2018 级 一元函数微分 参考答案

一、选择题（$4' \times 5 = 20'$）

(1) 下列等式中正确的是（C）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = 1$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 1$

C. $\lim\limits_{x\to \infty} x\tan\frac{1}{x} = 1$

D. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x} = 1$

解：简单的等价无穷小替换问题。

(2) 设$f(x)$是(a,b)内单调有界的函数，则$f(x)$在(a,b)内间断点的类型是（B）

A. 第二类间断点

B. 第一类间断点

C. 不确定

D. 无穷间断点

解：无穷间断点不满足有界性，振荡间断点不满足单调性，而跳跃间断点和可去间断点都可以构造出来。

(3) 若对曲线$y = f(x)$，在$\left(x_0, f(x_0)\right)$处的切线平行于x轴，则当$x \to x_0$，$f(x) - f(x_0)$是$x - x_0$的（D）

A. 同阶但不等价的无穷小

B. 等价的无穷小

C. 低阶的无穷小

D. 高阶的无穷小

解：判断无穷小的阶数，只需求极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{dy}{dx} = 0$$

自然选 D.

(4) 设函数$f(x) = \sin\frac{1}{x}$，则$f'\left(\frac{1}{\pi}\right)$是（A）

A. π^2

B. $-\pi^2$

C. -1

D. 0

解：有

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

代入得

$$f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi^2$$

(5) 设$f'(x) = (x-1)(2x+1), x \in (-\infty, +\infty)$，则在区间$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$内，函数$f(x)$是（B）

A. 单调增加且下凸的

B. 单调减少且下凸的

C. 单调增加且上凸的

D. 单调减少且上凸的

解：注意到区间上有$f'(x) < 0$，故函数单调减少，再求一阶导数有

$$f''(x) = 4x - 1 > 0$$

故函数是下凸的。

二、填空题（$4' \times 5 = 20'$）

(1) 若有常数a使得$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$，则$a = \ln 3$.

解：这是典型的1^∞型极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a} = 9$$

(2) 设a, b为常数，使函数$f(x) = \begin{cases} ax+b, x > 1 \\ x^3, x \le 1 \end{cases}$在$x = 1$处可导，则$a = 1, b = -2$

解：考察可导的特性，首先分段点处应有两段函数值相等，故有

$$a + b = 1$$

再考虑可导的定义

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t) - f(1)}{t}$$

由于是分段函数，故考虑左右极限

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(1+t) - f(1)}{t} = \lim_{t\to 0^-}\frac{(1+t)^3 - 1}{t} = 3$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t+1)-f(1)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{at+a+b-1}{t}=3$$

这意味着

$$a=3$$

故

$$b=-2$$

解得$a=1$.

(3) 曲线$y=\frac{x^2}{2x+1}$的斜渐近线为$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

解：根据斜渐近线的定义

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}-ax-b=0$$

即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(ax+b)(2x+1)}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-2a)x^2-(2b+a)x-b}{2x+1}=0$$

解得

$$1-2a=0$$

$$2b+a=0$$

即

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

(4) 设函数$y=y(x)$由方程$y=1+xe^{xy}$所确定，则$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=1$.

解：这是典型的隐函数求导问题。先根据原函数解出点(0,1)，再求导得

$$y'=e^{xy}+xe^{xy}(y+xy')$$

代入，得

$$y'=1$$

(5) 曲线$y=x^3+x$在(0,0)处的切线方程为$y=x$.

解：高中问题。先求导

$$y'=3x^2+1$$

解得斜率为 1，代入点，得切线$y=x$.

