第十章 非正弦周期信号电路的稳态分析

非正弦周期信号

10.1 非正弦周期信号及其傅立叶展开

- 非正弦周期信号的概念
- 周期函数分解为傅立叶级数

10.2 非正弦周期信号有关的参数

（非正弦周期函数的有效值、平均值和平均功率）

非正弦周期信号电路的分析

10.3 非正弦周期信号电路的分析——谐波分析法

信号的频谱

10.4 信号的频谱

10.1 非正弦周期信号及其傅立叶展开

一、非正弦周期信号的概念

信号 ——┬—— 周期信号(正弦、锯齿、方波、……)
　　　　└—— 非周期信号

生产实际中不完全是正弦电路，经常会遇到非正弦周期电压电流电路。在电子技术、自动控制、计算机和无线电技术等方面，电压和电流往往都是周期性的非正弦波形。即使是正弦周期信号源，如果电路中有非线性元件，也会产生非正弦周期信号(如二极管整流电路)。因此对非正弦周期信号电路的研究非常必要，而且具有普遍意义。

非正弦周期交流信号的特点：

1) 不是正弦波

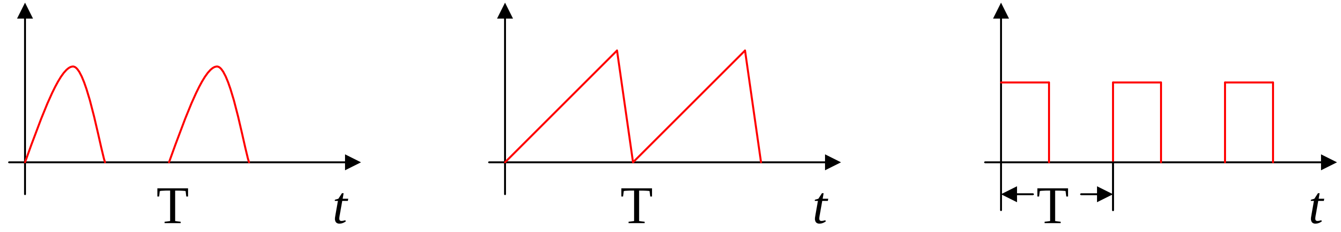
2) 按周期规律变化，满足：

$$\boxed{f(t)=f(t+kT) \quad (k=0,1,2,\cdots)} \tag{10-1}$$

式中*T*为周期。周期的倒数称为信号的重复频率，即

$$f=\frac{1}{T} \tag{10-2}$$

图10.1-1为一些典型的非正弦周期信号。



(a) 半波整流波形　　(b) 锯齿波　　(c) 方波

图10.1-1 几种典型的非正弦周期信号

本章主要讨论非正弦周期电流、电压信号的作用下，线性电路的稳态分析和计算方法。采用谐波分析法，实质上就是通过应用数学中傅里叶级数展开方法，将非正弦周期信号分解为一系列不同频率的正弦量之和；再根据线性电路的叠加定理，分别计算在各个正弦量单独作用下电路中产生的同频率正弦电流分量和电压分量；最后，把所得分量按时域形式叠加得到电路在非正弦周期激励下的稳态电流和电压。

二、周期函数分解为傅立叶级数

1. 周期信号的傅立叶级数(与信号频谱)：

电子技术中所遇到的非正弦周期电流、电压信号多能满足展开成傅里叶级数的条件，因而能分解成如下傅里叶级数形式：

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t] \qquad (10\text{-}3)$$

也可表示成：

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \qquad (10\text{-}4)$$

其中

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \qquad (10\text{-}5)$$

以上两种表示式中系数之间关系为

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k = A_{km}\cos\varphi_k \qquad b_k = -A_{km}\sin\varphi_k \\ \varphi_k = tg^{-1}\dfrac{-b_k}{a_k} \end{cases} \qquad (10\text{-}6)$$

傅立叶级数是一个无穷三角级数。

式(10-4)中：

第一项 A_0称为周期函数$f(t)$的恒定分量(或直流分量、平均值)；

第二项 $A_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ 称为一次谐波(基波)，

其周期或频率与原函数$f(t)$相同；

其它各项统称为高次谐波，即2次、3次、4次、…谐波。

上述系数可按下列公式计算

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_0 &= a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt && \text{(10-7a)} \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_1 t dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos k\omega_1 t d(\omega_1 t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k\omega_1 t d(\omega_1 t) && \text{(10-7b)} \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_1 t dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega_1 t dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin k\omega_1 t d(\omega_1 t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin k\omega_1 t d(\omega_1 t) && \text{(10-7c)}
\end{aligned}
\right.
$$

（k =1，2，3……）

求出a_0、a_k、b_k便可得到原函数 $f(t)$的展开式。

例10.2-1 把图10.2-1所示周期性方波电流分解成傅里叶级数。

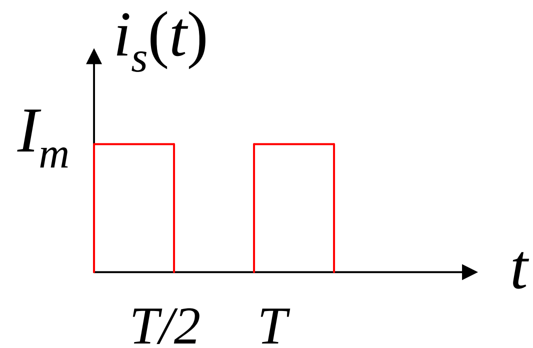


图10.2-1

解：周期性方波电流在一个周期内的函数表示式为

$$i_S(t)=\begin{cases} I_m & 0<t<\dfrac{T}{2} \\ 0 & \dfrac{T}{2}<t<T \end{cases}$$

各次谐波分量的系数为：

$$I_0=\frac{1}{T}\int_0^T i_S(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m dt=\frac{I_m}{2}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\sin k\omega t d(\omega t)=\frac{I_m}{\pi}(-\frac{1}{k}\cos k\omega t)\Big|_0^{\pi}=\begin{cases}0 & k\text{为偶数}\\ \dfrac{2I_m}{k\pi} & k\text{为奇数}\end{cases}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\cos k\omega t d(\omega t)=\frac{2I_m}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\sin k\omega t\Big|_0^{\pi}=0$$

$$A_k=\sqrt{b_k^2+a_k^2}=b_k=\frac{2I_m}{k\pi}\qquad (k\text{为奇数})$$

因此，i_S的傅里叶级数展开式为：

$$i_S(t)=\frac{I_m}{2}+\frac{2I_m}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots)$$

