目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

等距节点情形

- 等距节点的情形
  - 插值公式可进一步简化
- 设定
  - 假设函数$y = f(x)$在等距节点

$$x_k = x_0 + kh \ (k = 0,1,\dots,n)$$

上的值$f_k = f(x_k)$为已知

  - 这里h为常数，称为步长

差分

- **定义2.4** 偏差

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k \tag{2.5.1}$$

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1} \tag{2.5.2}$$

$$\delta f_k = f(x_k + h/2) - f(x_k - h/2) = f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}} \tag{2.5.3}$$

分别称为$f(x)$在x_k处以h为步长的向前差分、向后差分及中心差分。符号Δ，∇，δ分别称为向前差分算子、向后差分算子及中心差分算子。

- 一阶差分

差分（续）

- 利用一阶差分可定义二阶差分

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

- 一般地，可定义m阶差分

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k，\ \nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$

- 一阶中心差分
  - 前面定义用到的$f_{k+1/2}$和$f_{k-1/2}$不在函数表中
  - 新形式 $\delta f_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+1} - f_k$， $\delta f_{k-\frac{1}{2}} = f_k - f_{k-1}$
- 二阶中心差分

$$\delta^2 f_k = \delta f_{k+\frac{1}{2}} - \delta f_{k-\frac{1}{2}}$$

不变算子和移位算子

- 不变算子I和移位算子E，定义如下

$$\mathrm{I}f_k = f_k, \qquad \mathrm{E}f_k = f_{k+1}$$

- 因此

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = \mathrm{E}f_k - \mathrm{I}f_k = (\mathrm{E} - \mathrm{I})f_k$$

  - 可得

$$\Delta = \mathrm{E} - \mathrm{I}$$

  - 同理

$$\nabla = \mathrm{I} - \mathrm{E}^{-1}, \qquad \delta = \mathrm{E}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{E}^{-\frac{1}{2}}$$

基本性质

- **性质1** 各阶差分均可用函数值表示

$$\Delta^n f_k = (\mathrm{E}-\mathrm{I})^n f_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\mathrm{E}^{n-j}f_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f_{n+k-j} \qquad (2.5.4)$$

$$\nabla^n f_k = (\mathrm{I}-\mathrm{E}^{-1})^n f_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\mathrm{E}^{j-n}f_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_{k+j-n} \qquad (2.5.5)$$

  - 其中$\binom{n}{j} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$为二项式展开系数

- **性质2** 函数值也可用各阶差分表示，例如，可用向前差分表示f_{n+k}

$$f_{n+k} = \mathrm{E}^n f_k = (\mathrm{I}+\Delta)^n f_k = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Delta^j f_k \qquad (2.5.6)$$

基本性质（续）

- 性质3 差商与差分有如下关系
  - 向前差分 $$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k$$

一般地

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \quad (m = 1,2,\cdots,n) \tag{2.5.7}$$

  - 向后差分

$$f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m f_k \tag{2.5.8}$$

基本性质（续）

- 性质3 差商与差分有如下关系
  - 结合式(2.5.7)及式(2.4.5)

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \quad (m = 1,2,\cdots,n) \qquad (2.5.7)$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] \qquad (2.4.5)$$

可得差分与导数的关系

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi) \qquad (2.5.9)$$

✓ 其中$\xi \in (x_k, x_{k+n})$

差分表

- 计算差分可列差分表，下表是向前差分表

x_k	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\vdots$
f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\vdots$	
f_3	Δf_3	$\vdots$		
f_4	$\vdots$			
$\vdots$				

Newton前插公式

□ Newton插值公式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \qquad (2.4.6)$$

- 用差分代替差商

□ 设有节点$x_k = x_0 + kh\ (k = 0,1, \dots, n)$

- 要计算x_0附近点x的函数值$f(x)$，令$x = x_0 + th$，$0 \le t \le 1$，得到

$$\omega_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^{k} (x - x_j) = t(t-1)\cdots(t-k)h^{k+1}$$

Newton前插公式（续）

- 将上式和(2.5.7)代入(2.4.6)

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \quad (m = 1,2,\cdots,n) \qquad (2.5.7)$$

- Newton前插公式

$$N_n(x_0 + th)$$

$$= f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad (2.5.10)$$

- 插值余项由式(2.2.14)得到

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.2.14)$$

$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in (x_0, x_n) \qquad (2.5.11)$$

Newton后插公式

- 设有节点$x_k = x_0 + kh\ (k = 0,1,\dots,n)$
  - 要计算在x_n附近点x的函数值$f(x)$，此时将插值点按$x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$的次序排列

$$N_n(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_n, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1})$$

$$+ \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_n) \cdots (x - x_1)$$

  - 作变换$x = x_n + th\ (-1 \le t \le 0)$，利用式(2.5.8)

$$f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m f_k \qquad (2.5.8)$$

Newton后插公式（续）

- Newton后插公式

$$N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots$$

$$+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \qquad (2.5.12)$$

- 余项

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

✓ 其中$\xi\in(x_0,x_n)$.

说明

- 利用Newton前插公式(2.5.10)计算函数值$f(x)$时，由于x在x_0附近，其系数就是$f(x)$在x_0的各阶向前差分

- 利用Newton后插公式(2.5.12)计算函数值$f(x)$时，由于x在x_n附近，其系数就是$f(x)$在x_n的各阶向后差分

等距节点插值公式的应用

- 等距节点插值公式有不少实际应用，例如，很多工程设计计算都需要查各种函数表，用计算机计算时就必须解决计算机查表问题
  - 如果把整个函数表存入内存，往往占用单元太多
  - 如果用一个解析表达式近似该函数，又可能达不到精度要求
  - 因此，采用存放大间隔函数表，并用插值公式计算函数近似值，是一种可行的方案

例2.4

- 在微电机设计计算中需要查磁化曲线表，下面给出的表是磁密B每间隔500高斯磁路每厘米长所需安匝数at的值，下面要解决B从4000至11000区间的查表问题
  - 为了分析使用几阶插值公式合适，应先列出差分表
  - 从差分表中看到三阶差分近似于0，因此计算时只需用二阶差分
    - 也就是使用3个点实现插值，即$n = 2$

