微分中值定理的推广及应用

1 引言

在高等数学课程中罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理等统称为微分中值定理,他们是微分中值学中最基本、最重要的定理为加深学生对微分中值定理的理解.它的出现是一个过程，聚集了众多数学家的研究成果.从费马到柯西不断发展，理论知识也不断完善，成为了人们引进微分学以后，数学研究中的重要工具之一，而且应用也越来越广泛.微分中值定理在函数在某一点的局部性质；函数图象的走向；曲线凹凸性的判断；积分中值定理；级数理论；等式及不等式证明等问题的研究中也发挥着十分重要的作用.因此，微分中值定理已经成为整个微分学基础而又举足轻重的内容.

2 微分中值定理的定义

微分中值定理是一系列中值定理总称，是研究函数的有力工具,其中最重要的内容是拉格朗日定理，可以说其他中值定理都是拉格朗日中值定理的特殊情况或推广。也就是说微分中值定理包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、以及柯西中值定理等基本定理在内的定理的总称.以下是证明微分中值定理时用到的几个概念.

定义 1（函数单调性）函数 $f(x)$ 在定义域内,当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\le f(x_2)\ (f(x_1)<f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 单调递增(严格单调递增).当 $x_1<x_2$ 时,有

定义 2（极限的局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,则存在 $\Delta>0$,任意 $x\in(x_0-\Delta,$ $x_0+\Delta)$,使得 $f(x)>g(x)$.

$$f(x_1)\ge f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 单调递减(严格单调递减).

定义 3（最小值或最大值）设 $f(x)$ 在 I 上有定义,若存在 $x_0\in I$ 使任意 $x\in I$, $f(x_0)\le f(x)$ ($f(x_0)\ge f(x)$),则 $f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的最小值(最大值). x_0 为最小值点(最大值点).

定义 4（极小值或极大值）设 $f(x)$ 在任意 $x\in I$ 上有定义,若存在 $x_0\in I,\Delta>0$,任意 $x\in(x_0-\Delta,x_0+\Delta)$,都有 $f(x)\ge f(x_0)$ （$f(x)\le f(x_0)$),则 $f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的一个极小值(极大值), x_0 称为极小值点(极大值点).

定义 5(凸性) 若函数曲线位于其每一点处切线的上方(下方),则称函数曲线时下凸(上凸)的,或称函数向下凸(上凸).

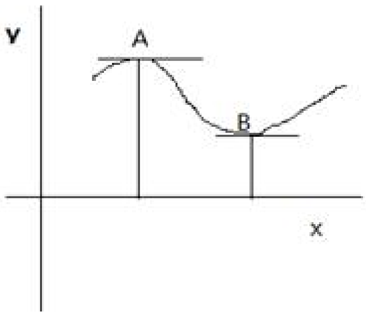
定义 6(凹性) 若 $y=f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单调递增(或递减),则称 $f(x)$ 在 (a,b) 是向上凹(下凹)的,或称函数曲线向上凹(下凹).

3 微分中值定理证明方法

3.1 费马引理

定理内容：设函数 $f(x)$ 在点x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有定义，并且在x_0处可导，如果对于任意的 $x\in U(x_0)$， 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ （或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），那 $f'(x_0)=0$

费马定理的几何意义:若将函数 $f(x)$ 的曲线置于平面直角坐标系 XOY,则费马定理具有几何意义:对曲线 $y=f(x)$ 上,若有一点 $(x_0, f(x_0))$ 存在切线,且 x_0为 $f(x)$ 极值点.则这一点处的切线平行于 x 轴.



证明 x_0 为 $f(x)$ 的极值点. 设 x_0 为极小值点,则存在 $\Delta>0$,任意 $x\in(x_0-\Delta, x_0+\Delta)$,有 $f(x_0)\le f(x)$,

若 $x>x_0$,则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0;$$

若 $x<x_0$,则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0;$$

取极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 分别为 P、T,由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则

$$P = T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

由极限的局部保号性有$T \geq 0$， $S \leq 0$. 故 $P = T = 0$. 所以有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

即 $f'(x_0) = 0$.

