第2章 信息的表示和处理 I：位、整数

- 教 师： 郑贵滨
- 计算机科学与技术学院
- 哈尔滨工业大学

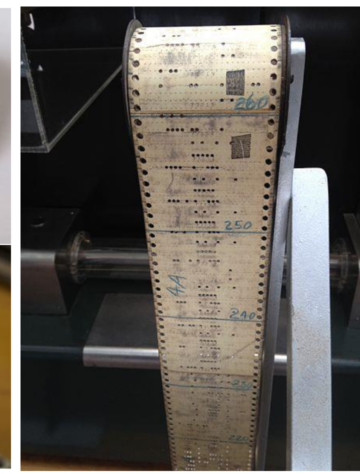
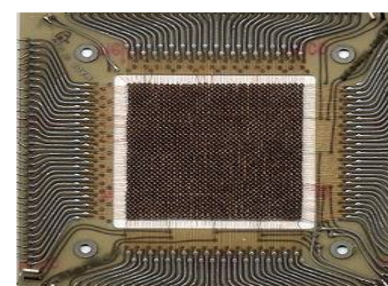
主要内容: 位、字节 和 整型数

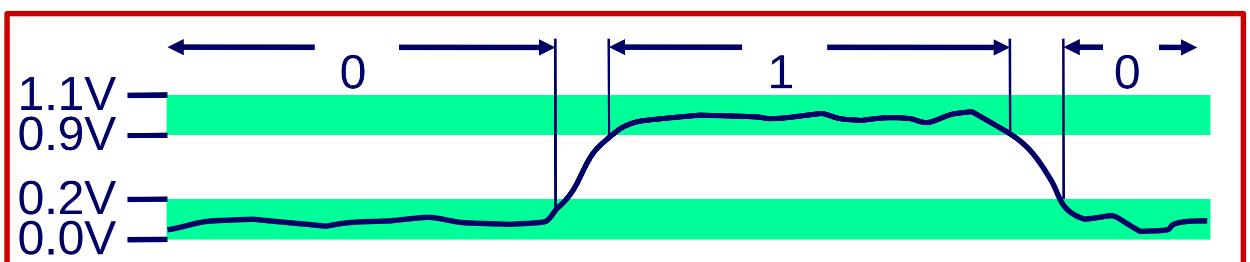
- 信息的位表示
- 位级运算
- 整型数
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

为什么用二进制？

- 十进制——适合人类使用
  - 有10个手指的人类
  - 1000年前源自印度、12世纪发展于阿拉伯、13世纪到西方
- 二进制——更适合机器使用
  - 容易表示、存储
    - 打孔纸带上是/否有空
    - 磁场的顺时针/逆时针
  - 容易传输
    - 导线上的电压高/低
    - 可以在有噪声、不精确的电路上可靠传输





位、字节

- 计算机存储、处理的信息：二值信号
- “位” 或 “比特”
  - 最底层的二进制数字（数码）称为位（bit，比特），值为0或1
  - 数字革命的基础
- 位组合
  - 把位组合到一起，采用某种规则进行解读
  - 每个位组合都有含义
- 字节：8-bit块
  - 人物：Dr. Werner Buchholz，1956年7月
  - 事件：IBM Stretch computer的早期设计阶段

维纳・布赫霍尔兹

进制

- 数的通用表示

10进制：

$$\mathbf{3721 = 3\times10^3+7\times10^2+2\times10^1+1\times10^0}$$

$$\mathbf{N= \pm\ a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m}$$

k进制：

$$N= \pm\ a_n \times k^n + a_{n-1} \times k^{n-1} + \ldots + a_1 \times k^1 + a_0 \times k^0$$
$$+ b_1 \times k^{-1} + b_2 \times k^{-2} + \ldots + b_m \times k^{-m}$$

其中a_i，b_j是0 ~ k-1中的一个数码

二进制数

- 特点：逢二进一，由0和1两个数码组成，基数为2，各个位权以2^i表示

- 二进制数：

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m =$$

$$a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \ldots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$$

$$+ \ b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} \ + \ldots + b_m \times 2^{-m}$$

其中a_i，b_j非0即1

便于计算机存储、算术运算简单、支持逻辑运算

二进制数

- MSB：最高有效位（Most Significant Bit）
- LSB：最低有效位（Least Significant Bit）

MSB	LSB
1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0	
15	0

数字串长、书写和阅读不便

十六进制数

- 基数16，逢16进位，位权为16^i，16个数码：

  0, 1，2，3，4，5，6，7，8，9，A，B，C，D，E，F

- 十六进制数：

  $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m =$

  $a_n \times 16^n + a_{n-1} \times 16^{n-1} + \ldots + a_1 \times 16^1 + a_0 \times 16^0$

  $+ b_1 \times 16^{-1} + b_2 \times 16^{-2} + \ldots + b_m \times 16^{-m}$

  其中a_i，b_j是0 ~ F中的一个数码

十六进制数的加减运算

- 十六进制数的加减运算类似十进制
  - 逢16进位1，借1当16

23D9H＋94BEH＝B897H

A59FH－62B8H＝42E7H

- 二进制和十六进制数之间具有对应关系：

每4个二进制位对应1个十六进制位

00111010B＝3AH，F2H＝11110010B

与二进制数相互转换简单、阅读书写方便

进制转换

- 十进制整数转换为k(2、8或16)进制数

  整数转换：用除法—除基取余法

  - 十进制数整数部分不断除以基数k(2、8或16)，并记下余数，直到商为0为止
  - 由最后一个余数起，逆向取各个余数，则为转换成的二进制和十六进制数

    126＝01111110B　二进制数用后缀字母B

    126＝7EH　十六进制数用后缀字母H

进制转换

- 十进制小数转换为k(2、8或16)进制数…

  小数转换：用乘法—乘基取整法

  乘以基数k，记录整数部分，直到小数部分为0为止

  0.8125＝0.1101B

  0.8125＝0.DH

  - 小数转换会发生总是无法乘到为0的情况
  - 可选取一定位数（精度）
  - 将产生无法避免的转换误差

进制转换

- k进制数转换为十进制数

  方法：按权展开

  - 二进制数转换为十进制数

    0011.1010B

    $=1\times2^{1}+1\times2^{0}+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}=3.625$

  - 十六进制数转换为十进制数

    $1.2H=1\times16^{0}+2\times16^{-1}=1.125$

- 2、8、16进制间的转换

  4个2进制位对应1个16进制位

  3个2进制位对应1个8进制位

计算机内的数值表示——编码

- 需要考虑的问题

① 编码的长度

② 数的符号

③ 数的运算

字节值编码

- Byte = 8 bits
  - 2进制(Binary) 00000000_2 — 11111111_2
  - 10进制(Decimal): 0_{10} — 255_{10}
  - 16进制(Hexadecimal)： 00_{16} — FF_{16}

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

C数据类型的宽度

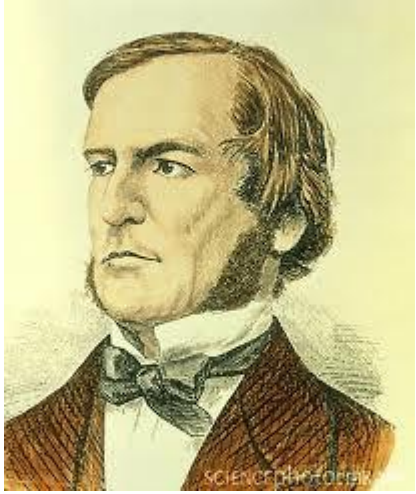
C 数据类型	32位	64位	x86-64
char	1	1	1
short	2	2	2
int	4	4	4
long	4	8	8
float	4	4	4
double	8	8	8
long double	–	–	10/16
pointer	4	8	8

主要内容: 位、字节 和 整型数

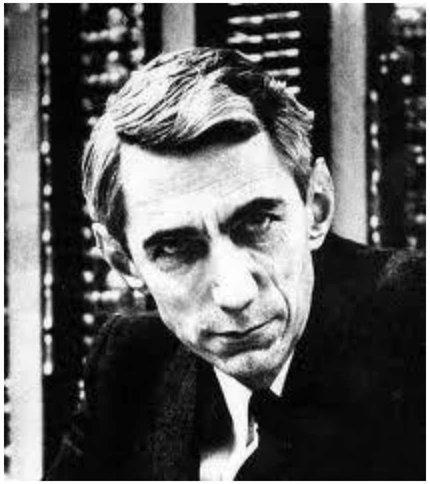
- 信息的位表示
- 位级运算
- 整型数
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

布尔代数(Boolean Algebra)

- George Boole(1815-1864)提出逻辑的代数表示
  - 逻辑值 “True(真)” 编码为 1
  - 逻辑值 “False(假)” 编码为 0



- Claude Shannon(1916–2001)创立信息论
  - 将布尔代数与数字逻辑关联起来



- 是数字系统设计与分析的重要工具

布尔代数(Boolean Algebra)

与(And)

- 当A=1 并且 B=1时， A&B = 1

&	0	1
0	0	0
1	0	1

或(Or)

- 当A=1 或 B=1时， A|B = 1

|	0	1
0	0	1
1	1	1

非(Not)

- 当A=0时， ~A = 1

~	
0	1
1	0

异或(Exclusive-Or,Xor)

- 当A=1 或 B=1且两者不同时为1， A^B = 1

^	0	1
0	0	1
1	1	0

一般的布尔代数

- 位向量操作(Operate on Bit Vectors)
  - 按位运算

```
  01101001     01101001                   01101001
& 01010101   | 01010101   ~ 01010101    ^ 01010101
  01000001     01111101     10101010      00111100
```

- 布尔代数的全部性质均适用

示例:集合的表示与运算

- 表示
  - 宽度 w 个比特的向量表示集合 {0, …, w–1}的子集
  - 如j ∈ A，则a_j = 1
    - 01101001 { 0, 3, 5, 6 }
      76543210
    - 01010101 { 0, 2, 4, 6 }
      76543210
- 运算
  - & 交集(Intersection) 01000001 { 0, 6 }
  - | 并集(Union) 01111101 { 0, 2, 3, 4, 5, 6 }
  - ^ 对称差集(Symmetric difference) 00111100{ 2, 3, 4, 5 }
  - ~ 补集(Complement) 10101010 { 1, 3, 5, 7 }

2.1.7 C语言中的位级运算

- C语言中的位运算： &, |, ~, ^
  - 适用于任何整型数据类型：long, int, short, char, unsigned
  - 将操作数视为位向量
  - 将参数按位运算
- 例子(char 类型)
  - ~0x41 → 0xBE
    - $\sim 01000001_2 \rightarrow 10111110_2$
  - ~0x00 → 0xFF
    - $\sim 00000000_2 \rightarrow 11111111_2$
  - 0x69 & 0x55 →0x41
    - $01101001_2 \,\&\, 01010101_2 \rightarrow 01000001_2$
  - 0x69 | 0x55 →0x7D
    - $01101001_2 \mid 01010101_2 \rightarrow 01111101_2$

巧用异或

- 按位异或是一种加的形式
- A ^ A = 0

```
int  inplace_swap(int *x, int *y)
{
   *x = *x ^ *y;    /* #1 */
   *y = *x ^ *y;    /* #2 */
   *x = *x ^ *y;    /* #3 */
}
```

Step	*x	*y
Begin	A	B
1	A^B	B
2	A^B	(A^B)^B = A^(B^B) = A^0 = A
3	(A^B)^A = (B^A)^A = B^(A^A) = B^0 = B	A
End	B	A

巧用异或

```
void reverse_array(int a[], int cnt) {
int first, last;
for (first = 0, last = cnt-1;
        first <= last;
        first++,last--)
    inplace_swap(&a[first], &a[last]);
}
```

2.1.8 对比: C语言的逻辑运算

- C语言的逻辑运算符： &&, ||, !
  - 将0 视作 逻辑“False(假)”
  - 所有非0值视作逻辑 “True(真)”
  - 计算结果总是0 或 1
  - 提前终止(Early termination)、短路求值(short cut)
- 例子(char 数据类型)
  - !0x41 → 0x00
  - !0x00 → 0x01
  - !!0x41 → 0x01
  - 0x69 && 0x55 → 0x01
  - 0x69 || 0x55 → 0x01
  - p && *p （避免空指针访问,why？）