即，周期性方波可以看成是直流分量与一次谐波、三次谐波、五次谐波等的叠加，如图10.2-2所示。

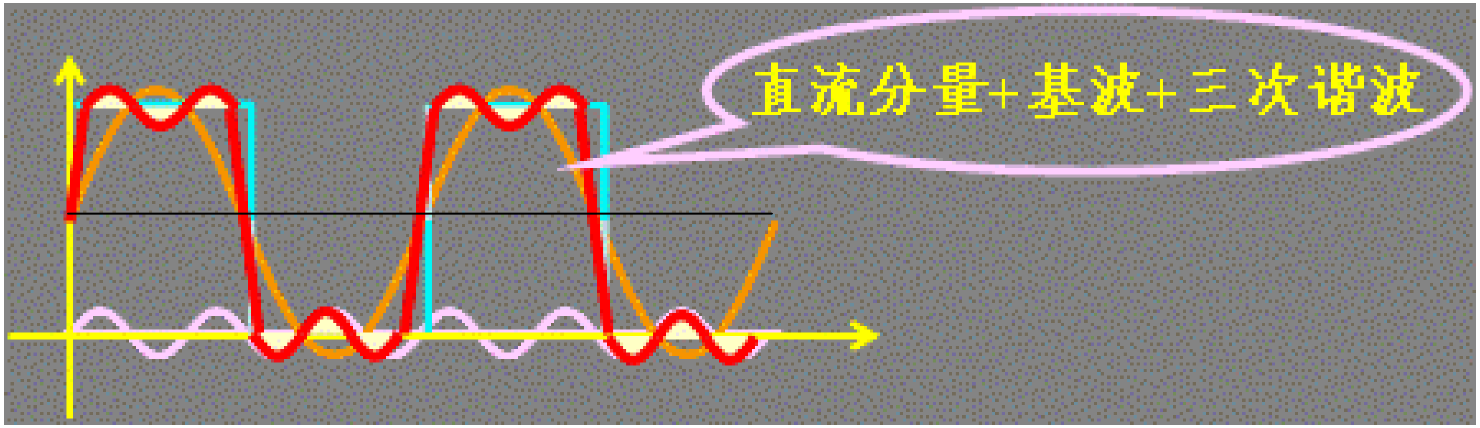


图10.2-2

2. 周期函数的对称性与傅立叶系数的关系：

非正弦周期电流、电压信号分解成傅里叶级数的关键在于求出系数 a_0、a_k、b_k，可以利用函数的某种对称性判断它包含哪些谐波分量及不包含哪些谐波分量，可使系数的确定简化，给计算和分析将带来很大的方便。如以下几种周期函数值得注意：

(1) 偶函数

波形对称于纵轴，如图10.2-3所示，

满足： $f(-t)=f(t)$ (10-8a)

则 $b_k=0$ (10-8b)

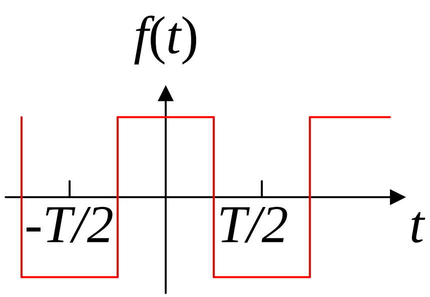


图10.2-3

(2) 奇函数

波形对称于原点，如图10.2-4所示，

满足： $f(t) = -f(-t)$ (10-9a)

则 $a_k = 0$ (10-9b)

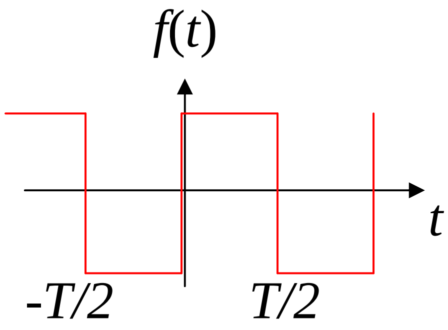


图10.2-4

(3) 奇谐函数

波形镜对称，波形移动半个周期后与横轴对称。如图10.2-5所示，

满足： $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$ (10-10a)

则 $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ (10-10b)

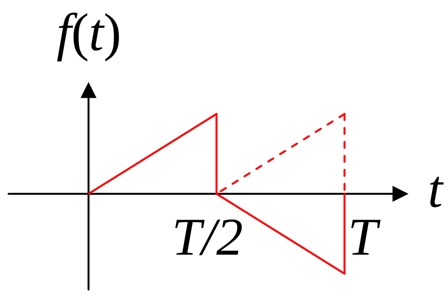


图10.2-5

可见，在奇谐函数的傅立叶级数中，只会含有基波和奇次谐波的正弦、余弦项，而不会包含偶次谐波项，这也是“奇谐函数”名称的由来。

4) 若函数是偶函数又是镜对称时，则只含有奇次的余弦项，即

$$a_0 = a_{2k} = b_k = 0 \qquad (10\text{-}11)$$

(5) 若函数是奇函数又是镜对称时，则只含有奇次的正弦项，即

$$a_0 = a_k = b_{2k} = 0 \qquad (10\text{-}12)$$

实际中所遇到的周期函数可能较复杂，不易看出对称性，但是如果将波形作一定的平移，或视为几个典型波形的合成，则也能使计算各次谐波的系数简化。

例10.2-2 给定函数 $f(t)$的部分波形如图10.2-6所示。为使 $f(t)$的傅里叶级数中只包含如下的分量：(1) 正弦分量；(2) 余弦分量；(3) 正弦偶次分量；(4) 余弦奇次分量。试画出 $f(t)$的波形。

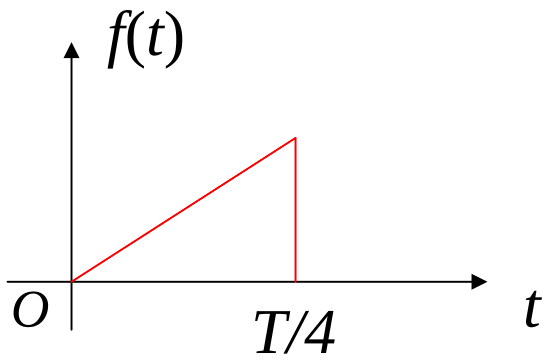
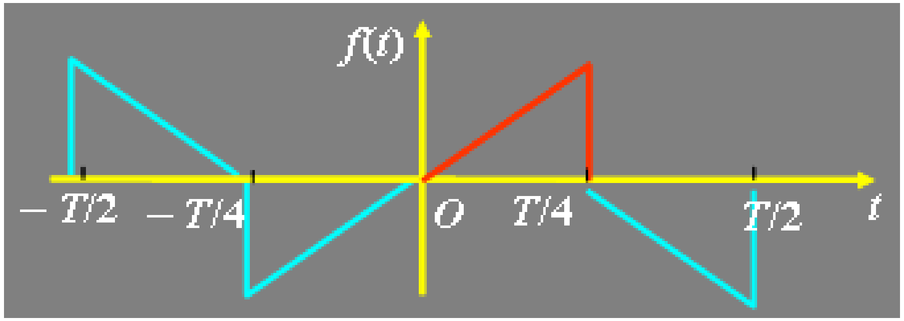
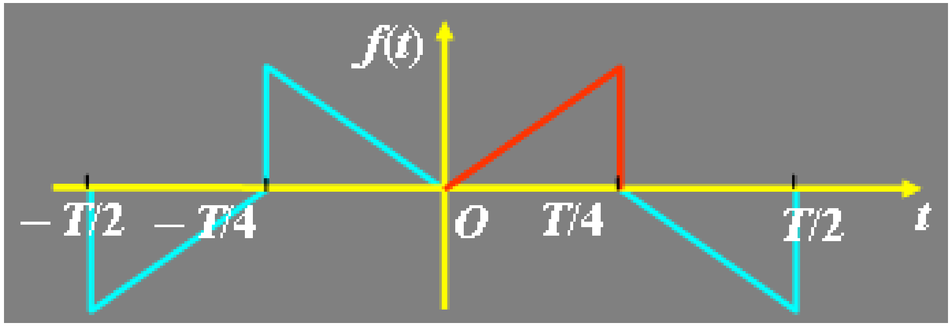


