

# Part 2 动态电路的分析

## ◆ 动态电路的分析方法：

- 时域分析

- s域分析

- 状态变量分析

## ◆ 一阶电路、二阶电路、高阶电路

# 第五章 动态电路的时域分析

5.1 动态元件(储能元件)

5.2 动态电路的方程

5.3 动态电路的初始条件

5.4 单回路&单节偶一阶电路分析

5.4.1 一阶电路的零输入响应

5.4.2 一阶电路的零状态响应

5.4.3 一阶电路的完全响应

5.5 动态电路的一般分析法

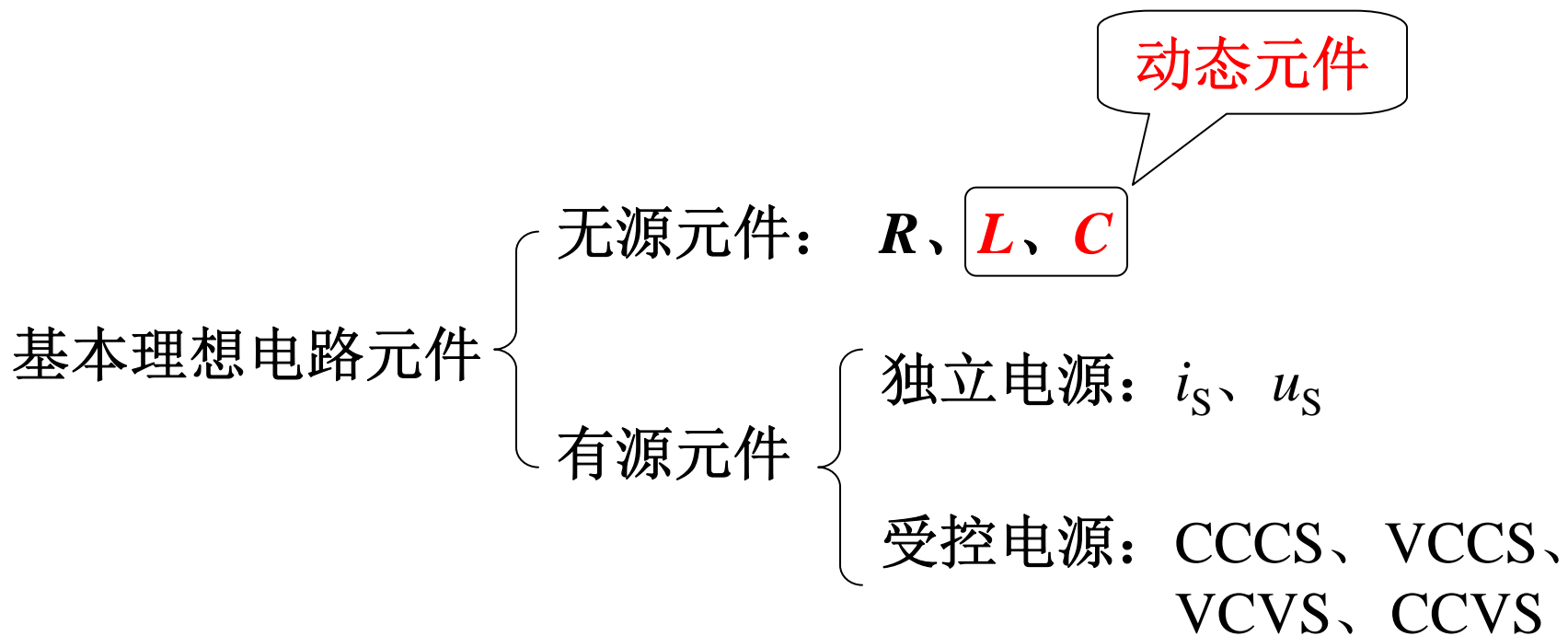
5.6 一阶电路的三要素法

5.7 一阶电路的阶跃响应

5.8 正弦激励下一阶电路的响应

5.9 小结

## 5.1 动态元件 (储能元件)



### 一、线性电容元件(capacitor)

电容器是一种能储存电荷或者说储存电场能量的部件。线性电容元件就是反映这种物理现象的电路模型。

#### 1. 线性电容元件定义（库伏特性）

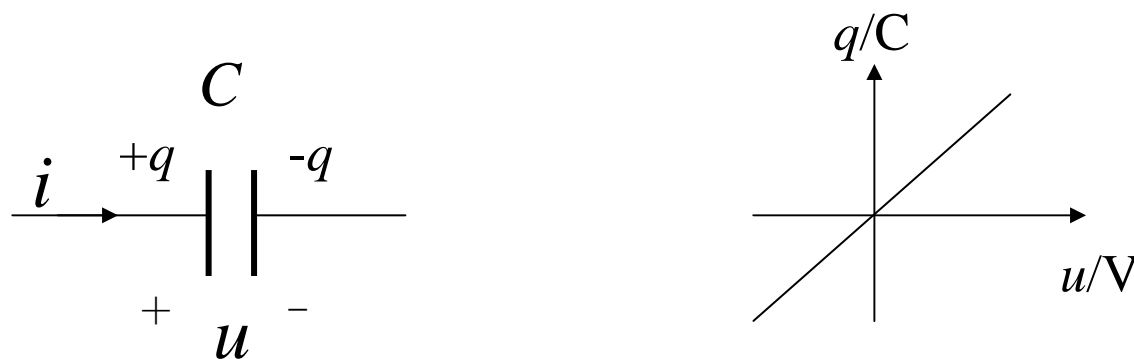


图 5.1-1 线性时不变电容元件

在外电源作用下，电容器两极板上分别带上等量异号电荷，撤去电源，板上电荷仍可长久地集聚下去，其特性可用 $u \sim q$  平面上的一条曲线来描述，称为库伏特性。电荷量 $q$ 与其端电压的关系为

$$q(t) = Cu(t) \quad (5.1-1)$$

式中 $C$ 是电容元件的参数，称为电容元件的电容量，单位为法拉(F)。 $C$ 是一个正实常数。

电容元件简称为电容，其符号 $C$ 既表示元件的参数，也表示电容元件。

## 2. 伏安特性 (VCR, voltage current relation)

### (1) 伏安特性的微分形式:

在电路分析中，关心的是元件的**VCR**。若电容端电压 $u$ 与通过的电流 $i$ 采用关联参考方向，如图5.1-1(a)所示，则有

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (5.1-2)$$

这是**伏安特性的微分形式**。

上式表明：

1) 任何时刻，通过电容元件的电流与该时刻的电压变化率成正比，与 $u$ 的大小无关，称为**动态元件**。如果电容两端加直流电压，则 $i=0$ ，电容元件相当于开路。故电容元件有隔断直流的作用。

2) 在实际电路中，通过电容的电流 $i$ 总是为有限值，这意味着 $du/dt$ 必须为有限值，也就是说，电容两端电压 $u$ 必定是时间 $t$ 的连续函数，而不能跃变。这从数学上可以很好地理解，当函数的导数为有限值时，其函数必定连续。

### (2) 伏安特性的积分形式:

将式(5.1-2)改写为

$$du(t) = \frac{1}{C} i(t) dt$$

对上式从 $-\infty$ 到 $t$ 进行积分，并设 $u(-\infty)=0$ ，得

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \quad (5.1-3)$$

可见，电容有“记忆”电流的作用，称为**记忆元件**。（而电阻元件的电压仅与该瞬时的电流值有关，是无记忆元件，称为**即时元件**。）

设 $t_0$ 为初始时刻。如果只讨论 $t \geq t_0$ 的情况，式(5.1-3)可改写为

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \\ &= u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.1-4)$$

其中

$$u(t_0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi$$

上式中 $u(t_0)$ 称为电容电压的**初始值**，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为**初始状态**。

上式是电容元件**伏安特性的积分形式**。



### 3. 电容元件的功率和储能

(1) 在电压、电流关联参考方向下，电容元件**吸收功率**

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t)\frac{du(t)}{dt}$$

(2) **储能**公式:  $\omega_C(t) = \int_{-\infty}^t p(\xi)d\xi$

$$= \int_{-\infty}^t Cu(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}d\xi$$

$$= \int_{u(-\infty)}^{u(t)} Cu(\xi)du(\xi)$$
$$= \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

一般总可以认为 $u(-\infty)=0$ ，得电容的储能为

$$\omega_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t) \quad (5.1-5)$$

上式表明，电容所储存的能量一定大于或等于零。

若在 $[0, \tau]$ 时间内，电容电压由0升高到 $U$ ，则电容元件吸收的电能为

$$W = \int_0^{\tau} p dt = \int_0^U C u du = \frac{1}{2} C U^2$$

若在相同时间内，电容电压由 $U$ 下降到0，则电容元件吸收的电能为

$$W' = \int_0^{\tau} p dt = \int_U^0 C u du = -\frac{1}{2} C U^2$$

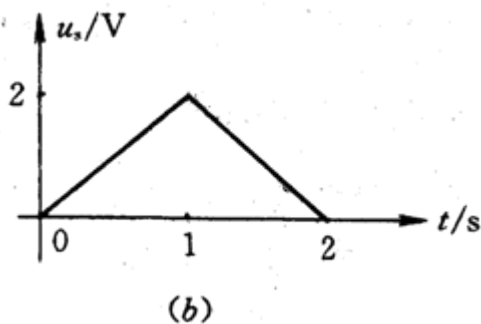
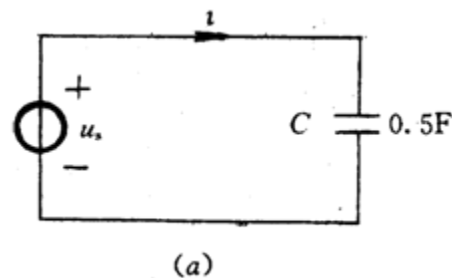
$W'$  为负值，表明电容放出能量，电容元件将储存的电场能转换为电能送还给电路系统。

比较以上二式，电容元件吸收的电能与放出的电能相等，故电容元件不消耗能量，是**储能元件**。同时，电容元件不会释放出多于它吸收或储存的能量，所以它是一种**无源元件**。

例5.1-1 图5.1-2(a)所示电路中的 $u_s(t)$ 波形如图(b)所示, 已知电容 $C=0.5\text{F}$ , 求电流 $i$ 、功率 $p(t)$ 和储能 $w_C(t)$ , 并绘出它们的波形。

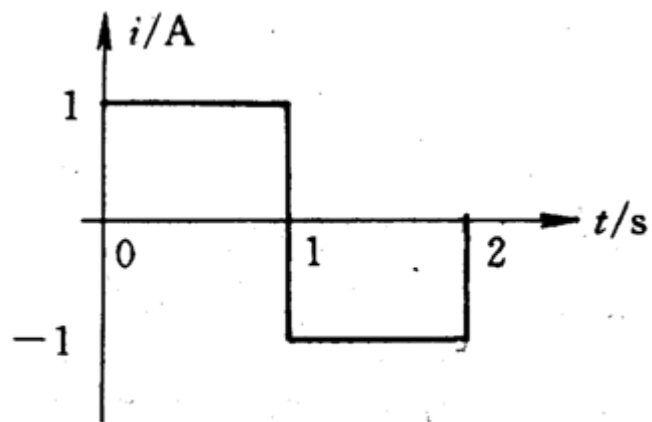
解 写出 $u_s$ 的函数表示式为

$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 1\text{s} \\ -2(t-2) & 1 \leq t \leq 2\text{s} \\ 0 & t \geq 2\text{s} \end{cases}$$



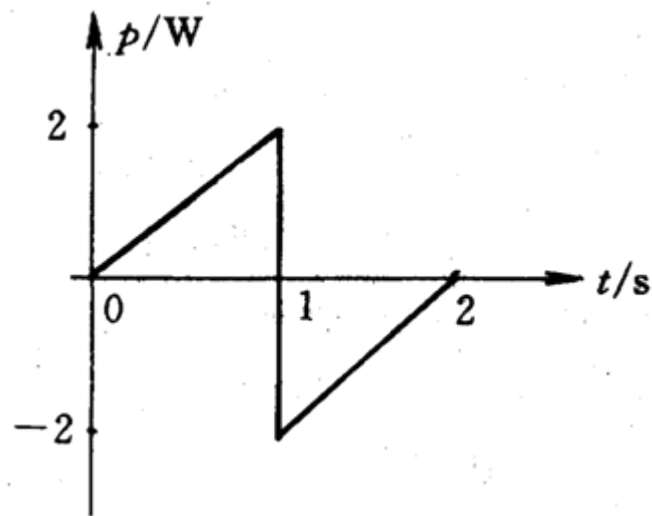
## 第五章 动态电路的时域分析

$$i(t) = C \frac{du_s}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1s \\ -1 & 1 \leq t < 2s \\ 0 & t \geq 2s \end{cases}$$



(c)

$$p(t) = u(t)i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & 0 \leq t < 1s \\ 2(t-2) & 1 \leq t < 2s \\ 0 & t \geq 2s \end{cases}$$

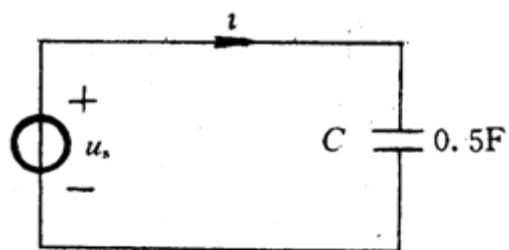


根据电容储能公式

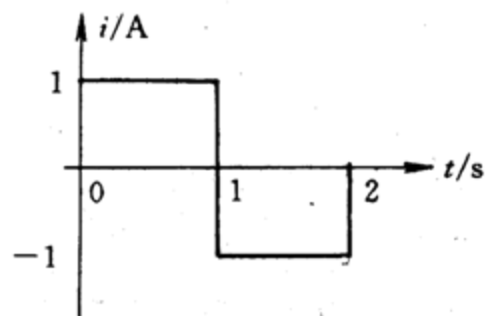
$$w_C = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

$$w_C(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^2 & 0 \leq t < 1s \\ (t-2)^2 & 1 \leq t < 2s \\ 0 & t \geq 2s \end{cases}$$

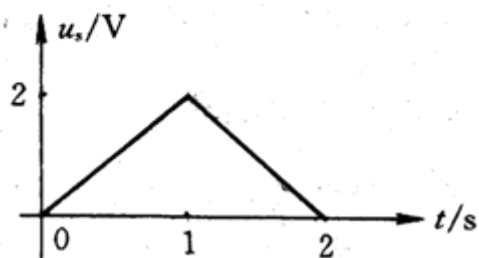
## 第五章 动态电路的时域分析



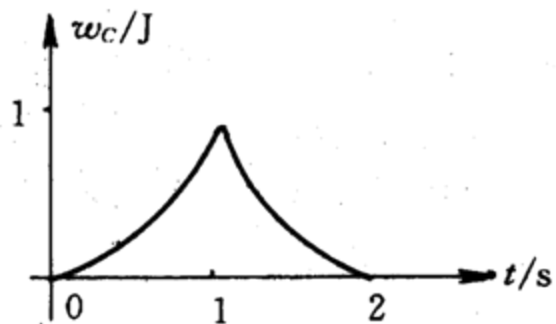
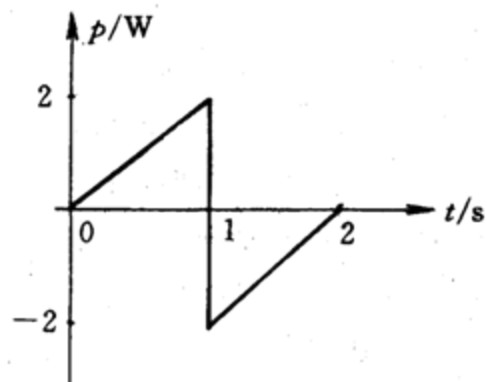
(a)



(c)



(b)

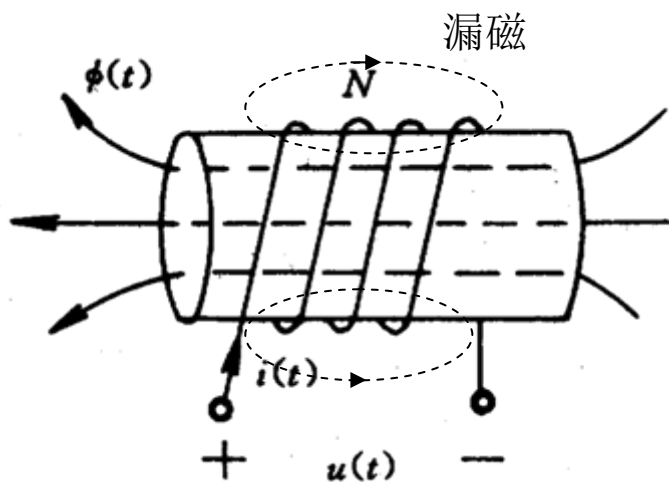


(e)

图 5.1-2 例 5.1-1 用图

### 二、线性电感元件(inductor)

线性电感元件是从实际电感线圈抽象出来的理想模型，它反映了电流产生磁通和磁场能量储存这一物理现象。



一般把金属导线绕在一骨架上来构成一实际电感器，当电流通过线圈时，将产生磁通。其特性可用  $\Psi \sim i$  平面上的一条曲线来描述，称为**韦安特性**。

图 5.1-3 实际电感器示意图

### 1. 线性电感元件定义（韦安特性）

线性电感元件的自感磁通链与元件中的电流存在以下关系

$$\Psi_L(t) = Li(t) \quad (5.1-6)$$

其中 $L$ 称为电感元件的自感（系数）或电感（系数）。 $L$ 是一个正实常数。

磁通和磁通链的单位是韦伯（**Wb**），电感 $L$ 的单位是亨利（**H**）。

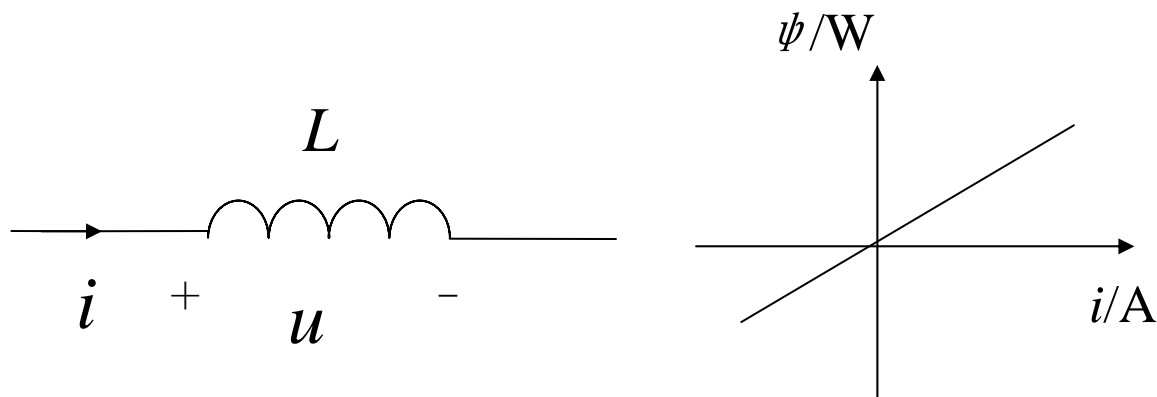


图 5.1-4 线性时不变电感元件及其韦安特性



### 2. 伏安特性 (VCR)

(1) **微分形式**：若电感的端电压 $U$ 和电流 $i$ 取关联参考方向，根据电磁感应定律与楞次定律则有

$$u_L(t) = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (5.1-7)$$

式中 $u$ 和 $i$ 为关联参考方向，且与 $\Psi_L$ 成右手螺旋关系。

上式表明：

1) 任何时刻，电感元件两端的电压与该时刻的电流变化率成正比，称**动态元件**。如果通过电感的电流是直流，则 $u=0$ ，电感相当于短路。

2) 由于电感上的电压为有限值，故电感中的电流不能跃变。

### (2) 伏安特性的积分形式:

对(5.1-7)式两端同时积分, 并设 $i(-\infty)=0$ , 得

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \quad (5.1-8)$$

设 $t_0$ 为初始时刻, (5.1-8)式可改写为

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \\ &= i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.1-9)$$

$$i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\xi) d\xi$$

可见, 电感元件也是记忆元件。上式中 $i(t_0)$ 称为电感电流的初始值, 它反映电感初始时刻的储能状况, 也称为初始状态。

### 3. 电感元件的功率与储能

(1) 在电压、电流采用关联参考方向下，由(1.3-13)式，电感元件吸收的功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt} \quad (5.1-10)$$

(2) 储能: 对上式从 $-\infty$ 到 $t$ 进行积分，得电感元件的储能为

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int_{-\infty}^t p(\xi)d\xi = L \int_{-\infty}^t i(\xi)\frac{di(\xi)}{d\xi}d\xi \\ &= L \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i(\xi)di(\xi) = \frac{1}{2} Li^2(t) \end{aligned} \quad (5.1-11)$$

若在 $[0, \tau]$ 时间内，电感电流由0升高到 $I$ ，则电感元件吸收的电能为

$$W = \int_0^{\tau} p dt = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

若在相同时间内，电感电流由 $I$ 下降到0，则电感元件吸收的电能为

$$W' = \int_0^{\tau} p dt = \int_I^0 L i di = -\frac{1}{2} L I^2$$

吸收的电能为负，意味着放出能量。

因此当电流增加时，电感元件从电路吸收电能，转化为磁场能储存起来；当电流减小时，释放磁场能量转化为电能送还给电路。

比较以上二式，电感元件吸收的电能与放出的电能相等，故电感元件不消耗能量，是储能元件。同时，电感元件不会释放出多于它吸收或储存的能量，所以也是一种无源元件。

### 三、电容的串联与并联等效

#### 1. 串联：

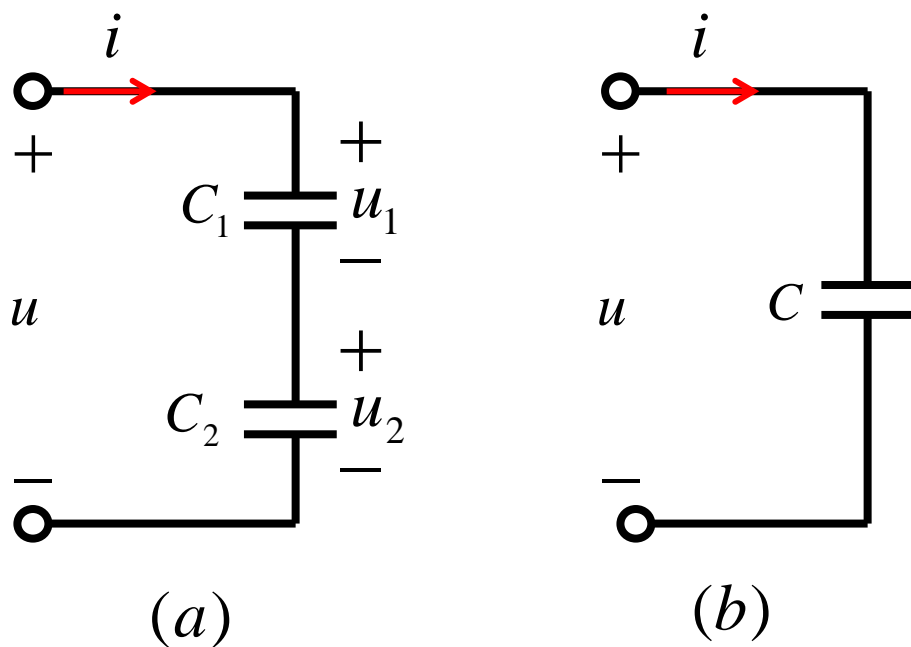


图 5.1-5 电容串联可等效为一个电容

### (1) 等效电容:

根据电容元件VCR的积分形式, 有

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \\ u_2 &= \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$
$$u = u_1 + u_2 = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi$$
$$= \frac{1}{C_{eq}} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi$$
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

(5.1-12)

或写为

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

若有 $n$ 个电容 $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 相串联, 同理可推得其等效电容为

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (5.1-13)$$

$$\int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi = C_{eq} u$$



### (2) 电容串联分压关系:

对电容串联的情况，由于每个电容元件极板上电荷相同，设为 $q$ ，则有

$$q = C_1 u_1 = C_2 u_2 = \cdots = C_n u_n = C_{eq} u$$

故每个电容的电压为，

$$u_k = \frac{C_{eq}}{C_k} u \quad (5.1-14)$$

对两个电容串联的情况，

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{C_{eq}}{C_1} u = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u \\ u_2 &= \frac{C_{eq}}{C_2} u = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u \end{aligned} \right\} \quad (5.1-15)$$

可见，电容串联分压与电容量大小成反比，即电容越大，分得的电压越小。

## 2. 并联:

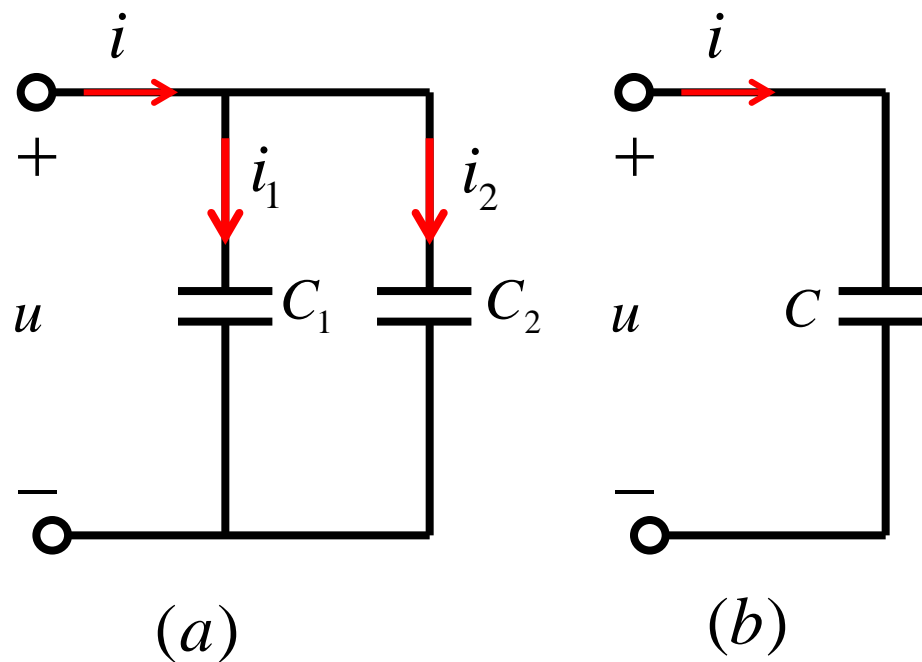


图 5.1-6 电容并联可等效为一个电容

### (1) 等效电容:

电容 $C_1$ 和 $C_2$ 相并联的电路如图5.1-6(a)所示, 电容 $C_1$ 与 $C_2$ 两端为同一电压 $u$ 。根据电容元件VCR的微分形式, 有

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= C_1 \frac{du}{dt} \\ i_2 &= C_2 \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\}$$

由KCL, 得端口电流为

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt} \\ &= C_{eq} \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (5.1-16)$$

若有 $n$ 个电容 $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 相并联, 同理可推得其等效电容为

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (5.1-17)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C_{eq}} i$$

### (2) 电容并联分流关系:

由于每个电容端电压相同, 每个电容极板上电荷为,

$$q_k = C_k u$$

故每条支路电流为

$$i_k = \frac{dq_k}{dt} = C_k \frac{du}{dt} = \frac{C_k}{C_{eq}} i \quad (5.1-18)$$

对两个电容并联的情况，

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{C_1}{C_{eq}} i = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i \\ i_2 &= \frac{C_2}{C_{eq}} i = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i \end{aligned} \right\} \quad (5.1-19)$$

## 四、电感的串联与并联等效

### 1. 串联：

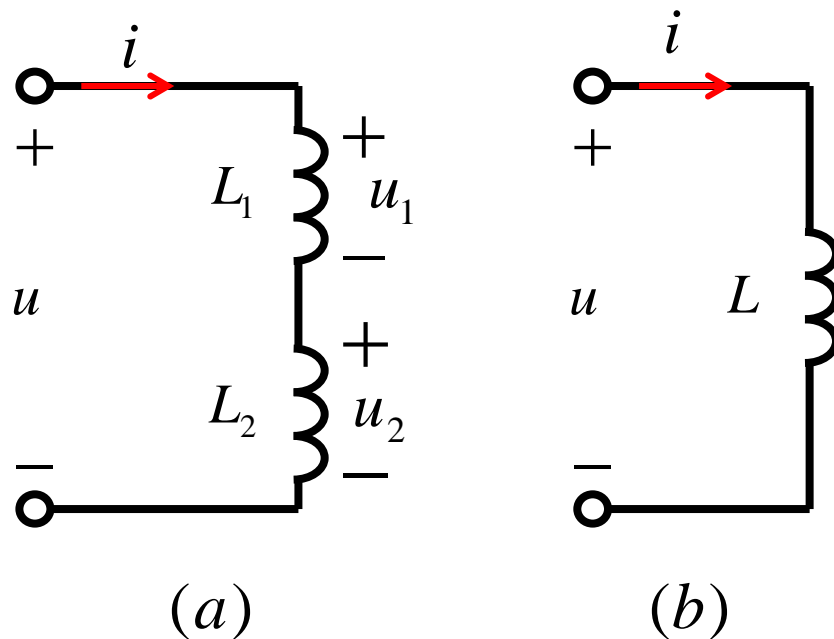


图 5.1-7 电感串联可等效为一个电感

### (1) 等效电感:

根据电感元件VCR的微分形式, 有

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}, u_2 = L_2 \frac{di}{dt}$$
$$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$
$$L_{eq} = L_1 + L_2 \quad (5.1-20)$$

若有 $n$ 个电感 $L_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )相串联, 同理可推得其等效电感为

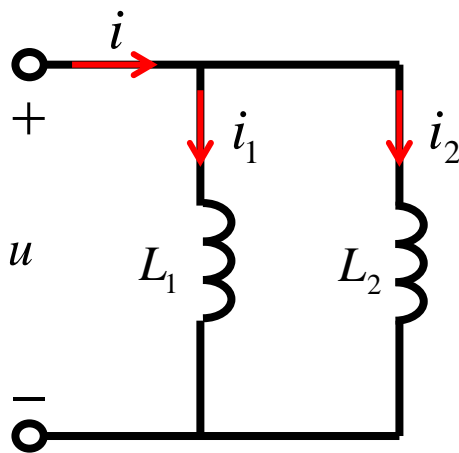
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (5.1-21)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L_{eq}} u$$

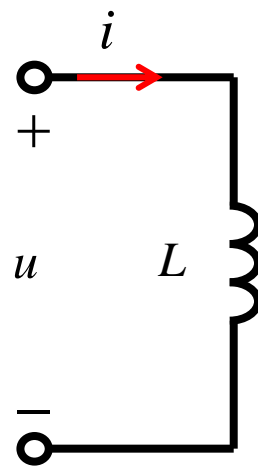
### (2) 电感串联分压:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{L_1}{L_{eq}} u = \frac{L_1}{L_1 + L_2} u \\ u_2 &= \frac{L_2}{L_{eq}} u = \frac{L_2}{L_1 + L_2} u \end{aligned} \right\} \quad (5.1-22)$$

### 2. 并联:



(a)



(b)

