

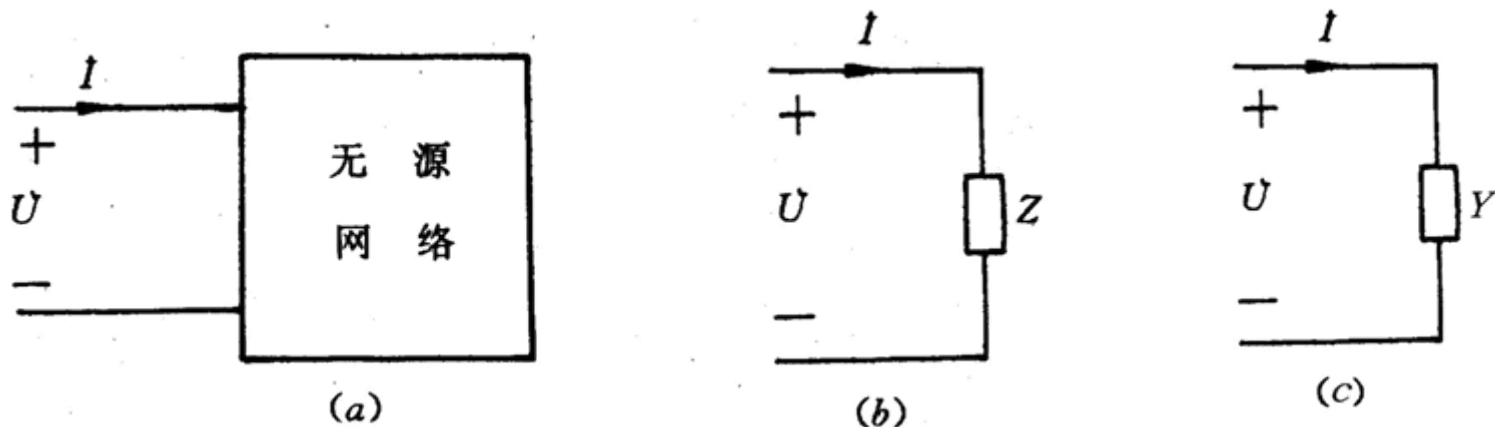
6.3 无源一端口的等效阻抗、等效电路和性质 ---阻抗/导纳的一般特性

阻抗和导纳的概念以及对它们的运算和等效变换是线性电路正弦稳态分析中的重要内容。

前面定义的元件阻抗或为纯实数（电阻），或为纯虚数（电容、电感）。本节通过无源一端口的等效阻抗，讨论阻抗/导纳的一般特性。

第六章 正弦电路的稳态分析

一、无源一端口的阻抗与导纳定义



无源线性一端口网络

等效电路一

等效电路二

图6.3-1 一端口的等效阻抗及其等效电路

1. 阻抗的一般性质:

①**定义**: 图6.3-1(a)所示的不含独立源线性一端口网络, 当它在角频率为 ω 的正弦电源激励下处于稳定状态时, 端口电压和电流将是同频率的正弦量, 且二者相量一定成正比。定义端口的电压相量和电流相量的比值为该一端口的阻抗, 并用 Z 表示

$$Z \equiv \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \quad \text{单位: } \Omega \quad (6.3-1)$$

由于 Z 为复数, 称为**复阻抗**(complex impedance), 通常简称阻抗。这样图6.3-1(a)所示的无源一端口网络可以用图6.3-1(b)所示的等效电路表示, 所以 Z 也称为一端口网络的**等效阻抗**或**输入阻抗**。

复阻抗定义为相量之比, 必然是复数, 但不是相量(即并不代表正弦量)。它是描述无源一端口网络特性的参数, 故 Z 字母上不加圆点。

第六章 正弦电路的稳态分析

②阻抗 Z 可以表示为极坐标形式

$$Z = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = \frac{U}{I} \angle \varphi_u - \varphi_i = |Z| \angle \varphi_z \quad (6.3-2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} |Z| &= \frac{U}{I} \\ \varphi_z &= \varphi_u - \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (6.3-3)$$

$|Z|=U/I$ 称为**阻抗模**（简称阻抗），单位为欧姆，等于端口电压与端口电流有效值之比； φ_z 称为**阻抗角** (impedance angle)，它是端口电压与电流之间的位相差。

（若 $\varphi_z > 0$ ， Z 称为**感性阻抗**； $\varphi_z < 0$ 称为**容性阻抗**；
 $\varphi_z = 0$ 电阻性阻抗。见三）

③阻抗也可以表示为代数形式

$$Z = R + jX \quad (6.3-4)$$

Z 的实部 $R=|Z|\cos \phi_Z$ 称为**电阻**(resistance);

Z 的虚部 $X=|Z|\sin \phi_Z$ 称为**电抗**(reactance)。

(若 $R>0$: 当 $X>0$ 时, Z 称为**感性阻抗**; $X<0$ 时称为**容性阻抗**; $X=0$ 为**电阻性阻抗**。见三)

④ $|Z|$ 、 R 和 X 之间的关系为

$$\left. \begin{array}{l} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \text{或} \quad \varphi_Z = \arctg \frac{X}{R} \end{array} \right\} \quad (6.3-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} R = |Z| \cos \varphi_Z \\ X = |Z| \sin \varphi_Z \end{array} \right\} \quad (6.3-6)$$

⑤ 阻抗三角形:

阻抗 \mathbf{Z} 可以在复平面上表示, 图6.3-2所示直角三角形表示出阻抗实部 R 、虚部 X 和阻抗模 $|\mathbf{Z}|$ 之间的关系(设 $X>0$), 称为阻抗三角形(impedance triangle)。

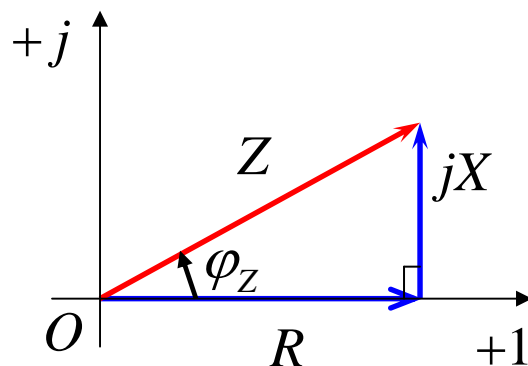


图6.3-2 阻抗三角形

第六章 正弦电路的稳态分析

⑥**无源元件的阻抗**：当无源二端网络分别为单个元件 **R** 、 **L** 和 **C** 时，它们相应的阻抗分别为

$$\left. \begin{aligned} Z &= R \\ Z &= j\omega L = jX_L \\ Z &= \frac{1}{j\omega C} = -jX_C \end{aligned} \right\} \quad (6.3-7)$$

式中 **R** 为**电阻**， $X_L = \omega L$ 和 $X_C = \frac{1}{\omega C}$ 分别为**电感的电抗**，简称**感抗**和**电容的电抗**，简称**容抗**，单位为欧姆(Ω)。

电阻即电阻元件阻抗的实部，感抗和容抗即电感和电容阻抗的虚部。

上式说明 Z 可以是纯实数，也可以是纯虚数。

可见，基本元件 **R** 、 **L** 、 **C** 的阻抗是阻抗的特殊形式。

2.导纳的一般性质:

①**定义**: 图6.3-1(a)所示的无源线性一端口网络, 当它在角频率为 ω 的正弦电源激励下处于稳定状态时, 端口的电流相量和电压相量的比值定义为该一端口的导纳, 并用 Y 表示。即

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \quad \text{单位: S} \quad (6.3-8)$$

或

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (6.3-9)$$

由于 Y 为复数, 称为复导纳(complex admittance), 简称导纳。这样图6.3-1(a)所示的无源一端口网络可以用图6.3-1(c)所示的等效电路表示, 所以 Y 也称为一端口网络的**等效导纳**或**输入导纳**。

第六章 正弦电路的稳态分析

②导纳 Y 可以表示为极坐标形式

$$Y = \frac{I \angle \varphi_i}{U \angle \varphi_u} = \frac{I}{U} \angle \varphi_i - \varphi_u = |Y| \angle \varphi_Y \quad (6.3-10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} |Y| &= \frac{I}{U} = \frac{1}{|Z|} \\ \varphi_Y &= \varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z \end{aligned} \right\} \quad (6.3-11)$$

$|Y|=I/U$ 称为**导纳模**（简称导纳），导纳模等于电流 \dot{I} 与电压 \dot{U} 的有效值之比； φ_Y 称为**导纳角** (admittance angle)，是电流与电压之间的位相差。

第六章 正弦电路的稳态分析

③导纳也可以表示为代数形式

$$Y = G + jB \quad (6.3-12)$$

Y 的实部 G 称为电导(conductance), 虚部 B 称为电纳(susceptance)。

④ $|Y|$ 、 G 、 B 之间的关系为:

$$\left. \begin{aligned} |Y| &= \sqrt{G^2 + B^2} \\ \varphi_Y &= \arctg \frac{B}{G} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-13)$$

或

$$\left. \begin{aligned} G &= |Y| \cos \varphi_Y \\ B &= |Y| \sin \varphi_Y \end{aligned} \right\} \quad (6.3-14)$$

第六章 正弦电路的稳态分析

⑤**导纳三角形**：导纳 Y 可以在复平面上表示，图6.3-3所示的直角三角形表示出 $|Y|$ 、 G 、 B 之间的关系（图中设 $B < 0$ ），称为**导纳三角形**(admittance triangle)表示。

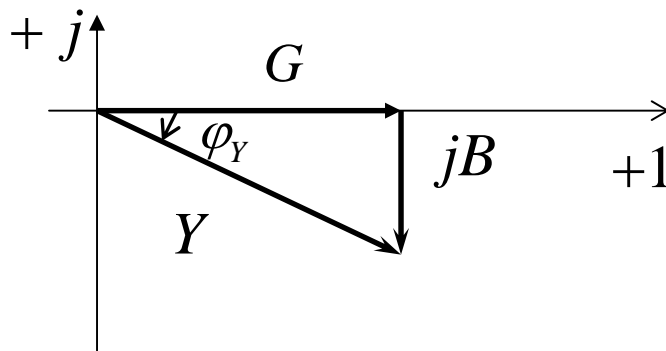


图6.3-3 导纳三角形

第六章 正弦电路的稳态分析

⑥**无源元件的导纳**：当无源二端网络分别为单个元件 R 、 L 和 C 时，它们相应的导纳分别为

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{1}{R} = G \\ Y &= \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L \\ Y &= j\omega C = jB_C \end{aligned} \right\} \quad (6.3-15)$$

式中 G 为**电导**， $B_L = \frac{1}{\omega L}$ 和 $B_C = \omega C$ 分别为**电感的电纳**，简称**感纳**和**电容的电纳**，简称**容纳**，单位为西门子(S)。

电导即电阻元件导纳的实部，感纳和容纳即电感和电容导纳的虚部。

说明 Y 可以是纯实数，也可以是纯虚数。

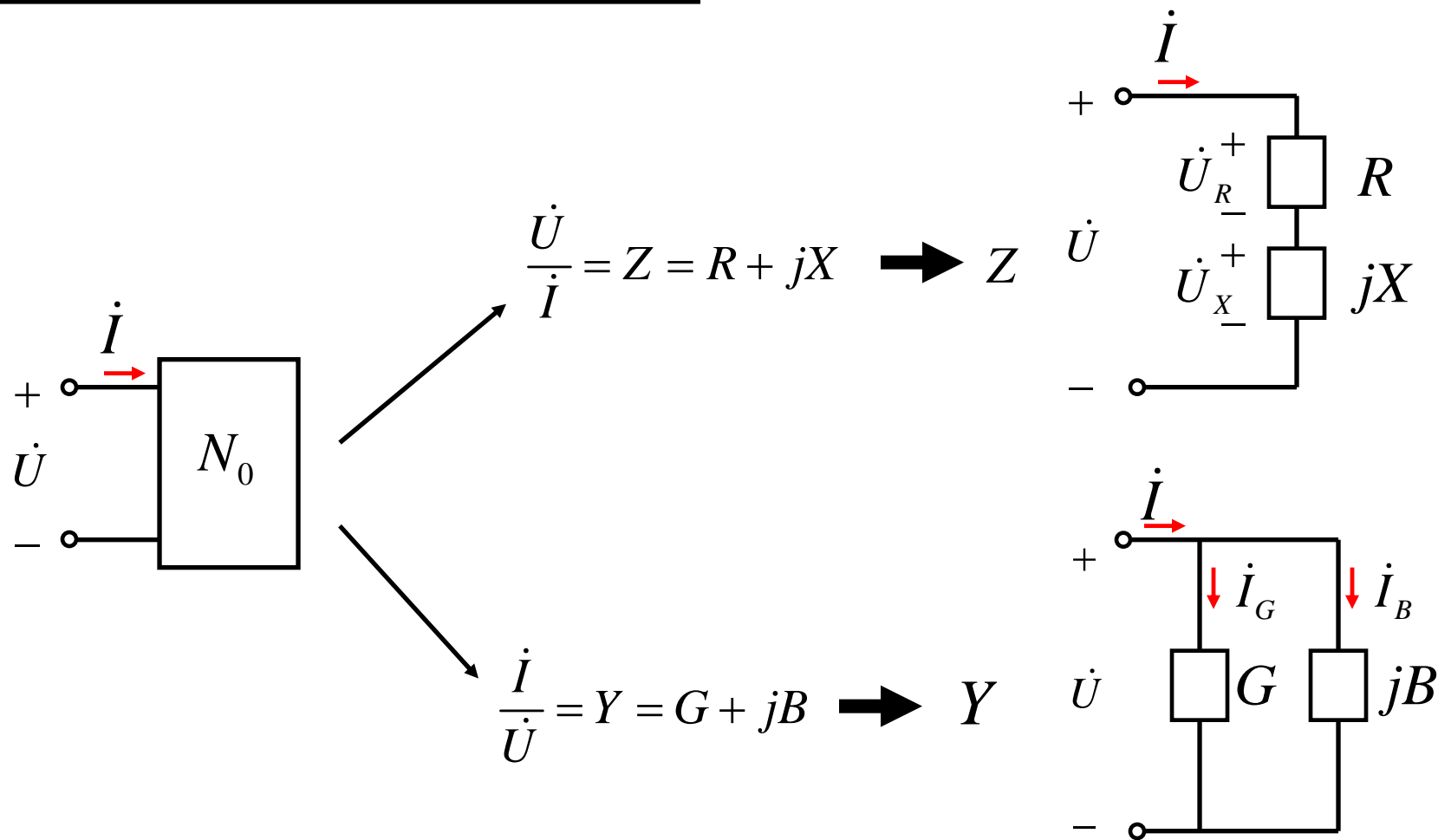
二.无源一端口的等效电路

1. 两种等效电路:

在电阻电路的分析中, 如果求得了一个一端口网络的输入电阻(或输入电导), 就意味着找到了该网络**一个最简单的等效电路**, 这等效电路只含一个电阻元件, 其电阻等于输入电阻(或输入电导的倒数)。

在正弦稳态情况下, 我们求得一个二端口网络的输入阻抗 Z 及输入导纳 Y , 这就意味着存在**两种最简单的等效电路**, 通常是由两个元件组成, 一种是由电阻与电抗元件串联组成, 另一种则是由电导和电纳元件并联组成, 如图6.3-4所示。它们是**最简单的等效电路**。

