例谈求极限的几种不常见方法

赵普军　孙青茹

在科学研究中，数学是重要的基本工具，已经广泛地渗透到各个学科，是培养各类科技人才的必要基础。《高等数学》这门课在内容上极其丰富，方法上灵活多样。在多年的教学实践中，作者发现，许多学生在学习求极限时感到非常困难，分析其原因在于极限概念不仅抽象，而且计算方法灵活，不易掌握。

因此，要熟练准确地计算各种极限，除了要掌握常见求极限方法如：利用极限的运算法则来求极限、利用两个重要的极限来求极限、利用等价无穷小代换来求极限等外，了解一些不常见解法，对于进一步学好《高等数学》的其它相关内容是十分必要的。本文提出了极限计算中不常见的七种解题方法，目的是开阔学生的解题思路，从而提高解题能力。

利用先求解微分方程再求极限的方法

说明：此法主要用于已知函数的导数所具有的极限性质，求函数所具有的根限，这种方法的主要内容为：设 $y(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有 n 阶连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k y^{(k)}=A$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$。通常令 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k y^{(k)}=f(x)$，解常系数微分方程得 $y(x)$。再利用 $y(x)$ 的表达式和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 确定极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$。

[例 1] 已知 $y(x)$ 在 $[x_0, +\infty]$ 上有连续的一阶导函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=a$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$。

解：设 $y'(x)+y(x)=f(x)$，解此常微分方程得通解 $y(x)=e^{-x}[\int_{x_0}^{x}f(t)e^t dt+c]$，其中 c 为任意数。

由已知条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$

①当 $a=0$ 时，且 $\int_{x_0}^{x}f(t)e^t dt$ 收敛时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0=a$

②当 $a\neq0$ 或 $a=0$ 但 $\int_{x_0}^{x}f(t)e^t dt$ 发散时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_{x_0}^{x}f(t)e^t dt+c}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)e^x}{e^x}=a$ 综上所述，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=a$

利用积分中值定理求极限

说明：求积分式的极限时，如果积分麻烦，或原函数求不出来，可考虑用积分中值定理，其中ξ的趋向由上，下限确定。积分中值定理：如果 $f(x)$ 在 [a, b] 上连续，$g(x)$ 在 [a, b] 上可积且不变号，则存在ξ∈ [a, b]，使得：$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

[例 2] 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\dfrac{(\ln t)^n}{t+2}dt$，其中 $a>0$ 为常数，n 为自然数。

解：由积分中值定理，在 x 与 $x+a$ 之间存在ξ，使得 $\int_x^{x+a}\dfrac{(\ln t)^n}{t+2}dt=\dfrac{(\ln\xi)^n}{\xi+2}a$，$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\dfrac{(\ln t)^n}{t+2}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a(\ln\xi)^n}{\xi+2}=0$

[例 3] 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\dfrac{dx}{1+x}$

解：对任意的 $0<\xi<1$，$\int_0^{1-\varepsilon}\dfrac{x^n}{1+x}dx=\xi^n\int_0^{1-\varepsilon}\dfrac{dx}{1+x}=\xi^n\ln(2-\varepsilon)$，其中 $0\leq\xi\leq1-\varepsilon$，所以 $\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx<\int_{1-\varepsilon}^1\dfrac{dx}{1+x}+\int_0^{1-\varepsilon}\dfrac{x^n}{1+x}dx=\varepsilon\ln\dfrac{2}{2-\varepsilon}+\xi^n\ln(2-\varepsilon)$，$0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\dfrac{dx}{1+x}\leq\varepsilon\ln\dfrac{2}{2-\varepsilon}$，由ε的任意性，$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\dfrac{dx}{1+x}=0$

Stolz 求极限法

说明：在计算数列形式的 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型的极限时，可采用下列结果：

Stolz 定理：(1) 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是两个实数列，第二个数列定向发散于∞并且对充分大的 n，它是严格单调的，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在（有限或无限），则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$；

