

Métodos III - Cálculo Vectorial

May 7, 2019

4.1 Teorema de Stockes. Teorema de Gauss.

Jose A. Hernando

Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela
Marzo 2019

```
In [1]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

Last version Thu Apr 25 11:01:40 2019

4.1.1 Objetivos

Extender el teorema de Green a 3D. Teorema de Stockes.

Extender el teorema de la divergencia a 3D. Teorema de Gauss.

Mostrar algunos ejemplos sencillos.

```
In [2]: # general imports
        %matplotlib inline
        %reload_ext autoreload
        %autoreload 2

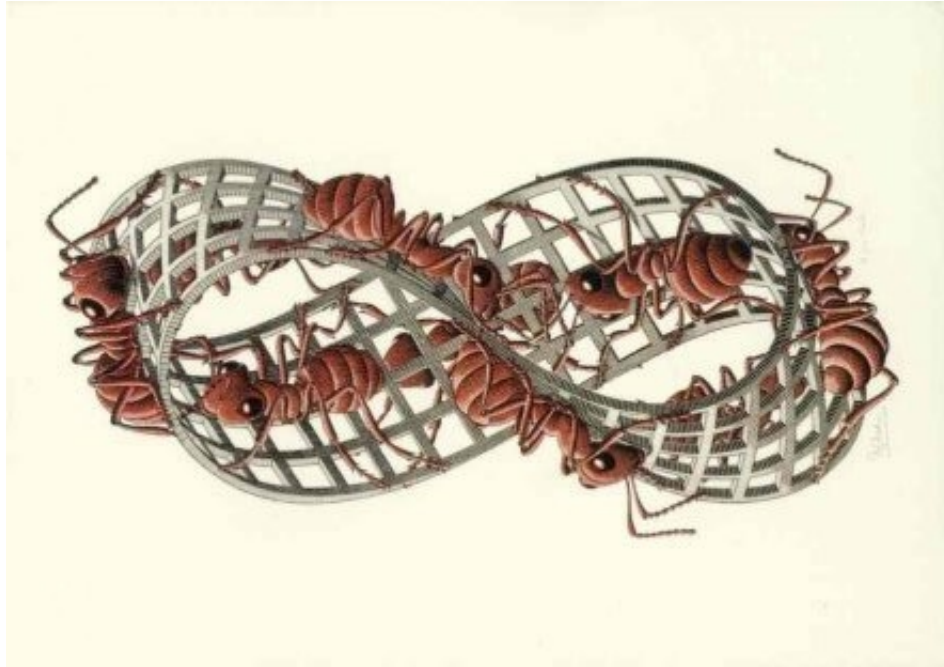
        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        matplotlib.style.use('ggplot')
        import graph_utils as gf

        figsize = 6, 3.8
        cmap     = 'hot'
```

4.1.2 Teorema de Stockes

Superficies orientables Una superficie es orientable si tiene dos caras. ¡Una cinta de Moebius solo tiene una cara!

orientación dextrógira



La cinta de Moebius solo tiene una cara.

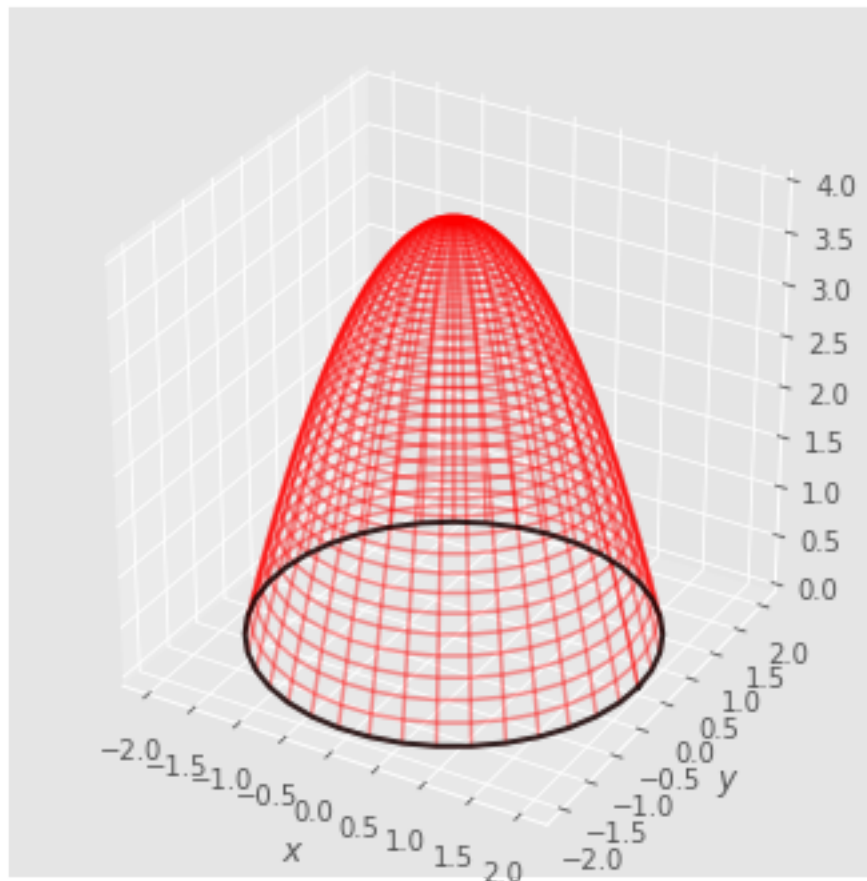
Damos la orientación de una superficie mediante un giro dextrógiro. Giraremos por la línea de la frontera en sentido anti-horario dejando la superficie siempre a nuestra izquierda.

Observa: la siguiente figura, la superficie y su frontera. El giro dextrógiro seguiría la frontera en sentido contrario al de las agujas del reloj.

In [3]: $R = 2.$