第六章 正弦电路的稳态分析



6.3-4 串联电路和其等效的并联电路

正弦电路中同一个无源(独立源)一端口电路, 当从其端口看进去时, 可分别用电阻 R 和电抗 jX 串联的复阻抗模型或电导 G 和电纳 jB 并联的复导纳模型等效。

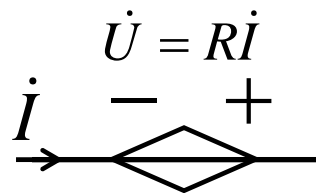
第六章 正弦电路的稳态分析

(1) 串联等效电路中的两个元件:

➤ 一是电阻元件 \mathbf{R} (表示实部):

$\mathbf{R} > 0$ 时为电阻; 

$\mathbf{R} < 0$ 时需用受控源表示实部。



➤ 二是储能元件 (电感或电容):

$\mathbf{X} > 0$ 时称为感性电抗, 可用等效电感替代

$$\omega L_{eq} = X \quad L_{eq} = \frac{X}{\omega}$$

$\mathbf{X} < 0$ 时称为容性电抗, 可用等效电容替代

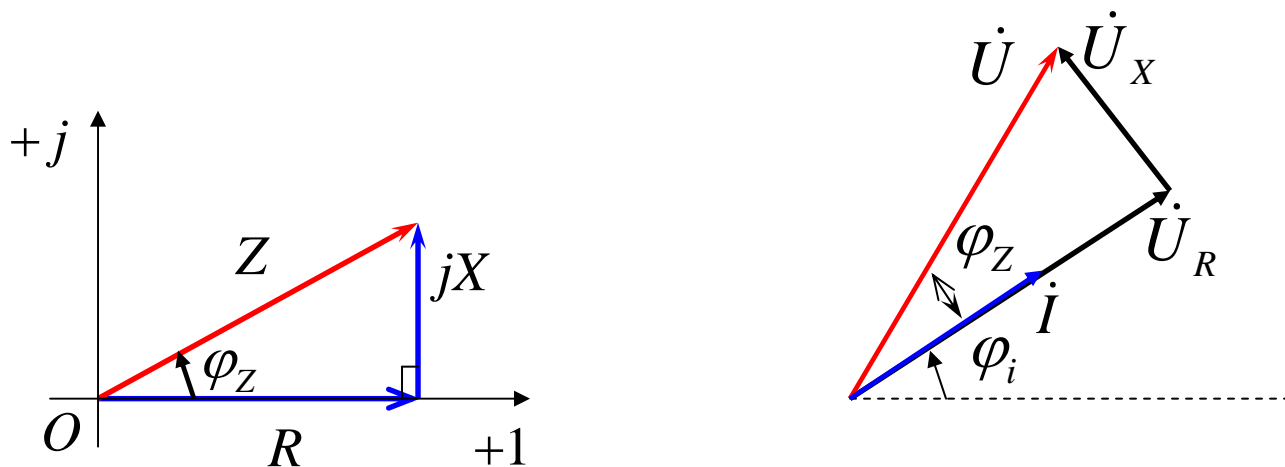
$$\frac{1}{\omega C_{eq}} = |X| \quad C_{eq} = \frac{1}{\omega |X|}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

串联等效电路将端电压分解为两个分量

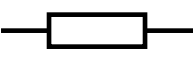
$$\dot{U} = (R + jX)\dot{I} = \dot{U}_R + \dot{U}_X$$

根据**KVL**，**3**个电压相量在复平面上组成一个与阻抗三角形相似的直角三角形（将阻抗三角形乘以 \dot{I} 获得），称为**电压三角形**，如图所示。

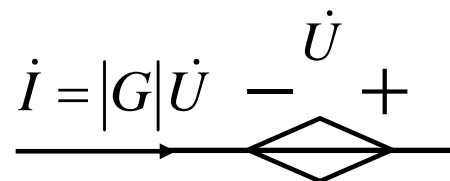


(2) 并联等效电路中的两个元件:

➤ 一是电导元件 G (表示实部):

$G > 0$ 时为电导; 

$G < 0$ 时需用受控源表示实部。



➤ 二是储能元件 (电感或电容):

$B > 0$ 时称为容性电纳, 可用等效电容替代

$$\omega C_{eq} = B \quad C_{eq} = \frac{B}{\omega}$$

$B < 0$ 时称为感性电纳, 可用等效电感替代

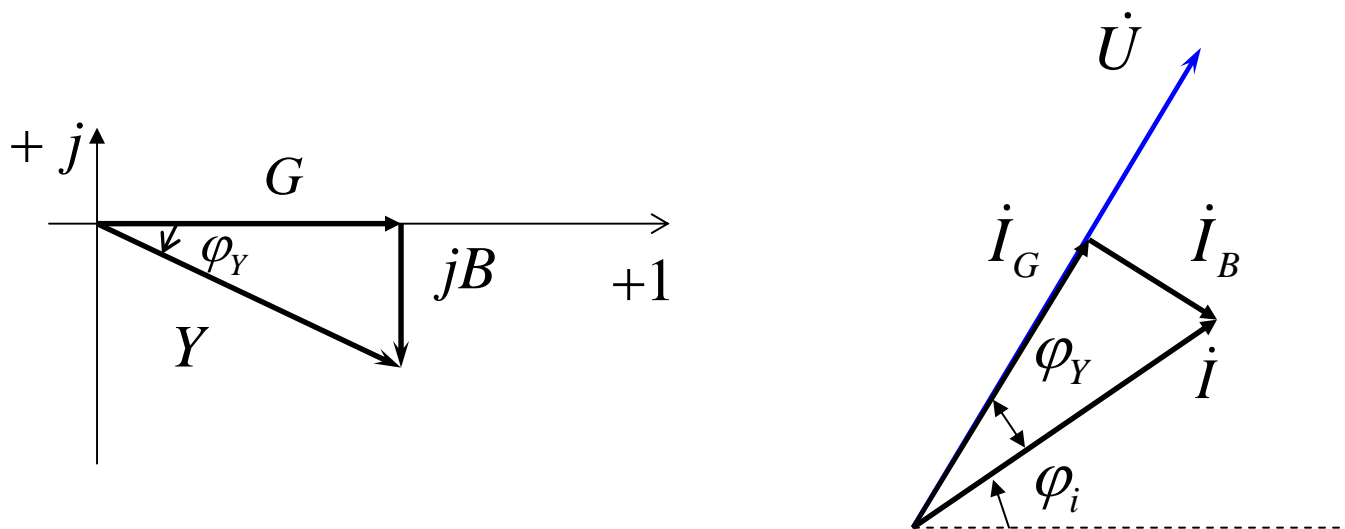
$$\frac{1}{\omega L_{eq}} = |B| \quad L_{eq} = \frac{1}{\omega |B|}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

并联等效电路将端电流分解为两个分量

$$\dot{I} = (G + jB)\dot{U} = \dot{I}_G + \dot{I}_B$$

根据**KCL**，3个电流相量在复平面上组成一个与导纳三角形相似的直角三角形（将导纳三角形乘以 \dot{U} 获得），称为**电流三角形**，如图所示。



第六章 正弦电路的稳态分析

例6.3-1 求如图6.3-5(a)电路的等效阻抗和导纳，并绘出等效电路。

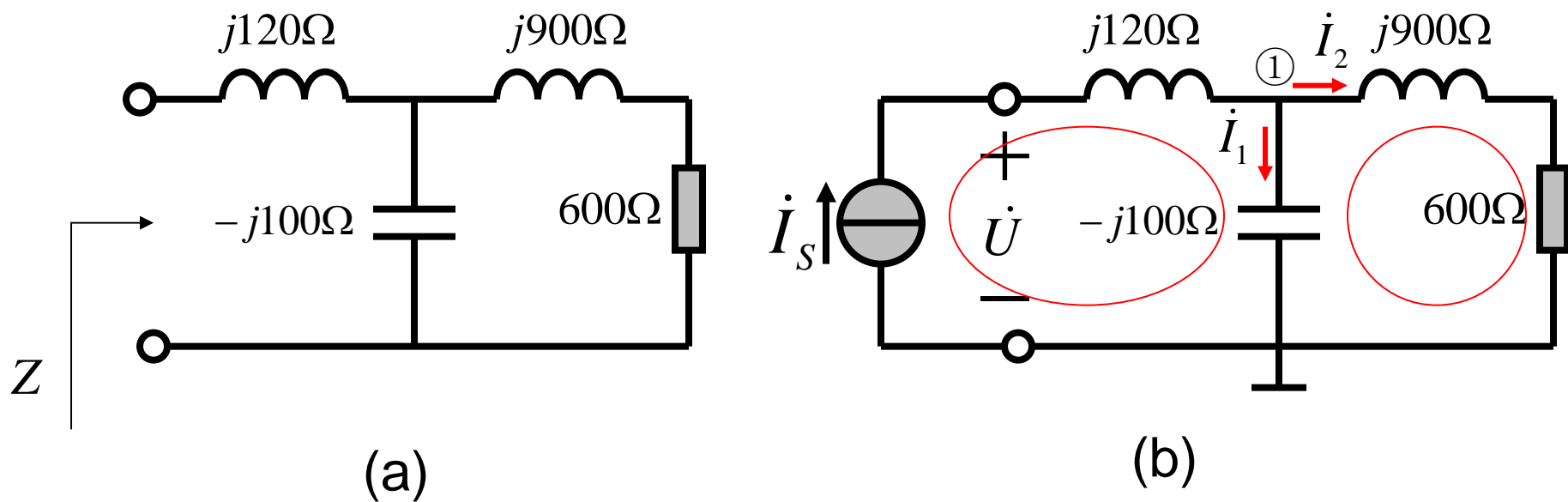


图 6.3-5

解：设在一端口外加电流源，来求端口电压相量。

对独立节点1和独立回路列写KCL、KVL方程，有

第六章 正弦电路的稳态分析

$$\dot{I}_s = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{U} = j120\dot{I}_s + (-j100)\dot{I}_1$$

$$j900\dot{I}_2 + 600\dot{I}_2 = (-j100)\dot{I}_1$$

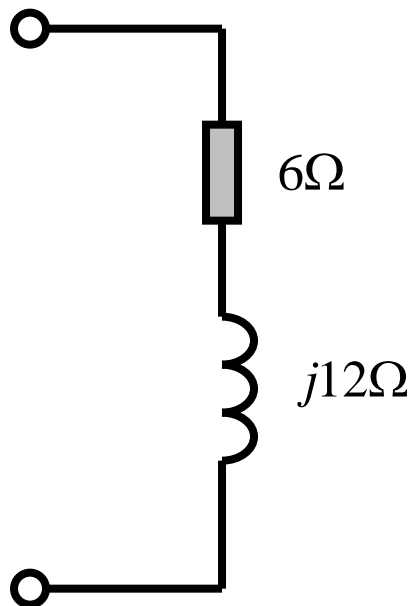
易解得

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_s} = 6 + j12 \quad \Omega$$

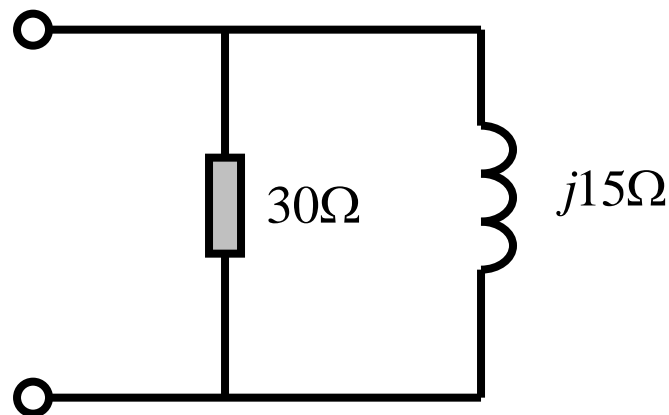
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{6 + j12} = \frac{1}{30} - j\frac{1}{15} \quad \text{S}$$

由 Z 的表达式可见，该一端口可等效为电阻与电感的串联，如图(c)所示；而由 Y 的表达式，则也可等效为电阻与电感的并联，如图(d)所示。注意两种等效电路中元件参数不同。

第六章 正弦电路的稳态分析



(c) 等效电路一：串联等效



(d) 等效电路二：并联等效

如果知道激励信号频率，则可计算出电感的自感系数 L 。

2. 两种等效电路的等效互换

用复阻抗 Z 表示的串联模型参数 R 和 X 与用复导纳 Y 表示的并联模型参数 G 和 B ，在满足一定条件时，两种最简等效电路可以相互等效变换。

这两种等效电路间的变换公式，仍可根据**电路等效的概念**求得。在正弦稳态电路中，两个电路模型欲实现等效，则需端口处有相同的VCR，即 $\dot{U} = Z\dot{I}$ 和 $\dot{I} = Y\dot{U}$ 完全相同，则显然要求 Z 与 Y 互为倒数，

$$Z = \frac{1}{Y} \quad \text{or} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad (6.3-16)$$

由上述等效的概念所得基本关系进而可推导出 Z 、 Y 等效互换时元件参数之间关系如下：

第六章 正弦电路的稳态分析

①当已知并联模型元件参数 G 和 B ，求等效串联模型元件参数 R 和 X 时，有

故有

$$Z = R + jX = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|Y|^2} - j \frac{B}{|Y|^2}$$

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|Y|^2} \\ X &= -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{B}{|Y|^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-17)$$

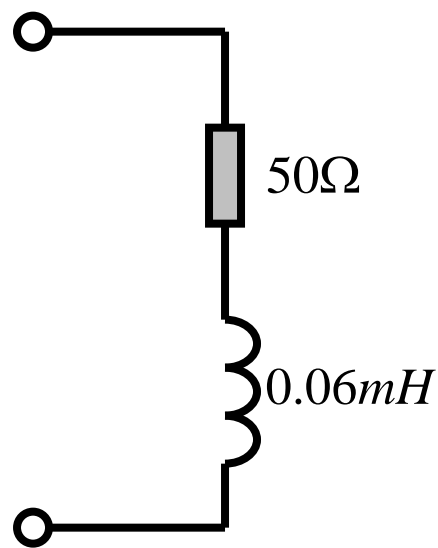
②同理，已知串联模型元件参数 R 和 X ，求等效并联模型元件参数 G 和 B 时，有

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|Z|^2} \\ B &= -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{|Z|^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-18)$$

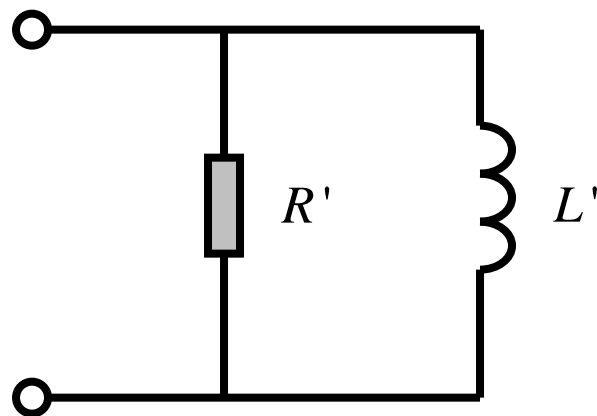
从变换公式可见，等效变换不会改变阻抗（或导纳）原来的感性或容性性质。

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.3-2 RL 串联电路如6.3-6(a)所示。若要求在 $\omega=10^6\text{rad/s}$ 时，把它等效成 $R' \ L'$ 并联电路(b)，试求 R' 和 L' 的大小。



