第13章　非正弦周期电流电路和信号的频谱

本章重点

● 重点

1. 周期函数分解为傅里叶级数

2. 非正弦周期函数的有效值和平均功率

3. 非正弦周期电流电路的计算

13.1 非正弦周期信号

生产实际中，经常会遇到非正弦周期电流电路。在电子技术、自动控制、计算机和无线电技术等方面，电压和电流往往都是周期性的非正弦波形。

- **非正弦周期交流信号的特点**

(1) 不是正弦波

(2) 按周期规律变化 → $f(t) = f(t + nT)$

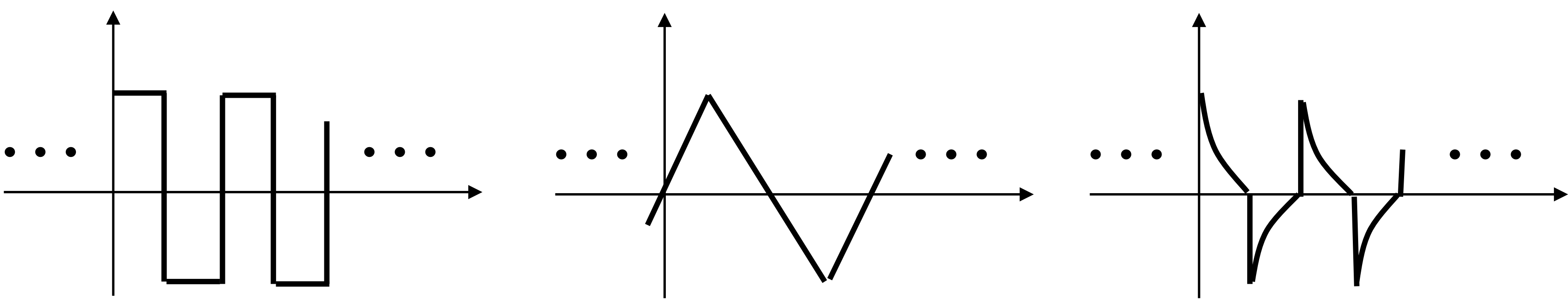
周期性非正弦激励下电路的稳态分析

周期性非正弦激励

发电机发出的电压波形不是理想的正弦波

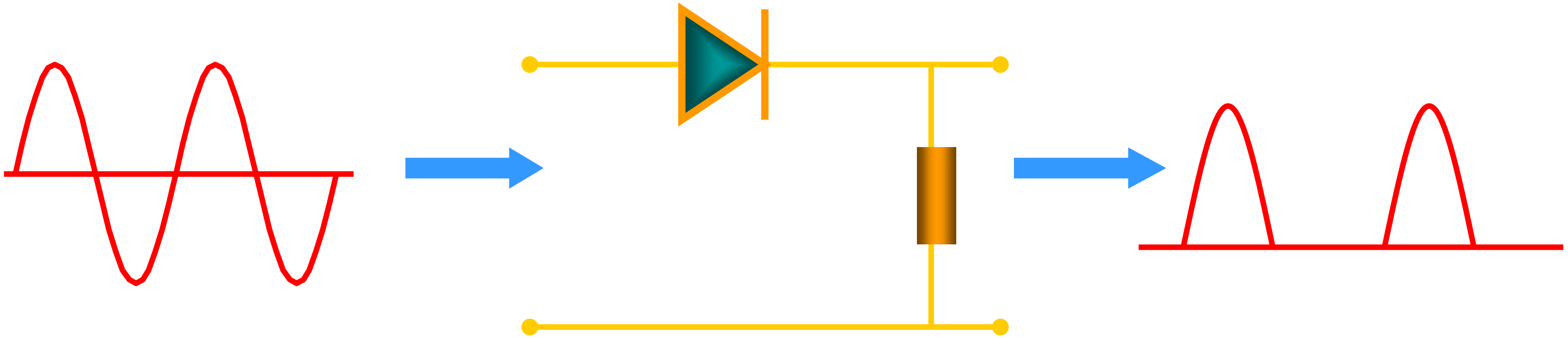
信号处理技术中有大量的周期性非正弦信号

当电路中存在非线性元件时，即使激励是正弦的，也会产生非正弦电压和电流

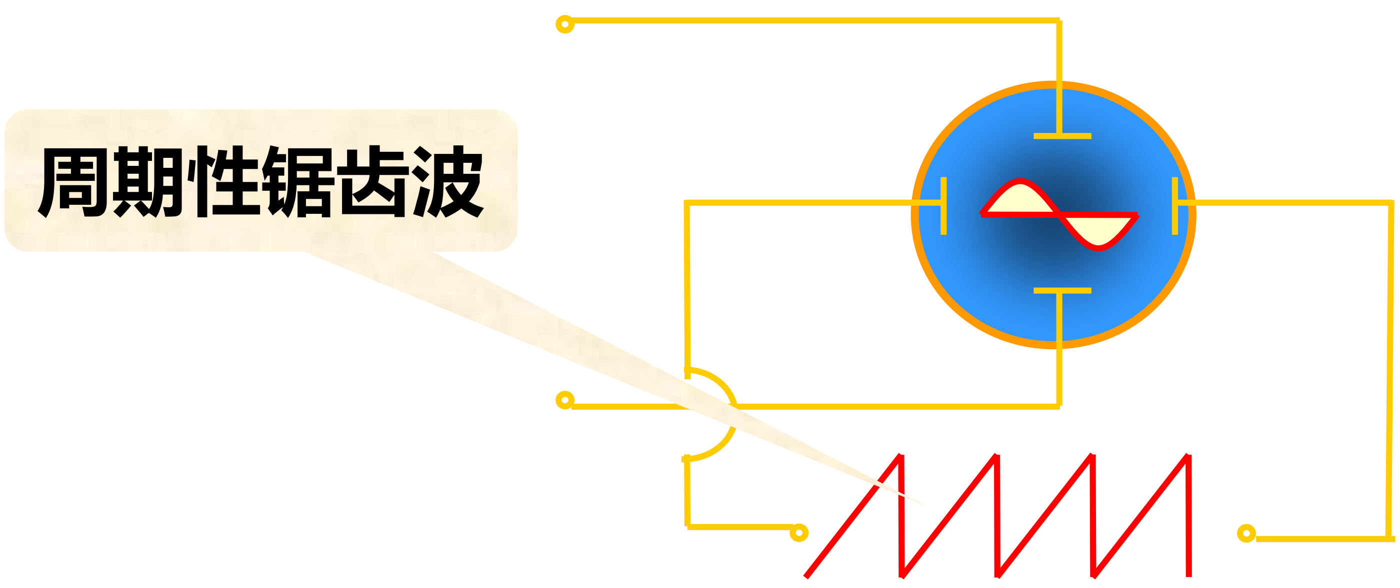


方波　　三角波　　脉冲

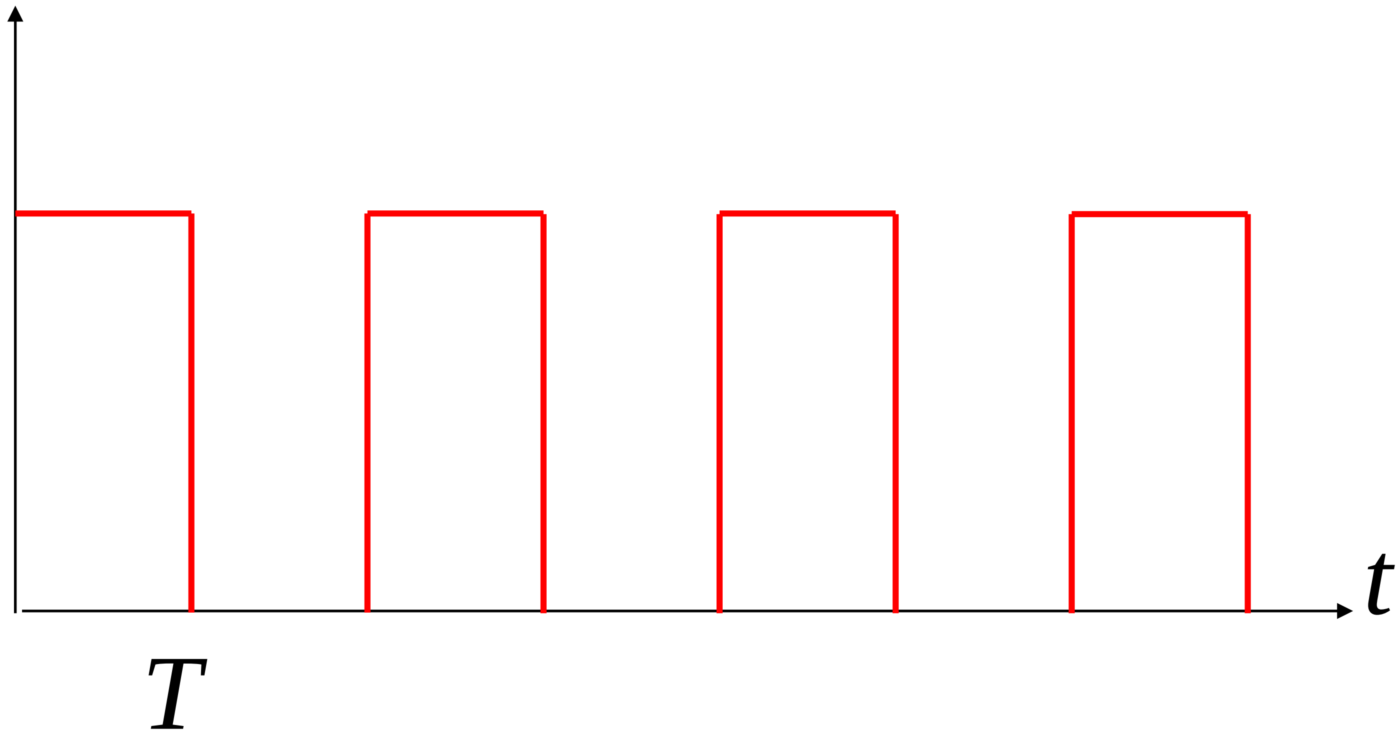
例1　半波整流电路的输出信号



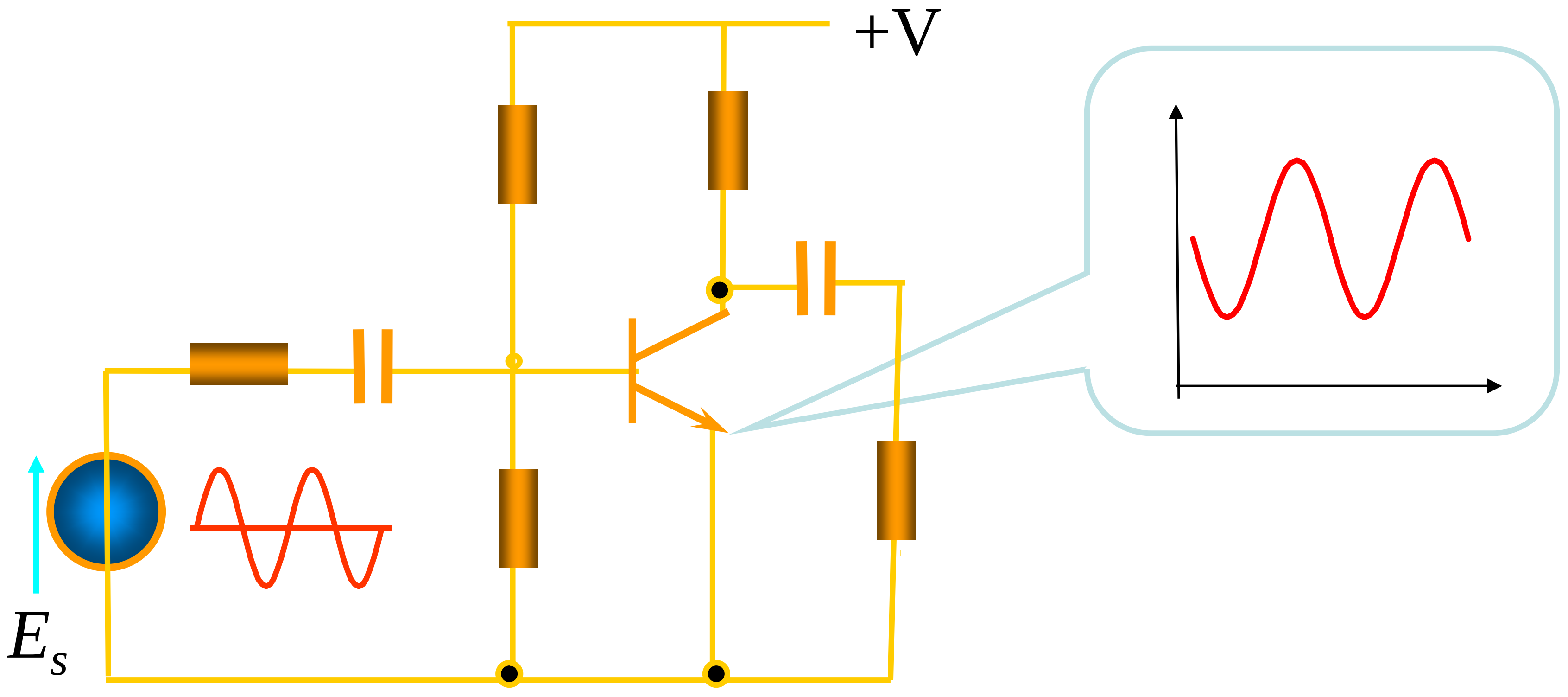
例2　示波器内的水平扫描电压



例3 脉冲电路中的脉冲信号



例4　交直流共存电路



13.2 周期函数分解为傅里叶级数

若周期函数满足狄利赫利条件：

①周期函数极值点的数目为有限个；

②间断点的数目为有限个；

③在一个周期内绝对可积，即：

$$\int_0^T \left|f(t)\right| \, \mathrm{d}t < \infty$$

可展开成收敛的傅里叶级数

注意 一般电工里遇到的周期函数都能满足狄利赫利条件。

周期函数展开成傅里叶级数：

直流分量

