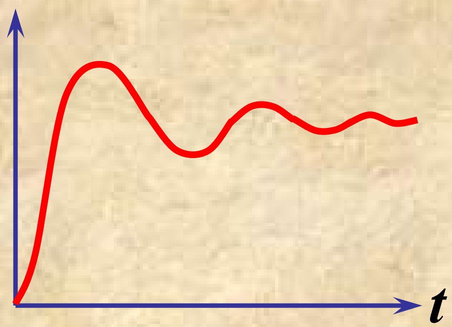
第七章 线性离散系统的分析与校正

7-1 离散系统的基本概念

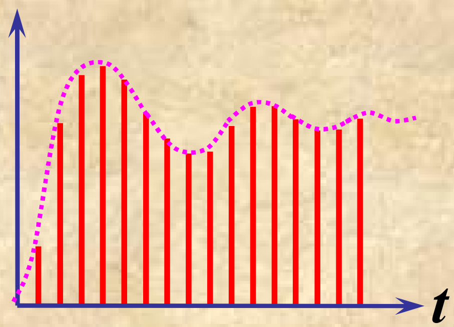
离散系统：系统中某些信号仅定义在离散时间上。

采样（脉冲）控制系统：离散信号是脉冲序列形式

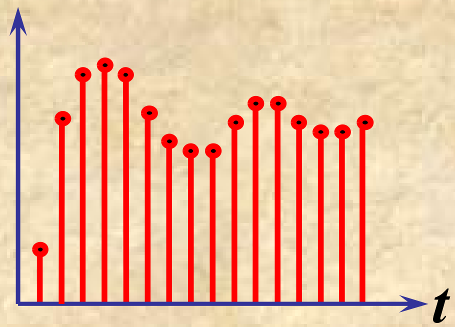
计算机控制系统（数字控制系统）：数字序列形式的离散系统



(*a*) 连续信号



(*b*) 离散信号



(c) 离散量化信号

一. 采样控制系统

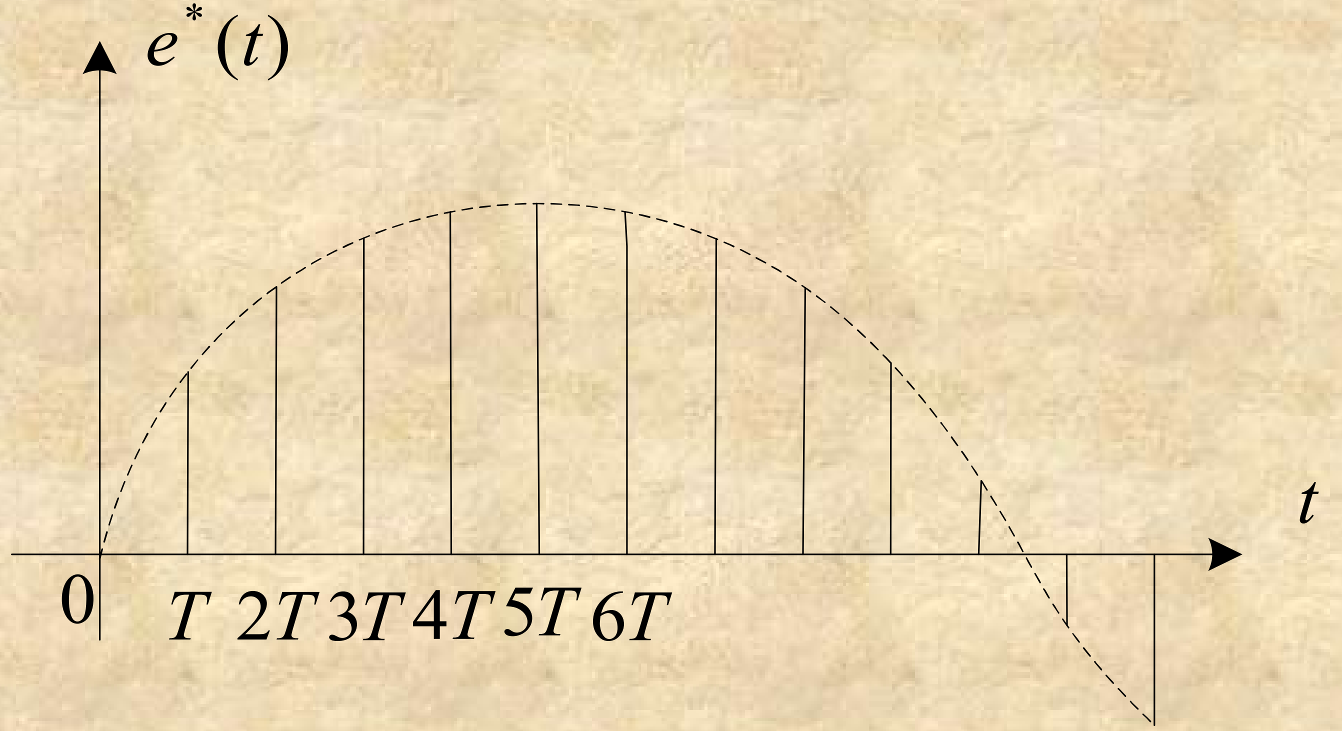
- 信号采样：对连续信号在某些规定的时刻进行取值，并变为脉冲序列的过程。

$$\begin{cases}\text{周期采样：采样的时间间隔具有一定规律。（本章内容）}\\ \text{非周期采样：采样的时间间隔是时变的、或随机的。}\end{cases}$$

