Métodos III - Series de Fourier

May 6, 2019

1 Series de Fourier

Jose A. Hernando
Departamento de Física de Partículas. Universidade de Santiago de Compostela
Abril 2019

```
In [1]: import time
        print(' Last version ', time.asctime() )
```

```
 Last version  Mon May  6 19:40:59 2019
```

2 Objectivos

Concepto de función par, impar y periódica.
Concepto de base completa de funciones.
Descomposición de una función periódica en series de Fourier.
Relación entre las series de Fourier y las series numéricas.
Mostrar algunos ejemplos sencillos.

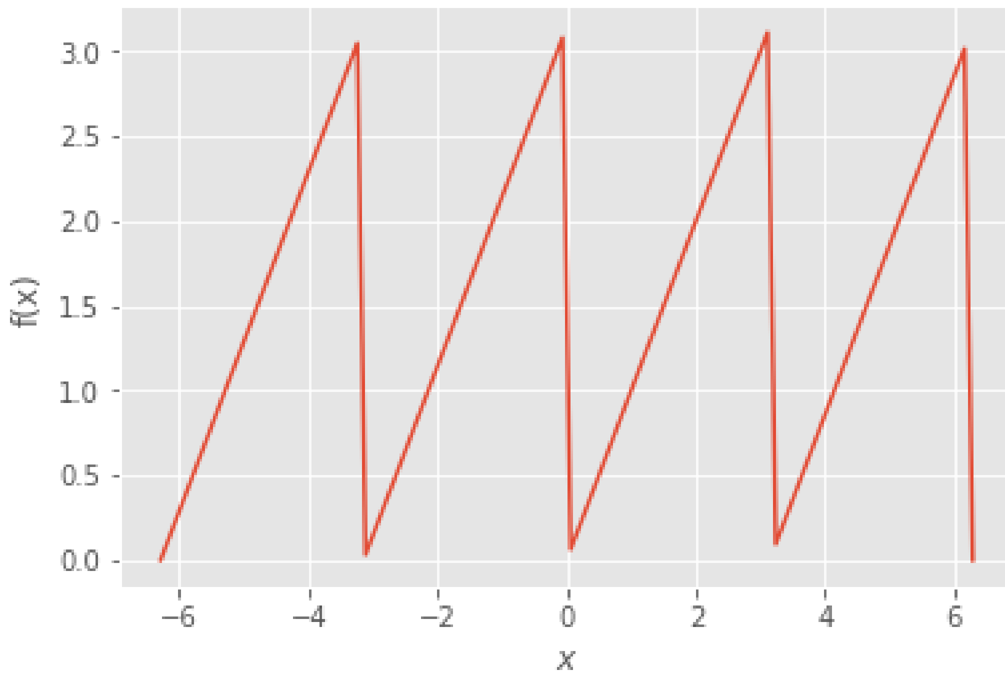
```
In [2]: # general imports
        %matplotlib inline
        %reload_ext autoreload
        %autoreload 2

        # numpy and matplotlib
        import numpy as np
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        matplotlib.style.use('ggplot')
        import graph_utils as gf

        figsize = 6, 3.8
        cmap    = 'hot'
```

Introducción Fourier fue un gran matemático Francés de la época Napoleónica que se dio cuenta que una función periódica podía descomponerse en una serie de sumas de senos y cosenos…

```
In [3]: N, T = 2, np.pi
        xrange = (-N*T, N*T, 100)
        fx = lambda x: np.mod(x, T)
        gf.fun1d(fx, xrange);
```



3 Series de Fourier

Funciones pares, impares y periódicas. Decimos que una función $f(x)$ es **periódica** con periodo T si: $f(x+T) = f(x)$.

