高等数学中求极限几种常见方法

林新和*
（呼伦贝尔学院数学系　内蒙古　海拉尔区　021008）

摘　要：极限概念在高数的基本概念中占有重要地位，高数中比较重要而又常见的计算便是求解极限。本文把授课中常见的求极限方法加以归纳，目的使学生学习极限知识时提高学习效率。

关键词：极限；概念；方法
中图分类号：O171　文献标识码：A　文章编号：1009－4601(2005)06－0102－03

1、据极限定义求极限

例题：求证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，（其中 $|q|<1$）

证明：已知 $|q|<1$，则存在 $a>0$，使 $|q|=\frac{1}{a+1}$，对任意 $\varepsilon>0$，根据二项式定理：放大、再解不等式

$$|q^n-0|=|q|^n=\frac{1}{(1+a)^n}$$

$$=\frac{1}{1+na+\frac{n(n-1)}{2!}a^2+\cdots+a^n}\le\frac{1}{na}\le\varepsilon$$

得 $n\ge\frac{1}{a\varepsilon}$，取 $N=[\frac{1}{a\varepsilon}]$，对任意 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $N=[\frac{1}{a\varepsilon}]$，当 $n\ge N$ 时，

有 $|q^n-0|\le\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$。

用定义求极限虽说是最基本的求极限的方法，但由于证明比较烦琐，故一般不采取这种方法。高数中许多定理、法则给我们提供了很多简单的求极限的方法。

2、利用单调有界公理求极限

例题　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}$

证明：设 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3\sqrt{3}}$，……，$x_n=\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}$ 有 $x_n=\sqrt{3x_n}$

1）证明 $\{x_n\}$ 有界，显然 $x_1=\sqrt{3}\le 3$，设 $x_n\le 3$，则 $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}\le\sqrt{3\cdot 3}\le 3$，所以 $\{x_n\}$ 有上界。

2）证明 $\{x_n\}$ 单调增加。

因为 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{3x_n}-x_n=\frac{3x_n-x_n^2}{\sqrt{3x_n}+x_n}=\frac{x_n(3-x_n)}{\sqrt{3x_n}+x_n}\ge 0$，$(x_n\le 3)$，所以 $\{x_n\}$ 单调，所以存在极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$，因为 $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}$，所以 $a=\sqrt{3a}$，$a=0$（舍去）或 $a=3$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}=3$

3、用乘子法求极限

例题：设 $|x|<1$，

求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})$

解：因为 $(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})=1-x^{2n+1}$ 当 $|x|<1$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

4、用有理化分子、分母求极限

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$$

5、利用夹逼定理求极限

* 收稿日期：2005－05－11
作者简介：林新和（1964－），男，呼伦贝尔学院数学系讲师，从事基础数学教育教学研究。

定理：若存在自然数 N，当 $n > N$ 时，总有 $a_n < b_n < c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

例题 1：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n}\right)$

解：$\frac{1+2+\cdots+n}{n^3+n} \le \frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n} \le \frac{1+2+\cdots+n}{n^3+1}$

即 $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3+n} \le \frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n} \le \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3+1}$ 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n^3+1)} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^3+1)} = 0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n}\right) = 0$。

例题 2：求 $\lim\limits_{n\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$

解：任意 $x \ne 0$，则 $\frac{1}{x}-1 \le \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}$，根据取整函数性质 $x-1 < [x] < x$

若 $x > 0$，则 $x\left(\frac{1}{x}-1\right) \le x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1$，

若 $x < 0$，则 $1 \le x\left[\frac{1}{x}\right] \le x\left(\frac{1}{x}-1\right)$，

而 $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}-1\right) = \lim\limits_{x\to 0}(1-x) = 1$，

根据夹逼定理 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

6、利用换元法求极限

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(sin\frac{1}{x}+cosx\frac{1}{x}\right)^x$

解：令 $\frac{1}{x} = y$，则 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$.

原式 $= \lim\limits_{y\to 0}(siny+cosy)^{\frac{1}{y}} =$

$\lim\limits_{y\to 0}[(1+siny+cosy-1)]^{\frac{1}{siny+cosy-1}\cdot\frac{siny+cosy-1}{y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{siny+cosy-1}{y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{cosy-siny}{1}} = e$

7、利用洛毕达法则求极限

此方法常用于未定式 $0\cdot\infty, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty$，型的求极限运算。

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^x-2x}{x-sinx}$

解：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^x-2x}{x-sinx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^x-2}{1-cosx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^x}{sinx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^x}{cosx} = 2$.

例题：求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}lnx} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

8、利用等价无穷小求极限

定义：设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小，且 $g(x) \ne 0$，若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，表示为 $f(x) = o(g(x))$。等价无穷小可替换。

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctan\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot ln(1-x^2)}{sin3x^2[ln(1+x)]^2}$

解：当 $x\to 0$ 时，$sin3x^2 = o(3x^2)$，$arctan\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = o\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$，$ln(1+x) = o(x)$，$ln(1-x^2) = o(1-x^2)$.

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)}{3x^2\cdot x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}$.

9、利用泰勒展式求极限

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解：因为 $cosx = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$，

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2!4}+o(x^4)$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2!4}-o(x^4)}{x^4}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$

10、利用收敛级数求极限

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$，

解：考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$，$U_n = \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

因为 $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!} = 2\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$

由达朗贝尔判别法得级数收敛，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n} = 0$

11、利用定积分求和式极限

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$，$\alpha > 0$

解：原式 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}=\int_0^1 x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$

12、利用积分中值定理求极限

例题：求 $\lim_{n\to\infty}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^n xdx$

解：$\forall\varepsilon>0,<\frac{\pi}{4},cos^n x\in\left[\varepsilon,\frac{\pi}{4}\right]$，

由积分中值定理得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^n xdx=\int_0^{\varepsilon}cos^n xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^n xdx\leq\int_0^{\varepsilon}1dx+\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)cos^n C_n,$$

上不等式 $\leq\varepsilon+\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\varepsilon$

所以，$\lim_{n\to\infty}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^n xdx=0$

13、利用数列递推关系求极限

例题：设 $a_1\geq a_2\geq 0$，$a_{2k+1}=\frac{a_{2k}+a_{2k-1}}{2}$，$a_{2k}=\sqrt{a_{2k-1}a_{2k-2}}$

证 $\{a_n\}$ 收敛

证明：往证 $\{a_{2k}\}$ 单调递增且有上界，$\{a_{2k-1}\}$ 单调递减且有下界，且 $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}$，

$a_2\leq a_3=\frac{a_2+a_1}{2}\leq a_1$，

$a_2\leq a_4=\sqrt{a_2a_3}\leq a_3$，

且 $a_2\leq a_4\leq a_3\leq a_1$，

类似，$a_4\leq a_3\Rightarrow a_4\leq a_6\leq a_5\leq a_3$，

由归纳法知，$a_2\leq a_4\leq a_6\leq\cdots\leq a_{2K}\leq a_{2K-1}\leq\cdots\leq a_3\leq a_1$，

即偶子列 $\{a_{2k}\}$ 单增有上界 a_1，奇子列 $\{a_{2k-1}\}$ 单减有下界 a_2，故均收敛。

设 $a_{2k}\to\beta$，$a_{2k-1}\to\alpha$，所以，$a_{2k}^2=a_{2k-1}a_{2k-2}$

两端取极限 $\beta^2=\alpha\beta$，$\beta(\beta-\alpha)=0$，所以，$\beta=\alpha\geq 0$，

所以证 $\{a_n\}$ 收敛，即存在极限

14、利用斯托兹（*Stolz*）定理求极限

例题：若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a$

证：往证 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\frac{1}{a}$，

根据 *Stolz* 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\frac{1}{a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)}{n-(n-1)}\right.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{1}=\frac{1}{a}$$

所以，原式 $=a$。

参考文献：

〔1〕刘玉琏，傅沛仁. 数学分析讲义〔M〕. 高等教育出版社，2003，第三版.

〔2〕华东师范大学数学系. 数学分析〔M〕. 高等教育出版社，2001，第三版.

（上接第 98 页）口语交际能力

学习完课文之后，根据课文的特点，教师可以组织学生通过双人、小组或全班活动的形式，进行简单的讨论，戏剧表演，扮演角色等以提高学生的学习兴趣。

（三）运用课文培养学生的书面表达能力

教师在教学过程中应努力使学生高度重视英语写作，引导学生树立提高英语写作能力的信心。让学生对已学的课文进行缩写、改写、续写、模仿写或对课文中的某个人物、事件、观点进行简单的评析。这样既能巩固所学的知识，又能培养学生综合运用知识的能力。

总之，培养阅读能力，掌握阅读方法是教学中应该长期坚持的，只有经过不懈努力才能取得好的效果。作为教师，要不断地更新教育观念，不断研究，学习教育学理论，不断地进行教改尝试，以新的教学理论为指导，以 21 世纪对人才的要求为目标，从远处着眼，从近处着手，切实通过课堂教学这条主渠道，认真地指导学生的学习方法，培养学生的创新意识，提高他们的创新能力。

参考文献：

〔1〕杭宝桐. 中学英语教学法〔M〕. 华东师范大学出版社出版，1988.

〔2〕英语教育专业教学大纲〔M〕. 东北师范大学出版社，1992.

〔3〕外语教育心理学〔M〕. 安徽教育出版社，1986.

〔4〕Albert J. Harris. How to Increase Reading Ability〔M〕. 1948.

〔5〕Fry. Edward. Teaching Faster Reading〔M〕. Cambridge University Press，1963.