例 5.14 假设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且有 $X \sim e(\alpha)$ 和 $Y \sim e(\beta)$, 求随机变量 $Z_1 = \max(X,Y)$ 和 $Z_2 = \min(X,Y)$ 的概率密度.

解 根据指数随机变量的定义可知随机变量 X 和 Y 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

于是得到随机变量 Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z_1) = F_X(z_1)F_Y(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f_X(t)dt \int_{-\infty}^{z_1} f_Y(t)dt \ .$$

当 $z_1 \leqslant 0$ 时由 $F_{Z_1}(z_1) = 0$; 当 $z_1 > 0$ 时

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_0^{z_1} f_X(t)dt \int_0^{z_1} f_Y(t)dt = \int_0^{z_1} \alpha e^{-\alpha t}dt \int_0^{z_1} \beta e^{-\beta y}dt = (1 - e^{-\alpha z_1})(1 - e^{-\beta z_1}) \ .$$

两边对 z_1 求导可得其概率密度为

$$f_{Z_1}(z_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z_1} + \beta e^{-\beta z_1} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_1} & z_1 > 0 \\ 0 & z_1 \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

同理可得随机变量 Z_2 的分布函数和概率密度分别为

$$F_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2 > 0 \\ 0 & z_2 \leqslant 0 \end{cases} \qquad f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2 > 0 \\ 0 & z_2 \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

5.6.5 随机变量的联合分布函数

已知随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 随机变量 U 和 V 是 X 和 Y 的函数, 如何求解 (U,V) 的联合分布. 具体而言, 设

$$\begin{cases} U = u(X,Y) \\ V = v(X,Y) \ , \end{cases}$$

已知随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 如何求解二维随机向量 (U,V) 的联合分布. 这里二元函数 $u(\cdot,\cdot)$ 和 $v(\cdot,\cdot)$ 具有连续的偏导, 并满足

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad \text{存在唯一的反函数} \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \ . \end{cases}$$

定理 5.10 设随机变量 $U = u(X, Y)$ 和 $V = v(X, Y)$ 有连续偏导, 且存在反函数 $X = x(U, V)$ 和 $Y = y(U, V)$. 若 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 (U, V) 的联合密度为

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(x(u, v), y(u, v))|J| \ ,$$

其中 J 为变换的雅可比行列式不为零, 即

$$J = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} .$$

上述结论可推广到一般的 n 维随机变量.

推论 5.6 设 X 和 Y 是相互独立的标准正太分布随机变量, 则有随机变量 $R = X^2 + Y^2$ 与 $\theta = \arctan(Y/X)$ 相互独立, 且有 $R \sim e(1/2)$ 以及 $\theta \sim U(0, 2\pi)$.

证明 令 $R = u(x, y) = x^2 + y^2$ 和 $\Theta = v(x, y) = \arctan(y/x)$. 于是得到雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \ .$$

由此可得 R 与 Θ 的联合分布为

$$f_{R\times\Theta}(r, \theta) = f_{X\times Y}(\sqrt{r}\cos\theta, \sqrt{r}\sin\theta)|J| = \frac{1}{4\pi}\exp(-r/2) = \frac{1}{2}\exp(-r/2) \times \frac{1}{2\pi} \ .$$

由此可以发现 $R \sim e(1/2)$ 和 $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, 且 R 和 Θ 相互独立. 推论得证.

5.7 多维正太分布

本节将二维随机向量及其分布推广到多维随机向量, 二维与多维随机变量没有本质性的区别, 只是相关的概念和结论的扩展.

定义 5.13 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量, 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 称函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n)$$

为 n **维随机向量** $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ **的分布函数**, 或 **随机变量** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **的联合分布函数**. 若存在可积函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使得对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \cdots, u_n)du_1du_2\cdots du_n \ ,$$

则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 **连续型随机向量**, 以及 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n **维联合密度函数**.