2.1.9 C语言中的移位运算

- 左移: x << y
  - **将位向量x向左移动 y位**
    - 扔掉左边多出(移出)的位
    - 在右边补0
- 右移: x >> y
  - **将位向量x向右移动 y位**
    - 扔掉右边多出(移出)的位
  - 逻辑右移：在左边补0
  - 算术右移：复制左边的最高位(y次)
- 未明确定义
  - 移位数量y< 0 或 y ≥ x的字长(位数)

Argument x	01100010
<< 3	00010***000***
Log. >> 2	***00***011000
Arith. >> 2	***00***011000

Argument x	10100010
<< 3	00010***000***
Log. >> 2	***00***101000
Arith. >> 2	***11***101000

主要内容: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- 整型数
  - **表示：无符号数和有符号数**
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示
- 总结

2.2 整数编码(Encoding Integers)

无符号数

$$B2U(X) = \sum_{i=0}^{w-1} x_i \cdot 2^i$$

有符号数——补码(Two’s Complement)

$$B2T(X) = -x_{w-1} \cdot 2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i \cdot 2^i$$

符号位

```
short int x =  15213;
short int y = -15213;
```

- C short： 2 字节
- 符号位
  - 对于补码(2’s complement), 最高位表示符号
    - 0 表示非负数（!= 正数）， 1 表示负数

	10进制	16进制	2进制
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
y	-15213	C4 93	11000100 10010011

补码示例

```
x =  15213: 00111011 01101101
y = -15213: 11000100 10010011
```

权重	15213		-15213	
1	1	1	1	1
2	0	0	1	2
4	1	4	0	0
8	1	8	0	0
16	0	0	1	16
32	1	32	0	0
64	1	64	0	0
128	0	0	1	128
256	1	256	0	0
512	1	512	0	0
1024	0	0	1	1024
2048	1	2048	0	0
4096	1	4096	0	0
8192	1	8192	0	0
16384	0	0	1	16384
-32768	0	0	1	-32768
总计		**15213**		**-15213**

数值范围

- 无符号数值
  - $UMin = 0$
    000…0
  - $UMax = 2^w - 1$
    111…1

- **补码数值**
  - $TMin = -2^{w-1}$
    100…0
  - $TMax = 2^{w-1} - 1$
    011…1
  - -1
    111…1

位数W = 16时的数值

	十进制	16进制	二进制
UMax	65535	FF FF	11111111 11111111
TMax	32767	7F FF	01111111 11111111
TMin	-32768	80 00	10000000 00000000
-1	-1	FF FF	11111111 11111111
0	0	00 00	00000000 00000000

不同字长的数值

	W			
	8	16	32	64
UMax	255	65,535	4,294,967,295	18,446,744,073,709,551,615
TMax	127	32,767	2,147,483,647	9,223,372,036,854,775,807
TMin	-128	-32,768	-2,147,483,648	-9,223,372,036,854,775,808

- 观察
  - $|TMin| = TMax + 1$
    - 非对称
  - $UMax = 2 * TMax + 1$

- C 语言的常量声明
  - #include <limits.h>
    - #define INT_MAX 2147483647
    - #define INT_MIN (-INT_MAX-1)
    - #define UINT_MAX 0xffffffff
  - 平台相关
    - #define ULONG_MAX
    - #define LONG_MAX
    - #define LONG_MIN (-LONG_MAX-1)

无符号数与有符号数编码的值

- 相同
  - 非负数值的编码相同
- 单值性
  - 每个位模式对应一个唯一的整数值
  - 每个可描述整数有一个唯一编码

$\Rightarrow$ 有逆映射

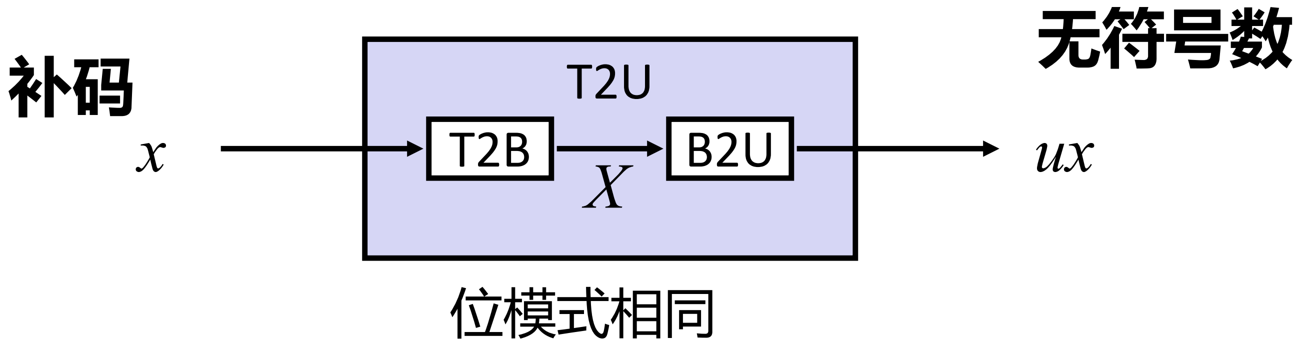
- $\mathrm{U2B}(x) = \mathrm{B2U}^{-1}(x)$
  - 无符号整数的位模式
- $\mathrm{T2B}(x) = \mathrm{B2T}^{-1}(x)$
  - 补码的位模式

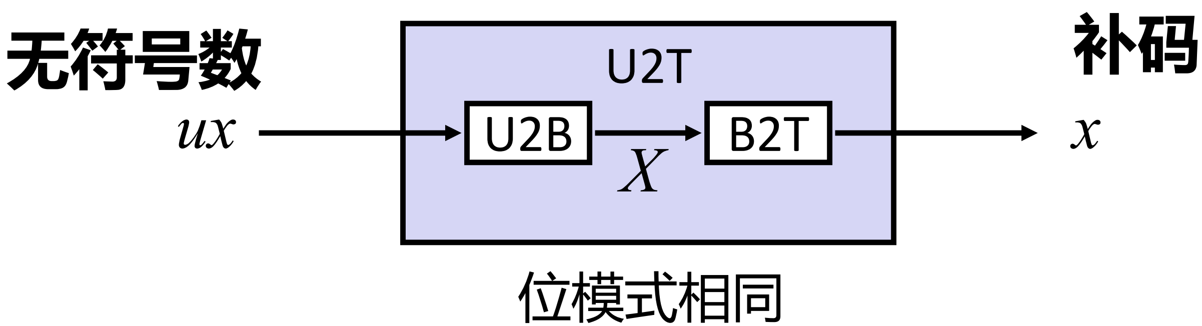
X	**B2U(*X*)**	**B2T(*X*)**
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	–8
1001	9	–7
1010	10	–6
1011	11	–5
1100	12	–4
1101	13	–3
1110	14	–2
1111	15	–1

主要内容: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - **无符号数和有符号数的转换**
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

有符号/无符号数之间的转换





- 有符号数和无符号数转换规则:
  位模式不变、数值可能改变(按不同编码规则重新解读)

有符号↔ 无符号数的转换

Bits	Signed	Unsigned
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	-8	8
1001	-7	9
1010	-6	10
1011	-5	11
1100	-4	12
1101	-3	13
1110	-2	14
1111	-1	15

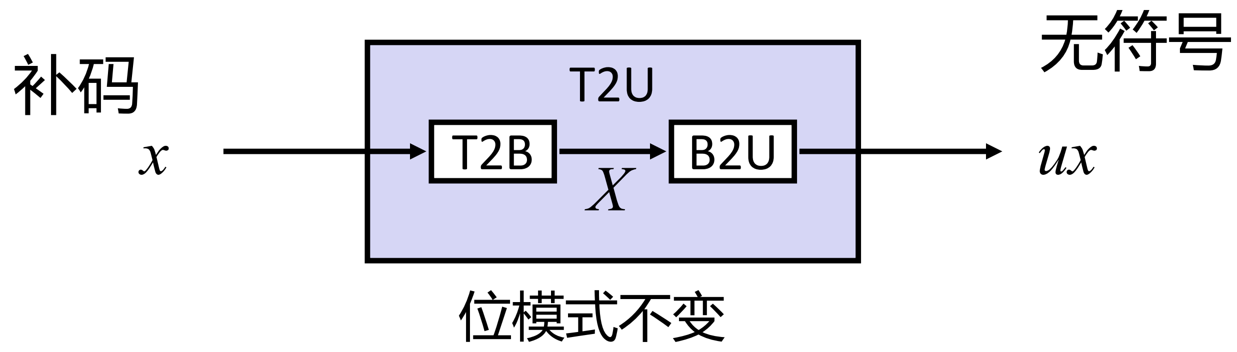
Signed $\rightarrow$ $\boxed{\text{T2U}}$ $\rightarrow$ Unsigned

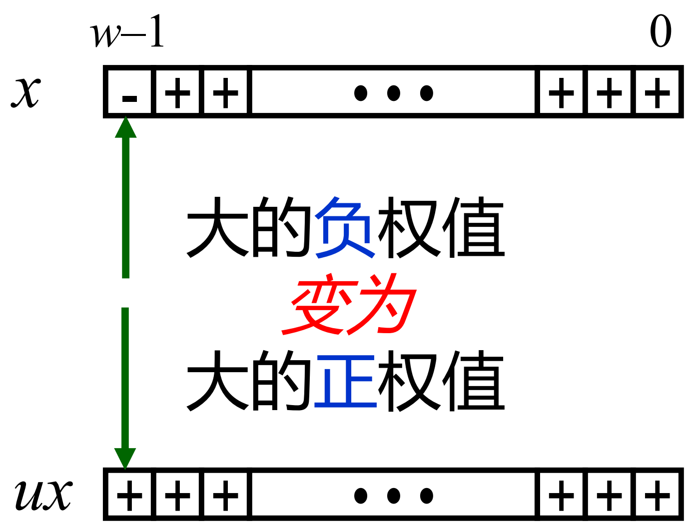
Signed $\leftarrow$ $\boxed{\text{U2T}}$ $\leftarrow$ Unsigned

有符号↔ 无符号数的转换

Bits	Signed		Unsigned
0000	0		0
0001	1		1
0010	2		2
0011	3		3
0100	4	=	4
0101	5		5
0110	6		6
0111	7		7
1000	-8		8
1001	-7		9
1010	-6		10
1011	-5	+/- 16	11
1100	-4		12
1101	-3		13
1110	-2		14
1111	-1		15

