浅谈一道数列及级数收敛证明题

文/似雪飞扬

2014 年数学一第 19 题是一道非常有意思的数列/级数收敛证明题，它以耦合数列为载体考察了基本的正项级数审敛方法和放缩技巧. 本文将从两种不同的解法出发来谈谈破解这类问题的思路.

以下给出原题.

> 2014 • 数学一 • 19 题（满分 10 分）
>
> 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.
>
> (1)证明：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$；(2)证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

1 解答

先给出原解法.

1.1 参考解答

(1)由 $\cos a_n-a_n=\cos b_n,0<a_n<\frac{\pi}{2}$ 得

$$\cos a_n-\cos b_n=a_n>0$$

从而 $\cos a_n>\cos b_n$. 又 $0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$ 且 $\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故

$$0<a_n<b_n.$$

又已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，从而由正项级数的比较审敛法可知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，于是由数项级数收敛的必要条件知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 证毕.

(2)由(1)可知，当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to0,b_n\to0$，于是由三角恒等变换的和差化积公式可得

$$0<\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{-2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2}}{b_n}\sim-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_n+b_n)(a_n-b_n)}{b_n}=\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$$

而$0<\dfrac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}<\dfrac{b_n^2}{2b_n}=\dfrac{b_n}{2}<b_n$，且正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，于是由比较审敛法可知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$收敛，于是由比较审敛法极限形式知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛. 证毕. □

以下给出新解.

1.2 新解

(1)构造连续函数

$$f(x)=\cos x-x,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

则$\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),f'(x)=-\sin x-1<0$，于是$f(x)$是$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的单调函数，则函数$f(x)$是一个一一映射. 又由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛知

$$\lim_{n\to\infty}(\cos a_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\cos b_n=\cos\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)=\cos 0=1$$

于是由$f(x)$的单调性和连续性知$f\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=1=f(0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 证毕.

(2)继续(1)中思路，由于$f'(0)=-1$，故可将$f(x)$泰勒展开得到

$$\forall x\in\mathring{U}_+(0),f(0)=f(0)+f'(0)x+o(x)=1-x+o(x),$$

转化为等价无穷小$f(x)-1\sim-x\left(x\to 0^+\right)$. 令$x=a_n$，则可得到

$$\cos a_n-a_n-1\sim-a_n\,(n\to\infty)$$

代入$\cos a_n-a_n=\cos b_n$即可得到

$$-a_n\sim\cos b_n-1\sim-\frac{1}{2}b_n^2\,(n\to\infty)$$

于是当$n\to\infty$时，$\dfrac{a_n}{b_n}\sim\dfrac{\frac{1}{2}b_n^2}{b_n}=\dfrac{b_n}{2}$. 而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，故而由比较审敛法极限形式可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$亦收敛. 证毕. □

2 分析

以下给出对题目和解题思路的剖析，以及对两种不同解法的比较和评价.

2.1 考点剖析及破题思路

本题以耦合数列为载体，主要考察了级数审敛的相关知识点：

- 任意数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要不充分条件——$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；
- 正项级数的比较审敛法（及其极限形式）；

除了基本的审敛方法，本题还借助三角形式的耦合方式，考察了包括和差化积在内的常用的恒等变形和放缩技巧.

在仔细审题，判断考点所在之后，即可知道解题的关键在于判断待求数列和级数收敛的速度. 而一般来讲，要想知道某个无穷小量收敛得有多快，第一思路当然是寻找其等价（或同阶）无穷小，于是借助等价无穷小、恒等变形或泰勒展开等方法，将耦合式处理成等价无穷小形式，便是显而易见的做法了.

进一步地，分析各问的破题思路，可有如下结论：第一问要求根据所给条件里 a_n 和 b_n 的关系推知正项数列 $\{a_n\}$ 的范围，进而根据 $b_n \to 0$ 推出 $a_n \to 0$；第二问则是要将较为复杂的三角关系处理成比阶无穷小的关系，进而由比较审敛法证明待证命题.

容易发现，两问里都用到了 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 这个条件，且都是起手一步，说明这个条件是“题眼”，是破题的关键所在. 而在抓住了这一点之后，还可以得到如上文所言新的解法.

2.2 解法比较及评价总结

对参考解答给出的原解法的分析已在上文指出，这里着重谈谈新解的思路. 上文提到，条件 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 是题眼，我们分析这个式子的特点，直接构造函数 $f(x) = \cos x - x$ 并分析其性质，就会很容易得出它在题干所给区间内单调的结论.

这里划一个小知识点：单调函数（是一一映射，于是）必有反函数. 这样便有 $x = f^{-1}(y)$，又由 f 连续 $\Leftrightarrow f^{-1}$ 连续可以推知 $\lim_{y\to1} x = \lim_{y\to1} f^{-1}(y) = f^{-1}\left(\lim_{y\to1} y\right) = f^{-1}(1) = 0$，进而由归结原理知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 至此第一问证毕.

对第二问的证明则需要在已有分析下更进一步，直接分析 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 在 $n \to \infty$

时的特点——等号两边都相当于 1 加上一个无穷小量. 于是尝试分析这两个无穷小量的关系——运用泰勒展开的方法也就是当然的了. 至此第二问可以说基本破解, 剩下的审敛问题只不过是常规类型了.

接下来我们比较两种解法的异同及优劣. 原解对于一二两问, 均是通过**等价变换**处理条件. 新解处理第一问的做法有些讨巧, 不是运用通性通法, 而是抓住题目特点给出技巧性的解答, 相较于通常解法而言, 不具有多少掌握的价值; 而在第二问上, 新解直击要害, 直接讨论取极限时的情况, **从而砍掉次要矛盾, 抓住主要矛盾**. 在这个角度上, 个人认为, 掌握新解更加具有意义——毕竟耦合方式多种多样, 放缩技巧五花八门, 不是每一种耦合数列都易于在通项上解出不等关系, 而泰勒展开然后直接取极限的解法则简洁得多. □