姓名

学号

专业

任课教师

南开大学 2020 级“多元函数微积分（信）”结课统考试卷（A 卷） 2021 年 4 月 24 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

一题得分	

一、求曲面 $x^2 + yx + e^z = 3$ 上点 $(x, y, z) = (1,1,0)$ 处的切平面与法线方程.(本题 10 分)

解：设 $F(x,y,z)=x^2+yx+e^z-3$ $\quad F'_x=2x+y \quad F'_y=x \quad F'_z=e^z$

在点 $(1,1,0)$ 处 $\quad F'_x=3 \quad F'_y=1 \quad F'_z=1$

$\therefore$ 切平面方程：$3(x-1)+y-1+z=0 \Longrightarrow 3x+y+z-4=0$

法线方程：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$

二、求函数 $f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$ 在闭区域 $D = \{(x，y) : x, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ 上的最大值、最小值（10 分）

二题得分	

解：当 $x+y<6$ 时，$f(x,y)=xy^2(4-x-y)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}=4y^2-2xy^2-y^3=0 \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=8xy-2x^2y-3xy^2=0$

得 $x=1, y=2$ 或 $x=0, y=4$ 或 $y=0$, ~~x为~~ $0\le x\le 6$

$f(1,2)=4 \quad f(0,4)=0 \quad f(x,0)=0$

当 $x+y=6$ 时，$f(x,y)=-2xy^2=-2(6-y)y^2=-12y^2+2y^3$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-24y+6y^2=0$

得 $y=0$ 或 $y=4$ $\quad$ $y=0$ 时 $f(x,y)=0$

$y=4$ 时 $f(x,y)=-64$

综上所述，$f(x,y)$ 的最大值为 4，最小值为 -64。

三、计算下列二重积分：（每小题 8 分）

三题得分	

（1）$\iint\limits_D (2x^2 + y^2)dxdy$，其中 D：$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$；

姓名

学号

专业

任课教师

（2）$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)^2\,dxdy$，其中区域 D 为：$y^2+x^2\le a^2,(a>0)$

解(1) 原式 $=\int_0^1 dx\int_0^1(2x^2+y^2)dy=\int_0^1(2x^2+\frac{1}{3})dx=(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x)\Big|_0^1=1$

(2) 原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^5dr=2\pi\times\frac{1}{6}a^6=\frac{\pi a^6}{3}$

四、计算下列三重积分（每小题 8 分）：

四题得分	

（1） $I=\iiint\limits_{\Omega}(y+2z)dxdydz$，其中 Ω 为由平面 $z+x+y=1$ 与三个坐标面所围的区域；

解：已知 Ω：$x+y+z\le1$，$x,y,z\ge0$ 关于 $y=x$，$y=z$，$z=x$ 对称，

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(y+2z)dxdydz=3\iiint\limits_{\Omega}y\,dxdydz=3\int_0^1dz\int_0^{1-z}y\,dy\int_0^{1-y-z}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^3dz$$
$$=-\frac{1}{8}(1-z)^4\Big|_0^1=\frac{1}{8}$$

利用对称性.

(2) $\mathrm{I}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z^2dxdydz$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$，与平面 $z=0,z=2$ 所围的区域。

解：原式 $=\int_0^2 z^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}z^3\Big|_0^2$

$=\frac{4\pi}{3}$

转~~换~~换坐标.

草稿

姓名

学号

专业

任课教师

草稿区

五、计算下列曲线积分与曲面积分：（每小题 10 分）

五题得分	

（1）计算曲线积分 $\int_C x^2 y dx + 2xy dy$，其中 C 为抛物线 $y = x^2$，从 O(0,0) 到 B(1,1)，的那一段弧线。

解：原式 $= \int_C x^2 \cdot x^2 dx + 2x \cdot x^2 \cdot 2x dx$

$= \int_0^1 5x^4 dx$

$= x^5 \big|_0^1 = 1$

（2）求曲面积分 $I = \iint_\Sigma (y^4 + z^4) dS$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, (R > 0)$

解：由轮换对称性得：$\iint_\Sigma y^4 dS = \iint_\Sigma z^4 dS = \iint_\Sigma x^4 dS$

$\therefore$ ~~原式~~ $I = \iint_\Sigma 2y^4 dS = 4\iint_{\Sigma_1} y^4 dS$　这里 Σ_1：$x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0, z>0)$.

