Métodos III - Derivadas

February 19, 2019

3 Límite y continuidad de funciones escalares y vectoriales.

Jose A. Hernando
Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela.
primera versión: enero 2019

```
In [2]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )

 Last version  Wed Feb  6 11:13:52 2019
```

3.1 Objectivos

Recordar los conceptos de límite y continuidad en funciones de una dimensión.
Y extenderlos a funciones escalares y vectoriales.
Presentar algún ejemplo de cómo estimar los posibles límites de una función escalar.

```
In [3]: # general imports
        %matplotlib inline

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt

        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        # possible styles: ggplot (simplicity), bmh (scientify data),
        matplotlib.style.use('ggplot')
```

3.2 Límite de funciones escalares y vectoriales

Bola Antes de estudiar los límites debemos definir un nuevo concepto: **bola**.
En una dimensión, la distancia entre dos valores reales, x y x_0, venía dada por el valor absoluto: $|x - x_0|$.
En un espacio real de n-dimensiones, R^n, $n > 1$, la distancia euclídea entre dos puntos, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_0$ vienes dada por la norma del vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$:

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| = \sqrt{\sum_{i=1,n} (x_i - x_{0i})^2}$$

Por ejemplo, en dos dimensiones, la distancia entre dos puntos: (x, y) y (x_0, y_0) es :

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Date cuenta que la distancia es una función escalar.

Si tenemos un espacio real de dimensión n, R^n, con $n > 1$.

Llamamos **bola** abierta de radio r centrada en un punto $\mathbf{x}_0$ a todos los puntos de ese espacio, $\mathbf{x}$, que estén a una distancia de $\mathbf{x}_0$ menor que r.

$$\{\forall \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < r\}$$

Si la bola es cerrada la condición es que estén a una distancia menor o igual, $\leq$, en la expresión anterior.

Puedes imaginarte que en dos dimensiones, una bola es simplemente un disco. Si es cerrada incluye los puntos en la circunferencia de su frontera, si es abiera, no la incluye.

Cuestión: ¿qué forma geométrica tiene una bola en tres dimensiones? ¿y en n-dimensiones?

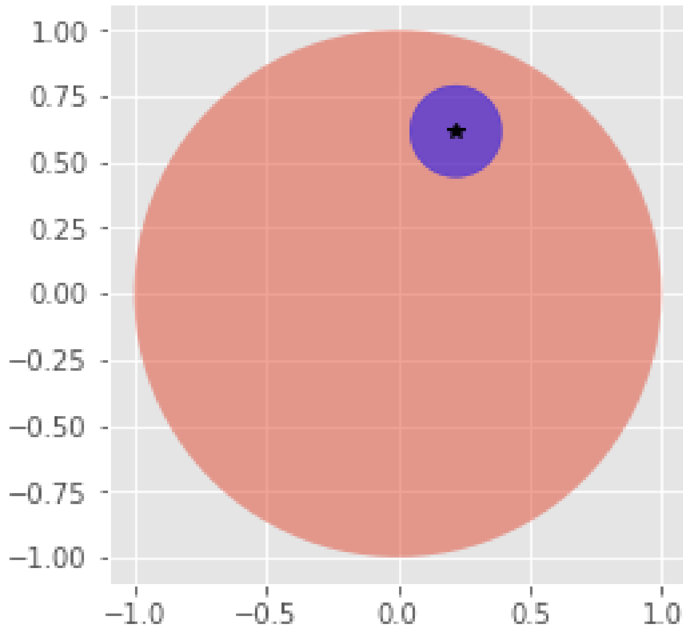
Algunas definiciones más:

Decimos que un punto es *interior* a un conjunto S, si podemos centrar sobre él una bola, cuyos puntos pertenezcan todos al conjunto. Y *frontera*, si todas las bolas que centramos en él, tienen siempre puntos del conjunto y puntos que no lo son.

Cuestión: Considera una bola cerrada en un espacio 2D. ¿Los puntos de la circunferencia que limita el disco son interiores o frontera?

