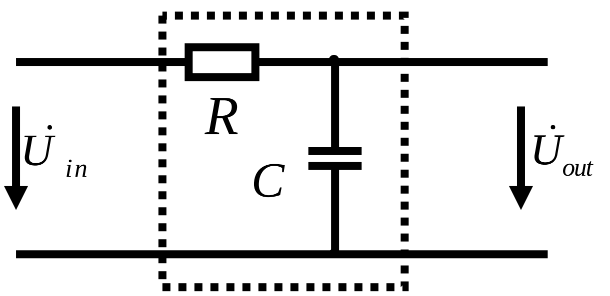
第八章 电路的频率特性分析

在正弦稳态分析中，有两大类问题：

- 一类是单一频率正弦激励下不同电路的稳态响应分析计算。此时响应与激励是同频率的正弦量（如第六章分析的电路）； → 给定激励幅度、位相和频率，求响应
- 另一类是同一电路在不同频率的正弦激励下，电路响应特性的分析。由于容抗、感抗是频率的函数，此时响应是正弦激励频率的函数，故称为频率响应或频率特性。 → 给定激励幅度、位相，频率变化时，求响应随频率的变化关系

网络的频率特性是研究正弦信号电路中电压、电流随频率变化的关系（即频域分析）。

简单例子：



$$\dot{U}_{out}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\dot{U}_{in}=\frac{1}{1+j\omega RC}\dot{U}_{in}$$

当输入电压 $\dot{U}_i$ 的大小和相位不变的情况下，输出电压的大小和位相随激励(输入信号)频率的改变而变化。

输出电压模与频率关系：
$$\left|\dot{U}_o\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}U_{in}$$

输出电压位相与频率关系：
$$\angle\varphi_{out}=\angle\varphi_{in}-tg^{-1}\omega RC$$

8.1 网络函数（network function）

在电路分析中，电路的频率特性通常用正弦稳态电路的网络函数来描述。

一、网络函数定义：

正弦稳态电路中，只有一个激励源下，根据齐次定理，响应相量与激励相量成正比，二者之比称为网络的网络函数。即，

$$H(j\omega) \equiv \frac{\dot{R}(j\omega)}{\dot{E}(j\omega)} \qquad (8.1\text{-}1)$$

式中ω为激励频率，$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{E}$分别为响应、激励的有效值。

因为只有一个激励，通常将激励和负载支路单独画出来，即用一个二端口网络来研究网络的一般特性。

例如，下图网络的传输函数（频率响应）为响应电压相量与激励电压相量之比，即

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o(j\omega)}{\dot{U}_i(j\omega)}$$

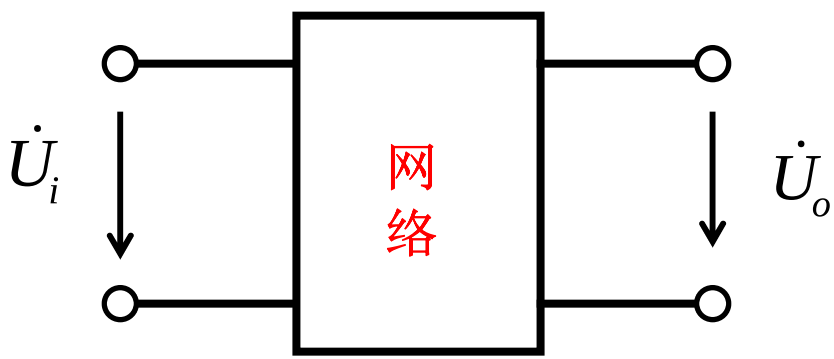


图7.1

网络函数是一个复数，

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|\angle\varphi(j\omega)=\frac{R\angle\varphi_R}{E\angle\varphi_E}=\frac{R}{E}\angle\varphi_R-\varphi_E$$

➢其模（响应相量与激励相量的模之比）随频率的变化关系称幅度-频率特性，

$$|H(j\omega)|-\omega \qquad (8.2\text{-}2a)$$

➢其幅角（响应相量与激励相量初相之差）随频率的变化关系称相位-频率特性，

$$\varphi(j\omega)-\omega \qquad (8.2\text{-}2b)$$

这两种特性与频率的关系，都可以在图上用曲线表示，称为网络的频率响应曲线（又称频率特性曲线），即幅频响应曲线和相位响应曲线。为了表示范围广泛的频率，横轴通常以对数坐标表示。

网络函数的求取 网络函数可以用相量法中任一方法求解获得。例如图RC电路，利用串联分压关系可以求得，该电路的网络函数为：

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

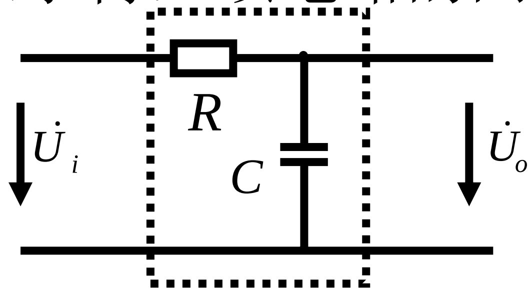


图7.2 RC网络

显然，网络函数$H(j\omega)$是由电路结构和参数决定的，与激励和响应的大小无关。它是激励的复函数，是电路自身特性的体现，描述网络的特性。

若激励 $\dot{U}_i$（初相、有效值）不变，则响应$\dot{U}_{out}$与$H(j\omega)$的变化规律一致，故响应与激励频率的关系决定于网络函数与频率的函数。

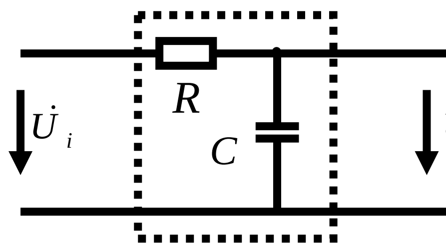
一旦获得电路的网络函数，也就能求得电路在任意正弦输入时的正弦响应，即有 $\dot{U}_o=H(j\omega)\dot{U}_i$

网络函数等于单位正弦激励(有效值1、初相0度)的响应。

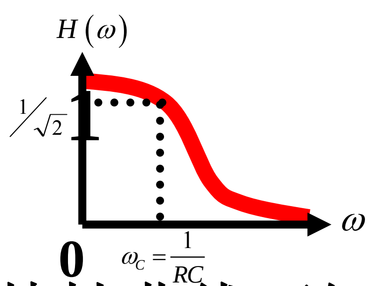
网络函数的含义 如开始所述，网络函数描述一个电路在结构和参数均不变的条件下，激励的幅度和初相也不变，只有激励的频率改变时，响应如何变化。例如图**8.2**的**RC**网络，从其网络函数，容易得到其幅频响应和相频响应为

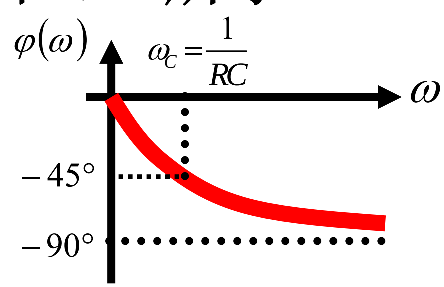
$$|H(j\omega)| = \left|\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(j\omega) = -arctg(\omega RC)$$



网络的频率特性曲线如图**a**、**b**所示。





$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

从频率特性曲线可知，当频率ω为零（直流激励）时，输出电压等于输入电压；当 $\omega \neq 0$（某一频率的正弦激励），输出电压会衰减，同时输出电压的相位相对于输入电压开始滞后。这个结果从电容的阻抗特性很容易理解。

二、网络函数的类型

由于激励何响应可以是电压，也可以是电流，因此，网络函数有多种形式。常用的几种网络函数定义式分别如下表示：

输入阻抗

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_1(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)}$$

电压转移函数

$$K_u=\frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)}$$

转移阻抗

$$Z_T=\frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)}$$

输出阻抗

$$Z_{out}=\frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{I}_2(j\omega)}$$