图10.2-6

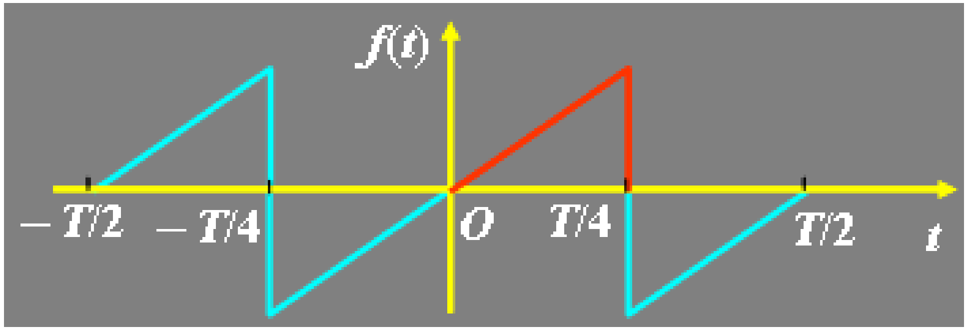
解：(1) $f(t)$的傅里叶级数中只包含正弦分量，说明 $f(t)$为奇函数，对原点对称，可用下图波形表示。



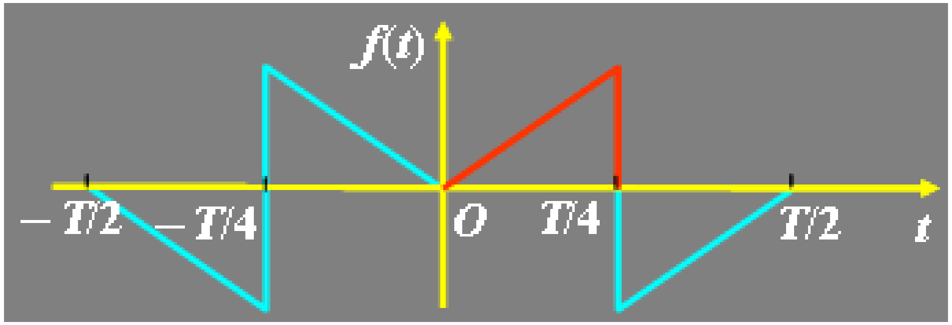
(2) $f(t)$的傅里叶级数中只包含余弦分量，说明 $f(t)$为偶函数，对坐标纵轴对称，可用下图波形表示。



(3) $f(t)$的傅里叶级数中只包含正弦偶次分量，可用下图波形表示。



(4) $f(t)$的傅里叶级数中只包含余弦奇次分量，可用下图波形表示。



3. 傅立叶有限级数与最小方均误差：

傅立叶级数是一个无穷级数，因此把一个非正弦周期函数分解为傅立叶级数，从理论上说，必须取无穷多项才能准确地代表原函数。实际运算中，只能取有限的项数，因此必然产生误差问题。

已知周期函数f(t)的傅立叶级数为

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t]$$

若取傅立叶级数的前$2N+1$项(即取到N次谐波项)来逼近周期函数$f(t)$，则有限项傅立叶级数为

$$f_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}[a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t]$$

这样用$f_N(t)$逼近$f(t)$引起的误差函数为

$$\varepsilon_N(t) = f(t) - f_N(t)$$

方均误差等于

$$E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_N^2(t)dt$$

将$f_N(t)$、$f(t)$所表示的级数代入上式，并利用下节式(9.3-1)-(9.3-3)，经简化得到，

$$E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \overline{f^2(t)} - \overline{f_N^2(t)} = \overline{f^2(t)} - [a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)]$$

10.2 非正弦周期函数的有关参数
——有效值、平均值和平均功率

1. 三角函数的性质

1）正弦、余弦函数在一个周期内的积分为0，即：

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \cdot d\omega t = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t d\omega t = 0 \qquad (10\text{-}13)$$

2） $\sin^2$、 $\cos^2$ 在一个周期内的积分为π，即：

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\omega t \cdot d\omega t = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 k\omega t \cdot d\omega t = \pi \qquad (10\text{-}14)$$

3）三角函数的正交性如下式所示：

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \sin p\omega t \cdot d\omega t = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \cos p\omega t \cdot d\omega t = 0 \qquad (k \neq p) \qquad (10\text{-}15)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \cdot \sin p\omega t \cdot d\omega t = 0$$

2. 非正弦周期函数的有效值

设非正弦周期电流可以分解为傅里叶级数

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

代入有效值的定义式中有:

$$I \equiv \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)]^2 dt}$$

利用上述三角函数的性质，上式中i的展开式平方后将含有下列各项

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 dt = I_0^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{km}^2 \cos^2(k\omega_1 t + \varphi_k)dt = I_{km}^2/2 = I_k^2 \quad (I_k = I_{km}/\sqrt{2})$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0 \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)dt = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km}\cos(k\omega_1 t + \varphi_k)I_{pm}\cos(p\omega_1 t + \varphi_p)dt = 0 \quad (k \neq p)$$

这样可以求得i的有效值为：

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_{km}^2}{2}} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \cdots} \qquad (10\text{-}16)$$

由此得到结论： <u>周期函数的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的方根</u>。此结论可以推广用于其他非正弦周期量。

3. 非正弦周期函数的平均值

设非正弦周期电流可以分解为傅里叶级数：

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

则其平均值定义为：

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)| dt \qquad (10\text{-}17)$$

即：非正弦周期电流的平均值等于此电流绝对值的平均值。

按上式可求得正弦电流的平均值为：

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T |I_m \cos(k\omega_1 t)| dt = 0.637 I_m = 0.898 I \qquad (10\text{-}18)$$