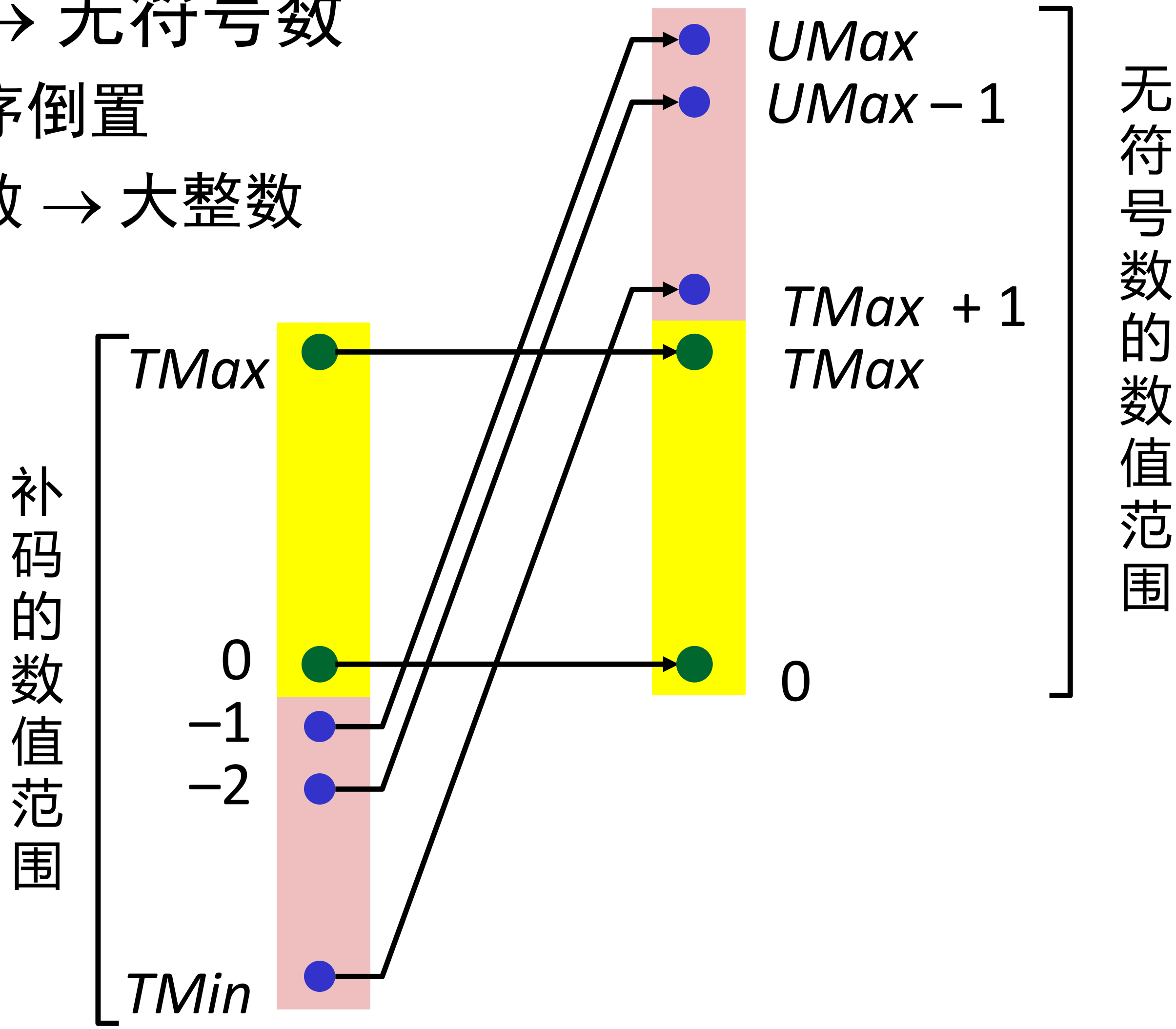
有符号数和无符号数的关系





转换的可视化

- 补码→ 无符号数
  - 顺序倒置
  - 负数 → 大整数



2.2.5 C语言中的有符号数和无符号数

- 常量
  - 数字默认是有符号数
  - 无符号数用后缀 'U'：`0U, 4294967259U`
- 类型转换
  - 显示的强制类型转换

```
int tx, ty;
unsigned ux, uy;
tx = (int) ux;
uy = (unsigned) ty;
```

  - 隐式的类型转换（赋值、函数调用等情况下发生）

```
tx = ux;
uy = ty;
```

类型转换的**惊喜！**

- 表达式计算
  - 表达式中有符号和无符号数混用时：

    有符号数隐式转换为无符号数

  - 包括比较运算符 **<, >, ==, <=, >=**
  - 例如$W = 32$:

    TMIN = -2,147,483,648

    TMAX =2,147,483,647

类型转换的惊喜！

Constant1	Constant2	Relation	Evaluation
0	0U	==	**unsigned**
-1	0	<	**signed**
-1	0U	>	**unsigned**
2147483647	-2147483648	>	**signed**
2147483647U	**-2147483648**	<	**unsigned**
-1	-2	>	**signed**
(unsigned)-1	-2	>	**unsigned**
2147483647	2147483648U	<	**unsigned**
2147483647	**(int) 2147483648U**	>	**signed**

有符号数和无符号数转换的基本原则

- 位模式不变
- 重新解读（按目标编码类型的规则解读）
- 会有意外副作用: 数值被 +或- 2^w

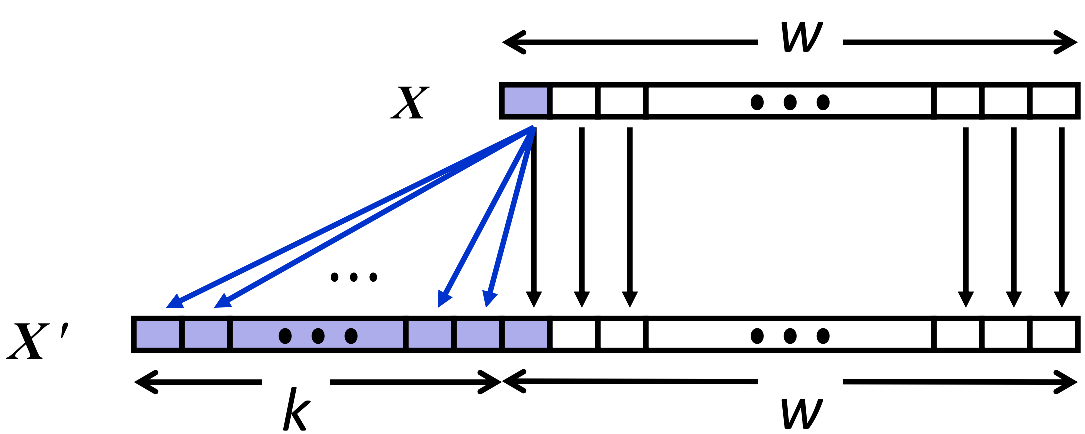
- 表达式含无符号数和有符号数时
  - **有符号数被转换成无符号数（如int 转成unsigned int）**
  - **当心副作用！！！**

主要内容: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - **扩展、截断**
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

符号扩展

- 任务:
  - 给定*w*位的有符号整型数*x*
  - 将其转换为*w*+*k*位的相同数值的整型数
- 规则:
  - 将最高有效位(符号位)x_{w-1}复制 *k*份:
  - $X' = \underbrace{x_{w-1}, \ldots, x_{w-1}}_{k\text{ copies of MSB}}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0$



符号扩展示例

```
short int x =  15213;
int      ix = (int) x;
short int y = -15213;
int      iy = (int) y;
```

	十进制	16进制	二进制
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
ix	15213	00 00 3B 6D	00000000 00000000 00111011 01101101
y	-15213	C4 93	11000100 10010011
iy	-15213	FF FF C4 93	11111111 11111111 11000100 10010011

- 从短整数类型向长整数类型转换时，C自动进行符号扩展

总结:扩展、截断的基本规则

- 扩展 (例如从short int 到int的转换)
  - 无符号数: 填充0
  - 有符号数:符号扩展
  - 结果都是明确的预期值
- 截断 (例如从unsigned 到unsigned short的转换)
  - 无论有/无符号数:多出的位均被截断
  - 结果重新解读
  - 无符号数: 相当于求模运算
  - 有符号数: 与求模运算相似
  - 对于小整数，结果是明确的预期值

主要内容: 位、字节 和 整型数

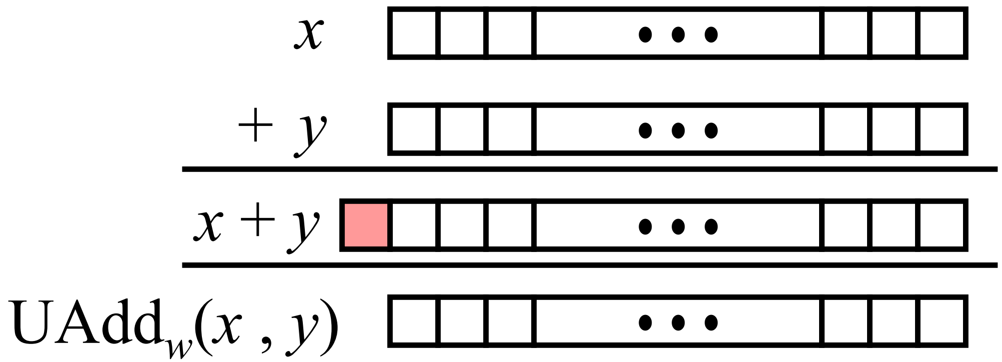
- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - **整数运算：加、非、乘、移位**
- 内存、指针、字符串表示
- 总结

无符号数加法

操作数: w 位

真实和: w+1 位

丢弃进位: 位w



- 标准加法功能
  - 忽略进位
- 模数加法：相当于增加一个模运算

$s \;=\; UAdd_w(x, y) \;=\; x + y \mod 2^w$

$$UAdd_w(\mathrm{x,y}) = \begin{cases} x+y & x+y < 2^w \\ x+y-2^w & x+y \geq 2^w \end{cases}$$

整数加法可视化示意图

- 整数加法
  - 4-bit 整型数 x, y
  - 计算真实值$\mathrm{Add}_4(x, y)$
  - 和随x和 y*线性增加*
  - 表面为斜面形