$$f(t) = A_0 + A_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) +$$

基波（和原函数同频）

$$+A_{2m}\cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \cdots$$

二次谐波（2倍频）

$$+A_{nm}\cos(n\omega_1 t + \varphi_n) +$$

高次谐波

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\cos(k\omega_1 t + \phi_k)$$

$A_{km}[\cos k\omega_1 t \cos\varphi_k - \sin k\omega_1 t \sin\varphi_k]$

也可表示成：

$$A_{km}\cos(k\omega_1 t + \varphi_k) = a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t]$$

系数之间的关系为：

a_k

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k = A_{km}\cos\varphi_k \qquad b_k = -A_{km}\sin\varphi_k \\ \varphi_k = \arctan\dfrac{-b_k}{a_k} \end{cases}$$

系数的计算：

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

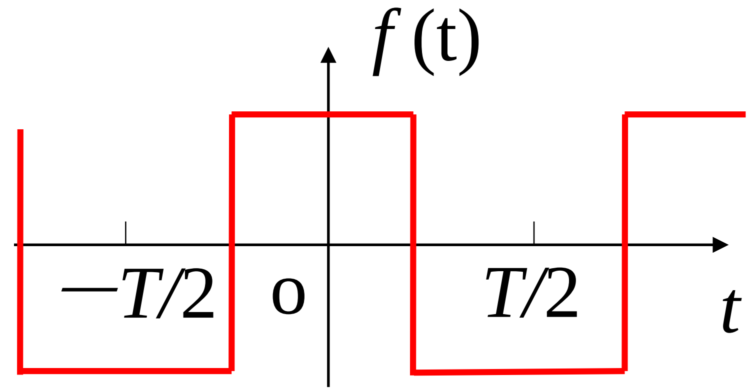
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

