第10章 含有耦合电感的电路

本章重点

10.1 互感

10.2 含有耦合电感电路的计算

10.3 耦合电感的功率

10.4 变压器原理

10.5 理想变压器

●重点

1.互感和互感电压

2.有互感电路的计算

3.变压器和理想变压器原理

互感和互感电压（Mutual Inductance）

复习——电感(inductance)

载流回路中的电流 i

安培环路定律

$$\int_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu \sum i_{\text{int}}$$

磁感应强度 B

磁通Φ的定义

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

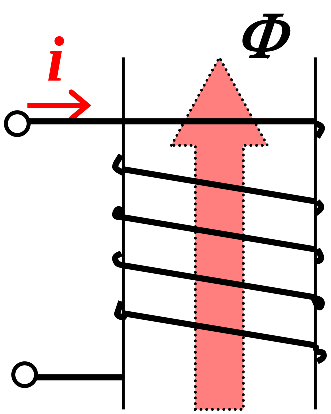
磁通 Φ

磁链ψ的定义

$$\psi = N\,\Phi$$

磁链 ψ

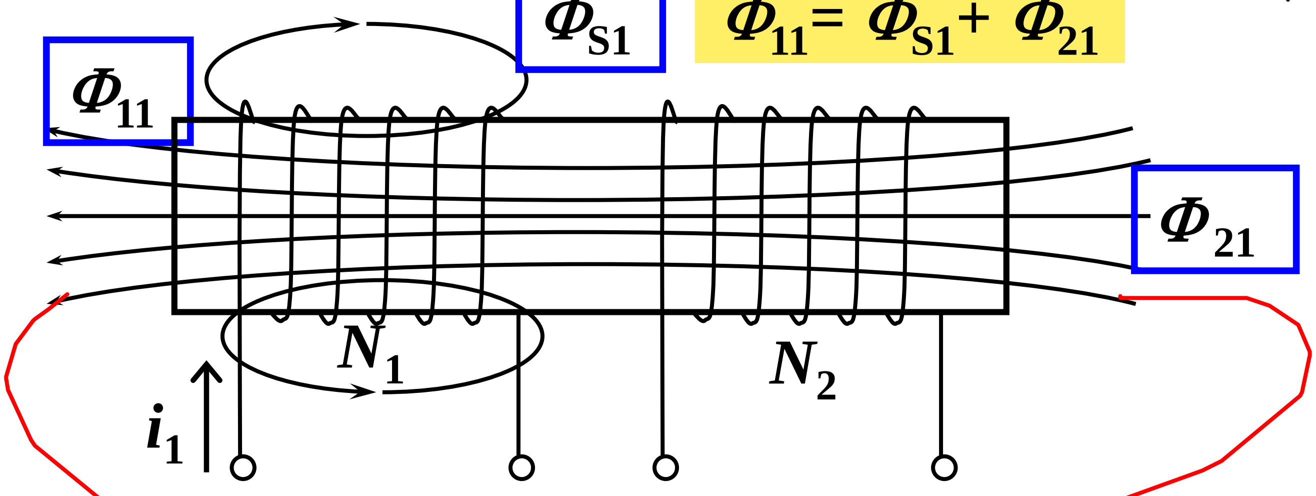
$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi}{i}$$



10.1 互感

耦合电感元件属于多端元件，在实际电路中，如收音机、电视机中的中周线圈、振荡线圈，整流电源里使用的变压器等都是耦合电感元件，熟悉这类多端元件的特性，掌握包含这类多端元件的电路问题的分析方法是非常必要的。

(1) 互感的定义



$\Phi_{11}=\Phi_{S1}+\Phi_{21}$

同理有线圈2的自感

$$L_2=\frac{\psi_{22}}{i_2}$$

线圈2对1的互感

$$M_{12}=\frac{\psi_{12}}{i_1}$$

2

载流回路1中的电流 i_1 → 磁感应强度 B → 磁通 Φ_{11}

磁通 Φ_{11} = 主磁通 Φ_{21} + 漏磁通 Φ_{S1}

$\psi_{11}=N_1\Phi_{11}$ → 磁链 ψ_{11}

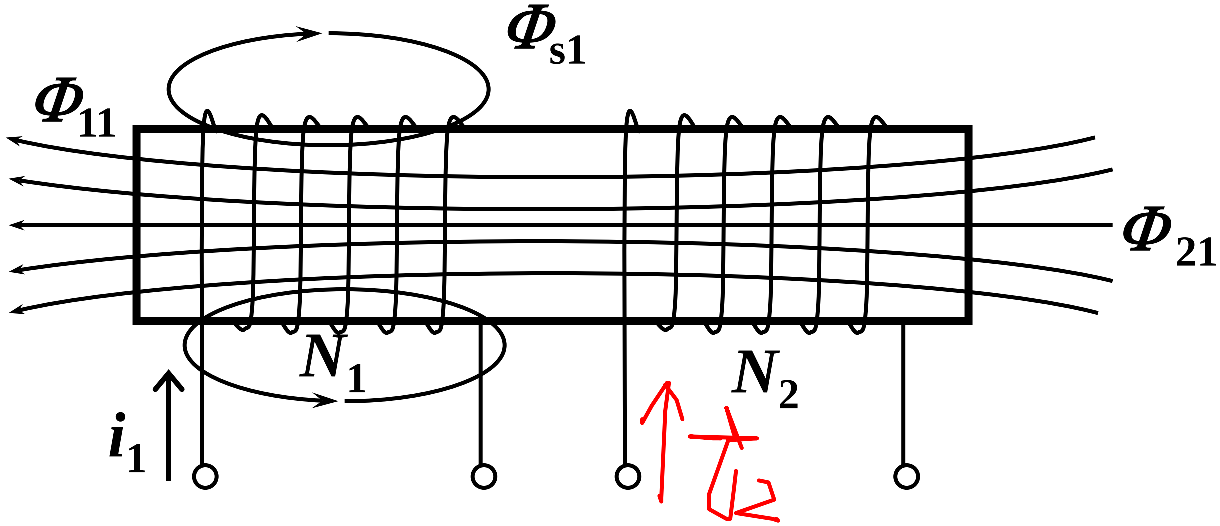
$$L_1\overset{\text{def}}{=}\frac{\psi_{11}}{i_1}$$

线圈1的自感

$\psi_{21}=N_2\Phi_{21}$ → 磁链 ψ_{21}

$$M_{21}\overset{\text{def}}{=}\frac{\psi_{21}}{i_1}$$

线圈1对2的互感



$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1} \qquad L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}$$

单位 亨 (H)

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} \qquad M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

当两个线圈都有电流时，每一线圈的磁链为自磁链与互磁链的代数和：

$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2$$

$$\psi_2 = \psi_{22} \pm \psi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1$$

(2) 互感的性质

$\boxed{M \propto N_1 N_2 \quad (L \propto N^2)}$

a） 对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$

b）互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。

c） L 总为正值，M 值有正有负。

2. 耦合系数

用耦合系数k **表示两个线圈磁耦合的紧密程度。**

$$k \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

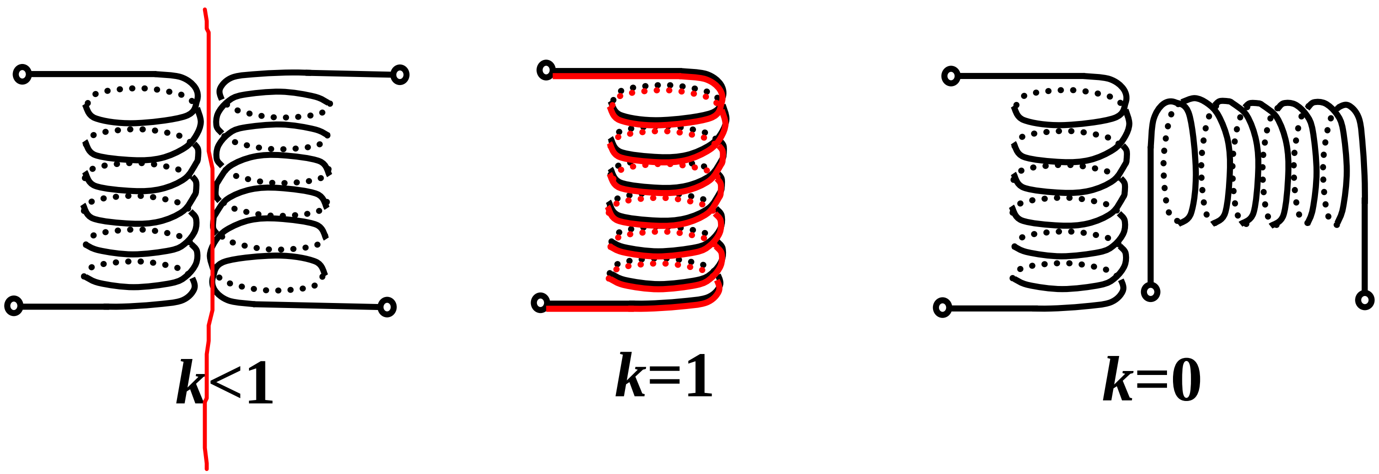
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{(Mi_1)(Mi_2)}{L_1 i_1 L_2 i_2}} = \sqrt{\frac{\Psi_{12}\Psi_{21}}{\Psi_{11}\Psi_{22}}} \leq 1$$