(a)



(b)

图 6.3-6 例 6.3-2 用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解： RL 串联电路的阻抗为

$$X_L = \omega L = 10^6 \times 0.06 \times 10^{-3} = 60\Omega$$

$$Z = R + jX_L = 50 + j60 = 78.1\angle 50.2^\circ\Omega$$

导纳为：

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{78.1\angle 50.2^\circ} = 0.0128\angle -50.2^\circ = 0.0082 - j0.0098 \text{ S}$$

$$G' = 0.0082 \text{ S}$$

$$B'_L = \frac{1}{\omega L} = 0.0098 \text{ S}$$

得等效并联电路的参数

$$R' = \frac{1}{G'} = \frac{1}{0.0082} = 122\Omega$$

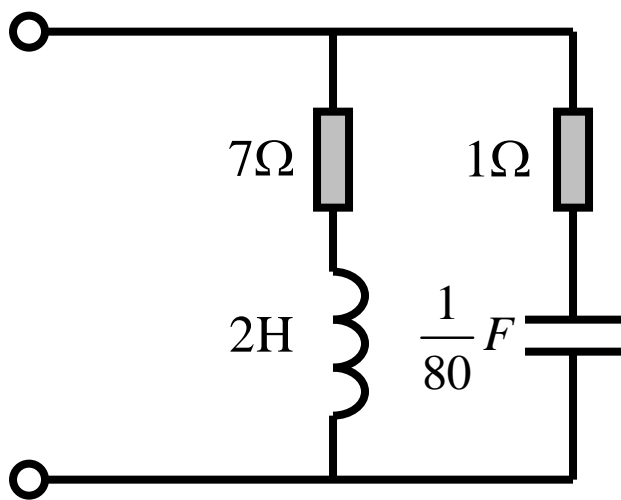
$$L' = \frac{1}{\omega B'_L} = \frac{1}{10^6 \times 0.0098} = 0.102 \text{ mH}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

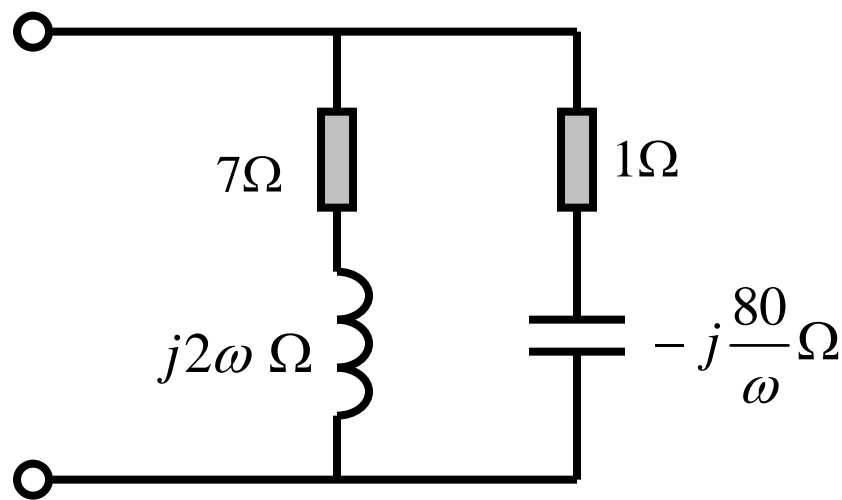
注意以上式(6.3-17)、(6.3-18)中的 \mathbf{R} 、 \mathbf{G} 、 \mathbf{X} 、 \mathbf{B} 等均为 ω 的函数，只有在某一指定频率下才能确定 \mathbf{R} 、 \mathbf{G} 的数值及其正、负号。因此，一般不存在一个适用于所有频率的具体等效电路，只能在某一频率下得到一个仅适用于该频率的、由电阻元件及动态元件组成的两元件等效电路。而且，这一等效电路只能用来计算在该频率下的正弦稳态响应，不能据以列写微分方程来求解原电路的完全响应。

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.3-3 图6.3-7为一二端网络及相量模型。求① $\omega = 4\text{rad/s}$ 时的等效电路；② $\omega = 10\text{rad/s}$ 时的等效电路。



(a)



(b)

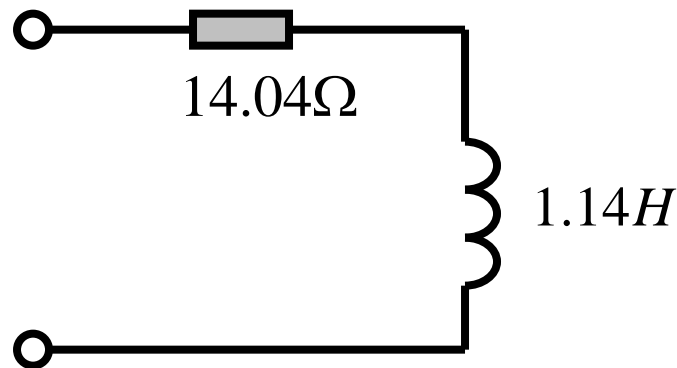
图 6.3-7 例 6.3-3 用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解：①当 $\omega = 4\text{rad/s}$ 时，

$$\begin{aligned} Z(j4) &= \frac{(7 + j8)(1 - j20)}{7 + j8 + 1 - j20} = \frac{(167 - j132)(8 + j12)}{(8 - j12)(8 + j12)} \\ &= \frac{2920 + j948}{66 + 144} = 14.04 + j4.56 \Omega \end{aligned}$$

所谓等效电路一般均系指最简单的等效电路。由求得的阻抗可知，**等效电路应包含两个串联的元件：****其一**为电阻，其值为 **14.04Ω** ；另一为电感，其值为 **$4.56/4=1.14\text{H}$** 。等效电路为



第六章 正弦电路的稳态分析

另一等效电路系由两个并联元件组成。在已求得一端口网络阻抗的情况下，可利用(6.3-18)式求得这一等效电路。其中一个元件的电导为

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{14.04}{14.04^2 + 4.56^2} = \frac{14.04}{217.9} S$$

如愿用电阻 R' 来表示这一元件，则

$$R' = \frac{1}{G} = \frac{217.9}{14.04} = 15.52 \Omega$$

另一元件导纳为

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{4.56}{217.9} S$$

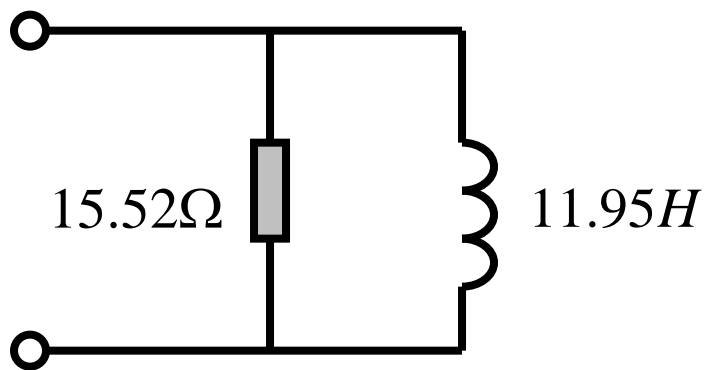
$B < 0$ ，电纳为电感性。如愿用电抗 X' 来表示，则

$$X' = -\frac{1}{B} = \frac{217.9}{4.56} = 47.79 \Omega$$

第六章 正弦电路的稳态分析

$X' > 0$ ，电抗为电感性、等效电路中的另一并联元件为电感，电感值为 $L = X' / \omega = 47.79 / 4 = 11.95\text{H}$ 。

等效电路如图，

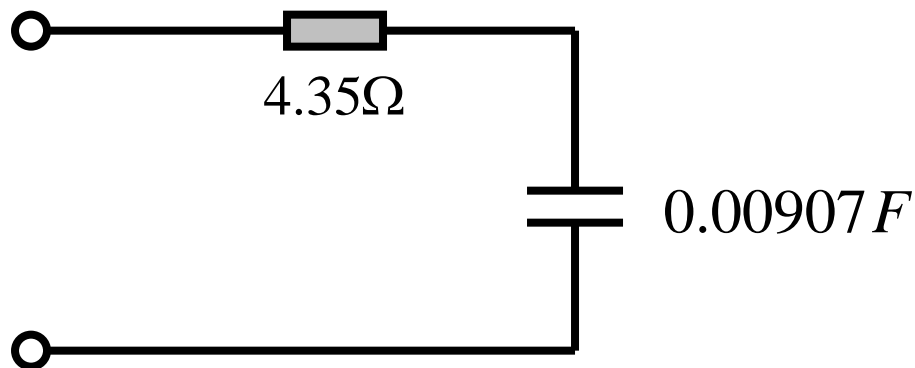


第六章 正弦电路的稳态分析

②当 $\omega = 10\text{rad/s}$ 时,

$$\begin{aligned} Z(j10) &= \frac{(7 + j20)(1 - j8)}{7 + j20 + 1 - j8} = \frac{(167 - j36)(8 - j12)}{(8 + j12)(8 - j12)} \\ &= \frac{904 - j2292}{64 + 144} = 4.35 - j11.02 \, \Omega \end{aligned}$$

在这一频率时，电抗分量为负值，说明等效电路的两串联元件是电阻与电容。电阻为 $4.35 \, \Omega$ ，电容为 $1/11.02 = 0.00907\text{F}$,



第六章 正弦电路的稳态分析

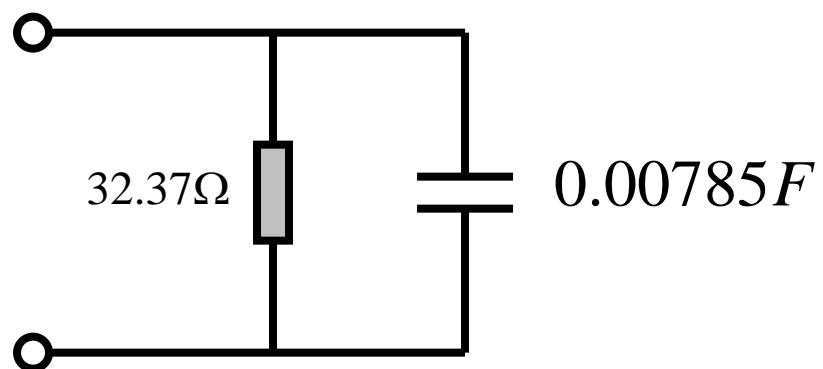
另一等效电路系由两个元件并联组成。本例直接引用 $Y=1/Z$ 来求解，

$$\begin{aligned} Y(j10) &= \frac{1}{Z(j10)} = \frac{1}{4.35 - j11.02} = \frac{4.35 + j11.02}{4.35^2 + 11.02^2} \\ &= \frac{4.35 + j11.02}{140.36} = \frac{4.35}{140.36} + j \frac{11.02}{140.36} = G + jB \end{aligned}$$

由此可知：其中一个元件的电导为 $4.35/140.36\text{S}$ ，或电阻为 $140.36/4.35=32.37\ \Omega$ ；另一元件的电纳为 $11.02/140.36\text{S}$ ，电纳为正，表明这元件是电容。在相量模型这一元件也可用电抗表示，则电抗应为 $-140.36/11.02=-12.74\ \Omega$ 。电容可算得为 $C=1/(12.74 \times 10)=1/127.4=0.00785\text{F}$ 。

第六章 正弦电路的稳态分析

等效电路如下图所示，



三、无源一端口电路的性质（阻抗的性质）

1、一端口网络的端口电压与端口电流的位相关系，有以下三种情况：当端口电压与端口电流为关联参考方向时，

1) 若电压超前电流，则一端口电路的性质与电感类似，称此一端口为**电感性电路**；

2) 若电流超前电压，则一端口电路的性质与电容类似，称此一端口为**电容性电路**；

3) 若电流与电压同位相，则一端口电路的性质与电阻类似，称此一端口为**电阻性电路**。

第六章 正弦电路的稳态分析

2、从阻抗或导纳来判断一端口电路的性质：

由于阻抗和导纳分别为，

$$Z(j\omega) = |Z(j\omega)| \angle \varphi_Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega),$$

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = \operatorname{tg}^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle \varphi_Y(\omega) = G(\omega) + jB(\omega),$$

$$\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = \operatorname{tg}^{-1} \frac{B(\omega)}{G(\omega)}$$

因此可以从阻抗或导纳来判断一端口电路的性质：

1) 从阻抗角判定：

若 $\varphi_Z > 0$ or $\varphi_Y < 0$ 则一端口电路为感性电路；

$\varphi_Z < 0$ or $\varphi_Y > 0$ 则一端口电路为容性电路；

$\varphi_Z = 0$ or $\varphi_Y = 0$ 则一端口电路为电阻性的。

2) 从阻抗的电阻和电抗分量符号判定:

当 $R>0$ 时, 若 $X>0$, 则为电感性; 若 $X<0$, 则为电容性。
当 $R<0$ 时, 相反。

注意 阻抗或导纳与频率有关, 同一电路在不同频率下可能会表现出不同的性质。

*一个一端口, 当端口电压与端口电流为关联参考方向时, 如果电压超前于电流, 称电感性网络, 其端口阻抗称电感性。如果电流超前于电压, 称电容性网络, 其端口阻抗称电容性。

根据阻抗定义, 可以由阻抗角或者阻抗的电阻和电抗分量的符号来判定一段口或阻抗的性质: 阻抗角 >0 为电感性, 阻抗角 <0 , 为电容性, 阻抗角 $=0$, 为电阻性。

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.3-4 分析 R 、 L 、 C 串联电路的性质。

解：根据KVL，

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

由阻抗定义得阻抗为

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

阻抗角为

$$\varphi_Z = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

显然由于阻抗的电抗部分与频率有关，在不同频率下，电路的性质不同。

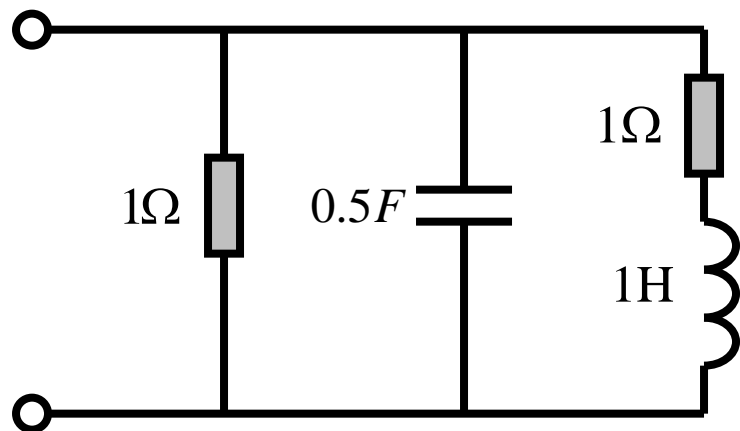
当 $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$ 即 $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 的频率范围，电路呈电感性

当 $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$ 即 $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 的频率范围，电路呈电容性

