hwk09

P202. 习题 10.2 (A) 13；(B) 3
P232. 习题 11.2 (A) 2，4，6，8；(B) 4
P239. 习题 11.3 (A) 2

13. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面.

3. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}yzdxdy+zxdydz+xydzdx$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截出部分的上侧.

2. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中 Σ 为上半球体 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (x^2+y^2\leqslant a^2)$ 的表面外侧.

4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h(h>0)$ 之间的部分的下侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

6. 求 $I=\iint\limits_{S}xdydz+ydxdz+zdxdy$，其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在第一卦限中 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分，取上侧.

8. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=a^2(a>0,a\neq 1)$，取外侧.

4. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与两平面 $z=R$，$z=-R(R>0)$ 所围立体表面的外侧.

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+z=R$ 的交线，L 的方向从 z 轴正向看去是逆时针.

修正为“z 轴正向看”

P202. 习题 10.2

13. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面.

A.13. 解. 依题意，任取 $P\in\Sigma$，则 $n_{P外}=\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)$，故

$$dS_{yz}=\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}dS_{xy},\quad dS_{zx}=\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}dS_{xy}\Rightarrow I=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+1\right)\frac{dxdy}{z}$$

$$\text{其中}\Sigma_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\text{方向向上}\quad \Sigma_2=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\text{方向向下}$$

$$\Rightarrow I=\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+1\right)\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2}{c}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}dxdy$$

其中 $D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$，进一步假设 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta\Rightarrow r\le 1,\theta\in(0,2\pi)$

$$\Rightarrow I=\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+1\right)\frac{2}{c}\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\frac{abr}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\frac{2ab}{c}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+1\right)2\pi=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$

P202. 习题 10.2

3. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截出部分的上侧.

B.3. 解. 依题意，$z=2-x^2-y^2$，方向向上

$$z_x=-2x, z_y=-2y \Rightarrow dS_{yz}=2x\,dS_{xy}, dS_{zx}=2y\,dS_{xy}$$

$$\Rightarrow I=\iint_{\Sigma}\left(yz+2zx^2+2xy^2\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}\left((2-x^2-y^2)(y+2x^2)+2xy^2\right)dxdy$$

$$\text{其中}D_{xy}: x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0 \Rightarrow (\text{极坐标})r\leq 1, \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$I=\int_0^1 dr\int_0^{\pi/2}\left((2-r^2)r^2\sin\theta+(2-r^2)2r^3\sin^2\theta+2r^4\cos\theta\sin^2\theta\right)$$

$$=\frac{7}{15}+\frac{\pi}{6}+\frac{2}{15}=\frac{3}{5}+\frac{\pi}{6}$$

P232. 习题 11.2

2. 计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为上半球体 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 的表面外侧.

A.2. 解. 依题意,

$$P=xz^2, Q=x^2y-z^3, R=2xy+y^2z\Rightarrow P_x+Q_y+R_z=z^2+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv$$

其中极坐标意义下, $\Omega, 0\le r\cos\varphi\le\sqrt{a^2-r^2\sin^2\varphi}\Rightarrow r\le a, \varphi\in(0,\frac{\pi}{2}), \theta\in(0,2\pi)$

$$\Rightarrow I=\int_0^a dr\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta r^4\sin\varphi=\frac{2\pi}{5}a^5$$

P232. 习题 11.2

4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h(h>0)$ 之间的部分的下侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

A.4. 解. 依题意，$I=\iint_{\Sigma}\left(x^2\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy\right)$

取 Σ_1: $z=h$, 方向向上　记 $J=\iint_{\Sigma_1}\left(x^2\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy\right)$

则 $I+J=\iiint_{\Sigma}2(x+y+z)\,dv$　其中 $0<z<h, x^2+y^2\le z^2$

$$\Rightarrow I+J=2\int_0^h z\,dz\iint_{D_z}dxdy=2\pi\int_0^h z^3\,dz=\frac{\pi h^4}{2}$$

另外 $J=\iint_{\Sigma_1}h^2\,dxdy=\iint_{D_{xy}}h^2\,dxdy=h^2S(D_{xy})=\pi h^4\quad\Rightarrow I=\dfrac{-\pi h^4}{2}$

P232. 习题 11.2

6. 求 $I=\iint\limits_{S} x\,dydz+y\,dxdz+z\,dxdy$，其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在第一卦限中 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分，取上侧.

