

高 等 学 校 教 材

高等数学

下 册

南开大学数学科学学院

刘光旭 张效成 赖学坚 编



高等教育出版社

ISBN 978-7-04-023872-3

9 787040 238723 >

定价 28.40 元

要點容內

非)主辦本社由出版社總經理任社長,總編輯由副社長擔任。總編輯對該社高級一級委員會
要定期內報送。報刊、出版許可證由國家新聞出版總署發給。

高等学校教材

高等数学

下册

南开大学数学科学学院

刘光旭 张效成 赖学坚 编

E-mail: dd@ hep. com. cn

通信地址: 北京市西城区德外大街号

郵政编码: 100120

書名: 高等数学

中圖法分类号: CIP圖書編目卡(2008)第020021号

總售價: 1896/58581879

作者: 刘光旭 张效成 赖学坚
出版社: 南开大学出版社
出版地: 天津
出版时间: 2008年4月
印制: 2008年4月
开本: 787×1092mm^{1/16}
印张: 34.52
字数: 400,000
定价: 38.00元

書名:	高等数学	作者:	刘光旭 张效成 赖学坚	出版社:	南开大学出版社	出版地:	天津	出版时间:	2008年4月	印制:	2008年4月	开本:	787×1092mm ^{1/16}	印张:	34.52	字数:	400,000	定价:	38.00元
書名:	高等数学	作者:	刘光旭 张效成 赖学坚	出版社:	南开大学出版社	出版地:	天津	出版时间:	2008年4月	印制:	2008年4月	开本:	787×1092mm ^{1/16}	印张:	34.52	字数:	400,000	定价:	38.00元
書名:	高等数学	作者:	刘光旭 张效成 赖学坚	出版社:	南开大学出版社	出版地:	天津	出版时间:	2008年4月	印制:	2008年4月	开本:	787×1092mm ^{1/16}	印张:	34.52	字数:	400,000	定价:	38.00元
書名:	高等数学	作者:	刘光旭 张效成 赖学坚	出版社:	南开大学出版社	出版地:	天津	出版时间:	2008年4月	印制:	2008年4月	开本:	787×1092mm ^{1/16}	印张:	34.52	字数:	400,000	定价:	38.00元

高等教育出版社

總售價: 1896/58581879

印制: 2008年4月

定價: 38.00元

内容提要

本书是为一般高等院校物理学类、电子信息科学类、电气信息类相关专业的本科生(兼顾对数学要求偏高的工科类专业)所编写的高等数学教材。全书分上、下册。上册内容主要包括一元函数微积分学和常微分方程初步。下册内容主要包括空间解析几何、多元函数微积分学和级数。本书理论的讲述逻辑清晰、条理分明;例题的选取层次有序,并力求做到富有典型性、综合性、启发性和趣味性;习题的编排难易适中,有A类、B类阶梯之分。书后附有习题答案与提示,供教师和学生参考使用。

本书是作者多年教学经验的总结和体现。它具有注重基础、突出重点、例题丰富、简明实用、便于讲授、便于学生理解和掌握、教学要求把握适度等特点。在基础理论的系统讲解、综合计算能力的严格训练以及实际应用能力的培养等方面都力求做到适合相关专业的教学要求。讲授本书有较大的灵活性,教师可根据课程的教学要求对内容作适当取舍。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/刘光旭, 张效成, 赖学坚编. —北京:
高等教育出版社, 2008. 6

ISBN 978 - 7 - 04 - 023872 - 3

I . 高… II . ①刘… ②张… ③赖… III . 高等
学校 - 教材 IV . 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 059097 号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 董达英 封面设计 王 眇 责任绘图 吴文信
版式设计 余 杨 责任校对 胡晓琪 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010—58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 24.75
字 数 460 000

购书热线 010—58581118
免费咨询 800—810—0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008 年 6 月第 1 版
印 次 2008 年 6 月第 1 次印刷
定 价 28.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23872—00

目 录

第7章 向量代数与空间解析几何	1
§ 1 向量代数	1
1.1 空间直角坐标系	1
1.2 向量的概念	3
1.3 向量的线性运算	3
1.4 向量的坐标表示	5
1.5 向量的模和方向余弦的坐标表示式	7
1.6 向量的三种乘积运算	8
习题 7.1	15
§ 2 空间的平面与直线	17
2.1 平面的方程表示	17
2.2 点到平面的距离	19
2.3 两平面间的夹角	20
2.4 空间直线的方程	20
2.5 两直线的夹角	23
2.6 直线与平面的夹角	23
2.7 点到直线的距离	23
2.8 异面直线的距离	24
习题 7.2	26
§ 3 几种常见的二次曲面与空间曲线简介	27
3.1 曲面方程的建立	28
3.2 由方程研究曲面的特征	31
3.3 空间曲线简介	36
3.4 常见空间区域的图形	38
习题 7.3	42
第8章 多元函数微分学	45
§ 1 多元函数的极限与连续	45
1.1 n 维欧氏空间	45
1.2 二元函数的极限与连续性	49
习题 8.1	57
§ 2 偏导数	61
2.1 偏导数	61

II 目 录

2.2 全微分	67
习题 8.2	71
§ 3 多元复合函数的微分法	74
3.1 复合函数求导法则	74
3.2 重复运用链式法则, 求多元复合函数的高阶偏导数	78
3.3 多元函数一阶全微分的微分形式不变性	79
习题 8.3	80
§ 4 隐函数的微分法	83
4.1 由一个方程所确定的隐函数	84
4.2 由方程组所确定的隐函数	86
习题 8.4	90
§ 5 多元函数的泰勒公式	93
习题 8.5	96
§ 6 方向导数与梯度	97
6.1 方向导数	97
6.2 梯度	100
习题 8.6	101
§ 7 偏导数的应用	103
7.1 几何应用	103
7.2 多元函数的极值	107
习题 8.7	116
第 9 章 重积分	119
§ 1 二重积分	119
1.1 二重积分的概念	119
1.2 二重积分的性质	121
1.3 在直角坐标系下计算二重积分	124
1.4 在极坐标系下计算二重积分	131
1.5 二重积分的一般换元公式	137
习题 9.1	141
§ 2 三重积分	144
2.1 三重积分的概念与性质	144
2.2 在直角坐标系下计算三重积分	146
2.3 在柱坐标系下计算三重积分	149
2.4 在球坐标系下计算三重积分	153
2.5 三重积分的一般换元公式	157
习题 9.2	160
§ 3 重积分的应用举例	163

第 9 章 几何应用举例	163
物理应用举例	169
习题 9.3	175
第 10 章 曲线积分与曲面积分	177
§ 1 曲线积分	177
1.1 第一型曲线积分	177
1.2 第二型曲线积分	181
习题 10.1	187
§ 2 曲面积分	189
2.1 第一型曲面积分	190
2.2 第二型曲面积分	194
习题 10.2	202
第 11 章 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式	205
§ 1 格林公式	205
1.1 格林公式	205
1.2 曲线积分与路径无关的条件	212
习题 11.1	223
§ 2 高斯公式	225
习题 11.2	231
§ 3 斯托克斯公式	233
习题 11.3	239
§ 4 梯度、散度和旋度	241
4.1 数量场的梯度	241
4.2 向量场的散度	242
4.3 向量场的旋度	243
习题 11.4	245
第 12 章 无穷级数	247
§ 1 常数项级数的概念和性质	247
1.1 基本概念	247
1.2 柯西收敛原理(柯西准则)	250
1.3 收敛级数的基本性质	251
习题 12.1	254
§ 2 正项级数及其收敛判别法	255
习题 12.2	264
§ 3 任意项级数的审敛法	265
3.1 交错级数	265
3.2 绝对收敛与条件收敛	267

§1 3.3 绝对收敛级数的性质	269
习题 12.3	270
§4 函数项级数	271
4.1 基本概念	271
4.2 函数项级数一致收敛的判别法	274
4.3 一致收敛级数的性质	275
习题 12.4	277
§5 幂级数	278
5.1 幂级数的收敛半径与收敛域	279
5.2 幂级数的运算与性质	282
习题 12.5	288
§6 泰勒级数及其应用	289
6.1 泰勒级数	289
6.2 函数展开成幂级数	292
6.3 幂级数展开的应用举例	300
6.4 欧拉公式	302
习题 12.6	303
§7 傅里叶级数	304
7.1 三角函数系的正交性	305
7.2 傅里叶级数	306
7.3 傅里叶级数的收敛定理	307
7.4 任意周期函数的傅里叶级数	314
7.5 正弦级数与余弦级数	317
7.6 傅里叶级数的复数形式与频谱分析	320
7.7 均方差与贝塞尔不等式	324
习题 12.7	324
第 13 章 广义积分与含参变量积分	326
§1 无穷限积分	326
1.1 无穷限积分的概念	326
1.2 非负函数无穷限积分的判敛法	328
1.3 绝对收敛	332
习题 13.1	332
§2 着积分	333
2.1 着积分的概念	333
2.2 着积分的判敛法	335
习题 13.2	337
§3 含参变量积分	338
习题 13.3	343

§ 4 欧拉积分	345
4.1 Γ 函数	345
4.2 B 函数	347
4.3 Γ 函数与 B 函数的关系	348
习题 13.4	350
部分习题答案与提示	352

第7章 向量代数与空间解析几何

在古代,点和数是完全不同的数学对象.研究点的学问(比如欧几里得(Euclid)几何)与研究数的学问(比如代数方程的求解)之间也没有什么联系.法国数学家笛卡儿(Descartes)首先在空间设立坐标系,在点与有序实数组之间建立了一一对应.这样就有可能用代数方程表示几何图形.反过来,几何图形也可以表示代数方程.

用代数方法研究几何问题的学问就是解析几何.向量及其代数运算是解析几何中的重要工具,这些知识称为向量代数,向量代数在研究空间直线与平面,以及在力学、物理学中都起着重要的作用.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样,空间解析几何的知识对今后学习多元函数微积分同样是非常必要的.

§1 向量代数

1.1 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过空间定点 O ,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点且具有相同的长度单位.三条轴分别称为 x 轴、 y 轴、 z 轴,统称为坐标轴.三条轴的正方向要符合右手法则,即让右手的拇指、食指、中指互相垂直,三个手指依次表示 z 轴、 x 轴、 y 轴.如此的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系.其中点 O 叫坐标原点.每两个坐标轴所决定的平面称为坐标平面,分别称为 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面.这三个平面把整个空间分成了八个部分,每一部分称为一个卦限.把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第一卦限,依逆时针顺序得 I, II, III, IV 四个处于 xy 平面上方的卦限,对应于 xy 平面下方就依次得到 V, VI, VII, VIII 四个卦限(图 7.1).

坐标系最重要的作用就是建立起一个空间中点与三元有序实数组之间的对应关系.

在空间直角坐标系中,空间中任一点 M 的位置可由它关于坐标轴的相对位置唯一确定.方法是:过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面,这些平面与三个坐标轴的交点分别为 P, Q, R .设 $OP = x, OQ = y, OR = z$,则称有序数组 (x, y, z) 为

点 M 的直角坐标, 记为 $M(x, y, z)$ (见图 7.2). x, y, z 称为点 M 的三个坐标分量. 这样, 点 M 就与一个有序数组对应起来. 反之, 任给一个有序数组 (x, y, z) , 我们便可以分别在三个坐标轴上得到点 P, Q, R , 过此三点分别作垂直于 x, y, z 轴的平面, 三个互相垂直的平面交于一点 M , 点 M 就是有序数组 (x, y, z) 所唯一确定的点. 这样, 在空间直角坐标系下, 空间中的点就与由三个数组成的有序数组一一对应了.

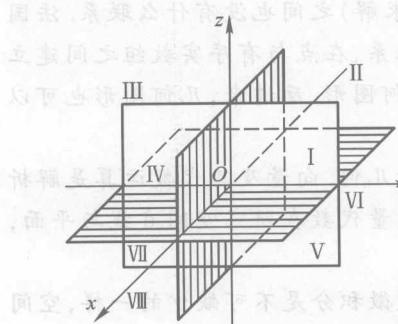


图 7.1

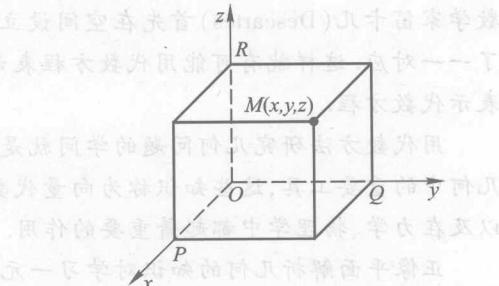


图 7.2

显然, 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$, 各坐标轴上点的坐标分量至少有两个分量为 0, 如 x 轴上点的坐标是 $(x, 0, 0)$, 各坐标面上点的坐标至少有一个分量是 0, 如 xy 平面上点的坐标是 $(x, y, 0)$.

2. 两点间的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 我们可用两点的坐标来表示它们之间的距离 d , 如图 7.3 所示. 过点 M_1, M_2 分别作垂直于坐标轴的六个平面, 这些平面构成以 M_1M_2 为对角线的长方体. 由立体几何知识, 我们知道

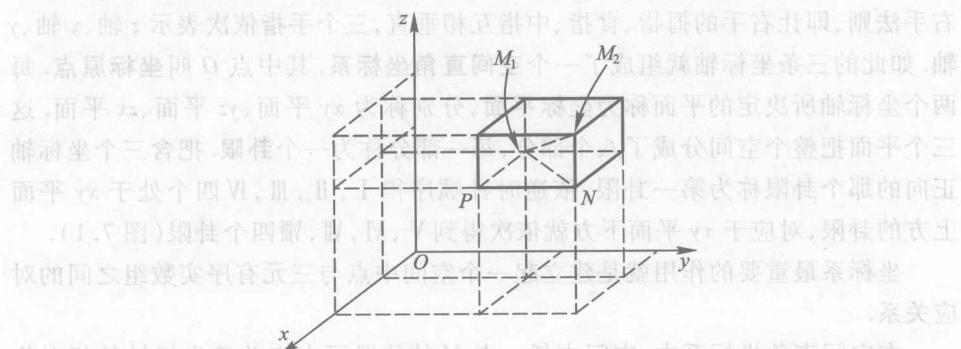


图 7.3

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

所以两点间的距离公式为

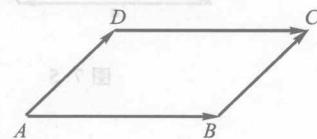
$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

1.2 向量的概念

在实际问题中,有些量只有大小,没有方向,例如时间、长度、质量、面积等.它们在取定一个单位后,可以用一个数来表示.这种量称为数量(或标量).还有一些量既有大小,又有方向,例如力、速度、加速度等.这种既有大小又有方向的量称为向量(或矢量).

向量可以用有向线段表示.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向,如以 M_1 为始点, M_2 为终点的向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$.有时也用一个黑体字母来表示向量,例如 \mathbf{a}, \mathbf{b} .

在许多涉及向量的实际问题中,可以不考虑向量的起点位置,只考虑其大小和方向,称这样的向量为自由向量.下面讨论的向量,均指自由向量.若向量 a 与 b 的方向相同或相反,则称向量 a 与 b 平行,记作 $a \parallel b$;若向量 a 与 b 大小相等且方向相同,则称向量 a 与 b 相等,记作 $a = b$.也就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.例如图



7.4, $ABCD$ 为一平行四边形,我们认为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.因此,一个向量在保持大小、方向都不

变的条件下可以自由地平行移动,简称平移.以后,为了方便,我们常把向量平移到同一起点来考虑.

向量的大小或长度称为向量的模,向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, a 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 与 $|a|$.模等于 1 的向量称为单位向量.模等于零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$.零向量没有确定的方向,规定零向量的方向是任意的.在直角坐标系中,以坐标原点 O 为起点,向已知点 M 引向量 \overrightarrow{OM} ,则称此向量为点 M 的向径(或矢径),常用黑体字母 r 表示.

设 a 为一向量,与 a 的模相等而方向相反的向量叫做 a 的反向量(或负向量),记作 $-a$.

1.3 向量的线性运算

与空间中的点相比,向量有更好的数学性质,因为向量有运算,而点没有.比如,任何两点就没法相加得到一个新的点,点也没有倍数的概念,但向量却有.向

量的性质正是通过各种运算体现出来的.

1. 向量的加减法

力是向量的物理原型. 我们知道, 力的合成可按平行四边形法则或三角形法则进行. 因此, 向量的加法也应遵循同样的法则.

若将向量 b 平移, 使其起点与 a 的终点重合(图 7.5), 则以 a 的起点为起点、以 b 的终点为终点的向量 c 称为向量 a 与 b 的和, 记作

$$c = a + b.$$

两个向量的加法可以推广到任意有限个向量的情形. 这只需将第一个向量放置好, 然后将其余向量依次首尾相接, 最后, 从第一个向量的起点至最末一个向量的终点的向量就是这些向量的和. 这种求和法称为多边形法则或折线法则.

向量 a 与向量 b 的负向量之和称为 a 与 b 的差, 记作 $a - b$, 即

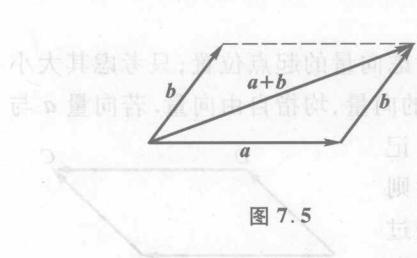


图 7.5

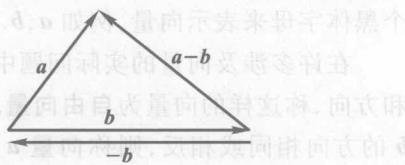


图 7.6

$$a - b = a + (-b).$$

由 $a - b = a + (-b) = (-b) + a$ 及加法的三角形法则, 容易作出向量 $a - b$. 从图 7.6 看出, 若将 a, b 的起点放在一起, 则以 b 的终点为起点、以 a 的终点为终点的向量就是 $a - b$.

任意两个向量之间, 满足 **三角形不等式**, 即有

定理 1.1 设 a, b 为任意两个向量, 则

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

证 当 a 与 b 不平行时, 由三角形两边之和大于第三边就可推知不等式成立. 当 a 与 b 平行时, $|a + b| = ||a| \pm |b|| \leq |a| + |b|$.

2. 数与向量的乘法

一个实数 λ 与一个向量 a 相乘(简称数乘)就得到一个向量 λa , 它与 a 平行且长度是 a 的 $|\lambda|$ 倍. 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的指向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的指向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, λa 为零向量. 由上可知, 零向量与任何数的数乘向量总是零向量. 对于非零向量 a , 任何与它平行的向量 b 都存在唯一实数 λ , 使得 $b = \lambda a$. 对任何向量 a 总有 $1a = a$, $(-1)a = -a$. 而对任意的实数 λ, μ 和任意的向量 a, b, c , 有以下性质成立.

性质 1 (交换律) $a + b = b + a$.

性质 2 (结合律) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

性质 3 (零元存在性) $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

性质 4 (负元存在性) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

性质 5 (第一分配律) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

性质 6 (第二分配律) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$.

性质 7 (数量结合律) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

1.4 向量的坐标表示

以上我们用几何方法引进了向量的概念及其线性运算. 几何方法虽然比较直观, 但对于向量的计算并不方便. 为了便于计算, 我们引进向量的坐标表示, 即用一个有序数组来表示向量, 从而可以把向量的运算化为数的运算.

我们先来定义空间中一点在轴上或在平面上的投影.

设 A 是空间中一点, 过点 A 作一垂直于 u 轴的平面 α , 则 α 与 u 轴的交点 A' 称为点 A 在 u 轴上的投影(图 7.7). 设 B 为空间中一点, 过 B 作垂直于平面 π 的直线 l , 则把 l 与平面 π 的交点 B' 称为点 B 在平面 π 上的投影(图 7.8).

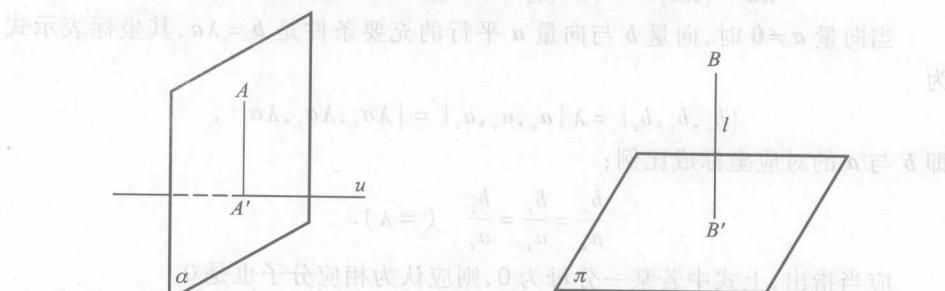


图 7.7

图 7.8

在空间取定直角坐标系 $Oxyz$, 在 x, y, z 轴的正方向上分别取三个单位向量, 记作 i, j, k , 称为坐标向量. 设 \mathbf{a} 为空间任一向量, 将它平移, 使其起点在坐标原点 O , 终点在点 $P(x, y, z)$, 并设点 P 在 x, y, z 轴上的投影分别为 A, B, C , 在 xy 平面上的投影为点 M (图 7.9), 则根据向量的加法, 得

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

而 $\overrightarrow{OA} = xi$, $\overrightarrow{OB} = yj$, $\overrightarrow{OC} = zk$, 于是得到

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = xi + yj + zk.$$

我们把上式右端称为向量 \mathbf{a} 的坐标分解式或坐标表示式, 其中 x, y, z 称为向量 \mathbf{a} 的分量.

显然,给定向量 \mathbf{a} ,就确定了点 P 及 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 三个分向量,进而确定了 x, y, z 三个有序数;

反之,给定三个有序数 x, y, z ,也就确定了向量 \mathbf{a} 与点 P .于是点 P 、向量 \mathbf{a} 与三个有序数组 $\{x, y, z\}$ 之间就有一一对应的关系:

$$\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{a} \leftrightarrow \{x, y, z\}.$$

据此,我们就把有序数 x, y, z 称为向量 \mathbf{a} (在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$.

利用向量的坐标,可把向量的加法、减法以及向量与数乘的运算化为数的运算.

设

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

即

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

从而

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x) \mathbf{i} + (\lambda a_y) \mathbf{j} + (\lambda a_z) \mathbf{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

当向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时,向量 \mathbf{b} 与向量 \mathbf{a} 平行的充要条件是 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$,其坐标表示式为

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \lambda \{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\},$$

即 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 的对应坐标成比例:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \quad (= \lambda).$$

应当指出,上式中若某一分母为 0,则应认为相应分子也是 0.

例 1.1(定比分点公式) 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$,在直线 AB 上求点 M ,使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解 如图 7.10 所示,由于

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$,

$$\text{从而 } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}).$$

以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的坐标(即点 A 、点 B 的坐标)代入,即得

$$\overrightarrow{OM} = \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right\}.$$

这就是点 M 的坐标.

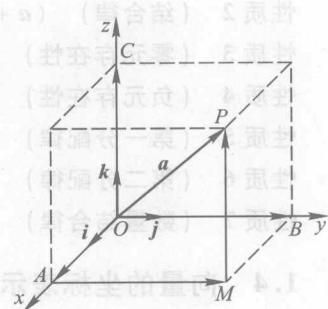


图 7.9

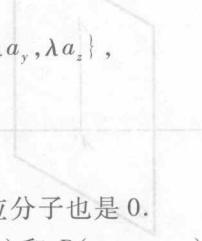


图 7.10

本例中的点 M 叫做有向线段 \overrightarrow{AB} 的 λ 分点. 特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

1.5 向量的模和方向余弦的坐标表示式

1. 向量的模

设向量 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$, 则由两点距离公式有

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

其中 $O(0, 0, 0)$ 为 \mathbf{a} 的起点, $P(x, y, z)$ 为 \mathbf{a} 的终点.

2. 方向余弦

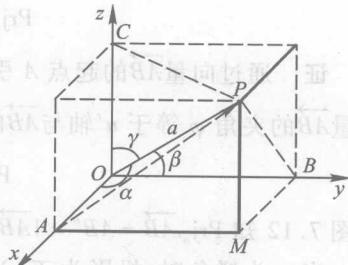
定义 1.1 非零向量 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$ 与三条坐标轴正向的夹角(指在 $[0, \pi]$ 之间的那个角)称为向量 \mathbf{a} 的方向角, 分别记作 α, β, γ . 而把 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 \mathbf{a} 的方向余弦.

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$, 点 P 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影分别为 A, B, C . α, β, γ 为 \mathbf{a} 的方向角(图 7.11). 因为 $PA \perp OA, PB \perp OB, PC \perp OC$, 所以

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$



从这里容易写出方向余弦所满足的关系式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

因为

$$\mathbf{a} = \{x, y, z\} = \{|\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \cos \beta, |\mathbf{a}| \cos \gamma\} = |\mathbf{a}| \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

所以 \mathbf{a} 的单位向量

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

这表明, \mathbf{a} 的方向余弦所组成的向量 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 就是 \mathbf{a} 的单位向量.

3. 方向数

与向量 \mathbf{a} 的方向余弦成比例的一组实数 l, m, n 即

$$\frac{l}{\cos \alpha} = \frac{m}{\cos \beta} = \frac{n}{\cos \gamma},$$

称为向量 \mathbf{a} 的方向数. 设其比值等于 k , 则有

$l^2 + m^2 + n^2 = k^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = k^2$
或 $k = \pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. 所以若已知 \mathbf{a} 的方向数, 则可求出 \mathbf{a} 的方向余弦:

$$\cos \alpha = \frac{l}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \cos \beta = \frac{m}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \cos \gamma = \frac{n}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

其中要同时取正号或同时取负号.

1.6 向量的三种乘积运算

在介绍向量乘积运算之前, 先给出空间中向量 \overrightarrow{AB} 在 u 轴上投影的概念.

设向量 \overrightarrow{AB} 的起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为 A' 和 B' , 则 u 轴上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的数值(记做 $\lambda = A'B'$)叫作向量 \overrightarrow{AB} 在 u 轴上的投影, 记作

$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$,
 u 轴称为投影轴. 如果 u 轴的单位向量是 e , 则有 $\overrightarrow{A'B'} = \lambda e$.

关于向量的投影, 有下面两个定理.

定理 1.2 向量 \overrightarrow{AB} 在 u 轴上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦, 即

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

证 通过向量 \overrightarrow{AB} 的起点 A 引 u' 轴与 u 轴平行, 且有相同正方向, 则 u 轴与向量 \overrightarrow{AB} 的夹角 φ 等于 u' 轴与 \overrightarrow{AB} 的夹角, 且有

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}.$$

由图 7.12 知 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$, 所以 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$.

当 φ 为锐角时, 投影为正; 当 φ 为钝角时, 投影为负; 当 φ 为直角时, 投影为 0.

容易得知, 相等的向量在同一轴上的投影相等. 读者不难推证如下定理.

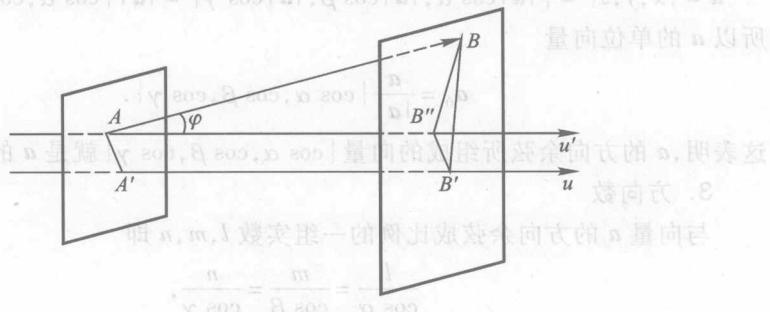


图 7.12

定理 1.3 有限个向量的和在 u 轴上的投影等于各向量在 u 轴上投影的和, 即

$$\text{Prj}_u(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2 + \cdots + \text{Prj}_u \mathbf{a}_n.$$

1. 两向量的数量积

由物理学可知, 一个物体在恒力 \mathbf{F} (大小和方向均不变) 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 , 若以 s 表示位移 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 则力 \mathbf{F} 所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |s| \cos(\hat{\mathbf{F}}, \hat{s}) = |\mathbf{F}| |s| \cos \theta,$$

其中 θ 为向量 \mathbf{F} 与 s 的夹角.

以此为背景, 我们引进两个向量的数量积.

定义 1.2 向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的模及它们的夹角的余弦的乘积称为向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的数量积, 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}).$$

数量积的记号中用一点“·”表示乘积, 因此向量间的数量积也叫做向量间的点积(亦称为内积).

前面讲的功 W 就是力 \mathbf{F} 与位移 s 的数量积, 即

$$W = \mathbf{F} \cdot s.$$

对任意向量 \mathbf{a} , 由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, 因此通常记 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$.

由数量积的定义可得

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

由投影的表达式 $\text{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$, 可知

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}),$$

或

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} (\mathbf{b} \neq \mathbf{0}),$$

即向量的点积等于一向量的模乘以另一向量在这向量(设它是非零向量)上的投影.

规定零向量与任何向量垂直. 不难求出: 两向量垂直(即 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$) 的充要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

读者不难证明数量积满足如下运算律:

(1) 交换律:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad [2, 2, -1] = \text{数量积}.$$

(2) 与数乘的结合律:

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot \lambda \mathbf{b} &= \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

(3) 分配律:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad [\text{由向量加法}].$$

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}.$$

下面给出数量积的坐标表达式.

设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 则由数量积的运算规律可得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$= a_x \mathbf{i} \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_y \mathbf{j} \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$+ a_z \mathbf{k} \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

即两个向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和.

由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 所以当 \mathbf{a}, \mathbf{b} 均为非零向量时, 可推得两向量夹角的余弦的坐标表达式:

$$\cos(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

由此, 两向量相互垂直的充要条件是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

例 1.2 试用向量证明三角形的余弦定理.

证 设在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA = \theta$ (图 7.13), $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, 要证

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

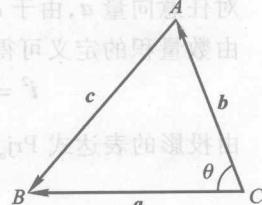
记 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, 则有

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

从而

$$|\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$



$$= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

由 $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $|\mathbf{c}| = c$ 及 $(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \theta$, 即得

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

例 1.3 已知三点 $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 0, 5)$, 求 $\angle ABC$.

解 作向量 $\overrightarrow{BA} = \{1, -2, 2\}$, $\overrightarrow{BC} = \{-1, -1, 4\}$, 则

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{9}{3 \sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$.

例 1.4 试证由圆心向圆的内接正三角形的三顶点连接的三个向量的和为零向量.

· 例证 设这三个向量为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 不妨设它们的模为 1, 则它们彼此间的夹角都为 $\frac{2\pi}{3}$. 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \\ &= 3 + 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

2. 两向量的向量积

在力学中, 我们学过力矩的概念. 设有一根短棍, 其一端 O 固定, 另一端 A 受力 \mathbf{F} 的作用, OA 便绕点 O 转动. 这时力 \mathbf{F} 对点 O 的力矩是一个向量, 记作 \overrightarrow{OM} . 它的模 $|\overrightarrow{OM}|$ 等于以 \overrightarrow{OA} 及 \mathbf{F} 为两边的平行四边形的面积, 即

$$|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OA}| |\mathbf{F}| \sin(\widehat{\overrightarrow{OA}, \mathbf{F}}),$$

而 \overrightarrow{OM} 的方向垂直于 \overrightarrow{OA} 与 \mathbf{F} , 且当右手自 \overrightarrow{OA} 到 \mathbf{F} 的方向握拳时, 大拇指伸开的指向就是 \overrightarrow{OM} 的方向, 即 $\overrightarrow{OA}, \mathbf{F}, \overrightarrow{OM}$ 成右手系(图 7.14).

像力矩这样由两个向量确定另一个向量的情况, 在其他物理现象中也常遇到, 于是把它抽象出来, 就得出两向量的向量积的概念.

定义 1.3 两个向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的向量积(也称为叉积)是一个向量, 记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 它的模为

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

即其长度大小等于以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为两边的平行四边形的面积, 而它的方向垂直于 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} , 且 \mathbf{a}, \mathbf{b} 与其向量积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 成右手系.

若 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则规定 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

由向量积的定义知, 上述的力矩 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}$.

从向量积的定义, 读者不难证明如下性质和运算律:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (\mathbf{a} 为任一向量);

(2) $i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$, 这里 i, j, k 是空间直角坐标系的三个单位向量.

(3) 对于两个非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 如果 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 那么 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$; 反之, 如果 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 那么 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

这是因为如果 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 由于 $|\mathbf{a}| \neq 0, |\mathbf{b}| \neq 0$, 故必有 $\sin \theta = 0$, 于是 $\theta = 0$ 或

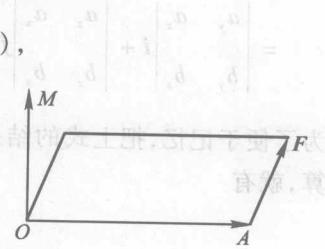


图 7.14

π , 即 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$; 反之, 如果 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 那么 $\theta = 0$ 或 π , 于是 $\sin \theta = 0$, 从而 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

由于可以认为零向量与任何向量都平行, 因此, 上述结论可叙述为: 向量 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充分必要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(4) (反交换律) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;

(5) (与数乘的结合律) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$;

下面给出如何用向量的坐标表示向量积.

设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 根据向量积的运算律, 有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$= a_x \mathbf{i} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_y \mathbf{j} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_z \mathbf{k} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

为了便于记忆, 把上式的结果写成三阶行列式, 并按三阶行列式的计算方法计算, 就有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

而 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$.

因为行列式若交换两行的位置其值反号, 故知向量积满足反交换律, 即 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. 由行列式的性质, 也容易推得非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 平行的充要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. 其坐标形式可表示为

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_z b_x - a_x b_z = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = 0,$$

或

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (1)$$

利用向量积的坐标表达式, 容易证明向量积满足分配律:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

例 1.5 已知三角形的顶点为 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(4, 3, 2)$, 求 $\triangle ABC$

的面积.

解 因为 $\vec{AB} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{AC} = \{3, 2, 1\}$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

而

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{-4, 8, -4\}.$$

从而所求面积

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 16} = 2\sqrt{6}.$$

例 1.6 设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转, 计算刚体上一点 M 的线速度.

解 刚体绕 l 轴旋转时, 我们可以用在 l 轴上的一个向量 ω 表示角速度, 它的大小等于角速度的大小, 它的方向由右手规则定出: 即以右手握住 l 轴, 当右手的四个手指的转向与刚体的旋转方向一致时, 大拇指的指向就是 ω 的方向(图 7.15).

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a , 再在 l 轴上任取一点 O 作向量 $r = \vec{OM}$, 并以 θ 表示 ω 与 r 的夹角, 那么

$$a = |r| \sin \theta.$$

设线速度为 v , 那么由物理学上线速度与角速度间的关系可知, v 的大小为

$$|v| = |\omega| a = |\omega| |r| \sin \theta;$$

v 的方向垂直于通过 M 点与 l 轴的平面, 即 v 垂直于 ω 与 r ; 又 v 的指向是使 ω , r, v 符合右手规则. 因此有

$$v = \omega \times r.$$

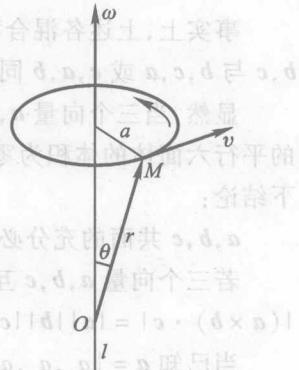


图 7.15

3. 三个向量的混合积

定义 1.4 对于给定的三个向量 a, b, c , 称向量 $a \times b$ 与 c 的数量积为三个向量的混合积, 记作 $[a, b, c]$, 即

$$[a, b, c] = (a \times b) \cdot c.$$

混合积也称为体积, 它是一个数量.

从几何上看, 若 a, b, c 都是非零向量, 则其混合积的绝对值是以 a, b, c (起点都拉到一起) 为三条棱的平行六面体的体积. 事实上, 如图 7.16, 这平行六面体的底面积为 $|a \times b|$, 高为 $h = ||c|| \cos \theta$, 其中 θ 为 c 与 $a \times b$ 的夹角, 因为 θ 可

能是钝角, 所以加绝对值. 由平行六面体的体积公式知该体积为

$$\begin{aligned} V &= \text{底面积} \times \text{高} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot ||\mathbf{c}| \cos \theta| \\ &= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|. \end{aligned}$$

若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 成右手系, 则 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$,
从而 $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 成左手系, 则 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$,
从而 $V = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

混合积具有如下轮换不变性:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b},$$

或

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

事实上, 上述各混合积的绝对值都等于同一个平行六面体的体积, 并且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ 或 $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ 同时为右手系或左手系, 故知上面的轮换不变性成立.

显然, 当三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 平行于同一平面(简称共面)时, 以它们为三条棱的平行六面体的体积为零, 从而它们的混合积为零. 反过来也对. 于是我们有如下结论:

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

若三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 互相垂直, 则由混合积的定义可推知其混合积的绝对值 $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}|$.

当已知 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, 则容易推出其混合积的坐标表示:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x, a_y, a_z \\ b_x, b_y, b_z \\ c_x, c_y, c_z \end{vmatrix}.$$

由上述混合积的坐标表示, 利用行列式的性质容易理解三个向量共面的条件以及混合积的轮换不变性.

例 1.7 已给点 $A(0, 0, 1)$, $B\left(\frac{\sqrt{8}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, 试求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 四面体从顶点 A 出发的三个边向量为
 $\overrightarrow{AB} = \left\{ \frac{\sqrt{8}}{3}, 0, -\frac{4}{3} \right\}$, $\overrightarrow{AC} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{4}{3} \right\}$, $\overrightarrow{AD} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{4}{3} \right\}$.

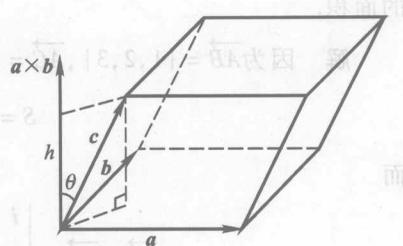


图 7.16

由立体几何知道,该四面体的体积 V 应等于以向量 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} 和 \overrightarrow{AD} 为棱的平行六面体的体积的 $\frac{1}{6}$, 即

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|,$$

而

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{16\sqrt{3}}{9},$$

$$\text{所以 } V = \frac{1}{6} \left(\frac{16\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{27}.$$

例 1.8 试证 $a = \{-1, 3, 2\}$, $b = \{2, -3, -4\}$, $c = \{-3, 12, 6\}$ 在同一平面上, 并将向量 c 表示成向量 a, b 的线性组合.

解 由于

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 a, b, c 共面. 令 $c = \lambda a + \mu b$, 则有

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = -3, \\ 3\lambda - 3\mu = 12, \\ 2\lambda - 4\mu = 6. \end{cases}$$

解此联立方程, 得 $\lambda = 5, \mu = 1$, 故知 $c = 5a + b$.

习题 7.1

A 类

- 在 x 轴上求与两点 $A(2, -4, 6)$ 和 $B(-3, 2, 7)$ 等距离的点.
- 试建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 r 的球面方程.
- 已知 $\triangle ABC$ 顶点坐标为 $A(1, 1, 1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(7, 9, 1)$. 试求 $\angle A$ 平分线与 BC 边交点 D 的坐标.
- 已知点 $C(2, 0, 2)$ 和点 $D(5, -2, 0)$ 把线段 AB 分成三等分. 试确定线段 AB 端点的坐标.
- 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求方向与 \overrightarrow{AB} 一致的单位向量 e_{AB} .

6. 求平行于向量 $\mathbf{a} = \{6, 7, -6\}$ 的单位向量.
7. 已知两点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(3, -4, 6)$, 求向量 \overrightarrow{AB} 的模与方向余弦.
8. 已知某向量与 y 轴和 z 轴的夹角分别为 60° 和 120° , 求它与 x 轴的夹角.
9. 已知向量 $\mathbf{a} = \{\alpha, 5, -1\}$ 和 $\mathbf{b} = \{3, 1, \gamma\}$ 共线, 求 α, γ .
10. 设 $\mathbf{a} = \{3, -1, -2\}, \mathbf{b} = \{1, 2, -1\}$,
- (1) 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
 - (2) 求与 \mathbf{a}, \mathbf{b} 都垂直的单位向量;
 - (3) 求 $(-2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{b})$ 及 $\mathbf{a} \times 2\mathbf{b}$;
 - (4) 求 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角的余弦.
11. 已知点 $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.
12. 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两构成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 又 $|\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 2, |\mathbf{c}| = 6$, 求向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 的长度.
13. 用向量方法证明正弦定理.
14. 设 $\mathbf{a} = \{3, 5, -2\}, \mathbf{b} = \{2, 1, 4\}$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系才能使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直?
15. 已知 $A(1, 1, 1), B(2, 2, 1), C(2, 1, 2)$, 求 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角 θ 及 $\text{Prj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$.
16. 已知 $\mathbf{a} = \{3, 6, 8\}$, 求同时垂直于 \mathbf{a} 和 x 轴的单位向量 \mathbf{e}_n .
17. 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.
18. 已知不在同一平面上的四点: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.
19. 已知 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面.
20. 证明 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$.

B 类

1. 设空间中一动点到两定点距离之比为常数, 求动点轨迹.
2. 设向量 \mathbf{a} 的方向平行于向量 $\mathbf{c} = \{7, -4, -4\}$ 与向量 $\mathbf{b} = \{-2, -1, 2\}$ 之间的角平分线, 且 $|\mathbf{a}| = 5\sqrt{6}$, 求 \mathbf{a} .
3. 用向量的方法证明:
- (1) 梯形两腰中点连线平行于底边且等于两底和的一半;
 - (2) 圆直径所对的圆周角为直角;
 - (3) 平行四边形两对角线的长度的平方和等于四边长的平方和.

4. 试用向量方法证明不等式 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|$.

$$0, 1 - 1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中 $a_i, b_i (i=1, 2, 3)$ 为任意实数, 并指出等号成立的条件.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a + xb| - |a - xb|}{x}$, $|a| \neq 0$.

§ 2 空间的平面与直线

2.1 平面的方程表示

给定平面 π , 与 π 垂直的直线称为 π 的法线, 与法线平行的非零向量称为 π 的法向量. 如果已知平面 π 的一个法向量 n 和平面上的一个点 M_0 , 则可以唯一确定这个平面(图 7.17). 事实上, 对平面 π 上任意一点 M , 向量 $\overrightarrow{M_0 M}$ 与 n 垂直, 于是

$$n \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0.$$

若记 $r_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $r = \overrightarrow{OM}$, 则 $\overrightarrow{M_0 M} = r - r_0$, 其中 O 为坐标原点, 从而可得

$$n \cdot (r - r_0) = 0. \quad (2.1)$$

这就是平面 π 的向量方程.

反之, 如果 $r = \overrightarrow{OM}$ 满足(2.1)式, 则 M 必在平面 π 上. 因此, (2.1)式唯一地确定了平面 π .

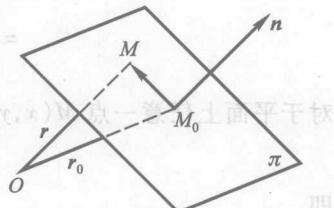


图 7.17

设 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $n = \{A, B, C\}$, 则(2.1)式变为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (2.2)$$

或

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.3)$$

其中 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

(2.3)式称为平面 π 的一般方程. 其中 x, y, z 一次项的系数 A, B, C 有着明显的几何意义: $n = \{A, B, C\}$ 是平面 π 的法向量.

例 2.1 求过点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$ 且与平面 $x + y + z = 0$ 垂直的平面方程.

解法 1 令平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 则由已知条件得齐次方程组

$$\begin{cases} A + B + C + D = 0, \\ B - C + D = 0, \\ A + B + C = 0. \end{cases}$$

解方程组可求得 $A = 2t$, $B = C = -t$, $D = 0$, t 为任意常数. 所以所求平面方程为

$$2x - y - z = 0.$$

解法2 设所求平面 π 的法向量为 n , 则 n 垂直于 π 上的 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$. 又因 π 垂直于平面 $x + y + z = 0$, 故 n 垂直于已知平面的法向量 $n_1 = \{1, 1, 1\}$. 所以可取

$$n = n_1 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \{-2, 1, 1\},$$

于是所求方程为 $-2(x - 1) + (y - 1) + (z - 1) = 0$, 即

$$2x - y - z = 0.$$

例 2.2 已知三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ 不共线, 求过这三点的平面方程.

解 连接 M_1, M_2 与 M_1, M_3 得到平面上的两个向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

于是该平面的法向量可取为

$$n = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

对于平面上任意一点 $M(x, y, z)$, 有

$$n \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0,$$

即

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0.$$

从而其混合积

$$[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}] = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

于是得到平面的三点式方程:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

例 2.3 已知平面 π 过如下三点: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ ($abc \neq 0$) (图 7.18), 求此平面方程.

解 因 a, b, c 都不为零, 分别将三点坐标代入平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

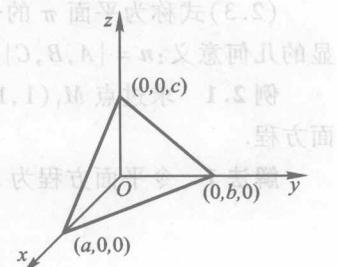


图 7.18

得到方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，其中 A, B, C, D 是常数。

再将上面 A, B, C 的值代入一般方程，并化简，即得所求平面的方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.4)$$

(2.4) 式称为平面 π 的截距式方程。

2.2 点到平面的距离

设平面 π 的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是平面 π 外的一点，从 M_1 向平面 π 引垂线，设垂足是 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，则 $|P_0M_1|$ 是点 M_1 到平面 π 的距离。

因 P_0 在平面 π 上，故 P_0 的坐标满足

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

又因平面 π 的法向量 $n = \{A, B, C\}$ ，于是 $\overrightarrow{P_0M_1}$ 与 n 平行或重合（共线），即 $\overrightarrow{P_0M_1}$ 与 n 之间的夹角为 0 或 π ，故有

而

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0M_1} \cdot n &= |\overrightarrow{P_0M_1}| |n| \cos(\overrightarrow{P_0M_1}, n) = \pm |\overrightarrow{P_0M_1}| |n|, \\ (2.5) \quad &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) \\ &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D, \\ |n| &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned}$$

于是点 M_1 到平面 π 的距离为

$$d = |\overrightarrow{P_0M_1}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 的平面方程 $ax + by + cz + d = 0$ 称为平面的法式方程。法式方程中的前三个系数 a, b, c 所构成的向量 $\{a, b, c\}$ 是该平面的单位法向量 e_n 。设 e_n 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ，则平面的法式方程又可以写成

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + d = 0.$$

任何平面方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 都可用乘以因子 $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 的方法变为法

式方程（称为法化）。通常把 $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 称为法化因子。因此，若求一点到平面

的距离,只需先把平面方程法化,然后把点的坐标代入法式方程左端,所得到的值取绝对值就是所要求的距离.

例 2.4 试求由平面 $\pi_1: 2x - z + 12 = 0$ 与 $\pi_2: x + 3y + 17 = 0$ 组成的二面角的分角面方程.

解 由立体几何知,一平面 π 为平面 π_1 与 π_2 的分角面的充分必要条件是: π 上的任意一点 $P(x, y, z)$ 到平面 π_1 与 π_2 的距离相等,即

$$\frac{|2x - z + 12|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 3y + 17|}{\sqrt{10}}$$

整理得 $2\sqrt{2}x - \sqrt{2}z + 12\sqrt{2} = \pm(x + 3y + 17)$. 因此,所求分角面的方程为

$$(2\sqrt{2} - 1)x - 3y - \sqrt{2}z + 12\sqrt{2} - 17 = 0$$

或 $(2\sqrt{2} + 1)x + 3y - \sqrt{2}z + 12\sqrt{2} + 17 = 0$.

2.3 两平面间的夹角

给定两个平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

并设 n_1, n_2 分别为 π_1, π_2 的法向量,则 π_1 与 π_2 的夹角 θ 定义为 n_1 与 n_2 的夹角. 这个夹角 θ 规定介于 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间(这是可以做到的,因为法向量可取为 $n_i = \pm\{A_i, B_i, C_i\}$, $i=1,2$),于是

$$\cos \theta = \cos(\hat{n_1}, \hat{n_2}) = \frac{|\hat{n_1} \cdot \hat{n_2}|}{|\hat{n_1}| |\hat{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad (2.5)$$

或写为

$$\theta = \arccos \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

由平面法线的定义可知:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

由公式(2.5)可推知:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

2.4 空间直线的方程

如果直线 l 通过一点 M_0 ,并且与非零向量 v 平行,则可以唯一确定这条直

线. 此非零向量 \mathbf{v} 称为直线 l 的方向向量(图 7.19). 事实上, 设 M 是 l 上任一点, 则向量 $\overrightarrow{M_0 M}$ 与 \mathbf{v} 平行, 于是存在实数 t , 使得

$$\overrightarrow{M_0 M} = t \mathbf{v}.$$

若记 $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, 则上式变为

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t \mathbf{v},$$

或者

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

反之, 任给实数 t , 由方程(2.6)确定的向量 \mathbf{r} 的终点必在直线 l 上. 因此, 由此方程就唯一确定了直线 l , 称(2.6)式为直线 l 的向量方程.

现在设 M_0 的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , $\mathbf{v} = \{l, m, n\}$, 并设 M 的坐标为 (x, y, z) , 则方程(2.6)可改写为

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (2.7)$$

此式称为直线 l 的参数方程, 称实数 t 为参数.

在参数方程(2.7)中, 若 l, m, n 皆不为零, 则可以消去参数 t , 得到

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (2.8)$$

方程(2.8)称为直线 l 的点向式方程, 又称为标准方程. 非零向量 $\mathbf{v} = \{l, m, n\}$ 是为直线 l 的方向向量. 凡与 l, m, n 成比例的任何一组数都称为该直线的一组方向数.

当 l, m, n 有一个为零, 例如 $l=0$ 时, 仍可将直线方程写为

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

此时直线 l 平行于向量 $\{0, m, n\}$, 且与 x 轴垂直.

在直线的标准方程(2.8)中包含两个独立的等式:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{l} &= \frac{y - y_0}{m}, \\ \frac{y - y_0}{m} &= \frac{z - z_0}{n}. \end{aligned}$$

每个等式都是一个平面, 而直线 l 上的点的坐标同时满足这两个等式, 所以这两个平面的交线就是直线 l .

如果两个不同的平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

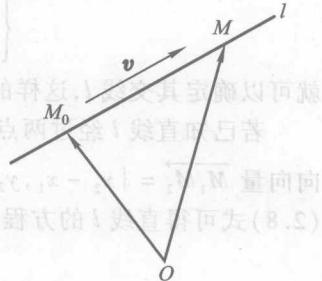


图 7.19 直线 l 的向量方程

0 有非空的交集, 则其交集就是一条直线. 所以由联立方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

就可以确定其交线 l , 这样的方程称为直线 l 的一般方程.

若已知直线 l 经过两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则可直接写出 l 的方向向量 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. 设 $P(x, y, z)$ 是 l 上任意一点, 则由(2.8)式可得直线 l 的方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.9)$$

(2.9)式称为直线的两点式.

例 2.5 试将直线的一般式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0, \\ 2x + 3y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

化为标准方程.

解 首先在直线上求出一点 (x_0, y_0, z_0) . 由方程的特征, 不妨令 $z_0 = 0$, 则另外两坐标 x_0, y_0 应满足方程组

$$\begin{cases} x + 2y - 6 = 0, \\ 2x + 3y - 1 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_0 = -16, y_0 = 11$, 即得直线上的点 $(-16, 11, 0)$.

然后, 求直线的方向向量 $\mathbf{v} = \{l, m, n\}$. 因两个平面的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = \{1, 2, 3\}, \mathbf{n}_2 = \{2, 3, -4\}$, 所以

$$\mathbf{v} // \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \{-17, 10, -1\}.$$

故直线的标准方程为

$$\frac{x + 16}{-17} = \frac{y - 11}{10} = \frac{z}{-1}.$$

例 2.6 求经过点 $A(-1, 0, 4)$, 且与平面 $\pi: 3x - 4y + z - 10 = 0$ 平行, 又与直线 $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线 L 的方程.

解 设所求直线 L 的方向向量为 $\mathbf{v} = \{l, m, n\}$, 因 $L // \pi$, 所以有 $3l - 4m + n = 0$. 记直线 L_1 的方向向量为 $\mathbf{v}_1 = \{1, 1, 2\}$, 在 L_1 上取一点 $B(-1, 3, 0)$, 作向量 $\overrightarrow{AB} = \{0, 3, -4\}$, 因此 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \overrightarrow{AB}$ 共面, 故有

$$[\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$-10l + 4m + 3n = 0.$$

它与已知方程 $3l - 4m + n = 0$ 联立, 可得关系

$$m = \frac{19}{16}l, \quad n = \frac{7}{4}l.$$

故得直线 L 的标准方程为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

2.5 两直线的夹角

两条相交直线 L_1 与 L_2 形成两对对顶角. 我们把成锐角或直角的对顶角定义为两直线的夹角. 设 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分别为两直线的方向向量, 则两直线的夹角 $\theta = \widehat{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$, 或 $\theta = \pi - \widehat{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$. 因此

$$\cos \theta = |\cos(\widehat{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2})| = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|}.$$

对于异面直线, 可把它们平移至相交状态. 此时的夹角就定义为异面直线的夹角.

若已求得 $\mathbf{v}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\mathbf{v}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$, 则容易推知:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

2.6 直线与平面的夹角

直线与平面的夹角是指该直线与平面法线夹角的余角. 当直线 L 的方向向量为 \mathbf{v} , 平面 π 的法向量为 \mathbf{n} 时, 则 L 与 π 的夹角 θ 满足

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{v}| |\mathbf{n}|},$$

即

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{v}| |\mathbf{n}|}.$$

作为推论, 易知

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0.$$

2.7 点到直线的距离

已知直线 L 的标准方程为

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

及点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 求 M_1 到 L 的距离, 如图 7.20.

设已知 L 上的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, L 的方向向量为 $\mathbf{v} = \{l, m, n\}$. 当 M_1 不在 L 上时, M_1 到 L 的距离 d 是以 $\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{v}$ 为边的平行四边形的 \mathbf{v} 边上的高. 因为平行四边形的面积

$$S = |\mathbf{v}| d = |\mathbf{v} \times \overrightarrow{M_0M_1}|,$$

所以点 M_1 到 L 的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{S}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\mathbf{v}|} \\ &= \sqrt{\left| \begin{array}{ccc} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & l \\ m & n & \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{ccc} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 & m \\ n & l & \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{ccc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & n \\ l & m & \end{array} \right|^2} \\ &= \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}. \end{aligned}$$

当 M_1 在直线 L 上时, $\overrightarrow{M_0M_1}$ 重合于 \mathbf{v} , 故 $|\mathbf{v} \times \overrightarrow{M_0M_1}| = 0$, 即 $d = 0$.

例 2.7 设有直线

$$L: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

求原点到直线 L 的距离 d .

解 直线 L 过点 $M_0(1, 1, 2)$, 方向向量 $\mathbf{v} = \{0, 3, 4\}$, 因此

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\mathbf{v} \times \overrightarrow{M_0O} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \{-2, -4, 3\},$$

$$|\mathbf{v} \times \overrightarrow{M_0O}| = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}.$$

从而 $d = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

2.8 异面直线的距离

设 l_1, l_2 是两条异面直线, 其方向向量分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. 点 P_1, P_2 分别位于 l_1 与 l_2 上. 过直线 l_2 作平面 π 与直线 l_1 平行 (图 7.21). 设 l_1 在 π 上的投影为直线 QR , 它交 l_2 于 Q , 并设 Q 为 l_1 上点 P 在 π 上的投影, 则 PQ 是直线 l_1 与 l_2 的公垂线.

因对 l_1 上任意一点 P_1 与 l_2 上任意一点 P_2 , 其距离 $\overline{P_1P_2}$ 都有性质 $\overline{PQ} \leq \overline{P_1P_2}$

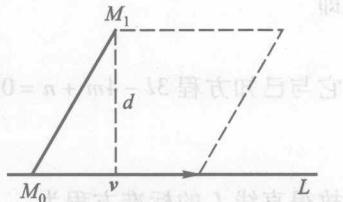


图 7.20

P_1P_2 , 故公垂线的距离 \overline{PQ} 是 l_1 与 l_2 的距离, 我们把它记作 d .

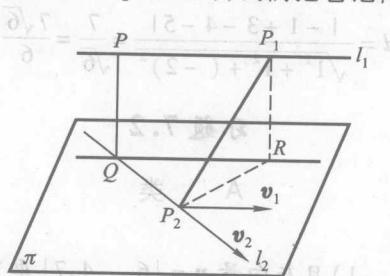


图 7.21

由于 $|\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{P_2P_1} \rangle|$ 是以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{P_2P_1}$ 为棱的平行六面体的体积, 所以

$$d = \frac{|\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{P_2P_1} \rangle|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}$$

例 2.8 设直线 l_1 过点 $A(3, 0, -1)$ 且与向量 $\mathbf{a} = \{2, 4, 3\}$ 平行. 另一直线 l_2 过点 $B(-1, 3, 2)$ 且与向量 $\mathbf{b} = \{2, 0, 1\}$ 平行, 求 l_1, l_2 之间的距离.

解法 1 利用异面直线的距离公式求解. 由于

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{AB} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0,$$

所以 l_1, l_2 不共面. 又

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{4, 4, -8\}.$$

所以

$$d = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{AB} \rangle|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \frac{28}{4\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

解法 2 过 l_1 作 l_2 的平行平面 π . 再求 l_2 到 π 的距离 d , 则 d 即为所求距离. 为此, 先作平面 π 的法向量 \mathbf{n} . 因为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\{1, 1, -2\},$$

故可取 $\mathbf{n} = \{1, 1, -2\}$. 又知平面 π 过点 $A(3, 0, -1)$, 所以 π 的方程为

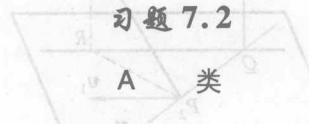
$$(x - 3) + (y - 0) - 2(z + 1) = 0,$$

即

$$x + y - 2z - 5 = 0.$$

点 $B(-1, 3, 2)$ 到平面 π 的距离为

$$d = \frac{|-1+3-4-5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$



1. 求过点 $M(2, 3, -1)$ 且与向量 $n = \{6, -4, 7\}$ 垂直的平面方程.
2. 求过点 $M_1(2, -1, 4), M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$ 的平面方程.
3. 一平面过点 $A(5, 4, 3)$ 且在各坐标轴上的截距相等, 求此平面的方程.
4. 一平面过点 $M(3, -1, -5)$, 且与平面 $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ 和 $5x - 4y + 3z + 1 = 0$ 都垂直, 求此平面的方程.

5. 求下列直线的标准方程和参数方程

- (1) $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 3x - 8y + 4z + 36 = 0; \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} x = 3z - 5, \\ y = 2z - 8. \end{cases}$

6. 求过点 $(-3, 2, 5)$, 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行的直线方程.

7. 求过点 $M(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

8. 求两直线 $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$ 的夹角.

9. 求直线

$$l_1: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad l_2: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

之间的夹角.

10. 求直线 $L: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 与平面 $\pi: x + \sqrt{2}y - z - 1 = 0$ 之间的夹角.

11. 求点 $(1, 2, 3)$ 到直线 $x = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ 的距离.

12. 求平行直线 $x = t + 1, y = 2t - 1, z = t$ 和 $x = t + 2, y = 2t - 1, z = t + 1$ 间的距离.

13. 证明直线

$$l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

与 $l_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ 不共面，并求 l_1, l_2 的距离。

14. 求过直线 $\begin{cases} x + 28y - 2z + 17 = 0 \\ 5x + 8y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相切的平面的方程。

B 类

1. 已知直线 $L_1: \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}, L_2: \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{x-2}{2}$, 试求(1) L_1 与 L_2 间的距离; (2) L_1 与 L_2 公垂线的方程。

2. 求通过点 $P(1, 2, 1)$ 且垂直于直线 $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, 又与 $L_2: \frac{x}{2} = y = -z$ 相交的直线方程。

3. 确定 m, n 的值, 使直线 $l: x-1 = \frac{y+2}{m} = \frac{z-1}{n}$ 垂直于平面 $\pi: 3x+6y+3z+25=0$, 并求 l 在平面 $\pi_1: x-y+z-2=0$ 上的投影直线的方程。

4. 求两条不相交直线 $x=t, y=0, z=0$ 和 $x=t+2, y=t-1, z=t+1$ 间的距离。

5. 已知点 $M_1(4, 3, 10)$ 和直线 $L_1: \begin{cases} 9x-2y-2z+1=0, \\ 4x-7y+4z-2=0, \end{cases}$ 若 M_2 是 M_1 关于 L_1 的对称点, 求过点 M_2 且平行于直线 L_1 的直线方程。

6. 一平面过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角, 求此平面方程。(提示: 所有过已知直线的平面的全体称为过已知直线的平面束, 此平面束的方程表示为

$$\lambda(x+5y+z) + \mu(x-z+4) = 0,$$

其中 λ, μ 不同时为 0. 再利用 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可解出 $\lambda = 0$, 或 $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{4}{3}$. 从而所求平面方程为 $x-z+4=0$ 或 $x+20y+7z-12=0$.)

§3 几种常见的二次曲面与空间曲线简介

三维空间中的曲面 S 常常可以用变量 x, y, z 之间的某个约束条件来描述, 即

$$S = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\},$$

其中 $F(x, y, z)$ 是一个三元函数, 曲面 S 上的每个点 (x, y, z) 都满足方程 $F(x, y, z) = 0$; 反之, 每个满足此方程的点 (x, y, z) 必定在曲面 S 上, 此时称 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 S 的方程(一般方程式).

关于空间曲面的研究, 主要归结为两个问题: 一是已知曲面, 建立它的方程; 二是已知方程, 研究它所表示的曲面形状.

三元二次方程

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5yz + a_6zx + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$$

(其中 $\sum_{i=1}^6 a_i^2 \neq 0$) 所表示的图形称为二次曲面. 本节的主要内容是介绍几种常见的二次曲面.

3.1 曲面方程的建立

1. 柱面

由平行于某固定直线 C 的动直线 l 沿空间一条固定曲线 Γ 平行移动所产生的曲面称为柱面. 动直线 l 称为母线, 固定曲线 Γ 称为柱面的准线(图 7.22).

特别地, 准线为圆周的柱面称为圆柱面. 当准线所在的平面垂直于直线 C , 则此圆柱面称为正圆柱面.

若母线是平行于 z 轴的直线, 准线是 xy 平面上的曲线, 设此平面曲线的方程为 $F(x, y) = 0$, 则此柱面的方程为不含 z 的方程

$$F(x, y) = 0. \quad (3.1)$$

事实上, 如果有一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在方程(3.1)的图形上, 即有 $F(x_0, y_0) = 0$. 过点 P_0 作平行于 z 轴的直线

$$L: \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z. \end{cases}$$

显然, L 上所有点的坐标 (x_0, y_0, z) 都满足方程(3.1), 即 L 在方程(3.1)的图形上. 这就是说, 方程(3.1)的图形是由平行于 z 轴的直线组成的, 因此它是一个柱面. 柱面与 xy 平面的交线

$$\Gamma: \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

就是此柱面的准线(图 7.23).

同理, 方程 $F(y, z) = 0$ 和 $F(x, z) = 0$ 在空间都表示柱面, 它们的母线分别平行于 x 轴和 y 轴.

柱面为二次曲面时, 称为二次柱面, 例如:

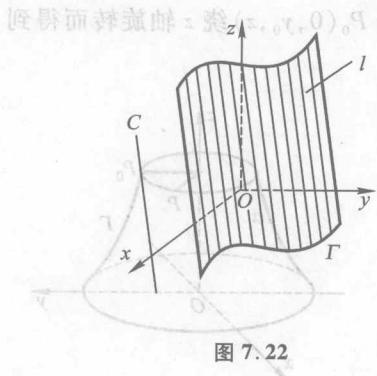


图 7.22

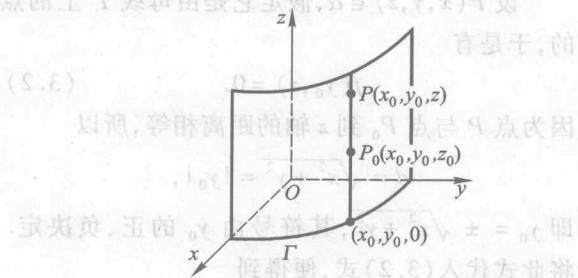


图 7.23

圆柱面: $x^2 + y^2 = a^2$; 椭圆柱面(图 7.24): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
双曲线柱面(图 7.25): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
抛物柱面(图 7.26): $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

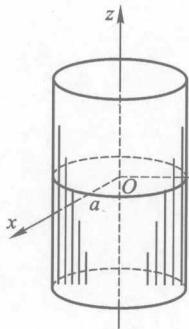


图 7.24

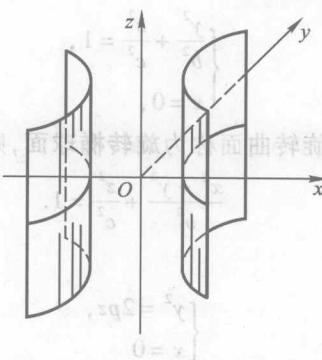


图 7.25

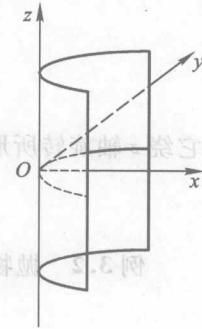


图 7.26

2. 旋转曲面

一条平面曲线 Γ 绕与其在同一平面上某固定直线 l 旋转所形成的曲面称为旋转曲面. 曲线 Γ 称为母线, 直线 l 称为旋转轴.

例如, 以 yz 平面上的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

为母线, 绕 z 轴旋转就形成如图 7.27 所示的旋转曲面 α . 现在我们来建立旋转曲面 α 的方程.

设 $P(x, y, z) \in \alpha$, 假定它是由母线 Γ 上的点 $P_0(0, y_0, z)$ 绕 z 轴旋转而得到的, 于是有

$$f(y_0, z) = 0. \quad (3.2)$$

因为点 P 与点 P_0 到 z 轴的距离相等, 所以

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|,$$

即 $y_0 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 其符号由 y_0 的正、负决定.

将此式代入(3.2)式, 便得到

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (3.3)$$

也就是说, 旋转曲面 α 上任一点 $P(x, y, z)$ 的坐标满足方程(3.3). 这就证明了(3.3)式是旋转曲面 α 的方程.

由此可知, 在有关曲线 Γ 的方程 $f(y, z) = 0$ 中将 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得到曲线 Γ 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面的方程. 同理, 曲线 Γ 绕 y 轴旋转的旋转曲面的方程为 $f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

例 3.1 平面曲线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

它绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面称为旋转椭球面, 则其方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

例 3.2 抛物线

$$\begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面称为旋转抛物面, 它的方程是

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

例 3.3 将 xz 平面上的双曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转一周所形成的曲面叫旋转单叶双曲面, 其方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

若绕 x 轴旋转一周, 形成的曲面叫旋转双叶双曲面, 其方程为

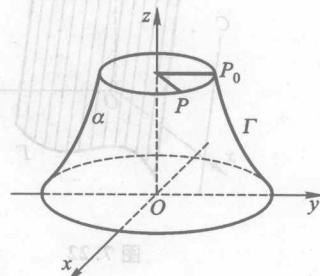


图 7.27

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

例 3.4 如图 7.28 所示, 直线 L 与 z 轴交于原点 O , L 绕 z 轴旋转一周所得的曲面是一个圆锥面. 交点 O 称为圆锥面的顶点, L 与 z 轴的夹角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 称为圆锥面的半顶角. 在 yz 平面上, 直线 L 的方程可写为 $z = y \cot \alpha$. 因为旋转轴为 z 轴, 由上面的讨论知, 只需将上方程中的 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得到该圆锥面的方程:

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha,$$

或

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

其中 $a = \cot \alpha$.

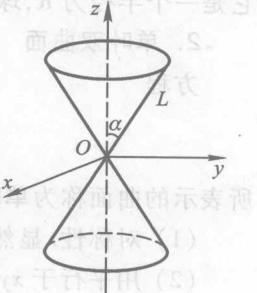


图 7.28

3.2 由方程研究曲面的特征

1. 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0) \quad (3.4)$$

表示的曲面为椭球面, 其图形(图 7.29)有如下特征:

(1) 对称性. 在方程(3.4)中, 以 $-x$ 代 x 后方程不变, 这表示曲面关于 yz 平面对称. 同理, 曲面关于 xy 平面, zx 平面对称. 类似地, 可知曲面关于坐标轴及原点也对称.

(2) 用平面 $z = h$ 去截椭球面, 则截痕是一个椭圆 ($|h| < c$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

或写为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(0 < y^2 < b^2, 0 < z < c)}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1. \\ a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) + b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) = 1. \\ z = h. \end{cases}$$

(3) 当 $a = b$ 时, 方程变为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

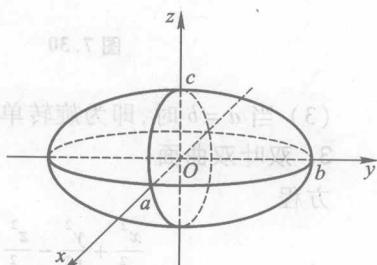


图 7.29

它是我们已见过的旋转椭球面.

(4) 若 $a = b = c = R$, 方程(3.4)化为

即圆锥面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

它是一个半径为 R , 球心在原点的球面.

2. 单叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

所表示的曲面称为单叶双曲面, 其图形(图 7.30)有如下特征:

(1) 对称性. 显然, 曲面关于三个坐标面、三个坐标轴和原点对称.

(2) 用平行于 xy 平面的平面 $z = h$ 截单叶双曲面, 所得截痕是曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

此截痕是平面 $z = h$ 上的椭圆, 且随 $|h|$ 的增大椭圆变大.

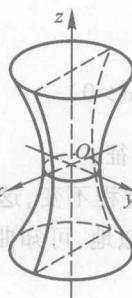


图 7.30



图 7.31

(3) 当 $a = b$ 时, 即为旋转单叶双曲面.

3. 双叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

所表示的曲面称为双叶双曲面, 其图形(图 7.31)有如下特征:

(1) 对称性. 曲面关于三个坐标面、三个坐标轴和原点对称.

(2) 用平行于 xy 平面的平面 $z = h$ 截曲面, 所得截痕是

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

当 $|h| < c$ 时, 无截痕, 当 $|h| > c$ 时, 截痕是一个椭圆, 且随 $|h|$ 的增大而椭圆变大.

曲面在 yz 平面, zx 平面上的交线分别是

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

它们都是相应坐标面上的双曲线.

(3) 当 $a = b$ 时, 即为旋转双叶双曲面.

4. 椭圆抛物面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (a > 0, b > 0, p > 0)$$

所表示的曲面称为椭圆抛物面, 其图形(图 7.32)有如下特征:

(1) 对称性. 曲面关于 yz 平面、 xz 平面和 z 轴对称.

(2) 用平面 $z = h$ 截该曲面, 交线是

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ph, \\ z = h (h > 0). \end{cases}$$

显然, 它是平面 $z = h$ 上的椭圆, 且随 h 的增大椭圆变大. 用平面 $x = 0$ 与 $y = 0$ 截曲面, 所得交线为

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 2pz, \\ y = 0. \end{cases}$$

它们均为相应坐标面上的抛物线. 当 $p < 0$ 时, 椭圆抛物面的开口朝下.

5. 双曲抛物面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (a > 0, b > 0, p \neq 0)$$

所表示的曲面称为双曲抛物面, 其图形(图 7.33a,b)有如下特征:

不妨设 $p > 0$. 以平面 $z = h$ 与曲面的截痕是双曲线, 其方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2ph, \\ z = h. \end{cases}$$

当 $h > 0$ 时, 其实轴与 x 轴平行; 当 $h < 0$ 时, 其实轴与 y 轴平行. 而当 $h = 0$

(B)

图 7.32

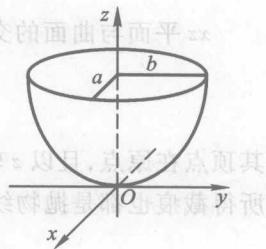


图 7.32

面程 (1)

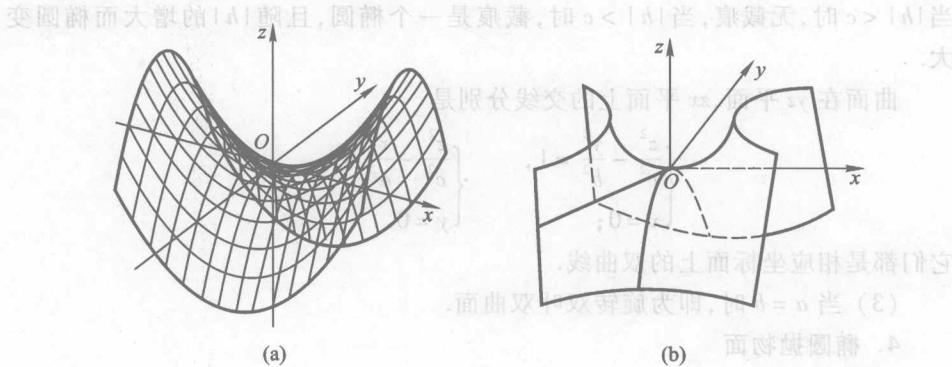


图 7.33

时,即以 xy 平面截双曲抛物面所得的截线为一对相交于原点的直线

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

xz 平面与曲面的交线是抛物线,方程为

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 pz, \\ y = 0, \end{cases}$$

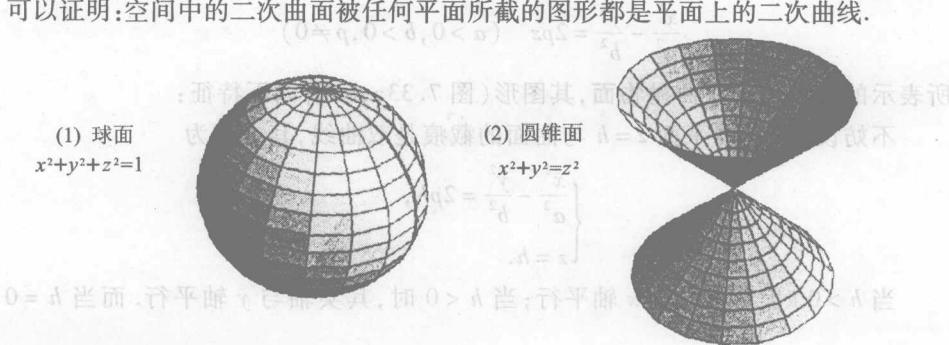
其顶点在原点,且以 z 轴为其轴. 以平行于 xz 平面的平面 $y = h$ 截此双曲抛物面所得截痕也都是抛物线,其方程为

$$\begin{cases} x^2 = 2p \left(z + \frac{h^2}{2pb^2} \right) a^2, \\ y = h, \end{cases}$$

抛物线的顶点为 $\left(0, h, -\frac{h^2}{2pb^2} \right)$, 轴平行于 z 轴. 以 yz 平面或平面 $x = h$ 截此双曲

抛物面所得截痕也都是抛物线,它的轴也都平行于 z 轴.

下面我们列出 11 种二次曲面的方程和图形. 可以证明: 空间中所有非退化(图形不是点、直线或平面)的二次曲面的标准型只能是这 11 种之一(图 7.34). 我们还可以证明: 空间中的二次曲面被任何平面所截的图形都是平面上的二次曲线.



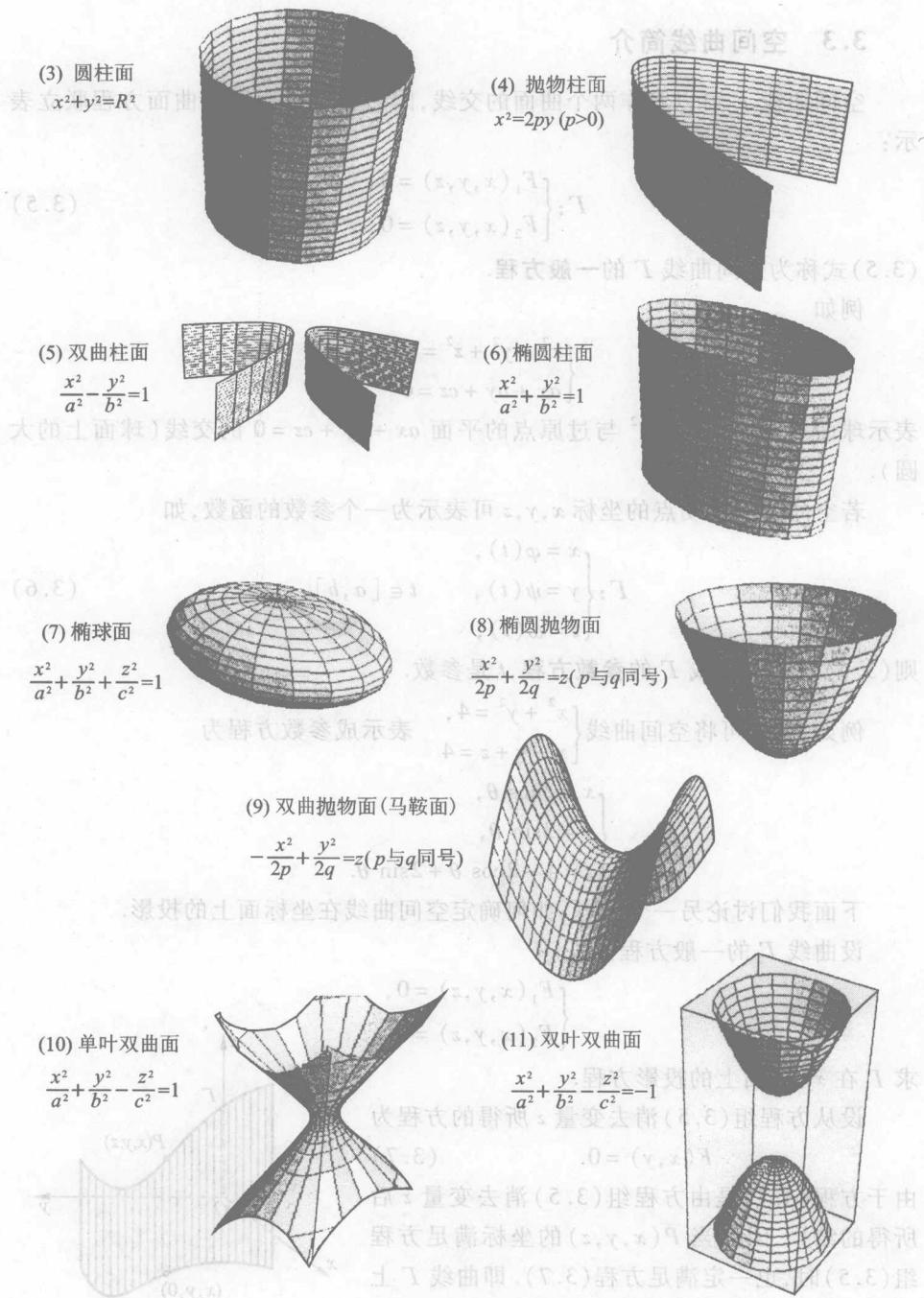


图 7.34

3.3 空间曲线简介

空间曲线 Γ 可以看作两个曲面的交线,因而它可以用两个曲面方程联立表示:

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

(3.5)式称为空间曲线 Γ 的一般方程.

例如

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

表示球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与过原点的平面 $ax + by + cz = 0$ 的交线(球面上的大圆).

若空间曲线上动点的坐标 x, y, z 可表示为一个参数的函数,如

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad (3.6)$$

则(3.6)式称为曲线 Γ 的参数方程, t 是参数.

例如, 我们可将空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y + z = 4 \end{cases}$ 表示成参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta, \\ y = 2 \sin \theta, \\ z = 4 - 2 \cos \theta + 2 \sin \theta. \end{cases}$$

下面我们讨论另一个问题: 如何确定空间曲线在坐标面上的投影.

设曲线 Γ 的一般方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

求 Γ 在 xy 平面上的投影方程.

设从方程组(3.5)消去变量 z 所得的方程为

$$F(x, y) = 0. \quad (3.7)$$

由于方程(3.7)是由方程组(3.5)消去变量 z 后所得的结果, 因此当 $P(x, y, z)$ 的坐标满足方程组(3.5)时, 也一定满足方程(3.7). 即曲线 Γ 上的点一定在方程(3.7)所表示的柱面上, 这柱面称为曲线 Γ 的投影柱面(图 7.35). 投影柱面与

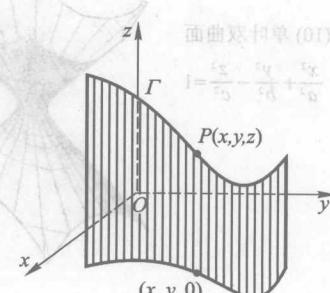


图 7.35

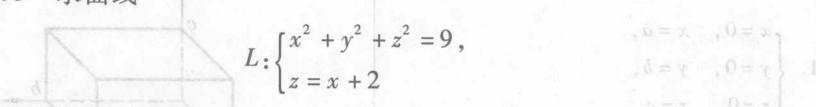
xy 平面上的交线称为空间曲线 Γ 在 xy 平面上的投影曲线, 简称投影. 它的方程是

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

同理, 消去方程组(3.5)中的变量 x 或 y , 再分别与 $x = 0$ 或 $y = 0$ 联立, 就得到曲线 Γ 在 yz 平面或 zx 平面上的投影方程:

$$\begin{cases} G(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} H(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

例 3.5 求曲线

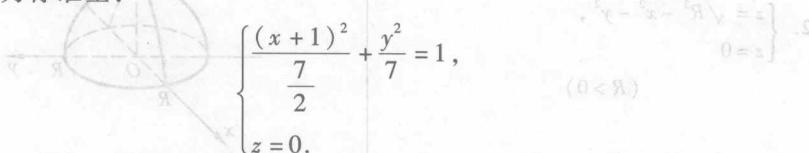


在坐标面上的投影曲线.

解 在所给方程组中消去 z , 可求得曲线 L 在 xy 平面上的投影曲线:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + y^2 = 5, \\ z = 0, \end{cases}$$

或将其化为标准型:

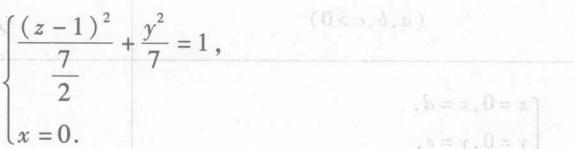


它是在 xy 平面上的椭圆.

类似地, 消去 x , 得到曲线 L 在 yz 平面上的投影曲线:

$$\begin{cases} 2z^2 - 4z + y^2 = 5, \\ x = 0. \end{cases}$$

或将其化为标准型:



它是 yz 平面上的椭圆.

因为曲线 L 包含在平行于 y 轴的平面 $z = x + 2$ 上, 所以 L 在 zx 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z = x + 2, \\ y = 0, \end{cases}$$

其中 $-\sqrt{\frac{7}{2}} - 1 \leq x \leq \sqrt{\frac{7}{2}} - 1$, 它是 zx 平面上的线段.

3.4 常见空间区域的图形

一个封闭曲面或者几个曲面都可以围成一个空间区域,构成一个立体图形。现在我们把一些常用的立体图形列举出来,在今后,特别是在即将学到的重积分计算中,这些立体图形是会经常出现的。希望读者能够熟悉它们(图 7.36)。

曲面方程	曲面所围立体图形
$1. \begin{cases} x=0, & x=a, \\ y=0, & y=b, \\ z=0, & z=c \end{cases} \quad (a, b, c > 0)$	
$2. \begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\ z = 0 \end{cases} \quad (R > 0)$	
$3. \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \end{cases} \quad (a, b, c > 0)$	
$4. \begin{cases} x=0, x=d, \\ y=0, y=e, \\ z=0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \end{cases} \quad (c > 0, a > d > 0, b > e > 0)$	

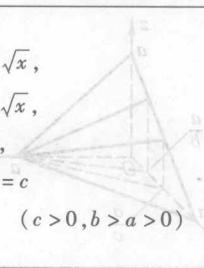
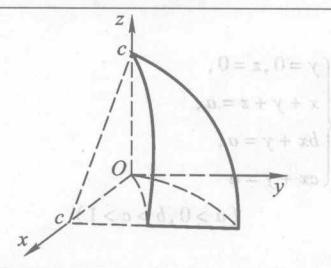
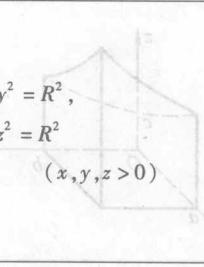
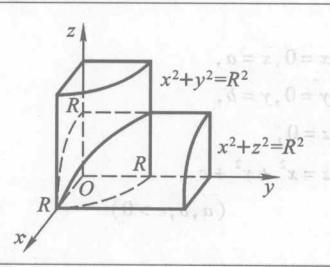
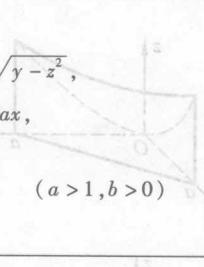
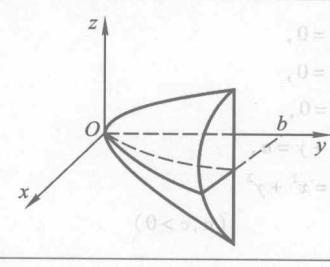
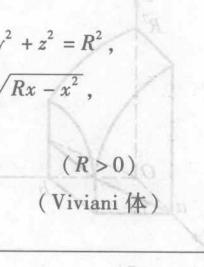
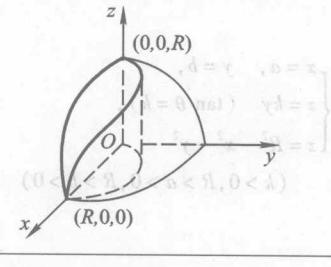
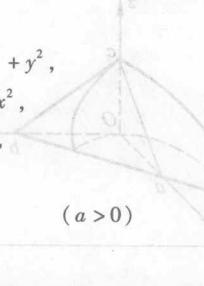
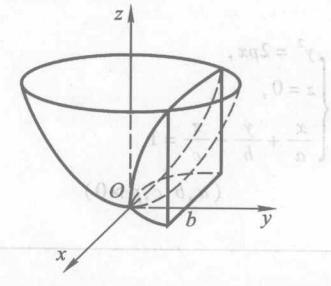
素数

续表

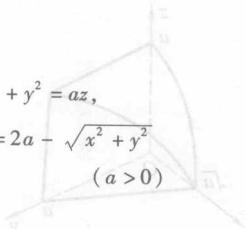
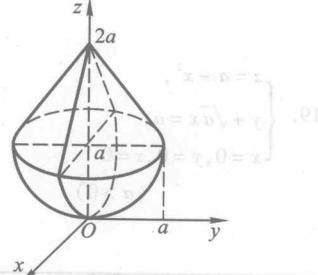
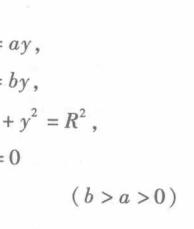
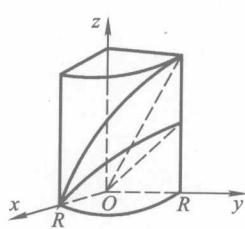
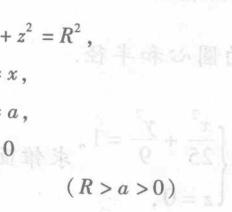
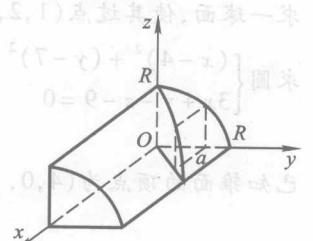
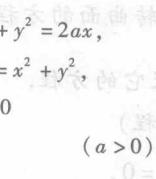
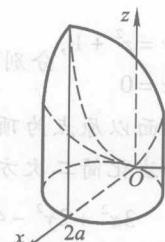
曲面方程	曲面所围立体图形
$\begin{cases} y=0, z=0, \\ x+y+z=a, \\ bx+y=a, \\ cx+y=a \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$(a > 0, b > c > 1)$</p>	
$\begin{cases} x=0, x=a, \\ y=0, y=b, \\ z=0, \\ z=x^2+y^2+c \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$(a, b, c > 0)$</p>	
$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0, \\ x+y=a, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$(a, c > 0)$</p>	
$\begin{cases} x=a, y=b, \\ z=ky \quad (\tan \theta = k), \\ z=R^2 - x^2 - y^2 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$(k > 0, R > a > 0, R > b > 0)$</p>	
$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z=0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">$(a, b, c, p > 0)$</p>	

表 7-2

续表

示意图曲面方程 面曲	曲面所围立体图形
<p>10. $\begin{cases} y = a\sqrt{x}, \\ y = b\sqrt{x}, \\ z = 0, \\ x + z = c \end{cases}$ $(c > 0, b > a > 0)$</p> 	
<p>11. $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$ $(x, y, z > 0)$</p> 	
<p>12. $\begin{cases} x = \sqrt{y - z^2}, \\ \sqrt{y} = ax, \\ y = b \end{cases}$ $(a > 1, b > 0)$</p> 	
<p>13. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = \sqrt{Rx - x^2}, \\ z = 0 \end{cases}$ $(R > 0)$ (Viviani 体)</p> 	
<p>14. $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = ax^2, \\ y = b, \\ z = 0 \end{cases}$ $(a > 0)$</p> 	

续表

图示 曲面方程	曲面所围立体图形
<p>15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = az, \\ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ $(a > 0)$</p> 	
<p>16. $\begin{cases} z = ay, \\ z = by, \\ x^2 + y^2 = R^2, \\ x = 0 \end{cases}$ $(b > a > 0)$</p> 	
<p>17. $\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \\ y = a, \\ z = 0 \end{cases}$ $(R > a > 0)$</p> 	
<p>18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ az = x^2 + y^2, \\ z = 0 \end{cases}$ $(a > 0)$</p> 	

表曲面的主轴圆—特征 $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \end{cases}$ 圆直主轴 $1+z = \frac{1-\eta}{\xi} = \frac{\xi-x}{\xi}$; 圆直角 φ

续表

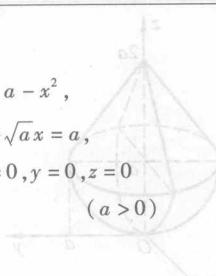
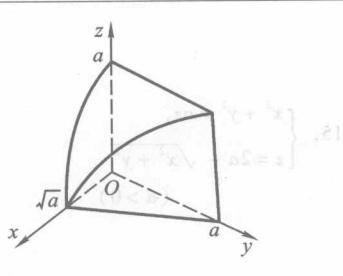
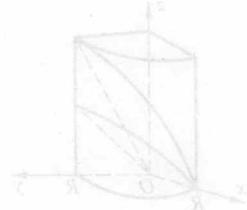
示意图	曲面方程	曲面所围立体图形
19. $\begin{cases} z = a - x^2, \\ y + \sqrt{ax} = a, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \\ (a > 0) \end{cases}$		

图 7.36



习题 7.3

A 类

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases} \\ & (0 < \alpha < \delta) \end{aligned}$$

- 建立球心在点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.
- 求一球面, 使其过点 $(1, 2, 5)$ 且与三个坐标面相切.
- 求圆 $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x+y-z-9=0 \end{cases}$ 的圆心和半径.
- 已知锥面的顶点为 $(4, 0, -3)$, 准线为椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ 求锥面的方程.
- 求以 $(1, 1, 1)$ 为顶点, 以 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线的锥面方程.
- 求曲线 $\begin{cases} y = z^2 + 1, \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转所成旋转曲面的方程.
- 一正圆锥面以原点为顶点, 并包含三条坐标轴, 求它的方程.
- 试用配方法化简二次方程(指将其化为标准型方程)

$$3x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6x + 2\sqrt{2}y - 4\sqrt{2}z - 2 = 0,$$
 并判断此方程表示哪一种二次曲面.
- 求直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ 绕定直线 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3 \end{cases}$ 旋转一周所生成的曲面方程.

10. 已知一动点与点(0,0,1)的距离等于与平面 $z=4$ 的距离的一半, 试求动点的轨迹, 并指出它是什么种二次曲面.

11. 求曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad \text{圆锥面上的圆柱面}$$

在 xy 平面上的投影.

12. 求曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z^2 = 2x \end{cases}$$

在 xy 平面上的投影.

13. 求曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2xy + yz + zx = 0 \end{cases}$$

在 xy 平面上的投影曲线.

14. 已知球面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 平面的方程为 $x + y + z = 0$. 求此球面与平面的交线在各坐标面上的投影方程.

15. 求两个球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 的交线在三个坐标面上的投影柱面方程及投影曲线方程.

16. 作出下列各组曲面所围立体的图形:

(1) 曲面 $z = x^2 + y^2$, 三个坐标面及 $x + y = 1$;

(2) 曲面 $z = 4 - x^2$, 三个坐标面及 $2x + y = 4$.

B 类

1. 求以空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线方向为 $\{1, 1, 1\}$ 的柱面方程.

2. 写出抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $y + z = 1$ 的交线在 xy 平面上的投影曲线方程.

3. 若椭圆抛物面的顶点在原点, z 轴是它的轴, 且点 $A(-1, -2, 2)$ 和 $B(1, 1, 1)$ 是该曲面上的点, 求该曲面的方程.

4. 试画出下列曲面所围成的立体图形:

(1) $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = 1 - x$, $y = 0$ 与 $z = 0$;

(2) $z = y$, $z = 2y$, $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $x = 0$.

5. 试求与两平面 $6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $6x - 3y - 2z + 63 = 0$ 相切的球面方

程,其中一个切点为 $A(5, -1, -1)$. 等离圆锥 $(1, 0, 0)$ 点是第一类曲面.

6. 求出 xy 平面上的圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = 0 \end{cases}$, 绕 xy 平面上平行于 y 轴的直线 $x = -a$ ($0 < r < a$) 旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

7. 求与坐标原点 O 及点 $A(2, 3, 4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面方程, 它表示何种曲面?

$$\begin{cases} 1 = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r} \\ z = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 1 = z + x + y \\ 0 = rx + ry + rz \end{cases};$$

平面 $0 = z + x + y$ 改写成 $z = -x - y$, 则 $1 = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{-x-y}{r}$ 为球形表面, 即一个三叶共轭双曲面 $I = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{-x-y}{r} = 1$.

球形表面 $I = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{-x-y}{r} = 1$ 为三个单叶双曲面.

$$\begin{aligned} & I = x + y + z = 1 \text{ 为单叶双曲面 (1)} \\ & I = x + y - z = 1 \text{ 为单叶双曲面 (2)} \end{aligned}$$

类 日

$$\begin{cases} I = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} \\ 0 = z \end{cases} \text{ 为单叶双曲面 (3)}$$

单叶双曲面 $I = x + y + z = 1$ 为单叶双曲面 (1).

$I = x + y - z = 1$ 为单叶双曲面 (2).

$$\begin{aligned} & I = x - y + z = 1 \text{ 为单叶双曲面 (4)} \\ & I = x - y - z = 1 \text{ 为单叶双曲面 (5)} \end{aligned}$$

单叶双曲面 $I = x\partial + y\partial - z\partial - \bar{x}\partial - \bar{y}\partial + \bar{z}\partial = 1$ 为单叶双曲面 (6).

第 8 章 多元函数微分学

本书前六章研究了一元函数及其微积分,但自然界中许多量往往依赖于多个因素,反映到数学上就是一个变量依赖于多个自变量而变化。因此,本章将研究多元函数及其微分。我们首先讨论多元函数的极限与连续性,然后研究多元函数的导数与微分,最后介绍多元函数微分学的某些应用。由一元函数过渡到二元函数,会出现某些实质性新问题,而从二元函数过渡到一般 n 元的函数,则往往只需作一般性推广,因此,本章将重点讨论二元函数。

§1.1 多元函数的极限与连续

为了讨论多元函数,必须首先讨论它的定义空间,即 n 维欧氏空间。

1.1 n 维欧氏空间

1. n 维欧氏空间的概念

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中,空间中每个向量 x 与三元有序数组 (x_1, x_2, x_3) 一一对应,于是我们称 x 为三维向量,称三维向量全体构成的集合为三维向量空间,记作 \mathbf{R}^3 。推而广之,若向量 x 与 n 元有序数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 一一对应,则称 x 为 n 维向量,并称 n 维向量全体构成的集合为 n 维向量空间,记作 \mathbf{R}^n 。

在 \mathbf{R}^n 空间中也可以像 \mathbf{R}^3 空间那样引进加法、减法、数乘与内积等运算。设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}$, 定义加法、数乘与内积运算如下:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \\ x \cdot y &= \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \end{aligned}$$

则称 \mathbf{R}^n 为欧几里得(Euclid)空间,简称欧氏空间,仍记 \mathbf{R}^n 。今后, \mathbf{R}^n 即指 n 维欧氏空间。

向量 x 的模 $\|x\|$ (或 $|x|$) 为:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

从而 x 与 y 之间的距离为

$$\|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

向量 x 与 y 夹角的余弦定义为:

$$\cos(\hat{x}, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

设向量 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$, 则成立三角不等式:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_3\| + \|x_3 - x_2\|.$$

2. n 维欧氏空间中点与点集

在 \mathbb{R}^n 中, 向量也称为点, 向量 x 的分量也称为坐标, 并且以 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 或 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 记之. 特别地, 当 X 的坐标分量均为零时, 称之为 \mathbb{R}^n 中的零元, 或零向量, 或坐标原点, 且记为 $\mathbf{0}$ 或 O .

定义 1.1 设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, 实数 $\delta > 0$, \mathbb{R}^n 中的子集 $\{X \mid \|X - X_0\| < \delta\}$ 和 $\{X \mid |x_i - x_i^0| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\}$ 分别称为点 $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的 δ 球邻域和 δ 方邻域.

显然, 当 $n = 1$ 时, 上述定义中的球邻域和方邻域就是邻域 $U(x_0, \delta)$; $n = 2$ 时, 集合 $\{X \mid \|X - X_0\| < \delta\}$ 是以 X_0 为心以 δ 为半径的圆域(称之为 δ 圆邻域), 集合 $\{X \mid |x_i - x_i^0| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\}$ 是以 X_0 为心以 2δ 为边长的正方形区域.

注意, 这两种邻域只是形式不同, 没有本质区别. 这是因为在以点 X_0 为心的球(或圆)邻域内总存在以点 X_0 为心的方邻域, 反之亦然. 因此, 通常不加区别地用“点 X_0 的 δ 邻域”泛指这两种形式的邻域, 并统一记为 $U(X_0, \delta)$. 当不关心 δ 的大小时记为 $U(X_0)$.

此外, 集合 $\{X \mid 0 < \|X - X_0\| < \delta\}$ 或 $\{X \mid 0 < |x_i - x_i^0| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\}$ 称为点 X_0 的 δ 去心邻域, 记为 $\dot{U}(X_0, \delta)$ 或 $\dot{U}(X_0)$.

定义 1.2 设 $D \subset \mathbb{R}^n, X \in D$, 若存在 $\delta > 0$, 有 $U(X, \delta) \subset D$, 则称 X 是 D 的内点; 若对任意的 $\delta > 0$, 在邻域 $U(X, \delta)$ 中既有属于 D 的点又有不属于 D 的点, 则称 X 是 D 的边界点; 若存在 $\delta > 0$, 使 $U(X, \delta) \cap D \neq \emptyset$, 则称 X 为 D 的外点.

D 的全体内点组成的集合称为 D 的内部, 记作 $\text{int } D$ 或 D° . D 的全体边界点组成的集合称为 D 的边界, 记作 ∂D .

定义 1.3 设 $D \subset \mathbb{R}^n, X \in \mathbb{R}^n$, 如果在 X 的任一去心邻域中总有 D 的点, 则称 X 为 D 的聚点, D 的全体聚点组成的集合称为 D 的导集, 记作 D^d . 称 $D \cup D^d$ 为 D 的闭包, 记作 \bar{D} .

显然, 内点一定是聚点, 外点一定不是聚点.

定理 1.1 X 是 D 的聚点的充分必要条件是存在点列 $\{X_k\}$ 满足 $X_k \in D$,

$X_k \neq X, k = 1, 2, \dots$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$.

定义 1.4 设 $D \subset \mathbf{R}^n$, 若 D 中每一点都是其内点, 即 $\text{int } D = D$, 则称 D 为 \mathbf{R}^n 中的开集; 若 $\bar{D} = D$, 则称 D 为闭集.

注 1 D 为闭集的另外两个等价定义是: (1) $D^d \subset D$; (2) $\partial D \subset D$.

注 2 约定空集 \emptyset 既是开集又是闭集.

定义 1.5 设 $D \subset \mathbf{R}^n$, 若存在 $M > 0$, 对任意 $X \in D$, 有

$$\|X\| \leq M,$$

则称 D 为有界点集; 否则, 称 D 为无界点集.

定义 1.6 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是有界点集. 正数

$$d(D) = \sup \{ \|P_1 - P_2\| \mid P_1, P_2 \in D\}$$

称为 D 的直径.

例如, 平面圆域的直径就是圆的直径; 矩形域的直径就是其对角线长.

为介绍下面的定义, 需要先给出折线的概念, 设 $P, Q \in \mathbf{R}^n$, 则参数方程

$$X(t) = (1-t)P + tQ \quad (0 \leq t \leq 1)$$

是连接 P 与 Q 的直线段. 由有限个直线段首尾相连接构成的曲线称为 \mathbf{R}^n 中的折线.

定义 1.7 设 $D \subset \mathbf{R}^n$, 若 D 的任意两点都能用属于 D 的折线连接起来, 则称 D 是连通的. 连通的开集称为开区域, 简称区域. 开区域与其边界之并集称为闭区域.

例如, $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ 是 \mathbf{R}^2 中的开区域, 而 $D = \{(x_1, x_2) \mid a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}$ 是 \mathbf{R}^2 中的闭区域.

注意, 开区域一定是开集, 而开集未必一定是开区域, 例如

$$D_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x_1, x_2) \mid 2 < x_1^2 + x_2^2 < 3\}$$

都是开区域, 而 $D_1 \cup D_2$ 虽然仍是开集, 但不是开区域.

3. \mathbf{R}^n 中的点列收敛与发散

定义 1.8 设 $\{P_m\}$ 为 \mathbf{R}^n 中的点列, $P_0 \in \mathbf{R}^n$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, 当 $m > N$ 时, 有

则称点列 $\{P_m\}$ 收敛或者存在极限, 极限是 P_0 , 且记作

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = P_0 \quad \text{或} \quad P_m \rightarrow P_0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad \text{或}$$

$$(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m) \rightarrow (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (m \rightarrow \infty).$$

如果点列 $\{P_m\}$ 不收敛, 则称之为发散.

定理 1.2 点列 $\{P_m\} \subset \mathbf{R}^n$ 收敛于 $P_0 \in \mathbf{R}^n$ 的充要条件是: 若记 $P_m = (x_1^m,$

$x_2^m, \dots, x_n^m), P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, 则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

此定理证明比较容易, 只要注意到

$$\begin{aligned} |x_i^m - x_i^0| &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n (x_k^m - x_k^0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|P_m - P_0\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n |x_k^m - x_k^0|. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

定理 1.3 如果点列 $\{P_m\}$ 收敛, 则它只能收敛于一点.

证 (略).

4. \mathbf{R}^n 的完备性定理

由第 1 章我们知道, 在实数系内极限运算是封闭的, 即实数列的极限仍是实数. 习惯上称这一性质为实数系的连续性或完备性, 它是极限存在的理论基础, 在 \mathbf{R}^n 中也存在类似的完备性定理.

以下的几个定理, 我们只给出结论, 不给出证明.

定理 1.4(柯西收敛准则) 点列 $\{P_m\} \subset \mathbf{R}^n$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $m, k > N$ 时, 有

$$\|P_m - P_k\| < \varepsilon.$$

定理 1.5(闭集套定理) 设 $\{D_k\} \subset \mathbf{R}^n$ 是一列非空闭集, 满足:

- (1) $D_{k+1} \subset D_k, k = 1, 2, \dots;$
- (2) D_k 的直径 $d(D_k) = \sup \{ \|X - Y\| \mid X, Y \in D_k \} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$, 则这列闭集 $D_k (k = 1, 2, \dots)$ 存在唯一的公共点.

定义 1.9 设 $D \subset \mathbf{R}^n$, $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 是 \mathbf{R}^n 的一族子集, 如果

$$D \subseteq \bigcup_{\lambda} U_\lambda,$$

则称 $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 为 D 的一个覆盖, 特别地, 当 $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 都是开集时, 称 $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 为 D 的一个开覆盖.

定义 1.10 如果对 D 的任何一个开覆盖 $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 都可从 $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 中选出有限个 $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_m}$ 使其仍为 D 的一个开覆盖, 即 $D \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{\lambda_i}$, 则称 D 为一个紧集.

定理 1.6(海涅(Heine) - 波莱尔(Borel))定理 D 是紧集的充分必要条件是它是有界闭集.

定理 1.7(波尔查诺(Bolzano) - 维尔斯特拉斯(Weierstrass)定理) 任何有界的无穷集必有聚点.

推论 任何有界点列必有收敛子列.

1.2 二元函数的极限与连续性

定义 1.11 设给定点集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 和实数集 \mathbb{R} . 若对每一点 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ 都可依给定规则 f 确定唯一的实数 u 与之对应, 则称 f 是从 D 到 \mathbb{R} 内的一个 n 元函数, 记作

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

x_1, x_2, \dots, x_n 称为自变量, u 称为因变量. 自变量的变化范围 D 称为函数 f 的定义域, u 称为函数 f 在 X 点处的函数值, 记作 $u = f(X)$ 或 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. u 的变化范围称为函数 f 的值域, 记为 $f(D)$.

习惯上, 二元和三元函数常表为 $z = f(x, y)$ 和 $u = f(x, y, z)$. 二元及二元以上的函数通称多元函数. 本章主要讨论二元函数的微分学及其基本理论. 但讨论的问题、方法和结果都不难推广到二元以上多个变元的情形.

1. 二重极限

定义 1.12 设 $f(P)$ 的定义域为 D , P_0 是 D 的一个聚点, a 是一实数, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $P \in D$ 且 $0 < \|P - P_0\| < \delta$ 时, 有 $|f(P) - a| < \varepsilon$,

则称 a 是当 $P \rightarrow P_0$ 时 $f(P)$ 的极限, 或称 $f(P)$ 收敛于 a , 记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = a \quad \text{或} \quad f(P) \rightarrow a \quad (P \rightarrow P_0).$$

当 P, P_0 用坐标 $(x, y), (x_0, y_0)$ 表示时, 则记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a \quad \text{或} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a.$$

注 (1) “ $0 < \|P - P_0\| < \delta$ ”是指 $P \in \dot{U}(P_0, \delta)$, 即上述定义是在圆邻域下给出的. 有时用方邻域比较方便, 则将“ $0 < \|P - P_0\| < \delta$ ”改为“ $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ ”.

(2) $f(P)$ 在 P_0 点有无定义均可, 只要求 P_0 是其定义域的聚点.

(3) 上述二元函数极限也称为二重极限. 必须注意所谓二重极限存在, 是指点 P 以任何方式趋近于 P_0 时, 函数 $f(P)$ 都无限趋近于 a . 因此, 若 P 以不同方式趋近于 P_0 时, 函数趋近于不同值, 则可断定此函数在 P_0 点极限不存在.

例 1.1 证明: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$.

证 因为 $\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| = (x^2 + y^2) \mid \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \mid$

直留 (x, y) 且 $0 < x^2 + y^2 < \delta$ 时 $0 < \frac{1}{x^2 + y^2} < \frac{1}{\delta}$ 而 $0 < x^2 + y^2 < \delta$ 时 $0 < x^2 + y^2 < \delta$ 且 $0 < x^2 + y^2 < \delta$ 时 $0 < x^2 + y^2 < \delta$

可见, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 则当 $0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$ 时, 总有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq x^2 + y^2 < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$.

例 1.2 设

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & xy \neq 0; \\ 0, & xy = 0 \text{ 且 } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

证明: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

证 因为

$$|f(x, y) - 0| = \begin{cases} \left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right|, & xy \neq 0; \\ 0, & xy = 0 \text{ 且 } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

故 $\forall \varepsilon > 0$,

(1) 若 $xy \neq 0$, 则取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 当 $|x| < \delta, |y| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{y} \right| + |y| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |x| + |y| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) 若 $xy = 0$ 且 $(x, y) \neq (0, 0)$, 则 $\forall \delta = \varepsilon > 0$, 当 $|x| < \delta, |y| < \delta$ 时,

$|f(x, y) - 0| = 0 < \varepsilon$.

综合上述, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $|x| < \delta, |y| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 有

即 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

下面是二重极限不存在的两个例子.

例 1.3 研究 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 的极限.

解 显然 $f(0, y) = f(x, 0) = 0$, 因而

$$\lim_{y \rightarrow 0} (0, y) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (x, 0) = 0.$$

即当 (x, y) 沿直线 $x = 0$ 或 $y = 0$ 趋于 $(0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 均趋于 0, 但当 (x, y) 沿直线 $y = mx (m \neq 0)$ 趋于 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq 0.$$

由此可见,当(x, y)沿上述不同方式趋于(0,0)时所得结果不同,故 $f(x, y)$ 在(0,0)处极限不存在.

例 1.4 研究 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 在(0,0)处的极限.

解 首先,当(x, y)沿过原点直线 $y = mx$ 趋于(0,0)时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

又,当(x, y)沿直线 $x = 0$ 趋于(0,0)时, $f(x, y)$ 显然趋于0.但当(x, y)沿抛物线 $y = x^2$ 趋于(0,0)时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

按定义, $f(x, y)$ 在(0,0)处不存在极限.

注 以上两例说明,若点(x, y)以不同路径趋于(x_0, y_0),而 $f(x, y)$ 趋于不同数,则可断定 $f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)不存在极限.但当已知 $f(x, y)$ 在(x_0, y_0)有极限时,则可以取一特殊路径求此极限.

多元函数极限的唯一性,局部有界性,局部保号性,局部比较原理,四则运算法则的叙述、论证与一元函数相仿,这里不再重复.

下面通过一些例题展示求二重极限的常用方法.

例 1.5 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

解 利用极坐标变换可化为有界量与无穷小乘积的形式.令 $x = r\cos \theta, y = r\sin \theta$,则

$$\text{原式} = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 0.$$

例 1.6 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

解 利用两边夹准则,由于

$$0 \leq |\sin(x^3 + y^3)| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2),$$

从而 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (|x| + |y|) = 0$.

所以,由两边夹准则,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 0.$$

例 1.7 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{xy}$.

解 先求其对数的极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2)$. 由于

$|xy \ln(x^2 + y^2)| \leq r^2 \ln r^2 \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0^+$),
所以, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2) = 0$. 于是, 原式 = 1.

2. 累次极限

在二重极限 $\lim f(x, y)$ 的极限过程中, 自变量 x, y 同时以各自不同方式趋于 (x_0, y_0) , 下面要介绍的累次极限, 则是自变量以一定先后顺序趋于某定点.

定义 1.13 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 δ 邻域 $U(P_0, \delta)$ 内有定义, 先暂时在 $U(P_0, \delta)$ 内把 y 当作常量, 这时 $f(x, y)$ 只是 x 的一元函数, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 则这个极限是与 y 有关的函数, 设 $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, 然后再考虑当 $y \rightarrow y_0$ 时函数 $\varphi(y)$ 的变化情况, 若 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$ 也存在, 记为 A , 则称 A 为 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 先对 x 后对 y 的累次极限, 记作

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A.$$

类似地, 可定义 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 先对 y 后对 x 的累次极限.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

例 1.8 求 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处的两个累次极限.

解 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$, 显然, 若取 $y = mx$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$ 不存在.

例 1.9 试求 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处的二重极限和两个累次极限.

解 在例 1.4 中已经知道, $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处不存在二重极限, 但其两个累次极限均存在:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

例 1.10 设 $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, 试讨论其在 $(0, 0)$ 处的两个累次极限和二重极限.

解 容易求出

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

不存在.

但 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} = 0$.

由定义和上述例题可以看出, 二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$

$(\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y))$ 是不同的极限概念. 二重极限存在,未必累次极限存在; 累次极限存在,也未必二重极限存在. 两者之间的关系是比较复杂的,有关进一步的讨论读者可参见习题 8.1B 中习题 7.

关于累次极限换序问题,有以下定理(证明从略).

定理 1.8 设 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个去心邻域内有定义, 如果

(1) 对每个固定的 $x \neq x_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = g(x)$ 存在;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = h(y)$ 关于 y 在 $0 < |y - y_0| < \eta$ 上一致收敛, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y).$$

现将二重极限和累次极限之间可能出现的情况归纳如下(假定在点 (x_0, y_0) 处):

(1) 当二重极限存在时,

i) 两个累次极限均存在, 此时三者必相等;

ii) 一个累次极限存在(且与二重极限相等), 另一个累次极限不存在;

iii) 两个累次极限均不存在, 如 $f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处.

(2) 当二重极限不存在时,

i) 两个累次极限存在且相等;

ii) 两个累次极限均不存在;

iii) 两个累次极限都存在但不相等, 如例 1.8;

iv) 一个累次极限存在, 另一个累次极限不存在.

注 若两个累次极限存在但不相等, 则二重极限不存在.

3. 二元函数的连续性

定义 1.14 设 $f(P)$ 的定义域为 D , $P_0 \in D$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $P \in$

$U(P_0, \delta) \cap D$ 时有

出来是容 职

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(P)$ 在 P_0 连续.

若 $f(P)$ 在 P_0 不连续, 则称 $f(P)$ 在 P_0 间断. 若 $f(P)$ 在 D 的每一点都连续, 则称 $f(P)$ 在 D 上连续, 记为 $f(P) \in C(D)$ 或 $f(x, y) \in C(D)$.

从定义可以知道, 当 P_0 为 D 的孤立点, 即 $P_0 \in D$ 但 $P_0 \notin D^d$ 时, $f(P)$ 在 P_0 一定连续. 当 P_0 为 D 的聚点时, $f(P)$ 在 P_0 连续的充分必要条件是

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 1.11 设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

试证 $f(x, y)$ 在原点连续.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 当 $\rho = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, 即 $x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon$ 时, 有

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| = |xy| \cdot \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|$$

$\leq |xy| = |x||y| \leq x^2 + y^2 < \varepsilon$, 所以, $f(x, y)$ 在原点连续.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x-y} - 1}{x-y}, & x > y, \\ 1, & x = y, \\ \frac{\sin x - \sin y}{x-y}, & x < y, \end{cases}$$

例 1.12 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x-y} - 1}{x-y}, & x > y, \\ 1, & x = y, \\ \frac{\sin x - \sin y}{x-y}, & x < y, \end{cases}$ 试讨论 $f(x, y)$ 的连续性.

解 显然, 当 $x \neq y$ 时, $f(x, y)$ 连续.

现讨论在直线 $x = y$ 上, $f(x, y)$ 的连续性. 在直线 $x = y$ 上任取一点 (x_0, y_0) , 以下分 $x > y$ 和 $x < y$ 两处情况讨论.

当 $x > y$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{e^{x-y} - 1}{x-y} \underset{x-y=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 = f(x_0, y_0),$$

即 $f(x, y)$ 在直线 $x = y$ 上任一点沿方向 $x > y$ 连续.

当 $x < y$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{x-y} = \cos x_0 \quad (x_0 = y_0),$$

易知,当 $x = y = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时 $f(x, y)$ 连续; 当 $x = y \neq 2k\pi$ 时, $f(x, y)$ 间断.

需要提请注意的是,一个二元(或多元)函数若对每个变元都连续,并不能推出它是一个二元(或多元)连续函数.例如,函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

在全平面上对 x, y 都分别连续,但它作为二元函数在原点极限不存在,当然也不连续(见例 1.3).

例 1.13 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 > 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处沿此点的每一条射线

$$x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha, 0 \leq t < +\infty$$

连续,即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0).$$

但此函数在点 $(0, 0)$ 处并不连续.

证 当 $t \neq 0$ 时,

$$f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha},$$

故

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0 = f(0, 0),$$

即函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处沿此点的每一条射线连续.

但由例 1.9 知, 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在, 故此函数在 $(0, 0)$ 处亦不连续.

在连续性方面二元函数有许多与一元函数相同的性质.

定理 1.9 若函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续, 则函数 $f(x, y) \pm g(x, y), f(x, y) \cdot g(x, y), \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ ($g(x, y) \neq 0$) 在 P_0 也连续.

定理 1.10 若函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续, 并且函数 $f(u, v)$ 在 $(u_0, v_0) = [\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0)]$ 连续, 则复合函数 $f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$

$y)$]在 P_0 也连续.

定理 1.11(保号性) 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 有定义, 若 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0) \in D$ 连续, 且 $f(P_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, $\forall (x, y) \in U(P_0, \delta) \cap D$, 有 $f(x, y) > 0$.

以上定理的证明均从略.

4. 紧集上连续函数的性质

一元函数在闭区间上的重要性质可以推广到多元函数.

定理 1.12(有界性) 设函数 $f(x, y)$ 在紧集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上有界, 即 $\exists M > 0$, $\forall (x, y) \in D$, 有 $|f(x, y)| \leq M$.

定理 1.13(最值性) 设函数 $f(x, y)$ 在紧集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 则它在 D 上必取到最大值 M 和最小值 m , 即存在 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 使 $f(x_1, y_1) = M, f(x_2, y_2) = m$, 且 $\forall (x, y) \in D$ 有

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

定理 1.14(介值定理) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为连通的紧集, $f(x, y)$ 是 D 上连续函数, 则 $f(x, y)$ 可取到它在 D 上的最小值 m 和最大值 M 之间的一切值, 即对任意 $c (m \leq c \leq M)$, 总存在点 $P \in D$, 使得 $f(P) = c$.

现在引入一致连续的概念.

定义 1.15 设 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$, 当 $\|P_1 - P_2\| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续.

定理 1.15(一致连续性定理) 设 $f(P)$ 为紧集 D 上的连续函数, 则 $f(P)$ 在 D 上一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $\|P - Q\| < \delta$ 且 $P, Q \in D$ 时有

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

证 用反证法. 假设 $f(P)$ 在 D 上不一致连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任何正整数 n , 都存在 $P_n, Q_n \in D$ 满足 $\|P_n - Q_n\| < \frac{1}{n}$, 而

$$|f(P_n) - f(Q_n)| \geq \varepsilon_0.$$

由于 $\{P_n\}$ 为有界点列, 故由波尔查诺-维尔斯特拉斯定理的推论知 $\{P_n\}$ 有收敛子列 $\{P_{n_k}\}$. 设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k} = P^*. \quad (1.1)$$

显然 $P^* \in D$. 另一方面, 由于

$$|Q_{n_k} - P^*| \leq |Q_{n_k} - P_{n_k}| + |P_{n_k} - P^*| < \frac{1}{n_k} + |P_{n_k} - P^*|.$$

故在上式中令 $k \rightarrow \infty$, 即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{n_k} = P^*. \quad (1.2)$$

于是,由式(1.1)、(1.2)及 $f(P)$ 在 P^* 的连续性就有

$$0 = |f(P^*) - f(P^*)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(P_{n_k}) - f(Q_{n_k})| \geq \varepsilon_0.$$

矛盾,从而证明 $f(P)$ 在 D 上一致连续.

习题 8.1

A 类

1. 描绘下列平面区域,并指出它是开区域、闭区域、有界区域还是无界区域.

- (1) $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
- (2) $\{(x, y) \mid x^2 > y\}$;
- (3) $\{(x, y) \mid |x + y| < 1\}$;
- (4) $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$;
- (5) $\{(x, y) \mid |xy| \leq 1\}$;
- (6) $\{(x, y) \mid |x| + y \leq 1\}$.

2. 试描绘下列空间区域的图像,并指出它们是开区域还是闭区域.

- (1) $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;
- (2) $D = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1, a, b, c > 0 \text{ 为常数} \right\}$;
- (3) $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z, z < 3\}$;
- (4) $D = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$;
- (5) $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq h; a, h > 0 \text{ 为常数}\}$.

3. 求下列函数的定义域:

- (1) $z = \frac{3}{x+y}$;
- (2) $z = \ln(4-xy)$;
- (3) $z = \ln(x-y) + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$;
- (4) $z = \ln(x \ln(y-x))$;
- (5) $z = x + \arccos y$;
- (6) $z = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(7) 三角形三边长分别是 x, y, z ,已知 $x+y+z=2p$,则三角形面积 $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ ($p>0$ 为常数).

4. 求下列函数的表达式:

- (1) 若 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$,求 $f(x, y)$;
- (2) 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x}-1)$,且已知 $y=1$ 时 $z=x$,求 $f(x)$ 及 z 的表达式;
- (3) 已知 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$,求 $f(tx, ty)$;
- (4) 已知 $f(u, v, w) = u^w + 2v^{u+v}$,求 $f(x+y, x-y, xy)$;

(5) 已知 $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = x^3 - 2xy + 3y^2$, 求 $f(x, y)$;

(6) 若 $f(x, y) = 3x + 2y$, 求 $f(xy, f(x, y))$.

5. 用极限定义证明下列极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} (3x^2 + 2y) = 14;$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy - 1}{y + 1} = 3;$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0;$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y + y^4)}{x^2 + y^2} = 0;$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0;$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0.$$

6. 设 $f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3}$, 证明:

(1) 当 (x, y) 沿任何直线趋于原点时, $f(x, y)$ 趋于 0;

(2) 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (x - y)^2};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy + 1} - 1}{x + y};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2};$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^3}.$$

8. 求下列极限

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \sin y};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 |y|^{\frac{3}{2}}}{x^4 + y^2};$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^{\frac{x^2}{x+y}};$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1};$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2};$$

$$(7) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x};$$

$$(8) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}};$$

$$(9) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(10) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2};$$

$$(11) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y),$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

9. 求下列函数的累次极限: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$.

$$(1) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, a = \infty, b = \infty;$$

$$(2) f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, a = +\infty, b = 0^+;$$

$$(3) f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, a = \infty, b = \infty;$$

$$(4) f(x, y) = \frac{1}{xy} \tan \frac{xy}{1 + xy}, a = 0, b = \infty;$$

$$(5) f(x, y) = \log_a (x + y), a = 1, b = 0.$$

10. 证明:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0 \end{cases}$$

在其定义域上是连续的.

11. 证明: 函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在全平面上连续.

12. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 证明: 对任意 $y_0 \in \mathbb{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

13. 设 $f(x), g(y)$ 分别在区间 $[a, b], [c, d]$ 上连续. 定义

$$F(x, y) = \int_a^x f(s) ds \cdot \int_c^y g(t) dt \quad (a \leq x \leq b, c \leq y \leq d).$$

试用 " $\varepsilon - \delta$ " 方法证明 $F(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 内连续.

14. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点 $(0, 0)$ 分别对 x 和 y 是连续的, 但在原点却不连续.

15. 设函数 $f(x, y)$ 分别对 x 和 y 是连续的, 而且对固定的 y , $f(x, y)$ 是 x 的单调函数, 证明 $f(x, y)$ 是连续的.

16. 求下列函数的不连续点

$$(1) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (2) f(x, y) = \frac{xy}{x + y};$$

$$(3) f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}; \quad (4) f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

17. 试证函数 $f(x, y) = \sin(xy)$ 在平面上不一致连续.

B 类

1. 求下列函数表达式:

$$(1) \text{ 设 } f(x-y, \ln x) = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \frac{e^x}{e^y \ln x}, \text{ 求 } f(x, y);$$

(2) 设 $z = \sqrt{x} + f(\sqrt{y} - 1)$, 当 $x = 1$ 时, $z = y$, 求函数 $f(u)$ 及 $z = z(x, y)$ 的表达式.

(3) 设 $f(x, y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x-y)$, 已知 $f(x, x) = 2x^2$, $f(x, -x) = \sin 2x$, 求连续函数 φ, ψ 及 f .

2. 试给出极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$ 和 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$ 的定义.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^4 + y^4} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2 - 2x + 2)^{\frac{x^2 + y^2 + 2x + 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1}};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4. 试证多元函数的海涅定理: 设 $f(P)$ 定义在 D 上, $P_0 \in D$, 则 $f(P)$ 在 P_0 连续的充分必要条件是对于 D 中任何收敛于 P_0 的点列 $\{P_n\}$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0).$$

5. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内对变量 x 是连续的, 对变量 y 满足李普希兹 (Lipschitz) 条件

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

其中 $(x, y_1), (x, y_2)$ 为 G 内任意两点, L 为常数. 证明函数 $f(x, y)$ 在 G 内连续.

6. 证明: 若 $f(x, y)$ 在 \mathbf{R}^2 连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$ (A 为常数), 则 $f(x, y)$ 在 \mathbf{R}^2 一致连续.

7. 证明: 设 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$, 若对 y_0 附近任意给定的 y , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A. \quad (1)$$

类似地, 若对 x_0 附近任意给定的 x , $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A. \quad (2)$$

(提示: 利用二重极限和累次极限定义).

§2 偏 导 数

一元函数的导数是研究函数性质的重要工具,同样,研究多元函数的性质也需要一元函数导数这样的概念.

2.1 偏导数

一元函数 $f(x)$ 对自变量 x 的导数就是 $f(x)$ 沿 x 轴方向的变化率.对于多元函数,我们需要研究函数沿着各个不同方向的变化率问题.特别地,函数沿某一坐标轴方向的变化率就是偏导数的概念,对于函数沿某一特定方向的变化率即方向导数的概念将在后面介绍.

下面,以二元函数为对象给出偏导数概念.

1. 偏导数的概念

定义 2.1 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义,如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

存在,则称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 关于 x 的偏导数存在,并将(2.1)的极限值称为 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数,记为

$$f'_x(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0), \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{等,即} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0).$$

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

类似地可定义

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

如果 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 内每一点 (x,y) 都存在 $f'_x(x,y)$, 则类似于一元函数情形, 称 $f'_x(x,y)$ 为 $z=f(x,y)$ 在 D 上的偏导函数(也简称为偏导数). $f'_x(x,y)$ 也可记为 $\frac{\partial f}{\partial x}, z_x(x,y)$, 等. 同理可定义 $z=f(x,y)$ 关于 y 的偏导函数 $f'_y(x,y)$.

以上关于二元函数偏导数的概念完全可以推广到 $n(n > 2)$ 元函数的情况.

从上述定义可以看出偏导数不是新概念, 它不过是一个多元函数关于某个自变量的导数. 因此, 求 $f'_x(x,y)$ 时, 只需把 y 当常数, 利用一元函数的求导公式及运算法则即可求得, 分段函数在分界点处的偏导数一般用定义求.

例 2.1 设 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_x(1,0), f'_y(1,0)$.

解

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y;$$

$$f'_x(1, 0) = 2 \cdot 1 + 0 = 2, f'_y(1, 0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1.$$

例 2.2 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 求 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$.

解 当 $(x, y) \neq (0, 0)$, 则有

$$f'_x(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$, 同理可得

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

例 2.3 设 $u = x^y$ ($x > 0, x \neq 1$), 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} \quad (\text{把 } y \text{ 看作常数}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x \quad (\text{把 } x \text{ 看作常数}).$$

例 2.4 设 $u = \frac{1}{r}, r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

解 由复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \\ &= -\frac{x-a}{r^3}. \end{aligned}$$

同法可得, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^3}$.

2. 偏导数的几何意义

二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的两个偏导数有明显的几何意义. 在空间直角坐标系中, 设 $z = f(x, y)$ 的图像是一个空间曲面 S . $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在 x_0 的导数, 由已知的一元函数导数的几何意义, 偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是平面 $y = y_0$ 上曲线

$$C_1: \begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0 \end{cases}$$

在点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) 的切线关于 x 轴的斜率(见图 8.1).

同样, 偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 是平面 $x=x_0$ 上曲线 $(x\Delta + x_0, y\Delta + y_0, z)$ 在

$$C_2: \begin{cases} z=f(x, y), \\ \dot{x}=x_0 \end{cases}$$

在点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 的切线关于 y 轴的斜率.

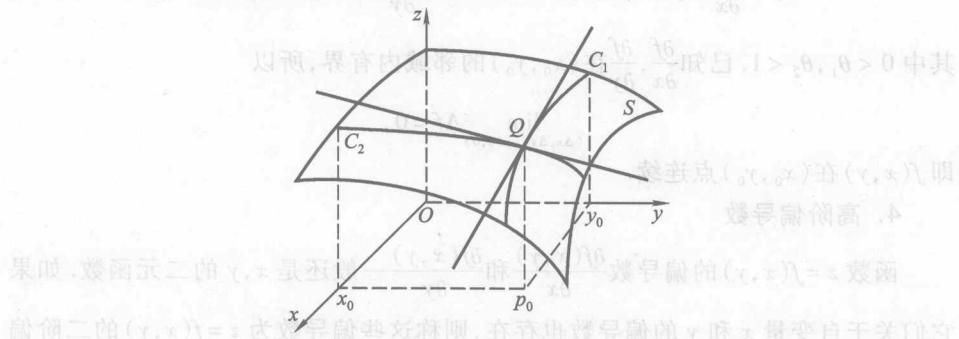


图 8.1 二元函数偏导数的几何意义

3. 偏导数与连续性的关系

一元函数在某点有导数, 则它在该点必定连续, 但对多元函数来讲, 即使在某点各个偏导数都存在, 也不能保证函数在该点连续. 以二元函数为例, 两个偏导数的存在, 只能保证一元函数 $z=f(x, y_0)$ 和 $z=f(x_0, y)$ 分别在 x_0 和 y_0 连续, 而不能保证点 P 以任何方式趋于 P_0 时, 函数 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$. 例如,

$$z=f(x, y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

其在 $(0, 0)$ 的两个偏导数都存在, 即 $f'_x(0, 0)=0, f'_y(0, 0)=0$. 但由例 1.3 中我们知道该函数在 $(0, 0)$ 无极限, 当然也不连续.

当然, 由 $z=f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续也不能保证它在 P_0 点的偏导数存在, 例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0, 0)$ 连续, 但

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \text{ 不存在,}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} \text{ 不存在.}$$

不过, 如果增加某个条件后, 则有以下结论.

定理 2.1 设 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域 $U(P_0, \delta)$ 内有定义, 又 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 都在 $U(P_0, \delta)$ 内存在且有界, 则 $f(x, y)$ 在 P_0 连续.

证 注意到 $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$\Delta f = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

利用一元函数的微分中值定理, 得

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y,$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. 已知 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内有界, 所以

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \Delta f = 0,$$

即 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续.

4. 高阶偏导数

函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 一般还是 x, y 的二元函数. 如果它们关于自变量 x 和 y 的偏导数也存在, 则称这些偏导数为 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数. 对二元函数来说, 二阶偏导数共有 4 种, 分别记为:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$

$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

其中 z''_{xy} 和 z''_{yx} 称为二阶混合偏导数.

类似地, 还可以定义更高阶偏导数, 如 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \dots$

一般地说, $z = f(x, y)$ 的 $n - 1$ 阶偏导数的偏导数(如果它存在的话), 称为 $z = f(x, y)$ 的 n 阶偏导数.

例 2.5 求 $z = xe^x \sin y$ 的二阶偏导数.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y + xe^x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \sin y + (1+x)e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1+x)e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -xe^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^x \cos y + xe^x \cos y = (1+x)e^x \cos y.$$

例 2.6 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

证明: $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

证 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f'_x = y - \frac{2y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

而当 $x^2 + y^2 = 0$ 时, 由定义, 有

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0,$$

故

$$(1) \quad f'_x(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

于是,

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y - 0} = -1.$$

类似地, 有

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} -x + \frac{2x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

于是

$$(2) \quad f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x - 0} = 1,$$

所以

$$(3) \quad f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

细心的读者会发现, 两个二阶混合偏导数可能相等也可能不相等. 下面的定理告诉我们在满足一定条件下, 两个二阶混合偏导数相等.

定理 2.2 若函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域 $U(P_0)$ 内有连续的二阶偏导数 $f''_{xy}(x, y)$ 和 $f''_{yx}(x, y)$, 则

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

分析 由定义,

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x_0, y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_x(x_0, y_0 + k) - f'_x(x_0, y_0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

设 $\varphi(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$,

从而

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h, k)}{hk}.$$

同样,

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(h, k)}{hk}.$$

所以, 定理 2.2 的实质是上述两个累次极限相等, 即两个累次极限可以变换次序.

证 当 $|h|$ 与 $|k|$ 充分小, 以致 $(x_0 + h, y_0 + k) \in U(P_0)$, 从而 $(x_0 + h, y_0)$ 与 $(x_0, y_0 + k) \in U(P_0)$. 设

$$\varphi(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0), \quad (1)$$

令 $g(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$, 于是, 式(1)可改写为

$$\varphi(h, k) = g(x_0 + h) - g(x_0).$$

函数 $g(x)$ 在以 $x_0, x_0 + h$ 为端点的区间内可导, 故由拉格朗日中值定理, 有

$$\begin{aligned} \varphi(h, k) &= g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0 + \theta_1 h) \cdot h \quad (0 < \theta_1 < 1) \\ &= [f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)] \cdot h. \end{aligned}$$

已知 $f''_{xy}(x, y)$ 在 $U(P_0)$ 存在, 将 $x_0 + \theta_1 h$ 当作常数, 再在以 $y_0, y_0 + h$ 为端点的区间上运用拉格朗日中值定理, 有

$$\begin{aligned} \varphi(h, k) &= [f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)] \cdot h \\ &= [f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \cdot k] \cdot h, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1 \end{aligned} \quad (2)$$

类似地, 再令 $l(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$, 有

$$\varphi(h, k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k) hk, \quad 0 < \theta_3, \theta_4 < 1. \quad (3)$$

于是, 由式(2)和式(3), 得

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k).$$

又, 已知 $f''_{xy}(x, y)$ 和 $f''_{yx}(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续, 则当 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ 时, 有

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

注 以上结果可推广到 n 元函数的高阶混合偏导数上去. 例如三元函数 $u = f(x, y, z)$ 关于 x, y, z 的三阶混合偏导数有 6 个:

$$\left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} \right\}$$

若它们在点 (x, y) 的某邻域内连续, 则它们相等.

2.2 全微分

1. 全微分概念

对于二元函数也可以像一元函数那样定义可微性及全微分.

定义 2.2 设函数 $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 的某邻域内有定义, 如果当自变量有改变量 $\Delta x, \Delta y$ 时, 函数的改变量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 能表示成

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$

其中 A, B 是与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的常数, 则称 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 可微, 并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的全微分, 记作 dz 或 df , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \quad (2.2)$$

由可微性定义立即有以下定理:

定理 2.3 若 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 则它在 (x_0, y_0) 连续.

如果 $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 可微, 全微分(2.2)中的常数 A, B 与 $f(x, y)$ 有什么关系呢? 对此, 我们有以下定理.

定理 2.4 若函数 $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 可微, 则它在 $P(x, y)$ 存在两个偏导数, 并且式(2.2)中的 A, B 分别是

$$A = f'_x(x, y), B = f'_y(x, y).$$

证 已知函数 $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 可微, 即

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

式中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 当 $\Delta y = 0$ 时, 有

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + o(\rho).$$

用 Δx 除上式两端, 再取极限 ($\Delta x \rightarrow 0$), 有

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A. \end{aligned}$$

同理可证 $f'_y(x, y) = B$.

特别地, 当 $f(x, y) = x$ 时, $f'_x(x, y) = 1, f'_y(x, y) = 0$, 故 $dx = \Delta x$. 同理, $dy = \Delta y$. 因此, 式(2.2)可改写为

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy. \quad (2.3)$$

一般地, n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全微分可表示为

$$du = f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + \dots + f'_{x_n}dx_n. \quad (2.4)$$

设 $z = f(x, y)$ 是空间 \mathbb{R}^3 中的曲面, 如果 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 那么全微分

的几何意义就是在空间的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 附近, 曲面可以用它在 M_0 的切平面近似代替, 其差是关于 $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 的一个高阶无穷小量.

与一元函数情况一样, 若 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可微, 则当 $\Delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 充分小时, 可用 du 作为 Δu 的近似值, 由此可计算函数 u 在某点附近的近似值并估计其误差.

2. 高阶全微分

一般说来, 函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = z'_x dx + z'_y dy$ 仍是 x, y 的函数(其中 dx, dy 是自变量的微分, 可视为与 x, y 无关的常量), 假定自变量的改变量仍取为 dx, dy , 则可再求函数 dz 的全微分 $d(dz)$ (如果它存在的话), $d(dz)$ 称为 z 的二阶全微分, 记为 d^2z .

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dy \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

这里 dx^2 和 dy^2 分别表示 $(dx)^2$ 和 $(dy)^2$. 若将 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$ 看作求偏导数的运算符号(也称微分算子), 并约定

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

则一阶、二阶全微分公式可以表示为

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z, \\ d^2z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z. \end{aligned}$$

我们不难用数学归纳法证明, k 阶全微分公式

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k z, \quad k = 1, 2, \dots.$$

并且对 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 亦可建立 k 阶全微分公式,

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k u, \quad k = 1, 2, \dots.$$

3. 可微与可偏导之间的关系

对于一元函数来说, 可微与可导是等价的, 然而对于多元函数来说, 即使各个偏导数都存在, 函数却未必可微. 例如, 函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 在原点 $(0, 0)$ 存在两个偏导数:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

但是, 它在原点 $(0,0)$ 不可微. 事实上, 假设它在 $(0,0)$ 可微, 则应有

$$df|_{(0,0)} = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y = 0.$$

$$\text{又 } \Delta f = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|},$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

特别地, 取 $\Delta x = \Delta y$, 则

$$\Delta f = \sqrt{|\Delta x \Delta y|} = \sqrt{|\Delta x|^2} = |\Delta x|,$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{2(\Delta x)^2} = \sqrt{2}|\Delta x|.$$

$$\text{于是 } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}|\Delta x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

即 $\Delta f - df$ 不是比 ρ 高阶的无穷小 ($\rho \rightarrow 0$), 这与可微定义矛盾, 故 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 不可微.

多元函数与一元函数的这个差别是不难理解的, 因为偏导数仅表示某个方向的变化率, 当然不能反映全面的变化性态. 为使多元函数在某点可微, 应该要求该函数满足比偏导数存在更强的条件.

定理 2.5 (可微充分条件) 若 f'_x 和 f'_y 在 $P(x,y)$ 连续, 则函数 $z = f(x,y)$ 在该点可微.

证 由偏导数在 (x,y) 连续知, 存在 $\delta > 0$, 偏导数在 (x,y) 的 δ 邻域 $U(P,\delta)$ 存在, 且函数 $z = f(x,y)$ 在该邻域内有定义. 考虑函数在点 (x,y) 的改变量.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

由于 f'_x 和 f'_y 在邻域 $U(P,\delta)$ 内存在, 因此只要 $\Delta x, \Delta y$ 足够小, 就可将一元函数的中值定理应用到上式右边的每一个差式, 从而有

$$\Delta z = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x + f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1).$$

又由于 f'_x 和 f'_y 在 $P(x,y)$ 连续, 有

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha_1,$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \alpha_2,$$

其中 $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$ ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$). 从而

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \frac{|\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &\leq \frac{|\alpha_1 \Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{|\alpha_2 \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &\leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0), \end{aligned}$$

所以

$$\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) = o(\rho).$$

故

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) + o(\rho).$$

这就证明了 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微.

注 (1) 若函数 $f(x, y)$ 在点集 D 上具有对所有变量的连续偏导数, 则记 $f(x, y) \in C^1(D)$.

(2) 本定理的条件是充分的, 而非必要的. 例如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 可微, 而 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处却间断, 事实上,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 0,$$

同理, $f'_y(0, 0) = 0$. 从而

$$df = f'_x(0, 0) \Delta x + f'_y(0, 0) \Delta y = 0,$$

$$df = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)$$

$$\text{而 } df = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \text{ 且 } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

另一方面, $\forall (x, y) (x^2 + y^2 \neq 0)$ 有

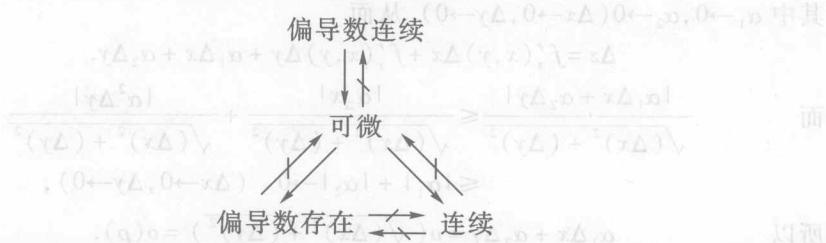
$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

特别地, 当 $y = x$ 时极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{2x^2} \right)$$

不存在, 即 $f'_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处间断. 同理可知 $f'_y(0, 0)$ 在 $(0, 0)$ 处也间断.

$f(x, y)$ 连续, 偏导数存在及可微关系如下表示:



那么,多元函数在某点可微的充分必要条件是什么呢?以二元函数为例,有以下结论.

定理 2.6 二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 可微的充分必要条件是,平面 $\pi: z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ 是曲面 $S: z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) 的切平面.
(证明略.)

注 所谓切平面是指与曲面 S 相切于 M 点的平面 π ,如果满足以下条件,即 S 上动点 Q 到平面 π 的距离 $h = |QR|$ (见图 8.2) 与 Q 到切点 M 之间的距离

$d = |QM|$ 之比在 $d \rightarrow 0$ 时的极限为零,即 $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{h}{d} = 0$,则称之为切平面.

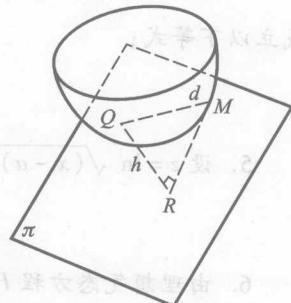


图 8.2

习题 8.2

A 类

1. 求下列函数一阶和二阶偏导数:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y};$$

$$(2) z = x \sin(x+y);$$

$$(3) z = x^y;$$

$$(4) u = \left(\frac{x}{y}\right)^z;$$

$$(5) z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(6) z = \tan \frac{x}{y};$$

$$(7) z = \arctan \frac{x}{y};$$

$$(8) z = e^{xy};$$

$$(9) z = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(10) u = x^{y^z}.$$

2. 设 $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$, 求 $f'_x(1, 2, 0)$, $f'_y(1, 2, 0)$ 和 $f'_z(1, 2, 0)$.

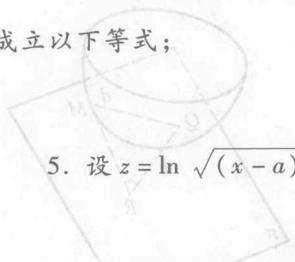
3. 验证下列各题中的等式成立:

$$(1) z = \frac{x-y}{x+y} \ln \frac{y}{x}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$(2) z = \arctan \frac{x^3 + y^3}{x - y}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z;$$

$$(3) u = \left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n, x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

4. 设(1) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$, (2) $u = x^{y^2}$, (3) $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$, 分别验证它们成立以下等式;



5. 设 $z = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ (a, b 为常数), 证明:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

6. 由理想气态方程 $PV = RT$ ($R \neq 0$, 常数), 推证热力学中的公式

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

7. 证明: 函数 $u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$ 在上半平面 $\mathbf{R}_+^2 = \{(x, t) | (x, t) \in \mathbf{R}^2, t > 0\}$ 上满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

其中 $a > 0$ 为常数.

8. 求下列函数的一阶和二阶微分:

$$(1) u = x^m y^n;$$

$$(2) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(3) u = \frac{z}{x^2 + y^2};$$

$$(4) u = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

9. 设 $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $df(1, 1, 1)$, $d^2 f(1, 1, 1)$.

10. 证明: 若 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $d^2 u \geq 0$.

11. 设 $f(x, y) = \varphi(|xy|)$, 其中 $\varphi(0) = 0$, 在 $u=0$ 的附近满足 $|\varphi(u)| \leq u^2$, 试证: $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

12. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 连续, 但在 $(0, 0)$ 处不可微.

13. 设 $f(x, y) = |x-y| \varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的一个邻域上有定义, 为使

(1) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续;

(2) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 存在偏导数;

讨论(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微, 应该给 $\varphi(x,y)$ 增加何种适当条件?

14. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x-y|}}{x^2+y^2} \sin(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

讨论: 题目要求判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续、可微.

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否连续? (2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否可微?

15. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

证明:

- 全由 (1) $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都存在;
 (2) $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续;
 (3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

16. 证明:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

的偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内都存在, 它们在 $(0,0)$ 处都不连续, 在 $(0,0)$ 的任意邻域内无界, 但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

B 类

1. 设 $x^2 = vw, y^2 = uw, z^2 = uv$, 且

$$f(x,y,z) = F(u,v,w).$$

试证明:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

2. 证明: 若 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在凸区域 D 内有界, 则函数 $f(x,y)$ 在 D 内一致连续.

3. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对变量 x 连续 (当固定 y 时), 且 $f'_x(x,y)$ 在 D 内有界, 则函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

4. 设 $f(x), g(x)$ 分别在区间 $[a,b]$ 及 $[c,d]$ 上连续, 定义

$$(S.E) \quad F(x,y) = \int_a^x f(t) dt \cdot \int_c^y g(s) ds \quad (a \leq x \leq b, c \leq y \leq d).$$

试用全微分的定义证明 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 其中 $a \leq x_0 \leq b, c \leq y_0 \leq d$ 为任意定点.

§3 多元复合函数的微分法

本节仍以二元函数为主讨论多元复合函数的导数及全微分的计算问题.

3.1 复合函数求导法则

定理 3.1 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 而 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 在 t 处可导, 则复合函数(实际为一元函数) $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ 在 t 也可导, 且

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (3.1)$$

证 设自变量 t 的改变量为 Δt , 于是有改变量 Δx 与 Δy , 并进而有 Δz , 由全微分定义, 有

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \cdot \rho,$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 且 $\alpha \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow 0$). 由此我们有

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\rho}{\Delta t}.$$

由于 x, y 是 t 的可微函数, 从而是连续的, 故当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, 从而 $\rho \rightarrow 0$, 因此也有 $\alpha \rightarrow 0$ (不过需指出的是, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有可能 $\Delta x, \Delta y$ 同时为 0, 即 $\rho = 0$, 这时我们规定 $\alpha = 0$); 另一方面, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 与 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 分别有极限 $\frac{dx}{dt}$ 和

$\frac{dy}{dt}$, 所以上式右端当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有极限

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

这就证明了 $\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$ 存在, 并且

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

注 一般地, 若函数 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 可微, 而 $x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 在 t 可导, 则复合函数

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \quad (3.2)$$

例 3.1 设函数 $z = x^y$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

解 由公式(3.1)有

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= yx^{y-1} \cos t + x^y \ln x (-\sin t) \\ &= yx^{y-1} \cos t - x^y \sin t \cdot \ln x.\end{aligned}$$

例 3.2 设函数 $z = \frac{y}{x}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y} = -\frac{x^2+y^2}{x^2y}.\end{aligned}$$

如果自变量是两个, 我们有下述定理.

定理 3.2 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 而 $x = \varphi(t, s)$, $y = \psi(t, s)$ 在点 (t, s) 都存在偏导数, 则复合函数 $z = f[\varphi(t, s), \psi(t, s)]$ 在点 (t, s) 处存在偏导数, 且

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (3.4)$$

证 将 s 看作常数, 应用定理 3.1 得(3.3); 将 t 看作常数, 再应用定理 3.1 得式(3.4).

注 定理 3.2 可推广到具有任意多个自变量和中间变量的情况. 设 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 而 $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 函数 f 和 φ_i 满足相应的可导性条件, 则

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (3.5)$$

式(3.1)~(3.5)通称链式法则.

例 3.3 设函数 $z = \ln(x^2 + y)$, 而 $x = e^{t+s^2}$, $y = t^2 + s$, 求 $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2x}{x^2 + y^2} e^{t+s^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} 2t \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} (x e^{t+s^2} + t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{2x}{x^2+y^2} 2s e^{t+s^2} + \frac{1}{x^2+y^2} \\ &= \frac{2}{x^2+y^2} (4xse^{t+s^2} + 1).\end{aligned}$$

例 3.4 求 $z = (x^2 + y^2)^{xy}$ 的偏导数

解 引进中间变量 $u = x^2 + y^2, v = xy$, 则 $z = u^v$, 从而 z 成为 x, y 的复合函数, 因为

$$\frac{\partial z}{\partial u} = vu^{v-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^v \ln u,$$

而 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial x} = y, \frac{\partial v}{\partial y} = x$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1} \cdot 2x + u^v \ln u \cdot y \\ &= (x^2 + y^2)^{xy} \left[\frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} + y \ln(x^2 + y^2) \right],\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = vu^{v-1} \cdot 2y + u^v \ln u \cdot x = (x^2 + y^2)^{xy} \left[\frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} + x \ln(x^2 + y^2) \right].$$

例 3.5 设 $z = f(x + y, xy)$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

解 引进中间变量, 令 $u = x + y, v = xy$, 则 $z = f(u, v)$, 于是

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x.$$

例 3.6 设 $u = f(x, xy), v = g(x + xy)$ 为连续可微函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

解 令 $\xi = xy, \eta = x + xy$, 于是 $u = f(x, \xi), v = g(\eta)$. 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dg}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = g'(\eta)(1 + y),$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)(1 + y)g'(\eta).$

例 3.7 设 $z = f(x, y, u) = e^{x^2+y^2+u^2}$, 而 $u = x^2 \sin y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= 2x e^{x^2+y^2+u^2} + 2u e^{x^2+y^2+u^2} 2x \sin y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x(1 + 2x^2 \sin^2 y) e^{x^2 + y^2 + x^4 \sin^2 y} \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2 + y^2 + u^2} + 2ue^{x^2 + y^2 + u^2} x^2 \cos y \\
 &= 2(y + x^4 \sin y \cos y) e^{x^2 + y^2 + x^4 \sin^2 y}.
 \end{aligned}$$

注 在运用链式法则求多元复合函数偏导数时,应注意两点:一是要搞清函数的复合关系;二是对某个自变量求偏导数时,必须要经过一切有关的中间变量而归结到该自变量.对于本例,如果我们不管具体情况套用公式(3.3)和(3.4)就会导致下面的混乱:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

左右两端同时出现了“ $\frac{\partial z}{\partial x}$ ”和“ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ”.其实两个 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和两个 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的含义是不同的.因为此例中第一组变量 x, y, u 和第二组变量 x, y 有着共同的变量 x, y .左边的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是相对于第二组变量而言的,右边的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是相对于第一组变量而言的,写出来就是

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x,y)} &= \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x,y,u)} + \frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(x,y,u)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)}, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x,y)} &= \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x,y,u)} + \frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(x,y,u)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)}.
 \end{aligned}$$

但这样写未免太繁琐,于是就简写为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

这样一来, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 就有不同含义了.

例 3.8 设 $u=f(x, y)$ 为可微函数,试求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标下的表达式.

解 由于 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,故可将 x, y 看作中间变量,有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

式(1)两端乘 r 后平方加上式(2)的平方, 即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

3.2 重复运用链式法则, 求多元复合函数的高阶偏导数

重复运用链式法则, 可求多元复合函数的高阶偏导数. 仍以二元函数为例, 设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

注意到 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial v}$ 仍然是 u, v 的函数, 从而也是 x, y 的函数, 因此

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

将它们代入前式, 并假定 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$, 即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

类似地, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

例 3.9 设 $w=f(x^2+y^2+z^2, xyz)$, 且 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.

解 令 $u=x^2+y^2+z^2$, $v=xyz$, 则 $w=f(u,v)$. 为简便起见, 用下标 1、2 分别

表示 u 和 v , 如 $f'_1=\frac{\partial f}{\partial u}$, $f''_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ 等. 为求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$, 应先求 $\frac{\partial w}{\partial x}$, 即

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$= f'_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot yz$$

于是 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (2xf'_1 + yzf'_2) = 2x \frac{\partial f'_1}{\partial z} + yf'_2 + yz \frac{\partial f'_2}{\partial z}$.

注意到 f'_1 和 f'_2 仍是复合函数, 故

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'_1}{\partial z} &= \frac{\partial f'_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= 2z \cdot f''_{11} + xyf''_{12}, \\ \frac{\partial f'_2}{\partial z} &= \frac{\partial f'_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 2zf''_{21} + xyf''_{22}.\end{aligned}$$

最后,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= 2x(2zf''_{11} + xyf''_{12}) + yf'_2 + yz(2zf''_{21} + xyf''_{22}) \\ &= 4xzf''_{11} + 2y(x^2 + z^2)f''_{12} + xy^2zf''_{22} + yf'_2,\end{aligned}$$

(由题设 f 具有二阶连续偏导数, 故 $f''_{12} = f''_{21}$.)

3.3 多元函数一阶全微分的微分形式不变性

与一元函数的一阶微分形式不变性一样, 多元函数也有它的一阶全微分形式不变性. 设 $z = f(x, y)$ 可微, 则有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

如果 x, y 不是自变量而是 s, t 的可微函数, 即 $x = x(s, t), y = y(s, t)$, 则 $z = f[x(s, t), y(s, t)]$ 是 s, t 的复合函数. 于是, 由复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned}dz &= \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.\end{aligned}$$

上式说明, 无论 x, y 是自变量还是中间变量, 函数 $z = f(x, y)$ 的全微分的表示形式是一样的, 我们称这个性质为多元函数的一阶全微分形式的不变性. 注意, 这个性质对二阶以上高阶全微分不再成立.

例 3.10 设 $u + v = x + y, \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$, 求 du, dv .

解 利用全微分形式的不变性及运算性质. 由 $u + v = x + y$ 得

$$du + dv = dx + dy,$$

由 $y \sin u = x \sin v$ 得

$$\sin u dy + y \cos u du = \sin v dx + x \cos v dv.$$

解方程组

$$\begin{cases} du + dv = dx + dy, \\ y \cos u du - x \cos v dv = \sin v dx - \sin u dy, \end{cases}$$

得

$$\begin{aligned} du &= \frac{x \cos v + \sin v}{x \cos v + y \cos u} dx + \frac{x \cos v - \sin u}{x \cos v + y \cos u} dy, \\ dv &= \frac{y \cos u - \sin v}{x \cos v + y \cos u} dx + \frac{\sin u + y \cos u}{x \cos v + y \cos u} dy. \end{aligned}$$

利用全微分表达式的唯一性, 又得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x \cos v + \sin v}{x \cos v + y \cos u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x \cos v - \sin u}{x \cos v + y \cos u}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{y \cos u - \sin v}{x \cos v + y \cos u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin u + y \cos u}{x \cos v + y \cos u}. \end{aligned}$$

习题 8.3

A 类

1. 求下列复合函数的偏导数(或导数):

(1) $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$, 求 f'_x, f''_{xx}, f''_{xy} ;

(2) $z = \ln(e^x + e^y)$, $y = x^3$, 求 $\frac{dz}{dx}$;

(3) $u = z^2 + y^2 + yz$, $z = \sin t$, $y = e^t$, 求 $\frac{du}{dt}$;

(4) $u = \arctan \frac{s}{t}$, $s = x + y$, $t = x - y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$;

(5) $z = x^2 y - xy^2$, $x = s \cdot \cos t$, $y = s \cdot \sin t$, 求 $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$;

(6) $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(7) $u = f(x, xy, xyz)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$;

(8) $z = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 证明函数 $z = yf(x^2 - y^2)$ 满足方程

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

3. 设 $z = f(x, y)$ 及 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 试证下式成立:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2.$$

4. 若函数 $f(x, y, z)$ 对任意正实数 t 均满足

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z),$$

则称 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数. 证明: 对于可微的 k 次齐次函数 $f(x, y, z)$, 下式恒成立:

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = kf(x, y, z).$$

5. 设函数 $g(r)$ 有二阶导数, $f(x, y) = g(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 求证:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''(r) + \frac{1}{r} g'(r).$$

6. 设 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续, 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2.$$

试求 $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$.

7. 设 $u = f(x, y), v = g(x, y, u), w = h(x, u, v)$, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$.

8. 设 $a, b \neq 0, f$ 具有二阶连续偏导数, 且

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$f(ax, bx) = ax,$$

$$f'_x(ax, bx) = bx^2. \quad (1)$$

求 $f''_{xx}(ax, bx), f''_{xy}(ax, bx), f''_{yy}(ax, bx)$.

9. 设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中函数 f, g 具有二阶连续导数, 求

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

10. 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续的

二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11. 设变换

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$$

可把方程

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0$$

化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a .

12. 设 $z = (x^2 + y^2) e^{-\arctan(y/x)}$, 求 dz .

13. 设

$$(x, y, z) \rightarrow f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt, \quad (x, y, z)$$

求

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

1. 设 $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$, 又 $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$, 证明下列等式成立;

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

2. 设二元可微函数 $F(x, y)$ 可写成

$$F(x, y) = f(x) + g(y).$$

又当 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 时, 有

$$F(r \cos \theta, r \sin \theta) = s(r),$$

试求 $F(x, y)$ 的表达式.

3. 设 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上有连续偏导数, 且 $f(x, x^2) \equiv 1$.

(1) 若 $f'_x(x, x^2) = x$, 求 $f'_y(x, x^2)$;

(2) 若 $f'_y(x, y) = x^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$.

4. 设 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数, 即 $f(x, y)$ 满足

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \quad (t > 0),$$

且 $f(x, y)$ m 次可微, 证明

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f = n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

5. 如果函数 $f(x, y)$ 存在偏导数, 但是不可微, 那么复合函数的导数公式 ($x = x(t), y = y(t)$)

否成立? (用微分法) 试用 $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ 验证不等式是否成立, 公理、零假设是否还成立?

隐函数的微分法

§4 隐函数的微分法

在一元函数微分学中, 我们介绍了隐函数求导法则, 现在我们把它推广到多元函数的情形.

定义 4.1 设给定方程

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0, \quad (4.1)$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $y \in I \subset \mathbb{R}$. 如果对 D 中每一点 X 都有唯一确定的 y 值: $y = f(X)$ 与之对应, 使得 $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ 恒满足方程(4.1), 即

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0, \quad X \in D$$

则我们说方程(4.1)确定了一个定义在 D 上的隐函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

定义 4.2 设给定方程组

$$(4.2) \quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \end{cases}$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in G \subset \mathbb{R}^m$. 若记 $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, 则方程组(4.2)可简记为

$$F(X, Y) = 0, \quad (4.3)$$

其中 $0 = (0, 0, \dots, 0)$ (m 个). 如果对 D 中每一点 X 都有唯一确定的 $Y = (y_1, \dots, y_m)$:

$$\begin{aligned} & \text{即 } 0 = (y_1, y_2, \dots, y_m) \Rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_m) = (0, 0, \dots, 0) \text{ 且 } (y_1, y_2, \dots, y_m) \in G. \\ & \text{即 } \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \end{aligned}$$

与之对应, 使得 (X, Y) 恒满足方程组(4.3), 即

$$F(X, Y) = 0, \quad X \in D,$$

则我们说方程组(4.2)确定了一个定义在 D 上的隐函数组.

是否任何方程或方程组都能确定一个隐函数或隐函数组呢? 回答是否定的. 例如 $2x^2 + y^3 + z^2 + 1 = 0$ 就不定义任何隐函数, 因为 3 个正数加 1 不会等于

零. 那么, 在什么条件下方程(或方程组)能确定隐函数(或隐函数组)? 它是否唯一? 它是否连续可微? 又怎样求其导数或偏导数? 下面就来讨论这些问题.

4.1 由一个方程所确定的隐函数

在第2章中我们已提出隐函数概念, 并且给出不经过显化直接由方程 $F(x, y) = 0$ 求其所确定的隐函数的导数的方法. 下面我们介绍隐函数存在定理, 并给出求导和求偏导的方法.(证明从略.)

定理4.1 设 $P_0(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$, 且函数 $F(x, y)$ 在 D 内满足:

$$(i) F(x, y) \in C^1(D),$$

$$(ii) F(x_0, y_0) = 0,$$

$$(iii) F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

则(1)存在 P_0 的某邻域 $U(P_0) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \eta, \delta, \eta > 0\} \subset D$, 使得在该邻域内, 方程 $F(x, y) = 0$ 唯一确定了定义在区间 $U_1(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 内的一元函数 $y = f(x)$, 且 $\forall x \in U_1(x_0)$, 有

$$(1) F(x, f(x)) = 0, y_0 = f(x_0), |f(x) - y_0| < \eta;$$

$$(2) f(x) \in C^1(U_1(x_0))$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (4.4)$$

上述定理可推广到多个变量的情形.

定理4.2 设开区域 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \in D$, 函数 $F(x_1, \dots, x_n, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

$$(i) F \in C^1(D),$$

$$(ii) F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0,$$

$$(iii) F'_y(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0,$$

则(1)存在 P_0 的某邻域 $U(P_0) = \{(x_1, \dots, x_n, y) \mid |x_i - x_i^0| < \delta, i = 1, 2, \dots, n, |y - y^0| < \eta, \delta, \eta > 0\} \subset D$, 使得在该邻域内由方程 $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ 唯一确定了定义在区域 $U_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i - x_i^0| < \delta, i = 1, \dots, n\}$ 内的函数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$, 且 $\forall (x_1, \dots, x_n) \in U_1$, 有

$$F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0,$$

$$y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

及

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - y^0| < \eta;$$

$$(2) f \in C^1(U_1) \text{ 且 } \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \dots, x_n, y)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.5)$$

注 上述两个定理既解决了隐函数存在性问题又给出了求导和求偏导的方法.

例 4.1 验证方程 $F(x, y) = xy + 2^x - 2^y = 0$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域确定唯一一个有连续导数的隐函数 $y = f(x)$, 并求 $f'(x)$.

解 函数 $F'_x(x, y) = y + 2^x \ln 2$ 和 $F'_y(x, y) = x - 2^y \ln 2$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域连续, 且 $F(0, 0) = 0$, $F'_y(0, 0) = -\ln 2 \neq 0$. 根据定理 4.1, 在点 $x = 0$ 的某邻域 $(-\delta, \delta)$ 内存在唯一一个有连续导数的(隐)函数 $y = f(x)$, 使 $F(x, f(x)) \equiv 0$, 且 $f(0) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{y + 2^x \ln 2}{x - 2^y \ln 2}$$

例 4.2 求由方程 $xy + \sin z + y = 2z$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数.

解 设 $F(x, y, z) = xy + \sin z + y - 2z$. 由于 $F'_x = y$, $F'_y = x + 1$, $F'_z = \cos z - 2$, 且容易验证它满足定理 4.2 的全部条件, 故由式(4.5)有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y}{2 - \cos z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{x + 1}{2 - \cos z}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{2 - \cos z} \right) = -\frac{y}{(2 - \cos z)^2} \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= -\frac{y^2 \sin z}{(2 - \cos z)^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{(1-x)+1}{(2-\cos z)^2} = \frac{2}{(2-\cos z)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2 - \cos z} \right) = \frac{(2 - \cos z) - y \left(\sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{(2 - \cos z)^2} \\ &= \frac{(2 - \cos z)^2 - (x + 1)y \sin z}{(2 - \cos z)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{x+1}{(2-\cos z)^2} \cdot \sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= -\frac{(x+1)^2 \sin z}{(2-\cos z)^3}. \end{aligned}$$

例 4.3 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$ 所确定的隐函数, 求 dz .

(方法一)求隐函数的偏导数可以不必套用公式(4.5)而直接应用复合函数的导数公式.在方程两边同时关于 x 求偏导,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 1 + e^{z-y-x} + xe^{z-y-x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1 \right) = 0,$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1$. 又由 $z = f(x,y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1$. 且, 又且, $0 = f(x,y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1$. 且, $0 = f(x,y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1$.

再对方程两边关于 y 求偏导,有

$$\frac{\partial z}{\partial y} - 1 + xe^{z-y-x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - 1 \right) = 0,$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 1$. 又由 $z = f(x,y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 1$.

于是

$$dz = \frac{1 + (x-1)e^{z-y-x}}{1 + xe^{z-y-x}} dx + dy.$$

(方法二)利用一阶微分形式不变性,对方程两边求全微分,有

$$dz - dy - dx + d(xe^{z-y-x}) = 0,$$

即

$$dz - dy - dx + e^{z-y-x} dx + xe^{z-y-x} (dz - dy - dx) = 0,$$

整理后,得

$$dz = \frac{1 + (x-1)e^{z-y-x}}{1 + xe^{z-y-x}} dx + dy.$$

4.2 由方程组所确定的隐函数

为讨论方程组的隐函数存在性及其求偏导方法,有必要先介绍函数的雅可比行列式概念.

定义 4.3 设函数组 $F_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 在点 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 的某邻域内偏导数 $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m$) 都存在,则由这些偏导数按下列方式构成的 m 阶行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

内层映射一个由 $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$ 使
 $\frac{\partial F_1}{\partial u_1} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \dots \frac{\partial F_1}{\partial u_m}$ 下式 $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$ 且
 $\frac{\partial F_2}{\partial u_1} \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \dots \frac{\partial F_2}{\partial u_m}$ 为 $\frac{\partial F_i}{\partial u_1} \frac{\partial F_i}{\partial u_2} \dots \frac{\partial F_i}{\partial u_m}$
 $\vdots \vdots \vdots$ 且
 $\frac{\partial F_m}{\partial u_1} \frac{\partial F_m}{\partial u_2} \dots \frac{\partial F_m}{\partial u_m}$ 果然, 走一些
 称为雅可比 (Jacobi) 行列式, 也称函数行列式, 简记为

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}.$$

例 4.4 设

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6, \\ G(x, y, z) = x + y + z, \end{cases}$$

试求 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$.