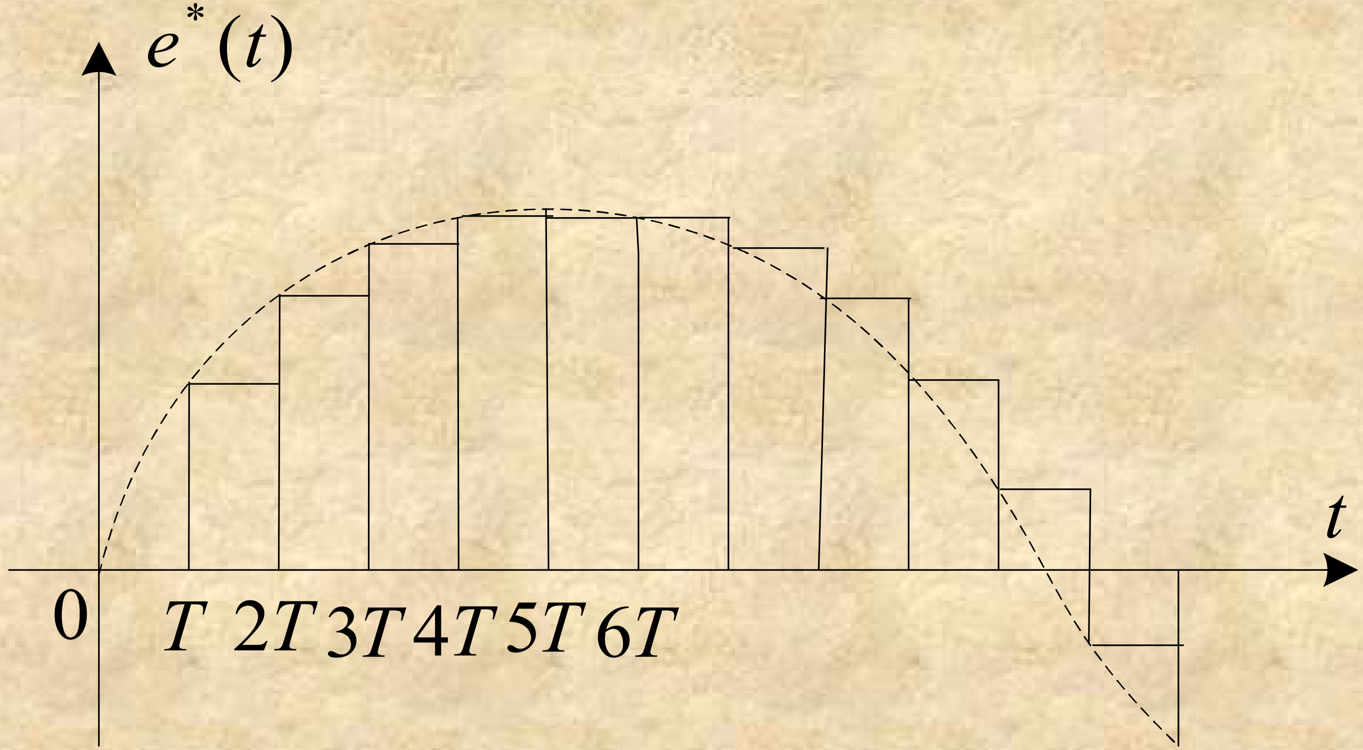
- 信号复现：把脉冲序列转变为连续信号的过程。

实现的装置：保持器

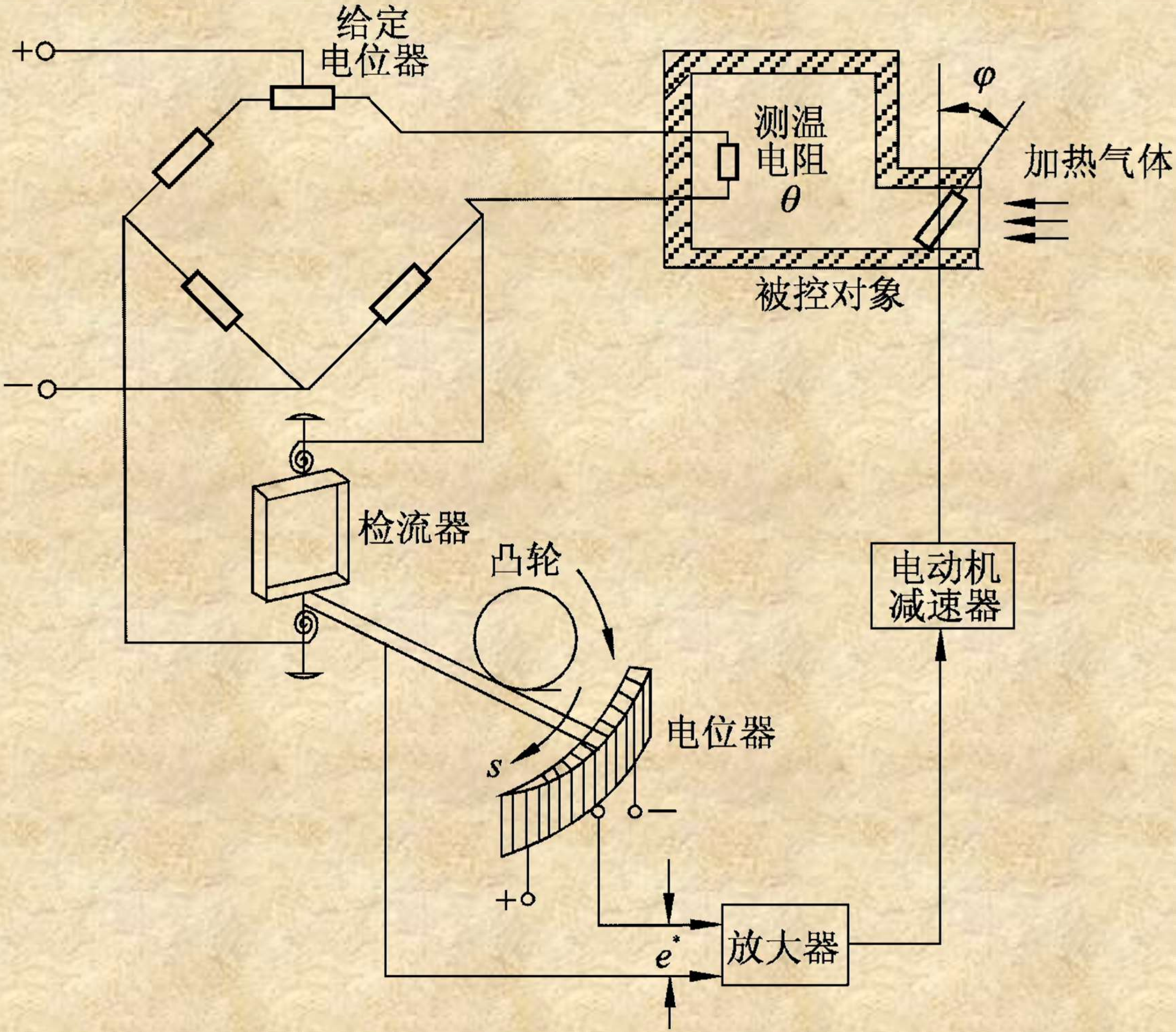
存在的问题：如何恢复采样时刻之间的信息



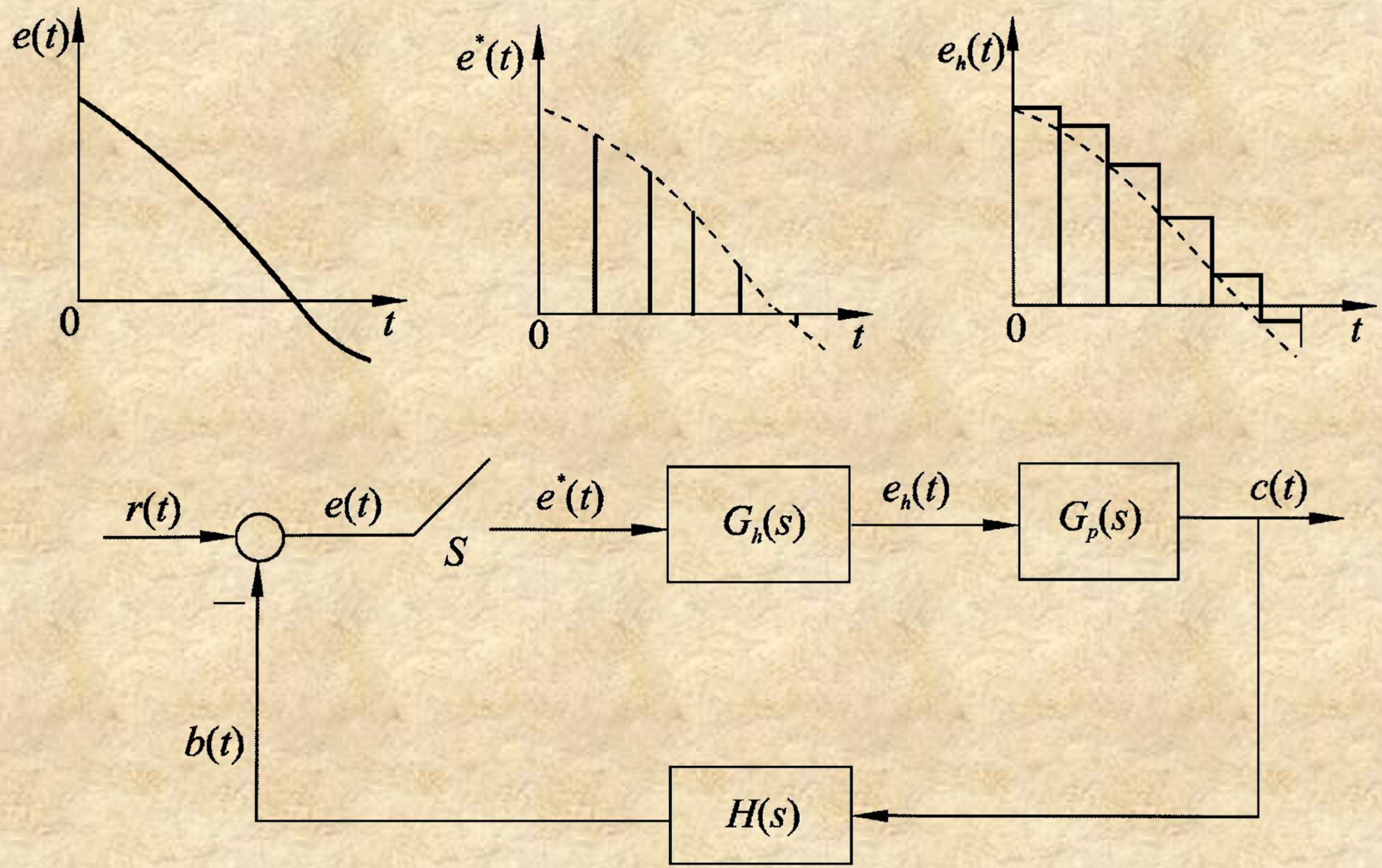
$e^*(t)$
t
0
T $2T$ $3T$ $4T$ $5T$ $6T$



$e^*(t)$
t
0
T $2T$ $3T$ $4T$ $5T$ $6T$



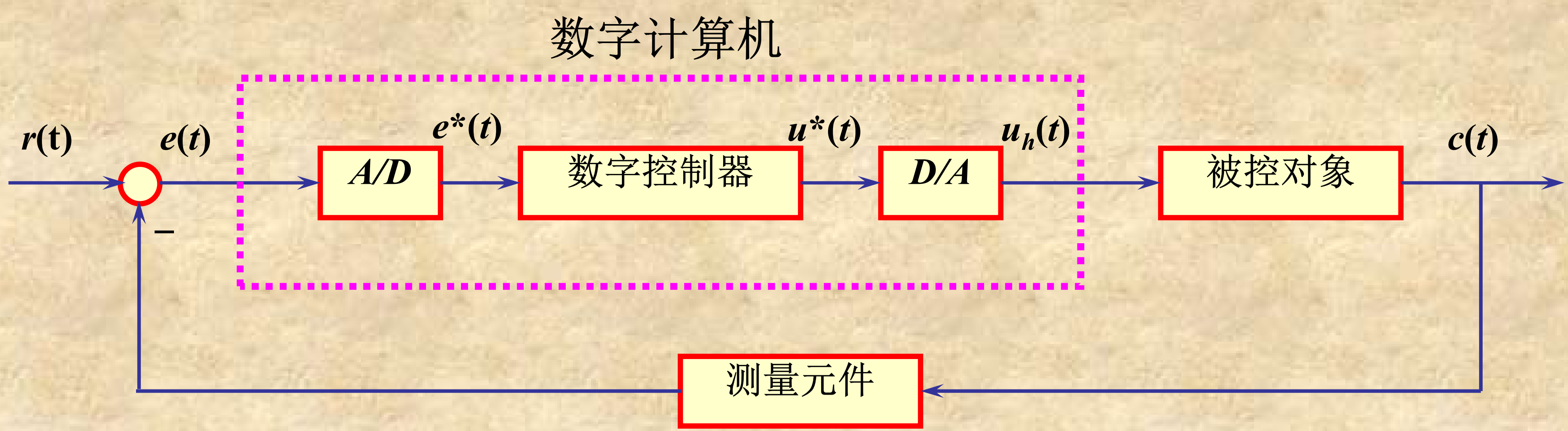
炉温采样控制系统原理图



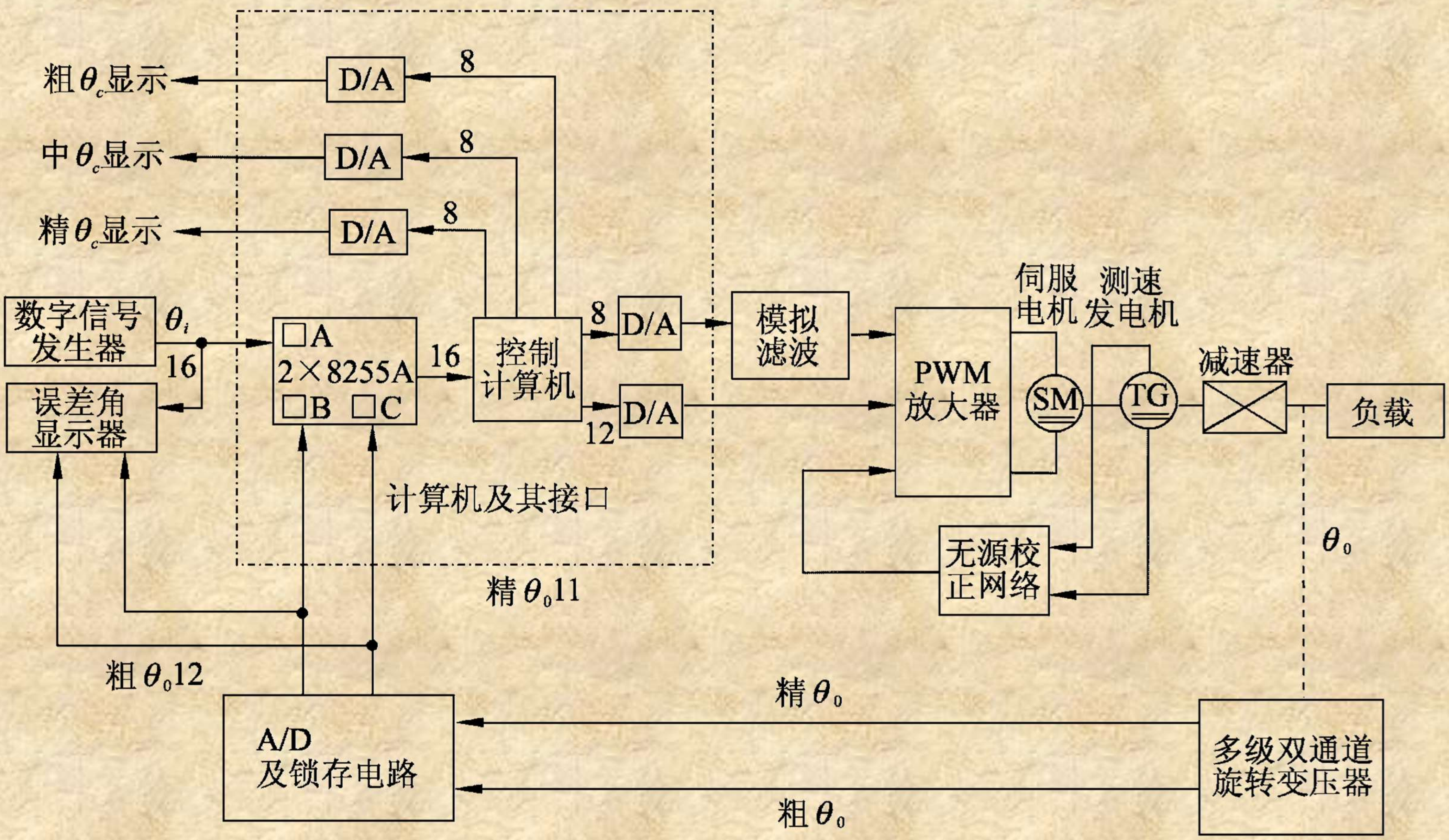
采样系统典型结构图

二. 数字控制系统

- 以数字计算机为控制器去控制具有连续工作状态的被控对象的闭环控制系统。



计算机控制系统典型原理图



小口径高炮高精度伺服系统

❖离散控制系统的特点

1. 校正装置效果比连续式校正装置好，且由软件实现的控制规律易于改变，控制灵活。

2. 采样信号，特别是数字信号的传递能有效地抑制噪声，从而提高系统抗干扰能力。

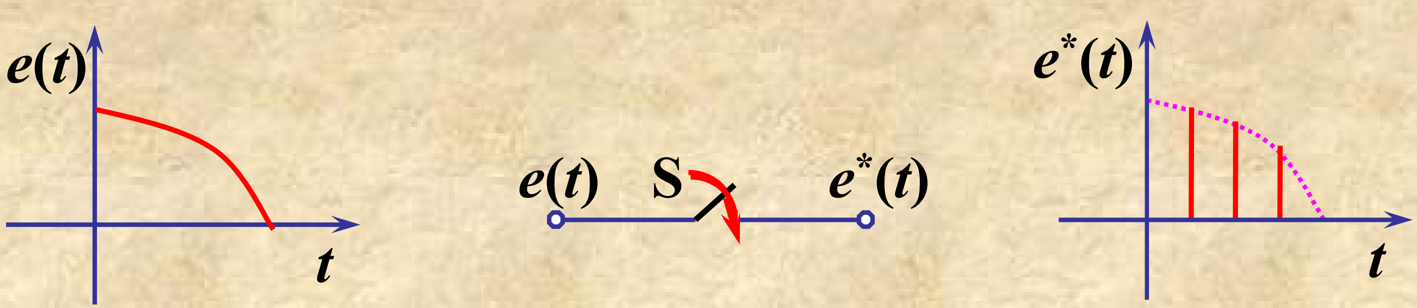
3. 可用一台计算机分时控制若干个系统，提高设备利用率。

4. 可实现复杂控制规律，且可以在运行中实时改变控制参数。

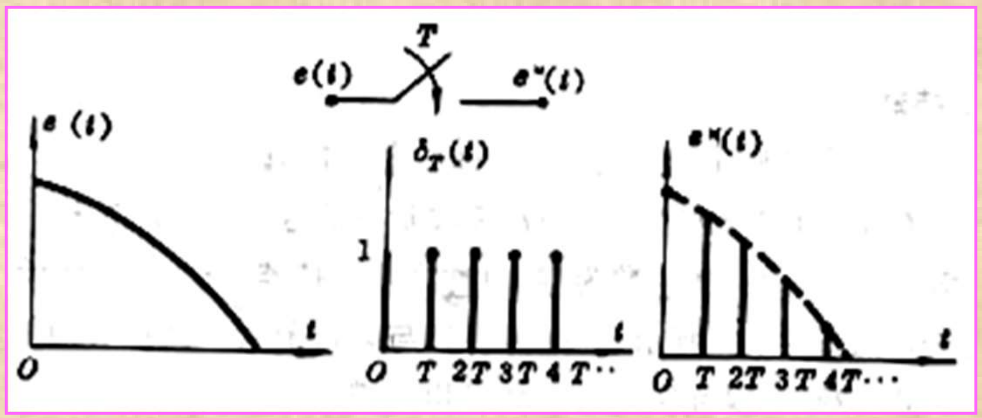
7-2 信号的采样与保持

一、采样过程

把连续信号变换为脉冲序列的装置称为采样器，又叫采样开关。



物理意义：可看成是单位理想脉冲串被输入信号 $e(t)$ 进行调制的过程。



二、采样过程的数学描述

采样信号：

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$e^*(t) = e(t)\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT)$$

对 $e^*(t)$ 取拉氏变换，得：

$$E^*(s) = L[e^*(t)] = L[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs}$$

$E^*(s)$ 只与 $e(nT)$ 有关，无法反映非采样点的信息。

例：设 $e(t)=1(t)$，求 $e^*(t)$ 的拉氏变换。

解：根据定义得到：

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}=1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{e^{Ts}}{e^{Ts}-1}$$

三、香农采样定理

定理：如果采样器的输入信号具有有限带宽，且有最小周期分量 T_h，则使信号 $e(t)$ 完满地从采样信号 $e^*(t)$ 恢复的采样周期满足：$T\le\frac{T_h}{2}$