图5.1-8 电感并联可等效为一个电感



### (1) 等效电感:

电感 $L_1$ 与 $L_2$ 相并联的电路如图5.1-8(a)所示, 电感 $L_1$ 和 $L_2$ 的两端为同一电压 $u$ 。根据电感元件VCR的积分形式有

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \\ i_2 &= \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$

由KCL, 得端口电流

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L_{eq}} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

## 第五章 动态电路的时域分析

式中

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad (5.1-23)$$

或写为

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

若有  $n$  个电感  $L_i (i=1, 2, \dots, n)$  相并联，同理可推得其等效电感为

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (5.1-24)$$

$$\int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = L_{eq} i$$

### (2) 电感并联分流:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{L_{eq}}{L_1} i = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i \\ i_2 &= \frac{L_{eq}}{L_2} i = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i \end{aligned} \right\} \quad (5.1-25)$$

## 5.2 动态电路的方程与列写方法

- ✓动态电路的特点
- ✓动态电路的方程
- ✓动态电路的初始条件

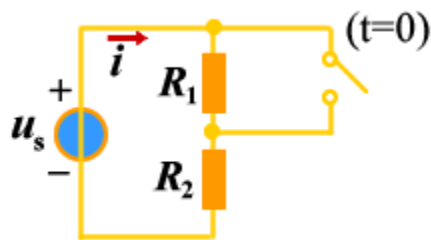
### 一、动态电路的特点

- 1. 含有动态元件(电容和电感)的电路称为动态电路。
- 2. 由于动态元件是储能元件，其**VCR**是对时间变量 **$t$** 的微分和积分关系，因此动态电路的特点是：当电路状态发生改变（称为**换路**）时需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的**过渡过程**，或暂态过程。通常这个过渡过程很短，故也称为瞬态过程。

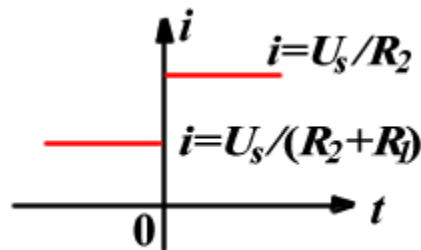
## 第五章 动态电路的时域分析

电阻电路、电容电路和电感电路在换路时的表现：

### 1) 电阻电路



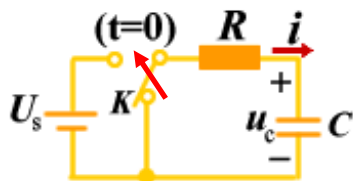
(a)



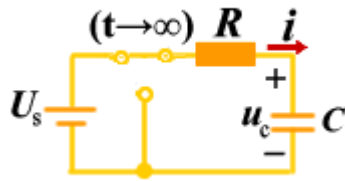
(b)

图 5.2-1

### 2) 电容电路



(a)



(b)

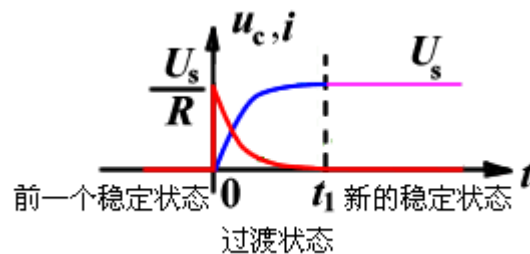
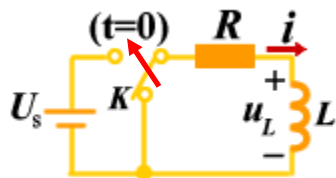
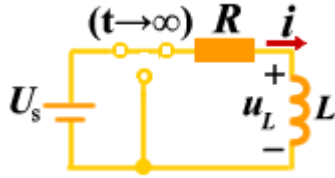


图 5.2-2

### 3) 电感电路



(a)



(b)

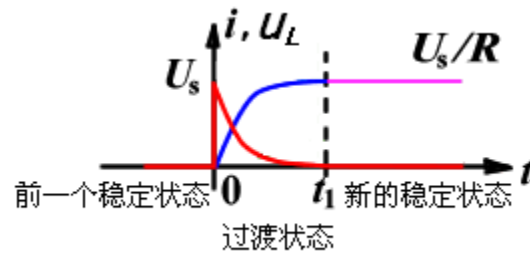


图 5.2-3

从以上分析需要明确的是：

①**换路**是指电路结构、状态发生变化，即电路中支路的接入、断开或电路参数的突然变化等统称为“换路”；

②含有动态元件的电路换路时**一般存在过渡过程**。过渡过程产生的**原因**是由于储能元件 $L$ 、 $C$ 在换路时能量发生变化<sup>\*</sup>，而能量的储存和释放需要一定的时间来完成，即：

$$p = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{若 } \Delta t \rightarrow 0 \text{ 则 } p \rightarrow \infty$$

<sup>\*</sup>并不是所有动态电路都存在过渡过程。若换路前后的两个稳态，动态元件的能量没有变化，则电路没有过渡过程，换路后立即达到稳态。

➤ **3. 动态电路分析**就是研究换路后动态电路中电压、电流随时间的变化规律。

分析方法:

- |                  |         |
|------------------|---------|
| 1) 时域分析 (经典法)    | } 输入输出法 |
| 2) $s$ 域分析 (运算法) |         |
| 3) 状态变量分析法       |         |

### 二、动态电路方程的建立

分析动态电路，首先要建立描述电路的方程。动态电路方程的建立也是根据两类约束，即基尔霍夫定律、电感和电容的微分或积分形式的VCR关系式。具体方法可采用支路电流法、回路/网孔法、节点法等，当然电路也可进行等效变换。

（对一阶电路，根据戴维宁/诺顿定理，电路总等效变换为单回路或单节偶电路。）

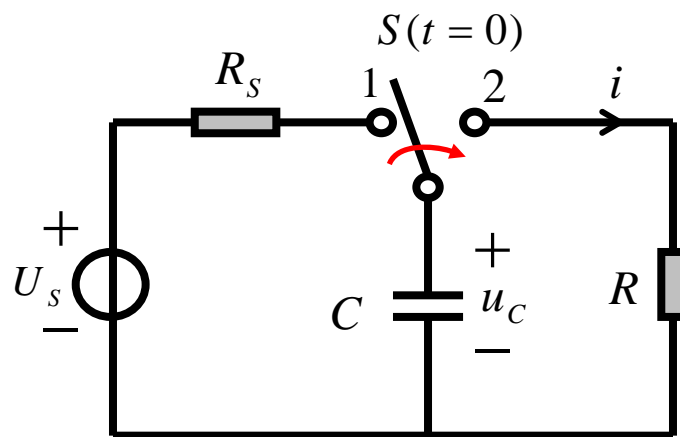
由于动态电路中的电感、电容的VCR是微积分关系，可以预料，动态电路列出的方程一定是微积分方程。下面通过简单实例给出详细的过程。



## 第五章 动态电路的时域分析

### 例5.2-1 RC串联电路（单回路）：

设RC电路如图5.2-4所示。换路后，根据KVL列出电路的回路电压方程为



对于换路后（ $t > 0$ ）的电路，由两类约束关系，可得

$$-u_R + u_C = 0 \quad t > 0 \quad (\text{KVL})$$

$$u_R = Ri \quad (\text{VCR})$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} \quad (\text{VCR})$$

①如果求解**电容电压 $u_C(t)$** ，则从以上三式，可得**电路方程**为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad t > 0 \quad (5.3-1)$$

②如果求解**电流**  $RC \frac{di}{dt} + i = 0 \quad t > 0$

## 第五章 动态电路的时域分析

### 例5.2-2 RC串联电路（单回路）：

设RC电路如图5.2-4所示。根据KVL列出电路的回路电压方程为

$$u_R(t) + u_C(t) = u_s(t)$$

由于

$$i = C \frac{du_C}{dt}, u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$$

将它们代入上式，并稍加整理，得以电容电压为变量的方程

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{RC} u_s \quad (5.2-1)$$

若以电流为变量，则有： $Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_s(t)$

对以上方程求导得：

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = \frac{1}{R} \frac{du_s(t)}{dt} \quad (5.2-2)$$

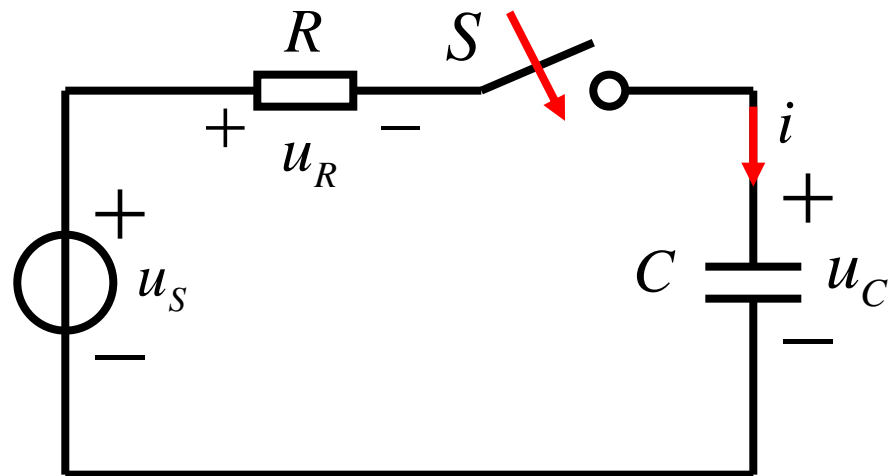
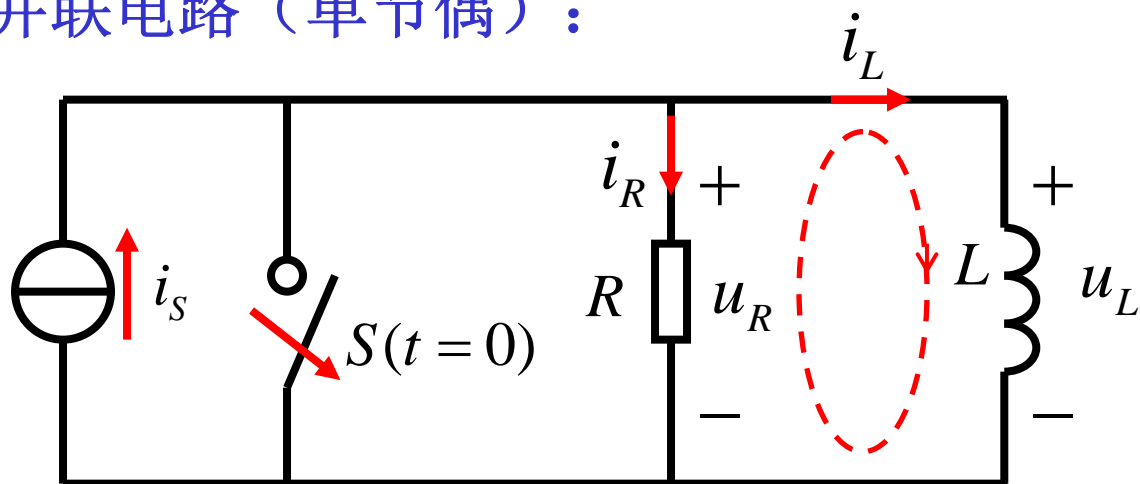


图5.2-4 RC串联电路

### 例5.2-3 RL并联电路（单节偶）：



支路电流法

换路后为双节点电路，对独立节点列写KCL方程，

$$i_R + i_L = i_s \quad (5.2-3)$$

KVL方程为，

$$-Ri_R + L\frac{di_L}{dt} = 0 \quad (5.2-4)$$

整理可得换路后 $RL$ 电路方程为，

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{R}{L}i_s \quad (5.2-5)$$

**例5.2-4 RLC串联电路（单回路电路）：**图5.2-6所示RLC串联电路，根据KVL列写回路方程

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = u_s(t)$$

由于

$$i = C \frac{du_C}{dt}, u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}, u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

整理以上各式得以电容电压为变量的二阶微分方程

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u_s \quad (5.2-6)$$

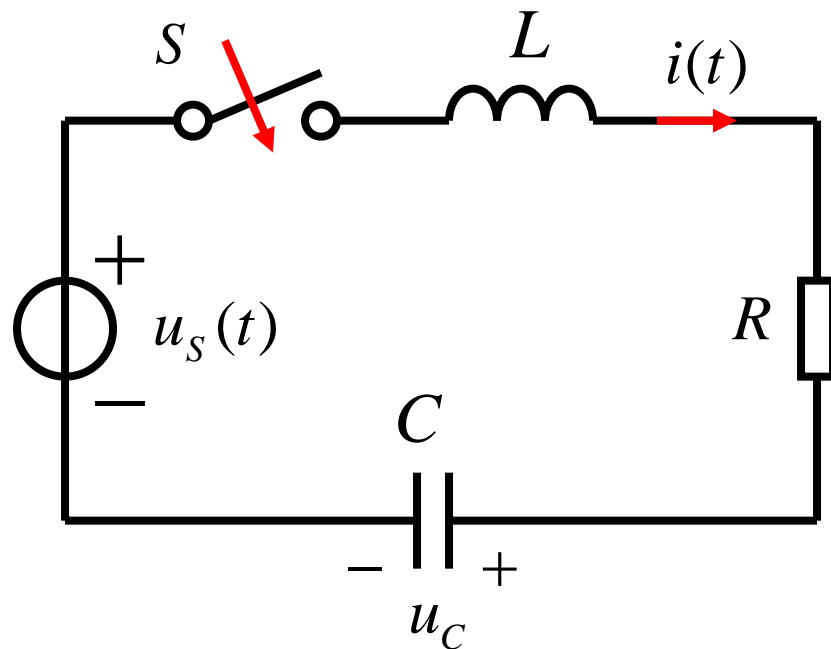


图 5.2-6 RLC串联电路

考察上述方程可得以下结论：

(1) 描述动态电路的电路方程为线性常系数微分方程。

方程中的系数与动态电路的结构和元件参数有关；

右端非齐次项与激励有关；

(2) 用一阶线性微分方程描述的动态电路称为**一阶电路**；

用二阶线性微分方程描述的动态电路称为**二阶电路**；

.....

用 **$n$** 阶线性微分方程描述的动态电路称为 **$n$ 阶电路**。

(3) 微分方程通式（下页）

## 第五章 动态电路的时域分析

- ✓描述一阶电路(**first-order circuits**)的方程是一阶线性微分方程

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0 \quad a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad t \geq 0$$

(非齐次方程)

(齐次方程)

- ✓描述二阶电路(**second-order circuits**)的方程是二阶线性微分方程

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

- ✓描述高阶电路的方程是高阶微分方程:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

方程中的系数与动态电路的结构和元件参数有关，右端非齐次项与激励有关。

### 三、动态电路方程的列写方法：

例5.2-5 电路如图5.5-3(a)所示。在开关闭合前，电路已处于稳定。当 $t=0$ 时开关闭合。求换路后的 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $i_C(t)$ 。

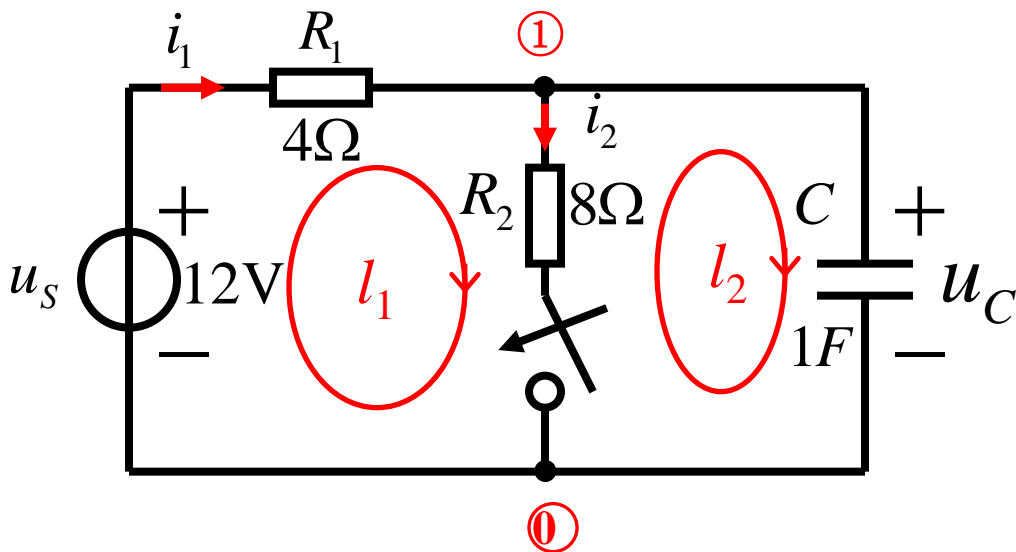


图5.5-3 例5.5-2用图

采用支路电流法，选取独立回路如图。

对独立节点 $n_1$ 列写KCL方程：

$$i_1 - i_2 - i_C = 0 \quad \textcircled{1}$$

对回路 $l_1$ 、 $l_2$ 列写KVL方程：

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_s \quad \textcircled{2}$$

$$-R_2 i_2 + u_C = 0 \quad \textcircled{3}$$

动态元件C的VCR，

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{or} \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad \textcircled{4}$$

由以上方程可建立以 $u_C$ 、 $i_C$ 、 $i_1$ 、 $i_2$ 为变量的微分方程。



①式带入②消去 $i_1$ ，有

$$(R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_C = u_s \quad (5)$$

③式带入⑤消去 $i_2$ ，有

$$\frac{(R_1 + R_2)}{R_2} u_C + R_1 i_C = u_s \quad (6)$$

④式 $i_C$ 带入⑥并整理，得到关于 $u_C$ 的电路方程为

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} u_C = \frac{1}{R_1 C} u_s \quad (7)$$

即

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{3}{8} u_C = 3$$

③带入⑤消去 $i_2$ ,

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} u_C + R_1 i_C = u_s \quad (8)$$

并将④式 $u_C$ 带入⑧式, 两边求导, 得以 $i_C$ 为变量的电路方程为

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_C = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt} \quad \text{即} \quad \frac{di_C}{dt} + \frac{3}{8} i_C = 0$$

类似地, 从①—④式可建立变量 $i_1$ 、 $i_2$ 的电路方程,

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_1 = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s \quad \text{即} \quad \frac{di_1}{dt} + \frac{3}{8} i_1 = \frac{3}{8}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s \quad \text{即} \quad \frac{di_2}{dt} + \frac{3}{8} i_2 = \frac{3}{8}$$

## 第五章 动态电路的时域分析

---

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} u_C = \frac{1}{R_1 C} u_s$$

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_C = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_1 = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{3}{8} u_C = 3$$

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{3}{8} i_C = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{3}{8} i_1 = \frac{3}{8}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{3}{8} i_2 = \frac{3}{8}$$

### 动态电路方程的求解（微分方程的经典解）

一阶电路的方程（一阶线性微分方程）的一般形式为，

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

或改写为

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = f(t) \quad t \geq 0 \quad (5.2-10)$$

从高等数学可知，线性常系数微分方程的解由两部分组成：

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

即：非齐次方程通解 = 齐次方程通解 + 非齐次方程的任一特解

### 1、齐次方程的解—自由响应:

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0 \quad t \geq 0 \quad (5.2-11)$$

解法一:

它的函数形式取决于微分方程的**特征根**。将试解

$$x = Ae^{pt}$$

代入一阶微分方程，得其**特征方程**为

$$p + \alpha = 0$$

特征根为  $p = -\alpha$ ，故

$$y_h(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\alpha t} \quad (5.2-12)$$

式中A为待定常数，由初始条件决定。

### 解法二：分离变量法

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0 \quad t \geq 0$$

将导数视为微分，分离变量，

$$\frac{dx}{x} = -\alpha dt$$

方程两边积分，有  $\ln x = -\alpha t + C$

方程两边取e指数，得

$$x = e^C \cdot e^{-\alpha t} = Ae^{-\alpha t} \quad (5.2-12)'$$

其中C、A是待定常数。该解形式与（5.2-12）一致。

齐次方程的解与激励无关，变量x随时间t得变化规律完全由电路本身的特性决定（因为方程系数由电路参数决定），故齐次方程的解称为自由响应，或固有响应。

### 2、非齐次方程的解—强迫响应

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = f(t) \quad t \geq 0$$

特解具有与激励 $e(t)$ 相同的函数形式。列表如下：

表5-1 不同激励时动态电路的特解

激励 $e(t)$ 函数形式	特解 $y_p(t)$
直流	常数 $k$
$t^m$	$k_m t^m + k_{m-1} t^{m-1} + \dots + k_1 t + k_0$
$e^{\alpha t}$	$ke^{\alpha t}$ 当 $\alpha$ 不是特征根时 $(k_1 t + k_0)e^{\alpha t}$ 当 $\alpha$ 是特征单根时 $(k_2 t^2 + k_1 t + k_0)e^{\alpha t}$ 当 $\alpha$ 是二重特征根时（二阶电路）
$\cos \beta t$ 或 $\sin \beta t$	$k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t$

表中 $k$ 、 $k_0$ 、 $k_1$ 、 $\dots$ 、 $k_m$ 均为待定常数。当特解 $y_p(t)$ 的函数形式确定后，将其代入原微分方程中，来求待定常数 $k_i$ 。

## 第五章 动态电路的时域分析

### (例5.2-1) RC串联电路（单回路）：

①求电容电压 $u_C(t)$ ,

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad t > 0$$

$$\frac{du_C}{u_C} = -\frac{1}{RC} dt$$

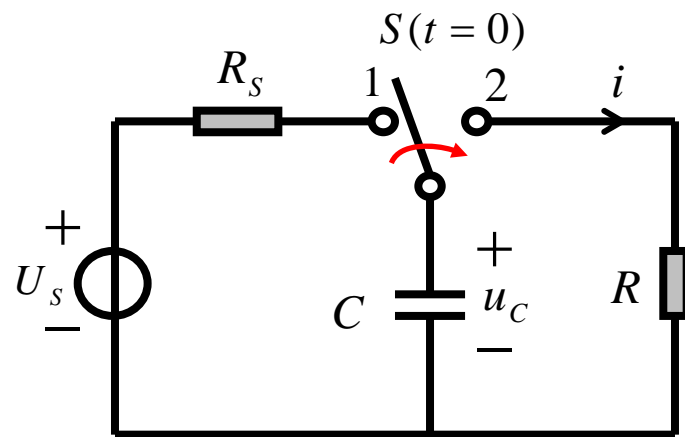
$$u_C(t) = Ae^{-t/RC} \quad t > 0$$

从初始条件  $t = 0, u_C(0) = U_s \Rightarrow U_s = A$

$$u_C(t) = U_s e^{-t/RC} \quad t > 0$$

②求解电流

$$RC \frac{di}{dt} + i = 0 \quad t > 0$$





(例5.2-2) 如图RC电路， $U_s$ 为直流电压源。当 $t=0$ 时闭合开关，电容的初始电压 $u_C(0) = U_0$ 。求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 。

解：1、求解电容电压 $u_C(t)$

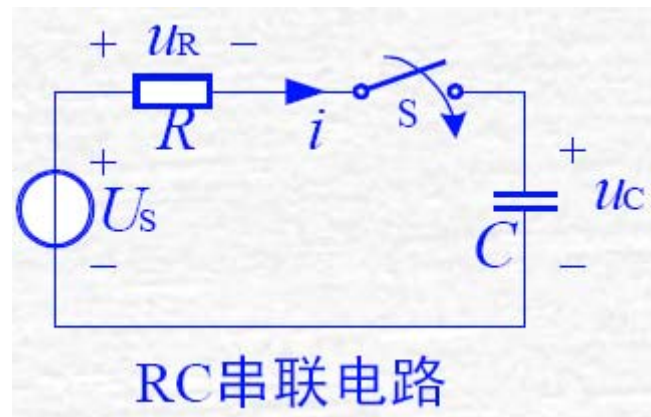
(1) 建立电路方程。前面例5.2-2已得

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}U_s$$

(2) 求齐次解 $u_{Ch}(t)$ 。特征方程为 $s + 1/(RC) = 0$ ，其特征根 $p = -1/(RC)$ ，故

$$u_{ch} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

(3) 求非齐次特解 $u_{Cp}(t)$ 。 $\because$ 激励 $U_s$ 为常数， $\therefore$ 特解也是常数。



例5.2-8用图

令 $u_{Cp}(t) = k$ ，将它代入非齐次微分方程，得

$$\frac{1}{RC}k = \frac{1}{RC}U_s$$

故得特解  $u_{Cp}(t) = k = U_s$

(4) 求完全解 $u_C(t)$ 。

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + U_s$$

式中常数 $k$ 由初试条件 $u_C(0) = U_0$ 确定。将该条件代入上式，得

$u_C(0) = A + U_s = U_0$ ，解得 $A = U_0 - U_s$ ，故

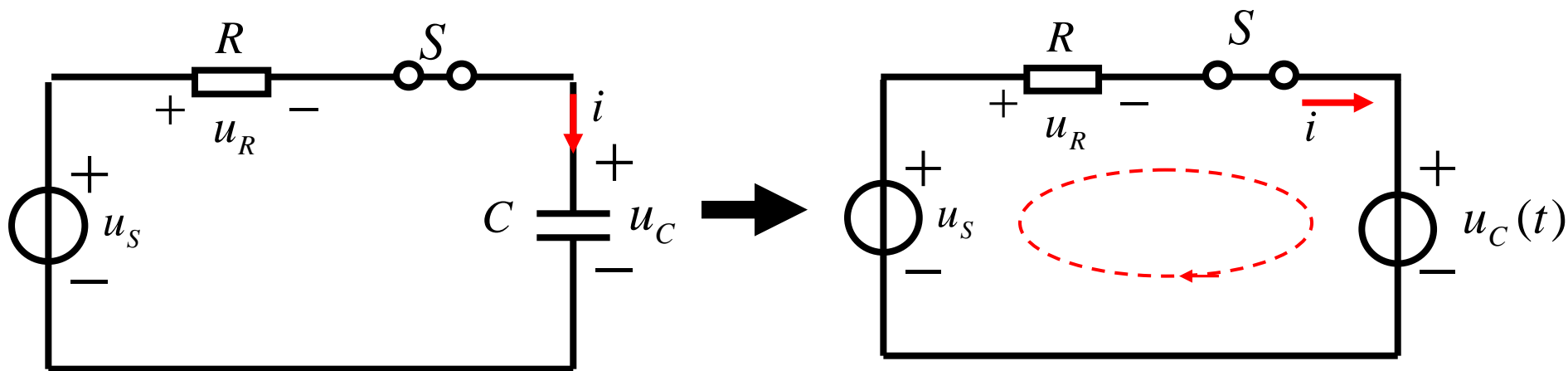
$$u_C(t) = (U_0 - U_s)e^{-\frac{1}{RC}t} + U_s, \quad t \geq 0$$

### 2、求解电路电流*i(t)*:

电路中的电流有两种方法确定:

- 1) 列写关于*i*的微分方程求解;
- 2) 将电容视为电压源(但  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ ): 由**KCL**、**KVL**决定。

电容的电压只与*t*有关, 可视为电压源。列写KVL,



$$i = \frac{u_s - u_C}{R} = -\frac{U_0 - U_s}{R} e^{-t/RC}, \quad t > 0$$

在单回路情况, 简单地由电容的**VCR**得,  $i(t) = i_C = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0 - U_s}{R} e^{-t/RC}, \quad t > 0$

## 动态电路初始条件

### 5.3 动态电路的初始条件

求解微分方程时，解答中的常数需要根据初始条件来确定。在数学中，初始条件作为已知量给出。在电路分析这样一个物理问题中，则需要根据换路前的电路状态确定。

①若把电路发生换路的时刻记为  $t=0$ （即计时零点选为0），换路前一瞬间记为  $0^-$ ，换路后一瞬间记为  $0^+$ ，（换路经历的时间为  $0^-$  到  $0^+$ ），则动态电路分析即求解  $0^+$  时刻以后电路中电流、电压，初始条件就是  $t=0^+$  时刻  $u$ ， $i$  及其  $n-1$  各阶导数的值，因此初始条件也称  **$0^+$  值**。

②初始条件  $0^+$  值由  $0^-$  值确定（ $0^-$  值通常就是第一个稳态下的电流、电压值）。确定初始条件，即  $u$ ， $i$  的  $0^+$  与  $0^-$  值之间的关系依据是换路定理，换路定理给出了电容电压  $u_c(t)$  和电感电流  $i_L(t)$  的初始条件。其它  $u$ ， $i$  的初值根据  $u$ ， $i$  的初值从  $0^+$  时刻电路确定。

## 第五章 动态电路的时域分析

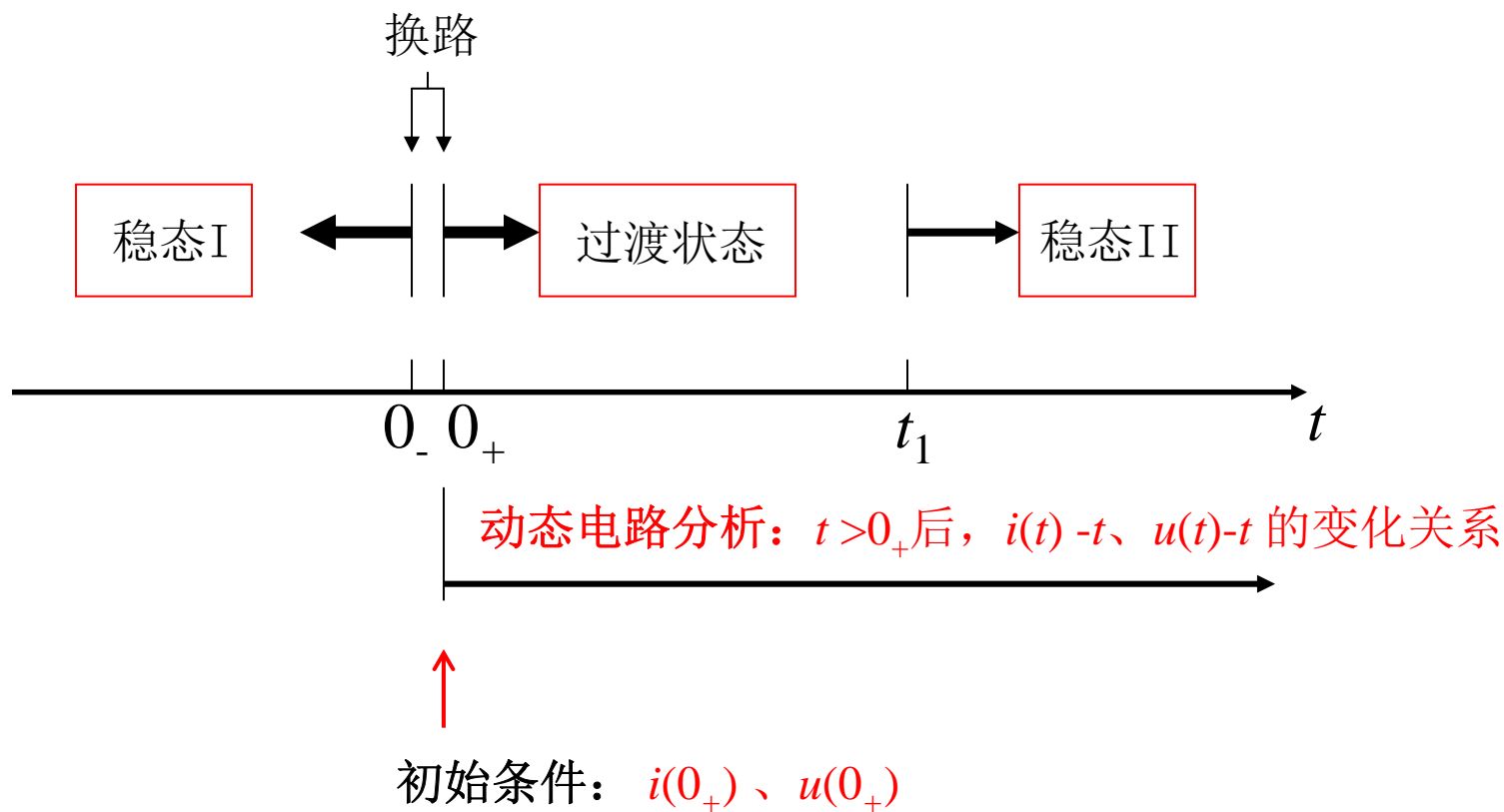


图 5.2-7

### 1. 换路定理—独立初始条件的确定

- 独立变量(状态变量)的初始条件

在动态电路中，如果电容的端电压、电感中的电流确定，则电路的**状态**就确定了。故电容电压和电感电流称为电路的**状态变量**，亦是电路的独立变量。二者的初始值称为**独立（变量）的初始条件**，其它电路变量(电流和电压)，可由电容电压和电感电流决定，故其初值称为**非独立初始条件**。