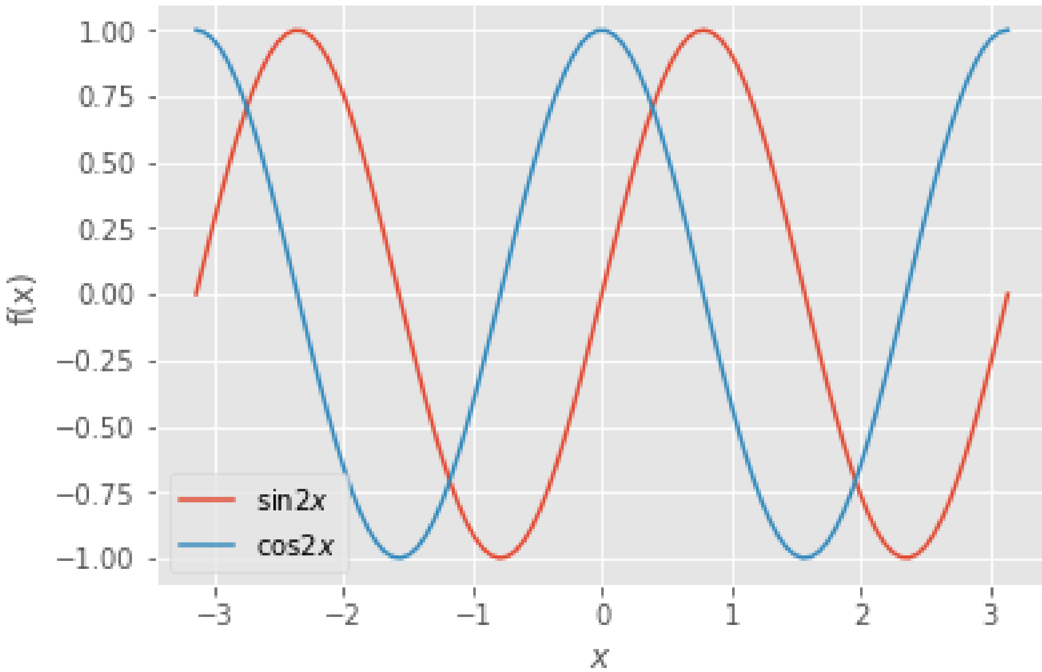
Por ejemplo, $f(x) = sin(x)$ es una función periódica de periodo $T = 2\pi$, $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$

Una función es par si $f(-x) = f(x)$ e impar si $f(-x) = -f(x)$

Por ejemplo, $f(x) = \cos(nx)$ es par, y $f(x) = \sin(x)$ es impar.

Ejercicio: Verifica que dado n natural, $n > 0$, $\cos(nx)$ es par y $\sin(nx)$ impar, y ambos son periódicas con periodo 2π

```
In [4]: n, m, N = 2, 2, 1
        xrange = (-N*np.pi, N*np.pi, 100)
        sx = lambda x : np.sin(n*x)
        cx = lambda x : np.cos(m*x)
        gf.fun1d(sx, xrange, label ='$\sin '+str(n)+'x$')
        gf.fun1d(cx, xrange, newfig = False, label = '$\cos '+str(m)+'x$');
```



Teorema: Sea $f(x)$ una función par y $g(x)$, $h(x)$ impar, cumplen:

1) $g(0) = 0$

2) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

3) $\int_{-a}^{a} g(x) = 0$

4) $f(x)\,g(x)$ es impar

5) $g(x)\,h(x)$ es par

También se cumple:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0,$

2) $\int_{\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0,$

para $n = 1, 2, \cdots \in \mathcal{N}$
Ejercicio: Toda función $f(x)$ se puede expresar como la suma de una función par y otra impar.
Definimos:

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

donde $h(x)$ es par, $g(x)$ es impar y $f(x) = h(x) + g(x)$
Ejemplo: Convertir $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ y 1 si $x > 0$ en una suma de función par e impar.

