利用变量轮换对称性计算积分

李曼生，霍锦霞

（兰州城市学院数学系，甘肃 兰州 730030）

摘 要：给出了变量轮换对称的定义，讨论了二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分的计算公式及应用实例。

关键词；变量轮换对称；积分；计算

中图分类号：O172.2

1 引言

对称性是数学美学的一个重要特征。利用积分域关于坐标面、坐标轴、坐标原点的对称性，积分域关于某点、某直线、某平面的广义对称性和被积函数的奇偶性计算积分是简化积分计算的有效方法。在此基础上，本文进一步给出了积分区域同时具有几种对称性时，相关的几种积分的计算公式。

2 定义

定义 1 若$\forall P(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)\cdot\in D^n\subset R^n(n\in N)$，有

$P_1(x_i,x_{i+1},\cdots\cdots,x_n,x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{i-1})\in D^n(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

成立，则称 D^n 关于 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 具有轮换对称性。

定义 2 若函数 $F(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)\equiv F(x_i,x_{i+1},\cdots\cdots,x_n,x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{i-1}),(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，则称函数 $F(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$关于 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 具有轮换对称性。

3 几类积分的计算公式

3.1 二重积分的轮换对称性

定理 1 设函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，D 关于变量轮换对称，则

(1)$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma$

(2)$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D f(x,y)+f(y,x)d\sigma$

例 1 求二重积分$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$，$D: x^2+y^2\leqslant R^2$

解 积分域 D 关于变量轮换对称，由定理 1

$$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2})dxdy$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^3d\rho$$
$$=\frac{\pi}{4}R^4(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$$

3.2 三重积分的轮换对称性

定理 2 设 $f(x,y,z)$在空间有界闭区域 Ω 上连续，Ω 关于变量轮换对称，则

(1) $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint\limits_\Omega f(y,z,x)dv=\iiint\limits_\Omega f(z,y,x)dv$

(2) $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\frac{1}{3}\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,y,x)dv$

例 2 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$，其中 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 及平面 $x=0,y=0,z=0$ 围成

解 因为 Ω 关于变量轮换对称，由定理 2

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=3\iiint\limits_\Omega xdv$$
$$=3\int_0^1xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz$$
$$=3\int_0^1xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^1x(1-x)^2dx=\frac{1}{8}$$

例 3 求 $I=\iiint\limits_\Omega(y^2+x^2)dv$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$

解 积分域 Ω 关于变量轮换对称，由定理 2

$$I=\iiint\limits_\Omega(y^2+x^2)dv=\frac{1}{3}\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2+z^2+x^2+x^2+y^2)dv$$
$$=\frac{2}{3}\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a\rho^4d\rho$$
$$=\frac{\pi}{15}a^5$$

以上两例中的积分域并不关于坐标面对称，一般解法是直接用直角坐标，柱坐标将三重积分化为三次积分，计算比较麻烦，而利用积分域关于变量轮换对称性，可将被积函数的结构改变，大大简化积分的计算。

3.3 曲线积分的轮换对称性

定理3 设L是xoy面上的一条光滑的曲线弧，L关于变量轮换对称，f(x,y)在L上连续，则

(1) $\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$

(2) $\int_L f(x,y)ds=\frac{1}{2}\int_L(f(x,y)+f(y,x))ds$

定理4 设L是xoy面上的一条光滑或分段光滑的有向曲线弧，L关于变量轮换对称，f(x,y)在L上连续，则

$\int_L f(x,y)dx=\int_L f(y,x)dy$

例4 计算$\int_L ydx+xdy$，其中L为直线$x+y=R$从点A(R,0)到点B(0,R)的一段

解 由于积分弧段L关于变量轮换对称，有

$\int_L ydx+xdy=0$

例5 计算$\oint_L y^{2/3}dx+x^{2/3}dy$，其中L为双纽线$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$位于第一象限的部分取逆时针方向解 由于积分弧段L关于变量轮换对称，有