```
rrange, phirange = (0, R, 40), (0, 2*np.pi, 40)
sx = lambda r, phi : r * np.cos(phi)
sy = lambda r, phi : r * np.sin(phi)
sz = lambda r, phi : R*R - sx(r, phi)*sx(r, phi) - sy(r, phi)*sy(r, phi)
cx = lambda phi : R * np.cos(phi)
cy = lambda phi : R * np.sin(phi)
cz = lambda phi : 0. + 0. * phi
```

```
In [4]: gf.wfsurface(sx, sy, sz, rrange, phirange, alpha = 0.4, color='red')
gf.line3d (cx, cy, cz, phirange, newfig = False, alpha = 0.4, color = 'black');
```



El teorema de Stokes es la generalización del de Green a 3 dimensiones.

Teorema: Sea una superficie S orientable, cuya frontera $\mathbf{c}(t)$ se recorre en sentido anti-horario, y parametrizada con $\sigma(u, v)$, donde (u, v) están definidas en una región R ; y sea un campo vectorial con derivadas primeras continuas $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$, se cumple:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} d\vec{\sigma} = \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{s}$$

- 1) Consideremos primero un campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), 0, 0)$, y una superficie orientable S con frontera \mathbf{c} parametrizada con $\sigma(x, y, z(x, y))$ en una región R de (x, y) con frontera \mathbf{d} .

La integral a lo largo de la frontera \mathbf{c} en sentido anti-horario es

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{s} = \oint_{\mathbf{d}} F_x(x, y, z(x, y)) dx$$

Donde podemos entender $F_x(x, y, z(x, y)) = f_x(x, y)$ como una función compuesta que depende de (x, y) , directamente y indirectamente via $z(x, y)$, y podemos re-expresar el último término de la igualdad en una integral de 2 dimensiones.

$$= \oint_{\mathbf{d}} f_x(x, y) dx$$

Y aplicar el teorema de Green:

$$= \int_R -\frac{\partial f_x}{\partial y} dx dy$$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

Por otro lado sabemos el vector \mathbf{n} de una superficie $\sigma(x, y) = (x, y, z(x, y))$ es:

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)$$

Luego podemos reescribir:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(0, -\frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)$$

Esto es

$$\begin{aligned} &= \oint_{\mathbf{a}} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx \\ &\int_R \left(0, \frac{\partial F_x}{\partial z}, -\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) dx dy = \int_S \left(0, \frac{\partial F_x}{\partial z}, -\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

2) Si consideramos el vector $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, F_y(x, y, z), 0)$ en la misma superficie obtenemos:

$$\oint_S \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_S \left(-\frac{\partial F_y}{\partial z}, 0, \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) d\vec{\sigma}$$

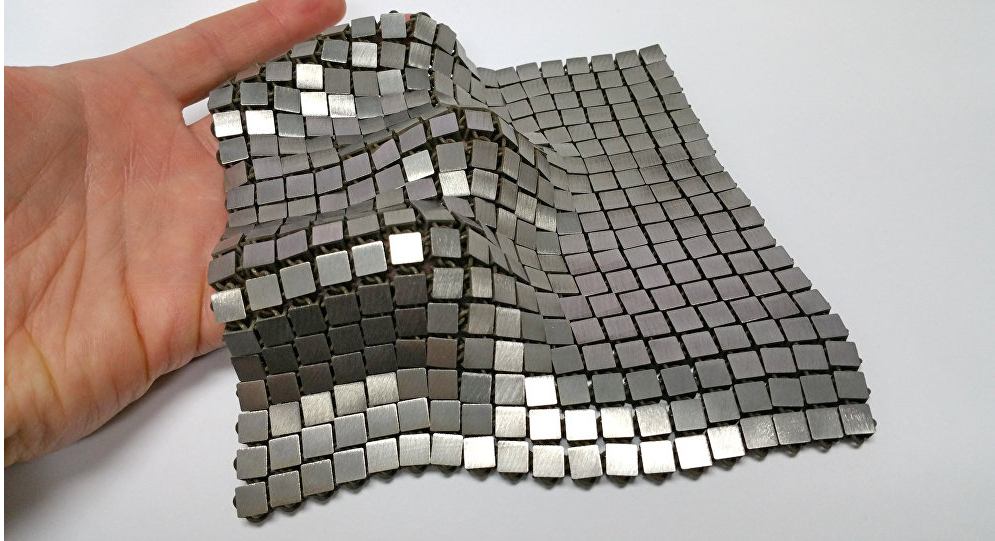
3) Y finalmente con $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, F_z(x, y, z))$ con parametrización de S en $\sigma(x, y(x, z), z)$

$$\oint_S \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_S \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}, -\frac{\partial F_z}{\partial x}, 0 \right) d\vec{\sigma}$$

Y por lo tanto, para $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ \oint_c \mathbf{F} d\mathbf{s} &= \int_S \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) d\vec{\sigma} \\ &= \int_S \nabla \times \mathbf{F} d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

En la siguiente figura se muestra una la malla, la superficie está dividida en pequeños cuadrados. Consideremos los infinitesimales. Si aplicamos el teorema de Stokes en cada cuadrado, la circulación en sus lados coincide con el rotacional en el centro por el área diferencial del cuadrado.



Malla con cuadraditos en los que aplicar Stokes.

Si te das cuenta la circulación en dos cuadrados adyacentes se anulan y da como resultado la circulación en la frontera externa. Y esa cantidad debe ser igual a la integral del rotacional en la superficie.

Date cuenta que la superficie es maleable y el teorema se aplica igualmente, la circulación en todos los cuadraditos es al final siempre la circulación en su frontera, igual a la integral del rotacional en la superficie, da igual su forma.

Ejercicio: Verificar el teorema de Stokes en la superficie dada por la intersección de un cilindro infinito con eje en la dirección z y base $x^2 + y^2 = 1$, y el plano $x + y + z = 1$, con $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, z^3)$