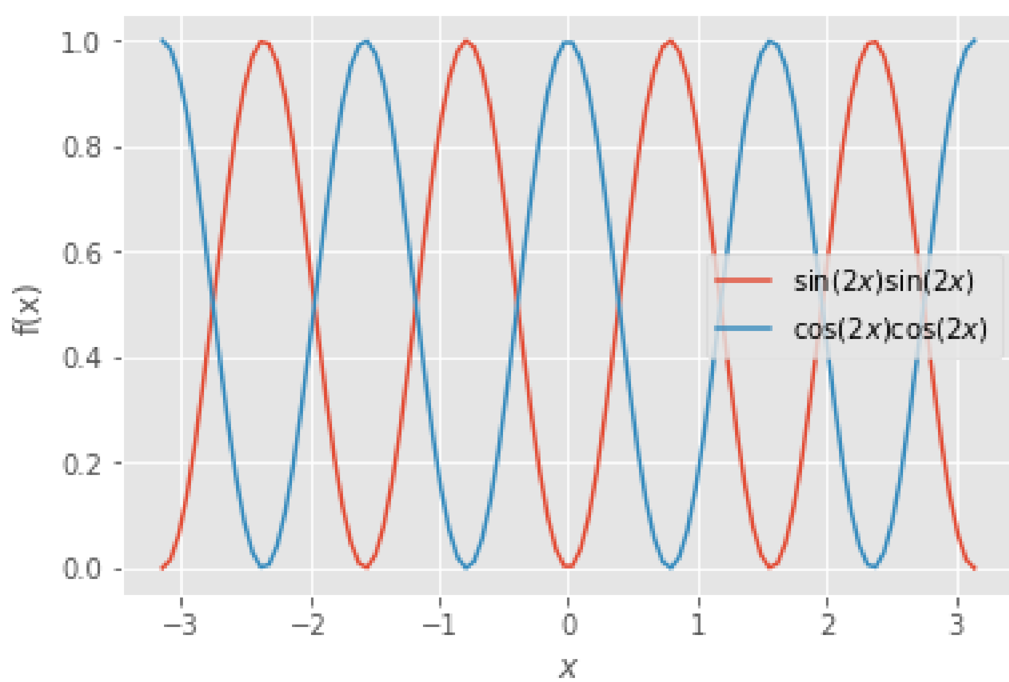
Funciones ortogonales Las siguiente funciones, $\sin(nx)$, $\cos(mx)$ con $n, m = 1, 2, \cdots \in \mathcal{N}$ son "ortogonales".

Teorema: Se cumple:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0$
2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \pi\delta_{nm}$
3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x = \pi\delta_{nm}$

donde:
$\delta\_\{nm\} = 1$ si $n = m$ y 0 si $n \neq m$
Ejercicio: Comprueba que las funciones, $\sin nx, , \cos mx$, con $n, m = 1, 2, \cdots \in \mathcal{N}$ son ortogonales en $[-\pi, \pi]$

In [5]:
```
n, m, N = 2, 2, 1
xrange = (-N*np.pi, N*np.pi, 100)
scx = lambda x : np.sin(n*x) * np.cos(m*x)
ssx = lambda x : np.sin(n*x) * np.sin(m*x)
ccx = lambda x : np.cos(n*x) * np.cos(m*x)
#gf.fun1d(scx, xrange, label = '$\sin('+str(n)+'x) \cos('+str(m)+'x)$')
gf.fun1d(ssx, xrange, newfig = False, label = '$\sin('+str(n)+'x) \sin('+str(m)+'x)$');
gf.fun1d(ccx, xrange, newfig = False, label = '$\cos('+str(n)+'x) \cos('+str(m)+'x)$');
```



La integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x = 0$$

es nula por ser el integrando una función impar.

La integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x - \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

que vale 0 si $n \neq m$ y para $n = m$

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

y finalmente, la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x + \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

que vale 0 si $n \neq m$ y para $n = m$

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{\pi}^{\pi} = \pi$$

Diremos que dos **funciones son ortogonales**, $f(x)$, $g(x)$, en un intervalo $[a, b]$ si:

$$\int_a^b f(x)\, g(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

y ortonormales si su norma es unidad, siendo su **norma**:

$$\int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b g^2(x) \, \mathrm{d}x = 1$$

Decimos que un conjunto numerable $\{\Psi_n(x)\}$ con $n \in \mathcal{N}$ es completo en un intervalo $[a, b]$, si son funciones ortonormales que permiten que "toda" función $f(x)$ pueda expresarse como:

$$f(x) = \sum_n a_n \, \Psi_n(x)$$

donde a_n son los coeficientes:

$$a_n = \int_a^b f(x)\, \Psi_n(x) \mathrm{d}x$$

esto es, podemos dar una función como una serie de funciones.

