Probability and Statistics

概率统计

南京大学

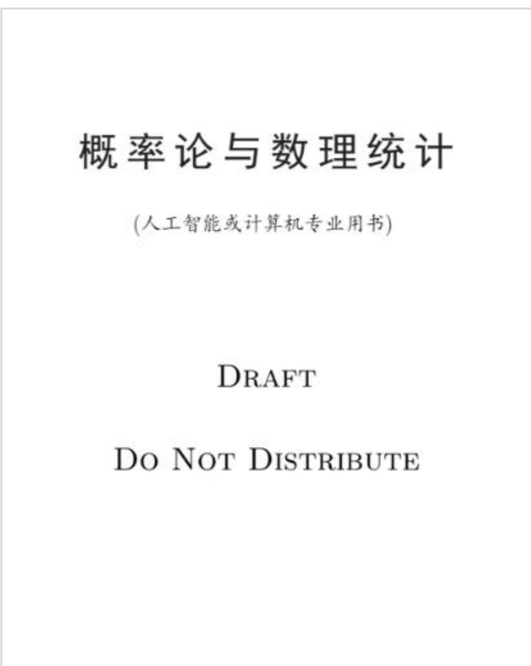
高 尉

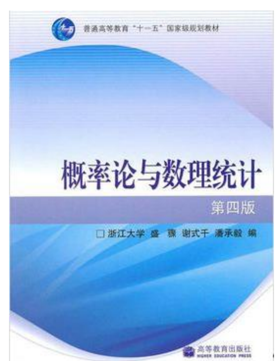
Course Information and Textbooks

- Instructor:　高尉
  - gaow@nju.edu.cn
  - gaow@lamda.nju.edu.cn
- Office: 国际学院A-305

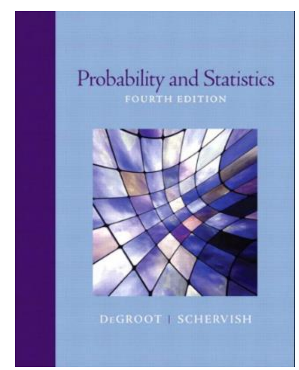
要求或建议

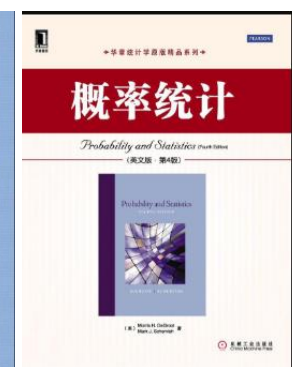
- 不能躺着上课
- 备好纸笔、做笔记
- 上课专心、课后少花时间
- 独立完成作业





概率论与数理统计
- 盛骤、谢式千等编
- 高等教育出版社





Probability and statistics
- M. H. DeGroot and M. J. Schervi
- 机械工业出版社

概率的萌芽：赌博（点数分配问题）

两人进行一场赌博，5局3胜，赌金为1000；假设当前比分为2：1，而比赛由某种原因不得不中止。

问题：最“公平合理”的奖金分配方式？

— 1495年意大利数学家/修道士帕西奥尼 (Luca Pacioli)

这个问题持续了150年左右

Luca Pacioli

概率的起源

1650左右的法国

- 赌博流行且时尚,不受法律限制
- 赌博变得更加复杂，风险增大
- 有必要通过数学方法来计算胜率
- 德梅根(De Mere)：点数分配问题

Blaise Pascal

Pierre Fermat

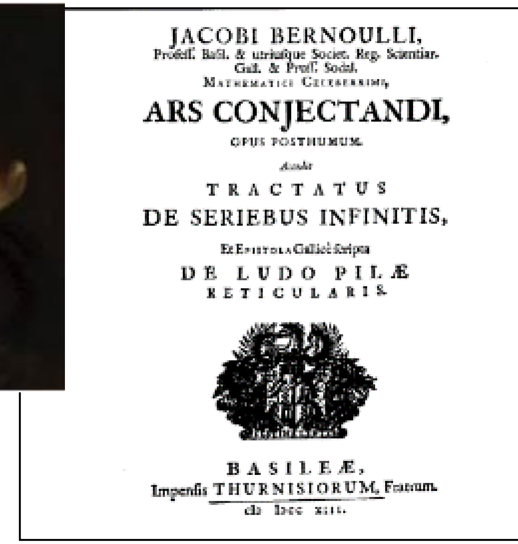
古典概型 (等可能概型)