解 $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z, \frac{\partial G}{\partial y} = 1, \frac{\partial G}{\partial z} = 1$, 所以

$$J = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 2z.$$

定理 4.3 给定方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

假设

(I) $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0)$ 使方程组 (4.6) 成立,

(II) $F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \frac{\partial F_i}{\partial u_k}$ ($1 \leq i, k \leq m, j = 1, \dots, n$) 均在 $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0)$ 的一个邻域内连续;

(III) F_1, \dots, F_m 关于 u_1, \dots, u_m 的雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

在 $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0)$ 处不等于零, 则在 $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0)$ 的一个邻域内, 方程组(4.6)唯一确定函数组

$$u_i = u_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, m,$$

而且 $u_i(x_1, \dots, x_n) (i = 1, 2, \dots, m)$ 都在 (x_1^0, \dots, x_n^0) 的一个邻域内连续, 并满足

$$u_i^0 = u_i(x_1^0, \dots, x_n^0), i = 1, 2, \dots, m.$$

进一步, 如果 F_1, \dots, F_m 在 $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0)$ 的一个邻域内关于 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 的偏导数连续, 则 u_1, \dots, u_m 在 (x_1^0, \dots, x_n^0) 的一个邻域内关于 x_i 的偏导数存在, 连续, 且

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (u_1, \dots, u_{i-1}, x_j, u_{i+1}, \dots, u_m)}. \quad (4.7)$$

(证明从略.)

例 4.5 已知方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

试验证其在点 $(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, 1)$ 的邻域内满足定理 4.3 的条件, 在点 $x_0 = 1$ 的邻域内存在唯一的一组有连续导数的函数组

$$y = f(x),$$

$$z = g(x),$$

并求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

解 设

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6, \\ G(x, y, z) = x + y + z, \end{cases}$$

由题意可知, y, z 是 x 的函数, 则 $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z, \frac{\partial G}{\partial x} = 1, \frac{\partial G}{\partial y} = 1, \frac{\partial G}{\partial z} = 1$

在点 $(1, -2, 1)$ 的邻域内都连续.

又

$$F(1, -2, 1) = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 - 6 = 0,$$

$$G(1, -2, 1) = 1 - 2 + 1 = 0,$$

以及

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(y - z),$$

故

$$J|_{(1, -2, 1)} = 2(y - z)|_{(1, -2, 1)} = -6 \neq 0.$$

由定理 4.3, 在 $x_0 = 1$ 的邻域内存在唯一一组有连续导数的函数组

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = g(x). \end{cases}$$

由公式(4.7), 有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = -\frac{1}{2(y-z)} \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{2(x-z)}{2(y-z)} = \frac{x-z}{y-z}, \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} = -\frac{1}{2(y-z)} \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{2(y-x)}{2(y-z)} = \frac{x-y}{y-z}. \end{aligned}$$

例 4.6 验证方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0, \\ xy - u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$ 的邻域内满足定理 4.3 的条件, 在点 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ 的邻域内存在唯一的一组有连续偏导数的函数组 $u = f_1(x, y), v = f_2(x, y)$, 并求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 设

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - uv, \\ F_2(x, y, u, v) = xy - u^2 + v^2, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u} = -v, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v} = -u, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u} = -2u, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v} = 2v \end{aligned}$$

在点 $(1, 0, 1, 1)$ 的邻域内都连续, 且

$$\begin{cases} F_1(1, 0, 1, 1) = 0, \\ F_2(1, 0, 1, 1) = 0. \end{cases}$$

又

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix} = -2(u^2 + v^2),$$

故

$$J|_{(1,0,1,1)} = -2(1^2 + 1^2) = -4 \neq 0,$$

所以,该方程组满足定理 4.3 的条件,因而在点 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ 的邻域内存在唯一一组有连续偏导数的函数组 $u = f_1(x, y), v = f_2(x, y)$.

由公式(4.7),得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, v)} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} 2x & -u \\ y & 2v \end{vmatrix} = \frac{4xv + yu}{2(u^2 + v^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, v)} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} 2y & -u \\ y & 2v \end{vmatrix} = \frac{4yv + xu}{2(u^2 + v^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, x)} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} -v & 2x \\ -2u & y \end{vmatrix} = \frac{4xu - yv}{2(u^2 + v^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, y)} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{vmatrix} -v & 2y \\ -2u & x \end{vmatrix} = \frac{4yu - xv}{2(u^2 + v^2)}. \end{aligned}$$

习题 8.4

A 类

1. 验证下列方程在指定点邻域存在以 x 为自变量的隐函数, 并求 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $\sin x + 2\cos y - \frac{1}{2} = 0$, 在点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$;

(2) $xy + 2\ln x + 3\ln y - 1 = 0$, 在点 $(1, 1)$.

2. 验证下列方程在指定点邻域存在以 x, y 为自变量的隐函数, 并求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

(1) $x + y - z - \cos(xyz) = 0$, 在点 $(0, 0, -1)$;

(2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$, 在点 $(1, 1, 2)$.

3. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数.

(1) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$, 求 dz ;

(4) $e^z = xyz$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

(5) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(6) $z^3 - 3xyz = a^2$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

(7) $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}$.

(8) $e^{x+y} \sin(x+z) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}$.

4. 证明: 若方程 $F(x, y, z) = 0$ 的任意一个变量都是另外两个变量的隐函数, 即 $z = f(x, y), x = g(y, z), y = h(z, x)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1. \quad (2)$$

5. 设函数 $u = u(x, y, z)$ 由方程 $F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2) = 0$ 所确定, 则

$$\frac{u'_x}{x} + \frac{u'_y}{y} + \frac{u'_z}{z} = \frac{1}{u}. \quad (3)$$

6. 设函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 由

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ xu + yv = 1 \end{cases} \quad (4)$$

确定, 求 du, dv .

7. 设 $z = u^3 + v^3$, 而 u, v 由方程组

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (5)$$

所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{在点 } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) \text{ 处, } 0 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi \quad (1)$$

8. 设

$$\begin{cases} x = -u^2 + v + z, \\ y = u + v z, \end{cases}$$

$$\text{在点 } (1, 1) \text{ 处, } 0 = 1 - \sqrt{3} \cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi + \sqrt{3} \quad (2)$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

$$\text{在点 } (1, 0, 0) \text{ 处, } 0 = (x(z)) \cos \xi - z - \sqrt{3} + \sqrt{3} \quad (3)$$

$$\text{在点 } (\xi, 1, 1) \text{ 处, } 0 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cos \xi - \frac{1}{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} \quad (4)$$

9. 设方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$. 确定了隐函数 $z = z(x, y)$, 其中 F 具有连续的一阶偏导数, 求证:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z. \quad (5)$$

$$10. \text{ 设 } z = f(x - y + g(x - y - z)), \text{ 其中 } f, g \text{ 为可微函数, 求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (6)$$

11. 验证下列方程组在指定点邻域存在隐函数组, 并求所指定的偏导数或全微分:

$$(1) \begin{cases} u + v = x + y, \\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}, \end{cases} \text{ 在点 } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right), \text{ 求 } du, dv; \quad (7)$$

$$(2) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \text{ 在点 } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \text{ 求 } \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}. \quad (8)$$

12. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数

$$(1) \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}; \quad (9)$$

$$(2) \begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases} \text{ 其中 } f, g \text{ 具有一阶连续偏导数, 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (10)$$

$$(3) \begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (11)$$

$$(4) \begin{cases} lx + my + nz = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}. \quad (12)$$

13. 求方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 10 \end{cases}$$

确定的隐函数组 $y = y(x), z = z(x)$ 在点 $P(1, 1, -2)$ 的导数 y', z' 与 y'', z'' .

$$(0 \leftarrow k) \quad (0 \leftarrow l) \quad 0 = (k, l)$$

B. 项类

1. 设 $u = f(z)$, 其中 z 为方程式

$$z = x + y\varphi(z)$$

所定义的为变量 x 和 y 的隐函数, 证明拉格朗日 (Lagrange) 公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ (\varphi(z))^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

2. 证明: 方程 $\arccos y = n \ln x$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$x^2 y^{(n+2)} + (2n+1)xy^{(n+1)} + 2n^2 y^{(n)} = 0.$$

3. 证明: 若函数 $y = y(x)$ 是由方程 $x = ky + \varphi(y)$ 确定的隐函数, 其中常数 $k \neq 0$, 且 $\varphi(y)$ 是以 ω 为周期的周期函数, 且 $|\varphi'(y)| < |k|$, 则

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 是以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

4. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内连续, 且 $f(0, 0) = 0$, $|f(x, y)| \leq 1$, 则方程

$$F(x, y, z) = z^3 + z(x^2 + y^2) - f(x, y) = 0$$

在区域 D 内确定一个连续的隐函数 $z = \varphi(x, y)$, 且 $\varphi(0, 0) = 0$.

5. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln z = f(\alpha), \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha) \end{cases}$$

所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = z^2,$$

其中 $\alpha = \alpha(x, y)$ 为多变量且 $f(\alpha)$ 为任意可微分的函数.

§5 多元函数的泰勒公式

为讨论多元函数泰勒公式, 有必要先回忆一元函数的泰勒公式. 设函数 $F(t)$ 在 t_0 的邻域内存在 m 阶导数, 则

$$F(t_0 + h) = F(t_0) + F'(t_0)h + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(t_0)h^m + r_m(t_0, h),$$

其中 $r_m(t_0, h)$ 是 $F(t)$ 在 t_0 且增量为 h 的 m 阶余项. 固定 t_0 , 一般有

$$r_m(t_0, h) = o(|h|^m) \quad (h \rightarrow 0)$$

称上述形式的余项为佩亚诺(Peano)余项. 进一步, 如果 $F(t)$ 在 t_0 的邻域内存在 $m+1$ 阶导数, 则余项可表示为

$$r_m(t_0, h) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} F^{(m+1)}(t_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

称上述形式的余项为拉格朗日(Lagrange)余项. 如果 $m+1$ 阶导数在 t_0 的邻域内连续, 则余项可写为积分形式,

$$r_m(t_0, h) = \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 F^{(m+1)}(t_0 + hs)(1-s)^m ds,$$

称上述形式的余项为积分形式余项.

现在, 我们将一元函数的泰勒公式推广到多元函数情形.

设 n 元函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ 附近有直到 m 阶连续偏导数, 令 $F(t) = f(x_1^0 + th_1, \dots, x_n^0 + th_n)$, 其中 h_i 是第 i 个自变量在 x_i^0 处的增量 ($i = 1, \dots, n$). 由复合函数的连续性可知, $F(t)$ 在 $t=0$ 的一个邻域内有 m 阶连续导数. 于是, 当 $(h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)^{\frac{1}{2}}$ 适当小时, 利用一元函数的泰勒公式可得

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} F^{(m-1)}(0) + r_{m-1} \quad (5.1)$$

显然, $F(1) = f(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n)$, $F(0) = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$. 由复合函数求导的链式法则, 有

$$F'(0) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l}(x_1^0, \dots, x_n^0) h_l,$$

$$F''(0) = \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) h_l h_k,$$

一般地,

$$F^{(k)}(0) = \sum_{l_1, \dots, l_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{l_1} \cdots \partial x_{l_k}}(x_1^0, \dots, x_n^0) h_{l_1} \cdots h_{l_k}.$$

综合上述分析, 我们有以下定理.

定理 5.1 设 n 元函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ 的邻域 $U(x_0)$ 内存在 m 阶连续偏导数, 则有泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) &= f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \dots + \\ &\quad \frac{1}{(m-1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{m-1} f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m f(x_1^0 + \theta h_1, \dots, x_n^0 + \theta h_n) \quad (0 < \theta < 1). \quad (5.2)$$

注 (1) 公式(5.2)是带有拉格朗日余项的泰勒公式.

(2) 在公式(5.2)中, 若令 $x_0 = (0, \dots, 0)$ 就得到多元函数的麦克劳林(Maclaurin)公式.

例 5.1 将函数 $f(x, y) = e^{x+y}$ 展成麦克劳林公式.

解 $f(x, y) = e^{x+y}$ 在 \mathbf{R}^2 存在任意阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^{m+l} f}{\partial x^m \partial y^l} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial^{m+l}}{\partial x^m \partial y^l} f(0, 0) = 1,$$

其中 m, l 是任意非负整数, 由公式(5.2)有

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(x+y)^n +$$

$$\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1} e^{\theta(x+y)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

例 5.2 当 $|x|, |y|, |z|$ 都很小时, 将超越函数

$$f(x, y, z) = \cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$$

近似表为 x, y, z 的多项式.

解 将函数展成麦克劳林公式(到二阶偏导数), 有

$$f(x, y, z) \approx f(0, 0, 0) + xf'_x(0, 0, 0) + yf'_y(0, 0, 0) + zf'_z(0, 0, 0) +$$

$$\frac{1}{2!} [x^2 f''_{xx}(0, 0, 0) + y^2 f''_{yy}(0, 0, 0) + z^2 f''_{zz}(0, 0, 0) +$$

$$2xyf''_{xy}(0, 0, 0) + 2yzf''_{yz}(0, 0, 0) + 2zx f''_{xz}(0, 0, 0)],$$

$$f(0, 0, 0) = 0,$$

$$f'_x(0, 0, 0) = [-\sin(x+y+z) + \sin x \cos y \cos z]_{(0,0,0)} = 0,$$

$$\text{同样 } f'_y(0, 0, 0) = 0, f'_z(0, 0, 0) = 0.$$

$$f''_{xx}(0, 0, 0) = [-\cos(x+y+z) + \cos x \cos y \cos z]_{(0,0,0)} = 0,$$

$$\text{同样 } f''_{yy}(0, 0, 0) = 0, f''_{zz}(0, 0, 0) = 0.$$

$$f''_{xy}(0, 0, 0) = [-\cos(x+y+z) + \sin x \sin y \cos z]_{(0,0,0)} = -1,$$

$$\text{同样 } f''_{yz}(0, 0, 0) = -1, f''_{xz}(0, 0, 0) = -1.$$

所以, $f(x, y, z) \approx -(xy + yz + zx)$.

例 5.3 将 $\sin(x^2 + y^2)$ 在 $(0, 0)$ 点按泰勒公式展开.

解 令 $x^2 + y^2 = t$, 则 $(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow t = 0$. 利用 $\sin t$ 在 $t = 0$ 点展开式

$$\sin t = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \frac{t^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(t),$$

得

$$\sin(x^2 + y^2) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \frac{1}{(2m-1)!} (x^2 + y^2)^{2m-1} + R_{2m},$$

其中 $R_{2m} = \frac{(x^2 + y^2)^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin\left(\theta(x^2 + y^2) + \frac{2m+1}{2}\pi\right) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$

林农康泰的函数式泰勒展开 (0) 司题 8.5

习题 8.5

A 类

- 求下列函数在指定点的泰勒展开式:
 - $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$, 在点 $(1, -2)$;
 - $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, 在点 $(1, 1, 1)$.
- 根据麦克劳林公式展开函数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 到 4 次项为止.
- 设 $|x|, |y|$ 同 1 比较是很小的量, 试给出 $\frac{\cos x}{\cos y}$ 的二次近似多项式.
- 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 邻域内存在一阶与二阶偏导数, 且这些偏导数在 $(0, 0)$ 连续, 则

$$f''_{xx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2h, e^{-\frac{1}{2}h}) - 2f(h, e^{-\frac{1}{2}h}) + f(0, 0)}{h^2}$$

- 设 $0 < |x|, |y| \ll 1$, 试给出 $\arctan \frac{1+x}{1-y}$ 的二次近似多项式.

- 设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点邻域有二阶连续偏导数, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

求 $f(0, 0)$ 及 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的一、二阶偏导数值.

- 按 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$ 的乘幂展开函数 $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$ 到二次项为止, 并写出余项 R_2 .

- 利用函数 $f(x, y) = x^y$ 的三阶泰勒公式计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

- 求常数 a_1, a_2, \dots, a_6 , 使当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, 有

$$\sqrt{\frac{1+x}{1+y}} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 x y + a_6 y^2 + o(x^2 + y^2).$$

- 若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内所有二阶偏导数之绝对值都不超过 M , 试估计

$$f(x_0 + k, y_0 + h) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)k + f'_y(x_0, y_0)h$$

的绝对误差.

B 类

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所确定, 且 $z(1, 1) = 1$, 求 $z(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒公式.

2. 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为凸有界闭区域, $f(P)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数, 试证: $f(P)$ 在 D 上满足 Lipschitz 条件, 即存在 $L > 0$, 对任意 $P_1, P_2 \in D$ 有

$$|f(P) - f(P_1)| \leq L|P - P_1|.$$

§6 方向导数与梯度

6.1 方向导数

设 n 元函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 定义在 $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ 的一个邻域内. 我们知道 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ 是 $f(X)(X = (x_1, \dots, x_n))$ 在 X_0 沿 x_i 轴正向的变化率, 然而许多问题需要研究沿其他方向的变化率, 这就引出方向导数的概念.

定义 6.1 设 n 元函数 $f(X)$ 在 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 点的某邻域内有定义, l 为由 X_0 出发的一条射线. 如果当点 X 沿射线 l 趋向 X_0 时, 极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(X) - f(X_0)}{\rho} \quad (6.1)$$

存在 (其中 $\rho = \|X - X_0\|$), 则称该极限值为 $f(X)$ 在 X_0 沿 l 的方向导数, 记为 $\frac{\partial f}{\partial l}(X_0)$. 又, 不妨设 $\|l\| = 1$, 记 l 在 x_i 轴的投影为 $\cos \alpha_i$, 则 $l = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)$, $\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1$. 显然有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l}(X_0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(X_0 + tl) - f(X_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [f(x_1^0 + t \cos \alpha_1, \dots, x_n^0 + t \cos \alpha_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)] \end{aligned} \quad (6.2)$$

注 (1) 方向导数还可表为 $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{x_0}$ 或 $f'_l(X_0)$ 等.

(2) 设 $f(X)$ 在 X_0 沿 x_i 轴正向和负向的方向导数分别为 $\frac{\partial f}{\partial x_i^+}(X_0)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x_i^-}(X_0)$. 显然, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ 存在的充分必要条件是 $\frac{\partial f}{\partial x_i^+}(X_0)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x_i^-}(X_0)$ 都存在且

$\frac{\partial f}{\partial x_i^+}(X_0) = -\frac{\partial f}{\partial x_i^-}(X_0)$. 反之, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ 存在, 则 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i^+}(X_0)$.

例 6.1 设 n 元函数 $f(X) = \|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, 对于任一方向 l , $\|l\| = 1$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial l}(O) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tl) - f(O)}{t} = 1,$$

即 $f(X)$ 在 O 点沿任意方向的方向导数均为 1, 由上述注(2)知, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(O)$ 不存在.

例 6.2 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

显然, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, 但取 $l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 由于

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} = +\infty,$$

从而 $\frac{\partial f}{\partial l}(0, 0)$ 不存在.

现在我们来研究方向导数与偏导数之间的关系, 并希望能用偏导数来求方向导数.

定理 6.1 设 $X = (x_1, \dots, x_n)$, $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, 并设 n 元函数 $f(X)$ 在 X_0 可微, 则对于任意方向 $l = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)$, $\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1$, $\frac{\partial f}{\partial l}(X_0)$ 存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial l}(X_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \cos \alpha_i. \quad (6.3)$$

证 由于 $f(X)$ 在 X_0 可微, 且记 $X' = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)$, 则

$$\begin{aligned} f(X') - f(X) &= f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n + o(\rho), \end{aligned}$$

其中 $\rho = \|X' - X_0\| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$, 两边同除以 ρ , 有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(X') - f(X)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\Delta x_n}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \right]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cos \alpha_n.$$

由定义 6.1, 上式即

$$\frac{\partial f}{\partial l}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \cos \alpha_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \cos \alpha_n.$$

注 定理中可微是结论成立的充分条件而非必要条件. 在例 6.1 中的 n 元函数 $f(X) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, 在点 O 沿任意方向的方向导数均存在且为 1, 但其偏导数不存在. 还要注意, 偏导数存在不足以保证各方向导数都存在.

例 6.3 设 $f(x, y, z) = ax + by + cz$, l 方向上的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 于是沿 l 方向的平均变化率为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\rho} &= \frac{1}{\rho} [f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] \\ &= \frac{1}{\rho} [a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + c(z + \Delta z) - ax - by - cz] \\ &= \frac{1}{\rho} (a\rho \cos \alpha + b\rho \cos \beta + c\rho \cos \gamma) \\ &= a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma, \end{aligned}$$

其中 $\rho = \| (X + \Delta X) - X \| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

所以

$$\frac{\partial f}{\partial l} = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma.$$

可见线性函数 f 沿 l 方向的导数不因点的位置而变化. 同时还可看出, 函数沿不同方向的方向导数一般是不同的.

例 6.4 设函数 $z = x^2y$, l 是由点 $(1, 1)$ 出发与 x 轴, y 轴的正方向所成夹角分别为 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}$

的一条射线(见图 8.3), 求 $\frac{\partial z}{\partial l}$.

$$\text{解 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2xy \Big|_{(1,1)} = 2,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)} = x^2 \Big|_{(1,1)} = 1.$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) \cos \frac{\pi}{3}$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \approx 2.232.$$

如果取 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则

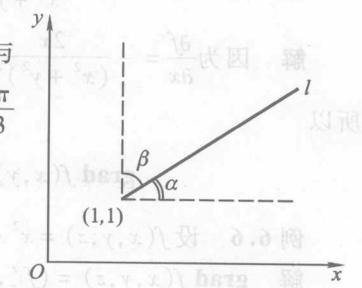


图 8.3

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.121.$$

如果取 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2 \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.866.$$

可以看到, 沿不同方向, 方向导数不同.

6.2 梯度

与方向导数有关联的一个概念是函数的梯度.

定义 6.2 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开区域, $X = (x_1, \dots, x_n)$, $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$, 又设 n 元函数 $f(X)$ 在 D 内可微. 所谓 $f(X)$ 在点 X_0 的梯度是指使在 X_0 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}(X_0)$ 取值最大的那个向量 l , 且 $\|l\| = \frac{\partial f}{\partial l}(X_0)$, 记之为 $\text{grad } f(X_0)$ 或 $\nabla f(X_0)$, 在直角坐标系下,

$$\text{grad } f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right), \quad (6.4)$$

从上述定义可以知道, 函数在一点的梯度是一个向量, 其方向是函数在这点的方向导数取得最大值的方向, 它的模等于方向导数的最大值.

例 6.5 设 $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, 求 $\text{grad } f(x, y)$.

$$\text{解} \quad \text{因为 } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

所以

$$\text{grad } f(x, y) = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

例 6.6 设 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 求 $\text{grad } f(1, -1, 2)$.

$$\text{解} \quad \text{grad } f(x, y, z) = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2x, 2y, 2z), \text{ 于是}$$

$$\text{grad } f(1, -1, 2) = (2, -2, 4).$$

对于复合函数的梯度, 有以下定理.

定理 6.2 设 $F(u_1, \dots, u_m)$ 在 $U_0 = (u_1^0, \dots, u_m^0) \in \mathbb{R}^m$ 的一个邻域 D 内有定义, 且在 U_0 可微. $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 在 $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ 的一个邻域 Ω 内有定义, $u_i(X_0) = u_i^0$ 且均在 X_0 可微, 记 $g(X) = F(u_1(X), \dots, u_m(X))$, 则复合函数 g 在 X_0 可微, 且

$$\text{grad } g(X_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial u_i}(U_0) \nabla u_i(X_0) \quad (6.5)$$

(证明略.)

习题 8.6

1. 求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿与 x 轴正向组成 α 角的射线 l 的方向导数. 又, α 角取何值时, 方向导数为; (1) 最大值; (2) 最小值; (3) 零?

2. 求下列函数在指定点和指定方向的方向导数.

(1) $u = xyz$, 在点 $(1, 1, 1)$ 沿方向 $l \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$;

(2) $u = x^2 - xy + z^2$, 从点 $(1, 0, 1)$ 到点 $(3, -1, 3)$ 的方向.

3. 证明函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 连续, 偏导数不存在, 但沿任一方向的方向导数都存在.

4. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

试证沿任意方向 $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的方向导数为:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial l} = \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}, & \sin \alpha \neq 0, \\ 0, & \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

5. 求 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上的点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的外法线方向的导数.

6. 设 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, l_1, l_2, \dots, l_n 为 P_0 处给定的 n 个单位向量, 相邻二向量夹角为 $\frac{2\pi}{n}$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_i} = 0.$$

7. 设 $y = \varphi(x)$ 是区间 $a \leq x \leq b$ 上的可微函数, 在 Oxy 直角坐标平面内其图像是曲线 Γ . 若二元函数 $f(x, y)$ 在包含曲线 Γ 的某区域上连续可微(即具有连续的偏导数), 且在曲线 Γ 上恒为零, 试证: $f(x, y)$ 在曲线 Γ 上任一给定点处沿该曲线切线方向的导数等于零.

8. 若 \mathbf{R}^2 上的可微函数 $f(x, y)$ 满足

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = 0,$$

则 $f(x, y)$ 恒为常数.

9. 求函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 沿过该点的等高线的法线方向的方向导数.

10. 设函数 $u = u(x, y, z)$ 由方程 $f(yzu, zux, uxy) = 0$ 所确定, 求 $du, \text{grad } u$.

11. 设 $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 求:

(1) u 在点 $P(1, 2, -2)$ 处的梯度;

(2) 何处梯度平行于 $a = i + 2k$;

(3) 何处梯度垂直于 $a = i + 2k$.

12. 求下列函数在指定点的梯度

(1) $u = 2x^3y - 3y^2z$, 在 $(1, 2, -1)$ 点; (2) $u = x^2y - 3y^2z$, 在 $(1, 0, 1)$ 点;

(2) $z = xy$, 在 $(1, 1)$ 点;

(3) $u = \ln r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 在 (x, y) 点.

13. 证明: $\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u$.

14. 求函数 $z = x^2y$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的梯度, 并验证该梯度与函数的等高线在该点的切线垂直.

15. 求函数 $z = \ln \frac{y}{x}$ 分别在点 $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right)$ 和点 $B\left(1, \frac{1}{6}\right)$ 处的两个梯度之间夹角的余弦.

B 类

1. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处: (1) 不连续; (2) 两个偏导数都存在; (3) 沿任一方向的方向导数并不都存在.

2. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) 在点 $(0, 0)$ 的任何邻域内连续;

(2) 两个一阶偏导数在 $(0, 0)$ 的任一邻域内有界;

(3) 在点 $(0, 0)$ 处不可微;

(4) 在点 $(0, 0)$ 处沿任一方向的方向导数都存在.

3. 求函数 $z = 2x^2 + y^2$ 在点 $P(1, 1)$ 处的梯度以及沿梯度方向的方向导数.

4. 设从 x 轴的正向到 \overrightarrow{PM} 的转角为 $\frac{\pi}{4}$, 求函数 $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 在点 $P(1, 2)$ 处的梯度及该梯度在 \overrightarrow{PM} 上的投影.

5. 求函数 $u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xyz}$ 在点 $P(-1, 3, -3)$ 处的梯度以及沿曲线 $x = -t^2$, $y = 3t^2$, $z = -3t^3$ 在点 P 参数增大的切线方向的方向导数.

6. 求函数 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $P(x, y, z)$ 处沿此点的向径 r 的方向导数, 并问在怎样情况下函数 u 沿此方向的方向导数等于它的梯度的模?

§7 偏导数的应用

7.1 几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

(1) 参数方程情形

设空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t). \end{cases}$$

假设 $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ 都在点 t_0 有导数, 且记改变量为 Δt , 记曲线上与 t_0 和 $t_0 + \Delta t$ 对应的点分别为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 其中

$$x_0 = \varphi(t_0), x_0 + \Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t),$$

$$y_0 = \psi(t_0), y_0 + \Delta y = \psi(t_0 + \Delta t),$$

曲线的割线 P_0Q 的方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}.$$

当 Q 沿曲线无限趋近于 P_0 时, 割线 P_0Q 的极限位置就是曲线在 P_0 的切线. 用 Δt 遍除割线方程的分母, 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 即得曲线在点 P_0 的切线方程

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi'(t_0)}$$

或

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

下面我们给出空间曲线的法平面方程. 过点 P_0 且与 P_0 处切线垂直的平面称为曲线在该点的法平面, 法平面的方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

另外, 我们还得到切线的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t_0)}{\sqrt{\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) + \chi'^2(t_0)}},$$

$$\cos \beta = \frac{\psi'(t_0)}{\sqrt{\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) + \chi'^2(t_0)}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\chi'(t_0)}{\sqrt{\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) + \chi'^2(t_0)}},$$

其中 α, β, γ 是切线与三个坐标轴正向间的夹角.

例 7.1 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 的切线及法平面方程.

解 $x'_t = 1, y'_t = 2t, z'_t = 3t^2$. 对应于点 $(1, 1, 1)$ 的参数 $t_0 = 1$, 所以

$$x'_0 = x'(t_0) = 1, y'_0 = y'(t_0) = 2, z'_0 = z'(t_0) = 3,$$

故法平面方程为

$$(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

或

$$x + 2y + 3z = 6.$$

切线方程为

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}.$$

(2) 隐函数情形

若空间曲线是用隐函数形式给出的, 即曲线 C 是两曲面的交线

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

且设该方程组在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内满足定理 4.2 的条件, 从而确定了函数

$$y = y(x), z = z(x).$$

此时, 我们可以把 x 看作参数, 于是曲线方程可以表示为

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \\ z = z(x). \end{cases}$$

这实际是特殊的参数方程. 因此, 曲线在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)},$$

法平面方程为

$$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0,$$

而切线余弦为

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x_0) + z'^2(x_0)}}, \\ \cos \beta &= \frac{y'(x_0)}{\sqrt{1 + y'^2(x_0) + z'^2(x_0)}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z'(x_0)}{\sqrt{1 + y'^2(x_0) + z'^2(x_0)}}.\end{aligned}$$

当 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \neq 0$ 时, 由公式(4.5), 得到以上各方程中的导数, 即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}.$$

2. 曲面的切平面与法线

在讨论多元函数可微的充分必要条件时, 我们给出过切平面的概念, 切平面一个很值得注意的特征是, 如果一个平面是曲面过点 P_0 的切平面, 那么曲面上过点 P_0 的任一曲线的切线都在这个平面上, 所谓曲面在 P_0 点的法线, 则是指过点 P_0 且与切平面垂直的直线.

下面我们就曲面方程的两种不同形式给出其切平面与法线方程.

(1) 曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上一点, 并设函数 $F(x, y, z)$ 的偏导数 F'_x, F'_y, F'_z 连续, 过 P_0 在曲面上任意做一条曲线 C , 设曲线的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t).$$

因为曲线 C 完全在曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上, 所以有等式

$$F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0.$$

上式对 t 求导, 在 $t = t_0$ 处得

$$F'_x(P_0)x'(t_0) + F'_y(P_0)y'(t_0) + F'_z(P_0)z'(t_0) = 0.$$

这表明向量 $n = \{F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\}$ 与曲线 C 的切线的方向向量 $s = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 垂直. 因为曲线 C 是曲面上过点 P_0 的任意一条曲线, 所以在曲面上过点 P_0 的一切曲线的切线都在同一平面上(因与同一向量垂直), 故此平面就是曲面在点 P_0 的切平面. 该切平面过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 且以向量 n 为其法线向量, 故其方程为

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

我们也容易得到曲面在 P_0 的法线方程

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)},$$

以及法线的方向余弦

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}$$

根式前面的符号决定法线向量指向哪一侧.

(2) 曲面方程为 $z = f(x, y)$

令 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, 于是

$$F'_x = f'_x, F'_y = f'_y, F'_z = -1,$$

故切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0,$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

法线的方向余弦(假定法线向量方向向上, $\cos \gamma > 0$)为

$$\cos \alpha = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$

$$\cos \beta = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}.$$

例 7.2 设球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, 试求在点 $P_0 = (3, 2, 1)$ 的切平面和法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$, 则 $F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 2z$, 于是 $F'_x(P_0) = 6, F'_y(P_0) = 4, F'_z(P_0) = 2$, 故在点 $(3, 2, 1)$ 处此球面的切平面方程为 $6(x - 3) + 4(y - 2) + 2(z - 1) = 0$, 法线方程为 $3x + 2y + z = 14$.

法线方程为 $3(x - 3) + 2(y - 2) + (z - 1) = 0$.

或
 $\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{2}$

例 7.3 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(2, 2, 8)$ 的切平面及法线方程.
 解 $f(x, y) = x^2 + y^2, F(x, y, z) = f(x, y) - z, F'_x = f'_x = 2x, F'_y = f'_y = 2y, F'_z = -1, f'_x(2, 2) = 4, f'_y(2, 2) = 4$, 故所求切平面方程为

$$4(x-2) + 4(y-2) = z-8$$

或
 $4x + 4y - z = 8.$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-8}{-1}.$$

7.2 多元函数的极值

1. 无条件极值

定义 7.1 若函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内恒有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处取得极小值, 极小值为 $f(x_0, y_0)$. 如果在点 P_0 的某邻域内恒有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处取得极大值, 极大值为 $f(x_0, y_0)$. 函数的极小值与极大值统称极值, 使函数达到极值的点统称极值点.

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 附近存在偏导数, 且函数在 P_0 处达到极值, 则对固定的 $y = y_0$, 一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 处达到极值, 从而 $f'_x(x_0, y_0) = 0$. 同理也应有 $f'_y(x_0, y_0) = 0$. 所以有以下定理.

定理 7.1(极值存在必要条件) 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内存在偏导数, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处达到极值的必要条件是

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (7.1)$$

对于 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 也有类似结论, 即若函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的邻域内存在偏导数且达到极值, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2)$$

满足条件(7.1)或(7.2)的点称为函数 $f(x, y)$ 或 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的驻点(也称稳定点). 但应当注意, 驻点不一定是极值点. 还有, 极值也可能在偏导数不存在的点上达到.

定理 7.2(极值存在的充分条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内存在连续的二阶偏导数, 且 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, 令

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

则 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 是否取得极值有以下结论:

- (1) 当 $B^2 - AC < 0$ 时取得极值, 且当 $A < 0$ (或 $C < 0$) 时为极大值, 当 $A > 0$ (或 $C > 0$) 时为极小值;
- (2) 当 $B^2 - AC > 0$ 时没有极值;
- (3) 当 $B^2 - AC = 0$ 时可能有极值也可能没有极值, 还需另做讨论.

证① 设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U_1(P_0)$ 有连续的二阶偏导数, 且 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$. 由二元函数泰勒公式, $\forall (x_0 + h, y_0 + k) \in U_1(P_0)$ 有

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{2} [h^2 f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hk f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \\ &\quad k^2 f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)] \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned} \quad (1)$$

(1) 设 $B^2 - AC < 0$, 即

$$f''_{xy}^2(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0. \quad (2)$$

因为 $f(x,y)$ 的二阶偏导数在 $U_1(P_0)$ 连续, 由式②可知, 存在 P_0 的邻域 $U_2(P_0) \subset U_1(P_0)$, 使得对任意 $(x_0 + h, y_0 + k) \in U_2(P_0) \subset U_1(P_0)$ 有

$$f''_{xy}^2(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) < 0, \quad (3)$$

并且易知 $f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ 与 $f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ 均不为 0 且两者同号. 式①可写成

$$\Delta f = \frac{1}{2f''_{xx}} [(hf''_{xx} + kf''_{xy})^2 + k^2(f''_{xx}f''_{yy} - f''_{xy}^2)].$$

当 h, k 不同时为零且 $(x_0 + h, y_0 + k) \in U_2(P_0)$ 时, 上式右端方括号内的值为正, 所以 Δf 异于零且与 f''_{xx} 同号. 又由 $f(x,y)$ 二阶偏导数的连续性知 f''_{xx} 与 A 同号, 因此, Δf 与 A 同号, 所以, 当 $A > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极小值; 当 $A < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

(2) 设 $B^2 - AC > 0$, 即

$$f''_{xy}^2(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > 0. \quad (4)$$

先假定 $f''_{xx}(x_0, y_0) = f''_{yy}(x_0, y_0) = 0$, 于是由式④可知 $f''_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$. 现在分别令 $k = h$ 及 $k = -h$, 则由式(1)得

① 教师可视具体情况决定是否讲授此证明过程.

$$\Delta f = \frac{h^2}{2} [f''_{xx}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 h) + 2f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 h) + f''_{yy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 h)]$$

及

$$\Delta f = \frac{h^2}{2} [f''_{xx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 - \theta_2 h) - 2f''_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 - \theta_2 h) + f''_{yy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 - \theta_2 h)]$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 以上两式中方括号内的式子分别趋于 $2f''_{xy}(x_0, y_0)$ 和 $-2f''_{xy}(x_0, y_0)$. 从而当 h 充分接近零时, 两者方括号内的值符号相反, 故 Δf 的符号不同, 因此 $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

再假定 $f''_{xx}(x_0, y_0)$ 和 $f''_{yy}(x_0, y_0)$ 不同时为零, 不妨假定 $f''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$. 先取 $k=0$, 于是由式①得

$$\Delta f = \frac{1}{2} h^2 f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0).$$

由此看出, 当 h 充分接近零时, Δf 与 $f''_{xx}(x_0, y_0)$ 同号. 但如果取

$$h = -f''_{xy}(x_0, y_0)s, k = f''_{xx}(x_0, y_0)s, \quad ⑤$$

其中 s 是异于零但充分接近零的数, 则可发现, 当 $|s|$ 充分小时, Δf 与 $f''_{xx}(x_0, y_0)$ 异号. 事实上, 在式①中, 将 h 和 k 用式⑤给定的值代入, 得

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{s^2}{2} [f''_{xy}^2(x_0, y_0) f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - 2f''_{xy}(x_0, y_0) f''_{xx}(x_0, y_0) \\ &\quad + f''_{xx}^2(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + f''_{xx}^2(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)], \end{aligned} \quad ⑥$$

上式右边方括号内的式子当 $s \rightarrow 0$ 时趋于

$$f''_{xx}(x_0, y_0) [f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}^2(x_0, y_0)].$$

由不等式④, 上式方括号内的值为负, 故当 s 充分接近零时, 式⑥右边, (即 Δf) 与 $f''_{xx}(x_0, y_0)$ 异号.

综合起来, 我们知道在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域中, Δf 取值符号不会相同, 因此 $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

(3) 设 $B^2 - AC = 0$, 为说明此时不能断定是否有极值, 我们考察函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ 和 $g(x, y) = xy^2$. 容易验证, 它们均以 $(0, 0)$ 为驻点, 且在 $(0, 0)$ 处满足 $B^2 - AC = 0$, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处有极小值, 而 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处无极值.

下面, 我们给出求二元函数极值的步骤.

- (1) 把实际问题化为求某函数 $f(x, y)$ 的极值问题;
- (2) 求函数的偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$, 并解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

求得一切实数解,即求出一切驻点;

(3) 对每一驻点 (x_0, y_0) 求出二阶偏导数(假定这些二阶偏导数都存在)的值,且令

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$

(4) 当 $B^2 - AC < 0$ 时, $A > 0$, $f(x_0, y_0)$ 为极小值; $A < 0$, $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

当 $B^2 - AC > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

当 $B^2 - AC = 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是否是极值不能决定.但若由问题实际意义知其有极值,且驻点也唯一,则可断定其为极值.

(5) 对于偏导数不存在的点(包括边界点),利用极值定义判断该点是否为极值点.

与一元函数一样,也可求二元函数的最大值和最小值.设 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x, y)$ 在 D 上必取得最大值与最小值.将 $f(x, y)$ 在 D 内的所有极值及 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大值、最小值相比较,从中找出最大者与最小者,即为所求.

例 7.4 设函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$,试求其极值点与极值.

解 方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0, \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0, \end{cases}$$

求得 4 个驻点 $(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$.又求得二阶导数

$$f''_{xx} = 6x + 6, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = -6y + 6.$$

在点 $(1, 0)$ 处, $B^2 - AC = -12 \times 6 < 0, A = 12 > 0$,故函数在 $(1, 0)$ 处取极小值,其值为 $f(1, 0) = -5$;在点 $(1, 2)$ 处, $B^2 - AC = 12 \times 6 > 0$,故在 $(1, 2)$ 处不取极值;在 $(-3, 0)$ 处, $B^2 - AC = 12 \times 6 > 0$,故在 $(-3, 0)$ 处不取极值;在点 $(-3, 2)$ 处, $B^2 - AC = -12 \times 6 < 0, A = -12 < 0$,故函数在点 $(-3, 2)$ 处取极大值,其值为 $f(-3, 2) = 31$.

例 7.5 欲将长度为 a 的细杆分为三段,试问如何分才能使三段长度之乘积为最大?

解 令 x, y 分别表示第一、二两段之长,则第三段长度为 $a - x - y$,三段长度之乘积为

$$z = f(x, y) = xy(a - x - y).$$

解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = ax - 2xy - y^2 = 0, \\ f'_y(x, y) = ay - x^2 - 2xy = 0, \end{cases}$$

求得 4 个驻点 $(0, 0), \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right), (0, a)$ 及 $(a, 0)$.

驻点 $(0,0), (0,a)$ 及 $(a,0)$ 不合题意, 不必讨论, 又

$$f''_{xx}(x,y) = -2y, f''_{xy}(x,y) = a - 2x - 2y, f''_{yy}(x,y) = -2x.$$

在点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 处,

$$B^2 - AC = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}a\right)\left(-\frac{2}{3}a\right) = -\frac{a^2}{3} < 0,$$

故在点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 处, 函数取最大值 $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$.

2. 最小二乘法

最小二乘法可以看做是求多元函数极值方法的重要应用. 为了确定某一对变量 x 与 y 之间的依赖关系, 对其进行 n 次测量, 得到 n 对数据:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

将这些数据看作直角坐标系 xOy 中的点 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$, 并把它们画在坐标平面上(见图 8.4). 如果这些点几乎分布在一条直线上, 我们就可以认为 x 与 y 之间存在线性关系. 设其方程为

$$y = ax + b,$$

其中 a, b 为待定参数.

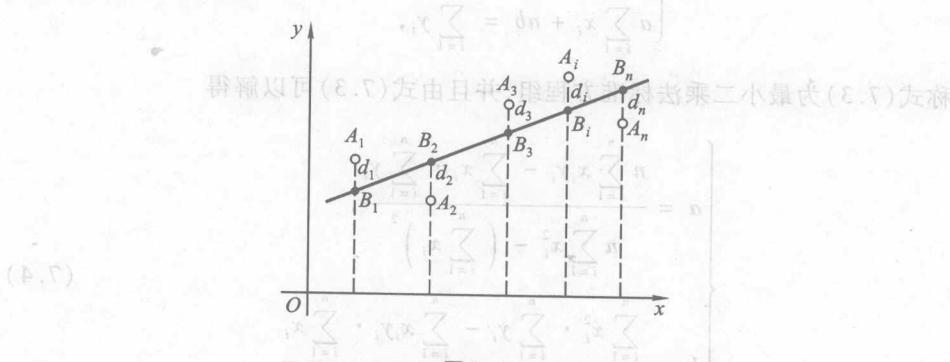


图 8.4

现在的问题是如何确定 a, b , 使 $y = ax + b$ 能尽量准确地反映 x 与 y 的关系. 从图 8.4 可以看出, 这就要求使所有的点 $A_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 都尽量靠近直线 $y = ax + b$.

设在直线 $y = ax + b$ 上与点 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 横坐标相同的点为 $B_i(x_i, ax_i + b)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), A_i 与 B_i 的距离

$$d_i = |ax_i + b - y_i|$$

称为观测值与理论值的偏差. 显然, 若点 (x_i, y_i) 在直线 $y = ax + b$ 上, 则偏差 $d_i = 0$; 否则, $d_i \neq 0$, 但 d_i 可能大于零也可能小于零, 在相加过程中会相互抵消. 为了

消除符号的影响,我们考虑偏差的平方和 $S(a,b)$ 的极小值.

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

$S(a,b)$ 在总体上刻画了 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 与直线 $y = ax + b$ 的接近程度.
 $S(a,b)$ 越小; A_i 越靠近直线,求 $S(a,b)$ 的最小值以确定 a, b , 从而也就确定了直线 $y = ax + b$ 的方法称为最小二乘法.

下面我们用求二元函数极值的方法来确定 a, b .
因为 S 是 a, b 的二元函数,所以由极值存在的必要条件应有

$$\begin{cases} S'_a = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ S'_b = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0, \end{cases}$$

即得

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases} \quad (7.3)$$

称式(7.3)为最小二乘法标准方程组,并且由式(7.3)可以解得

$$\begin{cases} a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}, \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}. \end{cases} \quad (7.4)$$

将 a, b 代入方程 $y = ax + b$, 即得到所求的经验公式.

例 7.6 某证券公司近几年投资于资本市场的资金额如下表所示:

编号 x	0	1	2	3	4
年份	2002 年	2003 年	2004 年	2005 年	2006 年
投资额	480	530	570	540	580

试求 2007 年投资额的估计值.

解 由式(7.3)有

解得 $a = 21, b = 498$, 于是所求经验公式为 $y = 21x + 498$.

当 $x = 5$ 时, $y = 603$, 即 2007 年投资额的估计值为 603.

3. 条件极值——拉格朗日乘数法

前面所讨论的极值问题,除了限制函数的自变量必须在函数的定义域内变化外并无其他条件,故常称之为无条件极值问题,但在大量实际问题中,会对函数自变量提出若干附加条件,例如求表面积为 a^2 而体积最大的长方体,如果用 x, y, z 分别表示长方体的长、宽、高,用 V 表示其体积,那么这个实际问题就是在附加条件

$$2xy + 2yz + 2zx = a^2$$

的限制下,求函数

$$V = xyz$$

的最大值.像这种对自变量带有附加条件的极值称为条件极值.

一般地,求函数

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

在满足方程组(即附加的限制条件)

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

的所有点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 构成的集合上的极值,即为条件极值,函数方程组(7.5)称为联系方程组或约束条件.

怎样求条件极值呢?对于某些比较简单的情形,可以把条件极值化为无条件极值,然后利用本节开始所讲的方法去求解.例如上面提到的长方体问题,可由附加条件 $2xy + 2yz + 2zx = a^2$, 将 z 表成 x, y 的函数

$$z = \frac{a^2 - 2xy}{2(x + y)}$$

再把它代入 $V = xyz$ 中,于是问题就化为求

$$V = \frac{xy}{2} \left(\frac{a^2 - 2xy}{x + y} \right)$$

的无条件极值.

但是,这种解法并不是对所有的条件极值都是可行的,下面介绍的拉格朗日乘数法是一种直接寻求条件极值的方法.

首先考察二元函数 $z = f(x, y)$ 在附加一个限制条件 $\varphi(x, y) = 0$ 的情况下取

得极值的必要条件. 容易明白, 如果 $z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 取得极值, 那么一定有 $\varphi(x_0, y_0) = 0$. 我们假定 $f(x,y)$ 和 $\varphi(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域内均有连续的一阶偏导数, 且设 $\varphi(x,y) \neq 0$. 由隐函数存在定理可知, 方程 $\varphi(x,y) = 0$ 确定一个具有连续导数的函数 $y=g(x)$, 将其代入 $z=f(x,y)$ 中, 则有

$$z=f(x, g(x)).$$

显然, 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 取得极值, 就相当于一元函数 $z=f(x, g(x))$ 在 $x=x_0$ 取得极值. 由一元可导函数取得极值的必要条件知道

$$\frac{dz}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (1)$$

而另一方面对 $\varphi(x,y)=0$ 用隐函数求导公式, 有

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}.$$

将其代入式(1), 有

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = 0. \quad (2)$$

于是, $\varphi(x_0, y_0) = 0$ 和式(2)就是 $z=f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 条件下在 (x_0, y_0) 取得极值的必要条件.

设 $\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = -\lambda$, 则上述必要条件可改写为

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

另一方面, 如果引进辅助函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

求二元函数 $L(x, y)$ 的无条件极值时, 其必要条件为

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ L'_y(x, y) = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

对于极值点 (x_0, y_0) , 当然应使上二式成立; 且同时使 $\varphi(x_0, y_0) = 0$ 成立, 而它们就是式(7.6). 函数 $L(x, y)$ 称为拉格朗日函数, 参数 λ 称为拉格朗日乘子.

归纳以上讨论, 我们给出以下结论.

拉格朗日乘数法: 设给定二元函数 $z=f(x,y)$ 和附加条件 $\varphi(x,y)=0$. 为寻找 f 在附加条件下的极值点, 先作拉格朗日函数

其中 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, 是不失去一般性, 且且

其中 λ 为参数. 求 $L(x, y)$ 对 x 和 y 的一阶偏导数, 令它们等于零, 并与附加条件联立, 即

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ L'_y(x, y) = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

由上述方程组解出 x, y 及 λ , 如此求得的 (x, y) 就是函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 的可能极值点.

现在, 把上述方法推广到一般情况. 求 n 元函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 m 个附加条件

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n$$

下条件极值的步骤如下.

(1) 由拉格朗日乘数法, 作辅助函数

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, \dots, x_n);$$

(2) 求 $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 关于 x_1, x_2, \dots, x_n 的偏导数, 令它们等于零, 并与各附加条件方程联立, 即

$$\begin{cases} L'_{x_i} = f'_{x_i} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi'_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

求解此方程组. 设解为 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$, 求解过程中可消去 λ_k ($k = 1, 2, \dots, m$), 从而得到函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在附加条件 $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 下可能的极值点 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$;

(3) 由问题的实际意义, 若函数必存在条件极值, 而可能的极值点又是唯一的, 则该点必是所求的极值点.

例 7.7 设生产 z 吨某产品与所用 A, B 两种原料吨数 x, y 之间的关系式为 $z(x, y) = 0.005x^2y$, 现拟向银行贷款 150 万元购买原料, 已知 A, B 两种原料每吨价格分别为 1 万元和 2 万元. 问怎样购进这两种原料可使该产品生产的数量最多?

解 依题意, 问题归结为求函数 $z(x, y) = 0.005x^2y$ 在附加条件 $x + 2y = 150$ 下的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y) = 0.005x^2y + \lambda(x + 2y - 150).$$

求 $L(x, y)$ 关于 x, y 偏导数, 令它们等于零并与 $x + 2y - 150 = 0$ 联立, 得到方程组

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 0.01xy + \lambda = 0, \\ L'_y(x, y) = 0.005x^2 + 2\lambda = 0, \\ x + 2y - 150 = 0. \end{cases}$$

解之,得 $x = 100, y = 25, \lambda = -25$.

因为此问题的最大值是存在的,且驻点 $(100, 25)$ 是唯一的,所以点 $(100, 25)$ 是 $z(x, y)$ 的最大值点. 其最大值是 $z(100, 25) = 1250$. 即当购进原料 A, B 分别为 100 吨和 25 吨时可使产量最大.

习题 8.7

A 类

1. 求下列曲线在指定点的切线方程与法平面方程.

$$(1) x = t - \cos t, y = 3 + \sin 2t, z = 1 + \cos 3t, \text{ 点 } t = \frac{\pi}{2};$$

$$(2) y = x, z = x^2, \text{ 点 } (1, 1, 1);$$

$$(3) x^2 + z^2 = 10, y^2 + z^2 = 10, \text{ 点 } (1, 1, 3).$$

2. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求出一点,使此点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

3. 求下列曲面在指定点的切平面方程与法线方程:

$$(1) z = \arctan \frac{y}{x}, \text{ 点 } \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right);$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 = 169, \text{ 点 } (3, 4, 12).$$

4. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的切平面,使其平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$.

5. 证明:曲面 $xyz = 10$ 上任一点处的切平面与三个坐标面构成的四面体的体积为常数.

6. 证明:曲面 $F(ax - by, cx - bz) = 0$ 上任一点处的切平面都与一常向量平行,其中 a, b, c 为常数.

7. 设 $F(u, v, w)$ 是可微函数,且 $F_u(2, 2, 2) = F_w(2, 2, 2) = 3, F_v(2, 2, 2) = -6$, 曲面 $F(x + y, y + z, z + x) = 0$ 通过 $(1, 1, 1)$ 点,求曲面过该点的法线方程.

8. 求下列函数的极值.

$$(1) z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$$

$$(2) z = x^2 + (y - 1)^2;$$

$$(3) z = (2ax - x^2)(2by - y^2), ab \neq 0;$$

$$(4) z = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)};$$

$$(5) u = (6t - t^2)(4s - s^2).$$

9. 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ 所确定的隐函数的极值.

10. 当 n 个正数 x_1, x_2, \dots, x_n 的和等于常数 l 时,求它们的乘积的最大值,并证明 n 个正数 a_1, a_2, \dots, a_n 的几何平均值小于算术平均值,即

費者數量，每個人的平均費用為 $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

11. 已知三角形的周长为 $2p$, 将它绕其一边旋转而构成一立体, 求使立体体积最大的那个三角形.

12. 某养殖场饲养两种鱼, 若甲种鱼放养 x (万尾), 乙种鱼放养 y (万尾), 收获时两种鱼的收获量分别是

$$(3 - ax - by)x \text{ 和 } (4 - bx - 2ay)y \quad (a > b > 0).$$

求使产鱼总量最大的放养数.

13. 用最小二乘法求与下表给定数据最相合的函数 $y = ax + b$.

x	10	20	30	40	50	60
y	150	100	40	0	-60	-100

14. 已知一组实验数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 现设经验公式为 $y = ax^2 + by + c$, 试按最小二乘法建立 a, b, c 应满足的三元一次方程组.

15. 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 问直线 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ 处在什么样的位置时, 这 n 个点与此直线的偏差的平方和为最小?

16. 求下列函数的条件极值:

$$(1) z = x^2 + y^2, \text{ 附加条件: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

$$(2) z = xy, \text{ 附加条件: } x + y = 1;$$

$$(3) u = x - 2y + 2z, \text{ 附加条件: } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

17. 用拉格朗日乘数法求 $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2$ 在椭圆域

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

上的最大值和最小值.

18. 用求极值的方法求椭圆

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

的长半轴与短半轴.

19. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

20. 当 n 个正数 x_1, x_2, \dots, x_n 之和为常数时, 求它们的乘积的 n 次算术根的最大值.

21. 有电动势为 E 、内电阻为 r 的电池 $4n^2$ 个, 现在把它串联成若干排, 再把各排并联起来, 接入外电阻为 $R = 4r$ 的电路中, 问怎样连接才能使电流达到最大?

22. 某公司可通过电台和报纸两种媒体做销售某产品的广告,根据统计资料销售收入 R (万元)与电台广告费用 x_1 (万元)和报纸广告费用 x_2 (万元)之间的关系有如下经验公式

$$R = 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2$$

- (1) 在广告费用不限的情况下,求最优广告策略;
 (2) 若提供的广告费用为 1.5 万元,求相应的最优广告策略.

B 类

1. 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点,使得函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 沿着点 $A(1, 1, 1)$ 到点 $B(2, 0, 1)$ 方向的方向导数具有最大值.

2. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ ($x, y, z > 0$) 上求一点,使函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 达到最大,且算出其最大值. 利用上述结果证明: $a, b, c > 0$ 时, $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.

3. 证明: 函数 $z = f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值,但无极小值.

4. 证明: $t \geq 1, s \geq 0$ 时,下面的不等式成立:

$$ts \leq t \ln t - t + e^s. \quad (1)$$

5. 试证: $f(x, y) = yx^y(1-x) < e^{-1}$, $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$.

6. 求 $x, y, z > 0$ 时,函数

$$f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$$

在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值. 证明: a, b, c 为正实数时

$$ab^2c^3 < 108 \left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

7. 将长度为 l 的铁丝分为三段,用此三段分别作成圆、正方形和等边三角形,问如何分法,才能使这三个图形的面积之和最小.

(1.1)

第9章 重积分

上一章把一元函数微分学推广到多元函数的微分学. 现在, 我们要把一元函数的定积分推广到多元函数的重积分、曲线积分和曲面积分. 定积分所讨论的是分布在区间上的整体量(如几何量和物理量). 重积分、曲线积分和曲面积分则是讨论分布在平面区域、平面曲线、空间区域、空间曲线或空间曲面上的整体量.

对一元函数的定积分, 我们有微积分学的基本定理——牛顿-莱布尼茨公式. 我们将会看到, 格林公式、高斯公式、斯托克斯公式则是牛顿-莱布尼茨公式在多元函数积分学中的重要推广.

在本章, 我们将学习重积分(二重积分和三重积分)的概念、性质、计算方法以及重积分在几何和物理上的应用.

§1 二重积分

1.1 二重积分的概念

先考察一个几何问题: 求曲顶柱体的体积 V . 所谓曲顶柱体是指这样的立体图形: 它的底面是 xy 平面上的一个有界闭区域 D , 顶面是由定义在 D 上的非负连续函数 $z=f(x,y)$ 所表示的曲面, 侧面是以 D 的边界曲线 ∂D 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面.

为计算曲顶柱体体积 V , 把区域 D 分割成 n 个小区域, 记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 同时也用这些记号表示小区域的面积. 以每一个小区域 $\Delta\sigma_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的边界为准线, 以平行于 z 轴的直线为母线作柱面, 这样就把原曲顶柱体分割成 n 个细小的曲顶柱体(图 9.1). 由于函数 $z=f(x,y)$ 是连续的, 当 $\Delta\sigma_i$ 适当小时, 在 $\Delta\sigma_i$ 上曲顶柱体的高度 $z=f(x,y)$ 变化不大, 我们可以近似地认为每一小曲顶柱体是一平顶柱体, 其体积等于底面积 \times 高, 即 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, 其中 (ξ_i, η_i) 是 $\Delta\sigma_i$ 中的任一点(图 9.2). 于是 n 个小平顶柱体体积的总和可作为 V 的近似值:

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

记 $d_i = \sup_{M_1, M_2 \in \Delta\sigma_i} |M_1 - M_2|$, d_i 称为 $\Delta\sigma_i$ 的直径. 再记 $\lambda = \max_{i=1, 2, \dots, n} d_i$. 当 $\lambda \rightarrow 0$, 即分割越“细密”时, 这个近似值越趋近于(严格地说是用极限过程定义)原曲顶柱体

的体积,即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i. \quad (1.1)$$

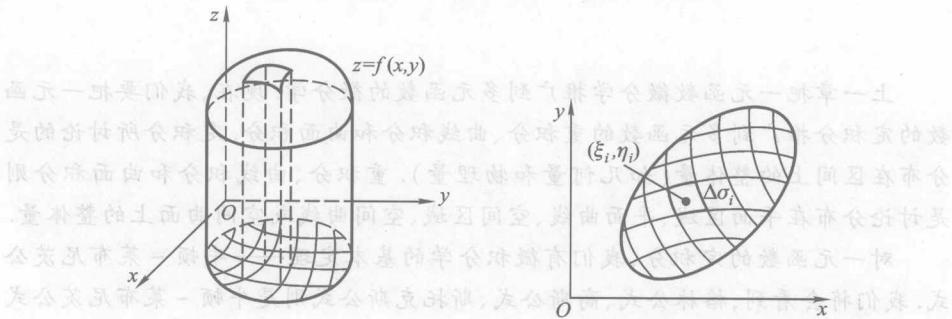


图 9.1
图 9.2

再考察一个物理问题:设有一平面薄片占有 xy 平面上的闭区域 D , 它在点 $(x, y) \in D$ 处的面密度为 $\rho(x, y)$, 其中 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续且为正. 我们也可以用类似的分析方法(分割、近似、作和、取极限)得出平面薄片的质量

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中 (ξ_i, η_i) 是在小块 $\Delta\sigma_i$ 上任取的一点.

上面两个具体问题是完全不同的,但解决问题的方法是一样的. 若抽去 $f(x, y), \rho(x, y)$ 的实际含义,不论是体积 V ,还是质量 m ,它们在数量关系上都是二元函数在有界闭区域 D 上的某种确定和式的极限. 由此我们引出二重积分的定义.

定义 1.1 设 $f(x, y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的二元函数. 将 D 分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ (同时用 $\Delta\sigma_i$ 表示该小区域的面积), 在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

我们称它为黎曼(Riemann)和. 记 $\lambda = \max_{i=1, 2, \dots, n} d_i$ (d_i 表 $\Delta\sigma_i$ 的直径). 如果无论区域 D 怎样分割与点 (ξ_i, η_i) 怎样取法, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 黎曼和总有同一极限 I , 则称二元函数 $f(x, y)$ 在 D 上(黎曼)可积, 记作 $f \in R(D)$, 并称此极限 I 为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记为

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, D 称为积分区域, $d\sigma$ 称为二重积分的面积元素(也

有人称为面积微元).

由二重积分的定义可知:

1. 若 $f \in R(D)$, 则 f 在 D 上必有界.

2. 曲顶柱体的体积 V 是曲顶上的点的竖坐标 $z = f(x, y)$ 在底区域 D 上的二重积分, 即

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

3. 薄片的质量 m 是面密度 $\rho = \rho(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 即

$$m = \iint_D \rho(x, y) d\sigma.$$

从直观上看, 曲顶为连续曲面或分片连续曲面的柱体一定有确定的体积. 一般而言, 我们可以证明: 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续或分片连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积(证明从略).

当 $f \in R(D)$ 时, 其积分值与分割方法无关, 所以为计算方便, 我们可以采取特殊的分割方法. 例如, 在直角坐标系中, 可用平行于坐标轴的直线网来分割区域 D . 这时, 小矩形区域的面积(用统一的写法) $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y$, 而面积元素 $d\sigma = dx dy$. 于是, 在直角坐标系中, 常把二重积分写为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

1.2 二重积分的性质

定义二重积分的思想方法与一元函数的定积分是一致的. 读者不难用二重积分定义证明, 一元函数定积分的几乎所有性质都可以推广到二重积分. 现将这些性质叙述于下.

1. (线性性) 若 $f, g \in R(D)$, 则 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$\iint_D [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] d\sigma = c_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + c_2 \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

2. (对区域的可加性) 若区域 D 被分成内部不相交的两个有界区域 D_1 和 D_2 , 又 $f \in R(D_1)$, $f \in R(D_2)$, 则 $f \in R(D)$, 且

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

3. 设 $f(x, y) \equiv 1$, 则

$$\iint_D d\sigma = \iint_D 1 d\sigma = D \text{ 的面积.}$$

4. (保序性) 若 $f, g \in R(D)$, 且在 D 上有 $f(x, y) \geq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

5. (估值定理) 设 $f \in R(D)$, m, M 分别是 f 在有界闭区域 D 上的最小值和最大值, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma,$$

其中 σ 是 D 的面积.

例 1.1 估计二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ 的值所在范围, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

解 因 D 的面积 $\sigma = \pi$, 在 D 上有 $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$. 从而

$$0 \leq \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \leq 2 \iint_D d\sigma,$$

故有

$$0 \leq \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \leq 2\pi.$$

6. (绝对可积性) 若 $f \in R(D)$, 则 $|f| \in R(D)$, 且

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

7. (积分中值定理) 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, σ 是闭区域 D 的面积, 则 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma.$$

事实上, 若把估值定理中的不等式遍除以面积 σ , 则有

$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M.$$

此式说明数值 $\frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$ 介于函数 $f(x, y)$ 的最大值 M 与最小值 m 之间, 根据连续函数的介值定理, 在 D 上必存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta).$$

从而

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma.$$

二重积分的中值定理有明显的几何意义: 给定一个顶部曲面连续的曲顶柱体, 必存在一个以曲顶柱体的底 D 为底, 以 D 内某一点 (ξ, η) 的函数值 $f(\xi, \eta)$ 为高的平顶柱体, 其体积等于该曲顶柱体的体积.

例 1.2 设 $f(x, y)$ 是连续函数, $I(R) = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} f(x, y) d\sigma$, 求 $\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{I(R)}{R^2}$.

解 当 $f(x, y)$ 为常数 c 时, $I(R) = c\pi R^2$, 此时, $\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{I(R)}{R^2} = c\pi$. 当 $f(x, y)$ 不为常数时, 由积分中值定理得 $I(R) = f(\xi, \eta) \cdot \pi R^2$, 其中 (ξ, η) 是圆域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 上某一点. 当 $R \rightarrow 0^+$ 时, $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$, 于是由 $f(x, y)$ 的连续性, 得

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{I(R)}{R^2} = \lim_{R \rightarrow 0^+} f(\xi, \eta) \pi = f(0, 0) \pi.$$

8. (二重积分的对称性定理)

(1) 如果积分区域 D 关于 x 轴对称, $f(x, y)$ 为 y 的奇(偶)函数, 此时, 在二重积分的和式中选取特殊的对称分割和对称取点, 则容易发现:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数, 即 } f(x, -y) = -f(x, y), \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数, 即 } f(x, -y) = f(x, y), \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴的上半平面部分.

(2) 如果 D 关于 y 轴对称, $f(x, y)$ 为 x 的奇(偶)函数, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数, 即 } f(-x, y) = -f(x, y), \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数, 即 } f(-x, y) = f(x, y), \end{cases}$$

其中 D_2 为 D 在 y 轴的右半平面部分.

(3) 如果 D 关于原点对称, $f(x, y)$ 同时为 x, y 的奇(偶)函数, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 是 } x, y \text{ 的奇函数, 即 } f(-x, -y) = -f(x, y), \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f \text{ 是 } x, y \text{ 的偶函数, 即 } f(-x, -y) = f(x, y), \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的上半平面部分.

(4) 如果 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma.$$

利用二重积分的对称性定理可减少计算量. 但要注意, 仅当积分区域 D 的对称性与被积函数 $f(x, y)$ 的奇偶性两者都满足时才能利用此对称性定理.

例 1.3 试估计二重积分

$$I = \iint_D (y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma$$

的值所在的范围, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

解 因为 D 的面积等于 π , 且在 D 上有 $-1 \leq y \leq 1, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$, 所以 $-1 \leq y^3 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$. 再利用积分估值定理, 便得到 I 的所在范围:

可否估计得更精确些? 事实上, 容易发现 D 关于 x 轴对称, 而 y^3 是 y 的奇函数, 故由对称性定理可知 $\iint_D y^3 d\sigma = 0$. 从而 $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$. 利用例 1.1 的结果可知

$$\pi(0,0) = -\frac{\pi}{2} \leq I \leq \frac{\pi}{2}$$

9. (二重积分对区域的导数) 在一元函数积分学中, 变上限积分对上限的导数等于被积函数在上限的值. 这一事实反映了微分与积分之间的内在联系, 对于二重积分来说, 也有类似的结果.

设 $f(x, y)$ 是区域 D 上的连续函数, ΔD 是 D 内包含定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的有界闭子域, 由积分中值定理有

$$\iint_{\Delta D} f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma_{\Delta D},$$

其中 $(\xi, \eta) \in \Delta D$, $\sigma_{\Delta D}$ 是 ΔD 的面积. 当 ΔD 的直径 $d \rightarrow 0$ 时, 便有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_{\Delta D}} \iint_{\Delta D} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} f(\xi, \eta) = f(x_0, y_0).$$

这个极限过程与证明变上限积分对上限求导的极限过程是类似的. 所以我们把上面的极限叫做二重积分在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对区域的导数. 因此, 我们有结论: 一个连续函数的二重积分在点 P 处对区域的导数等于其被积函数在该点的值.

1.3 在直角坐标系下计算二重积分

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的方法是把二重积分化为两次定积分来计算.

其关键是根据积分区域 D 的边界选定两个积分次序, 并确定出两个积分的上、下限. 下面我们用几何直观给出上述计算方法的说明.

设积分区域 D 可以用不等式: $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$ 表示 (图 9.3), 其中 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 是两条连续曲线 (常称这样的平面区域 D 为“简单区域”).

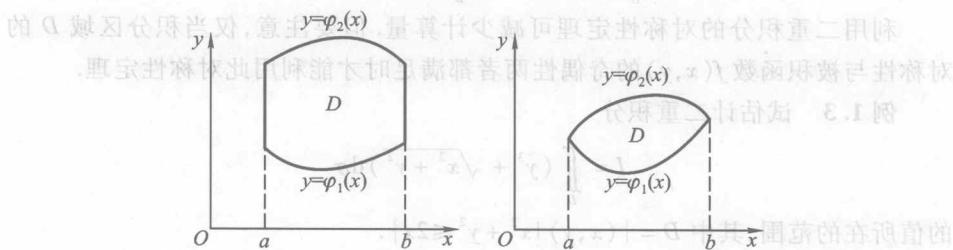


图 9.3

如果 $f(x, y)$ 在 D 上连续且 $f(x, y) \geq 0$, 那么由二重积分的几何意义知 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示以 D 为底面, 以 $z = f(x, y)$ 为顶面的曲顶柱体体积. 下面我们用“切片法”计算曲顶柱体的体积 V (图 9.4). 注意到平面 $x = x_0$ 与曲顶柱体相交所得的截面 $A(x_0)$ 是一个以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底, 以 $z = f(x_0, y)$ 为高的曲边梯形, 它平行于 yz 平面, 其面积等于积分

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

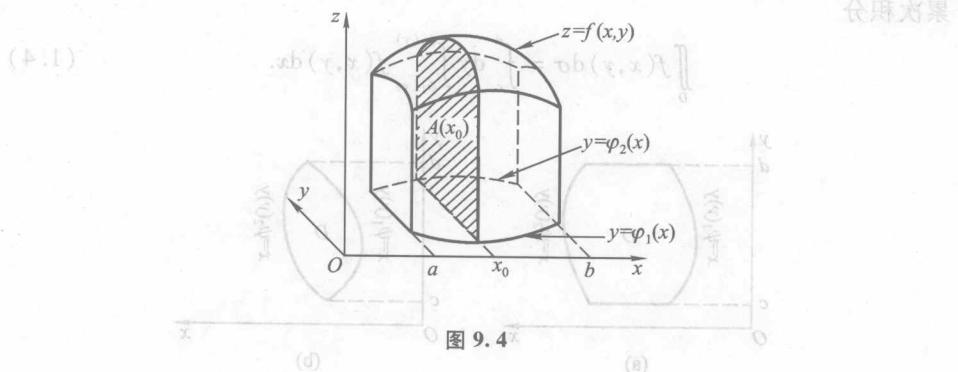


图 9.4

对于每一点 $x \in [a, b]$, 都有一个截面面积

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

与之对应. 于是应用计算“平行截面面积为已知的立体体积”的方法, 便可得到曲顶柱体体积

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

另一方面, 由二重积分的几何意义, 我们已经知道

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

从而有等式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (1.2)$$

于是, 计算上式左端二重积分的问题可以转化为计算等式右端的累次积分(也称为二次积分). (1.2)式右端的累次积分实际上是计算两次定积分: 先把 x 看作常数, 对 y 计算定积分 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ (积分的下、上限是由 D 的下边界到上边界), 然后再对 x 计算在区间 $[a, b]$ 上的定积分. 这种先对 y 后对 x 的累次积分也常记作

因此, 公式(1.2)也常写为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.3)$$

同样, 如果积分区域 D 可表示为 $D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$, 其中 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 是连续函数(图 9.5), 则当被积函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续且非负时, 二重积分可化为先对 x (积分限是由 D 的左边界到 D 的右边界) 后对 y 的累次积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (1.4)$$

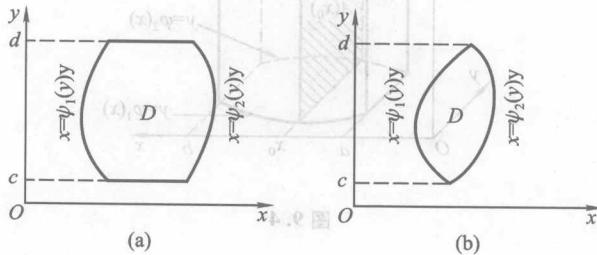


图 9.5

上述计算公式(1.3)和(1.4)都是对于一种特殊情形(即 $f(x, y) \geq 0$)得到的. 对于一般的连续函数, 只要取

$$f_1(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}, f_2(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2},$$

就有
因而

$$f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y).$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f_1(x, y) d\sigma - \iint_D f_2(x, y) d\sigma,$$

由于 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ 都是非负的, 从而可知上式左端的二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 也可以化为累次积分. 于是, 对一般情形, 我们有如下定理(不作严格证明).

定理 1.1 设 D 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界闭区域, 且可以表示为

$D: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \end{cases}$

其中 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 又设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

读者可类似写出与 $f(x, y)$ 在 D 上先对 x 后对 y 的累次积分计算公式.

当积分区域 D 不是“简单区域”时,通常总可

以把 D 分解为若干个“简单区域”,如图 9.6. 在每一个小区域上积分,再利用积分对区域的可加性,便得到区域 D 上的积分.

例 1.4 求椭圆抛物面 $z = 3 - 4x^2 - y^2$ 与平面 $z = 2$ 所围成的空间立体 Ω 的体积.

解 消去方程组

$$\begin{cases} z = 3 - 4x^2 - y^2, \\ z = 2 \end{cases}$$

中的 z ,得此椭圆抛物面与平面 $z = 2$ 的相交曲线

在 xy 平面上的投影曲线方程 $4x^2 + y^2 = 1$. 记此椭圆所包围的区域为 D , D 在第一象限的区域为 D_1 (图 9.7 和图 9.8). 所求体积应为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(3 - 4x^2 - y^2) - 2] dx dy \\ &= \iint_D (1 - 4x^2 - y^2) dx dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2) dy. \end{aligned}$$

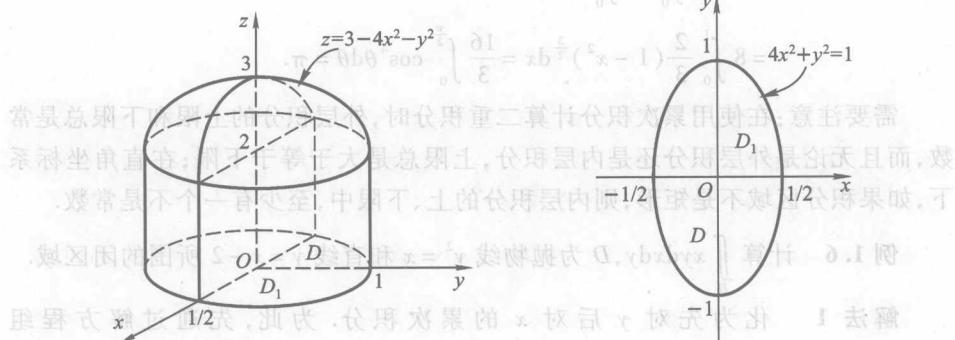


图 9.7

图 9.8

无论由 Ω 的对称性还是由偶函数定积分的性质以及上式,都得到这样的结论: Ω 的体积等于 Ω 在第一卦限部分图形体积的 4 倍(因积分区域对称,被积函数对称),即

$$V = 4 \iint_{D_1} (1 - 4x^2 - y^2) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2) dy \\
 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left((1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} dx \quad \left(\text{令 } x = \frac{1}{2} \sin t \right) \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

例 1.5 求由曲面 $z_1 = 2 - x^2 - y^2$ 与 $z_2 = x^2 + y^2$ 所围成的空间体的体积.

解 两曲面交线在 xy 平面上的投影曲线方程为 (图 9.9)

即单位圆 $x^2 + y^2 = 1$. 记 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 故所求体积

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (z_1 - z_2) d\sigma = \iint_D [(2 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)] d\sigma \\
 &= 2 \iint_D (1 - x^2 - y^2) d\sigma \\
 &= 4 \times 2 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy \\
 &= 8 \int_0^1 \frac{2}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \pi.
 \end{aligned}$$

需要注意: 在使用累次积分计算二重积分时, 外层积分的上限和下限总是常数, 而且无论是外层积分还是内层积分, 上限总是大于等于下限; 在直角坐标系下, 如果积分区域不是矩形, 则内层积分的上、下限中, 至少有一个不是常数.

例 1.6 计算 $\iint_D xy dxdy$, D 为抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $y = x - 2$ 所围的闭区域.

解法 1 化为先对 y 后对 x 的累次积分. 为此, 先通过解方程组 $\begin{cases} y = -\sqrt{x}, \\ y = x - 2 \end{cases}$, 求出交点 $(1, -1)$, 然后用直线 $x = 1$ 将 D 分为

$$D_1 = \{(x, y) \mid -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$$

和 $D_2 = \{(x, y) \mid x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4\}$

两部分 (图 1.10(a)). 于是

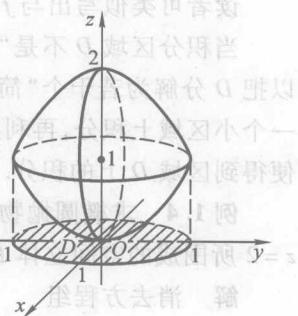


图 9.9

$$\iint_D xy \, dxdy = \iint_{D_1} xy \, dxdy + \iint_{D_2} xy \, dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy \, dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy \, dy$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \int_1^4 x [x - (x-2)^2] \, dx = \frac{45}{8}.$$

由图知 $D = D_1 \cup D_2$, 其中 D_1 为第一象限内由直线 $y=x$ 及 $y=-\sqrt{x}$ 所围成的区域; D_2 为第一象限内由直线 $y=x-2$ 及 $y=\sqrt{x}$ 所围成的区域.

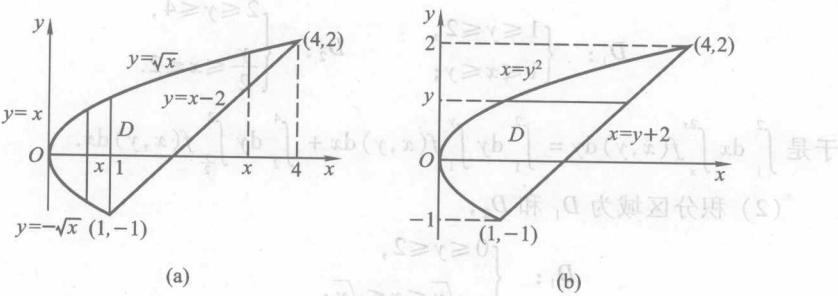


图 9.10

解法 2 化为先对 x 后对 y 的累次积分, 此时 D 可统一表示为(图 9.10(b))

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq y+2, -1 \leq y \leq 2\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dxdy &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y [(y+2)^2 - y^4] \, dy = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

显然第二种解法简单.

例 1.7 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x} \, dxdy$, D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域.

解 因为 $\int \frac{\sin x}{x} \, dx$ 不能用有限形式表示出其结果, 所以不能先对 x 积分, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx \int_{x^2}^x dy = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) \, dx \\ &= \int_0^1 (1-x) \sin x \, dx = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

例 1.8 设 $f(x, y)$ 连续, 改变下列积分次序.

$$(1) \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) \, dy;$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) \, dx.$$

解 (1) 积分区域为

$$D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x \leq y \leq 2x, \end{cases}$$

即 D 由 $y = x, y = 2x, x = 1, x = 2$ 四条直线所围成(见图 9.11).

若改成先对 x 后对 y 积分,用直线 $y = 2$ 把 D 分成 D_1 和 D_2 两部分:

$$D_1: \begin{cases} 1 \leq y \leq 2, \\ 1 \leq x \leq y; \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} 2 \leq y \leq 4, \\ \frac{y}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

于是 $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx.$

(2) 积分区域为 D_1 和 D_2 ,

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2, \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}; \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} 2 \leq y \leq 4, \\ -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y}. \end{cases}$$

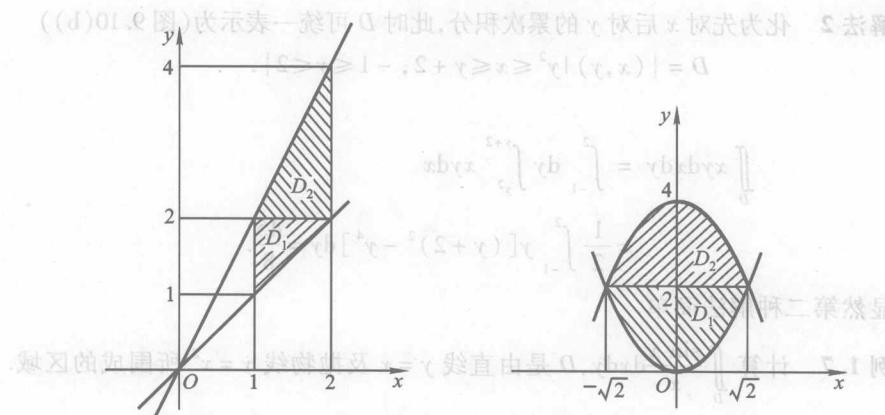


图 9.11

图 9.12

令 $D = D_1 \cup D_2$, 则 D 是由曲线 $y = x^2$ 与 $y = 4 - x^2$ 所围成(见图 9.12). D 可表示成

$$D: \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ x^2 \leq y \leq 4 - x^2. \end{cases} \quad (1)$$

于是

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x, y) dy. \quad (2)$$

例 1.9 计算积分

$$I = \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy, \quad D: \begin{cases} |x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

心同解 $I = \iint_{D_1} \sqrt{|y-x^2|} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{|y-x^2|} dx dy$ (D_1, D_2 如图 9.13)

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (y-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x^2}^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (x^2-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{3} |x|^3 dx = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

注 对带绝对值符号的被积函数须将积分区域作分析处理.

例 1.10 计算积分 $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$.

解 这是一个求定积分的问题, 但其原函数难以求出. 如果注意到

$$\frac{x-1}{\ln x} = \int_0^1 x^y dy.$$

我们可令 $f(x, y) = x^y$. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^y = 0$ ($y > 0$), $\lim_{y \rightarrow 0^+} x^y = 1$ ($x > 0$), 所以 $f(x, y)$ 在正 y 轴上取值为零, 在正 x 轴上取值为 1. 从而可知它只在点 $(0, 0)$ 处不连续, 而在正方形区域 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上 $x^y \leq 1$, 故 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 符合重积分化为累次积分的条件. 故有

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \iint_D x^y dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 \frac{dy}{1+y} = \ln 2.$$

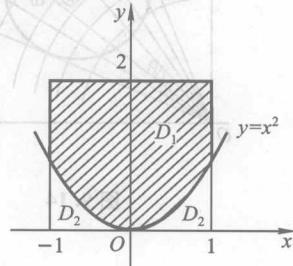


图 9.13

1.4 在极坐标系下计算二重积分

和定积分一样, 换元积分在二重积分计算中也有重要作用. 有些二重积分, 其积分区域 D 的边界曲线用极坐标方程表示比较方便, 其被积函数用极坐标变量 r, θ 表达也比较简单, 此时, 我们就可以考虑用极坐标来计算二重积分.

