DATE

第三次作业

14. (1) 对于任意一个模型 (M, σ)

由于 $\forall a \in M$, $(\forall x(x \doteq x))_{M[\sigma]} = \forall a(x \doteq x)_{M[\sigma[x:=a]]}$

$= \forall a(a = a)$

$= T$

$\therefore \forall x(x \doteq x)$ 为永真式

(2) 对于任意一个模型 (M, σ)

$(\forall x \forall y(x \doteq y \to y \doteq x))_{M[\sigma]} = \forall a(\forall y(x \doteq y \to y \doteq x))_{M[\sigma[x:=a]]}$

$= \forall a(\forall y(a \doteq y \to y \doteq a)$

$= \forall a \forall b(a \doteq y \to y \doteq a)_{M[\sigma[y=b]]}$

$= \forall a \forall b(a \doteq b \to b \doteq a)$

其中 $a, b \in M$

① 若 $a = b$，则 $a \doteq b$ 为T，$b \doteq a$ 为T，$\forall a \forall b(a \doteq b \to b \doteq a)$ 为T

② 若 $a \neq b$，则 $a = b$ 为F，$b = a$ 为F，$\forall a \forall b(a = b \to b = a)$ 为T　∴原式永真

(3) 对于任意一个模型 (M, σ)

$\forall x \forall y \forall z((x \doteq y) \wedge (y \doteq z) \to x \doteq z)_{M[\sigma]}$

$= \forall a \forall b \forall c((x \doteq y) \wedge (y \doteq z) \to x \doteq z)_{M[\sigma[x:=a][y:=b][z:=c]]}$

$= \forall a \forall b \forall c(B_{\to}(B_{\wedge}(a = b, b = c), a = c)$

若 $B_{\wedge}(a = b, b = c)$ 为T，由等号传递性知 $a = b = c$

∴上式成立

若 $B_{\wedge}(a = b, b = c)$ 为F，$B_{\to}(F, a = c)$ 为T

∴上式也成立

∴原式永真

DATE

16. 证: $\models (\neg\forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$

$\Leftrightarrow$ 对任何模型 $M \models_\sigma (\neg\forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$

$\Leftrightarrow$ 对任何模型 $M \models_\sigma ((\neg\forall x A) \rightarrow (\exists x \neg A)) \wedge ((\exists x \neg A) \rightarrow (\neg\forall x A))$

$\Leftrightarrow B_\wedge(\neg\forall x A \rightarrow \exists x \neg A,\ \exists x \neg A \rightarrow \neg\forall x A) = T$

① $\neg\forall x A \rightarrow \exists x \neg A = B_\rightarrow(\neg\forall x A,\ \exists x \neg A)$

当 $\neg\forall x A$ 为 T 时，$\forall x A$ 为 F

$\therefore$ 存在 $a \in M$，使得 $A_{M[\sigma[x:=a]]} = F$

即 $\exists x \neg A$ 为 T　　$\therefore B_\rightarrow(\neg\forall x A, \exists x \neg A) = T$

② $\exists x \neg A \rightarrow \neg\forall x A = B_\rightarrow(\exists x \neg A,\ \neg\forall x A)$

当 $\exists x \neg A$ 为 T 时，即存在 $a \in M$，使得 $\neg A_{M[\sigma:[x:=a]]} = T$

$\therefore A_{M[\sigma[x:=a]]} = F$

$\therefore \forall x A$ 为 F，$\neg\forall x A$ 为 T

$\therefore B_\rightarrow(\exists x \neg A, \neg\forall x A) = T$

$\therefore B_\wedge(B_\rightarrow(\neg\forall x A, \exists x \neg A), B_\rightarrow(\exists x \neg A, \neg\forall x A)) = T$

$\models (\neg\exists x A) \leftrightarrow (\forall x \neg A)$

$\Leftrightarrow \models (\neg\exists x A \rightarrow \forall x \neg A) \wedge (\forall x \neg A \rightarrow \neg\exists x A)$

$\Leftrightarrow$ 对任何模型 (M, σ)，$M \models_\sigma (\neg\exists x A \rightarrow \forall x \neg A) \wedge (\forall x \neg A \rightarrow \neg\exists x A)$

$\Leftrightarrow B_\wedge(B_\rightarrow(\neg\exists x A, \forall x \neg A), B_\rightarrow(\forall x \neg A, \neg\exists x A))_{M[\sigma[x:=a]]} = T$ for all $a \in M$.

