Printout

2022年5月23日 13:53

8 多元函数微分

二重极限 二元极限 vs. 累次极限; 性质 (复杂关系)

二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 A。

推论: 如果 P 以某一特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$，而 $f(x,y)\to A$，不能断定函数极限存在。

但是反之，如果不同方式极限不同，则函数极限一定不存在。

Q?: $\forall k\in\mathbb{R}$，当 $y=kx$ 时，$f(x,y)\to A$ 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$? 不对

二重极限存在	累次极限存在即相等	
	累次极限不存在亦可	$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$
二重极限不存在	累次极限存在且相等	$\frac{xy}{x+y}$
	累次极限存且不等	$\frac{x-y}{x+y}$
	累次极限不存在	

例 8.1. 讨论函数在点 $(0,0)$ 的极限

$$(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2};\quad \frac{xy}{x^2+y^2};\quad \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$y=kx$ $y=kx^2$

计算函数在点 $(0,0)$ 的累次极限

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad \frac{x^2y}{x^4+y^2};\quad x\sin\frac{1}{y}$$

偏导数 计算, 高阶导数 (vs. 可微, 连续)

链式法则, 隐函数求导 (借助一阶微分形式不变性)

例 8.2. 已知 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, 求 f_x, f_y, $f_x(1,0)$, $f_y(1,0)$.

已知 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$, 求二阶偏导数.

求 $\frac{dz}{dt}$, 已知 $z=x^y, x=\sin t, y=\cos t$.

求 z_t, z_s. 已知 $z=\ln(x^2+y), x=e^{t+s^2}, y=t^2+s$.

例 8.3. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续 (2) f_x, f_y 在 $(0,0)$ 连续

(3) f 在点 $(0,0)$ 可微分 (4) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在

则下列选项中正确的是:

(A) (2) ⇒ (3) ⇒ (1) (B) (3) ⇒ (4) ⇒ (1)

(C) (3) ⇒ (2) ⇒ (1) (D) (3) ⇒ (1) ⇒ (4)

例 8.4 (P80-习题 8.3-A-6). 设 $u(x,y)$ 的所有二阶偏导数都连续，且

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0,\qquad u(x,2x)=x,\qquad u_x(x,2x)=x^2$$

试求 $u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,2x)$ 同 8 题

$y=kx$

$f(x,kx)\to A.$

$(0,0)$ $P_n^1\to(0,0)$

$P_n^2\to(0,0)$

$f(P_n^1)\to A \neq f(P_n^2)\to B$

z_{xx} z_{yy} $z_{xy}=z_{yx}$

$z_x \to z_{xy}$

$2\to3\to4$

$2\to3\to1$

① 连 偏 ④ 可微 ③ ② 偏连

$u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)=0$

$u(x,y)\big|_{y=2x}=x$

$u_x(x,2x)\big|_{y=2x}=x^2$

$f'(x)$

$(f(x))'$

$$\begin{cases} \frac{\cos u}{\sin v}du - \frac{\sin u}{\sin^2 v}\cos v\,dv = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \\ du + dv = dx + dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ?\,dx + ?\,dy \\ dv = ?\,dx + ?\,dy \end{cases}$$

u_x, u_y, v_x, v_y

例 8.5. 已知 $u = f(x, y)$ 可微, 求极坐标下的 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

设 $u + v = x + y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$, 求 du, dv.

设 $z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

what if 设 $z = e^x \sin y, u = xy, v = x + y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

例 8.6. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$ 所确定的隐函数, 求 z_x, z_y $z(x,y)$

已知 $\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy - u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(1, 0, 1, 1)$ 存在函数关系 $u(x, y), v(x, y)$. 求函数在该点的偏导数.

(1) $x = r\cos\theta$

(4) $y = r\sin\theta$

$r \geq 0$

$\theta \in [0, 2\pi)$ or $[-\pi, \pi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ ✓

$\theta \neq \arctan\frac{y}{x}$ ✗

(1) $u(x(r,\theta), y(r,\theta))$

$$\begin{cases} u_r = u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r \\ u_\theta = u_x \cdot x_\theta + u_y \cdot y_\theta \end{cases}$$

u_r, u_θ vs u_x, u_y

(2)
$$\begin{cases} u_x = u_r \cdot r_x + u_\theta \cdot \theta_x \\ u_y = u_r \cdot r_y + u_\theta \cdot \theta_y \end{cases}$$

r_x r_y

θ_x θ_y

$$\begin{cases} 1 = r_x\cos\theta - r\sin\theta \cdot \theta_x \\ 0 = r_x \sin\theta + r\cos\theta\cdot\theta_x \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial y}$

梯度与方向导数 定义及计算

$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \vec{l_0}$ $|\vec{l_0}| = 1$

例 8.7. 求 $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ 在点 $(1, 1, 2)$ 沿方向 l 的方向导数, 其中 l 的方向角分别为 $60^o, 45^o, 60^o$.