例2.4 磁化曲线表

k	B_k	$at_k = f(B_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	4 000	1.38	0.10	0	0.01
1	4 500	1.48	0.10	0.01	0
2	5 000	1.58	0.11	0.01	0
3	5 500	1.69	0.12	0.01	0.02
4	6 000	1.81	0.13	0.03	−0.01
5	6 500	1.94	0.16	0.02	0.02
6	7 000	2.10	0.18	0.04	0
7	7 500	2.28	0.22	0.04	0
8	8 000	2.50	0.26	0.04	0.01
9	8 500	2.76	0.30	0.05	0.02
10	9 000	3.06	0.35	0.07	0.01
11	9 500	3.41	0.42	0.08	0.02
12	10 000	3.83	0.50	0.10	
13	10 500	4.33	0.60		
14	11 000	4.93			

例2.4（续）

- 当$4000 \leq B \leq 10500$，使用Newton前插公式
- 例如，求$f(5200)$时取$B_0 = 5000$，$f_0 = 1.58$，$\Delta f_0 = 0.11$，$\Delta^2 f_0 = 0.01$，$h = 500$，$B = 5200$，$t = 0.4$，于是由式(2.5.10)，取$n = 2$，可得

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \qquad (2.5.10)$$

$$f(5200) \approx 1.58 + 0.4 \times 0.11 + \frac{0.4 \times (-0.6)}{2} \times 0.01 \approx 1.62$$

- 当$10500 < B \leq 11000$，使用Newton后插公式
  - ✓ 前插缺少信息

目录

- 引言
- Lagrange插值
- 逐次线性插值
- 差商与Newton插值公式
- 差分与等距节点插值公式
- Hermite插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

Hermite插值多项式

Hermite插值多项式

- 不少实际问题不仅要求在节点上函数值相等，而且还要求导数值相等，甚至高阶导数值也相等

讨论函数值与导数值个数相等的情况

- 设在节点$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$上，$y_j = f(x_j)$，$m_j = f'(x_j)(j = 0,1,\ldots,n)$，要求插值多项式$H(x)$满足条件

$$H(x_j) = y_j，H'(x_j) = m_j \ (j = 0,1,\ldots,n) \qquad (2.6.1)$$

- 这里给出的$2n + 2$个条件，可唯一确定一个次数不超过$2n + 1$的多项式

求解思路

- 插值多项式

$$H_{2n+1}(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$$

1. 根据条件(2.6.1)来确定$2n+2$个系数
   - 理论可行，但非常复杂
2. 采用求Lagrange插值多项式的基函数方法

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x), \qquad (2.2.11)$$

   - n次插值基函数

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}(k=0,1,\dots,n)$$

Hermite插值多项式

- $2n+2$个插值基函数：$\alpha_j(x)$和$\beta_j(x)$
  - 每个基函数都是$2n+1$次多项式，且满足

$$\begin{cases} \alpha_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad \alpha_j'(x_k) = 0 \ (j, k = 0,1,\cdots,n) \\ \beta_j(x_k) = 0, \quad \beta_j'(x_k) = \delta_{jk} \end{cases} \tag{2.6.2}$$

- Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x) \right] \tag{2.6.3}$$

  - 由条件(2.6.2)，显然有

$$H_{2n+1}(x_k) = y_k, \quad H_{2n+1}{}'(x_k) = m_k \ \ (k = 0,1,\ldots,n)$$

构造基函数

- 令 $$\alpha_j(x) = (ax+b)l_j^2(x)$$
  - $l_j(x)$为Lagrange插值基函数

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

- 由条件(2.6.2)可得

$$\alpha_j(x_j) = (ax_j+b)l_j^2(x_j) = 1$$

$$\alpha_j'(x_j) = l_j(x_j)\left[al_j(x_j) + 2(ax_j+b)l_j'(x_j)\right] = 0$$

  - 利用条件$l_j(x_j) = 1$，$l_j(x_k) = 0\ (k \neq j)$
  - 在其他$x_k(k \neq j)$满足(2.6.2)的要求

构造基函数（续）

- 整理得到 $\begin{cases} ax_j + b = 1 \\ a + 2l_j'(x_j) = 0 \end{cases}$
- 解得$a = -2l_j'(x_j)$, $b = 1 + 2x_j l_j'(x_j)$
- 下面求$l_j'(x_j)$，对$l_j(x)$两边求对数，可得

$$\log l_j(x) = \sum_{k=0,k\neq j}^{n} \left[\log(x - x_k) - \log\left(x_j - x_k\right)\right]$$

- 再对两边求导，可得

$$\frac{l_j'(x)}{l_j(x)} = \sum_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{1}{x - x_k} \Rightarrow l_j'(x_j) = \sum_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}$$

构造基函数（续）

- 得到a, b的表达式，进而可得

$$\alpha_j(x) = \left[1 - 2(x - x_j) \sum_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}\right] l_j^2(x) \qquad (2.6.4)$$

- 同理可得

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x) \qquad (2.6.5)$$

- 可计算Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)\right] \qquad (2.6.3)$$

唯一性

- 满足条件(2.6.1)的插值多项式是唯一的，采用反证法
  - 假设$H_{2n+1}(x)$及$\overline{H}_{2n+1}(x)$均满足(2.6.1)
  - 定义函数
$$\varphi(x) = H_{2n+1}(x) - \overline{H}_{2n+1}(x)$$
  - 该函数在每个节点x_k上均有二重根，即$\varphi(x)$有$2n+2$重根
  - $\varphi(x)$是不高于$2n+1$次的多项式，故$\varphi(x) \equiv 0$
    - ✓ 可以查阅Fundamental theorem of algebra