电流转移函数

$$K_i=\frac{\dot{I}_2(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)}$$

转移导纳

$$Y_T=\frac{\dot{I}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)}$$

策动点函数

转移函数/传递函数

根据响应和激励是否在同一端口，又把网络函数分为**策动点函数**和**转移函数**两类：

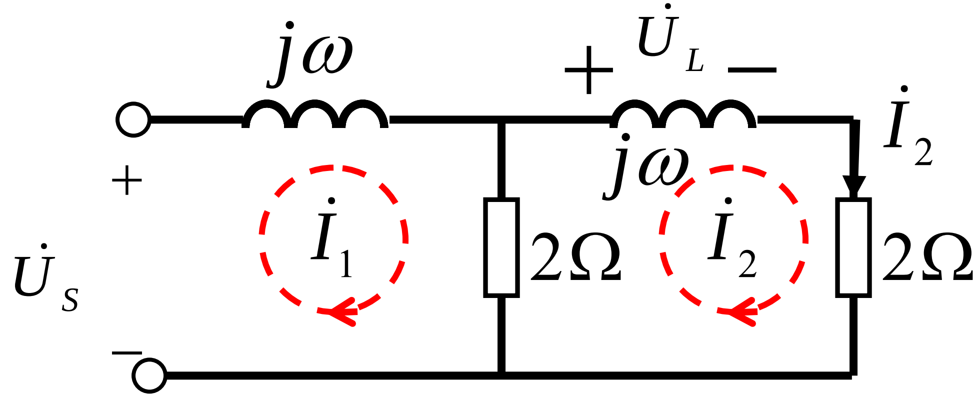
策动点函数 响应、激励在同一端口	转移/传递函数 响应、激励在不同端口
$Z_{in}=\left.\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$	$K_u=\left.\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$
$Z_{out}=\left.\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right\vert_{\substack{U_S=0\\ Z_S\neq 0}}$	$K_i=\left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$
	$Z_T=\left.\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$
	$Y_T=\left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$

驱动点函数实质上是描述单口网络外部特性的量，而转移函数则是描述双口网络传输特性的量。

电路/网络根据频率特性（转移/传输函数）分类：

- 根据幅频特性： 低通、高通、带通、带阻网络……
- 根据相频特性：超前网络 滞后网络

例8.1（书例11-1）



$$(2+j\omega)\dot{I}_1-2\dot{I}_2=\dot{U}_S$$

$$-2\dot{I}_1+(4+j\omega)\dot{I}_2=0$$

$$\dot{I}_2=\frac{2\dot{U}_S}{4+(j\omega)^2+j6\omega}$$

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_S}=\frac{2}{4-\omega^2+j6\omega}$$

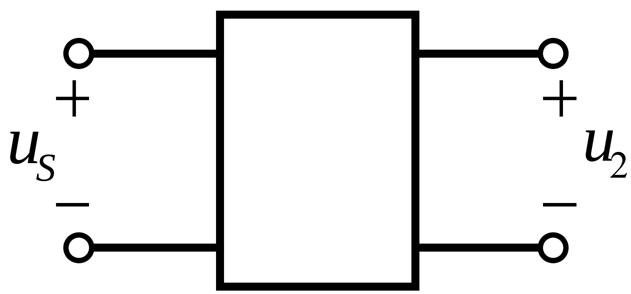
$$\dot{U}_L=j\omega\dot{I}_2=\frac{j2\omega\dot{U}_S}{4+(j\omega)^2+j6\omega}$$

$$\frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_S}=\frac{j2\omega}{4-\omega^2+j6\omega}$$

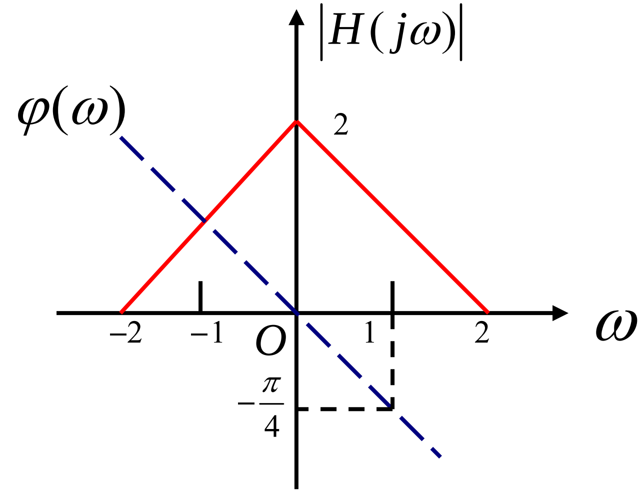
通常以网络函数中$(j\omega)$的最高次方的次数定义网络函数的阶数，如本例为**2**阶。网络函数的阶数与电路的阶数相同。

例**8.2**（书习题**11-18**）理解网络函数意义

题图**(a)**所示系统的网络函数 $H(j\omega)=\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_S}$ ，其幅频特性 $|H(j\omega)|-\omega$ 和相频特性 $\varphi(\omega)-\omega$ 如图**(b)**所示。求当 $u_S=10-6.4\sin t-3.2\sin(2t)-2.1\sin(3t)+\dots$ 时，输出$\boldsymbol{u_2}$ 。



(a)

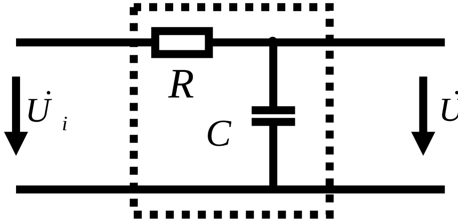


(b)

$$u_2=20+6.4\cos(t+\frac{\pi}{4})\ V$$

8. 2 RC/RL/RLC网络的频率特性

本节以无源网络为例介绍电路的频率特性分析方法，介绍一些网络的频率响应特点。



一、一阶网络的频率特性：

1、RC低通网络：以电容电压为输出时，

网络函数 $$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

幅频响应 $$|H(j\omega)|=\left|\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

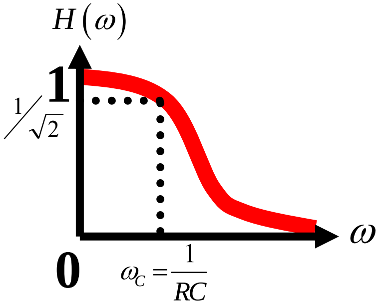
相频响应 $$\varphi(j\omega)=-arctg(\omega RC)$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_C}}$$

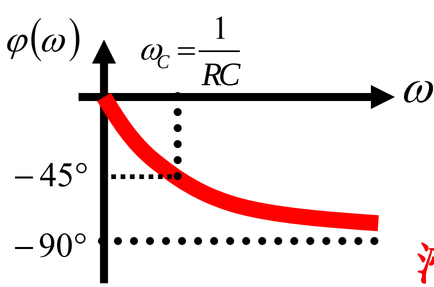
$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_C})^2}}$$

$$\varphi(j\omega)=-arctg(\frac{\omega}{\omega_C})$$

令 $\omega_C=\frac{1}{RC}$

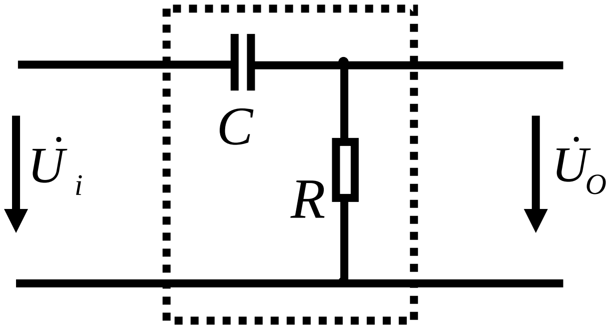


低通



滞后

2、RC高通网络：以电阻电压为输出时，



网络函数 $$H(j\omega)=\frac{\dot U_o}{\dot U_i}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega RC}{j\omega RC+1}$$

幅频响应 $$|H(j\omega)|=\left|\frac{\dot U_o}{\dot U_i}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_C}{\omega})^2}}$$

$$\omega_C=\frac{1}{RC}$$

相频响应 $$\varphi(\omega)=tg^{-1}\frac{1}{\omega RC}=90^\circ-tg^{-1}\omega RC$$

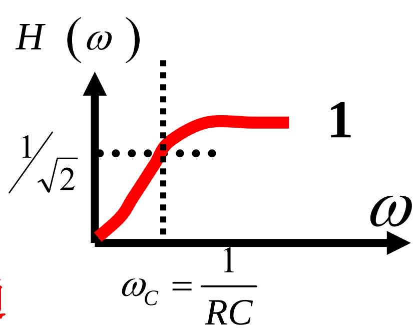
$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega_C}{\omega}}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_C}{\omega})^2}}$$

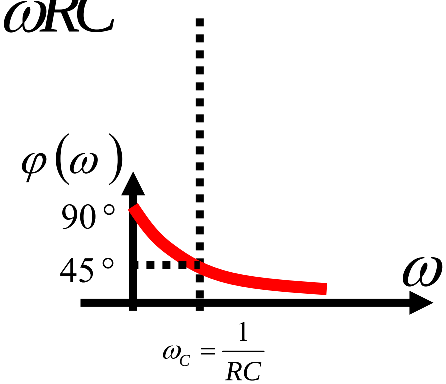
$$\varphi(j\omega)=arctg(\frac{\omega_C}{\omega})$$

$$=90^\circ-arctg(\frac{\omega}{\omega_C})$$

令 $\omega_C=\frac{1}{RC}$

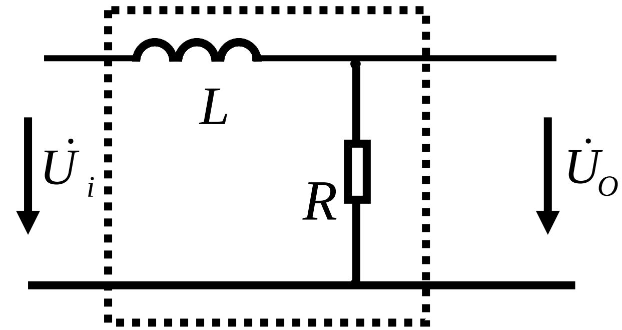


高通



超前

3、RL低通网络：以电阻电压为输出时，



网络函数 $$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{R}{R+j\omega L}=\sqrt{\frac{1}{1+(\frac{\omega L}{R})^2}}\angle(-tg^{-1}\frac{\omega L}{R})$$