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

(1) 在直角坐标系 Oxy 中, 取原点作极坐标系的极点, 取正 x 轴为极轴, 则点 P 的直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, θ) 之间有关系式

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan \frac{y}{x}. \end{cases}$$

在极坐标系下计算二重积分,需将被积函数 $f(x, y)$ 、积分区域 D ,以及面积元素 $d\sigma$ 都用极坐标来表示. 函数 $f(x, y)$ 的极坐标形式为 $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, 为得到极坐标系下的面积元素 $d\sigma$, 我们用坐标曲线网去分割区域 D , 即用一族同心圆 $r = \text{常数}$ 和一族以极点 O 为起点的射线 $\theta = \text{常数}$ 将区域 D 分割成 n 个小区域(图 9.14). 设 $\Delta\sigma$ 是从 r 到 $r + dr$ 和从 θ 到 $\theta + d\theta$ 之间的小区域(图 9.15). 则其面积为

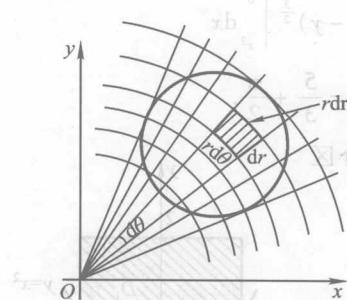


图 9.14

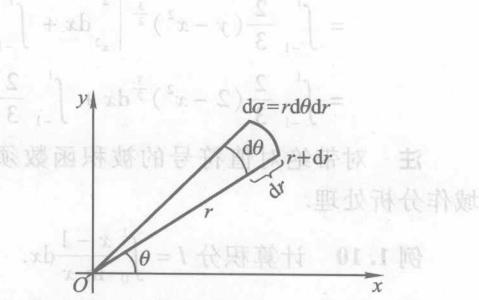


图 9.15

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} (r + dr)^2 d\theta - \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$= r dr d\theta + \frac{1}{2} (dr)^2 d\theta.$$

当 dr 和 $d\theta$ 都充分小时, 可略去比 $dr d\theta$ 更高阶的无穷小, 得 $\Delta\sigma$ 的近似公式

$$\Delta\sigma \approx r dr d\theta,$$

于是得到极坐标系下的面积元素

$$d\sigma = r dr d\theta.$$

假定积分区域 D 在极坐标系下表示为 D' , 则得到二重积分在极坐标系下的表示式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

在极坐标系下计算二重积分依然是化为累次积分. 下面按积分区域 D 的三种情形来讨论.

1. 如果 D 由射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta (\beta > \alpha)$, 连续曲线 $r = r_1(\theta)$ 和 $r = r_2(\theta)$ ($r_2(\theta) \geq r_1(\theta)$) 围成, 极点 O 不在区域 D 内部(图 9.16(a), (b)). 此时, D 可表示为

$$D: \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta, \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta). \end{cases}$$

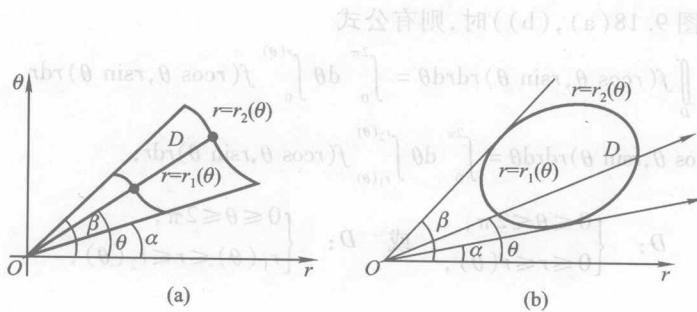


图 9.16

则

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (1.5)$$

事实上,作一个以 r 为横轴,以 θ 为纵轴的直角坐标系,就可以得到区域 D 在 $r\theta$ 平面上的图形,它是一个曲边矩形: $D = \{(r, \theta) | r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$. 因此,容易把二重积分 $\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ 化为先对 r 积分,再对 θ 积分的累次积分,即公式(1.5).

2. 当极点 O 在区域 D 的边界曲线 $r=r(\theta)$ 上(图 9.17(a),(b))时,则有计算公式

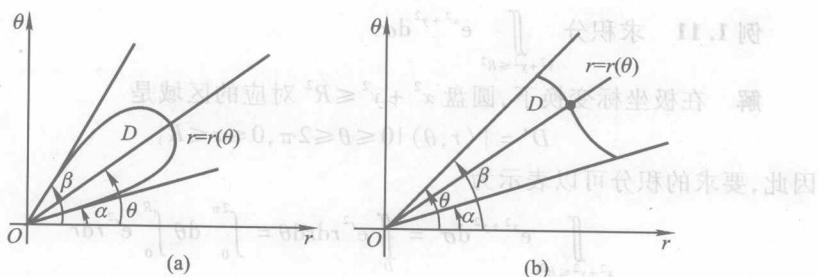


图 9.17

其中 $r=r(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

3. 当极点 O 在区域 D 内部, D 的边界是连续曲线 $r=r(\theta)$,或极点在 D 的

内边界内(图9.18(a),(b))时,则有公式

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr,$$

$$\text{或 } \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr,$$

其中

$$D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq r(\theta), \end{cases} \quad \text{或} \quad D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \end{cases}$$

(d)

(e)

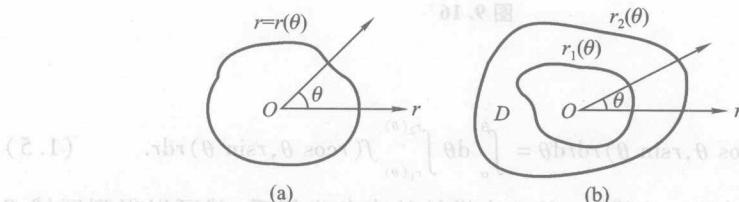


图 9.18

从图9.18可知,在极坐标系下,圆盘、圆环、扇形、曲边扇形等都可以表示为一个区域,且其面积计算公式为 $\iint_D r dr d\theta$ 。图9.18(b)所示的区域D是圆环形的,由两个同心圆的外侧部分组成,内圆半径为 $r_1(\theta)$,外圆半径为 $r_2(\theta)$ 。

(1) 积分区域 D 是圆盘、圆环、扇形、曲边扇形等;

(2) 被积函数有形式 $f(x^2 + y^2)$ 或 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 。

例 1.11 求积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{x^2+y^2} d\sigma$.

解 在极坐标变换下,圆盘 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 对应的区域是

$$D' = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R\}.$$

因此,要求的积分可以表示为

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{x^2+y^2} d\sigma &= \iint_{D'} e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{r^2} r dr \\ &= \pi(e^{R^2} - 1). \end{aligned}$$

例 1.12 将 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为极坐标系下的累次积分,其中 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \text{ 且 } (x-a)^2 + y^2 \geq a^2, 0 < a < 2\}$ 。

解 圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 与 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ 的图形如图9.19,而其相应的极坐标方程为

$$r_2 = 4 \cos \theta, \quad r_1 = a \sqrt{1 - \sin^2 \theta}, \quad 0 < a < 2.$$

式因 $r_1 = 2a \cos \theta$, 时 θ 在 $[\pi, 0]$ 时被冲, 意者

$$\left[\frac{\pi}{2}, 0 \right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

域 D 在极坐标系下可表示为

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid 2a \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

于是

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a \cos \theta}^{4 \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

例 1.13 计算 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} d\sigma$, 其中

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

解 本题的积分区域 D 是圆心在 $(0, \frac{1}{2})$, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆域(包括边界, 如图 9.20). 域 D 在极坐标系下可表示为

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi \right\}.$$

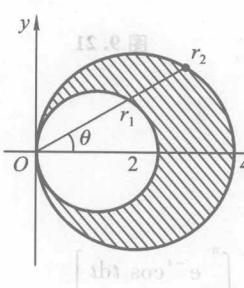


图 9.19

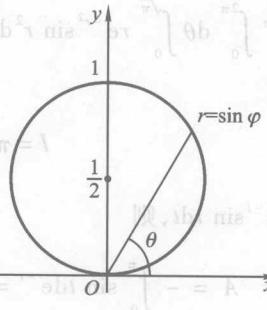


图 9.20

于是,

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sin \theta} d\theta \\ &\geq -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \theta - 1) d\theta - \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos^3 \theta - 1) d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

注意, 此处在 $[0, \pi]$ 上对 θ 积分必须分段, 因为

$$\sqrt{\cos^2 \theta} = \begin{cases} \cos \theta, & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -\cos \theta, & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

当然, 如果利用对称性, 就可避免上面可能的出错之处, 即

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} d\sigma = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} r dr.$$

本题积分值的几何意义是图 9.21 所示的曲顶柱体的体积(曲顶是球心在原点, 半径为 1 的球面).

例 1.14 计算

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2+y^2) dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \pi\}$.

解 用极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则有

$$\begin{aligned} I &= e^{-\pi} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy \\ &= e^{-\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} r e^{-r^2} \sin r^2 dr. \end{aligned}$$

令 $t = r^2$, 则

$$I = \pi e^{-\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt.$$

记 $A = \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt$, 则

$$\begin{aligned} A &= - \int_0^{\pi} \sin t de^{-t} = - \left[e^{-t} \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-t} \cos t dt \right] \\ &= - \int_0^{\pi} \cos t de^{-t} = - \left[e^{-t} \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \right] \\ &= e^{-\pi} + 1 - A. \end{aligned}$$

因此

$$A = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}), \quad I = \frac{\pi}{2} e^{-\pi} (1 + e^{-\pi}) = \frac{\pi}{2} (1 + e^{-\pi}).$$

例 1.15 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1}{xy} dx dy$, 其中积分区域 D 由不等式

$$2 \leq \frac{x}{x^2+y^2} \leq 4, \quad 2 \leq \frac{y}{x^2+y^2} \leq 4$$

所确定.

解 化为极坐标时, 区域 D 可表示为

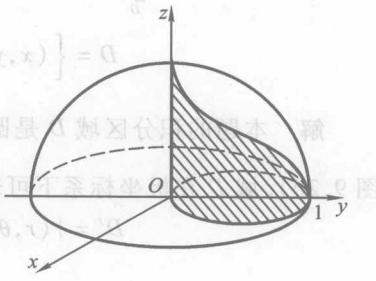
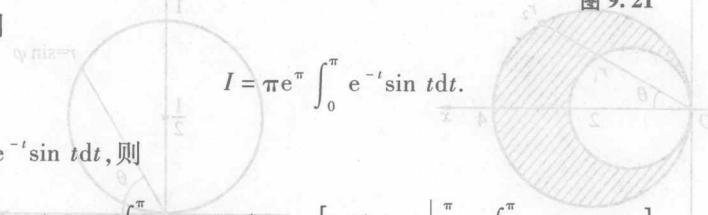


图 9.21



$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{4} \cos \theta \leq r \leq \frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{4} \sin \theta \leq r \leq \frac{1}{2} \sin \theta \right\},$$

它表示如图 9.22 中四个圆在第一象限所围的部分. 注意到积分区域及被积函数都关于直线 $y = x$ 对称, 所以只需计算其一半, 再 2 倍即可.

易知在圆 $r = \frac{1}{2} \sin \theta$ 与圆 $r = \frac{1}{4} \cos \theta$ 的交点

A 处, $\theta = \arctan \frac{1}{2}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy \, dxdy = 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{4} \cos \theta}^{\frac{1}{2} \sin \theta} r dr \\ &= 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin \theta \ln \left| \frac{\frac{1}{2} \sin \theta}{\frac{1}{4} \cos \theta} \right| d\theta \\ &= 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan \theta} \ln(2 \tan \theta) dtan \theta \\ &= (\ln 2)^2. \end{aligned}$$

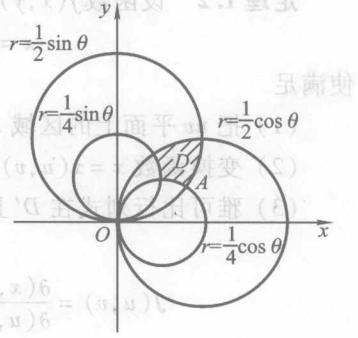


图 9.22

从本节 1.3 和 1.4 的讨论, 不难看出在计算二重积分时, 坐标系的选择不仅要看积分区域 D 的形状, 有时也需参考被积函数的形式. 下面是几种典型情况的选择方法.

坐标系	积分区域 D 形状	被积函数形式	面积元素 $d\sigma$	变量替换	积分表达式
直角坐标系	D 为矩形、三角形或任意形	$f(x, y)$	$d\sigma = dx dy$	/	$\iint_D f(x, y) \, dxdy$
极坐标系	D 为圆域	$f(r, \theta)$	$d\sigma = r dr d\theta$	$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 其中 $f(M) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$	$\iint_D f(M) r dr d\theta$
	环域	$f(r^2)$ 或 $f\left(\frac{y}{x}\right)$	$d\sigma = r dr d\theta$		
	扇域	$f\left(\frac{x}{y}\right)$	$d\sigma = r dr d\theta$		
	环扇域				

1.5 二重积分的一般换元公式

定积分的换元(也叫变量替换)在计算定积分时有着重要的作用, 它能使积分变得容易. 设函数 $f(x)$ 在区间 $I = [a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $J = [\alpha, \beta]$ 上连续可导, 且对一切 $t \in J, \varphi'(t) \neq 0, I = \varphi(J)$, 则有定积分换元公式

$$\left\{ \theta \mid \frac{1}{2} \geq \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right\} = \emptyset$$

【二重积分也有换元技巧,其目的是把被积函数和积分区域简化,使之便于计算累次积分。】

定理 1.2 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 做变换

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

使满足

- (1) 把 uv 平面上的区域 D' 一一对应于 xy 平面上的区域 D ;
- (2) 变换函数 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在 D' 上有连续的一阶偏导数;
- (3) 雅可比行列式在 D' 上处处不等于 0, 即

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in D',$$

则有换元公式

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(x, y)| du dv. \quad (1.6)$$

(定理的证明从略). 【由于本节二重积分的计算方法与一元函数的计算方法本质上是一致的, 因此这里主要说明如何利用雅可比行列式来计算二重积分。】

这里要补充说明一点, 如果雅可比行列式 $J(u, v)$ 只在 D' 内的个别点上, 或一条曲线段上为零, 而在其他点上不为零, 那么换元公式(1.6)依然成立.

当变换为极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 时,

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

它仅在 $r=0$ 处为零, 故不论闭区域 D' 是否含有极点, 换元公式都成立, 即有

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta,$$

其中 D' 是 D 在直角坐标 $r\theta$ 平面上的对应区域. 它与我们在本节 1.4 段中所推导的公式完全一致. 从而不难理解雅可比行列式的几何意义.

例 1.16 计算二重积分 $\iint_D (x+y)^2(x-y)^2 dxdy$, 其中 D 为 $x+y=1, x+y=3, x-y=-1$ 及 $x-y=1$ 所围成的区域.

解 作变换 $\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \frac{1}{2}(u-v), \end{cases}$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}, \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2},$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

故 $\iint_D (x+y)^2(x-y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D'} u^2 v^2 du dv$, 其中 $D' = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 3, -1 \leq v \leq 1\}$ 是一个矩形. 因此

$$\iint_D (x+y)^2(x-y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_{-1}^1 u^2 v^2 dv = \frac{26}{9}.$$

例 1.17 求椭球体的体积.

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

由于对称性, 只需求出椭球在第一卦限的体积, 然后再乘以 8 即可.

作广义极坐标变换

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

(这里 $a > 0, b > 0, 0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$). 这时椭球面化为

$$z = c \sqrt{1 - \left[\frac{(\cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \theta)^2}{b^2} \right]} = c \sqrt{1 - r^2},$$

又

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = abr,$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} V &= \iint_D z(x, y) d\sigma = \iint_{D_{r\theta}} z(r, \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (c \sqrt{1 - r^2}) abr dr = \frac{\pi}{2} abc \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{\pi}{2} abc \left[\frac{2}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} abc \left(-\frac{1}{2} \sqrt{1 - r^2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} abc \left[\frac{2}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} abc. \end{aligned}$$

所以椭球体积

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{\sqrt{6}}{96}, V = \frac{4\pi}{3} abc = \frac{\sqrt{6}}{96}, \frac{1}{\Sigma} = \frac{\sqrt{6}}{96}$$

特别当 $a = b = c = R$ 时, 得到以 R 为半径的球体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3$.

例 1.18 计算无穷限积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

解 这是一个有趣的例子. 我们知道, e^{-x^2} 的原函数是不可以用初等函数来表达的. 因此, 若局限在一元函数之内, 这个无穷限积分的值是无法直接得到的. 但注意到在二重积分的换元公式中, 由于有雅可比行列式的出现, 就有可能使被积函数变成其原函数能够求出的新形式.

对任意 $a > 0$, 考虑正方形 $D = [-a, a] \times [-a, a]$ 上的二重积分

$$I(a) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_D e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy.$$

将其化为累次积分后, 有

$$I(a) = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 = 4 \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2.$$

另一方面, 易知圆盘 $R_1: x^2 + y^2 \leq a^2$ 被 D 完全包含在内, 而圆盘 $R_2: x^2 + y^2 \leq 2a^2$ 完全包含着 D (图 9.23), 于是可得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq 4 \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 2a^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

利用极坐标换元公式, 有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr = \pi (1 - e^{-a^2}).$$

$$\text{同理 } \iint_{x^2+y^2 \leq 2a^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi (1 - e^{-2a^2}).$$

从而有

$$\pi (1 - e^{-a^2}) \leq I(a) \leq \pi (1 - e^{-2a^2}),$$

即

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi (1 - e^{-a^2})} \leq \int_0^a e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} \sqrt{\pi (1 - e^{-2a^2})}.$$

再利用两边夹取极限, 便得到概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 1.19 求 $I = \iint_D \max\{x, y\} e^{-x^2-y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$.

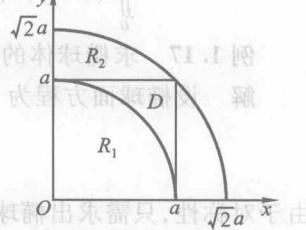


图 9.23

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D ye^{-x^2-y^2} d\sigma + \iint_D xe^{-x^2-y^2} d\sigma \\
 &\quad \text{其中 } 0 < x \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_x^{+\infty} ye^{-y^2} dy + \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{+\infty} xe^{-x^2} dx \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_x^{+\infty} ye^{-y^2} dy \quad \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx \right) \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right) \Big|_x^{+\infty} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (\sqrt{2}x = t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

注 对分段函数(如 $\max\{x, y\}$, $\min\{x, y\}$)需将积分区域 D 作分析处理.

习题 9.1

- 按定义计算二重积分 $\iint_D xy dxdy$, 其中 $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
- 试确定二重积分 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2) dxdy$ 的正负号.
- 计算 $I = \iint_D x[1+yf(x^2+y^2)] d\sigma$, 其中 D 由 $y=x^2$, $y=1$, $x=-1$ 所围成, f 是 D 上的连续函数.
- 利用二重积分的性质, 估计积分 $\iint_D (x^2+4y^2+9) d\sigma$ 的值, 其中 D 是 $x^2+y^2=4$ 所围成的圆域.
- 试估计积分 $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$ 的值, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$.
- 设积分区域 $D = \{(x, y) | x^2+y^2 \leq r^2\}$, 试求 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2+y^2} \cos(xy) dxdy$.
- 计算下列二重积分:
 - $\iint_D xe^{xy} dxdy$, 其中 $D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(2) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$, 其中 $a > 0$, D 是圆心在 (a, a) 、半径为 a 的圆周的较短弧段与两坐标轴所围成的区域;

(3) $\iint_D e^{-y^2} dxdy$, 其中 D 是以 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ 三点为顶点的三角形区域.

(4) $\iint_D y^2 \sqrt{a^2 - x^2} dxdy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$;

(5) $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$, 其中 $D: |x| + |y| \leq 1$;

(6) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, 其中 D 是由 $y=2$, $y=x$, $xy=1$ 所围成的区域.

8. 计算柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $y=0$ 和 $y=a$ ($a > 0$) 所围立体的体积.

9. 计算抛物柱面 $z=4-x^2$, 坐标面和平面 $2x+y=4$ 所围立体在第一卦限的部分的体积.

10. 求椭圆柱面 $4x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z=1-y$ 及 $z=0$ 所围成的立体体积.

11. 更换下列积分次序

$$(1) I = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx;$$

$$(2) I = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy;$$

$$(3) I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$(4) I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy.$$

12. 试将二重积分 $\iint_D f(x, y) dxdy$ 化为不同顺序的累次积分, 其中 D 是由抛物线 $y = \frac{x^2}{4} - 1$ 与直线 $y = 2 - x$ 所围成的区域.

13. 计算二重积分

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx.$$

14. 计算 $I = \iint_D \cos(x+y) dxdy$, 其中 D 是由 y 轴, $y=\pi$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

15. 计算 $\iint_D |\sin(x+y)| dxdy$, 其中 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

16. 如果闭区域 D 如图 9.24 所示, 试用极坐标给出其面积的计算公式.

17. 计算 $I = \iint_D (x+y) dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 \leq x + y\}.$$

18. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2ay$ 所围成的立体区域(含于柱体内部的区域)的体积($a > 0$).

19. 计算 $\iint_D xy[1+x^2+y^2] dx dy$, 其中 $D =$

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\},$$

符号 $[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数.

20. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由螺线 $r = 2\theta$ 上一段弧 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$, 求此薄片的质量.

21. 求由平面 $y=0, y=kx (k>0), z=0$, 以及球心在原点, 半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限的立体体积.

22. 计算以 xy 平面上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 围成的闭区域为底, 以曲面 $z = x^2 + y^2$ 作顶的曲顶柱体的体积.

23. 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 由 $y=x, y=2x, xy=1, xy=3$ 所围成.

24. 计算 $I = \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$, D 是由 $x+y=1, x=0$ 及 $y=0$ 所围区域.

25. 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 $D: x^4 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

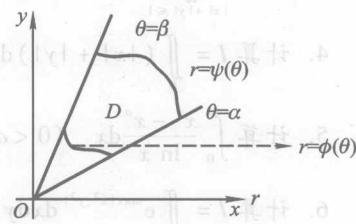


图 9.24

点奇古, Ω 是区间空育古村的某贵. 量遇的村的间空更密区因非想悉
的村的密苦式. 然且负非土 Ω 在 (x, y) 坐标系中更密的村的极 (r, θ)
用功). $N\Delta, \dots, N\Delta, N\Delta$ 构立小个. 而面界共公育只至如腾长 Ω 跳河. 量遇

1. 利用二重积分性质计算 $I = \iint_{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2} [x+y] dx dy$, 其中 $[x+y]$ 表示不超过 $x+y$ 的最大整数.

2. 证明 $\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma \leq \sqrt{2}$,

$$1 \leq \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma \leq \sqrt{2},$$

其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

3. 证明 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (2\sqrt{xy} + x^2) dx dy + \iint_{|x|+|y|\leq 1} (3|xy| + y^2) dx dy \leq \frac{9}{2}$.

4. 计算 $I = \iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

5. 计算 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ($0 < a < b$).

6. 计算 $I = \iint_D e^{\max|x^2, y^2|} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

7. 试求由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 平面 $z = 0$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 以及 $x^2 + y^2 = x$ 所围成的立体体积.

8. 设 $f(x, y)$ 在单位圆上有连续的偏导数, 且在边界上取值为零, 试证明

$$f(0, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(x) > 0$, 试利用二重积分证明

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

10. 计算 $I = \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$, f 连续且 $f(x) > 0$.

§2 三重积分

2.1 三重积分的概念与性质

考虑非均匀密度空间物体的质量. 设某物体占有空间区域 Ω , 它在点 (x, y, z) 处的体密度函数为 $\rho(x, y, z)$, 这里的 ρ 在 Ω 上非负连续. 为考察物体的质量, 可将 Ω 分割成至多只有公共界面的 n 个小立体 $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ (也用 ΔV_i 表示第 i 个小立体的体积) 之和:

$$\Omega = \Delta V_1 \cup \Delta V_2 \cup \dots \cup \Delta V_n.$$

若在每个小立体 ΔV_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 则各小立体的质量 m_i 就近似地等于 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$. 记这 n 个小立体的最大直径为 λ , 于是, 当极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i \geq 1$$

存在时, 自然把这个极限值定义为立体 V 的质量 m , 即

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

还有许多力学和物理问题都可以归结为上述特殊类型的和式极限, 把处理这些问题的方法之共同点(分割、取点近似、作和、取极限)抽象出来, 就可引出三重积分的概念.

定义 2.1 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有定义, 将 Ω 任意地分割成除边界外没有公共部分的 n 个小区域. 小区域及其体积都记作 ΔV_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 在每个小区域 ΔV_i 中任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作积分和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

记所有小区域 ΔV_i 的直径的最大值为 λ , 当极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

存在, 且其值与 Ω 的分割方法及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取方法无关时, 则称函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上可积, 并且称此极限值为函数 $f(x, y, z)$ 在空间区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, dV 称为体积元素.

由三重积分的定义知, 空间物体(占有空间区域 Ω)的质量 m 等于体密度 $\rho(x, y, z)$ 的三重积分, 即

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

当 $f(x, y, z) \equiv 1$ 时, 三重积分 $\iiint_{\Omega} dV$ 的值等于区域 Ω 的体积.

可以证明, 有界闭区域 Ω 上的连续函数或分块连续函数在 Ω 上是可积的(证明略).

三重积分也有与二重积分完全类似的性质, 这里不再一一复述. 只写出积分中值定理如下:

若 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续, V 是 Ω 的体积, 则在 Ω 上至少存在一点 (ξ, η, ζ) 使

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V.$$

(请读者给出证明)

2.2 在直角坐标系下计算三重积分

当积分存在时, 积分值与积分区域 Ω 的分割方法无关, 且与 ΔV_i 中点的取法无关, 所以在直角坐标系 $Oxyz$ 中, 为简化计算, 常用分别平行于三个坐标面的三组平面族去分割区域 Ω , 于是 $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 体积元素 $dV = dx dy dz$, 因此常把三重积分写为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

与计算二重积分类似, 三重积分的计算方法是化为三次积分(也称为累次积分).

定理 2.1 设积分区域 Ω 是上、下底分别为曲面

$$S_2: z = z_2(x, y), \quad S_1: z = z_1(x, y)$$

的曲顶、曲底的柱体, 它在 xy 平面上的投影区域为 D (图 9.25). 若函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, 并且对任意的点 $(x, y) \in D$, $f(x, y, z)$ 在区间 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上可积, 则有如下计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.1)$$

定理证明从略. 公式(2.1)说明: 三重积分的计算可以先在 D 上任取一点 (x, y) , 让函数沿 z 轴正向从点 $z_1(x, y)$ 到点 $z_2(x, y)$ 的线段上作定积分, 得到内层积分 $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$, 其积分结果是变量 x, y 的二元函数. 然后再将此二元函数在平面区域 D 上求二重积分, 就得到整个空间区域 Ω 上的三重积分. 此法俗称“先一后二”累次积分法.

如果平面区域 D 是由两条直线 $x = a, x = b$ 以及两条曲线 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ ($y_1(x) \leq y_2(x), \forall x \in [a, b]$) 所围成, 则公式(2.1)可进一步写成

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.2)$$

像二重积分一样, 化三重积分为累次积分的积分顺序可根据情况灵活选取. 有时也可先计算二重积分, 再计算定积分, 俗称“先二后一”计算法. 例如, 设积分区域 Ω 是介于平面 $z = c$ 与 $z = d$ 之间的区域, 过点 $(0, 0, z)$ 且与 xy 平面平行的平面截 Ω 成一个平面图形 D_z (图 9.26). 则三重积分可按如下顺序积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy. \quad (2.3)$$

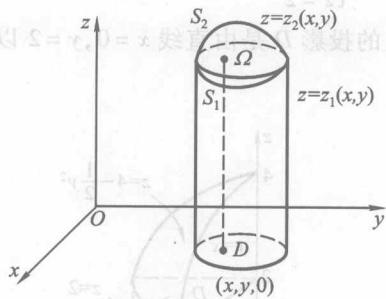


图 9.25

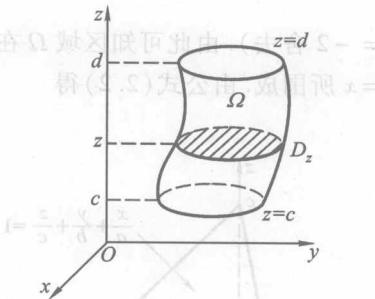


图 9.26

三重积分中最简单的积分区域是长方体 $\Omega: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$. 此时, 有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz.$$

例 2.1 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} zdV$, 其中 Ω 由三个坐标面以及平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) 所围成.

解 作出 Ω 的图形(图 9.27), 其在 xy 平面上的投影区域 D 由直线 $x = 0, y = 0$ 及 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 所围成. 由此可知 Ω 在直角坐标系下可表示为

$$0 \leq z \leq c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \quad 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

于是利用“先一后二”法可得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} zdxdydz &= \iint_D dxdy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} zdz = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} zdz \\ &= \frac{c^2}{2} \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 dy \\ &= \frac{bc^2}{6} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 dx = \frac{abc^2}{24}. \end{aligned}$$

例 2.2 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} xydV$, 其中 Ω 是由平面 $z = 2, y = x, x = 0$ 以及抛物柱面 $z = 4 - \frac{1}{2}y^2$ 围成的在第一卦限内的区域.

(E.S) 解 作出 Ω 的图形(图 9.28), 从方程组 $\begin{cases} z = 4 - \frac{1}{2}y^2 \\ z = 2 \end{cases}$ 中消去 z , 得 $y = 2(y = -2$ 舍去). 由此可知区域 Ω 在 xy 平面上的投影 D 是由直线 $x = 0, y = 2$ 以及 $y = x$ 所围成. 由公式(2.2)得

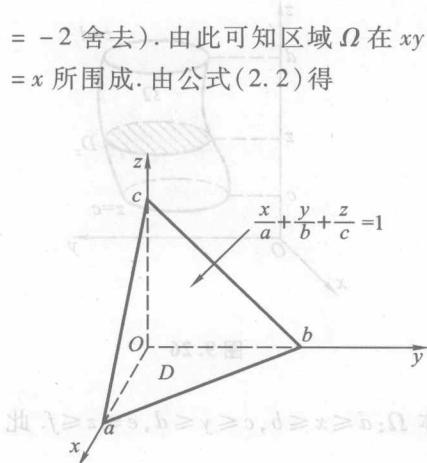


图 9.27

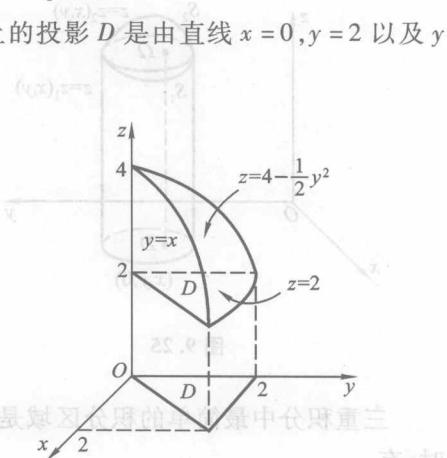


图 9.28

$$\iiint_{\Omega} xy dxdydz = \int_0^2 dx \int_x^2 dy \int_2^{4-\frac{1}{2}y^2} xy dz = \int_0^2 dx \int_x^2 xy \left(2 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\ = \int_0^2 x \left(2 - x^2 + \frac{1}{8}x^4 \right) dx = \frac{4}{3}$$

例 2.3 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \cos z^2 dV$, 其中 Ω

由椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ 及平面 $z = 1$ 所围成.

解 作 Ω 的图形(图 9.29). 选用“先二后一”法计算. 此时, D_z 为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq z (0 \leq z \leq 1)$, 相

应的椭圆截面面积等于 $6\pi z$. 于是

$$\iiint_{\Omega} \cos z^2 dV = \int_0^1 dz \iint_{D_z} \cos z^2 dxdy$$

$$= 6\pi \int_0^1 z \cos z^2 dz$$

$$= 3\pi \sin 1.$$

例 2.4 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ 化为三次积分(依先对 z , 次对 y , 再对

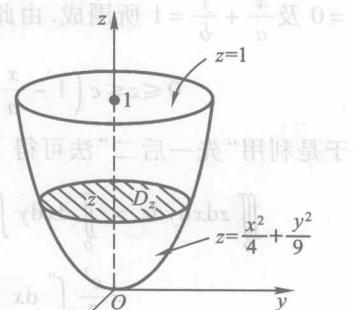


图 9.29

x), 其积分区域 Ω 是由椭圆抛物面 $z = 3x^2 + y^2$ 及抛物柱面 $z = 1 - x^2$ 所围成的区域.

解 作椭圆抛物面 $z = 3x^2 + y^2$ 和抛物柱面 $z = 1 - x^2$ 的图形(图 9.30). 从方程组

$$\begin{cases} z = 3x^2 + y^2, \\ z = 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2, \\ -\sqrt{1 - 4x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - 4x^2}, \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

中消去 z , 得包围 Ω 在 xy 平面上的投影区域 D 的边界曲线方程 $4x^2 + y^2 = 1$. 于是 Ω 可表示为

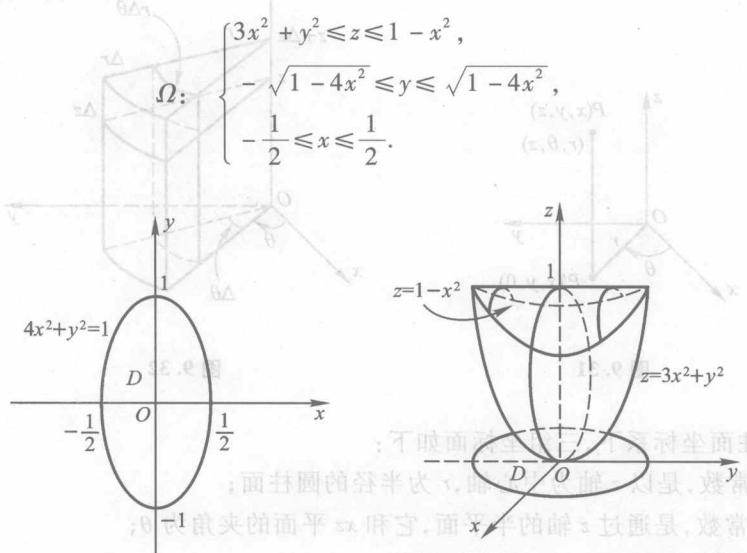


图 9.30

2.3 在柱坐标系下计算三重积分

设 $P(x, y, z)$ 是空间一点, 它在 xy 平面上的投影为 P' . 点 P' 的坐标采用极坐标 $P':(r, \theta, 0)$, 则我们把有序数组 (r, θ, z) 称为点 P 的柱坐标(图 9.31).

易知点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与其柱坐标 (r, θ, z) 之间的变换关系为

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

在柱坐标系下计算三重积分

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

当 P 取遍空间一切点时, r, θ, z 的取值范围是:

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty.$$

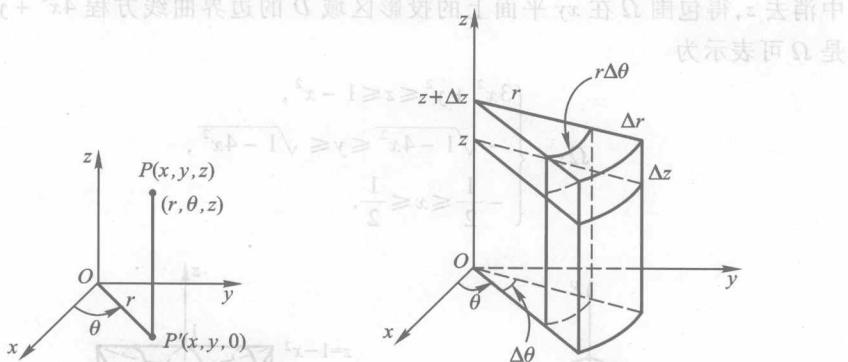


图 9.31

图 9.32

在柱面坐标系下,三组坐标面如下:

$r = \text{常数}$, 是以 z 轴为中心轴, r 为半径的圆柱面;

$\theta = \text{常数}$, 是通过 z 轴的半平面, 它和 xz 平面的夹角为 θ ;

$z = \text{常数}$, 是平行于 xy 平面的平面.

在柱坐标系下计算三重积分时,除将被积函数 $f(x, y, z)$ 换成 $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, 将积分区域 Ω 换成 Ω 的柱坐标变化域 Ω' 外,还要写出体积元素 $dV = dx dy dz$ 在柱坐标系下的表达式.为此,用柱坐标系的三组坐标面去分割积分区域 Ω .设 ΔV 是由圆柱面 $r = r, r = r + \Delta r$, 半平面 $\theta = \theta, \theta = \theta + \Delta \theta$, 以及平面 $z = z, z = z + \Delta z$ 围成的小区域,如图 9.32 所示.

当 $\Delta r, \Delta \theta, \Delta z$ 都很小时,该小区域 ΔV 就近似一个长方体,其体积

$$\Delta V \approx r \Delta r \Delta \theta \Delta z.$$

从而体积元素为

(图 9.32) 表示柱面坐标系下的体积元素 $dV = r dr d\theta dz$. 于是我们有三重积分在柱坐标系下的换元公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz,$$

其中 Ω' 为 Ω 的柱坐标变化域.

如果包围 Ω 的上、下表面可用柱坐标方程表示为 $z = z_2(r, \theta)$ 、 $z = z_1(r, \theta)$ ，且 Ω 在 xy 平面上的投影 $D_{r\theta}$ 可用极坐标不等式表示为 $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ ，那么，在柱坐标系下，三重积分化为三次积分的计算公式为

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV &= \iint_{D_{r\theta}} dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} dr \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz. \end{aligned}$$

对区域 Ω 的不同情形，三重积分在柱坐标系下化为三次积分还可以有其他不同的积分次序。

一般地，当 Ω 为圆柱体区域，或 Ω 的投影域 $D_{r\theta}$ 是以原点为心的圆环、圆扇形，被积函数为 $x^2 + y^2$ 与 z 的函数时，用柱坐标计算三重积分可能较为方便。

例 2.5 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dV$ ，其中 Ω 由圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 和平面 $z = 1$

所围成。

解 作出 Ω 的图形（图 9.33），采用柱坐标，锥面方程化为 $r = z$ ， Ω 在 xy 平面上投影区域为圆。

因此，
 $\Omega: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, r \leq z \leq 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 z dz = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} r^2 (1 - r^2) dr = \frac{2}{15}\pi.$$

若将区域 Ω 表示为 $0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq z$ ，则也可以改变积分次序：

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} z r^2 dr d\theta dz = \int_0^1 zdz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3} z^4 dz = \frac{2}{15}\pi. \end{aligned}$$

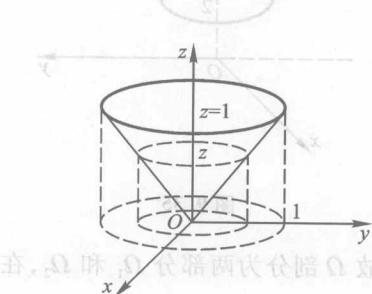


图 9.33

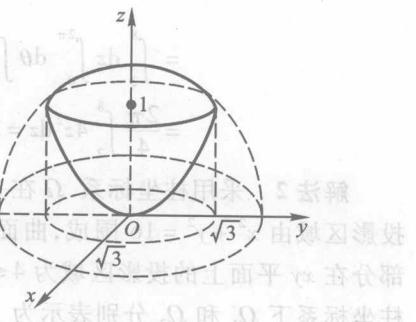


图 9.34

例 2.6 计算 $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围区域.

解 作出 Ω 的图形(图 9.34). 在柱坐标系下, 球面与旋转抛物面的交线为

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = 4, \\ r^2 = 3z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1, \\ r = \sqrt{3}. \end{cases}$$

即其脊柱直角坐标系三式并可表示为球坐标系下圆柱形 Ω 为

故圆柱中心点处 I 是 $\iint_{D_{xy}} dx dy \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zdz$, 轴对称圆柱 Ω 为, 此题一

更式式对称圆柱 Ω 为圆柱形 Ω 为, 切线函数 $z = \sqrt{4-r^2}$ 为圆柱形 Ω 为

$$I = \pi \text{ 面平味 } z = \sqrt{4-r^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zdz = 1 \text{ 真长 } 2.5 \text{ 圈}$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r \left(4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right) dr = \frac{13}{4}\pi.$$

例 2.7 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 是曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的

旋转抛物面与两平面 $z = 2$ 和 $z = 8$ 所围立体.

解法 1 作 Ω 的图形(图 9.35), 采用切片法(“先二后一”): Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[2, 8]$, 对于任意 $z \in [2, 8]$, 平面 $z = z$ 与 Ω 的截面区域 D_z 由 $x^2 + y^2 = 2z$ 所围成, 故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_2^8 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr \\ &= \frac{2\pi}{4} \int_2^8 4z^2 dz = 336\pi. \end{aligned}$$

解法 2 采用柱坐标系. Ω 在 xy 平面上的投影区域由 $x^2 + y^2 = 16$ 围成, 曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 部分在 xy 平面上的投影区域为 $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$. 故 Ω 剖分为两部分 Ω_1 和 Ω_2 , 在柱坐标系下 Ω_1 和 Ω_2 分别表示为

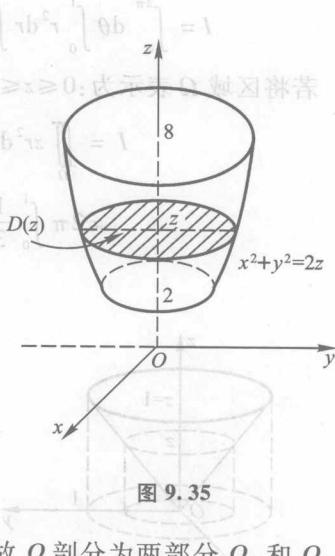


图 9.35

底面曲面常数量分时半球中(x, y)
点圆柱坐标系，通常 $\Omega_1: \begin{cases} 2 \leq z \leq 8, \\ 0 \leq r \leq 2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi; \end{cases}$ $\Omega_2: \begin{cases} \frac{r^2}{2} \leq z \leq 8, \\ 2 \leq r \leq 4, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

故于各负数代 Ω 的对称性， $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ， $\int_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{\Omega_1} f(x, y, z) dV + \int_{\Omega_2} f(x, y, z) dV$ 。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2) dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_2^8 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^8 dz \\ &= 336\pi. \end{aligned}$$

例 2.8 设 $f(t)$ 连续， $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dV$ ，其中 $\Omega: 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq t^2 (t > 0)$ ，求 $\frac{dF}{dt}$ 和 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$ 。

解 用柱坐标计算，则有

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r dr \int_0^h [z^2 + f(r^2)] dz \\ &= 2\pi h \int_0^t \left[\frac{h^2}{3}r + rf(r^2) \right] dr. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{dF}{dt} = 2\pi ht \left[\frac{h^2}{3} + f(t^2) \right].$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi h \left[\frac{h^2}{3} + f(t^2) \right] \\ &= \pi h \left[\frac{h^2}{3} + f(0) \right]. \end{aligned}$$

2.4 在球坐标系下计算三重积分

设空间中的点 $P(x, y, z)$ 在 xy 平面的投影为 $P_1(x, y, 0)$ 。记 $r = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ， θ 是通过 z 轴及 P 点的半平面与 zx 平面所成的角（即 θ 是 xy 平面上 \overrightarrow{OP}_1 与 x 轴正向的夹角， $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ）， φ 是 \overrightarrow{OP} 向量与 z 轴正向的夹角（ $0 \leq \varphi \leq \pi$ ），则称数组 (r, θ, φ) 为点 P 的球坐标（图 9.36）。同一点 P 的直角坐标与球坐标之间有如下关系：

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ z = r \cos \varphi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

与柱坐标相类似,在球坐标 (r, θ, φ) 中恰有一个坐标分量为常数的曲面为球坐标系的坐标曲面.更具体地说,三组坐标曲面依次为: $r = \text{常数}$,这是以原点为球心, r 为半径的球面; $\theta = \text{常数}$,这是过 z 轴并与 zx 平面的夹角为 θ 的半平面; $\varphi = \text{常数}$,这是以原点为顶点、 φ 为半顶角、 z 轴为轴的圆锥面.

用三组坐标曲面 $r = \text{常数}, \theta = \text{常数}, \varphi = \text{常数}$ 把有界闭区域 Ω 分割成若干个小区域.考虑其中这样的一个小区域 ΔV :它由半径为 r 和 $r + \Delta r$ 的球面,半顶角为 φ 和 $\varphi + \Delta\varphi$ 的圆锥面以及极角(指与 xz 平面的夹角)为 θ 和 $\theta + \Delta\theta$ 的半平面所围成的六面体(图9.37).它的体积与一个三条棱长分别为 $r \sin \varphi \cdot \Delta\theta, r \Delta\varphi, \Delta r$ 的长方体的体积近似,即

$$\Delta V \approx r^2 \sin \varphi \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\theta.$$

因此,在球坐标系下的体积元素为

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

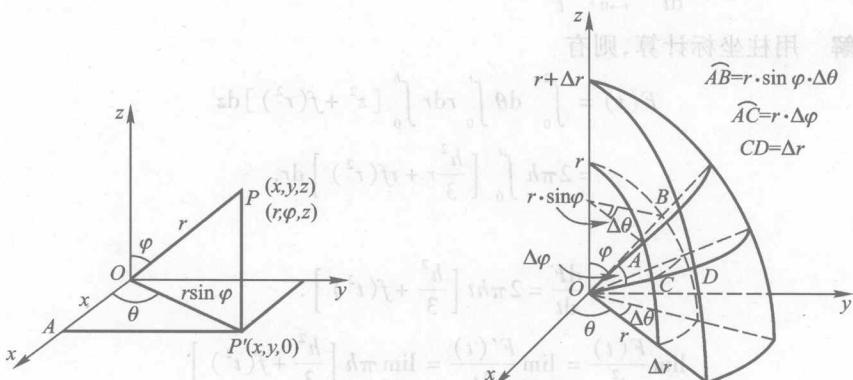


图 9.36

图 9.37

于是

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

其中 Ω' 为 Ω 的球坐标变化域.上面的计算公式即为三重积分由直角坐标化为球坐标的换元公式.

在球坐标系下计算三重积分,同样是把它化为对 r, φ, θ 的三次积分来计算.一种常用的方法是,先看 Ω 夹在哪两个半平面 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 之间,即 $\alpha \leq \theta \leq \beta$,然后任意取一个 $\theta \in (\alpha, \beta)$,作以 z 轴为棱,极角为 θ 的半平面截 Ω 得截面 D_θ .在这个平面上以原点 O 为极点,以 z 轴为极轴建立极坐标系,如果 D_θ 的极坐标 (r, φ) 可表示为 $\varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), r_1(\varphi, \theta) \leq r \leq r_2(\varphi, \theta)$,则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr.$$

一般地, 当积分区域 Ω 为球形区域时, 采用球坐标计算三重积分比较方便.

当 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围成, 若令 $f \equiv 1$, 则得到球体的体积公式:

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

例 2.9 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ 所确定的区域.

解 采用球坐标计算. 在球坐标系下 Ω 的边界面的表达式为 $r = 2 \cos \varphi$. Ω 可表示为

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

因此

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{8}{5}\pi.$$

例 2.10 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面与平面 $z = a$ ($a > 0$) 所围成的区域.

解 采用球坐标计算. 先画出 Ω 的图形(图 9.38).

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \varphi}} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \varphi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\frac{a}{\cos \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{5} a^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{2}{5}\pi a^5 \cdot \frac{1}{4} \tan^4 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{a^5}{10}\pi. \end{aligned}$$

注 本题积分区域为锥体, 既可用球坐标系, 也可用柱坐标系计算三重积分.

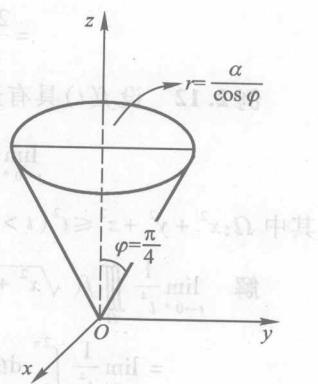


图 9.38

例 2.11 (计算 $\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = az$ ($a > 0$) 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 所围成的立体.)

解 作出 Ω 的图形(图 9.39). 采用球坐标, 此时球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = az$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 分别变为 $r = a \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 和 $r = 2a \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$). Ω 在球坐标系下可表示为

$$a \cos \varphi \leq r \leq 2a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

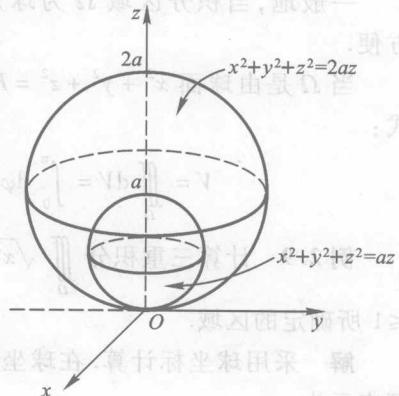


图 9.39

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{2a \cos \varphi} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{2a \cos \varphi} r^5 dr \\ &= 21\pi a^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^7 \varphi d\varphi \\ &= 21\pi a^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \varphi (\cos^2 \varphi - 1) d(\cos \varphi) \\ &= \frac{21\pi a^6}{40}. \end{aligned}$$

例 2.12 设 $f(t)$ 具有连续导数, 试求

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ ($t > 0$).

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t r^2 f(r) dr \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t r^2 f(r) dr \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi t^2 f(t)}{4t^3} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\pi f(t)}{t} = \begin{cases} \pi f'(0), & f(0) = 0, \\ \infty, & f(0) \neq 0. \end{cases}$$

注 在三重积分计算中,坐标系的选择不仅要看积分区域 Ω 的形状,有时还要看被积函数的形式,具体请参看下表:

坐标系	积分域 Ω 形状	被积函数 $f(x, y, z)$ 形状	体积元素 dV	变量替换	积分形式
直角坐标系	Ω 为长方体,四面体或任意形体	$f(x, y, z)$	$dV = dx dy dz$		$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$
柱坐标系	Ω 为柱体,锥体,或由柱面,锥面,旋转抛物面与其他曲面所围成的形体	$zf(x^2 + y^2)$ $zf\left(\frac{y}{x}\right)$ $xf(y^2 + z^2)$ $xf\left(\frac{z}{y}\right)$ $yf(x^2 + z^2)$ $yf\left(\frac{z}{x}\right)$	$dV = \rho d\rho d\theta dz$	$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$	$I = \iiint_n f(M) \rho d\rho d\theta dz$ 其中 $f(M) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$
球坐标系	Ω 为球体或球体的一部分,锥体	$f(x^2 + y^2 + z^2)$	$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$	$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$	$I = \iiint_n f(M) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ 其中 $f(M) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$

2.5 三重积分的一般换元公式

对各种积分来说,变量替换都是简化积分计算的一种有效方法,类似于二重积分,对三重积分我们也有类似的换元公式.

定理 2.2 设函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续,作变量替换

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Omega'$$

使满足

- (1) 把 $Ouvw$ 空间中的区域 Ω' 一一对应地变到 $Oxyz$ 空间中的区域 Ω ;
- (2) 变换函数 $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ 在 Ω' 上连续,且有连续的一阶偏导数;
- (3) 雅可比行列式

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \Big|_{\Omega'} = \begin{cases} 1 & (u, v, w) \in \Omega' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

则有三重积分换元公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

(证明从略).

$$\text{对柱坐标变换} \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, dV = r dr d\theta dz.$$

$$\text{对球坐标变换} \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi, \end{cases} \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi, \quad dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

例 2.13 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围立体 Ω 的体积 V ($a > 0, b > 0, c > 0$).

解法 1 $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$. 显然, 若将 Ω 变换成单位球体 Ω' , 计算将会简单些.

为此, 考虑换元

$$\begin{cases} u = \frac{x}{a}, \\ v = \frac{y}{b}, \\ w = \frac{z}{c}, \end{cases} \quad \begin{cases} (u, v, w) \in \Omega' \\ (u, v, w) \in \Omega \end{cases}$$

由此可得 $x = au, y = bv, z = cw$, 且 $(u, v, w) \in \Omega' \Leftrightarrow (au, bv, cw) \in \Omega$.

即

$$\begin{cases} x = au, \\ y = bv, \\ z = cw, \end{cases}$$

则

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

于是

$$V = \iiint_{\Omega'} dxdydz = \iiint_{\Omega'} abcdudvdw = abc \iiint_{\Omega'} dudvdw,$$

其中 Ω' 为单位球域: $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. 故知

$$V = abc \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

解法 2 作广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\varphi, \end{cases}$$

则椭球面的广义球坐标方程为 $r = 1$, 且 $J = abcr^2\sin\varphi$, 于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega'} abcr^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

例 2.14 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \geq 4$ 且 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 9, z \geq 0$ 所围成的空心立体.

解 区域 Ω 是大球内部 V_1 挖去小球 V_2 , 切掉大球在 xy 平面下面的部分 V_3 所剩下的区域 (图 9.40), 即

$$\Omega = V_1 - V_2 - V_3.$$

因此

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV = \iiint_{V_1} (x^2 + y^2) dV - \iiint_{V_2} (x^2 + y^2) dV - \iiint_{V_3} (x^2 + y^2) dV. \quad (2.4)$$

对于 V_1 宜取中心位于 $(0, 0, 1)$ 的球坐标:

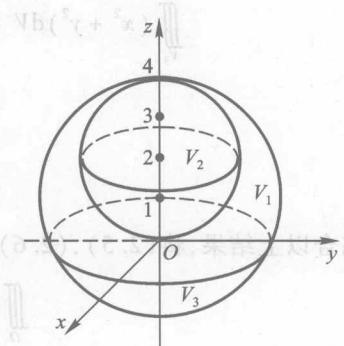


图 9.40

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z - 1 = r \cos \varphi, \\ J = r^2 \sin \varphi. \end{cases}$$

可知:

$$V'_1 = \{(r, \varphi, \theta) | 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

得

$$\iiint_{V'_1} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{8}{15} \times 3^5 \pi. \quad (2.5)$$

对于 V_2 宜用中心在 $(0, 0, 2)$ 的球坐标:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z - 2 = r \cos \varphi, \\ J = r^2 \sin \varphi. \end{cases}$$

于是

$$\iiint_{V_2} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r^4 \sin^3 \varphi dr = \frac{8}{15} \times 2^5 \pi. \quad (2.6)$$

对于 V_3 宜采用柱坐标, 向 xy 平面投影, 投影区域(在大球面方程中令 $z=0$ 可得) D 为 $x^2 + y^2 \leq 8$, 即 $r \leq 2\sqrt{2}$. 故

$$\begin{aligned} \iiint_{V_3} (x^2 + y^2) dV &= \iint_{r \leq 2\sqrt{2}} r dr d\theta \int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) (1 - \sqrt{9 - r^2})^3 dr \\ &= \left(124 - \frac{2}{5} \times 3^5 + \frac{2}{5}\right) \pi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

综合以上结果, 将(2.5), (2.6), (2.7)式代入(2.4), 便得

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV = \frac{256}{3} \pi.$$

习题 9.2

A 类

1. 利用对称性计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2} dV$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

2. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (xy + yz + xz) dx dy dz$, 其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.
3. 设 $f(x, y, z)$ 是连续函数, $I(R) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz$, 求 $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{I(R)}{R^3}$.
4. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 及三坐标平面所围区域.
5. 计算 $I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体.
6. 求积分 $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是锥面 $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = h (h > 0)$ 所围的立体区域.
7. 计算三重积分 $I = \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 V 是由曲面 $z = xy$ 及平面 $y = x, x = 1, z = 0$ 所围的区域.
8. 求 $I = \iiint_{\Omega} xyz dV$, 其中 Ω 为单位球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 在第一卦限的部分.
9. 将积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$ 改变为按 y, z, x 的先后次序积分.
10. 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 Ω 是由柱面 $x^2 + y^2 = 16$, 平面 $y + z = 4$ 和 $z = 0$ 所围成的区域.
11. 计算 $I = \iiint_{\Omega} y \sqrt{1 - x^2} dV$, 其中 Ω 是由曲面 $y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, x^2 + z^2 = 1$ 和平面 $y = 1$ 所围成的区域.
12. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} e^{|z|} dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
13. 利用柱坐标计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域.
14. 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 Ω 是圆柱面 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 平面 $z = 0, z = a (a > 0)$ 在第一卦限内围成的区域.
15. 试用柱坐标和球坐标两种方法计算 $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 为半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad (z \geq 0)$.

16. 求中心为 $(0, 0, a)$, 半径为 a 的球面与顶点在原点, 半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积.

17. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az (a > 0)$.

18. 计算 $\iiint_{\Omega} (x - 1)^{\frac{2}{3}} dV$, 其中 $\Omega: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \leq 1$.

19. 计算 $\iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, 其中 Ω 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

20. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (y - z) \arctan z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面

$$x^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 = R^2, z = 0, z = h (h > 0)$$

所围成的立体.

B 类

1. 将累次积分 $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz$ 化为定积分形式.

2. 曲面 $x^2 + y^2 + z = 4$ 将球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ 分成两部分, 求这两部分的体积之比.

3. 设球 $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \leq 4$, 从原点向球面上任意一点 Q 处的切平面作垂线, 垂足为 P . 当 Q 在球面上变动时, P 点的轨道形成一封闭曲面, 求此曲面所围的体积.

4. 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 试证

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_z^y f(x) f(y) f(z) dx dy dz = \frac{1}{6} \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^3.$$

5. 已给曲面方程为

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, h > 0).$$

试求由该曲面所围区域的体积.

6. 计算积分 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) \cos(x + y + z)^2 dx dy dz$, 其中

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x - y \leq 1, 0 \leq x - z \leq 1, 0 \leq x + y + z \leq 1\}.$$

$$(0 \leq z \leq 1 \geq x + y + z)$$

§3 重积分的应用举例

3.1 几何应用举例

1. 曲顶柱体体积

我们已经讲过,曲顶柱体的体积 V 是曲顶函数 $f(x, y)$ 在底面区域 D 上的二重积分,即

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中连续函数 $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$.

例 3.1 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与半顶角为 α 的圆锥面 $z = (\cot \alpha) \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 所包围的立体 Ω (指含在圆锥内的部分) 的体积.

解 先作出 Ω 的图形(图 9.41). 消去方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = (\cot \alpha) \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

中的 z , 得两曲面的交线在 xy 平面上的投影曲线方程

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \alpha.$$

故 Ω 在 xy 平面上的投影区域 D 在极坐标系下可表示为

$$0 \leq r \leq R \sin \alpha, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

再由二重积分的几何意义可知

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (\cot \alpha) \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \alpha} ((\sqrt{R^2 - r^2} - r \cot \alpha) r dr \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} (1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

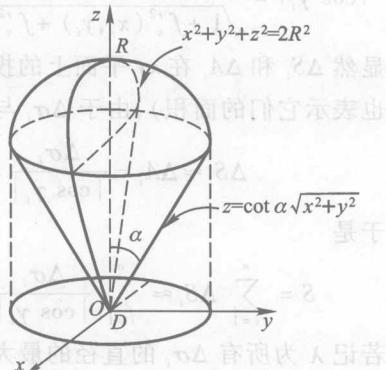


图 9.41

2. 曲面的面积公式

- (1) 设空间曲面 S 的方程为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D,$$

其中有界闭区域 D 是 S 在 xy 平面上的投影, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续的偏导数. 现在我们来计算曲面的面积 S (面积亦用 S 表示).

将 D 任意分割为 n 个小区域 $\Delta\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并作以 $\Delta\sigma_i$ 的边界为准线而母线平行于 z 轴的柱面, 这些柱面把曲面 S 分割成 n 个小曲面 $\Delta S_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 在 ΔS_i 上任取一点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, 过点 P_i 作 S 的切平面, 切平面被相应的柱面截得小平面块 ΔA_i (图 9.42).

设曲面 S 在点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 处的法向量

$$\mathbf{n}_i = \{-f'_x(x_i, y_i), -f'_y(x_i, y_i), 1\}$$

与 z 轴正向的夹角为 γ_i , 则

$$|\cos \gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}}.$$

显然 ΔS_i 和 ΔA_i 在 xy 平面上的投影都是 $\Delta\sigma_i$ ($\Delta S_i, \Delta A_i, \Delta\sigma_i$ 分别表示图形, 同时也表示它们的面积), 由于 $\Delta\sigma_i$ 与 ΔA_i 所在平面的法线的夹角为 γ_i , 所以

$$\Delta S_i \approx \Delta A_i = \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos \gamma_i|} = \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)} \Delta\sigma_i.$$

于是

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos \gamma_i|} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)} \Delta\sigma_i.$$

若记 λ 为所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值, 那么由此就可以定义曲面的面积:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)} \Delta\sigma_i \\ &= \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)} dx dy. \end{aligned} \quad (3.1)$$

称 $dS = \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)} dx dy$ 为曲面的面积元素.

有时, 也把曲面 S 的面积公式写为

$$S = \iint_D \frac{dx dy}{|\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})|},$$

其中 \mathbf{n} 是曲面 S 的法向量, 它是 x, y 的函数.

如果曲面 S 的方程为 $x = g(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 或 $y = h(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, S 在 yz 平面(或在 zx 平面)上的投影是有界闭区域 D_{yz} (或 D_{zx}), 类似上述的推导可得曲面 S 的面积计算公式:

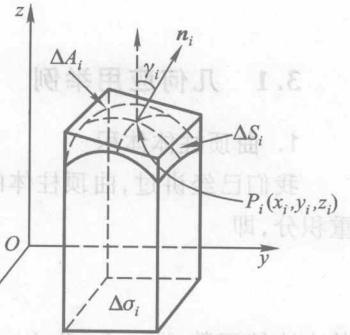


图 9.42

$$S = \iint_D \sqrt{1 + g_y'^2(y, z) + g_z'^2(y, z)} dy dz,$$

或

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + h_z'^2(z, x) + h_x'^2(z, x)} dz dx.$$

例 3.2 求旋转抛物面 $S_1: z = x^2 + y^2$ 与锥面 $S_2: z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成立体的表面积.

解 作出图形(图 9.43). 曲面 S_1 和 S_2 在柱坐标系下的方程分别为 $z = r^2$ 和 $z = 2 - r$. 从方程组

$$\begin{cases} z = r^2, \\ z = 2 - r \end{cases}$$

中消去 z , 解出 S_1 和 S_2 的交线在 xy 平面上的投影曲线方程为 $r = 1$. 故知投影区域 D 是由圆周 $r = 1$ 所围成. 再利用曲面面积计算公式得

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy + \iint_D \sqrt{2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} r dr + \sqrt{2}\pi \\ &= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1) + \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

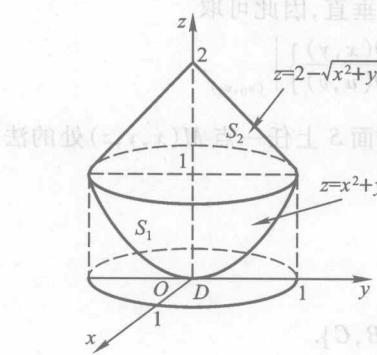


图 9.43

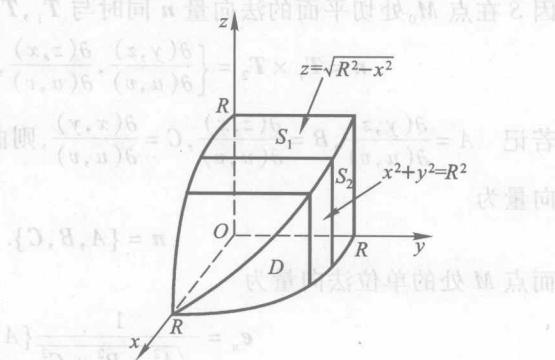


图 9.44

例 3.3 求圆柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$) 与 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成的曲面在第一卦限内的表面积 S .

解 作图形(图 9.44), 其中 S_1 是上侧面, S_2 是右侧面. S_1 在 xy 平面上投影 D 是由 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成的在第一象限内的区域. 由曲面面积计算公式得

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy \\ &= \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = \int_0^R R dx = R^2. \end{aligned}$$

类似地,若把 S_2 向 zx 平面投影,则可算出 $S_2 = R^2$. 故所求曲面面积为 $S = S_1 + S_2 = 2R^2$.

(2) 若曲面 S 是由参数方程给出:

$$S: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D_{uv},$$

其中 D_{uv} 是 uv 平面上的有界闭区域,而 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 在 D_{uv} 上具有连续的一阶偏导数.

设 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ 对应于参数 $(u_0, v_0) \in D_{uv}$. 在 S 上过点 M_0 作两条曲线:

$$C_1: \begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0), \end{cases} \quad \text{及} \quad C_2: \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v), \end{cases}$$

则这两条曲线在点 M_0 处的切向量分别为

$$\mathbf{T}_1 = \left. \{x'_u, y'_u, z'_u\} \right|_{(u_0, v_0)}, \quad \mathbf{T}_2 = \left. \{x'_v, y'_v, z'_v\} \right|_{(u_0, v_0)}.$$

因 S 在点 M_0 处切平面的法向量 \mathbf{n} 同时与 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 垂直,因此可取

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 = \left. \left\{ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\} \right|_{(u_0, v_0)}.$$

若记 $A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, 则曲面 S 上任一点 $M(x, y, z)$ 处的法向量为

$$\mathbf{n} = \{A, B, C\}.$$

而点 M 处的单位法向量为

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \{A, B, C\}.$$

$A^2 + B^2 + C^2$ 在 S 上处处不为零的曲面称为正则曲面,我们只讨论正则曲面.

注意到 $|\cos(\widehat{\mathbf{n}, z})| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, 并利用二重积分换元公式,便可推得曲面的面积公式:

$$S = \iint_D \frac{dxdy}{|\cos(\widehat{\mathbf{n}, z})|} = \iint_{D_{uv}} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|} \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

$$= \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv. \quad (3.2)$$

注 当曲面 S 由显式给出:

则可视为 $u = x, v = y$, 此时 S 的参数方程为

$$x = x, y = y, z = f(x, y), (x, y) \in D,$$

而

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = -f'_x, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = -f'_y, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1.$$

于是由公式(3.2)可直接得到与(3.1)相同的面积公式

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy.$$

例 3.4 计算半径为 a 的球面面积.

解 球面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta, \\ y = a \sin \varphi \sin \theta, \\ z = a \cos \varphi, \end{cases}$$

容易算出

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a^2 \sin \varphi,$$

所以面积元素为

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\varphi d\theta = a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta,$$

故所求的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2.$$

例 3.5 (通讯卫星的电波覆盖的地球面积) 将通讯卫星发射到赤道的上空, 使它位于赤道所在的平面内. 如果卫星自西向东地绕地球飞行一周的时间正好等于地球自转一周的时间, 那么它始终在地球的某一个位置的上空, 即相对静止. 这样的卫星称为同步卫星.

现在来计算卫星的电波所能覆盖的地球的表面积. 为简化问题, 把地球看成一个球体, 且不考虑其他天体对卫星的影响.

我们已经知道, 地球的半径 $R = 6371$ km, 地球自转的角速度 $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$ (单位为 $1/s$), 由于卫星绕地球飞行一周的时间正好等于地球自转一周的时间, 因此 ω 也就是卫星绕地球飞行的角速度.

我们先确定卫星离地面的高度 h . 要使卫星不会脱离预定轨道, 卫星所受的

地球引力必须与能使它绕地球飞行所受的向心力相等, 即

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = m\omega^2(R+h),$$

其中 M 是地球的质量, m 是卫星的质量, G 是引力常数. 由于重力加速度(即在地面的单位质量所受的引力) $g = \frac{GM}{R^2}$, 那么从上述得

$$(R+h)^3 = \frac{GM}{\omega^2} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R^2}{\omega^2} = g \frac{R^2}{\omega^2}.$$

于是

$$h = \sqrt[3]{g \frac{R^2}{\omega^2}} - R.$$

将 $R = 6371000$, $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$, $g = 9.8$ 代入上式, 就得到卫星的离地的高度

$$h = \sqrt[3]{9.8 \times \frac{(6371000)^2 \times (24)^2 \times (3600)^2}{4\pi^2}} - 6371000 \\ \approx 36000000 \text{ (m)} = 36000 \text{ (km)}.$$

为计算卫星的电波所覆盖的地球表面的面积, 取地心为坐标原点. 取过地心与卫星中心、方向从地心到卫星的有向直线为 z 轴, 如图 9.45. 通讯卫星覆盖的曲面 Σ 是上半球面被半顶角 α 的圆锥面所截得的部分. Σ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases} \quad (\varphi, \theta) \in D_{\varphi\theta},$$

其中 $D_{\varphi\theta} = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

由于 $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = R^2 \sin \varphi$, 所以通讯卫星的覆盖面积为

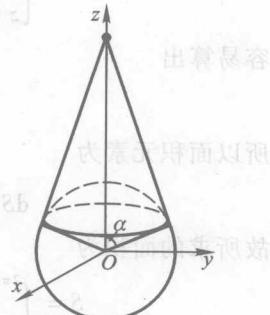


图 9.45

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{\varphi\theta}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\varphi d\theta \\ &= \iint_{D_{\varphi\theta}} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \\ &= 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = 2\pi R^2 \cdot \frac{h}{R+h}. \end{aligned}$$

由此得这颗通讯卫星的覆盖面积 S 与地球表面积 ($= 4\pi R^2$) 之比为

$$\frac{S}{4\pi R^2} = \frac{h}{2(R+h)} = \frac{36 \times 10^6}{2(36+6.4) \times 10^6} \approx 42.5\%.$$

由这个比值可以看出,卫星覆盖了全球三分之一以上的面积,但这并不意味着在赤道上空使用三颗相隔 $\frac{2}{3}\pi$ 角度的通讯卫星就可以覆盖地球全部表面,这是因为上面算出的 42.5% 小于 50%,也就是说至少南北极点就未包括在内,使用三颗卫星也不会覆盖南北极点,但可以覆盖人类主要生活区域.

3.2 物理应用举例

1. 求质量

由重积分的概念知,不均匀薄片的质量 m 是面密度函数 $\rho(x, y)$ 在薄片所占区域 D 上的二重积分,即

$$m = \iint_D \rho(x, y) d\sigma.$$

不均匀空间物体 Ω 的质量 m 等于该物体的体密度函数 $\rho(x, y, z)$ 在其区域 Ω 上的三重积分,即

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV.$$

2. 求不均匀物体的质心

先讨论平面薄片. 设其面密度为 $\rho(x, y)$. 我们把平面薄片分成 n 个直径很小的小片,在每一小片 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (x_i, y_i) ,如果把小片 $\Delta\sigma_i$ 的近似质量 $\rho(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 看做是质点 (x_i, y_i) 所具有的质量,则整个薄片就看作由 n 个质点组成的质点组. 已知这质点组质心坐标是

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i}, \quad \bar{y}_i = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i}$$

令所有小薄片 $\Delta\sigma_i$ 中的最大直径 $\lambda \rightarrow 0$,则得到所设平面薄片的质心坐标 \bar{x}, \bar{y} 为:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma},$$

或写为

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) d\sigma.$$

特殊地,如果平面薄片是均匀的,即密度是一个常数,则 $m = \rho S$, S 是平面薄片的面积. 上式简化为

仿照上面的讨论,将空间物体 Ω 分割为 n 个小立体,把每一小立体看成是质量集中在某一点的质点,则由质点组质心坐标公式,令小立体最大直径 $\lambda \rightarrow 0$,便可求得物体 Ω 的质心坐标:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV, \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dV, \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dV,$$

其中 $\rho(x, y, z)$ 是物体 Ω 的体密度函数, m 是物体 Ω 的质量.

例 3.6 设有半径为 R 的球,球心在点 $(0, 0, R)$,密度函数为 $\rho(P) = \frac{k}{r^2}$,其中 k 为常数, $r = |\overrightarrow{OP}|$, P 是球内的点,试计算球的质心.

解 由对称性可知质心在 z 轴上,因此可设质心为 $(0, 0, \bar{z})$. 利用求质心的计算公式有

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} \frac{k}{r^2} z dV.$$

利用球坐标可求出球体的质量:

$$m = \iiint_{\Omega} \frac{k}{r^2} dV = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\cos \varphi} r dr = 4Rk\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2Rk\pi.$$

所以

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{2Rk\pi} \iiint_{\Omega} \frac{k}{r^2} z dV = \frac{1}{2Rk\pi} k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\cos \varphi} r dr \\ &= \frac{1}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{4R^2 \cos^2 \varphi}{2} d\varphi \\ &= -2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\cos \varphi = \frac{-R}{2} \cos^4 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

于是质心为 $(0, 0, \frac{R}{2})$.

3. 转动惯量的计算公式

仿照上面的方法,把平面薄片近似地看成 n 个质点组成的质点组. 这个质点组对于 x 轴和对于 y 轴的转动惯量分别是

$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 \rho(x_i, y_i) \Delta \sigma_i \quad \text{和} \quad I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 \rho(x_i, y_i) \Delta \sigma_i.$$

而对原点 O 的转动惯量是

$$\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \rho(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$$

令 $\Delta\sigma_i$ 的最大直径 $\lambda \rightarrow 0$, 取极限, 则得到平面薄片对于 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma,$$

对于 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma,$$

对于原点 O 的转动惯量

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) d\sigma.$$

显然有

$$I_0 = I_x + I_y.$$

用类似的方法, 可以得到空间物体对于 xy 平面的转动惯量 I_{xy} , 对于 x 轴的转动惯量 I_x , 和对于原点 O 的转动惯量 I_0 的计算公式:

$$I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

其中 Ω 是空间物体所占的空间区域, $\rho(x, y, z)$ 是体密度.

物体对于 yz 平面, zx 平面的转动惯量, 以及对于 y 轴, z 轴的转动惯量都有类似的公式, 请读者自己写出.

例 3.7 求由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$ 所围的均匀物体对于三个坐标平面的转动惯量(设 $\rho = 1$).

解 令 $x = \arccos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, 其中 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, 则 $cr \leq z \leq c$, 且

$$I_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_{cr}^c z^2 dz = \frac{1}{5}\pi abc^3.$$

$$I_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_{cr}^c (\arccos \varphi)^2 dz = \frac{1}{20}\pi a^3 bc.$$

$$I_{zx} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_{cr}^c (b \sin \varphi)^2 dz = \frac{1}{20}\pi ab^3 c.$$

例 3.8 求密度为 ρ 的均匀圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = \pm h$ 对于直线 $l: x = y = z$ 的转动惯量.

解 直线 $x = y = z$ 通过圆柱的重心 $O(0, 0, 0)$ 且具有方向余弦 $\cos \alpha = \cos \beta$

$= \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 若取极坐标, 则有

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho(r^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz = \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho,$$

$$I_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho(r^2 \cos^2 \varphi + z^2) dz = \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho,$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho r^2 dz = \pi a^4 h \rho,$$

由于

$$d = \frac{1}{r} \sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r \cos \beta & r \cos \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ r \cos \gamma & r \cos \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ r \cos \alpha & r \cos \beta \end{vmatrix}^2},$$

其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,

从而 $d^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta$

$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma$,

于是

$$\begin{aligned} I_l &= \iiint_V \rho d^2 \cdot dx dy dz = I_z \cos^2 \gamma + I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta - 0 \\ &= \frac{2\pi\rho a^2 h}{3} \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right). \end{aligned}$$

4. 物体对质点的引力

设物体占据空间区域 Ω , 其体密度为 $\rho(x, y, z)$. 区域 Ω 外有一质量为 m_0 的质点 $A(a, b, c)$, 求物体 Ω 对质点 A 的引力 \mathbf{F} .

我们仍采用元素法(或称微元法).

如图 9.46 所示, 任意分割区域 Ω , 考虑有代表性的一小块, 其体积元素为 dV . 在 dV 内任取一点 $M(x, y, z)$, 则小块 dV 的质量为 $dm = \rho(x, y, z) dV$. 小块 dV 对质点 A 的引力 $d\mathbf{F}$ 可根据两质点间的引力来计算, 即有

$$d\mathbf{F} = G \frac{m_0 dm}{r^2} \mathbf{n}_0 = G m_0 \frac{\rho(x, y, z) dV}{r^2} \mathbf{n}_0,$$

其中 $G > 0$ 为引力常数, r 为点 A 到点 M 的距离,

即

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

\mathbf{n}_0 为 \overrightarrow{AM} 的单位向量, 即

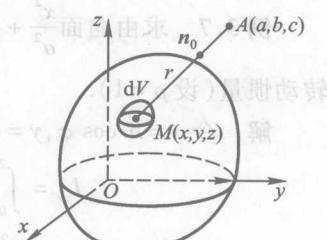


图 9.46

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \frac{\overrightarrow{AM}}{r} = \left\{ \frac{x-a}{r}, \frac{y-b}{r}, \frac{z-c}{r} \right\}.$$

因此 $d\mathbf{F}$ 在三个坐标轴上的分量分别为

$$dF_x = Gm_0 \frac{x-a}{r^3} \rho(x, y, z) dV,$$

$$dF_y = Gm_0 \frac{y-b}{r^3} \rho(x, y, z) dV,$$

$$dF_z = Gm_0 \frac{z-c}{r^3} \rho(x, y, z) dV,$$

于是得到引力 \mathbf{F} 在三个坐标轴上的分量分别为

$$F_x = Gm_0 \iiint_{\Omega} \frac{x-a}{r^3} \rho(x, y, z) dV,$$

$$F_y = Gm_0 \iiint_{\Omega} \frac{y-b}{r^3} \rho(x, y, z) dV,$$

$$F_z = Gm_0 \iiint_{\Omega} \frac{z-c}{r^3} \rho(x, y, z) dV,$$

其中 $r = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

例 3.9 设有半径为 R 的球, 密度为常数(不妨设 $\rho=1$), 试求出其引力场.

解 为求引力场, 在空间中任取一点 P , 我们要计算在点 P 处单位质量所受到的引力, 这里所说的引力, 应当是一个向量. 取球心为原点, 建立坐标系, 由于球的对称性, 不妨设 P 在 z 轴上, 即设 $P = (0, 0, l)$, 其中 $l > 0$, 它正是点 P 到球心的距离.

在球中任取一点 (x, y, z) , 环绕着它取一块体积微元 dV , 则这一小块对点 P 的引力的数值为(设引力常数 $k=1$)

$$\frac{dV}{x^2 + y^2 + (z-l)^2},$$

方向是从点 P 指向点 (x, y, z) , 这个方向同 z 轴

正向的夹角用 β 来记(图9.47). 因此引力在 z 轴上的分量为

$$\cos \beta dV \quad (1)$$

我们有

图 9.47

$$\cos \beta = \frac{z-l}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}$$

若用 F_z 表示球体对质点 P 的引力 \mathbf{F} 在 z 轴上的分量, 则

$$F_z = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{z-l}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}} dV.$$

作球坐标换元, 得出

$$F_z = 2\pi \int_0^R dr \int_0^\pi \frac{r^2(r\cos\varphi - l)\sin\varphi}{(r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi)^{3/2}} d\varphi.$$

现在, 应当先算出定积分

$$G(r) = \int_0^\pi \frac{(r\cos\varphi - l)\sin\varphi}{(r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi)^{3/2}} d\varphi,$$

对上述积分作换元 $t = (r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi)^{1/2}$, 得到

$$G(r) = \frac{1}{2l^2 r} \int_{r-l}^{r+l} \left(\frac{t^2 - l^2}{t^2} - 1 \right) dt = \frac{1}{l^2} \left(\frac{r-l}{|r-l|} - 1 \right),$$

可见

$$G(r) = \begin{cases} 0, & r > l, \\ -\frac{2}{l^2}, & r < l. \end{cases}$$

因此, 当 $l > R$ 时, 必有 $r < l$, 所以

$$F_z = 2\pi \int_0^R r^2 G(r) dr = -\frac{4\pi}{l^2} \int_0^R r^2 dr = -\frac{4\pi R^3}{3l^2};$$

当 $l \leq R$ 时

$$F_z = 2\pi \int_0^l r^2 G(r) dr = -\frac{4\pi}{l^2} \int_0^l r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi l^3.$$

由球的对称性和质量分布的均匀性, 可知对点 P 的引力在 x 轴和 y 轴方向的分量等于零, 即 $F_x = F_y = 0$, 而

$$F_z = \begin{cases} -\frac{4\pi R^3}{3l^2}, & \text{当 } l > R \text{ 时,} \\ -\frac{4}{3}\pi l^3, & \text{当 } l \leq R \text{ 时.} \end{cases}$$

综合以上结果, 可以得出以下的结论:

(1) 对任何一点所产生的引力指向球心;

(2) 对球外一点所产生的引力, 等于在球心上放置一个质量为 $\frac{4}{3}\pi R^3$ 的质

点对该点所产生的引力, 即犹如球的质量全部集中在球心上;

(3) 对球内一点 P 所产生的引力, 等于半径为 l (点 P 到球心的距离) 的球

体对点 P 所产生的引力, 犹如球面上一切点若它们到球心的距离大于点 P 到球心的距离时, 它们对 P 点的引力不起作用. (1) .

习题 9.3

1. 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 舍在柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 内那部分的面积.
2. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 舍在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 内那部分的面积.
3. 设 Σ 是马鞍面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ ($x > 0, y > 0$) 割下的部分, 求曲面 Σ 的面积.
4. 设一物体 Ω 由曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成, 其上任一点 (x, y, z) 处的密度等于该点到 z 轴的距离, 试求 Ω 的质量.
5. 求密度均匀的半椭圆薄片 D 的质心. 设 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0$.
6. 求一均匀的球顶锥体的质心, 设该球的球心在原点, 半径为 R , 锥体的顶点在原点, 以 z 轴为轴, 锥面母线与 z 轴交角为 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).
7. 求位于两个圆 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 和 $x^2 + y^2 = 2ax$ 之间的薄片的质心. 已知其上各点的密度与该点到原点的距离成正比.
8. 求由平面 $x = 0, y = 0, z = 0$, $z = x + y$ 及 $x + y = 1$ 所围成的均匀物体(设密度 $\rho = 1$) 对 xy 平面的转动惯量.
9. 求密度为 1 的均匀球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 对坐标轴的转动惯量.
10. 有一均匀圆柱壳 Ω , 由 $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 = b^2$ ($0 < a < b$) 及 $z = 0, z = h$ ($h > 0$) 围成, 另有一质量为 m_0 的质点位于原点, 求圆柱壳对此质点的引力 F .

B 类

1. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 被平面 $z = \frac{a}{4}$ 与 $z = \frac{a}{2}$ 所夹部分的面积.
2. 半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 上, 问 R 为何值时, Σ 在定球面内的那部分面积最大?
3. 求两个椭圆抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 8 - x^2 - y^2$ 所围成密度分布均匀的物体 Ω 的质心.
4. 求密度均匀, 高为 h 的环状轮盘对其轴线的转动惯量.

5. 一均匀物体(密度 ρ 为常数)占有的闭区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0, |x|=a, |y|=a$ 所围成的. (1) 求物体体积; (2) 求物体的质心; (3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

6. 设均匀柱体密度为 ρ , 占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0,0,a)$ ($a > h$)处的单位质量的质点的引力.

