

第七章 耦合电感和理想变压器及其电路分析

耦合电感

7.1 耦合电感元件

7.2 耦合电感的连接和去耦等效

7.3 含耦合电感电路的时域分析

7.4 含耦合电感电路的正弦稳态分析

7.5 空芯变压器电路的正弦稳态分析

理想变压器

7.6 理想变压器

7.7 含理想变压器的电路分析1

7.8 含理想变压器的电路分析2

耦合电感和理想变压器是 R 、 L 、 C 之外的另两种理想电路元件，是从实际耦合线圈和实际变压器抽象出来的。二者都属于二端口元件（或四端元件），为无源、线性元件。

本章介绍这两种理想元件的特性，以及含两种元件的电路的分析。

7.1 耦合电感元件(coupled inductor)

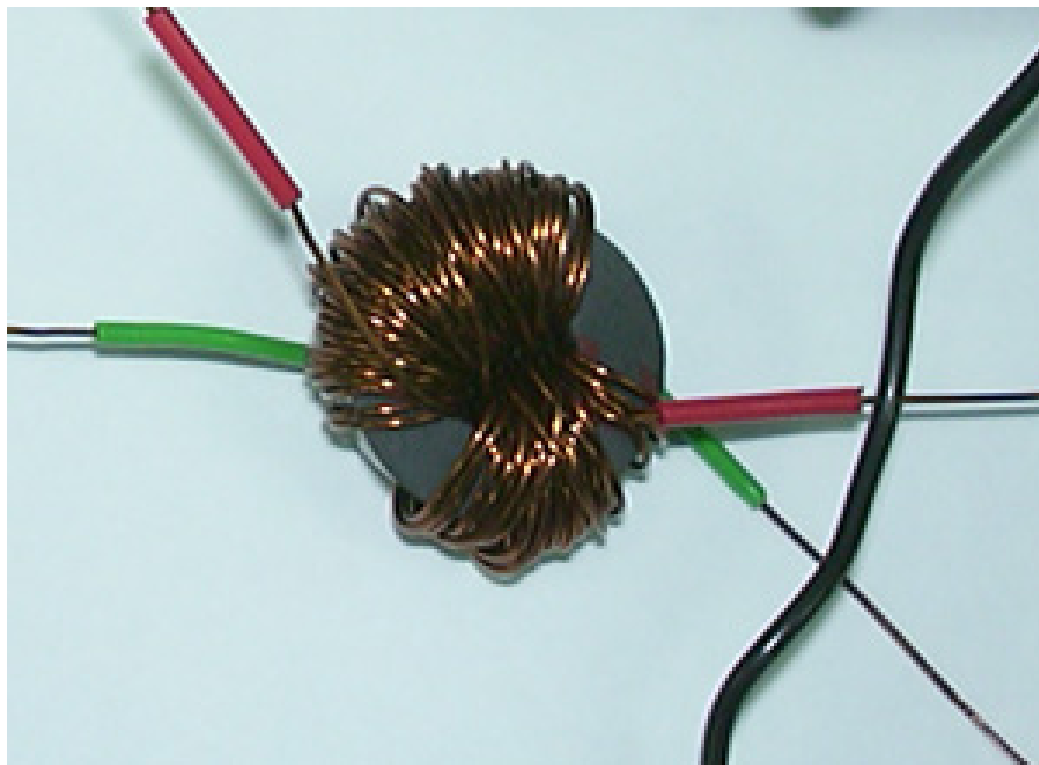
当2个或多个电感线圈位置较近时，一个线圈中的感应磁场会穿越其他线圈，结果不仅在本身内部产生感应电压（**自感电压**），也会在其他线圈中产生感应电压（称为**互感电压**）。

对于电感元件来说，不希望这种互感现象。然而，专门利用互感现象制成的元件也有重要应用，包括互感元件和变压器。

本节先介绍互感元件，也称耦合电感。

第七章 耦合电感与理想变压器

下图示例一个实际耦合线圈。在磁环上用漆包线绕制1个线圈，形成耦合电感线圈。



理想耦合电感元件是实际耦合线圈的理想化模型，即一种理想电路元件。与线性电感一样，耦合电感是一种动态元件。

耦合电感线圈是根据电感线圈间的磁耦合——互感现象制成的。根据物理学的知识，两个靠近的电感线圈，当一个线圈流过变动电流时，除了在此线圈两端产生感应电压(称为自感电压)之外，在另一个电感线圈两端也将产生感应电压，这种现象称为**互感现象**。所产生的感应电压称为**互感电压**。这时说两线圈发生了**磁耦合**(magnetic coupling)。

一、电感线圈间的磁耦合：

先来讨论与电感线圈之间的磁耦合，即互感现象，以及相关的概念。

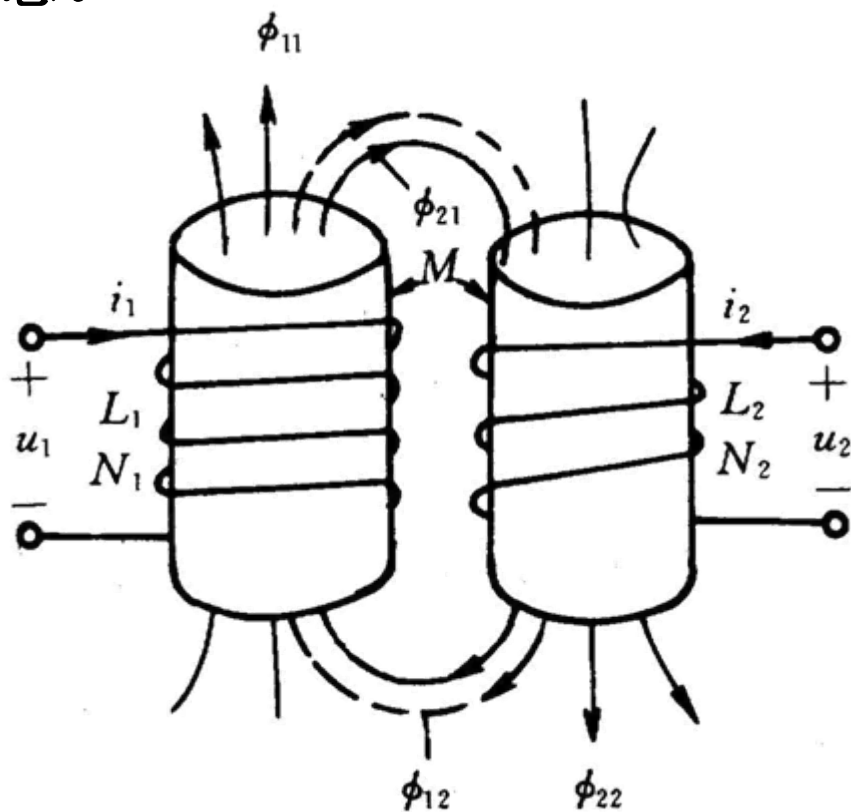


图7.1-1 耦合线圈

电流的参考方向与
磁通的参考方向符
合右手螺旋法则

1. 互感系数:

①当线圈1通以电流 i_1 、线圈2开路时：在线圈1中产生自感磁通 Φ_{11} ，其中有一部分也穿过线圈2，记为 Φ_{21} ，称为互感磁通。显然有，

$$\varphi_{21} \leq \varphi_{11} \quad (7.1-1)$$

电流 i_1 (称为施感电流)在线圈1、线圈2中产生的自感磁通链和互感磁通链分别为

$$\psi_{11} = N_1 \varphi_{11} \quad \psi_{21} = N_2 \varphi_{21} \quad (7.1-2)$$

对于线性耦合电感，自感和互感磁通链都正比于电流 i_1 ，

$$\psi_{11} = L_1 i_1 \quad \psi_{21} = M_{21} i_1 \quad (7.1-3)$$

式中 L_1 为线圈1的自感系数， M_{21} 是互感系数，单位也是亨利。

②同理，当线圈2通以电流 i_2 、线圈1开路时：在线圈2中产生自感磁通 Φ_{22} ，其中有一部分也穿过线圈1，记为 Φ_{12} ，称为互感磁通。同样有，

$$\Phi_{12} \leq \Phi_{22} \quad (7.1-4)$$

电流 i_2 (亦称施感电流)在线圈2、线圈1中产生的自感磁通链和互感磁通链分别为

$$\psi_{22} = N_2 \Phi_{22} \quad \psi_{12} = N_1 \Phi_{12} \quad (7.1-5)$$

对于线性耦合电感，自感和互感磁通链都正比于电流 i_2 ，

$$\psi_{22} = L_2 i_2 \quad \psi_{12} = M_{12} i_2 \quad (7.1-6)$$

式中 L_2 为线圈2的自感系数， M_{12} 是互感系数，单位是亨利。

第七章 耦合电感与理想变压器

式(7.1-3)和(7.1-6)中的互感系数可写为

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

可以证明：

$$M_{12} = M_{21} \quad (7.1-7)$$

对只有两个线圈的耦合电感，互感系数统一用M表示，

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (7.1-8)$$

2. 耦合系数:

耦合系数用于描述两个线圈相互耦合的紧密程度。定义为

$$k \equiv \sqrt{\frac{|\psi_{12}|}{\psi_{11}} \frac{|\psi_{21}|}{\psi_{22}}} \quad (7.1-9)$$

定义式

将式(7.1-3)、(7.1-6)代入上式, 有

$$k = \sqrt{\frac{M_{12}i_2}{L_1i_1} \frac{M_{21}i_1}{L_2i_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \quad (7.1-10)$$

计算式

第七章 耦合电感与理想变压器

从 k 定义式, 可得

$$k \equiv \sqrt{\frac{|\psi_{12}|}{\psi_{11}} \frac{|\psi_{21}|}{\psi_{22}}} = \sqrt{\frac{|\phi_{12}|}{\phi_{11}} \frac{|\phi_{21}|}{\phi_{22}}}$$

由于 $\phi_{12} \leq \phi_{22}$, $\phi_{21} \leq \phi_{11}$, 所以

$$0 \leq k \leq 1 \quad (7.1-11)$$

k 的大小取决于两线圈的位置和取向。

$k=1$ 称为全耦合;

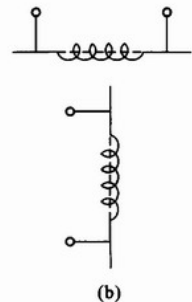
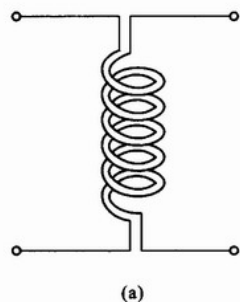
k 近于1时称为紧耦合;

k 值较小时称为松耦合;

$k=0$ 时为无耦合, 即两个独立的电感元件。

从式(7.1-10)和(7.1-11), 有

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (7.1-12)$$



第七章 耦合电感与理想变压器

当采用关联的电压、电流参考方向时，电压的参考方向(亦即绕组中电压降的参考方向)与磁通的参考方向也符合右手螺旋法则

3. 互感电压：

①若施感电流 i_1 是交变的，则除了在线圈1两端产生自感电压 u_{11} 之外，还将在在线圈2两端产生互感电压 u_{21} ，

$$u_{11} = \frac{d\psi_{11}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad u_{21} = \frac{d\psi_{21}}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (7.1-13)$$

注意， u_{21} 的参考方向与 ϕ_{21} 成右手螺旋法则。

②同理，若第2个线圈通以交变电流 i_2 ，亦在第1个线圈两端产生互感电压 u_{12} ，

$$u_{22} = \frac{d\psi_{22}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad u_{12} = \frac{d\psi_{12}}{dt} = M \frac{di_2}{dt} \quad (7.1-14)$$

u_{12} 与 ϕ_{12} 成右手螺旋法则。

二. 耦合电感的磁通链方程和伏安特性(VCR) 同名端

一般情况，两个线圈同时加有施感电流 i_1 和 i_2 。这时每个线圈中的总磁通链和总电压与施感电流之间的关系即磁通链方程和伏安特性方程。

1. 磁通链方程：当两个线圈同时加有施感电流 i_1 和 i_2 时，则耦合电感线圈中的磁通链等于自感磁通链和互感磁通链两部分之代数和。以图7.1-2所示两种情况为例。

第七章 耦合电感与理想变压器

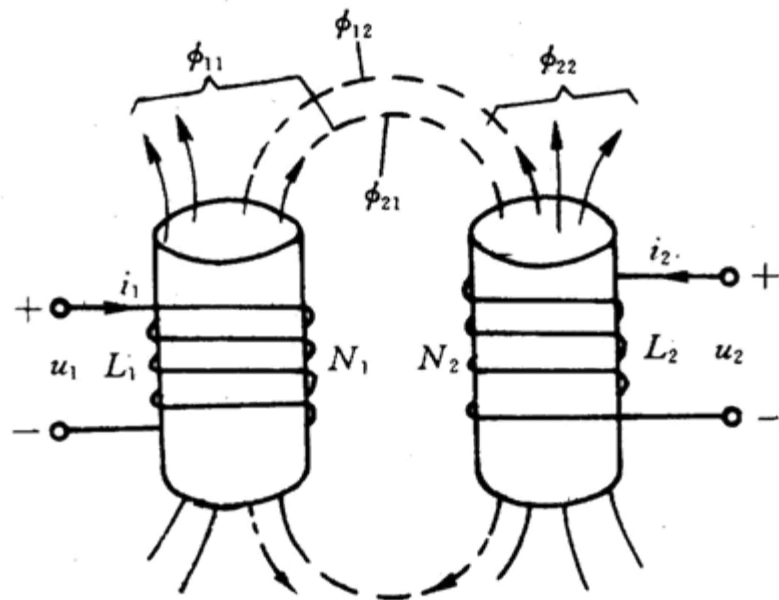
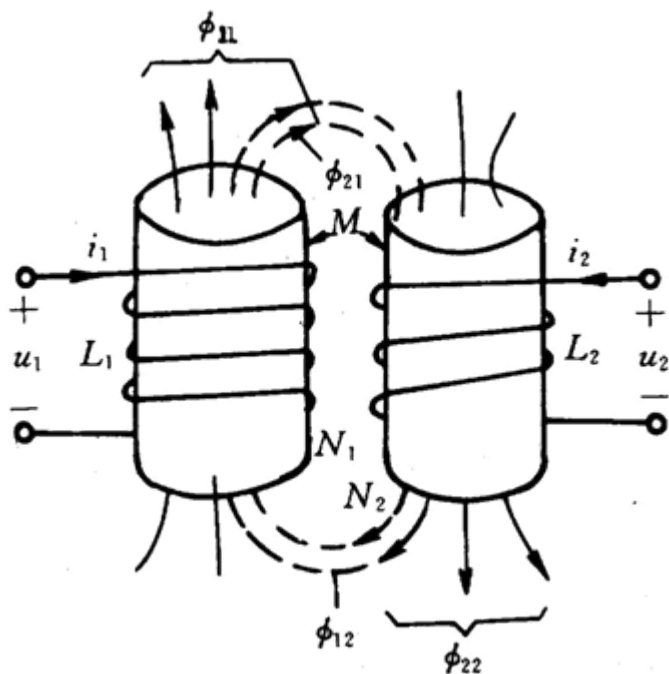


图7.1-2 磁通相助和磁通相消的耦合电感

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12} = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\psi_2 = \psi_{22} + \psi_{21} = L_2 i_2 + M i_1$$

$$\psi_1 = \psi_{11} - \psi_{12} = L_1 i_1 - M i_2$$

$$\psi_2 = \psi_{22} - \psi_{21} = L_2 i_2 - M i_1$$

第七章 耦合电感与理想变压器

图a中二施感电流 i_1 、 i_2 在对方线圈内部产生的互感磁通与自感磁通方向相同，磁通增强，称为**磁通相助**；图b中二施感电流 i_1 、 i_2 在对方线圈内部产生的互感磁通与自感磁通方向相反，磁通削弱，称为**磁通相消**。二线圈内部总磁通链分别如上二式所示。

或写为

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{21} \\ \psi_2 = \pm \psi_{21} + \psi_{22} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \psi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases} \quad (7.1-15)$$

“+”号表示互感磁通链与自感磁通链方向一致，互感起“增强”作用；
“—”号表示互感磁通链与自感磁通链方向相反，互感起“削弱”作用。
十、一号的选择取决于两线圈中通入的电流的方向及各线圈绕向。

2. 耦合电感的VCR方程:

如果两线圈都有施感电流 i_1 、 i_2 且都是随时间变化的, 则两个线圈中会有感应电压, 每个线圈的感应电压包括自感电压和互感电压两部分。

若各线圈的电压、电流均采用关联参考方向, 则根据电磁感应定律, 由磁通链方程可得

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (7.1-16)$$

这就是理想耦合电感线圈的伏安关系式。这是两个联立的线性微分方程组, 表明了 u_1 不仅与 i_1 有关, 也与 i_2 有关。同样, u_2 也如此。这两式体现了线圈间的耦合作用。由此可见, 理想耦合线圈, 即耦合电感用三个参数 L_1 、 L_2 、 M 来表征。

上两式都表明每个线圈的电压是自感电压和互感电压的叠加。当 $i_2=0$ 时，(7.1-16a)式即与(7.1-13)完全相同。而 $i_1=0$ 时，(7.1-16b)式与(7.1-14)式完全相同。

必须着重指出，互感电压项的正负，取决于这一线圈中互感磁通与自感磁通的参考方向是否一致而定。而这两者是否一致又要取决于两线圈的相对位置、绕向和电流的参考方向。但在实际情况下，线圈往往是密封的，不能看到具体的情况，并且，要在电路图中给出线圈绕向也很不方便。为此，引入同名端。

3. 同名端(corresponding terminals):

从磁通角度定义

①当电流分别从两线圈各自的某端同时流入(或流出)时，若两者产生的磁通相助，则这两端称为两互感线圈的同名端。

②当给某一线圈施加可变电流而另一线圈开路时，每个线圈上均有一感应电压(一个自感电压、一个互感电压)，这两个电压实际极性的高(或低)电位端称为同名端。

or 若施感电流为一正的且为增长的电流(则自感电压正极性在电流进端，故可定义)，施感电流的进端与互感电压的正极性端构成同名端。

同名端用标志“.”或“*”等符号表示。

从感应电压角度定义

第七章 耦合电感与理想变压器

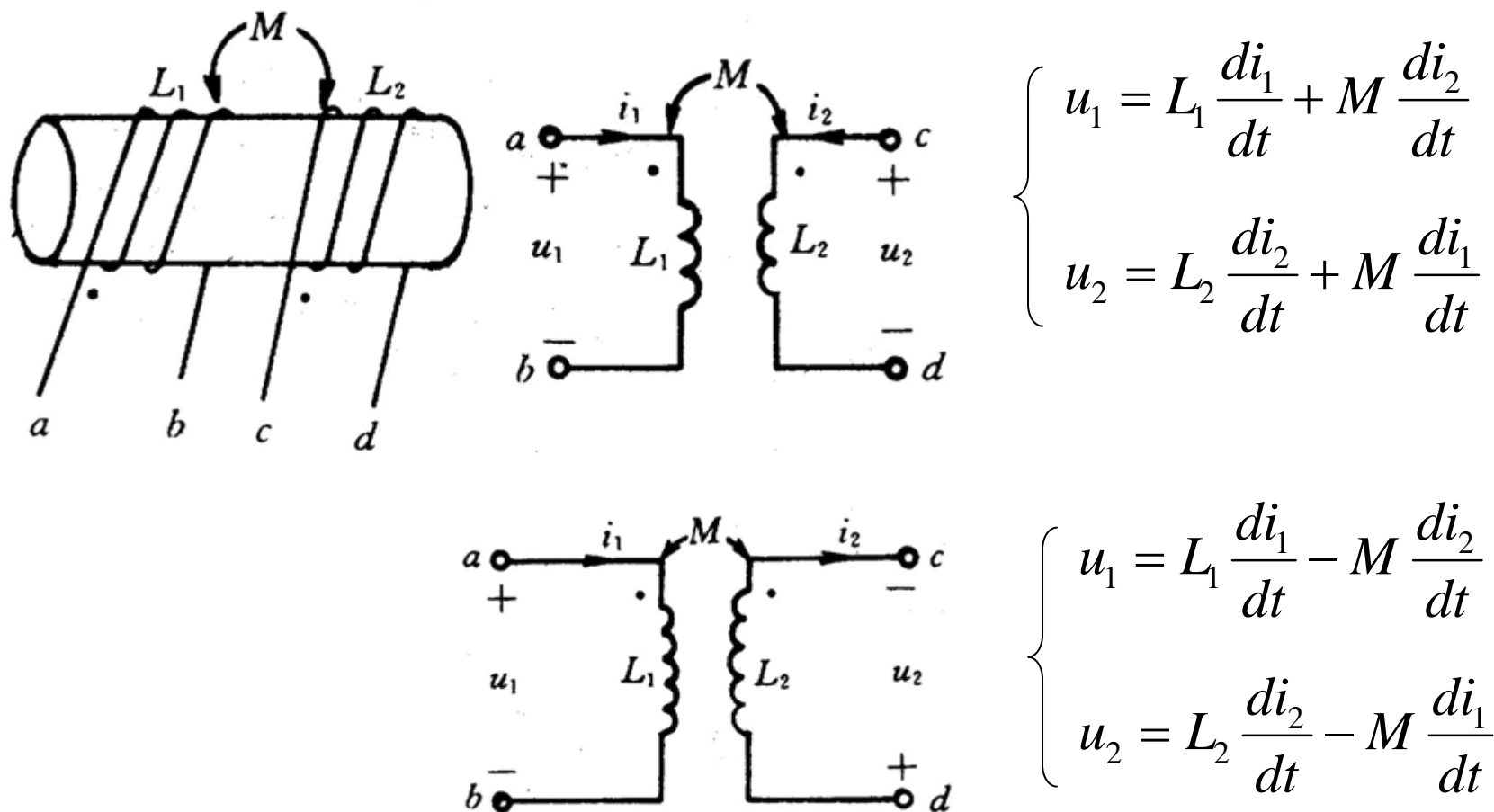


图7.1-3 互感线圈的同名端：a.磁通相助情况
b.磁通相消情况

第七章 耦合电感与理想变压器

由于同名端反映了两线圈间互感电压与电感电流之间的对应关系，因此在电路图中就不需要画出线圈的绕向和磁芯的结构。耦合电感用图7.1-4表示。

对应的VCR方程为

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (7.1-17)$$

此式是在各线圈电流电压为关联参考方向，二电流由同名端流入的情况下，写出的。

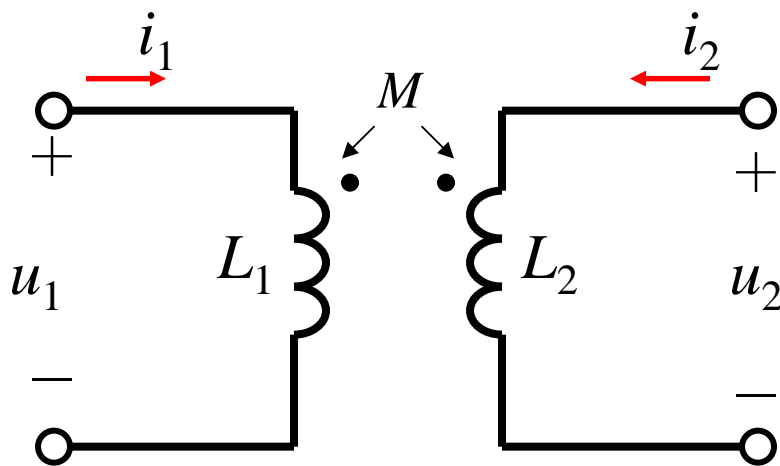


图7.1-4 耦合电感的电路符号

同名端的测定:

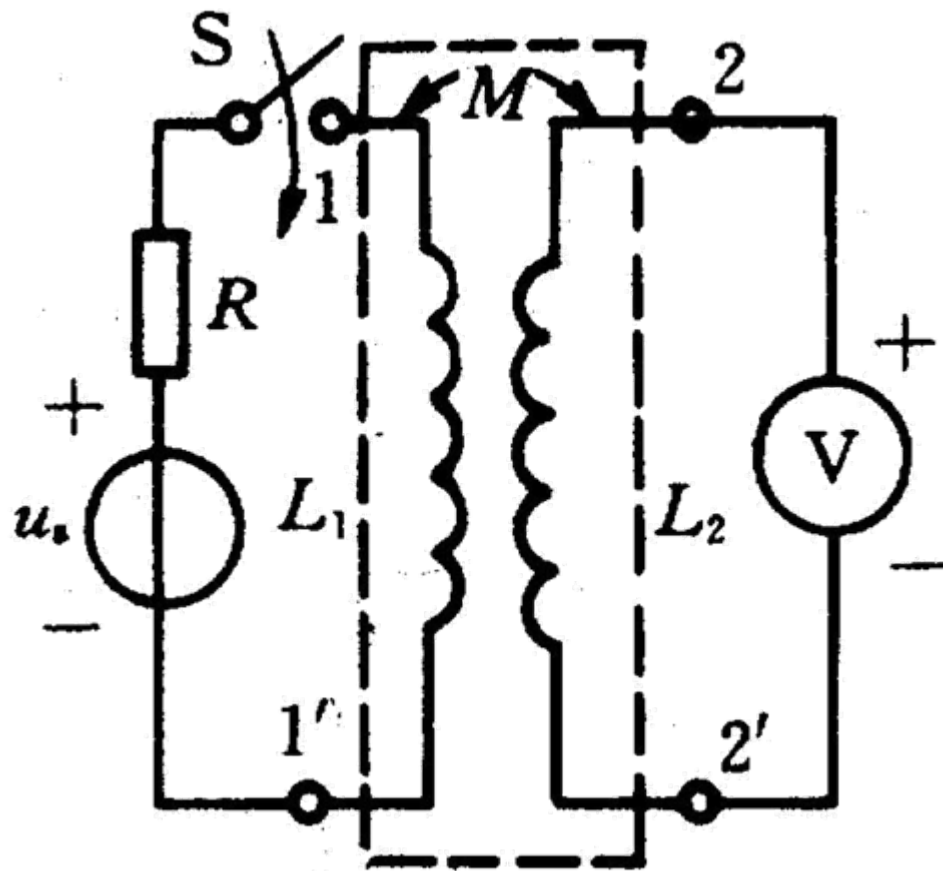
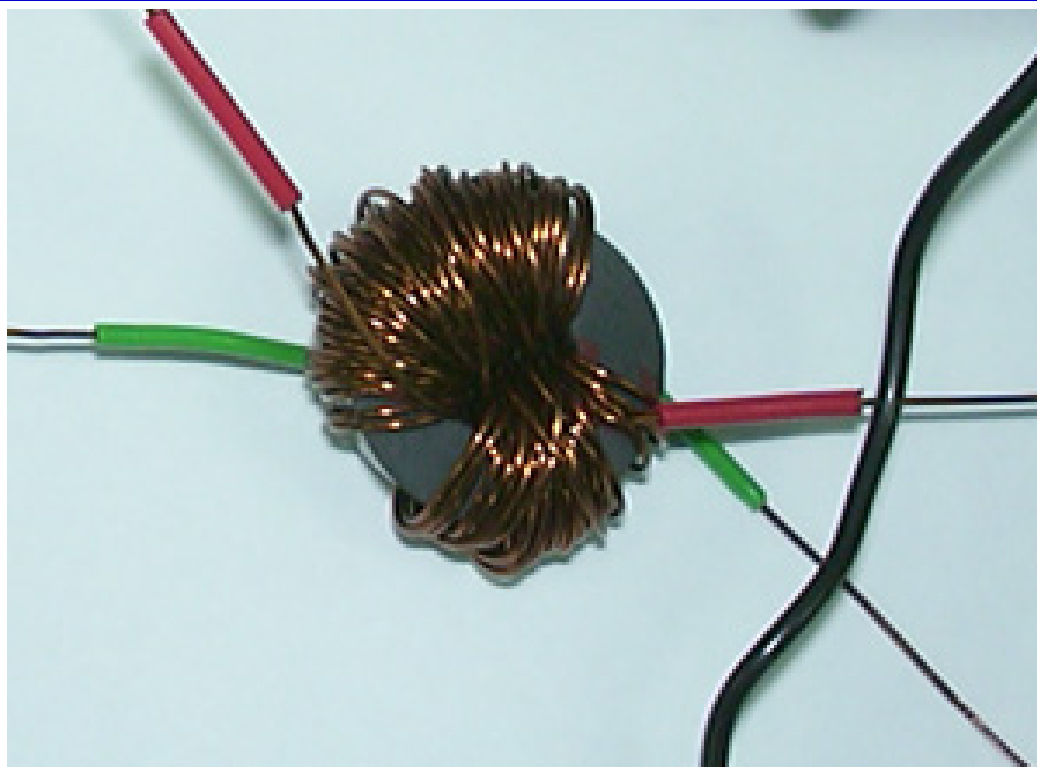
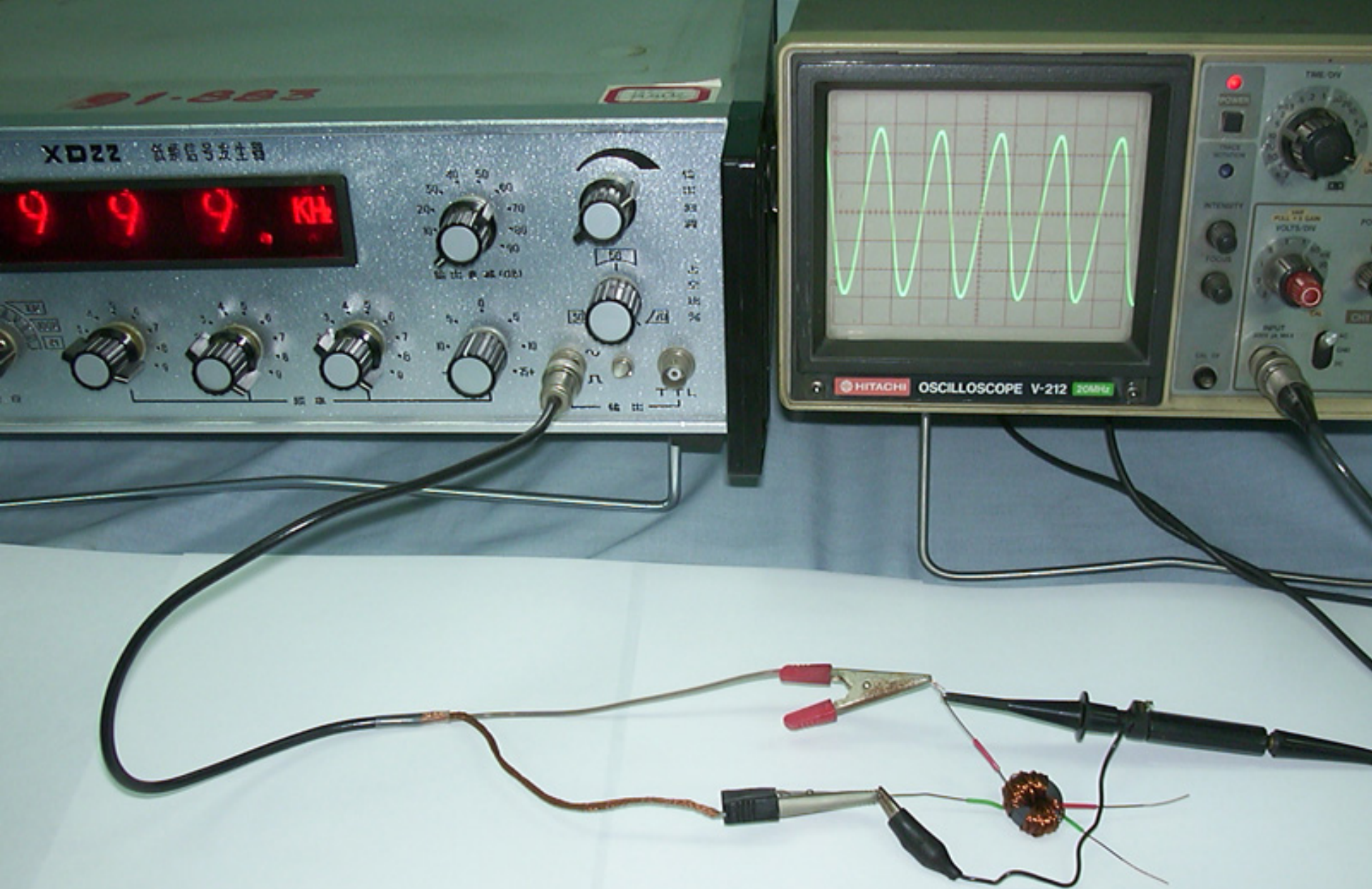


图7.1-5 互感线圈同名端的测定

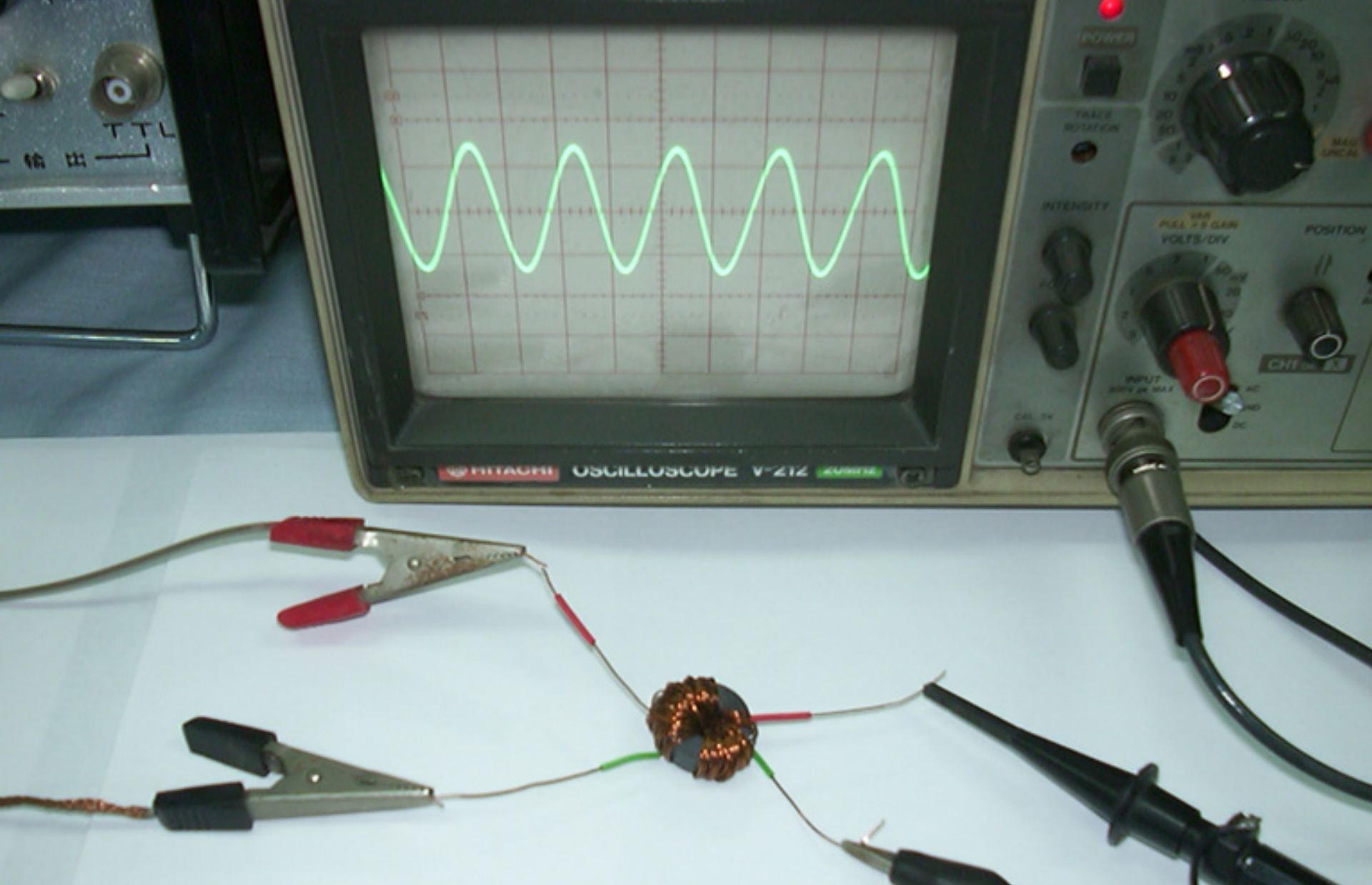
实验：耦合线圈初次级波形的观测

在环形磁芯上用漆包线绕一个耦合电感，初级60匝，次级30匝，如图所示。

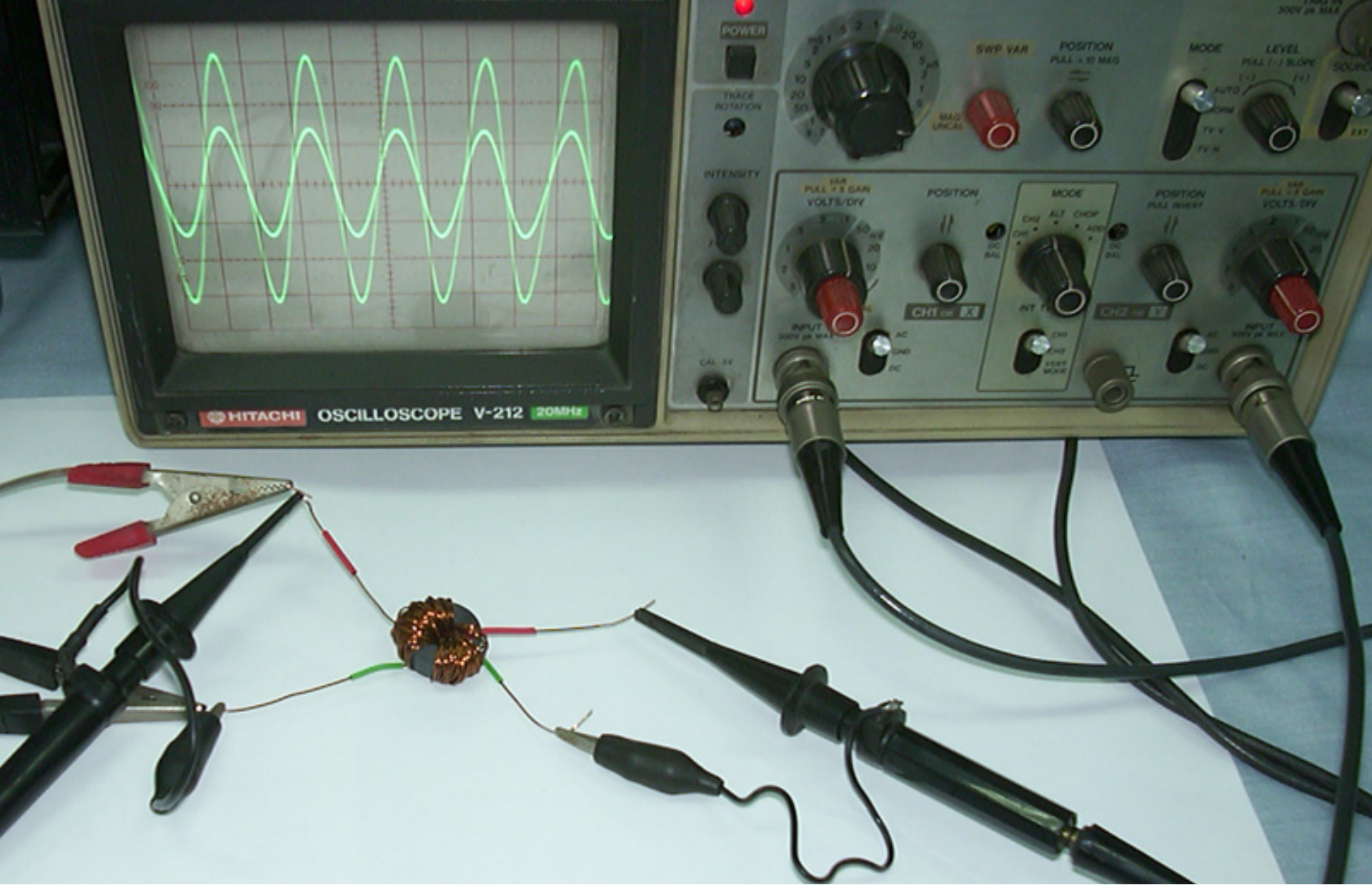




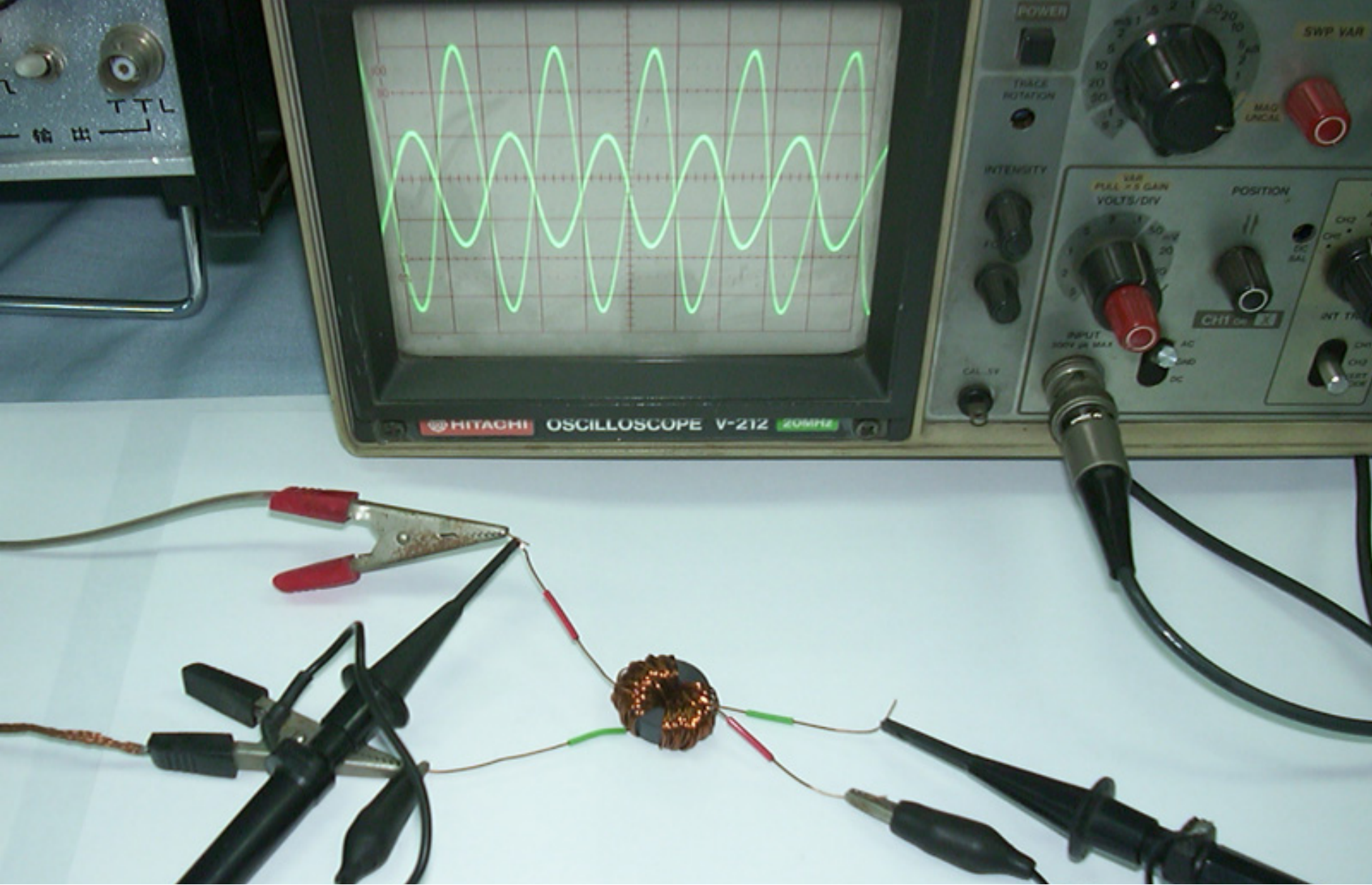
在初级加上999kHz正弦信号，用示波器观察到正弦波形。



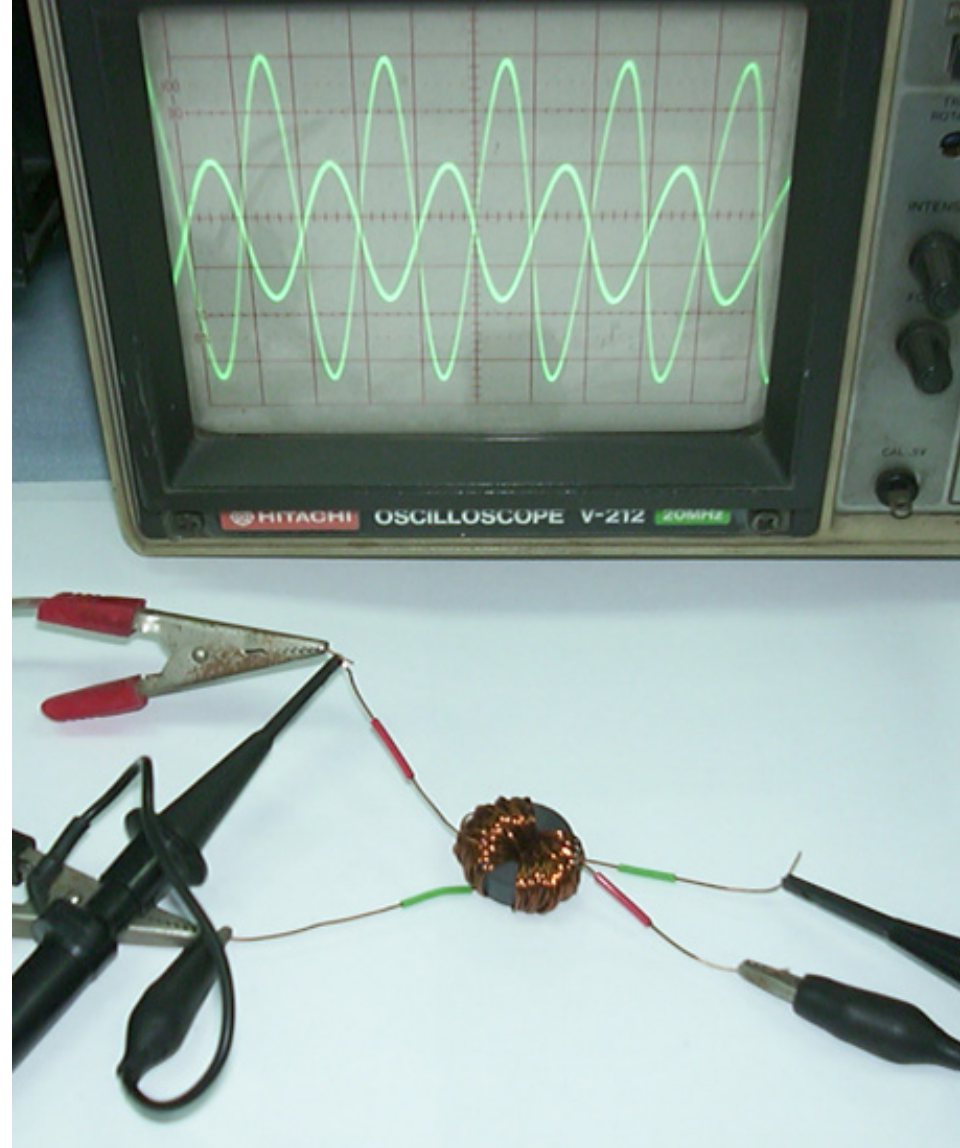
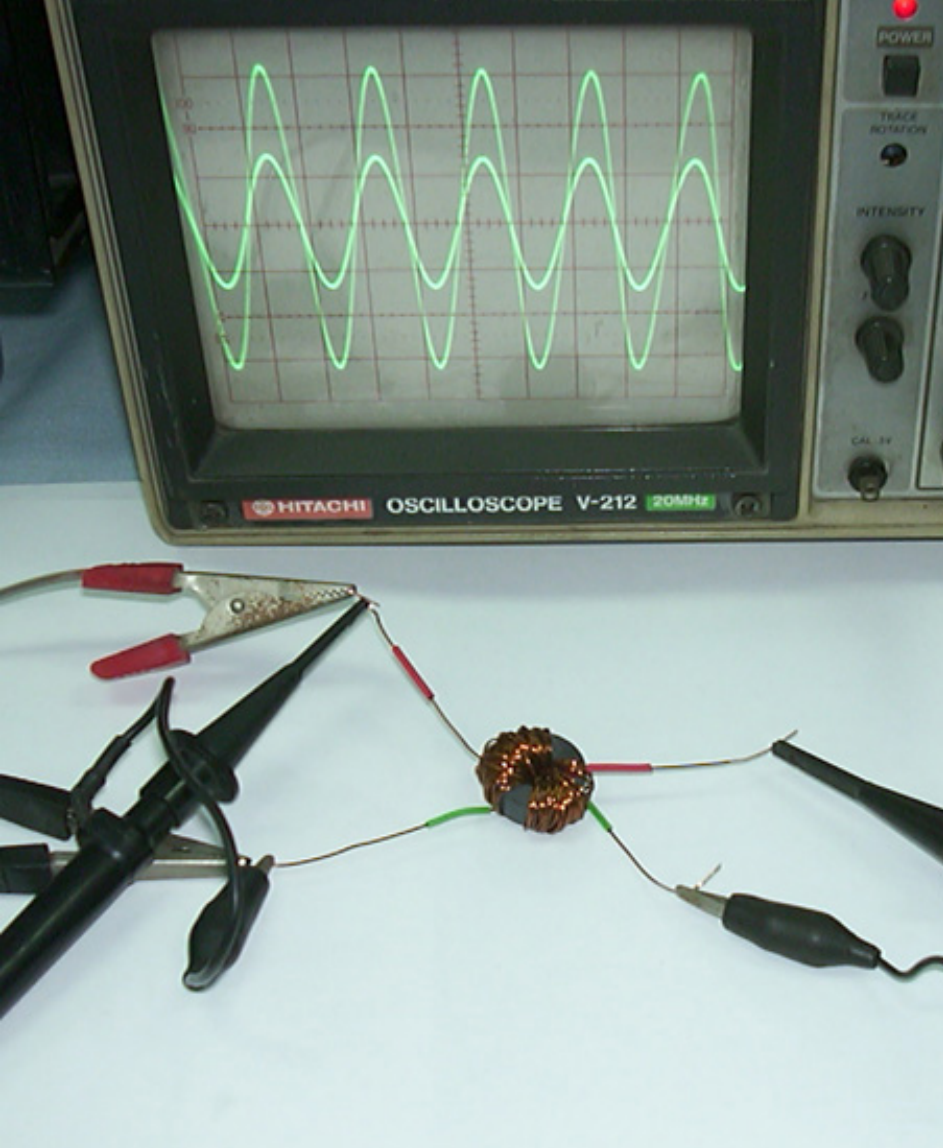
在耦合电感的次级上，可以观察到正弦波形，其幅度约为初级电压的一半。



用双踪示波器可以同时观察耦合电感初级和次级线圈上的正弦电压波形，它们的相位是相同的。



当我们改变次级线圈的绕向时，耦合电感初级和次级线圈上电压波形的相位是相反的。



为了区别这两种情况，需确定耦合电感的同名端，图示耦合电感线圈的两个红色(或绿色)端钮是一对同名端。当初次级电压参考方向的正极都在同名端时，它们的相位相同。

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.1-1 图7.1-7(a)所示电路，已知 $R_1=10\ \Omega$ ， $L_1=5\text{H}$ ， $L_2=2\text{H}$ ， $M=1\text{H}$ ， $i_1(t)$ 波形如图7.1-7(b)所示。试求电流源两端电压 $u_{ac}(t)$ 及开路电压 $u_{de}(t)$ 。

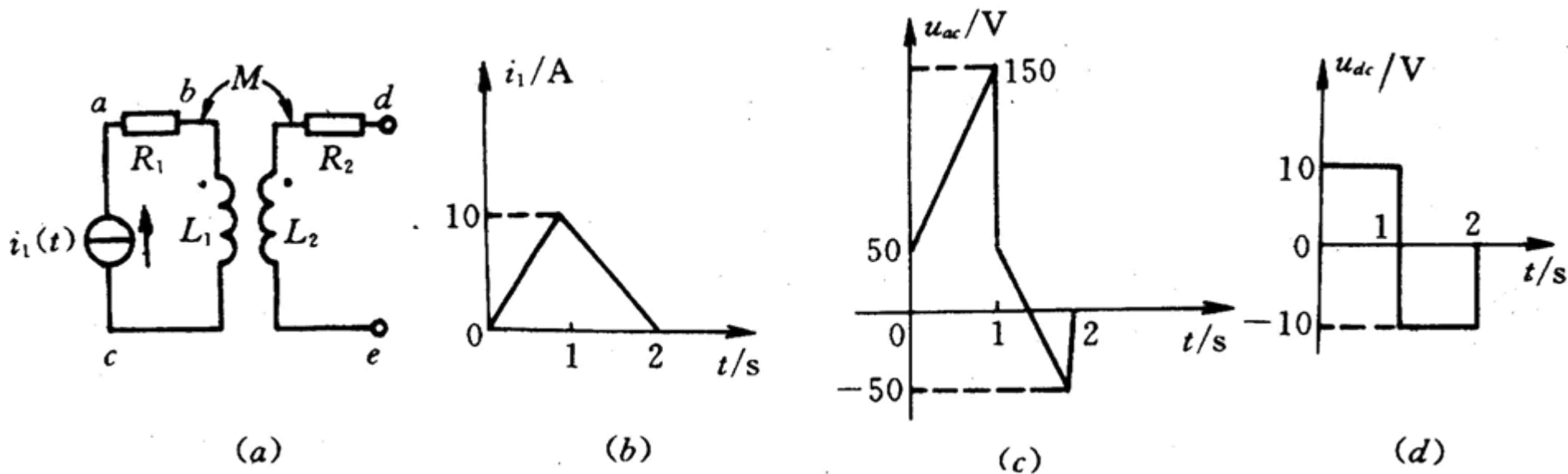


图7.1-7 例7.1-1用图

第七章 耦合电感与理想变压器

解 由于第2个线圈开路，其电流为零，所以 R_2 上电压为零， L_2 上自感电压为零， L_2 上仅有电流 i_1 在其上产生的互感电压。这一电压也就是 d, e 开路时的电压。根据 i_1 的参考方向及同名端位置，可知

$$u_{de}(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$u_{bc}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$u_{ac}(t) = u_{ab}(t) + u_{bc}(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

在 $0 \leq t \leq 1$ s时, $i_1(t) = 10t$ A (由给出的 $i_1(t)$ 波形写出) 琚

$$u_{ab}(t) = R_1 i_1(t) = 10 \cdot 10t = 100t \text{ V}$$

$$u_{bc}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} = 5 \frac{d}{dt}(10t) = 50 \text{ V}$$

$$u_{ac}(t) = u_{ab}(t) + u_{bc}(t) = 100t + 50 \text{ V}$$

$$u_{de}(t) = M \frac{di_1}{dt} = 1 \frac{d(10t)}{dt} = 10 \text{ V}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

