回溯算法

问题描述: 输出n个数字的全部排列,数字可以重复

输入: 1,2,3

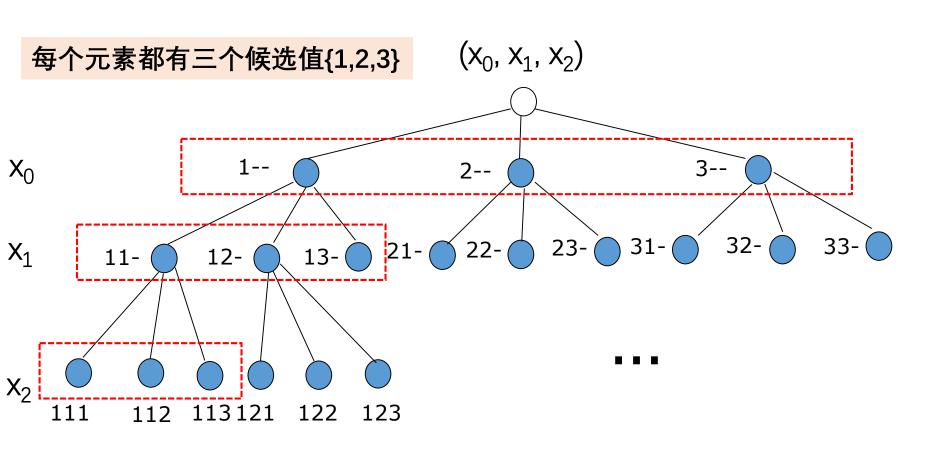
输出: 111 112 113 121 122 123 131 132 133 ... 333

解空间 (搜索空间)

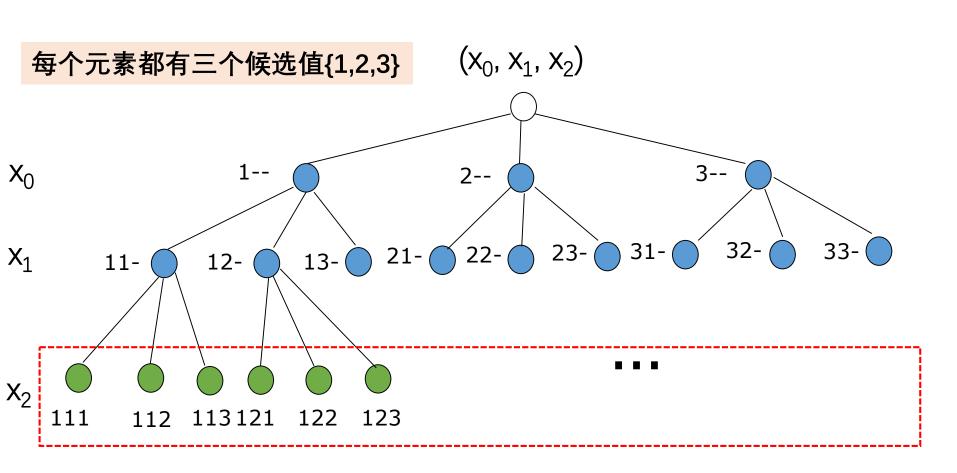
一个解 (x₀, x₁, x₂)

回溯:按照深度优先顺序遍历整个解空间

解空间 (搜索空间)

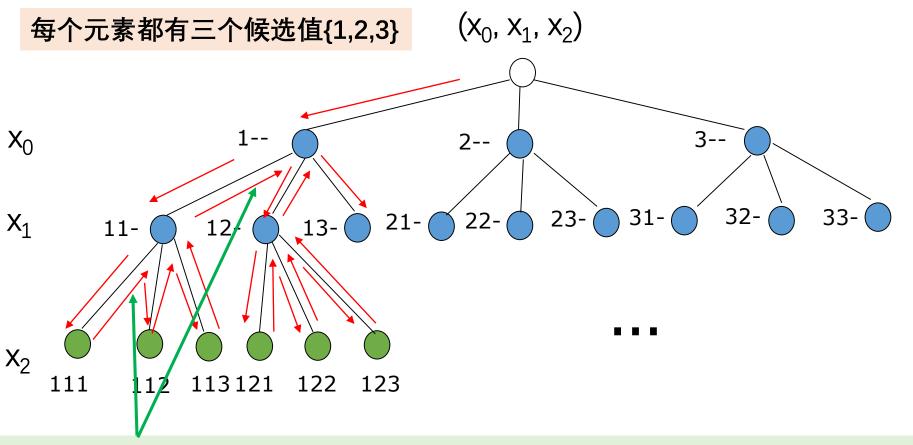


解空间 (搜索空间)



