# 2016 级 场论与无穷级数 参考答案

一、判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+6}{n^2+1}$;

解：收敛。注意到这是交错级数，并注意到

$$f(x)=\frac{x+6}{x^2+1}$$

有

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2-12x}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2+12x-1}{(x^2+1)^2}<0,x\geq 1$$

故数列

$$u_n=\frac{n+6}{n^2+1}$$

单调递减，并

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{n^2+1}=0$$

故该级数收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

解：注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{2}{e}<1$$

故原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

解：注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=+\infty$$

故原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

解：该级数为正项级数，故

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}$$

故该级数收敛。

二、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$的收敛域与和函数。

解：注意到

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}=1$$

故收敛半径为 1，当$x=\pm 1$时，原级数显然发散，故收敛域为$(-1,1)$.记和函数为$S(x)$，又记

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

不难发现这两个级数在$(-1,1)$上都收敛。记

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

逐项求积分得

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

记$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，再逐项求积分得

$$\varphi(x)=\int_0^x h(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

故

$$h(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x)=[xh(x)]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$S_1(x)=xf(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

又

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

逐项求积分得

$$\int_0^x S_2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$$

故

$$S_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

综上

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1-x)^3}, x \in (-1,1)$$

三、将函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$$

展开为$x-1$的幂级数。

解：注意到

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)$$

令$t = x - 1$，则

$$f(x) = g(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+4}\right)$$

同时注意到

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n, -2 < t < 2$$

$$\frac{1}{t+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{4}\right)^n, -4 < t < 4$$

故

$$g(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)t^n$$

代回，得

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-1)^n$$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解

(1) $y' + 2xy = x$；

解：这是一阶线性微分方程，根据公式有

$$y=e^{-x^2}\left[\int e^{x^2}\cdot x dx+C\right]=\frac{1}{2}+Ce^{-x^2}$$

(2) $(1+x^2)y'=y^2$

解：这是可分离变量的微分方程，注意到有常数解$y\equiv 0$，变形为

$$\frac{1}{y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$$

两边积分得

$$-\frac{1}{y}=\arctan x+C$$

即

$$y=-\frac{1}{\arctan x+C}$$

(3) $y''+y=2x$；

解：这是常系数二阶线性微分方程，其特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

解得

$$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$$

故与之对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

注意到$f(x)=2x$，故特解必然满足形式

$$y^*=kx$$

显然，一个特解可写为

$$y^*=2x$$

综上，该方程的通解为

$$y=2x+C_1\cos x+C_2\sin x$$

(4) $(y-x)\frac{dy}{dx}=x+y$；

解：注意到$y=x$不是原方程的解，做变形

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{y-x}=\frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}$$

这是齐次方程，令$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，故原式化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{u-1}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u-u^2}{u-1}$$

注意到当$u\equiv 1\pm\sqrt{2}$时，方程总是成立，故

$$y=\left(1\pm\sqrt{2}\right)x$$

是原方程的解。除此之外，进一步令

$$\frac{1}{x}dx=\frac{u-1}{1+2u-u^2}du$$

两边同时积分得

$$\ln|x|=-\frac{1}{2}\ln|1+2u-u^2|+C$$

代回，得

$$\ln|x|=-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right|+C$$

整理，得

$$x^2+2xy-y^2=C_1$$

其中$C_1$为任意常数。

(5) $(1+x^2)y''=2xy',y(0)=1,y'(0)=3$；

解：这是可降阶的二阶微分方程，令$p=y',p'=y''$，原方程化为

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx}=2xp$$

注意到$p\equiv 0$不满足初值条件，故

$$\frac{1}{p}dp=\frac{2x}{1+x^2}dx$$

两边同时积分，得

$$\ln|p|=\ln(1+x^2)+C$$

即

$$p=y'=C_1(1+x^2)$$

将初值条件代入，解得

$$C_1=3$$

故

$$y'=3(1+x^2)$$

再次积分，得

$$y=3x+x^3+C_2$$

再将初值条件代入，得

$$C_2 = 1$$

故该方程的解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

五、计算下列广义积分

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$;

解：令$t = 1 + \sqrt{x}$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3} = \int_1^{+\infty} \frac{2(t-1)}{t^3} dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{-2}{t^3} dt = 2 - 1 = 1$$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

解：注意到$x = 1$是瑕点，而该积分显然收敛。故，令$t = \sqrt{1-x}$，则

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)t} dt = 2(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

六、将函数$f(x) = 2x^2\ (0 \le x \le \pi)$展开为正弦级数。

解：对原函数作奇延拓，得

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2, 0 \le x < \pi \\ -2x^2, -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

此时

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2\pi^2}{n} + \frac{4}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\}$$

故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2\pi^2}{n} + \frac{4}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx, 0 \le x < \pi$$

七、讨论广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}} dx$$

的敛散性。

解：注意到

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

当$\alpha > 1$时，$x = 0$为瑕点，故拆分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}} dx$$

对于第一个瑕积分，注意到

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

故该积分在$\alpha-1<1$时收敛。对于第二个无穷限积分，注意到当$\alpha\le 1$时

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}=+\infty$$

当$\alpha>1$时，取$p=\frac{1}{2}(1+\alpha)>1$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{p}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}}=0$$

故该无穷限积分在$\alpha>1$时收敛，在$\alpha\le 1$时发散。

当$\alpha\le 1$时，虽然$x=0$不再是瑕点，但由上述过程知无穷限积分发散。综上，该积分在$\alpha>1$时收敛，在$\alpha\le 1$时发散。

八、计算下列积分

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx\,,a>0$$

解：注意到

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}dx$$

设$u=\tan x$，则原积分化为

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2u^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}du$$
$$=-\frac{a^2}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(au)^2}du+\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}du$$

解得

$$I'(a)=\frac{\pi}{2(1+a)}$$

积分，得

$$I(a)=\int_0^a I'(t)dt=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)-I(0)$$

注意到

$$\lim_{a\to 0} I(a)=I(0)=0$$

解得$C=0$，故

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a).$$