- 有限个基本事件
- 每个基本事件发生的可能性相同

概率论的形成和发展

《推想的艺术》 1713年

- 贝努利 (James Bernoulli)
  - ➢ 大数定律
  - ➢ 频率稳定性理论化
  - ➢ 特殊问题到一般理论

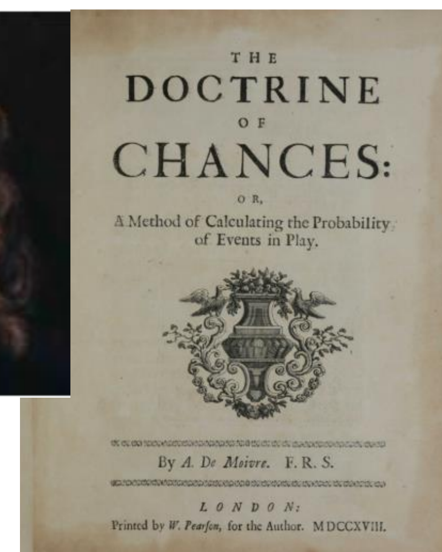


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

《机遇原理》 1718年

-棣谟佛 (Abraham de Moiver)
  - ➢ 概率乘法法则
  - ➢ 正态分布律
  - ➢ 中心极限定理的一个特例



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability of Events in Play.

By A. De Moivre. F. R. S.

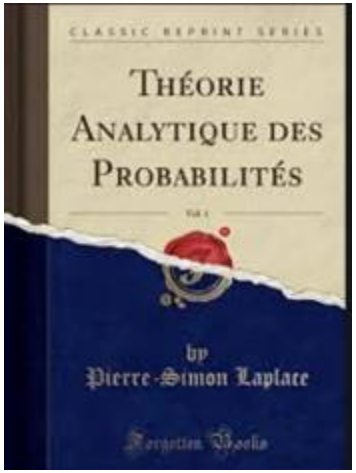
LONDON:
Printed by W. Pearson, for the Author. MDCCXVIII.

19世纪：概率论进一步发展-应用

Theorie Analytique des Probabilities

\- Pierre-Simon Laplace

A mathematical theory of probability with an emphasis on scientific applications



高斯
Carl F. Gauss

麦克斯韦
James C. Maxwell

吉布斯
Josiah W. Gibbs

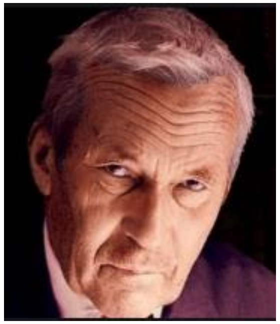
20世纪：　概率的公理化定义

1900年希尔伯特提出了著名的23个数学问题

概率公理化

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnun 1933

- 柯尔莫哥洛夫(Andrey Kolmogorov)



