

Métodos III - Derivadas

February 19, 2019

0 Introducción

Jose A. Hernando

Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela
Enero 2019

```
In [2]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

Last version Sat Feb 2 17:51:11 2019

0.1 ¿Cómo acceder a los apuntes interactivos?

Los apuntes interactivos están en Jupyter Notebook. Un Jupyter NB permite combinar en una página web en distintas celdas de texto (también latex) y código *Python*, que se pueden ejecutar interactivamente. Para saber más de los Jupyter Notebook visita: <https://jupyter.org>

- En tu ordenador, accede a la página: <https://github.com/jahernando/USC-MMIII> (no funciona para teléfonos)
- Puedes ver de forma estática los Jupyter NB clicando en los ficheros con extensión '.ipynb' en tu navegador

Métodos para acceder al repositorio:

1. Puedes descargar el repositorio a tu ordenador local, pulsando el botón de la derecha, *Clone or Download* y luego *Download Zip*. Abre a continuación el paquete '.zip' para acceder a los Jupyter NB que están en su interior.
2. Puedes copiar localmente, *clonar*, el repositorio, en el mismo botón *Clone or Download*, copiando la dirección URL, (la dirección junto al dibujito de copiar).
 - En Linux o Max, abre una terminal, una consola, sitúate en el directorio que prefieras y ejecuta
 1. `git clone https://github.com/jahernando/USC-MMIII.git`
 2. `jupyter-notebook` y debería abrirse tu navegador y en una página web ver el listado de los ficheros del repositorio, cliquea en uno: `tderivadas_introduccion.ipynb` y debería abrirse en una pestaña de tu navegador.

- (método pro) Hazte una cuenta en github (es gratis), ves a la página github del repositorio del curso, <https://github.com/jahernando/USC-MMMIII>, cliquea el botón de arriba, *fork*.
 - Aparecerá en tu espacio de github el repositorio *USC-MMMIII*, que puedes ahora clonarlo via: *git clone*

Métodos para actualizar tu repositorio local (si el profesor añadió material nuevo o lo modificó en remoto, en github):

1. Puedes descargarte de nuevo el fichero '.zip'
2. Si clonaste el repositorio puedes hacer, en una consola y en el directorio donde tienes el repositorio:
 - *git fetch*

0.2 Objetivos

Presentar los conceptos fundamentales del primer tema:

- funciones escalares y vectoriales
- derivadas de funciones de varias dimensiones
- desarrollo de Taylor de funciones de varias dimensiones
- máximos y mínimos de funciones de varias dimensiones

a través de cuestiones sobre algunas gráficas.

```
In [3]: # general imports
        %matplotlib inline

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        import scipy.stats as stats

        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        # possible styles: ggplot (simplicity), bmh (scientific data),
        matplotlib.style.use('ggplot')
```

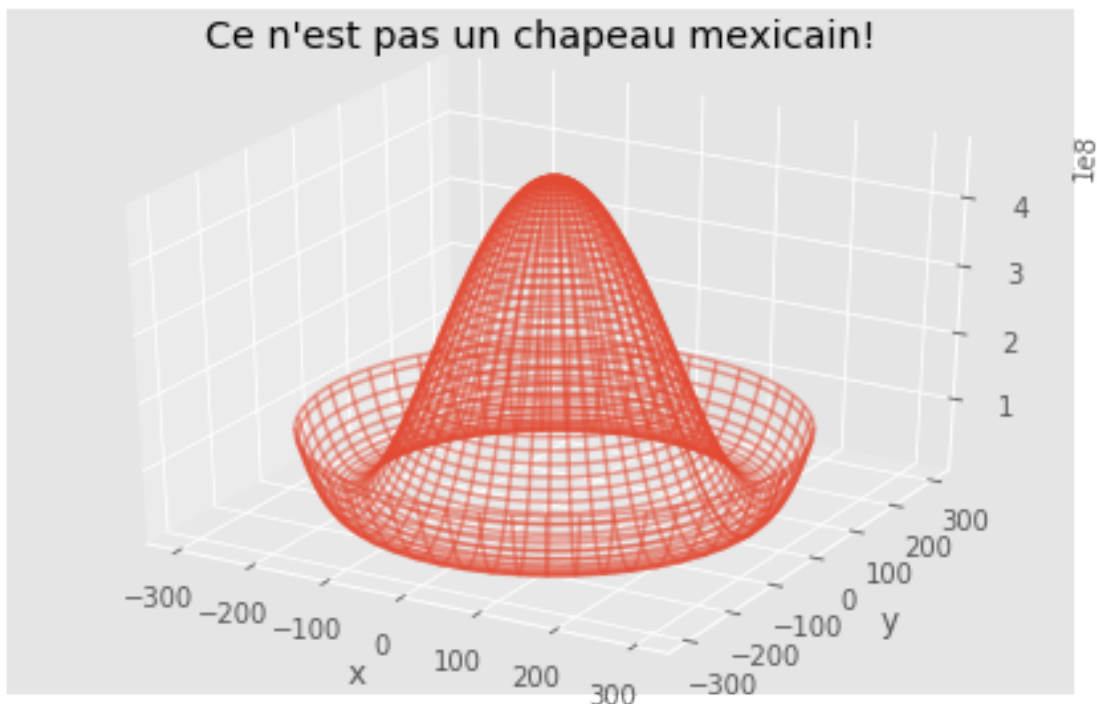
Observa la siguiente figura:

```
In [2]: # create a grid in the [-300, 300] x [-300, 300] region
        rs = np.linspace(0., 300, 100)
        phis = np.linspace(0., 2*np.pi, 100)
        # create xms, yms, the mesh used for the function
        rms, pms = np.meshgrid(rs, phis)
        # compute the values of the Higgs potential for the points in the grid
```

```

k = 0.13; v = 246. # GeV2
vms = k*(rms**4) - 2*k*(v**2)*(rms**2) + k*(v**4)
xms = rms * np.cos(pms)
yms = rms * np.sin(pms)
# draw them!
fig = plt.figure() # figsize=(9, 7)
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot_wireframe(xms, yms, vms, cmap='hot', alpha = 0.5);
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y'); plt.title("Ce n'est pas un chapeau mexicain!")
plt.tight_layout();

```



0.3 Cuestiones

Cuestiones sobre continuidad y límites

Supongo que recuerdas los conceptos de límite, continuidad y derivada de funciones de una dimensión, con ellos en mente, intenta contestar a las siguientes cuestiones, fundamentalmente con palabras y quizás con algún dibujo.

- ¿Qué es esta figura? ¿Qué forma tiene? Descríbela.
- ¿Es continua la función que da lugar a esta gráfica? ¿Tiene límite en el origen? ¿Y en resto de los puntos?

La anterior figura es una gráfica de una función escalar de dos dimensiones. Para cada valor del plano (x, y) le asociamos un valor de z igual al valor de la función, $f(x, y)$

Cuestiones sobre derivadas

- Sabemos que el concepto de derivada de una función de una dimensión está relacionado con la pendiente de su gráfica. En este caso, ¿crees que se puede extender el concepto de pendiente a la función de la gráfica de la figura?
- Pero es algo más complicado ¿no? Ahora depende de hacia qué dirección se mueva uno. Imagina que nos colocamos en el origen del plano $(0,0)$, y nos desplazamos a lo largo del eje x . ¿Cómo será la pendiente de la gráfica? ¿Puedes hacer un dibujo aproximado de la pendiente a lo largo del eje x ?
- Ahora colócate a una distancia del origen y muévete a lo largo de una circunferencia, eso sí, centrada en el origen. ¿Cambia la pendiente? ¿Cómo es el valor de la función en todos los puntos de esa circunferencia?
- Intenta ahora quedarse sólo con los puntos de la gráfica que están a una misma altura. Si proyectas esos puntos sobre el plano horizontal, el plano (x,y) . ¿Qué figura geométrica obtienes? ¿Es una circunferencia?