```
In [5]: phirange, zrange = (0., 2*np.pi, 30), (-1, 3, 30)
```

```
    s1x = lambda z, phi : 1 * np.cos(phi)
```

```
    s1y = lambda z, phi : 1 * np.sin(phi)
```

```
    s1z = lambda z, phi : z + 0.*phi
```

```
    rrange = (0., 1., 20)
```

```
    s2x = lambda r, phi : r * np.cos(phi)
```

```
    s2y = lambda r, phi : r * np.sin(phi)
```

```
    s2z = lambda r, phi : 1 - s2x(r, phi) - s2y(r, phi)
```

```
    cx = lambda phi : 1 * np.cos(phi)
```

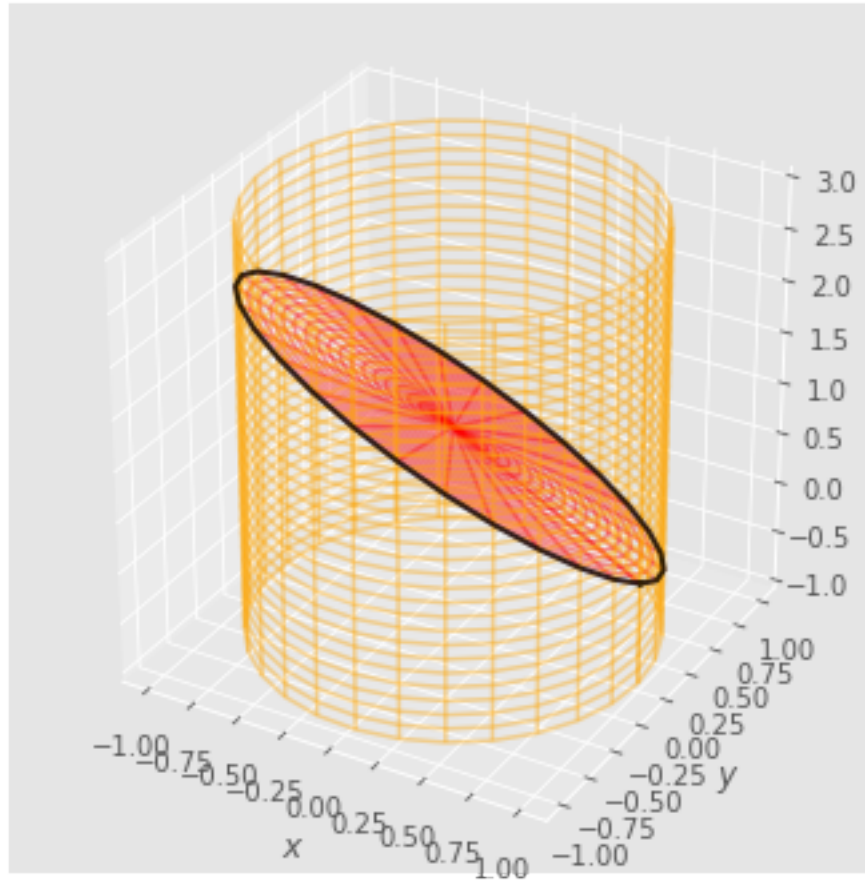
```
    cy = lambda phi : 1 * np.sin(phi)
```

```
    cz = lambda phi : 1 - cx(phi) - cy(phi)
```

```
In [6]: gf.wfsurface(s1x, s1y, s1z, zrange, phirange, alpha = 0.4, color='orange')
