当 😊 $\to 0$ 时

$\sin \text{😊} \sim \text{😊}$	$\tan \text{😊} \sim \text{😊}$
$\ln(1+\text{😊}) \sim \text{😊}$	$\mathrm{e}^{\text{😊}} - 1 \sim \text{😊}$
$\arcsin \text{😊} \sim \text{😊}$	$\arctan \text{😊} \sim \text{😊}$
$\log_a(1+\text{😊}) \sim \dfrac{\text{😊}}{\ln a}$	$a^{\text{😊}} - 1 \sim \text{😊} \ln a$
$1-\cos \text{😊} \sim \dfrac{1}{2}\text{😊}^2$	$\sqrt[n]{1+\text{😊}} - 1 \sim \dfrac{\text{😊}}{n}$
$\text{😊} - \sin \text{😊} \sim \dfrac{1}{6}\text{😊}^3$	$\tan \text{😊} - \text{😊} \sim \dfrac{1}{3}\text{😊}^3$
$(1+\text{😊})^{\alpha} - 1 \sim \alpha \text{😊}$	$\arcsin \text{😊} - \text{😊} \sim \dfrac{1}{6}\text{😊}^3$
$\text{😊} - \arctan \text{😊} \sim \dfrac{1}{3}\text{😊}^3$	$\tan \text{😊} - \sin \text{😊} \sim \dfrac{1}{2}\text{😊}^3$

切比雪夫不等式

说到切比雪夫不等式, 可能考研的学生最先想到的概率论里面的不等式. 但是这里所说的切比雪夫不等式并不是, 首先理科生在高中就应该学过四个重要不等式: 均值, 柯西, 排序, 切比雪夫, 其中切比雪夫不等式是排序不等式的推论:

结论 1: 离散切比雪夫不等式

如果 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, 则

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

如果 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 则

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

这里我们就不给这个不等式的证明了, 高中竞赛党可能比较常用. 而在考研以及大学生数学竞赛里面出现的切比雪夫不等式是积分版本的形式:

结论 2: 积分形式切比雪夫不等式

如果函数 $f(x), g(x)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的单调递增函数, 则

$$(b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单增, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单减, 则

$$(b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

考研内不会直接考这个不等式, 但是却拿这个不等式变形考了很多, 比如把 $f(x), g(x)$ 取一个具体的单调函数就变成了一个考研题. 假定 $f(x)$ 单增, 取

$g(x)=x$, 则

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这个题不要有人说自己没做过. 基本上只要涉及到单调函数的积分不等式问题, 都是切比雪夫不等式解决的问题. 不过这里我们也不给出这个不等式的证明, 因为我们还要给一个加权切比雪夫不等式:

结论 3: 积分形式加权切比雪夫不等式

如果函数 $f(x), g(x)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的单调递增函数, $p(x)$ 非负可积. 则

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单增, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单减, $p(x)$ 非负可积. 则

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

这里取 $p(x)=1$ 就是普通的切比雪夫不等式了. 要证明这个不等式呢, 就要知道离散形式的切比雪夫不等式的证明思路, 之前提过了, 它是切比雪夫不等式的推论, 证明起来自然要利用排序法了. 我们来证明第一部分.

证明 首先注意到对任意 $x,y\in[a,b]$, 由于 $f(x), g(x)$ 的单调性一致, 因此

$$p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geqslant 0.$$

展开整理即得

$$\begin{aligned}&p(x)f(x)g(x)p(y)+p(y)f(y)g(y)p(x)\\ \geqslant\, &p(x)f(x)g(y)p(y)+p(y)f(y)g(x)p(x).\end{aligned}$$

两边在 $[a,b]^2$ 上作二重积分, 并利用积分与积分变量的无关性可得可得

$$2\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$f(x), g(x)$ 单调性相反, $g(x)$ 换成 $-g(x)$ 即可. □

这就是一般形式的切比雪夫不等式了, 用排序法也是标准的证明方法, 不过限制在考研范围内, 一般会给定 $f(x), g(x), p(x)$ 都是连续函数, 这个时候还有一种方法就是利用变上限积分求导的方法. 最后我们就举一个简单的例子吧:

例题 设函数 $q(x)$ 是 $[0,1]$ 上正的单增函数, 则

$$\frac{\int_0^1 xq^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 xq(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 q^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x}.$$

这个题本来是某届全国大学生数学竞赛, 但是某些考研书就把它搞过来变成了考研题. 这里涉及到单调函数的积分不等式, 只需要取 $p(x)=f^2(x), f(x)=x, g(x)=\frac{1}{q(x)}$, 利用上面的加权切比雪夫不等式即得.

当然了, 如果出现在考研范围内会给定 $q(x)$ 是连续函数, 这个时候只需要令

$$F\left(t\right)=\int_{0}^{t}xq^{2}\left(x\right)\mathrm{d}x\int_{0}^{t}q\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{t}q^{2}\left(x\right)\mathrm{d}x\int_{0}^{t}xq\left(x\right)\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1]$$

然后对 t 求导考虑单调性即可.
只要随便取一些函数 $p(x)$, $f(x)$, $g(x)$, 可以得到更多的不等式.