k=1 **称全耦合: 漏磁** $\Phi_{s1} = \Phi_{s2} = 0$

满足: $\rightarrow$ $\Phi_{11} = \Phi_{21}$, $\Phi_{22} = \Phi_{12}$

注意

耦合系数k与线圈的结构、相互几何位置、空间磁介质有关。



互感现象 → 利用——变压器：信号、功率传递

避免——干扰

克服：合理布置线圈相互位置或增加屏蔽减少互感作 用。

3. 耦合电感上的电压、电流关系

当i_1为时变电流时，磁通也将随时间变化，从而在线圈两端产生感应电压。

当i_1、u_{11}、u_{21}方向与Φ符合右手螺旋时，根据电磁感应定律和楞次定律：

$$u_{11} = \frac{\mathrm{d}\Psi_{11}}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \text{自感电压}$$

$$u_{21} = \frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \text{互感电压}$$

当两个线圈同时通以电流时，每个线圈两端的电压均包含自感电压和互感电压。

$$\begin{cases}\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2 \\ \psi_2 = \psi_{22} \pm \psi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

在正弦交流电路中，其相量形式的方程为：

$$\begin{cases}\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \pm \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2\end{cases}$$

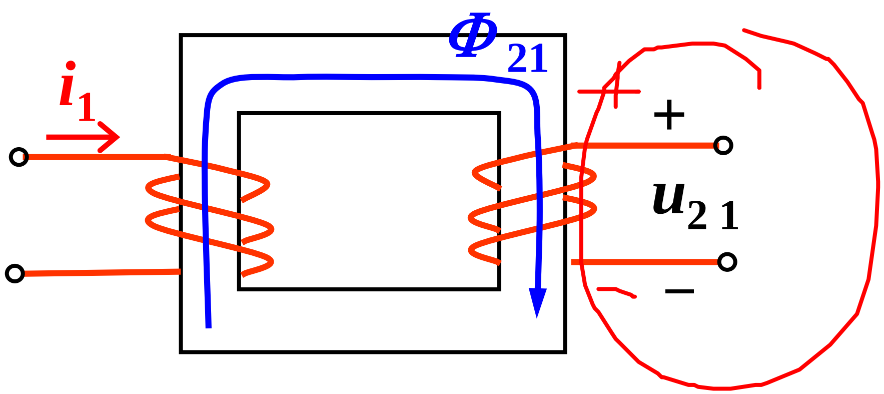
注意

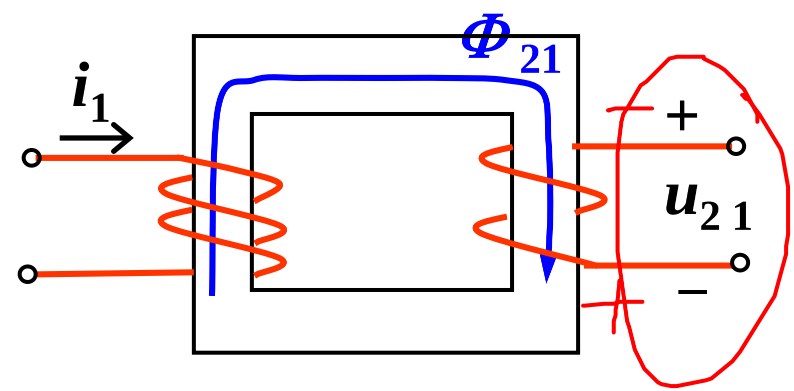
$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

两线圈的自磁链和互磁链相助，互感电压取正，否则取负。表明互感电压的正、负：

（1）与电流的参考方向有关；

（2）与线圈的相对位置和绕向有关。





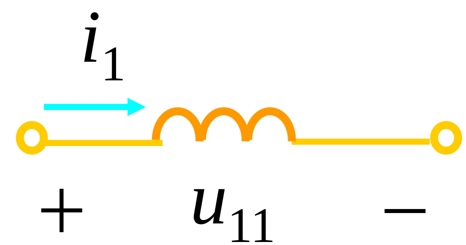
i_1，Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}，u_{21}，右手螺旋定则

4.互感线圈的同名端

对自感电压，当u，i 取关联参考方向，u、i 与Φ符合右螺旋定则，其表达式为：

$$u_{11}=\frac{\mathrm{d}\Psi_{11}}{\mathrm{d}t}=N_1\frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t}=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



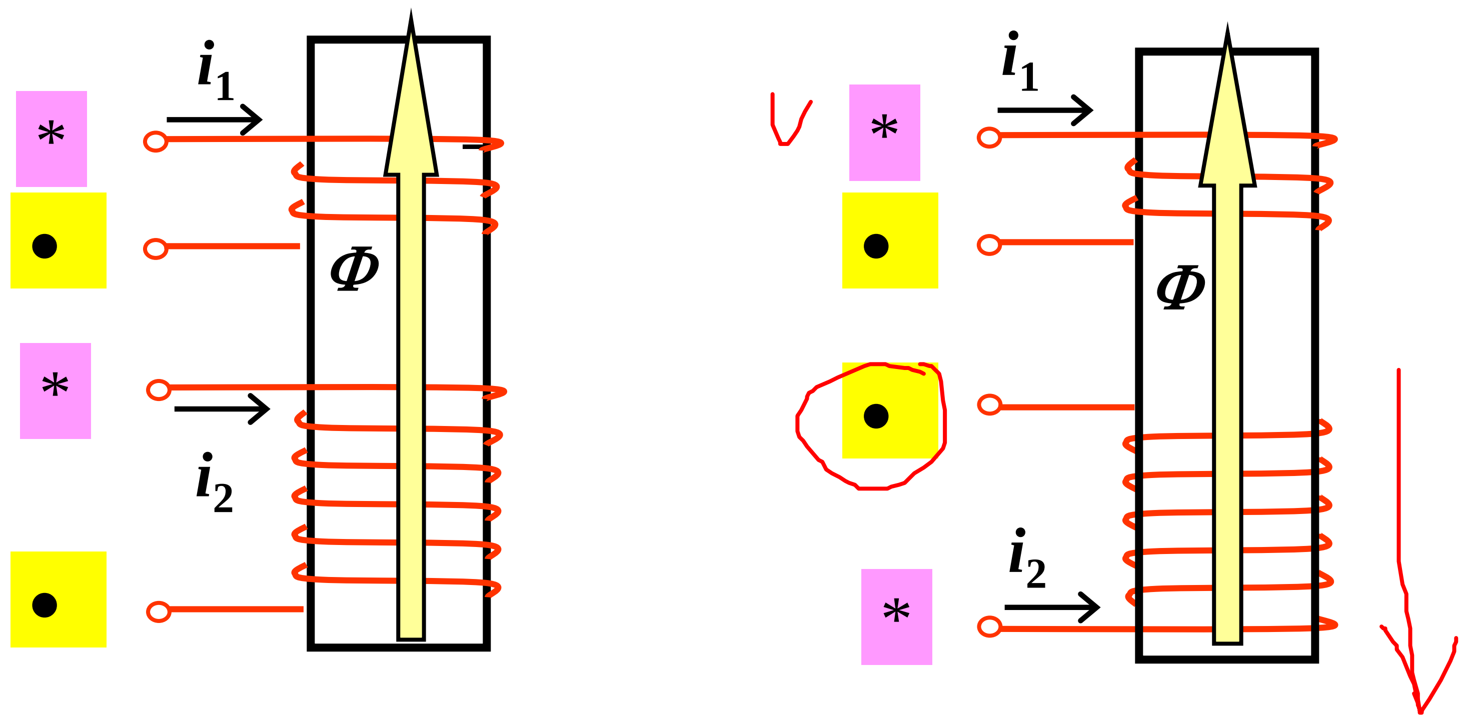
上式说明，对于自感电压由于电压电流为同一线圈上的，只要参考方向确定了，其数学描述便可容易地写出，可不用考虑线圈绕向。