Ejercicio: ¿Puedes demostrar que todos los puntos de una bola abierta en un espacio 2D son interiores? Fíjate en la celda siguiente.

```
In [7]: import random
        phis     = np.linspace(0., 2*np.pi, 100)
        xs, ys   = np.cos(phis), np.sin(phis)
        r1, phi  = np.random.uniform(0., 1.), np.random.uniform(0., 2*np.pi)
        while (r1 >=1.): r1, phi  = np.random.uniform(0., 1.), np.random.uniform(0., 2*np.pi)
        r2       = (1. - r1)/2.
        x1, y1   = r1*np.cos(phi), r1*np.sin(phi)
        x1s, y1s = x1 + r2 * np.cos(phis), y1 + r2 * np.sin(phis)
        fig = plt.figure(); ax = plt.gca()
        ax.fill(xs, ys, alpha = 0.5)
        ax.plot(x1, y1, '*', color='black')
        ax.fill(x1s, y1s, color='blue', alpha = 0.5)
        ax.set_aspect('equal');
```



Vamos a revisar la definición de límite de una dimensión.

Para una función $f(x)$ decíamos que existía el límite en un punto x_0 del dominio o de la frontera de éste donde estaba definida la función, si al aproximarnos a él, la función "se aproximaba a un valor b".

Matemáticamente, poníamos una condición. Decíamos que b era el límite, si siempre podíamos encontrar un intervalo de tamaño δ alrededor de x_0, de tal forma, que el valor de la función en los puntos de ese intervalo, estaba tan próxima al valor b como quisiéramos, ϵ. Es más fácil darlo en notación matemática:

Existe el límite de una función $f(x)$ en x_0 y vale b, si:

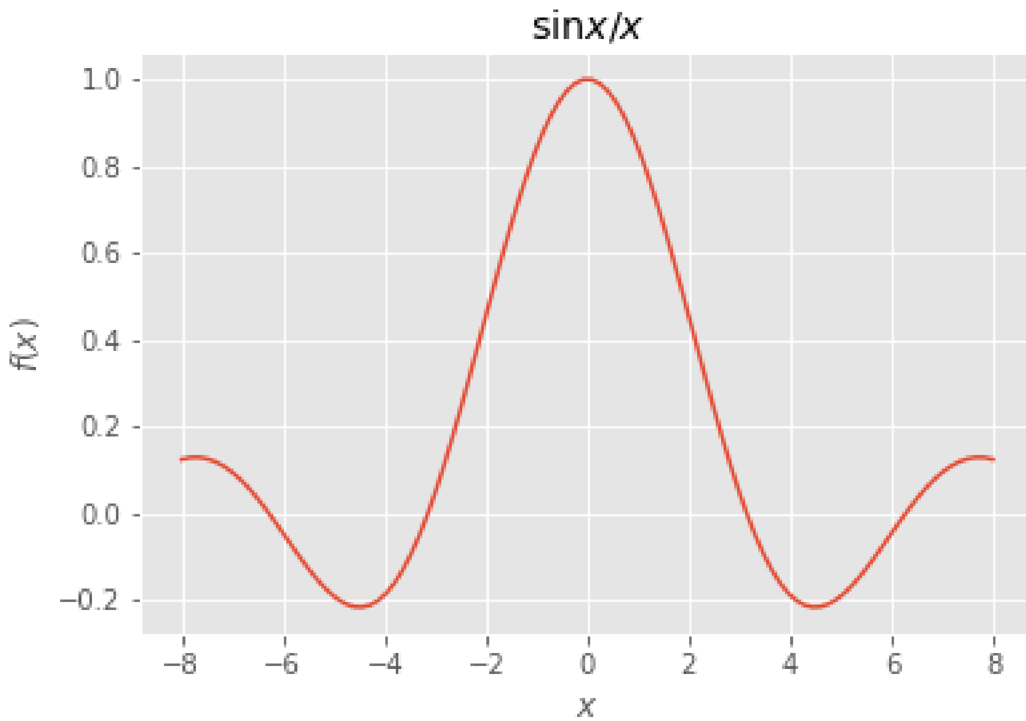
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{t.q. } |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \epsilon$$

La siguiente gráfica corresponde a la función:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Vemos la función tiene límite en el origen, $x = 0$. Puedes calcularlo si aplicas la regla de l'Hôpital o haces el desarrollo de Taylor del numerador y denominador en torno a $x = 0$

```
In [8]: xs = np.linspace(-8., 8., 100)
        ys = np.sin(xs) / xs
        plt.plot(xs, ys);
        plt.xlabel('$x$'); plt.ylabel('$f(x)$'); plt.title('$\sin x /x$');
```