换路定理给出了电容电压和电感电流的初值，即独立初始条件。

### (1) 电容电压的初始条件

根据

$$i_C = \frac{dq_C}{dt}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

在 $0^- \rightarrow 0^+$ 范围内积分, 可得 $0^+$ 时刻, 线性电容的电荷、电压与电流的关系为

$$q_C(0_+) = q_C(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (5.2-6a)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (5.2-6b)$$



从上二式可以看出，如果在换路前后（即 $0_-$ 到 $0_+$ 的瞬间），电流 $i_C(t)$ 为有限值，则式中右方积分项为零，此时电容上的电荷和电压不发生突变，即

$$q_C(0_+) = q_C(0_-) \quad (5.2-7a)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (5.2-7b)$$

对于一个在 $t=0_-$ 时刻电压为 $u_C(0_-)=U_0$ 的电容，在换路瞬间不发生跃变的情况下，有 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ 。所以在换路的瞬间( $0_-$ — $0_+$ 期间)，电容可视为一个电压值为 $U_0$ 的电压源。

若 $U_0=0$ ，则相当于短路。

### (2) 电感电流的初始条件

根据

$$u_L = \frac{d\Psi_L}{dt}, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

在 $0_- \rightarrow 0_+$ 范围内积分, 可得 $0_+$ 时刻, 线性电感的磁通链、电流与电压的关系为

$$\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} u_L dt \quad (5.2-8a)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L dt \quad (5.2-8b)$$

如果从 $0_-$ 到 $0_+$ 瞬间, 电压 $u_L(t)$ 为有限值, 则式中右方积分项为零, 此时电感中的磁通链和电流不发生跃变, 即

$$\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) \quad (5.2-9a)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (5.2-9b)$$

对于一个在 $t=0_-$ 时刻电流为 $i_L(0_-)=I_0$ 的电感，在换路瞬间不发生跃变的情况下，有 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0$ 。所以在换路的瞬间( $0_- \sim 0_+$ 期间)，电感可视为一个电流值为 $I_0$ 的电流源。

若 $I_0=0$ ，则相当于开路。

式(5.2-7a)、(5.2-7b)和(5.2-9a)、(5.2-9b)说明了换路前后瞬间，电容电压和电感电流的关系，称为**换路定理**。换路定理表明：

1) 换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）在换路前后保持不变。这是电荷守恒定律的体现。

2) 换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）在换路前后保持不变。这是磁链守恒的体现。

换路定理是动态电路分析的重要依据。

$$\begin{aligned} u_C(0_+) &= u_C(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned}$$

**需要明确的是：**

1) 电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。

2) 换路定律反映了能量不能跃变的事实。

### 2. 电路非独立初始条件的确定

– 非独立变量(非状态变量)的初始条件

根据换路定律可以由电路的 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 确定 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 时刻的值，电路中其它电流和电压在 $t=0_+$ 时刻的值可以通过所谓**初值电路( $0_+$ 电路)**求得。求初始值的具体步骤是：

- 1) 由换路前 $t=0_-$ 时刻的电路（一般为稳定状态）求 $u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$ ；
- 2) 由换路定律得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ ；
- 3) 画 $t=0_+$ 时刻的等效电路：根据替代定理，电容用电压等于 $u(0_+)$ 的电压源替代，电感用电流等于 $i_L(0_+)$ 的电流源替代，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同；独立电源均取 $t=0_+$ 时的值。此时得到的电路是一个直流电源作用下的电阻电路，称为**初值电路或 $0_+$ 等效电路**。
- 4) 由 $0_+$ 等效电路求所需各变量的 $0_+$ 值。

**例5.2-6** 图示电路中，开关S闭合前电容电压 $u_C$ 为0。当电路稳定时合上开关S、试求各电流、电压的初试值。已知：

$$U_S = 20V, R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega。$$

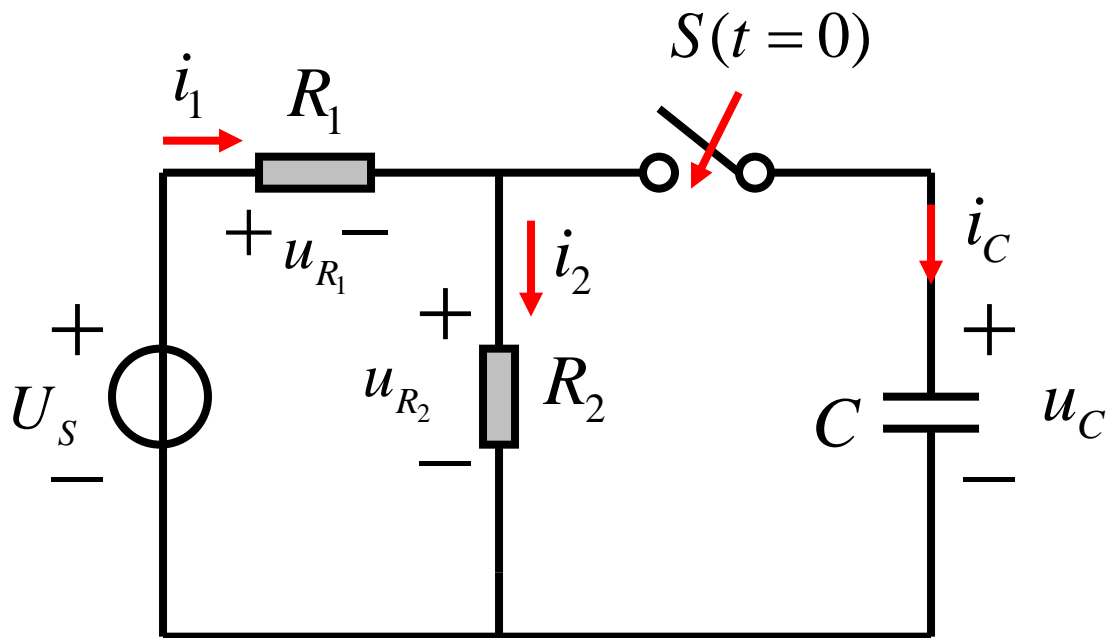


图 5.2-9 例5.2-6用图

**例5.2-7** 图示电路，开关闭合前电路已稳定，已知：  
 $U_s = 10V$ ， $R_1 = 30\Omega$ ， $R_2 = 20\Omega$ ， $R_3 = 40\Omega$ ， $t = 0$ 时开关闭合。试求开关闭合时各电压、电流值。

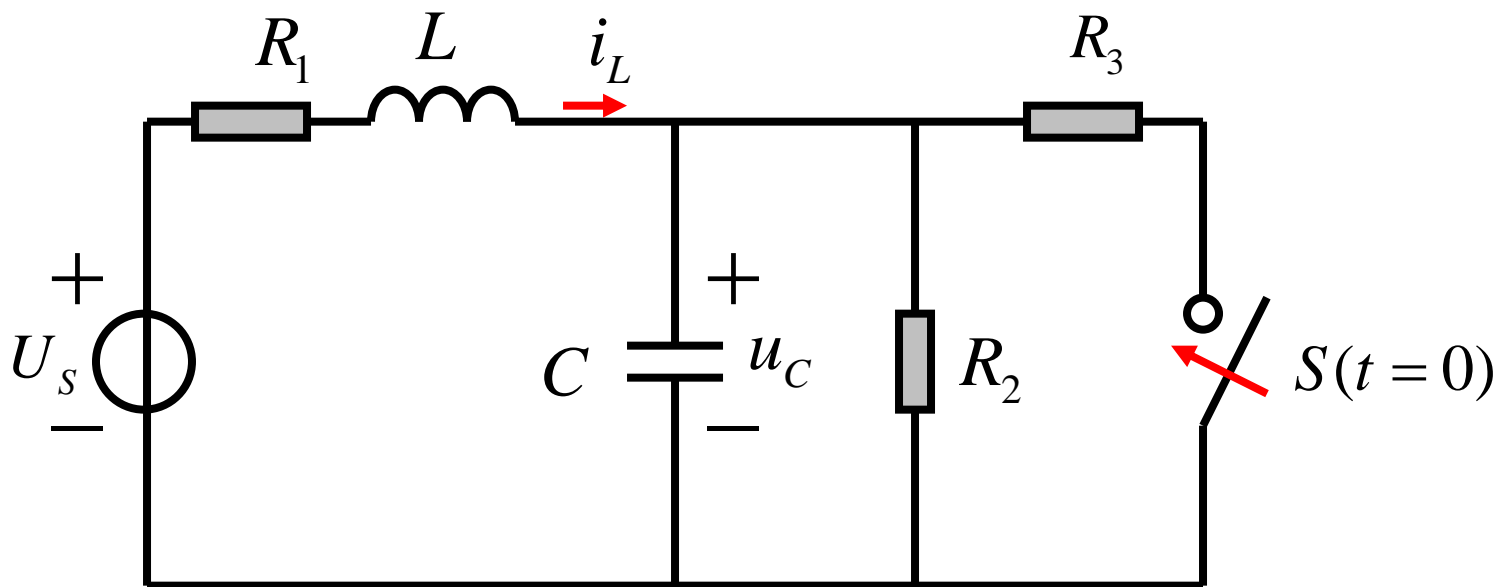


图 5.2-9 例5.2-7用图

### 小结 – 动态电路的分析过程：

#### 1、列写动态电路方程（微分方程）：

画出换路后( $t > 0$ )电路，根据电路约束和元件约束列写电路方程(动态元件L和C的VCR单独列写)，具体方法在5.4节介绍。

#### 2、求初始值：

- ①由 $t < 0$ 时的电路，求出 $u_C(0_-)$ ,  $i_L(0_-)$ ，亦即 $u_C(0_+)$ ,  $i_L(0_+)$ 。  
( $t < 0$ 电路一般处于稳态，电容相当于开路、电感相当于短路，因此是电阻电路。)
- ②画出初值电路（ $0_+$ 等效电路）：电容用电压源或短路替代、电感用电流源或开路替代，因此初值电路是电阻电路；
- ③由初值电路，求出各电流、电压的初始值。

#### 3、求解动态电路方程（微分方程）：

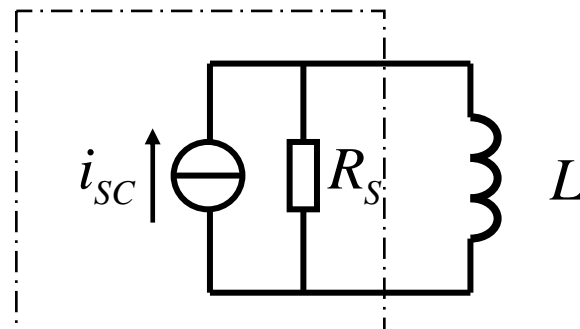
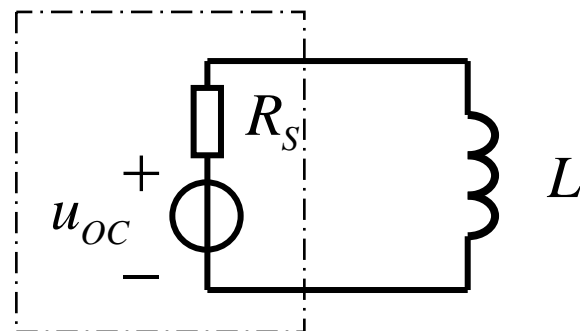
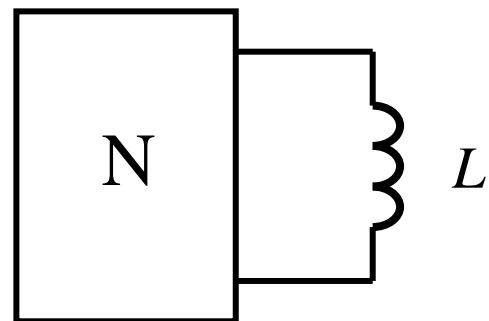
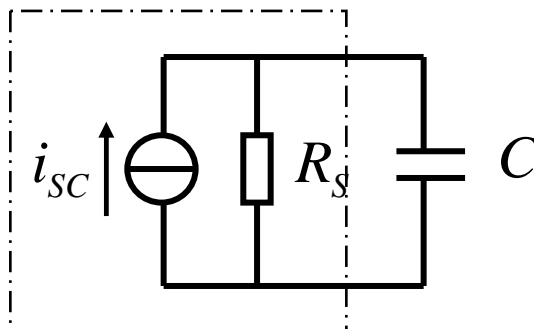
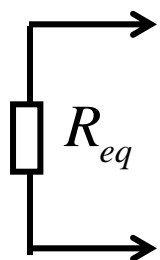
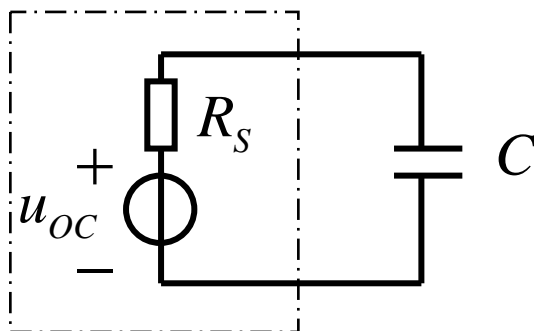
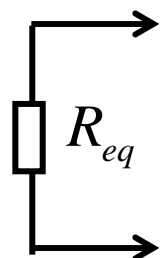
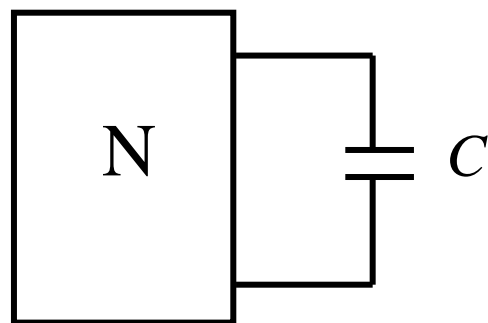
经典法（时域） | s域(即用Laplace变换) | 状态变量法



### 5.4 单回路&单节偶一阶电路分析

- ▶ 由一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。  
从**电路结构**来看，一阶电路只包含一个(独立的)动态元件。凡是可以用等效概念化归为一个等效动态元件的电路都是一阶电路。
- ▶ 对于任意一阶电路，换路后总可以用图a来描述。  
即一阶电路总可以看成是一个有源/无源二端电阻网络N外接一个动态元件（电容或电感）所组成。  
根据戴维宁/诺顿定理，图a电路总可以等效为图b或图c所示电路。

## 第五章 动态电路的时域分析



(a)

(b)

(c)

➤ 动态电路能量来源于两部分：一是外加激励，另一是电路的初始储能(初始状态)，可视为内部激励。

外加激励均为零时，仅由初始状态所引起的响应，称为零输入响应(**zero input**)，记为 $y_{zi}(t)$ 。

当电路的初始储能为零(即初始状态为零)时，仅由外加激励所引起的响应，称为零状态响应(**zero state**)，记为 $y_{zs}(t)$ 。

电路在外加激励和初始状态共同作用下所产生的响应，称为全响应。

### 5.3.1 一阶电路的零输入响应

定义：外加激励为零，仅由动态元件初始储能所产生的电流和电压，称为动态电路的**零输入响应**。

这个物理过程即动态元件的放电（磁）过程。

#### 一、一阶RC电路的零输入响应

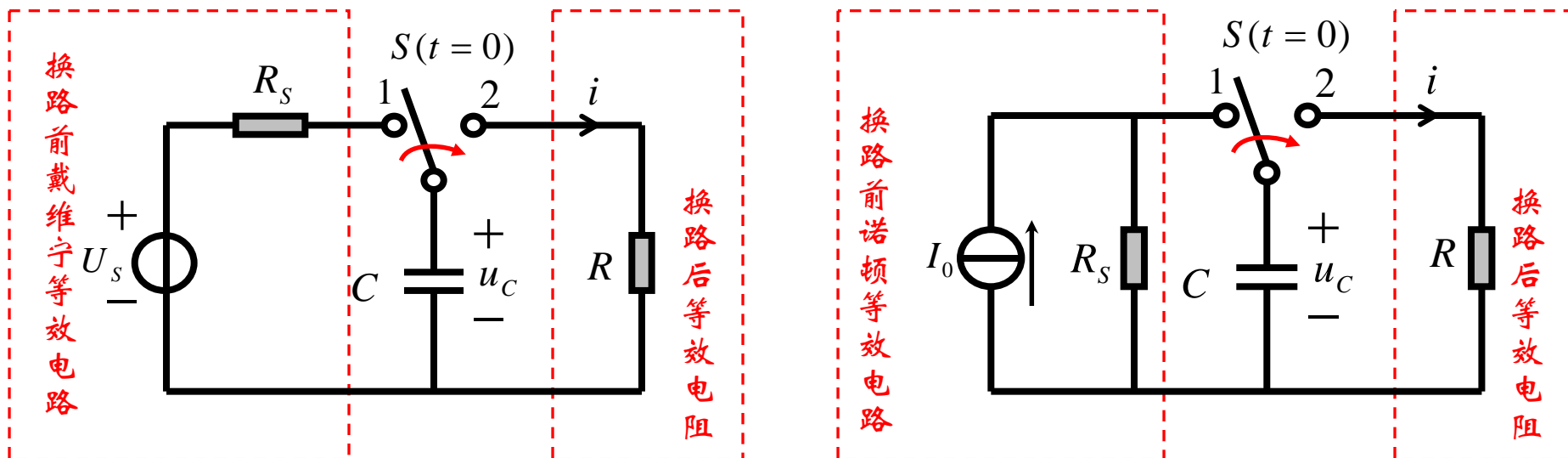


图5.3-1 一阶RC电路的零输入响应

**RC零输入电路**如图所示。在 $t < 0$ 时，开关在位置1，电路已处于稳态，即电容的初始状态 $u_C(0^-) = U_0$ 。

当 $t = 0$ 时，开关S由位置1拨到位置2。根据换路定理 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$ ，换路后，R、C形成回路，电容C将通过R放电，从而在电路中引起电压、电流的变化。由于电阻是耗能元件，且电路在零输入条件下得不到能量的补充，电容电压将逐渐下降，放电电流也将逐渐减少。最后，电容储能全部被电阻耗尽，电路中的电压、电流也趋向于零。

下面进行定量的数学分析。

### 1、电路方程与解

对于换路后 ( $t > 0$ ) 的电路, 由两类约束关系, 可得

$$-u_R + u_C = 0 \quad t > 0 \quad (\text{KVL})$$

$$u_R = Ri \quad (\text{VCR})$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} \quad (\text{VCR})$$

①如果需求解**电容电压 $u_C(t)$** , 则从以上三式, 可得**电路方程**为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad t > 0 \quad (5.3-1)$$

(5.3-1)式为一阶齐次微分方程。其初始条件为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

## 第五章 动态电路的时域分析

由高等数学可知，一阶齐次微分方程通解的形式为

$$u_C = Ae^{pt} \quad t > 0$$

其中 $p$ 为特征方程

$$RCp + 1 = 0$$

的根。因此得特征根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

故式(5.3-1)式的通解为

$$u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

待定积分常数 $A$ 由将初始条件确定。将 $u_C(0_+) = U_0$ 代入上式，得

$$u_C(0_+) = A = U_0$$

于是满足初始条件的微分方程的解为

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{RC}} = U_0e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0 \quad (5.3-2)$$

②若响应是电路中的放电电流 $i(t)$ ，可用两种方法求取。

a. 采用与求取 $u_C$ 完全相似的方法，列出以 $i(t)$ 为变量的齐次微分方程

$$RC \frac{di}{dt} + i = 0 \quad t > 0$$

根据初始条件

$$i(0+) = \frac{u_R(0+)}{R} = \frac{U_0}{R}$$

可求解得

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

b. 使用电容元件的VCR，可得

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{d}{dt} (U_0 e^{-\frac{t}{RC}}) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0 \quad (5.3-3)$$

③若响应是电阻电压，同样可求得

$$u_R(t) = Ri(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0 \quad (5.3-4)$$



令  $\tau = RC$ ,  $\tau$  具有时间量纲, 即

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]/[T]} = [T]$$

称为RC电路的时间常数。这样, 式(5.3-2)、(5.3-3)、(5.3-5)可写为:

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

$$u_R(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

可见, 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数。

## 第五章 动态电路的时域分析

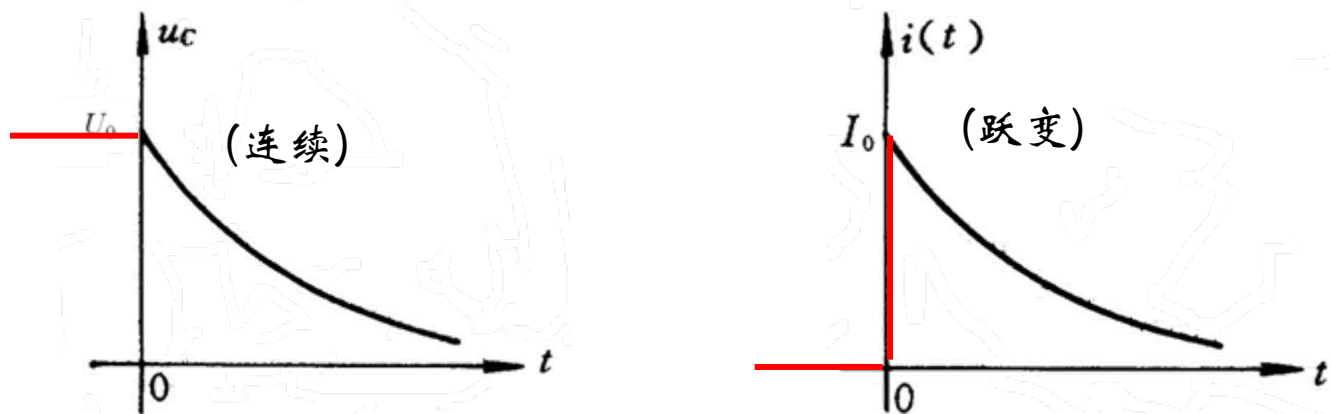


图5.3-2  $u_C$ 、 $i$ 、 $u_R$ 波形

电路在 $t < 0$ 时，处于稳定状态，电容上的电压为 $U_0$ 。当电路发生换路后，电容电压由 $u_C(0_+)$ 逐渐下降到零，我们把这一过程称为**过渡过程**，或称为**暂态(瞬态)过程**。当 $t \rightarrow \infty$ 时，过渡过程结束，电路又处于另一稳定状态。

### 2、讨论

(1) 时间常数：时间常数  $\tau$  的大小反映了电路过渡过程的进展速度。

① 当R、C参数一定时：

$$t = \tau \text{ 时, } u_C(\tau) = u_C(0_+)e^{-1} = 0.368u_C(0_+)$$

$$t = 4\tau \text{ 时, } u_C(4\tau) = u_C(0_+)e^{-4} = 0.0183 u_C(0_+)$$

理论上说，过渡过程需要无限长的时间才结束，不过在工程上一般认为经历(3—5)  $\tau$  的时间后就告结束。

### ② 对不同的 $R$ 、 $C$ 参数：

$\tau$ 越大，过渡过程的进展越慢，见下图所示。这是因为在一定的初始条件下， $C$ 越大，意味着电容储存的电场能量越多；而 $R$ 越大，意味着放电电流越小，衰减越慢。反之，则衰减越快。

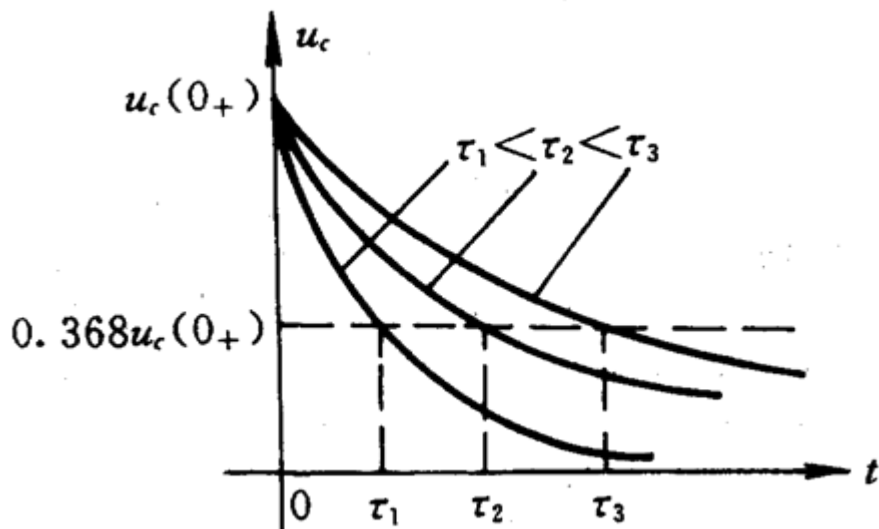


图5.3-3 不同时间常数的 $u_c$ 波形

### (2) 能量转换:

在放电过程中，电容不断放出能量为电阻所消耗；最后，原来储存在电容中的电场能量全部转换为电阻吸收而转换成热能，即

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} i^2(t) R dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \right)^2 R dt \\ &= \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{RC}t} dt = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_C \end{aligned}$$

### 二、一阶RL电路的零输入响应

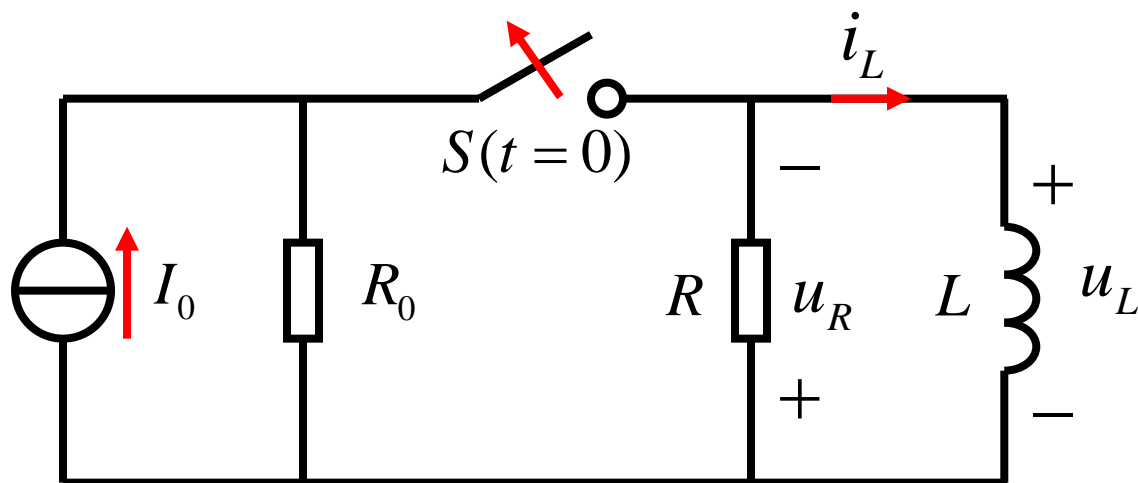


图5.3-4 一阶RL电路的零输入响应

#### 1、电路方程与解

由KVL得

$$u_R + u_L = 0$$

由VCR

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, u_R = Ri_L$$

于是**RL**电路方程为，

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = 0 \quad (5.3-6)$$

根据换路定律，得初始条件为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$$

**(5.3-6)**式为一阶齐次微分方程。其特征方程为

$$p + \frac{R}{L} = 0$$

特征根为

$$p = -\frac{R}{L}$$

故式**(5.3-6)**式的通解为

$$i_L(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$$

将初始条件代入上式，得

$$i_L(0_+) = A = I_0$$

零输入响应 $i_L(t)$ 为

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{Rt}{L}} = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t > 0 \quad (5.3-7)$$

电阻和电感上的电压分别为

$$u_R(t) = Ri_L = RI_0 e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t > 0 \quad (5.3-8)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t > 0 \quad (5.3-9)$$



令  $\tau=L/R$ ，它同样具有时间量纲，是 $RL$ 电路的时间常数。  
这样，(5.3-7)- (5.3-9) 式可表示为

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

$$u_R(t) = RI_0 e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

$$u_L(t) = -RI_0 e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

## 2、讨论

### (1) 时间常数：

标志过渡过程的快慢。

### (2) 能量转换：

电阻吸收的全部能量为，

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} i^2(t) R dt = \int_0^{\infty} (I_0 e^{-\frac{R}{L}t})^2 R dt \\ &= I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I_0^2 = W_L \end{aligned}$$

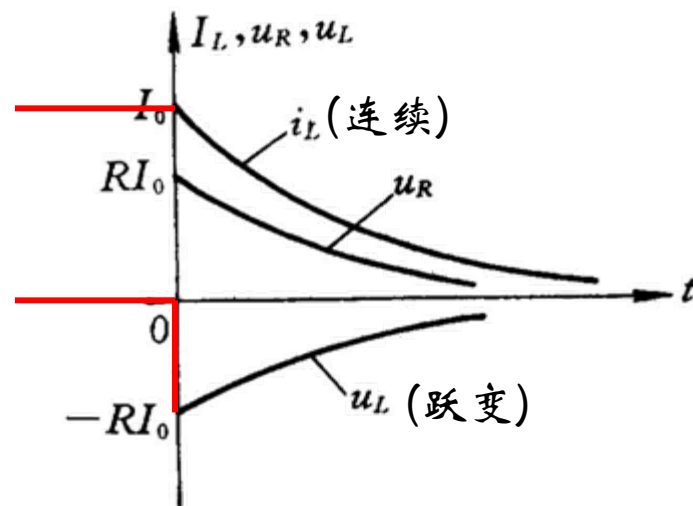


图5.3-5 波形

### 三、一阶电路零输入响应的一般公式：

在零输入情况下，电路中没有激励，所以对任何电压、电流的一阶电路方程必为齐次方程。一般形式如下，

$$\frac{dy_{zi}}{dt} + \frac{1}{\tau} y_{zi} = 0 \quad t \geq 0 \quad (5.3-10)$$

其通解为

$$y_{zi}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

设初始条件为 $t = 0$ 时， $y = y_{zi}(0_+)$ ，代入通解确定积分常数 $A$ ，

$$A = y_{zi}(0_+)$$

于是得到一阶电路的零输入响应的一般公式为

$$y_{zi}(t) = y_{zi}(0_+)e^{-t/\tau} \quad t > 0 \quad (5.3-11)$$

从物理意义上说，由于零输入响应是由动态元件的初始储能所产生的，随着时间 $t$ 的增加，动态元件的初始储能逐渐被电阻 $R$ 所消耗。因此，零输入响应总是按指数规律逐渐衰减到零。其解必为（5.3-11）形式。

