Métodos III - Cálculo Vectorial

April 24, 2019

2 Teorema de Green

Jose A. Hernando
Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela
Marzo 2019

```
In [1]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

```
 Last version  Wed Apr 24 16:14:02 2019
```

2.1 Objectivos

Relación entre la integral de área de una región y la integral de línea de determinados campos vectoriales.

El teorema de Green. Relación entre la integral a lo largo de una curva cerrada de una función vectorial y la integral de la tercera componente del rotacional dentro de la región encerrada.

Demostrar el teorema con dos lemas.

Mostrar algunos ejemplos sencillos.

```
In [2]: # general imports
        %matplotlib inline
        %reload_ext autoreload
        %autoreload 2

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        matplotlib.style.use('ggplot')
        import graph_utils as gf

        figsize = 6, 3.8
        cmap    = 'hot'
```

2.2 Teorema de Green

Relación entre integral de línea de un campo vectorial e integral de superficie. Considera una región, R, en plano (x, y) definida de tipo I:

$$\{a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son las funciones que limitan la parte inferior y superior de la región.
Date cuenta que podemos parametrizar la línea del límite inferior de la región con:

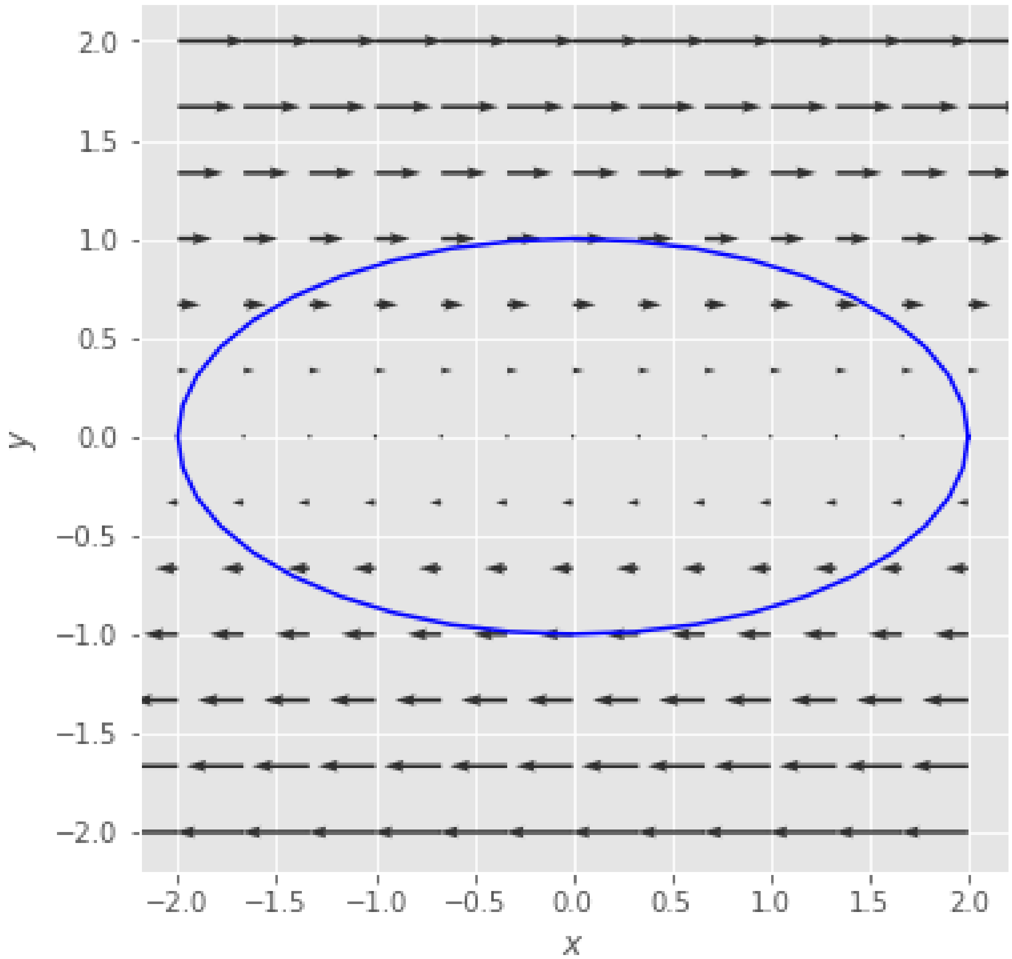
$$x \in [a, b],\ \mathbf{c_1}(x) = (x, y_1(x))$$

y la superior con:

$$x \in [a, b],\ \mathbf{c_2}(x) = (x, y_2(x))$$

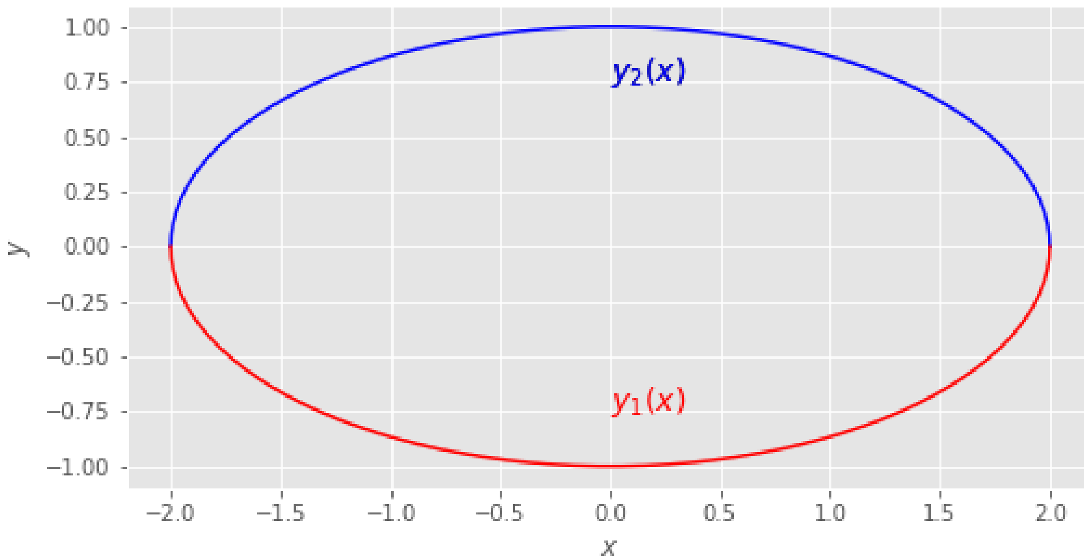
Observa: En la siguiente figura se muestra el campo $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$ y la elipse de ejes $a = 2$ en x y $b = 1$ en y. Recuerda que el área de elipse es πab.

In [3]:
```
a, b = 2., 1.
xrange = (-2.0, 2.0, 13)
trange = (0, 2.*np.pi, 41)
Ex = lambda x, y :     y * 1.
Ey = lambda x, y :     x * 0.
cx = lambda t    : a * np.cos(t)
cy = lambda t    : b * np.sin(t)
gf.line2d(cx, cy, trange);
gf.quiver2d(Ex, Ey, xrange, xrange);
```



Observa: En la siguiente figura se muestra cómo podemos definir la región de la elipse de tipo I, y parametrizar las dos curvas que determinan la frontera de la región.