3.2 罗尔中值定理

定理内容：如果函数$f(x)$满足：

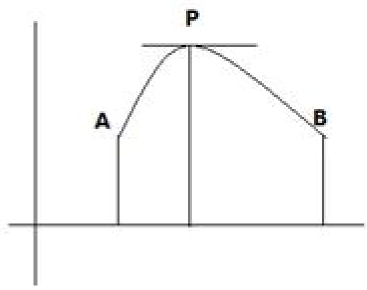
在闭区间[a,b]上连续；

在开区间(a,b)内可导；

在区间端点处的函数值相等，即 $f(\mathrm{a}) = f(\mathrm{b})$，

那么在(a,b)内至少有一点ξ($\mathrm{a} < \xi < b$)，使得 $f'(\xi) = 0$.

罗尔定理的几何意义:若$f(x)$满足罗尔定理的条件,则在曲线$y = f(x)$上至少存在一点$P(\xi, f(\xi))$,使得点P处的切线平行于x轴(如图)，其中$A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$.



证明 因为$a < b$,且$f(b) = f(a)$.

（1） 若$f(x) = f(b) = f(a)$为常数,则必有$f'(x) = 0$，所以,存在$\xi \in (a,b)$,使得$f'(\xi) = 0$;

（2） 若$f(x)$不是常数,则$f(x)$非单调,又有$f(x)$在$[a,b]$上连续在(a,b)内可导,根据引理 1,存在$\xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi) = 0.$$

证毕.

3.3 拉格朗日中值定理

定理 3 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使等式

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证法 利用罗尔中值定理

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$

证明（方法一） 引进辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],$$

显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，由罗尔定理可知，存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$ 即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明（方法二）（利用分析法证明拉格朗日中值定理）要证存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

成立，即证，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \qquad (1)$$

成立．亦即

$$\left.\left(f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]x\right)'\right|_{x=\xi}=0 \qquad (2)$$

记

$$F(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]x,x\in[a,b],$$

则由 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 (2) 成立，进而 (1) 成立．从而拉格朗日中值定理成立．

3.4 柯西中值定理

定理 4 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足:(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;(2) 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

证明（方法一） 由定理条件可知 $g(b)\neq g(a)$, 则任意 $\xi\in(a,b)$ 都有 $g'(\xi)\neq 0$, 因此, 只需证

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]-g'(\xi)[f(b)-f(a)]=0,$$

为此, 构造函数

$$F(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)],\ x\in[a,b],$$

显然, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F(a)=F(b)$, 根据罗尔定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=0,$$

即

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]-g'(\xi)[f(b)-f(a)]=0,$$

所以

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

2.1 泰勒中值定理

定理 5 若函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数，$\forall x\in U(x_0)$，函数 $G(t)$ 在以 x 与 x_0 为端点的闭区间 I 连续，在其开区间可导，且 $G'(t)\neq 0$，则 x 与 x_0 之间至少存在一点 ξ，使

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!G'(\xi)}(x-x_0)^n[G(x)-G(\xi)]$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!G'(\xi)}(x-x_0)^n[G(x)-G(\xi)]$.

证明 $f(x)$ 的泰勒多项式

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\quad+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

我们记 $F(t)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\quad+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, 则

$$F'(t)=f'(t)-f'(t)+f''(t)(x-t)-f''(t)(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

可以看出函数 $F(t)$ 与 $G(t)$ 在闭区间 I 连续，在其开区间可导， $G'(t)\neq 0$，

且可以看出 $F(x)=f(x)$.

应用柯西中值定理有： x 与 x_0 之间至少存在一点 ξ， 使

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!G'(\xi)}(x-x_0)^n[G(x)-G(\xi)],$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!G'(\xi)}(x-x_0)^n[G(x)-G(\xi)]$.

4 微分中值定理的推广

微分中值定理是微分学的核心内容, 而随着其不断地发展和完善, 衍生了许多微分中值定理的推广. 以下是几种微分中值定理的推广形式.

4.1 罗尔定理中值的推广

定理 5 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$, 其中 $|A|\leq+\infty$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 则必有 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 又有

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=A.$$

(1) 当 $|A|<+\infty$ 时, 对 $f(x)$ 在 a,b 两点进行连续延拓, 使得 $f(a)=f(b)=A$, 则有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导且有 $f(a)=f(b)=A$, 所以, 满足罗尔定理的条件, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 当 $|A|=+\infty$ 时, 由于 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$, 故存在 $x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, 在 (x_1,x_2) 内可导, 满足罗尔定理, 即存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

综上所述, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

3.2.2 拉格朗日中值定理的推广

定理 6 (推广一) 设 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

证明 作辅助函数

$$H(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix},$$

很明显 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $H(a)=H(b)=0$, 则根据罗尔定理有, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $H'(\xi)=0$, 命题得证.

定理 7 (推广二) 若 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内可导, 且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}.$$

证明 （1）当 $f(a+0)=f(b-0)$ 时, 由定理 5 可知, 结论成立.

（2）当 $f(a+0)\neq f(b-0)$ 时, 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a+0)-\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}(x-a),$$

由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导知, $F(x)$ 在 (a,b) 内也可导, 又因为

$$F(a+0)=f(a+0)-f(a+0)-\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}(a+0-a)=0;$$

$$F(b-0)=f(b-0)-f(a+0)-\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}(b-0-a)=0,$$

根据定理 5 可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 进而有

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}=0,$$

即

$$f'(\xi)=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}.$$

综上所述，存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}.$$

4.2.3 柯西定理的推广

(洛必达法则一) 若函数 f(x) 与 $\varphi(x)$ 满足下列条件:

1) 在 a 的某去心领域 $\overset{0}{U}(a)$ 可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ 与 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$.

证法　证明洛必达法则要找到两个函数之比与这两个函数的倒数之比之间的联系. 柯西中值定理正是实现这种联系的纽带. 为了使函数 f(x) 与 $\varphi(x)$ 在 a 满足柯西中值定理的条件，将函数 f(x) 与 $\varphi(x)$ 在 a 作连续开拓. 这不影响定理的证明，因为讨论函数 $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ 在 a 的极限与函数 f(x) 与 $\varphi(x)$ 在 a 的函数值无关.

证明　将函数 f(x) 与 $\varphi(x)$ 在 a 作连续延拓，即设

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a,\\ 0, & x=a;\end{cases}\qquad \varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq a,\\ 0, & x=a;\end{cases}$$

$\forall x\in\overset{0}{U}(a)$. 在以 x 与 a 为端点的区间上函数 $f_1(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 满足满足柯西中值定理的

条件，则在 x 与 a 之间至少存在一点 c，使

$$\frac{f_1(x)-f_1(a)}{\varphi_1(x)-\varphi_1(a)}=\frac{f_1^{'}(c)}{\varphi_1^{'}(c)}.$$

已知 $f_1(a)=\varphi_1(a)=0$，$\forall x\neq a$，有 $f_1(x)=f(x)$ 与 $\varphi_1(x)=\varphi(x)$，$f_1^{'}(c)=f^{'}(c)$，$\varphi_1^{'}(c)=\varphi^{'}(c)$. 从而，

$$\frac{\mathrm{f(x)}}{\varphi(\mathrm{x})}=\frac{\mathrm{f}^{'}(\mathrm{c})}{\varphi^{'}(c)}.$$

因为 c 在 x 与 a 之间，所以当 $x\to a$ 时，有 $c\to a$，有条件 3），有

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f(x)}}{\varphi(\mathrm{x})}=\lim_{c\to a}\frac{\mathrm{f}^{'}(\mathrm{x})}{\varphi^{'}(x)}=l=\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f}^{'}(\mathrm{x})}{\varphi^{'}(x)}.$$

.

5 微分中值定理的应用

微分学是整个数学分析的重要组成部分, 而微分中值定理是微分学的核心内容, 其建立了函数值与导数之间的关系, 是用于证明等式, 证明不等式, 讨论方程根的存在性等问题的重要工具.

5.1 利用微分中值定理证明等式

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a},\ 0<a<b.$$

证明 利用柯西中值定理 令 $g(x)=\ln x$, $x>0$, 显然, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$, 所以, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{\ln\frac{b}{a}},$$

所以

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证毕.