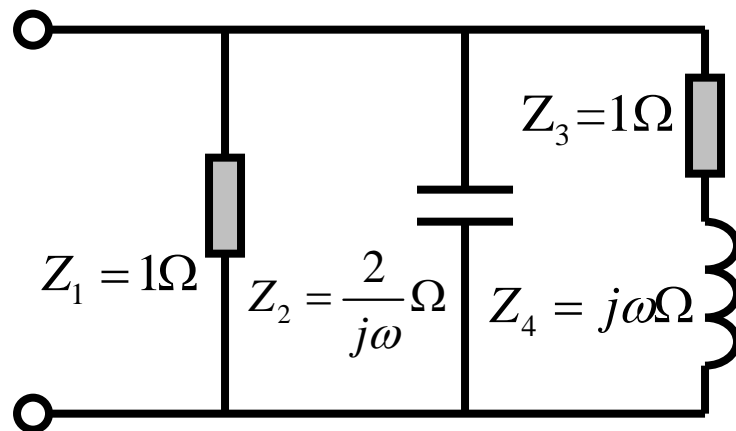
当 $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ 即 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 这一频率，电路呈电阻性

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.3-5 分析图6.3-8(a)所示电路输入阻抗的性质。



(a) 时域模型



(b) 相量模型

图 6.3-8 例 6.3-4 用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解：做原电路的相量模型如图b所示。由元件串、并联关系， 可得

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_4} = 1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{1 + j\omega} \\ &= 1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2} \\ &= \frac{2 + \omega^2}{1 + \omega^2} + j\frac{\omega^3 - \omega}{2(1 + \omega^2)} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{2 + \omega^2}{1 + \omega^2} \\ B(\omega) &= \frac{\omega^3 - \omega}{2(1 + \omega^2)} \end{aligned}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

$Y(j\omega)$ 的倒数即 $Z(j\omega)$ ，但所得表达式比较复杂。实际上，从 $Y(j\omega)$ 的表达式即可分析输入阻抗的性质。其结果为：

对所有 ω ， $G(\omega) > 0$ 。

1)若 $0 < \omega < 1$ ， $B(\omega) < 0$ 则 $-90^\circ < \varphi_Y(\omega) < 0$ 或等效地表示为 $0^\circ < \varphi_Z(\omega) < 90^\circ$ 。在此频率范围内，阻抗为电感性。

2)若 $\omega = 1$ ， $B(\omega) = 0$ ，因而 $\varphi_Y(1) = \varphi_Z(1) = 0$ ，在该频率，阻抗为电阻性。

3)若 $1 < \omega < \infty$ ， $B(\omega) > 0$ ，因而 $0^\circ < \varphi_Y(\omega) < 90^\circ$ 或等效地表示为 $-90^\circ < \varphi_Z(\omega) < 0^\circ$ 。在此频率范围内，阻抗为电容性。

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.3-6 某 RLC 串联电路，其电阻 $R=10\text{k}\Omega$ ，电感 $L=5\text{mH}$ ，电容 $C=0.001\mu\text{F}$ ，正弦电压源的振幅为 10V ， $\omega=10^6\text{rad/s}$ 。求电流和各元件上的电压，并画出相量图。

解 首先计算电路的阻抗。

感抗

$$X_L = \omega L = 10^6 \times 5 \times 10^{-3} = 5\text{k}\Omega$$

容抗

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^6 \times 0.001 \times 10^{-6}} = 1\text{k}\Omega$$

电抗

$$X = X_L - X_C = 4\text{k}\Omega$$

电路的阻抗

$$Z = R + jX = 10 + j4 = 10.77\angle 21.8^\circ \text{k}\Omega$$

由于电抗 $X>0$ ，阻抗角 $\phi_Z=21.8^\circ>0$ ，所以阻抗呈电感性。设电压源相量为

$$\dot{U}_{sm} = 10\angle 0^\circ \text{V}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

电流相量

$$I_m = \frac{U_{sm}}{Z} = \frac{10 \angle 0^\circ}{10.77 \angle 21.8^\circ} = 0.929 \angle -21.8^\circ \text{ mA}$$

电阻电压相量

$$U_{Rm} = RI_m = 10 \times 10^3 \times 0.929 \angle -21.8^\circ \times 10^{-3} = 9.29 \angle -21.8^\circ \text{ V}$$

电感电压相量

$$U_{Lm} = jX_L I_m = j5 \times 10^3 \times 0.929 \angle -21.8^\circ \times 10^{-3} = 4.65 \angle 68.2^\circ \text{ V}$$

电容电压相量

$$U_{Cm} = -jX_C I_m = -j1 \times 10^3 \times 0.929 \angle -21.8^\circ \times 10^{-3} = 0.929 \angle -111.8^\circ \text{ V}$$

电流、电压的表示式为

$$i(t) = 0.929 \cos(10^6 t - 21.8^\circ) \text{ mA}$$

$$u_R(t) = 9.29 \cos(10^6 t - 21.8^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 4.65 \cos(10^6 t + 68.2^\circ) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 0.929 \cos(10^6 t - 111.8^\circ) \text{ V}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

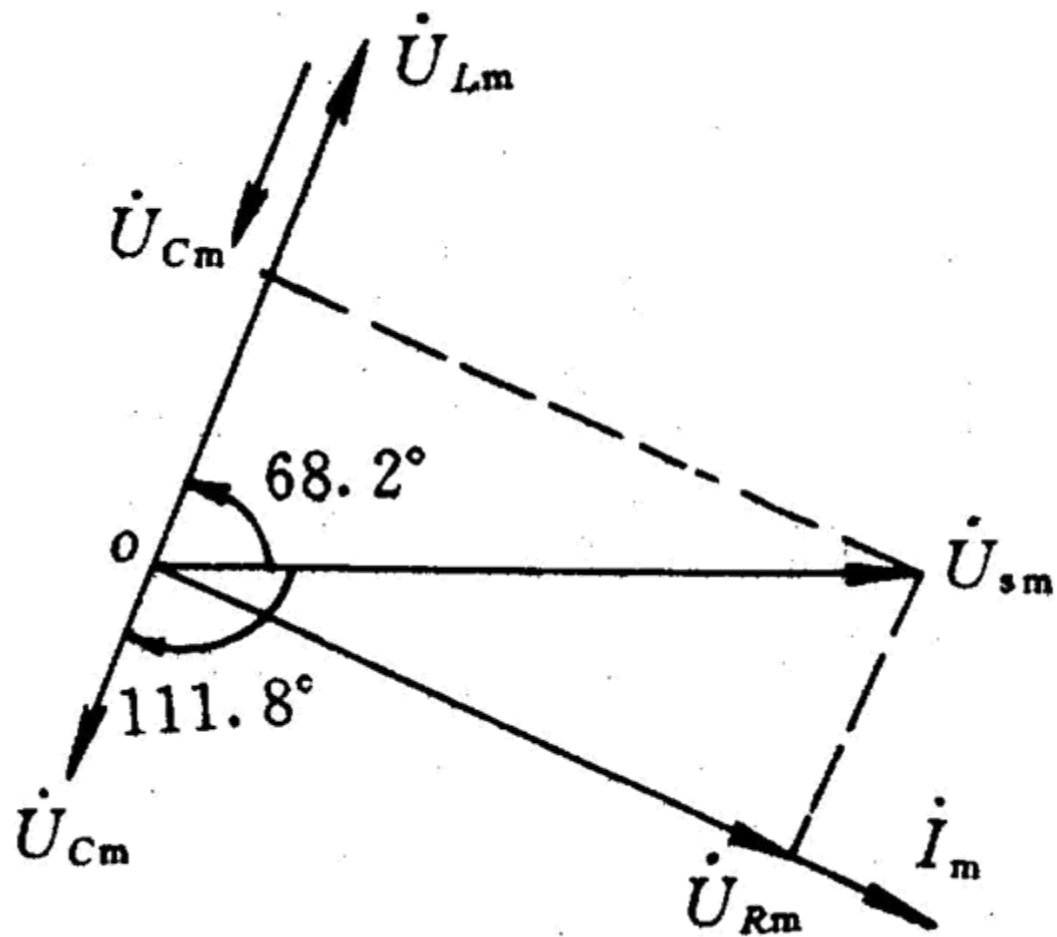


图6.3-8 电路的相量图

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.3-7 有一个 RCL 并联电路，已知 $R=10\ \Omega$ ， $C=0.5\ \mu\text{F}$ ， $L=5\ \mu\text{H}$ ，正弦电压源的电压有效值 $U=2\text{V}$ ， $\omega=10^6\text{rad/s}$ 。求总电流并说明电路的性质。

解 电路的导纳为 $Y = G + j(B_C - B_L)$

$$\text{其中 } G = \frac{1}{R} = 0.1\text{S}$$

$$B_C = \omega C = 10^6 \times 0.5 \times 10^{-6} = 0.5\text{S}$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{10^6 \times 5 \times 10^{-6}} = 0.2\text{S}$$

$$\text{故 } Y = 0.1 + j(0.5 - 0.2) = 0.1 + j0.3 = 0.316 \angle 71.56^\circ \text{S}$$

$$\dot{U} = 2 \angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I} = Y\dot{U} = 0.632 \angle 71.56^\circ \text{A}$$

导纳角 $\phi_Y = 71.56^\circ$ ，表示电流 \dot{I} 超前电压 \dot{U} 为 71.56° 。

因此，电路呈电容性。

6.4 正弦稳态电路的相量分析法

一、分析计算的依据——相量形式的两类约束

电阻电路分析：

KCL/KVL/VCR的时域形式

正弦稳态电路分析：

KCL/KVL/VCR的相量形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum i_k = 0 \\ \sum u_k = \sum u_S \\ u_k = Ri_k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum \dot{I}_k = 0 \\ \sum \dot{U}_k = \sum \dot{U}_S \\ \dot{U}_k = Z\dot{I}_k \end{array} \right.$$

电路的**KCL/KVL/元件VCR**的相量形式与电阻电路的响应关系完全相同，因此，分析电阻电路的所有方法都适用于正弦稳态分析。

如前所述，正弦稳态电路采用相量分析法，即电路中的正弦量都以相量表示，根据元件约束和结构约束的相量形式，直接引用电阻电路介绍的定理、定律及分析方法分析。有些情况下也可利用有效值关系、相位关系求解。此外，相量图也是确定正弦量之间关系的有力工具。

二、等效法

常见的电路等效分为两类：

1、**无源一端口的等效**：如果不含受控源，常用阻抗的串、并联等效和端口阻抗定义等效；如果含受控源，用端口阻抗定义求。

2、**有源一端口的等效**：常用电源互换等效、戴维宁/诺顿定理等效。

下面说明这些方法在正弦稳态分析中的应用。
注意电路理论中的“无源”或“有源”常指独立源。

第六章 正弦电路的稳态分析

1. 阻抗和导纳的串、并联等效和Y- Δ 等效

1) 串联等效：若有 n 个阻抗相串联，它的等效阻抗为

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n (R_k + jX_k)$$

分压公式为

$$\dot{U}_i = \frac{Z_i}{\sum_{k=1}^n Z_k} \dot{U}$$

\dot{U} 为 n 个串联阻抗的总电压相量； \dot{U}_i 为第 i 个阻抗上的电压相量。

若两个阻抗 Z_1 和 Z_2 相串联，则等效阻抗为

$$Z = Z_1 + Z_2$$

分压公式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \\ \dot{U}_2 &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \end{aligned} \right\}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

2) 并联等效： 若有 n 个导纳相并联，它的等效导纳为

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k = \sum_{k=1}^n (G_k + jB_k)$$

分流公式为

$$\dot{I}_i = \frac{Y_i}{\sum_{k=1}^n Y_k} \dot{I}$$

\dot{I}_i 为通过任一导纳 Y_i 的电流相量； \dot{I} 为总电流相量。

若两个阻抗 Z_1 和 Z_2 相并联，则等效阻抗为

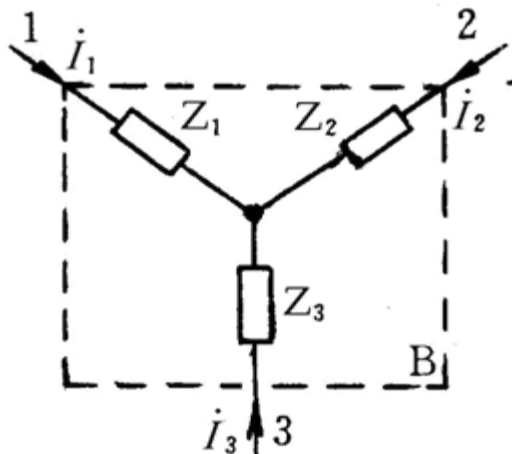
$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

分流公式为

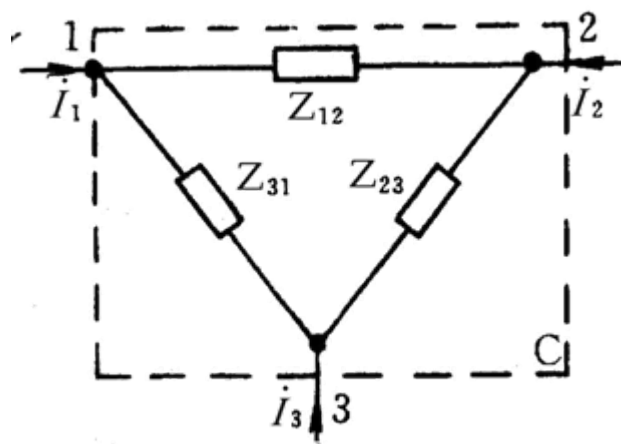
$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \\ \dot{I}_2 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \end{aligned} \right\}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

3) Y- Δ 等效(Tee-Pi or Wye-Delta Transformations):



(a) Y形网络



(b) Δ 形网络

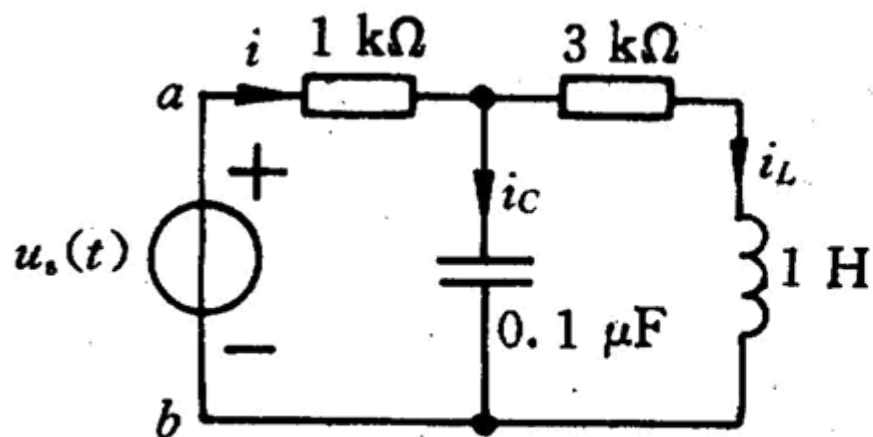
$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \\ Z_2 &= \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \\ Z_3 &= \frac{Z_{31}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \end{aligned} \right\}$$

Y \longleftrightarrow **Δ**

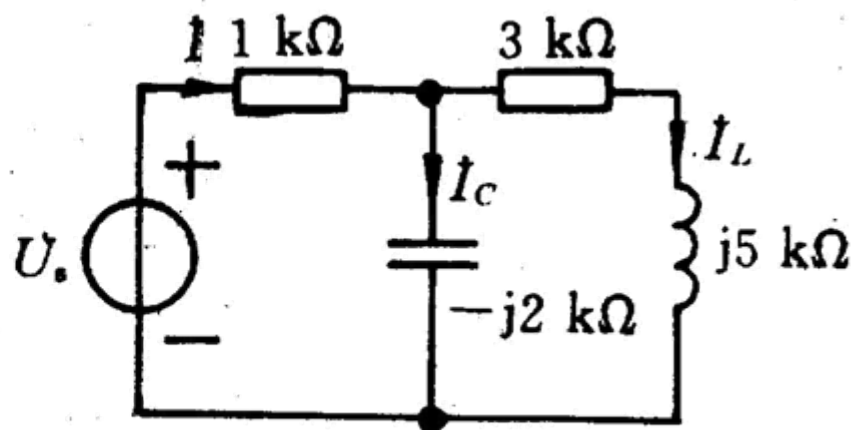
$$\left. \begin{aligned} Z_{12} &= \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_3} \\ Z_{23} &= \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1} \\ Z_{31} &= \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2} \end{aligned} \right\}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