$\oint_L y^{2/3}dx+x^{2/3}dy=0$

3.4 曲面积分的轮换对称性

定理5 设Σ是光滑曲面或分片光滑曲面，Σ关于变量轮换对称，f(x,y,z)在Σ上连续，则

(1)$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)ds=\iint\limits_{\Sigma}f(y,z,x)ds=\iint\limits_{\Sigma}f(z,x,y)ds$

(2)$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)ds=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y))ds$

定理6 设Σ是光滑或分片光滑的有向曲面，Σ关于变量轮换对称，f(x,y,z)在Σ上连续，则

$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dydz=\iint\limits_{\Sigma}f(y,z,x)dydz=\iint\limits_{\Sigma}f(z,x,y)dydz$

$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dydz+f(y,z,x)dydz+f(z,x,y)dydz$

例6 计算$\oint\limits_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx$，其中Σ是平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧

解 因为积分曲面Σ关于变量具有轮换对称性(见图1)，所以

$\oint\limits_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx=3\oint\limits_{\Sigma}xzdxdy$

$=3(\oint\limits_{\Sigma_1}xzdxdy+\oint\limits_{\Sigma_2}xzdxdy+\oint\limits_{\Sigma_3}xzdxdy+\oint\limits_{\Sigma_3}xzdxdy)$

$=3\oint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)dxdy$

$=3\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{8}$

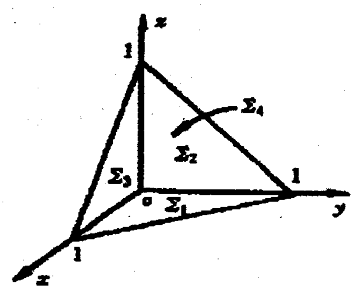

图1

积分计算是高等数学的基本计算，以上的结论和实例说明，在解题的过程中，根据问题的特点去发掘潜在的对称性关系或构造其中的对称性，可以化难为易，提高解题效率。

参考文献：

[1] 李曼生. 利用积分域的对称性计算积分[J]. 甘肃高师学报. 2002(2)

[2] 钱双平. 对称性在高等数学解题中的应用[J]. 云南电大学报. 2004(2)

[3] 胡适耕. 大学数学解题艺术[M]. 长沙. 湖南大学出版社. 2001. 141—168

(上接第64页)在一些不足之处，没有做到经济、社会效益最大化，有待进一步改进措施，切实实现干气的综合利用。

参考文献：

[1] 内部资料，兰州石化公司2004年技改项目情况通报。

[2] 内部资料，兰州石化公司A、B、C燃煤锅炉改造技术协议

[3] 谢恒，姜鹏，陈云生，等. 3.0Mt/a重油催化裂化联合装置新技术的应用. 合成橡胶工业，2005.12第26卷

[4] 李红洲、司国孝等. 炼化结合优化乙烯原料. 合成橡胶工业，2005. 26(12)

[5] 兰州石化公司炼油厂技术科内部资料，炼厂干气平衡情况.

[6] 王建，夏荣安，周天基，等. 催化干气回收乙烯工艺的工业应用. 石化技术与应用，2006，24(5)

利用变量轮换对称性计算积分

作者：　　　　李曼生，　霍锦霞
作者单位：　　兰州城市学院数学系,甘肃,兰州,730030
刊名：　　　　甘肃科技
英文刊名：　　GANSU SCIENCE AND TECHNOLOGY
年，卷(期)：　2007，23(12)
引用次数：　　0次

参考文献(3条)

1. 李曼生 利用积分域的对称性计算积分[期刊论文]-甘肃高师学报 2002(2)

2. 钱双平 对称性在高等数学解题中的应用--数学美学方法的应用[期刊论文]-云南电大学报 2004(2)

3. 胡适耕 大学数学解题艺术 2001

相似文献(2条)