一、判定下列级数的敛散性($4\times5=20$分):

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+3}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(\frac{1}{n+1})^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n+1},a>0$.

二、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}x^{n-1}$ 的收敛域,并求出和函数（10 分）

三、将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开为 x 的幂级数,并求收敛域.（本题 10 分）

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解（每小题 5 分）:

（1）$(2+x^2)y'=xy$;

（2） $xy'=y(\ln y-\ln x)$;

（3）$y''+y=3x$;

（4） $xy''=y'$;

（5）$2y'=y^2-1,y(0)=2$

五、计算下列广义积分（每小题 5 分）:

（1） $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$;

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

六、（本题 8 分）讨论广义积分 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 的敛散性，其中 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$.

七、（本题 9 分）将函数 $f(x)=x,(0\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

八、（8 分）计算积分 $I(a)=\int_0^{\pi/2}(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x})\frac{dx}{\cos x}$，其中 $|a|<1$.

一、(1) $\because \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0$，故级数发散

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+3} \Big/ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{3}{n^2}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，故原级数收敛.

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\cdot\left(\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{1}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-1}\cdot\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{e} < 1$

故原级数收敛

(4) 当 $0<a<1$ 时 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-a)^n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n+1}} = a \Rightarrow$ 原级数绝对收敛

当 $a=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 为交错级数；条件收敛.

当 $a>1$ 时 $\lim_{n\to\infty} \frac{(-a)^n}{n+1} = \infty$，$\Rightarrow$ 原级数发散.

二、

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot n}{3^{n+1}\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3} \Rightarrow R=3.$

当 $x=-3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\cdot n}(-3)^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，收敛

当 $x=3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\cdot n} 3^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散

故原级数的收敛域为 $[-3,3)$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\cdot n} x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\cdot n} x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n.$

令 $S_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t t^{n-1} dt = \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right)dt = \int_0^t \frac{1}{1-t} dt$

$= -\ln(1-t) \quad (-1\le t<1)$

故 $S(x) = \frac{1}{x}\cdot S_1\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1-\frac{x}{3}\right) \quad (-3\le x<3)$

三、$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$(x^2<1)$

$\Rightarrow \int_0^x f'(x)\,dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

故 $f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$-1\le x\le 1$（因 $x=\pm1$ 时

级数收敛

$\boxed{四}$ P2

(1). 分离变量得 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{x}{2+x^2}dx$

两边积分得 $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + \ln|c| = \ln(2+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot|c|$

$\Rightarrow y = c\sqrt{2+x^2}$，其中C为任意常数

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$ 为齐次方程.

令 $u=\frac{y}{x}$. 则 $y' = u + xu' = u\ln u$

分离变量得 $\dfrac{du}{u(\ln u-1)} = \dfrac{dx}{x}$

两边积分: $\ln|\ln u-1| = \ln|x| + \ln|c|$

即 $\ln y - \ln x - 1 = cx$ （C为任意常数）

(3) 齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，其解为 $r=0\pm i$，

通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x$，

由于 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，故令非齐次方程的特解为

$y^* = ax+b$

代入原方程可得 $ax+b = 3x \Rightarrow a=3, b=0$

故原方程的通解为

$y = C_1\cos x + C_2\sin x + 3x$，$C_1, C_2$ 为任意常数

(4). 令 $y'=p(x)$ 则有

$xp' = p$

分离变量: $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow p = C_1 x$ （C_1 为任意常数）

即 $y' = C_1 x$

积分得 $y = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2$ （C_1, C_2 为任意常数）

(5). $\dfrac{2dy}{y^2-1} = dx \Rightarrow \left(\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1}\right)dy = dx$

两边积分得 $\ln|y-1| - \ln|y+1| = x + C$，$y(0)=2 \Rightarrow C = -\ln 3$

故特解为 $\ln|y-1| - \ln|y+1| = x - \ln 3$

五

(1) $x=0$ 为瑕点. 令 $\sqrt{x}=t$. 则 $x=t^2$

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=\int_0^1\frac{2t\,dt}{t\cdot(1+t^2)}=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2\cdot\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

(2) $$I=\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

令 $t=x-\frac{1}{x}$, $0\le t\le+\infty$, 则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d\frac{t}{\sqrt{2}}}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

六

$I=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$, 先考虑 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$

① 令 $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2-\alpha}\cdot x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$$

故 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ 的敛散性相同.

