§5 对角矩阵

一、 可对角化的概念

二、 可对角化的条件

三、 对角化的一般方法

一、可对角化的概念

定义1：设σ是n维线性空间V的一个线性变换，如果存在V的一个基，使σ在这组基下的矩阵为对角矩阵，则称**线性变换 σ 可对角化**.

定义2：矩阵A是数域 P上的一个n级方阵. 如果存在一个P上的n级可逆矩阵X，使 $X^{-1}AX$ 为对角矩阵，则**称矩阵A可对角化**.

二、可对角化的条件

1. (定理7) 设 σ 为 n 维线性空间V的一个线性变换，

则σ可对角化$\Leftrightarrow$ σ 有n个线性无关的特征向量.

证：设σ在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则有 $\sigma\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$，$i=1,2,\cdots n.$

$\therefore\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$就是$\sigma$的$n$个线性无关的特征向量.

反之，若σ有n个线性无关的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，

那么就取$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，为基，则在这组基下 σ 的矩阵是对角阵.

定理8 属于不同特征值的特征向量线性无关.

证 设$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$为线性变换$\sigma$的$m$个不同特征值，$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m$为相应的特征向量.

当$m=1$时，$\xi_1\neq 0$(单个的非零向量线性无关)，定理成立.

假设对$m-1$不同的特征值定理成立，现证对m个不同特征值定理也成立. 设

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_m\xi_m=0 \qquad (*)$$

两端同时施行变换,得

$$k_1\sigma(\xi_1)+k_2\sigma(\xi_2)+\ldots+k_s\sigma(\xi_m)=0$$

再利用 $\sigma(\xi_i)=\lambda_i\xi_i$ ($i=1,2,\ldots,m$),得

$$k_1\lambda_1\xi_1+k_2\lambda_2\xi_2+\ldots+k_m\lambda_m\xi_m=0 \qquad (**)$$

$(**)-\lambda_m(*)$,得

$k_1(\lambda_1-\lambda_m)\xi_1+k_2(\lambda_2-\lambda_m)\xi_2+\ldots+k_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)\xi_{m-1}=0$

由归纳假设, $\xi_1, \xi_2,\ldots\ \xi_{m-1}$线性无关.因而

$$k_i(\lambda_i-\lambda_m)=0 \quad i=1, 2, \ldots, m-1$$

但$(\lambda_i-\lambda_m)\neq 0(i=1, 2,\ldots, m-1)$,于是$k_i=0(i=1, 2,\ldots, m-1)$.

此时式(*)变成 $k_m\xi_m=0$, 而 $\xi_m\neq 0$, 所以 $k_m=0$.

这就证明了$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$线性无关. ||

2. (定理9) 设σ为线性空间V的一个线性变换，

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_k$是$\sigma$的不同的特征值，而$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots\xi_{ir_i}$是属于

特征值λ_i的线性无关的特征向量， $i=1,2,\cdots,k,$

则向量$\xi_{11},\cdots,\xi_{1r_1},\cdots,\xi_{k1},\cdots,\xi_{kr_k}$ 线性无关.

证明：首先，σ的属于同一特征值λ_i的特征向量

的非零线性组合仍是σ的属于特征值λ_i的一个特征

向量.

设 $a_{11}\xi_{11}+\cdots+a_{1r_1}\xi_{1r_1}+\cdots+a_{k1}\xi_{k1}+\cdots+a_{kr_k}\xi_{kr_k}=0$, ④

$a_{11},\cdots,a_{1r_1},\cdots,a_{k1},\cdots,a_{kr_k}\in P$.

令 $\eta_i=a_{i1}\xi_{i1}+\cdots+a_{ir_i}\xi_{ir_i}$, $i=1,2,\cdots,k$.

由④有, $\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_k=0$.

若有某个$\eta_i\neq 0$, 则η_i是σ的属于特征值λ_i的特征向量. 而$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_k$是互不相同的，由定理8，必有所有的 $\eta_i=0$, $i=1,2,\cdots,k$.

即 $a_{i1}\xi_{i1}+\cdots+a_{ir_i}\xi_{ir_i}=0.$

而 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{ir_i}$ 线性无关，所以有

$$a_{i1}=\cdots=a_{ir_i}=0,\ \ i=1,2,\cdots,k.$$

故 $\xi_{11},\cdots,\xi_{1r_1},\cdots,\xi_{k1},\cdots,\xi_{kr_k}$ 线性无关.

3. (推论1) 设 σ 为 n 维线性空间V的一个线性变换，

如果 σ 的特征多项式在数域P中有 n 个不同特征值，

则 σ 可对角化.

特别地，**(推论2)** 在复数域C上的线性空间中，

如果线性变换 σ 的特征多项式没有重根，则 σ 可

对角化.

4. 设 σ 为n维线性空间V的一个线性变换, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_r$

为σ 全部不同的特征值，则 σ可对角化.

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r}\dim V_{\lambda_i} = n,\quad V_{\lambda_i}$$ 为σ的特征子空间.

5. 设 σ 为n维线性空间V的一个线性变换，

若σ在某组基下的矩阵为对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则 1） σ 的特征多项式就是

$$f_\sigma(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

2）对角矩阵D主对角线上元素除排列次序外是唯一确定的,它们就是 σ 的全部特征根(重根按重数计算).

