

基本不等式专题辅导

一、知识点总结

1、基本不等式原始形式

(1) 若 $a, b \in R$, 则 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(2) 若 $a, b \in R$, 则 $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

2、基本不等式一般形式(均值不等式)

若 $a, b \in R^*$, 则 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

3、基本不等式的两个重要变形

(1) 若 $a, b \in R^*$, 则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(2) 若 $a, b \in R^*$, 则 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

总结: 当两个正数的积为定植时, 它们的和有最小值;

当两个正数的和为定植时, 它们的积有最小值;

特别说明: 以上不等式中, 当且仅当 $a = b$ 时取 “=”

4、求最值的条件: “一正, 二定, 三相等”

5、常用结论

(1) 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (当且仅当 $x = 1$ 时取 “=”)

(2) 若 $x < 0$, 则 $x + \frac{1}{x} \leq -2$ (当且仅当 $x = -1$ 时取 “=”)

(3) 若 $ab > 0$, 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (当且仅当 $a = b$ 时取 “=”)

(4) 若 $a, b \in R$, 则 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

(5) 若 $a, b \in R^*$, 则 $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

特别说明: 以上不等式中, 当且仅当 $a = b$ 时取 “=”

6、柯西不等式

(1) 若 $a, b, c, d \in R$, 则 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

(2) 若 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in R$, 则有:

$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$

(3) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 与 b_1, b_2, \dots, b_n 是两组实数, 则有

$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$