求出A_0、a_k、b_k**便可得到原函数** $f(t)$ **的展开式。**

注意 利用函数的对称性可使系数的确定简化

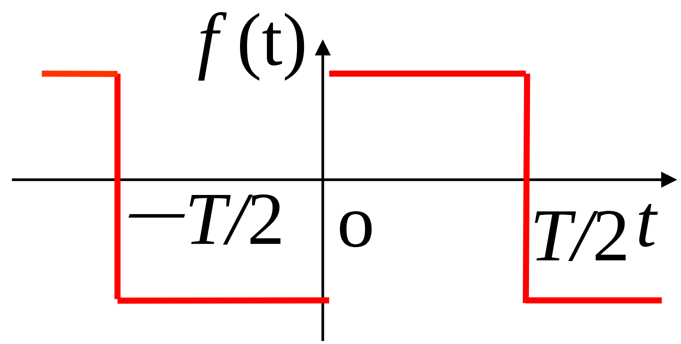
①偶函数

$$f(t) = f(-t)$$
$$b_k = 0$$



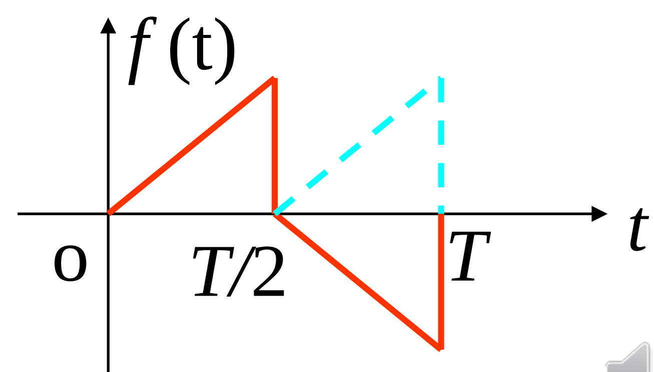
②奇函数

$$f(t) = -f(-t) \quad a_k = 0$$



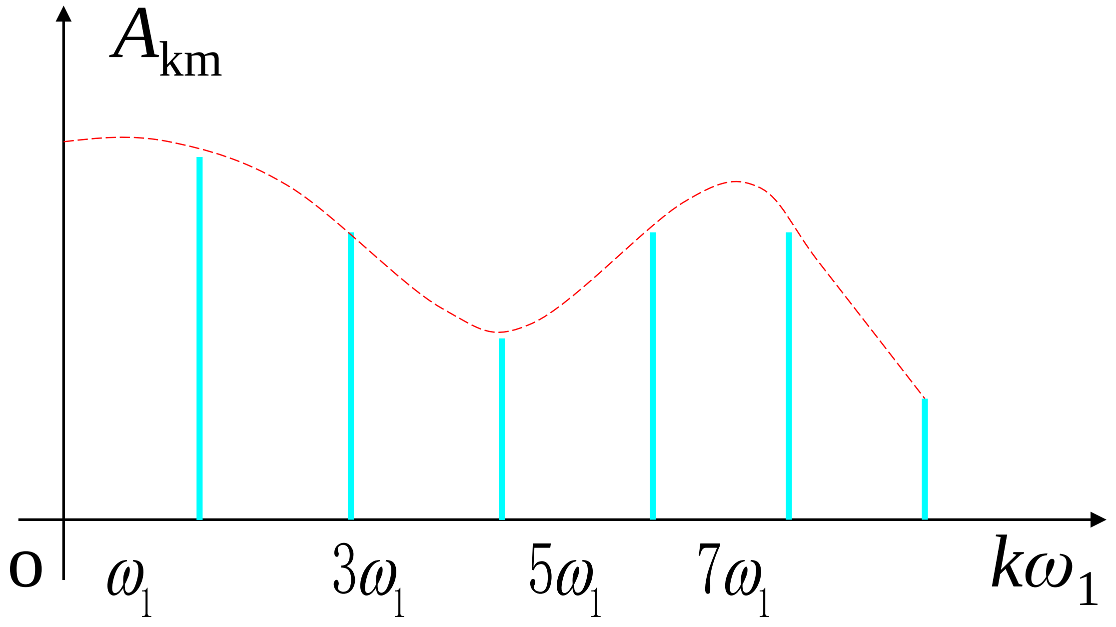
③奇谐波函数

$$f(t) = -f(t + \frac{T}{2}) \qquad a_{2k} = b_{2k} = 0$$



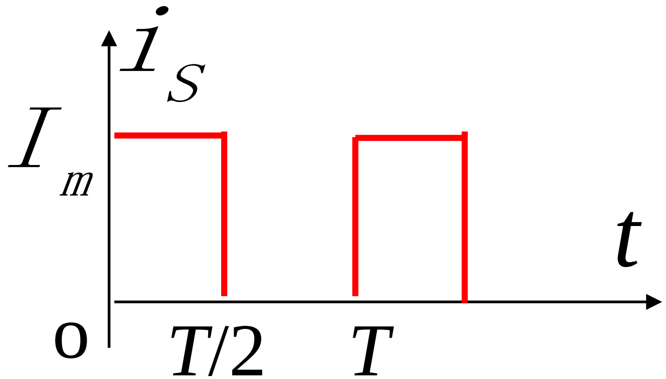
周期函数的频谱图：

幅度频谱 → $A_{km} \sim k\omega_1$ 的图形



相位频谱 → $\phi_k \sim k\omega_1$ 的图形

例1　**周期性方波信号的分解**



$$i_S(t)=\begin{cases} I_m & 0<t<\dfrac{T}{2} \\ 0 & \dfrac{T}{2}<t<T \end{cases}$$

解　**图示矩形波电流在一个周期内的表达式为：**

直流分量： $I_0=\dfrac{1}{T}\int_0^T i_S(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m\,\mathrm{d}t=\dfrac{I_m}{2}$

谐波分量： $b_K=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$

$$=\frac{I_m}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos k\omega t\right)\Big|_0^{\pi}=\begin{cases} 0 & K\text{为偶数} \\ \dfrac{2I_m}{k\pi} & K\text{为奇数} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\cos k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{2I_m}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\sin k\omega t\,\Big|_0^{\pi} = 0$$

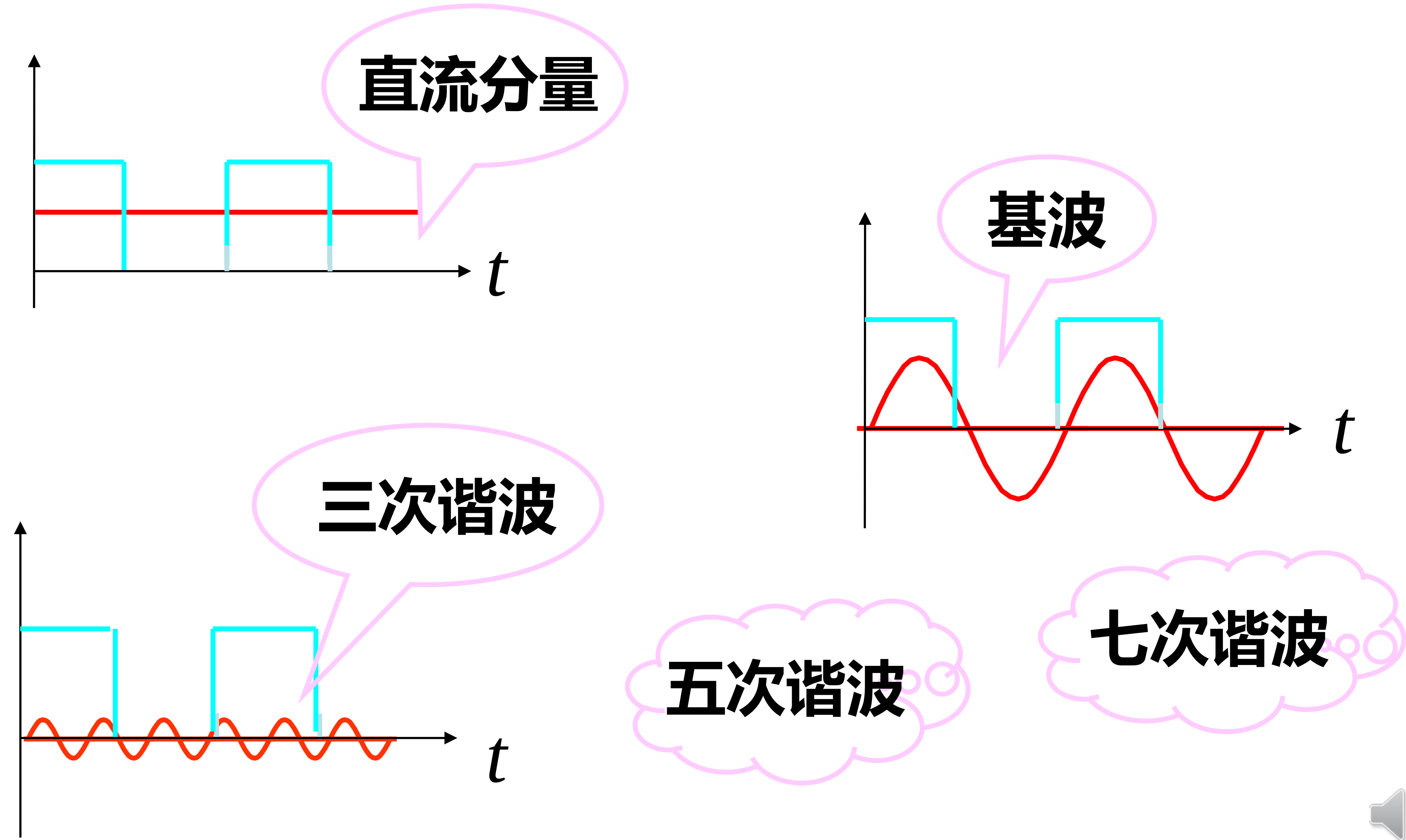
$$A_k = \sqrt{b_k^2 + a_k^2} = b_K = \frac{2I_m}{k\pi}$$ **(k为奇数)**

