homework04

P141. 习题 9.1　(A) 7-2, 7-3, 7-4, 7-5; 8; 10; 11-3

积分换序 $\int_0^4 dx \int_{2x-3}^{3-x} dy f(x, y)$

7. 计算下列二重积分：

(2) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}$，其中 $a>0$，D 是圆心在 (a,a)、半径为 a 的圆周的较短弧段与两坐标轴所围成的区域；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,1)$ 三点为顶点的三角形区域.

(4) $\iint\limits_D y^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}$；

(5) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$|x|+|y|\leqslant 1$；

8. 计算柱面 $x^2+z^2=R^2$ 与平面 $y=0$ 和 $y=a(a>0)$ 所围立体的体积.

10. 求椭圆柱面 $4x^2+y^2=1$ 与平面 $z=1-y$ 及 $z=0$ 所围成的立体体积.

11. 更换下列积分次序

(3) $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$；

P141 习题 9.1

7. 计算下列二重积分：

(2) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$，其中 $a>0$，D 是圆心在 (a,a)、半径为 a 的圆周的较短弧段与两坐标轴所围成的区域；

A.7-2. **解.** **依题意**

$$D = \{(x,y)|0 \le x \le a, 0 \le y \le a - \sqrt{2ax - x^2}\}$$

$$(*) = \int_0^a dx \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^a dx\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}} - \sqrt{x}\right)$$

$$= -2a(2a-x)^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a = (2\sqrt{2} - \frac{8}{3})a^{3/2}$$

P141 习题 9.1

(3) $\iint_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $(0,0),(0,1),(1,1)$ 三点为顶点的三角形区域.

A.7-3. 解. 依题意

$$D=\{(x,y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$$

$$(*)=\int_0^1 dy\int_0^y dxe^{-y^2}=\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy=\frac{-1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2e}$$

(4) $\iint_D y^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}$；

A.7-4. 解. 依题意，由对称性

$$D_1=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\}$$

$$(*)=4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dyy^2\sqrt{a^2-x^2}=4\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2}\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\int_0^a\frac{4}{3}dx(a^2-x^2)^2=\ldots=\frac{32}{45}a^5$$

P141 习题 9.1

(5) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:|x|+|y|\leqslant 1$；

A.7-5. 解. 依题意，由对称性

$$D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$$

$$(*) = 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(x^2+y^2) = \int_0^1 dx\left(4x^2(1-x) + \frac{4}{3}y^3\Big|_0^{1-x}\right)$$

$$= \int_0^1 dx\left(4x^2 - 4x^3 + \frac{4}{3}(1-x)^3\right) = \ldots = \frac{2}{3}$$

8. 计算柱面 $x^2+z^2=R^2$ 与平面 $y=0$ 和 $y=a(a>0)$ 所围立体的体积.

A.8. 解. 依题意

$$D_1 = \{(x,z)|0 \le x \le R, 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2}\}$$

$$V = 4\int_{D_1} a\,dxdz = 4a\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 4a\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$= 4ax\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R + \int_0^R \frac{4ax^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 2aR^2\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = \pi R^2 a$$

P141 习题 9.1

10. 求椭圆柱面 $4x^2+y^2=1$ 与平面 $z=1-y$ 及 $z=0$ 所围成的立体体积.

A.10. 解. 依题意,

$$D=\{(x,y)|4x^2+y^2\le 1\}\quad D_1=\{(x,y)|0\le x\le \frac{1}{2},0\le y\le \sqrt{1-4x^2}\}$$

$$V=\iint_D (1-y)\,dxdy=\iint_D dxdy=4\iint_{D_1} dxdy$$

$$=4\int_0^{1/2} dx\int_0^{\sqrt{1-4x^2}} dy=4\int_0^{1/2}\sqrt{1-4x^2}\,dx$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

P141 习题 9.1

11. 更换下列积分次序

(3) $I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$;

A.11-3. **解.** **依题意,**

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le \sqrt{2x-x^2}\}\\
&= \{(x,y)|0\le y\le 1, 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 1\}\\
D_2 &= \{(x,y)|1\le x\le 2, 0\le y\le 2-x\}\\
&= \{(x,y)|0\le y\le 1, 1\le x\le 2-y\}\\
(*) &= \int_0^1 dy\int_1^{1-\sqrt{1-y^2}} dxf(x,y)+\int_0^1 dy\int_1^{2-y} dxf(x,y)\\
&= \int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} dxf(x,y)
\end{aligned}$$

补充题

积分换序：$\int_0^4 dx \int_{2x-3}^{3-x} dy f(x,y)$

解. 依题意 $x \in (0,2)$ 时，$3-x > 2x-3$；$x \in (2,4)$ 时，$3-x < 2x-3$，故

$$(*) = \int_0^2 dx \int_{2x-3}^{3-x} dy f(x,y) - \int_2^4 dx \int_{3-x}^{2x-3} dy f(x,y)$$

$$D_1:\ x \in (0,2), \begin{cases} 2x-3 < y \\ y < 3-x \end{cases} \Rightarrow -3 < y < 3, \begin{cases} x < \frac{3+y}{2} \\ x < 3-y \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < y < 1 \\ 0 < x < \frac{3+y}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} 1 < y < 3 \\ 0 < x < 3-y \end{cases}$$

$$D_2:\ x \in (2,4), \begin{cases} y < 2x-3 \\ 3-x < y \end{cases} \Rightarrow -1 < y < 5, \begin{cases} \frac{y+3}{2} < x \\ 3-y < x \\ 2 < x < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 < y < 1 \\ 3-y < x < 4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 1 < y < 5 \\ \frac{3+y}{2} < x < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) = \int_{-3}^1 dy \int_0^{\frac{3+y}{2}} dx f(x,y) + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} dx f(x,y)$$

$$- \int_{-1}^1 dy \int_{3-y}^4 dx f(x,y) - \int_1^5 dy \int_{\frac{3+y}{2}}^4 dx f(x,y)$$