设 $f(x, y) = \frac{|x|^{1/2}|y|^{1/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则 f_x, f_y 存在, 但 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 不存在. $(l = (1, 1))$.

$v = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ ∥ $v = n_1 \times n_2$? 运算

切 v, $n_法$

点. 方向

空间中的曲线与曲面 曲线: 切线、法平面 ~ 参数方程情形、隐函数情形

曲面: 切平面、法线 结合位置关系: 平行, 垂直, 成角度

例 8.8. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 的切线及法平面方程.

求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $(3, 2, 1)$ 的切平面、法线.

$F(x,y,z) = 0$ | $n_法 = (F_x, F_y, F_z)$ esp. $z = f(x,y)$ $n_法 = (f_x, f_y, -1)$

例 8.9. 求 $z = xy$ 上的点, 使得该曲面在此点的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$.

$a \parallel b$, $a \perp b$, $a\cdot b = |a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$

极值, 最值 无条件极值: 必要条件 + 充分条件; (方法 + 判定) 条件最值: 拉格朗日 (case1,case2) 注意讨论步骤

例 8.10. 设函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, 讨论极值. ✓

求函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在 $D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$ 内的最大值最小值. ✓

例 8.11. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定, 讨论 z 的极值

无条件极值 $f(x, y)$ (书 P109)

step i. 求驻点 $f_x = 0, f_y = 0$

step ii. 利用二阶导数判定:

$f_{xx} = A, f_{xy} = B, f_{yy} = C$

$A>0$ 极小

$A<0$ 极大

a. $AC > B^2$ 时, 必然是极值点 ✓

b. $AC < B^2$ 时, 必然不是极值点 ✓

c. $AC = B^2$ 时, 结论不一定 ?

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

条件极值 (最值)

case 1. max $f(x, y)$ s.t. $\varphi(x, y) = 0$;

max $f(x, y, z)$ s.t. $F(x, y, z) = 0$;

max $f(x, y, z)$ s.t. $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

拉格朗日乘子法 $L = f + \lambda\varphi$; $L = f + \lambda F + \mu G$

$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \\ x \\ y \end{cases}$ 各种联立

(1) 特殊

case 2. max $f(x, y)$ s.t. $(x, y) \in D \sim \partial D\varphi(x, y) = 0$;

max $f(x, y, z)$ s.t. $(x, y, z) \in D$

step 1 区域 D 内的无条件极值的驻点 1

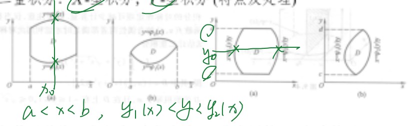
step 2 区域边界 ∂D 上的条件极值的驻点 2 (1) 特殊

step 3 取值比较

9 重积分

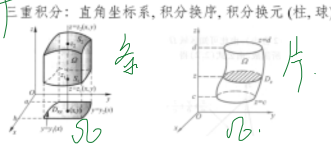
- 直角坐标系, 积分换序, 积分换元(常用, 规范) 性质: 对称性 (轴, 中, 轮)

  二重积分: X-型积分; Y-型积分 (特点及处理)



$a < x < b$, $y_1(x) < y < y_2(x)$

- 初等函数的不定积分, 分部积分, 一些常用技巧 (积分换元)
- 三重积分: 直角坐标系, 积分换序, 积分换元 (柱, 球)



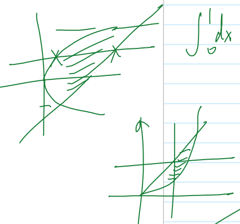
条 片

- 重积分的应用: 曲面面积 $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$

例 9.1. • 计算 $\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma$, D 是由 $y=x, x=-1, y=1$ 所围区域.

选y型

- 计算 $\iint_D xy\,d\sigma$, D 为抛物线 $y^2=x$ 和直线 $y=x-2$ 所围区域.
- (*) 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,d\sigma$, D 是由 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所围区域.
- 求曲面 $z_1 = 2-x^2-y^2$ 与 $z_2 = x^2+y^2$ 所围立体体积



$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy\, \frac{\sin x}{x}$ ✓

$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx\, \frac{\sin x}{x}$ ✗

例 9.2 (积分计算). 极坐标 计算 $I = \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$. 其中 $D: x^2+(y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$.