A.6. 解. 依题意，取 $\Sigma_1: z=1$，方向向下，并

$$记 J=\iint_{\Sigma_1}\left(x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy\right)$$

$$\Rightarrow I+J=-\iiint_{\Omega}3\,dv \quad 其中 0<z<1, x^2+y^2\leq z^2$$

$$\Rightarrow I+J=-3\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy=-3\int_0^1 dz\pi z^2=-\pi z^3\Big|_0^1=-\pi$$

$$另外 J=\iint_{\Sigma_1}z\,dxdy=-\iint_{D_{xy}}dxdy=-\pi \quad \Rightarrow I=0$$

P232. 习题 11.2

8. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=a^2(a>0,a\neq 1)$，取外侧.

A.8. **解**. **依题意**，

$$记 P=\frac{x}{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}},\ Q=\frac{y}{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}},\ R=\frac{z}{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{(\cdots)^{3/2}}-\frac{3x^2}{(\cdots)^{5/2}},\ Q_y=\frac{1}{(\cdots)^{3/2}}-\frac{3y^2}{(\cdots)^{5/2}},\ R_z=\frac{1}{(\cdots)^{3/2}}-\frac{12z^2}{(\cdots)^{5/2}}$$

$$a\in(0,1)时,\ I=\iiint_{\Omega_1}\left(P_x+Q_y+R_z\right)dv=0$$

$$a>1时，取\quad \Sigma_2: x^2+y^2+4z^2=\varepsilon^2, \varepsilon>0\ 较小，方向向内$$

$$记 J=\iint_{\Sigma_2}(P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy)\Rightarrow I+J=\iiint_{\Omega_0}\left(P_x+Q_y+R_z\right)dv=0$$

$$同时 J=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_2}(x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy)=-\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_2}dv$$

$$=\ -\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\pi\frac{\varepsilon^3}{2}=-2\pi\Rightarrow I=2\pi$$

P232. 习题 11.2

4. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与两平面 $z=R$，$z=-R(R>0)$ 所围立体表面的外侧.

B.4. 解. 依题意，取 $P=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $R=\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$

前侧面$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$方向向前　后侧面$\Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}$方向向后

上顶面$\Sigma_3: z=R$方向向上　下底面$\Sigma_4: z=-R$方向向下

$$\iint_{\Sigma_1}\left(P\,dydz+R\,dxdy\right)+\iint_{\Sigma_2}\left(P\,dydz+R\,dxdy\right)=\iint_{D_{yz}}\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,dzdy$$

其中$D_{yz}: -R\le y\le R, -R\le z\le R \Rightarrow \iint_{D_{yz}}\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,dzdy=\frac{\pi^2R}{2}$

$$\iint_{\Sigma_3}\left(P\,dydz+R\,dxdy\right)+\iint_{\Sigma_4}\left(P\,dydz+R\,dxdy\right)=0$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi^2R}{2}$$

P239. 习题 11.3

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+z=R$ 的交线，L 的方向从 z 轴正向看去是逆时针.

A.2. 解. 依题意，取 $\Sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，方向向上

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \iint_\Sigma \left(-dydz-dzdx-dxdy\right)$$

$$\text{又} z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow I=\iint_\Sigma \left(\frac{-(x+y)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}-1\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{-x-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}-1\right)dxdy$$

$$\text{其中} D_{xy}: x^2+y^2+(R-x)^2\le R^2 \Rightarrow \frac{-R}{\sqrt{2}}\le y\le\frac{R}{\sqrt{2}}, \left|x-\frac{R}{2}\right|\le\sqrt{\frac{R^2}{4}-\frac{y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}dy\int_a^b\frac{-x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}-S(D_{xy})$$

$$=-4\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{R^2}{4}-\frac{y^2}{2}}\,dy-\pi\frac{R^2}{2\sqrt{2}}=\frac{-R^2\pi}{\sqrt{2}}$$

P239. 习题 11.3

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+z=R$ 的交线，L 的方向从 z 轴正向看去是逆时针.

A.2. **解**. **依题意，取** $\Sigma: x+z=R$ **方向向上，则** $n=(1,0,1)$

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \iint_\Sigma \left(-dydz-dzdx-dxdy\right)=\iint_\Sigma -\sqrt{2}dS$$

其中, Σ **为平面** $x+x=R$ **被球面** $x^2+y^2+z^2=R^2$ **所截圆, 半径为** $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow I=-\sqrt{2}S(\Sigma)=-\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$$