(2) 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$ 且 $\{y_n\}$ 对充分大的 n 严格单调，则当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在（有限或无限），有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

[例 4] 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，求下列各极限值。

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}$；(2) 若 $a_k>0$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}$；(3) 若 $a_k\neq0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}}$；(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n^2}$；

解：(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka_k-\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{(n+1)-n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}=\exp[\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k]=\exp[\ln a]=a$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}}=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}}{n}]^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka_k-\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{(n+1)^2-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)a_n}{2n+1}=\dfrac{a}{2}$

[例 5] 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n=1,2\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cdot x_n$

解：易见 $\{x_n\}$ 是单调递减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，而

$$\lim_{n\to+\infty}nx_n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2\cdot x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2\sin^2x_n}{x_n^2-\sin^2x_n}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2x}{x^2-\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x^2-\frac{x^4}{3}+0(x^4))}{x^2-x(x^2-\frac{x^4}{3}+0(x^4))}=3$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cdot x_n=\sqrt{3}$

Stirling 公式法求极限

说明：这种方法是利用 stirling 公式：$n!=\sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{e})^n e^{\frac{Q_n}{12n}}$，$0<Q_n<1$，求含有 n! 或者 n^n 数列的极限。

[例 6] 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n\sqrt{n!}}$

解：根据 stirling 公式：$\sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{e})^n e^{\frac{Q_n}{12n}}$，$(0<Q_n<1)$。

$\because\dfrac{n}{n\sqrt{n!}}=n\sqrt{\dfrac{n^n}{n!}}=(\dfrac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}\cdot e^{-\frac{Q}{12n}})^{\frac{1}{n}}=e(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}}e-\dfrac{Q_n}{12n^2}$，

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n\sqrt{n!}}=e\lim\limits_{n\to\infty}(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}}e-\dfrac{Q_n}{12n^2}=e$

[注] 与 Stirling 公式法相应的有 Euler 公式法：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=c+\ln n+\varepsilon_n$，其中 c 为 Euler 常数，$\varepsilon_n\to0$（n→∞）。

[例 7] 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n})$

解：记$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$x_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$,则$x_{2n+1}=x_{2n}+\frac{1}{2n+1}$且

$x_{2n}=(H_2n-\frac{1}{2}H_n)-\frac{1}{2}H_n=H_{2n}-H_n=\ln2+\varepsilon_n$,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\ln2$ 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln2$

幂级数的极限法求极限

说明：此法是利用幂级数在其收敛区间上的逐项可微，可积等性质来求极限。如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在某区间上收敛，若$x_0$是该区间的一个内点，则：$\lim\limits_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_0x_0$；$(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'_{x=x_0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x_0^{n-1}$；$\int_0^{x_0}[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n]\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{x_0}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x_0^{n+1}}{1+n}$，若$x_0$是该区间的一个端点，则当幂级数的收敛域包括$x_0$点时，也有单边极限。

[例 8] 求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{n+1})$

解令 s（x）$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n1+n}$，$|x|<3$。则$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}=\frac{x}{3-x}$，所 以$s(x)=\int_0^x s'(x)dx=-x-3\ln(1-\frac{x}{3})$，因 此$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k(1+k)}=s(1)=-1+3\ln\frac{3}{2}$

[例 9] 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$

解：由于 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $x\in[-1,1]$。所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln2$。

利用 Riemann 引理求极限

说明：设$f(x)$在［a，b］上可积，则$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\begin{matrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{matrix}dx=0$，这个结果称为黎曼（Riemann）引理。

[例 10] 求极限：$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^1\frac{\cos^4\lambda x}{1+x^2}dx$

解：由于$\cos^4\lambda x=(\frac{1+\cos2\lambda x}{2})^2=\frac{1}{4}(\frac{3}{2}+2\cos2\lambda x+\frac{1}{2}\cos4\lambda x)$，所以：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1\frac{\cos^4\lambda x}{1+x^2}dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1\frac{1}{4}(\frac{\frac{3}{2}+2\cos2\lambda x+\frac{1}{2}\cos4\lambda x}{1+x^2})dx=\frac{3}{8}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{3}{32}\pi$$

