homework02

P101. **习题** 8.6　(A) 2； 5； 15；
P116. **习题** 8.7　(A) 1-2； 4； 8-2； 9； 16-3

2. 求下列函数在指定点和指定方向的方向导数

(1) $u=xyz$，在点(1,1,1)沿方向 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$；

(2) $u=x^2-xy+z^2$，从点(1,0,1)到点(3,−1,3)的方向.

5. 求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上的点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线方向的导数.

15. 求函数 $z=\ln\frac{y}{x}$ 分别在点 $A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{10}\right)$ 和点 $B\left(1,\frac{1}{6}\right)$ 处的两个梯度之间夹角的余弦.

---

1. 求下列曲线在指定点的切线方程与法平面方程.

(2) $y=x,z=x^2$，点(1,1,1)；

4. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使其平行于平面 $x+4y+6z=0$.

9. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ 所确定的隐函数的极值.

8. 求下列函数的极值.

(2) $z=x^2+(y-1)^2$；

16. 求下列函数的条件极值：

(3) $u=x-2y+2z$，附加条件：$x^2+y^2+z^2=1$.

2. 求下列函数在指定点和指定方向的方向导数

(1) $u=xyz$,在点$(1,1,1)$沿方向$\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$;

(2) $u=x^2-xy+z^2$,从点$(1,0,1)$到点$(3,-1,3)$的方向.

A.2. 解. 依题意 (1)

$$Du=(yz,xz,xy)\Rightarrow \text{在 }(1,1,1)\quad Du=(1,1,1)\Rightarrow u_l=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

(2). 依题意 $l=(2,-1,2)$

$$Du=(2x-y,-x,2z)\Rightarrow \text{在 }(1,1,1)\quad Du=(1,-1,2)$$

$$\Rightarrow u_l=\frac{Du\cdot l}{\|l\|}=\frac{(2+1+4)}{\sqrt{9}}=\frac{7}{3}$$

P101 习题 8.6

5. 求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上的点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线方向的导数.

A.5. **解**. **依题意** $n_{法}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)=n_{外法}$, $|n_{法}|=\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^2}}$

$$Df=(2x,2y,2z)\Rightarrow f_{n_{外法}}=\left(\frac{2x_0^2}{a^2}+\frac{2y_0^2}{b^2}+\frac{2z_0^2}{c^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$=2\Big/\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^2}}$$

P101 习题 8.6

15. 求函数 $z=\ln\frac{y}{x}$ 分别在点 $A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{10}\right)$ 和点 $B\left(1,\frac{1}{6}\right)$ 处的两个梯度之间夹角的余弦.

A.15. 解.

$$Dz=\left(\frac{-1}{x},\frac{1}{y}\right)\Rightarrow Dz(A)=(-3,10)\quad Dz(B)=(-1,6)$$

$$\cos\theta=\frac{63}{\sqrt{109}\sqrt{37}}$$

P116 习题 8.7

1. 求下列曲线在指定点的切线方程与法平面方程.　　(2) $y=x, z=x^2$，点$(1,1,1)$；

A.1-2. 解. 依题意 $v_{切}=(1,1,2x) \Rightarrow$ 在 $(1,1,1)$ 处 $v_{切}=(1,1,2)$

$$\Rightarrow \text{切线方程} \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2} \quad \text{法平面方程} \pi_{法}: x+y+2z=4$$

4. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使其平行于平面 $x+4y+6z=0$.

A.4. 解. 依题意假设切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$，则

$$n_{切}=(2x,4y,6z) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{2y}{4}=\frac{3z}{6}=t \\ x^2+2y^2+3z^2=21 \end{cases} \Rightarrow t=\pm 1$$

$$\Rightarrow (x_0,y_0,z_0)=(1,2,2) \text{ 或 } (-1,-2,-2)$$

$$\Rightarrow \text{切平面为} \quad x+4y+6z=21 \text{ 或 } x+4y+6z=-21$$

P116 习题 8.7

8. 求下列函数的极值. (2) $z=x^2+(y-1)^2$;

A.8-2. **解. 依题意**

$$\begin{cases} z_x = 2x = 0 \\ z_y = 2(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1$$

在 $(0,1)$ **点**

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 2 \Rightarrow (z_{xy})^2 < z_{xx} z_{yy}$$

$$\Rightarrow \text{函数在 } (0,1) \text{ 点取极小值为 } 0$$

9. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ 所确定的隐函数的极值.

A.9. 解. 依题意, 分别对 x, y 求偏导有

$$\begin{cases} 2x+2zz_x-2-6z_x=0 \\ 2y+2zz_y+4-6z_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_x=\frac{2x-2}{6-2z}=\frac{x-1}{3-z}=0 \\ z_y=\frac{2y+4}{6-2z}=\frac{y+2}{3-z}=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,-2)$$

带入方程有

$$z^2-6z-16=0 \Rightarrow z=-2,8$$

同时, 进一步求导有,

$$z_{xx}=\frac{1}{3-z}-\frac{x-1}{(3-z)^2}(-z_x) \quad z_{xy}=\frac{1-x}{(3-z)^2}(-z_y) \quad z_{yy}=\frac{1}{3-z}-\frac{y+2}{(3-z)^2}(-z_y)$$

在 $(1,-2,-2)$, $z_{xx}=\frac{1}{5}, z_{xy}=0, z_{yy}=\frac{1}{5}$, 故 z 在 $(1,-2,-2)$ 取极小值 -2
在 $(1,-2,8)$, $z_{xx}=\frac{-1}{5}, z_{xy}=0, z_{yy}=\frac{-1}{5}$, 故 z 在 $(1,-2,8)$ 取极大值 8

P116 习题 8.7

16. 求下列函数的条件极值：

(3) $u=x-2y+2z$，附加条件：$x^2+y^2+z^2=1$.

A.16. 解. 依题意，取 $L=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，则

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 \\ L_y=-2+2\lambda y=0 \\ L_z=2+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2\lambda}, y=\frac{1}{\lambda}, z=\frac{-1}{\lambda} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow (x,y,z,\lambda)=\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{3}{2}\right) \quad \text{或} \quad \left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{-3}{2}\right)$$

分别有 $u\Big|_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}}=-3, \quad u\Big|_{\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}}=3$

由题目实际意义知，u 在 $\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$ 取极小值 -3，在 $\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 取极大值 3.