① $\neg\exists x A$ 为 T，$\exists x A$ 为 F

即任意 a，使得 $A_{M[\sigma[x:=a]]} = F$

$\therefore \forall x \neg A = T$　　$\therefore B_\rightarrow(\neg\exists x A, \forall x \neg A) = T$

② $\forall x \neg A$ 为 T，即任意 $a \in M$，$\neg A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = F$

$\therefore \exists x A$ 为 F，$\neg\exists x A$ 为 T

$\therefore B_\rightarrow(\forall x \neg A, \neg\exists x A) = T$

$\therefore B_\wedge(B_\rightarrow(\neg\exists x A, \forall x \neg A), B_\rightarrow(\forall x \neg A, \neg\exists x A)) = T$ for all $a \in M$

DATE

18. (1) $\models \forall x A \leftrightarrow \forall y A[y/x]$

即对任何模型，有 $M \models_\sigma \forall x A \leftrightarrow \forall y A[y/x]$

$$(\forall x A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 对所有 a \in M,\ A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases}$$

$$(\forall y A[y/x])_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 对所有 a \in M,\ A[y/x]_{M[\sigma[y:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases}$$

∵ y是新变元

$$\therefore A[y/x]_{M[\sigma[y:=a]]} = A_{M[\sigma[x:=y_{M[\sigma]}, y:=a]]} = A_{M[\sigma[x:=a]]}$$

$\therefore B_\leftrightarrow(\forall x A, \forall y A[y/x]) = T$

$\therefore \models \forall x A \leftrightarrow \forall y A[y/x]$

(2) $\models \exists x A \leftrightarrow \exists y A[y/x]$

即对任何模型，有 $M \models_\sigma \exists x A \leftrightarrow \exists y A[y/x]$

$$(\exists x A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 存在 a \in M,\ A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases}$$

$$(\exists y A[y/x])_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 存在 a \in M,\ A[y/x]_{M[\sigma[y:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases}$$

∵ y是新变元

∴ 由替换引理，

$$A[y/x]_{M[\sigma[y:=a]]} = A_{M[\sigma[x:=y_{M[\sigma]}, y:=a]]} = A_{M[\sigma[x:=a]]}$$

$\therefore \exists x A \leftrightarrow \exists y A[y/x]$ 对任意模型

DATE

19. (1) $\forall x A(x) \leftrightarrow \forall t. A(x)[\frac{t}{x}]$ 永真

即对任何模型，$M \models_\sigma \forall x A \leftrightarrow \overset{\forall t}{A}[t/x]$

即 $B_{\leftrightarrow}(\forall x A, A[t/x])_{M[\sigma]} = T$

即 $B_{\rightarrow}(\forall x A, \forall t A[t/x])_{M[\sigma]} = T$ 且

$B_{\rightarrow}(A[t/x], \forall x A)_{M[\sigma]} = T$

若 $\forall x A = T$，则所有 $a \in M$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$

由引理3.11，$t_{M[\sigma]} \in M$

$\therefore A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = T$

由替换引理，$A[\frac{t}{x}]_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = T$

$\therefore B_{\rightarrow}(\forall x A, A[t/x])_{M[\sigma]} = T$

若$\forall t A[t/x] = T$

即 $A[\frac{t}{x}]_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = T$，对所有项 t

$\because t_{M[\sigma]} \in M$，$t$ 为任意一个项

$\therefore \forall a \in M$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$

$\therefore B_{\rightarrow}(\forall x A, A[t/x])_{M[\sigma]} = T$

$\therefore \forall x A \leftrightarrow A[t/x]$ 永真

分别令 $t_1 := x_1$，$t_2 := x_2$，…，$t_n := x_n$，

知 $A[t_1/x]_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{1M[\sigma]}]]}$

$= A_{M[\sigma[x:=x_1]]} = T$

…

$A[t_n/x]_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{nM[\sigma]}]]}$

$= A_{M[\sigma[x:=x_n]]} = T$

(2) $\forall t. A[t/x] \rightarrow \exists x A$ 永真

即对任何模型，$M \models_\sigma A[t/x] \rightarrow \exists x A$

即 $B_{\rightarrow}(A[t/x], \exists x A)_{M[\sigma]} = T$

当 $A[t/x]_{M[\sigma]} = T$ 时，

即 $A[t/x]_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = T$

由引理3.11，$t_{M[\sigma]} \in M$，设 $t_{M[\sigma]} = a$.

所以 存在 $a \in M$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$

即 $\exists x A = T$

$\therefore B_{\rightarrow}(A[t/x], \exists x A) = T$

$\therefore A[t/x] \rightarrow \exists x A$ 永真.

