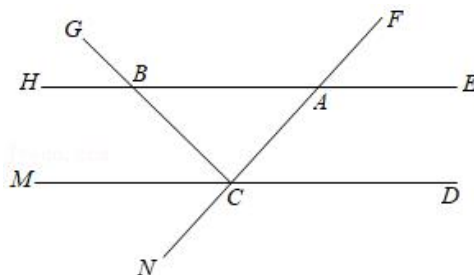


第 7/12 章 几何（一）

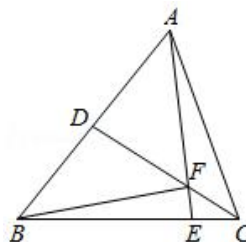
例 1、如图， FN 交 HE 、 MD 于点 A 、点 C ，过 C 作射线 CG 交 HE 于点 B 。若 $\angle EAF = \angle NCM = \angle MCB = 46^\circ$ 。

(1) 求证： $AB \parallel CD$ ；

(2) 求 $\angle ABG$ 的度数。



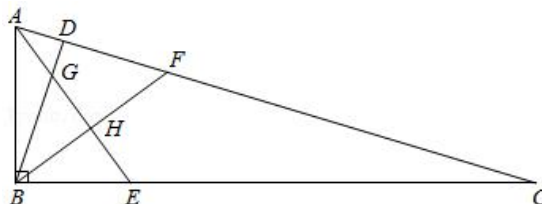
例 2、如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 中点， E 是 BC 边上一点，且 $BE = 4EC$ ， CD 与 AE 交于点 F ，连接 BF 。若 $\triangle BEF$ 的面积是 4，则 $\triangle ABC$ 的面积是 _____。



例 3、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， BD 是 AC 边上的高， AE 是 $\angle BAC$ 的角平分线，分别交 BD 、 BC 于点 G 、 E ，过点 B 作 AE 的垂线 BF ，分别交 AE 、 AC 于点 H 、 F 。

(1) 求证： BF 平分 $\angle DBC$ ；

(2) 若 $\angle ABF = 3\angle C$ ，求 $\angle C$ 的度数。

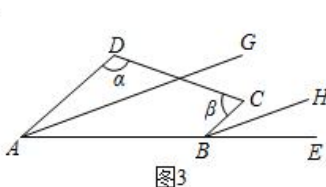
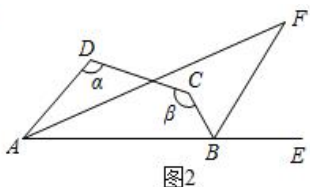
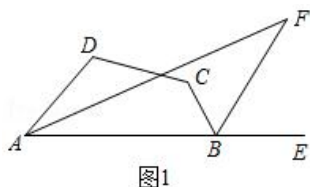


例 4、【探究】

(1) 如图 1, $\angle ADC = 120^\circ$, $\angle BCD = 130^\circ$, $\angle DAB$ 和 $\angle CBE$ 的平分线交于点 F , 则 $\angle AFB =$ _____ $^\circ$;

(2) 如图 2, $\angle ADC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, 且 $\alpha + \beta > 180^\circ$, $\angle DAB$ 和 $\angle CBE$ 的平分线交于点 F , 则 $\angle AFB =$ _____; (用 α 、 β 表示)

(3) 如图 3, $\angle ADC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, 当 $\angle DAB$ 和 $\angle CBE$ 的平分线 AG 、 BH 平行时, α 、 β 应该满足怎样的数量关系? 请证明你的结论.



【挑战】

如果将 (2) 中的条件 $\alpha + \beta > 180^\circ$ 改为 $\alpha + \beta < 180^\circ$, 再分别作 $\angle DAB$ 和 $\angle CBE$ 的平分线, 你又可以找到怎样的数量关系? 画出图形并直接写出结论.

课后练习:

1、一个多边形的内角和是外角和的 2 倍, 这个多边形是 ()

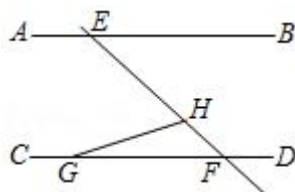
- A. 四边形 B. 五边形 C. 六边形 D. 八边形

2、给出下列 4 个命题: ①四边形的内角和等于外角和; ②有两个角互余的三角形是直角三角形; ③若 $|x| = 2$, 则 $x = 2$; ④同旁内角的平分线互相垂直. 其中真命题的个数为 ()

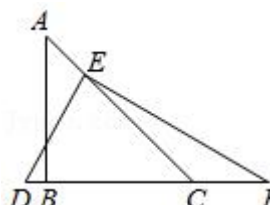
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3、在一个多边形中, 小于 120° 的内角最多有 _____ 个.

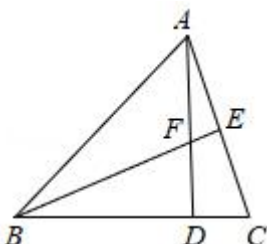
4、如图，已知 $AB \parallel CD$ ， $\angle EHG = 60^\circ$ ， $\angle HGF = 20^\circ$ ，则 $\angle BEF =$ _____ $^\circ$ 。



（第4题）



（第5题）



（第6题）

5、如图，把一副常用的三角板如图所示拼在一起，那么图中 $\angle CEF =$ _____ $^\circ$ 。

6、如图， BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 D 是 BC 边上一点， $BD = 3CD$ ， BE 、 AD 交于点 F ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 20，则 $\triangle BDF$ 与 $\triangle AEF$ 的面积之差 $S_{\triangle BDF} - S_{\triangle AEF}$ 等于（

A. $\frac{10}{3}$

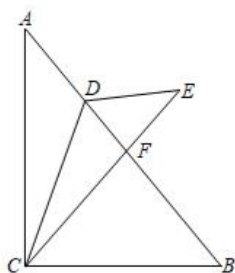
B. 5

C. 4

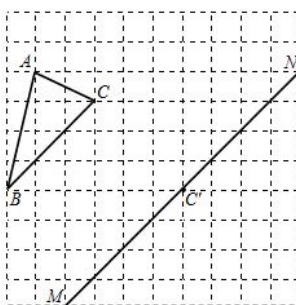
D. 3

7、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B - \angle A = 10^\circ$ ， D 是 AB 上一点，将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折后得到 $\triangle CED$ ，边 CE 交 AB 于点 F 。若 $\triangle DEF$ 中有两个角相等，则 $\angle ACD$ 的度数为（ ）

A. 15° 或 20° B. 20° 或 30° C. 15° 或 30° D. 15° 或 25°



（第7题）



（第8题）

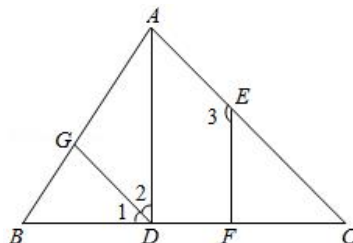
8、在正方形网格中， $\triangle ABC$ 的位置如图所示。将 $\triangle ABC$ 平移，点 C 恰好落在 C' 处。

（1）请画出平移后的 $\triangle A'B'C'$ ，其中， A' 、 B' 分别为 A 、 B 的对应点；

（2）若图中每个小正方形的边长都为 1，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积为_____；

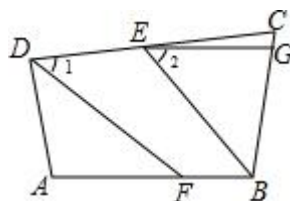
（3）在线段 MN 上是否存在格点 P ，使得 $\triangle PA'B'$ 的面积是 $\triangle PA'C'$ 面积的 2 倍，若存在，请画出所有这样的格点 P_1 、 P_2 、...，若不存在，请说明理由。

9、已知：如图， $\angle 1 = \angle C$ ， $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ 。求证： $AD \parallel EF$ 。



10、如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A$ 与 $\angle C$ 互补， $\angle ABC$ 、 $\angle ADC$ 的平分线分别交 CD 、 AB 于点 E 、 F 。 $EG \parallel AB$ ，交 BC 于点 G 。

- (1) $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 有怎样的数量关系？为什么？
- (2) 若 $\angle A = 100^\circ$ ， $\angle 1 = 42^\circ$ ，求 $\angle CEG$ 的度数。



11、已知 $\angle A$ ，在 $\angle A$ 的两边上分别取点 B 、 C ，在 $\angle A$ 的内部取一点 O ，连接 OB 、 OC 。设 $\angle OBA = \angle 1$ ， $\angle OCA = \angle 2$ ，探索 $\angle BOC$ 与 $\angle A$ 、 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 之间的数量关系。