三、求下列极限（$5'\times 3=15'$）

(1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$；

解：这是典型的有理化问题，考虑平方差公式

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$$

(2) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln}\right)$；

解：这是典型的洛必达法则求极限，作恒等变形

$$\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=1+\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=1+\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}$$

$$=1+\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$；

解：这也是典型的洛必达法则问题

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$$

四、求下列函数的导数（$5'\times3=15'$）

(1) 设$y=(x^2+x+1)^{\sin x}$，求$\frac{dy}{dx}$；

解：这是典型的幂指函数求导，我们令

$$y=e^{\sin x\ln(x^2+x+1)}$$

求导得

$$y'=e^{\sin x\ln(x^2+x+1)}\cdot\left(\cos x\ln(x^2+x+1)+\sin x\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)$$

(2) 设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t\\y=t^3-3t\end{cases}$所确定的函数，求$\frac{dy}{dx}$；

解：求出一阶导数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}$$

(3) 设$y=(1+x^2)\arctan x$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：先求出一阶导数

$$y'=2x\arctan x+1$$

再求出二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$$

五、证明下列不等式（$6' \times 2 = 12'$）

(1) 当$0 < x < \frac{\pi}{2}$，$(2+\cos x)x > 3\sin x$；

解：构造函数

$$f(x) = (2+\cos x)x - 3\sin x$$

$$f(0) = 0$$

求导得

$$f'(x) = -x\sin x + 2 + \cos x - 3\cos x = 2 - 2\cos x - x\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

再求导得

$$f''(x) = 2\sin x - \sin x - x\cos x = \sin x - x\cos x$$

注意到在$0 < x < \frac{\pi}{2}$上，有

$$\tan x > x$$

故

$$f''(x) > 0$$

$$f'(x) > f'(0) = 0$$

$$f(x) > f(0) = 0$$

证毕。

(2) 当$x > 0$，$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$

解：构造函数

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(0) = 0$$

求导得

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

$$f(x) > f(0) = 0$$

原命题得证。

六、求函数最大值、最小值（$6' \times 1 = 6'$）

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, x \in [-3,3]$$

解：求导，得

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

显然导函数有两零点

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

这意味着函数在$x_1 = 0$处取得极大值$y_1 = 4$，在$x_2 = 2$处取得极小值$y_2 = 0$.

再考虑端点值

$$f(-3) = -50, f(3) = 4$$

综上，该函数的最大值为 4，在点$x = 0, x = 3$处均可取得，最小值为-50，在点$x = -3$处取得。

七、求极值与证明（$6' \times 1 = 6'$）

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 17$$

并证明$f(x) = 0$只有一个实根。

(1) 求极值；

解：先求导

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

显然导函数有两零点$x_1 = 1, x_2 = 3$，这意味着原函数在$x_1 = 1$处取得极大值$y_1 = -13$，在$x_2 = 3$处取得极小值-17。

(2) 证明：$f(x)$只有一个实根

解：据上一问自然有$f(x)$在$(-\infty, 1)$上单调递增，故

$$f(x) < f(1) = -13 < 0, x \in (-\infty, 1)$$

类似的，有

$$f(x) < f(1) < 0, x \in (1,3)$$

自然，有

$$f(100) > 0$$

且函数在$(3, +\infty)$上单调递增，故$f(x)$在$(3,100)$上存在唯一实根，综上，$f(x)$在定义域上只有一个实根。

八、证明题（$6' \times 1 = 6'$）

设函数$f(x)$在$[a, b]$上二阶可导，且$f(a) = f(b)$，证明：存在$\xi \in (a, b)$，使得

$$(b-\xi)f''(\xi) = 2f'(\xi)$$

证：考虑函数

$$g(x)=(b-x)^2f'(x)$$

注意到

$$g'(x)=(b-x)^2f''(x)-2(b-x)f'(x)$$

故原命题等价为，存在$\xi\in(a,b)$，使得$g'(\xi)=0$，只要证存在$m,n\in[a,b]$，使得$g(m)=g(n)$，首先有

$$g(b)=0$$

又据罗尔中值定理，必存在这样的η，使得

$$f'(\eta)=0$$

这样就找到了$g(b)=g(\eta)=0$，故存在$\xi\in(\eta,b)$，使得$g'(\xi)=0$，满足题意，证毕。