2010级高数期末

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

一、判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

解：$\because \lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}\Big/\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1}=4>1$

$\therefore$ 原级数发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n}{n^2}$

解：$\because \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2}=0$

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+1)}{(n+1)^2}\Big/\frac{1+n}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1}<1$

$\therefore$ 原交错级数收敛

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2}\Big/\frac{1}{n}=1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2}$ 发散

$\therefore$ 原级数条件收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

解：$\because \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e}=\infty$

$\therefore$ 原级数发散

二、判断下列广义积分的敛散性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$

解：$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{x^2}$

即 $x\to+\infty$，$\frac{x\arctan x}{1+x^3}\sim\frac{\pi}{2x^2}$

又 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$ 收敛

(2) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)\,dx}{x^{\frac{3}{2}}}$

解：$x=0$ 为原积分瑕点、

$\because \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

又 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛

$\therefore \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛

三、计算下列广义积分

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

解：原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$

$=\int_0^{+\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$

$=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

(2) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$

解：$x=e$ 为原积分瑕点，

原式 $=\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$

$=\int_1^e\frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2x}}$

$=\arcsin\ln x\Big|_1^e$

$=\frac{\pi}{2}$

四. 解微分方程.

(1) $\frac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}\cos x$

解: $y=e^{-\int -2x\,dx}\left(\int e^{x^2}\cos x\cdot e^{\int -2x\,dx}dx+C\right)$

$=e^{x^2}\left(\int e^{x^2}\cos x\cdot e^{-x^2}dx+C\right)$

$=e^{x^2}(\sin x+C)$

$=e^{x^2}\sin x+Ce^{x^2}$

(2) $y''-3y'+2y=0$

解: 原方程的特征方程为

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

得特征根为

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$

$\therefore y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

(3) 求微分方程 $y''-4y'+13y=0$ 满足初值条件 $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=3$ 的特解

解: 原微分方程的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+13=0$

解得其特征根为 $\lambda_1=2+3i$, $\lambda_2=2-3i$

$\therefore y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

$\because y|_{x=0}=C_1=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow y=C_2e^{2x}\sin 3x$

$\therefore y'=2C_2e^{2x}\sin 3x+3C_2e^{2x}\cos 3x$

又 $y'|_{x=0}=3C_2=3$

$\therefore C_2=1$

$\therefore$ 所求特解为 $y=e^{2x}\sin 3x$

五. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛区间,并求其和函数

解: $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$

$\therefore R=1$

又 $x=1$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)$ 发散; $x=-1$ 时 $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)(-1)^n$ 发散

$\therefore$ 原幂级数收敛域为 $(-1,1)$

令 $t=\sqrt{x}$, 则原幂级数化为 $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)t^{2n}$

$\because \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)t^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(t^{2n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n+1}\right)'=\left(\frac{t}{1-t^2}\right)'=\frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$

即 $S(x)=S(t^2)=\frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}=\frac{x+1}{(1-x)^2}$ $x\in(-1,1)$

2010 高数期末

南開大學 作业纸 第 页

系别________ 班级________ 姓名________

六.将函数 $f(x)=\frac{1}{2x^2-3x+1}$ 展开成x的幂级数

解：$f(x)=\frac{1}{2x^2-3x+1}=\frac{1}{(1-2x)(1-x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$

$\because \frac{2}{1-2x}=2\cdot[1+2x+(2x)^2+\cdots+(2x)^n+\cdots]=2\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$\therefore f(x)=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(2^{n+1}-1)$

七.将函数 $f(x)=2+|x|$ $(-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅里叶级数

解：令 $g(x)=|x|$，$(-1\le x\le 1)$

$\because g(x)$ 为偶函数，故其傅利叶级数中，$b_n=0$

又 $T=2$. $\therefore l=1$

$\therefore a_0=\frac{2}{l}\int_0^1 x\,dx=2\int_0^1 x\,dx=x^2\Big|_0^1=1$， $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=\frac{2}{l}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin n\pi x$

$=\frac{2}{n\pi}x\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,dx$

$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$

$\therefore a_n=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi^2}, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$

$\therefore f(x)=2+|x|=2+g(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$

八. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

证明：∵ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内存在二阶导数

∴ $f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

又 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$ 存在

∴ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=l$. $l\neq+\infty$

记 $g(\frac{1}{n})=|f(\frac{1}{n})|$，则 $g'(\frac{1}{n})=\begin{cases} f'(\frac{1}{n}), & f(\frac{1}{n})\geq 0 \\ -f'(\frac{1}{n}), & f(\frac{1}{n})<0 \end{cases}$

∴ $|g'(\frac{1}{n})|=|f'(\frac{1}{n})|$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}g'(\frac{1}{n})}{\frac{-2}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{g'(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|g'(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|f'(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f'(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right|=|l|$. 存在.

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 收敛

∴ 原级数绝对收敛.

（$f(0)=0$，$f'(0)=0$，~~泰勒展开~~ $n\to\infty$时 $f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\sim\frac{f''(0)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}$，

又 $f''(0)$ 存在，~~故原级数~~ $|f(\frac{1}{n})|\sim\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，故绝对收敛）