



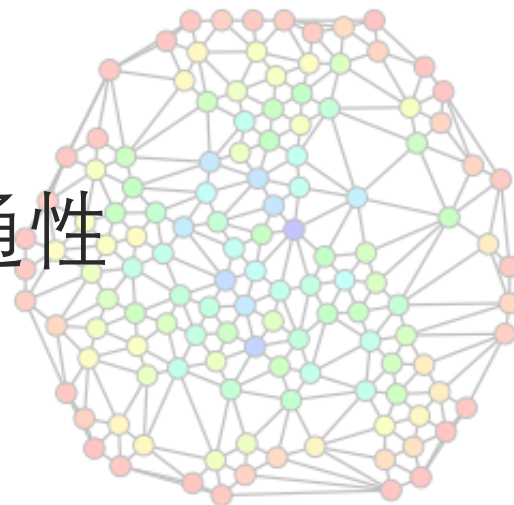
离散数学

Discrete Mathematics

第十九讲：图的连通性

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系



2021 年 12 月 16 日



前情提要



- 图论在计算机科学中的应用
- 图的定义与表示
- 图的术语
- 子图与图同构
- 图的基本运算
- 图模型及其应用
- 图的通路与回路

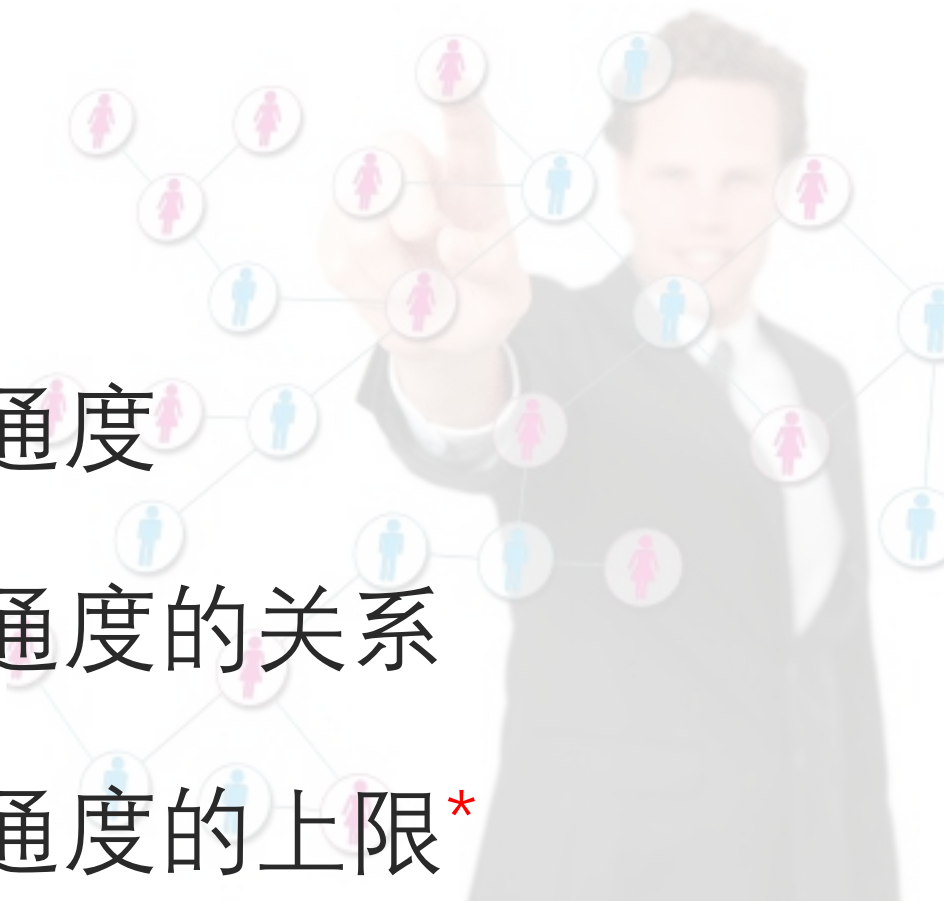




本讲主要内容



- 无向图的连通性
- 连通的度量
- 点连通度与边连通度
- 点连通度与边连通度的关系
- 点连通度与边连通度的上限*





无向图的连通性 (connectivity)



- **定义 (无向图顶点间的连通关系)** : 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图, $v_i, v_j \in V(G)$, 定义关系 $\sim : v_i \sim v_j$ 若 v_i 与 v_j 之间**存在通路**。易见, \sim 为 V 上的**等价关系**
- **定义 (无向图的连通性)** : 若 $\forall u, v \in V(G), u \sim v$, 称无向图 G **连通** (connected)
- **定义 (连通分支)** : 商集 $V(G)/\sim = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, 称 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 为图 G 的**连通分支** (connected component), 其计数为 $p(G) = k$



