草稿区

学号

专业

任课教师

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

一、选择题(每小题4分)

一题得分	

(1) 对数列$\{a_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,(A\neq 0)$，则当$n$充分大时，必有（ D ）

(A) $|a_n|\le A$；(B) $|a_n|\le|A|$；(C) $|a_n|\le(1/2)|A|$；(D) $|a_n|\ge(1/2)|A|$

(2) 当$x\to 0$时，$(2/3)(\cos x-\cos 2x)$ 是x^2的（ A ）

(A) 等价无穷小；(B) 高阶无穷小；(C) 同阶，但不等价无穷小；(D) 低阶无穷小

(3) 设函数$f(x)$在x_0处可导，则$\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0-\frac{1}{n})]=$（ C ）；

(A) $f'(x_0)$；(B) $-f'(x_0)$；(C) $2f'(x_0)$；(D) 0；

(4) 设函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为（ B ）；(A) -1；(B) -2；(C) 1/2；(D) 2；

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-2$

(5) 设函数$f(x)=\frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$，则$x=0$是$f(x)$的（ D ）；

(A) 可去间断点；(B) 连续点；(C) 无穷间断点；(D) 跳跃间断点

当$x\to 0^+$时 $\frac{1}{x}\to+\infty$ $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$ $f(x)\to -1$

当$x\to 0^-$时 $\frac{1}{x}\to-\infty$ $e^{\frac{1}{x}}\to 0$ $f(x)\to 1$

二、填空题（每小题4分）：

二题得分	

(1) 设$f(x)=(x-1)^2e^{x-1}$，则$f^{(100)}(1)=$ 9900

$f(x)=(x-1)^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+2}}{n!}$

$a_{100}=\frac{1}{98!}=\frac{f^{(100)}(1)}{100!}\Rightarrow f^{(100)}(1)=\frac{100!}{98!}=9900$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin x+(e^x-1)}{\ln(1+2x)}=$ 2 ．

(3) 设函数$y=y(x)$由方程$y-xe^y=2$所确定，则$y'(0)=$ e^2

$y'-xe^y y'-e^y=0\Rightarrow y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$ $x=0$时$y=2$ 故$y'(0)=e^2$

(4) 设函数$f(x)$有任意阶导数，且满足$f'(x)=[f(x)]^2$，则当$n\ge 2$，$f^{(n)}(x)=$ $n![f(x)]^{n+1}$ （归纳法）

(5) 设函数$f(x)=x^x$，则$f'(2)=$ $4(\ln 2+1)$

$f(x)=e^{x\ln x}$ $f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$ $f'(2)=4(\ln 2+1)$

学号

专业

任课教师

三、求下列极限（每小题 5 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-4x}-\sqrt{1+6x}}{x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-4x-6x}{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1+6x}}=-10\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1+6x}}=-5$

三题得分	

草稿区

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{2x}+\cos\dfrac{2}{x})^{x}$ $=\left\{\left[1+(\sin\frac{1}{2x}+\cos\frac{2}{x}-1)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{2x}+\cos\frac{2}{x}-1}}\right\}^{(\sin\frac{1}{2x}+\cos\frac{2}{x}-1)x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{2x}+\cos\dfrac{2}{x}-1)x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2x}+o(\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{x})^{2}+o(\dfrac{1}{x^{2}})\right)x=\dfrac{1}{2}$ 所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{4}$

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）

(1) 设 $y=\arctan(\dfrac{1-x}{1+x})$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ $=\dfrac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2}\cdot\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$

四题得分	

(2) 设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中（$n\geq 2$）为自然数，求 $f'(0)$。

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$

$=(-1)(-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

（3）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=3t+t^3 \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{6(1+t^2)(1+t^2)'}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2$

从而 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.12t(1+t^2)^2\right|_{t=1}=48$

五、证明下列不等式（每小题 6 分）

五题得分	

（1）当 $x>0$，$e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$；

令 $f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$　$f'(x)=e^x-\ln(1+x)-1$

$f''(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}>0$　$x>0$ 所以 $f'(x)\uparrow$　$f'(x)>f'(0)=0$

故 $f(x)\uparrow$　从而 $f(x)>f(0)=0$　#

（2）当 $1>x>0$，$\arcsin x<\dfrac{x}{1-x^2}$

$f(x)=\arcsin x-\dfrac{x}{1-x^2}$　$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}=\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)}{(1-x^2)^2}<0$

所以 $f(x)<f(0)=0$

六、（6 分）求函数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ 的极值

六题得分	

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$

$f''(x)=12x-6$

令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=-1$　$x_2=2$

$f''(-1)=-18<0$　故 $x_1=-1$ 是极大值点　极大值 $f(-1)=17$

$f''(2)=18>0$　故 $x_2=2$ 是极小值点　极小值 $f(2)=10$

学号

专业

任课教师

草稿区

级信息类一元函数微分学……

……在装订线右侧，写在装订线左侧无效，影响成绩后果自负。）

……	核分	复核

七、（6 分）求函数 $f(x)=x^4-2x^2-31$，在区间 $[-2,3]$ 上的最大值，最小值

$f'(x)=4x^3-4x=0$ 解得 $x_1=-1$ $x_2=0$ $x_3=1$

$f(-2)=-23$ $f(\pm1)=-32$ $f(0)=-31$ $f(3)=32$

所以 $f_{max}=f(3)=32$

$f_{min}=f(\pm1)=-32$

七题得分	

草稿区

八、（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1/3$，

证明：分别存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

八题得分	

令 $F(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}$ 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

在 $(0,1)$ 内可导 且 $F(0)=0=F(1)$，在 $[0,\frac{1}{2}]$

上应用 Lagrangé 微分中值定理 有 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$ s.t

$F(\frac{1}{2})-F(0)=F'(\xi)$，即 $F(\frac{1}{2})=f'(\xi)-\xi^2$

在 $[\frac{1}{2},1]$ 上应用 Lagrangé 微分中值定理，$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ s.t

$F(1)-F(\frac{1}{2})=F'(\eta)$ 即 $-F(\frac{1}{2})=f'(\eta)-\eta^2$，从而

$f'(\xi)-\xi^2=-(f'(\eta)-\eta^2)$ 整理即得

$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$