2015 级场论与无穷级数试卷 参考答案

一、判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+2}$;

解：发散。注意到

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n-1}{n^2+2}=1$$

故该级数发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

解：收敛。注意到

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1$$

故该级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n, a>0$;

解：当$a=1$时，该级数转化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$$

故该级数发散。当$a>1$时，注意到

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1}\right)^n}=a>1$$

故该级数发散。类似的，当$a<1$时，该级数收敛。综上，该级数在$a\geq 1$时发散，在$a<1$时收敛。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n+1}$;

解：收敛。这是交错级数，注意到函数

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$$

其导函数

$$f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}-\ln x\right)}{(x+1)^2}$$

当$x > e^2$时，有$f'(x) < 0$，故当$n > 9 > e^2$时，该级数满足

$$\frac{\ln n}{n+1} > \frac{\ln(n+1)}{n+2}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n+1} = 0$$

根据莱布尼茨定理得该级数收敛。

二、求幂级数$\Sigma_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域，并求和函数。

解：注意到

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1$$

故$R = \frac{1}{\rho} = 1$，收敛半径为1，当$x = \pm1$时，原级数显然发散（一般项极限不为零），故收敛域为$(-1,1)$。记和函数为$S(x)$，注意到

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

若设$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$，则逐项求积分

$$\int_0^x S'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

故

$$S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

即

$$S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

又

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

综上

$$S(x) = 2S_1(x) + S_2(x) = \frac{x+1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1)$$

三、求函数$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$在$x = -4$处的泰勒展开。

解：注意到

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

不妨设$t=x+4$，则

$$f(x)=g(t)=\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}$$

又注意到

$$\frac{1}{t-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n,-3<t<3$$

$$\frac{1}{t-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n,-2<t<2$$

综上

$$g(t)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)t^n,-2<t<2$$

代回，得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,-6<x<-2$$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解。

(1) $y''+4y'+3y=0$；

解：此为常系数二阶微分方程，特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+3=0$$

解得

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$$

故通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$$

(2) $y'+2y=2x+1$；

解：此为一阶线性微分方程，根据公式有

$$y=e^{-2x}\left[\int e^{2x}(2x+1)dx+C\right]=x+Ce^{-2x}$$

(3) $y''+6y'+5y=e^{2x}$；

解：此为常系数二阶微分方程，特征方程为

$$\lambda^2+6\lambda+5=0$$

解得

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$$

故对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$$

注意到$f(x) = e^{2x}$，故特解的形式满足

$$y^* = ke^{2x}$$

解得

$$k = \frac{1}{21}$$

故特解为

$$y^* = \frac{1}{21}e^{2x}$$

综上，通解为

$$y = \frac{1}{21}e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^4}$

解：视x为y的函数，则

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y^3$$

此为一阶线性微分方程，根据公式有

$$x = y\left[\int \frac{1}{y} \cdot y^3 dy + C\right] = \frac{y^4}{3} + Cy$$

(5) $y^2 dx + (x+1)dy = 0, y(0) = 1$；

解：此为可分离变量的微分方程，转化为

$$\frac{1}{x+1}dx = -\frac{1}{y^2}dy$$

根据初值条件，y不恒为零，两边同时积分，得

$$\ln|x+1| = \frac{1}{y} + C$$

注意到$y(0) = 1$，解得$C = -1$，故

$$|x+1| = e^{\frac{1}{y}-1}$$

五、计算下列广义积分。

(1) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

解：注意到$x = 1$是瑕点，而该积分显然收敛，故

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx^2$$

令$u = x^2, t = \sqrt{1-u}$，则

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}}du = \int_0^1 (1-t^2)dt = \frac{2}{3}$$

故

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{3}$$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)}$;

解：注意到$x = 0$是瑕点，而该积分显然收敛，故令$u = x^{\frac{1}{3}}$，则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)} = \int_0^1 \frac{3u^2}{u(1+u^2)}du = \frac{3}{2}\ln 2$$

六、将函数$f(x) = x + 1 (0 \le x \le \pi)$展开为正弦级数。

解：对该函数作奇延拓，得

$$F(x) = \begin{cases} x+1, x \in (0,\pi) \\ 0, x = 0 \\ x-1, x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

此时

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\sin nx\, dx = \frac{2}{n\pi}[1 + (-1)^{n+1}\cdot(\pi+1)], n = 1,2,\cdots$$

故

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1 + (-1)^{n+1}\cdot(\pi+1)]\sin nx, x \in (0,\pi)$$

七、讨论积分

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^\alpha}dx$$

的敛散性。

解：注意到$\alpha > 0$ 时$x = 0$为瑕点，故拆分为

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^\alpha}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^\alpha}dx$$

注意到

$$F_1(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^\alpha}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}dx$$

而当$x \to 0^+$时

$$\frac{1}{x^{\alpha}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \sim \frac{1}{x^{\alpha}}$$

故当$\alpha \geq 1$时，该积分发散，$\alpha < 1$时，该积分收敛；又注意到

$$F_2(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} dx$$

当$x \to +\infty$时，有

$$\frac{1}{x^{\alpha}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \sim \frac{1}{2x^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

则$\alpha + \frac{1}{2} > 1$，即$\alpha > \frac{1}{2}$时，该积分收敛；$\alpha + \frac{1}{2} \leq 1$，即$\alpha \leq \frac{1}{2}$时，该积分发散。

当$\alpha \leq 0$时，尽管$x = 0$不是瑕点，然而注意到

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^{\alpha}} = \frac{1}{2}$$

而$\alpha + \frac{1}{2} < 1$，故积分始终发散。

综上所述，当$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$时该积分收敛，其余情况下该积分发散。

八、计算积分

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx\,, |a| > 1$$

解：注意到

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a - \sin x} dx$$

令$u = \tan\frac{x}{2}$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin x} dx = \int_0^1 \frac{2}{1+u^2} \cdot \frac{1}{a + \frac{2u}{1+u^2}} du = \int_0^1 \frac{2}{a(1+u^2) + 2u} du$$

解得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin x} dx = \frac{2\arctan\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2\arctan\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}}$$

类似的，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a - \sin x} dx = \frac{2\arctan\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2\arctan\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}}$$

故

$$I'(a)=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\arctan\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}+\arctan\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}\right)$$

注意到

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}=1$$

故

$$\arctan\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}+\arctan\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{\pi}{2}$$

即

$$I'(a)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

积分，得

$$I(a)=\int I'(a)da=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+C$$