8.3 二阶常系数线性微分方程与Euler方程

教学要求

(1) 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法;

(2) 会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程;

(3) 会求自由项为$e^{\lambda x}P_m(x)$和

$$e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解;

(4) 会解Euler方程.

一. 二阶常系数齐次线性微分方程

二. n阶常系数齐次线性微分方程

三. 二阶常系数非齐次线性微分方程

四. Euler方程

一、二阶常系数齐次线性微分方程

1. 关于$y''+py'+qy=0$的通解讨论

设 $y=e^{rx}$是$y''+py'+qy=0$的解，r待定.

则$y'=re^{rx}, y''=r^2e^{rx}$.

将其代入原方程，得 $(r^2+pr+q)e^{rx}=0$

$r^2+pr+q=0$ 特征方程

$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

有两个不相等的实根$(\Delta > 0)$

特征根为$r_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $r_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

两个线性无关的特解

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x},$$

得齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

有两个相等的实根 $(\Delta = 0)$

特征根为 $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$，一特解为 $y_1 = e^{r_1 x}$，

设另一特解为 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$，

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入原方程并化简，

$$u'' + \underline{(2r_1 + p)}u' + \underline{(r_1^2 + pr_1 + q)}u = 0,$$

知 $u'' = 0$，　取 $u(x) = x$，　则 $y_2 = xe^{r_1 x}$，

得齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$；

有一对共轭复根 $(\Delta < 0)$

特征根为 $r_1 = \alpha + i\beta,\quad r_2 = \alpha - i\beta,$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x},$$

重新组合 $\bar{y}_1 = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

得齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

例1 求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$,

解得 $r_1 = r_2 = -2$,

故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

2. 求解$y''+py'+qy=0$的步骤

(1) 写出特征方程 $r^2+pr+q=0$

(2) 求出特征方程的根 r_1, r_2

(3) 由 r_1, r_2 的情况写出通解：

两不等实根($r_1 \neq r_2$)时，$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

两相等实根($r_1=r_2=r$)时，$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

一对共轭复根($r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$)时，

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

例2 求方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$,

解得 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$,

故所求通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

例 1. 求解下列微分方程 (1) $y''+2y'-3y=0$, (2) $y''-2y'+y=0$, (3) $y''+4y'+5y=0$, (4) $y''-4y'=0$, (5) $y''+y=0$.

解. (1)特征方程为 $r^2+2r-3=0$,

解得 $r_1=1, r_2=-3$

故所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$.

(2)特征方程为 $r^2-2r+1=0$,

解得 $r_1=r_2=1$

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$.

例3.求方程 $y'' + y = 0$的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$,

解得 $r_{1,2} = \pm i$,

故所求通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

例4 求方程 $y''-4y'=0$,满足$y(0)=1, y''(0)=0$的特解.

解 **特征方程** $r^2-4r=0,$

特征根 $r_1=0,\ r_2=4,$

对应齐次方程通解 $y=c_1+c_2e^{4x},$

由初始条件$y(0)=1, y''(0)=0$,得

$$\begin{cases} y(0)=c_1+c_2=1 \\ y''(0)=c_1+9c_2=0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{9}{8} \\ c_2=-\dfrac{1}{8} \end{cases},$$

故所求特解为: $y=\dfrac{9}{8}-\dfrac{1}{8}e^{4x}$

n 阶常系数齐线性微分方程的特征方程为

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

特征根	通解中的对应项
单实根 λ	1 项 $Ce^{\lambda x}$
k 实重根 λ	k 项 $e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	2 项 $e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
一对共轭 k 重复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$2k$ 项 $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1})\sin\beta x]$

例5.求下列方程的通解.