Cuestiones sobre la simetría

- ¿Esta gráfica tiene alguna simetría? Imagina la situación siguiente: te venden los ojos y mientras no puedes ver, giro (o no) la figura respecto al eje z un determinado ángulo, luego te quito la venda y te pregunto: ¿puedes decirme si he girado la figura?
- Habitualmente usamos las coordenadas cartesianas (x,y) pero en este caso, ¿crees que hay otras coordenadas que facilitan el dibujo de la gráfica, que reflejan que la gráfica tiene una simetría? ¿Cuáles serían?
- Intenta leer ahora el código *Python* de la celda que crea la figura. ¿Cuáles son las variables que se han utilizado para dibujarla? ¿Puedes decir qué son las variables *rs* y las variables *phis* del código?
- Secciona ahora la gráfica de forma vertical, (cártala como si tuvieses un cuchillo), eso sí, pasando siempre por el origen. ¿Cuál es la sección de la superficie que quedaría? ¿Sería la misma independiente de en qué ángulo cortes la gráfica?

Cuestiones sobre máximos y mínimos

- ¿Te acuerdas cómo se calculaban los máximos y los mínimos en funciones de una dimensión? Fíjate de nuevo en la gráfica. ¿Identificas el máximo local? ¿Y los mínimos? ¿Cuánto crees que valdría la pendiente de la gráfica en los puntos mínimos y máximos?
- La superficie *parece* una superficie, pero fíjate bien, en realidad *no es* exactamente una superficie, solo lo parece. ¿Cómo está dibujada? Supongo que te has dado cuenta, es obvio aunque a veces cuesta verlo: está dibujada con una especie de piecitas, como con teselas de un mosaico.

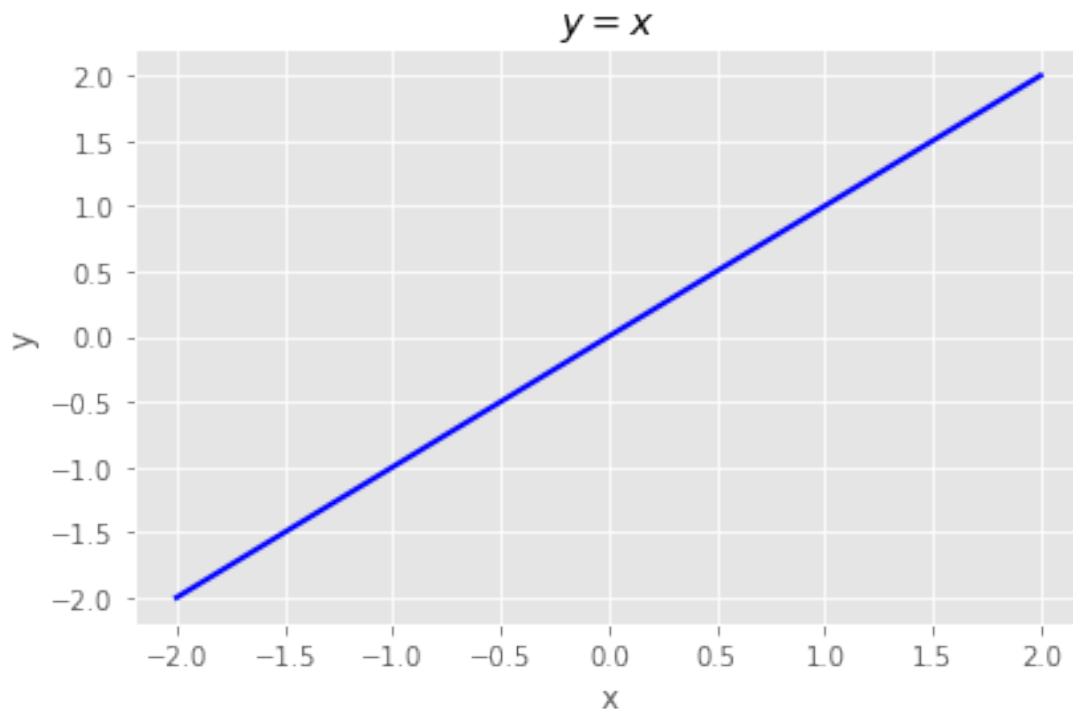
- Recuerda por un momento el desarrollo de Taylor de una función de una dimensión. En primer orden, podíamos aproximar en un intervalo pequeño, la gráfica de la función a una recta, cuya pendiente era, claro, la derivada. Ahora fíjate de nuevo en las teselas del mosaico. Tienen pinta de ser pequeños trozos de plano ¿verdad? Uno podría decir que si una función escalar de dos dimensiones, como la de la figura, tiene desarrollo de Taylor de primer orden, su gráfica en un trozo pequeñito se podrá aproximar a un ... (está claro, ¿no?).

0.4 Ejercicios

Vamos a hacer unos ejercicios sencillos:

1. En la siguiente celda, dibujamos una recta que pasa por el origen y que tiene pendiente unidad. Fíjate en el código. Ahora, ¿puedes dibujar la recta que pasa por el punto $(1, -1)$ con pendiente -1 ?