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 在 $(-a,a)$ 内可导, 且 $f(-a)=f(a)=0$. 证明对任

意常数k，存在$\xi\in(-a,a)$，有$f'(\xi)+kf(\xi)=0$.

证明 利用罗尔定理，构造函数

$$F(x)=f(x)e^{kx},$$

由于$f(x)$在$[-a,a]$上连续，在$(-a,a)$内可导，且$f(-a)=f(a)$，所以，$F(-a)=F(a)=0$，且$F(x)$在$[-a,a]$上连续，在$(-a,a)$内可导，所以，存在$\xi\in(-a,a)$使得

$$F'(\xi)=0,$$

即$f'(\xi)+kf(\xi)=0$.

例 3 设$f(x)$满足：(1) 在$[a,b]$上连续；(2) 在(a,b)内可导，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=f(\xi).$$

证明 证法同例 2，令$k=-1$即可证得.

小结 如例 3，例 7 中用罗尔定理证明，需要构造出原函数，此类函数有固定的原型$F(x)=f(x)e^{g(x)}$，利用微分中值定理容易得到想要证明的结论.

例 4 设$f(a)+f(b)+f(c)=3$，$f(3)=1$，$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，$a,\ b,\ c\in(0,3)$. 则有$\xi\in(0,3)$使得$f'(\xi)=0$.

证明 由于$f(a)+f(b)+f(c)=3$，且$f(x)$在$[0,3]$上连续在$(0,3)$内可导，所以，必存在$k\in(0,3)$使得$f(k)=f(3)=1$，根据罗尔定理，存在$\xi\in(k,3)\subset(0,3)$使得

$$f'(\xi)=0.$$

例 5 证明恒等式：$\arctan x=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2}$.

证明 令

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2},$$

则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\equiv 0,(x\geq 1),$$

所以，$f(x)$在$(1,+\infty)$为常函数. 又有$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，所以$f(x)=f(1)=\frac{\pi}{2}$，

即

$$\arctan x=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2}$$

成立.

例 6 设 $f(x)>0(0<x<1)$ 且在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导. 则存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

证明 变换待证等式为

$$\begin{aligned}0&=f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)\\&=\frac{d}{dx}[f(\xi)f(1-\xi)]=F'(\xi)\end{aligned}$$

其中 $F(x)=f(x)f(1-x)$, 显然 $F(0)=f(0)f(1)=F(1)$, 利用罗尔定理即可得

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

例 7 设 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 则存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{-f(\xi)}{\xi}.$$

证明 变换待证等式为

$$0=\xi f'(\xi)+f(\xi)=F'(\xi),$$

其中 $F(x)=xf(x)$. 由于

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx,$$

所以

$$F(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=F(c),$$

其中 $c\in[0,1]$, 于是, 在 $[c,1]$ 上 $F(x)$ 满足罗尔定理, 从而有结论

$$f'(\xi)=\frac{-f(\xi)}{\xi}.$$

若待证等式 $\phi(a,b,\xi)=0$ 明显可表示为

$$\varphi(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

的形式, 则 $\varphi(\xi)$ 很可能就是 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 因而, 可以利用柯西定理证明.

例 8 设 $0<a<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证明 令 $g(x)=\ln x$ 则 $g'(x)\neq0$, 且 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续在 (a,b) 内可导, 根据

柯西定理, 存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a},$$

即

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

5.2 利用微分中值定理证明不等式

利用拉格朗日中值定理或柯西中值定理证明不等式时, 常将待证不等式变形为

$$M<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<N(\text{或}M<\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}<N)$$

的形式, 且$f(x)$(或$f(x),g(x)$)满足拉格朗日或柯西定理的条件, 再证明对一切的$x\in(a,b)$有

$$M<f'(x)<N(\text{或}M<\frac{f'(x)}{g'(x)}<N),$$

最后利用中值定理证明.