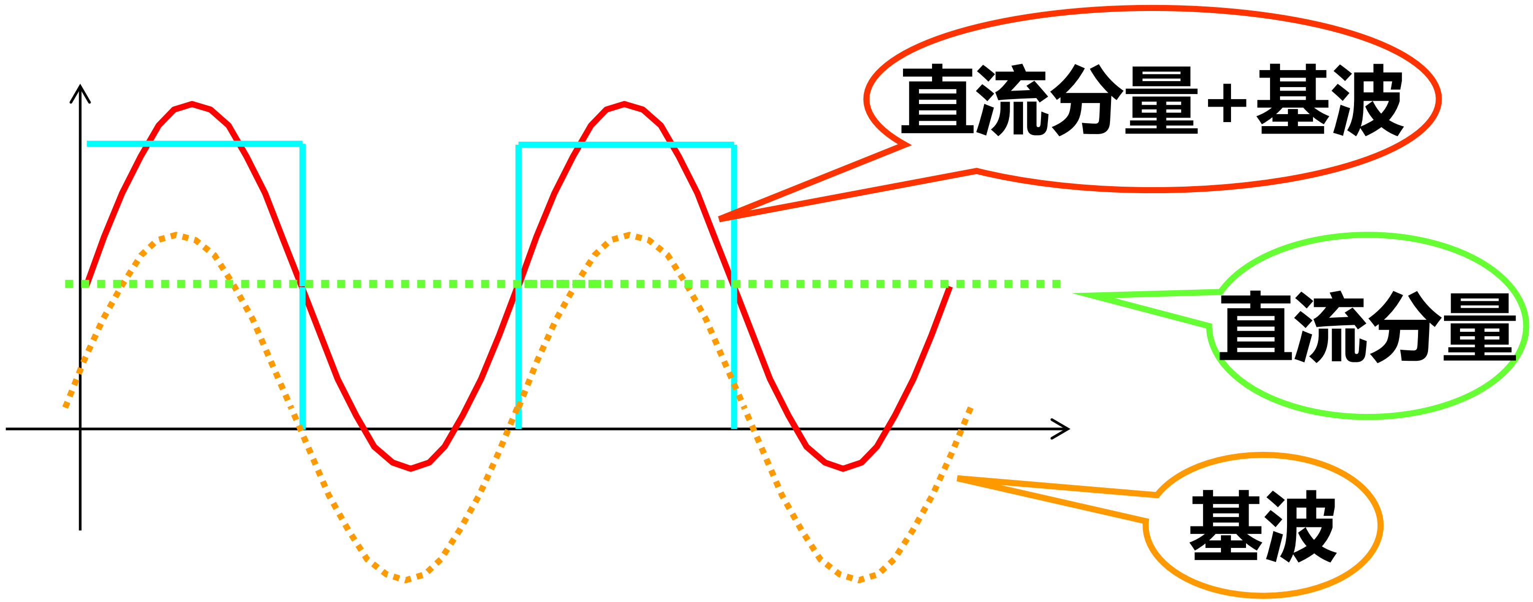
i_S**的展开式为：**

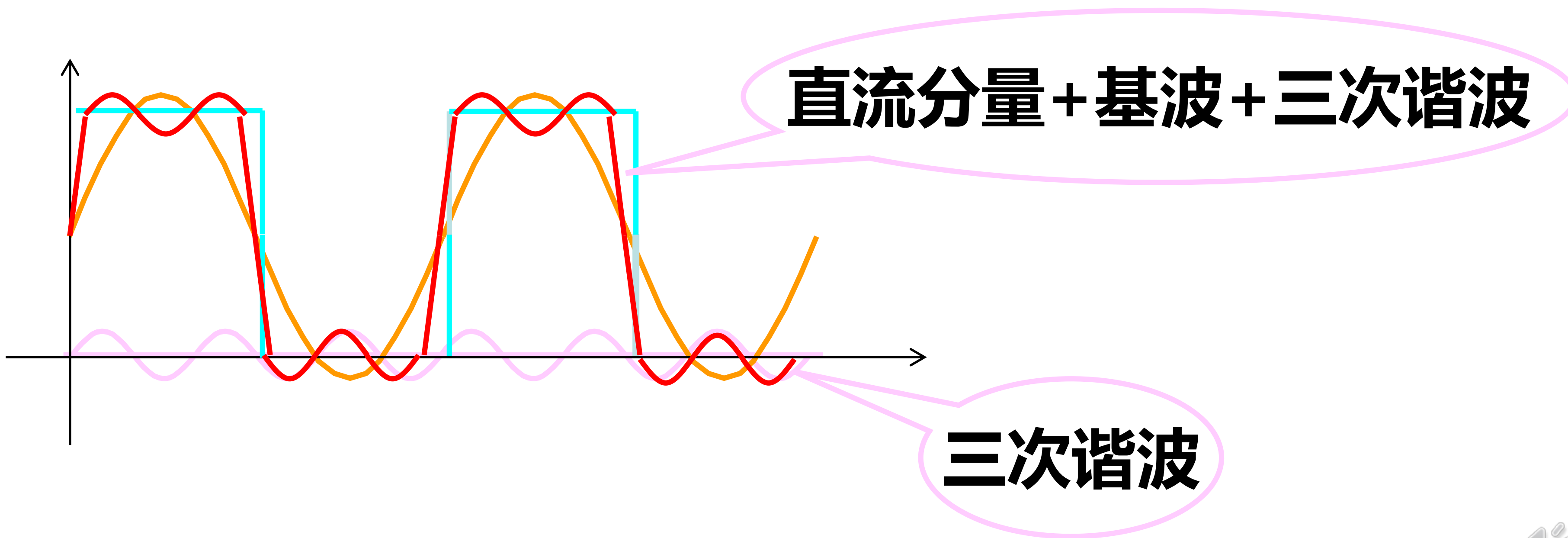
$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$$

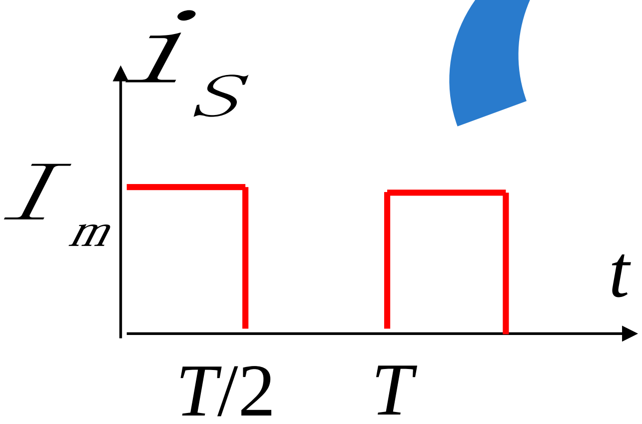
$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$$

