# 8 多元函数微分

## 二重极限 二元极限 vs. 累次极限; 性质 (复杂关系)

二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 $A$。

推论: 如果 $P$ 以某一特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$, 而 $f(x,y)\to A$, 不能断定函数极限存在。

但是反之，如果不同方式极限不同，则函数极限一定不存在。

Q?: $\forall k\in\mathbb{R}$，当 $y=kx$ 时，$f(x,y)\to A$ 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$? 不对

| | | |
|---|---|---|
| 二重极限存在 | 累次极限存在即相等 | |
| | 累次极限不存在亦可 | $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ |
| 二重极限不存在 | 累次极限存在且相等 | $\frac{xy}{x+y}$ |
| | 累次极限存且不等 | $\frac{x-y}{x+y}$ |
| | 累次极限不存在 | |

例 8.1. 讨论函数在点 $(0,0)$ 的极限

$$(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2};\qquad \frac{xy}{x^2+y^2};\qquad \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

计算函数在点 $(0,0)$ 的累次极限

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\qquad \frac{x^2y}{x^4+y^2};\qquad x\sin\frac{1}{y}$$

## 偏导数 计算, 高阶导数 (vs. 可微, 连续)

链式法则, 隐函数求导 (借助一阶微分形式不变性)

例 8.2. 已知 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, 求 $f_x$, $f_y$, $f_x(1,0)$, $f_y(1,0)$.

已知 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$, 求二阶偏导数.

求 $\frac{dz}{dt}$, 已知 $z=x^y, x=\sin t, y=\cos t$.

求 $z_t, z_s$. 已知 $z=\ln(x^2+y), x=e^{t+s^2}, y=t^2+s$.

例 8.3. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续 (2) $f_x, f_y$ 在 $(0,0)$ 连续

(3) $f$ 在点 $(0,0)$ 可微分 (4) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在

则下列选项中正确的是:

(A) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$ (B) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$

$(C)$ $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$ (D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

例 8.4 (P80-习题 8.3-A-6). 设 $u(x,y)$ 的所有二阶偏导数都连续，且

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)u=0,\qquad u(x,2x)=x,\qquad u_x(x,2x)=x^2$$

试求 $u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,2x)$ 同 8 题

例 8.5. 已知 $u=f(x,y)$ 可微, 求极坐标下的 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

设 $u+v=x+y, \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}$, 求 $du, dv$.

设 $z=e^u\sin v, u=xy, v=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

what if 设 $z=e^x\sin y, u=xy, v=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

例 8.6. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的隐函数, 求 $z_x, z_y$

已知 $\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy-u^2+v^2=0 \end{cases}$ 在 $(1,0,1,1)$ 存在函数关系 $u(x,y), v(x,y)$. 求函数在该点的偏导数.

## 梯度与方向导数 定义及计算

例 8.7. 求 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,2)$ 沿方向 $l$ 的方向导数, 其中 $l$ 的方向角分别为 $60^o, 45^o, 60^o$.

设 $f(x,y)=\frac{|x|^{1/2}|y|^{1/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则 $f_x, f_y$ 存在, 但 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 不存在. $(l=(1,1))$.

## 空间中的曲线与曲面 曲线: 切线、法平面 ∼ 参数方程情形、隐函数情形

曲面: 切平面、法线　　结合位置关系: 平行, 垂直, 成角度

例 8.8. 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 的切线及法平面方程.

求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(3,2,1)$ 的切平面、法线.

例 8.9. 求 $z=xy$ 上的点, 使得该曲面在此点的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$.

## 极值, 最值 无条件极值: 必要条件 + 充分条件; (方法 + 判定) 条件最值: 拉格朗日 (case1,case2) 注意讨论步骤

例 8.10. 设函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$, 讨论极值.

求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在 $D: x^2+y^2+z^2\le 100$ 内的最大值最小值.

例 8.11. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定, 讨论 $z$ 的极值

无条件极值 $f(x,y)$ (书 P109)

step i. 求驻点 $f_x=0, f_y=0$

step ii. 利用二阶导数判定:
$f_{xx}=A, f_{xy}=B, f_{yy}=C$

a. $AC>B^2$ 时, 必然是极值点

b. $AC<B^2$ 时, 必然不是极值点

c. $AC=B^2$ 时, 结论不一定

条件极值 (最值)

case 1. $\max f(x,y)$ s.t. $\varphi(x,y)=0$;
$\max f(x,y,z)$ s.t. $F(x,y,z)=0$;
$\max f(x,y,z)$ s.t. $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
拉格朗日乘子法 $L=f+\lambda\varphi; L=f+\lambda F+\mu G$

case 2. $\max f(x,y)$ s.t. $(x,y)\in D \sim \partial D\varphi(x,y)=0$;
$\max f(x,y,z)$ s.t. $(x,y,z)\in D$