注意：

1）测量 非正弦周期电流或电压的有效值要用电磁系或电动系仪表，测量非正弦周期量的平均值要用磁电系仪表。

2）非正弦周期量的有效值和平均值没有固定的比例关系，它们随着波形不同而不同。

4. 非正弦周期交流电路的平均(有功)功率

设任意一端口电路的非正弦周期电流和电压可以分解为傅里叶级数:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{ik})$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{uk})$$

则一端口的平均功率为:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{uk})][I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{ik})]dt$$

利用三角函数的性质，得：

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k$$
$$= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \cdots$$
$$= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots\cdots \qquad (10\text{-}19)$$

式中 $\varphi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik}$

由此得出结论：

非正弦周期电流电路的平均功率＝直流分量的功率＋各次谐波的平均功率

10.3 非正弦周期信号电路的计算

根据以上讨论可得非正弦周期信号激励下线性电路的分析方法和计算步骤如下：

1) 应用傅立叶级数对激励信号进行谐波分析，将给定的非正弦周期激励信号分解成直流分量和各次谐波分量之和；

2) 将激励信号的直流分量和各次谐波分量分别单独作用于所分析的电路，利用直流和正弦信号电路的计算方法，对直流和各次谐波激励分别计算其响应；

只需注意：①当直流分量作用时，电路中的电容相当于开路、电感相当于短路；而②当各次谐波分别作用时，电容和电感相对于各次谐波的阻抗值是不同的，其中感为$X_{kL}=\omega_k L=k\omega_1 L$；容抗为 $X_{kC}=1/\omega_k C=1/k\omega_1 C$。

3) 将以上计算结果转换为瞬时值迭加。

注意：这里指的是瞬时值的叠加，而不是相量的叠加。因为不同频率的相量叠加在电路中没有实际的物理意义。

上述建立在傅立叶级数和叠加原理基础上的非正弦周期信号电路的分析方法称为谐波分析法。

注意: 1） 各次谐波电路计算可应用相量法，

2）对不同的频率，感抗与容抗是不同的。对直流C相当于开路、L相于短路。对k次谐波有：

$$\left.\begin{aligned} X_{kL} &= \omega_k L = k\omega L \\ X_{kC} &= \frac{1}{\omega_k C} = \frac{1}{k\omega C} \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}20)$$

例10.4-1 电路如图10.4-1(a)所示，电流源为图(b)所示的方波信号。求输出电压u_0,已知 $R=20\Omega$、$L=1mH$、$C=1000\,pF$，$I_m=157\,\mu A$、$T=6.28\,\mu s$ 。

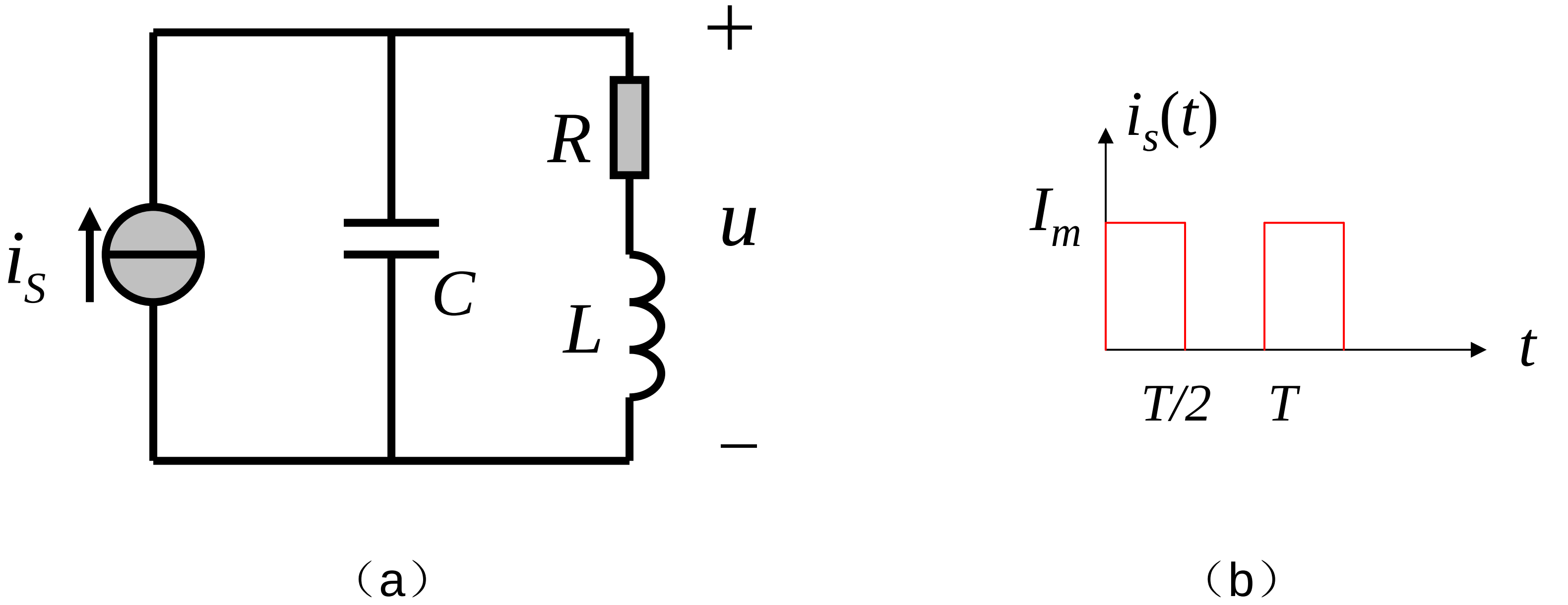


图10.4-1

解：计算步骤如下：

（1）将激励信号做傅立叶级数展开：

由例10.2-1知方波信号的展开式为，

$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots)$$

将已知数据 $I_m = 157\mu A,\ T = 6.28\mu s$ 代入得：

直流分量 $I_0 = \frac{I_m}{2} = \frac{1.57}{2} = 78.5\mu A$

基波最大值 $I_{1m} = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2\times 1.57}{3.14} = 100\mu A$

三次谐波最大值 $I_{3m} = \frac{1}{3}I_{1m} = 33.3\mu A$

五次谐波最大值 $I_{5m}=\frac{1}{5}I_{1m}=20\mu A$

角频率为： $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{6.28\times10^{-6}}=10^{6}rad/s$

