

# Métodos III - Derivadas

February 9, 2019

## 5 Gradiente, matriz jacobina, funciones diferenciables

Jose A. Hernando

*Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela*

Enero 2019

```
In [1]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

Last version Sat Feb 9 19:00:03 2019

### 5.1 Objetivos

Presentar los conceptos de

- gradiente y matriz jacobiana
- definición de función diferenciable

Discutir sobre:

- La condición suficiente de diferenciabilidad
- las bondades de las funciones diferenciables

```
In [2]: # general imports
        # general imports
        %matplotlib inline
        %reload_ext autoreload
        %autoreload 2

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        matplotlib.style.use('ggplot')
        import graph_utils as gf

        figsize = 6, 3.8
        cmap     = 'hot'
```

## 5.2 Gradiente

Para una función escalar  $f(x, y)$  diferenciable, hemos dado el desarrollo de Taylor en un punto  $(x_0, y_0)$  si nos desplazamos en el espacio origen un vector  $(v_x, v_y)$ .

$$f((x_0, y_0) + (v_x, v_y)) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)v_x + f'_y(x_0, y_0)v_y$$

o lo que es lo mismo:

$$f((x_0, y_0) + (v_x, v_y)) = f(x_0, y_0) + \left( f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right) (v_x, v_y)$$

Donde la expresión:

$$\left( f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right) (v_x, v_y)$$

Es el producto vectorial entre  $(v_x, v_y)$ , el vector desplazamiento; y otro vector, el **gradiente**,  $\nabla f(x_0, y_0)$ , cuyas componentes son las derivadas parciales:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right) = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

Supongo que ya has visto el gradiente en Física. En el electromagnetismo definimos el campo eléctrico como (menos) el gradiente del potencial.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$$

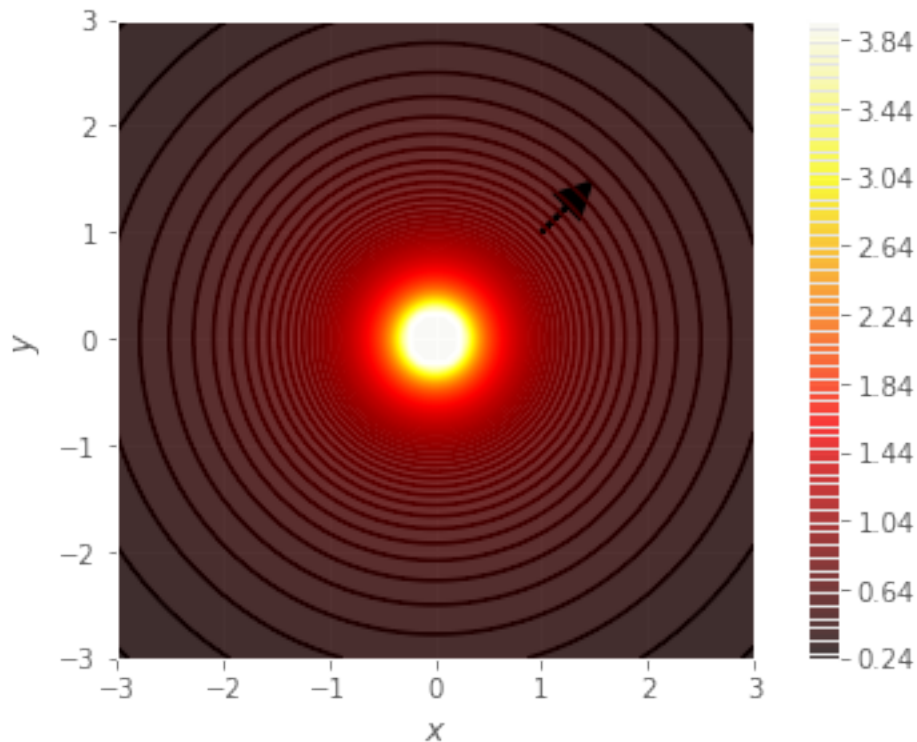
Puedes revisar que efectivamente es así, a partir de la definición de potencial y campo eléctrico que vimos en la sección sobre funciones escalares y vectoriales.

*Ejemplo:* La siguiente figura nos muestra los conjuntos de nivel del potencial eléctrico de una carga. También nos muestra el campo eléctrico, (el gradiente cambiado de signo), en un determinado punto  $(x_0, y_0)$

*Explora* y cambia el punto y observa como cambia el gradiente.

In [3]: `x0, y0 = 1, 1.`