幅频响应 $$|H(j\omega)|=\left|\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R})^2}}$$

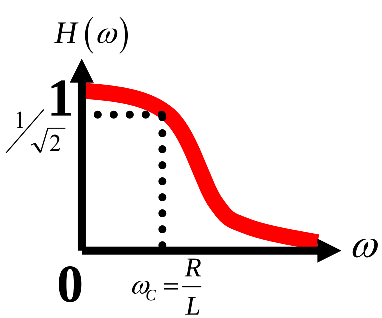
相频响应 $$\varphi(j\omega)=-arctg(\frac{\omega L}{R})$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_C}}$$

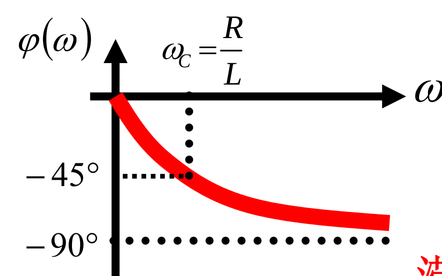
$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_C})^2}}$$

$$\varphi(j\omega)=-arctg(\frac{\omega}{\omega_C})$$

令 $\omega_C=\frac{R}{L}$

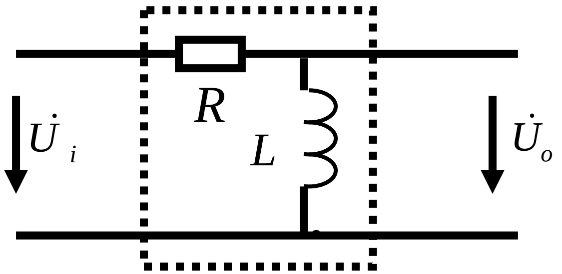


低通



滞后

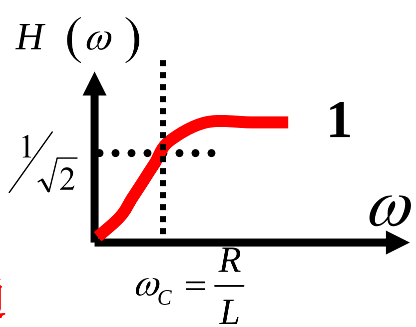
4、RL高通网络：以电感电压为输出时，



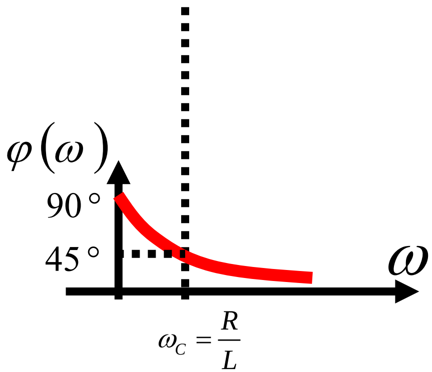
网络函数 $$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{j\omega L}{R+j\omega L}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_C}{\omega})^2}}\angle(90^\circ-tg^{-1}\frac{\omega L}{R})$$

幅频响应 $$|H(j\omega)|=\left|\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_C}{\omega})^2}}\qquad \omega_C=\frac{R}{L}$$

相频响应 $$\varphi(j\omega)=90^\circ-arctg(\frac{\omega L}{R})=arctg(\frac{\omega_C}{\omega})$$



高通



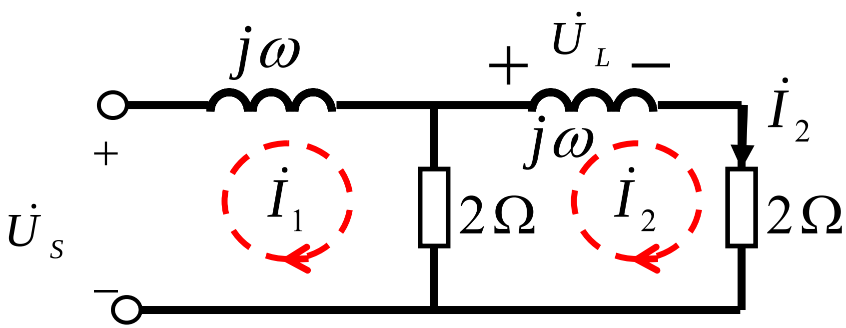
超前

二、二阶电路的频率特性：

即含2个独立动态元件的电路的网络函数，如下面图中二例和下节将讨论的**RLC**电路的频率特性。

1、RL网络：

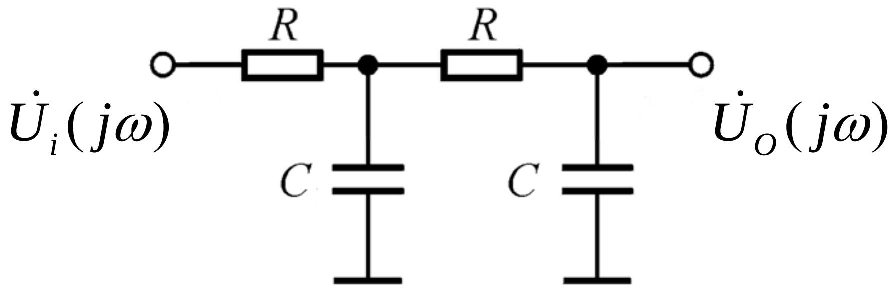
2节一阶RL电路级联构成2阶电路(例7.1)



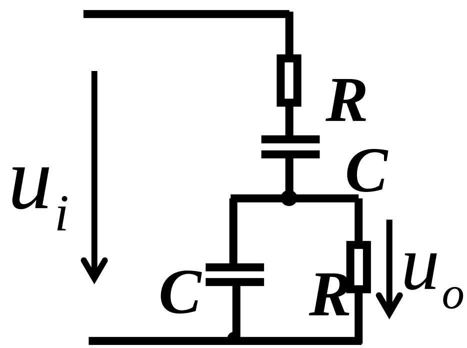
$$\frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_S} = \frac{j2\omega}{4 - \omega^2 + j6\omega}$$

2、RC网络：

2节一阶RC电路级联

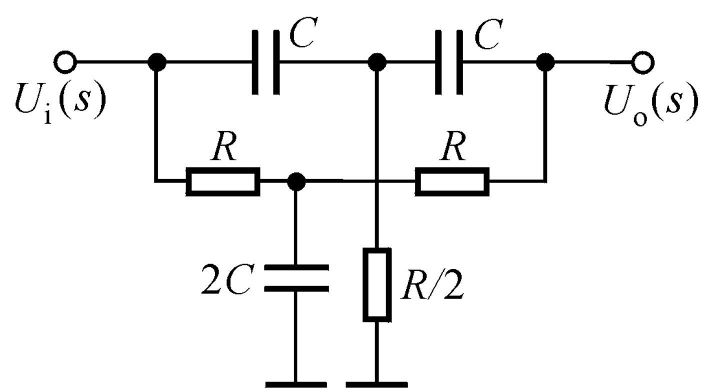


RC串并联网络



$$\frac{\dot{U}_O}{\dot{U}_i} = \frac{1}{3 + j(R\omega C - \dfrac{1}{R\omega C})}$$

双T网络

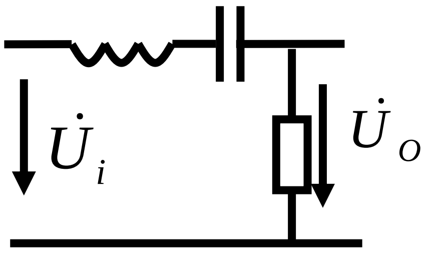


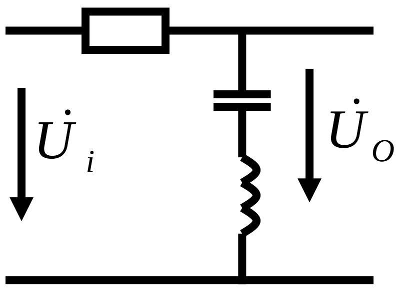
$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_O}{\dot{U}_i} = \frac{1-(\omega CR)^2}{[1-(R\omega C)^2] + j4\omega CR}$$

$$= \frac{1-(\dfrac{\omega}{\omega_0})^2}{[1-(\dfrac{\omega}{\omega_0})^2] + j4\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