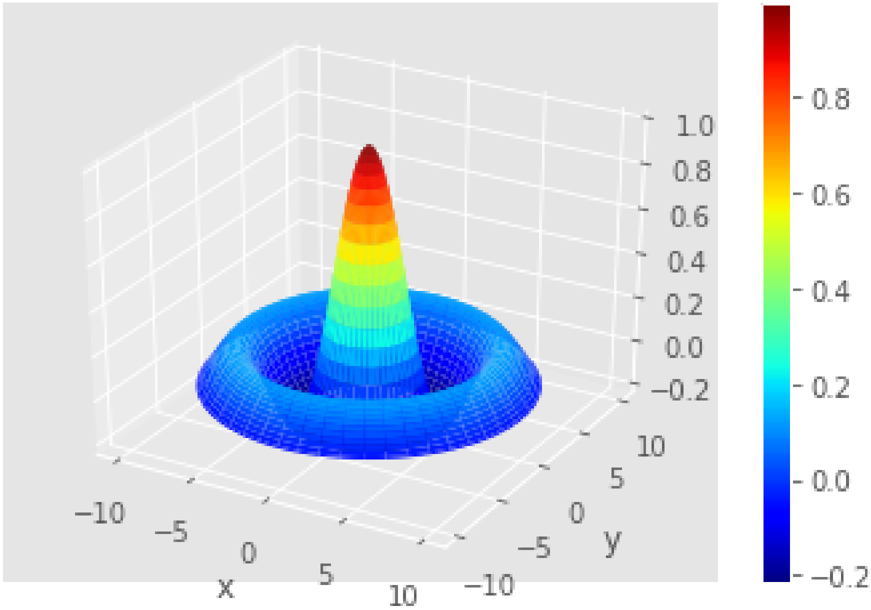
Observa ahora la gráfica de la función escalar:

$$f(x,y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

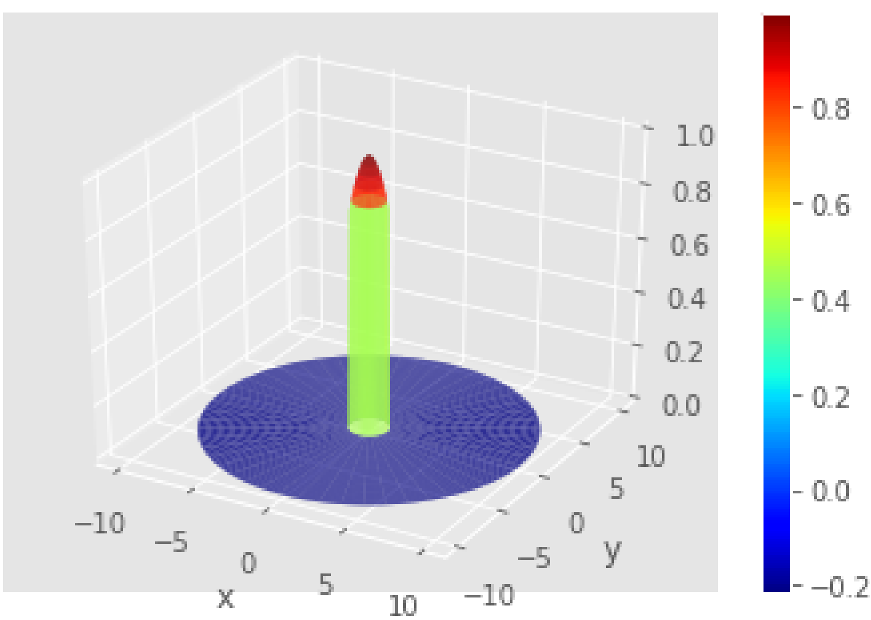
Ves que nuevamente tiene límite en el origen, que vale 1. Calcularlo no obstante es más complicado. Hay que recurrir a la definición de límite. Dada un ϵ encontrar un δ en el espacio inicial, que cumpla que los puntos en la bola de radio δ tienen el valor de su función a una distancia inferior a ϵ respecto del límite, 1.