对互感电压，因产生该电压的电流在另一线圈上，因此，要确定其符号，就必须知道两个线圈的绕向。这在电路分析中显得很不方便。为解决这个问题引入同名端的概念。

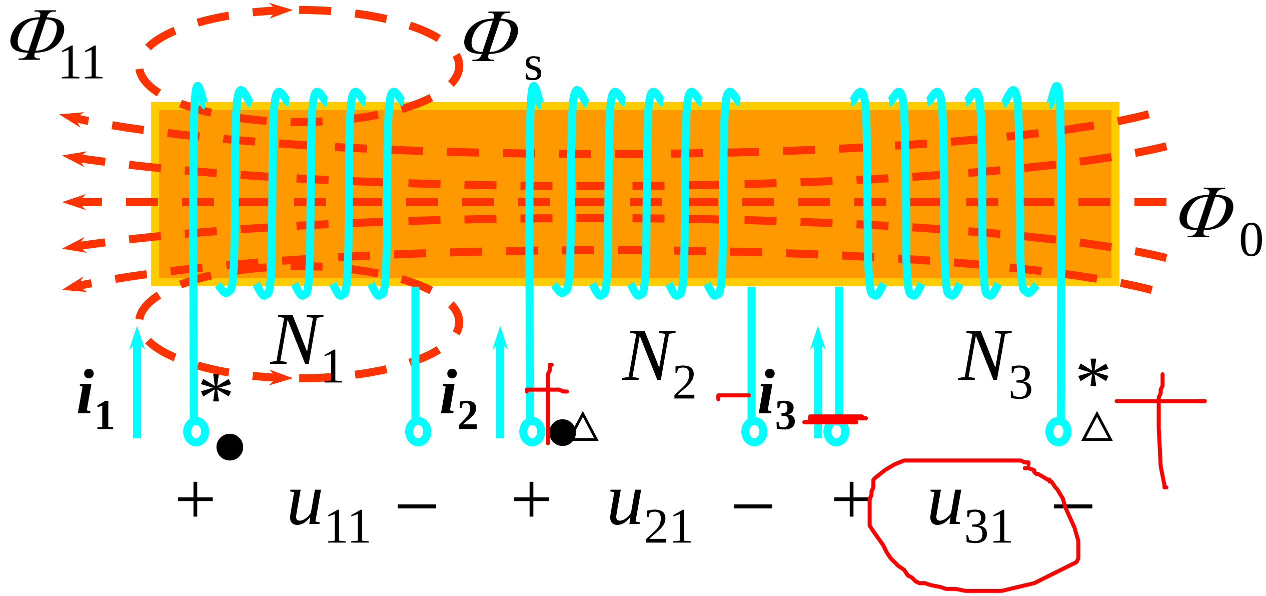
同名端

当两个电流分别从两个线圈的对应端子同时流入或流出，若所产生的磁通相互加强时，则这两个对应端子称为两互感线圈的同名端。

需要解决的问题1：如何根据绕法确定同名端?



注意：线圈的同名端必须两两确定。



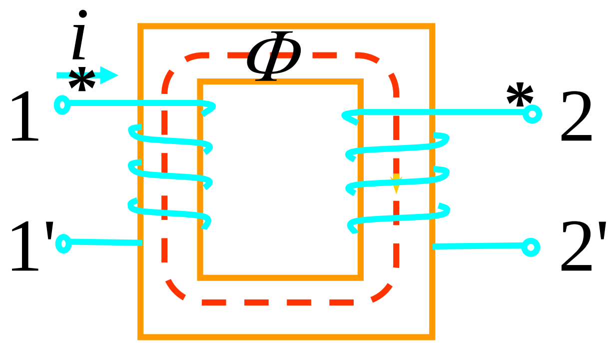
$$u_{21} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad u_{31} = -M_{31}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

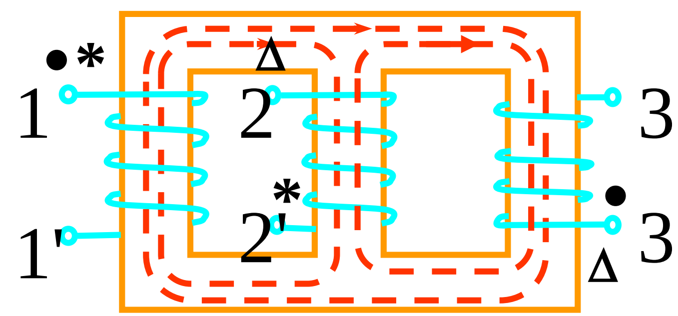
注意　线圈的同名端必须两两确定。

需要解决的问题2：除了绕向，如何通过实验方法判断同名端?

(1)当两个线圈中电流同时由同名端流入(或流出)时，两个电流产生的磁场相互增强。

例





(2)当随时间增大的时变电流从一线圈的一端流入时，将会引起另一线圈相应同名端的电位升高。

$$u_{21}=M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\qquad u_{31}=-M_{31}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

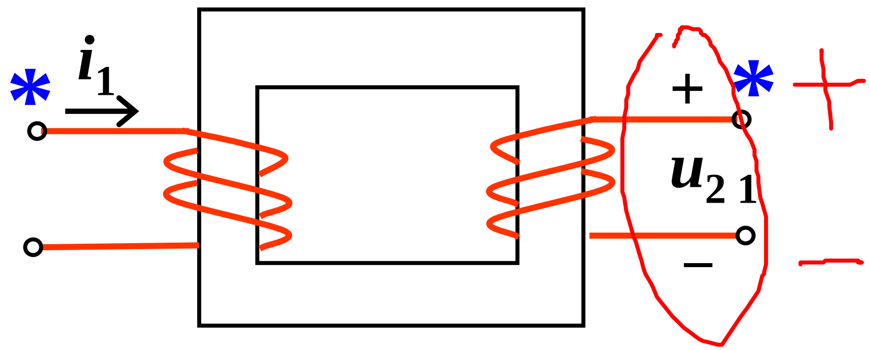
同名端的实验测定：

如图电路，当闭合开关 S 时，i 增加，

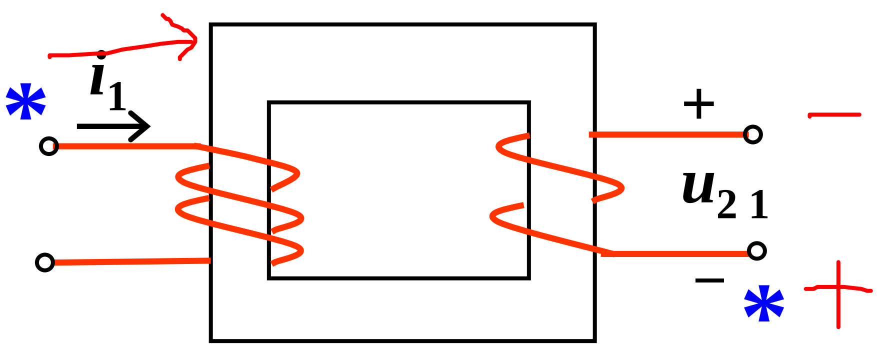
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0, \qquad u_{22'} = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0$$ 电压表正偏。

当两组线圈装在黑盒里，只引出四个端线组，要确定其同名端，就可以利用上面的结论来加以判断。

需要解决的问题3：如何根据同名端确定互感电压?



$$u_{21} = M\frac{di_1}{dt}$$



$$u_{21} = -M\frac{di_1}{dt}$$

有怎样的记忆方法?

