Métodos III - Derivadas

February 12, 2019

6 Cambio de coordenadas y regla de la cadena

Jose A. Hernando
Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela
Enero 2019

```
In [1]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

```
 Last version  Tue Feb 12 00:24:20 2019
```

6.1 Objectivos

Aprender a hacer cambios de coordenadas
Mostrar la regla de la cadena y algunos usos.

```
In [2]: # general imports
        # general imports
        %matplotlib inline
        %reload_ext autoreload
        %autoreload 2

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        matplotlib.style.use('ggplot')
        import graph_utils as gf
```

6.2 Cambio de variables

La siguiente función es el potencial de una carga eléctrica, q en el espacio:

$$V(x,y,z) = k\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

El potencial sabemos que es radial, que solo depende de la distancia a la carga, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Podemos expresar el potencial en *coordenadas cartesianas*, como en la anterior ecuación, pero también, de forma más sencilla, en *coordenadas esféricas*, donde la variable r es la distancia al origen, así:

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

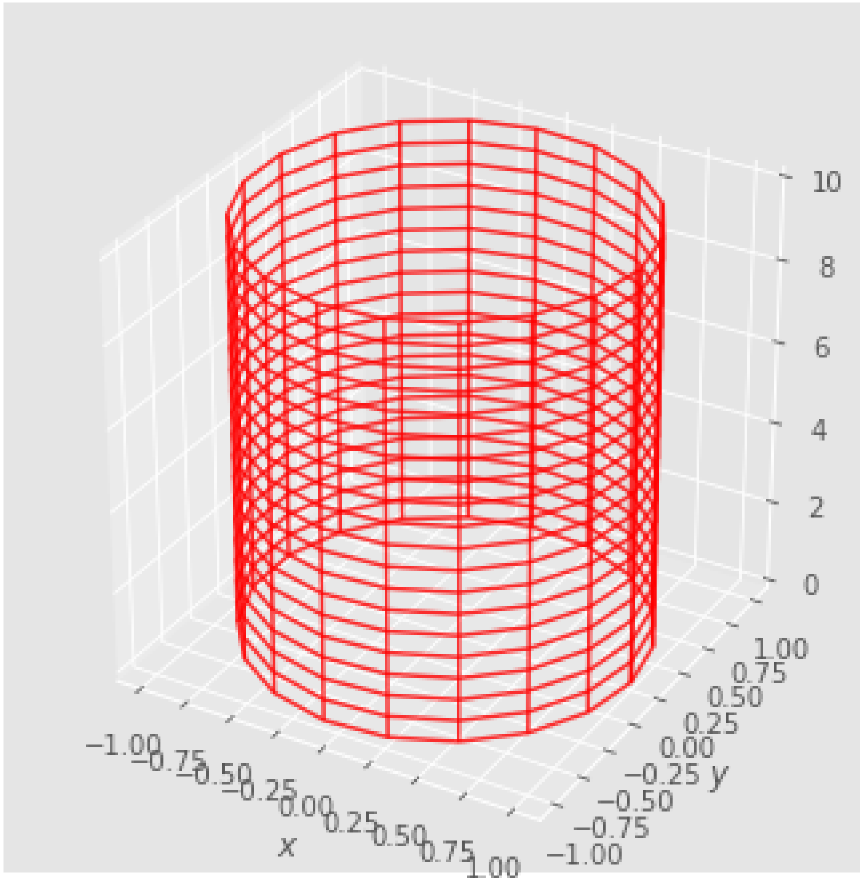
En este caso solo depende de r

En la sección de parametrización de superficies, vimos que podíamos dar la pared de un cilindro de radio r, y altura infinita como:

$$\sigma(\phi, z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$$

Donde el radio, r, era una constante. Si consideramos ahora que r puede tomar todos los valores de $[0, \infty)$. El conjunto de todos los cilindros *cubre*, mapea, el espacio tridimensional.