因此，电流源各频率的谐波分量表示式为：

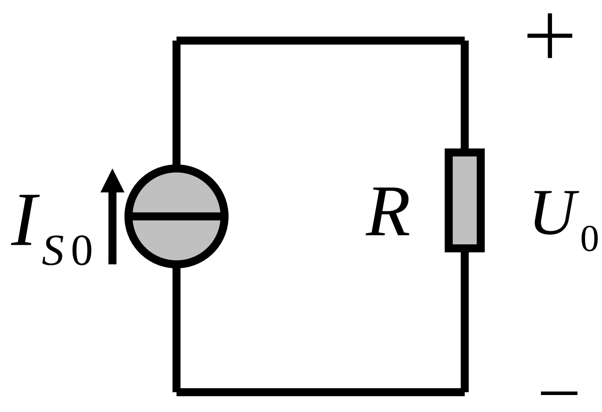
$$i_S=\underbrace{78.5}_{I_{S0}}+\underbrace{100\sin10^{6}t}_{i_{S1}}+\underbrace{\frac{100}{3}\sin3\cdot10^{6}t}_{i_{S3}}+\underbrace{\frac{100}{5}\sin5\cdot10^{6}t}_{i_{S5}}\quad\mu A$$

（2） 对各次频率的谐波分量单独计算：

（a) 直流分量 $I_{S0}=78.5\mu A$ 单独作用时：

把电容断路，电感短路，电路如图(c)所示，计算得：

$$U_0 = RI_{S0} = 20\times 78.5\times 10^{-6} = 1.57mV$$



（c）

（b) 基波 $i_{S1}=100\sin 10^6 t\ \mu A$ 单独作用时，

电路如图(d)所示。计算得容抗和感抗为：

$$\frac{1}{\omega_1 C}=\frac{1}{10^6\times 1000\times 10^{-12}}=1k\Omega \qquad \omega_1 L=10^6\times 10^{-3}=1k\Omega$$

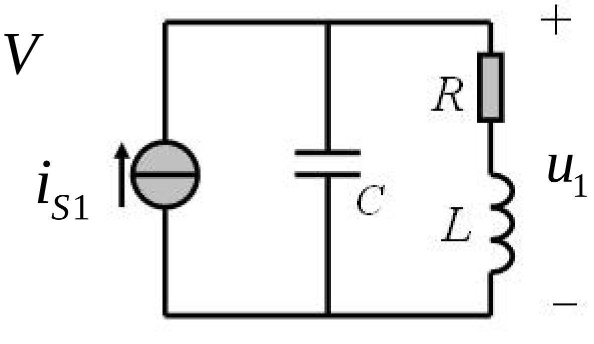
所以阻抗为：

$$Z(j\omega_1)=\frac{(R+jX_L)(-jX_C)}{R+j(X_L-X_C)}\approx\frac{X_L X_C}{R}=\frac{L}{RC}=50k\Omega$$

因此

$$\dot{U}_1=\dot{I}_1\cdot Z(j\omega_1)=\frac{100\times 10^{-6}}{\sqrt{2}}\cdot 50=\frac{5000}{\sqrt{2}}mV$$

$$u_1=5000\sin\omega t\ mV$$



（d）

(c) 三次谐波 $i_{S3}=\dfrac{100}{3}\sin 3\cdot10^6 t\ \mu A$ 单独作用时，

计算得容抗和感抗为：

$$\frac{1}{3\omega_1 C}=\frac{1}{3\times10^6\times1000\times10^{-12}}=0.33K\Omega \qquad 3\omega_1 L=3\times10^6\times10^{-3}=3k\Omega$$

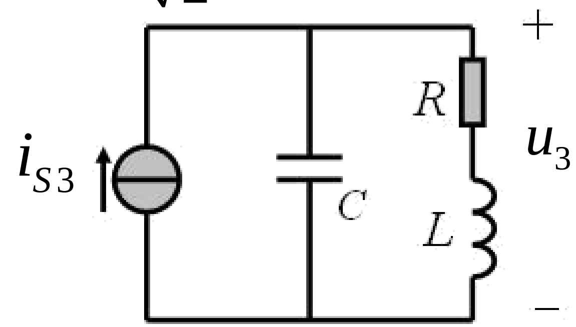
阻抗为：

$$Z(j3\omega_1)=\frac{(R+jX_{L3})(-jX_{C3})}{R+j(X_{L3}-X_{C3})}=374.5\angle-89.19^\circ\ \Omega$$

则

$$\dot U_3=\dot I_{S3}\cdot Z(j3\omega_1)=\frac{\frac{100}{3}\times10^{-6}}{\sqrt2}\cdot374.5\angle-89.19^\circ=\frac{12.47}{\sqrt2}\angle-89.19^\circ\ mV$$

$$u_3=12.47\sin(3\omega t-89.2^\circ)\ mV$$



（e）

(d) 五次谐波 $i_{S5}=\dfrac{100}{5}\sin 5\cdot 10^6 t\ \mu A$单独作用时，

计算得容抗和感抗为：

$$\frac{1}{5\omega_1 C}=\frac{1}{5\times10^6\times1000\times10^{-12}}=0.2K\Omega \qquad 5\omega_1 L=5\times10^6\times10^{-3}=5k\Omega$$

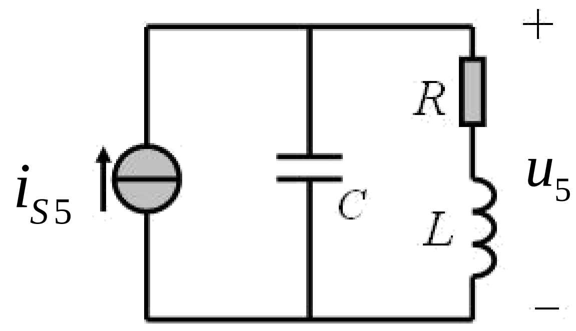
阻抗为：

$$Z(j5\omega_1)=\frac{(R+jX_{L5})(-jX_{C5})}{R+j(X_{L5}-X_{C5})}=208.3\angle-89.53°\ \Omega$$

则

$$\dot U_5=\dot I_{S5}\cdot Z(j5\omega_1)=\frac{20\times10^{-6}}{\sqrt2}\cdot 208.3\angle-89.53°=\frac{4.166}{\sqrt2}\angle-89.53°\ mV$$

$$u_5=4.166\sin(5\omega t-89.53°)\ mV$$



（f）

(3) 把各次谐波分量计算结果的瞬时值迭加：

$$
\begin{aligned}
u &= U_0 + u_1 + u_3 + u_5 \\
&\approx 1.57 + 5000\sin\omega t \\
&\quad + 12.47\sin(3\omega t - 89.2^\circ) \\
&\quad + 4.166\sin(5\omega t - 89.53^\circ)\ mV
\end{aligned}
$$

例10.4-2 图10.4-2(a)所示电路中各表读数 (有效值) 及电路吸收的功率。已知 $u = 30 + 120\cos 1000t + 60\cos(2000t + \frac{\pi}{4})\ V$

