Métodos III - Cálculo Vectorial

May 6, 2019

4 Integral de superficie

Jose A. Hernando
Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela
Marzo 2019

```
In [1]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

```
 Last version  Mon May  6 20:10:41 2019
```

4.1 Objectivos

Revisar la parametrización de superficies
Definir la integral de una función escalar y vectorial en una superficie.
Mostrar algunos ejemplos sencillos.

```
In [2]: # general imports
        %matplotlib inline
        %reload_ext autoreload
        %autoreload 2

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        matplotlib.style.use('ggplot')
        import graph_utils as gf

        figsize = 6, 3.8
        cmap    = 'hot'
```

4.2 Integral en una superficies

Revisión de parametrización de superficies. Hemos visto con anterioridad que podemos parametrizar una superficie, $\mathbf{œ}(u, v)$, de un espacio R^3 como una función vectorial definida en un región R de un espacio (u, v) de R^2.

$$\sigma(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))$$

Ejemplo: parametrización de un cilindro centrado en el origen, con eje en z, radio r, y longitud infinita

$$\sigma(\phi, z) = (r\cos\phi,\, r\sin\phi, z),\ \phi \in [0, 2\pi),\, z \in \mathrm{R}$$

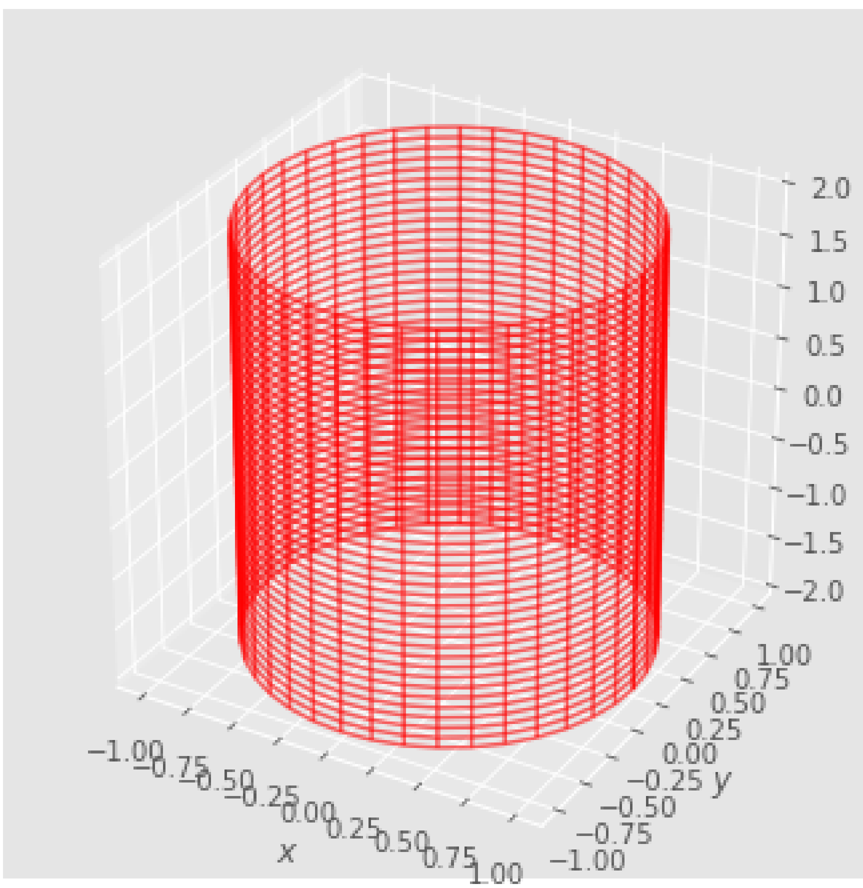
Ejemplo: Parametrización de una esfera centrada en el origen de radio r.

$$\sigma(\theta, \phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\,,\ \theta \in [0, \pi],\, \phi \in [0, 2\pi)$$

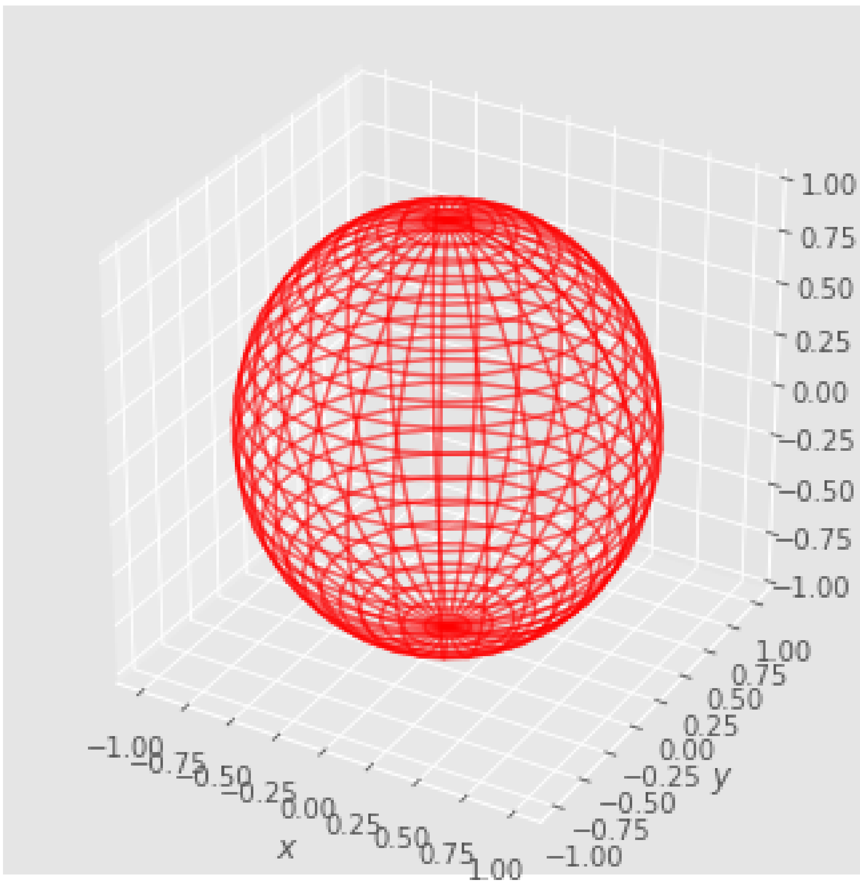
Observa: como las siguientes figuras están dibujadas a partir de la malla de (u, v). Puedes ver su cuadrícula.

Observa: fíjate también en las líneas de la superficie, cada una ellas corresponde al caso en la que u o v son constantes y la otra variable recorre los posible valores de su rango.