$$(1)y^{(4)}-2y'''+y''=0$$

$$(2)y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$$

解:(1)特征方程为$r^4-2r^3+r^2=0,$

$$\Rightarrow \text{得} r^2(r^2-2r+1)=0$$

$$\Rightarrow r_{1,2}=0, r_{3,4}=1$$

$\therefore$ 原方程的通解为$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$

(2)特征方程为$r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,$

$$\Rightarrow (r+1)(r^4+2r^2+1)=0$$

$$\Rightarrow (r+1)(r^2+1)^2=0$$

$$\Rightarrow r_1 = -1, r_{2,3} = -i, r_{3,4} = i$$

$\therefore$ 原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$$

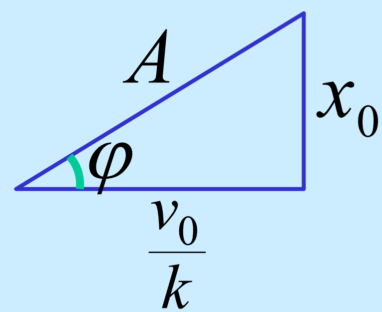
1) 无阻尼自由振动情况（$n=0$）

方程: $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2}+k^2 x=0$$

特征方程: $r^2+k^2=0$, 特征根: $r_{1,2}=\pm \mathrm{i}\, k$

方程通解: $$x=C_1\cos k t+C_2\sin k t$$

利用初始条件得: $C_1=x_0,\quad C_2=\dfrac{v_0}{k}$



故所求特解:

$$x=x_0\cos k t+\frac{v_0}{k}\sin k t$$

$$=A\sin(k t+\varphi)\qquad \left(A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}},\ \tan\varphi=\frac{k x_0}{v_0}\right)$$

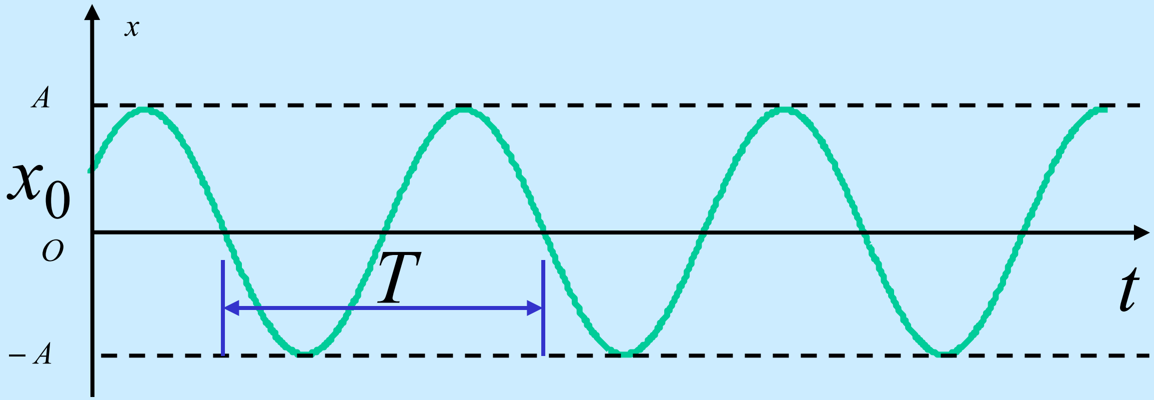
解的特征:

$x = A\sin(kt+\varphi)$　　简谐振动

A: 振幅, φ: 初相, 周期: $T=\dfrac{2\pi}{k}$

$k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$: **固有频率 (仅由系统特性确定)**

(下图中假设 $x\big|_{t=0}=x_0>0,\quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0>0$)



2) 有阻尼自由振动情况

方程: $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2 x=0$$

特征方程: $r^2+2nr+k^2=0$

特征根: $r_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$

这时需分如下三种情况进行讨论:

小阻尼: $\boldsymbol{n<k}$ $\longrightarrow$ $x=\mathrm{e}^{-nt}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)$

$(\omega=\sqrt{k^2-n^2})$ 解的特征

大阻尼: $\boldsymbol{n>k}$ $\longrightarrow$ $x=C_1\mathrm{e}^{r_1 t}+C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$ 解的特征

