

第6章 线性空间

- 集合 映射
- 线性空间的定义与简单性质
- 维数 基与坐标
- 基变换与坐标变换
- 线性子空间
- 子空间的交与和
- 子空间的直和
- 线性空间的同构

集合与映射

一、集合

1、定义

把一些事物汇集到一起组成的一个整体就叫做**集合**；
组成集合的这些事物称为集合的**元素**。

☆ 常用大写字母 A 、 B 、 C 等表示集合；

用小写字母 a 、 b 、 c 等表示集合的元素。

当 a 是集合 A 的元素时，就说 a 属于 A ，记作： $a \in A$ ；

当 a 不是集合 A 的元素时，就说 a 不属于 A ，记作： $a \notin A$

注：

- 关于集合没有一个严谨的数学定义，只是有一个描述性的说明。
- 集合论的创始人是19世纪中期德国数学家康托尔（G. Cantor），他把集合描述为：所谓集合是指我们直觉中或思维中确定的,彼此有明确区别的那些事物作为一个整体来考虑的结果;集合中的那些事物就称为集合的元素。即，集合中的元素具有：确定性、互异性、无序性。

集合的表示方法：描述法、列举法

描述法： 给出这个集合的元素所具有的特征性质.

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

列举法： 把构成集合的全部元素一一列举出来.

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

例1 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, x, y \in R\}$

例2 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad 2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$

☆ 空集：不含任何元素的集合，记为 \varnothing .

注意： $\{\varnothing\} \neq \varnothing$

约定：空集是任意集合的子集合.

2、集合间的关系

☆ 如果 B 中的每一个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的**子集**，记作 $B \subseteq A$ ，（读作 B **包含于** A ）

$B \subseteq A$ 当且仅当 $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

☆ 如果 A 、 B 两集合含有完全相同的元素，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

$A=B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

3、集合间的运算

交： $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ；

并： $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

显然有, $A \cap B \subseteq A$; $A \subseteq A \cup B$

二、映射

1、定义

设 M 、 M' 是给定的两个非空集合，如果有 一个对应法则 σ ，通过这个法则 σ 对于 M 中的**每一个**元素 a ，都有 M' 中一个唯一确定的元素 a' 与它对应，则称 σ 为 M 到 M' 的一个**映射**，记作： $\sigma:M \rightarrow M'$ 或 $M \xrightarrow{\sigma} M'$ 称 a' 为 a 在映射 σ 下的**象**，而 a 称为 a' 在映射 σ 下的**原象**，记作 $\sigma(a)=a'$ 或 $\sigma:a \mapsto a'$.

注:①设映射 $\sigma : M \rightarrow M'$, 集合 $\sigma(M) = \{\sigma(a) \mid a \in M\}$, 称之为 M 在映射 σ 下的**象** (image), 记作 $\text{Im}\sigma$.

显然, $\text{Im}\sigma \subseteq M'$

②集合 M 到 M 自身的映射称为 M 的一个**变换**.

例3 判断下列 M 到 M' 对应法则是否为映射

1) $M = \{a, b, c\}$ 、 $M' = \{1, 2, 3, 4\}$

σ : $\sigma(a)=1, \sigma(b)=1, \sigma(c)=2$ (是)

δ : $\delta(a)=1, \delta(b)=2, \delta(c)=3, \delta(c)=4$ (不是)

τ : $\tau(b)=2, \tau(c)=4$ (不是)

2) $M = P^{n \times n}$, $M' = P$, (P 为数域)

σ : $\sigma(A) = |A|$, $\forall A \in P^{n \times n}$ (是)

3) $M = P$, $M' = P^{n \times n}$, (P 为数域)

τ : $\tau(a) = aE$, $\forall a \in P$ (E 为 n 级单位矩阵) (是)

4) M 、 M' 为任意两个非空集合, a_0 是 M' 中的一个
固定元素. σ : $\sigma(a) = a_0$, $\forall a \in M$ (是)

例4 M 是一个集合，定义 I :

$$I(a)=a, \quad \forall a \in M$$

即 I 把 M 上的元素映到它自身， I 是一个映射，
称为 M 上的**恒等变换**或**单位变换**.

例5 任意一个在实数集 R 上的函数 $y=f(x)$

都是实数集 R 到自身的映射，即，函数可以看成是映射的一个特殊情形.

2、映射的乘积

设映射 $\sigma: M \rightarrow M'$, $\tau: M' \rightarrow M''$, **乘积** $\tau \circ \sigma$

定义为: $\tau \circ \sigma(a) = \tau(\sigma(a)) \quad \forall a \in M$

即相继施行 σ 和 τ 的结果, $\tau \circ \sigma$ 是 M 到 M'' 的一个映射.