周期性方波波形分解

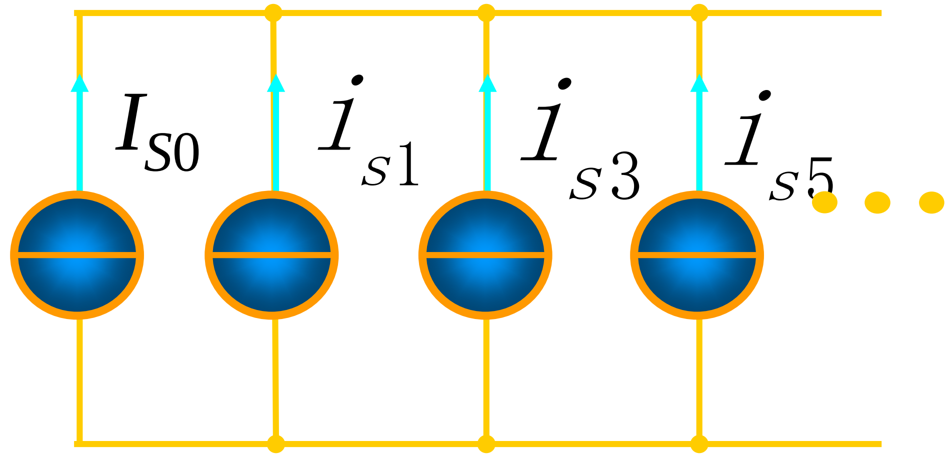



直流分量+基波
直流分量
基波


直流分量+基波+三次谐波
三次谐波

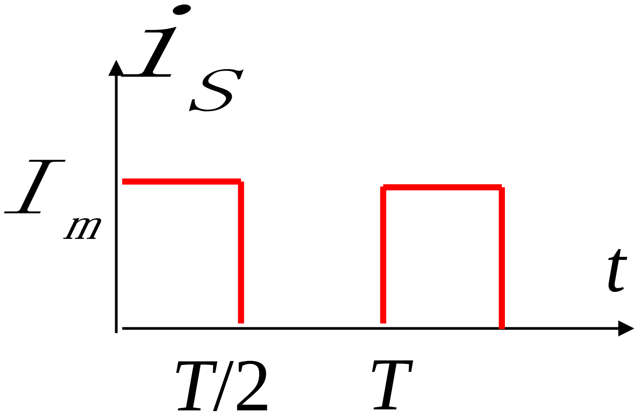


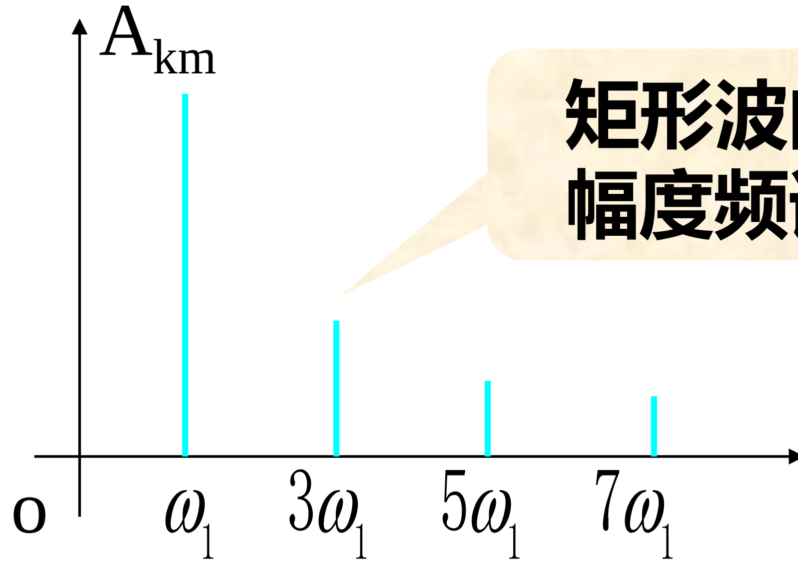
等效电源



$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right)$$

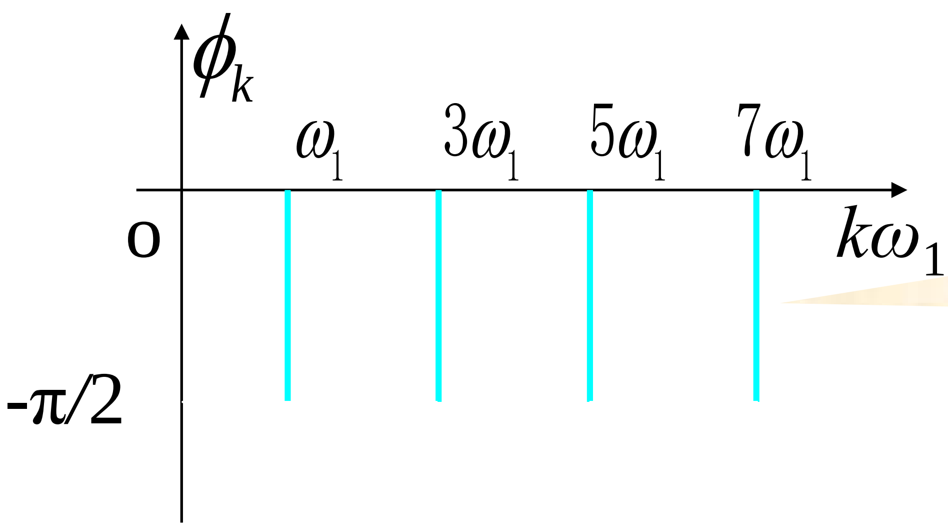
I_{S0} i_{s1} i_{s3} i_{s5}





矩形波的幅度频谱

$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right)$$



矩形波的相位频谱

13.3 有效值、平均值和平均功率

1. 三角函数的性质

①正弦、余弦信号一个周期内的积分为0。

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \mathrm{d}(\omega t) = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos k\omega t \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

② $\sin^2$、$\cos^2$ 在一个周期内的积分为π。

*k*整数

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\omega t \mathrm{d}(\omega t) = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 k\omega t \mathrm{d}(\omega t) = \pi$$

③三角函数的正交性

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \sin p\omega t \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \cos p\omega t \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \cdot \sin p\omega t \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

$$(k \neq p)$$

2. 非正弦周期函数的有效值

若 $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_k)$

则有效值:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(\omega t)\,\mathrm{d}(t)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos\left(k\omega t + \phi_k\right)\right]^2 \mathrm{d}(t)}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos\left(k\omega t + \phi_k\right)\right]^2 \mathrm{d}(t)}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \mathrm{d}t = I_0^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{km}^2 \cos^2(k\omega_1 t + \varphi_k)\mathrm{d}t = I_k^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0 \cos(k\omega t + \varphi_k)\mathrm{d}t = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) I_{qm} \cos(q\omega t + \varphi_q)\mathrm{d}t = 0$$

$$\left(k \neq q\right)$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{km}^2}{2}}$$

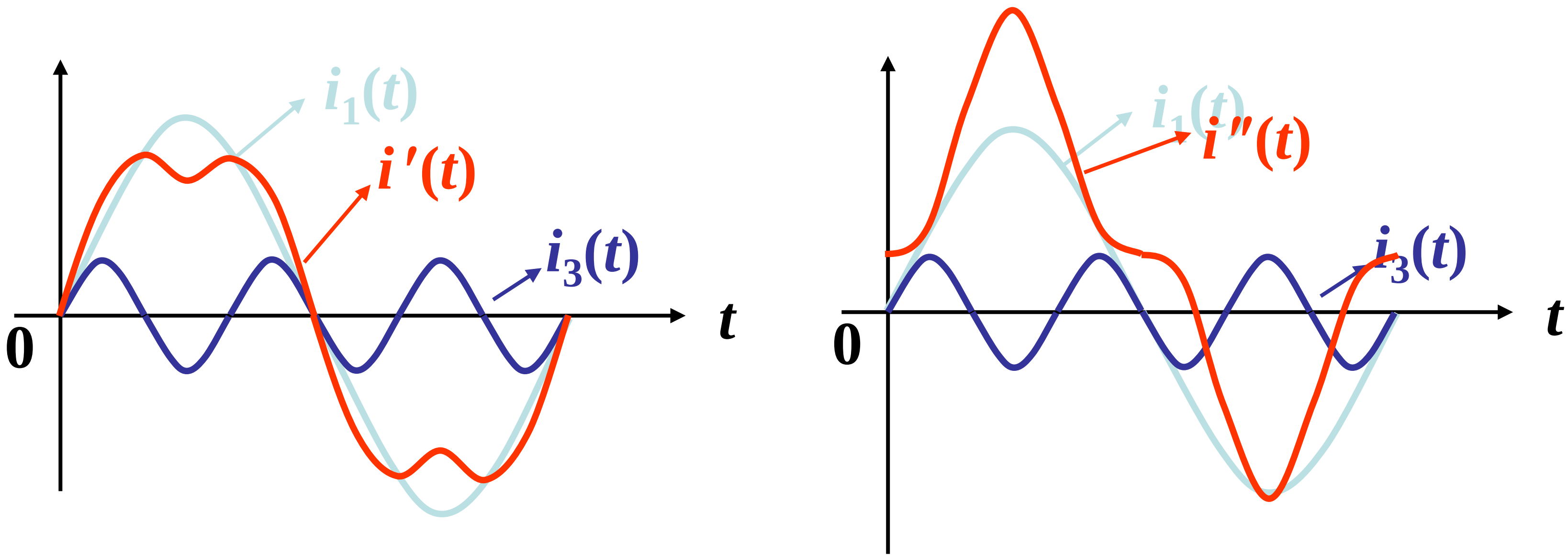
$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots\cdots}$$

结论 周期函数的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的方根。

注意： ① 周期性非正弦电流（或电压）有效值与最大值一般无$\sqrt{2}$倍关系。

② 有效值相同的周期性非正弦电压（或电流）其波形不一定相同。

例



$$i^{'}(t)=i_1(t)+i_3(t) \neq i^{''}(t)=i_1(t)-i_3(t)$$

$$I'=\sqrt{I_1^2+I_3^2} = I''=\sqrt{I_1^2+I_3^2}$$

3. 非正弦周期函数的平均值

若 $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_k)$

其直流值为：

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T i(\omega t)\mathrm{d}t = I_0$$

