当 $P_0(x_0,y_0)\neq O(0,0)$时，令 $x=x_0+s, y=y_0+h$，则 $P(x,y)=P(x_0+s,y_0+h)$，当 $s\to 0, h\to 0$ 时，而 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$. 故 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{s\to 0\\ h\to 0}} f(x_0+s,y_0+h)$.

参 考 文 献

[1] 别尔曼著．数学解析习题集．高等教育出版社，1957. 7
[2] 复旦大学数学系主编．数学分析．上海科学技术出版社，1960. 5
[3] 同济大学数学教研室主编．高等数学．高等教育出版社，1978. 10
[4] 华东师大数学系程其襄主编．数学分析．人民教育出版社，1981. 5

关于 Dirichlet 积分的十种计算方法

沈克精
（安徽大学）

引 言

Dirichlet 积分$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ 是积分学中著名的积分，许多重要积分的计算最后都化为此积分，物理中阻尼振动以及其它实际问题，也常遇到此积分。不难证明，此积分是收敛的，但由于被积函数的原函数不能用初等函数表示，因此，不能用牛顿 — 莱布尼兹公式计算其结果，本文将分别用二重积分、含变量反常积分、复变函数、无穷级数、拉普拉斯变换、付立叶变换以及 δ 函数等方面的理论，运用十种不同的方法，计算 Dirichlet 积分，从而得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

方法一 利用二重积分计算

考虑二重积分 $I=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}dxdy$ [注 1]

先对 y 积分得到

$$I=\int_0^\infty \sin dx\int_0^\infty e^{-xy}dy=\int_0^\infty \sin x\left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_{y=0}^\infty dx=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx;$$

先对 x 积分得到

$$I=\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-xy}(-y\sin x-\cos x)}{1+y^2}\right]_{x=0}^\infty dy$$
$$=\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}=[\operatorname{arctg} y]_0^\infty=\frac{\pi}{2}.$$

因此，$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

方法二 利用含参变量以常积分计算（Ⅰ）

考虑积分 $\int_0^\infty e^{\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx \quad (\alpha\geqslant 0)$. (2.1)

由于 $I(\alpha)$在半直线 $\alpha\geqslant 0$ 上一致收敛，因此，$I(\alpha)$在 $\alpha\geqslant 0$ 上连续，特别，

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha)=I(0)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

另一方面，(2.1)对 α 微分得到

$$I'(\alpha)=-\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+\alpha^2} \tag{2.2}$$

由于 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $|I(\alpha)|\leqslant\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}$，

因此 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0.$

对(2.2)两端在(α,∞)上积分，得到

$$-I(\alpha)=-\int_{\alpha}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=-\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\alpha.$$

因此，当 $\alpha\to 0^+$时，得到

$$I(0)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

方法三　利用含参变量反常积分计算(Ⅱ)

考虑积分 $I=\int_0^{\infty}e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\quad(k>0,\alpha\geqslant 0).$ (3.1)

(3.1)对 α 微分得到

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}=\int_0^{\infty}e^{-kx}\cos\alpha x\mathrm{d}x=\frac{k}{\alpha^2+k^2} \tag{3.2}$$

是一致收敛的。因此，对于 $\alpha\geqslant 0$ 时，(3.2)对 α 求积分，得到

$$I=\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{k}. \tag{3.3}$$

(3.3)在假定 $k>0$ 之下导出的，但当 α 看作常量时，I 是 k 的函数，且当 $k=0$ 时它是连续的，即 $\lim\limits_{k\to 0^+}I=I_0$

若 $\alpha>0$，则 $I_0=\lim\limits_{k\to 0^+}\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{k}=\mathrm{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}.$

特别，取 $\alpha=1$，便得到 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

方法四　利用含参变量反常积分计算(Ⅲ)

考虑等式 $\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\alpha x\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\alpha^2}.$ (4.1)

等式(4.1)左端积分，对于任意 α 均一致收敛，故可在$[0,\alpha]$上，对 α 作两次积分得到

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\mathrm{d}x=\alpha\mathrm{arctg}\alpha-\ln\sqrt{1+\alpha^2}.$$

若令 $t=\alpha x$，则得

$$\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{\alpha}}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}x=\mathrm{arctg}t-\frac{\ln(1+\alpha^2)}{2\alpha} \tag{4.2}$$

(4.2)左端积分，对于 $\alpha>0$ 一致收敛，所以它是 α 的连续函数，因此，当 $\alpha\to+\infty$时，有

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

而 $$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\cos t-1}{t}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

因此 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

方法五　利用无穷级数计算

把积分 $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ 表成级数形式

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx. \tag{5.1}$$

令 $n=2m$，或 $n=2m-1$，并相应地作代换 $x=m\pi+t$ 或 $x=m\pi-t$，即有

$$\int_{2m\frac{\pi}{2}}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=(-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{m\pi+t}dt. \tag{5.2}$$

与

$$\int_{(2m-1)\frac{\pi}{2}}^{2m\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=(-1)^{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{m\pi-t}dt. \tag{5.3}$$

把(5.2)，(5.3)代入(5.1)即得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^m\left(\frac{1}{t+m\pi}+\frac{1}{t-m\pi}\right)\sin t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^m\frac{2t\sin t}{t^2-m^2\pi^2}dt.$$

由于　$\left|(-1)^m\frac{2t\sin t}{t^2-m^2\pi^2}\right|\leqslant\frac{1}{\pi\left(m^2-\frac{1}{4}\right)}$，　$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

故有数 $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2t\sin t}{t^2-m^2\pi^2}$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上一致收敛，因此，它可以逐项积分。

于是，可把 I 表成如下形式：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\left[\frac{1}{t}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2t}{t^2-m^2\pi^2}\right]dt.$$

注意到 $\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2t}{t^2-m^2\pi^2}$，　[注 2]

立得　$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$. 即　$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

方法六　利用复变函数计算

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\int_0^\infty\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx.$$

即

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right]. \tag{6.1}$$

考虑复积分　$\oint_L\frac{e^{iz}}{z}dz$

其中 L 为上半平面 $y\geqslant 0$ 及 $\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R$ 所围成的半圆环域的周界(如图所示)。

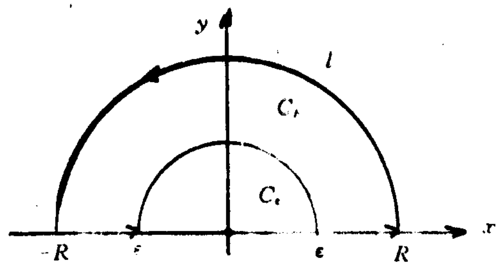
$$\oint_L\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz,$$

当 $R\to\infty$ 时，$\frac{e^{iz}}{z}$ 在上半平面无奇点，因此 $\oint_L\frac{e^{iz}}{z}dz=0$.

同时，由约旦引理 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$,

故当 $R\to\infty$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right]=-\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz.$

(6.2)



以下计算上式右端极限：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}dz+\int_{C_\varepsilon}P(z)dz\right],\tag{6.3}$$

其中 $P(z)$ 为解析部分。

当 $\varepsilon\to0$ 时，$\left|\int_{C_\varepsilon}P(z)dz\right|\leqslant M2\pi\varepsilon\to0$，

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}dz=-\int_0^\pi\frac{i\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\varphi=-\pi i.\tag{6.4}$$

联系(6.4)，(6.3)，(6.2)，(6.1)立得

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx+\frac{1}{2i}\cdot\pi i=\frac{\pi}{2}.$$

方法七 利用拉谱拉斯(Laplace)变换计算(Ⅰ)

定理1 若 $L[f(t)]=F(p)$ 且 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}$ 存在，则 $L[\frac{f(t)}{t}]=\int_p^\infty F(p)dp.$

证 $\int_p^\infty F(p)dp=\int_p^\infty\left[\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right]dp=\int_0^\infty\left[\int_p^\infty f(t)e^{-pt}dp\right]dt$

$=\int_0^\infty f(t)\left[\frac{e^{-pt}}{-t}\right]_p^\infty dt=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt=L[\frac{f(t)}{t}].$

由定理1，如果 $\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt$ 收敛，则有 $\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp$. 因此，$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\infty L[\sin x]dp=\int_0^\infty\frac{dp}{1+p^2}=[\mathrm{arctg}\,p]_0^\infty=\frac{\pi}{2}.$

方法八 利用拉普拉斯变换计算(Ⅱ)

定理2 若 $L[f(t,x)]=F(p,x)$，则 $L[\int_{x_0}^x f(t,x)dx]=\int_{x_0}^x F(p,x)dx$

证 $\int_{x_0}^x F(p,x)dx=\int_{x_0}^x\left[\int_0^\infty f(t,x)e^{-pt}dt\right]dx=\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_{x_0}^x f(t,x)dx\right]dx.$

即
$$L\left[\int_{x_0}^x f(t,x)dx\right]=\int_{x_0}^x F(p,x)dx.$$

由定理2，选取 $f(t,x)=\frac{\sin tx}{x}\quad(t>0)$，$L[f(t,x)]=\frac{1}{p^2+x^2}=F(p,x)$，

$$L\left[\int_0^\infty f(t,x)dx\right]=\int_0^\infty F(p,x)dx=\int_0^\infty\frac{dx}{p^2+x^2}=\left[\frac{1}{p}\mathrm{arctg}\frac{x}{p}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{2p},$$

因此 $\int_0^\infty f(t,x)dx=\frac{\pi}{2}$. 即 $\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$

取 $t=1$，得到 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$

方法九 利用付立叶(Fourier)变换计算

考虑函数

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<\lambda,\\ \frac{1}{2}, & |t|=\lambda,\\ 0, & |t|>\lambda,\end{cases}$$

$f(t)$的付立叶变换为

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt=\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-iwt}dt=[-\frac{1}{iw}e^{-iwt}]_{-\lambda}^{\lambda}=\frac{e^{i\lambda w}-e^{-i\lambda w}}{iw}=\frac{2\sin\lambda w}{w}$$

$f(t)$的付立叶积分为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwt}dw=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda w}{w}e^{iwt}dw$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda w\cos wt}{w}dw+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda w\sin wt}{w}dw].$$

即 $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda w\cos wt}{w}dw=\begin{cases}\pi, & |t|<\lambda,\\ \frac{\pi}{2}, & |t|=\lambda,\\ 0, & |t|>\lambda.\end{cases}$$

若取 $\lambda=1$，则 $t=1$.

立得 $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w\cos w}{w}dw=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2w}{2w}d(2w)=\frac{\pi}{2}.$$

即 $$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

方法十　利用 δ 函数计算

考虑 $\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ \infty, & t=0.\end{cases}$　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1.$

$f(t)$的付立叶变换为

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-iwt}dt=e^{-iwt}\Big|_{t=0}=1;$$

$\delta(t)$的付立叶积分为

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos wt\,dw.$$

即 $$\int_{0}^{\infty}\cos wt\,dw=\pi\delta(t).$$

对于积分 $$I(\lambda)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx\quad(\lambda>0),$$

两边对参数 λ 微分得到

$$I'(\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\cos\lambda x\,dx=\pi\delta(\lambda),$$

对方程 $I'(\lambda)=\pi\delta(\lambda)$的两端取拉普拉斯变换，可得

$$L[I'(\lambda)]=\pi L[\delta(t)].$$

若记 $L[I(\lambda)]=\bar{I}(p)$，即得　$p\bar{I}(p)-p(0)=\frac{\pi}{2}$　[注 3]

因 $I(0)=0$，故得 $\bar{I}(p)=\frac{\pi}{2p}$，因此，$I(\lambda)=\frac{\pi}{2}$. 取 $\lambda=1$，立得$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

由上面计算结果，可进一步得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda x}{x} dx = \begin{cases} \pi, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0, \\ -\pi, & \lambda < 0. \end{cases}$$

［注 1］此二重广义积分在主值意义下收敛。

［注 2］利用公式$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{t}{2})$，可以得到$\frac{1}{\sin t}$的展开式。

［注 3］$L[\delta(\lambda)] = \int_0^{\infty} \delta(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) e^{-p|\lambda|} d\lambda = \frac{1}{2} e^{-p|\lambda|}\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{2}.$

参 考 文 献

[1] Kunze, L. E. R. Integrals Operators. (1978)
[2] (波兰)拐·米库辛斯基．算符演算．王建午译．上海科技出版社，(1964)
[3] (日)河田龙夫．付立叶变换与拉普拉斯变换．钱端壮译．上海科技出版社，(1961)
[4] 沈克精．拉普拉斯(Laplace)变换的一个新应用．数学的实践与认识，1991 年第一期
[5] 沈克精．有限付立叶正弦和余弦变换及其应用．安徽大学学报(数学专辑)．1987

用跃度求多项式函数的 Fourier 级数

周 南
(浙江工业大学)

我们在求一个函数的 Fourier 级数时，虽然方法并不难，只须套用公式，然而计算却往往十分麻烦，特别是多项式函数，需要分部积分多次。我们在平时常遇的函数不少是分段多项式函数(也包括不分段的)，现在我们引进“跃度”这一概念，利用函数及其各阶导数的跃度来求这类函数的 Fourier 系数，无须分部积分，可以大大减少计算量。

定义 1 设 x_0 是分段多项式函数 $f(x)$ 的分段点，称 $d_0 = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的跃度。

当 $f(x_0+0) - f(x_0-0) > 0$，跃度为正；当 $f(x_0+0) - f(x_0-0) < 0$ 跃度为负；当 $f(x_0+0) - f(x_0-0) = 0$ 跃度为零。

我们并用 d_0'，d_0''，…，分别表示 $f'(x)$，$f''(x)$，…，在 x_0 点的跃度。

定义 2 设 x_{i-1}，x_i 是分段多项函数 $f(x)$ 的两个相邻的分段点，则

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) dx = f(x_i - 0) - f(x_{i-1} + 0)$$

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的分段多项式周期函数，其在$[-\pi, \pi]$上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} P_1(x), & -\pi < x \leqslant x_1, \\ P_2(x), & x_1 < x \leqslant x_2, \\ \cdots & \\ P_n(x), & x_{n-1} < x \leqslant x_n \quad (x_n = \pi), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $P_1(x)$，$P_2(x)$，…，$P_n(x)$ 均为多项式函数。