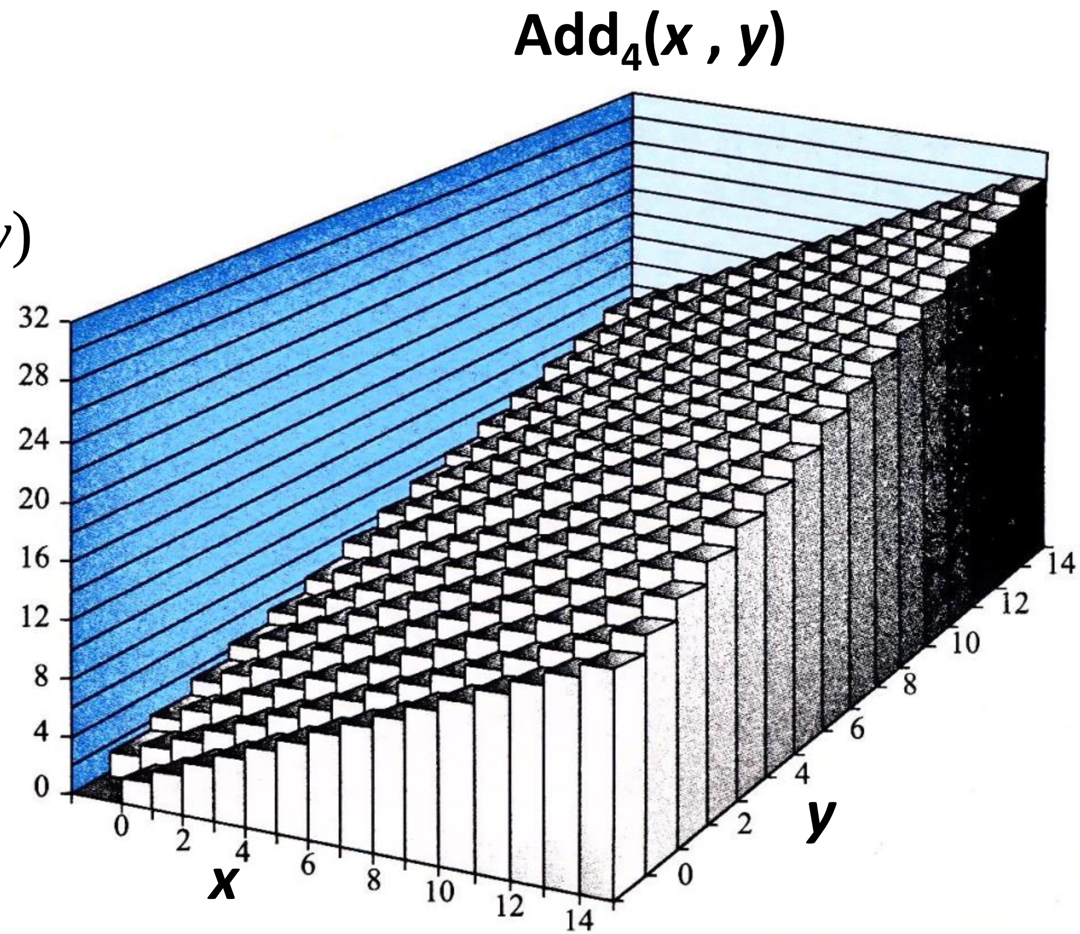
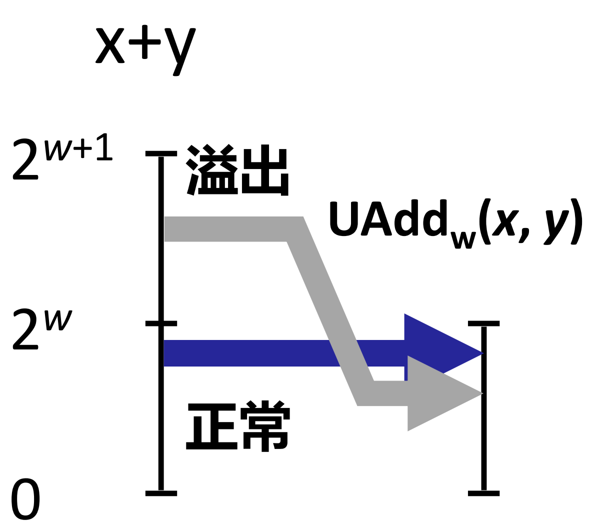
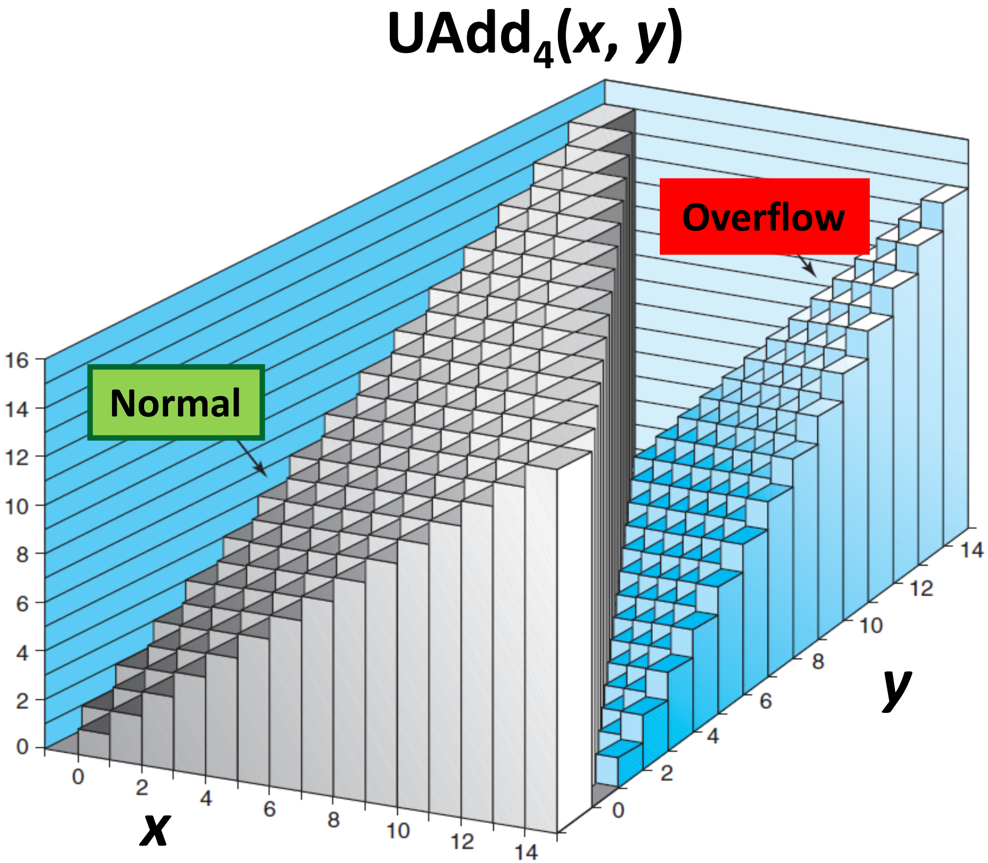


图 2-21 整数加法。对于一个 4 位的字长，其和可能需要 5 位

无符号数加法可视化示意图

- 数值面有弯折：
  - 当真实和≥ 2^w时溢出
  - 最多溢出一次



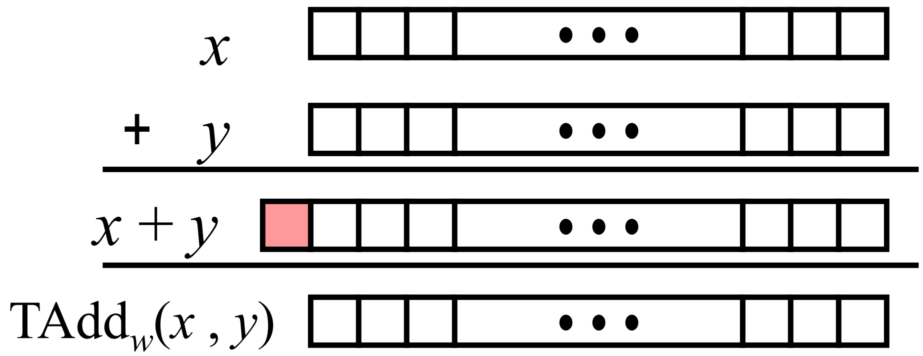


补码加法

操作数: *w* 位

真实和: *w*+1 位

丢弃进位: 位*w*



- TAdd 和 UAdd 具有完全相同的位级表现
  - C语言中有符号数(补码)与无符号数加法:

    int s, t, x, y;

    s = (int) ((unsigned) x + (unsigned) y);

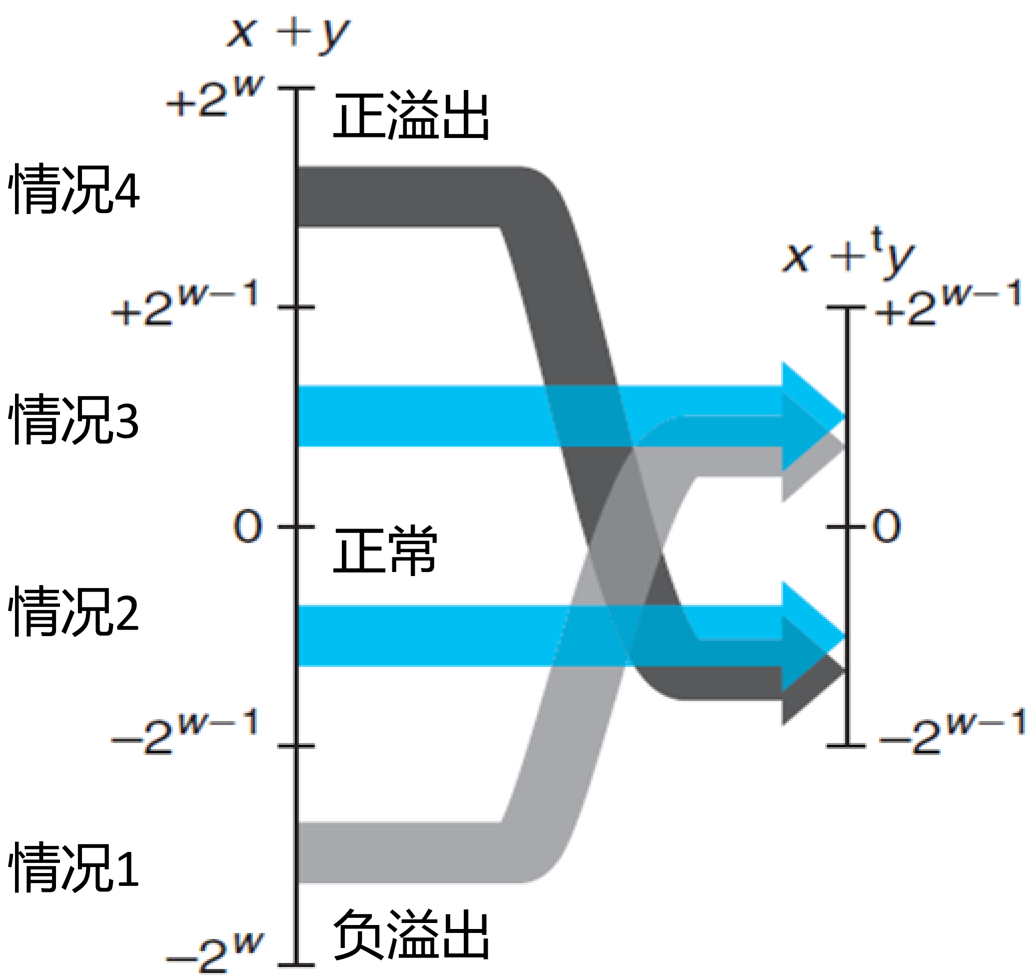
    t = x + y
  - 将会有`s == t`

补码加法(Tadd)

- 功能
  - 真实和需要w+1位
  - 丢弃最高有效位（MSB）
  - 将剩余的位视作补码（整数）

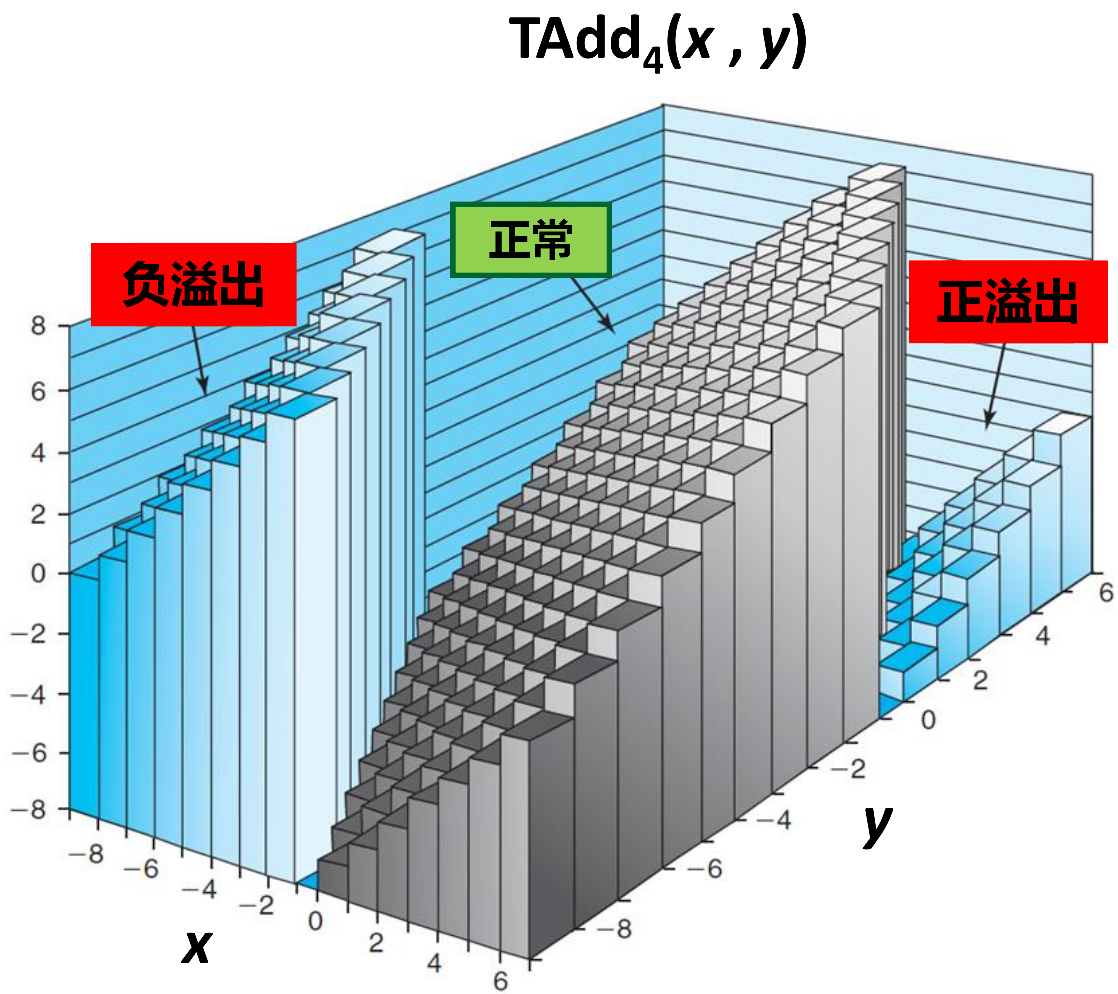
$$TAdd(x, y) = \begin{cases} x + y - 2^w, & TMax_w < x + y & \text{正溢出} \\ x + y, & TMin_w \le x + y \le TMax_w & \text{正常} \\ x + y + 2^w, & x + y < TMin_w & \text{负溢出} \end{cases}$$