无向图的连通性（续）



- **定义（连通图）**：若无向图 G 是平凡图或任何两顶点均连通，称 G 为**连通图**（connected graph），否则称 G 是非连通图（disconnected graph）或**分离图**（separated graph）。显然，完全图 $K_n (n \geq 1)$ 是连通图，零图 $N_n (n \geq 2)$ 是分离图且其连通分支最多，为 $p(N_n) = n$
- 对连通图， $p(G) = 1$ ；对非连通图， $p(G) \geq 2$



图的连通性 (续)



■ **命题**：若 G 不连通，则 G 的补图 \bar{G} 连通

■ **证明**：

假设 G 不连通。任给 $u, v \in \bar{G}$ ：

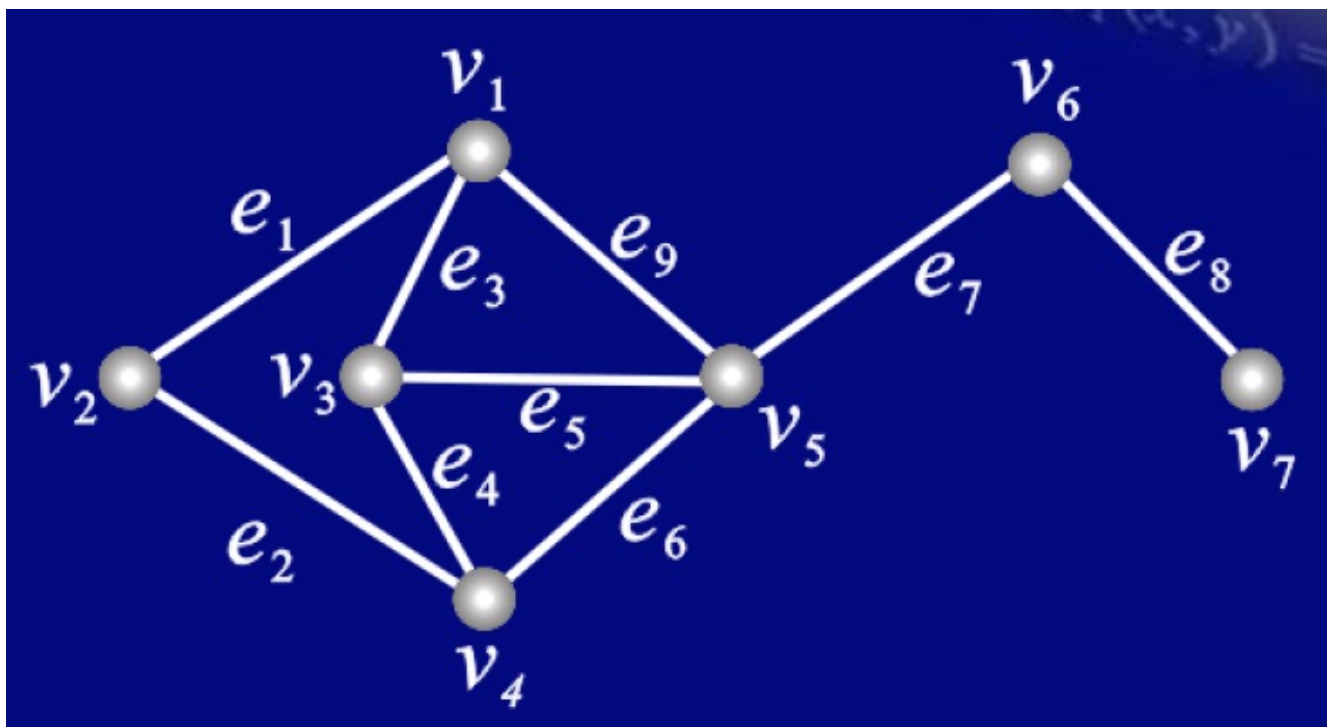
- 如果 $uv \notin E(G)$ ，则 u 与 v 在 \bar{G} 中相邻；
- 如果 $uv \in E(G)$ ，因为 G 是非连通图，一定存在顶点 w 与 u, v 在不同的连通分支中，于是 $uw \notin E(G)$, $vw \notin E(G)$ 。所以 $uw \in E(\bar{G})$, $vw \in E(\bar{G})$ ，因此 (u, w, v) 是 \bar{G} 中的 (u, v) —通路， \bar{G} 是连通图. \square



连通性的度量



- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？





连通性的度量（续）



- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？

- (1) 边的删除可能导致连通分支数的增加：

$$p(G) \leq p(G - \{e\}) \leq p(G) + 1$$

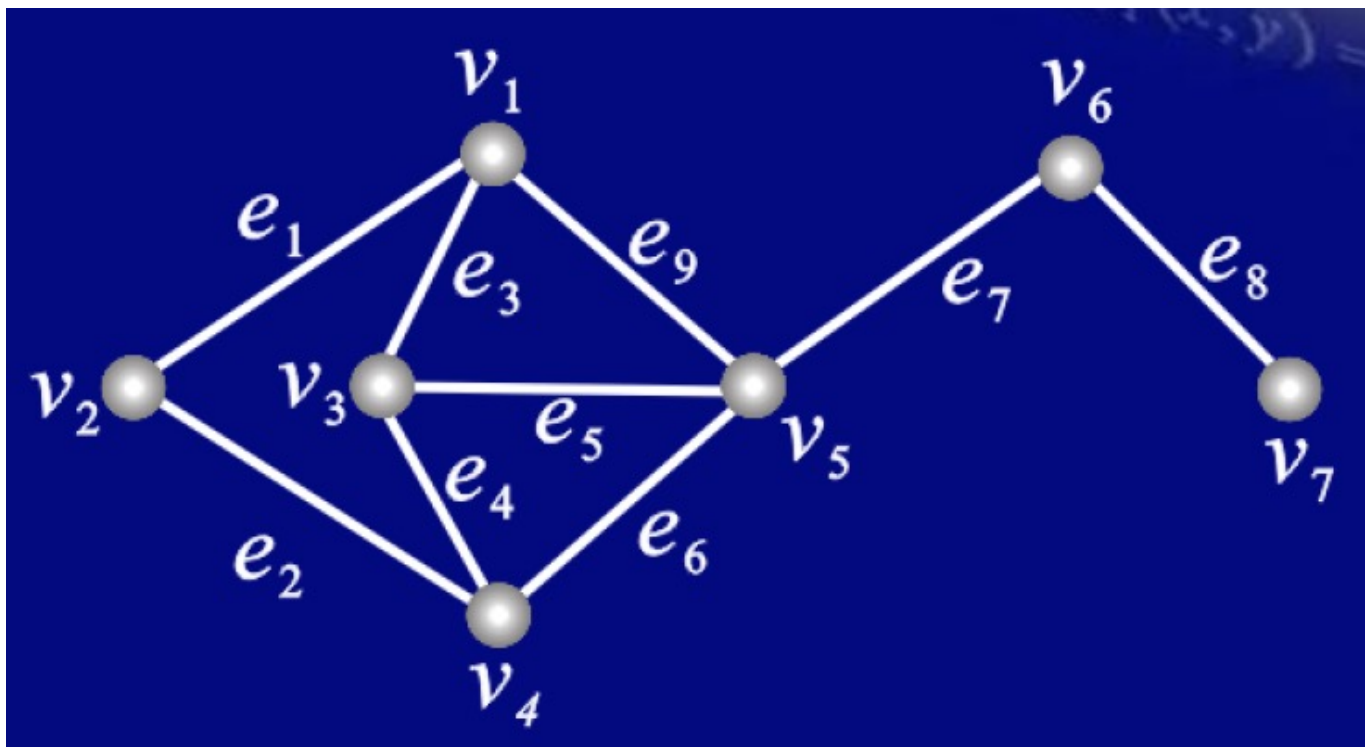
- 第一个“不大于”显然成立(删除边 e 只会影响 e 所在的那一个连通分支)
- 第二个“不大于”：注意在图中任意两点之间加一条边，最多只能将两个连通分支连成一个。因此删除某条边不会使连通分支增加多于一个



连通性的度量 (续)



- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？





连通性的度量 (续)



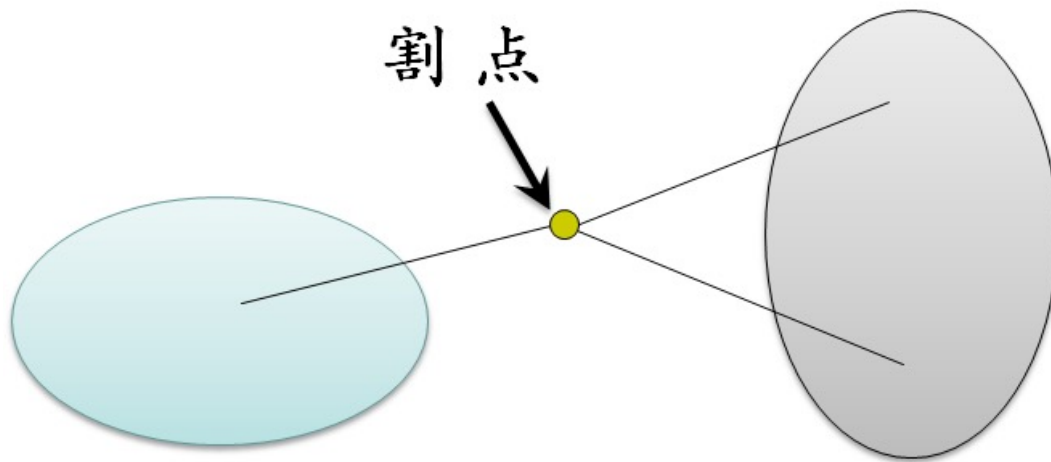
- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？
- (2) 点的删除可能导致连通分支数的增加或减少：
 $p(G) ? p(G - \{v\})$
 - $p(G) > p(G - \{v\})$ ：删除孤立顶点连通分支数会减少
 - $p(G) = p(G - \{v\})$ ：删除悬挂顶点连通分支数不变
 - $p(G) < p(G - \{v\})$ ：删除星图中间顶点会导致连通分支数增加任意有限多个



连通性的度量（续）



- **定义（点割集与割点）**：设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，若存在非空的 $V' \subset V$ 使得 $p(G - V') > p(G)$ 而对于任意的 $V'' \subset V'$ ，均有 $p(G - V'') = p(G)$ ，则称集合 V' 是 G 的**点割集**，若 $V' = \{v\}$ ，称 v 为**割点**





连通性的度量 (续)

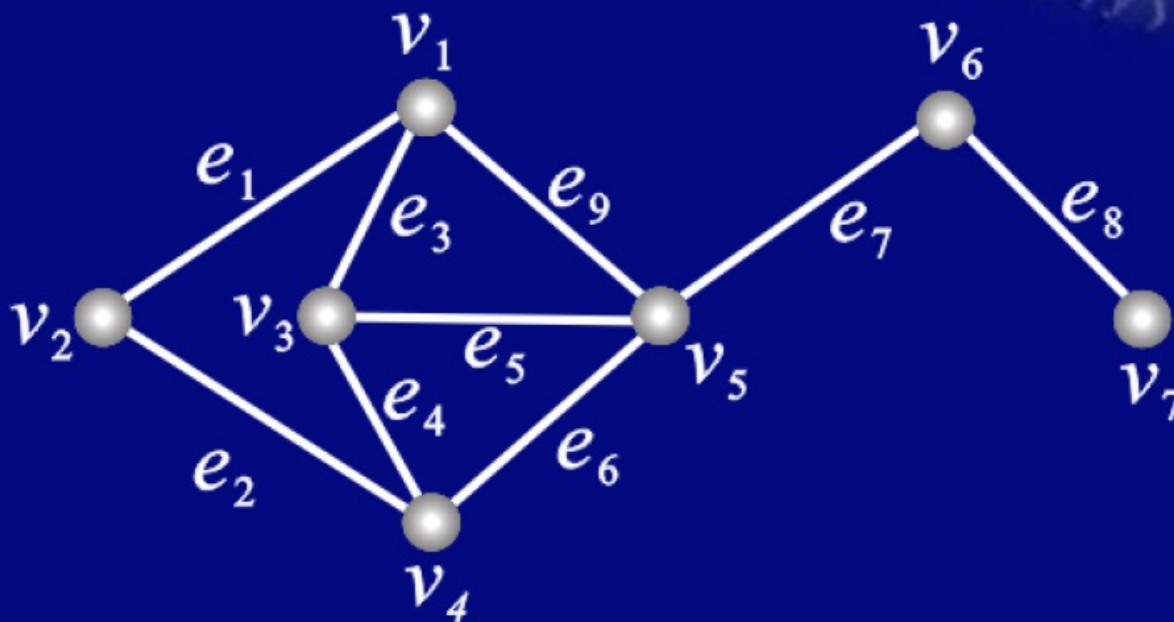


图 7

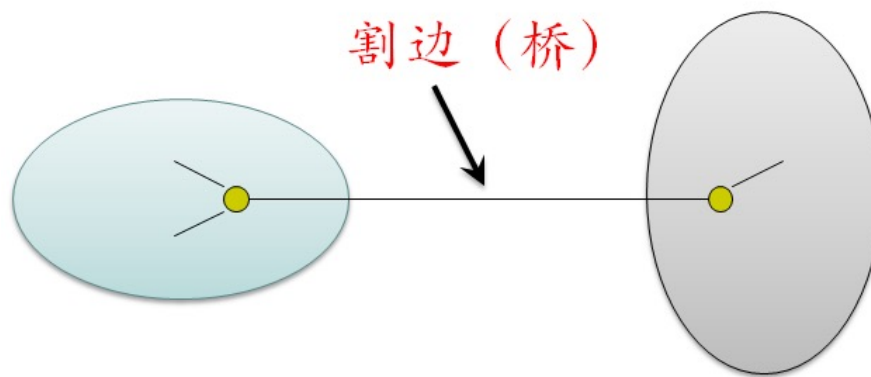
图 7 中, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_6\}$ 是点割集, v_6 是割点. $\{v_2, v_5\}$ 是点割集吗?



连通性的度量（续）



- **定义（边割集与割边）**：设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，若存在非空的 $E' \subset E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$ 而对于任意的 $E'' \subset E'$ ，均有 $p(G - E'') = p(G)$ ，则称集合 E' 是 G 的**边割集**，或简称**割集**，若 $E' = \{e\}$ ，称 e 为**割边**或**桥**





连通性的度量（续）



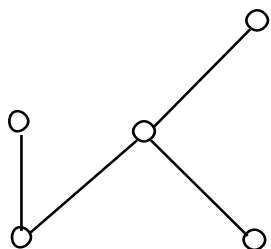
- **命题：** e 是割边当且仅当 e 不在 G 的任一简单回路上（注意：对割点则没有相应结论）
 - **证明：** \Rightarrow ：假设 C 是包含 $e = (x, y)$ 的简单回路，令 $C - \{e\} = P$ ， P 是不含 e 的 (x, y) -简单通路。对 G 中任意顶点 u, v ，若 (u, v) -通路中不含 e ，则该通路也是 $G - \{e\}$ 中的 (u, v) -通路；若 (u, v) -通路中含 e ，则将所有的 e 均替换为 P ，得到 $G - \{e\}$ 中的 (u, v) -通路， $\therefore G - \{e\}$ 仍连通，与 e 是割边矛盾；
 \Leftarrow ：假设 $e = (x, y)$ 不是割边。则 $G - \{e\}$ 仍连通，设 P 是 $G - \{e\}$ 中的 (x, y) -路径， P 中不含 e ，则： $P + \{e\}$ 是 G 中的简单回路，矛盾。 \square



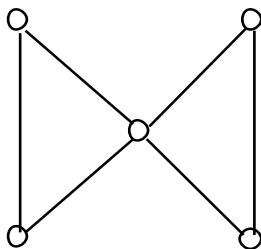
图的连通性的度量



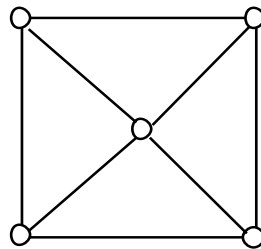
- 试观察以下4图中连通的“强度”或“牢度”



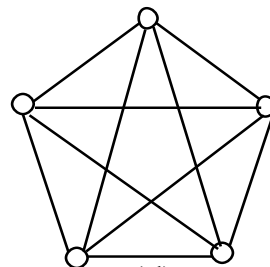
(a)



(b)



(c)



(d)

- 图a中删除任意一条边便不连通了
- 图b则至少要删除两条边或删除当中那个顶点才不连通
- 图c删除任意一个点都不可能不连通
- 图d至少要删除四条边才可能不连通，且不可能通过删除顶点使其不连通





图的连通性的度量（续）



- 如何来衡量图中**连通的程度**？一个科学的方法是看图中有多少“**关键**”的顶点或边，去除这些顶点或边可导致连通分支数的变化；因此可考虑用**点割集**和**边割集**的大小来度量连通性
- 那么，应该选取最小的点（边）割集还是最大的点（边）割集之大小来衡量呢？





图的连通性的度量 (续)





图的连通性的度量 (续)





图的点连通度



- **定义（点连通度）**：使非平凡连通图 G 成为**不连通图**或者**平凡图**需要删除的**最少**顶点数称为图 G 的**点连通度**（或**连通度**），记为 $\kappa(G)$ ：

$$\kappa(G) = \min\{|T| \mid T \text{ 为 } G \text{ 的点割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除 $\kappa(G)$ 个点就一定会使该图不连通）

- **约定**：非连通图或者平凡图的连通度为0



图的点连通度（续）



- 定义（ k -连通图）：若图 G 的（点）连通度不小于 k ，称 G 是 k -(点)连通图
 - 也就是说： k -连通图同样是1-，2-，3-，
...， $(k-1)$ -连通图，或者说：对 k -连通图，
如果删除少于 k 个顶点，它一定依然连通



图的边连通度



- **定义（边连通度）**：使非平凡连通图 G 成为**不连通图**或者**平凡图**需要删除的**最少**边数称为图 G 的**边连通度**，记为 $\lambda(G)$ ：

$$\lambda(G) = \min\{|S| \mid S \text{ 为 } G \text{ 的边割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除 $\lambda(G)$ 条边就一定会使该图不连通）

- **约定**：非连通图或者平凡图的边连通度为0



图的边连通度（续）



■ **定义（ k -边连通图）**：若图 G 的边连通度不小于 k ，称 G 是 k -边连通图

○ 也就是说： k -边连通图同样是1-，2-，3-， \dots ， $(k-1)$ -边连通图，或者说：对 k -边连通图，如果删除少于 k 条边，它一定依然连通

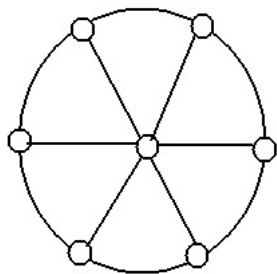


点连通度与边连通度的关系

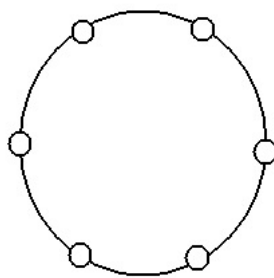


- 对6阶轮图 W_6 : $\kappa(W_6) = \lambda(W_6) = 3 = \delta(W_6)$
- 对6阶圈图 C_6 : $\kappa(C_6) = \lambda(C_6) = 2 = \delta(C_6)$
- 对完全二部图 $K_{2,3}$: $\kappa(K_{2,3}) = \lambda(K_{2,3}) = 2 = \delta(K_{2,3})$

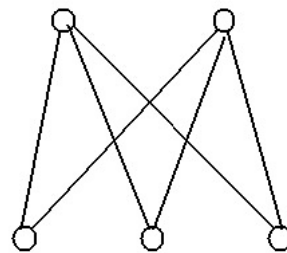
$$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) ?$$



W_6



C_6



$K_{2,3}$



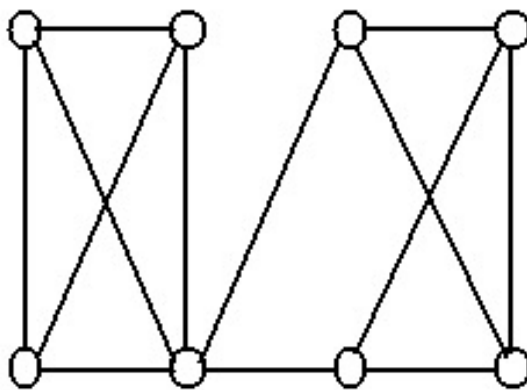
点连通度与边连通度的关系 (续)

~~$\kappa = \lambda = \delta$~~ ?

✓ $\kappa(G) = 1$

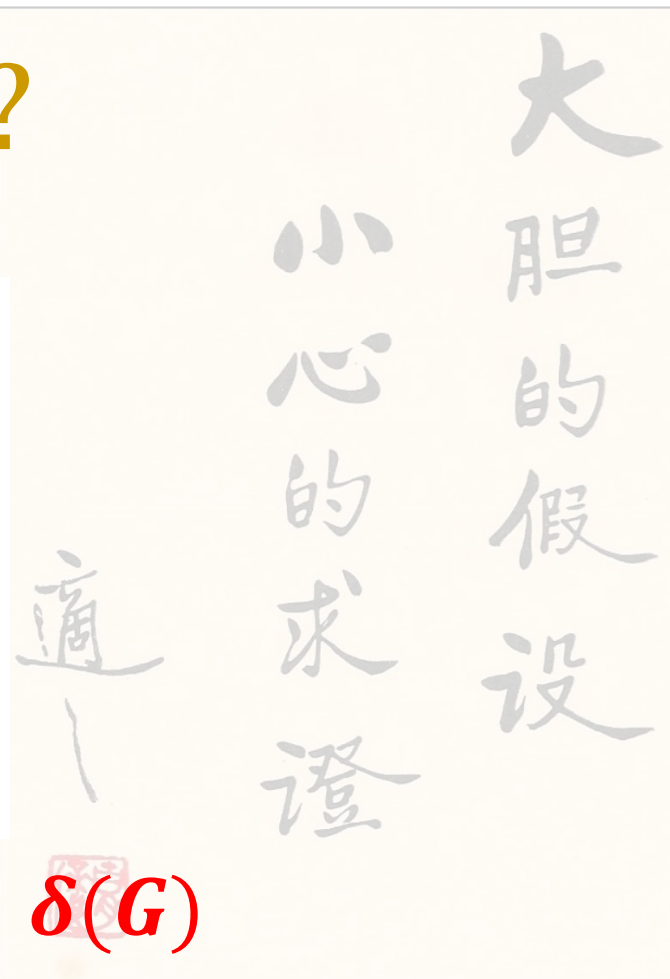
✓ $\lambda(G) = 2$

✓ $\delta(G) = 3$



G

■ 我们猜想: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$





点连通度与边连通度的关系 (续)

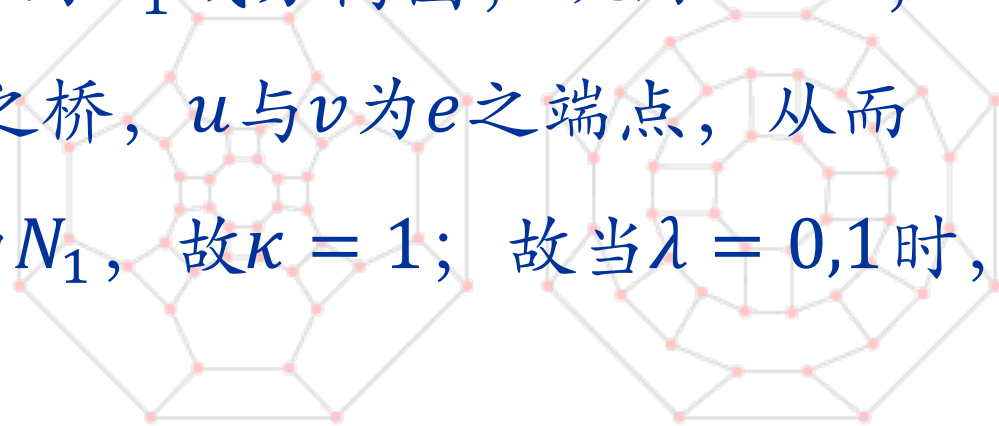


猜想： $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

■ **证明：** (1) $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ ，对边连通度 λ 进行归纳：

■ **Basis：** $\lambda = 0$ 时， G 为 N_1 或分离图，从而 $\kappa = 0$ ；

$\lambda = 1$ 时，设 e 为 G 之桥， u 与 v 为 e 之端点，从而
 $G - \{u\}$ 不连通或为 N_1 ，故 $\kappa = 1$ ；故当 $\lambda = 0, 1$ 时，
有 $\kappa \leq \lambda$ ；





点连通度与边连通度的关系 (续)



- 证明: (1) $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ (续)
- I.H.: 对任意图 G , $\lambda(G) = k$, 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) = k$
- Ind. Step: 设 H 为无向图且 $\lambda(H) = k + 1$, 设 $S = \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ 为 H 之最小边割集, 从而易见:
 $\lambda(H - \{e_0\}) = k$, 由 I.H. 知, $H - \{e_0\}$ 有点割集 T 且 $|T| \leq k$, 设 u 为 e_0 的一个端点, 从而 $T \cup \{u\}$ 为 H 的点割集, 故 $\kappa(H) \leq k + 1 = \lambda(H)$, 归纳完成. \square



点连通度与边连通度的关系 (续)



猜想: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

■ 证明: (2) $\lambda(G) \leq \delta(G)$

设 $v \in V(G)$ 且 $d(v) = \delta(G)$, 且 S 为与 v 关联的边的集合, 有 $|S| = \delta(G)$. $\because G - S$ 为 N_1 或分离图, $\therefore \lambda(G) \leq \delta(G)$. \square

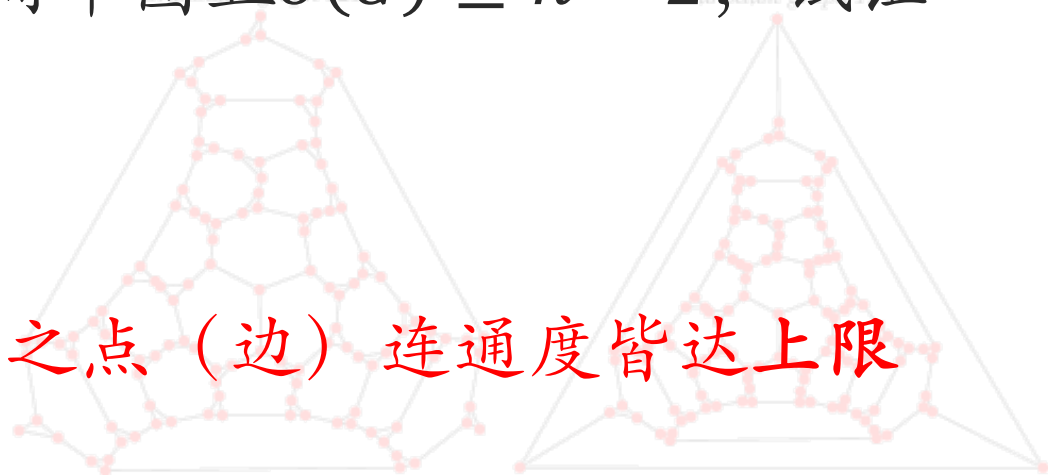
■ 故猜想成立 (Whitney 1932)



点连通度与边连通度的关系 (续)



- 练习(★★★) : G 是 n 阶简单图且 $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$,
试证明: $\lambda(G) = \delta(G)$ (Chartrand, 1966)
- (留作习题) G 是 n 阶简单图且 $\delta(G) \geq n - 2$, 试证明: $\kappa(G) = \delta(G)$
- 上述2种情况下, 图之点(边)连通度皆达上限





点连通度与边连通度的关系 (续)

- **证明 (用反证法)**：由于对于任意简单图 G ，有 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ ，假设已知条件下 $\lambda(G) = p < \delta(G)$ ，则存在最小边割集 $S \subseteq E(G)$ 使得 $|S| = p$ 且 $G - S$ 含两个连通分支(回忆 $p(G - \{e\}) \leq p(G) + 1$) G_1 与 G_2 ；不妨设 $|G_1| \leq |G_2|$ ，则 $|G_1| \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ；由于 G 是简单图，故 G_1 中顶点度数之和不大于 $K_{|G_1|}$ 的顶点度数之和加上已被删除的边数 p ，即： $\sum_{v \in V(G_1)} d(v) \leq |G_1|(|G_1| - 1) + p < |G_1|(|G_1| - 1) + \delta(G)$ ；注意 $|G_1| \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq \delta(G)$ （已知条件），故有： $\sum_{v \in V(G_1)} d(v) < \delta(G)(|G_1| - 1) + \delta(G) = |G_1| \cdot \delta(G)$ ，即 G_1 子图的度数和小于 G_1 的度数下限，这显然不可能，故假设错误， $\lambda(G) = \delta(G)$. \square



点连通度与边连通度的上限*



- 定理 (Whitney, 1933) : 对任意图 G ,

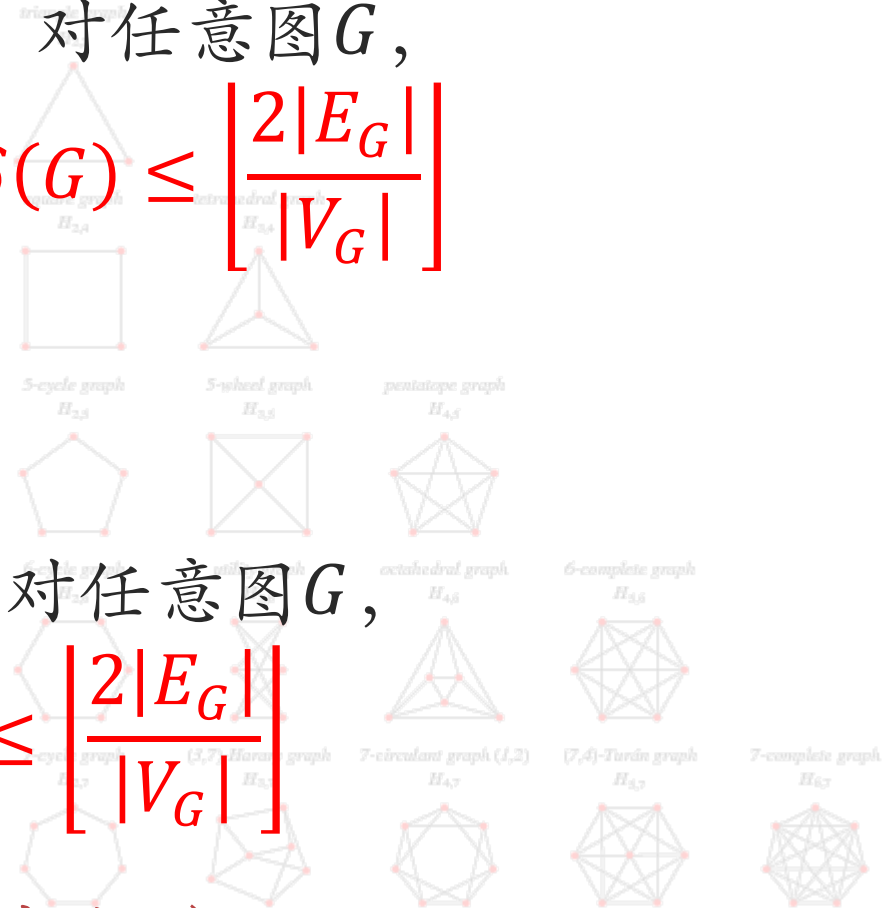
$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

(只需证明 $\delta(G) \leq \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$)

- 定理 (Harary, 1962) : 对任意图 G ,

$$\kappa(G), \lambda(G) \leq \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

(不依赖上述结论, 证明超出范围)





连通度与点(边)不相交的通路*

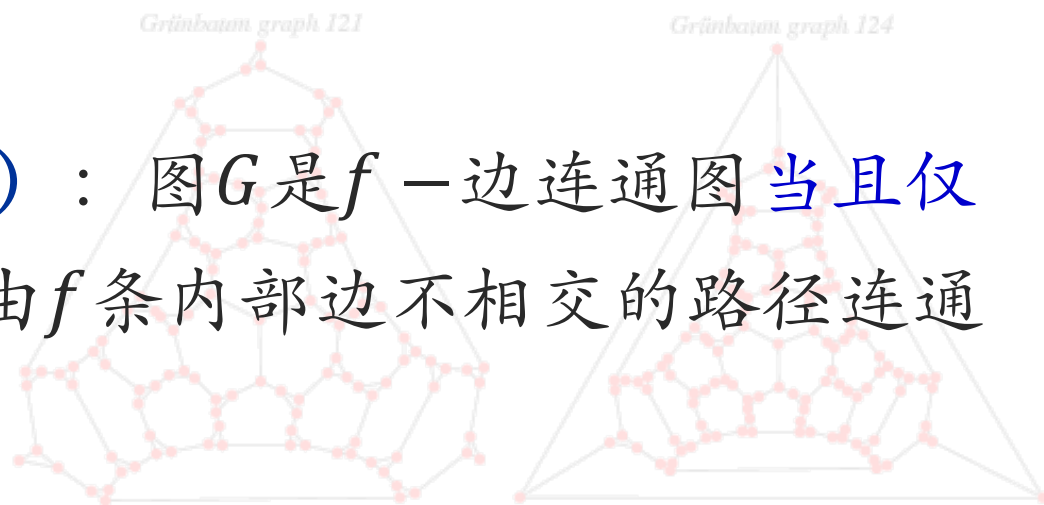


- **定理*** (Whitney, 1935) : 图 G 是 f -连通图当且仅当 G 中任意两点被至少 f 条内部 (即除端点外) 顶点不相交的路径连通

(证明超出范围)

- **定理*** (Menger, 1927) : 图 G 是 f -边连通图当且仅当 G 中任意两点至少由 f 条内部边不相交的路径连通

(证明超出范围)





本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 10.4.3 节
- 课后习题：
 - Problem Set 19
- 提交时间：待定