```
In [3]: r, size = 1., 2.
        phirange = (0., 2*np.pi, 41)
        zrange   = (-size, size, 41)
        xfun = lambda phi, z : r * np.cos(phi)
        yfun = lambda phi, z : r * np.sin(phi)
        zfun = lambda phi, z : z
        gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, phirange, zrange, alpha = 0.6);
```



```
In [4]: r          = 1.
        phirange   = (0., 2*np.pi, 30)
        thetarange = (0.,   np.pi, 30)
        xfun = lambda phi, theta : r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
        yfun = lambda phi, theta : r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
        zfun = lambda phi, theta : r * np.cos(theta)
        gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, phirange, thetarange, alpha = 0.6);
```



La superficie se construye a partir de líneas maestras. Fijado un valor de $u = u'$, si recorremos v en su rango, $[v_0, v_1]$ obtenenos las líneas maestras a lo largo de v.

$$\mathbf{c}_{u'}(v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,,\ u = u',\, v \in [v_0, v_1]$$

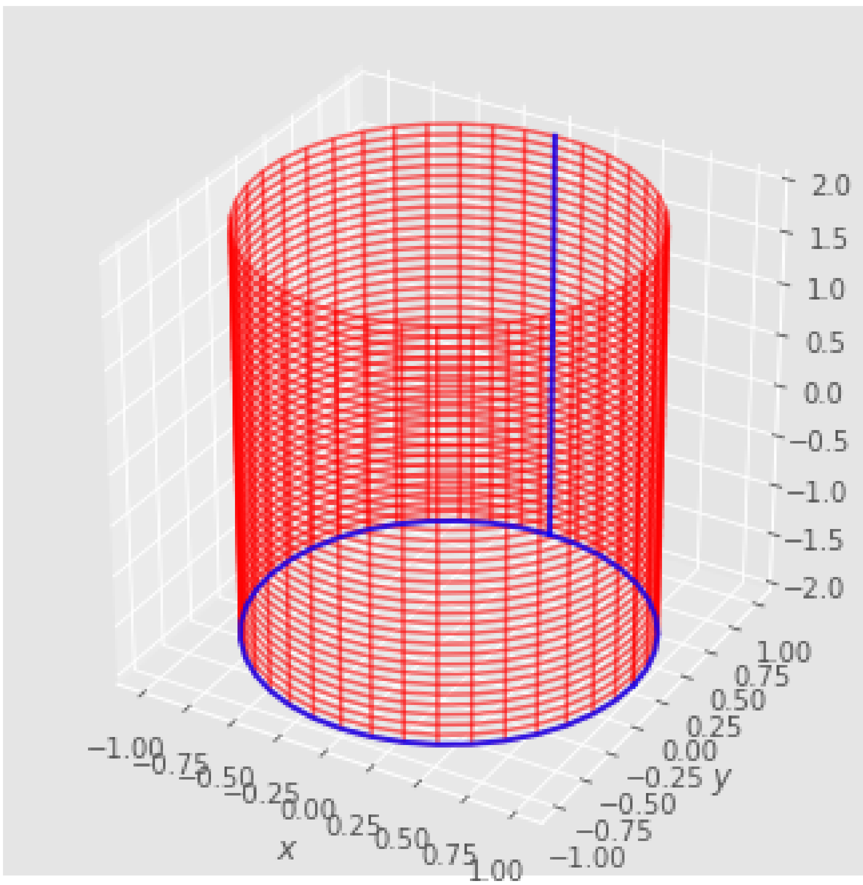
Y viceversa:

$$\mathbf{c}_{v'}(u) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,,\ u = [u_0, u_1],\, v = v'$$

Observa: En la siguiente figura están marcadas dos de las líneas maestras del cilindro.

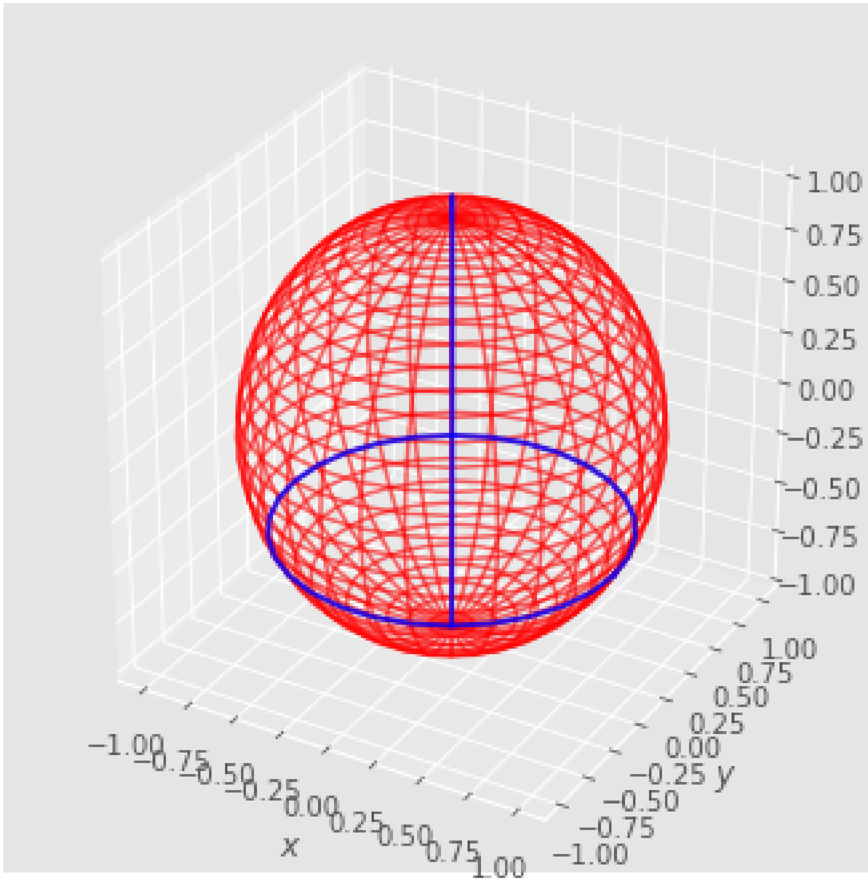
Explora: Cambia las líneas maestras que están dibujadas, cambiando el elemento (i, j) de la malla (u, v).

```
In [5]: r, size = 1., 2.
        phirange = (0., 2*np.pi, 41)
        zrange   = (-size, size, 41)
        phii, zj = 10, 0
        xfun = lambda phi, z : r * np.cos(phi)
        yfun = lambda phi, z : r * np.sin(phi)
        zfun = lambda phi, z : z
        gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, phirange, zrange, alpha = 0.6);
        gf.wfmasterlines(xfun, yfun, zfun, phirange, zrange, ui = phii, vj = zj);
```




```
In [6]: r          = 1.
        phirange   = (0., 2*np.pi, 31)
        thetarange = (0.,   np.pi, 31)
        phii, thetaj = 10, 20
        xfun = lambda phi, theta : r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
        yfun = lambda phi, theta : r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
```