```
In [4]: trange = (0., np.pi, 60)
        gf.line2d(cx, cy, trange, color = 'blue');
        plt.text(0.,  0.75, "$y_2(x)$", fontsize = 14);
        trange = (np.pi, 2.*np.pi, 60)
        gf.line2d(cx, cy, trange, newfig = False, color = 'red');
        plt.text(0.,  0.75, "$y_2(x)$", color = 'blue', fontsize = 14);
        plt.text(0., -0.75, "$y_1(x)$", color = 'red' , fontsize = 14);
```



Cálculemos ahora el área de la región:

$$\int_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right)\, \mathrm{d}x = \int_a^b y_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b y_1(x)\,\mathrm{d}x$$

Si calculamos ahora la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (y,0)$ a lo largo de $\mathbf{c}_1(x)$,

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{ds} = \int_{\mathbf{c}_1} y\,\mathrm{d}x$$

El elemento vectorial diferencial de arco es:

$$\mathbf{ds} = \dot{\mathbf{c}}(x)\,\mathrm{d}x = (1, \dot{y}_1(x))\,\mathrm{d}x$$

Y el producto vectorial:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{ds} \to (y_1(x), 0)\ \left(1, \dot{y}_1(x)\right)\ \mathrm{d}x = y_1(x)\,\mathrm{d}x$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{ds} = \int_{\mathbf{c}_1} y\,\mathrm{d}x = \int_a^b y_1(x)\mathrm{d}x$$

Que corresponde al área que hay entre la línea $y_1(x)$ (o $\mathbf{c}_1$) y el eje $y = 0$, en el intervalo $[a,b]$ de x.

De igual forma, la integral de la función vectorial, $\mathbf{F}(x,y) = (y,0)$, a lo largo de la línea superior, $\mathbf{c}_2(x)$ que da la frontera superior de la región queda:

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{ds} = \int_{\mathbf{c}_2} y\,\mathrm{d}x = \int_a^b y_2(x)\,\mathrm{d}x$$

Si enlazamos la integral de línea de la función vectorial $(y, 0)$ a lo largo de $\mathbf{c}_2(x)$ y luego $\mathbf{c}_1(x)$ (en sentido contrario), nos da una integral a lo largo de una curva cerrada, $\mathbf{c}$, en sentido horario, que corresponde al área de la región, R, encerrada por $\mathbf{c}$.

$$\begin{aligned}
\oint_c (y,0)\,\mathrm{d}\mathbf{s} &= \oint_{\mathbf{c}} y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{c}_2} y\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{c}_1} y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b y_2(x) - \int_a^b y_1(x)\mathrm{d}x = \int_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ejercicio: Verifica que la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (0,x)$ a lo largo de la frontera, $\mathbf{c}(y)$, en sentido anti-horario, de una región, R, de (x,y) parametrizada de tipo II, es igual al área de R.

$$\oint_{\mathbf{c}} (0,x)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{\mathbf{c}} x\,\mathrm{d}y = \int_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Teorema de Green **Teorema**: La integral del campo vectorial, $\mathbf{F}(x,y) = \big(F_x(x,y),\ F_y(x,y)\big)$, con $F_x(x,y), F_y(x,y)$ con derivadas primeras continuas en una región, R, a lo largo de una línea frontera, $\mathbf{c}$ de la región R en sentido anti-horario es:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{\mathbf{c}} F_x(x,y)\,\mathrm{d}x + F_y(x,y)\mathrm{d}y = \int_R \left(\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Lema: Sea una función vectorial, $\mathbf{F}(x,y) = (F_x(x,y), 0)$ con $F_x(x,y)$ con derivadas primeras continuas en una región, R; la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de una línea frontera, $\mathbf{c}$, de R en sentido anti-horario es:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{\mathbf{c}} F_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_R -\frac{F_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Consideremos que definimos la región de tipo I, con dos líneas frontera, parametrizadas en función de x en el intervalo $[a,b]$.

$$\{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

con:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1(x) &= (x, y_1(x))\,,\ x \in [a,b] \\
\mathbf{c}_2(x) &= (x, y_2(x))\,,\ x \in [a,b]
\end{aligned}$$

La integral (nota el cambio de signo):

$$\int_R \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b F_x(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b F_x(x, y_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b F_x(x, y_1(x))\,\mathrm{d}x$$

Por otro lado, la integral en la línea $\mathbf{c}_2(x)$ de la función vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (F_x(x,y), 0)$ es:

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} (F_x(x,y), 0)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} F_x(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Como en el caso anterior:

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \dot{\mathbf{c}}_2(x)\,\mathrm{d}x = (1, \dot{y}_2(x))\,\mathrm{d}x$$

Y por lo tanto

$$\int_{\mathbf{c}_2} (F_x(x,y), 0)\ \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b (F_x(x, y_2(x)), 0)\ (1, \dot{y}_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b F_x(x, y_2(x))\,\mathrm{d}x$$

que corresponde al primer término de la integral anterior de área.