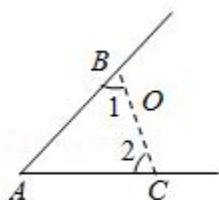


图 1

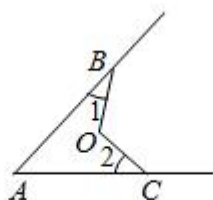


图 2

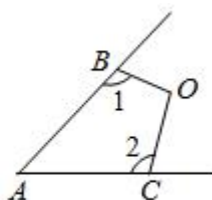


图 3

【初步感知】

如图 1，当点 O 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上时， $\angle BOC = 180^\circ$ ，此时 $\angle A + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 与 $\angle A$ 、 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 之间的数量关系是 $\angle BOC = \angle A + \angle 1 + \angle 2$ 。

【问题再探】

(1) 如图 2，当点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部时，请写出 $\angle BOC$ 与 $\angle A$ 、 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 之间的数量关系并说明理由；

(2) 如图 3，当点 O 在 $\triangle ABC$ 的外部时， $\angle BOC$ 与 $\angle A$ 、 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 之间的数量关系是 _____；

【拓展延伸】

(1) 如图 4， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的外角平分线相交于点 P 。

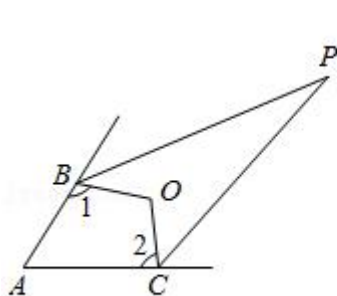


图 4

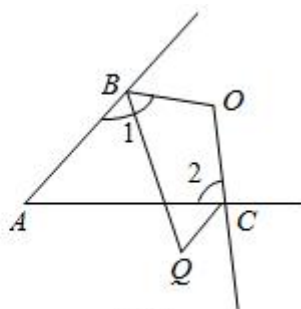


图 5

①若 $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle BOC = 100^\circ$ ，则 $\angle P =$ _____ $^\circ$ ；

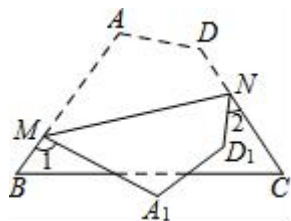
②若 $\angle BOC = 4\angle A$ 且 $\angle P = 30^\circ$ ，则 $\angle A =$ _____ $^\circ$ ；

③直接写出 $\angle BOC$ 与 $\angle A$ 、 $\angle P$ 之间的数量关系；

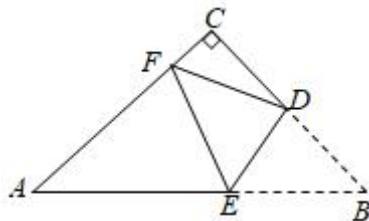
(2) 如图 5， $\angle 1$ 的平分线与 $\angle 2$ 的外角平分线相交于点 Q ，则 $\angle Q =$ _____ (用 $\angle BOC$ 、 $\angle A$ 表示)

第 7/12 章 几何（二）

例 1、如图，将四边形纸片 $ABCD$ 沿 MN 折叠，点 A 、 D 分别落在 A_1 、 D_1 处，若 $\angle 1 + \angle 2 = 144^\circ$ ，则 $\angle B + \angle C = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ 。



（第 1 题）



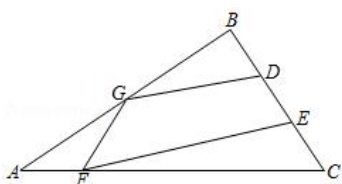
（第 2 题）

例 2、如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠，使得点 B 落在 AC 边上的点 F 处，若 $\angle CFD = 60^\circ$ 且 $\triangle AEF$ 中有两个内角相等，则 $\angle A$ 的度数为（ ）

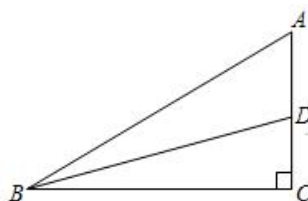
- A. 30° 或 40° B. 40° 或 50° C. 50° 或 60° D. 30° 或 60°

例 3、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AG = BG$ ， $BD = DE = EC$ ， $CF = 4AF$ ，若四边形 $DEFG$ 的面积为 14，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）

- A. 24 B. 28 C. 35 D. 30



（第 3 题）



①

（第 4 题）

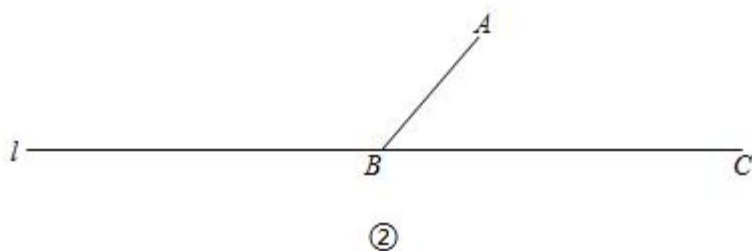
例 4、如果三角形的两个内角 α 与 β 满足 $2\alpha + \beta = 90^\circ$ ，那么我们称这样的三角形为“准直角三角形”。

（1）如图①，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线。求证： $\triangle ABD$ 是“准直角三角形”。

（2）关于“准直角三角形”，下列说法：

- ①在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 100^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ， $\angle C = 10^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 是准直角三角形；
 ②若 $\triangle ABC$ 是“准直角三角形”， $\angle C > 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle B = 20^\circ$ ；
 ③“准直角三角形”一定是钝角三角形。其中，正确的是_____。（填写所有正确结论的序号）

(3) 如图②， B 、 C 为直线 l 上两点，点 A 在直线 l 外，且 $\angle ABC = 50^\circ$ ．若 P 是 l 上一点，且 $\triangle ABP$ 是“准直角三角形”，请直接写出 $\angle APB$ 的度数．

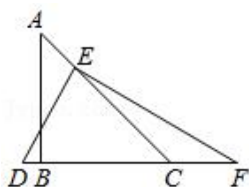


课后练习：

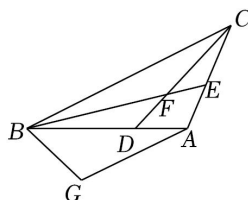
1、若多边形的每个内角都相等，且它的每一个外角是它的邻补角的 $\frac{1}{5}$ ，则该多边形是()

A. 十边形 B. 十二边形 C. 十五边形 D. 十六边形

2、如图，把一副常用的三角板如图所示拼在一起，那么图中 $\angle CEF = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ．



(第 2 题)



(第 5 题)

3、对于下列命题：

①若 $a > b$ ，则 $a^2 > b^2$ ；

②在直角三角形中，任意两个内角的和一定大于第三个内角；

③无论 x 取何值，代数式 $x^2 + 2x + 2$ 的值都不小于 1；

④在同一个平面内，有两两相交的三条直线，这些相交直线构成的所有角中，至少有一个角小于 60° ．

其中真命题有()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

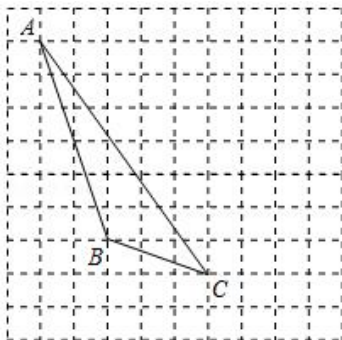
4、写出命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题：_____．

5、如图， $\triangle ABC$ 的角平分线 CD ， BE 相交于点 F ， $\angle BAC = \angle AGB$ ， $AG \parallel BC$ ，下列结论中不一定成立的是()

A. $\angle BAG = 2\angle CBE$ B. $\angle EFC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$
C. $\angle AEB = \angle GBE$ D. $\angle ADC = \angle AEB$

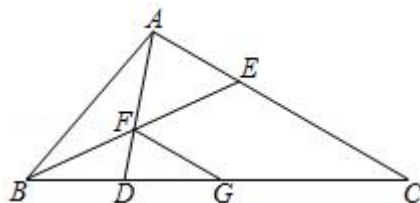
6、如图，每个小正方形的边长为1个单位，每个小方格的顶点叫格点。

- (1) 画出 $\triangle ABC$ 向下平移1个单位，再向右平移4个单位后的图形 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 画出 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高 CD ，垂足为 D ；
- (3) 求出 $\triangle ABC$ 的面积为_____；
- (4) 图中，能使 $S_{\triangle QBC} = 3$ 的格点 Q ，共有_____个。



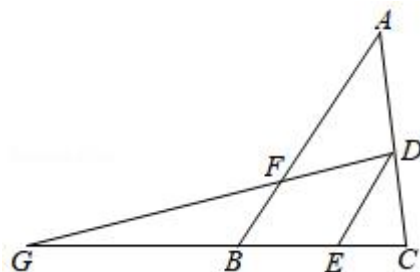
7、如图， $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 上一点， $\angle C = \angle BAD$ ， $\triangle ABC$ 的角平分线 BE 交 AD 于点 F 。

