目录

1 广义积分与含参变量积分

- 广义积分
- 含参变量积分

基本概念

定积分的对象是有限闭区间 $[a,b]$ 上的有界连续函数.

- 积分区间无穷 $[a,\infty), (-\infty,a], (-\infty,\infty)$. pp327. def.1.1
- 函数在闭区间上存在瑕点. (端点 + 内部). pp333. def.2.1

例 1.1 (广义积分计算)

$$\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx;\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx;\quad \int_0^\infty \sin x\,dx;\quad \int_1^\infty x^{-p}\,dx$$

ans: $k^{-2}, \pi,$ 发散, pv.s.1

基本概念

定积分的对象是有限闭区间 $[a,b]$ 上的有界连续函数.

- 积分区间无穷 $[a,\infty), (-\infty,a], (-\infty,\infty)$. pp327. def.1.1
- 函数在闭区间上存在瑕点. (端点 + 内部). pp333. def.2.1

例 1.1 (广义积分计算)

$$\int_0^{\infty} xe^{-kx}\,dx;\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx;\quad \int_0^{\infty} \sin x\,dx;\quad \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx$$

ans: k^{-2}, π, 发散, pv.s.1

收敛判定方法

非负被积函数 $\mathscr{D}e$ 柯西、比较判别法 (比阶)

例 1.2 (敛散性判断)

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x};\quad \int_2^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln x};\quad \int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}dx;\quad \int_1^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}$$

绝对收敛 vs. 条件收敛

定义: 绝对收敛 vs. 条件收敛 pp332. def.1.2

例 1.3 (敛散性判断)

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}dx$$

瑕积分

- 函数在闭区间上存在瑕点. (端点 + 内部). pp333. def.2.1

例 1.4 (瑕积分计算)

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx;\quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx;\quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx (p>0)$$

ans: $\frac{\pi}{2}$

收敛判定方法

非负被积函数 $\mathscr{D}e$ 柯西、比较判别法 (比阶)

例 1.5 (敛散性判断)

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx; \quad \int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx; \quad \int_1^3 \frac{dx}{\ln x};$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}(k^2<1); \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}dx$$

含参变量积分

examples: $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx,\quad g(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$

- （连续性）$f\in C[a,b]\times[c,d]$，则 $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$
- （积分）$f\in C[a,b]\times[c,d]$，则 $\int_a^b dy\int_c^d f(x,y)dx=\int_c^d dx\int_a^b f(x,y)dy$

例 2.1

- $I(\alpha)=\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$，则 $\lim\limits_{a\to 0} I(a)=2(e-1)$
- $I=\int_0^1 \dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx(b>a>0)$ ans: $\ln\frac{1+b}{1+a}$

含参变量积分

- (Thm.3.3) $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \dfrac{d}{dy}f(x,y)\,dx$
- $g(y) = \displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ (Thm.3.4.(连续性); Thm.3.5.(莱布尼兹公式))

例 2.2

- 计算 $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ ans: $\frac{\pi}{8}\ln 2$
- 已知 $\varphi(y) = \int_{\sin u}^{\cos u} \frac{1}{1+(1+u)x^2}$，求 $\lim_{u\to 0}\varphi(u)$ ans: $\frac{\pi}{4}$
- $y(x) := \displaystyle\int_x^{x^2} \sin(x-t)^2\,dt$, 求 $y'(x)$. ans: $(2x-1)\sin(x-x^2)^2$

复习

1. 广义积分的判定 (定义 + 非负函数的比较定理)
2. 广义积分的计算 (牛顿-莱布尼兹)
3. 含参变量积分 (求导; 一元积分变二元积分)

广义积分计算

例 2.3 (习题课讲义)

- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx$; $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$;
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$; $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx$