学号

专业

任课教师

南开大学 2016 级信息类一元函数微分学统考试卷（A 卷）2016 年 11 月 12 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效，影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分											

草稿区

一、选择题(每小题 4 分)

一题得分	

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限是函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的（ B ）

(A) 充分条件；(B) 必要条件；(C)充分必要条件；(D) 不充分，也不必要条件

(2) 当 $x \to 0$ 时，下列无穷小量中最高阶的是（ D ）

(A) $2x^2$；(B) $1-\cos x$；(C) $\sqrt{1+x^2}-1$；(D) $3x^3$

(3) 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{(x-1)^2}$ 的值为（ ~~B~~ ）C（直接代值）

(A) ∞；(B) 1；(C) 0；(D) -1

(4) 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，则（3阶导数）$f'''(0)$ 是（ A ）

(A) 6；(B) 5；(C) 4；(D) 3

(5) 曲线 $y^3=6y-x^2$ 在 $(-2,2)$ 处的切线斜率为（ B ）

(A) 1/3；(B) 2/3；(C) 1/2；(D) 1

(4) $f(x)=x^2\left(x-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)=x^3-\frac{x^4}{2}+\cdots$ $\quad a_3=1=\frac{f'''(0)}{3!}$

$\Rightarrow f'''(0)=3!=6$

(5) $3y^2y'=6y'-2x \quad y'=\frac{2x}{6-3y^2}$

(1) $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

二、填空题（每小题 4 分）

二题得分	

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan(1/x), & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ 则 $f'_-(0)=$ $-\frac{\pi}{2}$

(2) 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $f'(1)=1$，令 $F(x)=f(1/x)-f(x^2)$，则 $F'(1)=$ ______

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+(e^x-1)}{\ln(1+4x)}=$ 1

(4) $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdots(x+16)=16!$

(4) 设函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)\ldots(x+16)$，则 $f'(0)$ 为 16!

(5) 设 $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=1$，则 $a=$ 1 $\quad b=$ -1

$0=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x(x+1)}-a-\frac{b}{x}\right]=1-a \Rightarrow a=1$

$b=1-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=1-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=-1$

姓名

学号

专业

任课教师

三、求下列极限：（每小题 5 分）

三题得分	

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x}+3\sin\frac{1}{x})^{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+e^x)^{1/x}$

$\boxed{\infty^0} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x^2+e^x)}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x^2+e^x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+e^x}{x^2+e^x} = 1$ 所以

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+e^x)^{\frac{1}{x}} = e$

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）：

四题得分	

（1） 设 $y=(x^2+x+2)^{x+1}$，求 $\frac{dy}{dx}$；

(2) 设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^3) \\ y=t^2\sin t \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\frac{dy}{dx}$；

草稿

姓名

学号

专业

任课教师

草稿区

七、（6分）设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0\end{cases}$，其中 $\alpha,\beta>0$，试分别讨论 α,β 满足什么条件时，

（1）$f'(0)$ 存在；（2）$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

七题得分	

(1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ $\quad f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^\beta}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}$

当 $\alpha=1$ 时 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x^\beta}$ 无极限，当 $\alpha<1$ 时 $x^{\alpha-1}$ 为无穷大量 $\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$ 无极限

当 $\alpha>1$ 时 $x^{\alpha-1}$ 为无穷小量，$\cos\frac{1}{x^\beta}$ 为有界量 所以 $\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}=0$。所以当 $\alpha>1$ 时 $f'(0)$ 存在

(2) 当 $x<0$ 时 $f'(x)=0$。当 $x>0$ 时 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^\beta}\cdot\frac{1}{x^{\beta+1}}=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=0=f'(0)$，($\alpha>1$ 时) $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)$ 右边极限

要存在必须 $\boxed{\alpha-1>0 \quad \alpha-\beta-1>0}$ 此时极限 $=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=f'(0)$

八、（6分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$.

证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=1-\xi$；

（2）存在不同的 $\alpha,\beta\in(0,1)$，使 $f'(\alpha)f'(\beta)=1$

八题得分	

(1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=f(0)-1=-1$，$F(1)=f(1)=1$。由介值定理，$\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $F(\xi)=0$

即 $f(\xi)=1-\xi$

(2) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上应用 Lagrangé 微分中值定理，分别 $\exists\,\alpha\in(0,\xi)$ $\beta\in(\xi,1)$ s.t.

$f(\xi)-f(0)=f'(\alpha)\xi$，$f(1)-f(\xi)=f'(\beta)(1-\xi)$ 即有 $1-\xi=f'(\alpha)\xi$，$\xi=f'(\beta)(1-\xi)$

$\Rightarrow f'(\alpha)=\dfrac{1-\xi}{\xi}$，$f'(\beta)=\dfrac{\xi}{1-\xi}$。从而 $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=1$.