Series de Fourier El siguiente conjunto de funciones definidas es completo en $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$$

con $n = 1, 2, \cdots \in \mathrm{N}$

Toda función periódica continua, acotada, $f(x)$, con periodo $T = 2\pi$ puede darse como una serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos nx + \sum_{n=1} b_n \sin nx$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

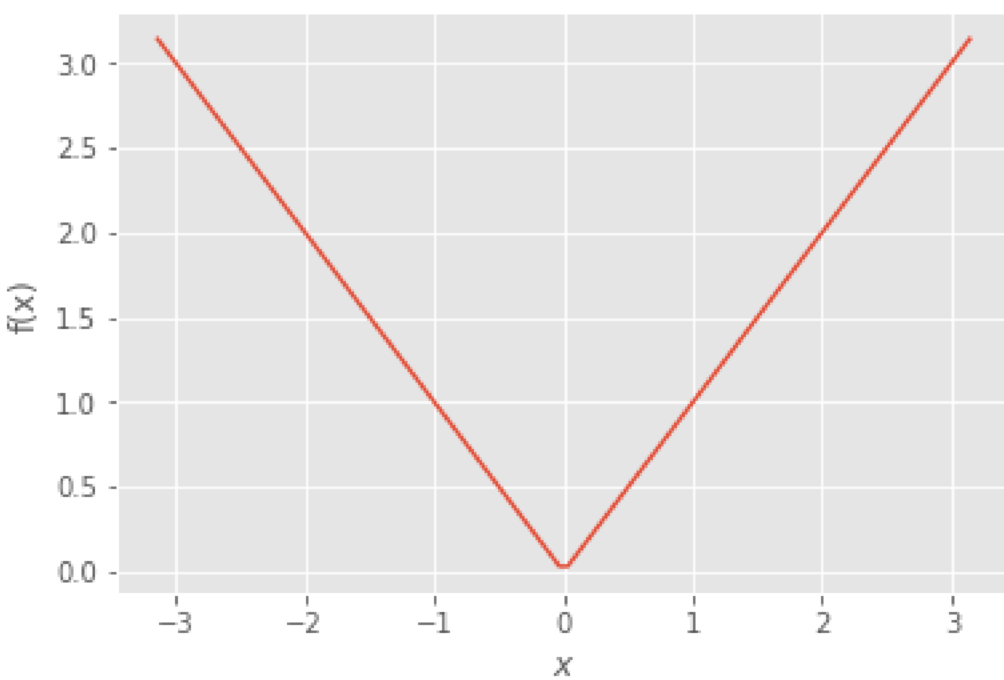
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin nx\,\mathrm{d}x$$

Cuestión: Si $f(x)$ es continua con periodo 2π y par, ¿tendra coeficientes b_n? ¿Y si es impar tendrá a_n?

Ejemplo: Obtener la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ si $x \leq 0$.

```
In [6]: xrange = (-np.pi, np.pi, 100)
        def fx(x):
            sign = x/abs(x)
            return sign*x
        gf.fun1d(fx, xrange);
```



Es una función par, por lo tanto $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} = 2\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

