§6 线性变换的值域与核

一、值域与核的概念

定义1：设σ是线性空间V的一个线性变换，

集合 $\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)\,|\,\alpha\in V\}$

称为**线性变换σ的值域**，也记作$\mathrm{Im}\,\sigma$，或 $\sigma(V)$.

集合 $\sigma^{-1}(0)=\{\alpha\,|\,\alpha\in V,\sigma(\alpha)=0\}$

称为**线性变换σ的核**，也记作 $\ker\sigma$或者$null\,\sigma$.

注：$\sigma(V)$，$\sigma^{-1}(0)$皆为V的子空间.

事实上，$\sigma(V)\subseteq V,\sigma(V)\neq\varnothing$，且对

$$\forall\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\in\sigma(V),\ \forall k\in P$$

有 $$\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\sigma(\alpha+\beta)\in\sigma(V)$$

$$k\sigma(\alpha)=\sigma(k\alpha)\in\sigma(V)$$

即 $\sigma(V)$ 对于V的加法与数量乘法封闭.

$\therefore\sigma(V)$为V的子空间.

再看$\sigma^{-1}(0)$.　首先，$\sigma^{-1}(0)\subseteq V,\sigma(0)=0,$

$$\therefore 0 \in \sigma^{-1}(0),\ \ \sigma^{-1}(0) \neq \varnothing.$$

又对 $\forall \alpha, \beta \in \sigma^{-1}(0)$，有 $\sigma(\alpha) = 0, \sigma(\beta) = 0$ 从而

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = 0.$$

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha) = k0 = 0, \qquad \forall k \in P$$

即 $\alpha + \beta \in \sigma^{-1}(0),\ \ k\alpha \in \sigma^{-1}(0),$

$\therefore \sigma^{-1}(0)$ 对于V的加法与数量乘法封闭.

故 $\sigma^{-1}(0)$ 为V的子空间.

定义2：线性变换 σ 的值域$\sigma(V)$的维数称为**σ 的秩**；

σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数称为 **σ的零度**.

例1、在线性空间 $P[x]_n$ (最高次方是 x^{n-1} ）中，令

$$D(f(x)) = f'(x)$$

则 $$D\left(P[x]_n\right) = P[x]_{n-1},$$

$$D^{-1}(0) = P$$

所以D的秩为n－1，D的零度为1.

二、有关性质

1. (定理10) 设 σ 是 n 维线性空间V的线性变换，

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是V的一组基， σ 在这组基下的矩阵是A，

则

1） σ 的值域 $\sigma(V)$ 是由基象组生成的子空间，即

$$\sigma(V)=L\left(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\right)$$

2） σ 的秩＝A的秩.

证：1）$\forall \xi \in V$，设 $\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

于是 $\sigma(\xi) = x_1\sigma(\varepsilon_1) + x_2\sigma(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\sigma(\varepsilon_n)$

$$\in L\big(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_n)\big)$$

即 $\sigma(V) \subseteq L\big(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_n)\big)$

又对 $\forall x_1\sigma(\varepsilon_1) + x_2\sigma(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\sigma(\varepsilon_n)$

有 $x_1\sigma(\varepsilon_1) + x_2\sigma(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\sigma(\varepsilon_n)$

$$= \sigma(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n) \in \sigma(V)$$

$$\therefore\quad L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big)\subseteq\sigma(V).$$

因此，$\sigma(V)=L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big).$

2）由1），σ的秩等于基象组 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$

的秩，又

$$\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big)=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n,})A.$$

由第六章§5的结论3知，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 的秩

等于矩阵A的秩.

$\therefore$ 秩(σ)＝秩(A).

2. 设σ为n维线性空间V的线性变换，则

σ的秩＋σ的零度＝n

即 $\dim\sigma(V)+\dim\sigma^{-1}(0)=n.$

证明：设σ的零度等于r，在核$\sigma^{-1}(0)$中取一组基

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$

并把它扩充为V的一组基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\cdots,\varepsilon_n$

由定理10，$\sigma(V)$ 是由基象组 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$

生成的.

但 $\sigma(\varepsilon_i)=0, \qquad i=1,2,\cdots,r.$

$\therefore \quad \sigma(V)=L\big(\sigma(\varepsilon_{r+1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\big)$

下证$\sigma(\varepsilon_{r+1}),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$为$\sigma(V)$的一组基，即证它们线性无关.

设 $k_{r+1}\sigma(\varepsilon_{r+1})+\cdots+k_n\sigma(\varepsilon_n)=0$

则有 $\sigma\big(k_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n\big)=0$

$\therefore \quad \xi=k_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n\in\sigma^{-1}(0)$

即ξ可被$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$线性表出.

设 $\xi = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_r\varepsilon_r$

于是有 $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_r\varepsilon_{r,} - k_{r+1}\varepsilon_{r+1} - \cdots - k_n\varepsilon_n = 0$

由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为V的基.

$\therefore$因此仅有$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$

故$\sigma(\varepsilon_{r+1}), \cdots, \sigma(\varepsilon_n)$线 性无关，即它为$\sigma(V)$的一组基.

$\therefore$ σ 的秩＝n－r .

因此，σ 的秩＋ σ 的零度＝n.

注意：

虽然 $\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数之和等于 n ，但是 $\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$ 未必等于V.

