第4章 电路定理

本章重点

重点:

熟练掌握各定理的内容、适用范围及如何应用。

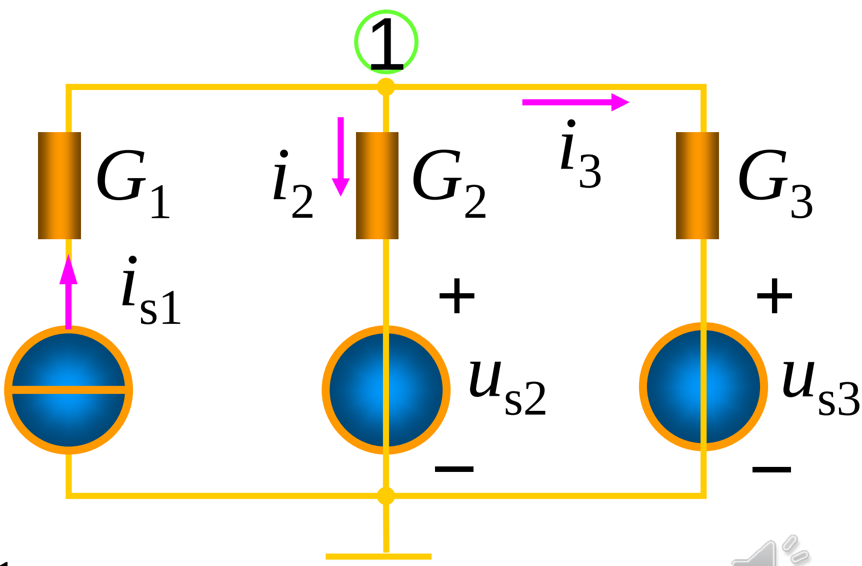
4.1 叠加定理

Superposition Theorem

1. 叠加定理

在线性电路中，任一支路的电流(或电压)可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

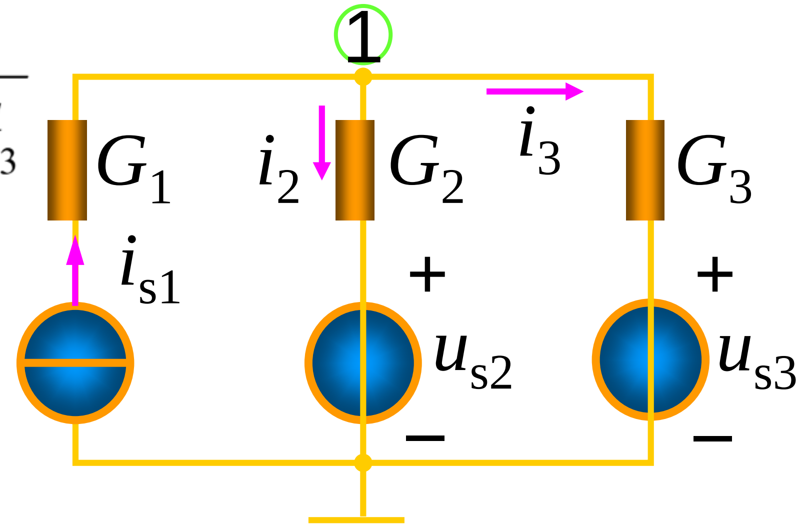
2 .定理的证明



应用结点法：

$$(G_2+G_3)u_{n1}=G_2u_{s2}+G_3u_{s3}+i_{S1}$$

$$u_{n1}=\frac{G_2u_{S2}}{G_2+G_3}+\frac{G_3u_{S3}}{G_2+G_3}+\frac{i_{S1}}{G_2+G_3}$$



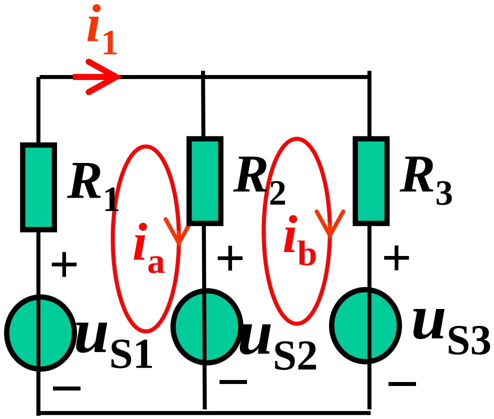
或表示为：

$$u_{n1}=a_1i_{S1}+a_2u_{s2}+a_3u_{S3}$$
$$=u_{n1}^{(1)}+u_{n1}^{(2)}+u_{n1}^{(3)}$$

支路电流为：

$$i_2=(u_{n1}-u_{S2})G_2=(\frac{-G_3G_2}{G_2+G_{3\ 2}})u_{S2}+\frac{G_3G_2u_{S3}}{G_2+G_3}+\frac{G_2i_{S1}}{G_2+G_3}$$
$$=b_1i_{S1}+b_2u_{S2}+b_3u_{S3}=i_2^{(1)}+i_2^{(2)}+i_2^{(3)}$$

$$i_3=(u_{n1}-u_{S3})G_3=(\frac{G_3G_2}{G_2+G_3})u_{S2}+(\frac{-G_2G_3}{G_2+G_{3\ 3}})u_{S3}+\frac{G_3i_{S1}}{G_2+G_3}$$
$$=i_3^{(1)}+i_3^{(2)}+i_3^{(3)}$$



由回路法

$$R_{11}i_a+R_{12}i_b=u_{S11}$$

$$R_{21}i_a+R_{22}i_b=u_{S22}$$

其中

$R_{11}=R_1+R_2$

$R_{12}= R_{21}= -R_2$

$R_{22}=R_2+R_3$

$u_{S11}=u_{S1}-u_{S2}$

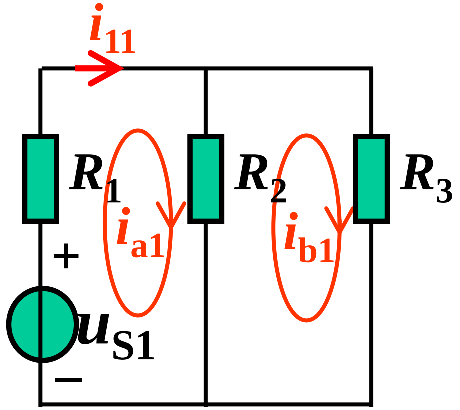
$u_{S22}=u_{S2}-u_{S3}$

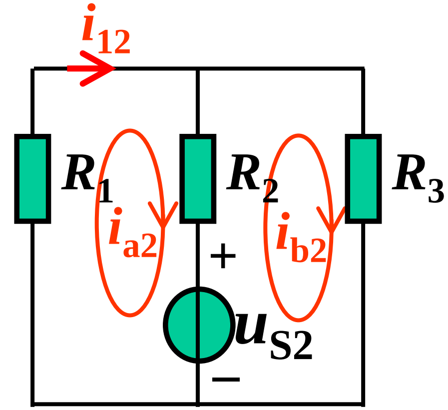
$$\Delta=\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} = R_{11}R_{22}-R_{12}R_{21}$$

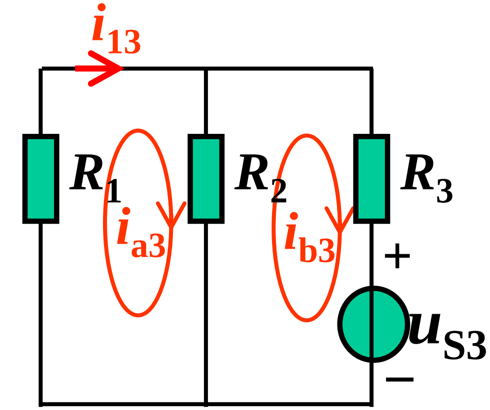
$u_{S1}-u_{S2}$ $\qquad$ $u_{S2}-u_{S3}$

$$i_a=\frac{\begin{vmatrix} u_{S11} & R_{12} \\ u_{S22} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{S11}+\frac{-R_{12}}{\Delta}u_{S22}$$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{S1}-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{S2}+\frac{R_{12}}{\Delta}u_{S3}$$







$$R_{11}i_{a1}+R_{12}i_{b1}=u_{S1}$$
$$R_{21}i_{a1}+R_{22}i_{b1}=0$$

$$i_{a1}=\frac{\begin{vmatrix} u_{S1} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=\boxed{\frac{R_{22}}{\Delta}u_{S1}}$$

$$R_{11}i_{a2}+R_{12}i_{b2}=-u_{S2}$$
$$R_{21}i_{a2}+R_{22}i_{b2}=u_{S2}$$

$$i_{a2}=\frac{\begin{vmatrix} -u_{S2} & R_{12} \\ u_{S2} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}(-u_{S2})+\frac{-R_{12}}{\Delta}u_{S2}$$

$$=\boxed{-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{S2}}$$

$$R_{11}i_{a3}+R_{12}i_{b3}=0$$
$$R_{21}i_{a3}+R_{22}i_{b3}=-u_{S3}$$

$$i_{a3}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} \\ -u_{S3} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{R_{12}}{\Delta}(-u_{S3})$$

$$=\boxed{\frac{R_{12}}{\Delta}u_{S3}}$$

$$i_{\mathrm{a}}=\frac{\begin{vmatrix} u_{\mathrm{S}11} & R_{12} \\ u_{\mathrm{S}22} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{\mathrm{S}1}-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{\mathrm{S}2}+\frac{R_{12}}{\Delta}u_{\mathrm{S}3}$$

$$i_{\mathrm{a}1}=\frac{\begin{vmatrix} u_{\mathrm{S}1} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{\mathrm{S}1}$$

$$i_{\mathrm{a}2}=\frac{\begin{vmatrix} -u_{\mathrm{S}2} & R_{12} \\ u_{\mathrm{S}2} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{\mathrm{S}2}$$

$$i_{\mathrm{a}3}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} \\ -u_{\mathrm{S}3} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=\frac{R_{12}}{\Delta}u_{\mathrm{S}3}$$

证得 $i_{\mathrm{a}}=i_{\mathrm{a}1}+i_{\mathrm{a}2}+i_{\mathrm{a}3}$ **即回路电流满足叠加定理**

支路电流满足叠加定理

结论　结点电压和支路电流均为各电源的一次函数，均可看成各独立电源单独作用时，产生的响应之叠加。

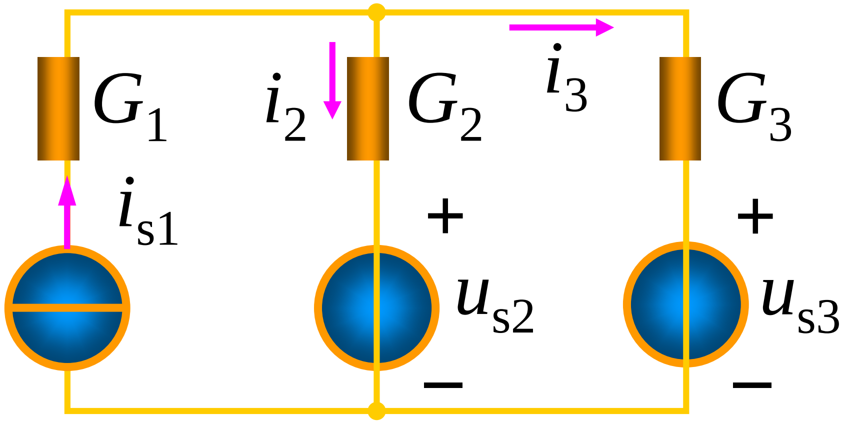
3. 几点说明

①叠加定理只适用于线性电路。

②一个电源作用，其余电源为零

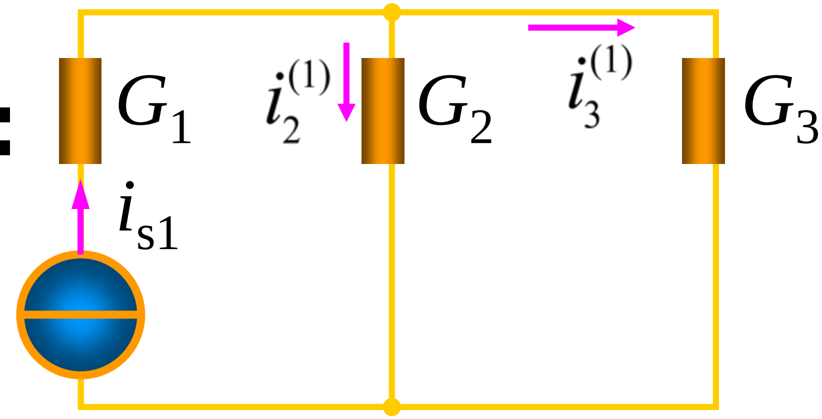
电压源为零 — 短路。

电流源为零 — 开路。



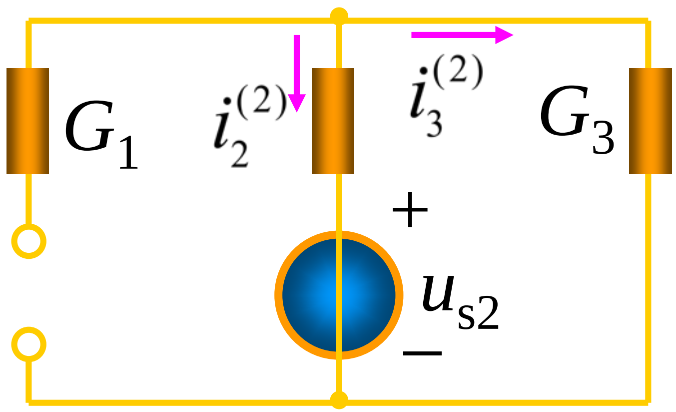
三个电源共同作用

=



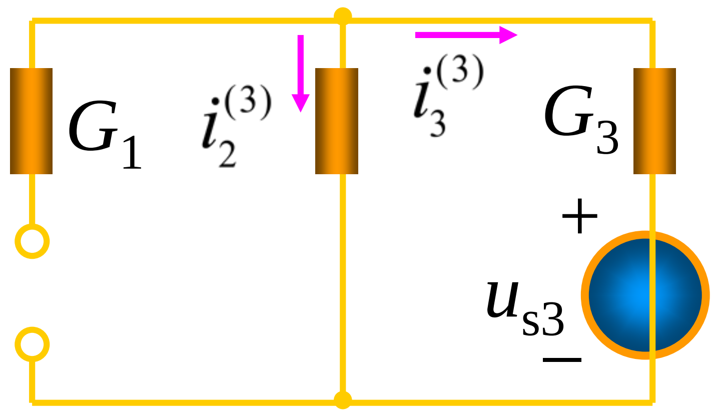
i_{s1}单独作用

+



u_{s2}单独作用

+



u_{s3}单独作用

③功率不能叠加(功率为电压和电流的乘积，为电源的二次函数，非线性)。

$$u = u_1 + u_2 \qquad i = i_1 + i_2$$

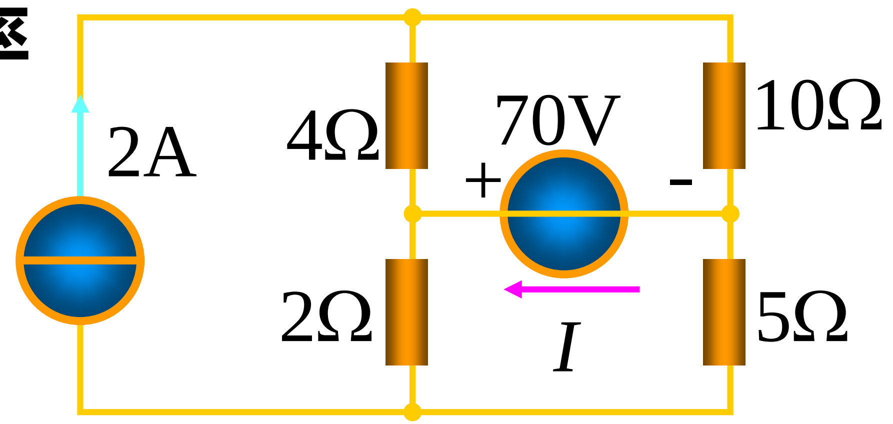
$$p = ui = (u_1 + u_2)(i_1 + i_2) \neq u_1 i_1 + u_2 i_2$$

④ u，i叠加时要注意各分量的参考方向。

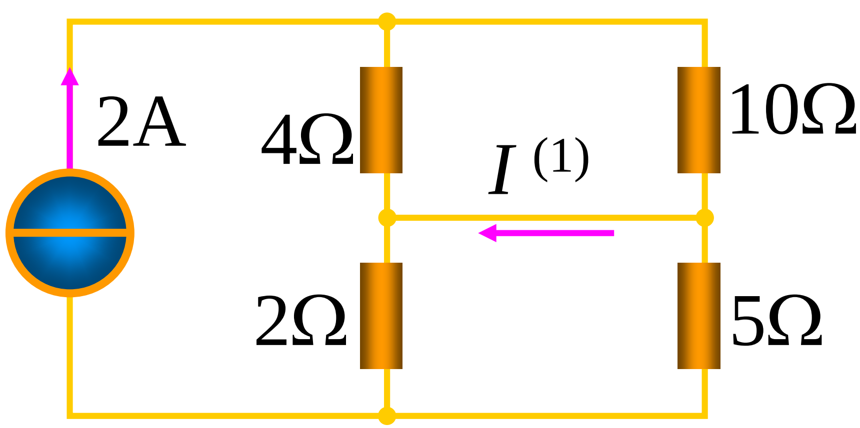
⑤含受控源(线性)电路亦可用叠加，但受控源应始终保留。

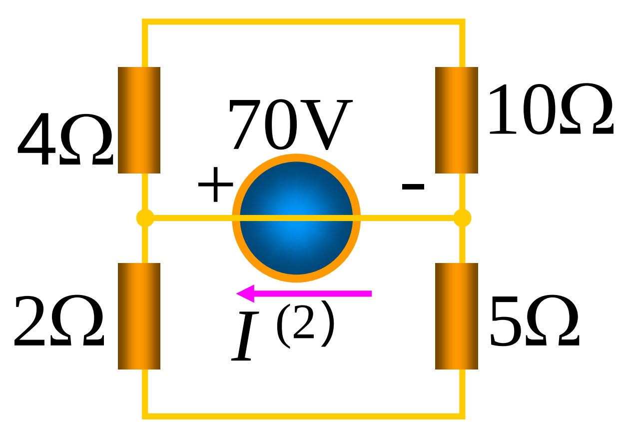
4. 叠加定理的应用

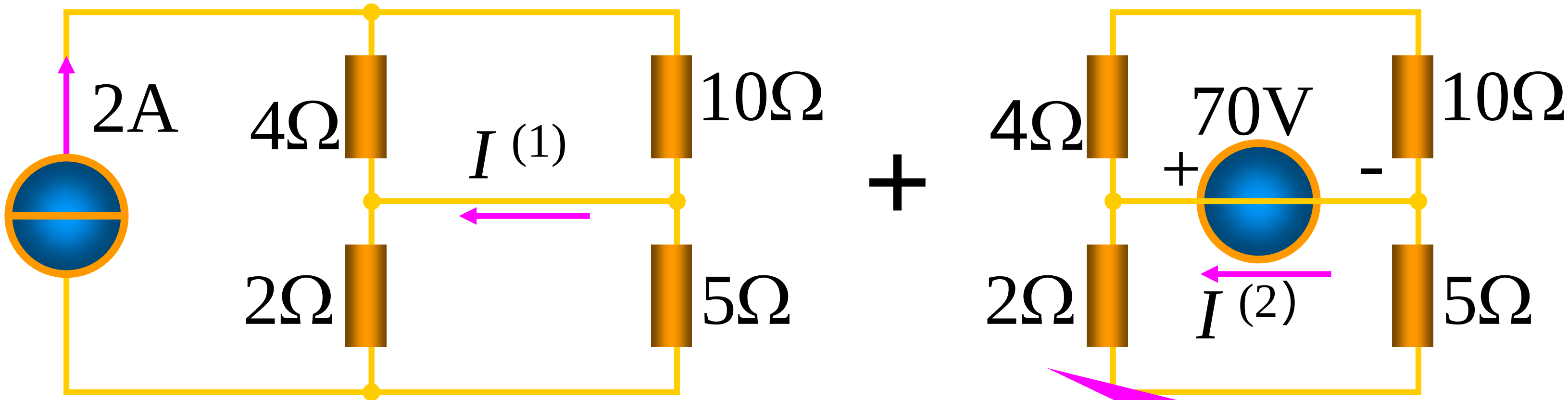
例1 **求电压源的电流及功率**



解 **画出分电路图**







两个简单电路

2A电流源作用，电桥平衡：

$$I^{(1)} = 0$$

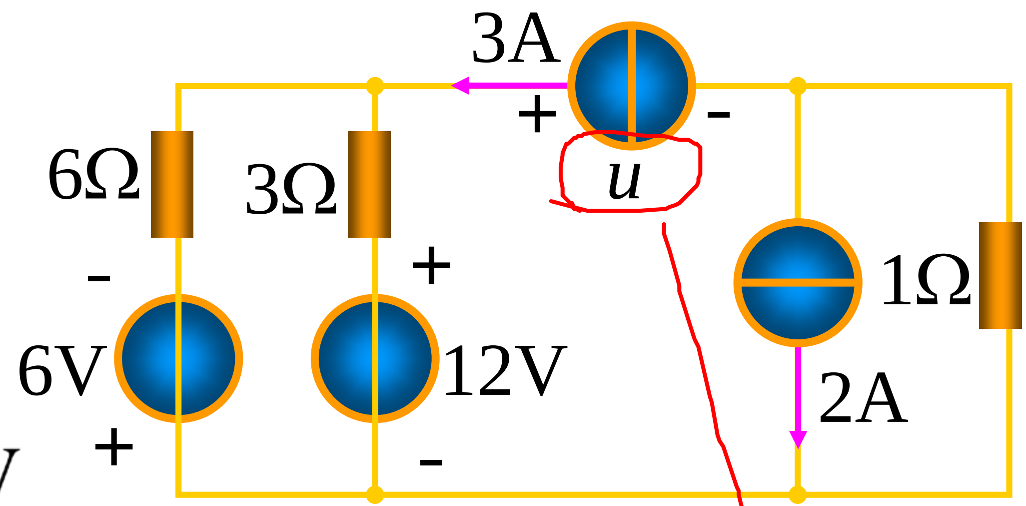
70V电压源作用： $I^{(2)} = 70/14 + 70/7 = 15\text{A}$

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 15\text{A} \qquad P = 70 \times 15 = 1050\text{W}$$

应用叠加定理使计算简化

例2 计算电压u

解 画出分电路图



3A电流源作用：

$$u^{(1)}=(6//3+1)\times 3=9\text{V}$$

其余电源作用：

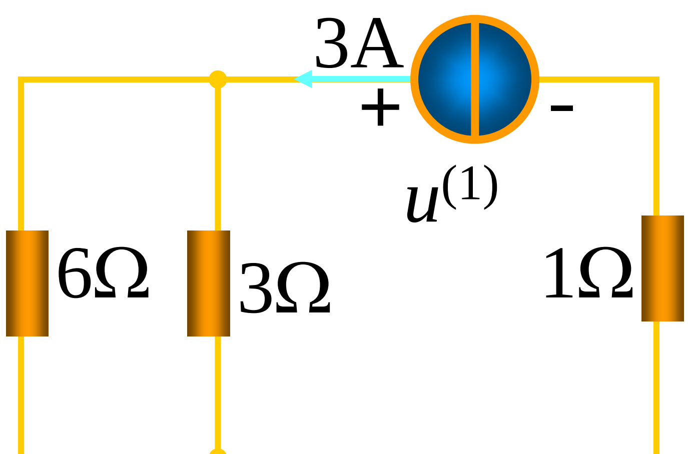
$$i^{(2)}\times(6\Omega+3\Omega)-(6V+12V)=0$$

$$i^{(2)}=2\text{A}$$

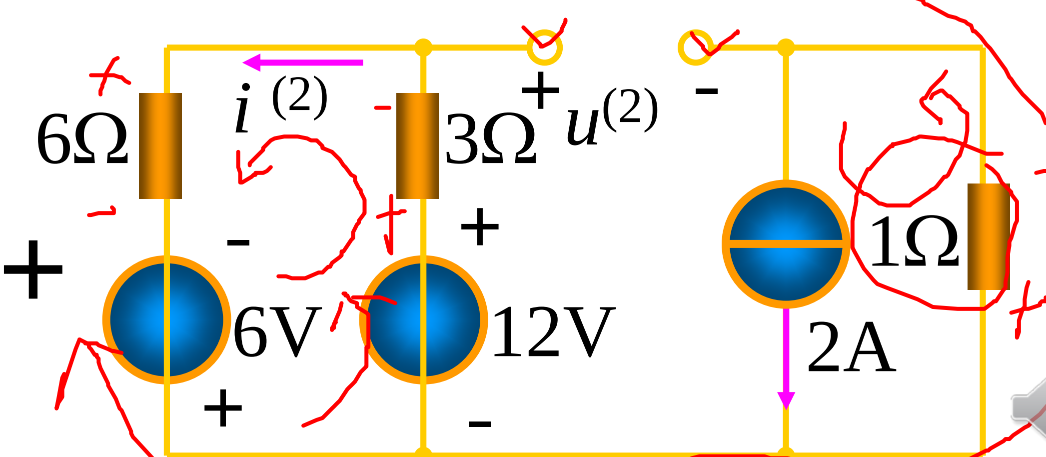
$$u^{(2)}-6i^{(2)}+6\text{V}-2\text{A}\times 1\Omega=0$$

$$u^{(2)}=8\text{V}$$

$$u=u^{(1)}+u^{(2)}=9+8=17\text{V}$$



+

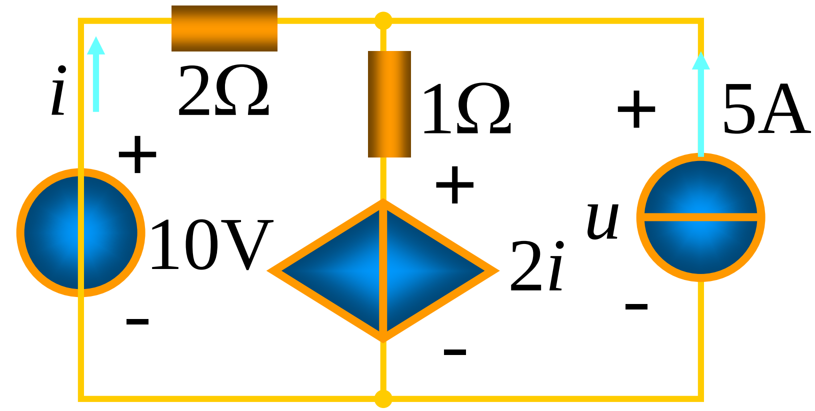


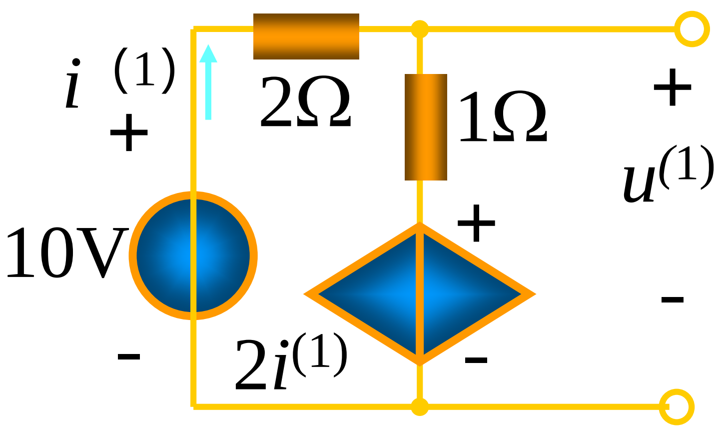
注意

叠加方式是任意的，可以一次一个独立源单独作用，也可以一次几个独立源同时作用，取决于使分析计算简便。

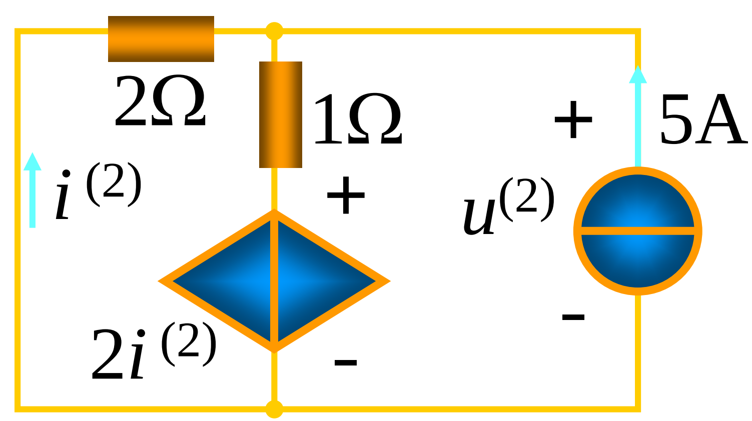
例3 **计算电压u、电流i。**

解 **画出分电路图**

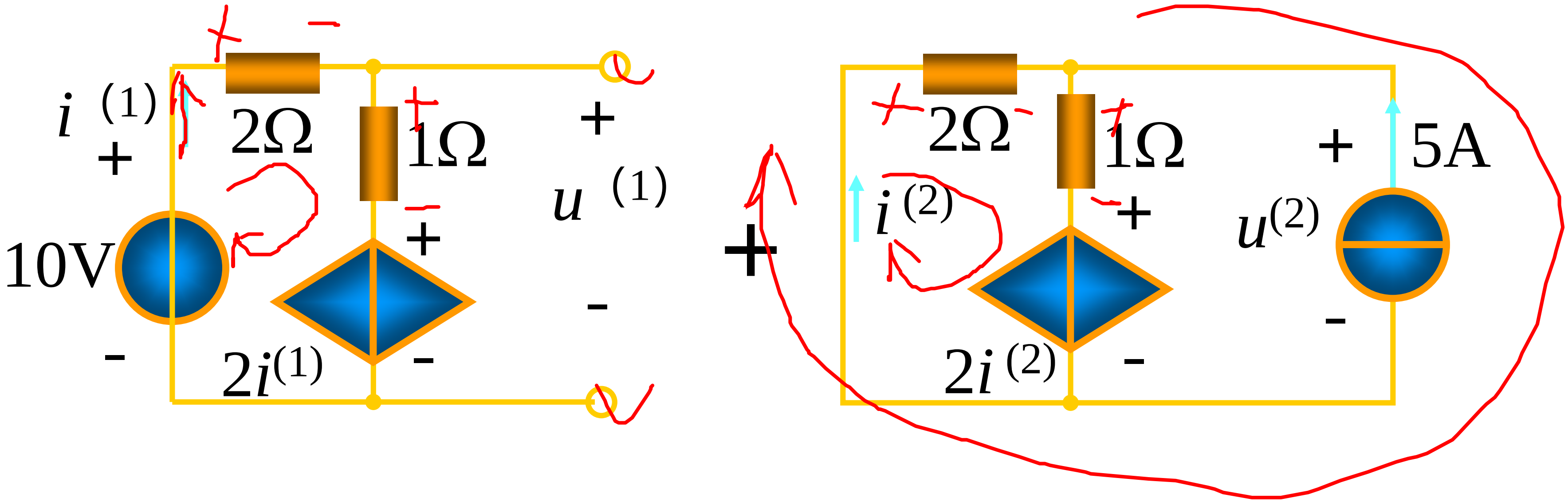




+



受控源始终保留



10V**电源作用：** $i^{(1)})\times(2+1)-10+2i^{(1)}=\mathbf{0}$ $i^{(1)}=2\mathrm{A}$

$$u^{(1)}=1\times i^{(1)}+2i^{(1)}=3i^{(1)}=6\mathrm{V}$$

5A**电源作用：** $2i^{(2)}+1\times(5+i^{(2)})+2i^{(2)}=0$

$i^{(2)}=-1\mathrm{A}$ $u^{(2)}+2i^{(2)}=\mathbf{0}$, $u^{(2)}=-2\times(-1)=2\mathrm{V}$