临界阻尼: $\boldsymbol{n=k}$ $\longrightarrow$ $x=(C_1+C_2 t)\mathrm{e}^{-nt}$ 解的特征

小阻尼自由振动解的特征：

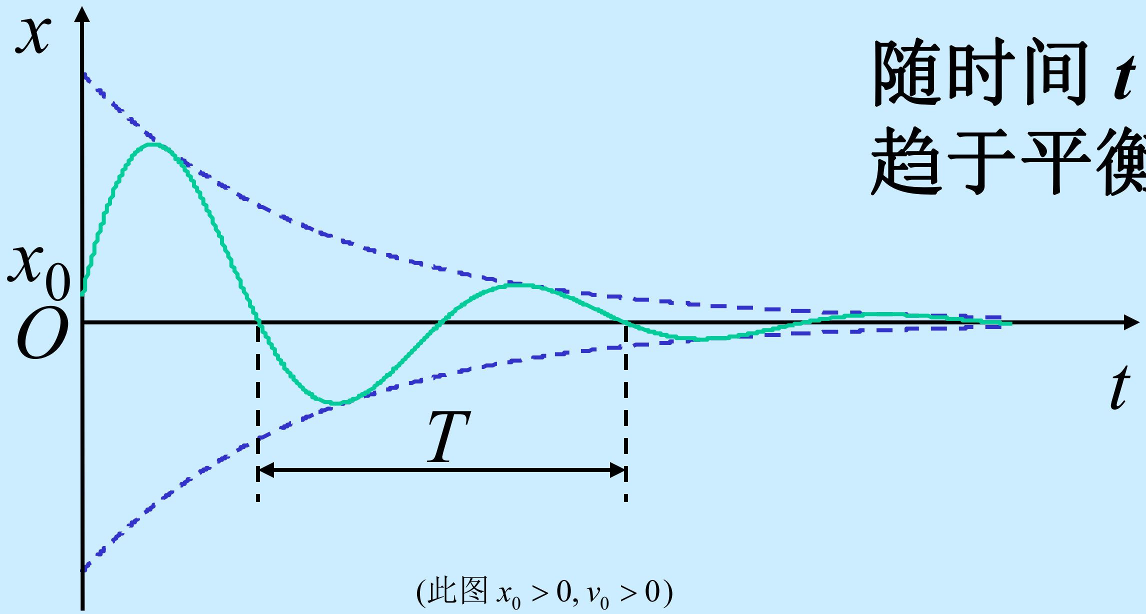
$$x = \mathrm{e}^{-nt}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) \qquad (\omega = \sqrt{k^2 - n^2})$$

由初始条件确定任意常数后变形

$$x = A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega t + \varphi)$$

运动周期: $T = \dfrac{2\pi}{\omega};$

振幅: $A\mathrm{e}^{-nt}$ 衰减很快，随时间 t 的增大物体趋于平衡位置.



(此图 $x_0 > 0, v_0 > 0$)

大阻尼解的特征：($\boldsymbol{n > k}$)

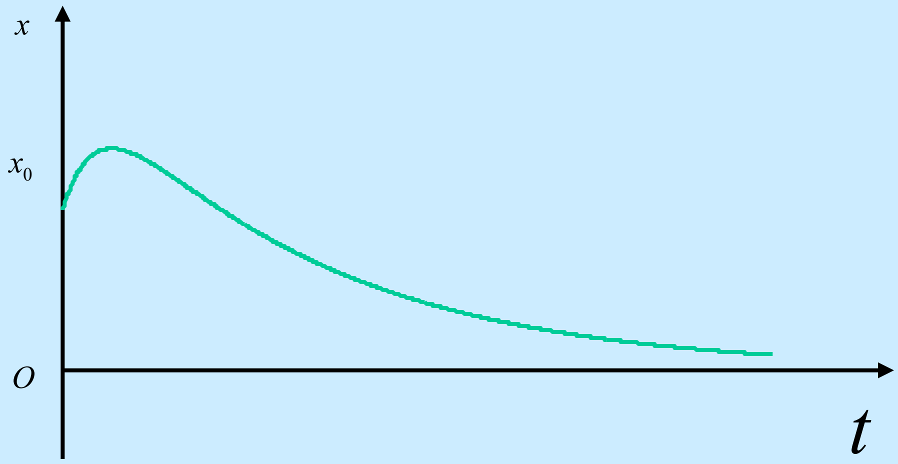
$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

其中 $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -\left(n \mp \sqrt{n^2 - k^2}\right) < 0$

1) 无振荡现象;

2) 对任何初始条件 $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0.$

即随时间 $\boldsymbol{t}$ 的增大物体总趋于平衡位置.