```
zfun = lambda phi, theta : r * np.cos(theta)
gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, phirange, thetarange, alpha = 0.6);
gf.wfmasterlines(xfun, yfun, zfun, phirange, thetarange, ui = phii, vj = thetaj);
```



En un punto (u, v) podemos obtenemos los vectores tangentes a las líneas en ese punto.

$$\mathbf{t}_u = \frac{\partial \sigma(u,v)}{\partial u}, \ \mathbf{t}_v = \frac{\partial \sigma(u,v)}{\partial v}$$

que están asociados a lo diferencial vectorial de arco de cada línea maestra:

$$\mathbf{t}_u \mathrm{d}u, \ \mathbf{t}_v \mathrm{d}v$$

El vector normal a los dos vendrá dado por:

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$$

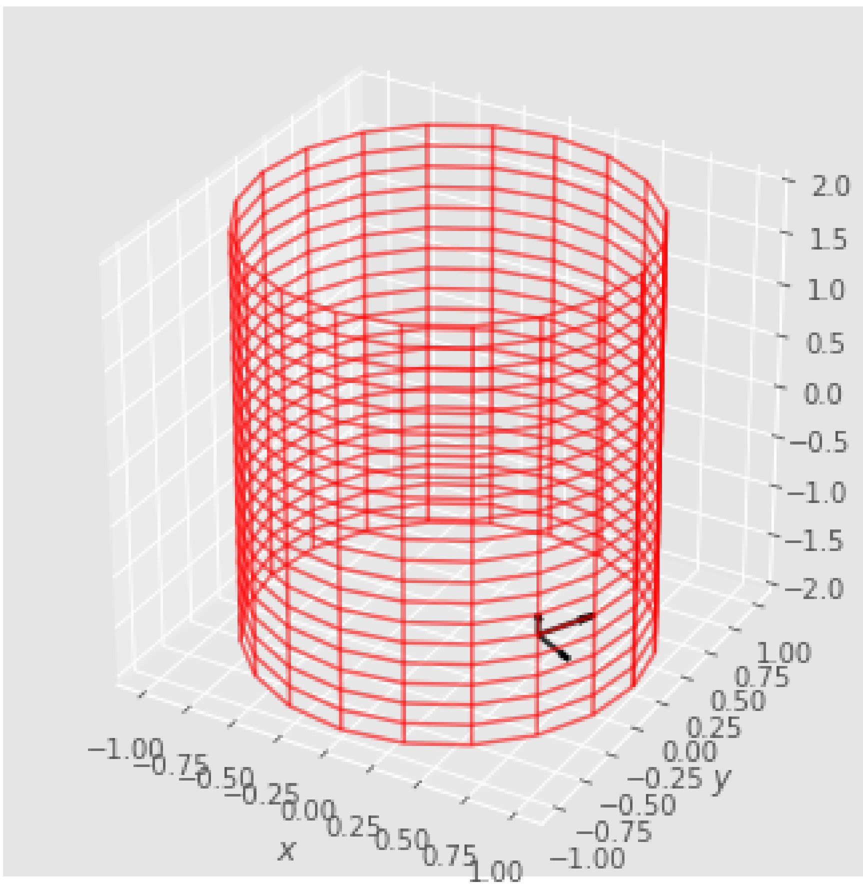
Si te das cuenta $|\mathbf{n}|$ es la normal a los dos vectores y su módulo corresponde al área del paralelogramo que sustentan $\mathbf{t}_u, \ \mathbf{t}_v$.

El diferencial de área

$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \mathbf{n} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \ \mathrm{d}\sigma = |\mathbf{n}| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

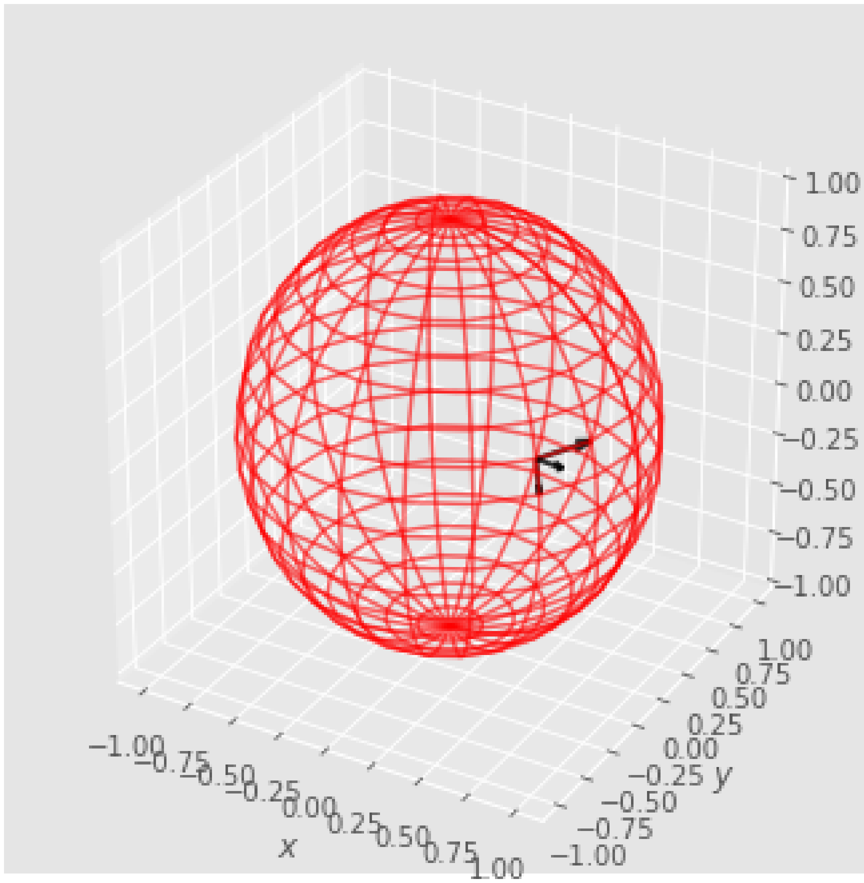
Diremos que una superficie es regular siempre que exista **n** en todo el rango de (u, v).
Observa: los vectores tangentes, $\mathbf{t}_u$, $\mathbf{t}_v$ a la superficie un punto y su vector normal **n**.
Explora: cambia la posición (i, j) de la malla de (u, v) donde dibujamos los tres vectores.

In [7]:
```
r, size = 1., 2.
