极限算法的几种特殊技巧

◎徐　芹　（甘肃定西师范高等专科学校　743000）

【摘要】极限是微积分学最重要的概念之一，是高等数学后续知识的基础. 而极限的计算是微积分学的基本运算之一. 本文介绍了一些特殊的极限计算方法并通过实例加以说明，力求使初学者掌握更多计算极限的方法和技巧.

【关键词】极限; 特殊算法; 夹逼原理; Stolz 原理; 单调有界; 收敛

极限讨论的是变化趋势问题，极限的计算是事物运动变化由量变到质变的辩证规律在数上的反映. 导数和积分的定义都是建立在极限的计算基础上的. 因此，熟练掌握极限的计算是必须的. 常用的极限计算方法有利用定义求极限、利用极限的四则运算法则和性质求极限、利用两个重要极限公式求极限、利用等价无穷小求极限、利用洛必达法则求未定式的极限等等. 但有些极限的计算需要有一些特殊的技巧，下面列举一些特殊的极限计算方法供大家参考，除增加极限的算法外，也力求能够对微积分的知识有贯通性的把握.

1. 利用夹逼原理求数列极限

夹逼定理: 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$为三个数列，$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = a$.

例 1　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+i}}$.

解　$$\frac{n}{\sqrt{2n^2+n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2n^2+i}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由夹逼原理有　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2n^2+i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

此方法的要点是当极限不易直接求出时，可考虑将求极限的数列作适当的放大和缩小，使放缩后所得的新数列易于求极限，且两者的极限值相同，则原数列的极限存在，且等于此公共值.

2. 利用级数审敛法求极限

通过此方法是找出要求极限的数列所对应的级数$\sum a_n$. 如果能判定此级数是收敛的，则由级数收敛的必要条件可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$.

例 2　计算$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

解　设$a_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$，有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\mathrm{e}} < 1,$$

由级数审敛法可知级数$\sum a_n$收敛，故$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$.

虽然这种方法只能判断以零为极限的数列，具有很大局限性，但由于级数的审敛方法很多，所以对某些极限来说使用该方法还是方便的.

3. 利用 Stolz 原理求数列极限

Cauchy-Stolz 定理: 设数列$\{x_n\}$及$\{y_n\}$满足条件:

(1) $\{y_n\}$严格递增且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = +\infty$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在(有限或为 $\pm\infty$)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

例 3　设k为正整数，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

证明　令$x_n = 1^k+2^k+\cdots+n^k$，$y_n = n^{k+1}$，由 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(k+1)n^k+\frac{1}{2}(k+1)kn^{k-1}+\cdots+1} = \frac{1}{k+1}.$$

例 4　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{n}p!$.

解　令$x_n = \sum\limits_{p=1}^{n}p!$，$y_n = n!$，则$y_n$严格递增且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = +\infty$. 由 Cauchy-Stolz 定理，有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1.$

(下转 69 页)

为$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin^2\alpha, \\ y = -\dfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），P 点轨迹的普通方程为 $\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{16}$，故 P 点轨迹是圆心为 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$，半径为 $\dfrac{1}{4}$ 的圆.

方法总结 用参数法求点的轨迹方程，是通过已知条件把所求的点的横、纵坐标分别表示为某个参数（该参数通常是角度）的函数，但要注意参数的取值范围.

四、考查曲线参数方程的应用

例4 （2013年浙江）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C：$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），过点 $P(2,1)$ 的直线与曲线 C 交于 A，B 两点. 若 $|PA|\cdot|PB| = \dfrac{8}{3}$，求 $|AB|$ 的值.

解析 由题意，曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + 2y^2 = 2$. 设过点 $P(2,1)$ 且倾斜角为 α 的直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t\cos\alpha, \\ y = 1 + t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数），设点 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2. 将直线的参数方程代入 $x^2 + 2y^2 = 2$，化简得 $(1 + \sin^2\alpha)t^2 + 4(\sin\alpha + \cos\alpha)t + 4 = 0$，则 $\Delta = 16(2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) > 0$ 且 $t_1 + t_2 = \dfrac{4(\sin\alpha + \cos\alpha)}{1 + \sin^2\alpha}$，$t_1t_2 = \dfrac{4}{1 + \sin^2\alpha}$.

由 $|PA|\cdot|PB| = \dfrac{8}{3}$ 得 $|t_1t_2| = \dfrac{4}{1 + \sin^2\alpha} = \dfrac{8}{3}$，故 $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}$，又由 $\Delta > 0$ 得 $0 < \tan\alpha < 2$，故 $t_1 + t_2 = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$，$t_1t_2 = \dfrac{8}{3}$，所以 $|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

方法总结 1. 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = f(\theta), \\ y = g(\theta) \end{cases}$（$\theta$ 是参数）时，曲线上任一点的坐标即可设为 $(f(\theta), g(\theta))$. 2. 在选修教材中，只考查过定点 $P(x_0, y_0)$ 且倾斜角为 α 的直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 是参数），因其参数 t 有实际的几何意义，故对直线的参数方程的考查会逐渐加强. 3. 根据直线的参数方程的标准式中参数 t 的几何意义，有如下常用结论：（1）直线与圆锥曲线相交于点 A，B，设点 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，则弦长 $|AB| = |t_1 - t_2|$；（2）若定点 P 是弦 AB 的中点，则 $t_1 + t_2 = 0$；（3）设弦 AB 中点为 M，则点 M 对应的参数值 $t = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$（由此可求 $|AB|$ 及中点 M 的坐标）.

（上接67页）

4. 利用极限满足的关系式求极限

设 f 是连续函数，若数列 $\{x_n\}$ 由式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 给出，就说该数列是用递推方法给出的. 倘若 $\{x_n\}$ 收敛于 $\bar{x}$，对式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端求极限，注意到 f 的连续性，有 $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$. 可见 $\{x_n\}$ 的极限是方程 $x = f(x)$ 的解. 于是问题归结为证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. 通常用单调有界原理或数列收敛的 Cauchy 准则证明 $\{x_n\}$ 收敛. 我们也看到，决定递推式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 给出的数列的要素是初值 x_0 和函数 f. 为使 $\{x_n\}$ 收敛，讨论初值 x_0 和函数 f 所应满足的条件，常可给出一般的结果，例如压缩映象原理. 这类数列的收敛问题，用某些一般的结果，可给出较简洁的证明.

例5 已知函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant x$，$x \in [0, +\infty)$. 对 $\forall a_1 \geqslant 0$，构造数列 $a_{n+1} = f(a_n)$，$n = 1,2,\cdots$. 证明：

ⅰ）$\{a_n\}$ 为收敛数列；

ⅱ）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$，则 $f(t) = t$；

ⅲ）若条件改为 $0 \leqslant f(x) < x$，则 $t = 0$.

证明 ⅰ）$a_{n+1} = f(a_n) \leqslant a_n$，$a_n$ 单调递减，由单调有界原理，$\{a_n\}$ 收敛.

ⅱ）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$，对式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 两端取极限，利用 f 的连续性有

$$t = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(t).$$

ⅲ）倘若 $t > 0$，有 $t = f(t) < t$，矛盾. 因此只能有 $t = 0$.

可以看到，极限的计算既是一种重要的运算，同时它又牵扯到多方面的知识点和技巧，相信通过极限计算能力的提高也必然可以提升我们综合处理问题的能力.

【参考文献】

[1] 同济大学. 高等数学[M]. 第5版. 北京：高等教育出版社，2002：23－38.

[2] 陈效群，等. 微积分学习辅导[M]. 北京：科学出版社，2004：1－28.

[3] 马振民. 数学分析的方法与技巧选讲[M]. 兰州大学出版社，1999：5－32.