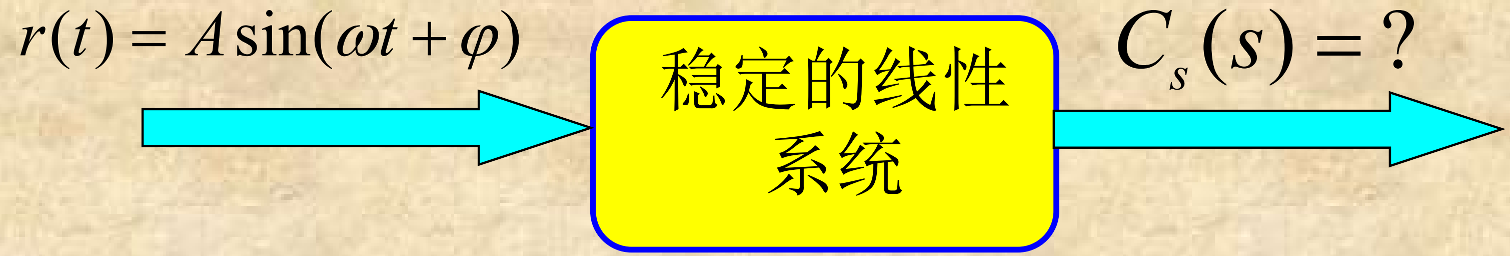
第五章 线性系统的频域分析法

5-1 引 言

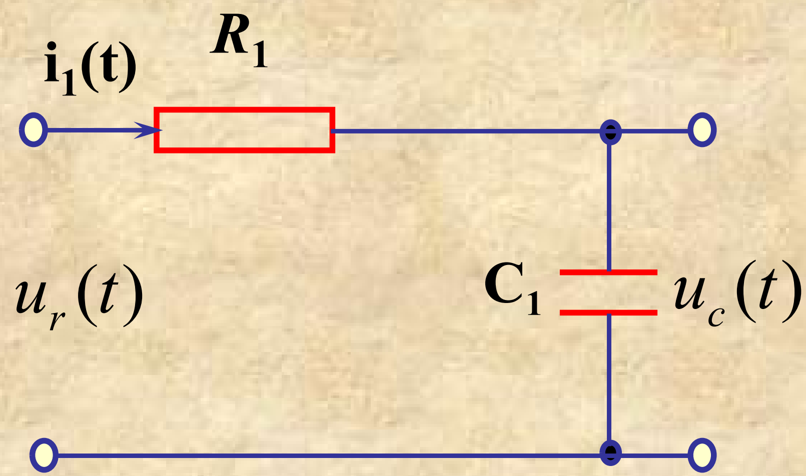
- 频率特性：正弦信号作用下系统响应的性能。
- 原因：信号可以表示成不同频率正弦信号的合成，线性系统的叠加特性。
  - 频率特性可由分析法和实验方法获得
  - 频率特性物理意义明确
  - 可以兼顾动态响应和噪声抑制
  - 不仅适用于线性定常系统，可以推广至非线性系统

5-2 频 率 特 性

一. 频率特性的基本概念



❖例：RC电路



$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{R_1C_1s+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

$$u_r = A\sin\omega t \ ,\Rightarrow U_r(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$U_o(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$u_0(t)=\frac{A\omega T}{1+\omega^2T^2}e^{-t/T}+\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}sin(\omega t-arctg\omega T)$$

稳态分量 $\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}sin(\omega t-arctg\omega T)$

设线性系统的闭环传函为：

$$G(s)=K^{*}\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_{i})}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_{j})}$$

所有闭环极点位于左半平面，系统稳定。

对于输入

$$r(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$R(s)=\frac{A\left(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi\right)}{s^{2}+\omega^{2}}$$

$$C(s)=G(s)R(s)=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}\frac{A(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi)}{s^2+\omega^2}$$

由于系统稳定 ⇒ $C_s(s)=\dfrac{c_1}{s+j\omega}+\dfrac{c_2}{s-j\omega}$

其中

$$c_1=\left[(s+j\omega)R(s)G(s)\right]_{s=-j\omega}=\left[G(s)\frac{A(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi)}{s-j\omega}\right]_{s=-j\omega}$$

$$=G(-j\omega)\frac{A(\omega\cos\varphi-j\omega\sin\varphi)}{-2j\omega}=G(-j\omega)\frac{Ae^{-j\varphi}}{-2j}$$

$$c_2=\left[(s-j\omega)R(s)G(s)\right]_{s=j\omega}=\left[G(s)\frac{A(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi)}{s+j\omega}\right]_{s=j\omega}$$

$$=G(j\omega)\frac{A(\omega\cos\varphi+j\omega\sin\varphi)}{2j\omega}=G(j\omega)\frac{Ae^{j\varphi}}{2j}$$

另一方面，设

$$G(j\omega)=\frac{a(\omega)+jb(\omega)}{c(\omega)+jd(\omega)}=\left|G(j\omega)\right|e^{j\angle G(j\omega)}$$

其中

$$\left|G(j\omega)\right|=\left[\frac{a^2(\omega)+b^2(\omega)}{c^2(\omega)+d^2(\omega)}\right]^{1/2} \qquad \angle G(j\omega)=a\tan\left[\frac{b(\omega)c(\omega)-a(\omega)d(\omega)}{a(\omega)c(\omega)+b(\omega)d(\omega)}\right]$$

传函为实系数分式，则：

$$a(-\omega)=a(\omega),b(-\omega)=-b(\omega)$$

$$c(-\omega)=c(\omega),d(-\omega)=-d(\omega)$$

$$G(-j\omega)=\frac{a(\omega)-jb(\omega)}{c(\omega)-jd(\omega)}=\left|G(j\omega)\right|e^{-j\angle G(j\omega)}$$

$$c_1 = G(-j\omega)\frac{Ae^{-j\varphi}}{-2j} = \left|G(j\omega)\right| e^{-j\angle G(j\omega)} \frac{Ae^{-j\varphi}}{-2j} = \frac{A\left|G(j\omega)\right|}{-2j} e^{-j[\varphi + \angle G(j\omega)]}$$

$$c_2 = G(j\omega)\frac{Ae^{j\varphi}}{2j} = \left|G(j\omega)\right| e^{j\angle G(j\omega)} \frac{Ae^{j\varphi}}{2j} = \frac{A\left|G(j\omega)\right|}{2j} e^{j[\varphi + \angle G(j\omega)]}$$

$$C_s(s) = \frac{1}{s + j\omega}\frac{A\left|G(j\omega)\right|}{-2j} e^{-j[\varphi + \angle G(j\omega)]} + \frac{1}{s - j\omega}\frac{A\left|G(j\omega)\right|}{2j} e^{j[\varphi + \angle G(j\omega)]}$$

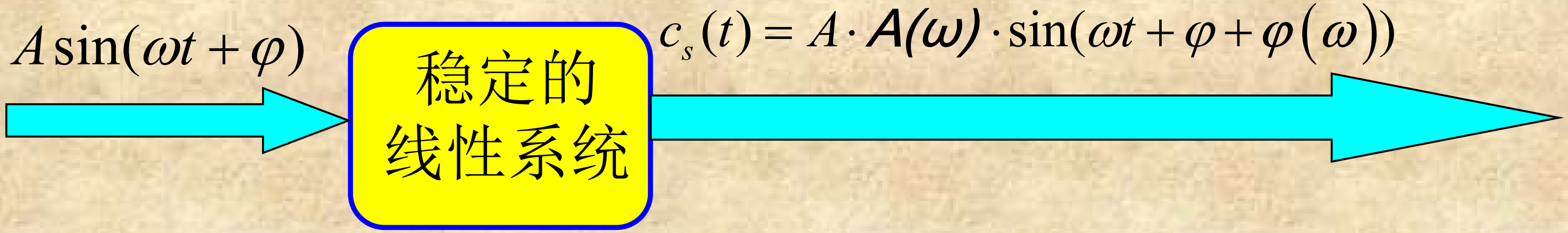
$$c_s(t) = \frac{A\left|G(j\omega)\right|}{-2j} e^{-j[\varphi + \angle G(j\omega)]} e^{-j\omega t} + \frac{A\left|G(j\omega)\right|}{2j} e^{j[\varphi + \angle G(j\omega)]} e^{j\omega t}$$

$$= A\left|G(j\omega)\right| \frac{e^{j[\varphi + \angle G(j\omega) + \omega t]} - e^{-j[\varphi + \angle G(j\omega) + \omega t]}}{2j}$$

$$= A\left|G(j\omega)\right| \sin\left[\omega t + \varphi + \angle G(j\omega)\right]$$

结论：对于稳定的线性系统，由谐波输入产生的输出稳态分量仍然是与输入同频率的谐波函数：

$$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$



其中，

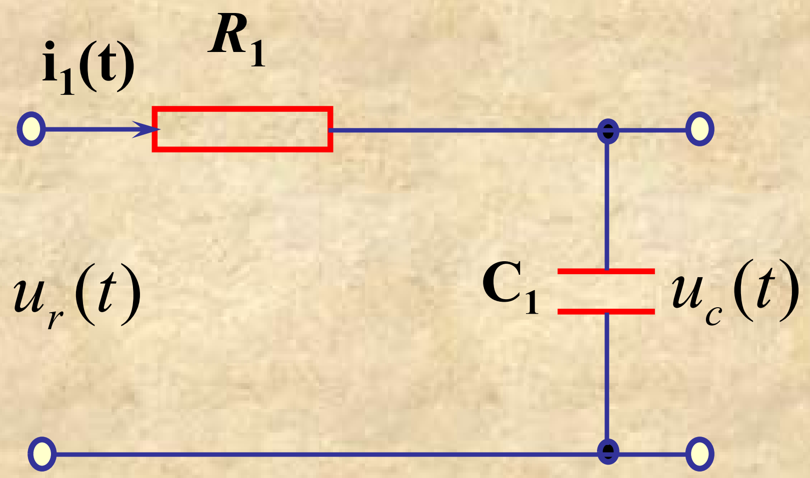
$$G(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$A(\omega)$：幅频特性；　$\varphi(\omega)$：相频特性

频率特性定义：一个线性系统或环节中，输入信号为正弦量，当 ω 从 $0\rightarrow\infty$ 时，在稳态条件下，输出量与输入量之比。

❖例：RC电路

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{R_1C_1s+1}=\frac{1}{Ts+1}$$



RC电路的频率特性：

$$\frac{U_c}{U_r}=\frac{1}{1+jT\omega}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

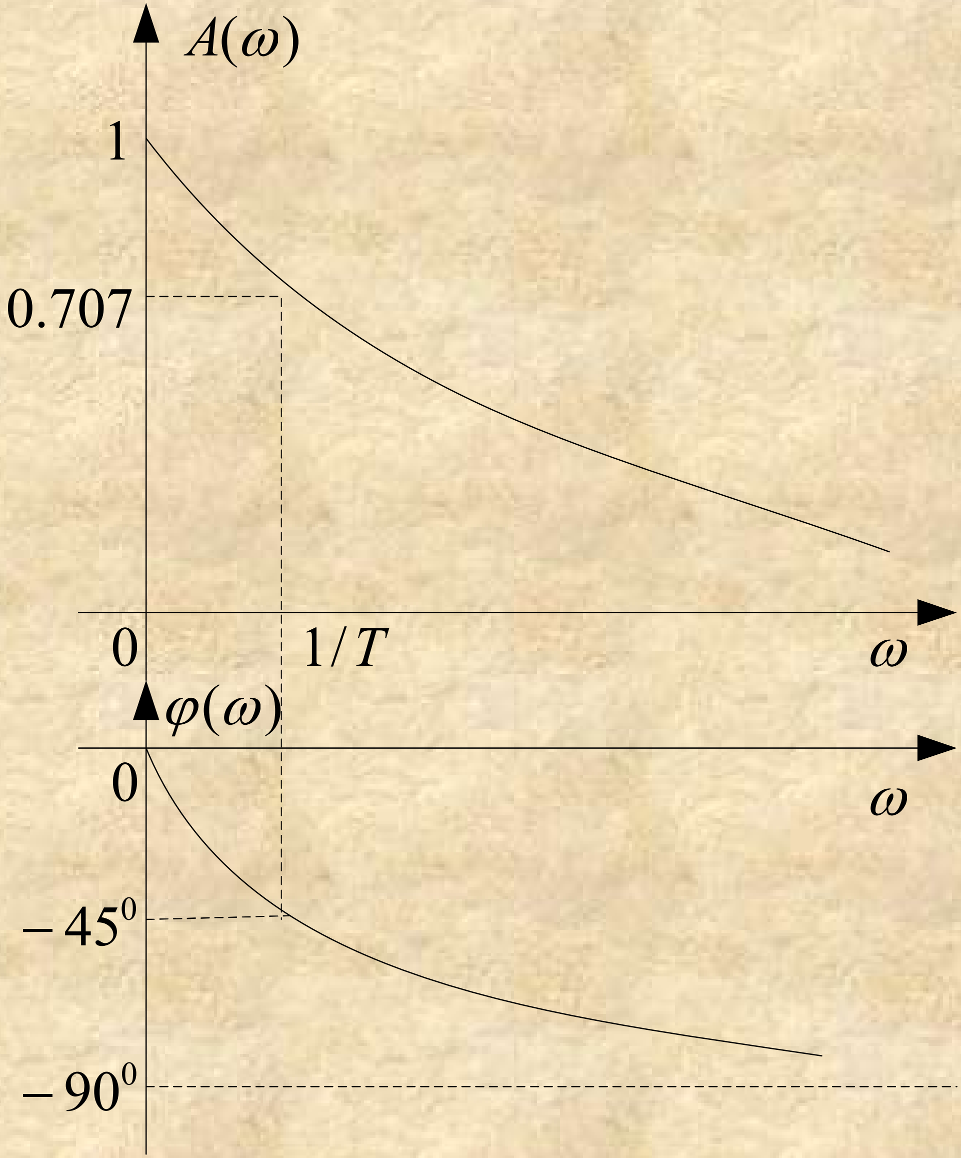
根据定义$A(\omega)=1/\sqrt{1+\omega^2T^2},\varphi(\omega)=-arctg\omega T$

$$u_r(t)=U_{rm}\sin(\omega t+\varphi_r) \Longrightarrow$$

$$u_{cs}(t)=A(\omega)U_{rm}\sin\left(\omega t+\varphi(\omega)+\varphi_r\right)$$

幅频特性与相频特性随着 ω 改变而变化

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	1	0
$1/T$	0. 707	-45^0
…	…	…
∞	0	-90^0



二. 频率特性的表示方法

1. 幅相频率特性曲线（幅相曲线，极坐标图）：频率特性表示为实数和虚数和的形式。

画概略幅相曲线要素：

- 明确起点（$\omega = 0^{+}$）和终点（$\omega = \infty$）；
- 曲线与实轴的交点；
- 曲线变化范围（所在区域、经过的象限等）

例：已知某系统的传递函数为：$G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$

请绘出其幅相频特性曲线。

解：$G(s)=\dfrac{K}{Ts+1} \Longrightarrow G(j\omega)=\dfrac{K}{1+jT\omega}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

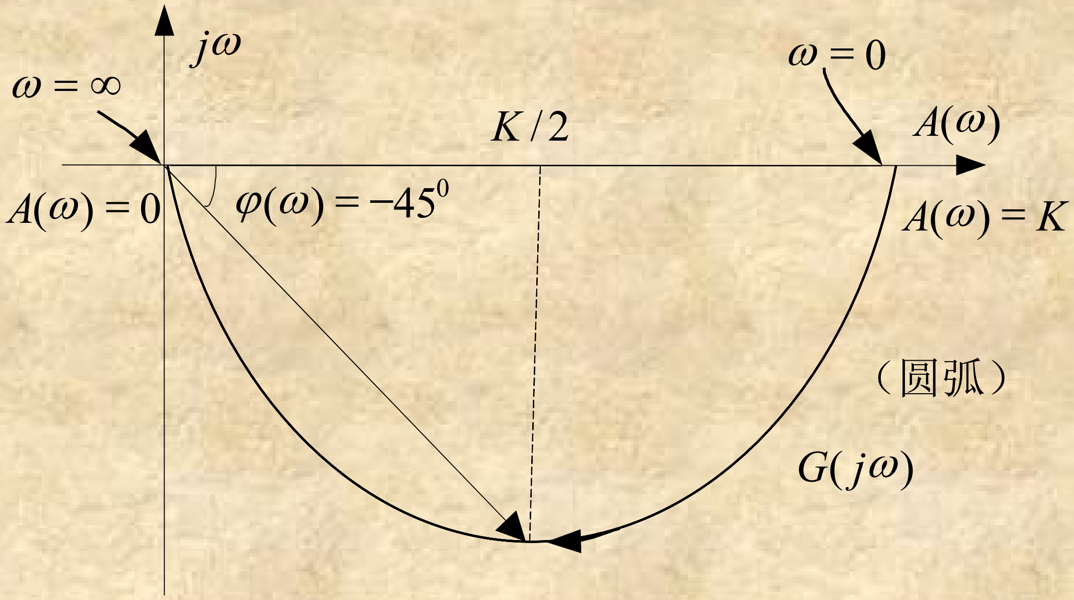
$$\varphi(\omega)=-tg^{-1}T\omega$$

概略幅相频率曲线绘制：

①、对应一个 ω，有 $A(\omega)$、$\varphi(\omega)$，把点连起来；

②、$G(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	k	0
$1/T$	0. 707k	-45^0
…	…	…
∞	0	-90^0



幅相曲线

2. 对数频率特性曲线 （伯德曲线，伯德图）

对数幅频特性 $L(\omega)$： 横轴取为 $\lg\omega$，

纵轴取：$L(\omega)=20\lg A(\omega)$

$L(\omega)$ 与 $A(\omega)$ 的对应关系：

$A(\omega)$ ： 0、0.01、0.1、…、1、10、100、…、+∞

$L(\omega)$ ： －∞、…、-40、-20、0、20、40、…、+∞

$\lg\omega$ 与 ω 的对应关系：

ω ： 1、10、100、1000、…、＋∞

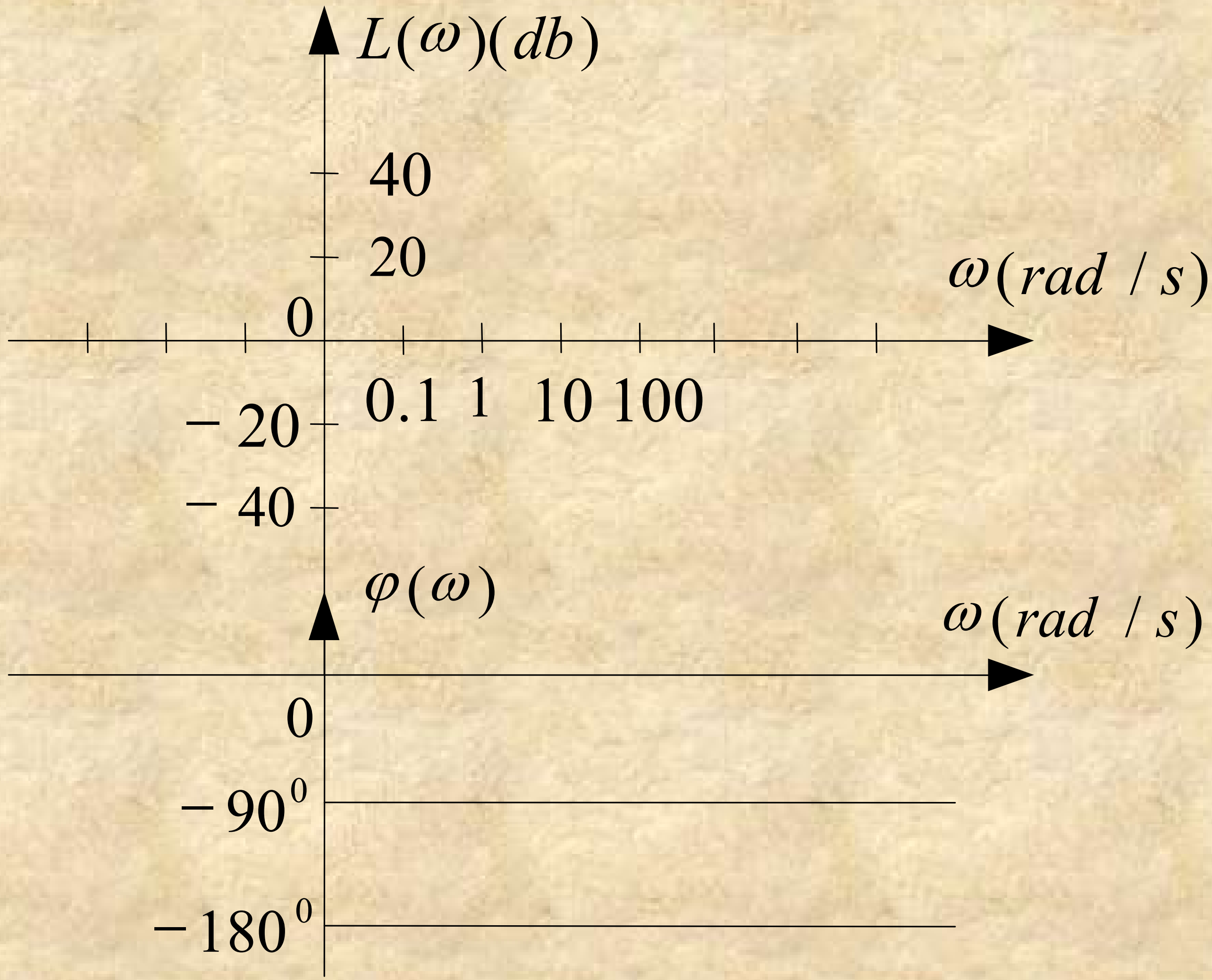
$\lg\omega$ ： 0、1、2、3、…、＋∞

对数相频特性

横轴取为 $\lg\omega$，纵轴取为 $\varphi(\omega)$

当频率范围很宽时，可以缩小比例尺。

当系统由多个环节串联构成时，简化了绘制系统的频率特性。



3. 对数幅相曲线

又称为尼柯尔斯曲线，对数幅相图的横坐标表示对数相频特性的相角 $\varphi(\omega)$，纵坐标表示对数幅频特性的幅值的分贝数 $L(\omega)$。

5-3 典型环节开环频率特性

一. 典型环节

- ✓ 比例环节
- ✓ 惯性环节
- ✓ 积分环节
- ✓ 微分环节
- ✓ 比例微分环节
- ✓ 振荡环节
- ✓ 时滞环节

$$G(S)H(s)=\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

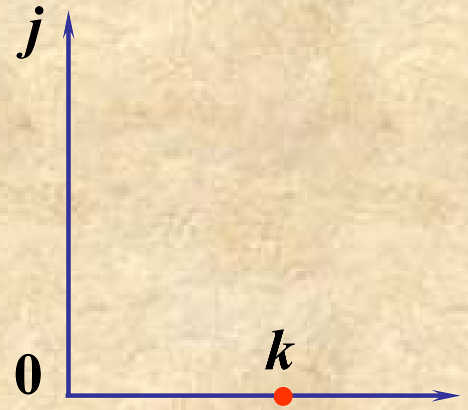
二. 典型环节的频率特性

1. 比例环节

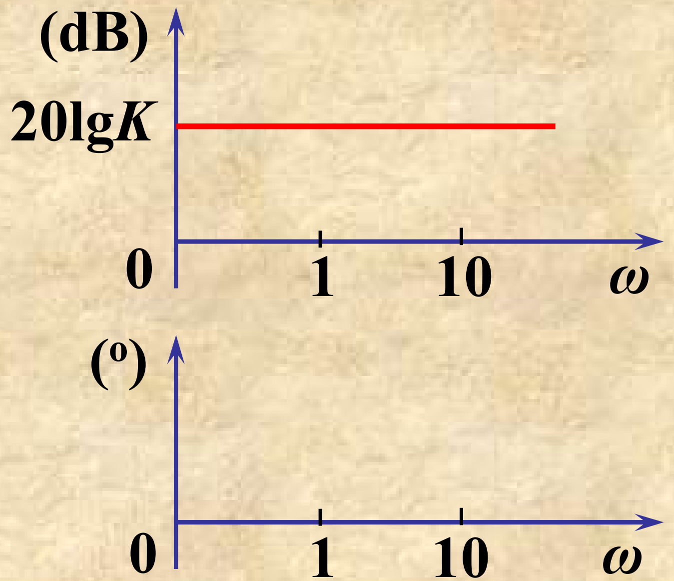
$$G(s)=K \quad \Rightarrow \quad G(j\omega)=K=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性: $A(\omega)=K$, $L(\omega)=20\lg K$

相频特性: $\varphi(\omega)=0$



比例环节的幅相曲线



比例环节的对数频率特性

2. 惯性环节

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K}{1+jT\omega}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频：$A(\omega)=\dfrac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$　　相频：$\varphi(\omega)=-tg^{-1}T\omega$

$$G(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)=\frac{K}{1+T^2\omega^2}+j\frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

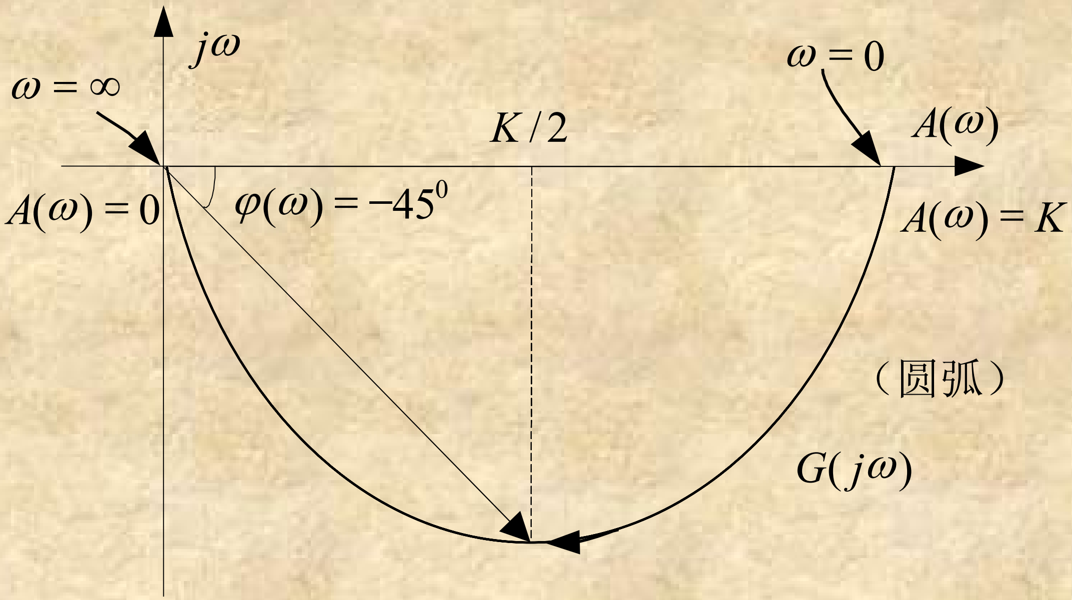
证明：惯性环节的奈氏曲线是一个圆

$$P(\omega)=\frac{K}{1+\left(\dfrac{Q}{P}\right)^2} \Rightarrow \begin{aligned} &P^2+Q^2=KP \\ &\left(P-\frac{K}{2}\right)^2+Q^2=\left(\frac{K}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

概略幅相频率特性曲线

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+T^2\omega^2}+j\frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	k	0
$1/T$	0. 707k	-45^0
…	…	…
∞	0	-90^0



幅相曲线

对数频率特性曲线

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}=20\lg K-20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2}$$

渐近线：

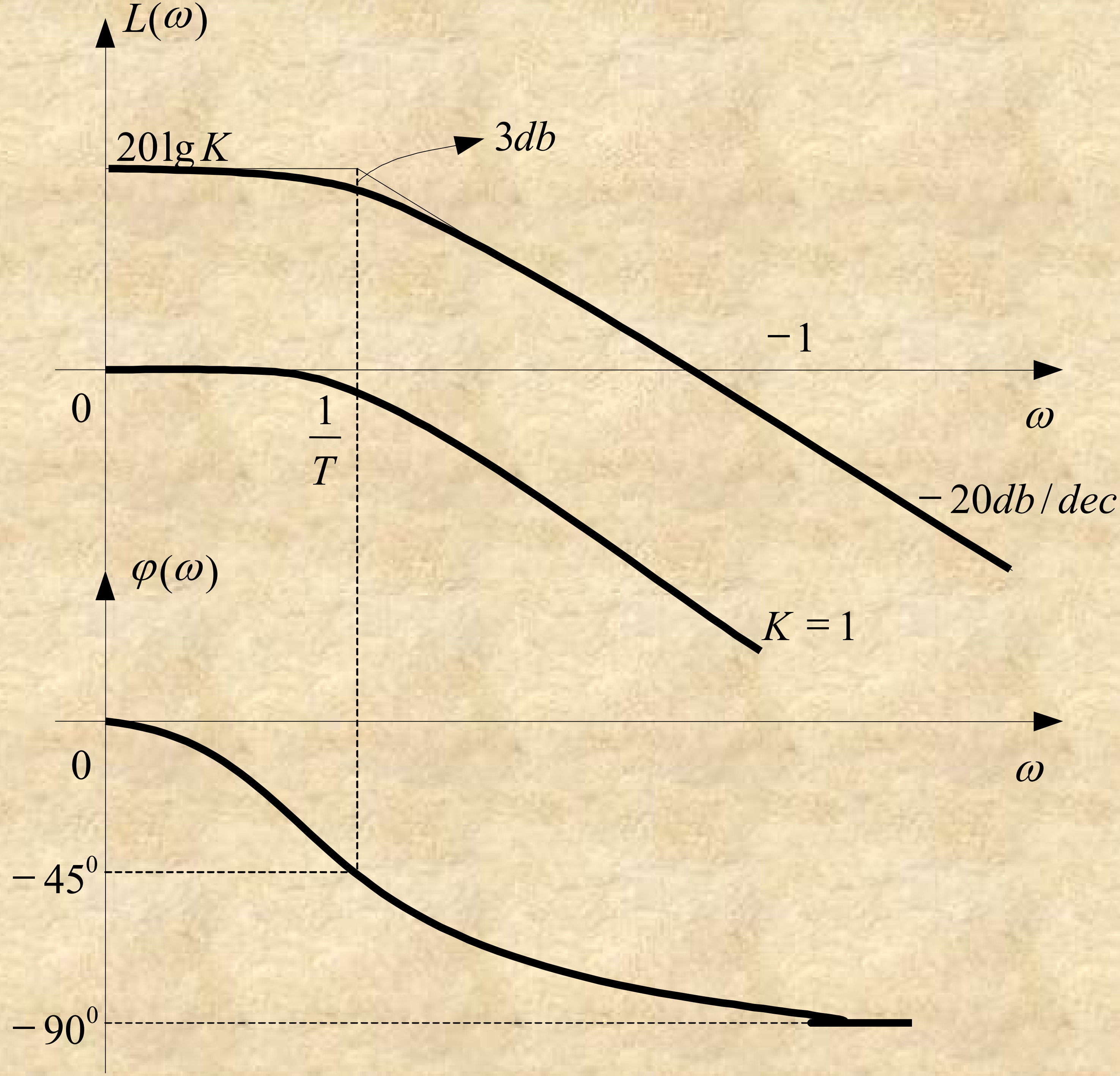
① $\omega << 1/T$，$L(\omega)\approx 20\lg K$；

② $\omega >> 1/T$，$L(\omega)\approx 20\lg K-20\lg T\omega$

③ 在 $\omega=1/T$ 时，$L(\omega)\approx 20\lg K$，$1/T$—交接频率

实际频率特性与渐近线最大误差位于交接频率处：

$$L_{实}(\omega)=20\lg K-3db$$

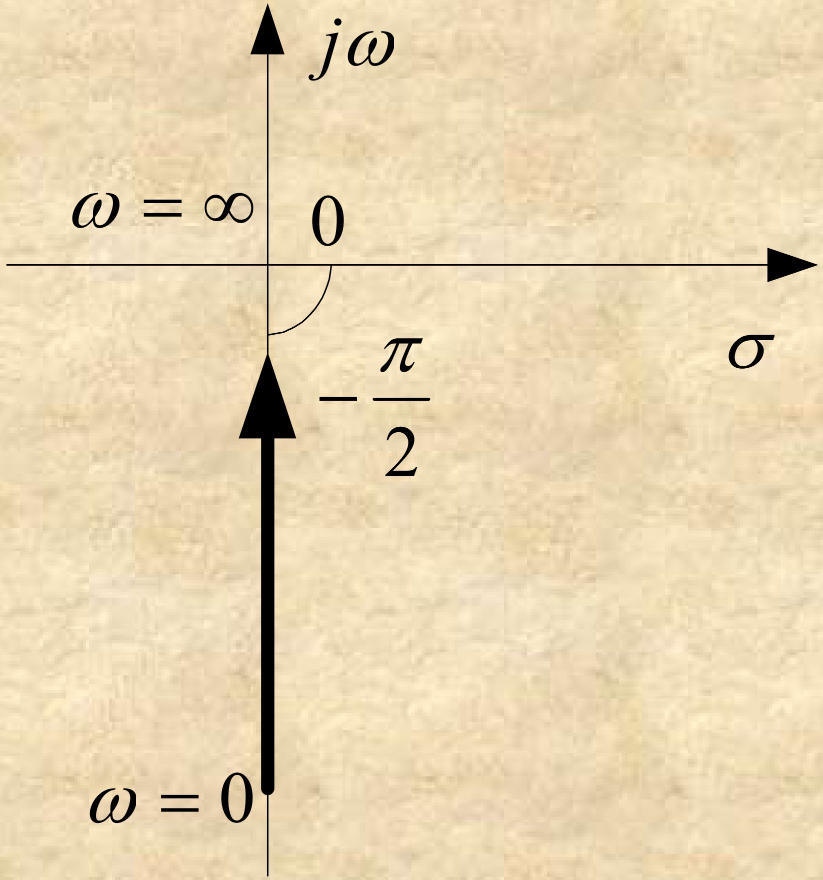


$L(\omega)$
$20\lg K$
$3db$
-1
0
ω
$\frac{1}{T}$
$-20db/dec$
$\varphi(\omega)$
$K=1$
0
ω
-45^0
-90^0

3. 积分环节

$$G(s)=\frac{K}{s} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K}{j\omega}=-j\frac{K}{\omega}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频：$A(\omega)=\dfrac{K}{\omega}$　　　相频：$\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$



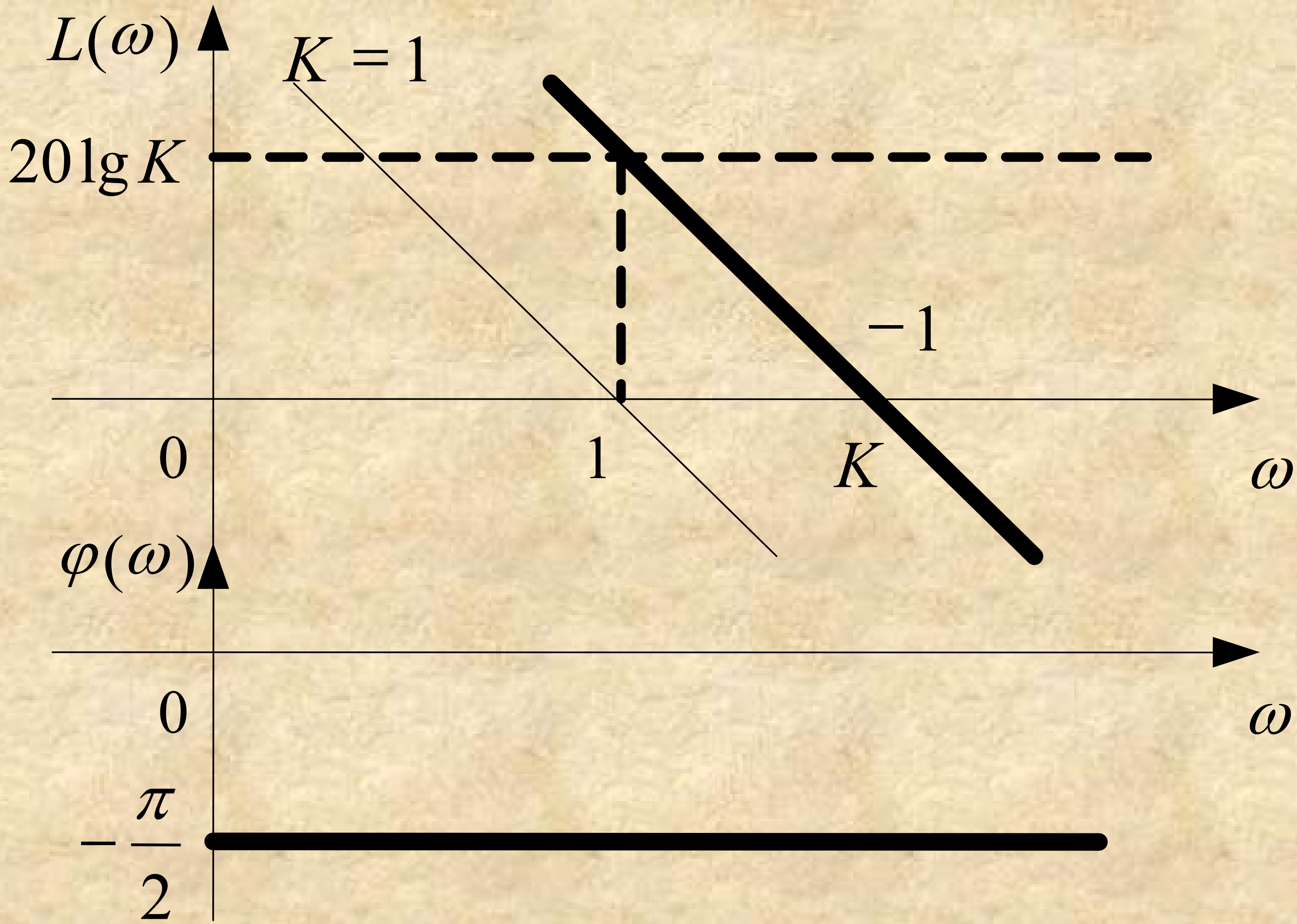
<u>概略幅相曲线</u>

$\omega=0 \Rightarrow A(\omega)\to\infty$

$\omega\to\infty \Rightarrow A(\omega)\to 0$

对数频率特性

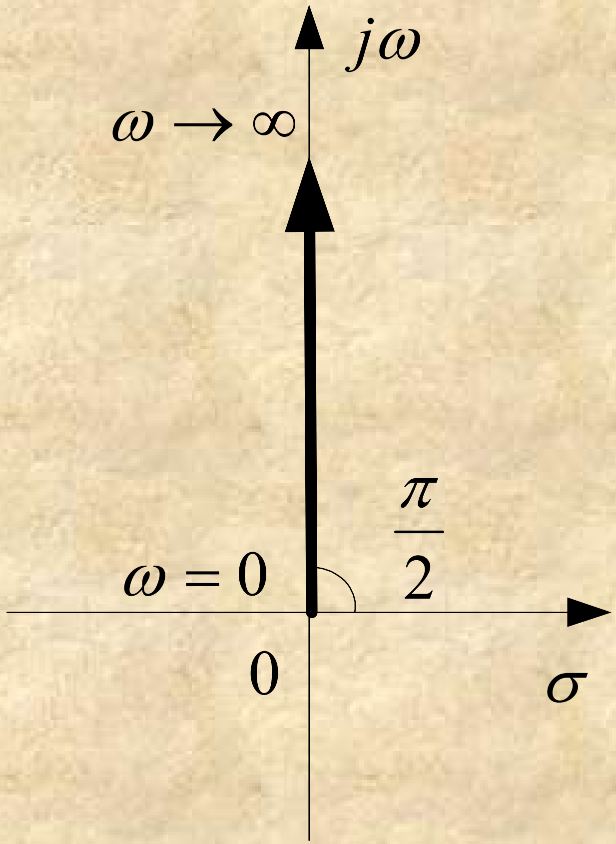
$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{K}{\omega}=20\lg k-20\lg\omega$$



4. 微分环节

$$G(s)=K\cdot s \quad \Rightarrow \quad G(j\omega)=K\cdot j\omega=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频：$A(\omega)=K\omega$　　相频：$\varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$



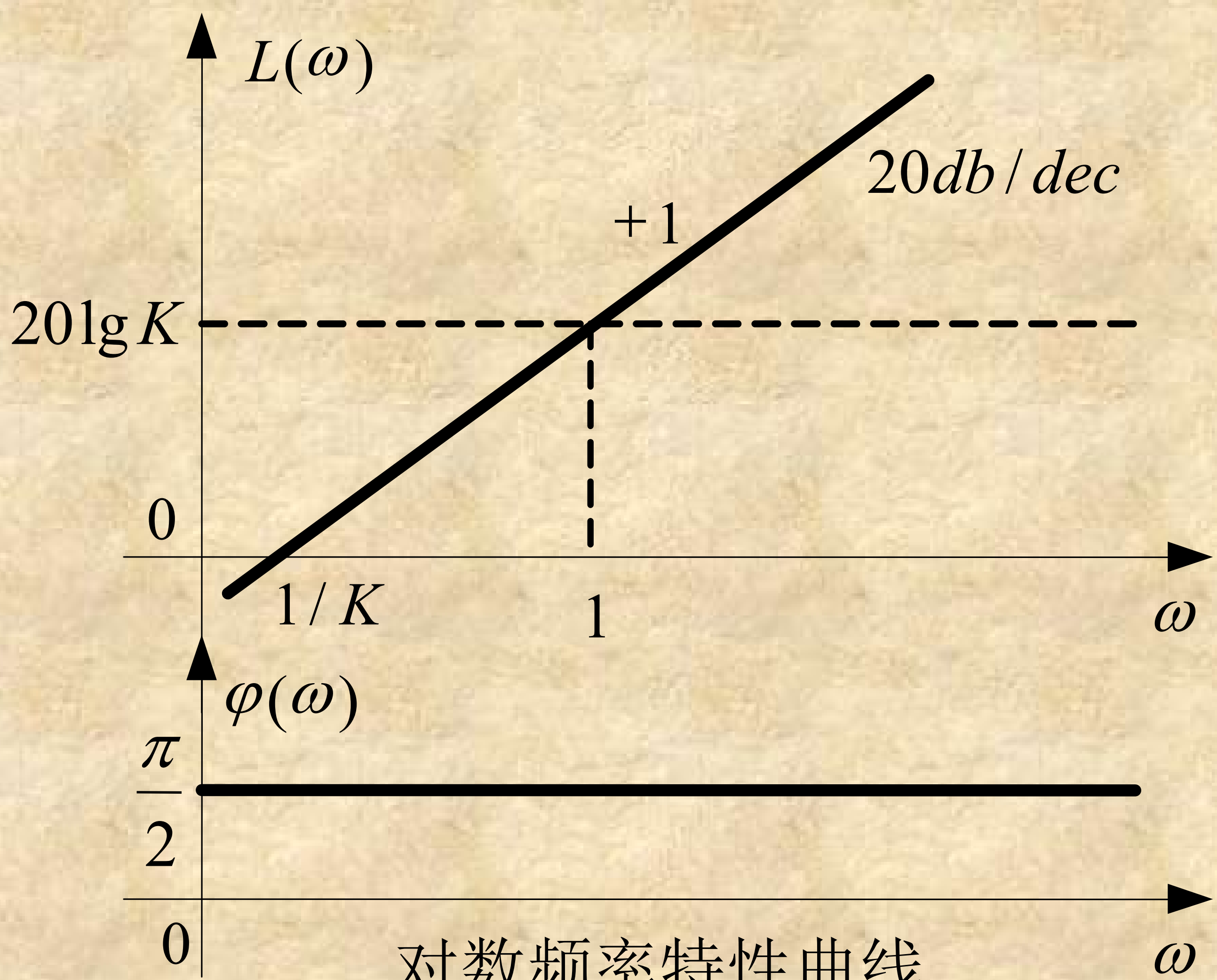
概略幅相曲线

$\omega=0 \Rightarrow A(\omega)=0$

$\omega\to\infty \Rightarrow A(\omega)\to\infty$

对数频率特性

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k + 20\lg \omega$$



对数频率特性曲线

5. 比例微分环节

$$G(s)=1+\tau s \Rightarrow G(j\omega)=1+j\tau\omega=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频：$A(\omega)=\sqrt{1+(\tau\omega)^2}$　　相频：$\varphi(\omega)=tg^{-1}\tau\omega$

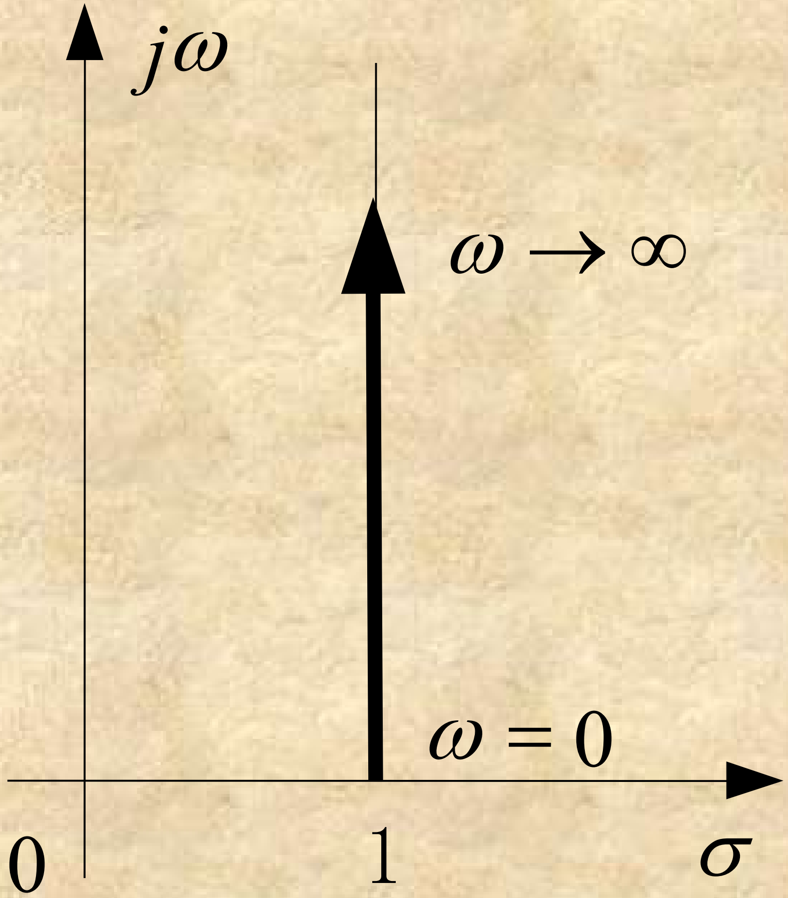
<u>概略幅相曲线</u>

$\omega=0 \Rightarrow A(\omega)=0$

$\varphi(\omega)=0$

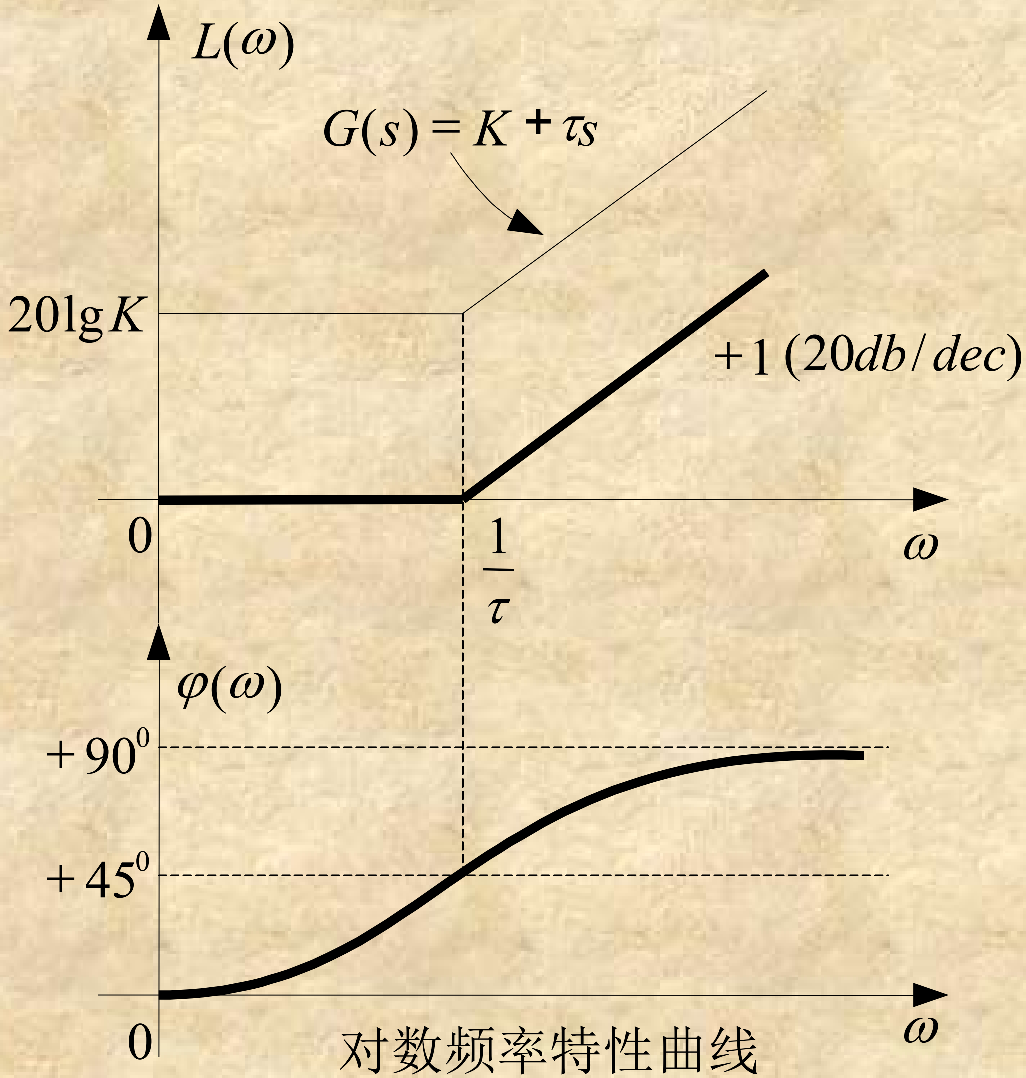
$\omega\to\infty \Rightarrow A(\omega)\to\infty$

$\varphi(\omega)\to\pi/2$



对数频率特性

$$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(\tau\omega)^2}\approx\begin{cases}0, \omega<<1/\tau \\ 20\lg(\tau\omega), \omega>>1/\tau\end{cases}$$



对数频率特性曲线

6. 振荡环节

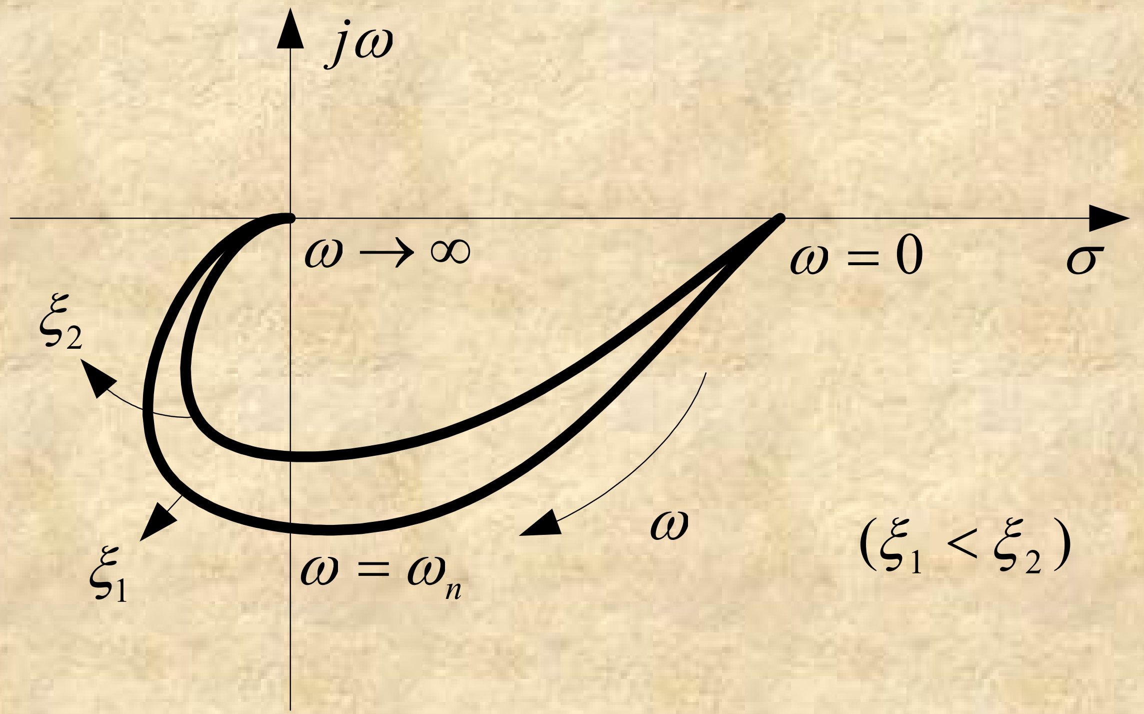
$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+2\xi\omega_n j\omega+\omega_n^2}=\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\qquad \varphi(\omega)=-tg^{-1}\frac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

概略幅相频率特性曲线

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	1	0
ω_n	$1/2\xi$	-90^0
…	…	…
∞	0	-180^0



幅相特性曲线

对数频率特性曲线

$$L(\omega) = -20\lg\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$= \begin{cases} 0, & \omega << \omega_n \\ -20\lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = -40\lg\frac{\omega}{\omega_n}, & \omega >> \omega_n \end{cases}$$

斜率：$L_{10}(\omega) - L_1(\omega) = -40db/dec$

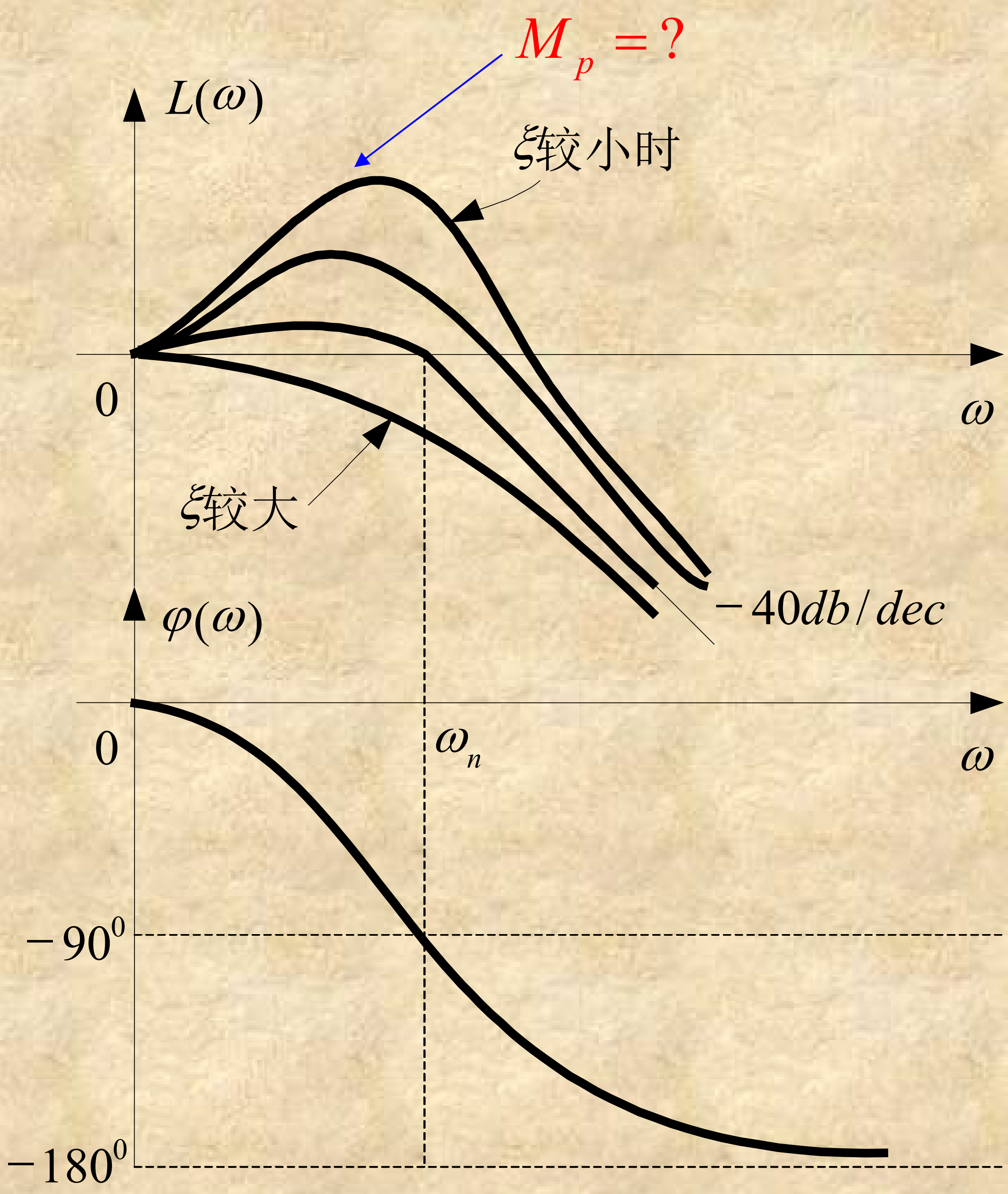
在 $\omega=\omega_n$ 时，

$$A(\omega_n)=\frac{1}{2\xi}$$

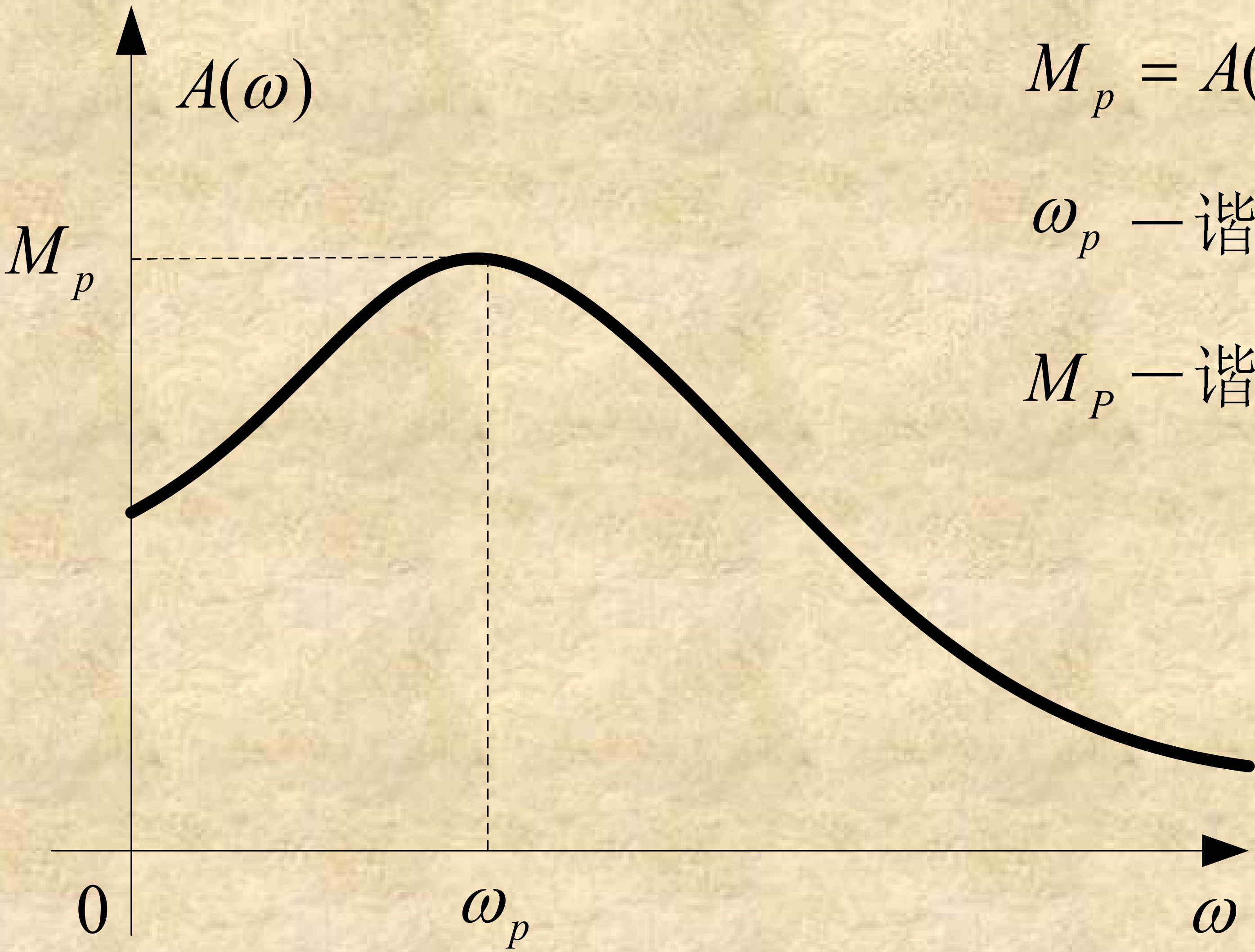
ξ 越小，$A(\omega_n)$越大

当 $\xi<0.5$ 时

$$A(\omega_n)>1$$



对数频率特性曲线



$M_p = A(\omega)_{\max}$ （对应）

ω_p —谐振角频率

M_p —谐振峰值

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=0 \Rightarrow A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

设 $u=\frac{\omega}{\omega_n}$，代入 $A(\omega)$ 得到：

$$A(u)=\frac{1}{\sqrt{\left[1-u^2\right]^2+\left(2\xi u\right)^2}}$$

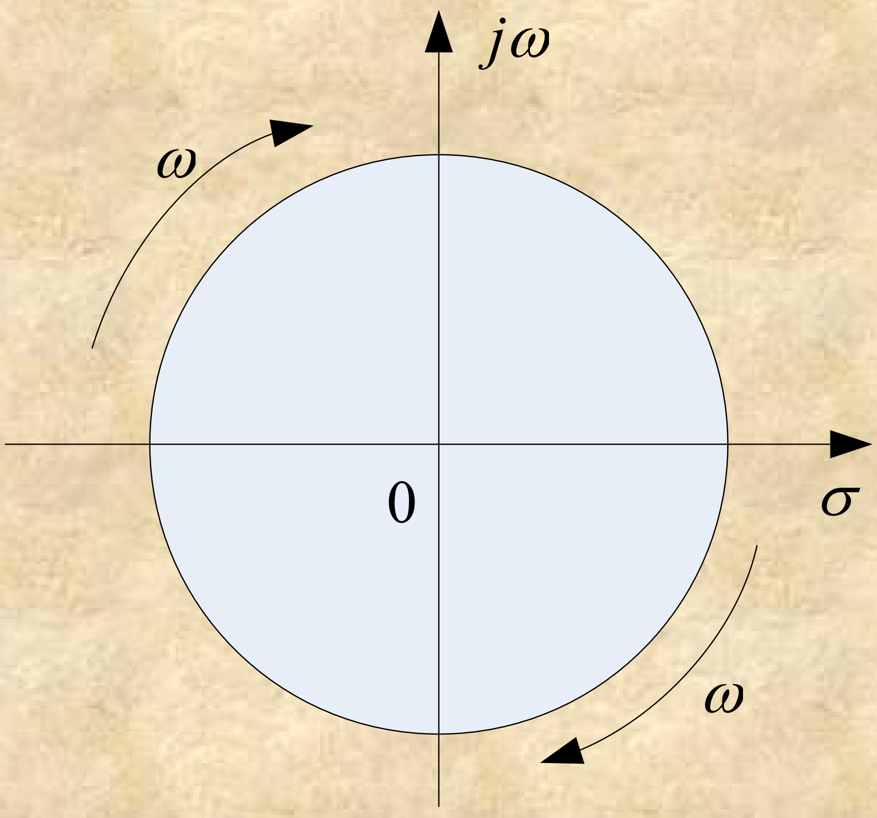
$$\frac{d}{du}[(1-u^2)^2+4\xi^2u^2]=0 \Rightarrow \left(u^2-1\right)+2\xi^2=0 \Rightarrow$$

$$u=\sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \text{当 } \xi<\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时，} \begin{cases} \omega_p=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_p=\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}\cdot 2\xi} \end{cases}$$

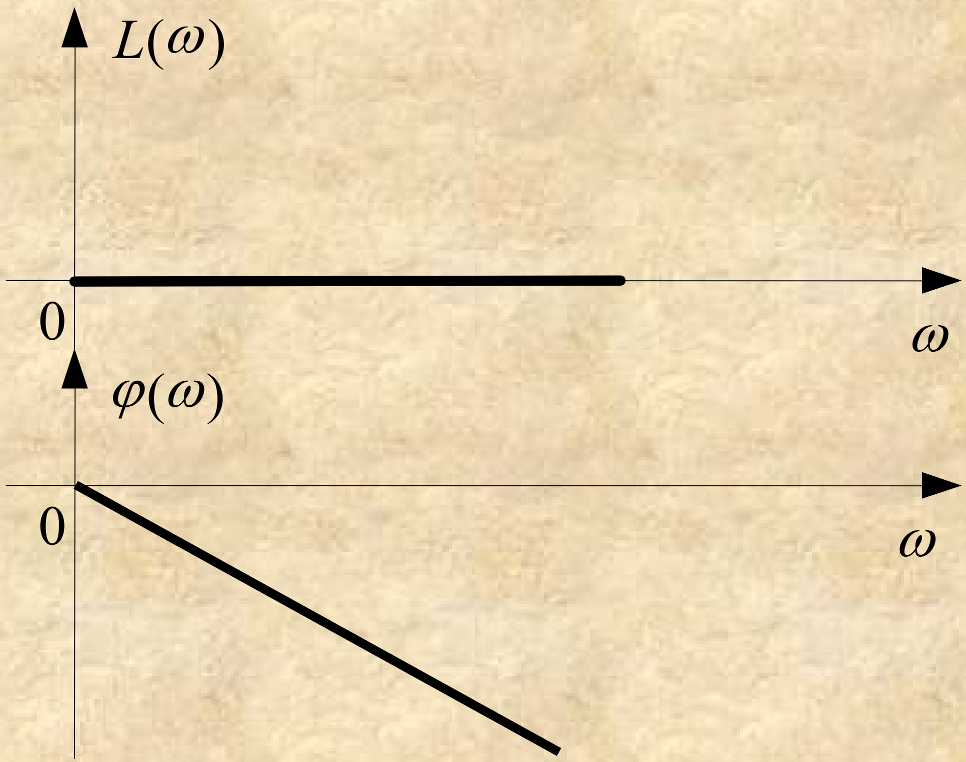
7. 时滞环节

$$G(s)=e^{-\tau s} \Rightarrow G(j\omega)=e^{-j\tau\omega}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频：$A(\omega)=1$　　　相频：$\varphi(\omega)=-\tau\omega$



幅相频率特性



对数频率特性

三. 系统开环幅相曲线的绘制

- 曲线的起点（$\omega = 0^+$）和终点（$\omega = \infty$）
- 曲线与实轴的交点

  计算方法：$\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = 0$

  $$\varphi(\omega_x) = \angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = k\pi$$

  ω_x称为穿越频率

  曲线与实轴交点：$\mathrm{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = G(j\omega_x)H(j\omega_x)$

- 开环幅相曲线的变化范围：象限，单调性

问题：开环增益增加，穿越频率如何变化？

例：已知某系统的开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$

请绘出其幅相频率特性曲线。

解：

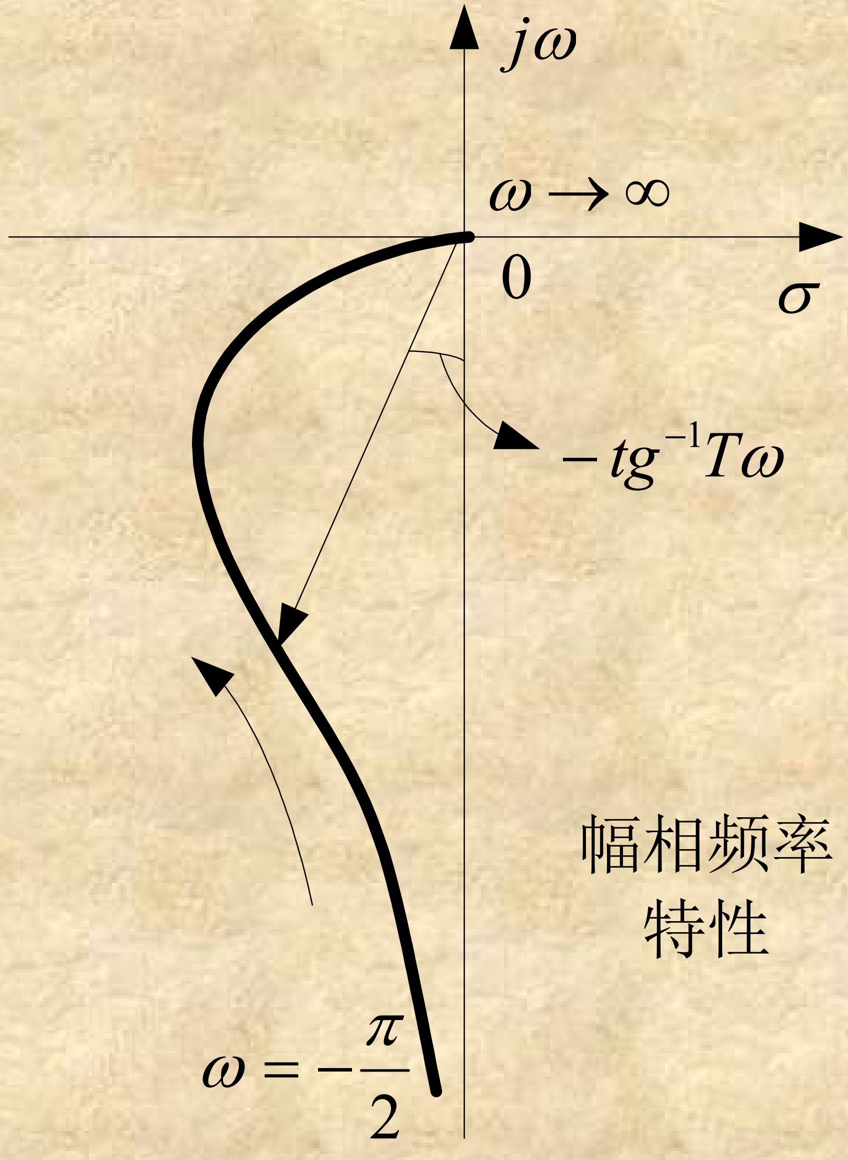
$$G_k(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$$

$$G_K(j\omega)=\frac{K}{j\omega(jT\omega+1)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{1+(T\omega)^2}} \qquad \varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-tg^{-1}T\omega$$

幅相频率特性曲线

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	∞	$-\pi/2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
∞	0	$-\pi$



例：已知某系统的开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$

请绘出其幅相频率特性曲线。

解：

$$G_k(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$$

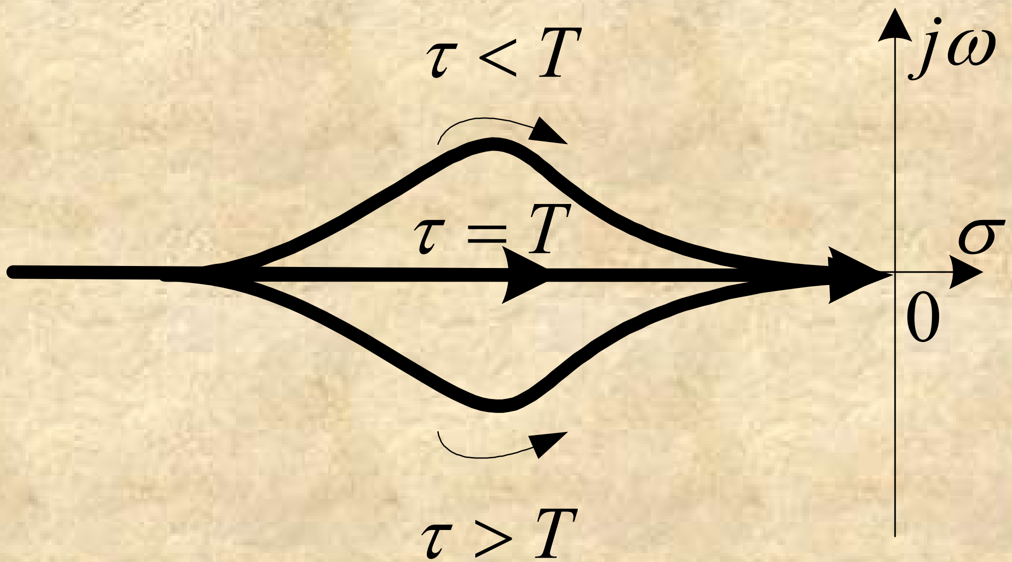
$$G_k(j\omega)=\frac{K(1+j\tau\omega)}{(j\omega)^2(1+jT\omega)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega)=\frac{K\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}{\omega^2\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=tg^{-1}\tau\omega-tg^{-1}T\omega-\pi$$

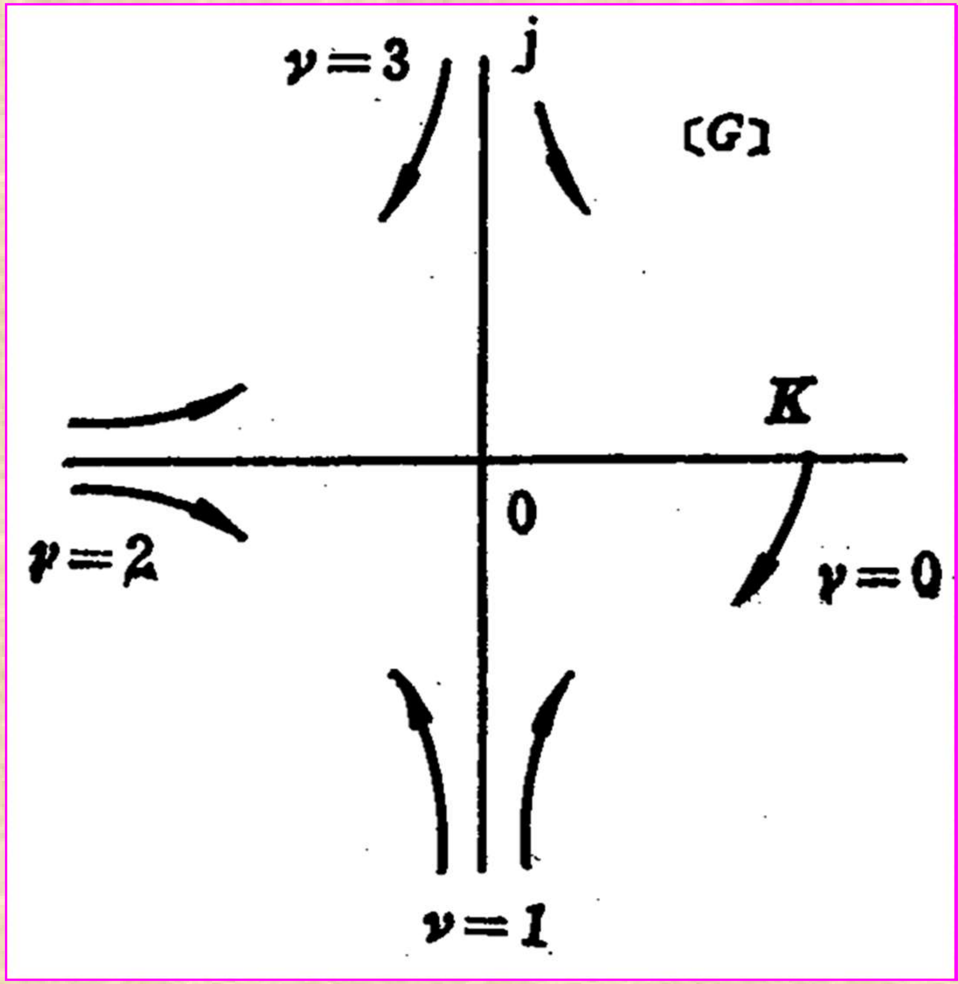
幅相频率特性曲线

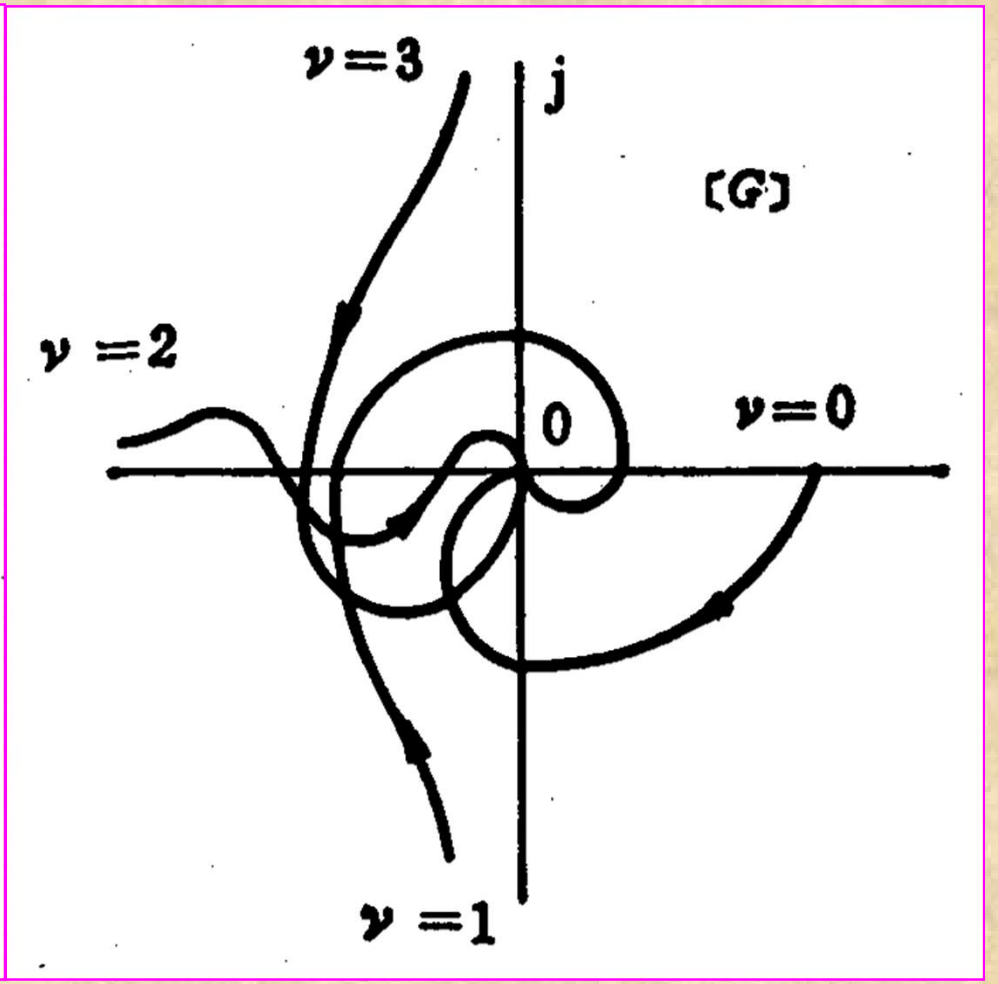
ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	∞	$-\pi$
…	…	…
…	…	…
∞	0	$-\pi$



幅相频率特性

例：5-1，5-2，5-3，5-4，5-5





四. 开环对数频率特性曲线的绘制

$$G_k(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N\prod_{j=1}^{n-N}(s+p_j)}$$

将开环传递函数进行典型环节分解以后，作出各个典型环节的对数频率特性曲线，然后采用叠加方法就可以方便地绘制出开环频率特性曲线。

①将开环传函按典型环节分解；

②确定一阶、二阶环节的交接频率；

③绘制低频段（$\omega < \omega_{\min}, \omega_{\min}$—最小交接频率）渐进特性；

- 一般为纯积分环节或纯微分环节。
- $L_a(1) = 20\lg(k)$，该点在曲线（所有交接频率>1）或其延长线上(存在交接频率<1)

④按照斜率绘制高频段（$\omega \geq \omega_{\min}$）渐近特性。

根据分段折线计算系统的截至频率：

$$L(\omega_c)=0$$

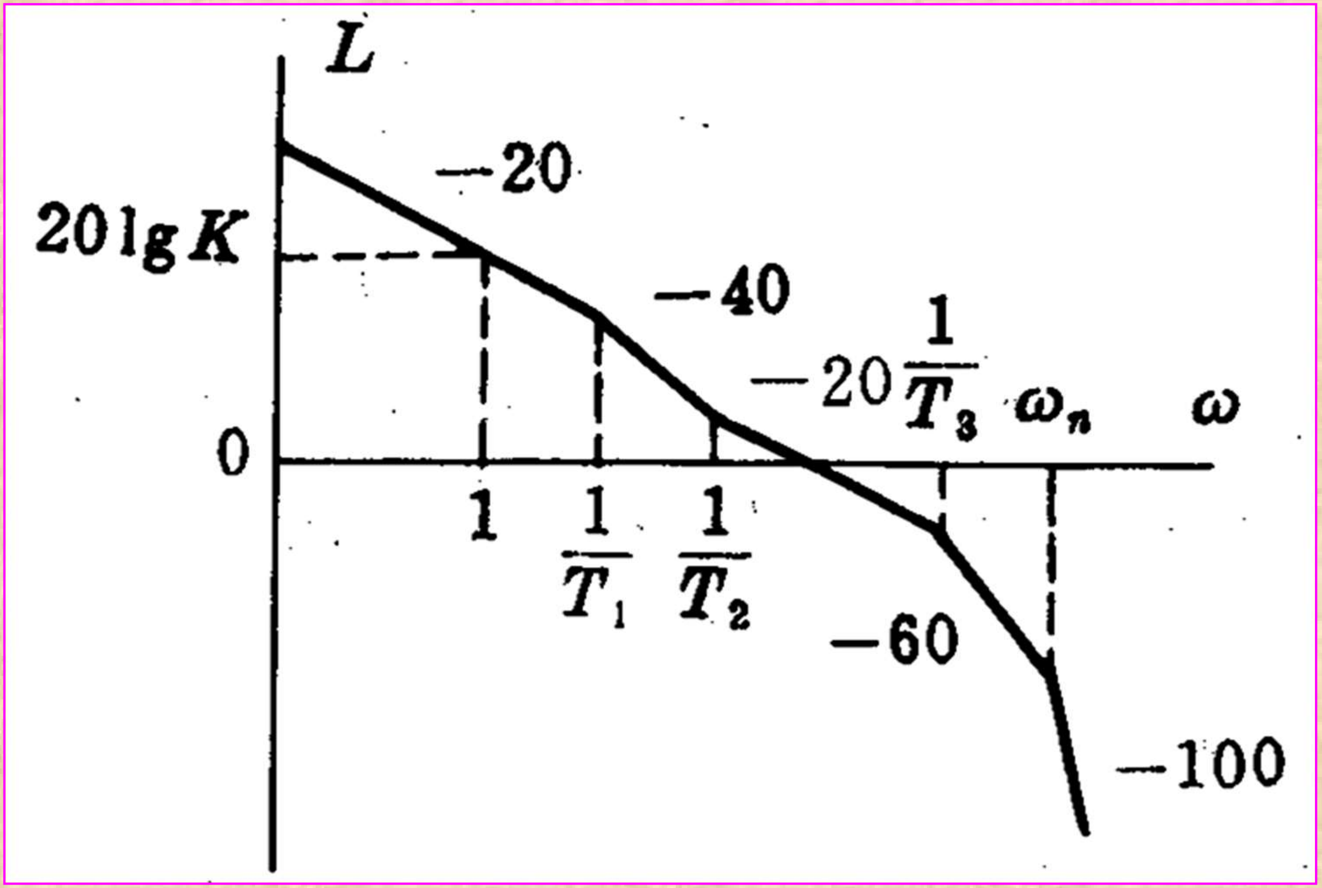
按照折线进行近似计算。

问题：开环增益增加，截止频率如何变化？

例：已知某系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(T_2s+1)\cdot\omega_n^{\ 2}}{s(T_1s+1)(T_3s+1)^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})},1>T_1>T_2>T_3>\frac{1}{\omega_n}$$

试绘出开环对数渐近幅频曲线。



例：5-6

5-4 频率域稳定判据

一. 奈氏判据的数学基础

1. 幅角原理

内容：把 s 平面上的各点映射到 $F(s)$ 平面上去，然后再映射到 $G_k(s)$ 平面上去。

设在 s 平面上有一个闭合路径顺时针包围 $F(s)$ 的一个零点，把该闭合路径映射到 $F(s)$平面上去：

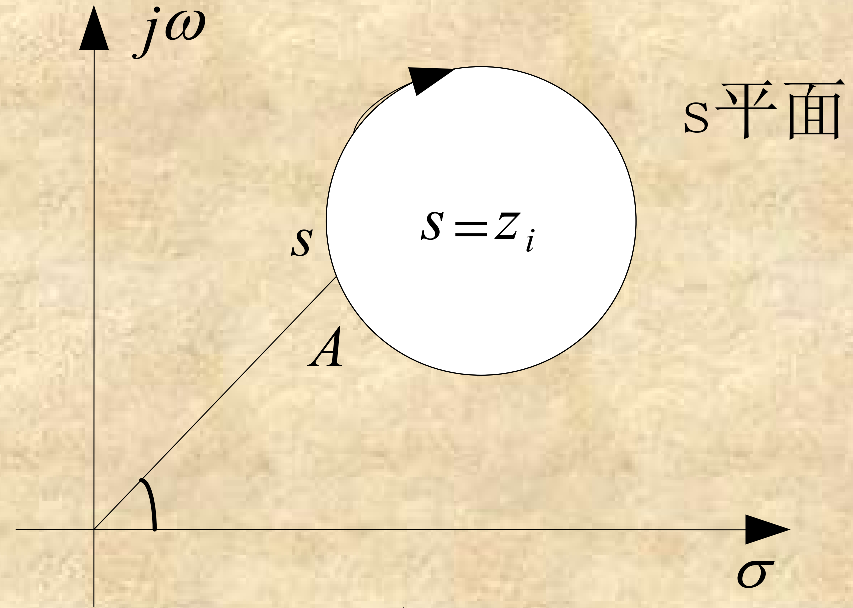
$$F(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

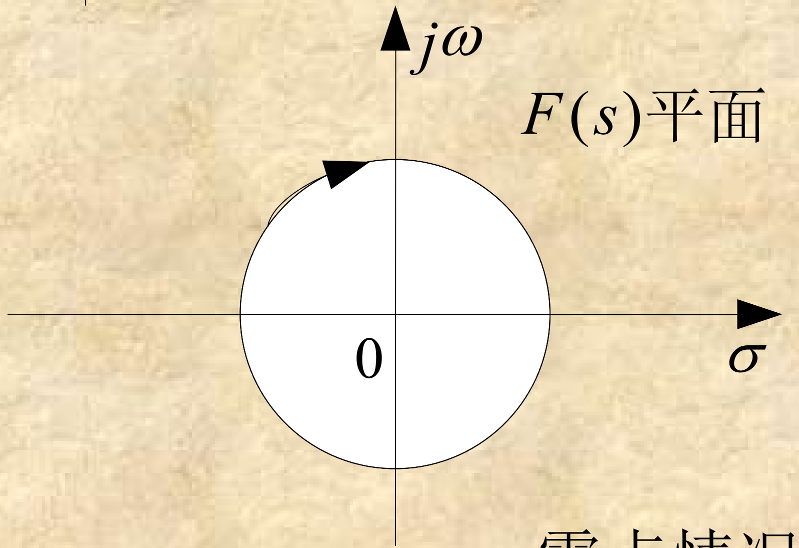
当 s 变化时，$F(s)$ 角度（相位）的变化为：

$$\Delta\angle F(s)=\sum_{i=1}^{m}\Delta\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\Delta\angle(s-p_j)$$

从A点开始顺时针包围 z_i 转一周：

$s-z_i$ 角度变化量为：-2π，不考虑其它因素导致的相角变化，则意味着在 $F(s)$ 平面上绕原点顺时针转一周。

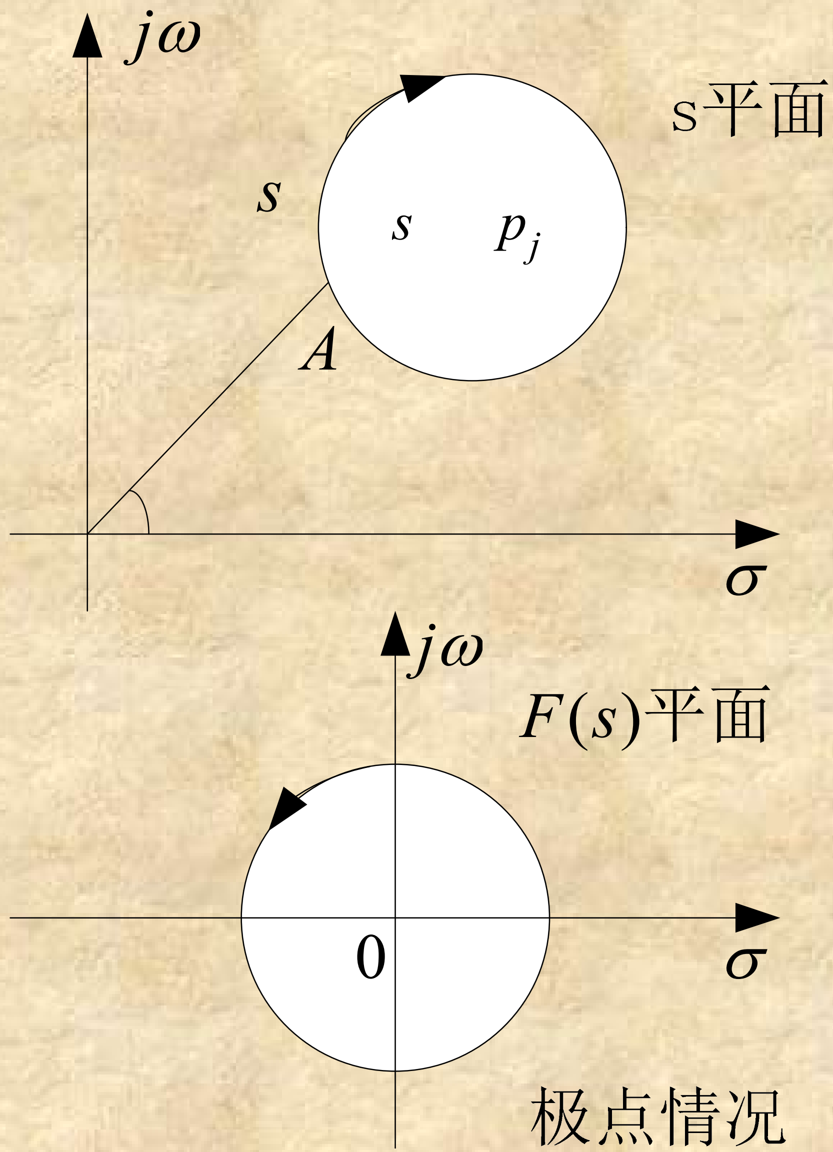




零点情况

从A点开始顺时针包围 p_j 转一周：

角度变化：-2π，意味着在 $F(s)$ 平面上绕原点逆时针转一周。



极点情况

幅角原理（映射定理）：在 s 平面上，闭合曲线 Γ 包围 $F(s)$ 的 P 个极点和 Z 个零点，则当 Γ 顺时针运动一周时，在 $F(s)$ 平面上，闭合曲线逆时针包围原点的圈数为：

$$R = P - Z$$

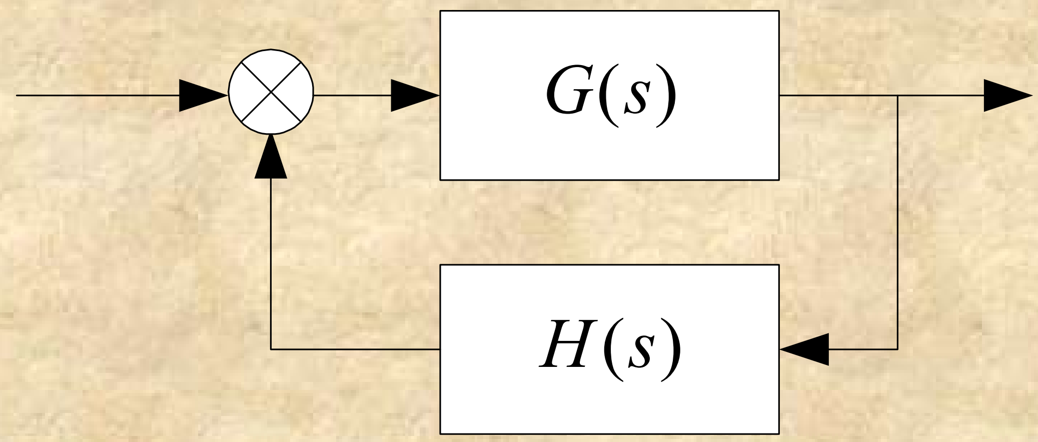
2. 复变函数$F(s)$的选择

开环传递函数： $G_k(s)=G(s)H(s)$

闭环传递函数：$G_B(s)=\dfrac{G(s)}{1+G_k(s)}$

特征方程：$1+G_K(s)=0$

系统稳定的充要条件：特征方程的根在s平面的左半平面。



令：$F(s)=1+G_k(s)$，设：$G_k(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$

则有：$F(s)=1+\dfrac{N(s)}{D(s)}=\dfrac{D(s)+N(s)}{D(s)}$

① $F(s)$的零点等于闭环传函的极点（Z个）；

② $F(s)$的极点等于开环传函的极点（P个）；

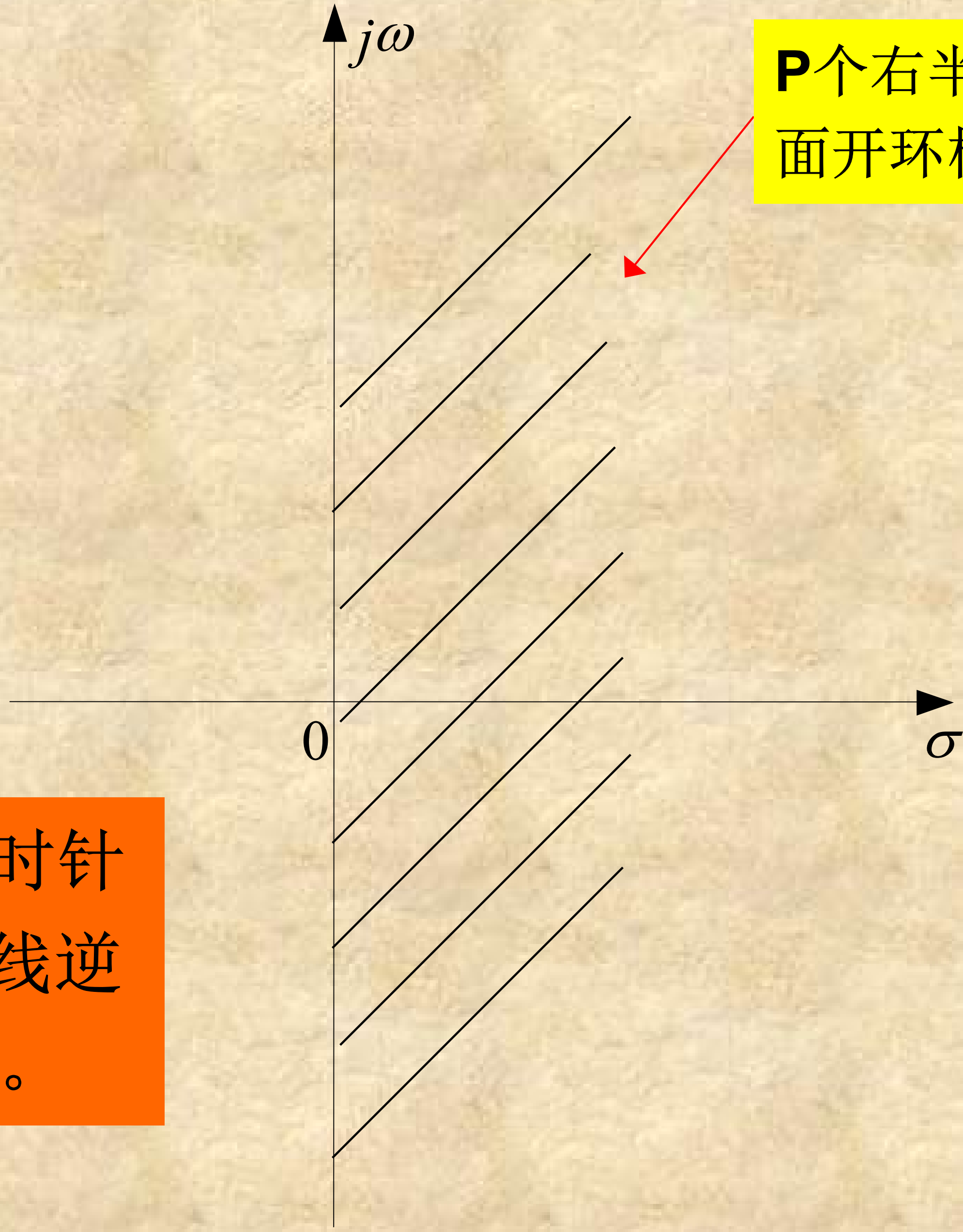
稳定问题转化为判断$F(s)$在右半平面的零点个数是否为零，即：$Z=0$？

$$R = P - Z$$

$$Z = P - R = 0\,?$$

Z: F(s)右半平面零点数。

R: 当**s**沿闭合曲线顺时针运动一周时，**F(s)**曲线逆时针包围原点的圈数。



P个右半平面开环极点

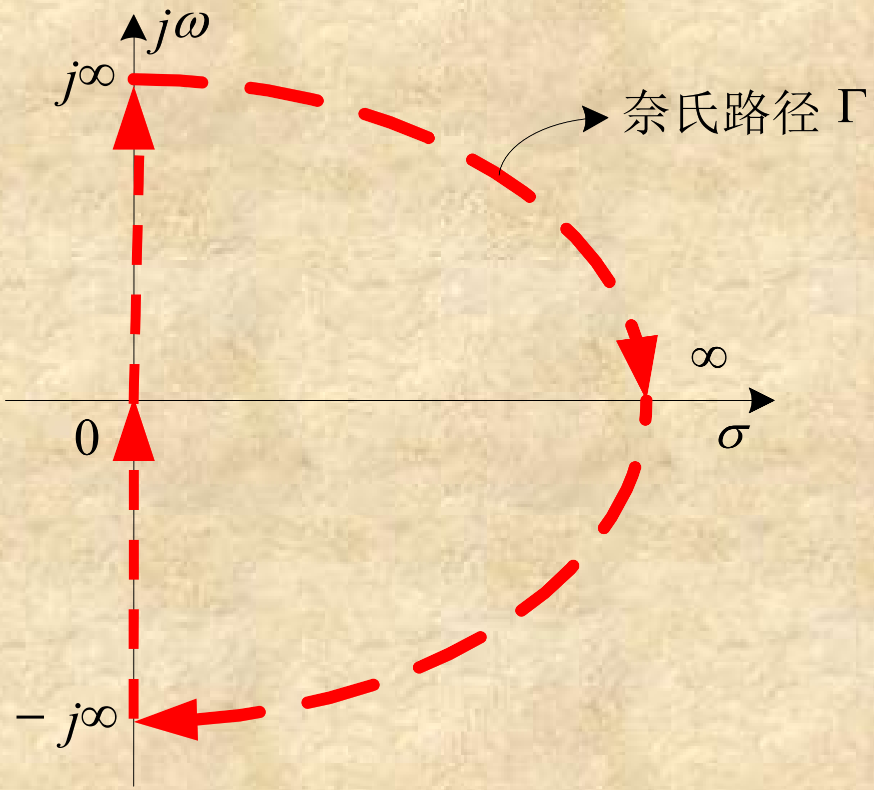
③ 闭合曲线 Γ_F 和 Γ_{GH} 只相差常数1，因此闭合曲线 Γ_F 包围 $F(s)$ 平面原点的圈数等于 Γ_{GH} 包围 $(-1, j0)$ 点的圈数。

直接选择曲线 Γ_{GH}（即开环系统的奈氏曲线），通过统计其包围点 $(-1, j0)$ 的圈数来分析系统稳定性。

3. s平面闭合曲线的选择

奈氏路径：包围s平面右半平面的闭合路径。

情形1：在虚轴上不包含极点

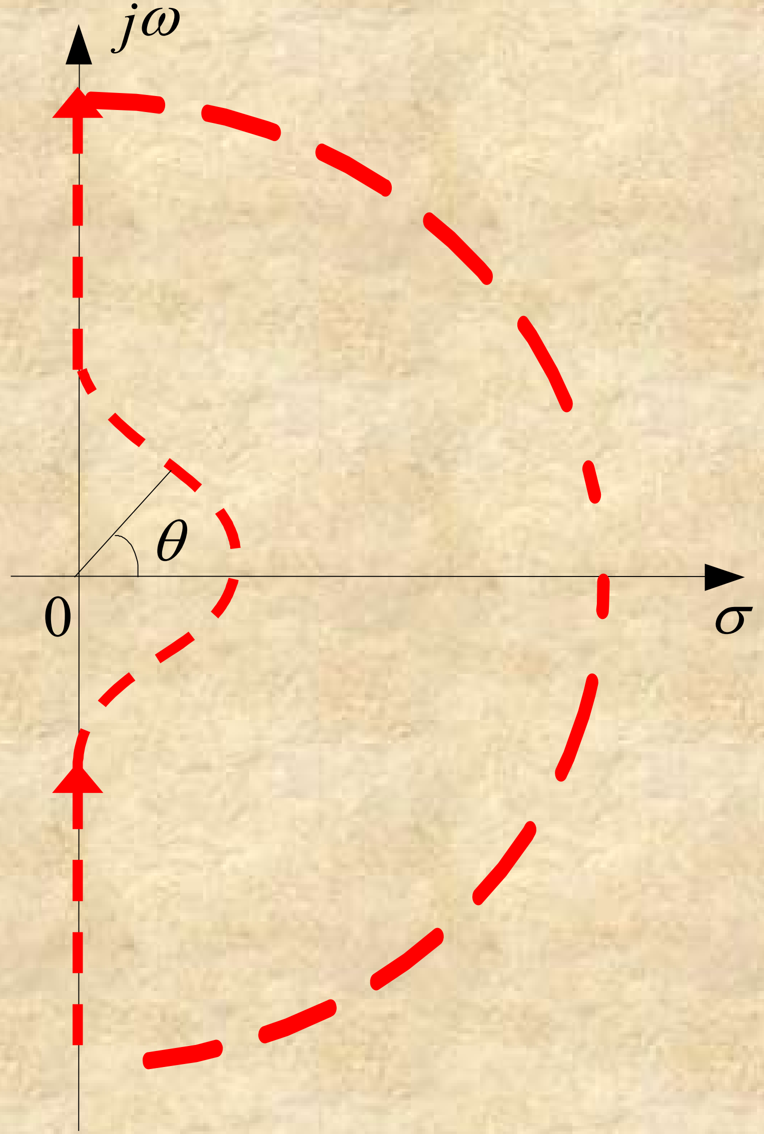


$$\Gamma: -j\infty \to 0 \to j\infty \to \infty e^{j\theta}(\theta \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}])$$

情形2：含有积分环节

奈氏路径从右侧绕过极点 $s=0$，为此，将极点附近的路径选择为半圆：

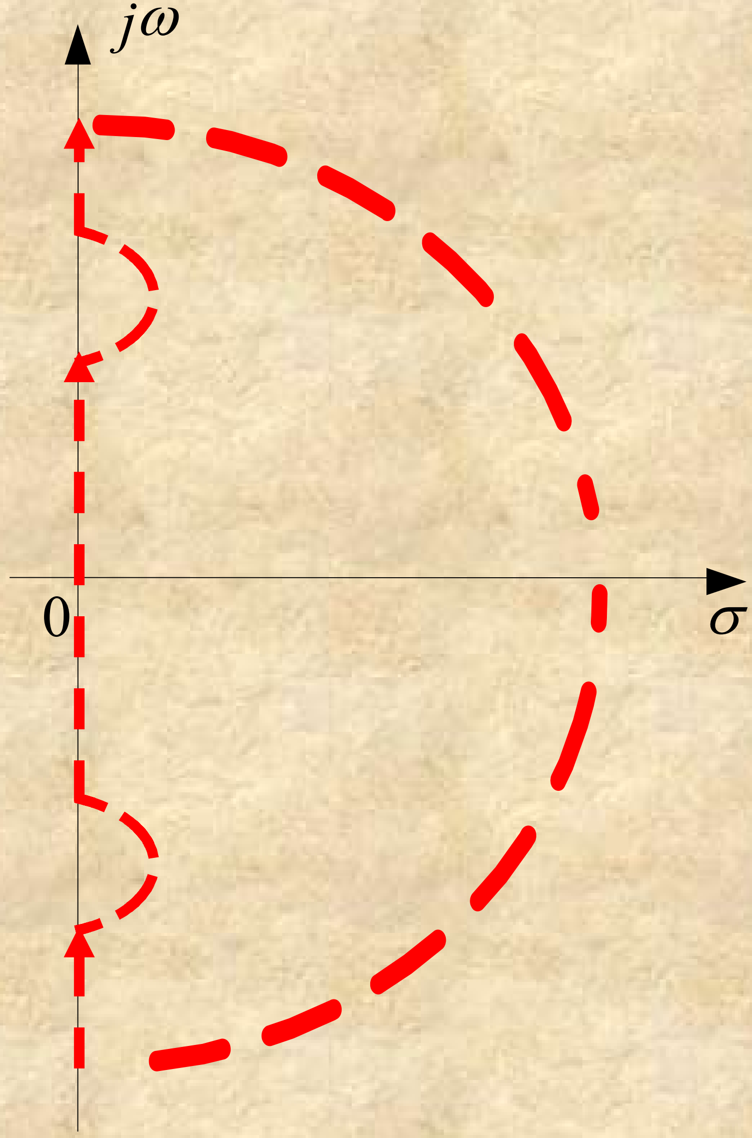
$$s=\varepsilon e^{j\theta},\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$



$$\Gamma:-j\infty\to\varepsilon e^{-j\frac{\pi}{2}}\to\varepsilon\to\varepsilon e^{j\frac{\pi}{2}}\to j\infty\to\infty e^{j\theta}(\theta\in[\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}])$$

情形3：虚轴含有非零极点奈氏路径从右侧绕过极点$s = j\omega_n$，为此，将极点附近的路径选择为半圆：

$$s = j\omega_n + \varepsilon e^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



4. 闭合曲线 Γ_{GH} 的绘制

曲线关于实轴对称，只画 $\mathrm{Im}(s)\geq 0$ 的部分曲线，对应的半闭合曲线叫做奈奎斯特曲线，记为Γ_{GH}。

情形1：在虚轴上不包含极点

第一部分：$s=j\omega, \omega\in[0,+\infty)$，即开环幅相曲线；

第二部分：$\infty e^{j\theta}(\theta\in[90^{\circ},0])$，对应平面上一个点

情形2：含有积分环节，设 $G(s)H(s)=\frac{1}{s^{\nu}}G_1(s)$

第一部分：原点附近, $s=\varepsilon e^{j\theta}(\theta\in[0,90^{\circ}])$；

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta})=\frac{1}{\varepsilon^{\nu}e^{j\nu\theta}}G_1(\varepsilon e^{j\theta})=\infty G_1(0)e^{-j\nu\theta}=\infty e^{-j(\nu\theta+\angle G_1(0))}$$

同时，$|G_1(0)|\neq 0,|G_1(0)|\neq\infty$

即从$\infty G_1(0)$开始，半径为 ∞，圆心角为 $\nu\times 90^{\circ}$ 的顺时针圆弧，交开环幅相曲线于 $G(j0^{+})H(j0^{+})$；

第二部分：$s=j\omega,\omega\in[0^{+},+\infty)$，即开环幅相曲线；

第三部分：$\infty e^{j\theta}(\theta\in[90^{\circ},0])$，对应平面上一个点。

情形3：虚轴上有极点，设 $G(s)H(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+\omega_n{}^2\right)^{\nu}}G_1(s)$

第一部分：在 $s=j\omega_n$ 附近，$s=j\omega_n+\varepsilon e^{j\theta}$；

$$G(s)H(s)=\frac{1}{\left(2j\omega_n\varepsilon e^{j\theta}+\varepsilon^2 e^{j2\theta}\right)^{\nu}}G_1(j\omega_n+\varepsilon e^{j\theta})\approx\frac{1}{\left(2j\omega_n\varepsilon e^{j\theta}\right)^{\nu}}G_1(j\omega_n)$$

$$=\frac{e^{-j\left(\theta+90^{\circ}\right)\nu}}{(2\omega_n\varepsilon)^{\nu}}G_1(j\omega_n)=\infty G_1(j\omega_n)e^{-j\left(\theta+90^{\circ}\right)\nu}$$

即从 $G(j\omega_{n-})H(j\omega_{n-})$开始，半径为$\infty$，圆心角为$\nu\times180^{\circ}$的顺时针圆弧，至 $G(j\omega_{n+})H(j\omega_{n+})$；

第二部分：$s=j\omega,\omega\in[0,\omega_n^-]$，幅相曲线一部分；

第三部分：$s=j\omega,\omega\in[\omega_n^+,+\infty)$，幅相曲线一部分；

第四部分：$\infty e^{j\theta}(\theta\in[90^\circ,0])$，对应平面上一个点。

注意：图5-31的图(b)过于特殊！

5. 闭合曲线 Γ_{GH} 包围 $(-1, j0)$ 点的圈数

$$R = 2N = 2\left(N_{+} - N_{-}\right)$$

N_{+}：正穿越，从左侧从上至下穿越；

N_{-}：负穿越，从左侧从下至上穿越

注意：a. 半次穿越，终止或起始于 $(-1, j0)$ 左侧；

b. 不要计算穿越 $(-1, j0)$ 点的次数；

c. 不要漏了补作圆弧产生的穿越次数。

例：图5-32

二. 奈奎斯特稳定判据

奈氏判据： 反馈控制系统稳定的充分必要条件是半闭合曲线 Γ_{GH}不穿过 $(-1, j0)$ 点且逆时针包围临界点 $(-1, j0)$ 的圈数R等于开环传递函数的正实部极点数P。

而当 Γ_{GH}穿过 $(-1, j0)$点时，存在 $s = \pm j\omega_n$，使：

$$G(\pm j\omega_n)H\left(\pm j\omega_n\right) = -1$$

即闭环系统存在纯虚根，系统可能临界稳定。

例：已知某系统的开环传递函数为

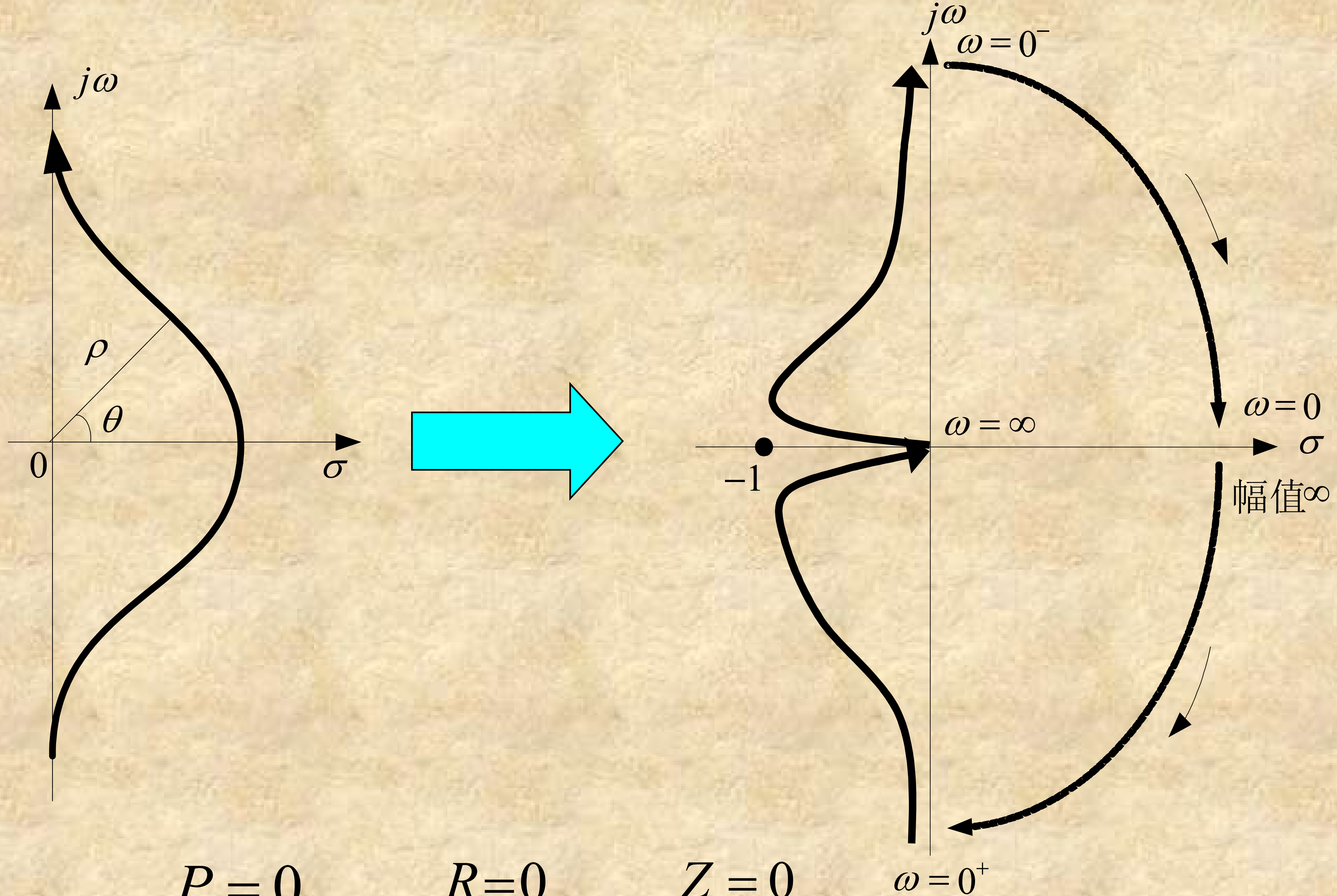
$$G_K(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$$

试分析其稳定性。

解：选择原点附近奈氏路径为： $s=\rho e^{j\theta},\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$s=\rho \quad \Rightarrow \quad G_k(0)=\frac{K}{\rho(T\rho+1)}$$

$$s=\rho e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad G_k(s)=\frac{K}{\rho e^{j\frac{\pi}{2}}(T\rho e^{j\frac{\pi}{2}}+1)}=\infty\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



$P=0$ $R=0$ $Z=0$

闭环系统稳定

例：已知某系统的开环传递函数为

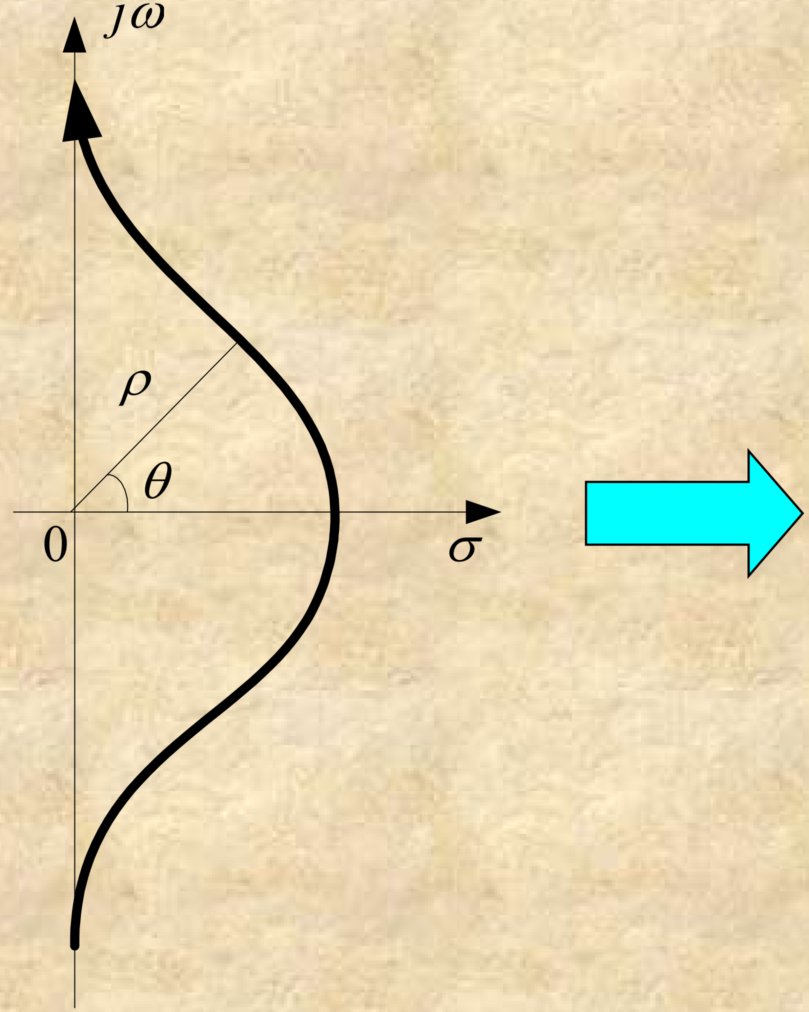
$$G_k(s)=\frac{K}{s(Ts-1)}$$

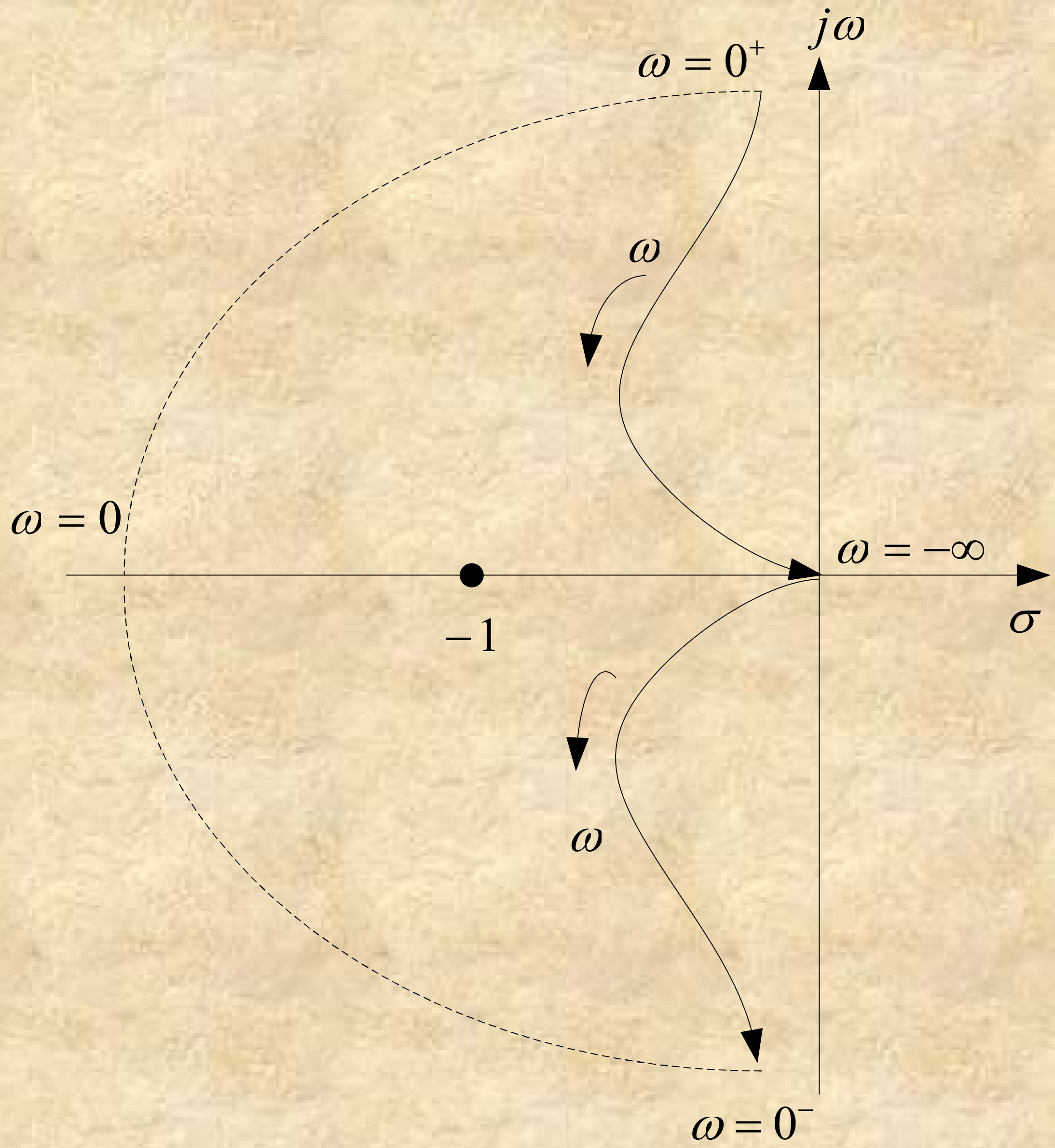
试分析其稳定性。

解：$P=1$，开环不稳定

$$s=\rho \Rightarrow G_k(s)=\left.\frac{K}{\rho(T\cdot\rho-1)}\right|_{\rho\to 0}=\infty e^{-j\pi}$$

$$s=\rho e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow G_k(s)=\left.\frac{K}{\rho e^{j\frac{\pi}{2}}(T\cdot\rho e^{j\frac{\pi}{2}}-1)}\right|_{\rho\to 0}=\infty e^{-j\frac{3\pi}{2}}$$





$P = 1$ $\quad R = -1$ $\quad Z = P - R = 2$

闭环系统不稳定

例：5-8，5-9

三. 对数频率稳定判据

设P为开环系统正实部的极点数，反馈控制系统稳定的充分必要条件是：

$$\varphi\left(\omega_c\right) \neq \left(2k+1\right)\pi; k = 0,1,2,\ldots$$

和$L(\omega) > 0$时，曲线穿越$\left(2k+1\right)\pi$线的次数满足：

$$Z = P - 2R = 0$$

例：5-10，5-11

四. 系统稳定的类型

- 条件稳定系统：系数改变影响稳定性的变化

- 结构不稳定系统：系统不稳定性与系数无关

5-5 稳定裕度

一. 相角裕度与幅值裕度

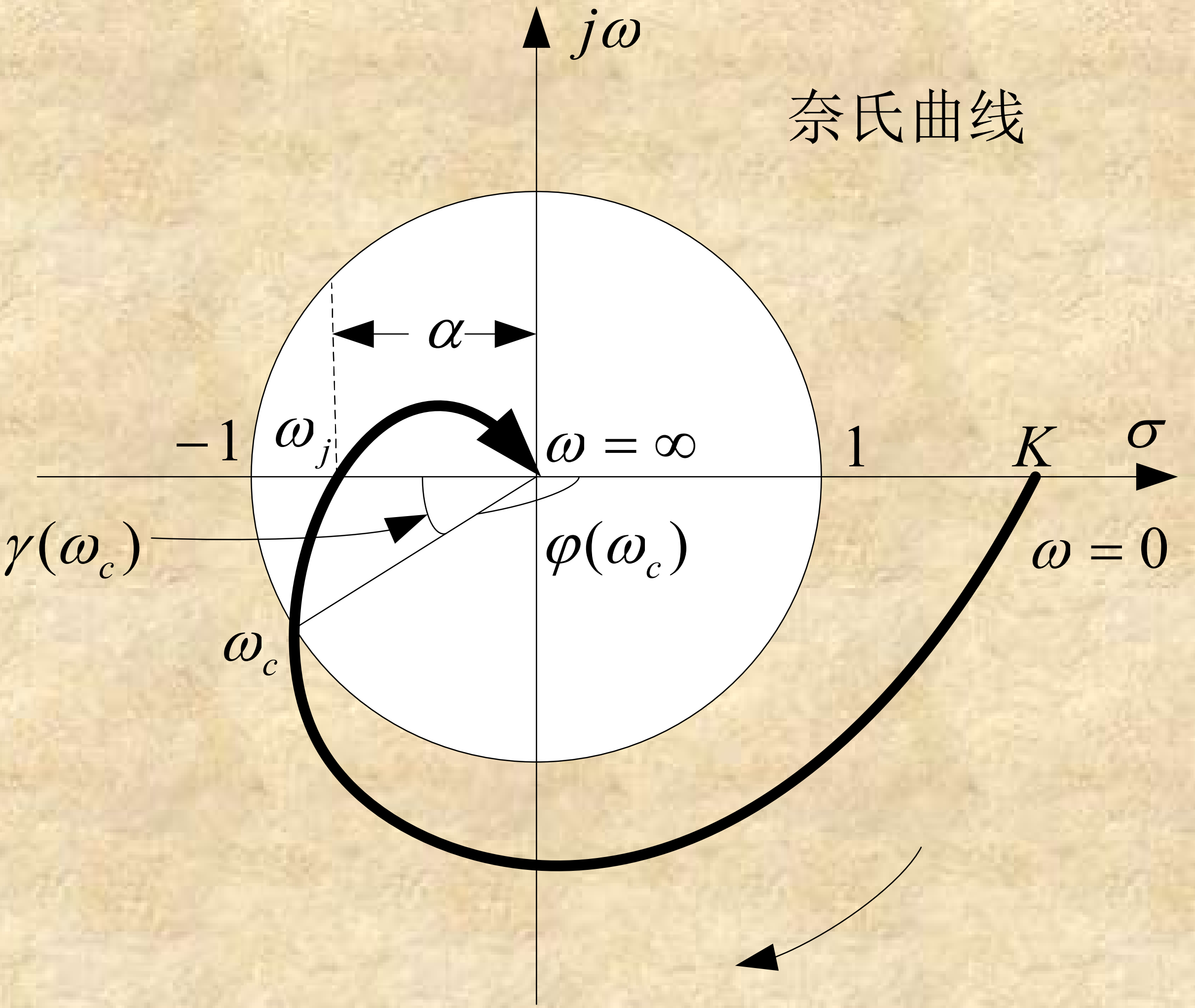
相角裕度：$\gamma(\omega_c) = \pi + \varphi(\omega_c)$

其中，ω_c 为截止频率：$L(\omega_c) = 0$

幅值裕度：$$h(\omega_x) = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}$$

其中，ω_x 为穿越频率：

$$\varphi(\omega_x) = \angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = -\pi$$

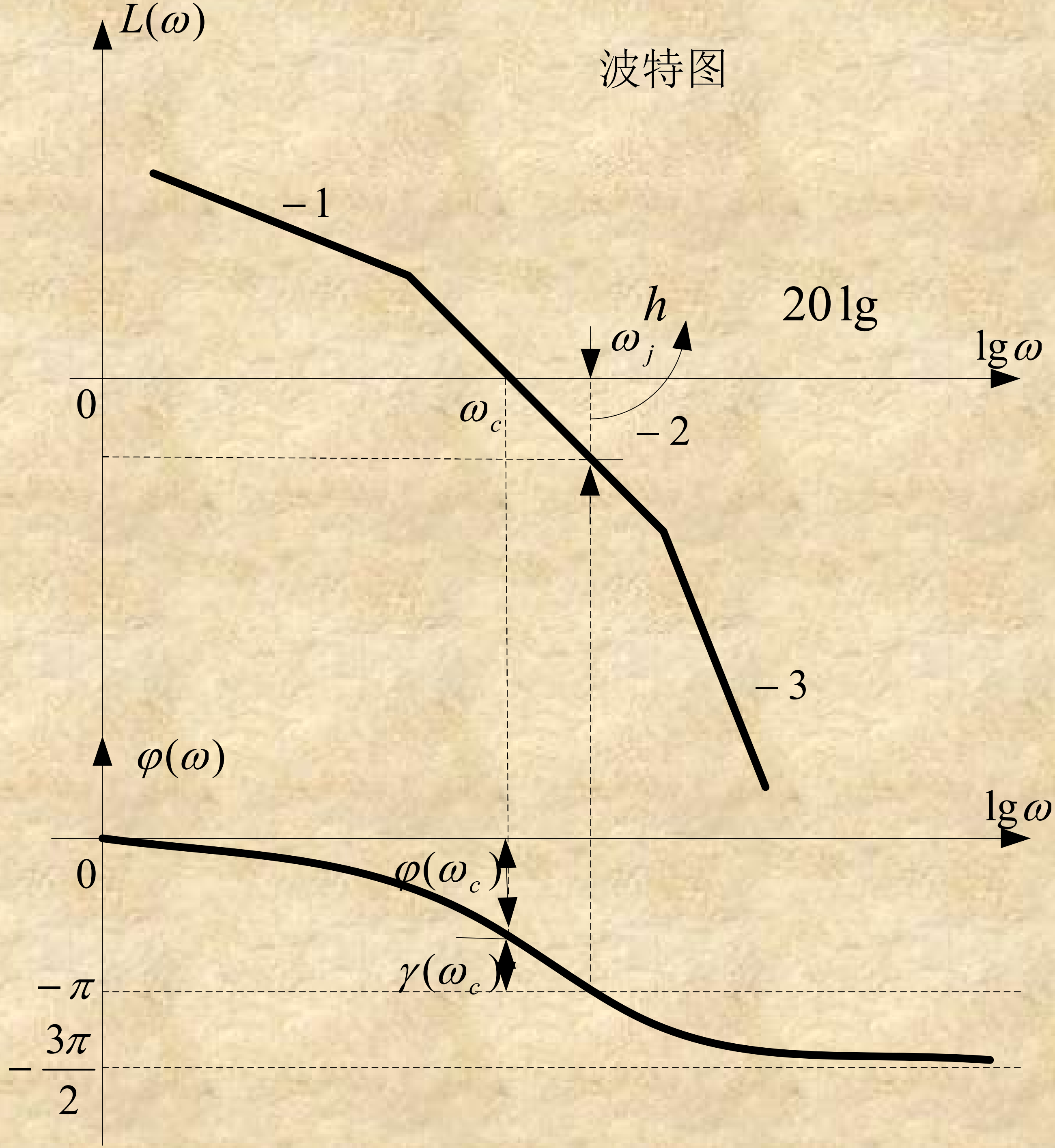


$\gamma(\omega_c)$：从负实轴标起，逆时针为正

$\gamma(\omega_c)$越大，系统稳定性越好；

$h(\omega_x)$越大，系统稳定性越好；

波特图


$L(\omega)$
-1
h
$20\lg$
ω_j
$\lg\omega$
0
ω_c
-2
-3
$\varphi(\omega)$
$\lg\omega$
0
$\varphi(\omega_c)$
$\gamma(\omega_c)$
$-\pi$
$-\frac{3\pi}{2}$

例：已知某系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

其中, $1 < \frac{1}{T} < K$ ，试分析其稳定性。

解：

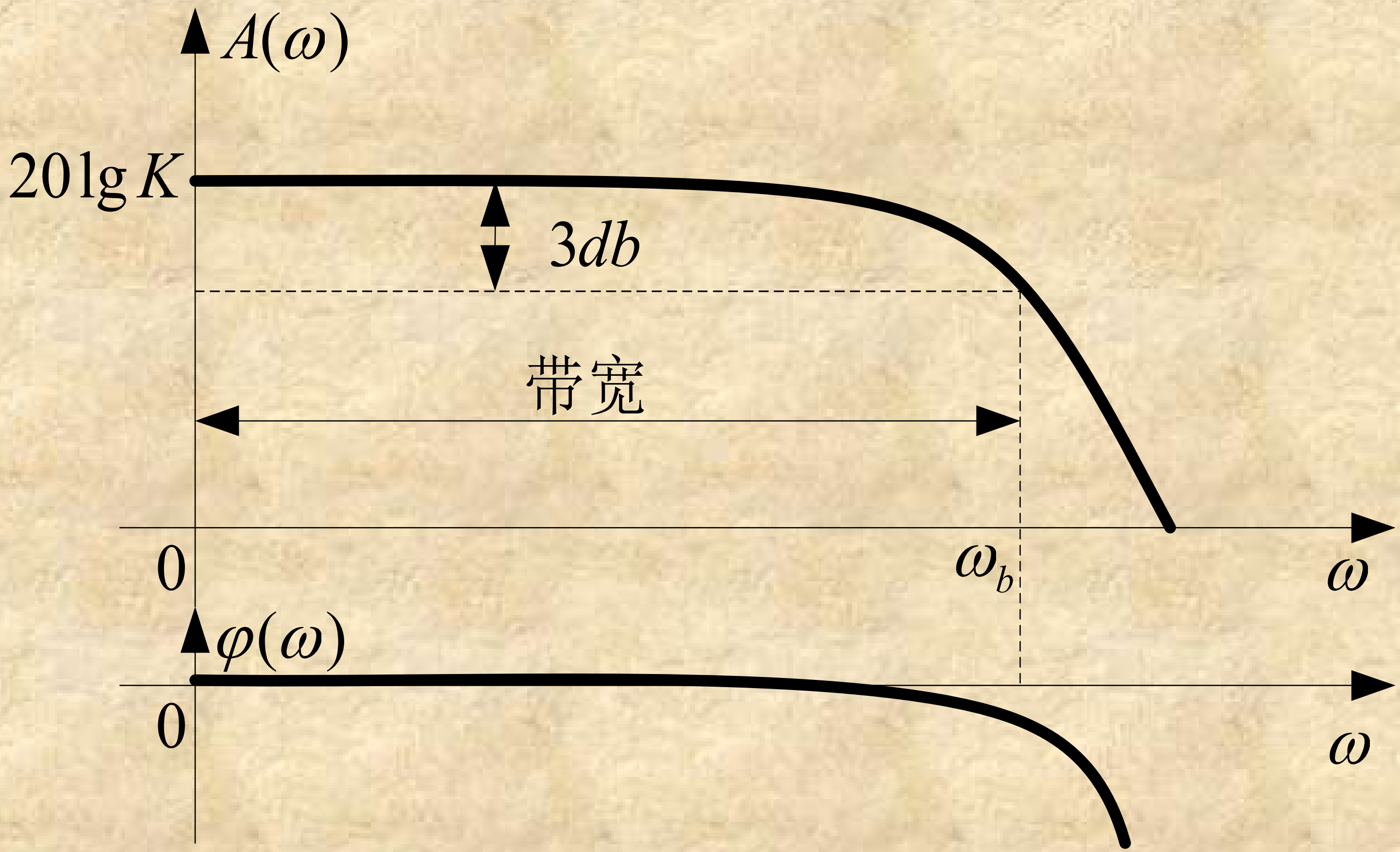
$$L(\omega_c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_c = \sqrt{\frac{K}{T}}$$

$$\varphi(\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - tg^{-1} T\omega_c$$

$$\gamma(\omega_c) = \pi - \frac{\pi}{2} - tg^{-1} T\omega_c = \frac{\pi}{2} - tg^{-1} T\omega_c$$

5-6 闭环系统的频域性能指标（自学）

一．控制系统的频带宽度



带宽：频率特性下降到频率为零时的分贝值以下3分贝，以 ω_b 表示。

对本章内容有疑问？