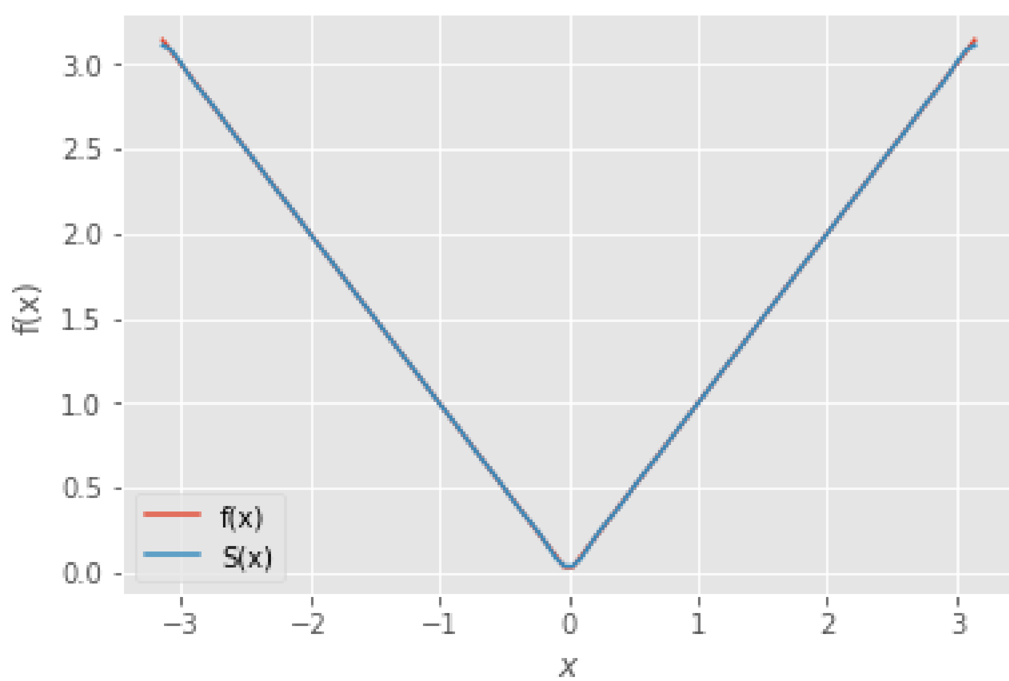
Si n es par, $a_n = 0$. Podemos dar

$$a_k = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2},\ k = 0, 1, 2 \in \mathcal{N}$$

Asi:

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$$

In [7]:
```
N = 10
def sx(x):
    ss = np.pi/2
    for k in range(0, N):
        ss = ss + -4*np.cos((2*k+1)*x)/(np.pi*(2*k+1)*(2*k+1))
    return  ss
gf.fun1d(fx, xrange, label = 'f(x)');
gf.fun1d(sx, xrange, newfig = False, label = 'S(x)');
```



A veces las series de Fourier pueden ayudarnos a calcular series numéricas
Ejercicio: Calcula, usando el desarrollo de Fourier anterior, el valor de:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Solución: Si valoramos la serie en $x = 0$ obtenemos:

$$S(0) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} = 0$$

Esto es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

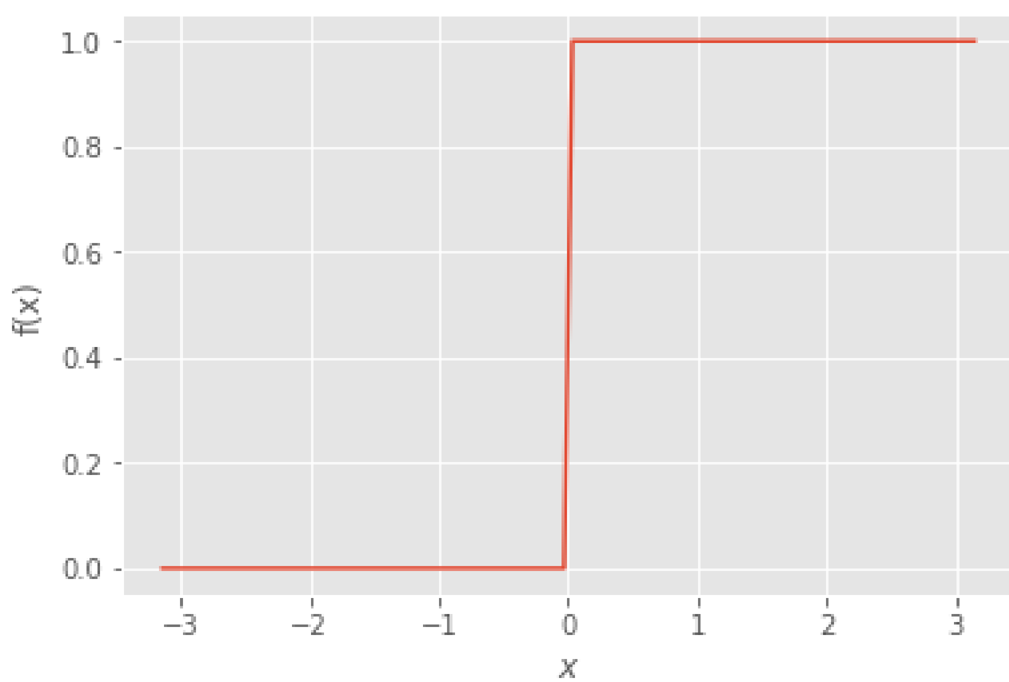
Teorema de Dirichlet Toda función periódica en $[-\pi, \pi]$ (continua en un número finito de trozos y con un número finito de máximos y mínimos) admite desarrollo en serie de Fourier.

Solo que la función puede ser discontinua en un número finito de puntos mientras que la serie de Fourier *siempre* en continua. En los puntos de discontinuidad la serie nos da el valor medio entre su valor a la izquierda y la derecha de la función en ese punto.