明, 1 则是函数的原函数, 即 $\int_0^x f(t) dt = F(x)$

第 10 章 曲线积分与曲面积分

本章将研究多元函数在空间曲线上的积分, 以及在曲面上的积分。

上一章是把一元函数的定积分推广到多元函数的重积分。本章则是研究定义在一段曲线弧或一片曲面上的多元函数的积分。这样推广后的积分分别称为曲线积分和曲面积分。

§1 曲线积分

示例 1.1 用果胶制作果冻, 关键在于将果胶均匀地涂在果冻上, 使其均匀分布。

我们从讨论物质曲线的质量问题和力场对质点所做功的问题引出两种类型的曲线积分。

1.1 第一型曲线积分

设有一物质曲线弧 $L(\overrightarrow{AB})$, 其线密度为连续函数 $\rho(x, y, z)$ ($(x, y, z) \in L$), 试问: 怎样计算曲线 L 的质量 m ? 我们仍采用分割、采样、作和式、求极限的方法解决这一问题, 将曲线 L 分成 n 小段: $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$, 并用 Δl_i 表示第 i 小段曲线的弧长, 在 Δl_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 则该小段的质量近似值为 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i$, 将这 n 个小段质量近似值相加, 则得

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i,$$

记 $\lambda = \max_i \{\Delta l_i\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上式和式的极限就是曲线 L 的质量, 即

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i.$$

定义 1.1 设 $L(\overrightarrow{AB})$ 是 $Oxyz$ 空间的一段曲线, $f(x, y, z)$ 是定义在 L 上的函数。将 L 分成 n 个小段 $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$; 并用 Δl_i 表示该小段的弧长, 在 Δl_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), 如图 10.1, 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i,$$

如果无论 L 怎样分割, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 点怎样选取,

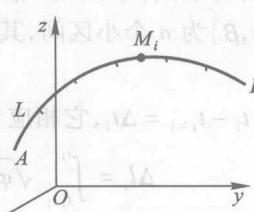


图 10.1

当 $\lambda = \max_i \{\Delta l_i\} \rightarrow 0$ 时, 和式总有唯一确定的极限 I , 即

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i,$$

则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在 L 上的第一型曲线积分, 也称为对弧长的曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y, z) dl$ (或 $\int_L f(M) dl$), 即

$$\int_L f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, L 称为积分弧段(也称为积分路径). 当 L 是封闭曲线时, 曲线积分记作 $\oint_L f(x, y, z) dl$.

由定义可知, 第一型曲线积分与积分弧段 L 的指向无关, 即如果用 L_+ 表示与 $L(\overrightarrow{AB})$ 指向相反的同一曲线弧段 ($L_- = \overleftarrow{BA}$), 则两个曲线积分相等, 即

$$\int_L f(M) dl = \int_{L_-} f(M) dl.$$

这个性质与定积分的性质 $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ 是不同的. 但由曲线积分定义容易证明定积分的其他许多性质(如线性性质、可加性、积分中值定理等)都可以推广到曲线积分.

与定积分类似, 对曲线积分有如下积分存在定理.

定理 1.1 若曲线 $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, 其中函数 $x(t), y(t), z(t)$ 有连续的导数, 且被积函数 $f(x, y, z)$ 在 L 上连续, 则曲线积分 $\int_L f(x, y, z) dl$ 存在.

下面建立第一型曲线积分的计算公式. 为简单起见, 我们以平面曲线为例.

设曲线 L 的参数方程为:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 而 $f(x, y, z) \in C(L)$. 分割区间 $[\alpha, \beta]$ 为 n 个小区间, 其分点依次为

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

记 $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$, 它相当于 L 上的弧长为 Δl_i . 由弧长表达式及积分中值定理, 有

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \sqrt{\varphi'^2(\xi_i^*) + \psi'^2(\xi_i^*)} \Delta t_i,$$

其中 $\xi_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. 为构造积分和, 在 Δl_i 上取点 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$. 因为曲线积分存在, 所以这里的 M_i 可以在 Δl_i 上任意取, 不妨就取 $M_i = (\varphi(\xi_i^*), \psi(\xi_i^*))$. 此时, 积分和为

$$\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i^*), \psi(\xi_i^*)) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i^*), \psi(\xi_i^*)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(\xi_i^*) + \psi'^2(\xi_i^*)} \Delta t_i, \quad (1.1)$$

其中 $f(x, y)$ 在 L 上连续.

因为 $\varphi(t), \psi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 所以当 $\max_i \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ 时, 有 $\max_i \{\Delta l_i\} \rightarrow 0$. 又因为曲线积分存在, 所以当 $\max_i \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ 时, 等式(1.1)左端的和式 $\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i^*), \psi(\xi_i^*)) \cdot \Delta l_i$ 趋于曲线积分 $\int_L f(x, y) dl$. 另一方面, 因为函数 $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 是 t 的连续函数, 所以当 $\max_i \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ 时, 等式(1.1)右端的和式趋于定积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

于是, 当我们在等式(1.1)两端同时取极限时, 便得到第一型曲线积分的计算公式

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \quad \alpha < \beta, \quad (1.2)$$

式中 $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$ 正是弧长微分(或称弧长元素) dl . 这里要强调的是, (1.2) 中的定积分下限 α 一定小于上限 β .

特别地, 当曲线 L 用函数 $y=y(x), x \in [\alpha, \beta]$ 表示时, 则取 x 为参数, 此时弧长微分 $dl = \sqrt{1+y'^2(x)} dx$, 故

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1+y'^2(x)} dx.$$

公式(1.2)可推广到三维情况, 设 L 是空间曲线, 其参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

其中 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $f(x, y, z) \in C(L)$, 则第一型曲线积分可通过对参数 t 的定积分来计算, 其计算公式为

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt. \quad (1.3)$$

在公式(1.3)中 $dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt$ 是 L 的弧长微分(即弧长元素, 有时也用 ds 表示).

例 1.1 计算第一型曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, 其中 $L: x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).

解法 1 L 的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \quad y = \frac{a}{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

弧长微分 $dl = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2} dt$, 所以

$$(1.1) \quad \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1 + \cos t)} dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2a^2.$$

解法2 由对称性, 考虑沿上半圆周

$$L_1: y = \sqrt{ax - x^2} \quad (0 \leq x \leq a)$$

的积分, 此时 $dl = \frac{a}{2} \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$, 则

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = 2 \int_{L_1} \sqrt{x^2 + y^2} dl$$

$$= 2 \int_0^a \sqrt{ax} \cdot \frac{a}{2} \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}} = a\sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^2.$$

例1.2 要计算曲线积分 $I = \oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 、直线 $y = x$ 和 x 轴在第一象限所围图形的边界.

解 将 L 分解为 $L = C_1 + C_2 + C_3$ (如图 10.2), 其中

$$C_1: y = 0 \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$C_2: x^2 + y^2 = a^2 \quad (0 \leq y \leq x),$$

$$C_3: y = x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

所以

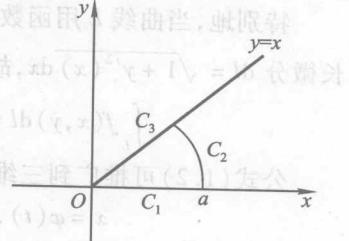


图 10.2

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl + \int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl + \int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl \\ &= \int_0^a e^x dx + \int_{C_2} e^a dl + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx \\ &= (e^a - 1) + \frac{\pi}{4} ae^a + (e^a - 1) = 2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} ae^a. \end{aligned}$$

例1.3 如果曲线 $L: y = \ln x$ 上每一点的密度等于该点的横坐标的平方, 试求曲线 L 在横坐标 x_1 和 x_2 间的一段质量 ($0 < x_1 < x_2$).

解 因为 $m = \int_L \rho ds$, 所以质量 $m = \int_L x^2 ds$, 其中弧长微分

$$\text{故 } m = \int_L x^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) \\ = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{3} [(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x_1^2)].$$

例 1.4 计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为圆周: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

解 根据对称性知 $\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$, 因此

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_L ds = \frac{a^2}{3} \cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

例 1.5 计算 $\int_L zd l$, 其中 L 为螺旋线的一段弧: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\text{解 } \int_L zd l = \int_0^{2\pi} bt \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ = \int_0^{2\pi} b \sqrt{a^2 + b^2} t dt = 2b \sqrt{a^2 + b^2} \pi^2.$$

1.2 第二型曲线积分

设空间一单位质量的质点在变力 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 的作用下沿光滑曲线 L 从点 A 运动到点 B , 我们讨论如何求变力 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 所做的功 W .

为此我们使用积分中常用的方法, 从 A 到 B 作曲线 L 一个分割:

其中 $A_i \in L$, 它的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 小弧段 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ 的长度记作 Δs_i , 向量 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i\} = \{x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}, z_i - z_{i-1}\}$. 在弧 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ 上任取一点 $M_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$ 很小时, $\mathbf{F}(x, y, z)$ 连续时, 我们可以将弧 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ 近似地看成有向线段 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$, 而将 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ 上近似地看作常力 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. 常力 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 对位移 $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ 所做的功为 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1} A_i}$. 由此我们得到 W 的一个近似值

$$W \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1} A_i}.$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 则该和式的极限即为功 W 的值.

如果记 $\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, 则

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i.$$

由此我们引出以下定义：

定义 1.2 设函数 $f(x, y, z)$ 在空间光滑曲线 $L = \overline{AB}$ 上有定义, 从 A 到 B 给定 L 一个定向, 对 L 作沿定向的分割:

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B,$$

其中 $A_i(x_i, y_i, z_i) \in L$, 记 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i , 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 及 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$.

任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i.$$

若当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上面和式的极限存在且不依赖于分割及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取, 则称此极限为函数 f 沿有向曲线 L 对 x 方向的第二型曲线积分(也称为对坐标的曲线积分), 记为 $I = \int_L f(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i$.

同理可以定义函数 $f(x, y, z)$ 沿 y 方向和沿 z 方向的第二型曲线积分:

$$\int_L f(x, y, z) dy, \quad \int_L f(x, y, z) dz.$$

回到关于功的计算, 我们有

$$W = \int_L P(x, y, z) dx + \int_L Q(x, y, z) dy + \int_L R(x, y, z) dz.$$

常把上式写为

$$W = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

若记 $ds = \{dx, dy, dz\}$ 为有向弧长微元, 其方向为 L 的方向(弧长微元 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$), 则

$$W = \int_L F(x, y, z) \cdot ds.$$

第二型曲线积分与第一型曲线积分的一个重要区别是: 第二型曲线积分具有方向性. 当积分方向换成由点 B 到点 A 时, 则因

$$\overleftarrow{A_{i-1}A_i} = -\overrightarrow{A_iA_{i-1}},$$

故有 $\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz = - \int_{\overline{BA}} P dx + Q dy + R dz$.

闭曲线 L 上的第二型曲线积分常记为

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

这时, 积分只与 L 的方向有关, 而与起点的选择无关.

下面我们给出第二型曲线积分的计算公式. 其计算方法依然是将其转化为对参数 t 的积分来算. 为书写简单, 我们仅对平面曲线给出计算公式的证明.

定理 1.2 设函数 $P(x, y)$ 在光滑曲线 L 上连续, 曲线弧 L 由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

给出, 当参数 t 单调地由 α 变到 β 时, L 上的点 $M(x, y)$ 从起点 A 连续变化到终点 B , 则 $P(x, y)$ 在曲线 $L = \widehat{AB}$ 上的第二型曲线积分存在, 且

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

证 对 $L = \widehat{AB}$ 作沿定向的分割:

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B.$$

它们对应于一列单调变化的参数值

$$\alpha = t_0, t_1, \dots, t_n = \beta$$

(构成区间 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 的分割, 为确定起见, 假设 $\alpha < \beta$). 记 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i , 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$. 取任点 $(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$, 设其对应于参数 τ_i , 即 $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, 其中 τ_i 在 t_{i-1} 与 t_i 之间.

由于 $P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 因此当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i) \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

而由微分中值定理知, 存在 $\tau_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, 使得

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i^*) \Delta t_i.$$

因此函数 $P(x, y)$ 在曲线 L 上对 x 方向的第二型曲线积分的和式为

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i^*) \Delta t_i,$$

但 $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 从而一致连续, $P(x, y)$ 在 L 上连续有界, 所以当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ 时, 便有

$$\left| \sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i^*) \Delta t_i - \sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i) \Delta t_i \right| \rightarrow 0,$$

因此第二型曲线积分 $\int_L P(x, y) dx$ 存在, 并且

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i^*) \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

类似可以证明函数 $Q(x, y)$ 在曲线 L 上对 y 方向的曲线积分的计算公式是：

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^\beta Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (1.5)$$

将(1.4)式与(1.5)式相加,便得到如下计算公式

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^\beta [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt. \quad (1.6)$$

这里要强调的是:第二型曲线积分化为定积分计算时,定积分的下限 α 一定是对应积分路径 L 的起点,上限 β 一定是对应积分路径 L 的终点,下限 α 不一定小于 β .

如果 L 由方程 $y=f(x)$ 给出,可以看做是参数方程的特殊情况,此时公式(1.6)成为

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)] dx,$$

其中下限 a 对应 L 的起点,上限 b 对应 L 的终点.

公式(1.6)可推广到空间曲线.设空间曲线 L 由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ 给出,其计算公式为

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_a^\beta [P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \psi'(t) + \\ & \quad R(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \omega'(t)] dt, \end{aligned}$$

其中下限 α 对应 L 的起点,上限 β 对应 L 的终点.

由于曲线 L 的方向决定了其上每点 (x, y, z) 处的单位切向量 e_t 的方向, e_t 的方向余弦记为 $\{\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z\}$, 其中 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 是 e_t 的方向角,从而由 L 的参数方程有

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}}, \\ \cos \theta_y &= \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}}, \\ \cos \theta_z &= \frac{\omega'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}}. \end{aligned}$$

由第一型曲线积分的计算公式可得

$$\begin{aligned} & \int_L [P(x, y, z) \cos \theta_x + Q(x, y, z) \cos \theta_y + R(x, y, z) \cos \theta_z] ds \\ &= \int_a^\beta \left[P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) & \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}} + \\
 R(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) & \frac{\omega'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}} \\
 = & \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\omega'(t)] dt \\
 = & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.
 \end{aligned}$$

由此可见, 空间曲线 L 上的第一型曲线积分与第二型曲线积分之间有如下联系:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (P \cos \theta_x + Q \cos \theta_y + R \cos \theta_z) ds, \quad (1.7)$$

其中 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 是有向曲线弧 L 在点 (x, y, z) 处的切向量的方向角.

注 在公式(1.7)的推导过程中, 我们沿用了假设 $\alpha < \beta$. 如果 $\alpha > \beta$, 则可令 $u = -t$, 起始点 A, B 对应 $u = -\alpha, u = -\beta$, 此时有 $(-\alpha) < (-\beta)$, 只需将上述推导过程对参数 u 进行即可.

曲例 1.6 计算曲线积分 $\int_{AB} x dy - y dx$, 其中 \widehat{AB} 为椭圆弧, 其参数方程为

$$\widehat{AB}: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int_{AB} x dy - y dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)] dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{2} ab \pi.
 \end{aligned}$$

例 1.7 计算积分 $\int_L x^3 dx + 3zy^2 dy - xy^2 dz$, 其中 L 是从点 $A(3, 2, 1)$ 到点 $B(0, 0, 0)$ 的线段.

解 直线段 L 的方程为

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

由此得到 L 的参数方程 $x = 3t, y = 2t, z = t$, $0 \leq t \leq 1$.

参数值 $t = 1$ 对应起点 $A, t = 0$ 对应终点 B . 所以

$$\int_L x^3 dx + 3zy^2 dy - xy^2 dz = \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - 3t \cdot (2t)^2] dt = x$$

$$+\frac{93}{4} = -\frac{93}{4} \quad ((1)\omega, (1)\psi, (1)\varphi)$$

例 1.8 计算 $\int_L xy dx$, 其中 L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧.

解法 1 将所给积分化为对 x 的定积分来计算. 由于 $y = \pm\sqrt{x}$ 不是单值函数, 所以要把 L 分为 \widehat{AO} 和 \widehat{OB} 两部分. 在 \widehat{AO} 上, $y = -\sqrt{x}$, x 从 1 变到 0; 在 \widehat{OB} 上, $y = \sqrt{x}$, x 从 0 变到 1, 因此

$$\begin{aligned} \int_L xy dx &= \int_{\widehat{AO}} xy dx + \int_{\widehat{OB}} xy dx \\ &= \int_1^0 x(-\sqrt{x}) dx + \int_0^1 x\sqrt{x} dx \\ &= 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

解法 2 将所给积分化为对 y 的定积分来计算. 现在 $x = y^2$, y 从 -1 变到 1. 因此

$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 y(y^2)' dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

例 1.9 在过点 $O(0, 0)$ 和 $A(\pi, 0)$ 的曲线簇 $y = a \sin x$ ($a > 0$) 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

$$\begin{aligned} \text{解 } I(a) &= \int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy \\ &= \int_0^\pi [1 + a^3 \sin^3 x + (2x + a \sin x) \cdot a \cos x] dx = \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3. \end{aligned}$$

$$I'(a) = 4(a^2 - 1), I''(a) = 8a.$$

令 $I'(a) = 0$ 得 $a_1 = -1$ (舍去), $a_2 = 1$. 又 $I''(1) = 8 > 0$, 所以 $I(a)$ 在 $a = 1$ 取最小值, 故所求曲线为 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

注 本例题说明, 在一般情况下, 曲线积分与路径有关.

例 1.10 计算曲线积分

$$I = \int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向看去 L 取逆时针方向, $a > 0$.

解法 1 取 L 的参数方程为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t, \quad y = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t, \quad z = -\frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{3a}{\sqrt{6}} \sin t \right) \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{a}{\sqrt{6}} \cos t \right) + \right. \\ &\quad \left(-\frac{3a}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t \right) \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{a}{\sqrt{6}} \cos t \right) + \\ &\quad \left. \left(\frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \right) \left(-\frac{2a}{\sqrt{6}} \cos t \right) \right] dt \\ &= - \int_0^{2\pi} a^2 (\sqrt{3} \sin^2 t + \sqrt{3} \cos^2 t) dt = -2\sqrt{3} a^2 \pi. \end{aligned}$$

解法 2 为求 L 的切向量 \mathbf{T} , 先求出平面与球面的法向量

$$\mathbf{n}_1 = \{1, 1, 1\}, \mathbf{n}_2 = \{x, y, z\},$$

所以 L 的切向量为

$$\mathbf{T} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \{z - y, x - z, y - x\},$$

可以看出 \mathbf{T} 的方向与 L 的方向一致, 由此得

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{\sqrt{(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2}} \{z - y, x - z, y - x\}.$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= \int_L [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] ds \\ &= - \int_L \frac{(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2}{\sqrt{(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2}} ds \\ &= - \int_L \sqrt{(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2} ds \\ &= - \int_L \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2) - (x+y+z)^2} ds \\ &= - \int_L \sqrt{3} ads = -2\sqrt{3} a^2 \pi. \end{aligned}$$

习题 10.1

A 类

1. 计算曲线积分

$$\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl, \text{ 其中 } L: x = a \cos t, y = a \sin t, z = at \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0).$$

其中 2. 计算曲线积分 $I = \int_L \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $y = x$ 相交的圆周, $a > 0$.

3. 计算积分 $I = \int_L x^2 y z ds$, 其中 L 为折线 $ABCD$, 这里 A, B, C, D 依次为点 $(0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 3, 2)$.

4. 求空间曲线 $L: x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(3, 3, 2)$ 的弧长 ($t > 0$).

5. 计算球面上的三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0), x > 0, y > 0, z > 0$ 的围线的重心的坐标.

6. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 计算 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) dl$.

7. 设 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 含在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 内的部分, 试用曲线积分求 Σ 的面积.

8. 计算 $\int_L y^2 dx$, 其中 L 为:

(1) 半径为 a , 圆心在原点, 按逆时针方向的上半圆周;

(2) 从点 $A(a, 0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a, 0)$ 的线段.

9. 计算 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, 其中 L 为:

(1) 抛物线 $y = x^2$ 从 $O(0, 0)$ 到 $B(1, 1)$ 的一段弧线;

(2) 有向折线 OAB , 这里 O, A, B 依次为点 $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

10. 计算曲线积分 $\oint_L (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$, 其中 L 是曲线

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ 从 z 轴正向看去, L 取顺时针方向.

11. 计算曲线积分 $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $(x - a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行).

12. 计算曲线积分 $\int_L y dx + x dy$, 其中积分路径 L 为从 $O(0, 0)$ 经 $A(1, 1)$ 到 $B(2, 0)$ 的圆弧: $x^2 + y^2 = 2x \quad (y \geq 0)$.

13. $\oint_{\Gamma} dx - dy + y dz$, 其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$, 这里的 A, B, C 依次为点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

14. $\oint_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向绕行).

15. 把曲线积分 $I = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 化为对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

(1) 沿抛物线 $y = x^2$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$;

(2) 沿上半圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 由 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

面曲积类, 级数界值定理 3. 义定理 (3. 1) 面曲界值定理 3. 义
题型置边值问题时, 本题的解法是先求出平面区域 D , 然后将曲面 S 在 D 上的积分化为二重积分, 即 $\iint_D f(x, y) dxdy$.
1. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的弧长, 其中 $a > 0$.

2. 计算 $\oint_L \frac{\partial f}{\partial n} ds$, 其中 L 为椭圆 $x^2 + y^2 = 1$, n 为 L 的外法向量 (即指向椭圆外侧的法向量), $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$.

3. 计算第二型曲线积分

$I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

(1) $L: x^2 + y^2 = a^2$ 沿逆时针方向.

(2) $L: |x| \leq l, |y| \leq l$ 的边界, 沿逆时针方向.

4. 计算 $I = \oint_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, L 是由 $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2 - 2$ 所围区域的正向边界曲线.

5. 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在曲线 L 上连续, T 为 L 的长度, $M = \max_{(x, y) \in L} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$.

(1) 证明

$$\left| \int_L P dx + Q dy \right| \leq TM.$$

(2) 利用上不等式证明如下曲线积分的估计式:

$$|I_R| = \left| \oint_{C_R} \frac{(y-1) dx + (x+1) dy}{(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2)^2} \right| \leq \frac{2\pi}{R^2},$$

其中 C_R 为圆周 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = R^2$, 取正向, 并求 $\lim_{R \rightarrow +\infty} |I_R|$.

6. 求曲线积分 $I = \int_L e^{-(x^2+y^2)} [\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy]$ 的值, 其中 L 是单位圆 $x^2 + y^2 = 1$, 方向为逆时针.

§2 曲面积分

把平面区域上的积分推广到曲面上去就得到曲面积分. 曲面积分和曲线积分一样有两种类型: 第一型曲面积分和第二型曲面积分.

2.1 第一型曲面积分

1. 第一型曲面积分的概念

设 Σ 是分片光滑的有界曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的有界函数. 光滑曲面是指在此曲面上的每一点都有切平面, 并且随着切点的移动, 切平面的位置连续变化(或说切平面的法向量的方向连续变化); 曲面是分片光滑是指把有限个光滑的曲面片拼接起来所得到的曲面, 如多面体的表面.

用光滑的简单曲线网把曲面 Σ 分割成 n 个子曲面:

$$\Sigma = \Delta\Sigma_1 \cup \Delta\Sigma_2 \cup \cdots \cup \Delta\Sigma_n,$$

$\Delta\Sigma_i$ 的面积记为 ΔS_i . 用 λ_i 表示子曲面 $\Delta\Sigma_i$ 的直径(即 $\lambda_i = \sup_{M_1, M_2 \in \Delta\Sigma_i} |M_1 M_2|$), $d_n = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 分割要求当 $n \rightarrow \infty$ 时, 所有子曲面的直径一致地缩小为零, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$. 在每个子曲面上任意取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\Sigma_i$, 在这些样点上求函数 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的值, 并作和式

$$A_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

最后求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, 如果和式 A_n 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在, 并且极限值不仅与分割方式无关, 而且与样点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的取法无关, 则称函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上可积. 极限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 称为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上的第一型曲面积分, 也称为对面积的曲面积分, 记作

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS,$$

即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做作积分曲面, dS 表示 Σ 的面积元素. 当 Σ 是封闭曲面时, 常采用符号

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

易知如果在曲面 Σ 上分布着某种物质, 其面密度函数 $\rho(x, y, z)$ 是连续的, 则利用上述分析方法可知曲面 Σ 的质量 m 等于密度函数在曲面 Σ 上的积分, 即

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS.$$

特别地, 当 $\rho(x, y, z) \equiv 1$ 时, 则

$$\iint_{\Sigma} dS = \text{曲面 } \Sigma \text{ 的面积.}$$

有关二重积分的性质,如积分的线性性质,积分的可加性,积分运算的保序性质,积分运算和绝对值运算的关系,积分中值定理以及连续函数必可积等性质都可以推广到曲面积分上来.

2. 第一型曲面积分的计算

设 Σ 的参数方程为

$$\Sigma: \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \omega(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D, \quad (2.1)$$

其中参数域 D 为有界闭区域,其边界曲线是分段光滑的. 则类似曲线积分那样,可以证明如下定理.

定理 2.1 如果在区域 D 上(2.1)式中的函数都有连续的一阶偏导数,并且对任意的 $(u, v) \in D$,

$$J(u, v) = \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2} \neq 0,$$

则 Σ 上的连续函数 $f(x, y, z)$ 必可积,且有如下计算公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)) J(u, v) du dv, \quad (2.2)$$

其中 $dS = J(u, v) du dv$ 是曲面 Σ 的面积元素.

特别在直角坐标系下,如果曲面 Σ 的方程为

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

其中 D 是曲面 Σ 在 xy 平面上的投影区域. 此时面积元素为

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy,$$

于是第一型曲面积分的计算公式为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy. \quad (2.3)$$

公式(2.3)说明:在计算曲面积分时只需把变量 z 换成 $z(x, y)$,曲面的面积元素 dS 换为 $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$,再确定 Σ 在 xy 平面上的投影区域 D ,这样就可以把曲面积分化为二重积分来计算了.

例 2.1 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上取 $A(1, 0, 0)$,

$B(0, 1, 0)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 三点为顶点的球面三

角形(\widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} 均为大圆弧). 若球面的密度为 $\rho = x^2 + z^2$,求此球面三角形块 Σ 的质量(图 10.3).

解 设所求质量为 m ,则 $m = \iint_{\Sigma} \rho dS =$

$\iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) dS$. 因为被积函数为 $f(x, y, z) = x^2 +$

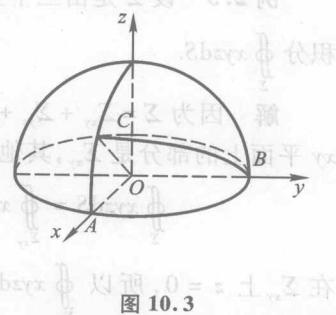


图 10.3

z^2 , 所以应把曲面 Σ 投影到 xz 平面. 此时, 曲面 Σ 的方程为 $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$, $(x, z) \in D_{xz}$, 其面积元素为

$$dS = \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} dx dz = \frac{dx dz}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}},$$

故 $m = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{D_{xz}} (x^2 + z^2) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} dx dz$

且共, 故 $= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{8} \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho^2 \frac{\sqrt{1 - \rho^2} = t}{6} \frac{\pi}{6}$

例 2.2 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

解 积分曲面 Σ 是球心在原点, 半径为 R 的上半球面, 其参数方程为

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

容易算出面积元素 $dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$, 于是由公式(2.2), 并且注意到

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0,$$

则有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS \\ &= \iint_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}} (R \sin \varphi \cos \theta + R \sin \varphi \cos \theta + R \cos \varphi) R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} (R \sin \varphi \cos \theta + R \sin \varphi \sin \theta + R \cos \varphi) R^2 \sin \varphi d\theta \\ &= 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \pi R^3. \end{aligned}$$

例 2.3 设 Σ 是由三个坐标面和 $x + y + z = 1$ 围成的四面体的表面, 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz dS$.

解 因为 $\Sigma = \Sigma_{xy} + \Sigma_{yz} + \Sigma_{zx} + \Sigma_0$, Σ_0 是 Σ 在平面 $x + y + z = 1$ 上的部分, Σ 在 xy 平面上的部分是 Σ_{xy} , 其他记号的意义自明. 所以

$$\iint_{\Sigma} xyz dS = \iint_{\Sigma_{xy}} xyz dS + \iint_{\Sigma_{yz}} xyz dS + \iint_{\Sigma_{zx}} xyz dS + \iint_{\Sigma_0} xyz dS.$$

在 Σ_{xy} 上 $z = 0$, 所以 $\iint_{\Sigma_{xy}} xyz dS = 0$. 同理 $\iint_{\Sigma_{yz}} xyz dS = 0$, $\iint_{\Sigma_{zx}} xyz dS = 0$. 现在计算

$\oint_{\Sigma_0} xyz dS$. 设 D 是 Σ_0 在 xy 坐标面上的投影，则

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \}.$$

Σ_0 的方程为 $z = 1 - x - y$, $(x, y) \in D$. 此时面积元素是

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy.$$

由公式(2.3),有

$$\oint_S xyz \, dS = \iint_D xy(1-x-y)\sqrt{3} \, dx \, dy$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} xy(1-x-y) dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \int_0^1 y(1-y)^3 dy = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

综合以上讨论,有 (D) $\exists (x, y)$ 且, $\exists (x, z), (y, z) = z$ 面曲干核, 取图 删

$$\iint_S xyz dS = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

卷之二十一

例 2.4 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in S$, π 是 S

在点 P 处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 为原点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 π 的距离, 求

解 设 (X, Y, Z) 是切平面 π 上的任意一点, 则 π 的方程为

$$\frac{xX}{2} + \frac{yY}{2} + zZ = 1,$$

从而可知

$$\rho(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

由 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}$, 有 (常数 $0 < R, \pi/2 \geq \theta \geq 0, \pi \geq \phi \geq 0$)

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$$= \left[1 + \left(\frac{-x}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy$$

$$= \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy,$$

$$2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$$

故

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)} dS &= \frac{1}{4} \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

2.2 第二型曲面积分

1. 曲面的侧

我们先对曲面的侧做一些说明. 通常我们遇到的曲面都是双侧的, 例如由方程 $z=f(x,y)$ 所表示的曲面 S 有上侧和下侧之分; 又例如包围某一空间区域的闭曲面有外侧和内侧之分. 这种曲面我们称之为“双侧曲面”. 在讨论第二型曲面积分时, 需要指定曲面的侧. 我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧. 例如, 对于曲面 $z=f(x,y)$, $(x,y) \in D$, 且 $f(x,y) \in C^1(D)$, 如果取它的法向量 n 的指向朝上(确切地说, 取法向量 n 的指向与 z 轴正向的夹角 γ 为锐角, 此时 $\cos \gamma > 0$), 我们就认为取定曲面的上侧, 此时 S 的法向量 $n = \{-f_x, -f_y, 1\}$. 若取下侧, 则 $n = \{-f_x, -f_y, -1\}$. 这种取定了法向量的方向, 亦即选定了侧的曲面称为有向曲面.

如果曲面 S 由参数方程

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D$$

给出, 其中 $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$. 记

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

并假定对 D 中每一点都有 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. 则 S 的法向量 $n = \pm \{A, B, C\}$, 前面的“ \pm ”号分别表示曲面 S 的两侧.

例如球面 S :

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \varphi$$

$$(0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, R > 0 \text{ 为常数}).$$

容易算出 $A = R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, B = R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, C = R^2 \sin \varphi \cos \varphi$, 故球面的法向量可取 $n = \pm \{\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi\}$. 当取 S 的外侧为正侧, 为确定前面的符号, 我们可以在球面上取定一点, 譬如取点 $(0, R, 0)$, 此时 $\varphi = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}$, 而法向量 n 的第二个分量应是正的, 所以法向量 n 的表示式前面应取“+”号. 而球面的内侧 S_- 的法向量则为 $-\{\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi\}$.

应当指出, 并不是所有曲面都是双侧的. 例如默比乌斯 (Möbius) 带就是单侧曲面. 当人们在它上面刷漆时, 在不越过曲面边沿的情况下, 可以涂遍整个曲

面. 默比乌斯带的做法(图 10.4): 把带子的 AD 端捏紧, 再捏住 BC 端旋转 180° , 跟 AD 端对接, 使点 A 与 C 重合, 点 B 与 D 重合.

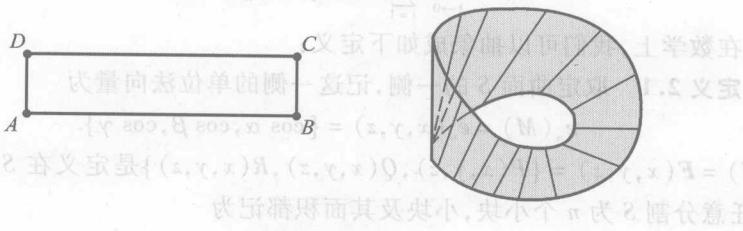


图 10.4

在今后的讨论中, 我们总假定所考虑的曲面是双侧的.

2. 第二型曲面积分的概念和性质

在流体力学中, 常需要研究流体通过给定曲面的流量; 在电学中, 常需要考虑电力线通过给定曲面的电通量. 不论是流量还是电通量, 在数学中, 它们都可以说抽象为相同的形式. 下面我们从流量问题引出第二型曲面积分的概念.

设有一定常流体(每一点的速度只与点的位置有关而不随时间改变的流体, 称为定常流体), 以速度 $\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ 流过光滑有向曲面 S (从负侧流向正侧), 现计算它的流量 Φ .

在物理学中, 流量即体积流量, 它是指单位时间内通过流体的体积. 为求流量 Φ 把曲面 S 分成 n 个小块 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n, \Delta S_i$ 也表示该小块的面积. 在每一小块 ΔS_i 上, 速度向量 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 可近似看作一个常向量 $\mathbf{v}(M_i)$, 这里 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 是 ΔS_i 上的任一点. 因而在单位时间内流过 ΔS_i 的流量绝对值近似等于一个以 ΔS_i 为底, 以 $\mathbf{v}(M_i)$ 的模为斜高的斜柱体体积. 若记 $\mathbf{e}_n(M_i) = \{\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i\}$ 为 S 在点 M_i 处的单位法向量, 则单位时间内流过 ΔS_i 选定一侧的流量

$$\Delta \Phi_i \approx \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{e}_n(M_i) \Delta S_i.$$

从而流过曲面 S 选定一侧的总流量

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^n \Delta \Phi_i \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{e}_n(M_i) \Delta S_i \\ (10.1) \quad &= \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + \\ &\quad R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i. \end{aligned}$$

当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i\}$ 的直径 $\rightarrow 0$ 时, 便得到

$$\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{e}_n(M_i) \Delta S_i.$$

类似, 电场强度 $\mathbf{E}(M)$ 通过有向曲面 S 的电通量 Φ 也可以表示为同一形式

的极限

$$\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \mathbf{e}_n(M_i) \Delta S_i.$$

在数学上,我们可以抽象成如下定义:

定义 2.1 取定曲面 S 的一侧,记这一侧的单位法向量为

$$\mathbf{e}_n(M) = \mathbf{e}_n(x, y, z) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

$\mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ 是定义在 S 上的向量函数.任意分割 S 为 n 个小块,小块及其面积都记为

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n.$$

在每一小块 ΔS_i 上,任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$,作和式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \mathbf{e}_n(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \\ &= \sum_{i=1}^n (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)_{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)} \Delta S_i. \end{aligned} \quad (2.4)$$

令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i\}$ 的直径 $\rightarrow 0$,若此和式总有确定的极限 I ,即

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \mathbf{e}_n(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)_{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)} \Delta S_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

则称 I 为向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在有向曲面 S 上沿指定一侧的第二型曲面积分,记作

$$I = \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{e}_n(x, y, z) dS.$$

简记作 $I = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS$. 若引进有向面积元素(作为向量) $dS = \mathbf{e}_n dS$, 则可记为

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot dS.$$

因为(2.5)式右端是函数 $P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ 在 S 上的第一型曲面积分 $\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$, 所以我们有关系式

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (2.6)$$

即 $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S P \cos \alpha dS + Q \cos \beta dS + R \cos \gamma dS$,

其中 α, β, γ 是单位法向量 \mathbf{e}_n 的方向角,一般说来,它们都是点 (x, y, z) 的函数.若在曲面积分中引进记号

$$dydz = \cos \alpha dS, \quad dzdx = \cos \beta dS, \quad dxdy = \cos \gamma dS \quad ①,$$

则 $dxdy = \begin{cases} d\sigma_{xy}, & 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}, \\ -d\sigma_{xy}, & \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi, \end{cases}$ 其中 $d\sigma_{xy} \geq 0$ 是 dS 在 xy 平面上的投影的

面积. 类似 $dydz = \pm d\sigma_{yz}, dzdx = \pm d\sigma_{zx}, dxdy$ 分别叫做面积元素 dS 在 yz 平面, zx 平面, xy 平面上的有向投影, 因此第二型曲面积分可表示为

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy. \quad (2.8)$$

上式右端的积分称为第二型曲面积分的坐标形式.

可以证明: 如果 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在光滑曲面 S 上连续, 则 $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ 在 S 上的第二型曲面积分存在.

第二型曲面积分具有与第二型曲线积分类似的性质. 例如

(1) 线性:

$$\iint_S (k_1 \mathbf{F}_1 + k_2 \mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{e}_n dS = k_1 \iint_S \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{e}_n dS + k_2 \iint_S \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_n dS,$$

其中 k_1, k_2 为常数.

(2) 可加性: 若 S 由 S_1 和 S_2 组成, 则

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS. \quad (2.01)$$

(3) 有向性:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = - \iint_{S^-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS.$$

这是因为改变曲面的侧时, 法向量要改变方向, 因此 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$ 在 S 上与在另一侧 S^- 上差一负号, 从而积分值要变号.

3. 第二型曲面积分的计算

设向光滑曲面 S 由方程

$$z = f(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

给出, 其中 D_{xy} 是 S 在 xy 平面上的投影区域, $f(x, y)$ 在 D_{xy} 上有连续的一阶偏导数. 函数 $R(x, y, z)$ 在 S 上连续, 则由关系

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS,$$

① 为区别二重积分中的面积元素, 有的书采用记号 $dy \wedge dz = \cos \alpha dS, dz \wedge dx = \cos \beta dS, dx \wedge dy = \cos \gamma dS$.

可知曲面积分 $\iint_S R(x, y, z) dx dy$ 可以化为二元函数 $R(x, y, f(x, y))$ 在 D_{xy} 上的二重积分:

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \begin{cases} \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) d\sigma_{xy}, & x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) (-d\sigma_{xy}), & -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

同理,若曲面 S 的方程由 $x = g(y, z), (y, z) \in D_{yz}$ 给出,则有

$$(8.2) \quad \iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(g(y, z), y, z) d\sigma_{yz}.$$

若曲面 S 取前侧,此时 $\cos \alpha > 0$,则上式右端积分号前取正号;若曲面 S 取后侧,此时 $\cos \alpha < 0$,则右端积分号前取负号.在计算二重积分时,应把函数 P 中的 x 换成函数 $g(y, z)$.

同样,读者不难把 $\iint_S Q(x, y, z) dz dx$ 化为二重积分来计算.

例 2.5 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分(图 10.5).

解 把 Σ 分成下,上两部分:

$$\begin{aligned} \Sigma_1: z &= -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ \Sigma_2: z &= \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy + \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} - \iint_{D_{xy}} xy \left(-\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) d\sigma_{xy} \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} \\ &= 2 \iint_{D_{r\theta}} r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 - r^2} \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

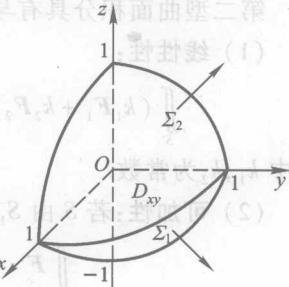


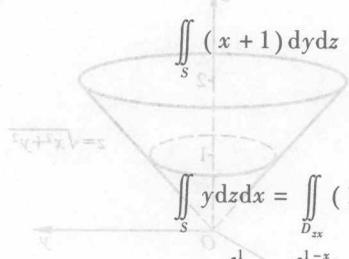
图 10.5

例 2.6 计算 $I = \iint_S (x+1) dydz + ydzdx + dx dy$, 其中 S 是以点 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ 为顶点的平面三角形, 法线方向为由原点到 S 的方向.

解 三角形 ABC 所在的平面方程为 $x+y+z=1$.

$$\text{平面 } x+y+z=1 \text{ 上 } I = \iint_S (x+1) dydz + \iint_S ydzdx + \iint_S dx dy,$$

其中



$$\begin{aligned} \iint_S (x+1) dydz &= \iint_{D_{yz}} [(1-y-z)+1] d\sigma_{yz} \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (2-y-z) dz = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S ydzdx &= \iint_{D_{zx}} (1-x-z) d\sigma_{zx} \\ &= 0 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-z) dz = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\iint_S dx dy = \iint_{D_{xy}} d\sigma_{xy} = \frac{1}{2}.$$

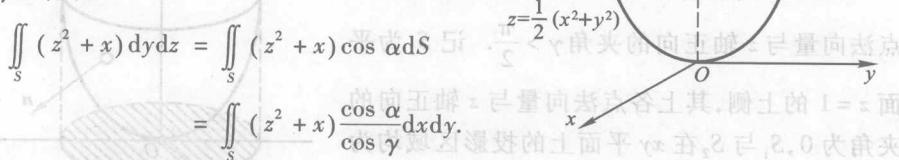
故

$$I = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

例 2.7 计算 $I = \iint_S (z^2 + x) dydz + \sqrt{z} dx dy$, 其中 S 为抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 在平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分,

定向取下侧(图 10.6).

解 由于 $dydz = \cos \alpha dS, dx dy = \cos \gamma dS$, 所以



$$\begin{aligned} \iint_S (z^2 + x) dydz &= \iint_S (z^2 + x) \cos \alpha dS \\ &= \iint_S (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy. \end{aligned}$$

因 S 的定向取下侧, 所以

图 10.6 (x, y)

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

注意到 S 在 xy 平面上的投影区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, 于是有

$$I = \iint_S [(z^2 + x)(-x) + \sqrt{z}] dx dy$$

$$\begin{aligned} &= - \iint_D \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right)^2 + x \right] (-x) + \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \right\} dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}r^5 \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta + \sqrt{\frac{1}{2}r^2} \right) r dr = \left(4 - \frac{8}{3}\sqrt{2} \right) \pi. \end{aligned}$$

例 2.8 计算 $I = \iint_S y dy dz - x dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的外侧 (图 10.7).

解 因 $\gamma > \frac{\pi}{2}$, 所以取定的单位法向量为

$$e_n = \frac{-1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \{ -z'_x, -z'_y, 1 \}. \text{ 利用曲面面}$$

积元素公式 $dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} d\sigma_{xy}$ 和有向面积元素 $dS = \{ dy dz, dz dx, dx dy \}$, 则有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \{ y, -x, z^2 \} \cdot dS \\ &= \iint_S \{ y, -x, z^2 \} \cdot e_n dS \\ &= - \iint_{D_{xy}} \{ y, -x, z^2 \} \cdot \left\{ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\} d\sigma_{xy} \\ &= - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) d\sigma_{xy} = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 dr = -\frac{15}{2}\pi. \end{aligned}$$

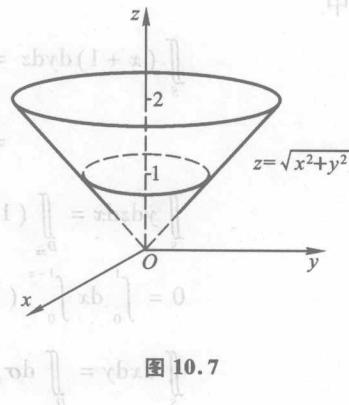


图 10.7

例 2.9 设 S 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的封闭曲面, 取外侧. 试计算曲面积分 $I = \iint_S y^2 z dx dy$.

解 记 S_1 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 的外侧, 其上各

点法向量与 z 轴正向的夹角 $\gamma > \frac{\pi}{2}$. 记 S_2 为平

面 $z=1$ 的上侧, 其上各点法向量与 z 轴正向的夹角为 0 , S_1 与 S_2 在 xy 平面上的投影区域均为

$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (图 10.8), 于是

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} y^2 z dx dy &= \iint_{D_{xy}} y^2 (x^2 + y^2) (-d\sigma_{xy}) \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 \sin^2 \theta) r^2 \cdot r dr \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

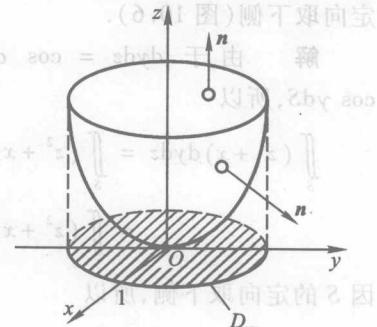


图 10.8

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} y^2 z dx dy &= \iint_{D_{xy}} y^2 \cdot 1 (d\sigma_{xy}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 \sin^2 \theta) \cdot r dr \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

故

$$I = \iint_{S_1} y^2 z dx dy + \iint_{S_2} y^2 z dx dy = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

例 2.10 计算 $I = \iint_S x dy dz - y dz dx - 2z dx dy$, 其中 S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 的前半部介于 $z = 0$ 及 $z = 1$ 之间的部分, 取后侧.

解 因 S 的方程为 $x = \sqrt{z - y^2}$, 故知

$$x'_y = \frac{-y}{\sqrt{z - y^2}}, \quad x'_z = \frac{1}{2\sqrt{z - y^2}},$$

且 S 在 yz 平面上的投影区域为(图 10.9)

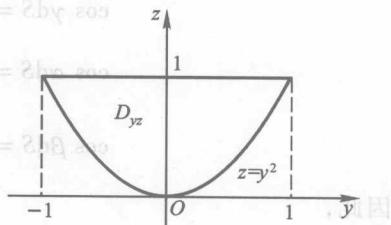


图 10.9

由于 S 取后侧, 其上各点的法向量与 x 轴正

向的夹角 $\alpha > \frac{\pi}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} I &= \iint_S x dy dz - y \frac{y}{\sqrt{z - y^2}} dy dz - 2z \frac{-1}{2\sqrt{z - y^2}} dy dz \\ &= - \iint_{D_{yz}} \left(\sqrt{z - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{z - y^2}} + \frac{z}{\sqrt{z - y^2}} \right) d\sigma_{yz} \\ &= -2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{z - y^2} d\sigma_{yz} = -2 \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z - y^2} dz \\ &= -\frac{8}{3} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy. \end{aligned}$$

令 $y = \sin t$, 则 $I = -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = -\frac{\pi}{2}$.

例 2.11 计算曲面积分 $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$, 其中 S 为圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的全表面外侧.

解 记 S_1, S_2 分别为圆锥面的底面和侧面, 而 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为圆锥面外法线的方向余弦. 于是, 在 S_1 上有

$$\iint_{S_1} (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr \\
 &= \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

而在 S_2 上, 对于任一点 $(x, y, z) \in S_2$, 有

$$\frac{\cos \alpha}{x} = \frac{\cos \beta}{y} = \frac{\cos \gamma}{z}.$$

从而, dS 在各坐标面上的投影分别为

$$\cos \gamma dS = -d\sigma_{xy},$$

$$\cos \alpha dS = -\frac{x}{z} \cos \gamma dS = \frac{x}{z} d\sigma_{xy},$$

$$\cos \beta dS = -\frac{y}{z} \cos \gamma dS = \frac{y}{z} d\sigma_{xy}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 &\iint_{S_2} (y-z) dy dz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy = 0 \\
 &= \iint_{S_2} [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] dS \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} \left[\frac{x}{z}(y-z) + \frac{y}{z}(z-x) - (x-y) \right] d\sigma_{xy} \\
 &= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dxdy = 0.
 \end{aligned}$$

综合上述, 可知原积分 $= \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0$.

习题 10.2

A 类

1. 计算积分 $I = \iint_S |xyz| dS$, S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1, z = 0$ 所割下的部分.

2. 计算积分 $I = \iint_S (xy + yz + zx) dS$, 其中 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截下的有限部分, $a > 0$ (图 10.10).

3. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 已知此壳的面密度为 $\rho = z$.

4. 计算曲面积分 $I = \iint_S zdS$, 其中 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

5. 计算曲面积分 $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(x,y,z) dS$, 其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{当 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & \text{当 } z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

6. 设曲面 S 为平面 $x + y + z = 1$ 及三个坐标面所围成的四面体之表面. 如果 S 上每点的密度为 $\rho = (1 + x + y)^{-2}$, 试求 S 的质量.

7. 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的外侧.

8. 计算曲面积分

$$I = \iint_S xz dy dz + yz dz dx + z^2 dx dy,$$

其中 S 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

9. 电量等于 q 的点电荷置于球的中心, 求电场强度对于球面的通量.

10. 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{\sqrt{|x|} + y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|}} dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

11. 设 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧, 试求

$$\iint_{\Sigma} [f(x,y,z) + x] dy dz + [2f(x,y,z) + y] dz dx + [f(x,y,z) + z] dx dy.$$

12. 计算 $I = \iint_{\Sigma} -y dz dx + (z + 1) dx dy$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 被平面 $x + z = 2$ 和 $z = 0$ 所截出的部分, 取外侧.

13. 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{dy dz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z}$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外表面.

14. 设 Σ 是由三个坐标面和平面 $x + y + z = 1$ 围成的四面体的外侧, 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dx dy$.

15. 计算 $I = \iint_{\Sigma} \left| x - \frac{a}{3} \right| dy dz + \left| y - \frac{2b}{3} \right| dz dx + \left| z - \frac{c}{4} \right| dx dy$, 其中 Σ 是长方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 表面的外侧.

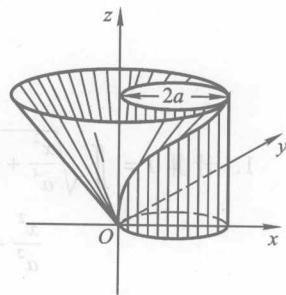


图 10.10

B 类

1. 计算 $I = \iint_{\Sigma} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} dS$, 其中 Σ 为椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0.$$

2. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS$, 其中 Σ 是球面:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

3. 计算 $I = \iint_{\Sigma} yz dx dy + zx dy dz + xy dz dx$, 其中 Σ 为旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截出部分的上侧.

4. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - zdxdy$, 曲面 Σ 由旋转抛物面 $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧.

5. 计算 $I = \iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$ ($a, b, c > 0$), 定向取上侧.

6. 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z=R$, $z=-R$ ($R > 0$) 所围立体表面外侧.

7. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 4zx dy dz - 2zdz dx + (1 - z^2) dx dy$, 曲面 Σ 为曲线

$\begin{cases} z = a^y \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转一周所成曲面的下侧, 其中 $0 \leq y \leq 2, a > 0, a \neq 1$.

8. 设点 $M(\xi, \eta, \zeta)$ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限的点, S 是该椭球面在点 M 处的切平面被三个坐标平面所截得的三角形, 法向量与 z 轴正向的夹角为锐角. 问 ξ, η, ζ 取何值时, 曲面积分 $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ 的值最小? 并求出此最小值.

第11章 格林公式、高斯公式 和斯托克斯公式

平面闭曲线上的第二型曲线积分与该闭曲线所围平面区域上的二重积分之间有着密切的联系,在一定条件下,它们可以互相转化.揭示这种联系的公式称为格林公式.高斯公式则是给出空间区域上的三重积分与该区域边界上的曲面积分之间的联系.作为格林公式的推广,斯托克斯公式则是把有向曲面上的曲面积分与该曲面边界上的曲线积分联系起来.我们也将看到,在证明斯托克斯公式时,要用到格林公式.

从本质上，这三个公式都是牛顿-莱布尼茨公式在多元情况下的推广。这些基本公式的建立和应用应该是微积分的核心内容，也是高等数学中最精彩的内容之一。

这些公式在许多物理问题中有着重要的应用。

§1 格林公式

1.1 格林公式

设 D 为平面上的一个区域. 如果 D 内的任意一条简单闭曲线(曲线不自交, 今后我们只讨论简单曲线)都可以不触及边界地、连续地收缩成一点, 那么 D 称为单连通区域, 否则它称为复连通区域. 例如, 单位圆盘 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 就是单连通区域, 而圆环 $\{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ 就是复连通区域. 对于平面区域 D , 我们给它的边界 ∂D 规定一个正向: 如果一个人沿 ∂D 的这个方向行走时, D 总是在他的左边, 这种规定也称为 D 的诱导定向, 带有这样定向的 ∂D 称为 D 的正向边界. 如图 11.1 所示的区域 D 由 L 与 l 所围成, 按照我们的规定, 外边界 L 的正向为逆时针方向, 而内边界 l 的正向则为顺时针方向.

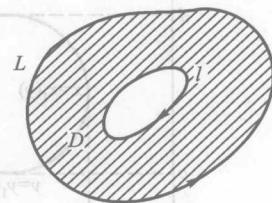


图 11.1

如果函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数, 则有

$$\oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dxdy,$$

其中 ∂D 取正向, 即 D 的诱导定向.

证 我们先证明 D 可同时表示为以下两种形式

$$D = \{(x, y) | y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$

$$= \{(x, y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$$

的情形(图11.2, 这时平行于 x 轴或 y 轴的直线与区域 D 的边界至多交两点).

这样的区域称为标准区域. 在这种情况下,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx$$

$$= - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_b^a P(x, y_2(x)) dx$$

$$= - \oint_{\partial D} P(x, y) dx,$$

式中最后一步是利用了曲线积分的计算公式. 同理又有

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

$$= \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] dy$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y), y) dy + \int_d^c Q(x_1(y), y) dy$$

$$= \oint_{\partial D} Q(x, y) dy.$$

两式合并就得定理 1.1 的公式(格林公式).

再证区域 D 可分成有限块标准区域的情形. 我们只考虑如图 11.3 的区域,

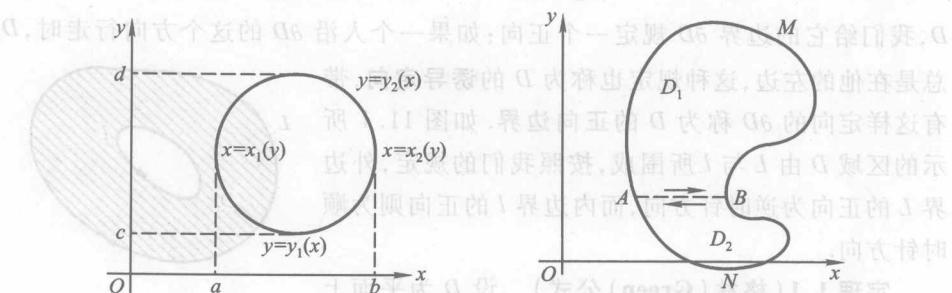


图 11.2

图 11.3

在这种区域上,平行于 y 轴的直线与 D 的边界的交点可能会多于两个.此时,如图所示用辅助线 AB 将 D 分割成两个区域 D_1 与 D_2 (D_1 的边界为曲线 $ABMA$, D_2 的边界为曲线 $ANBA$),这时 D_1 和 D_2 都是标准区域,因此应用格林公式得

$$\oint_{\partial D_1} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

$$\oint_{\partial D_2} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

注意 D_1 和 D_2 的公共边界 AB ,其方向相对于 ∂D_1 而言是从 A 到 B ,相对于 ∂D_2 而言则是从 B 到 A ,两者方向正好相反,辅助线上的曲线积分互相抵消,所以将上面的两式相加便得

$$\oint_D Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

关于格林公式,我们作如下说明:

1. 格林公式可以推广到有有限个“洞”的复连通区域上去.例如图 11.4(a),它的边界曲线 ∂D 由两条闭路径 L 与 l 组成,作为 D 的边界,外边界 L 的正方向 L^+ 为逆时针方向,内边界 l 的正方向 l^+ 为顺时针方向.在外边界 L 和内边界 l 上分别取 A 点与 B 点并做辅助线 \overline{AB} ,这样由闭曲线 L^* : $ABCEBAFGA$ 所围成的闭区域 D^* 是单连通的,于是在 D^* 上格林公式成立,而在 D^* 上的二重积分与在 D 上的二重积分是相等的,因此有

$$\begin{aligned} & \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \left(\int_{L(AFCA)} + \int_{AB} + \int_{l(BCEB)} + \int_{BA} \right) (Pdx + Qdy) \\ &= \left(\oint_{L^+} + \oint_{l^+} \right) (Pdx + Qdy) = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

由上面的等式可以看出格林公式对复连通区域仍然成立.对于更一般的情况(如图 11.4(b))在添加若干条辅助线之后,仍然可以证明格林公式成立.只

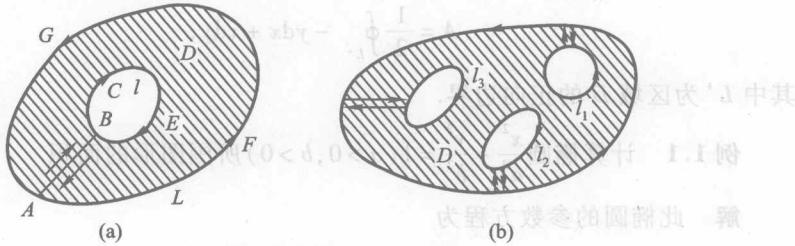


图 11.4 复面朱祖模, (a) 式表示向量场的单连通性

须注意公式右端应是包括沿区域 D 的全部边界的曲线积分,且边界的方向对区域 D 都是正向.

2. 格林公式是牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式在二维情形的推广. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 取 $D = [a, b] \times [0, 1]$ (见图 11.5). 在格林公式中取 $P = 0, Q = f(x)$, 就得

$$\iint_D f'(x) dx dy = \int_{\partial D} f(x) dy.$$

利用二重积分为化累次积分的方法就知道, 等式左

边就是 $\int_a^b f'(x) dx$. 而注意到在线段 AB 上, $y=0$, 在线段 CD 上, $y=1$, 因此都有 $dy=0$, 于是等式右边等于

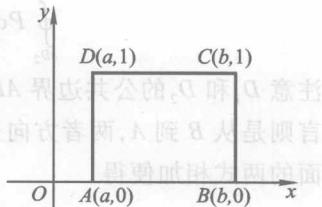


图 11.5

$$\begin{aligned} & \left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \right) f(x) dy \\ &= \left(\int_{BC} + \int_{DA} \right) f(x) dy \\ &= \int_0^1 f(b) dy + \int_1^0 f(a) dy \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

3. 为便于记忆, 格林公式也可以写为

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

4. 若取 $P = -y, Q = x$, 则由格林公式得

$$\oint_{L^+} -y dx + x dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2A.$$

A 是区域 D 的面积. 于是我们得到利用曲线积分计算平面有界闭区域面积的公式.

$$A = \frac{1}{2} \oint_{L^+} -y dx + x dy,$$

其中 L^+ 为区域 D 的正向边界.

例 1.1 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 所围图形的面积.

解 此椭圆的参数方程为

$$x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

记椭圆的正向边界为 L^+ , 则所求面积为

$$A = \frac{1}{2} \oint_{L^+} (-ydx + xdy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta) d\theta$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab.$$

例 1.2 计算积分 $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 正向取逆时针.

解 注意到 $x^2 + y^2 = 1$, 所以

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_L x dy - y dx = \text{单位圆面积的二倍} = 2\pi.$$

(如果令

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

则容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

但此时不能应用格林公式, 其原因是在原点处 P, Q 和它们的偏导数不连续. 定理条件不满足.)

例 1.3 计算 $\oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L^+ 为一条不经过原点的简单闭曲线, 方向为逆时针方向.

解 设 L 所围的区域为 D . $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 而

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x^2 + y^2 > 0).$$

那么当 D 不包含原点时, 由格林公式得

$$\oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

当 D 包含原点时, 函数 P, Q 在原点处不连续, 故不满足格林公式的条件, 因此不能直接使用格林公式. 为了能用格林公式, 需要把原点“挖掉”. 为此, 以原点为圆心, $\epsilon (> 0)$ 为半径作一个小圆 C , 使 C 整个在以 L 为边界的有界闭区域内 (图 11.6). 挖去这个小圆域之后, 在 L 与 C 所夹成的区域 D_1 上, 可以应用格林公式 (这种方法俗称“挖洞”法). 这时有

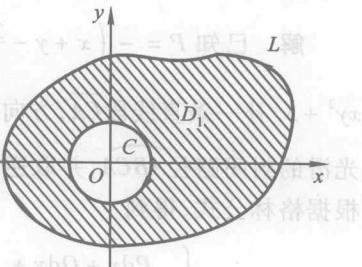


图 11.6

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

由于 ∂D_1 是由 L^+ 和 C^+ 组成 (注意 C^+ 是顺时针方向), 由此可知

$$\oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \oint_{C^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_{D_1} 0 dx dy = 0.$$

即

$$\begin{aligned} \oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= - \oint_{C^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-1}{\varepsilon^2} \oint_{C^+} x dy - y dx = \frac{-1}{\varepsilon^2} (-2\pi\varepsilon^2) = 2\pi. \end{aligned}$$

这个结果与例 1.2 的结果比较似乎令人吃惊. 其实, 当我们注意到被积表达式

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d \left(\arctan \frac{y}{x} \right) = d\theta$$

(这里 θ 是径向量 $\{x, y\}$ 的辐角) 就可以看出, 当点 (x, y) 在无论怎样一条包含原点在其内部的封闭曲线上绕行一周之后, 其辐角的增量总是 2π .

5. 当计算一个较复杂的曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 时, 如果 L 不是封闭路径时, 则可考虑补上一条直线段 L_1 , 使 $L + L_1$ 成为封闭的, 再利用格林公式, 把问题转化为计算一个二重积分和另一个较简单的曲线积分 (俗称“加辅助线法”).

例 1.4 计算曲线积分

$$I = \int_{ABC} (x + xy^2 + 3) dy - \left(x + y - \frac{y^3}{3} \right) dx,$$

其中曲线 \widehat{ABC} 是由圆 $x^2 + y^2 = 1$ 在第四象限的部分 \widehat{AB} 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限的部分 \widehat{BC} 连接而成 ($0 < a <$ b), 起点为 $A(0, -a)$, 终点为 $C(0, b)$, 如图 11.7 所示.

解 已知 $P = - \left(x + y - \frac{y^3}{3} \right) = -x - y + \frac{y^3}{3}$, $Q = x + xy^2 + 3$. 补一条直线段 \overline{CA} , 方向从点 C 到点 A , 则得到分段光滑的封闭路径 $\widehat{ABC}A$, 并取逆时针方向为路径的正向. 记 D 为该路径所围区域,

根据格林公式, 得到

$$\int_{CA} P dx + Q dy + \int_{\widehat{ABC}} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

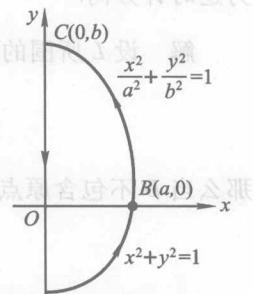


图 11.7

$$= \iint_D [1 + y^2 - (-1 + y^2)] dx dy \quad (8.11)$$

$$= \iint_D 2 dx dy = 2 \times (\text{区域 } D \text{ 的面积})$$

$$= 2 \left(\frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi ab}{4} \right) = \frac{\pi a^2}{2}(a+b).$$

于是所求积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_{ABC} (x + xy^2 + 3) dy - \left(x + y - \frac{y^3}{3} \right) dx \\ &= \frac{\pi a}{2}(a+b) - \int_{CA} (x + xy^2 + 3) dy - \left(x + y - \frac{y^3}{3} \right) dx \\ &= \frac{\pi a}{2}(a+b) - \int_b^a 3 dy \quad (\text{因在 } CA \text{ 上}, x=0, dx=0) \\ &= \frac{\pi a}{2}(a+b) + 3(a+b) = (a+b) \cdot \left(\frac{\pi a}{2} + 3 \right). \end{aligned}$$

6. 如果我们引进(二维)拉普拉斯(Laplace)算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

与(二维)哈密顿(Hamilton)算子

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

则有

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\}.$$

从而可推出格林公式的其他形式. 设 D 是分段光滑的封闭曲线 L 所围成的平面区域, 而函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在 D 上有连续的二阶偏导数, 则可证明如下结论:

(1) 格林第一公式:

$$\iint_D v \Delta u d\sigma = \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_D \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial x} + \frac{\partial u \partial v}{\partial y \partial y} \right) d\sigma,$$

或写为

$$\iint_D v \Delta u d\sigma = \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v) d\sigma,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 L 的外法线方向导数.

证 设 L 上的单位切向量 e_t 与 L 的正向一致, e_t 与正 x 轴的夹角为 α (如图 11.8), 则 L 的外法线单位向量 e_n 与正 x 轴的

夹角为 $\alpha - \frac{\pi}{2}$, 于是 L 的外法线方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha,$$

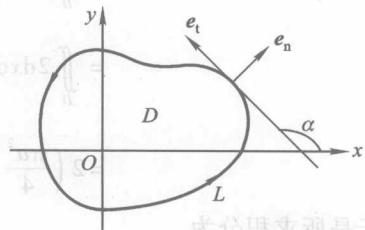


图 11.8

从而

$$\begin{aligned} \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_L \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + v \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right) ds \\ &= \oint_L -v \frac{\partial u}{\partial y} dx + v \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &\stackrel{\text{由格林公式}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\sigma \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D v \Delta u d\sigma \\ &= \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v) d\sigma + \iint_D v \Delta u d\sigma. \end{aligned}$$

移项便得到格林第一公式.

(2) 格林第二公式:

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

这只需将格林第一公式中 u, v 的互换, 然后两式相减即得.

(3) 格林第三公式:

$\oint_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D (\nabla u)^2 d\sigma + \iint_D u \Delta u d\sigma.$

这只需在格林第一公式中令 $v = u$ 即得.

1.2 曲线积分与路径无关的条件

我们先看两个例题.

例 1.5 计算 $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, 其中 L 为:(1) 圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的上半部分, 方向为逆时针方向 (图 11.9); (2) 从点 $(R, 0)$ 到点 $(-R, 0)$ 的直线段.

解 (1) 这时 L 的参数方程为

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t,$$

其中 t 从 0 变化到 π . 因此

$$\int_L y^2 dx + x^2 dy = \int_0^\pi [R^2 \sin^2 t (-R \sin t) + R^2 \cos^2 t (R \cos t)] dt$$

$$= R^3 \int_0^\pi [(1 - \cos^2 t)(-\sin t) + (1 - \sin^2 t)\cos t] dt$$

$$= -\frac{4}{3}R^3.$$

(2) 这时 L 的方程为 $y = y(x)$, 其中 $y(x) \neq 0$, 假设 $y'(x) \neq 0$.

其中 x 从 R 变化到 $-R$. 因此

$$\int_L y^2 dx + x^2 dy = \int_R^{-R} 0 \cdot dx = 0.$$

例 1.6 求空间中一质量为 m 的物体沿某一光滑曲线 L 从 A 点移动到 B 点时, 重力所做的功(图 11.10).

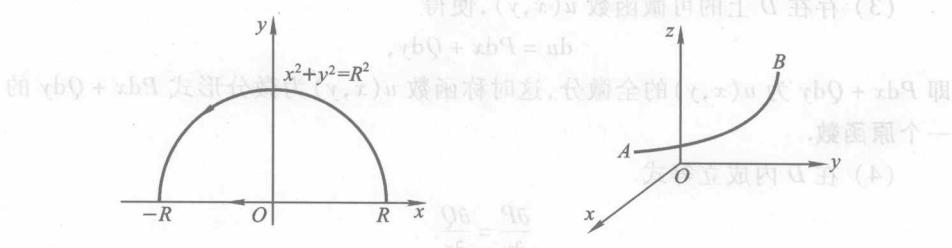


图 11.9 圆的上半部分; 图 11.10 曲线 L 在空间中的位置.

解 作直角坐标系, 使 z 轴铅直向上. 在这个坐标系下, 设 $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2)$. 假定 L 的方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

其中 $A = (x_1, y_1, z_1) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)), B = (x_2, y_2, z_2) = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$. 显然重力 $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, 其中 g 为重力加速度. 那么重力所做的功为

$$W = \int_L (-mg) dz = -mg \int_L dz - mg \int_\alpha^\beta z'(t) dt = mg(z_1 - z_2).$$

这说明, 重力所做的功与路径无关, 它仅取决于物体下降(或上升)的距离.

上面两个例子说明第二型曲线积分既可能与路径有关, 也可能只与路径的始、终端点有关而与路径无关. 本段将探讨曲线积分与路径无关的条件, 并介绍相关的公式和方法.

1. 四个等价命题

定义 1.1 设 D 为平面区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 为 D 上的连续函数. 如果对于

D 内任意两点 A, B , 积分值

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{L'} P dx + Q dy$$

只与 A, B 两点有关, 而与从 A 到 B 的路径 L (曲线 L 是光滑或分段光滑的) 无关, 就称曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关.

曲线积分与路径无关问题的讨论可以归纳为下面的定理.

定理 1.2 设 D 为平面上的单连通区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数. 则下面的四个命题等价:

(1) 对于 D 内的任意一条光滑(或分段光滑)闭曲线 L ,

$$\int_L P dx + Q dy = 0.$$

(2) 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关.

(3) 存在 D 上的可微函数 $u(x, y)$, 使得

$$du = P dx + Q dy,$$

即 $P dx + Q dy$ 为 $u(x, y)$ 的全微分, 这时称函数 $u(x, y)$ 为微分形式 $P dx + Q dy$ 的一个原函数.

(4) 在 D 内成立等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

证 (1) \Rightarrow (2): 设 A, B 为 D 内任意两点, L_1 和 L_2 是 D 中从 A 到 B 的任意两条路径, 则 $C = L_1 + (L_2^-)$ 就是 D 中的一条闭曲线. 因此

$$0 = \int_C P dx + Q dy = \left(\int_{L_1} + \int_{L_2^-} \right) P dx + Q dy$$

于是

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = - \int_{L_2} P dx + Q dy.$$

因此曲线积分与路径无关.

(2) \Rightarrow (3): 设点 $M_0(x_0, y_0)$ 为 D 内一固定点, $M(x, y)$ 为 D 内任一点. 由于曲线积分与路径无关, 因此, 积分

$$\int_{M_0 M} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

只依赖于终点 $M(x, y)$, 即它是点 $M(x, y)$ 的函数, 把它记作

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (1.1)$$

可以证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

事实上, 在点 $M(x, y)$ 附近, 取一点 $N(x + \Delta x, y)$, 使直线段 MN 仍在 D 内 (图 11.11), 显然有

$$u(x + \Delta x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

因为积分与路径无关, 所以上式右端的积分可

以选取路径 $\widehat{M_0 MN}$ (图 11.11), 于是

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{M_0 M} P dx + Q dy + \int_{M N} P dx + Q dy \right) - \int_{M_0 M} P dx + Q dy \\ &= \int_{M N} P dx + Q dy = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

由于在直线 MN 上, $y \equiv \text{常数}, dy = 0$, 因此

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_x^{x + \Delta x} P(x, y) dx.$$

由积分中值定理得

$$\int_x^{x + \Delta x} P(x, y) dx = P(\xi, y) \Delta x,$$

其中 ξ 在 x 与 $x + \Delta x$ 之间. 从而

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{P(\xi, y) \Delta x}{\Delta x} = P(\xi, y).$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则 $\xi \rightarrow x$, 于是由 $P(x, y)$ 的连续性知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\xi \rightarrow x} P(\xi, y) = P(x, y).$$

同理可证 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

由 $P(x, y), Q(x, y)$ 的连续性知, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 在 D 内连续, 因此函数 $u(x, y)$ 在 D 内可微, 即全微分存在, 且

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

(3) \Rightarrow (4): 由于存在 D 上的可微函数 u , 使得 $du = P dx + Q dy$, 那么

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

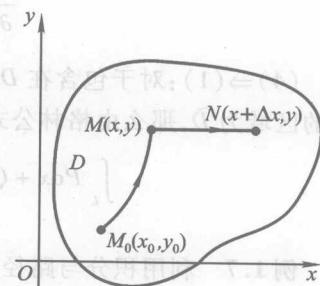


图 11.11

又由于函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 内具有连续偏导数, 于是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(4) \Rightarrow (1): 对于包含在 D 内的任一条光滑(或分段光滑)闭曲线 L , 设它包围的区域为 \tilde{D} , 那么由格林公式就得

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_{\tilde{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

例 1.7 利用积分与路径无关性计算积分 $\int_L \frac{y}{x} dx + \ln x dy$, 其中 L 是起点为 $A(1, 1)$, 终点为 $B(2, 2)$ 的一条分段光滑有向曲线, 并且不与 y 轴相交.

解 由题意知道曲线 L 位于 y 轴右侧的一个区域 D 内, 取 D 是一个单连通区域. 另外容易验证

$$\frac{\partial \left(\frac{y}{x} \right)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial (\ln x)}{\partial x},$$

从而积分与路径无关. 也就是说, 可以在区域 D 内任意另外取一条与 L 有相同起点和终点的分段光滑有向曲线进行积分, 其积分结果相同. 为使计算简单, 一般是“取折线”, 即从 $A(1, 1)$ 出发, 沿竖直方向(此时 $dx = 0$) 经过点 $C(1, 2)$, 再沿水平线段(此时 $dy = 0$) 到点 $B(2, 2)$ 的有向折线. 于是

$$\begin{aligned} \int_L \frac{y}{x} dx + \ln x dy &= \left(\int_{A \rightarrow C} + \int_{C \rightarrow B} \right) \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right) \\ &= \int_1^2 \ln 1 dy + \int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2 \ln x \Big|_1^2 \\ &= 2 \ln 2. \end{aligned}$$

例 1.8 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$, 其中 L 为一条不经过点 $(1, 0)$ 的简单闭曲线, 方向为逆时针方向.

解 设 L 所围的区域为 D .

$$\begin{aligned} P &= \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \quad Q = \frac{-(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \neq (1, 0). \end{aligned}$$

那么当 D 不包含点 $(1, 0)$ 时, 由格林公式即得

$$I = \oint_L P dx + Q dy = 0.$$

当 D 包含点 $(1, 0)$ 时, 函数 P, Q 在点 $(1, 0)$ 处不满足格林公式的条件, 因此不能

直接使用格林公式. 可用“挖洞法”, 在 D 中挖去一个以点 $(1,0)$ 为心, 半径为 r 的小圆盘后, 对于余下的部分格林公式的条件就满足了. 记 D 中挖去小圆盘后的区域为 D_1 , 记小圆盘的边界为 l , 在区域 D_1 上应用格林公式得

$$I = \oint_L P dx + Q dy = \oint_l P dx + Q dy,$$

其中 l 为 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$, 取逆时针方向, 令

则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2 [\sin \theta(-\sin \theta) - \cos \theta \cos \theta]}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

这个例题说明, 定理 1.2 中对于区域是单连通和函数 P, Q 以及 $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ 是连续的要求是必要的.

2. 利用原函数求曲线积分的计算公式

定理 1.3 若在单连通区域 D 内 $u(x, y)$ 是 $P dx + Q dy$ 的原函数, $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ 是 D 内任意两点, 则沿 D 内任意一条从点 A 到点 B 的光滑曲线 L 的曲线积分

$$\int_{L(A,B)} P dx + Q dy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = u(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)}. \quad (1.2)$$

证 设光滑曲线 L 的参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \text{ 在 } \alpha, \beta \text{ 之间},$$

并且 $\varphi(\alpha) = x_0, \psi(\alpha) = y_0, \varphi(\beta) = x_1, \psi(\beta) = y_1$, 计算曲线积分

$$\begin{aligned} I &= \int_{L(A,B)} P dx + Q dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt. \end{aligned}$$

已知 $u(x, y)$ 是 $P dx + Q dy$ 的原函数, 则 $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \psi'(t) \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dx} u(\varphi(t), \psi(t)) dt \\ &= u(\varphi(t), \psi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = u(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)}. \end{aligned}$$

上述定理所给出的计算公式(1.2)为某些曲线积分的计算提供了比较简便的方法:如果被积表达式 $Pdx + Qdy$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分,即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \quad Pdx + Qdy = du,$$

那么函数 $u(x, y)$ 在积分路径终点与起点处的值的差就是曲线积分的值. 这与牛顿-莱布尼茨公式完全类似.

当曲线积分与路径无关时,一般说来,被积表达式 $Pdx + Qdy$ 的原函数并不是一眼就能看出,下面给出求原函数的三种方法.

(1) 用曲线积分计算原函数 $u(x, y)$.

设点 $M_0(x_0, y_0)$ 为 D 内一固定点, $M(x, y)$ 为 D 内任意一点. 由于曲线积分与路径无关,因此积分

$$\int_{M_0 M} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

只依赖于终点 $M(x, y)$. 为计算简单,取折线容易计算出其积分是点 $M(x, y)$ 的函数(见(1.1)式),记为

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

因为已经证明过 $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, 再由 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 的连续性,可知 $u(x, y)$ 是微分式 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 的原函数.

例 1.9 求微分式 $2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$ 的原函数.

解 因为 $\frac{\partial(2xy^3)}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial x}$, 所以微分式 $2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$ 有原函数

$$u(x, y) = \int_{(0, 0)}^{(x, y)} 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy.$$

由于积分与路径无关,取图 11.12 中所示的路线,于是

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(\int_{OA} + \int_{AB} \right) 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y 3x^2y^2 dy = x^2y^3, \end{aligned}$$

即求得原函数 $u(x, y) = x^2y^3$. 因为不同的原函数之间差一个常数,所以对于任意常数 C , $u(x, y) + C$ 也是原函数.

(2) 用不定积分的方法求原函数.

例 1.10 验证:在整个 xy 平面上, $xy^2 dx + x^2y dy$ 是某个函数的全微分,并求出这样的函数.

解 这里 $P = xy^2$, $Q = x^2y$, 且

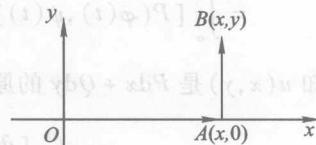


图 11.12

$$(b(x,y)) \frac{\partial P}{\partial y} - (a(x,y)) \frac{\partial Q}{\partial x} = (b(x,y))ab$$

在整个 xy 平面上恒成立, 因此 $xy^2 dx + x^2 y dy$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分.

因为函数 $u(x,y)$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2$, 故

$$u = \int xy^2 dx = \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的待定函数. 由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y + \varphi'(y) = Q(x,y) = x^2 y,$$

即

$$x^2 y + \varphi'(y) = x^2 y.$$

从而 $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$, C 是任意常数, 故所求原函数为

$$u = \frac{x^2 y^2}{2} + C.$$

(3) 用“凑微分”法求原函数.

例 1.11 判断微分式 $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy$ 是否为某个函数 $u(x,y)$ 的全微分, 若是, 求出原函数 $u(x,y)$.

解 令 $P(x,y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, $Q(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2}$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xe^y}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在全平面上成立, 故存在原函数 $u(x,y)$, 使得所给微分式确是 $u(x,y)$ 的全微分, 即有

$$\begin{aligned} du(x,y) &= \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx - \frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} dx + \frac{d(e^y)}{1+x^2} \\ &= \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{(1+x^2)d(e^y) - e^y d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= d\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) + d\left(\frac{e^y}{1+x^2}\right) \\ &= d\left(\frac{e^y - 1}{1+x^2}\right), \end{aligned}$$

因此 $u(x,y) = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + C$, C 为任意常数.

3. 全微分方程

一个微分方程写成

$$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0 \quad (1.3)$$

形式后, 如果它的左端恰好是某一个函数 $u = u(x,y)$ 的全微分:

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

则方程(1.3)称为全微分方程(也叫恰当方程). 这里

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

而方程(1.3)就是

$$du(x, y) = 0. \quad (1.4)$$

如果 $y = \varphi(x)$ 是方程(1.3)的解, 那么这个解必满足(1.4), 故有

$$du[x, \varphi(x)] \equiv 0,$$

因此

$$u[x, \varphi(x)] \equiv C.$$

这表示方程(1.3)的解是由方程 $u(x, y) = C$ 所确定的隐函数.

另一方面, 如果方程 $u(x, y) = C$ 确定一个可微的隐函数 $y = \varphi(x)$, 则

$$u[x, \varphi(x)] \equiv C,$$

上式两端对 x 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \quad \text{即 } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

这表示由方程 $u(x, y) = C$ 所确定的隐函数是方程(1.3)的解. 因此, 当方程(1.3)的左端是函数 $u(x, y)$ 的全微分, 那么

$$u(x, y) = C$$

就是全微分方程(1.3)的隐式通解, 其中 C 是任意常数.

我们知道, 当 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通区域 G 内具有一阶连续偏导数时, 要使方程(1.3)是全微分方程的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在区域 G 内恒成立. 当满足此条件时, 函数 $u(x, y)$ 可以通过曲线积分(因与路径无关, 故取折线路径)算出, 并直接写出通解

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C,$$

其中 x_0, y_0 是在区域 G 内适当选定的点 $M_0(x_0, y_0)$ 的坐标.

例 1.12 求 $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ 的通解.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以方程是全微分方程. 现在求 u , 使它同时满足

如下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3. \quad (1.6)$$

方程(1.5)两边对 x 积分得

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y). \quad (1.7)$$

为确定 $\varphi(y)$, 将此式对 y 求导, 并使它满足(1.6), 即得

$$\frac{du}{dy} = 6x^2y + \frac{d\varphi(y)}{dy} = 6x^2y + 4y^3.$$

于是

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = 4y^3,$$

积分后可得

$$\varphi(y) = y^4.$$

将 $\varphi(y)$ 代入(1.7), 得到

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

因此, 原方程的通解为

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C,$$

其中 C 是任意常数.

例 1.13 求解方程 $\left(\cos x + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

解 因 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以方程是全微分方程. 如果我们把方程重新“分项组合”, 得到

$$\cos x dx + \frac{1}{y} dy + \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy\right) = 0,$$

即

$$d(\sin x + \ln|y|) + \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0.$$

或写成

$$d\left(\sin x + \ln|y| + \frac{x}{y}\right) = 0.$$

所以方程的通解为

其中 C 是任意常数.

例 1.14 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$ ($y > 0$).

解 在方程两端同乘以 y , 把方程变形为

$$(1) \quad xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

凑微分, 把方程改写为

$$(2) \quad \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

在这个方程两端同除以 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 得到新方程:

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

凑微分得到

$$d\sqrt{x^2 + y^2} = dx.$$

由此得到微分方程的通解

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C.$$

从上例可以发现, 有些一阶微分方程并不是全微分方程, 但是在方程两端同乘以某个非零函数以后, 得到的新方程是全微分方程. 这时, 这个非零函数叫原微分方程的“积分因子”.

例如, 考虑某个方程

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0.$$

这个方程未必是全微分方程, 但是有可能存在这样的非零函数 $\mu(x, y)$, 用它乘以方程的两端得到新方程

$$\mu(x, y)p(x, y)dx + \mu(x, y)q(x, y)dy = 0,$$

而这个新方程是全微分方程.

用这样的方法可以求解原来的方程. 但是, 积分因子是否存在? 如何求积分因子? 都是比较困难的问题, 没有有效的解决方法. 这里仅以简单例题加以说明.

例 1.15 求解微分方程 $ydx + (y - x)dy = 0$.