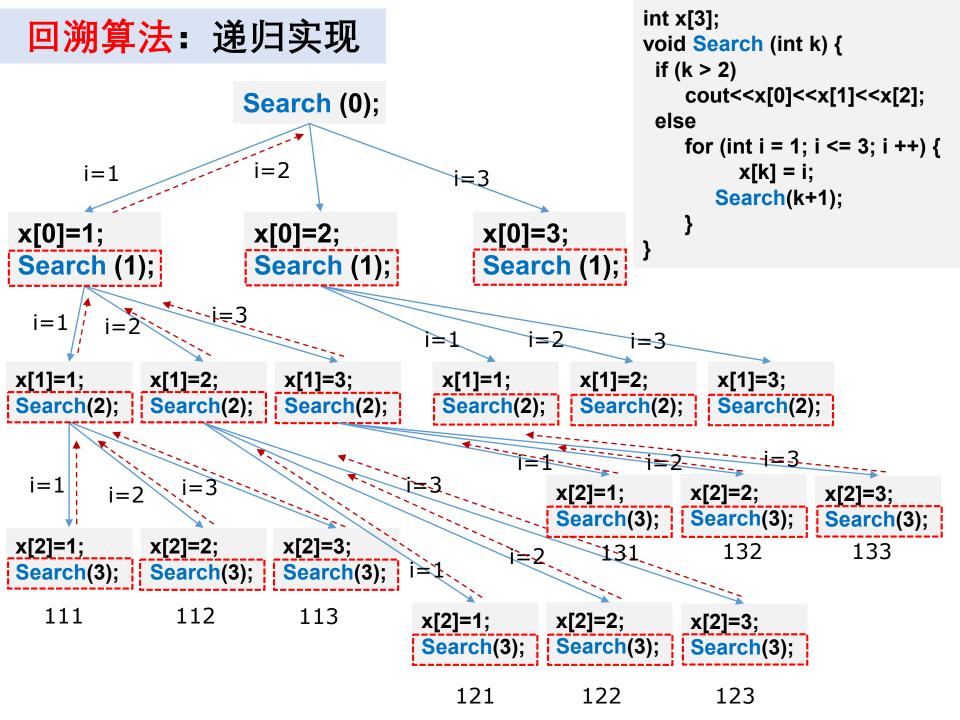
解空间 (搜索空间)

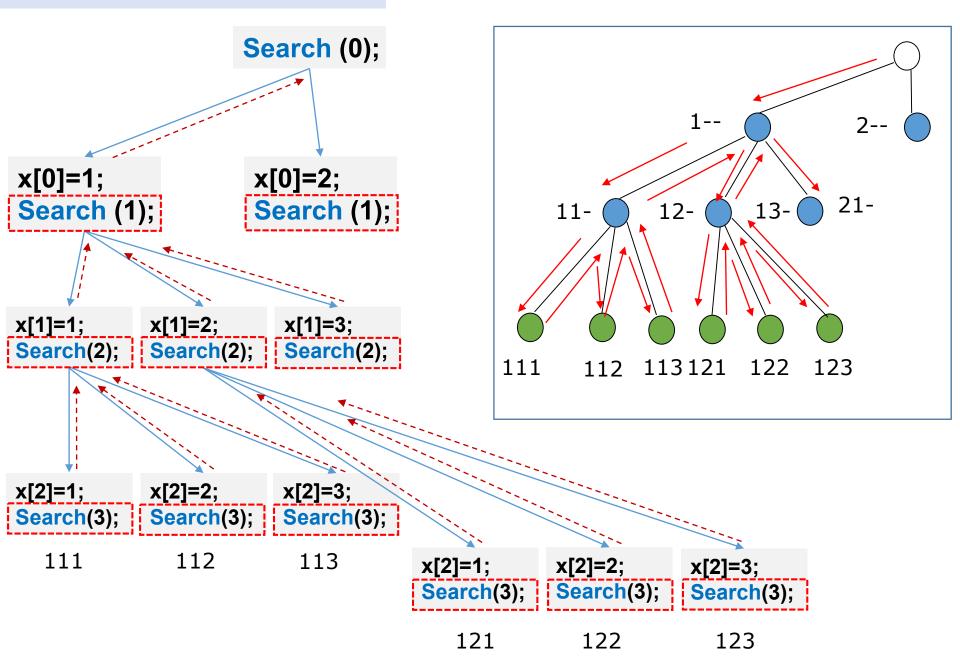
深度优先:每次决定解的一个元素,先决定x₀,再决定x₁,"



<mark>回溯</mark>:深度优先,从一条路往前走,能进则进,不能进退 回来,换一条路再试,直到走完搜索空间

```
int x[3]; //数组存放解, x[0] 代表 x₀, x[1] 代表 x₁...
void Search (int k) { //参数k表示正在决定x[k]
 if (k > 2)
   cout<<x[0]<<x[1]<<x[2]; ← 找到一组解,输出
 else
   for (int i = 1; i \le 3; i ++) {
      x[k] = i;
                               x[k]有三种选择 {1,2,3},
      Search(k+1);
                               逐个尝试
                    x[k] 确定后,决定 x[k+1]
```





