## 2018 级多元函数微积分 参考答案

一、求曲面 $x^2 + y^2 + z^3 = 1$ 上点(1,1,-1)处的切平面与法线方程。

解:记曲面方程为

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - 1 = 0$$

有

$$\begin{cases} F_x = 2x = 2 \\ F_y = 2y = 2 \end{cases}$$
$$F_z = 3z^2 = 3$$

故

$$\vec{n} = (2,2,3)$$

故切平面方程为

$$2(x-1) + 2(y-1) + 3(z+1) = 0$$

或

$$2x + 2y + 3z = 1$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

二、求函数 $f(x,y,z) = (x+2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ 下的最大、最小值。

解:先证明,最值一定在边界上取到。不妨先证明最大值的情况。用反证法,假设在球域内部一点取到最大值,连接该点与点(-2,-2,1),这条直线与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 必有两个交点,对于远离(-2,-2,1)的交点,它到这一点的距离比球内部的点还要大,自然f(x,y,z)不会在球域内部取得最大值,最小值亦然。

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = (x + 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x + 4 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2z - 2 + 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = \pm \frac{2}{3} \\ y = \pm \frac{2}{3} \\ z = \mp \frac{1}{3} \end{cases}$$

故最大值为16,最小值为4.

(注:事实上,如果关注到f(x,y,z)与两点间距离公式的类似性,可以认为它描绘了空间中的点到点(-2,-2,1)距离的平方,毫无疑问,在球面上找一点与给定点距离最长与最短,自然是"点到球心距离±半径"。)

## 三、计算下列二重积分:

(1)  $\iint_{D} |x^2 + y^2 - 1| dx dy$ ,  $\sharp \oplus D : x^2 + y^2 \le 4$ ;

解: 先分类去掉绝对值号,即

$$D = D_1 + D_2$$

$$D_1: x^2 + y^2 \le 1$$

$$D_2: 1 < x^2 + y^2 \le 4$$

作极坐标换元, 故原式可写为

$$\begin{split} I &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{0}^{1} (1 - r^2) r dr + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{1}^{2} (r^2 - 1) r dr = 5\pi. \end{split}$$

(2)  $\iint_D (x+y) dxdy$ ,  $D: x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0$ .

解:直接化为累次积分

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)dy = \frac{8}{3}.$$

(注:如果实在难以割舍对对称性的渴求,也可以作这样的变量替换

$$\begin{cases}
 u = x + y \\
 v = y
\end{cases}$$

它的雅可比行列式为1,事实上这是一个剪切变换,故原式就化为

$$I = \iint_{D'} u du dv = \int_{0}^{2} du \int_{0}^{u} u dy = \frac{8}{3}.$$

这样计算亦可。)

解: 作广义球坐标换元

四、计算下列三重积分:

(1) 
$$\iiint_{V} \left( \frac{x^{2}}{a^{2}} + \frac{y^{2}}{b^{2}} + \frac{z^{2}}{c^{2}} \right) dx dy dz, \, \sharp + V : \frac{x^{2}}{a^{2}} + \frac{y^{2}}{b^{2}} + \frac{z^{2}}{c^{2}} \le 1, a, b, c > 0;$$

$$\begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \\ z = cr \cos \varphi \end{cases}$$

$$I = \int_{-2\pi}^{2\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_{-\pi}^{1} r^4 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5}.$$

(2)  $\iiint_V (1+z^3) dx dy dz$ , V 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , z = 1 围成的区域。

解: 利用柱坐标换元,将原积分写为

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{0}^{1} r dr \int_{r}^{1} (1 + z^{3}) dz = 2\pi.$$

## 五、计算下列曲线积分与曲面积分

(1) 设C为曲线 $y = \sqrt{\pi}x^2$ 从O(0,0)到 $A(1,\sqrt{\pi})$ 的曲线段,求 $\int_C \cos y^2 dx - 2xy \sin y^2 dy$ ;解:注意到

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin y^2 = \frac{\partial P}{\partial y}$$

故该积分与路径无关,得

$$\int_{C} \cos y^{2} dx - 2xy \sin y^{2} dy = \int_{C} \cos y^{2} dx + xd(\cos y^{2}) = \int_{C} d(x \cos y^{2})$$

记 $F(x,y) = x \cos y^2$ , 故原积分为

$$I = F(1, \sqrt{\pi}) - F(0,0) = -1.$$

(2) 求 $I = \iint_S z^3 dS$ , 其中S为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$ ,在第一卦限的部分。解:直接化为二重积分

$$I = \iint_D (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$
$$= R \iint_D (R^2 - x^2 - y^2) dxdy$$

再化为极坐标,故

$$I = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{8} R^5.$$

六、求曲线积分

$$\oint_{I} \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2}$$

其中L是单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ ,取逆时针方向。

解: 容易发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4y^2 - x^2 - 8xy}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

但此时L所围区域内包含不可导点(0,0),故以该点为中心,作椭圆

$$C: x^2 + 4y^2 = \epsilon^2$$

使椭圆完全包含于圆域内部,对两曲线所夹部分用格林公式,得

$$I = \oint_{L+C} -\oint_C = \oint_C \frac{1}{\epsilon^2} [(x+4y)dy + (x-y)dx]$$

故此时在椭圆域上用格林公式

$$I = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_D 2d\sigma = \frac{2\pi}{\epsilon^2} \cdot \frac{\epsilon^2}{2} = \pi.$$

七、设Σ是曲面 $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ 的外侧,求

$$I = \iint_{\Sigma} xy dy dz + x dz dx + x^2 dx dy$$

解: 容易发现该曲面是一球面的上半面,而

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + 0 + 0 = y$$

且没有偏导数不连续点。在所求区域内,补面用高斯公式,在xy面上补充平面

$$C: x^2 + y^2 \le 4$$

取下侧,有

$$I = \iint_{\Sigma + C} - \iint_{C} = \iiint_{V} y dx dy dz + \iint_{C^{+}} x^{2} dx dy$$

当然,注意到积分区域V关于xz平面对称,故第一个积分为零。将第二个积分化为累次积分,得到

$$I = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{0}^{2} r^{2} \cos^{2} \theta \, r dr = 4\pi.$$

八、设 $\Omega$ 是由曲面 $x^2 + (y-z)^2 = 4, z = 0, z = 1$ 围成的立体区域,求三重积分

$$\iiint_{\Omega} (y-z)^2 z^2 dx dy dz$$

解: 先作换元

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - z \\ w = z \end{cases}$$

其雅各比行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

故原积分化为

$$I = \iiint_{V} v^{2} w^{2} du dv dw$$

其中V为

$$V: \begin{cases} u^2 + v^2 \le 4\\ 0 \le w \le 1 \end{cases}$$

故

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{0}^{2} r dr \int_{0}^{1} r^{2} \cos^{2}\theta \, w^{2} dw = \frac{4\pi}{3}.$$