第8章　相量法

本章重点

重点：

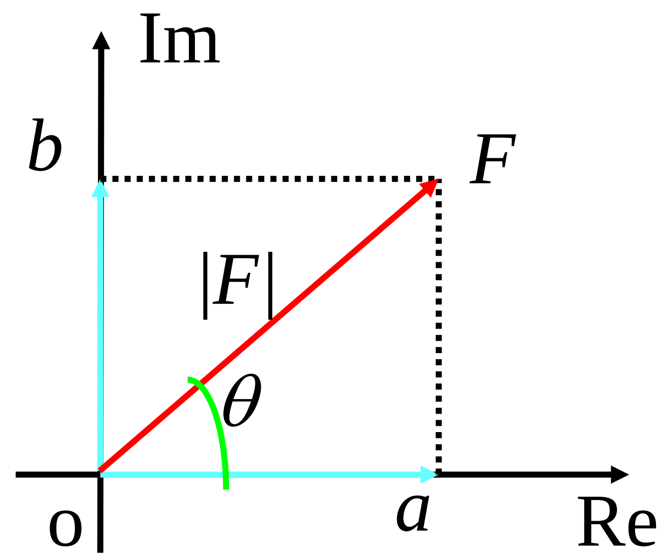
1. 正弦量的表示、相位差

2. 正弦量的相量表示

3. 电路定理的相量形式

8.1 复数

1. 复数的表示形式



$$F = a + \mathrm{j}b$$ 代数式

($\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ 为虚数单位)

$$F = |F| e^{\mathrm{j}\theta}$$ 指数式

三角函数式

$$F = |F| e^{\mathrm{j}\theta} = |F|(\cos\theta + j\sin\theta) = a + \mathrm{j}b$$

$$F = |F| e^{\mathrm{j}\theta} = |F| \angle\theta$$ 极坐标式

几种表示法的关系：

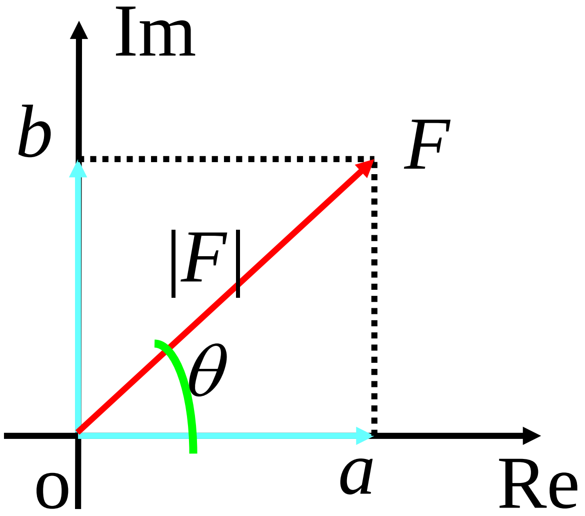
$$F = a + \mathrm{j}b$$

$$F = |F| e^{\mathrm{j}\theta} = |F| \angle \theta$$

$$\begin{cases} |F| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a = |F| \cos\theta \\ b = |F| \sin\theta \end{cases}$$



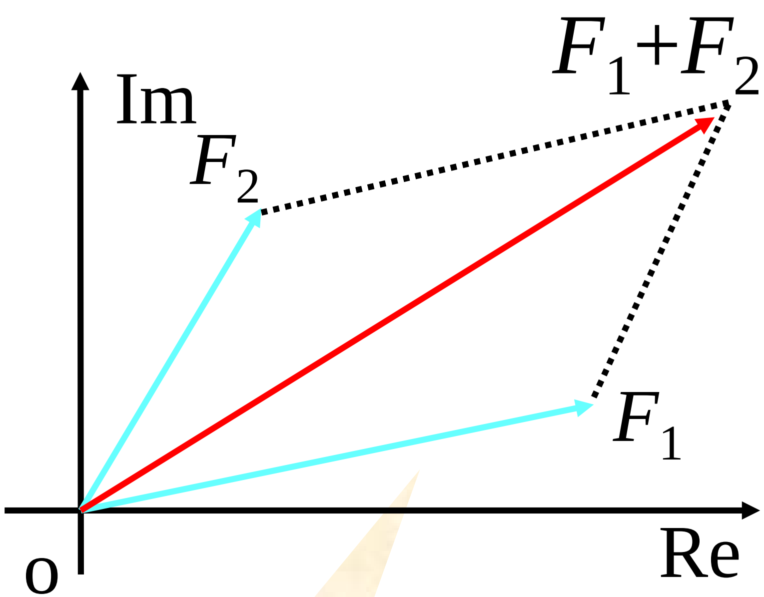
2. 复数运算

①加减运算 —— 采用代数式

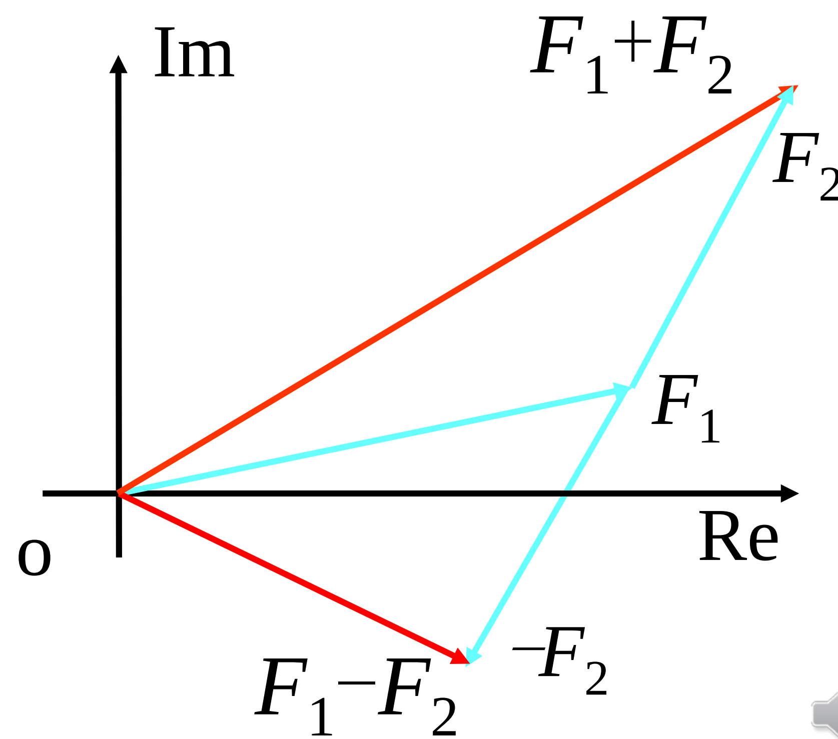
$|F_1|e^{j\theta_1} \pm |F_2|e^{j\theta_2}$

若 $F_1=a_1+jb_1$， $F_2=a_2+jb_2$

则 $F_1 \pm F_2=(a_1 \pm a_2)+j(b_1 \pm b_2)$



图解法



②乘除运算 —— 采用极坐标式

$(a_1+jb_1)(a_2+jb_2)=a_1a_2+a_2b_1j$
$+a_1b_2j-b_1b_2$

若 $F_1=|F_1|\angle\theta_1$ ，$F_2=|F_2|\angle\theta_2$

则: $F_1\cdot F_2=|F_1|e^{j\theta_1}\cdot|F_2|e^{j\theta_2}=|F_1||F_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$$=|F_1||F_2|\angle\theta_1+\theta_2$$

模相乘
角相加

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{|F_1|\angle\theta_1}{|F_2|\angle\theta_2}=\frac{|F_1|e^{j\theta_1}}{|F_2|e^{j\theta 2}}=\frac{|F_1|}{|F_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{|F_1|}{|F_2|}\angle\theta_1-\theta_2$$

模相除
角相减

例1 $5\angle 47^\circ + 10\angle -25^\circ = ?$

解 $$原式 = (3.41 + j3.657) + (9.063 - j4.226)$$

$$= 12.47 - j0.569 = 12.48\angle -2.61^\circ$$

例2 $$220\angle 35^\circ + \frac{(17 + j9)(4 + j6)}{20 + j5} = ?$$

解 $$原式 = 180.2 + j126.2 + \frac{19.24\angle 27.9^\circ \times 7.211\angle 56.3^\circ}{20.62\angle 14.04^\circ}$$

$$= 180.2 + j126.2 + 6.728\angle 70.16^\circ$$

$$= 180.2 + j126.2 + 2.238 + j6.329$$

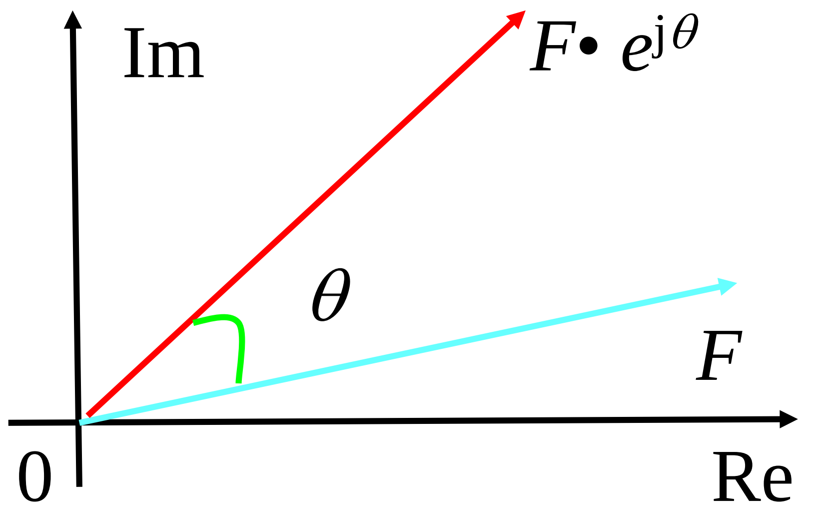
$$= 182.5 + j132.5 = 225.5\angle 36^\circ$$