### 本节小结:

1、零输入响应电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数。并且同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

2、一阶电路零输入响应解的一般公式：若零输入响应用 $y_{zi}(t)$ 表示之，其初始值为 $y_{zi}(0_+)$ ，那么

$$y_{zi}(t) = y_{zi}(0_+)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

3、零输入响应的衰减快慢取决于时间常数  $\tau$ ，其中 $RC$ 电路  $\tau = R_{eq}C$ ， $RL$ 电路  $\tau = L/R_{eq}$ ， $R_{eq}$  为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

4、一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。亦即电路初始状态增大 $k$ 倍，则由此引起的零输入响应也相应增大 $k$ 倍(齐次性)；若初值为 $y_{zi}^{(1)}(t)$ 时的零输入响应为 $y_{zi}^{(1)}(t) = y_{zi}^{(1)}(0_+)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$ ，初始值为 $y_{zi}^{(2)}(t)$ 时的零输入响应为 $y_{zi}^{(2)}(t) = y_{zi}^{(2)}(0_+)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$ ，则初值为 $y_{zi}^{(1)}(t) + y_{zi}^{(2)}(t)$ 时的零输入响应为（叠加性）

$$y_{zi}(t) = [y_{zi}^{(1)}(0_+) + y_{zi}^{(2)}(0_+)]e^{-t/\tau} = y_{zi}^{(1)}(0_+)e^{-t/\tau} + y_{zi}^{(2)}(0_+)e^{-t/\tau} = y_{zi}^{(1)}(t) + y_{zi}^{(2)}(t) \quad t \geq 0$$

例5.3.1-1 电路如图5.3-6(a) 所示。 $t < 0$ 时电路处于稳定， $t = 0$ 时开关S打开。求 $t > 0$ 时的电流 $i_L$ 和电压 $u_R$ 、 $u_L$ 。

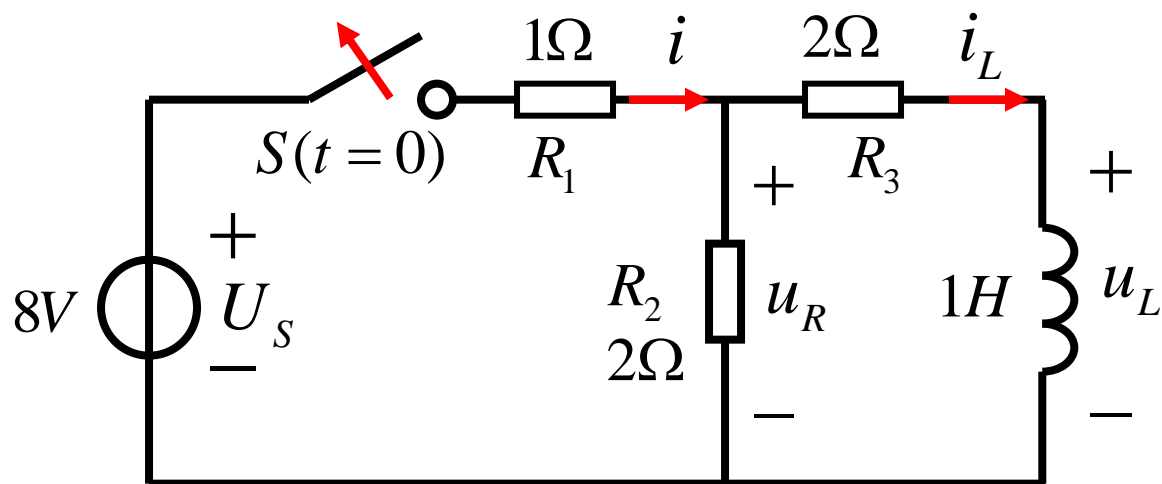


图5.3.1-6 例5.3.1-1用图

## 第五章 动态电路的时域分析

解 由于 $t < 0$ 时电路处于稳定，电感 $L$ 看作短路，故

$$i(0_-) = \frac{8}{2//2+1} = 4A$$

$$i_L(0_-) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i(0_-) = \frac{1}{2} \times 4 = 2A$$

根据换路定律，得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2A$$

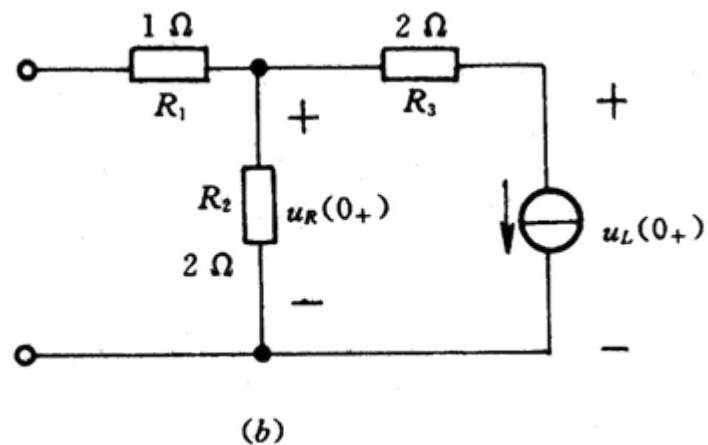
画出 $0_+$ 等效电路如图(b)所示，由图可得

$$u_R(0_+) = -R_2 i_L(0_+) = -4V$$

$$u_L(0_+) = -(R_2 + R_3) i_L(0_+) = -8V$$

时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R_2 + R_3} = \frac{1}{4} s$$



根据(5.3-11)式计算零输入响应，得

$$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-4t} \text{ A} \quad t > 0$$

$$u_R = u_R(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -4e^{-4t} \text{ V} \quad t > 0$$

$$u_L = u_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -8e^{-4t} \text{ V} \quad t > 0$$

需要说明一点，电压 $u_R$ 和 $u_L$ 也可以通过如下方法求得，即

$$u_R = -R_2 i_L = -2 \times 2e^{-4t} = -4e^{-4t} \text{ V} \quad t > 0$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -8e^{-4t} \text{ V} \quad t > 0$$

注意：若 $R_2$ 是代表一个电压表内阻，假设为**10k**，则

$$u_R = -R_2 i_L(t) = -10000 \times 2e^{-4t} = -20000e^{-4t} \text{ V}, \quad t > 0$$

$t=0^+$  时，电压达最大值 $u_R(0_+) = -20000\text{V}$ ，会造成电压表的损坏。说明 **$RL$** 电路在换路时会出现过电压现象，不注意会造成设备的损坏。

### 5.3.2 一阶电路的零状态响应

电路的零状态响应定义为：电路的初始储能为零，仅由 $t \geq 0$ 外加激励所产生的响应。

该响应描述动态元件的充电（磁）过程。

#### 一、一阶RC电路的零状态响应

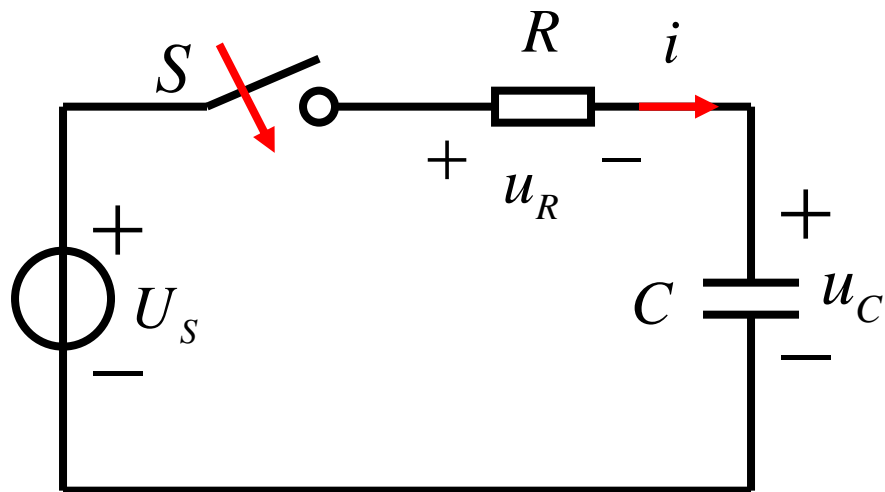


图5.4-1 一阶RC电路的零状态响应



### 1、电路方程与解

开关闭合后，列写KVL为

$$u_R + u_C = U_s$$

由元件VCR，

$$i = C \frac{du_C}{dt}, u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$$

代入前式并稍加整理，得

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{RC} U_s \quad (5.4-1)$$

为一阶非齐次微分方程。

其初始条件为

$$u_C(0_+) = 0 \quad (5.4-2)$$

## 第五章 动态电路的时域分析

---

非齐次方程的通解是相应齐次方程(homogeneous)的通解 $u_{Ch}$ 与非齐次方程(nonhomogeneous)的任意一个特解(particular) $u_{Cp}$ 之和,

$$u_C = u_{Ch} + u_{Cp} \quad (5.4-3)$$

相应齐次方程为,

$$\frac{du_{Ch}}{dt} + \frac{1}{RC} u_{Ch} = 0 \quad (5.4-4)$$

其特征方程为

$$p + \frac{1}{RC} = 0$$

特征根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

于是齐次方程的通解为

$$u_{Ch} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.4-5)$$

## 第五章 动态电路的时域分析

令非齐次方程的特解为常数K，代入非齐次方程中，有

$$\frac{1}{RC}K = \frac{1}{RC}U_s$$

$$u_{Cp} = K = U_s \quad (5.4-6)$$

将(5.4-5)、(5.4-6)代入(5.4-3)，得  
非齐次方程的通解为

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U_s \quad (5.4-7)$$

将初始条件(5.4-2)代入上式确定常数A，

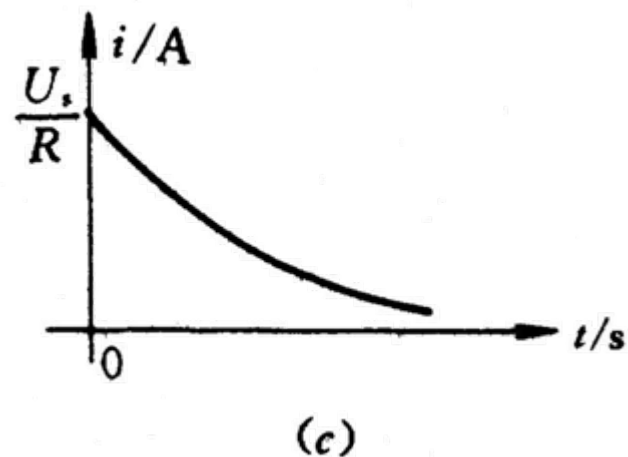
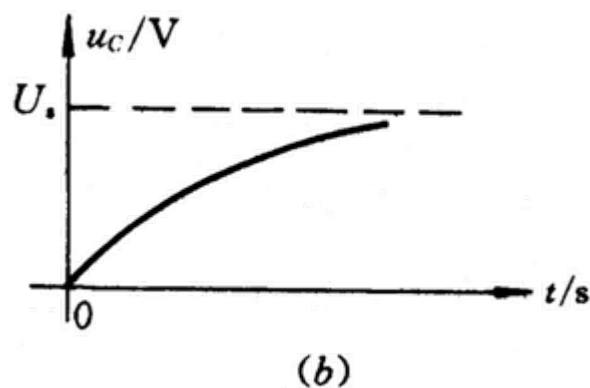
$$u_C(0_+) = A + U_s = 0 \quad (5.4-8)$$

$$A = -U_s \quad (5.4-9)$$

于是响应为

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})V \quad t \geq 0 \quad (5.4-10)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} A \quad t > 0 \quad (5.4-11)$$



### 2、讨论

(1) 响应变化的快慢，由时间常数  $\tau = RC$  决定； $\tau$  大，充电慢， $\tau$  小充电就快。

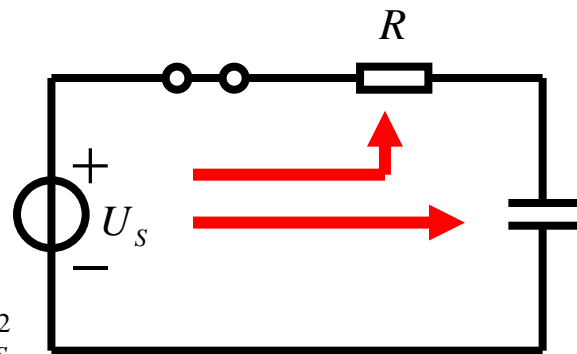
(2) 充电过程的能量关系为：

电容最终储存能量： $W_C = \frac{1}{2}CU_S^2$

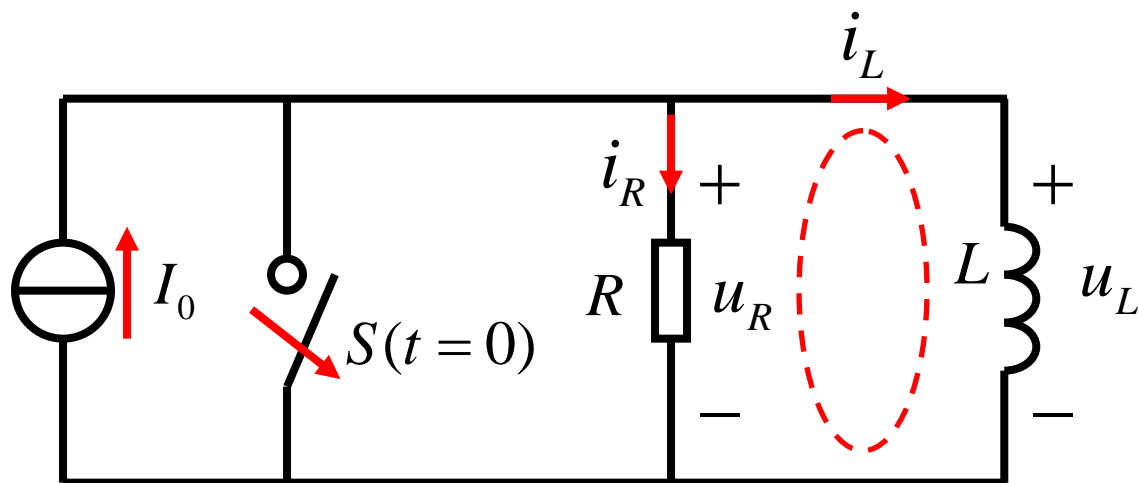
电源提供的能量为： $W = \int_0^\infty U_S i dt = U_S q = CU_S^2$

电阻消耗的能量为： $W_R = \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R} e^{-t/RC}\right)^2 R dt = \frac{1}{2}CU_S^2$

以上各式说明不论电路中电容 **C** 和电阻 **R** 的数值为多少，电源提供的能量总是一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中，即充电效率为 **50%**。电路中能量的分配如图所示。



### 二、一阶RL电路的零状态响应



5.4-2 一阶RL电路的零状态响应

#### 1、电路方程与解

换路后为双节点电路，对独立节点列写KCL方程，

$$i_R + i_L = I_s \quad (5.4-12)$$

KVL方程为，

$$-Ri_R + L\frac{di_L}{dt} = 0 \quad (5.4-13)$$

## 第五章 动态电路的时域分析

---

整理可得换路后 $RL$ 电路方程为,

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{R}{L}I_s \quad (5.4-14)$$

其初始条件为

$$i_L(0_+) = 0 \quad (5.4-15)$$

齐次方程特征根为

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

$\tau$  是电路的时间常数,

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (5.4-16)$$

齐次方程的通解为,

$$i_{Lh} = Ae^{-t/\tau} \quad (5.4-17)$$

设非齐次方程特解为常数K，带入方程(5.4-14)，得

$$\frac{R}{L} K = \frac{R}{L} I_s$$

于是非齐次方程得特解是，

$$i_{Lp} = K = I_s \quad (5.4-18)$$

非齐次方程的通解为，

$$i_L = i_{Lh} + i_{Lp} = Ae^{-t/\tau} + I_s \quad (5.4-19)$$

将初始值(5.4-15)代入上式，确定常数A，

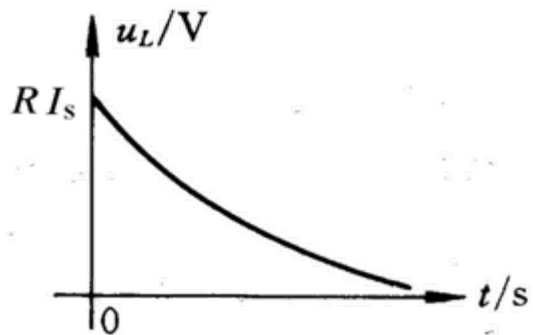
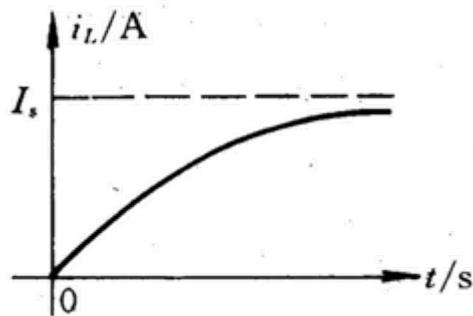
$$i_L(0_+) = A + I_s = 0, \quad A = -I_s$$

## 第五章 动态电路的时域分析

得到电路响应为，

$$i_L = I_s (1 - e^{-t/\tau}) \text{ A} \quad t \geq 0 \quad (5.4-20)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = RI_s e^{-t/\tau} \text{ V} \quad t > 0 \quad (5.4-21)$$





### 2、讨论

(1) 响应变化的快慢，由时间常数  $\tau = L/R$  决定； $\tau$  大，充电慢， $\tau$  小充电就快。

(2) 能量转换关系：

电感最终储存能量：

$$W_L = \frac{1}{2} Li_L^2(+\infty) = \frac{1}{2} LI_S^2$$

电阻消耗能量：

$$W_R = \int_0^{\infty} Ri_R^2 dt = \int_0^{\infty} RI_S^2 e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} LI_S^2$$

电源提供能量：

$$W = \int_0^{\infty} I_S u_L dt = \int_0^{I_S} I_S L di_L = LI_S^2$$

### 三、一阶电路电容电压、电感电流零状态响应的一般公式：

恒定（直流）激励下零状态电路的过渡过程实质上是动态元件的储能由零增长到某一定值的过程。因此，尽管一阶电路的结构和元件参数千差万别，但电路中表征电容或电感储能状态的变量 $u_C$ 和 $i_L$ 却都是从零值按指数规律逐渐增长至稳态值。可见，对于直流激励的一阶电路，状态变量(即 $u_C$ 和 $i_L$ )零状态响应一般可写为

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0 \quad (5.4-22a)$$

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0 \quad (5.4-22b)$$

上述稳态值可以从电容相当于开路、电感相当于短路的等效电路来求取，此电路称为终值电路。

其它电路变量(如 $i_C$ 、 $u_R$ 等)的零状态响应, 可在求得 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 之后, 根据替代定理将电容用电压为 $u_C(t)$ 的电压源替代, 电感用电流为 $i_L(t)$ 的电流源替代, 这样得到一个电阻电路, 求解该电路(用支路法、回路法、节点法等)即可求得其它电路变量的零状态响应。

### 本节小结:

1、零状态响应电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数。并且同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

2、一阶电路电容电压、电感电流零状态响应的一般公式为

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0$$

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0$$

3、零状态响应变化的快慢取决于时间常数  $\tau$ ，其中  $RC$  电路  $\tau = R_{eq}C$ ， $RL$  电路  $\tau = L/R_{eq}$ ， $R_{eq}$  为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

4、一阶电路的零状态响应与外加激励成正比，亦即在零状态电路中，当激励增大  $k$  倍，零状态响应也相应增大  $k$  倍。

若电路有多个激励，则相应是每个激励分别单独作用时产生响应的代数 sum。

这种关系称为零状态线性。它是线性电路中齐次性和可加性在零状态电路中的反映。

### 5.3.3 一阶电路的完全响应

假若电路的初始状态不为零，同时又有外加激励电源的作用，这时电路的响应称为**完全响应**。对于线性电路而言，从电路换路后的能量来源可以推论：电路的完全响应必然等于其零输入响应与零状态响应之和，即

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (5.5-1)$$

下面先以 $u_C(t)$ 为例说明，5.5节再给出一般证明。

**例5.3.3-1 RC串联电路的全响应：** 电路如图5.6-1所示。开关S未闭合前，电容初始状态 $u_C(0_-)=U_0$ ； $t=0$ 时，开关S闭合，电路与直流电源 $U_S$ 接通。

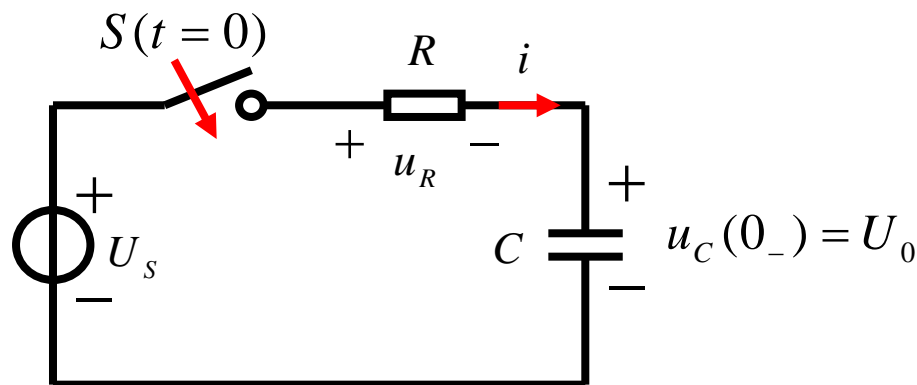


图5.5-1 RC全响应电路

解：以电容电压为响应变量的电路方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad t > 0 \quad (5.5-2)$$

$$u_C(0_-) = U_0$$

与零状态电路方程相比较，差别仅初始条件不同。

## 第五章 动态电路的时域分析

---

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

式中,

$$u_{Ch}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

$$u_{Cp}(t) = U_S$$

得

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + U_S$$

式中待定积分常数A由初始条件确定后易得,

电容电压的全响应为

$$u_C(t) = (U_0 - U_S)e^{-t/\tau} + U_S \quad t \geq 0 \quad (5.5-3)$$

电容电流全响应为

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{(U_0 - U_S)}{R} e^{-t/\tau} \quad t > 0 \quad (5.5-4)$$

图5.5-2分别画出了 $U_S$ 、 $U_0$ 均大于零时， $U_S > U_0$ 、 $U_S = U_0$ 、 $U_S < U_0$ 三种情况下 $u_C(t)$ 、 $i(t)$ 全响应的波形。由图可知： $U_S > U_0$ 时电容充电； $U_S < U_0$ 时电容放电； $U_S = U_0$ 时， $i=0$ ，电路换路后立即进入稳态。可见，只有电路初始值和终值不同时，才会有过渡过程。

图5.5-2 RC全响应电路电压、电流波形



将式（5.5-3）重新整理，可表示为

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} + U_S (1 - e^{-t/\tau}) \quad t \geq 0$$

(零输入响应)      (零状态响应)

$$= u_{Czi}(t) + u_{Czs}(t) \quad (5.5-5)$$

上式说明动态电路的全响应符合线性电路的叠加原理，即

**全响应 = 零输入响应 + 零状态响应**

## 2、全响应分解为固有响应与强制响应

全响应按其响应的能量来源不同可分解为零输入响应和零状态响应，也可根据微分方程通解和特解的形式或特性不同作如下分解。

观察式（5.5-3），第一项按指数规律变化是由电路自身特性所决定的，因此是电路的**固有响应或自然响应**；第二项与外部激励形式相同，因此称为**强制响应**。即按电路的响应形式来分，全响应可分解为

**全响应 = 固有响应（自然响应） + 强制响应**

### 3、全响应分解为暂态响应与稳态响应

按电路的响应特性来分，把  $t \rightarrow \infty$  时，衰减至零的分量，称为电路的**暂态响应**； $t \rightarrow \infty$  时保留下来的分量称为**稳态响应**。  
即

$$\text{全响应} = \text{暂态响应} + \text{稳态响应}$$

在换路后恒定激励且  $R > 0$ （有损耗的电路）的情况下，一阶电路的固有响应就是暂态响应，强制响应就是稳态响应。

$$u_C(t) = (U_0 - U_S)e^{-t/\tau} + U_S \quad t \geq 0 \quad (5.5-3)$$

（固有响应）

（强制响应）

（暂态响应）

（稳态响应）

### 5.5 动态电路的一般分析方法 (建立动态电路方程的一般方法)

迄今为止，我们只分析了单回路和单节偶电路。本节讨论动态电路方程的一般建立方法，包括复杂一阶电路、二阶和高阶电路的电路方程的建立方法。

### 一、动态电路的一般分析方法

采用电路方程法，列写每个待求变量的方程，分别求解

**例5.4-1** 电路如图5.5-3(a)所示。在开关闭合前，电路已处于稳定。当 $t=0$ 时开关闭合。求换路后的 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $i_C(t)$ 。

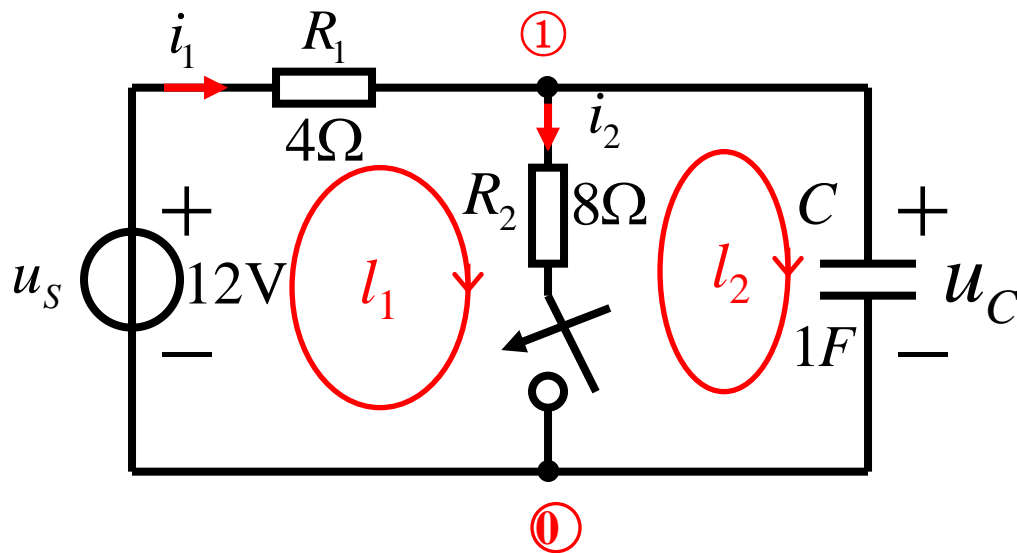


图5.5-3 例5.5-2用图

解一：采用电路方程法，列写每个待求变量的方程，分别求解。

(1) 建立换路后(即 $t>0$ )的电路方程。

采用支路电流法，选取独立回路如图。

对独立节点 $n_1$ 列写KCL方程：

$$i_1 - i_2 - i_C = 0 \quad \textcircled{1}$$

对回路 $l_1$ 、 $l_2$ 列写KVL方程：

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_s \quad \textcircled{2}$$

$$-R_2 i_2 + u_C = 0 \quad \textcircled{3}$$

动态元件C的VCR，

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{or} \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad \textcircled{4}$$

由以上方程可建立以 $u_C$ 、 $i_C$ 、 $i_1$ 、 $i_2$ 为变量的微分方程。

①式带入②消去 $i_1$ ，有

$$(R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_C = u_s \quad (5)$$

③式带入⑤消去 $i_2$ ，有

$$\frac{(R_1 + R_2)}{R_2} u_C + R_1 i_C = u_s \quad (6)$$

④式 $i_C$ 带入⑥并整理，得到关于 $u_C$ 的电路方程为

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} u_C = \frac{1}{R_1 C} u_s \quad (7)$$

即

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{3}{8} u_C = 3$$

③带入⑤消去 $i_2$ ,

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} u_C + R_1 i_C = u_s \quad (8)$$

并将④式 $u_C$ 带入⑧式, 两边求导, 得以 $i_C$ 为变量的电路方程为

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_C = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt} \quad \text{即} \quad \frac{di_C}{dt} + \frac{3}{8} i_C = 0$$

类似地, 从①—④式可建立变量 $i_1$ 、 $i_2$ 的电路方程,

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_1 = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s \quad \text{即} \quad \frac{di_1}{dt} + \frac{3}{8} i_1 = \frac{3}{8}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s \quad \text{即} \quad \frac{di_2}{dt} + \frac{3}{8} i_2 = \frac{3}{8}$$

## 第五章 动态电路的时域分析

---

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} u_C = \frac{1}{R_1 C} u_s$$

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_C = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_1 = \frac{1}{R_1} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C} u_s$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{3}{8} u_C = 3$$

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{3}{8} i_C = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{3}{8} i_1 = \frac{3}{8}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{3}{8} i_2 = \frac{3}{8}$$



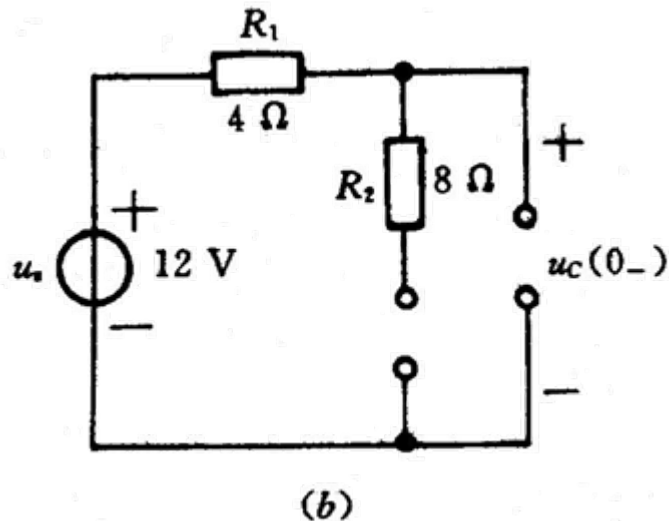
### 2、求初始条件:

1) 求  $u_C(0_+)$ 。根据换路定理， $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ ，故也就是求开关闭合前的电容电压  $u_C(0_-)$ 。由于开关闭合前电路已处于稳定， $u_C(t)$  不再变化， $du_C/dt=0$ ，故  $i_C=0$ ，电容可看作开路。 $t=0$ -时电路如图(b)所示，由图(b)可得

$$u_C(0_-) = 12V$$

根据换路定律有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 12V$$

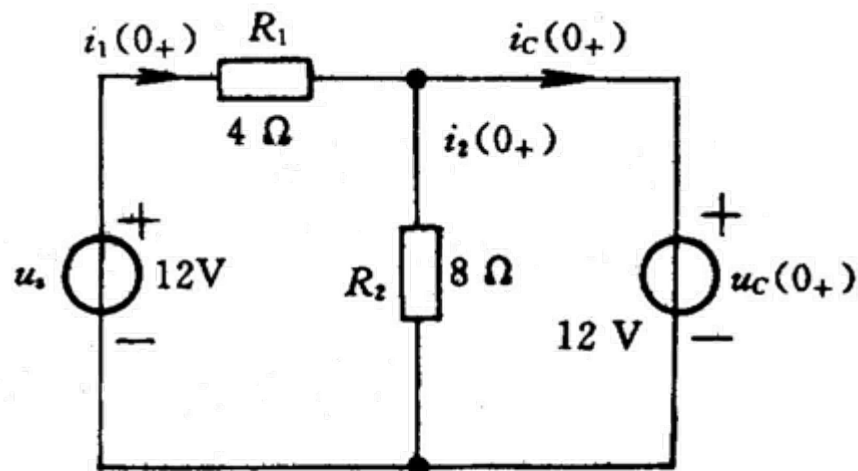


(b)  
 $t=0$ -时刻电路

## 第五章 动态电路的时域分析

2) 画出 $0_+$ 等效电路。如图(c)，其中电容用12V电压源替代。

3) 由 $0_+$ 等效电路，计算各电流的初始值。由图(c)可知



(c)  $t=0_+$ 时刻电路

$$i_1(0_+) = \frac{U_s - u_C(0_+)}{R_1} = \frac{12 - 12}{4} = 0$$

$$i_2(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_2} = \frac{12}{8} = 1.5A$$

$$i_C(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = -1.5A$$

电路方程和初始值列写如下，

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{du_C}{dt} + \frac{3}{8}u_C = 3 & u_C(0_+) = 12V \\ \frac{di_C}{dt} + \frac{3}{8}i_C = 0 & i_C(0_+) = -1.5A \\ \frac{di_1}{dt} + \frac{3}{8}i_1 = \frac{3}{8} & i_1(0_+) = 0 \\ \frac{di_2}{dt} + \frac{3}{8}i_2 = \frac{3}{8} & i_2(0_+) = 1.5A \end{array} \right.$$

### 3、解电路方程：

根据上述电路方程和初值，即可求解各变量。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C(t) = 4e^{-\frac{3}{8}t} + 8 \text{ V} \\ i_C(t) = -1.5e^{-\frac{3}{8}t} \text{ A} \\ i_1(t) = -e^{-\frac{3}{8}t} + 1 \text{ A} \\ i_2(t) = 0.5e^{-\frac{3}{8}t} + 1 \text{ A} \end{array} \right. \quad (\text{全响应})$$

实际上，不必要求解每个微分方程，只要求解出 $u_C(t)$ （对 $L$ 电路只需求 $i_L(t)$ ），即可从式①—③（KCL、KVL和动态元件VCR）求得其它量。

**例 5.4-2** 电路如图5.5-9(a)所示,  $t=0$ 时开关S由1板向2, 在 $t<0$ 时电路处于稳定。求 $t>0$ 的 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

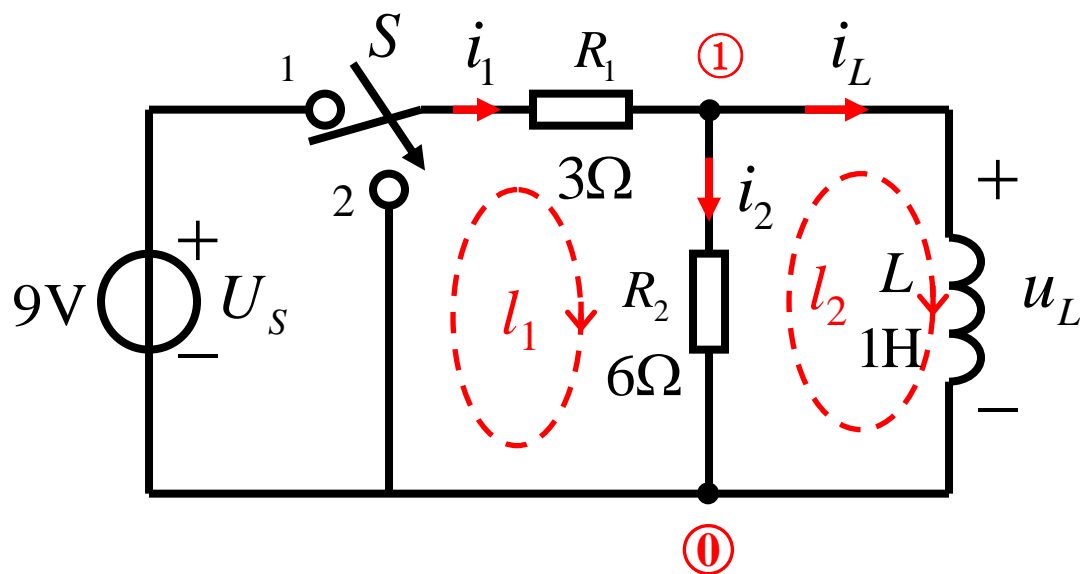


图5.5-9 例5.5-8用图

(解一)

(1) 建立换路后(即 $t>0$ )的电路方程。采用支路电流法，选取独立回路如图。

$$\begin{array}{llll} \text{KCL } n_1: & i_1 - i_2 - i_L = 0 & \text{①} \\ \text{KVL } l_1: & R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0 & \text{②} \\ & l_2: & -R_2 i_2 + u_L = 0 & \text{③} \\ \text{电感VCR:} & u_L = L \frac{di_L}{dt} \text{ or } i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt & \text{④} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \end{array}} \right\}$$

类似例5.5-2，可得，

## 第五章 动态电路的时域分析

---

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} i_L = 0$$

$$\frac{du_L}{dt} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} u_L = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} i_1 = 0$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} i_2 = 0$$

即,

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0$$

$$\frac{du_L}{dt} + 2u_L = 0$$

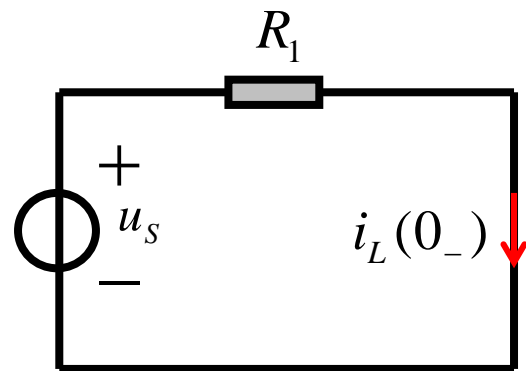
$$\frac{di_1}{dt} + 2i_1 = 0$$

$$\frac{di_2}{dt} + 2i_2 = 0$$

### (2)求初始值。

1) 由 $t < 0$ 时的电路（图b），求 $i_L(0_-)$ 。

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1} = \frac{9}{3} = 3A$$



(b)  $t=0_-$ 时刻电路

2) 画出 $0_+$ 等效电路，如图c。

根据换路定律，有  $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3A$

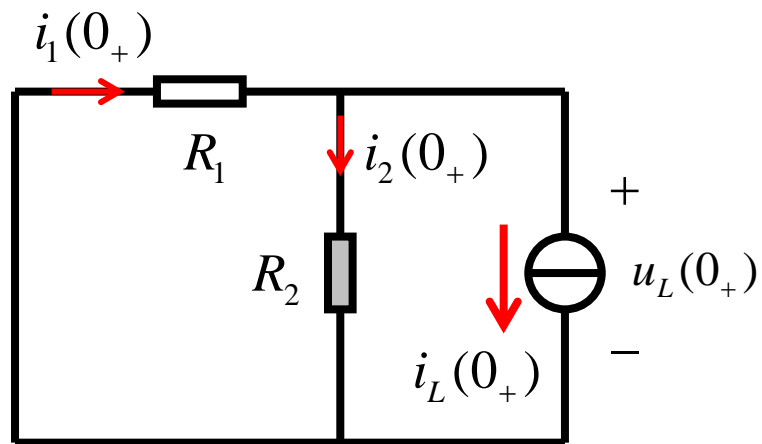
3) 由 $0_+$ 等效电路，计算各初始值。

由图(c)可知

$$i_1(0_+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L(0_+) = \frac{6}{3 + 6} \times 3 = 2A$$

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_L(0_+) = 2 - 3 = -1A$$

$$u_L(0_+) = R_2 i_2(0_+) = 6 \times (-1) = -6V$$



(c)  $t=0_+$ 时刻电路



### (3)求解微分方程。

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \quad i_L(0_+) = 3A$$

$$\frac{du_L}{dt} + 2u_L = 0 \quad u_L(0_+) = -6V$$

$$\frac{di_1}{dt} + 2i_1 = 0 \quad i_1(0_+) = 2A$$

$$\frac{di_2}{dt} + 2i_2 = 0 \quad i_2(0_+) = -1A$$

解得:



$$i_L(t) = 3e^{-2t} A$$

$$u_L(t) = -6e^{-2t} V$$

$$i_1(t) = 2e^{-2t} A$$

$$i_2(t) = -e^{-2t} A$$

(零输入响应)

实际上, 不必要求解每个微分方程, 只要求解出  $u_C(t)$  (对  $L$  电路只需求  $i_L(t)$  ), 即可从式①— ③ (KCL、KVL和动态元件VCR) 求得其它量。

**例 5.4-3** 电路如图(a)所示,  $R_1=4\ \Omega$ ,  $R_2=2\ \Omega$ ,  $R_3=4\ \Omega$ ,  $U_S=6\text{V}$ ,  $L=4\text{H}$ ,  $t=0$ 时开关S闭合。试求 $i_L(t)$ 和 $u_2$ 的变化规律。

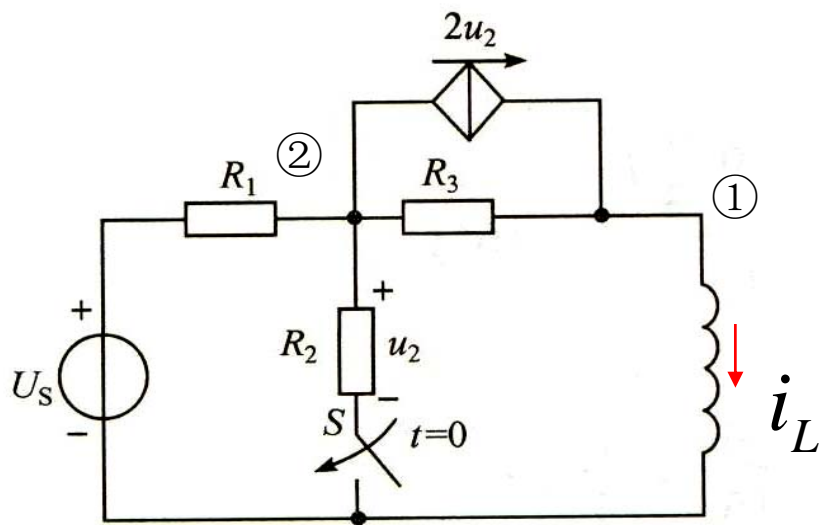


图 5.5-10 例 5.5-4 用图

(解一)

用节点法列换路后的电路方程。

$$\frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 = 2u_2 - i_L \quad (1)$$

$$-\frac{1}{4}u_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)u_2 = \frac{6}{4} - 2u_2 \quad (2)$$

$$u_1 = 4 \frac{di_L}{dt} \quad (L \text{ 的 VCR}) \quad (3)$$

## 第五章 动态电路的时域分析

③→①、②消去 $u_1$

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} - \frac{9}{4}u_2 + i_L = 0 & \text{④} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{di_L}{dt} + 3u_2 = \frac{3}{2} & \text{⑤} \end{cases}$$

⑤解出 $u_2 \rightarrow$  ④，整理得到以 $i_L(t)$ 为变量的电路方程，

$$\frac{di_L}{dt} + 4i_L = \frac{9}{2} \quad \text{⑥}$$

$$\text{④} + \text{⑤}, \text{ 得 } \frac{3}{4}u_2 + i_L = \frac{3}{2}, \text{ 解出 } i_L = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}u_2 \quad \text{⑦}$$

$$\text{⑦式微分得, } \frac{di_L}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{du_2}{dt} \quad \text{⑧}$$

$$\text{⑦、⑧代入④, 得以 } u_2 \text{ 为变量得电路方程 } \frac{du_2}{dt} + 4u_2 = 2$$

$$\frac{di_L}{dt} + 4i_L = \frac{9}{2}$$

$$\frac{du_2}{dt} + 4u_2 = 2$$

(2) 求初值:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_3} = \frac{6}{8}$$

(3) 求解电路方程,

$$i_L(t) = -\frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{9}{8} A = -0.375e^{-4t} + 1.125 A$$

将 $i_L(t)$ 代入①、②、③式, 解得,

$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} e^{-4t} \right) = 0.5(1 + e^{-4t}) V \quad (\text{全响应})$$

### 二、先求解状态变量，再求解非状态变量：

**解二：**先求解状态变量 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ ，再求解非状态变量：

求解过程两点简化：

➤在求得 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 之后，根据替代定理将电容用电压为 $u_C(t)$ 的电压源替代、电感用电流为 $i_L(t)$ 的电流源替代，这样得到一个电阻电路，求解该电路即可求得其它电路变量。

而列写状态变量 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 方程和求解其初始条件也变得简单。

➤对**一阶电路**，当列写以 $u_C$ 或 $i_L$ 为变量的电路方程时，可先将动态元件（C或L）以外有源二端网络等效为用戴维宁/诺顿电路，使电路成为 $R_C$ 或 $R_L$ 单回路/双节点电路，再列写电路方程。这样**电路方程列写也变得简单。**

对一阶电路（只含一个动态元件），当列写以 $u_C$ 或 $i_L$ 为变量的电路方程时，总可先将动态元件C或L之外的有源或无源二端网络等效为用戴维宁/诺顿电路，使电路成为RC或RL单回路或者单节偶（双节点）电路，再列写电路方程。

由于 $u_C$ 和 $i_L$ 是状态变量，只要求出 $u_C$ 或 $i_L$ ，其它任意支路电流、电压均可由该两个状态变量求得。

**解法2步骤：** 以例5.4-1为例，

1、求解状态变量：

1) 列写状态变量的电路方程：同前

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{3}{8}i_C = 0$$

对一阶电路，可先等效变换再列写状态变量的电路方程。

2) 求状态变量初始条件：同前（换路定理）

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 12V$$

3) 求解状态变量：同前

$$u_C(t) = 4e^{-\frac{3}{8}t} + 8 \text{ V}$$

### 2、求解非状态变量：

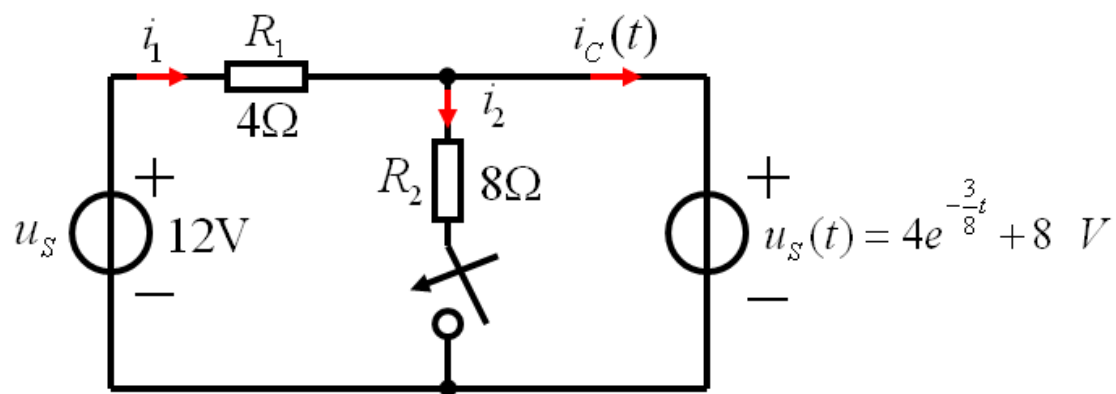
在求得  $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$  之后，回到原电路，根据替代定理将电容用电压为  $u_C(t)$  的电压源替代、电感用电流为  $i_L(t)$  的电流源替代，这样得到一个电阻电路，求解该电路即可求得其它电路变量。

易得

$$i_2 = \frac{u_s(t)}{R_2} = 0.5e^{-\frac{3}{8}t} + 1A$$

$$i_1 = \frac{12 - u_s(t)}{R_1} = 1 - e^{-\frac{3}{8}t} A$$

$$i_C = i_1 - i_2 = -1.5e^{-\frac{3}{8}t} A$$



其实就是回到电路方程①-③求其它变量。



(例5.4-1) 电路如图5.5-3(a)所示。在开关闭合前，电路已处于稳定。当 $t=0$ 时开关闭合。求换路后的 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $i_C(t)$ 。

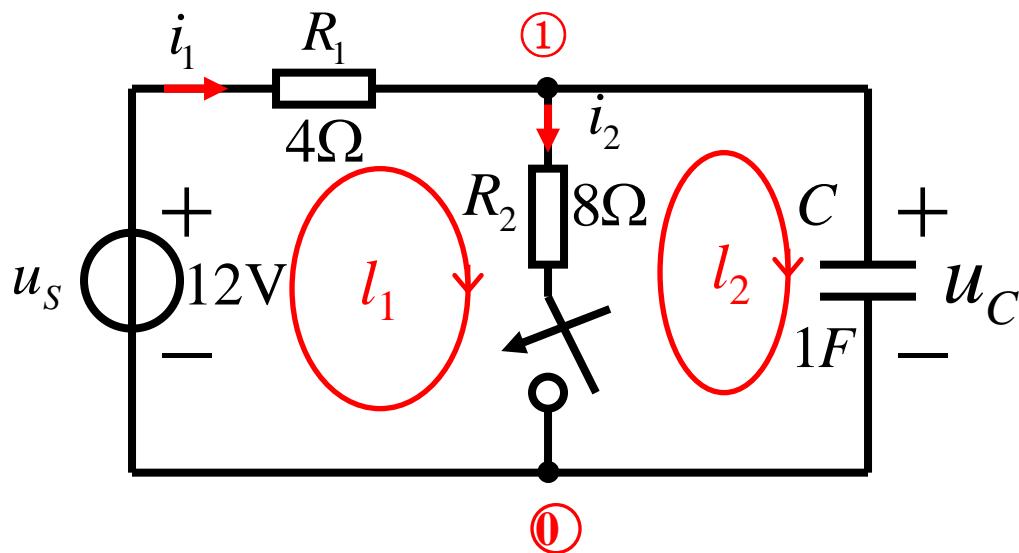


图5.5-3 例5.5-2用图

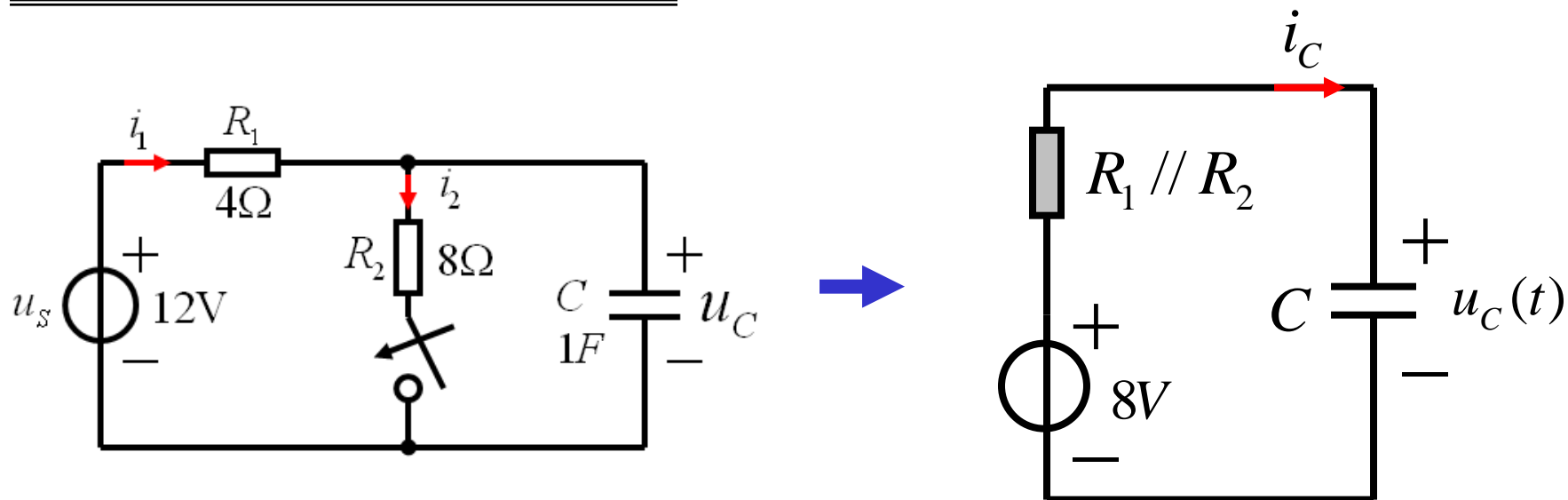
**解二：**先求出 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ ；

在求得 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 之后，根据替代定理将电容用电压为 $u_C(t)$ 的电压源替代、电感用电流为 $i_L(t)$ 的电流源替代，这样得到一个电阻电路，求解该电路即可求得其它电路变量。

**(1)求 $u_C(t)$ ：**

对一阶电路，当列写以 $u_C$ 或 $i_L$ 为变量的电路方程时，可先将动态元件（C或L）以外有源二端网络等效为用戴维宁/诺顿电路，使电路成为RC或RL单回路/双节点电路，再列写电路方程。

## 第五章 动态电路的时域分析



将动态元件C之外的部分用戴维宁等效如图b，则

$$u_C(t) + R_1 // R_2 i_C(t) = 8$$

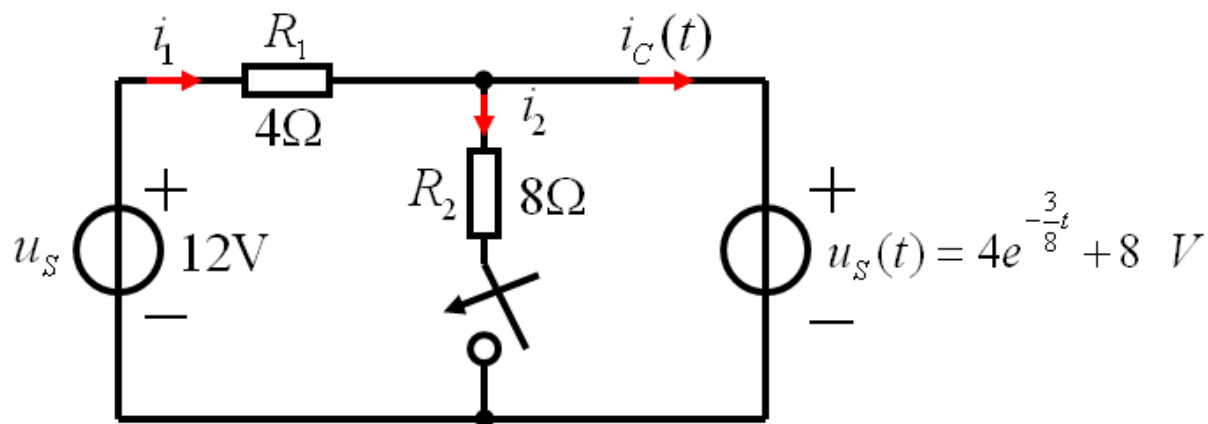
$$u_C(t) + \frac{8}{3} \frac{du_C}{dt} = 8$$

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} + \frac{3}{8} u_C = 3 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = 12 \end{cases}$$

$$\rightarrow u_C(t) = 4e^{-\frac{3}{8}t} + 8 \text{ V}$$

(2)求 $i_C$ 、 $i_1$ 、 $i_2$ 。

回到原电路a，将电容视为电压源，（电感视为电流源），电路成为一电阻电路。



易得

$$i_2 = \frac{u_s(t)}{R_2} = 0.5e^{-\frac{3}{8}t} + 1 \text{ A}$$

$$i_1 = \frac{12 - u_s(t)}{R_1} = 1 - e^{-\frac{3}{8}t} \text{ A}$$

$$i_C = i_1 - i_2 = -1.5e^{-\frac{3}{8}t} \text{ A}$$

(例 5.4-2) 电路如图5.5-9(a)所示,  $t=0$ 时开关S由1板向2, 在 $t<0$ 时电路处于稳定。求 $t>0$ 的 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

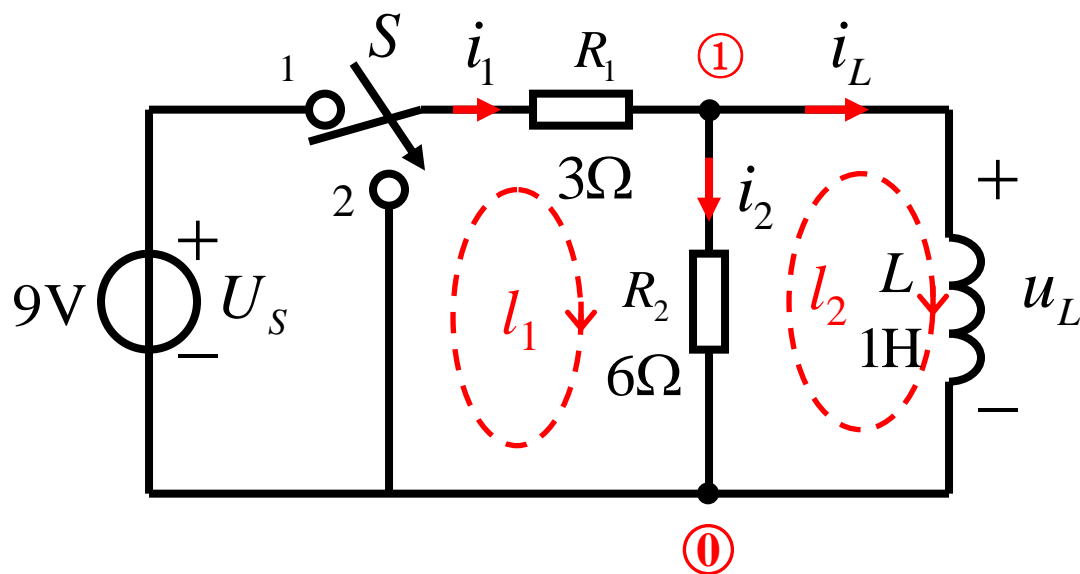
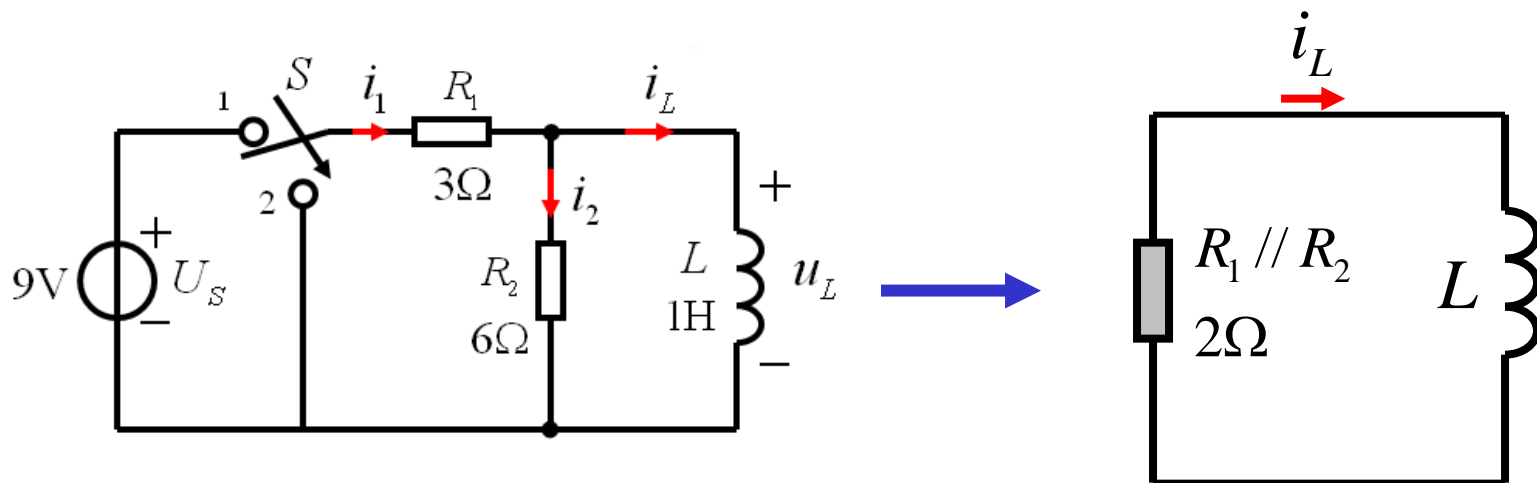


图5.5-9 例5.5-8用图

## 第五章 动态电路的时域分析

解二：

(1) 先求 $i_L(t)$ 。



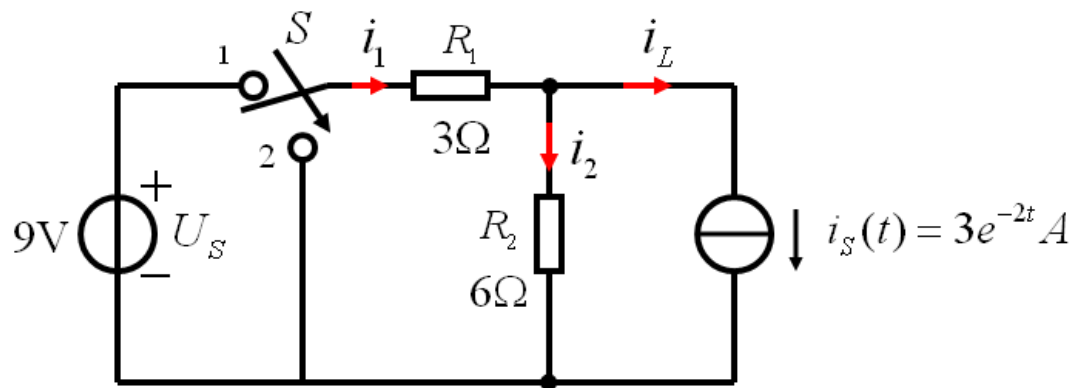
$$u_L(t) + R_1 // R_2 i_L(t) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} + 2i_L(t) = 0 \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{9}{3} = 3A \end{cases}$$



$$i_L(t) = 3e^{-2t} A$$

(2) 回到原电路，将 $i_L(t)$ 用电流源替代得电阻电路，求其它变量。



根据分流公式，有

$$i_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_S(t) = 2e^{-2t} \text{ A}$$

$$i_2(t) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} i_S(t) = -e^{-2t} \text{ A}$$

## 第五章 动态电路的时域分析

(例 5.4-3) 电路如图(a)所示,  $R_1=4\ \Omega$ ,  $R_2=2\ \Omega$ ,  $R_3=4\ \Omega$ ,  $U_S=6\text{V}$ ,  $L=4\text{H}$ ,  $t=0$ 时开关S闭合。试求 $i_L(t)$ 和 $u_2$ 的变化规律。

