南开大学 2020 级“一元函数积分（信）”结课统考试卷（A 卷）2021 年 1 月 4 日

姓名__________ 学号__________ 专业__________ 任课教师 __________

题号	一	二	三	四	五	六	七	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分										

一题得分	

一、选择题(每小题 4 分)

（1）设函数 $f(x)=e^{-|x|}$，则 $\int f(x)dx=$（ D ）.

(A) $\begin{cases}-e^{-x}+C_1, x\ge 0\\ e^{x}+C_2, x<0\end{cases}$；(B) $\begin{cases}-e^{-x}+C, x\ge 0\\ e^{x}+C, x<0\end{cases}$；(C) $-e^{-|x|}+C$；(D) $\begin{cases}2-e^{-x}+C, x\ge 0\\ e^{x}+C, x<0\end{cases}$

（2）极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^{y})}{\sqrt{x^2+y^2}}=$（ B ）:（A）1,（B）不存在;（C）-1;（D）0

(3) 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1\dfrac{x^{n-1}}{1+x^2}dx=$（ C ）:（A）0;（B）1; (C) 1/2; (D) 不存在

（4）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x\sin\frac{1}{y})(y\sin\frac{1}{x}), xy\ne 0\\ 0, xy=0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=$（ A ）;

（A）0;（B）1;（C）不存在;（D）-1

(5) 设函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点某邻域有定义，且满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处（ D ）:

(A) 不连续;（B）连续，但两个偏导数都不存在;（C）两个偏导数存在，但不可微;（D）可微

草稿区

二、填空题（每小题 4 分）：

二题	
得分	

（1） 设函数 $f(t)$ 满足 $\ln f(t)=\cos t$，则 $\int \frac{tf'(t)}{f(t)}dt=$ $t\cos t-\sin t+C$

（2） 设 $f(x)$ 为连续可导函数，满足 $f(5)=2, \int_0^5 f(x)dx=3$，则 $\int_0^5 xf'(x)dx=$ 7

（3） 点 $(2,1,-2)$ 到平面 $3x+4z=3$ 的距离为 1

（4） 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $2z+e^z=x^2y$ 所确定，则 $dz=$ $\frac{2xy\,dx+x^2dy}{2+e^z}$

（5） 平面 $x+2y+z-1=0$ 与 $x-2y+3z+1=0$ 之间的夹角为 $\frac{\pi}{2}$

三、求下列不定积分：（每小题 6 分）

三题	
得分	

（1） $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^5}dx$ $=\frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^5}d(1+x^2)=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(1+x^2)^4}-\frac{1}{(1+x^2)^5}\right)d(x^2+1)$

$=\frac{1}{8}\frac{1}{(1+x^2)^4}-\frac{1}{6}\frac{1}{(1+x^2)^3}+C$

（2） $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

$=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}d\sin x$

$=\int\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)d\sin x$

$\frac{1}{\ }-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 x}+C$

（3） $\int(\cos x-\sin x)e^{-x}dx$

$=\int e^{-x}d\sin x-\int \sin x\, e^{-x}dx$

$=e^{-x}\sin x+\int \sin x\, e^{-x}dx-\int \sin x\cdot e^{-x}dx$

$=e^{-x}\sin x+C$

四、求下列定积分（每小题 7 分）：

（1）$\int_0^2 x|x-1|dx$； 令 $t=x-1$

$=\int_{-1}^{1}(1+t)|t|\,dt=\int_{-1}^{1}|t|\,dt+\int_{-1}^{1}t|t|\,dt$

$=2\int_0^1 t\,dt+0=t^2\Big|_0^1=1$

(2) $\int_0^2\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}dx$；

四题得分	

令 $x=2\sin\theta$ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$dx=2\cos\theta\,d\theta$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,d\theta$

$=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$

（3）$\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$. $dx=-dt$

$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\dfrac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

$\therefore 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)\,dx$

$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d\sin x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\sin x)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi-1}{2}$ 所以 $I=\dfrac{\pi-1}{4}$

五、（8 分）设二元函数 $f(u,v)$ 具有连续二阶偏导数，$z=f(2x-3y,x+2y)$，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

五题得分	

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3f_1'+2f_2'$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3(2f_{11}''+f_{12}'')+2(2f_{21}''+f_{22}'')$

$=-6f_{11}''+f_{12}''+2f_{22}''$

草稿区

六、(分) 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n dx$，$n\ge 1$，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$。

$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan^2 x+1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\, d\tan x$

$=\frac{\tan^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\quad n=1,2\cdots$

六题 得分	

$n=3,4\cdots$

在 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时 $\tan x<1$ 从而有 $a_{n+2}<a_n<a_{n-2}$

$a_{n+2}+a_n<2a_n<a_{n-2}+a_n$ 即有 $\frac{1}{n+1}<2a_n<\frac{1}{n-1}$

$\frac{n}{2(n+1)}<na_n<\frac{n}{2(n-1)}\quad n=3,4,\cdots$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$

由夹挤定理，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2}$

七、(10分) 证明 $\int_0^{\pi/2}\sin(\sin x)dx<\int_0^{\pi/2}\cos(\cos x)dx$

七题 得分	

证一：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\frac{\pi}{2}-\cos x)dx$

因 $\sin x$ 在 $(0\ \frac{\pi}{2})$ 上递增 只需证

$\sin x<\frac{\pi}{2}-\cos x\qquad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

亦即 $\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}\qquad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})<\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，故上式成立

证二：令 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx\quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)dx$

当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ $\sin x\le x$ $\sin(\sin x)\le\sin x$ 从而 $I_1\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$

而当 $x>0$ 时 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ ∴当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时 $\cos(\cos x)>1-\frac{1}{2}\cos^2 x$

$I_2>\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}\cos^2 x)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}=\frac{3}{8}\pi>\frac{9}{8}>1\ge I_1$ 所以 $I_1<I_2$

草稿区