3、RLC网络：

RLC串联





$$H(j\omega)=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

RLC并联

三、波特图：

1、幅频特性：

纵轴： $H(\omega)(dB)=20\lg H(\omega)$

当有2级网络级联时，用分贝表示的总网络函数为2个网络函数之和：

$$H(\omega)(dB)=20\lg\left[H_1(\omega)\cdot H_1(\omega)\right]=20\lg H_1(\omega)+20\lg H_2(\omega)$$

横轴：频率用对数坐标表示。

2、相频特性：

纵轴：仍用角度

横轴：频率也用对数坐标表示。

四、波特图的近似画法

8.3 滤波器（Filter）– 无源滤波器

一、低通滤波器

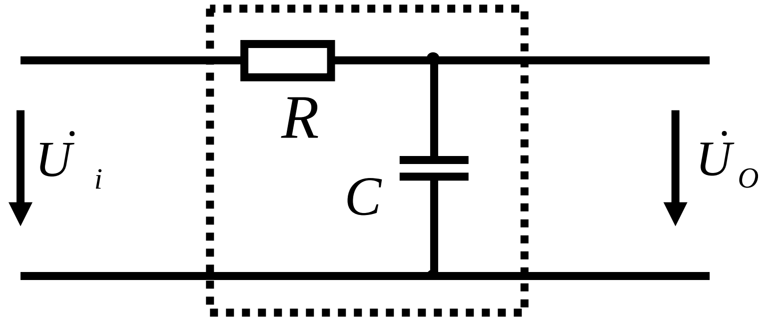
二、高通滤波器

三、带通滤波器

四、带阻滤波器

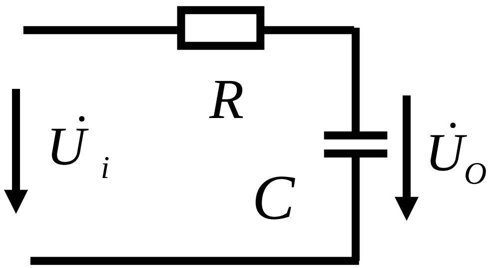
一、低通滤波器（Low-Pass Filter,LPF）

滤掉输入信号的高频成分，通过低频成分。



网络的传递函数：

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}}$$



1、低通滤波器的传递函数

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

或

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\angle -tg^{-1}\omega RC=H(\omega)\angle\varphi(\omega)}$$

其中：$\left\{\begin{array}{l} H(\omega) \text{ --- 幅频特性：输出与输入有效值之比与频率的关系。} \\ \varphi(\omega) \text{ --- 相频特性：输出与输入相位差与频率的关系。} \end{array}\right.$

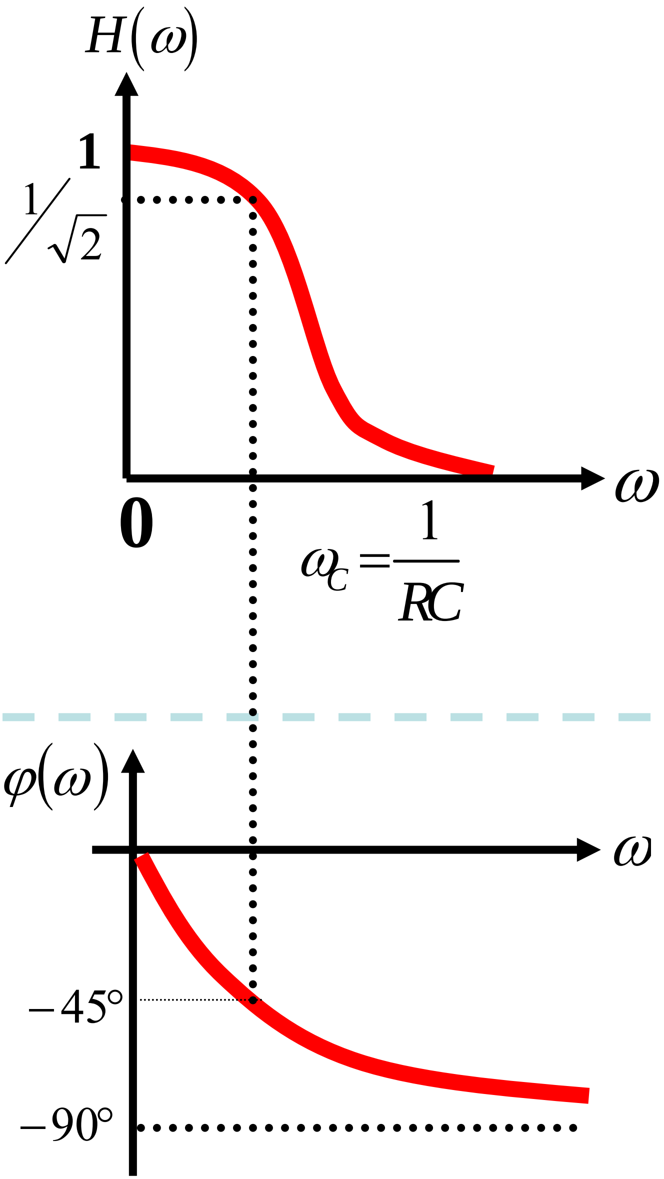
2、低通滤波器的频率特性

幅频特性

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}$$

ω_C ： 截止频率

0 ~ ω_C ： 带宽



相频特性

$$\varphi(\omega)=\angle -tg^{-1}\omega RC$$

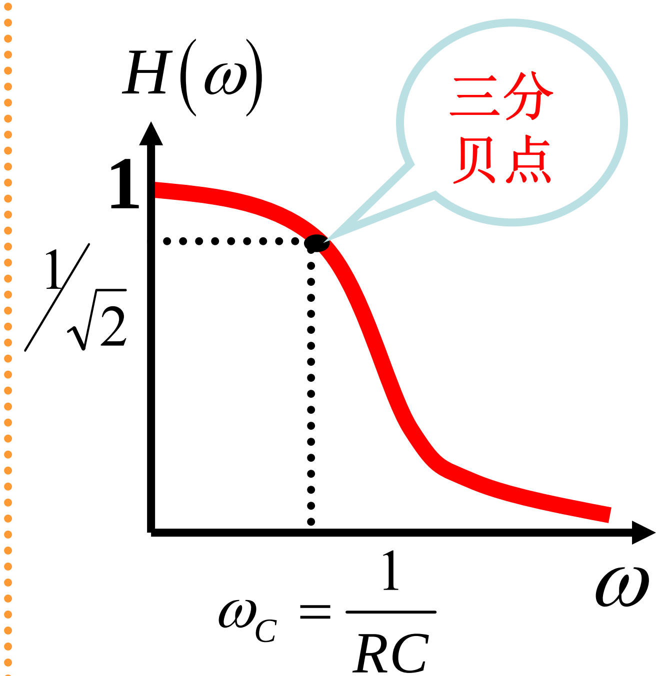
幅频特性上 $\omega=\omega_C$ 时，叫 3 分贝点或半功率点。

分贝数定义：$\boxed{dB = 20\lg\frac{U_o}{U_i} = 10\lg\frac{P_o}{P_i}}$

半功率点：

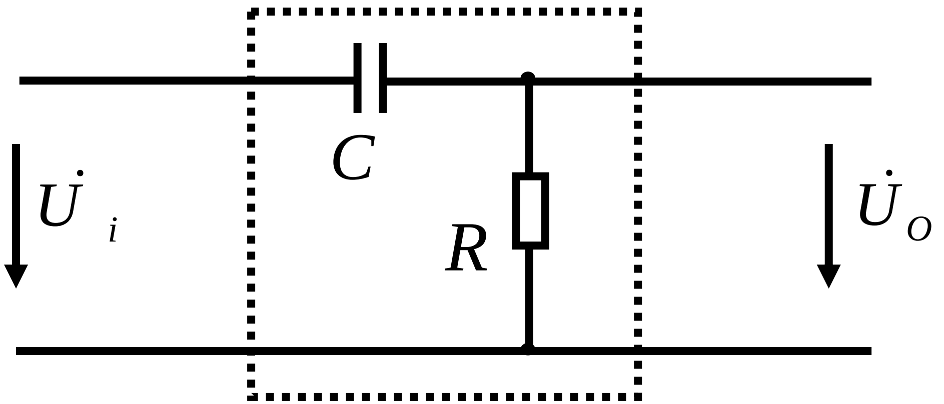
当 $\frac{U_o}{U_i} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$\frac{P_o}{P_i} = \frac{1}{2}$

$$20\lg\frac{U_o}{U_i} = 20\lg\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB}$$



二、高通滤波器（High-Pass Filter,HPF）

滤掉输入信号的低频成分，通过高频成分。



1、高通滤波器的传递函数

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{R}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}$$