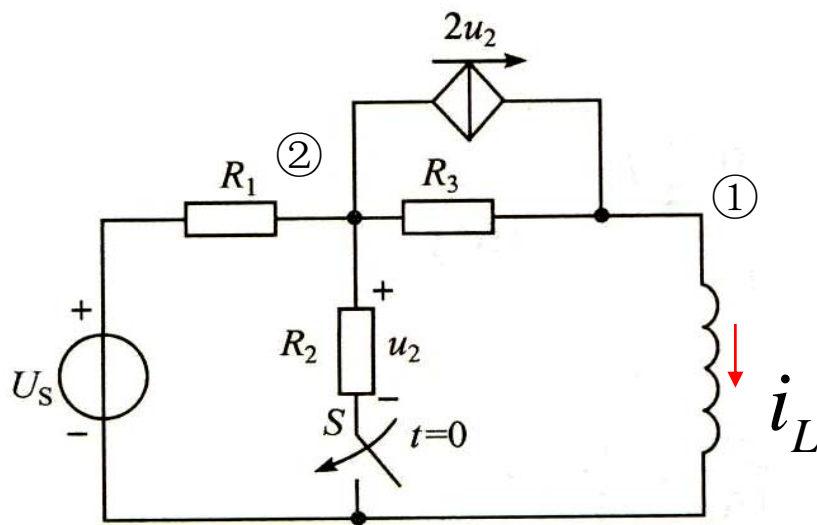
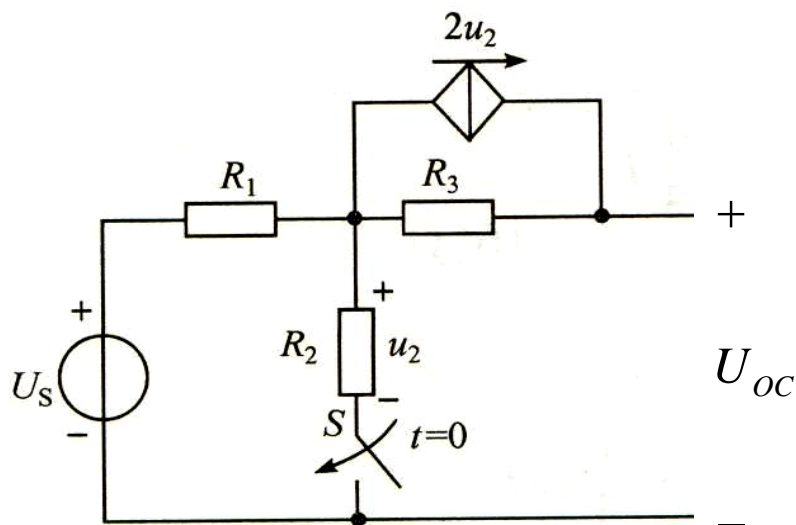


图5.5-10 例5.5-4用图



## 第五章 动态电路的时域分析

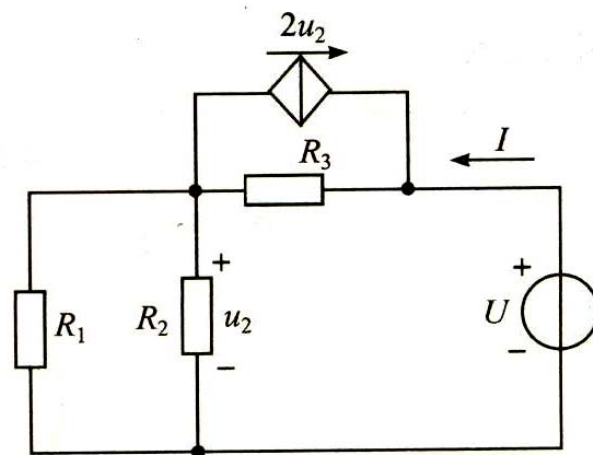
**解二：** 将动态元件C之外电路用戴维宁等效。先求 $i_L(t)$ ，再回到等效变换前的原电路，将电感用电流源替代，求解其他量。



$$U_{OC} = R_3 \cdot (2u_2) + u_2$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S = \frac{2}{4 + 2} \times 6 = 2V$$

$$U_{OC} = (2R_3 + 1)u_2 = (2 \times 4 + 1) \times 2 = 18V$$

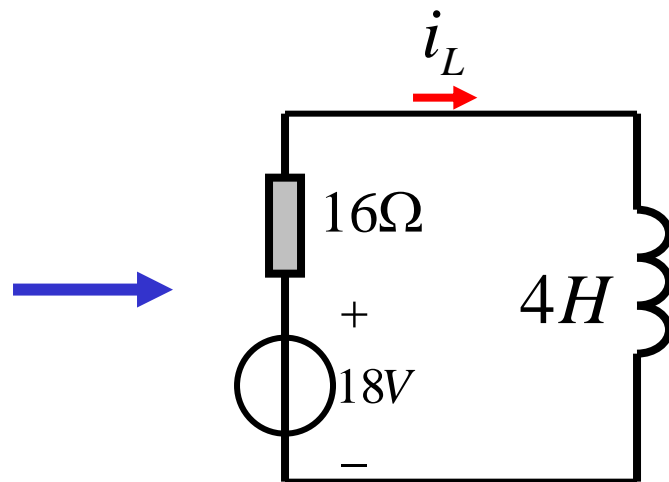
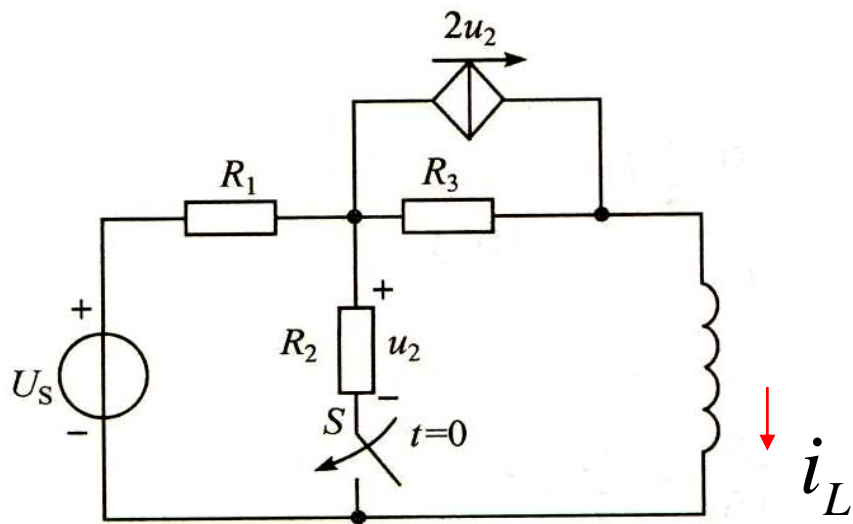


$$U = (I + 2u_2)R_3 + u_2 = 4I + 9u_2$$

$$u_2 = (R_1 // R_2)I = \frac{4 \times 2}{4 + 2} I = \frac{4}{3} I$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4I + 9 \times \frac{4}{3} I}{I} = 16\Omega$$

## 第五章 动态电路的时域分析



$$16i_L(t) + u_L(t) = 18$$

$$16i_L(t) + 4 \frac{di_L}{dt} = 18$$

$$\frac{di_L}{dt} + 4i_L(t) = \frac{9}{2}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_3} = \frac{6}{4 + 4} = \frac{3}{4} \text{ A}$$

$$i_L(t) = -\frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{9}{8} \text{ A} = -0.375e^{-4t} + 1.125 \text{ A}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 4 \times 4 \times 0.375e^{-4t} = 6e^{-4t} \text{ (V)}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= R_3[i_L(t) - 2u_2(t)] + u_L(t) \\ &= 4 \times i_L(t) - 8u_2(t) + 6e^{-4t} \end{aligned}$$

$$u_2(t) = 0.5(1 + e^{-4t}) \text{ (V)}$$

### 小结:

#### 一、电路方程（微分方程）法分析动态电路过程:

- 1、列写电路方程;
- 2、求初始值（ $0_+$ 值）;
- 3、求解电路方程（微分方程）：
  - ①求解相应的齐次方程的一般解;
  - ②求非齐次方程的任一特解;
  - ③由初始条件确定积分常数。

### 具体步骤:

#### 1、列写动态电路方程的简要步骤如下:

- ①画出换路后( $t > 0$ )电路, 用支路电流法、回路法或节点法列写KCL、KVL方程, 动态元件L和C的VCR单独列写;
- ②对列出的方程组消元(消元过程中需要对某些方程微分), 得出所求变量的微分电路方程。

#### 2、求初始值的简要步骤如下:

- ①由 $t < 0$ 时的电路, 求出 $u_C(0_-)$ ,  $i_L(0_-)$ , 亦即 $u_C(0_+)$ ,  $i_L(0_+)$ 。  
 $t < 0$ 电路一般处于稳态, 电容相当于开路、电感相当于短路, 因此是电阻电路。
- ②画出 $0_+$ 等效电路: 电容用电压源或短路替代、电感用电流源或开路替代, 因此 $0_+$ 等效电路是电阻电路;
- ③由 $0_+$ 等效电路, 求出各电流、电压的初始值。

### 3、求解动态电路方程（微分方程）的简要步骤如下：

根据线性微分方程经典求解方法求解。

\*对于较复杂的动态电路和高阶电路，常在s域（即用Laplace变换）进行分析。

## 二、先求状态变量，再求非状态变量：

1、求状态变量：（一阶电路等效为单回路求解）

2、求非状态变量：电容用电压源替代、电感用电流源替代，得到电阻电路。由此电阻电路求解非状态变量

## 三、一阶电路的时域分析法：

1) 电路方程法：

- 1、将C、L之外的电路用戴维宁/诺顿定理等效；
- 2、求解 $u_C(t)$ 或 $i_L(t)$ ；
- 3、求解其它 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。

2) 对于一阶电路，可使用三要素法求解。

### 5.6 一阶电路的三要素公式

本节推导一阶电路任意电流、电压响应的一般公式。

#### 1、任意激励下的响应：

在线性非时变一阶电路中，**设 $t=0$ 时换路**。换路后电路任一响应与激励之间的关系均可用一个一阶常系数线性微分方程来描述，其一般形式为

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bf(t) \quad t > 0 \quad (5.6-1)$$

其中 $y(t)$ 为电路的任一响应， $f(t)$ 是与外激励有关的时间 $t$ 的函数， $a$ 、 $b$ 为实常数。

## 第五章 动态电路的时域分析

响应 $y(t)$ 的完全解为该微分方程相应的齐次方程的通解与非齐次方程特解之和，即响应为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad t > 0 \quad (5.6-2)$$

其中  $y_h(t) = Ae^{-t/\tau}$ ,  $y_p(t)$  的形式由外激励决定，得

$$y(t) = y_p(t) + Ae^{-t/\tau} \quad (5.6-3)$$

设响应的初始值为 $y(0_+)$ ，将 $t=0_+$ 代入上式，得

$$A = y(0_+) - y_p(0_+) \quad (5.6-4)$$

将A代入式（5.6-3），得

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-t/\tau} \quad t > 0 \quad (5.6-5)$$

上式为求取**一阶电路任意激励下，任一响应的公式**，式中 $y_p(0_+)$ 为非齐次方程特解或强制响应在 $t=0_+$ 时的值。

### 2、直流激励下的响应：

当换路后在直流激励作用下，式(5.6-5)中非齐次方程特解  $y_p(t)$  为一常数，即响应的稳态值  $y(\infty)$ 。显然有  $y_p(t) = y(\infty) = y_p(0^+)$  故式(5.6-5)可表示为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0^+) - y(\infty)]e^{-t/\tau} \quad t > 0 \quad (5.6-6)$$

上式为**恒定激励下一阶电路任一响应的公式**。式中  $y(0^+)$ 、 $y(\infty)$  和  $\tau$  分别代表响应的初始值、稳态值（也称终值）和时间常数，称为恒定激励下一阶电路的**三要素**。

直接根据式(5.6-6)求解直流激励下一阶电路响应的方法称为**三要素法**。相应地式(5.6-6)则称为**三要素公式**。



### 利用三要素公式需注意的问题：

- ① 三要素公式适用于直流激励下一阶电路任意支路的电流或任意两端的电压(包括某点的电位)；
- ② 三要素公式不仅适用于计算全响应，同样也适用于求解零输入响应和零状态响应。

这里着重说明一下计算 $y(0^+)$ 所需的 $t \rightarrow 0^+$ 的等效图，即初始值电路。在初始值电路中，有两类激励：一类是内激励（即用 $u_C(0^+)$ 替代的电压源或用 $i_L(0^+)$ 替代的电流源），另一类是外激励。仅由内激励产生的为 $y_{zi}(0^+)$ ，仅由外激励产生的为 $y_{zs}(0^+)$ 。根据叠加原理，有

$$y(0^+) = y_{zi}(0^+) + y_{zs}(0^+) \quad (5.6-7)$$

➤ 当求零输入响应 $y_{zi}(t)$ 时，外激励置零，则必然有 $y(\infty) \rightarrow 0$ ，代入三要素公式，得

$$y_{zi}(t) = 0 + [y_{zi}(0^+) - 0]e^{-t/\tau} = y_{zi}(0^+)e^{-t/\tau} \quad t > 0$$

上式与式(5.3-10)相同。

➤ 当求零状态响应 $y_{zs}(t)$ 时，内激励置零，代入三要素公式，得

$$y_{zs}(t) = y(\infty) + [y_{zs}(0^+) - y(\infty)]e^{-t/\tau} \quad t > 0 \quad (5.6-8)$$

这就是零状态响应的一般公式。

如果求解的是电容电压或电感电流的零状态响应，则必然有 $u_C(0^+) = 0$ 或 $i_L(0^+) = 0$ ，则与式(5.4-22a)或式(5.4-22b)一致。即，

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0$$

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-t/\tau}), \quad t > 0$$

## 第五章 动态电路的时域分析

根据以上讨论，三要素公式表达为零状态响应与零输入响应之和的一般形式为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(\infty) + [y(0^+) - y_p(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= y_p(\infty) + [y_{zi}(0^+) + y_{zs}(0^+) - y_p(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= \underbrace{y_{zi}(0^+)e^{-t/\tau}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{y_p(\infty) + [y_{zs}(0^+) - y_p(\infty)]e^{-t/\tau}}_{\text{零状态响应}} \quad t > 0 \end{aligned} \quad (5.6-9)$$

对于状态变量，即电容电压和电感电流，则为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 e^{-t/\tau} + U_S (1 - e^{-t/\tau}) \\ &= u_C(0^+) e^{-t/\tau} + u_C(\infty) (1 - e^{-t/\tau}) \quad t \geq 0 \\ &= u_{Czi}(t) + u_{Czs}(t) \end{aligned} \quad (5.6-10)$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(0^+) e^{-t/\tau} + i_L(\infty) (1 - e^{-t/\tau}) \quad t \geq 0 \\ &= i_{Lzi}(t) + i_{Lzs}(t) \end{aligned} \quad (5.6-11)$$

**例5.5-1** 图5.6-6(a)所示电路， $t=0$ 时开关S闭合，闭合前电路处于稳定。求 $t>0$ 时的电感电流 $i_L$ 。

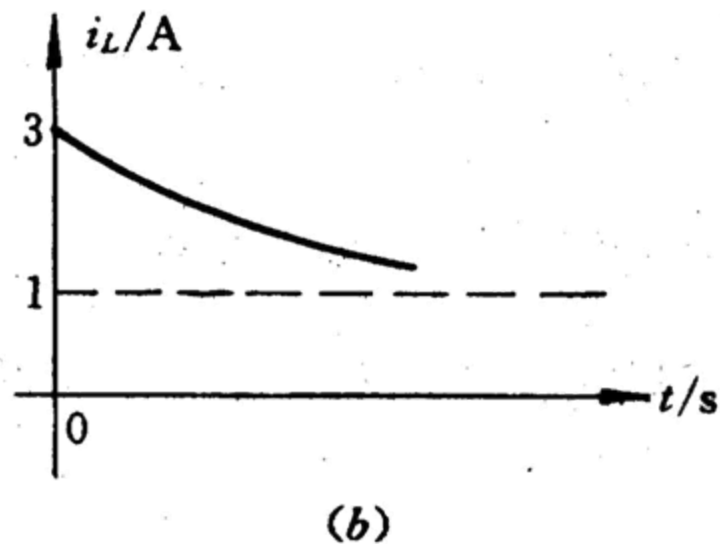
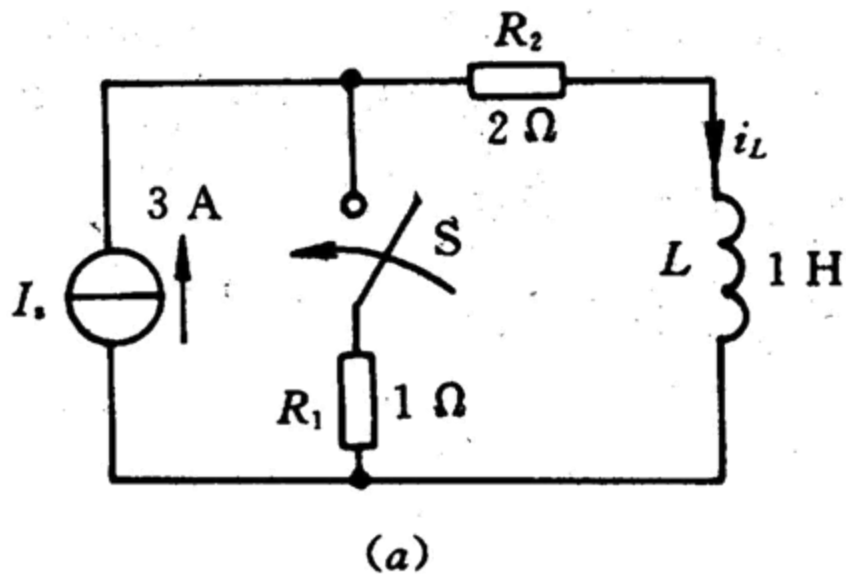


图 5.6-6 例5.6-1用图

## 第五章 动态电路的时域分析

解 (1) 求 $i_L(0_+)$ 。开关闭合前电路处于稳定，电感看作短路， $i_L(0_-)=I_s=3A$ ，根据换路定律，有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3A$$

(2) 求 $i_L(\infty)$ 。

$$i_L(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s = \frac{1}{1+2} \times 3 = 1A$$

(3) 求  $\tau$ 。

$$R = R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{3}s$$

(4) 求 $i_L$

$$i_L = 1 + (3-1)e^{-3t} = \underbrace{1}_{\text{稳态响应}} + \underbrace{2e^{-3t}}_{\text{暂态响应}} A \quad t > 0$$

## 第五章 动态电路的时域分析

**例5.5-2** 电路如图5.6-7(a)所示,  $t < 0$ 时电路处于稳态。 $t = 0$ 时 $S_1$ 打开,  $S_2$ 闭合。求电容电压 $u_C$ 和电流 $i$ 。

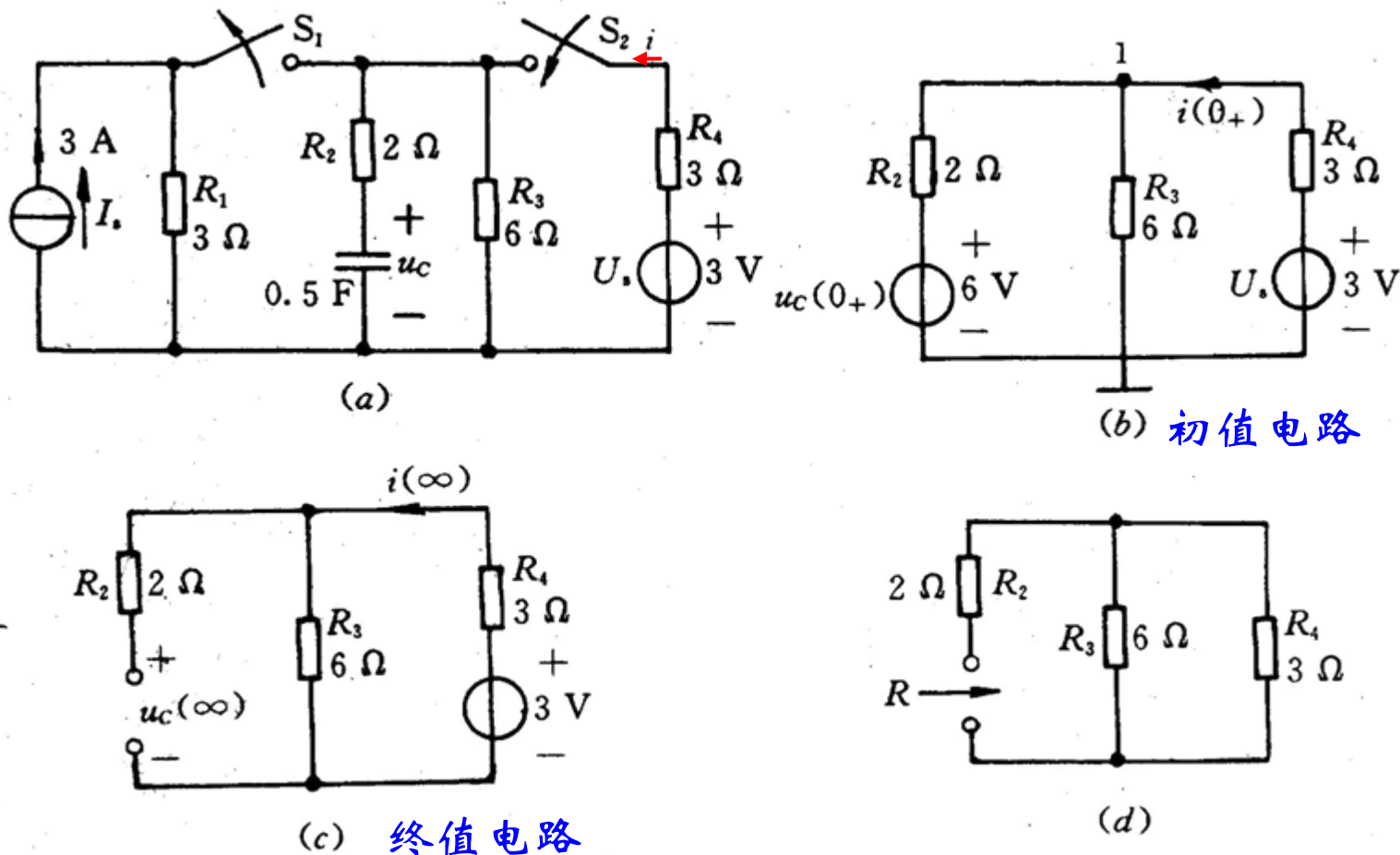


图 5.6-7 例5.6-2用图

解 (1) 求 $u_C(0_+)$ 和 $i(0_+)$ 。

先求 $u_C(0_+)$ :  $t=0$ -时, 电容 $C$ 相当于开路, 故

$$u_C(0_-) = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} I_s = \frac{3 \times 6}{3 + 6} \times 3 = 6V$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6V$$

为求 $i(0_+)$ , 列写节点方程,

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) u_1(0_+) = \frac{6}{2} + \frac{3}{3} = 4$$

$$u_1(0_+) = 4V$$

故

$$i(0_+) = \frac{U_s - u_1(0_+)}{R_4} = \frac{3 - 4}{3} = -\frac{1}{3}A$$

(2) 求 $u_C(\infty)$ 和 $i(\infty)$ 。

$$u_C(\infty) = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_s = \frac{6}{6+3} \times 3 = 2V$$

$$i(\infty) = \frac{U_s}{R_3 + R_4} = \frac{3}{6+3} = \frac{1}{3}A$$

(3) 求  $\tau$ 。

$$R = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 2 + \frac{3 \times 6}{3+6} = 4\Omega$$

$$\tau = RC = 4 \times 0.5 = 2s$$

(4) 求 $u_C$ 和 $i$ 。根据三要素公式，有

$$u_C = 2 + (6-2)e^{-\frac{t}{2}} = 2 + 4e^{-\frac{t}{2}}V \quad t > 0$$

$$i = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}A \quad t > 0$$



## 第五章 动态电路的时域分析

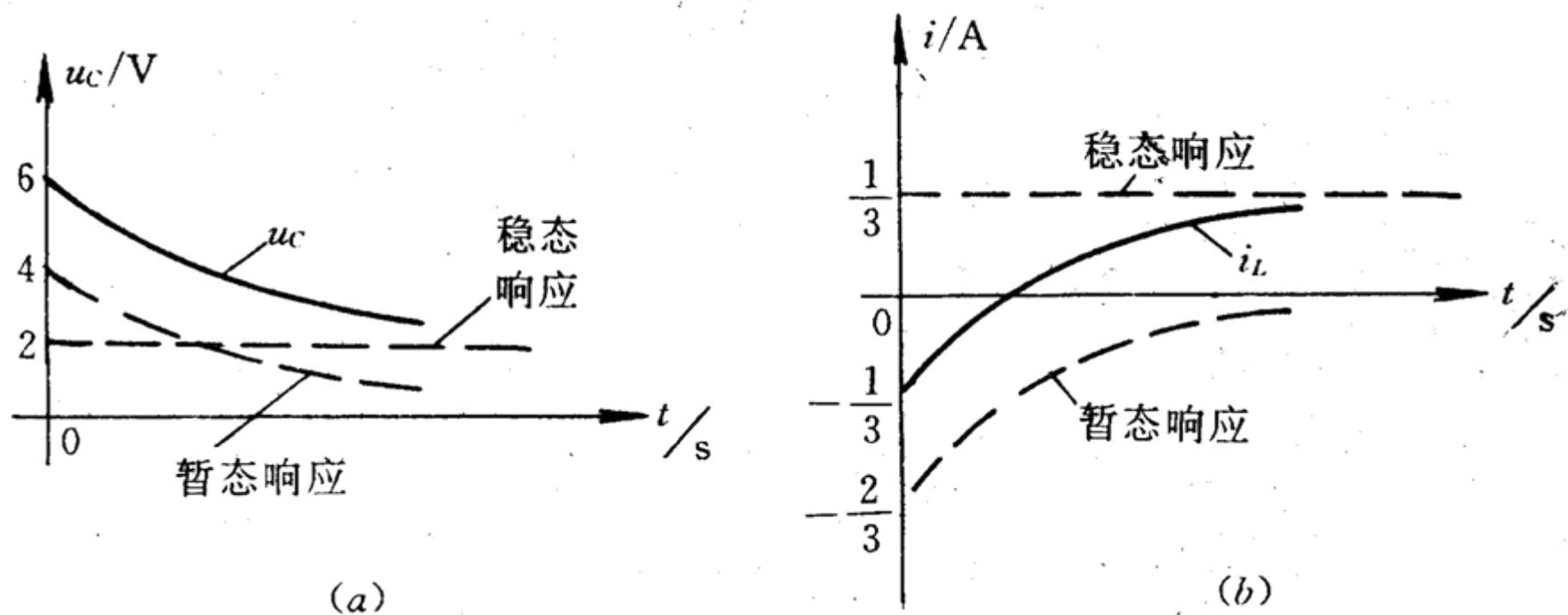


图 5.6-8  $u_C$ 和 $i$ 的波形

**例5.5-3** 图示电路中，当 $t < 0$ 时电路处于稳态，在 $t = 0$ 时开关断开。求 $t \geq 0$ 时电容电压 $u_C(t)$ 、 $v_A(t)$ 、 $v_B(t)$ ，并画出它们的变化曲线。

解

①  $t \geq 0$ 时电容电压 $u_C(t)$ ,

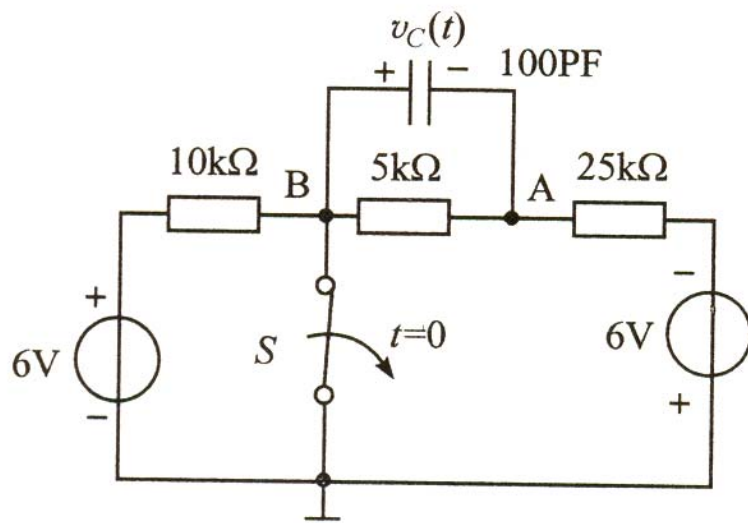
$$u_C(0+) = u_C(0-) = \frac{5}{5+25} \times 6 = 1V$$

$$u_C(\infty) = \frac{5}{10+5+25} \times (6+6) = 1.5V$$

$$\tau = [(10000 + 25000) // 5000] \times 100 \times 10^{-12} = 0.44 \times 10^{-6} s$$

所以

$$u_C(t) = 1.5 + (1 - 1.5)e^{-\frac{t}{0.44 \times 10^{-6}}} = 1.5 - 0.5e^{-2.3 \times 10^6 t} (V)$$



## 第五章 动态电路的时域分析

②  $t \geq 0$  时 A 点电位  $v_A(t)$ ,

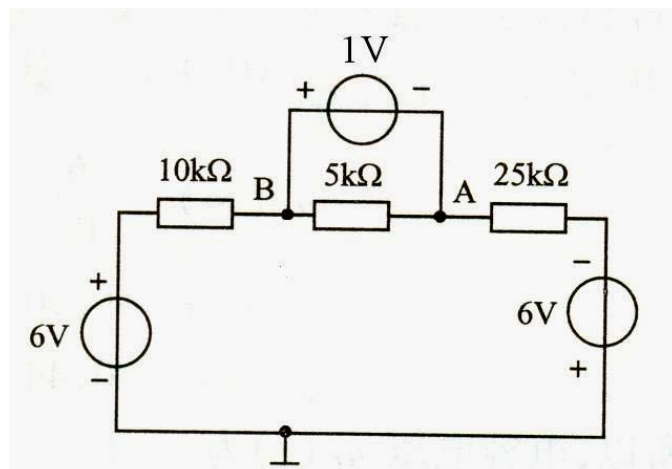
根据  $t=0+$  时刻等效电路和  $t \rightarrow \infty$  时的电路, 有

$$v_A(0+) = \frac{12-1}{10+25} \times 25 - 6 = 1.86V$$

$$v_A(\infty) = \frac{12}{10+5+25} \times 25 - 6 = 1.5V$$

则有

$$v_A(t) = 1.5 + (1.86 - 1.5)e^{-2.3 \times 10^6 t} = 1.5 + 0.36e^{-2.3 \times 10^6 t} (V)$$



