·大学教学·

缺项幂级数收敛域的求法

肖俊[1,2]　林燕[3]

(1. 武汉科技大学 理学院,武汉 430065;2. 冶金工业工程系统科学 湖北省重点实验室,武汉,430081;
3. 武汉市第二职业教育中心学校,武汉,430060)

摘　要:本文从一道求幂级数收敛域的习题讲起,讨论了在缺项条件下,幂级数收敛域的求法。

关键词:幂级数;收敛半径;收敛域

中图分类号:O173　　文献标识码:A　　文章编号:1006-7353(2011)05-0026-02

数学是一门建立在公理化体系下的逻辑严密的科学,定义、定理和公式是构成数学的重要基石。但应用定理、公式时一定要注意其成立的条件,不可盲目套用,否则就会出现错误。比如在教课书[1] 中就有这样一题:

例 1　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ [1] 的收敛域

学生在作业中通常有两种解法:

解法 1

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}}\right|=1$

所以收敛半径 $R=1$

当 $x=\pm1$ 时,级数分别为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$,这两个级数都收敛,因此原级数的收敛域为 $[-1,1]$

解法 2

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{(-1)^n\cdot x^n}{2n+1}}\right|=x^2$

当 $x^2<1$,即 $|x|<1$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|$ 收敛,$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 收敛;

当 $x^2>1$,即 $|x|>1$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|$ 发散,$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 发散。

当 $x=\pm1$ 时,级数分别为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$,这两个级数都收敛,因此原级数的收敛域为 $[-1,1]$

请问这两种做法,谁对谁错?还是都对或都错呢?从答案来看,解法 1 与解法 2 相同,似乎都对。

分析　解法 1 中第一步

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}}\right|=1$$

运用的是课本上求幂级数收敛半径的定理。

定理[2]　如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

收稿日期:2011-06-18.

基金项目:科技部重大教研项目子课题-科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践,项目编号:2009IM010400-1-25.

作者简介:肖俊(1973-)男,湖北武汉人,硕士,讲师,研究方向:高等数学教育与系统科学.

其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数,则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0. & \rho = +\infty \end{cases}$$

注意 应用该定理的前提是极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 存在,这里 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数,与 $a_n x^n$ 相邻的两项分别是 $a_{n-1}x^{n-1}$ 和 $a_{n+1}x^{n+1}$,本题缺少偶次项,偶次项系数为零,0,$(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,0 为相邻项。

故 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{0}\right| = +\infty$,而 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{0}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}\right| = 0$

所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在,无法用定理求 R,因此解法1错误,解法2将其看做常数项级数求收敛域是正确的。

解法1与解法2答案相同,不过是巧合罢了,为加深印象,请看下例:

例2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n}$ 的收敛域。

错误解法

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n-1}{2^n}}{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}\right| = 2$

所以收敛半径 $R = 2$

当 $x = \pm 2$ 时,两个级数都发散,

因此原级数的收敛域为 $(-2, 2)$

正确解法1

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}}\right| = \frac{x^2}{2}$

当 $\frac{x^2}{2} < 1$,即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时,级数绝对收敛;

当 $\frac{x^2}{2} > 1$,即 $x > \sqrt{2}$ 或 $x < -\sqrt{2}$ 时,级数发散。

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时,级数分别为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$,这级数发散,

因此原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

正确解法2

本题缺奇次项

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$

令 $t = \frac{x^2}{2}$,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot t^n$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| = 1$,当 $t = \pm 1$ 时,级数发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot t^n$ 收敛域为 $-1 < t < 1$,

所以 $-1 < \frac{x^2}{2} < 1 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$,原级数收敛域为 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

两种做法结果迥然不同。

总结 对于缺项的幂级数收敛域的求法,不能直接用求幂级数收敛半径的定理解答,而应像例一中解法二一样,将其看做常数项级数,然后加上绝对值考虑其对应的正项级数,利用判断正项级数收敛的定理,比如比值法、根值法加以判断,最后利用绝对收敛和收敛的关系,即可求出收敛域。特别地,对缺奇次项的题目,也可令 $t = x^2$,再用定理求幂级数的收敛半径,如例二正确解法2所示。

参考文献:

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学(下册)[M]. 北京:高等教育出版社,2007:277.
[2] 同济大学应用数学系. 高等数学(下册)[M]. 北京:高等教育出版社,2007:272.