DATE

20. (1) 若 $A_{M[\sigma[x:=a]]}=T$, $A_{M[\sigma[x:=b]]}=F$ $(a\neq b)$

则 $(\exists xA)_{M[\sigma]}=T$ 因为 $\exists a\in M$, 使得 $A_{M[\sigma[x:=a]]}=T$

$(\forall xA)_{M[\sigma]}=F$ 因为 $\exists b\in M$. 使得 $A_{M[\sigma[x:=b]]}=F$

(2) 若 $A_{M[\sigma[x:=a]]}=F$, $B_{M[\sigma[x:=a]]}=T$

$A_{M[\sigma[x:=b]]}=T$, $B_{M[\sigma[x:=b]]}=F$ $(a\neq b)$

对其他 $c\in M$ 且 $c\neq a, c=b$

$A_{M[\sigma[x:=c]]}=T$, $B_{M[\sigma[x:=c]]}=T$

则 $\forall x(A\vee B)_{M[\sigma]}=T$

$(\forall xA)_{M[\sigma]}=F$ 因为 $\exists a\in M$, $A_{M[\sigma[x:=a]]}=F$

$(\forall xB)_{M[\sigma]}=F$ 因为 $\exists b\in M$. $B_{M[\sigma[x:=b]]}=F$

$\therefore$ $\forall x(A\vee B)\to((\forall xA)\vee(\forall xB))$ 不是永真

21. (1) 设A的一个模型 (M,σ)

$M=N$, $\sigma(x_n)=n$

$(x,y)\in R(x,y)$ 当且仅当 $x<y$

则对所有 $a\in M$, $(a,a)\notin R(x,y)$

$\therefore$ $\forall x\neg R(x,x)=T$

$\forall a,b,c\in M$, 若 $(a,b)\in R(x,y)$, $(b,c)\in R(x,y)$

即 $a<b$ 且 $b<c$, 则 $a<c\Rightarrow(a,c)\in R(x,y)$

$\therefore$ $\forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z)\to R(x,z))=T$

$\forall a\in M$, $\exists a+1\in M$

使得 $(a,a+1)\in R(x,y)$

$\therefore$ $\forall x\exists yR(x,y)=T$

$\therefore$ (M,σ) 为A的一个无穷模型

DATE

(2) 假设A有一个无穷模型 (M, σ)

~~??~~ $\sigma(x_n) = a_i \quad (i=0,1,\cdots,k)$

$M = \{a_i \mid 0 \le i \le k\}$

若 $(a_i, a_j) \in R(x,y)$

记为 $a_i < a_j \quad (i<j)$

$\because \forall x \exists y R(x,y) = T$

$\therefore$ ~~$\exists a R($~~ 取 $x_{M[\sigma]} = a_k$

则 $\exists a_j R(a_k, a_j) = T, \quad a_j \in M$

则 $j > k$ ~~F~~

与 $0 \le j \le k$ 矛盾

$\therefore$ A没有有穷模型

(1) 证: case 1: t 为某个变元 x_i ($i \le n$)

$\because \forall i \le n,\ s_1(x_i) = s_2(x_i)$

$\therefore t_{M[s_1]} = x_{i\,M[s_1]} = s_1(x_i) = s_2(x_i) = t_{M[s_2]}$

case 2: t 为某个常元 c

则 $t_{M[s_1]} = c_{M[s_1]} = c = c_{M[s_2]} = t_{M[s_2]}$

case 3: t 为 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 均为项

$$
\begin{aligned}
\text{则 } t_{M[s_1]} &= f(t_1, t_2, \cdots, t_n)_{M[s_1]} = f_M(t_{1M[s_1]}, \cdots, t_{nM[s_1]}) \\
&= f_M(t_{1M[s_2]}, \cdots, t_{nM[s_2]}) \\
&= f(t_1, t_2, \cdots, t_n)_{M[s_2]} \\
&= t_{M[s_2]}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(2). case 1: 若 A 呈形 $s \doteq t$ (s 和 t 为项)

则 $A_{M[s_1]} = (s \doteq t)_{M[s_1]} = \begin{cases} T, & \text{if } s_{M[s_1]} = t_{M[s_1]} \\ F, & \text{else} \end{cases}$

$A_{M[s_2]} = (s \doteq t)_{M[s_2]} = \begin{cases} T, & \text{if } s_{M[s_2]} = t_{M[s_2]} \\ F, & \text{else} \end{cases}$

由 (1) 知, 对任意项 t, $t_{M[s_1]} = t_{M[s_2]}$

$\therefore A_{M[s_1]} = A_{M[s_2]}$

case 2: A 呈形 $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, R 为 n 元谓词符号, $t_1, \cdots, t_n$ 为项.