三、对角化的一般方法

设 σ为维线性空间V的一个线性变换， $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基， σ 在这组基下的矩阵为A.

步骤:

1° 求出矩阵A的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$.

2° 对每一个特征值 λ_i，求出齐次线性方程组

$$\left(\lambda_i E - A\right) X = 0, \qquad i = 1.2.\cdots k$$

的一个基础解系（此即 σ 的属于λ_i的全部线性无关的特征向量在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标）.

3° 若全部基础解系所含向量个数之和等于n，则

σ 有n个线性无关的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，从而 σ

（或矩阵A）可对角化. 以这些解向量为列，作一个

n阶方阵T，则T可逆，$T^{-1}AT$是对角矩阵. 而且

T就是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵.

例1. 设复数域上线性空间V的线性变换σ 在某组基

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问σ是否可对角化. 在可对角化的情况下，写出

基变换的过渡矩阵.

解：A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

得A的特征值是1、1、－1.

解齐次线性方程组 $(1 \cdot E - A) X = 0$, 得 $x_1 = x_3$

故其基础解系为: $(1,0,1)^T, (0,1,0)^T$

所以， $\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$， $\eta_2 = \varepsilon_2$

是σ 的属于特征值1的两个线性无关的特征向量.

再解齐次线性方程组$\left(-1\cdot E-A\right)X=0$,得 $\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$

故其基础解系为：$(1,0,-1)^T$

所以， $\eta_3=\varepsilon_1-\varepsilon_3$

是σ的属于特征值－1的线性无关的特征向量.

η_1,η_2,η_3 线性无关，故 σ 可对角化，且

σ在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

即基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

例2. 问A是否可对角化？若可，求可逆矩阵T，使

$T^{-1}AT$ 为以角矩阵. 这里 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

解: A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 12\lambda + 16 = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

得A的特征值是2、2、−4 .

对于特征值2，求出齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个基础解系：$(-2, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T$

对于特征值－4，求出齐次方程组

$$\begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个基础解系： $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)^T$

所以A可对角化.

令 $$T=\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

练习： 在 $P[x]_n(n>1)$ 中，求微分变换D的特征多项式. 并证明：D在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵（即D不可对角化）.

解：在 $P[x]_n$中取一组基：1，x，$\frac{x^2}{2!}$，$\cdots$，$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

则D在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\left|\lambda E - A\right| = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n$$

∴ **D**的特征值为0（n重）.

又由于对应特征值0的齐次线性方程组 $-AX=0$

的系数矩阵的秩为n－1，从而方程组的基础解系

只含有一个向量，它小于n.

故 **D** 不可对角化 .

例3　线性变换σ在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

问:在V中是否存在一组基,使σ在该基下的矩阵为对角矩阵？若存在,试求之.

解 (i) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

得σ的特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$;

(ii) 当$\lambda_1=2$时，解$(2E-A)x=0$.

$$由\ 2E-A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$, 基础解系为$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

σ的属于特征值2的线性无关特征向量为$\xi_1=\varepsilon_3$;

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解$(E-A)x=0$.

由$E-A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得$\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-2x_3\end{cases}$,

σ的属于特征值1的线性无关特征向量为

$$\xi_2=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3;$$

由于线性变换σ的线性无关特征向量个数为2≠3，因此σ不能对角化.

例4　实数域上的矩阵A能否与对角矩阵相似？若能，求可逆矩阵 X 使$X^{-1}AX=\Lambda$为对角阵.这里

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

解(i) 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)(\lambda-2)^2$

得A的特征值$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$;

(ii) 当$\lambda_1 = -1$时，解$(-E-A)x = 0$.

由 $-E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$，基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时，解$(2E - A)x = 0$.

$$\text{由 } 2E - A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得$x_3 = 4x_1 - x_2$, 基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A的线性无关特征向量个数等于3，因此A与对角矩阵相似.令

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \text{则} X \text{可逆且} X^{-1}AX = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

四.可对角化矩阵的简单应用

(i)由特征值和特征向量反求矩阵A:

$$A=X\,\Lambda\,X^{-1}$$

(ii) 求方阵的幂:

$$A^{k}=X\,\Lambda^{k}\,X^{-1}$$

例5　3阶方阵A有三个不同的特征值$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, λ_3 , 对应的特征向量分别为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

已知$\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{6}$.　求 (1) $\lambda_3, |A|$; (2) A, A^{20}.

解 (1) $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=\frac{1}{2\lambda_3}=\frac{1}{6}$，得 $\lambda_3=3$；

$$|A|=\frac{1}{\left|A^{-1}\right|}=6,$$

(2)令 $X=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

则

$$X^{-1}AX=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$$

$$A=X\Lambda X^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

$$A^{20} = X\Lambda^{20}X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{20} & & \\ & 2^{20} & \\ & & 3^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{21} - 3^{20} & -1 + 2^{20} - 3^{20} & \frac{1}{2}(1 - 3^{20}) \\ -2^{20} + 3^{20} & 1 - 2^{20} + 3^{20} & \frac{1}{2}(-1 + 3^{20}) \\ -2(2^{20} - 3^{20}) & -2(2^{20} - 3^{20}) & 3^{20} \end{bmatrix}.$$