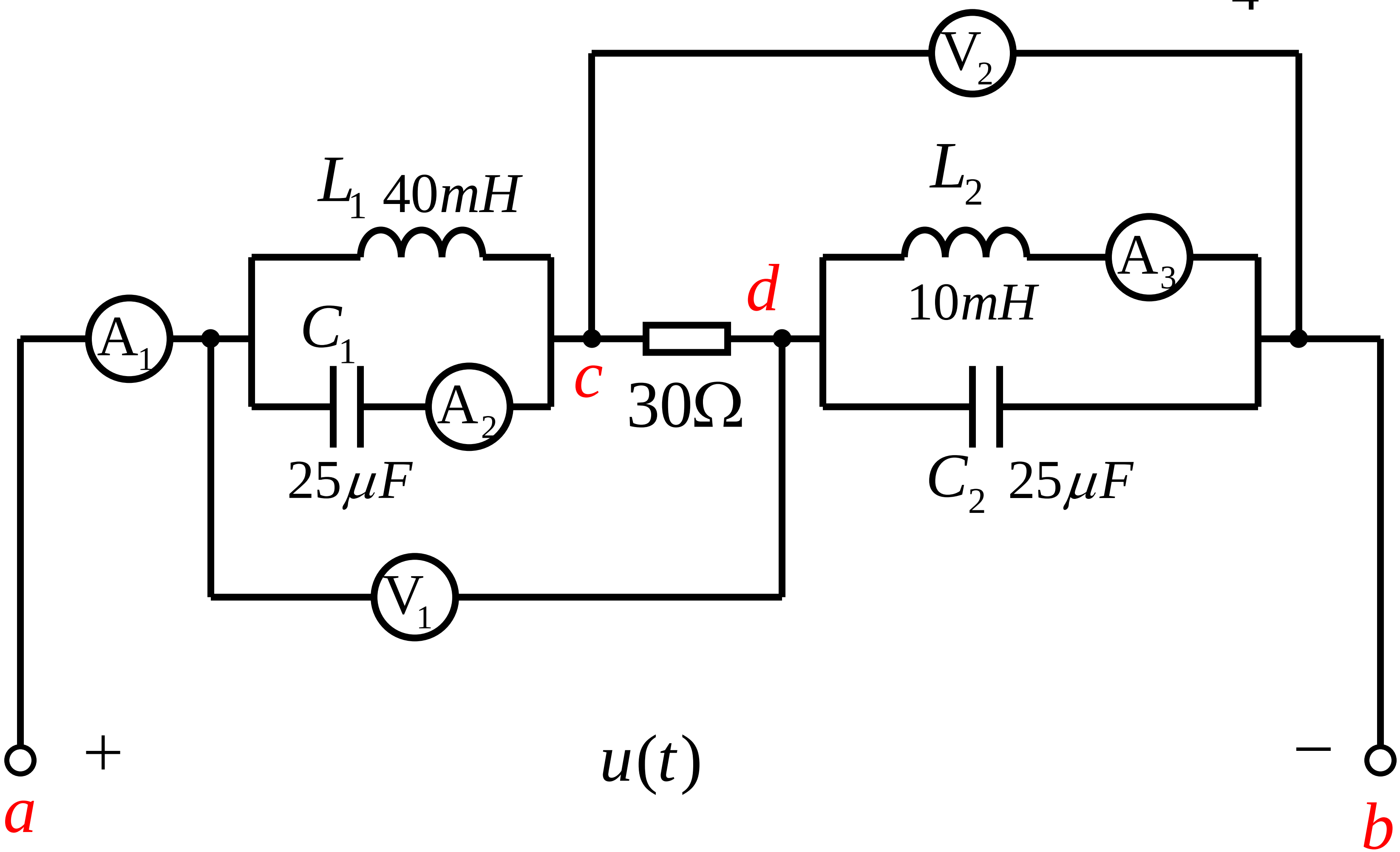
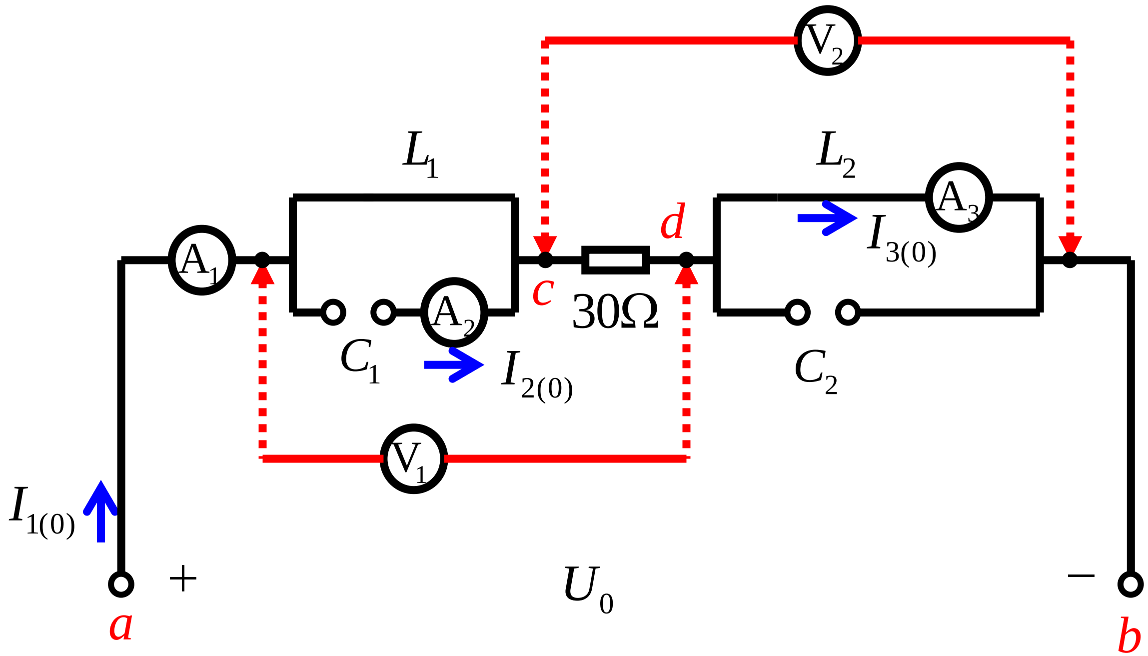