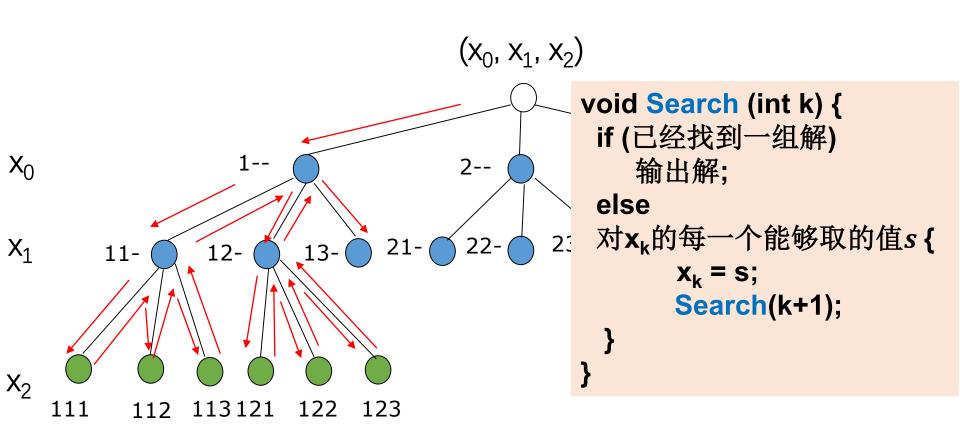
完整程序

```
#include<iostream>
using namespace std;
int x[3];
void Search (int k) {
 if (k > 2)
    cout<<x[0]<<x[1]<<x[2];
 else
    for (int i = 1; i \le 3; i ++) {
       x[k] = i;
       Search(k+1);
int main() {
  Search (0);
  return 0;
```

思考:为何不直接用三重for循环?如果有n个数字,需要多少重循环?

回溯算法的通式

回溯算法通式

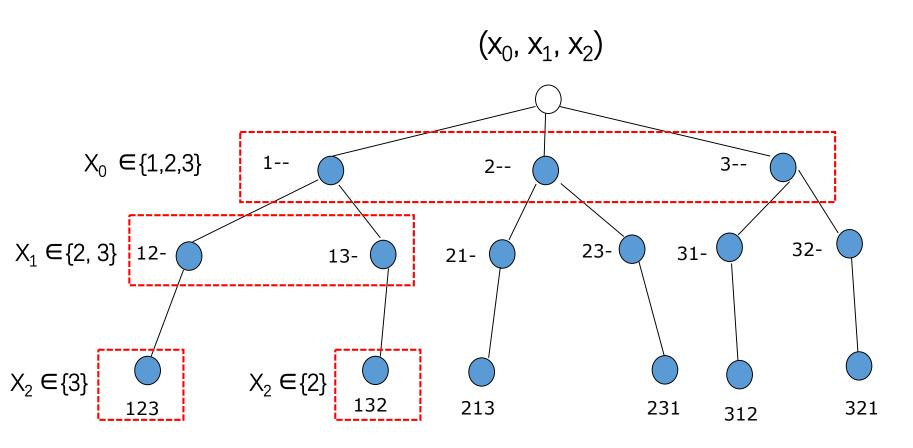


按照通式程序,就可以完成对解空间的深度优先搜索

问题描述: 输出n个数的全部排列,数字不能重复

输入: 1,2,3

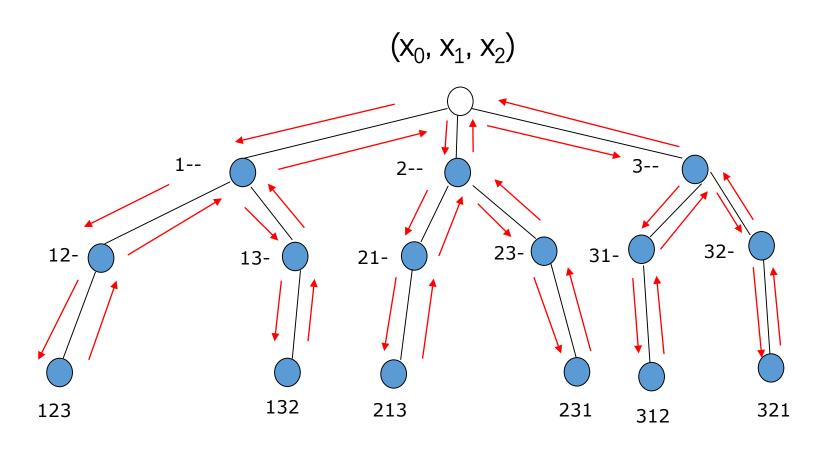
输出: 123 132 213 231 312 321



问题描述: 输出n个数的全部排列,数字不能重复

输入: 1,2,3

输出: 123 132 213 231 312 321



```
回溯算法的通式
```

```
void Search (int k) {
    if (已经找到一组解)
        输出解;
    else
        对x<sub>k</sub>每一个能够取的值s {
             x<sub>k</sub> = s;
             Search(k+1);
        }
}
```

```
int x[3]; //x[k]代表x<sub>k</sub>
void Search (int k) {//决定xk
if (k > 2) //找到一组解,输出结果
    cout<<x[0]<<x[1]<<x[2];
 else
    for (int i = 1; i \le 3; i ++) {
        if(check_feasible(i, k)) {
          x[k] = i;
          Search(k+1);
```

