一.解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)n}{n^2+1}=1$ 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为发散级数 ∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ 发散

原级数非绝对收敛

又∵ $f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$ $f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2-6x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}\le 0$ 在 $x\ge1$ 时恒成立

∴ $f(x)$ 单调递减 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+1}=0$

∴ 原级数条件收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{4}{e}>1$

∴ 原级数发散

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$

∴ 原级数收敛

(4) $1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1-\cos\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi^2}{4n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2=2$

又∵ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{4n}$ 发散

∴ 原级数发散.

二.解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n+1)+2}{n^2-n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{n^2-n+2}=1=\rho$ ∴ $R=\frac{1}{\rho}=1$

$x=1$ 时 原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2-n+2$ 发散；$x=-1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+2)$ 发散

∴ 收敛域为 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2-n+2)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)nx^n+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=S_1(x)+S_2(x)=S(x)$

对于 $S_2(x)=\frac{2x}{1-x}$ $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n=x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2S_3(x)$

$S_3(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$ $\int_0^x S_3(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_0^x n(n-1)x^{n-2}dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}=S_4(x)$

$S_4(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}$ $\int_0^x S_4(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}$

$S_4(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$ ∴ $S_3(x)=S_4'(x)=\left[\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2}{(1-x)^3}$

∴ $S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

∴ $S(x)=\frac{2x}{1-x}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

三. 解: $f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)\right]=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right]x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}}{1-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{2^{n+2}-(-1)^{n+1}}{2^{n+1}-(-1)^n}=1$$

$x=\pm1$时, 原级数发散, 故收敛域为$(-1,1)$

四. 解(1) $e^y dy=(1+x+x^2)dx$

$\therefore \int e^y dy=\int(1+x+x^2)dx$

$\therefore e^y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C_1$

即 $y=\ln\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)+C$

(2) $\frac{1}{y}dy=\frac{2x}{1+x^2}dx$

$\therefore \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{1+x^2}dx^2$

即 $\ln y=\ln(1+x^2)$

$\therefore y=C(1+x^2)$

(3) 特征方程(齐次)为: $\lambda^2+\lambda=0$

$\therefore \lambda_1=-1,\ \lambda_2=0$

通解: $y=C_1e^{-x}+C_2$

原方程特解可设为:

$y^*=ax+b$

代入: $0+ax+b=2+x$

解得: $a=1,\ b=2$

$\therefore y^*=x+2$

$\therefore$ 原方程通解为 $y=C_1e^{-x}+x+C_2$

(4) 特征方程(齐次)为:

$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1$

则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$

设原方程特解可设为

$y^*=\cancel{A\sin x}\ A\cos x$

代入得 $\cancel{A\cos x}$

$\cancel{A\sin x+2A\cos x+A\sin x}$

$-A\cos x-2A\sin x+A\cos x=-2\sin x$

$\therefore A=1$

$\therefore y^*=\cos x$

$\therefore$ 原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\cos x$

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$

令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=ux$

$\therefore \cancel{\frac{du}{dx}=}\ \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=u-(u)^2$

$\therefore x\frac{du}{dx}=-u^2$

$\therefore \int\frac{du}{-u^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\therefore \frac{1}{u}=\ln|x|+C$

即 $u=\frac{1}{\ln|x|+C}$ 进而可得 $y=\frac{x}{\ln|x|+C}$ 又$\because y(1)=1$ $\therefore y=\frac{x}{\ln|x|+1}$

五. 解(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d(x+1)^{-1}=-\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=[\ln x-\ln(x+1)]\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$

(2) $\cancel{\int_1^{+\infty}\cdots}$ 令 $\sqrt{x-1}=u \quad x=u^2+1 \quad dx=2udu$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{u(u^2+4)}du=\int_0^{+\infty}\frac{2}{u^2+4}du=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\frac{u}{2})^2+1}du=\arctan\frac{u}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$

六. 解: $f(x)=f(-x)$

$\therefore a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)dx=\frac{2}{\pi}(x^2-x)\Big|_0^{\pi}=2\pi-2$

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(2x-1)d\sin nx=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{4}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0\end{cases}$$

$\therefore f(x)=\pi-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cos n\pi \qquad x\in[-\pi,\pi]$.

七. 解: $I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x^2)\sim x^2$

$\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha-2}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$

当 $\alpha-2<1$, $\alpha<3$ 时, $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛

当 $\alpha-2\geq 1$, $\alpha\geq 3$ 时, $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 发散.

当 $\alpha\leq 1$ 时 $\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}>\frac{1}{x^\alpha}$ $(x>2)$

而 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 发散, $\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 发散.

当 $\alpha>1$ 时 $\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-\frac{\alpha-1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}=0$

而 $\alpha-\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\alpha+1}{2}>1$ 即 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}dx$ 收敛

$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛.

综上所述: 当 $1<\alpha<3$ 时 $I(\alpha)$ 收敛

当 $0<\alpha\leq 1$ 或 $\alpha\geq 3$ 时 $I(\alpha)$ 发散.

八. 解: 令 $f(x,\alpha)=\frac{\arctan(\alpha\sin x)}{\sin x}$ $\qquad f(x,\alpha)=\frac{1}{1+(\alpha\sin x)^2}$

$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\alpha\sin x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\alpha^2+1)\sin^2x+\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{(\alpha^2+1)\tan^2x+1}=\frac{\arctan(\sqrt{\alpha^2+1}\tan x)}{\sqrt{\alpha^2+1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}$

$\therefore I(\alpha)=I(0)+\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2\sqrt{t^2+1}}dt=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}) \quad (\alpha>0)$