```
In [3]: phi_range = 0., 2.*np.pi
        z_range   = 0., 10.
        r = 1.
        funx = lambda phi, z: r  * np.cos(phi)
        funy = lambda phi, z: r  * np.sin(phi)
        funz = lambda phi, z: z
        gf.wfsurface(phi_range, z_range, funx, funy, funz, nbins = 20);
```



Podemos dar todos los puntos, (x, y, y), de un espacio R^3 en *coordenadas cilíndricas*, donde expresamos las coordenadas (x, y) por, (r, ϕ) donde r es la distancia al origen y ϕ el ángulo con el eje x. Mientras que mantenemos la coordenada z. Esto es:

$$(r, \phi, z) \to (x, y, z)$$

Donde:

$$x = r\cos\phi, \ \ y = r\sin\phi, \ \ z = z$$

El dominio en cilíndricas es $r \in [0, \infty]$, $\phi \in [0, 2\pi)$, mientras que z es todo R.

Cuestión: ¿Cuál es la transformación inversa, de cartesianas a cilíndricas?

La transformación inversa, de *cilíndricas* a *cartesianas* viene dada por:

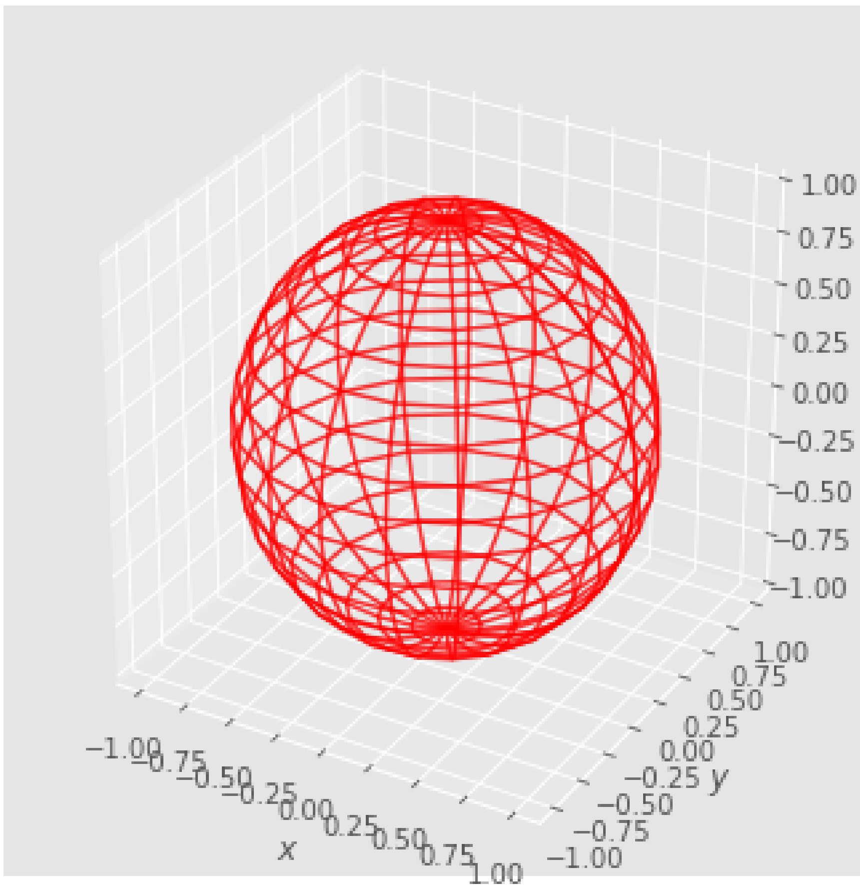
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \ z = z$$

Si recuerdas, también parametrizamos una esfera de radio r:

$$\sigma(\theta, \phi) = (r\cos\phi\sin\theta, \ r\sin\phi\sin\theta, \ r\cos\theta)$$

Considerando ahora todas las posibles esferas, esto es variando r de $[0, \infty]$ podemos cubrid de nuevo todo el espacio tri-dimensional, R^3