插值余项

- 若$f(x)$在(a,b)内的$2n+2$阶导数存在，则其插值余项满足

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \qquad (2.6.6)$$

  - 其中$\xi \in (a,b)$且与x有关

- 证明
  - 可仿照例**2.5**，与Lagrange插值余项类似

两点三次插值多项式

- 重要特例是$n = 1$的情况
- 取节点x_k和x_{k+1}，插值多项式$H_3(x)$满足

$$\begin{cases} H_3(x_k) = y_k, & H_3(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ H_3'(x_k) = m_k, & H_3'(x_{k+1}) = m_{k+1} \end{cases} \tag{2.6.7}$$

- 基函数$\alpha_k(x), \beta_k(x), \alpha_{k+1}(x), \beta_{k+1}(x)$应满足

$$\alpha_k(x_k) = 1，\ \alpha_k(x_{k+1}) = 0，\ \alpha_k'(x_k) = \alpha_k'(x_{k+1}) = 0$$

$$\alpha_{k+1}(x_k) = 0，\ \alpha_{k+1}(x_{k+1}) = 1，\ \alpha_{k+1}'(x_k) = \alpha_{k+1}'(x_{k+1}) = 0$$

$$\beta_k(x_k) = \beta_k(x_{k+1}) = 0，\ \beta_k'(x_k) = 1，\ \beta_k'(x_{k+1}) = 0$$

$$\beta_{k+1}(x_k) = \beta_{k+1}(x_{k+1}) = 0，\ \beta_{k+1}'(x_k) = 0，\ \beta_{k+1}'(x_{k+1}) = 1$$

两点三次插值多项式（续）

- 根据式(2.6.4)及式(2.6.5)，可得

$$\begin{cases} \alpha_k(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \alpha_{k+1}(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases} \quad (2.6.8)$$

$$\begin{cases} \beta_k(x) = (x - x_k)\left(\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1})\left(\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases} \quad (2.6.9)$$

- 满足条件(2.6.7)的插值多项式为

$$H_3(x) = y_k\alpha_k(x) + y_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x) \quad (2.6.10)$$

- 余项$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$，由式(2.6.6)可得

$$R_3(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2$$

例2.5

- 求满足$P(x_j)=f(x_j)(j=0,1,2)$及$P'(x_1)=f'(x_1)$的插值多项式及其余项表达式
  - 给定条件可确定次数不超过3的插值多项式
  - 该多项式通过点$(x_0,f(x_0))$，$(x_1,f(x_1))$及$(x_2,f(x_2))$，故可写成

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

- ✓ 类似于Newton差商插值多项式(2.4.6)的形式
- ✓ A为待定常数

例2.5（续）

- 利用条件$P'(x_1) = f'(x_1)$，可得

$$P'(x_1) = f[x_0,x_1] + f[x_0,x_1,x_2](x_1 - x_0) + A(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$$

$$= f'(x_1)$$

- 因此

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0,x_1] - (x_1 - x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

- 下面计算余项$R(x) = f(x) - P(x)$，假设

$$R(x) = f(x) - P(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)$$

  - ✓ $K(x)$为待定函数
  - ✓ 容易验证$R(x)$满足$R(x_j) = 0\ (j = 0,1,2)$，并且 $R'(x_1) = P'(x_1) - f'(x_1) = 0$

例2.5（续）

- 构造函数

$$\varphi(t)=f(t)-P(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$$

- 显然$\varphi(x_j)=0(j=0,1,2)$，$\varphi'(x_1)=0$，$\varphi(x)=0$
- 因此$\varphi(t)$在(a,b)有5个零点（重根算2个）
- 反复运用Rolle定理可得$\varphi^{(4)}(t)$在(a,b)至少有1个零点ξ，故$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!\,K(x)=0$
- 于是$K(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$，得到余项表达式

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}{4!}$$

✓ 其中ξ位于x_0，x_1，x_2和x所界定的范围内

目录

多项式插值的问题

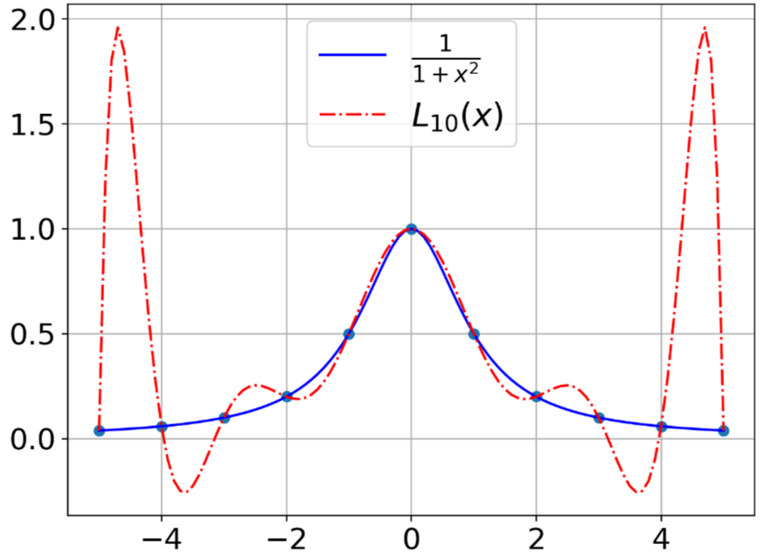
- 根据区间$[a,b]$上给出的节点构造插值多项式$L_n(x)$近似$f(x)$时，次数n越高逼近程度越好？
  - ×，对于任意的插值节点，当$n\to\infty$，$L_n(x)$未必收敛
- 20世纪初Runge给出了一个不收敛的例子
  - 函数$f(x)=1/(1+x^2)$，在$[-5,5]$上各阶导数均存在
  - 在$[-5,5]$上取$n+1$个等距节点$x_k=-5+10\frac{k}{n}\quad(k=0,1,\dots,n)$，构造Lagrange插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{1+x_j^2}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega_{n+1}'(x_j)}$$