判断i是否可以作为xk的值

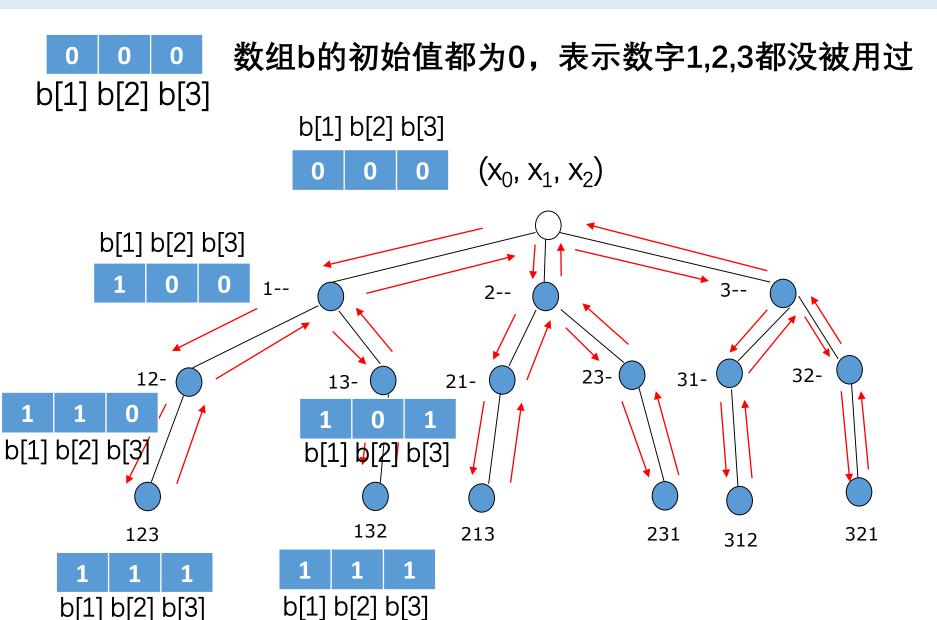
```
//判断i是否可以作为x_k的值
bool check_feasible(int i, int k) {
  bool flag = true;
  for(j=k-1; j>=0; j--) {
    if(i == x[k-1]) {
                           i如果和x[0]...x[k-1]中的某个
        flag = false;
        break;
                           值重复,则不能作为xk的值
                                 复杂度较高!
  return flag;
```

```
int b[100]={0};//b[i]用来标记i是否已经被
用过,0表示没用过,1表示被用过
int x[3]; //x[k]代表x<sub>k</sub>
void Search (int k) {//决定xk
 if (k > 2) //找到一组解,输出结果
    cout<<x[0]<<x[1]<<x[2];
 else
    for (int i = 1; i \le 3; i ++) {
       if(b[i] == 0) { //0表示没用过
         x[k] = i;
         b[i] = 1; //标记i已经被x<sub>k</sub>用了
         Search(k+1);
         b[i] = 0; //回溯,恢复b[i]的值
```

回溯算法的通式

```
void Search (int k) {
 if (已经找到一组解)
   输出解;
else
对x_k每一个能够取的值s {
     x_k = s;
     添加相应的标记;
     Search(k+1);
     删除标记:
```

回溯过程



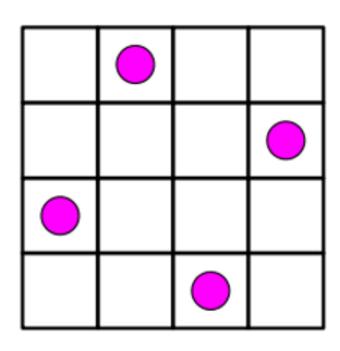
完整程序

```
#include<iostream>
using namespace std;
int b[100]={0};
int x[3];
void Search (int k) {
 if (k > 2)
    cout<<x[0]<<x[1]<<x[2];
 else
    for (int i = 1; i \le 3; i ++) {
        if(b[i] == 0) {
          x[k] = i;
          b[i] = 1;
          Search(k+1);
          b[i] = 0;
```

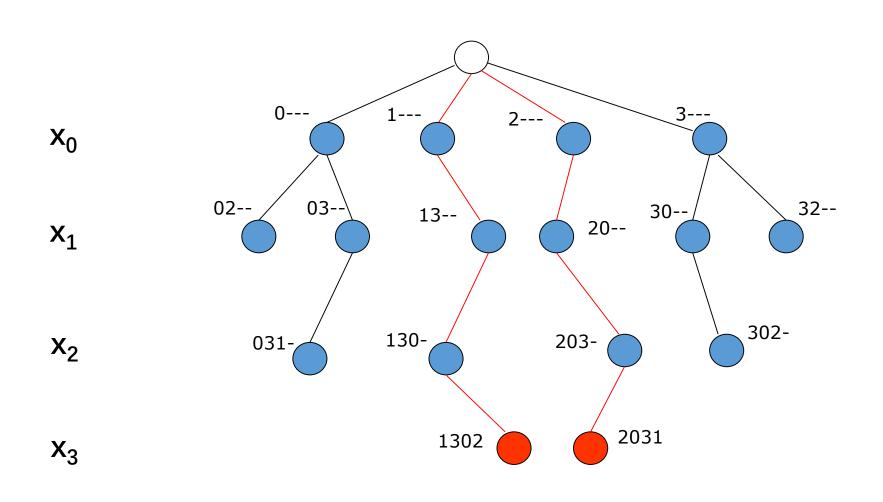
```
int main() {
    Search (0);
    return 0;
}
```

