Métodos III - Integrales

March 13, 2019

3 Integrales en varias dimensiones

Jose A. Hernando
Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela
Marzo 2019

```
In [1]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

```
 Last version  Wed Mar 13 17:10:54 2019
```

3.1 Objectivos

Extender la integral de una función escalar de dos dimensions.
Definición de regiones en varias dimensiones.
Extender cómo integrar con un cambio de variables.
Mostrar algunos ejemplos sencillos

```
In [2]: # general imports
        %matplotlib inline
        %reload_ext autoreload
        %autoreload 2

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        matplotlib.style.use('ggplot')
        import graph_utils as gf

        figsize = 6, 3.8
        cmap    = 'hot'
```

3.2 Integrales en varias dimensiones

Extensión de la integral. Sea una función escalar, $f(x, y, z)$, y un prisma dado por: $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. La integral de la función en el prisma es:

$$\int_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

El **teorema de Fubini** nos asegura que podemos integrar en el orden que deseemos.

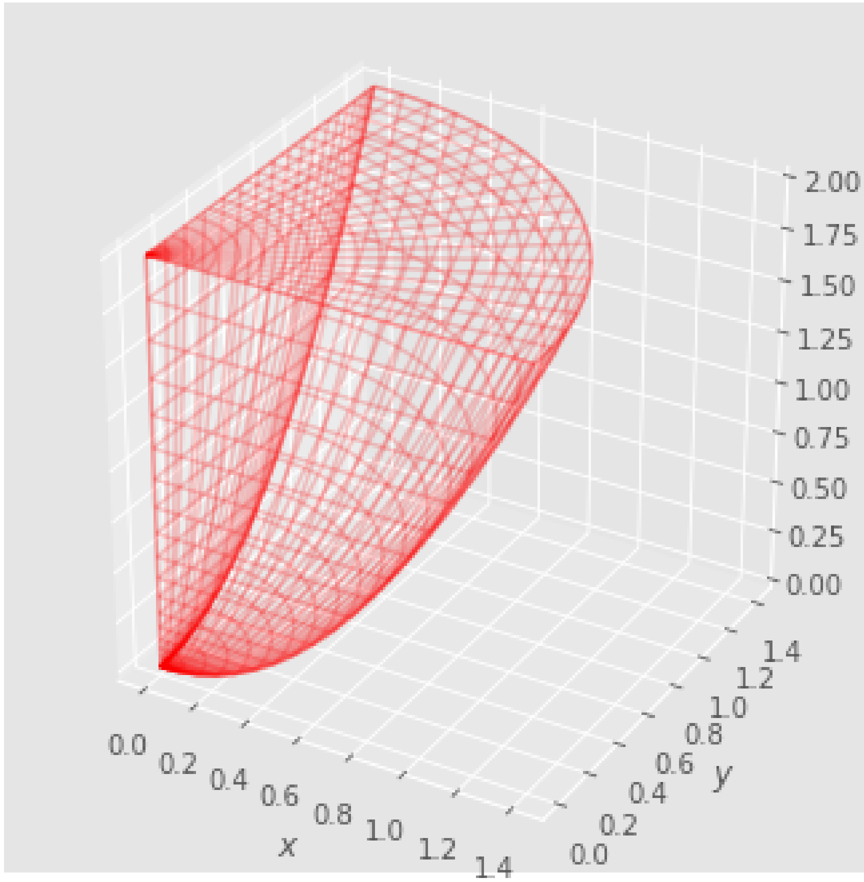
$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \,\mathrm{d}x$$
$$= \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \right] \,\mathrm{d}z = \ \ldots$$

Integrales en volumenes que no son un prisma. Considera el siguiente volumen limitado por superficie $z = x^2 + y^2$ hasta $z = 2$, con $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

La siguiente figura te muestra este volumen.