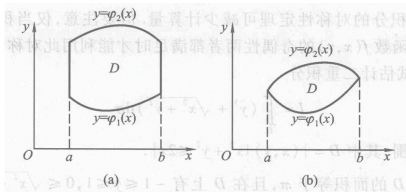
step 1 区域 $D$ 内的无条件极值的驻点 1

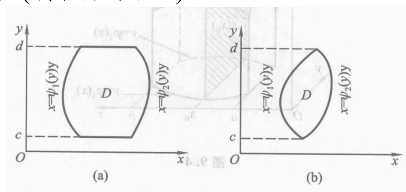
step 2 区域边界 $\partial D$ 上的条件极值的驻点 2

step 3 取值比较

# 9 重积分

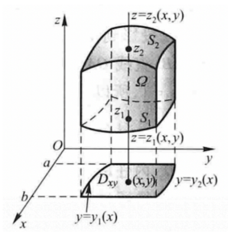
- 直角坐标系, 积分换序, 积分换元(常用, 规范) 性质: 对称性 (轴, 中, 轮)
  二重积分: $X$-型积分; $Y$-型积分 (特点及处理)

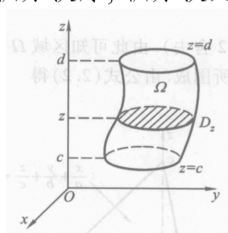



- 初等函数的不定积分, 分部积分, 一些常用技巧 (积分换元)

- 三重积分: 直角坐标系, 积分换序, 积分换元 (柱, 球)




- 重积分的应用: 曲面面积 $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$

例 9.1.
- 计算 $\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma$, $D$ 是由 $y=x, x=-1, y=1$ 所围区域.
- 计算 $\iint_D xy\,d\sigma$, $D$ 为抛物线 $y^2=x$ 和直线 $y=x-2$ 所围区域.
- (*) 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,d\sigma$, $D$ 是由 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所围区域.
- 求曲面 $z_1=2-x^2-y^2$ 与 $z_2=x^2+y^2$ 所围立体体积

例 9.2 (积分计算). 极坐标 计算 $I=\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$. 其中 $D: x^2+(y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$.

一般坐标 $\iint\limits_D (x+y)^2(x-y)^2\,d\sigma$, 其中 $D$ 为 $x+y=1, x+y=3, x-y=-1, x-y=1$ 所围区域.

例 9.3. 直角坐标系 $\iiint\limits_\Omega z\,dV$, 其中 $\Omega$ 由三个坐标平面以及 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, (a,b,c>0)$ 所围立体.

柱面坐标 $\iiint\limits_\Omega z\,dV$, 其中 $\Omega$ 由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 所围.

球面坐标 $\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, 其中 $\Omega$ 为 $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$ 所确定区域.

一般坐标 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dV$. $\Omega: x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4, z\ge 0, x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$ 所围成的空心体.

# 10 场论——曲线、曲面积分

- 第一型曲线积分 (参数方程); 第二型曲线积分; 格林公式（结论）

$$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt,\quad ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt,$$

$$d\vec{s}=(dx,dy)=(x'(t),y'(t))dt=(\cos\alpha,\cos\beta)ds$$

$$\oint_{L^+}(Pdx+Qdy)=\iint\limits_D(Q_x-P_y)d\sigma$$

直接积分　识别 $dx,dy,dz$；从 $A$ 到 $B$ 的有向弧线；
特点：参数单调变化或关于某参变量成函数形式变化
方法：化第二类型积分为定积分计算, $\alpha\sim$ 起点, $\beta\sim$ 终点

参数方程　$\int_\alpha^\beta\big(Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\big)\,dt$

第二类曲线积分 v.s. 第一类曲线积分 $\displaystyle\int_{\vec{L}}\vec{F}\cdot d\,\vec{l}=\int_L\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$

格林公式: 补线法、打洞法、四个等价命题.

建议步骤: 1、明确 $P,Q$; 2、验证 $Q_x,P_y$; 3、定义辅助线; 4、计算.

例 10.1. 计算 $I=\displaystyle\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, 其中 $l:x^2+y^2=2ax,(a>0)$.

计算 $I=\displaystyle\int_L x^2ds$, 其中 $L:x^2+y^2+z^2=a^2\cap x+y+z=0$. (自建参数方程)

计算 $I=\displaystyle\int_C xdy-2ydx$, 其中 $C:x^2+y^2=2$ 在第一象限部分, 逆时针方向.