$\because z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　$\therefore dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy$

$\therefore I = 4\iint_{D_{xy}} \frac{Ry^4}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy$　D：$x^2+y^2 \le R^2$

$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{Rr^5 \sin^4\theta}{\sqrt{R^2-r^2}} dr = 4R\int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta \int_0^R r^5 (R^2-r^2)^{-\frac{1}{2}} dr = 4\pi R \int_0^R -r^4 d(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}$

$= -4\pi R\left[(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}} r^4\Big|_0^R - 3\int_0^R r^3 (R^2-r^2)^{\frac{1}{2}} dr\right.$

$= -4\pi R \int_0^R r^2 d(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}$

运用分部积分公式.

$= -4\pi R \int_0^R (R^2-r^2)^{\frac{3}{2}} d(R^2-r^2)$.

$= -4\pi R \times \frac{2}{5}(R^2-r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^R$

$= \frac{8\pi R^6}{5}$

六、（10 分）求曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$，其中 L 是以（0,1）为中心，2 为半径的圆周，取逆时针方向；

六题得分	

解：~~令 L_0 是~~ 令 L_0 是以 (0,0) 为中心，$4x^2+y^2=r^2$ 的椭圆 (r 无限小)，取顺时针方向。

由格林公式　$I_0 = \int_{L+L_0^+} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2} = 0$

$\therefore \int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2} = \int_{L_0^-} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2} = \frac{1}{r^2}\int_{L_0^-} xdy-ydx = \frac{2}{r^2}\iint_{D_0} dS = \frac{2}{r^2} \times \frac{r^2}{2}\pi = \pi$.

姓名

学号

专业

任课教师

草稿区

七、(10 分) 设 Σ 是球面 $z^2+x^2+y^2=1$ 的外侧,

七题得分	

求曲面积分: $I=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+z^2)^{3/2}}$

解: 设 Σ_0 是 $x^2+4y^2+z^2=r^2$ (r 无限小) 的内侧, 由高斯公式

$$\therefore \iint_{\Sigma+\Sigma_0^{+}}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\cancel{\frac{1}{r^3}}\ 0$$

$$\therefore I=\iint_{\Sigma_0^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r^3}\iint_{\Sigma_0^-}xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{1}{r^3}\iiint_{\Omega_0}(1+1+1)dxdydz$$

(Ω_0 为 Σ_0 所围区域).

$$=\frac{3}{r^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}\cdot r$$

$$=2\pi$$

八、(8 分) 设有椭球体 $\Omega:\frac{(x+y+1)^2}{4}+\frac{(x-y+2)^2}{9}+(z+1)^2\le 1$, 试计算下列积分,

八题得分	

$I=\iiint_{\Omega}z^2dxdydz$

解: 令 $\frac{x+y+1}{2}=u$, $\frac{x-y+2}{3}=v$, $z+1=w$

得 $\begin{cases}x+y+1=2u\\x-y+2=3v\end{cases}$ $\therefore x=\frac{2u+3v-3}{2}$ $y=\frac{2u-3v+1}{2}$ $z=w-1$

$$\therefore J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1&\frac{3}{2}&0\\1&-\frac{3}{2}&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3 \quad |J|=3$$

原式 $=3\iiint_{\Omega'}(w-1)^2dudvdw$ $\Omega': u^2+v^2+w^2\le 1$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}(w^2-2w+1)dw$$

$$=6\pi\int_0^1 r\left[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{1-r^2}\right]dr$$

$$=-3\pi\int_0^1\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2)$$

$$=-3\pi\left[\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}+2\times\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1=3\pi\times\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{24\pi}{5}$$