$u=6+2=8\mathrm{V}$ $i=2+(-1)=1\mathrm{A}$

例4　**封装好的电路如图，已知下列实验数据：**

当 $u_S = 1\text{V}$， $i_S = 1\text{A}$ 时，响应 $i = 2\text{A}$

当 $u_S = -1\text{V}$， $i_S = 2\text{A}$ 时，响应 $i = 1\text{A}$

求 $u_S = -3\text{V}$， $i_S = 5\text{A}$ 时，响应 $i = ?$

研究激励和响应关系的实验方法

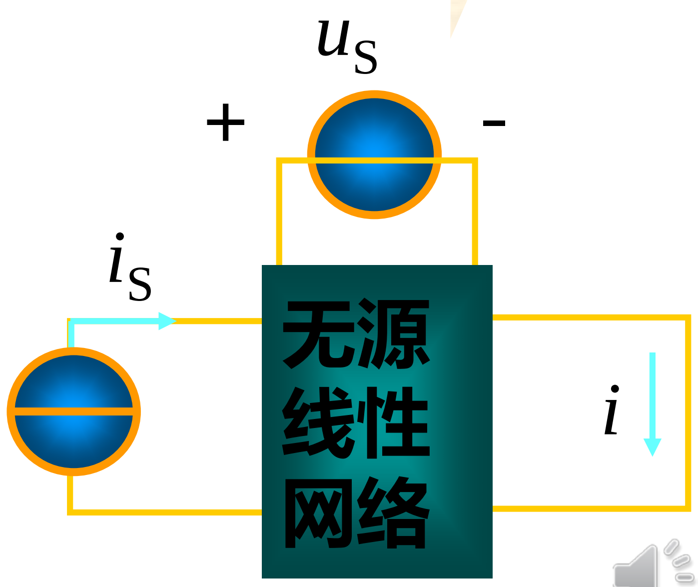
解　**根据叠加定理**　$i = k_1 i_S + k_2 u_S$

代入实验数据：

$$k_1 + k_2 = 2$$

$$2k_1 - k_2 = 1$$

$$i = u_S + i_S = -3 + 5 = 2\text{A}$$



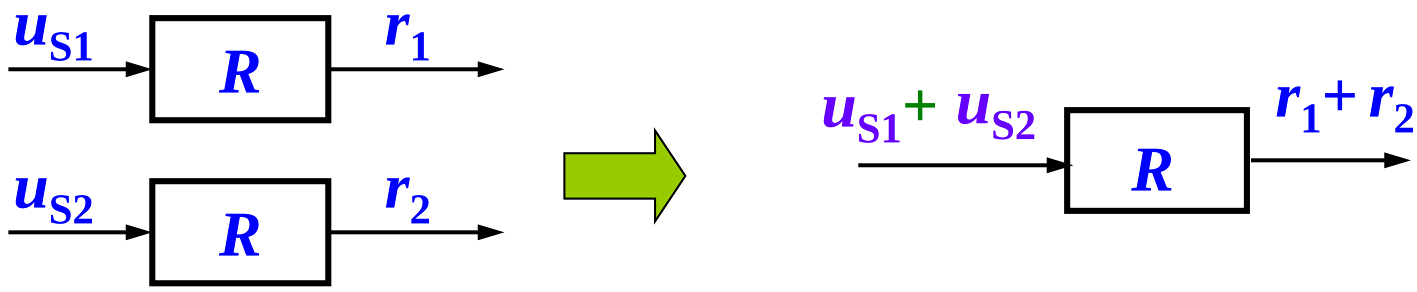
5.齐性原理 Homogeneity Property

线性电路中，所有激励(独立源)都增大(或减小)同样的倍数，则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。

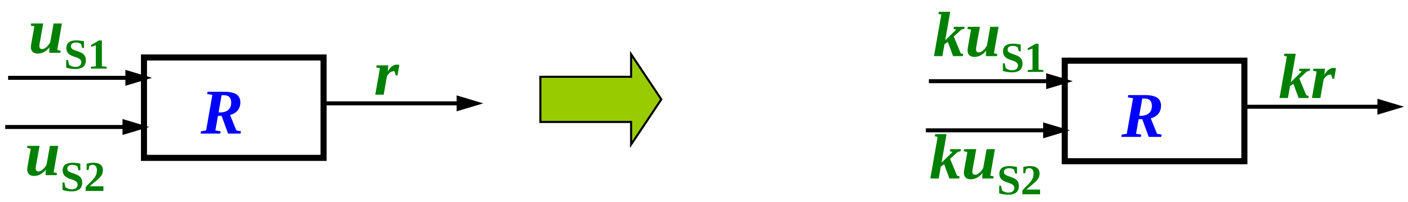
注意

当激励只有一个时，则响应与激励成正比。

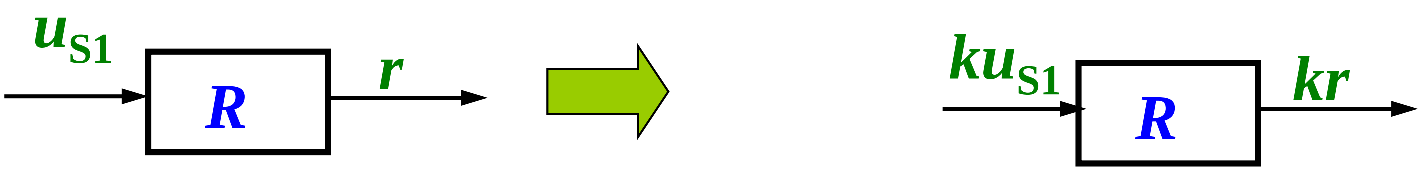
具有可加性。



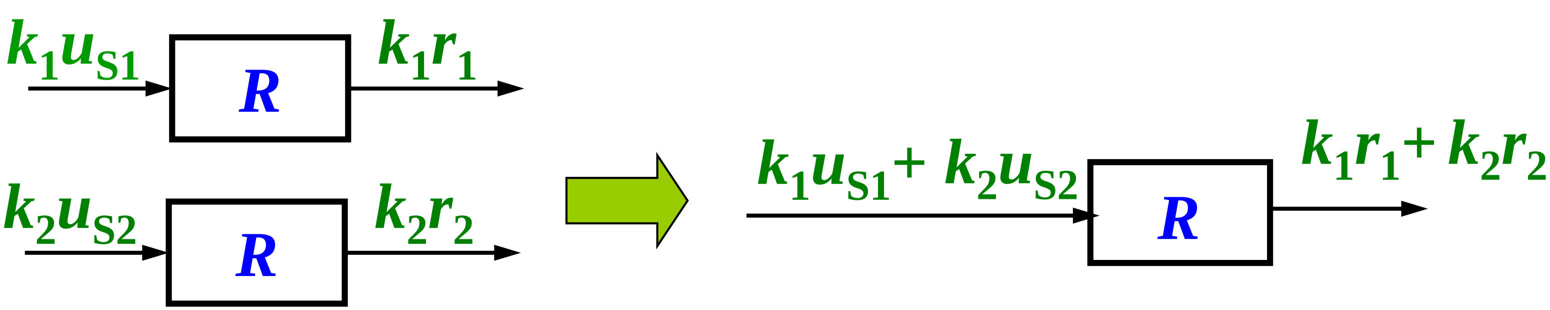
u_{S1}
R
r_1
u_{S2}
R
r_2
$u_{S1}+u_{S2}$
R
r_1+r_2



u_{S1}
u_{S2}
R
r
ku_{S1}
ku_{S2}
R
kr

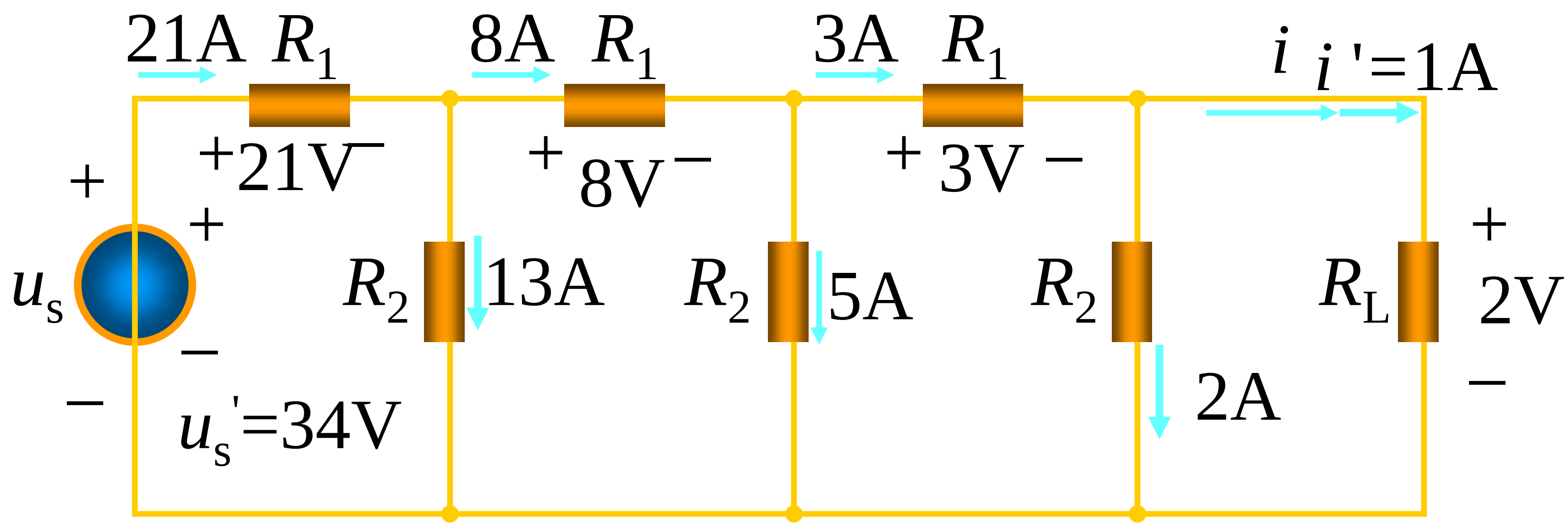


u_{S1}
R
r
ku_{S1}
R
kr



k_1u_{S1}
R
k_1r_1
k_2u_{S2}
R
k_2r_2
$k_1u_{S1}+k_2u_{S2}$
R
$k_1r_1+k_2r_2$

例　$R_L=2\Omega$　$R_1=1\ \Omega$　$R_2=1\ \Omega$　$u_s=51\text{V}$，**求电流 i**



法一：分压、分流。　法二：电源变换。　法三：用齐性原理

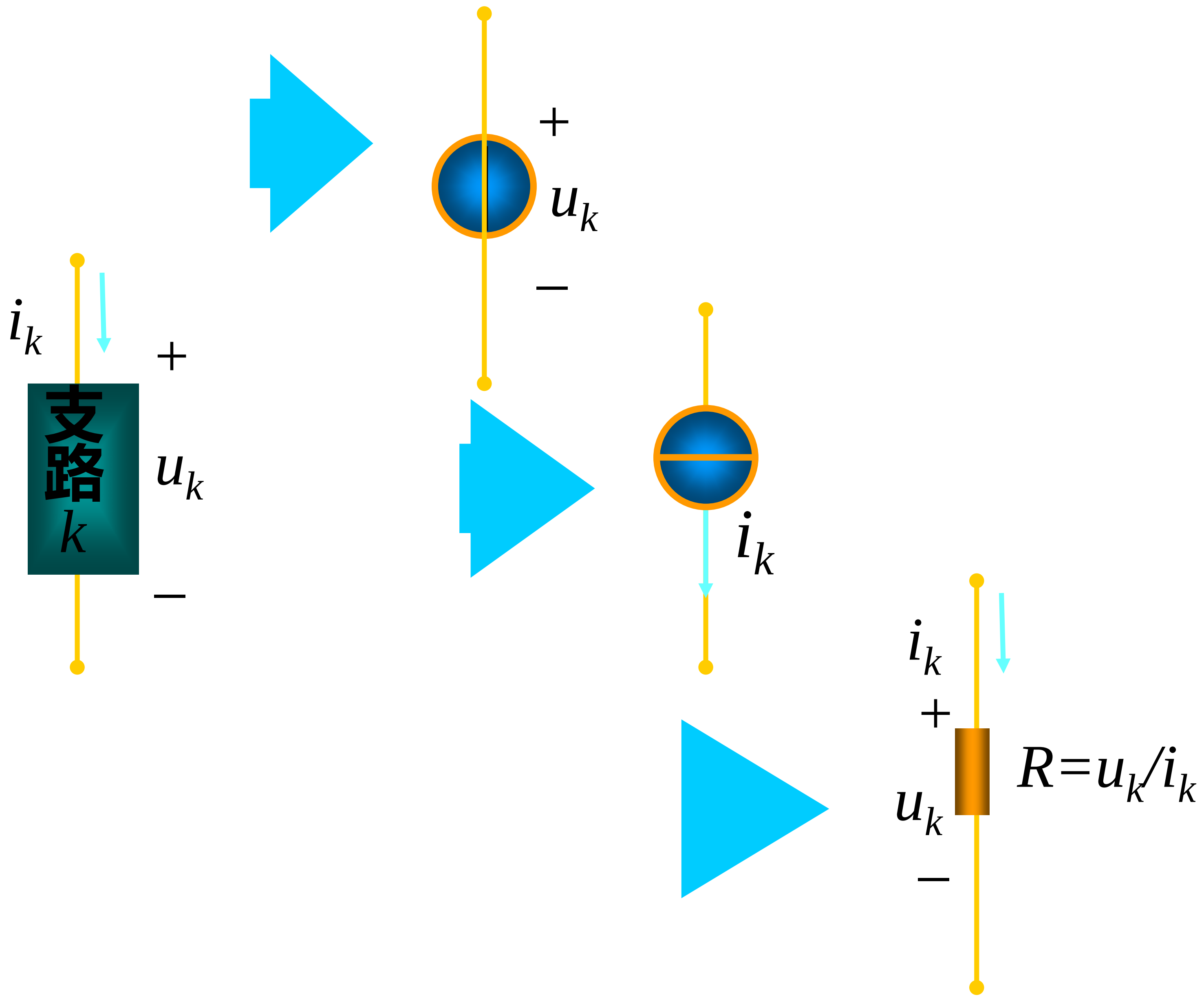
解　**采用倒推法：设** $i'=1\text{A}$

则 $\dfrac{i}{i'}=\dfrac{u_s}{u_s'}$　即 $i=\dfrac{u_s}{u_s'}i'=\dfrac{51}{34}\times 1=1.5\text{A}$

4.2 替代定理

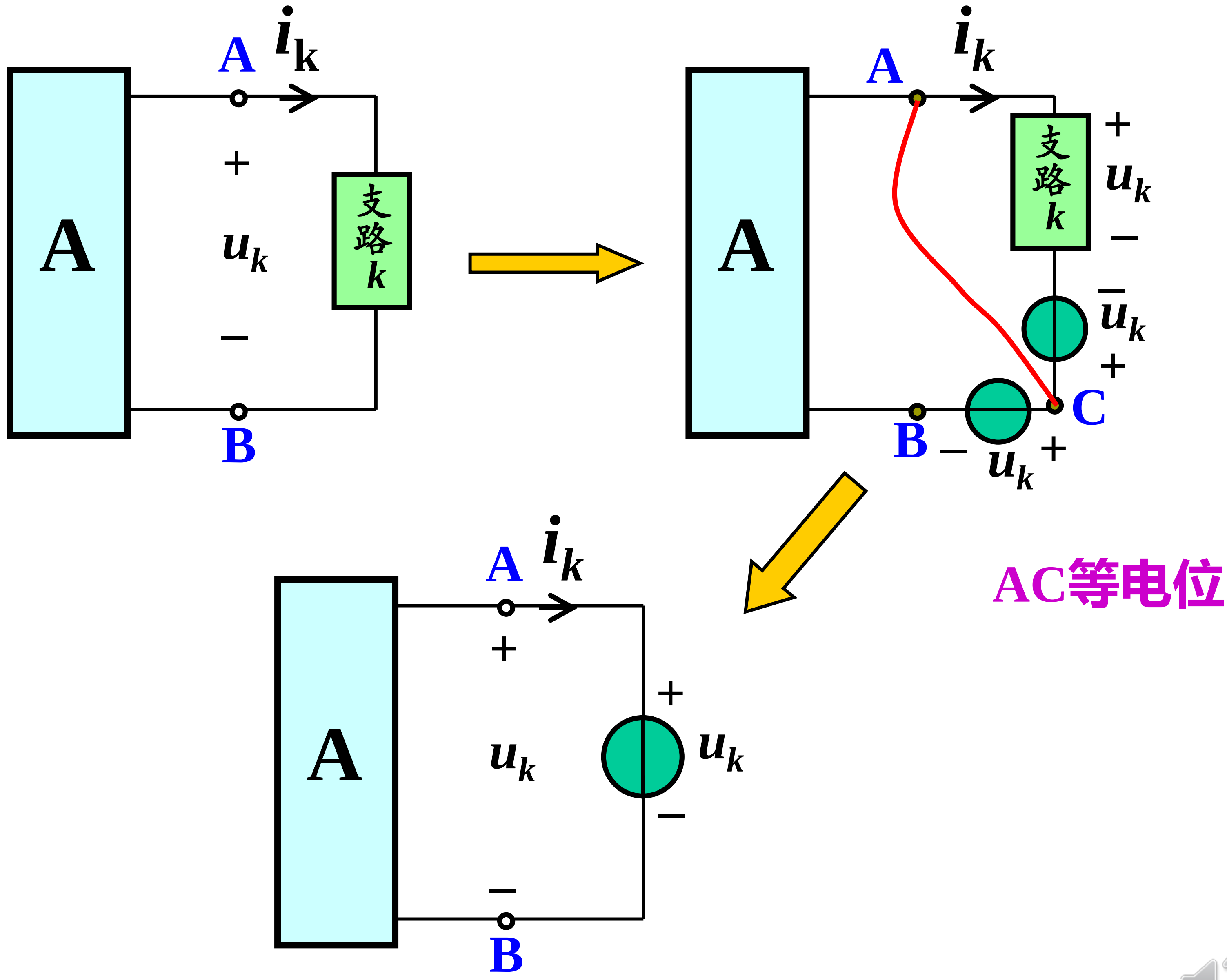
1.替代定理

对于给定的任意一个电路，若某一支路电压为u_k、电流为i_k，那么这条支路就可以用一个电压等于u_k的独立电压源，或者用一个电流等于i_k的独立电流源，或用$R=u_k/i_k$的电阻来替代，替代后电路中全部电压和电流均保持原有值(解答唯一)。

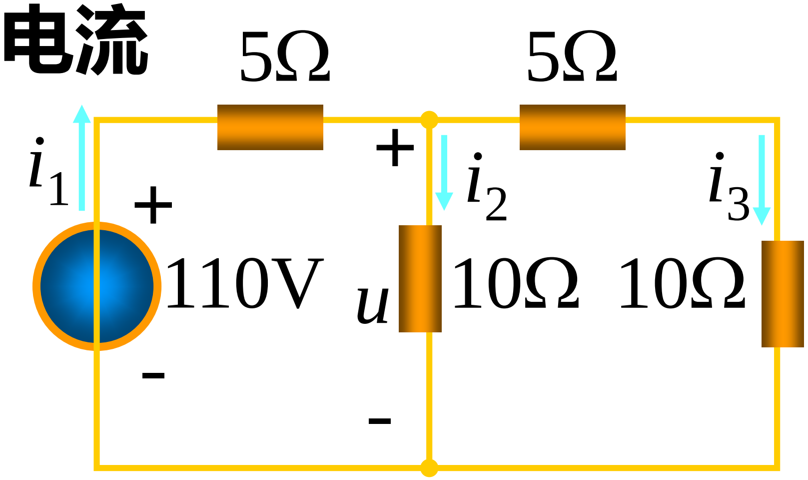


i_k
$+$
支路 k
u_k
$-$
$+$
u_k
$-$
i_k
i_k
$+$
u_k
$-$
$R=u_k/i_k$

证明:



例　求图示电路的支路电压和电流



解

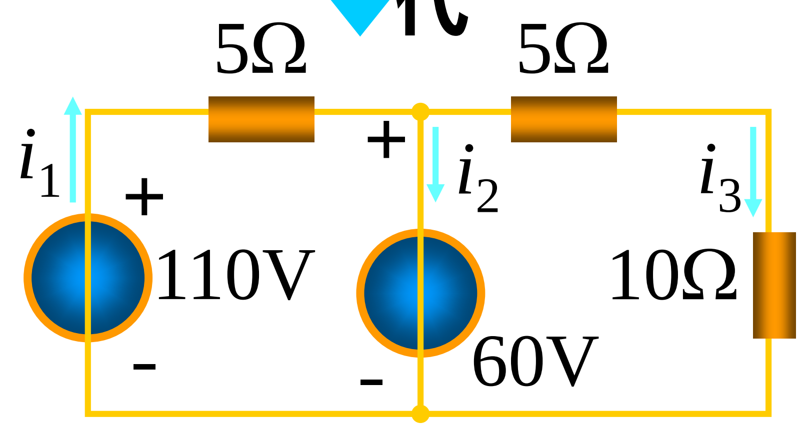
$$i_1 = 110/[5+(5+10)//10] = 10\text{A}$$

$$i_2 = \left(\frac{15}{10+15}\right)i_1 = 3i_1/5 = 6\text{A}$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 2i_1/5 = 4\text{A}$$