2、高通滤波器的频率特性

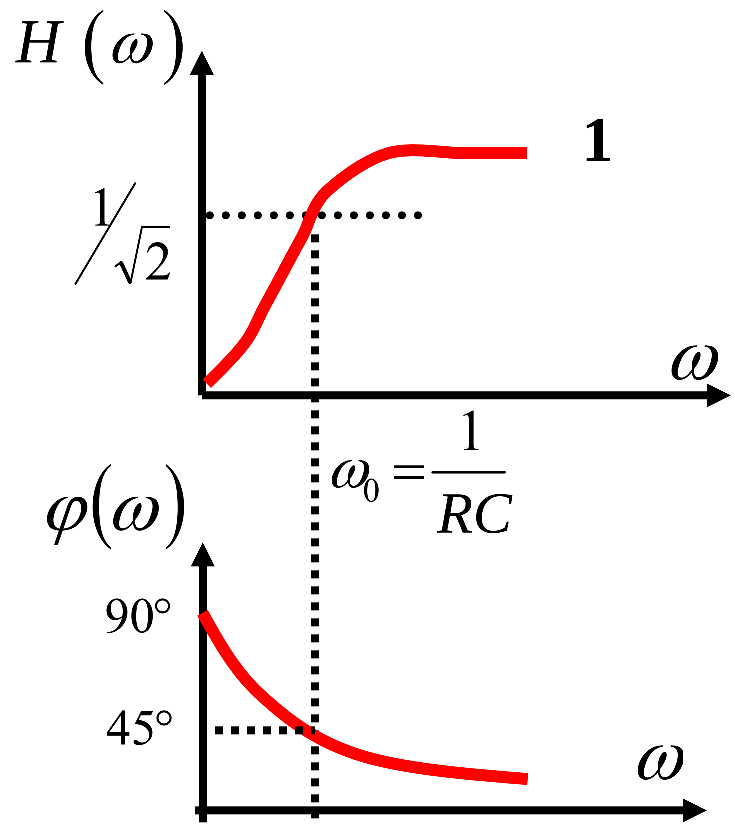
$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{R}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}$$

幅频特性

$$H(\omega)=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_C}{\omega}\right)^2}}$$

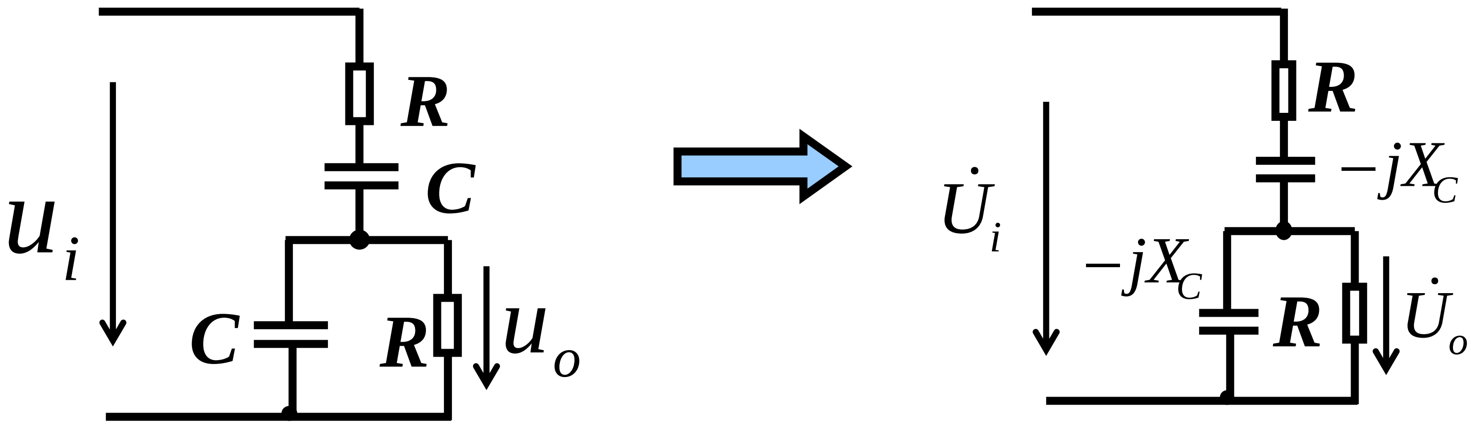
相频特性

$$\varphi(\omega)=90^\circ-tg^{-1}\omega RC=90^\circ-tg^{-1}\frac{\omega}{\omega_C}$$



三、带通滤波器（Band-Pass Filter,BPF）

RC 串并联网络



令：$Z_1=(R\text{串联 }C)=R-jX_c$

$$Z_2=(R\text{并联 }C)=\frac{R(-jX_c)}{R-jX_c}$$

则：

$$\dot{U}_o=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{U}_i$$

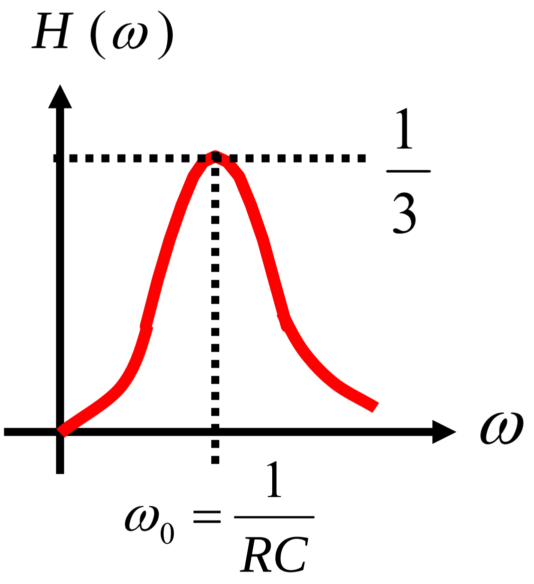
$$\dot{U}_O = \frac{\dfrac{R(-jX_c)}{R-jX_c}}{(R-jX_c)+\dfrac{R(-jX_c)}{R-jX_c}}\dot{U}_i$$

$$= \frac{1}{3+j(R\omega C-\dfrac{1}{R\omega C})}\dot{U}_i$$

幅频特性

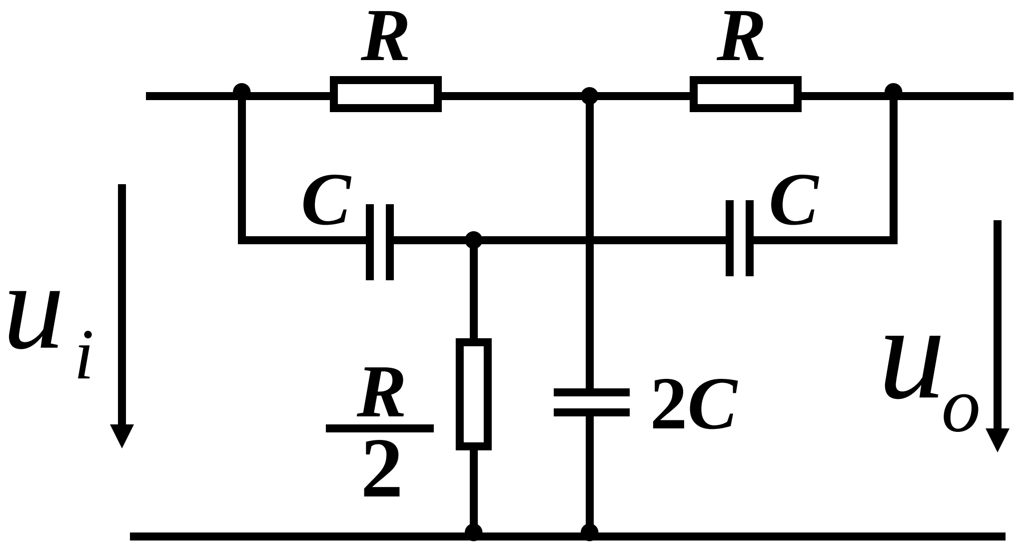
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{3^2+(\omega RC-\dfrac{1}{\omega RC})^2}}$$

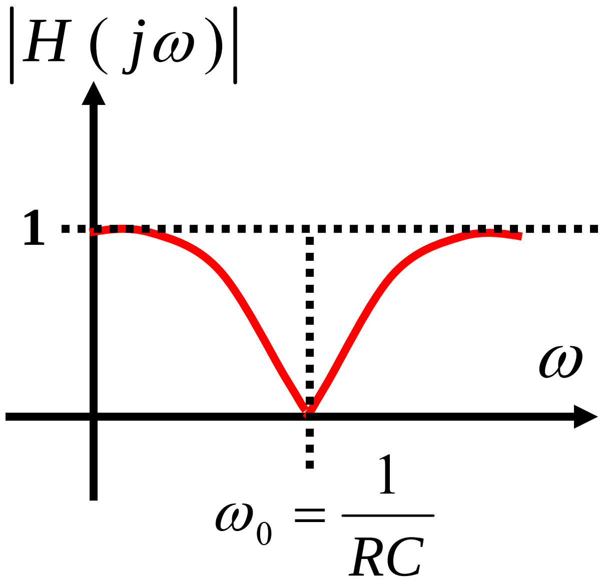
$$= \frac{1}{\sqrt{3^2+(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}$$



