§7 不变子空间

一、不变子空间

二、在不变子空间W引起的线性变换

三、不变子空间与线性变换的矩阵化简

四、线性空间的直和分解

一、不变子空间

1、定义

设 σ 是数域P上线性空间V的线性变换，W是V的子空间，若 $\forall \xi \in W$，有 $\sigma(\xi) \in W$ （即 $\sigma(W) \subseteq W$ ）

则称W是 σ 的不变子空间，简称为 σ-子空间.

注：

V的平凡子空间（V及零子空间）对于V的任意一个变换 σ 来说，都是 σ -子空间.

2、不变子空间的简单性质

1）两个 σ —子空间的交与和仍是 σ —子空间.

2）设 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$, 则W是 σ —子空间

$$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_s)\in W.$$

证："$\Rightarrow$" 显然成立.

"$\Leftarrow$" 任取 $\xi\in W$, 设 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$,

则 $\sigma(\xi)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)$.

由于 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_s)\in W$, $\therefore$ $\sigma(\xi)\in W$.

故W为 σ 的不变子空间.

3、一些重要不变子空间

1）线性变换 σ 的值域$\sigma(V)$与核 $\sigma^{-1}(0)$ 都是σ 的不变子空间.

证： $\because\ \sigma(V)=\{\sigma(\alpha)|\alpha\in V\}\subseteq V,$

$\therefore \forall\xi\in\sigma(V)$, 有 $\sigma(\xi)\in\sigma(V)$.

故 $\sigma(V)$ 为 σ 的不变子空间.

又任取 $\xi\in\sigma^{-1}(0)$, 有 $\sigma(\xi)=0\in\sigma^{-1}(0)$.

$\therefore\ \sigma^{-1}(0)$也为 σ 的不变子空间.

2）若 $\sigma\tau=\tau\sigma$,则 $\tau(V)$与$\tau^{-1}(0)$都是 σ－子空间.

证： $\because\ \ \tau(V)=\{\tau(\alpha)|\alpha\in V\}$.

$\therefore$ 对$\forall\xi\in\tau(V)$,存在$\alpha\in V$,使 $\xi=\tau(\alpha)$,

于是有,

$$\sigma(\xi)=\sigma\big(\tau(\alpha)\big)=\sigma\tau(\alpha)=\tau\sigma(\alpha)=\tau\big(\sigma(\alpha)\big)\in\tau(V)$$

（就是有$\forall\xi\in\tau(V)$，推得$\sigma(\xi)\in\tau(V)$）

$\therefore\tau(V)$ 为σ 的不变子空间.

其次，由 $\tau^{-1}(0)=\{\alpha|\alpha\in V,\tau(\alpha)=0\}$,

$\therefore$ 对 $\forall\xi\in\tau^{-1}(0)$,有 $\tau(\xi)=0$.

于是 $\tau\left(\sigma(\xi)\right)=\tau\sigma(\xi)=\sigma\tau(\xi)=\sigma\left(\tau(\xi)\right)=\sigma(0)=0.$

$\therefore \sigma(\xi)\in\tau^{-1}\left(0\right).$

故 $\tau^{-1}\left(0\right)$ 为 σ 的不变子空间.

注:

$\because\ \sigma f(\sigma)=f(\sigma)\sigma$

$\therefore\ \sigma$ 的多项式 $f(\sigma)$ 的值域与核都是 σ 的不变子空间.

这里 $f(x)$ 为 $P[x]$ 中任一多项式.

3）任何子空间都是数乘变换 K 的不变子空间.

$\left(\because \forall\xi\in W,\ \mathrm{K}\xi=k\xi\in W\right)$

4）线性变换σ的特征子空间 V_{λ_0} 是σ 的不变子空间.

$(\because \forall\xi\in V_{\lambda_o}$，有$\sigma(\xi)=\lambda_o\xi\in V_{\lambda_o}.)$

5）由 σ 的特征向量生成的子空间是 σ 的不变子空间.