$$u = 10 i_2 = 60\text{V}$$

替代



替代以后有：

$$i_1 = (110-60)/5 = 10\text{A}$$

$$i_3 = 60/15 = 4\text{A}$$

注意　替代后各支路电压和电流完全不变。

原因

替代前后KCL,KVL关系相同，其余支路的u、i关系不变。

用u_k替代后，其余支路电压不变(KVL)，其余支路电流也不变，故第k条支路i_k也不变(KCL)。

用i_k替代后，其余支路电流不变(KCL)，其余支路电压不变，故第k条支路u_k也不变(KVL)。

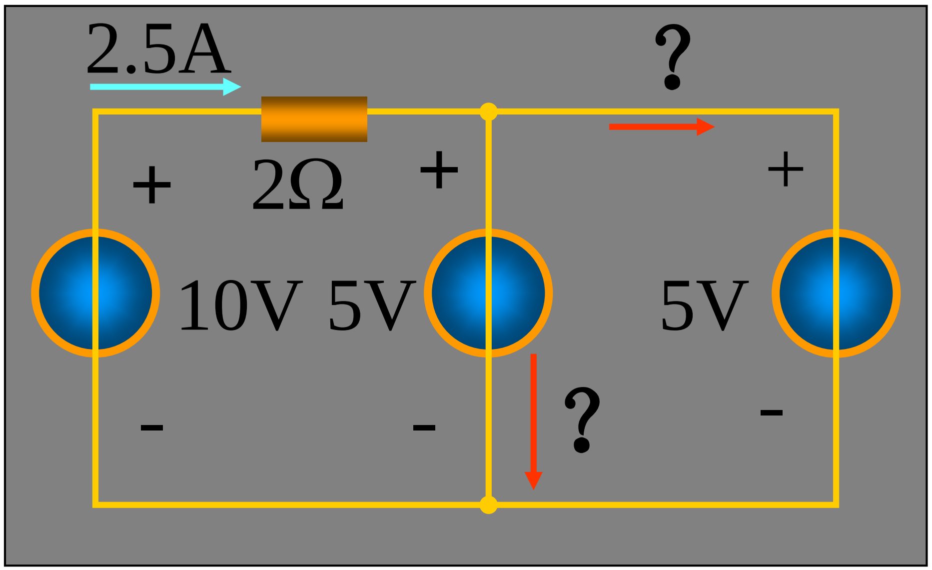
注意

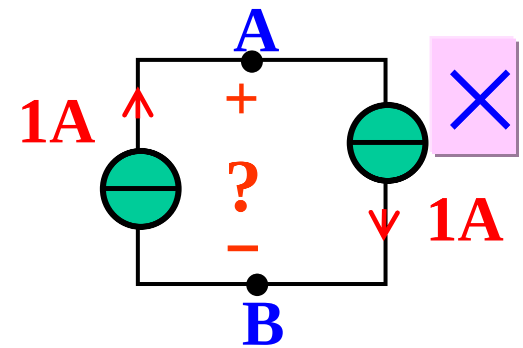
①替代定理既适用于线性电路，也适用于非线性电路。适用于定常和时变电路。

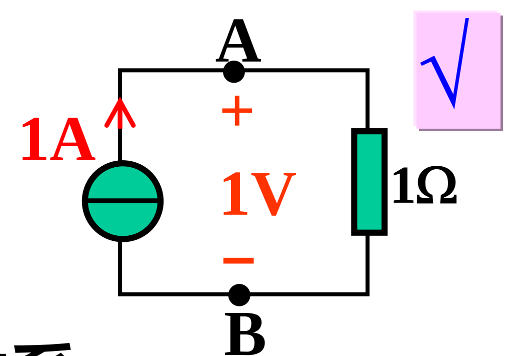
注意

②替代后电路必须有唯一解。

- 无电压源回路；
- 无电流源结点(含广义结点)。







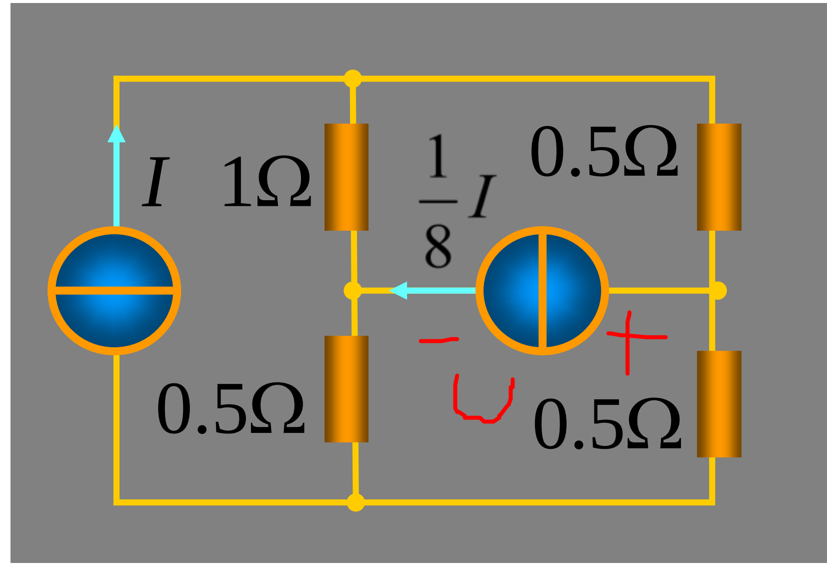
③被替代的支路和电路其它部分应无耦合关系。

④替代后其余支路及参数不能改变(U和I是确定值)。

3. 替代定理的应用

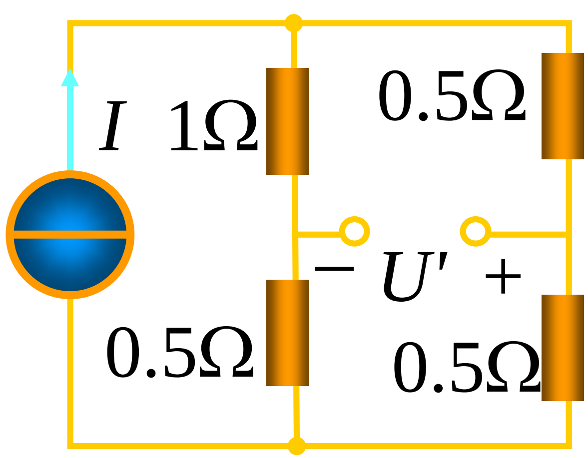
例1 若使 $I_x = \frac{1}{8} I$，

试求该支路的替代R_x

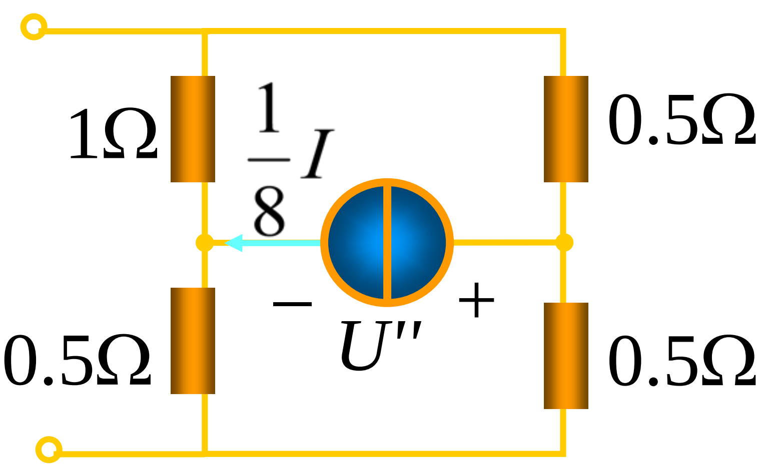


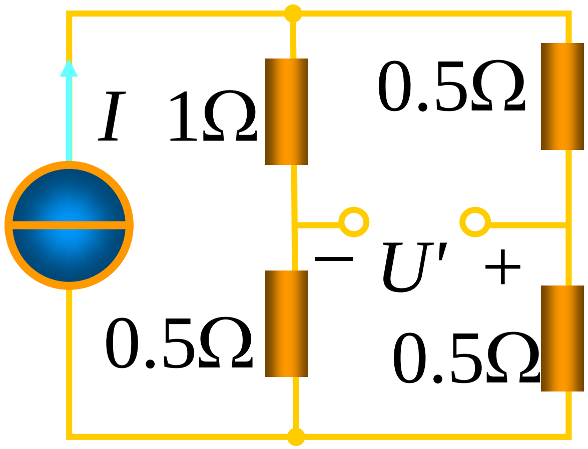
解 用替代+叠加：

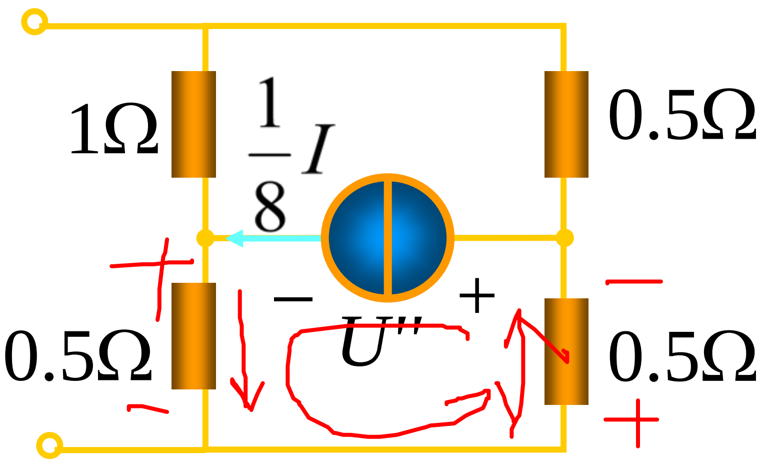
=



+







$$U' = \boldsymbol{U1} - \boldsymbol{U0.5} =$$

$$\frac{\mathbf{0.5+0.5}}{\mathbf{1+0.5+0.5+0.5}}I\times 1-\frac{\mathbf{1+0.5}}{\mathbf{1+0.5+0.5+0.5}}I\times 0.5=0.1I$$

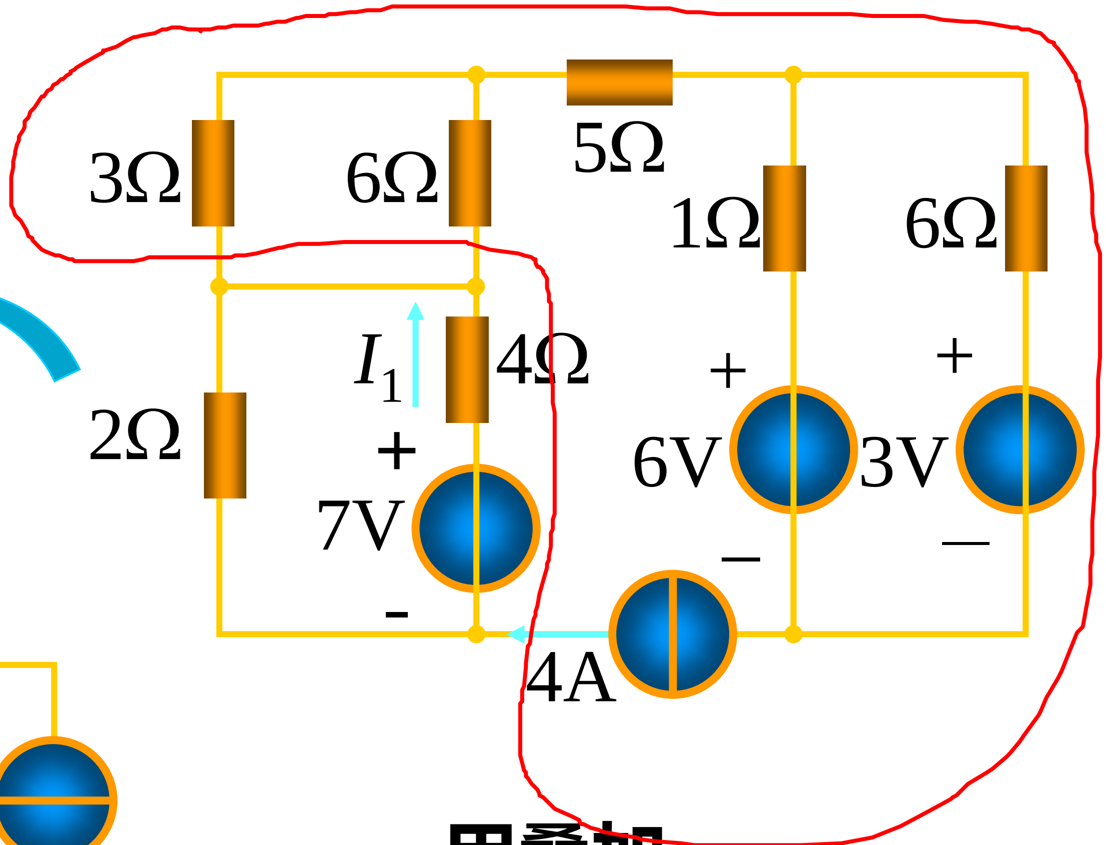
$$U''=-\frac{1+\mathbf{0.5}}{\mathbf{1+0.5+0.5+0.5}}\times\frac{1}{8}I\times(\mathbf{0.5+0.5})=-0.075I$$

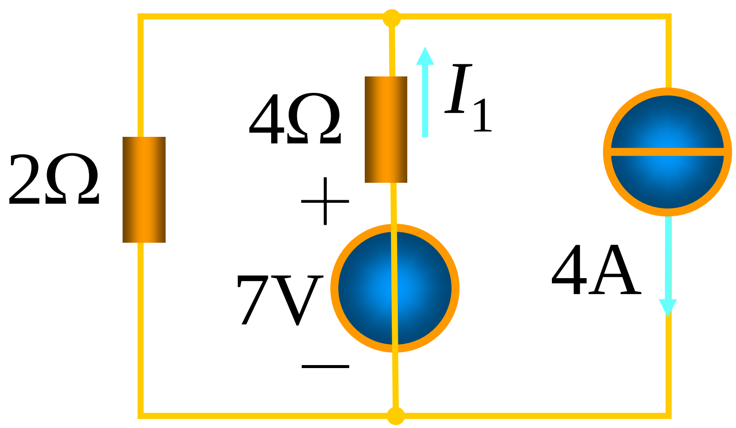
$$U=U'+U''=(0.1-0.075)I=0.025I$$

$$R_x=U/0.125I=0.025I/0.125I=0.2\Omega$$

例2 **求电流**I_1

解 **用替代:**

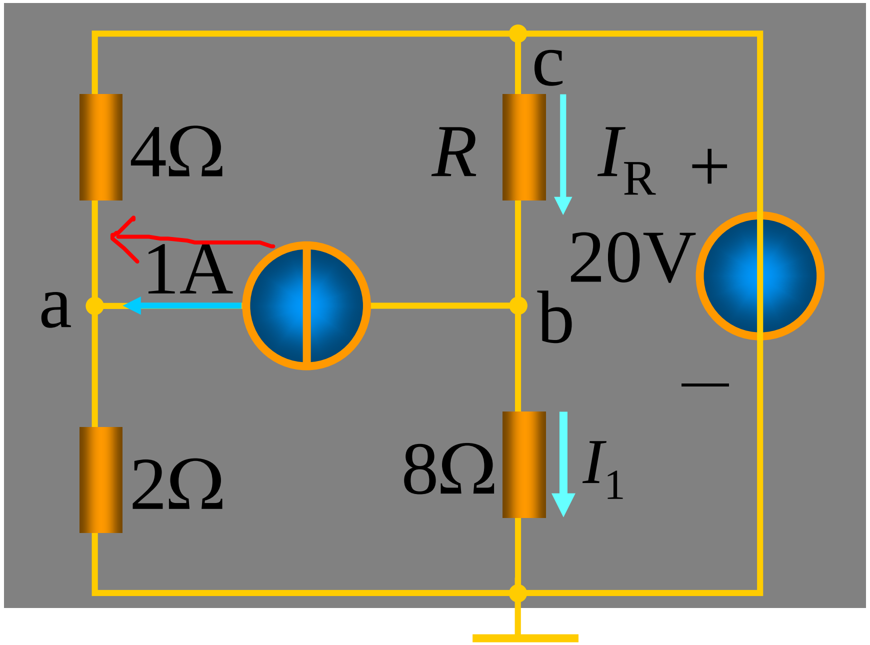




用叠加:

$$I_1 = \frac{7}{6} + \frac{2\times 4}{2+4} = \frac{15}{6} = 2.5\text{A}$$

例3 **已知:**u_{ab}=0, **求电阻**R



解 **用替代:**

$$u_{ab} = \underline{-3I + 3} = 0$$

$$\Rightarrow I = 1\text{A}$$

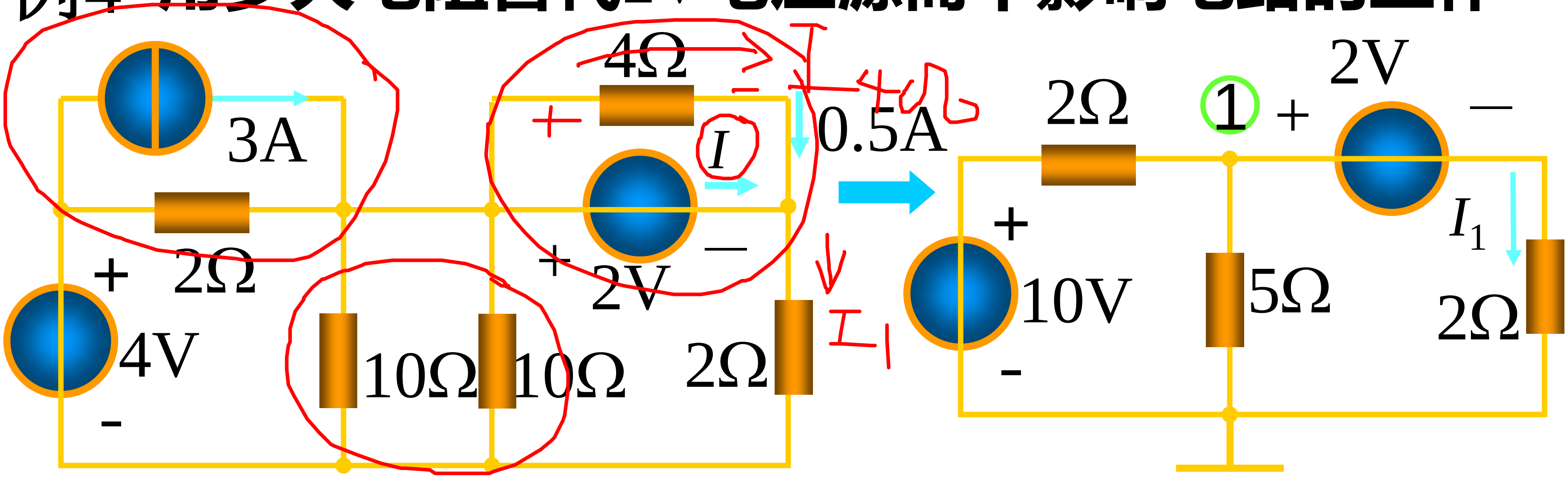
用结点法:

$$\text{a点} \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)u_a - \frac{1\times 20}{4} = 1$$

$$\Rightarrow u_a = u_b = 8\text{V} \qquad I_1 = \frac{u_b}{8} = 1\text{A} \qquad I_R = I_1 + 1 = 2\text{A}$$

$$u_R = u_C - u_b = 20 - 8 = 12\text{V} \qquad R = \frac{12}{2} = 6\Omega$$

例4 **用多大电阻替代2V电压源而不影响电路的工作**



解 **应求电流I，先化简电路。应用结点法得：**

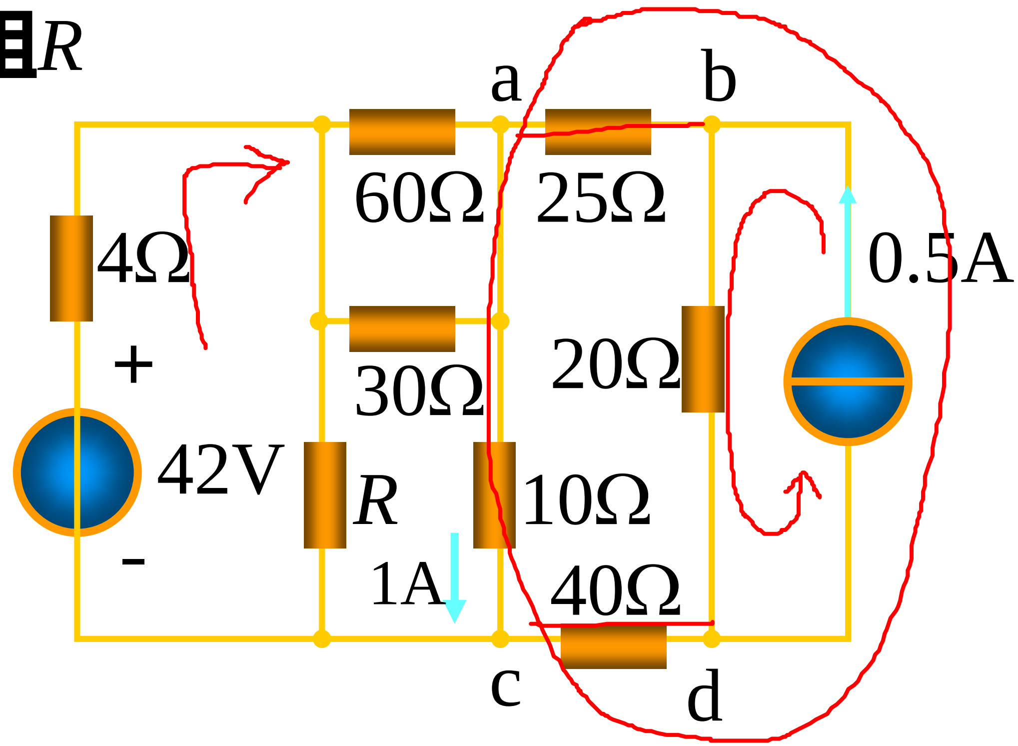
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)u_1=\frac{10}{2}+\frac{2}{2}=6 \quad\rightarrow\quad u_1=6/1.2=5\text{V}$$

$$I_1=(5-2)/2=1.5\text{A}$$

$$I=1.5-0.5=1\text{A}$$

$$R=2/1=2\Omega$$

例5 **已知:** $u_{ab}=0$, **求电阻**R



解

$$u_{ab}=u_{cd}=0$$
$$\Rightarrow i_{ab}=i_{cd}=0$$

用开路替代，得:

$$u_{bd}=u_{ac}=20\Omega\times 0.5A=10V$$

短路替代

$$u_R=\left(30//60+10\right)\times 1A=30V$$

$$R=\frac{u_R}{i_R}=\frac{30}{2}=15\Omega$$

$$i_R=(42V-30V)/4\Omega-1A=2A$$

4.3 戴维宁定理和诺顿定理

(Thevenin-Norton Theorem)

工程实际中，常常碰到只需研究某一支路的电压、电流或功率的问题。对所研究的支路来说，电路的其余部分就成为一个有源二端网络，可等效变换为较简单的含源支路(电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路)，使分析和计算简化。戴维宁定理和诺顿定理正是给出了等效含源支路及其计算方法。

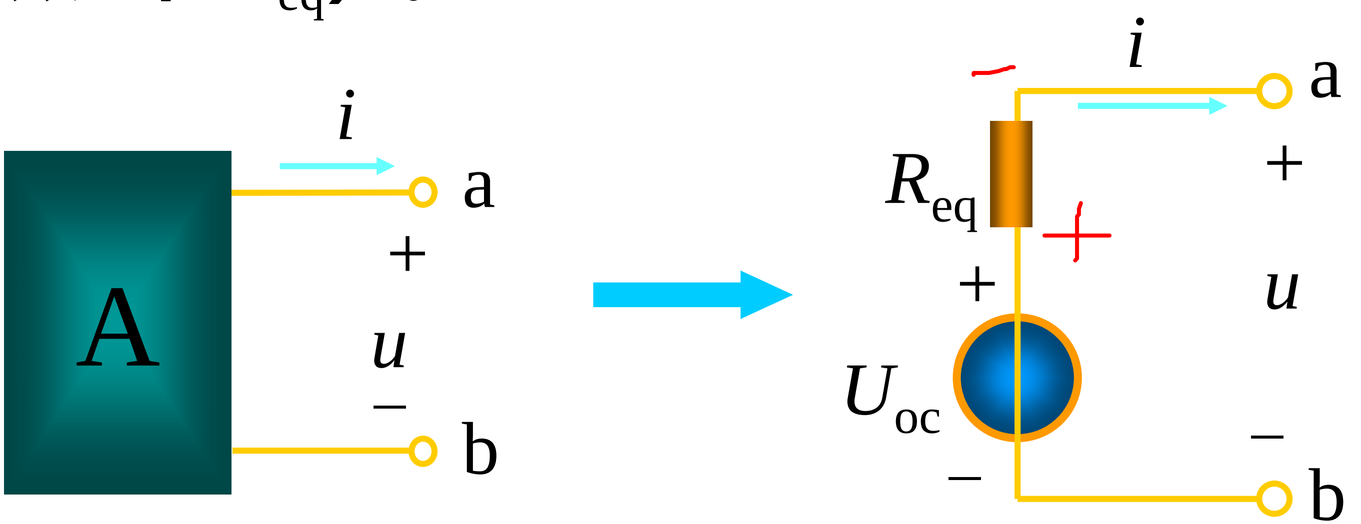
戴维宁定理

戴维宁
(Thevenin)
法国工程师
1883年证明

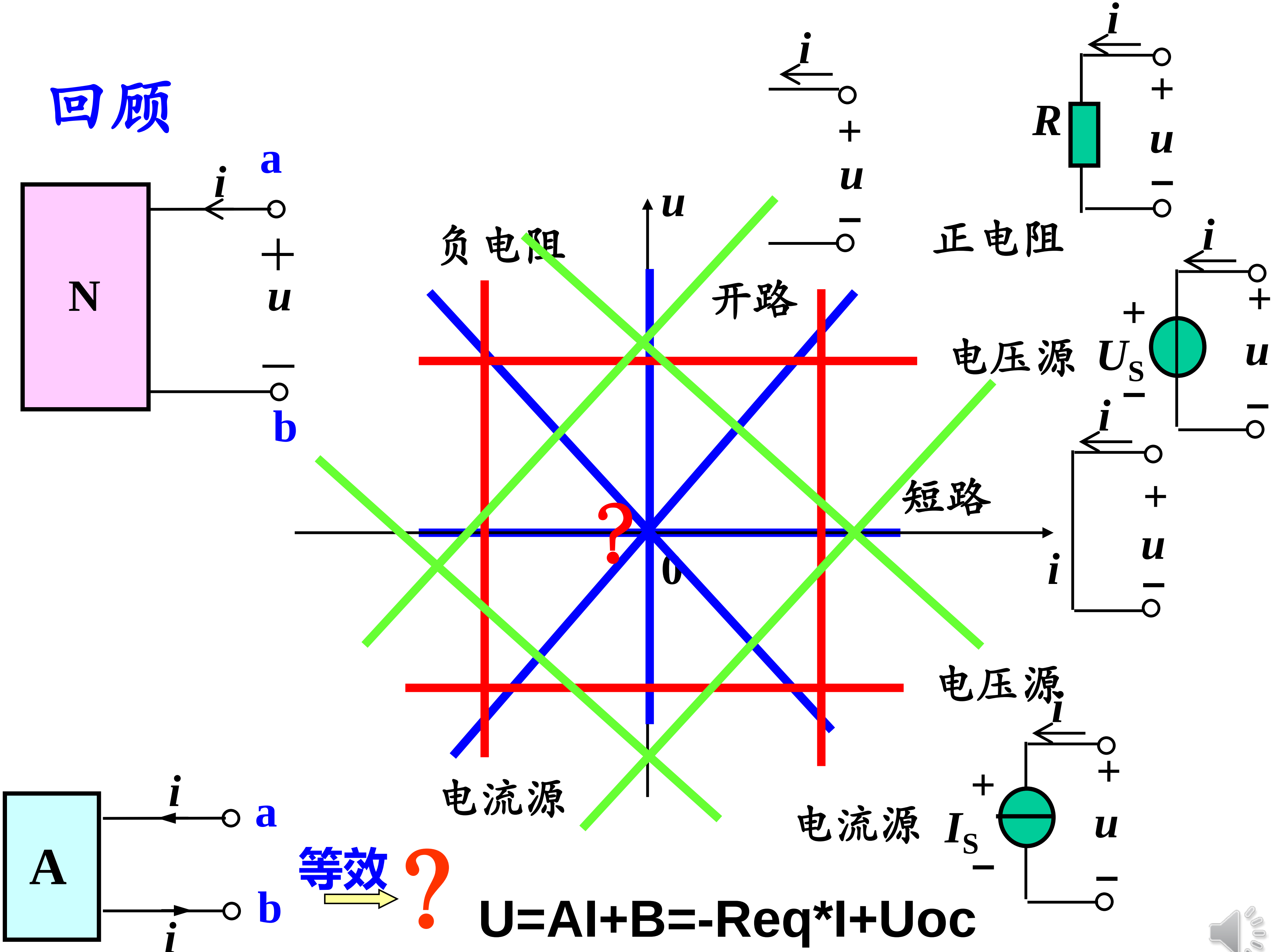
赫尔姆霍茨
(Helmholtz)
德国科学家
1853年已发现

1. 戴维宁定理

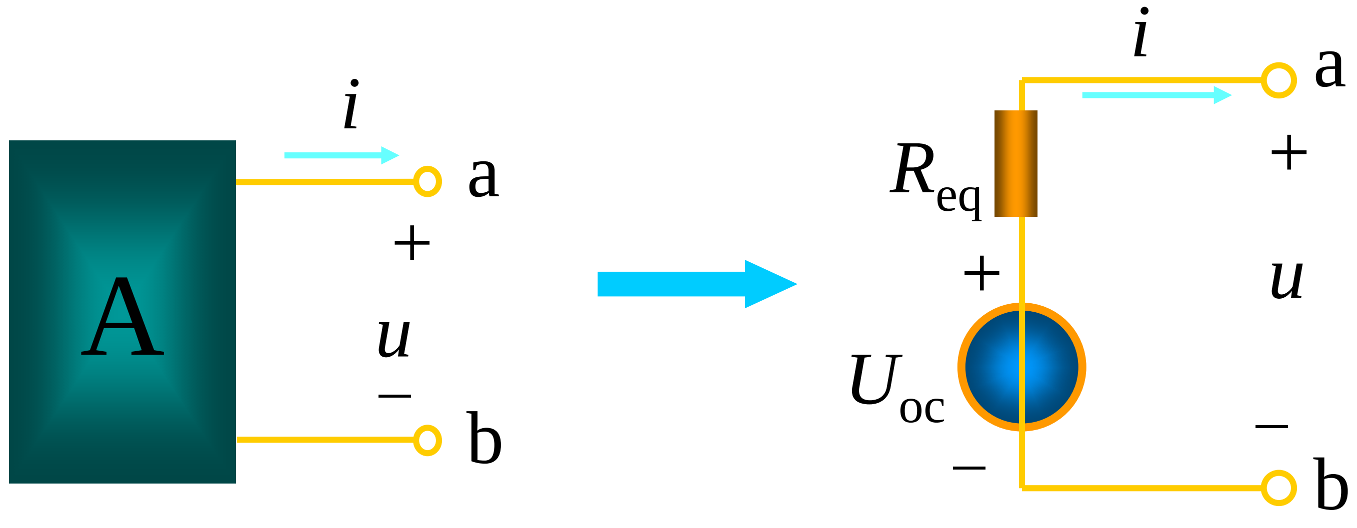
任何一个线性含源一端口网络，对外电路来说，总可以用一个电压源和电阻的串联组合来等效置换；此电压源的电压等于外电路断开时端口处的开路电压u_{oc}，而电阻等于一端口的输入电阻（或等效电阻R_{eq}）。