四、带阻滤波器（Band-Stop Filter,BSF）

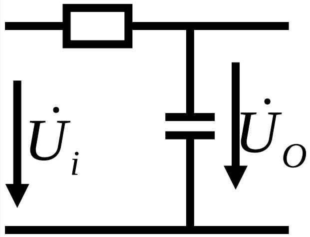
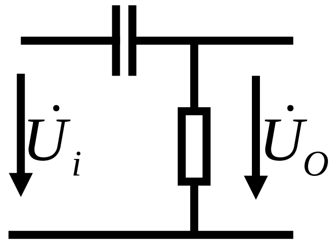
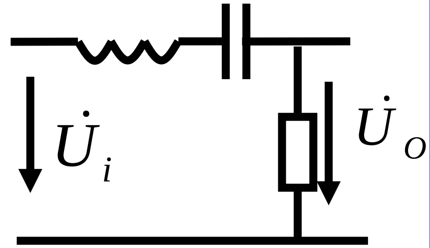
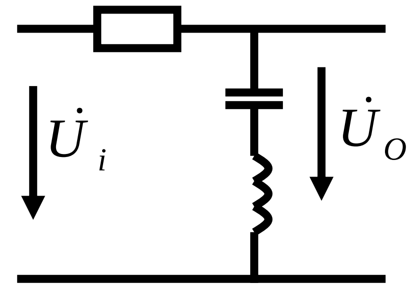
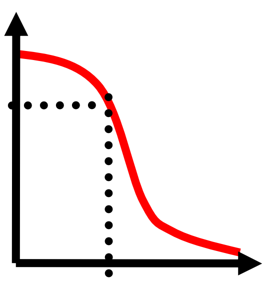
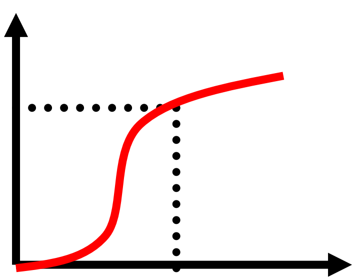
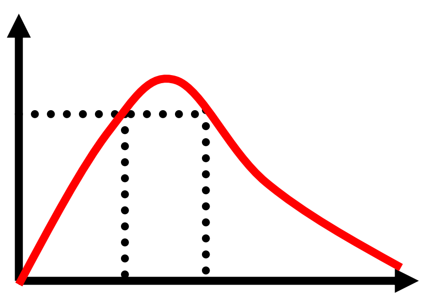
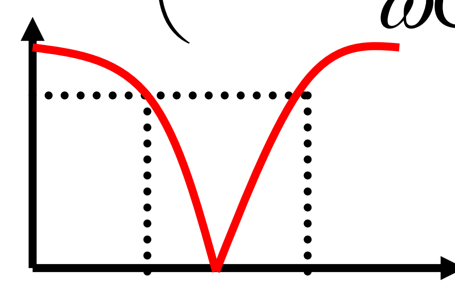
双*T*网络





$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{1-(\omega CR)^2}{[1-(R\omega C)^2]+j4\omega CR}=\frac{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}{[1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2]+j4\frac{\omega}{\omega_0}}$$

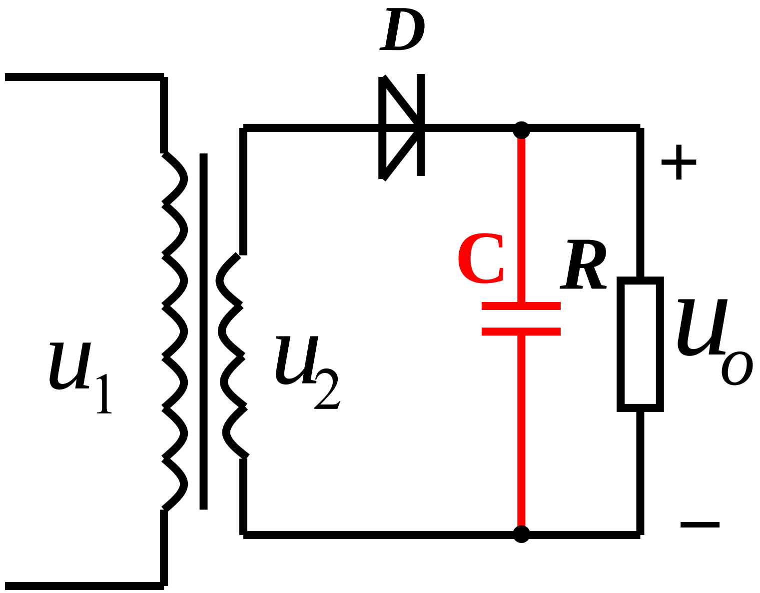
典型的网络函数

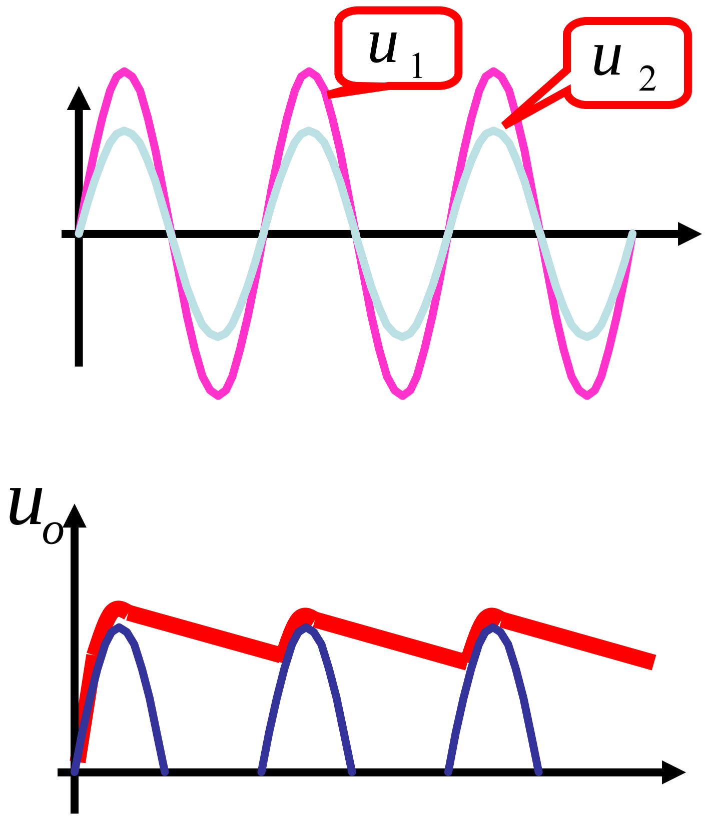
	低通	高通	带通	带阻
电路举例				
传递函数	$H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega RC}$ 	$H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\dfrac{1}{\omega RC}}$ 	$H(j\omega)=\dfrac{R}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$ 	$H(j\omega)=\dfrac{j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$ 