解 因为 $\frac{\partial(y-x)}{\partial x} \neq \frac{\partial y}{\partial y}$, 所以原方程不是全微分方程. 下面我们对方程变形, 来寻找积分因子. 原方程可以变形为

$$ydx - xdy = -ydy.$$

在两端同乘以 $\frac{1}{y^2}$, 得到

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = -\frac{1}{y}dy, \quad (2)$$

即

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = -d\ln|y|, \quad (3)$$

因此原方程的通解是

$$\frac{x}{y} = -\ln|y| + C. \quad (4)$$

对于一阶线性方程

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1.8)$$

若取积分因子 $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, 乘方程(1.8)两端, 得

$$y'e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad (5)$$

即

$$y'e^{\int P(x)dx} + y\left[e^{\int P(x)dx}\right]' = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad (6)$$

亦即

$$\left[ye^{\int P(x)dx}\right]' = Q(x)e^{\int P(x)dx}. \quad (7)$$

两端积分, 便得到线性方程(1.8)的通解公式

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C, \quad (8)$$

或

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right]. \quad (9)$$

习题 11.1

1. 用两种方法(化为定积分方法与用格林公式方法)计算曲线积分

$$\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy, \quad (10)$$

其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 所围区域的正向边界曲线.

2. 用格林公式计算下列曲线积分:

$$(1) I = \int \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[x y + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy, \quad \text{其中 } L \text{ 为曲线 } y = \sin x,$$

$0 \leq x \leq \pi$ 与直线段 $y=0, 0 \leq x \leq \pi$ 所围区域 D 的正向边界;

(2) $\oint_L (3xy^4 + x^3y^2) dy - (3x^4y + x^2y^3) dx$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的正方向;

(3) $\oint_L (x^2 + y^2) dx + (y^2 - x^2) dy$, 其中 L 是由 $y=0, x=1, y=x$ 所组成闭回路的正方向;

(4) 计算 $\int_L y(1 + \cos x) dx + \sin x dy$, 其中 L 为自点 $(0,1)$ 沿抛物线 $y^2 = 1 - x$ 到点 $(1,0)$ 的一段;

(5) 计算曲线积分 $\int_L y dx + x dy$, 其中积分路径 L 为从 $O(0,0)$ 经 $A(1,1)$ 到 $B(2,0)$ 的圆弧 $x^2 + y^2 = 2x$ ($y \geq 0$).

(6) 计算 $I = \int_{AO} (e^x \sin y - y^2) dx + e^x \cos y dy$, 其中 AO 为自 $A(a,0)$ 至 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$);

(7) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, L 的方向是逆时针方向.

3. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

(2) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$.

4. 已知曲线 $y = \ln x$ 上每一点处的密度等于该点横坐标的平方, 试求该曲线在横坐标 a 与 b 之间的那一段的质量 ($0 < a < b$).

5. 证明曲线积分 $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$ 在整个 xy 平面上与路径无关, 并计算积分值.

6. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X = x + y^2, Y = 2xy - 8$. 这变力确定了一个力场, 证明质点在此场内移动时, 场力做的功与路径无关.

7. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + x^3 + y}{1+x}$ 的通解.

8. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导函数, 且满足

$$\oint_C \left[\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} f'(x) \right] y dx + f'(x) dy = 0,$$

其中 C 为 xy 平面第一象限内任一条简单闭曲线, 已知 $f(1) = f'(1) = 0$, 求 $f(x)$.

B 类

1. 计算曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 是由圆周 $x^2+y^2=a^2$ ($a>0$)、直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围成的图形的边界曲线.
2. 在椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上每一点 P 处都有力 F 作用, 大小等于从点 P 到该椭圆中心的距离, 而方向指向该椭圆中心. 试求质点 M 从点 $A(a,0)$ 出发沿椭圆经最长弧移动到点 $B(0,b)$ 时, 力 F 所做的功.
3. 设抛物面壳 Σ 由 $z=2-x^2-y^2$ ($0\leq z\leq 2$) 所确定, 其上点 (x,y,z) 处的面密度是竖向坐标 z 的 3 倍, 试求 Σ 的质量 m .
4. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{x dy - y dx}{2x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心、 R 为半径的圆周 ($R\neq 1$), 取顺时针方向.
5. 设 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$, 求函数 $u(x,y)$, 使 $du=y[e^x-\varphi(x)]dx+[\varphi'(x)-2\varphi(x)]dy$, 并计算曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} y[e^x-\varphi(x)]dx+[\varphi'(x)-2\varphi(x)]dy$ 的值.
6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续的导数, 试计算 $\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$, 其中 L 为从点 $A\left(3, \frac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.
7. 设函数 $Q(x,y)$ 在 xy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xy dx + Q(x,y) dy$ 与路径无关, 并且对任意 t , 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x,y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x,y) dy$, 求 $Q(x,y)$.
8. 设 L 为分段光滑的简单闭曲线, $f(u)$ 为连续函数, 试证:

$$\oint_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = 0.$$

§2 高斯公式

格林公式表达了平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系, 而高斯公式则给出空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积

分之间的关系.

定理 2.1 设空间区域 Ω 的边界曲面 Σ 是分片光滑的, 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, Σ 的法向量指向朝外, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (2.1)$$

或

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS. \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$, $\mathbf{e}_n = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量. 公式(2.1)或(2.2)称为高斯(Guass)公式.

证 设闭区域 Ω 在 xy 平面上的投影区域为 D_{xy} . 假定穿过 Ω 内部且平行于 z 轴的直线与 Ω 的边界曲面 Σ 的交点恰好有两个. 这样, 可设 Σ 由 Σ_1 , Σ_2 和 Σ_3 组成(图 11.13). 其中 Σ_1 , Σ_2 分别由方程 $z = z_1(x, y)$ 和 $z = z_2(x, y)$ 给出, 这里 $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$, Σ_1 取下侧, Σ_2 取上侧; Σ_3 是以 D_{xy} 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面上的一部分, 取外侧.

根据三重积分的计算方法, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

另一方面, 由曲面积分的计算法, 有

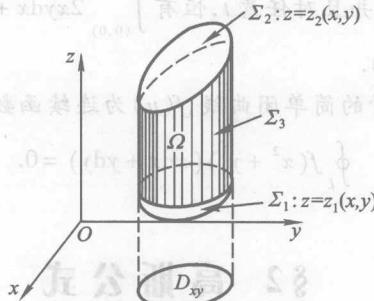


图 11.13

$$\iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy.$$

$$\iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy.$$

因为在 Σ_3 上 $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\cos \gamma = 0$, 所以

$$\iint_{\Sigma_1} R dx dy = \iint_{\Sigma_1} R \cos \gamma dS = \iint_{\Sigma_3} 0 dS = 0.$$

把以上三式相加, 得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

比较(2.3)与(2.4), 得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy.$$

类似可证

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dz dy, \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz &= \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx. \end{aligned}$$

把以上三式相加, 便得高斯公式(2.1), 再利用两类曲面积分之间的联系, 立即可以推出公式(2.2).

如果边界曲面 Σ 与穿过 Ω 内部且平行于坐标轴的直线的交点多于两个, 可引进辅助曲面把区域 Ω 分成有限个小区域, 使每个小区域的边界曲面满足上述定理的条件, 并注意到沿辅助曲面相反两侧的两个曲面积分正好抵消, 因此公式(2.1)对这样的 Ω 依然成立.

高斯公式的一个直接应用就是可用沿区域 Ω 的边界 Σ 的曲面积分来计算 Ω 的体积, 即

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\Sigma} x dy dz = \iint_{\Sigma} y dz dx = \iint_{\Sigma} z dx dy \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy, \end{aligned}$$

其中 Σ 的定向为外侧.

利用高斯公式计算第二型曲面积分是求第二型曲面积分的基本方法之一. 当曲面不封闭时, 可利用“补片法”. 当封闭曲面内部有个别点处 P, Q, R 不满足

连续可微条件时,可利用“挖洞法”.

例 2.1 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

解 利用高斯公式,有

$$\begin{aligned} I &= 3 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ 0}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &\stackrel{\text{球坐标}}{=} 3 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{12}{5} \pi R^5. \end{aligned}$$

例 2.2 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (2x + z) dy dz + z dx dy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 其法向量与 z 轴正向夹角为锐角.

解 “补片”后再利用高斯公式. 作辅助曲面 $S: z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 上侧, 则 $\Sigma + S^-$ 形成一个封闭曲面, 内侧. 应用高斯公式有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+S^-} (2x + z) dy dz + z dx dy + \iint_S (2x + z) dy dz + z dx dy \\ &= - \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (2x + z) + \frac{\partial}{\partial z} z \right] dx dy dz + 0 + \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1}} dx dy \\ &= - 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz + \pi = - \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$

例 2.3 设 Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(\sqrt{2x^2 + 2y^2 + z^2})^3}$.

解 这里 $P = x(2x^2 + 2y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$, $Q = y(2x^2 + 2y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$, $R = z(2x^2 + 2y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$. 从而可求得 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, 此时最宜用高斯公式. 但注意到在球内点 $(0, 0, 0)$ 处 P, Q, R 不存在(更谈不上有偏导数), 可知此题不具有应用高斯公式的条件. 现采用“挖洞”法, 取 $0 < \varepsilon < 1$, 作椭球面 $\sigma: 2x^2 + 2y^2 + z^2 = \varepsilon^2$, 取外侧, 则在 $\Sigma + \sigma^-$ 所围的区域 Ω 内可用高斯公式:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\sigma^-} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(\sqrt{2x^2 + 2y^2 + z^2})^3} + \iint_{\sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(\sqrt{2x^2 + 2y^2 + z^2})^3} \\ &= \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz + \iint_{\sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\varepsilon^3}. \end{aligned}$$

$$= \iiint_V \frac{3}{\varepsilon^3} dx dy dz \quad (V \text{ 是 } 2x^2 + 2y^2 + z^2 = \varepsilon^2 \text{ 所围区域})$$

$$= \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cdot \varepsilon \pi = 2\pi.$$

例 2.4 设对于半空间 $x > 0$ 内任一光滑封闭曲面 S 有

$$\oint_S xf(x) dy dz - (y+z)f(x) dz dx - x^2 z e^{2x} dx dy = 0,$$

其中函数 $f(x) \in C^1(0, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 求 $f(x)$.

解 由高斯公式有

$$0 = \iint_S xf(x) dy dz - (y+z)f(x) dz dx - x^2 z e^{2x} dx dy$$

$$= \pm \iiint_{\Omega} [xf'(x) + f(x) - f(x) - x^2 e^{2x}] dx dy dz,$$

其中 Ω 是 S 所围成的有界闭区域. 当 S 取外侧时选“+”号, 当 S 取内侧时选“-”号. 由 S 的任意性知, $x > 0$ 时有

$$xf'(x) + f(x) - f(x) - x^2 e^{2x} = 0,$$

$$f'(x) = x e^{2x}, f(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x} + C.$$

利用条件 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 求出 $C = \frac{1}{4}$. 故

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x} + \frac{1}{4}.$$

例 2.5 设函数 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 在包含闭区域 Ω 的区域上具有一阶及二阶连续偏导数, 证明

$$\iint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz = \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz,$$

其中 Σ 是闭区域 Ω 的整个边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方

向导数, 符号 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为三维拉普拉斯算子, $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ 称为三

维哈密顿算子. 通常把本例题的公式叫做高斯第一公式.

证 因为

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的外法线向量的方向余弦, 所以曲面积分

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= \iint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\
 &= \iint_{\Sigma} \left[\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta + \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS \\
 &\xrightarrow{\text{高斯公式}} \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz.
 \end{aligned}$$

将上式移项便得所要证明的高斯第一公式.

注 1 若在高斯第一公式中将 u, v 互换, 然后两式相减, 便得

$$\iint_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = \iiint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz.$$

上式称为高斯第二公式.

注 2 若在高斯第一公式中令 $v = u$, 则有

$$\iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} u \Delta u dx dy dz + \iiint_{\Omega} (\nabla u)^2 dx dy dz.$$

此式称为高斯第三公式.

例 2.6 证明电学中的高斯定理: 在点电荷 q 所产生的静电场中, 电场强度 \mathbf{E} 通过任何包含 q 在内的光滑封闭曲面 S_1 的电通量都等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$.

证 点电荷 q 产生一个静电场, 场中任一点 M 处的电场强度为 $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0$, 其中 r 是点 M 到点电荷 q 的距离, \mathbf{r}_0 是从 q 指向 M 的单位向量, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$ 是比例常数, 先求 \mathbf{E} 通过以 q 为中心, R 为半径的球面 S 的电通量 Φ . 已知

$$\Phi = \iint_{S^+} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n dS,$$

因 \mathbf{E} 的方向与 \mathbf{e}_n 一致, 所以 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n = |\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 从而有

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \iint_S dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(电通量与球的半径 R 无关). 但封闭曲面 S_1 未必是球面, 所以要在 S_1 的内部, 以 q 为球心任意作一个小球面 S (图 11.14). 考虑由 S_1 及 S 所围成的空间区域 Ω ,

在 Ω 上应用高斯公式. 由于 Ω 的边界曲面应取正侧, 即在 S_1 上应取外侧, 在 S 上应取内侧. 于是, 由高斯公式有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_{S^+} E \cdot e_{n_1} dS + \iint_{S^-} E \cdot e_n dS, \quad (2.5)$$

其中 e_{n_1} 为 S_1^+ 的单位法向量, e_n 为 S^- 的单位法向

量, P, Q, R 是电场强度 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r$ 的三

个分量, 即

$$P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} x, \quad Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} y, \quad R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} z,$$

$$\text{于是 } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2 - 3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

从而算出 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$. 将此结果代入 (2.5) 式, 得

$$\iint_{S^+} E \cdot e_{n_1} dS = - \iint_{S^-} E \cdot e_n dS = \iint_{S^+} E \cdot e_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

习题 11.2

A 类

1. 试用两种方法计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dx dy$, 其中 Σ 为半球面 $z = -\sqrt{3 - x^2 - y^2}$ ($-\sqrt{3} \leq z \leq 0$) 的下侧. (提示: 解法一: 直接把曲面积分化为二重积分; 解法二: “补面”后用高斯公式.)

2. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy$, 其中 Σ 为上半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($x^2 + y^2 \leq a^2$) 的表面外侧.
3. 求 $I = \iint_{\Sigma} (x - y^2) dx dy + (y - z^2) dz dx + (z - x^2) dx dy$, 其中 Σ 是锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 在 $0 \leq z \leq h$ 部分的下侧.

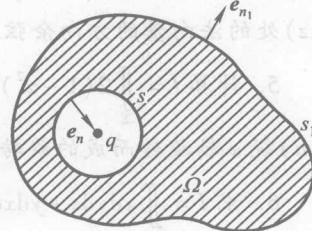


图 11.14

4. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, 其中 Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h$ ($h > 0$) 之间的部分的下侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

5. 计算 $I = \iint_{\Sigma} 2(1-x^2) dydz + 8xydzdx - 4xzdxdy$, 其中 Σ 是曲线 $x=e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面, 取外侧.

6. 求 $I = \iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, 其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在第一卦限中 $0 \leq z \leq 1$ 的部分, 取上侧.

7. 计算 $I = \iint_{\Sigma} [(z^n - y^n) \cos \alpha + (x^n - z^n) \cos \beta + (y^n - x^n) \cos \gamma] dS$, 其中 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$), α, β, γ 为球面外法线向量的方向角.

8. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + 4z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是球面 $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0, a \neq 1$), 取外侧.

B 类

1. 设 S 是上半空间 $z > 0$ 中任意光滑闭曲面, S 围成区域 Ω , 函数 $u = rk(r)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在上半空间有连续二阶偏导数, 满足

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial x} dydz + \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy = \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV.$$

求 $k(r)$.

2. 计算 $I = \iint_{\Sigma} ydydz - xdzdx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在平面 $z=1$ 及 $z=2$ 之间部分的外侧.

3. 计算 $I = \iint_{\Sigma} 4zxdydz - 2zdzdx + (1-z^2) dx dy$, 其中 Σ 为曲线 $\begin{cases} z=a^y, \\ x=0 \end{cases}$ ($0 \leq y \leq 2, a > 0, a \neq 1$) 绕 oz 轴旋转一周所成曲面的下侧.

4. 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与两平面 $z=R$, $z=-R$ ($R > 0$) 所围立体表面的外侧.

5. 设函数 $u(x, y, z)$ 在由球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 所包围的闭区域 Ω 上具有二阶连续偏导数, 且满足关系式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 + y^2 + z^2$. e_n 为 S 的外法线方

向的单位向量. 求 $\iint_S \frac{\partial u}{\partial e_n} dS$.

6. 设对半空间 $x \geq 0$ 中任意光滑闭曲面 S 均有

$$\iint_S e^{-x} u(x) dy dz + \sqrt{e^x - 1} y u^2(x) dz dx = 0,$$

其中 $u(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续导数, 试求 $u(x)$.

7. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay - 2az + a^2 = 0$ ($a > 0$), 证明

$$I = \iint_{\Sigma} (x + y + z - \sqrt{3}a) dS \leq 12\pi a^3.$$

8. 设曲面 Σ 是锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 所围立体表面的外侧, 试计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x^3 dy dz + [y^3 + f(yz)] dz dx + [z^3 + f(yz)] dx dy,$$

其中 $f(u)$ 是连续可微的奇函数.

§3 斯托克斯公式

格林公式的另一个推广是把曲面 Σ 上的曲面积分与沿着 Σ 的边界曲线的曲线积分联系起来. 这个联系可表述如下:

定理 3.1 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则①, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在曲面 Σ (连同边界 Γ) 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned} \quad (3.1)$$

公式(3.1)称为斯托克斯(Stokes)公式.

证 先假定 Σ 与平行于 z 轴的直线相交不多于一点, 并设 Σ 的方程为 $z = f(x, y)$, 取上侧, Σ 的正向边界曲线 Γ 在 xy 平面上的投影为平面有向曲线 C , C 所围成的闭区域为 D_{xy} (图 11.15(a)).

因为有向曲面 Σ 的法向量的方向余弦为

① 就是说, 当右手除拇指外的四指依 Γ 的绕行方向时, 拇指所指的方向与 Σ 上法向量的指向相同. 这时称 Γ 是有向曲面 Σ 的正向边界曲线(图 11.15).

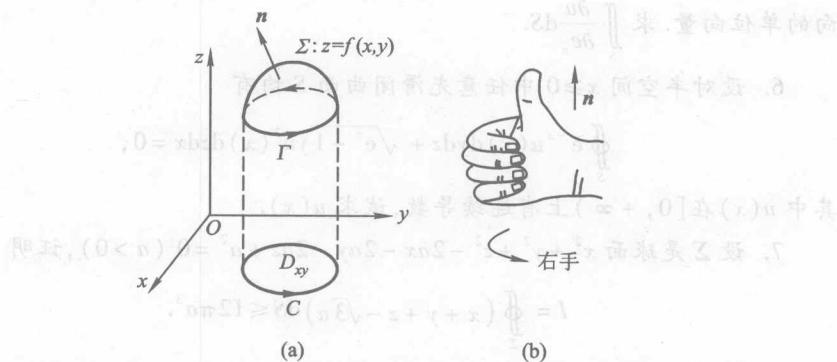


图 11.15

$$\cos \alpha = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}, \cos \beta = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}},$$

所以 $\cos \beta = -f'_y \cos \gamma$. 于是(由两类曲面积分的关系)

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS \\ &= - \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f'_y \right) \cos \gamma dS = - \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f'_y \right) dS \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dx dy \quad (\text{利用复合函数微分法}). \end{aligned}$$

根据格林公式有

$$-\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dx dy = \oint_C P(x, y, f(x, y)) dx.$$

于是

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P(x, y, f(x, y)) dx.$$

因为函数 $P(x, y, f(x, y))$ 在曲线 C 上点 (x, y) 处的值与函数 $P(x, y, z)$ 在曲线 Γ 上对应点 (x, y, z) 处的值是一样的, 故由第二型曲线积分的计算方法知

$$\oint_C P(x, y, f(x, y)) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx.$$

因此我们证得

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \quad ①$$

如果 Σ 取下侧, Γ 也相应地改成相反的方向, 则上式两端同时改变符号, 故等式关系依然成立.

如果曲面与平行于 z 轴的直线交点多于一个, 则可采用作辅助线的方法, 把曲面分成几部分, 并注意到沿辅助曲线而方向相反的两个曲线积分相加时正好抵消, 因此上述等式关系也依然成立.

同理可证

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \oint_{\Gamma} Q(x, y, z) dy.$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz = \oint_{\Gamma} R(x, y, z) dz.$$

把上面三个关系式相加, 便得到斯托克斯公式. 若用行列式记号, 斯托克斯公式可写为如下形式

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

利用两类曲面积分间的联系, 我们还可以得到斯托克斯公式的另一形式:

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz,$$

其中 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 是有向曲面 Σ 的单位法向量.

当 Σ 是 xy 平面上的闭区域, 斯托克斯公式就退化为格林公式. 因此可以说格林公式是斯托克斯公式的特殊情况.

例 3.1 计算 $I = \oint_{\Gamma} xy dx + x^2 dy + zx dz$, 其中 Γ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 的交线. 从 z 轴的正向看去为逆时针方向.

解 设 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 Γ 所围部分的上侧. $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2ax$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & z^2 & zx \end{vmatrix} \\ &= - \iint_{\Sigma} 2z dy dz + zdz dx + x dy dz \\ &= - \iint_{\Sigma} [2z(-z'_x) + z(-z'_y) + x] dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \iint_{\Sigma} \left(2z \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} (x + y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} (\cos \theta + \sin \theta) r dr \\
 &= \frac{8}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \theta + \sin \theta \cos^3 \theta) d\theta \\
 &= \frac{16}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{16}{3} a^3 \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} - \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{16}{3} a^3 \cdot \frac{3}{16} \pi = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

例 3.2 计算曲线积分 $I = \oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 其中

Γ 为用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 切立方体: $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$ 的表面所得的切痕, 若从 x 轴的正向看去, Γ 的正向是依逆时针方向 (图 11.16).

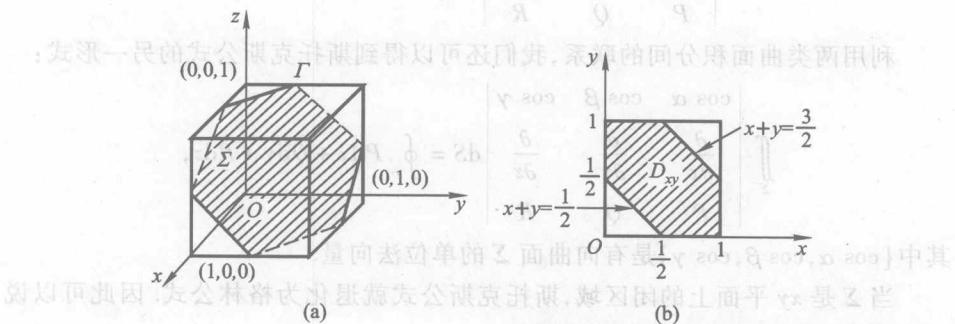


图 11.16

解 由平面方程 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 可求出平面六边形区域 Σ (图 11.16(a)) 的单位法向量 $e_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}$, 即

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

由斯托克斯公式有

$$I = \oint_{D_{xy}} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (-2y - 2z - 2x - 2z - 2x - 2y) dS \\
 &= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Sigma} dS \\
 &= -2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

注 一般而言,当闭曲线 Γ 所围成的区域为平面区域时,把曲线积分化为曲面积分来计算往往会简单方便些.

例 3.3 计算 $I = \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中 L 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ($z \geq 0$) 与圆柱面 $x^2 + y^2 = 2rx$ ($R > r > 0$) 的交线, 从 z 轴的正向看去, 方向为逆时针方向(图 11.17).

解 记在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ($z \geq 0$) 上由 L 所围成的曲面为 Σ . 由于 L 的定向,(为应用斯托克斯公式)故取 Σ 的定向为上侧, 所以其法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x - R}{R}, \cos \beta = \frac{y}{R}, \cos \gamma = \frac{z}{R},$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz \\
 &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} dS \\
 &= 2 \iint_{\Sigma} [(y - z) \cos \alpha + (z - x) \cos \beta + (x - y) \cos \gamma] dS \\
 &= 2 \iint_{\Sigma} \left[(y - z) \frac{x - R}{R} + (z - x) \frac{y}{R} + (x - y) \frac{z}{R} \right] dS
 \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\iint_{\Sigma} zdS - \iint_{\Sigma} ydS \right).$$

由于曲面 Σ 关于 xz 平面对称, 因此 $\iint_{\Sigma} ydS = 0$. 而在上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ($z \geq 0$) 上, Σ 的方程可写为 $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$, 所以面积元素

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{(x-R)^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dx dy = \frac{R}{z} dx dy.$$

注意到 Σ 在 xz 平面上的投影区域 D 是圆盘 $(x-r)^2 + y^2 \leq r^2$, 其面积为 πr^2 , 因而得

$$I = 2 \iint_{\Sigma} zdS = 2 \iint_{(x-r)^2+y^2 \leq r^2} z \cdot \frac{R}{z} dx dy = 2R \iint_{(x-r)^2+y^2 \leq r^2} dx dy = 2\pi r^2 R.$$

例 3.4 计算积分 $\oint_{L^+} ydx + zdy + xdz$, 其中 L^+ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, 从 z 轴正向看去为逆时针方向 (图 11.18).

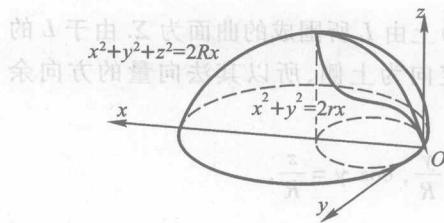


图 11.17

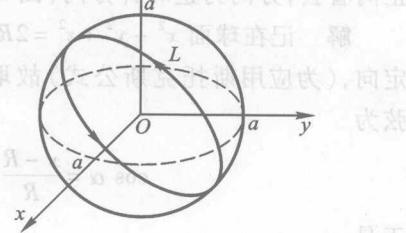


图 11.18

解法 1

$$I = \iint_{\Sigma^+} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma^+} -dy dz - dz dx - dx dy$$

轮换对称

$$-3 \iint_{\Delta_{xy}} dx dy = -3 \iint_{\Delta_{xy}} dx dy.$$

其中 Σ^+ 为 L 所围成的大圆区域上侧, 而 Δ_{xy} 是 Σ^+ 在 xy 平面的投影区域: $x^2 + y^2 + xy \leq \frac{a^2}{2}$. 令 $x = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$, 则

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) | 3\xi^2 + \eta^2 \leq a^2\},$$

故 $I = -3S_{\Delta_{\xi\eta}} = -\frac{3}{\sqrt{3}}a^2\pi = -\sqrt{3}a^2\pi.$

解法 2

$$\Sigma^+: F \equiv x + y + z = 0, \quad \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{1, 1, 1\}.$$

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

故 $I = \iint_{\Sigma^+} 3 \cdot (-1) \frac{1}{\sqrt{3}} dS = -\sqrt{3} \iint_{\Sigma^+} dS = -\sqrt{3} S_{\Sigma} = -\sqrt{3} a^2 \pi.$

习题 11.3

A 类

(a) 用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_L (ydx + zd\gamma + xdz)$.

解 (a) 由图 11.11 可知向量场 $F = (y, z, x)$ 在圆周上是逆时针方向的.

解 (b) 由图 11.11 可知向量场 $F = (y, z, x)$ 在圆周上是顺时针方向的.

$$I = \oint_L zdx + xdy + zdz,$$

其中 L 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标平面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则.

2. 计算曲线积分 $I = \oint_L ydx + zd\gamma + xdz$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + z = R$ 的交线, L 的方向从 y 轴正向看去是逆时针.

3. 计算 $I = \int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, 其中 L 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标平面所截三角形 Σ 的边界, 若从 x 轴的正向看去, 定向为逆时针方向.

4. 计算 $\oint_{L^+} \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 L 是球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限与坐标平面相交的三段圆弧连接而成的闭曲线, 其正方向如图 11.19 所示.

5. 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I = \oint_L (by^2 z - x)dx + (3x - ayz^2)dy + (x + y + z)dz,$$

其中 L 为圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的交线, 从 x 轴正向往原点看去, L 为逆时针方向如图 11.20 所示.

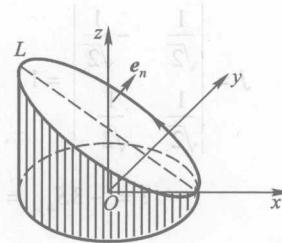
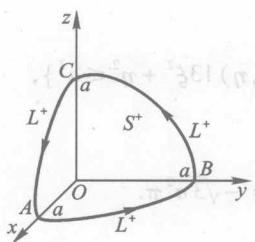
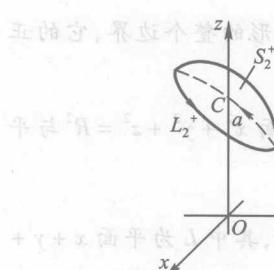


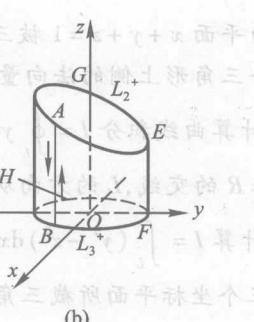
图 11.19

图 11.20

B 类

1. 计算 $I = \oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L^+ 为:(1) 任意不围绕也不通过 z 轴的闭曲线, 正方向如图 11.21(a) 所示, 记作 L_1^+ ;(2) 任意围绕 z 轴一圈的闭曲线, 正方向如图 11.21(b) 所示, 记作 L_2^+ (此时, 正方向符合右手法则). (提示: 把 L_2^+ 上的曲线积分化为平面曲线 L_3^+ 上的积分, 见图 11.21(b)).

(a)



(b)

图 11.21

2. 求 $I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 其中 Γ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界线, 方向为 $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.3. 确定函数 $f(x), \varphi(x)$ 使曲线积分

$$\int_L \left\{ \frac{\varphi(x)}{2} y^2 + [x^2 - f(x)] y \right\} dx + [f(x) y + \varphi(x)] dy + zdz = 0$$

对于任何闭曲线 L 的积分都等于 0. 假设上面确定的函数 $f(x), \varphi(x)$ 满足 $f(0) = -1, \varphi(0) = 0$, 试计算沿曲线 L 从点 $M_0(0, 1, 0)$ 到点 $M_1\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$ 的曲线积分

$$I = \int_{M_0}^{M_1} \left\{ \frac{\varphi(x)}{2} y^2 + [x^2 - f(x)] y \right\} dx + [f(x) y + \varphi(x)] dy + zdz$$

§4 梯度、散度和旋度

曲线积分和曲面积分以及相关的三个积分公式, 对于物理学有着重要意义, 特别是在电磁学, 流体力学和理论物理中, 它们有着广泛的应用.

具有某种物理现象的空间称为物理场. 当刻画物理现象的量是数量时, 称此场为数量场, 如温度场. 当刻画物理现象的量是向量时, 就称此场为向量场(也称矢量场), 如速度场, 电场, 力场等.

4.1 数量场的梯度

在本节中, 假定所涉及的数量函数和向量函数都具有我们所需要的各阶连续的偏导数.

设 $\mathbf{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 是给定的一个向量, 则数量函数 $f(M)$ 在点 M_0 处沿方向 \mathbf{l} 的方向导数为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \\ &= |\mathbf{grad} f(M_0)| \cdot |\mathbf{l}| \cos \theta, \end{aligned}$$

其中 θ 是 $\mathbf{grad} f(M_0)$ 与 \mathbf{l} 之间的夹角, 而 $\mathbf{grad} f(M_0)$ 是 $f(M)$ 在点 M_0 处的梯度(参见第 8 章 §6). 所以 $f(M)$ 的梯度是一个向量.

沿着这一方向, 即当 $\theta = 0$, 方向导数有最大的数值, 也就是说, 在梯度的方向上, 函数 $f(M)$ 的变化最大, 而这个最大值正好是 $|\mathbf{grad} f(M)|$.

为了说明梯度的几何意义, 我们引入数量场 f 的等值面的概念. 称点集

$$\{M(x, y, z) | f(M) = c, c \text{ 为常数}, M(x, y, z) \in \Omega\}$$

为数量场 f 的 c -等值面.

我们知道, 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的法向量为 $\{F'_x, F'_y, F'_z\}$, 因此, 等值面 $f(x, y,$

$z) - c = 0$ 的法向量是 $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$, 这正是 $\text{grad } f$. 所以数量场 f 的梯度 $\text{grad } f$ 垂直于 f 的等值面. 这是梯度的一个重要几何性质, 有时也把梯度写为 $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial n} e_n$, 其中 e_n 是等值面 $f(x, y, z) = c$ 的单位法向量, 由梯度定义知, 这里的 e_n 指向函数增加的方向.

如果使用哈密顿算子

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\},$$

则可得到梯度的另一种表示:

$$\text{grad } f = \nabla f.$$

4.2 向量场的散度

若 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ 是定义在 Ω 上的一个向量函数, 则称 \mathbf{F} 是 Ω 上的一个向量场, 于是 \mathbf{F} 通过定向曲面 S 的通量为

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot e_n dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot dS.$$

若在高斯公式

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot e_n dS = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

中定义

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

并把它称为向量场 \mathbf{F} 的散度 (div 是 divergence 的缩写). 那么, 高斯公式便有一个简单的表示:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot e_n dS = \iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{F} dV,$$

其中 e_n 是 $\partial\Omega$ 的外向单位法向量.

为说明散度的物理意义, 我们把 \mathbf{F} 设想为流速场. 那么上式左边的通量就是在单位时间内流出 $\partial\Omega$ 的总量. 这是一个代数和, 因为在某一局部, 从 $\partial\Omega$ 的里面流到外面的流体多一些, 而在另一局部, 则可能流进的多一些. 如果这个曲面积分值是正的, 表明体内的流体减少; 如果是负的, 说明体内的流体增多.

在 Ω 内任取一内点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心, 做一个半径为 ε 的小球, 记作 B_ε . 让 ε 如此小, 使得 $B_\varepsilon \subset \Omega$. 令 ∂B_ε 表示小球的球面, 取 e_n 为其外向单位向量, 则由高斯公式, 知通量

$$\Phi_\varepsilon = \iint_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

对上式右边应用积分中值定理, 得

$$\iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(M_\xi) \iiint_{B_\varepsilon} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(M_\xi) V_\varepsilon,$$

其中点 $M_\xi \in B_\varepsilon$, V_ε 表示球体 B_ε 的体积. 于是我们发现: 在球体 B_ε 内存在一点 M_ξ , 使得通量 Φ_ε 可以表示为

$$\Phi_\varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{F}(M_\xi) V_\varepsilon.$$

这样一来, 通量 Φ_ε 与体积 V_ε 的比值为

$$\frac{\Phi_\varepsilon}{V_\varepsilon} = \operatorname{div} \mathbf{F}(M_\xi).$$

这个比值反映的是: 在点 M_0 邻近, 流速场穿过单位球体外表面的通量. 直观地说, 这个比值刻画的是: 在点 M_0 邻近流速场的发散强度. 为了求出流速场在点 M_0 处的发散强度, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即让小球无限地向点 M_0 收缩(此时 $M_\xi \rightarrow M_0$), 立刻得到

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi_\varepsilon}{V_\varepsilon}.$$

由此可见, 散度刻画的是向量场在一点处的发散强度.

如果使用哈密顿算子, 则可得到散度的另一种表示:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

4.3 向量场的旋度

1. 环量

设 Γ 是位于向量场中的有向闭曲线, Γ 在点 (x, y, z) 处的单位切向量记为

$$\mathbf{e}_t = \{\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu\},$$

其中 λ, μ, ν 是切向量与三个坐标轴正向的夹角, 则向量场

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

关于闭曲线 Γ 的环量定义为向量 \mathbf{F} 沿曲线 Γ 的积分, 即

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_t ds.$$

如果这里的向量场是力场 \mathbf{F} , 那么环量就是力 \mathbf{F} 所做的功.

2. 旋度

正像通量的定义与高斯公式有关一样, 环量的定义与斯托克斯公式有关. 设 $\mathbf{e}_n = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 是有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量, \mathbf{e}_t 是 Σ 的正向边界曲线 $\partial^+ \Sigma$ 的单位切向量, 则斯托克斯公式有形式:

$$\iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

$$= \oint_{\partial^+ \Sigma} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) ds.$$

或写成如下向量形式:

$$\iint_{\Sigma} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{Bmatrix} \cdot e_n dS = \oint_{\partial^+ \Sigma} \mathbf{F} \cdot e_t ds.$$

根据这个公式, 我们引出旋度概念. 对向量场 $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$, 旋度的记号和定义是

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

(rot 是 rotation 的缩写) 可以看出, 旋度是向量. 利用旋度我们可以把斯托克斯公式写成更简明的向量形式:

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot e_n dS = \oint_{\partial^+ \Sigma} \mathbf{F} \cdot e_t ds.$$

或

$$\iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{F})_n dS = \oint_{\partial^+ \Sigma} F_t ds, \quad (4.1)$$

其中

$$(\text{rot } \mathbf{F})_n = \text{rot } \mathbf{F} \cdot e_n$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma$$

为旋度 $\text{rot } \mathbf{F}$ 在 Σ 的法向量上的投影, 而

$$F_t = \mathbf{F} \cdot e_t = P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu$$

为向量 \mathbf{F} 在 $\partial^+ \Sigma$ 的切向量上的投影. 从而斯托克斯公式(4.1)可以表述为: 向量场 \mathbf{F} 沿有向闭曲线 Γ 的环量等于向量场 \mathbf{F} 的旋度场通过 Γ 所张的曲面 Σ 的通量, 这里 Γ 的正向与 Σ 的侧应符合右手法则.

3. 旋度的意义

为了说明这个问题, 现在引出所谓“环量密度”的概念. 在向量场里取定一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 过 M_0 做一个有向平面 π , 假定其指定侧的单位法向量是 e_n . 在平面 π 上做一个半径 ε 的充分小的圆盘 Σ_ε . 根据斯托

克斯公式,向量场沿圆周的环量是

$$\Gamma_\varepsilon = \oint_{\partial^+ \Sigma_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_t ds = \iint_{\Sigma_\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS.$$

对右端的积分应用中值定理,则在圆盘 Σ_ε 上存在一点 $M_\xi(\xi, \eta, \zeta)$ 使得环量 Γ_ε 可以表示为

$$\Gamma_\varepsilon = \operatorname{rot} \mathbf{F}(M_\xi) \cdot \mathbf{e}_n S_\varepsilon,$$

其中 $S_\varepsilon = \pi \varepsilon^2$ 是圆盘 Σ_ε 的面积.于是环量 Γ_ε 与面积 S_ε 的比值为

$$\frac{\Gamma_\varepsilon}{S_\varepsilon} = \operatorname{rot} \mathbf{F}(M_\xi) \cdot \mathbf{e}_n,$$

这个比值是一种平均值,它描述的是“向量场在点 M_0 邻近沿单位圆盘的平均环量”,或叫平均环量面密度.直观说来,向量场在变化时旋转程度越大,平均环量面密度就越大(例如在力场 \mathbf{F} 中,力 \mathbf{F} 使质点沿圆周 Γ_ε 转动得越快,力做的功就越多).现在让圆盘 Σ_ε 无限地收缩于点 M_0 ,即令圆盘半径 $\varepsilon \rightarrow 0$,点 $M_\xi \rightarrow M_0$,

$$\text{平均环量 } \frac{\Gamma_\varepsilon}{S_\varepsilon} \rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{F}(M_0) \cdot \mathbf{e}_n,$$

这个极限值叫向量场 \mathbf{F} 在点 M_0 处沿方向 \mathbf{e}_n 的环量面密度.容易看出:向量场在点 M_0 的旋度方向就是使环量面密度达到最大的方向.

旋度恒为零的向量场叫做无旋场,否则叫有旋场.根据斯托克斯公式,在无旋场里,向量场沿任何封闭曲线的环量总是 0.

习题 11.4

A 类

1. 设 $\mathbf{F} = \{e^{xy}, \cos(xy), \cos(xz^2)\}$, 求 $\operatorname{div} \mathbf{F}$.
2. 设 $\mathbf{A} = \{x^2 \sin y, y^2 \sin(xz), xy \sin z\}$, 求 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$.
3. 设

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{a_1(x, y, z), a_2(x, y, z), a_3(x, y, z)\}, \\ \mathbf{B} &= \{b_1(x, y, z), b_2(x, y, z), b_3(x, y, z)\},\end{aligned}$$

试证

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \varphi \mathbf{A} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi) + \varphi (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \varphi$ 都是 (x, y, z) 的可微函数.

4. 设 $\mathbf{r} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, 试证
 $\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$.
5. 设 $\operatorname{div} [\operatorname{grad} f(r)] = 0$, 求 $f(r)$.

量不随圆周而变, 为常数

B 类

1. 设 F_1, F_2 是旋转椭球面的两焦点, P 为椭球面上任意一点. 试证 PF_1, PF_2 与过点 P 的切平面成等角 (见图 11.22).

2. 证明: 梯度场是无旋场, 即 $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \mathbf{0}$, 其中 $u = u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数. 旋度场是无源场, 即 $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$.

3. 设 $u = x^2 yz, v = x^2 + y^2 - z^2$, 计算

(1) $\nabla(\nabla u \cdot \nabla v)$;

(2) $\nabla \cdot (\nabla u \times \nabla v)$;

(3) $\nabla \times (\nabla u \times \nabla v)$.

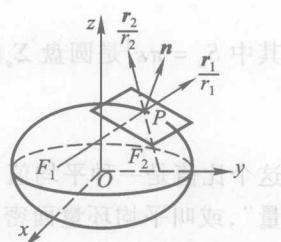


图 11.22 (选做题)

C. II 题区

A类

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \text{ 未, } \{(z, x)_{\text{未}}, (y, x)_{\text{未}}, (z, y)\} = \mathbf{A} \text{ 未, } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \text{ 未, } \{z \sin(y), (x) \sin^2(t), (z) \sin^2(y)\} = \mathbf{A} \text{ 未, } \mathbf{A}$$

类, E

$$\{(z, x, y)_{\text{未}}, (z, y, x)_{\text{未}}, (z, x, y)_{\text{未}}\} = \mathbf{A}$$

$$\{(z, x, y)_{\text{未}}, (z, y, x)_{\text{未}}, (z, x, y)_{\text{未}}\} = \mathbf{A}$$

类, E

$$\mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\phi \nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} = \mathbf{A} \phi (\nabla \cdot \mathbf{a})$$

类, E

$$\text{即 } \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x} - z) + \frac{\partial}{\partial y} (-y) + \frac{\partial}{\partial z} (x - z) = 1 = 1, \{y^2 - z, y(-x), x - z\} = \nabla \text{类, A}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x) = (x) \frac{\partial}{\partial x} + 1 = x \frac{\partial}{\partial x} + 1$$

$$(x) \text{类, } 0 = [(x) \frac{\partial}{\partial x}] \text{ rib 类, } \mathbf{c}$$

第12章 无穷级数

迄今为止,我们已经介绍了微积分中的主要内容:极限理论、微分学和积分学.本章所要讨论的无穷级数是高等数学的一个重要组成部分,它可分为常数项无穷级数与函数项无穷级数两大类.函数项无穷级数是表示函数、研究函数(初等函数与非初等函数)性质以及进行数值计算的重要手段;常数项无穷级数是函数项无穷级数的基础.无穷级数在自然科学、工程技术和数学学科本身都有广泛的应用.

本章先讨论常数项无穷级数,介绍无穷级数的一些基本概念、性质以及收敛性判别法.然后讨论函数项级数的一般理论,着重讨论如何将函数展开成幂级数与三角级数的问题.

§1 常数项级数的概念和性质

1.1 基本概念

1. 无穷级数

我们先看看两个有趣的例子:

第一个是庄子所举的例子:“一尺之棰,日取其半,万世不竭”(《庄子·天下》).即设有一尺长的木棍,第一天取半尺,第二天取剩下的一半,以后每天都取剩下的一半,这样永远取之不尽.庄子把有限长度一尺长的木棍进行了无限的分割,分割成无限段木棍,它们的长分别为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots,$$

于是,天天不断取出的总长之“和”为

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$$

上式右端就是一个无穷级数.

第二个是希腊哲学家芝诺所举的例子.大约在公元前450年前后,古希腊哲学家芝诺(Zeno)曾提出四个在数学发展史上产生过重大影响的悖论,人称“芝诺悖论”,其中一个悖论是:“阿基里斯(Achilles,古代神话中跑得最快的人)追

不上乌龟”.设乌龟在阿基里斯前面 S_1 米处向前爬行,阿基里斯在后面开始追赶,当阿基里斯用了 t_1 秒时间跑完 S_1 米时,乌龟已向前爬行了 S_2 米;当阿基里斯再用 t_2 秒时间跑完 S_2 米时,乌龟又向前爬行了 S_3 米;……,这样的过程可以一直无限地继续下去.因此阿基里斯永远也追不上乌龟.

显然,这一结论完全有悖于常识.没有人会怀疑,阿基里斯必将在某一 T 秒时间内,跑了 S 米后追上乌龟(T 和 S 是常数).芝诺的诡辩之处就在于把有限的时间 T (或距离 S)分割成了无限个时间段 t_1, t_2, \dots (或距离段 S_1, S_2, \dots),然后一段一段地加以叙述,从而造成一种假象:这样“追一爬—追一爬”的过程将随时间的流逝而永无止境.所以,此悖论的症结就在于无限段时间的和可以是有限的;无限段长度的和可以是有限的.事实上,如果将用掉的时间 t_1, t_2, \dots (或跑过的距离 S_1, S_2, \dots)加起来,即

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots \quad (\text{或 } S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots),$$

尽管相加的项有无限个,但它们的和却是有限数 T (或 S).换言之,经过时间 T 秒,阿基里斯跑完 S 米后,他已追上了乌龟.

这里,我们同样是遇到了无限个数相加求和的问题.很自然地要问,这种“无限个数相加求和”是否一定有意义?若不一定的话,那么应该怎样来判定?另外,有限个数相加时的运算法则(如加法的交换律、结合律等)对于无限个数相加是否继续有效(例如,若令 $\sigma = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$,那么,如果依旧使用有限个数相加的结合律,则读者不难用三种方法推导出 σ 可以等于不同的值: $\sigma = 0$, $\sigma = 1$, $\sigma = 2$.这显然是错误的,说明此时加法的结合律是不成立的)?如此等等,这正是级数要讨论的一些问题.

定义 1.1 设已给数列 $\{u_n\}$,称表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1.1)$$

为常数项无穷级数,简称为数项级数或级数,记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的一般项或通项.

上面所提出的级数定义纯粹是形式上的,它只指出级数是无穷多项累加,怎样理解无穷级数中无穷多个数量相加呢?直到 1823 年法国数学家柯西(Cauchy)对无穷级数作出了严格的论述后,才搞清无穷级数的概念.

2. 无穷级数的收敛与发散

定义 1.2 级数(1.1)的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad (1.2)$$

称为它的前 n 项部分和, 简称部分和. 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称其极限值 S 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ ，即

$$\frac{1}{1+\alpha} - 1 = \left(\frac{1}{1+\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k ; \quad \left(\frac{1}{\Sigma} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\Sigma} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right) =$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有极限，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

发散的级数无值可言(发散的级数没有和),只有收敛的级数才能把极限

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 视为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的值; 此时, 部分和 S_n 是级数和 S 的近似值, 称它们之间的差值

$$Y_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

为级数的余项,用近似值 S_n 代替和 S 所产生的误差为 $|r_n|$.

无穷级数的收敛性与发散性统称为敛散性,但在许多著作中提及的讨论级数的收敛性是指判定级数是否收敛.

例 1.1 讨论几何级数(等比级数)

$$+ [\xi \cdot n] + \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (a \neq 0) \quad (1.3)$$

的敛散性. 如果收敛, 求其和.

解 当 $q = 1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), 级数 (1.3) 发散.

当 $q = -1$ 时, 级数(1.3)成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^n \cdot a + \cdots$$

显然 n 为奇数时, $S_n = a$; n 为偶数时, $S_n = 0$, 故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 这时级数 (1.3) 发散.

当 $|q| \neq 1$ 时，则部分和

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 从而 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, 级数(1.3)收敛, 其和为

$\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 这时级数(1.3)发散.

综上所述,当 $|q| < 1$ 时,几何级数收敛于 $\frac{a}{1-q}$;当 $|q| \geq 1$ 时,几何级数发散.

例 1.2 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 的敛散性。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的敛散性.

解 用定义判定级数敛散性时, 常用拆项相消法:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

从而

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

故所讨论的级数收敛, 其和为 1, 其余项为

$$r_n = S - S_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

例 1.3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 用拆项相消法, 得

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= [\ln(1+1) - \ln 1] + [\ln(2+1) - \ln 2] + [\ln(3+1) - \ln 3] + \\ &\quad \cdots + [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(1+n). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+n) = +\infty$, 所以原级数发散.

1.2 柯西收敛原理(柯西准则)

能直接用定义来判别级数是否收敛的例子为数不多. 那么判别一个级数是否收敛的一般方法是什么? 下面的柯西收敛原理给出了判别级数收敛的充分必要条件.

定理 1.1 (柯西收敛原理) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意自然数 p , 下述不等式都成立

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

证 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和为 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{S_n\}$ 有极限, 故由数列 $\{S_n\}$ 收敛的柯西准则知其又等价于: 对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $n > N$ 时, 对任意自然数 p , 都有

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

定理得证.

例 1.4 试用柯西收敛原理证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

证 由于

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\ &= \left| \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+3} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right| < \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 根据柯西收敛原理知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

例 1.5 试用柯西收敛原理证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散.

证 由于 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < x$, 故 $\ln(1+k) < k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), 从而

$$\begin{aligned} |S_{2n} - S_n| &= \left| \frac{1}{\ln(1+n+1)} + \frac{1}{\ln(1+n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(1+2n)} \right| \\ &> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故由柯西原理知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散.

从上述证明过程可以看出调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也是发散的.

1.3 收敛级数的基本性质

根据无穷级数收敛、发散以及和的概念, 可以得到收敛级数的几个基本性质, 这些性质都以定理的形式给出. 根据柯西收敛原理, 立刻得出级数收敛的必要条件.

定理 1.2 (级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则它的一般项 u_n 趋于零, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

注 级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件, $u_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 并不能断言级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 虽然它的一般项 $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 但是它是发散的(见例 1.3). 另一方面, 用定理 1.2 来判断一些级

数的发散是很方便的. 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 是发散的, 这是因为 $u_n = n \sin \frac{1}{n} \rightarrow 1 \neq 0 (n \rightarrow \infty)$.

定理 1.3 设 c 为任意非零常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性相同. 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 S 时, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n = cS.$$

定理的证明从略.

例 1.6 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛而且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (见例 1.2), 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ 收敛, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$; 因为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n} (c \neq 0)$ 也是发散的.

定理 1.4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S 和 σ , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $S \pm \sigma$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S \pm \sigma.$$

证 记 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和 τ_n 为

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = S_n \pm \sigma_n. \end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm \sigma$.

这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 并且其和为 $S \pm \sigma$.

例 1.7 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} + 5 \cdot \frac{2^n}{3^{n-1}} \right)$ 的敛散性, 若收敛, 求其和.

解 由于等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ (公比 $q = \frac{1}{2} < 1$) 收敛, 且等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ (公比 $q = \frac{2}{3} < 1$) 也收敛, 故根据定理 1.4 及定理 1.3, 原级数收敛, 并且有 (见

例 1.1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} + 5 \cdot \frac{2^n}{3^{n-1}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \frac{2^n}{3^{n-1}} \\ &= 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + 10 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 36. \end{aligned}$$

注 (1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 必发散.

这是由于若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(u_n \pm v_n) - u_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \pm v_n = \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散矛盾.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 可能收敛也可能发散

定理 1.5 在级数前面删去或添加有限项, 不影响级数的敛散性. 即级数的敛散性与其前面的有限项大小无关.

证 若从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中删去前 k 项, 则所得级数为 $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$, 记它们的部分和分别为 S_n 与 σ_n , 则

$$S_{n+k} = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{n+k} = S_k + \sigma_n.$$

因为 S_k 对固定整数 k 来说是常数, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, S_{n+k} 与 σ_n 同时有极限或同时没有极限, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散.

同理可知, 在级数的前面添加有限项也不影响级数的敛散性.

定理 1.6 对收敛级数的项任意加括号后所成的级数仍然收敛, 且与原级数有相同的和.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 其部分和为 S_n , 又设将其任意加括号后所得的新级数为

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots,$$

则新级数的部分和数列为

$$\sigma_1 = S_{n_1}, \sigma_2 = S_{n_2}, \dots, \sigma_k = S_{n_k}, \dots,$$

即 $\{\sigma_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子数列. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 故有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S$.

推论 如果加括号后的新级数发散, 则原来的级数必发散.

注 收敛级数不能任意去括号. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于零,但去掉括号后的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

却是发散的.

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}} \cdot 01 + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}} \cdot \varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}} \right) \cdot 01 + \left(\frac{\varepsilon}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}} \right) \cdot \varepsilon =$$

习题 12.1

A 类

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}.$$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{3} - \frac{7}{4} + \cdots; \quad (2) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(3) \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 - \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \cdots; \quad (4) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

3. 根据定义判定下列级数的敛散性,若收敛,求其和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

4. 利用级数的基本性质判定下列级数的敛散性:

$$(1) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots; \quad (2) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots;$$

$$(3) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \cdots;$$

$$(5) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5 \cdot n}\right) + \cdots;$$

$$(6) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$$

B 类

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = a$. 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ 收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - a.$$

2. 利用柯西原理证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛。

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 且 $u_n \leq w_n \leq v_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也收敛。

4. 试用柯西收敛原理证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散。

§2 正项级数及其收敛判别法

本节讨论正项级数, 因为正项级数在实际应用中经常会遇到, 并且许多级数的敛散性问题往往可以归结为正项级数的敛散性问题, 因此它显得尤其重要。

定义 2.1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的每项都是非负的, 即 $u_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则称此级数为正项级数。

关于正项级数, 我们以定理形式介绍几个判别其敛散性的方法。

定理 2.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

证 必要性. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则由收敛数列必有界可知数列 $\{S_n\}$ 有上界。

充分性. 设 $\{S_n\}$ 有上界 M . 由于 $u_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 故数列 $\{S_n\}$ 满足 $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 即数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的有界数列. 故由数列极限存在的单调有界准则知极限 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 即正项级数收敛。

由定理 2.1 可知, 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则它一定发散到 $+\infty$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. 此定理的实用性并不在于用它来直接判别正项级数的敛散性, 而在于基于此定理我们可以建立在实用上很方便的比较判别法、比值判别法、根值判别法以及积分判别法。

例 2.1 证明 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$) 当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $0 < p \leq 1$ 时发散。

证 令 $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $y=f(x)$ 的图形如图 12.1 所示. 由于当 $x \in [k-1, k]$ 时 ($k=2, 3, \dots, n$), 有

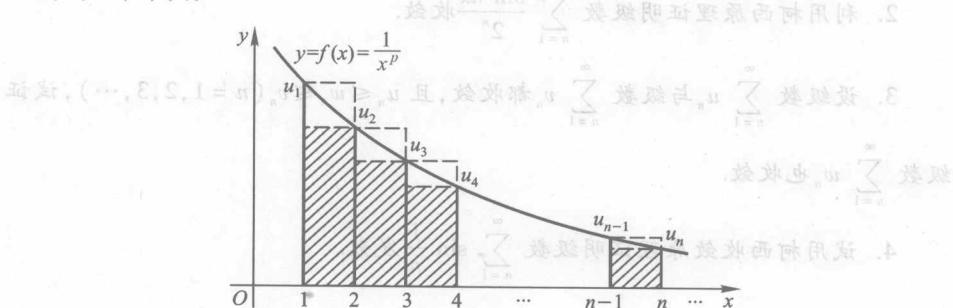


图 12.1

于是, 有(如图 12.1 所示)

$$u_k = \frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{(k-1)^p} dx = \frac{1}{(k-1)^p} = u_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, n).$$

从而

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-1)^p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p},$$

亦即 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 具有性质:

$$S_n - u_1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \leq S_{n-1}. \quad (2.1)$$

根据定理 2.1 及不等式(2.1)式可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 与数列 $\left\{ \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \right\}$ 有相同的敛散性. 当 $p=1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty.$$

当 $p > 0$ 且 $p \neq 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & 0 < p < 1. \end{cases}$$

这就证明了数列 $\left\{ \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \right\}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散, 而当 $p > 1$ 时收敛. 从而证明了

p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散, 而当 $p > 1$ 时收敛. 0, 即 $1 > p > 0$ 时 (1)

定理 2.2 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时 $u_n \leq c \cdot v_n$ (常数 $c > 0$), 则

- (1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;
- (2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 由于级数删去前头有限项后不影响其敛散性, 故我们不妨假设不等式 $u_n \leq cv_n$ 对一切正整数 n 都成立. 设 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $\sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, 则由已知条件可知 $S_n \leq c \cdot \sigma_n$ ($c > 0, n = 1, 2, 3, \dots$).

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则由定理 2.1 知, 存在 $M > 0$, 使得 $\sigma_n \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 从而 $S_n \leq c\sigma_n \leq cM$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 再根据定理 2.1 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 再由 $\sigma_n \geq \frac{1}{c}S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$. 根据定理 2.1 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 2.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛. 事实上, 因为当 $x > 0$ 时有 $\ln(1+x) < x$, 所以 $0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). 又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

例 2.3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ 是发散的.

证 由 $n(2n+1) < 4n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 可知

$$\frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}} > \frac{1}{2n}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 是发散的, 根据比较判别法可知所给级数也是发散的.

例 2.4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}}$ ($q > 0$) 的敛散性.

解 此正项级数的一般项 $u_n = \frac{q^n}{1+q^{2n}}$.

(1) 当 $0 < q < 1$ 时, $0 < u_n < q^n$, 且几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛. 故根据比较判别法, 原级数收敛.

(2) 当 $q > 1$ 时, $0 < u_n < \frac{q^n}{q^{2n}} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$, 且几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$ 收敛. 故根据比较判别法, 原级数收敛.

(3) 当 $q = 1$ 时, $u_n = \frac{1}{2}$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2} \neq 0$, 故当 $q = 1$ 时原级数发散.

用比较判别法来讨论级数的敛散性, 关键在于选取一个敛散性已知的级数作为比较标准, 常用的是几何级数与 p -级数等, 读者应熟记这些级数.

定理 2.3 (比较判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 \leq l \leq +\infty).$$

(1) 如果 $0 \leq l < +\infty$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 如果 $0 < l \leq +\infty$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证 当 $0 < l < +\infty$ 时, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 故对于 $\varepsilon = \frac{l}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$

时, 就有 $\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \frac{l}{2}$, 即当 $n > N$ 时, 就有

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l} \right) n! \leq u_n \leq \frac{l}{2} v_n, \quad \text{即 } \frac{1}{2} v_n < u_n < \frac{l}{2} v_n.$$

根据定理 2.2, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散.

当 $l = 0$ 时或当 $l = +\infty$ 时, 可类似地证明, 其具体证明过程从略.

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot u_n = l (0 < l \leq +\infty)$ 且 $0 < p \leq 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot u_n = l (0 \leq l < +\infty)$, 且 $p > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 2.5 判定下列各级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n^4+2}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}.$$

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n^4+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}{n^4 + 2}} = \sqrt{1} = 1,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛.

(2) 因为(由洛必达法则)

$$(5.5) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

$$(5.5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛.

(3) 因为(由洛必达法则)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \pi x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi \sin \pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{1}{2} \pi^2,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛.

(4) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

将定理 2.2 及定理 2.3 与 p -级数的敛散性结合起来使用是非常简便的. 在选取 p -级数的过程中, 常常根据下述等价无穷小量来选取(当 $x \rightarrow 0$ 时):

$$\sin x \sim x; \ln(1+x) \sim x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2;$$

$$\arcsin x \sim x; \arctan x \sim x; e^x - 1 \sim x.$$

定理 2.4 (比值判别法, 达朗贝尔 (D'Alembert) 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项

级数,如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \quad (0 \leq \rho \leq +\infty), \quad (3)$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛;当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时,级数发散,此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$;
当 $\rho = 1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

证 当 $0 \leq \rho < +\infty$ 且 $\rho \neq 1$ 时,由极限的定义,对于 $\varepsilon = \frac{|1-\rho|}{2} > 0$,存在 N ,

当 $n > N$ 时,就有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

由(2.2)式得

$$q_2 \cdot u_n < u_{n+1} < q_1 \cdot u_n \quad (n = N+1, N+2, \dots), \quad (2.3)$$

其中 $q_1 = \rho + \frac{1}{2} \cdot |1-\rho|$, $q_2 = \rho - \frac{1}{2} \cdot |1-\rho|$.

当 $0 \leq \rho < 1$ 时, $q_1 = \frac{1}{2}(1+\rho) < 1$. 由(2.3)式得

$$u_{n+1} < q_1 \cdot u_n < q_1^2 \cdot u_{n-1} < \dots < q_1^{n-N} \cdot u_{N+1} \quad (n = N+1, N+2, \dots). \quad (2.4)$$

由于几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q_1^n$ 收敛,故根据比较判别法(定理 2.2)可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

当 $1 < \rho < +\infty$ 时, $q_2 = \frac{1}{2}(1+\rho) > 1$. 根据(2.3)式,类似(2.4)式的推导可

得 $u_{n+1} > u_{N+1} \cdot q_2^{n-N}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{N+1} \cdot q_2^{n-N} = +\infty, \quad (2.5)$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = +\infty$. 这就证明了当 $1 < \rho < +\infty$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

易证 $\rho = +\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $\rho = 1$ 时,级数可能收敛也可能发散. 例如 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,不论 p 为何值都有

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = 1.$$

而 $p \leq 1$ 时, p -级数发散; $p > 1$ 时, p -级数收敛.

定理 2.5 (根值判别法,柯西判别法) 不设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \quad (0 \leq \rho \leq +\infty),$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛, 当 $\rho > 1$ (或 $\rho = +\infty$) 时, 级数发散, 此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散.

定理 2.5 的证明与定理 2.4 类似, 这里从略.

例 2.6 判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (a > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

解 (1) 用比值法. 由于

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{a^{n+1}}{n! a^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e},$$

故当 $0 < a < e$ 时 $\rho < 1$, 原级数收敛; 当 $a > e$ 时 $\rho > 1$, 原级数发散; 当 $a = e$ 时 $\rho = 1$, 比值法失效, 考虑用其他方法来判别, 由于 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调增加且趋向 e , 故对一切 n , 都有

即 $u_{n+1} > u_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 原级数发散.

(2) 用根值法. 由于

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1} < 1,$$

故原级数收敛.

(3) 用比值法或用根值法均可. 用比值法时有

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

故原级数收敛.

定理 2.6 (柯西积分判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数. 如果存在一个定义在区间 $[1, +\infty)$ 上的单调减少的非负值函数 $f(x)$, 满足

$$(1 + \sqrt[n]{u_n}) \cdot u_n = f(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ 存在.

定理 2.6 的证明与例 2.1 相仿, 这里从略.

例 2.7 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$ ($p > 0$) 的敛散性.

解 令 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ ($2 \leq x < +\infty$), 则 $f(x)$ 是区间 $[2, +\infty)$ 内的单调减少的非负值函数, 而且 $u_n = f(n)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$). 由于

$$\begin{aligned} \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^p} dx &= \int_2^n \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{du}{u^p} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{p-1} [\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln n)^{p-1}}], & p \neq 1, \\ \ln(\ln n), & p = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \begin{cases} +\infty, & 0 < p \leq 1, \\ \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}, & p > 1. \end{cases}$$

从而根据积分判别法, 当 $p > 1$ 时, 原级数收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时, 原级数发散.

对于上面介绍的几种判别法, 读者应该通过练习, 归纳一下它们适用的级数特点, 从而熟练灵活地使用它们. 一般而言, 可根据正项级数通项的形式, 按照以下几点所提示的规律进行思考.

(1) 对于以 n 的幂 (整数幂或分数幂) 有理式为通项的情形, 可考虑用比较判别法, 比较级数为 p -级数.

(2) 对于通项含有阶乘或其他连乘运算, 指数函数、幂指函数等因式的情形, 可考虑使用比值判别法.

(3) 对于通项含有指数函数、幂函数等因式的情形 (但不含阶乘因式), 可考虑使用根值判别法.

应当注意, 这些判别法, 都有局限性, 如果用其中一个不能判定出所给级数的敛散性, 那么就应该试用另外的判别法, 甚至用级数收敛与发散的定义、收敛级数的性质等方法去判定. 现举下列例子以供读者参阅.

例 2.8 用适当的方法判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) (p > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{(2^n)^p};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n^3+1} \cdot (\sqrt{n}+1)}.$$

解 (1) 因为 $\ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ ($p > 0$) $\sim \frac{1}{n^p}$ ($n \rightarrow \infty$), 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \frac{1}{n^p} = 1,$$

根据比较判别法的极限形式可知, 当 $p > 1$ 时, 原级数收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 原级数发散.

(2) 用比较判别法: 由于 $0 < u_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ 收敛, 故原级数收敛.

也可用根值判别法 (注意到对于任何常数 $a > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$): 由于

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[2^n]{2 + (-1)^n} = \frac{1}{2} < 1,$$

故根据根值判别法知原级数收敛.

还可以用收敛级数的性质来判定: 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ 都收敛, 故原级数收敛.

(3) 注意到通项 u_n 含有阶乘及幂指函数的因子, 我们尝试用比值判别法. 由于

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 < 1, \end{aligned}$$

故原级数收敛.

(4) 由于通项

$$u_n = \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n^3+1} \cdot (\sqrt{n}+1)},$$

故试用比较判别法. 由于通项的分子是关于 n 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大, 而分母是关于 n 的

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ 阶的无穷大, 从而通项是关于 $\frac{1}{n}$ 的 $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 阶的无穷小, 故取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 为比较对象. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n^3+1} \cdot (\sqrt{n}+1)} = 1,$$

故根据比较判别法的极限形式可知, 原级数收敛.

站. (∞) 习题 12.2 A) $\left(\frac{1}{n^2} + 1\right)$ 级数因 (1) 级

$$\Gamma = \frac{1}{n^2} + 1 \text{ mil} = \left(\frac{A}{n^2} + 1\right) \text{ mil} = \frac{1}{n^2} \text{ mil}$$

支题 1. 用比较判别法或极限形式的比较判别法判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-n}};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^p} (p > 0); \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + (-1)^n}{3^n}; \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[3]{4n^3+n+1}}$$

支题 2. 用比值判别法判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot a^n (a > 0);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}.$$

支题 3. 用根值判别法判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{(\ln n)^n} (a > 0); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

支题 4. 用适当的方法判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin \frac{1}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$

B 类

1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}$ 都

收敛.

2. 试证极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!} = 0$ ($a > 0$).
育证极限存在且为零, 则由(1)知 $\sum u_n$ 收敛.

3. (对数判别法) 设 $u_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln u_n}{\ln n} = q \quad (0 \leq q < +\infty).$$

试证当 $q > 1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 收敛, 当 $q < 1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 发散.

4. 设 $u_n > 0$ 且 $v_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 又有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

如果 $\sum v_n$ 收敛, 级数 $\sum u_n$ 也收敛.

§3 任意项级数的收敛法

本节讨论任意项级数, 即既有无穷多个正项又有无穷多个负项的级数. 首先讨论一类特殊的任意项级数——交错级数.

3.1 交错级数

定义 3.1 如果级数的各项是正项、负项交替出现的级数, 则称其为交错级数, 一般它可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (3.1)$$

其中 $u_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

交错级数是最简单的任意项级数, 关于其收敛性有下述的重要定理.

定理 3.1 (莱布尼茨 (Leibniz) 定理) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足下列两个条件:

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$);

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

则交错级数(3.1)收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

证 先证明级数(3.1)的前 $2n$ 项的部分和 S_{2n} 的极限存在. S_{2n} 可表成如下两种形式:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

根据定理条件(1)知,上两式所有括号内的差都是非负的,从第一个等式可知数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调增加的,从第二等式可知 $S_{2n} < u_1$. 于是,根据单调有界数列必有极限的准则知道极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$$

存在,且有 $S \leq u_1$. 再由 $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ 及定理的条件(2),我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = S + 0 = S.$$

这表明部分和数列 $\{S_n\}$ 的奇、偶子列都有相同的极限 S ,根据数列极限的理论可知,数列 $\{S_n\}$ 也收敛于 S . 这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛于和 S ,且 $S \leq u_1$.

对于(3.1)的余项 r_n 可以写成

$$r_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots),$$

上式右端也是一个交错级数,而其绝对值同样也是交错级数:

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots,$$

它也满足定理的两个条件,故其和小于级数的第一项,即

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

例3.1 证明级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$ 收敛,并估计其余项.

解 $u_n = \frac{1}{n}$,显然 $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} < u_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 故根据莱布尼茨定理可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛,其和 $S \leq 1$. 如果取前 n 项的部分和

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

作为 S 的近似值,所产生的误差 $|r_n| \leq \frac{1}{n+1} (= u_{n+1})$.

利用莱布尼茨定理来判定交错级数收敛性,关键在于验证定理中的两个条件,此时常借用导数及洛必达法则来完成验证过程. 现举下例供读者阅读.

例3.2 试证级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 收敛.

证 为了证 $u_n = \frac{\ln n}{n}$ 满足莱布尼茨定理的条件,令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x \geq 2$),则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \quad (x \geq 3),$$

由此可知 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上严格单调减少. 于是有

$$u_{n+1} = f(n+1) < f(n) = u_n \quad (n=3, 4, 5, \dots).$$

又由于(利用洛必达法则)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad (1)$$

故根据莱布尼茨定理, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 收敛.

3.2 绝对收敛与条件收敛

定义 3.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛; 如果级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而且 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

定理 3.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛.

证 令

$$v_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) \quad (n=1, 2, \dots),$$

则 $0 \leq v_n \leq |u_n|, 0 \leq w_n \leq |u_n|$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以根据比较判别法, 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 都收敛. 于是根据收敛级数的性质可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

收敛.

根据定理 3.2, 判断任意项级数的敛散性时, 应当首先用有关正项级数的判别法判断其是否绝对收敛, 如果不是, 则用其他方法来判断原级数是否条件收敛.

例 3.3 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛, 而且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 条件收敛.

例 3.4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性.

解 因为

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ 收敛, 即原级数绝对收敛.

例 3.5 讨论下列级数的敛散性, 若收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

解 (1) 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛, 即原级数绝对收敛.

(2) 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2} < 1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ 收敛, 即原级数绝对收敛.

(3) 因为

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} > \frac{1}{2n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ 也发散. 显然, 根据莱布尼茨定理, 原级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ 收敛. 这就证明了原级数条件收敛.

(4) 因为

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty \neq 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散(收敛的必要

条件不满足).

3.3 绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数与条件收敛级数虽然都是收敛级数,但它们有着本质的差别,条件收敛级数的所有正项构成一个发散级数,它的所有负项也构成一个发散级数.下面我们介绍.绝对收敛级数的两个基本性质(其证明从略),这些性质对于条件收敛级数不适用.

定理 3.3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,则任意将它的各项重新排列次序后所得的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 也绝对收敛,且其和不变.

定理 3.4 若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛,其和分别为 S 与 σ ,则它们的各项相乘得到的所有可能的乘积 $u_i v_j (i, j = 1, 2, 3, \dots)$ 按任何次序排列所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也绝对收敛,且其和为 $S\sigma$. 特别它们的柯西乘积.

$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots$ (3.2)
是绝对收敛的,且其和为 $S\sigma$.

若记

$$c_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \dots + u_n v_1, \quad (3.3)$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的柯西乘积为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

例 3.6 几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 当 $|x| < 1$ 时绝对收敛,其和为 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ($-1 < x < 1$). 这个级数自身的柯西乘积的各项分别为(令 $u_n = x^n$ 且 $v_n = x^n (n = 0, 1, 2, \dots)$):

$$c_0 = u_0 \cdot v_0 = 1 \cdot 1 = 1, c_1 = u_0 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_0 = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x,$$

$$c_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 = 1 \cdot x^2 + x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2, \dots, \quad (1)$$

$$c_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_n v_0$$

$$= 1 \cdot x^n + x \cdot x^{n-1} + x^2 \cdot x^{n-2} + \dots + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n. \quad (2)$$

根据定理 3.4 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1).$$

例 3.7 设对于 $|x| < R (R > 0)$ 的任一个 x , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 都绝对收敛, 其和分别为 $f(x)$ 与 $g(x)$. 试求这两个级数的柯西乘积.

解 令 $u_n = a_n x^n$ 与 $v_n = b_n x^n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$, 则这两个级数的柯西乘积的

各项分别为:

$$c_0 = u_0 v_0 = a_0 b_0; c_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 = (a_0 b_1 + a_1 b_0) x;$$

$$c_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 = (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2;$$

$$c_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_k v_{n-k} + \cdots + u_n v_0$$

$$= (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0) x^n$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n. \quad (3.4)$$

于是, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的柯西乘积为

$$f(x) \cdot g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n, \quad (3.5)$$

而且柯西乘积所构成的级数(3.5)对于 $|x| < R$ 的任一个 x 都绝对收敛.

习题 12.3

$$(A) \cdots + (z_0 u + \cdots + z_{n-1} u + z_n u) + \cdots + (z_0 u + z_1 u) + z_0 u$$

A 类

1. 判定下列交错级数的敛散性, 如果收敛, 说明是绝对收敛还是条件收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(1+n)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad (p > 0)$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n - \ln n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

2. 判定下列级数的敛散性, 如果收敛, 说明是条件收敛还是绝对收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sin \frac{1}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{q^n}{n^2} \quad (q > 0).$$

$$(B) \text{类}$$

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 也都绝对收敛.

来西科由媒基个西科, ($\cdots, \varepsilon, \varepsilon, 1, 0 = n$) $x_n = \varepsilon$ 已 $x_n = \varepsilon$ 今

2. 试研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 的敛散性.

3. 判别级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$ ($p > 0$) 的敛散性, 如果收敛, 说明是绝对收敛还是条件收敛.

§4 函数项级数

我们在研究一个比较复杂的函数时, 常常是设法把它表示成一些简单函数(如幂函数与三角函数)的函数项级数. 本节主要来讨论函数项级数的基本概念, 着重来讨论一致收敛性与一致收敛级数的分析性质.

4.1 基本概念

定义 4.1 设 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 是一列定义在某区间 I 上的函数, 则由这函数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (4.1)$$

称为定义在 I 上的函数项级数. 取 $x_0 \in I$, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 为函

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点, 记其和为 $S(x_0)$; 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称

x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点, 函数项级数(4.1)的所有收敛点的全体组成的集合称为级数(4.1)的收敛域, 记作 X . 对于收敛域 X 内的点 x , 级数(4.1)的和是 x 的函数 $S(x)$, 称 $S(x)$ 为级数(4.1)的和函数, 并写成

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X. \quad (4.2)$$

而称 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ 为级数(4.1)的部分和函数序列, 称 $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 为函数项级数(4.1)的余项. 函数项级数(4.1)的所有发散点全体组成的集合称为级数(4.1)的发散域.

对于收敛域 X 上的点 x , 显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (4.3)$$

例 4.1 函数项级数

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1}) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

是定义在整个实数轴 \mathbf{R} 上的函数项级数, 其部分和函数列为

$$S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

而当 $x = -1$ 或 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ 不存在, 故此函数项级数的收敛域为 $(-1, 1]$, 其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1; \end{cases}$$

此函数项级数的发散域为 $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

例 4.2 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$ 的收敛域.

解 记 $u_n(x) = \frac{\ln^n x}{n}$, 则

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|\ln x|^n} = |\ln x|,$$

当 $\rho = |\ln x| < 1$ 时, 即 $e^{-1} < x < e$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $\rho = |\ln x| > 1$ 时, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)| = +\infty \neq 0$, 原级数发散; 当 $\rho = |\ln x| = 1$ 时, 即当 $x = e^{-1}$ 或 $x = e$ 时,

原级数分别化为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 和发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 故原级数的收敛域为 $\left[\frac{1}{e}, e \right]$.

例 4.1 表明函数项级数 $x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ 的每一项都在收敛域 $(-1, 1]$ 上连续, 而其和函数 $S(x)$ 在 $(-1, 1]$ 上不连续. 因此我们有必要来研究在什么条件下, 有限个函数求和所具有的分析性质(主要指连续性, 可积性, 可导性)在无限求和时能得到保持. 为此, 我们引进一致收敛性概念.

定义 4.2 (一致收敛) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 X , 其和函数为 $S(x)$, 其部分和函数序列为 $\{S_n(x)\}$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 就有

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in I \subseteq X,$$

则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和函数 $S(x)$, 或称函数列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于极限函数 $S(x)$.

函数项级数(4.2)(或函数列 $\{S_n(x)\}$)在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$ 的几何意义如下:

由于 $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ 等价于

$$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon,$$

总存在 $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 其所有曲线 $y = S_n(x)$ 在区间 I 上都介于两条“平行”曲线 $y = S(x) + \varepsilon$ 与 $y = S(x) - \varepsilon$ 之间所构成的带形区域内(如图 12.2 所示).

例 4.3 证明函数项级数 $x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ 在区间 $-1 < x < 1$ 内不一致收敛, 而对于任何 $0 < q < 1$, 此函数项级数在闭区间 $[-q, q]$ 上一致收敛.

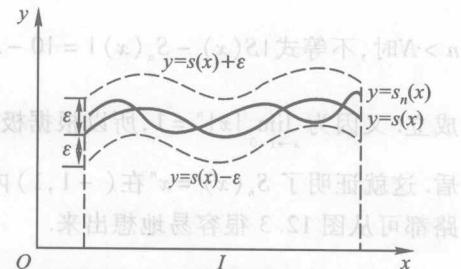


图 12.2

证 由例 4.1 知此级数的部分和序列 $S_n(x) = x^n$, 它的和函数

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

曲线族 $y = S_n(x)$ 如图 12.3 所示. 当 $|x| \leq q$ 时, 有

$$|S(x) - S_n(x)| = |0 - x^n| \leq q^n.$$

于是, 对于 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨假定 $0 < \varepsilon < 1$), 取

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \right], \text{当 } n > N(\varepsilon) \text{ 时, 不等式}$$

$$|S(x) - S_n(x)| = |x|^n \leq q^n \leq \varepsilon$$

对所有的 $x \in [-q, q]$ 均成立. 这就证明了此函数项级数(或函数列 $\{S_n(x)\} = \{x^n\}$)在闭区间 $[-q, q]$ 上一致收敛于 $S(x) = 0$.

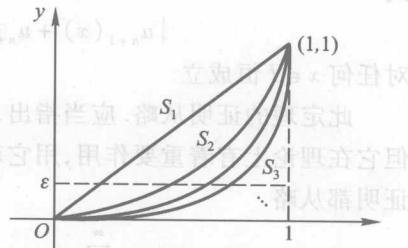


图 12.3

要证函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (函数列

$\{S_n(x)\}$)在区间 I 上不一致收敛于 $S(x)$, 这只要证明, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任何 N (不论 N 是多么大的正整数), 都存在 $n > N$ 以及 $x_n \in I$, 使得 $|S(x_n) - S_n(x_n)| > \varepsilon_0$ 成立就可以了. 为此, 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2e}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

于是, 对于任何正整数 N , 都有 n , 使得 $n > N$ 及 $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (-1, 1)$, 而且

$$|S(x_n) - S_n(x_n)| = \left| 0 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{2e},$$

故原级数在区间 $(-1, 1)$ 内不一致收敛于 $S(x) = 0$ ($-1 < x < 1$).

也可以用反证法证明 $S_n(x) = x^n$ 在区间 $(-1, 1)$ 内不一致收敛于 $S(x) = 0$. 若 $S_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内一致收敛于 $S(x) = 0$, 则对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 不等式 $|S(x) - S_n(x)| = |0 - x^n| = |x|^n < \varepsilon = \frac{1}{2}$ 对一切 $x \in (-1, 1)$ 均成立. 又因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} |x|^n = 1$, 所以根据极限的基本性质得 $\lim_{x \rightarrow 1^-} |x|^n = 1 \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$, 矛盾.

这就证明了 $S_n(x) = x^n$ 在 $(-1, 1)$ 内不一致收敛于 $S(x) = 0$. 以上的证明思路都可从图 12.3 很容易地想出来.

4.2 函数项级数一致收敛的判别法

定理 4.1 (柯西一致收敛原理) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对任何 $p \in \mathbb{N}$, 不等式

$$|(u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x))| < \varepsilon$$

对任何 $x \in I$ 恒成立

此定理的证明从略. 应当指出, 柯西一致收敛原理虽然应用起来并不方便, 但它在理论上有着重要作用, 用它就可以推出下列的推论以及定理. 这些定理的证明都从略.

推论 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的必要条件是一般项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于零.

例 4.4 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1, 1)$ 内收敛于 $S(x) = \frac{1}{1-x}$, 因为函数列 $\{x^n\}$ 在 $(-1, 1)$ 内不一致收敛于零, 所以此级数在 $(-1, 1)$ 内不一致收敛于 $S(x)$.

定理 4.2 (魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 判别法, 又称 M 判别法) 对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 如果存在数列 $\{M_n\}$, 使得 $x \in I$ 时, 有 $|u_n(x)| \leq M_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

例 4.5 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证 因为 $1 + n^4 x^2 \geq 2n^2 |x|$, 所以

$$\left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}, -\infty < x < +\infty.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故所论函数项级数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

4.3 一致收敛级数的性质

我们知道有限个连续函数的和仍是连续函数, 有限个可导与可积函数的和的导数与积分, 分别等于它们的导数与积分的和. 而具有一致收敛性的函数项级数在相应的条件下, 对级数也可以逐项求极限, 逐项求积分与逐项求导数, 下面来讨论这些问题.

定理 4.3 (和函数的连续性) 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 都在区间 I 内连续, 并且级数在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 则和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上连续, 即 $\forall x_0 \in I$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0)$.

证 $\forall x_0 \in I$, 只需证 $S(x)$ 在点 x_0 处连续. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.4)$$

对 $\forall x \in I$ 都成立. 因而对 $x = x_0$ 时也有

$$|S(x_0) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.5)$$

取定一个 $n > N$, 由于 $u_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) 在 I 上都连续, 所以部分和 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ 在区间 I 上连续. 从而对于上述的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 而且 $x \in I$ 时, 即对 $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap I$, 就有

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.6)$$

由(4.4), (4.5)与(4.6)式得

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

这就证明了 $S(x)$ 在 I 上任一点 x_0 处连续.

定理 4.3 说明一致收敛的级数可以逐项求极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0). \quad (4.7)$$

推论 如果 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 在区间 I 上连续, 并且和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在收敛区间 I 上不连续, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛.

例 4.6 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在区间 $[-R, R]$ ($R > 0$) 上不一致收敛.