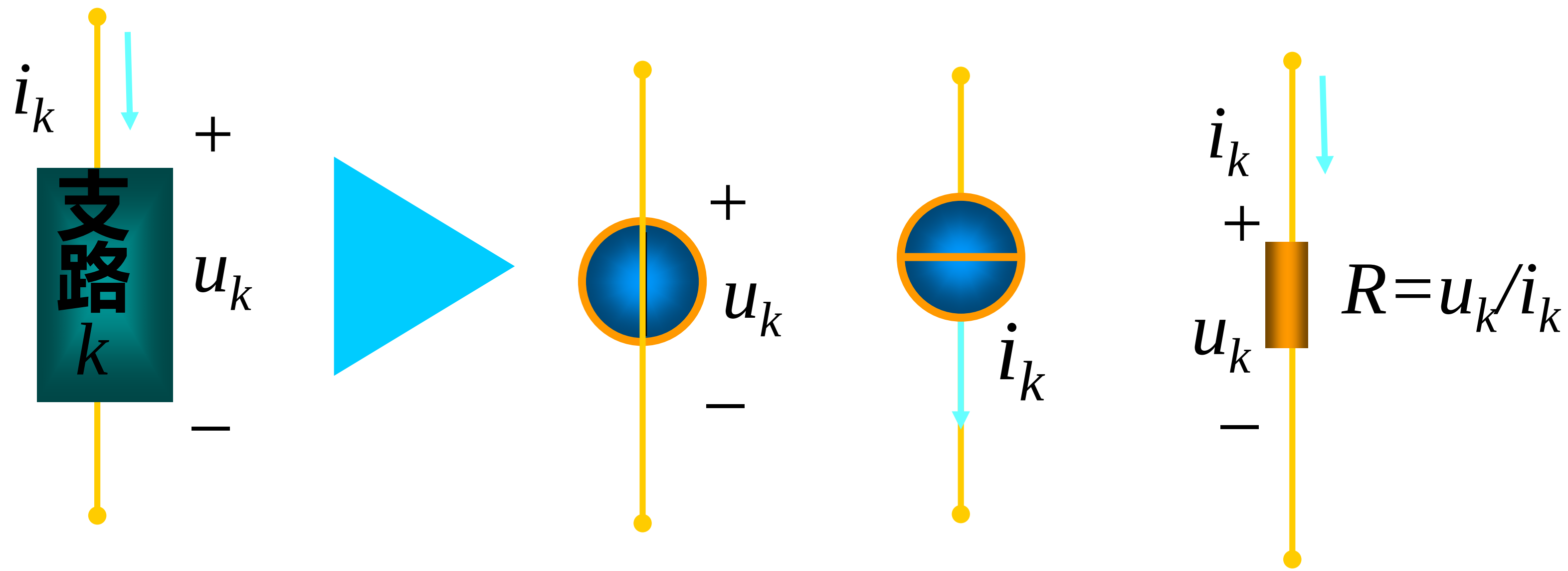


回顾



U=AI+B=-Req*I+Uoc

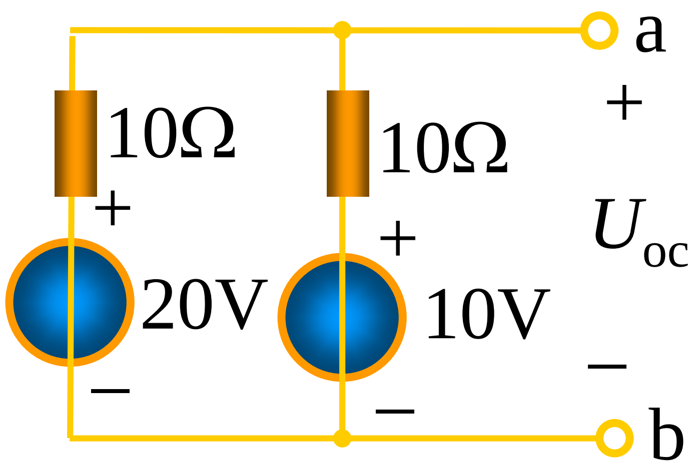

A
i
a
+
u
−
b
i
a
R_{eq}
+
U_{oc}
−
+
u
−
b


i_k
+
支路
k
u_k
−
+
u_k
−
i_k
i_k
+
u_k
−
$R=u_k/i_k$

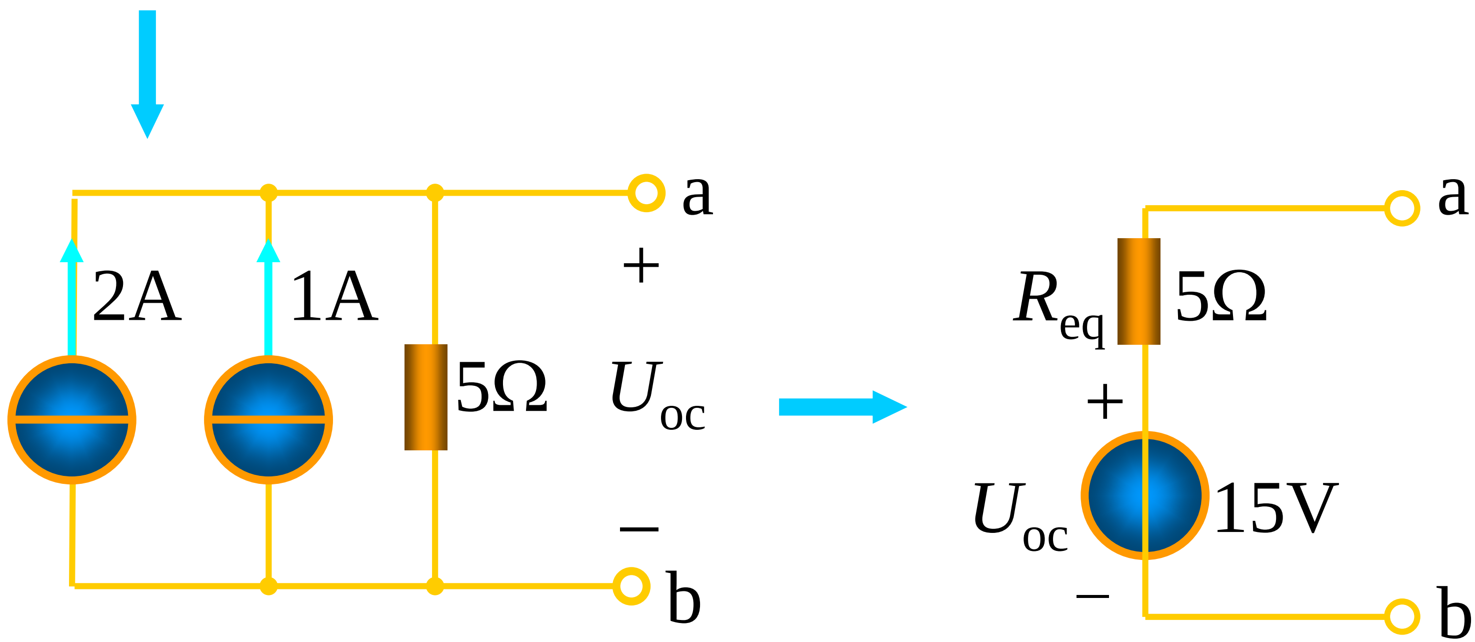
$$U=AI+B$$

戴维宁定理和诺顿定理指出：一个含源一端口网络可以按照其端口的伏安特性（$u-i$ 坐标图上的一条直线）等效为电压源与电阻的串联组合或电流源与电阻的并联组合。当此一端口网络与外电路连接后，其端口处就有确定的电压 u_p 与电流 i_p，也就是一端口网络工作于伏安特性曲线上的一点 $p(u_p, i_p)$。替代定理说明了在这种情况下可将一端口网络用一个电压源或电流源置换的替代关系，也可以说是在伏安特性曲线上特定的一点上的等效置换。这和戴维宁定理及诺顿定理中整个伏安特性曲线上的等效置换是不同的。

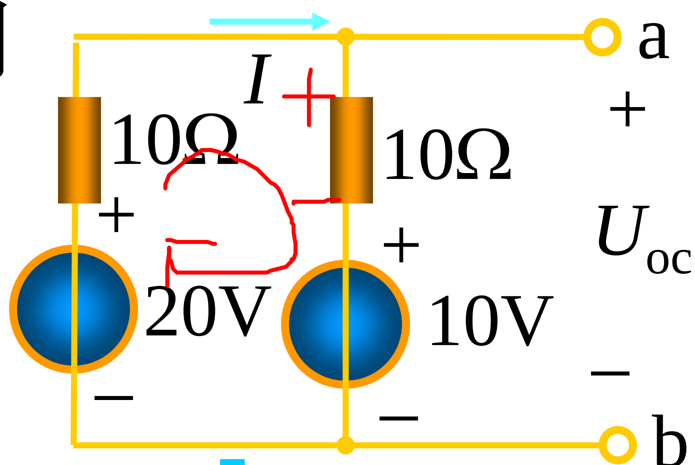
例

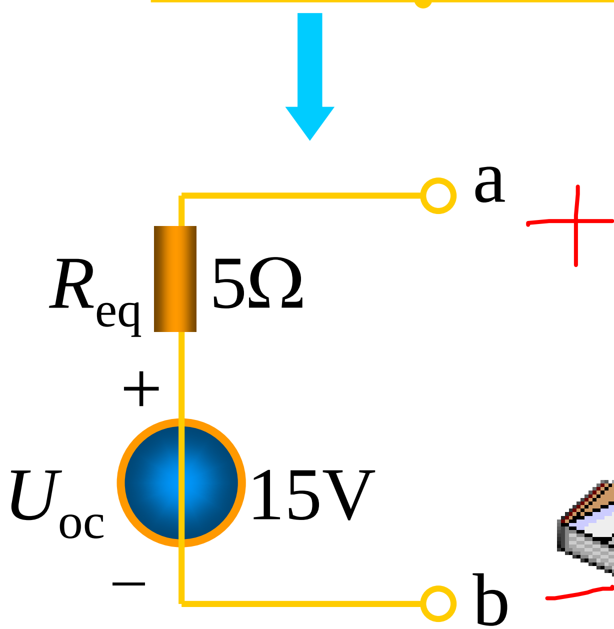


应用电源等效变换



例





应用戴维宁定理

(1) 求开路电压U_{oc}

$$I = \frac{20\text{V} - 10\text{V}}{10\Omega + 10\Omega} = 0.5\text{A}$$

$$U_{oc} = 0.5\text{A} \times 10\Omega + 10\text{V} = 15\text{V}$$

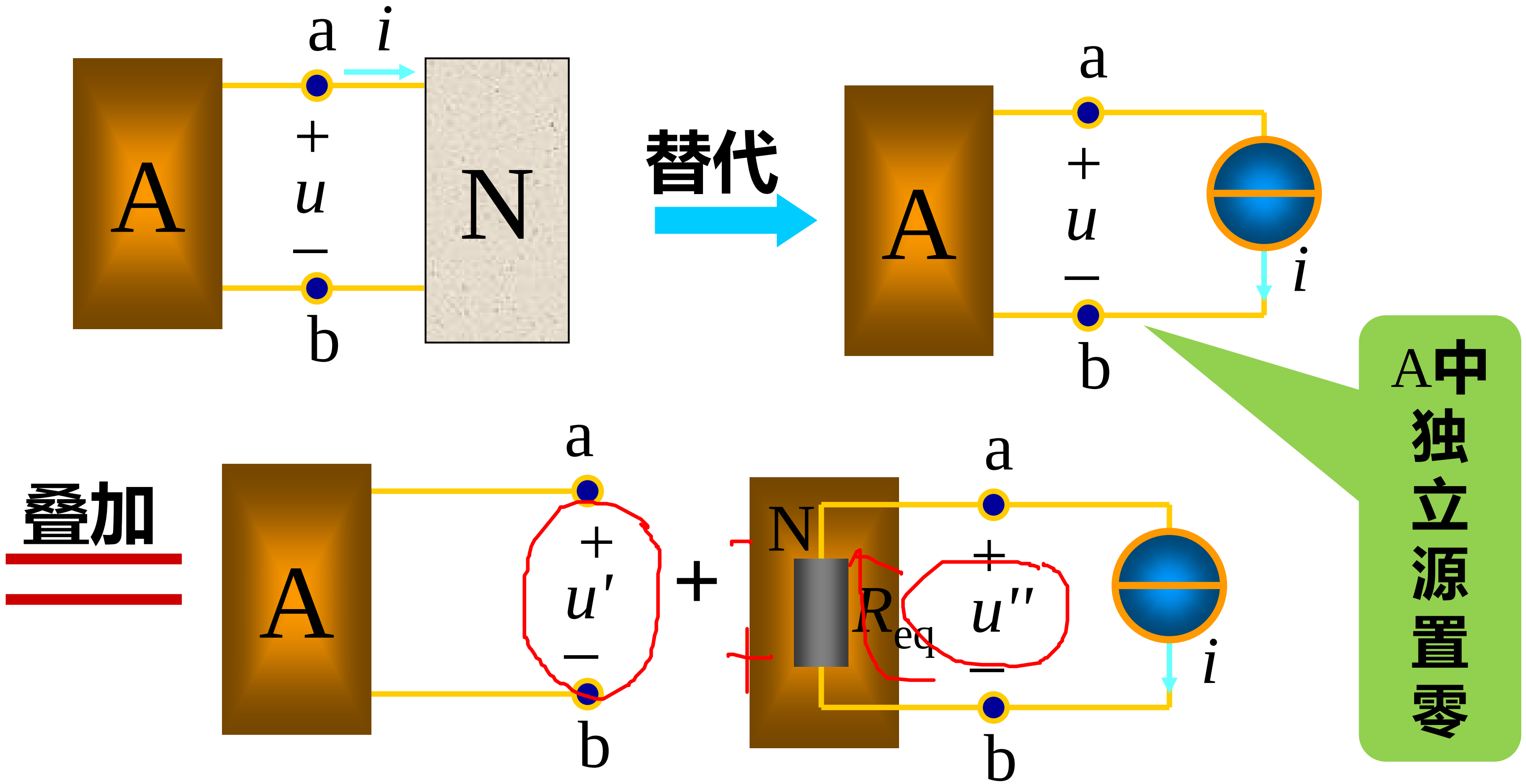
(2) 求输入电阻R_{eq}

$$R_{eq} = 10 // 10 = 5\Omega$$

注意

两种解法结果一致，戴维宁定理更具普遍性。

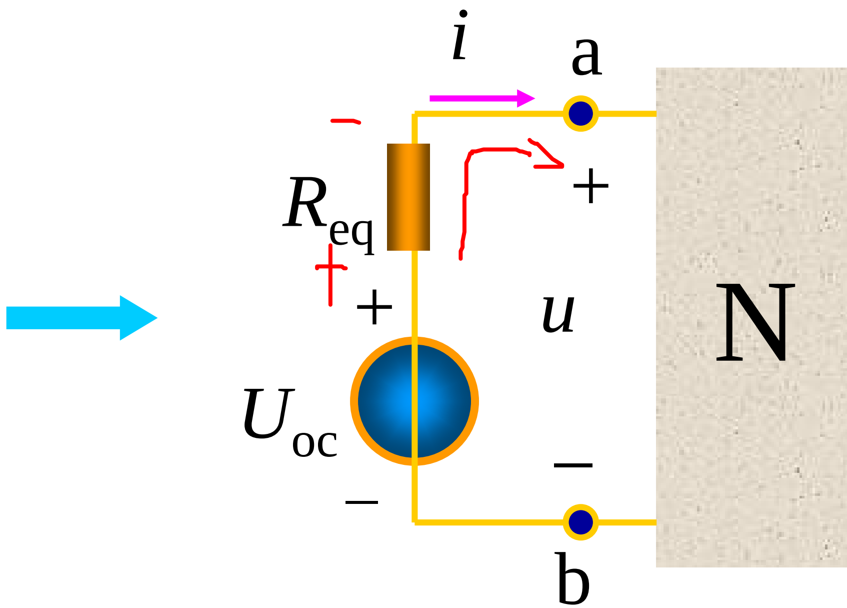
2.定理的证明



$$u' = u_{oc}$$

$$u'' = -R_{eq} i$$

$$u = u' + u'' = u_{oc} - R_{eq} i$$

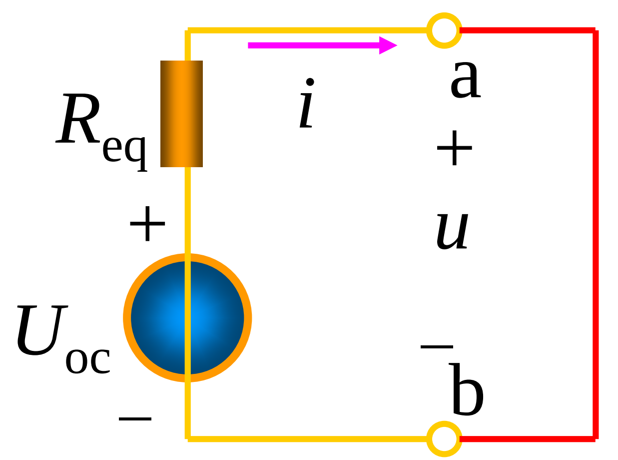


(u_R, i_R)

3.定理的应用

（1）开路电压U_{oc}的计算

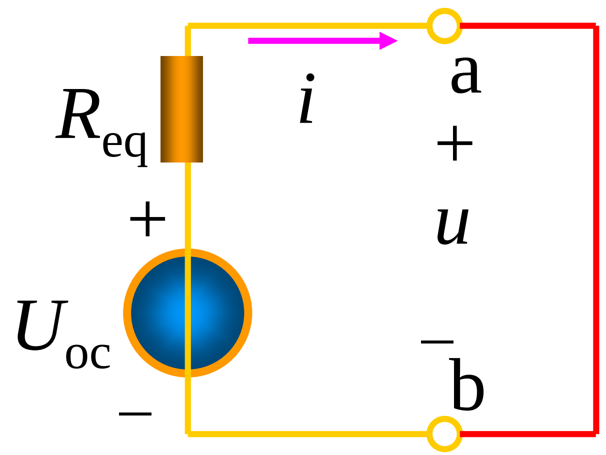
戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压U_{oc}，电压源方向与所求开路电压方向有关。计算U_{oc}的方法视电路形式选择前面学过的任意方法，使易于计算。



3.定理的应用

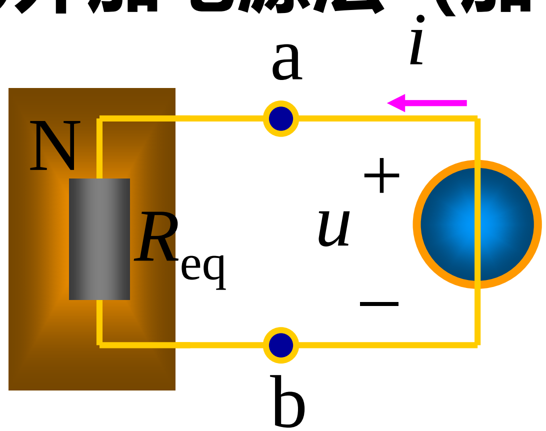
（2）等效电阻的计算

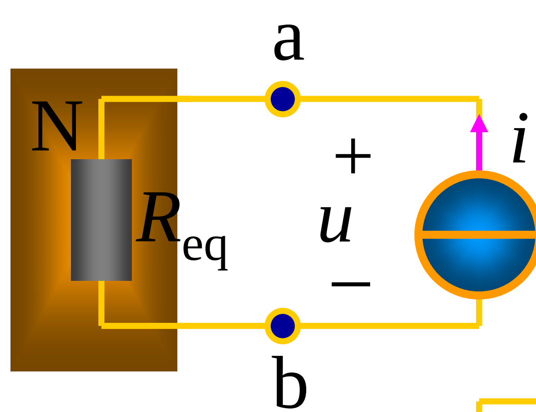
等效电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后，所得无源一端口网络的输入电阻。常用下列方法计算：



①当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联和△－Y互换的方法计算等效电阻；

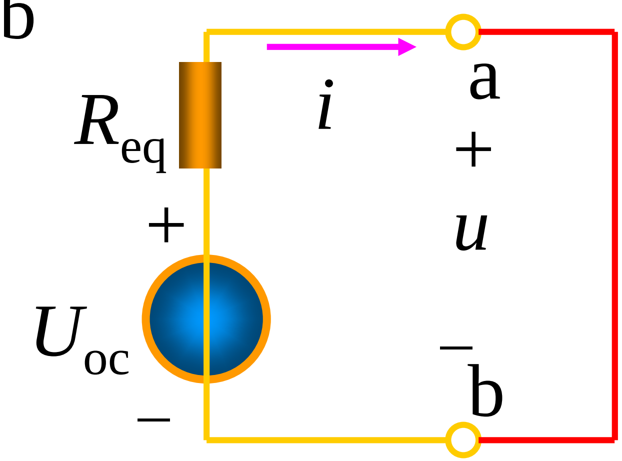
②外加电源法（加电压求电流或加电流求电压）；





$$R_{eq}=\frac{u}{i}$$

③开路电压，短路电流法。



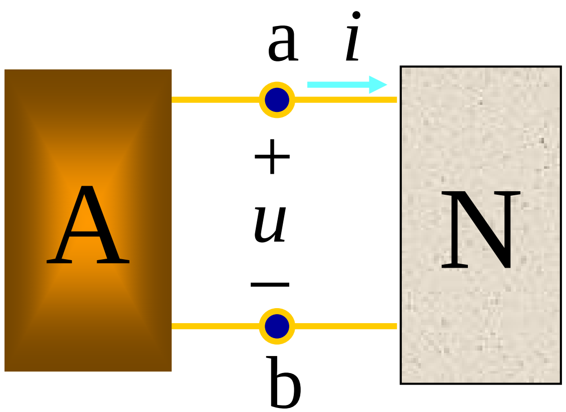
$$R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$

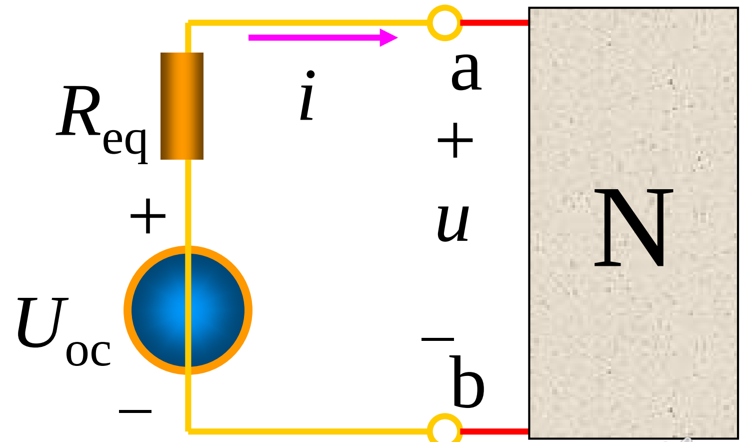
②③ 方法更有一般性。

注意

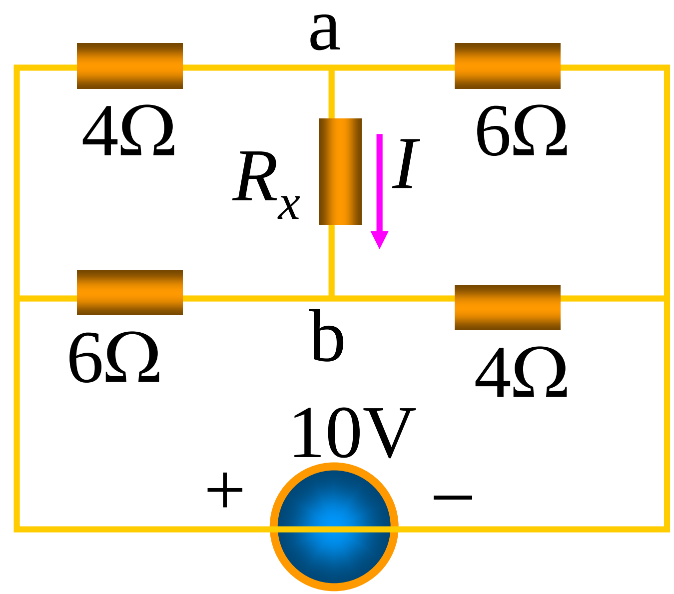
① 外电路可以是任意的线性或非线性电路，外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变(伏-安特性等效)。

② 当一端口内部含有受控源时，控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

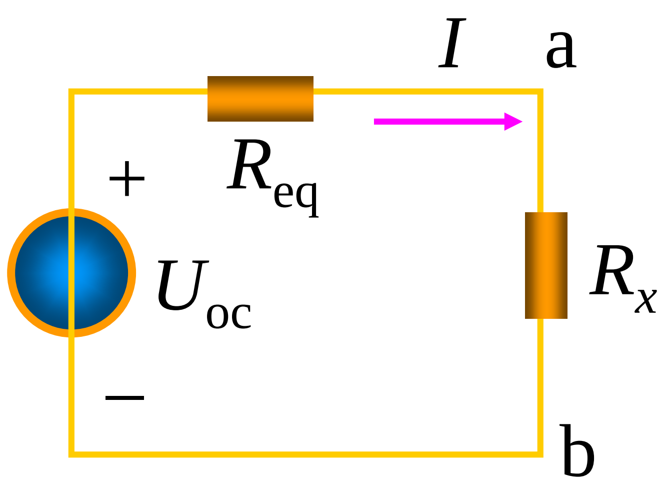


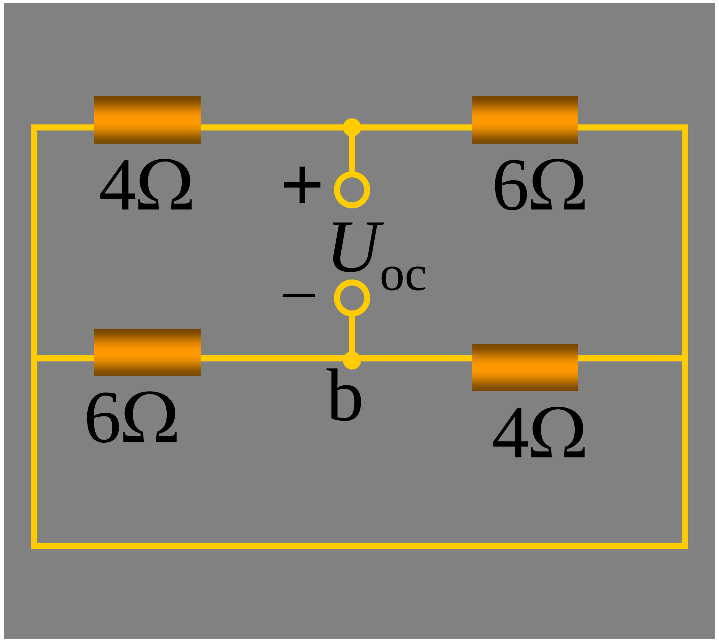


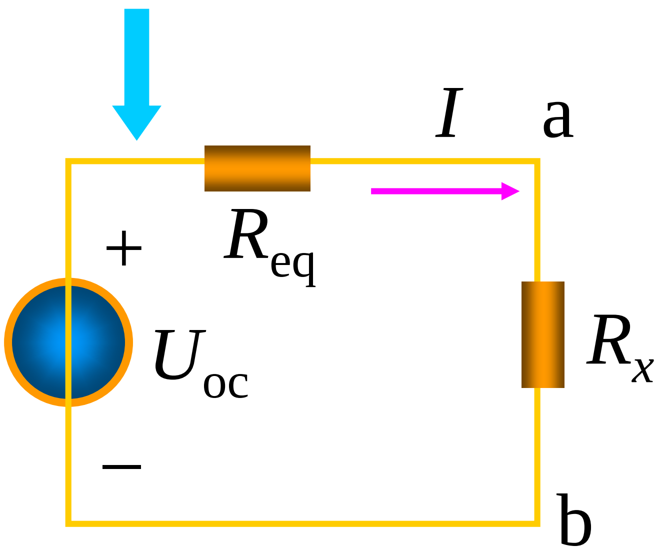
例1 **计算**R_x**分别为**1.2Ω、5.2Ω**时的电流**I



解 **断开**R_x**支路，将剩余一端口网络化为戴维宁等效电路：**







①求开路电压

$$U_{oc} = U_1 - U_2$$
$$=10\times6/(4+6)-10\times4/(4+6)$$
$$= 6-4=2\text{V}$$

②求等效电阻R_{eq}

$$R_{eq}=4//6+6//4=4.8\Omega$$

③ R_x =1.2Ω**时，**

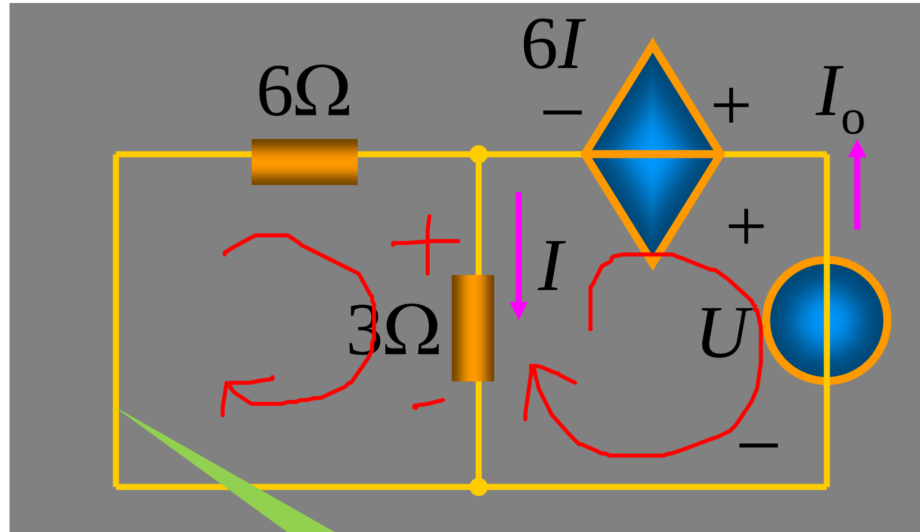
$$I= U_{oc} /(R_{eq} + R_x) =0.333\text{A}$$

R_x =5.2Ω**时，**

$$I= U_{oc} /(R_{eq} + R_x) =0.2\text{A}$$

例2　**求电压**U_o

解 **①求开路电压**U_{oc}



$$\begin{cases} U_{oc}-6I-3\ \Omega\times I=0 \\ 3\ \Omega\times I+6\ \Omega\times I-9V=0 \end{cases}$$

I=9V/9 Ω =1A

→ U_{oc}=9V

独立源置零

②求等效电阻R_{eq} **方法1：加压求流**

$$\begin{cases} U-6I+3\ \Omega\times I=0 \\ I=I_o\times 6/(6+3)=(2/3)I_o \end{cases}$$