此图参数:

$n = 1.5, \quad k = 1$

$x_0 = 1.5$

$v_0 = 5.073$

临界阻尼解的特征：($\boldsymbol{n = k}$)

$$x = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-nt}$$

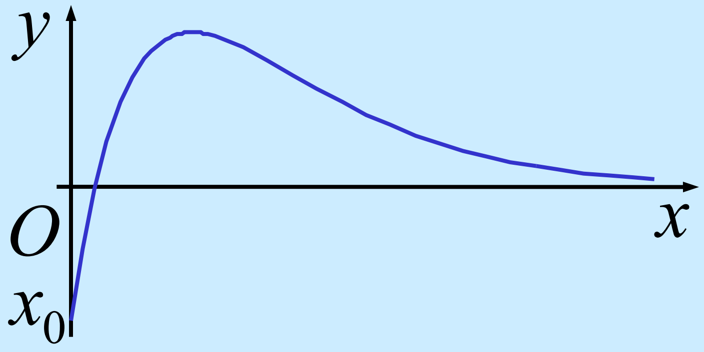
任意常数由初始条件定, 无论 C_1, C_2 取何值都有 :

1) $x(t)$ 最多只与 $\boldsymbol{t}$ 轴交于一点;

2) 无振荡现象 ;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-nt} = 0 .$

即随时间 $\boldsymbol{t}$ 的增大物体总趋于平衡位置.



此图参数: $n = 2$

$x_0 = -0.1$

$v_0 = 1$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

1. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$

其中λ为常数,$P_m(x)$是关于x的m次多项式.

关于 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$的特解讨论

设非齐次方程的特解为$y^* = Q(x)e^{\lambda x}$，代入原方程

$$Q''(x) + \underline{(2\lambda + p)}Q'(x) + \underline{(\lambda^2 + p\lambda + q)}Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根，$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$,

可设 $Q(x) = Q_m(x)$,

$y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$;

(2) 若λ是特征方程的单根，

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\ \ 2\lambda + p \neq 0,$$

可设 $Q(x) = xQ_m(x)$,

$$y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x};$$

(3) 若λ是特征方程的重根，

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\ \ 2\lambda + p = 0,$$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$,

$$y^* = x^2 Q_m(x)e^{\lambda x}.$$

综上讨论

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$,

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根,} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$$

求 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$特解的步骤

(1)求出特征方程$r^2+pr+q=0$的根

(2)设特解为$y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)$,

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是特征方程的根}\\ 1 & \lambda\text{是特征方程的单根,}\\ 2 & \lambda\text{是特征方程的重根}\end{cases}$$

(3)用待定系数法将y^*代入原方程,即可求得

$Q_m(x)$中的待定参数,得到特解.

例 6. 求解 $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}(x^2+1)$

解. 特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 解得 $r_1 = -1, r_2 = 3$,

故齐次方程通解为 $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

由于$\lambda = 3$是特征方程的单根,可设

$$y^* = x(a_0 x^2 + a_1 x + a_2)e^{3x}$$

将$y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$代入原方程得

$$2a_1 + 4a_2 + (6a_0 + 8a_1)x + 12a_0 x^2 = 1 + x^2$$

比较系数得$\begin{cases} 12a_0 = 1 \\ 2a_1 + 4a_2 = 1 \\ 6a_0 + 8a_1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{12} \\ a_1 = -\dfrac{1}{16} \\ a_2 = \dfrac{9}{32} \end{cases}$$

$$\therefore y^* = x(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{9}{32})e^{3x}$$

$\therefore$ 所求通解为$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + x(\dfrac{1}{12}x^2 - \dfrac{1}{16}x + \dfrac{9}{32})e^{3x}$.

例 7. 设连续函数$f(x)$满足

$$f(x)=e^x+\int_0^x (t-x)f(t)dt,\text{试求}f(x).$$

例. $\because f(x)=e^x+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt,$

$$f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt,$$

$\therefore f''(x)+f(x)=e^x$，且$f(0)=1, f'(0)=1.$

即$y''+y=e^x$

特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm i.$

故齐次方程通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

由于$\lambda=1$为不是特征方程的根,可设

$y^* = ae^x$

将$y^*, y^{*\prime\prime}$代入原方程得 $2ae^x = e^x$, 得$a = \frac{1}{2}$.