```
V = lambda x, y : 1/(x*x + y*y)**(1/2)
Ex = lambda x, y : x/(x*x + y*y)**(3/2)
Ey = lambda x, y : y/(x*x + y*y)**(3/2)
gf.contour(V, contours = 100, zlim=(0., 4));
gf.arrow(x0, y0, Ex(x0, y0), Ey(x0, y0));
```



Por supuesto, lo que hemos visto para funciones escalares de dos dimensiones para para cualquier dimensión.

Sea una función  $f(\mathbf{x})$  escalar definida en  $\mathbb{R}^n$ , diremos que es “suave”, si tiene desarrollo de Taylor de primer orden, esto es, la función en un punto  $\mathbf{x}$  próximo a  $\mathbf{x}_0$ , relacionados por un vector “pequeño”,  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}$ , se puede aproximar por un hyper-plano.

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

donde las derivadas parciales son las pendientes en cada dirección,  $f'_i(\mathbf{x}_0)$ .

*Ejercicio:* Calcula el gradiente de las siguientes funciones:

1.  $f(x, y) = e^{x+y}$
2.  $f(x, y) = \cos x \sin y$

*Solución:*

1.  $\nabla f(x, y) = (e^{x+y}, e^{x+y})$
2.  $\nabla f(x, y) = (-\sin x \cos y, \cos x \cos y)$

El gradiente nos aporta más información sobre la función. Fíjate:

El término:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

es un producto escalar que podemos reescribir cómo:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman los dos vectores.

Tenemos ahora dos casos:

1. los dos vectores son paralelos, si van en la misma dirección y sentido, es máximo.

Esto es, si el desplazamiento  $\mathbf{v}$  va en la misma dirección y sentido que el gradiente, el cambio de la función es máximo.

2. los dos vectores son perpendiculares, el término es nulo.

O lo que es lo mismo, la valor función no cambiará ortogonalmente al gradiente.

Regresemos a la relación entre el campo y el potencial eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$$

El gradiente entonces indica la dirección y sentido en el que el potencial eléctrico *decae* más rápidamente.

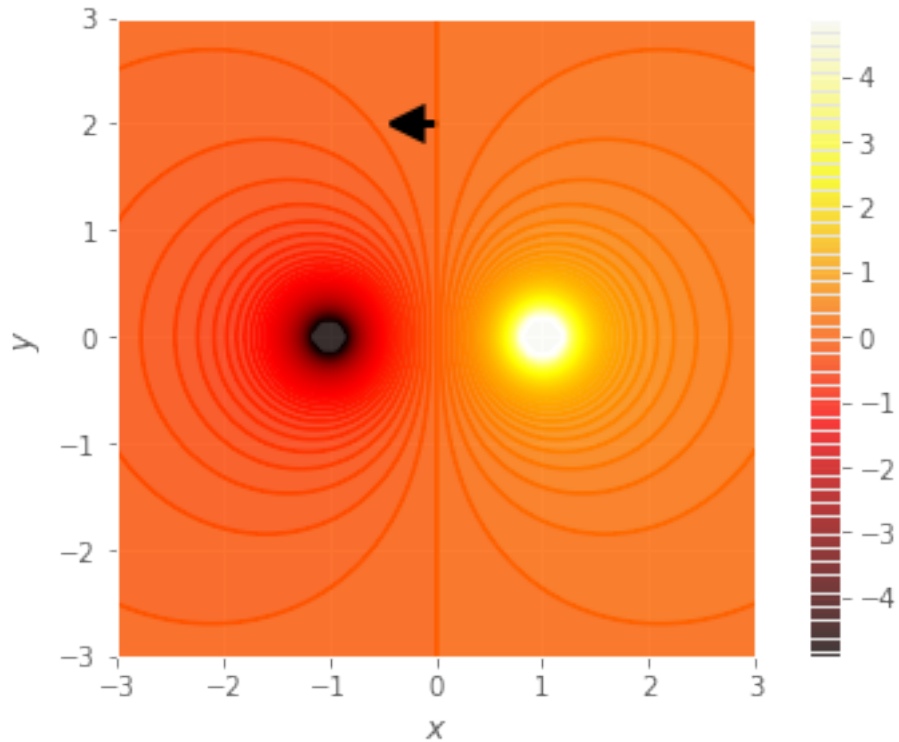
Ahora recordemos los conjuntos de nivel, que son aquellos puntos del espacio inicial cuya valor de la función es  $c$ .

El gradiente va a ser normal a los conjuntos de nivel, porque en los conjuntos de nivel el valor de la función no cambia.

*Ejemplo:* La siguiente figura nos muestra los conjuntos de nivel de un dipolo eléctrico. También nos muestra el campo eléctrico, (el gradiente cambiado de signo), en un determinado punto  $(x_0, y_0)$

*Explora* y cambia el punto y observa como cambia el gradiente.

