第23卷 第6期 龙岩学院学报 2005年12月
Vol.23 No.6 Journal of Longyan University December 2005

谈谈求极限的几种方法

卢达平
(龙岩财经学校 福建龙岩 364000)

摘要:归纳了常用的十种求极限方法,即:夹逼法、单调有界收敛法、重要极限法、斯笃兹法、级数法、定积分法、无穷小代换法、幂级数展式法、求导数法、幂指函数法等。并列举了大量的实例加以说明。

关键词:极限;方法;无穷小
中图分类号:O172.1 文献标识码:C 文章编号:1673-4629(2005)06-0095-03

在高等数学学习中,极限是认识和研究变量的重要工具和方法之一,准确和熟练地计算极限是学好高等数学的基本功之一。这里介绍一些常用的计算极限的方法,并通过例子进行说明。

1 运用夹逼法求极限

定理1 对于数列$\{X_n\}$,存在数列$\{Y_n\}$、$\{Z_n\}$若 $Y_n\leq X_n\leq Z_n$,对充分大的n都成立,

且$\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=a$

例1.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$

解:记原式$=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

设 $y_n=\frac{1}{(n+n)^2}+\frac{1}{(n+n)^2}+\frac{1}{(n+n)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}$

$z_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

显然有 $y_n\leq x_n\leq z_n(n=1,2,3,\cdots)$

而$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

∴由夹逼法,可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

例2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5}\sin n!}{2n^2+1}$

解: 记原式$=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 设 $y_n=0$, $z_n=\frac{\sqrt[3]{n^5}}{2n^2+1}$

显然有 $0\leq|x_n|\leq\frac{\sqrt[3]{n^5}}{2n^2+1}=z_n$, 即 $y_n\leq|x_n|\leq z_n$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5}}{2n^2+1}=0$, ∴$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$ 即 原式=0

2 运用单调有界数列收敛性求极限

定理2 单调有界数列必有极限

例3.求数列:$x_1=\sqrt{2}$,$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$,$\cdots x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\cdots$的极限。

解:由于该数列的后一项比前一项在最里边的根号内多了一个$\sqrt{2}$,显然该数列是单调递增的。现证明该数列有上界。

由 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$,得 $x_n^2=2+x_{n-1}$

$x_n^2-x_{n-1}=2$

$\because x_n>x_{n-1}$

$\therefore x_n^2-x_n=2+x_{n-1}-x_n<2$

即 $x_n^2-x_n<0$

解该不等式,得 $-1<x_n<2$

由 $x_n>0$,得 $0<x_n<2$.说明数列$\{x_n\}$是有界的,所以该数列有极限。

由 $x_n^2=2+x_{n-1}$,得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=2+\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$,记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

$\therefore a^2-a-2=0$,解之,得 $a=2$ 或 $a=-1$ (舍去)

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

3 运用两个重要极限求极限

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^x=e$(或$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$)

这是两个重要的极限,它们在求极限中经常用到。

例4.求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$

解:原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$

例5.求极限$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}$

解:原式$=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t$(设 $t=\cot x$)

收稿日期:2005—06—13

例 6.求极限$\lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m^2})^m$

解:原式$=\lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m})^m\cdot\lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m=e^{-1}\cdot e=1$

4 运用斯笃兹 O·Stoz 定理求极限

斯笃兹定理:设数列$\{y_n\}$为单调上升数列,且 $y_n\to\infty$,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$(有限或无限),则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$

例 7.计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^6}$

解:此极限显然满足斯笃兹定理的条件。

记 $x_n=1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5, y_n=n^6$.

则 $x_n-x_{n-1}=n^5, y_n-y_{n-1}=n^6-(n-1)^6=6n^5-15n^4+\cdots-1$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{6n^5-15n^4+\cdots-1}=\frac{1}{6}$

例 8.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{2^p+4^p+\cdots+(2n)^p}$(p 为整数)

解:记 $x_n=1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p, y_n=2^p+4^p+\cdots+(2n)^p$

显然,数列$\{y_n\}$单调上升,且 $y_n\to\infty$

所以,由斯笃兹定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^p}{(2n)^p}=1$$

5 运用级数收敛性求极限

定理 3 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

例 9.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

解:对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$,记 $u_n=\frac{2^n}{n!}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$. 由达朗贝尔的比值判别法知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$收敛。根据级数收敛的必要条件,即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

例 10.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

解:对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$,记 $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2\cdot(2n)!}{[2(n+1)]!\cdot(n!)^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$,由比值判别法知,级数是收敛的。

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=0$.