当 $2-\alpha>1$, 即 $\alpha<1$ 时 收敛

当 $2-\alpha\le1$, 即 $\alpha\ge1$ 时 发散

② 再考虑 $\int_0^1 f(x)dx$

$x=0$ 为瑕点,

对于 $\int_0^1\frac{1}{x^{1-\alpha}}dx$

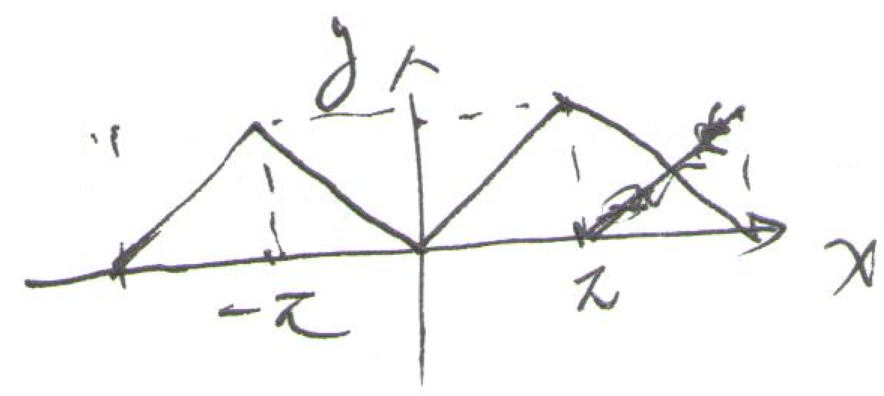
当 $1-\alpha\ge1$ 时 发

$1-\alpha<1$ 时 收

即 $\begin{cases}\alpha>0 & 收\\ \alpha\le0 & 发\end{cases}$

由①②有. $0<\alpha<1$, 收敛. 否则发散

七. 将 $f(x)$ 作偶延拓及周期延拓, 得函数 $F(x)$, 将 $F(x)$ 展开成为余弦级数即可.



$$F(x)=\begin{cases}f(x)=x & x\in[0,\pi]\\ f(-x)=-x & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(x\sin nx+\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^\pi$$
$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases},\ k=1,2,\cdots$$

故 $x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$, $(0\le x\le\pi)$

令 $x=0$, 可得 $0=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\dfrac{1}{(2k-1)^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^\infty\dfrac{1}{(2k-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$

令 $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{4}\sigma = \frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{1}{3}\sigma_1 = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{24}\pi^2 + \frac{1}{8}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

11、 $I'(a) = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+a\cos x} + \frac{1}{1-a\cos x}\right) dx$

计算 $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\cos x} dx$，作万能代换 $t = \tan\frac{x}{2}$，则

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+a\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+a(1-t^2)} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{(1+a)+(1-a)t^2} dt$$

$$= \frac{2}{1+a}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,t\right)^2}$$

$$= \frac{2}{1+a} \arctan\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,t \cdot \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

同理 $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-a\cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$

故 $I'(a) = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \arctan\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

(可证: $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$)

万能代换:
令 $t = \tan\frac{x}{2}$
则 $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

从而 $\int_0^a I'(t)dt = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi \arcsin t \Big|_0^a = \pi\arcsin a$ $\quad \left(\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$\Rightarrow I(a) = I(0) + \pi\arcsin a = 0 + \pi \arcsin a$$

即 $I(a) = \pi \arcsin a$