```
In [4]: from common_functions import edipole
        x0, y0 = 0., 2.
        V, Ex, Ey = edipole(1., 1., 0., -1., 0.)
        gf.contour(V, contours= 100, zlim=(-5., 5.))
        gf.arrow(x0, y0, Ex(x0, y0), Ey(x0, y0));
```

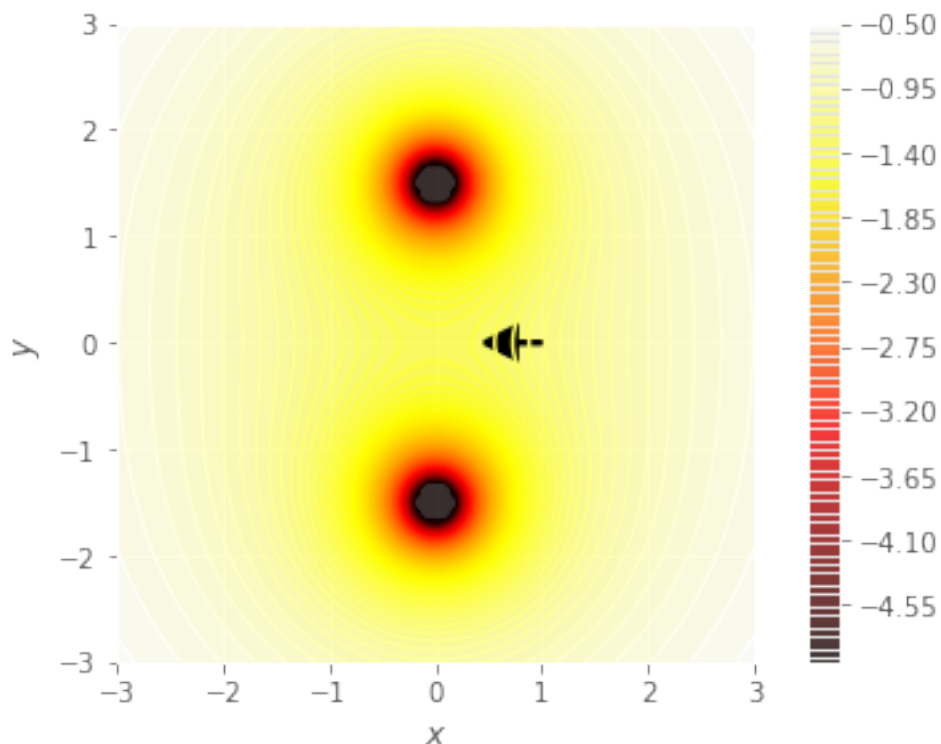


La siguiente celda te permite dibujar el potencial de un conjunto de cargas. El dibujo corresponde a dos cargas negativas situadas en el eje vertical separadas por 2 unidades.

*Explora* y cambia el punto y observa como cambia el potencial y el gradiente.

*Explora* y cambia el sistema de cargas para ver como cambia el potencial y el gradiente en un punto.