6 运用定积分求极限

使用该法时,一般取积分区间为[0,1],然后进行 n 等分,得$\triangle x_i=\frac{1}{n}$,取$\xi=\frac{1}{n}$.

例 11.求$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$

解:原式$=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

例 12.求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

解:原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}|_0^1=\frac{3}{2}$

7 运用等价无穷小代换求极限

这种方法如使用恰当,会给求极限过程带来很大方便。常用的等价无穷小有:$x\to0$ 时,$\sin x\sim x\sim\tan x$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $e^x\sim1+x$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^{\frac{1}{n}}\sim\frac{1}{n}x+1$等。

例 13.求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin^3x+e^{2x})-2x}{\ln(x^3+e^{3x})-3x}$

解:原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin^3x+e^{2x})-\ln e^{2x}}{\ln(x^3+e^{3x})-\ln e^{3x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\frac{\sin^3x}{e^{2x}}+1)}{\ln(\frac{x^3}{e^{3x}}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin^3x}{e^{2x}}}{\ln\frac{x^3}{e^{3x}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3x}{x^3}\cdot e^x$

$=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$

例 14.求极限$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\sin2\sqrt[3]{x^2-1}}$

解:原式$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

8 运用幂级数展式求极限

经常用到的是泰勒展开式,对于特殊的极限,有时会使问题得到简化。

例 15.求极限$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x})$

解:原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}-o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

例 16.求极限$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x})$

解:原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-e^x+1}{\sin x\cdot(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]-[1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)]+1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\frac{x^2}{2!}-o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

9 运用洛比达法则求极限

定理 4 设当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时,$\lim f(x)=0(\infty)$.如果 $g'(x)$

$\neq 0$，并且 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（有限或无限），则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 这就是洛比达法则，它是求函数极限的最常用方法之一。

例 17.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\cdot\sin x}{1-\cos x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin x+(e^x-1)\cdot\cos x}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin x+e^x\cdot \mathrm{con}x+e^x\cdot \mathrm{con}x-e^x\cdot\sin x+\sin x}{\mathrm{con}x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(2e^x+\tan x)=2.$

例 18.求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{\tan 2x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{1+2x}}{\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 2x}{1+2x}=1.$

例 19.求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ \frac{1}{-\cos x\csc^2 x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-2\sin x\,\mathrm{con}x}{\cos x-x\sin x}=0.$

例 20.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt}{x^2}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}\cdot 2x}{2x}=1$

例 21.求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}dt}{x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\cos(\frac{2}{x})(-\frac{1}{x^2})}{4(\frac{1}{x})^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}\cos\frac{2}{x}=\frac{1}{4}.$

例 22.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sec^2 x-1)^3}{\int_{x^2}^{0}\tan u^2 du}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^6 x}{\int_{x^2}^{0}\tan u^2 du}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\tan^5 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\tan u^2\cdot 2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^5}{-2x^5}=-3\ (\tan x\sim x)$

10 幂指函数求极限

这类极限问题近年来在各种考试中出现频率很高，是值得重视的。求这类极限的常用方法是先取对数，再求指数，把求‘幂’的极限化为求‘积’的极限。

例 23.求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}$

其中$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$

所以　原式$=e^{-\frac{1}{2}}$

例 24.求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot(-\frac{1}{1+x^2})}{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{x}{1+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1.$

参考文献：

[1]武汉大学数学系. 数学分析[M]. 北京：人民教育出版社，1978,9.

[2]（苏）吉米多维奇. 数学分析的问题和练习[M]. 上海：上海科学技术出版社，1983, 5.

[3]邹节铣，陈强. 全国招考研究生高等数学试题选解[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1983, 8.

[4]卢玉文. 幂指函数求极限[J]. 河北自学考试，2001,（7）: 8-9.

[5]方义成. 运用斯笃兹（O·Stolz）定理求极限[J]. 中学数学研究，1984,（2）: 1-3.