→ $U=9\times(2/3)I_o=6I_o$

$R_{eq}=U/I_o=6\ \Omega$

方法2：开路电压、短路电流

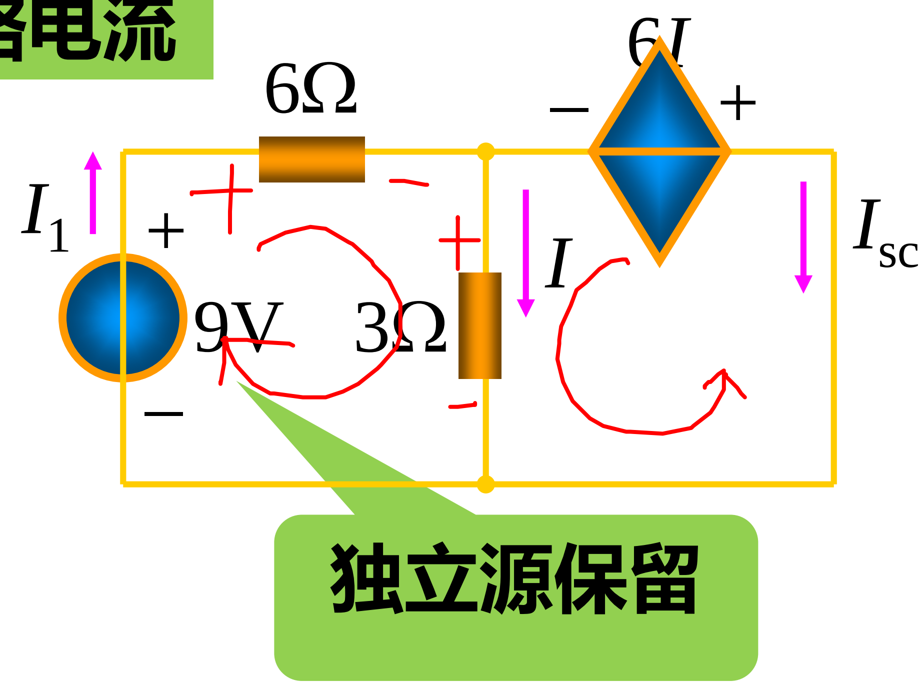
$(U_{oc}=9\text{V})$

$6I+3I=0$ ➡ $I=0$

$6\Omega\times I_1+3\Omega\times I-9\text{V}=0$

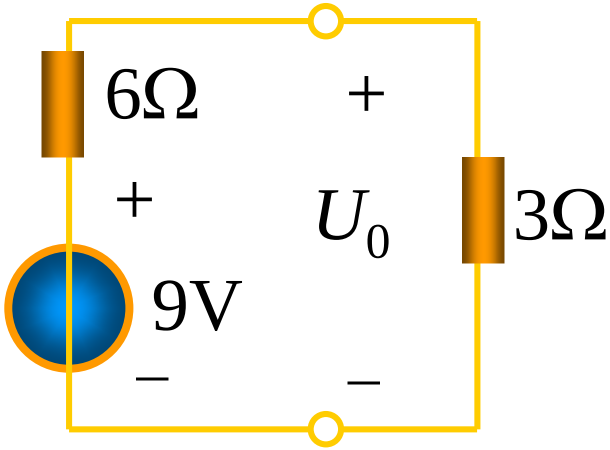
$I_{sc}=I_1=9/6=1.5\text{A}$

$R_{eq} = U_{oc} / I_{sc} =9/1.5=6\ \Omega$



③等效电路

$$U_0=\frac{9}{6+3}\times 3=3\text{V}$$



(1) 戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压 U_{oc}。

(2) 戴维宁等效电路中串联电阻为将网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后端口的等效电阻。

等效电阻的计算方法：

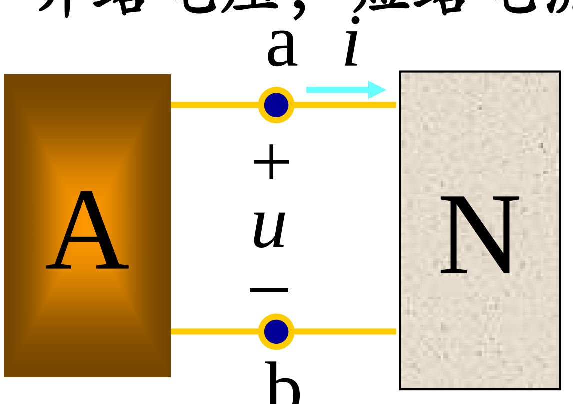
① 当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联的方法计算；

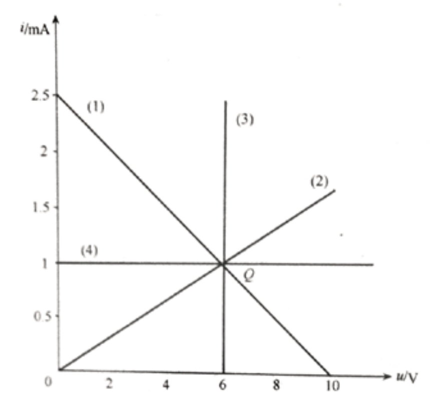
$$u = u_{oc} - R_{eq}i$$

② 加压求流法或加流求压法。

③ 开路电压，短路电流法。

②③ 方法更有一般性。

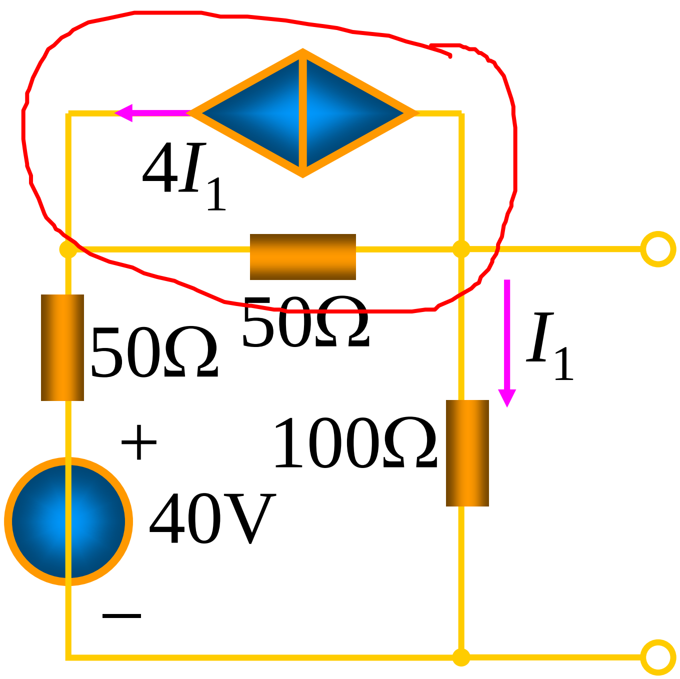


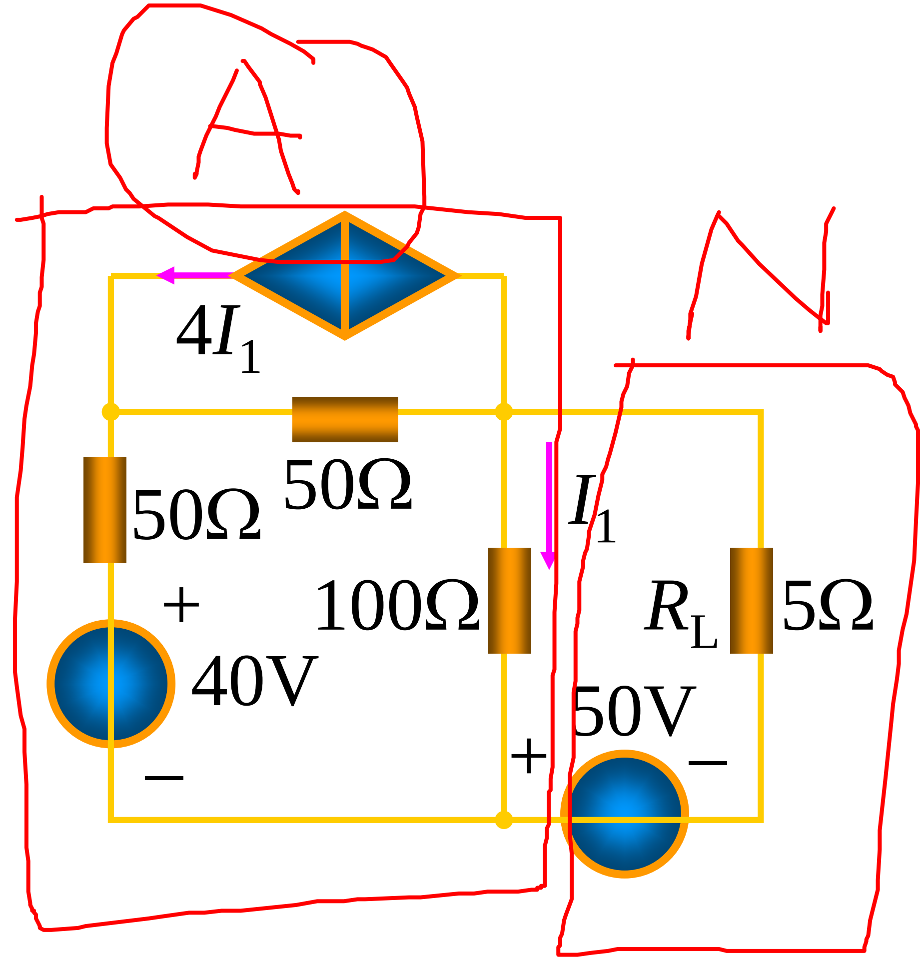


例3 **求负载R_L消耗的功率**

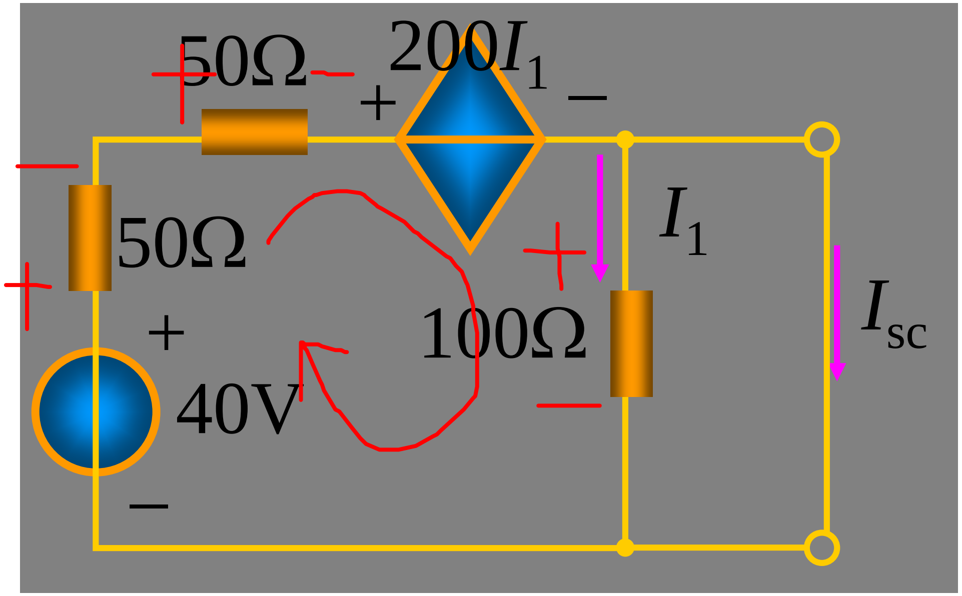
解

①求开路电压U_{oc}





$$(\mathbf{50}+\mathbf{50})I_1+200I_1+100I_1-\mathbf{40}=0$$



$$\Rightarrow \quad I_1=0.1\text{A}$$

$$U_{oc}=100I_1=10\text{V}$$

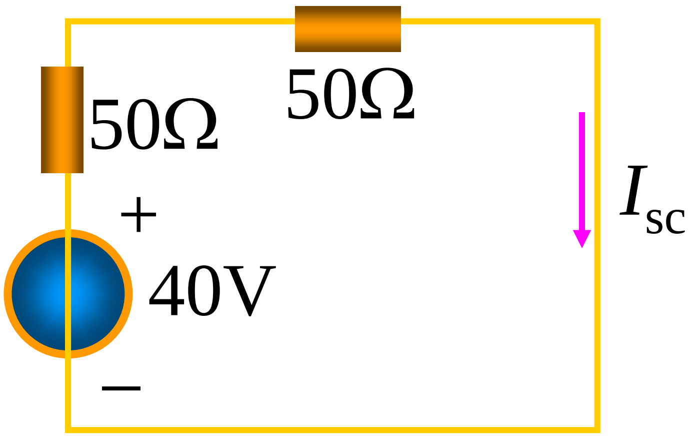
②求等效电阻R_{eq}

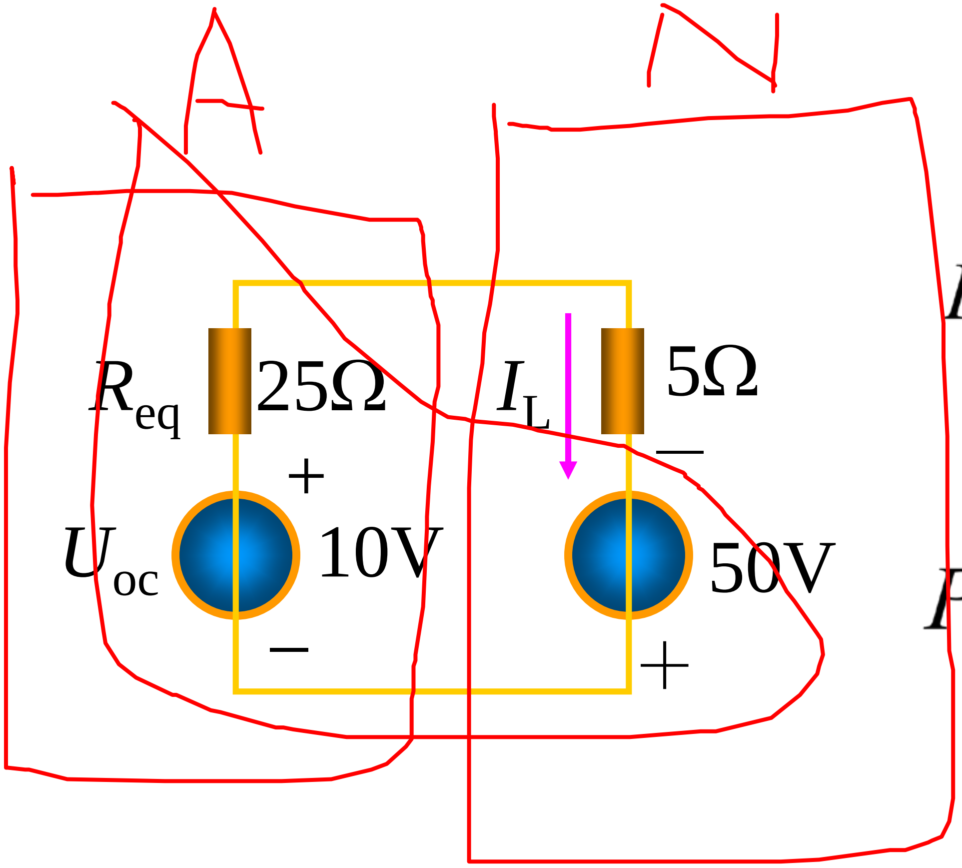
用开路电压、短路电流法

$$I_1=0$$

$$I_{sc}=40/100=0.4\text{A}$$

$$R_{eq}=\frac{U_{oc}}{I_{sc}}=10/0.4=25\Omega$$

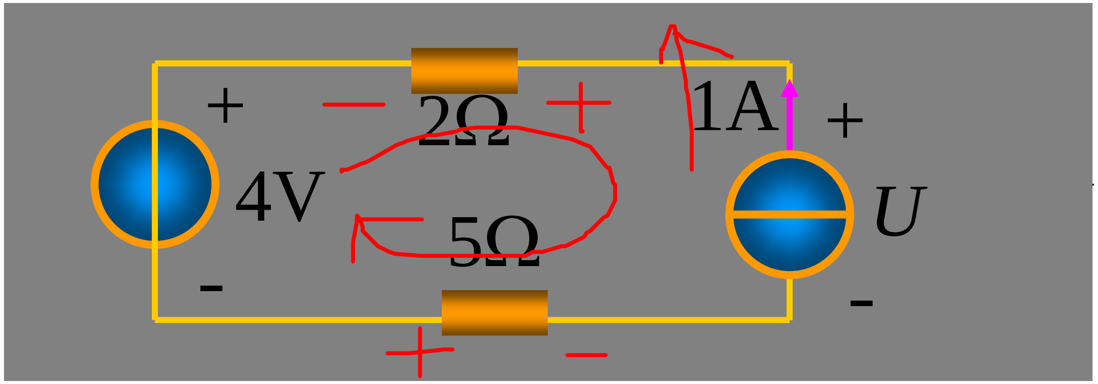




$$I_L = \frac{U_{oc} + 50}{25 + 5} = \frac{60}{30} = 2\text{A}$$

$$P_L = 5I_L^2 = 5 \times 4 = 20\text{W}$$

例4　　**已知开关S**



→ 1　A = 2A

→ 2　V = 4V

求开关S打向3，电压U等于多少。

解　$i_{Sc}=2\text{A}\quad U_{oc}=4\text{V}\longrightarrow R_{eq}=2\Omega$

$$U=(2+5)\times 1+4=11\text{V}$$

小结

(1) 戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压U_{oc}。

(2) 戴维宁等效电路中串联电阻为将网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后端口的等效电阻。

等效电阻的计算方法:

1 当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联的方法计算;

2 加压求流法或加流求压法。

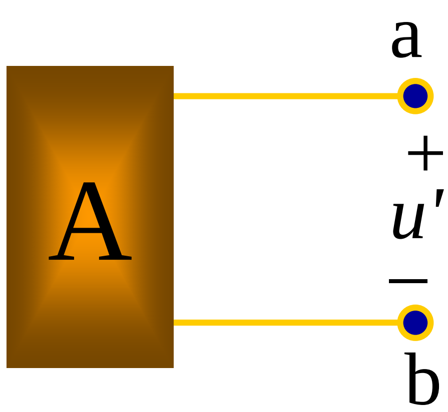
3 开路电压，短路电流法。

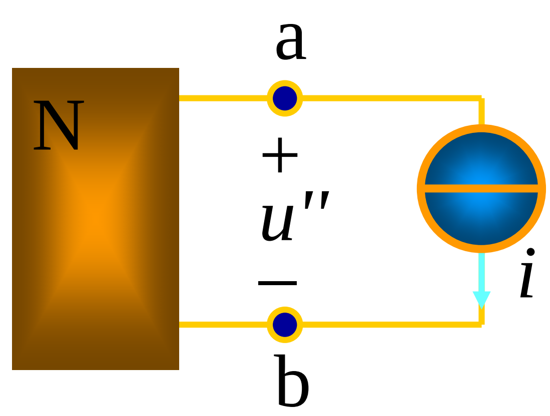
2 3 方法更有一般性。

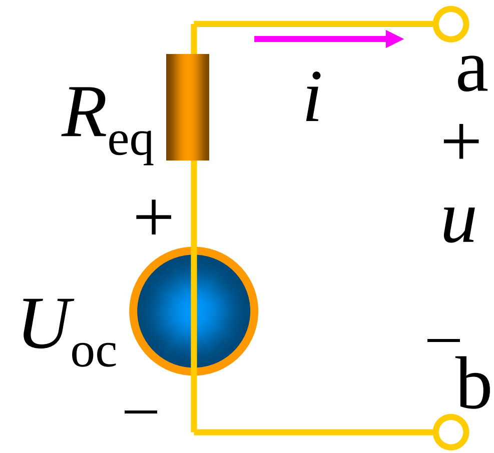
(3) 当一端口内部含有受控源时，控制量与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

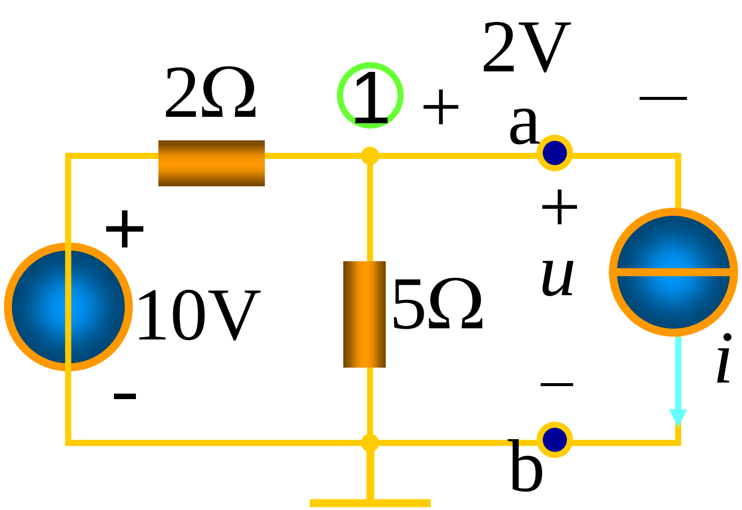
(4) 戴维宁定理仅适用于线性电路。

$$u = u' + u'' = u_{oc} - R_{eq} i$$









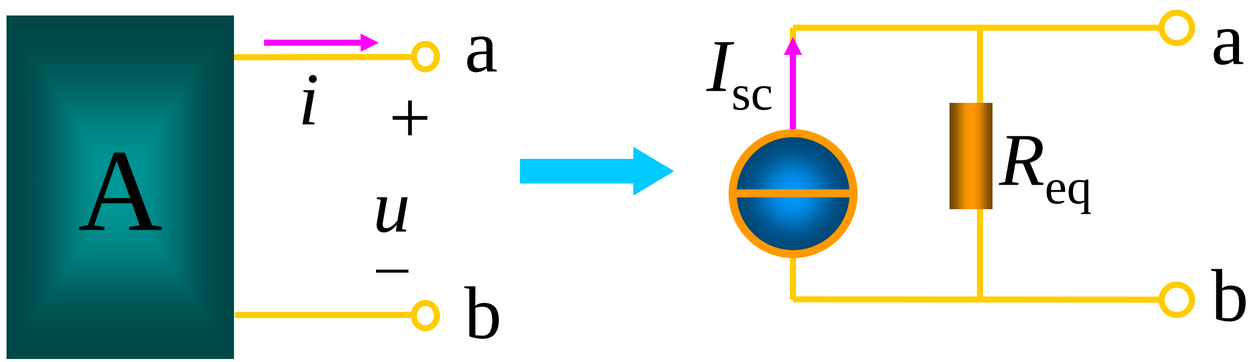
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\boldsymbol{u}=\frac{10\boldsymbol{V}}{2}-\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{u}=\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{7}}-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{i}$$

$$u_{oc}=\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{7}}, R_{eq}=\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{7}}$$

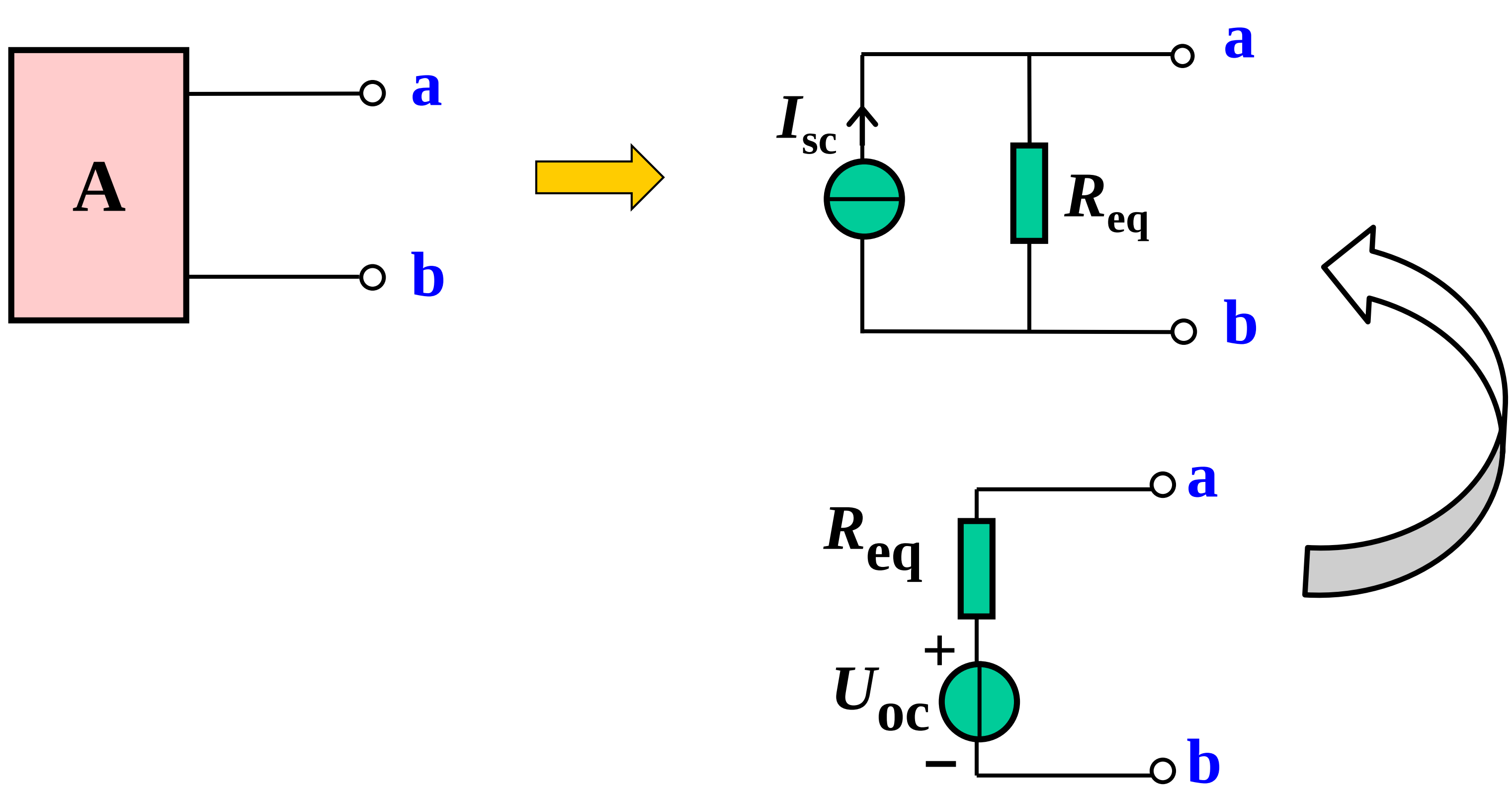
4. 诺顿定理

任何一个含源线性一端口电路，对外电路来说，可以用一个电流源和电阻的并联组合来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，电阻等于该一端口的输入电阻。



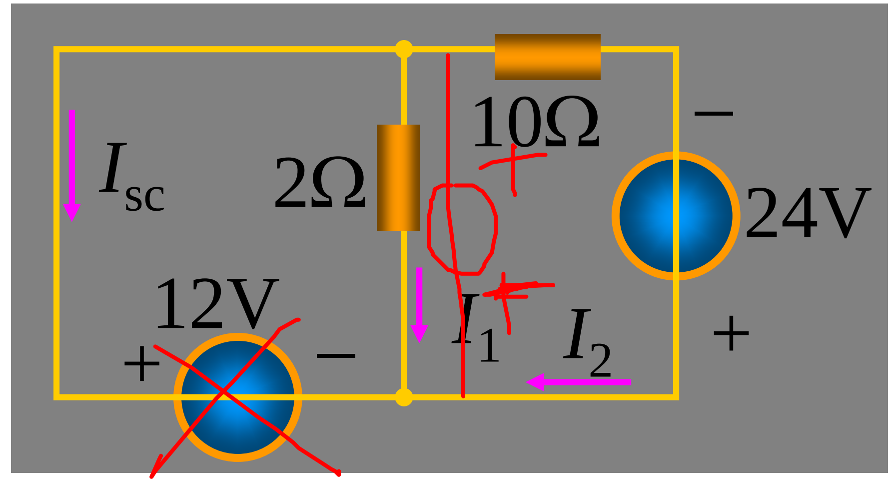
一般情况，诺顿等效电路可由戴维宁等效电路经电源等效变换得到。

诺顿等效电路可采用与戴维宁定理类似的方法证明。



例1　求电流I

解　①求短路电流I_{sc}

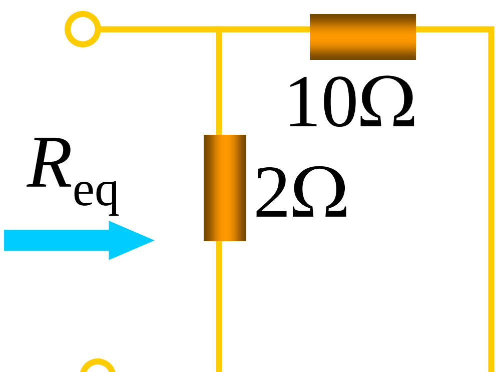


$I_1 = 12/2 = 6A$

$I_2 = (24+12)/10 = 3.6A$

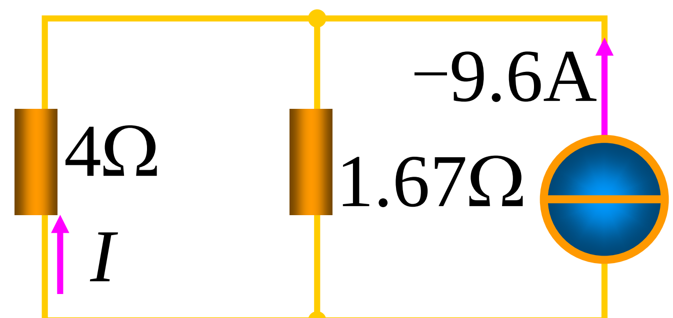
$I_{sc} = -I_1 - I_2 = -3.6 - 6 = -9.6A$　　$R_{eq} = 10//2 = 1.67\ \Omega$