一般坐标 $\iint\limits_D (x+y)^2(x-y)^2\,d\sigma$, 其中 D 为 $x+y=1, x+y=3, x-y=-1, x-y=1$ 所围区域. (u, v)

例 9.3. 直角坐标系 $\iiint\limits_\Omega z\,dV$, 其中 Ω 由三个坐标平面以及 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, (a,b,c>0)$ 所围立体.

柱面坐标 $\iiint\limits_\Omega z\,dV$, 其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 所围.

球面坐标 $\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$ 所确定区域.

一般坐标 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dV$. $\Omega: x^2+y^2+(z-2)^2 \ge 4, z\ge 0, x^2+y^2+(z-1)^2 \le 9$ 所围成的空心体.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ | $x = ar\cos\theta + x_0$, $y = br\sin\theta + y_0$ | $dxdy = r\,drd\theta$

$-1 \le xy \le 1$, $1 \le x/y \le 3$, $u = xy$, $v = x/y$ $dxdy = |J|\,dudv$ $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$

$dxdydz = \begin{cases} r\,drd\theta dh \\ r^2\sin\varphi\,d\theta d\varphi dr \end{cases}$ | $dxdydz = |J|\,dudvdw$

$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $r \ge 0$, $\varphi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$ / $[-\pi, \pi)$

r, $r\sin\varphi$

10 场论——曲线、曲面积分

x_i, $f(x)$

- 第一型曲线积分 (参数方程); 第二型曲线积分; 格林公式 (结论)

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt, \quad ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt,$$

$$d\vec{s} = (dx, dy) = (x'(t), y'(t))dt = (\cos\alpha, \cos\beta)ds$$

$\int_L(Pdx + Qdy + Rdz)$

L^+ D 格

$$\oint_{L^+}(Pdx + Qdy) = \iint_D (Q_x - P_y)d\sigma$$

直接积分 识别 dx, dy, dz; 从 A 到 B 的有向弧线;

特点: 参数单调变化或关于某参变量成函数形式变化

方法: 化第二类型积分为定积分计算, $\alpha \sim$ 起点, $\beta \sim$ 终点

参数方程 $\int_\alpha^\beta \left(Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right) dt$

第二类曲线积分 v.s. 第一类曲线积分 $\int_{\vec{L}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$

切∥, 指向 $= \vec{l}$

格林公式: 补线法、打洞法、四个等价命题.

建议步骤: 1、明确 P, Q; 2、验证 Q_x, P_y; 3、定义辅助线; 4、计算.

例 10.1. 计算 $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, 其中 $l: x^2 + y^2 = 2ax, (a > 0)$.

计算 $I = \int_L x^2 ds$, 其中 $L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cap x + y + z = 0$. (自建参数方程)

参数. $z = -(x+y)$, $x^2+y^2+(x+y)^2=a^2$

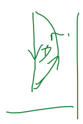
对称性, $I = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)ds = \frac{a^2}{3}\cdot C(L)$

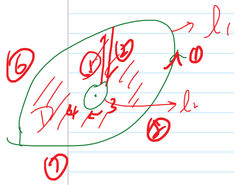
计算 $I = \int_C xdy - 2ydx$, 其中 $C: x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限部分, 逆时针方向.

例 10.2. 计算 $I = \oint_C xy^2dy - x^2ydx$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 方向为正向.

$\oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. L 为包含原点, 简单闭曲线.

l_2: $x^2+y^2=\varepsilon^2$ (ε较小).





$$\oint_{l_1^+} + \oint_{l_2^-} = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$$

$\oint_{l_2^+}$

例 10.3. 验证积分与路径无关并求值:

$Q_x = P_y$

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$$

$u(3,0) - u(-2,-1)$

$u(x,y)$

- 定义: 第一型曲面积分 (参数方程); 第二型曲面积分; 高斯公式

$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$

$(A,B,C)=(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)$

$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$(\Delta S) = (dydz, dzdx, dxdy) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)(dS)$$

