1)=(n-1)!/n!=1/n \qquad \text{和} \qquad P(X_i=0)=1-1/n\ .$$

于是得到期望

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots,X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_1)=1\ .$$

对任意 $i\neq j$ 有

$$P(X_i=1,X_j=1)=(n-2)!/n!=1/n(n-1)\ ,$$

由此得到

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E(X_i)E(X_j)=1/n^2(n-1)\ ,$$

最后根据协方差的性质有

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 1 \ .$$

6.3 相关系数

两个随机变量之间的关系可分为独立与非独立, 在非独立中又可以分为线性关系和非线性关系. 非线性关系较为复杂, 目前尚无好的办法来处理. 但线性相关程度可以通过线性相关系数来刻画, 下面给出具体的定义:

定义 6.2 设 (X,Y) 为二维随机向量, 如果它们的方差 $\mathrm{Var}(X)$ 和 $\mathrm{Var}(Y)$ 存在且都不为零, 则称 $\mathrm{Cov}(X,Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$ 为 X 与 Y 的 **线性相关系数**, 简称 **相关系数** (correlation coefficient), 记为

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \ .$$

若 $\rho_{XY} > 0$, 称 X 与 Y **正相关**; 若 $\rho_{XY} < 0$, 称 X 与 Y **负相关**; 若 $\rho_{XY} = 0$, 称 X 与 Y **不相关**.

相关系数是根据协方差和方差所定义, 与协方差同号, 可以看作是对协方差的一种规范化. 相关系数的很多性质可以通过协方差获得:

- 根据协方差性质 6.9 可知
$$|\rho_{XY}| \leqslant 1 \ ,$$
$|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为 X 与 Y 几乎处处有线性关系 $Y = aX + b$.
- 根据协方差性质 6.8 可知, 若 X 与 Y 相互独立, 则 X 与 Y 不相关 ($\rho_{XY} = 0$), 但反之不成立;
- 随机变量 X 与 Y 不相关, 仅仅表示 X 与 Y 之间不存在线性关系, 可能存在其他关系. 例如, 设随机变量 $X \sim U(-1/2, 1/2)$ 和 $Y = \cos(X)$, 则有
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cos(X)) - E(X)E(\cos(X)) = E[X\cos(X)] = \int_{-1/2}^{1/2} x\cos(x)dx = 0 \ .$$

根据定理 6.2 和推论 6.1 有

定理 6.3 若随机向量 $(X,Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = \rho$, 以及 X 与 Y 独立的充要条件是 X 与 Y 不相关.

独立与不相关的等价性仅限于正太分布随机变量, 对其它类型并不一定成立, 详情见性质 6.8 证明中的反例.

根据相关系数、协方差和方差的定义很容易得到如下几个不相关的等价条件.

定理 6.4 设随机变量 X 和 Y 的方差存在且都不为零, 以下几个条件相互等价:

- X 和 Y 不相关, 即 $\rho_{XY}=0$;
- 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;
- $E(XY)=E(X)E(Y)$;
- $\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$.

例 6.6 设随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 相互独立. 求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数 $(\alpha,\beta\neq 0)$.

解 根据正态分布的定义有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2) &= \mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\
\mathrm{Var}(Z_1) &= \mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X+\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\\
\mathrm{Var}(Z_2) &= \mathrm{Cov}(\alpha X-\beta Y,\alpha X-\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\ ,
\end{aligned}
$$

由此可知 $\rho_{XY}=(\alpha^2-\beta^2)/(\alpha^2+\beta^2)$.

例 6.7 设离散型随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从多项分布 $M(m,p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 对任意 $i\neq j$, 求 X_i 和 X_j 的相关系数.

根据多项分布的定义有 $X_1+X_2+\cdots+X_n=m$, 当 X_i 越大时 X_j 应该越小, 因此直观而言这两随机变量之间应该是负相关的.

解 根据多项分布的性质有 X_i 和 X_j 的边缘分布分别

$$X_i\sim B(m,p_i)\qquad 和 \qquad X_j\sim B(m,p_j)\ .$$

由此可得 $\mathrm{Var}(X_i)=mp_i(1-p_i)$ 和 $\mathrm{Var}(X_j)=mp_j(1-p_j)$. 直接求解 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$ 存在一定的难度. 对每个 $k\in[m]$, 引入随机变量

$$Y_i^k=\begin{cases}1 & 若第\ k\ 次实验的结果为\ i\\ 0 & 其它\end{cases}\qquad 和 \qquad Y_j^k=\begin{cases}1 & 若第\ k\ 次实验的结果为\ j\\ 0 & 其它\ .\end{cases}$$

由此可得

$$X_i=Y_i^1+Y_i^2+\cdots+Y_i^m\qquad 和 \qquad X_j=Y_i^1+Y_i^2+\cdots+Y_i^m\ .$$

根据第 k 次试验和第 l 次试验相互独立 $(k\neq l)$, 以及 $Y_i^kY_j^k=0$ 有

$$\mathrm{Cov}(Y_i^k,Y_j^l)=0\ ,\qquad 以及 \qquad \mathrm{Cov}(Y_i^k,Y_j^k)=E[Y_i^kY_j^k]-E(Y_i^k)E(Y_j^k)=-p_ip_j\ ,$$

根据协方差的性质有

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Cov}(Y_i^k, Y_j^k) + \sum_{k \neq l} \mathrm{Cov}(Y_i^k, Y_j^l) = -mp_ip_j \ .$$

最后得到 X_i 和 X_j 的相关系数为

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)} = \frac{-mp_ip_j}{\sqrt{mp_i(1-p_i)}\sqrt{mp_j(1-p_j)}} = -\frac{\sqrt{p_ip_j}}{\sqrt{(1-p_i)(1-p_j)}} \ .$$

6.4 条件期望

前一章介绍了条件分布, 基于条件分布可以考虑条件期望, 分离散和连续性随机变量两种情况.

定义 6.3 设 (X, Y) 为连续型随机变量, 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件密度函数为 $f_{X|Y}(x|y)$, 称

$$E(X|y) = E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

为在 $Y = y$ 条件下 X 的 **条件期望**. 设 (X, Y) 为离散型随机变量, 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布列为 $P(X = x_i|Y = j)$, 称

$$E(X|y) = E(X|Y = y) = \sum_{i} x_i P(X = x_i|Y = j)$$

为在 $Y = y$ 条件下 X 的 **条件期望**.

条件期望 $E[X|y]$ 一般都与 y 相关, 是 y 的函数, 而 (无条件) 期望 $E(X)$ 是一个具体的常数. 在上面的定义中, 我们都默认期望存在. 条件期望是条件分布的期望, 具有期望的一切性质:

- 对任意常数 a, b 有 $E(aX_1 + bX_2|Y) = aE(X_1|Y) + bE(X_2|Y)$;
- 对离散型随机变量 (X, Y) 和函数 $g(X)$ 有

  $$E(g(X)|Y) = \sum_{i} g(x_i)P(X = x_i|Y = y) \ ;$$

  对连续型随机变量 (X, Y) 和函数 $g(X)$ 有

  $$E(g(X)|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x|Y = y)dx \ ;$$

- 设随机向量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则在 $Y = y$ 的条件下随机变量 X 服从正太分布 $\mathcal{N}(\mu_x - \rho\sigma_x(y - \mu_y)/\sigma_y, (1 - \rho^2)\sigma_x^2)$, 由此可得 $E(X|y) = \mu_x - \rho\sigma_x(y - \mu_y)/\sigma_y$.

下面给出了计算期望的另一种方法.