证：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 σ 的分别属于特征值

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的特征向量. 任取 $\xi\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,

设 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 则

$$\sigma(\xi)=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2+\cdots+k_s\lambda_s\alpha_s\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$$

$\therefore$ $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 为 σ 的不变子空间.

注：

特别地，由σ 的一个特征向量生成的子空间是一个一维σ–子空间.　反过来，一个一维　σ –子空间必可看成是σ 的一个特征向量生成的子空间.

事实上，若　$W = L(\xi) = \{k\xi \mid k \in P, \xi \neq 0\}.$

则ξ为$L(\xi)$的一组基.　　因为W为 σ–子空间，

$\therefore$　$\sigma(\xi) \in W$，即必存在 $\lambda \in P$，使　$\sigma(\xi) = \lambda\xi.$

$\therefore$　ξ 是σ 的特征向量.

二、σ 在不变子空间W引起的线性变换

定义：

设 σ是线性空间V的线性变换，W是V的一个σ 的

不变子空间. 把 σ 看作W上的一个线性变换，称作

σ在不变子空间W上引起的线性变换，或称作 σ 在

不变子空间W上的限制 . 记作 $\sigma|_W$.

注：

① 当 $\xi \in W$ 时，$\sigma|_W(\xi) = \sigma(\xi)$.

当 $\xi \notin W$ 时，$\sigma|_W(\xi)$无意义.

② $\sigma|_W(W) \subseteq W$.

③ 任一线性变换 σ 在它核上引起的线性变换是零变换，即 $\sigma|_{\sigma^{-1}(0)} = 0$ ；

σ在特征子空间 V_{λ_0} 上引起的线性变换是数乘变换，即有 $\sigma|_{V_{\lambda_0}} = \lambda_o E$.

设 $\dim(V_{\lambda_0}) = k$, 且ε_1, $\varepsilon_2,\cdots$, ε_k是V_{λ_0}的一组基底，故

$$\sigma(\varepsilon_i)=\lambda_0\varepsilon_i, \qquad i=1,2,\cdots,k$$

则

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\cdots, \varepsilon_k)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\cdots, \varepsilon_k)\begin{bmatrix}\lambda_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0\end{bmatrix}_{k\times k}$$

$$=\lambda_0 E_k$$

三、不变子空间与线性变换的矩阵化简

1、设 σ是n 维线性空间V的线性变换，W是V 的

σ—子空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 为W的一组基，把它扩允为

V的一组基：　$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots\varepsilon_n$.

若 $\sigma|_W$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 下的矩阵为$A_1\in P^{k\times k}$; 则

σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵具有下列形状:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

反之，若 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$,

$A_1 \in P^{k\times k}$. 则由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 生成的子空间必为 σ 的不变子空间.

事实上，因为W是 σ 的不变子空间.

$\therefore\ \sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_k)\in W$.

即，$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_k)$ 均可被 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 线性表出.

即 $$\begin{cases} \sigma(\varepsilon_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{k1}\varepsilon_k \\ \sigma(\varepsilon_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{k2}\varepsilon_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(\varepsilon_k) = a_{1k}\varepsilon_1 + a_{2k}\varepsilon_2 + \cdots + a_{kk}\varepsilon_k \end{cases}$$

也就是

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k) A_1$$

从而，$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

2、设σ 是n 维线性空间V的线性变换，W_i 都是 σ 的不变子空间，而 $\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}$是 W_i 的一组基，且 $\sigma|_{W_i}$在这组基下的矩阵为 A_i，$A_i\in P^{n_i\times n_i}, i=1,2,\cdots,s.$

若 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$ ，则

$$\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s}$$

为V的一组基，且在这组基下 σ 的矩阵为准对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}. \qquad （1）$$

反之，若 σ 在基 $\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s}$

下的矩阵为准对角矩阵(1), 则由 $\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}$ 生成

的子空间 W_i 为 σ 的不变子空间，且V具有直和分解：

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s .$$

由此即得：

V的线性变换 σ 在某组基下的矩阵为准对角形

$\Leftrightarrow$ V可分解为一些 σ 的不变子空间的直和.

