目录

基本概念

无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n\geq 1} u_n$；部分和的收敛 vs 发散；余项

例 1.1

- 讨论无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots (a \neq 0)$ 的收敛性.
- 证明级数 $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ 的发散性.
- 判定无穷级数 $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$
- 判断无穷级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ln(1+n)}$ 的收敛性。

柯西判定定理

基本性质

(1) 线性封闭　　(2) 有限项改变不会改变级数的敛散性
(3) 括弧不变性 *　　(4) $u_n \to 0$ *

例 1.2 (判断敛散性)

- $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{2^{n-1}} + 5\frac{2^n}{3^{n-1}}\right)$ 并求值.　　ans: 36
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.
- $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{6} + \cdots$

正项级数判定方法

结论: 正项级数收敛 iff 部分和有界

p-级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots.$

比较判别法 (极限); P257 Thm.2.2;

比值判别法, 根值判别法; P259 Thm.2.4，2.5;

积分判别法 P261 Thm.2.6

正项级数判定方法

比较判别法 (极限); 比值判别法, 根值判别法; 积分判别法
(P257-Thm.2.2.)。。。当 $n \geq N_0$ 时, $u_n \leq c \cdot v_n (c > 0)$, 则
1、$\sum_{n\geq1} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n\geq1} u_n$ 收敛　　2、$\sum_{n\geq1} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n\geq1} v_n$ 发散
与几何级数、p-级数的推论, pp258

例 1.3 (判断级数收敛性)

- $\displaystyle\sum_{n\geq1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{q^n}{1+q^{2n}} (q>0)$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq1} \sqrt{\frac{n+1}{n^4+2}}$ $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{\ln n}{n^2}$; $\displaystyle\sum_{n\geq1} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$; $\displaystyle\sum_{n\geq1} \sin\frac{1}{n}$;
  $\displaystyle\sum_{n\geq1} \left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$; $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{1+a^n} (a>0)$

正项级数判定方法

比较判别法 (极限)；比值判别法，根值判别法；积分判别法 (P259-Thm.2.4;2.5)。。。 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$。。。 $\rho\sim 1$

例 1.4 (判断级数收敛性)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n!a^n}{n^n}(a>0);\quad \sum_{n\geq 1}n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2};\quad \sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n};\quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!};$$

讨论 $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$ 的收敛性，其中 $a_n\to a$, a_n, a, b 均为正数.

正项级数判定方法

比较判别法 (极限)；比值判别法，根值判别法；积分判别法

例 1.5 (判断级数收敛性)

讨论级数 $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^p}, (p>0)$ 的敛散性.

例 1.6 (用适当的方法判定)

$\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)(p>0)$; $\sum_{n\geq 1}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(n!)^2}$;

$\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{10^n}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n^3+1}(\sqrt{n}+1)}$; $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

正项级数判定方法

重要结论: 性质 (1,3,4), 等比级数, p-级数

- 比较判别法 $u_n \le v_n$ (极限结论)
- 比值判别法 $u_{n+1}/u_n \to \rho$
- 根值判别法 $\sqrt[n]{u_n} \to p$
- 积分判别法 $f(n) = u_n, f$ 单减, $\int_c^\infty f(t)\,dt$

例 1.7 (判断敛散性)

若正项级数 $\sum_{n\ge0} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n\ge0} \frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\cdots}$ 发散.

交错级数判定方法

结论: 莱布尼兹定理 (交错级数); 条件收敛 vs 绝对收敛 (一般级数).

例 1.8 (判断级数敛散性, 是条件收敛还是绝对收敛)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n},\quad \sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\ln n}{n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n^2}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(n!)^2}{(2n)!};\quad \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n};\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}};\quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

例 1.9 (讨论级数的收敛性)

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}\right);\quad \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}};\quad \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n};$$

$$\sum_{n\geq 2}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi);\quad \sum_{n\geq 2}\sin(\sqrt{n^2+n}\pi)$$

常数项级数总结

step 1: 是否满足性质 4 ($u_n \to 0$)

step 2: 判断是否为正项级数 (比较、比值、根值、积分)

step 3: 一般级数 (是否绝对收敛 $\Rightarrow$ 正项级数)

step 4: 是否为交错级数

step 5: 特殊级数

hwk10

homework10

P264. 习题 12.2 (A) 1-3,1-7；2-5；3-1；4-1,4-4；
P270. 习题 12.3 (A) 1-5；2-3；(B) 2

交错级数判定方法

(柯西乘积—后面计算的理论基础)

绝对收敛的级数相乘，则 $\sum\limits_{n\geq0} u_n \sum\limits_{m\geq0} v_m = \sum\limits_{n\geq0}\sum\limits_{m=0}^{n} u_{n-m}v_m$ 也绝对可积.

假设级数 $\sum_{n\geq0} a_n x^n, \sum_{n\geq0} b_n x^n$ 绝对收敛，其和函数分别为 $f(x), g(x)$，

则 $\forall |x| < R, \sum_{n\geq0} c_n x^n$ 也绝对收敛，且和函数为 $f(x)g(x)$.

$\sum_{n\geq0} x^n (|x| < 1)$ 是绝对收敛的，其和函数为 $\frac{1}{1-x}$，

则该级数的自身的柯西乘积有 $\sum_{n\geq0}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

函数项级数

定义域 I; 部分和序列 $S_n(x)$; 和函数 $S(x)$; 收敛域; 发散域

$$u_n : I \to \mathbb{R}, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \to S(x) \quad \text{for } x \in J$$

例 2.1 (讨论函数项级数的收敛域)

$$x + \sum_{n\geq 2}(x^n - x^{n-1}); \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln^n x}{n}$$

ans: $(-1, 1]$; $[1/e, e)$

(P276 Thm.4.4. 逐项求和求积分；P277 Thm.4.5. 逐项求导求和)

幂级数在收敛区间内满足性质

幂级数

幂级数: $$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots;$$
$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots;$$

结论: (Abel 定理) 绝对收敛; Thm.5.4. 一致收敛; 连续性; 可导性; 可积性
收敛半径; 收敛区间; 收敛域

例 2.2 (典型例题及计算)

$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$

收敛半径为 $R = 1$ 收敛区间为 $(-1, 1)$ 收敛域为 $[-1, 1)$

记和函数为 $S(x)$, 则 $S'(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $\forall |x| < 1$

故 $S(x) = -\ln(1-x), \forall x \in [-1, 1)$

收敛半径与收敛域

收敛半径: $R=\rho^{-1}$ if $\rho:=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)$

例 2.3 (求收敛半径与收敛域)

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}x^n;\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n4^n}{n+1}x^{2n};\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-3)^n}{n}(x-2)^n$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(2x+3)^n;\quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{3n+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n;\quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n\geq 0}n!x^n;\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$$

幂级数运算

性质: 和 (收敛域); 连续性; 可导性; 可积性; 端点性质
常用方法：通过逐项求导、逐项求积分将幂级数化为几何级数

求解步骤

step 1: 求收敛半径;

step 2: 对 $x \in$ 收敛区间讨论;

step 3: 讨论端点收敛性

step 4: 计算, 讨论, 证明

例 2.4

记 $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$

- 收敛区间 (半径, 域)
- 证明 $(x-1)S'(x) = 1$
- 求 $S(x)$
- 求 $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

幂级数运算

例 2.5 (求解和函数)

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1};\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1};\quad \sum_{n\geq 1} n^2x^n$$

ans: $(1-x)^{-2}, x\in(-1,1)$; $\arctan x, x\in[-1,1]$; $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$

例 2.6 (求无穷级数)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n};\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1};\quad \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$$

幂级数运算

例 2.7 (求和函数)

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1};\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}n(n+1);\quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!};\quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$$

ans: $\frac{-1}{x}\ln(1-x), x\in[-1,1)$; $\frac{2x}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$; $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; e^x

例 2.8

求证和函数 $y := \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$ 满足方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0.$$

hwk11

homework11

P277. 习题 12.4 (A) 1-1,1-3
P288. 习题 12.5 (A) 1-3；2-2；

补 **1.** 求幂级数 $\sum_{n\geq 0}(2n+1)(3n+2)x^n$

补 **2.** 求级数 $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4n+3}\left(\frac{1}{4}\right)^n, \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4n+3}\left(\frac{-1}{4}\right)^n$

补 **3.** 求级数 $\sum_{n\geq 1}\frac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}$

补 **4.** 求级数 $\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 满足的一阶微分方程，并求该级数

幂级数展开

泰勒展开: $f(x) \approx \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

结论: 若能展开形式唯一; 泰勒级数未必收敛; 收敛也不一定是原函数

做题要求: 指出收敛域 (等号成立范围)*

例 2.9 (幂级数展开 (以及验证))

e^x; $\sin x$; $\cos x$; $(1+x)^\alpha$; $(\alpha = \pm\frac{1}{2})$ $\ln(1+x)$

$(1+x)^\alpha$ 在 $1,-1$ 的泰勒级数的敛散性

记 $(\alpha)_n=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, $a_n:=\frac{(\alpha)_n}{n!}$, $S(x)=1+\sum_{n\geq 1}a_nx^n$

$$1+\sum_{n\geq 1}a_n\sim\quad 1+\sum_{n\geq 1}a_n(-1)^n$$

$\alpha>0$ 时，在 $x=1, x=-1$ 绝对收敛 由 $c>1$ 时，$(1+x)^c\geq 1+cx, \forall x>-1$

$$\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n-\alpha}{n+1}=1-\frac{\alpha+1}{n+1}\leq\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow a_n\leq c_0n^{-(1+\alpha)}\quad\forall n\text{较大}\Rightarrow\sum_{n\geq 1}|a_n|\text{收敛}$$

