二元函数重积分

- 直角坐标系 (X-型积分、Y-型积分，累次积分计算原则）

  积分换序，积分换元（极坐标、一般坐标）　性质: 对称性（轴, 中, 轮）

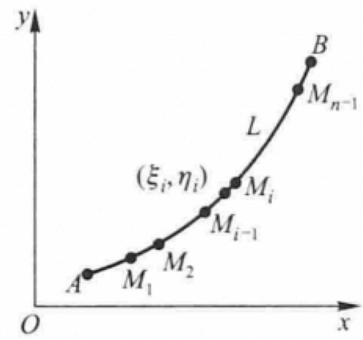
三元函数重积分

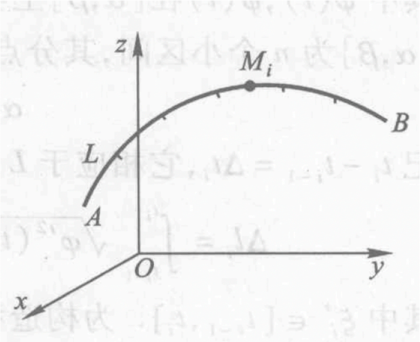
- 直角坐标系（条形积分、切片积分）　积分换元（柱、球、一般坐标）
- 应用：体积 + 表面积
  1. $z=f(x,y)$：投影 XOY 平面，$ds=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$
  2. 参数方程形式：
     $(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)=(A,B,C), ds=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$

目录

第一类型曲线积分

几何意义: 非均匀密度曲线的质量 (平面 + 空间)





性质：无方向性；线性封闭；弧段可加性；保序性

$$\int_L f\,dl \le \int_L g\,dl \quad \text{if} f \le g$$

第一类型曲线积分

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt, t \in [\alpha, \beta]$$

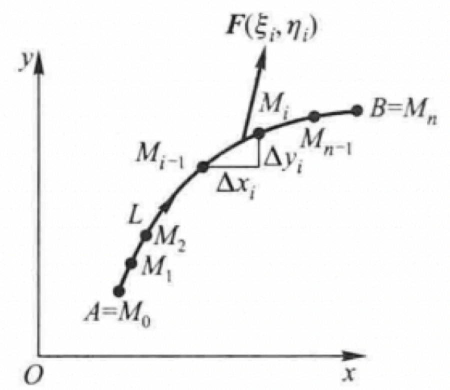
例 1.1 (计算)

1. $\int_L \sqrt{y}\,dl$, 其中 L 是 $y = x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与 $B(1,1)$ 之间的一段弧. ans: $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$
2. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, 其中 $L: x^2+y^2 = ax, (a>0)$. ans: $2a^2$
3. $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2 = a^2, y = x$ 和 x 轴在第一象限所围成扇形的边界. ans: $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4}ae^a$
4. $\int_L x^2\,dl$, 其中 $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2, \\ x+y+z = 0. \end{cases}$ (参数方程 + 对称性) ans: $\frac{2}{3}\pi a^3$
5. $\int_L z\,dl$, 其中 $L: x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$. ans: $2b\sqrt{a^2+b^2}\pi^2$

第二类型曲线积分

物理意义: 变力沿 (有向) 曲线做功;

定向曲线 + 向量被积函数 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$



性质: 有向性; 线性封闭; 弧段可加性;

$$\int_{L^-} \vec{F}(x,y) \cdot dr = -\int_{L^+} \vec{F}(x,y) \cdot dr$$

第二类型曲线积分

直接积分　识别 dx, dy, dz；从 A 到 B 的有向弧线；
特点：参数单调变化或关于某参变量成函数形式变化
方法：化第二类型积分为定积分计算, $\alpha\sim$ 起点, $\beta\sim$ 终点

参数方程　$\int_{\alpha}^{\beta}\big(Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\big)\,dt$

例 1.2 (计算)

1. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} xdy-ydx$, 其中 $\widehat{AB}:\begin{cases} x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}, t:0\to\frac{\pi}{2}$.　ans: $\frac{ab}{2}\pi$
2. $\displaystyle\int_{\vec{L}} x^3dx+3zy^2dy-xy^2dz$, L 为从 $A(3,2,1)$ 到 $B(0,0,0)$ 的线段.　ans: $\frac{-93}{4}$
3. $\displaystyle\int_{\vec{L}} xy\,dx$, L 为 $x=y^2$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的弧段. (dx v.s. dy)　ans: $4/5$