- (1) 求证： $\angle AEF = \angle AFE$ ；
- (2) G 为 BC 上一点，当 FE 平分 $\angle AFG$ 且 $\angle C = 30^\circ$ 时，求 $\angle CGF$ 的度数。



8、如图， $\triangle ABC$ 中， D 为 AC 边上一点，过 D 作 $DE \parallel AB$ ，交 BC 于 E ； F 为 AB 边上一点，连接 DF 并延长，交 CB 的延长线于 G ，且 $\angle DFA = \angle A$ 。

- (1) 求证： DE 平分 $\angle CDF$ ；
- (2) 若 $\angle C = 80^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，求 $\angle G$ 的度数。



9、去年汛期期间，防汛指挥部在某重要河流的一段危险地带两岸各安置了一探照灯，便于夜间查看河水及两岸河堤的情况．如图 1，灯 A 射线自 AM 顺时针旋转至 AN 便立即回转，灯 B 射线自 BP 顺时针旋转至 BQ 便立即回转，两灯不停交叉照射巡视．若灯 A 转动的速度是 15 度/秒，灯 B 转动的速度是 5 度/秒．假定这一带两岸河堤是平行的，即 $PQ \parallel MN$ ，且 $\angle BAN = 45^\circ$ ．

(1) 若灯 B 射线先转动 4 秒，灯 A 射线才开始转动，在灯 B 射线到达 BQ 之前，A 灯转动几秒，两灯的光束互相平行？

(2) 如图 2，两灯同时转动，在灯 A 射线到达 AN 之前．若灯 A 射出的光束与灯 B 射出的光束交于点 C，过 C 作 $CD \perp AC$ 交 PQ 于点 D，则在转动过程中， $\angle BAC$ 与 $\angle BCD$ 的数量关系是否发生变化？若不变，请直接写出其数量关系；若改变，请说明理由．

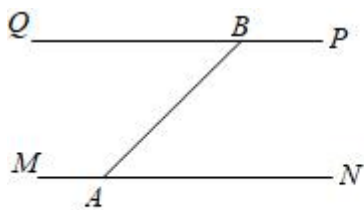


图 1

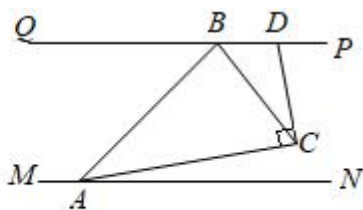


图 2

10、如图， $MN \parallel GH$ ，点 A、B 分别在直线 MN、GH 上，点 O 在直线 MN、GH 之间，若 $\angle NAO = 116^\circ$ ， $\angle OBH = 144^\circ$ ．

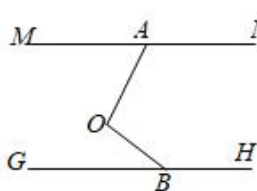


图 1

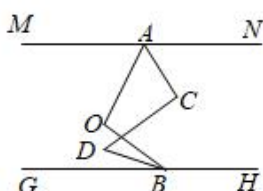


图 2

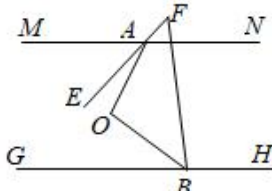


图 3

(1) $\angle AOB = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ；

(2) 如图 2，点 C、D 是 $\angle NAO$ 、 $\angle GBO$ 角平分线上的两点，且 $\angle CDB = 35^\circ$ ，求 $\angle ACD$ 的度数；

(3) 如图 3，点 F 是平面上的一点，连结 FA、FB，E 是射线 FA 上的一点，若 $\angle MAE = n\angle OAE$ ， $\angle HBF = n\angle OBF$ ，且 $\angle AFB = 60^\circ$ ，求 n 的值．

第八章 幂的运算

【考点1 同底数幂相乘】

运算法则：文字描述 - _____，符号表示 _____

【例1】已知 $2^x = 8$, $2^y = 5$, $2^z = 40$ 那么下列关于 x, y, z 之间满足的等量关系正确的是（ ）

- A. $x + y = z$ B. $xy = z$ C. $2x + y = z$ D. $2xy = z$

【变式1-1】计算： $-a \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^4 \cdot (-a)^5 =$ _____

【变式1-2】若 $\underbrace{(2020 \times 2020 \times \dots \times 2020)}_{\text{共 } 2020 \text{ 个}} \times \underbrace{(2020 + 2020 + \dots + 2020)}_{\text{共 } 2020 \text{ 个}} = 2020^n$,

则 $n =$ （ ）

- A. 2022 B. 2021 C. 2020 D. 2019

【变式1-3】（已知 $2^a = 5$, $2^b = 3.2$, $2^c = 6.4$, $2^d = 10$ ，则 $a + b + c + d$ 的值为 _____.

【考点2 同底数幂乘法的逆用】 符号表 _____

【例2】若 $x = 2^n + 2^{n+1}$, $y = 2^{n+2} + 2^{n+3}$ 其中 n 为整数, 则 x 与 y 的数量关系为（ ）

- A. $x = 4y$ B. $y = 4x$ C. $x = 12y$ D. $y = 12x$

【变式2-1】若 $3^x = 12$, $3^y = 4$, 则 $3^{x+y} =$ _____.

【变式2-2】已知 $2x + y - 4 = 0$, 则 $4^x \cdot 2^y$ 的值是 _____.

【变式2-3】阅读理解：①根据幂的意义， a^n 表示 n 个 a 相乘；则 $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ ；

② $a^n = m$, 知道 a 和 n 可以求 m , 我们不妨思考：如果知道 a, m , 能否求 n 呢？对于 $a^n = m$, 规定 $[a, m] = n$, 例如： $6^2 = 36$, 所以 $[6, 36] = 2$. 记 $[5, x] = 4m$, $[5, y - 3] = 4m + 2$; y 与 x 之间的关系式为 _____.

【考点3 幂的乘方运算】

运算法则：文字描述 - _____，符号表示 _____

【例3】已知 $2^a = 3$, $2^b = 27$, 求 $\frac{b}{a}$ 的值

【变式3-1】计算 $(-0.125)^{2022} \times 2^{6066}$ 的结果是（ ）

- A. 1 B. -1 C. 8 D. -8

【变式3-2】(1) 已知 $a^m = 3$, $a^n = 4$, 求 a^{2m+3n} 的值;

(2) 已知 $9^{n+1} - 9^n = 72$, 求 n 的值.

【变式3-3】已知，有一组不为零的数 a, b, c, d, e, f, m , 满足 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = m$,

求

解： $\because a=bm, c=md, e=fm$

$$\therefore \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{bm+dm+fm}{b+d+f} = m$$

利用数学的恒等变形及转化思想，试完成：

(1) $2^{44}, 3^{33}, 4^{22}$ 的大小关系是 _____;

(2) 已知 a, b, c 不相等且不为零, 若 $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3}, \frac{cb}{c+b} = \frac{1}{4}, \frac{ac}{a+c} = \frac{1}{5}$, 求 $\frac{abc}{ab+bc+ac}$ 的值.

【考点4 幂的乘方的逆用】符号表示

【例4】若 m, n 均为正整数，且 $2^{m-1} \times 4^n = 32$ ，则 $m+n$ 的所有可能值为_____.

【变式4-1】若 $3 \times 9^m \times 27^m = 3^{11}$ ，求 m 的值.

【变式4-2】已知 $4^x = 25^y = 10$ ，则 $(x-1)(y-1) + xy + 2005$ 的值_____.

【变式4-3】已知 $2^a = 8^b = 64^c$ ，求代数式 $\frac{a-b-c}{a+b+c}$ 的值.

【考点5 积的乘方】

运算法则：文字描述 _____，**符号表示** _____

【例5】计算： $(-3x^2)^3 + (-5x)^2 \cdot x^4 =$ _____

【变式5-1】计算： $(-0.125)^5 \times (-2)^{16} =$ ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

【变式5-2】已知 $(\frac{x}{2} + y)^2 = \frac{1}{1024}$ ， $(\frac{1}{2})^2 2x = \frac{1}{16}$ ，求 $(\frac{1}{2})^4 4y$ 的值.

【变式5-3】阅读下列各式： $(a \cdot b)^2 = a^2 b^2$ ， $(a \cdot b)^3 = a^3 b^3$ ， $(a \cdot b)^4 = a^4 b^4 \dots$

回答下列三个问题：

①验证： $(2 \times \frac{1}{2})^{100} =$ _____， $2^{100} \times (\frac{1}{2})^{100} =$ _____；

②通过上述验证，归纳得出： $(a \cdot b)^n =$ _____； $(a \cdot b \cdot c)^n =$ _____；

③请应用上述性质计算： $(-0.125)^{2019} \times 2^{2018} \times 4^{2017}$

【考点6 积的乘方的逆用】符号表示

【例6】已知 $3^{x+1} \cdot 5^{x+1} = 15^{2x-3}$ ，则 $x =$ _____.