La siguiente celda te permite variar el valor de ϵ y te muestra la gráfica con los puntos que están cerca del límite a una distancia menor que ϵ. Su proyección en el plano (x, y) te muestra la bola, de tamaño δ, respecto al origen en los que están incluidos todos los puntos. Da igual que valor de ϵ eligas, siempre encuentras la bola de radio δ. Luego existe el límite y vale 1.

```
In [24]: rs       = np.linspace(1e-10, 10., 100)
         ps       = np.linspace(0. , 2.*np.pi, 100)
         rms, pms = np.meshgrid(rs, ps)
         xms      = rms * np.cos(pms)
         yms      = rms * np.sin(pms)
         zms      = np.sin(rms)/rms
         fig = plt.figure(); ax = fig.gca(projection='3d');
         sf = ax.plot_surface(xms, yms, zms, cmap='jet', alpha = 1.);
         ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); fig.colorbar(sf);
```




```
In [25]: cms = np.sin(rms)/ rms
         b, epsilon = 1, 0.2
         sel         = abs(zms-b) < epsilon
         cms[~sel]   = 0.
         fig = plt.figure(); ax = fig.gca(projection='3d')
         #ax.plot_surface(xms, yms, zms, cmap = 'jet', alpha = 0.2);
         ax.plot_surface(xms, yms, cms, cmap = 'jet', alpha = 0.8);
         ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); fig.colorbar(sf);
```



Para calcular los límites utilizaremos una aproximación, calcularemos los límites en un punto aproximándones a él por todas las rectas posibles, si el valor del límite que encontremos es el mismo y no depende de la recta, podremos afirmar: "si existe el límite, éste debe ser su valor".

A continuación vamos a considerar dos ejercicios, calcula el límite en el origen para las funciones:

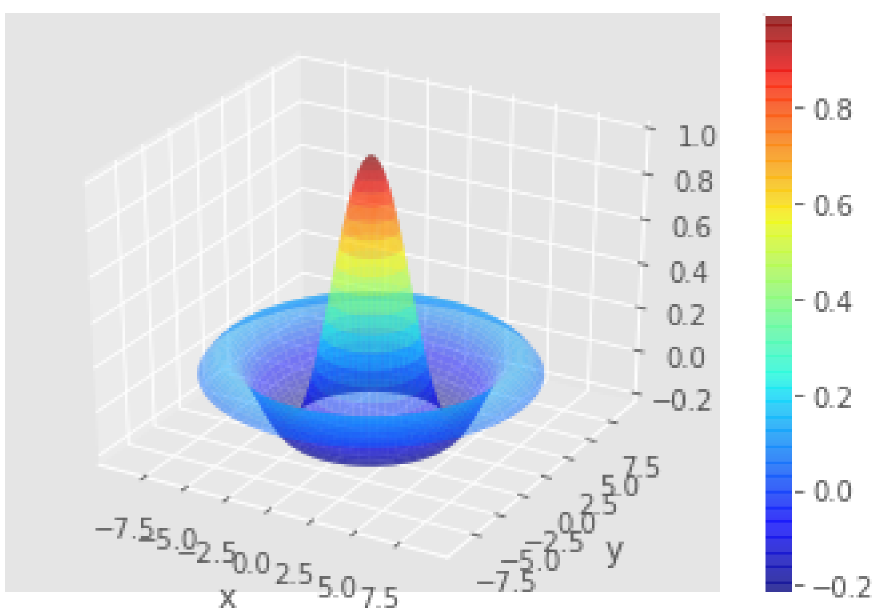
1) $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

2) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

pero primero observa las gráficas ¿puedes deducir por ellas si existe el límite? Hemos dibujado también sus conjuntos de nivel.