③旋转因子

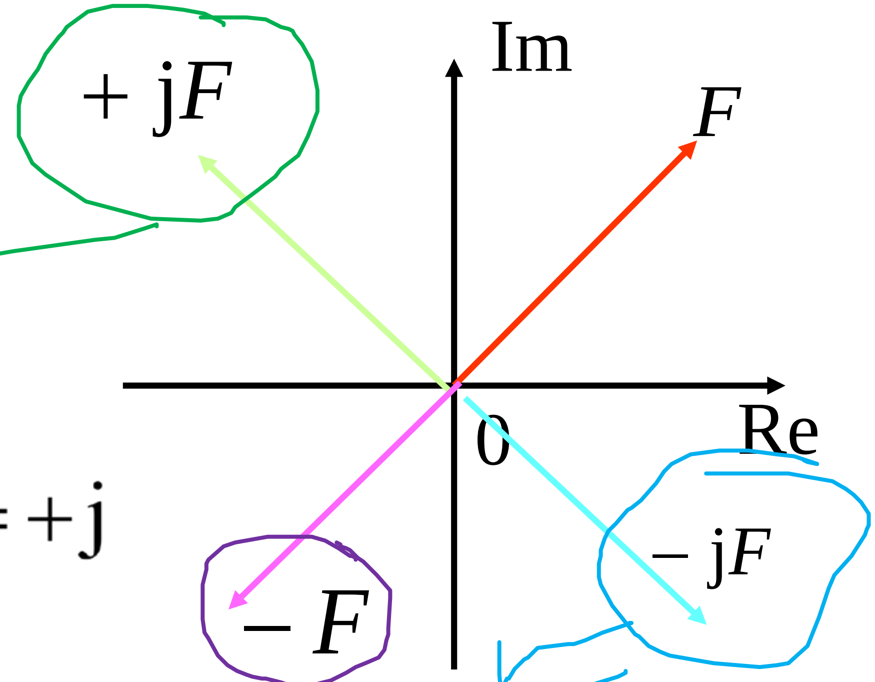
复数 $e^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta=1\angle\theta$

$F\bullet e^{\mathrm{j}\theta}$

旋转因子



特殊旋转因子



$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2} = +\mathrm{j}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad e^{\mathrm{j}-\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{j}\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{j}$$

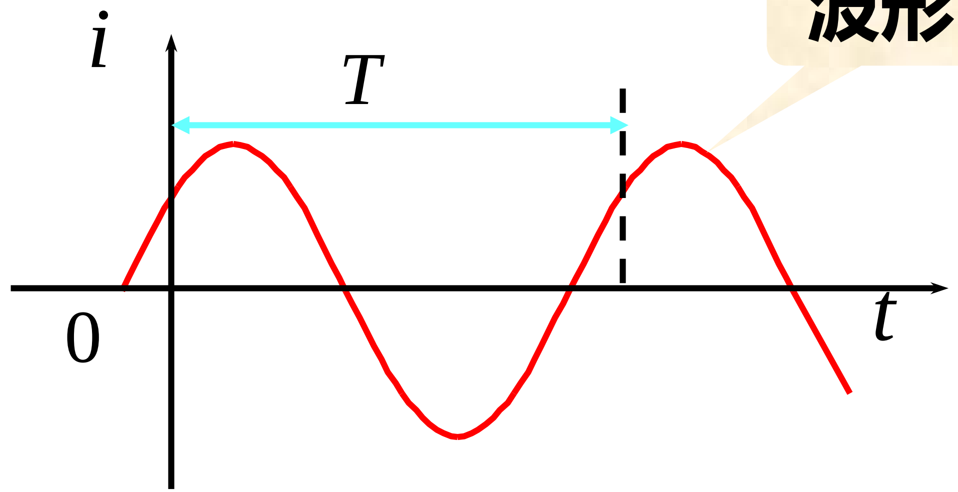
$$\theta = \pm\pi, \quad e^{\mathrm{j}\pm\pi} = \cos(\pm\pi) + \mathrm{j}\sin(\pm\pi) = -1$$

注意 $+\mathrm{j}, -\mathrm{j}, -1$ **都可以看成旋转因子。**

8.2 正弦量

1. 正弦量

●瞬时值表达式



$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$$

正弦量为周期函数 $f(t)=f\,(\,t+kT\,)$

$$f=\frac{1}{T}$$

●周期 T 和频率 f

$\left\{\begin{array}{l}\text{周期}T\text{：重复变化一次所需的时间。单位：秒s}\\ \text{频率}f\text{：每秒重复变化的次数。单位：赫(兹)Hz}\end{array}\right.$

●正弦电流电路

激励和响应均为同频率的正弦量的线性电路（正弦稳态电路）称为正弦电路或交流电路。

●研究正弦电路的意义

1. 正弦稳态电路在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位。

优点

①正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍是同频率的正弦函数；

②正弦信号容易产生、传送和使用。

2.正弦信号是一种基本信号，任何非正弦周期信号可以分解为按正弦规律变化的分量。

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega t+\theta_k)$$

结论

对正弦电路的分析研究具有重要的理论价值和实际意义。

2. 正弦量的三要素

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)$$

相位

$\omega = \frac{\quad}{t}$

(1) 幅值 (振幅、最大值)I_m

→ **反映正弦量变化幅度的大小。**

(2) 角频率ω

→ **相位变化的速度，反映正弦量变化快慢。**

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

单位： rad/s ，**弧度/秒**

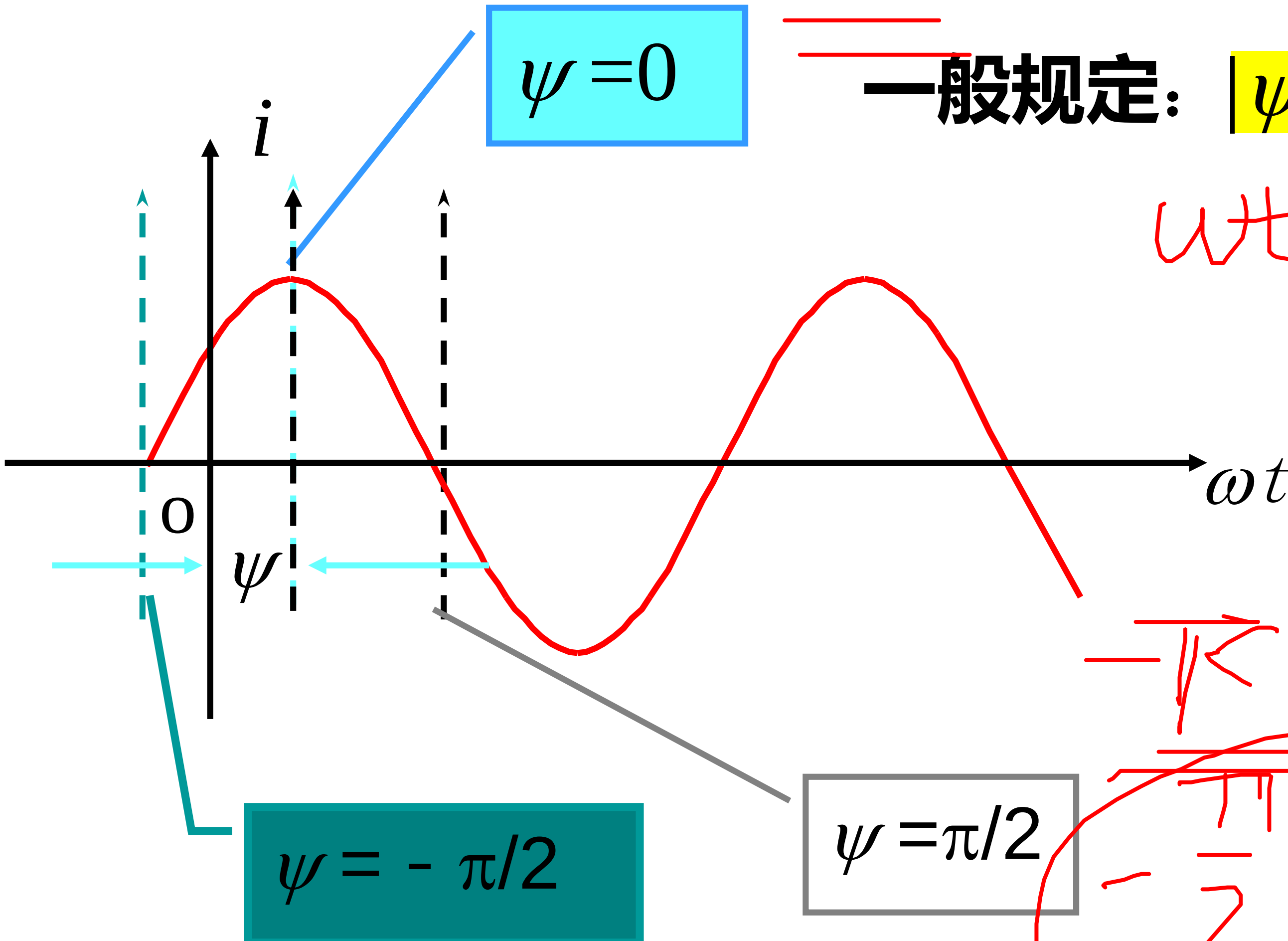
(3) 初相位ψ

→ **反映正弦量的计时起点，常用角度表示。**

注意 **同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。**

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)$$

一般规定：$|\psi|\le\pi$ 。



$\omega t \mid \psi=0$

$\psi=-\omega t$

$-\pi < \pi$

$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$

例 **已知正弦电流波形如图，$\omega = 10^3 \text{rad/s}$，**

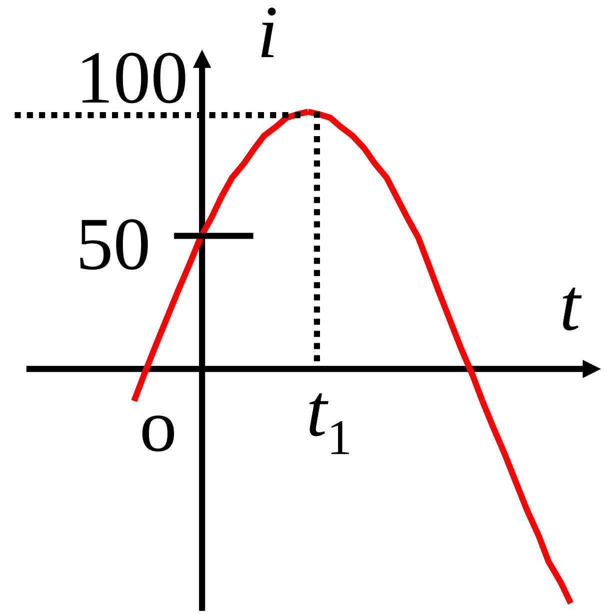
1.写出 $i(t)$ 表达式；2.求最大值发生的时间 t_1

解

$$i(t) = 100\cos(10^3 t + \psi)$$

$$t = 0 \rightarrow 50 = 100\cos\psi$$

$$\rightarrow \quad \psi = \pm\pi/3 \quad \rightarrow \quad \psi = -\frac{\pi}{3}$$



由于最大值发生在计时起点右侧

$$i(t) = 100\cos\boxed{\left(10^3 t - \frac{\pi}{3}\right)} = 0$$

当 $10^3 t_1 = \pi/3$ 有最大值 $\rightarrow \quad t_1 = \dfrac{\pi/3}{10^3} = 1.047\,\text{ms}$

3. 同频率正弦量的相位差

设 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi_u)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi_i)$

相位差：$\varphi=(\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)=\psi_u-\psi_i$