补码加法(Tadd)的溢出问题



补码加法可视化示意图

- 数值
  - 4位补码
  - 数值范围-8 ～ +7
- 弯折——溢出
  - $x+y \geq 2^{w-1}$ 时
    - 变成负数
    - 最多一次
  - $x+y < -2^{w-1}$
    - 变成正数
    - 最多一次



乘法

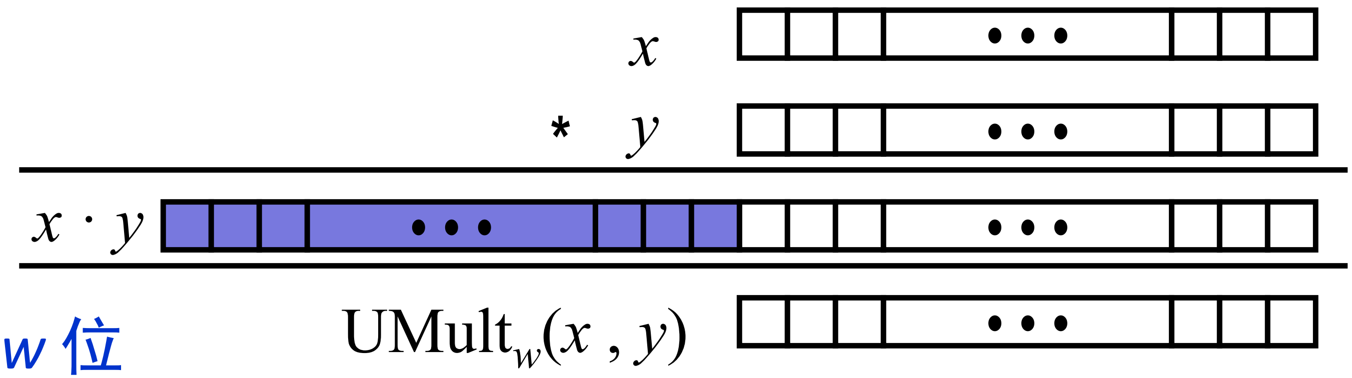
- 目标: 计算w位的两个数x和 y的乘积
  - 有符号数或者无符号数
- 乘积的精确结果可能超过 w 位
  - 乘积的无符号数最多可达 2w 位
    - 结果范围: $0 \le x * y \le (2^w - 1)^2 = 2^{2w} - 2^{w+1} + 1$
  - 补码的最小值 (负数)最多需要2w-1 位
    - 结果范围: $x * y \ge (-2^{w-1})*(2^{w-1}-1) = -2^{2w-2} + 2^{w-1}$
  - 补码最大值(正数)最多需要2w 位——值为 $(TMin_w)^2$
    - 结果范围: $x * y \le (-2^{w-1})^2 = 2^{2w-2}$
- 为获得精确结果可扩展乘积的字长
  - 在需要时用软件方法完成，例如：算术程序包“arbitrary precision”

C 语言的无符号数乘法

操作数: *w* 位

真实乘积: 2**w*位

丢弃 *w* 位: 保留低*w* 位



- 标准乘法功能
  - 忽略高*w* 位
- 相当于对乘积执行了模运算

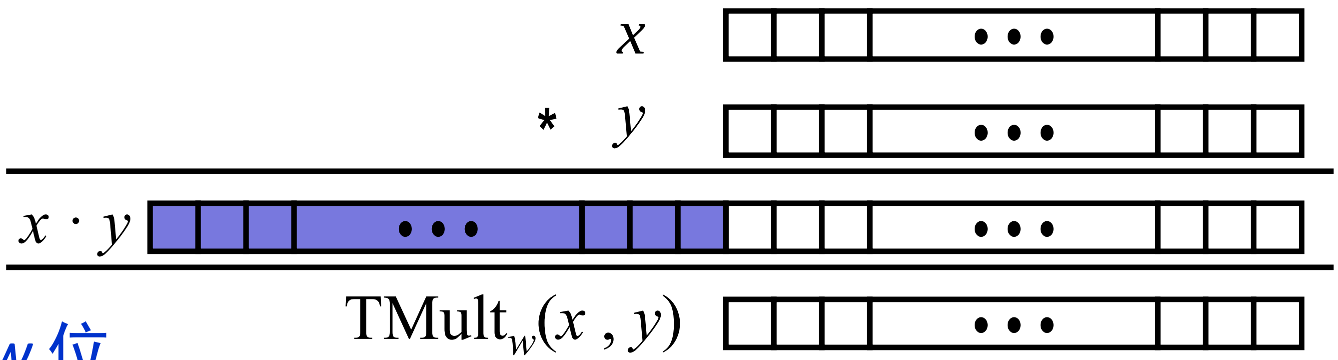
$$\mathrm{UMult}_w(x, y) = x \cdot y \mod 2^w$$

C 语言的有符号数乘法

操作数: *w* 位

真实乘积: 2**w*位

丢弃 *w* 位: 保留低*w* 位



- 标准乘法功能
  - 忽略高*w* 位
  - 有符号数乘、无符号数乘有不同之处
    - 乘积的符号扩展
  - 乘积的低位相同

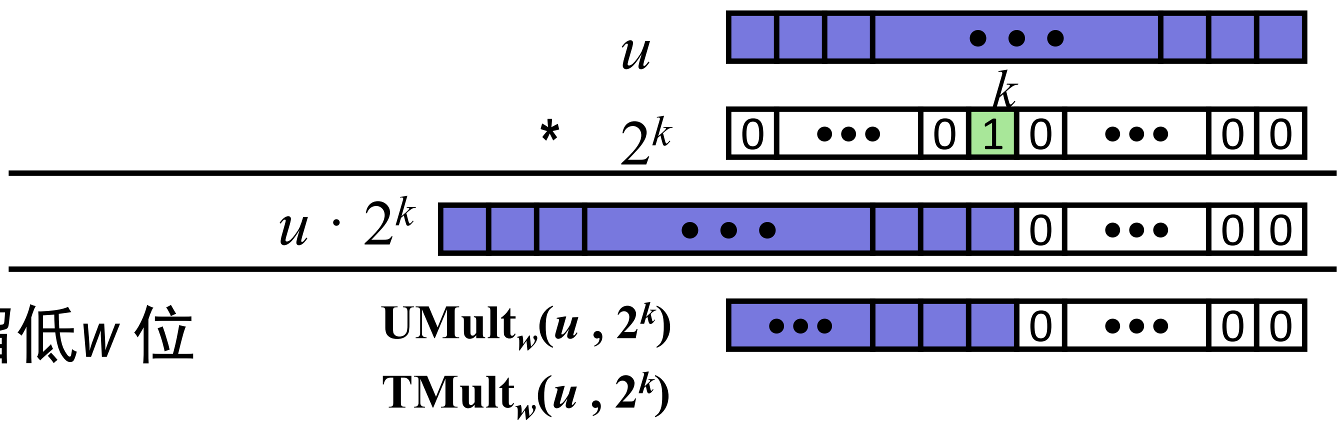
用移位实现“乘以2的幂”

- 无论有符号数还是无符号数：
  u << k 可得到 **u*** 2^k

操作数: *w* 位

真实乘积: *w*+*k* 位

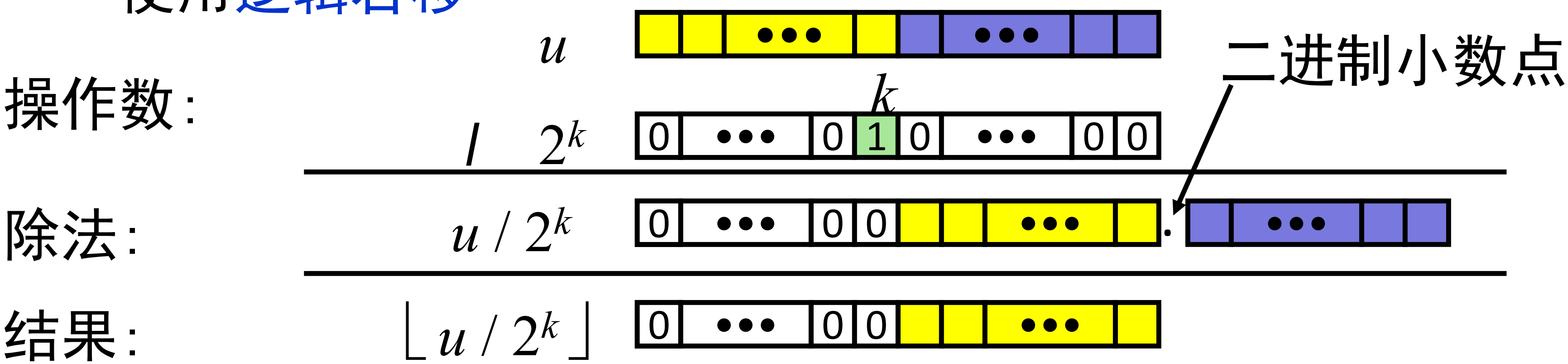
丢弃高 *k* 位: 保留低*w* 位



- 示例
  - `u << 3 == u * 8`
  - `(u << 5) - (u << 3) == u * 24`
  - 绝大多数机器，移位比乘法快
  - 编译器自动生成基于移位的乘法代码

用移位实现无符号数“除以2的幂”

- 无符号数“除以2的幂”的商
  - `u >> k` 得到 $\lfloor u \,/\, 2^k \rfloor$
  - 使用逻辑右移



	Division	Computed	Hex	Binary
`x`	15213	15213	`3B 6D`	`00111011 01101101`
`x >> 1`	7606.5	7606	`1D B6`	`00011101 10110110`
`x >> 4`	950.8125	950	`03 B6`	`00000011 10110110`
`x >> 8`	59.4257813	59	`00 3B`	`00000000 00111011`

主要内容: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- **整型数**
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - **总结**
- 内存、指针、字符串表示

算术运算: 基本规则

- 加法:
  - 无/有符号数的加法: 正常加法后再截断,位级的运算相同
  - 无符号数:加后对2^w求模
    - 数学加法 + 可能减去 2^w
  - 有符号数: 修改的加后对 2^w 求模，使结果在合适范围
    - 数学加法 + 可能减去或加上 2^w
- 乘法:
  - 无/有符号数的乘法:正常乘法后加截断操作,位级运算相同
  - 无符号数:乘后对2^w求模
  - 有符号数: 修改的乘后对 2^w 求模，使结果在合适范围内

为何用无符号数？

- *一定要知道隐含的转换规则，否则不要用*
  - 常见错误

```
unsigned i;
for (i = cnt-2; i >= 0; i--)
  a[i] += a[i+1];
```

  - 不易察觉的问题

```
#define DELTA sizeof(int)
int i;
for (i = CNT;  i - DELTA >= 0; i -= DELTA)
  . . .
```

巧用无符号数：向下计数

- 使用无符号类型循环变量的适当方法

```
unsigned i;
for (i = cnt-2; i < cnt; i--)
  a[i] += a[i+1];
```

- 参考Robert Seacord著《*Secure Coding in C and C++*》
  - C 语言标准确保无符号数加法的行为与模运算类似
    - 0 – 1 → *UMax*
- 好方法

```
size_t i;
for (i = cnt-2; i < cnt; i--)
  a[i] += a[i+1];
```

  - `size_t` 定义为长度为计算机程序相同字长的无符号数
  - 即便cnt = *UMax*也能很好工作
  - 若cnt 是有符号数，且值小于0，会如何？

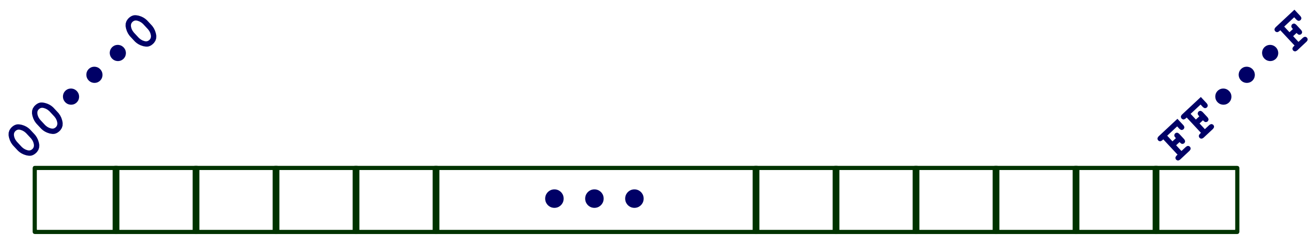
为何用无符号数?