Si calculamos entonces la integral del campo $\mathbf{F}(x,y) = (F_x(x,y), 0)$ en dirección horaria de la curva cerrada, $\mathbf{c}$, que es la frontera de R, y que corresponde a integrar en $\mathbf{c}_2$ y luego en $\mathbf{c}_1$ (en sentido opuesto), esto es, en sentido horario, obtenemos:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} &= \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} \\ &= \int_a^b F_x(x, y_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b F_x(x, y_1(x))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Si consideramos el sentido anti-horario, implica un cambio de signo en el lado derecho de la igualdad:

$$\oint_{\mathbf{c}} (F_x(x,y), 0)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_R -\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ejercicio: Verificar el siguiente lema

Lema: La integral de la función vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \big(0, F_y(x,y)\big)$ a lo largo de la curva $\mathbf{c}$, que limita una región R, en sentido anti-horario es:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{\mathbf{c}} F_y(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Con la demostración de ambos lemas, queda demostrado el teorema de Green.

Corolario: La integral en sentido anti-horario de la función vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)/2$ a lo largo de la línea frontera $\mathbf{c}$ de una región R corresponde a su área:

El término que aparece en el teorema de Green es:

$$\left(\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Por lo tanto:

$$\oint_{\mathbf{c}} \frac{1}{2}(-y, x)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{\mathbf{c}} -\frac{y}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{2}\mathrm{d}y = \int_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ejercicio: Verificar el teorema de Green con la función vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$ en el disco de radio unidad.

El término de la derecha del teorema de Green es:

$$\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} = 0$$

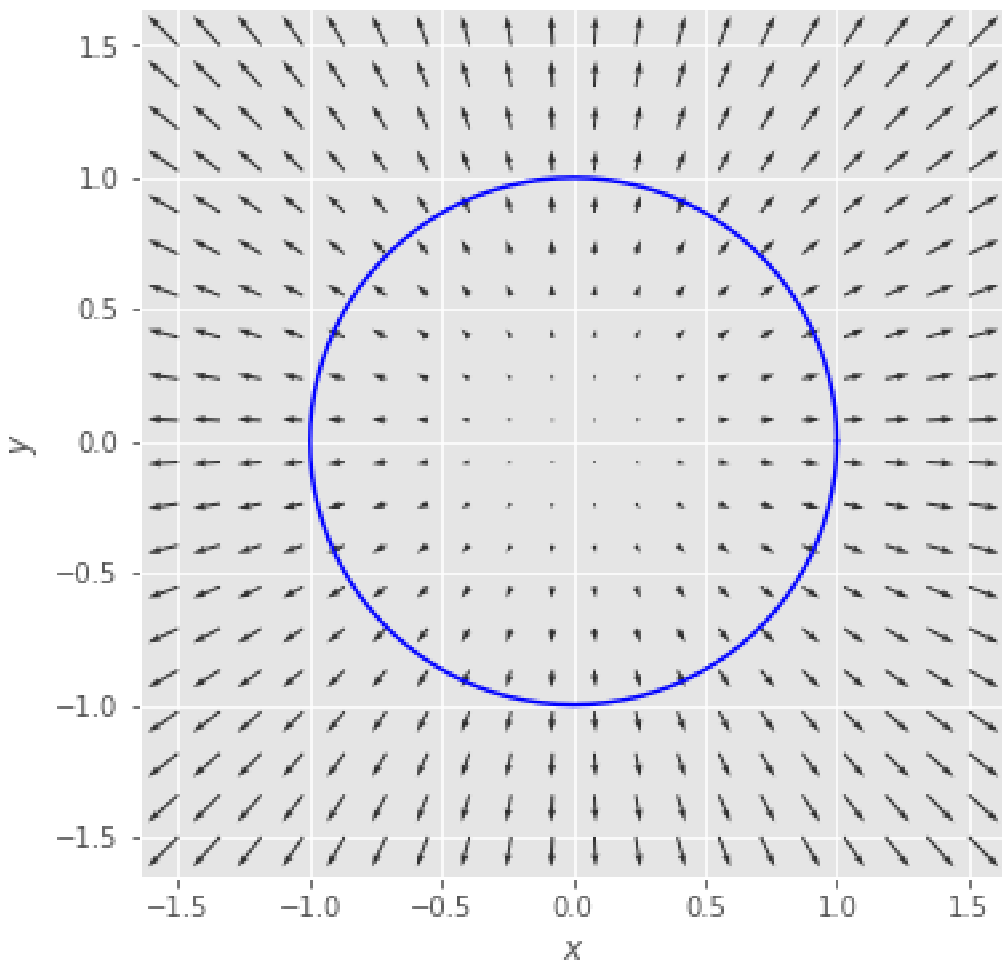
Para la parametrización de la circunferencia, en sentido anti-horario:

$$t \in [0, 2\pi),\ \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$$

La integral de línea:

$$\oint_{\mathbf{c}} (x, y)\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t)\, (-\sin t, \cos t)\, \mathrm{d}t = 0$$

```
In [5]: xrange = (-1.5, 1.5, 20)
        trange = (0, 2.*np.pi, 101)
        Ex = lambda x, y : 1.*x
        Ey = lambda x, y : 1.*y
        cx = lambda t    : np.cos(t)
        cy = lambda t    : np.sin(t)
        gf.line2d(cx, cy, trange);
        gf.quiver2d(Ex, Ey, xrange, xrange);
```



Teorema de la divergencia. Vamos a considerar la integral de una función vectorial de dos dimensiones, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, *a través de* una línea, $\mathbf{c}(t)$.

Dado el elemento vectorial diferencial de arco $\mathrm{d}\mathbf{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, en vez de calcular el productor escalar del campo a lo largo de la trayectoria, $\mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, lo calculamos a través de ella, normal a