```
In [3]: rrange, phirange = (0, np.sqrt(2), 20), (0, np.pi/2, 20)
        xfun  = lambda r, phi : r * np.cos(phi)
        yfun  = lambda r, phi : r * np.sin(phi)
        zfun  = lambda r, phi : r * r
        ztop  = lambda r, phi : 2 + 0.*r # this is trick
        cero  = lambda r, phi : 0 + 0.*r
```

```
In [4]: gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r');
        gf.wfsurface(xfun, yfun, ztop, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
        gf.wfsurface(xfun, cero, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
        gf.wfsurface(cero, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
```



En 3 dimensiones podemos definir un volumen con 6 tipos distintos, de forma simular a cómo definimos las regiones en 2 dimensiones.

Por ejemplo, el volumen de tipo I sería:

$$\{a \le x \le b,\ \phi_0(x) \le y\phi_1(x),\ \gamma_0(x,y) \le z \le \gamma_1(x,y)\}$$

donde el intervalo de integración en x es $[a,b]$. Fijado un valor de x, los límites de integración en y vienen dados por las funciones reales $[\phi_0(x), \phi_1(x)]$. Y finalmente, fijado un punto (x,y), los límites de integración en z están dados por las funciones escalares $[\gamma_0(x,y), \gamma_1(x,y)]$.

La integral es:

$$\int_a^b \left[\int_{\phi_0(x)}^{\phi_1(x)} \left[\int_{\gamma_0(x,y)}^{\gamma_1(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

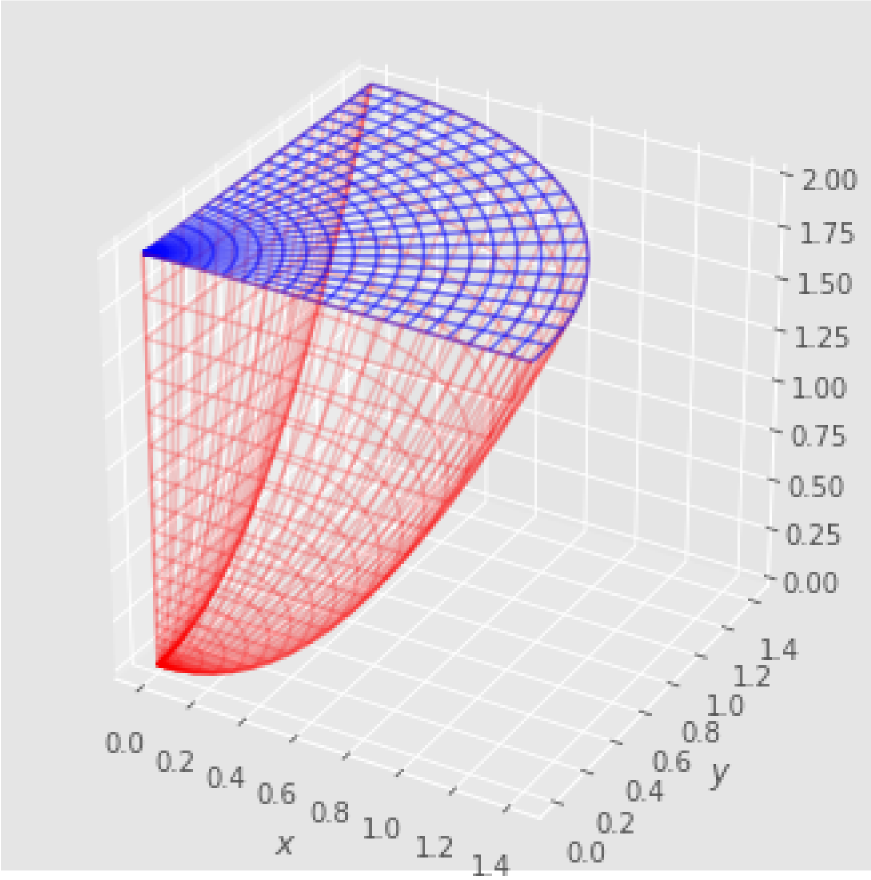
En el caso en que $f(x,y,z) = 1$, la integral corresponde al volumen.

Vamos a definir el anterior volumen como tipo I.

En la figura se muestra la tapa superor, que nos permite determinar el rango de integración. El intervalo en x en $[0, \sqrt{2}]$. Mientras que fijado un valor de x, el intervalo de y es $[0, \sqrt{2-x^2}]$.

