习题

4.1 若随机变量 X 的取值区间为 $[1, c]$, 且落入 $[1, c]$ 任意小区间的概率与小区间的长度成正比, 求 X 的分布函数.

4.2 用随机变量 X 表示某银行从下午开始营业起到第一个顾客到达的等待时间 (分), 设 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - c\exp(-x/8) & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

求这些事件的概率: 1) $P(X \leqslant 4)$; 2) $P(X \geqslant 8)$; 3) $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$; 4) $P(X \leqslant 4$ 或$X \geqslant 8)$; 5) $P(X = 6)$.

4.3 若随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \ln x & 1 \leqslant x < e \\ 1 & x \geqslant e, \end{cases}$$

求随机变量 X 的密度函数.

4.4 若随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ c - x & x \in [1, 2) \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

求随机变量 X 的分布函数, 并画出分布函数和密度函数.

4.5 已知长方形的宽服从均匀分布 $U(0, 2)$ (单位: 米), 以及长方形的面积为 10 (单位: 平方米), 求长方形的周长的期望与方差.

4.6 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0. \end{cases}$$

求 $Y = e^{-2X}$ 的期望.

4.7 已知随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 对任意 $\lambda > 0$ 求 $E[\lambda^{\max(X, 1-X)}]$.

4.8 电池的故障是电动汽车的核心问题, 设相继两次事故之间的时间 T 服从参数为 1/40 的指数分布, 求概率 $P(X > 45)$, 以及求最小的 τ 使得 $P(X > t) \geqslant 60\%$.

4.9 设乘客在一公交车站等待公交车的时间服从参数为 1/6 的指数分布, 某乘客若等待时间超过 10 分钟则换乘出租车离开. 该乘客一个月内有 10 天乘公交站 (每天是否乘出租车相互独立), 用 Y 表示该乘客因未等到公交车而换乘出租车的次数, 求 Y 的分布函数.

4.10 设随机变量 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases},$$

求期望 $E(X)$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)$.