【变式6-1】如果 $2^a = 3$ ， $3^a = 5$ ，那么 $12^a - 6^a =$ _____.

【变式6-2】计算 $(-2.5)^{2015} \times (-4)^{2016} \div (-10)^{2015} =$ _____.

【变式6-3】已知 $6^x = 192$ ， $32^y = 192$ ，则 $(-2019)^{(x-1)(y-1)-1} =$ _____.

【考点7 同底数幂的除法】

运算法则：文字描述 _____，**符号表示** _____

【例7】①若 $3 \times 27n \div 9 = 3^{20}$ ，则 $n =$ _____；

② $-(2y-x)^4 \div (x-2y)^3 =$ _____.

【变式7-1】已知 $a^m = -3$ ， $a^n = 2$ ，则 $a^{3m-2n} =$ _____.

【变式7-2】已知 $3a=2$ ， $3b=5$ ， $3c=\frac{40}{9}$ ，那么 a, b, c 之间满足的等量关系是_____.

【变式7-3】已知 $4^{m+3} \cdot 8^{m+1} \div 2^{4m+7} = 32$ ，求 m 的值.

【考点8 同底数幂的除法的逆用】符号表示

【例 8】已知 $10^a=20$, $100^b=50$, 则 $2a+4b-3$ 的值是 ()

- A. 9 B. 5 C. 3 D. 6

【变式 8-1】已知 $x^a=3$, $x^b=4$, 则 x^{3a-2b} 的值是 ()

- A. $\frac{27}{8}$ B. $\frac{27}{16}$ C. 11 D. 19

【变式 8-2】已知 $2x-3y-2=0$, 则 $9^x \div 27^y$ 的值为_____.

【变式 8-3】(1) 已知 $5^x=36$, $5^y=2$, 求 5^{x-2y} 的值.

(2) 已知 $x^{2n}=2$, 求 $(3x^{3n})^2 - 4(x^2)^{2n}$ 的值.

【考点 9 零指数幂的运用】

运算法则：文字描述 - _____，符号表示

【例 9】计算： $-2^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{\pi}{3}\right)^0 - \sqrt[3]{8}$.

【变式 9-1】计算 $\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2^3 =$ _____.

【变式 9-2】下列运算正确的是 ()

- A. $(-\pi)^0=0$ B. $x^4x^5=x^{20}$ C. $(ab^2)^3=a^3b^5$ D. $2a^2a^{-1}=2a$

【变式 9-3】已知 $(x-3)^{x-2}=1$, 则 $x=$ _____.

【考点 10 负整数指数幂的运用】

运算法则：文字描述 - _____，符号表示

【例 10】已知 $2^{x+3} \times 3^{x+3} = 36^{x+1}$, 那么 2022^{-x} 的值是 ()

- A. 2022 B. 1 C. $-\frac{1}{2022}$ D. $\frac{1}{2022}$

【变式 10-1】若 $3 \times 9^{-m} \times 27^m = 3^4$, 则 m 的值为 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【变式 10-2】在① $-x^5 \cdot (-x)^2$; ② $-(-x)^6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-4}$; ③ $-(-x^2)^3 \cdot (x^3)^2$;

④ $[-(-x)^2]^5$ 中, 计算结果是 $-x^{10}$ 的是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【变式 10-3】如果 $a=(-2019)^0$, $b=(-0.1)^{-1}$, $c=\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$, 那么 a,b,c 三数的大小为 ()

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

【考点 11 用科学记数法表示绝对值小于 1 的数】 符号表示

【例 11】面对国外对芯片技术的垄断, 我国科学家奋起直追, 2020 年 11 月 26 号, 上海微电子宣布由我国独立研发的光刻机为光源完成了 22nm 的光刻水准, $1\text{nm}=1.0 \times 10^{-9}\text{m}$, 用科学记数法表示 22nm, 则正确的结果是 ()

A. $22 \times 10^9 \text{m}$ B. $22 \times 10^8 \text{m}$ C. $2.2 \times 10^8 \text{m}$ D. $2.2 \times 10^{10} \text{m}$

【变式 11-1】新型冠状病毒体积很小，这种病毒外直径大概在 0.00000 011 米，则 0.00000011 这个数字可用科学记数法表示为（ ）

A. 1.1×10^{-6} B. 1.1×10^{-7} C. 1.1×10^{-8} D. 0.11×10^{-8}

【变式 11-2】人体中枢神经系统中约含有 1 千亿个神经元，某种神经元的直径约为 62 微米（1 微米=0.000001 米），将 62 微米用科学记数法表示为（ ）

A. $0.62 \times 10^{-5} \text{米}$ B. $6.2 \times 10^{-6} \text{米}$ C. $6.2 \times 10^{-5} \text{米}$ D. $62 \times 10^{-6} \text{米}$

【考点 12 还原用科学记数法表示的小数】

【例 12】某种细胞的直径约为 0.0...08 米，将 0.0...08 米用科学记数法表示为 8×10^{-6} 米，则原数中小数点后“0”的个数为（ ）

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【变式 12-1】某 H 品牌手机上使用 5nm 芯片， $1 \text{nm} = 0.0000001 \text{cm}$ ，则 5nm 用科学记数法表示为（ ）

A. $50 \times 10^{-8} \text{cm}$ B. $0.5 \times 10^{-7} \text{cm}$ C. $5 \times 10^{-7} \text{cm}$ D. $5 \times 10^{-8} \text{cm}$

【变式 12-2】世界上最小的开花结果的植物的果实像一个微小的无花果，其质量只有 $7.6 \times 10^8 \text{g}$ ，将 7.6×10^8 用小数表示为 _____。

【变式 12-3】下列哪一个数值最小（ ）

A. 9.5×10^{-9} B. 2.5×10^{-9} C. 9.5×10^{-8} D. 2.5×10^{-8}

【考点 13 利用幂的运算进行比较大小】

【例 13】若 $a = 3^{555}$ ， $b = 4^{444}$ ， $c = 5^{333}$ ，比较 a 、 b 、 c 的大小（ ）

A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【变式 13-1】阅读下列材料：

若 $a^3 = 2$ ， $b^5 = 3$ ，则 a ， b 的大小关系是 a _____ b (填“<”或“>”)。

解：因为 $a^{15} = (a^3)^5 = 2^5 = 32$ ， $b^{15} = (b^5)^3 = 3^3 = 27$ ， $32 > 27$ ，所以 $a^{15} > b^{15}$ ，所以 $a > b$ 。

解答下列问题：

(1) 上述求解过程中，逆用了哪一条幂的运算性质 _____

A. 同底数幂的乘法 B. 同底数幂的除法 C. 幂的乘方 D. 积的乘方

(2) 已知 $x^5 = 2$ ， $y^7 = 3$ ，试比较 x 与 y 的大小。

【变式 13-2】阅读探究题：.

【阅读材料】

比较两个底数大于 1 的正数幂的大小，可以在底数（或指数）相同的情况下，比较指数（或底数）的大小，

如： $2^5 > 2^3$ ， $5^5 > 4^5$

在底数（或指数）不相同的情况下，可以化相同，进行比较，如： 27^{10} 与 3^{25} ，

解： $27^{10} = (3^3)^{10} = 3^{30}$ ， $\because 30 > 25$ ， $\therefore 3^{30} > 3^{25}$

[类比解答] 比较 25^4 ， 125^3 的大小。

[拓展拔高] 比较 3^{555} ， 4^{444} ， 5^{333} 的大小。

【变式 13-3】阅读：已知正整数 a, b, c ，若对于同底数，不同指数的两个幂 a^b 和 a^c ($a \neq 1$)，当 $b > c$ 时，则有 $a^b > a^c$ ；若对于同指数，不同底数的两个幂 a^b 和 c^b ，当 $a > c$ 时，则有 $a^b > c^b$ ，根据上述材料，回答下列问题. [注（2），（3）写出比较的具体过程]

(1) 比较大小： 5^{20} _____ 4^{20} ， 9^{61} _____ 27^{41} ；（填“>”、“<”或“=”）

(2) 比较 2^{33} 与 3^{22} 的大小；

(3) 比较 $3^{12} \times 5^{10}$ 与 $3^{10} \times 5^{12}$ 的大小.

(4) 计算 $4^{2021} \times 0.25^{2020} - 8^{2021} \times 0.125^{2020}$.

【考点 14 幂的混合运算】

【例 14】计算

(1) $(m-n)^2 \cdot (n-m)^3 \cdot (n-m)^4$ (2) $(b^{2n})^3(b^3)^{4n} \div (b^5)^{n+1}$

(3) $(a^2)^3 - a^3 \cdot a^3 + (2a^3)^2$

(4) $(-4a^{m+1})^3 \div [2(2a^m)^2 \cdot a]$ (5) $(2x^3 \cdot x^5)^2 + (-x)^2 \cdot (-x^2)^3 \cdot (x^2)^4$.