建立概率公理化理论体系，利用基本性质来定义概率，可媲美于欧几里得几何公理化

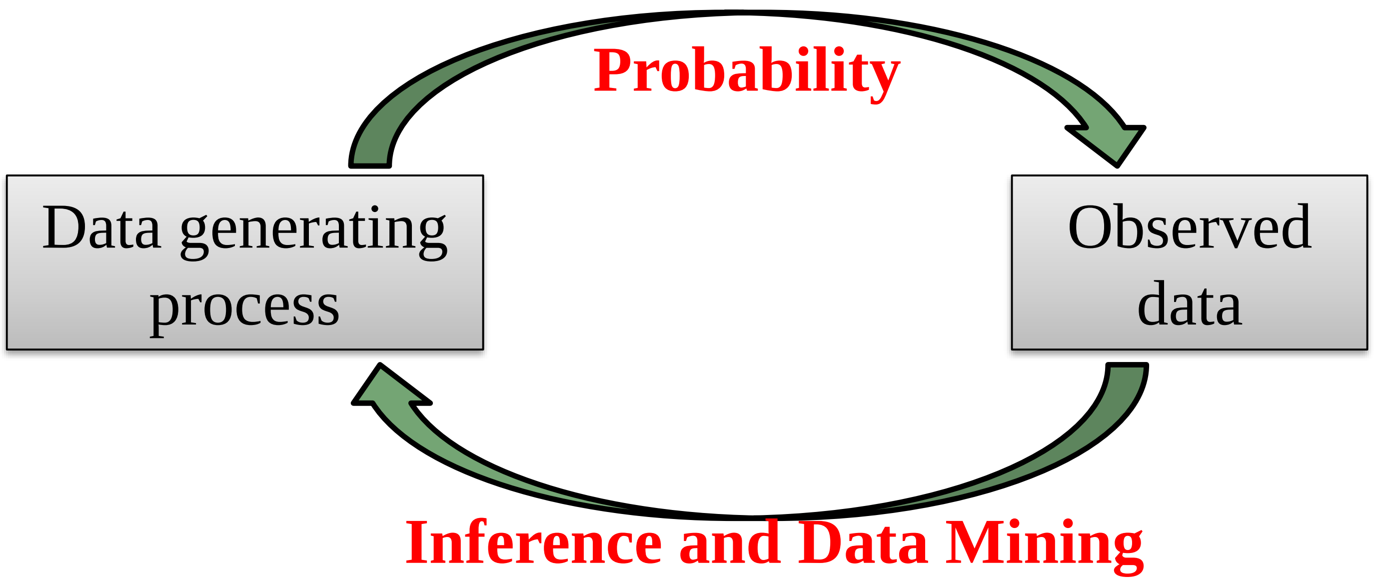
概率公理化 (三点)

- 非负性
- 规范性
- 可列可加性

现代概率统计：测度论

概率与统计

- **概率：**研究事件的不确定性，在给定数据生成过程中观察、研究数据的性质，强调**公理体系**、**推理**
- **统计：**收集与分析数据，根据观察的数据反思其数据生成过程，强调“**归纳**”、最大特点是“**不确定性**”



- 概率: 随机变量、分布、大数定律、概率不等式等
- 统计: 推断、参数估计、假设检验、模型、算法 (与机器学习相关)

应用

顶级国际期刊与会议

- 概率统计及其相关的顶级国际期刊
  - Annals of Statistics
  - Journal of the American Statistical Association (JASA)
  - Annals of Probability
  - Journal of Machine Learning Research
- 国际会议
  - ICML: International Conference on Machine Learning
  - COLT: Annual Conference on Learning Theory
  - STOC: ACM Symposium on Theory of Computing
  - FOCS: IEEE Symposium on Foundations of Computer Science

先修课程与考核方式

- 数学分析
- 高等代数
- 计算机编程

- Home work: 30% (每周1次，下一周上课之前交)
- Mid-Term exam: 10%
- Final exam: 60%

Ch1　随机事件与概率

必然现象与随机现象

自然界所观察到的现象：**必然现象**　**随机现象**

- **必然现象：**在一定条件下必然发生的现象，其特征是条件完全决定结果
  - 太阳从东边升起
  - 水往低处流
  - 可导的函数必连续

- **随机现象：**在一定条件下可能出现、可能不出现的现象，其特征是条件不能完全决定结果
  - 婴儿的诞生
  - 流星殒落
  - 蝴蝶效应　...

随机现象的例子

例1：在相同条件下掷一枚均匀的硬币

结果： 可能是**正面**、也可能**反面**

例2：过马路交叉口时，可能遇上的交通指挥灯

结果： **红、黄、绿**

例3：含正品和次品的产品中任取一产品

结果： **正品、次品**

随机现象的必然性与偶然性

- 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数确切的描述
- 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，即多种可能的结果中不能确定到底是哪一种结果
- 随机现象是否是无规律可言　　不是

大量重复试验或观察中，结果的出现具有一定的统计规律性

□ 偶然性：对随机现象做一次观察，观察结果不可预知

□ 必然性：对随机现象做大量观察，观察结果具有一定的规律性，即统计规律性

概　率：研究随机现象统计规律性的学科

概率论普遍存在于生活

法国数学家拉普拉斯： 对生活的大部分，最重要的问题实际上都是概率问题.

