关于积分中“不可积”问题探究

提到积分，首先要明确不定积分是用来求原函数，定积分是用来求无穷项加和，莱布尼兹公式把它们神奇的联系起来。

从高等数学里面，我们学习到被积函数只要连续，其必定存在原函数。但是为什么会出现“不可积”的问题呢？

首先我们来看几个“不可积”积分的例子。

1.三角积分类.$\int \frac{\sin x}{x^n}dx, \int \frac{\cos x}{x^n}dx, \int \frac{\tan x}{x^n}dx, \int x^n \tan x dx$

$$\int (\frac{x}{\sin x})^n dx, \int (\frac{x}{\cos x})^n dx, \int (\frac{x}{\tan x})^n dx,$$

$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \tan x^2 dx$(菲涅尔积分类型）

$\int \cos(x \sin x)dx$(贝塞尔积分）, $\int \frac{\cos \beta x}{1+x^2}dx$(拉普拉斯积分）

2. 高斯积分类.$\int e^{ax^2+bx+c}dx, \int x^n e^{ax^2+bx+c}dx$

3.指数积分类型.$\int \frac{e^{ax}}{x}dx, \int \frac{e^{ax}}{a+x^n}dx, \int \frac{x^n}{1 \pm e^x}dx$.其中$\mathrm{E_i}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}dt$

4.对数积分类型.$\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\ln x dx}{1+x^n}, \int \ln \sin x dx, \int \ln \cos x dx, \int \ln \tan x dx$.其中$\mathrm{L_i}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$

$$\int \ln(a+b\sin x)dx, \int \ln(a+b\cos x)dx, \int \ln(a+b\tan x)dx$$

$$\int \ln\ln \sin x dx, \int \ln\ln \cos x dx, \int \ln\ln \tan x dx,$$

5.椭圆积分类:$\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx, \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx, \int \frac{1}{\sqrt{1 \pm x^n}}dx, \int \sqrt{1 \pm x^n}dx (n \geq 3)$

它们”不可积”主要是因为它们的原函数不能表示成初等函数的形式，现阶段只能表示成级数的形式。现在就出现一个问题，到底它们能不能积分呢？答案是确定的，由于一些特殊函数以及复数的出现，使得基本所有的积分都成为了可能。下面列举了几个“不可积”积分的积分算法。

第一个例子是一个指数积分

$$\int \frac{x}{e^x+1}dx \xrightarrow{t=e^x} \int \frac{\ln t dt}{t(t+1)} = \int \frac{\ln t}{t}dt - \int \frac{\ln t}{t+1}dx = \frac{1}{2}\ln^2 t - \int \ln t d\ln(t+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t \ln(t+1) + \int \frac{\ln(1+t)}{t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t \ln(t+1) + \int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}t^{k-1}}{k}dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t \ln(t+1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 t - \ln t \ln(t+1) - Li_2(-t)$$

$$= \frac{x^2}{2} - x\ln(1+e^x) - Li_2(-e^x) + C$$

第二个例子是一个欧拉积分

$$\int \ln\sin x dx = x\ln\sin x - \int x\frac{\cos x}{\sin x}dx = x\ln\sin x - \int x\frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}dx$$

$$= x\ln\sin x - \int ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}dx$$

$$\int ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}dx = i\int x(1+\frac{2e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}})dx = \frac{i}{2}x^2 + 2i\int\frac{x}{e^{2ix}-1}dx$$

$$= \frac{i}{2}x^2 - \frac{i}{2}[Li_2(e^{2ix}) + 2x^2 + 2ix\ln(1-e^{2ix})]$$

$$= -\frac{i}{2}Li_2(e^{2ix}) - \frac{i}{2}x^2 + x\ln(1-e^{2ix})$$

$$\int \ln\sin x dx = x\ln\sin x - \int x\cot x dx = x\ln\sin x + \frac{i}{2}[Li_2(e^{2ix}) + x^2] - x\ln(1-e^{2ix}) + C$$

特别的, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

第三个例子狄拉克雷积分

$$\int(\frac{\sin x}{x})^2 dx = -\int\sin^2 x d(\frac{1}{x}) = -\frac{\sin^2 x}{x} + \int\frac{2\sin x\cos x}{x}dx$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x} + \int\frac{\sin 2x}{2x}d2x = -\frac{\sin^2 x}{x} + Si(2x) + C$$

其中 $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

特别的 $Si(+\infty) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}, \int_0^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^2 dx = \frac{\pi}{2}$

第四个例子是高斯积分

$$\int e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int e^{-(\sqrt{a}x)^2}d(\sqrt{a}x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}erf(\sqrt{a}x)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}erf(\sqrt{a}x) + C$$

其中 $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx, erfc(x) = 1 - erf(x)$