phirange = (0., 2*np.pi, 21)
zrange   = (-size, size, 21)
phii, zj = 18, 5
xfun = lambda phi, z : r * np.cos(phi)
yfun = lambda phi, z : r * np.sin(phi)
zfun = lambda phi, z : z
gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, phirange, zrange, alpha = 0.6);
gf.wfaxis(xfun, yfun, zfun, phirange, zrange, ui = phii, vj = zj);
```



In [8]:
```
r          = 1.
phirange   = (0., 2*np.pi, 21)
thetarange = (0.,   np.pi, 21)
thetai, phij = 8, 18
xfun = lambda theta, phi : r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
```

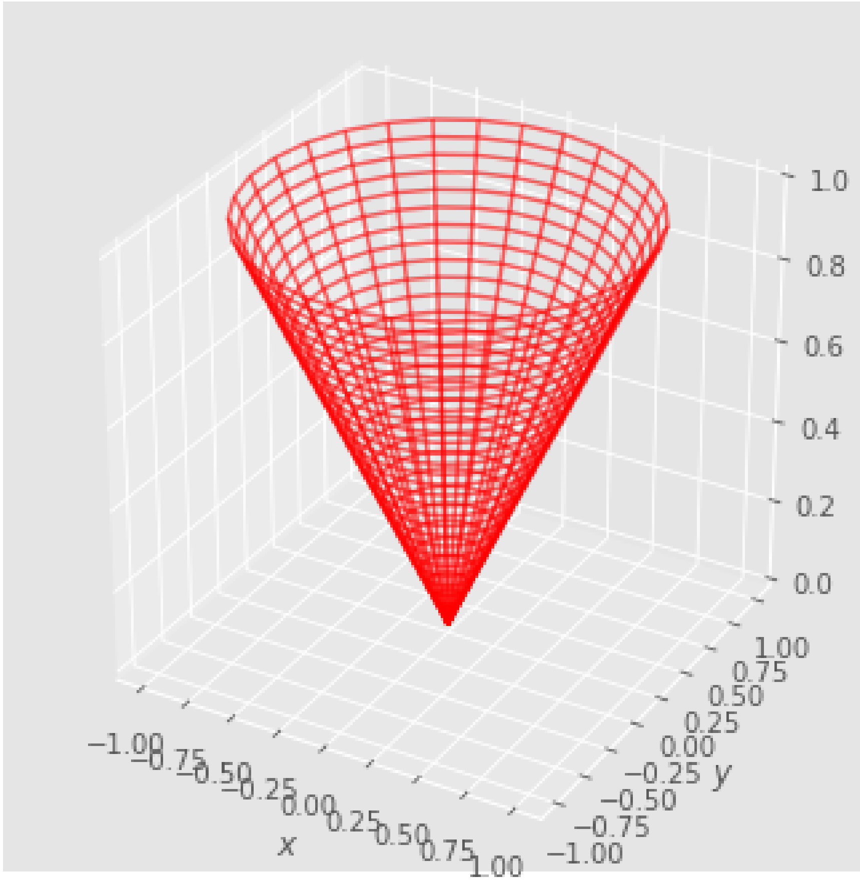
```
yfun = lambda theta, phi : r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
zfun = lambda theta, phi : r * np.cos(theta)
gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, thetarange, phirange, alpha = 0.6);
gf.wfaxis(xfun, yfun, zfun, thetarange, phirange, ui = thetai, vj = phij);
```



Cuestión: ¿Es la siguiente superficie regular?

$$\sigma(\phi, z) = (z\cos\phi, z\sin\phi, z)\,,\ \phi \in [0, 2\pi), z \geq 0$$

In [9]:
```
phirange = (0., 2*np.pi, 30)
zrange   = (0.,      1., 30)
xfun = lambda phi, z : z * np.cos(phi)
yfun = lambda phi, z : z * np.sin(phi)
zfun = lambda phi, z : z
gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, phirange, zrange, alpha = 0.6);
```



Si consideramos ahora en un punto (u, v) los elementos diferenciales de arco en las dos líneas maestras:

$$\mathbf{t}_u \mathrm{d}u,\ \mathbf{t}_v \mathrm{d}v$$

El elemento diferencial de área que sustentan es:

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Entonces, para obtener el área de una superficie parametrizada $\sigma(u, v)$ donde (u, v) están definidas en una región R, calculamos:

$$S = \int_\sigma \mathrm{d}\sigma = \int_R |\mathbf{n}| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_R |\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Ejemplo: Calcula el área de una esfera de radio r.

La superficie parametrizada es:

$$\sigma(\theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)\ ,\ \theta \in [0, \pi],\ \phi \in [0, \theta]$$

Los vectores tangentes:

$$\mathbf{t}_\theta = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta)$$

$$\mathbf{t}_\phi = (-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0)$$

Y el vector normal:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$

Esto es:

$$\mathbf{n} = \left(r^2\sin^2\theta\cos\phi, r^2\sin^2\theta\sin\phi, r^2\cos\theta\sin\theta\right)$$

Y por lo tanto

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{r^4\sin^4\theta + 4^4\cos^2\theta\sin^2\theta} = r^2\sin\theta$$

El área de la superficie es:

$$S = \int_\sigma \mathrm{d}\sigma = \int_R |\mathbf{n}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

$$= r^2\,\phi\Big|_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^\pi = 4\pi r^2$$

Parametrización de la superficie de una gráfica. Podemos considerar la gráfica de una función $f(x,y)$ definida en una reción R como la parametrización de una superficie con (x,y)