图灵奖得主 Y. LeCun： 历史上大多数研究成果的出现是偶然事件 ... 所有努力都是为了提高概率.

现实生活中的每个人: 所有的努力都是为了提高成功的概率.

随机试验

- **随机现象**：具有**不确定性**（或偶然性）的现象
- 试　　验：对某随机现象的观察或测量等
- **随机试验(用E表示)**：具备以下三个特点的试验
  - **可重复**：可在相同的条件下重复进行
  - **多结果**：结果不止一个，所有可能的结果事先已知
  - **不确定**：试验前无法预测/确定哪一种结果

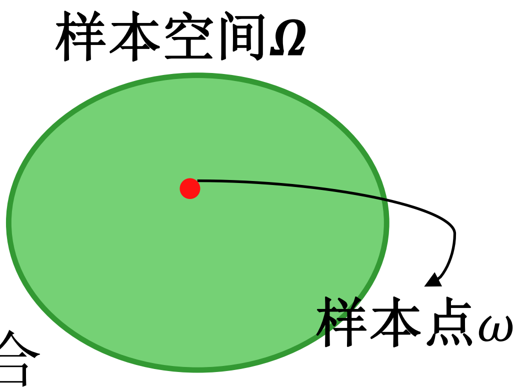
例如

✓ E_1：抛一枚骰子，观察其出现的点数

✓ E_2：随机选取一盏电灯，测试其寿命

样本空间

- 样本点：试验的每一种可能的结果
  - 记为ω
- 样本空间：试验中所有可能的结果组成的集合
  - 记为Ω



E1： 抛一枚骰子，观察其出现的点数

样本空间$\Omega=$

E2：随机选取一盏电灯，测试其寿命

样本空间$\Omega=$

样本空间类型

有限样本空间：有限个样本点

例：将一枚硬币抛掷两次，观察正面、反面出现的情况，该试验的样本空间 Ω

无限可列样本空间：样本点是无限的但可列的

例：中国一年内出生的婴儿数，其样本空间 Ω

不可列样本空间：样本点是无限的、且不可列的

例：随机选取一盏电灯，测试其寿命，则样本空间 Ω

随机事件

随机事件：样本空间Ω的子集，由单个或某些样本点ω的集合

- **本质是集合**

- 一般用字母A、B、C等

称"**随机事件A发生**"当且仅当**试验的结果是子集A中的元素**

对试验E：抛两枚骰子

其样本空间$\Omega = \{(i,j): i,j \in [6]\}$

- 随机事件A：点数相同， A =?
- 随机事件B：点数和为偶数，B =?