规律：

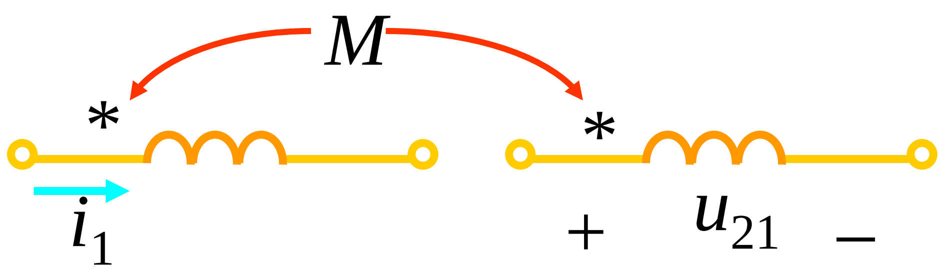
如果电流参考方向从同名端流入，互感电压参考方向在同名端为正。

则 $u = M\frac{di}{dt}$

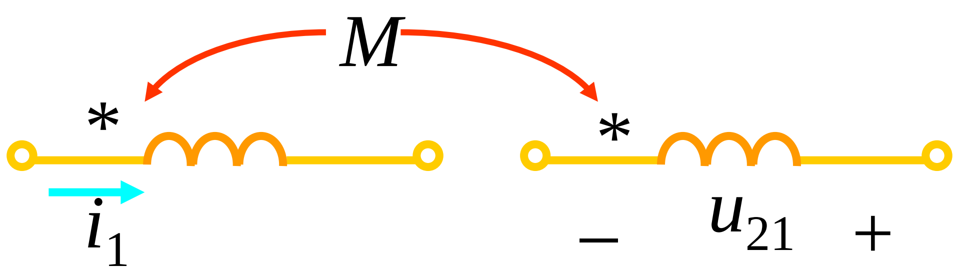
重要！！

由同名端及u、i参考方向确定互感线圈的特性方程

有了同名端，表示两个线圈相互作用时，就不需考虑实际绕向，而只画出同名端及u、i参考方向即可。



$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

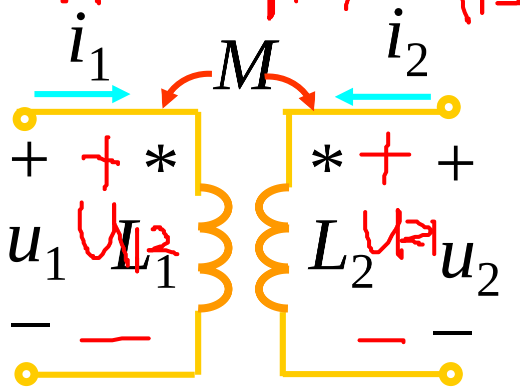


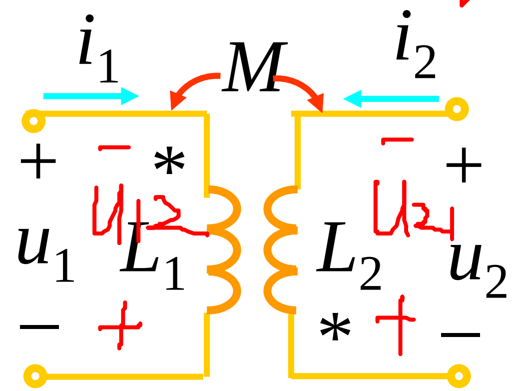
$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

例

$u_1 = u_{11} + u_{12}$　　　　$u_2 = u_{22} + u_{21}$

写出图示电路电压、电流关系式



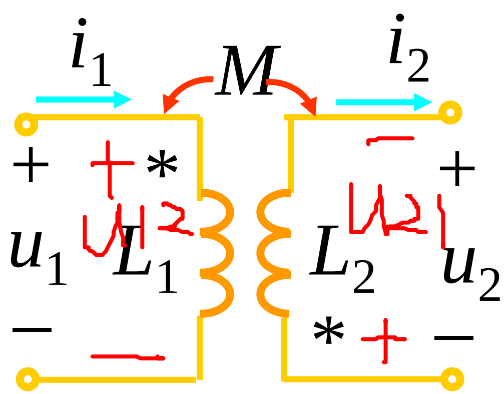


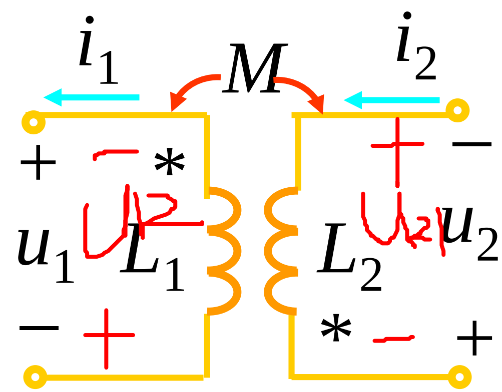
$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

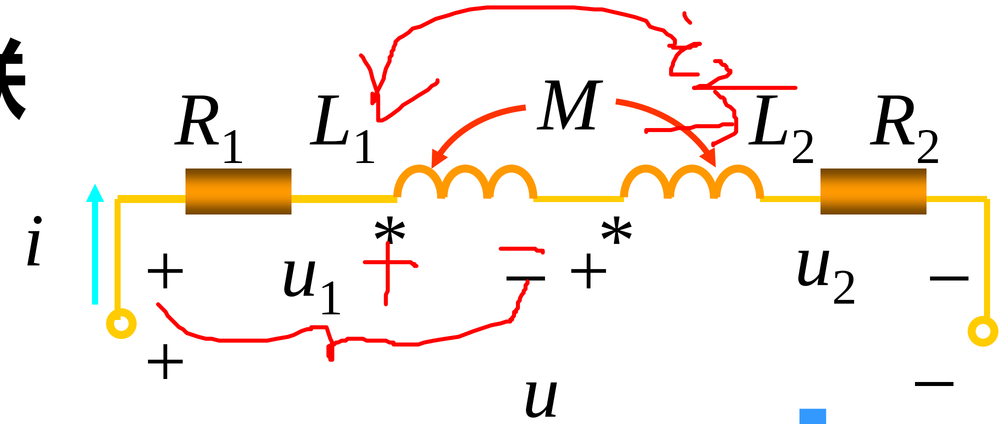




10.2 含有耦合电感电路的计算

1. 耦合电感的串联

①顺接串联

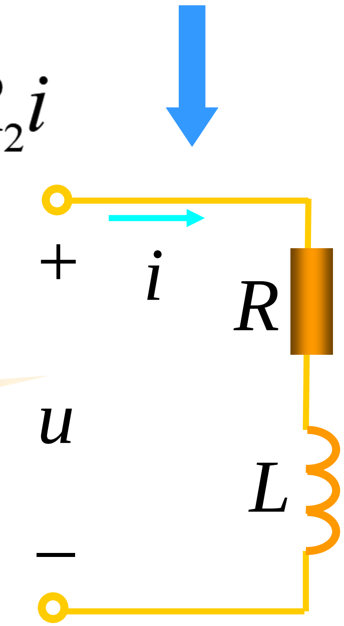


$$u = R_1 i + L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

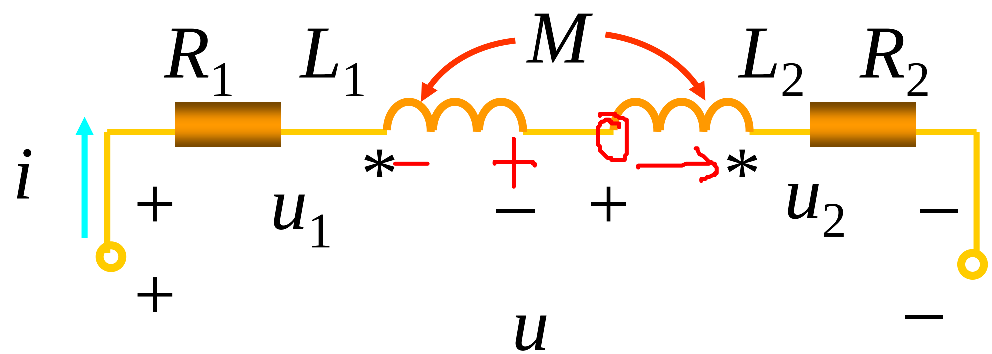
$$= Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

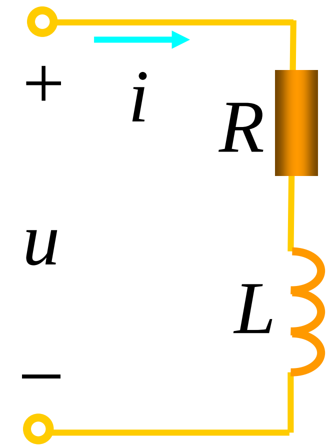
去耦等效电路



$$R = R_1 + R_2 \qquad L = L_1 + L_2 + 2M$$

②反接串联





$$u = R_1 i + L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$R = R_1 + R_2 \qquad L = L_1 + L_2 - 2M$$

注意 $L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0 \rightarrow M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$

互感的测量方法:

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

顺接一次，反接一次，就可以测出互感:

$$M = \frac{L_{顺} - L_{反}}{4}$$

全耦合时 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

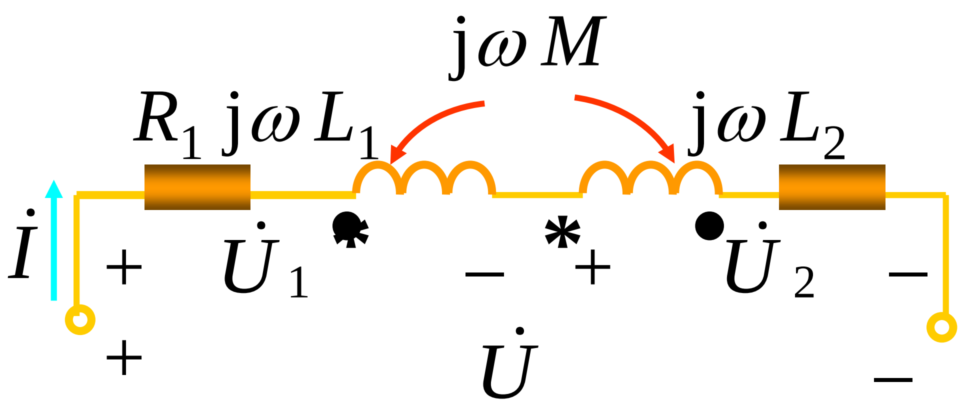
$$= L_1 + L_2 \pm 2\sqrt{L_1 L_2}$$

$$= (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2$$

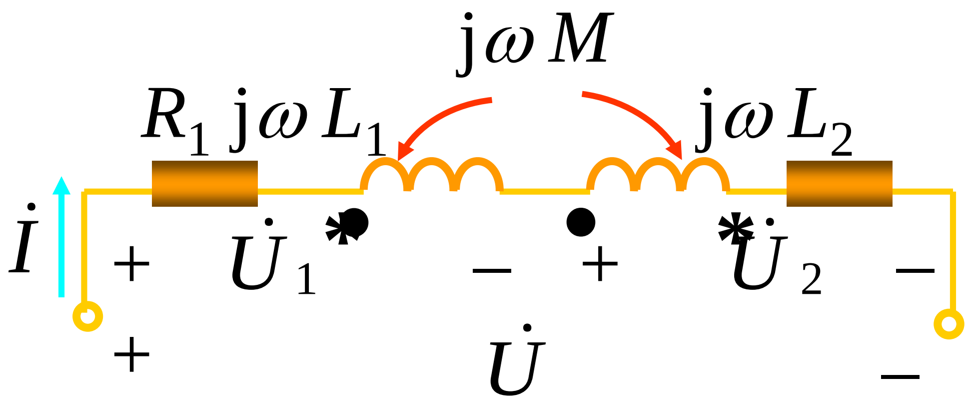
当 $L_1 = L_2$ **时**，$M = L$

$$L = \begin{cases} 4M & \text{顺接} \\ 0 & \text{反接} \end{cases}$$

在正弦激励下：



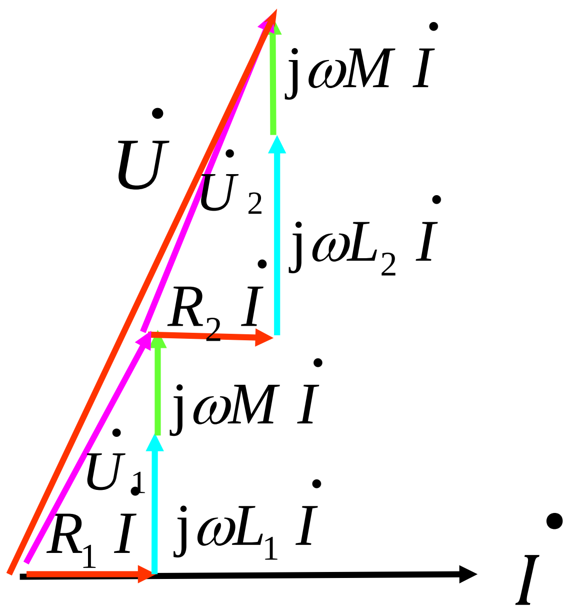
$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}$$

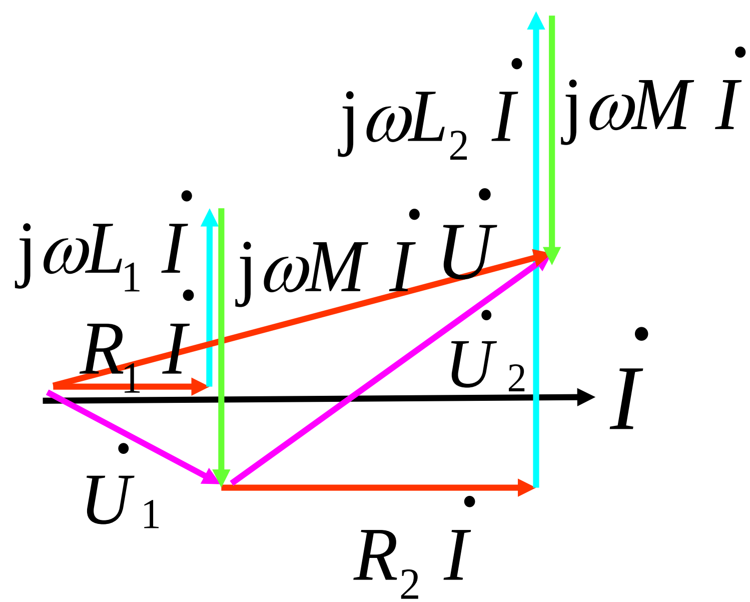

jω M
R1 jω L1
jω L2
İ
+
U̇1
−
+
U̇2
−
+
U̇
−

相量图:

(a) 顺接

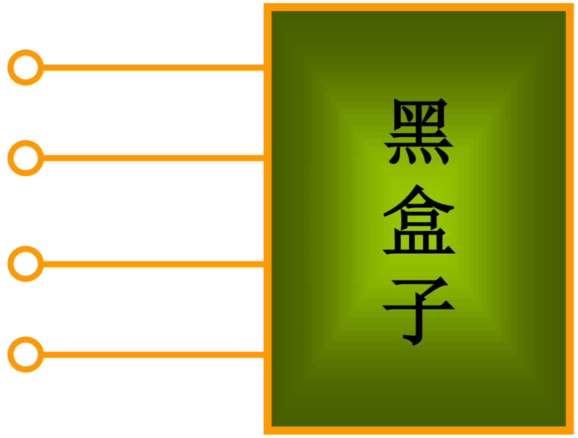
(b) 反接


jωM İ
U̇
U̇2
jωL2 İ
R2 İ
jωM İ
U̇1
R1 İ
jωL1 İ
İ


jωL2 İ
jωM İ
jωL1 İ
jωM İ
U̇
R1 İ
U̇2
İ
U̇1
R2 İ

思考题

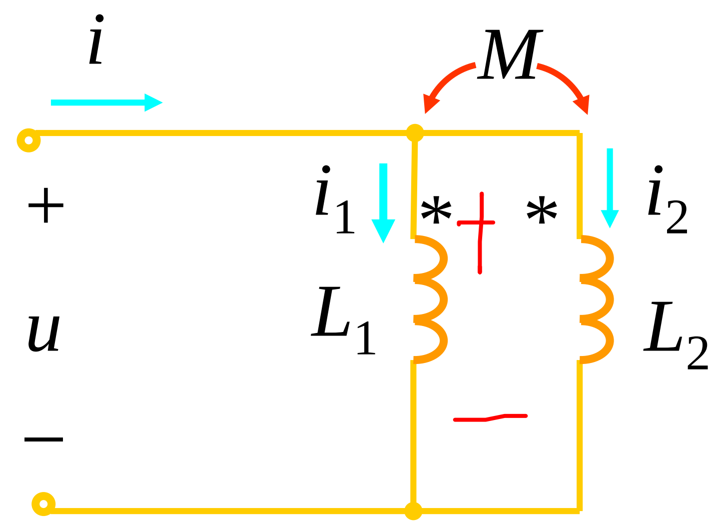
同名端的实验测定：



两互感线圈装在黑盒子里，只引出四个端子，现在手头有一台交流信号源及一只万用表，试用试验的方法判别两互感线圈的同名端。

2. 耦合电感的并联

①同侧并联



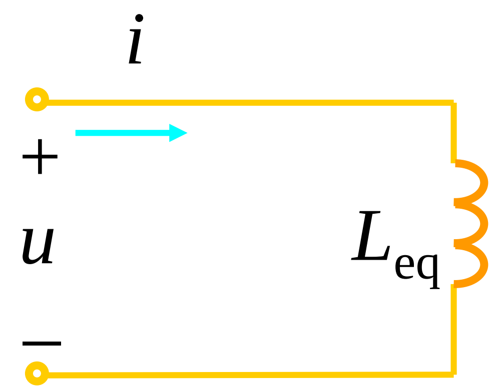
$$
\begin{cases}
u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
u = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\
i = i_1 + i_2
\end{cases}
$$