- 需要进行模运算的时候，就用无符号数
  - 多精度的算术运算
- 用二进制位表示集合时，就用无符号数
  - 逻辑右移、无符号扩展

主要内容: 位、字节 和 整型数

- 信息的位表示
- 位级运算
- 整型数
  - 表示：无符号数和有符号数
  - 无符号数和有符号数的转换
  - 扩展、截断
  - 整数运算：加、非、乘、移位
  - 总结
- 内存、指针、字符串表示

面向字节的内存组织管理



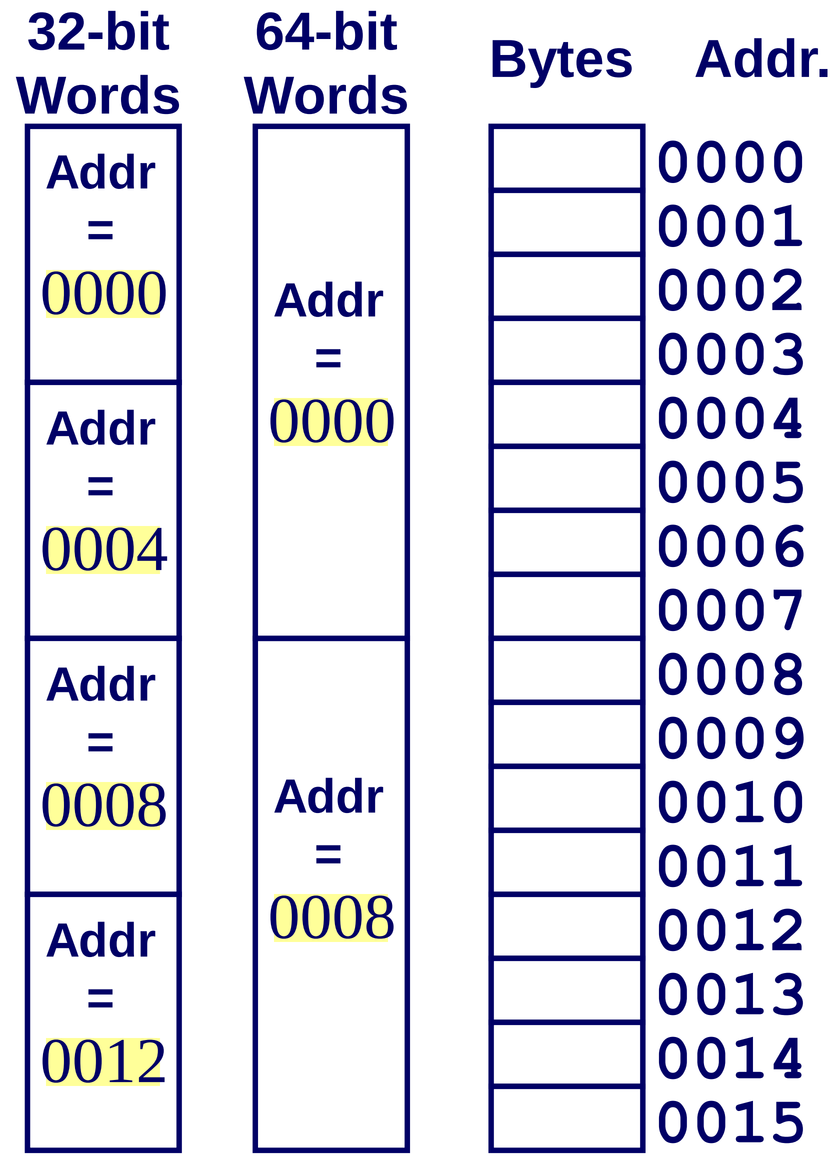
- 程序用地址来引用内存中的数据
  - 内存可看做巨大的“字节数组”
    - 实际上不是这样，但不妨这样联想
  - 地址就像这个“字节数组”的索引
    - 指针变量可保存地址数值
- 注意:
  - 操作系统为每个进程提供私有的地址空间
  - 每个进程可访问自己地址空间中的内存数据，彼此不干扰。

机器字

- 任何机器都有一个 “字长”
  - 整型值数据的名义长度
    - 地址的名义长度
  - 1985年intel 386 CPU开始,大多数机器使用32位 (4字节) 字长
    - 地址空间最大4GB (2^{32} bytes)
  - 目前, 64位字长的机器是主流
    - 潜在地，可以有18 EB (Exabytes) 的可寻址内存
    - 约18.4 * 10^{18}字节
  - 机器依然支持多种数据格式
    - 字长的一部分或几倍长度
    - 始终是整数个字节

面向字的内存组织管理

- 地址：指定字节的位置
  - 字中第一个字节的地址
  - 相邻字的地址相差 4 (32-bit) 或 8 (64-bit)



C数据类型的典型大小(字节数)

C 数据类型	32位	64位	x86-64
`char`	1	1	1
`short`	2	2	2
`int`	4	4	4
`long`	**4**	**8**	**8**
`float`	4	4	4
`double`	8	8	8
`long double`	–	–	10/16
pointer	**4**	**8**	**8**

字节序

- 有多个字节的“字”(word)，其各个字节在内存中的排列
- 惯例
  - 大端序、大尾序（Big Endian）: Sun, PPC Mac, Internet
    - 最低有效位字节的地址最高
  - 小端序、小尾序（Little Endian）: x86、运行Android 的ARM处理器、 iOS和Windows
    - 最低有效位字节的地址最低
- 双端序(Bi-Endian)
  - 机器可以配置成大端序或小端序
  - 很多新近的处理器均支持双端序

字节序示例

- 示例
  - 变量x 有4字节数值0x01234567
  - 假定x的地址为 0x100

Big Endian

		0x100	0x101	0x102	0x103		
		01	23	45	67		

Little Endian

		0x100	0x101	0x102	0x103		
		67	45	23	01		

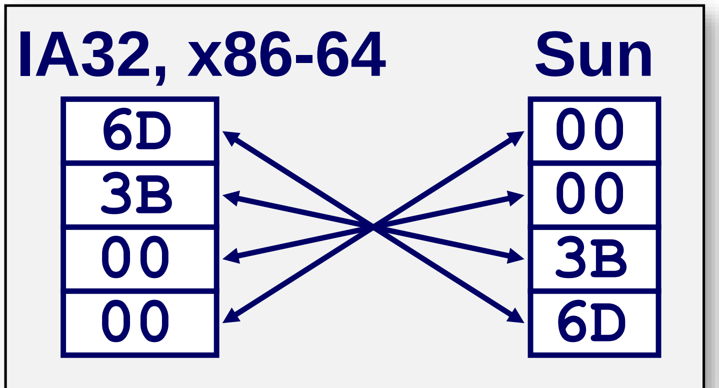
整型数的表示

十进制: 15213

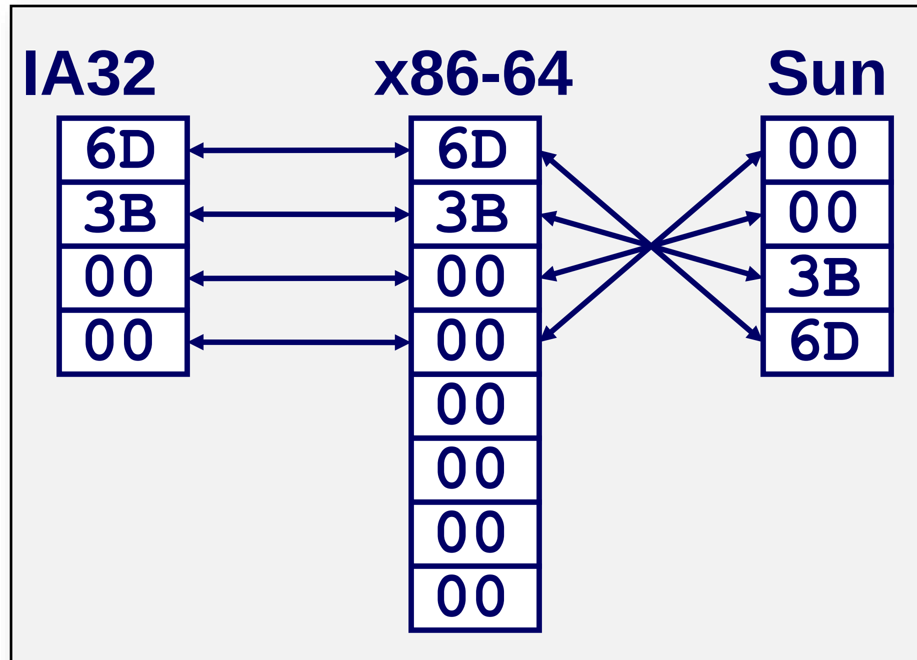
二进制: 0011 1011 0110 1101

16进制: 3 B 6 D

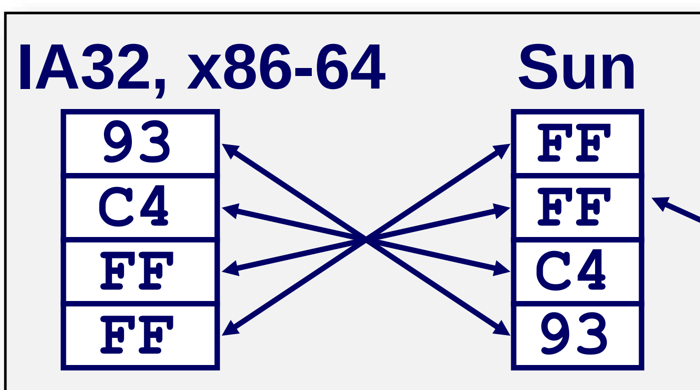
`int A = 15213;`



`long int C = 15213;`



`int B = -15213;`



补码表示

验证数的表示

- 打印数据字节表示的程序代码
  - 将指针转换成unsigned char * 类型，从而按字节数组处理

```
typedef unsigned char *pointer;

void show_bytes(pointer start, size_t len){
  size_t i;
  for(i = 0; i < len; i++)
    printf(”%p\t0x%.2x\n",start+i, start[i]);
  printf("\n");
}
```

printf 指令:
%p: **打印指针**
%x: **16进制格式打印**

show_bytes 的执行实例

```
int a = 15213;
printf("int a = 15213;\n");
show_bytes((pointer) &a, sizeof(int));
```

Result (Linux x86-64):

```
int a = 15213;
0x7fffb7f71dbc 6d
0x7fffb7f71dbd 3b
0x7fffb7f71dbe 00
0x7fffb7f71dbf 00
```

指针的表示

```
int B = -15213;
int *P = &B;
```

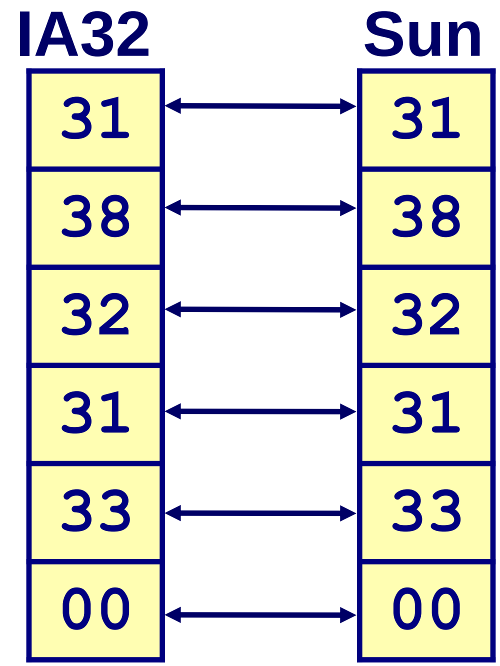
Sun	IA32	x86-64
EF	AC	3C
FF	28	1B
FB	F5	FE
2C	FF	82
		FD
		7F
		00
		00