在 $1 \leq t \leq 2\text{s}$ 时, $i_1(t) = -10t + 20\text{A}$

$$u_{ab}(t) = R_1 i_1(t) = 10 \cdot (-10t + 20) = 100t + 200\text{V}$$

$$u_{bc}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} = 5 \frac{d}{dt}(-10t + 20) = -50 \text{ V}$$

$$u_{ac}(t) = u_{ab}(t) + u_{bc}(t) = -100t + 150 \text{ V}$$

$$u_{de}(t) = M \frac{di_1}{dt} = 1 \frac{d(-10t + 20)}{dt} = -10 \text{ V}$$

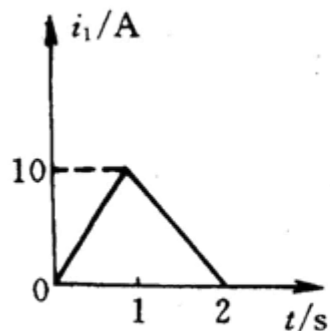
在 $t \geq 2\text{s}$ 时, $i_1(t) = 0$

$$u_{ab} = 0, u_{bc} = 0, u_{ac} = 0, u_{de} = 0$$

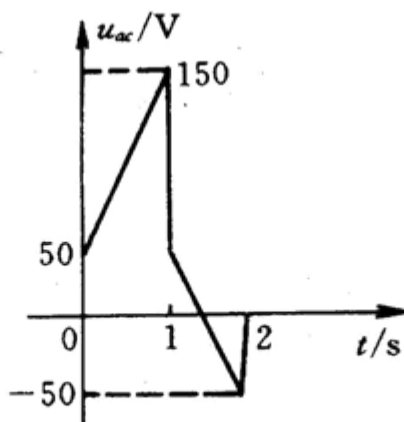
第七章 耦合电感与理想变压器

$$u_{ac}(t) = \begin{cases} 100t + 50V & 0 < t \leq 1s \\ -100t + 150V & 1 < t \leq 2s \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

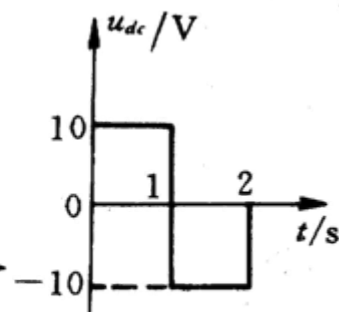
$$u_{de}(t) = \begin{cases} 10V & 0 < t \leq 1s \\ -10V & 1 < t \leq 2s \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$



(b)



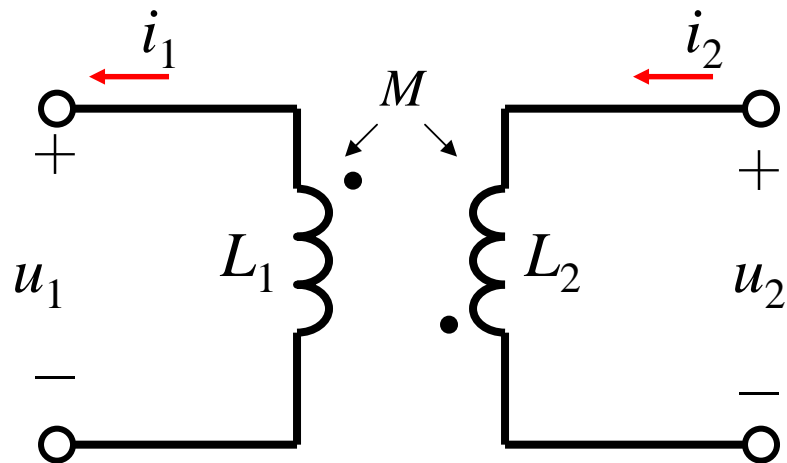
(c)



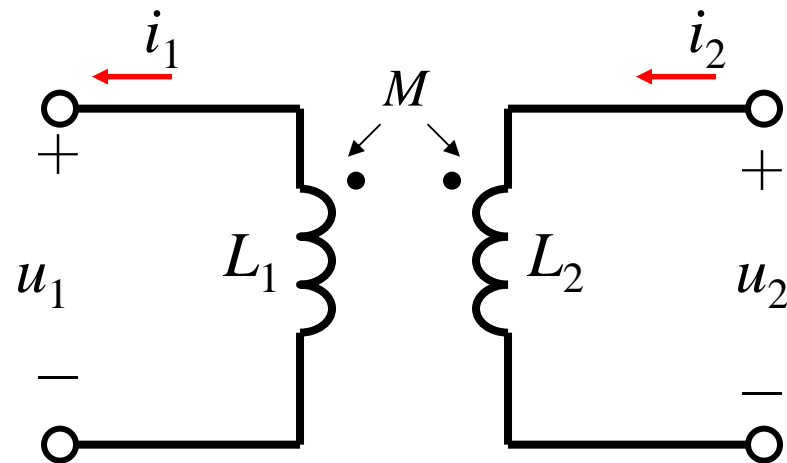
(d)

例7.1-2 图 7.1-8所示互感线圈模型电路，同名端位置及各线圈电压、电流的参考方向均标示在图上，试列写出该互感线圈的电压、电流关系式(指微分关系)。

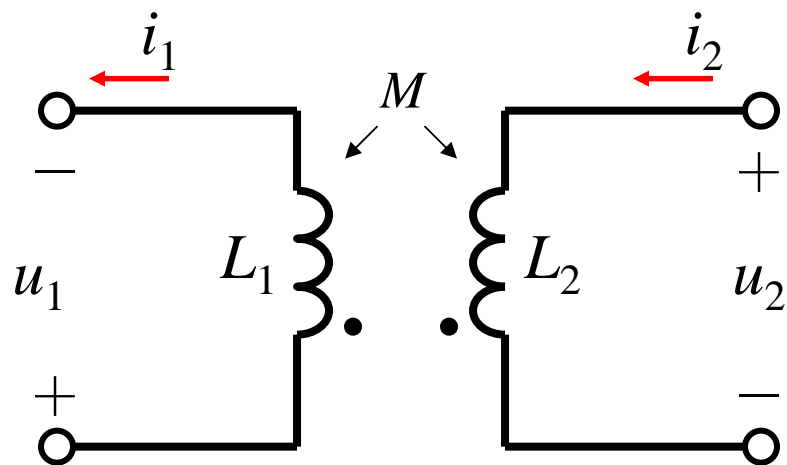
第七章 耦合电感与理想变压器



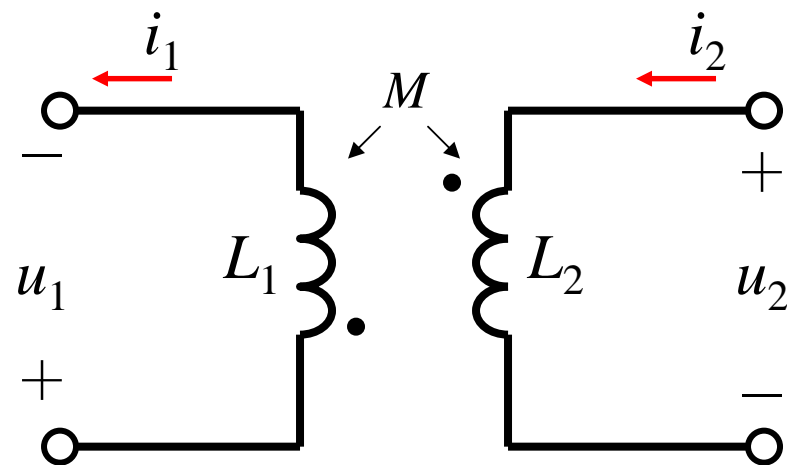
(a)



(b)



(c)



(d)

图 7.1-8 例7.1-2用图

第七章 耦合电感与理想变压器

解:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\}$$

(a)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\}$$

(b)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\}$$

(c)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\}$$

(d)

小结：

线圈电压 = 自感电压 + 互感电压

1、自感电压的符号由线圈自身电压、电流参考方向决定：线圈自身的电压与电流参考方向相关联，自感电压取正号；两者参考方向不一致，自感电压取负号。

2、互感电压由两个线圈电流流入方向决定：电流都从同名端流入，互感与自感同号；电流从异名端流入，互感与自感取反号。

三. 正弦稳态电路中的耦合电感元件

在正弦稳态电路中，耦合电感的**VCR**可表示为相量形式，

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1\end{aligned}\quad (7.1-17)$$

根据式(7.1-17)，等效电路为(互感电压用CCVS表示)，

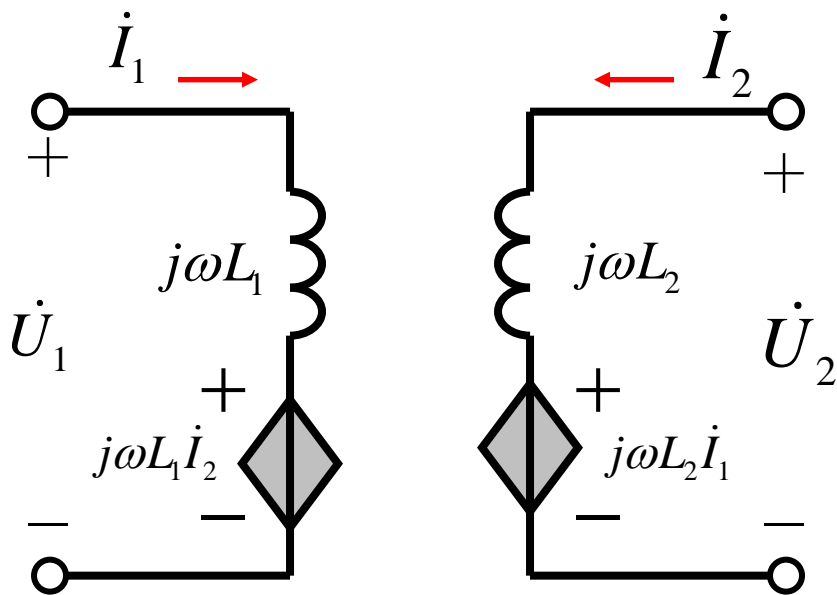


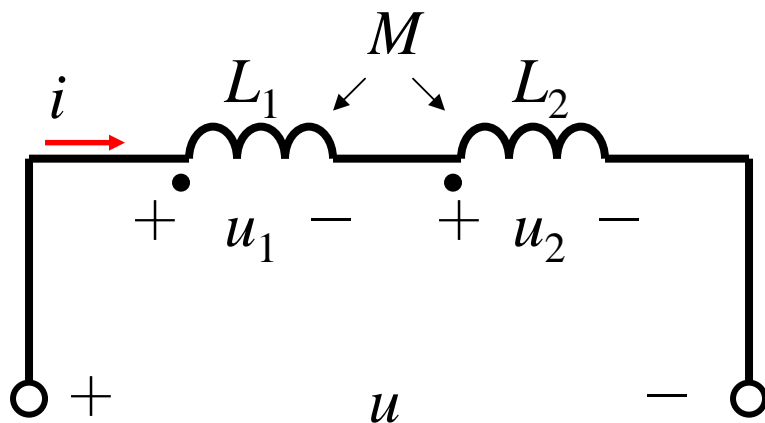
图7.1-6 正弦稳态下耦合电感等效电路

7.2 耦合电感的连接和去耦等效

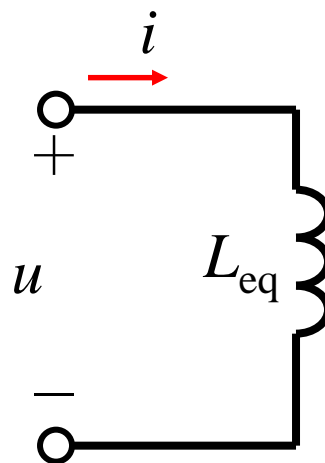
耦合电感中的两个电感线圈在以下几种连接下可以进行去耦等效(并不是所有情况都能去耦)。

一. 耦合电感的串联等效

1. 顺向串联:



(a)



(b)

7.2-1 互感线圈顺接串联及其等效电感

第七章 耦合电感与理想变压器

由所设电压、电流参考方向及互感线圈上电压、电流关系，得

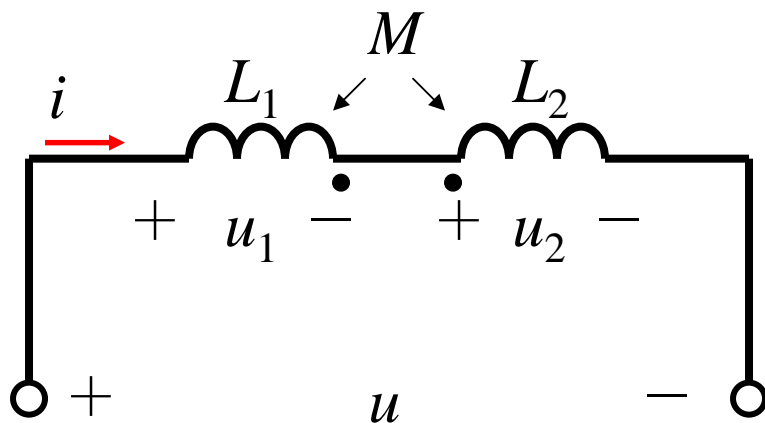
$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \\ &= L_{eq} \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

式中

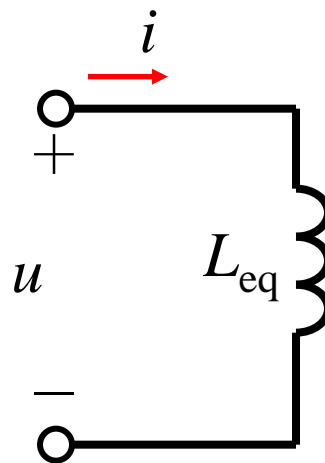
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M \quad (7.2-1)$$

因此，两个有顺向串联的耦合电感可以用一个自感为 L_{eq} 的电感线圈等效，如图(b)。

2. 反向串联:



(a)



(b)

7.2-2 互感线圈反接串联及其等效电感

等效电感为

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

(7.2-2)

第七章 耦合电感与理想变压器

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

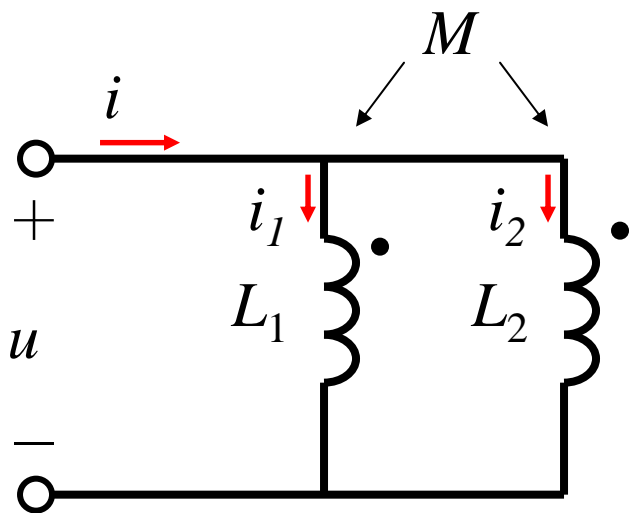
顺向串联取+
逆向串联取-

从式(7.2-1)和(7.2-2)可见，两个无耦合电感串联时的等效电感为

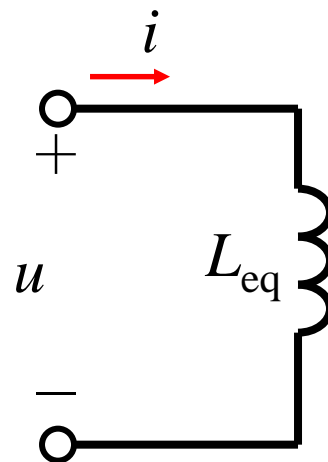
$$L_{eq} = L_1 + L_2 \quad (7.2-3)$$

二. 耦合电感的并联等效

1. 同侧并联



(a)



(b)

7.2-3 互感线圈同侧并联

第七章 耦合电感与理想变压器

根据KVL，有

$$u = u_1 = u_2 \quad (7.2-4)$$

由耦合电感VCR

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (7.2-5)$$

按照式(7.2-4)，可得

$$(L_1 - M) \frac{di_1}{dt} - (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (7.2-6)$$

根据KCL，有

$$i = i_1 + i_2 \quad (7.2-7)$$

或

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt} \quad (7.2-8)$$

第七章 耦合电感与理想变压器

从(7.2-6)和(7.2-8)式可解出

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{L_2 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (7.2-9)$$

将式(7.2-9)代回式(7.2-4)，可得

$$\begin{aligned} u &= u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ &= \frac{L_1(L_2 - M)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt} + \frac{M(L_1 - M)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt} \\ &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (7.2-10)$$

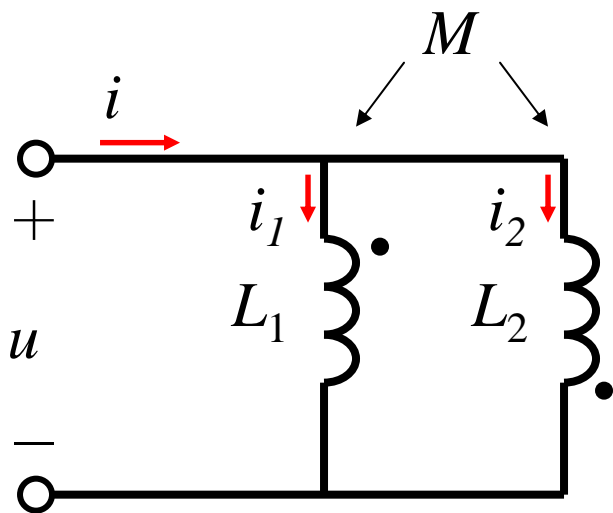
第七章 耦合电感与理想变压器

式中

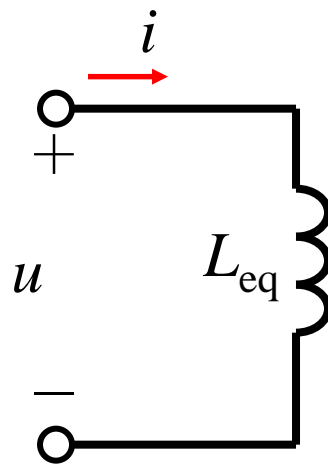
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (7.2-11)$$

可见，两耦合电感的同测并联可等效为一个电感，如图(b)。

2. 异侧并联



(a)



(b)

7.2-4 互感线圈异侧并联

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

(7.2-12)

两耦合电感的异侧并联可等效为一个电感，如图(b)。

第七章 耦合电感与理想变压器

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

同侧并联取-
异侧并联取+

从式(7.2-11)和(7.2-12)可见，无耦合时，两个电感线圈并联的等效电感为

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

(7.2-13)

三. 耦合电感的T型等效

1. 同名端为公共端的T型去耦等效

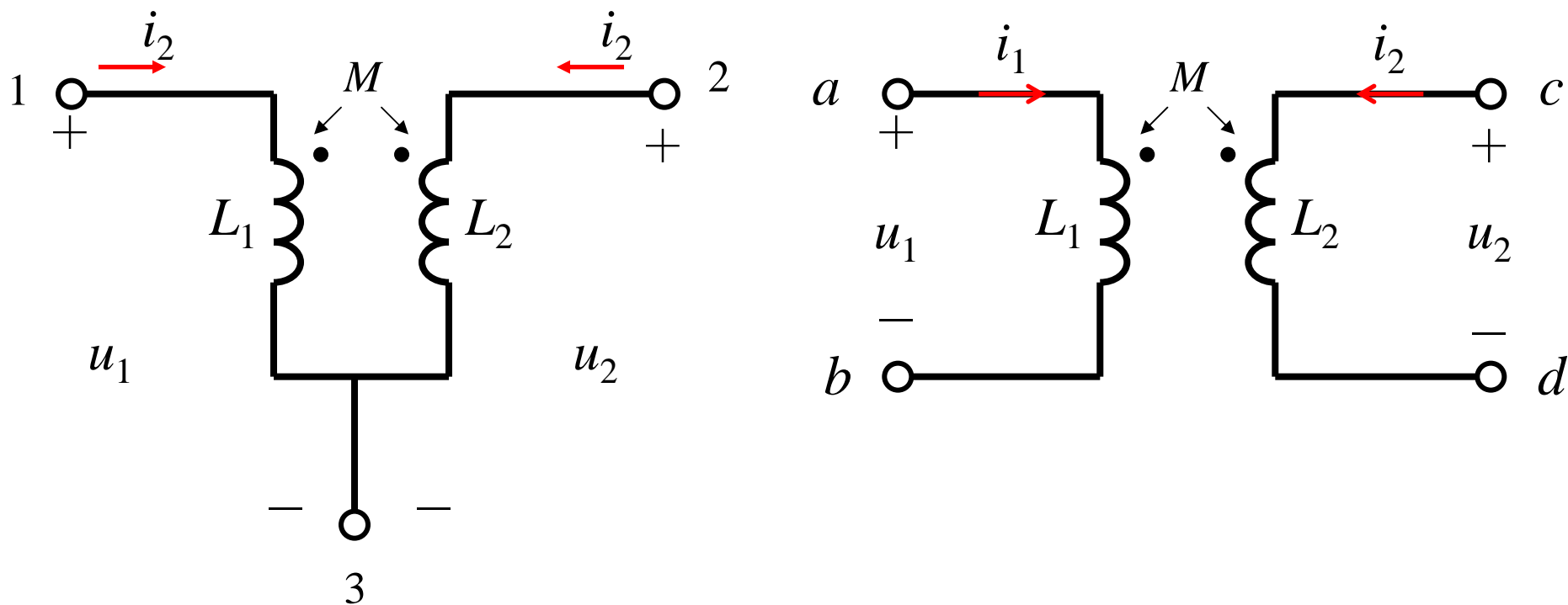


图7.2-5 同名端为共端的T型去耦等效

第七章 耦合电感与理想变压器

根据耦合电感VCR，有

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

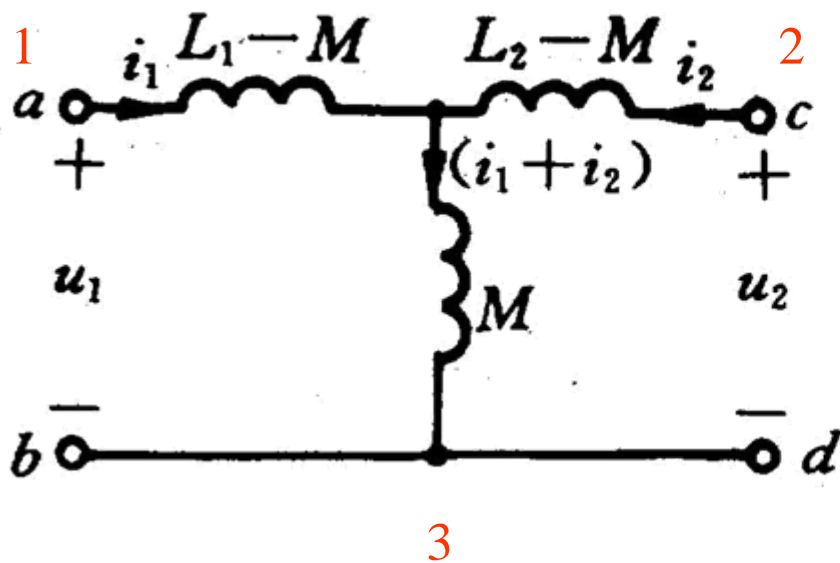
上2式可变换为

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ &= (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \end{aligned} \quad (7.2-14)$$

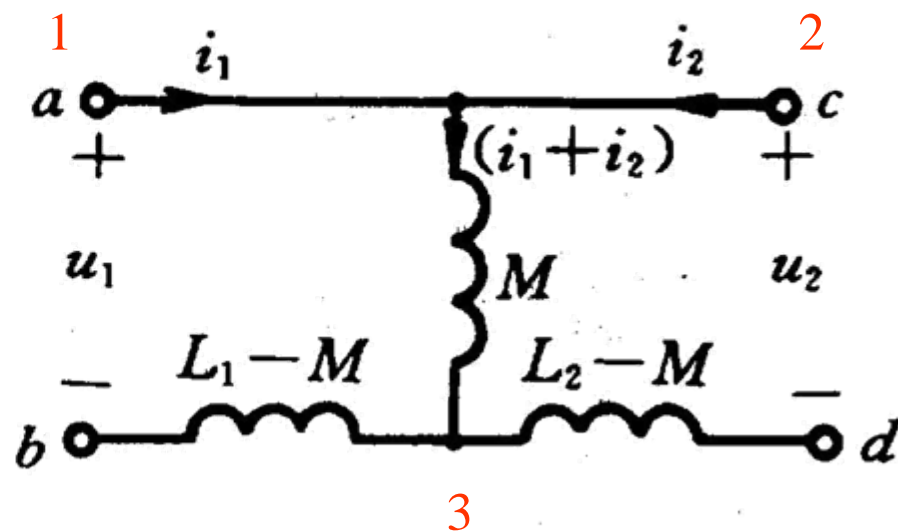
$$\begin{aligned} u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \\ &= (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \end{aligned} \quad (7.2-15)$$

第七章 耦合电感与理想变压器

根据式(7.2-14)和(7.2-15)，图7.2-5(a)和(b)可等效为图c或d

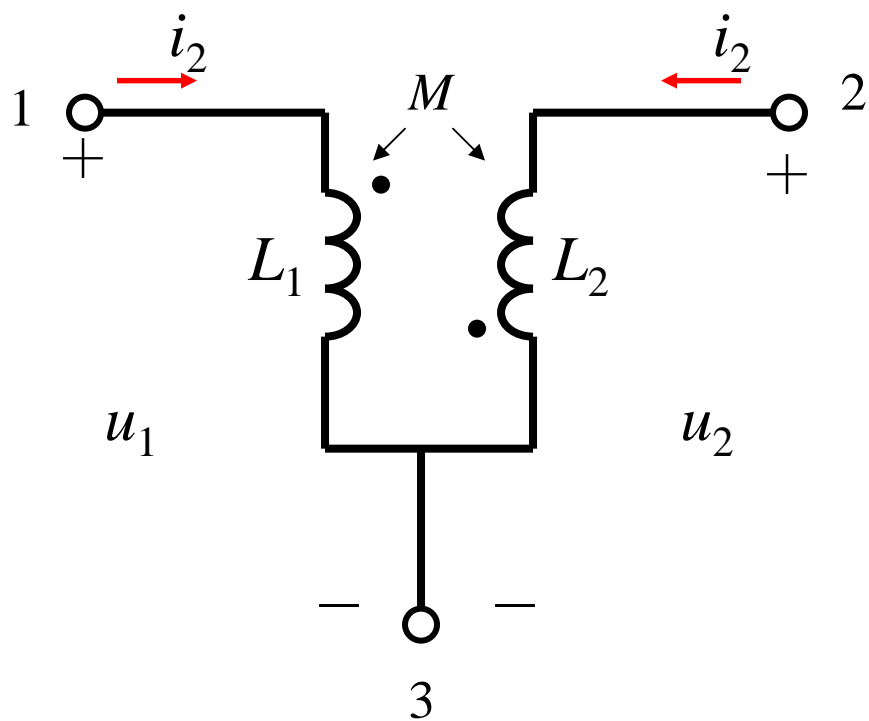


(c)

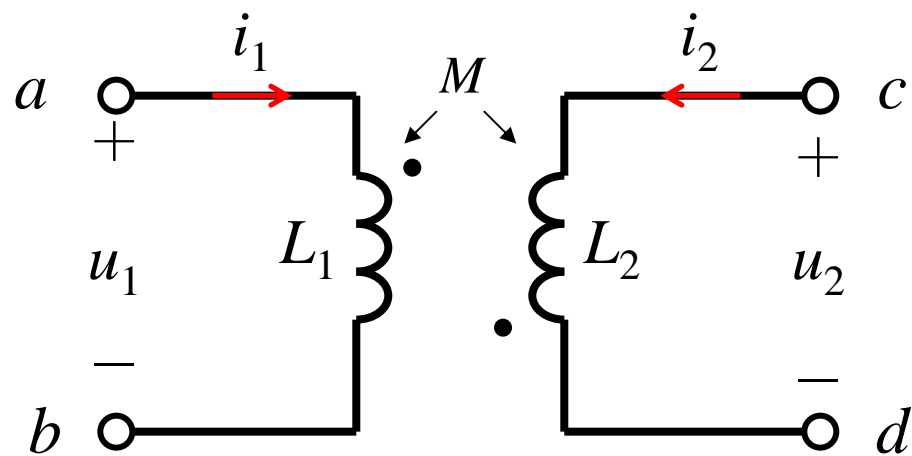


(d)