```
In [4]: theta_range = 0., np.pi
        phi_range   = 0., 2.*np.pi
        r = 1.
        funx = lambda theta, phi : r * np.cos(phi) * np.sin(theta)
        funy = lambda theta, phi : r * np.sin(phi) * np.sin(theta)
        funz = lambda theta, phi : r               * np.cos(theta)
        gf.wfsurface(theta_range, phi_range, funx, funy, funz);
```



Las *coordenadas esféricas* nos permiten asociar cualquier punto del espacio, (x, y, z), de R^3, medinate el radio, r, o la distancia del punto al origen, el ángulo, θ, que forma el punto con el eje z, y el ángulo que forma (x, y) en el eje x.

El cambio en esféricas viene dado por:

$$x = r\cos\phi, \sin\theta, \;\; y = r\cos\phi\sin\theta, \;\; z = r\cos\theta$$

Donde si recuerdas el range de θ es $[0, \pi]$ y el de ϕ de $[0, 2\pi)$.

Con $\theta = 0, \pi$ damos los polos de la esfera, con $\theta = \pi/2$ su ecuador. Situados a una altura de la esfera, el águno ϕ, nos permite recorrerla en una circuferencia de radio $r\sin\theta$ en sentido antihorario (visto desde arriba). En el ecuador, claro está, con radio r.

Cuestión: ¿Cuál es el cambio inverso que nos pasa de cartesianas a esféricas?

El cambio inverso de cartesianas a esféricas, viene dado por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \ \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Cambios de coordenadas Los cambios de coordenadas son por lo tanto funciones vectoriales, $\mathbf{f} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, diferenciables, biyectivas (a excepción de algún punto singular) y que admiten una función inversa también diferenciable.

Nota: Una función biyectica asociada a cada punto de espacio inicial un punto distinto en el espacio imagen, y todo punto del espacio imagen tiene un punto en el inicial. Fíjate que hay algunos puntos singulares que no cumplen esto, como los polos en el cambio a esféricas y cuando $r = 0$ para las dos. Sin embargo esto no nos impide cubrir completamente el espacio R^3

Matriz jacobiana del cambio de coordenadas Vamos a calcular la matriz jacobiana de los cambios de coordenadas a cilíndricas.

la función vectorial del cambio de coordenadas a cilíndricas es:

$$\mathbf{x}(r, \phi, z) \ = \ (r\cos\phi, \, r\sin\phi, \, z)$$

Y su matriz jacobiana:

$$\mathbf{Dx}(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la función vectorial del cambio de coordenadas a esféricas es:

$$\mathbf{x}(r, \phi, \theta) \ = \ (r\cos\phi\sin\theta, \, r\sin\phi\sin\theta, \, r\cos\theta)$$

Y su matriz jacobiana:

$$\mathbf{Dx}(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

6.3 La regla de la cadena

En determinados casos tenemos una fución vectorial, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, de R^3, de la que conocemos su derivada, $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$, y nos preguntamos cual será su derivada en coordenadas cilíndricas o esféricas.

¿Existe una relación sencilla entre la derivada de la función en las nuevas coordenadas y la derivada en cartesianas?

La respuesta es la regla de la cadena, que nos dice, que la nueva derivada es el producto de la derivada de la primera función y la derivada, la matriz jacobiana, del cambio de variables:

Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con derivada, $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$ en cartesianas y $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ un cambio de coordenadas, con matriz jacobiana, $\mathbf{Dx}(\mathbf{u})$. La función compuesta, $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}\,(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$, tiene como derivada:

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{u}) \ = \ \mathbf{Df}\,(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \ \mathbf{Dx}(\mathbf{u})$$

¡El producto de las derivadas!

Teorema de la regla de la cadena *Teorema*: Sea $\mathbf{g} : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, A un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, y $\mathbf{f} : B \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, B un conjunto abierto de $\mathbf{R}^m$, donde el dominio de $\mathbf{f}$ esta incluido en el rango de $\mathbf{g}$. Si $\mathbf{g}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{x}$ interior a A y $\mathbf{f}$ lo es en el punto $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, entonces, la función composición $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g} : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, definida como: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, es diferenciable en $\mathbf{x}$ y su diferencial es:

$$\mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{Df}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\ \mathbf{Dg}(\mathbf{x})$$

Ejemplo: Con las funciones: $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $\mathbf{g}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, verifica la regla de la cadena para la función compuesta, $h(r,\theta) = (f \circ \mathbf{g})(r,\theta)$.

solución: Como producto de derivadas:

$$\nabla f(x,y) = (2x,\ 2y) \Rightarrow \nabla f(r,\theta) = (2r\cos\theta,\ 2r\sin\theta)$$

$$\mathbf{Dg}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(r,\theta)\,\mathbf{Dg}(r,\theta) = (2r\cos\theta, 2r\sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = (2r, 0)$$

Ahora expresando la función inicial en polares:

$$h(r,\theta) = r^2$$

$$\nabla h(r,\theta) = (2r, 0)$$

Ejercicio: Verifica la regla de la cadena para la función compuesta $h = f \circ \mathbf{g} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{g}(x,y,z) = (x^2y, y^2, e^{-xz})$ y $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w$.

Solución:

Sustituyendo:

$$h(x,y,z) = (x^2y)^2 + (y^2)^2 - e^{-xz}$$

$$\nabla h(x,y,z) = (4x^3y^2 + ze^{-xz}, 2x^4y + 4y^3, xe^{-xz})$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\mathbf{Dg}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ -ze^{-xz} & 0 & -xe^{-xz} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(u,v,w) = (2u, 2v, -1) \Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (2x^2y, 2y^2, -1)$$

$$\nabla f(x,y,z)\,\mathbf{Dg}(x,y,z) = (2x^2y, 2y^2, -1)\begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ -ze^{-xz} & 0 & -xe^{-xz} \end{pmatrix} = (4x^3y^2 + ze^{-xz}, 2x^4y + 4y^3, xe^{-xz})$$

Ejemplo del uso de la regla de la cadena:

Plano tangente a un conjunto de nivel de una función $f(x,y,z)$.

Sea un función escalar, $f(x, y, z)$ de $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}$, y un conjunto de nivel, c, $f(xy, z) = c$, y una línea, una trayectoria, parametrizada, de puntos de ese conjunto de nivel $\mathbf{r}(t)$, con $t \in [t_0, t_e]$, donde en $t = t_0$, nos da $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Si hacemos la función compuesta $h = f \circ \mathbf{r}(t)$, que fíjate, es simplemente una función real de una dimensión, $h(t) = f(\mathbf{r}(t))$, $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$.

En este caso dado que los puntos de $\mathbf{r}(t)$ están en el conjunto de nivel de $f(x, y, z) = c$, la función siempre vale c, y por lo tanto su derivada es nula.

$$\frac{\mathrm{d}h(t_0)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Que por la regla de la cadena es lo mismo que:

$$\nabla f\,(\mathbf{r}(t_0))\;\mathbf{r}'(t_0) = 0$$

Que corresponde a dos vectores ortogonales. El primero es el gradiente de $f(x, y, z)$ en (x_0, y_0, z_0), esto es, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. El segundo es el vector "velocidad" de la trayectoria en t_0.

En un espacio R^3, dado un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y vector $\mathbf{n}$. Podemos dar la ecuación del plano normal a $\mathbf{n}$, que pasa por $\mathbf{x}_0$, como aquellos puntos, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ cuyo vector, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, es ortogonal a $\mathbf{n}$, esto es:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,\mathbf{n} = 0$$

Si nos fijamos en el caso anterior, la 'velocidad' de la trayectoria, $\mathbf{r}'(t_0)$, debe estar contenida entonces en el plano definido por el punto (x_0, y_0, z_0) y el vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

Ese plano, que es el plano tangente a al conjunto de nivel $f(x, y, z) = c$ en (x_0, y_0, z_0), viene dado por la ecuación:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$$

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) \;+\; f'_y(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + \; f'_z(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) \;=\; 0.$$

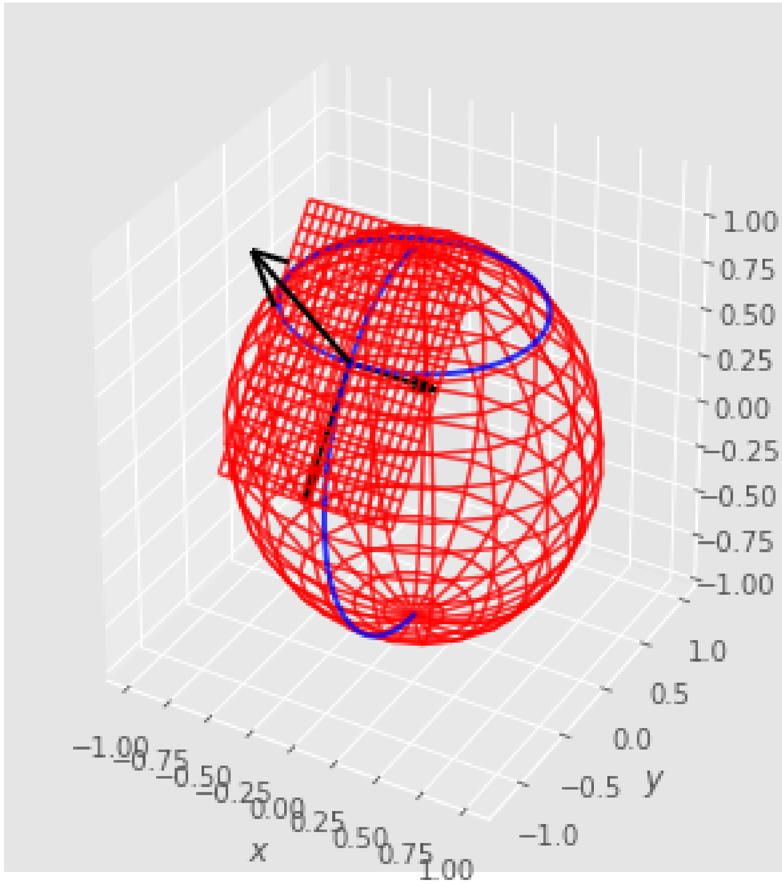
Date cuenta que esta forma de dar el plano, solo sirve para funciones, $f(x, y, z)$, cuyo gradiente en un punto, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, sea distinto de cero.

La siguiente celda muestra el plano tangente en un punto al conjunto de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ de valor $c = 1$, que corresponde a la esfera de radio unidad.

También se muestra el gradiente de la función en , y dos trayectorias dentro de la esfera, una vertical, y otro horizontal, que pasan por ese punto. Puedes ver también los vectores "velocidad" de esas trayectorias, que están, claro, en el plano.

Explora y cambia el punto de la esfera.