ella, $\mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{n}$, donde, $\mathrm{d}\mathbf{n}$ es normal a $\mathrm{d}\mathbf{s}$, pero con igual módulo, que damos por: $\mathrm{d}\mathbf{n} = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x)$.

Esto es:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\mathbf{c}} F_x(x,y)\,\mathrm{d}y - F_y(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Que podemos calcular a partir de la parametrización de la curva: $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [t_0, t_1]$.

$$\mathrm{d}\mathbf{n} = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) \to (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x(x(t),y(t)),\, F_y(x(t),y(t))\right)\, (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$$

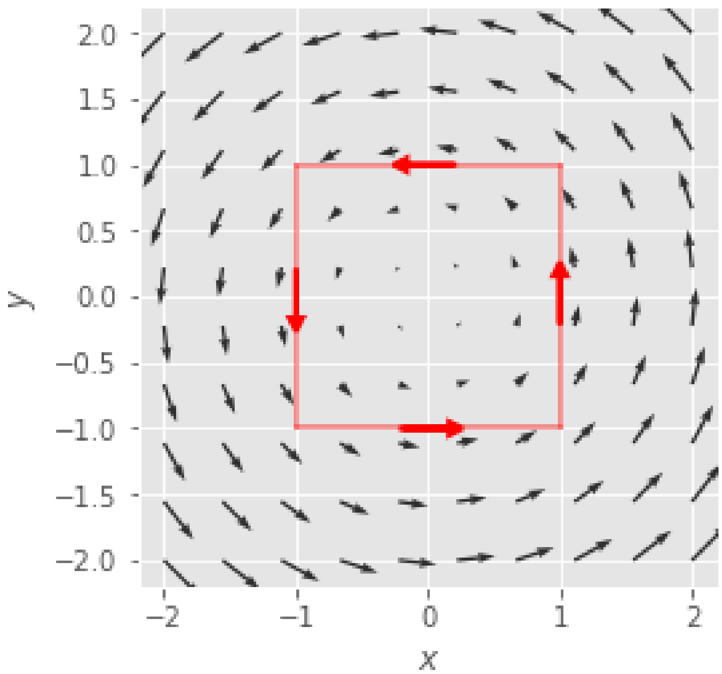
Si aplicamos el teorema de Green a una curva cerrada recorrida en sentido anti-horario:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\mathbf{c}} F_x(x,y)\,\mathrm{d}y - F_y(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_R \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

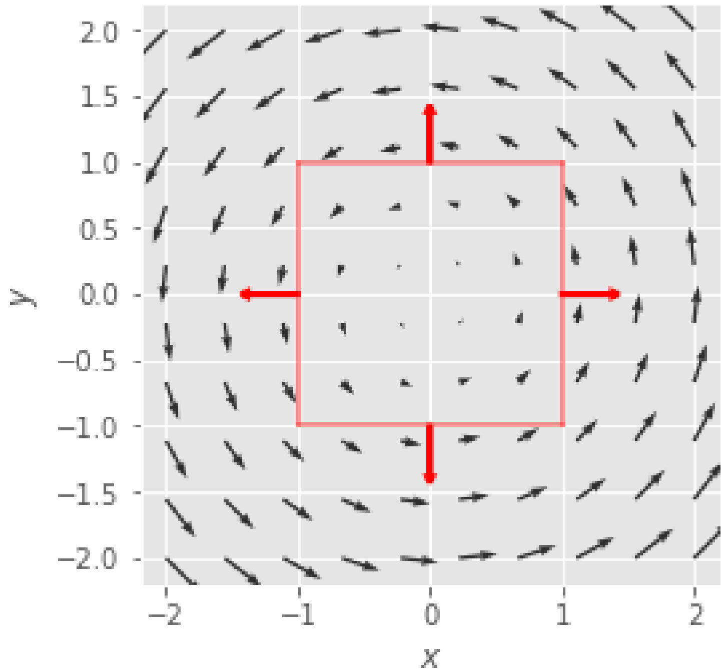
que se denomina **teorema de la divergencia**.

Explora: Cómo es la integral de los campos a lo largo y a través de la espira cuadrada centrada en el origen. Dibuja por ejemplo los siguientes campos: $\mathbf{F}(x,y) = (\pm x, \pm y)/2$ y $\mathbf{F}(x,y) = (\pm y, \pm x)/2$

```
In [6]: xrange = (-2., 2., 10)
        Ex = lambda x, y:  -y/2
        Ey = lambda x, y:   x/2
        gf.quiver2d(Ex, Ey, xrange, xrange);
        x0, y0, xside, yside = -1, -1., 2., 2.