2. 异名端为公共端的T型去耦等效



(a)



(b)

图7.2-6 异名端为共端的T型去耦等效

第七章 耦合电感与理想变压器

耦合电感VCR,

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

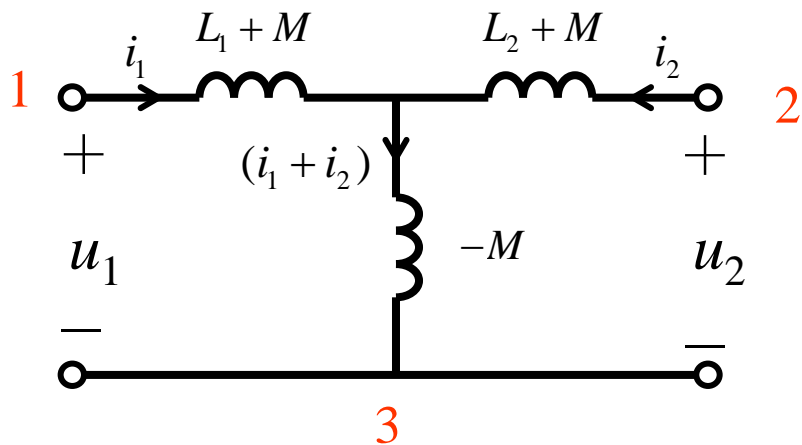
变换为,

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ &= (L_1 + M) \frac{di_1}{dt} - M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \end{aligned} \quad (7.2-16)$$

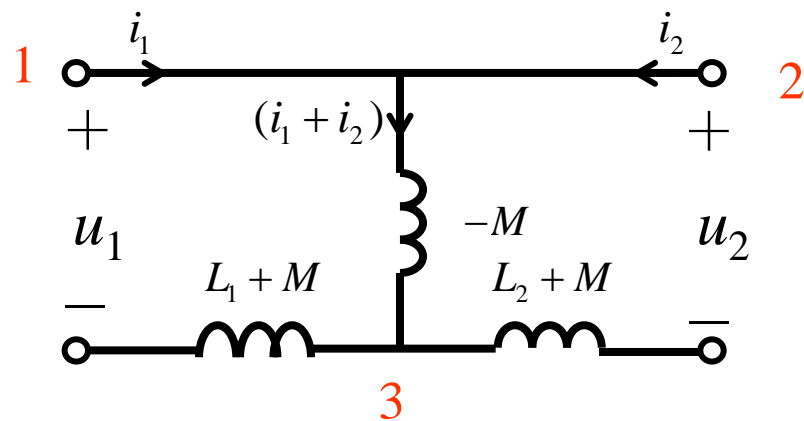
$$\begin{aligned} u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \\ &= (L_2 + M) \frac{di_2}{dt} - M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \end{aligned} \quad (7.2-17)$$

第七章 耦合电感与理想变压器

根据式(7.2-16)和(7.2-17)，图7.2-6(a)和(b)可等效为图c或d



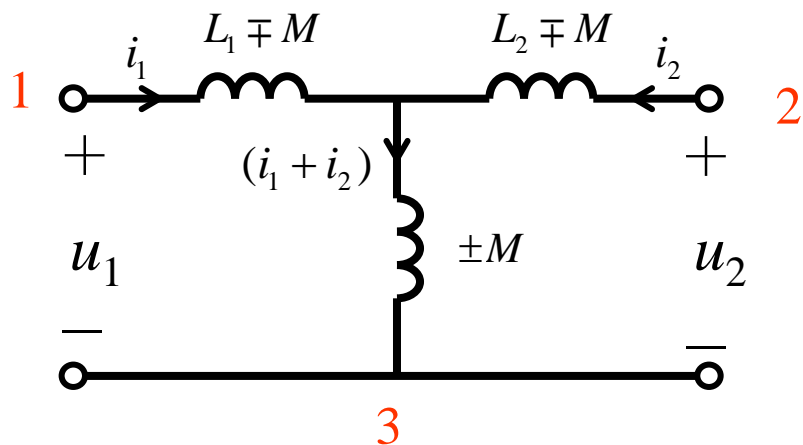
(c)



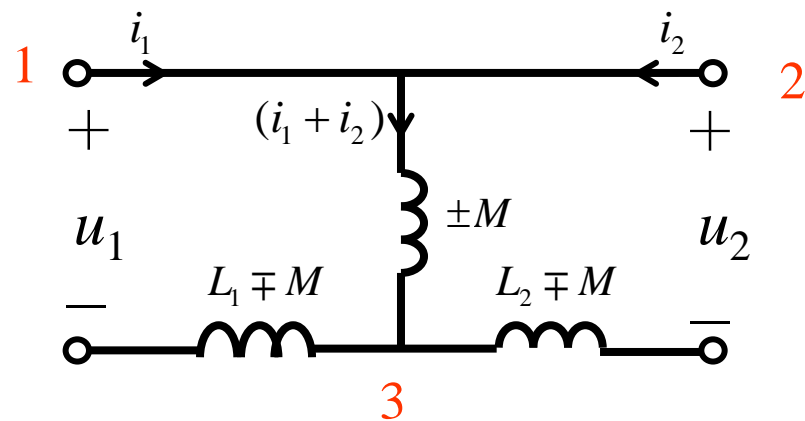
(d)

图7.2-7

第七章 耦合电感与理想变压器



(a)



(b)

竖直电感 $\pm M$: 公共端为同名端取+
公共端为异名端取-
水平电感 $L \mp M$: 与竖向电感反号

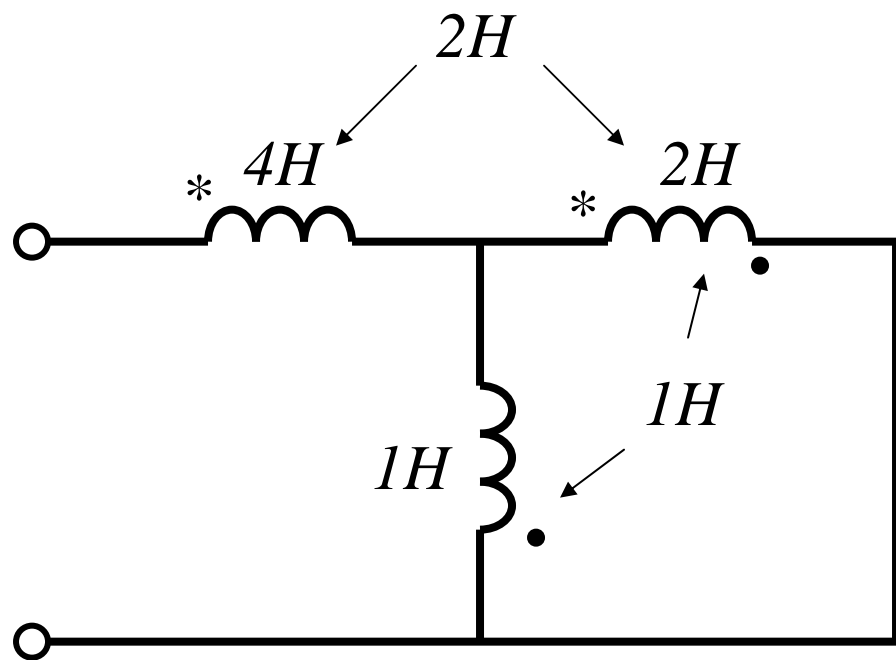
第七章 耦合电感与理想变压器

以上讨论了耦合电感的两种主要的去耦等效方法(耦合电感的并联可用7.2.3得到), 它们适用于任何变动电压、电流情况, 当然也可用于正弦稳态交流电路。

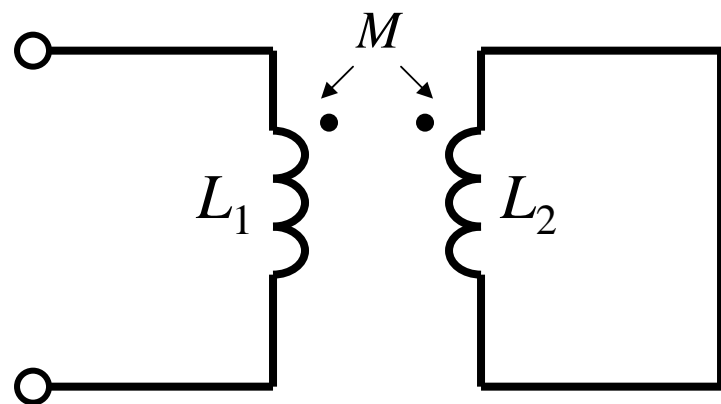
应再次明确, 无论是互感串联二端子等效还是T型去耦多端子等效, 都是对端子以外的电压、电流、功率来说的, 其等效电感参数不但与两耦合线圈的自感系数、互感系数有关, 而且还与同名端的位置有关。

去耦等效电路消除了原电路各电感之间的耦合, 称为去耦等效变换。替换后的电路即可作为一般无互感电路来分析、计算(即在分析电路时不必再考虑其耦合作用), 这给分析互感电路带来不少方便。

例7.2-1 求图7.2-8所示两个网络的等效电感。



(a)



(b)

图7.2-8

第七章 耦合电感与理想变压器

解：

方法一、用去耦等效电路替换求等效电感。

第七章 耦合电感与理想变压器

方法二、用去耦等效的方法，理解等效过程。

(a) 选择3个线圈的电流和电压参考方向如图

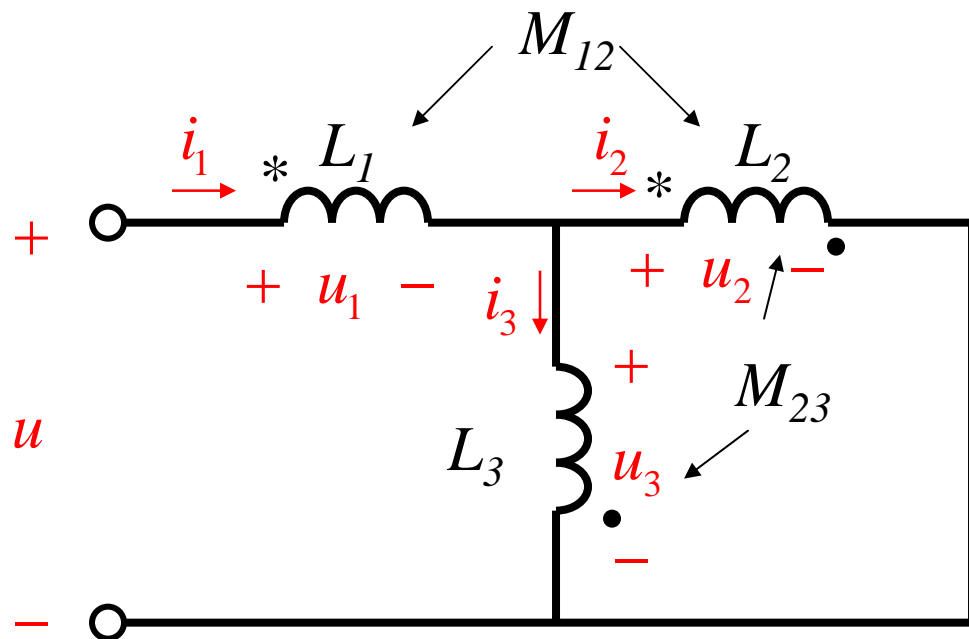
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_3 = L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt}$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\text{此外 } u_2 = u_3$$

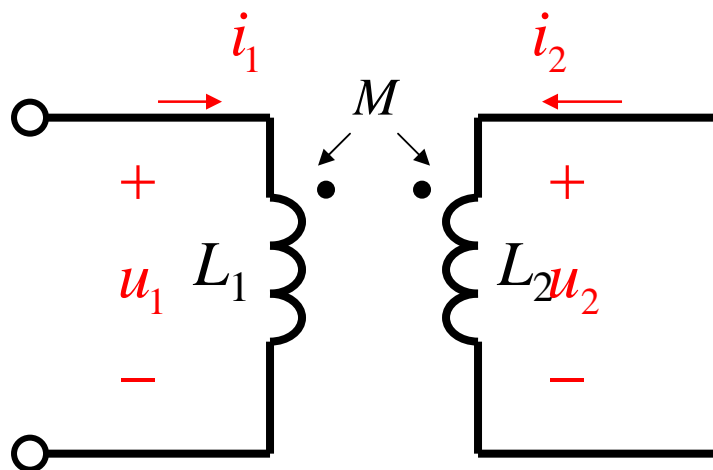


$$u = u_1 + u_3 = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) + \left(L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} \right) = (\dots) \frac{di_1}{dt}$$

L_{eq}

第七章 耦合电感与理想变压器

(b) 选择初级、次级线圈电流和电压参考方向如图



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

方法三、从正弦稳态阻抗计算求等效电感。

答案: (a) 1H (b) $L_{eq} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$

7.3 含互感的动态电路分析（时域分析）

简单情况的动态分析：初级线圈回路和次级线圈回路独立，次级线圈开路或短路的情况。

- 前一种情况，初级线圈只有自感电压，次级线圈只有互感电压。初级回路就是普通RL电路，可用三要素公式求解；
- 后一种情况可进行去耦等效。

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.3-1 如图7.3-1所示电路， $t < 0$ 时已处于稳态。当 $t = 0$ 时开关 S 闭合，求 $t \geq 0$ 时的开路电压 $u(t)$ 。

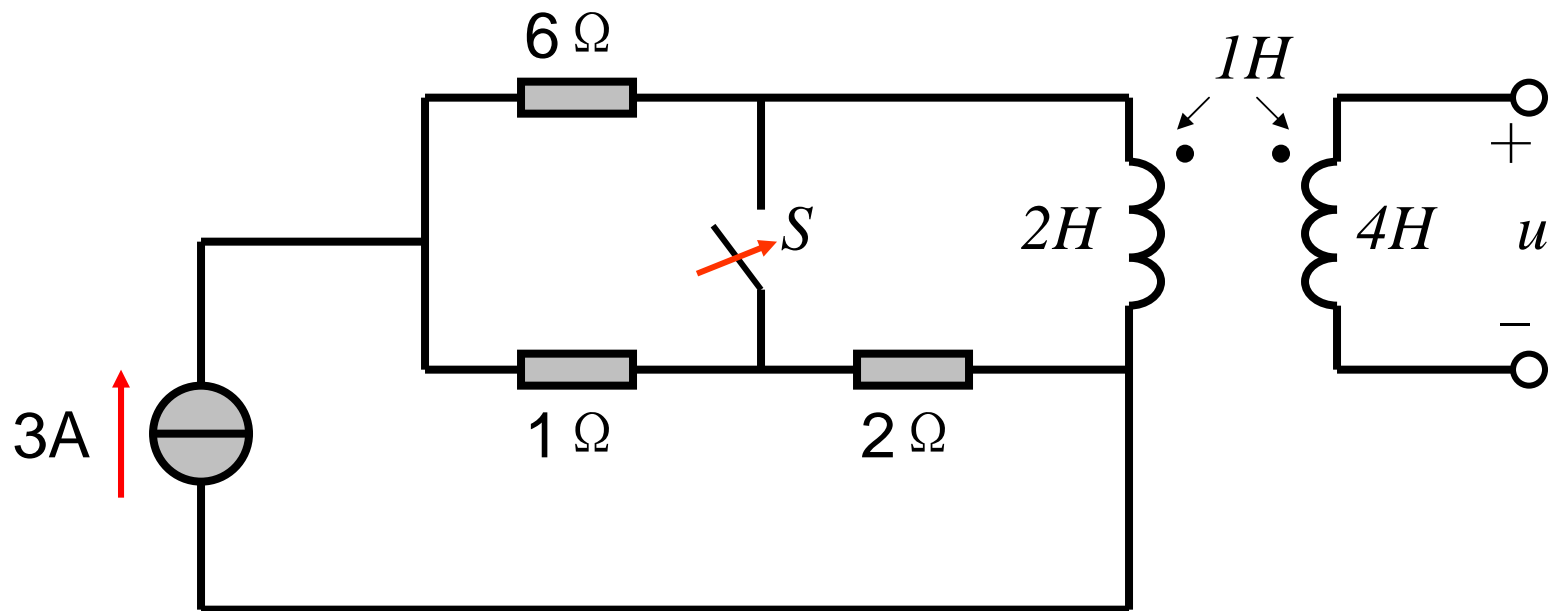


图7.3-1

第七章 耦合电感与理想变压器

解： 由于4H电感始终开路，其电流为零，故2H电感中无互感电压。

把2H电感所在电路用诺顿等效为3A电流源与2Ω电阻并联，利用三要素公式求解。

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1A$$

$$i_L(\infty) = 3A$$

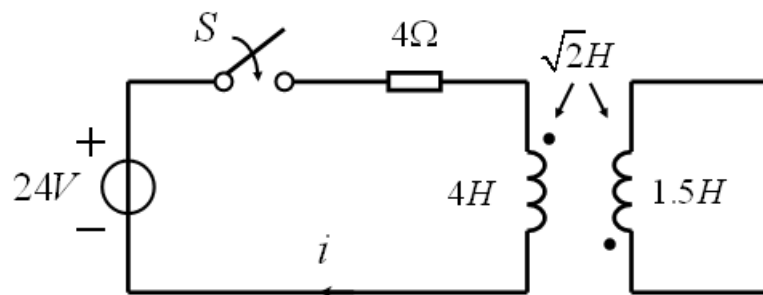
$$\tau = L / R_{eq} = \frac{2}{2} = 1\text{sec}$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 3 + (1 - 3)e^{-t} = 3 - 2e^{-t} \quad A \end{aligned}$$

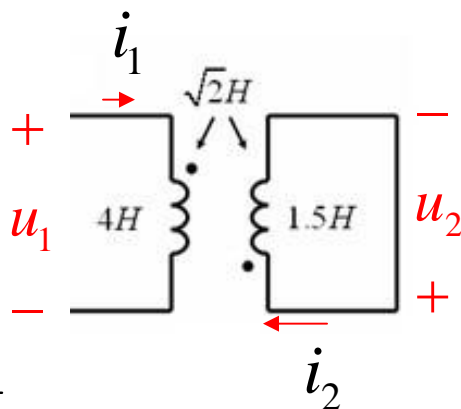
$$u(t) = M \frac{di_L}{dt} = 2e^{-t}V$$

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.3-2 图示电路原已稳定， $t=0$ 时合上开关。试求
 $t>0$ 之后的电流 $i(t)$ 。



去耦等效



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

$$6(1 - e^{-1.5t}) A$$

第七章 耦合电感与理想变压器

与其它电感无耦合的电感元件的换路关系：

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad di = \frac{1}{L} u dt, \quad \int_{0^-}^{0^+} di = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u dt,$$

$$i(0^+) - i(0^-) = 0, \quad \text{即 } i(0^+) = i(0^-)$$

与另外一个电感有耦合时的换路关系：

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad L di_1 + M di_2 = u_1 dt, \quad \int_{0^-}^{0^+} L_1 di_1 + M di_2 = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u_1 dt,$$

$$[L_1 i_1(0^+) + M i_2(0^+)] - [L_1 i_1(0^-) + M i_2(0^-)] = 0,$$

即

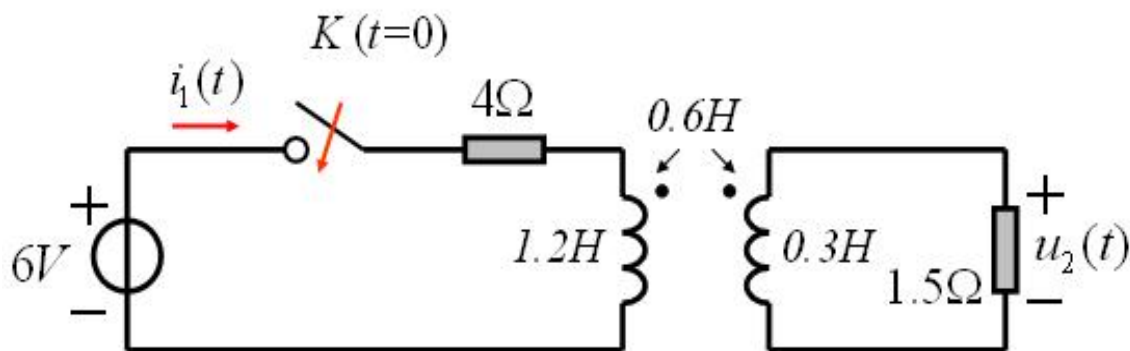
$$L_1 i_1(0^+) + M i_2(0^+) = L_1 i_1(0^-) + M i_2(0^-) \quad \text{即磁通链守恒}$$

类似的， L_2 的初值由下式确定，

$$L_2 i_2(0^+) + M i_1(0^+) = L_2 i_2(0^-) + M i_1(0^-) \quad \text{即磁通链守恒}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.3-2 图示电路原已稳定， $t=0$ 时开关K闭合，求时的电流 $i_1(t)$ 和电压 $u_2(t)$ 。



答案：

$$i_1 = 1.5 - 0.9e^{-2t} \text{ A} (t > 0)$$
$$u_2 = 1.8e^{-2t} \text{ V} (t > 0)$$

7.4 含互感电路的正弦稳态(相量法)分析

一. 电路方程法:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

分析含有耦合电感电路的关键是，要在电感电压中计入互感电压，并注意其极性。

例7.4-1 图7.4-1为含有耦合电感的正弦稳态电路，电源角频率为 ω 。试写出网孔方程和节点电压方程。

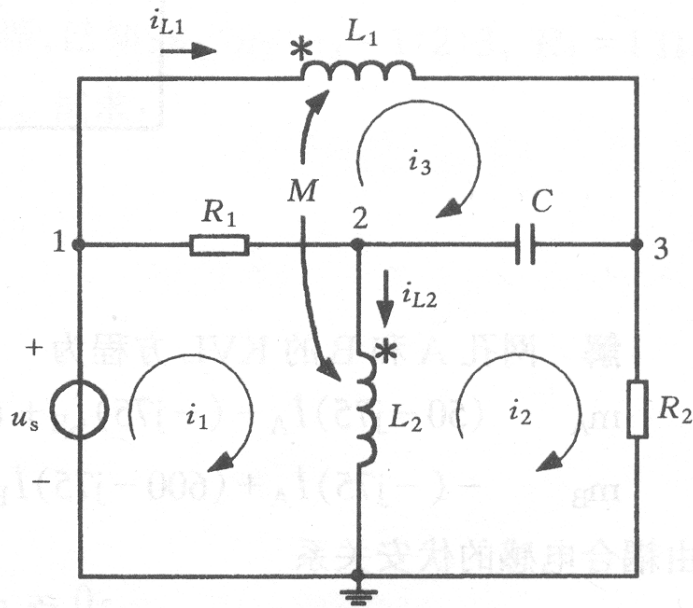


图7.4-1

解：

1、网孔电流方程：

列写网孔电流方程的方法是：把耦合电感的电压也作为变量，对各网孔列KVL方程，然后补上耦合电感的VCR，

1)对各网孔应用KVL，

$$l_1: R_1 \dot{I}_1 - R_1 \dot{I}_3 + \dot{U}_{L2} = \dot{U}_S$$

$$l_2: (R_2 + \frac{1}{j\omega C}) \dot{I}_2 - \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_3 - \dot{U}_{L2} = 0$$

$$l_3: -R_1 \dot{I}_1 - \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_2 + (R_1 + \frac{1}{j\omega C}) \dot{I}_3 + \dot{U}_{L1} = 0$$

第七章 耦合电感与理想变压器

2) 设 L_1 、 L_2 的电压 \dot{U}_{L1} 、 \dot{U}_{L2} 均以标记端为正极性端，由耦合电感的VCR，有

$$\begin{aligned}\dot{U}_{L1} &= j\omega L_1 \dot{I}_3 + j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \\ &= j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 + j\omega L_1 \dot{I}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{L2} &= j\omega L_2 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + j\omega M \dot{I}_3 \\ &= j\omega L_2 \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3\end{aligned}$$

3) 将 \dot{U}_{L1} 、 \dot{U}_{L2} 代入前面三式，整理后有

$$\begin{aligned}(R_1 + j\omega L_2) \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2 + (-R_1 + j\omega M) \dot{I}_3 &= \dot{U}_s \\ -j\omega L_2 \dot{I}_1 + [R_2 + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})] \dot{I}_2 + j(\frac{1}{\omega C} - \omega M) \dot{I}_3 &= 0 \\ (-R_1 + j\omega M) \dot{I}_1 + j(\frac{1}{\omega C} - \omega M) \dot{I}_2 + [R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C})] \dot{I}_3 &= 0\end{aligned}$$

2.节点电压方程：把耦合电感的电流也作为变量，对各节点列KCL，然后再补上耦合电感的VCR。

1)将 \dot{I}_{L1} 、 \dot{I}_{L2} 也作为变量，列各节点KCL方程

$$n_1: \dot{U}_1 = \dot{U}_s$$

$$n_2: -\frac{1}{R_1}\dot{U}_1 + \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C\right)\dot{U}_2 - j\omega C\dot{U}_3 = -\dot{I}_{L2}$$

$$n_3: -j\omega C\dot{U}_2 + \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)\dot{U}_3 = \dot{I}_{L1}$$

2)耦合电感VCR (\dot{U}_{L1} 、 \dot{U}_{L2} 用节点电压表示)

$$\underline{\dot{U}_{L1}} \quad \dot{U}_1 - \dot{U}_3 = j\omega L_1 \dot{I}_{L1} + j\omega M \dot{I}_{L2}$$

$$\underline{\dot{U}_{L2}} \quad \dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_{L1} + j\omega L_2 \dot{I}_{L2}$$

例7.4-2 正弦稳态电路如图。设电源的角频率为 ω ，试列写网孔电流方程。

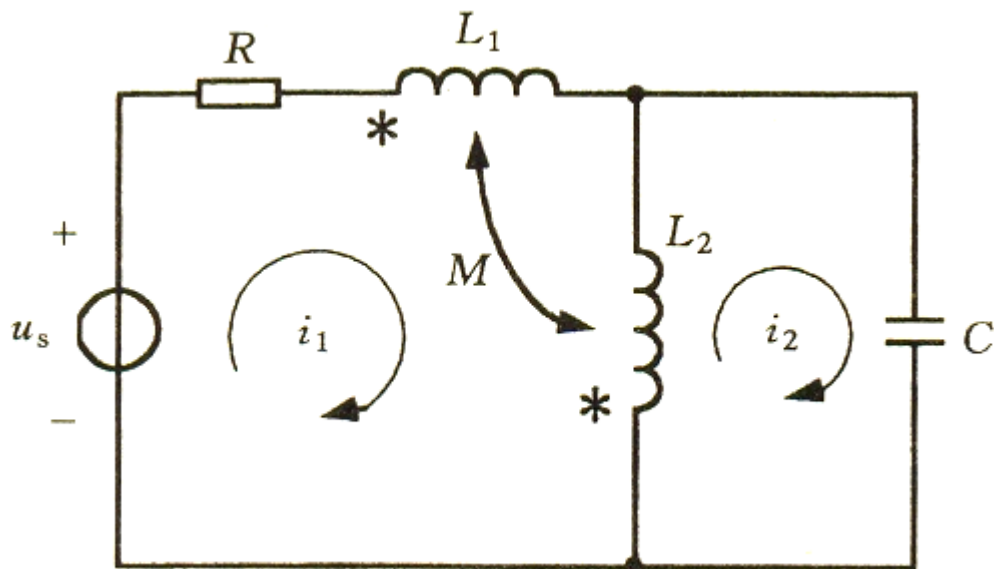


图7.4-2

第七章 耦合电感与理想变压器

解：

方法一、

1) 先将 \dot{U}_{L1} 、 \dot{U}_{L2} 也作为变量列写网孔方程

$$R\dot{I}_1 + \dot{U}_{L1} - \dot{U}_{L2} = \dot{U}_S$$

$$\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2 + \dot{U}_{L2} = 0$$

2) 根据耦合电感的VCR，并将 \dot{U}_{L1} 、 \dot{U}_{L2} 用网孔电流表示

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M (\dot{I}_2 - \dot{I}_1)$$

$$= j\omega (L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_{L2} = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 (\dot{I}_2 - \dot{I}_1)$$

$$= j\omega (M - L_2) \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

3)将 \dot{U}_{L1} 、 \dot{U}_{L2} 表达式代入前式，整理得

$$[R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)]\dot{I}_1 + j\omega(M - L_2)\dot{I}_2 = \dot{U}_s$$

