hwk08

P202. 习题 10.2 (A) 2，4，6，8，12；(B) 2，4，6

2. 计算积分 $I=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截下的有限部分，$a>0$（图 10.10）.

4. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 内的部分.

6. 设曲面 S 为平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面所围成的四面体之表面. 如果 S 上每点的密度为 $\rho=(1+x+y)^{-2}$，试求 S 的质量.

8. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

10. 求曲面积分 $\iint\limits_\Sigma \dfrac{\sqrt{|x|}+y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$.

2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma (ax+by+cz+d)^2\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$.

4. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，曲面 Σ 由旋转抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧.

6. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$，$z=-R(R>0)$ 所围立体表面外侧.

P187 习题 10.2

2. 计算积分 $I=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截下的有限部分，$a>0$(图 10.10).

A.2. 解. 依题意，

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

投影区域 $D: x^2+y^2\le 2ax$ 标准极坐标下$r\le 2a\cos\theta,\theta\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sqrt{2}\iint_D\left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\sqrt{2}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\\
&=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}dr r^3\cos\theta=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\frac{r^4}{4}\cos\theta\Big|_0^{2a\cos\theta}\\
&=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta 4a^4\cos^5\theta=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}\cos\theta(1-\sin^2\theta)^2\,d\theta\\
&=8\sqrt{2}a^4\left(\frac{\sin^5\theta}{5}-\frac{2\sin^3\theta}{3}+\sin\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{64}{15}a^4\sqrt{2}\end{aligned}$$

P187 习题 10.2

4. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leq 2x$ 内的部分.

A.4. 解. 依题意，

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

投影区域 $D: x^2+y^2\leq 2x$ 标准极坐标下$r\leq 2\cos\theta,\theta\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\sqrt{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\\
&=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}drr^2=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta}\\
&=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\frac{8}{3}\cos^3\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}d\theta\cos\theta(1-\sin^2\theta)\\
&=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{32\sqrt{2}}{9}
\end{aligned}$$

P187 习题 10.2

6. 设曲面 S 为平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面所围成的四面体之表面. 如果 S 上每点的密度为 $\rho=(1+x+y)^{-2}$, 试求 S 的质量.

A.6. 解. 依题意，四个面的方程分别为

$$S_1: x=0 \quad \text{投影 } YOZ \text{ 平面} \quad D_{yz}: 0\le z\le 1, 0\le y\le 1-z$$

$$M_1=\iint_{D_{yz}}\frac{dydz}{(1+y)^2}=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}\frac{dy}{(1+y)^2}=\cdots=1-\ln 2$$

$$S_2: y=0 \quad \text{投影 } ZOX \text{ 平面} \quad D_{zx}: 0\le z\le 1, 0\le x\le 1-z$$

$$M_2=\iint_{D_{zx}}\frac{dzdx}{(1+x)^2}=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}\frac{dx}{(1+x)^2}=\cdots=1-\ln 2$$

$$S_3: z=0, S_4: z=1-x-y, \quad \text{投影 } XOY \text{ 平面} \quad D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$$

$$M_3=\iint_{D_{xy}}\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{1}{(1+x+y)^2}=\cdots=\ln 2-\frac{1}{2}$$

$$M_4=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}(\ln 2-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow M=M_1+M_2+M_3+M_4=(\sqrt{3}-1)\ln 2+\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

P187 习题 10.2

8. 计算曲面积分

$$I=\iint_S xz\,dydz+yz\,dzdx+z^2\,dxdy,$$

其中 S 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

A.8. 解. 依题意，

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\frac{-x}{z},\ z_y=\frac{-y}{z}\Rightarrow dS_{yz}=\frac{x}{z}\,dS_{xy},\ dS_{zx}=\frac{y}{z}\,dS_{xy}$$

$$\Rightarrow \text{原式}=\iint_S(x^2+y^2+z^2)\,dS_{xy}=R^2\iint_S dS_{xy}$$

$$=R^2\iint_{D_{xy}} dxdy=\pi R^4$$

P187 习题 10.2

10. 求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\sqrt{|x|}+y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}} dS$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$.