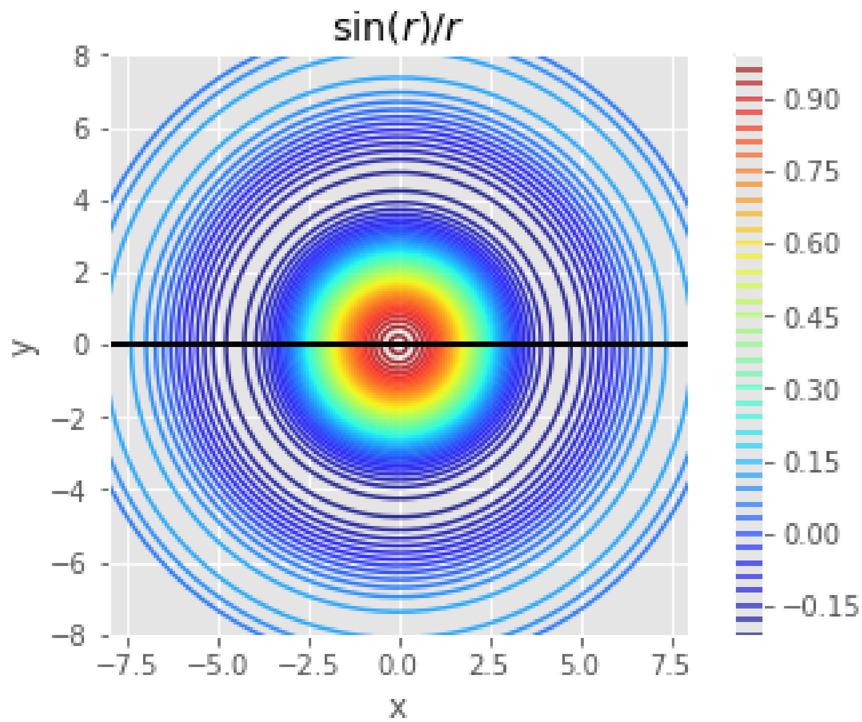
En el caso de la primera de ellas, sobre los conjuntos de nivel hemos subreimpuesto una recta que pasa por el origen. ¿Cuándo te acercas a él siguiendo esa recta, a qué valor tiende la función?. Explora y cambia la pendiente a para vér qué pasa si te acercas por otra recta.

```
In [13]: rs        = np.linspace(1e-10, 9., 100)
         ps        = np.linspace(0. , 2.*np.pi, 100)
         rms, pms = np.meshgrid(rs, ps)
         xms       = rms * np.cos(pms)
         yms       = rms * np.sin(pms)
         zms       = np.sin(rms)/rms
         fig = plt.figure(); ax = fig.gca(projection='3d');
         sf = ax.plot_surface(xms, yms, zms, cmap='jet', alpha = 0.5);
         ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); fig.colorbar(sf);
```

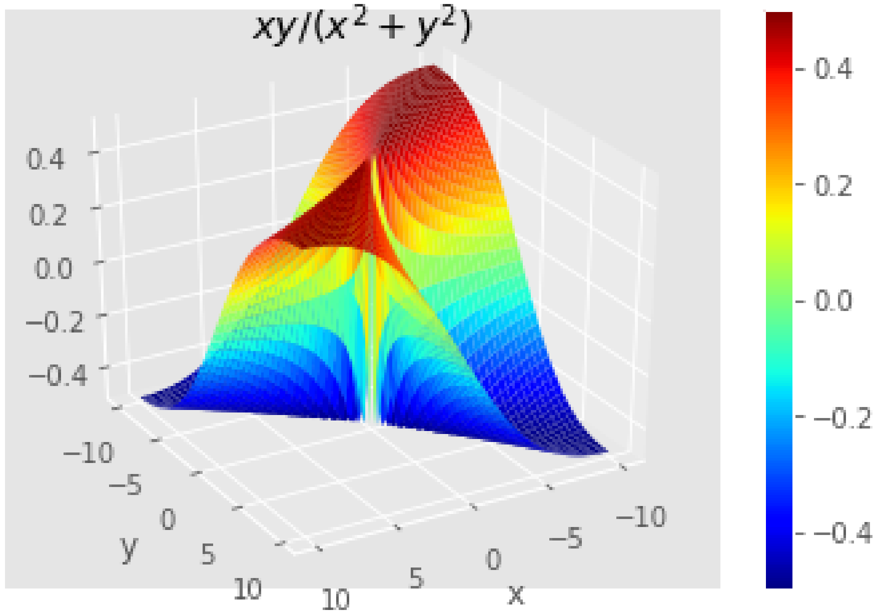


Ahora te mostramos los conjuntos de nivel, sobre los que hemos dobre-impuesto una recta de color negro que pasa por el origen. ¿Cuándo te acerca a él siguiendo esa recta, a qué valor tiende la función?. Explora y cambia la pendiente a y estudia cual es el límite si te acercas ahora por esa recta hasta el origen.

