homework04

P141. 习题 9.1 (A) 13，15，18，23，24；(B) 6

补 1：化 $\int_0^{1/2} dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x,y)$ 为极坐标积分

补 2：计算 $\iint_D x \arcsin \dfrac{x}{2x+y} dxdy$ 其中 D 是由 x 轴，y 轴和 $2x+y=3$ 所围成的闭区域。

13. 计算二重积分

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx.$$

15. 计算 $\iint\limits_D |\sin(x+y)| dxdy$，其中 $D: 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi$.

18. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=2ay$ 所围成的立体区域（含于柱体内部的区域）的体积($a>0$).

23. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy dxdy$，其中 D 由 $y=x, y=2x, xy=1, xy=3$ 所围成.

24. 计算 $I=\iint\limits_D \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dxdy$，$D$ 是由 $x+y=1, x=0$ 及 $y=0$ 所围区域.

6. 计算 $I=\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy$，其中 $D=\{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

P141 习题 9.1

13. 计算二重积分

$$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x.$$

A.13. **解. 依题意**

$$D_1:\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<x<\sqrt{y}\Rightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},\begin{cases}x^2<y\\ \frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},x^2<y<\frac{1}{2}$$

$$D_2:\frac{1}{2}<y<1,y<x<\sqrt{y}\Rightarrow\frac{1}{2}<x<1,\begin{cases}\frac{1}{2}<y<1\\ y<x\\ x^2<y\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}<y<x\quad\text{或者}\quad\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1,x^2<y<x$$

$$(*)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{x^2}^{x}dye^{y/x}+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}dye^{y/x}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}dye^{y/x}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\left(xe^{y/x}\right)\Big|_{x^2}^{x}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\left(xe-xe^{x}\right)=\frac{ex^2}{2}-e^{x}(x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3e}{8}-\frac{1}{2}e^{1/2}$$

P141 习题 9.1

15. 计算 $\iint\limits_D |\sin(x+y)|dxdy$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \pi$.

A.15. 解. 令 $u=x-\frac{\pi}{2}, v=y-\frac{\pi}{2}$， 则 $dudv= dxdy, D:|u|\le\frac{\pi}{2}, |v|\le\frac{\pi}{2}$

$$(*)=\iint_D \left|\sin(u+v-\pi)\right| dudv=2\iint_{D_1} \sin(u+v)\, dudv$$

其中 $D_1 := D\cap\{u+v>0\}=\left\{\frac{-\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}, -v<u<\frac{\pi}{2}\right\}$

$$(*)=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du\int_{-v}^{\frac{\pi}{2}} dv\sin(u+v)$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du(-\cos(u+v))\Big|_{-v}^{\frac{\pi}{2}}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du\big(1+\sin u\big)=2\pi$$

18. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=2ay$ 所围成的立体区域(含于柱体内部的区域)的体积($a>0$).

A.18. 解. 依题意 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2ay\}, z_1=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$

$$V=2\iint_D z_1\,dxdy=2\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

极坐标下，$D=\{r\le 2a\sin\theta,\theta\in[0,\pi]\}$

$$V=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}drr\sqrt{4a^2-r^2}=2\int_0^{\pi}d\theta\frac{-1}{3}(4a^2-r^2)^{3/2}\Big|_0^{2a\sin\theta}$$

$$=\frac{16a^3}{3}\int_0^{\pi}d\theta\left(1-|\cos\theta|^3\right)=\frac{32a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos\theta+\cos\theta\sin^2\theta\right)$$

$$=\frac{32a^3}{3}\left(\theta-\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{16a^3\pi}{3}-\frac{64a^3}{9}$$

23. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x, y=2x, xy=1, xy=3$ 所围成.

A.23. 解. 依题意记 $u=xy, v=y/x$，则在第一象限 $y=\sqrt{uv}, x=\sqrt{\frac{u}{v}}$

$$D_1: 1\le v\le 2, 1\le u\le 3$$

$$\left|\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2v}$$

$$原式 = \iint_{D_1} \frac{u}{2v}dudv = \left(\int_1^2 dv\frac{1}{v}\right)\left(\int_1^3 \frac{u}{2}du\right) = \ln v\Big|_1^2 \cdot \frac{u^2}{4}\Big|_1^3 = 2\ln 2$$

答案 $4\ln 2, 2\ln 2$ 均算对

P141 习题 9.1

24. 计算 $I=\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $x+y=1$，$x=0$ 及 $y=0$ 所围区域.

A.24. **解. 依题意取** $u=x+y, v=x-y$, **则** $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}\right)=\frac{-1}{2}$$

$$D: x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1 \Rightarrow u+v\geq 0, u-v\geq 0, u\leq 1 \Rightarrow \begin{matrix} 0\leq u\leq 1 \\ -u\leq v\leq u \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (*)=\frac{1}{2}\int_0^1 du\int_{-u}^{u} dv\cos\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 du\, u\sin\frac{v}{u}\Big|_{-u}^{u}$$

$$=\sin 1\int_0^1 u\,du=\frac{\sin 1}{2}$$

6. 计算 $I=\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

B.6. 解. 依题意由对称性

$$I=2\iint_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dxdy=2\iint_{D_1} e^{x^2}\,dxdy$$

其中 $D_1=D\cap\{x>y\}=\{0\le x\le 1,0\le y\le x\}$

$$\Rightarrow\quad I=2\int_0^1 dx\int_0^x dye^{x^2}=2\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=e^{x^2}\Big|_0^1=(e-1)$$

P141 习题 9.1

补充 1：化 $\int_0^{1/2} dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x,y)$ 为极坐标积分

补充 1： 解. 依题意

$$D: 0 \le x \le \frac{1}{2}, 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \le r\cos\theta \le \frac{1}{2}; \quad 1 - r\cos\theta \le r\sin\theta; \quad r^2\sin^2\theta \le 1 - r^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], r \le \frac{1}{2\cos\theta}, r \ge \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}, r \le 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]\text{时}, & \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \le r \le \frac{1}{2\cos\theta} \\ \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\text{时}, & \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \le r \le 1 \end{array}$$

$$(*) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{1}{2\cos\theta}} dr\Big(r \cdot f(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big)$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} dr\Big(r \cdot f(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big)$$

P141 习题 9.1

补充 2：计算 $\iint_D x\arcsin\dfrac{x}{2x+y}\,dxdy$ 其中 D 是由 x 轴，y 轴和 $2x+y=3$ 所围成的闭区域。

补充 2： 解. 依题意取 $u=\frac{x}{2x+y}, v=2x+y$, 则 $x=uv, y=v-2uv$

$$\det\left(\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix} v & u \\ -2v & 1-2u \end{pmatrix}\right)=v$$

$$D: x\geq 0, y\geq 0, 2x+y\leq 3 \Rightarrow uv\geq 0, v-2uv\geq 0, v\leq 3$$

$$\Rightarrow v\geq 0, u\geq 0, 1-2u\geq 0, v\leq 3 \Rightarrow v\in[0,3], u\in[0,\frac{1}{2}]$$

$$(*)=\int_0^3 dv\int_0^{\frac{1}{2}} du\Big(uv\arcsin uv\Big)=\Big(\int_0^3 v^2\,dv\Big)\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} u\arcsin u\,du\Big)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u\arcsin u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\sin t\cos t\,dt=\ldots=\frac{\sin 2t}{8}-\frac{t\cos 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{48}$$

$$\Rightarrow (*)=\frac{9\sqrt{3}-3\pi}{16}$$