```
In [3]: # create a partition of interval [-2, 2] in 100 bins
xs     = np.linspace(-2., 2., 100)
# the parameters of the straight line, a: slope, b: offset
a, b = 1., 0.
# the equation of the straight line, y is now an array of the same dimension of x,
ys     = a*xs + b
# plot the straight line with blue color and line width 2
plt.plot(xs, ys, color='blue', lw=2);
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y'); plt.title('$y = x$')
plt.tight_layout();
```

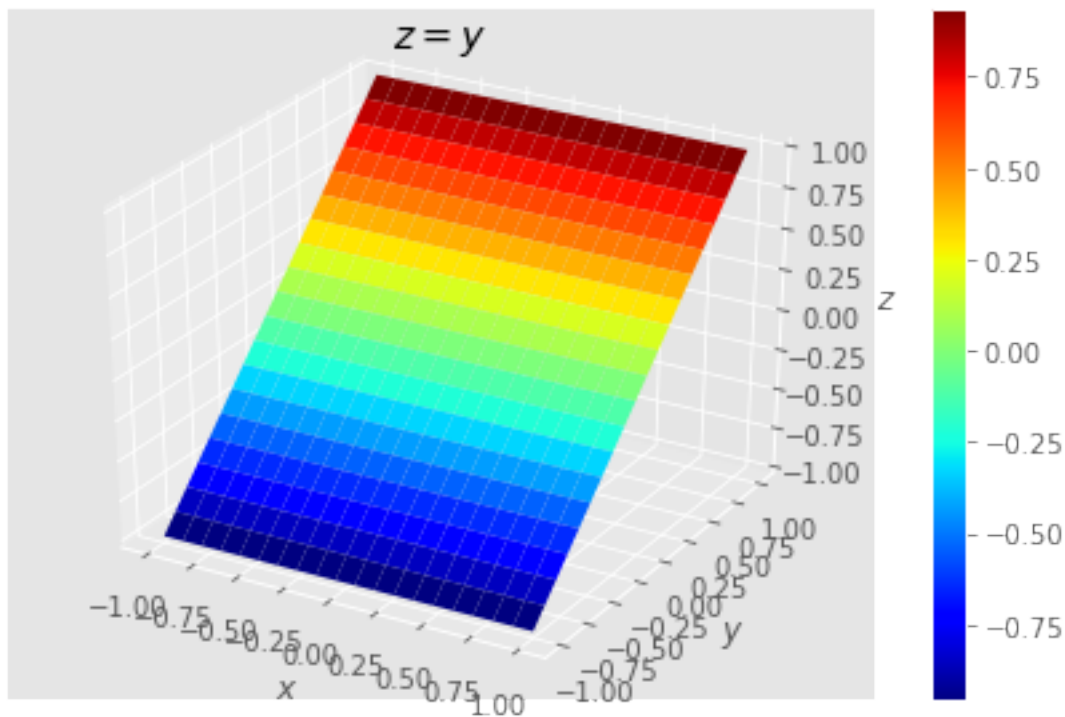


2. También hemos dibujado un plano, en este caso, el plano que pasa por el origen, sin pendiente en la dirección x y pendiente 1 en la dirección y , esto es $z = y$. Fíjate nuevamente en cómo lo hemos dibujado y cómo la altura también esta marcada por la regla de color. Ten cuidado, a veces no queda claro dónde está el origen.

2.a) ¿Crees que puedes dibujar el plano que pasa por el origen y tenga pendiente 1 en x y pendiente +1 en y ? ¿Y un plano con esas pendientes pero que pase por el punto $(0, 0, 1)$?

2.b) Hagámoslo un poco más difícil: dibuja el plano que pasa por el punto $(1, 1, 0)$ con pendiente -1 en la dirección x y -1 en y ?