例 9 证明对任何正数a、$b(a<b)$有

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{a}{b}<\frac{b-a}{a}.$$

证明 令$f(x)=\ln x$, $x\in[a,b]$. 则$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 根据拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a),$$

由于$\xi\in(a,b)$, 所以$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$, 即有

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{a}{b}<\frac{b-a}{a}.$$

例 10 设$f(x)$为非线性函数, 且在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 则存在$\xi\in(a,b)$使得

$$(b-a)f'(\xi)>f(b)-f(a).$$

证明 变换待证不等式为

$$0<(b-a)f'(\xi)-[f(b)-f(a)]$$
$$=\frac{d}{d\xi}\{(b-a)f(\xi)-[f(b)-f(a)]\}$$
$$=F'(\xi),$$

其中 $F(x)=(b-a)f(x)-x[f(b)-f(a)]$，若结论不成立，则 $F'(x)\le 0(a<x<b)$，因而 $F(x)$ 单调递减. 但是

$$F(a)=(b-a)f(a)-a[f(b)-f(a)]=F(b),$$

故, 必有 $F(x)\equiv F(a)$, 从而与已知矛盾, 所以结论成立. 即

$$(b-a)f'(\xi)>f(b)-f(a)$$

成立.

例 11 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导 $f(a)=f(b)=0<f'(a)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f''(\xi)<0.$$

证明 若不存在 ξ, 则 $f''(\xi)\ge 0$, 从而 $f'(x)$ 单调递增，又由于 $f'(x)$ 满足罗尔定理, 则存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f'(x_0)=0$, 又有 $f'(a)>0$, 所以，$f'(x)$ 非单调递增. 上下矛盾. 因而, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$.

例 12 设 $x>0$, 对任意 $\alpha\in(0,1)$. 证明 $x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha$.

证明 当 $x=1$ 时, 结论显然成立.

当 $x\ne 1$ 时, 取 $[x,1]$ 或 $[1,x]$, 在该区间上, 设 $f(x)=x^\alpha$，$g(x)=\alpha x$, 根据柯西定理, 有

$$\frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \xi\in(x,1)\text{或}\xi\in(1,x),$$

即

$$\frac{x^\alpha-1}{\alpha x-\alpha}=\xi^{\alpha-1};$$

当 $x<1$ 时，$\xi\in(x,1)$，$\xi^{\alpha-1}>1$，即

$$\frac{x^\alpha-1}{\alpha x-\alpha}>1;$$

又有 $\alpha x-\alpha=\alpha(x-1)<0$, 所以 $x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha$.

当 $x>1$ 时,

$$\xi\in(1,x),\ \xi^{\alpha-1}<1\ ,\ \alpha x-\alpha=\alpha(x-1)>0,$$

所以，$x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha$. 由此, 不等式得证.

5.3 讨论方程根的存在性

注意到在中值定理中有 $f'(\xi)=0$，令 $f'(x)=g(x)$，这样就可以利用中值定理讨论方程 $g(x)=0$ 的根的存在性.

例 13 设 $a_1,a_2,\quad,a_n$ 为任意 n 个实数, 证明函数

$$f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\quad +a_n\cos nx$$

在$(0,\pi)$必有零点.

证明 作辅助函数

$$F(x)=a_1\sin x+\frac{1}{2}a_2\sin 2x+\quad +\frac{1}{n}a_n\sin nx,x\in[0,\pi],$$

则$F'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\quad +a_n\cos nx=f(x)$, 容易验证$F(x)$在$[0,\pi]$上连续, 在$(0,\pi)$可导, 且 $F(\pi)=F(0)=0$, 所以存在$\xi\in(0,\pi)$使得$F'(\xi)=0$, 即$f(\xi)=0$. 所以, $f(x)$在$(0,\pi)$必存在零点.

例 14 设函数$f(x)$在区间K上可导, 则$f(x)$的两个零点间一定存在$f(x)+f'(x)$的零点.

证明 (采用罗尔定理)任取$f(x)$的两个零点x_1,x_2. 不妨设$x_1<x_2$. 作辅助函数

$$F(x)=f(x)e^x,$$

则$F(x)$在$[x_1,x_2]$上连续, 在$x_1<x_2$内可导, 且$F(x_1)=F(x_2)=0$, 由罗尔定理, 存在$\xi\in(x_1,x_2)$, 使得$F'(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)e^{\xi}+f'(\xi)e^{\xi}=0,$$

而$e^{\xi}\neq 0$, 故有$f(\xi)+f'(\xi)=0$, 即$f(x)$的两个零点间一定存在$f(x)+f'(x)$的零点.