不同的编译器、机器会有不同的运行结果。甚至程序的每次运行结果都不同

字符串的表示

```
char S[6] = "18213";
```

- C字符串
  - 用字符数组表示
  - 每个字符都是ASCII格式编码
    - 字符集合的标准7位编码
    - 字符’0’的编码是 0x30
      - ✓ 数码 *i* 的编码是 0x30+*i*
  - 字符串以null结尾
    - 最后的字符 = 0
  - 兼容性
    - 字节序不是个事！



C的整型数习题

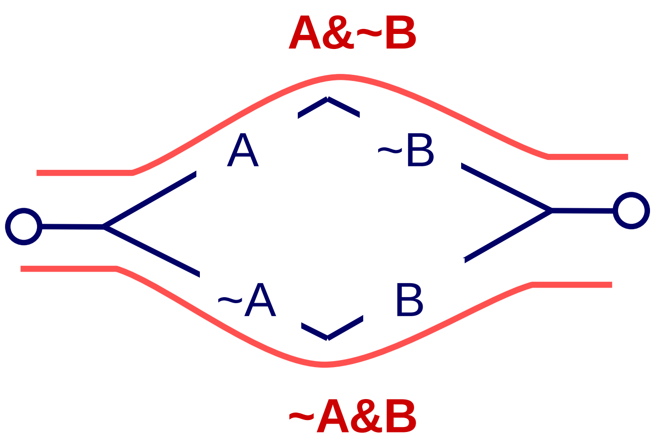
Initialization

```
int x = foo();

int y = bar();

unsigned ux = x;

unsigned uy = y;
```

• x < 0	((x*2) < 0)
• ux >= 0	
• x & 7 == 7	(x<<30) < 0
• ux > -1	
• x > y	-x < -y
• x * x >= 0	
• x > 0 && y > 0	x + y > 0
• x >= 0	-x <= 0
• x <= 0	-x >= 0
• (x|-x)>>31 == -1	
• ux >> 3 == ux/8	
• x >> 3 == x/8	
• x & (x-1) != 0	

布尔代数的应用

- 香浓应用于数字系统
  - 1937 MIT 硕士论文
  - 延迟开关网络的推理
    - 闭合开关编码为1, 开关打开编码为 0



连接条件:

A&~B | ~A&B

= A^B

二进制数性质

断言

$$1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{w-1} = 2^{w}$$

$$\boxed{1+\sum_{i=0}^{w-1} 2^{i} = 2^{w}}$$

- **证明:**
  - w = 0:
    - $1 = 2^{0}$
  - 假设w-1时成立，则w时:
    - $\underbrace{1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{w-1}}_{=\ 2^{w}} + 2^{w} = 2^{w} + 2^{w} = 2^{w+1}$

代码安全示例

```
/* 库函数 memcpy的声明*/
void *memcpy(void *dest, void *src, size_t n);
```

```
/*内核内存区域保持用户访问数据*/
#define KSIZE 1024
char kbuf[KSIZE];

/* 从内核内存区域最多拷贝maxlen字节到用户缓冲区*/
int copy_from_kernel(void *user_dest, int maxlen) {
    /*字节数len=min（缓冲区大小,maxlen） */
    int len = KSIZE < maxlen ? KSIZE : maxlen;
    memcpy(user_dest, kbuf, len);
    return len;
}
```

- 与FreeBSD’s的getpeername代码实现相似
- 有很多聪明的人试图在程序中发现漏洞

典型用法

```
/* 库函数 memcpy的声明*/
void *memcpy(void *dest, void *src, size_t n);
```

```
/*内核内存区域保持用户访问数据*/
#define KSIZE 1024
char kbuf[KSIZE];

/* 从内核内存区域最多拷贝maxlen字节到用户缓冲区*/
int copy_from_kernel(void *user_dest, int maxlen) {
   /*字节数len=min（缓冲区大小,maxlen） */
   int len = KSIZE < maxlen ? KSIZE : maxlen;
   memcpy(user_dest, kbuf, len);
   return len;
}
```

```
#define MSIZE 528
void getstuff() {
   char mybuf[MSIZE];
   copy_from_kernel(mybuf, MSIZE);
   printf("%s\n", mybuf);
}
```

恶意用法

```
/* 库函数 memcpy的声明*/
void *memcpy(void *dest, void *src, size_t n);
```

```
/*内核内存区域保持用户访问数据*/
#define KSIZE 1024
char kbuf[KSIZE];

/* 从内核内存区域最多拷贝maxlen字节到用户缓冲区*/
int copy_from_kernel(void *user_dest, int maxlen) {
   /* 字节数len=min（缓冲区大小KSIZE,maxlen）*/
   int len = KSIZE < maxlen ? KSIZE : maxlen;
   memcpy(user_dest, kbuf, len);
   return len;
}
```

```
#define MSIZE 528
void getstuff() {
   char mybuf[MSIZE];
   copy_from_kernel(mybuf, - MSIZE);
   . . .
}
```

改进： size_t int copy_from_kernel(void *user_dest, size_t maxlen)

数学性质

- 模数加法构成阿贝尔群（Modular Addition Forms an *Abelian Group*
  - **封闭性：** $0 \le \mathrm{UAdd}_w(u, v) \le 2^w - 1$
  - **交换性：** $\mathrm{UAdd}_w(u, v) = \mathrm{UAdd}_w(v, u)$
  - **结合性：** $\mathrm{UAdd}_w(t, \mathrm{UAdd}_w(u, v)) = \mathrm{UAdd}_w(\mathrm{UAdd}_w(t, u), v)$
  - **单位元：0**

    $\mathrm{UAdd}_w(u, 0) = u$
  - **每个元素都有逆元**
    - u的逆元 $\mathrm{UComp}_w(u) = 2^w - u$

      则：$\mathrm{UAdd}_w(u, \mathrm{UComp}_w(u)) = 0$

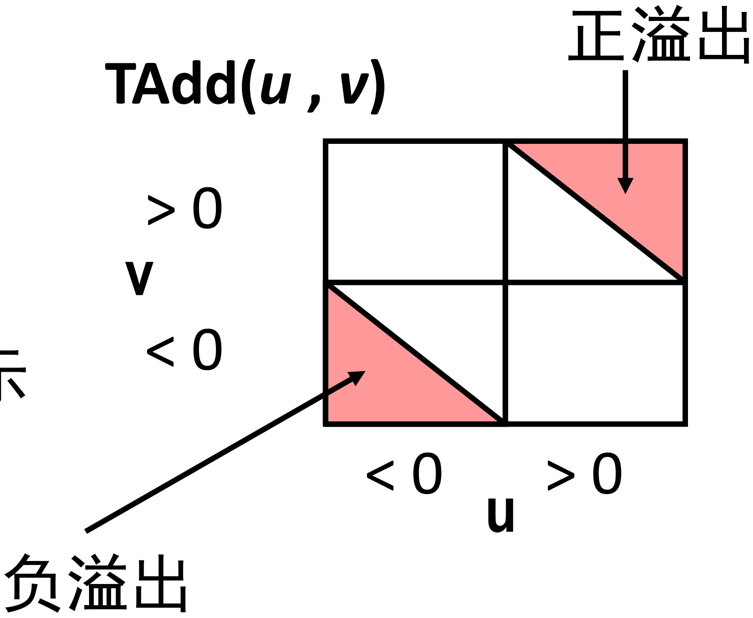
Tadd的数学性质

- 与带Uadd加法的无符号数是同构群
  - $\mathrm{TAdd}_w(u\ , v) = \ \mathrm{U2T}(\mathrm{UAdd}_w(\mathrm{T2U}(u\ ), \mathrm{T2U}(v)))$
    - 因为两者具有相同的位模式
- 补码加法Tadd构成一个群
  - 封闭性、 交换性、结合性、0是单位元
  - 每个元素都有逆元

$$TComp_w(u) \quad = \quad \begin{cases} -u & u \neq TMin_w \\ TMin_w & u = TMin_w \end{cases}$$

Tadd的表征

- 功能性
  - 真实和需要w+1 位
  - 舍弃最高有效位 MSB
  - 将剩余位看做整数的补码表示



$$TAddw(u,v)=\begin{cases} u+v+2^{w} & u+v<TMin_{w}\ \text{负溢出} \\ u+v & TMin_{w}\le u+v\le TMax_{w} \\ u+v-2^{w} & TMax_{w}<u+v\ \text{正溢出} \end{cases}$$

非(negation)

- 非(negation)

  变反加1(Complement & Increment)

- 断言：下式对补码成立

  `~x + 1 == -x`

- ~x + x == 1111…111 == -1

	x	1	0	0	1	1	1	0	1
+	~x	0	1	1	0	0	0	1	0
	-1	1	1	1	1	1	1	1	1

示例

x = 15213

	Decimal	Hex	Binary
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
~x	-15214	C4 92	11000100 10010010
~x+1	-15213	C4 93	11000100 10010011
y	-15213	C4 93	11000100 10010011

x = 0

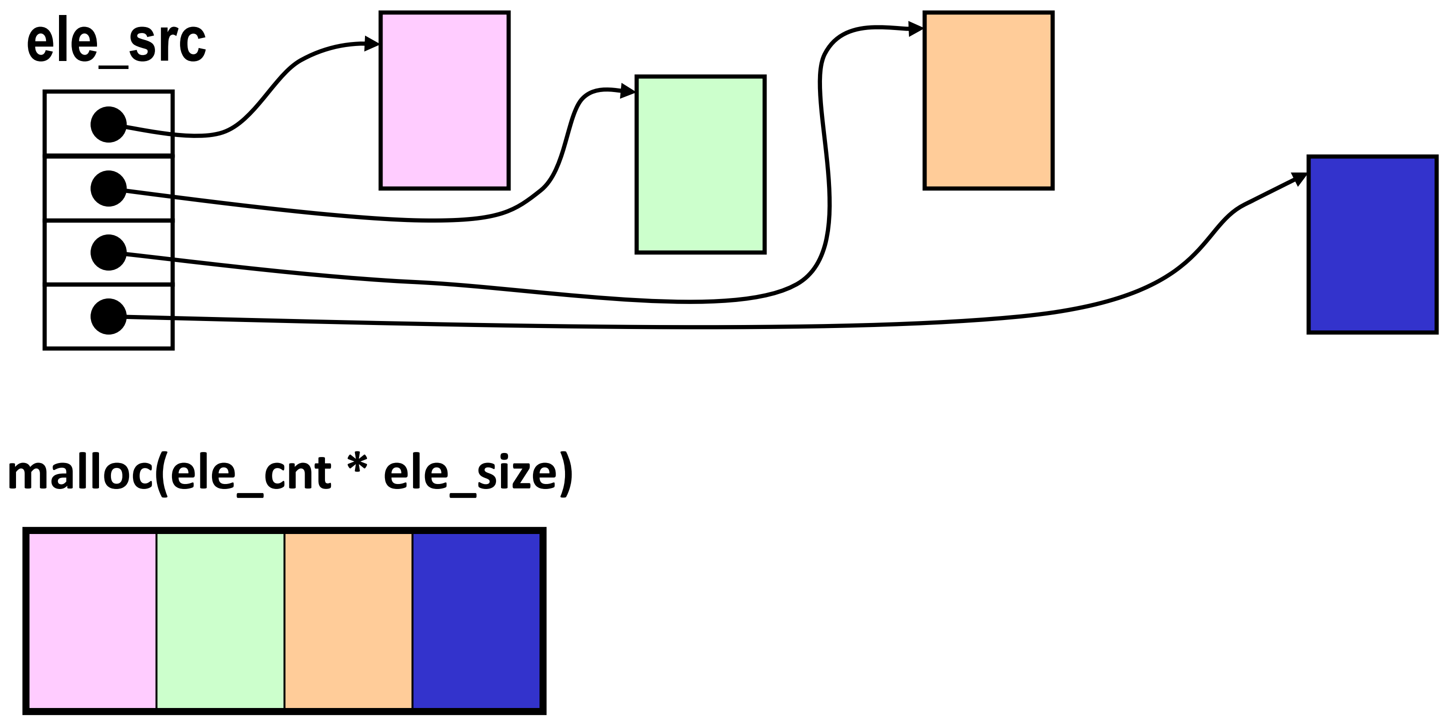
	Decimal	Hex	Binary
0	0	00 00	00000000 00000000
~0	-1	FF FF	11111111 11111111
~0+1	0	00 00	00000000 00000000

代码范例#2

- SUN XDR 函数库

  广泛用于机器间传输数据

```
void* copy_elements(void *ele_src[], int ele_cnt, size_t ele_size);
```



XDR 代码

```
void* copy_elements(void *ele_src[], int ele_cnt, size_t ele_size) {
   /* 为ele_cnt个对象申请缓冲区, 每个对象ele_size字节
    * 并从ele_src指定的位置拷贝*/

   void *result = malloc(ele_cnt * ele_size);
   if (result == NULL)
           /* malloc failed */
           return NULL;
   void *next = result;
   int i;
   for (i = 0; i < ele_cnt; i++) {
      /* Copy object i to destination */
      memcpy(next, ele_src[i], ele_size);
      /* Move pointer to next memory region */
      next += ele_size;
   }
   return result;
}
```

XDR 的弱点

malloc(ele_cnt * ele_size)

- 32位程序，考虑以下情况:
  - **`ele_cnt`** $= 2^{20} + 1$
  - **`ele_size`** $= 4096$ $= 2^{12}$
  - 申请的字节数 = ?
  - 赋值元素的个数= ?
  - ….
- 如何能让这个函数安全?