四、信号的保持

拟解决的问题：脉冲信号 $e^{*}(t)$ 在时间间隔 nT 到 $(n+1)T$ 之间信号的恢复。

特点：在信号恢复时，在采样时刻，连续信号的值与脉冲序列的强度相等，即：

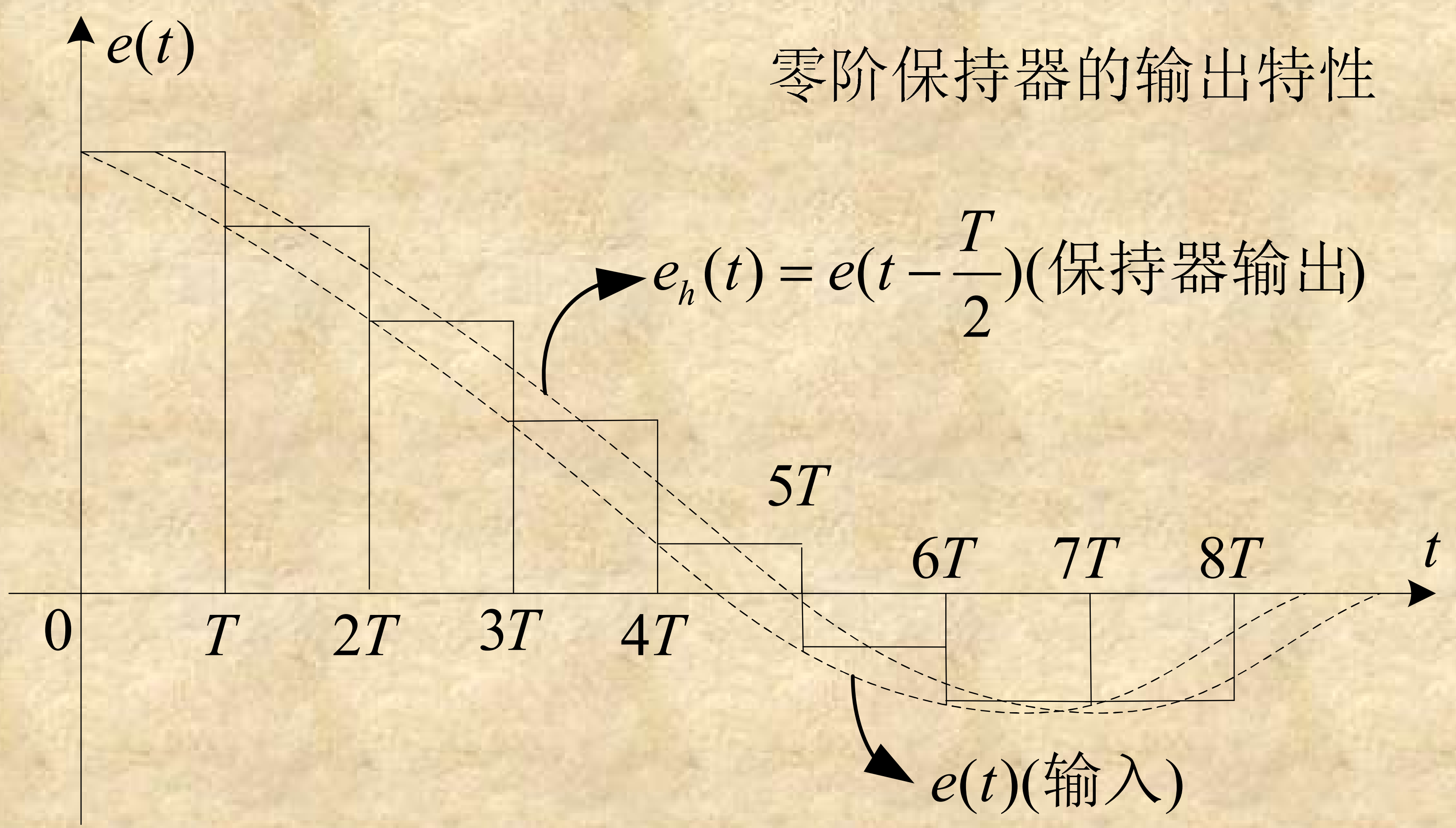
$$e(t)\big|_{t=nT} = e(nT) = e^{*}(nT)$$

办法：用采样保持器解决各采样点之间的插值问题（保持器是具有外推功能的元件）。

1、零阶保持器

输出表达式：$e(nT+\Delta t)=e(nT), 0\le \Delta t<T$

特点：将 $e(nT)$ 时刻的输出值保持到下一时刻。



求零阶保持器的传递函数：

输入表达式：幅值为1理想单位脉冲 $\delta(t)$

脉冲响应 $g_h(t)$：幅值为1，时间为 T 的矩形脉冲：

$$g_h(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

取拉氏变换，得零阶保持器的传递函数：

$$G_h(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

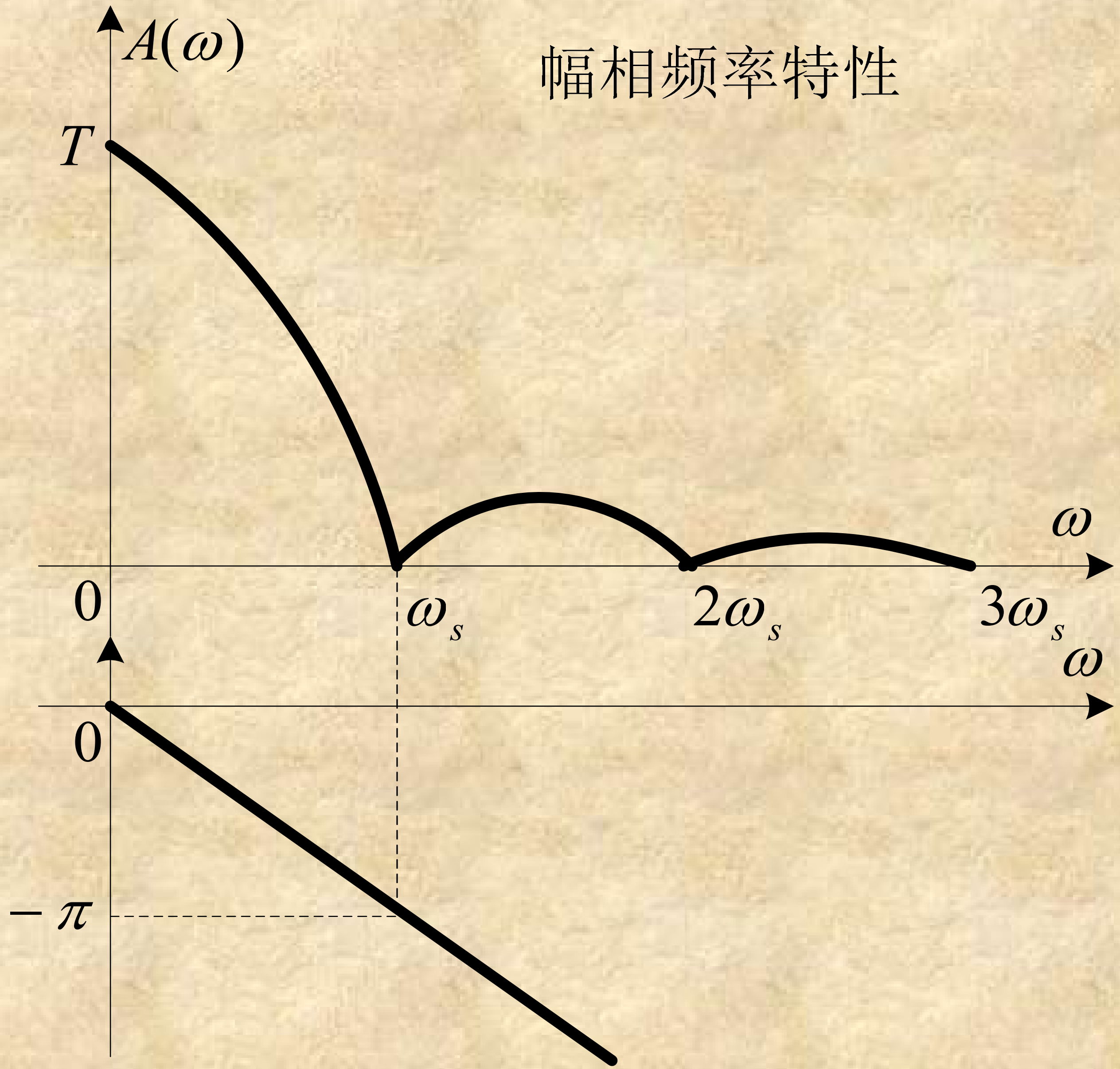
$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{2j\omega} = T\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}e^{-j\omega T/2}$$

$$G_h(j\omega) = T\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}e^{-j\omega T/2} = \frac{2\pi}{\omega_s}\cdot\frac{\sin\pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)}e^{-j\omega T/2}$$

①具有低通特性；

②增加滞后相角，
系统稳定性变差；

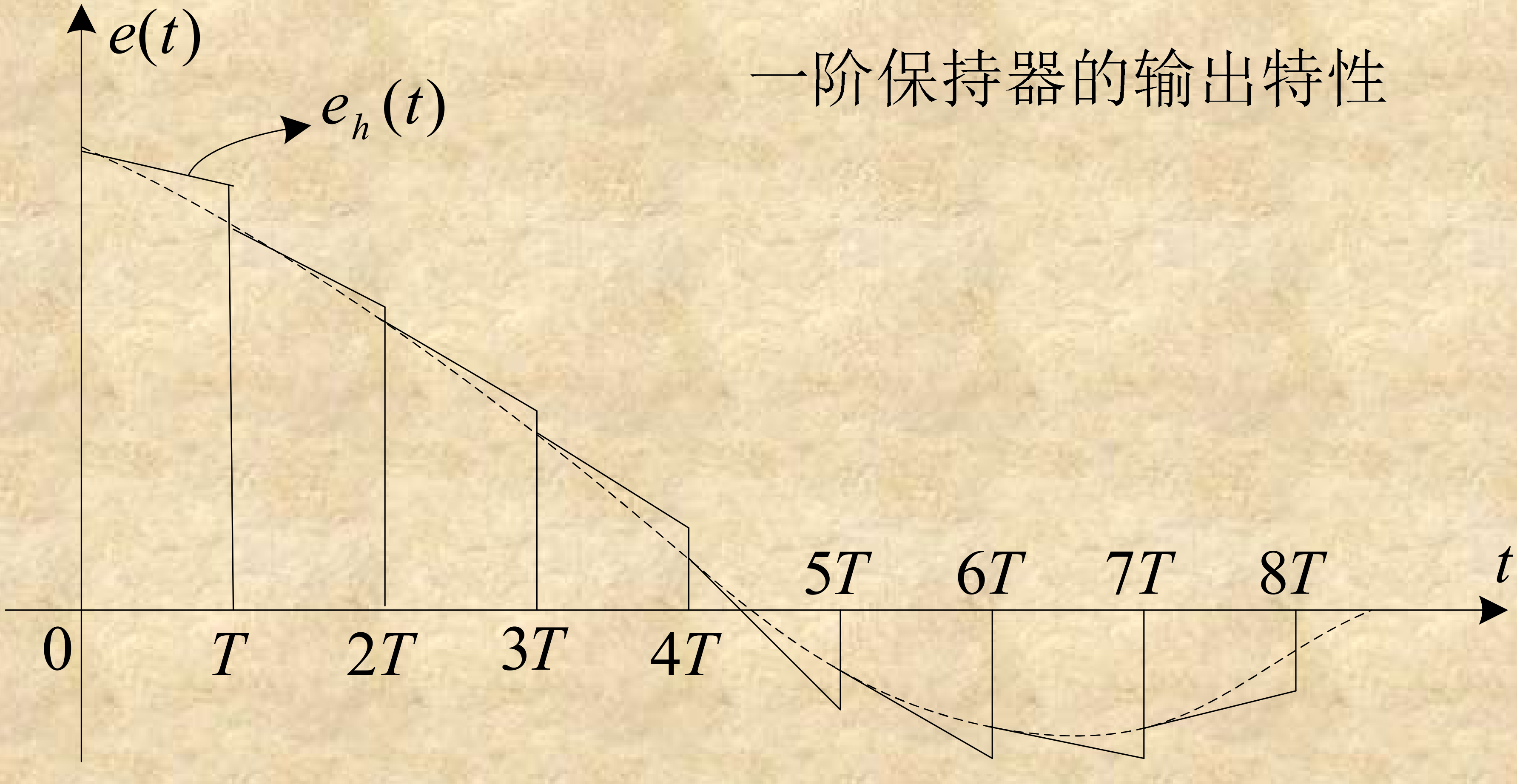
③平均输出响应
为$e(t-T/2)$，即
在时间上输出信号
滞后输入$T/2$，
相当于给系统增加
了一个延迟环节。



2、一阶保持器

输出表达式：$e(nT+\Delta t)=e(nT)+\dfrac{e(nT)-e[(n-1)T]}{T}\Delta t$

特点：利用线性拟合得到采样间隔的输出。



一阶保持器的输出特性

一阶保持器的特性：

传递函数如下：$G_h(s)=T(1+Ts)\left(\dfrac{1-e^{-Ts}}{Ts}\right)^2$

$$G_h(j\omega)=T\sqrt{1+(\omega T)^2}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 e^{-j(\omega T-tg^{-1}\omega T)}$$

- ✓ 一阶保持器复现信号的准确性较高；
- ✓ 保持器幅频特性较大，带宽较大，通过的高频信号较多，易造成干扰和纹波；
- ✓ 相角滞后较大，一般较少采用。

3、m阶保持器

输出表达式：

$$e(nT+\Delta t)=a_0+a_1\Delta t+a_2\Delta t^2+\cdots+a_m\Delta t^m$$

① 阶保持器的输出取决于过去m个时刻的离散信号的值；

② 保持器阶数越多，复现信号的能力越强，但时间延迟越大，带来的滞后相角越大，闭环系统越不易稳定。

7-3 Z变换理论

一、Z变换定义

$$E^*(s) = L[e^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs}$$

$$z \overset{\Delta}{=} e^{Ts} \Rightarrow s \overset{\Delta}{=} \frac{1}{T}\ln z$$

$$E^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\cdot z^{-n}$$

二、 Z变换方法

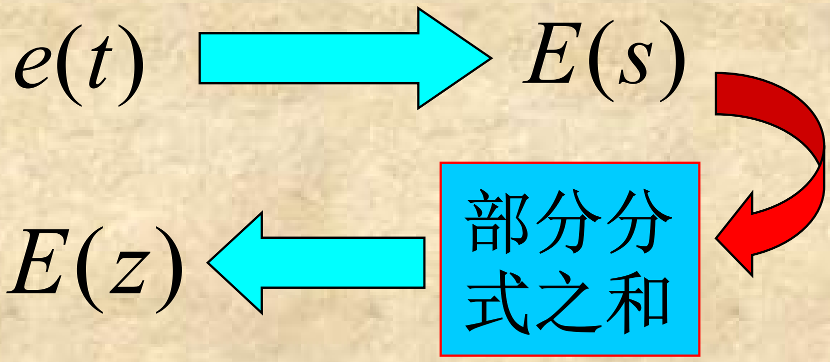
1. 级数求和法（定义法）

根据定义：

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\cdot z^{-n}=e(0)+e(T)z^{-1}\ldots+e(nT)z^{-n}+\ldots$$

对于常用函数，都可以写出其闭合形式。例7-6, 7-7

2. 部分分式法



例7-8, 7-9

三、 Z变换的性质

1. 线性定理

$$Z(\alpha_1 e_1 \pm \alpha_2 e_2) = \alpha_1 Z(e_1) \pm \alpha_2 Z(e_2) = \alpha_1 E_1(z) \pm \alpha_2 E_2(z)$$