```
In [5]: gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r');
        gf.wfsurface(xfun, yfun, ztop, rrange, phirange, alpha = 0.5, color = 'b', newfig = Fals
```

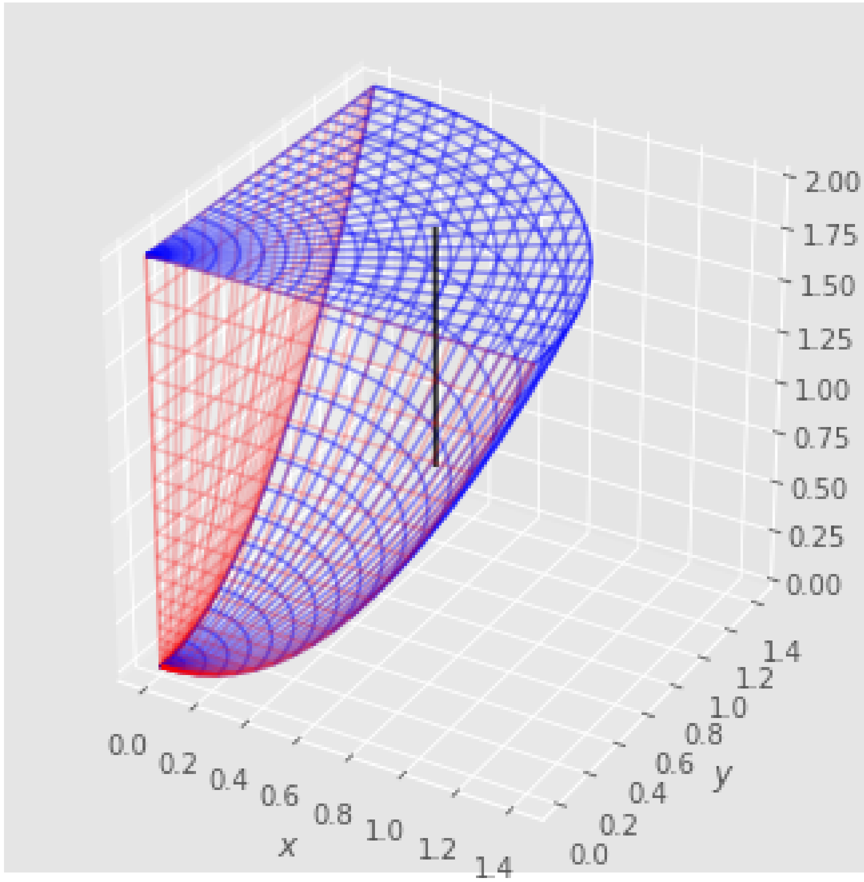
```
gf.wfsurface(xfun, cero, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
gf.wfsurface(cero, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
```



En la figura se muestra el segmento en z de integracción fijado un punto (x, y), que corresponde a $[x^2 + y^2, 2]$.

```
In [6]: x0 = 0.5 * np.sqrt(2.)
        y0 = 0.5 *(np.sqrt(2 - x0*x0))
        trange = (0., 1., 20)
        xline = lambda t : x0 + 0. * t
        yline = lambda t : y0 + 0. * t
        zline = lambda t : (1 - t) * (x0*x0 + y0*y0) + 2. * t
```