In [15]:
```
a = 0.
xs = np.linspace(-8., 8., 20)
ys = a*xs
fig = plt.figure(); ax = fig.gca()
sf = ax.contour(xms, yms, zms, 40, cmap = 'jet', alpha = 0.8); ax.set_aspect('equal')
ax.plot(xs, ys, color='black', lw=2)
ax.set_xlim(-8., 8.); ax.set_ylim(-8., 8.); fig.colorbar(sf)
ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); ax.set_title('$\sin(r)/r$');
```

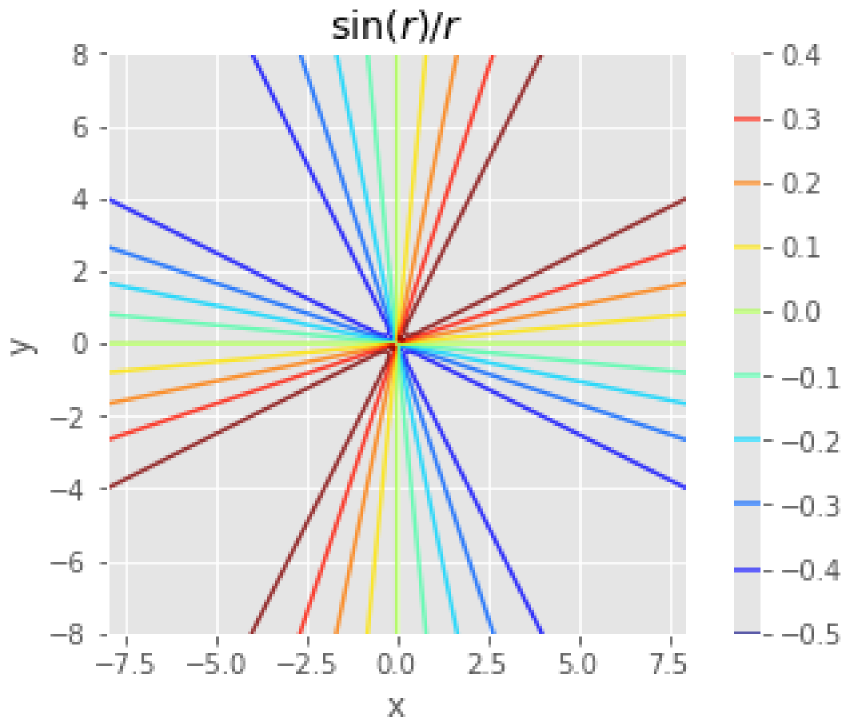


In [21]:
```
xs       = np.linspace(-10., 10., 100)
ys       = np.linspace(-10., 10., 100)
xms, yms = np.meshgrid(xs, ys)
zms      = (xms * yms) /(xms*xms + yms*yms)
fig = plt.figure(); ax = fig.gca(projection='3d');
ax.view_init(azim=60.)
sf  = ax.plot_surface(xms, yms, zms, cmap='jet', alpha = 1.);
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y'); fig.colorbar(sf); plt.title('$xy/(x^2+y^2)$');
```



Dibujamos ahora los conjuntos de nivel. ¿Son rectas? ¿Qué pasa si te aproximas ahora al origen por cada una de esas recas?

```
In [22]: fig = plt.figure(); ax = fig.gca()
         cs  = [-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0., 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]
         sf = ax.contour(xms, yms, zms, cs, cmap = 'jet', alpha = 0.8); ax.set_aspect('equal')
         ax.set_xlim(-8., 8.); ax.set_ylim(-8., 8.); fig.colorbar(sf)
         ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); ax.set_title('$\sin(r)/r$');
```



Ahora vamos a intentar calcular el límite.

para ello vamos a considerar todas las rectas que pasan por el origen, podemos darlas en cartesianas o polares.

a. cartesianas:

$$y = ax + b$$

donde b = 0, porque pasa por el origen. Calculamos en 1D el límite $x \to 0$

b. polares:

$$x = r\cos\phi;\ y = r\sin\phi$$

donde $\phi \in [0, 2\pi)$. Tomamos el límite en 1D $r \to 0$

Ejercicio: ¿Puedes dar las ecuaciones de todas las rectas que pasan por (x_0, y_0)? En cartesianas y polares.

solución:

En cartesianas:

$$y = y_0 + a(x - x_0)$$

En polares:

$$x = x_0 + r\cos\phi, \quad y = y_0 + r\sin\phi$$

Ejercicio: Calcular si existe el límite en el origen de la función:

$$f(x,y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Solución:
En cartesianas, sustituyendo $y = ax$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sqrt{(1+a^2)}}{x\sqrt{1+a^2}} = 1$$

Si existe el límite es 1

ii) o si cambiamos a polares y hacemos el límite $r \to 0$.