例 15 证明:若

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\quad +\frac{a_n}{n+1}=0,$$

则多项式

$$f(x)=a_0x+a_1x^2+\quad +a_nx^{n+1}$$

在$(0,1)$内至少有一个实根.

证明 令

$$g(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\quad +\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

则

$$g'(x)=f(x),$$

又有$g(x)$在$[0,1]$连续可导, 且$g(0)=g(1)=0$, 满足罗尔定理的条件, 故存在$\xi\in(0,1)$使得

$$g'(\xi)=0$$

即$f(\xi)=0$, 结论得证.

例 16 若函数$f(x)$在$[a,b]$上非负, 且三阶可导, 方程$f(x)=0$在(a,b)内有两个不同

的实根. 证明存在$\xi\in(a,b)$使得

$$f'''(\xi)=0.$$

证明 因为方程$f(x)=0$在(a,b)内有两个不同的实根, 设其分别为$x_1,x_2(x_1<x_2)$所以$f(x_1)=f(x_2)=0$, 又由于$f(x)$非负，根据极值定义可以知道x_1,x_2为$f(x)$的两个极值点，所以有$f'(x_1)=f'(x_2)=0$又因为$f(x)$满足罗尔定理，所以存在$k_1\in(a,b)$使得$f'(k_1)=0$, 又$f(x)$三阶可导，所以$f'(x)$满足罗尔定理, 即存在$k_2\in(x_1,k_1)$, $k_3\in(k_1,x_2)$使得

$$f''(k_2)=f''(k_3)=0,$$

同样$f''(x)$满足罗尔定理, 则存在$\xi\in(k_2,k_3)\subset(a,b)$使得

$$f'''(\xi)=0.$$

证毕.

例 17 设$a>0$, 则方程

$$x^3+x=\frac{a^2}{2\arctan a}$$

在$(0,a)$内有解.

证明 将待证问题转化为中值问题:存在$\xi\in(0,a)$使得

$$\frac{\arctan a}{a^2}=\frac{1}{2\xi(1+\xi^2)},$$

即

$$\frac{\arctan a-\arctan 0}{a^2-0}=\frac{(\arctan\xi)'}{(\xi^2)'},$$

根据柯西中值定理直接得证, 即方程

$$x^3+x=\frac{a^2}{2\arctan a}$$

在$(0,a)$内有解.

例 18 若函数$f(x)$在$[a,b]$可导, 对$f_+'(a)$与$f_-'(b)$之间的任意数μ, 则在(a,b)内至少存在一点c, 使得$f'(c)=\mu$.

证明 不妨设$f_+'(a)<f_-'(b)$. 则$f_+'(a)<\mu<f_-'(b)$.

作辅助函数 $F(x)=f(x)-\mu x$, 有$F'(x)=f'(x)-\mu$. 显然, $F_+'(a)=f_+'(a)-\mu<0$与$F_-'(b)=f_-'(b)-\mu>0$, 即

$$F_+'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$$

与

$$F_+'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}>0.$$

由极限保号性, 存在 $x_1\in(a,b)$, 使得

$$\frac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}<0,$$

从而, $F(x_1)<F(a)$. 存在 $x_2\in(a,b)$, 使得

$$\frac{F(x_2)-F(a)}{x_2-a}>0,$$

从而, $F(x_2)<F(b)$. 于是, $F(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个极小值点 c. 根据费马定理, 有

$$F'(c)=f'(c)-\mu=0, \text{即 } f'(c)=\mu.$$

结束语

由上所述,我们发现微分中值定理的证明除了构造辅助函数,还可以利用其他的证明方法加以证明,同时从罗尔定理到柯西中值定理的层次之间还存在着递进关系.除了本文介绍的几个方面,利用微分中值定理还可以导出洛必达法则,泰勒公式等.由导数研究函数的性态(极值、最值、凹凸性)也要用到微分中值定理的结论. 深入研究微分中值定理,有助于加深对这些定理的理解;清楚这些定理的证明,能促使我们掌握微分中值定理的具体应用.