  - 当$n\to\infty$时只在$|x|\le 3.63$内收敛，而在该区间外发散

Runge现象

- 取$n=10$，画出$y=L_{10}(x)$及$y=1/(1+x^2)$在$[-5,5]$上的图形



  - 可以看出在$x=\pm 5$附近两个函数的差距较大，说明高次插值的效果并不好
  - 如果把$y=1/(1+x^2)$在节点$x=0$，± 1，± 2，± 3，± 4，± 5处用折线连起来逼近效果更好，这正是下面要讨论的分段低次插值的出发点

分段线性插值

- 将插值点用折线段连接起来逼近$f(x)$

- 已知节点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$上的函数值$f_0$，$f_1$，…，$f_n$，记

$$h_k = x_{k+1} - x_k,\quad h = \max_k h_k$$

称$I_h(x)$为分段线性插值函数，如果满足

1. $I_h(x) \in C[a,b]$；（ $C[a,b]$ 表示$[a,b]$上连续的函数集合）
2. $I_h(x_k) = f_k\ (k = 0,1,\ldots,n)$；
3. $I_h(x_k)$在每个区间$[x_k, x_{k+1}]$上是线性函数。

分段线性插值（续）

- 由定义，$I_h(x)$在区间$[x_k, x_{k+1}]$上可表示为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1} \ (x_k \le x \le x_{k+1}) \qquad (2.7.1)$$

- 用插值基函数表示

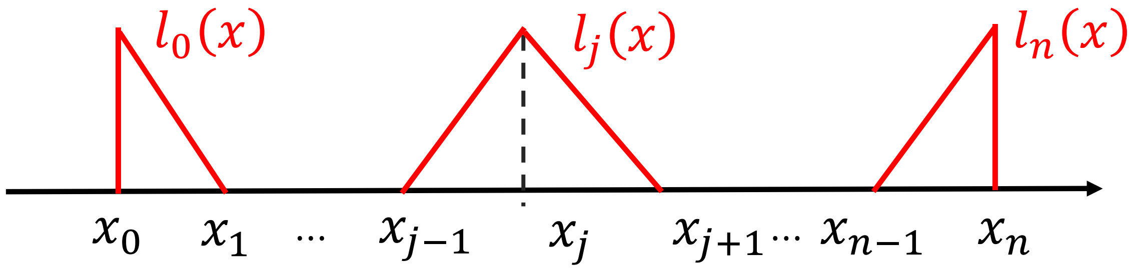
$$I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x) \qquad (2.7.2)$$

  - $l_j(x)$满足条件$l_j(x_k) = \delta_{jk} \ (j, k = 0,1, \dots, n)$，为

$$l_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \le x \le x_j \ (j = 0 \text{ 略去}) \\ \dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, & x_j \le x \le x_{j+1} \ (j = n \text{ 略去}) \\ 0, & x \in [a, b], x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases} \qquad (2.7.3)$$

分段线性插值（续）

- 分段线性插值基函数$l_j(x)$只在x_j附近不为零，其他地方均为零，该性质称为局部非零性质



- 当$x \in [x_k, x_{k+1}]$时

$$1 = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) = l_k(x) + l_{k+1}(x), \quad f(x) = [l_k(x) + l_{k+1}(x)]f(x)$$

- 此时，根据局部非零性质

$$I_h(x) = f_k l_k(x) + f_{k+1} l_{k+1}(x)$$

收敛性

- $\omega(h)$是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的连续模
  - 对任意两点x'，$x'' \in [a,b]$，只要$|x'-x''| \le h$，有
    $$|f(x')-f(x'')| \le \omega(h)$$
  - 当$f(x) \in C[a,b]$时，有$\lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$
- 现证明$\lim\limits_{h\to 0} I_h(x) = f(x)$，考虑$x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|f(x)-I_h(x)| = |[l_k(x)+l_{k+1}(x)]f(x) - f_k l_k(x) - f_{k+1} l_{k+1}(x)|$$

$$\le l_k(x)|f(x)-f_k| + l_{k+1}(x)|f(x)-f_{k+1}|$$

$$\le [l_k(x)+l_{k+1}(x)]\omega(h_k) = \omega(h_k) \le \omega(h)$$

收敛性（续）

- 当$x \in [a,b]$时，有

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-I_h(x)| \le \omega(h)$$

- 只要$f(x)\in C[a,b]$，就有$\lim\limits_{h\to 0} I_h(x)=f(x)$在$[a,b]$上一致成立
  - $I_h(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$

分段线性插值函数能够收敛到$f(x)$

分段三次Hermite插值

- 分段线性插值函数$I_h(x)$的导数是间断的
  - 函数连续，但不光滑

- 在节点x_k $(k = 0,1,\dots,n)$上除函数值f_k外还给出导数值$f_k' = m_k$ $(k = 0,1,\dots,n)$，就可构造一个导数连续的分段插值函数$I_h(x)$，满足：
  1. $I_h(x) \in C^1[a,b]$；（$C^1[a,b]$ 表示$[a,b]$上一阶导数连续的函数集合）
  2. $I_h(x_k) = f_k$, $I_h'(x_k) = f_k'$ $(k = 0,1,\dots,n)$;
  3. $I_h(x_k)$在每个区间$[x_k, x_{k+1}]$上是三次多项式。

分段三次Hermite插值（续）

- 根据两点三次Hermite插值多项式(2.6.10)可知，$I_h(x)$在区间$[x_k, x_{k+1}]$上的表达式为

$$I_h(x) = \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) f_k + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) f_{k+1}$$

$$+ \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 (x - x_k) f_k' + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 (x - x_{k+1}) f_{k+1}' \qquad (2.7.5)$$

- 在整个区间$[a, b]$上定义一组分段三次插值基函数$\alpha_j(x)$及$\beta_j(x)$ $(j = 0,1, \ldots, n)$

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[f_j \alpha_j(x) + f_j' \beta_j(x)\right] \qquad (2.7.6)$$