[例 11] 求极限：$\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{m}\frac{(\sin x\sqrt{n^2+k})^2}{m^2+(kx)^2}dx$

解：由于$(\sin x\sqrt{n^2+k})^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2x\sqrt{n^2+k}$，所以有

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{(\sin x\sqrt{n^2+k})^2}{m^2+(kx)^2}dx=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1-\cos2x\sqrt{n^2+k}}{m^2+(kx)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{m^2+(kx)^2}=\frac{1}{2m}arctg\frac{k}{m}$，因此，$\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{m}\frac{(\sin x\sqrt{n^2+k})^2}{m^2+(kx)^2}dx=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m}arctg\frac{k}{m}=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{arctg}x dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln2$

利用级数的收敛性质求极限

说明: 这是一种应用级数理论中某些结论求极限的方法，主要有：⑴ 级数收敛的必要条件: 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^p$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，当数列的极限不易求出, 如果把它成某级数的通项（或幂级数）而对此级数的收敛性判别比较容易时, 则由级数收敛必要条件得。

⑵ 数列看作级数的部分和：对于数列｛x_n｝，$x_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$，$x_0=0$，于是求极限问题代为求级数的和。

⑶ 柯西收敛准则：如果级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{n+p}x_k=0$

[例 12] 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n})$

解：令$a_n=(\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n})^p$,$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=$ n$[(\frac{2n+2}{2n+1})^p-1]=$ n$[(1+\frac{1}{2n+1})^p-1]=\frac{pn}{2n+1}+O(\frac{1}{n})\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{p}{2}$, 根据级数的拉贝判别法，当$\frac{p}{2}>1$，即$p>2$ 时级数$\sum a_n$收敛，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n})=0$

[例 13] 已知$x_1=a$，$x_2=b$，$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$，$n=3$，$4\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解：设$x_0=0$，$x_1-x_0=a$，$x_2-x_1=b-a=(-\frac{1}{2})^0(b-a)$,$x_k-x_{k-1}=-\frac{1}{2}(x_{k-1}-x_{k-2})=(-\frac{1}{2})^{k-2}(x_2-x_1)$，

$\therefore x_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=a+\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=a+\sum_{k=2}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-2}(b-a)=a+(b-a)\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}$ 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{1}{3}(a+2b)$

[例 14] 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2})$

解：由于级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$收敛，根据柯西收敛准则，对任意的$p$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}=0$，特别地当$p=n$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}=0$。

参考文献：

[1]刘书田.高等数学》(第二版)[M].北京:北京大学出版社, 2005.

[2]丁家泰.微积分解题方法[M].北京师范大学出版社, 1981.

[3]华东师范大学数学系.数学分析[M].高等教育出版社, 1997.

[4] 同济大学.高等数学[M].北京:高等教育出版社, 2001.

作者单位:赵普军，洛阳理工学院师范学院

孙青茹，洛阳理工学院现代教育技术中心

（上接第 53 页）

4. 总结。老师在讨论结束后，要对学生的分析观点作一个简短的点评和总结，及时肯定在讨论过程中的优点。对不够深入、不够确切的主要问题，加以分析并重新讲解，帮助学生加强记忆，把握要旨。在讲解过程中，还要结合教学大纲突出教学重点。当然，这不一定是真正的最优方案，也不一定是标准答案，毕竟“思维无定势”，要根据具体情况具体分析。

参考文献：

[1]徐国伟.市场营销案例教学的体会与探讨[J];商场现代化,2006年21期.

[2]武文珍.案例教学在高职市场营销教学中的应用与探索[J];沙洲职业工学院学报,2007年01期.

[3]李本千.市场营销学教学中如何运用案例教学[J];文教资料;2006年25期,112-113.

[4]吴水龙,周运锦,陆音.市场营销学案例教学研究与实践[J];赣南师范学院学报,2007年04期.

作者单位:江苏省南通商贸高等职业学校