(6) $x \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^2)^3 - 2(x^3)^2$; (7) $(-4a^{m+1})^3 + [2(2a^m)^2 \cdot a]$.

(8) $x^2 \cdot x^4 + (x^3)^2 - 5x^6$ (9) $(-2a)^6 - (-3a^3)^2 + [- (2a)^2]^3$

【考点 15 利用幂的运算进行简便计算】

【例 15】计算 $0.25^{100} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{101} \times 8^{101} =$ _____.

【变式 15-1】计算 $(-0.25)^{2022} \times 4^{2021}$ 的结果是（ ）

A. -1

B. 1

C. 0.25

D. 44020

【变式 15-2】用简便方法计算： $-3^5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \times (-5)^6$

【考点 16 幂的运算中的新定义问题】

【例 16】阅读材料：

定义：如果 $10^a = n$ ，那么称 a 为 n 的劳格数，记为 $a = d(n)$ ，

例如： $10^2 = 100$ ，那么称 2 是 100 的劳格数，记为 $2 = d(100)$ 。

填空：根据劳格数的定义，在算式 $a = d(1000)$ 中，_____ 相当于定义中的 n ，所以 $d(1000) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

直接写出 $d(10^{-8}) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

探究：某数学研究小组探究劳格数有哪些运算性质，以下是他们的探究过程

若 a 、 b 、 m 、 n 均为正数，且 $10^a = p$ ， $10^b = q$ ，

根据劳格数的定义： $d(p) = a$ ， $d(q) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

$\because 10^a \cdot 10^b = pq$

$\therefore 10^{a+b} = pq$ ，这个算式中，_____ 相当于定义中的 a ，_____ 相当于定义中的 n ，

$\therefore d(pq) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，即 $d(pq) = d(p) + d(q)$ ，

请你把数学研究小组探究过程补全

拓展：根据上面的推理，你认为： $d\left(\frac{m}{n}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式 16-1】(2022·北京·清华附中八年级期中)定义一种新运算 (a, b) ，若 $a^c = b$ ，则 $(a, b) = c$ ，例 $(2, 8) = 3$ ， $(3, 81) = 4$ 。若 $(3, 5) + (3, 7) = (3, x)$ ，则 x 的值为_____。

【变式 16-2】(2022·江苏连云港·七年级期中)阅读下列材料：小明为了计算 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021}$ 的值，采用以下方法：

设 $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021}$ ①

则 $2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$ ②

②-①得， $2S - S = S = 2^{2022} - 1$ 。

请仿照小明的方法解决以下问题：

(1) $2 + 2^2 + \dots + 2^{20} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 求 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{50}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 求 $(-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{100}$ 的和；(请写出计算过程)

(4) 求 $a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n$ 的和 (其中 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$)。(请写出计算过程)

第9章 整式乘法与因式分解

一、知识回顾

1. 整式乘法：

(1) 单项式乘单项式法则，(2) 单项式乘多项式法则，(3) 多项式乘多项式法则，
(4) 乘法公式：完全平方公式_____平方差公式_____.

2. 因式分解：

(1) 因式分解与整式乘法的关系：_____.
(2) 因 式 分 解 的 一 般 思 路：_____.

二、典型例题

例 1. 计算：

$$(1) (5a - \frac{1}{5}b)^2$$

$$(2) (-\frac{1}{3}x - 1)(\frac{1}{3}x - 1)$$

$$(3) (m - n - 3)^2$$

$$(4) (x - 2y + 3z)(x + 2y - 3z)$$

(5) 先化简，再求值： $(x - 5y)(-x - 5y) - (-x - 5y)^2$ ，其中 $x=0.5$ ， $y=-1$.

例 2. 若 $(x^2 - mx + 2)(2x + 1)$ 的积中 x 的二次项系数和一次项系数相等，求 m 的值.

例 3. 分解因式：

$$(1) -x^3 + 2x^2y - xy^2$$

$$(2) x^2(x - 2) + 4(2 - x)$$

$$(3) (b^2 + 9)^2 - 36b^2$$

$$(4) (x - 3)(x + 1) + 4$$

例 4. 利用分解因式说明： $25^7 - 5^{12}$ 能被 60 整除.

例 5. 已知 $a(a-2)-(a^2-2b)=-4$. 求代数式 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab$ 的值.

例 6. (1) 如果 $9x^2+kx+1$ 是一个完全平方式, 那么 $k=$ _____.

(2) 如果 $x^2-2(m-1)x+1$ 是一个完全平方式, 那么 m 的值_____.

例 7. (1) 若 $m^2+n^2+2m-6n+10=0$, 则 $m=$ _____, $n=$ _____.

(2) 求证: 无论 x, y 为何值, $4x^2-12x+9y^2+30y+35$ 的值恒为正.

(3) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, 说明 $a^2-2ab+b^2-c^2$ 的值小于 0.

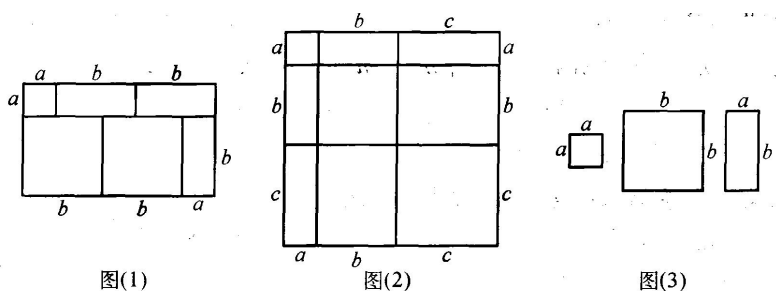
例 8. 已知长方形的长为 a , 宽为 b , 周长为 16, 两边的平方和为 14.

(1) 求此长方形的面积; (2) 求 $ab^3+2a^2b^2+a^3b$ 的值.

例 9. 我们知道, 对于一个图形, 通过两种不同的方法计算它的面积, 可以得到一个数学等式. 例如图(1)可以得到 $(a+2b)(a+b)=a^2+3ab+2b^2$. 请解答下列问题:

(1) 写出图(2)中表示的数学等式;

(2) 利用 (1) 中得到的结论, 解决下面的问题: 已知 $a+b+c=11, ab+bc+ac=38$, 求 $a^2+b^2+c^2$ 的值;



(3) 图(3)中给出了若干个边长为 a 和边长为 b 的小正方形纸片及若干个边长分别为 a, b 的长方形纸片, 请利用所给的纸片拼出一个几何图形, 使得用两种不同的方法计算它的面积时, 能够得到数学公式:

$$2a^2+5ab+2b^2=(2a+b)(a+2b);$$

(4) 小明同学用 2 张边长为 a 的正方形, 3 张边长为 b 的正方形, 5 张边长分别为 a, b 的长方形纸片重新拼出一个长方形, 那么该长方形较长一边的边长为_____.

三、课后练习

1. 下列计算正确的是()

- A. $a + 2a^2 = 3a^2$ B. $a^8 \div a^2 = a^4$ C. $(a^3)^2 = a^6$
D. $a^3 \cdot a^2 = a^6$

2. 下列等式由左边向右边的变形中, 属于因式分解的是()

- A. $x^2 + 5x - 1 = x(x + 5) - 1$ B. $x^2 + 3x - 4 = x(x + 3 - \frac{1}{x})$
C. $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ D. $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

3. 如果 $a = (-2014)^0$, $b = (-\frac{1}{2})^{-2}$, $c = (-0.1)^2$. 则 a 、 b 、 c 的大小关系是()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

4. 若 $(x + 3)(2x - n) = 2x^2 + mx - 15$, 则()

- A. $m = -1, n = 5$ B. $m = 1, n = -5$ C. $m = -1, n = -5$
D. $m = 1, n = 5$

5. 若 a 、 b 都是有理数, 且 $a^2 - 2ab + 2b^2 + 4b + 4 = 0$, 则 ab 等于()

- A. 4 B. 8 C. -8 D. -4

6. 某种生物细胞的直径约为 $0.000056 m$, 用科学记数法表示为 m .

7. 已知 $s + t = 4$, 则 $s^2 - t^2 + 8t =$ _____.

8. 已知 $x^m = 6, x^n = 3$, 则 $x^{m-n} =$ _____; $(-x^m) \div x^{-n} =$ _____.

9. 已知 $(x - 1)^{x+2} = 1$, 则整数 $x =$ _____.

10. 已知 $m > 0$, 并且使得 $x^2 + (m - 2)x + 16$ 是完全平方式, 则 m 的值为_____.

11. 如果当 $x = 3$ 时, 式子 $px^3 + qx + 1$ 的值为 2023, 则当 $x = -3$ 时, 式子 $px^3 + qx + 1$ 的值是_____.