```

```
gf.wfsurface(s2x, s2y, s2z, rrange, phirange, newfig = False, alpha = 0.4, color = 'red')
```

```
gf.line3d (cx, cy, cz, phirange, newfig = False, alpha = 0.4, color = 'black');
```



Podemos parametrizar la superficie:

$$\sigma(x, y) = (x, y, 1 - x - y) \text{ con } x^2 + y^2 \leq 1$$

donde:

$$\mathbf{n}(x, y) = (1, 1, 1)$$

Y la frontera con la línea:

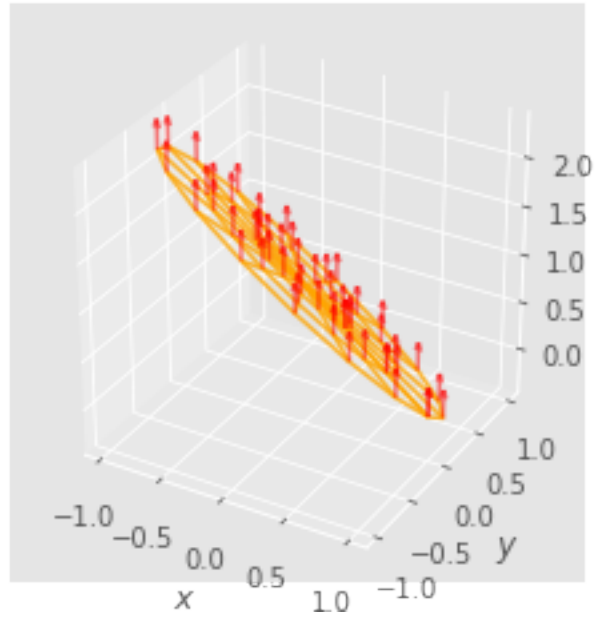
$$\mathbf{c}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 1 - \cos \phi - \sin \phi) \text{ con } \phi \in [0, 2\pi]$$

donde:

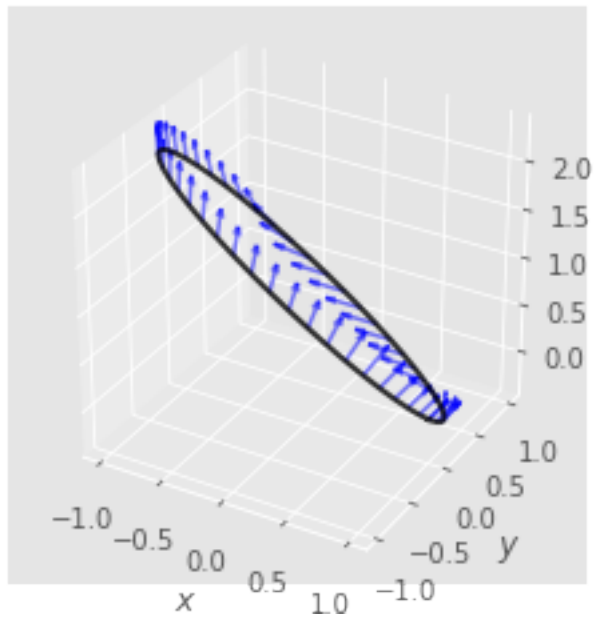
$$\dot{\mathbf{c}}(\phi) = (-\sin \phi, \cos \phi, 1 + \sin \phi + \cos \phi)$$

```
In [7]: Fx = lambda x, y, z : -y**3
        Fy = lambda x, y, z : x**3
        Fz = lambda x, y, z : z**3
        Rx = lambda x, y, z : 0
        Ry = lambda x, y, z : 0
        Rz = lambda x, y, z : 3*x*x + 3*y*y
```

```
In [8]: rrange, phirange = (0., 1, 4), (0, 2*np.pi, 18)
        gf.quiver3d_in_wfsurface(Rx, Ry, Rz, s2x, s2y, s2z, rrange, phirange, alpha = 0.5, color = 'blue')
        gf.wfsurface(s2x, s2y, s2z, rrange, phirange, newfig = False, alpha = 0.8, color = 'orange')
```



```
In [9]: rrange, phirange = (0., 1, 4), (0, 2*np.pi, 50)
        gf.quiver3d_in_line3d(Fx, Fy, Fz, cx, cy, cz, phirange, alpha = 0.5, color = 'blue');
        gf.line3d(cx, cy, cz, phirange, newfig = False, alpha = 0.8, color = 'black');
```



El rotacional de \mathbf{F} es:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

La integral en la superficie:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} d\vec{\sigma} = \int_R (0, 0, 3x^2 + 3y^2) (1, 1, 1) dx dy = \int_R 3(x^2 + y^2) dx dy$$

La región R es el disco de radio unidad, que podemos integrar en polares

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^2 r dr d\phi = \frac{3}{4} r^4 \Big|_0^1 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

recuerda que el Jacobiano en polares es r .

La integral de \mathbf{F} a lo largo de la frontera:

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{F} d\mathbf{s} &= \oint_c -y^3 dx + x^3 dy + z^3 dz \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 \phi, \cos^3 \phi, (1 - \cos \phi - \sin \phi)^3) (-\sin \phi, \cos \phi, \sin \phi - \cos \phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi + (1 - \cos \phi - \sin \phi)^3 (\sin \phi - \cos \phi)) d\phi \end{aligned}$$

Que dividimos en dos integrales:

$$\int_0^{2\pi} (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) d\phi + \int_0^{2\pi} (1 - \cos \phi - \sin \phi)^3 (\sin \phi - \cos \phi) d\phi$$

La primera integral, como:

$$\begin{aligned} \sin^4 \phi + \cos^4 \phi &= \frac{1}{4} (1 - \cos 2\phi)^2 + \frac{1}{4} (1 + \cos 2\phi)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 2\phi - 2 \cos 2\phi + 1 + \cos^2 2\phi + 2 \cos 2\phi) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos^2 2\phi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\phi) \right) \end{aligned}$$

Así:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\phi \right) d\phi = \left(\frac{3\phi}{4} + \frac{1}{16} \sin 4\phi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

La segunda integral se calcula directamente:

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos \phi - \sin \phi)^3 (\sin \phi - \cos \phi) d\phi = \frac{1}{4} (1 - \cos \phi - \sin \phi)^4 \Big|_0^{2\pi} = 0$$

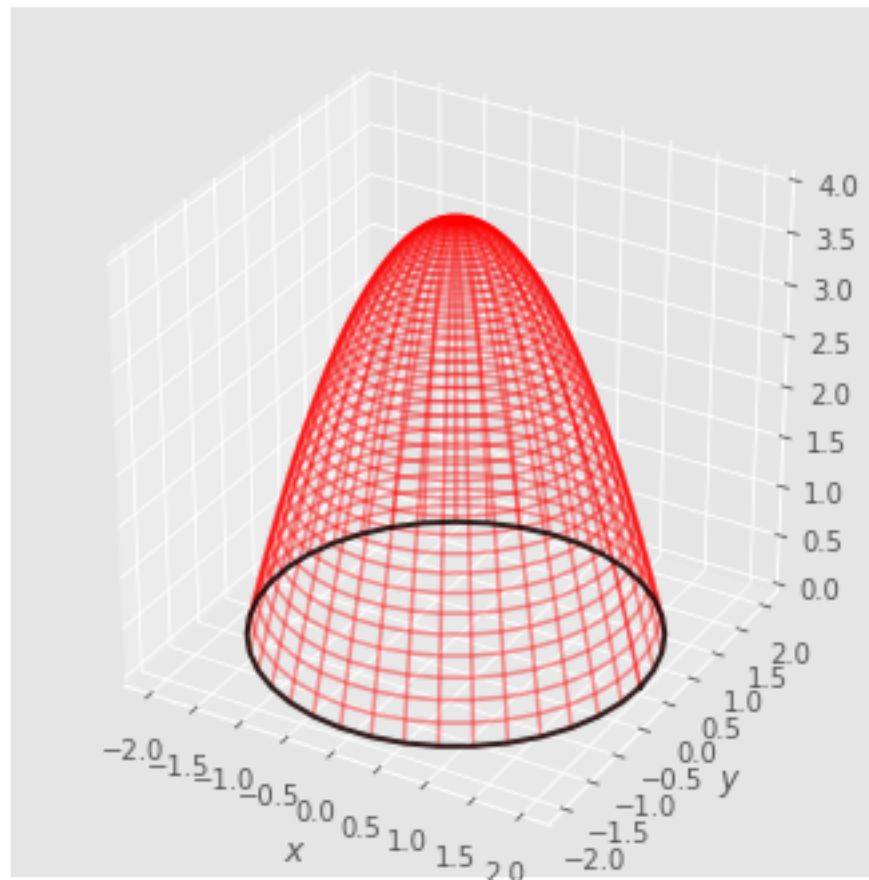
Ejercicio: Verifica el teorema de Stokes con el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ en la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$.


