姓名

学号

专业

任课教师

南开大学 2017 级信息类一元函数微分学统考试卷（A 卷） 2017 年 11 月 25 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效，影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

一、选择题(每小题 4 分)

一题得分	

（1）设 $f(x)=x\sin\frac{1}{x^2}$，则 $x=0$ 为 其(C)

(A) 跳跃间断点; (B) 振荡间断点; (C) 可去间断点; (D) 无穷间断点

（2）设 $f(x)$ 在 x_0 点存在左、右导数，则有(B)

(A) $f(x)$ 在 x_0 点可微; (B) $f(x)$ 在 x_0 点连续 (C) $f(x)$ 在 x_0 点发散; (D) $f(x)$ 在 x_0 点可导

（3）若对函数 $y=f(x)$，有 $f'(x_0)=2$，则当 $\Delta x\to 0$，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是（ D ）;

（A）与 Δx 等价的无穷小;（B）比 Δx 低阶的无穷小;
（C）比 Δx 高阶的无穷小;（D）与 Δx 同阶的无穷小

(4) 设数列 $\{x_n\}$ 通项为 $x_n=\begin{cases}\sqrt{n}-\frac{1}{n}, & \text{当n为奇数,}\\ \frac{1}{n}, & \text{当n为偶数}\end{cases}$，则当 $n\to\infty$，该数列是(C)

(A) 无穷大量; (B) 无穷小量; (C) 无界变量 (D) 有界变量

(5) 若函数 $f(x)$ 为偶函数，且其导数 $f'(x)$ 存在，则有(A)，

(A) $f'(x)$ 是奇函数; (B) $f'(x)$ 是偶函数; (C) $f'(x)$ 的奇偶性不确定; (D) $f'(x)$ 非奇，非偶.

二、填空题（每小题 4 分）

二题得分	

$y'=2x+5$ $2x+5=3$ $x=-1 \Rightarrow y=1$

（1） 设有曲线 $y=x^2+5x+4$，若直线 $y=3x+b$ 是它的切线，则 $b=$ 2

（2） 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\sin x+(e^x-1)}{\ln(1+3x)}=$________

草 稿 区

$y-1=3(x+1)$

$y=3x+2$

姓名

学号

专业

任课教师

七、(6 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\cos(1/x), x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，试分别讨论 α 取何值时，

(1) $f'(0)$ 存在，(2) $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

七 题 得分	

(1) 当 $\alpha\le$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^{\alpha}\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^{\alpha}\cos\frac{1}{x}}{\operatorname{sgn}x\cdot|x|}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}}{\operatorname{sgn}x}$ 不存在 故 $f'(0)$ 不存在

当 $\alpha>1$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^{\alpha}\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x\cdot|x|^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}=0$. 故 $f'(0)$ 存在 且 $f'(0)=0$

(2) 当 $x>0$ 时 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}$

当 $x<0$ 时 $f'(x)=-\alpha(-x)^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}+(-x)^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}$ 故当 $\alpha>1$ 时

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x} & x>0\\ -\alpha(-x)^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}+(-x)^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x} & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

类似(1)的讨论可知当 $\alpha>2$ 时

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$ 故当 $\alpha>2$ 时 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

八、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=0, f(1)=1$,

证明：对 $0<\alpha<1$, 存在不同的 $\xi,\eta\in(0,1)$，使 $\dfrac{\alpha}{f'(\xi)}+\dfrac{1-\alpha}{f'(\eta)}=1$

八 题 得分	

由介值定理 $\exists c\in(0,1)$ s.t $f(c)=\alpha$

在 $[0,c]$ 上应用 Lagrange 微分中值定理. $\exists\xi\in(0,c)$

s.t $\alpha=f(c)-f(0)=f'(\xi)c$ 即

$\dfrac{\alpha}{f'(\xi)}=c$

在 $[c,1]$ 上应用 Lagrange 微分中值定理 $\exists\eta\in(c,1)$. s.t

$1-\alpha=f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)$. 即 $\dfrac{1-\alpha}{f'(\eta)}=1-c$.

从而 $\dfrac{\alpha}{f'(\xi)}+\dfrac{1-\alpha}{f'(\eta)}=c+(1-c)=1$

草稿区