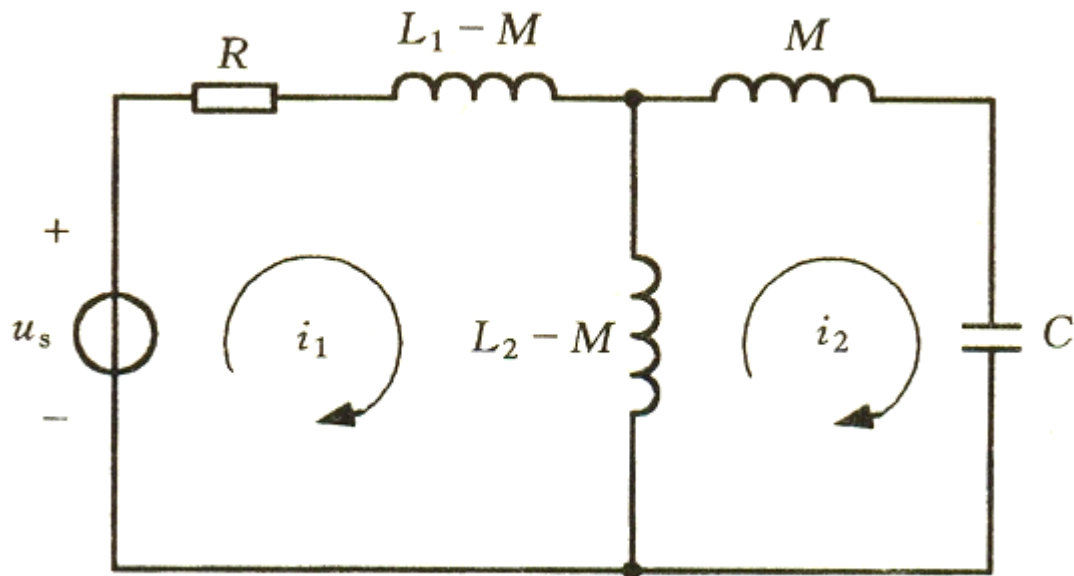
$$j\omega(M - L_2)\dot{I}_1 + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})\dot{I}_2 = 0$$

也可写为矩阵形式，

$$\begin{bmatrix} R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) & j\omega(M - L_2) \\ j\omega(M - L_2) & j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

方法二、 由于本题耦合电感有一端相连，因此可以进行去耦等效变换，如下图所示。



对该图列写网孔电流方程，直接可得上式结果。

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.4-3 电路如图，试求 I_1 、 I_2 、 \dot{U}_1 、 \dot{U}_2 以及电路的输入阻抗。

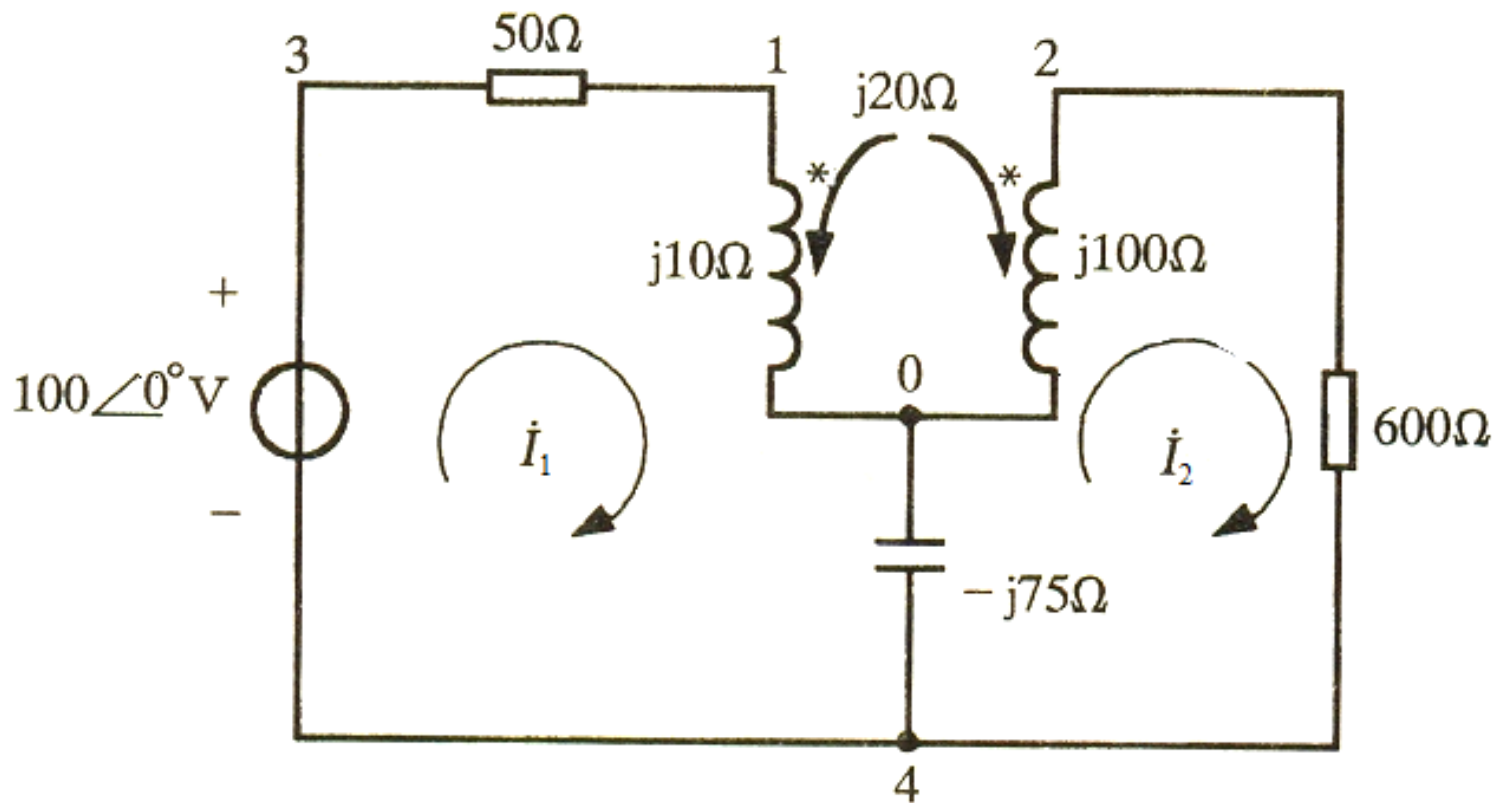


图7.4-3

第七章 耦合电感与理想变压器

网孔1、2的KVL方程为

$$\begin{aligned}(50 - j75)\dot{I}_1 - (-j75)\dot{I}_2 + \dot{U}_1 &= 100 \\ -(-j75)\dot{I}_1 + (600 - j75)\dot{I}_2 - \dot{U}_2 &= 0\end{aligned}$$

由耦合电感的VCR

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= j10\dot{I}_1 - j20\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= j20\dot{I}_1 - j100\dot{I}_2\end{aligned}$$

则网孔电流方程为：

$$\begin{aligned}(50 - j75 + j10)\dot{I}_1 + (j75 - j20)\dot{I}_2 &= 100 \\ (j75 - j20)\dot{I}_1 + (600 - j75 + j100)\dot{I}_2 &= 0\end{aligned}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

从中解出

$$\dot{I}_1 = 1.17 \angle 49.84^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 0.107 \angle -42.55^\circ \text{ A}$$

将 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 代入耦合电感的VCR，得

$$\dot{U}_1 = 12.0 \angle 150.13^\circ \text{ V}$$

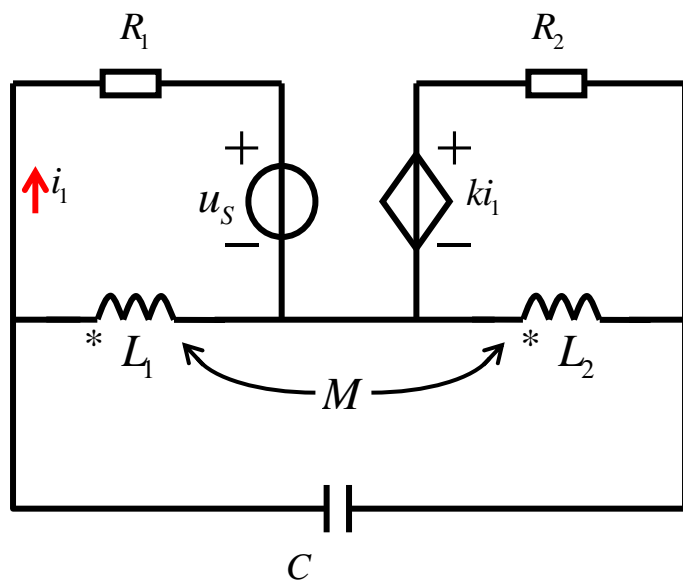
$$\dot{U}_2 = 26.18 \angle 164.02^\circ \text{ V}$$

电路的输入阻抗为

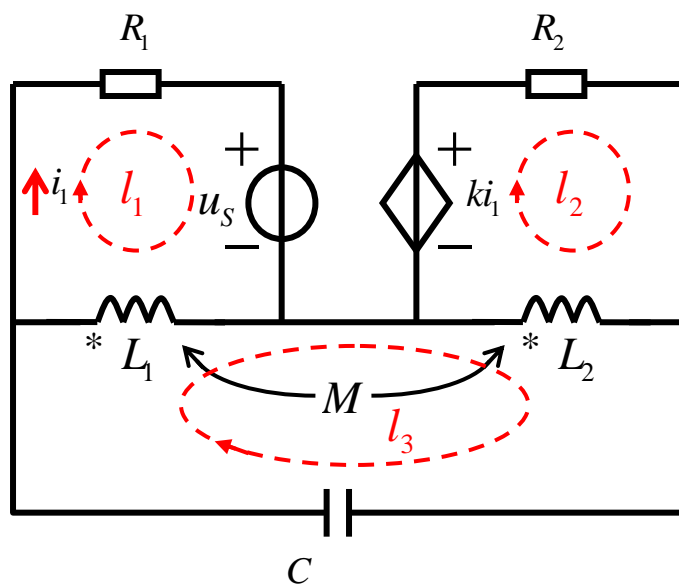
$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = 55.03 - j65.21 \ \Omega$$

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.4-4 图 (a) 为有耦合电感的电路，试列写电路的回路电流方程。



例 7-4-4 (a)



例 7-4-4 (b)

第七章 耦合电感与理想变压器

解：设网孔电流如图（b）所示，为顺时针方向，则回路方程为：

$$(R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega L_1\dot{I}_3 + j\omega M(\dot{I}_2 - \dot{I}_3) = -\dot{U}_s$$

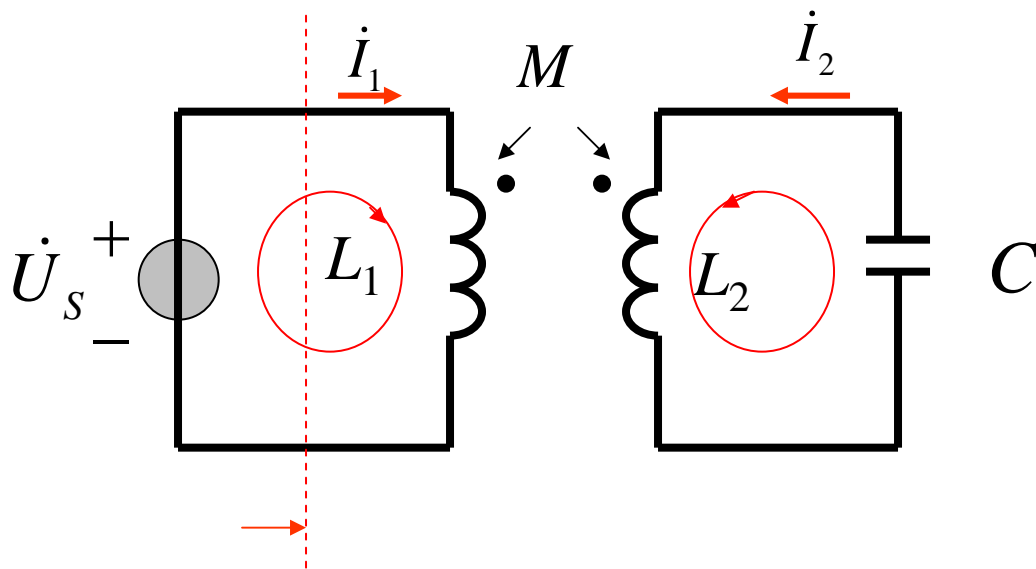
$$(R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega L_2\dot{I}_3 + j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_3) = k\dot{I}_1$$

$$(j\omega L_1 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C})\dot{I}_3 - j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_3 - \dot{I}_1) + j\omega M(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = 0$$

注意： 列写有互感电路的回路电流方程是，注意互感电压的极性和不要遗漏互感电压。

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.4-5 求图示电路的输入阻抗，设信号源角频率为 ω 。



解一、回路方程

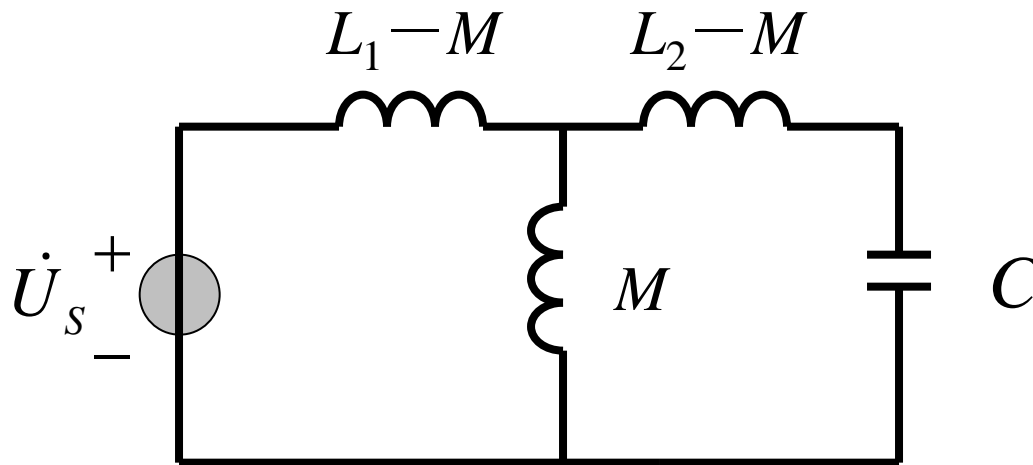
$$\left. \begin{aligned} j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_s \\ j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 - \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

可解得

第七章 耦合电感与理想变压器

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = j\omega L_1 + j\omega M \frac{j\omega M}{\frac{1}{j\omega C} - j\omega L_2} \\ &= j \frac{\omega^3 (L_1 L_2 - M^2) C + \omega L_1}{1 + \omega^2 L_2 C} \end{aligned}$$

解二、采用去耦等效



第七章 耦合电感与理想变压器

例7.4-6 求图示正弦稳态网络的等效电感。

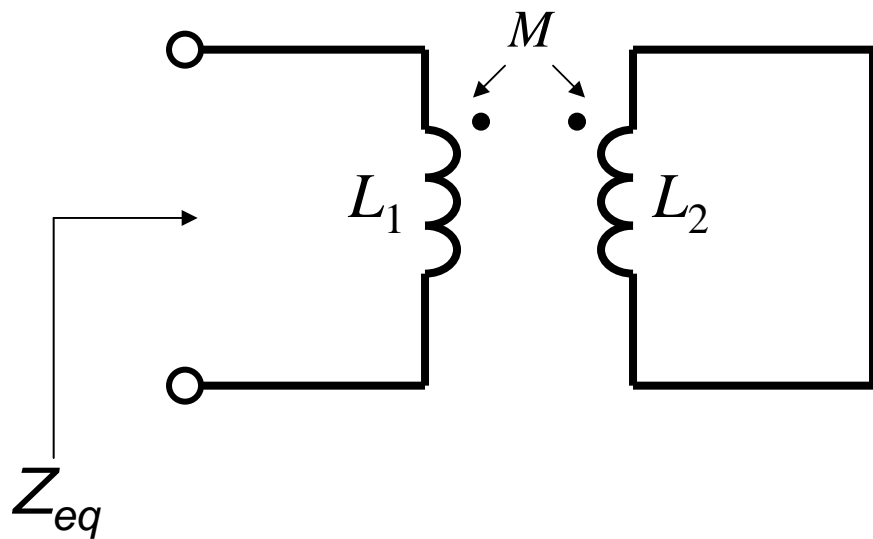
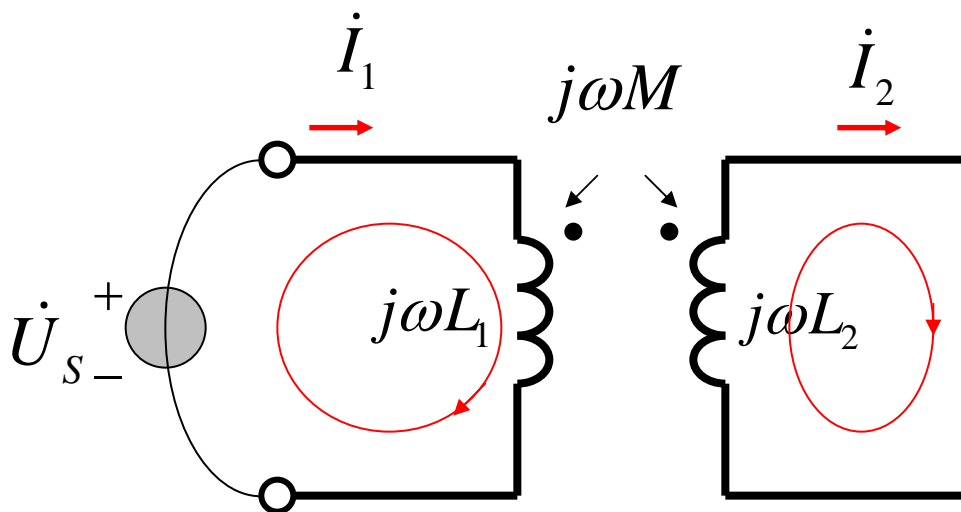


图7.4-5

第七章 耦合电感与理想变压器

解



做出原电路的相量模型如图。

设在端口处施加 \dot{U}_s ，网孔方程为

$$\begin{aligned} j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_s \\ -j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

可解得

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_s & -j\omega M \\ 0 & j\omega L_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & j\omega L_2 \end{vmatrix}} = \frac{j\omega L_2 \dot{U}_s}{-\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2}$$

于是

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = \frac{-\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2}{j\omega L_2} = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)$$

从阻抗表达式可以看出，该网络等效于一个电感线圈，等效电感为，

$$L_{eq} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

此结果与例7.2-1(b) 结果一致。

第七章 耦合电感与理想变压器

例 7.4-7 图 7.4-6(a) 所示互感电路，已知 $R_1=8.5\ \Omega$ ， $\omega L_1=30\ \Omega$ ， $\frac{1}{\omega C_1}=22.5\ \Omega$ ， $R_2=60\ \Omega$ ， $\omega L_2=60\ \Omega$ ， $\omega M=30\ \Omega$ ， $\dot{U}_s=15\angle 0^\circ\ \text{V}$ 。求电流 \dot{I}_1 ， \dot{I}_2 ， R_2 上消耗的功率 P_2 。

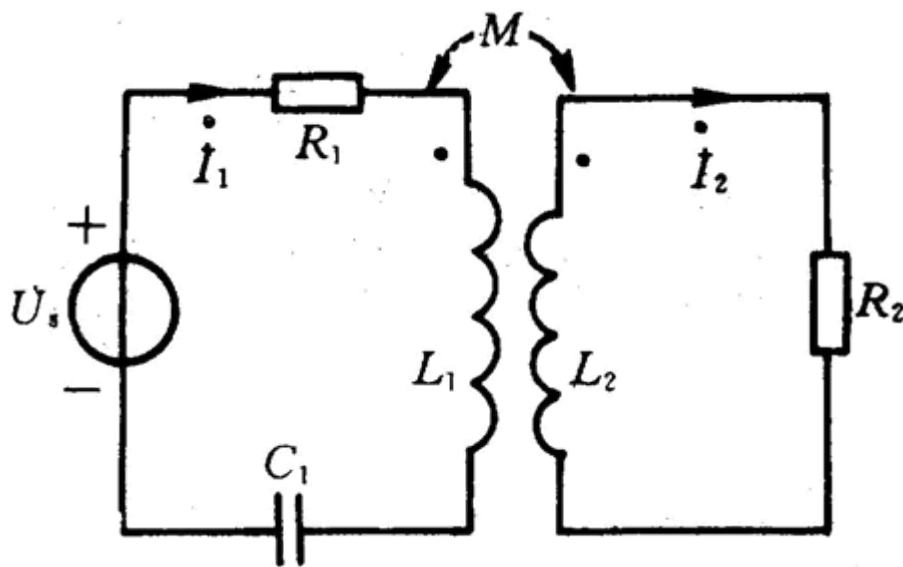


图7.4-6 例7.4-7用图

第七章 耦合电感与理想变压器

解： 网孔方程

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})\dot{I}_1 + \dot{U}_{L1} &= \dot{U}_S \\ R_2\dot{I}_2 - \dot{U}_{L2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

即

$$\left. \begin{aligned} (7.5 - j22.5)\dot{I}_1 + \dot{U}_{L1} &= 15 \\ 60\dot{I}_1 - \dot{U}_{L2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

由耦合电感VCR，

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{L1} &= j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2 = j30\dot{I}_1 - j30\dot{I}_2 \\ \dot{U}_{L2} &= -j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = -j60\dot{I}_2 + j30\dot{I}_1 \end{aligned} \right\}$$

代入前两式并整理，得网孔方程为

第七章 耦合电感与理想变压器

$$\left. \begin{aligned} (7.5 + j7.5)\dot{I}_1 - j30\dot{I}_2 &= 15 \\ -j30\dot{I}_1 + (60 + j60)\dot{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

可解得

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -j30 \\ 0 & 60(1+j) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7.5(1+j) & -j30 \\ -j30 & 60(1+j) \end{vmatrix}} = 1\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7.5(1+j) & 15 \\ -j30 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7.5(1+j) & -j30 \\ -j30 & 60(1+j) \end{vmatrix}} = 0.25\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$

R_2 上消耗的功率

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (0.25\sqrt{2})^2 \times 60 = 7.5 \text{ W}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.4-8 电路如图所示，为使负载获得**最大功率**，求负载阻抗。

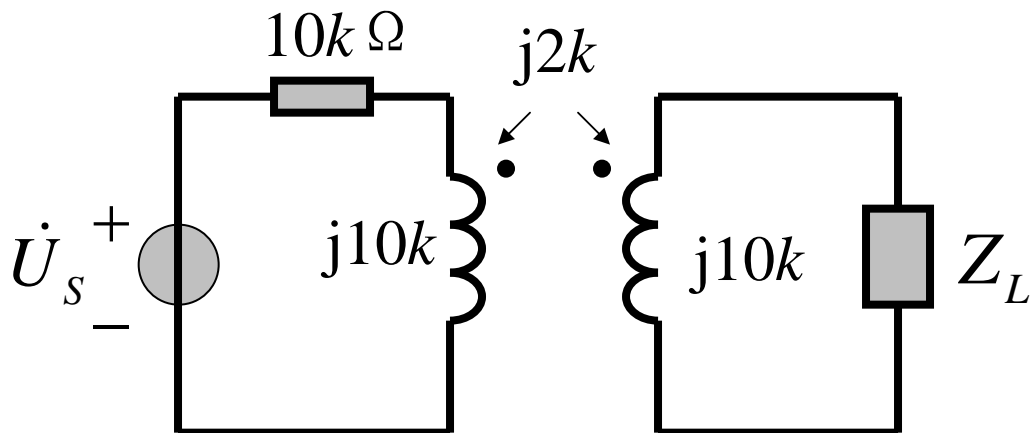
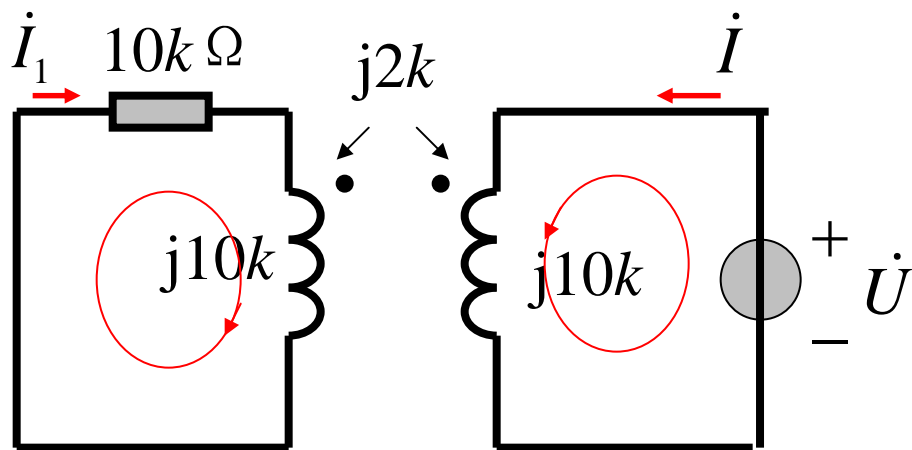


图7.4-6

解 只要求出戴维宁等效阻抗即可。将电压源置零，如下图



第七章 耦合电感与理想变压器

列网孔方程

$$(10 + j10)\dot{I}_1 + j2\dot{I} = 0$$

$$j10\dot{I} + j2\dot{I}_1 = \dot{U}$$

消去 \dot{I}_1 ，可解得

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j10 + \frac{2}{5(1 + j)} = 0.2 + j9.8 \text{ k}\Omega$$

当负载阻抗为等效电源内阻抗的共扼时，获得最大功率，故

$$Z_L = Z_{eq}^* = 0.2 - j9.8 \text{ k}\Omega$$

二.用去耦等效分析含有互感的正弦稳态电路:

例7.4-9 如图7.4-7(a)所示正弦稳态电路中含有互感线圈, 已知 $u_s(t)=2\cos(2t+45^\circ)$ V, $L_1=L_2=1.5\text{H}$, $M=0.5\text{ H}$, 负载电阻 $R_L=1\ \Omega$ 。求 R_L 上吸收的平均功率 P_L 。