解得u, i **的关系：** $$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

等效电感：

$$L_{eq}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2-2M}\geq 0$$

去耦等效电路

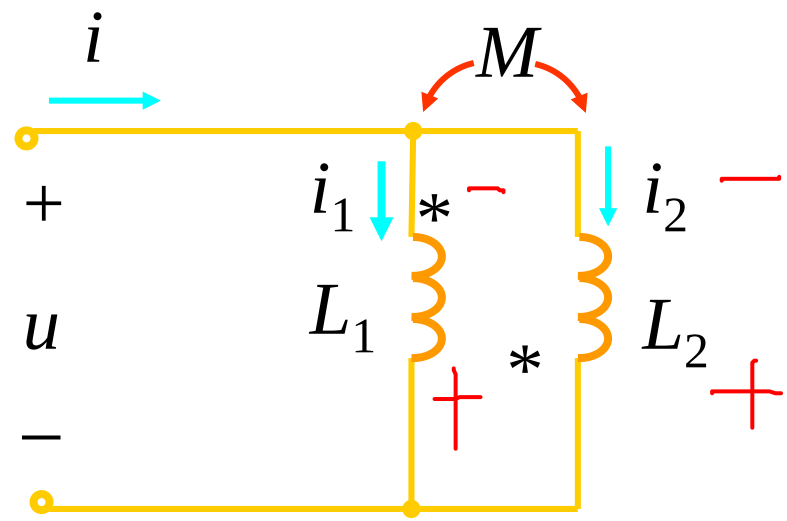


如全耦合：$L_1L_2=M^2$

当 $L_1\neq L_2$ ， $L_{eq}=0$ **(短路)**

当 $L_1=L_2=L$ ， $L_{eq}=L$ **(相当于导线加粗，电感不变)**

② 异侧并联



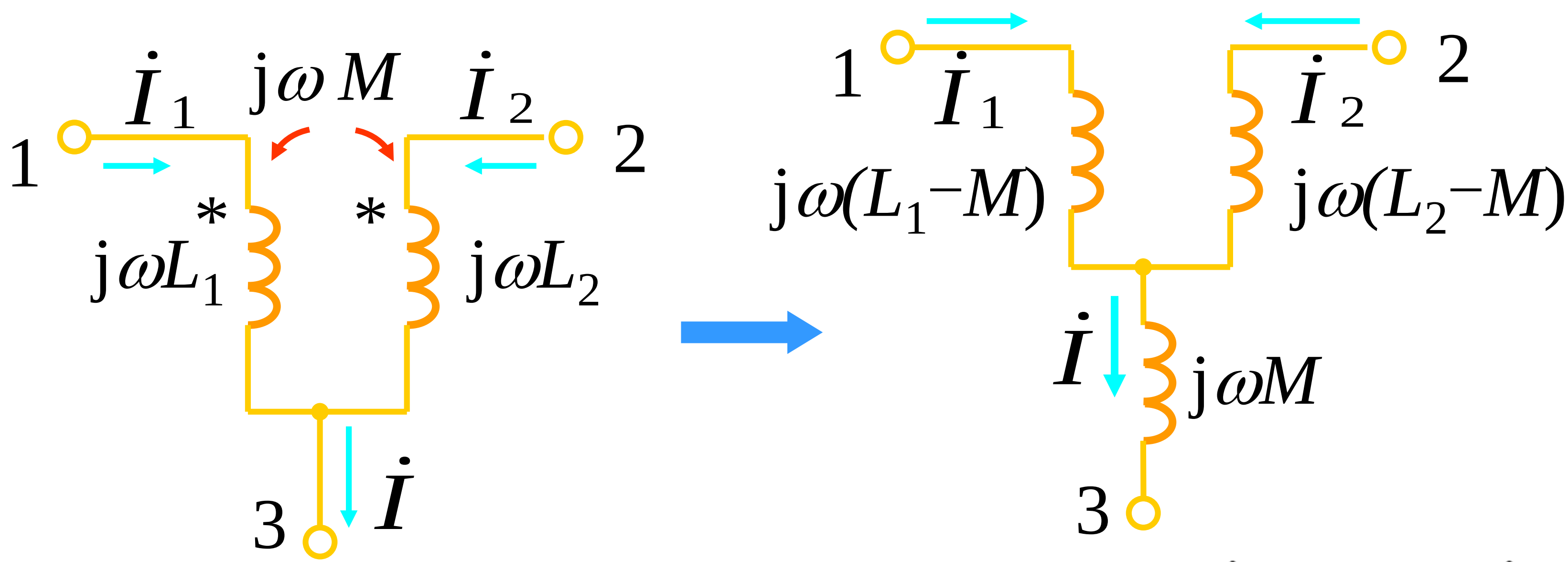
$$
\begin{cases}
u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
u = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\
i = i_1 + i_2
\end{cases}
$$

解得u, i **的关系：** $u = \dfrac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

等效电感： $L_{eq} = \dfrac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \geq 0$

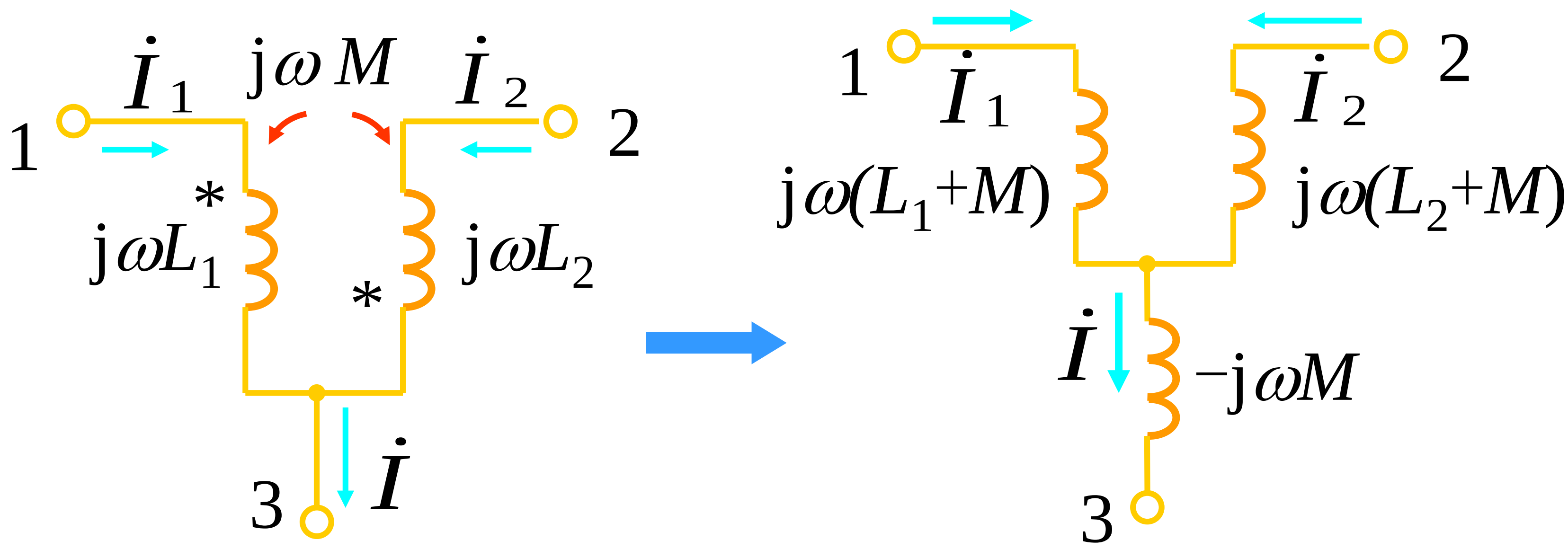
3.耦合电感的T型等效

①同名端为共端的T型去耦等效

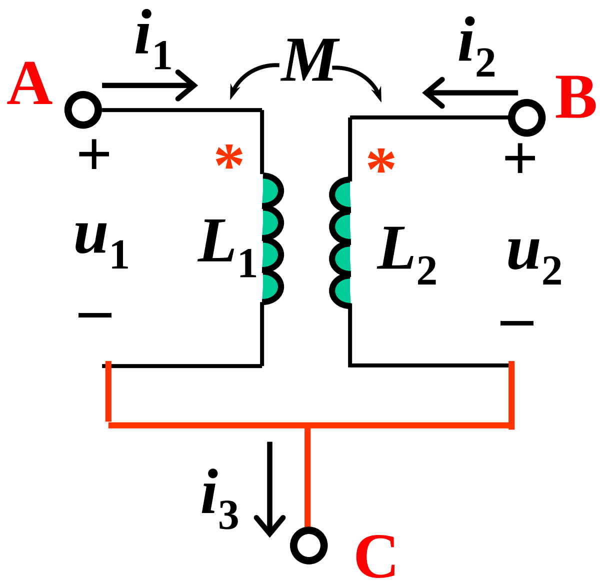


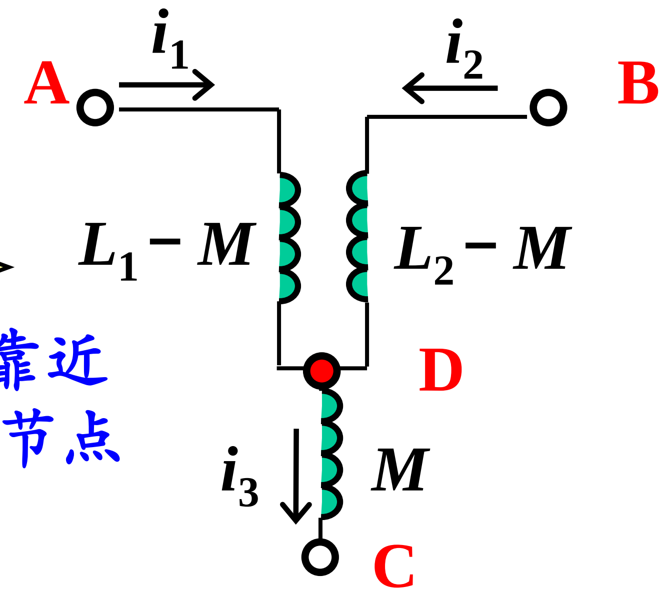
$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 = \mathrm{j}\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 = \mathrm{j}\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