等于初相位之差

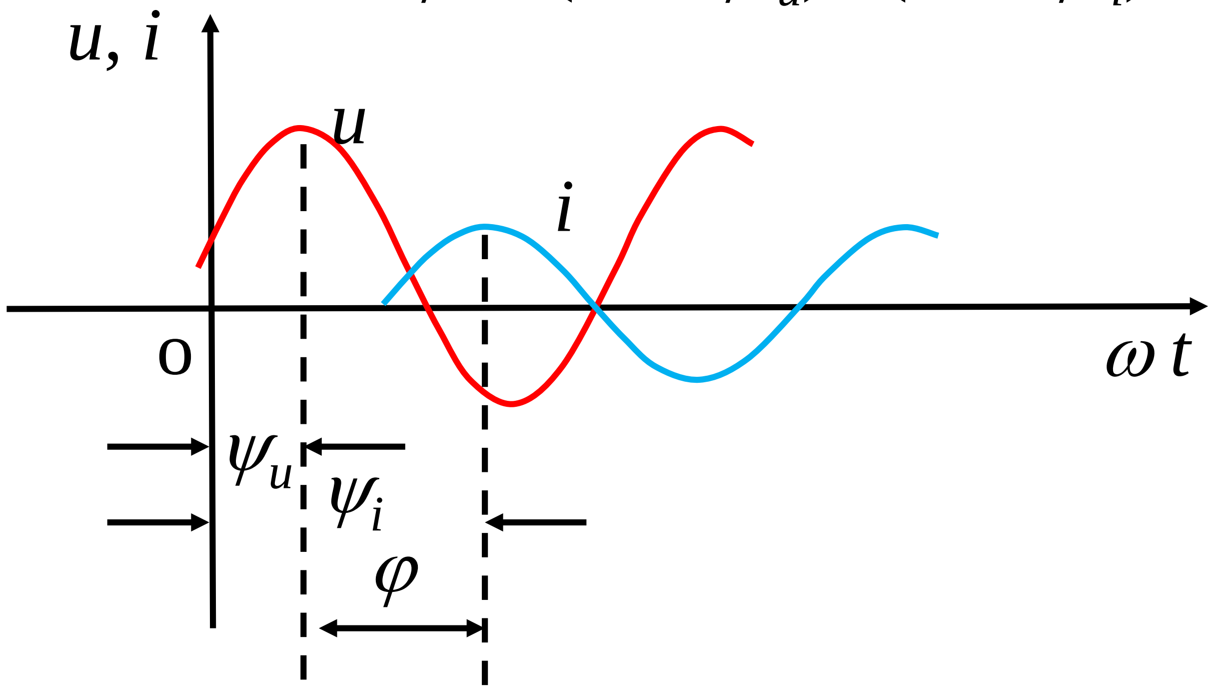
规定： $|\varphi|\le\pi\ (180^\circ)$

$-\pi < \quad < \pi$

$0 < \quad < 2\pi$

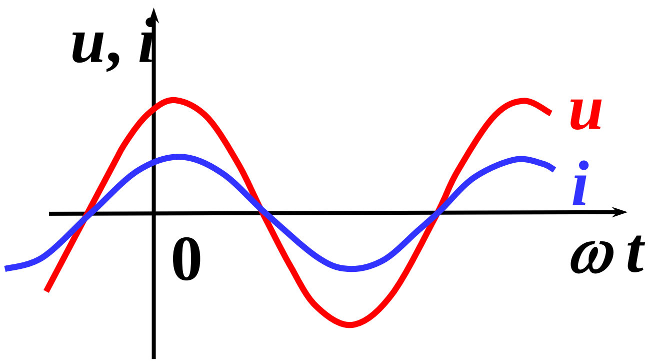
- $\varphi>0$， u**超前**i φ**角，或**i **滞后** u φ**角,(**u **比** i **先到达最大值);**
- $\varphi<0$， i **超前** u φ**角，或**u **滞后** i φ**角,(** i **比** u **先到达最大值）。**

$$\varphi=(\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)=\psi_u-\psi_i$$

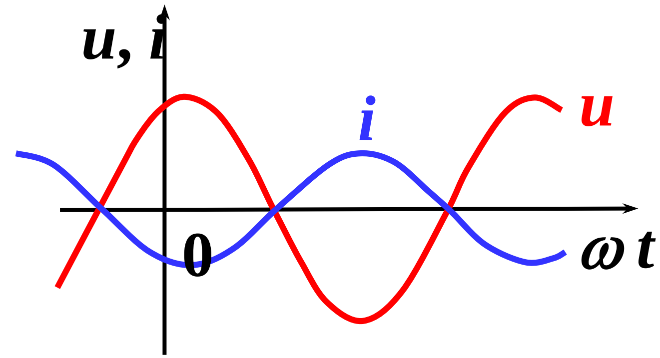


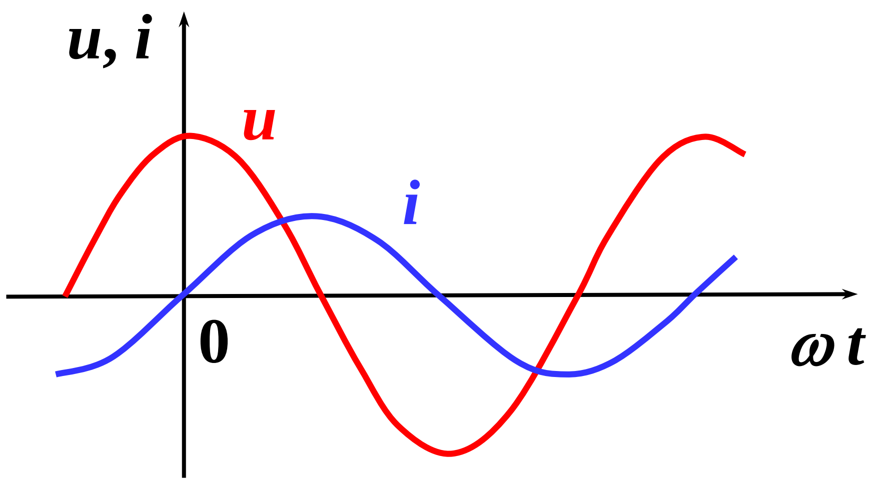
特殊相位关系

$\varphi = 0$， 同相



$\varphi = \pm\pi\ (\pm 180^{\circ})$， 反相





$\varphi = 90^{\circ}$

u 领先 i 90°

或 i 落后 u 90°

不说 u 落后 i 270°

或 i 领先 u 270°

规定：$|\varphi| \leq \pi\ (180^{\circ})$

同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

例　计算下列两正弦量的相位差。

解

$$i_2(t)=10\cos(100\pi t-105^0)$$

$$\varphi=30^0-(-105^0)=135^0$$

(2) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+30^0)$

cos

$i_2(t)=10\sin(100\pi t-15^0)$

$$i_2(t)=3\cos(100\pi t-150^0)$$

$$\varphi=-30^0-(-150^0)=120^0$$

(4) $i_1(t)=5\cos(100\pi t-30^0)$

$i_2(t)=-3\cos(100\pi t+30^0)+180^0=210^0$

$-\pi<\pi$　$=-150^0$

结论

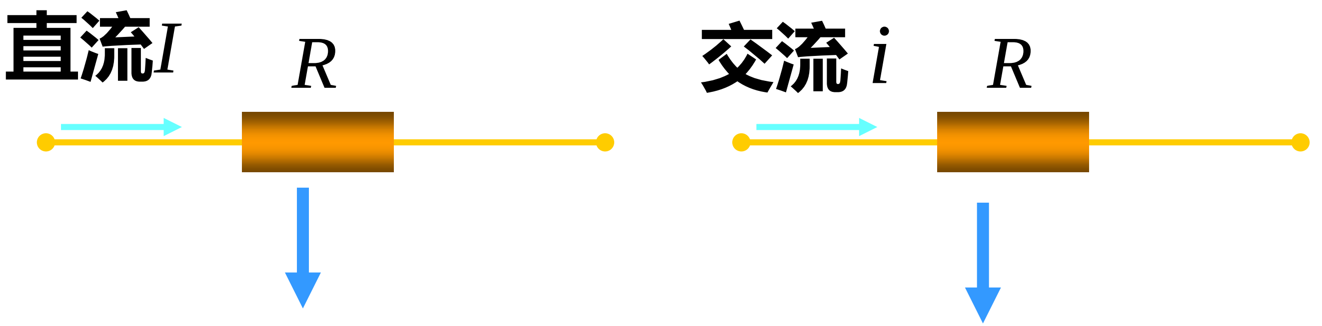
两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果，工程上采用有效值来表示。

●周期电流、电压有效值定义

物理意义



$$W = RI^2T \quad = \quad W = \int_0^T Ri^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$W = RI^2T \quad = \quad W = \int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$$

方均根值

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

定义电压有效值:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

● 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\Psi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\Psi)\,dt}$$

$$\because\quad \int_0^T\cos^2(\omega t+\Psi)\,dt=\int_0^T\frac{1+\cos 2(\omega t+\Psi)}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$$

$$I_m=\sqrt{2}I$$

$$\therefore\quad I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m$$

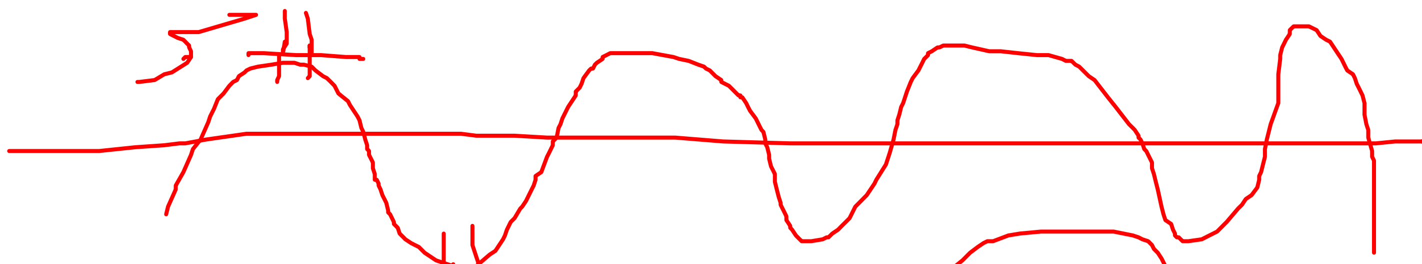
$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\Psi)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}} \quad 或 \quad U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U$$