特别的当 $a = 1, \int_0^{\infty}e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}erf(\infty) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

从上面例子看出，虽然这些积分“不可积”，但我们依旧可以通过一般的方法将它们表示出来，显然这样也就出现了许多特殊函数。

从这个角度来看，基本所有的连续函数都是可积的，都可以通过初等或者特殊函数来表示。

说了这么多特殊函数，下面来介绍几个简单的特殊函数。

几个简单的特殊函数

1.Beta函数 $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$,(其中a, b都 > 0)

2.Gamma函数 $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{a-1}dt$,(其中$a>0$)

3.误差函数 $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$

4.zeta函数 $\varsigma(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$

5.狄拉克雷eta函数 $\eta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^s}=(1-2^{1-s})\varsigma(s)$

6.多重对数函数(Polylog) $\mathrm{Li}_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^n}$

其他还有一些像椭圆函数，超几何分布函数，贝塞尔函数这里不做介绍了。

最后留几个问题

1.$\int_0^1 \ln\ln\frac{1}{x}dx$

2.$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln\tan x dx$

3.$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx$

4.$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\sin x})^2 dx$

5.$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\cos x\ln\sin x\ln\cos x dx$

问题的解答：

$$1.\int_0^1 \ln\ln\frac{1}{x}dx \xrightarrow{t=\ln\frac{1}{x}} \int_0^{\infty}\ln t * e^{-t}dt=\Gamma'(1)=-C$$

$$2.\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln\tan xdx \xrightarrow{t=\ln\tan x} \int_0^{\infty}\frac{\ln t * e^{2t}}{e^{2t}+1}dt=\int_0^{\infty}\frac{\ln t}{e^{t}+e^{-t}}dt$$

$$Let\ \ I=\int_0^{\infty}\frac{x^a}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^a * e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}(-1)^k e^{-(2k+1)x}x^a dx$$

$$\xrightarrow{t=(2k+1)x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-t}t^{a+1-1}}{(2k+1)^{a+1}}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(a+1)}{(2k+1)^{a+1}}$$

$$I'=\int_0^{\infty}\frac{x^a\ln x}{e^x+e^{-x}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}[\Gamma'(a+1)*\frac{1}{(2k+1)^{a+1}}-\frac{\Gamma(a+1)\ln(2k+1)}{(2k+1)^{a+1}}]$$

$$I'(0)=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{e^x+e^{-x}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}[\Gamma'(1)*\frac{1}{2k+1}-\frac{\Gamma(1)\ln(2k+1)}{2k+1}]$$

其中 $\sum_{k=0}^{\infty}[\Gamma'(1)*\frac{1}{2k+1}]=-\frac{\pi}{4}C,\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k\frac{\Gamma(1)\ln(2k+1)}{2k+1}]=\frac{\pi}{4}\ln(\frac{\pi}{\Gamma^4(\frac{3}{4})})-\frac{\pi}{4}C$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln\tan xdx=\frac{\pi}{4}\ln(\frac{\Gamma^4(\frac{3}{4})}{\pi})$$

$$3.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx$$

我们知道卡特兰常数G有一个定义

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx \quad (a)$$

令$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx \xrightarrow{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin tdt$

$$=2[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx+\frac{\pi}{4}\ln 2]$$

$$=2(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx)+\frac{\pi}{2}\ln 2=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

得到$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ (b)

结合a，b得到$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx=-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\ln 2+C)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx=\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2}\ln 2+C)$$

$$4.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2 d\cot x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}d\sin x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$$

$$=\pi\ln 2$$

$$5.\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x\ln\cos x\sin x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\ln\sin x\ln\cos x\sin x\cos xdx$$

得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x\ln\cos x\sin x\cos xdx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ln\cos x\sin x\cos xdx$

令a= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ln\cos x\sin x\cos xdx$

我们知道：B(a, b)=2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2a-1}(\cos x)^{2a-1}dx$

则有 $\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial a\partial b}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2a-1}(\cos x)^{2a-1}\ln\sin x\ln\cos xdx$

$$=\mathrm{B}(a,b)\{[(\psi(a)-\psi(a+b))((\psi(b)-\psi(a+b))]-\psi_1(a+b)\}$$

带入a=1，b=1得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x\ln\cos x\sin x\cos xdx=\frac{\pi}{4}*\frac{1}{8}\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial a\partial b}(1,1)$

$$=\frac{\pi}{32}[(\psi(1)-\psi(2))^2-\psi_1(2)]=\frac{\pi}{16}-\frac{\pi^3}{192}$$

其中 $\psi(s+1)-\psi(s)=\frac{1}{s},\psi_1(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\varsigma(2)-1=\frac{\pi^2}{6}-1$

Written by Rolle

2014.12.8