§8 若当标准形介绍

一、 若当(Joran)形矩阵

二、若当(Jordan)标准形

引入

由§7.5知，n维线性空间V的线性变换在某组基下的矩阵为对角形$\Leftrightarrow \sigma$有n个线性无关的特征向量 .

$\Leftrightarrow \sigma$的所有不同特征子空间的维数之和等于n .

可见，并不是任一线性变换都有一组基，使它在这组基下的矩阵为对角形.

本节介绍，在适当选择基下，一般的线性变换的矩阵能化简成什么形状.

一、若当(Jordan)形矩阵

定义：形式为

$$J(\lambda,t)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{t\times t}$$

的矩阵称为**若当(Jordan)块**，其中λ为复数；

由若干个若当块组成的准对角矩阵称为**若当形矩阵**.

如：$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ 都是若当块；

而下面的准对角形则是一个若当形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(1,2) & & \\ & J(4,1) & \\ & & J(-i,3) \end{pmatrix}$$

注：一级若当块就是一级矩阵，从而对角矩阵都是若当形矩阵.

二、若当(Jordan)标准形

1、设σ是复数域C上n维线性空间的一个线性变换，在V中必存在一组基，使σ在这组基下的矩阵是若当形矩阵，并除若当块的排列次序外，该若当形由σ唯一决定，称之为σ的若当标准形.

2、任一n级复矩阵A总与某一若当形矩阵相似，并且除若当块的排列次序外，该若当形矩阵由矩阵A唯一决定，称之为矩阵A的若当标准形.

3、在一个线性变换σ的若当标准形中，主对角线上的元素是σ的特征多项式的全部根（重根按多数计算）.

附：有时也规定形式为

$$J(\lambda,t)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{t\times t}$$

的矩阵为**若当(Jordan)块**.

§9 最小多项式

一、 最小多项式的定义

二、 最小多项式的基本性质

引入

由哈密尔顿—凯莱定理，$\forall A \in P^{n\times n}, f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 是A的特征多项式，则 $f(A) = 0.$

因此，对任定一个矩阵 $A \in P^{n\times n}$，总可以找到一个多项式 $f(x) \in P[x]$，使 $f(A) = 0$. 此时，也称多项式$f(x)$以A为根.

本节讨论，以矩阵A为根的多项式的中次数最低的那个与A的对角化之间的关系.

一、最小多项式的定义

定义：设 $A\in P^{n\times n}$, 在数域P上的以A为根的多项式中，次数最低的首项系数为1的那个多项式，称为**A的最小多项式**.

二、最小多项式的基本性质

1.（引理1）矩阵A的最小多项式是唯一的.

2.（引理2）设 $g(x)$ 是矩阵A的最小多项式，则

$$f(x)\text{以}A\text{为根} \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \mid f(x)$$

3. 矩阵A的最小多项式是A的特征多项式的一个因子.

例1、数量矩阵kE的最小多项式是一次多项式$x-k$;

特别地，单位矩阵的最小多项式是 $x-1$ ；

零矩阵的最小多项式是 x .

反之，若矩阵A的最小多项式是一次多项式，则A一定是数量矩阵.

例2、求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的最小多项式.

解：A的特征多项式为

$$f(x)=|xE-A|=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=(x-1)^3$$

又 $A-E\neq 0,$

$$(A-E)^2=A^2-2A+E$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$\therefore$ A的最小多项式为 $(x-1)^2.$

4. 相似矩阵具有相同的最小多项式.

证：设矩阵A与B相似，$g_A(x), g_B(x)$分别为它们的最小多项式.

由A相似于B，存在可逆矩阵T， 使 $B = T^{-1}AT.$

从而 $g_A(B) = g_A(T^{-1}AT) = T^{-1}g_A(A)T = 0$

$\therefore g_A(x)$ 也以B为根， 从而 $g_B(x) \mid g_A(x).$

同理可得 $g_A(x) \mid g_B(x).$

又 $g_A(x), g_B(x)$都是首1多项式， $\therefore g_A(x) = g_B(x).$

注：反之不然，即最小多项式相同的矩阵未必相似.

如：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

的最小多项式皆为$(x-1)^2(x-2)$，但A与B不相似.

$$\because\quad |\lambda E-A|=(x-1)^3(x-2),$$

$$|\lambda E-B|=(x-1)^2(x-2)^2$$

即 $|\lambda E-A|\neq|\lambda E-B|$.　所以，A与B不相似.

5.（引理3） 设A是一个准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

并设 A_1, A_2 的最小多项式分别为 $g_1(x), g_2(x)$.

则A的最小多项式为 $g_1(x), g_2(x)$的最小公倍式.

推广：　若A是一个准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

且 A_i 的最小多项式为 $g_i(x)$，$i=1,2,\dots,s$

则A的最小多项式是为 $[g_1(x),g_2(x),\dots,g_s(x)]$.

特别地，若 $g_1(x),g_2(x),\dots,g_s(x)$ 两两互素，即

$$\big(g_1(x),g_2(x),\dots,g_s(x)\big)=1$$

则A的最小多项式是为 $g_1(x)g_2(x)\dots g_s(x)$.

6.（引理4）k 级若当块

$$J=\begin{pmatrix} a & & & & \\ 1 & a & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}$$

的最小多项式为 $(x-a)^k$.

证：J的特征多项式为 $(x-a)^k$

$$\therefore\quad (J-aE)^k=0.$$

而

$$J-aE=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$(J-aE)^2=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(J-aE)^{k-1}=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$\therefore$ J 的最小多项式为 $(x-a)^k$.

7. (定理13） $A\in P^{n\times n}$与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow$ A的最小多项式是P上互素的一次因式的积.

8. $A\in C^{n\times n}$ 与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow$ A 的最小多项式没有重根.

练习:

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的最小多项式.

解： A 的特征多项式

$$f(x)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & \cdots & 1 \\ -1 & x-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ -1 & -1 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-n)x^{n-1}$$

又 $A\neq 0,\ \ A-nE\neq 0,\ \ A^2\neq 0$

而 $A(A-nE)=0.$

$\therefore A$ 的最小多项式为 $x(x-n).$