例 6.4-2 电路如图6.4-1(a)所示。其中 $u_s(t) = \sqrt{2}10\cos 5\,000t\text{V}$
求电流 $i(t)$, $i_L(t)$ 和 $i_C(t)$ 。



(a) 时域模型



(b) 相量模型
(频域模型)

图6.4-1 例6.4-2用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解

$$\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{V}$$

$$X_L = \omega L = 5\,000 \times 1 = 5\text{k}\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5\,000 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 2\text{k}\Omega$$

设 RL 串联支路的阻抗为 Z_1 , 电容支路的阻抗为 Z_2 , 即

$$Z_1 = 3 + \text{j}5 = 5.83\angle 59^\circ \text{k}\Omega$$

$$Z_2 = -\text{j}2 \text{k}\Omega$$

Z_1 和 Z_2 并联的等效阻抗 Z_{12} 为

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5.83\angle 59^\circ \times (-\text{j}2)}{3 + \text{j}5 - \text{j}2} = \frac{11.66\angle -31^\circ}{4.24\angle 45^\circ} \\ &= 2.74\angle -76^\circ = 0.663 - \text{j}2.66 \text{k}\Omega \end{aligned}$$

在 ab 两端的等效阻抗(常称为输入阻抗)为

$$Z = 1 + Z_{12} = 1 + 0.663 - \text{j}2.66 = 3.14\angle -58^\circ \text{k}\Omega$$

总电流相量

$$I = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{3.14\angle -58^\circ} = 3.18\angle 58^\circ \text{mA}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

利用分流计算电流相量 I_L 和 I_C , 即

$$I_L = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I = \frac{-j2}{3 + j5 - j2} \times 3.18 \angle 58^\circ = 1.5 \angle -77^\circ \text{ mA}$$

$$I_C = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I = \frac{5.83 \angle 59^\circ}{3 + j5 - j2} \times 3.18 \angle 58^\circ = 4.37 \angle 72^\circ \text{ mA}$$

各电流的表示式为

$$i(t) = \sqrt{2} 3.18 \cos(5\,000t + 58^\circ) \text{ mA}$$

$$i_L(t) = \sqrt{2} 1.5 \cos(5\,000t - 77^\circ) \text{ mA}$$

$$i_C(t) = \sqrt{2} 4.37 \cos(5\,000t + 72^\circ) \text{ mA}$$

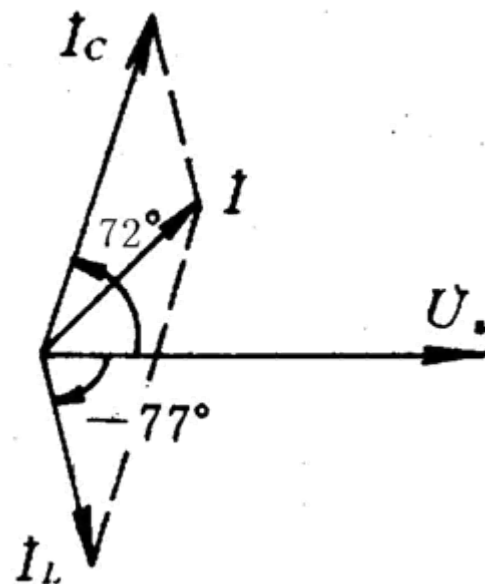
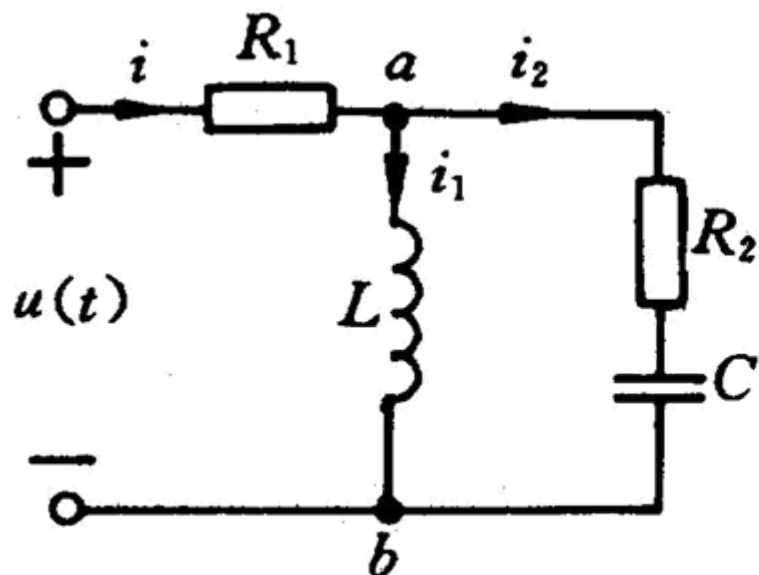


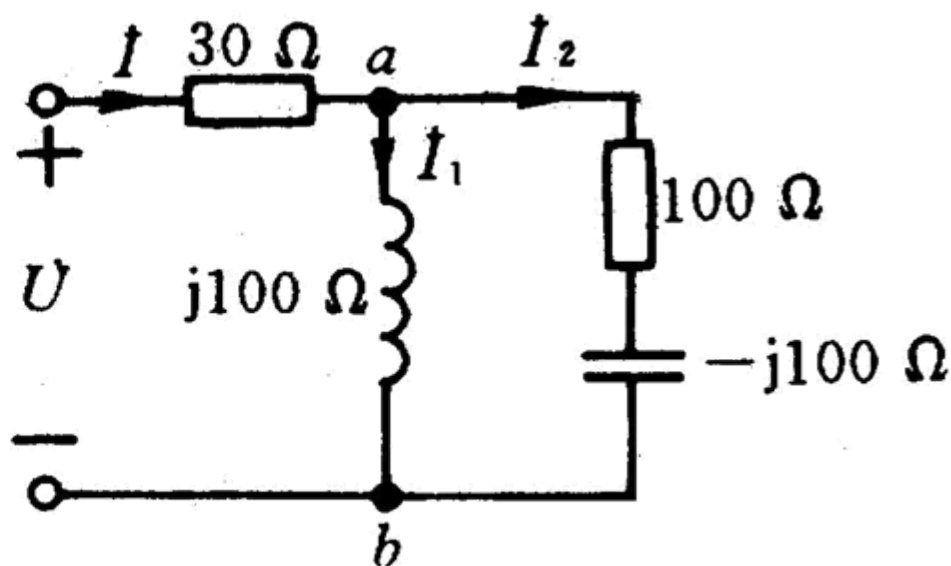
图6.4-5(c) 例6.4-4解题图

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.4-3 电路如图 6.4-2(a)所示。已知 $R_1=30\ \Omega$, $R_2=100\ \Omega$, $C=0.1\ \mu\text{F}$, $L=1\text{mH}$, $i_2(t)=\sqrt{2}0.2\cos(10^5t+60^\circ)\text{A}$ 。求电压 $u(t)$ 和ab两端的等效阻抗 Z_{ab} 。



(a) 时域模型



(b) 相量模型

图6.4-2 例6.4-3用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解

$$X_L = \omega L = 10^5 \times 1 \times 10^{-3} = 100 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^5 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 100 \Omega$$

设 L 支路的阻抗为 Z_1 , $R_2 C$ 串联支路的阻抗为 Z_2 , 即

$$Z_1 = jX_L = j100 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 - jX_C = 100 - j100 = 141 \angle -45^\circ \Omega$$

电流 i_2 的相量为

$$I_2 = 0.2 \angle 60^\circ \text{ A}$$

ab 两端的电压相量 \dot{U}_{ab} 为

$$\dot{U}_{ab} = Z_2 \dot{I}_2 = 141 e^{-j45^\circ} \times 0.2 e^{j60^\circ} = 28.2 \angle 15^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{ab}}{jX_L} = \frac{28.2 \angle 15^\circ}{j100} = 0.282 \angle -75^\circ \text{ A}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

由 KCL, 得

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = 0.282 \angle -75^\circ + 0.2 \angle 60^\circ \\ &= (0.073 - j0.273) + (0.1 + j0.173) \\ &= 0.173 - j0.1 = 0.2 \angle -30^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

电阻 R 上的电压相量为

$$U_R = RI = 30 \times 0.2 \angle -30^\circ = 6 \angle -30^\circ \text{ V}$$

由 KVL, 得

$$\begin{aligned} U &= U_R + U_{ab} = 6 \angle -30^\circ + 28.2 \angle 15^\circ \\ &= (5.2 - j3) + (27.2 + j7.3) \\ &= 32.4 + j4.3 = 32.8 \angle 7.6^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

ab 两端的等效阻抗为

$$Z_{ab} = \frac{U_{ab}}{I} = \frac{28.2 \angle 15^\circ}{0.2 \angle -30^\circ} = 141 \angle 45^\circ = 100 + j100 \Omega$$

Z_{ab} 呈电感性。 $u(t)$ 的表达式为

$$u(t) = \sqrt{2} 32.8 \cos(10^5 t + 7.5^\circ) \text{ V}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.4-4 电路的相量模型如图6.4-3所示。已知 $R=3\ \Omega$ ， $X_C=4\ \Omega$ ， $X_L=4\ \Omega$ ，电容电压的有效值 $U_C=20\text{V}$ ，求电流有效值 I 。

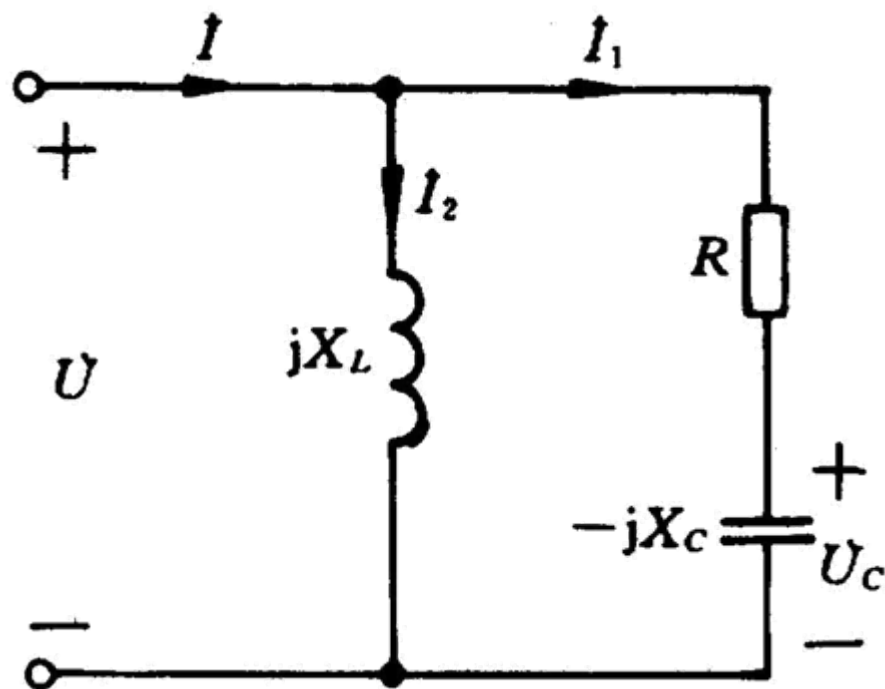


图6.4-3 例6.4-4用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解 设电容电压 \dot{U}_C 为参考相量，即

$$\dot{U}_C = 20\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_C}{-jX_C} = \frac{20\angle 0^\circ}{-j4} = j5 \text{A}$$

$$Z_1 = R - jX_C = 3 - j4 = 5\angle -53.1^\circ \Omega$$

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I}_1 = 25\angle 36.9^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{25\angle 36.9^\circ}{j4}$$

$$= 6.25\angle -53.1^\circ = 3.75 - j5 \text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = j5 + 3.75 - j5 = 3.75\angle 0^\circ \text{A}$$

2. 电源的等效:

1) 同频电压源的串联等效

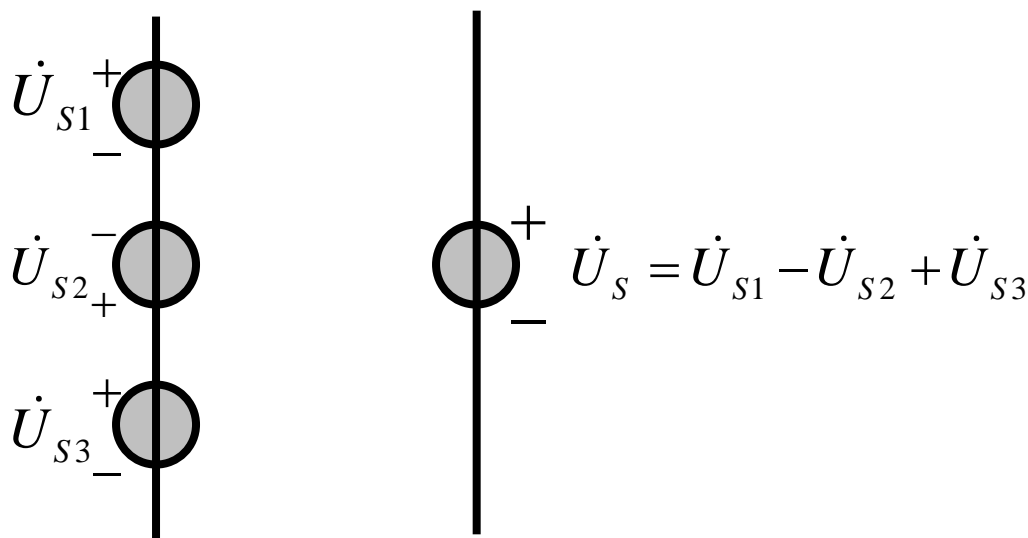


图6.4-4

2) 同频电流源的并联等效

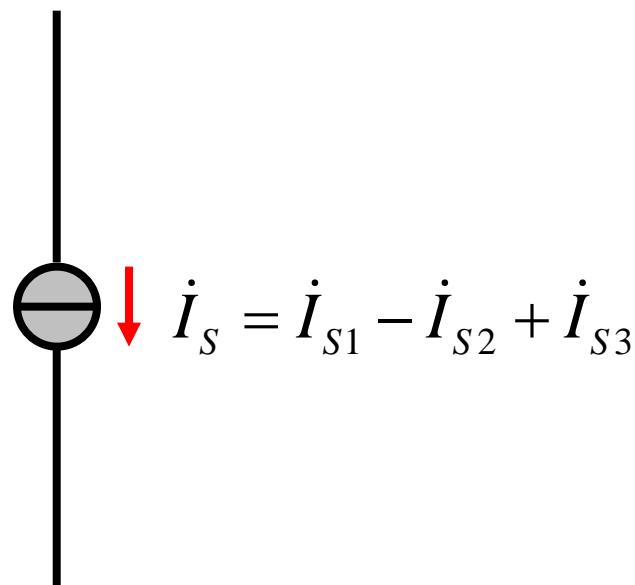
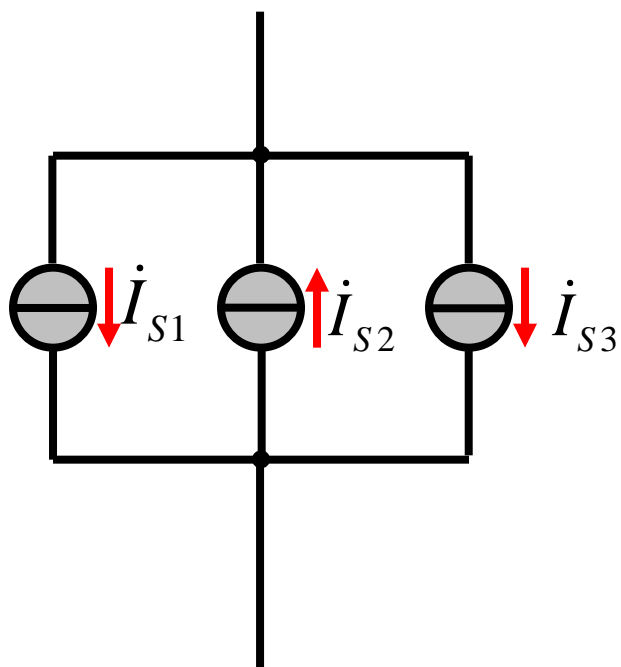


图6.4-5

3) 电源变换原理

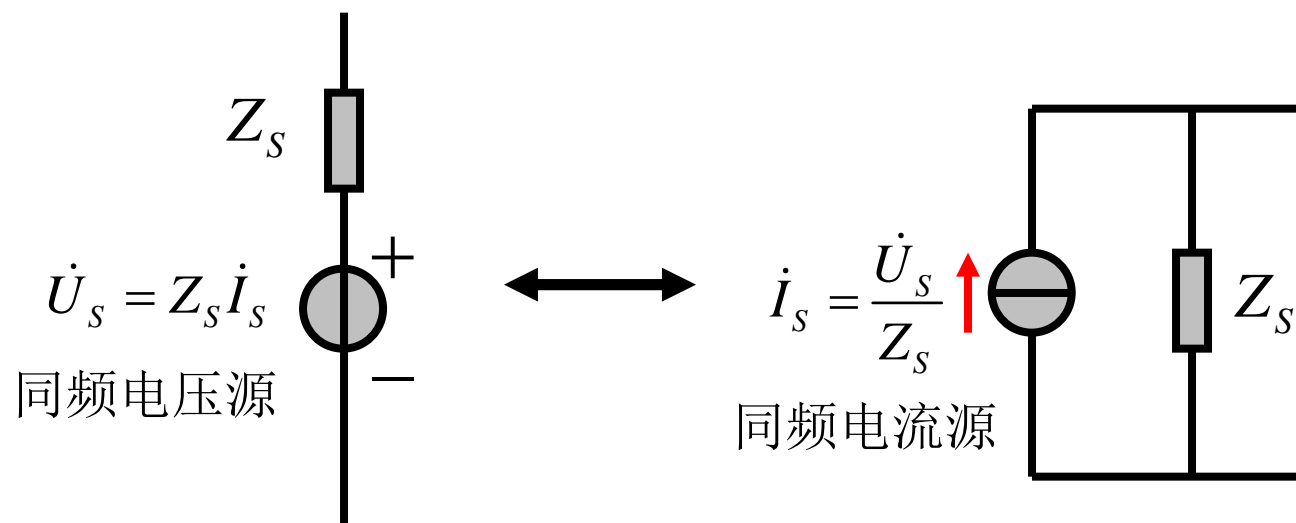


图6.4-6

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.4-5 如图6.4-7(a)正弦稳态电路，试求电流 I 。

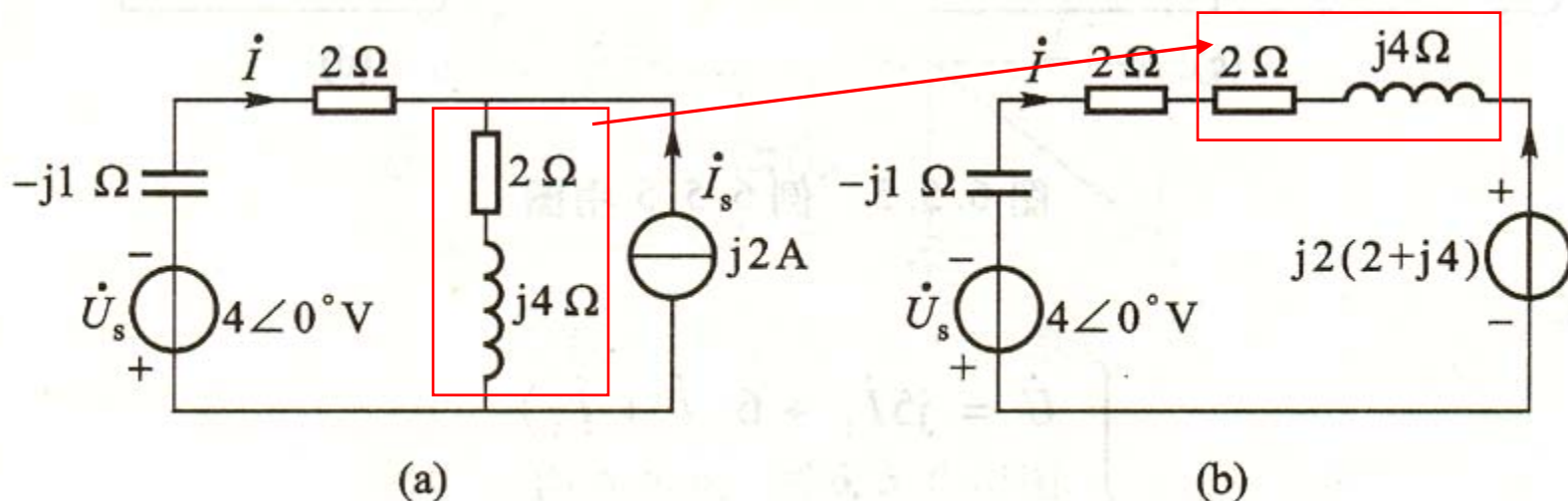


图6.4-7 例6.4-5用图

解：利用**电源互换原理**将图6.4-7(a)等效为图6.4-7(b)。

列KVL方程，解得

$$\dot{I} = \frac{-4 - j2(2 + j4)}{4 + j3} = \frac{4 - j4}{4 + j3} = 0.8\sqrt{2}\angle -81.9^\circ \text{ A}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

3. 戴维宁/诺顿等效(Thévenin and Norton Equivalents)

例6.4-6 如图6.4-8所示电路，试求(1)当阻抗 $Z=3\ \Omega$ 时电压 \dot{U}_2 ；
(2)若要使 $\dot{U}_2 = 1.2 + j8\ \text{V}$ ，求阻抗 Z 。

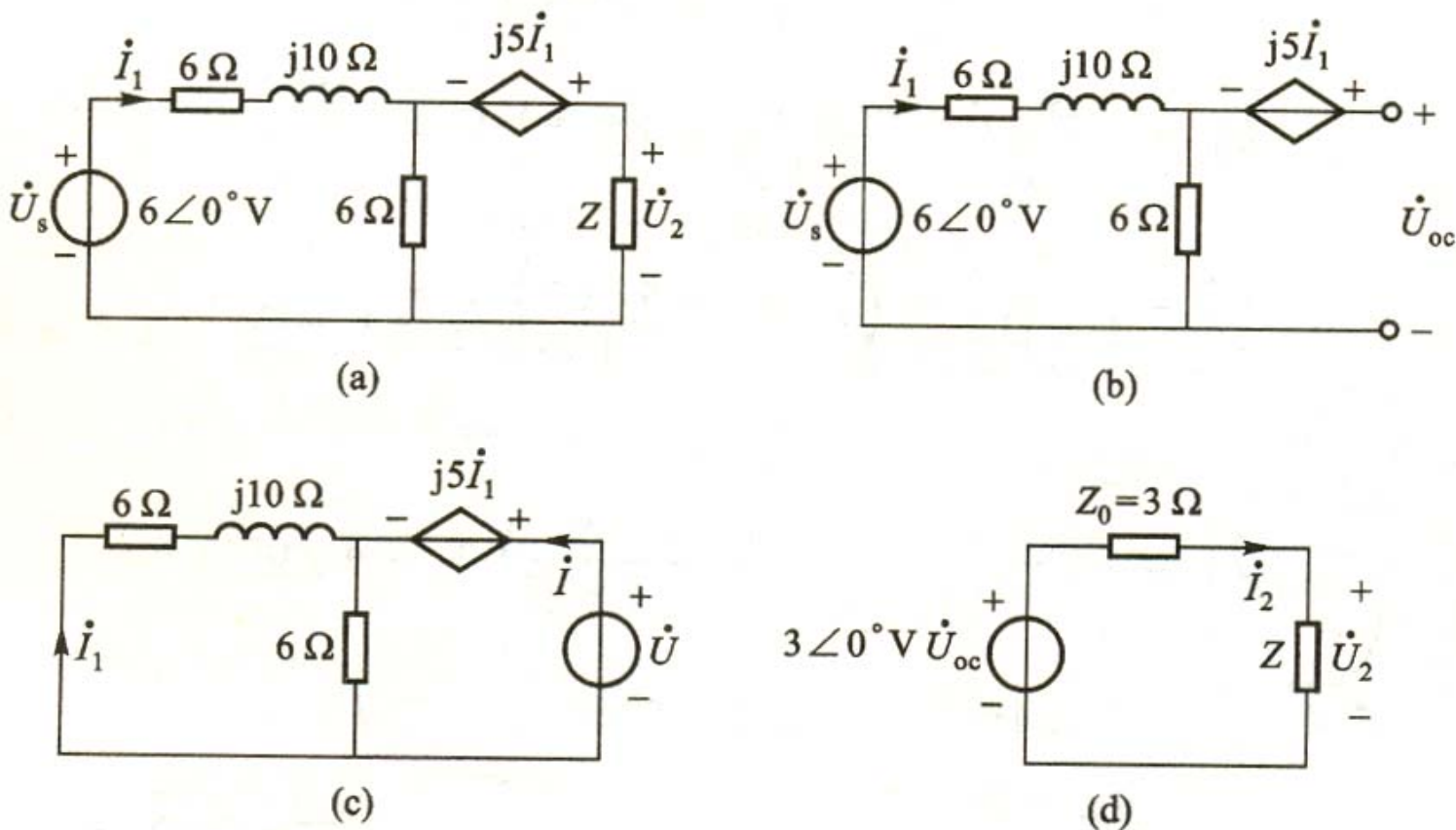


图6.4-8 例6.4-6用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解： 因为负载阻抗为变化的值，又求的是负载端电压，故用戴维宁等效定理最为方便。

首先求 Z 断开时的开路电压，如图6.4-8(b)所示，

$$\dot{I}_1 = \frac{6}{12 + j10} A$$

$$\dot{U}_{oc} = j5\dot{I}_1 + 6\dot{I}_1 = (6 + j5)\frac{6}{12 + j10} = 3V$$

其次，求等效阻抗 Z_0 。将电压源短路，用外接电源法，如图6.4-8(c)所示。

列出方程

$$\begin{cases} \dot{U} = j5\dot{I}_1 + 6(\dot{I} + \dot{I}_1) \\ \dot{I}_1 = \frac{j5\dot{I}_1 - \dot{U}}{6 + j10} \end{cases}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

联立求解，得 $\dot{U} = 3\dot{I}$

等效阻抗 $Z_0 = 3\Omega$

画戴维宁等效电源，在接上负载 Z ，如图6.4-8(d)所示。

(1)当 $Z=3\Omega$ 时，

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{2}\dot{U}_{oc} = 1.5\angle 0^\circ \text{V}$$

(2)欲要使 $\dot{U}_2 = 1.2 + j1.8 \text{ V}$ ，则

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{oc} - \dot{U}_2}{Z_0} = \frac{3 - 1.2 - j1.8}{3} \text{ A} = 0.6 - j0.6 \text{ A}$$

$$Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{1.2 + j1.8}{0.6 - j0.6} \Omega = -0.5 + j2.5 \Omega$$

因为 Z 的电阻部分是负的，所以这时的阻抗应为含有受控源的二端网络的等效阻抗。

三、方程法

1. 回路/网孔分析(loop/mesh analysis)

例6.4-7 电路的相量模型如图6.4-9所示，求电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2

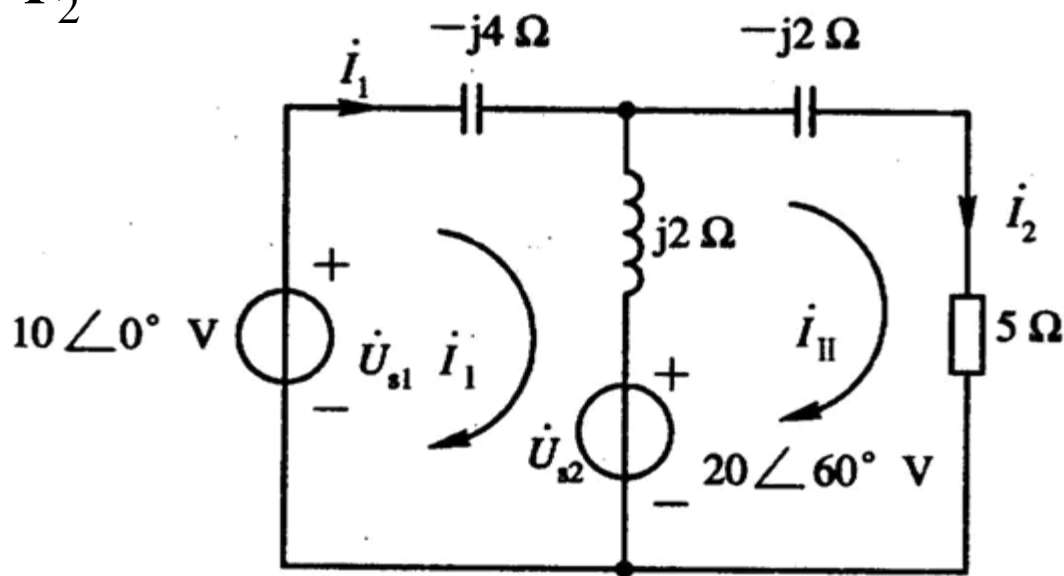


图 6.4-9 例6.4-7 用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解 设网孔电流 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 如图中所示。

$$\text{网孔 1} \quad (-j4 + j2)\dot{I}_{l1} - j2\dot{I}_{l2} = 10 - 20\angle 60^\circ$$

$$\text{网孔 2} \quad -j2\dot{I}_{l1} + (5 + j2 - j2)\dot{I}_{l2} = 20\angle 60^\circ$$

$$\text{整理得} \quad \begin{cases} -j2\dot{I}_{l1} - j2\dot{I}_{l2} = 10 - 20\angle 60^\circ & (6.4-20) \\ -j2\dot{I}_{l1} + 5\dot{I}_{l2} = 20\angle 60^\circ & (6.4-21) \end{cases}$$

由(6.4-20)式减去(6.4-21)式, 得

$$(-5 - j2)\dot{I}_{l2} = 10 - 40\angle 60^\circ$$

$$\text{解得} \quad \dot{I}_{l2} = \frac{10 - 40\angle 60^\circ}{-5 - j2} = 6.69\angle 52.1^\circ \text{ A}$$

将 \dot{I}_2 代入(6.4-21)式, 得

$$\dot{I}_{l1} = \frac{20\angle 60^\circ - 5 \times 6.69\angle 52.1^\circ}{-j2} = 6.95\angle -49.28^\circ \text{ A}$$

故

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{l1} = 6.95\angle -49.28^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{l2} = 6.69\angle 52.1^\circ \text{ A}$$

2. 节点法(node analysis)

例6.4-8 电路的相量模型如图6.4-10所示。求各节点的电压相量。

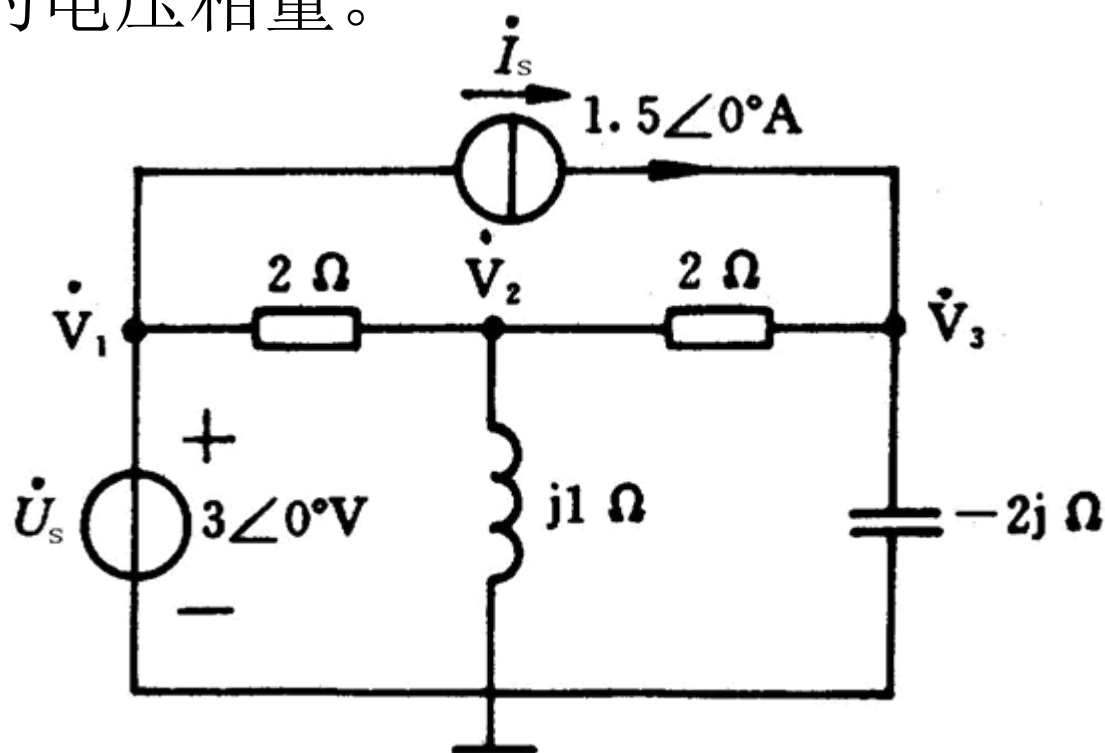


图 6.4-10 例 6.4-8 用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解

$$\dot{V}_1 = 3\angle 0^\circ \quad (6.4-22)$$

$$-\frac{1}{2}\dot{V}_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j1} + \frac{1}{2}\right)\dot{V}_2 - \frac{1}{2}\dot{V}_3 = 0 \quad (6.4-23)$$

$$-\frac{1}{2}\dot{V}_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-j2}\right)\dot{V}_3 = 1.5\angle 0^\circ \quad (6.4-24)$$

将(6.4-22)代入(6.4-23)、(6.4-24)，并稍加整理得

$$2(1 - j1)\dot{V}_2 - \dot{V}_3 = 3$$

$$-\dot{V}_2 + (1 + j1)\dot{V}_3 = 3$$

上式的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(1 - j1) & -1 \\ -1 & (1 + j1) \end{vmatrix} = 3$$

故得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 + j1 \end{vmatrix} \\ &= 2 + j1 = 2.24\angle 26.6^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2(1 - j1) & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 - j2 = 3.6\angle -33.7^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

四、电路定理

以下说明叠加原理在正弦稳态分析中的应用。

1) 用叠加原理计算同频正弦激励下电路的稳态响应:

例6.4-9 用叠加原理求图a电路中的电流 \dot{I}_R 、 \dot{I}_C 。已知

$$R = X_C = 1\Omega, \quad \dot{I}_S = 10\angle 0^\circ \text{A}, \quad \dot{U}_S = 10\angle 90^\circ \text{V},$$

\dot{I}_S 与 \dot{U}_S 频率相同。

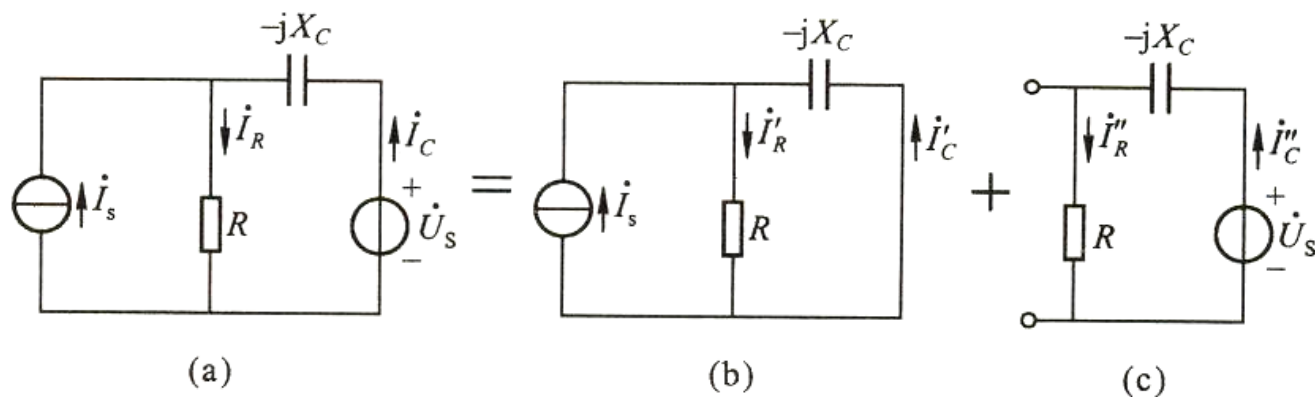
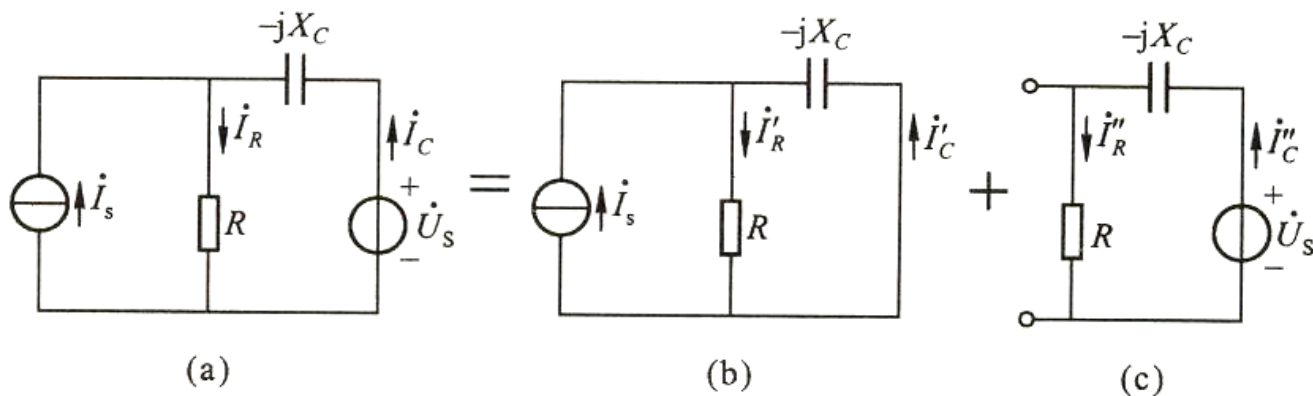


图6.4-11

第六章 正弦电路的稳态分析



解： 1) 电流源单独作用时电路如图(b)所示

$$\dot{I}'_R = \frac{-jX_C}{R - jX_C} \dot{I}_S = \frac{-j10}{1 - j} \text{ A}$$

$$\dot{I}'_C = \frac{R}{R - jX_C} \dot{I}_S \quad \text{or} \quad \dot{I}'_C = \dot{I}'_R - \dot{I}_S = \frac{-j10}{1 - j} - 10 = \frac{-10}{1 - j} \text{ A}$$

2) 电压源单独作用时电路如图(c)所示

$$\dot{I}''_R = \dot{I}''_C = \frac{\dot{U}_S}{R - jX_C} = \frac{j10}{1 - j} \text{ A}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

3)根据叠加原理

$$\dot{I}_R = \dot{I}'_R + \dot{I}''_R = \frac{-j10}{1-j} + \frac{j10}{1-j} = 0A$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}'_C + \dot{I}''_C = \frac{-10}{1-j} + \frac{j10}{1-j} = -10 = 10\angle 180^\circ A$$

4)总瞬时值为

$$i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 180^\circ) = -10\sqrt{2} \sin \omega t A$$

2) 用叠加原理计算不同频率正弦激励下电路的稳态响应:

讨论多个不同频率的正弦激励下电路稳态响应的计算问题。可以运用叠加原理来解决这一问题。为此, 首先应先分别算得各正弦波单独作用下得正弦稳态响应, 它们的代数和就是所求的稳态响应。由于不同频率的正弦波之和不是正弦波, 这一稳态响应不是正弦波, 因而不能称为正弦稳态响应。

在计算正弦波单独作用下的正弦稳态响应时, 可以利用相量法。但应注意, 由于动态元件的阻抗或导纳是频率的函数, 因而, **对应各个不同频率的正弦波, 应使用不同的相量模型来进行计算。**

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.4-10 电路如图6.4-12(a)所示。

$$u_s(t) = 15 + \sqrt{2} \cdot 10 \cos \omega t + \sqrt{2} \cdot 10 \cos 2\omega t \text{ V}$$

式中 $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ 。求 ab 两端的输出电压 $u(t)$ 。

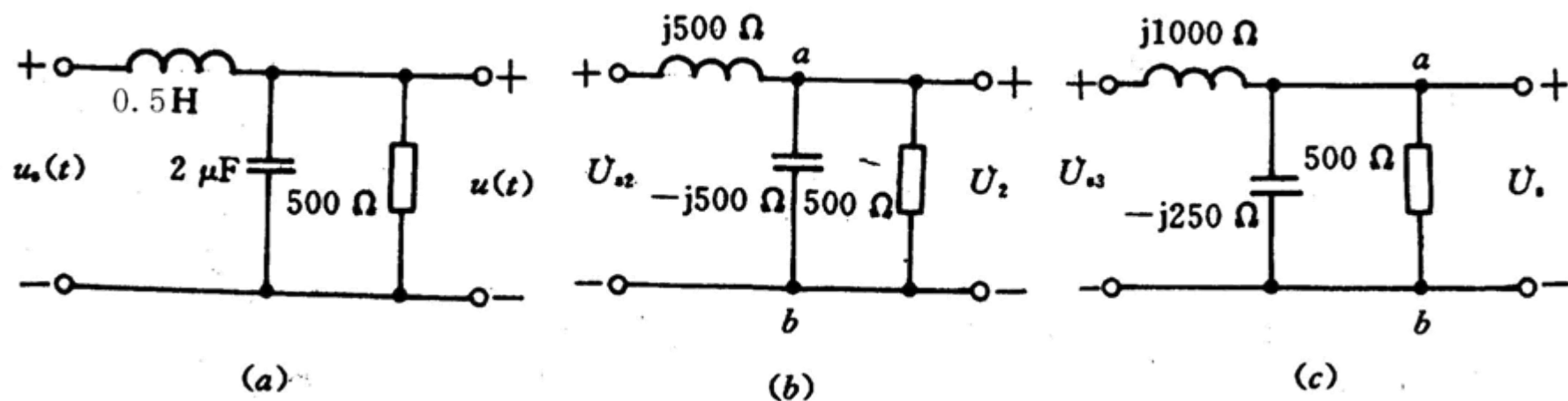


图6.4-12 例6.4-10用图

第六章 正弦电路的稳态分析

解 电源 $u_s(t)$ 可以看作是 3 个电源叠加而成的, 即

$$u_s(t) = u_{s1} + u_{s2} + u_{s3}$$

$$u_{s1} = 15V$$

$$u_{s2} = \sqrt{2} \cdot 10 \cos \omega t V$$

$$u_{s3} = \sqrt{2} \cdot 10 \cos 2\omega t V$$

(1) u_{s1} 作用于电路。

$$u_1(t) = u_{s1} = 15V$$

第六章 正弦电路的稳态分析

(2) u_{s2} 作用于电路。电路的相量模型如图(b)所示, 图中

$$X_L = \omega L = 10^3 \times 0.5 = 500 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \times 2 \times 10^{-6}} = 500 \, \Omega$$

ab 两端的等效阻抗为

$$Z_{ab} = \frac{500 \times (-j500)}{500 - j500} = 250 - j250 \, \Omega$$

$$\dot{U}_{s2} = 10 \angle 0^\circ \, \text{V}$$

故

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{Z_{ab}}{jX_L + Z_{ab}} \dot{U}_{s2} = \frac{250 - j250}{250 + j250} \times 10 \angle 0^\circ \\ &= 10 \angle -90^\circ \, \text{V} \end{aligned}$$

$$u_2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cos(\omega t - 90^\circ) \, \text{V}$$

第六章 正弦电路的稳态分析

(3) u_{s3} 作用于电路。 $X_L = 2\omega L = 1\,000\,\Omega$

$$X_C = \frac{1}{2\omega C} = 250\,\Omega$$

ab 两端的等效阻抗为

$$Z_{ab} = \frac{500 \times (-j250)}{500 - j250} = 100 - j200\,\Omega$$

$$\dot{U}_{s3} = 10\angle 0^\circ\text{ V}$$

此时输出电压相量为

$$\begin{aligned}\dot{U}_3 &= \frac{Z_{ab}}{jX_L + Z_{ab}} \dot{U}_{s3} = \frac{100 - j200}{100 + j800} \times 10\angle 0^\circ \\ &= 2.77\angle -146.3^\circ\text{ V}\end{aligned}$$

故

$$u_3(t) = \sqrt{2} \cdot 2.77 \cos(2\omega t - 146.3^\circ)\text{ V}$$

根据叠加原理, 输出电压为

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$= 15 + \sqrt{2} \cdot 10 \cos(\omega t - 90^\circ) + \sqrt{2} \cdot 2.77 \cos(2\omega t - 146.3^\circ)\text{ V}$$