证 $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 当 $x = 0$ 时, 级数的和为零. 当 $x \neq 0$ 时,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot \frac{(1+x^2)^n}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

故原级数对任何 $x \neq 0$ 也收敛, 其和为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{x^2+1},$$

于是, 此函数项级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$, 且和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

显然 $S(x)$ 在区间 $[-R, R]$ ($R > 0$) 上不连续, 所以级数在 $[-R, R]$ 上不一致收敛.

定理 4.4 (逐项求积分) 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于和函数 $S(x)$, 且级数的每一项 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 都在 $[a, b]$ 上连续, 则其和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可积, 且可逐项求积分, 即

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4.8)$$

证 由定理 4.3 知和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因而必可积. 由一致收敛性可知: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

于是当 $n > N$ 时, 就有 $|S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_k(x)| \geq |S(x) - S_k(x)|$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| &= \left| \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n u_k(x) \right) dx - \int_a^b S(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(x+n)\cdots(x+1)} \sum_{k=n}^{\infty} (S_k(x) - S(x)) dx = \left| \int_a^b (S_n(x) - S(x)) dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

其，故此式一内 (∞, ∞) 为 $\frac{\varepsilon}{b-a}$

这就证明了(4.8)式, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

定理 4.5 (逐项求导数) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上处处收敛于和函数 $S(x)$, 如果它的各项 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 都在 I 上有连续的导数, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 I 上可微, 并且可以逐项求导数, 即

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (4.9)$$

证 设 $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, 由于此级数在区间 I 上一致收敛, 而且 $u'_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 在区间 I 上连续, 所以 $\sigma(x)$ 在区间 I 上连续. $\forall a, x \in I$, 由逐项可积性得

$$\begin{aligned} \int_a^x \sigma(t) dt &= \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^x u'_n(t) dt \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \\ &= S(x) - S(a). \end{aligned}$$

将上式两端对 x 求导, 得 $\sigma(x) = S'(x)$, 即

$$S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

习题 12.4

(2)

A 类

类比数列的判别法, 试用数列的判别法 (2) 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 的收敛性.

1. 求下列函数项级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n;$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(1+n+x^2)};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+x^2)\cdots(n+x^2)}.$$

2. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 其中常数 $p > 1$.

3. 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cdot \cos n\pi x^2$, 试求 $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$.

B类

1. 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, 试求 $\int_0^{\pi} S(x) dx$ 的值.

2. 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

3. 试证函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续的导函数.

4. 试证函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \ln(1+n^2x^2)$ 在 $[-1, 1]$ 上有连续的导函数.

§ 5 幂 级 数

幂级数是函数项级数中最简单而最重要的一类级数,它的标准形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (5.1)$$

其中常数 a_n ($n=0,1,2,\dots$) 称为幂级数的系数. 幂级数的一般形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \quad (5.2)$$

令 $t = x - x_0$, 则(5.2)式化为标准形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, 所以下面主要讨论标准形式(5.1)的幂级数.

本节讨论幂级数的收敛域以及幂级数的分析性质.

5.1 幂级数的收敛半径与收敛域

定理 5.1(阿贝尔(Abel)定理) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_0 处收敛, $x_0 \neq 0$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的 x 都绝对收敛; 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_1 处发散, 则对满足不等式 $|x| > |x_1|$ 的一切 x , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都发散.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 故必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. 于是存在 $M > 0$, 使得 $|a_n x_0^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$,

于是对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

当 $|x| < |x_0|$ 时, 由于几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛, 根据比较判别法知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛, 即原级数(5.1)在 $|x| < |x_0|$ 内绝对收敛.

用反证法可证定理的其余结论: 倘若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 发散而有一点 x_2 适合 $|x_2| > |x_1|$ 使得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 收敛, 则根据本定理的第一部分, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 应当绝对收敛, 这与假设矛盾.

根据阿贝尔定理, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性可分三种情况:

情况 1 已知幂级数在数轴上既有收敛点 $x_0 \neq 0$ 也有发散点 x_1 . 现在从原点沿数轴向右方走, 最初只遇到收敛点, 然后就只遇到发散点. 这两部分的分界点 P 可能是收敛点, 也可能是发散点. 设 P 点

坐标为 R , 即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 可能收敛也可能发

散. 于是, 当 $|x| < R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝

对收敛, 当 $|x| > R$ 时, 该幂级数发散. 当 $x = -R$ 与 $x = R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散(如图 12.4 所示).



图 12.4

正数 R 叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间 $(-R, R)$ 叫做幂级数的收

敛区间(如图 12.4 所示). 再由幂级数在 $x = \pm R$ 处的收敛性就可以确定它的收敛域是 $(-R, R)$ 、 $[-R, R)$ 、 $(-R, R]$ 或 $[-R, R]$ 这四种情况之一.

情况 2 幂级数仅在 $x=0$ 处收敛, 此时规定此幂级数的收敛半径 $R=0$.

例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛. 其实, 令 $u_n(x) = n! x^n$, 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot |x| = +\infty, \quad |x| = +\infty.$$

故对任何 $x \neq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 都发散, 因此收敛半径 $R=0$.

情况 3 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都收敛(此时幂级数绝对收敛), 此时规定此幂级数的收敛半径 $R = +\infty$.

下面介绍求幂级数的收敛半径 R 的方法.

定理 5.2 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad (\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})$$

存在或 $\rho = +\infty$, 则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty. \end{cases}$$

证 令 $u_n(x) = a_n x^n$, 则当 $0 < \rho < +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \rho \cdot |x|. \end{aligned}$$

于是, 根据比值判别法(根值判别法), 当 $l = \rho \cdot |x| < 1$, 即当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 该幂级数绝对收敛, 当 $l = \rho \cdot |x| > 1$, 即当 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 该幂级数发散. 于是收敛半径 R

$$= \frac{1}{\rho}.$$

当 $\rho = 0$ 时, 则对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $l = \rho \cdot |x| = 0 < 1$, 从而根据比

值判别法(根值判别法),该幂级数都绝对收敛.于是收敛半径 $R = +\infty$.

当 $\rho = +\infty$ 时,对任何 $x \neq 0$,都有

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x| \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \right) = +\infty,$$

从而该幂级数发散.于是收敛半径 $R = 0$.

例 5.1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} x^n$ 的收敛半径与收敛域.

解 因为

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(n+2) \cdot 3^{n+1}} \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}} \right) = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以收敛半径 $R = 3$. 又 $x = 3$ 时,原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, 它发散;当 $x = -3$ 时,原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, 它收敛.于是原级数的收敛域为 $[-3, 3)$.

例 5.2 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{n+1} \cdot x^{2n}$ 的收敛半径与收敛域.

解 此幂级数缺少奇次幂的项,不能直接应用定理 5.2. 此时我们应根据比值(或根值)判别法来求收敛半径.令 $u_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{n+1} \cdot x^{2n}$, 由于

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} \cdot x^{2n+2}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{4^n \cdot x^{2n}} = 4x^2,$$

故当 $\rho = 4x^2 < 1$ 时,即当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时,级数绝对收敛;当 $\rho = 4x^2 > 1$ 时,即当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时,级数发散.因此,原级数的收敛半径 $R = \frac{1}{2}$. 当 $x = \pm \frac{1}{2}$ 时,原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, 级数收敛.故原级数的收敛域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

例 5.3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} (x-2)^n$ 的收敛半径与收敛域.

解 因为(令 $t = x-2$, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} \cdot t^n$)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n} = 3,$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{3}$. 当 $x-2 = \frac{1}{3}$ 时,原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 级数收敛;当 $x-2 = -\frac{1}{3}$ 时,原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$, 级数发散.故原级数的收敛域为 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right)$.

$x = -\frac{1}{3}$ 时, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 级数发散. 从而收敛区域由 $-\frac{1}{3} < x - 2 \leq \frac{1}{3}$ 所确定.

定. 由此可知原级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

例 5.4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (定义 $0! = 1$) 的收敛半径与收敛域.

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

所以收敛半径 $R = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

例 5.5 求下列函数项级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2x+3)^n; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n.$$

解 (1) 令 $t = 2x+3$, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$. 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

故对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$ 而言, 其收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$. 当 $t = 1$ 时, 此级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 级数发散; 当 $t = -1$ 时, 此级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 级数收敛. 故此级数的收敛域为 $-1 \leq t < 1$. 于是原级数的收敛域由 $-1 \leq 2x+3 < 1$ 所确定. 由此可解得原级数的收敛域为 $-2 \leq x < -1$.

(2) 令 $t = \frac{1+x}{1-x}$, 原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} t^n$, 此级数的收敛域显然为 $-1 \leq t < 1$. 故原级数的收敛域由 $-1 \leq \frac{1+x}{1-x} < 1$ 所确定. 解此不等式组可得到原级数的收敛域, 它为 $(-\infty, 0)$.

5.2 幂级数的运算与性质

由于幂级数在收敛区间内是绝对收敛的, 故根据绝对收敛的数项级数的性质(见定理 3.3 和定理 3.4), 容易得到幂级数的代数运算性质如下(其证明从略):

定理 5.3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 与 R_2 , 和函数为 $S(x)$ 与 $\sigma(x)$. 记 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则在它们公共的收敛区间 $(-R, R)$ 内, 有

(1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 收敛, 且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S(x) \pm \sigma(x);$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的柯西乘积级数收敛, 且有

$$(1, 2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = S(x) \cdot \sigma(x),$$

其中 $c_0 = a_0 b_0, c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 (n = 1, 2, 3, \dots)$.

下面来讨论幂级数的分析性质. 首先来讨论幂级数的一致收敛性.

定理 5.4(内闭一致收敛性) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则

(1) 在 $(-R, R)$ 内的任何闭区间 $[-r, r]$ (其中 $0 < r < R$) 上, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是一致收敛的.

(2) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在闭区间 $[0, R]$ 上一致收敛.

(3) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在闭区间 $[-R, 0]$ 上一致收敛.

证 (1) 由于 $0 < r < R$, 则由阿贝尔定理 5.1 可知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ 收敛. 由于 $\forall x \in [-r, r]$, 都有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot r^n,$$

根据 M -判别法, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛.

(2) 与(3)的证明从略.

定理 5.5(幂级数的分析性质) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 其和函数为 $S(x)$, 则

(1) $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 处收敛, 则 $S(x)$ 在 $(-R, R]$ 内连续; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -R$ 处收敛, 则 $S(x)$ 在 $[-R, R)$ 内连续(和函数的连续性);

(2) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内有连续的导数, 并且可以逐项求导, 即有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad (5.3)$$

逐项求导后所得的幂级数(5.3)与原级数有相同的收敛半径 R , 但在收敛区间端

点($x = \pm R$)处的敛散性可能改变;

(3) $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可积, 并且可以逐项求积分, 即

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right), \quad x \in (-R, R). \end{aligned} \quad (5.4)$$

逐项积分后所得的幂级数(5.4)与原级数有相同的收敛半径 R , 但在收敛区间端点($x = \pm R$)处的敛散性可能改变.

定理5.5的证明从略.

根据定理5.5, 幂级数的和函数在收敛区间内具有任意阶的连续导数. 利用幂级数在收敛区间内可以逐项求导, 逐项求积分等分析运算的性质, 可以求许多幂级数的和函数. 它在将函数展开为幂级数等问题中也有很重要的作用.

例5.6 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 先求收敛域. 此幂级数缺少偶次幂的项, 因此我们根据比值判别法来求收敛半径与收敛域. 令 $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, 则

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{|x|^{2n+1}} = |x|^2,$$

于是, 当 $|x|^2 < 1$ 时, 即 $|x| < 1$ 时, 原幂级数绝对收敛; 当 $|x|^2 > 1$, 即 $|x| > 1$ 时, 原幂级数发散. 从而收敛半径 $R = 1$.

在端点 $x = 1$ 处, 幂级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 级数收敛; 在端点 $x = -1$, 幂级数

化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, 级数收敛. 因此收敛域为 $[-1, 1]$.

设和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

逐项求导得

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$\begin{aligned} S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(t) dt = 0 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \arctan x, \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

即圆周率的奇数倍, 半圆周率的偶数倍.

$$S(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 \leq x \leq 1. \quad (5.5)$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = S(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

例 5.7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

解 先求出此幂级数的收敛域 $(-1, 1)$. 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ($-1 < x < 1$).

逐项求积分得

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad (-1 < x < 1), \end{aligned}$$

再对上式两边对 x 求导, 得

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1).$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

通过逐项求导、逐项求积分将幂级数化为几何级数是求幂级数和函数的常用方法. 我们再举几例供读者阅读.

例 5.8 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2}{3^n}$ 的和.

解 先求出此幂级数的收敛域 $(-1, 1)$. 记和函数为 $S(x)$, 则 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ ($-1 < x < 1$). 记 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ ($-1 < x < 1$). 逐项求积分得

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

记 $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 逐项求积分得

$$\varphi(x) = \int_0^x h(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

从而

且, 收敛于 $(1, 1]$ 在 $x=1$ 时

$$(2.2) \quad h(x) = \varphi'(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned} f(x) = g'(x) &= [xh(x)]' = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' \\ &= \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1), \end{aligned}$$

$$S(x) = xf(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1).$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -S\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{32}. \end{aligned}$$

在求和过程中,其中的步骤有多种多样的写法.例如

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = S(0) + \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right] \right]' dx \\ &= S(0) + \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \right] dx = 0 + \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

又如

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \\ &= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt \right)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right)' \\ &= x \left(x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right)' = x \left[x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1} dt \right)' \right]' \\ &= x \left[x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \right]' = x \left[x \left(\frac{x}{1-x} \right)' \right]' \\ &= x \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

尽管如此,无论哪种写法,都应当先说明所论幂级数的收敛域,然后再进行各种各样的运算.试看下述各例.

例 5.9 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解 先求出此幂级数的收敛域 $[-1, 1]$. 设和函数为 $S(x)$. 即

$$\frac{x}{x-1} = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad -1 \leq x < 1,$$

则 $S(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续,且

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

对上式从 0 到 x 积分, 得

$$xS(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1).$$

根据洛必达法则得

$$S(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1,$$

故

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

例 5.10 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot n(n+1)$ 的和.

解 考察幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, 此幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$, 设其和函数为 $S(x)$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)'' \\ &= x \cdot \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot n(n+1) &= - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n \\ &\equiv -S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

例 5.11 试求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (5.6)$$

的和函数.

解 设和函数为 $S(x)$, 先求出此幂级数的收敛域 $(-\infty, +\infty)$. 故

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$S(0) = 1$, 并且逐项求导得

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \end{aligned}$$

故 $S'(0) = 0$. 再逐项求导得

$$S''(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (5.7)$$

比较(5.6)式与(5.7)式可知, $S''(x) = S(x)$.

综上所述, $y = S(x)$ 满足下述二阶线性方程 $y'' - y = 0$, 而且满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

二阶线性方程的特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm 1$, 齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 由于

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}.$$

于是由 $y(0) = 1$ 及 $y'(0) = 0$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - C_2 = 0. \end{cases}$$

解此线性方程组, 得 $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$, 故 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 即 $y = \operatorname{ch} x$. 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

A类

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n}; \quad (5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad (6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. 求下列幂级数的收敛域及其和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}; \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

B类

1. 利用幂级数求下列常数项级数之和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2^n};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

§6 泰勒级数及其应用

前面我们讨论了幂级数的收敛域及其和函数的分析性质.但在实际问题中往往遇到相反的问题:如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有任何阶导数,问它在此邻域内能否表示为

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots. \quad (6.1)$$

这里要回答以下问题: $f(x)$ 在什么条件下能展开为 $(x - x_0)$ 的幂级数(6.1)?如果 $f(x)$ 能展开为幂级数(6.1),其中系数 a_n 如何确定? $f(x)$ 的幂级数展开式是否唯一呢?这些就是本节首先要讨论的问题.

6.1 泰勒级数

定义 6.1 设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处具有任意阶导数,则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (6.2)$$

为函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的泰勒(Taylor)级数.当 $x_0 = 0$ 时,(6.2)式化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots \quad (6.3)$$

级数(6.3)称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林(Maclaurin)级数.

定义 6.2 设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处具有任意阶导数,且在含 x_0 的某个区间 $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ ($r > 0$) 内可以表示成它的泰勒级数,即下面的等式成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in I, \quad (6.4)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 内可展开成(或能表示为)它的泰勒级数.

我们知道,如果 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某邻域内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数,则在该邻域内 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \end{aligned} \quad (6.5)$$

成立,其中余项 $R_n(x)$ 为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (6.6)$$

ξ 是介于 x 与 x_0 之间的某个值.

定理 6.1 设函数 $f(x)$ 在含有点 x_0 的某区间 $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ ($r > 0$) 内具有任意阶导数, 则 $f(x)$ 在 I 内能展开为泰勒级数的充分必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in I.$$

证 先证必要性. 如果 $f(x)$ 在区间 I 内能展开为泰勒级数, 即(6.4)式成立, 则(6.5)式化为

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x),$$

其中 $S_{n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒级数(6.4)式的前 $(n+1)$ 项的部分和. 因为(6.4)式对任何 $x \in I$ 都成立, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x) = f(x),$$

从而对任何 $x \in I$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_{n+1}(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

这就证明了必要性.

再证充分性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 对一切 $x \in I$ 成立, 则由 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式(6.5)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x), \quad x \in I,$$

即 $f(x)$ 的泰勒级数(6.2)在区间 I 内收敛, 并且收敛于 $f(x)$. 这就证明了充分性.

定理 6.2(唯一性) 如果 $f(x)$ 在区间 $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ ($R > 0$) 内能展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in I, \quad (6.7)$$

则 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内具有任意阶导数, 且

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

证 如果 $f(x)$ 在区间 $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数(6.7)式, 则根据幂级的性质可知, $f(x)$ 在 I 内具有任意阶导数, 且可以逐项求导, 有

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots,$$

由逐项求导后的级数的收敛半径不变可知, 上述幂级数在 I 仍是收敛的. 反复进行逐项求导, 得

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \cdots + (n-1) \cdot n(x - x_0)^{n-2} + \cdots,$$

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \cdots,$$

在(6.7)式及上述各式中令 $x = x_0$, 得

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0), \quad f'(x_0) = a_1, \quad f''(x_0) = 1 \cdot 2 a_2, \dots, \\ f^{(n)}(x_0) &= n! a_n, \dots. \end{aligned}$$

从而有

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

证毕.

根据定理 6.2, 如果 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 能展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数, 则这个幂级数必定是 $f(x)$ 的泰勒级数.

根据定理 6.1 来判断 $f(x)$ 能否在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内展开成 $f(x)$ 的泰勒级数, 关键是判断是否对任何 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 由于余项 $R_n(x)$ 的构造可能比较复杂, 所以我们常用到一个较方便的充分条件.

定理 6.3 如果 $f(x)$ 的各阶导数在区间 $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ 内一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得不等式

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad (\forall x \in I)$$

对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 与 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 都成立, 则 $f(x)$ 在区间 I 内可以展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

证 根据定理条件, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 都有

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot R^{n+1},$$

由比值法知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{(n+1)!} R^{n+1}$ 收敛, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{(n+1)!} \cdot R^{n+1} = 0,$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 再由定理 6.1, 定理 6.3 得证.

应当注意, 函数在 $x = x_0$ 的某邻域内具有任意阶导数并不能保证它能展成泰勒级数. 试看下例:

例 6.1 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 由于当 $x \neq 0$ 时, 有

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

而由洛必达法则可得(令 $t = \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0. \end{aligned}$$

同样可证, 对任何正整数 m , 都有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^m}{e^{t^2}} = 0.$$

故不难验证 $f^{(n)}(0) = 0 (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有任意阶导数. 于是, $f(x)$ 的麦克劳林级数为

$$\begin{aligned} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \cdots = 0. \end{aligned}$$

显然, 除原点外, $f(x)$ 的麦克劳林级数的和函数 0 与 $f(x)$ 不同.

6.2 函数展开成幂级数

我们要将函数 $f(x)$ 展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

其中 x_0 为某一定点. 当令 $t = x - x_0$ 时, 则 $x = t + x_0$, 再令 $g(t) = f(t + x_0)$, 就将函数 $f(x)$ 展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数的问题化为将函数 $g(t)$ 展开成麦克劳林级数

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

的问题. 因此, 下面主要介绍几个常用初等函数的麦克劳林展开式. 综合前面的讨论, 我们强调指出以下几点:

第一, $f(x)$ 若能展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数, 则此幂级数必为 $f(x)$ 的泰勒级数.

第二, $f(x)$ 的泰勒级数未必总是收敛, 即使收敛也不一定收敛到 $f(x)$.

第三, 在求 $f(x)$ 的泰勒展开式时, 由于有唯一性定理, 故不管采用什么展开方法, 其展开式的结果都应当是一样的, 都是 $f(x)$ 的泰勒级数, 这样就允许我们可用直接方法或间接方法去实现这个展开. 所谓直接方法是指按定义先求出 $f(x)$ 的泰勒级数(6.2)式, 再根据定理 6.1 去研究是否 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 而间接法

则是利用已有的幂级数展开式,或再运用幂级数的运算性质去求出相应的函数的泰勒展开式.用间接方法求函数的泰勒展开式比较简便,所以常被采用.

用直接方法把函数 $f(x)$ 展开成麦克劳林级数,可以按照下列步骤进行:

第一步 求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f^{(n)}(x)$ ($n=1,2,3,\dots$), 并求出函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值: $f(0), f^{(n)}(0)$ ($n=1,2,3,\dots$).

第二步 写出 $f(x)$ 的麦克劳林级数,即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots,$$

并求出收敛半径 R .

第三步 对于收敛区间 $(-R, R)$ 内任一点 x , 考察余项 $R_n(x)$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时是否以 0 为极限, 即极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

是否为零. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-R, R)$ 内的麦克劳林展开式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad x \in (-R, R), \quad (6.8)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, 则 (6.8) 式不成立, 也就是说, 此时虽然麦克劳林级数在 $(-R, R)$ 内收敛, 却并不收敛到 $f(x)$.

例 6.2 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f^{(n)}(x) = e^x$ ($n=1,2,3,\dots$), 故 $f^{(n)}(0) = 1$ ($n=0,1,2,3,\dots$), 其中 $f^{(0)}(0) = f(0)$. 于是 $f(x) = e^x$ 的麦克劳林级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

它的收敛半径 $R = +\infty$. 再由于 $R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$, 其中 ξ 在 0 与 x 之间.

于是, 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1}.$$

因为由比值判别法知, 对任何有限的数 x , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 都收敛, 所以

$$(11.0) \quad |R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

故有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty < x < +\infty). \quad (6.9)$$

例 6.3 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). $f(0) = \sin 0 = 0$, $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的值有

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & n=2k+1, \\ 0, & n=2k \end{cases}, \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots),$$

于是 $f(x) = \sin x$ 的麦克劳林级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

它的收敛半径 $R = +\infty$.

对于任何有限的数 $x \in (-\infty, +\infty)$ 及 ξ (ξ 在 0 与 x 之间), 余项 $R_n(x)$ 有

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left[\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

再根据 e^x 的麦克劳林展开式(6.9)式知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都收敛, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \quad (6.10)$$

以上是用直接方法将函数展开成幂级数的例子, 直接展开的方法计算量较大, 而且研究余项即使在初等函数中也不是一件容易的事. 下面我们用间接方法将所给函数展开成幂级数. 这样做不但计算简单, 而且可以避开讨论余项.

例 6.4 将 $f(x) = \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 用例 6.3 的解法当然可以求出 $f(x) = \cos x$ 的展开式. 但如果采用间接方法, 则计算十分简单. 事实上, 对展开式(6.10)逐项求导就得

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \quad (6.11)$$

例 6.5 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

而 $\frac{1}{1+x}$ 是收敛的等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ($-1 < x < 1$) 的和函数:

$$(6.1.8) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

所以由幂级数的逐项求积分的性质, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(x) dx \\ &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n x^{n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

即

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1. \quad (6.12)$$

因为展开式(6.12)式右端的幂级数当 $x = 1$ 收敛, 所以根据定理 5.5, 上述展开式对 $x = 1$ 也成立.

例 6.6 将函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 展开为 x 的幂级数, 其中 α 为任意常数.

解 不妨设 $\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \dots$, 则 $(1+x)^\alpha = (x+1)^\alpha$.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$(6.1.9) \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

所以 $f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \dots, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$.

于是 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数为

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots.$$

根据比值判别法知该级数的收敛半径 $R = 1$. 根据定理 5.4, 上述级数在 $(-1, 1)$ 是内闭一致收敛的, 设其和函数为 $S(x)$. 为了避免直接研究余项, 我们用如下方法直接证明 $S(x) = (1+x)^\alpha$ ($-1 < x < 1$).

$$S(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1). \quad (6.13)$$

将此式两端对 x 求导(逐项求导), 得

$$S'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1), \quad (6.14)$$

(6.14)式两边各乘以 $(1+x)$, 并把含 x 的同类项合并, 得

$$\begin{aligned} (1+x)S'(x) &= \alpha \left(1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \right) \\ &= \alpha S(x) \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

从而得

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\alpha}{1+x} \quad (-1 < x < 1).$$

对上式两边求积分得

$$\int_0^x \frac{S'(t)}{S(t)} dt = \int_0^x \frac{\alpha}{1+t} dt \quad (-1 < x < 1),$$

故有

$$\ln S(x) - \ln S(0) = \alpha \ln(1+x) = \ln(1+x)^\alpha \quad (-1 < x < 1).$$

注意到 $S(0)=1$, 因此有

$$S(x) = (1+x)^\alpha \quad (-1 < x < 1).$$

此即

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1. \quad (6.15)$$

这里我们没有去讨论余项 $R_n(x)$, 所以这也是一个间接法的实例. 请注意, 在 $(1+x)^\alpha$ 的展开式(6.15)中, 我们是说它至少在 $(-1, 1)$ 内成立, 在区间端点展开式是否成立要看 α 的数值而定.

公式(6.15)叫做二项展开式(又称为二项式级数), 特别地, 当 α 为正整数 n 时, (6.15)式化为如下多项式

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n \quad (-\infty < x < +\infty),$$

这就是著名的二项式定理.

如果(6.15)式在端点 $x=1$ 或 $x=-1$ 处收敛, 则根据定理5.5, (6.15)式的成立范围可扩充到区间的该端点上去. 例如, 对应于 $\alpha=\frac{1}{2}$ 与 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 的二项展开式分别为

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}x^n + \cdots \end{aligned}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}x + \right) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \\ &\quad + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n + \dots \quad \text{由泰勒立定理中其} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 < x \leq 1). \quad (6.17) \end{aligned}$$

显然有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (6.19)$$

关于 $\frac{1}{1+x}, e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ 等函数的麦克劳林展开式, 以后都将直接引用在其他情况下的幂级数展开. 读者应熟记它们.

例 6.7 将 $f(x) = \arcsin x$ 展开为 x 的幂级数

解 因为 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 故由 (6.17) 式 (用 $-x^2$ 替代 x) 得

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (-1 < x < 1).$$

两边求积分 ($f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$) 得

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x = f(0) + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! (2n+1)} \cdot x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! (2n+1)} x^{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

上述幂级数在 $x = \pm 1$ 时皆收敛, 根据定理 5.5, 展开式的成立范围包含端点 $x = \pm 1$.

例 6.8 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

解 因为

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3+(x-3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{3}},$$

故由 (6.18) 式 (用 $\frac{x-3}{3}$ 替代 x) 得

$$(6.12) \quad f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{3} \right)^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \cdot (x-3)^n, \quad 0 < x < 6,$$

其中成立范围由

$$(6.13) \quad (1 > x > -1) \Rightarrow -1 < \frac{x-3}{3} < 1 \Rightarrow (1 - \frac{x-3}{3})^n + 1 =$$

所确定.

例 6.9 将函数 $f(x) = \ln x$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

解 因为

$$(6.14) \quad f(x) = \ln x = \ln[3 + (x-3)] = \ln 3 + \ln \left(1 + \frac{x-3}{3}\right),$$

$$(6.15) \quad (1 > x > -1) \Rightarrow 1 + \frac{x-3}{3} = \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x-1}$$

故由 (6.12) 式 (用 $\frac{x-3}{3}$ 代替 x) 得

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x = \ln 3 + \ln \left(1 + \frac{x-3}{3}\right) \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x-3}{3}\right)^n = (x) \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n} \cdot (x-3)^n, \quad 0 < x \leq 6, \end{aligned}$$

其中成立范围由

$$-1 < \frac{x-3}{3} \leq 1$$

所确定.

例 6.10 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x = \cos \left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right], \end{aligned}$$

故由 (6.10) 式与 (6.11) 式 (用 $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 代替 x) 得

$$f(x) = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right], \quad -\infty < x < +\infty.$$

例 6.11 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{-1}{3} \left[\frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \right], \end{aligned}$$

故由(6.19)式(用 $(x-1)$ 代替 x)与(6.18)式(用 $\frac{x-1}{2}$ 代替 x)得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \right] \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(x-1)^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \right] \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] \cdot (x-1)^n, \quad 0 < x < 2, \end{aligned}$$

其中成立的范围由不等式组

$$\begin{cases} -1 < x-1 < 1, \\ -1 < \frac{x-1}{2} < 1 \end{cases}$$

所确定.

例 6.12 将函数 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1),$$

所以根据定理 5.3, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的柯西乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在区间 $(-1, 1)$ 内收敛,

此处

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad b_n = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1,$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

并且有

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \right) \frac{1}{x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) x^n, \quad -1 < x < 1.$$

6.3 幂级数展开的应用举例

由于幂级数具有很好的代数性质与分析性质,所以它的应用很广泛.例如可以用它来近似计算函数值,近似计算定积分,还可以用来求解微分方程,在无线电技术中常遇到的贝塞尔(Bessel)函数、勒让得(Legendre)函数等都是用幂级数方法求得的相应的微分方程的解.这里主要介绍它在近似计算中的应用.

例 6.13 求 $\ln 2$ 的近似值, 精确到小数四位(即误差 $|r_n| < 0.0001$).

解 根据公式(6.12),

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1,$$

于是

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

右端为交错级数. 若取前 n 项的部分和作为 $\ln 2$ 的近似值, 则根据莱布尼茨定理, 其误差 r_n 有 $|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

要使

$$|r_n| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10000},$$

需取 $n = 10\,000$, 即需取前 10 000 项之和, 显然计算量太大. 因此我们想另外找一个收敛得较快的级数来计算 $\ln 2$. 为此, 将级数

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots \quad (-1 \leq x < 1)$$

相減，得

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right) \quad (-1 < x < 1).$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$, 即 $x = \frac{1}{3}$, 得

$$\ln 2 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}} + \cdots \right].$$

若取前 n 项部分和为近似值, 则误差 R_n 可估计如下:

$$\begin{aligned} 0 < R_n &= 2 \left[\frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5) \cdot 3^{2n+5}} + \cdots \right] \\ &< \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots \right) \\ (6.13) \quad &= \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{4(2n+1) \cdot 3^{2n-1}}. \end{aligned}$$

要使 $0 < R_n < 10^{-4}$, 取 $n=4$, 此时

$$0 < R_4 < \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 3^7} = \frac{1}{78732} < \frac{1}{10000}.$$

于是

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx 2 \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} \right] \\ &\approx 0.6931. \end{aligned}$$

例 6.14 求定积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值, 精确到 0.0001.

解 因为 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不是初等函数, 所以只能近似计算此定积分的值.

由 $\sin x$ 的麦克劳林展开式(6.10)得

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{7!} dx + \cdots \\ (6.14) \quad &+ \int_0^1 (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} dx + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} + \cdots. \end{aligned}$$

右端为交错级数. 若取前 n 项的部分和为积分的近似值, 则根据莱布尼茨定理, 其误差 r_n 有 $|r_n| \leq \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+1)!}$. 要使

$$|r_n| \leq \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} < \frac{1}{10000},$$

取 $n=3$. 此时

$$|r_3| < \frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{30000}.$$

于是

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.9461.$$

6.4 欧拉公式

根据 e^z 的麦克劳林展开式(6.9), 我们定义复变函数 e^z :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots (|z| < +\infty), \quad (6.20)$$

其中 $z = x + iy$. 记 z 的模(又称为 z 的绝对值)为 $|z|$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. 由比值判别法可知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} > 0$$

对任意复数 z 都收敛, 因而复数项幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 收敛.

当 $x=0$ 时, $z=iy$ 为纯虚数, (6.20) 式变为

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(iy)^n + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + i\frac{1}{5!}y^5 + \frac{1}{6!}y^6 - i\cdots \\ &\quad \frac{1}{7!}y^7 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!}y^{2n} + i \cdot (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} + \cdots \right) \\ &\quad + i \left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1} + \cdots \right) \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

把 y 换写为 x , 上式变为

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (6.21)$$

称公式(6.21)为欧拉(Euler)公式.

应用公式(6.21), 复数 $z=x+iy$ 可以表示为指数形式:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad (6.22)$$

其中 $r=|z|$ 是 z 的模, $\theta=\arg z$ 是 z 的辐角(如图 12.5 所示).

在公式(6.21)中把 x 换为 $-x$, 又有

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

于是上式与(6.21)式相加、相减,得

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{cases} \quad (6.23)$$

这两个式子也叫做欧拉公式.

根据 e^z 的定义, 我们不难验证

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

对任何两个复数 z_1 与 z_2 都成立. 特别, 设

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)},$$

对于复数 $z = x + iy$, 由

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

可知, 复变量指数函数 e^z 在 $z = x + iy$ 处的值是模为 e^x , 辐角为 y 的复数.

习题 12.6

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

$$(1) \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$(2) \ln(a+x) (a > 0);$$

$$(3) a^x; \quad (4) \sin^2 x;$$

$$(5) \frac{x}{x^2 - x - 2};$$

$$(6) \arctan \frac{1+x}{1-x};$$

$$(7) e^{x^2};$$

$$(8) \cos^2 x.$$

2. 将下列函数展开成 $(x - x_0)$ 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

$$(1) \frac{1}{3-x}, x_0 = 1;$$

$$(2) \ln x, x_0 = 2;$$

$$(3) \lg x, x_0 = 1; \quad (4) \frac{1}{x^2 + 4x + 3}, x_0 = 1;$$

$$(5) \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{3};$$

$$(6) e^x, x_0 = 2;$$

$$(7) \sin x, x = \frac{\pi}{4};$$

$$(8) \frac{1}{(1+x)^2}, x_0 = 1.$$

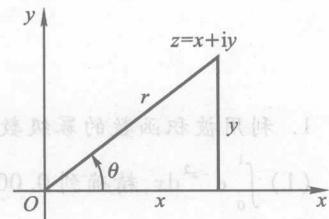


图 12.5

数, 高阶, 带余项的泰勒公式是关于

B类

1. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

$$(1) \int_0^1 e^{-x^2} dx, \text{ 精确到 } 0.0001;$$

$$(2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx, \text{ 精确到 } 0.001.$$

2. 将函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

§7 傅里叶级数

有两类特殊的函数项级数是最重要、最常见的, 其一是前面所讨论的幂级数, 另一类是本节要讨论的三角级数, 其标准形式是

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (7.1)$$

其中 a_0, a_n, b_n 都是常数, 这里将常数项写成 $\frac{a_0}{2}$ 是为了后面计算方便. 幂级数虽然比较简单, 用起来也就十分方便, 但是, 由于幂级数所表示的函数总是无限次可微的, 而且还有其他的一些要求, 因此其适用范围比较有限. 三角级数也可以用来表达函数, 它所能表达的函数相当广泛, 它是表达函数和研究函数的有效工具, 而且实际应用极为广泛.

在科学技术中, 例如振动问题中、交流电的电流和电压、无线电技术的信号等常常需要研究周期波(周期函数). 在物理学中, 最简单的周期波是简谐波:

$$u(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x = A \sin(\omega x + \varphi),$$

其中 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ 叫做振幅, φ 称为初相 ($\sin \varphi = \frac{a}{A}, \cos \varphi = \frac{b}{A}$), ω 称为频率,

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ 是周期, 当 $\omega = 1$ 时, 周期 $T = 2\pi$.

一般说来, 任何复杂的振动都可以分解为一系列简谐振动之和(叠加), 也就是说, 在相当普遍的条件下, 周期为 T 的函数 $f(x)$ 可以表达成以下形式的三角级数:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x], \quad (7.2)$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$. 当 $T = 2\pi$ 时, 上式变为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7.3)$$

这样的方法在电学中称为谐量分析或谐波分析, 其中常数项 a_0 称为 $f(x)$ 的直流分量, 而 $A_1 \sin(\omega x + \varphi_1)$ 称为一次谐波(又称为基波), $A_2 \sin(2\omega x + \varphi_2)$ 称为二次谐波, $A_3 \sin(3\omega x + \varphi_3)$ 称为三次谐波, ……, 等.

对此我们必须研究以下一些问题:

- (1) 函数 $f(x)$ 具备什么条件, 才能展开为上述形式的三角级数?
- (2) 如果函数可以展开为上述形式的三角级数, 试问其中的系数 a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 如何确定?
- (3) 对应于 $f(x)$ 的三角级数展开式是否一定收敛于 $f(x)$?

本节先来讨论函数关于(7.3)式的展开问题, 然后再来讨论一般周期函数的展开.

7.1 三角函数系的正交性

称三角函数系

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\} \quad (7.4)$$

为基本三角函数系. 因为三角级数(7.1)是由三角函数构成的, 所以有必要对三角函数系(7.4)的性质做一番探讨.

定理 7.1(正交性) 三角函数系(7.4)中任意两个不同函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (m, n = 1, 2, \dots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n; m, n = 1, 2, \dots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n; m, n = 1, 2, \dots).$$

证 利用三角学中积化和差公式

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$(2.5) \quad \cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x],$$

可以得到

$$(2.5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0,$$

$$(2.6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \begin{cases} \pi, & m=n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

$$(2.7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & m=n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

其余各式显然成立. 证毕.

三角函数系(7.4)中,两个相同函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不等于零,根据(7.5)式与(7.6)式,有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad (n=1, 2, \dots).$$

7.2 傅里叶级数

利用三角函数系的正交性就可以解决问题(2)了.

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,且在 $[-\pi, \pi]$ 上能展开为三角级数:

$$(7.7) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

并且右端级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$,故在(7.7)式两端在 $[-\pi, \pi]$ 上积分时,在其右端可以逐项求积分.于是由(7.7)式得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

$$= a_0 \pi + 0 = a_0 \pi,$$

从而

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

在(7.7)式两端同乘以 $\cos nx$,再在 $[-\pi, \pi]$ 上逐项积分,得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx \right) \\ &= \pi a_n, \end{aligned}$$

从而

同理可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

综上所述, 得到公式

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (7.8)$$

公式(7.8)称为欧拉 - 傅里叶(Euler - Fourier)公式, 这样确定出的系数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)系数, 所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数(简称为傅氏级数), 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

这里不写等号, 是因为右端的傅里叶级数可能不收敛, 即使收敛, 也未必收敛到 $f(x)$.

7.3 傅里叶级数的收敛定理

虽然系数公式(7.8)是在 $f(x)$ 能展开成一致收敛的三角级数(7.7)的条件下求得的, 但从公式本身来看, 只要 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 就可以按此公式计算出其傅氏系数 a_n, b_n , 并唯一地写出 $f(x)$ 的傅里叶级数. 然而, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是否一定收敛? 如果它收敛, 它是否一定收敛于函数 $f(x)$? 一般说来, 这两个问题的答案都不是肯定的. 那么, $f(x)$ 在怎样的条件下, 其傅里叶级数不仅收敛, 而且收敛于 $f(x)$? 也就是说, $f(x)$ 满足什么条件可以展开成傅里叶级数?

定义 7.1(狄利克雷条件或狄氏条件) 设 $f(x)$ 是以 2π (或 $2l$) 为周期的函数. 如果 $f(x)$ 满足下列两个条件:

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ (或 $[-l, l]$) 上连续或逐段连续(即只有有限个第一类间断点);

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ (或 $[-l, l]$) 上只有有限个极值点(即可以把 $[-\pi, \pi]$ (或 $[-l, l]$) 分为有限个子区间, 使 $f(x)$ 在每个子区间上是单调的, 也就是说, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ (或 $[-l, l]$) 上不作无限次振动), 则称 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ (或 $[-l, l]$) 上满足狄氏条件.

定理 7.2(狄利克雷收敛定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄氏条件, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上处处收敛, 并且其和函数 $S(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上有

$$(8.8) \quad S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 是 } f(x) \text{ 的连续点}, x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \text{ 是 } f(x) \text{ 的间断点}, x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm \pi. \end{cases}$$

定理的证明比较复杂, 此处从略.

应当指出的是, 虽然定理 7.2 中的函数仅定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 但由于傅里叶级数的各项是以 2π 为周期的函数, 所以, 它的和函数 $S(x)$ 也是以 2π 为周期的函数, 只要将 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 或 $(-\pi, \pi]$ 外补充 $f(x)$ 的定义, 使它拓广成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$ (这样的方式拓广函数的定义域的过程称为周期延拓), 那么它的傅里叶级数就在整个数轴上都收敛于相应的 $F(x)$ 的值了.

特别, 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是奇函数, 那么由于函数 $f(x) \cos nx$ 也是奇函数, 而 $f(x) \sin nx$ 为偶函数, 所以(7.8)式化为

$$(7.9) \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

从而, 它的傅里叶级数变为仅含正弦项的三角级数

$$(7.10) \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

称为正弦级数.

类似地, 当 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是偶函数时, (7.8)式化为

$$(7.11) \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

它的傅里叶级数变为仅含常数项和余弦项的三角级数

$$(7.12) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

称为余弦级数.

例 7.1 将周期为 2π , 振幅为 1 的方波展开成傅里叶级数, 此方波函数在

$[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

解 显然 $f(x)$ 满足狄氏条件, 且 $f(x)$ 为奇函数, 故它的傅里叶级数为正弦级数, $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

于是方波的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{(2n-1)} \sin (2n-1)x + \dots \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \sin (2n-1)x. \end{aligned}$$

根据狄利克雷定理, $S(x) = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$; $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, 如图 12.6 所示). 在 $[-\pi, \pi]$ 上 $S(x)$ 为:

$$S(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

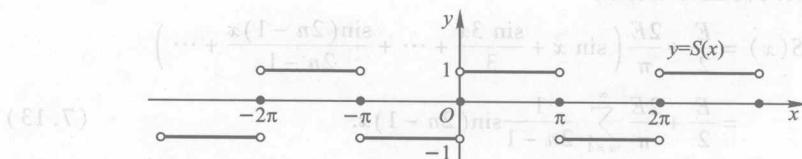


图 12.6

例 7.2 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi, \pi]$ 内的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ E, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

其中常数 $E > 0$ ($y = f(x)$ 的图形如图 12.7 所示). 它是无线电技术中常会遇到的矩形波. 试求 $f(x)$ 的傅氏级数.

解 显然 $f(x)$ 满足狄氏条件. 而

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E dx = E.$$

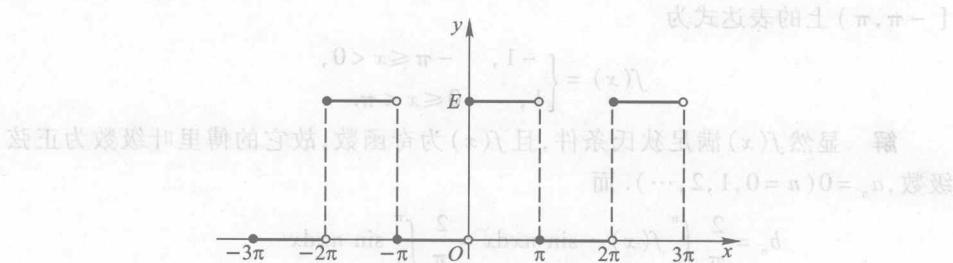


图 12.7

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E \cos nx dx$$

$$\left[\cdots + \frac{E}{n\pi} \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \right] \frac{1}{\pi} = (x)_2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E \sin nx dx$$

$$= \frac{-E}{n\pi} \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{E}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{E}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{2E}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1, \\ 0, & n=2k \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots)$$

于是此矩形波的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots \right) \\ &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x. \end{aligned} \quad (7.13)$$

根据狄氏定理, $S(x) = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$; $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$). 在 $[-\pi, \pi]$ 上 $S(x)$ 为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ E, & 0 < x < \pi, \\ \frac{E}{2}, & x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

在矩形波的傅里叶展开式(7.13)的右端中, 第一项 $\frac{E}{2}$ 表示矩形波 $f(x)$ 的直流分量, $\frac{2E}{\pi} \sin x$ 是矩形波 $f(x)$ 的基波, $\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x, \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{5} \sin 5x, \dots$ 依次为三次谐波, 五次谐波, …….

例 7.3 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

解 显然 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄氏条件。将 $f(x)$ 周期延拓成 2π 为周期的函数 $F(x)$ 。而

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cdot x \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} \pi [(-1)^n - 1] = \frac{1}{n^2} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = 0, \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{(2k-1)^2 \cdot \pi}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k=1, 2, 3, \dots). \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cdot x \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

从而得 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$S(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2n-1)^2 \pi} \cdot \cos((2n-1)x) + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right].$$

$y = S(x)$ 的图形如图 12.8 所示。

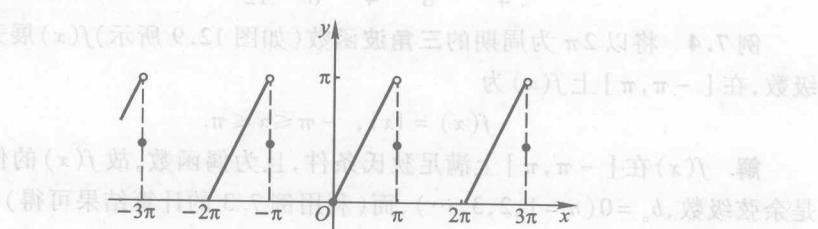


图 12.8

根据狄氏定理,有 $S(x) = F(x)$ ($-\infty < x < +\infty, x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$), 特别, 有

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

由 $S(0) = 0$, 得

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 \pi} = 0.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

记

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

则

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \sigma_1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sigma_1 + \frac{1}{4} \sigma. \end{aligned}$$

从而有

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \sigma_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = (\text{偶}) \\ &= \sigma_1 - \frac{1}{4} \sigma = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

例 7.4 将以 2π 为周期的三角波函数(如图 12.9 所示) $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(x)$ 为

$$f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi.$$

解 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄氏条件, 且为偶函数, 故 $f(x)$ 的傅里叶级数是余弦级数, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 而(利用例 7.3 的计算结果可得)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx$$

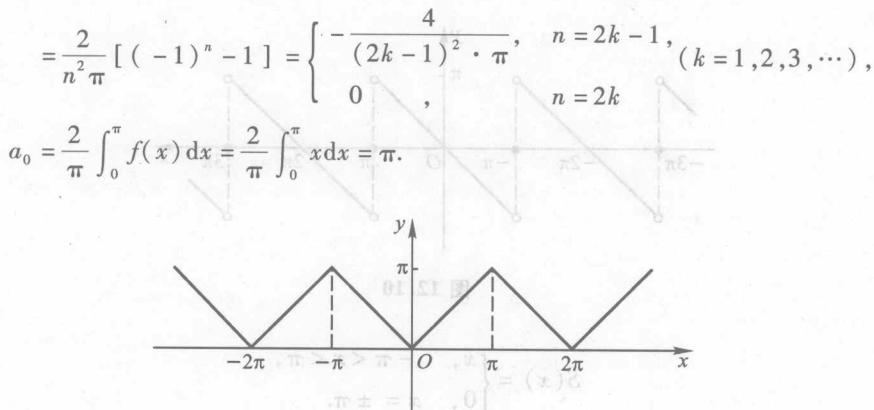


图 12.9

从而得 $f(x)$ 的傅里叶展开式

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos((2n-1)x). \quad (7.14)$$

根据狄氏定理 $f(x) = S(x) (-\infty < x < +\infty)$. 特别有

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos((2n-1)x), x \in [-\pi, \pi]. \quad (7.15)$$

在(7.14)式右端第一项 $\frac{\pi}{2}$ 表示三角波 $f(x)$ 的直流分量, $-\frac{4}{\pi} \cos x$ 表示基波, $-\frac{4}{\pi \cdot 3^2} \cos 3x, -\frac{4}{\pi \cdot 5^2} \cos 5x, \dots$ 依次表示三次谐波, 五次谐波, …….

例 7.5 将以 2π 为周期的锯齿波函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表示式为 $f(x) = x$.

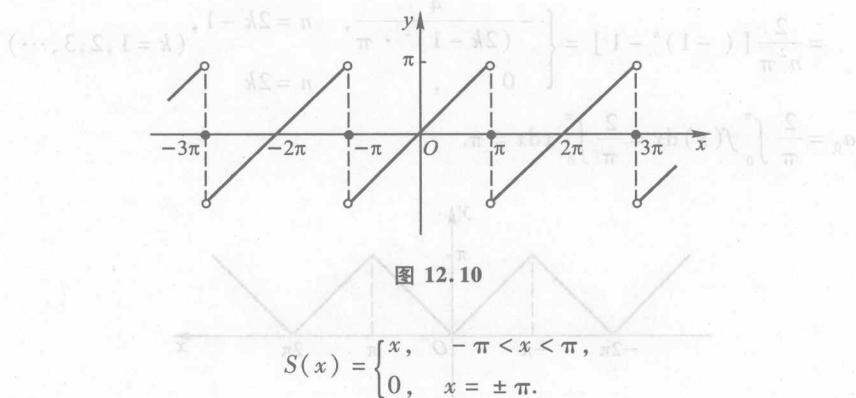
解 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄氏条件, 且为奇函数, 故 $f(x)$ 的傅里叶级数为正弦级数, $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$, 而(利用例 7.3 的计算结果可得)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{n} \cdot ((-1)^{n-1} \cdot [(0+1-)+(0-1)]) \frac{1}{2} \end{aligned}$$

从而得 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

根据狄氏定理 $f(x) = S(x) (-\infty < x < +\infty, x \neq \pm \pi, \pm 3\pi, \dots)$, $y = S(x)$ 图形如图 12.10 所示. 特别有



7.4 任意周期函数的傅里叶级数

前面所讨论的函数都是以 2π 为周期的函数,但在实际问题中所遇到的函数都是一般的周期函数.因此,下面我们讨论周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数.

定理 7.3(狄利克雷收敛定理) 设周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上满足狄利克雷条件,则 $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (7.15)$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (7.16)$$

记(7.15)式右端的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$, (7.15)式的等号是下述意义下相等:在 $[-l, l]$ 上有

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-l, l) \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点,} \\ \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)], & x \in (-l, l) \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点,} \\ \frac{1}{2} [f(l-0) + f(-l+0)], & x = \pm l. \end{cases} \quad (7.17)$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,它的傅氏级数为正弦级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (7.18)$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.19)$$

当 $f(x)$ 为偶函数时, 它的傅氏级数为余弦级数

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (7.20)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.21)$$

证 作变量代换 $t = \frac{\pi x}{l}$, 于是区间 $-l \leq x \leq l$ 就变换为 $-\pi \leq t \leq \pi$, 而函数 $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = F(t)$, 就化为以 2π 为周期且在 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄利克雷条件的函数 $F(t)$, 故 $F(t)$ 的傅里叶级数

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (7.22)$$

在 $t \in (-\infty, +\infty)$ 收敛, 其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt dt.$$

令 $t = \frac{\pi x}{l}$, 则 (7.22) 式变为 (7.15) 式, 而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理 7.2, 本定理得证.

在实际应用中, 除了周期信号以外, 常遇到只在有限区间 $[a, b]$ 上有定义的非周期信号, 例如两端固定在 $x = a$ 和 b 处的弦振动问题(例如桥梁的振动问题), 关于只在 $[a, b]$ 上有定义的函数 $f(x)$, 以 $2l = T = b - a$ 作周期延拓, 得到以 $2l$ 为周期的新的周期函数 $F(x)$, 然后可将 $F(x)$ 展开为傅里叶级数. 应当指出, 因为任何以 T 为周期的函数在任何长度为 T 的闭区间上的积分值都相等, 故可按下列计算公式计算傅氏系数:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases} \quad (7.23)$$

例 7.6 将 $f(x) = e^x$ 在 $(-1, 1)$ 内展开为以 2 为周期的傅氏级数.

解 显然 $f(x) = e^x$ 在 $[-1, 1]$ 上满足狄利克雷条件. 计算傅氏系数如下(此

处 $l=1$) :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-1}^1 e^x \cos n\pi x dx \\ &= \frac{1}{1^2 + (n\pi)^2} \cdot e^x (n\pi \sin n\pi x + \cos n\pi x) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{(-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} \cdot (e - e^{-1}), \end{aligned}$$

由于 $f(x) = e^x$ 在 $(-1, 1)$ 上连续, 故有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-1}^1 e^x \sin n\pi x dx \\ &= \frac{1}{1^2 + (n\pi)^2} \cdot e^x (\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{1 + n^2 \pi^2} \cdot n\pi (e - e^{-1}). \end{aligned}$$

而傅里叶级数的和函数 $S(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处的值为

$$S(\pm 1) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}).$$

$S(x)$ 的图形如图 12.11 所示.

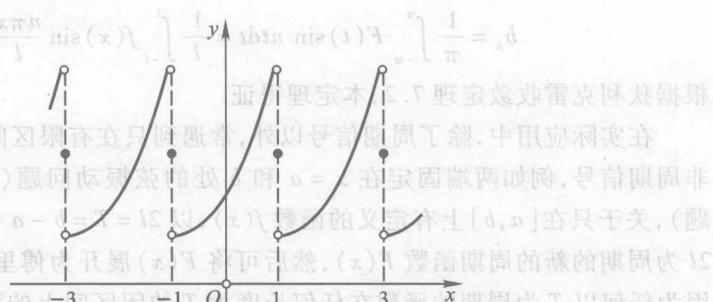


图 12.11

例 7.7 将函数 $f(x) = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) 展开为 2 为周期的傅里叶级数.

解 $f(x) = x^2$ 在 $[-1, 1]$ 上满足狄氏条件, 且为偶函数, 故它的傅里叶级数为余弦级数, 傅里叶系数中 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 又 $l = 1$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx \\
 &= \frac{2}{n\pi} \cdot x^2 \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx \\
 &= \frac{4}{n^2 \pi^2} \cdot x \cos n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n\pi x dx \\
 &= (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2 \pi^2} (n=1,2,3,\dots),
 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

于是, 根据狄利克雷收敛定理, 有

$$x^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x, \quad x \in [-1, 1].$$

例 7.8 将以 4 为周期, 在 $[-2, 2]$ 上定义为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}, & |x| < \delta, \\ 0, & \delta \leq |x| \leq 2 \end{cases}$$

的矩形脉冲函数(此函数在电子学中常用)展开为傅里叶级数.

解 显然 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上满足狄利克雷条件, $l=2$. 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $b_n = 0 (n=1, 2, \dots)$, 而

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \int_0^\delta \frac{1}{2\delta} dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^\delta \frac{1}{2\delta} \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{n\pi\delta} \sin \frac{n\pi\delta}{2} (n=1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

根据狄利克雷定理,

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\delta}{2} \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad x \in [-2, -\delta) \cup (-\delta, \delta) \cup (\delta, 2];$$

而在 $x = \pm\delta$ 处, 傅氏级数收敛于 $\frac{1}{4\delta}$.

7.5 正弦级数与余弦级数

设 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上有定义, 且满足狄利克雷条件. 为了求它的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数, 将它任意延拓到区间 $[-l, 0]$ 上. 在理论上, 延拓的方式有多种多样, 可以根据不同的要求采用不同的方式, 但常用的是下面两种:

(1) 偶延拓. 为了将 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上展开成余弦级数, 可令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ f(-x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

再将 $F(x)$ 在 $[-l, l]$ 上展开成傅氏级数: 有 $b_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

从而根据狄氏定理,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

就是 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上的傅里叶展开式(这里的等号成立的范围按定理 7.3 确定, 以后不再重述).

(2) 奇延拓 为了将 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上展开成正弦级数, 可采用奇延拓. 令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -f(-x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

注意根据奇函数的定义, 应有 $f(0) = 0$. 如果 $f(x)$ 不满足这个条件, 则首先应当改变 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的值. 使之符合这个要求. 然后再将 $F(x)$ 在 $[-l, l]$ 上展开. 但不论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的值如何, 都有 $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$, 且

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

根据狄氏定理,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

就是 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上的傅里叶展开式.

例 7.9 将函数 $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数. 为此对函数 $f(x) = x + 1$ 奇延拓(如图 12.12 所示), 此时 $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$, 而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x + 1) \sin nx dx \\ &= \frac{-2}{\pi \cdot n} (x + 1) \cdot \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 + (-1)^{n-1} \cdot (\pi + 1)] (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$\begin{aligned} x + 1 &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot [1 + (-1)^{n-1} (\pi + 1)] \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[(\pi + 2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} (\pi + 2) \sin 3x - \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4} \sin 4x + \dots], \quad 0 < x < \pi.$$

在端点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处, 级数的和显然为零, 它不代表原来函数 $f(x)$ 的值.

再求余弦级数, 为此对 $f(x)$ 进行偶延拓(如图 12.13 所示), 此时 $b_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \cdot (x+1) \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos nx \Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4}{(2k-1)^2 \cdot \pi}, & n = 2k-1 (k = 1, 2, 3, \dots), \end{cases} \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) dx = \pi + 2. \end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

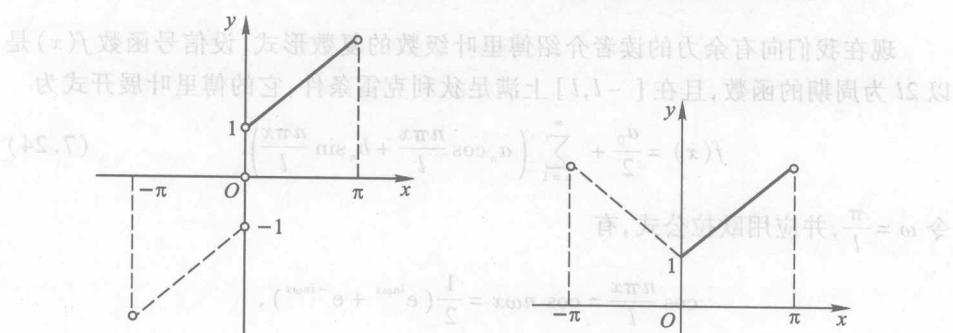


图 12.12

图 12.13

$$x+1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), \quad x \in [0, \pi].$$

例 7.10 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

在 $[0, 2]$ 上展开为傅里叶正弦级数.

解 对 $f(x)$ 进行奇延拓(其图请读者作出), 此时 $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$, $b_n = 2$, 而

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\
 &= \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\
 &\quad - \frac{2}{n\pi} \left[(2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 + \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\
 &= \frac{8}{n^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \\
 &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1} \cdot \frac{8}{(2k-1)^2 \cdot \pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad (k=1,2,3,\dots).
 \end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

7.6 傅里叶级数的复数形式与频谱分析

现在我们向有余力的读者介绍傅里叶级数的复数形式. 设信号函数 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数, 且在 $[-l, l]$ 上满足狄利克雷条件, 它的傅里叶展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (7.24)$$

令 $\omega = \frac{\pi}{l}$, 并应用欧拉公式, 有

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \cos n\omega x = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}),$$

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = \sin n\omega x = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}).$$

(7.24) 式化为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x). \quad (7.25)$$

将欧拉公式代入(7.25)得到

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right).
 \end{aligned}$$

记

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} (n = 1, 2, 3, \dots),$$

则 $f(x)$ 的傅里叶展开式(7.25)就化为简洁的复数形式

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (7.26)$$

其中系数

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) (\cos n\omega x - i \sin n\omega x) dx$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

同理有

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{inx} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

综上所述,就有

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (7.27)$$

傅氏级数的复数形式与实数形式本质上是一样的.但在电子技术中,用傅里叶级数作频谱分析时,用(7.26)式比用(7.25)式方便.就(7.25)式而论, $\omega = \frac{\pi}{l}$ 称为基频,由于第 n 次谐波为

$$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = A_n \sin(n\omega x + \varphi_n),$$

其中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 为 n 次谐波的振幅, $\varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$ 为 n 次谐波的初相,(7.25)

式化为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n). \quad (7.28)$$

这样,我们就知道周期信号 $f(x)$ 是由哪些不同频率(基频的整数倍)、不同振幅的谐波叠加而成.为了便于频谱分析,作信号 $f(x)$ 的振幅频谱图.它是根据下表作出振幅频谱图的.(此表称为振幅谱).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{l} \geq |x| > \frac{\pi}{\omega} \\ 0 \end{array} \right\} = (x)$$

傅里叶级数与频谱(八卦指)

频率	0	ω	2ω	3ω	\dots	$n\omega$	\dots
振幅	$\frac{ a_0 }{2}$	A_1	A_2	A_3	\dots	A_n	\dots

若用(7.26)式作频谱分析时,因为

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

于是 $|c_n|$ 是 n 的偶函数,且 $|c_n|$ 又恰为 n 次谐波振幅的一半,而我们关心的是各振幅之间的比,相差一个常数因子没有关系,故可用 $|c_n|$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$)作振幅谱图.

例7.11 例7.4中的三角波 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1)x + \dots \right], \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的振幅谱为

频率	0	1	2	3	4	5	\dots	n	\dots
振幅	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3^2}$	0	$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{5^2}$	\dots	$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$	\dots

它的振幅谱图如图12.14所示.

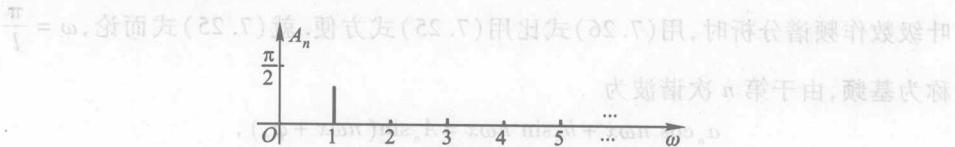


图 12.14

例7.12 设周期为 T ,高度为 E ,波宽为 $\frac{T}{3}$ 的矩形波 $f(x)$ (其中常数 $E > 0$)

为

$$f(x) = \begin{cases} E, & |x| \leq \frac{T}{6}, \\ 0, & \frac{T}{6} < |x| \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开为复数形式的傅里叶级数.

解 $\omega = \frac{2\pi}{T}$. 根据(7.27)式得($2l = T$)

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2l} \int_{-\frac{l}{3}}^{\frac{l}{3}} E e^{-inx} dx$$

$$= \frac{E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(12.15) \quad c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2l} \int_{-\frac{l}{3}}^{\frac{l}{3}} E dx = \frac{E}{3}.$$

故矩形波 $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$f(x) = \frac{E}{3} + \frac{E}{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n} e^{inx} \right) \quad (n \neq 0)$$

于是, $f(x)$ 的振幅谱为

频率	0	ω	2ω	3ω	4ω	5ω	6ω
振幅	$\frac{E}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E}{\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{5}$	0

频率	7ω	8ω	9ω	10ω	11ω	12ω
振幅	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{7}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{8}$	0	$\frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$	$ \sin \frac{n\pi}{3} $...

信号 $f(x)$ 频谱图如图 12.15 所示

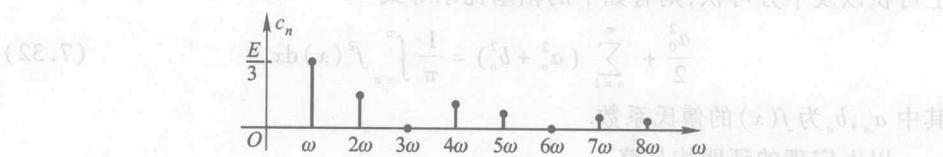


图 12.15

对于给定的信号,列出其振幅谱表,画出其振幅谱图,就可以知道它的主要频率范围,分析信号的主要频率范围的方法,就是频谱分析. 频谱分析在无线电、光学、地震波、信号处理等方面都有重要应用.

知道了信号 $f(x)$ 的振幅谱图后,如何确定信号的主要频率范围? 一般来说,当振幅随频率的增加衰减很快时,往往把谱线的第一个零点以内的频率范围,认为是信号 $f(x)$ 的主要频率范围;当振幅衰减较慢时,可根据实际情况,选第三个或更多个谱线的零点以内的频率范围为主要频率范围. 当谱线没有零点

时,通常规定振幅不小于 $\frac{1}{10}|c_1|$ 的频率范围为主要频率范围.

7.7 均方差与贝塞尔不等式

上段和本段的内容都是为有余力的读者提供阅读的资料. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数. 我们考虑用三角多项式

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7.29)$$

来近似代替 $f(x)$ 的误差.

定义 7.2 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积以及平方可积(即 $f^2(x)$ 可积),我们称(7.29)式 $S_n(x)$ 为 n 阶三角多项式,称

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \quad (7.30)$$

为均方差,简称方差.

定理 7.4 均方差 δ_n^2 取最小值的充分必要条件是 $S_n(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和.

定理 7.5(贝塞尔(Bessel)不等式) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期,在 $[-\pi, \pi]$ 上可积以及平方可积,则 $f(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 满足

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (7.31)$$

定理 7.6(帕塞瓦尔(Parseval)等式) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期,在 $[-\pi, \pi]$ 上可积以及平方可积,则有如下的帕塞瓦尔等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (7.32)$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅氏系数.

以上定理的证明均从略.

习题 12.7

A 类

1. 下列函数 $f(x)$ 的周期为 2π ,试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数,如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ (或在 $[-\pi, \pi]$) 上的表达式为:

(1) $f(x) = 2 \sin \frac{x}{3}$ ($-\pi \leq x < \pi$);

(2) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$);

$$(3) f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

$$(1) f(x) = x^2 \quad (-1 \leq x \leq 1);$$

$$(2) f(x) = x^2 - x \quad (-2 \leq x \leq 2);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -3 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 3; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{2} e^x \quad (0 \leq x < 1).$$

3. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -3 \leq x < 0, \\ 0 & 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

4. 将 $f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 展开为正弦级数.

直垂 5. 将 $f(x) = 2x + 3 \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 展开为余弦级数.

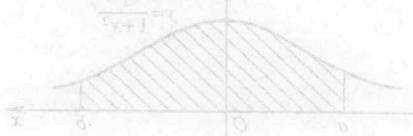
6. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

展开为正弦级数.

1. 证明定理 7.4.

2. 证明定理 7.5.



13.1 图

8) $\delta = \pi, 0 = \pi$ 然直略 $\frac{1}{\pi+1} = \pi$ 然曲

式得面的渐近曲的函数 $0 = \pi, (0 <$

$$; (\pi \geq x \geq \pi -) \quad \text{和} \quad (x) \wedge (\varepsilon)$$

第13章 广义积分与含参变量积分

本章主要讨论广义积分的两种推广，其一是将积分区间推广到无限区间，从而就有无限区间的广义积分，简称无穷限积分；其二是将被积函数推广到无界函数，从而就有无界函数的广义积分，简称瑕积分。

在研究定积分时，我们总假定被积函数为有界函数，而积分区间是有限区间。现在我们讨论定积分的两种推广，其一是将积分区间推广到无限区间，从而就有无限区间的广义积分，简称无穷限积分；其二是将被积函数推广到无界函数，从而就有无界函数的广义积分，简称瑕积分。

本章主要学习三个内容：一是判断广义积分（也称为反常积分）是否收敛的若干方法；二是含参变量积分对参变量的连续性、可导性和可积性；三是欧拉积分。

§1 无穷限积分

1.1 无穷限积分的概念

例 1.1 根据定积分的物理意义，容易求得将质量为 m 的物体从地面垂直举高 h 所做的功为

$$W_h = GMm \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right).$$

其中 r 是物体到地心的距离， R 是地球半径， M 是地球的质量， G 是引力常数。

为了使物体脱离地球引力，或者说要把它送到无穷远处，那么所做的功就是

$$W = \lim_{h \rightarrow +\infty} W_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_R^{R+h} \frac{GMm}{r^2} dr = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_R^A \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{R}.$$

若把 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_R^A \frac{GMm}{r^2} dr$ 记作 $\int_R^{+\infty} \frac{GMm}{r^2} dr$ ，则有 $\int_R^{+\infty} \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{R}$ 。

例 1.2 求位于曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的下方， x 轴上方的图形面积（图 13.1）。

解 由对称性，易知只需求出当 $a = 0, b \rightarrow +\infty$ 时的面积即可。

曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 和直线 $x = 0, x = b$ ($b > 0$)， $y = 0$ 所围成的曲边梯形的面积为

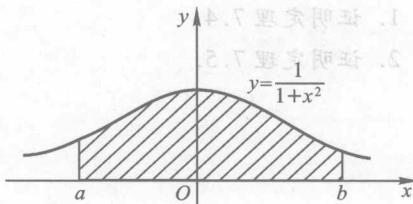


图 13.1

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^b = \arctan b.$$

若把直线 $x=b$ 无限向右移, 即令 $b \rightarrow +\infty$, 则曲边梯形的面积最终转化为我们所求的向右无限延伸的图形的面积 S_1 , 即

$$S_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

由对称性, 整个面积(即当 $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$ 时)为

$$S = 2S_1 = \pi.$$

定义 1.1 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a, +\infty)$ 上, 且在任一个有界区间 $[a, b]$ 上都可积. 若极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在, 则称此极限值为函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的广义积分, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

此时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 若上式右端极限不存在, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

类似地, 可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上的积分

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

也可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷限积分:

若对任意实数 k , $\int_{-\infty}^k f(x) dx$ 与 $\int_k^{+\infty} f(x) dx$ 都收敛, 我们就说广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^k f(x) dx + \int_k^{+\infty} f(x) dx.$$

不难证明上式右端与 k 无关, 为简单计, 常取 $k=0$.

若 $\int_{-\infty}^k f(x) dx, \int_k^{+\infty} f(x) dx$ 中只要有一个发散, 则说 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 1.3 计算无穷限积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-kx} dx$ 的值, 其中 k 为正常数.

$$\text{解 } \int_0^{+\infty} xe^{-kx} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b xe^{-kx} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x}{k} e^{-kx} - \frac{1}{k^2} e^{-kx} \right]_0^b = \frac{1}{k^2}.$$

例 1.4 $\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - \cos b)$

不存在. 故无穷限积分 $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ 发散.

例 1.5 计算无穷限积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ 的值.

$$\text{解 } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

例 1.6 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性, 其中 p 是任意常数.

解 当 $p = 1$ 时, 有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty,$$

即 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散.

当 $p \neq 1$ 时, 有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1).$$

若 $p > 1$, 则 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1) = \frac{1}{p-1}$, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ 收敛.

若 $p < 1$, 则 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1) = +\infty$, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散.

结论: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 当 $p > 1$,
发散, 当 $p \leq 1$.

例 1.7 讨论 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x}$ 的敛散性, 其中 q 是任意常数.

解 当 $q = 1$ 时, 有

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = +\infty.$$

当 $q \neq 1$ 时, 有

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^q x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-q} [(\ln b)^{1-q} - (\ln 2)^{1-q}].$$

所以, 广义积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} \begin{cases} \text{收敛, 当 } q > 1, \\ \text{发散, 当 } q \leq 1. \end{cases}$$

1.2 非负函数无穷限积分的判敛法

因为并不是所有的定积分都能算出来, 所以从广义积分定义去判断其收敛性常常是行不通的. 但由于无穷限积分的收敛性与变上限积分函数 $\int_a^b f(x) dx$ 在 $b \rightarrow +\infty$ 时极限的存在性是一致的, 因此利用函数极限存在的柯西(Cauchy)准

则就会得到如下定理.

定理 1.1(柯西收敛准则) 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $A' > N, A'' > N$ 时, 有 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

柯西收敛准则说明, 要使无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 必须且只需在充分远的、不论多长的区间上, 其积分绝对值可以任意小.

定理 1.2(比较判敛法) 设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的非负函数, 且在任何有界区间 $[a, b]$ 上可积, 则

(1) 若存在收敛的广义积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 使得 $f(x) \leq g(x)$ 对充分大的 x 都成立, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

(2) 若存在发散的广义积分 $\int_a^{+\infty} h(x) dx$ 使得 $0 \leq h(x) \leq f(x)$ 对充分大的 x 都成立, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

证 (1) 不妨设 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ 对任意的 $x \in [a, +\infty)$ 都成立, $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 根据柯西收敛准则, $\exists M > a$, 使得当 $A' > M, A'' > M$ 时, 有

$$\left| \int_{A'}^{A''} g(x) dx \right| < \varepsilon,$$

从而

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

因此, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

(2) 反证法. 假设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 由于 $0 \leq h(x) \leq f(x)$, 则根据结论(1)可知 $\int_a^{+\infty} h(x) dx$ 收敛, 这与条件矛盾, 故 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

为了应用方便, 比较判敛法也可以写成极限形式.

定理 1.3(比较判敛法的极限形式) 设 $f(x) \geq 0, g(x) > 0, x \in [a, +\infty)$, 且在任何有界区间 $[a, b]$ 上都可积, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 同时收敛;

(2) 当 $l = 0$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也发散.

证 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 其中 $l \neq 0, l \neq +\infty$, 则可取一正数 ε , 使得 $|l - \varepsilon| > 0$,

由极限定义, 必存在 $N > 0$, 使当 $x \geq N$ 时, 有

$$0 < l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon,$$

即 $0 < (l - \varepsilon)g(x) < f(x) < (l + \varepsilon)g(x)$. 由比较判敛法知, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 有相同的敛散性.

定理中结论(2),(3)的证明, 请读者给出.

我们已经熟知 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (a > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散. 以它为标准, 应用比较判敛法, 便得下面的定理.

定理 1.4 (比阶判敛法) 设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty) (a > 0)$ 上的非负函数, 且在任何有界区间 $[a, b]$ 上可积, 则

(1) 若存在正数 k , 使 $f(x) \leq \frac{k}{x^p}$ 在 $[a, +\infty)$ 上成立, 而且 $p > 1$, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

(2) 若存在正数 k , 使 $f(x) \geq \frac{k}{x^p}$ 在 $[a, +\infty)$ 上成立, 而且 $p \leq 1$, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = l$, 则当 $0 \leq l < +\infty, p > 1$ 时, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 当 $0 < l \leq +\infty, p \leq 1$ 时, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 1.8 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + e^x}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$, 且 $p = 2 > 1$, 故知原广义积分收敛.

例 1.9 讨论 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$ 的敛散性, 其中 α 为实数.

解 当 $\alpha > 1$ 时, 取 $p = \alpha > 1$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \cdot \frac{1}{x^\alpha \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

所以 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$ 收敛.

当 $\alpha < 1$ 时, 取 $p = \frac{1}{2}(1 + \alpha) < 1$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \cdot \frac{1}{x^\alpha \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}}{\ln x} = +\infty.$$

所以广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$ 发散.

当 $\alpha = 1$ 时, 由例 1.7 知广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ 发散.

例 1.10 判断积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ 的敛散性.

解 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^3},$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ 收敛, 所以原广义积分收敛.

例 1.11 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ 的敛散性.

解 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{1}{x^{1-\alpha}(1+x)} \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}},$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}} dx$ 当 $2-\alpha > 1$ (即 $\alpha < 1$) 时收敛, 故原积分当 $\alpha < 1$ 时收敛.

例 1.12 判断 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}}$ 的敛散性.

解 因为当 $x > 2$ 时有

$$\begin{aligned} x^2 \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} &= x^2 \sqrt{x - x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= x^2 \sqrt{x - x \left[1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]} \\ &= x^2 \sqrt{\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = x^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + o(1)}, \end{aligned}$$

所以被积函数在 $x \rightarrow +\infty$ 时与 $\frac{1}{x^{3/2}}$ 同阶, 这里 $p = \frac{3}{2} > 1$, 故原广义积分收敛.

1.3 绝对收敛

当被积函数不是非负函数(或者说是变号函数)时,我们可以考虑被积函数取绝对值的积分.为此,对无穷限积分我们引入绝对收敛的概念.

定义 1.2 设 $\int_a^b f(x) dx$ 对任何 $b \geq a$ 存在,又 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛,则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛;若 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散,但 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛.

定理 1.5 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 必收敛.

证 由无穷限积分的柯西收敛准则,可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使当 $A' > N, A'' > N$ 时,有

$$\left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon,$$

从而

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

再由柯西收敛准则,知广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

例 1.13 判定 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x \sqrt{1+x^2}} dx$ 的收敛性.

解 因为当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $\left| \frac{\sin x}{x \sqrt{1+x^2}} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛, 所以原积分绝对收敛.

习题 13.1

A 类

- 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
- 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.
- 判断广义积分 $\int_0^{+\infty} (e^{-pt} \sin \omega t) dt$ 的收敛性. 若收敛,求其值.
- 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x} dx$.

5. 判断积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x^4}} (a > 0)$ 的收敛性.

6. 判断积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ 的收敛性.

7. 试求正数 a , 使得

$$\int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

8. 一轮船在以常速 v_0 航行时关闭发动机, 它所受到的水的阻力与其航速的大小成正比, 问: 在不受其他外力作用时, 轮船要滑行多远才能停下?

B 类

1. 求常数 a, b , 使 $\int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax} dx = 0$.

2. 判断广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ 的收敛性.

3. 判断广义积分 $\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right] dx$ 的收敛性.

4. 当 k 为何值时, 广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 又当 k 为何值时, 该广义积分取得最小值?

$$\frac{1}{(x-\delta)} - \frac{1}{(x-\epsilon)} \quad \text{当 } x \rightarrow \infty$$

§2 球积分

2.1 球积分的概念

本节讨论另一种广义积分: 积分区间是有界的, 但被积函数在区间的某些点处没有定义, 且在这些点的邻域内无界. 这种有界区间上无界函数的广义积分称为球积分.

定义 2.1 设 $f(x)$ 在任意一个区间 $[a, b-\varepsilon]$ 上可积 ($0 < \varepsilon < b-a$), 并且 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$, 如果极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

存在, 就称无界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的广义积分收敛, 并称这个极限值为无界函数积分的值. 如果上述极限不存在, 就称在 $[a, b]$ 上该无界函数积分发散. 不

论收敛或发散,我们都用 $\int_a^b f(x) dx$ 表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的无界函数积分.

类似地,可定义在 $x = a$ 附近无界函数 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

若函数在一点附近无界,我们就称这一点是函数 $f(x)$ 的瑕点.

若 $x = c$ ($a < c < b$) 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的唯一的瑕点,则当 $\int_a^c f(x) dx$ 和 $\int_c^b f(x) dx$ 都收敛时,定义 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛,且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

否则称广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

例 2.1 求 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

解 $x=2$ 是瑕点,于是

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) \right] \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow 2^-} \arcsin \frac{t}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

例 2.2 讨论 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ ($p > 0$) 的收敛性.

解 当 $p \neq 1$ 时, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p}$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(b-x)^{p-1}} \Big|_0^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} - \frac{1}{(b-a)^{p-1}} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1. \end{cases}$$

当 $p = 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-\ln \varepsilon + \ln(b-a)] = +\infty.$$

所以当 $p < 1$ 时 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 收敛, 积分值为 $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$; 当 $p \geq 1$ 时积分发散.

例 2.3 判断积分 $\int_{-8}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ 的收敛性.

解: 点 $x=0$ 是函数 $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 的瑕点, 讨论下面两个无界函数积分:

$$\int_{-8}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

任取 $\varepsilon > 0$, 使 $0 < \varepsilon < 1$, 则

$$\int_{-8}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-8}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (\varepsilon^{2/3} - 4) = -6;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (1 - \varepsilon^{2/3}) = \frac{3}{2}.$$

于是, 无界函数积分 $\int_{-8}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ 收敛, 且

$$\text{而且, } \int_{-8}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-8}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -6 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}.$$

2.2 球积分的判敛法

如果换一种处理方法, 例如为了研究球积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 的收敛性, 可先作变换

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = y, \text{ 于是}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^{\frac{1}{\sqrt{0}}} \frac{1}{y^2} dy.$$

这样就把判断球积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 的收敛问题归结到判断无穷限积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy$ 的收

敛问题, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy$ 是收敛的, 且收敛到 1.

一般来说, 如果 a 是 $f(x)$ 的瑕点, 作变换 $x = a + \frac{1}{y}$, 那么

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a-\varepsilon}} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2} dy \\ &= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2} dy. \end{aligned}$$

这就是说, 通过上面的变换, 每一个球积分都可以化成为一个无穷限积分. 因此, 前面那些关于无穷限积分的收敛判别法, 都可以平行地对球积分建立起来. 这里我们不再重复其证明, 只把结论列出来.

为简单起见, 都假定积分下限 a 是瑕点, f 和 φ 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积.

定理 2.1(柯西收敛准则) 积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛的充分必要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $0 < \eta < \delta, 0 < \eta' < \delta$, 就有

$$\left| \int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

定理 2.2(比较判敛法) 假设对充分靠近 a 的 $x (x > a), f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 满足不等式

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x),$$

那么

(1) 若 $\int_a^b \varphi(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(2) 若 $\int_a^b f(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^b \varphi(x) dx$ 发散.

定理 2.3(比较判敛法的极限形式) 设 $f(x) \geq 0, \varphi(x) > 0, x \in (a, b]$, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l,$$

那么

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 积分 $\int_a^b f(x) dx$ 与 $\int_a^b \varphi(x) dx$ 有相同的敛散性;

(2) 当 $l = 0$ 时, 若 $\int_a^b \varphi(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 若 $\int_a^b \varphi(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也发散.

定理 2.4(比阶判敛法) 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上非负, 且在 $[a + \varepsilon, b]$ 上可积, 其中 $0 < \varepsilon < b - a$, 则

(1) 若存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (a, a + \delta]$ 时, 有 $f(x) \leq \frac{k}{(x-a)^p}, p < 1, k > 0$, 则广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(2) 若存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (a, a + \delta]$ 时, 有 $f(x) \geq \frac{k}{(x-a)^p}, p \geq 1, k > 0$, 则广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^p f(x) = l$, 则当 $0 \leq l < +\infty, p < 1$ 时, 广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 当 $0 < l \leq +\infty, p \geq 1$ 时, 广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

当被积函数变号时, 我们同样可以给出瑕积分绝对收敛和条件收敛的概念,

并有如下判敛法.

定理 2.5(绝对值判敛法) 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上有定义, a 是 $f(x)$ 的一个瑕点, 若 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

例 2.4 讨论 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ 的敛散性.

解 $x=0$ 是瑕点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \frac{\ln x}{1+x^2} = 0, \quad \text{且 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{x}} = +\infty,$$

这里 $p = \frac{1}{2} < 1, l = 0$. 由比阶判敛法知 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ 收敛.

例 2.5 判断广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ 的收敛性.

解 被积函数不是非负的, 取其绝对值 $|\ln \sin x| = -\ln \sin x, x \in (0, 1]$. 把它与函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 相比较, 考察极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln \sin x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln \sin x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = 0.$$

由于广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛, 所以原广义积分必收敛.

习题 13.2

A 类

1. 求积分 $\int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|12-x|}} dx$.

2. 计算反常积分 $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}$.

