

2018 级 场论与无穷级数 参考答案

一、判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{6n^2+5}$;

解：发散。注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n+2}{6n^2+5} = \frac{1}{6}$$

故该级数发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

解：注意到这是交错级数，并注意到

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

其导函数

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

在 $x > 1$ 时恒小于零，故

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}, n > 1$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

根据莱布尼茨定理，知该级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

解：注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3(n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{3}{e} > 1$$

所以原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}}, a \in \mathbb{R}$;

解：当 $a > 0$ 时，该级数为正项级数，注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = a$$

当 $a > 1$ 时，该级数发散，当 $a < 1$ 时，该级数收敛，当 $a = 1$ 时，原级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

级数显然发散。

当 $a = 0$ 时，级数自然收敛。

当 $a < 0$ 时，该级数为交错级数，当 $-1 < a < 0$ 时该级数绝对收敛，当 $a = -1$ 时该级数条件收敛，当 $a < -1$ 时，注意到该级数的一般项

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^n}{\sqrt{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|a|^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \cdot |a|^x \cdot \ln|a| \neq 0$$

故该级数发散。综上所述，当 $x \in [-1, 1)$ 时该级数收敛，其他情况下该级数发散。

二、求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2(n+1)}$$

的收敛域与和函数，并求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

的和。

解：注意到

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+3)(2n+4)} |x|^2 = |x|^2$$

故收敛半径为 1，当 $x = \pm 1$ 时，原级数显然收敛，故收敛域为 $[-1, 1]$ 。记和函数为 $S(x)$ ，

注意到

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} x^{2(n+1)}$$

记

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2(n+1)} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} x^{2(n+1)}$$

不难发现这两个级数在 $[-1, 1]$ 上都收敛。记

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

逐项求导数得

$$g(x) = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

积分，并注意到 $f(0) = 0$ ，得

$$f(x) = \arctan x$$

故

$$S_1(x) = xf(x) = x \arctan x, x \in [-1, 1]$$

记

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} x^{2(n+1)}$$

类似的，解得

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = \frac{x}{1+x^2}$$

积分，并注意到 $h(0) = 0$ ，得

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

故

$$S_2(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2), x \in [-1, 1]$$

综上

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), x \in [-1, 1]$$

级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = S(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

三、将函数

$$f(x) = \frac{1+x}{(x-1)^2}$$

展开为 x 的幂级数，并说明其收敛域。

解：注意到

$$f(x) = \frac{x-1+2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2}$$

同时注意到

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1$$

对上式逐项求导数得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n, -1 < x < 1$$

故

$$\frac{2}{(1-x)^2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)x^n, -1 < x < 1$$

则

$$f(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)x^n - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n, \\ -1 < x < 1$$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解

(1) $y'(xy + x^3y) = 1 + y^2$;

解：这是可分离变量的微分方程，有

$$\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

两边同时积分有

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \\ \ln(1+y^2) = \ln x^2 - \ln(x^2+1) + C$$

即

$$1+y^2 = \frac{Cx^2}{1+x^2}$$

(2) $-y + xy' = 4x^2$

解：先变形为

$$y' - \frac{1}{x}y = 4x$$

这是一阶线性微分方程，根据公式有

$$y = x \left[\int 4dx + C \right] = 4x^2 + Cx$$

(3) $y'' + 4y' + 4y = x + 8$;

解：这是常系数二阶线性微分方程，其特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

解得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

故与之对应的齐次方程的通解为

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$$

注意到 $f(x) = x + 8$ ，故特解必然满足形式

$$y^* = Ax + B$$

显然，一个特解可写为

$$y^* = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

综上，该方程的通解为

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4} + e^{-2x}(C_1 + C_2x).$$

(4) $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}, x \neq 0;$

解：这是齐次方程，令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，故原式化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \tan u + u$$

$$x \frac{du}{dx} = \tan u$$

进一步令

$$\frac{1}{x} dx = \frac{1}{\tan u} du$$

两边同时积分得

$$\ln |x| = \ln |\sin u| + C$$

代回，整理，得

$$x = C_1 \sin \frac{y}{x}$$

其中 C_1 为任意非零常数。

(5) $xy'' = y', y(1) = 1, y'(1) = 2;$

解：这是可降阶的二阶微分方程，令 $p = y', p' = y''$ ，原方程化为

$$x \frac{dp}{dx} = p$$

注意到 $p \equiv 0$ 不满足初值条件，故

$$\frac{1}{p} dp = \frac{1}{x} dx$$

两边同时积分，得

$$\ln|p| = \ln|x| + C$$

即

$$p = y' = C_1 x$$

将初值条件代入，解得

$$C_1 = 2$$

故

$$y' = 2x$$

再次积分，得

$$y = x^2 + C_2$$

再将初值条件代入，得

$$C_2 = 0$$

故该方程的解为

$$y = x^2$$

五、计算下列广义积分：

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

解：注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

$$(2) \int_0^1 \frac{(2-x)}{\sqrt{x}} dx;$$

解：注意到 $x=0$ 是瑕点，而该积分显然收敛。故令 $t=\sqrt{x}$ ，则

$$\int_0^1 \frac{(2-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{2-t^2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 (2-t^2) dt = \frac{10}{3}$$

六、将函数 $f(x) = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开为(周期为 2π 的)余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的值。

解：对原函数作偶延拓，得

$$F(x) = 1 - x^2, -\pi \leq x \leq \pi$$

此时

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) dx = -\frac{2}{3}(\pi^2 - 3)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot (-2n\pi \cos n\pi) \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{4}{n^2}(-1)^{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0$$

故

$$f(x) = \frac{1}{3}(3 - \pi^2) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx, 0 \leq x \leq \pi.$$

注意到

$$f(0) = \frac{1}{3}(3 - \pi^2) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

七、讨论广义积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$$

的敛散性，其中 $\alpha > 0$.

解：首先将原积分拆分为

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$$

当 $\alpha \leq 2$ 时，有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2-\alpha} = 0$$

故 $x = 0$ 不是瑕点，左侧积分收敛。关注右侧无穷限积分，当 $1 < \alpha \leq 2$ 时，此时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{2}{\alpha-1} \cdot x^{\frac{3-\alpha}{2}} = 0$$

故无穷限积分收敛。当 $\alpha = 1$ 时，此时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x} = +\infty$$

故无穷限积分发散。当 $0 < \alpha < 1$ 时，此时亦有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = +\infty$$

故无穷限积分发散。

当 $\alpha > 2$ 时，第一个积分是瑕积分，当 $2 < \alpha < 3$ 时，此时注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = 1$$

故原积分收敛。当 $\alpha \geq 3$ 时，有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = 1$$

故原积分发散。而对于无穷限积分，此时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{2}{\alpha-1} \cdot x^{\frac{3-\alpha}{2}} = 0$$

故无穷限积分收敛。

综上所述，原积分在 $\alpha \in (1,3)$ 上收敛，在其余取值上发散。

八、计算下列积分

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \cos x)}{\cos x} dx, \alpha > 0$$

被积函数在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的值取其在点处的极限。

解：根据题意，被积函数在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的值存在，故 $\frac{\pi}{2}$ 不是瑕点。注意到

$$I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \alpha^2 \cos^2 x} dx$$

作恒等变形，则原积分化为

$$I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \alpha^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\alpha^2 + 1) \cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \tan x}{(\alpha^2 + 1) + \tan^2 x}$$

令 $t = \tan x$ ，则

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(\alpha^2 + 1) + t^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2 + 1}}$$

积分，得

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha I'(t) dt = \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}) + I(0)$$

注意到

$$I(0) = 0$$

故

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}).$$