```
In [7]: gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.4, color = 'b');
        gf.wfsurface(xfun, yfun, ztop, rrange, phirange, alpha = 0.4, color = 'b', newfig = Fals
        gf.wfsurface(xfun, cero, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
        gf.wfsurface(cero, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
        gf.line3d(xline, yline, zline, trange, alpha = 0.5, color = 'black', newfig = False);
```



El volumen queda definido como:

$$\{0 \leq x \leq \sqrt{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$$

Luego la integral queda:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left[\int_{x^2+y^2}^{2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Ejercicio: Integra la función $f(x,y,z) = x$ en el volumen anterior.

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left[\int_{x^2+y^2}^{2} x\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x\,z\Big|_{x^2+y^2}^{2} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x\,(2-x^2-y^2)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)y - x\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}(2-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x = -\frac{2}{15}(2-x^2)^{5/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15}\sqrt{2}$$

Vamos a redefinir el volumen de otro tipo.

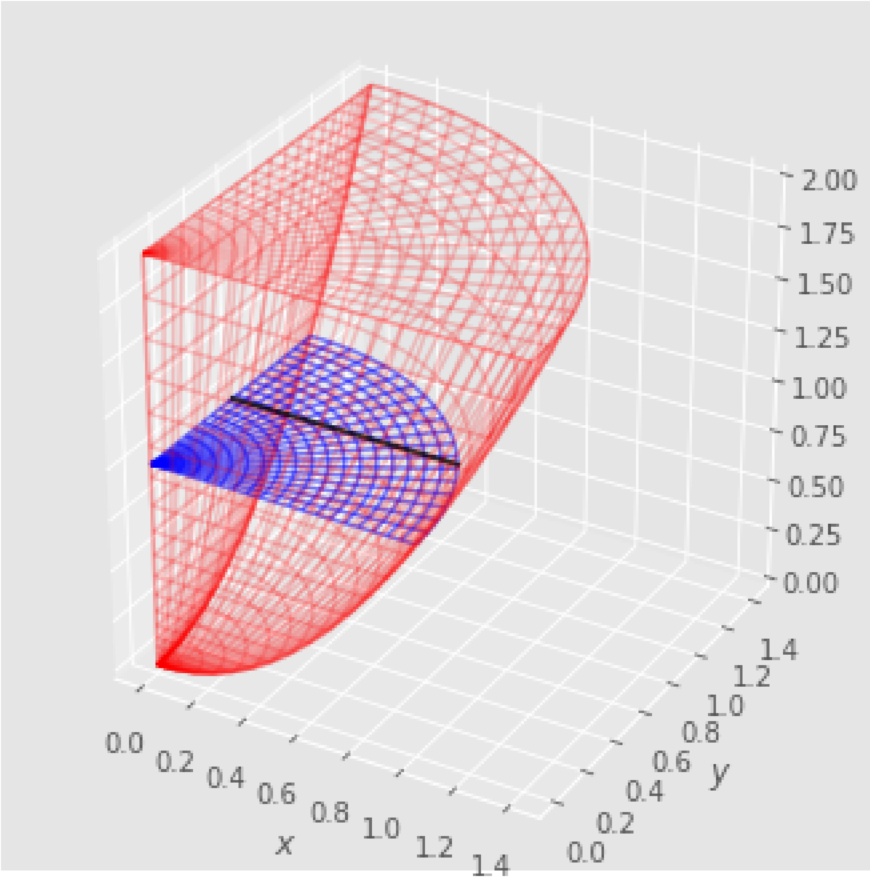
El rango en z es $[0,2]$.

La figura muestra el plano (x,y) una vez fijado un valor de z. El rango, por ejemplo, de y es $[0,\sqrt{z}]$.

La figura también muestra el segmento en x una vez fijado un punto (y,z). El rango en x es $[0,\sqrt{z-y^2}]$.

In [8]:
```
z0 = 0.5 * 2.
y0 = 0.5 * np.sqrt(z0)
xval = lambda r, phi : r * np.sqrt(z0/2.) * np.cos(phi)
yval = lambda r, phi : r * np.sqrt(z0/2.) * np.sin(phi)
zval = lambda r, phi : z0 + 0.*r
xline = lambda t : np.sqrt(z0 - y0*y0) * t
yline = lambda t : y0 + 0. * t
zline = lambda t : z0 + 0. * t
```

In [9]:
```
gf.wfsurface(xfun, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r');
gf.wfsurface(xfun, yfun, ztop, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
gf.wfsurface(xfun, cero, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
gf.wfsurface(cero, yfun, zfun, rrange, phirange, alpha = 0.2, color = 'r', newfig = Fals
gf.wfsurface(xval, yval, zval, rrange, phirange, alpha = 0.5, color = 'b', newfig = Fals
gf.line3d(xline, yline, zline, trange, alpha = 0.5, color = 'black', newfig = False);
```



El volumen se puede redefinir como:

$$\{0 \leq z \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{z},\ 0 \leq x \leq \sqrt{z - y^2}\}$$

La integral queda:

$$\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \left[\int_0^{\sqrt{z-y^2}} f(x,y,z)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z$$

Ejercicio: Repite la integral de $f(x,y,z) = x$ con la nueva definición del volumen.

$$\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \left[\int_0^{\sqrt{z-y^2}} x\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\sqrt{z-y^2}} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \frac{z - y^2}{2} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z = \int_0^2 \left. \frac{z}{2}y - \frac{y^3}{6} \right|_0^{\sqrt{z}} \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{3} z^{3/2} \mathrm{d}z = \left. \frac{2}{15} z^{5/2} \right|_0^2 = \frac{8}{15}\sqrt{2}$$