```
In [5]: from common_functions import esystem
        x0, y0 = 1., 0.
        charges = [(-1., 0, 1.5), (-1., 0, -1.5)]
        V, Ex, Ey = esystem(charges)
        gf.contour(V, contours = 100, zlim=(-5., 5.))
        gf.arrow(x0, y0, Ex(x0, y0), Ey(x0, y0));
```



### 5.3 Matriz Jacobiana

Una función vectorial es diferenciable, si y solo si, lo son cada una de sus funciones componentes.

Sea una función vectorial,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que es diferenciable en un punto  $\mathbf{x}_0$  cada uno de sus funciones componentes debe ser diferenciable, pongamoslas una debajo de la otra:

$$f_1(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) \approx f_1(\mathbf{x}_0) + \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

...

$$f_m(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) \approx f_m(\mathbf{x}_0) + \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

O también:

$$f_1(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) \approx f_1(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1,n} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} v_i$$

...

$$f_m(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) \approx f_m(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1,n} \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} v_i$$

Que podemos reescribir de forma matricial, colocando  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  como vectores columnas.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

Donde  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$  es una matriz cuyos elementos son:

$$\mathbf{Df}_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}$$

*Cuestión:* Si te fijas en las filas de la matriz jacobiana, ¿a qué corresponden?

*Ejercicio:* Calcula la matriz jacobiana de la siguiente función vectorial:

$$\mathbf{f}(x, y) = (e^{x+y}, \cos x \sin y)$$

*Solución:*

$$\mathbf{Df}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

Recapitulemos:

- Si una función escalar,  $f(\mathbf{x})$  es diferenciable podemos aproximarla en un punto  $\mathbf{x}_0$  y en una dirección  $\mathbf{v}$  por :

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

donde  $\nabla f \mathbf{x}_0$  es el gradiente:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

- Si una función vectorial,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  es diferenciable podemos aproximarla en un punto  $\mathbf{x}_0$  y en una dirección  $\mathbf{v}$  por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

donde  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$  es la matriz jacobiana:

$$\mathbf{Df}_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}$$

*Cuestión:* Ya conoces con seguridad de Física al menos una matriz jacobiana. ¿Sabes cuál?

¡La velocidad!

Si tenemos una trayectoria de un móvil en el espacio en función del tiempo:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

En la notación anterior, la matriz jacobiana es:

$$\mathbf{Dr}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

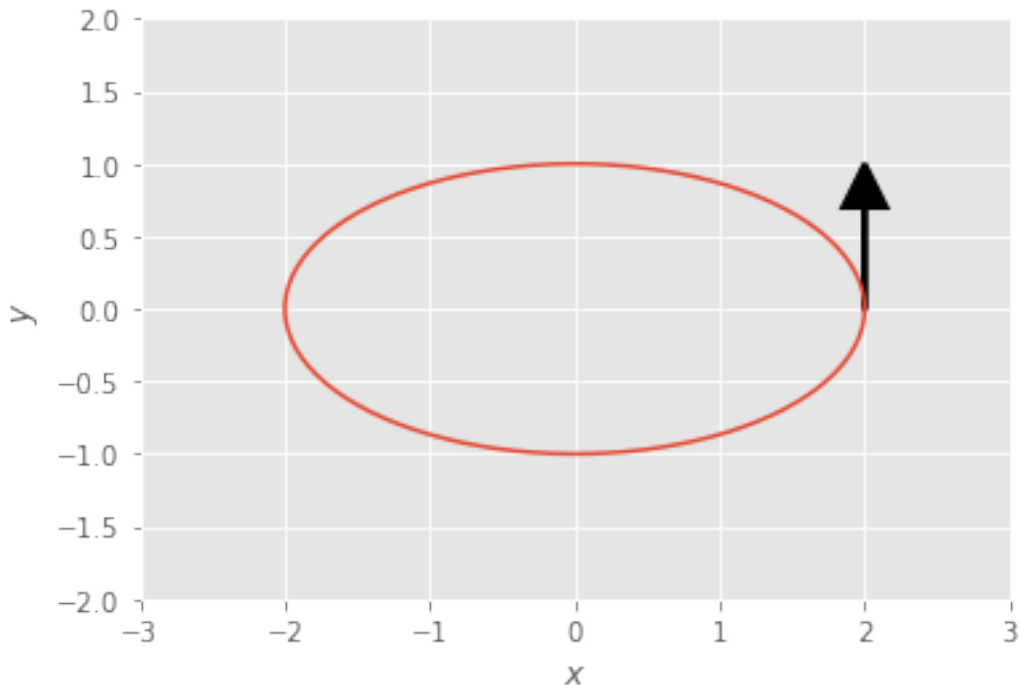
El desarrollo de Taylor es por lo tanto:

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \approx \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\Delta t$$

*Ejemplo:* La siguiente celda dibuja la línea de un móvil a lo largo de una elipse y en un punto su velocidad (su “matriz” jacobiana)

*Explora:* puedes cambiar el valor de  $t_0$  y observa como cambia la velocidad.