若交流电压有效值为 U=220V， U=380V

其最大值为 U_{m}≈311V U_{m}≈537V



注意

① 工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。

②测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

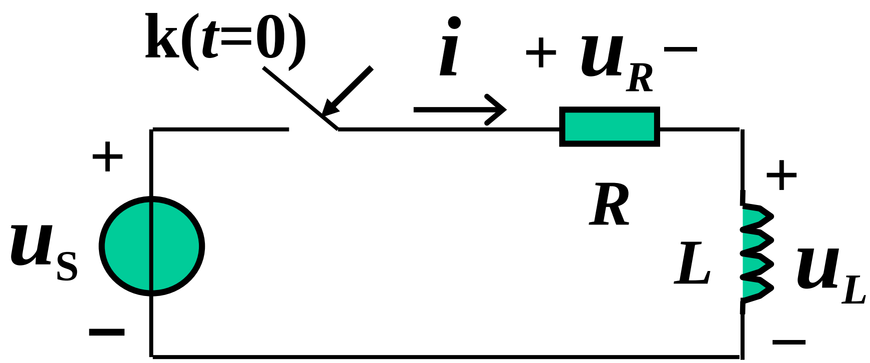
③区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

$$i, I_{\mathrm{m}}, I, \quad u, U_{\mathrm{m}}, U$$

$i(t)$ $u(t)$

正弦稳态分析的关键→相量(phasor)

(1) 问题



$$u_S = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

一阶常系数线性微分方程

$$i = i' + i''$$

强制分量（非齐次特解）

自由分量（齐次通解）

$t \to \infty$：稳态

$t \to \infty$：0

$$i'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

求特解　　查表寻找特解的函数类型

激励　　特解类型

$$\sin\omega t \xrightarrow{\text{查表}} C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t$$ 或 $$A\sin(\omega t + B)$$

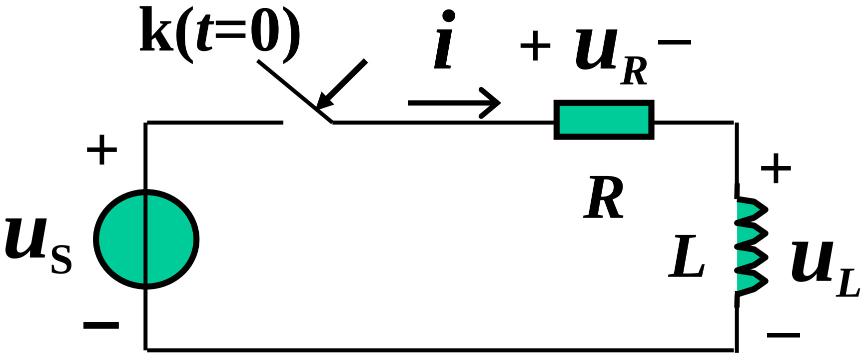
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_u) \xrightarrow{\text{设特解为}} i = A\sin(\omega t + B)$$

代入

$$LA\omega\cos(\omega t + B) + RA\sin(\omega t + B) = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t + B) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + B)\right)$$

$$= U_m\sin(\omega t + \psi_u)$$



$$i'(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$u_L'(t)=\frac{L\omega U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

$$u_R'(t)=\frac{RU_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

3个支路量有何特点?

所有支路电压电流均以相同频率变化!!

接下来……

$i(t)=I_m\sin(\cancel{\omega} t+\psi)$

所有支路电压电流均以相同频率变化!!

复数!!

(b) 幅值 (I_m)

(c) 初相角(ψ)

用什么可以同时表示幅值和相位?

问题1：如何用复数表示正弦量?

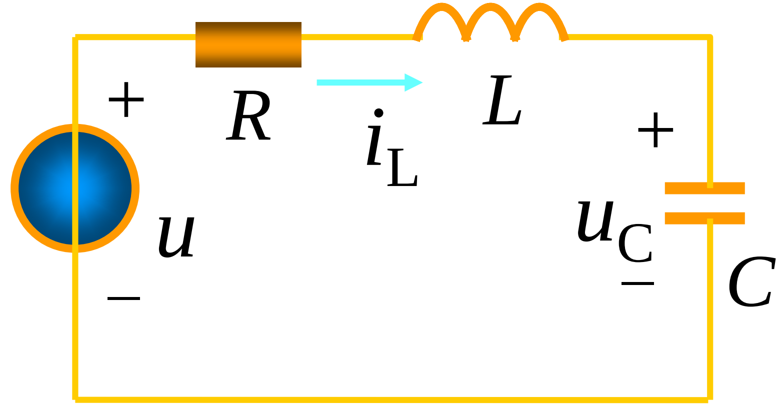
问题2：

- 求微分方程特解
- 正弦量微分/积分
- 正弦量加减

?

8.3 相量法的基础

1. 问题的提出



电路方程是微分方程：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u(t)$$

两个正弦量的相加：如KCL、KVL**方程运算：**

$$i_1=\sqrt{2}\,I_1\cos(\omega t+\psi_1)$$

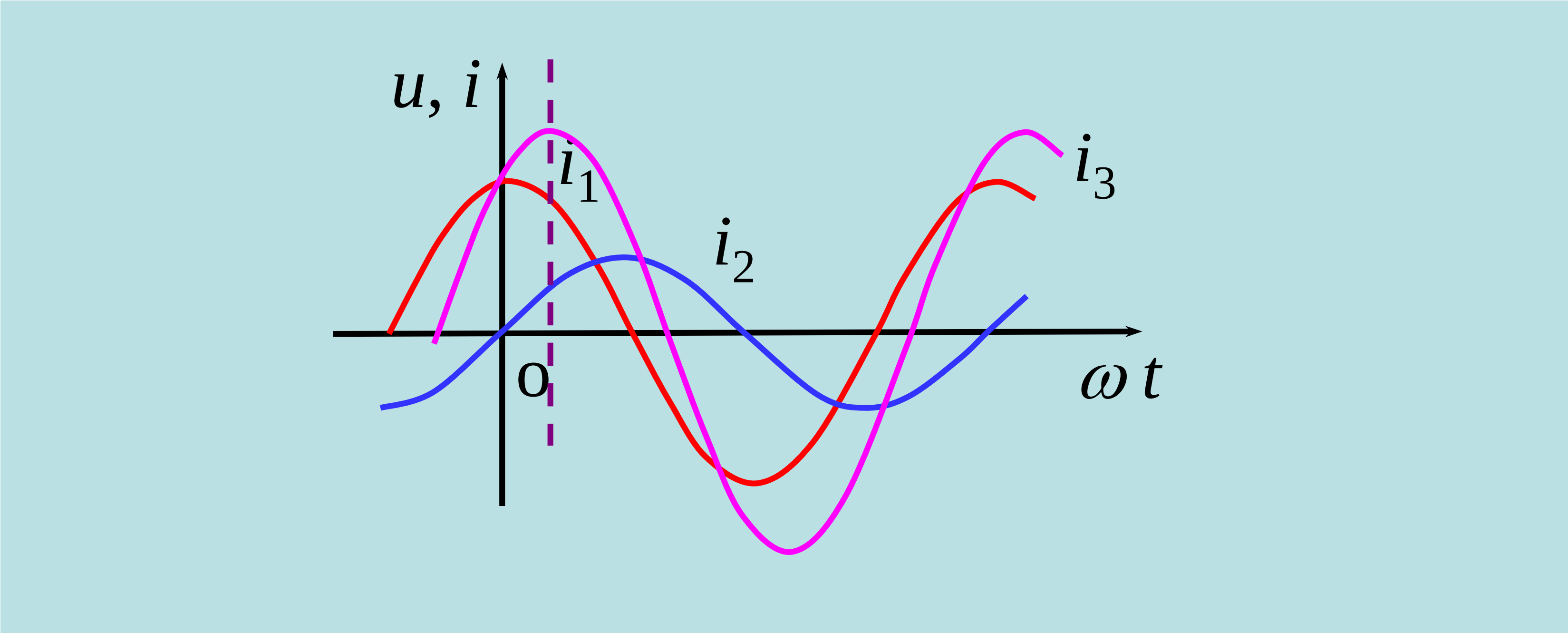
$$i_2=\sqrt{2}\,I_2\cos(\omega t+\psi_2)$$

+

$$i_1 = \sqrt{2}\, I_1 \cos(\omega t + \psi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2}\, I_2 \cos(\omega t + \psi_2)$$

$+$



	i_1	i_2	$i_1+i_2 \rightarrow i_3$ i_3
~~角频率~~	$\cancel{\omega}$	$\cancel{\omega}$	$\cancel{\omega}$
有效值	I_1	I_2	I_3
初相位	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3

结论 **同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，所以，只需确定初相位和有效值。因此采用**

正弦量 $\longleftrightarrow$ 复数

变换的思想

3. 正弦量的相量表示

无物理意义

造一个复函数 $F(t)=\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\Psi)}$

$$=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)+j\sqrt{2}I\sin(\omega t+\Psi)$$

对 $F(t)$ 取实部 $\mathrm{Re}[F(t)]=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)=i(t)$

是一个正弦量有物理意义

结论 任意一个正弦时间函数都有唯一与其对应的复数函数。

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)\leftrightarrow F(t)=\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\Psi)}$$

$F(t)$ 还可以写成

$$F(t)=\sqrt{2}\overbrace{Ie^{\mathrm{j}\psi}}^{\text{复常数}}e^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}$$

正弦量对应的相量

$F(t)$ 包含了三要素：I、 Ψ、 ω,

复常数包含了两个要素：I，Ψ。

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)\Leftrightarrow\dot{I}=I\angle\Psi$$

注意

- 相量的**模**表示正弦量的**有效值**
- 相量的**幅角**表示正弦量的**初相位**

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系：

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\ \Leftrightarrow\ \dot{U}=U\angle\theta$$

例1 **已知** $i=141.4\cos(314t+30^{\circ})\mathrm{A}$

$u=311.1\cos(314\mathrm{t}-60^{\circ})\mathrm{V}$

试用相量表示i, u .

解 $\dot{I}=100\angle 30^{\circ}\mathrm{A},\quad \dot{U}=220\angle -60^{\circ}\mathrm{V}$

例2 已知 $\dot{I}=50\angle 15^{\circ}\mathrm{A},\ f=50\mathrm{Hz}$.