$$\sigma(x,y) = (x, y, z = f(x,y)) \;\; (x,y) \in \mathrm{R}$$

En este caso los vectores directores y el vector normal tienen expresiones más simples:

$$\mathbf{t}_x(x,y) = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$\mathbf{t}_y(x,y) = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

y:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$$

Y el módulo:

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Observa: la siguiente figura, donde se representa la gráfica de la función, $f(x,y) = x^2 + y^2$, y se dibuja una partición de la región (x,y). Para cada uno de los rectángulitos de la gráfica, que es una pequeña sección de un plano, estamos dando su área como:

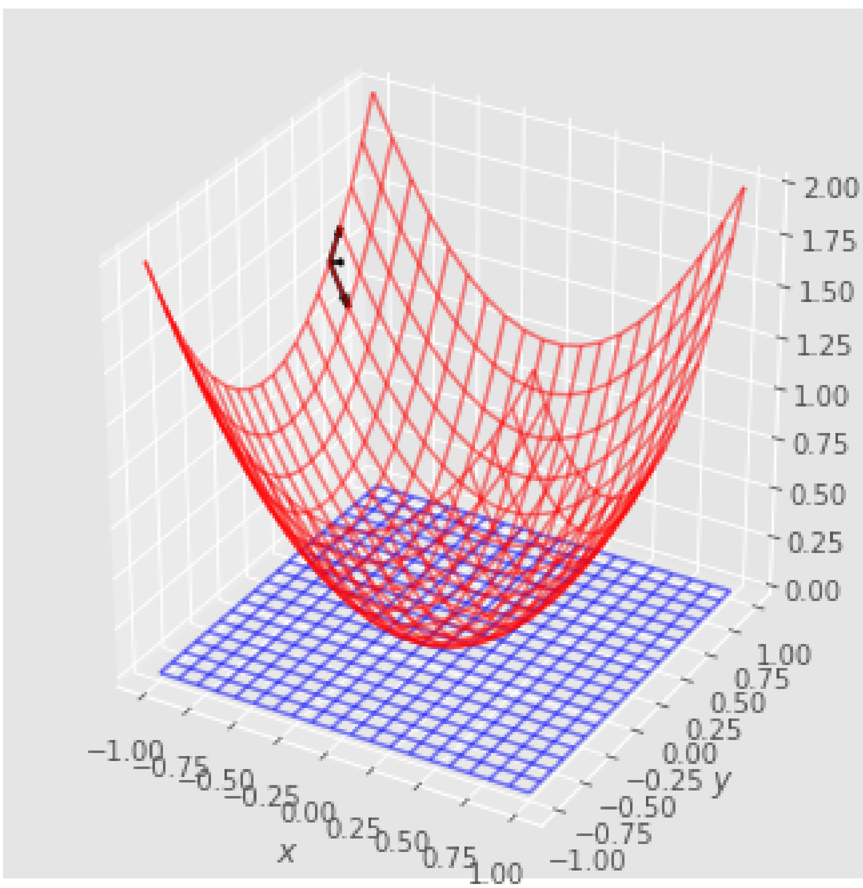
$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Mientras que el área de los rectángulos en $(x, y) $que los sustentan es: $dxdy$
Podemos reescribir:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Donde γ es ahora el ángulo que forma la normal con el eje z.

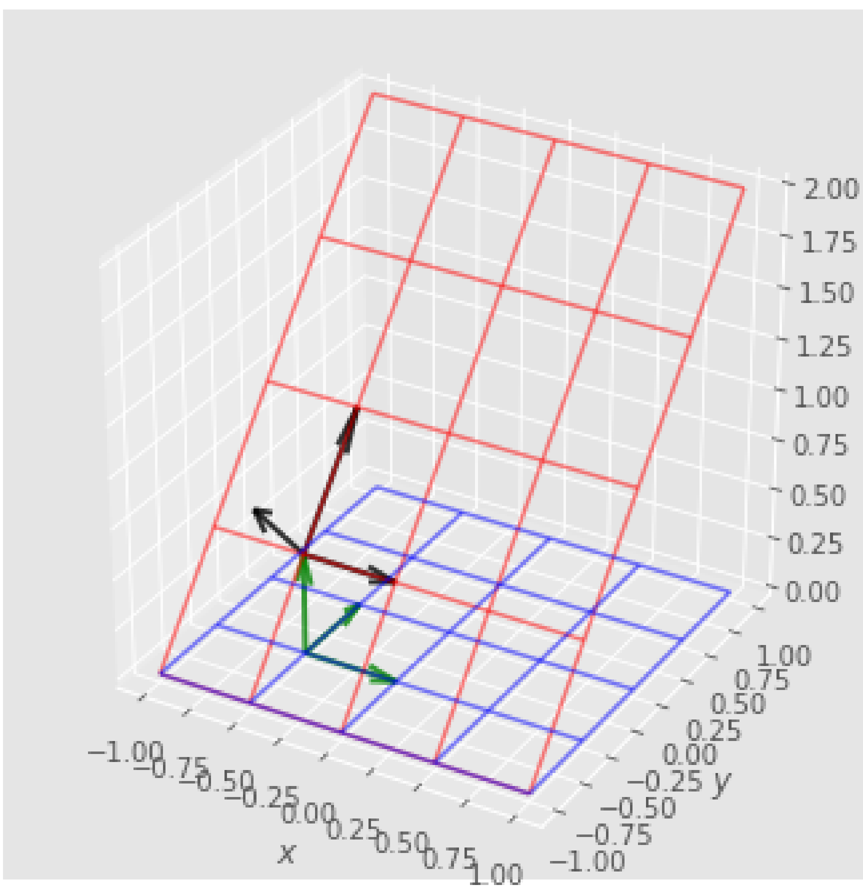
In [10]:
```
xrange = (-1., 1., 20)
xfun = lambda x, y : x
yfun = lambda x, y : y
zfun = lambda x, y : x*x + y*y
zero = lambda x, y : 0*x + 0*y
gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, xrange, xrange, alpha = 0.5);
gf.wfaxis   (xfun, yfun, zfun, xrange, xrange, 0, 15)
gf.wfsurface(xfun, yfun, zero, xrange, xrange, newfig = False, alpha = 0.5, color = 'b'
```



Ejercicio: Verifica que γ es dicho ángulo para gráficas de planos