第二类型曲线积分

第二类曲线积分 v.s. 第一类曲线积分 $\int_{\vec{L}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$

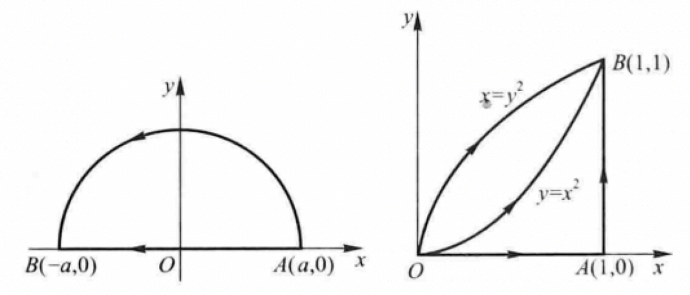
例 1.3 (计算 (对比两种算法))

$I = \int_{\vec{L}} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, 其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向看去 L 取逆时针方向. $(a>0)$. ans: $-2\sqrt{3}a^2\pi$

第二类型曲线积分

例 1.4 (积分 v.s. 路径)

1. $\int_L y^2\,dx$，其中 L 为 ans: $-\frac{4}{3}a^3; 0$
   (1) 逆时针方向绕行的上半圆周；(2) 从点 A 沿 x 轴到 B 的直线段;
   (一般情况下，积分与路径相关)
2. $\int_L 2xy\,dx + x^2\,dy$，其中 L 为 ans: $1; 1; 1$
   (1) 曲线 $y = x^2, O \to B$; (2) 曲线 $x = y^2,) \to B$; (3) 有向折线 OAB



格林公式（基础版本）

结论: 第二类型曲线积分 $\Rightarrow$ 二重积分 $\oint_{L+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\,dxdy$

例 1.5

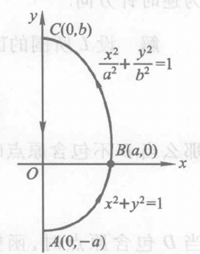
1. $\oint_L (x^2y\,dx - xy^2\,dy)$，$L$ 为正向圆周 $x^2+y^2=a^2$ ans: $\frac{-\pi}{2}a^4$
2. $\iint\limits_D e^{-y^2}\,dx\,dy$, 其中 D 为以 $A(0,0), B(1,1), C(0,1)$ 为顶点的三角形.

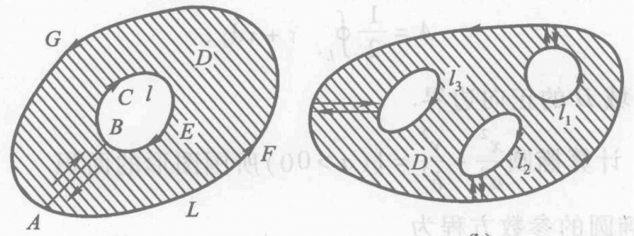
   ans: $(\frac{1}{2}(1-e^{-1}))$.
3. 椭圆面积. $(2\iint_D dxdy = \oint_{L+} xdy - ydx)$

格林公式（推广版本）

条件

- L 为封闭曲线 (?if not) 且简单（不自交）取正向
- L 所围成区域为 D 单连通区域 (?if not)
- P, Q, P_y, Q_x 在 D 上连续.
- 第一公式、第二公式、第三公式





(a) (b)

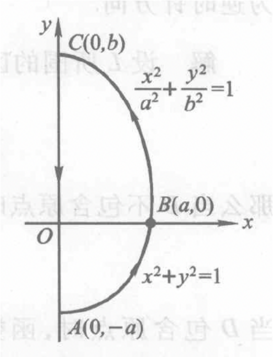
格林公式（非封闭曲线）

应用 1: 非封闭曲线. 构造一个合适的封闭路径

例 1.6 (计算)

$$I=\int_{\widehat{ABC}}(x+xy^2+3)\,dy-(x+y-\frac{y^3}{3})\,dx,$$

其中曲线 $\widehat{ABC}$ 由 $x^2+y^2=1$ 在第四象限部分 $\widehat{AB}$ 与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限部分 $\widehat{BC}$ 连接而成, 起点 $A(0,-a)$ 终点 $C(0,b)$.　ans: $(a+b)(3+\frac{\pi a}{2})$



格林公式（$Q_x = P_y$ 的应用）

应用 2.1：积分与路径无关 (四个等价命题, Thm.1.2.) 验证条件并构造积分路径

例 1.7 (计算)

1. $\displaystyle\oint_{L+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. L 为包含原点, 简单闭曲线. ans: (2π)
2. $\displaystyle\int_L \frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy$, 其中 L 是 $A(1,1)$ 到 $B(2,2)$ 的分段光滑有向曲线, 且与 y 轴不相交. ans: $(2\ln 2)$
3. 例题1.4

格林公式（$Q_x = P_y$ 的应用）

应用 2.2：求解全微分方程: $du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

例 1.8 (求解原函数)

1. (曲线积分) $2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$. ans: $x^2y^3 + c$
2. (不定积分) $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. ans: $\frac{x^2y^2}{2} + c$
3. (凑微分) $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy$. ans: $\frac{e^y-1}{1+x^2} + c$

格林公式（$Q_x = P_y$ 的应用）

一元微分方程求解 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow u \equiv c$

例 1.9 (微分方程求解)

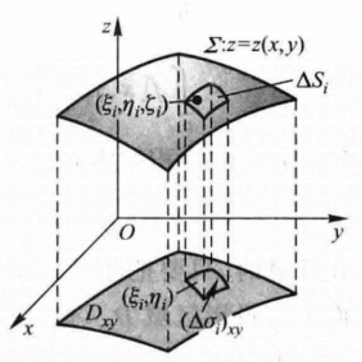
1. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$ ans: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$
2. $(\cos x + \frac{1}{y})\,dx + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})\,dy = 0$ ans: $\sin x + \ln|y| + \frac{x}{y} = c$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} + \sqrt{1 + (\frac{x}{y})^2}, (y > 0)$ ans: $\sqrt{x^2 + y^2} = x + c$
4. $y\,dy + (y - x)\,dy = 0$ ans: $\frac{x}{y} = -\ln|y| + c$

第一类型曲面积分

几何意义: 非均匀密度曲面的质量 $\iint\limits_{D} \rho(x,y,z)\, dS$

$$dS = \frac{1}{\cos\gamma} dxdy = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$dS = J(u,v)\, dudv$参数方程情形



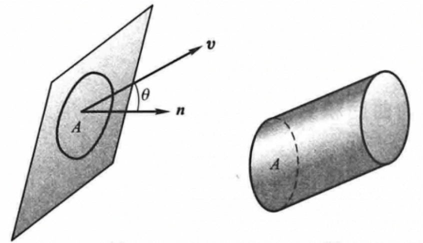
第一类型曲面积分

例 2.1 (计算曲面积分)

1. $\iint_\Sigma \frac{dS}{z}, \Sigma : x^2+y^2+z^2=a^2$ 被 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部. ans: $2\pi a \ln \frac{a}{h}$
2. $\iint_\Sigma xyzdS, \Sigma$ 为坐标平面与 $x+y+z=1$ 所围成的四面体表面. ans: $\frac{\sqrt{3}}{120}$
3. $\iint_\Sigma (x+y+z)dS$, 其中 $\Sigma : x^2+y^2+z^2=R^2, z \geq 0$. ans: πR^3
4. 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取点 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 为顶点的球面三角形. 已知球面密度为 $\rho = x^2+z^2$, 求三角形块的质量. ans: $\frac{\pi}{6}$
5. 设 S 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分, 点 $P(x,y,z) \in S, \pi$ 是 P 处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 为原点 O 到平面 π 的距离, 求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)} dS$. ans: $\frac{3}{2}\pi$

第二类型曲面积分

几何意义: 有向曲面流体通过量;
常分: 上侧 vs 下侧, 外侧 vs 内侧
有向小块曲面 ΔS 的有向投影
流向曲面一侧的流量



(a) (b)

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{e_n}\, ds = \iint_S P dydz + Q dzdx + \underline{R dxdy}$$

$$(dS)_{xy} = dxdy = \pm d\sigma_{xy}, ds = \frac{1}{|\cos\gamma|} d\sigma_{xy}$$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\int_{S^-} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

第二类型曲面积分

例 2.2 (基于定义——化成二重积分)

1. $\iint_\Sigma x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, 其中 Σ 为长方体 $\Omega = [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的表面外侧. ans: $(a+b+c)abc$
2. $\iint_\Sigma xyzdxdy$, Σ 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分. ans: $\frac{2}{15}$
3. 计算 $I = \iint_S (x+1)dydz + ydzdx + dxdy$, 其中 S 以 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 为顶点的平面三角形, 法线方向为由原点到 S 的方向. ans: $\frac{4}{3}$

第二类型曲面积分

基于 $(dxdy, dydz, dzdx) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)ds$ 的讨论

例 2.3 (基于讨论——互相转换)

1. 计算 $I = \iint_S (z^2+x)dydz + \sqrt{z}dxdy$, 其中 S 为抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分, 方向向下. ans: $(4-\frac{8}{3}\sqrt{2})\pi$
2. 计算 $I = \iint_S ydydz - xdzdx + z^2dxdy$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的外侧. ans: $-\frac{15}{2}\pi$
3. $I = \iint_S x\,dydz - y\,dzdx - 2z\,dxdy$, S 为 $z = x^2+y^2$ 前半部分介于 $z=0, z=1$ 之间的部分，取后侧. ans: $-\frac{\pi}{2}$
4. $I = \iint_S y^2z\,dxdy$, S 为 $z = x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围封闭区域外侧. ans: $\frac{\pi}{6}$

高斯公式

结论: 第二类型封闭曲面积分 $\Rightarrow$ 三重积分

$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega (P_x + Q_y + R_z)dv$

- 封闭区域，外法向量
- 函数性质好
- 第一公式、第二公式、第三公式

高斯公式— 基本公式及技巧

例 2.4

1. $I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, S 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧. ans: $\frac{12}{5}\pi R^5$
2. $\oiint_\Sigma (x-y)\,dxdy+(y-z)x\,dydz$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成封闭区域的外侧. ans: $\frac{-9\pi}{2}$
3. $I=\iint_S (2x+z)dydz+zdxdy$, 其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$, 法线方向与 z 轴正向成锐角. ans: 补片，$(\frac{-1}{2}\pi)$
4. $I=\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2})^3}$. $S: x^2+y^2+z^2=1$ 外侧. ans: 挖洞，(2π)

高斯公式

例 2.5

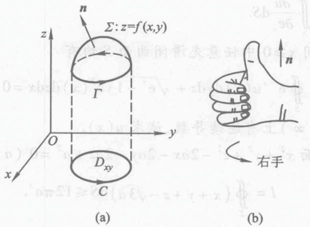
1. 设 $\iint_S (xf(x)dydz - (y+z)f(x)dzdx - x^2ze^{2x}dxdy = 0$ 对于 $z>0$ 内任意封闭光滑曲面 S 成立, 其中 $f\in C^1(0,\infty), f(0+)=0$, 求 $f(x)$. ans: $(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})e^{2x}+\frac{1}{4}$
2. $\iint_\Sigma (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$, 其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于 $z=0, z=h(h>0)$ 之间比分的下侧, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 Σ 的法向量的方向余弦. ans: $\frac{-\pi}{2}h^4$

斯托克斯公式

结论: 第二类型封闭曲线积分

$\Rightarrow$ 第二类型曲面积分

Γ 的正向与 Σ 的侧服从右手法则



(a) (b)

$$\oint_{\Gamma}(Pdx+Qdy+Rdz)$$
$$=\iint_{\Sigma}(R_y-Q_z)dydz+(P_z-R_x)dzdx+(Q_x-P_y)dxdy$$
$$=\iint_{\Sigma}\Big((R_y-Q_z)\cos\alpha+(P_z-R_x)\cos\beta+(Q_x-P_y)\cos\gamma\Big)\,ds$$