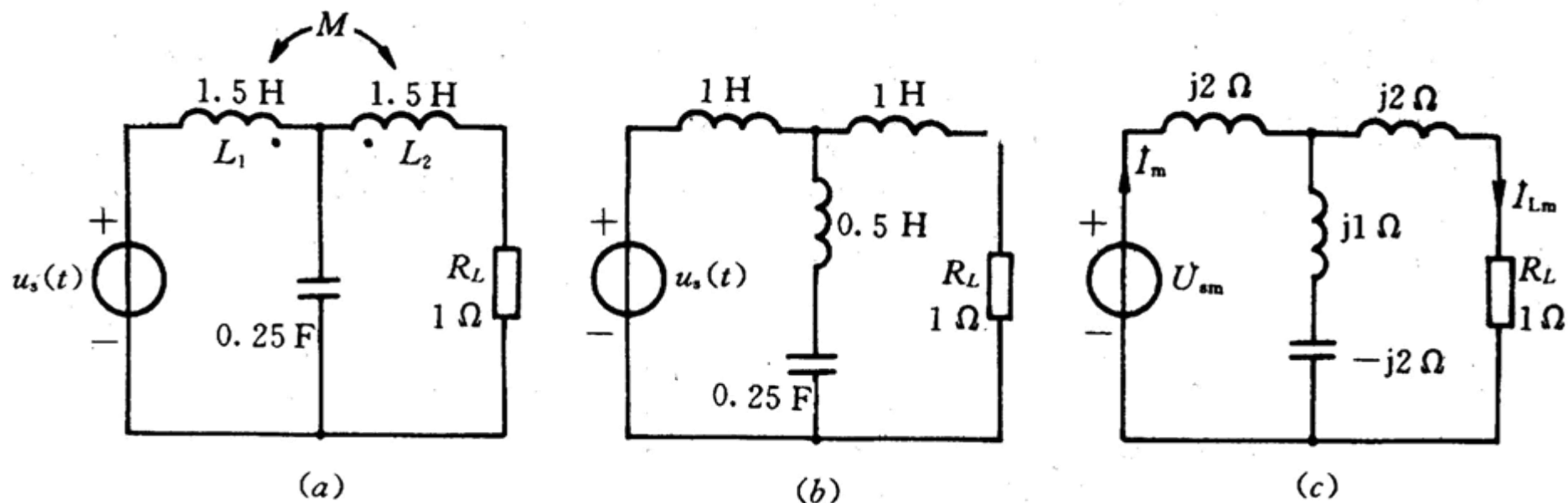


图7.4-7 含有互感的正弦稳态电路

第七章 耦合电感与理想变压器

解：利用T形等效为图b电路，再做出电路b的相量模型如图c

总电流

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{sm}}{(1 + j2) // [j1 + (-j2)] + j2} = \frac{2\angle 45^\circ}{\frac{1}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ} = 2\sqrt{2}\angle 0^\circ \text{ A}$$

负载电阻支路电流

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{j1 - j2}{1 + j2 + j1 - j2} \dot{I}_m = \frac{-j1}{1 + j1} \times 2\sqrt{2}\angle 0^\circ = 2\angle -135^\circ \text{ A}$$

于是，电阻功率为

$$P_L = \frac{1}{2} I_{Lm}^2 R_L = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 1 = 2 \text{ W}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

例 7.4-10 图 7.4-8(a) 所示正弦稳态电路, 已知 $L_1=7\text{H}$, $L_2=4\text{H}$, $M=2\text{H}$, $R=8\ \Omega$, $u_s(t)=20\cos t\text{ V}$, 求电流 $i_2(t)$ 。

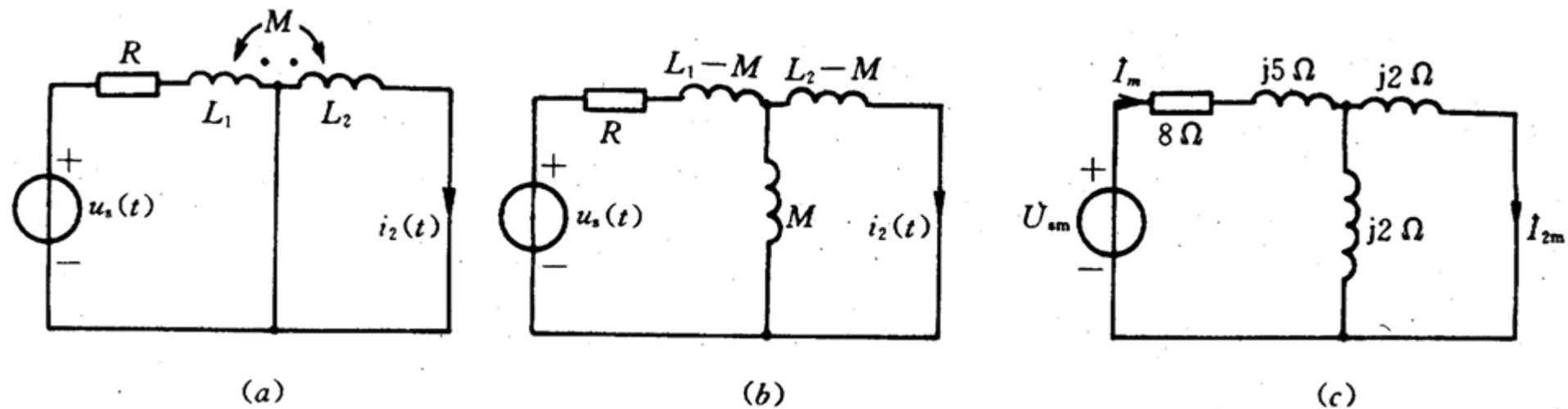


图 7.4-8 例 7.4-10 用图

第七章 耦合电感与理想变压器

解：利用T形等效为图b电路，再做出电路b的相量模型如图c

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{sm}}{8 + j5 + j2 // j2} = \frac{20 \angle 0^\circ}{10 \angle 36.9^\circ} = 2 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{j2}{j2 + j2} \dot{I}_m = \frac{1}{2} \times 2 \angle -36.9^\circ = 1 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

所以

$$i_2(t) = \cos(t - 36.9^\circ) \text{ A}$$

7.5 空芯变压器电路的分析

(两个回路的互感电路的正弦稳态分析^①)

变压器是电子技术中经常用到的部件，它通常有一个初级(原边)线圈和一个次级(副边)线圈。初级线圈接电源形成**初级回路(或原边回路)**，次级线圈接负载形成**次级回路(或副边回路)**，能量通过磁场的耦合由电源传递给负载。

变压器可以用铁芯(称为**铁芯变压器**)，也可以不用铁芯(称为**空芯变压器**)。铁心变压器的耦合系数可接近1，属于紧耦合；空心变压器的耦合系数则较小，属于松耦合。

变压器是利用电磁感应原理制成的，可以用耦合电感来构成它的模型。这一模型常用于分析空芯变压器电路。本节说明这类电路的正弦稳态分析方法。

^①两个回路由耦合电感相联系。

第七章 耦合电感与理想变压器

当变压器磁芯工作在线性区时，其电路模型如图。其中 R_1 、 R_2 分别为变压器初级、次级绕组的电阻， Z_L 为负载阻抗。

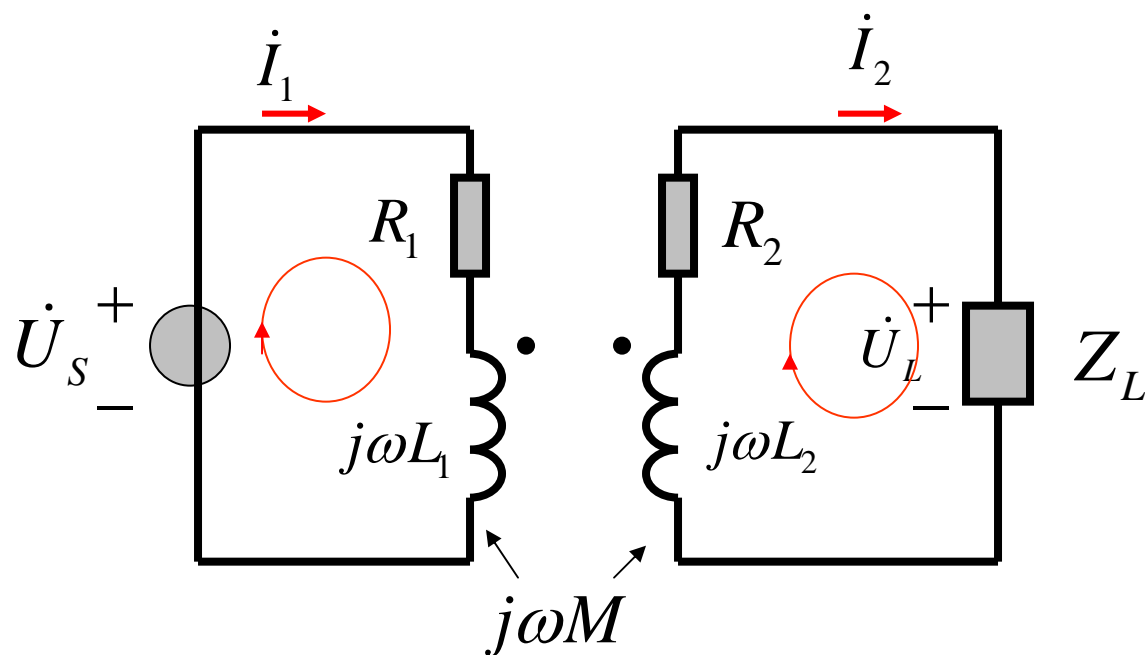


图7.5-1 空芯变压器电路模型
(两个回路的互感电路)

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_{L2} = -j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$



一、方程法(回路法)分析:

由KVL, 得

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_s \\ -j\omega M \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L) \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.5-1)$$

$$\begin{aligned} \text{令} \quad Z_1 &= R_1 + j\omega L_1 \quad (\text{变压器原边回路阻抗}) \\ Z_2 &= R_2 + j\omega L_2 + Z_L \quad (\text{变压器副边回路阻抗}) \end{aligned} \quad (7.5-2)$$

则网孔方程为

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_s \\ -j\omega M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.5-3)$$

第七章 耦合电感与理想变压器

可以解出

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_s & -j\omega M \\ 0 & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & Z_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{U}_s}{Z_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2}} \\ \dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_2} = \frac{j\omega M \frac{\dot{U}_s}{Z_1}}{Z_2 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_1}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (7.5-4) \\ (7.5-5) \end{array}$$

式中： $\frac{\omega^2 M^2}{Z_2}$ 是副边折算到原边的引入阻抗；

$\frac{\omega^2 M^2}{Z_1}$ 是原边折算到副边的引入阻抗；

$j\omega M \frac{\dot{U}_s}{Z_1}$ 则是副边的开路电压。

二、等效法(初级、次级等效电路):

1、初级等效电路

从式(7.5-4)可得由电源端看进去的输入阻抗为,

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = Z_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2} = Z_1 + Z_{1f} \quad (7.5-6)$$

由此可见, 输入阻抗由两部分构成:

$Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ 即初级回路阻抗;

$Z_{1f} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2}$ 次级回路在初级回路中的反映阻抗, 其大小等于 $(\omega M)^2$ 除以次级回路阻抗。

第七章 耦合电感与理想变压器

当 $\dot{I}_2 = 0$ 时，亦即次级开路时， $Z_{in} = Z_1$ ；当 $\dot{I}_2 \neq 0$ 时，在输入阻抗中即增加了反映阻抗这一项。这就是说，次级回路对初级回路的影响可以用反映阻抗来计及。因此，由电源端看进去的等效电路，亦即初级等效电路如图8.5-2所示。

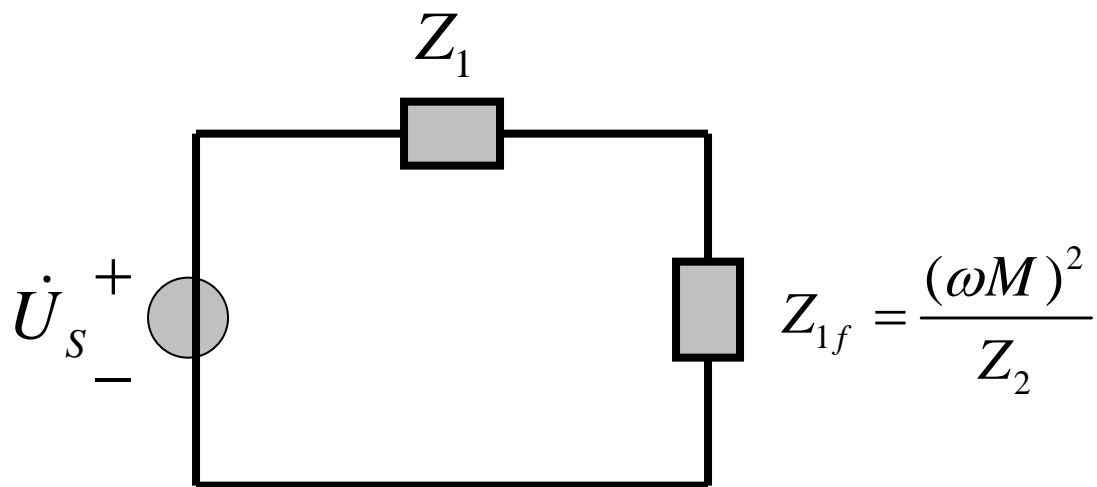


图 7.5-2 初级等效电路

当我们只需求解初级电流时，可利用这一等效电路迅速求得结果。

2、次级等效电路

从式(7.5-5)第一个等号可见,

$$\dot{i}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_2} \quad (7.5-7)$$

等效电路如下,

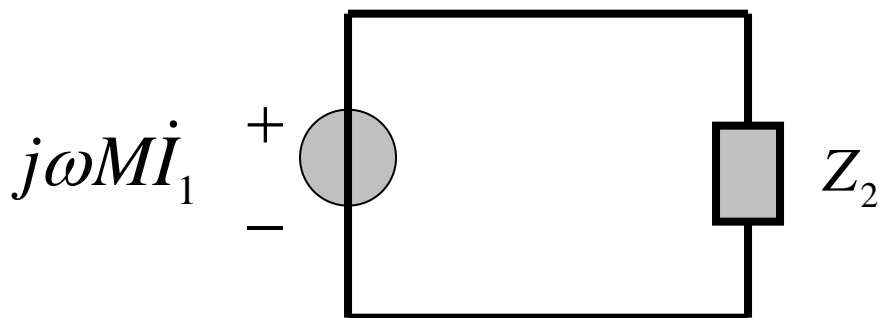


图 7.5-3 次级等效电路

3、次级戴维宁等效电路

从式(7.5-5)第二个等号可见，

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \frac{\dot{U}_s}{Z_1}}{Z_2 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_1}} = \frac{j\omega M \frac{\dot{U}_s}{Z_1}}{Z_2 + Z_{2f}} = \frac{j\omega M \dot{I}_{10}}{Z_2 + Z_{2f}} \quad (7.5-8)$$

\dot{I}_{10} 是次级断开时的初级电流相量。因而次级回路又可等效如下，

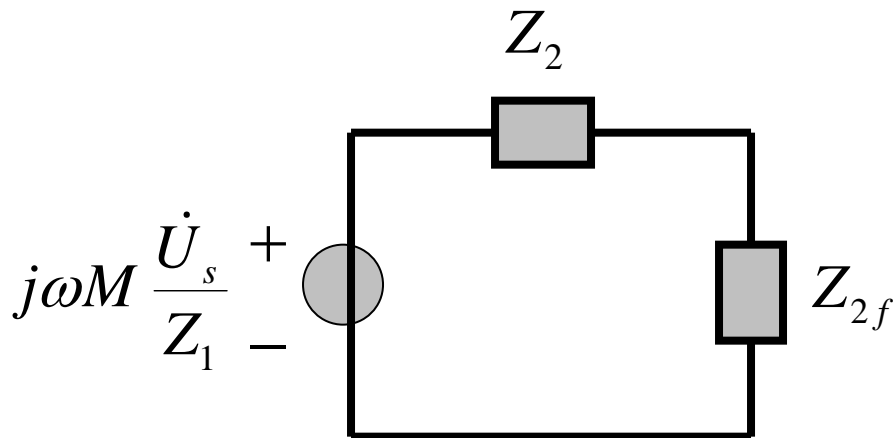


图 7.5-4 次级戴维宁等效电路

第七章 耦合电感与理想变压器

可见，次级等效电路中的阻抗也由两部分构成：次级回路阻抗 Z_2 和初级在次级回路的反映阻抗 Z_{2f} ，这一反映阻抗等于 $(\omega M)^2$ 除以初级回路阻抗 Z_1 。

次级戴维宁等效电路也可由戴维宁定理得到。负载断开后的相量模型如图7.5-5(a)所示。由图可知

$$\dot{U}_{oc} = j\omega M \dot{I}_{10}$$

而

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1}$$

故

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j\omega M \dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{j\omega M \dot{U}_s}{Z_1}$$

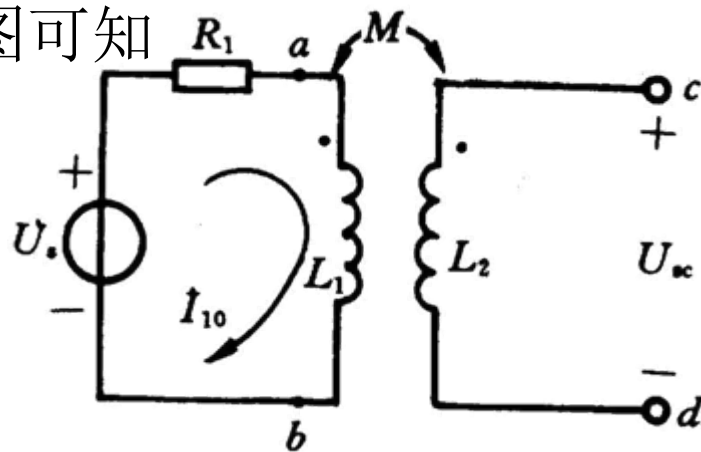


图7.5-5 (a) 求开路电压用图

注意， \dot{I}_{10} 是次级断开时的初级电流相量，计算时不考虑次级对初级的反映阻抗。

第七章 耦合电感与理想变压器

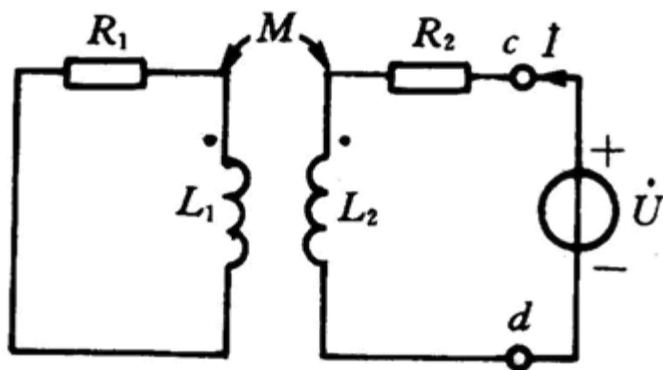
求戴维宁等效电路的等效内阻抗时，把电路中的电压源短路，在断开处施加电源（如图7.5-5b），再求c、d端输入阻抗即可。根据反映阻抗的概念，可知

$$Z_{eq} = \underbrace{(R_2 + j\omega L_2)}_{\text{次级回路阻抗}} + \underbrace{\frac{(\omega M)^2}{Z_1}}_{\text{初级回路对次级回路的反映阻抗}}$$

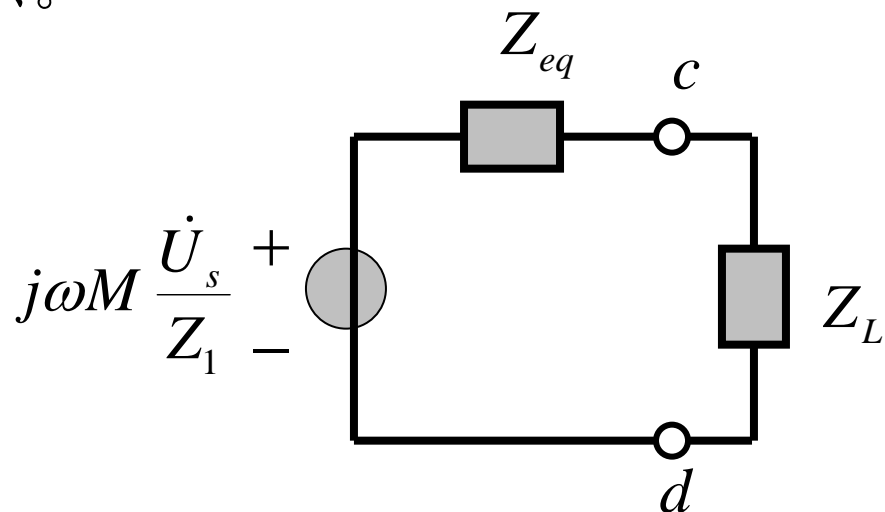
次级回路阻抗

初级回路对次级回路的反映阻抗

故次级等效电路如图8.5-5(c)所示。



(b) 求等效内阻抗用图



(c) 次级等效电路

第七章 耦合电感与理想变压器

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{eq} + Z_L} = \frac{j\omega M \frac{\dot{U}_s}{Z_1}}{Z_2 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_1}} = \frac{j\omega M \frac{\dot{U}_s}{Z_1}}{Z_2 + Z_2'}$$

此式正是(7.5-8)。

当只求次级回路电流时，用反映阻抗的概念可以很快求得。

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.5-2 (例7.4-6) 图7.5-7(a)所示互感电路, 已知 $R_1=8.5\ \Omega$, $\omega L_1=30\ \Omega$, $\frac{1}{\omega C_1}=22.5\ \Omega$, $R_2=60\ \Omega$, $\omega L_2=60\ \Omega$, $\omega M=30\ \Omega$, $\dot{U}_s=15\angle 0^\circ\ \text{V}$ 。求电流 \dot{I}_1, \dot{I}_2 , R_2 上消耗的功率 P_2 。

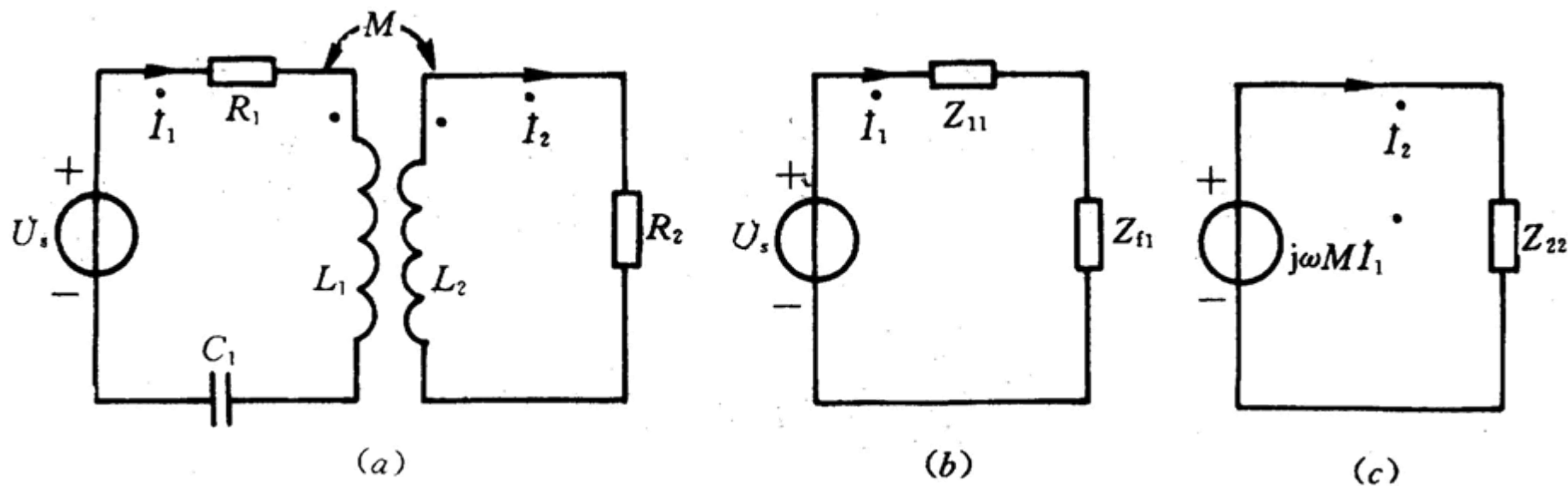


图7.5-7 例7.5-2用图

第七章 耦合电感与理想变压器

解 用初、次级等效电路

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 7.5 + j30 - j22.5 = 7.5 + j7.5\Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 60 + j60\Omega$$

$$Z_1' = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2} = \frac{30^2}{60 + j60} = 7.5 - j7.5\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_1 + Z_1'} = \frac{15\angle 0^\circ}{7.5 + j7.5 + 7.5 - j7.5} = 1\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_2} = \frac{j30 \times 1\angle 0^\circ}{60 + j60} = 0.25\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (0.25\sqrt{2})^2 \times 60 = 7.5 \text{ W}$$

当然也可用[方程法](#)求解。

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.5-3 图7.5-8(a)所示电路, 已知 $\dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$, $L_1 = L_2 = 1 \text{ mH}$, $C_1 = C_2 = 1\,000 \text{ pF}$, $R_1 = 10 \, \Omega$, $M = 20 \, \mu\text{H}$ 。负载电阻 R_L 可任意改变, 问 R_L 等于多大时其上可获得最大功率, 并求出此时的最大功率 $P_{L \max}$ 及电容 C_2 上的电压有效值 U_{C_2} 。

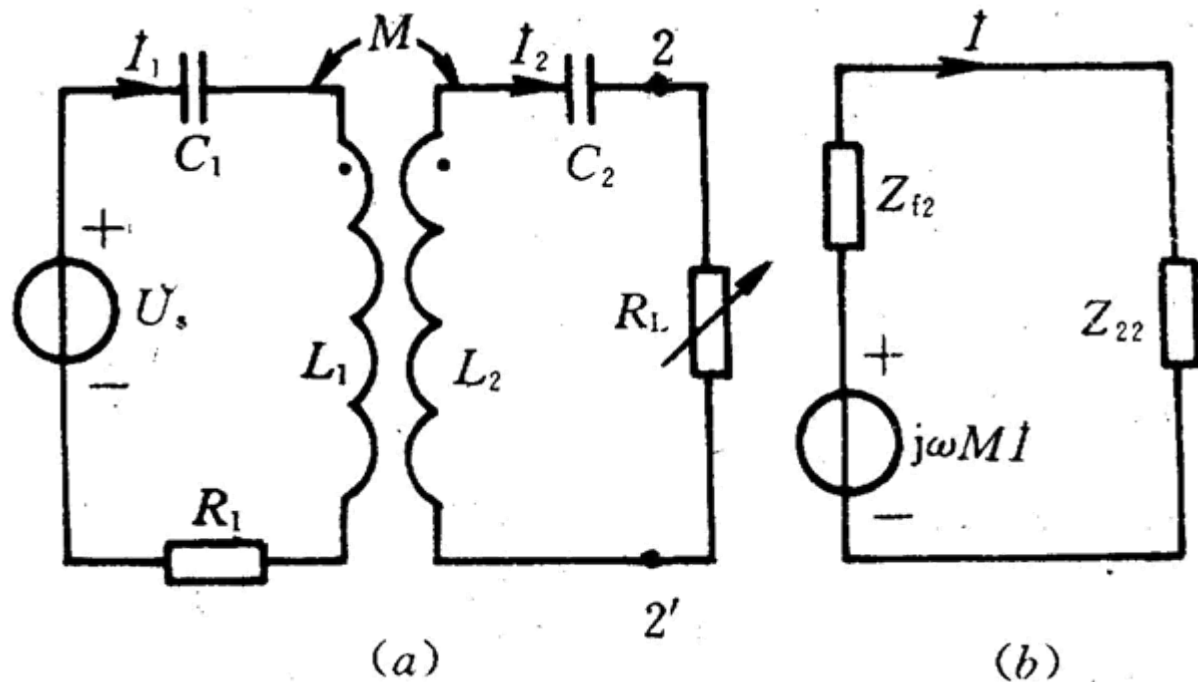


图7.5-8 例7.5-3用图

第七章 耦合电感与理想变压器

解 自22' 处断开 R_L ,

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = 10 + j10^6 \times 1 \times 10^{-3} - j \frac{1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 10\Omega$$

$$Z_2 = j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = j10^6 \times 1 \times 10^{-3} - j \frac{1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 0$$

$$Z_2' = \frac{\omega^2 M^2}{Z_1} = \frac{(10^6)^2 \times (20 \times 10^{-6})^2}{10} = 40\Omega(\text{纯阻})$$

$$Z_{eq} = Z_2 + Z_2' = 0 + 40 = 40\Omega(\text{纯阻})$$

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_s}{Z_1} = \frac{10\angle 0^\circ}{10} = 1\angle 0^\circ A$$

