行列式计算拓展

,

行或列比例递减

,

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

(自右向左减左边相邻列)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3+a_4 \\ a_1 & 2a_1+a_2 & 3a_1+2a_2+a_3 & 4a_1+3a_2+2a_3+a_4 \\ a_1 & 3a_1+a_2 & 6a_1+3a_2+a_3 & 10a_1+6a_2+3a_3+a_4 \end{vmatrix}$$

(自下而上减上一行)

,

,

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

(自左向右加左列的x倍)

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12245 \\ 67813 & 67913 \end{vmatrix}$$

(第1列减第2列)

行或列全加

$$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

(每一列加到第一列)　　(每一列加到第一列)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{列全加}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第1列展开}]{\text{行递减}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \xrightarrow{\text{列全加}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ -1 & 1 & 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

配套相加

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n=2k}$$

(下面一半：第2k+1-i行加到第i行,
右面一半：第2k+1-i列减去第i列)

化三角形消零

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

(第1行加到各行)

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

(若$a_i \neq 0$，各列的$-1/a_i$倍加到第1列)

(若有 $a_i=0$，可按第1行展开)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行递减}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{最后列加到每一列}} \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & n+n-1 & n \\ 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \ddots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

递推式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

($D_n=D_{n-1}-D_{n-2}= -D_{n-3}$)

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & & \\ 1 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

($D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$)

分裂行列式

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & & \\ 1 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

(第一列分裂成$a+a$和1+0, 得$D_n=a^n+aD_{n-1}$)

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

(最后列分裂成 $a_1b_n+0, a_2b_n+0, \ldots, a_nb_n+(x_n-a_nb_n)$ 得 $D_n= (x_1-a_1b_1)\ldots(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1})a_nb_n+(x_n-a_nb_n)D_{n-1}$)