第11章 电路的频率响应

●重点

1. 网络函数

2. 串、并联谐振的概念；

$\frac{1}{j\omega C}$

11.1 网络函数

$j\omega L$

当电路中激励源的频率变化时，电路中的感抗、容抗将跟随频率变化，从而导致电路的工作状态亦跟随频率变化。因此，分析研究电路和系统的频率特性就显得格外重要。

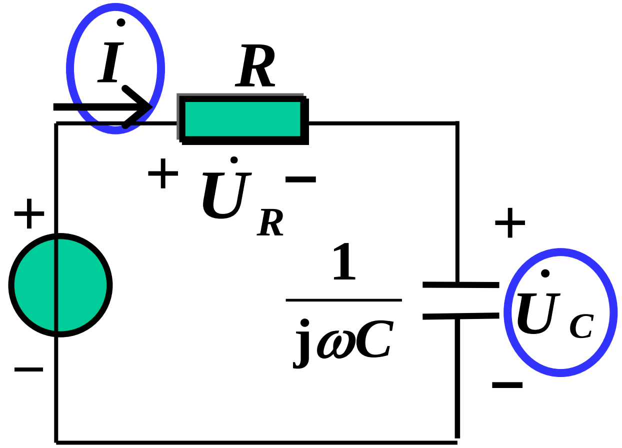
ω

频率特性 →

电路和系统的工作状态跟随频率而变化的现象，称为电路和系统的频率特性，又称频率响应。

激励

$U_S\angle\varphi$



响应

$$\dot{I} = \frac{U_S\angle\varphi}{R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{U_S}{\sqrt{R^2 + \left(1/\omega C\right)^2}}\angle\left(\varphi + \arctan 1/\omega RC\right)$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \frac{U_S}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}\angle\left(\varphi + \arctan 1/\omega RC - 90^\circ\right)$$

电路响应的幅值和相角均随频率的变化而变化

电路的频率响应 ⟷ 电路的频率特性

改变电路激励的频率（维持其幅值不变）对电路造成的影响。

阻抗 → 阻抗频率特性、电抗频率特性

支路电压电流 → 电压频率特性、电流频率特性

输入输出关系 → 网络函数

$X_L = \omega L$

$$\dot{I} = \frac{U_S}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \angle\left(\varphi + \arctan \frac{1}{\omega RC}\right)$$

$$H = \frac{\text{响应}}{\text{激励}}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \angle -\arctan(\omega RC)$$

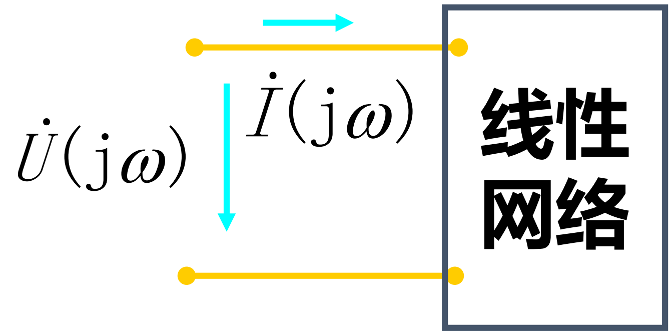
1. 网络函数H（jω）的定义

在线性正弦稳态网络中，当只有一个独立激励源作用时，网络中某一处的响应（电压或电流）与网络输入之比，称为该响应的网络函数。

$$H(\mathrm{j}\omega) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\dot{R}(\mathrm{j}\omega)}{\dot{E}(\mathrm{j}\omega)}$$

2. 网络函数$H(j\omega)$的物理意义

● 驱动点函数



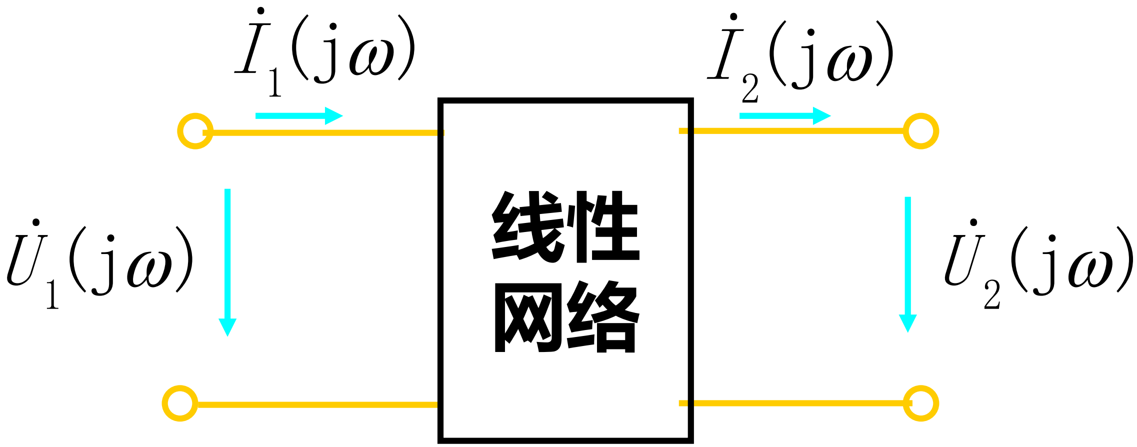
激励是电流源，响应是电压

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}(j\omega)}{\dot{I}(j\omega)}\longrightarrow \text{策动点阻抗}$$

激励是电压源，响应是电流

$$H(j\omega)=\frac{\dot{I}(j\omega)}{\dot{U}(j\omega)}\longrightarrow \text{策动点导纳}$$

● 转移函数(传递函数)



激励是电压源

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{I}_2(\mathrm{j}\omega)}{\dot{U}_1(\mathrm{j}\omega)}$$

转移导纳

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2(\mathrm{j}\omega)}{\dot{U}_1(\mathrm{j}\omega)}$$

转移电压比

激励是电流源

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2(\mathrm{j}\omega)}{\dot{I}_1(\mathrm{j}\omega)}$$

转移阻抗

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{I}_2(\mathrm{j}\omega)}{\dot{I}_1(\mathrm{j}\omega)}$$

转移电流比

注意

① $H(j\omega)$与网络的结构、参数值有关，与输入、输出变量的类型以及端口对的相互位置有关，与输入、输出幅值无关。因此网络函数是网络性质的一种体现。

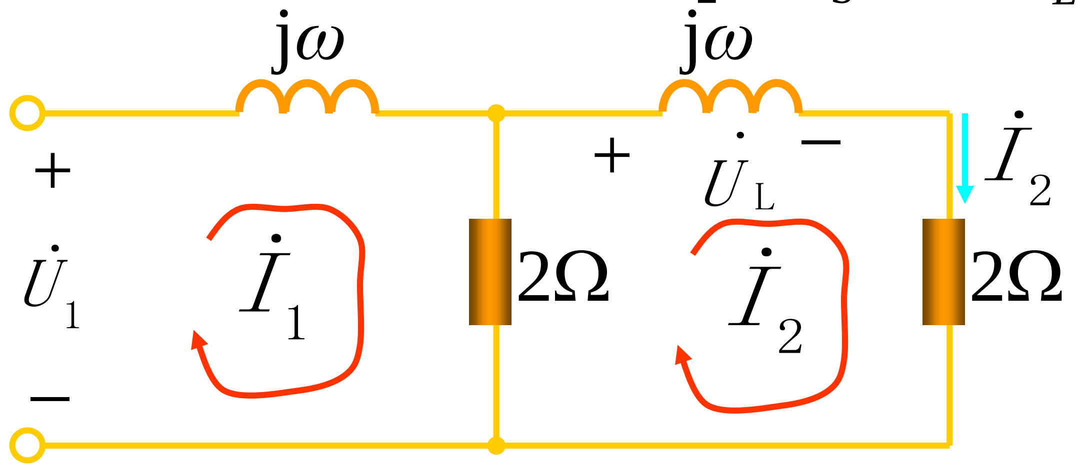
② $H(j\omega)$ 是一个复数，它的频率特性分为两个部分：

$\boxed{\text{幅频特性}}$ ⟶ 模与频率的关系 $|H(j\omega)| \sim \omega$

$\boxed{\text{相频特性}}$ ⟶ 幅角与频率的关系 $\phi(j\omega) \sim \omega$

③ 网络函数可以用相量法中任一分析求解方法获得。

例　求图示电路的网络函数 $\dot{I}_2/\dot{U}_S$ 和 $\dot{U}_L/\dot{U}_S$



解　列网孔方程解电流 $\dot{I}_2$

$$\begin{cases} (2+\mathrm{j}\omega)\dot{I}_1 - 2\dot{I}_2 = \dot{U}_S \\ -2\dot{I}_1 + (4+\mathrm{j}\omega)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{2\dot{U}_S}{4+(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}6\omega}$$

$$\dot{I}_2/\dot{U}_S = \frac{2}{4-\omega^2+\mathrm{j}6\omega}$$

转移导纳

$$\dot{U}_L/\dot{U}_S = \frac{\mathrm{j}2\omega}{4-\omega^2+\mathrm{j}6\omega}$$

转移电压比

注意

①以网络函数中jω的最高次方的次数定义网络函数的阶数。

②由网络函数能求得网络在任意正弦输入时的端口正弦响应，即有

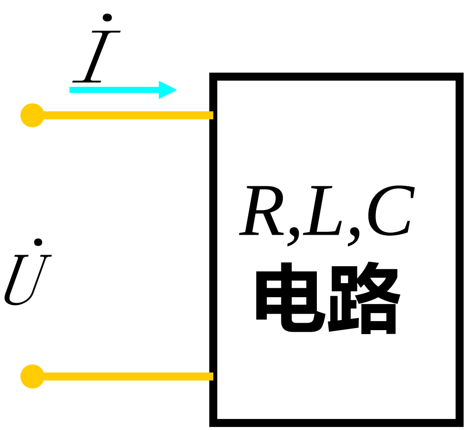
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{R}(\mathrm{j}\omega)}{\dot{E}(\mathrm{j}\omega)} \longrightarrow \dot{R}(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)\dot{E}(\mathrm{j}\omega)$$

11.2 *RLC*串联电路的谐振

谐振是正弦电路在特定条件下产生的一种特殊物理现象。谐振现象在无线电和电工技术中得到广泛应用，研究电路中的谐振现象有重要实际意义。

1. 谐振的定义

含R、L、C的一端口电路，在特定条件下出现端口电压、电流同相位的现象时，称电路发生了谐振。



$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = R$$

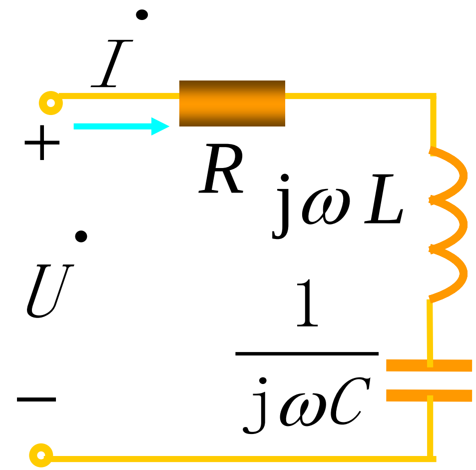
发生谐振

2.串联谐振的条件

$+\frac{1}{jwC}$

$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + \mathrm{j}(X_L + X_C)$$

$$= R + \mathrm{j}X$$



$$X = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

谐振条件

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

谐振角频率

仅与电路参数有关

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

谐振频率

串联电路实现谐振的方式：

(1) $L\ C$ 不变，改变 ω　　$\omega=\omega_0$

ω_0由电路参数决定，一个$R\ L\ C$串联电路只有一个对应的ω_0，当外加电源频率等于谐振频率时，电路发生谐振。

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

(2)电源频率不变，改变 L 或 C（常改变C）。

$\omega_0=\omega$

3. *RLC*串联电路谐振时的特点

阻抗的频率特性

$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = |Z(\omega)| \angle\phi(\omega)$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

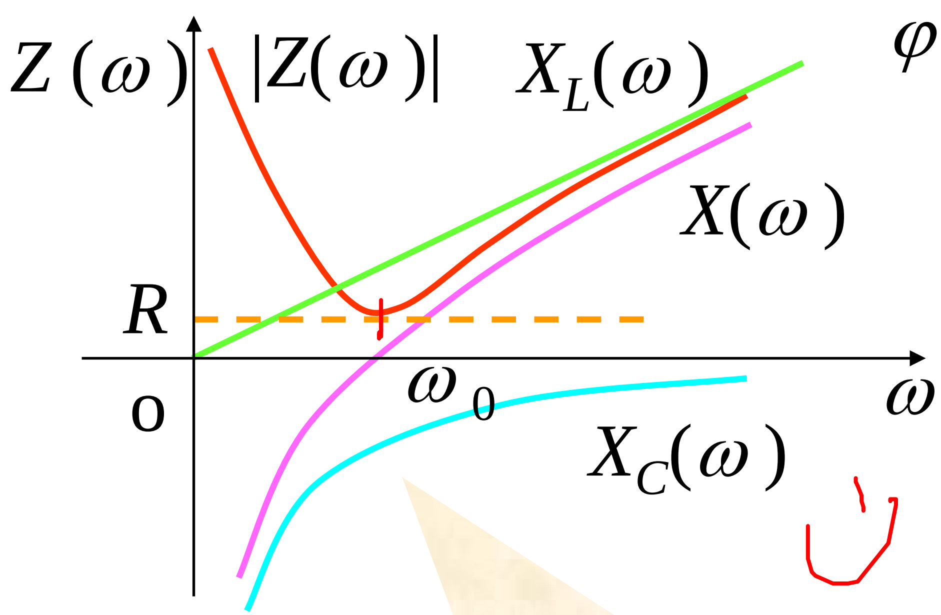
$$\phi(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{X_L + X_C}{R} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{X}{R}$$

幅频特性

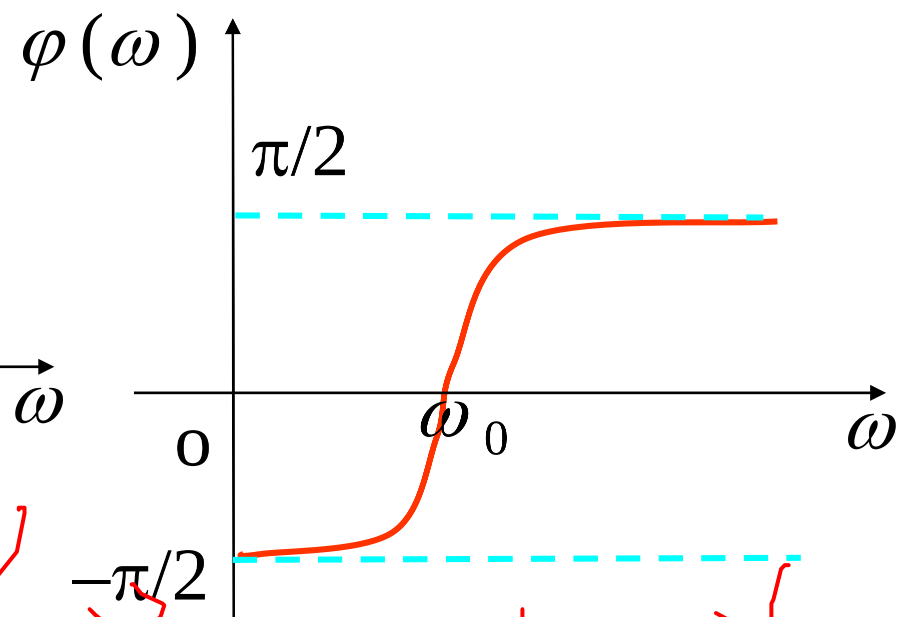
相频特性

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\phi(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{X_L + X_C}{R} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{X}{R}$$



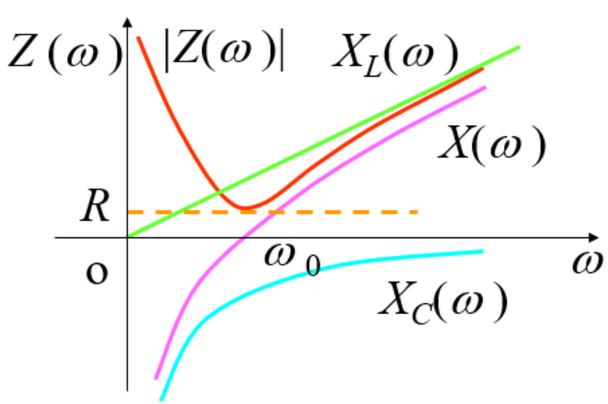
Z(jω)频响曲线

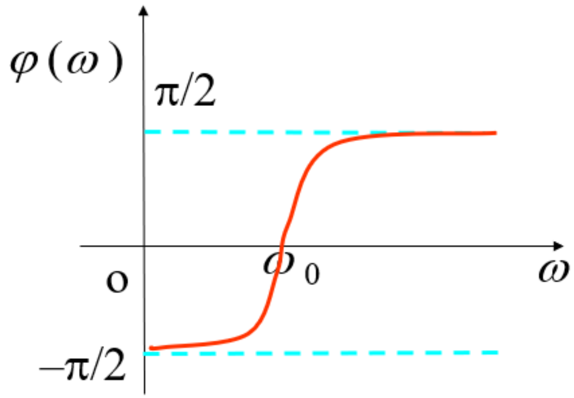


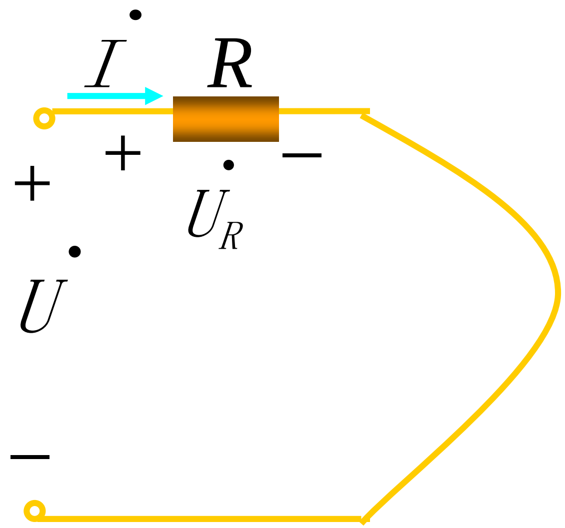
$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Z(jω)频响曲线表明阻抗特性可分三个区域描述：

容性区	电阻性	感性区
$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$X(j\omega) < 0$	$X(j\omega) = 0$	$X(j\omega) > 0$
$\phi(j\omega) < 0$	$\phi(j\omega) = 0$	$\phi(j\omega) > 0$
$R < \lvert Z(j\omega) \rvert$	$Z(j\omega_0) = R$	$R < \lvert Z(j\omega) \rvert$
$\lim\limits_{\omega \to 0} \lvert Z(j\omega) \rvert = \infty$		$\lim\limits_{\omega \to \infty} \lvert Z(j\omega) \rvert = \infty$

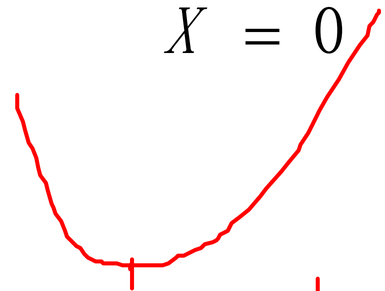




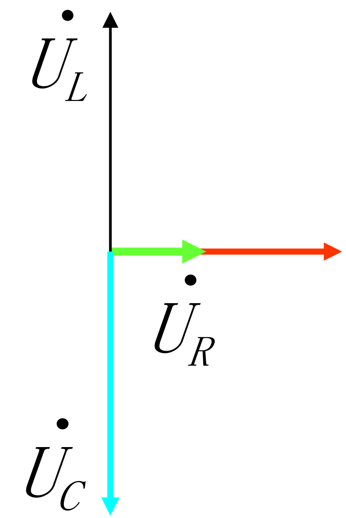


$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$$

$$X = 0$$



$R=|Z|$



(1).谐振时 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相 .

入端阻抗为纯电阻，即$Z=R$，阻抗值$|Z|$最小。

电流I和电阻电压U_R达到最大值 $I_0=U/R$ （U一定)。

(2) LC上的电压大小相等，相位相反，串联总电压为零，也称电压谐振，即

$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0,$$ LC相当于短路

电源电压全部加在电阻上，$\dot{U}_R = \dot{U}$

$|Z| = R$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L\dot{I} = \mathrm{j}\omega_0 L\frac{\dot{U}}{R} = \mathrm{j}Q\dot{U}$$

$$\dot{U}_C = -\mathrm{j}\frac{\dot{I}}{\omega_0 C} = -\mathrm{j}\omega_0 L\frac{\dot{U}}{R} = -\mathrm{j}Q\dot{U}$$

$$\left|\dot{U}_L\right| = \left|\dot{U}_C\right| = QU$$

特性阻抗

品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

$$\left|\dot{U}_L\right| = \left|\dot{U}_C\right| = QU$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

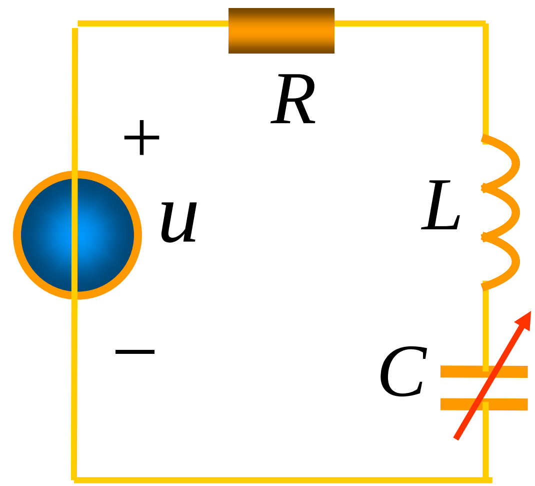
(3) 谐振时出现过电压

当 $\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) >> R$ **时，** $Q >> 1$

$$U_L = U_C = QU >> U$$

例　某收音机输入回路 L=0.3mH，R=10Ω，为收到中央电台560kHz信号，求：(1)调谐电容C值；(2) 如输入电压为1.5μV,求谐振电流和此时的电容电压。

$\omega_0 =$



解　(1) $$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = 269\text{pF}$$

(2) $$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{1.5}{10} = 0.15\mu\text{A}$$

$$U_C = I_0 X_C = 158.5\mu\text{V} >> 1.5\mu\text{V}$$

or $$U_C = QU = \frac{\omega_0 L}{R} U$$

(4) 谐振时的功率

$P=UI\cos\varphi=UI=RI_0^{2}=U^2/R$,

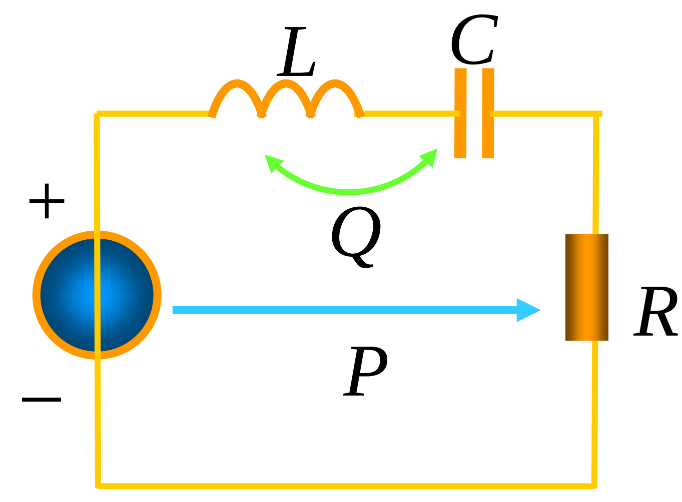
电源向电路输送电阻消耗的功率，电阻功率达最大。

$$Q=UI\sin\varphi=Q_L+Q_C=0$$

$$Q_L=\omega_0 L I_0^2,\qquad Q_C=-\frac{1}{\omega_0 C}I_0^2=-\omega_0 L I_0^2$$

注意

电源不向电路输送无功。电感中的无功与电容中的无功大小相等，互相补偿，彼此进行能量交换。



(5) 谐振时的能量关系

设 $u = U_{\mathrm{m}} \sin \omega_0 t$ 则 $i = \dfrac{U_{\mathrm{m}}}{R} \sin \omega_0 t = I_{\mathrm{m}} \sin \omega_0 t$

$$u_C = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_{\mathrm{m}} \cos \omega_0 t$$

$$w_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} L I_{\mathrm{m}}^2 \cos^2 \omega_0 t \longrightarrow \text{电场能量}$$

$$w_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_{\mathrm{m}}^2 \sin^2 \omega_0 t \longrightarrow \text{磁场能量}$$