滤波器应用举例（之一）

低通

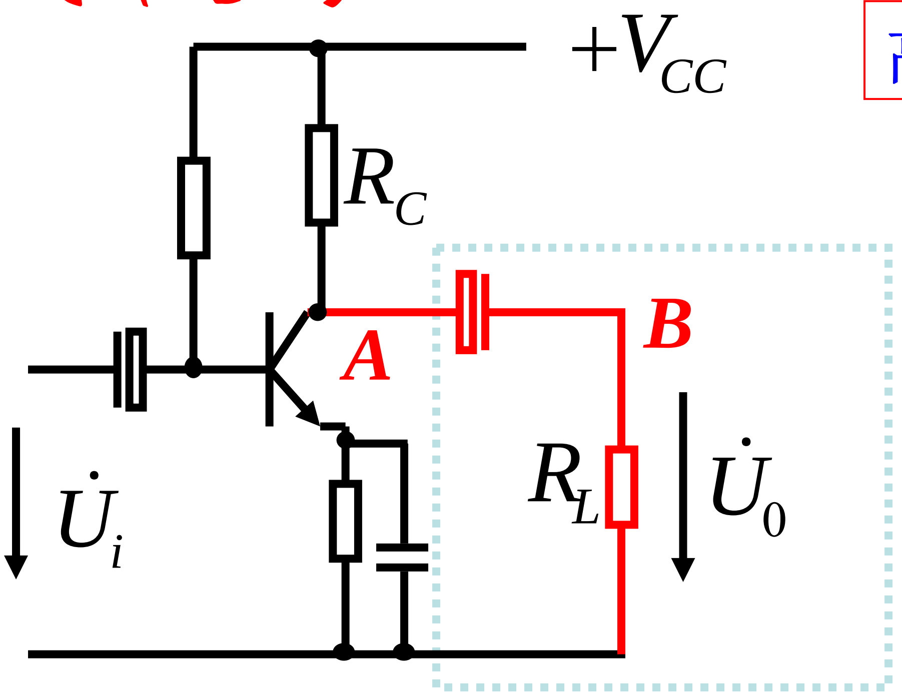
整流滤波

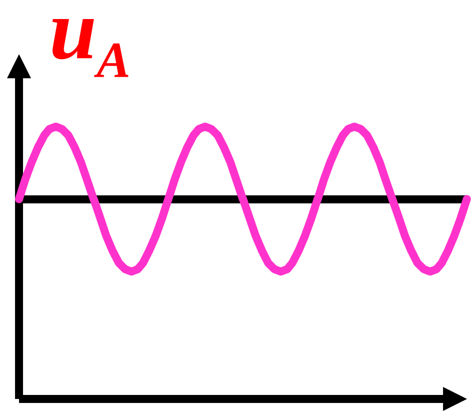


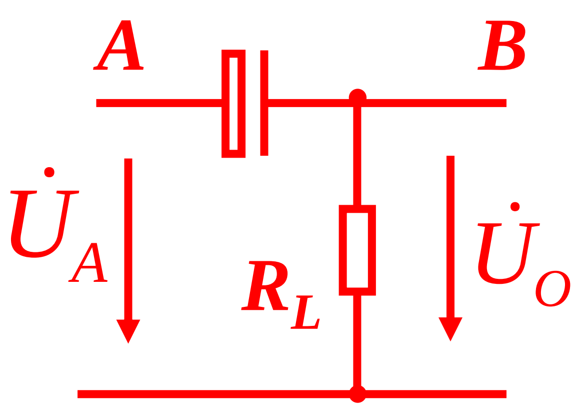


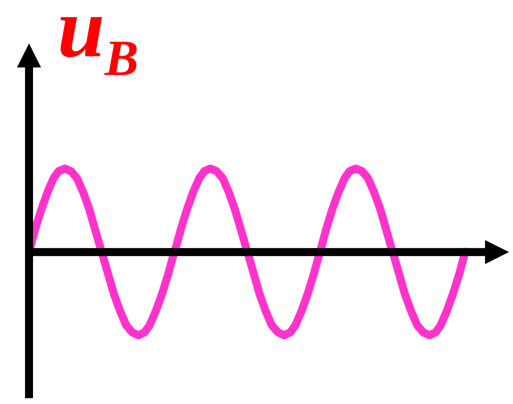
滤波器应用举例（之二）

高通



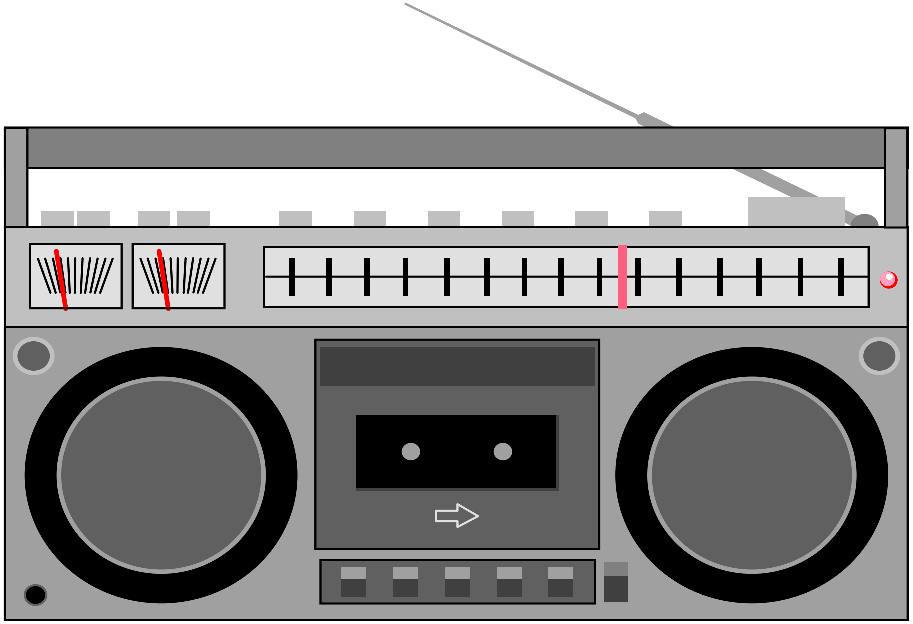






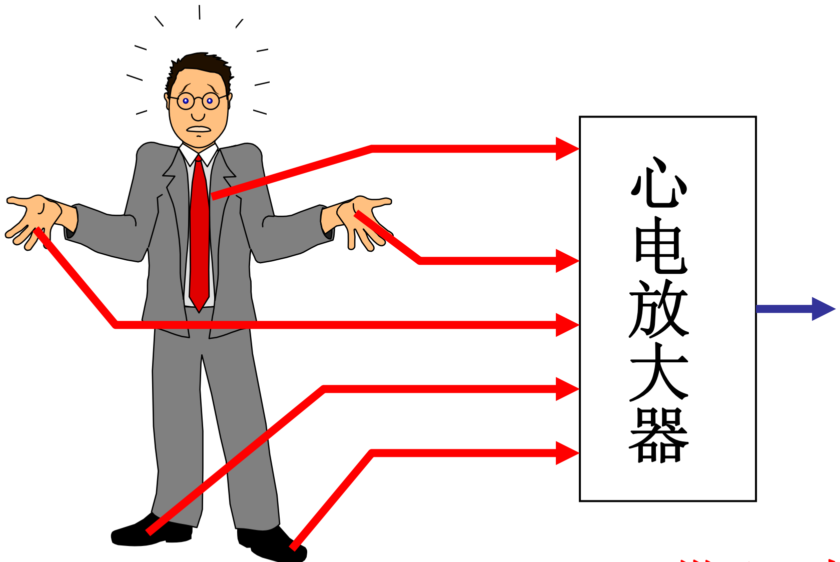
滤波器应用举例（之三）

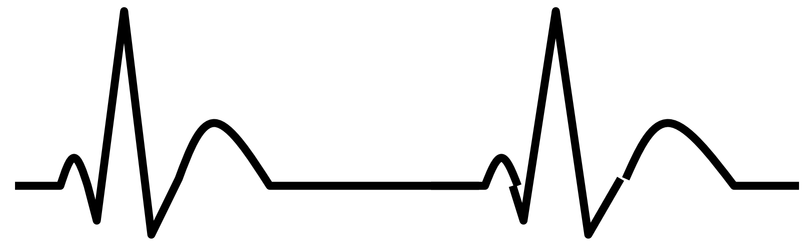
带通



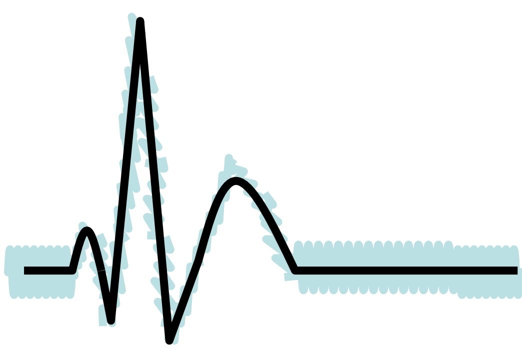
滤波器应用举例（之四）

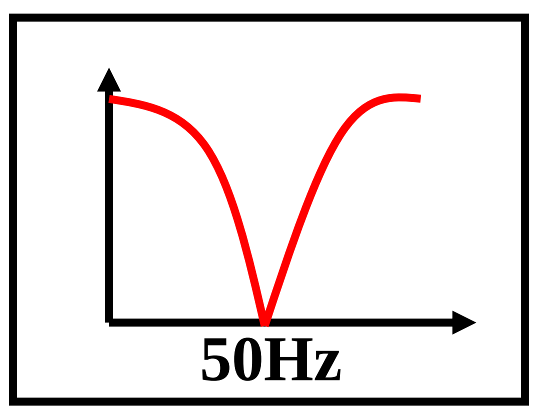
带阻

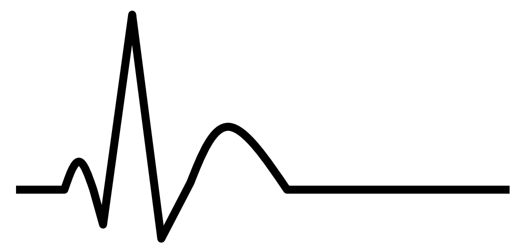




带阻滤波器



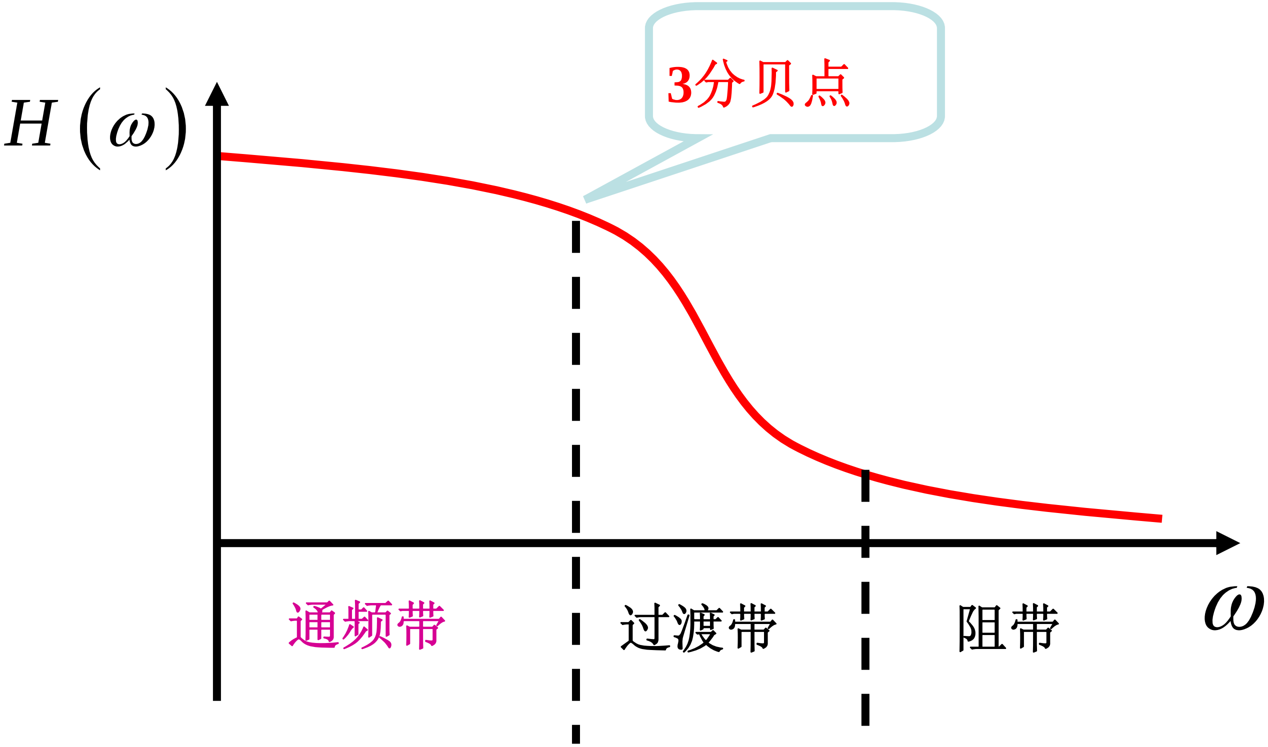




工频噪声被去除

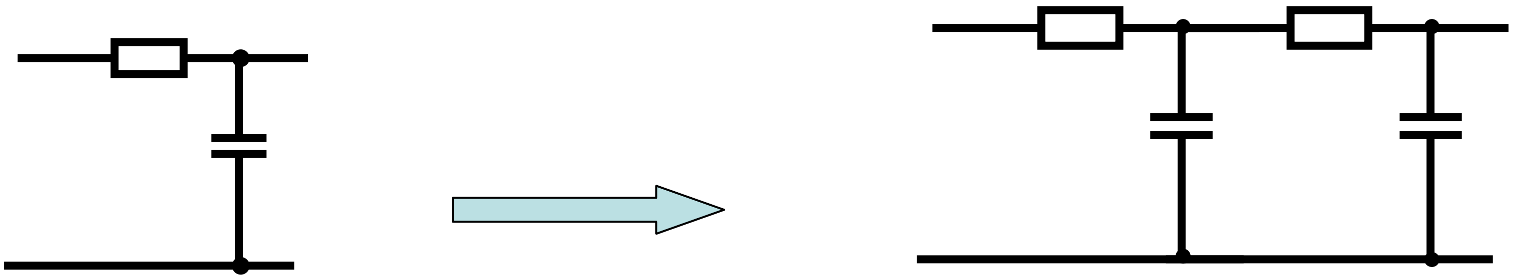
关于滤波器质量的评价

