

离散数学作业 Problem Set 6

Problem 1

设集合 $A = \{a, b, c\}$, 判断以下结论是否正确.

- a) $\emptyset \subseteq A \times A$
- b) $\{a, b\} \in A \times A$
- c) $\{a, c\} \in A$
- d) $(a, b) \in A \times A$

Problem 2

证明 $A \times B \neq B \times A$, 除非 $A = B$, 其中 A 和 B 都是非空集合.

Problem 3

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系. 从集合 B 到集合 A 的逆关系, 记作 R^{-1} , 是有序对 $\{(b, a) | (a, b) \in R\}$ 的集合, 补关系 \bar{R} 是有序对 $\{(a, b) | (a, b) \notin R, a \in A, b \in B\}$ 的集合.

设 R 是正整数集合上的关系, $R = \{(a, b) | a \text{ 整除 } b\}$, 求

- a) R^{-1}
- b) \bar{R}

Problem 4

设 R 是关系 $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$, S 是关系 $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$, 求 $S \circ R$.

Problem 5

基于 Problem 3 中的逆关系的概念, 给定两个关系 R 和 S , 假设他们满足 $R = R^{-1}$, $S = S^{-1}$, 并且他们满足 $R \circ S \subseteq S \circ R$, 请证明: $R \circ S = S \circ R$.

Problem 6

设 R 是定义在具有博士学位的人的集合上的关系, $(a, b) \in R$ 当且仅当 a 是 b 的论文导师. 请问, 什么情况下一个有序对 (a, b) 在 R^2 中? 什么情况下一个有序对在 R^n 中? 这里的 n 是正整数.(注意每个具有博士学位的人都有一个论文导师.)

Problem 7

设 R_1 和 R_2 分别是整数集合上的“模 3 同余”和“模 4 同余”关系, 即 $R_1 = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{3}\}$ 和 $R_2 = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{4}\}$. 求:

- a) $R_1 \cup R_2$
- b) $R_1 \cap R_2$
- c) $R_1 - R_2$
- d) $R_2 - R_1$
- e) $R_1 \oplus R_2$

Problem 8

- a) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个不同的关系?

b) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个关系包含有序对 (a, a) ?

Problem 9

对以下整数集上面的关系 R 和 S , 确定 $R \circ S$.

a) $R = \{(x, y) | y = 2x - 1\}, S = \{(x, y) | y = x + 3\}$

b) $R = \{(x, y) | y = x - 4\}, S = \{(x, y) | y = x^2 + 3x + 1\}$

c) $R = \{(x, y) | y = 2^x\}, S = \{(x, y) | x = y^2\}$

d) $R = \{(x, y) | y = 2^x\}, S = \{(x, y) | y = x^2\}$

Problem 10

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系, 证明:

a) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

b) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$