```
In [5]: theta0, phi0 = 1.*np.pi/4., 3.*np.pi/2.
        gf.sphere_plane(theta0, phi0, 0.5);
```



Sea la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
El conjunto de nivel $f(x,y,z) = 1$ es la esfera de radio unidad: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
El gradiente es, $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$.
El plano tangente, en un punto (x_0, y_0, z_0) de la esfera cumple la ecuación:

$$2x(x - x_0) + 2y(y - y_0) + 2z(z - z_0) = 0$$

La trayectoria del meridiano en una esfera de radio r que va de polo norte a sur a un ángulo constante ϕ viene dada por: $\mathbf{r}(\theta) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$, y su derivada, $\mathbf{r}'(\theta) = (r\cos\phi\cos\theta, r\sin\phi\cos\theta, -r\cos\theta)$.

La trayectoria del paralelo en una esfera de radio r a un ángulo constante θ viene dada por: $\mathbf{r}(\phi) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$, y su derivada: $\mathbf{r}'(\phi) = (-r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi\sin\theta, 0)$.

¡Esto es todo por ahora!

6.4 Apéndice

Demostración de la regla de la cadena

Las dos funciones son diferenciables:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Dg}(\mathbf{x})\,\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{E}_g(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}+\mathbf{u})-\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{Df}(\mathbf{y})\,\mathbf{u} + \|\mathbf{u}\|\mathbf{E}_f(\mathbf{y},\mathbf{u})$$

Como $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})$, tenemos:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}+\mathbf{u})-\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{Df}(\mathbf{y})\left(\mathbf{Dg}(\mathbf{x})\,\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{E}_g(\mathbf{x},\mathbf{v})\right) + \|\mathbf{u}\|\mathbf{E}_f(\mathbf{y},\mathbf{u})$$

$$= \mathbf{Df}(\mathbf{y})\mathbf{Dg}(\mathbf{x})\,\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\left(\mathbf{Df}(\mathbf{y})\,\mathbf{E}_g(\mathbf{x},\mathbf{v}) + \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{E}_f(\mathbf{y},\mathbf{u})\right)$$

Que podemos asociar a:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}+\mathbf{v})-\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{Dh}(\mathbf{x})\,\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{E}_h(\mathbf{x},\mathbf{v})$$

Donde

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{x}) = \mathbf{Df}(\mathbf{y})\,\mathbf{Dg}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \mathbf{Df}(\mathbf{y})\,\mathbf{E}_g(\mathbf{x},\mathbf{v}) + \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{E}_f(\mathbf{y},\mathbf{v})$$

La derivada es el producto de las derivadas.
Solo falta comprobar que: $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}\ \mathbf{E}_h(\mathbf{x},\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$.
El primer termino es directo $\mathbf{E}_g(\mathbf{x},\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$.
En el segundo podemos acotar, $\frac{\|u\|}{\|v\|} \leq M_g(\mathbf{x}) + \|\mathbf{E}_g(\mathbf{x},\mathbf{v})\|$, donde $M_g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n}\|\nabla g_k(\mathbf{x})\|$.
ya que $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Dg}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{E}_g(\mathbf{x},\mathbf{v})$ y por lo tanto $\|\mathbf{u}\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|\nabla g_k\| + \|\mathbf{E_g}(y,v)\|\right)\|\mathbf{v}\|$.
Cuando $\mathbf{v}\to\mathbf{0}$ también $\mathbf{u}\to\mathbf{0}$ y $\mathbf{E}_f(\mathbf{y},\mathbf{u})\to\mathbf{0}$.