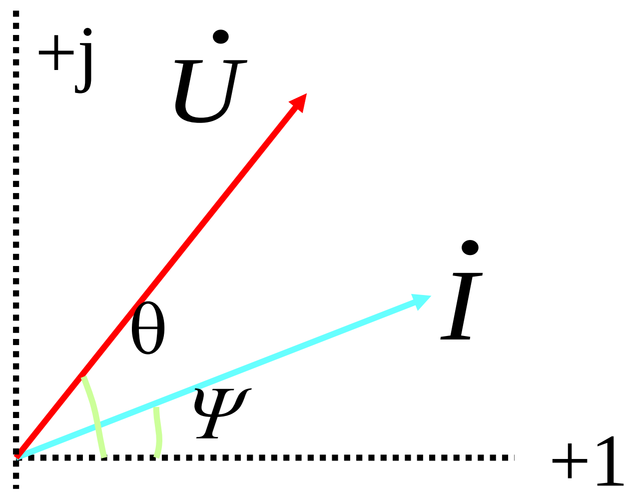
试写出电流的瞬时值表达式。

解 $i=50\sqrt{2}\cos(314t+15^{\circ})\ \mathrm{A}$

- **相量图** → **在复平面上用向量表示相量的图**

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)\rightarrow \dot{I}=I\angle\Psi$$

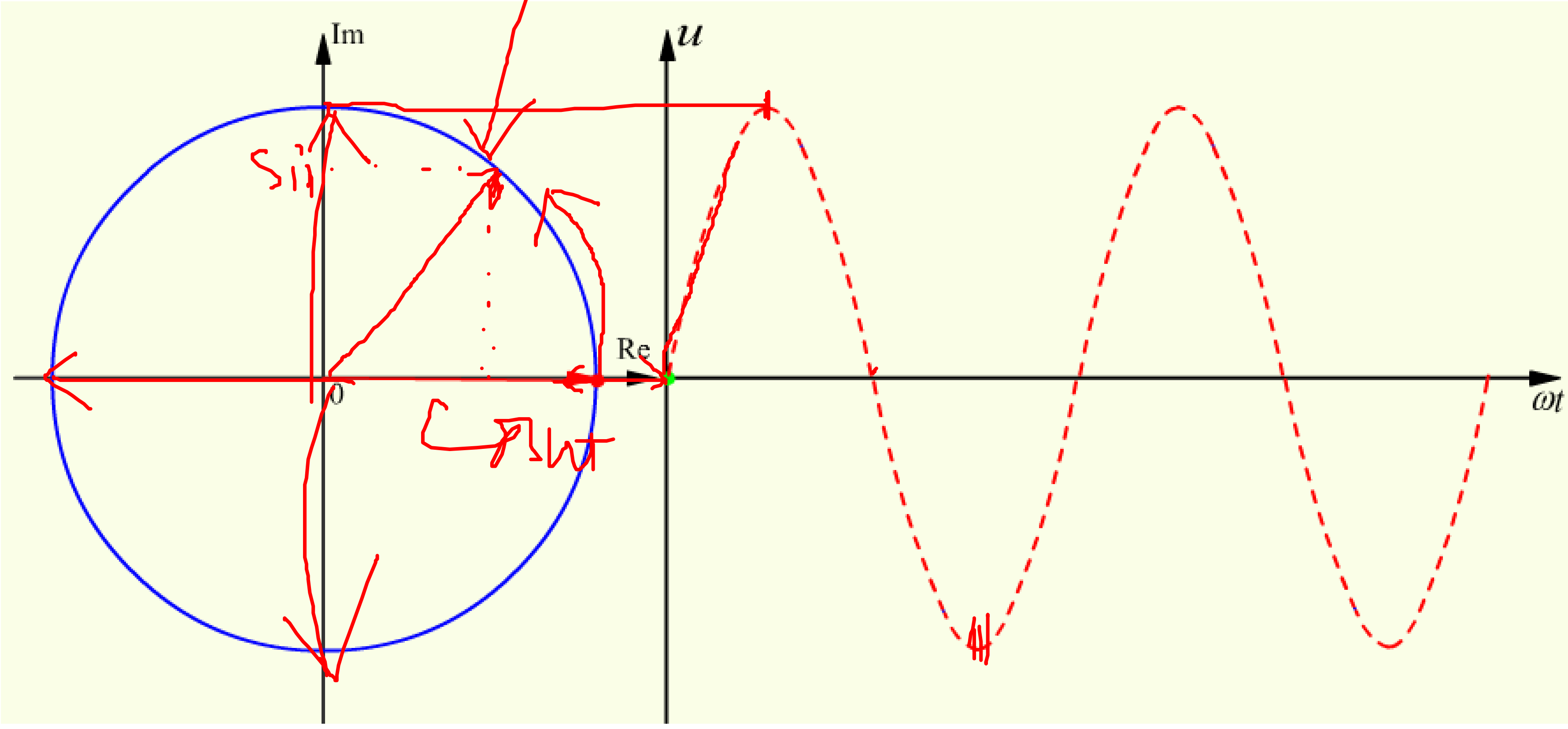
$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\rightarrow \dot{U}=U\angle\theta$$



$$A(t)=\sqrt{2}\,U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\,\dot{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi)$$

相量和矢量的联系与区别



4. 相量法的应用

①同频率正弦量的加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\cos(\omega t+\Psi_1)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\cos(\omega t+\Psi_2)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\underbrace{(\dot{U}_1+\dot{U}_2)}_{\dot{U}}e^{\mathrm{j}\omega t})$$

相量关系为： $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

结论 **同频正弦量的加减运算变为对应相量的加减运算。**

$$i_1 \pm i_2 = i_3$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

例

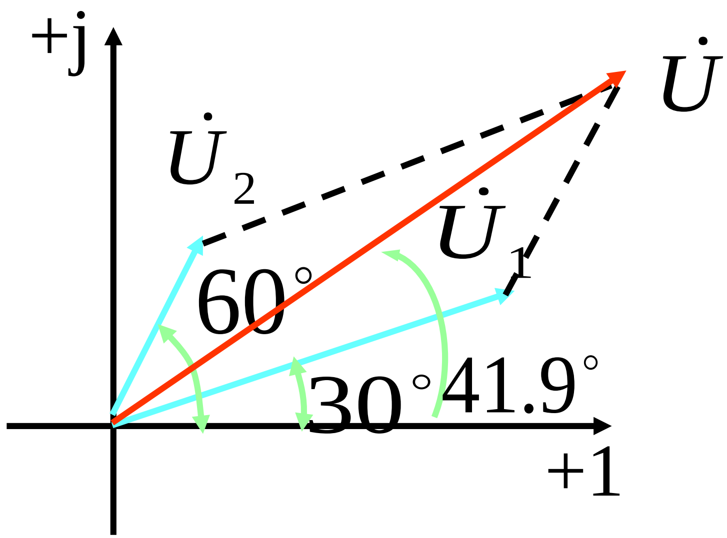
$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)\ \text{V} \\ u_2(t) &= 4\sqrt{2}\cos(314t + 60^\circ)\ \text{V} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 6\angle 30^\circ\ \text{V} \\ \dot{U}_2 &= 4\angle 60^\circ\ \text{V} \end{aligned}\right.$$

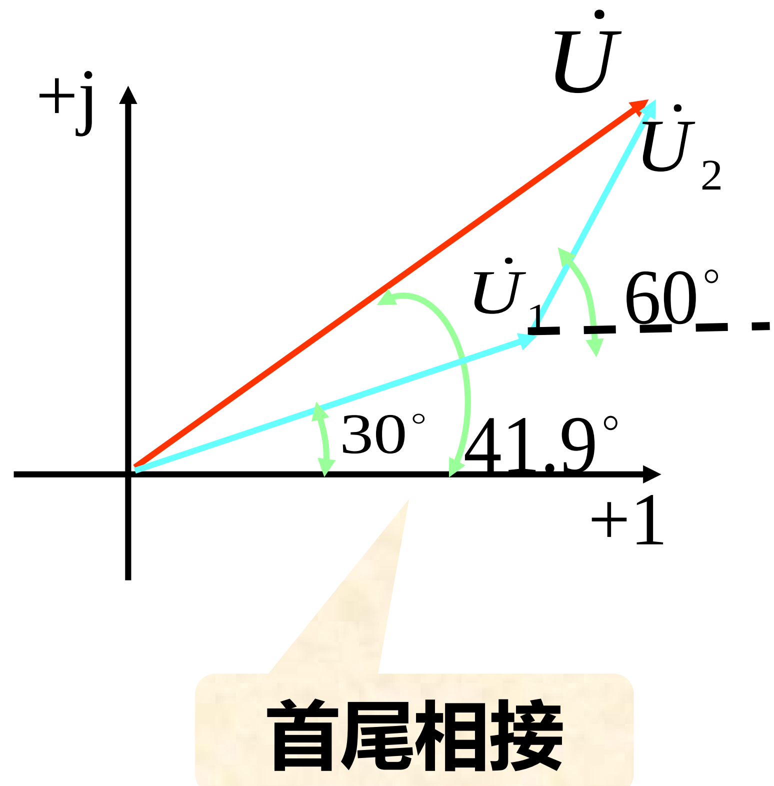
$$\begin{aligned} \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 &= 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ \\ &= 5.19 + \text{j}3 + 2 + \text{j}3.46 = 7.19 + \text{j}6.46 \\ &= 9.64\angle 41.9^\circ\ \text{V} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 9.64\sqrt{2}\cos(314t + 41.9^\circ)\ \text{V}$$

借助相量图计算

$\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ \text{ V}$ $\dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \text{ V}$





②正弦量的微分、积分运算

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)\leftrightarrow \dot{I}=I\angle\psi_i$$

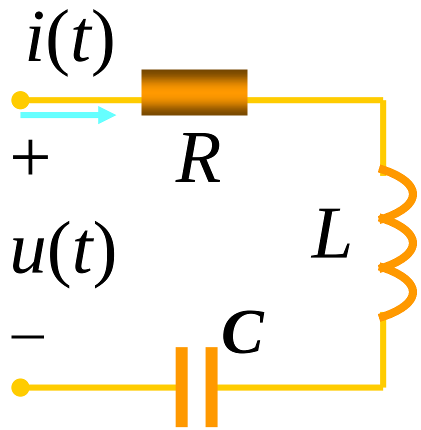
微分运算 $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}\cdot \underline{\mathrm{j}\omega\, e^{\mathrm{j}\omega t}}\right]$$

积分运算 $$\int i\mathrm{d}t=\int \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{\dot{I}}{\underline{\mathrm{j}\omega}}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\rightarrow \mathrm{j}\omega\dot{I}=\omega I\angle\psi_i+\pi/2$$

$$\int i\mathrm{d}t\rightarrow\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}=\underline{\frac{I}{\omega}\angle\psi_i-\pi/2}$$

例

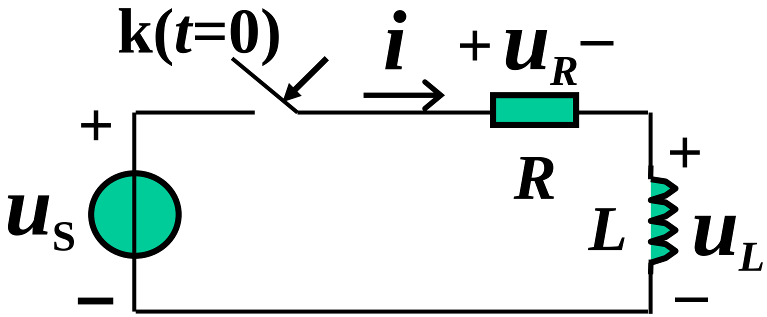


$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

$$u(t)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

用相量运算：

$$\dot{U}=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}+\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega C}$$



$$u_S = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

$$u_S(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \dot{U}_S = R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{U\angle\psi_u}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\angle\arctan\frac{\omega L}{R}} = \frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \frac{\omega LU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R} + 90°)$$

$$u_R = Ri_L \Rightarrow \dot{U}_R = R\dot{I} = \frac{RU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R} + 90°)$$