必须指出

$$U \neq U_1 + U_2 + U_3$$

五、相量图辅助解法

在正弦稳态分析时，有时借助相量图，可以使解题过程简单明了。

例6.4-11 图6.4-13(a)所示正弦稳态电路中， A_1 、 A_2 电流表指示值均为有效值。求电流表A的读数。

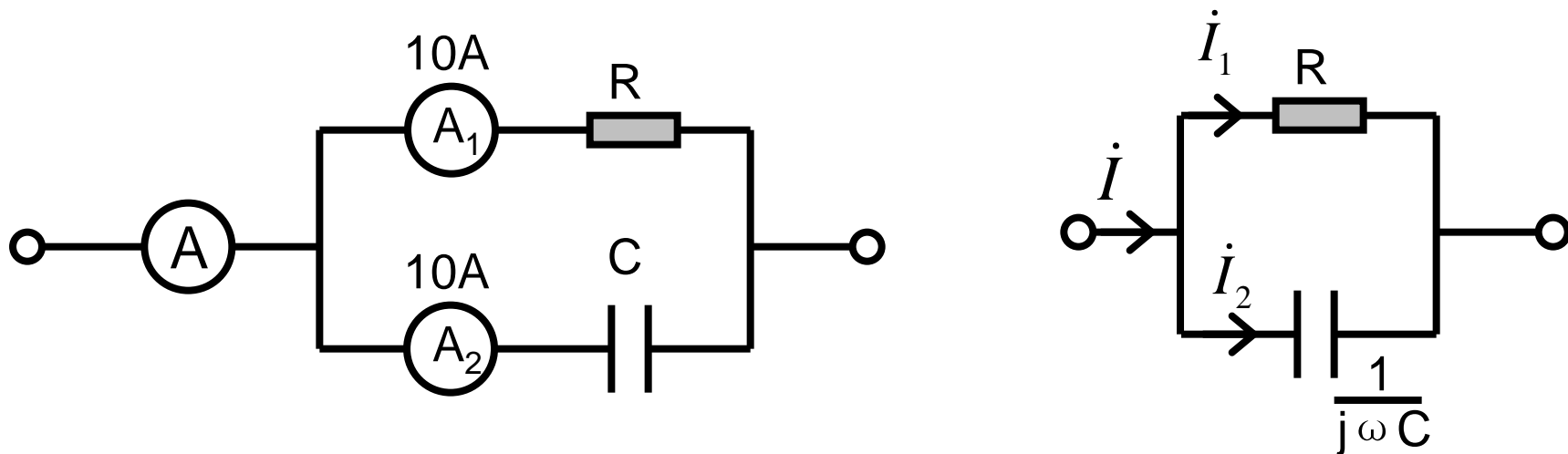


图6.4-13

第六章 正弦电路的稳态分析

解一：利用相量法分析（解析法）

作出相量模型如图b所示。取并联支路电压为参考相量，

即设 $\dot{U} = U \angle 0^\circ$

则
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} \angle 0^\circ = I_1 \angle 0^\circ$$

A₁表的读数为正弦电流*i*₁的有效值，即*I*₁=10A，故得

$$\dot{I}_1 = 10 \angle 0^\circ \quad (6.4-1)$$

又

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{1/j\omega C} = U \omega C \angle 90^\circ = I_2 \angle 90^\circ$$

根据A₂的读数可知*I*₂=10A，故得

$$\dot{I}_2 = 10 \angle 90^\circ \quad (6.4-2)$$

第六章 正弦电路的稳态分析

由KCL可知

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10 + j10 = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ = 14.1\angle 45^\circ \text{ A}$$

(6.4-3)

其有效值为14.1A，即A的读数应为14.1A。

解二：利用相量图法求解（几何法）

这里与前面例题中绘制相量图不同之处是：过去画相量图是根据计算结果画的，起着陪衬作用，而现在是在并未计算出结果的情况下画相量图，试图用以解决问题。由于没有具体数据，只能定性画图，而不能定量地画。

在相量的幅角未知时，首先要选择一个合适的相量做**参考相量**，即认为其初相角为零。其它相量根据其参考相量的位相关系定性画出。通常选各支路的共有相量为参考相量：串联支路宜选电流为参考相量；并联支路宜选电压为参考相量。当然，有的题目应根据题目要求，具体问题具体分析。

第六章 正弦电路的稳态分析

作出电路的相量模型后，可以依照以下步骤逐个绘出相量：

①首先在水平方向作参考相量，这里为电压相量 \dot{U} 。

②利用元件电压、电流的位相关系绘出各元件的电流相量。

电阻元件的电流与电压同相，故相量 \dot{I}_1 应在水平方向与 \dot{U} 方向一致；电容元件的电流超前电压 90° ，故相量 \dot{I}_2 应垂直于 \dot{U} 且处于超前 \dot{U} 的位置。根据已知条件，相量 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 的长度相等，都等于10。由这两相量所构成的平行四边形的对角线确定了相量 \dot{I} ，且由相量图的几何关系可知

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}A = 14.1A$$

故得A的读数为14.1A。

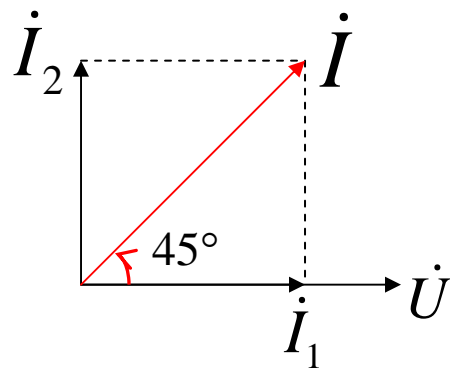


图6.4-13(c)

例6.4-12 图6.4-14所示正弦稳态电路，各电压表指示有效值。试求电压表 V_2 的读数。

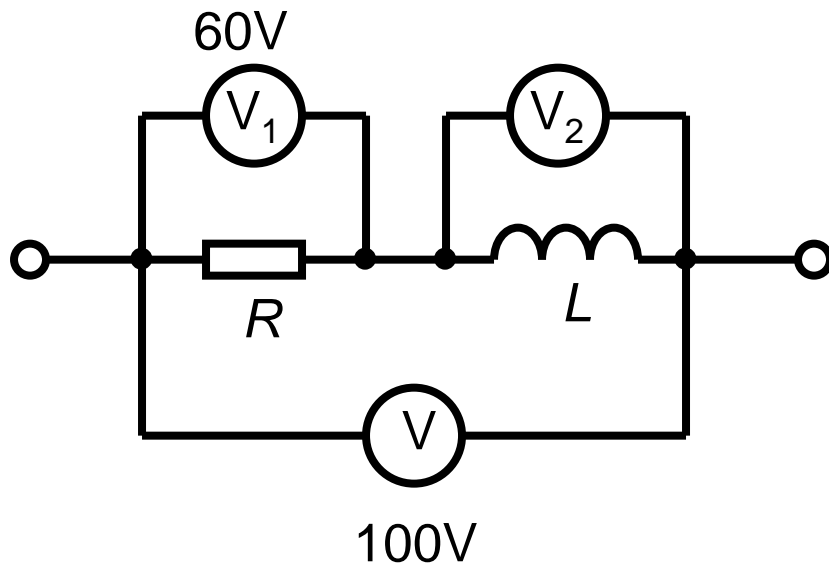
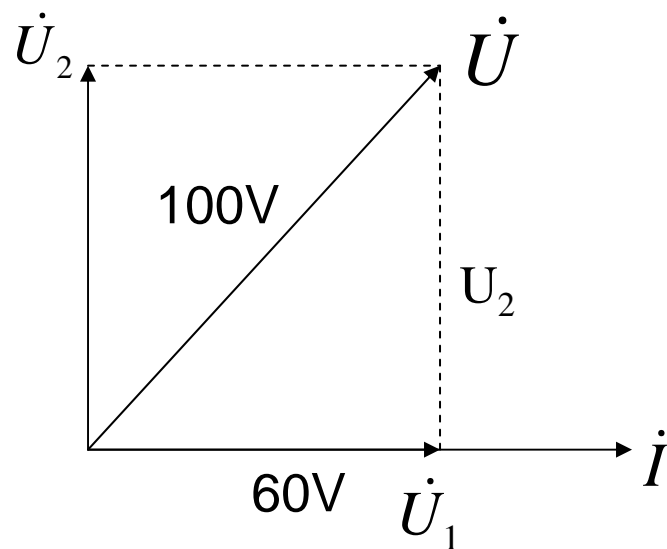


图6.4-14

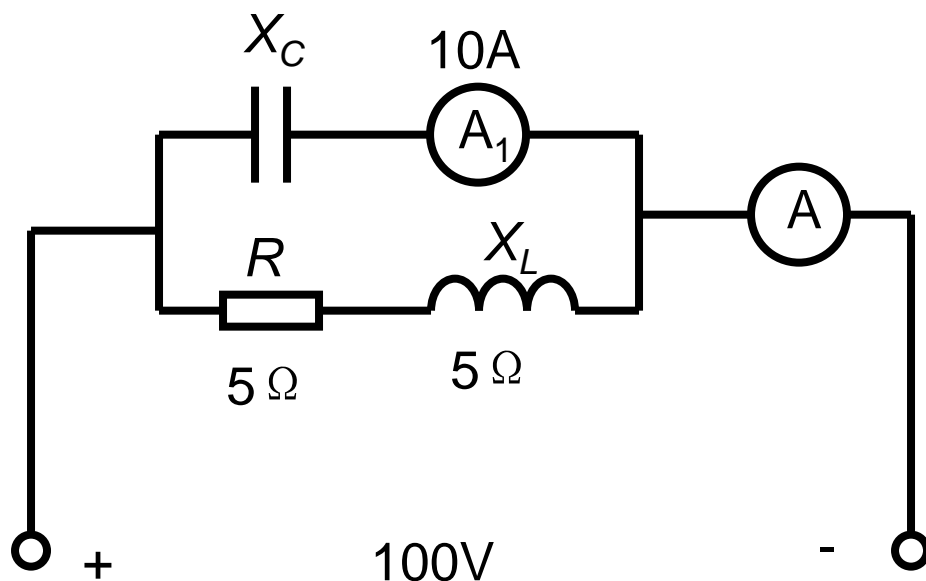
第六章 正弦电路的稳态分析



$$100^2 = 60^2 + U_2^2$$

$$U_2 = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80V$$

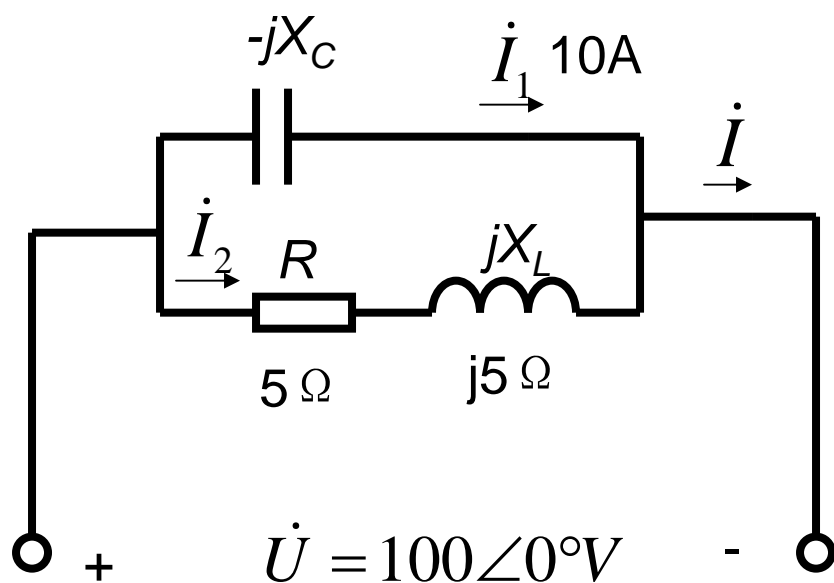
例6.4-13 求图6.4-15(a)中电流表A的读数。



(a)

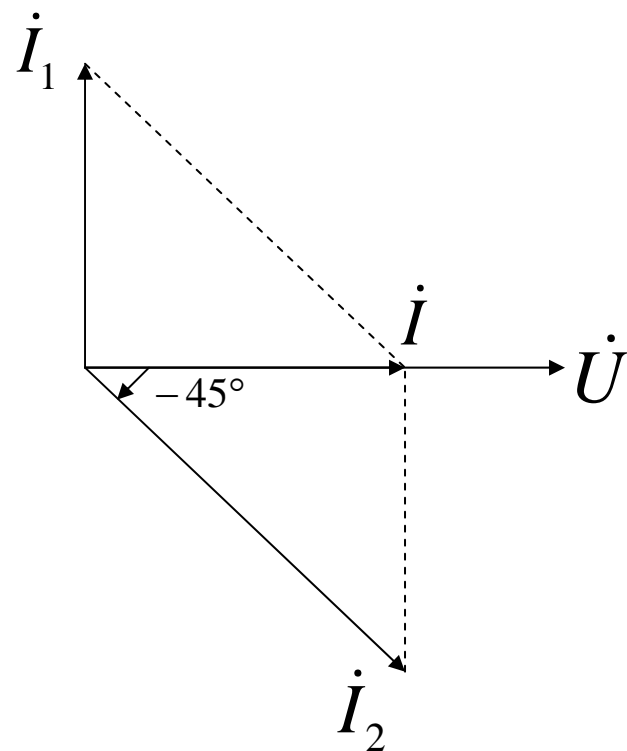
图6.4-15

第六章 正弦电路的稳态分析



(b) 相量模型

$$\dot{I}_2 = \frac{10}{5 - j5} = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ$$



相量图

第六章 正弦电路的稳态分析

例6.4-14 图中, $I_1=10\text{A}$, $I_2=10\sqrt{2}\text{A}$, $U=200\text{V}$, $R_1=X_L$, $R_2=5\Omega$ 。求 R_1 、 X_L 和 X_C 。

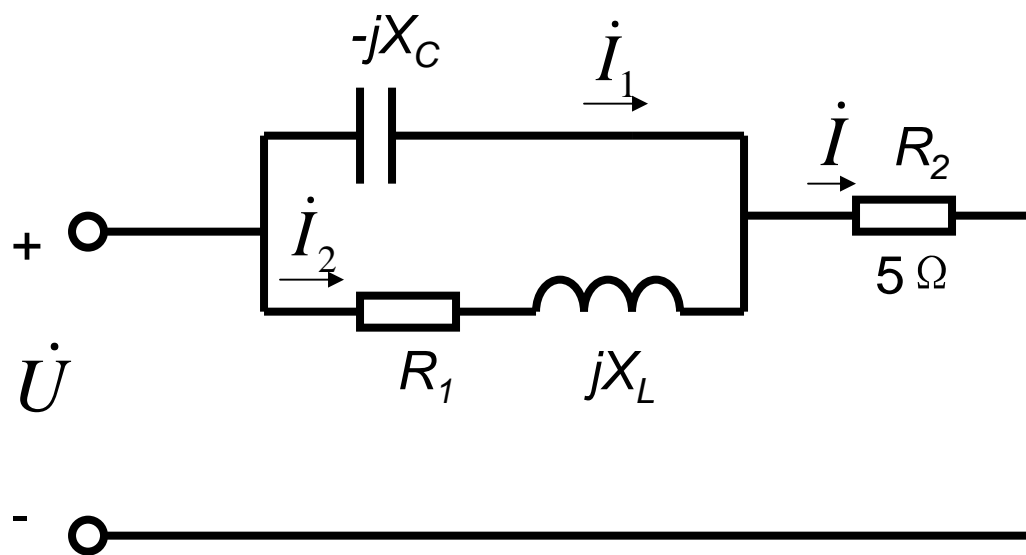


图6.4-16