$\therefore y^* = \frac{1}{2}e^x$

$\therefore$ 所求通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$.

又 $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}e^x$.

由$f(0) = 1, f'(0) = 1$代入得 $C_1 + \frac{1}{2} = 1, C_2 + \frac{1}{2} = 1$

故$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$.

推广：

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = e^{\lambda x} P_m(x)$$的特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$$

其中 $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是特征方程的根} \\ s & \lambda\text{是特征方程的}s\text{重根} \end{cases}$

2. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$

其中λ,ω为常数,$P_l(x),P_n(x)$是关于x的l,n次多项式,且有一个可为零.

关于$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$的特解讨论

$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 利用Euler公式

$$= e^{\lambda x}[P_l(x)\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + P_n(x)\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}]$$

$$= (\frac{P_l(x)}{2} + \frac{P_n(x)}{2i})e^{(\lambda + i\omega)x} + (\frac{P_l(x)}{2} - \frac{P_n(x)}{2i})e^{(\lambda - i\omega)x}$$

$$= e^{(\lambda + i\omega)x}P_m(x) + e^{(\lambda - i\omega)x}\overline{P}_m(x),\ m = \max(l,n).$$

设 $y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$,

$$y_1^* = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x},$$

设 $y'' + py' + qy = \overline{P}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$,

$$y_2^* = x^k \overline{Q}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x},$$

$$\therefore y^* = y_1^* + y_2^* = x^k e^{\lambda x}[Q_m(x)e^{i\omega x} + \overline{Q}_m(x)e^{-i\omega x}]$$

$$= x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + S_m(x)\sin\omega x]$$

是所求方程的特解形式. $m = \max(l, n)$.

求$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$特解的步骤

(1)求出特征方程$r^2 + pr + q = 0$的根

(2)设特解为$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + S_m(x)\sin\omega x]$,

且$m = \max(l, n)$, $k = \begin{cases} 0 & \lambda \pm i\omega\text{不是特征方程的根} \\ 1 & \lambda \pm i\omega\text{是特征方程的根} \end{cases}$

(3)用待定系数法将y^*代入原方程,即可求得

$R_m(x)$与$S_m(x)$中的待定参数,得到特解.

例 8. 求 $y''-2y'+y=x\cos x+2\sin x$ 的一个特解.

解. 这里 $\lambda=0,\omega=1,P_l(x)=x,P_n(x)=2$

特征方程为 $r^2-2r+1=0$, 解得 $r_{1,2}=1.$

而$\lambda\pm i\omega=\pm i$不是特征方程的根,故可设特解为

$$y^*=(a_0x+a_1)\cos x+(b_0x+b_1)\sin x$$

将$y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$代入原方程并整理得

$$2(b_0x-a_0+b_0-b_1)\cos x+2(a_0x-a_0-b_0+a_1)\sin x$$
$$=x\cos x+2\sin x$$

比较系数得

$$\begin{cases} -2b_0 = 1 \\ -a_0 + b_0 - b_1 = 0 \\ 2a_0 = 0 \\ -a_0 - b_0 + a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \dfrac{1}{2} \\ b_0 = -\dfrac{1}{2} \\ b_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 所求特解为 $y^* = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}(x+1)\sin x.$

对于$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

中$P_l(x)$或$P_n(x)$有一个为0的情况，可转化为

$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$解得.

定理 设$y=y_1(x)+iy_2(x)$是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+if_2(x)$的解，则 $y_1(x)$是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$的解;

$y_2(x)$是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$的解.

对于方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$ (*)

即为 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P(x)\cos\omega x+ie^{\lambda x}P(x)\sin\omega x$

由定理知

(*)的解的实部是 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P(x)\cos\omega x$的解;

(*)的解的虚部是 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P(x)\sin\omega x$的解.

例 9. 求 $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$ 的一个特解.