分段三次Hermite插值（续）

- $\alpha_j(x),\beta_j(x)$依式(2.6.8)和式(2.6.9)可表示为

$$\alpha_j(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j}\right) & x_{j-1}\le x\le x_j\ (j=0\ \text{略去})\\ \left(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right) & x_j\le x\le x_{j+1}\ (j=n\ \text{略去})\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{2.7.7}$$

$$\beta_j(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^2(x-x_j) & x_{j-1}\le x\le x_j\ (j=0\ \text{略去})\\ \left(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\right)^2(x-x_j) & x_j\le x\le x_{j+1}\ (j=n\ \text{略去})\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{2.7.8}$$

$$I_h(x)=\sum_{j=0}^{n}[f_j\alpha_j(x)+f_j'\beta_j(x)] \quad (2.7.6)$$

收敛性

- 由于$\alpha_j(x)$，$\beta_j(x)$的局部非零性质
  - 当$x\in[x_k,x_{k+1}]$时，只有$\alpha_k(x)$，$\alpha_{k+1}(x)$，$\beta_k(x)$，$\beta_{k+1}(x)$不为零，于是(2.7.6)可表示为

$$I_h(x)=f_k\alpha_k(x)+f_{k+1}\alpha_{k+1}(x)+f_k'\beta_k(x)+f_{k+1}'\beta_{k+1}(x)$$

$$(x_k\le x\le x_{k+1}) \qquad (2.7.9)$$

- 根据式(2.7.7)中$\alpha_j(x)$的定义，可知

$$0\le\alpha_j(x)\le 1, \qquad (2.7.10)$$

  - 根据定义，很显然$\alpha_j(x)$非负
  - 定义

$$g(x)=\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)=\left(\frac{x-x_{k+1}}{h_k}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_k}{h_k}\right)$$

收敛性（续）

- 令$g'(x)=0$，可得$x=(2x_k+x_{k+1}-h_k)/3$
- 将其代入$g(x)$，可得最大值为1
- 其他情况可以类似分析

□ 根据式(2.7.8)中$\beta_j(x)$的定义， 当$x\in[x_k,x_{k+1}]$，可知

$$\begin{cases} |\beta_k(x)| \le \dfrac{4}{27}h_k \\ |\beta_{k+1}(x)| \le \dfrac{4}{27}h_k \end{cases} \qquad (2.7.11)$$

- 考虑$\beta_k(x)$

$$g(x)=\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2(x-x_k)=\left(\frac{x-x_{k+1}}{h_k}\right)^2(x-x_k)$$

收敛性（续）

- 令$g'(x) = 0$，可得$x = (2x_k + x_{k+1})/3$
- 将其代入$g(x)$，可得最大值为$\frac{4}{27}h_k^2$
- 其他情况可以类似分析

□ 当$x \in [x_k, x_{k+1}]$，存在以下关系

$$\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)$$

$$= \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) + \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)$$

$$= \cdots = \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{h_k^2} = 1 \qquad (2.7.12)$$

收敛性（续）

- 由式(2.7.9)～ (2.7.12)，当$x \in [x_k, x_{k+1}]$可得

$$|f(x) - I_h(x)|$$

$$= |[\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)]f(x) - [f_k\alpha_k(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + f_k'\beta_k(x) + f_{k+1}'\beta_{k+1}(x)]|$$

$$\le \alpha_k(x)|f(x) - f_k| + \alpha_{k+1}(x)|f(x) - f_{k+1}| + \frac{4}{27}h_k[|f_k'| + |f_{k+1}'|]$$

$$\le [\alpha_k(x) + \alpha_{k+1}(x)]\omega(h) + \frac{8h}{27}\max\{|f_k'|, |f_{k+1}'|\}$$

- 对于$x \in [a, b]$，可得

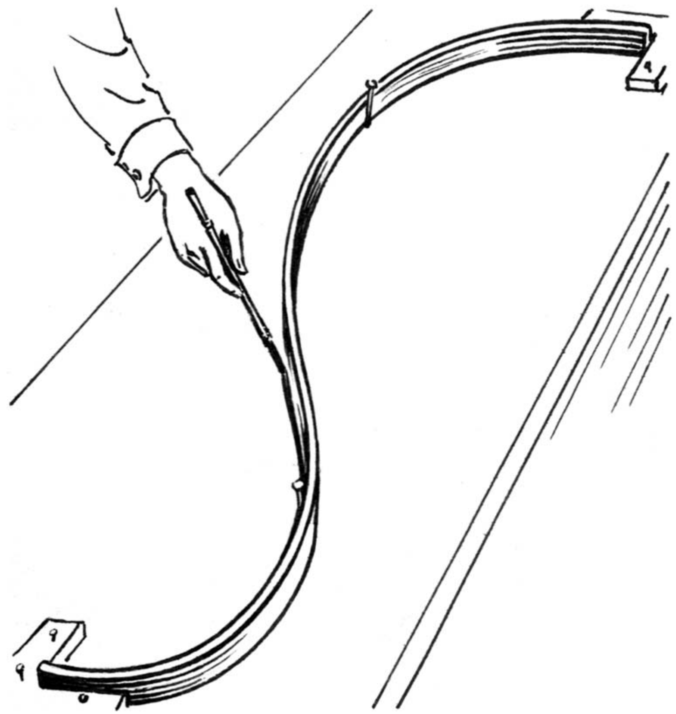
$$|f(x) - I_h(x)| \le \omega(h) + \frac{8h}{27}\max_{0\le k\le n}|f_k'| \qquad (2.7.13)$$

  - 当$f(x) \in C[a, b]$，$\lim_{h\to 0} I_h(x) = f(x)$，即算法收敛

目录

样条曲线

- 分段低次插值函数一致收敛，但光滑性较差
  - 对于像高速飞机的机翼、船体放样等的型值线，往往要求有二阶光滑度
- 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（样条）用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，然后画下长条的曲线，称为**样条曲线**
  - 分段三次曲线并接而成，在连接点上二阶导数连续



三次样条函数

- 定义2.5 若函数$S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，其中$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$是给定节点，则称$S(x)$是节点$x_0$，$x_1$，…，$x_n$上的三次样条函数。