搞定！！！

相量法的优点

①把时域问题变为复数问题；

②把微积分方程的运算变为复数方程运算；

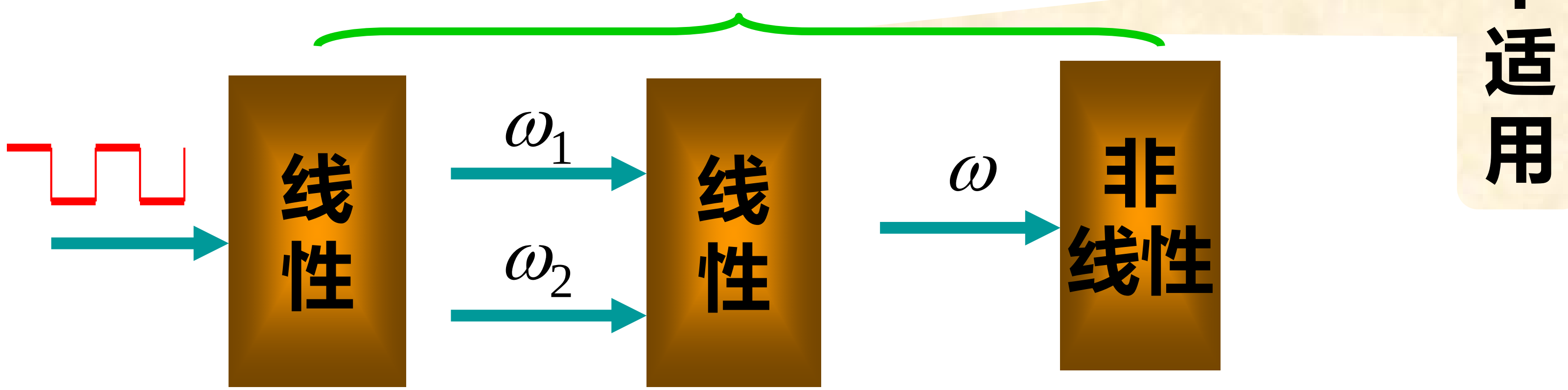
③可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路。

注意 ① 正弦量 ⇄ 相量

时域 频域

正弦波形图 ⇄ 相量图

②相量法只适用于激励为同频正弦量的非时变线性电路。



③相量法用来分析正弦稳态电路。

求解顺序

- 列写动态电路时域方程
- 将动态电路时域方程变换为复系数代数方程
- 求解复系数代数方程
- 反变换得到时间表达式

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

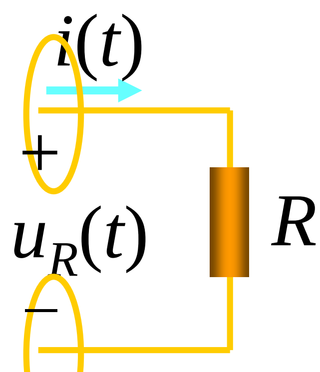
$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$\dot{U} = R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

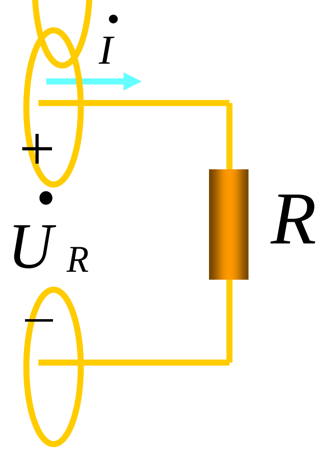
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R+\mathrm{j}\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

8.4 电路定律的相量形式

1. 电阻元件VCR的相量形式



时域形式：
$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi_i)$$
$$u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}\underbrace{RI}_{U_R}\cos(\omega t+\underbrace{\Psi_i}_{\Psi_u})$$

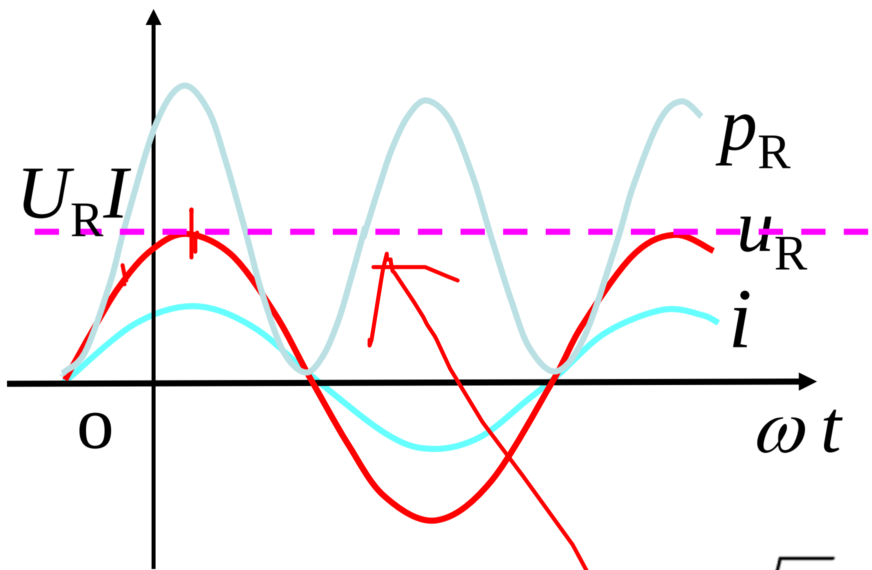


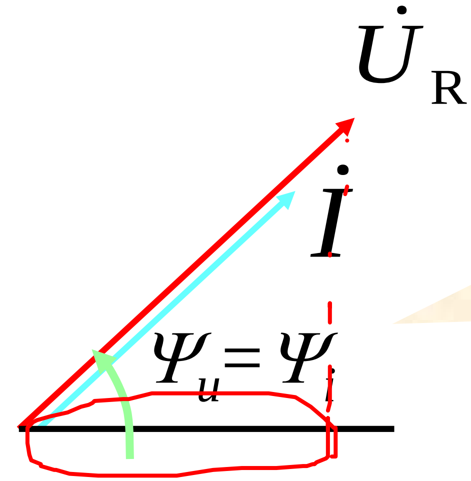
相量形式： $\dot{I}=I\angle\Psi_i \qquad \dot{U}_R=RI\angle\Psi_i$

相量关系： $$\dot{U}_R=R\dot{I}$$

相量模型 → $\begin{cases} U_R=RI & \text{有效值关系} \\ \Psi_u=\Psi_i & \text{相位关系} \end{cases}$

波形图及相量图





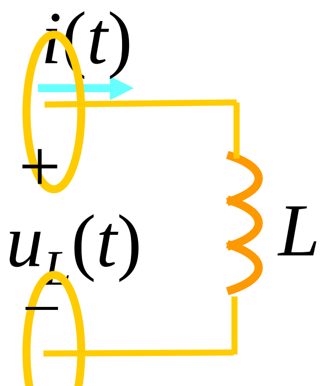
同相位

瞬时功率 $= \sqrt{2}U_R\sqrt{2}I\cos^2(\omega t + \Psi_i)$

$= U_R I[1 + \cos 2(\omega t + \Psi_i)]$

瞬时功率以2ω交变，始终大于零，表明电阻始终吸收功率

2. 电感元件VCR的相量形式

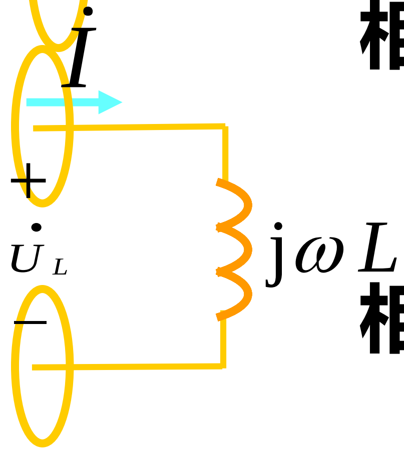


时域形式： $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega L I\sin(\omega t+\Psi_i)$$

$$=\sqrt{2}\omega L I\cos(\omega t+\Psi_i+\frac{\pi}{2})$$

$e^{j\frac{\pi}{2}}$



相量形式：

$$\dot{I}=I\angle\Psi_i \qquad \dot{U}_L=\omega LI\underline{/\Psi_i+\pi/2}$$

相量关系： $\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\mathrm{j}X_L\dot{I}$

jX

相量模型

有效值关系： $U=\omega L I$

相位关系： $\Psi_u=\Psi_i+90°$

感抗和感纳

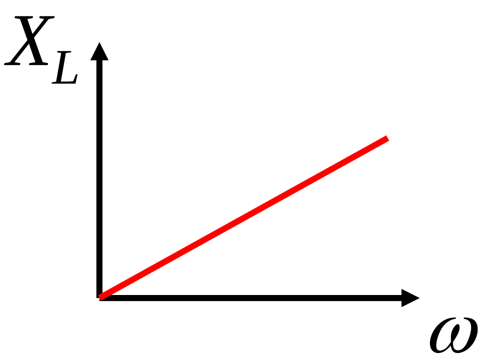
$X_L=\omega L=2\pi fL$， **称为感抗，单位为Ω (欧姆)**