2. 实数位移定理

$$Z[e^*(t-kT)] = z^{-k} E(z)$$

$$Z[e^*(t+kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nt) z^{-n}]$$

3. 复数位移定理

$$Z[e^*(t) e^{\mp \alpha T}] = E(z e^{\pm \alpha T})$$

4. 终值定理

$$e^{*}(t) \leftrightarrow E(z)$$

$e(nT)$有限

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}E(z)=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)E(z)$$

5. 卷积定理

$$x(nT)*y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)y[(n-k)T]$$

$$g(nT)=x(nT)*y(nT)$$

$$G(z)=X(z)\cdot Y(z)$$

四、 Z反变换

1. 部分分式法（查表法）

将$E(z)$展成若干分式和的形式，对每部分分式查Z变换表找出相应的$e^*(t)$。　　例7-13

2. 幂级数法（综合除法）

通过综合除法将$E(z)$展开成z^{-1}的升幂排列形式:

$$E(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}$$

$$e^*(t)=c_0\delta(t)+c_1\delta(t-T)+c_2\delta(t-2T)+\cdots$$

例7-14

3. 反演积分法（留数法）

$$e(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{r}E(z)z^{n-1}dz=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}\{E(z)z^{n-1}\}$$

单极点：

$$\mathrm{Res}\left[E(z)z^{n-1}\right]_{z\to z_i}=\lim_{z\to z_i}\left[\left(z-z_i\right)E(z)z^{n-1}\right]$$

n阶重极点:

$$\mathrm{Res}\left[E(z)z^{n-1}\right]_{z\to z_i}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(z-z_i\right)^n E(z)z^{n-1}\right]$$

例7-15

例：已知 $E(z)=\dfrac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$，试计算 $e(nT)$。

解：

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{(1-e^{-\alpha T})}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-\alpha T}}$$

$$E(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$$

$$e(nT)=1-e^{-\alpha nT}$$

例：已知 $E(z)=\dfrac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$，试计算 $e(nT)$。

解：函数 $E(z)z^{n-1}$ 有两个单极点：

$$\operatorname{Res}\left[E(z)z^{n-1}\right]_{z\to 1}=\lim_{z\to 1}\left[\frac{(1-e^{-\alpha T})z^{n}}{(z-e^{-\alpha T})}\right]=1$$

$$\operatorname{Res}\left[E(z)z^{n-1}\right]_{z\to e^{-\alpha T}}=\lim_{z\to e^{-\alpha T}}\left[\frac{(1-e^{-\alpha T})z^{n}}{(z-1)}\right]=-e^{-\alpha nT}$$

$$e(nT)=1-e^{-\alpha nT}$$

7-4 离散系统的数学模型

一、离散系统的数学定义

- 非线性离散系统
- 线性离散系统：满足叠加原理
  - 线性定常离散系统：输入输出关系不随时间变化
  - 线性时变离散系统

二、线性常系数差分方程及其解法

一般 n 阶线性定常离散系统：

$$c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\cdots+a_nc(k)$$
$$=b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\cdots b_mr(k)$$

差分方程求解

迭代法：根据差分方程和初值条件，利用递推关系一步一步计算输出序列。 例7-16

z变换法：对差分方程取Z变换，得到以z为变量的代数方程，然后对其求解后取反变换。

例7-17

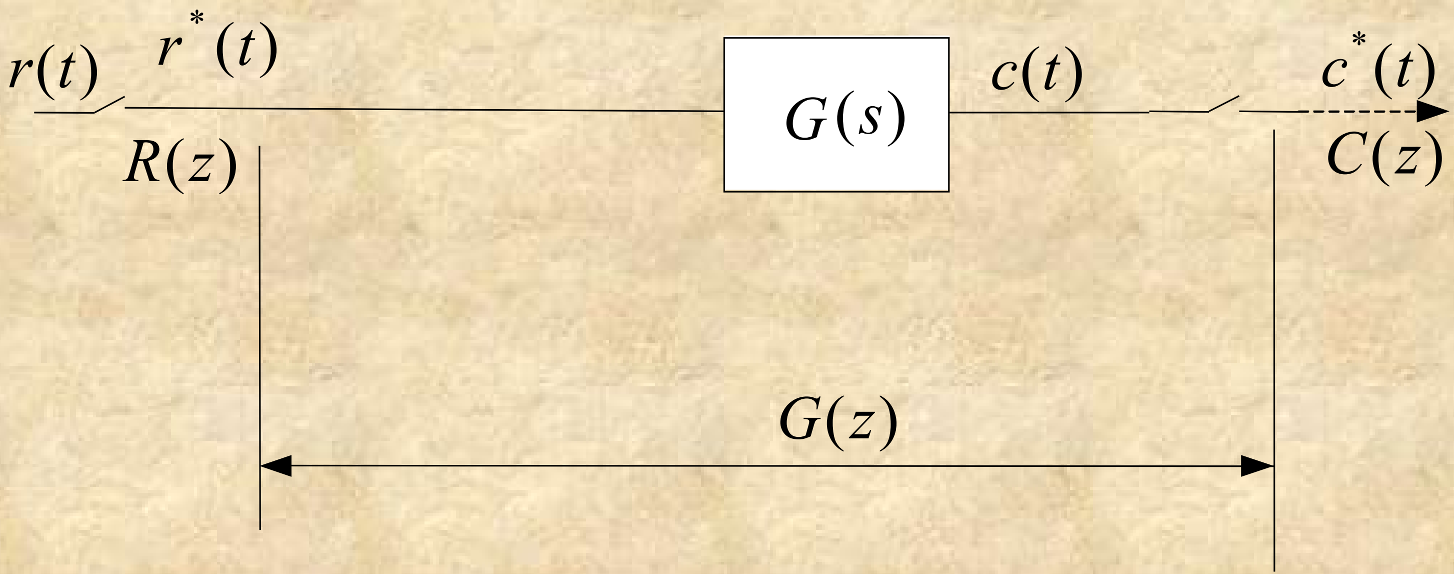
三、脉冲传递函数

1. 脉冲传递函数的定义

- 零初始条件下，系统输出的z变换与输入的z变换之比，称为脉冲传递函数：

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

脉冲传递函数定义



- 当输入 $r(nT)=\delta(nT)$，系统输出称为单位脉冲响应序列，记做：$c(nT)=K(nT)$，则有：

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}K(nT)z^{-n}$$

$$G(s)\xrightarrow{L^{-1}}K(t)\xrightarrow{\text{离散化}}K(nT)\xrightarrow{z}G(z)$$

$$G(z)=G^{*}(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln(Z)}=Z(G(s))$$

例7-18, 7-19

四、开环系统脉冲传递函数

1. 两个性质

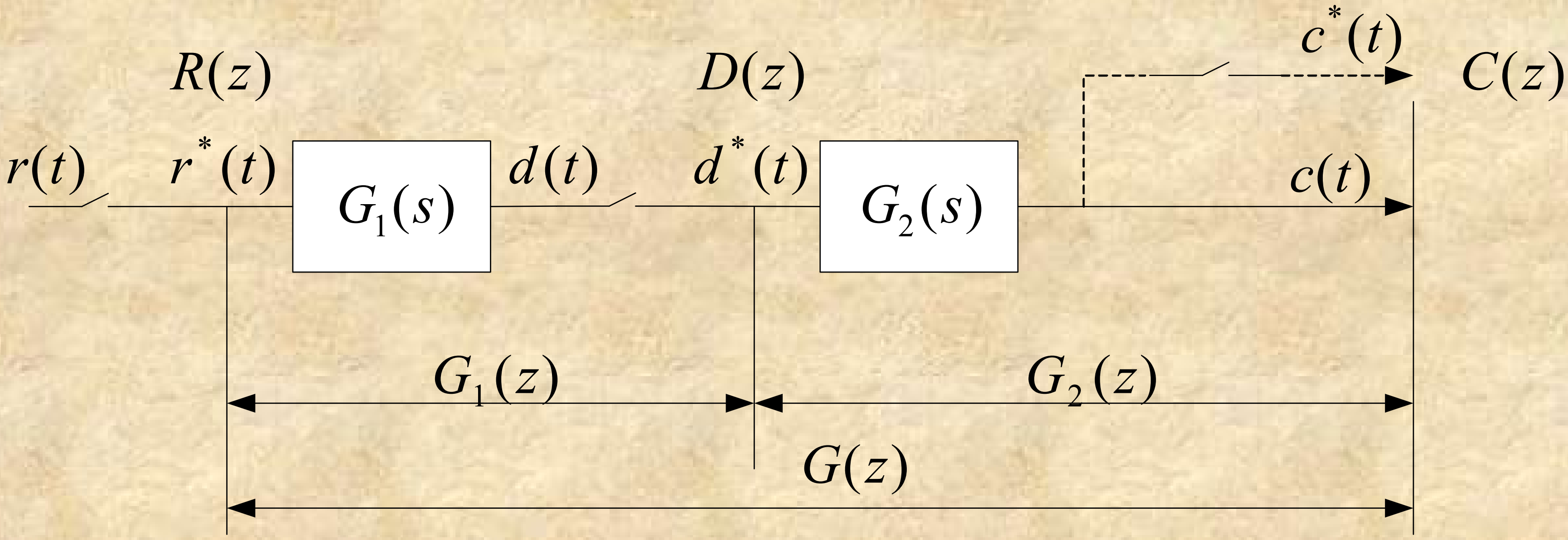
$$G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$$

$$\left[G(s)E^*(s)\right]^* = G^*(s)E^*(s)$$

证明见教材。

2. 环节串联时的开环脉冲传递函数

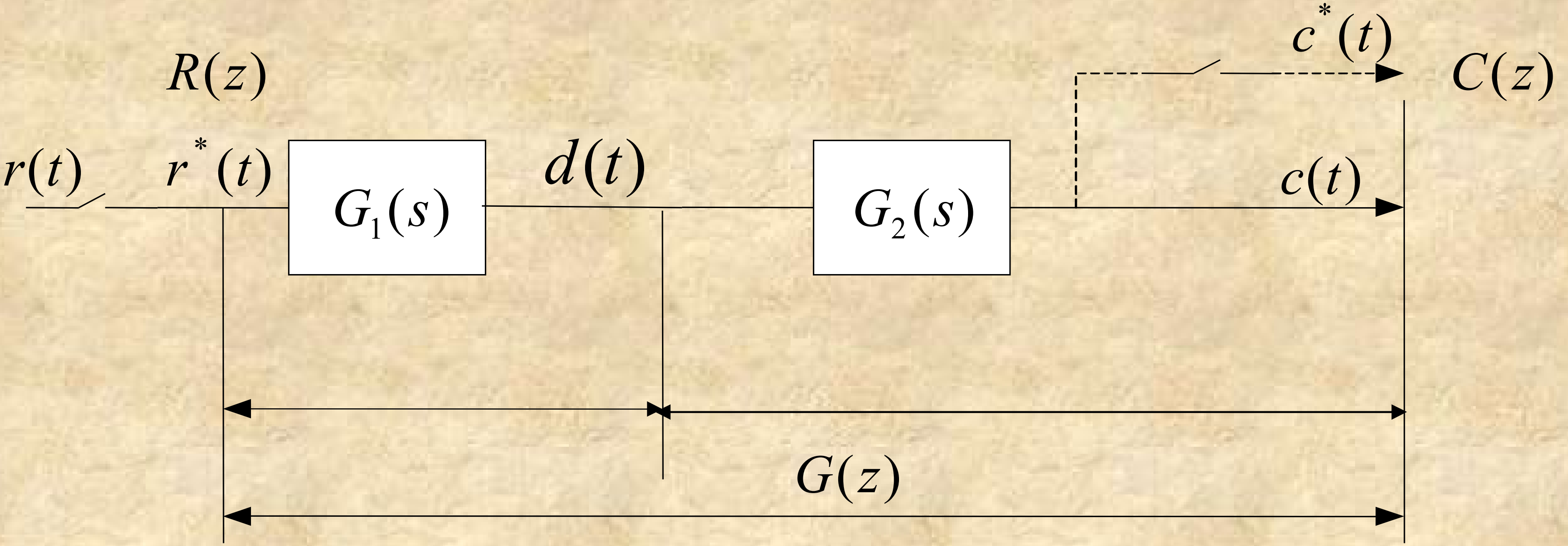
① 环节之间有采样开关



$$G_1(z)=\frac{D(z)}{R(z)} \qquad G_2(z)=\frac{C(Z)}{D(z)}$$

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$$

② 环节之间无采样开关



$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=Z[G_1(s)G_2(s)]\neq Z[G_1(s)]\cdot Z[G_2(s)]$$

