2017 级 场论与无穷级数 参考答案

一、判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}$；

解：发散。注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

故该级数发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\ln n)^2}{n}$；

解：注意到这是交错级数，并注意到

$$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$$

其导函数

$$f'(x)=\frac{[2\ln x-(\ln x)^2]}{x^2}$$

在$x>e^2$时恒小于零，故

$$\frac{(\ln n)^2}{n}>\frac{[\ln(n+1)]^2}{n+1},n>10>e^2$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$$

根据莱布尼茨定理，知该级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；

解：注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

所以原级数收敛。

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^9}$；

解：该级数为正项级数，注意到

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{(\ln n)^9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\ln x)^9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{9(\ln x)^8}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{9!\ln x}=+\infty$$

故该级数发散。

二、求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}x^{2n}$$

的收敛域与和函数，并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$$

的和。

解：注意到

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}|x|^2=|x|^2$$

故收敛半径为 1，当$x=\pm1$时，原级数显然收敛，故收敛域为$[-1,1]$.记和函数为$S(x)$，注意到

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}x^{2n}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n}\right]$$

记

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n},xS_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

不难发现这两个级数在$[-1,1]$上都收敛。记

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

逐项求导数得

$$g(x)=f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

积分，并注意到$f(0)=0$，得

$$f(x)=\arctan x$$

故

$$S_1(x)=xf(x)=x\arctan x,x\in[-1,1]$$

记

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

类似的，解得

$$h'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$$

积分，并注意到$h(0)=0$，得

$$h(x)=x-\arctan x$$

故

$$S_2(x)=\frac{h(x)}{x}=1-\frac{\arctan x}{x},x\in[-1,1]$$

特别地，当$x=0$时

$$S_2(0)=\lim_{x\to 0}S_2(x)=0$$

综上

$$S(x)=\frac{1}{2}[S_1(x)-S_2(x)]=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x\arctan x-1+\frac{\arctan x}{x}\right),x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 0,x=0\end{cases}$$

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=S(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

三、将函数

$$f(x)=\frac{x}{-2x^2+x+1}$$

展开为x的幂级数。

解：注意到

$$f(x)=-\frac{x}{(x-1)(2x+1)}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

同时注意到

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,-1<x<1$$

$$\frac{1}{2x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

故

$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n\,,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解

(1) $y'=2x(1+y^2)$；

解：这是可分离变量的微分方程，有

$$\frac{1}{1+y^2}dy=2xdx$$

两边同时积分有

$$\arctan y=x^2+C$$

即

$$y=\tan(x^2+C)$$

(2) $y+xy'=4x^3$

解：先变形为

$$y'+\frac{1}{x}y=4x^2$$

这是一阶线性微分方程，根据公式有

$$y=\frac{1}{x}\left[\int 4x^3dx+C\right]=x^3+\frac{C}{x}$$

(3) $y''+y=(x+2)e^x$；

解：这是常系数二阶线性微分方程，其特征方程为

$$\lambda^2+1=0$$

解得

$$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$$

故与之对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

注意到$f(x)=(x+2)e^x$，故特解必然满足形式

$$y^*=(Ax+B)e^x$$

显然，一个特解可写为

$$y^*=\frac{1}{2}(x+1)e^x$$

综上，该方程的通解为

$$y=\frac{1}{2}(x+1)e^x+C_1\cos x+C_2\sin x$$

(4) $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$;

解：这是齐次方程，令$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，故原式化为

$$u+x\frac{du}{dx}=e^{u}+u$$

$$x\frac{du}{dx}=e^{u}$$

进一步令

$$\frac{1}{x}dx=e^{-u}du$$

两边同时积分得

$$\ln|x|=-e^{-u}+C$$

代回，整理，得

$$x=C_1e^{-e^{-\frac{y}{x}}}$$

其中C_1为任意非零常数。

(5) $(1+x^4)y''=4x^3y',y(0)=1,y'(0)=2$；

解：这是可降阶的二阶微分方程，令$p=y',p'=y''$，原方程化为

$$(1+x^4)\frac{dp}{dx}=4x^3p$$

注意到$p\equiv 0$不满足初值条件，故

$$\frac{1}{p}dp=\frac{4x^3}{1+x^4}dx$$

两边同时积分，得

$$\ln|p|=\ln(1+x^4)+C$$

即

$$p=y'=C_1(1+x^4)$$

将初值条件代入，解得

$$C_1=2$$

故

$$y'=2(1+x^4)$$

再次积分，得

$$y=2x+\frac{2}{5}x^5+C_2$$

再将初值条件代入，得

$$C_2 = 1$$

故该方程的解为

$$y = \frac{2}{5}x^5 + 2x + 1$$

五、计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^4} dx$；

解：注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \arctan x^2 \,|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)x}}$；

解：注意到$x = 0$是瑕点，而该积分显然收敛。故令$t = \sqrt{4-x}$，则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)x}} = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2t}{\sqrt{4-t^2}\,t} dt = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}} d\frac{t}{2} = 2\arcsin\frac{t}{2}\,|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{\pi}{3}$$

六、将函数$f(x) = 1 - \frac{x}{2\pi}\ (0 \le x \le \pi)$展开为（周期为$2\pi$的）余弦级数。

解：对原函数作偶延拓，得

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2\pi}, 0 \le x < \pi \\ 1 + \dfrac{x}{2\pi}, -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

此时

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) dx = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2\pi^2}[1 - (-1)^n], n = 1,2,\cdots$$

$$b_n = 0$$

故

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x\,, 0 \le x \le \pi$$

七、证明：广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

收敛，并求其值。

解：对于这个积分，注意到$x = 0$是瑕点，故拆分为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

对于第一个瑕积分，注意到

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right|=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}|\ln x|=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}=0$$

故该积分绝对收敛。对于第二个无穷限积分，注意到

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\ln x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\ln x+\sqrt{x}}{2x}=0$$

故该积分也收敛。所以原积分收敛。事实上，注意到令$t=\frac{1}{x}$，则

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_1^{+\infty}-\frac{\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{1}{t^2}dt=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

故该积分化为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

积分的值为零。

八、计算下列积分

$$I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\alpha^2\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx\,,|\alpha|<1$$

被积函数在$x=\frac{\pi}{2}$处的值取其在该点处的极限。

解：根据题意，被积函数在$x=\frac{\pi}{2}$处的值存在，故$\frac{\pi}{2}$不是瑕点。注意到

$$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha}{1+\alpha^2\cos^2 x}dx$$

作恒等变形，则原积分化为

$$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha}{1+\alpha^2\cos^2 x}dx=2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\alpha^2+1)\cos^2 x+\sin^2 x}dx$$

$$=2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{(\alpha^2+1)+\tan^2 x}$$

令$t=\tan x$，则

$$I'(\alpha)=2\alpha\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(\alpha^2+1)+t^2}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\alpha^2+1}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\alpha\pi}{\sqrt{\alpha^2+1}}$$

积分，得

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha I'(t)dt = \pi\sqrt{\alpha^2 + 1} - \pi + I(0)$$

注意到

$$I(0) = 0$$

故

$$I(\alpha) = \pi\sqrt{\alpha^2 + 1} - \pi.$$