```

In [10]: sx = lambda r, phi : r * np.cos(phi)
          sy = lambda r, phi : r * np.sin(phi)
          sz = lambda r, phi : 4 - sx(r, phi)*sx(r, phi) - sy(r, phi)*sy(r, phi)
          cx = lambda phi    : 2. * np.cos(phi)
          cy = lambda phi    : 2. * np.sin(phi)
          cz = lambda phi    : 0. + 0. * phi

In [11]: rrange, phirange = (0, 2, 40), (0, 2*np.pi, 40)
          gf.wfsurface(sx, sy, sz, rrange, phirange, alpha = 0.4, color='red')
          gf.line3d    (cx, cy, cz, phirange, newfig = False, alpha = 0.4, color = 'black');

```



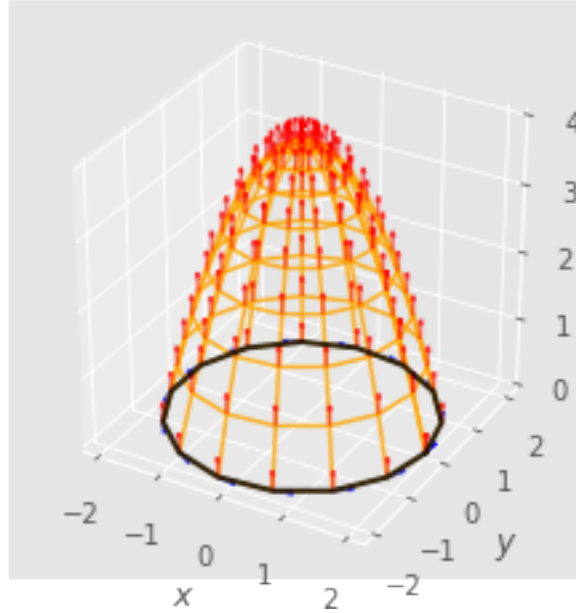
```

In [12]: Fx = lambda x, y, z : -1.*y + 0.*x
          Fy = lambda x, y, z : 1.*x + 0.*y
          Fz = lambda x, y, z : 0. + 0.*z
          Rx = lambda x, y, z : 0.*x
          Ry = lambda x, y, z : 0.*y
          Rz = lambda x, y, z : 2. + 0.*z

In [13]: rrange, phirange = (0., 2, 10), (0, 2*np.pi, 16)
          gf.quiver3d_in_wfsurface(Rx, Ry, Rz, sx, sy, sz, rrange, phirange, alpha = 0.5, color =

```