四、线性空间的直和分解

定理12：设 σ 为线性空间V的线性变换，$f(\lambda)$ 是

是 σ 的特征多项式. 若 $f(\lambda)$ 具有分解式：

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

再设 $V_i=\left\{\xi \,\middle|\, (\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\xi)=0, \xi\in V\right\}$

则V可表示成σ的不变子空间V_i的直和：

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s \quad .$$

证：令 $f_i(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$

$$=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})^{r_{i-1}}(\lambda-\lambda_{i+1})^{r_{i+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

取 $W_i=f_i(\sigma)V,$

则W_i是$f_i(\sigma)$的值域，由于$\sigma f_i(\sigma)$可交换，所以$f_i(\sigma)$的值域与核都是σ的不变子空间.

又 $\because$ $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}W_i=(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}f_i(\sigma)V$

$$=\left((\sigma-\lambda_i E)^{r_i}f_i(\sigma)\right)V=f(\sigma)V$$

(利用哈密顿-凯莱Hamilton-Caylay定理)

$\therefore$ $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}W_i=0.$ （2）

下证$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$. 分三步:

1°. 证明 $V=W_1+W_2+\cdots+W_s$.

2°. 证明 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

3°. 证明 $V_i=W_i$, $i=1,2,\cdots,s$.

$\because\big(f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots f_s(\lambda)\big)=1$, 即$f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots f_s(\lambda)$互素.

$\therefore$ 存在多项式 $u_1(\lambda),u_2(\lambda),\cdots,u_s(\lambda)$, 使

$$u_1(\lambda)f(\lambda)_1+u_2(\lambda)f_2(\lambda)+\cdots+u_s(\lambda)f_s(\lambda)=1$$

于是 $u_1(\sigma)f_1(\sigma)+u_2(\sigma)f_2(\sigma)+\cdots+u_s(\sigma)f_s(\sigma)=E$

$\therefore$ 对 $\forall\alpha\in V$, 有

$$\alpha = E(\alpha)$$

$$= \big(u_1(\sigma) f_1(\sigma) + u_2(\sigma) f_2(\sigma) + \cdots + u_s(\sigma) f_s(\sigma)\big)(\alpha)$$

$$= u_1(\sigma) f_1(\sigma)(\alpha) + u_2(\sigma) f_2(\sigma)(\alpha) + \cdots + u_s(\sigma) f_s(\sigma)(\alpha)$$

$$= f_1(\sigma)\big(u_1(\sigma)(\alpha)\big) + f_2(\sigma)\big(u_2(\sigma)(\alpha)\big) + \cdots\cdots$$

$$+ f_s(\sigma)\big(u_s(\sigma)(\alpha)\big)$$

这里 $f_i(\sigma)\big(u_i(\sigma)(\alpha)\big) \in f_i(\sigma)V = W_i$，$i = 1, 2, \cdots, s.$

$$\therefore\ V = W_1 + W_2 + \cdots + W_s .$$

$2°$. 证明 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

即证，如果 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=0$ (3)

其中 $\beta_i \in V_i$ (由V_i的定义，$(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\beta_i)=0$)

则 $\beta_i=0,\ i=1,2,\cdots,s.$

$\because\ (\lambda-\lambda_j)^{r_j}\,\big|\, f_i(\lambda),\ i\neq j$

$\therefore$ 存在 $h(\lambda)$, 使 $f_i(\lambda)=h(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{r_j}.$

于是 $f_i(\sigma)=h(\sigma)(\sigma-\lambda_j E)^{r_j}.$

$$\therefore\quad f_i(\sigma)(\beta_j)=h(\sigma)(\sigma-\lambda_j E)^{r_j}(\beta_j)$$

$$=h(\sigma)\Big((\sigma-\lambda_j E)^{r_j}(\beta_j)\Big)=h(\sigma)(0)=0,\quad j\neq i.$$