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1$$

Si existe el límite es 1
Ejercicio: Calcular si existe el límite en el origen de la función:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

solución

i) si estudiamos el límite a lo largo de la recta $y = ax$ y tomamos el límite $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{x^2+a^2x^2} = \frac{a}{1+a^2}$$

El límite depende de la pendiente a, luego no existe el límite. Si $a = 0$, la función vale 0., Si $a = 1$ la función vale $1/2$.

ii) Si cambiamos a polares y luego hacemos el límite $r \to 0$.

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\phi\sin\phi}{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi} = \cos\phi\sin\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$$

El límite depende del ángulo ϕ, luego no existe el límite. Si $\phi = 0, \pi/2$ la función vale 0, mientras que para $\phi = \pm\pi/4$, vale $\pm 1/2$.

Teorema

Sea una función vectorial $\mathbf{f} : S \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, y $f_i(\mathbf{x})$ las m-funciones componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. El límite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, con $\mathbf{a} \in S$, existe, si y solo si, existen los límites de sus m-funciones componentes y estos son $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$.

Teorema

Sean dos funciones $\mathbf{f} : S \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ y $\mathbf{g} : S \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, y λ un número real, si existen el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ y el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ se cumple:

$$i) \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

$$ii)\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \lambda \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{b}$$

$$iii)\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\ \mathbf{c}$$

$$iv)\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{b}\|$$

Ejercicio
Sea la función vectorial:

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \frac{xy}{x^2+y^2} \right)$$

¿Tiene límite en el origen?

3.3 Continuidad

En funciones de una dimensión, decíamos que la función era continua en un punto, x_0, si pertenecía a su dominio, y el valor de la función en ese punto, $f(x_0)$, coincide con el límite $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Para una función escalar, $f(\mathbf{x})$, diremos que es continua en $\mathbf{x}_0$, si el punto está en el dominio y el valor de la función y el límite coinciden:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

Y para una función vectorial, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, si, dado un $\mathbf{x}_0$ del dominio, se cumple:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Teorema
Sean dos funciones $\mathbf{f} : S \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ y $\mathbf{g} : S \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, y λ un número real, si $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})$ son continuas en un punto $\mathbf{a}$, se cumple que las siguientes funciones tambi´rn son continuas en $\mathbf{a}$:

$$i)\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$$ii)\ \lambda \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$iii)\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$$iv)\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$$

Teorema
Si la función vectorial es continua en $\mathbf{a}$, también son lo son las m-funciones componentes $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ y viceversa.

¡Esto es todo por ahora!

3.4 Apéndice

teorema

Sea $\mathbf{g} : A \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ y $\mathbf{f} : B \subset \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^p$, donde suponemos que el rango de **g** está en el dominio de **f**, B. Si $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es continua en **a** y $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ lo es en $\mathbf{g}(\mathbf{a})$, entonces la función compuesta $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ es continua en **a**.

demostracion:

Al ser $\mathbf{g}, \mathbf{f}$ continuas en **a** y $\mathbf{g}(\mathbf{a})$, tenemos que $\forall \epsilon > 0$ y $\epsilon' > 0$ existen $\delta > 0$ y $\delta' > 0$ y se cumple:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| < \epsilon'$$

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{b}\| < \delta' \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{b})\| < \epsilon$$

Al componer **g** sobre **f**, aplicamos la función **f** sobre los puntos de llegada de **g**. Esto es $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ y al ser además **g** continua, $ **{g(a)} = {b}$.**

Si tomamos $\epsilon' = \delta'$, tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe un δ, tal que, si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\| = \|(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) - (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a})\| < \epsilon.$$

que es la condición de que exista el límite y sea continua la función compuesta.

Q.E.D.

***Cuestión*: ¿Es esta función $h(x, y) = \sin^2(x^2 + y^2)$ continua?**