例：

$$G_1(s)=\frac{1}{s}$$

$$G_2(s)=\frac{10}{s+10}$$

$$G_1(z)=\frac{Z}{Z-1}$$

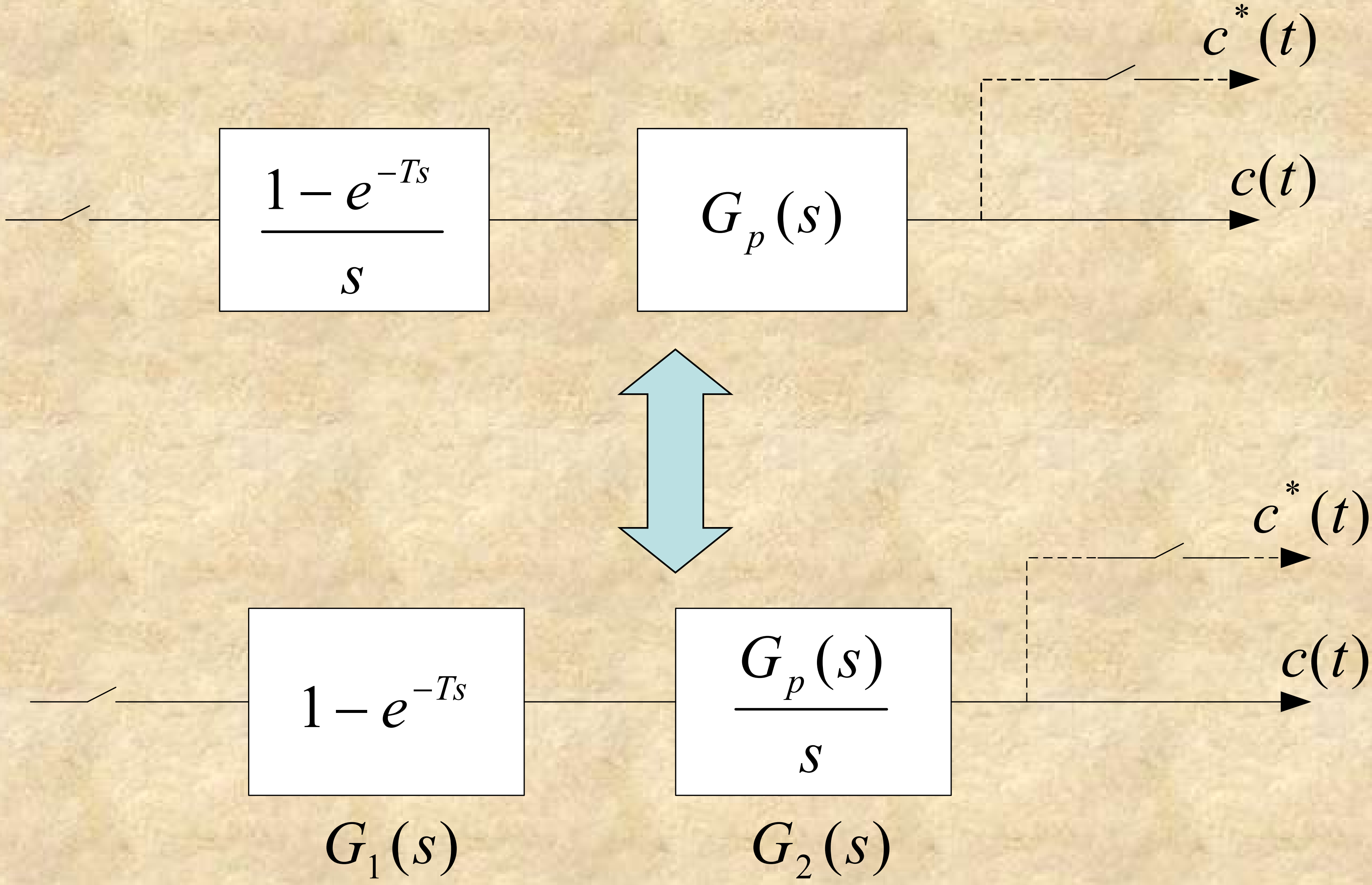
$$G_2(z)=\frac{10z}{z-e^{-10T}}$$

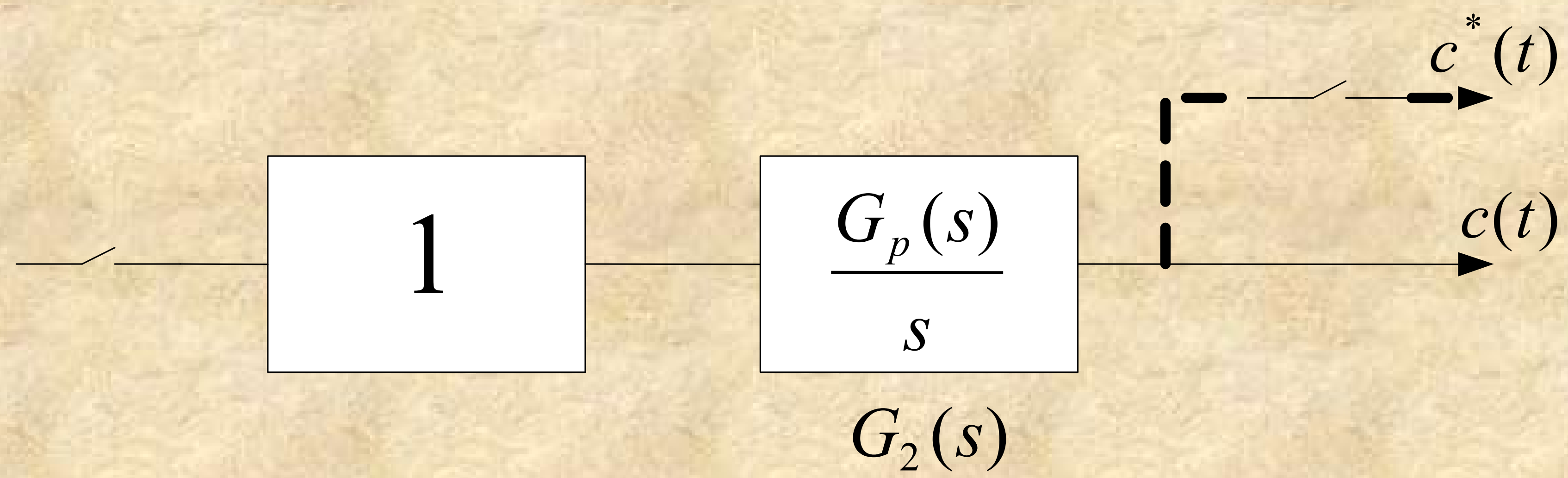
$$G_1(z)\cdot G_2(z)=\frac{Z}{Z-1}\cdot\frac{10z}{z-e^{-10T}}$$

$$G_1G_2(z)=Z\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+10}\right]=\frac{z(1-e^{-10T})}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

$$\mathrm{Z}[G_1(s)G_2(s)]\neq \mathrm{Z}[G_1(s)]\cdot Z[G_2(s)]$$

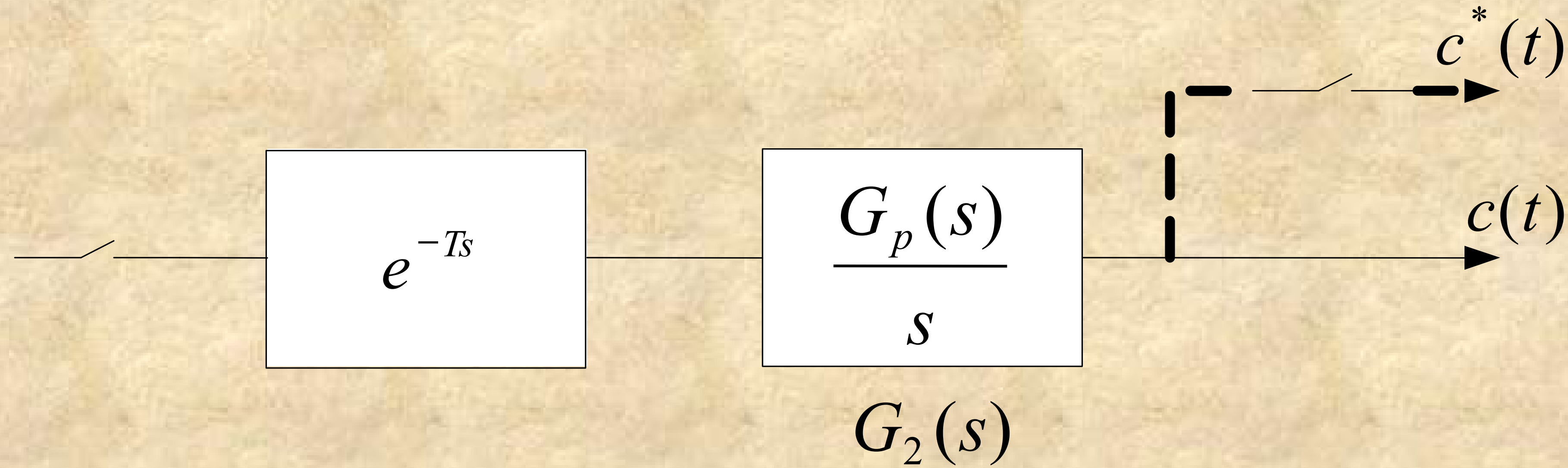
3. 有零阶保持器时的开环脉冲传递函数





$c^*(t)$
1
$\frac{G_p(s)}{s}$
$c(t)$
$G_2(s)$

$-$



$c^*(t)$
e^{-Ts}
$\frac{G_p(s)}{s}$
$c(t)$
$G_2(s)$

$$C(z) = C_1(z) - C_2(z)$$

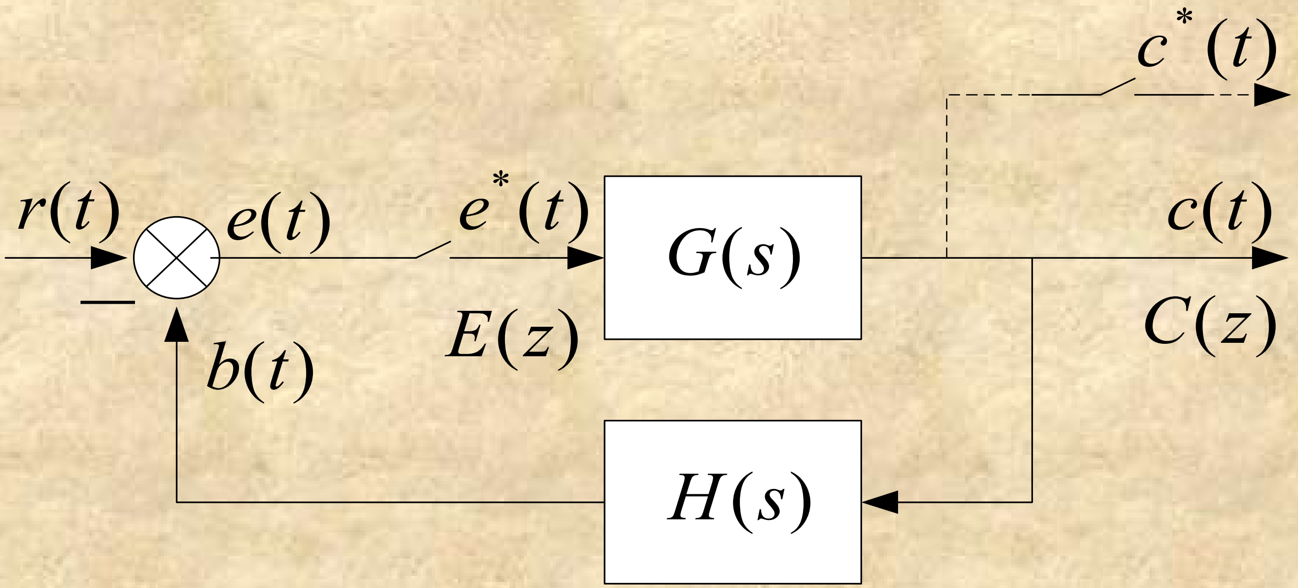
$$C_1(z) = \mathrm{Z}[c_1^*(t)] = G_2(z)R(z)$$

$$C_2(z) = \mathrm{Z}[c_2^*(t)] = z^{-1}G_2(z)R(z)$$

$$c(t) = \frac{z-1}{z} G_2(z)R(z)$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} G_2(z) = \frac{z-1}{z} \mathrm{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] = (1 - z^{-1})\mathrm{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$$

五、闭环系统的脉冲传递函数



$$E(z) = R(z) - B(z) \qquad B(z) = E(z)HG(z)$$

$$E(z) = \frac{R(z)}{1+HG(z)} \overset{\Delta}{=} \Phi_e(z)R(z) \qquad \Phi_e(z) \neq Z[\Phi_e(s)]$$

$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1+HG(z)} \overset{\Delta}{=} \Phi(z)R(z) \qquad \Phi(z) \neq Z[\Phi(s)]$$

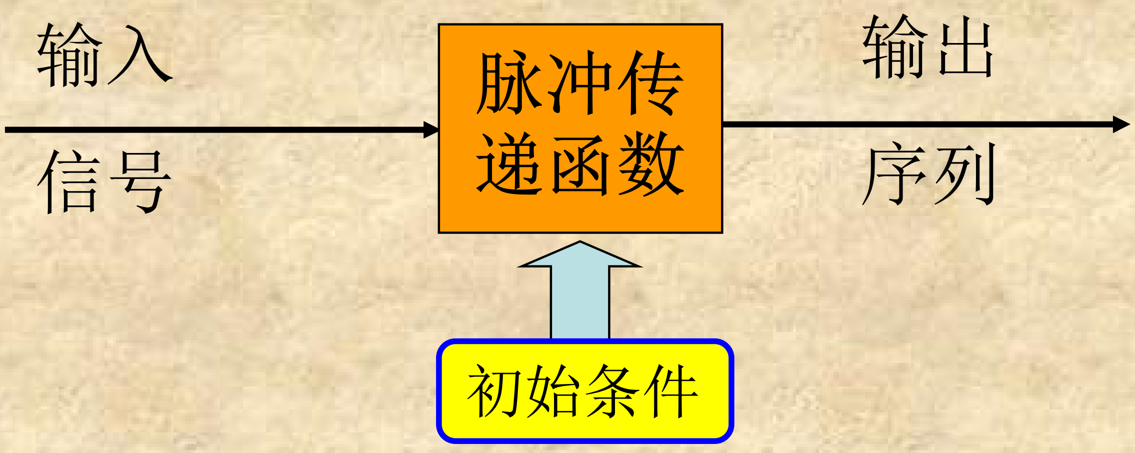
例7-22，7-23

五、闭环系统的脉冲传递函数

- 采样器在闭环系统中的位置可以有多种配置，因此闭环离散系统没有唯一的结构图形式，其闭环脉冲传递函数也有不同形式。

- 当误差信号之后没有采样开关时，无法求出闭环离散系统对于输入量的脉冲传递函数！

七. 应用脉冲传递函数计算系统响应



- 零初始条件下，计算响应序列
- 非零初始条件时，计算响应序列

零初始条件下响应序列计算：

计算过程：Step 1. 计算 $R(z)=Z(r(nT))$；

Step 2. $C(z)=G(z)R(z)$；

Step 3. 输出信号：$c(nT)=Z^{-1}(C(z))$

幂级数法

部分分式法

留数法

例：已知某离散系统的脉冲传递函数为：

$$G(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

且初始条件为零，试计算 $r(nT)=1$ 作用下的响应。

解：对于输入 $r(nT)=1$，有：

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$C(z)=G(z)R(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$$