其平均值为：

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|i(\omega t)\right|\mathrm{d}t$$

正弦量的平均值为：

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|I_m \cos \omega t\right| \mathrm{d}t = 0.898 I$$

4.非正弦周期交流电路的平均功率

$$\begin{cases} u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \phi_{uk}) \\ i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik}) \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i \, \mathrm{d}t$$

利用三角函数的正交性，得：

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\phi_k \qquad (\phi_k = \phi_{uk} - \phi_{ik})$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots$$

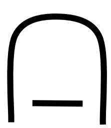
$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \cdots$$

结论

平均功率＝直流分量的功率＋各次谐波的平均功率

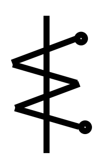
（同频率电压电流相乘才形成平均功率）。

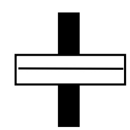
磁电系电表



测平均值

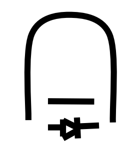
电磁系或电动力系电表





测有效值

整流型电表



测绝对值平均值，按有效值刻度

13.4 非正弦周期电流电路的计算

1. 计算步骤

①利用傅里叶级数，将非正弦周期函数展开成若干种频率的谐波信号；

②对各次谐波分别应用相量法计算；（注意:交流各谐波的 X_L、X_C不同，对直流 C 相当于开路、L 相于短路。）

$j\omega L$　$\frac{1}{j\omega C}$

③将以上计算结果转换为瞬时值迭加。

周期性非正弦电流电路的计算

采用谐波分析法，其步骤如下：

(a) 将周期性非正弦电源，分解为傅里叶级数，根据要求取有限项。

(b) 根据叠加定理，分别计算直流分量和各次谐波激励单独作用时产生的响应。

① 直流分量单独作用相当于解直流电路。（L短路、C开路）

② 各次谐波单独作用时均为正弦稳态电路，可采用相量法计算。要注意电感和电容的阻抗随频率ω的变化而变化。

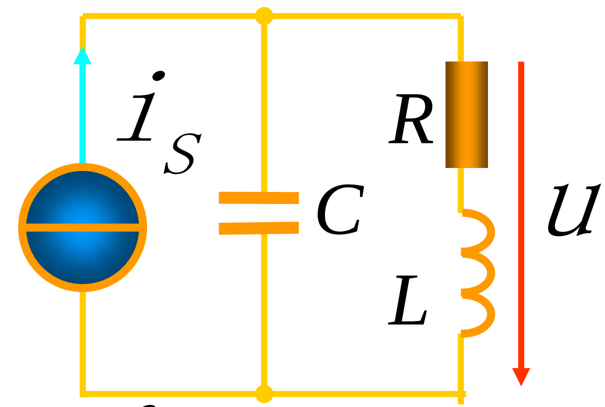
(c) 将计算结果以瞬时值形式相加（各次谐波激励所产生的相量形式的响应不能进行相加，因其频率不同），求总有效值、总平均功率。

2. 计算举例

例1 方波信号激励的电路。求u, 已知：

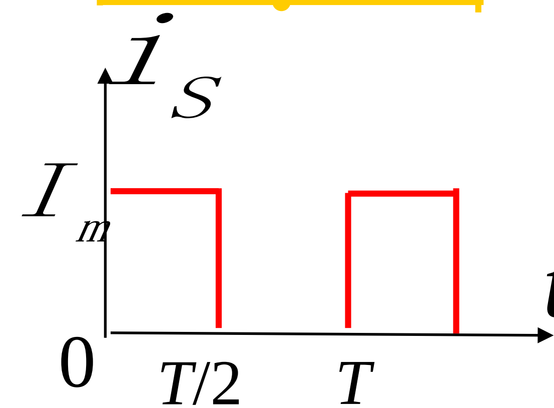
$R=20\Omega$、 $L=1\text{mH}$、 $C=1000\text{pF}$

$I_m=157\mu\text{A}$、 $T=6.28\mu\text{s}$



解 (1) 方波信号的展开式为：

$$i_S=\frac{I_m}{2}+\frac{2I_m}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots)$$



代入已知数据： $\boxed{I_m=157\mu\text{A},\quad T=6.28\mu\text{s}}$

直流分量： $I_0 = \frac{I_m}{2} = \frac{157}{2} = 78.5\mu A$

基波最大值： $I_{1m} = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2 \times 1.57}{3.14} = 100\ \mu A$

三次谐波最大值： $I_{3m} = \frac{1}{3} I_{1m} = 33.3\mu A$

五次谐波最大值： $I_{5m} = \frac{1}{5} I_{1m} = 20\mu A$

角频率： $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{6.28 \times 10^{-6}} = 10^{6}\ \ rad/s$

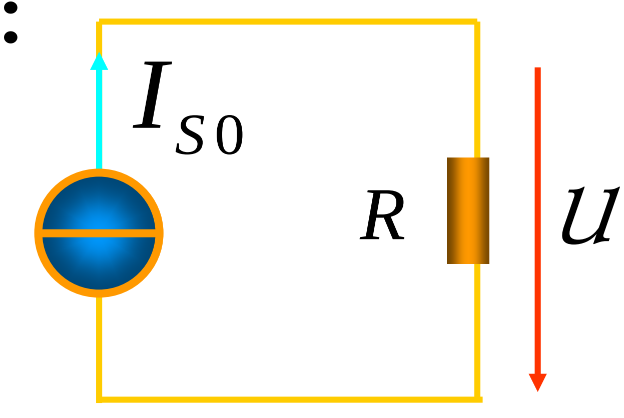
电流源各频率的谐波分量为：

$$I_{S0}=78.5\mu A \quad i_{s1}=100\sin 10^6 t \ \ \mu A$$

$$i_{s3}=\frac{100}{3}\sin 3\cdot 10^6 t \ \ \mu A \quad i_{s5}=\frac{100}{5}\sin 5\cdot 10^6 t \ \ \mu A$$

(2) 对各次谐波分量单独计算：

(a) 直流分量 I_{S0} 作用

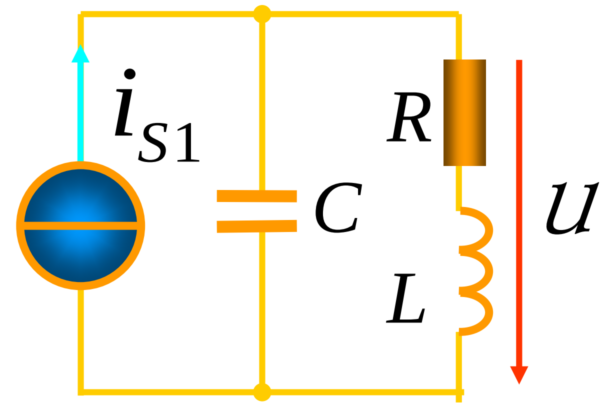


$$I_{S0}=78.5\mu A$$

电容断路，电感短路

$$U_0=RI_{S0}=20\times 78.5\times 10^{-6}=1.57\text{mV}$$

(b)基波作用 $i_{s1} = 100\sin 10^6 t \quad \mu A$



$$-\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = -1\text{k}\,\Omega$$

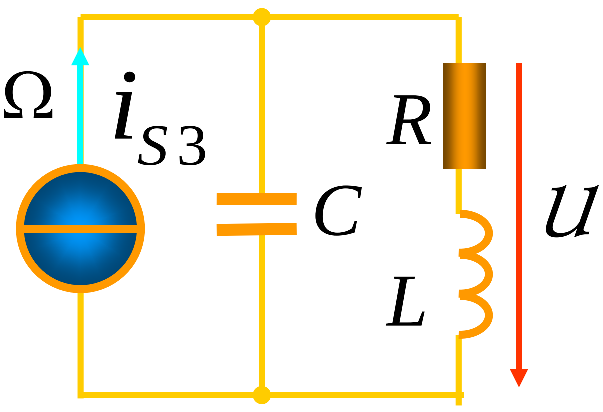
$$\omega_1 L = 10^6 \times 10^{-3} = 1\text{k}\,\Omega$$

$\mathbf{X_L >> R}$

$$Z(\omega_1) = \frac{(R + \mathrm{j}X_L)\cdot(\mathrm{j}X_C)}{R + \mathrm{j}(X_L + X_C)} \approx -\frac{X_L X_C}{R} = \frac{L}{RC} = 50\text{k}\,\Omega$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot Z(\omega_1) = \frac{100 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} \cdot 50 = \frac{5000}{\sqrt{2}} \quad \text{mV}$$