4皇后问题

在4×4的国际象棋棋盘上,放置4个皇后,使任何一个皇后都不能吃掉另一个,需满足的条件是:同一行、同一列、同一对角线上只能有一个皇后。求所有满足要求的放置方案。



回溯解法: (x_0, x_1, x_2, x_3) // x_i 表示第 i 行的皇后放在哪一列



```
回溯算法的通式
```

```
void Search (int k) {
    if (已经找到一组解)
        输出解;
    else
    对x<sub>k</sub>每一个能够取的值s {
        x<sub>k</sub> = s;
        Search(k+1);
    }
}
```

```
int x[4]; //x[i]表示第i行皇后放在哪一列
void Search (int k) {
 if (k > 3)
    print(); //找到可行解, 打印棋盘
 else
   for (int i = 0; i < 4; i ++) {
       if(able_to_place(i, k)) {
         x[k] = i;
         Search(k+1/);
```

检查如果第k行皇后放在第 i 列, 是否可以

```
bool able_to_place(int i, int k) {
 //遍历第k行之前的所有行,即x[0],...,x[k-1]
 for (int j=0; j<k; j++) {
   if (i==x[j]) {//如果在同一列,该位置不能放
    return false;
   //如果当前位置的右上/左下方有皇后,也不行
   if ((j+x[j])==(k+i)) {
    return false;
   //如果当前位置的左上/右下方有皇后,也不行
   if ((j-x[j])==(k-i)) {
    return false;
 return true; //如果以上情况都不是,当前位置就可以放皇后
```

```
void print() {
 for (int line = 0; line < 4; line++) {
   int i;
   for (i = 0; i < x[line]; i++)
     cout<<"0"; //没放皇后的位置打印字符0
   cout<<"#"; //放皇后的位置打印字符#
   for (i = x[line] + 1; i < 4; i++) {
     cout<<"0"; //没放皇后的位置打印字符0
   cout<<endl;
  cout<<"=======\n":
```

```
#include<iostream>
using namespace std;

int main() {
    Search(0); //从第0行开始放
    return 0;
}
```

主函数

```
0#00
000#
#000
00#0
00#0
#000
000#
0#00
```

输出结果

简化版本

回溯算法的通式

```
void Search (int k) {
if (已经找到一组解)
   输出解;
else
对x_k每一个能够取的值s {
     x_k = s;
     添加相应的标记;
     Search(k+1);
     删除标记:
```

```
int x[4]; //x[i]表示第i行皇后放在哪一列
int b[100]={0};//b[j]标记第j列是否已被占用
int c[100]={0};//标记右上/左下对角线是否被占
int d[100]={0};//标记左上/右下对角线是否被占
void Search (int k) {
 if (k > 3)
   print(); //找到可行解, 打印棋盘
 else
   for (int i = 0; i < 4; i ++) {
      if((!b[i]) && (!c[i+k]) && (!d[k-i+3])) {
         x[k] = i;
         b[i] = 1; c[i+k] = 1; d[k-i+3] = 1;
         Search(k+1);
         b[i] = 0; c[i+k] = 0; d[k-i+3] = 0;
```

走迷宫 (Maze)