以低通滤波器为例:



希望：通频带内尽可能平坦， 过渡带尽可能窄。

改进方法举例：



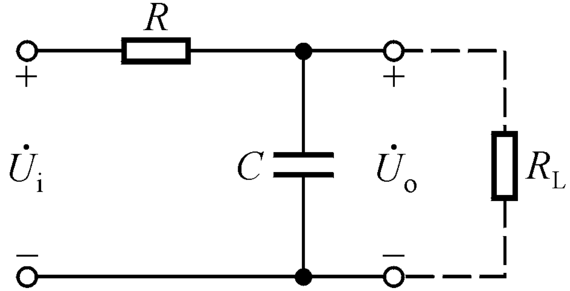
（一阶电路）

（二阶电路）

8.4 RC有源滤波器

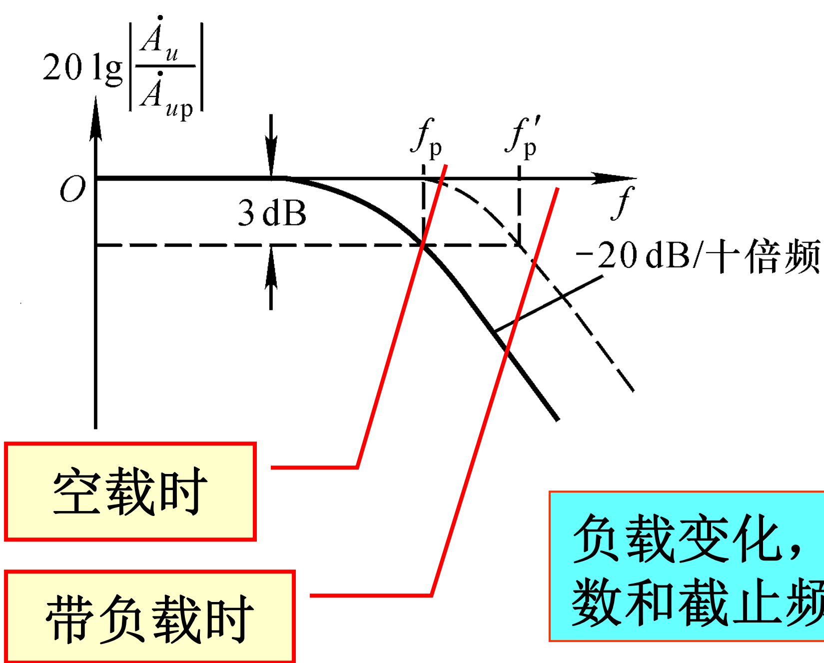
1. 无源滤波电路和有源滤波电路:

无源滤波电路



空载：$\dot{A}_{up}=1 \quad f_p=\dfrac{1}{2\pi RC}$

$$\dot{A}_u=\frac{1}{1+j\dfrac{f}{f_p}}$$



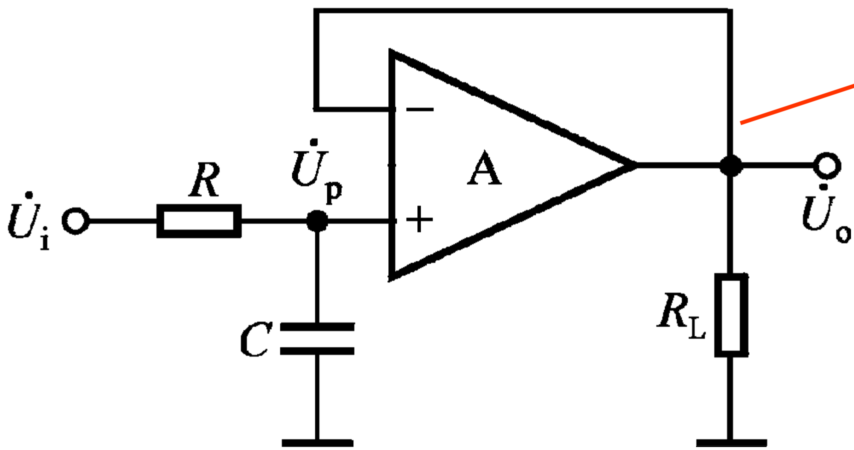
带载：$\dot{A}_{up}=\dfrac{R_L}{R+R_L}$

$$f_p=\frac{1}{2\pi\,(R/\!/R_L)C}$$

$$\dot{A}_u=\frac{\dot{A}_{up}}{1+j\dfrac{f}{f_p}}$$

负载变化，通带放大倍数和截止频率均变化。

有源滤波电路



用电压跟随器隔离滤波电路与负载电阻

无源滤波电路的滤波参数随负载变化；有源滤波电路的滤波参数不随负载变化，可放大。

无源滤波电路可用于高电压大电流，如直流电源中的滤波电路；有源滤波电路是信号处理电路，其输出电压和电流的大小受有源元件自身参数和供电电源的限制。