hwk06

P160. 习题 9.2 (A) 4, 6, 11, 17; (B) 2; 4;
P175. 习题 9.3 (A) 1, 2, 3

4. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 及三坐标平面所围区域.

6. 求积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是锥面 $z^2=\dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=h(h>0)$ 所围的立体区域.

11. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$ 和平面 $y=1$ 所围成的区域.

17. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 2az(a>0)$.

2. 曲面 $x^2+y^2+z=4$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4z$ 分成两部分，求这两部分的体积之比.

4. 设函数 $f(x)\in C[0,1]$，试证

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3.$$

1. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在柱面 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$ 内那部分的面积.

2. 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 含在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 内那部分的面积.

3. 设 Σ 是马鞍面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=R^2(x>0,y>0)$ 割下的部分，求曲面 Σ 的面积.

4. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 及三坐标平面所围区域.

A.4. 解. 依题意

$$\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-x-y$$

$$\Rightarrow \text{原式} = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz(x+y+z)$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{(x+y+z)^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+y)^2\Big)$$

$$= \int_0^1 dx\Big(\frac{y}{2}-\frac{1}{6}(x+y)^3\Big)\Big|_0^{1-x} = \int_0^1\Big(\frac{1-x}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}x^3\Big)dx$$

$$= -\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = \frac{6-4+1}{24} = \frac{1}{8}$$

P160 习题 9.2

6. 求积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是锥面 $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=h(h>0)$ 所围的立体区域.

A.6. 解. 依题意

$$\Omega: x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \text{极坐标假设下} r\le R, 0\le z\le \frac{h}{R}r$$

$$\text{原式}=\int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{hr}{R}} dzzr$$

$$=2\pi\int_0^R dr\frac{z^2 r}{2}\Big|_0^{\frac{h}{R}r}=\frac{h^2\pi}{R^2}\int_0^R r^3$$

$$=\frac{h^2\pi}{R^2}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^R=\frac{1}{4}\pi h^2R^2$$

P160 习题 9.2

11. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$ 和平面 $y=1$ 所围成的区域.

A.11. **解**. **依题意**

$$\Omega: -1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le z\le \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1$$

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}dy\,y\sqrt{1-x^2}$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\frac{y^2}{2}\sqrt{1-x^2}\Big|_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\frac{x^2+z^2}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2z}{2}+\frac{z^3}{6}\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\left(x^2(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{3}\right)=\ldots=\frac{28}{45}$$

17. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 2az(a>0)$.

A.17. 解. 依题意取球面坐标

$$\Omega: r^2 \leq 2ar\cos\varphi \Rightarrow r \leq 2a\cos\varphi, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\, dxdydz = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2a\cos\varphi} dr r^2(r^2\sin\varphi) = 2\pi \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{r^5\sin\varphi}{5}\Big|_0^{2a\cos\varphi}$$

$$= \frac{64\pi a^5}{5}\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{64\pi a^5}{5}\left(\frac{-\cos^6\varphi}{6}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{32\pi a^5}{15}$$

P160 习题 9.2

2. 曲面 $x^2+y^2+z=4$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4z$ 分成两部分，求这两部分的体积之比.

B.2. **解. 依题意**

$$\begin{cases} x^2+y^2+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=4z \end{cases} \Rightarrow z^2+4+5z=0 \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \begin{cases} z=4 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$\Omega: x^2+y^2\le 3, 2-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 4-x^2-y^2$$

$$V_1=\int_0^{\sqrt{3}} dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{4-r^2} dzr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}} dr\Big(r(2-r^2)+r\sqrt{4-r^2}\Big)$$

$$=2\pi\Big(\frac{(r^2-2)^2}{-4}+\frac{(4-r^2)^{3/2}}{-3}\Big)\Big|_0^{\sqrt{3}}=2\pi\Big(\frac{3}{4}+\frac{7}{3}\Big)=\frac{37\pi}{6}$$

$$\Rightarrow V_2=\frac{4}{3}\pi 2^3-\frac{37\pi}{6}=\frac{27}{6}\pi \quad \Rightarrow V_1:V_2=37:27$$

P160 习题 9.2

4. 设函数 $f(x)\in C[0,1]$，试证

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3.$$

B.4. **解**. **依题意取**

$$\Omega_1: 1\ge x\ge y\ge z\ge 0;\quad \Omega_2: 1\ge x\ge z\ge y\ge 0;\quad \Omega_3: 1\ge y\ge z\ge x\ge 0;$$
$$\Omega_4: 1\ge y\ge x\ge z\ge 0;\quad \Omega_5: 1\ge z\ge x\ge y\ge 0;\quad \Omega_6: 1\ge z\ge y\ge x\ge 0$$

$$\text{记}\quad I_k:=\iiint_{\Omega_k} f(x)f(y)f(z)\,dxdydz\quad \Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$\text{则} I_1=I_2=\cdots=I_6$$

$$\Rightarrow I_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} I_k=\frac{1}{6}\iiint_{\Omega} f(x)f(y)f(z)\,dxdydz=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3$$

P175 习题 9.3

1. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在柱面 $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ 内那部分的面积.

A.1. 解. 依题意，取 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则

$$z_x=\frac{-x}{z}, z_y=\frac{-y}{z}, \Rightarrow ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$D: x^2+y^2\le ax \quad \text{极坐标下} r\le a\cos\theta, \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

$$S=2S_1=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}dr\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$=2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\Big(-(a^2-r^2)^{1/2}\Big)\Big|_0^{a\cos\theta}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2a^2(1-|\sin\theta|)\,d\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\,d\theta=4a^2(\theta+\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}=2a^2(\pi-2)$$

P175 习题 9.3

2. 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 含在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 内那部分的面积.

A.2. 解. 依题意投影 XOZ 平面，取 $y=\sqrt{ax-x^2}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=ax \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+z^2=a^2 \\ a>x>0 \end{cases}$$

$$D: 0<x<a, ax+z^2\le a^2 \quad y_x=\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}, y_z=0$$

$$\Rightarrow ds=\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\,dxdz$$

$$S=2S_1(XOY\text{ 平面对称})=2\int_0^a dx\int_{-\sqrt{a^2-ax}}^{\sqrt{a^2-ax}} dz\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

$$=2a\int_0^a dx\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=2a^{3/2}\left(2x^{1/2}\right)\Big|_0^a=4a^2$$

P175 习题 9.3

3. 设 Σ 是马鞍面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2 (x > 0, y > 0)$ 割下的部分，求曲面 Σ 的面积.

A.3. 解. 依题意 $z = xy$

$$z_x = y, z_y = x \Rightarrow ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

$$D : x^2 + y^2 \le R^2, x > 0, y > 0; \Rightarrow r \le R, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R dr\left(r\sqrt{1 + r^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + r^2\right)^{3/2} \frac{1}{3}\Big|_0^R = \frac{\pi}{6}\left((1 + R^2)^{3/2} - 1\right)$$