$t=0+$  时刻等效电路

## 第五章 动态电路的时域分析

③  $t \geq 0$  时 B 点电位  $v_B(t)$ ,

根据  $t=0+$  时刻等效电路和  $t \rightarrow \infty$  时的电路, 有

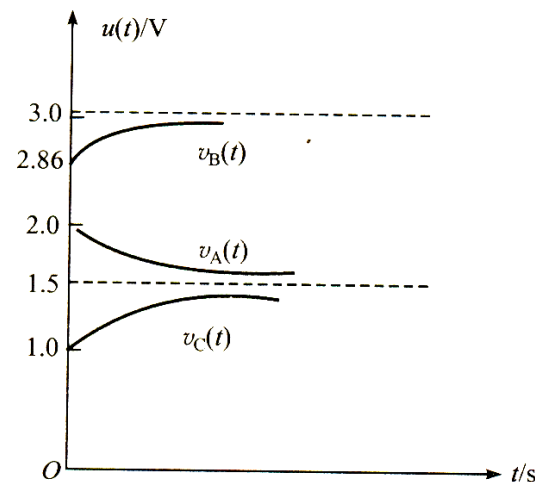
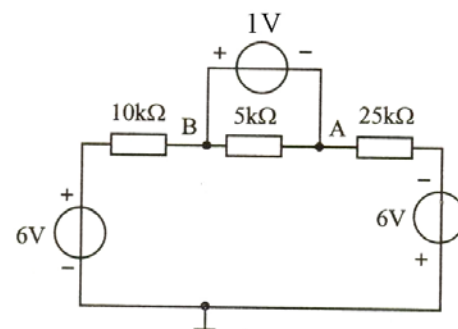
$$v_B(0+) = 1 + \frac{12-1}{10+25} \times 25 - 6 = 2.86V$$

$$v_B(\infty) = \frac{12}{10+5+25} \times (5+25) - 6 = 3V$$

则有

$$v_B(t) = 3 + (2.86 - 3)e^{-2.3 \times 10^6 t} = 3 - 0.14e^{-2.3 \times 10^6 t} (V)$$

三者变化曲线见右图。注意在任何时刻都有  $u_C(t) = v_B(t) - v_A(t)$ 。



**例5.5-4** 图示电路中，已知 $I_S=10\text{mA}$ ， $R_1=2\text{k}\Omega$ ， $R_2=1\text{k}\Omega$ ， $R_3=2\text{k}\Omega$ ， $R_4=1\text{k}\Omega$ ， $C=10\mu\text{F}$ ， $U_S=10\text{V}$ ，换路前电路处于稳定状态。试求 $t=0$ 开关S闭合后， $u_C(t)$ 随时间的变化规律。

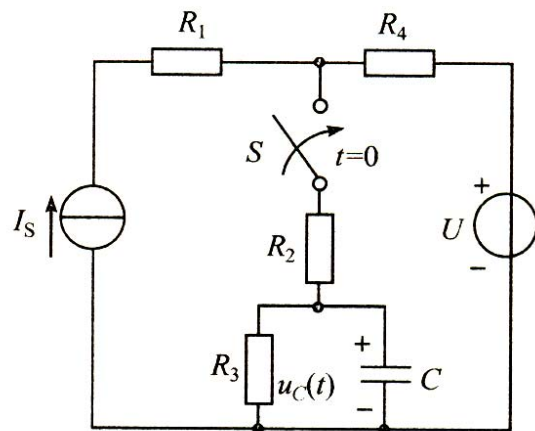
**解** 确定初值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

稳态值是电流源和电压源

共同作用时在电阻 $R_3$ 上产生的压降，根据叠加原理

$$\begin{aligned} u_C(\infty) &= \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \times U_S + \frac{R_4 I_S}{R_2 + R_3 + R_4} \times R_3 \\ &= \frac{2}{1+2+1} \times 10 + \frac{1 \times 10}{1+2+1} \times 2 = 10\text{V} \end{aligned}$$



时间常数中的 $R_{eq}$ 是除源后从电容两端求得的戴维宁等效电阻，则

$$R_{eq} = (R_2 + R_4) // R_3 = (1+1) // 2 = 1(k\Omega)$$

$$\tau = R_{eq}C = 1000 \times 10 \times 10^{-6} = 10^{-2}(s)$$

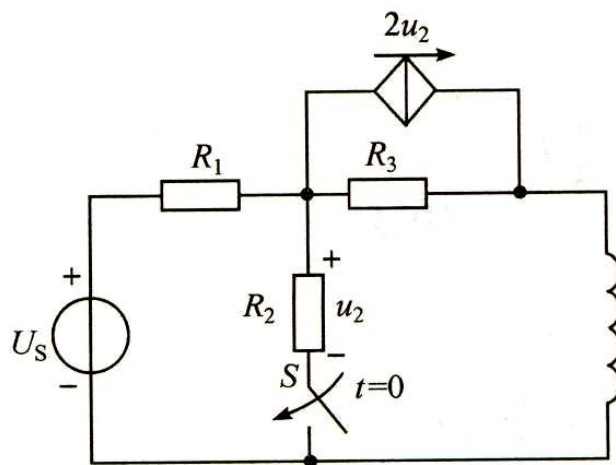
所以

$$u_C(t) = 10 + (0 - 10)e^{-\frac{t}{10^{-2}}} = 10(1 - e^{-100t})(V)$$

注：也可将C之外的有源电路等效为戴维宁电路，再进行计算。

## 第五章 动态电路的时域分析

**例5.5-5** 电路如图(a)所示,  $R_1=4\ \Omega$ ,  $R_2=2\ \Omega$ ,  $R_3=4\ \Omega$ ,  $U_S=6\text{V}$ ,  $L=4\text{H}$ ,  $t=0$ 时开关S闭合。试求 $i_L(t)$ 和 $u_2$ 的变化规律。



(a)

解 对**含有受控源的动态电路**进行分析时，可以直接应用三要素公式计算，也可应用戴维宁定理将换路后的电路化简再分析计算。此处用三要素法求解。

①初始值：

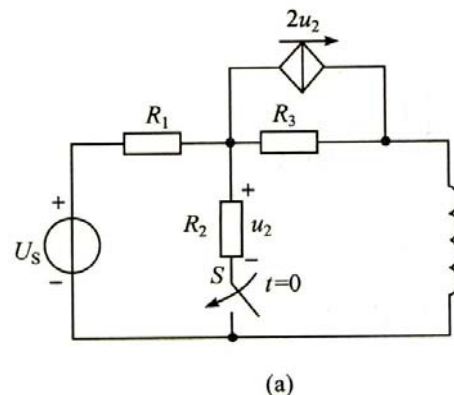
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_3} = \frac{6}{8} = 0.75(\text{A})$$

②稳态值：电感短路，由节点法有

$$u_2 = \frac{\frac{U_s}{R_1} - 2u_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{6}{4} - 2u_2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 1.5 - 2u_2$$

所以  $u_2 = 0.5\text{V}$

$$i_L(\infty) = i_{R_3} + 2u_2 = \frac{u_2}{R_3} + 2u_2 = \frac{0.5}{4} + 2 \times 0.5 = 1.125\text{A}$$





③时间常数：计算等效电阻的电路如图(b)所示。由于电路中有受控源，故用外加电源的方法计算。

$$U = (I + 2u_2)R_3 + u_2 = 4I + 9u_2$$

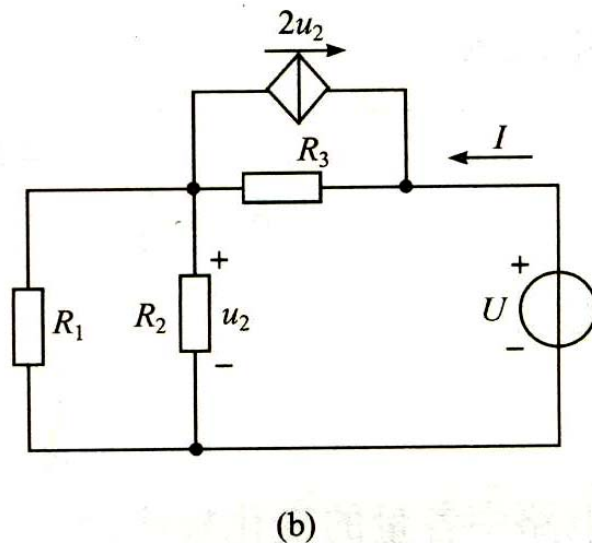
$$u_2 = (R_1 // R_2)I = \frac{4 \times 2}{4 + 2}I = \frac{4}{3}I$$

等效电阻为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4I + 9 \times \frac{4}{3}I}{I} = 16\Omega$$

则时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}s$$



④电路中各量的变化规律为

$$\begin{aligned}i_L(t) &= 1.125 + (0.75 - 1.125)e^{-4t} \\&= 1.125 - 0.375e^{-4t} \text{ (A)}\end{aligned}$$

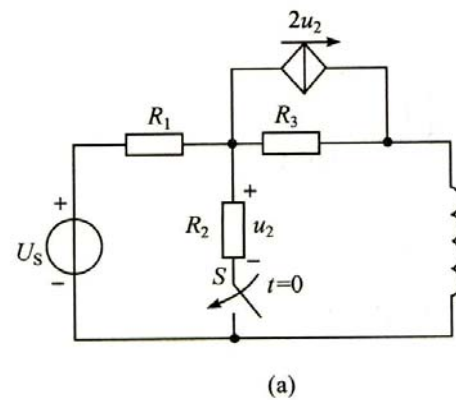
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 4 \times 4 \times 0.375e^{-4t} = 6e^{-4t} \text{ (V)}$$

由于

$$\begin{aligned}u_2(t) &= R_3[i_L(t) - 2u_2(t)] + u_L(t) \\&= 4 \times i_L(t) - 8u_2(t) + 6e^{-4t}\end{aligned}$$

所以

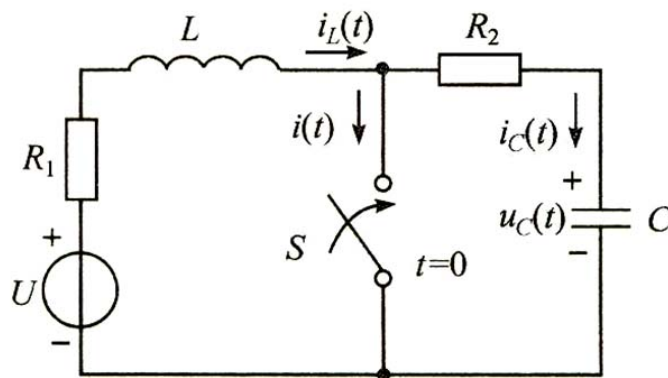
$$u_2(t) = 0.5(1 + e^{-4t}) \text{ (V)}$$



**例5.5-6** 图示电路中， $U=2\text{V}$ ,  $R_1=R_2=1\ \Omega$ ,  $L=2\text{H}$ ,  $C=0.5\text{F}$ 。

电路原来处于稳定状态， $t=0$ 时将开关S闭合。试求：

- (1)  $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 和 $i(t)$ 的变化规律；
- (2) 画出 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 和 $i(t)$ 的变化曲线。



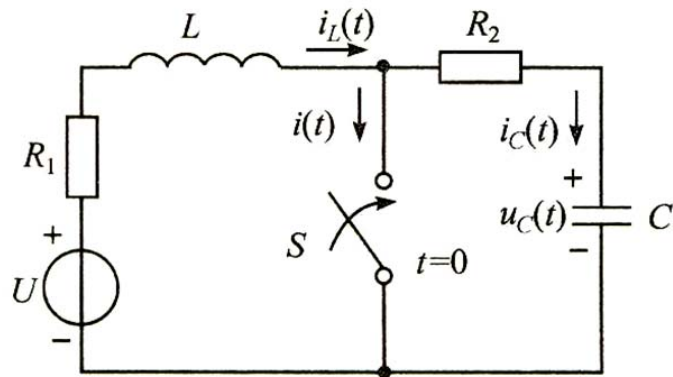
## 第五章 动态电路的时域分析

解: 电路虽然有两个动态元件 $L$ 和 $C$ , 但电路在 $t=0_-$ 时刻是稳定的。在 $t=0$ 时, 开关 $S$ 闭合后, 则将两个储能元件分别划分在两个独立的一阶电路中。可见, 该电路实质上是求两个一阶电路, 因而可分别用三要素法分析计算。

(1)初始值 由于电路在 $t=0_-$ 时是稳定的, 则

$$i_L(0_-) = 0\text{A}$$

$$u_C(0_-) = U = 2\text{V}$$



## 第五章 动态电路的时域分析

根据换路定理，有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0A$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2V$$

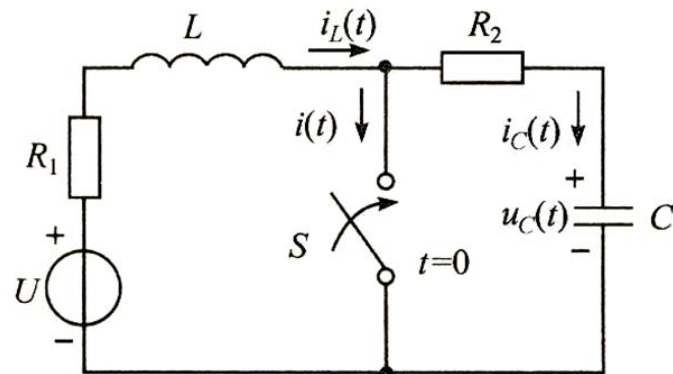
$t=0$ 时开关闭合，稳定值为

$$u_C(\infty) = 0$$

$$i_L(\infty) = \frac{U}{R_1} = 2A$$

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1} = 2s$$

$$\tau_2 = R_2 C = 0.5s$$



所以,

$$i_L(t) = 2(1 - e^{-t/\tau_1}) = 2(1 - e^{-0.5t}) A$$

$$u_C(t) = 2e^{-t/\tau_2} = 2e^{-2t} V$$

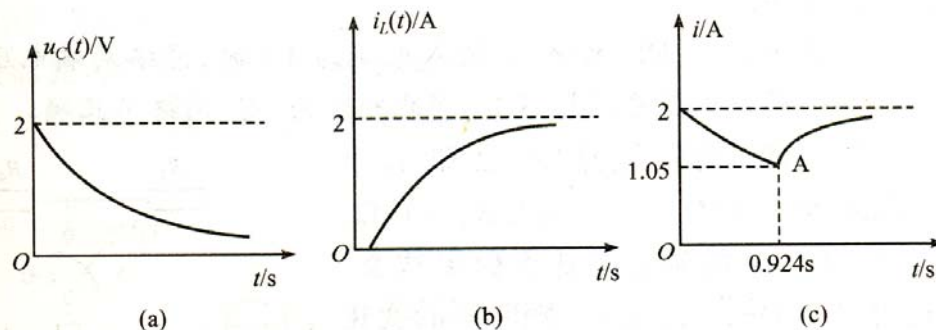
$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -2e^{-2t} A$$

$$i(t) = i_L(t) - i_C(t) = 2(1 - e^{-0.5t}) + 2e^{-2t} (A)$$

(2)  $u_C$ 、 $i_L$ 的变化曲线如图a、b所示。因为

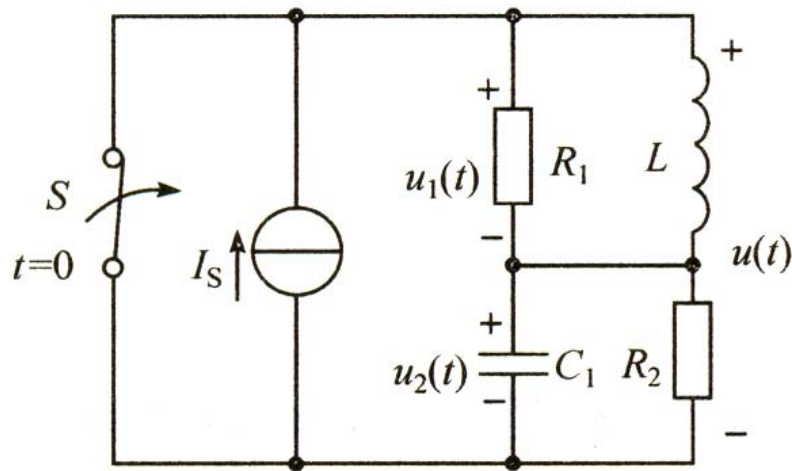
$$i(0) = 2A, i(\infty) = 2A$$

由 $di/dt=0$ 可知,  $t=0.924s$ 时,  $i=1.05A$ 。故 $i(t)$ 的变化曲线如图c所示。



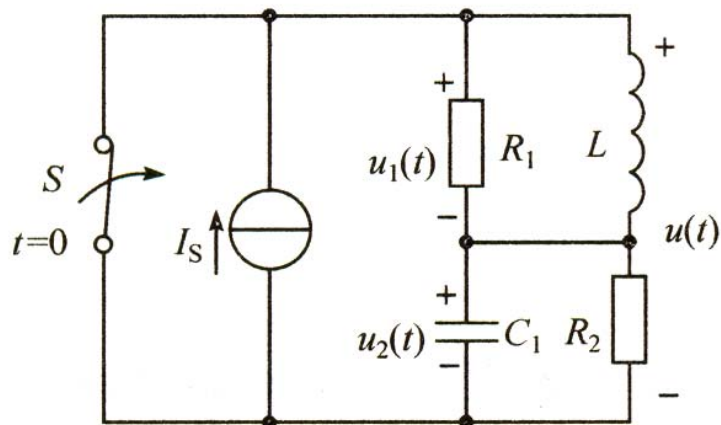
**例5.5-7** 图示电路中，已知 $R_1=R_2=2\ \Omega$ ， $L=1\text{H}$ ， $C=1\text{F}$ ， $I_S=1\text{A}$ 。 $t<0$ 时电路已达稳定状态， $t=0$ 时开关S打开。试求：

- (1)  $t>0$ 时电压 $u(t)$ ；
- (2) 若S打开后，电路立刻进入稳态，则电路参数应具备什么关系？



## 第五章 动态电路的时域分析

解： 虽然电路含有两个动态元件，由于 $L$ 和 $R_1$ 并联， $C$ 和 $R_2$ 并联，故可将图示电路视为由两个一阶电路组成。



(1) 分别用三要素法求 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ ，即



## 第五章 动态电路的时域分析

---

$$u_1(0_+) = R_1 I_S = 2 \times 1 = 2V$$

$$u_1(\infty) = 0V$$

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1} = \frac{1}{2} = 0.5s$$

$$u_1(t) = u_1(0_+)e^{-t/\tau_1} = 2e^{-2t}V$$

又因为

$$u_2(0_+) = u_C(0_-) = 0V$$

$$u_2(\infty) = R_2 I_S = 2V$$

$$\tau_2 = R_2 C = 2 \times 1 = 2s$$

$$u_2(t) = u_C(t) = 2(1 - e^{-t/\tau_2}) = 2(1 - e^{-0.5t})V$$

所以，电压 $u(t)$ 为

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2(1 + e^{-2t} - e^{-0.5t})V$$

(2) 欲使电路立即进入稳态，由 $u(t)$ 可知

$$e^{-\frac{R_1}{L}t} = e^{-\frac{t}{R_2C}}$$

故

$$R_1 = R_2 = R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

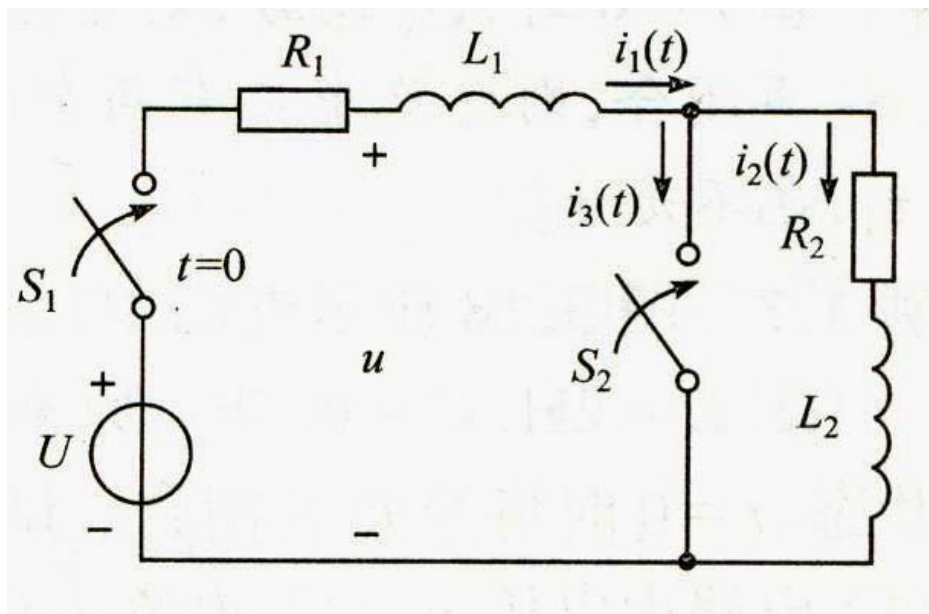
参数满足上述关系， $t=0$ 时开关S闭合后， $u(t) = R_2 I_S = 2V$

注意：1) 电路虽然有两个动态元件，但它们各自独立地进行瞬变，所以原则上仍是一阶电路。因此可用三要素法求解；  
2) 开关S闭合后电路无暂态过程，即要求在 $u(t)$ 地表达式中不能含有 $t$ 的函数项。

## 第五章 动态电路的时域分析

**例5.5-8** 图示电路中， $R_1=2\ \Omega$ ， $R_2=1\ \Omega$ ， $L_1=0.01\text{H}$ ， $L_2=0.02\text{H}$ ， $U=6\text{V}$ 。试求：

- (1)  $S_1$  闭合后电路中电流  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ ；
- (2)  $S_1$  闭合后电路达到稳定状态时， $S_2$  闭合，求  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $i_3(t)$



解： (1)  $t=0$ 时 $S_1$ 闭合，电路与恒定电压 $U$ 接通， $L_1$ 、 $L_2$ 可等效为 $L$ 。由于换路前电感元件无储能，故为 $RL$ 的零状态响应。用三要素法，

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0A$$

$$i_1(+\infty) = i_2(+\infty) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{6}{2+1} = 2A$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} = \frac{0.01+0.02}{2+1} = 0.01s$$

所以

$$i_1(t) = i_2(t) = 2(1 - e^{-100t})A$$

(2) 电路稳定后再将 $S_2$ 闭合，此时，使电路中 $R_2$ 、 $L_3$ 脱离电源，但 $L_2$ 中已储有能量，其中电流的初值 $i_2(0_+) = I_0$ 。故电路为零输入响应。用三要素法求解。

## 第五章 动态电路的时域分析

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = i_1(0_-) = i_2(0_-) = I_0 = 2A$$

$$i_1(+\infty) = \frac{U}{R_1} = \frac{6}{2} = 3A$$

$$i_2(+\infty) = 0$$

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{0.01}{2} = \frac{1}{200} s$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2} = \frac{0.02}{1} = 0.02 s$$

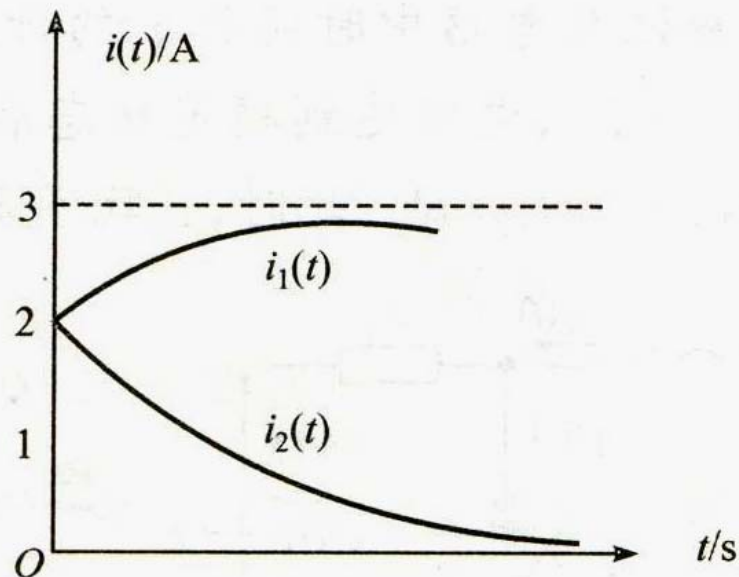
$$i_1(t) = 3 + (2 - 3)e^{-t/\tau_1} = 3 - e^{-200t} A$$

$$i_2(t) = 2e^{-t/\tau_2} = 2e^{-50t} A$$

闭合 $S_2$ 后，其电流为

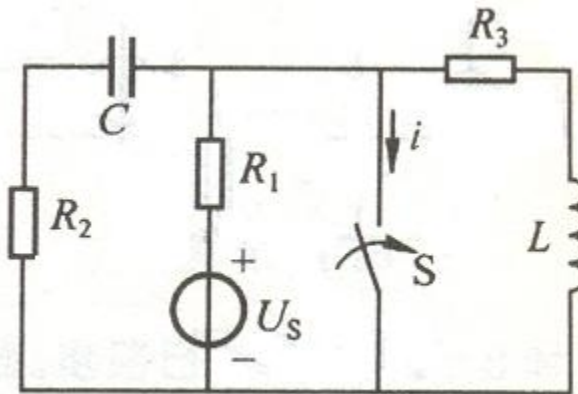
$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = 3 - e^{-200t} - 2e^{-50t} A$$

$i_1$ 、 $i_2$ 变化曲线如图。



## 第五章 动态电路的时域分析

**例5.5-9** 图示电路中，已知 $U_S=100\text{V}$ ， $R_1=60\ \Omega$ ， $R_2=40\ \Omega$ ， $R_3=40\ \Omega$ ， $C=125\ \mu\text{F}$ ， $L=1\text{H}$ ，电路原先已稳定。在 $t=0$ 瞬间合上开关，求开关合上后通过开关的电流 $i$ 。

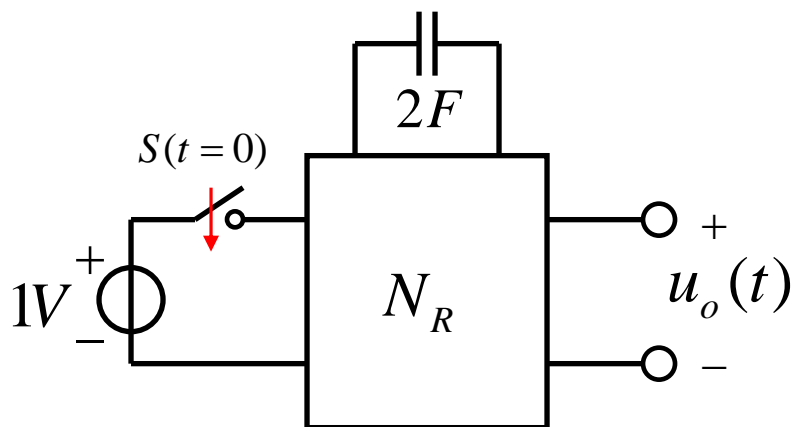


$$i(t) = \frac{5}{3} + e^{-200t} - e^{-40t} \text{ A}$$

**例5.5-10** 图示电路中， $N_R$ 为线性电阻网络，开关在 $t=0$ 时闭合，已知输出端的零状态响应为

$$u_o(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^{-0.25t}V \quad t > 0$$

若电路中的电容换为 $2H$ 的电感，试求该情况下输出端的零状态响应 $u_o(t)$ 。



$$u_o(t) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}e^{-t}V \quad t > 0$$

### 小结——一阶电路三要素法分析动态电路：

- 1、由初值电路求初值（ $0+$ 值）；
- 2、由终值电路求终值（稳态值）；
- 3、求电路的时间常数；
- 4、代入三要素公式。



### 5.7 一阶电路的阶跃响应

#### 一、单位阶跃函数(step function)

##### 1. 单位阶跃函数的定义

单位阶跃函数是一种奇异函数，如图5.8-1所示，函数在 $t=0$ 发生了阶跃。用  $\varepsilon(t)$ 表示，其定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

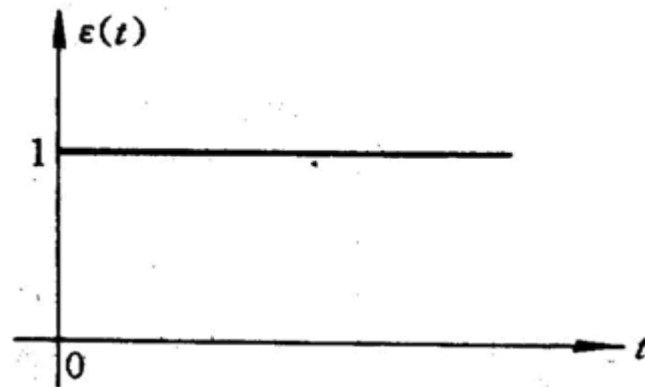


图5.6-1 单位阶跃函数

## 第五章 动态电路的时域分析

单位阶跃函数可以用来描述直流电源接入电路的情况。

例如图5.6-2(a)表示大小为 $E$ 的电压源在 $t=0$ 时接入电路，可写为 $u(t) = E\varepsilon(t)$ ；图5.7-2(b)表示大小为 $I_s$ 的电流源在 $t=0$ 接入电路，可写为 $i(t) = I_s\varepsilon(t)$ 。

因此，阶跃函数可以作为开关的数学模型。

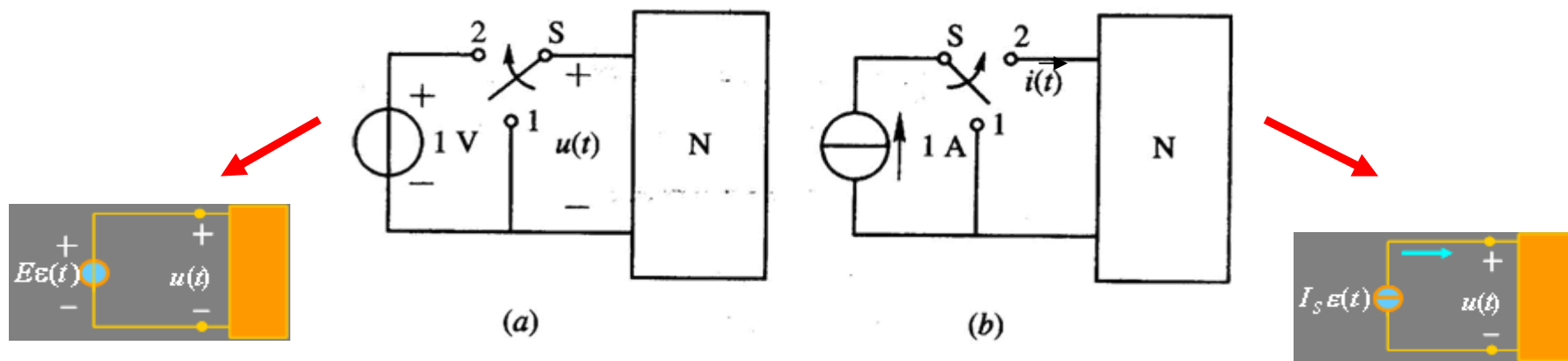


图 5.6-2 单位阶跃函数示意图

任一时刻 $t_0$ 起始的阶跃函数(也称为延迟的阶跃函数)定义为

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

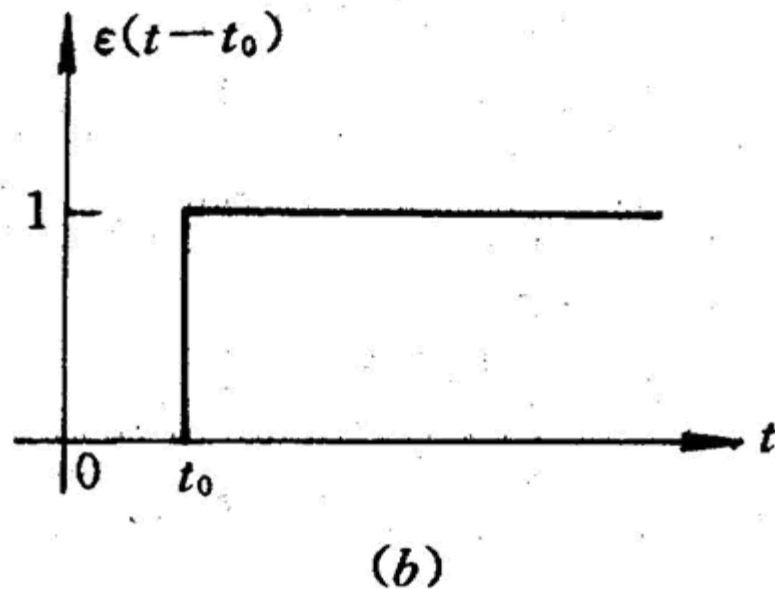
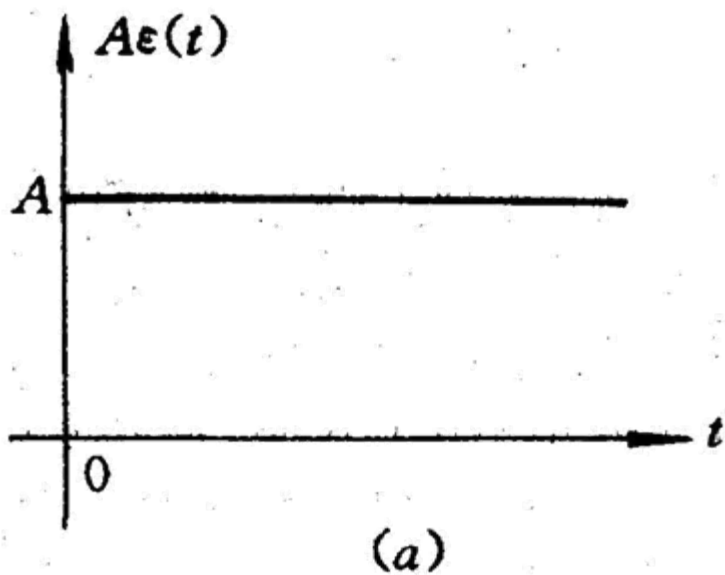