②异名端为共端的T型去耦等效

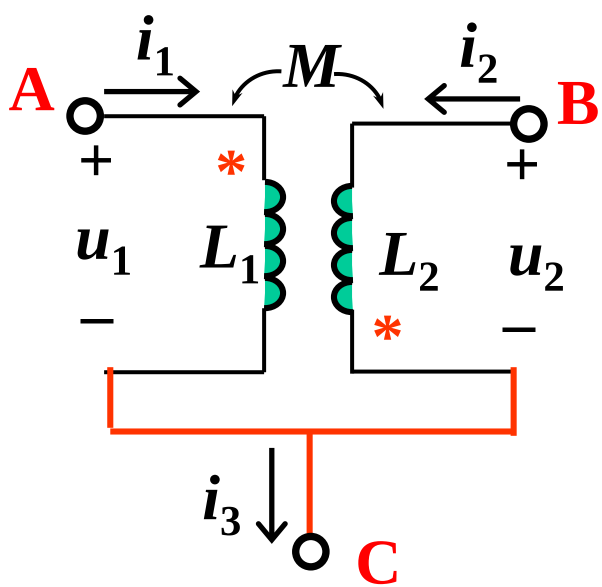


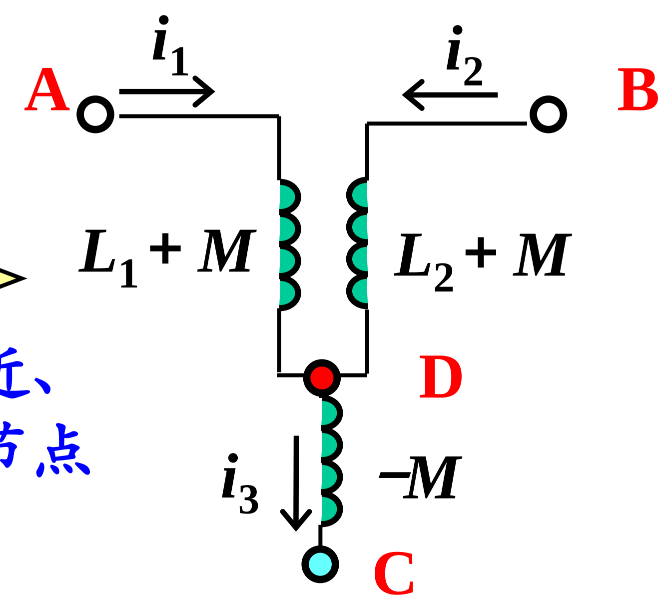
$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 = \mathrm{j}\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 = \mathrm{j}\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$