解. 这里 $\lambda=1,\omega=2,P(x)=1$

作辅助方程 $y''-2y'+5y=e^{(1+2i)x}$

特征方程为 $r^2-2r+5=0$, 解得 $r_{1,2}=1\pm 2i.$

由于 $\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的单根,可设

$\bar{y}=xAe^{(1+2i)x}$ 为 $y''-2y'+5y=e^{(1+2i)x}$ 的解.

$$\bar{y}'=Ae^{(1+2i)x}+A(1+2i)xe^{(1+2i)x}$$

$$=Ae^{(1+2i)x}[(1+2i)x+1]$$

$$\bar{y}''=2A(1+2i)e^{(1+2i)x}+A(1+2i)^2xe^{(1+2i)x}$$

$$=Ae^{(1+2i)x}[4i(x+1)-3x+2]$$

将$\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$代入方程$y'' - 2y' + 5y = e^{(1+2i)x}$

可得 $A = -\dfrac{i}{4}.$

故 $\bar{y} = -\dfrac{i}{4} x e^{(1+2i)x} = xe^{x}(-\dfrac{i}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x)$

$$= \frac{1}{4} x e^{x} \sin 2x + i(-\frac{1}{4} x e^{x} \cos 2x)$$

$\therefore$ 所求特解为 $y^* = -\dfrac{1}{4} x e^{x} \cos 2x.$

求 $y''+py'+qy=f(x)$通解的步骤

(1) 求 $y''+py'+qy=0$的通解

(2) 求 $y''+py'+qy=f(x)$的一个特解 y^*

(3) 写出通解 $y=Y+y^*$

例 10. 求 $y'' + y = 4\sin x$ 的通解.

解. 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm i$.

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

由于 $\lambda \pm i\omega = \pm i$ 是特征方程的根, 可设

$$y^* = x(a\cos x + b\sin x)$$

把 $y^*, y^{*''}$ 代入原方程得 $-2a\sin x + 2b\cos x = 4\sin x$

比较系数得 $a = -2, b = 0.$

故 $y^* = -2x\cos x$

$\therefore$ 原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x.$

或作辅助方程 $y'' + y = 4e^{ix}$,

$\because \lambda = i$ 是单根，故 $\bar{y} = Axe^{ix}$,

代入上式 $2Ai = 4$, $\therefore A = -2i$,

$\therefore \bar{y} = -2ixe^{ix} = 2x\sin x - (2x\cos x)i$,

所求非齐次方程的特解为 $y^* = -2x\cos x$,（取虚部）

原方程通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$.

例 11. 求方程 $y''+y=x\cos^2 x$ 的通解.

解. 即求 $y''+y=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cos 2x$ 的通解.

特征方程为 $r^2+1=0$, 解得 $r_{1,2}=\pm i$.

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$,

设 $y_1^*=ax+b$是 $y''+y=\frac{x}{2}$ 的特解.

将 $y_1^*, y_1^{*\prime\prime}$ 代入 $y''+y=\frac{x}{2}$ 得$ax+b=\frac{x}{2}$, $\Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=0.$

$\therefore y_1^*=\frac{x}{2}.$

作辅助方程 $y''+y=\frac{x}{2}e^{2ix}$,

$\because \lambda = 2i$ 不是特征方程的根,

设特解为 $\bar{y} = (Ax + B)e^{2ix}$, 代入辅助方程

$$\begin{cases} 2Ai - 3B = 0 \\ -3A = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \therefore A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{2}{9}i,$$

$$\therefore \bar{y} = (-\frac{1}{6}x - \frac{2}{9}i)e^{2ix}$$

$$= -\frac{1}{6}x\cos 2x + \frac{2}{9}\sin 2x + i(-\frac{1}{6}x\sin 2x + \frac{2}{9}\cos 2x)$$

$$\therefore y_2^* = -\frac{1}{6}x\cos 2x + \frac{2}{9}\sin 2x$$

$\therefore$ 所求通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2} - \frac{1}{6}x\cos 2x + \frac{2}{9}\sin 2x.$

例12 已知二阶可微函数 $f(x)$满足关系式

$$\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2 + e^x - f(x),$$

求 $f(x)$.