表明

①电感和电容能量按正弦规律变化，最大值相等 $W_{Lm}=W_{Cm}$。L、C的电场能量和磁场能量作周期振荡性的交换，而不与电源进行能量交换。

②总能量是不随时间变化的常量，且等于最大值。

$$W_{总} = W_L + W_C = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2 = C Q^2 U^2$$

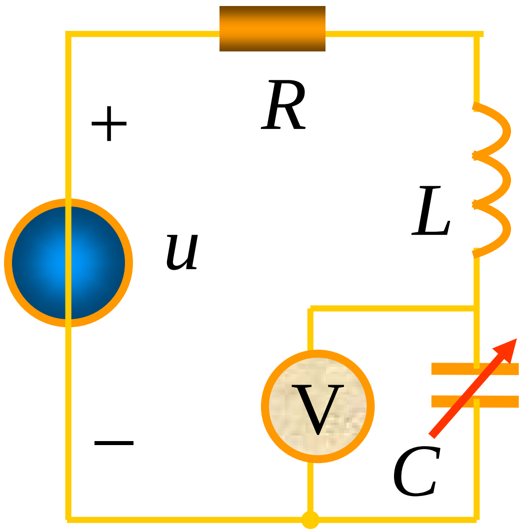
电感、电容储能的总值与品质因数的关系：

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 \cdot \frac{L I_0^2}{R I_0^2} = 2\pi \cdot \frac{L I_0^2}{R I_0^2 T_0}$$

$$= 2\pi \frac{\text{谐振时电路中电磁场的总储能}}{\text{谐振时一周期内电路消耗的能量}}$$

Q是反映谐振回路中电磁振荡程度的量，Q越大，总能量就越大，维持振荡所消耗的能量愈小，振荡程度越剧烈。则振荡电路的“品质”愈好。一般在要求发生谐振的回路中希望尽可能提高Q值。

例



一接收器的电路参数为： U=10V ω=5×10^3 rad/s，**调**C**使电路中的电流最大，**I_{max}=200mA，**测得电容电压为**600V，**求**R、L、C**及**Q。

解

$$R=\frac{U}{I_0}=\frac{10}{200\times10^{-3}}=50\Omega$$

$$U_C=QU\Rightarrow Q=\frac{U_C}{U}=\frac{600}{10}=60$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$L=\frac{RQ}{\omega_0}=\frac{50\times60}{5\times10^3}=600\text{mH}\qquad C=\frac{1}{\omega_0^2L}=6.67\mu\text{F}$$

11.3 *RLC*串联电路的频率响应

研究物理量与频率关系的图形（谐振曲线）可以加深对谐振现象的认识。

① $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\omega)/\dot{U}_{\mathrm{S}}(\mathrm{j}\omega)$ 的频率响应

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\omega)}{\dot{U}_{\mathrm{S}}(\mathrm{j}\omega)}=\frac{R}{R+\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}$$

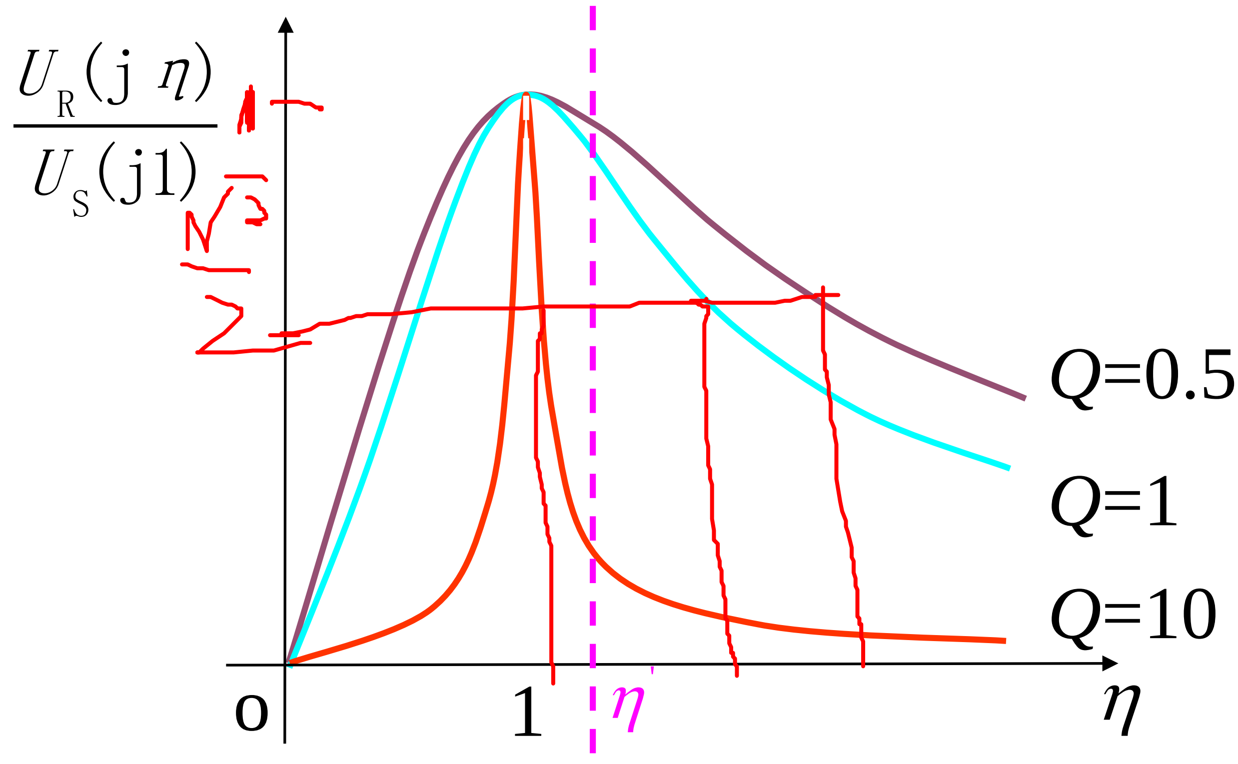
为比较不同谐振回路，令

$$\omega\rightarrow\frac{\omega}{\omega_0}=\eta$$

$$H_R(\mathrm{j}\eta)=\frac{\dot U_R(\mathrm{j}\omega)}{\dot U_S(\mathrm{j}\omega)}=\frac{R}{R+\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}=\frac{1}{1+\mathrm{j}Q(\eta-\dfrac{1}{\eta})}$$

$$\phi(\mathrm{j}\eta)=-\arctan[Q(\eta-\frac{1}{\eta})]$$ **相频特性**

$$|H_R(\mathrm{j}\eta)|=\cos\phi(\mathrm{j}\eta)$$ **幅频特性**



表明

①谐振电路具有选择性

在谐振点响应出现峰值，当ω 偏离ω_0时，输出下降。即串联谐振电路对不同频率信号有不同的响应，对谐振信号最突出(响应最大)，而对远离谐振频率的信号具有抑制能力。这种对不同输入信号的选择能力称为“选择性”。

②谐振电路的选择性与Q成正比

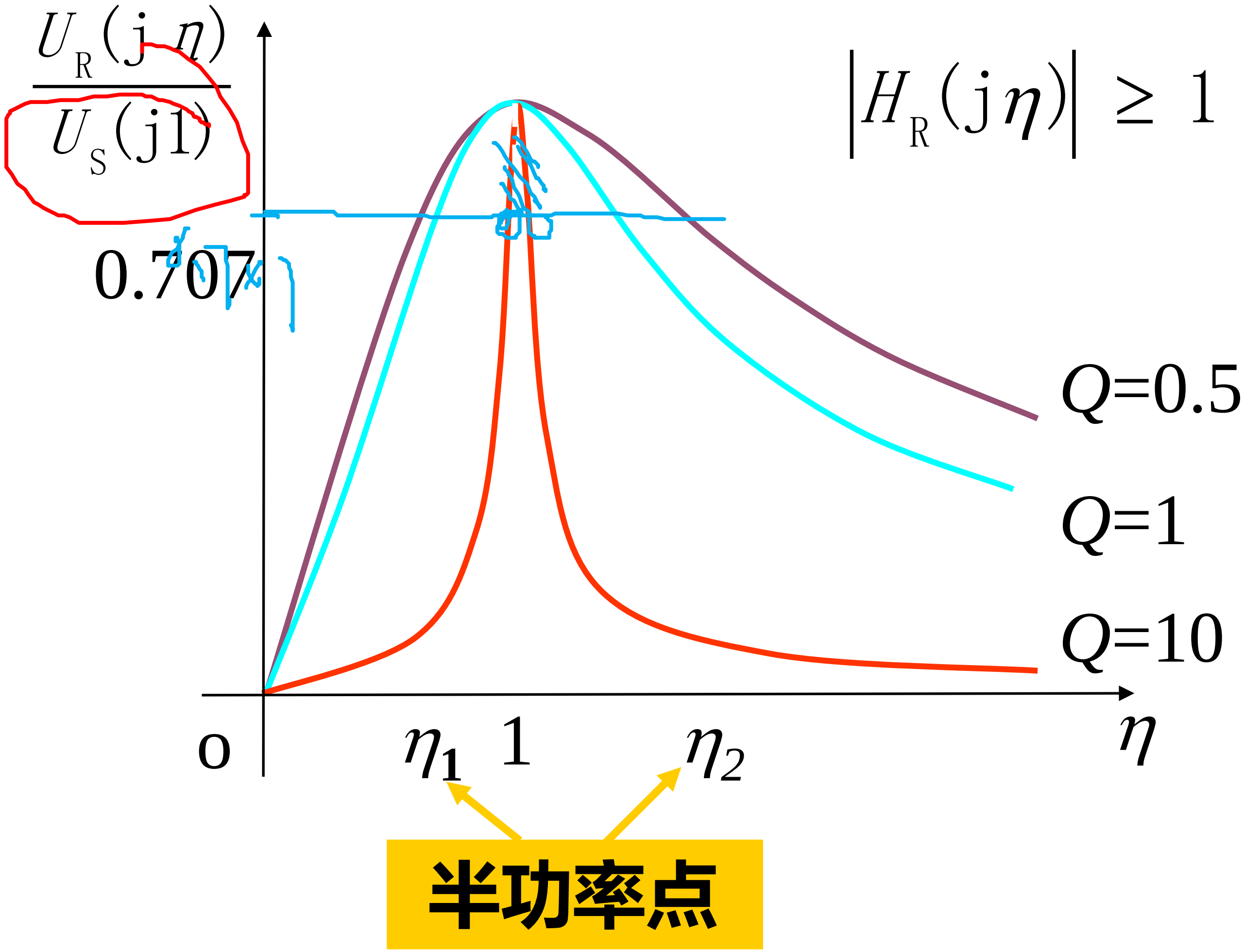
Q越大，谐振曲线越陡。电路对非谐振频率的信号具有强的抑制能力，所以选择性好。因此Q是反映谐振电路性质的一个重要指标。

③谐振电路的有效工作频段

半功率点

声学研究表明，如信号功率不低于原有最大值一半，人的听觉辨别不出。

$$\left|H_R(\mathrm{j}\eta)\right| \geq 1/\sqrt{2} = 0.707$$



$$\eta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$\eta_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

$$\omega_2 > \omega_1.$$

定义： $H_{dB}=20\log_{10}[U_R（\mathrm{j}\eta）/U_S（\mathrm{j}1）]$

$$20\lg 0.707=-3\ \mathrm{dB}$$

通频带 → $\omega_2-\omega_1$ **3分贝频率**

可以证明： $Q=\dfrac{1}{\eta_2-\eta_1}=\dfrac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

通频带规定了谐振电路允许通过信号的频率范围。是比较和设计谐振电路的指标。

实际应用中，经常会出现

- 待考察量的变化非常大
- 频率范围非常宽

阻抗、电压电流、传递函数

$10^{-4}<|H|<10^{+3}$

1mHz～1GHz

幅值/相位频率特性的波形特点被掩盖

$-4<\lg|H|<+3$

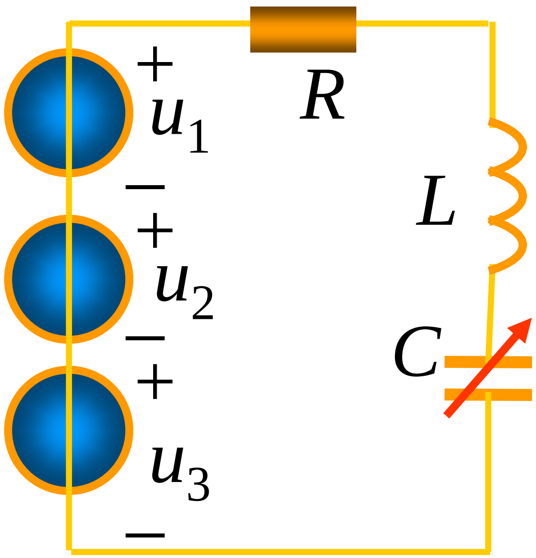
用对数来表示

$-3\sim9$

分贝(decibel)

$$H_{\mathrm{dB}} = 20\lg|H|$$

例1



一接收器的电路参数为：

L=250μH, R=20Ω,

U_1=U_2=U_3=10μV,

当电容调至 C=150pF**时谐振**

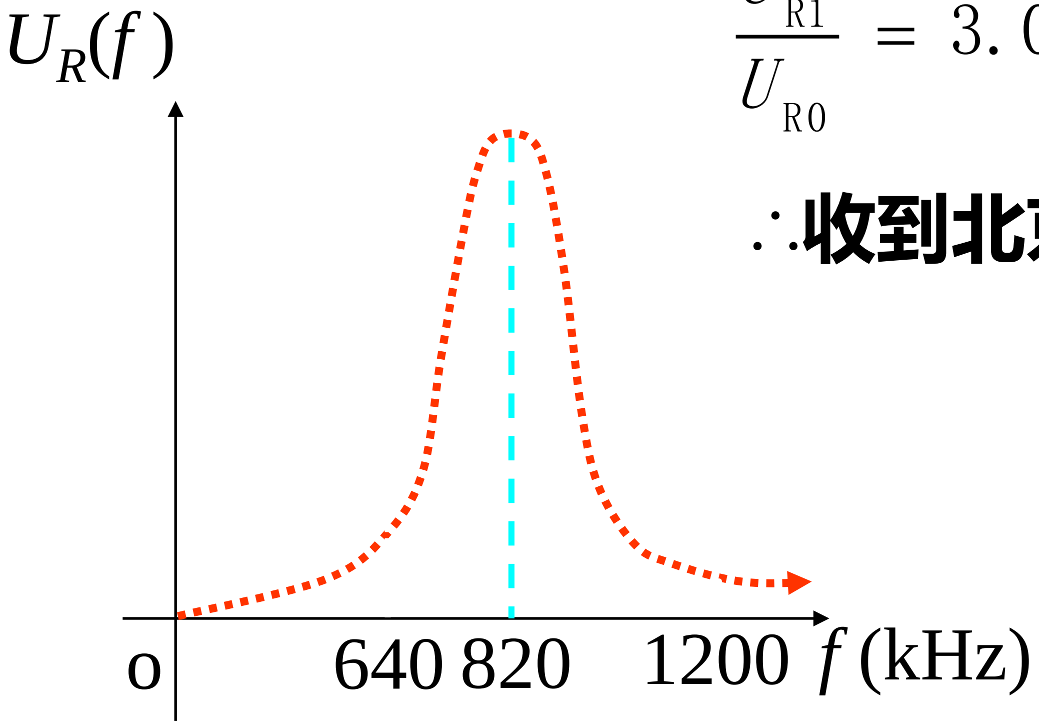
ω_0=5.5×10^6rad/s, f_0=820 kHz

	北京台	**中央台**	**北京经济台**
f (kHz)	820	640	1026
ωL	1290	1000	1611
$\dfrac{1}{\omega C}$	−1290	–1660	−1034
X	0	– 660	577
$U_R=UR/\|Z\|$	U_{R0}=10	U_{R1}=0.304	U_{R2}=0.346

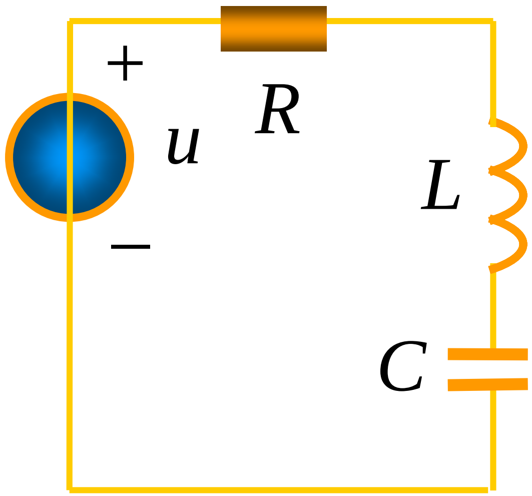
$U_R = UR/|Z|$ (μV) $U_{R0}=10$ $U_{R1}=0.304$ $U_{R2}=0.346$

$$\frac{U_{R1}}{U_{R0}} = 3.04\% \qquad \frac{U_{R2}}{U_{R0}} = 3.46\%$$

∴**收到北京台**820kHz**的节目。**



例2



一信号源与R、L、C**电路串联，要求** $f_0=10^4$Hz，$\Delta f=100$Hz，$R=15\Omega$，**请设计一个线性电路。**

解

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f}=\frac{10^4}{100}=100$$

$$L=\frac{RQ}{\omega_0}=\frac{100\times 15}{2\pi\times 10^4}=39.8\mathrm{mH}$$

$$C=\frac{1}{\omega_0^2 L}=6360\mathrm{pF}$$

② 以$U_L(\omega)$与$U_C(\omega)$为输出的$H(\omega)$频率特性

$$H_{\mathrm{L}}(\omega)=\frac{U_L(\omega)}{U(\omega)}=\frac{\omega L}{|Z|}=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$H_{\mathrm{L}}(\eta)=\frac{Q}{\sqrt{\frac{1}{\eta^2}+Q^2(1-\frac{1}{\eta^2})^2}}$$

$$H_{\mathrm{C}}(\omega)=\frac{U_C(\omega)}{U(\omega)}=\frac{1}{\omega C|Z|}=\frac{1}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$H_{\mathrm{C}}(\eta)=\frac{QU}{\sqrt{\eta^2+Q^2(\eta^2-1)^2}}$$

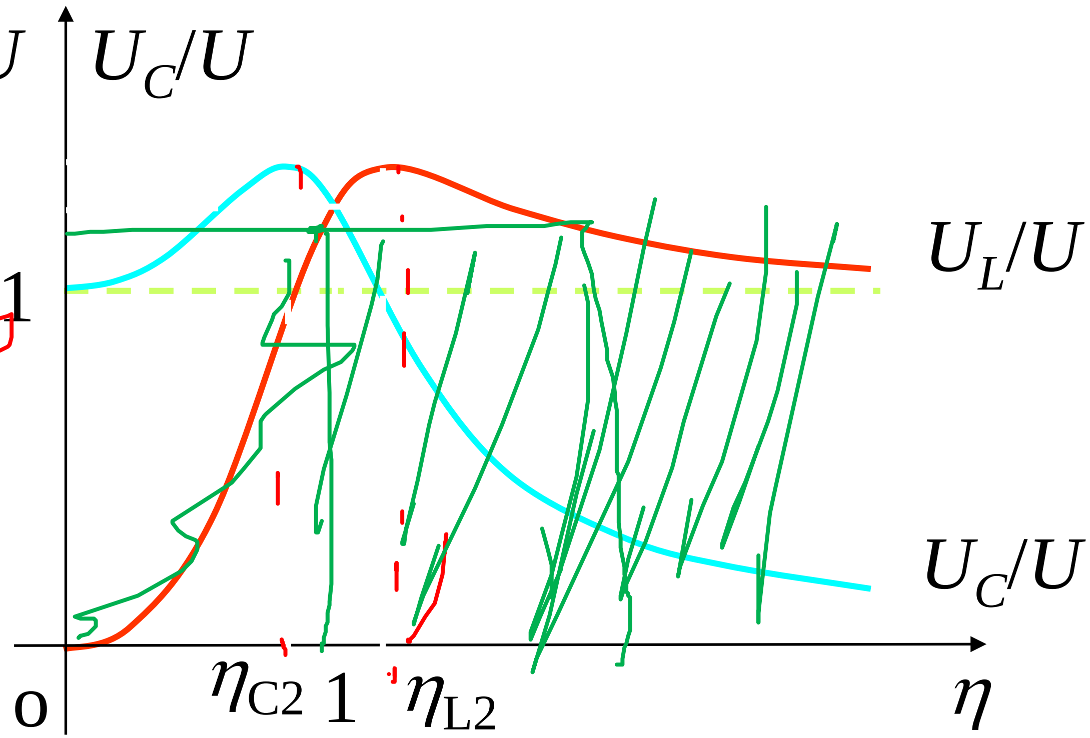
$H_L(\eta)$**与**$H_C(\eta)$**的极值点：令**$\dfrac{\mathrm{d}H_{\mathrm{L}}(\eta)}{\mathrm{d}\eta} = 0 \qquad \dfrac{\mathrm{d}H_{\mathrm{C}}(\eta)}{\mathrm{d}\eta} = 0$

$$\eta_{\mathrm{C1}} = 0 \qquad H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C1}}) = 1 \qquad \eta_{\mathrm{C3}} = \infty \qquad H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C3}}) = 0$$

$$\eta_{\mathrm{C2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C2}}) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > Q(Q > 0.707)$$

$$\eta_{\mathrm{L1}} = \frac{1}{\eta_{\mathrm{C3}}} = 0 \qquad H_{\mathrm{L}}(\eta_{\mathrm{L1}}) = 0 \qquad \eta_{\mathrm{L3}} = \frac{1}{\eta_{\mathrm{C1}}} = \infty \quad H_{\mathrm{L}}(\eta_{\mathrm{L3}}) = 1$$

$$\eta_{\mathrm{L2}} = \frac{1}{\eta_{\mathrm{C2}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad H_{\mathrm{L}}(\eta_{\mathrm{L2}}) = H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C2}})$$



$\frac{1}{\omega C}$ $\omega \to 0$

$\omega C \to \infty$

ωL

当 $Q > 1/\sqrt{2}$

$\eta=\eta_{C2}$，$U_C(\eta)$**获最大值；** $\eta=\eta_{L2}$，$U_L(\eta)$**获最大值。**

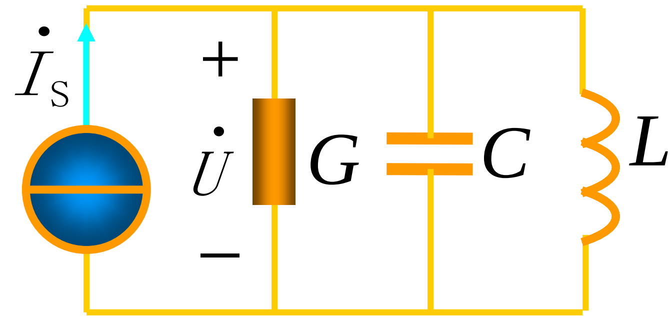
且$U_C(\eta_{C2})=U_L(\eta_{L2})$。

注意 $H_C(\mathrm{j}\eta)$ **为低通函数,** $H_L(\mathrm{j}\eta)$**为高通函数;**

Q**越高，** η_{L2}**和**η_{C2} **越靠近**$\eta=1$，**同时峰值增高。**

11.4 RLC并联谐振电路

1. G、C、L 并联电路



$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$j\omega C$ $\quad \frac{1}{j\omega L}$

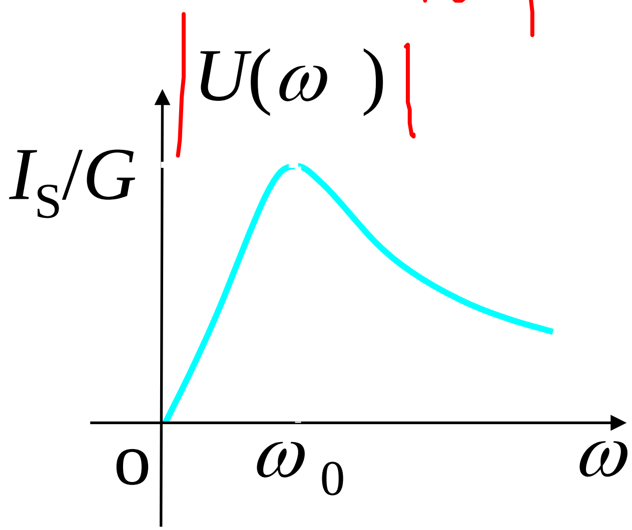
谐振角频率 $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

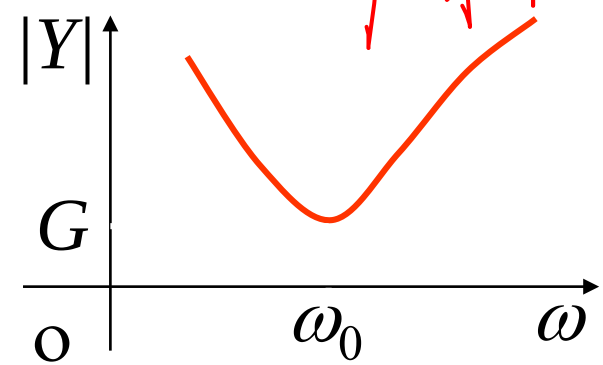
谐振特点：

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

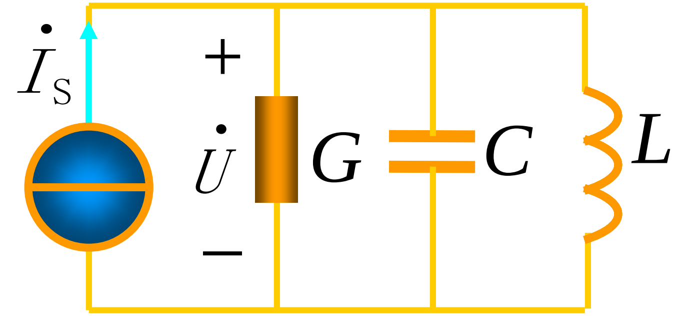
①入端导纳为纯电导，导纳值$|Y|$最小，端电压达最大。

$$|U| = I/|Y| = I_S/|G|$$





② LC上的电流大小相等，相位相反，并联总电流为零，也称电流谐振，即

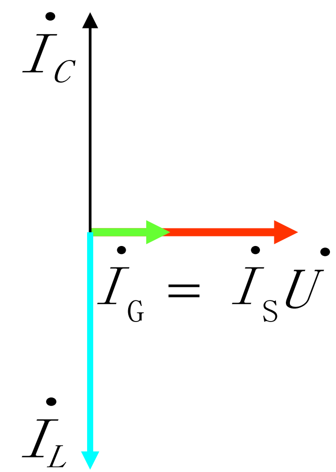


$$\dot{I}_C = \dot{U}\mathrm{j}\omega_0 C = \mathrm{j}\omega_0 C\frac{\dot{I}_S}{G} = \mathrm{j}Q\dot{I}_S$$

$$\dot{I}_L = \dot{U} / \mathrm{j}\omega_0 L = -\mathrm{j}\omega_0 C\frac{\dot{I}_S}{G} = -\mathrm{j}Q\dot{I}_S$$

$$I_L(\omega_0) = I_C(\omega_0) = QI_S$$

ic+iL=0



品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

③谐振时的功率

$$P = UI = U^2 G$$

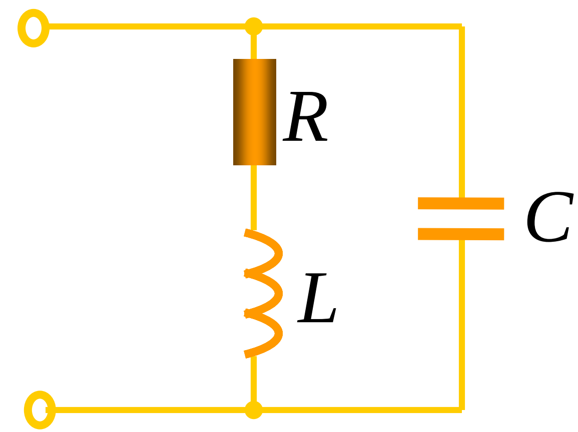
$$\left|Q_L\right| = \left|Q_C\right| = \omega_0 C U^2 = \frac{U^2}{\omega_0 L} \qquad Q_L + Q_C = 0$$

④谐振时的能量

$$W(\omega_0) = W_L(\omega_0) + W_C(\omega_0) = LQ^2 I_S^2$$

2.电感线圈与电容器的并联谐振

实际的电感线圈总是存在电阻，因此当电感线圈与电容器并联时，电路如图：



（1）谐振条件

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}) = G + jB$$

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0 \rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{L})^2}}$$

注意 ① **电路发生谐振是有条件的，在电路参数一定时，满足：**

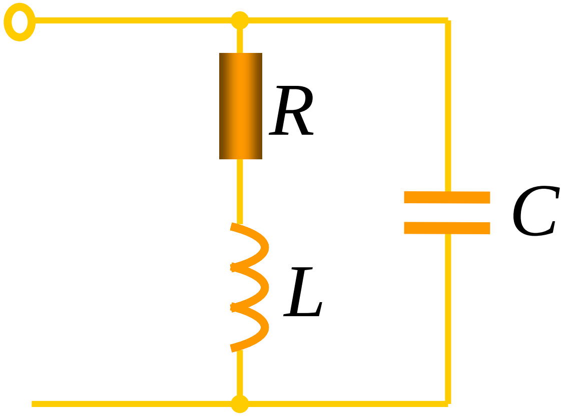
$$\frac{1}{LC}-(\frac{R}{L})^2>0,\quad 即\ R<\sqrt{\frac{L}{C}}\ 时，可以发生谐振$$

② **一般线圈电阻**$R<<\omega L$**，则等效导纳为：**

$$Y=\frac{R}{\cancel{R^2}+(\omega L)^2}+\mathrm{j}(\omega C-\frac{\omega L}{\cancel{R^2}+(\omega L)^2})$$

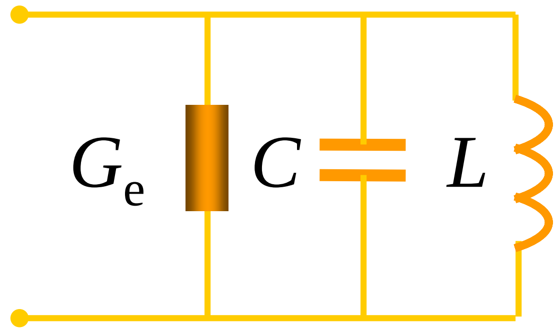
$$\approx\frac{R}{(\omega L)^2}+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})$$

谐振角频率 $\omega_0\approx\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



$$Y \approx \frac{R}{(\omega L)^2} + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

等效电路



$$R_e = \frac{1}{G_e} \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$

品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\omega_0 C}{R\ /\ (\omega_0 L)^2} = \frac{\omega_0^3 C L^2}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

线圈的品质因数

$$Y \approx \frac{R}{(\omega L)^2} + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

（2）谐振特点

①电路发生谐振时，输入阻抗很大；

$$Z(\omega_0) = R_0 = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R} \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{L}{RC}$$

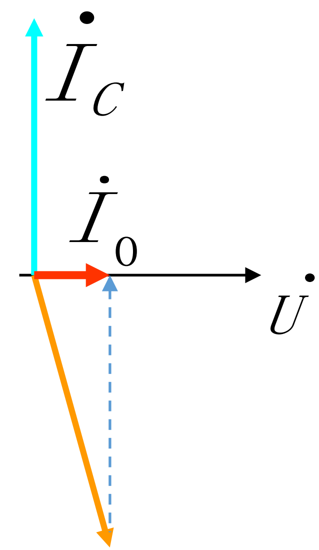
②电流一定时，端电压较高

$$U_0 = I_0 Z = I_0 \frac{L}{RC}$$

$$Z(\omega_0) = R_0 \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{L}{RC}$$

③支路电流是总电流的Q倍，设$R<<\omega L$

$$I_L \approx I_C \approx \frac{U}{\omega_0 L} = U\omega_0 C$$

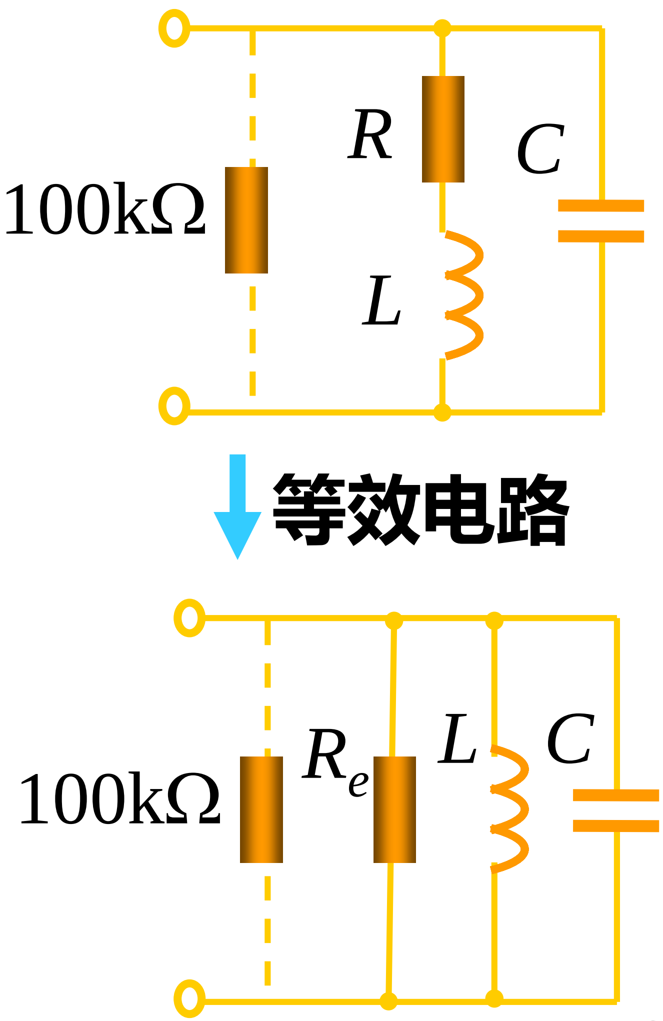


$$\frac{I_L}{I_0} = \frac{I_C}{I_0} = \frac{U \ / \ \omega_0 L}{U(RC \ / \ L)} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q$$

$$\Rightarrow \quad I_L \approx I_C = QI_0 >> I_0$$

$$Z(\omega_0) = R_0 \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{L}{RC}$$

例1 如图R=10Ω的线圈其Q_L=100，与电容接成并联谐振电路，如再并联上一个100kΩ的电阻，求电路的Q.



解 $$Q_L = 100 = \frac{\omega_0 L}{R}$$

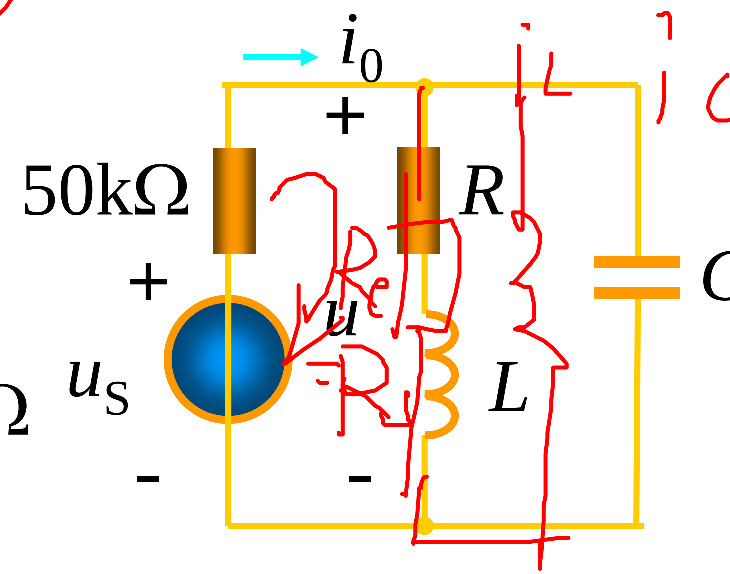
$$\Rightarrow \omega_0 L = RQ_L = 1000\Omega >> R$$

$$R_e \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{10^6}{10} = 100k\Omega$$

$$R_{eq} = 100 // 100 = 50k\Omega$$

$$Q = \frac{R_{eq}}{\omega_0 L} = \frac{50 \times 10^3}{1000} = 50$$

例2 **如图**R_S=50kΩ，U_S=100V，$\omega_0=10^6$，Q=100，**谐振时线圈获取最大功率，求**L、C、R**及谐振时**I_0、U**和**P**。**



解

$$\begin{cases} Q_L = \dfrac{\omega_0 L}{R} = 100 \\ R_e = \dfrac{(\omega_0 L)^2}{R} = R_S = 50k\Omega \\ \omega_0 \approx \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

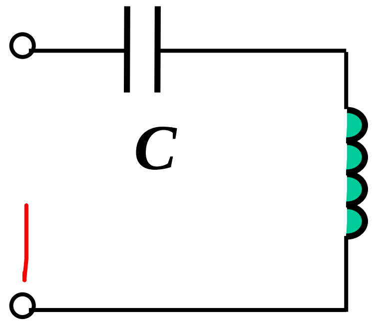
$$I_0 = \frac{U_S}{2R_S} = \frac{100}{2 \times 50 \times 10^3} = 1\text{mA}$$

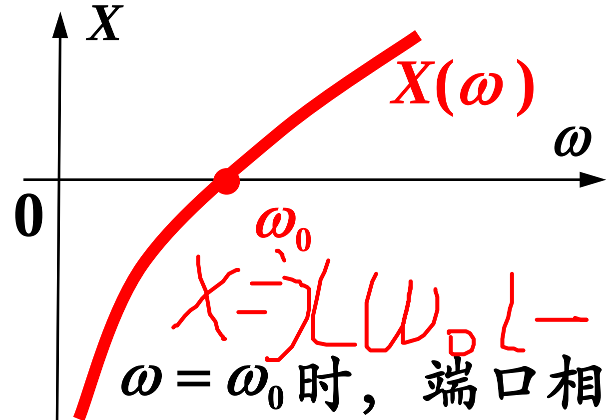
$$\begin{cases} R = 5\Omega \\ L = 0.5\text{mH} \\ C = 0.002\mu\text{F} \end{cases}$$

$$U = \frac{U_S}{2} = 50\text{V}$$

$$P = UI_0 = 0.05\text{W}$$

LC串联谐振



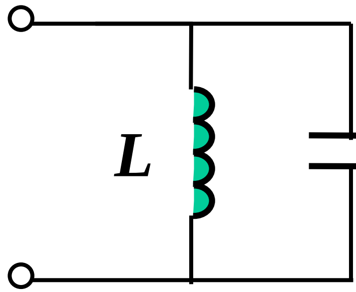


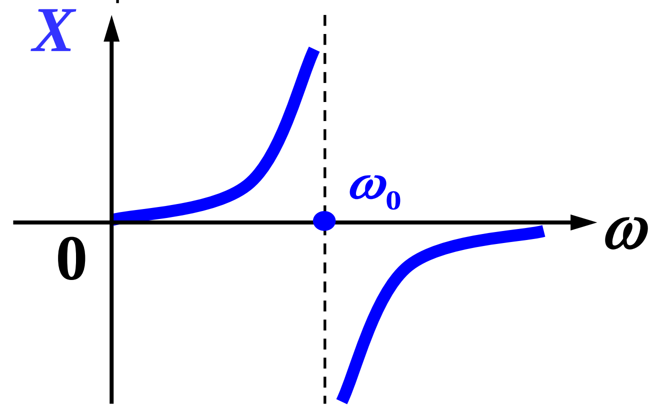
$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}$

$\omega = \omega_0$ 时，端口相当于短路

$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$

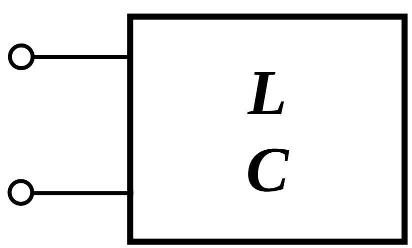
LC并联谐振





$\omega = \omega_0$ 时，端口相当于开路

$X = \frac{1}{\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}}$



$$Z(\omega) = \mathrm{j}\frac{f_1(\omega)}{f_2(\omega)}$$

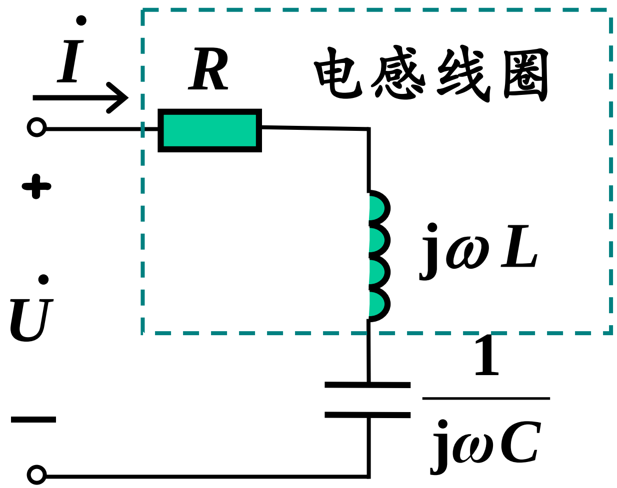
$f_1(\omega_0) = 0$ 时，电路发生串联谐振

$f_2(\omega_0) = 0$ 时，电路发生并联谐振

(1) 电感线圈与电容的串联谐振

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$



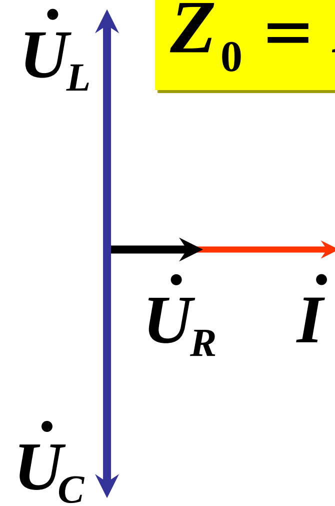
$\omega L > \frac{1}{\omega C}$ 感性

$\omega L < \frac{1}{\omega C}$ 容性

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 阻性

串联谐振

$Z_0 = R$

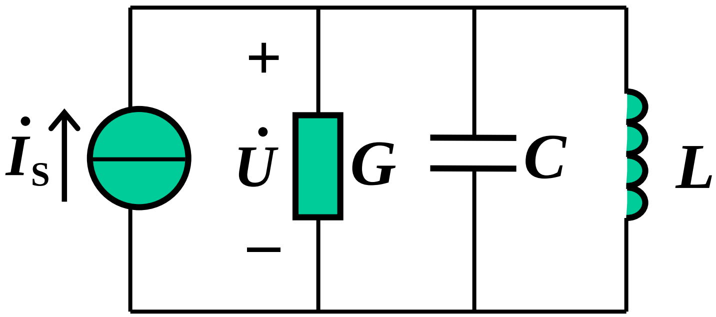


谐振时的相量图

串联谐振又称<u>电压谐振</u>

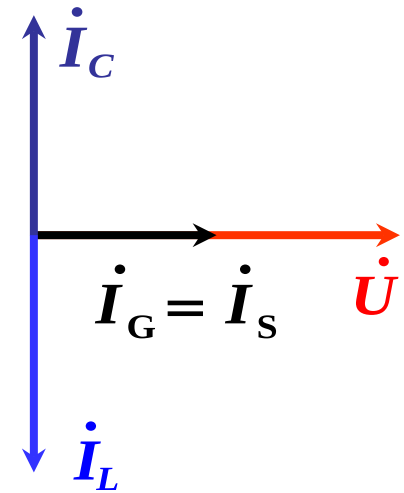
当ω，L，C 满足一定条件，恰好使端口上电压、电流出现同相位。电路的这种状态称为谐振。

(2) 电感线圈与电容的并联谐振



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = 1/G$$



$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$Z = \frac{G - \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})}{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

$\omega C > \frac{1}{\omega L}$ 容性

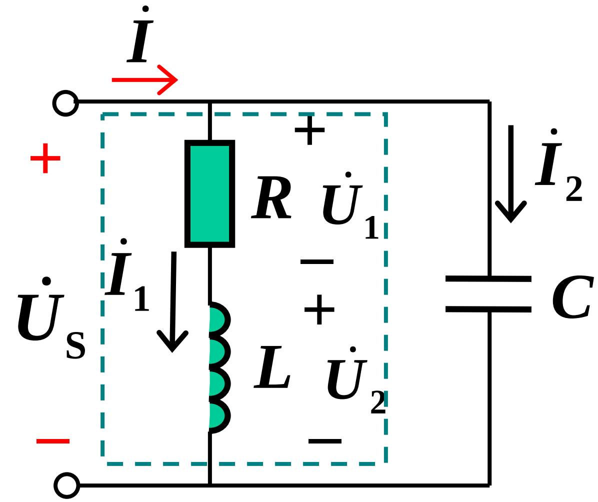
$\omega C < \frac{1}{\omega L}$ 感性

$\omega C = \frac{1}{\omega L}$ 阻性

并联谐振

并联谐振又称<u>电流谐振</u>

(3) 电感线圈与电容并联谐振



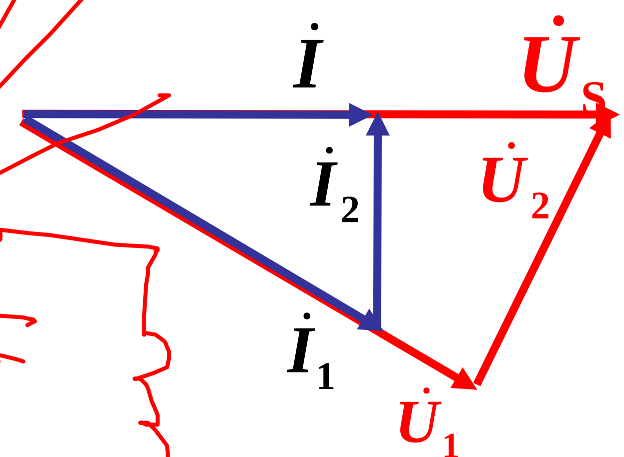
$$Y = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

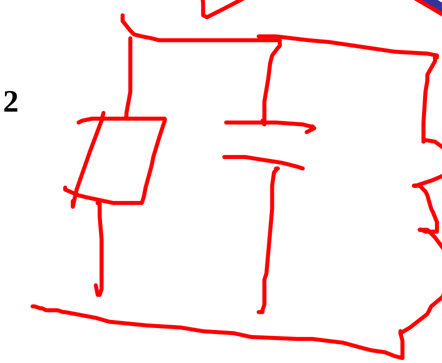
代入

谐振条件 $\omega_0 C - \dfrac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0$

$$\boxed{Z_0 = \frac{L}{RC}} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$



$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{L}\right)^2$$



$R \to 0$ $\quad \boxed{\omega \to \sqrt{\dfrac{1}{LC}}}$ 开路

11.5 波特图

对电路和系统的频率特性进行分析时，为了直观地观察频率特性随频率变化的趋势和特征，工程上常采用对数坐标来作频响曲线，这种用对数坐标描绘的频率响应图就称为频响波特图。

例 **画出网络函数的波特图。** $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{200\,\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+10)}$

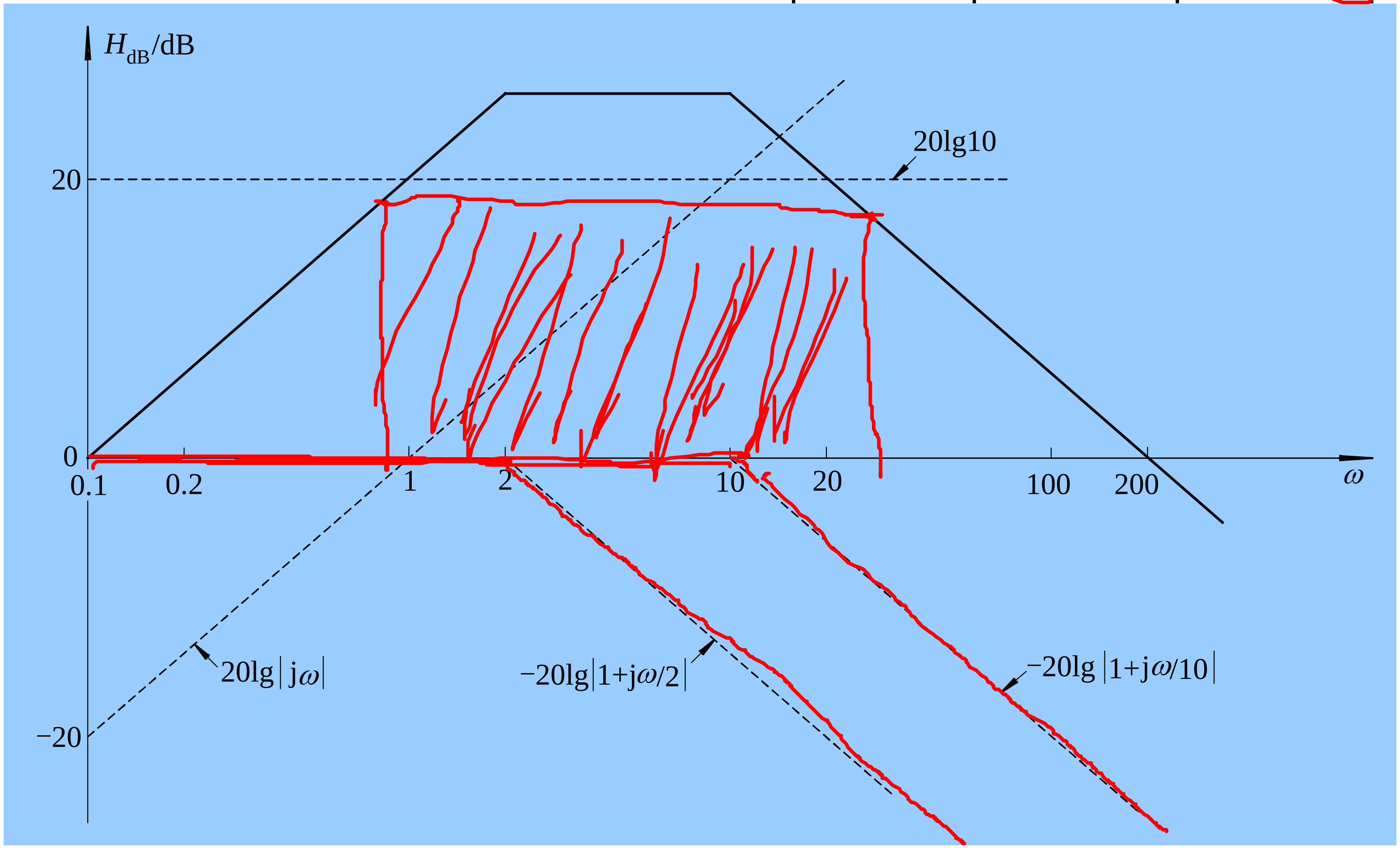
解 **改写网络函数为**

$$=\frac{10\left|\mathrm{j}\omega\right|}{\left|1+\mathrm{j}\omega/2\right|\cdot\left|1+\mathrm{j}\omega/10\right|}\quad 90^{\circ}-\tan^{-1}(\omega/2)-\tan^{-1}(\omega/10)$$

因此对数模（单位分贝）

$$H_{dB} = 20\lg|H|$$

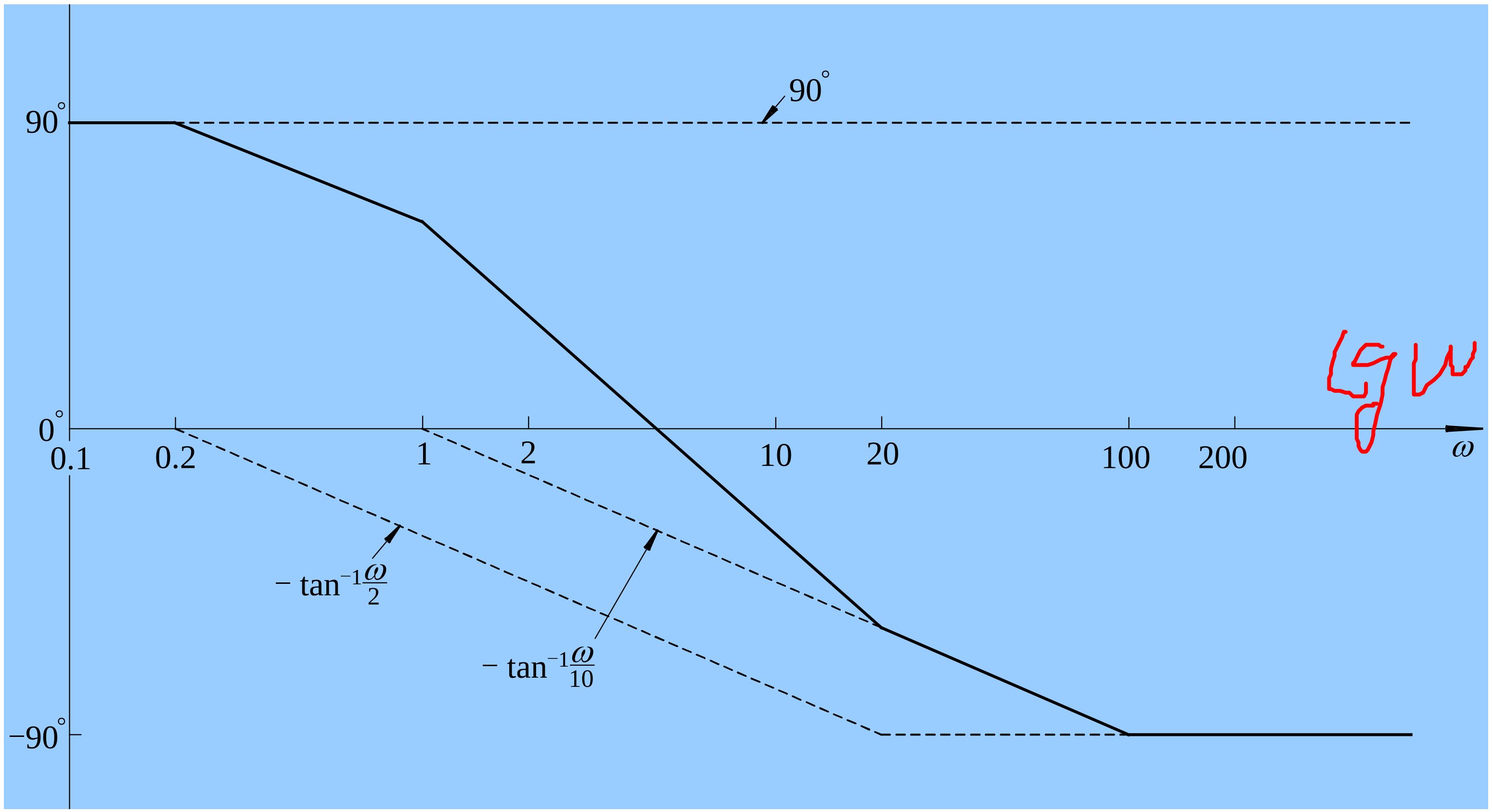
$$H_{dB} = 20\lg 10 + 20\lg|j\omega| - 20\lg\left|1 + j\frac{\omega}{2}\right| - 20\lg\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|$$



幅频波特图

相位（单位度）

$$\phi = 90^\circ - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$



相频波特图

11.6 滤波器简介

● 滤波器

工程上根据输出端口对信号频率范围的要求，设计专门的网络，置于输入—输出端口之间，使输出端口所需要的频率分量能够顺利通过，而抑制或削弱不需要的频率分量，这种具有选频功能的中间网络，工程上称为滤波器。

● 滤波电路的传递函数定义

U_i → 滤波电路 → U_o

$$H(\omega)=\frac{U_o(\omega)}{U_i(\omega)}$$

滤波器(Filter)

去除噪声的装置称为滤波器

噪声是无处不在的

假设信号与噪声的频带不重合

估计信号特征，从而提高信噪比

经典滤波器

现代滤波器

用模拟系统实现

用数字系统实现

现代信号处理

模拟滤波器

数字滤波器

用无源元件实现

用有源元件实现

数字信号处理

无源滤波器

有源滤波器

电路与系统

模拟电子技术基础

电力电子技术基础

模拟滤波器

从实现方式上分类

无源滤波器

RC　LC

用无源元件实现

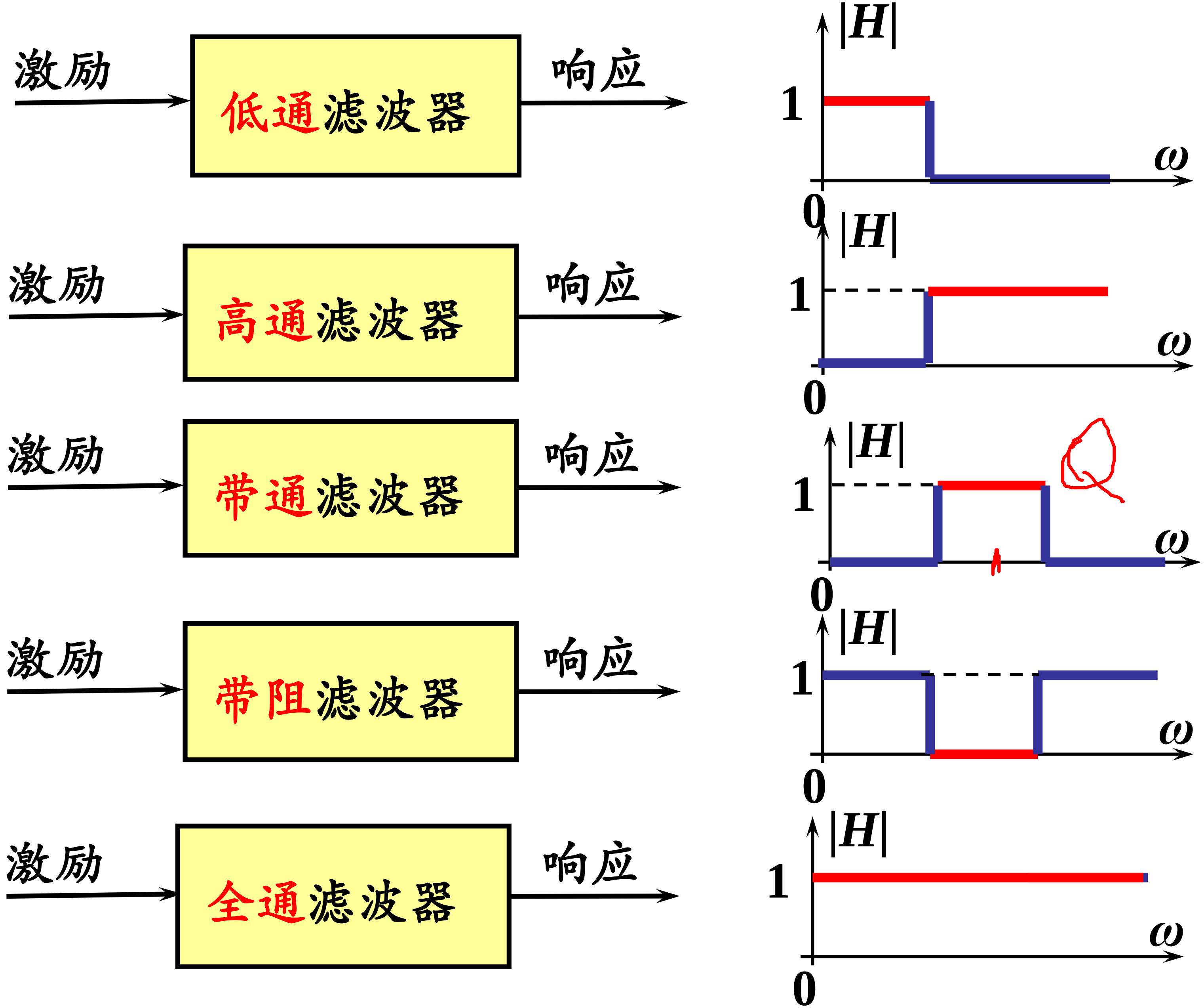
有源滤波器

Op Amp　电力电子器件

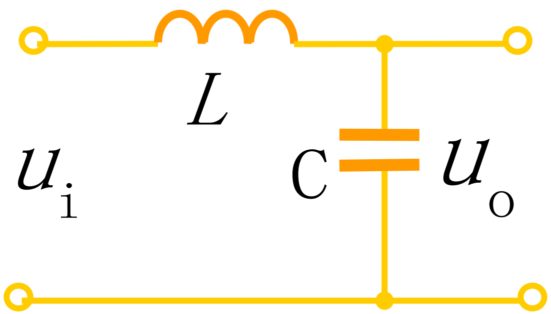
用有源元件实现

从功能上分类

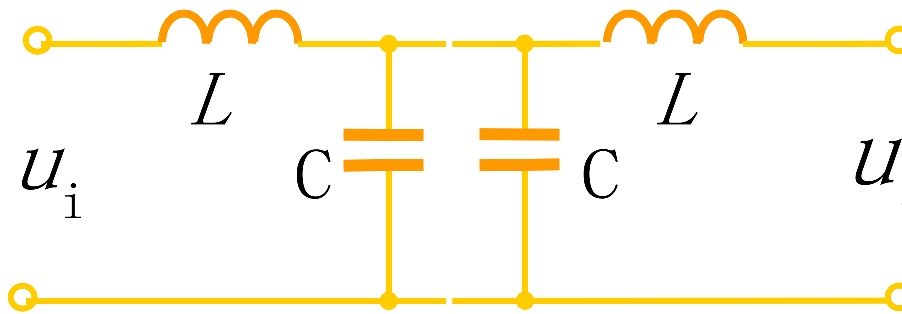
低通(LP)　高通(HP)　带通(BP)　带阻(BS, Notch)　全通(FP)



如何利用高通和低通滤波器得到带通和带阻滤波器?



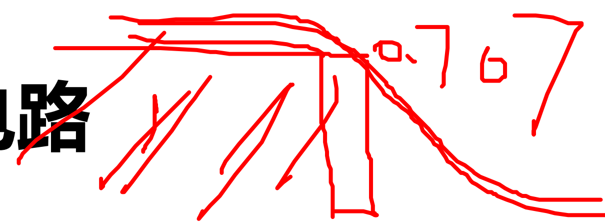
L型

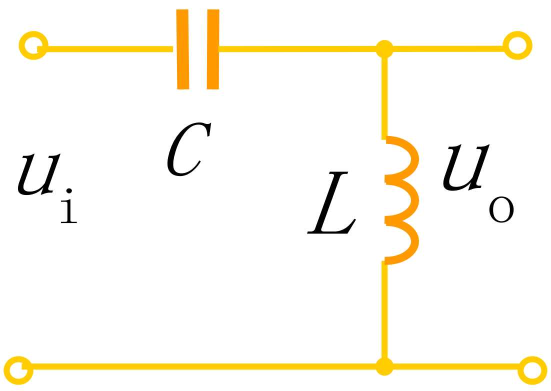


T型

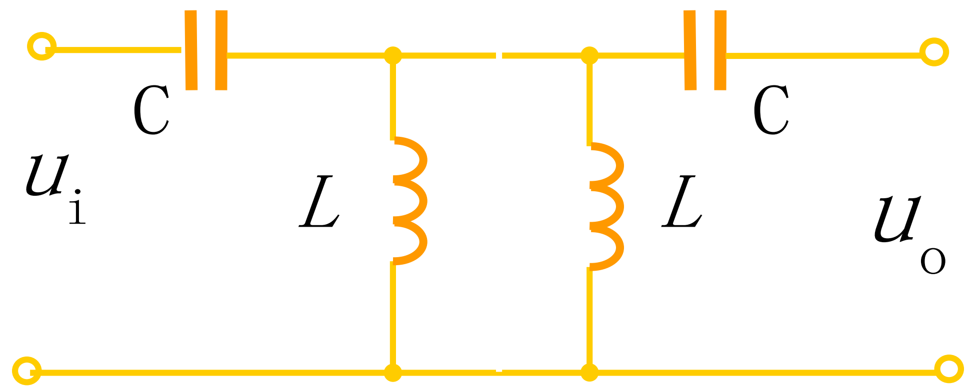
π型

低通滤波器的单元电路

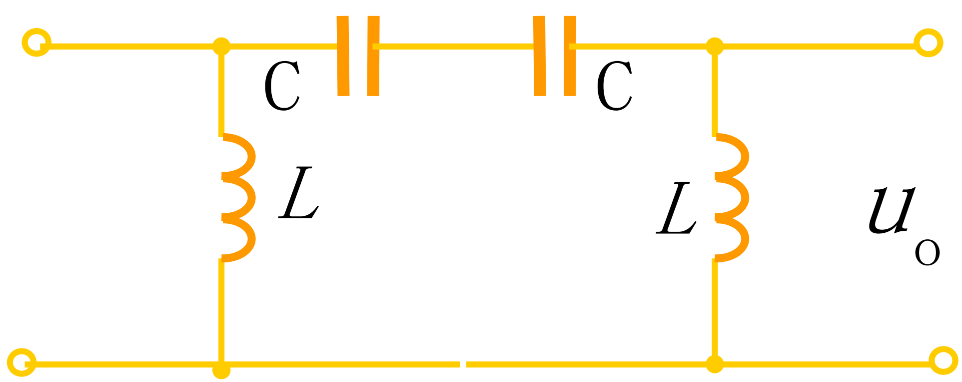




L型

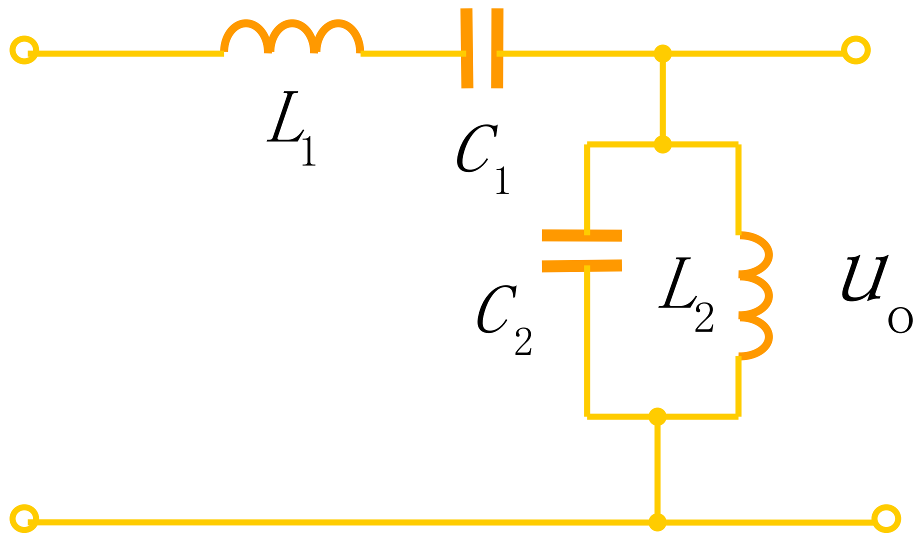


T型

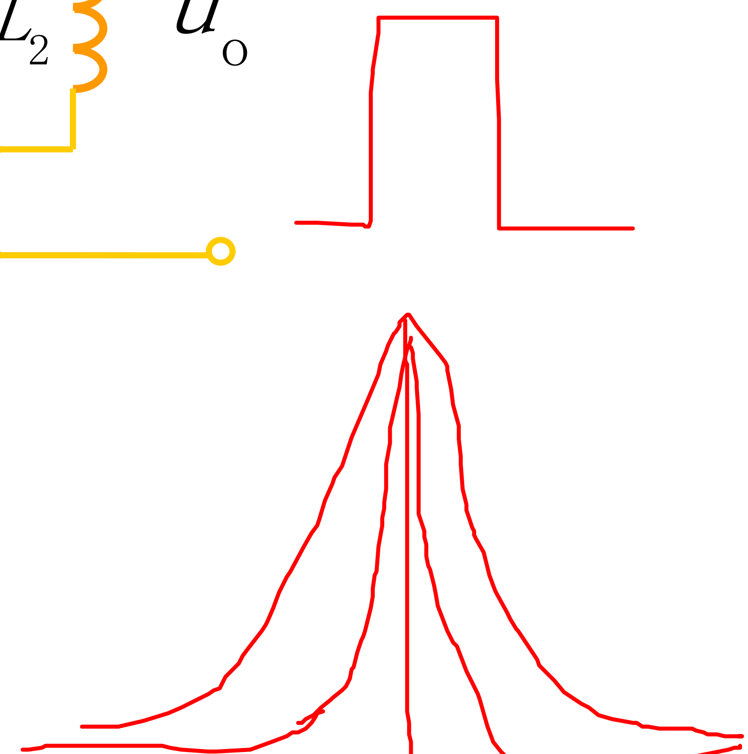


π型

高通滤波器的单元电路



带通滤波器



Homework

11-6

11-11

11-13

11-14