函数 $C(z)z^{n-1}=\dfrac{z^{n+1}}{(z-1)^2(z-2)}$ 有两个极点：

$$\operatorname{Res}\left[C(z)z^{n-1}\right]_{z\to 1}=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-2)}\right]=-n-2$$

$$\operatorname{Res}\left[C(z)z^{n-1}\right]_{z\to 2}=\lim_{z\to 2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)^2}\right]=2^{n+1}$$

$$c(nT)=2^{n+1}-n-2$$

非零初始条件下响应序列计算：

计算过程：

Step 1.通过脉冲传递函数得到系统的差分方程；

Step 2.考虑初始条件，用Z变换方法求解差分方程来得到系统的输出序列。

例：已知某离散系统的脉冲传递函数为：

$$G(z)=\frac{2}{z^2+3z+2}$$

且初始条件为 $c(0)=0, c(1)=1$，试计算零输入信号下的响应。

解：根据系统的脉冲传递函数得到：

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{2}{z^2+3z+2}$$

即：

$$C(z)\left(z^2+3z+2\right)=2R(z)$$

还原得到差分方程如下：

$$c(n+2)+3c(n+1)+2c(n)=2r(n)$$

对上式求 Z变换后得到：

$$\left[z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)\right]+3\left[zC(z)-zc(0)\right]+2C(z)=2R(z)$$

整理后得到：

$$C(z)=\frac{2R(z)}{\left[z^2+3z+2\right]}+\frac{\left[\left(z^2+3z\right)c(0)+zc(1)\right]}{\left[z^2+3z+2\right]}$$

代入初始条件和 $R(z)=0$，并整理后得到：

$$C(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

$$\frac{C(z)}{z}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}$$

其中,

$$A=\lim_{z\to-1}\frac{1}{(z+2)}=1,\qquad B=\lim_{z\to-2}\frac{1}{(z+1)}=-1$$

$$C(z)=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}\qquad\Longrightarrow\qquad c(nT)=1-(-2)^n$$

7-5 离散系统的稳定性与稳态误差

一、S域到Z域的映射

$$z = e^{Ts} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$s = \sigma + j\omega \quad \Rightarrow \quad z = e^{Ts} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$$

$$|z| = e^{\sigma T}$$

$s=\sigma+j\omega \Rightarrow |z|=e^{\sigma T}$

① S域虚轴 $\sigma=0 \Rightarrow |z|=1$

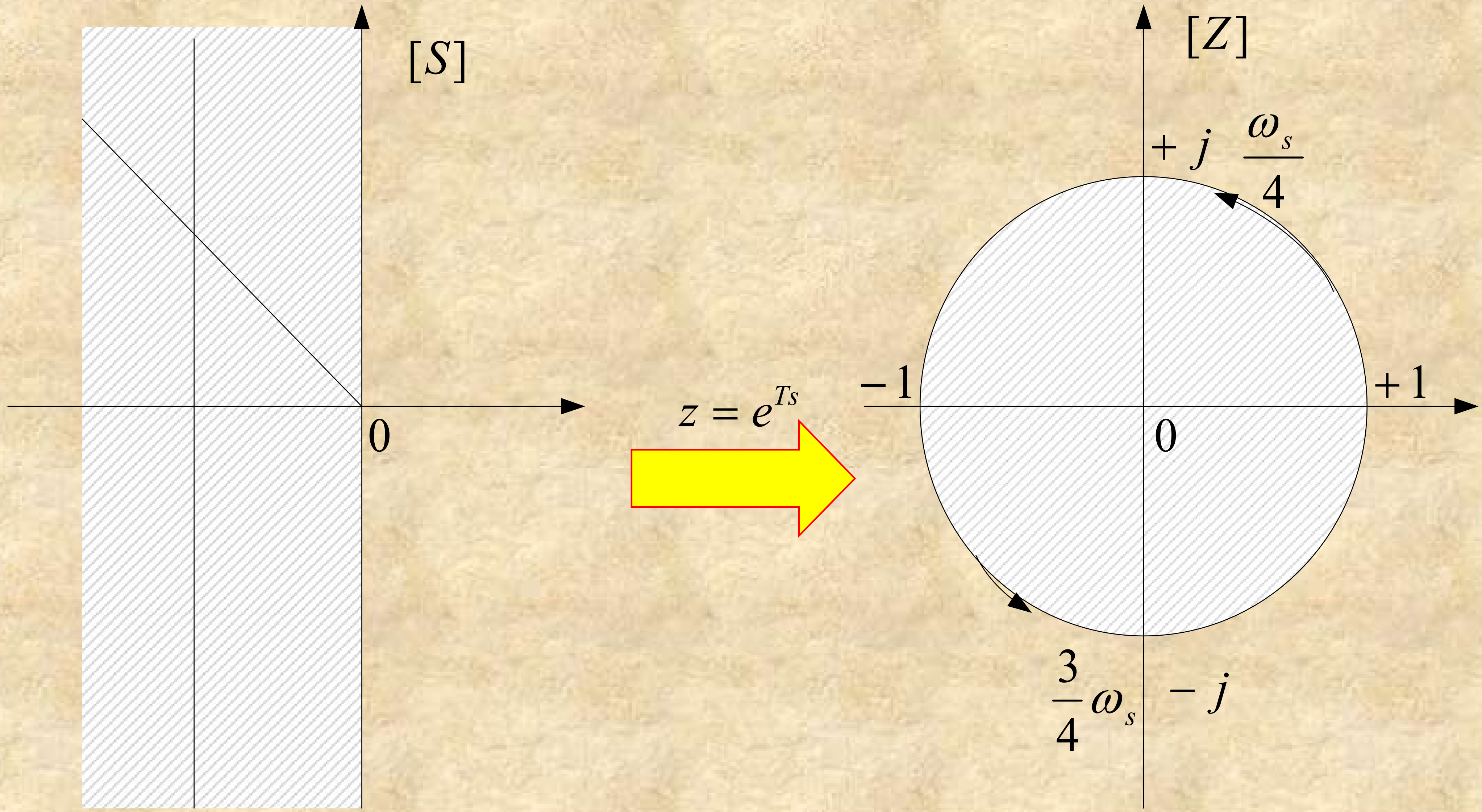
$\Rightarrow$ 单位圆上

② S域左半平面 $\sigma<0 \Rightarrow |z|<1$

$\Rightarrow$ 单位圆内

③ S域的右半平面 $\sigma>0 \Rightarrow |z|>1$

$\Rightarrow$ 单位圆外



[S]
0
$z = e^{Ts}$
[Z]
$+j$
$\frac{\omega_s}{4}$
-1
$+1$
0
$\frac{3}{4}\omega_s$
$-j$

二、离散系统稳定的充分必要条件

定义：若离散系统在有界输入序列作用下，其输出序列也是有界的，则称该离散系统是稳定的。

稳定的充分必要条件：当且仅当离散系统的全部特征根位于单位圆内，即所有特征根的模均小于1时，该线性定常离散系统是稳定的。

三、离散系统的稳定性判据

1. 双线性变换与劳斯判据

目的：将连续系统稳定性分析方法推广到离散系统。

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

双线性变换

$$w=\frac{z+1}{z-1}$$

设：

$$z = x + jy \qquad w = u + jv$$

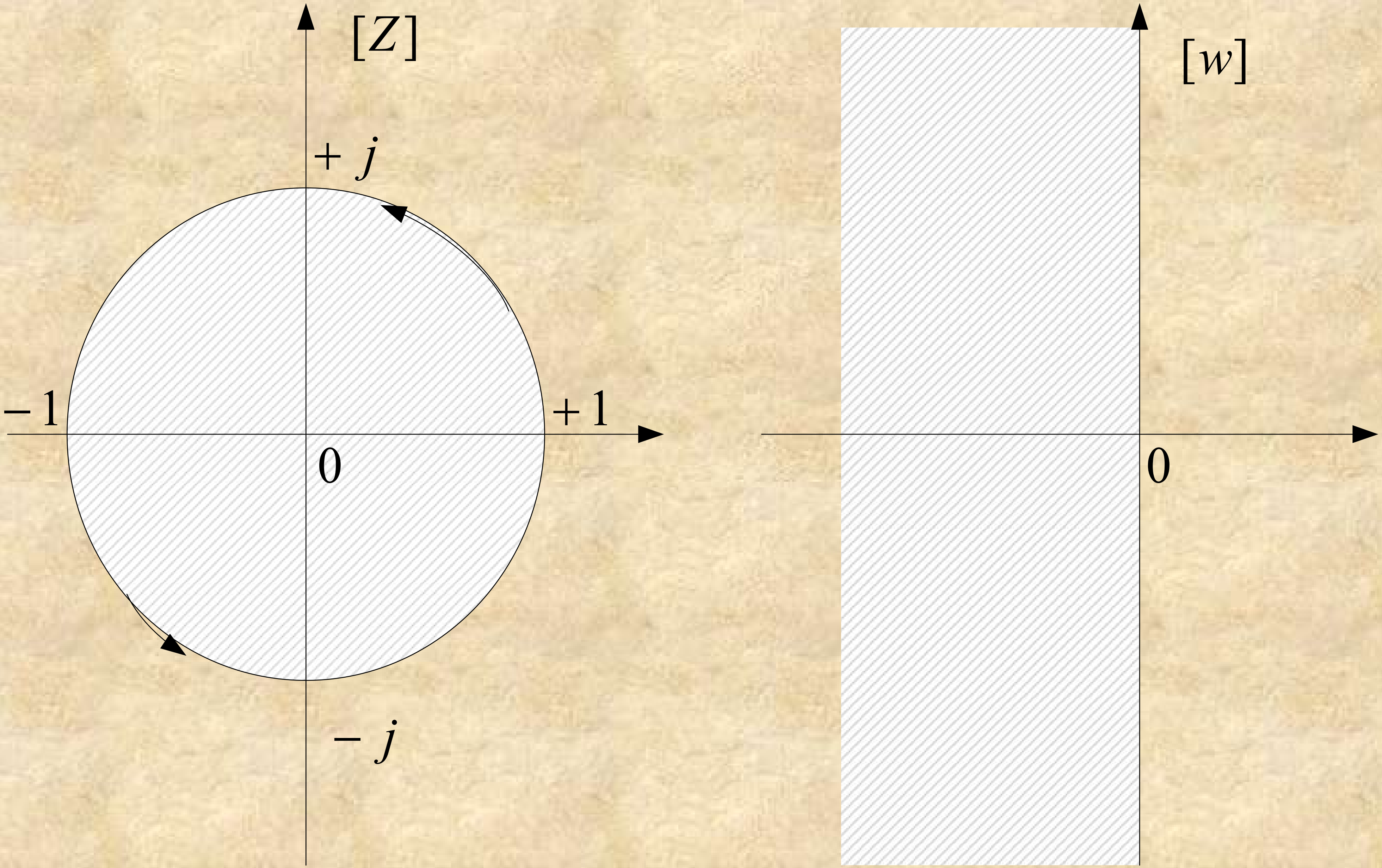
$$w = \frac{(x+1) + jy}{(x-1) + jy} = \frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2} - j\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$u = \frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2} \qquad v = -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

① Z平面单位圆上：$x^2 + y^2 = 1$ $\Rightarrow$ $u = 0$

② Z平面单位圆内：$x^2 + y^2 < 1$ $\Rightarrow$ $u < 0$

③ Z平面单位圆外：$x^2 + y^2 > 1$ $\Rightarrow$ $u > 0$


[Z]
+ j
−1
+1
0
− j
[w]
0

稳定条件：$\varphi(\omega)$ 的极点都在W平面的左半面，则系统稳定。

$$\varphi(s) \longrightarrow \varphi(z) \longrightarrow \varphi(w)$$

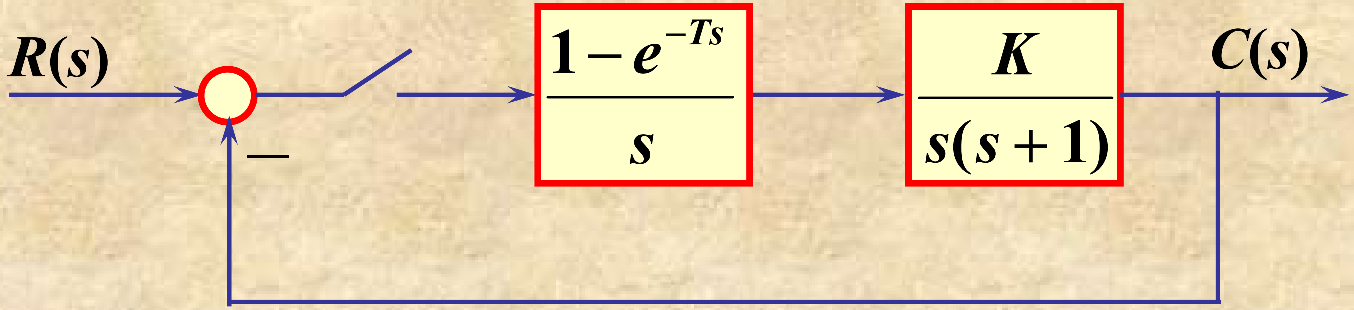
S平面　　Z平面　　W平面

虚轴　　单位圆　　虚轴

劳斯判据　　物理意义伪

劳斯判据

例：设系统的结构图如下图所示，采样周期T=1s 。设K=10,试分析系统的稳定性，并求系统的临界放大系数。



解：（1）由图得

$$G(s)=\frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2(s+1)}=\frac{10(1-e^{-s})}{s^2(s+1)}$$

$$G(z)=\frac{10(0.368z+0.264)}{z^2-1.368z+0.368}$$

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{3.68z+2.64}{z^2+2.31z+3}$$

由此得系统特征方程为

$$z^2+2.31z+3=0$$

求解得一对共轭复根

$$\lambda_1=-1.156+j1.29 \qquad \lambda_2=-1.156-j1.29$$

分布在单位圆外，因此系统是不稳定的。

(2) 由系统开环脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{K(0.368z+0.264)}{z^2-1.368z+0.368}$$