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{(\alpha)_n}{n!}=2^\alpha\quad\text{而}\quad 1+\sum_{n\geq 1}\frac{(\alpha)_n}{n!}(-1)^n=0$$

$(1+x)^\alpha$ 在 $1,-1$ 的泰勒级数的敛散性

$\alpha\in(-1,0)$ 时，在 $x=1$ 条件收敛，在 $x=-1$ 发散

由 $0<c<1$ 时，$(1+x)^c\le 1+cx,\forall x>-1$，

$$\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{(-1)^n a_n}=\frac{n-\alpha}{n+1}(>0)=1-\frac{\alpha+1}{n+1}\ge\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow(-1)^{n+1}a_{n+1}(>0)\ge c_0 n^{-(1+\alpha)}\Rightarrow\sum_{n\ge1}(-1)^n a_n=\sum_{n\ge1}|a_n|\text{发散}$$

$$\text{同时}\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{(-1)^n a_n}=1-\frac{\alpha+1}{n+1}\le\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta}\quad\forall n\text{较大，其中 }\beta\in(0,\alpha+1)$$

$$\Rightarrow(-1)^n a_n\text{单减，趋于 }0\Rightarrow\sum_{n\ge1}a_n\text{条件收敛}\quad\sum_{n\ge1}(-1)^n a_n\text{发散}$$

$\alpha\le-1$ 时，在 $x=1,x=-1$ 发散

$$\alpha\le-1\Rightarrow(-1)^{n+1}a_{n+1}\text{单增，故级数均发散}$$

幂级数展开

例 2.10 (幂级数展开)

- (在 x_0) 将 x^{-1} 展开成 $(x-3)$ 的幂级数;
  将 $\ln x$ 在 $x=3$ 处展开; 将 $\cos x$ 展开成 $(x+\frac{\pi}{4})$
- (加减) 将 $(x^2-x-2)^{-1}$ 展开成$(x-1)$的幂级数
- (乘积) 将 $\dfrac{e^x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数
  $(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数 ans: $x+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{n(n-1)}x^n, x\in[-1,1]$
- (间接) 将 $\arcsin x$ 展开成 x 的幂级数

傅里叶展开

- 对象: 周期为 2π 的函数 $f(x)$.
- 结论: $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$ 不连续点 P308 Thm.7.2
- 求解: a_n, b_n 傅里叶系数: （三角函数系的正交性）

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

傅里叶展开

例 3.1 (傅里叶展开)

设 $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi\le x<0 \\ 1 & 0\le x<\pi \end{cases}$ 是周期为 2π 的周期函数.

ans: $\frac{4}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

设 $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi\le x<0 \\ c & 0\le x<\pi \end{cases}$ 是周期为 2π 的周期函数.

ans: $\frac{c}{2}+\frac{2c}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

傅里叶展开

例 3.2

求函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数，

ans: $\frac{\pi}{4} - \sum_{n\ge 1}\left(\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$

并求 $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{1}{(2n-1)^2}, \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}, \sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

ans: $\frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12}$

傅里叶展开

例 3.3 (正弦 (余弦) 展开 (奇 (偶) 函数展开))

- 设 $f(x)=x, x\in[-\pi,\pi)$ 是周期为 2π 的周期函数.

  ans: $2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$

- 设 $f(x)=|x|, x\in[-\pi,\pi)$ 是周期为 2π 的周期函数.

  ans: $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

- 将 $f(x)=\begin{cases}\cos x & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi\end{cases}$ 展开成正弦, 余弦级数.

  ans: 正弦 $\frac{1}{\pi}\left[\sin x+2\sum_{n\geq 2}\frac{n-\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx\right], x\in(0,\pi]$

  ans: 余弦 $\frac{1}{\pi}+\frac{\cos x}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx, x\in[0,\pi]$

傅里叶展开

任意周期 $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx$$

例 3.4 (周期不为 2π)

$f(x) = e^x$ 在 $(-1, 1)$ 内展开为以 2 为周期的傅里叶级数

ans: $(e - e^{-1})\left[\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x)\right], x \in (-1, 1)$

$f(x) = x^2 (x \in [-1, 1])$ 展开为以 2 为周期的傅里叶级数

ans: $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x, x \in [-1, 1]$

幂级数复习

1. 收敛半径讨论 ($R = \rho^{-1}$; 区间; 区域)
2. 计算 (微分方程; 求解) (先换元; 后讨论收敛区域)
3. 展开 (细节) (讨论收敛区间)