12. 计算: (1) $(-2ab^2)^2 \cdot (3a^2b - 2ab - 1)$; (2) $4(a - b)^2 - (2a + b)(-b + 2a)$;

(3) $(x + 3y)(x^2 + 9y^2)(x - 3y)$; (4) $(1 + x - y)(x + y - 1)$;

13. 因式分解: (1) $4m(m - n) + 4n(n - m)$; (2) $81(a - b)^2 - 16(a + b)^2$;

(3) $4(a + b)^2 - 12(a + b) + 9$; (4) $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$.

14. 若 $a+b=5$, $ab=6$, 求 a^4+b^4 的值.

15.

(1) 若 m 、 n 为任意有理数, 则 $4m^2+n^2$ _____ $4mn$ (填 “ $>$ 、 $<$ 、 \geq 、 \leq 、 $=$ ”);

(2) 阅读下列因式分解的过程, 再回答所提出的问题:

$$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2=(1+x)[1+x+x(x+1)]=(1+x)^2(1+x)=(1+x)^3$$

①上述分解因式的方法是_____法, 共应用了_____次;

②若分解 $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^{2023}$, 则需要应用上述方法_____次, 分解因式后的结果是_____;

③请用以上的方法分解因式: $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^n$ (n 为正整数), 必须有简要的过程.

16. 问题: 对于形如 $x^2+2xa+a^2$ 这样的二次三项式, 可以用公式法将它分解成 $(x+a)^2$ 的形式. 但对于二次三项式 $x^2+2xa-3a^2$, 就不能直接运用公式了. 此时, 我们可以在二次三项式 $x^2+2xa-3a^2$ 中先加上一项 a^2 , 使它与 x^2+2xa 的和成为一个完全平方式, 再减去 a^2 , 整个式子的值不变, 于是有:

$$\begin{aligned}x^2+2xa-3a^2 &= (a^2+2ax+a^2)-a^2-3a^2 = (x+a)^2-4a^2 = (x+a)^2-(2a)^2 \\&= (x+3a)(x-a)\end{aligned}$$

像这样, 先添一适当项, 使式中出现完全平方式, 再减去这个项, 使整个式子的值不变的方法称为“配方法”, 利用“配方法”, 解决下列问题:

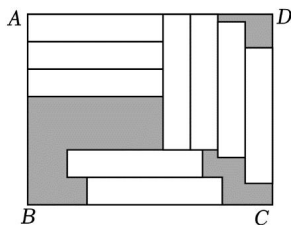
(1) 利用“配方法”分解因式: a^2-6a+8 ;

(2) 利用“配方法”比较代数式 x^2-1 与 $2x-3$ 的大小.

第 10 章 二元一次方程（组）

二元一次方程（组）

1. 已知 $x^{a-1} + y^{2b-3} = 1$ 是关于 x, y 的二元一次方程，则 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 方程 $3x - 5y = 9$ ，用含 x 的代数式表示 y 为（ ）
 A. $y = \frac{9-3x}{5}$ B. $x = \frac{9-5y}{3}$ C. $x = \frac{9+5y}{3}$ D. $y = \frac{3x-9}{5}$
3. 已知关于 x, y 的方程 $(m+2)x^{|m|-1} + y^{2n+m} = 5$ 是二元一次方程，求 m, n 的值.
4. 已知： $|2x - y - 3| + (4x - 3y - 5)^2 = 0$ ，则 x 和 y 的值为（ ）
 A. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$
5. 如图，长方形 $ABCD$ 中放置 9 个形状、大小都相同的小长方形， AD 与 AB 的差为 2，小长方形的周长为 14，则图中阴影部分的面积为（ ）



- A. 26 B. 25 C. 24 D. 23

二元一次方程组的解

6. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ ，则关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1(x+2022) + b_1(y-2022) = c_1 \\ a_2(x+2022) + b_2(y-2022) = c_2 \end{cases}$ 的解为（ ）
 A. $\begin{cases} x=2014 \\ y=-2019 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2024 \\ y=2025 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-2020 \\ y=-2019 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-2020 \\ y=2025 \end{cases}$
7. 我们知道二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ ，现给出另一个二元一次方程组 $\begin{cases} 2(2x+1) - 3(3y-1) = 3 \\ 3(2x+1) - 4(3y-1) = 5 \end{cases}$ ，它的解是（ ）
 A. $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$
8. 若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+y=11k \\ x-2y=7k \end{cases}$ 的解也是二元一次方程 $2x+3y=4$ 的解，则 k 的值为（ ）
 A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
9. 方程组 $\begin{cases} 2x-y=\triangle \\ x-y=4 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=-2 \\ y=\nabla \end{cases}$ ，则被 \triangle 和 ∇ 遮盖的两个数分别为（ ）
 A. -10, 6 B. 2, -6 C. 2, 6 D. 10, -6

10. 已知，关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-5y=36 \\ bx+ay=-8 \end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases} 2x+5y=-26 \\ ax-by=-4 \end{cases}$ 有相同的解.

(1) 求这两个方程组的相同解:

(2) 求 $(2a+b)^{2023}$ 的值.

用二元一次方程组解决问题

11. 方案类问题

例题: 宁波杨梅季，本地慈溪杨梅在宁波人的心中是一种家乡的味道. 今年是杨梅大年，菜杨梅种植大户为了能让居民品尝到物美价廉的杨梅，对 1000 斤的杨梅进行打包方式优惠出售. 打包方式及售价如下：圆篮每篮 8 斤，售价 160 元；方篮每篮 18 斤，售价 270 元. 假如用这两种打包方式恰好全部装完这 1000 斤杨梅.

(1) 若销售 a 篮圆篮和 a 篮方篮共收入 8600 元，求 a 的值；

(2) 当销售总收入为 16760 元时，

① 若这批杨梅全部售完，请问圆篮共包装了多少篮，方篮共包装了多少篮；

② 若杨梅大户留下 $b(b > 0)$ 篮圆篮送人，其余的杨梅全部售出，请确定该杨梅大户有几种包装方案.

12. 销售利润问题

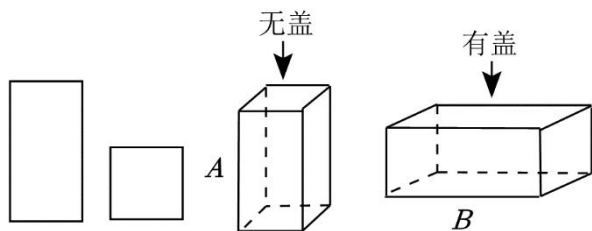
例题: 某商店决定购进 A 、 B 两种纪念品出售，若购进 A 种纪念品 10 件， B 种纪念品 5 件，则需要 215 元；若购进 A 种纪念品 5 件， B 种纪念品 10 件，则需要 205 元.

(1) 求 A 、 B 两种纪念品的购进单价；

(2) 已知商店购进两种纪念品 32 件，共花费 450 元，两种纪念品均标每件 18 元出售，其中有 5 件 B 种纪念品以七五折售出，求这 32 件纪念品的销售利润.

13. 几何类问题

如图，用若干张长方形纸板和正方形纸板作侧面和底面，制作 A 款（无盖包装盒）和 B 款（有盖包装盒）若干；现仓库有 360 张长方形纸板和 140 张正方形纸板，问 A、B 两款包装盒各做多少个时，仓库中的纸板刚好全部用完？



课后练习

二元一次方程（组）

1. 已知关于 x, y 的方程 $(m+2)x^{|m|-1} + y^{2n+m} = 5$ 是二元一次方程，求 m, n 的值。

二元一次方程组的解

2. 已知 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} mx+ny=7 \\ ny-mx=3 \end{cases}$ 的解，则 m, n 的值分别是（ ）

- A. $\begin{cases} m=-1 \\ n=5 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m=-1 \\ n=-5 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m=1 \\ n=5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m=1 \\ n=-5 \end{cases}$

3. 已知方程组 $\begin{cases} 5x+y=3 \\ x-2y=5 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} ax+2y=1 \\ 2x+by=8 \end{cases}$ 有相同的解，则 a, b 的值为（ ）

4. 关于 x, y 的两个方程组 $\begin{cases} ax-2by=2 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 3ax-5by=9 \\ 3x-y=11 \end{cases}$ 具有相同的解，则 $a+b$ 的值是（ ）

- A. -1 B. 5 C. 6 D. 不能确定

5. 若方程组 $\begin{cases} 2x+y=m \\ 2x-y=10 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=n \end{cases}$ ，小亮求解时不小心滴上了两滴墨水，刚好遮住了 m 和 n 两数，则这两数分别为（ ）

- A. 6 和 -2 B. 10 和 2 C. -6 和 4 D. 4 和 6

6. 我们知道二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 。现给出另一个二元一次方程组

程组 $\begin{cases} 2(2x+1)-3(3y-1)=3 \\ 3(2x+1)-4(3y-1)=5 \end{cases}$ ，它的解是（ ）

- A. $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

用二元一次方程组解决问题

7. 方案类问题：

去年年底，重庆疫情形势严峻，除了医务人员和志愿者们主动请缨走向抗疫前线，众多企业也纷纷伸出援助之手。某公司租用 A 、 B 两种货车向重庆运送抗疫物资，已知用 2 辆 A 型车和 3 辆 B 型车载满货物一次可运物资 21 吨；用 1 辆 A 型车和 4 辆 B 型车载满货物一次可运物资 23 吨。