随机事件

- **基本事件**：由单个样本点构成的单点集合

对试验E：抛一枚骰子

– $A=\{$掷出1点$\}$　$\mathrm{B}=\{$掷出基数点$\}$

- **必然事件**：试验中必定发生的事件，记为 Ω
- **不可能事件**：试验中不可能发生的事件，用 $\emptyset$ 表示

对试验E：抛一枚骰子

– “抛出的点数小于7”的事件是必然事件

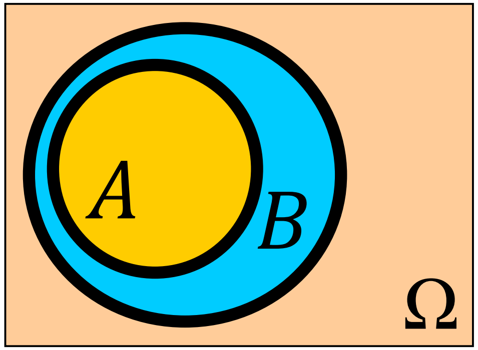
– “抛出的点数大于7”的事件是不可能事件

概率论与集合论之间的关系

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	随机事件	子集

事件间的关系

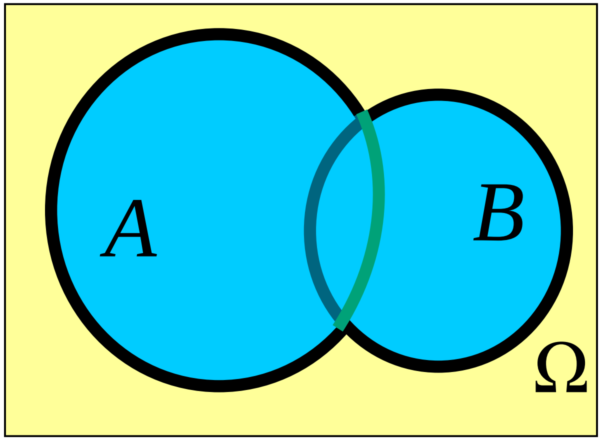
包含： 若A发生必然导致B发生，称事件B包含事件A，记为$\boldsymbol{A \subset B}$或$\boldsymbol{B \supset A}$



相等： 若$A \supset B$且$B \supset A$，记为$\boldsymbol{A = B}$

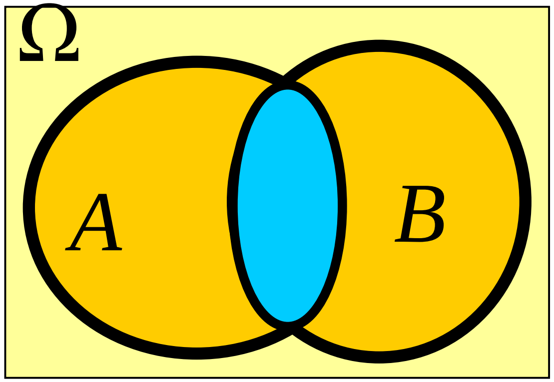
事件间的关系

事件的并：事件A和B至少发生一个的事件称为A和B的并/和，记为$\boldsymbol{A \cup B}$



事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$中至少有一个发生的事件称为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的并, 记为

$$\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i}$$



事件的交：事件A和B同时发生的事件称为A与B的交/积，记为$A \cap B = AB$

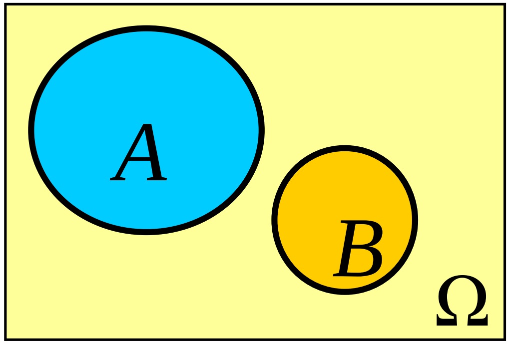
事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$同时发生的事件称为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的交，记