Ejemplo: Sea la función definida en $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0, 1 \text{ si } x \geq 0$$

In [8]:
```
xrange = (-np.pi, np.pi, 100)
def fx(x):
    sig = x/abs(x)
    return  1/2 + sig/2.
gf.fun1d(fx, xrange);
```



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\Big|_0^{\pi} = -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

los términos b_n para n par se anulan, así podemos dar:

$$b_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

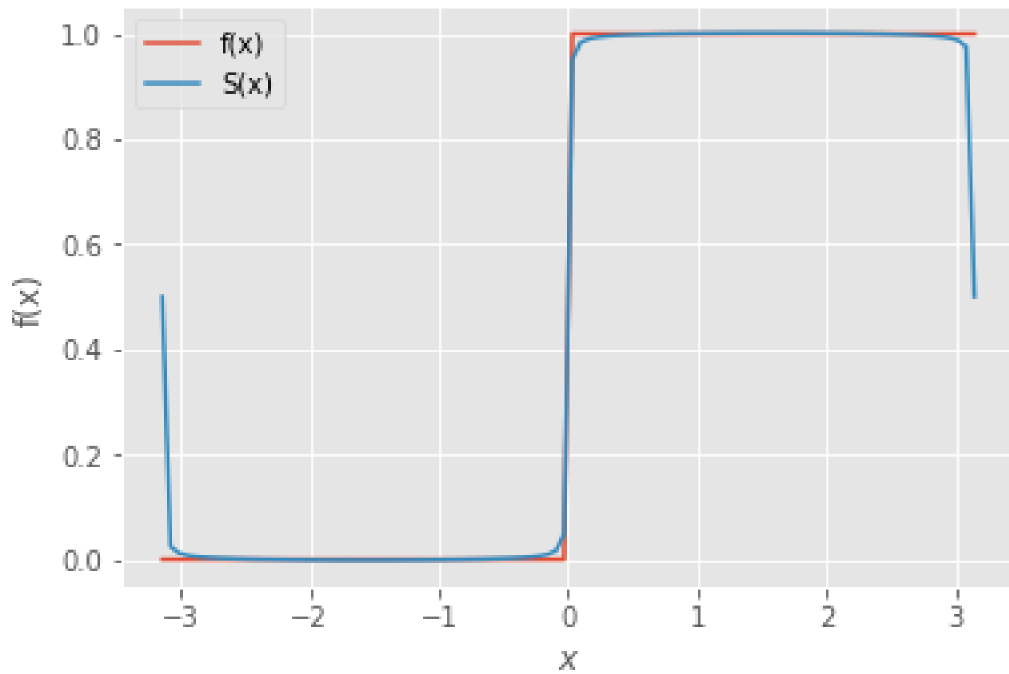
con $k = 0, 1, 2 \cdots \in \mathcal{N}$

Por lo tanto la función se expresa con la siguiente serie de Fourier:

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0} \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x$$

Experimenta: cambia en el siguiente código el número de términos de la serie de Fourier y observa su convergencia con la función original.

In [9]:
```
N = 100
def sx(x):
    ss = 1./2.
    for k in range(0, N):
        ss = ss + 2*np.sin((2*k+1)*x)/(np.pi*(2*k+1))
    return  ss
gf.fun1d(fx, xrange, label = 'f(x)');
gf.fun1d(sx, xrange, newfig = False, label = 'S(x)');
```



Cuestión: ¿Cuánto vale la serie de Fourier en $x = 0$? ¿Y la función?

Series periódicas con periodo $2L$ Sea ahora una función periódica con periodo $[-L, L]$, la podemos dar como una serie de Fourier a partir del siguiente conjunto de funciones ortonormales.

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \cos \frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \sin \frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{d}x$$

Así:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_n b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Cuestión: ¿Qué funciones y desarrollo obtienes con $L = \pi$?