乘法编译生成的代码

C 函数

```
long mul12(long x)
{
  return x*12;
}
```

编译得到的算术运算

```
leaq   (%rax,%rax,2), %rax
salq   $2, %rax
```

解释

```
t ← x+x*2
return t << 2 ;
```

- 对于常数的乘法，C 编译器自动生成移位和加法代码

无符号数除编译生成的代码

C 函数

```
unsigned long udiv8
       (unsigned long x)
{
  return x/8;
}
```

编译生成的数学运算

```
  shrq      $3, %rax
```

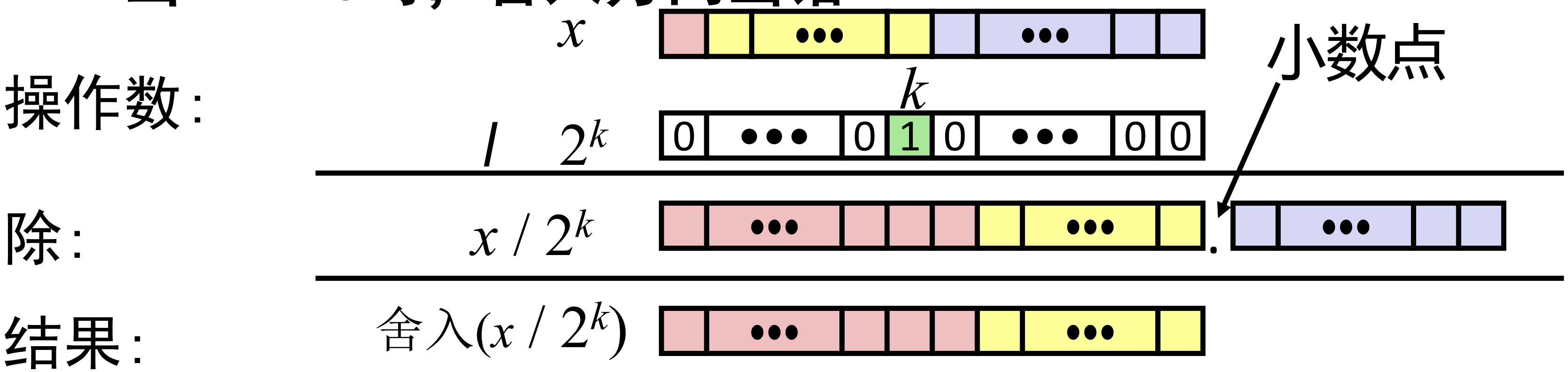
解释

```
  # Logical shift
  return x >> 3;
```

- 无符号数使用逻辑移位

用移位实现有符号数“除以2的幂”

- 有符号数“除以2的幂”的商
  - **x >> k 得到** $\lfloor x\ /\ 2^k \rfloor$
  - 使用算术右移
  - **当x < 0时，舍入方向出错**

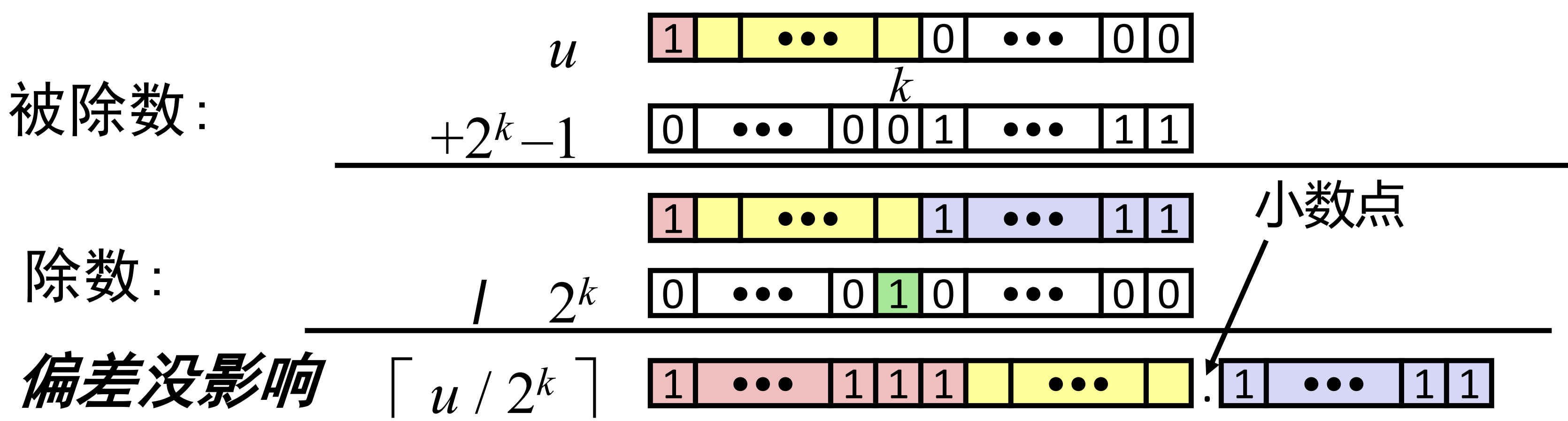


	Division	Computed	Hex	Binary
y	-15213	-15213	C4 93	11000100 10010011
y >> 1	-7606.5	-7607	E2 49	11100010 01001001
y >> 4	-950.8125	-951	FC 49	11111100 01001001
y >> 8	-59.4257813	-60	FF C4	11111111 11000100

修正 2的整数幂 除法

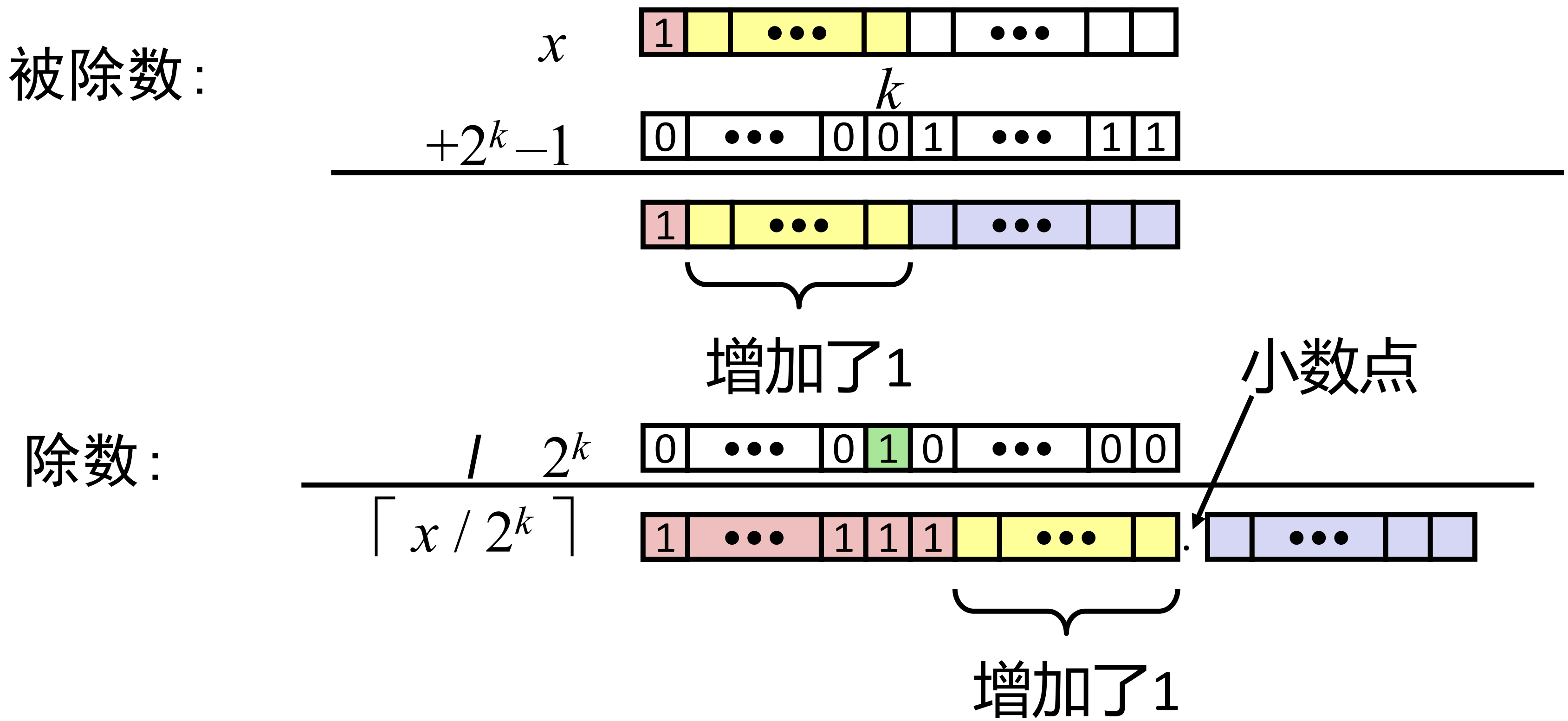
- 负数除以2的整数幂的商
  - 欲计算 $\lceil \mathbf{x} \ / \ 2^k \rceil$ (向0舍入)
  - **按** $\lfloor (\mathbf{x}+2^k-1) / \ 2^k \rfloor$ **计算**
    - C表达式: `( x + (1<<k)-1 ) >> k`
    - 被除数偏差趋向0

情况1:无舍入



修正 2的整数幂 除法

- 情况2：有舍入



偏差导致最终结果增加了 1

编译生成的有符号数除代码

C 函数

```
long idiv8(long x)
{
  return x/8;
}
```

编译生成的结果

```
    testq %rax, %rax
    js      L4
L3:
    sarq   $3, %rax
    ret
L4:
    addq  $7, %rax
    jmp    L3
```

解释

```
if x < 0
  x += 7;
# Arithmetic shift
return x >> 3;
```

- 使用了算术右移

算术运算:基本规则

- 无符号整数、补码整数是同构环(isomorphic rings)
  - 同构 = 类型转换 (isomorphism = casting)
- 左移
  - 无论有/无符号数，都可用逻辑左移实现乘以 2^k
- 右移
  - 无符号数: 逻辑右移,除以 2^k (除法 +向0舍入)
  - 有符号数: 算术右移
    - 正整数:除以 2^k (除法 + 向0舍入)
    - 负整数:除以 2^k (除法 + 远离0舍入)，使用偏置来修正