如在例1中,

$$D\left(P[x]_n\right)+D^{-1}\left(0\right)=P[x]_{n-1}\neq P[x]_n$$

3. 设 σ 为 n 维线性空间V的线性变换，则

i) σ是满射 $\Leftrightarrow \sigma(V)=V$

ii) σ是单射 $\Leftrightarrow \sigma^{-1}(0)=\{0\}$

证明：i) 显然.

ii) 因为 $\sigma(0)=0$, 若 σ为单射，则 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$.

反之，若 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$, 任取 α、$\beta\in V$, 若

$\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$, 则 $\sigma(\alpha-\beta)=\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)=0$,

从而 $\alpha-\beta\in\sigma^{-1}(0)=\{0\}$, 即 $\alpha=\beta$. 故 σ 是单射.

4. 设 σ 为 n 维线性空间V的线性变换，则

σ 是单射 $\Leftrightarrow$ σ 是满射.

证明：σ 是单射

$$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(0)=\{0\}$$

$$\Leftrightarrow \dim\sigma^{-1}(0)=0$$

$$\Leftrightarrow \dim\sigma(V)=n$$

$$\Leftrightarrow \sigma(V)=V$$

$\Leftrightarrow \sigma$ 是满射.

例2、设A是一个n阶方阵，$A^2=A$，证明：A相似于一个对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证：设A是n维线性空间V的一个线性变换σ在一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵，即

$$\sigma\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

由 $A^2 = A$, 知 $\sigma^2 = \sigma$.

任取 $\alpha \in \sigma(V)$, 则总有 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma(\beta)$,

则 $\sigma(\alpha) = \sigma(\sigma(\beta)) = \sigma^2(\beta) = \sigma(\beta) = \alpha$

故有 $\alpha \in \sigma(V)$, $\sigma(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$.

因此有 $\sigma(V) \cap \sigma^{-1}(0) = \{0\}$

从而 $\sigma(V) + \sigma^{-1}(0)$ 是直和.

又 $\dim \sigma(V) + \dim \sigma^{-1}(0) = n$

所以有 $V = \sigma(V) \oplus \sigma^{-1}(0)$.

在 $\sigma(V)$ 中取一组基：$\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_r$

在 $\sigma^{-1}(0)$ 中取一组基：$\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$

则 $\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$ 就是V的一组基.

显然有，

$$\sigma(\eta_1)=\eta_1，\ \sigma(\eta_2)=\eta_2，\ \cdots，\ \sigma(\eta_r)=\eta_r,$$

$$\sigma(\eta_{r+1})=0,\ \sigma(\eta_{r+2})=0,\ \cdots,\ \sigma(\eta_n)=0.$$

用矩阵表示即

$$\sigma(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

所以，A相似于矩阵 $\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$.

若$n\times n$矩阵A满足$A^2=A$,则称A为幂等矩阵.同样满足$\sigma^2=\sigma$的线性变换称为等幂线性变换.

事实上，等幂矩阵相似的矩阵也是等幂矩阵.

设A与B相似，则存在非奇异矩阵P,使得

$$P^{-1}AP=B \Rightarrow B^2=P^{-1}A^2P=P^{-1}AP=B$$

因此B也是幂等矩阵.

当A是满秩幂等矩阵时，$A^2=A \Rightarrow A=E$为单位矩阵.

例3、 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是线性空间V的一组基，已知

线性变换 σ 在此基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1) 求 $\sigma(V)$ 及 $\sigma^{-1}(0)$.

2) 在 $\sigma^{-1}(0)$ 中选一组基，把它扩充为V的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵.

3) 在 $\sigma(V)$ 中选一组基，把它扩充为V的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵.

解：由题意得

$$\sigma(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

先求$\sigma^{-1}(0)$

设$\xi\in\sigma^{-1}(0)$，在基底$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4$下，其坐标为

$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T$,即$\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4$

$$\sigma(\xi)=\sigma(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

解此齐次线性方程组，得它的一个基础解系：

$$\begin{pmatrix}-2 & -2/3 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\ \begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

从而 $\eta_1 = -2\varepsilon_1 - 2/3\varepsilon_2 + \varepsilon_3,$

$\eta_2 = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$

是$\sigma^{-1}(0)$的一组基. $\therefore\ \sigma^{-1}(0) = L(\eta_1, \eta_2).$

再求$\sigma(V)$. 由于σ 的零度为2，所以σ 的秩为2，

即 $\sigma(V)$为2维的. 又由矩阵A，有

$$\sigma(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4$$
$$\sigma(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4$$

所以，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$ 线性无关，　从而有

$$\sigma(V)=L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3),\sigma(\varepsilon_4)\big)$$

$$=L\big(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)\big)$$

$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$ 就是$\sigma(V)$的一组基.

2）因为 η_1,η_2是$\sigma^{-1}(0)$的一组基，故扩展为

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -2/3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)D_1$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\therefore$ D_1 可逆.

从而，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$线性无关，即为V的一组基.

σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$ 下的矩阵为

$$D_1^{-1} A D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 9/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3）因为

$$\left(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\varepsilon_3,\varepsilon_4\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)D_2$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,\quad \therefore\ D_2$ 可逆 .

从而 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 线性无关，即为V的一组基.

σ 在这组基下的矩阵为

$$D_2^{-1}AD_2=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 9/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$