```
gf.wfsurface(sx, sy, sz, rrange, phirange, newfig = False, alpha = 0.8, color = 'orange')
gf.line3d(cx, cy, cz, phirange, newfig = False, alpha = 0.2, color = 'black');
gf.quiver3d_in_line3d(Fx, Fy, Fz, cx, cy, cz, phirange, newfig = False, alpha = 0.5, co
```



Parametrizamos la superficie:

$$\sigma(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

$$\mathbf{n}(x, y) = (2x, 2y, 1)$$

Parametrizamos la frontera:

$$\mathbf{c}(\phi) = (2 \cos \phi, 2 \sin \phi, 0)$$

$$\dot{\mathbf{c}}(\phi) = (-2 \sin \phi, 2 \cos \phi, 0)$$

El rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

La integral del rotacional en la superficie:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \, d\vec{\sigma} = \int_R (0, 0, 2)(2x, 2y, 1) \, dx \, dy = \int_R 2 \, dx \, dy$$

La región R es el disco de radio 2, si cambiamos a polares

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2r \, dr \, d\phi = 2\pi r^2 \Big|_0^2 = 8\pi$$

Y la integral del campo a lo largo de la frontera:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \, d\mathbf{s} &= \oint -y \, dx + x \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin \phi, 2 \cos \phi, 0) \cdot (-2 \sin \phi, 2 \cos \phi, 0) \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} 4(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \, d\phi = \int_0^{2\pi} 4 \, d\phi = 8\pi\end{aligned}$$

4.1.3 Teorema de Strogadski-Gauss

El teorema de Gauss corresponde al teorema de la divergencia en 3 dimensiones.

Teorema: Sea un volumen regular, V limitado por una superficie cerrada S , y sea un campo vectorial con derivadas primeras continuas $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$, se cumple:

$$\oint_S \mathbf{F} \, d\vec{\sigma} = \int_V \nabla \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$$

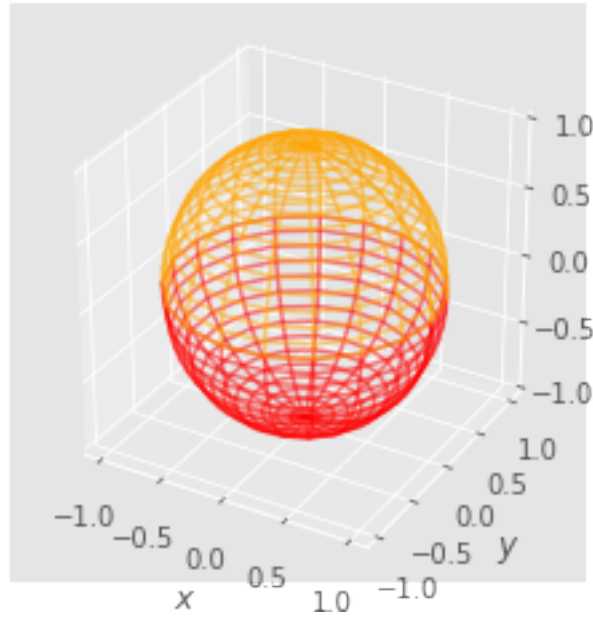
donde la superficie cerrada está definida hacia afuera.

Sea un volumen regular definido por una región D en (x, y) y $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, donde $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ son dos funciones escalares que nos limitan los valores de z .

Consideremos:

$$\int_V \frac{\partial F_z}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \int_D F_z(x, y, z) \Big|_{z_1}^{z_2} \, dx \, dy = \int_D [F_z(x, y, z_2(x, y)) - F_z(x, y, z_1(x, y))] \, dx \, dy$$