  若在节点x_j上给定函数值$y_j = f(x_j)\ (j = 0,1,\ldots,n)$，且

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\ldots,n) \qquad (2.8.1)$$

  成立，则称$S(x)$是三次插值样条函数。

三次样条函数的条件

- 由于$S(x)$在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，所以要确定4个系数；一共有n个小区间，故要确定$4n$个参数
- $S(x)$在$[a, b]$上二阶导数连续，故在节点$x_j\ (j = 1,2, \dots, n-1)$处要满足连续性条件

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0)，S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$$

$$S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0) \qquad (2.8.2)$$

共有$3n - 3$个条件
- $S(x)$满足插值条件(2.8.1)，共$4n - 2$个条件，此外还需要2个条件才能确定$S(x)$

边界条件

- 在区间端点$a = x_0$，$b = x_n$各加一个条件

1. 已知两端的一阶导数值，即

$$\begin{cases} S'(x_0) = f_0' \\ S'(x_n) = f_n' \end{cases} \tag{2.8.3}$$

2. 两端的二阶导数已知，即

$$\begin{cases} S''(x_0) = f_0'' \\ S''(x_n) = f_n'' \end{cases} \tag{2.8.4}$$

自然边界条件

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \qquad (2.8.4)'$$

边界条件（续）

3. 当$f(x)$是以$x-x_0$为周期的周期函数时，则要求$S(x)$也是周期函数，此时边界条件为

$$\begin{cases} S(x_0+0)=S(x_n-0) \\ S'(x_0+0)=S'(x_n-0) \\ S''(x_0+0)=S''(x_n-0) \end{cases} \qquad (2.8.5)$$

此时式(2.8.1)中$y_0=y_n$，这样的$S(x)$称为周期样条函数

✓ 注意，此时还是2个条件

三转角方程

$$I_h(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[f_j\alpha_j(x)+f_j'\beta_j(x)\right] \quad (2.7.6)$$

- 假定$S'(x)$在节点x_j处的值为$S'(x_j)=m_j$
  - $m_j\ (j=0,1,\dots,n)$的数值未知
- 结合式(2.8.1)，由分段三次Hermite插值式(2.7.6)可得

$$S(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[y_j\alpha_j(x)+m_j\beta_j(x)\right] \qquad (2.8.6)$$

  - 其中$\alpha_j(x)$和$\beta_j(x)$是插值基函数，分别由式(2.7.7)和式(2.7.8)表示
  - 式(2.8.6)中$S(x)$和$S'(x)$在整个区间$[a,b]$上连续，且满足式(2.8.1)

$$S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0) \quad (2.8.2)$$

三转角方程（续）

- 为了进一步确定(2.8.6)中的m_j ($j = 0,1,\ldots,n$)，可利用式(2.8.2)及某种边界条件
  - 考虑$S(x)$在$[x_j, x_{j+1}]$上的表达式

$$S(x) = \frac{(x - x_{j+1})^2 [h_j + 2(x - x_j)]}{h_j^3} y_j + \frac{(x - x_j)^2 [h_j + 2(x_{j+1} - x)]}{h_j^3} y_{j+1}$$

$$+ \frac{(x - x_{j+1})^2 (x - x_j)}{h_j^2} m_j + \frac{(x - x_j)^2 (x - x_{j+1})}{h_j^2} m_{j+1} \qquad (2.8.7)$$

✓ 其中$h_j = x_{j+1} - x_j$

- 对$S(x)$求二阶导，可得

$$S''(x) = \frac{6x - 2x_j - 4x_{j+1}}{h_j^2} m_j + \frac{6x - 4x_j - 2x_{j+1}}{h_j^2} m_{j+1} + \frac{6(x_j + x_{j+1} - 2x)}{h_j^3} (y_{j+1} - y_j)$$

三转角方程（续）

- 于是 $S''(x_j+0) = -\frac{4}{h_j}m_j - \frac{2}{h_j}m_{j+1} + \frac{6}{h_j^2}(y_{j+1}-y_j)$
- 同理，可得$S''(x)$在区间$[x_{j-1},x_j]$上的表达式

$$S''(x) = \frac{6x-2x_{j-1}-4x_j}{h_{j-1}^2}m_{j-1} + \frac{6x-4x_{j-1}-2x_j}{h_{j-1}^2}m_j + \frac{6(x_{j-1}+x_j-2x)}{h_{j-1}^2}(y_j-y_{j-1})$$

- 于是 $S''(x_j-0) = \frac{2}{h_{j-1}}m_{j-1} + \frac{4}{h_{j-1}}m_j - \frac{6}{h_{j-1}^2}(y_j-y_{j-1})$
- 由条件$S''(x_j-0) = S''(x_j+0)(j=1,2,\ldots,n-1)$

$$\frac{1}{h_{j-1}}m_{j-1} + 2\left(\frac{1}{h_{j-1}}+\frac{1}{h_j}\right)m_j + \frac{1}{h_j}m_{j+1} = 3\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j^2}+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}^2}\right)$$

$$(j=1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.8)$$

三转角方程（续）

- 用$\frac{1}{h_{j-1}}+\frac{1}{h_j}$除全式，并注意$y_i=f_i$，$\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}=f[x_j,x_{j+1}]$，(2.8.8)可化简为

$$\lambda_j m_{j-1}+2m_j+\mu_j m_{j+1}=g_j\ (j=1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.9)$$

其中

$$\lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j},\quad \mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}\ (j=1,2,\cdots,n-1) \quad (2.8.10)$$

$$g_j=3\left(\lambda_j f\left[x_{j-1},x_j\right]+\mu_j f\left[x_j,x_{j+1}\right]\right)\ (j=1,2,\cdots,n-1) \quad (2.8.11)$$

- (2.8.9)是关于$n+1$个未知数$m_0,m_1,\dots,m_n$的$n-1$个方程
  - ✓ 还需要利用边界条件

三转角方程（续）

- 选择边界条件(2.8.3)，即$m_0 = f_0'$，$m_n = f_n'$
  - 方程(2.8.9)为只含m_1， …， m_{n-1}的$n-1$个方程，写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n' \end{bmatrix} \quad (2.8.12)$$