(c)三次谐波作用 $i_{s3} = \frac{100}{3}\sin 3\cdot 10^6 t \quad \mu A$



$$\frac{1}{3\omega_1 C} = \frac{1}{3\times 10^6 \times 1000\times 10^{-12}} = 0.33\text{k}\,\Omega$$

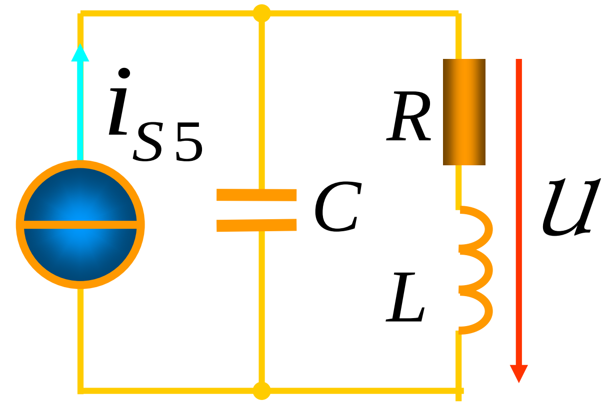
$$3\omega_1 L = 3\times 10^6 \times 10^{-3} = 3\text{k}\,\Omega$$

$$Z(3\omega_1) = \frac{(R + \mathrm{j}X_{L3})(-\mathrm{j}X_{C3})}{R + \mathrm{j}(X_{L3} - X_{C3})} = 374.5\angle -89.19^0\,\Omega$$

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_{S3}\cdot Z(3\omega_1) = 33.3\times\frac{10^{-6}}{\sqrt{2}}\times 374.5\angle -89.19^0$$

$$= \frac{12.47}{\sqrt{2}}\angle -89.2^0\,\text{mV}$$

(d)五次谐波作用 $i_{s5} = \frac{100}{5}\sin 5\cdot 10^6 t \quad \mu A$



$$\frac{1}{5\omega_1 C} = \frac{1}{5\times 10^6\times 1000\times 10^{-12}} = 0.2\text{k}\,\Omega$$

$$5\omega_1 L = 5\times 10^6\times 10^{-3} = 5\text{k}\,\Omega$$

$$Z(5\omega_1) = \frac{(R + \mathrm{j}X_{L5})(-\mathrm{j}X_{C5})}{R + \mathrm{j}(5X_{L5} - X_{C5})} = 208.3\angle -89.53^\circ\,\Omega$$

$$\dot{U}_5 = \dot{I}_{s5}\cdot Z(5\omega_1) = 20\times 10^{-6}/\sqrt{2}\cdot 208.3\angle -89.53^\circ$$

$$= \frac{4.166}{\sqrt{2}}\angle -89.53^\circ\ \text{mV}$$

(3)各谐波分量计算结果瞬时值迭加：

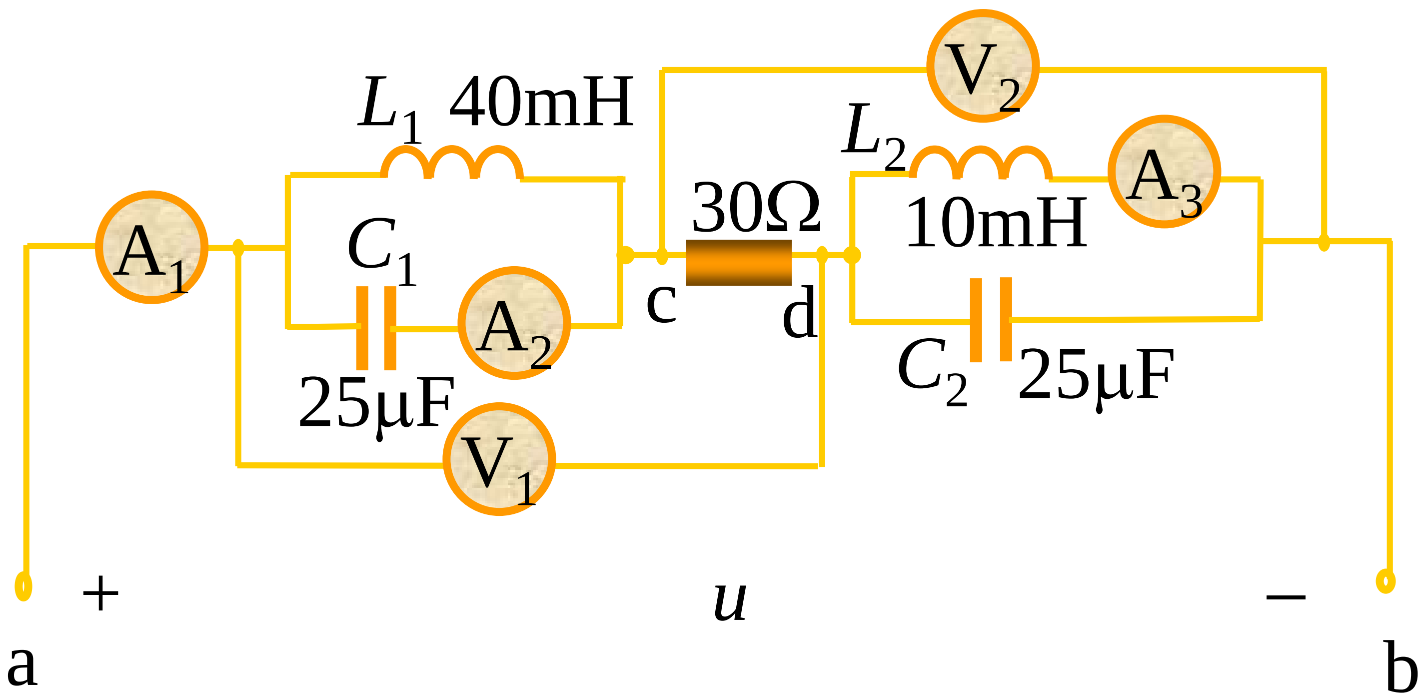
$$U_0 = 1.57\ \text{mV} \qquad \dot{U}_3 = \frac{12.47}{\sqrt{2}}\angle -89.2^\circ \text{mV}$$

$$\dot{U}_1 = \frac{5000}{\sqrt{2}}\ \text{mV} \qquad \dot{U}_5 = \frac{4.166}{\sqrt{2}}\angle -89.53^\circ\ \text{mV}$$

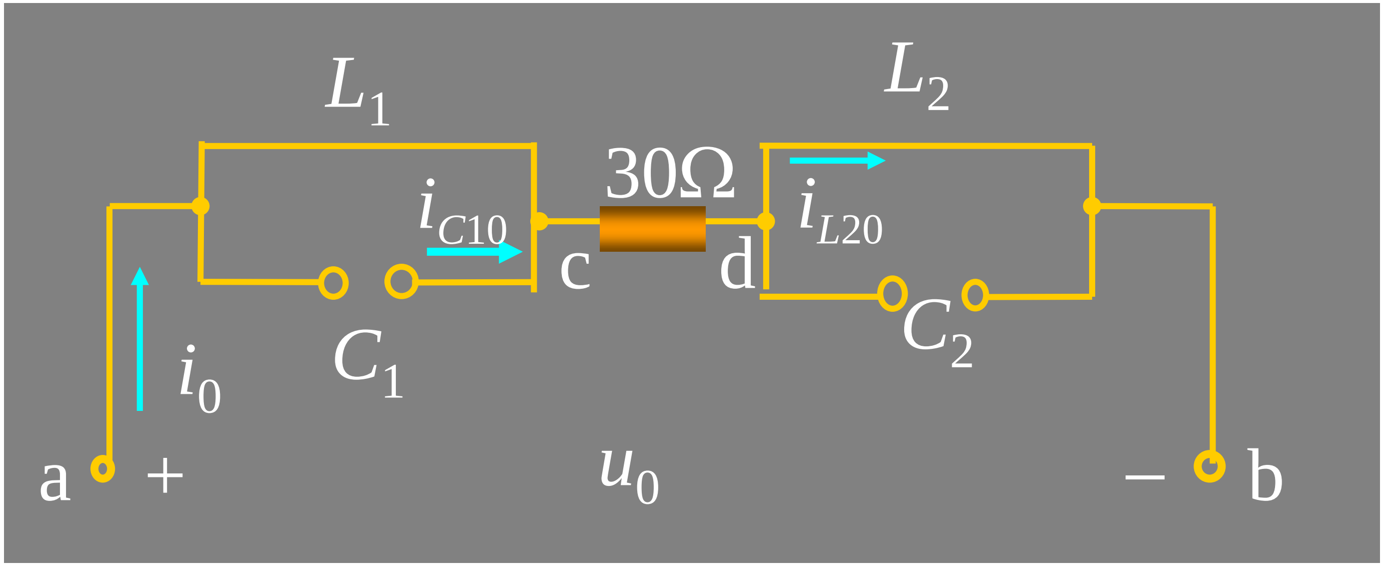
$$\begin{aligned} u &= U_0 + u_1 + u_3 + u_5 \\ &\approx 1.57 + 5000\sin\omega t \\ &\quad + 12.47\sin(3\omega t - 89.2^\circ) \\ &\quad + 4.166\sin(5\omega t - 89.53^\circ)\quad \text{mV} \end{aligned}$$

例2 已知：$u = 30 + 120\cos 1000t + 60\cos(2000t + \frac{\pi}{4})$ V.