```
In [11]: xrange = (-1., 1., 5)
         a, b, c = 0., 1, 1.
         cgamma = np.sqrt(1/(1+a*a+b*b))
         xfun = lambda x, y : x
         yfun = lambda x, y : y
         zfun = lambda x, y : a*x + b*y + c
         zero = lambda x, y : 0*x + 0*y
         gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, xrange, xrange, alpha = 0.5);
         gf.wfsurface(xfun, yfun, zero, xrange, xrange, newfig = False, alpha = 0.5, color = 'b'
         xi, yj = 1, 1
         gf.wfaxis(xfun, yfun, zfun, xrange, xrange, ui = xi, vj = yj)
         gf.wfaxis(xfun, yfun, zero, xrange, xrange, ui = xi, vj = yj, color = 'green')
         print('gamma', np.arccos(cgamma), 'cos(gamma)', cgamma)
```

```
gamma 0.7853981633974483 cos(gamma) 0.7071067811865476
```



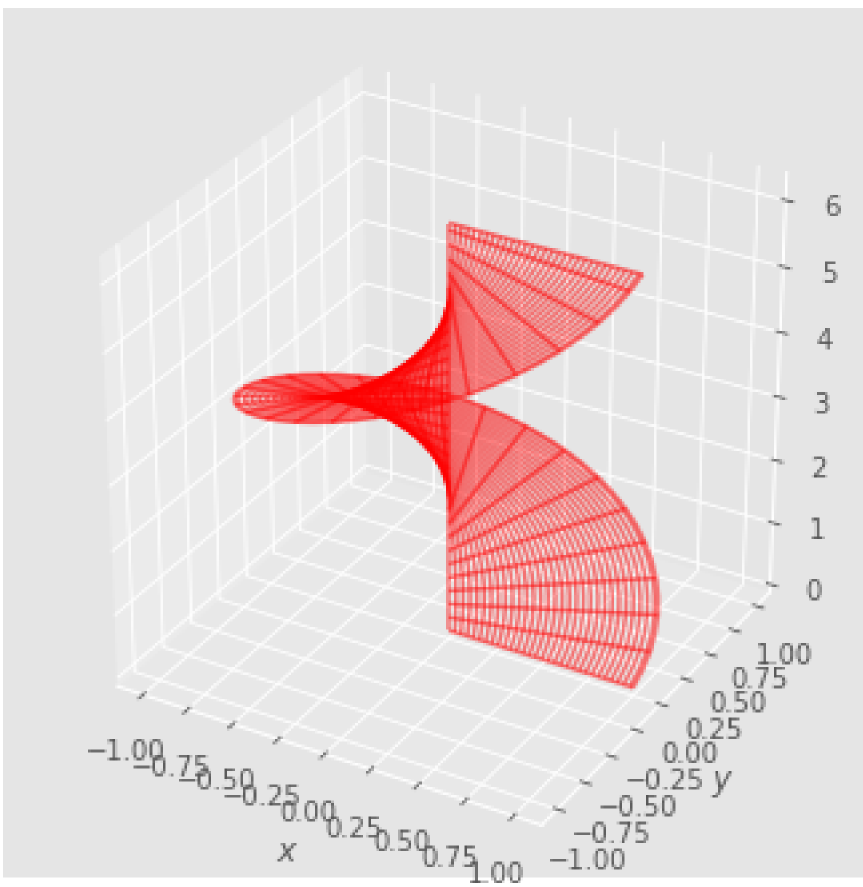
Integral de una función escalar en una superfice Sea S una superficie parametrizada con $\sigma(u,v)$ en una region R de (u,v), y $f(x,y,z)$ una función escalar definida en los puntos de la superficie. Llamamos integral de la función $f(x,y,z)$ en la superficie $\sigma(u,v)$ a:

$$\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \int_R f(\sigma(u,v))\,|\mathbf{n}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Cuestión: ¿Puedes dar una interpretación a la integral de una función escalar sobre una superficie?

Ejercicio: Integra la función $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ en el helicoloide dado por: $\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ con $\theta \in [0,2\pi]$ y $r \in [0,1]$

