2019级多元函数微积分 参考答案

一、求曲面$x^3+y^2+z^3=1$上点$(-1,1,1)$处的切平面与法线方程。

解：记曲面方程为

$$F(x,y,z)=x^3+y^2+z^3-1=0$$

有

$$\begin{cases}F_x=3x^2=3\\F_y=2y=2\\F_z=3z^2=3\end{cases}$$

故

$$\vec{n}=(3,2,3)$$

故切平面方程为

$$3(x+1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

或

$$3x+2y+3z=2$$

法线方程为

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

二、求函数$f(x,y,z)=x-y+z$在闭区域Ω:$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+(z-2)^2\leq 1$上的最大、最小值。

解：先证明，最值一定在边界上取到。不妨先证明最大值的情况。用反证法，假设在椭球域内部一点取到最大值，则它正上方的点的函数值必然大于该点。自然$f(x,y,z)$不会在球域内部取得最大值，最小值亦然。

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=x-y+z+\lambda\left(\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+(z-2)^2-1\right)$$

令

$$\begin{cases}L_x=1+\frac{1}{2}\lambda(x-1)=0\\L_y=-1+\frac{1}{2}\lambda(y+1)=0\\L_z=1+2\lambda(z-2)=0\\L_\lambda=\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}+(z-2)^2-1=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 1 \pm \dfrac{4}{3} \\ y = -1 \mp \dfrac{4}{3} \\ z = 2 \pm \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

故最大值为 7，最小值为 1.

三、计算下列二重积分：

(1) $\iint_D (1-x-y)dxdy$, 其中$D: x, y \geq 0, x+y \leq 1$；

解：直接化为累次积分，即

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \frac{1}{6}.$$

(2) $\iint_D |y-x^2|\, dxdy\,, D: 0 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1.$

解：先划分积分区域，脱掉绝对值号：

$$D = D_1 + D_2$$

$$D_1: y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$D_2: x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1$$

化为累次积分

$$I = \iint_{D_1} (x^2 - y)dxdy + \iint_{D_2} (y - x^2)dxdy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y)dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y - x^2)dy = \frac{11}{15}.$$

四、计算下列三重积分：

(1) $\iiint_V (1+z^4)dxdydz$, 其中$V: z = x^2 + y^2, z = 1$围成的区域；

解：不妨“先二后一”：

$$I = \int_0^1 dz \iint_{D_z} (1+z^4)dxdy = \int_0^1 (1+z^4) \cdot \pi z dz = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) $\iiint_V e^{|z|} dxdydz\,, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$。

解：由对称性与奇偶性易知，该积分为上半球积分的二倍，脱去绝对值号，故

$$I = 2\iiint_V e^z dxdydz$$

依然“先二后一”

$$I = 2\int_0^1 e^z dz \iint_{D_z} dxdy = 2\int_0^1 e^z \cdot \pi(1-z^2)dz = 2\pi$$

五、计算下列曲线积分与曲面积分

(1) 设曲线积分$\int_C 2xydx + \big(2y + \varphi(x)\big)dy$与路径无关，$\varphi'(x)$连续，且$\varphi(0) = 0$，求积

分：

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + \big(2y + \varphi(x)\big)dy$$

解：注意到

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \varphi'(x) = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

且已知初值条件$\varphi(0) = 0$，故有

$$\varphi(x) = x^2$$

故该积分为

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + (2y + x^2)dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} ydx^2 + dy^2 + x^2dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(x^2y + y^2)$$

记$F(x,y) = x^2y + y^2$，故原积分为

$$I = F(1,1) - F(0,0) = 2.$$

(2) 求$I = \iint_S (x-y)^2 dS$, 其中S为球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$。

解：先化简得到

$$I = \iint_S (x-y)^2 dS = \iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_S (R^2 - z^2) dS$$

由对称性易知

$$\iint_S z^2 dS = \iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \frac{1}{3}\iint_S R^2 dS = \frac{4}{3}\pi R^4$$

故

$$I = \frac{8}{3}\pi R^4.$$

六、求曲线积分

$$\oint_L \frac{(x-y)dy - (x+y)dx}{x^2 + y^2}$$

其中L是以$(1,0)$为中心，R为半径$(R > 0, R \neq 1)$的圆周，取逆时针方向。

解：容易发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

党$R < 1$时，由于该回路所含区域不包含不可导点，故有

$$I = 0$$

$R > 1$时，以$(0,0)$为中心，作圆

$$C: x^2 + y^2 = \epsilon^2$$

使圆完全包含于大圆域内部，对两曲线所夹部分用格林公式，得

$$I=\oint_{L+C}-\oint_{C}=\oint_{C}\frac{1}{\epsilon^2}[(x-y)dy-(x+y)dx]$$

故此时在圆域上用格林公式

$$I=\frac{1}{\epsilon^2}\iint_D 2d\sigma=\frac{2\pi}{\epsilon^2}\cdot\epsilon^2=2\pi.$$

七、设$f(u)$具有连续导函数，Σ是曲面$z=x^2+y^2+6,z=8-x^2-y^2$所围立体表面的外侧。

求：

$$I=\iint_\Sigma \frac{1}{z}f\left(\frac{e^x}{z}\right)dydz+ydzdx+f\left(\frac{e^x}{z}\right)dxdy$$

解：被积函数的可导性是显然的，故用高斯公式：

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{e^x}{z^2}f'\left(\frac{e^x}{z}\right)+1-\frac{e^x}{z^2}f'\left(\frac{e^x}{z}\right)=1$$

$$I=\iiint_V dxdydz$$

注意到积分区域V关于$z=7$平面对称，得到

$$I=2\iiint_{V'}dxdydz=2\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy=2\int_0^1\pi(1-z)dz=\pi..$$

八、设$D:0\le x\le 2,0\le y\le 2$，求二重积分

$$\iint_D|xy-1|dxdy$$

解：先划分区域，脱去绝对值号

$$D=D_1+D_2+D_3$$

$$D_1:0\le x\le\frac{1}{2},0\le y\le 2$$

$$D_2:\frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le\frac{1}{x}$$

$$D_3:\frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2$$

$$I=\iint_{D_1}(1-xy)dxdy+\iint_{D_2}(1-xy)dxdy+\iint_{D_3}(xy-1)dxdy$$

再拆分为累次积分即可

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^2(1-xy)dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}}(1-xy)dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2(xy-1)dy$$

$$=\frac{3}{4}+\ln 2+\frac{3}{4}+\ln 2=\frac{3}{2}+2\ln 2.$$