```
In [14]: r, phirange = 1, (0, 2*np.pi, 20)
        theta1range, theta2range = (0, np.pi/2, 16), (np.pi/2, np.pi, 16)
        Fx = lambda x, y, z : x
        Fy = lambda x, y, z : y
        Fz = lambda x, y, z : z
        sx = lambda theta, phi : r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
        sy = lambda theta, phi : r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
        sz = lambda theta, phi : r * np.cos(theta)
        gf.wfsurface(sx, sy, sz, theta1range, phirange, newfig = False, alpha = 0.5, color = 'o')
        gf.wfsurface(sx, sy, sz, theta2range, phirange, newfig = False, alpha = 0.5, color = 'r')
```



La integral

$$\int_D F_z(x, y, z_2(x, y)) \, dx dy = \int_D F_z \hat{k} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} \hat{n} = \int_{z_2} F_z \hat{k} \, d\vec{\sigma}$$

Donde hemos introducido el término

$$\frac{\hat{k} \hat{n}}{|\hat{k} \hat{n}|} = \frac{\hat{k} \hat{n}}{|\cos \gamma|},$$

y

$$d\vec{\sigma} = \frac{\hat{n}}{|\cos \gamma|} dx dy$$

\hat{n} es el vector unitario normal al diferencial de superficie de la superficie dada por z_2 , y γ el ángulo que forma \hat{n} con \hat{k} . Este término es 1 para z_2 , y es -1 para z_1 dado que hemos definido la superficie hacia fuera.

Así:

$$\int_V \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \oint F_z \hat{k} \, d\vec{\sigma}$$

Y de forma similar para el resto de sumandos, considerando para cada caso la correspondiente definición de las superficies que limitan el volumen.

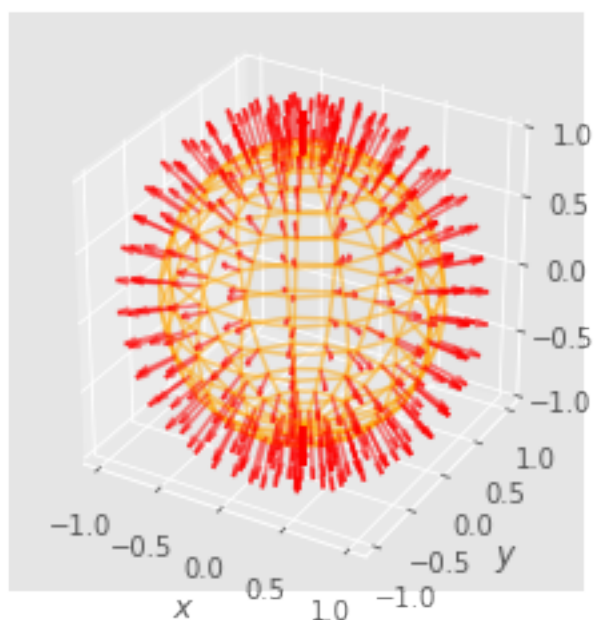
$$\int_V \frac{\partial F_y}{\partial y} dx dy dz = \oint F_y \hat{j} \, d\vec{\sigma}$$

$$\int_V \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz = \oint F_x \hat{i} \, d\vec{\sigma}$$

Ejemplo: Verifica el teorema de Gauss con el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ en la esfera de radio unidad.

Observa: Como el campo es radial, igual que los elementos diferenciales de área de la esfera.

```
In [15]: r, thetarange, phirange = 1, (0., np.pi, 18), (0, 2*np.pi, 18)
Fx = lambda x, y, z : x
Fy = lambda x, y, z : y
Fz = lambda x, y, z : z
sx = lambda theta, phi : r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
sy = lambda theta, phi : r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
sz = lambda theta, phi : r * np.cos(theta)
gf.quiver3d_in_wfsurface(Fx, Fy, Fz, sx, sy, sz, thetarange, phirange, alpha = 0.5, col
gf.wfsurface(sx, sy, sz, thetarange, phirange, newfig = False, alpha = 0.5, color = 'or
```



a) la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$

$$\int_V 3 dx dy dz = 3 \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

b) Si parametrizamos la esfera en coordenadas esféricas, ya vimos que

$$\mathbf{n}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \sin \theta$$

$$\mathbf{F}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

Luego:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \sin \theta$$

Así

$$\oint_S \mathbf{F} d\vec{\sigma} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi = \phi \Big|_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 4\pi$$

Ejercicio: Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$ en la esfera de radio unidad. Aplicamos el teorema de Gauss,

$$\nabla \mathbf{F} = 2 + 2y + 2z$$

La integral

$$\int_V (2 + 2y + 2z) dx dy dz$$

Las dos últimas integrales son nulas. Considera la primera, el volumen dividido en dos semiesferas $y \leq 0$ e $y \geq 0$, la integral vale lo mismo en cada semiesfera pero con signo cambiado.

$$\int_V 2y dx dy dz = \int_V 2z dx dy dz = 0$$

La integral que resta es simplemente dos veces el volumen de la esfera

$$\int_V 2 dx dy dz = 2 \frac{4\pi}{3}$$

Ejercicio: Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, yx^2, y)$ sobre el cilindro de disco unidad y altura en z en $[-1, 1]$

Aplicamos el teorema de Gauss:

$$\nabla \mathbf{F} = y^2 + x^2$$

La integral del volumen la hacemos en coordenadas cilíndricas, (recuerda que el jacobiano es r):

$$\int_V \nabla \mathbf{F} dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\phi dz$$

Esto es:

$$= z \Big|_{-1}^1 \phi \Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \pi$$

¡Aún hay más! Carl Friedrich Gauss fue uno de las grandes matemáticos de la historia, con importantes contribuciones en Física, en Electromagnetismo y en Estadística. La probabilidad normal, con la que ocurren casi todos los fenómenos de medida, sigue se ley de Gauss.

Aquí tienes su entrada en la Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss



Gauss