类似于二维密度函数, n 维联合密度函数具有以下性质:

- 非负性: 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0$.
- 规范性: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \cdots, u_n)du_1du_2\cdots du_n = 1$.
- 设 G 是 n 维空间的一片区域, 则有

$$P((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in G) = \underset{G}{\int\cdots\int} f(u_1, u_2, \cdots, u_n)du_1du_2\cdots du_n \ .$$

- 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 处连续, 则有

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ .$$

随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中任意 k 个向量所构成的随机向量 $(k \leqslant n)$, 它的分布函数和密度函数被称为 k **维边缘分布函数** 和 k **维边缘密度函数**. 例如随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 前 k 维随机向量的边缘分布函数和边缘密度函数分布为

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2,\cdots,X_k}(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_k \leqslant x_k) = \lim_{\substack{x_{k+1}\to+\infty \\ \cdots \\ x_n\to+\infty}} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
f_{X_1,X_2,\cdots,X_k}(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_n)du_{k+1}\cdots du_n \ .
\end{aligned}$$

还可以定义 n 个随机变量的独立性和两个随机向量的独立性.

定义 5.14 若随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n) \ ,$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**. 若随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 的联合分布函数 $F(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$ 满足

$$F(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = F_X(x_1, \cdots, x_m)F_Y(y_1, \cdots, y_n) \ ,$$

则称 **随机向量 X 和 Y 相互独立**.

上面的独立性也可以通过联合密度函数和边缘密度函数来定义. 多维随机向量中最重要的常用分布是多维正太分布.

定义 5.15 给定一个向量 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ 和正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 对任意实数向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 若随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left(-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2\right) \ ,$$

则称随机向量 X 服从参数为 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的多维正态分布 (multivariate normal distribution), 记

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

在上面的定义中, $|\boldsymbol{\Sigma}|$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的行列式, 因为其正定性可以确保 $|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}$ 有意义. 特别地, 当 $n = 2$ 时, 设

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \qquad \text{和} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \ ,$$

则定义 5.9 和定义 5.15 中关于二维正太分布的密度函数尽管表达形式不同, 但两者完全相等, 相关证明将作为一个练习题.

当 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_n$ (全为零的 n 维向量), 以及 $\boldsymbol{\Sigma} = I_n$ ($n \times n$ 单位阵) 时, 正太分布 $\mathcal{N}(\mathbf{0}_n, I_n)$ 被称为 n **维标准正太分布**, 此时它的密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{2}\right) \ .$$

不难发现, n 维标准正太分布可以看作是相互独立的 n 个标准正太分布随机变量的联合分布, 也容易验证 n 标准正太分布的密度函数满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) dx_i = 1 \ .$$

对于正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 通过特征值分解有

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U} \ ,$$

这里 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 是由特征值构成的对角阵, $\boldsymbol{U}$ 是特征向量所构成的正交矩阵. 基于特征值分解可以将任意 n 维正态分布转化为 n 维标准正态分布.

定理 5.11 设 n 维随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 以及正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值分解为 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}$, 则随机向量

$$Y = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{U}(X - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, I_n) \ .$$

证明 根据 $Y = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{U}(X-\boldsymbol{\mu})$ 可得 $X = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^{1/2}Y+\boldsymbol{\mu}$, 已知 X 的概率密度函数为

$$f_X(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}|\mathbf{\Sigma}|^{-1/2}\exp\left(-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2\right) \ .$$

根据 n 维随机变量函数 (定理 5.10 的多维情况) 的概率密度公式有

$$f_Y(\boldsymbol{y}) = f_X\left(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\mu}\right)\left|\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\right| \ ,$$

其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$. 根据特征值分解 $\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{U}$ 有

$$\left|\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\right| = |\mathbf{\Sigma}|^{1/2} \ ,$$

以及将 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\mu}$ 代入有

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ .$$

由此可得随机向量 $Y = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{U}(X-\boldsymbol{\mu})$ 的密度函数为

$$f_Y(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-n/2}\exp\left(-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}/2\right) \ ,$$

定理得证.

多维正太分布有下面的性质, 其证明将作为一个练习题.