②求等效电阻R_{eq}



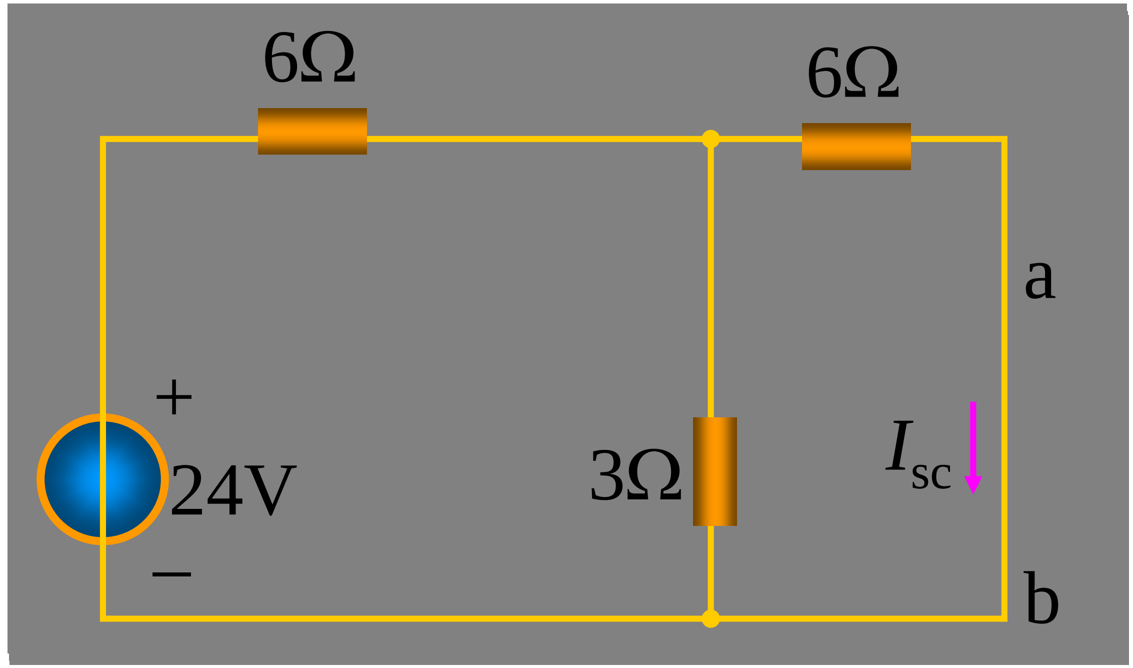
③诺顿等效电路:

应用分流公式



$I = 2.83A$

例2 **求电压U**

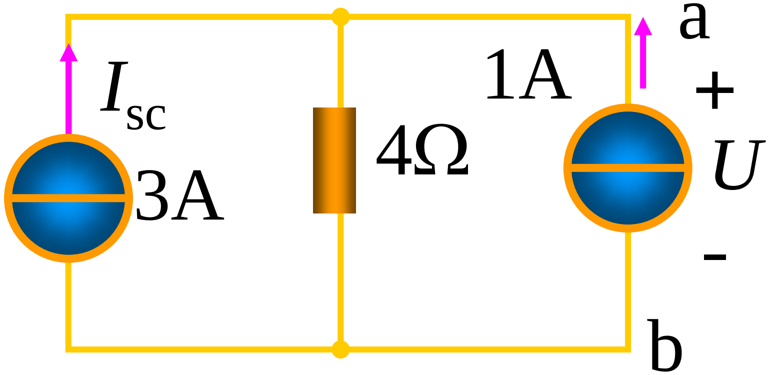


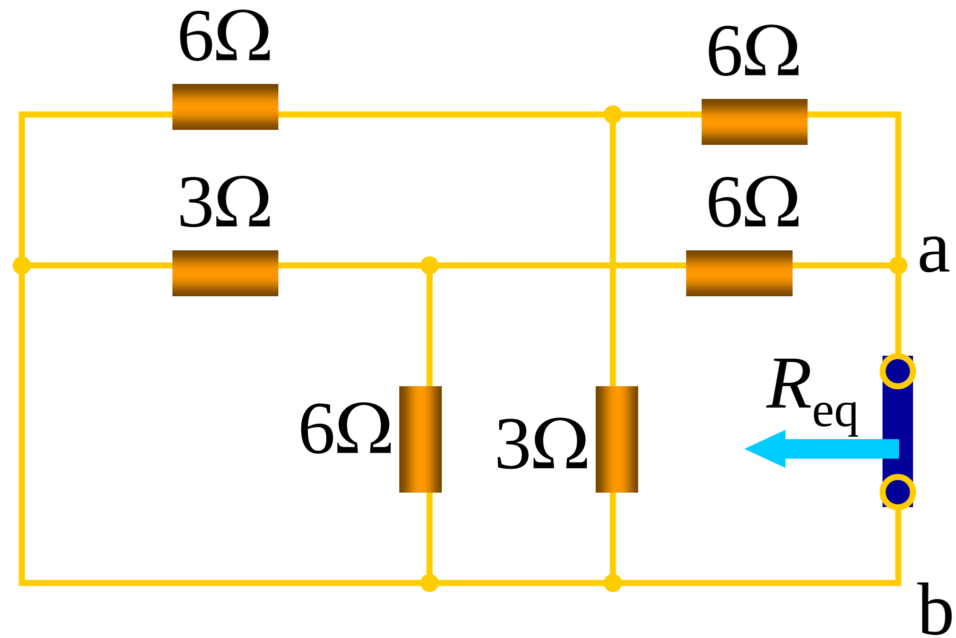
解 **本题用诺顿定理求比较方便。因**a、b**处的短路电流比开路电压容易求。**

①求短路电流I_{sc}

$$I_{sc}=\frac{24}{6//6+3}\times\frac{1}{2}+\frac{24}{3//6+6}\times\frac{3}{3+6}=3\text{A}$$

②求等效电阻R_{eq}





$$R_{eq}=[6//3+6]//[3//6+6]=4\Omega$$

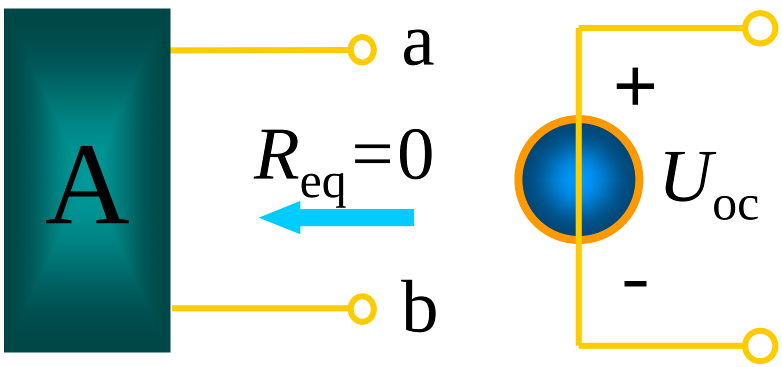
③诺顿等效电路:

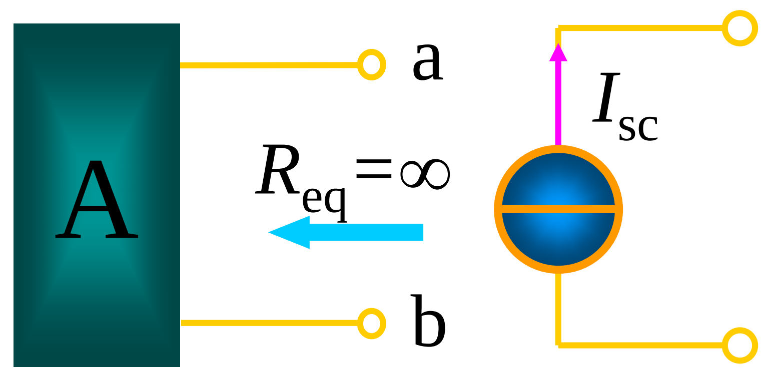
$$U=(3+1)\times 4=16\text{V}$$

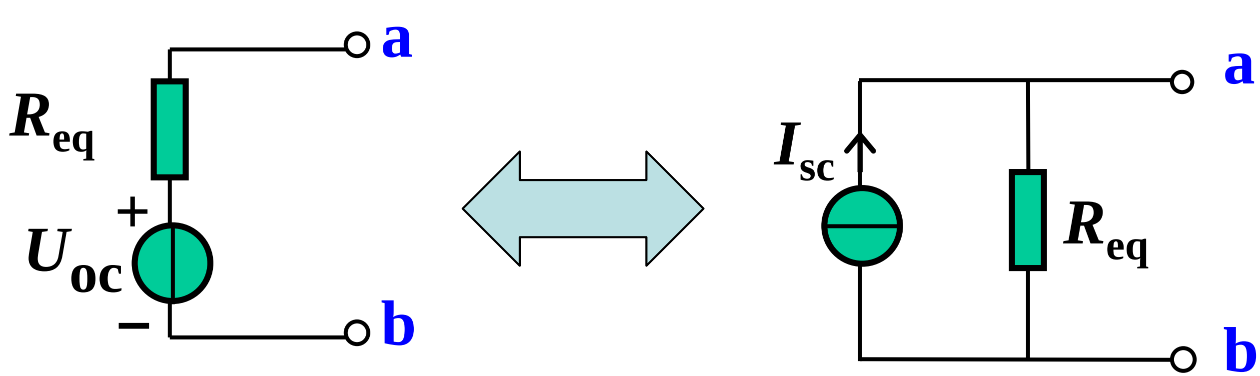
注意

①若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=0$，该一端口网络只有戴维宁等效电路，无诺顿等效电路。

②若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=\infty$，该一端口网络只有诺顿等效电路，无戴维宁等效电路。

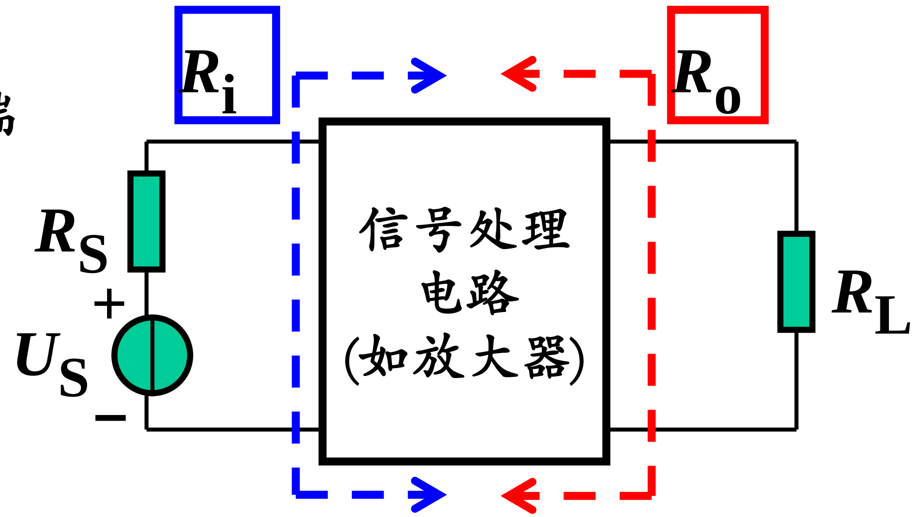




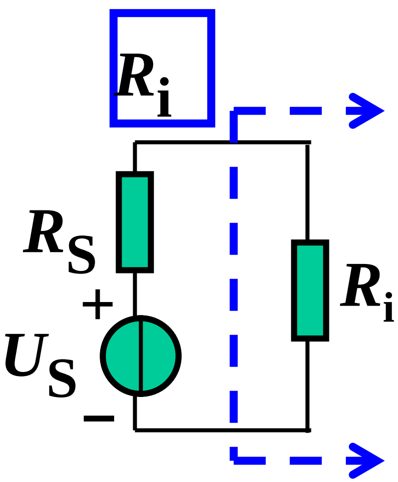


关于输入—输出电阻的讨论（电压型）

R_i为从信号输入端看入的无独立源一端口等效电阻

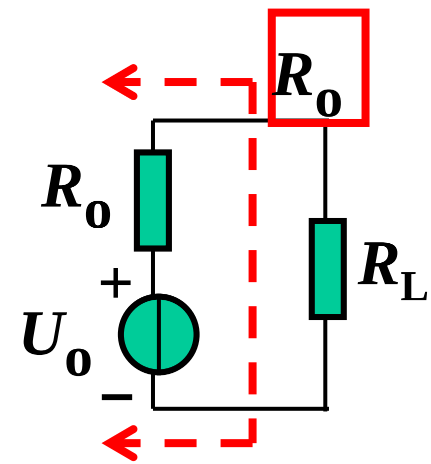


R_o为从信号输出端看入的有独立源一端口戴维宁等效电阻



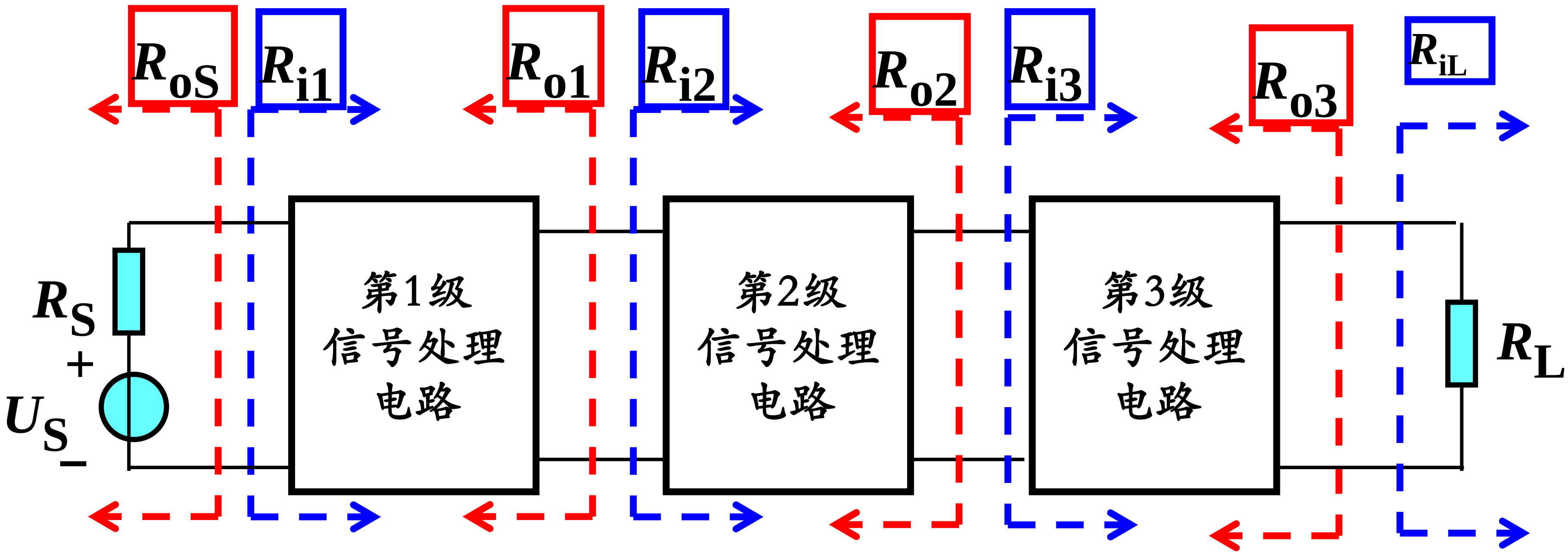
R_i越大

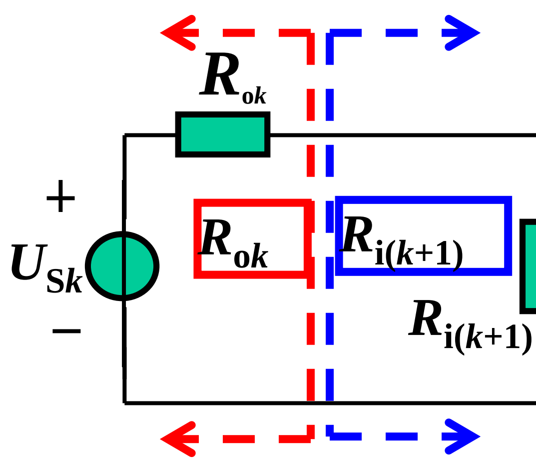
放大器输入端获得电压越大



R_o越小

带载能力强

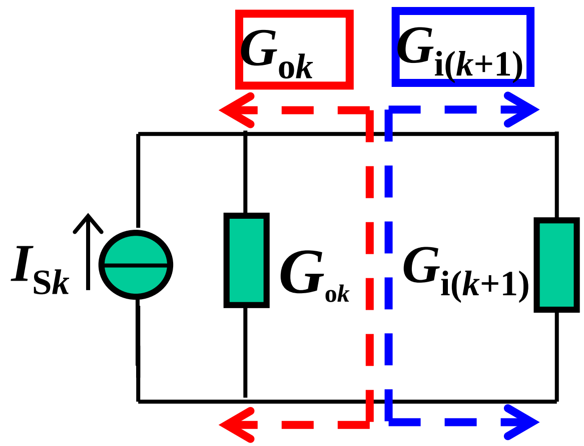




R_i越大越好 → 从前一级信号处理电路获得的电压大 → 对前级影响小

R_o越小越好 → 给后一级信号处理电路的电压大 → 带载能力强

关于输入—输出电阻的讨论(电流型)



G_i越大越好 ⟶ 从前一级信号处理电路获得的电流大

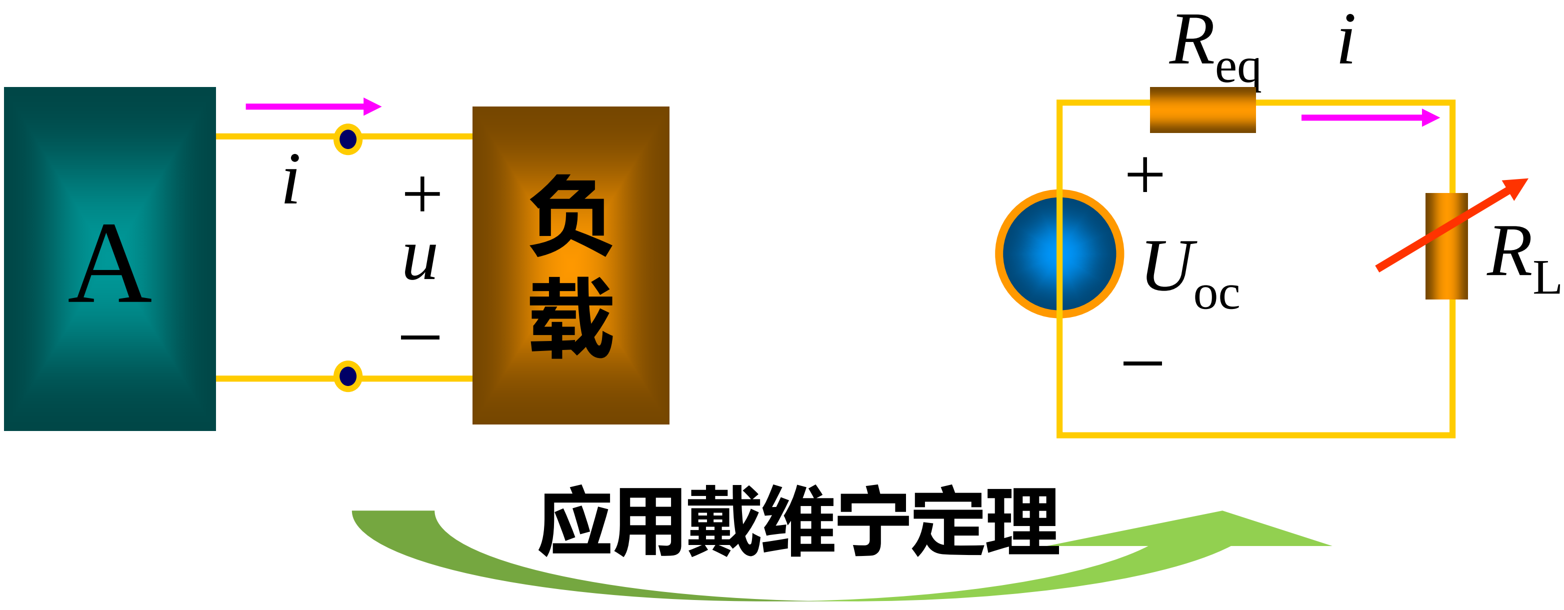
⟶ 对前级影响小

G_0越小越好 ⟶ 给后一级信号处理电路的电流大

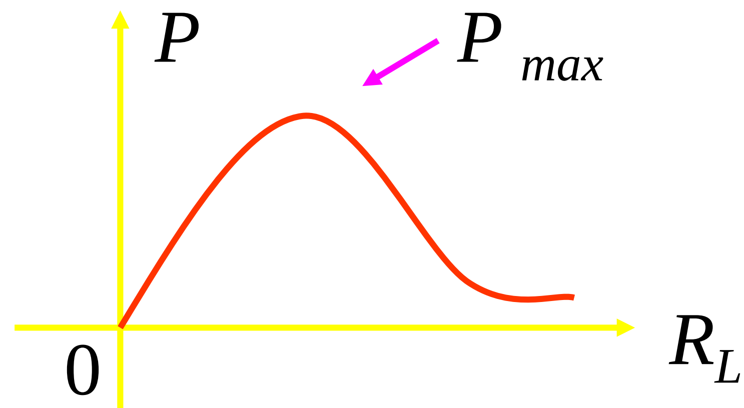
⟶ 带载能力强

4.4 最大功率传输定理

一个含源线性一端口电路，当所接负载不同时，一端口电路传输给负载的功率就不同，讨论负载为何值时能从电路获取最大功率，及最大功率的值是多少的问题是有工程意义的。



$$P = I^2 * R_L = R_L\left(\frac{u_{oc}}{R_{eq}+R_L}\right)^2$$



对P求导：

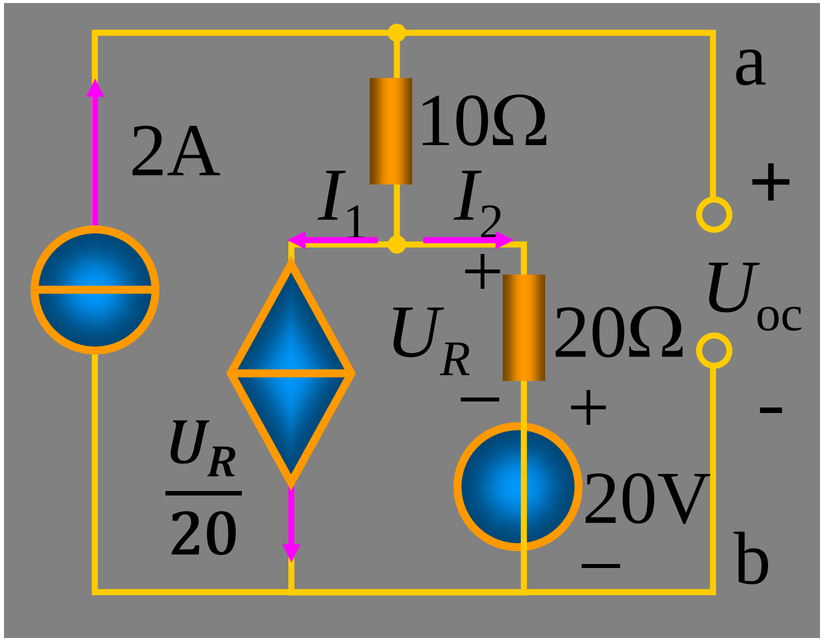
$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}R_L} = P' = u_{oc}^2\,\frac{(R_{eq}+R_L)^2 - 2R_L(R_{eq}+R_L)}{(R_{eq}+R_L)^4} = 0$$

$$\rightarrow \quad R_L = R_{eq} \quad \rightarrow \quad P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$$

最大功率匹配条件

例 R_L为何值时能获得最大功率，并求最大功率

解 ①求开路电压U_{oc}



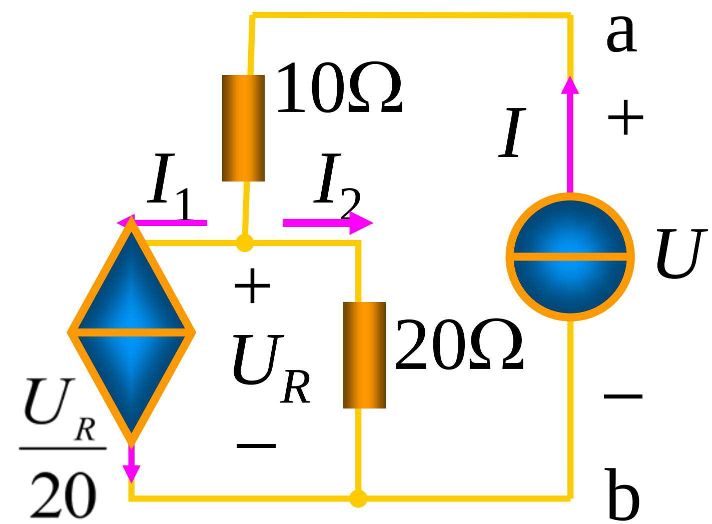
$$I_1 = I_2 = U_R/20$$

$$I_1 + I_2 = 2A$$

$$I_1 = I_2 = 1A$$

$$U_{oc} = 2 \times 10 + 20 I_2 + 20 = 60V$$

②求等效电阻R_{eq}　加流求压法



$$I_1 = I_2 = I/2$$

$$U = 10I + 20 \times I/2 = 20I$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 20\Omega$$

③由最大功率传输定理得:

$R_L = R_{eq} = 20\Omega$　时其上可获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4 \times 20} = 45\,\mathrm{W}$$

注意

①最大功率传输定理用于一端口电路给定,负载电阻可调的情况;

②一端口等效电阻消耗的功率一般并不等于端口内部消耗的功率,因此当负载获取最大功率时,电路的传输效率并不一定是50%;

③计算最大功率问题结合应用戴维宁定理或诺顿定理最方便.