则 $A_{M[s_1]} = R(t_1, t_2, \cdots, t_n)_{M[s_1]} = \begin{cases} T, & \text{若} \langle t_{1M[s_1]}, \cdots, t_{nM[s_1]} \rangle \in P_M; \\ F, & \text{若} \langle t_{1M[s_1]}, \cdots, t_{nM[s_1]} \rangle \notin P_M. \end{cases}$

$A_{M[s_2]} = R(t_1, t_2, \cdots, t_n)_{M[s_2]} = \begin{cases} T, & \text{若} \langle t_{1M[s_2]}, \cdots, t_{nM[s_2]} \rangle \in P_M \\ F, & \text{若} \langle t_{1M[s_2]}, \cdots, t_{nM[s_2]} \rangle \notin P_M \end{cases}$

由 (1), 对任意项 t, $t_{M[s_1]} = t_{M[s_2]}$

$\therefore A_{M[s_1]} = A_{M[s_2]}$

DATE

case 3: A是形 $\neg B$, 其中 B 为公式

则 $A_{M[s_1]} = (\neg B)_{M[s_1]} = B_{\neg}(B_{M[s_1]})$

$A_{M[s_2]} = (\neg B)_{M[s_2]} = B_{\neg}(B_{M[s_2]})$

由 case 1 和 case 2 知 $B_{M[s_1]} = B_{M[s_2]}$

$\therefore A_{M[s_1]} = A_{M[s_2]}$

case 4: A是形 $B * C$, $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$

则 $A_{M[s_1]} = B_*(B_{M[s_1]}, C_{M[s_1]})$

$A_{M[s_2]} = B_*(B_{M[s_2]}, C_{M[s_2]})$

$\because B_{M[s_1]} = B_{M[s_2]}$, $C_{M[s_1]} = C_{M[s_2]}$

$\therefore A_{M[s_1]} = A_{M[s_2]}$

case 5: A是形 $\forall x.B$ (x为变元)

$A_{M[s_1]} = (\forall x.B)_{M[s_1]} = \begin{cases} T, & \text{若对所有 } a \in M, B_{M[s_1[x:=a]]} = T \\ F, & \text{否则} \end{cases}$

$A_{M[s_2]} = (\forall x.B)_{M[s_2]} = \begin{cases} T, & \text{若对所有 } a \in M, B_{M[s_2[x:=a]]} = T \\ F, & \text{否则} \end{cases}$

$\because B_{M[s_1]} = B_{M[s_2]}$

$\therefore A_{M[s_1]} = A_{M[s_2]}$

case 6: A是形 $\exists x.B$

$A_{M[s_1]} = (\exists x.B)_{M[s_1]} = \begin{cases} T, & \text{若对某个 } a \in M, B_{M[s_1[x:=a]]} = T \\ F, & \text{否则} \end{cases}$

$A_{M[s_2]} = (\exists x.B)_{M[s_2]} = \begin{cases} T, & \text{若对某个 } a \in M, B_{M[s_2[x:=a]]} = T \\ F, & \text{否则} \end{cases}$

$\because B_{M[s_1]} = B_{M[s_2]}$

$\therefore A_{M[s_1]} = A_{M[s_2]}$

Q.E.D.

23. 证: $M \models_\sigma (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge B)_{M[\sigma]}$

$\Leftrightarrow B_\wedge(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$

$= \begin{cases} T, & A_{M[\sigma]} = T \text{ and } B_{M[\sigma]} = T \\ F, & \text{否则} \end{cases}$

$M \models_\sigma A \text{ and } M \models_\sigma B = \begin{cases} T, & A_{M[\sigma]} = T \text{ and } B_{M[\sigma]} = T \\ F, & \text{否则} \end{cases}$

$\therefore M \models_\sigma (A \wedge B) \Leftrightarrow (M \models_\sigma A \text{ and } M \models_\sigma B)$

24. 证: $M \models_\sigma \forall z. A[\frac{z}{x}] \Leftrightarrow (\forall z. A[\frac{z}{x}])_{M[\sigma]} = T$

$\Leftrightarrow$ 对任意 $a \in M$, $(A[\frac{z}{x}])_{M[\sigma[z:=a]]} = T$

$\Leftrightarrow A_{M[\sigma[x:=z][z:=a]]} = A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$

(替换引理)

$\Leftrightarrow M \models_\sigma \forall x. A$