```
In [4]: fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1, projection='3d')
# create two arrays, xs, ys, between [-1., 1.] of 20 bins
xs = np.linspace(-1., 1., 20)
ys = np.linspace(-1., 1., 20)
# create a 2D mesh with the (xs, ys),
xms, yms = np.meshgrid(xs, ys)
# Slope in x: a, slope in y: b, z-offset at origin: c
a, b, c = 0., 1., 0.
# zms is the values of the plane
zms = a*xms + b*yms + c
# plot
sf = ax.plot_surface(xms, yms, zms, cmap='jet'); fig.colorbar(sf, ax=ax)
ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylabel('$y$'); ax.set_zlabel('$z$'); ax.set_title('$z = y$')
fig.tight_layout();
```

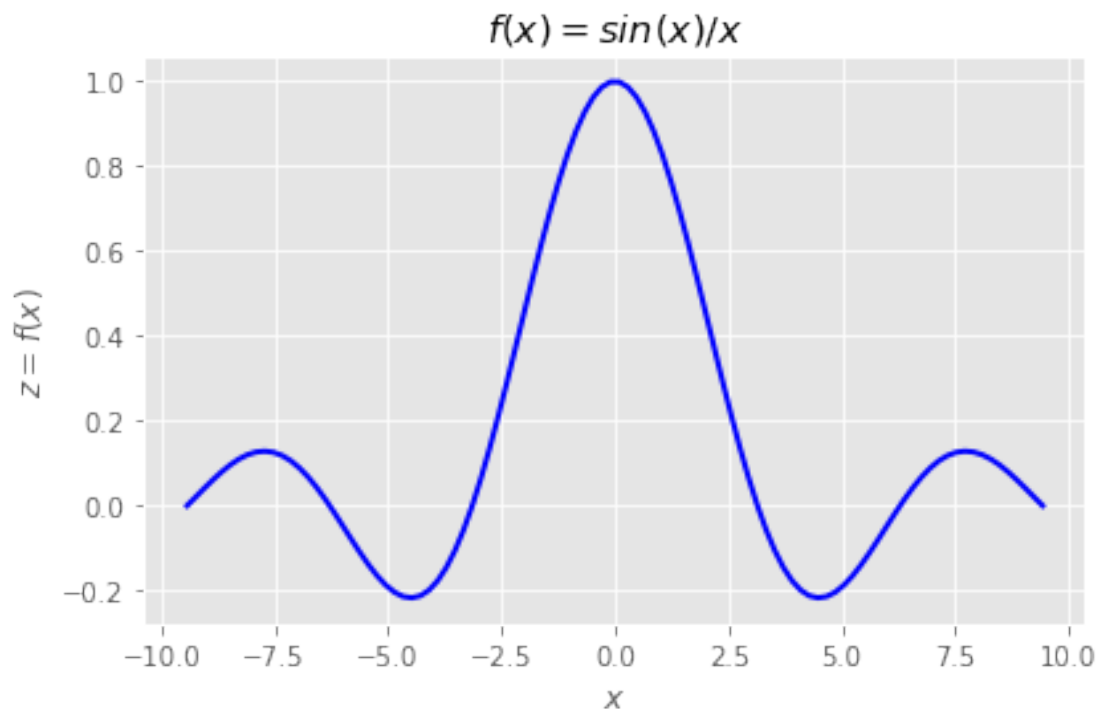


3. Por último mira el código de esta tercera celda y la gráfica de la función de una dimensión, $f(x) = \sin(x)/x$. Refresca tus conocimientos y calcula el límite de esa función en el origen.

Imagina ahora que los valores de $f(x)$ están en el eje z y que haces girar la gráfica en torno a ese eje. ¿Te imaginas cómo quedaría la figura? ¿Puedes intentar escribir el código y dibujarla? Ayúdate del ejemplo con el que hemos empezado esta sección, el del sombrero mexicano. ¿Dónde estarían los máximos y mínimos de esta nueva gráfica?

```
In [5]: # create an array between [-3 pi, 3 pi] with 100 bins
xs = np.linspace(-3.*np.pi, 3.*np.pi, 100)
# compute the function sin(x)/x for the xs array
ys = np.sin(xs)/xs

# plot the arrays, that simulates plotting the function
plt.plot(xs, ys, color='blue', lw=2)
plt.xlabel('$x$'); plt.ylabel('$z = f(x)$'), plt.title('$f(x) = \sin(x)/x$')
plt.tight_layout();
```



0.5 ¡Aún hay más!

La primera gráfica, la del sombrero mexicano, corresponde al potencial del campo del bosón de Higgs, que es la piedra angular del modelo teórico de Física de Partículas. El bosón de señor Higgs se descubrió en el año 2012 en el CERN, cuarenta años después de que Englert (a la izquierda en



la imagen) y Higgs (derecha) lo propusieran, y por lo que los dos recibieron el premio Nobel en 2013.

Aquí está un enlace sobre el Higgs de la academia sueca: <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/popular-physicsprize2013-1.pdf>. Y aquí la página del CERN: <https://home.cern>. Y por último, una explicación sencilla de cómo actúa el bosón de Higgs, <https://www.youtube.com/watch?v=QG8g5JW64BA>. Fíjate en la camisa del profesor Ellis, que es quien aparece en el vídeo, ¡El término $V(\phi)$ en la última línea de su camiseta es el que hemos dibujado en la primera figura!

¡Esto es todo por ahora!