```
In [12]: thetarange = (0., 2*np.pi, 60)
         rrange     = (0.,      1., 60)
         xfun = lambda r, theta : r * np.cos(theta)
         yfun = lambda r, theta : r * np.sin(theta)
         zfun = lambda r, theta : theta
         gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, rrange, thetarange, alpha = 0.5);
```



A partir de la superficie parametrizada:

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$$

Calculamos los vectores:

$$\mathbf{t}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,,$$

$$\mathbf{t}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1)$$

y el vector normal

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta, r)$$

La función en la superficie vale:

$$f(\sigma(r,\theta)) = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1} = \sqrt{r^2+1}$$

El diferencial de área:

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathbf{n}|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

Y la integral de la función en la superficie:

$$\int_\sigma f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2+1)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\left(r+\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$

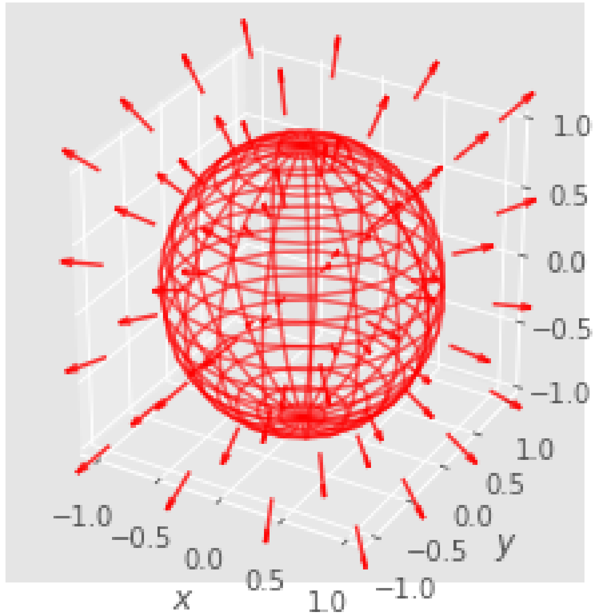
Integral de una función vectorial a través de una superfice Sea S una superficie parametrizada con $\sigma(u,v)$ en una region R de (u,v), y $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(F_x, F_y, F_z\right)$ una función vectorial definida en los puntos de la superficie. Llamamos integral de la función $\mathbf{F}(x,y,z)$ a través de la superficie $\sigma(u,v)$ a:

$$\int_\sigma \mathbf{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_R \mathbf{F}(\sigma(u,v))\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Cuestión: ¿Puedes dar una interpretación de la integral de un campo $\mathbf{F}$ a través de una superficie? En Física seguro que has encontrado este caso con anterioridad. ¡Se trata del flujo!

Ejercicio: Integra el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ sobre la esfera de radio unidad.

```
In [13]: r = 1
         phirange   = (0., 2*np.pi, 20)
         thetarange = (0.,   np.pi, 20)
         xrange     = (-1., 1., 4)
         Ex   = lambda x, y, z : x
         Ey   = lambda x, y, z : y
         Ez   = lambda x, y, z : z
         xfun = lambda phi, theta : r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
         yfun = lambda phi, theta : r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
         zfun = lambda phi, theta : r * np.cos(theta)
         gf.quiver3d(Ex, Ey, Ez, xrange, xrange, xrange, color = 'r')
         gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, phirange, thetarange, color = 'r', alpha = 0.6, newfig =
```



Vimos antes que:

$$\mathbf{n} = \left(\sin^2\theta\cos\phi, \sin^2\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\theta\right)$$

El campo en la esfera es:

$$\mathbf{F}(\sigma(\theta,\phi)) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{F}(\sigma(\theta,\phi))\,\mathbf{n} = \sin^3\theta\cos^2\phi + \sin^3\theta\sin^2\phi + \sin\theta\cos^2\theta = \sin\theta$$

Y la integral

$$\int_\sigma \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi$$