第七章 耦合电感与理想变压器

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_{10}}{Z_{eq} + R_L} = \frac{j10^6 \times 20 \times 10^{-6} \times 1 \angle 0^\circ}{40 + 40} = 0.25 \angle 90^\circ$$

$$P_{L\max} = I_2^2 R_L = (0.25)^2 \times 40 = 2.5W$$

$$U_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} I_2 = \frac{1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} \times 0.25 = 250V$$

当然也可用方程法求解。

7.6 理想变压器

实际变压器是一种利用磁耦合原理实现能量和信号传输的多端电路元件，它在各种电气及电子系统中有着广泛的应用。为了建立实际变压器的电路模型，引入理想变压器(ideal transformer)元件。

一. 理想变压器的三个理想条件

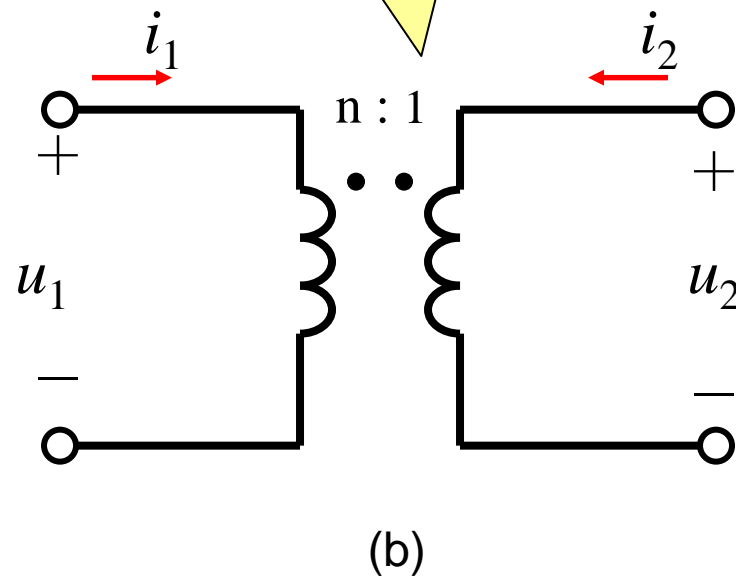
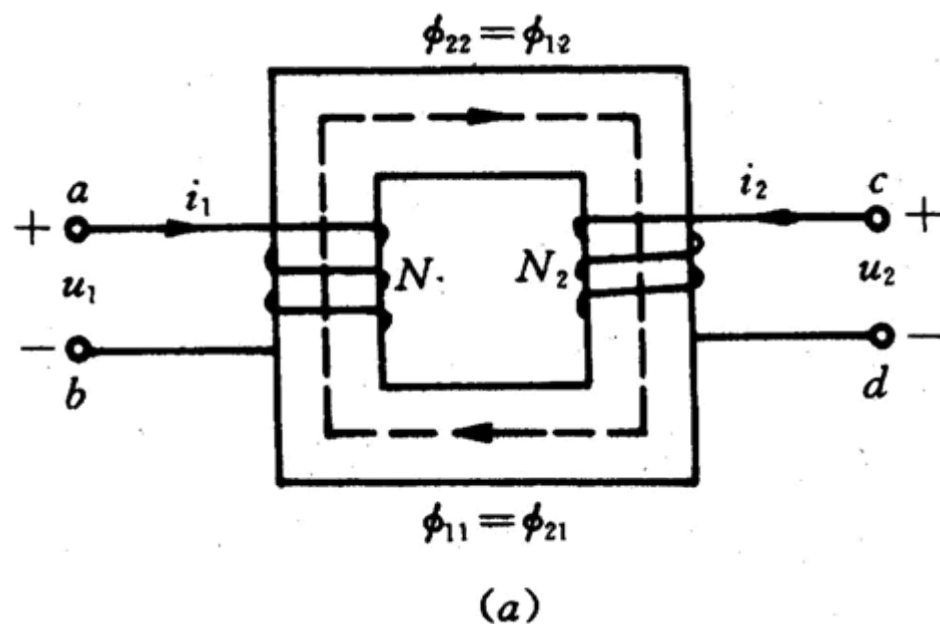
理想变压器多端元件可以看作为互感多端元件在满足下述3个理想条件极限演变而来的。

条件1：耦合系数 $k=1$ ，即全耦合。

条件2：自感系数 L_1 、 L_2 无穷大但 L_1/L_2 等于常数。由(8.1-10)式并考虑条件1，可知 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ 也为无穷大。此条件可简说为参数无穷大。

条件3：无损耗。

二. 理想变压器的主要特性



理想变压器与耦合电感元件的符号相同(这是由于实际变压器常用耦合线圈实现), 但它只有唯一的一个参数--- n 。

图 7.6-1 变压器示意图及其电路符号

第七章 耦合电感与理想变压器

设 i_1 、 i_2 从同名端流入且 u_1 、 i_1 和 u_2 、 i_2 取关联参考方向，

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= N_1\phi_{11} + N_1\phi_{12} = N_1(\phi_{11} + \phi_{12}) \\ \psi_2 &= N_2\phi_{22} + N_2\phi_{21} = N_2(\phi_{22} + \phi_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (7.6-1)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11} + \phi_{12} &= \phi_{11} + \phi_{22} = \phi \\ \phi_{22} + \phi_{21} &= \phi_{22} + \phi_{11} = \phi \end{aligned} \right\} \quad (7.6-2)$$

则初、次级磁通链分别为，

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= N_1\phi \\ \psi_2 &= N_2\phi \end{aligned} \right\} \quad (7.6-3)$$

1. 变压关系

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

或

$$u_1 = nu_2$$

(7.6-4)

$n = \frac{N_1}{N_2}$ 称为**匝数比**(turns ratio)或**变比**(transformation ratio)。

2. 变流关系

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (7.6-5)$$

设电流初始值为零并对(7.6-5)式两端作0~ t 的积分, 得

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^t u_1(\xi) d\xi - \frac{M}{L_1} i_2(t)$$

$$\frac{M}{L_1} = \frac{\frac{N_2 \phi_{21}}{i_1}}{\frac{N_1 \phi_{11}}{i_1}} = \frac{N_2 \phi_{11}}{N_1 \phi_{11}} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{而 } L_1 \rightarrow \infty$$

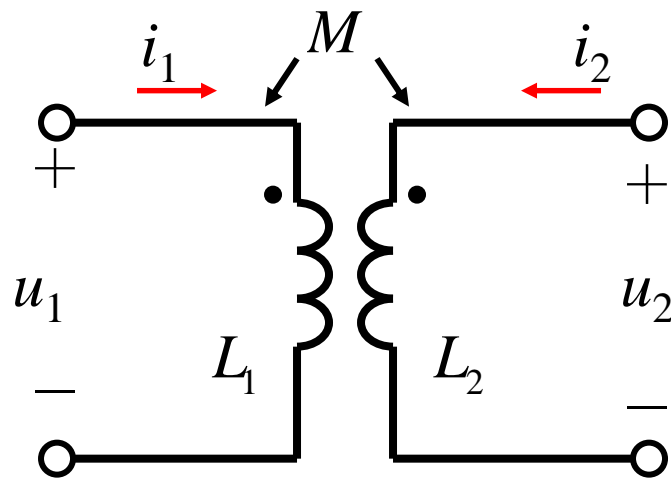


图7.6-2 变流关系

第七章 耦合电感与理想变压器

故
$$i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_2(t)$$

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n}$$

或

$$i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) \quad (7.6-6)$$

式(7.6-4)和(7.6-6)即理想变压器的伏安特性(VCR)。从VCR可见：

理想变压器次级短路相当于初级亦短路；次级开路相当于初级亦开路。

第七章 耦合电感与理想变压器

功率:
$$\begin{aligned} p(t) &= u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \\ &= u_1(t)i_1(t) + \frac{1}{n}u_1(t)(-ni_1(t)) = 0 \end{aligned} \quad (7.6-7)$$

理想变压器不消耗能量，也不贮存能量，所以它是不耗能、不贮能的无记忆多端电路元件。

在正弦稳态下，理想变压器VCR可写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{N_1}{N_2} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 &= -\frac{N_2}{N_1} \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.6-8)$$

$$\bar{S} = \dot{U}_1 \dot{I}_1^* + \dot{U}_2 \dot{I}_2^* = 0 \quad (7.6-9)$$

3. 变换阻抗关系

$$\dot{U}_1 = \frac{N_1}{N_2} \dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{N_2}{N_1} \dot{I}_2$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\frac{N_1}{N_2} \dot{U}_2}{-\frac{N_2}{N_1} \dot{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right)$$

$$Z_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L = n^2 Z_L$$

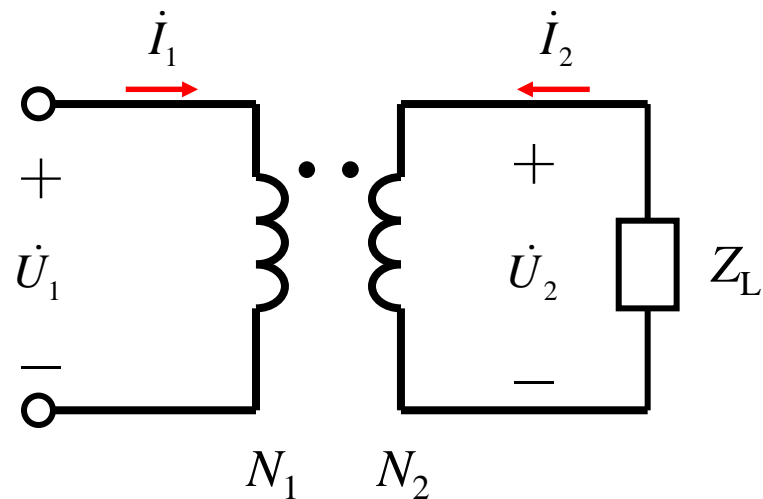


图7.6-3 推导理想变压器变换阻抗关系用图

(7.6-10)

第七章 耦合电感与理想变压器

利用调节变压器的匝数比可实现阻抗匹配。在功率放大电路中，一般负载 Z_L 是固定的，不能随意改变，为了提高输出功率，采用变压器耦合，将实际负载 Z_L 变成所期望的值 $n^2 Z_L$ ，调节 n 容易实现阻抗匹配。（有时会有两个 n 值满足匹配条件，理论上都可以。工程上一般取较小的 n ，这样匝数少，节省铜线材料。如习题10-19）

另外，注意这里的匹配由于 n_2 使得 Z_L 模改变来达到匹配，所以属于模匹配的情况。如果想要负载得到最大功率，应该调节负载实部、虚部，达到共扼匹配。

小结：

- (1) 理想变压器的3个理想条件： 全耦合、 参数无穷大、 无损耗。
- (2) 理想变压器的3个主要性能： 变压、变流、变阻抗。
- (3) 理想变压器的变压、变流关系适用于一切变动电压、电流情况，即便是直流电压、电流，理想变压器也存在上述变换关系。
- (4) 理想变压器在任意时刻吸收的功率为零，这说明它是不耗能、不贮能、只起能量传输作用的电路元件。

第七章 耦合电感与理想变压器

由于变压器次级一般接负载，次级对负载来说是电源，故常选参考方向如图所示。在这样的参考方向下，VCR为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= nu_2 \\ i_1(t) &= -\frac{1}{n}i_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.6-11)$$

两式相乘，得

$$u_1 i_1 = u_2 i_2 \quad or \quad p_1 = p_2$$

即初级输入功率等于次级发出功率。

阻抗变换关系不变。

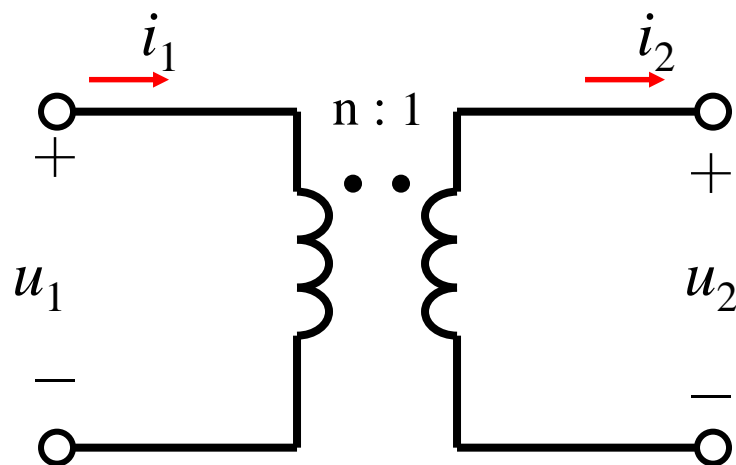


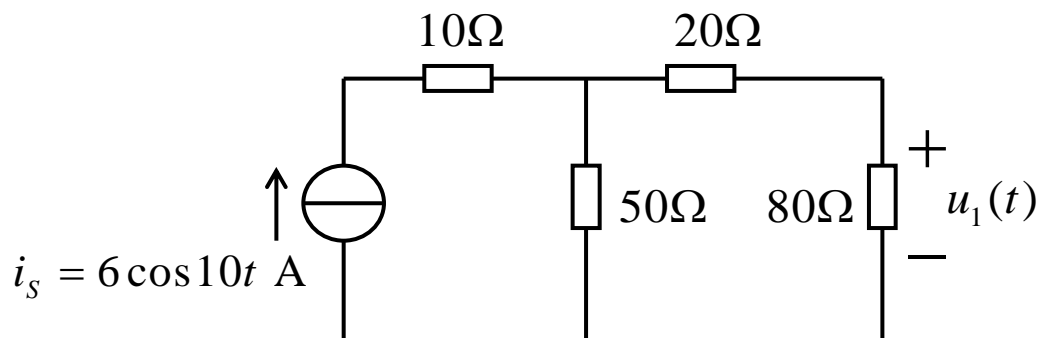
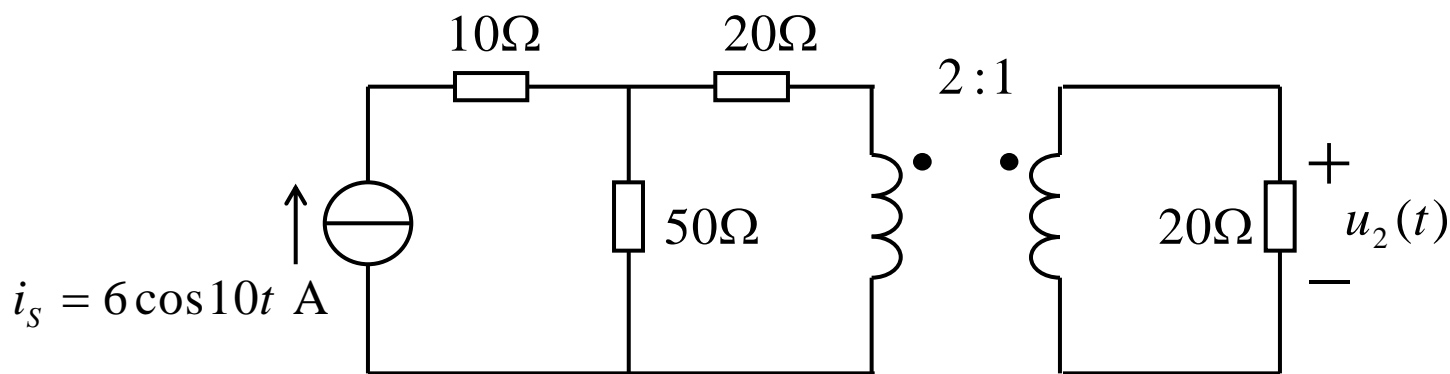
图7.6-4 另一种常用参考方向

7.7. 含理想变压器电路的分析

一. 含理想变压器的电阻电路分析

1、理想变压器的阻抗变换：

例1、电路如图a所示，求电压 $u_2(t)$ 。



第七章 耦合电感与理想变压器

提示：分析含理想变压器的电路时，常利用阻抗原一副边折算的方法，将电路等效为无耦合电路进行求解、分析。

解：将图a电路副边电阻折算到原边，得等效电路图b，由此可得

$$u_1(t) = i_s \times \frac{50}{50 + 20 + 80} \times 80 = 160 \cos 10t \text{ V}$$

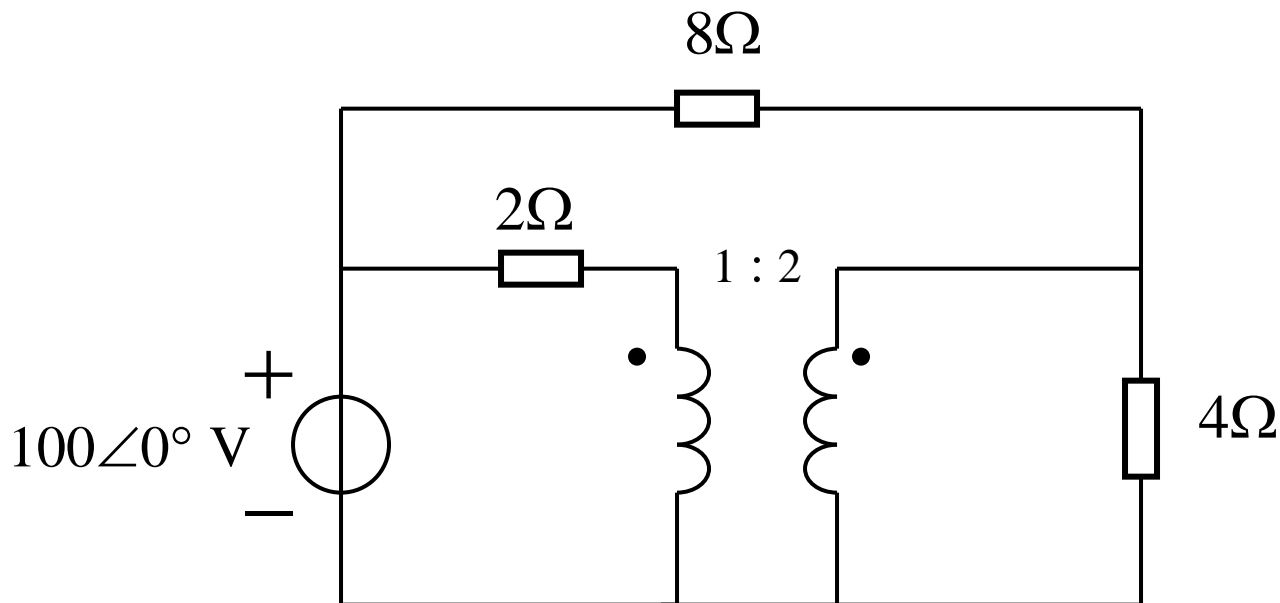
利用理想变压器特性，可知

$$u_2(t) = \frac{1}{2} u_1(t) = 80 \cos 10t \text{ V}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

2、含理想变压器电路的一般分析方法：

例2、电路如图a所示，求 $4\ \Omega$ 电阻获得的功率。

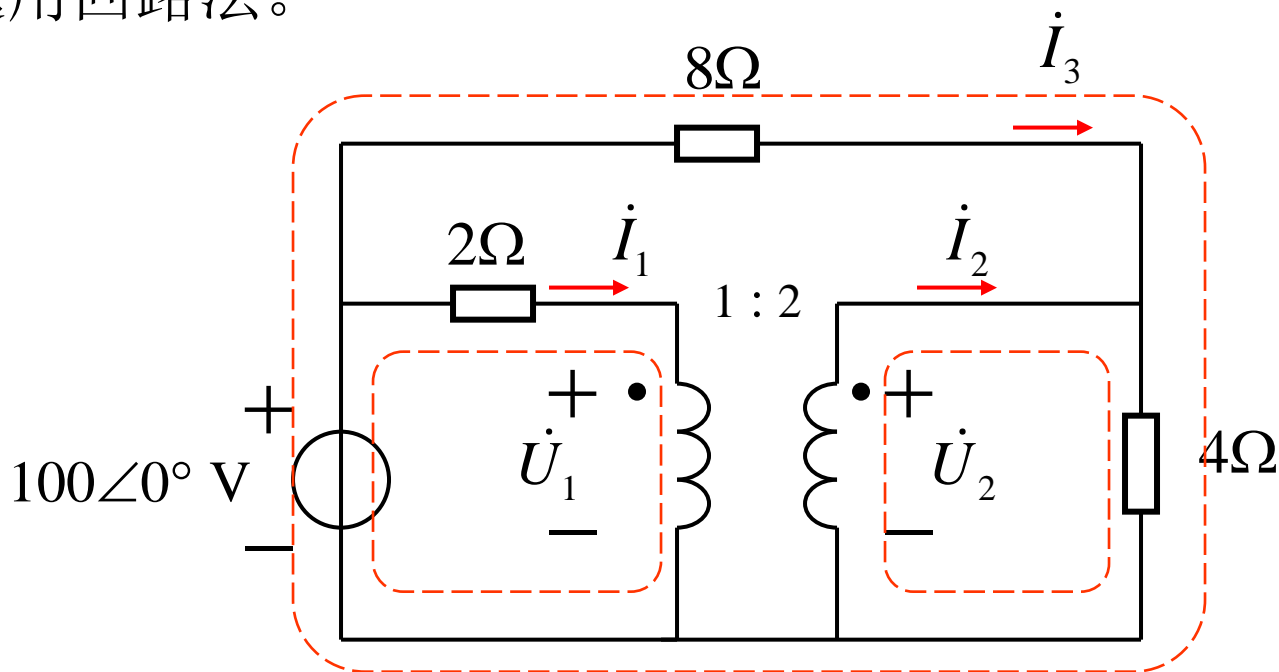


提示：图示电路不是初级、次级独立回路，故不能用阻抗变换方法。

对于含理想变压器电路，可利用电路的支路法、网孔/回路法、节点法等进行求解分析，再加上理想变压器VCR关系。

第七章 耦合电感与理想变压器

解 选用回路法。



列回路方程：

$$\begin{cases} 2\dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 100\angle 0^\circ \\ 4\dot{I}_2 + 4\dot{I}_3 = \dot{U}_2 \\ 12\dot{I}_3 + 4\dot{I}_2 = 100\angle 0^\circ \end{cases}$$

列变压器VCR关系方程：

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = 2\dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 = 2\dot{I}_2 \end{cases}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

联立解方程可得

$$\dot{I}_1 = 31.25 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 15.625 \angle 0^\circ \text{ A}$$

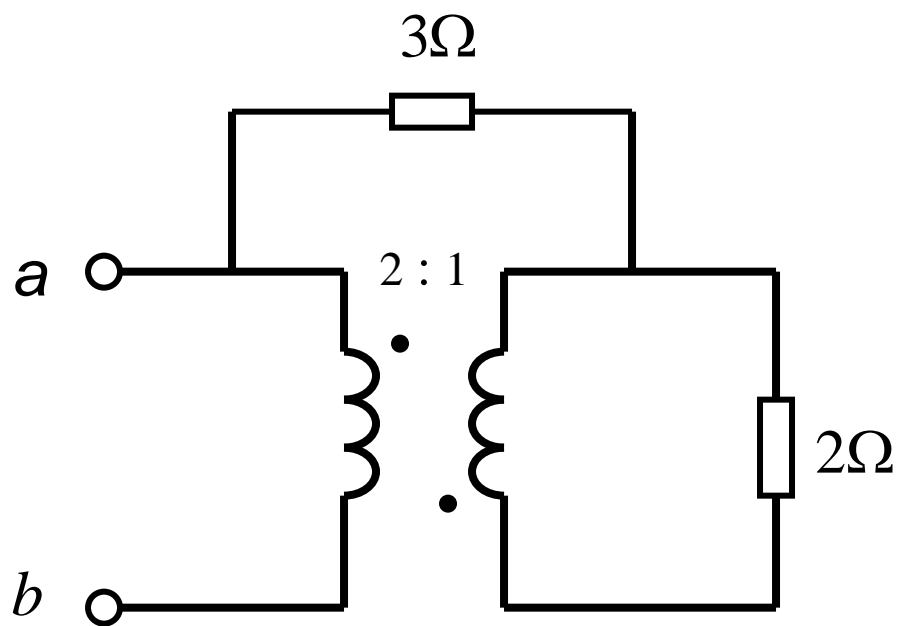
$$\dot{I}_3 = 3.125 \angle 0^\circ \text{ A}$$

通过 4Ω 电阻的电流 $\dot{I} = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 18.75 \angle 0^\circ \text{ A}$

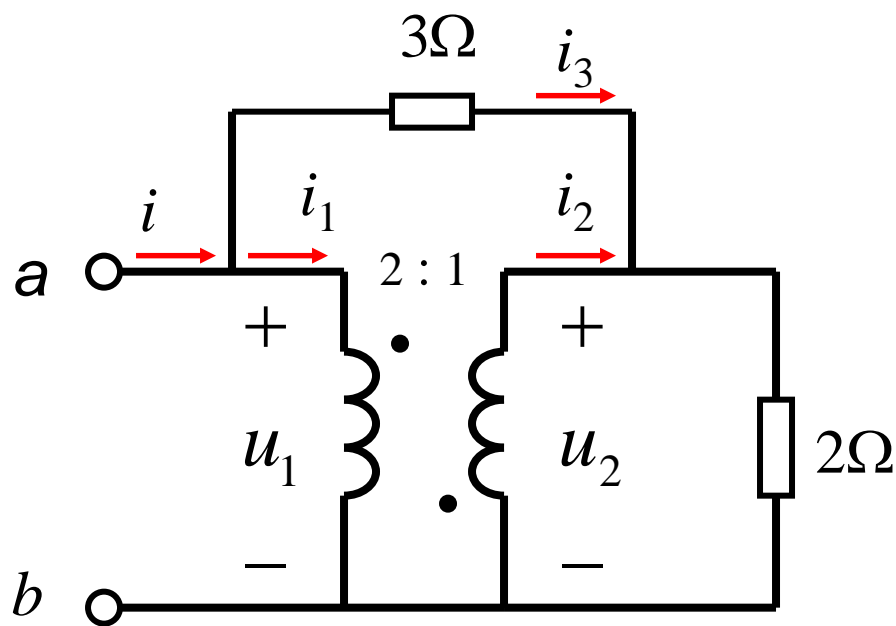
则 4Ω 电阻获得功率 $P = I^2 R = 18.75^2 \times 4 = 1406.25 \text{ W}$

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.6-2 图7.6-6 (a)、(b) 电路, 求 ab 端等效电阻 R_{ab} 。



(a)



(b)

图7.6-6 例7.6-2用图

第七章 耦合电感与理想变压器

提示：a、b两图输入电阻的不同是因为变压器下端是否短接决定了 3Ω 电阻上是否有电流流过。

解：

(1) 对于图a，根据广义基尔霍夫电流定律可知流过 3Ω 电阻支路电流为0，所以该支路可以断开。因此，利用电阻变换可知

等效变换法

$$R_{ab} = 2^2 \times 2 = 8\Omega$$

(2) 对于图b，变压器下端短接，此时 3Ω 电阻支路有电流流过，不能再断开，采用加压求流法求输入电阻。

方程法

第七章 耦合电感与理想变压器

节点方程

$$\begin{aligned} n_1 \quad & \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 = i - i_1 \\ n_2 \quad & -\frac{1}{3}u_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)u_2 = i_2 \end{aligned}$$

变压器VCR

$$\begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ i_1 = \frac{1}{2}i_2 \end{cases}$$