已知一N×N的迷宫,允许往上、下、左、右四个方向行走,现请你 找出所有从左上角(起点)到右下角(终点)的路径

输入数据有N行,每行有N个0或1(0表示可以通过,1表示不能通过),用以描述迷宫地图。入口在左上角(0,0)处,出口在右下角(N-1,N-1)处

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{0, 1, 1, 0, 1, 0},

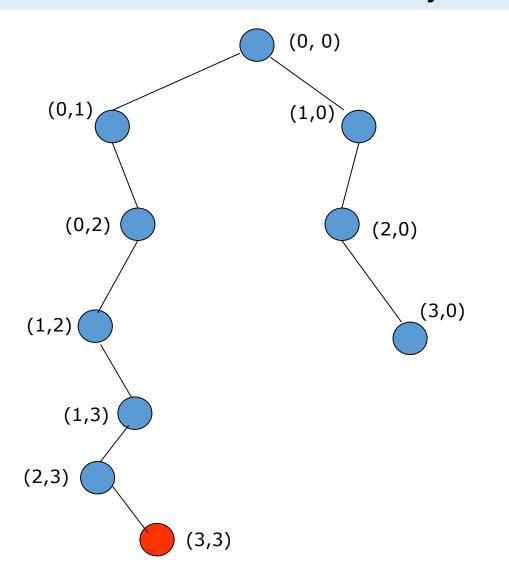
{0, 1, 1, 0, 1, 0},

{0, 1, 1, 0, 1, 0},

{0, 0, 0, 0, 0, 0},
```

回溯解法

(x₀, x₁, x₂, x₃ ···) // x_k 表示第 k 步走到哪个位置,位置用 (i, j) 表示, i 表示行,j表示列



{0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 0},

思路

从入口出发, 顺某一方向向前探索, 若能走通, 则继续往前走; 否则沿原路退回, 换一个方向再继续探索, 直至所有可能的通路都探索到为止,如果所有可能的通路都试探过, 还是不能走到终点, 那就说明该迷宫不存在从起点到终点的通道。

深度优先搜索解空间!

回溯解法

(x₀, x₁, x₂, x₃ ···) // x_k 表示第 k 步走到哪个位置,位置用 (i, j) 表示, i 表示行,j表示列

```
//定义结构体,表示迷宫一个具体位置
struct Pos {
    int i; //表示所在的行
    int j; //表示所在的列
};
```

Pos x[1000]; //x[k]表示第k步走到哪个位置

迷宫问题的回溯程序 6X6迷宫

回溯算法的通式

```
void Search (int k) {
    if (已经找到一组解)
        输出解;
    else
    对x<sub>k</sub>每一个能够取的值s {
        x<sub>k</sub> = s;
        Search(k+1);
    }
```

```
void Search(int k) {//决定第k步要走到哪个位置
  if(x[k-1].i == 5 \&\& x[k-1].j == 5) {
    print(k);//输出路径
  } else {
    //四个方向分别用t = 1, 2, 3, 4表示
    for(int t = 1; t \le 4; t ++) {
       if(able_to_go(k, t)) {//如果可以往i方向
         Pos cur = x[k-1];//第k步要走到哪
         if(t == 1) //往右
           cur.j += 1;
         if(t == 2) //往下
           cur.i += 1;
         if(t == 3) //往左
           cur.j -= 1;
         if(t == 4) //往上
           cur.i -= 1;
         x[k] = cur; //确定了第k步的位置
         Search(k+1);//决定第k+1步
```

迷宫问题的回溯程序

```
//判断第k步是否可以往t方向走
bool able to go(int k, int t) {
  Pos last = x[k-1];//第k-1步的位置
  Pos cur = last;//第k步要走到的位置,从k-1步位置开始走
  if(t == 1) {//往右
    if (last.j+1 > 5 || maze[last.i][last.j+1] != 0) {
       return false;
    cur.j +=1;
  if(t == 2) {//往下
    if ((last.i+1 > 5) || (maze[last.i+1][last.j] != 0)) {
       return false;
    cur.i += 1;
```

迷宫问题的回溯程序

```
if(t == 3) {//往左
  if (last.j-1 < 0 || maze[last.i][last.j-1] != 0) {
     return false;
  cur.j -= 1;
if(t == 4) {//往上
  if (last.i-1 < 0 || maze[last.i-1][last.j] != 0) {
     return false;
  cur.i -= 1;
//x[k]不能和x[0],x[1],...,x[k-1]重复
for(int m = 0; m < k; m ++) {
  if(cur.i == x[m].i \&\& cur.j == x[m].j)
     return false;
return true;//满足上面所有条件,可以往i方向走
```

迷宫问题的回溯程序

```
//打印找打的路径, 即x[0],x[1],...,x[k-1]
void print(int k) {
   for(int m = 0; m < k; m ++) {
      cout<<x[m].i<<" "<<x[m].j<<endl;
   }
   cout<<endl;
}
```

迷宫问题的完整程序

```
#include<iostream>
                                                             00
using namespace std;
                                                  00
//迷宫
                                                             10
                                                  01
int maze[6][6] = {
                                                  02
                                                             20
{<mark>0,0,0,0</mark>,0,1},
                                                             30
                                                  03
{0,1,1,<del>0</del>,1,1},
                                                  13
                                                             40
\{0,1,1,0,1,0\},
                                                  23
                                                             50
\{0,1,1,0,1,0\},
                                                  33
                                                             51
{0,1,1,0,0,0,0},
                                                  43
                                                             52
{0,0,0,0,1,0}
                                                  44
                                                             53
                                                  45
                                                             43
                                                  5 5
                                                             44
int main() {
                                                             45
  Pos start = {0,0};//起点
  x[0] = start;//把x[0]置为起点
                                                             55
  Search(1);//从第一步开始搜索
                                                     输出结果
  return 0;
```

简化版本

回溯算法的通式

```
void Search (int k) {
if (已经找到一组解)
   输出解;
else
对x_k每一个能够取的值s {
     x_k = s;
     添加相应的标记;
     Search(k+1);
     删除标记;
```