Desarrollo de Fourier para una función no periódica definida en un intervalo [0, L] ¿Y si la función está definida solo en una región $[0, L]$? Podemos extender la función a $[-L, L]$ por ejemplo $f(-x) = f(x)$ haciéndola par, y calculado su serie de Fourier, y declarándola válida solo en el intervalo $[0, L]$

Ejercicio: Sea $f(x) = x^2$ definida en $[0, 2]$ dar su desarrollo en serie de Fourier.

definimos $g(x) = x^2$ en $[-2, 2]$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

integrando por partes:

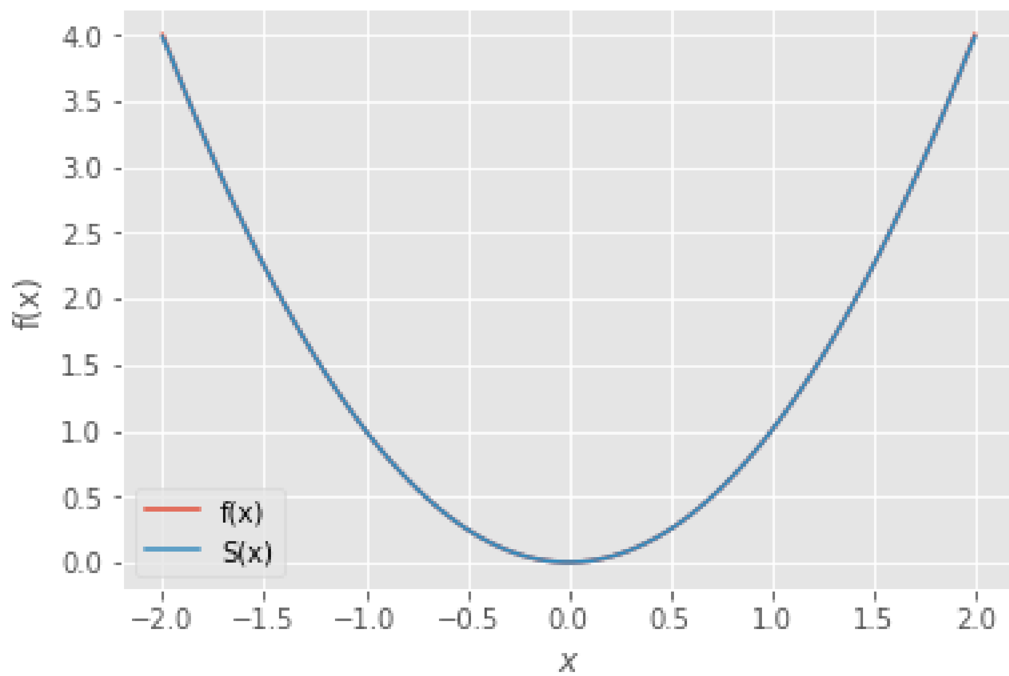
$$= \frac{2x^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} - \int_0^2 \frac{4x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2x^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{8x}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{16}{(n\pi)^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]\Big|_0^2 = \frac{16}{(n\pi)^2}(-1)^n$$

Luego:

$$S(x) = \frac{4}{3} + 16\sum_n \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

In [10]:
```
N = 100
xrange = (-2., 2., 100)
fx = lambda x: x*x
def sx(x):
    ss = 4./3.
    for n in range(1, N):
        ss = ss + 16 * (-1)**n * np.cos( n*np.pi*x/2) / (n*n*np.pi*np.pi)
    return ss
gf.fun1d(fx, xrange, label ='f(x)');
gf.fun1d(sx, xrange, newfig = False, label = 'S(x)');
```



La belleza de los números complejos nos permite reescribir de forma compacta y elegante los desarrollos de Fourier, date cuenta:

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right), \; \sin nx = -\frac{i}{2}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right),$$

Así:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}(a_n - ib_n)\, e^{inx} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}(a_n + ib_n)\, e^{-inx}$$

Si definimos:

$$c_0 = a_0/2, \; c_n = a_n - ib_n, \; c_{-n} = c_n^* = a_n + ib_n$$

tenemos:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

Pero ésta es otra historia y debe ser contada en otro ocasión

¡Aún hay más! Joseph Fourier fue un gran físico y matemático Francés que se dio cuenta que una función periódica podía descomponerse en una serie de sumas de senos y cosenos. Fourier participó en la famosa expedición "científica" de Napoleón a Egipto.

Aquí tienes su entrada en la Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier

Por cierto, Dirichlet fue alumno suyo.

En análisis en transformadas de Fourier es fundamental en Física cuántica, en Optica, y tiene aplicaciones fundamentales en propagación de señales y tratamiento de imágenes.

¡Algunos de tus filtros de instagram son algoritmos que modifican las transformadas de Fourier de las imágenes!

Joseph Fourier