同济-高数-12.2-pp 271; ans-pp 353;

常数项级数

习　题　12－2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}+\cdots$；

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$；

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$　$(a>0)$.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

*3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a\ (n\to\infty)$，a_n,b,a 均为正数.

4. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+n\left(\frac{3}{4}\right)^n+\cdots$；

(2) $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots \ (a>0, b>0)$.

5. 判定下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots$;

(4) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

同济-高数-12.3-pp 281; ans-pp 353;

幂级数

习　题　12－3

1. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(2) $1-x+\dfrac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2}+\cdots$;

(3) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\dfrac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\dfrac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$;

(4) $\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$;

(5) $\dfrac{2}{2}x+\dfrac{2^2}{5}x^2+\dfrac{2^3}{10}x^3+\cdots+\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

2. 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

(3) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$.

同济-高数-12.4-pp 281; ans-pp 354;

泰勒级数

习 题 12－4

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$；　　(2) $\ln(a+x)\quad(a>0)$；

(3) a^{x}；　　(4) $\sin^{2} x$；

(5) $(1+x)\ln(1+x)$；　　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$.

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\sqrt{x^{3}}$；　　(2) $\lg x$.

4. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

同济-高数-12.5-pp 298; ans-pp 355;

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解：

(1) $y'-xy-x=1$；

(2) $y''+xy'+y=0$；

(3) $(1-x)y'=x^{2}-y$.

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初值条件的特解：

(1) $y'=y^{2}+x^{3}, y\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $(1-x)y'+y=1+x, y\big|_{x=0}=0$.

5. 验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^{3}}{3!}+\dfrac{x^{6}}{6!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^{x}$，并利用此结果求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

同济-高数-12.7-pp 320; ans-pp 356;

傅里叶级数

习　题　12－7

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：

(1) $f(x)=3x^2+1\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；　(2) $f(x)=e^{2x}\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(3) $f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\leqslant x<0, \\ ax, & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$ （a,b 为常数，且 $a>b>0$）.

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；　(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

3. 将函数 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi, \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

6. 将函数 $f(x)=2x^2\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

7. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π. 证明：

(1) 若 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0,a_{2k}=0,b_{2k}=0\quad(k=1,2,\cdots)$；

(2) 若 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0,b_{2k+1}=0\quad(k=0,1,2,\cdots)$.

同济-高数-12.8-pp 327; ans-pp 356;

傅里叶级数（extended）

习 题 12－8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）：

(1) $f(x)=1-x^2 \quad \left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right)$；

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2}\leqslant x<1; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x<3. \end{cases}$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l; \end{cases}$ (2) $f(x)=x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 2)$.

*3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在 $[-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)=e^{-x}$. 试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

书习题-12.2-P264-正项级数-ans-P377

习题 12.2

A 类

1. 用比较判别法或极限形式的比较判别法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3-n}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}(p>0)$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^n}{3^n}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt{4n^3+n+1}}$

2. 用比值判别法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot a^n(a>0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot\cdots\cdot(4n-3)}$.

3. 用根值判别法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\ln n)^n}(a>0)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4. 用适当的方法判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin \frac{1}{2^n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

书习题-12.3-P270-交错级数-ans-P378

习题 12.3

A 类

1. 判定下列交错级数的敛散性，如果收敛，说明是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(1+n)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} (p>0)$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$，

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n - \ln n}$； (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

2. 判定下列级数的敛散性，如果收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sin \frac{1}{n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{q^n}{n^2} (q>0)$.

B 类

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 也都绝对收敛.

2. 试研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1+a^n} (a>0)$ 的敛散性.

3. 判别级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n (\ln \ln n)^p} (p>0)$ 的敛散性，如果收敛，说明是绝对收敛还是条件收敛.

书习题-12.4-P277-可做习题-ans- P378

习题 12.4

A 类

1. 求下列函数项级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(1+n+x^2)}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2)\cdots(n+x^2)}$.

书习题-12.5-P288-幂级数-ans- P378

习题 12.5

A 类

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}x^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n}$；　(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$；　(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

2. 求下列幂级数的收敛域及其和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$；　(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

B 类

1. 利用幂级数求下列常数项级数之和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{2^n}$；　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

书习题-12.6-P303-泰勒级数-ans- P379

习题 12.6

A 类

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$；　　(2) $\ln(a+x)(a>0)$；

(3) a^{x}；　　(4) $\sin^{2}x$；

(5) $\dfrac{x}{x^{2}-x-2}$；　　(6) $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$；

(7) $e^{x^{2}}$；　　(8) $\cos^{2}x$.

2. 将下列函数展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\dfrac{1}{3-x}, x_0=1$；　　(2) $\ln x, x_0=2$；

(3) $\lg x, x_0=1$；　　(4) $\dfrac{1}{x^{2}+4x+3}, x_0=1$；

(5) $\cos x, x_0=-\dfrac{\pi}{3}$；　　(6) $e^{x}, x_0=2$；

(7) $\sin x, x=\dfrac{\pi}{4}$；　　(8) $\dfrac{1}{(1+x)^{2}}, x_0=1$.

2. 将函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

书习题-12.7-P324-傅里叶级数-ans-P381

习题 12.7

A 类

1. 下列函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$（或在 $[-\pi,\pi]$）上的表达式为：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}\ (-\pi\leqslant x<\pi)$；

(2) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

(3) $f(x)=x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

(4) $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

2. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）：

(1) $f(x)=x^2\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$；

(2) $f(x)=x^2-x(-2\leqslant x\leqslant 2)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1; & -3\leqslant x<0,\\ 1 , & 0\leqslant x<3;\end{cases}$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x(0\leqslant x<1)$.

3. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -3\leqslant x<0,\\ 0 & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

4. 将 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为正弦级数.

5. 将 $f(x)=2x+3(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为余弦级数.

6. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2}\\ l-x, & \dfrac{l}{2}<x\leqslant l\end{cases}$$

展开为正弦级数.