$B_L=-1/\omega L=-1/2\pi fL$， **称为感纳，单位为 S**

感抗的性质

①表示限制电流的能力；

②感抗和频率成正比。



$\omega=0$(直流)，$X_L=0$，短路；

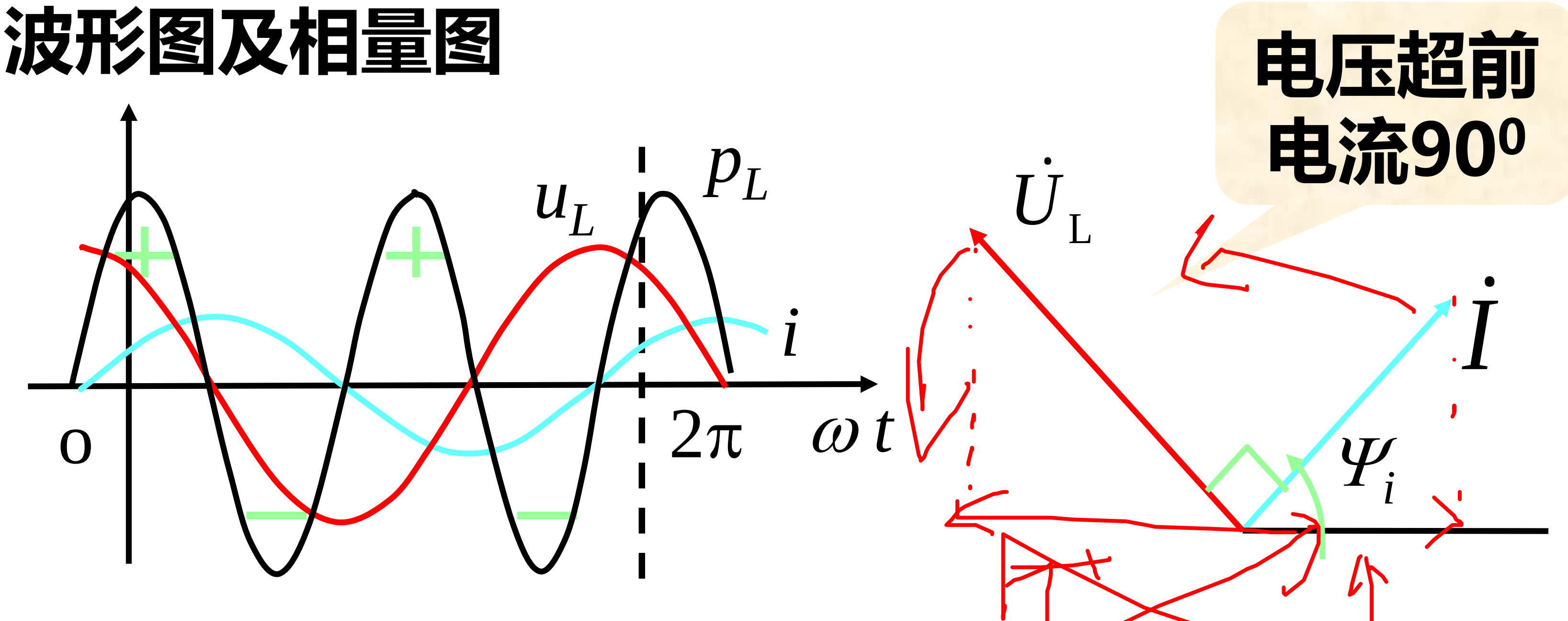
$\omega\to\infty$，$X_L\to\infty$，开路；

相量表达式

$$\dot{U}=\mathrm{j}X_L\dot{I}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}\,,$$

$$\dot{I}=\mathrm{j}B_L\dot{U}=\mathrm{j}\frac{-1}{\omega L}\dot{U}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U}$$

波形图及相量图

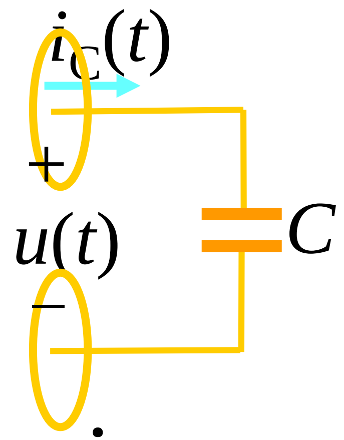


功率 $$p_L = u_L i = U_{Lm} I_m \cos(\omega t + \Psi_i) \sin(\omega t + \Psi_i)$$

$$= U_L I \sin 2(\omega t + \Psi_i)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电感只储能不耗能。

3. 电容元件VCR的相量形式



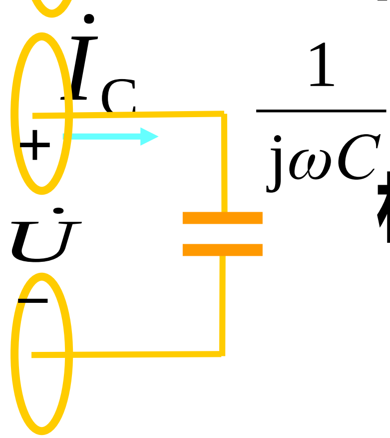
时域形式： $u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\Psi_u)$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t+\Psi_u)$$

$$=\sqrt{2}\omega CU\cos(\omega t+\Psi_u+\frac{\pi}{2})$$

相量形式：

$\dot{U}=U\angle\Psi_u$ $\dot{I}_C=\omega CU\underline{/\Psi_u+\pi/2}$



相量关系： $\dot{U}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}=\mathrm{j}X_C\dot{I}$

有效值关系： $I_C=\omega CU$ $U=\frac{1}{wC}I_c$

相位关系： $\Psi_i=\Psi_u+90°$

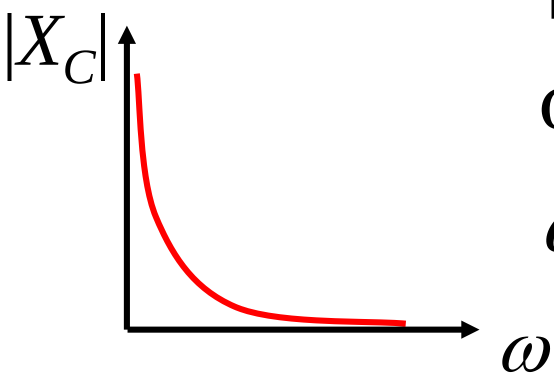
相量模型

容抗与容纳

$X_C = -1/\omega C$， **称为容抗，单位为** Ω**(欧姆)**

$B_C = \omega C$， **称为容纳，单位为** S

容抗和频率成反比



$\omega \to 0$， $|X_C| \to \infty$ **直流开路(隔直)**

$\omega \to \infty$ ， $|X_C| \to 0$ **高频短路**

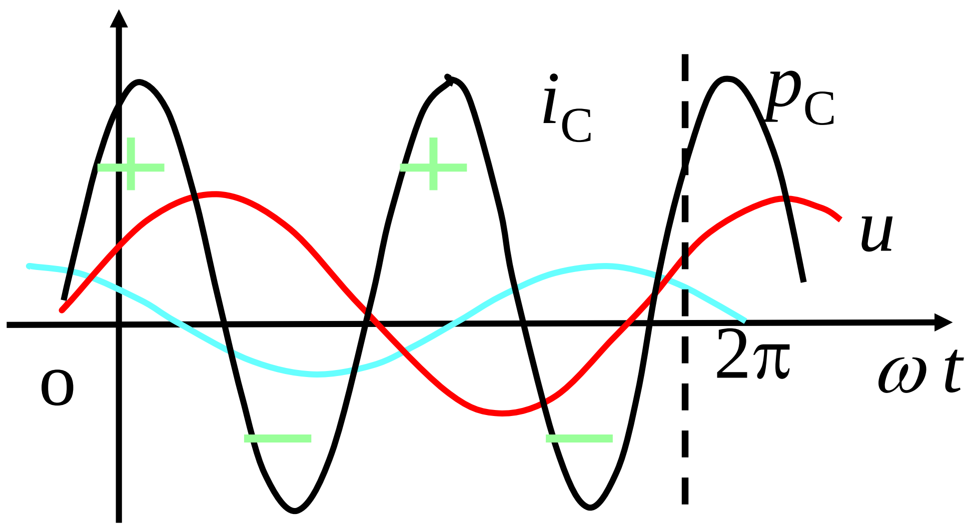
相量表达式

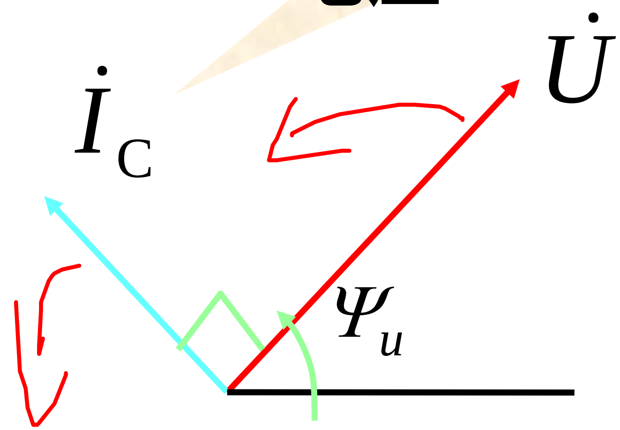
$$\dot{U} = \mathrm{j}X_C\dot{I} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

$$\dot{I} = \mathrm{j}B_C\dot{U} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

波形图及相量图

电流超前电压90^0





功率 $p_C = u i_C = 2UI_C \cos(\omega t + \Psi_u)\sin(\omega t + \Psi_u)$

$$= UI_C \sin 2(\omega t + \Psi_u)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电容只储能不耗能。

4. 基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此，在正弦电流电路中，KCL和KVL可用相应的相量形式表示：

$$\sum i(t)=0 \longrightarrow \sum i(t)=\sum \mathrm{Re}\sqrt{2}\left[\dot{I}_1+\dot{I}_2+\cdots\right]e^{\mathrm{j}\omega t}=0$$

$$\longrightarrow \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \longrightarrow \sum \dot{U}=0$$

表明　流入某一结点的所有正弦电流用相量表示时仍满足KCL；而任一回路所有支路正弦电压用相量表示时仍满足KVL。

相量形式的电路定律和电路的相量模型

（1）相量形式的基尔霍夫定律

$$\sum i(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{U}=0$$

（2）电路元件电压与电流的相量关系

$$u=Ri \quad \Rightarrow \quad \dot{U}=R\dot{I}$$

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$u=\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \dot{U}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

频 域 电感元件 错误的写法

$\dot{I} = I\angle 0^0$ $\quad \dot{U} = j\omega L\,\dot{I}$

$\omega L \cancel{=} \dfrac{u}{i}$

$\omega L \cancel{=} \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$

有效值关系：

$U=\omega L I$

定义：$X_L = \omega L$

频 域 电容元件 错误的写法

$\dot{U} = U\angle 0^0$ $\quad \dot{I} = j\omega C\,\dot{U}$

$\dfrac{1}{\omega C} \cancel{=} \dfrac{u}{i}$

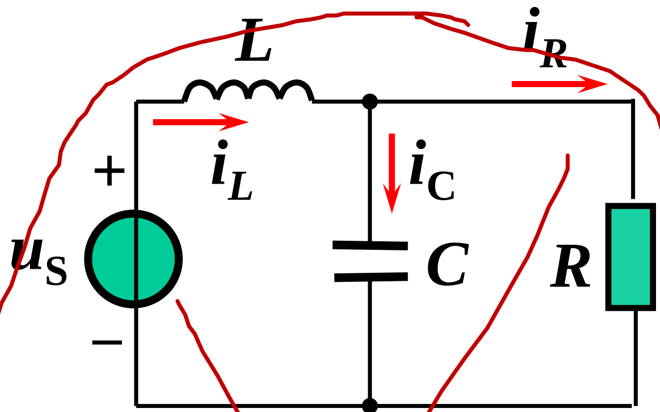
$\dfrac{1}{\omega C} \cancel{=} \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$

