

# 离散数学作业— Problem Set 11

## Problem 1

设  $S$  为一  $n$  元集,

- (1)  $S$  上可以定义多少个不同的二元运算?
- (2) 其中有多少个二元运算是可交换的?
- (3) 其中有多少个二元运算是幂等的?
- (4) 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的?

## Problem 2

设  $A = \{0, 1\}$ ,  $S = A^A$ ,

- (1) 试列出  $S$  中的所有元素;
- (2) 给出  $S$  上函数复合运算的运算表, 并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元。

## Problem 3

设  $A = \{a, b, c\}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 能否确定  $a, b, c$  的值使得

- (1)  $A$  对普通加法封闭?
- (2)  $A$  对普通乘法封闭?

## Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

- (1) 整数集合  $\mathbb{Z}$  和普通的减法运算。
- (2) 非零整数集合  $\mathbb{Z}^*$  和普通的除法运算。
- (3) 全体  $n \times n$  实数矩阵集合  $M_n(\mathbb{R})$  和矩阵加法及乘法运算，其中  $n \geq 2$ 。
- (4) 全体  $n \times n$  实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中  $n \geq 2$ 。
- (5) 正实数集合  $\mathbb{R}^+$  和  $\circ$  运算，其中  $\circ$  运算定义为：

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$

- (6)  $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $n \geq 2$ 。 $\circ$  运算定义如下：

$$\forall a, b \in \mathbb{A}, a \circ b = b$$

- (7)  $S = \{0, 1\}$  关于普通加法和乘法运算。
- (8)  $S = \{x | x = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+\}$  关于普通的加法和乘法运算。
- (9)  $S = \{x | x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$  关于普通的加法和乘法运算。

## Problem 5

$\mathbb{R}$  为实数集，定义以下 4 个函数  $f_1, f_2, f_3, f_4$ 。 $\forall x, y \in \mathbb{R}$  有

$$f_1((x, y)) = x \cdot y, \quad f_2((x, y)) = x - y,$$

$$f_3((x, y)) = \max(x, y), \quad f_4((x, y)) = |x - y|$$

- (1) 判断上述二元运算是否为可交换、可结合、幂等的。
- (2) 求上述二元运算的单位元、零元以及每一个可逆元素的逆元。
- (3) 设  $A = \{a, b\}$ ，试给出  $A$  上一个不可交换、也不可结合的二元运算。

## Problem 6

设  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ , 问下面定义的运算能否与  $S$  构成代数系统  $\langle S, * \rangle$ ?  
如果能, 则说明  $*$  运算是否满足交换律、结合律, 并给出单位元和零元。

- (1)  $x * y = \gcd(x, y)$ ,  $\gcd(x, y)$  是  $x$  与  $y$  的最大公约数。
- (2)  $x * y = \text{lcm}(x, y)$ ,  $\text{lcm}(x, y)$  是  $x$  与  $y$  的最小公倍数。
- (3)  $x * y =$  大于等于  $x$  和  $y$  的最小整数。
- (4)  $x * y =$  质数  $p$  的个数, 其中  $x \leq p \leq y$ 。

## Problem 7

判断下列集合能否构成代数系统  $V = \langle \mathbb{N}, + \rangle$  的子代数:

- (1)  $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 的某次幂可以被 } 16 \text{ 整除} \}$
- (2)  $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 的某次幂可以被 } y \text{ 整除} \}$
- (3)  $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 与 } 5 \text{ 互素} \}$
- (4)  $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 30 \text{ 的因子} \}$
- (5)  $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 30 \text{ 的倍数} \}$

## Problem 8

设  $S = \{a, b, c, d\}$ , 定义  $S$  上的一个二元运算  $\circ$  如下表所示:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

1. 请指出代数系统  $V = \langle S, \circ \rangle$  的单位元和零元，并尝试给出  $V$  的所有子代数；
2. 如果保持  $S$  不变，同时要求代数系统有唯一单位元  $a$ ，且每个元素在运算  $\circ$  下都有逆元。若把将  $b, c, d$  三个元素任意交换后相同的运算表当作同一种情况（同构），请画出所有满足条件的  $\circ$  的运算表。