        gf.square( (x0, y0), xside, yside, color = 'r');
        gf.arrow ( x0 + 0.4 * xside, y0              ,  0.2 * xside,  0.0        , head = 0.1, co
        gf.arrow ( x0 + xside      , y0 + 0.4 * yside,  0.0        ,  0.2* yside, head = 0.1, co
        gf.arrow ( x0 + 0.6 * xside, y0 + 1.0 * yside, -0.2 * xside,  0.0        , head = 0.1, co
        gf.arrow ( x0              , y0 + 0.6 * yside,  0.0        , -0.2* yside, head = 0.1, co
```

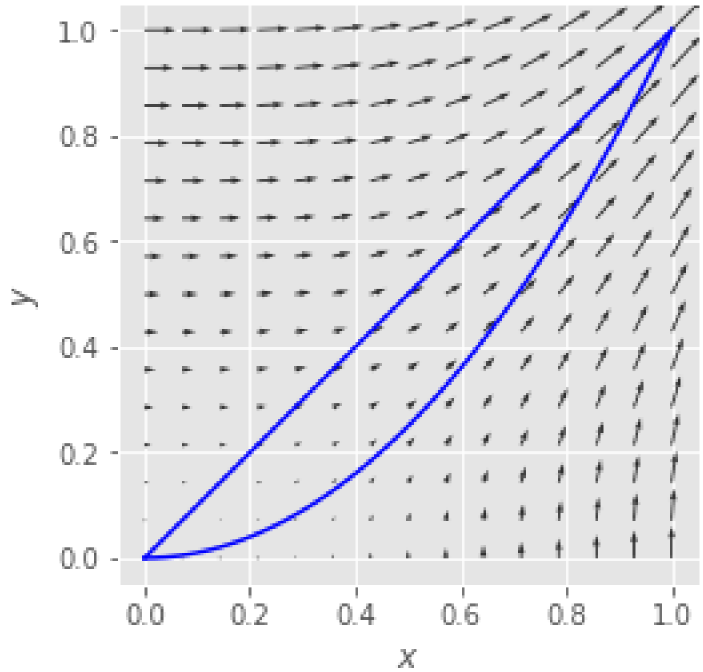


In [7]:
```
gf.quiver2d(Ex, Ey, xrange, xrange);
x0, y0, xside, yside = -1, -1., 2., 2.
gf.square( (x0, y0), xside, yside, color = 'r');
gf.arrow ( x0 + 0.5 * xside, y0                ,  0.0 * xside, -0.2 * yside, head = 0.05,
gf.arrow ( x0 + xside      , y0 + 0.5 * yside,  0.2 * xside,  0.0 * yside, head = 0.05,
gf.arrow ( x0 + 0.5 * xside, y0 + 1.0 * yside,  0.0 * xside,  0.2 * yside, head = 0.05,
gf.arrow ( x0              , y0 + 0.5 * yside, -0.2 * xside, -0.0 * yside, head = 0.05,
```



Apéndices *Ejercicio*: Verifica el teorema de Green para el campo, $\mathbf{F}(x,y) = (y, x^2)$ en la región definida como: $\{0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

```
In [8]: xrange = (-0., 1., 15)
        trange = (0., 1., 50)
        Ex     = lambda x, y: y
        Ey     = lambda x, y: x*x
        fx     = lambda x   : x
        fy1    = lambda x   : x*x
        fy2    = lambda x   : x
        gf.quiver2d(Ex, Ey, xrange, xrange);
        gf.line2d(fx, fy1, trange, newfig = False);
        gf.line2d(fx, fy2, trange, newfig = False);
```



1) Calculamos

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \to 2x - 1$$

Luego:

$$\int_R \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \to \int_0^1 \left[\int_x^{x^2} (2x-1)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (2x-1)\, y\big|_x^{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x-1)(x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2 - x)\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = 0$$

2) Parametrizamos la línea frontera inferior $\mathbf{c}_1(x)$ y superior $\mathbf{c}_2(x)$:

$$\mathbf{c}_1(x) = (x, x^2),\ \dot{\mathbf{c}}_1(x) = (1, 2x),\ x \in [0,1]$$
$$\mathbf{c}_2(x) = (x, x),\ \dot{\mathbf{c}}_2(x) = (1, 1),\ x \in [0,1]$$

2i) La integral del campo, $\mathbf{F}(x,y) = (y, x^2)$ a lo largo de $\mathbf{c}_1$ es:

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}\, \mathbf{ds} \to \int_0^1 (x^2, x^2)\,(1, 2x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 + 2x^3 \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

2ii) La integral del campo a lo largo de $\mathbf{c}_2$ es:

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{s} \to \int_0^1 (x, x^2)\,(1,1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x + x^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

2iii) La integral del campo a lo largo de $\mathbf{c}_1$ y luego $\mathbf{c}_2$ (en sentido contrario), de tal forma que recorrarmos la frontera, $\mathbf{c}$, en sentido antihorario es:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$$