P303. 习题 12.6　(A) 1-6,1-7,1-8； 2-4,2-6；

P324. 习题 12.7　(A) 1-1,1-3；

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(6) $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;　(7) e^{x^2};　(8) $\cos^2 x$.

2. 将下列函数展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(4) $\dfrac{1}{x^2+4x+3}, x_0=1$; (6) $e^x, x_0=2$;

---

1. 下列函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$（或在 $[-\pi,\pi]$）上的表达式为：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}$ $(-\pi\leqslant x<\pi)$; (3) $f(x)=x^2$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

补 1、 验证 $S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$，并求解和函数 S

补 2、 用幂级数求解微分方程的解 $y''+xy'+y=0$

P303 习题 12.6

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：(6) $\arctan\frac{1+x}{1-x}$；(7) e^{x^2}；

A.1-6. 解. 记 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geq0}(-1)^n x^{2n}$$

$$\Rightarrow f(x)=f(0)+\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=-1$ 时，$\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，故 $x\in[-1,1)$ 时等式成立。

A.1-7. 解.

$$\text{由}\, e^u=\sum_{n\geq0}\frac{u^n}{n!}\quad\forall u\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{x^2}=\sum_{n\geq0}\frac{x^{2n}}{n!}\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

P303 习题 12.6

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：(8) $\cos^2 x$.

A.1-8. **解.** 由

$$\text{由} \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) \quad \cos u = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

P303 习题 12.6

2. 将下列函数展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：(4) $\frac{1}{x^2+4x+3}, x_0=1$；(6) $e^x, x_0=2$；

A.2-4. 解. 记 $t=(x-1)$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\Big) = \frac{1}{2}\frac{1}{t+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+4} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{t}{2}}-\frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{-t}{2}\Big)^n-\frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{-t}{4}\Big)^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2}\Big(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\Big)(x-1)^n
\end{aligned}
$$

$$\text{由}\left|\frac{x-1}{2}\right|<1 \Rightarrow x\in(-1,3)\text{时，等式成立}$$

A.2-6. 解.

$$e^x = e^2 e^{x-2} = e^2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(x-2)^n \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

P324 习题 12.7

1. 下列函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$（或在 $[-\pi,\pi]$）上的表达式为：(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\ (-\pi\leqslant x<\pi)$；

A.1-1. 解. 依题意知 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{3}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(n-\frac{1}{3})x - \cos(n+\frac{1}{3})x\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin(nx-\frac{x}{3})}{\frac{3n-1}{3}} - \frac{\sin(nx+\frac{x}{3})}{\frac{3n+1}{3}x}\right|_0^{\pi} = \frac{18\sqrt{3}n}{(9n^2-1)\pi}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim S(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{18\sqrt{3}(-1)^{n+1}n}{(9n^2-1)\pi}\sin nx = \begin{cases} 2\sin\frac{x}{3} & x\in(-\pi,\pi) \\ 0 & x=\pm\pi \end{cases}$$

1. 下列函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$（或在 $[-\pi,\pi]$）上的表达式为：

(3) $f(x)=x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

A.1-3. **解.** **依题意知，** $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$$

又 $(x^2\sin nx)'=2x\sin nx+nx^2\cos nx\quad(x\cos nx)'=\cos nx-nx\sin nx$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}+\frac{2x\cos nx}{n^2}-\frac{2\sin nx}{n^3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow f(x)\sim S(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n\geq 1}\frac{4}{n}(-1)^{n^2}\cos nx=x^2\quad x\in[-\pi,\pi]$$

P303 习题 12.6

补 1、验证 $S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$，并求解和函数 S

补 1. 解. 记 $a_n=\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x^3|}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\to 0\Rightarrow \text{级数收敛域为 } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow S'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}\quad S''(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$$

$$\Rightarrow S''(x)+S'(x)+S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}=e^x\quad S(0)=1,S'(0)=0$$

$$\lambda^2+\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow S(x)=\frac{1}{3}e^x+e^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow S(x)=\frac{1}{3}e^x+e^{-x/2}\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

补 2、用幂级数求解微分方程的解 $y'' + xy' + y = 0$

补 2. 解. 记方程的幂级数解为 $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

$$\Rightarrow S'(x) = \sum_{n\geq 1} a_n n x^{n-1} \Rightarrow xS'(x) = \sum_{n\geq 1} x^n n a_n$$

$$\Rightarrow S''(x) = \sum_{n\geq 2} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} x^n (n+1)(n+2)a_{n+2}$$

$$\Rightarrow 2a_2 + a_0 = 0, \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} + na_n + a_n = 0 \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!!}a_0 = \frac{(-1)^n}{2^n n!}a_0 \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}a_1$$

$$\Rightarrow S(x) = a_0 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

$$= a_0 e^{-x^2/2} + a_1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$