附加

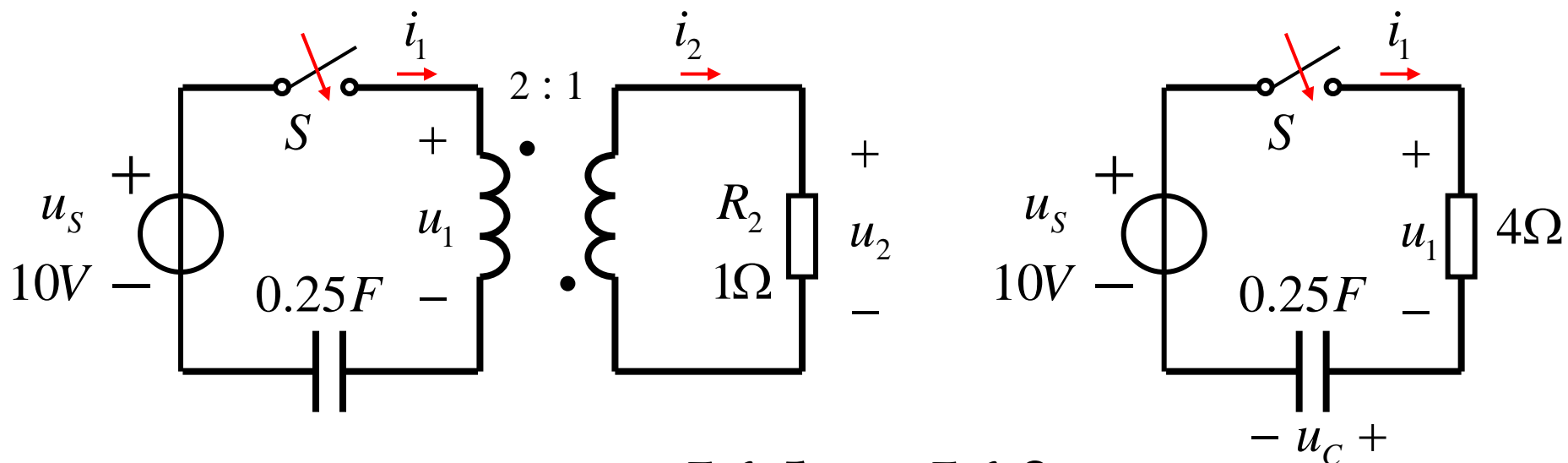
$$u_1 = u$$

$$R_{ab} = \frac{u}{i} = 4.8\Omega$$

二. 含理想变压器电路的动态电路分析

理想变压器本身并不是动态元件，这里讨论如何利用其VCR分析含有理想变压器的动态电路。

例7.6-1 图7.6-5(a)所示电路，理想变压器匝比为2，开关S闭合前电容上无储能， $t=0$ 时开关S闭合，求 $t \geq 0_+$ 时的电压 $u_2(t)$ 。



第七章 耦合电感与理想变压器

解:

$$R_{in} = n^2 R_2 = 2^2 \times 1 = 4\Omega$$

$$u_C(0_+) = 0, u_C(\infty) = 10V, \tau = 1s$$

$$u_C(t) = 10[1 - e^{-t}]V$$

$$i_1(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 0.25 \times 10e^{-t} = 2.5e^{-t}A$$

$$i_2(t) = -ni_1(t) = -2 \times 2.5e^{-t} = -5e^{-t}A$$

$$u_2(t) = R_2 i_2(t) = 1 \times (-5e^{-t}) = -5e^{-t}V \quad t \geq 0_+$$

三. 含理想变压器电路的正弦稳态电路分析

例7.6-3 图7.6-7(a)所示正弦稳态电路，已知 $U_s = 8V$ $\omega = 1rad/s$

(1) 若变比 $n=2$, 求电流 I_1 以及 R_L 上消耗的平均功率 P_L ;

(2) 若匝比 n 可调整，问 $n=?$ 时可使 R_L 上获最大功率，并求出该最大功率 $P_{L\max}$ 。

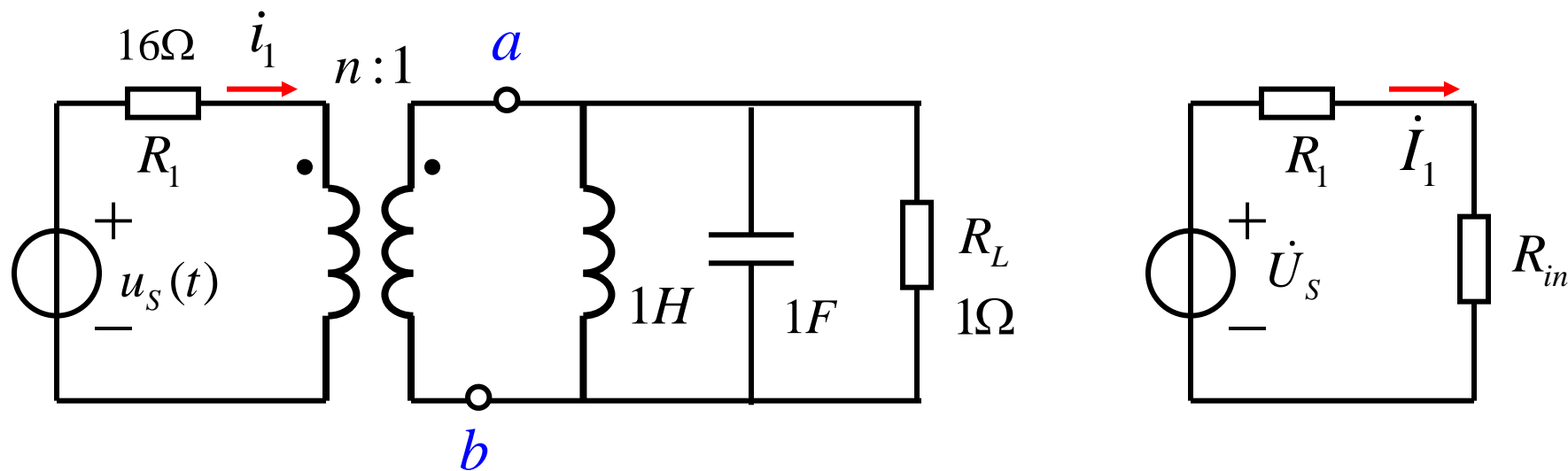


图7.6-7 例7.6-3用图

第七章 耦合电感与理想变压器

解 (1)

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{1}{\frac{1}{R_L} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{1} - j\frac{1}{1 \times 1} + j1 \times 1} = 1\Omega$$

$$Z_{in} = n^2 Z_{ab} = 2^2 \times 1 = 4\Omega$$

$$R_{in} = Z_{in} = 4\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + R_{in}} = \frac{8\angle 0^\circ}{16 + 4} = 0.4\angle 0^\circ A$$

$$P_L = I_1^2 R_{in} = 0.4^2 \times 4 = 0.64W$$

(2) 改变变比 n 以满足最大输出功率条件

$$R_{in} = n^2 R_L$$

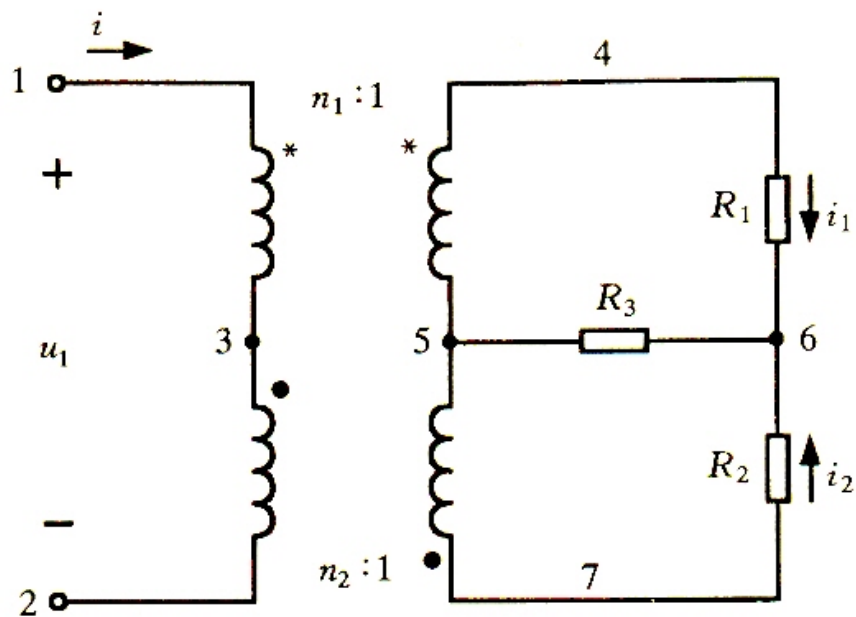
根据匹配条件，当 $R_{in}=R_1$ 时，负载获得最大功率。故有

$$n = \sqrt{\frac{R_1}{R_L}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = 4$$

$$P_{L\max} = \frac{U_s^2}{4R_1} = \frac{8^2}{4 \times 16} = 1W$$

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.6-4 求如图电路的输入电阻。



7.8. 含理想变压器电路的分析2

—初次级阻抗搬移和初次级等效电路

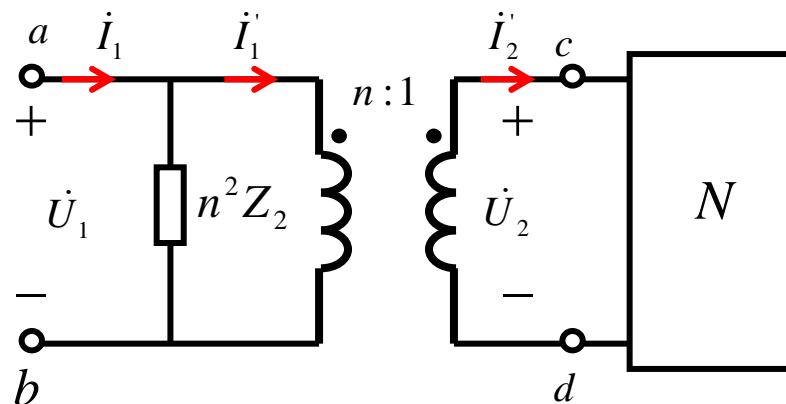
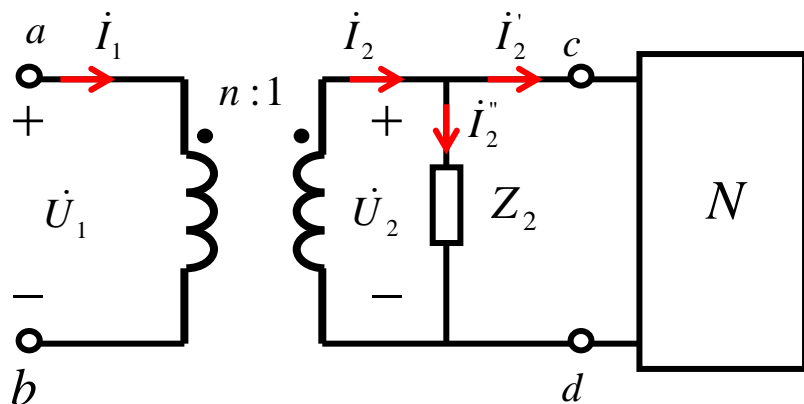
第七章 耦合电感与理想变压器

1、并接阻抗从次级向初级等效搬移：

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{n}\dot{I}_2 = \frac{1}{n}(\dot{I}_2'' + \dot{I}_2') = \frac{1}{n}\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_2} + \dot{I}_2'\right) = \frac{\dot{U}_1}{n^2 Z_2} + \dot{I}_1'$$

$$\dot{I}_1' = \frac{1}{n}\dot{I}_2'$$



若次级 c 、 d 端开路，这时 $\dot{I}_2' = 0$ ，由理想变压器的伏安关系，可得 $\dot{I}_1' = 0$ （理想变压器次级开路等同于初级开路）。此时，初级输入阻抗为

$$Z_{ab} = n^2 Z_2$$

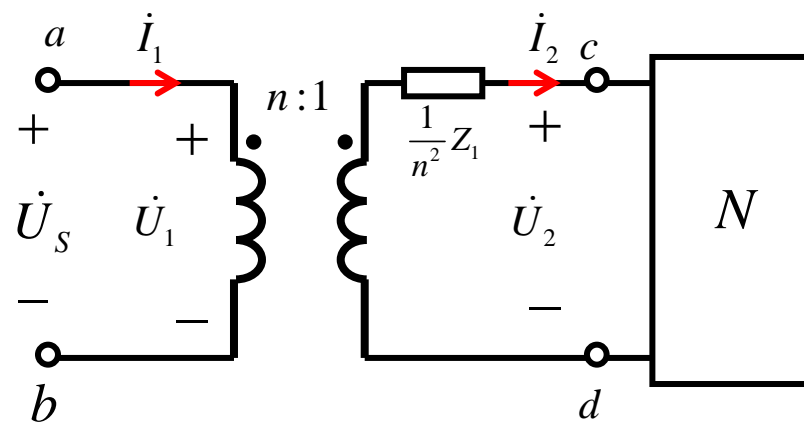
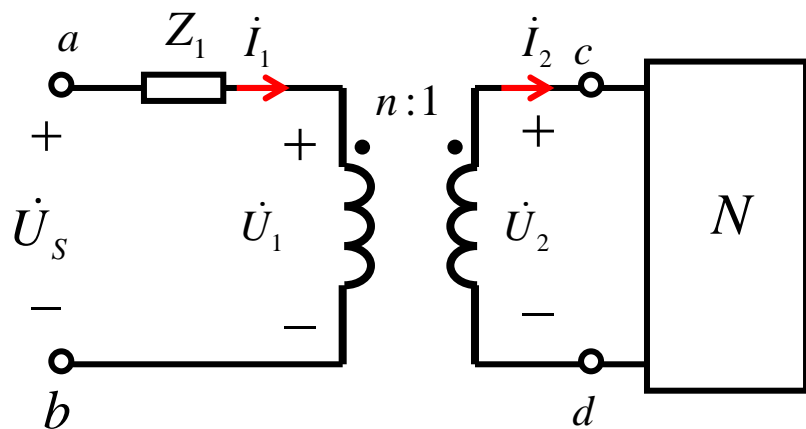
第七章 耦合电感与理想变压器

必须指出，从次级搬到初级，阻抗增加了 n^2 倍，而不一定相当于元件值增加了 n^2 倍。若 Z_2 为电阻或电感时，阻抗增加 n^2 倍与相当于元件值增加 n^2 倍一致；但当 Z_2 为电容时，即 $z_2 = \frac{1}{j\omega C}$ ，则搬移到初级为 $n^2 \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega \frac{C}{n^2}}$ 相当于电容元件值缩小 n^2 倍。

2、串接阻抗从初级向次级等效搬移：

$$\dot{I}_2 = n\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n}\dot{U}_1 = \frac{1}{n}(\dot{U}_s - Z_1\dot{I}_1) = \frac{1}{n}(\dot{U}_s - Z_1\frac{\dot{I}_2}{n}) = \frac{1}{n}\dot{U}_s - \frac{Z_1}{n^2}\dot{I}_2$$



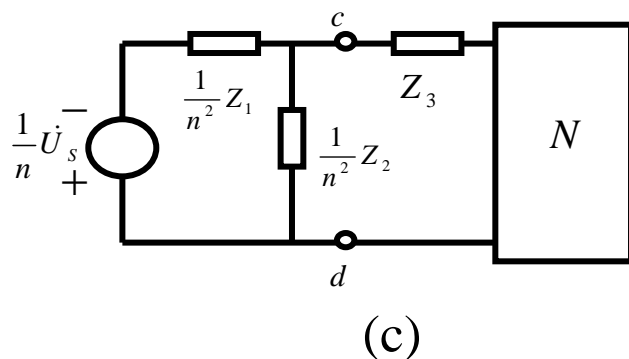
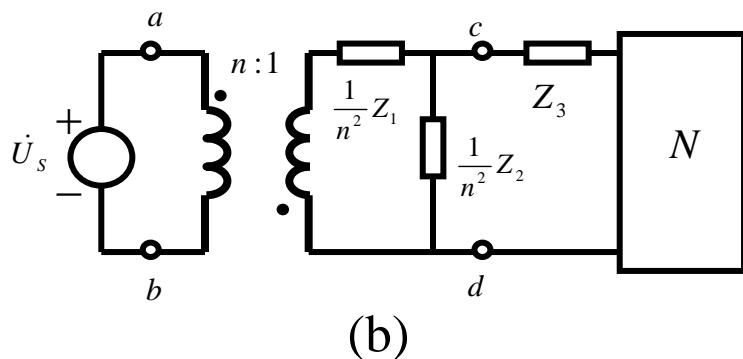
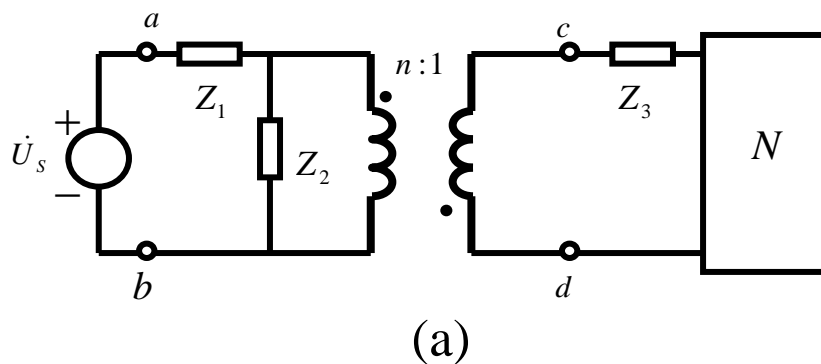
第七章 耦合电感与理想变压器

利用上述两种方法，初次级的阻抗可以来回搬移。从次级搬移到初级时阻抗要乘以 n^2 ；反之，从初级搬移到次级时阻抗要除以 n^2 ；且串、并联关系保持不变。

第七章 耦合电感与理想变压器

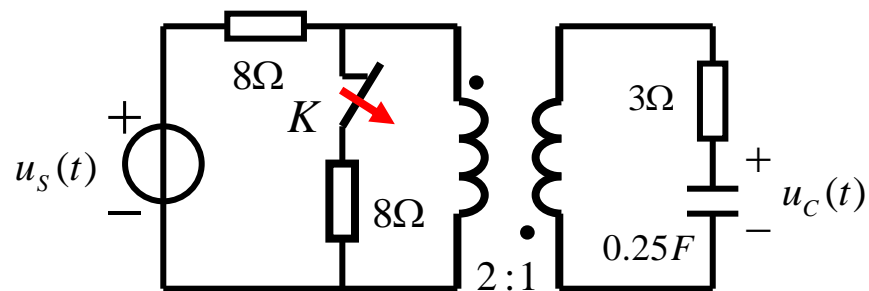
3、电压源在初级和次级之间的等效搬移：

应该指出，阻抗来回搬移与同名端无关；而电源来回搬移则与同名端有关。如图(a)所示电路可搬移成为图(b)和(c)所示电路，这样做的结果能使电路得到简化。

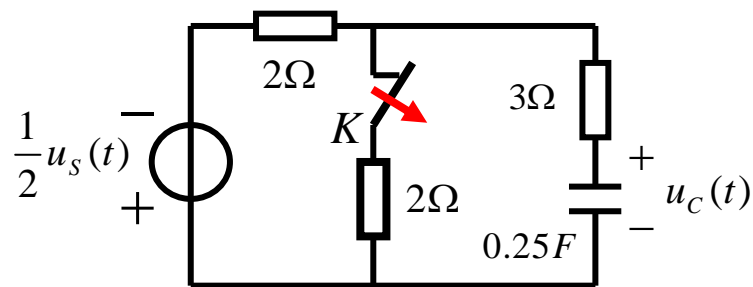


第七章 耦合电感与理想变压器

例7.8-1 含理想变压器电路如图7.8-1(a)所示，在开关K动作之前电路已处于稳定，当 $t=0$ 时，开关K打开。已知 $u_s(t)=50\cos t$ V，试求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 。



(a)



(b)

解 利用理想变压器的阻抗和电源搬移特性，将初级电路全部搬移至次级，可得图b电路。

第七章 耦合电感与理想变压器

当 $t < 0$ 时，用相量法列节点方程，为

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 - j4}\right)\dot{U}_m = -\frac{25}{2}$$

解得

$$\dot{U}_{cm} = \frac{-j4}{3 - j4}\dot{U}_m = \frac{25}{2\sqrt{2}}\angle 135^\circ$$

$$u_C = \frac{25}{2\sqrt{2}}\cos(t + 135^\circ)$$

当 $t = 0^-$ 时， $u_C(0^-) = -\frac{25}{4} = -6.25V = u_C(0^+)$

当 $t > 0$ 时，再用相量法，可得

$$\dot{U}_{cm} = \frac{-j4}{5 - j4}(-25) = 15.62\angle 128.7^\circ V$$

$$u_{Cp}(t) = 15.62\cos(t + 128.7^\circ) V$$

$$u_{Cp}(0^+) = 15.62\cos 128.7^\circ V = -9.76V$$

$$\tau = RC = 5 \times 0.25 = 1.25s$$

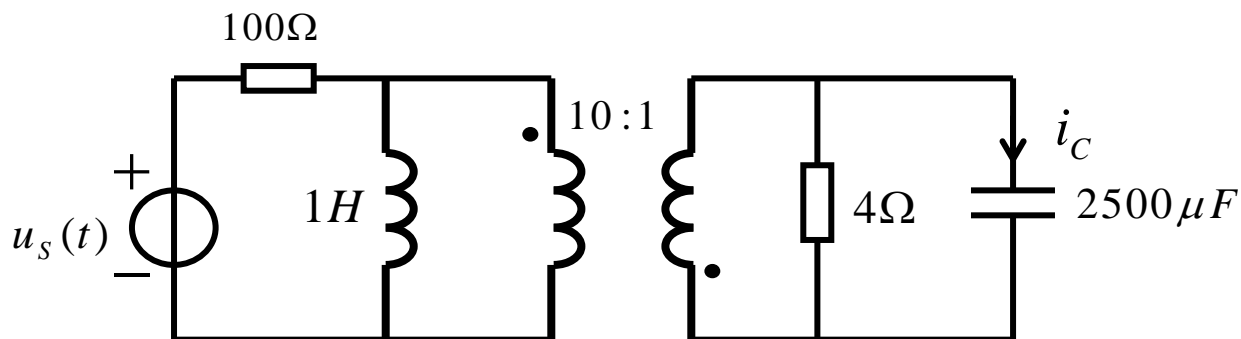
代入式 (5.6-5)，得 $u_C(t) = 15.62\cos(t + 128.7^\circ) + [-6.25 - (-9.76)]e^{4t/5}V$
 $= 15.62\cos(t + 128.7^\circ) + 3.51e^{4t/5}V$

第七章 耦合电感与理想变压器

例7.8-2 如图所示电路，已知正弦电压

$$u_S(t) = 100\sqrt{2} \sin 200t \text{ V}$$

求 $i_C(t)$ 。



$$i_C(t) = -4\sqrt{2} \sin 200t \text{ A}$$

第七章 耦合电感与理想变压器

多个次级线圈的理想变压器:

1、VCR:

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} = \frac{u_3}{N_3} \quad \text{or} \quad u_1 = n_1 u_2 + n_2 u_3$$

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 0 \quad \text{or} \quad i_1 = \frac{1}{n_1} i_2 + \frac{1}{n_2} i_3$$

$$n_1 = \frac{N_1}{N_2}, \quad n_2 = \frac{N_1}{N_3}$$

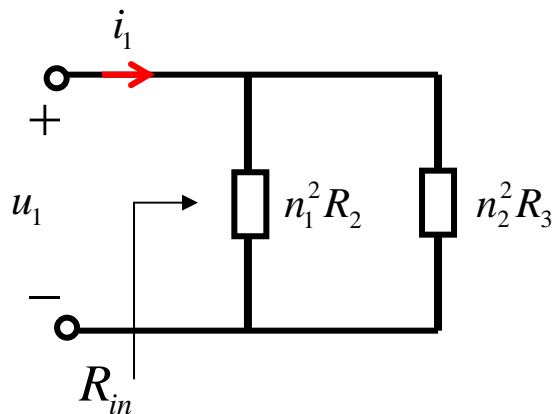
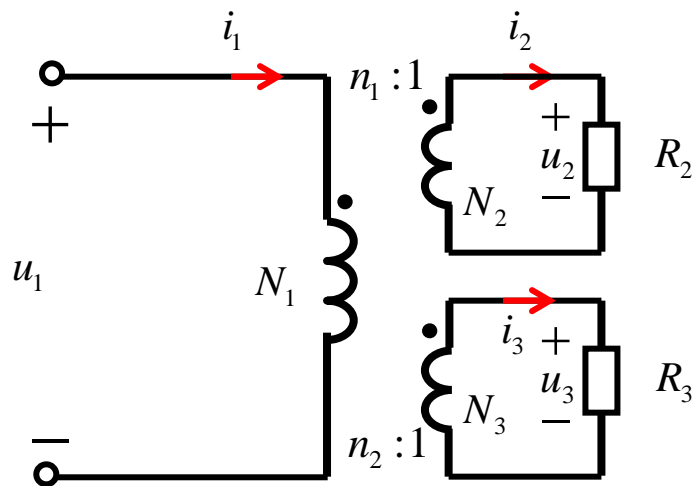
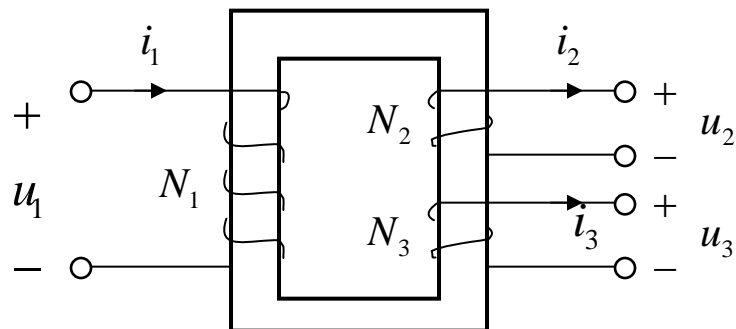
2、阻抗变换:

初级看入的等效电导为

$$G_{in} = \frac{i_1}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2 + \frac{1}{n_2} i_3}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2}{u_1} + \frac{\frac{1}{n_2} i_3}{u_1} = \frac{\frac{1}{n_1} i_2}{n_1 u_2} + \frac{\frac{1}{n_2} i_3}{n_2 u_3} = \frac{1}{n_1^2 R_2} + \frac{1}{n_2^2 R_3}$$

$$R_{in} = \frac{(n_1^2 R_2)(n_2^2 R_3)}{n_1^2 R_2 + n_2^2 R_3}$$

即两个次级阻抗可以先后一个一个搬移到初级去。其等效电路如图c所示。



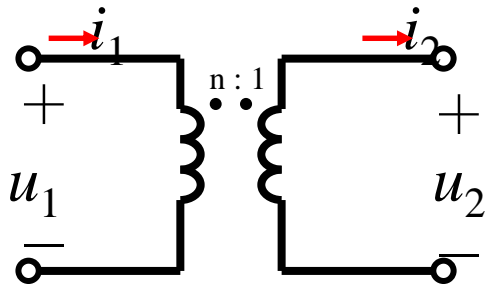
本章小结

一、耦合电感：

$$u = L \frac{di}{dt} + M_1 \frac{di_1}{dt} \text{ (该电感与另1个电感有耦合时)}$$

$$u = L \frac{di}{dt} + M_1 \frac{di_1}{dt} + M_2 \frac{di_2}{dt} + \dots \text{ (该电感与多个电感有耦合时)}$$

二、理想变压器：



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= nu_2 \\ i_1(t) &= \frac{1}{n} i_2(t) \\ Z_{in} &= \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L = n^2 Z_L \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} = \frac{u_3}{N_3} \quad \text{or} \quad u_1 = n_1 u_2 + n_2 u_3$$

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 0 \quad \text{or} \quad i_1 = \frac{1}{n_1} i_2 + \frac{1}{n_2} i_3$$

$$n_1 = \frac{N_1}{N_2}, \quad n_2 = \frac{N_1}{N_3}$$

$$\frac{1}{Z_{in}} = \frac{1}{n_1^2 Z_1} + \frac{1}{n_2^2 Z_2}$$