```
void Search(int k) {//决定第k步要走到哪个位置
  if(x[k-1].i == 5 \&\& x[k-1].j == 5) {
    print(k);//输出路径
  } else {
     for(int t = 1; t \le 4; t ++) {
       if(able_to_go(k, t)) {//如果可以往t方向
         Pos cur = x[k-1];//上一步的位置
         if(t == 1) //往右
           cur.j += 1;
         if(t == 2) //往下
           cur.i += 1;
         if(t == 3) //往左
           cur.j -= 1;
         if(t == 4) //往上
           cur.i -= 1;
         x[k] = cur;//确定了第k步的位置
         maze[cur.i][cur.j] = 2;
         Search(k+1);
         maze[cur.i][cur.j] = 0;
                    标记迷宫这个位置已经走过
        递归回来删除标记
```

简化版本

```
//判断第k步是否可以往t方向走
bool able to_go(int k, int t) {
  Pos last = x[k-1];//上一步位置
  Pos cur = last;//这一步要走到的位置
  if(t == 1) {//往右...}
  if(t == 2) {//往下...}
  if(t == 3) {//往左...}
  if(t == 4) {//往上...}
  //x[k]不能和x[0],x[1],...,x[k-1]重复
  for(int m = 0; m < k; m ++) {
    if(cur.i == x[m].i \&\& cur.j == x[m].j)
      return false;
  return true;//满足上面所有条件,可以往i方向走
```

可以删掉,因为 已经把走过的路 线标记为2,不会 再走重复的路线

走迷宫(Maze)

已知一N×N的迷宫,允许往上、下、左、右四个方向行走,最短路 径的长度是多少?

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

{0, 1, 1, 0, 1, 0},

{0, 1, 1, 0, 1, 0},

{0, 1, 1, 0, 1, 0},

{0, 0, 0, 0, 0, 0},
```

回溯程序

```
int shortest path = 6*6;//记录目前为止最短路径长度
void Search(int k) {//决定第k步要走到哪个位置
  if(x[k-1].i == 5 \&\& x[k-1].j == 5) {
   //新找到的路径的长度为k
    if(shortest path > k+1)
       shortest path = k+1; //如果新找到的路径更短,更新
  } else {
```

迷宫问题的完整程序

```
#include<iostream>
using namespace std;
int shortest path = 36;
int maze[6][6] = {
{0,0,0,0,0,1},
{0,1,1,0,1,1},
{0,1,1,0,1,0},
                                                    11
{0,1,1,0,1,0},
{0,1,1,0,0,0},
                                                输出结果
{0,0,0,0,1,0} };
int main() {
  Pos start = {0,0};//起点
 x[0] = start;//将x[0]置为起点
 Search(1);//从第一步开始
  cout<<shortest path<<endl;
  return 0;
```

更高效的方案?

```
int shortest_path = 6*6;//记录目前为止最短路径长度
void Search(int k) {//决定第k步要走到哪个位置
 if(k+1 > shortest path)
    return; //剪枝操作
 if(x[k-1].i == 5 \&\& x[k-1].i == 5) {
   //新找到的路径的长度为k
   if(shortest_path > k+1)
      shortest_path = k+1; 如果搜索过程中, 发现k+1
                        已经大于shortest_path了,
  else {
                        可以跳过正在搜索的路径
```

深度优先搜索过程

shortest_path=36

shortest_path=11

深度优先搜索过程

shortest_path=36

shortest_path=11

停止,因为k+1已经超过了shortest_path

深度优先(DFS)与广度优先(BFS)

迷宫最短路问题,m行n列迷宫,S表示起点,E表示终点, +表示不通,-表示通路,求S到E的最短路径长度

+	+	+	+	+	+
+	Е	•	•	•	+
+	1	-	-	-	+
+	-	-	_	_	+
+	+	+	+	S	+

深度优先搜索(DFS)

思路

定义数组b[m][n], b[i][j]表示从S到(i,j)的最短距离; 初始时, b[S_x][S_y]为0(S到自己的最短路为0), 其余b[i][j]为无穷大; 深度优先遍历所有路径, 每走一步, 更新所到达节点的b[i][j](将路径长度+1), 直到所有路径搜索完, b[E_x][E_y]就是S到E的最短路径。

+	+	+	+	+	+
+	Ш	ı	ı	ı	+
+	ı	ı	1	1	+
+	ı	ı	-	ı	+
+	+	+	+	S	+

∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	8	8	∞	∞	8
∞	∞	8	∞	∞	8
∞	∞	8	∞	∞	8
∞	8	8	8	0	8

深度优先(DFS)搜索:下,上,右,左的顺序 + ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ E E + ∞ \$ S 0 ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ 3 + ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ Ε + ∞ \$ + ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ 3 5 3 4 ∞ ∞ ∞ + E + ∞ ∞ ∞ + ∞ ∞ ∞ + ∞ ∞ + ∞ ∞ ∞ + ∞ 0 ∞ ∞ ∞ + + ∞ ∞ + + + + ∞