方向，指

$\iint_S (Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)$

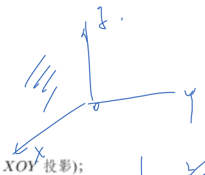
高斯

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega (P_x+Q_y+R_z)dV$$

第二类型建议: 使用 D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}; 分面 + 影射 + 定号 + 计算; 相互转换

$$I = \iint_S (P+Q+R) = \iint_S dxdy() = \pm \iint_{D_{xy}} ()dxdy = ans$$

高斯公式: 1、明确 P,Q,R; 2、定义辅助条件; 3、计算



1. 第一类型曲面积分计算: 按已有公式计算即可
2. 第二类型曲面积分计算:
   (a) 首先应准确认定是第二类型曲面积分
   (b) 选择投影区域: 简化计算 (例 2.1-4);
   不得不的情形 (例 2.3-4, 垂直于 XOY 的曲面不能在 XOY 投影);
   (c) 建立曲面方程 $z = z(x,y)$, 并且描述方向 (向上、向下);
   (d) 斜曲面 (以投影 XOY 为例), 将 dS_{yz}, dS_{zx} 的计算转化为 dS_{xy} (例 2.3-1);
   (e) 二类转重积分 $dS_{xy} \to d\sigma_{xy}$, $\iint_\Sigma f(x,y)dxdy \to \iint_D f(x,y)\,dxdy$
   方向向上为正 $dS_{xy} = dxdy$, 方向向下为负 $dS_{xy} = -dxdy$;
   注意题目中"外侧", 这个方向是相对与内部的概念

XOY侧

$2\Rightarrow1$

$2\Rightarrow$重,

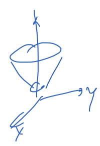
$x^2+z^2=1$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$y=\sqrt{1-x^2-z^2}$

例 10.4. 计算

1. (定义) $\iint_\Sigma x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, 其中 Σ 为长方体 $\Omega = [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的表面外侧.
2. (相互转换) 计算 $I = \iint_S ydydz - xdzdx + z^2dxdy$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的外侧.



$z=z(x,y)$

$n_{法}=(z_x,z_y,-1)$

$dS_{yz}=-z_x\,dS_{xy}$

$dS_{zx}=-z_y\,dS_{xy}$

例 10.5.
1. $I = \iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, S 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.
2. $\iint_\Sigma (x-y)\,dxdy + (y-z)x\,dydz$, 其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成封闭区域的外侧.
3. $I = \iint_S (2x+z)dydz + zdxdy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2+y^2 (0\le z\le 1)$, 法线方向与 z 轴正向成锐角. 补片
4. $I = \iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2})^3}$. $S: x^2+y^2+z^2=1$ 外侧. 挖洞

$2x^2+2y^2+z^2=\varepsilon^2$ (ε 较小)

$P_x+Q_y+R_z=0$

$\iint_{S^+} + \iint_{S^-} = \iiint_\Omega$

12 无穷级数

常数项级数 p 级数，等比级数的结论；常数项级数总结

- step 1: 是否满足性质 4 ($u_n \to 0$)
- step 2: 判断是否为正项级数 (比较、比值、根值、积分)
- step 3: 一般级数 (是否绝对收敛 $\Rightarrow$ 正项级数)
- step 4: 是否为交错级数
- step 5: 特殊级数

幂级数
- 收敛半径 (区间, 域);
- 幂级数计算 (性质 1, 2, 3)
- 幂级数展开 (五个基本初等函数); 间接展开法; 和 + 乘积; (收敛域讨论)

傅里叶级数 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$

- 周期为 2π 的函数
- 正弦 (余弦) 展开
- 周期为 $2l$ 的函数

例 12.1 (讨论级数的收敛性). $\sum\limits_{n\ge1}\left(\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}\right)$; $\sum\limits_{n\ge2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$; $\sum\limits_{n\ge2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$; $\sum\limits_{n\ge2}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$; $\sum\limits_{n\ge2}\sin(\sqrt{n^2+n}\pi)$

例 12.2. 判断收敛域以及求解和函数

$$\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n+1};\quad \sum_{n\ge1}nx^n;\quad \sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1};\quad \sum_{n\ge1}n^2x^n$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{n}{2^n};\quad \sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n}{2n+1};\quad \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$$

$$\sum_{n\ge0}(2n+1)(3n+2)x^n;\quad \sum_{n\ge0}\frac{1}{4n+3}\left(\frac{1}{4}\right)^n, \sum_{n\ge0}\frac{1}{4n+3}\left(\frac{-1}{4}\right)^n;\quad \sum_{n\ge1}\frac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}$$

例 12.3. 求证和函数 $y := \sum\limits_{m\ge0}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$ 满足方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0.$$

例 12.4 (幂级数展开). ... 在 x_0... 加减法.... 乘积... 间接展开

例 12.5.

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = ...$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\text{任意周期}\quad f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx$$