2014级高数期末

南开大学 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 1 页

一、判断敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5n-2}$

解：∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n-2}=\frac{2}{5}\neq 0$

∴原级数发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n^2+1}$

解：∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n^2+1}\Big/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3(n+2)}{(n^2+1)^2}}=1$

∴原级数收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{1}{n}\right)^n$

解：∵ $\lim_{n\to\infty}(n+1)!\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/n!\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$

∴原级数收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n}$ $(a>0)$

解：∵ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|(-a)^n|}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{n}}=a$

∴ $\begin{cases}0<a<1\text{ 时，原级数绝对收敛}\\ a=1\text{ 时，原级数条件收敛}\\ a>1\text{ 时，原级数发散}\end{cases}$

二、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}x^{n-1}$ 的收敛域并求出和函数.

解：∵ $u_n=\frac{1}{2^n n}$

∴ $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{2}$

∴ $R=2$

又当 $x=2$ 时，原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$，发散；$x=-2$ 时，原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$，收敛

∴收敛域为 $[-2,2)$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$

令 $t=\frac{x}{2}$，则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^n}{n}$

令 $2tf(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int t^{n-1}dt=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$

∴ $f(t)=-\frac{\ln(1-t)}{2t}$

即 $S(x)=-\frac{\ln(1-\frac{x}{2})}{x}$

三、将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并求收敛域

解：$f(x)=\arctan x=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

此时 $\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big/\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}x^2\cdot\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$, 1

当 $x^2<1$ 即 $-1<x<1$ 时，原级数收敛

当 $x^2=1$ 时，$x=\pm1$

1) $x=1$ 时，原级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，收敛

2) $x=-1$ 时，原级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$，收敛

∴收敛域为 $[-1,1]$

四、求下列微分方程或初值问题的解

(1) $(1+x^2)y'=xy$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{y}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$

两边积分 $\Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{1+x^2}dx+C$

$\Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

$\therefore\ y=C\sqrt{1+x^2}$

(2) $xy'=y(\ln y-\ln x)$

解：$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ (*)

令 $y=ux$

则(*)式化为

$u+u'x=u\ln u$

$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=u\ln u-u$

$\Rightarrow \frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{1}{x}dx+C$

$\Rightarrow \ln(\ln u-1)=\ln x+C$

$\ln u-1=Cx$

$\Rightarrow u=e^{Cx+1}$

$\Rightarrow y=xe^{Cx+1}$

(3) $2xy'=x+y$

解：原方程化为

$y'-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}$

$\therefore\ y=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int\frac{1}{2}\cdot e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right)$

$=\sqrt{x}\left(\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}+C\right)$

$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+C)$

$=x+C\sqrt{x}$

(4) $xy''=y'$

解：$x\cdot\frac{dy'}{dx}=y'$

$\Rightarrow \frac{1}{y'}dy'=\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \int\frac{1}{y'}dy'=\int\frac{1}{x}dx+C_1$

$\Rightarrow \ln y'=\ln x+C_1$

$\Rightarrow y'=C_1x$

$\therefore y=C_1x^2+C_2$

(5) $y''-7y'+6y=0$

解：原方程特征方程为

$\lambda^2-7\lambda+6=0$

$\Rightarrow$得特征根

$\lambda_1=6,\ \lambda_2=1$

$\therefore y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}$

(6) $\begin{cases}2y'=y^2-1\\ y(0)=0\end{cases}$

解：$\because 2y'=y^2-1$

$\Rightarrow y'=\frac{y^2-1}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2}{y^2-1}dy=dx$

$\Rightarrow \int\frac{2}{y^2-1}dy=\int dx+C$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x+C$

将y(…

得C…

$\therefore \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|$…

$\Rightarrow \left|\frac{y+1}{y-1}\right|$…

五、计算下列广义积分

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

解：令 $x=\tan t$，则 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore$原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sec^2 t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt$

$=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

$=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}-1$

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解：令 $x=\sin t$，$x=1,\ t=\frac{\pi}{2}$，$x=$…

则原积分 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t}dt$

$=\pi$

六. 将 $f(x)=x\ (0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数

解：将 $f(x)$ 拓展成偶函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\pi \\ -x, & -\pi\le x<0 \end{cases}$

则 $b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx=\pi,\quad \frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x\,d\sin nx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^\pi d\cos nx=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x\right)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

七. $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}$.

…