4.5* 特勒根定理
(Tellegen's Theorem)

1. 特勒根定理1

任何时刻，一个具有n个结点和b条支路的集总电路，在支路电流和电压取关联参考方向下，满足:

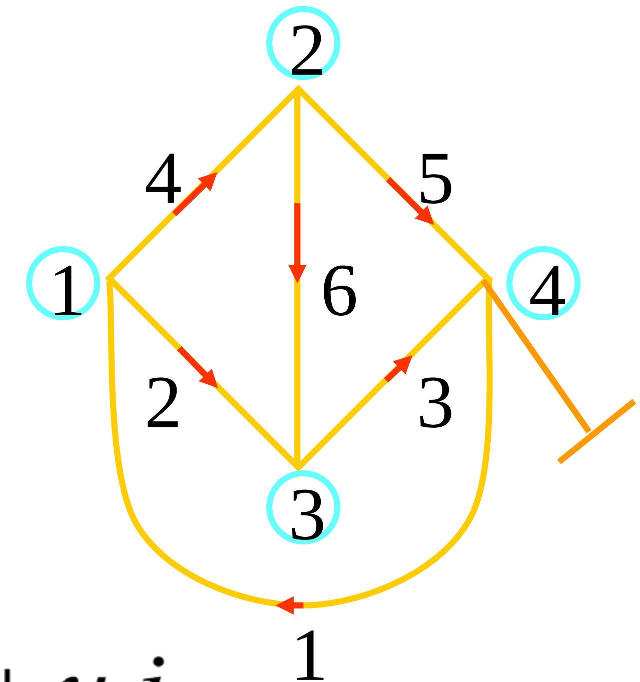
$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

功率守恒

表明　任何一个电路的全部支路吸收的功率之和恒等于零。

定理证明： 应用KCL：

$$
\begin{cases}
① & -i_1 + i_2 + i_4 = 0 \\
② & -i_4 + i_5 + i_6 = 0 \\
③ & -i_2 + i_3 - i_6 = 0
\end{cases}
$$



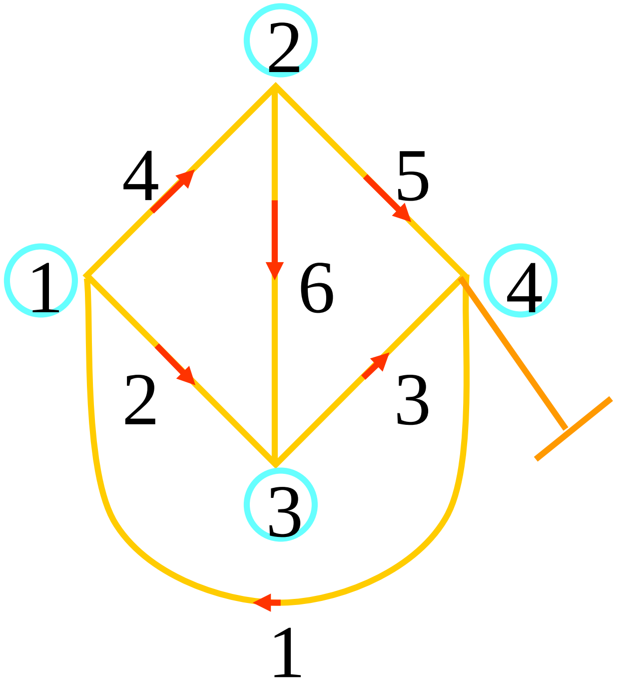
$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \cdots + u_6 i_6$$

$$= -u_{n1} i_1 + (u_{n1} - u_{n3}) i_2 + u_{n3} i_3 + (u_{n1} - u_{n2}) i_4 + u_{n2} i_5 + (u_{n2} - u_{n3}) i_6$$

支路电压用结点电压表示

$$u_{n1}(-i_1+i_2+i_4)$$
$$+u_{n2}(-i_4+i_5+i_6)$$
$$+u_{n3}(-i_2+i_3-i_6)=0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0}$$



2. 特勒根定理2

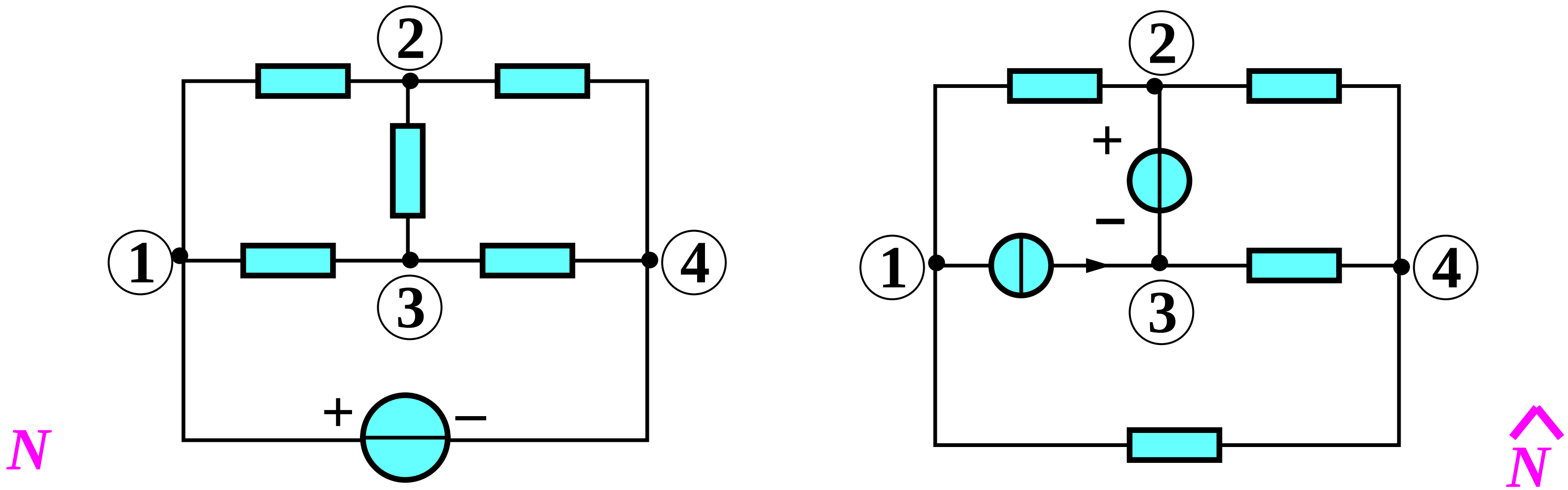
任何时刻，对于两个具有n个结点和b条支路的集总电路，当它们具有相同的图，但由内容不同的支路构成，在支路电流和电压取关联参考方向下，满足以下内容:

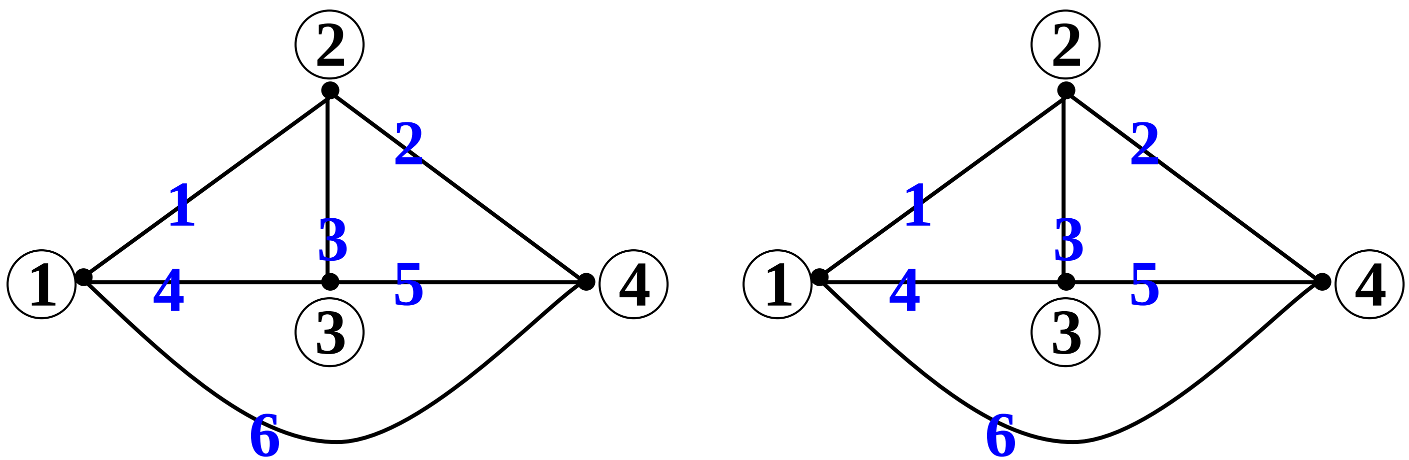
$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$$

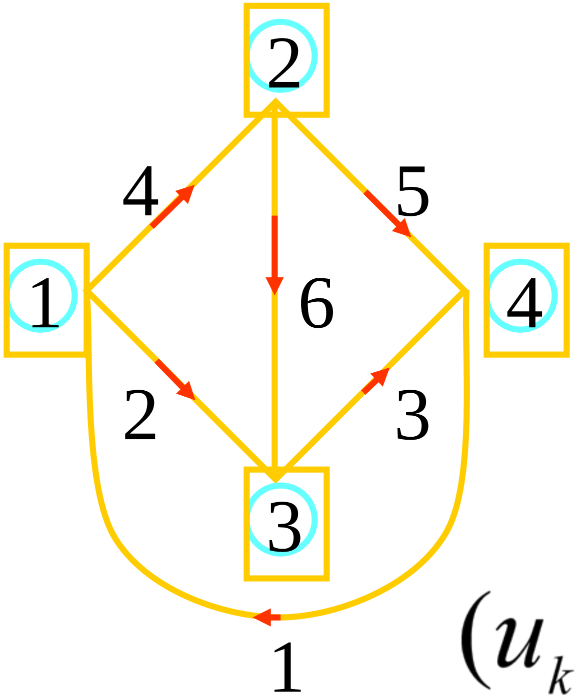
拟功率定理

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$$

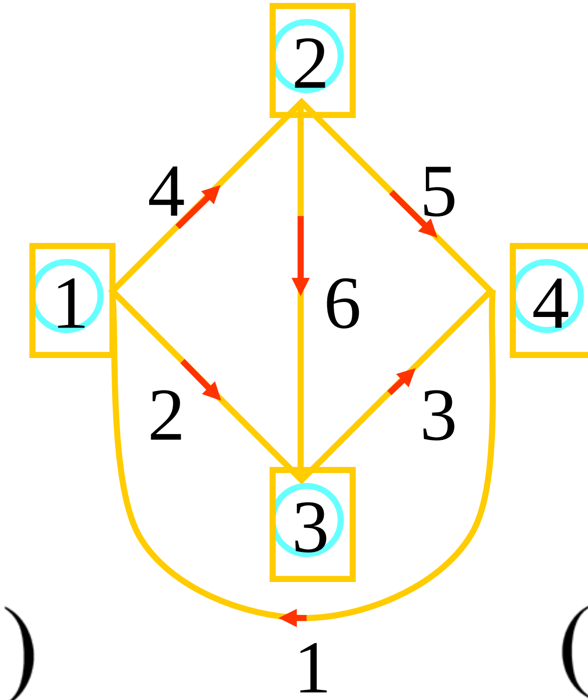
具有相同拓扑结构的电路







(u_k, i_k)



$(\hat{u}_k, \hat{i}_k)$

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$$

拟功率定理

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

定理证明：

对电路2应用KCL：

$$\begin{cases} ① & -\hat{i}_1+\hat{i}_2+\hat{i}_4=0 \\ ② & -\hat{i}_4+\hat{i}_5+\hat{i}_6=0 \\ ③ & -\hat{i}_2+\hat{i}_3-\hat{i}_6=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{b}u_k\hat{i}_k &= u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2+\cdots+u_6\hat{i}_6 \\ &= -u_{n1}\hat{i}_1+(u_{n1}-u_{n3})\hat{i}_2+u_{n3}\hat{i}_3+ \\ &\quad (u_{n1}-u_{n2})\hat{i}_4+u_{n2}\hat{i}_5+(u_{n2}-u_{n3})\hat{i}_6 \\ &= u_{n1}(-\hat{i}_1+\hat{i}_2+\hat{i}_4)+u_{n2}(-\hat{i}_4+\hat{i}_5+\hat{i}_6) \\ &\quad +u_{n3}(-\hat{i}_2+\hat{i}_3-\hat{i}_6)=0\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{b}\hat{u}_k i_k=0$$

例1 ① $R_1=R_2=2\Omega$, $U_s=8V$时，$I_1=2A$，$U_2=2V$

② $R_1=1.4\ \Omega$, $R_2=0.8\Omega$, $U_s=9V$时，$I_1=3A$, **求此时的**U_2

解 **把两种情况看成是结构相同，参数不同的两个电路，利用特勒根定理2**

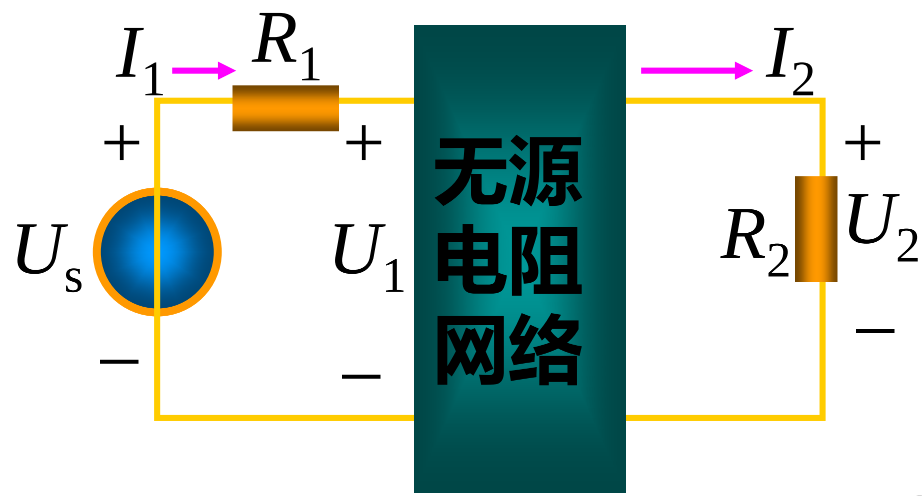
由(1)得： $U_1=4V$, $I_1=2A$, $U_2=2V$, $I_2=U_2/R_2=1A$

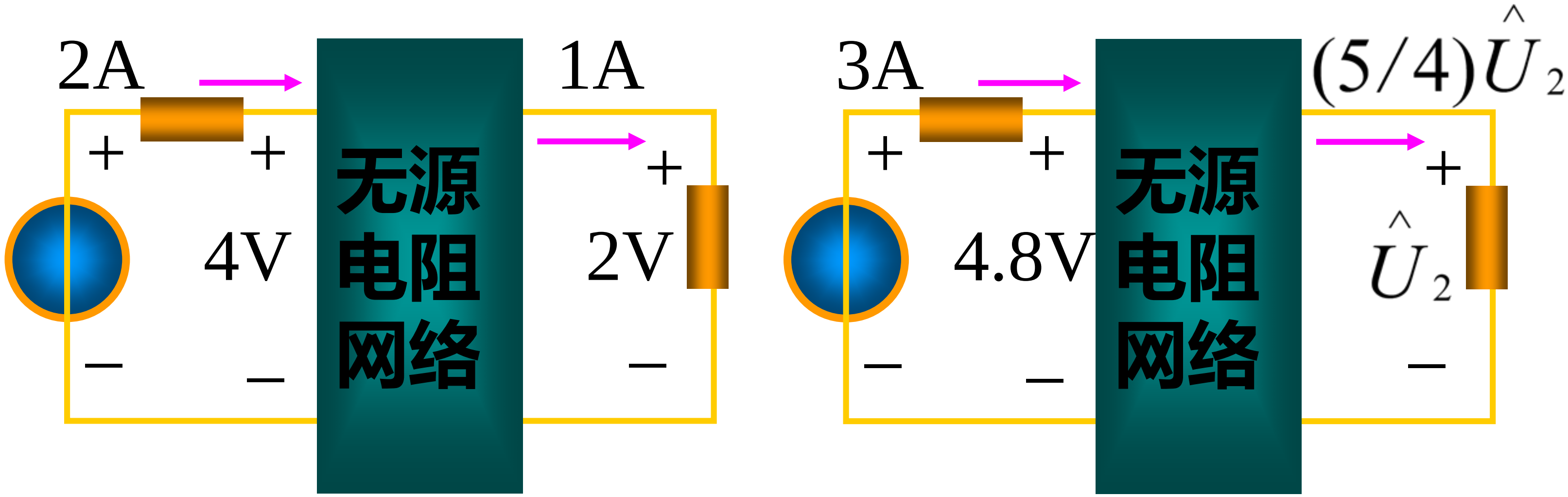
由(2)得：

$$\hat{U}_1 = U_s - I_1 \times R_1 = 9-3\times1.4 = 4.8V$$

$$\hat{I}_1 = 3A$$

$$\hat{I}_2 = \hat{U}_2/R_2 = (5/4)\hat{U}_2$$





$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \text{ 和 } \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$$

$$U_1(-\hat{I}_1) + U_2 \hat{I}_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k I_k \hat{I}_k = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_2 I_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k \hat{I}_k I_k$$

(负号是因为 U_1, I_1 的方向不同)

$$-4\times 3 + 2\times 1.25\hat{U}_2 = -4.8\times 2 + \hat{U}_2 \times 1$$

$$\hat{U}_2 = 2.4/1.5 = 1.6\text{V}$$

由特勒根定理： $\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$ 和 $\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$

即： $$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k$$

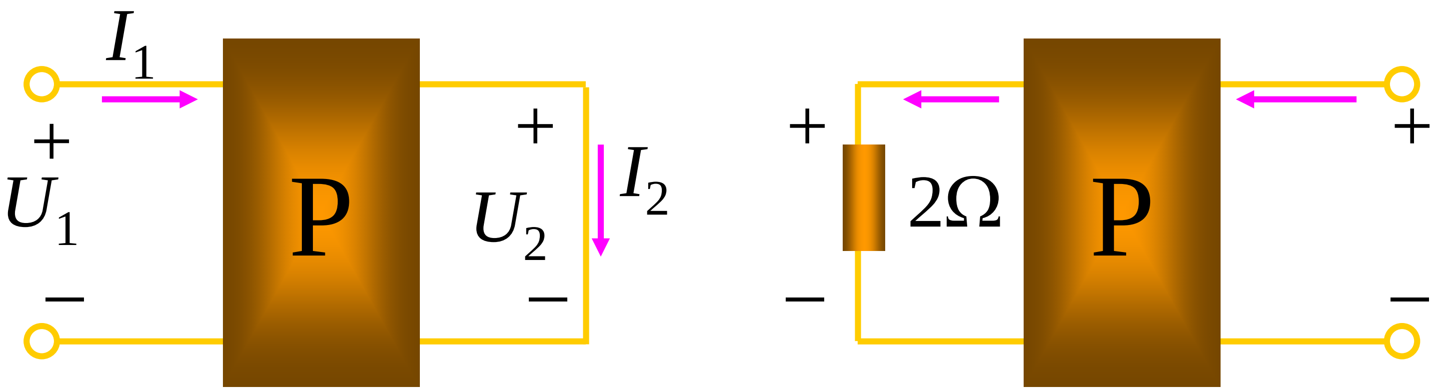
$$= u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k$$

$$= \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

两式相减，得： $u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$

例2



已知: $U_1=10\text{V},\ I_1=5\text{A},\ U_2=0,\ I_2=1\text{A}$ $\quad \hat{U}_2 = 10\text{V}$ $\quad$ 求$\hat{U}_1$

解

$$\begin{cases} U_1 \hat{I}_1 + U_2(-\hat{I}_2) = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_2 I_2 \\ \hat{U}_1 = 2\hat{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 \times \dfrac{\hat{U}_1}{2} = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_2 I_2 \\ 10 \times \dfrac{\hat{U}_1}{2} = \hat{U}_1 \times (-5) + 10 \times 1 \end{cases} \longrightarrow \hat{U}_1 = 1\text{V}$$

注意

应用特勒根定理：

①电路中的支路电压必须满足KVL;

②电路中的支路电流必须满足KCL;

③电路中的支路电压和支路电流必须满足关联参考方向；（否则公式中加负号）

④定理的正确性与元件的特征全然无关。

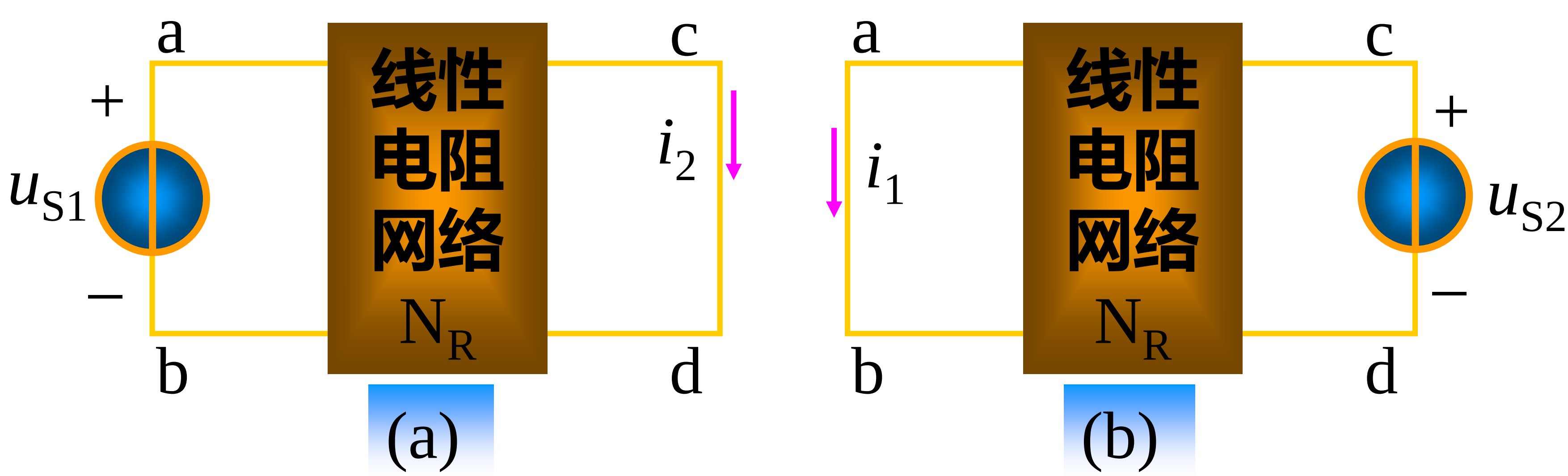
4.6* 互易定理

互易性是一类特殊的线性网络的重要性质。一个具有互易性的网络在输入端（激励）与输出端（响应）互换位置后，同一激励所产生的响应并不改变。具有互易性的网络叫互易网络，互易定理是对电路的这种性质所进行的概括，它广泛的应用于网络的灵敏度分析和测量技术等方面。

1. 互易定理

对一个仅含线性电阻的二端口电路N_R，其中一个端口加激励源，一个端口作响应端口，在只有一个激励源的情况下，当激励与响应互换位置时，同一激励所产生的响应相同。

● 情况1　　激励 ⟷ 电压源　　响应 ⟷ 电流



则端口电压电流满足关系：

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{u_{S2}} \quad \text{或} \quad u_{S1} i_1 = u_{S2} i_2$$

注意　当 $u_{S1} = u_{S2}$ 时，$i_2 = i_1$

证明: 由特勒根定理： $\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$ 和 $\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$

即：
$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k$$
$$= u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k = 0$$
$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k$$
$$= \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

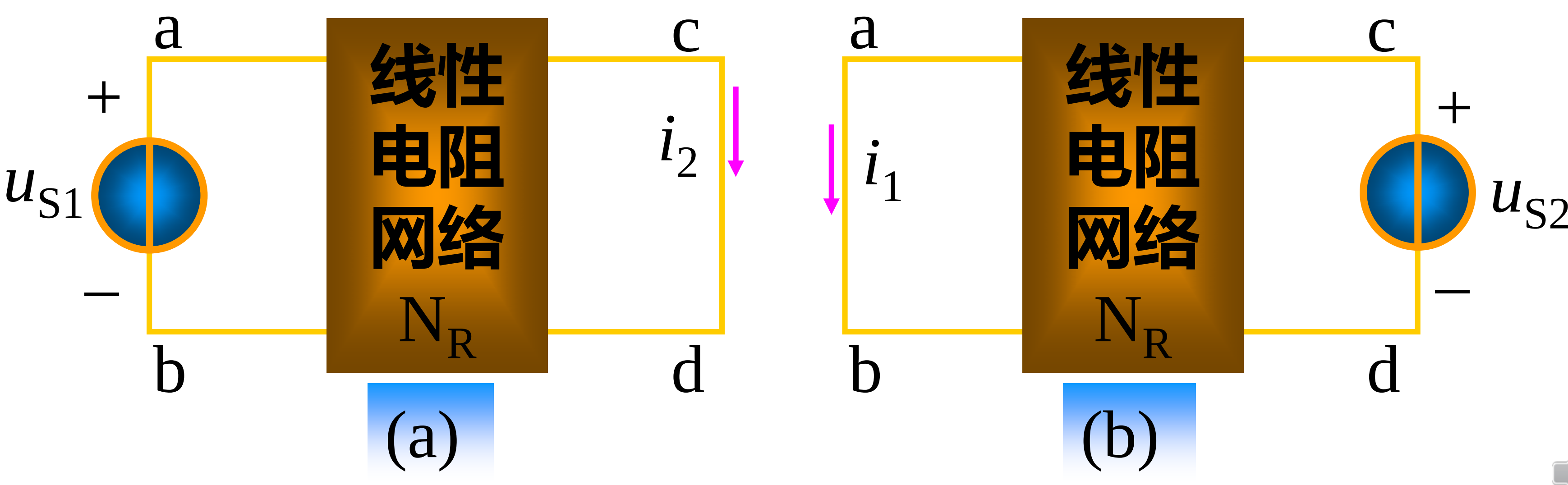
两式相减，得： $u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$

将图(a)与图(b)中端口条件代入，即:

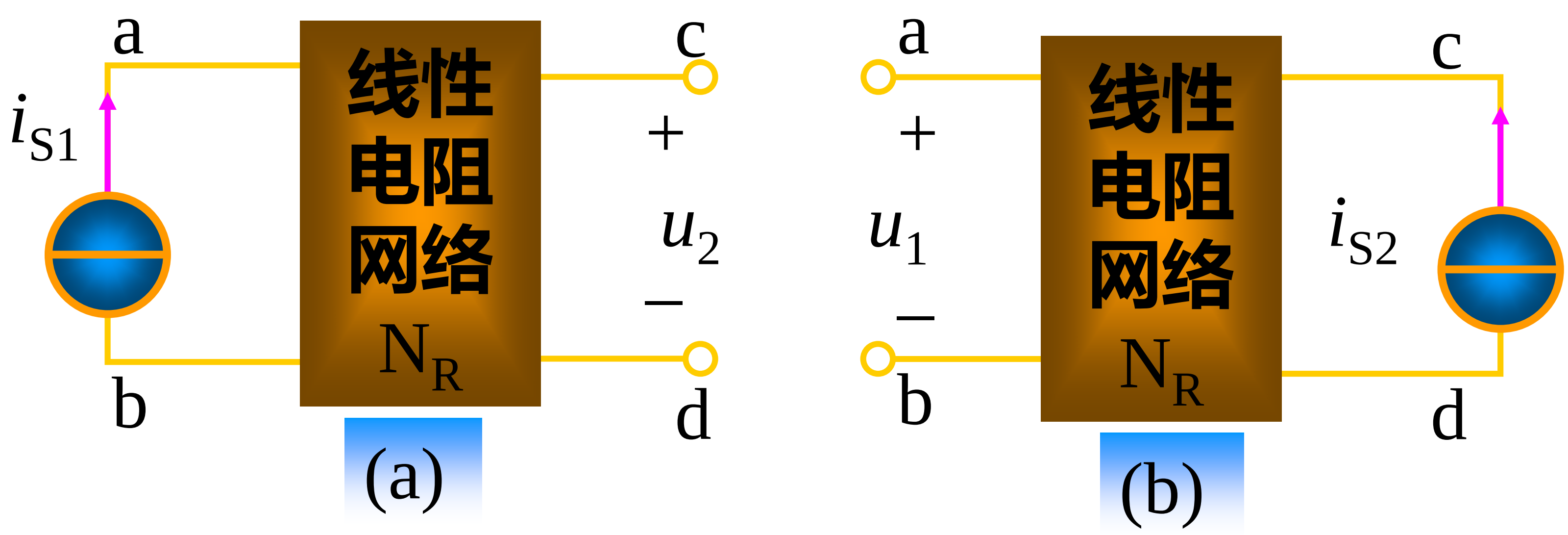
$$u_1 = u_{S1},\ u_2 = 0,\quad \hat{u}_1 = 0,\ \hat{u}_2 = u_{S2}$$

$$u_{S1} i_1 + 0 \times \hat{i}_2 = 0 \times i_1 + u_{S2} i_2 \qquad u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

即：
$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{u_{S2}} \quad \text{或} \quad u_{S1} i_1 = u_{S2} i_2$$
证毕!