定理 5.12 设随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, 则有

$$Y = \boldsymbol{A}X + \boldsymbol{b} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\Sigma\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

其中 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

对于多维正太分布还有下面一些重要的性质:

定理 5.13 设随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)^{\mathrm{T}}$, 以及

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{xx} & \mathbf{\Sigma}_{xy} \\ \mathbf{\Sigma}_{yx} & \mathbf{\Sigma}_{yy} \end{pmatrix}\right) \ ,$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \cdots, \mu_{x_n})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\mu}_y = (\mu_{y_1}, \mu_{y_2}, \cdots, \mu_{y_m})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{\Sigma}_{xy} = \mathbf{\Sigma}_{yx}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{\Sigma}_{xx} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{yy} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则有

- 随机向量 X 和 Y 的边缘分布分别为 $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \mathbf{\Sigma}_{xx})$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y, \mathbf{\Sigma}_{yy})$;
- 随机向量 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\mathbf{\Sigma}_{xy} = (\mathbf{0})_{m\times n}$ (元素全为零的 $m \times n$ 矩阵);

- 在 $X = \boldsymbol{x}$ 的条件下随机向量 $Y \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_x), \boldsymbol{\Sigma}_{yy} - \boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{xy})$;
- 在 $Y = \boldsymbol{y}$ 的条件下随机向量 $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_y), \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx})$.

我们这里仅仅给出结论, 不给出具体的证明. 有兴趣的读者可以查询资料或自己动手, 证明的核心是矩阵的分块, 可以借鉴二维正太分布的证明.

第 6 章　多维随机向量的数字特征

6.1 多维随机向量函数的期望

前面介绍了一维随机变量及其函数的期望, 下面研究二维随机向量函数的期望, 同理可推广到维度更多的随机变量.

定理 6.1　设二维离散型随机向量 (X,Y) 的分布列为 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$, 则随机向量函数 $g(X,Y)$ 的期望为

$$E[g(X,Y)]=\sum_{i,j}g(x_i,y_j)p_{ij}\ ;$$

设二维连续型随机向量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$, 则随机向量函数 $g(X,Y)$ 的期望为

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy\ .$$

定理的证明超出了本书的范畴而被略去. 当 $g(X,Y)=X$ 时, 对二维连续型随机变量有

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\ ,$$

随机向量 (X,Y) 中 X 的期望就是其边缘分布的期望, 同理可得 Y 的期望, 对离散情况结论也成立.

当 $g(X,Y)=(X-E(X))^2$ 时有

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f_X(x)dx=\mathrm{Var}(X)\ ,$$

X 的方差就是边缘分布的方差, 同理可得 Y 的方差. 根据期望的定义有

性质 6.1　若随机变量 X,Y 满足 $X\geqslant Y$, 则有 $E[X]\geqslant E[Y]$.

性质 6.2　对任意随机变量 X,Y 有 $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.

证明　这里仅仅给出连续情况的证明, 同理可以考虑类型随机变量.

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y)\ ,\end{aligned}$$

由此完成证明.

性质 6.2 可推广到 n 个随机变量, 即 $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$.

性质 6.3 对相互独立的随机变量 X 和 Y, 有

$$E[XY]=E[X]E[Y]\ ;$$

对任意随机变量 X 和 Y, 有 Cauchy-Schwartz 不等式

$$|E[XY]|\leqslant\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}\ .$$

证明 这里仅仅给出连续情况的证明, 同理可以考虑类型随机变量. 根据随机变量 X 与 Y 的独立性有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 由此可得

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)yf_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy=E(X)E(Y)\ . \end{aligned}$$

对任意随机变量 X 和 Y, 以及对任意 $t\in\mathbb{R}$ 有 $E[(X+tY)^2]\geqslant 0$, 即任意 $t\in\mathbb{R}$,

$$t^2E[Y^2]+E[X^2]+2tE[XY]\geqslant 0\ .$$

因此有 $\Delta=4[E(XY)]^2-4E[X^2]E[Y^2]\leqslant 0$, 即 $|E(XY)|\leqslant\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.

根据性质 6.3, 若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则有

$$E[h(X)g(Y)]=E[h(X)]E[g(Y)]\ ;$$

若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 则有

$$E[X_1X_2\cdots X_n]=E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]\ .$$

性质 6.4 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 则有

$$\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\ .$$

证明 根据方差的定义有

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X\pm Y) &= E[(X-EX\pm(Y-EY))^2] \\ &= E(X-EX)^2+E(Y-EY)^2\pm 2E[(X-EX)(Y-EY)] \\ &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2E[(X-EX)(Y-EY)]. \end{aligned}$$