图10.4-2 （a）

解：(1) 当直流分量 U_0 =30V 作用于电路时，L_1、L_2 短路，C_1、C_2 开路，电路如图（b）所示。



（b）

所以 $I_{1(0)} = I_{3(0)} = \dfrac{30}{30} = 1A, \quad I_{2(0)} = 0$

$$U_{1(0)} = U_{2(0)} = 30V$$

(2) 基波作用于电路， u_1=120cos1000t V

$$\omega L_1 = 1000 \times 40 \times 10^{-3} = 40\Omega$$

$$\omega L_2 = 1000 \times 10 \times 10^{-3} = 10\Omega$$

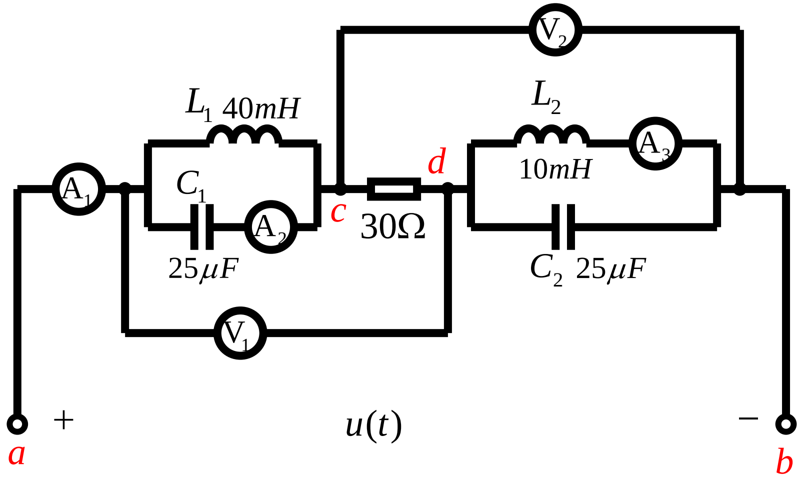
$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{1000 \times 25 \times 10^{-6}} = 40\Omega$$

L_1、C_1 对基波发生并联谐振。所以 $I_{1(1)} = 0$ ，基波电压加于 L_1、C_1 并联电路两端，故

$$\dot{U}_{1(1)} = \frac{120}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ V, \qquad \dot{U}_{2(1)} = 0$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \dot{I}_{3(1)} = 0$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \frac{\dot{U}_1}{-jX_{C1}} = \frac{\frac{120}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ}{-j40} = \frac{3}{\sqrt{2}}\angle 90^\circ A$$



(3) 二次谐波u_2=60cos(2000t+π/4)V作用于电路，有

$$2\omega L_1 = 2000\times 40\times 10^{-3} = 80\Omega$$

$$2\omega L_2 = 2000\times 10\times 10^{-3} = 20\Omega$$

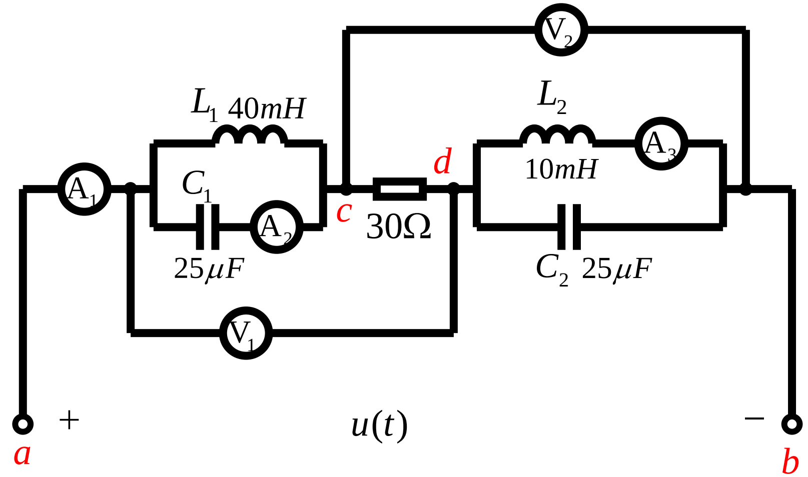
$$\frac{1}{2\omega C_1} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2000\times 25\times 10^{-6}} = 20\Omega$$

L_2、C_2 对二次谐波发生并联谐振。所以$I_{1(2)} = I_{2(2)} = 0$ ，电压加于L_2、C_2 并联电路两端，故

$$\dot{U}_{1(2)} = 0\ V, \qquad \dot{U}_{2(2)} = \dot{U}_2 = \frac{60}{\sqrt{2}}\angle 45°V$$

$$\dot{I}_{1(2)} = \dot{I}_{2(2)} = 0$$

$$\dot{I}_{3(2)} = \frac{\dot{U}_1}{j2\omega L_2} = \frac{\frac{60}{\sqrt{2}}\angle 45°}{j20} = \frac{3}{\sqrt{2}}\angle -45° A$$



所以电流表 $A_1 = 1A$

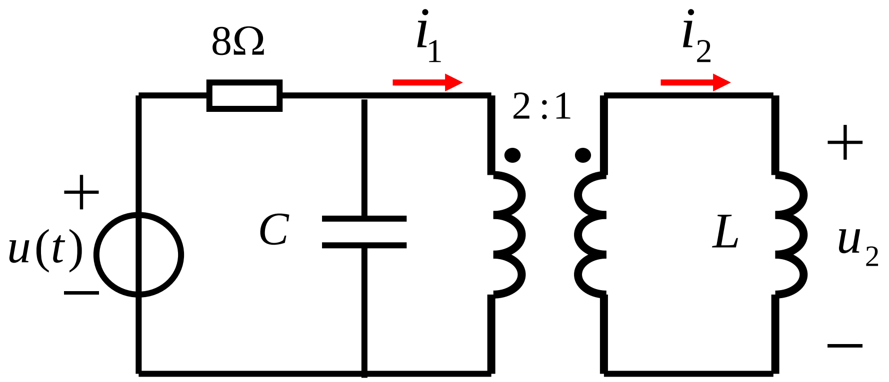
$$A_2 = 3/\sqrt{2} = 2.12A$$

$$A_3 = \sqrt{1^2 + (3/\sqrt{2})^2} = 2.35A$$

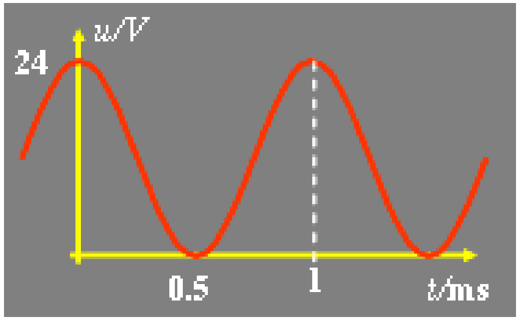
电压表 $V_1 = \sqrt{30^2 + (120/\sqrt{2})^2} = 90V$

$$V_2 = \sqrt{30^2 + (60/\sqrt{2})^2} = 52V$$

例10.4-3　图(a)所示电路中，已知电源$u(t)$是周期函数，波形如图(b)所示，L=1/(2π) H，C=125/π μF。求：理想变压器原边电流i_1(t)及输出电压u_2的有效值。



例10.4-3　(a)