● 情况2　激励 ⟷ 电流源　响应 ⟷ 电压



则端口电压电流满足关系：

$$\frac{u_2}{i_{S1}}=\frac{u_1}{i_{S2}} \quad 或 \quad u_1 i_{S1}=u_2 i_{S2}$$

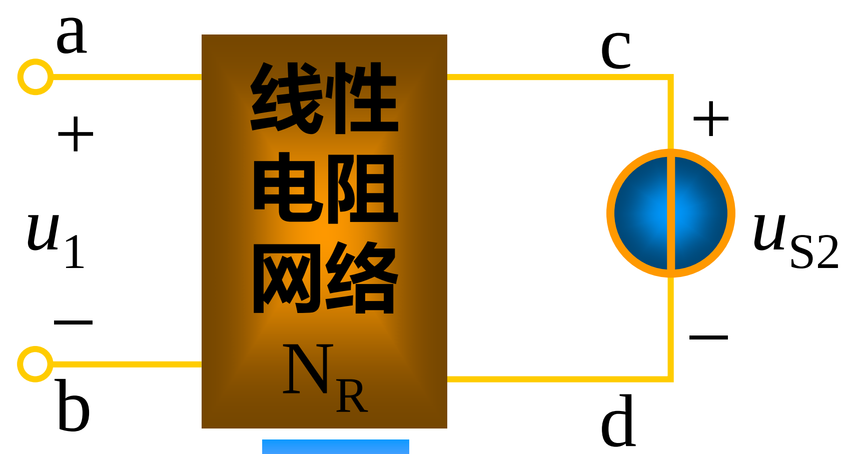
注意　当 $i_{S1}=i_{S2}$ 时，$u_2=u_1$

● 情况3

激励：图a ⟷ 电流源；图b ⟷ 电压源

响应：图a ⟷ 电流；图b ⟷ 电压

(a)



(b)

则端口电压电流在数值上满足关系：

$$\frac{i_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{u_{S2}} \quad 或 \quad u_1 i_{S1} = u_{S2} i_2$$

注意　　当 $i_{S1} = u_{S2}$ 时，$i_2 = u_1$

应用互易定理分析电路时应注意：

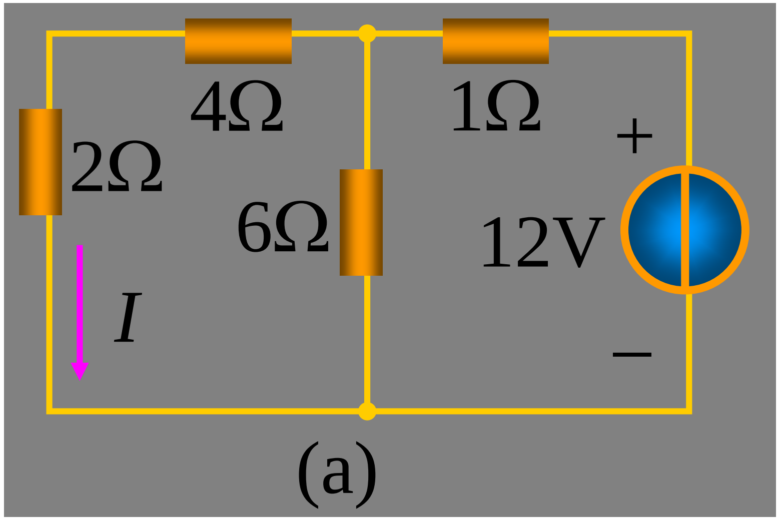
① 互易前后应保持网络的拓扑结构不变，仅理想电源搬移；

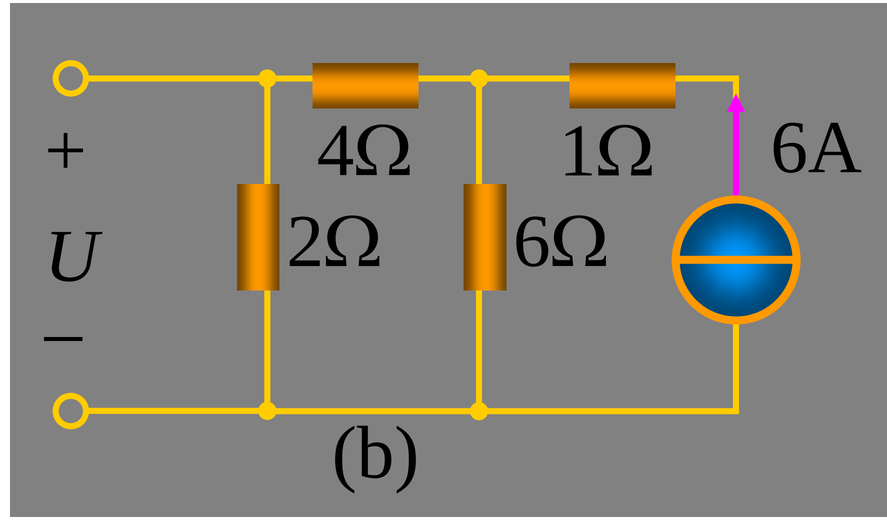
②互易前后端口处的激励和响应的极性保持一致（要么都关联，要么都非关联）；

③ 互易定理只适用于线性电阻网络在单一电源激励下，端口两个支路电压电流关系。

④含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

例1 **求**(a)**图电流**I，(b)**图电压**U





解 **利用互易定理**

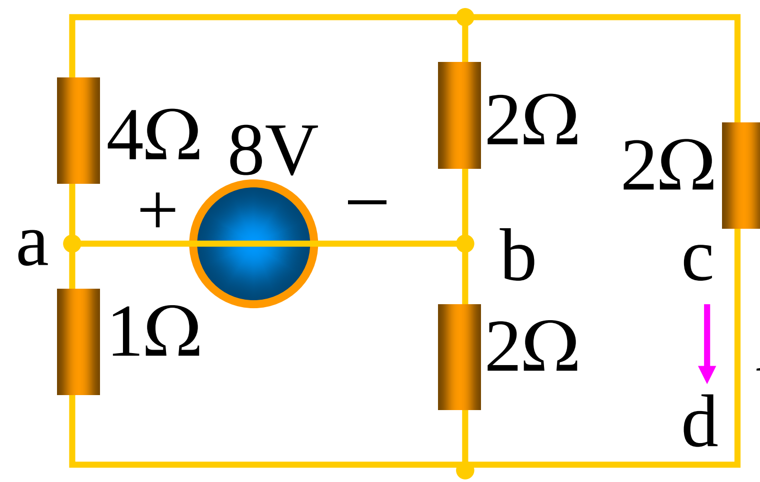
$$U = \boldsymbol{6A} \times \frac{\mathbf{2\Omega + 4\Omega}}{\mathbf{2\Omega + 4\Omega + 6\Omega}} \times 2\Omega$$

$$= 6\mathrm{V}$$

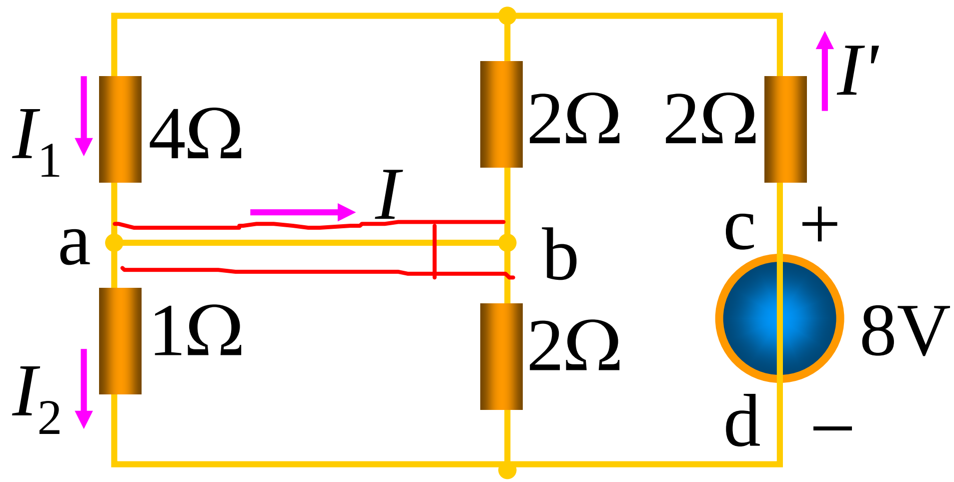
$$I = \frac{12\boldsymbol{V}}{1\Omega + 6\Omega//6\Omega} \times \frac{\mathbf{2\Omega + 4\Omega}}{\mathbf{2\Omega + 4\Omega + 6\Omega}} = 1.5\mathrm{A}$$

例2　**求电流I**

解　**利用互易定理**



$$I' = \frac{8}{2+4//2+1//2} = \frac{8}{4} = 2\text{A}$$

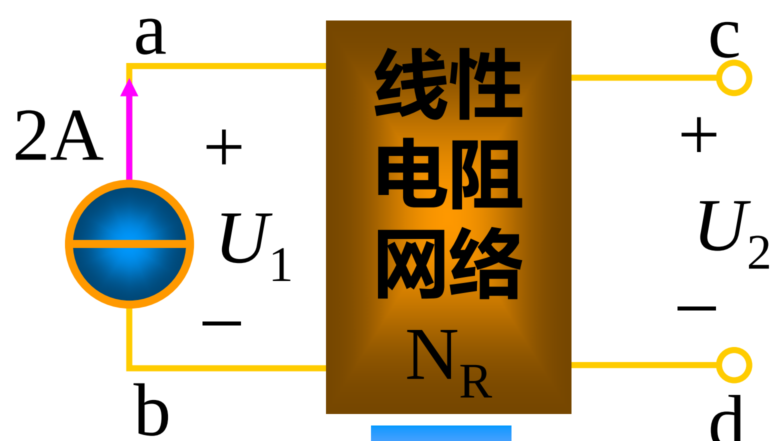


$$I_1 = I'\times 2/(4+2) = 2/3\text{A}$$

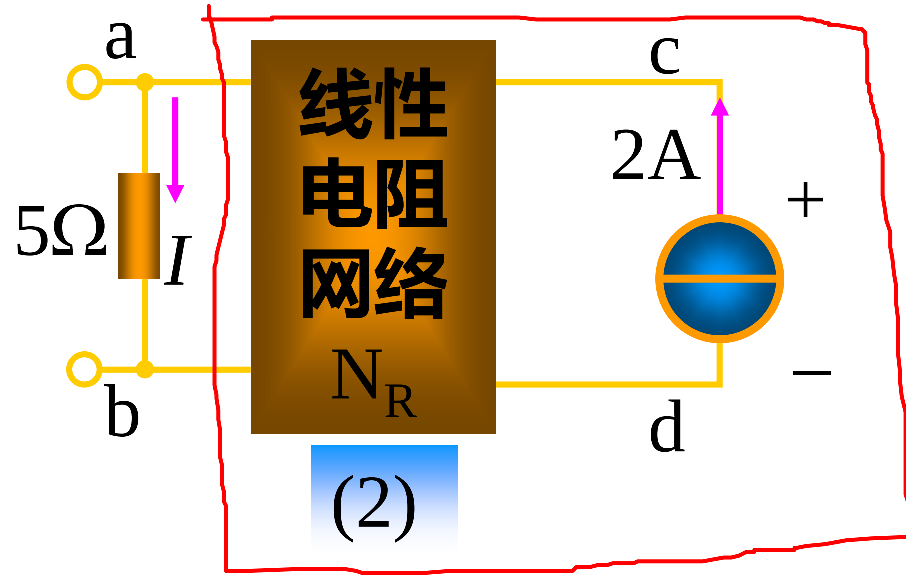
$$I_2 = I'\times 2/(1+2) = 4/3\text{A}$$

$$I = I_1 - I_2 = -2/3\text{A}$$

例3 测得1图中U_1＝10V，U_2＝5V，求2图中的电流I



(1)



(2)

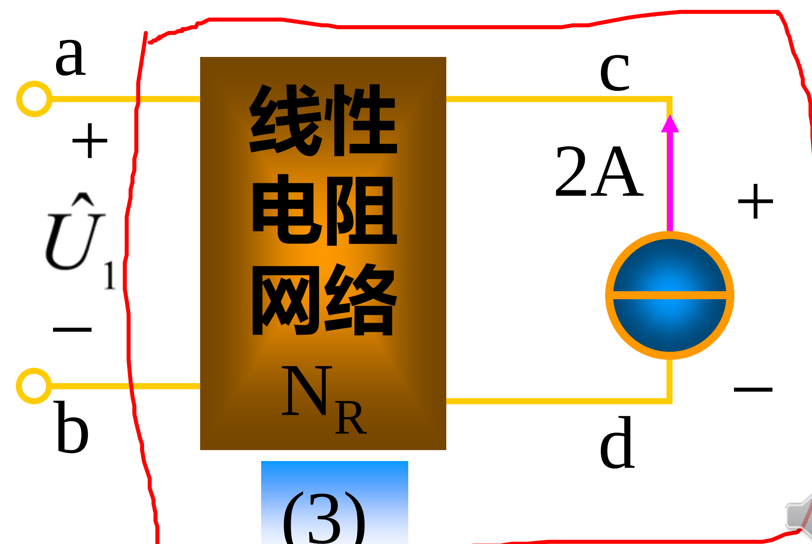
解1

①利用互易定理情况2

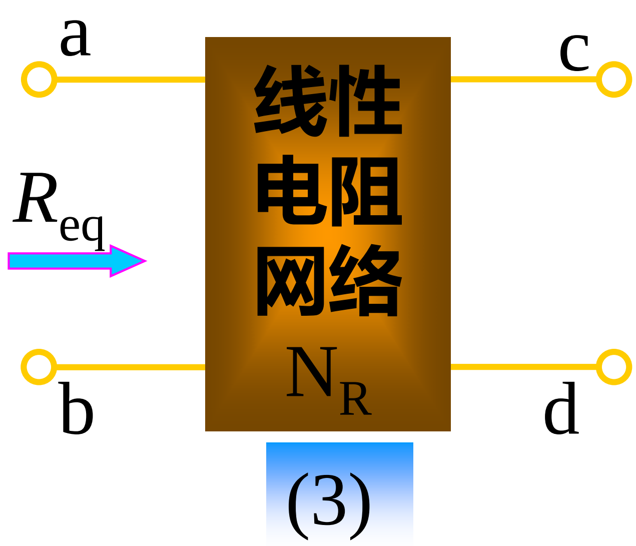
$$\hat{U}_1 = U_2 = 5\text{V}$$

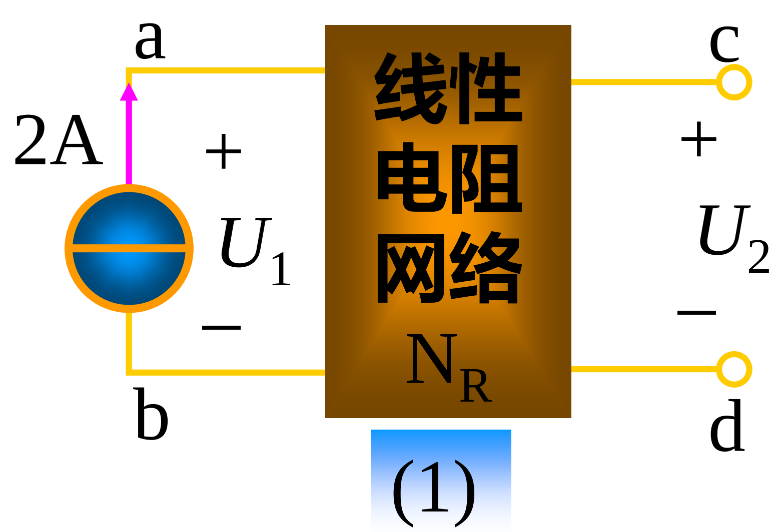
对比3图和2图，可知

$$\hat{U}_1 = U_{OC} = 5\text{V}$$



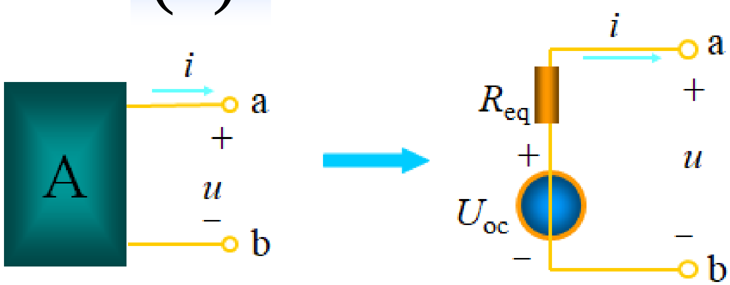
(3)





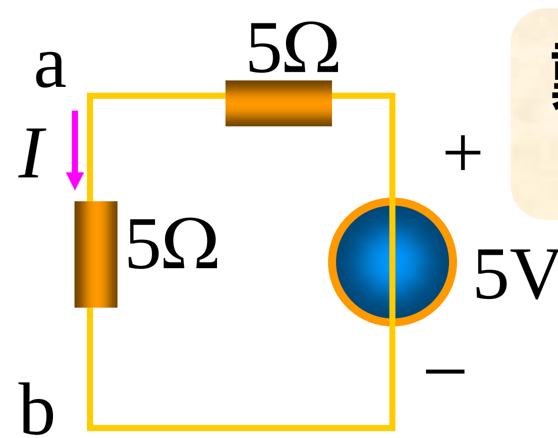
②结合1图，知3图的等效电阻

也就是2图的等效电阻Req：

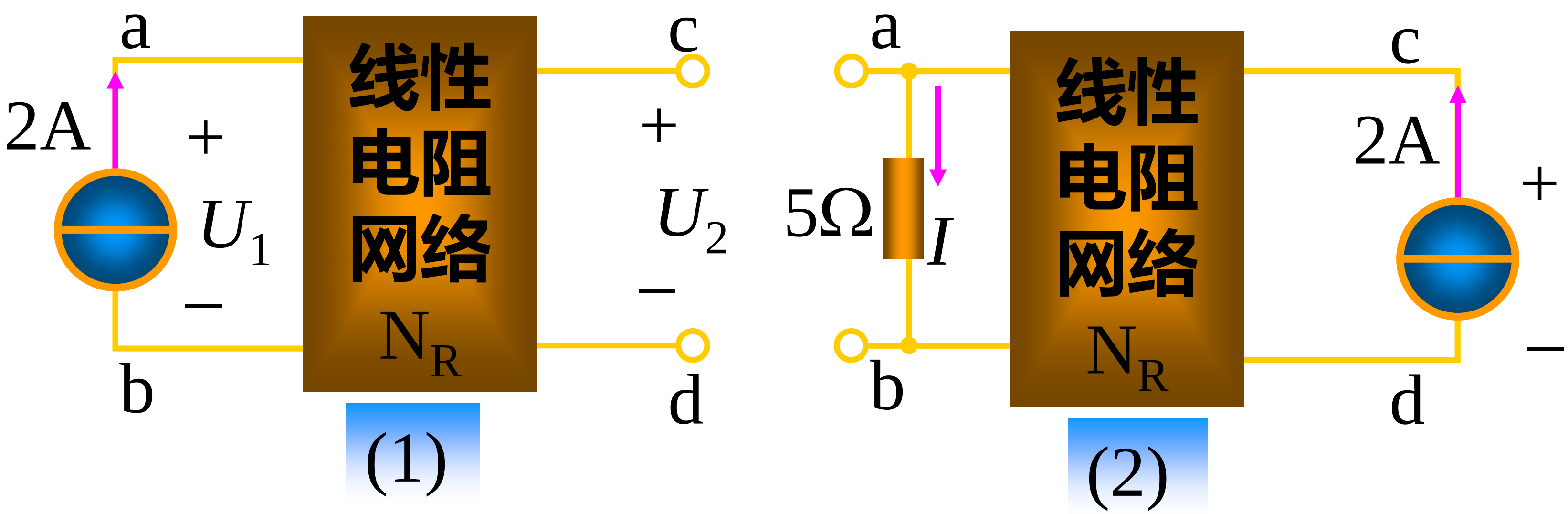


$$R_{eq}=\frac{u_1}{2}=\frac{10}{2}=5\Omega$$

$$I=\frac{5}{5+5}=0.5\text{A}$$



戴维宁等效电路



解2 **应用特勒根定理：**

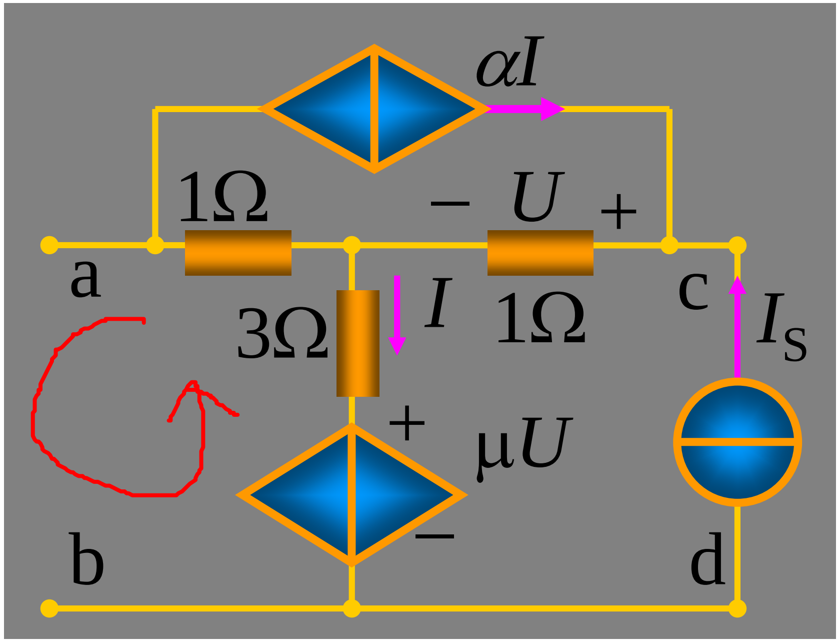
$$u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

$$10\hat{i}_1 + 5\times(-2) = 5\hat{i}_1\times(-2) + \hat{u}_2\times 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{i}_1 = I = 0.5\text{A}$$

例4　问图示电路α与μ取何关系时电路具有互易性

解



在a-b端加电流源，解得：

$$U_{cd}=U+3I+\mu U$$
$$=(\mu+1)\alpha I+3I$$
$$=[(\mu+1)\alpha+3]I_S$$

在c-d端加电流源，解得：

$$U_{ab}=-\alpha I+3I+\mu U=(3-\alpha)I+\mu(I_S+\alpha I)$$
$$=(\mu+3-\alpha+\mu\alpha)I_S$$

如要电路具有互易性，则： $U_{ab} = U_{cd}$

$$\left[(\mu+1)\alpha+3\right] = (\mu+3-\alpha+\mu\alpha)$$

$$\alpha = \frac{\mu}{2}$$

结论　一般有受控源的电路不具有互易性。

4.7* 对偶原理

1. 对偶原理

在对偶电路中，某些元素之间的关系(或方程)可以通过对偶元素的互换而相互转换。对偶原理是电路分析中出现的大量相似性的归纳和总结 。

2. 对偶原理的应用

根据对偶原理，如果在某电路中导出某一关系式和结论，就等于解决了和它对偶的另一个电路中的关系式和结论。

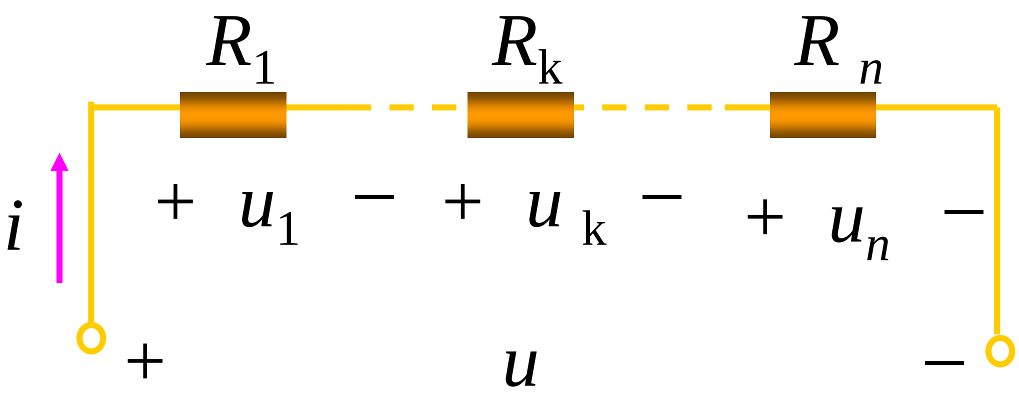
对偶元素

结点	结点电压	串联	R	L	u_s	CCVS	KCL	…
网孔	网孔电流	并联	G	C	i_s	VCCS	KVL	…

两个对偶电路N，$\overline{N}$ 如果对电路N有命题（或陈述）S 成立，则将S中所有元素，分别以其对应的对偶元素替换，所得命题（或陈述）$\overline{S}$ 对电路$\overline{N}$成立。

注意： 只有平面电路才有对偶电路。

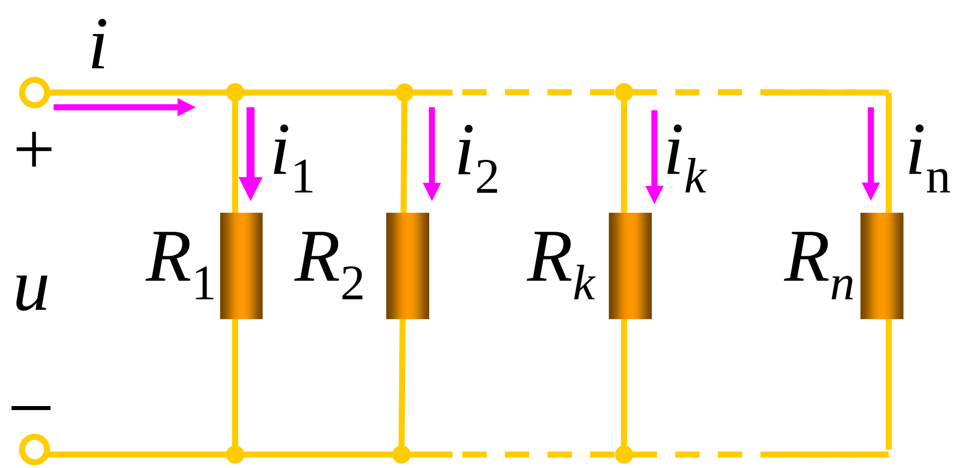
例1 串联电路和并联电路的对偶



总电阻 $R=\sum_{k=1}^{n} R_k$

电流 $i=\dfrac{u}{R}$

分压公式 $u_k=\dfrac{R_k}{R}u$



总电导 $G=\sum_{k=1}^{n} G_k$

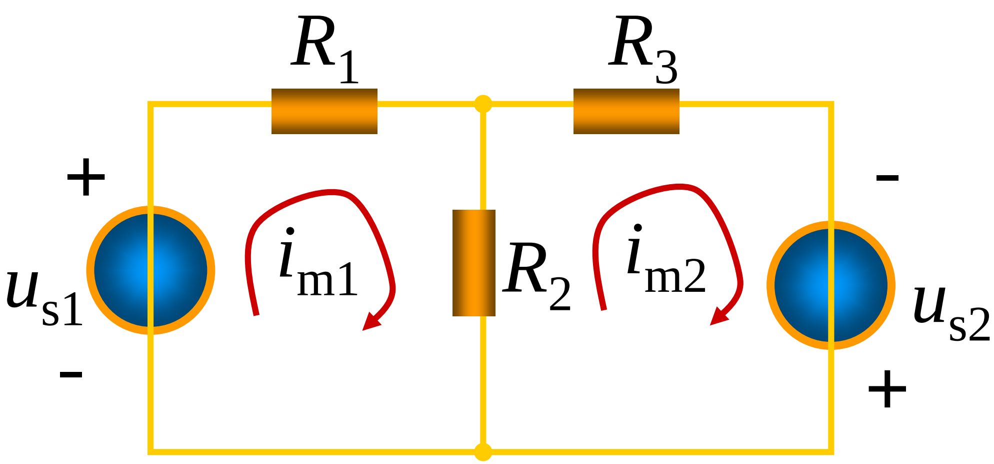
电压 $u=\dfrac{i}{G}$

分流公式 $i_k=\dfrac{G_k}{G}i$

结论

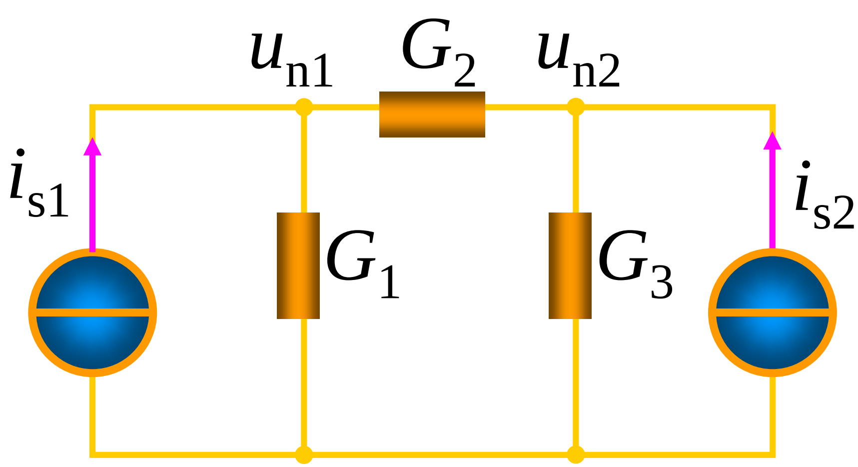
将串联电路中的电压*u*与并联电路中的电流*i*互换，电阻*R*与电导*G*互换，串联电路中的公式就成为并联电路中的公式。反之亦然。这些互换元素称为对偶元素。电压与电流；电阻*R*与电导*G*都是对偶元素。而串联与并联电路则称为对偶电路。

例2 网孔电流与结点电压的对偶



网孔电流方程

$$
\left.\begin{aligned}
(R_1+R_2)i_{m1}-R_2 i_{m2}&=u_{S1}\\
-R_2 i_{m1}+(R_2+R_3)i_{m2}&=u_{S2}
\end{aligned}\right\}
$$



结点电压方程

$$
\left.\begin{aligned}
(G_1+G_2)u_{n1}-G_2 u_{n2}&=i_{S1}\\
-G_2 u_{n1}+(G_2+G_3)u_{n2}&=i_{S2}
\end{aligned}\right\}
$$

结论

把 R 和 G，u_s 和 i_s ，网孔电流和结点电压等对应元素互换，则上面两个方程彼此转换。所以“网孔电流”和“结点电压“是对偶元素，这两个平面电路称为对偶电路。

对偶关系

基本定律	$U=RI$	$I=GU$
	$\sum U=0$	$\sum I=0$
分析方法	网孔法	节点法
对偶结构	串联	并联
	网孔	节点
	∇	Y
对偶状态	开路	短路

对偶元件	R	G
	L	C
	⋮	

对偶结论

开路电流为零，短路电压为零；

理想电压源不能短路，

理想电流源不能开路；

戴维南定理，诺顿定理；

…