# homework10

P264. 习题 12.2　(A) 1-3,1-7；2-5；3-1；4-1,4-4；
P270. 习题 12.3　(A) 1-5；2-3；(B) 2

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}$; (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+(-1)^n}{3^n}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$; (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin \frac{1}{2^n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

---

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n - \ln n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$;

2. 试研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$ 的敛散性.

# P264. 习题 12.2

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}$; (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+(-1)^n}{3^n}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;

A.1-3. 解. 记 $u_n = \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}$，由

$$u_n \sim n^{-3/2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n \text{收敛}$$

A.1-7. 解. 记 $v_n = \frac{4+(-1)^n}{3^n}$，由

$$0 \leq v_n \leq \frac{5}{3^n} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} v_n \text{收敛}$$

A.2-5. 解. 记 $x_n = \frac{3^n n!}{n^n}$，由

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3(n+1)}{(n+1)^{n+1}} n^n = 3\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n \text{发散}$$

# P264. 习题 12.2

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$; (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin\frac{1}{2^n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$.

A.3-1. 解. 记 $y_n = \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$，由

$$\sqrt[n]{y_n} = \frac{n+1}{3n+2} \to \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} y_n\text{收敛}$$

A.4-1. 解. 记 $u_n = n^2 \sin\frac{1}{2^n}$，则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sin\frac{1}{2^{n+1}}}{\sin\frac{1}{2^n}} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n\text{收敛}$$

A.4-4. 解. 记 $v_n = \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$，由

$$v_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,dx \leq \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}} = n^{-3/2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} v_n\text{收敛}$$

# P270. 习题 12.3

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n-\ln n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$;

A.1-5. 解. 记 $u_n=\frac{1}{n-\ln n}$, $f(t)=t-\ln t$,

$$u_n\geq\frac{1}{n},\ \text{而}\ \sum_{n\geq1}\frac{1}{n}\ \text{发散}\ \Rightarrow\sum_{n\geq1}u_n\ \text{发散}$$

$$f'(t)=1-\frac{1}{t}>0\ \forall t>1\Rightarrow u_n\text{单减趋于 }0\Rightarrow\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}u_n\ \text{条件收敛}$$

A.2-3. 解. 记 $v_n=\frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(2n+1)}{3(n+1)}\to\frac{2}{3}<1\Rightarrow\sum_{n\geq1}v_n\ \text{收敛}\Rightarrow\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}v_n\ \text{绝对收敛}$$

# P270. 习题 12.3

2. 试研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1+a^n} (a>0)$ 的敛散性.

B.2. 解. 记 $x_n = \frac{1}{n(1+a^n)}$

Case1. $a > 1$ 时, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \frac{1+a^n}{1+a^{n+1}} \to \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n x_n$ 绝对收敛

Case2. $a = 1$ 时, $x_n = \frac{1}{2n}$ 单减趋于 $0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n x_n$ 条件收敛

Case3. $a < 1$ 时, $x_n \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ 发散

同时, 记 $y_n = \frac{1}{n}, z_n = x_n - y_n = \frac{-a^n}{n(1+a^n)}$, 由 $|z_n| \leq a^n \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n z_n$ 收敛

同时 $\sum_{n\geq 1} (-1)^n y_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n x_n$ 条件收敛