轮换对称性在积分中的应用*

陈云新 （南华大学数理部 湖南衡阳 421001）

在某些积分的计算过程中，若积分区域具备轮换对称性，则可以简化积分的计算过程。本文讨论了利用轮换对称性简化二重积分，三重积分，第一，二类曲线积分，第一，二类曲面积分的计算方法。（以下都在积分存在下予以讨论）

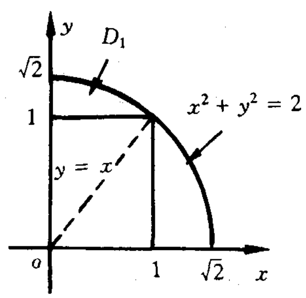
定义 1：若$\forall$ $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D^n\subset R^n(n\in N)$，有 $P_1(x_i,x_{i+1},\cdots,x_n,x_1,x_2\cdots x_{i-1})\in D^n(i=1,2,\cdots,n)$成立，则称 D^n 关于 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 具有轮换对称性。

定义 2：若函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv F(x_i,x_{i+1},\cdots x_n,x_1,x_2\cdots x_{i-1})$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则称函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 具有轮换对称性。

一、二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的轮换对称性

若积分区域 D 关于 x,y 具有轮换对称性，则 1. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D(f(x,y)+f(y,x))d\sigma$；2. D 关于直线 $y=x$ 对称，记 D 位于直线 $y=x$ 上半部分区域为 D_1，(1)当 $f(x,y)=f(y,x)$时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma$；(2) 当 $f(x,y)=-f(y,x)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$

例 1：求(1) $\iint\limits_D(x+y)d\sigma$；(2) $\iint\limits_D(x-y)d\sigma$，其中：$D$ 由 $x\geqslant1,y\geqslant1,x^2+y^2=2$ 在第一象限内所围成的图形。



解：积分区域 D 关于 x,y 具有轮换对称性，即积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，记 D 位于直线 $y=x$ 的上半部分为 D_1。

(1)因为被积函数 $f(x,y)=x+y$，满足：$f(x,y)=f(y,x)$，所以：$\iint\limits_D(x+y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}(x+y)d\sigma=2\int_1^{\sqrt{2}}dy\int_1^{\sqrt{2-y^2}}(x+y)dx=\frac{4}{3}\sqrt{2}-1$

(2)因为被积函数 $f(x,y)=x-y$，满足：$f(x,y)=-f(y,x)$，所以 $\iint\limits_D(x-y)d\sigma=0$

二、三重积分 $\iiint\limits_\Omega F(x,y,z)dv$ 的轮换对称性

若积分区域 Ω 关于 x,y,z 具有轮换对称性，则：$\iiint\limits_\Omega F(x,y,z)dv=\iiint\limits_\Omega F(y,z,x)dv=$

* 收稿日期：2000-06-28

$$\iiint_{\Omega} F(z,x,y)dv = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega} (F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y))dv$$

例 2:计算 $\iiint_{\Omega}(x^2 + z^2)dv$,其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

解:因为积分区域 Ω 关于 x,y,z 具有轮换对称性,所以

$$\iiint_{\Omega}(x^2 + z^2)dv = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}((x^2 + z^2) + (y^2 + x^2) + (z^2 + y^2))dv =$$

$$\frac{2}{3}\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr = \frac{8}{15}\pi$$

三、第一类曲线积分的轮换对称性

1. 在第一类平面曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 的计算过程中,若积分曲线 L 关于 x,y 具有轮换对称性,则:(1) $\int_L f(x,y)ds = \int_L f(y,x)ds = \frac{1}{2}\int_L (f(x,y) + f(y,x))ds$;

(2):L 关于直线 $y=x$ 对称,记:L 位于直线 $y=x$ 上半部分区域为 L_1,则(a)当 $f(x,y)=f(y,x)$时,$\int_L f(x,y)ds = 2\int_{L_1} f(x,y)ds$,(b)当 $f(x,y)=-f(y,x)$时,$\int_L f(x,y)ds = 0$

2. 在第一类空间曲线积分 $\int_{\Gamma} F(x,y,z)ds$ 的计算过程中,若积分曲线 Γ 关于 x,y,z 具有轮换对称性,则:

$$\int_{\Gamma} F(x,y,z)ds = \int_{\Gamma} F(y,z,x)ds = \int_{\Gamma} F(z,x,y)ds =$$

$$\frac{1}{3}\int_{\Gamma}(F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y))ds$$

例 3:计算 $\oint_{\Gamma} x^2 ds$ 其中 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解:∵Γ 关于 x,y,z 具有轮换对称性

$$\therefore \oint_{\Gamma} x^2 ds = \frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2 + y^2 + z^2)ds = \frac{1}{3}\oint_{\Gamma} R^2 ds = \frac{2}{3}\pi R^3$$

四、第一类曲面积分 $\iint_{\Sigma} F(x,y,z)ds$ 的轮换对称性

若积分曲面 Σ 关于 x,y,z 具有轮换对称性,则:$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)ds = \iint_{\Sigma} F(y,z,x)ds = \iint_{\Sigma} F(z,x,y)ds = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y))ds$

例 4:计算 $\oiint_{\Sigma}(x^4 + 2y^2z^2)ds$,其中 Σ 是闭曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$。

解:因为积分曲面 Σ 关于 x,y,z 具有轮换对称性,所以 $\oiint_{\Sigma}(x^4 + 2y^2z^2)ds = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}((x^4 + 2y^2z^2) + (y^4 + 2z^2x^2) + (z^4 + 2x^2y^2))ds = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2 + y^2 + z^2)^2 ds = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} 4ds = \frac{32}{3}\pi$

五、第二类曲线积分的轮换对称性

若积分曲线 Γ 关于 x,y,z 具有轮换对称性，则：$\int_{\Gamma}P(x,y,z)dx=\int_{\Gamma}P(y,z,x)dy=\int_{\Gamma}P(z,x,y)dz=\frac{1}{3}\int_{\Gamma}P(x,y,z)dx+P(y,z,x)dy+P(z,x,y)dz$

六、第二类曲面积分的轮换对称性

若积分曲面 Σ 关于 x,y,z 具有轮换对称性，则

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz=$$

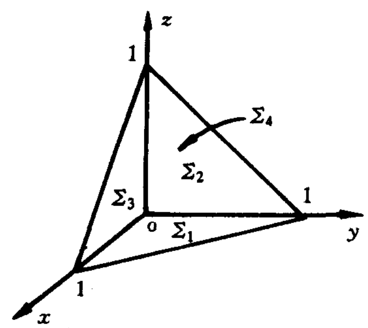
$$\iint_{\Sigma}P(y,z,x)dzdx=$$

$$\iint_{\Sigma}P(z,x,y)dxdy=$$

$$\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+P(y,z,x)dzdx+P(z,x,y)dxdy$$

例 5：计算 $\oiint_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx$

其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。



解：因为积分曲面 Σ 关于 x,y,z 具有轮换对称性，所以

$$\oiint_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=3\oiint_{\Sigma}xzdxdy=$$

$$3\left[\oiint_{\Sigma_1}xzdxdy+\oiint_{\Sigma_2}xzdxdy+\oiint_{\Sigma_3}xzdxdy+\oiint_{\Sigma_4}xzdxdy\right]=$$

$$0+0+0+3\oiint_{D_{xy}}x(1-x-y)dxdy=$$

$$3\int_0^1xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{8}$$

（上接第 6 页）

却是十分有力的指挥棒. 因此十分重要的是改革目前硕士研究生入学考试的高等数学科目中有关概率统计的内容，把考察考生应用数理统计方法解决实际问题的能力作为主要目的.

以上仅是个人的一得之见. 因深感这一问题相当重要，在此提出来，期望引起概率统计界同仁的重视和进一步的探讨.

轮换对称性在积分中的应用

作者： 陈云新
作者单位： 南华大学数理部,湖南,衡阳,421001
刊名： 高等数学研究
英文刊名： STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS
年，卷(期)： 2001，4(1)
引用次数： 4次

引证文献(4条)

1. 刘洁.戴长城 对称性在积分计算中的应用[期刊论文]-邵阳学院学报(自然科学版) 2008(4)

2. 刘建康 积分中的对称性[期刊论文]-数理医药学杂志 2008(01)

3. 陈毅文 可利用对称原理求积分的几种类型[期刊论文]-福建广播电视大学学报 2005(06)

4. 钱双平 对称性在高等数学解题中的应用--数学美学方法的应用[期刊论文]-云南电大学报 2004(02)