(1) 求 1 辆 A 型车和 1 辆 B 型车都装满货物一次可分别运送多少吨物资？

(2) 现有 60 吨抗疫物资需要运往重庆，该公司计划同时租用 A 型车和 B 型车（两种型号车均要租用），一次运完，且恰好每辆车都装满货物。若 A 型车每辆需租金 1000 元/次， B 型车每辆需租金 1500 元/次。那么该公司有哪几种租车方案，并且哪种方案租车费用最少。

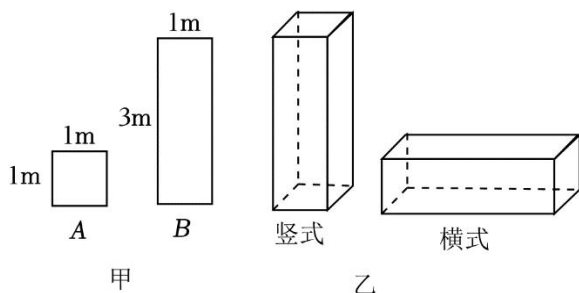
8. 几何类问题

某工厂准备用图甲所示的 A 型正方形板材和 B 型长方形板材，制作成图乙所示的竖式和横式两种无盖箱子。

(1) 若现有 A 型板材 120 张， B 型板材 240 张，可制作竖式和横式两种无盖箱子各多少个？

(2) 若该工厂准备用 12000 元资金去购买 A 、 B 两种型号板材，制作竖式，横式箱子共 100 个，已知 A 型板材每张 10 元， B 型板材每张 30 元，发现资金恰好用完，问可以制作竖式箱子多少个？

(3) 若该工厂新购得 65 张规格为 $3m \times 3m$ 的 C 型正方形板材，将其全部切割成 A 型或 B 型板材（不记损耗），用切割的板材制作成两种类型的箱子，要求竖式箱子不少于 10 个，且材料恰好用完，则最多可以制作竖式箱子多少个？



第 11 章 一元一次不等式

课堂例题

不等式的基本性质

1. 若 $a < b$ ，则下列结论不一定成立的是()

- A. $a-1 < b-1$ B. $2a < 2b$ C. $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$ D. $a^2 < b^2$

2. 若实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是()



- A. $a+c > b+c$ B. $a-c < 0$ C. $ac > bc$ D. $|c| > |b|$

3. 【阅读】在证明命题“如果 $a > b > 0$ ， $c < 0$ ，那么 $a^2 + bc > ab + ac$ ”时，小明的证明方

法如下：

证明： $\because a > b > 0$ ，

$\therefore a^2 > \underline{\hspace{1cm}} \therefore a^2 + bc > \underline{\hspace{1cm}}$.

$\because a > b$ ， $c < 0$ ，

$\therefore bc > \underline{\hspace{1cm}} \therefore ab + bc > \underline{\hspace{1cm}}$.

$\therefore a^2 + bc > ab + ac$.

【问题解决】

(1) 请将上面的证明过程填写完整；

(2) 有以下几个条件：① $a > b$ ，② $a < b$ ，③ $a < 0$ ，④ $b < 0$ 。

请从中选择两个作为已知条件，得出结论 $|a| > |b|$ 。

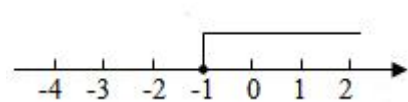
你选择的条件序号是 ，并给出证明过程。

解一元一次不等式

4. 若关于 x 的不等式 $x \leq a+5$ 恰有 3 个正整数解，则字母 a 的取值范围是()

- A. $a \leq -1$ B. $-2 \leq a < -1$ C. $a < -1$ D. $-2 < a \leq -1$

5. 关于 x 的不等式 $x-a \geq 3$ 的解集如图所示，则 a 的值是 。



6. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x-y=1+3m \\ x+3y=1+m \end{cases}$ ，且 $-1 < x \leq 2$ ，则 y 的取值范围是 。

7. 小明的数学研学作业单上有这样一道题：已知 $-x+y=2$ ，且 $x < 3$ ， $y \geq 0$ ，

设 $w = x + y - 2$ ，

那么 w 的取值范围是什么？

【回顾】

小明回顾做过的一道简单的类似题目：已知： $-1 < x < 2$ ，设 $y = x+1$ ，那么 y 的取值范围是 。（请你直接写出答案）

【探究】

小明想：可以将研学单上的复杂问题转化为上面回顾的类似题目。

由 $-x+y=2$ 得 $y=2+x$ ，则 $w = x + y - 2 = x + 2 + x - 2 = 2x$ ，

由 $x < 3$, $y \geq 0$, 得关于 x 的一元一次不等式组 _____,

解该不等式组得到 x 的取值范围为 _____,

则 w 的取值范围是 _____.

【应用】

(1) 已知 $a - b = 4$, 且 $a > 1$, $b < 2$, 设 $t = a + b$, 求 t 的取值范围;

(2) 已知 $a - b = n$ (n 是大于 0 的常数), 且 $a > 1$, $b \leq 1$, $2a + b$ 的最大值为 _____ (用含 n 的代数式表示);

【拓展】

若 $3x = 6y + 12 = 2z$, 且 $x > 0$, $y \geq -4$, $z \leq 9$, 设 $m = 2x - 2y - z$, 且 m 为整数, 那么 m 所有可能的值的和为 _____.

8. 已知 x 、 y 满足 $3x + 2y = 6$.

(1) 若 y 满足 $y > 3$, 求 x 的取值范围;

(2) 若 x 、 y 满足 $-3x + 2y = k$, 且 $x < \frac{1}{2}$, $y \geq 1$, 求 k 的取值范围.

一元一次不等式组

9. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x < a \end{cases}$ 有解, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq -2$ B. $a < -2$ C. $a \geq -2$ D. $a > -2$

10. 已知关于 x 、 y 的方程 $ax - 3y = 4$, 给出以下结论: ①将方程化为 $y = kx + m$

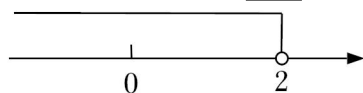
的形式, 则 $m = \frac{4}{3}$; ②若 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$ 是方程 $ax - 3y = 4$ 的解, 则 $a = -8$; ③当 $a = 5$ 时,

方程满足 $-10 \leq x \leq 10$ 的整数解有 7 个; ④当 $a = -2$ 且 $-2 < x \leq 1$ 时, y 的取值范围为 $-2 < y \leq 0$. 其中正确的结论是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④

11. 如图, 数轴上表示的是关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} x - m < 0 \\ 2(x + 1) > 3x \end{cases}$ 的解集, 则 m

的取值范围是 _____.



12. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} x - m < 0 \\ 2x + 1 > 3 \end{cases}$ 仅有 2 个整数解, 则 m 的取值范围

是 _____.

13. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x+1 > x+a \\ x-1 \leq \frac{2x+a+2}{3} \end{cases}$ (a 为整数) 的所有整数解的和 S 满

足 $21.6 \leq S < 33.6$ ，则所有这样的 a 的和为_____.

14. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=5m+3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$ (m 是常数).

(1) 若方程组的解满足 $3x+y=14$ ，求 m 的值；

(2) 若方程组的解满足 $x-3y \leq 5$ ，求 m 的取值范围.

15. 已知非负数 x, y 满足 $\frac{x-2}{4} = \frac{3-y}{3} = k$ ，设 $L = 2x + y - 3k$.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 求满足条件的 L 的所有整数值.

用一元一次不等式解决问题

16. 党的十八大以来，党中央把脱贫攻坚工作纳入“五位一体”总体布局和“四个全面”战略布局，作出一系列重大部署和安排，全面打响脱贫攻坚战. 为帮助苏州市对口扶贫城市某省 A 市将 58 吨水果运往外地销售，苏州市某公司计划租用 A, B 两种车型的箱式货车共 9 辆，其中 A 型箱式货车至少要租 2 辆. 两种货车的运载量和运费如下表所示：

车型	A	B
运载量（吨/辆）	5	8
运费（元/辆）	1000	1200

(1) 请写出符合公司要求的租车方案，并说明理由；

(2) 若将这批水果一次性运送到水果批发市场，那么哪种租车方案运费最少？并求出最少运费.

17. 我市对居民生活用水实行“阶梯水价”. 小李和小王查询后得知: 每户居民年用水量 180 吨以内部分, 按第一阶梯到户价收费; 超过 180 吨且不超过 300 吨部分, 按第二阶梯到户价收费; 超过 300 吨部分, 按第三阶梯到户价收费. 小李家去年 1-9 月用水量共为 175 吨,

10 月、11 月用水量分别为 25 吨、22 吨, 对应的水费分别为 118.5 元、109.12 元.