用 $f_i(\sigma)$作用（3）的两端，得

$$f_i(\sigma)(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s)$$

$$=f_i(\sigma)(\beta_1)+f_i(\sigma)(\beta_2)+\cdots+f_i(\sigma)(\beta_s)$$

$$=f_i(\sigma)(\beta_i)=0$$

又 $\Big(f_i(\lambda),(\lambda-\lambda_i)^{r_i}\Big)=1.$

$\therefore$ 有多项式 $u(\lambda), v(\lambda)$，使

$$u(\lambda) f_i(\lambda) + v(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{r_i} = 1$$

从而 $$u(\sigma) f_i(\sigma) + v(\sigma)(\sigma - \lambda_i E)^{r_i} = E$$

$$\therefore \quad \beta_i = E(\beta_i) = \left(u(\sigma) f_i(\sigma) + v(\sigma)(\sigma - \lambda_i E)^{r_i} \right)(\beta_i)$$

$$= u(\sigma)\left(f_i(\sigma)(\beta_i) \right) + v(\sigma)\left((\sigma - \lambda_i E)^{r_i} (\beta_i) \right)$$

$$= u(\sigma)(0) + v(\sigma)(0) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

所以 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 是直和.

3°．证明： $W_i = V_i = \left\{ \xi \middle| (\sigma - \lambda_i E)^{r_i}(\xi) = 0,\ \xi \in V \right\}$

首先由(2)，有 $W_i \subseteq \left((\sigma - \lambda_i E)^{r_i} \right)^{-1}(0)$

$(\sigma - \lambda_i E)^{r_i} W_i = 0.$

即 $W_i \subseteq V_i.$

下面证明 $V_i \subseteq W_i$ ， 任取 $\alpha \in V_i$, 设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,\ \alpha_i \in W_i.$$

即 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + (\alpha_i - \alpha) + \cdots + \alpha_s = 0$

令 $\beta_j = \alpha_j,\ (j \neq i);\ \beta_i = \alpha_i - \alpha.$

由（2）, 有 $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,s.$

又 $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\beta_i)=(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha_i-\alpha)$

$$=(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha_i)-(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\alpha)=0$$

从而有 $(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\beta_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,s.$

即 $\beta_i\in V_i,\ \ \therefore\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s\in V_1+V_2+\cdots+V_s$

又 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=0,$

由 2° $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和，它的零向量分解式

唯一. $\therefore\ \beta_i=0,\ \ i=1,2,\cdots,s.$

于是 $\alpha=\alpha_i\in W_i$. 即有 $V_i\subseteq W_i$.

故 $W_i=V_i=\left\{\xi\,\middle|\,(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\xi)=0,\ \xi\in V\right\}.$

综合 1°,2°,3°，即有

V_i 是 σ 的不变子空间，且

$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s.$

定义8 $V,\sigma,f(\lambda)$如定理12，我们称

$$V_i=\left\{\xi\,\middle|\,(\sigma-\lambda_i E)^{r_i}(\xi)=0,\xi\in V\right\}$$

为σ的对应于特征值λ_i的根子空间，常记为V^{λ_i}.

练习：

设3维线性空间V的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的

矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

证明：$W=L(-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_3)$ 是σ 的不变子空间.

证：令 $\beta_1=-\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_2=-\alpha_1+\alpha_3$

由 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

有

$$\sigma(\beta_1,\beta_2)=\sigma\left((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\left((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A\right)\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

即 $$\sigma(\beta_1)=\alpha_1-\alpha_2=-\beta_1$$

$$\sigma(\beta_2)=\alpha_1-\alpha_3=-\beta_2$$

$\therefore\ \sigma(\beta_1),\sigma(\beta_2)\in W$.

故W为 σ 的不变子空间.