求电路中各表读数(有效值)。



解



(1)u_0=30V**作用于电路，**L_1、L_2**短路，**C_1、C_2**开路。**

$$i_0 = i_{L20} = u_0/R = 30/30 = 1\text{A},$$

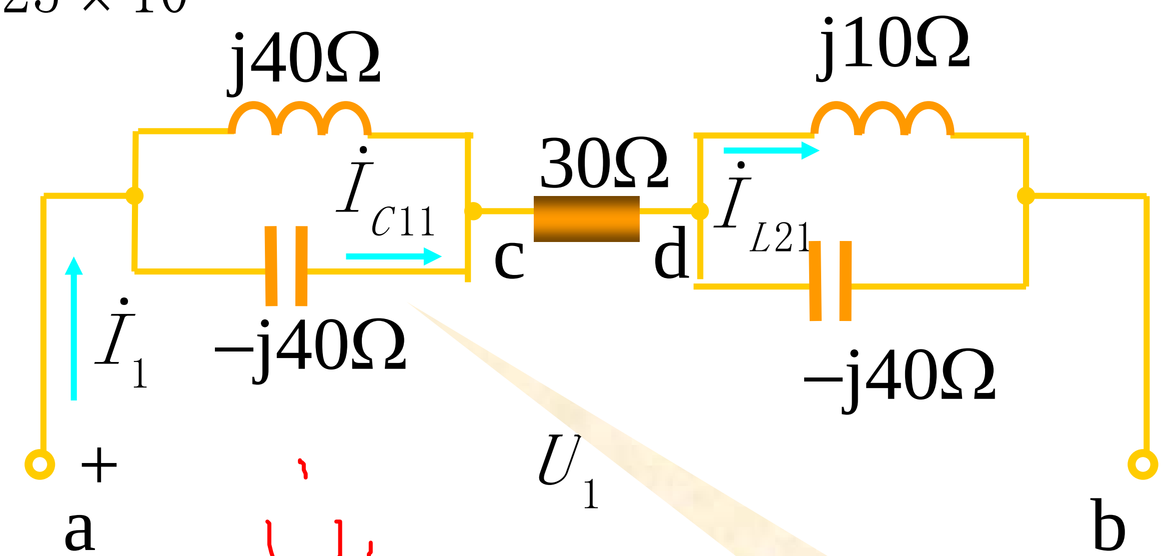
$$i_{C10} = 0,$$

$$u_{ad0} = u_{cb0} = u_0 = 30\text{V}$$

(2) u_1=120cos1000t V作用

$$\omega L_1 = 1000 \times 40 \times 10^{-3} = 40\Omega \qquad \omega L_2 = 1000 \times 10 \times 10^{-3} = 10\Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{1000 \times 25 \times 10^{-6}} = 40\Omega$$



$$\dot{U}_1 = 120\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{L21} = 0$$

$$\dot{U}_{cb1} = 0$$

$$\dot{U}_{ad1} = \dot{U}_1 = 120\angle 0^\circ \text{V}$$

并联谐振

$$\frac{1}{j\omega_1 C_1}$$

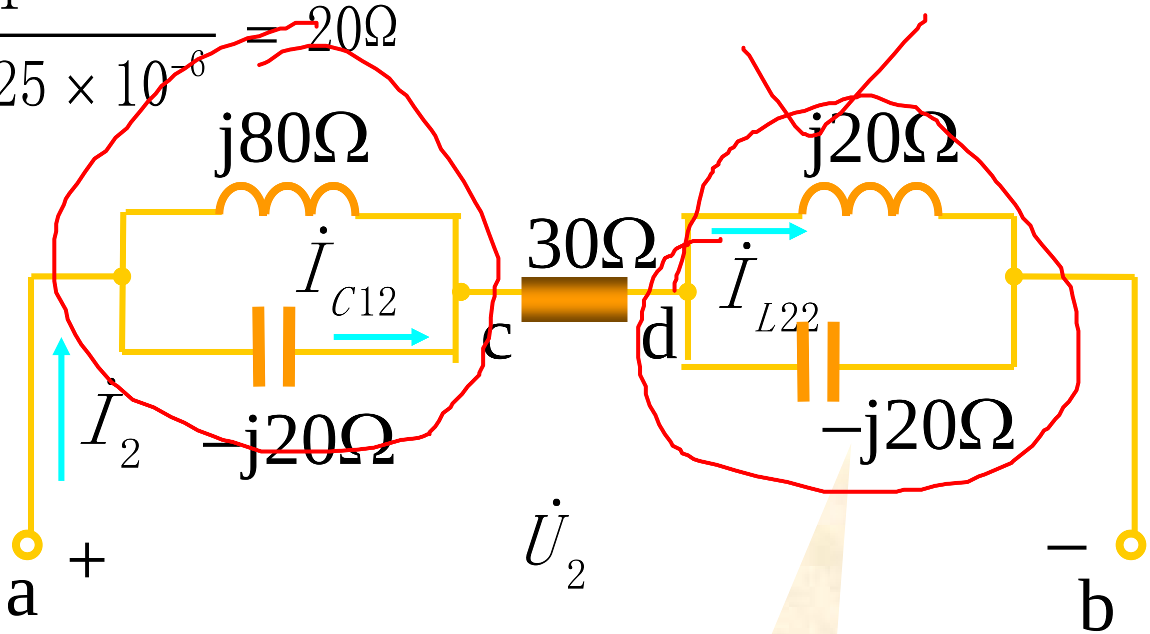
$$\dot{I}_{C11} = j\omega C_1 \dot{U}_1 = \frac{120\angle 0^\circ}{-j40} = 3\angle 90^\circ \text{A}$$

$\dot{U}_1 \cdot j\omega_1 C_1$

(3) u_2=60cos(2000t+π /4)V作用

$$2\omega L_1 = 2000 \times 40 \times 10^{-3} = 80\Omega, \qquad 2\omega L_2 = 2000 \times 10 \times 10^{-3} = 20\Omega$$

$$\frac{1}{2\omega C_1} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2000 \times 25 \times 10^{-6}} = 20\Omega$$



$$\dot{U}_2 = 60\angle 45^\circ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{C12} = 0$$

$$\dot{U}_{ad2} = 0$$

$$\dot{U}_{cb2} = \dot{U}_2 = 60\angle 45^\circ \mathrm{V}$$

并联谐振

$$\dot{I}_{L22} = \frac{\dot{U}_2}{\mathrm{j}2\omega L_2} = \frac{60\angle 45^\circ}{\mathrm{j}20} = 3\angle -45^\circ \mathrm{A}$$

所求电压、电流的瞬时值为：

$i = i_0 + i_1 + i_2 = 1\text{A}$

$i_{C1} = i_{C10} + i_{C11} + i_{C12} = 3\cos(1000t + 90°)\ \text{A}$

$i_{L2} = i_{L20} + i_{L21} + i_{L22} = 1 + 3\cos(2000t - 45°)\ \text{A}$

$u_{\text{ad}} = u_{\text{ad0}} + u_{\text{ad1}} + u_{\text{ad2}} = 30 + 120\cos 1000t\ \text{V}$

$u_{\text{cb}} = u_{\text{cb0}} + u_{\text{cb1}} + u_{\text{cb2}} = 30 + 60\cos(2000t + 45°)\ \text{V}$

表A_1**的读数：** $I = 1\ \text{A}$　**表**A_2**的读数：**$3/\sqrt{2} = 2.12\text{A}$

表A_3**的读数：** $\sqrt{1^2 + (3/\sqrt{2})^2} = 2.35\text{A}$

表V_1**的读数：** $\sqrt{30^2 + (120/\sqrt{2})^2} = 90\text{V}$

表V_2**的读数：** $\sqrt{30^2 + (60/\sqrt{2})^2} = 52.0\text{V}$

Homework

13-6
13-8
13-9
13-10