三转角方程（续）

- 选择边界条件(2.8.4)，则

$$\begin{cases} S''(x_0) = f_0'' \\ S''(x_n) = f_n'' \end{cases} \tag{2.8.4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \dfrac{h_0}{2} f_0'' = g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \dfrac{h_{n-1}}{2} f_n'' = g_n \end{cases} \tag{2.8.13}$$

- 选择边界条件(2.8.4)′，则

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \tag{2.8.4$'$}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] = g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] = g_n \end{cases} \tag{2.8.13$'$}$$

三转角方程（续）

- 式(2.8.9)与式(2.8.13)或式(2.8.13)′合并后用矩阵形式表示为

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\lambda_1 & 2 & \mu_1 & \ddots & & \vdots \\
0 & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}
\qquad (2.8.14)
$$

✓ 包含$n+1$个变量$m_0, m_1, \dots, m_n$的$n+1$个方程

三转角方程（续）

- 边界条件为周期性条件式(2.8.5)，则

$$m_0 = m_n$$

$$\frac{1}{h_0}m_1 + \frac{1}{h_{n-1}}m_{n-1} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right)m_n = \frac{3}{h_0}f[x_0, x_1] + \frac{3}{h_{n-1}}f[x_{n-1}, x_n]$$

  - 化简为 $\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n$

$$\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad g_n = 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n])$$

  - 与式(2.8.9)合并后用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (2.8.15)$$

讨论

- 这里得到的方程组(2.8.12)、(2.8.14)及式(2.8.15)中，每个方程都联系三个m_j，m_j在力学上解释为细梁在x_j截面处的转角，故称之为三转角方程

- 这些方程系数矩阵对角元素均为2，非对角元素$\mu_j+\lambda_j=1$，故系数矩阵具有强对角优势，方程组(2.8.12)、(2.8.14)及(2.8.15)都有唯一解，可用追赶法求解，从而得到$S(x)$

三弯矩方程

- 三次样条插值函数$S(x)$有多种表达方式，有时用二阶导数$S''(x_j)=M_j\ (j=0,1,\ldots,n)$ 更方便
- M_j在力学上解释为细梁在x_j截面处的弯矩，并且与两个相邻的弯矩有关，故称为三弯矩方程
- 由于$S(x)$在区间$[x_j,x_{j+1}]$上是三次多项式，故$S''(x)$在区间$[x_j,x_{j+1}]$上是线性函数，可写成

$$S''(x)=M_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j} \qquad (2.8.16)$$

  - 对$S''(x)$积分两次并利用$S(x_j)=y_j$及$S(x_{j+1})=y_{j+1}$，可确定积分常数，得到

三弯矩方程（续）

$$S(x) = M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j} + M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}$$

$$+\left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j} \quad (j = 0,1,\cdots,n-1) \qquad (2.8.17)$$

- 对$S(x)$求导，得

$$S'(x)$$

$$= -M_j\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j} + M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j \quad (2.8.18)$$

- 由此可得

$$S'(x_j+0) = -\frac{h_j}{3}M_j - \frac{h_j}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}$$

$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j \; (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.9)$$

三弯矩方程（续）

- 类似地，可求出$S(x)$在区间$[x_{j-1}, x_j]$上的表达式，从而得到

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

- 利用$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$，可得

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \; (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.19)$$

其中

$$\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \quad \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \; (j = 1,2,\cdots,n-1) \quad (2.8.10)$$

$$d_j = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \; (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.8.20)$$

三弯矩方程（续）

- 方程(2.8.19)和方程(2.8.9)完全类似，只要加上式(2.8.3)～(2.8.5)的任一种边界条件，就可得到关于三弯矩M_j的方程组
  - 若边界条件为式(2.8.3)，则端点方程为

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0')，M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f_n' - f[x_{n-1}, x_n])$$

  - 若边界条件为式(2.8.4)，则端点方程为

$$M_0 = f_0''，M_n = f_n''$$

- 同样通过追赶法，可求出三弯矩方程的的解$M_j (j = 0,1, \dots, n)$，代入式(2.8.17)得到$S(x)$

计算步骤

- 样条函数，特别是三次样条在实际中有广泛的应用，在计算机上也容易实现
- 下面以方程(2.8.12)为例，说明在计算机上求$S(x)$的算法步骤

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n' \end{bmatrix} \tag{2.8.12}$$

计算步骤（续）

- 以方程(2.8.12)求解$S(x)$的算法步骤

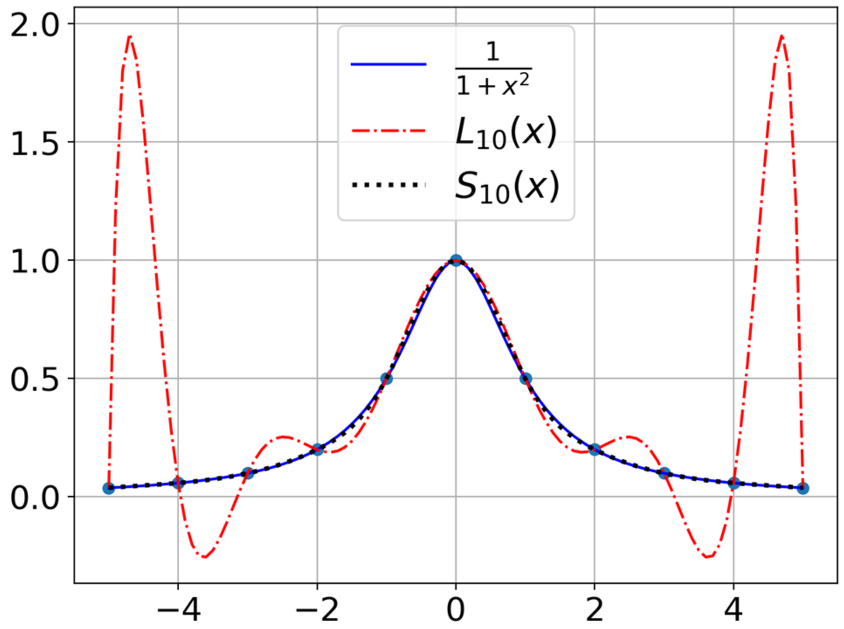
1. 输入初始数据x_j，y_j $(j=0,1,\ldots,n)$及f_0'，f_n'和n
2. j从0到$n-1$计算$h_j=x_{j+1}-x_j$及$f\left[x_j,x_{j+1}\right]$
3. j从1到$n-1$由式(2.8.10)及式(2.8.11)计算λ_j，μ_j，g_j
4. 用追赶法（公式见7.4.3节）解方程(2.8.12)，求出m_j $(j=1,2,\ldots,n-1)$
5. 计算$S(x)$的系数或计算$S(x)$在若干点上的值，并打印结果

