examen-I

June 17, 2019

1 Solucion examen I - mayo 2019

[3]:
```
import time
print(' Last version ', time.asctime() )
```

```
Last version  Mon Jun 17 17:44:38 2019
```

Cuestión: Los conjunto de nivel de $\log(\sqrt{x^2+2y^2})$ son elipses
Solución: verdadero

$$\frac{1}{2}\log(x^2+2y^2)=c \;\Rightarrow\; x^2+2y^2=c'$$

Cuestión: El campo eléctrico $\mathbf{E}=-\nabla V$, indica la dirección en la que el potencial decrece más rápidamente
Solución: verdadero, el gradiente indica la dirección de mayor cambio de una función escalar, el signo negativo el mayor decrecimiento.
Cuestión: El desarrollo de Taylor de segundo orden de una función en el origen no puede ser xy^2
Solución: verdadero. El desarrollo de Taylor de segundo orden solo puede ser un polinomio de segundo orden y xy^2 es de tercer grado.

Ejercicio: Calcular el desarrollo de Taylor de segundo orden de $xy+yz+zx$ en el origen
solución:

$$f(0,0,0)=0;\ \nabla f(x,y,z)=(y+z,x+z,y+x);\ \nabla f(0,0,0)=0$$

$$\mathbf{H}(x,y)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x,y,z)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=xy+yz+zx$$

Ejercicio: verifica que $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ no tiene mínimos
Solución:

$$\nabla f(x,y) = (-(1+e^y)\sin x,\, e^y(\cos x - 1 - y))$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \to \sin x = 0,\, (\cos x - 1 - y) = 0$$

$$x = 2k\pi \to y = 0;\; x = (2k+1)\pi \to y = -2;\; k \in \mathbf{Z}$$

puntos críticos

$$(2k\pi, 0),\; ((2k+1)\pi, -2)\;\; k \in \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} -(1+e^y) & -e^y \sin x \\ -e^y \sin x & e^y(\cos x - 2 - y) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \text{mximo}$$

$$\mathbf{H}((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} (1+e^{-2}) & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{pmatrix} \to \text{silla}$$

Ejercicio: sea $\mathbf{f}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$. Calcular la derivada direccional en la dirección tangente en los puntos de la circunferencia de radio unidad.
solución:

$$\mathbf{Df}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

la dirección tangente a la cirfunferencia

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t),\; \dot{\mathbf{c}}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

La derivada direccional

$$f'(\mathbf{c}(t); \dot{\mathbf{c}}(t)) = \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\sin t \\ 2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\cos t \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}$$

ejercicio Calcular la matriz jacobiana de la composición de $\mathbf{f}$ con la parametrización $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ de la circunferencia de radio unidad
solución:

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = (1, \cos^2 t - \sin^2 t) = (1, \cos 2t)$$

$$\mathbf{Dh}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}$$

lo mismo que antes
ejercicio: Calcular los puntos críticos de $x^2 - y^2$ en la circunferencia de radio unidad.

solución:
por multiplicadores de Lagrange, o cuando $\sin 2t = 0$, esto es $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
luego:

$$(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$$

[ ]: