中值等式证明构造辅助函数的方法

（编者：甄典　时间：2017.12.16）

在证明微分中值等式时，往往需要构造辅助函数，再利用罗尔定理，或者拉氏定理进行求解，然而如何构造辅助函数却是令人头疼的问题，这里给大家介绍两种常用的方法，希望对大家有帮助：

方法一：解微分方程法

例题 1：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)f(1)<0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得：

$$\xi f'(\xi)+(4-\xi)^2 f(\xi)=0$$

分析：将 ξ 用 x 代替，上述的等式可以转化为 $xf'(x)+(4-x)^2 f(x)=0$，很明显这是一个微分方程，于是就可以求出这个微分方程，$f(x)=c\cdot x^{-16}e^{8x-\frac{1}{2}x^2}$，在联想到，对于任何一个常数的导数都为零，即可以假设

$F(x)=c=f(x)\cdot x^{16}e^{\frac{1}{2}x^2-8x}$ 这样我们就得出了构造函数，然后验证是否满足题目所给的条件，采用罗尔定理或者拉格朗日中值定理，这道题目就迎刃而解了，下面是具体的步骤：

证明：由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)f(1)<0$，可知存在一个 $a\in(0,1)$ 使得 $f(a)=0$，设 $F(x)=f(x)\cdot x^{16}e^{\frac{1}{2}x^2-8x}$，由题意可知 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 上可导，且 $F(0)=F(a)$，满足罗尔定理，则有 $\ni\xi\in(0,a)$ 即 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$，从而得到 $\xi f'(\xi)+(4-\xi)^2 f(\xi)=0$。（注意：这里不能用拉氏定理）

方法二：常数 k 值法

例题 2：设 $b>a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得：

$$\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}$$

分析：因为$\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}$很明显是个常数，就可以设$\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}$=$k$，做恒等变换，将$a,b$的表达式分开，即使得等式一端为$a$及$f(a)$的代数式，另一端为$b$及$f(b)$的代数式,，观察原式是否有对称性，或者轮换对称性，若是，只要将a或者b改成x，对于的$f(a)$或者$f(b)$改成$f(x)$，这样就构造了所需要的辅助函数。下面是具体步骤：

令：

$$
\begin{aligned}
&\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=k \Rightarrow af(b)-bf(a)=kab(b-a) \\
&\Rightarrow af(b)-kab^2=bf(a)-ka^2b \\
&\Rightarrow \frac{f(b)-kb^2}{b}=\frac{f(a)-ka^2}{a}
\end{aligned}
$$

这样就可以得到辅助函数：$F(x)=\frac{f(x)}{x}-kx$。

由题目可得$F(x)$在$\left[a,b\right]$上连续，在(a,b)内可导

$$
\begin{aligned}
F(a)&=\frac{f(a)-ka^2}{a}=\frac{f(a)}{a}-\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}a \\
&=\frac{b^2f(a)-a^2f(b)}{ab(b-a)} \\
F(b)&=\frac{f(b)-kb^2}{b}=\frac{f(b)}{b}-\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}b \\
&=\frac{b^2f(a)-a^2f(b)}{ab(b-a)}
\end{aligned}
$$

所以$F(a)=F(b)$，满足罗尔定理，则有$\ni\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)$=0，即得到

$$\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}。$$

注：对于普通没有对称性的一般做法是将k和常数表达式（类似于$\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}$）全都移到等号的一边，将其中$a$或$b$变成$x$，相对的函数值也变成$f(x)$，其他常数不变，直接构成了辅助函数。此外若原式中含有高阶导数，

就多用几次即可得到想要的结果。如下例题：

例 3：证明：设 $a<b<c$，若 $f(x)$ 在 $\left[a,c\right]$ 上连续，在 (a,c) 内二次可微，则存在一点 $\xi\in(a,c)$，使得：

$$\frac{f(a)}{(a-b)(c-a)}+\frac{f(b)}{(b-c)(a-b)}+\frac{f(a)}{(c-a)(b-c)}=-\frac{1}{2}f''(\xi)$$

证明：令

$$\frac{f(a)}{(a-b)(c-a)}+\frac{f(b)}{(b-c)(a-b)}+\frac{f(a)}{(c-a)(b-c)}=-\frac{1}{2}k$$

恒等变换可得

$$f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(a-b)+\frac{1}{2}k(a-b)(c-a)(b-c)=0$$

令

$$F(x)=f(x)(b-c)+f(b)(c-x)+f(c)(x-b)+\frac{1}{2}k(x-b)(c-x)(b-c)$$

易得 $F(a)=F(b)=0$，满足罗尔定理，$\ni\eta_1\in(a,b)$ 使得 $F'(\eta)=0$，即

$$F'(\eta_1)=f'(\eta_1)(b-c)-f(b)+f(c)+\frac{1}{2}k[-2\eta_1(b-c)+b^2-c^2]=0$$

在令

$$G(x)=f'(\eta_1)(b-x)-f(b)+f(x)+\frac{1}{2}k[-2\eta_1(b-x)+b^2-x^2]$$

易得 $G(c)=G(b)$，满足罗尔定理，$\ni\eta_2\in(b,c)$，使得 $G'(\eta_2)=0$，又因为

$$G'(\eta_2)=-f'(\eta_1)+f'(\eta_2)+k(\eta_1-\eta_2)=0$$

由此可得

$$\frac{f'(\eta_1)-f'(\eta_2)}{(\eta_1-\eta_2)}=k=f''(\xi)\ \ \xi\in(\eta_1,\eta_2)\in(a,c)$$

证毕。