（b）

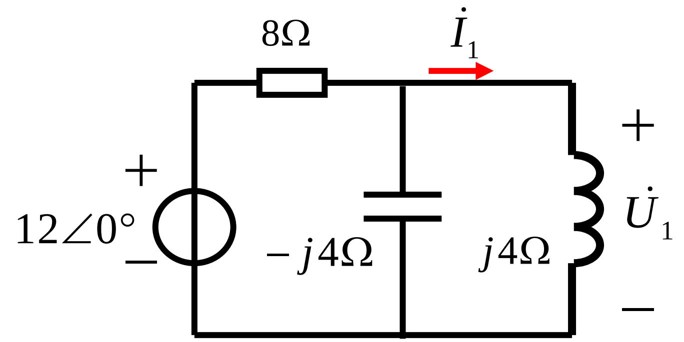
解：由图（b）知

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times 10^3 rad/s$$

$$u(t) = 12 + 12\cos\omega t$$

(1)当直流分量U_0 =12V作用于电路时，电容开路、电感短路，有：

$$i_{1(0)} = 12/8 = 1.5A \qquad u_{2(0)} = 0V$$



（c）

(2)当 $u_1 = 12\cos\omega t$ 作用于电路时，有：

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{\pi}{2\pi \times 10^3 \times 125 \times 10^{-6}} = 4\Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 10^3 \times \frac{1}{2\pi} \times 10^{-3} = 1\Omega$$

图(a)的原边等效电路如图(c)所示。电容和电感发生并联谐振，电源电流为零，因此:

$$\dot{U}_1 = \dot{U} = \frac{12}{\sqrt{2}}\angle 0°V, \qquad \dot{U}_2 = \frac{1}{n}\dot{U}_1 = \frac{6}{\sqrt{2}}\angle 0°V$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j4} = -j3 = 3\angle -90°A$$

则

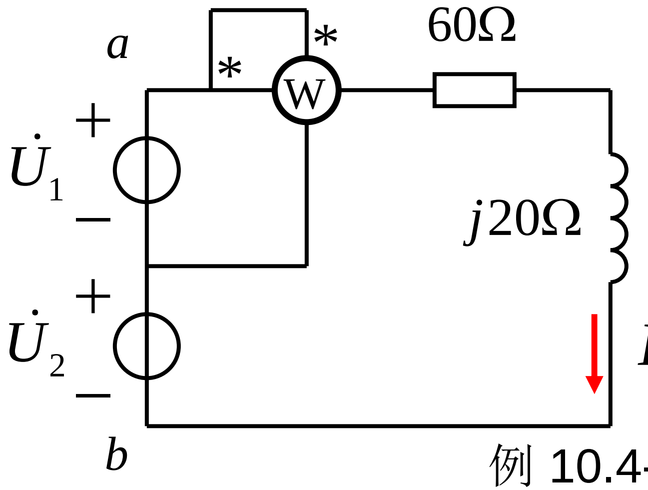
$$i_1 = 1.5 + 3\cos(\omega t - 90°)A$$

$$U_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4.243V$$

例10.4-4 求图示电路中 a、b 两端电压有效值 U_{ab} 、电流 i 及功率表的读数。已知：

$$u_1 = 220\sqrt{2}\cos\omega t \ \text{V}$$

$$u_2 = 220\sqrt{2}\cos\omega t + 100\sqrt{2}\cos(3\omega t + 30°) \ \text{V}$$



例 10.4-4图

解: (1)a、b两端电压为

$$u_{ab} = u_1 + u_2 = 440\sqrt{2}\cos\omega t + 100\sqrt{2}\cos(3\omega t + 30°)V$$

电压有效值 $U_{ab} = \sqrt{440^2 + 100^2} = 451.22V$

(2)电流i：

一次谐波作用时：

$$\dot{U}_{ab(1)} = 440\angle 0° \ V$$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{440}{60 + j20} = \frac{22}{3 + j} = 6.96\angle -18.4° \ A$$

三次谐波作用时：

$$\dot{U}_{ab(3)} = 100\angle 30^\circ\ V$$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100\angle 30^\circ}{60 + j60} = \frac{5\angle 30^\circ}{3 + j3} = 1.18\angle -15^\circ\ A$$

所以

$$i = 6.96\sqrt{2}\cos(\omega t - 18.4^\circ) + 1.18\sqrt{2}\cos(3\omega t - 15^\circ) A$$

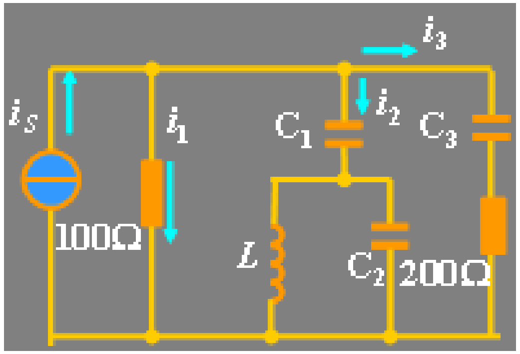
(3)功率表读数为

$$P = 220 \times 6.96\cos 18.4^\circ = 1452.92W$$

注意： 同频率的电压电流构成有功功率。

例10.4-5 已知图(a)电路中 $i_S = 5 + 20\cos 1000t + 10\cos 3000t\ A$，$L$=0.1H，$C_3$＝1μF。电容$C_1$中只有基波电流，电容$C_3$中只有三次谐波电流。求$C_1$、$C_2$和各支路电流。

例10.4-5 图



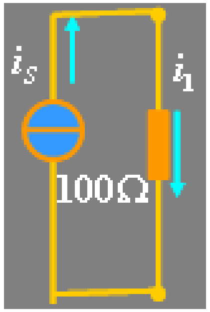
解： C_1中只有基波电流，说明L和C_2对三次谐波发生并联谐振。所以：

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{9\times10^5} F$$

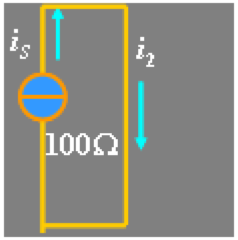
C_3中只有三次谐波电流，说明L、C_1、C_2对一次谐波发生串联谐振。所以：

$$\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{-L/C_2}{j(\omega L - \frac{1}{\omega C_2})} = 0 \qquad C_1 = \frac{8}{9\times10^5} F$$

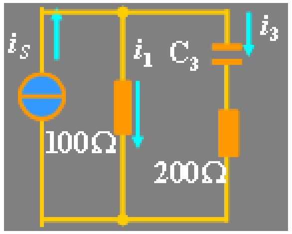
各次谐波分量单独作用时的电路如图(b)、(c)、(d)所示。由图可计算得：



（b） 直流作用



（c） 一次谐波作用



（d） 三次谐波作用

$$\dot{I}_{3(3)}=\frac{100\times10}{100+200-j10^3/3}=\frac{30}{9-j10}=2.23\angle48°\ A$$

$$\dot{I}_{1(3)}=\dot{I}_S-\dot{I}_{3(3)}=10-\frac{30}{9-j10}=8.67\angle-11°\ \ A$$

$$i_1(t)=5+8.67\cos(3000t-11°)\ A$$

$$i_2(t)=20\cos1000t\ A$$

$$i_3(t)=2.23\cos(3000t+48°)\ A$$

10.4 信号的频谱