注: ①对于任意映射 $\sigma: M \rightarrow M'$, 有

因为对 $\forall a, (I_{M'} \circ \sigma)(a) = I_{M'} \sigma(a) = \sigma(a) \quad I_{M'} \circ \sigma = \sigma \circ I_M = \sigma$

②设映射 $\sigma: M \rightarrow M'$, $\tau: M' \rightarrow M''$, $\psi: M'' \rightarrow M'''$,

有 $(\psi \circ \tau) \circ \sigma = \psi \circ (\tau \circ \sigma)$

3、映射的性质： 设映射 $\sigma: M \rightarrow M'$

1) 若 $\text{Im}\sigma = M'$ ，即对于任意 $y \in M'$ ，均存在 $x \in M$ ，使 $y = \sigma(x)$ ，则称 σ 是 M 到 M' 的一个**满射**（或称 σ 为**映上的**）；

2) 若 M 中不同元素的象也不同，即

$$\forall a_1, a_2 \in M, \text{若 } a_1 \neq a_2, \text{ 则 } \sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$$

（或 $\forall a_1, a_2 \in M, \text{若 } \sigma(a_1) = \sigma(a_2), \text{ 则 } a_1 = a_2$ ） ，

则称 σ 是 M 到 M' 的一个**单射**（或称 σ 为**1—1的**）；

3) 若 σ 既是单射，又是满射，则称 σ 为**双射**，
（或称 σ 为 **1—1对应**）

例6 判断下列映射的性质

1) $M = \{a, b, c\}$ 、 $M' = \{1, 2, 3\}$

$\sigma: \sigma(a)=1, \sigma(b)=1, \sigma(c)=2$

(既不单射,
也不是满射)

$\tau: \tau(a)=3, \tau(b)=2, \tau(c)=1$

(双射)

2) $M = P^{n \times n}$, $M' = P$, (P 为数域)

$\sigma: \sigma(A)=|A|, \quad \forall A \in P^{n \times n}$ (是满射, 但不是单射)

3) $M=P$, $M' = P^{n \times n}$, P 为数域, E 为 n 级单位矩阵

$$\tau: \tau(a)=aE, \quad \forall a \in P \quad (\text{是单射, 但不是满射})$$

4) M 、 M' 为任意非空集合, $a_0 \in M'$ 为固定元素

$$\sigma: \sigma(a)=a_0, \quad \forall a \in M \quad (\text{既不单射, 也不是满射})$$

5) M 是一个集合, 定义 I :

$$I(a)=a, \quad \forall a \in M \quad (\text{双射})$$

6) $M=Z$, $M' = 2Z$,

$$\sigma: \sigma(n)=2n, \quad \forall n \in Z \quad (\text{双射})$$

注:

① 对于有限集来说, 两集合之间存在1—1对应的充要条件是它们所含元素的个数相同;

② 对于有限集 A 及其子集 B , 若 $B \neq A$ (即 B 为 A 的真子集), 则 A 、 B 之间不可能存在1—1对应; 但是对于无限集未必如此.

如例6中的6), σ 是1—1对应, 但 $2Z$ 是 Z 的真子集.

$$\begin{aligned} M &= Z, \quad M' = 2Z, \\ \sigma: \quad \sigma(n) &= 2n, \quad \forall n \in Z \end{aligned}$$

4、可逆映射

定义： 设映射 $\sigma: M \rightarrow M'$, 若有映射 $\tau: M' \rightarrow M$,

使得 $\tau \circ \sigma = I_M, \sigma \circ \tau = I_{M'}$

则称 σ 为**可逆映射**, τ 为 σ 的**逆映射**, 记作 σ^{-1} .

注：

σ 的逆映射是由 σ 唯一确定的

①若 σ 为可逆映射, 则 σ^{-1} 也为可逆映射, 且

$$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma.$$

② $\sigma: M \rightarrow M'$ 为可逆映射, $a \in M$, 若 $\sigma(a) = a'$,

则有 $\sigma^{-1}(a') = a$.

③ σ 为可逆映射的充要条件是 σ 为1—1对应.

3、设映射 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, 令 $h = g \circ f$, 证明:

1) 如果 h 是单射, 那么 f 也是单射;

2) 如果 h 是满射, 那么 g 也是满射;

3) 如果 f 、 g 都是双射, 那么 h 也是双射, 并且

$$h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

证: 1) 若 f 不是单射, 则存在 $a_1, a_2 \in A$, 且 $a_1 \neq a_2$,

但 $f(a_1) = f(a_2)$, 于是有

$$\begin{aligned} h(a_1) &= g \circ f(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &= g \circ f(a_2) = h(a_2) \end{aligned}$$

这与 h 是单射矛盾, $\therefore f$ 是单射.

2) $\because h$ 是满射, $\forall c \in C, \exists a \in A$, 使 $h(a) = c$, 即

$$c = h(a) = g \circ f(a) = g(f(a))$$

又 $\because f(a) \in B$, $\therefore g$ 是满射.

3) $\forall c \in C$, 因为 g 是满射, 存在 $b \in B$, 使
 $g(b) = c$.

又因为 f 是满射, 存在 $a \in A$, 使 $f(a) = b$

$$\therefore h(a) = g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c,$$

h 是满射.

\because 若 $a_1, a_2 \in A$, 且 $a_1 \neq a_2$, 由于 f 是单射, 有
 $f(a_1) \neq f(a_2)$.

又因为 g 是单射, 有 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$

即, $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$

$\therefore h(a_1) \neq h(a_2)$, h 是单射.

因而 h 是双射.

又 $\because h \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_C$

同理 $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ h = I_A. \therefore h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$