有效值关系

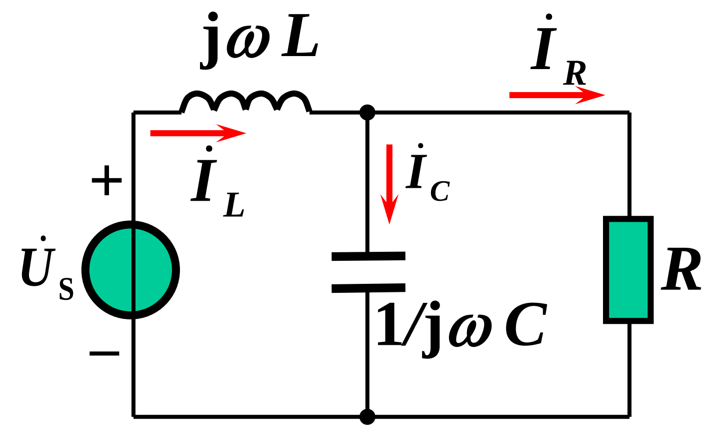
$I=\omega C U$

$$X_C \overset{\text{定义}}{=} -\frac{1}{\omega C}$$

电路的相量模型（以单电源RLC电路为例）



电路时域模型



电路相量模型

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_R \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t = u_S \\ R i_R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t \end{cases}$$

时域的微分方程

$$\begin{cases} \dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R \\ j\omega L\dot{I}_L + \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = \dot{U}_S \\ R\dot{I}_R = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}_C \end{cases}$$

相量形式的代数方程

例1　**试判断下列表达式的正、误。**

1. $U = \omega L I$

2. $i = 5\cos\omega t \not= 5\angle 0^0$

3. $\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m$

4. $X_L = \dfrac{U}{I} = \dfrac{U_m}{I_m}$

5. $\dfrac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \dfrac{1}{j\omega C}\,\Omega$

6. $\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L$

7. $u = L\dfrac{di}{dt}$

例2 **已知电流表读数：** A_1 = 8A A_2 = 6A

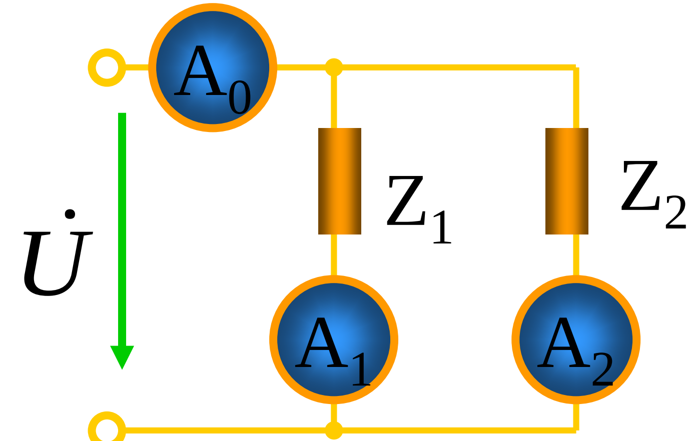
若 1. $Z_1 = R, \quad Z_2 = \mathrm{j}X_C$

A_0 = ?

2. $Z_1 = R$, Z_2为何参数

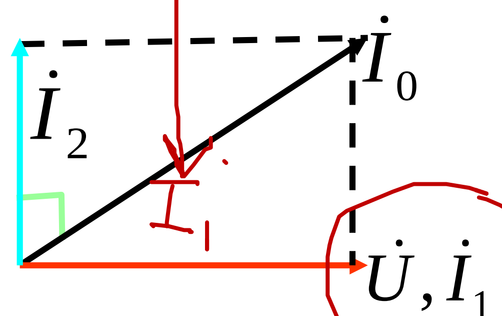
$A_0 = I_{0\max}$=?

3. $Z_1 = \mathrm{j}X_L$, Z_2为何参数 $A_0 = I_{0\min}$=?



解

1. $I_0 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\mathrm{A}$
2. $Z_2 = R, \quad I_{0\max} = 8 + 6 = 14\mathrm{A}$
3. $Z_2 = \mathrm{j}X_C, \quad I_{0\min} = 8 - 6 = 2\mathrm{A}$

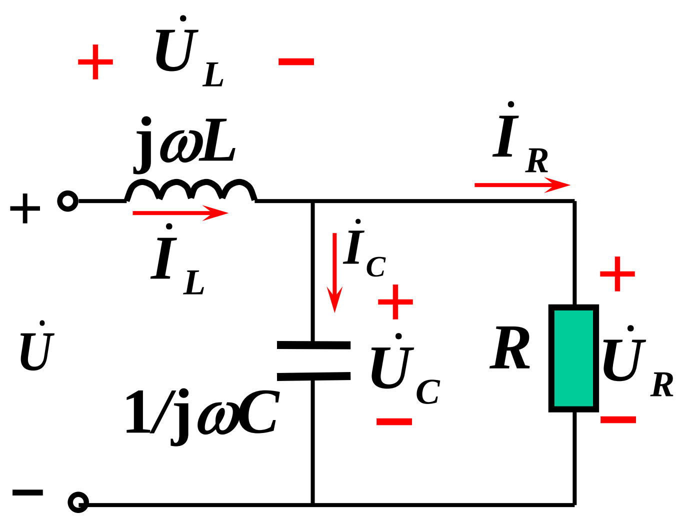


相量图(phasor diagram)

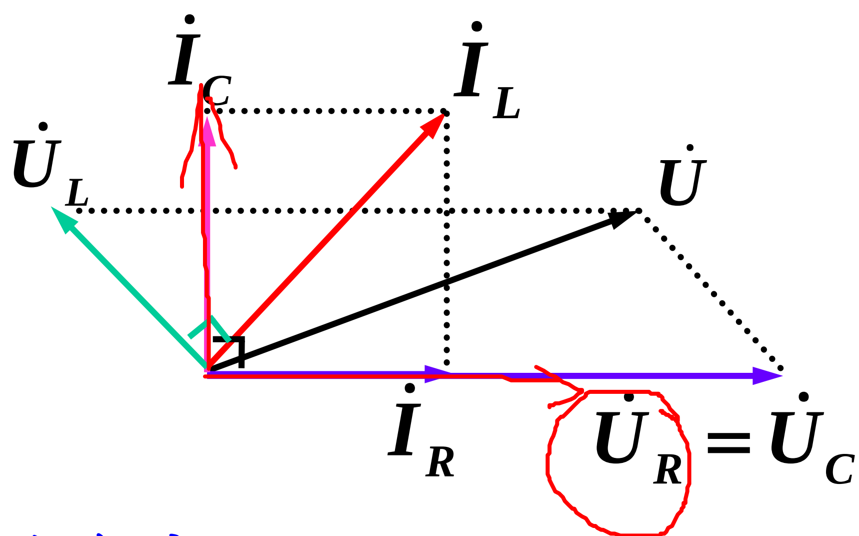
（a）同频率正弦量的相量，才能表示在同一张相量图中；

（b）逆时针旋转——正角度增加的方向；

（c）选定一个参考相量（设其初相位为零——水平线方向）。

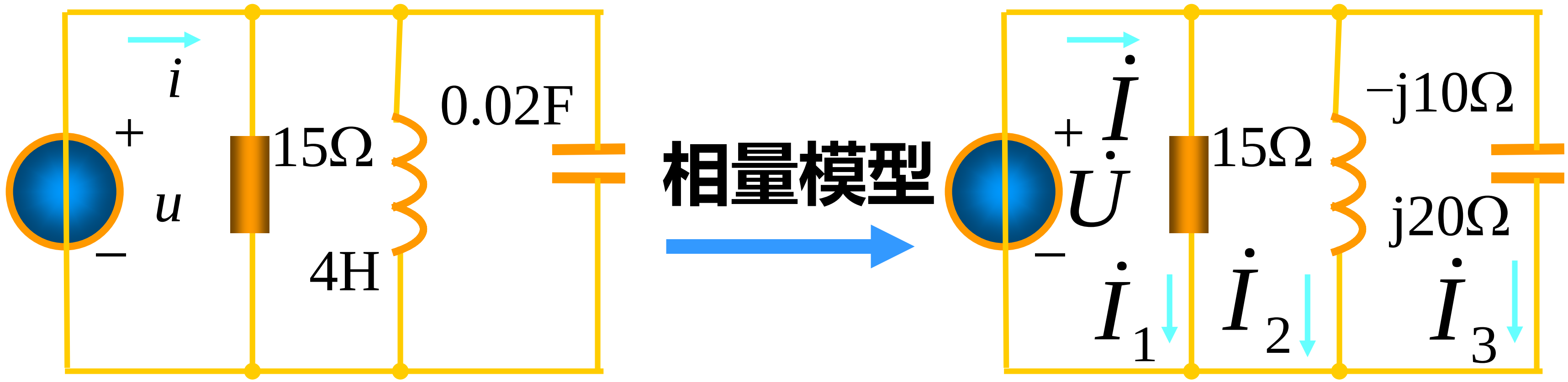


选 $\dot{U}_R$ 作为参考相量



思考：对调*L*与*C*位置，相量图如何变？

例3 已知 $u(t)=120\sqrt{2}\cos(5t)$,求:$i(t)$



解 $\dot{U}=120\angle 0^0$

$$\mathrm{j}X_L=\mathrm{j}4\times 5=\mathrm{j}20\Omega$$

$$\mathrm{j}X_C=-\mathrm{j}\frac{1}{5\times 0.02}=-\mathrm{j}10\Omega$$

$$\dot I = \dot I_R + \dot I_L + \dot I_C = \frac{\dot U}{R} + \boxed{\frac{\dot U}{jX_L} + \frac{\dot U}{jX_C}}$$

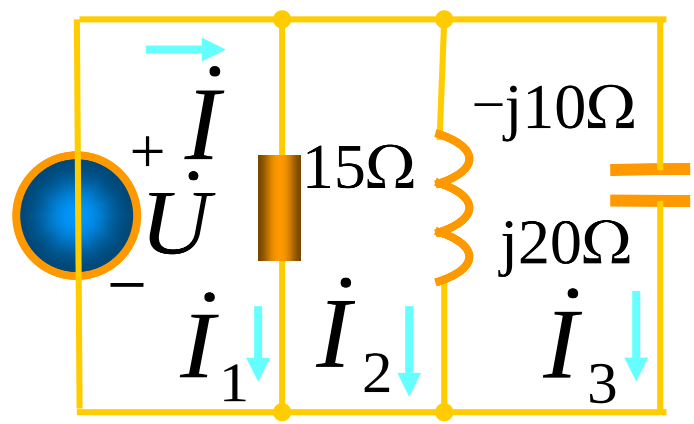
120∠0°

$$=120\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{j20}-\frac{1}{j10}\right)$$

120

$$=8-j6+j12=8+j6=10\angle 36.9^{0}\,\text{A}$$

$$i(t)=10\sqrt{2}\cos(5t+36.9^{0})\text{A}$$



Homework

8-7
8-8
8-15
8-16