解 原方程可化为

$$x\int_0^x f'(t)dt + \int_0^x (1-t)f'(t)dt = x^2 + e^x - f(x),$$

两端对x 求导得

$$\int_0^x f'(t)dt + xf'(x) + (1-x)f'(x) = 2x + e^x - f'(x),$$

整理得 $$\int_0^x f'(t)dt + 2f'(x) = 2x + e^x,$$

两端再对x 求导得 $f'(x) + 2f''(x) = 2 + e^x$,

$$f'(x)+2f''(x)=2+e^x,$$

$$\Rightarrow f''(x)+\frac{1}{2}f'(x)=1+\frac{1}{2}e^x.$$

此为常系数线性微分方程，其对应的齐次方程为

$$f''(x)+\frac{1}{2}f'(x)=0.$$

特征方程为 $r^2+\frac{1}{2}r=0$, 特征值为 $r_1=0$， $r_2=-\frac{1}{2}$,

故齐次方程通解为 $\bar{f}(x)=c_1+c_2e^{-\frac{1}{2}x}$.

由于$1=1e^{0x}$， 而0为特征值， 故， 自由项为

1 时原方程的特解可设为 $f_1^*(x)=Ax$;

而1不是特征值，故自由项为 $\frac{1}{2}e^x$时，原方程的特

特解可设为 $f_2^*(x)=Be^x$,

$f_1^*(x)=Ax;$

所以，原方程特解可设为 $f^*(x)=Ax+Be^x$,

$[f^*(x)]'=A+Be^x$, $[f^*(x)]''=Be^x$,

代入原方程得

$$f''(x)+\frac{1}{2}f'(x)=1+\frac{1}{2}e^x.$$

$$Be^x+\frac{1}{2}(A+Be^x)=1+\frac{1}{2}e^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}A+\frac{3}{2}Be^x)=1+\frac{1}{2}e^x \Rightarrow A=2, B=\frac{1}{3},$$

所以，原方程特解 $f^*(x)=2x+\frac{1}{3}e^x$,

于是原方程通解为 $f(x)=c_1+c_2e^{-\frac{1}{2}x}+2x+\frac{1}{3}e^x.$

原方程通解为 $f(x)=c_1+c_2e^{-\frac{1}{2}x}+2x+\frac{1}{3}e^x.$

由此得 $f'(x)=-\frac{1}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}x}+2+\frac{1}{3}e^x,$

注意到由方程有:

$$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2},$$

所以有 $c_1+c_2+\frac{1}{3}=1, -\frac{1}{2}c_2+2+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$

解之得 $c_1=-3, c_2=\frac{11}{3},$

原方程解为 $f(x)=-3+\frac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+2x+\frac{1}{3}e^x.$

四、Euler(欧拉)方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$为常数) 叫**欧拉方程**.

特点： 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的乘方的次数相同.

解法： 欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

解法分析：

作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

将自变量换为 t,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right), \quad \cdots\cdots$$

用 D 表示对自变量 t 求导的运算 $\dfrac{d}{dt}$,

上述结果可以写为

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

$$\cdots\cdots$$

一般地，$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

将上式代入欧拉方程，则化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 求出这个方程的解后，把 t 换为 $\ln x$，即得到原方程的解.

例: 求方程 $x^2 y'' + xy' + 4y = 2(\cos\ln x)^2$ 的通解.

解. 令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$.

有 $D(D-1)y + Dy + 4y = 2\cos^2 t$

即 $D^2 y + 4y = 2\cos^2 t$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 1 + \cos 2t$$

由$r^2+4=0$,得$r_{1,2}=\pm 2i$.

$\therefore$ 对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$.

设$y_1^*=a$是$\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=1$的特解，得$a=\dfrac{1}{4}$，$\therefore y_1^*=\dfrac{1}{4}$.

设$y_2^*=t(b\cos 2t+d\sin 2t)$是$\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=\cos 2t$的特解,

则得$-4b\sin 2t+4d\cos 2t=\cos 2t$，得$b=0,d=\dfrac{1}{4}$,

$\therefore y_2^*=\dfrac{1}{4}t\sin 2t$.

故 $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}t\sin 2t$.

$\therefore$ 通解为 $y=C_1\cos 2\ln x+C_2\sin 2\ln x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\ln x\sin 2\ln x$.

The end

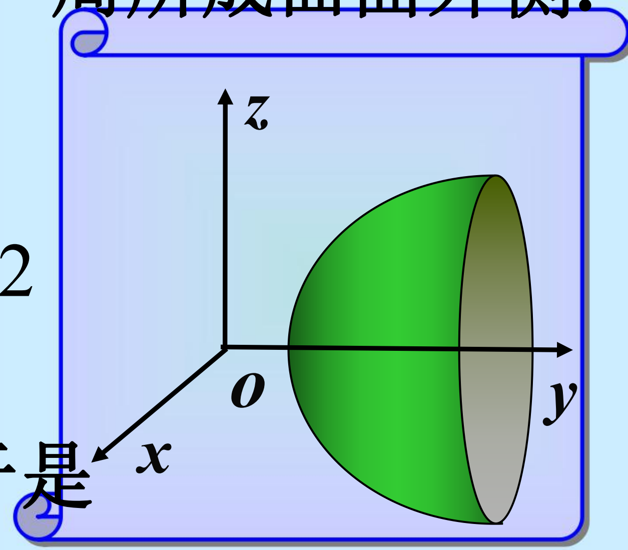
思考题

设二阶常系数线性微分方程$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$的一个特解为$y = e^{2x} + (1 + x)e^x$，试确定$\alpha, \beta, \gamma$，并求该方程的通解.

三、典型例题

1. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中

Σ是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$绕y轴旋转一周所成曲面外侧.



解: Σ的方程为 $y-1=x^2+z^2\,(1\le y\le 3)$

Σ不是封闭曲面, 所以补充Σ_1: $\begin{cases} x^2+z^2\le 2 \\ y=3 \end{cases}$

取右侧, 则$\Sigma+\Sigma_1$构成封闭曲面, 外侧. 于是

$$I=\iiint_{\Omega}(8y+1-4y-4y)\mathrm{d}V-\iint_{\Sigma_1}(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V-2\iint_{\Sigma_1}(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_1^3\mathrm{d}y\iint_{D_y}\mathrm{d}\sigma+16\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\pi+32\pi=34\pi$$

三、典型例题

2. 计算$I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中$f(u)$具有连续导数，Σ是锥面$x=\sqrt{y^2+z^2}$与两球面

$x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体的表面的外侧.

解：由高斯公式，$I=\iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_1^2 3\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

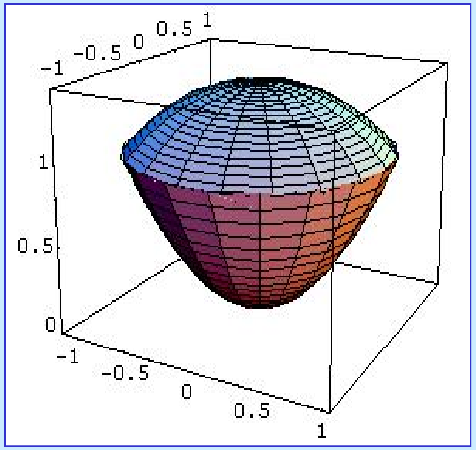
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_1^2 3r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{93}{5}\pi(2-\sqrt{2})$$

例：计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$其中　Ω是由抛物面 $z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=2$所围成的空间闭区域.

解　$\because\ (x+y+z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2+2(\underline{xy+yz}+zx)$$



其中$xy+yz$是关于y的奇函数,

且Ω关于zox面对称，$\therefore\ \iiint\limits_{\Omega}(xy+yz)dv=0$,

同理 $\because zx$ 是关于 x 的奇函数,

且 Ω 关于 yoz 面对称, $\therefore \iiint\limits_{\Omega} xzdv = 0,$

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dv,$

则 $I = \iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)^2 dxdydz$

$= \iiint\limits_{\Omega} (2x^2 + z^2) dxdydz,$

在柱面坐标下：

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1, \quad r^2 \le z \le \sqrt{2 - r^2},$$

投影区域 D_{xy}：$x^2 + y^2 \le 1,$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r(2r^2 \cos^2\theta + z^2)dz$$

$$= \frac{\pi}{60}(90\sqrt{2} - 89).$$