A.12. 解. 依题意，由对称性

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}} dS \\
&= \iint_{\Sigma} \frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}} dS \\
&= \iint_{\Sigma} \frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}} dS \\
&= \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} dS = \frac{4}{3}\pi R^2
\end{aligned}
$$

P187 习题 10.2

2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$.

B.2. 解. 依题意，由对称性

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma}\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2\right)dS \\
&\quad + \iint_{\Sigma}(2abxy+2bcyz+2caz+2adx+2bdy+2cdz)\,dS \\
&= \iint_{\Sigma}\left(d^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)dS \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2+3d^2}{3}4\pi R^2
\end{aligned}$$

P187 习题 10.2

4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\,dydz-z\,dxdy$，曲面 Σ 由旋转抛物面 $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧.

B.4. 解. 依题意，

$$z_x=x\Rightarrow dS_{yz}=-x\,dS_{xy}$$

$$\Rightarrow \text{原式}=\iint_{\Sigma}(-x^2-xz^2-z)dxdy=\iint_D\left(x^2+\frac{x(x^2+y^2)^2}{4}+\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy$$

其中 $D: x^2+y^2\le 4$， 由对称性

$$\text{原式}=\iint_D(x^2+\frac{x^2+y^2}{2})\,dxdy=\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^2 dr\int_0^{2\pi} d\theta r^3=2\pi\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=8\pi$$

P187 习题 10.2

6. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$，$z=-R(R>0)$ 所围立体表面外侧.

B.6. 解. 依题意，圆柱面在 XOY 投影为曲线，故

$$I_1=\iint_{\Sigma}\frac{x\,dydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma}\frac{x\,dydz}{R^2+z^2}=\iint_{\Sigma_1}\frac{x\,dydz}{R^2+z^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{x\,dydz}{R^2+z^2}$$

$$\text{其中}\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}\text{方向向前}\quad \Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}\text{方向向后}$$

$$\text{在 } YOZ \text{ 投影区域为}-R\le z\le R, -R\le y\le R$$

$$\Rightarrow I_1=2\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}\,dydz}{R^2+z^2}=8\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,dy\int_0^R\frac{dz}{R^2+z^2}=\cdots=\frac{\pi^2R}{2}$$

$$\text{上表面，方向向上}z=R\Rightarrow I_{\text{上}}=\iint_{D_{xy}}\frac{z^2\,dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{D_{xy}}\frac{R^2\,dxdy}{x^2+y^2+R^2}$$

$$\text{下表面，方向向下}z=-R\Rightarrow I_{\text{下}}=\iint_{D_{xy}}\frac{-z^2\,dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{D_{xy}}\frac{-R^2\,dxdy}{x^2+y^2+R^2}$$

$$\text{其中}D_{xy}: x^2+y^2\le R^2\qquad\Rightarrow I=I_1+I_{\text{上}}+I_{\text{下}}=\frac{\pi^2R}{2}$$

P187 习题 10.2

12. 计算 $I=\iint_{\Sigma}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出的部分，取外侧.

A.12. 解. 依题意，

$$\text{侧面}\quad \Sigma_1: y=\sqrt{4-x^2}\quad \text{方向向右，投影 } ZOX$$

$$\text{侧面}\quad \Sigma_2: y=-\sqrt{4-x^2}\quad \text{方向向左，投影 } ZOX$$

$$D_{zx}: -2\le x\le 2, 0\le z\le 2-x, dS_{xy}=0$$

$$\Rightarrow I=I_1+I_2=\iint_{\Sigma_2}-\sqrt{4-x^2}\,dzdx+\iint_{\Sigma_3}\sqrt{4-x^2}\,dzdx$$

$$=\ -2\iint_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2}\,dzdx=-8\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=-8\pi$$