求得系统特征方程为

$$z^2-(1.368-0.368K)z+(0.368+0.264K)=0$$

进行w变换得

$$(2.736-0.104\text{K})w^2+(1.264-0.528\text{K})w+0.632K=0$$

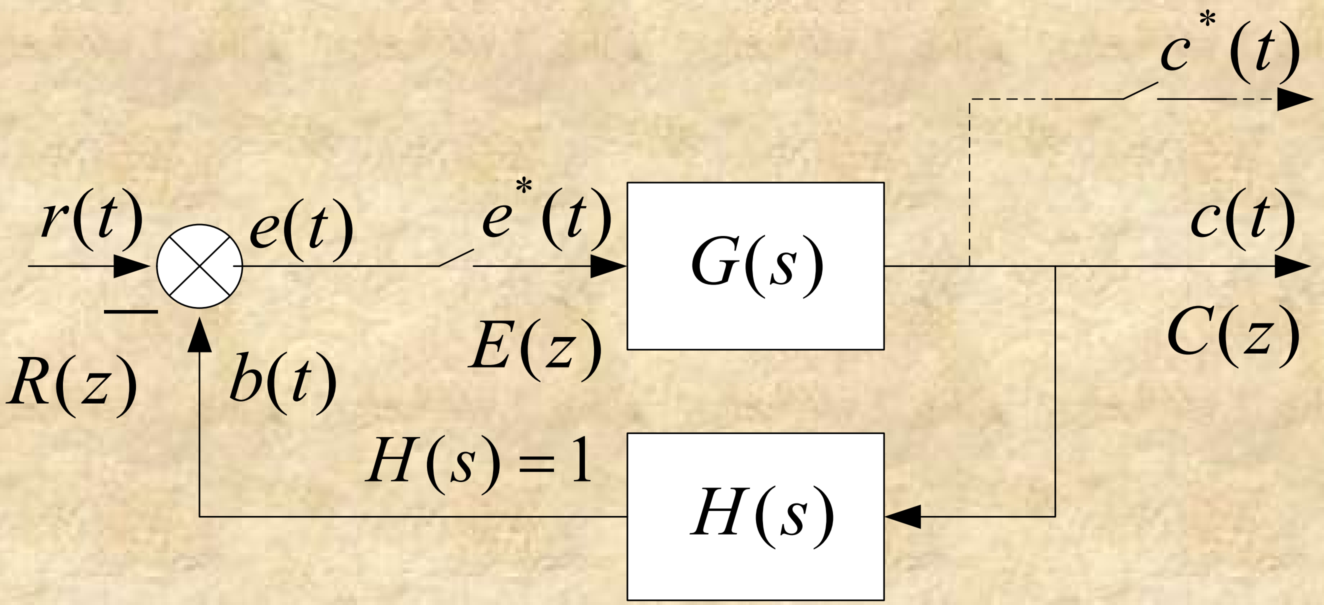
列劳氏表计算

w^2	$2.736-0.104K$	$0.632K$
w^1	$1.264-0.528K$	0
w^0	$0.632K$	

为使系统稳定，须有
$$\begin{cases}0.632K>0\\1.264-0.528K>0\\2.736-0.104K>0\end{cases}$$

得到系统的临界放大系数为： $K_c=2.4$

四、离散系统的稳态误差



$$E(z)=R(z)-C(z)=\Phi_e(z)R(z)=\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

$$\Phi_e(z)=\frac{1}{1+G(z)}$$

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e^*(t)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{[1+G(z)]}$$

例7-31

五、离散系统的型别与静态误差系数

(1) 单位阶跃输入

$$r(t)=1(t) \Rightarrow R(z)=\frac{z}{z-1} \Rightarrow$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+G(z)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{z\to 1}G(z)}\overset{\Delta}{=}\frac{1}{K_p} \qquad K_p=1+\lim_{z\to 1}G(z)$$

(2) 单位斜坡输入

$$r(t)=t \Rightarrow R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2} \Rightarrow$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{T}{(z-1)[1+G(z)]}\overset{\Delta}{=}\frac{T}{K_v} \qquad K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$$

(3) 单位加速度输入

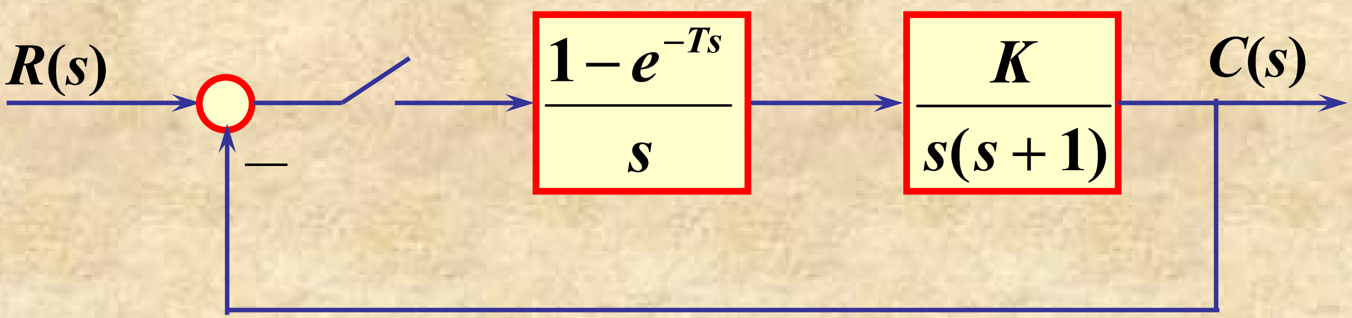
$$r(t)=\frac{1}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad R(t)=\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad \Rightarrow$$

$$e(\infty)=\frac{T^2}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2[1+G(z)]}\overset{\Delta}{=}\frac{T^2}{K_a} \qquad K_a=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)^2 G(z)$$

	阶跃	斜坡	抛物
0型	$1/K_p$	∞	∞
I型	0	T/K_v	∞
II型	0	0	T^2/K_a

各型系统在不同输入信号作用下的稳态误差

例: 设系统的结构图如下图所示，K=1，T=0. 1s ，$r(t)=1(t)+t$，求系统的稳态误差。



解：系统的开环传递函数为

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

把T=0.1代入化简得 $G(z)=\dfrac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}$

$$K_p=\lim_{z\to 1}[1+G(z)]=\lim_{z\to 1}\left[1+\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}\right]=\infty$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}=0.1$$

系统的稳态误差为

$$e(\infty)=\frac{1}{K_p}+\frac{T}{K_v}=1$$

[注：$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)=0$]

7-6 离散系统的动态性能分析

一、离散系统的时间响应

一般假定外作用为单位阶跃函数，则系统输出量的Z变换函数为：

$$C(z)=\frac{z}{z-1}\Phi(z)$$

然后用长除法，将C(z)展成无穷幂级数：

$$C(z)=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n}+\ldots$$

$$C(kT)=a_k,k=0,1,2\ldots$$

例7-32

二、闭环极点与动态响应的关系

$$\Phi(z)=\frac{M(z)}{D(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z-p_j)}$$

$$r(t)=1(t)\quad\Rightarrow\quad R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{M(z)}{D(z)}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{M(1)}{D(1)}\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_kz}{z-p_k}$$

$$c_k=\frac{M(p_k)}{(p_k-1)\dot{D}(p_k)}$$

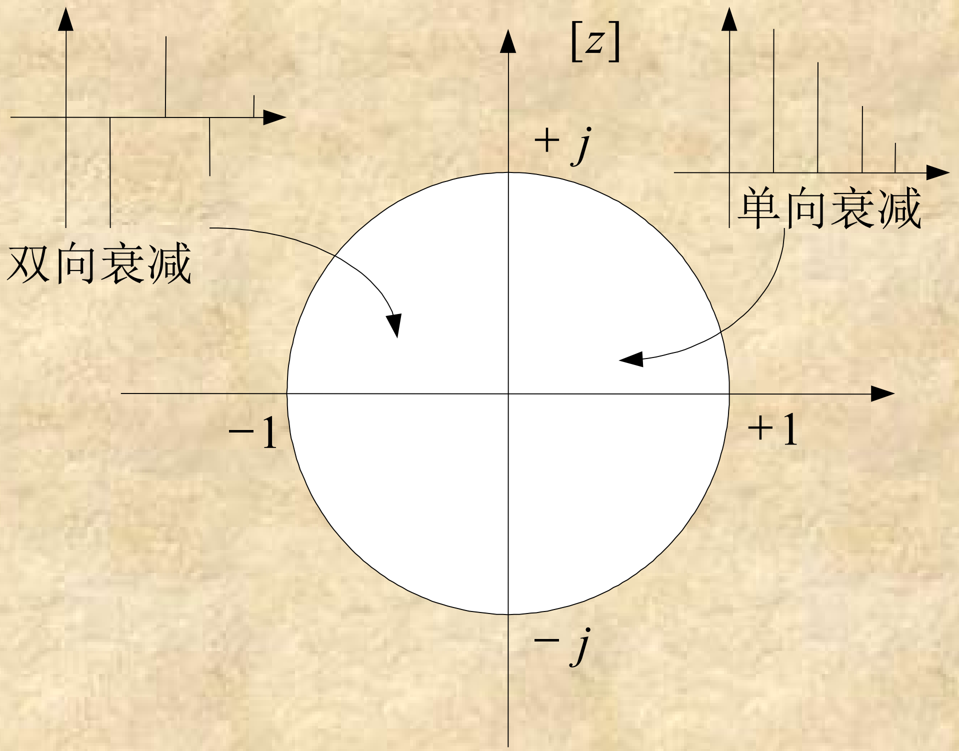
$$c(nT)=\frac{M(1)}{D(1)}+\sum_{p_k\text{为实数}} c_k(p_k)^n+\sum(\cdots)$$