深度优先(DFS)搜索

 ∞

5

 ∞

3

+	Ε	+	1		∞	∞	2		+	Ę	+		∞	6	∞	2
+	ı	1	*	∞	∞	∞	1		+	-	ı	*	∞	∞	∞	1
+	+	+	\$	∞	∞	∞	0		+	+	+	\$	∞	∞	∞	0
+			- 1	∞	5	4	3		+	-	+	- 1	∞	5	4	3
+	Ę	+		∞	6	∞	2		+	E	+	1	∞	6	∞	2
+	_		_	∞	∞	2	1		+	-	ı	•	∞	∞	∞	1
+	+	+	5	∞	∞	∞	0		+	+	+	5	∞	∞	∞	0
	•		•		•		•							•	•	
+	•	+	1	\propto	5	4	3		+	-	+	- 1	∞	5	4	3
+	Ę	+	•	∞	6	∞	2		+	Ę	+		∞	4	∞	2
+	+		_ 1	∞	3	2	1		+	-		_ +	∞	3	2	1
+	+	+	\$	∞	∞	∞	0		+	+	+	\$	∞	∞	∞	0

深度优先搜索(DFS)

```
#include<iostream>
#include<cstring>
using namespace std;
char a[101][101];//存迷宫,+号表示障碍,-表示通路,S表示入口,
E表示出口
int b[101][101];//b[i][j]存储从入口到a[i][j]的最短路长度
int m,n,x e,y e,x s,y s;//m行n列; xe: 出口行坐标, ye: 出口
列坐标,xs:入口行坐标,ys:入口列坐标
void dfs(int x, int y, int z)//DFS, z表示从起点到(x,y)的最短路径
     if(x>m||x<1||y>n||y<1||a[x][y]=='+'||b[x][y]<=z) return;
     b[x][y] = z;//更新最短路
     dfs(x+1,y,z+1);//往下走
     dfs(x-1,y,z+1);//往上走
     dfs(x,y+1,z+1);//往右走
     dfs(x,y-1,z+1);//往左走
```

深度优先搜索(DFS)

```
int main() {
      cin>>m>>n;
      for(int i=1; i<=m; i++)
        for(int j=1; j<=n; j++){
            cin>>a[i][j];
              if(a[i][j] == 'S') x_s=i, y_s=j;
              if(a[i][j] == 'E') x_e=i, y_e=j;
        }//输入迷宫
      for(int i=1;i<=m;i++)
        for(int j=1;j<=n;j++)
            b[i][j]=1e9;//将每个点与起点的最短路置为无穷大
      dfs(xs,ys,0);//从起点开始走
      if(b[x_e][y_e]==1e9) cout<<"WRONG";
      else
        cout<<br/>b[x e][y e];//输出终点到起点的最短路
      return 0;
```

广度优先搜索(BFS)

思路

定义数组b[m][n], b[i][j]表示从S到(i,j)的最短距离; 初始时, b[S_x][S_y]为0 (S到自己的最短路为0)对于起点每个可达的位置(i,j), 更新b[i][j]为1对于每个位置(i,j)每个可达的位置(i1,j1), 更新b[i1][j1]为2

. . .

以此类推,直到到达终点E

+	+	+	+	+	+
+	Е	1	-	-	+
+	1	-	-	-	+
+	1	-	-	-	+
+	+	+	+	S	+

∞	∞	8	∞	∞	8
∞	∞	∞	∞	∞	8
∞	∞	∞	∞	∞	8
∞	∞	∞	∞	∞	8
∞	∞	8	∞	0	8

广度优先搜索(BFS)

+	-	-	_	∞	∞	∞	∞		+	ı	ı	-	∞	∞	∞	∞
+	Ε	-	-	∞	∞	∞	∞		+	Е	ı	-	∞	∞	∞	∞
+	-	-	-	∞	∞	∞	∞		+	1	-	†	∞	∞	∞	1
+	+	+	S	∞	∞	∞	0		+	+	+	5	∞	∞	∞	0
													,			
+	-	-	1	∞	∞	∞	3		+	1	-	-	∞	∞	∞	8
+	Е	-	- 🕇	∞	∞	3	2	4	+	Е	ı	†	∞	∞	∞	2
+	-		- 🛉	∞	8	2	1		+	1	ļ	- 1	∞	∞	2	1
+	+	+	\$	∞	8	8	0		+	+	+	5	∞	∞	∞	0
				ļ								•				
+	-	-		∞	∞	8	3		+	ı	 	_	∞	∞	4	3
+	Е	_	- 🕇	∞	∞	3	2		+	Е	-	- 🕇	∞	∞	3	2
+	4-	4	- 🛉	∞	3	2	1		+	-		- 1	∞	3	2	1
+	+	+	\$	∞	∞	8	0		+	+	+	5	∞	∞	∞	0
								-						•	-	•

广度优先搜索(BFS)

```
定义数组b[m][n];//b[i][j]表示S到(i,j)的最短距离
将b[S.x][S.y]初始化为0,其余的b[i][j]置无穷大
定义队列Q:
将S放入Q:
while(Q不空) {
  取出队列首元素q;
  如果q是终点E,程序结束,输出b[E.x][E.y];
  对于每个q能到达的位置a //更新b[a.x][a.y]
    b[a.x][a.y] = min\{b[q.x][q.y]+1, b[a.x][a.y]\};
```