示例

- 例：给定函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$x\in[-5,5]$，节点$x_k=-5+k\ (k=0,1,\dots,10)$，用三次样条插值求$S_{10}(x)$
  - 取$S_{10}(x_k)=f(x_k)\ (k=0,1,\dots,10)$，边界条件

$$S_{10}'(-5)=f'(-5),\quad S_{10}'(5)=f'(5)$$

  - 利用上述步骤编制的程序计算$S_{10}(x)$，并与$f(x)$及Lagrange插值$L_{10}(x)$比较
  - $S_{10}(x)$能很好地逼近$f(x)$，不会出现$L_{10}(x)$的Runge现象



收敛性

- 为了证明三次样条插值的收敛性，需要用到向量和矩阵范数有关的结论
  - 设$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_n$为$n\times n$矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$为$n$维向量，定义$\boldsymbol{x}$及$\boldsymbol{A}$的范数为

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\le j\le n}\left|x_j\right|,$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\sup_{\boldsymbol{x}\ne 0}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \qquad (2.8.21)$$

  - 对于函数$f(x)\in C[a,b]$，也定义f的范数为

$$\|f\|_\infty=\sup_{a\le x\le b}|f(x)|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

收敛性（续）

- 为了证明三次样条插值的收敛性，需要用到向量和矩阵范数有关的结论
  - **引理** 若$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_n$具有强对角占优，即

$$\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|<\left|a_{ii}\right|\ (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2.8.22)$$

则$\boldsymbol{A}^{-1}$存在，且

$$\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_{\infty}\leq\left\{\min\left(\left|a_{ij}\right|-\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|\right)\right\}^{-1} \qquad (2.8.23)$$

收敛性（续）

- 以自然边界条件(2.8.4) ′的三次样条插值函数$S(x)$为例，讨论其收敛性
  - 此时方程式为(2.8.14)，可写成

$$\boldsymbol{Am} = \boldsymbol{g} \qquad (2.8.24)$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

  - 由于$\mu_i + \lambda_i = 1$，且$a_{ii} = 2$，故由引理得

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leq 1 \qquad (2.8.25)$$

收敛性（续）

- **定理2.3** 若$f(x) \in C[a,b]$，$S(x)$是以$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$为节点，满足条件式(2.8.1)及式(2.8.4)′的三次样条插值函数，令

$$h_j = x_{j+1} - x_j,\quad h = \max_{0 \le j \le n-1} h_j,\quad \delta = \min_{0 \le j \le n-1} h_j$$

设$h/\delta < \infty$，则$S(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$

- 注意到$S(x)$可用式(2.8.6)表示

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x) \right] \qquad (2.8.6)$$

- 这是一个分段三次Hermite插值多项式，于是可以重用2.7.3节中证明的收敛性分析结果

$$|f(x)-I_h(x)| \le \omega(h)+\frac{8h}{27}\max_{0\le k\le n}|f_k'| \quad (2.7.13)$$

收敛性（续）

- 基于式(2.7.13)，可得

$$\|f(x)-S(x)\|_\infty \le \omega(h)+\frac{8}{27}h\|\boldsymbol{m}\|_\infty \qquad (2.8.26)$$

- 根据

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{g} \qquad (2.8.24)$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \le 1 \qquad (2.8.25)$$

- 可得

$$\|\boldsymbol{m}\|_\infty \le \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{g}\|_\infty \le \|\boldsymbol{g}\|_\infty \qquad (2.8.27)$$

- 根据

$$g_j=3\left(\lambda_j f[x_{j-1},x_j]+\mu_j f[x_j,x_{j+1}]\right)\ (j=1,2,\cdots,n-1) \quad (2.8.11)$$

$$\begin{cases}2m_0+m_1=3f[x_0,x_1]=g_0\\ m_{n-1}+2m_n=3f[x_{n-1},x_n]=g_n\end{cases} \qquad (2.8.13)'$$

收敛性（续）

- 可得

$$\|\boldsymbol{g}\|_\infty \le 3\max_{0\le j\le n-1}\left|f\left[x_j, x_{j+1}\right]\right| \le \frac{3}{\delta}\omega(h) \quad (2.8.28)$$

- 将(2.8.27)和(2.8.28)代入(2.8.26)，可得

$$\|f(x)-S(x)\|_\infty \le \left(1+\frac{8}{9}\frac{h}{\delta}\right)\omega(h)$$

- 由于$f(x)\in C[a,b]$，当$h\to 0$时，$\|f(x)-S(x)\|_\infty \to 0$，故$S(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$

- 其他边界条件的三次样条插值函数收敛性证明与此类似

总结

- Lagrange插值
  - 插值多项式的唯一性、n次插值基函数、差值余项
- 逐次线性插值
  - Atiken逐次线性插值公式、Neville算法
- 差商与Newton插值公式
  - 差商的定义和性质、Newton差商插值多项式
- 差分与等距节点插值公式
  - 差分的定义和性质、Newton前（后）插公式

总结（续）

- Hermite插值
  - Hermite插值多项式、Hermite插值基函数、两点三次Hermite插值多项式
- 分段低次插值
  - Runge现象、分段线性插值、分段三次Hermite插值、收敛性分析
- 三次样条插值
  - 三次样条函数、三转角方程、三弯矩方程、收敛性分析