求数列极限的技巧与方法

甘肃 通渭 •邢文巧

一、引言

数列极限是数学这门学科的重要内容之一。对于一些复杂极限，直接按照极限的定义来求就显得很困难，不仅计算量大，而且不一定就能求出结果。因此，为了解决求极限的问题，我们在研究比较复杂的数列极限问题时，通常先考查该数列极限的存在性问题;如果有极限，我们再考虑如何计算此极限(也就是极限值的计算问题)。这就是极限理论的两个基本问题。求数列极限的方法多种多样，比如:化简通项求极限、单调有界原理求极限等。现在我通过一些具体的例子，和大家一起探讨求数列极限的常用技巧与方法。

二、求数列极限的常用技巧与方法

1. 化简通项求极限

在求一些比较复杂的数列极限，特别是处理通项为 n 项和式的一类很特殊的极限时，经常先对通项进行化简，化简时往往利用链锁消去法。其工作原理如下:

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，$a_n\neq 0$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})+\cdots+(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{k+1}}$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{a_1}$。

应用时往往需要把通项 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ 中的 x_k 裂项为 $x_k=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})$，具体实施可用待定系数法。

例 1：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)}$。

解: $(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)}=(-1)^{k+1}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})=-[\frac{(-1)^k}{k}-\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}]$，$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)}=-\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{(-1)^k}{k}-\frac{(-1)^{k+1}}{k+1})=-(-1-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1})\to 1(n\to\infty)$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)}=1$。

2. 利用级数求 n 项和式的极限

通项为和式的数列极限，可以化为积分或级数求和问题，当然也是计算这类数列极限的一个重要方法。

设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。

由此，我们常可求数列级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的和，从而求得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$。

解: 考虑数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$，现求其和，为此考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$。

该幂级数的收敛域为[-1,1]。设和函数为 S(x)，则在(-1,1)内 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{n}(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=-\frac{x^2}{1+x^2}$。

$$s(x)=\int_0^x s'(t)dt=-\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt=\mathrm{arctg}x-x,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=s(1)=\mathrm{arctg}1-1=\frac{\pi}{4}-1$。

3. 利用单调有界原理求数列的极限

利用单调有界原理，解决了一些特殊数列的极限问题，在用单调有界原理证明数列极限的存在问题时，首先根据给出数列的通项公式，列举该数列的前几项，然后根据观察，初步判断已给数列的单调性和有界性。最后采用数学归纳法来验证观察所得出的结论，看看是否可以采用单调有界原理来证明此数列的存在问题。

计算极限除了上面讲的方法还有很多，比如讨论如何应用我们学过的幂级数、定积分、O-Stolz 公式、泰勒展式、微分中值定理等方法计算数列极限。主要是我们如何通过实例来阐述求数列极限中体现出的数学逻辑思维方法，如利用简单的初等函数(特别是高中数学中的基本初等函数)的麦克劳林展开式，往往能求得一些特殊形式的数列极限。还比如我们可以利用级数收敛性判定极限存在性，知道由于级数与数列可以有的时候相互转化，因此使得级数与数列的性质有了必然的联系。这样，数列极限的存在性及数列极限的求解，就可以可转化为研究级数收敛性问题，我们利用 O-Stolz 公式计算数列极限、应用泰勒公式求数列极限，就可以减少做题的过程，使这个问题更容易地解决。不过总的来说，像有的方法仅限于求两个无穷小量的乘积或除的极限，而对两个无穷小数列非乘且非除的极限，以上方法不能直接去做，因此用 Taylor 公式代换是解决这类数列极限问题的一种很好的方法。还有利用微分中值定理求极限，利用数列函数的增减性求数列函数的最大值和最小值，还有数列函数的图像等方面都被广泛应用。其实数列它是一种特殊的函数，是一种定义域为正整数集的特殊的函数，因此它也像一般函数一样具有单调性。

数列单调性也是它的重要性质，数列的单调性应用非常广泛。求解数列极限的方法还有很多，比如把通项 $a_n=f(n)$拓展为$[1,\infty)$上的函数 f(x)，然后应用洛必达法则，或利用结果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$(其中 $a_n>0$)以及均值定理等都可以求出极限。还有在高中阶段求数列的极限的时候，可以将比较复杂数列极限的问题，通过变形或化简。比如用分组求和法、错位求和法求极限，分母有理化、还有分母分子同时都除以 n 的最高次幂的方法将它化简。这样我们可以将它转化成为简单基本数列极限的问题，就可以求出所要得到的极限。但是我们解决数列的极限问题时应该灵活运用我们所学的数列极限的有关方法与技巧，注意要认真思考，多联想所学的知识，要学会学以致用。函数极限只是把数列极限进一步深度话。但是函数极限与数列极限有类似的四则运算的法则，求函数极限的基本思想也是运用求数列的各种方法技巧的互相转化问题，尤其在实施转化时，可注意方法与技巧的转化，就可以仿照求数列极限的一些方法与技能。

数列极限在高中数学中起着衔接作用，极限的概念和运算法则是学微积分最重要的基础，也是学好导数和微分的基础。所以，历年来数列极限一直是高考重点考查的内容之一，其题型多与分类讨论的思想相结合，或者通过求某数列的前 n 项和或积再求极限。数列极限在数学这门学科中有着非常重要的作用，我们一定要掌握求数列极限的方法与技巧。

(通渭县常河职中)