Cambio de variables En el caso anterior, la integral se resuelve de forma más cómoda en cilíndricas.

Al igual que vimos en funciones escalares de dos dimensiones. En unas nuevas variables (u,v,w), con $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$, viene dada por:

$$\int_V f(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{V'} f(u,v,w)\, |J| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

donde V' es el volumen y $f(u,v,w)$ la función en las nuevas variables.
Mientras que el elemento diferencial de volumen

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to |J| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Donde $|J|$ es el valor absoluto del jacobiano, el determinante de la matriz jacobiana del cambio de variables:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Cambio a cilíndricas
Recordemos que el cambio a cilíndricas es:

$$x(r,\phi,z) = r\cos\phi,\ y(r,\phi,z) = r\sin\phi,\ z(r,\phi,z) = z$$

La matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el Jacobiano, $J = r$
Luego:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

Ejercicio: Calcula nuevamente la integral de $f(x,y,z) = x$ en el volumen anterior en coordenadas cilíndricas.

El volumen podemos definirlo como en cilíndricas como:

$$\{0 \leq z \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq \sqrt{z}\}$$

La integral queda:

$$\int_0^2 \left[\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\sqrt{z}} r^2\cos\phi\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}z$$

$$\int_0^2 \sin\phi\Big|_0^{\pi/2}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}z = \int_0^2\frac{z^{3/2}}{3}\mathrm{d}z = \frac{2}{15}z^{5/2}\Big|_0^2 = \frac{8}{15}\sqrt{2}$$

Cámbio a esféricas

Recordemos el cámbio de coordenadas esféricas:

$$x(r,\phi,\theta) = r\cos\phi\sin\theta,\ y(r,\phi,\theta) = r\sin\phi\sin\theta,\ z(r,\phi,\theta) = r\cos\theta$$

Y su matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Y el valor absoluto del jacobiano $|J| = r^2\sin\theta$
Por lo tanto:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

El jacobiano:

$$J = \cos\theta\left(-r^2\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta\right) - r\sin\theta\left(r\cos^2\phi\sin^2\theta + r\sin^2\phi\sin^2\theta\right)$$
$$= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta = -r\sin\theta$$

La siguiente figura muestra el elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas.
Los lados del elemento diferencial son, dr, rdθ, y $r\sin\theta$dϕ.
Ejercicio: Calcula la integral de $f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ en la esfera de radio unidad.
La definición de la esfera de radio unidad:

$$\{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

La integral queda:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{r^3}\,r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \phi\big|_0^{2\pi}(-\cos\theta)\big|_0^{\pi}\frac{1}{3}e^{r^3}\big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$