例 10.2. 计算 $I=\displaystyle\oint_C xy^2dy-x^2ydx$, 其中 $C$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 方向为正向.

$\displaystyle\oint_{L^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. $L$ 为包含原点, 简单闭曲线.

例 10.3. 验证积分与路径无关并求值:

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

- 定义: 第一型曲面积分 (参数方程); 第二型曲面积分; 高斯公式

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

$$(\Delta S) = (dydz, dzdx, dxdy) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)(dS)$$

$$\oiint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_\Omega (P_x + Q_y + R_z)dV$$

第二类型建议: 使用 $D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}$; 分面 + 影射 + 定号 + 计算; 相互转换

$$I = \iint\limits_S (P + Q + R) = \iint\limits_S dxdy() = \pm \iint\limits_{D_{xy}} ()dxdy = ans$$

高斯公式: 1、明确 $P, Q, R$; 2、定义辅助条件; 3、计算

1. 第一类型曲面积分计算: 按已有公式计算即可
2. 第二类型曲面积分计算:
   (a) 首先应准确认定是第二类型曲面积分
   (b) 选择投影区域: 简化计算 (例 2.1-4);
   不得不的情形 (例 2.3-4，垂直于 $XOY$ 的曲面不能在 $XOY$ 投影);
   (c) 建立曲面方程 $z = z(x, y)$，并且描述方向 (向上、向下);
   (d) 斜曲面 (以投影 $XOY$ 为例)，将 $dS_{yz}, dS_{zx}$ 的计算转化为 $dS_{xy}$ (例 2.3-1);
   (e) 二类转重积分 $dS_{xy} \to d\sigma_{xy}, \iint_\Sigma f(x, y)dxdy \to \iint_D f(x, y)\, dxdy$
   方向向上为正 $dS_{xy} = dxdy$，方向向下为负 $dS_{xy} = -dxdy$;
   注意题目中“外侧”，这个方向是相对与内部的概念

例 10.4. 计算

1. (定义) $\iint_\Sigma x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, 其中 $\Sigma$ 为长方体 $\Omega = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ 的表面外侧.
2. (相互转换) 计算 $I = \iint\limits_S ydydz - xdzdx + z^2dxdy$, 其中 $S$ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在平面 $z = 1$ 与 $z = 2$ 之间的外侧.

例 10.5. 1. $I = \iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, $S$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

2. $\oiint_\Sigma (x - y)\, dxdy + (y - z)x\, dydz$，其中 $\Sigma$ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围成封闭区域的外侧.
3. $I = \iint_S (2x + z)dydz + zdxdy$, 其中 $S$ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$, 法线方向与 $z$ 轴正向成锐角. 补片
4. $I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(\sqrt{2x^2 + 2y^2 + z^2})^3}$. $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧. 挖洞

# 12 无穷级数

常数项级数 $p$ 级数，等比级数的结论；常数项级数总结

step 1: 是否满足性质 4 ($u_n \to 0$)

step 2: 判断是否为正项级数 (比较、比值、根值、积分)

step 3: 一般级数 (是否绝对收敛 $\Rightarrow$ 正项级数)

step 4: 是否为交错级数

step 5: 特殊级数

幂级数

- 收敛半径 (区间, 域);
- 幂级数计算 (性质 $1,2,3$)
- 幂级数展开 (五个基本初等函数); 间接展开法; 和 + 乘积; (收敛域讨论)

傅里叶级数 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)$

- 周期为 $2\pi$ 的函数
- 正弦 (余弦) 展开
- 周期为 $2l$ 的函数

---

例 12.1 (讨论级数的收敛性). $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n}\right)$; $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$; $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$; $\sum\limits_{n\geq 2} \sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$; $\sum\limits_{n\geq 2} \sin(\sqrt{n^2+n}\pi)$

例 12.2. 判断收敛域以及求解和函数

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}; \quad \sum_{n\geq 1} nx^n; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}; \quad \sum_{n\geq 1} n^2 x^n$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}; \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{3^n}$$

$$\sum_{n\geq 0} (2n+1)(3n+2)x^n; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4n+3}\left(\frac{1}{4}\right)^n, \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4n+3}\left(\frac{-1}{4}\right)^n; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}$$

例 12.3. 求证和函数 $y := \sum\limits_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$ 满足方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2-1)y = 0.$$

例 12.4 (幂级数展开). ... 在 $x_0$... 加减法.... 乘积... 间接展开

例 12.5.

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big) = \dots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

任意周期 $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{\pi n x}{l} \, dx \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{\pi n x}{l} \, dx$$