```
In [6]: t0 = 0.*np.pi
a, b, w = 2, 1, 1
fx = lambda t: a*np.cos(w*t)
fy = lambda t: b*np.sin(w*t)
fxp = lambda t: -w*a*np.sin(w*t)
fyp = lambda t: w*b*np.cos(w*t)
gf.line2d(fx, fy, length = 2.*np.pi);
gf.arrow(fx(t0), fy(t0), fxp(t0), fyp(t0));
plt.xlim(-a-1, a+1); plt.ylim(-b-1, b+1);
```



## 5.4 Función diferenciable

Hemos visto como son las funciones, diferenciable, pero ¿cómo las definimos matemáticamente? ¿cuándo una función será diferenciable?

Sea  $\mathbf{f} : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , decimos que la función es **diferenciable** en un punto  $\mathbf{x}$  interior a  $D$  si en una bola centrada en  $\mathbf{x}$  de radio  $r$  y para los vectores que cumplen  $\|\mathbf{v}\| < r$ , existe una transformación lineal  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  y una función error,  $\mathbf{E} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , tales que:



$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}_x(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\| \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

donde  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  es una función error de orden  $\mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|)$ , que cumple:

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Esto es:

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_x(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

A  $\mathbf{T}_x$  se llama diferencial o **derivada** de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}$ .

La expresión anterior es el **desarrollo de Taylor** de primer orden de  $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{v})$

$\mathbf{T}_x$  es la **derivada** de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}$ .

Si se trata de una función escalar,  $f(\mathbf{x})$ , es un **gradiente**,  $\nabla f(\mathbf{x})$ .

Si se trata de una función vectorial,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , es la **matriz jacobiana**,  $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$

Y te adelanto que:

$\mathbf{T}_x(\mathbf{v})$  es la **derivada direccional** de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  en el punto  $\mathbf{x}$  y la dirección  $\mathbf{v}$

Si se trata de un función escalar,  $\mathbf{T}_x(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \mathbf{v}$ .

Si se trata de una función vectorial,  $\mathbf{T}_x(\mathbf{v}) = \mathbf{Df}(\mathbf{x}) \mathbf{v}$

#### Propiedades de las funciones diferenciables

*Ejercicios:* Intenta ahora demostrar los siguientes teoremas:

*Teorema*

Si una función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en un punto interior  $\mathbf{x}$ , entonces es continua en ese punto.

*Teorema*

Si una función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en un punto interior  $\mathbf{x}$ , su derivada direccional a lo largo de un vector  $\mathbf{v}$  viene dada por:

si la función es escalar

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \mathbf{v}$$

si la función es vectorial

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \mathbf{Df}(\mathbf{x}) \mathbf{v}$$

**Condición suficiente de diferenciability** Si recuerdas un función real de una dimensión,  $f(x)$ , era diferenciable, tenía desarrollo de Taylor, en un punto interior,  $x$ , si su derivada,  $f'(x)$ , era continua en un intervalo centrado en ese punto  $x$ .

Ahora para funciones escalares, se cumple:

*Teorema:*

Una función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si sus derivadas parciales,  $f'(\mathbf{x})$ , son continuas en una bola en torno a  $\mathbf{x}$ .

**¡Esto es todo por ahora!**