图 5.6-3 阶跃函数和延时阶跃函数

### 2. 阶跃函数的作用:

①可以用来起始一个任意函数:

$$f(t)$$

$$f(t)\varepsilon(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0_+ \\ 0 & t \leq 0_- \end{cases}$$

$$f(t)\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} f(t) & t \geq t_{0+} \\ 0 & t \leq t_{0-} \end{cases}$$

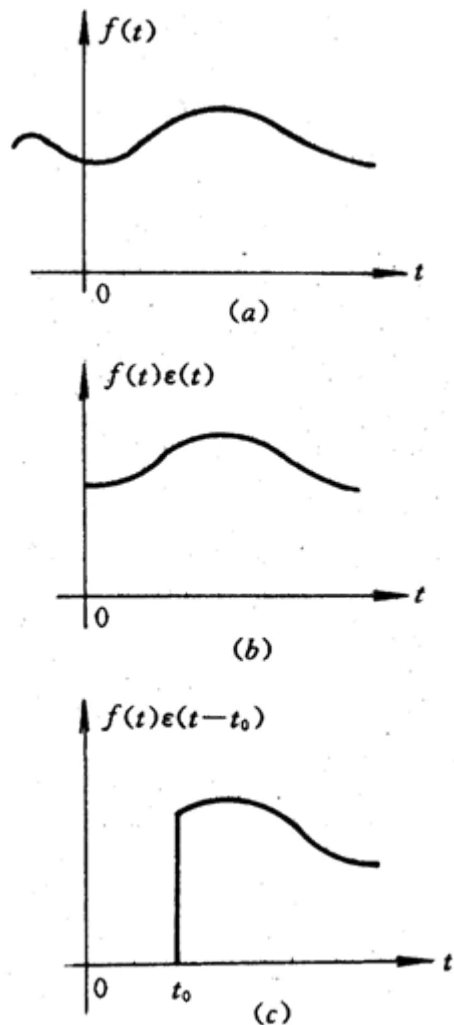
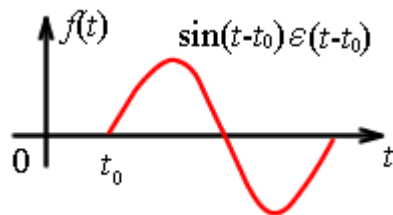


图 5.6-5

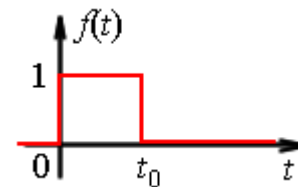
## 第五章 动态电路的时域分析

②可以用来延迟一个函数。如图所示，



③可以用来表示复杂的信号。如图矩形脉冲可用阶跃函数表示为

$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)]$$



## 第五章 动态电路的时域分析

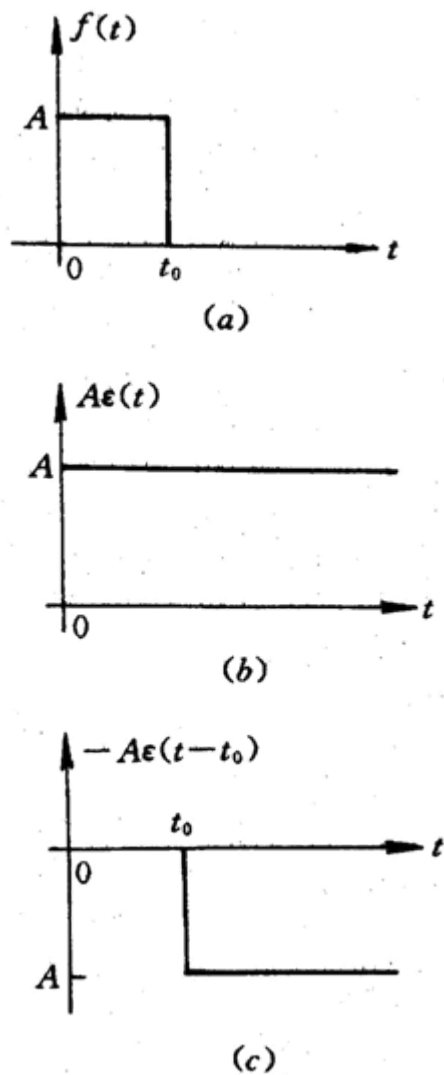


图 5.6-4 矩形脉冲分解

### 二、一阶电路的单位阶跃响应

**定义：**一阶电路在单位阶跃激励下的零状态响应称为一阶电路的单位阶跃响应。简称阶跃响应，用 $g(t)$ 表示之。

**例5.6-1** 图5.6-6(a)所示电路，若以电流 $i_L$ 为输出，求其阶跃响应 $g(t)$ 。

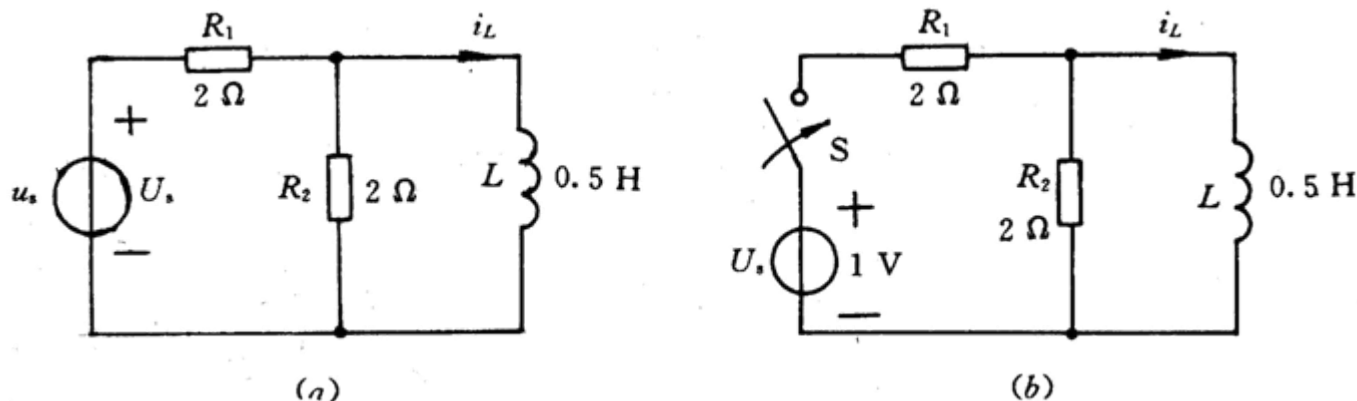


图 5.6-6 例5.6-1用图

解 根据阶跃响应的定义, 令 $u_s = \varepsilon(t)$ , 它相当于1V电压源在 $t=0$ 时接入电路, 如图(b)所示, 而且电路的初始状态 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ 。由图(b)可知,  $i_L$ 的稳态值和该电路的时间常数分别为

$$i_L(\infty) = \frac{U_s}{R_1} = \frac{1}{2} \text{ A}$$
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

利用三要素公式得阶跃响应为

$$g(t) = i_L(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\varepsilon(t) \text{ A}$$



**例5.6-2** 图5.6-8(a)所示电路，其激励 $i_s$ 的波形如图(b)所示。若以 $u_C$ 为输出，求其零状态响应。

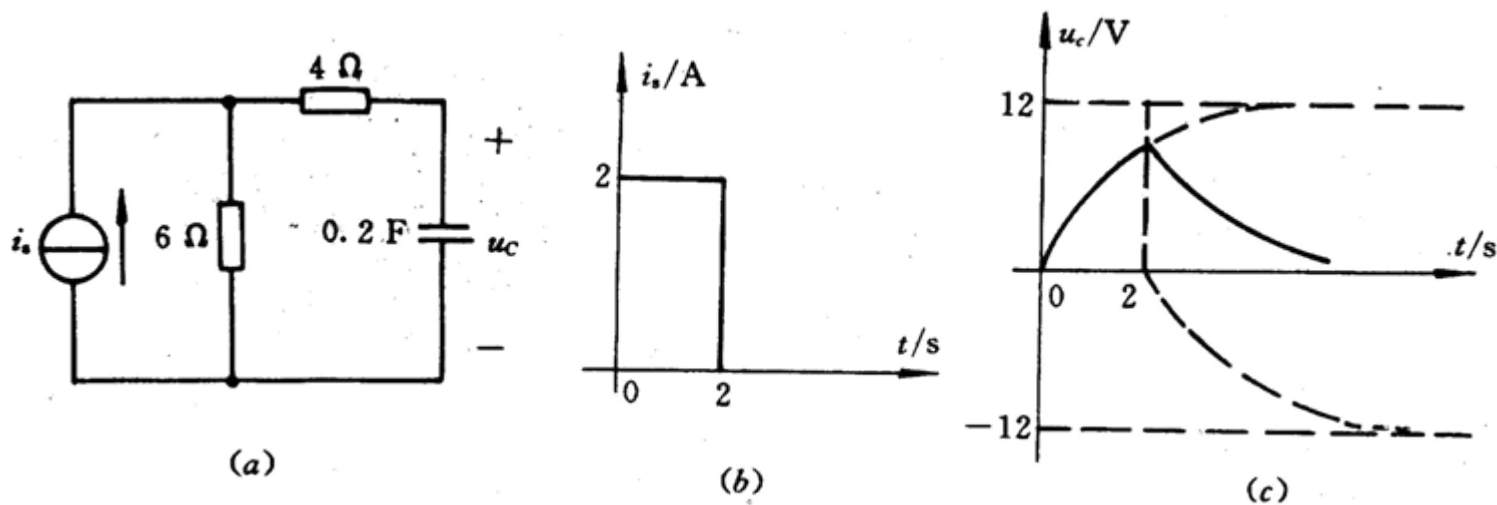


图5.6-8 例5.6-2用图

解一：电路有两次换路过程

1、开关在 $t=0$ 秒闭合(0~2秒):

用三要素法:

$$u_C(0_+) = 0$$

$$u_C(\infty) = 6 \times 1 = 6V$$

$$\tau = RC = 10 \times 0.2 = 2s$$

故响应为

$$u_C(t) = 6(1 - e^{-\frac{1}{2}t})V \quad 0 < t < 2s$$

2、开关在 $t=2$ 秒断开(2秒之后):

$$u_C(2) = 6(1 - e^{-1})V$$

$$u_C(\infty) = 0V$$

$$\tau = RC = 2s$$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(2) - u_C(\infty)]e^{-(t-2)/\tau} \\ &= 6(1 - e^{-1})e^{-(t-2)/\tau}V \quad t > 2s \end{aligned}$$

### 解2. 线性时不变电路的性质：

(1) 零状态响应与外加激励之间满足齐次性和叠加性(称零状态线性)。

线性电路具有两个特性：齐次性和叠加性。若以  $f(t)$  表示激励， $y_f(t)$  表示电路的零状态响应。

齐次性可表示为      若       $f(t) \rightarrow y_f(t)$   
   则       $Af(t) \rightarrow Ay_f(t)$

叠加性可表示为      若       $f_1(t) \rightarrow y_{f1}(t)$   
    $f_2(t) \rightarrow y_{f2}(t)$

                                 则       $f_1(t) + f_2(t) \rightarrow y_{f1}(t) + y_{f2}(t)$

如果电路既满足齐次性又满足叠加性，则该电路是线性的，可表示为

$$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) \rightarrow A_1 y_{f1}(t) + A_2 y_{f2}(t)$$

## 第五章 动态电路的时域分析

(2) 满足时不变性:

如果电路元件的参数不随时间变化, 则该电路为时不变电路。这时, 电路的零状态响应的函数形式与激励接入电路的时间无关, 即

$$f(t) \rightarrow y_f(t)$$

$$f(t-t_0) \rightarrow y_f(t-t_0)$$

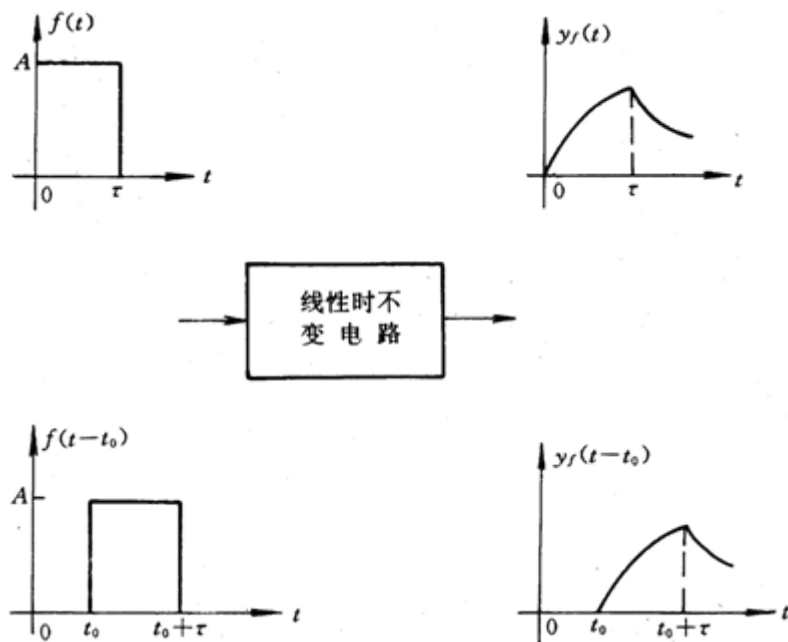


图 5.6-7 时不变特性

电路的线性时不变特性，将给电路的计算带来许多方便。例如，若电路的激励为图5.6-4(a)所示的矩形脉冲信号，即

$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$$

根据线性时不变特性，该电路的零状态响应为

$$y_f(t) = Ag(t) - Ag(t - t_0)$$

解二 激励 $i_s$ 可表示为

$$i_s(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-2)A$$

根据线性时不变特性，该电路的零状态响应为

$$u_{cf}(t) = 2g(t) - 2g(t-2)V$$

只要求 $g(t)$ 即可，用三要素法：

$$u_C(0_+) = 0$$

$$u_C(\infty) = 6 \times 1 = 6V$$

$$\tau = RC = 10 \times 0.2 = 2s$$

故阶跃响应为

$$g(t) = 6(1 - e^{-\frac{1}{2}t})\varepsilon(t)V$$

因此零状态响应为

$$u_{cf}(t) = 12(1 - e^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t) - 12(1 - e^{-\frac{t-2}{2}})\varepsilon(t-2)V$$



## 5.8 冲击函数及其在动态电路中的应用

---

### 一、冲击函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

二、

### 5.9 正弦激励下一阶电路的响应

实际电路中，除直流电源外，另一类典型的激励就是正弦电源。下面以一阶电路为例讨论正弦电源激励下电路的完全响应。

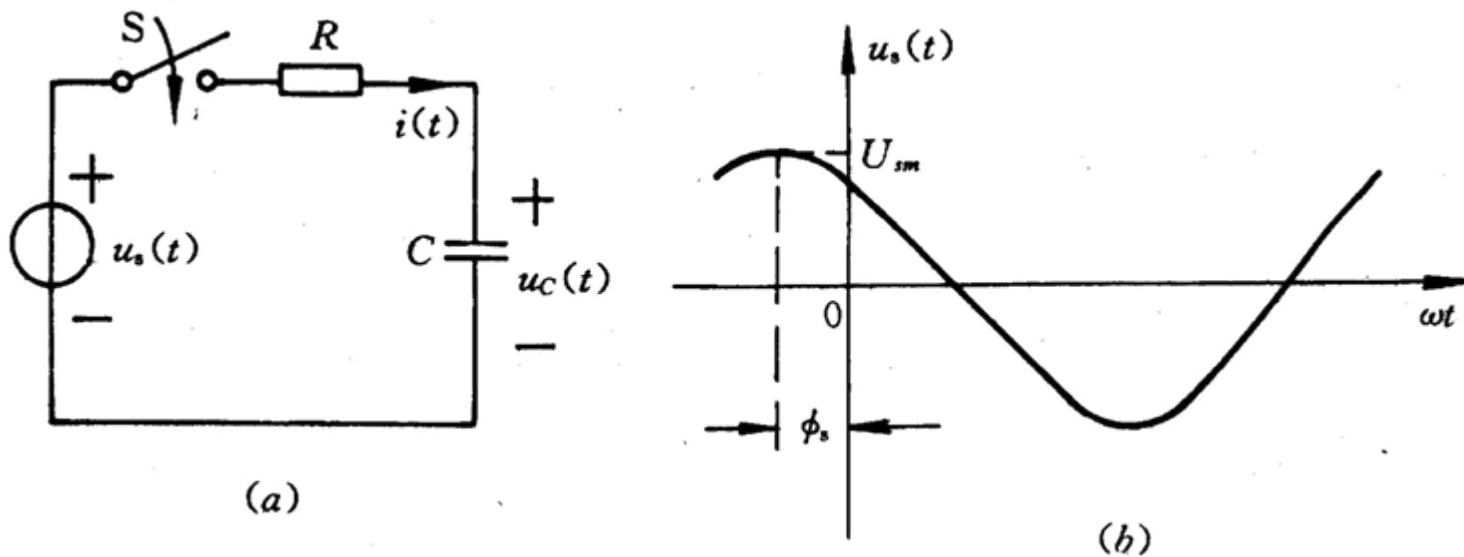


图5.7-1 正弦电压源作用于 $RC$ 电路



图5.7-1(a)所示一阶 $RC$ 电路,  $t=0$ 时开关闭合。若电容电压的初始值 $u_C(0_+)=U_0$ , 电压源为

$$u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \phi_s) V \quad (5.7-1)$$

电路方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_{sm} \cos(\omega t + \phi_s) \quad (5.7-2)$$

解包括齐次解和特解两部分,

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) \quad (5.7-3)$$

齐次方程通解为

$$u_{Ch}(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.7-4)$$

## 第五章 动态电路的时域分析

下面来求非齐次方程的特解。设特解具有如下形式，

$$u_{Cp}(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \phi) \quad (5.7-5)$$

代入方程(5.7-2)，有

$$-RCU_{cm}\omega \sin(\omega t + \phi) + U_{Cm}(\omega t + \phi) = U_{sm} \cos(\omega t + \phi_s) \quad (5.7-6)$$

用待定系数法确定 $U_{Cm}$ 和 $\phi$ 。引入常数 $K_1$ 、 $K_2$ ，

$$K_1 = \omega CR U_{Cm}, K_2 = U_{Cm} \quad (5.7-7)$$

令

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = U_{Cm} \sqrt{(\omega CR)^2 + 1} \quad (5.7-8)$$

$$\theta = \arctg \frac{K_1}{K_2} = \arctg \omega CR \quad (5.7-9)$$

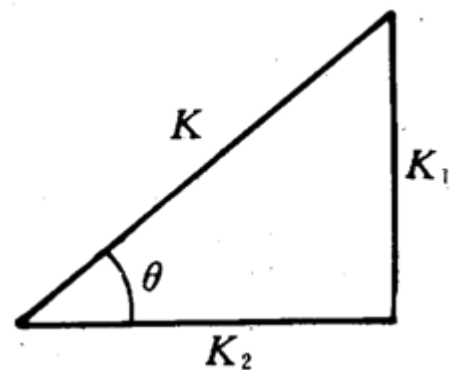


图 5.7-2 直角三角形图示

由图可得

$$K_1 = K \sin \theta, K_2 = K \cos \theta \quad (5.7-10)$$

这样式(5.10-6)可以写为

$$-K \sin \theta \sin(\omega t + \phi) + K \cos \theta \cos(\omega t + \phi) = U_{sm} \cos(\omega t + \phi_s) \quad (5.7-11)$$

利用三角公式

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

式(5.7-11)变换为

$$K \cos(\omega t + \phi + \theta) = U_{sm} \cos(\omega t + \phi_s)$$

若使上式等号两端相等，必须满足

$$\left. \begin{aligned} K &= U_{cm} \sqrt{(\omega CR)^2 + 1} = U_{sm} \\ \phi + \theta &= \phi_s \end{aligned} \right\}$$

于是得到

$$U_{Cm} = \frac{U_{sm}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}} \quad (5.7-12)$$

$$\phi = \phi_s - \theta = \phi_s - \arctg \omega CR \quad (5.7-13)$$

最后得到电路方程的通解为

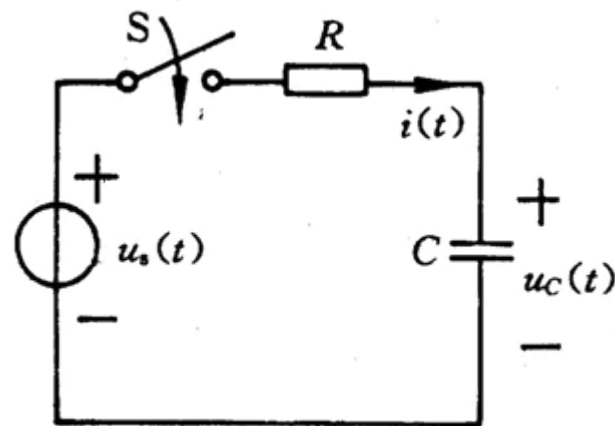
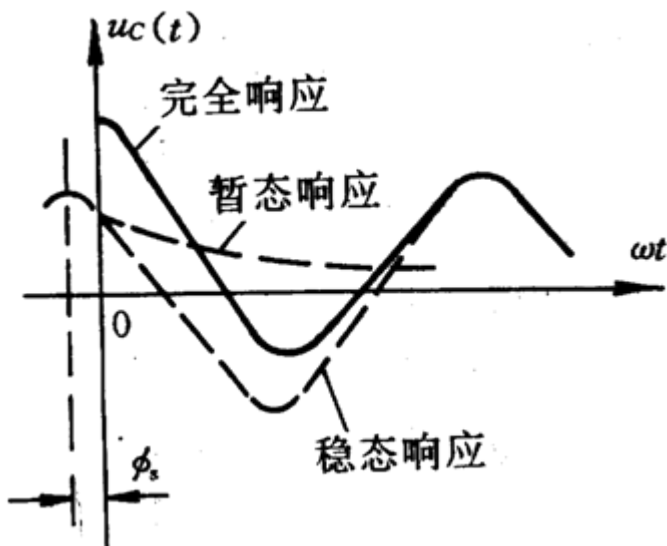
$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U_{Cm} \cos(\omega t + \phi) \quad (5.7-14)$$

利用初始条件确定常数A， 即

$$\begin{aligned} u_C(0) &= A + U_{Cm} \cos \phi = U_0 \\ A &= U_0 - U_{Cm} \cos \phi \end{aligned} \quad (5.7-15)$$

所以，

$$u_C(t) = \underbrace{(U_0 - U_{Cm} \cos \phi) e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{U_{Cm} \cos(\omega t + \phi)}_{\text{稳态响应}} \quad t > 0 \quad (5.7-16)$$



$$u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \phi_s) V$$

图 5.7-3  $u_C(t)$  波形

从 $u_C(t)$ 表达式有以下几点结论：

①当 $t > 5\tau$ 时， $u_C(t)$ 的暂态分量衰减为零，电路进入稳态，其电压为正弦函数，电压的振幅和初相与元件参数 $R$ 、 $C$ 有关，此外还与角频率 $\omega$ 有关，电容 $C$ 和角频率 $\omega$ 的效应用乘积 $RC$ 体现，电压的振幅与输入电压的振幅成正比。

②若  $u_C(0_+) = U_{Cm} \cos \varphi$ ，电路无暂态过程，立即进入稳态；

③ 设  $u_C(0_+) = 0$ ,  $\varphi = -\pi$ , 则

$$u_C(t) = -U_{Cm} \cos \omega t + U_{Cm} e^{-t/\tau} \quad (5.7-17)$$

在 $\omega t = \pi$ 处，若指数函数 $e^{-t/\tau}$ 衰减很小，则此时的电压值接近于 $2U_{Cm}$ 。说明电压的瞬态值有可能大于稳态最大值。

④对线性电路，当存在稳态时，正弦激励电路的稳态解为正弦量，其角频率与电源的角频率相同。因此，求解稳态响应的关键是要确定其振幅和初相。

对任一线性电路，可以证明，当电路的固有频率为负实数，或实部为负值的复数时，在正弦激励下，电路存在稳态，稳态响应为与激励同频率的正弦函数。由无源电阻、电感和电容组成的电路一定存在稳态。

由上可见当电路复杂时，求解稳态响应麻烦，下一章介绍求解正弦稳态解的一种简便方法——即相量分析法。

### 5.10 小 结

1、 动态元件的VCR是微分或积分关系，如下表所示。

伏安关系等 元件名称	微分关系	积分关系	储 能
电容 $C$	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi$	$w_C = \frac{1}{2} C u_C^2$
电感 $L$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi$	$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2$



2、 描述动态电路的方程是微分方程。利用KCL, KVL和元件的VCR可列写出待求响应的微分方程。利用换路定律和 $0_+$ 等效电路, 可求得电路中各电流、电压的初始值。

### 3、零输入响应、零状态响应和全响应：

零输入响应是激励为零，由电路的初始储能产生的响应，它是齐次微分方程满足初始条件的解。零状态响应是电路的初始状态为零，由激励产生的响应，它是非齐次微分方程满足初始条件的解，包含齐次解和特解两部分。假若电路的初始状态不为零，在外加激励电源作用下，电路的响应为完全响应，它等于零输入响应与零状态响应之和。

动态电路的响应也可以分为自由响应与强迫响应。对于稳定电路，在直流电源或正弦电源激励下，强迫响应为稳态响应，它与激励具有相同的函数形式。自由响应即为暂态响应，它随着时间的增加逐渐衰减到零。

零输入响应和自由响应都是满足齐次微分方程的解，它们的形式相同，但常数不同。零输入响应的待定常数仅由输入为零时的初始条件 $y_x(0_+)$ 所确定，而自由响应的待定常数由全响应的初始条件 $y(0_+)$ 所确定。

(1) 一阶电路的零输入响应是初始值的线性函数

$$y_{zi}(t) = y_{zi}(0^+)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

如果初值为  $y_{zi}^{(1)}(t)$  时的零输入响应为

$$y_{zi}^{(1)}(t) = y_{zi}^{(1)}(0_+)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

初值为  $y_{zi}^{(2)}(t)$  时的零输入响应为

$$y_{zi}^{(2)}(t) = y_{zi}^{(2)}(0_+)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

则初值为  $ky_{zi}^{(1)}(t)$  ( $k$  为任一常数) 时的零输入响应为

$$y^3 = k \cdot y_{zi}^{(1)}(0^+)e^{-t/\tau} \quad t \geq 0 \quad (\text{齐次性})$$

初值为  $y_{zi}^{(1)}(t) + y_{zi}^{(2)}(t)$  时的零输入响应为

$$\begin{aligned} y^4 &= [y_{zi}^{(1)}(0_+) + y_{zi}^{(2)}(0_+)]e^{-t/\tau} \\ &= y_{zi}^{(1)}(0_+)e^{-t/\tau} + y_{zi}^{(2)}(0_+)e^{-t/\tau} \\ &= y_{zi}^{(1)}(t) + y_{zi}^{(2)}(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{可加性}) \end{aligned}$$

### (2) 零状态响应是激励的线性函数

在线性电路中，如果激励为 $f_1(t)$ 时的零状态响应为 $y^{(1)}$ ，激励为 $f_2(t)$ 时的零状态响应为 $y^{(2)}$ ，则有激励为 $kf_1(t)$ （ $k$ 为任一常数）时的零状态响应为 $ky^{(1)}$ （齐次性）；激励为 $f_1(t)+f_2(t)$ 时的零状态响应为

$$y = y^{(1)} + y^{(2)} \quad (\text{可加性})$$

上式表明，在由几个独立源激励的线性电路中的零状态响应，等于各个独立源单独激励时零状态响应之代数和，即线性电路中的零状态响应满足叠加性。

必须指出，全响应不是激励的线性函数，也即全响应不满足叠加性。

### 4、一阶电路的电路方程分析法：

#### ➤ 求状态变量

##### a. 列写状态变量微分方程：

将动态元件之外的二端网络用戴维宁等效，成为单回路，再列写 $u_C$ 或 $i_L$ 的方程。

##### b. 求状态变量初值：

根据换路定理求解。

##### c. 求解状态变量的微分方程：

分离变量法或特征方程法

#### ➤ 求非状态变量：

回到原电路，将电容用电压源/电感用电流源替代；再用KCL/KVL代数方程，求其它非状态变量

### 5、一阶电路的三要素法：

利用三要素公式可以简便地求解一阶电路在直流电源或阶跃信号作用下的电路响应。三要素公式为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$

**求三要素的方法为：**

① 初始值 $y(0_+)$ ：利用换路定律和 $0_+$ 等效电路求得。

② 稳态响应 $y(\infty)$ ：在直流电源或阶跃信号作用下，电路达到稳态时，电容看作开路，电感看作短路，此时电路成为电阻电路。利用电阻电路的分析方法，求得稳态响应 $y(\infty)$ 。

③ 时常数  $\tau$ ： $RC$ 电路， $\tau = R_{eq}C$ ； $RL$ 电路， $\tau = L/R_{eq}$ 。式中 $R_{eq}$ 为断开动态元件后的戴维宁等效电路的等效电阻。