1）常数项：稳态输出

2）第二类：单位圆内

✓ 正实数：单向衰减

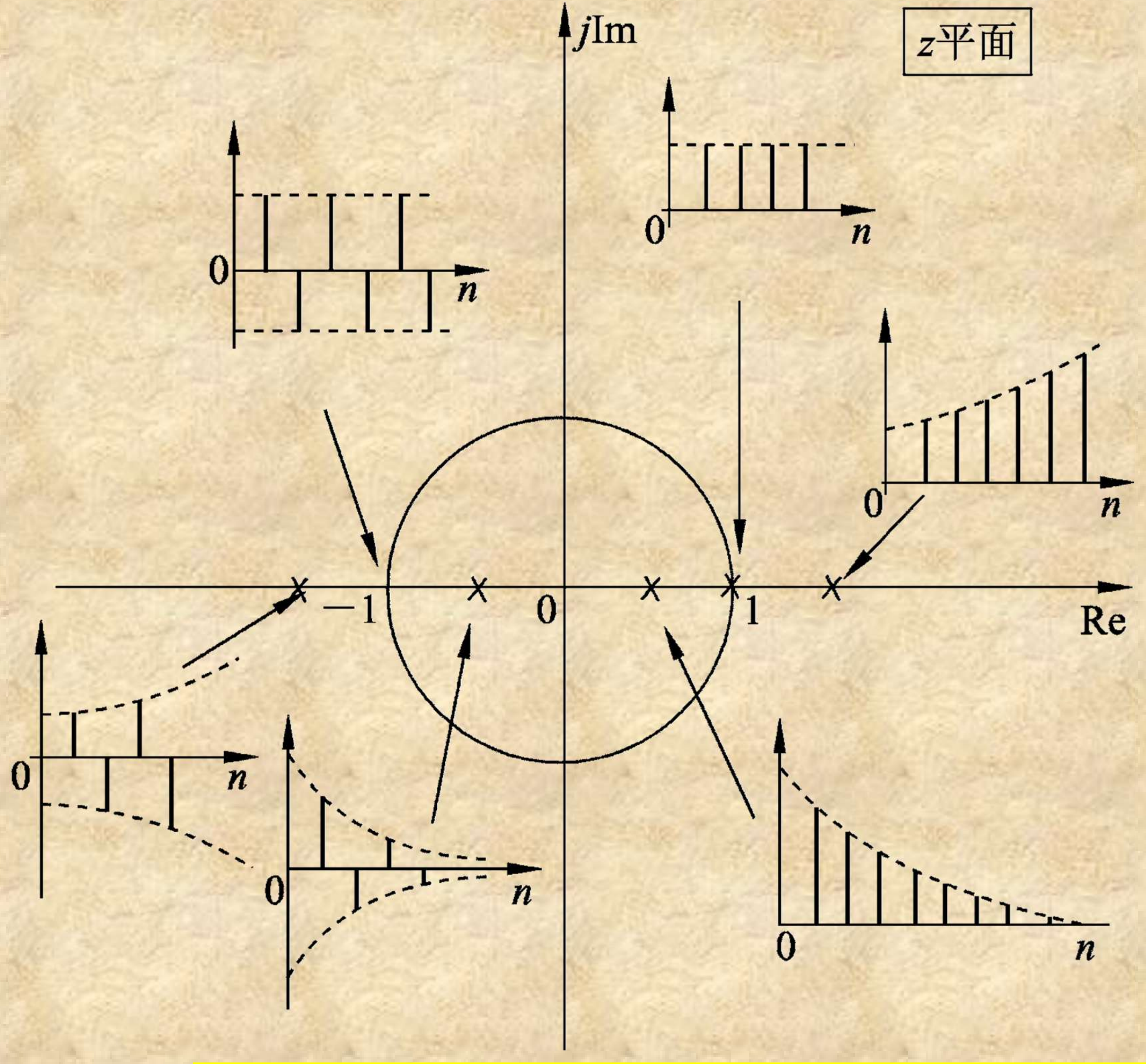
✓ 负实数：双向衰减



3）第三类：单位圆外

✓ 正实数：单向发散

✓ 负实数：双向发散



闭环实极点分布与相应的动态响应形式

闭环共轭复数极点

$$\frac{c_k z}{z-p_k}+\frac{\bar{c}_k z}{z-\bar{p}_k}$$

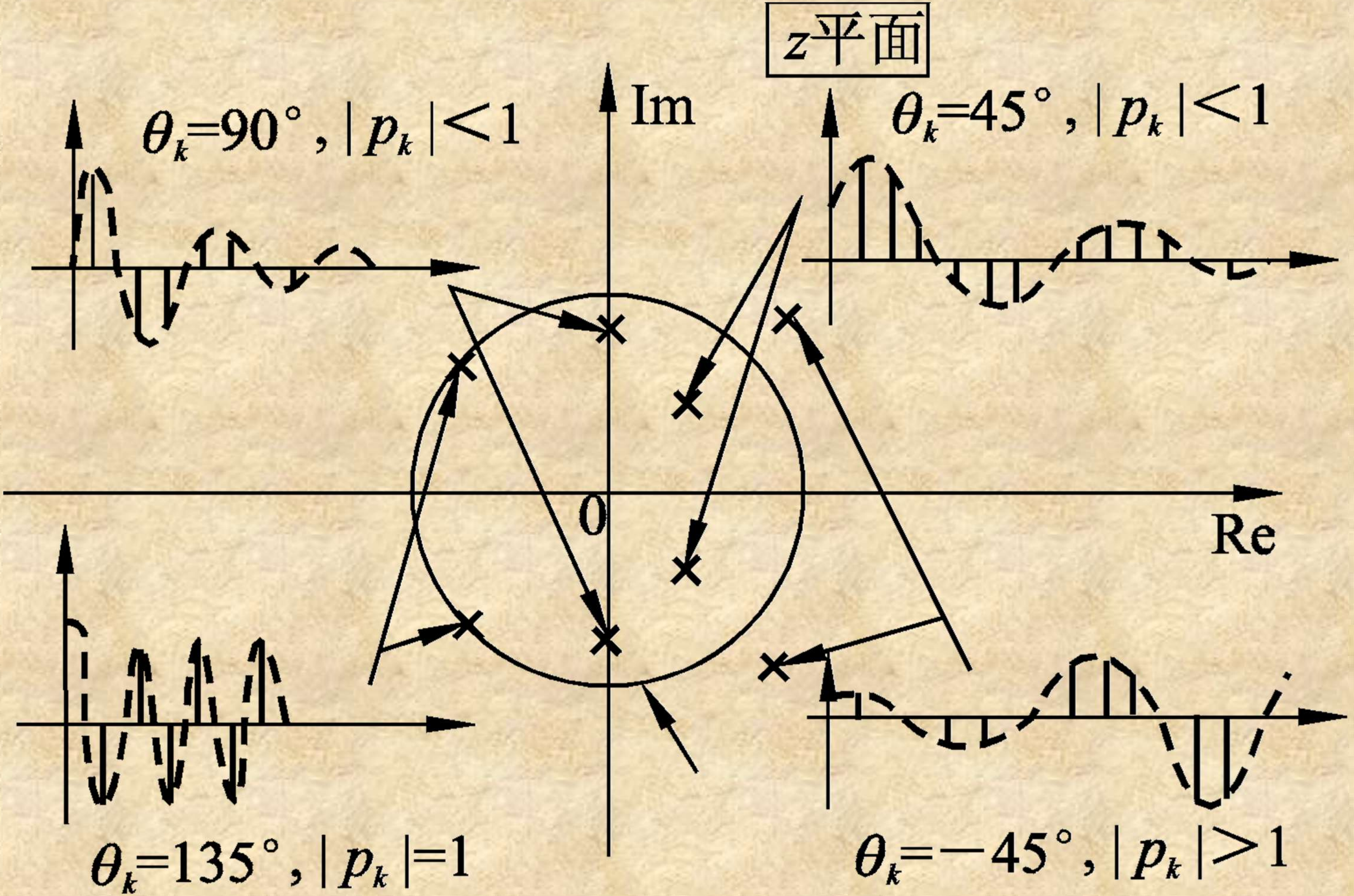
$$c_{k,\bar{k}}(nT)=c_k\left(p_k\right)^n+\bar{c}_k\left(\bar{p}_k\right)^n$$

$$=\left|c_k\right|e^{j\varphi_k}\left|p_k\right|^n e^{jn\theta_k}+\left|c_k\right|e^{-j\varphi_k}\left|p_k\right|^n e^{-jn\theta_k}$$

$$=\left|c_k\right|\left|p_k\right|^n e^{j(\varphi_k+n\theta_k)}+\left|c_k\right|\left|p_k\right|^n e^{-j(\varphi_k+n\theta_k)}$$

$$=\left|c_k\right|\left|p_k\right|^n\left[e^{j(\varphi_k+n\theta_k)}+e^{-j(\varphi_k+n\theta_k)}\right]$$

$$c_{k,\bar{k}}(nT)=2\left|c_k\right|\left|p_k\right|^n\cos\left(n\theta_k+\varphi_k\right)$$



闭环复极点分布与相应的动态响应形式

三、最少拍系统

定义：当脉冲传递函数$\Phi(z)$的全部极点都在原点时，该系统称为具有无穷大稳定度的离散系统。

$$\Phi(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{n-1}}{z^n} = d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_n z^{-n}$$

由于$\Phi(z)$是z^{-1}的有限次幂级数，因此相应的输出序列必在有限拍内结束。当被控对象与采样周期一定时，这种离散系统具有最短的动态过程，因此又称其为最少拍系统。

例：已知 $\Phi(z)=\dfrac{2z-1}{z^2}$ ，当输入信号分别为单位阶跃与单位斜坡信号时，计算其响应。

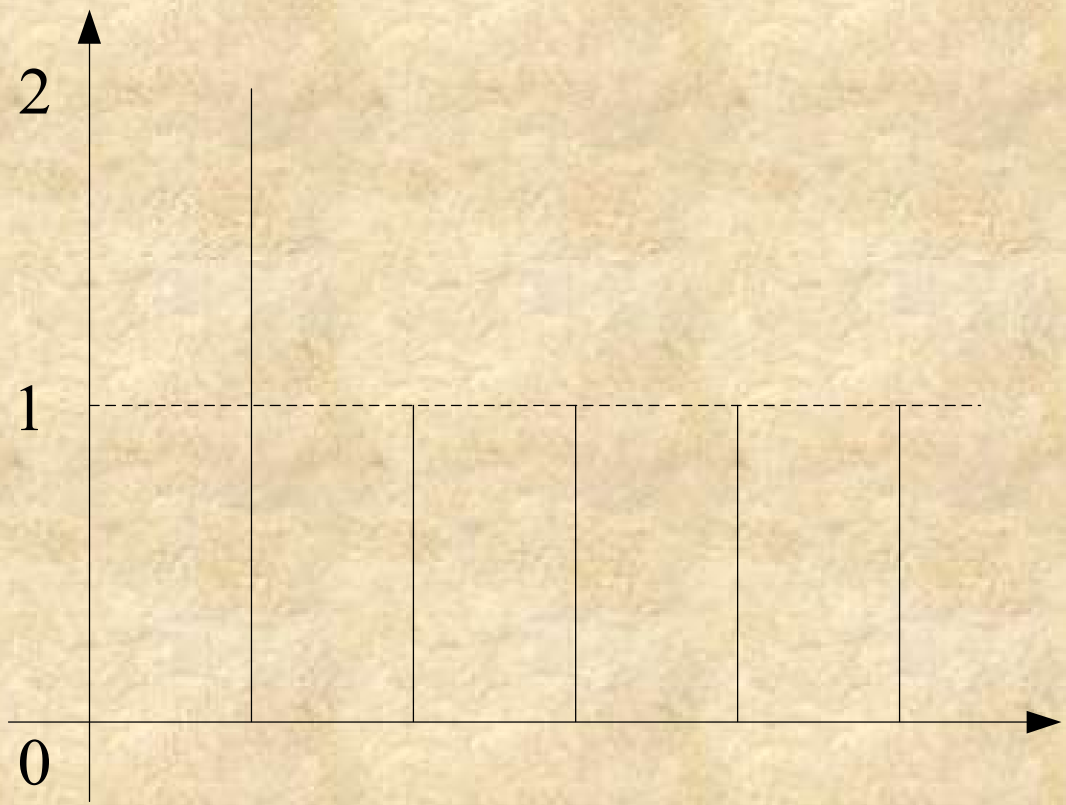
解：单位阶跃响应：

$$C(z)=\frac{2z-1}{z^2}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$=2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

$$E(z)=[1-\Phi(z)]R(z)$$

$$=\frac{z-1}{z}=1-z^{-1}+0$$



$\delta\%=100\%(n=2)$

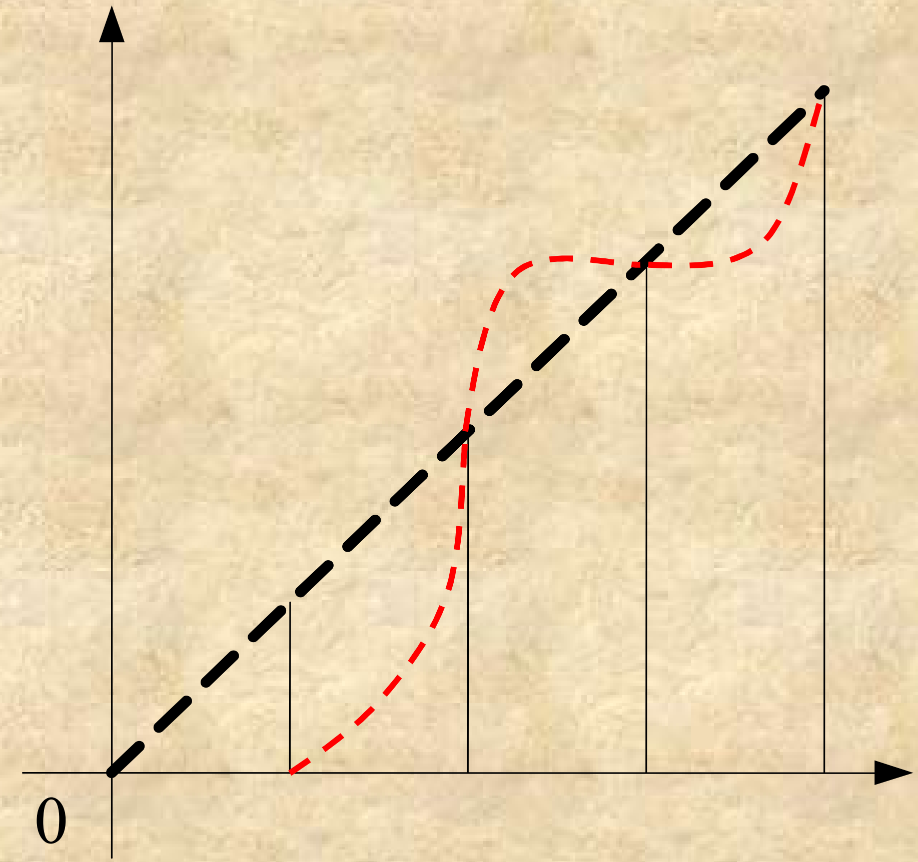
单位斜坡响应：

$$R(t)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$C(z)=\frac{2z-1}{z^2}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$=2Tz^{-2}+3Tz^{-3}+4Tz^{-4}+\cdots$$

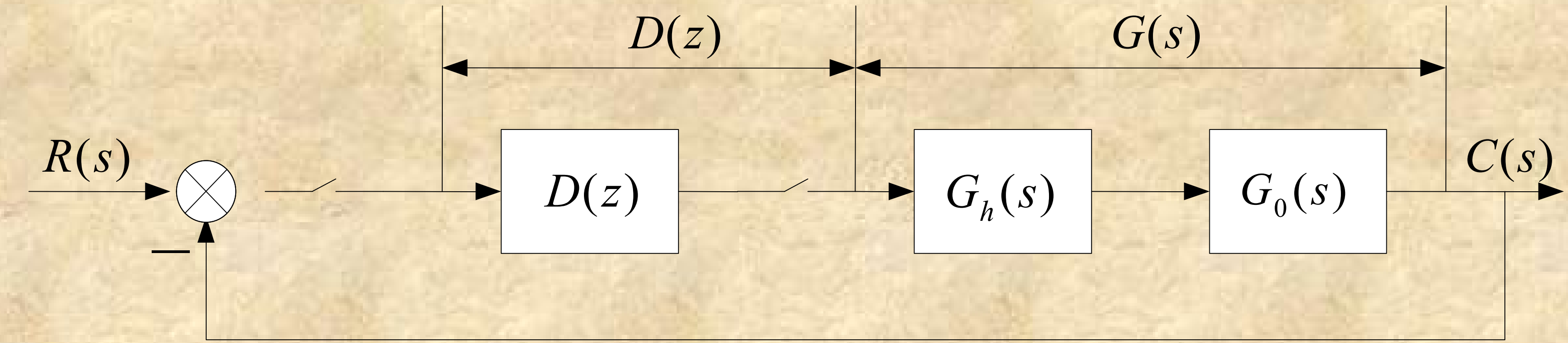
$$E(z)=[1-\Phi(z)]R(z)=Tz^{-1}+0$$



$$\delta\%=0(n=2)$$

7-7 离散系统的数字校正

一、数字控制器的脉冲传递函数



$$\Phi(z)=\frac{D(z)G(z)}{1+G(z)D(z)}\qquad \Phi_e(z)=1-\Phi(z)$$

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\left[1-\Phi(z)\right]}=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}=\frac{1-\Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

二、最少拍系统设计

定义：在典型输入作用下，能以有限拍结束响应过程，且在采样时刻无稳态误差的离散系统。

设计方法：根据性能指标要求，确定闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 或者 $\Phi_e(z)$，然后再计算出数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$。

典型输入信号：

$$R(z)=\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

$$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=\frac{\Phi_e(z)A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}\Phi_e(z)$$

取 $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^m F(z)$，则 $e(\infty)=0$，且：

$$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=A(z)F(z)=e(0)+e(1)z^{-1}+\ldots$$

1、单位阶跃输入：

$$R(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})} \Rightarrow m=1, A(z)=1 \Rightarrow$$

$$\Phi_e(z)=1-z^{-1} \Rightarrow D(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)G(z)}$$

$$E(z)=1 \Rightarrow$$

$$e(0)=1, e(T)=e(2T)=\ldots=0$$

一拍系统

2、单位斜坡输入：

$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \Rightarrow m=2,\ A(z)=Tz^{-1} \Rightarrow$$

$$\Phi_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^2 \Rightarrow D(z)=\frac{z^{-1}\left(2-z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^2 G(z)}$$

$$E(z)=Tz^{-1} \Rightarrow$$

$$e(0)=0,e(T)=T,e(2T)=e(3T)=\ldots=0$$

二拍系统

3、单位加速度输入：

$$R(z)=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} \Rightarrow m=3,\ A(z)=\frac{T^2}{2}z^{-1}(1+z^{-1})$$

$$\Phi_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^3 \Rightarrow D(z)=\frac{z^{-1}\left(3-3z^{-1}+z^{-2}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3G(z)}$$

$$E(z)=\frac{T^2}{2}z^{-1}(1+z^{-1})=\frac{T^2}{2}z^{-1}+\frac{T^2}{2}z^{-2} \Rightarrow$$

$$e(0)=0,e(T)=\frac{T^2}{2},e(2T)=\frac{T^2}{2},e(3T)=e(4T)=\ldots=0$$

三拍系统

表**7-7**：最少拍系统的设计结果

小结

例7-33

无纹波最少拍系统设计（自学）

对本章内容有疑问？