(1) 求第一阶梯到户价及第二阶梯到户价 (单位: 元/吨);

(2) 若小王家去年的水费不超过 856 元, 试求小王家去年年用水量的范围 (单位: 吨, 结果保留到个位).

课后练习

不等式的基本性质

1. 若 $a < b$, 则下列不等式一定成立的是 ()

A. $a + 2c < b + 2c$ B. $2c - a < 2c - b$ C. $a + 2c > b + 2c$ D. $2ac < 2bc$

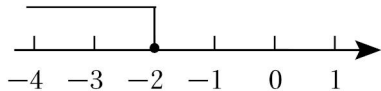
2. 已知 $a > b > c$, 则下列结论不一定成立的是 ()

A. $a + c > b + c$ B. $ac > bc$ C. $4a - c > 4b - c$ D. $c - 2a < c - 2b$

3. 命题“若 $a \geq b$, 则 $ac \geq bc$ ”是____命题. (填“真”或“假”)

解一元一次不等式

4. 关于 x 的不等式 $a - x \geq 2$ 的解集如图所示, 则 a 的值是 ____.



5. 不等式 $2x - 1 < 5$ 的正整数解为 ____.

6. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x + 2y = 3m + 1 \\ 3x - y = 2m + 3 \end{cases}$, 且 x, y 满足 $x + y > 3$. 则

m 的取值范围是 ____.

7. 已知 $x - 2y = 3$ 且 $x \geq y$. 若 $k = 3x - 5y$, 则 k 的最小值为 ____.

8. 已知 $a + b - 1 = 0$, 且 $a > b > -1$, 则 a 的取值范围为 ____.

9. 已知 $2^{x+y} = 1$, 且 $-1 < x < 2$, 则 y 的取值范围是 ____.

10. n 边形的内角和比它的外角和至少大 120° , n 的最小值是 ____.

11. 解不等式: $2x - 3 > -\frac{x}{3} + 4$ $3(x - 2) + 1 < -2$

12. 对非负实数 x “四舍五入”到个位的值记为 $\langle x \rangle$. 即当 n 为非负整数时, 若 $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$, 则 $\langle x \rangle = n$. 如: $\langle 3.2 \rangle = 3$, $\langle 3.5 \rangle = 4$, $\langle 3.8 \rangle = 4$. 根据

以上材料, 解决下列问题:

- (1) 填空: $\langle 3.45 \rangle =$ _____;
- (2) 若 $\langle 2x+1 \rangle = 3$, 求 x 满足的条件;
- (3) 下面两个命题: ①如果 $x \neq 0$, m 为非负整数, 那么 $\langle x+m \rangle = m + \langle x \rangle$; ②如果 $x \geq 0$, k 为非负整数, 那么 $\langle kx \rangle = k \langle x \rangle$; 请判断在这两个命题中属于假命题的是 _____, 并举反例说明;
- (4) 满足 $\langle x \rangle = \frac{2}{3}x + 1$ 的所有非负实数 x 的值为 _____.

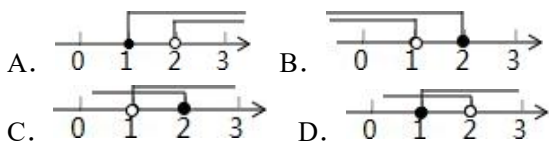
13. 我们定义: 如果两个一元一次不等式有公共解, 那么称这两个不等式互为“云不等式”,

其中一个不等式是另一个不等式的“云不等式”.

- (1) 在不等式① $2x-1 < 0$, ② $x \leq 2$, ③ $x - (3x-1) < -5$ 中, 不等式 $x \geq 2$ 的“云不等式”是 _____; (填序号)
- (2) 若关于 x 的不等式 $x+2m \geq 0$ 不是 $2x-3 < x+m$ 的“云不等式”, 求 m 的取值范围;
- (3) 若 $a \neq -1$, 关于 x 的不等式 $x+3 \geq a$ 与不等式 $ax-1 < a-x$ 互为“云不等式”, 求 a 的取值范围.

一元一次不等式组

14. 不等式组 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 4-2x \geq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示为 ()



15. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2(x+1) > 4 \\ x > a \end{cases}$ 的解集是 $x > 1$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a < 1$ B. $a \leq 1$ C. $a > 1$ D. $a \geq 1$

16. 请写出一个解集是 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 的不等式组: _____.

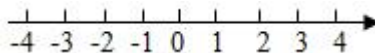
17. 已知 $2-a$ 和 $3-2a$ 的值的符号相反，则 a 的取值范围是_____.

18. 如果不等式组 $\begin{cases} x > 1 \\ x \leq m \end{cases}$ 恰有 2 个正整数解，则实数 m 的取值范围是 _____.

19. 若不等式组 $\begin{cases} 4x-1 \geq x+8 \\ x \leq m \end{cases}$ 只有一个整数解，则 m 的取值范围是_____.

20. 解不等式组 $\begin{cases} x-2(x-1) \geq 2 \\ \frac{1+x}{3} > x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x \leq 9 \\ x > -2 \\ 2(x+1) < x+3 \end{cases}$

21. 解不等式组: $\begin{cases} 2(x-1) < x+2 \\ \frac{x+1}{2} < x \end{cases}$ ，把它解集在数轴上表示出来，并写出它的最大整数解.



22. 已知方程组 $\begin{cases} x+y=6-m \\ x-y=2+3m \end{cases}$ 的解满足 x 、 y 均为非负数.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 当 m 为绝对值最小值数时，求原方程组的解.

23. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > -1 \\ x < 4 \\ x \leq 1-k \end{cases}$.

(1) 当 $k=-2$ 时，求不等式组的解集;

(2) 若不等式组的解集是 $-1 < x < 4$ ，求 k 的范围;

(3) 若不等式组有 3 个整数解，求 k 的范围.

用一元一次不等式解决问题

24. 某公司有甲、乙两个口罩生产车间，甲车间每天生产普通口罩 6 万个，N95 口罩 2.2 万个. 乙车间每天生产普通口罩和 N95 口罩共 10 万个，且每天生产的普通口罩比 N95 口罩多 6 万个.

(1) 求乙车间每天生产普通口罩和 N95 口罩各多少万个？

(2) 现接到市防疫指挥部要求：需要该公司提供至少 156 万个普通口罩和尽可能多的 N95 口罩. 因受原料和生产设备的影响，两个车间不能同时生产，且当天只能确保一个车间的生产. 已知该公司恰好用 20 天完成防疫指挥部下达的任务.

问：①该公司至少安排乙车间生产多少天？

②该公司最多能提供多少个 N95 口罩？

25. 大浮杨梅是我市特色水果，古称“吴越佳果”. 某水果店以 20 元/千克的价格购进一批杨梅，由于销售状况良好，该店再次购进同一种杨梅，第二次进货价格比第一次每千克便宜了 0.5 元. 该水果店两次共购进杨梅 110 千克，共花去 2160 元.

(1) 该水果店两次分别购买了多少千克的杨梅？

(2) 在销售中，尽管两次进货的价格不同，但水果店仍以相同的价格售出，若第一次购进的杨梅有 10% 的损耗，第二次购进的杨梅有 15% 的损耗，该水果店希望售完这些杨梅获利不低于 500 元，则该杨梅每千克售价至少为多少元？

26. 某公园的门票价格如表所示：

购票人数	1~50	51~80	100 以上
票价（元/人）	10	8	5

某校七年级甲、乙两个班共 100 多人去该公园举行游园活动，其中甲班有 50 多人，乙班不足 50 人．如果以班为单位分别买门票，两个班一共应付 928 元；如果两个班联合起来作为一个团体购票，一共只要 520 元．

（1）甲、乙两班分别有多少人？

（2）游园过程中，学校组织全体学生坐船游玩“畅沁湖”．坐小船 4 人一艘，每艘小船价格 20 元；坐大船 8 人一艘，每艘大船价格 50 元，领队只剩下 620 元．在保证每艘船都坐满的情况下，请问至少需要租多少艘小船？

27. 为了增强公民的节水意识，合理利用水资源，某市出台了居民用水“阶梯价格”制度来引导市民节约用水，下表是用水价格的标准：

阶梯	一户居民每月用水量 （单位：立方米）	水费价格 （单位：元/立方米）
一档	不超过 15 立方米	a
二档	超过 15 立方米的部分	b

已知该市某户居民今年 4 月份用水 16 立方米，缴纳水费 50 元；5 月份用水 20 立方米，缴纳水费 70 元．

（1）求出表格中 a 、 b 的值；

（2）6 月份是用水高峰期，该户居民计划 6 月份水费支出不超过 85 元，那么该户居民 6 月份最多可用水多少立方米？