3. 判断下列积分的敛散性:

$$(1) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} (a < b);$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}};$$

$$(4) \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}};$$

$$(5) \int_0^2 \frac{e^{-2x}}{(2-x)^2} dx.$$

4. 证明积分 $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} dx$ 当 $0 < p < 1$ 时绝对收敛, 而当 $p \geq 2$ 时发散.

5. 求积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$

1. 设 $f(x) = \frac{x+1}{x(x-2)}$, 求 $\int_1^3 \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx$.

2. 讨论反常积分 $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ 的敛散性.

3. 判断积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} dx$ 的敛散性.

4. 证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx$ 绝对收敛.

§3 含参变量积分

设函数 $f(x, y)$ 在矩形: $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上有界. 若对任意固定的 $y \in [c, d]$. 函数 $f(x, y)$ 关于 x 在 $[a, b]$ 上可积, 则积分 $\int_a^b f(x, y) dx$ 是 y 的函数, 记为

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

我们把它称为含参变量 y 的(常义)积分. 有时我们还遇到积分限也与变量 y 有关的积分:

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (1)$$

例如累次积分中的内层积分就常是这种形式的含参变量积分.

如果对于固定的 $y, f(x, y)$ 是变量 x 在 $[a, b]$ 上的无界函数, 或者 $[a, b]$ 是一

个无限区间,则称相应的积分是含参变量 y 的广义积分. 例如积分

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

是含参变量 s 的广义积分; 积分

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

当 $p < 1$ 或 $q < 1$ 时是含两个参变量 p, q 的广义积分.

本节主要是讨论含参变量(常义)积分所确定的函数的分析性质, 即它们的连续性、可微性, 以及如何计算它们的导数和积分.

定理 3.1 设 $f(x, y)$ 在矩形 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, 则

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \in C[c, d].$$

换言之, 对任意的 $y_0 \in [c, d]$, $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0)$ 成立, 即

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

上式表示 $f(x, y)$ 的连续性保证了积分运算与极限运算可以交换次序.

证 当 y 和 $y + \Delta y$ 均属于 $[c, d]$ 时, 有

$$I(y + \Delta y) - I(y) = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx.$$

因 $f(x, y)$ 在闭域 D 上连续, 因而在 D 上一致连续. 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|\Delta y| < \delta$, 对任意的 $x \in [a, b]$, 恒有

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

于是

$$|I(y + \Delta y) - I(y)| < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b - a).$$

所以 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续.

例 3.1 已知 $I(\alpha) = \int_{-1}^1 e^{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} dx$, 求 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$.

解 由定理 3.1 知 $I(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 处连续, 所以

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = I(0) = \int_{-1}^1 e^{|x|} dx = 2 \int_0^1 e^x dx = 2(e - 1).$$

既然函数 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 那么它在 $[c, d]$ 上的积分存在, 这个积分可以写为

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

右端积分是函数 $f(x, y)$ 先对 x 后对 y 的二次积分. 当 $f(x, y)$ 在矩形 D 上连续时, $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 存在, 这个二重积分化为二次积分

来计算时,也可以化为先对 y 后对 x 的二次积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$, 因此我们有下面的定理.

定理 3.2 若 $f(x, y)$ 在矩形 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, 则

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

上式表示积分顺序是可交换的.

例 3.2 求 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ($a > 0, b > 0$).

解 $x = 1$ 不是瑕点, I 为普通的定积分. 但直接计算 I 是困难的, 我们可以利用含参变量积分的理论来解. 把被积函数写为 $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$, 那么

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = \ln \frac{1+b}{1+a}. \end{aligned}$$

下面考虑由含参变量积分确定的函数 $I(y)$ 的微分性质.

定理 3.3 设 $f(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在矩形 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上都是连续的, 则

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \in C^1[c, d],$$

且

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

上式表示在 f 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续的条件下, 微分运算和积分运算的次序可以交换.

证 设 y 是 $[c, d]$ 上任一点, 如果 $y + \Delta y$ 也属于 $[c, d]$, 那么

$$\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx.$$

利用微分中值定理, 得

$$\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx \quad (0 < \theta < 1).$$

令 $\Delta y \rightarrow 0$, 对右端积分运用定理 3.1, 便得

$$\frac{d}{dy} I(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

例 3.3 求积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ 的值.

解 为使积分容易计算, 我们引进一个参变量 y . 考虑含参变量积分

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx.$$

因为函数 $f(x, y) = \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$ 及其关于 y 的偏导数 $f'_y(x, y) = \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ 都在矩形 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上连续, 根据定理 3.3 有

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx = \frac{1}{1+y^2} \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+x^2} - \frac{y}{1+xy} \right) dx \\ &= \frac{1}{1+y^2} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + y \arctan x - \ln(1+xy) \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{1+y^2} \left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} y - \ln(1+y) \right]. \end{aligned}$$

将上式两边关于 y 从 0 到 1 积分, 得

$$\begin{aligned} I(1) - I(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} y - \ln(1+y) \right] dy \\ &= \frac{\ln 2}{2} \arctan y \Big|_0^1 + \frac{\pi}{8} \ln(1+y^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2} dy \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I(1). \end{aligned}$$

因为 $I(1) = I, I(0) = 0$, 所以上式移项便有 $2I = \frac{\pi}{4} \ln 2$. 故

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

作为定理 3.1 和定理 3.3 的推广, 我们研究积分限也含有参变量的积分

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx,$$

其连续性和可微性有以下定理.

定理 3.4 若 $f(x, y)$ 在矩形 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, $\alpha(y), \beta(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 且当 $y \in [c, d]$ 时, 有

$$a \leq \alpha(y) \leq b, \quad a \leq \beta(y) \leq b,$$

则 $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上连续.

证 当 $y, y + \Delta y$ 均属于 $[c, d]$ 时,

$$\begin{aligned} F(y + \Delta y) - F(y) &= \int_{\alpha(y+\Delta y)}^{\beta(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \\ &= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y+\Delta y)} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \\ &\quad - \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\beta(y)}^{\beta(y+\Delta y)} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时, 由于函数 $\alpha(y), \beta(y)$ 连续, 有

$$\alpha(y + \Delta y) \rightarrow \alpha(y), \beta(y + \Delta y) \rightarrow \beta(y).$$

因此上式右端第二个和第三个积分都趋于零. 用类似于定理 3.1 的证明方法易知, 当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时, 上式右端第一个积分也趋于零, 所以 $F(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续.

定理 3.5 若函数 $f(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 都在矩形 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, $\alpha(y), \beta(y) \in C^1[c, d]$, 并且当 $y \in [c, d]$ 时, $a \leq \alpha(y) \leq b, a \leq \beta(y) \leq b$. 那么

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \\ &= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \alpha'(y). \end{aligned}$$

此公式称为莱布尼茨公式.

$$\begin{aligned} \text{证 } F(y + \Delta y) - F(y) &= \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y + \Delta y)}^{\beta(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \\ &= \frac{1}{\Delta y} \int_{\beta(y)}^{\beta(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

先考察上式右端第一个积分. 记 $\Delta \beta = \beta(y + \Delta y) - \beta(y)$, 应用积分中值定理, 得

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{\beta(y)}^{\beta(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx = f(\beta(y) + \theta \Delta \beta, y + \Delta y) \frac{\Delta \beta}{\Delta y}$$

当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时, $\Delta \beta \rightarrow 0$ 且 $\frac{\Delta \beta}{\Delta y} \rightarrow \beta'(y)$, 所以

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_{\beta(y)}^{\beta(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx = f(\beta(y), y) \beta'(y).$$

类似地

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx = f(\alpha(y), y) \alpha'(y).$$

对于(3.1)式右端的第三个积分, 像定理 3.3 一样, 可以证明

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx,$$

因而, 莱布尼茨公式得证.

显然, 定理 3.3 是本定理的特殊情况.

例 3.4 已知 $\varphi(u) = \int_{\sin u}^{\cos u} \frac{1}{1 + (1+u)x^2} dx$, 求 $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u)$.

解 由含参变量积分的连续性(定理3.4), $\varphi(u)$ 在点 $u=0$ 处连续,从而

$$\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = \varphi(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

例3.5 设 $y(x) = \int_x^{x^2} \sin(x-t)^2 dt$, 求 $y'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y'(x) &= \int_x^{x^2} \cos(x-t)^2 \cdot 2(x-t) dt + \sin(x-x^2)^2 \cdot 2x \\ &= -\sin(x-t)^2 \Big|_x^{x^2} + 2x \sin(x-x^2)^2 \\ &= (2x-1) \sin(x-x^2)^2. \end{aligned}$$

例3.6 设 $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha) dx$, 其中 $f(u, v)$ 有连续的偏导数,求 $F'(\alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } F'(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx + f(2\alpha, 0) \\ &= \int_0^\alpha [f'_u(u, v) - f'_v(u, v)] dx + f(2\alpha, 0), \end{aligned}$$

其中 $u = x + \alpha, v = x - \alpha$. 因为

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+\alpha, x-\alpha) = f'_u(u, v) + f'_v(u, v),$$

故 $F'(\alpha)$ 又有另一表达式

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= 2 \int_0^\alpha f'_u(u, v) dx - \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x} f(x+\alpha, x-\alpha) dx + f(2\alpha, 0) \\ &= 2 \int_0^\alpha f'_u(u, v) dx - f(x+\alpha, x-\alpha) \Big|_0^\alpha + f(2\alpha, 0) \\ &= 2 \int_0^\alpha f'_u(u, v) dx + f(\alpha, -\alpha). \end{aligned}$$

习题 13.3

A 类

1. 计算 $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}$.
2. 求 $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+a^2} dx$.
3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, A]$ 上连续, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a), a < x < A.$$

而从教材第 10 章例题 10 可知，由变量替换 $x = \ln t$ ， $y = t^2$ ，得

4. 设 $F(y) = \int_y^2 \frac{\sin(yx)}{x} dx$ ($y > 0$)，求 $F'(y)$.

$$\frac{d}{dy} F(y) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(yx)}{x} \right] \Big|_{x=\ln y} = (\ln y) \cos(y\ln y).$$

5. 设

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx, \quad y > 0.$$

求 $F(y)$.

6. 若 $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y) dy$ ，其中 $f(x)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$.

7. 设 $F(x) = \int_a^b f(y) |x-y| dy$ ，其中 $a < b$ ， $f(x)$ 为可微分函数，求 $F''(x)$.

8. 设 $f(x, y) = y \sin(xy)$ ，求出含参变量积分

的定义域及函数 $I(x)$ 的表达式.

的定义域及函数 $I(x)$ 的表达式.

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{(1+x)e^{2t^2}}.$$

2. 设 $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ，证明

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \neq \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

(提示：因 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续，积分次序未必可交换.)

3. 计算

$$I(\theta) = \int_0^\pi \ln(1 + \theta \cos x) dx \quad (|\theta| < 1).$$

4. 某仪器上有一只圆柱形的无盖水桶，桶高 6 cm，半径为 1 cm，在桶壁上钻有两个小孔用于安装支架，使水桶可以自由倾斜，两个小孔距桶底 2 cm，且两孔连线恰为直径，水可以从两个小孔向外流出，当水桶以不同角度倾斜放置且没有水漏出时，这时水桶最多可装多少水？

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \min\{r \sin \theta, r \cos \theta\} d\theta d\phi.$$

§4 欧拉积分

4.1 Γ 函数

形如

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (s > 0)$$

的含参变量积分称为伽马 (Gamma) 函数, 也叫第二型欧拉 (Euler) 积分.

当 $s - 1 < 0$ 时, $x = 0$ 为被积函数的瑕点, 同时此积分又是无穷限的.

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = I_1 + I_2,$$

对于 I_1 , 当 $x \rightarrow 0$ 时 $x^{s-1} e^{-x}$ 等价于 x^{s-1} , 所以当 $s - 1 > -1$, 即 $s > 0$ 时, I_1 收敛; 当 $s \leq 0$ 时, 积分发散. 对于 I_2 , 由比阶判别法可知它对任意实数 s 都收敛. 所以 $\Gamma(s)$ 当 $s > 0$ 时收敛, 而当 $s \leq 0$ 时发散.

因为

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s\Gamma(s),$$

所以伽马函数有递推公式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0).$$

设 n 为自然数, $n < s \leq n+1$, 即 $0 < s-n \leq 1$, 反复应用递推公式 n 次, 便可得到如下关系式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s(s-1)\Gamma(s-1) = \cdots = s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n).$$

于是, 若已知 $\Gamma(s)$ 在 $0 < s \leq 1$ 中的值, 则 $\Gamma(s)$ 对任何 $s (s > 0)$ 的值均可通过上式算出.

如果 $s = n+1$ 为自然数, 那么

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = n!.$$

这表示 Γ 函数把阶乘运算推广到了非正整数的情况. 又因为 $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ 及 $\Gamma(1) = 1$, 所以 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \Gamma(s) = +\infty$.

如果在 Γ 函数中令 $x = t^2$, 则可以得出 $\Gamma(s)$ 的另一种形式:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} (t^2)^{s-1} e^{-t^2} \cdot 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} t^{2s-1} e^{-t^2} dt.$$

例 4.1 求 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 及 $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$.

解 由 $\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2s-1} e^{-t^2} dt$, 可知

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

为求此积分值, 令 $I = \int_0^A e^{-x^2} dx$, 从而

$$I^2 = \int_0^A e^{-x^2} dx \cdot \int_0^A e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

其中积分区域 $D: 0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq A$ 是一个边长为 A 的正方形, 由于 $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$, 所以

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy < I^2 < \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

式中 $R_1: x^2 + y^2 \leq A^2, x \geq 0, y \geq 0; R_2: x^2 + y^2 \leq 2A^2, x \geq 0, y \geq 0$. 改用极坐标, 上面的不等式就变成

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^A e^{-r^2} r dr < I^2 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2A} e^{-r^2} r dr.$$

积分后可得

$$(z)Tz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-A^2}) < I^2 < \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2A^2}).$$

当 $A \rightarrow +\infty$ 时, 两边的极限都是 $\frac{\pi}{4}$, 从而

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I^2 = \frac{\pi}{4}, \quad (z)Tz = (1+z)Tz.$$

即

$$(n-z)T(n-z) \cdots (1-z)z = \cdots = (1-z)T(1-z)z = (z)Tz = (1+z)Tz.$$

由递推公式得

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105}{16} \sqrt{\pi}.$$

例 4.2 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\text{解 } \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{2}, \quad T = (1)T.$$

例 4.3 计算广义积分 $\int_0^1 (\ln x)^n dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

解 令 $\ln x = -t$, 则

$$\int_0^1 (\ln x)^n dx = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} dt = \left(\frac{1}{2}\right)Tz.$$

$$\cdot (p, q) B \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{1+p+q} = (-1)^n n! .$$

4.2 B 函数

由 $\Gamma(p, q)$ 的定义可知，不破算具同玄函数 $B(p, q)$ 由

形如

$$(1-p, 1-q) B \frac{(1-p)(1-q)}{(1-p+q)(1-p+q)} = (p, q) B$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx .$$

的含参变量积分称为 B 函数，也叫第一型欧拉积分。

先看它的定义域。将 B 函数写成

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx ,$$

当 $p \geq 1, q \geq 1$ 时，右端两个积分都是常义定积分；当 $p < 1$ 时， $x=0$ 是瑕点；当 $q < 1$ 时， $x=1$ 是瑕点。当 $x \rightarrow 0$ 时， $x^{p-1} (1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$ ，所以只有当 $p > 0$ 时右端第一个广义积分收敛。而当 $x \rightarrow 1$ 时， $x^{p-1} (1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$ ，所以只有当 $q > 0$ 时右端第二个广义积分收敛。这说明 $B(p, q)$ 在 $p > 0, q > 0$ 时收敛，其他情况发散。即 B 函数 $B(p, q)$ 的定义域为 $p > 0, q > 0$ 。

B 函数具有对称性： $B(p, q) = B(q, p)$ 。事实上，只要作变换 $x = 1 - t$ 就得到

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = - \int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt = B(q, p). \end{aligned}$$

类似于 Γ 函数，B 函数的递推公式是：

$$B(p+1, q+1) = \frac{q}{p+q+1} B(p+1, q).$$

事实上，利用分部积分法得

$$\begin{aligned} B(p+1, q+1) &= \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = (p, q) B \\ &= \frac{1}{p+1} \int_0^1 (1-x)^q d(x^{p+1}) \\ &= \frac{1}{p+1} x^{p+1} (1-x)^q \Big|_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx &= \int_0^1 [x^p - x^p (1-x)] (1-x)^{q-1} dx \\ &= B(p+1, q) - B(p+1, q+1), \end{aligned}$$

代入上式化简便有递推公式：

$$\Gamma(p+1) = (1+q)T^*(1-q) \frac{q}{p+q+1} B(p+1, q).$$

由 $B(p, q)$ 的对称性并结合递推公式, 可得到如下结果: 当 $p > 1, q > 1$ 时.

$$B(p, q) = \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)} B(p-1, q-1).$$

如果作变量代换 $x = \cos^2 \varphi$, 可得 B 函数的另一种形式:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi.$$

据此可以算出

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

如果作变量代换 $x = \frac{1}{1+t}$, 得

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}(x-1)^{1-q}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$$

在最后一个积分中再作变量代换 $t = \frac{1}{u}$, 则有

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du,$$

于是可得 B 函数的另一种表示形式:

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{t^{p-1} + t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$$

4.3 Γ 函数与 B 函数的关系

定理 4.1 Γ 函数与 B 函数之间具有如下关系:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p > 0, q > 0.$$

证 由于

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2p-1} e^{-t^2} dt, \Gamma(q) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2q-1} e^{-t^2} dt,$$

取 $\Omega = \{(s, t) | 0 \leq s < +\infty, 0 \leq t < +\infty\}$, 则有

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^{+\infty} s^{2p-1} e^{-s^2} ds \int_0^{+\infty} t^{2q-1} e^{-t^2} dt \\ &= 4 \iint_{\Omega} s^{2p-1} e^{-s^2} t^{2q-1} e^{-t^2} ds dt. \end{aligned}$$

作极坐标变换 $s = r \cos \theta, t = r \sin \theta$, 得

$$(1+p, 1+q)B = (p, 1+q)B =$$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \left(\iint_{\substack{0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta dr d\theta \right) \\ &= \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta \right) \left(2 \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr \right) \\ &= B(p, q)\Gamma(p+q).\end{aligned}$$

移项得

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

例 4.4 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \sin^\beta x dx$, $\alpha > -1, \beta > -1$.

解 令 $t = \sin^2 x$, 便得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \sin^\beta x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{\beta-1}{2}} (1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.\end{aligned}$$

注 1 若在例 4.4 中取 $\alpha = \beta = 0$, 立刻得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}\right) B(p, q) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

注 2 若在例 4.4 中取 $\alpha = m, \beta = n$ 为正整数, $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right), \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ 的值可容易算出. 例如(应用 Γ 函数的递推公式)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin^4 x dx &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{5!} = \frac{\frac{15}{8} \sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi}}{2 \cdot 5!} \\ &= \frac{3\pi}{512}.\end{aligned}$$

例 4.5 计算 $I = \int_0^1 x^8 \cdot \sqrt{1-x^3} dx$.

解 作变换 $x^3 = t$, 得

$$I = \int_0^1 x^8 \cdot \sqrt{1-x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t} dt = \frac{1}{3} B\left(3, \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{2! \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{16}{315}.$$

例 4.6 计算 $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

解 令 $x^{\frac{1}{3}} = t$, 即 $x = t^3$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3t^2 dt = 3 \int_0^1 t^{3-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= 3B\left(3, \frac{1}{2}\right) = 3 \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{3 \cdot 2! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

注 3 在 B 函数与 Γ 函数的关系公式基础上, 我们还可以进一步证明一个非常有用的余元公式(证明从略):

$$B(s, 1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad 0 < s < 1.$$

例 4.7 计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$.

解

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}} dx = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

习题 13.4

1. 计算积分 $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$.

2. 计算下列广义积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^3} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} dx, n > 0;$$

$$(4) \int_0^1 (\ln x)^n dx (n \in \mathbb{N});$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

3. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^{2n}} dx;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx.$$

4. 计算曲线 $r^4 = \sin^3 \theta \cos \theta$ 所围图形的面积。

$$5. \text{ 证明 } \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3 + \cos x}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

$$1. \text{ 证明 } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

2. 证明如下公式：

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}} \Gamma(2s).$$

$$3. \text{ 计算积分 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha dx, |\alpha| < 1.$$

部分习题答案与提示

第7章



习题 7.1

A类

$$1. M\left(-\frac{17}{10}, 0, 0\right).$$

$$2. (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

$$3. D\left(\frac{17}{3}, \frac{11}{3}, -1\right).$$

$$4. A(-1, 2, 4), B(8, -4, -2).$$

$$5. \left\{ \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right\}.$$

$$6. \left\{ \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11} \right\} \text{或} \left\{ -\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11} \right\}.$$

$$7. |\overrightarrow{AB}| = 7, \cos \alpha = \frac{2}{7}, \cos \beta = -\frac{6}{7}, \cos \gamma = \frac{3}{7}.$$

8. 45° 或 135° .

$$9. \alpha = 15^\circ, \gamma = -\frac{1}{5}.$$

$$10. (1) 3, \{5, 1, 7\};$$

$$(2) \pm \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}} \right\};$$

$$(3) -18, \{10, 2, 14\};$$

$$(4) \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

$$11. \left\{ \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}} \right\} \text{或} \left\{ -\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}} \right\}.$$

12. 10.

13. 利用 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \mathbf{0}$, 从而 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$, 再分别取模.

14. $\lambda = 2\mu$.

$$15. \theta = \frac{\pi}{3}, \text{Prj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

16. $\pm \left\{ 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\}$

$$\frac{\pi \xi}{\xi} = \theta, \frac{1}{\xi} = \theta \text{ and } \theta$$

17. $\frac{\sqrt{19}}{2}$

$$\frac{\pi}{\phi} = \theta, \frac{\sqrt{3}\eta}{\xi} = \theta \text{ and } \theta$$

18. $V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$, 其中符号的选择必须和行列式的符号一致.

19. 提示: 等式两边与向量 c 作数量积, 从而证明 $[abc] = 0$.

20. 因 $(a \cdot b)^2 + (a \times b)^2 = |a|^2 |b|^2 [\cos^2(\widehat{a, b}) + \sin^2(\widehat{a, b})]$.

B类

1. 设比为常数 k , 则当 $k=1$ 时, 轨迹为一平面, 当 $k \neq 1$ 时, 轨迹为一球面.

2. $\frac{5}{3}\{1, -7, 2\}$.

4. 设 $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则 $|a \cdot b| = |a||b|\cos(\widehat{a, b}) \leq |a||b|$.

5. 分子分母同乘以 $(|a+xb| + |a-xb|)$. 化简后取极限.

A类

1. $6x - 4y + 7z + 7 = 0$.

2. $14x + 9y - z - 15 = 0$.

3. $x + y + z - 12 = 0$.

4. $2x + y - 2z - 15 = 0$.

5. (1) $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, $\begin{cases} x = 4t, \\ y = 4-t, \\ z = -1-5t; \end{cases}$

(2) $\frac{x+5}{3} = \frac{y+8}{2} = \frac{z}{1}$, $\begin{cases} x = 3t-5, \\ y = 2t-8, \\ z = t. \end{cases}$

6. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$ 或 $\begin{cases} x - 4z = +23, \\ 2x - y - 5z = -33. \end{cases}$

7. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

8. $\cos \theta = \frac{1}{2}$. 夹角为 60° (若取其量为反向量则夹角为 120°).

9. $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$$\left\{ \frac{x}{2} + \frac{y}{2}, 0 \right\} \pm \sqrt{3}$$

10. $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

11. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

普通方程为 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$. 其中 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x + 2y + 2z = 0$.

12. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14. $387x - 164y - 24z = 421$ 或 $3x - 4y = 5$.

B类

1. (1) $d = 7$; (2) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-6}$.

面求一式得 $x = 1 - 3t$, 面平一式得 $y = 2 + 3t$, 面 $z = 1 + 5t$.

2. $\begin{cases} y = 2 + 3t, \\ z = 1 + 5t. \end{cases}$

3. $m = 2, n = 1; \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$.

4. $\sqrt{2}$.

5. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-6}{5}$ 或 $\begin{cases} 9x - 2y - 2z + 12 = 0, \\ 4x - 7y + 4z + 31 = 0. \end{cases}$

6. 设平面束方程为 $\lambda(x + 5y + z) + \mu(x - z + 4) = 0$, 由此可算出 $\cos \frac{\pi}{4} =$

$\frac{-27\lambda + 9\mu}{9\sqrt{27\lambda^2 + 2\mu^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 解出 $\lambda = 0$ 或 $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{4}{3}$. 故所求平面为 $x - z + 4 = 0$ 或 $x + 20y + 7z - 12 = 0$.

习题 7.3

A类

1. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

2. $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 25$ 或 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

3. 圆心 $(1, 6, 0)$, 半径为 5.

4. $9x^2 + 25y^2 - 9z^2 + 24xz - 150z - 225 = 0$.

5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z^2 - 1 = 0$.

6. $\pm \sqrt{x^2 + y^2 - z^2} - 1 = 0$, 即 $x^2 + y^2 - z^2 - 2z^2 - 1 = 0$.

7. $xy + yz + zx = 0$.

8. $3x'^2 + 2y'^2 - 4z'^2 = 4$, 或写为 $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{4} = 1$. 单叶双曲面.

(0°或90°的夹角量向量其项带) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. 锥面: $x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0$.

10. $4x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 12$ 或写为标准型 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$. 它是 yz 平面上的椭圆

圆 $\begin{cases} 4x^2 + 3z^2 = 12 \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面.

11. $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$ 在 xy 平面上, 中心为 $(0,0)$, 半径为 $\frac{R}{\sqrt{2}}$ 的圆.

12. $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, \end{cases}$ $x \geq 0$. 它是一段圆弧.

13. $\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$

14. 在 xy 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

在 yz 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} 2y^2 + 2yz + 2z^2 = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

在 zx 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} 2x^2 + 2xz + 2z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

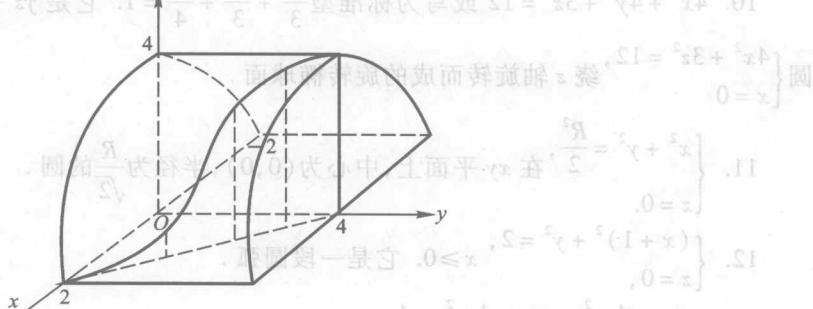
15. 在 xy 平面上投影的柱面方程为 $2x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$. 投影曲线方程为

$\begin{cases} 2x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$ 在 yz 平面上投影的柱面方程为 $y + z = 1 (0 \leq y \leq 1)$. 投影曲线是直线段 $\begin{cases} y + z = 1 (0 \leq y \leq 1), \\ x = 0. \end{cases}$ 在 zx 平面上投影的柱面方程为 $x^2 + 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

16. (1)

第 16 题(1) 的图

(2)



第 16 题(2)的图

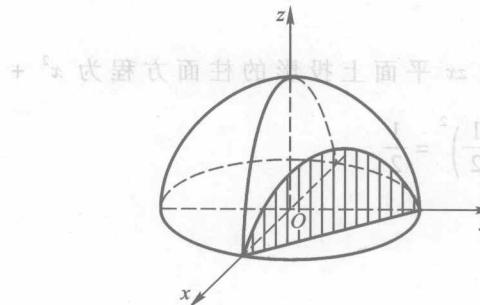
B 类

1. $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - 1 = 0$.

2. $\begin{cases} x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, \\ z = 0. \end{cases}$

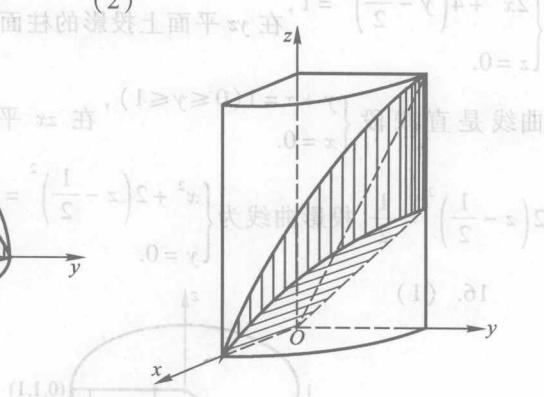
3. $2x^2 + y^2 = 3z.$

4. (1)

解: $(1 \geq t \geq 0) I = z + t$ 

第 4 题(1)的图

(2)



第 4 题(2)的图

5. 过点 A 作两平面的垂线 $\frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{-2}$, 从而求出另外两个切点 $B(-7, 5, 3)$. AB 中点为 $C(-1, 2, 1)$, 球面方程为 $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$.

6. 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 是圆上任一点, 由 P_1 绕轴旋转到空间一点 $P(x, y, z)$, 那么两点与旋转轴的距离相等, 另外由于旋转轴平行于 y 轴, 所以 $y = y_1$, 这样便可以建立起 $P(x, y, z)$ 所满足的方程. 从而求得曲面方程为 $(x + a)^2 + z^2 - (r^2 - y^2) - a^2 = \pm 2a \sqrt{r^2 - y^2}$.

7. 设 $P(x, y, z)$ 为所求曲面上的任一点, 则利用 $\frac{|PO|}{|PA|} = \frac{1}{2}$, 可求得该曲面为

$$\text{球面 } \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{116}{9}.$$

第 8 章

习题 8.1

A 类

1. (1) 有界, 闭区域; (2) 无界, 开区域;
 - (3) 无界, 开区域; (4) 无界, 闭区域;
 - (5) 无界, 闭区域; (6) 无界, 闭区域.
 2. (1) 闭区域, (2) 开区域, (3) 开区域,
 - (4) 闭区域, (5) 闭区域,
 3. (1) $\{(x, y) | x + y \neq 0\}$,
 - (2) $\{(x, y) | xy < 4\}$,
 - (3) $\{(x, y) | x > y, y \geq 0, x^2 + y^2 < a^2\}$,
 - (4) $\{(x, y) | x > 0, y > x + 1 \text{ 或 } x < 0, x < y < x + 1\}$,
 - (5) $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } |y| \leq 1\}$,
 - (6) $\{(x, y) | 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$,
 - (7) $\{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < p, x + y > p\}$.
4. (1) $x^2 \frac{1-y}{1+y}$; (2) $x^3 + 3x^2 + 3x, \sqrt{y} + x - 1$;
 - (3) $t^2 f(x, y)$; (4) $(x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$;
 - (5) $\frac{1}{x^3} - \frac{2}{xy} + \frac{3}{y^3}$; (6) $3(xy+6x+4y)$.
 8. (1) 2, (2) 0, (3) 0, (4) $e^{\frac{1}{a}}$, (5) 2, (6) 0,
 - (7) $a < \frac{1}{e}$, (8) 1, (9) $\ln 2$, (10) 0, (11) 0.
 9. (1) 0, 1 (2) $\frac{1}{2}, 1$ (3) 0, 1 (4) 0, 1 (5) $1, \infty$.
 16. (1) $(0, 0)$; (2) $\{(x, y) | x + y = 0\}$;
 - (3) $\{(x, y) | xy = 0\}$; (4) $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

- 解. (1) $\frac{xe^{x-2y}}{y}$; (2) $\sqrt{x+y-1}, u^2+2u$;
- (3) $\varphi(x) = 1+x$,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{x} \sin x, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0; \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + x^2 + xy - \frac{2y}{x-y} \sin(x-y), & x \neq y, \\ x - y + x^2 + xy, & x = y. \end{cases}$$

3. (1) 0; (2) e^4 ; (3) 0.

习题 8.2

A类

1. (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}$;
- (2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(x+y) + x \cos(x+y), \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(x+y),$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin(x+y),$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x \sin(x+y);$
- (3) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, 0 < x < 1 (t, x)$;
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, x > 0;$
- (4) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln \frac{x}{y},$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln^2 \frac{x}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y} \right)^z;$
- (5) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \left(\frac{x}{y} > 0 \right);$

- (5) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -3xy^2(x^2+y^2)^{-5/2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} - 3y^3(x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3y^5}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3xy^2(x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3y^5}{x^2 + y^2}$$

$$(6) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \sec^2 \frac{x}{y}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \sec^2 \frac{x}{y}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2} \sec^2 \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2xy^{-3} \sec^2 \frac{x}{y} \tan \frac{x}{y}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^3} \sec^2 \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -y^{-2} \sec^2 \frac{x}{y} - 2xy^{-3} \sec^2 \frac{x}{y} \tan \frac{x}{y}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^4} \sec^2 \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy^{-3} \sec^2 \frac{x}{y} + 2xy^{-4} \sec^2 \frac{x}{y} \tan \frac{x}{y}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y^4} \sec^2 \frac{x}{y}$$

$$(7) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (x^2 + y^2)^{-1} - 2y^2(x^2 + y^2)^{-2}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xy(x^2 + y^2)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xy(x^2 + y^2)^{-2}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(8) \frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (1 + xy)e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

$$(9) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2 + 1}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2xy(x^2 + y^2)^{-2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(xb - yb)}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ 且 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2)(yb - xb)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(10) \frac{\partial u}{\partial x} = y^z, x^{y^z-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1} \cdot x^{y^z}, \frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z} \cdot \ln x \cdot \ln y, \text{ 且 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^z(y^z - 1)x^{y^z-2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y^z-1}y^{z-2}z(1 + y^z \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = x^{y^z-1}y^z \ln y(1 + x^{y^z-1}y^z \ln x), \text{ 且 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^{y^z}y^{z-2}z(z - 1 + zy^z \ln x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z, \text{ 且 } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x), \text{ 且 } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x), \text{ 且 } \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x), \text{ 且 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x), \text{ 且 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^{y^z-1}y^{z-1}y^z \cdot z(1 + y^z \ln x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^{y^z} y^{z-1} (1 + z \ln y + z \cdot y^z \cdot \ln x \cdot (\ln y)), \quad = \frac{z^6}{x^6 y^6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^{y^z} y^z \cdot \ln x \cdot \ln^2 y (1 + y^z \ln x), \quad = \frac{z^6}{x^6 y^6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = x^{y^z-1} y^z \ln y (y^z \ln x + 1), \quad = \frac{z^6}{x^6}, \quad = \frac{z^6}{x^6} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = x^{y^z} \cdot y^{z-1} \ln x (z \ln y + z y^z \ln x \cdot \ln y + 1), \quad = \frac{z^6}{x^6 y^6}$$

$$2. \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

$$8. \quad (1) \quad du = mx^{m-1} y^n dx + nx^m y^{n-1} dy,$$

$$d^2 u = m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2 + 2mn x^{m-1}y^{n-1} dxdy +$$

$$n(n-1)x^m y^{n-2} dy^2; \quad = \frac{z^6}{x^6}, \quad = \frac{z^6}{x^6}, \quad = \frac{z^6}{x^6} \quad (8)$$

$$(2) \quad du = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy,$$

$$d^2 u = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [(y^2 - x^2) dx^2 - 4xy dx dy + (x^2 - y^2) dy^2];$$

$$(3) \quad du = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [-2xz dx - 2yz dy + (x^2 + y^2) dz],$$

$$d^2 u = \frac{2}{(x^2 + y^2)^3} [z(3x^2 - y^2) dx^2 + z(3y^2 - x^2) dy^2 +$$

$$8xyz dx dy - 2x(x^2 + y^2) dx dz - 2y(x^2 + y^2) dy dz];$$

$$(4) \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{1+y^2} dy,$$

$$d^2 u = \frac{-2}{(1+x^2)^2} (x dx^2 + y dy^2).$$

$$9. \quad dx - dy, 2(dy - dx)(dy + dz).$$

$$13. \quad (1) \text{ 当 } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + y^2} \varphi(x, y) = 0 \text{ 时, } f(x, y) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 点连续;}$$

$$(2) \text{ 当 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x, 0) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x, 0) \text{ 时, } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ 存在,}$$

$$\text{当 } \lim_{y \rightarrow 0^+} \varphi(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \varphi(0, y) \text{ 时, } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ 存在;}$$

$$(3) \text{ 当 } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, y) = 0 \text{ 时, } f(x, y) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 可微.}$$

习题 8.3

A类

$$1. \quad (1) \quad 2xf'(x^2 + y^2 + z^2), 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

- (1) $4xyf''(x^2 + y^2 + z^2);$
- (2) $\frac{e^x + 3x^2 e^{x^3}}{e^x + e^{x^3}};$
- (3) $(2\sin t + e^t) \cos t + (2e^t + \sin t)e^t;$
- (4) $\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2};$
- (5) $(2xy - y^2) \cos t + (x^2 - 2xy) \sin t, 5(y^2 - 2xy) \sin t + s(x^2 - 2xy) \cos t, x = s \cos t, y = s \sin t;$
- (6) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2;$
- (7) $f'_1 + yf'_2 + yzf'_3, xf'_1 + xzf'_3, xyf'_3;$
- (8) $f''_{11} + \frac{1}{y}f''_{12} + \frac{1}{y}f''_{21} + \frac{1}{y^2}f''_{22}, \frac{2x}{y^3}f'_2 + \frac{x^2}{y^4}f''_{22},$
 $-\frac{1}{y^2} \left(xf''_{12} + f'_2 + \frac{x}{y}f''_{22} \right);$
6. $-\frac{4}{3}x, \frac{5}{3}x, -\frac{4}{3}x.$
7. $h'_1 + h'_2 \frac{\partial f}{\partial x} + h'_3 \left(g'_1 + g'_3 \frac{\partial f}{\partial x} \right), h'_2 \frac{\partial f}{\partial y} + h'_3 \left(g'_2 + g'_3 \frac{\partial f}{\partial y} \right).$
8. $\frac{2b}{a}x, 0, -\frac{2a}{b}x.$
9. 0.
10. $-2f''(2x - y) + g''_{12}x + g'_2(x, xy) + xyg''_{22}(x, xy).$
11. 3.
12. $e^{-\arctan(y/x)} [(2x + y)dx + (2y - x)dy].$
13. $-2e^{-x^2y^2}.$

B类

2. $k_1(x^2 + y^2) + k_2$ (k_1, k_2 为任意常数).
3. (1) $-\frac{1}{2}$; (2) $x^2y + y^2 + 1 - 2x^4.$

习题 8.4

1. (1) $\frac{\cos x}{2\sin y};$ (2) $\frac{-y(xy+2)}{x(xy+3)}.$
2. (1) $\frac{1+y\sin(xyz)}{1-x\sin(xyz)}, \frac{1+x\sin(xyz)}{1-y\sin(xyz)};$ (2) $\frac{y-x\sin(xyz)}{z\sin(xyz)}, \frac{x-y\sin(xyz)}{z\sin(xyz)}.$

$$(2) \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \frac{y^2 - xz}{xy - z^2}; \quad ; (\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y})^n \text{ (4)}$$

$$3. (1) \frac{x+y}{x-y}; \quad (2) \frac{yz}{z^2 - xy}, \frac{xz}{z^2 - xy}; \quad ; \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}}{\frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}} \text{ (5)}$$

$$(3) \frac{-1}{\sin 2z} (\sin 2x dx + \sin 2y dy); \quad ; \frac{-x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (4)}$$

$$(4) \frac{yz}{e^z - xy}, \frac{xz}{e^z - xy}, \frac{-z^3 + 2z^2 - 2z}{x^2(z-1)^3}; \quad ; \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x-y} \text{ (6)}$$

$$(5) -1, -1; \quad ; -1 + \cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}y) + \sin(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}y) \text{ (7)}$$

$$(6) \frac{-2xzy^3}{(z^2 - xy)^3}, \frac{-2yzx^3}{(z^2 - xy)^3}, \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^2}; \quad ; \frac{z^6}{x^6} \text{ (8)}$$

$$(7) \frac{ayz - x^2}{z^2 - axy}, \frac{axz - y^2}{z^2 - axy}, \frac{axz - y^2}{x^2 - ayz}; \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (9)}$$

$$(8) -\tan(x+z) - 1, -\tan(x+z), -\frac{1}{1 + \cot(x+z)}. \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (10)}$$

$$6. -\frac{u+y}{x-y} dx - \frac{v+y}{x-y} dy, \frac{u+x}{x-y} dx + \frac{v+x}{x-y} dy. \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (11)}$$

$$7. \frac{3}{2}(y - x^2), \frac{3}{2}x. \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (12)}$$

$$8. -\frac{z}{2uz+1}, \frac{1}{2uz+1}, \frac{1}{2uz+1}. \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (13)}$$

$$10. \frac{f' \cdot (1+g')}{1+f' \cdot g'}, \frac{-f' \cdot (1+g')}{1+f' \cdot g'}. \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (14)}$$

$$11. (1) \frac{(\sin u + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos v) dy}{x \cos v + y \cos u}, \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (15)}$$

$$-(\sin u - y \cos v) dx + (\sin u + y \cos v) dy; \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (16)}$$

$$(2) \frac{y-z}{x-y}, \frac{xz}{x-y}. \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (17)}$$

$$12. (1) -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \frac{x}{3z+1}; \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (18)}$$

$$(2) \frac{-uf'_1(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1)} - \frac{g'_1(xf'_1 + uf'_1 - 1)}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 \cdot g'_1}; \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (19)}$$

$$(3) \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (20)}$$

$$\frac{\cos v - e^u}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)}, \frac{(\sin v + e^u)}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)}; \quad ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ (21)}$$

$$(4) \frac{lz - nx}{ny - mz}, \frac{mx - ly}{ny - mz}; \quad ; \frac{(zxy) \sin xy + 1}{(zxy) \sin xy - 1}, \frac{(zxy) \sin xy + 1}{(zxy) \sin xy - 1} \text{ (22)}$$

13. $-1, 0, -\frac{4}{5}, \frac{4}{5}$.

习题 8.5

A类

1. (1) $5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$;

(2) $3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1)$.

2. $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$.

3. $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

5. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4}(y^2 - x^2)$. (意即 $x, 0 = z\Sigma + \alpha$ (z, y, x) + (z))

6. $0, 0, 0, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 1$.

7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] + R_2, R_2 = \frac{-1}{3!} \left[\cos \xi \cdot \sin \eta \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + 3 \sin \xi \cdot \cos \eta \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cos \xi \cdot \sin \eta \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin \xi \cdot \cos \eta \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right]$

$(\xi, \eta$ 分别在 x 与 $\frac{\pi}{4}$, y 与 $\frac{\pi}{4}$ 之间).

8. 1. 1021.

9. $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{8}$.

10. $\frac{M}{2}(|h| + |k|)^2$.

8.8 题区

类 A

B类

1. $1 + [2(x-1) - (y-1)] + [10(x-1)(y-1) - 8(x-1)^2 - 3(y-1)^2] + R_2$.

习题 8.6 $\frac{1-z}{1-x} = \frac{1-y}{1-t} = \frac{1-s}{1-t}$ (2)

A类

1. $\cos \alpha + \sin \alpha$. (1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $\frac{5\pi}{4}$; (3) $\frac{3\pi}{4}$ 与 $\frac{7\pi}{4}$.

2. (1) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$; (2) $3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. $\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}.$

9. $\pm \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$

- 10. $\frac{(1-x)u - (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(yzf'_1 + zx f'_2 + xyf'_3)} [(zf'_2 + yf'_3) dx + (zf'_1 + xf'_3) dy + (yf'_1 + xf'_2) dz],$
 $= \frac{u}{yzf'_1 + zx f'_2 + xyf'_3} \{ zf'_2 + yf'_3, zf'_1 + xf'_3, yf'_1 + xf'_2 \} \cdot \frac{1}{\delta} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{1}{\delta} = 1 \cdot \varepsilon$

11. (1) $\frac{2}{9}\mathbf{i} + \frac{4}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k};$

(2) $\{(x, y, z) | 2x = z, y = 0\};$

(3) $\{(x, y, z) | x + 2z = 0, y \text{ 任意}\}.$

12. (1) $12\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 12\mathbf{k};$ (2) $\mathbf{i} + \mathbf{j};$ (3) $\frac{1}{r^2}(xi + yj).$

14. $\{2x_0y_0, x_0^2\}.$

- 15. $\frac{(\frac{\pi}{4}-x)(-\frac{63}{4}\pi)+(\frac{\pi}{4}-x)\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{109} \cdot \sqrt{37}} \cdot \left[\frac{1}{1\varepsilon} + \left(\frac{\pi}{4}-x \right) \frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{1}{1\varepsilon} = \mathbf{A}, \mathbf{B} + \left[\left(\frac{\pi}{4}-x \right) \frac{1}{\varepsilon} \right]$

16. $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, 2\sqrt{5}.$

4. $\frac{1}{5}(-2\mathbf{i} + \mathbf{j}), -\frac{\sqrt{2}}{10}.$

5. $\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} - \frac{1}{27\sqrt{10}}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{10}}{27}\mathbf{k}, -\frac{5\sqrt{10}}{99}.$

6. $\frac{2u}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{当 } a = b = c \text{ 时}, \frac{\partial u}{\partial r} = |\mathbf{grad} u| \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{1}{8} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{8} + \frac{1}{\varepsilon}, 1, 0$

习题 8.7

A类

类 A

1. (1) $\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 1}{3}, 2x - 2y + 3z = \pi - 3;$

(2) $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{2}, x + y + 2z = 4;$

(3) $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z - 3}{-1}, 3x + 3y - z = 3.$

2. $M_1(-1, 1, -1), M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$

3. (1) $\cos \alpha + \sin \alpha; \quad (2) \frac{(\tan \alpha + 1)(1 - \tan \alpha)}{2}$

3. (1) $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-y)$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(2) $3x + 4y + 12z = 169$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$.

4. $x + 4y + 6z = \pm 21$.

7. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

8. (1) $(2, 1)$ 是极小值点, 极小值是 -28 ;

(-2, -1) 是极大值点, 极大值是 28 ;

(2) $(0, 1)$ 是极小值点, 极大值是 0 ;

(3) (a, b) 是极大值点, 极大值是 $a^2 b^2$;

(4) $(0, 0)$ 是极小值点, 极小值是 0 ;

$(0, \pm 1)$ 是极大值点, 极大值是 $\frac{b}{e}$; $\left(0, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

(5) $(3, 2)$ 是极大值点, 极大值是 36 .

9. 该方程确定了两个隐函数, 记为 $z_1(x, y)$ 和 $z_2(x, y)$. $(1, -2)$ 是 $z_1(x, y)$ 的极小点, 极小值为 -2 ; $(1, -2)$ 又是 $z_2(x, y)$ 的极大点, 极大值是 8 .

11. 三角形三边长分别为 $\frac{p}{2}, \frac{3}{4}p, \frac{3}{4}p$.

12. $x_0 = \frac{3a-2b}{2a^2-b^2}, y_0 = \frac{4a-3b}{2(2a^2-b^2)}$ (万尾).

13. $y = -\frac{177}{35}x + \frac{596}{3}$.

15. $\tan \alpha = \frac{2(\bar{xy} - \bar{yx})}{|\bar{x^2} - (\bar{x})^2| - |\bar{y^2} - (\bar{y})^2|}$,

其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \bar{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$,

$$\bar{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \bar{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

16. (1) $z \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2} \right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, 极小值;

(2) $z \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$, 极大值;

(3) $u \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) = -3$ 是极小值,

$$u\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3 \text{ 是极大值.}$$

17. $3, -2$.

$$18. \sqrt{3}, 1.$$

$$19. \frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

$$20. \frac{c}{n} (c = x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

21. 排成 n 排, 每排 $4n$ 个.

22. (1) 电台广告费用 0.75 万元, 报纸广告费用 1.25 万元时利润最大;
 (2) 1.5 万元全部用作报纸广告费用, 利润最大.

B类

$$1. M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

$$2. M(r, r, \sqrt{3}r), \text{ 最大值是 } \ln(3\sqrt{3}r^5).$$

$$6. \text{ 最大值 } f(r, \sqrt{2}r, \sqrt{3}r) = \ln(6\sqrt{3}r^6).$$

$$7. \text{ 分割比例: } \pi : 4 : 3\sqrt{3}.$$

第 9 章

◎

$$(9.1)$$

A类

$$1. \frac{1}{4}.$$

2. 负.

$$3. -\frac{2}{5}.$$

4. 先求出 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 9$ 在 $x^2 + y^2 \leq 4$ 上的最大值和最小值. 于是,

有

$$\int_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \leq \int_D \frac{1}{4} dx dy$$

$$36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy \leq 100\pi.$$

$$5. 0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2.$$

$$6. (\text{利用二重积分的积分中值定理}) 1.$$

$$7. (1) e - 2; (2) \left(2\sqrt{a} - \frac{8}{3}\right) \left(a\sqrt{a}; \frac{\frac{1}{2}}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}\right) \text{ (E)}$$

$$(3) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right); \quad (4) \frac{32}{45} a^5;$$

$$(5) \frac{2}{3}; \quad (6) \frac{27}{64}.$$

8. (利用对称性) $a\pi R^2$.

$$9. \frac{40}{3}.$$

(利用对称性, 曲线 $y = x^2$ 与 $y = 4x$ 的交点是 $(0,0)$ 和 $(1,1)$)

10. (利用积分区域和被积函数的对称性) $\frac{\pi}{2}$.

$$11. (1) \int_{-2}^0 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx +$$

$$\int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx.$$

12. (先画图, 联立方程求出交点 $A(-6, 8), B(2, 0)$)

$$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$13. (\text{可先交换积分次序}) \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

14. -2.

15. (先去掉绝对值) 2π .

$$16. \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\psi^2(\theta) - \varphi^2(\theta)] d\theta.$$

$$17. \frac{\pi}{2}.$$

$$18. \frac{16}{9}a^3(3\pi - 4).$$

$$19. \frac{3}{8}.$$

$$20. \frac{\pi^5}{40}.$$

21. $\frac{R^3}{3} \arctan k.$

$\frac{\pi R^3}{3} (\oplus) \quad : \left(\frac{1}{9} + 1 \right) \frac{1}{3} (\varepsilon)$

22. $\frac{3}{32} \pi a^4.$

$\frac{\pi a^4}{48} (\oplus) \quad : \frac{3}{\varepsilon} (\varepsilon)$

23. $\begin{cases} \text{注意到 } D \text{ 的四条边界曲线方程, 可作变换} \\ u = \frac{y}{x}, \text{ 即} \\ v = xy, \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} \\ 2 \ln 2. \end{cases}$

24. (可作变换 $u = x - y, v = x + y$) $\frac{1}{2} \sin 1.$

25. (可令 $x = \sqrt{r \cos \theta}, y = r \sin \theta$) $\frac{1}{6}.$

1. (将 D 分成四个小区域) 6.

2. 由对称性可知 $\iint_D \cos y^2 d\sigma = \iint_D \cos x^2 d\sigma.$

3. 先证明 $2 \sqrt{xy} + x^2 + 3|xy| + y^2 = (|xy| + 2 \sqrt{|xy|} + 1) + (x^2 + 2|xy| + y^2) - 1 \leq \frac{9}{4}.$

4. (利用积分区域和被积函数的对称性) $\frac{32}{3}.$

5. $\ln \frac{b+1}{a+1}.$

6. (用直线 $y = x$ 将 D 分成 D_1 和 D_2 两部分) e - 1.

7. $\frac{45}{32} \pi.$

8. 用极坐标及定积分的中值定理.

10. $\frac{1}{2}(a+b)\pi R^2.$

习题 9.2

A 类

1. (利用对称性和奇偶性) 0.

2. (利用对称性和奇偶性) 0.

3. $\begin{cases} \frac{4}{3}\pi M, \text{ 当 } f(x, y, z) \text{ 为常数 } M \text{ 时,} \\ \frac{4}{3}\pi f(0, 0, 0), \text{ 当 } f(x, y, z) \text{ 不是常数时.} \end{cases}$

4. (利用对称性) $\frac{1}{8}$. (I) 且, ab(i) $\left\{ \begin{array}{l} = (x)^2 \\ \text{试证函数 } f(x) \text{ 好 } \end{array} \right.$

5. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$. $\frac{\partial \phi}{\partial x}$

6. $\frac{1}{4}\pi R^2 h^2 \sin \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\delta} = \frac{1}{z} \right)$ $\left(z + \bar{z} + x = 0, z - \bar{z} = 0, \bar{z} - x = 0 \right)$

7. $\frac{1}{364}$. 类 A

8. $\frac{1}{48}$.

9. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy$.

10. $\frac{512}{3}\pi$.

11. $\frac{28}{45}$.

12. (用“先 = 后 -”法) $4\pi(e^2 - 1)$. $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, 0 \right)$

13. $\frac{64}{3}\pi$. $\left((\delta \cos \theta + 1) \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, 0, 0 \right)$

14. $\frac{8}{9}a^2$. $\left(0, \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$

15. $\frac{\pi}{4}$. $\frac{1}{12}$

16. $\frac{4\pi a^3}{3}(1 - \cos^4 \alpha)$. $\frac{8}{15}$

17. (利用对称性和奇偶性) $\frac{32}{15}\pi a^3$. $(\delta \cos \theta + 1) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, 0$

18. $\frac{36}{55}\pi$. 类 B

19. (用广义球坐标) $\frac{4}{5}\pi abc$. $\frac{1}{5}\pi$

20. (令 $x = u, y - z = \sqrt{2}v, z = w, J = \sqrt{2}$) 0.

B类

1. $\frac{1}{2} \int_0^a (a - z)^2 f(z) dz$. $(\delta, 0, 0)$

2. (由 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14z \\ x^2 + y^2 + z = 4 \end{cases}$, 解得两曲面的交线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z = 1. \end{cases}$) 37: 27.

3. (设 Q 为 (x_0, y_0, z_0) , 先写出切平面方程和垂线方程) $\frac{40}{3}\pi$.

4. 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 且 $F(1) = \int_0^1 f(x) dx$, $F(0) = 0$.

5. $\frac{\pi a^2 bc}{3h}$.

6. (作变量代换 $u = x - y, v = x - z, w = x + y + z$. $J = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \sin \frac{1}{w} \right)$)

习题 9.3

A 类

1. $2a^2(\pi - 2)$.

2. $4a^2$.

3. $\frac{1}{6}\pi[(1+R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$.

4. $\frac{56}{5}\pi$.

5. $\left(0, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

6. $\left(0, 0, \frac{3a}{8}(1 + \cos \alpha)\right)$.

7. $\left(\frac{9}{7}a, 0\right)$.

8. $\frac{1}{15}$.

9. $\frac{8}{15}\pi$.

10. $\{0, 0, -2\pi Gm_0\mu_0 (\sqrt{b^2 + h^2} - \sqrt{a^2 + h^2} - b + a)\}$, 其中 μ_0 是 Ω 的体密度(常数), G 是引力常数.

B 类

1. $\frac{1}{2}\pi a^2$.

2. $R = \frac{4}{3}a$.

3. $(0, 0, 4)$.

4. $\frac{\pi}{2}ch(R_2^4 - R_1^4)$.

5. (1) $\frac{8}{3}a^4$; (2) $\left(0, 0, \frac{7}{15}a^2\right)$; (3) $\frac{112}{45}\rho$.

6. $\{0, 0, 2\pi G\rho [h + \sqrt{R^2 + (a-h)^2} - \sqrt{R^2 + a^2}]\}$.

第 10 章

习题 10.1

A 类

1. $\frac{8}{3}\sqrt{2}a\pi^3$.

2. $2\pi a^2$.

3. 9

4. 5.

5. $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$ (用球坐标变换. 写出球面三角形三条曲边的方程. 围线的长为 $S = \frac{3\pi}{2}a$. 求得重心坐标 $x_0 = \frac{4a}{3\pi}$, 其余 y_0, z_0 由对称性可直接写出 $y_0 =$

$$z_0 = x_0 = \frac{4a}{3\pi}$$

6. $12a$ (利用对称性).

7. $4R^2$.

8. (1) $-\frac{4}{3}a^3$ (用参数方程); (2) 0.

9. (1) 1; (2) 1.

10. -2π (先将 L 化为参数方程).

11. $-\frac{\pi}{2}a^3$.

12. 0.

13. $\frac{1}{2}$.

14. -2π .

15. (1) $I = \int_L \left[P(x, y) \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} + Q(x, y) \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \right] ds$; $\frac{1}{2} = 2b \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{b^2}}} ds$;

(2) $I = \int_L [P(x, y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x, y)(1-x)] ds$. $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \pi^4$.

B 类

1. $8a$.

2. $2\sqrt{2}\pi$.

3. (1) 2π ; (2) 2π .

4. $\frac{4}{3}\ln(2+2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2} - \ln 2$.

5. (1) 利用 $(P\cos \alpha + Q\sin \alpha)^2 = P^2 \cos^2 \alpha + Q^2 \sin^2 \alpha + 2PQ\cos \alpha \sin \alpha$, 及 $0 \leq (P\sin \alpha - Q\cos \alpha)^2 = P^2 \sin^2 \alpha + Q^2 \cos^2 \alpha - 2PQ\cos \alpha \sin \alpha$. 从而推得 $(P\cos \alpha + Q\sin \alpha)^2 \leq P^2 + Q^2$;

(2) 在 C_R 上 $P^2 + Q^2 = \frac{1}{R^6} \cdot \lim_{R \rightarrow +\infty} |I_R| = 0$.

6. 0(利用积分曲线 L 的上、下两部分的对称性).

习题 10.2

A 类

1. $\frac{1}{420}(125\sqrt{5} - 1)$ (利用对称性可使计算简化).

2. $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$ (注意到 S 关于 xz 平面对称, 且 $xy + yz = (x+z)y$ 是 y 的奇函数).

3. $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3} + 1)$.

4. $\frac{32}{9}\sqrt{2}$.

5. $\frac{8 - 5\sqrt{2}}{6}\pi a^4$.

6. $(\sqrt{3} - 1)\ln 2 + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})$.

7. $2\pi(e - e^2)$.

8. πR^4 .

9. $4\pi q$ (设球心在原点 O , 球半径为 R . 用球坐标, 先写出球面方程).

10. $\frac{4}{3}\pi R^2$ (先注意到 y 关于 xz 平面对称, 再利用球面的对称性).

11. $\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{1}{2}$.

12. -8π .

13. $4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right)$ (可单独计算三个积分, 然后相加).

14. $\frac{1}{6}$.

15. $\frac{abc}{2}$.

B类

1. $\frac{4}{3}abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ (用球坐标及对称性).

2. $4\pi R^2 d^2 + \frac{4}{3}\pi(a^2 + b^2 + c^2)R^4$ (利用对称性).

3. $\frac{\pi}{6} + \frac{3}{5}$.

4. 8π .

5. $\frac{2}{5}\pi abc(a^2 + b^2 + c^2)$ (利用广义球坐标).

6. $\frac{1}{2}\pi r^2 R$.

7. $4\pi(2a^4 - 1) - 2\pi\left[\frac{a^4}{\ln a} - \frac{a^4}{(2\ln a)^2} + \frac{1}{(2\ln a)^2}\right]$.

8. $\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}, I_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}abc$ (用条件极值).

第 11 章

○-----

习题 11.1

A类

1. $\frac{1}{30}$.

2. (1) $\frac{4}{9}$; (2) πa^6 ; (3) -1 ; (4) $\frac{2}{3}$;

(5) 0; (6) $\frac{a^3}{6}$; (7) $-\pi$.

3. (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (2) πa^2 .

4. $\frac{1}{3}[(1+b^2)^{\frac{3}{2}} - (1+a^2)^{\frac{3}{2}}]$.

5. 积分值等于 5.

6. 只需验证场力所做的功为 $W = \int_L (x+y^2)dx + (2xy-8)dy$ 与路径无关.

7. $y + xy + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = C$. (先将方程变形为 $(x^2 + x^3 + y)dx + (1+x)dy = 0$. 验证它是全微分方程, 再用曲线积分法求原函数).

8. 由闭路积分为 0, 故有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即得 $f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) = \frac{\ln x}{x}$. 用降阶法解此线性微分方程的初值问题便得 $f(x) = (x+1)\ln x - 2x + 2$.

B类

$$1. \left(\frac{\pi}{4}a + 2 \right) e^a - 2. \quad (\text{并求该函数的极值}) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$2. \quad \frac{1}{2}(a^2 - b^2). \quad \text{(對應於題目)} \quad \text{A} \left(\frac{c_2 + c_3 + c_4}{3} \right) \pi \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} + \frac{c_3}{3} \pi \frac{4}{5} \pi + \dots$$

$$3. \quad \frac{111}{10}\pi.$$

4. 当 $0 < R < 1$ 时, 积分等于 0; 当 $R > 1$ 时, 积分等于 $-\sqrt{2}\pi$.

5. 设 $P(x, y) = y[e^x - \varphi(x)]$, $Q(x, y) = \varphi'(x) - 2\varphi(x)$. 由题意 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,

从而得二阶常系数线性微分方程 $\varphi'' - 2\varphi' + \varphi = e^x$. 求出 $\varphi(x) = \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$.

$u(x,y) = e^x \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y$. 而积分值等于 $\frac{e}{2}$.

$$6. -4 \text{ (取折线进行积分).}$$

7. 先求出 $Q(x, y) = x^2 + C(y)$, $C(y)$ 待定. 最后得 $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$.

8. 提示: $f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = \frac{1}{2}f(x^2 + y^2)d(x^2 + y^2)$

$$= d \left[\frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u) du \right].$$

习题 11.2

A类

$$1. \quad 2\sqrt{3}\pi. \quad ; \frac{\xi}{\varepsilon}(\xi) \quad ; 1 - (\xi) \quad ; {}^{\text{op}}\pi(\xi) \quad ; \frac{k}{\rho}(1) \quad .$$

$$2. \frac{2}{5}\pi a^5 \text{ (高斯公式).}$$

$$3. \frac{\pi}{4} h^4 \text{ (补面法).}$$

$$4. -\frac{1}{2}\pi h^4 \text{ (补面法).}$$

$$5. \quad 2(e^{2a} - 1)\pi a^2 \text{ (补面法).}$$

6. 0(补面法或直接计算).

7. 0.

8. 当 $a \leq 1$ 时, $I = 0$; 当 $a \geq 1$ 时, $I = 2\pi$.

8. 当 $a < 1$ 时, $I = 0$; 当 $a > 1$ 时, $I = 2\pi$. (提示: 用积分法计算)

B类

$$1. k(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{1}{r} e^r - \frac{2}{r^2} e^r - \frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{r} \quad (\text{其中 } u(r) \text{ 是可降阶的二阶线性微分方程})$$

方程的解, C_1, C_2 为两个任意常数).

2. $-\frac{15}{2}\pi$.

(1) 3. $4\pi(2a^4 - 1) - 2\pi \left[\frac{a^4}{\ln a} - \frac{a^4}{(2\ln a)^2} + \frac{1}{(2\ln a)^2} \right]$.

4. $\frac{1}{2}R\pi^2$ (将 Σ 分为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别计算).

5. $\frac{32}{15}\pi$ (方向导数、两类曲面积分的联系及高斯公式).

6. $u(x) = \frac{e^x}{\frac{2}{5}(e^x - 1)^{5/2} + \frac{2}{3}(e^x - 1)^{3/2} + C}$, $x \geq 0$, C 为任意常数 (先由高斯公式引出伯努利微分方程, 求解可得).

7. 写出 Σ 上任一点 (x, y, z) 处的向外单位法向量. 利用两种类型曲面积分的关系. 再用高斯公式计算, 便可做出估计.

8. $\frac{6}{5} \left(\frac{9}{2}\sqrt{2} - 5 \right) \pi$ (注意: Σ 所围区域 Ω 关于 yz 平面是非对称的, 因此当被积函数关于 x 为奇函数时, 不能得到相应三重积分为 0 的结论).

习题 11.3

A 类

1. $\frac{3}{2}$. 2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2$. 3. -2.

4. 0. 5. $a(3a + b)\pi$

B 类

1. (1) 0; (2) 2π .

2. -4.

3. 利用斯托克斯公式可推得微分方程

$$f'(x) = \varphi(x), \quad \varphi'(x) = x^2 - f(x) \Rightarrow f''(x) = x^2 - f(x).$$

其通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$,

$$\varphi(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x.$$

利用初值条件, 得 $f(x) = \cos x + x^2 - 2$, $\varphi(x) = -\sin x + 2x$.

又因积分与路径无关, 可选取沿折线求积分. 其值 $I = 1$.

习题 11.4

A 类

1. $y e^{xy} - x \sin(xy) - 2xz \sin(xz^2)$.

2. $\{x \sin(\cos z) - xy^2 \cos(xz), -y \sin(\cos z), y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y\}$.

3. 利用 $\mathbf{B} \cdot \nabla = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + b_3 \frac{\partial}{\partial z}$, $\varphi \mathbf{A} = \{\varphi a_1, \varphi a_2, \varphi a_3\}$.

4. 提示: $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x}$.

5. 先算出 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = f''(r) + 2 \frac{f'(r)}{r}$. 再用降阶法解微分方程 $f''(r)$

$+ 2 \frac{f'(r)}{r} = 0$. 求出 $f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$.

B类

1. 提示: 记 $r_1 = \overrightarrow{F_1 P}$, $r_1 = |\mathbf{r}_1|$, $r_2 = \overrightarrow{F_2 P}$, $r_2 = |\mathbf{r}_2|$, 则 $f(P) = r_1 + r_2 = 2C$ (C 为常数). f 在点 P 的梯度与椭球面在点 P 处的外法线方向重合, 即 $\mathbf{n} = \operatorname{grad} f(P)$. 所以只需证明 $\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$ 与 $\frac{\mathbf{r}_2}{r_2}$ 跟梯度 $\mathbf{n} = \operatorname{grad} f(P)$ 成等角. 为此, 可考察

$\mathbf{n} \times \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$ 与 $\mathbf{n} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}$.

2. 提示: 只需注意 $u(x, y, z)$ 的二阶混合偏导数与求导次序无关.

3. (1) $8xyz\mathbf{i} + 4x^2\mathbf{j} + 4x^2y\mathbf{k}$;

(2) 0;

(3) $2z(5x^2 - 2y^2)\mathbf{j} + 2y(5x^2 + 2z^2)\mathbf{k}$.

第 12 章



习题 12.1

A类

1. (1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$;

(2) $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \dots$;

(3) $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots$.

2. (1) $u_n = (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{n}$; (2) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

(3) $u_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{4n-1} \right)^n$; (4) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

3. (1) 收敛, $S = \frac{1}{3}$; (2) 收敛, $S = \frac{1}{5}$; (3) 发散; (4) 收敛, $S = \frac{8}{17}$.

4. (1) $u_n = \frac{1}{3n}$, 发散; (2) $u_n = \frac{n}{n+1}$, 发散;

(3) 收敛, $S = \frac{3}{2}$; (4) 发散; (5) 发散;

$$(6) \text{发散, 提示: 因为 } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1} \text{发散.}$$

B类区

1. 提示: $\sigma_n = \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k-1}) = u_1 + u_2 + \dots + u_n - nu_{n+1}$
2. 提示: 因 $|u_n| = \left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$, 故 $|S_{n+p} - S_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n}$
4. 由 $|S_{2n} - S_n| = \left| \sin \frac{1}{n+1} + \dots + \sin \frac{1}{n+n} \right| > n \sin \frac{1}{2n}$ 证之.

习题 12.2

A类

1. (1) 发散; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛;
(5) $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散; (6) 收敛;
(7) 收敛; (8) 收敛.
2. (1) 收敛; (2) 当 $0 < a < 1$ 时收敛, 当 $a \geq 1$ 时发散; (3) 收敛;
(4) 收敛; (5) 发散; (6) 收敛.
3. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 发散.
4. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; 提示: $0 < u_n < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

B类

1. 提示: 利用 $\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$, $\frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2} \right)$ 等证之.
2. 提示: 利用比值法证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ 收敛, 从而 $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.
3. 提示: 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}|1-q|$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln u_n}{\ln n} = q$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $(q - \varepsilon) \ln n < -\ln u_n < (q + \varepsilon) \ln n$. 故当 $q > 1$ 时, 有 $P = q - \varepsilon = \frac{1}{2}(1+q) > 1$, $u_n < \frac{1}{n^p}$; 当 $0 < q < 1$ 时, 有 $P = q + \varepsilon = \frac{1}{2}(1+q) < 1$, $u_n > \frac{1}{n^p}$.
4. 提示: 由 $u_n = u_1 \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \dots \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{u_1}{v_1} \cdot v_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \dots$

$$\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{u_1}{v_1} \cdot v_n \text{ 证之. } = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{v_1^2}}} - \frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{1}{v_1^2}}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \text{ 读因: 示壁, 赖类 (d)}$$

习题 12.3

A 类

1. (1) 条件收敛; (2) 条件收敛;
(3) 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 当 $0 < p < 1$ 时, 条件收敛;
2. (4) 条件收敛; (5) 条件收敛; (6) 发散.
2. (1) 绝对收敛; (2) 条件收敛; (3) 绝对收敛;
(4) 当 $0 < q \leq 1$ 时绝对收敛; 当 $q > 1$ 时, 发散.

B 类

2. $a > 1$ 时绝对收敛, 当 $0 < a \leq 1$ 时, 条件收敛.
3. 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 当 $0 < p < 1$ 时条件收敛.

习题 12.4

A 类

1. (1) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; (2) (e^{-1}, e) ; (3) $(0, +\infty)$;
(4) $(-\infty, +\infty)$; (5) $(-\infty, +\infty)$; (6) $(-\infty, +\infty)$.
3. 提示: $|u_n(x)| \leq \left| \frac{x}{3} \right|^n$, 可证级数在 $[-R, R]$ 内一致收敛, 其中 $R < 3$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

B 类

1. 0.

2. 提示: 由 $\left\{ u_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} \right\}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛于零 ($\lim_{x \rightarrow 0^+} u_n(x) = 1$)

证之.

4. 提示: 因为 $\ln(1+x^2) < x$ ($x > 0$), 故 $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n^3} \cdot \ln(1+n^2) \leq \frac{1}{n^2}$ ($|x| \leq 1$).

习题 12.5

A 类

1. (1) $R = 1, (-1, 1)$; (2) $R = 1, [-1, 1]$; (3) $R = 1, (-1, 1]$;
(4) $R = 1, [4, 6)$; (5) $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$;
(6) $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$.
2. (1) $S(x) = -\ln(1-x)$, $x \in [-1, 1)$;
(2) $S(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$, $x \in (-1, 1)$;

$$(3) S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1). \quad (1-)$$

B类

$$1. (1) \text{ 提示: 令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} (-1 < x < 1) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1} dt \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \text{ 原级数之和 } = \frac{1}{2} S\left(\frac{1}{2}\right) = 2;$$

$$(2) \text{ 提示: 令 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1} = S(0) + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) dx = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} (-1 < x < 1), \text{ 原级数之和 } = \sqrt{2} S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2});$$

$$(3) \text{ 提示: 令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n-2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} (-1 < x < 1), \text{ 原级数之和 } = \frac{1}{2} S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3;$$

$$(4) \text{ 提示: 令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = S(0) + \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \right] dx = 0 + \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) (-1 < x \leq 1), \text{ 原级数之和 } = S(1) = \ln 2.$$

习题 12.6 (1-)

A类

$$1. (1) \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) \ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{a} \right)^n, x \in (-a, a];$$

$$(3) a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(4) \sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(5) \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{2^n} \right] x^n, x \in (-1, 1);$$

$$(6) \arctan \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1, 1);$$

$$(7) e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(8) \cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$2. (1) \frac{1}{3-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (x-1)^n, x \in (-1, 3);$$

$$(2) \ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{(x-2)^n}{2^n}, x \in (0, 4];$$

$$(3) \lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n, x \in (0, 2];$$

$$(4) \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n, x \in (-1, 3);$$

$$(5) \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\sqrt{3} \cdot \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n}}{(2n)!} \right], x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(6) e^x = e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(7) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n}}{(2n)!} \right], x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(8) \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \cdot (x-1)^{n-1}}{2^{n+1}}, x \in (-1, 3).$$

B类

$$1. (1) \int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot n! \approx \sum_{n=0}^6 \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot n! \approx 0.7486 \left(|r_7| \leq \frac{1}{15 \cdot 7!} < 10^{-4} \right);$$

$$(2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} \approx$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 \cdot 8} + \frac{1}{5^2 \cdot 32} \approx 0.487 \left(|r_3| \leq \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} < 10^{-3} \right).$$

$$2. \frac{\ln x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \cdot (x-1)^n, x \in (0, 2). 提示: \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-1)^n, x \in (0, 2), \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n, x \in (0,$$

2], 由柯西乘积, 有 $\frac{\ln x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n, x \in (0, 2)$, 其中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots$

$+ a_{n-1}b_1 + a_n b_0, a_n = (-1)^n (n=0, 1, 2, 3, \dots), b_0 = 0, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} (n=1, 2, 3, \dots).$

习题 12.7

A类

$$1. (1) f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \sin nx}{9n^2 - 1}, (-\infty < x < +\infty, x \neq \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots);$$

$$(2) f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos nx, (-\infty, +\infty);$$

$$(3) f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cos nx, (-\infty, +\infty);$$

$$(4) f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n] \cdot \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right\}, (-\infty < x < +\infty, x \neq \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots).$$

$$2. (1) f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \cos n\pi x, (-\infty < x < +\infty);$$

$$(2) f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{16}{n^2 \pi^2} \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} \right), (-\infty < x < +\infty, x \neq \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots);$$

$$(3) f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{3} + \frac{6}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin \frac{n\pi x}{3} \right\}, (-\infty < x < +\infty, x \neq \pm 3, \pm 9, \pm 15, \pm 21, \dots);$$

$$(4) f(x) = \frac{e-1}{2} + (e-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (2n\pi)^2} [\cos(2n\pi x) - 2n\pi \sin(2n\pi x)], (-\infty < x < +\infty, x \in \mathbb{Z});$$

$$\text{提示: } 2l = 1, a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx, a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^l \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot$$

$$\cos 2n\pi x dx, b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^l \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot \sin 2n\pi x dx.$$

$$3. (1) f(x) = \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} \cos nx + \left[\frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{1 + n^2} + \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} \right] \sin nx \right\}, (-\pi, \pi);$$

$$(2) f(x) = -\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3}{n^2 \pi^2} [1 + (-1)^{n-1}] \cos \frac{n\pi x}{3} + \right\}$$

$$\text{E.C. } f(x) = \frac{1 - (-1)^{n-1} + 3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3}, ((-3, 3)) \quad (\text{A. 由 } f(0) = 3, f'(0) = 0)$$

$$4. \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, (0, \pi].$$

$$5. 2x + 3 = \pi + 3 - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, [0, \pi].$$

$$6. f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}, [0, l].$$

B类 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$, 均方差

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4} (A_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2],$$

其中 $a_k (k=0, 1, 2, \dots, n)$ 与 $b_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是 $f(x)$ 的傅氏系数。当 $A_k = a_k (k=0, 1, 2, \dots, n)$ 且 $B_k = b_k (k=1, 2, \dots, n)$ 时, δ_n^2 取最小值, 此时

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

2. 提示: 由上式推出贝塞尔不等式.

第 13 章

习题 13.1

$$- (\pi \sin x) \cos x = \frac{1}{(\pi \sin x) + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1-x}{\sin x} = (\text{x}) \setminus (\text{b})$$

$$1. -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$2. \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin x} \sin x = \frac{1}{\pi} = \text{常数}$$

$$3. \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \text{ (两次分部积分).}$$

$$4. \pi - 2 \ln 2 \text{ (利用 } \ln \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x\text{).}$$

$$5. \text{收敛} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x^4}} \leq \frac{1}{x^3} \right), \text{由 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1-x(1-x)+1}{x} + \frac{x-x \sin^2(1-x)+x-1}{x+1} \right]$$

$$6. \text{收敛} \left(\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} (x \geq 1) \right), \text{由 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{n^2}$$

7. $a=1$ (令 $u=x^2$, 可求出 $\int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right)$).

8. $\frac{m}{k}v_0$. (提示: 设船速为 $v(t)$, 阻力常数为 k , 轮船的质量为 m , 则可利用牛顿第二定律求出 $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}$. 而路程 $s = \int_{t_0}^{+\infty} v(t) dt$.)

B类

1. $a=b=0$ (提示: 先证明 $b-a=0$, 再利用 $\frac{a}{2x^2+ax} = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a}$).

2. 收敛. (提示: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$).

3. 收敛. (提示: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 所以

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} \left[1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

从而 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x} \sim \frac{1}{2x^2}$ ($x \rightarrow +\infty$)).

4. 当 $k > 1$ 时, 广义积分收敛, 其值 $I(k) = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, ($k > 1$). 应用导数 $I'(k)$ 可求出 $k-1-\frac{1}{\ln \ln 2}$ 时, $I(k)$ 最小.

习题 13.2

A类

1. $1 + \ln x$. 提示: 将区间 $[1, 3]$, 分成 $[1, 2-\varepsilon]$ 和 $[2+\varepsilon, 3]$.

2. $x=e$ 为间断点. 积分值等于 $\frac{\pi}{2}$.

3. (1) 收敛; (2) 收敛 (注意: 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}$, 所以 $x=1$ 不是瑕点);

(3) 收敛. 提示: $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$, 当 $x \rightarrow 1^-$;

(4) 收敛. 提示: $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, 当 $x \rightarrow 0^+$; $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi-x}}$, 当 $x \rightarrow \pi^-$;

(5) 发散.

4. 提示: 作变换 $\frac{1}{x} = t$, 用比较判敛法证明 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}} dt$ 绝对收敛, 用反证法,

利用柯西收敛准则可证明原积分当 $p \geq 2$ 时发散.

5. 1. 提示: 用换元法, 令 $\frac{1}{x} = t$.

B类

1. $\arctan 2 + \arctan \frac{4}{3} - \pi$. 提示: 将 $[1, 3]$ 分成 $[1, 2], [2, 3]$.

2. 当 $p > 0, q > 0$ 时, 积分收敛, 其余情况发散. 提示: 分别讨论瑕积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \text{ 和 } \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

3. 收敛. 提示: 分别讨论两个瑕积分.

4. 提示: $x=0$ 为瑕点. 分别证明瑕积分 $\int_0^1 \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx$ 绝对收敛 (利用

$\left| \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, 当 $x \rightarrow 0$) 与无穷限积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx$ 绝对收敛 (利

用 $\left| \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} \right| \sim \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$, 当 $x \rightarrow +\infty$).

习题 13.3

1. $\frac{\pi}{4}$ (先说明含参变量积分 $F(a) = \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}$ 是 a 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数).

2. 1.

3. 提示: 因 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上连续, 所以在 $[a, A]$ 上存在原函数 $F(x)$.

4. $\frac{1}{y}(3\sin y^3 - 2\sin y^2)$.

5. $\frac{2}{y} \ln(1+y^2)$.

6. $3f(x) + 2xf'(x)$.

7. 当 $x \in (a, b)$ 时, 用 x 将 (a, b) 分成两个区间求得 $F''(x) = 2f(x)$. 当 $x \leq a, F''(x) = 0$; 当 $x \geq b$ 时, $F''(x) = 0$.

8. $I(x) = \begin{cases} -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(提示: 分情况 $x \neq 0, x = 0$ 分别计算.)

B类

1. 0.

2. 先求出 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$. 然后分别计算左端和右端.

3. 对于任意满足 $|\theta| < 1$ 的 θ , 必有正数 a , 使得 $|\theta| \leq a < 1$. 先算出 $I'(\theta) = \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta \sqrt{1 - \theta^2}}$. 再将其对 θ 积分得

$$I(\theta) = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - \theta^2}) + C.$$

由 $I(0) = 0$, 定出 $C = -\pi \ln 2$. 故得

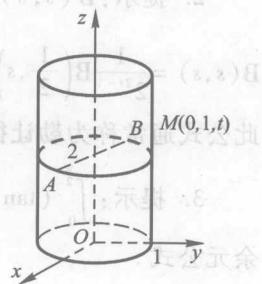
$$I(\theta) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \theta^2}}{2}.$$

(这里先求导, 再积分的方法不是回到原来的出发点, 而是解决了问题).

4. 建立坐标系如图. 设两孔位置为 $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 0, 2)$. 桶向 y 轴倾斜时, 水面所在平面经过 A, B 及点 $M(0, 1, t)$ ($2 \leq t \leq 6$), 平面方程为 $(t-2)y - z + 2 = 0$.

0. 设水桶中水的容积为 $V(t)$, 则

$$V(t) = \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1, \\ y \geq \frac{2}{t-2}}} [(t-2)y + 2] dx dy,$$



令 $V'(t) = 0$, 得 $t = 4$, 比较 $V(4), V(6), V(2)$ 得

$$V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi.$$

第4题的图

习题 13.4

A类

1. $\frac{\pi}{8}$.

2. (1) $\frac{\pi}{8}$. 提示: 可作代换 $x^2 = y$;

(2) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 提示: 用代换 $x^3 = t$, 再作代换 $\frac{t}{1+t} = u$;

(3) $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$;

(4) $(-1)^n n!$. 提示: 可令 $\ln x = -t$;

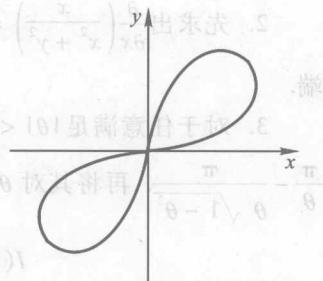
(5) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. 提示: 利用 B 函数与 Γ 函数之间的关系.

3. (1) $\frac{1}{3}$. 提示: 先令 $x^{2n} = t$, 再利用 $\Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的连续性.

(2) 1. 令 $t = x^n$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$. 提示: 用极坐标形式的面积公式.

5. 提示: 先令 $u = \cos^2 \frac{x}{2}$, 然后可再作代换 $t = u^2$.



第 4 题的图

B 类

1. 提示: 可先令 $t = x^4$, 再用余元公式.

2. 提示: $B(s, s) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{\frac{s-1}{2}} dx$, 作变换 $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$, 得

$B(s, s) = \frac{1}{2^{2s-1}} B\left(\frac{1}{2}, s\right)$. 再利用 B 函数与 Γ 函数的关系便可得到要证的公式, 此公式通常称为勒让德(Legendre)公式.

3. 提示: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\alpha} x \sin^\alpha x dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$. 再利用余元公式.

圆的面积

$$\pi \frac{\delta}{\xi} + \frac{\overline{\delta}}{\xi} =$$

4.81 跟踪

类 A

$$\frac{\pi}{8}$$

$$; \epsilon = \frac{\pi}{8} \text{ 的几何意义: 示意图 } \frac{\pi}{8} (I) \quad (2)$$

$$; x = \frac{1}{1+\epsilon} \text{ 的几何意义: 示意图 } \frac{\pi \epsilon}{1+\epsilon} (2)$$

$$\frac{\pi}{8} (2)$$

$$; \epsilon = x \text{ 的几何意义: 示意图 } \ln(1-x) (2)$$