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$$

事件间的关系

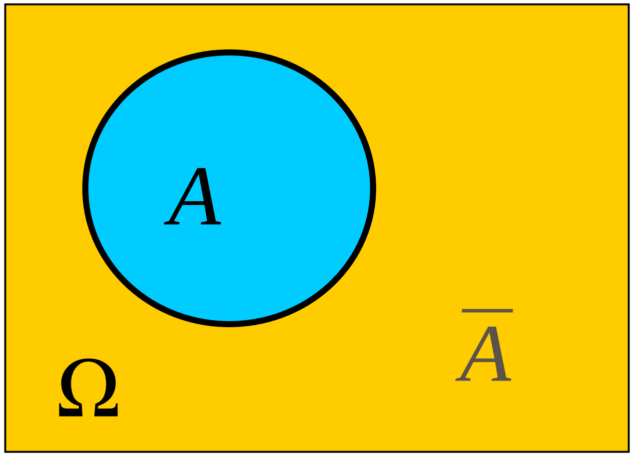
互斥/互不相容： 若事件A和B不可能同时发生，称事件A和B互斥、或互不相容

$B \cap \mathrm{A} = \emptyset$



对立/逆事件： 事件 A 不发生的事件称为A的对立事件、或逆事件，记$\bar{A}$

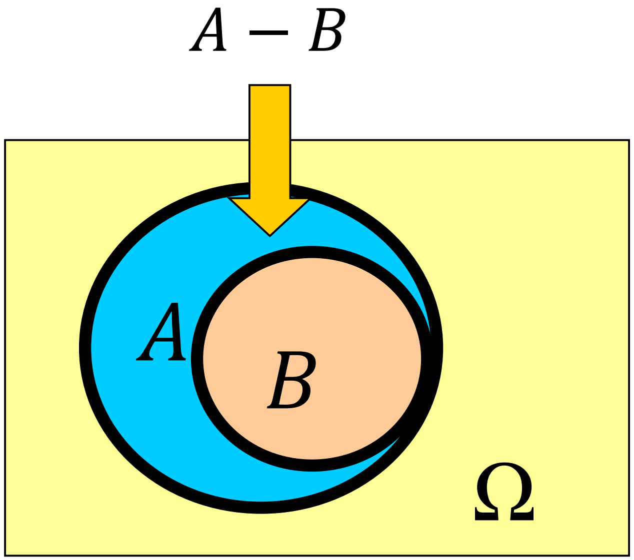
$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \qquad A \cup \bar{A} = \Omega$$

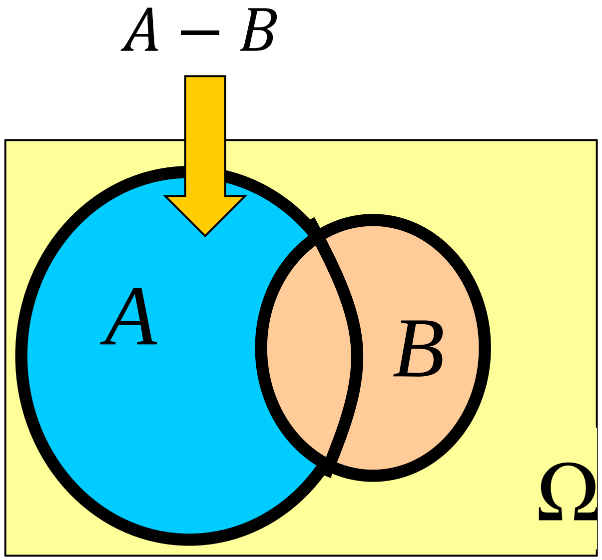


对立和互不相容事件之间的关系?

事件间的关系

事件的差： A发生，而B不发生的事件称为A与B的差，记为$\boldsymbol{A-B}$





$$\boldsymbol{A-B=A-AB=A\overline{B}=(A\cup B)-B}$$

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
$\bar{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A发生必然导致B发生	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等
$A \cup B$	事件A与事件B的和	集合A与集合B的并集
$A \cap B$	事件A与B的积事件	集合A与集合B的交集
$A - B$	事件A与事件B的差	集合A与集合B的差集
$A \cap B = \emptyset$	事件A与事件B互不相容	集合A与集合B中没有相同的元素

事件的运算规律

- 幂等律： $A \cup A = A$，$A \cap A = A$
- 交换律： $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
- 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 对偶律： $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$，$\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

上述规律可推广到多个事件

例题

设A、B、C为三个随机事件，试用A、B、C表示如下随机事件：

- 事件A与B同时发生， 而事件C不发生的事件:
- 三个事件中至少有一个发生的事件:
- 这三个事件中恰好有一个发生的事件:
- 这三个事件中至多有一个发生的事件:
- 这三个事件中至少有两个发生的事件:
- 这三个事件中至多有两个发生的事件:
- 这三个事件中恰好有两个发生的事件:

例题

设A、B、C为任意三个随机事件，证明

$$\left(\overline{A}\cup B\right)(A\cup B)\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)(A\cup\overline{B})=\emptyset$$

$$(A-B)\cup(B-C)=(A\cup B)-BC$$