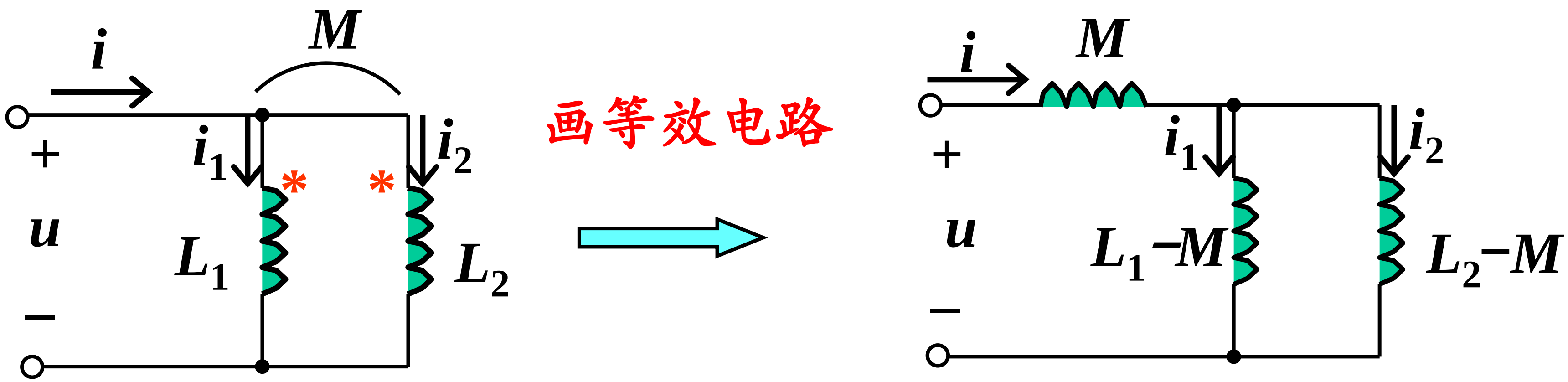
2个同名端都靠近（远离）公共节点





同名端1个靠近、1个远离公共节点

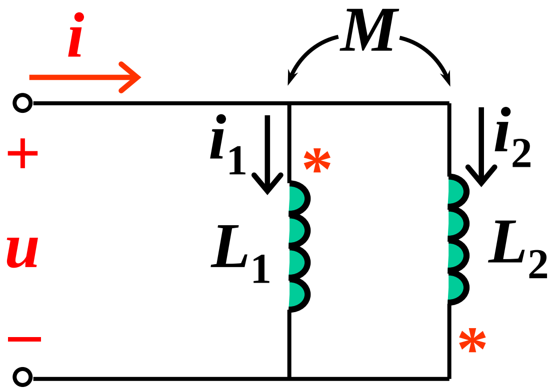
同侧并联电路的去耦等效分析



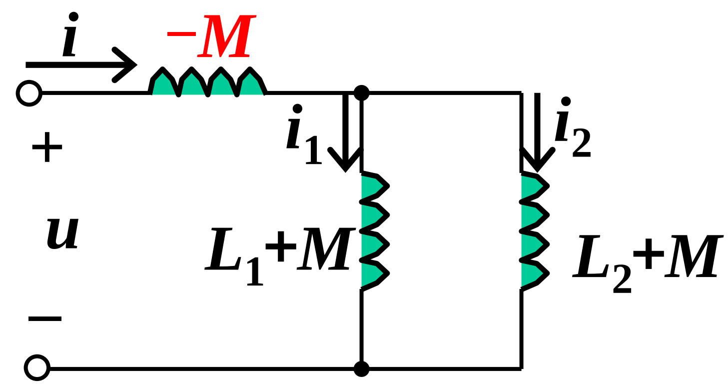
$$(L_1-M)//(L_2-M)+M$$

$$L_{eq}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2-2M}$$

同理可推得 异侧并联电路的去耦等效分析



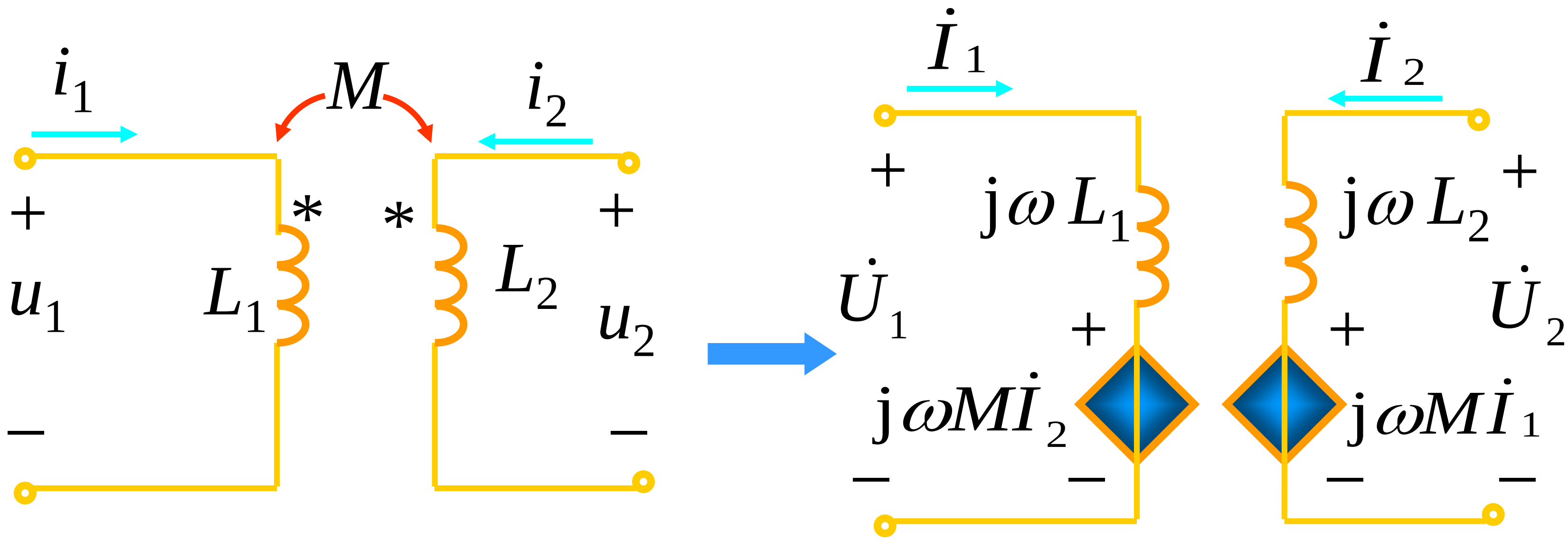
等效电路



$$(L_1+M)//(L_2+M)-M$$

$$L_{\mathrm{eq}}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2+2M}$$

4. 受控源等效电路



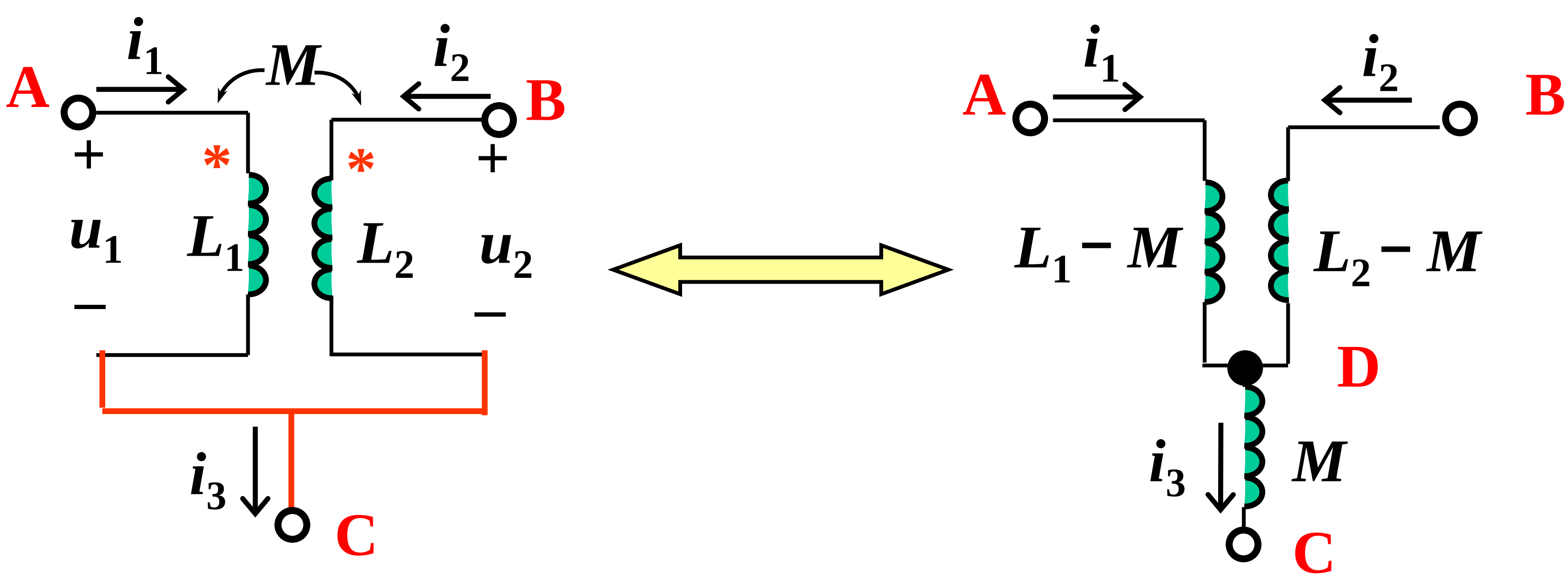
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

做各种去耦等效的目的是什么？

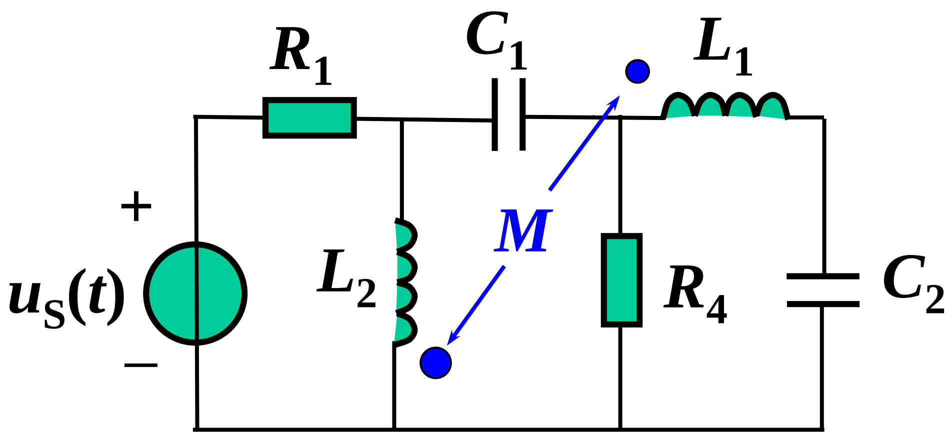
不用再考虑互感，不用再考虑同名端。

直接等效成自感的部分，互感的部分，

可以直接列写方程

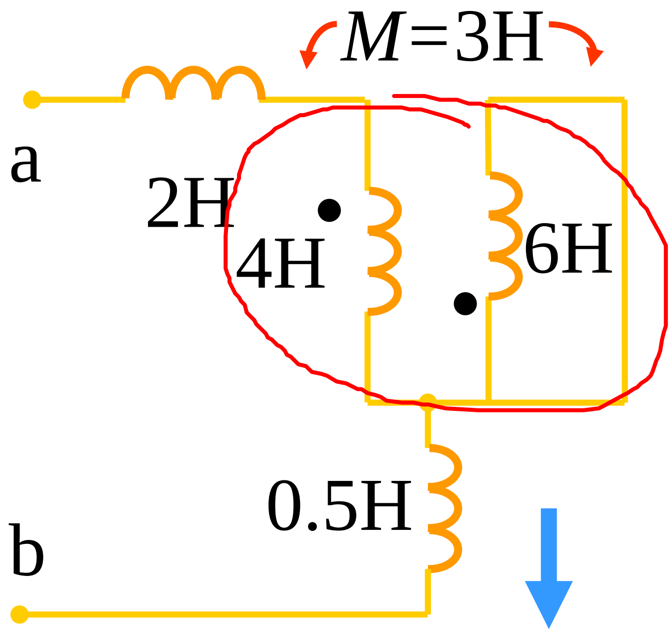


去耦等效不是万能的

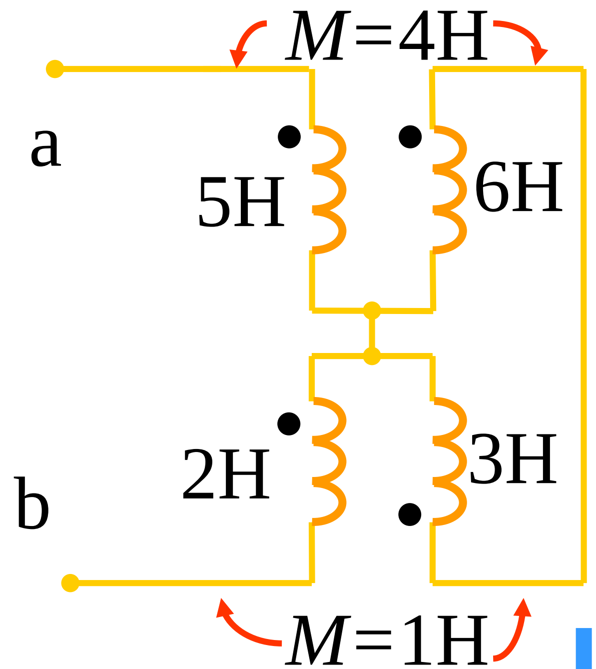


没有公共点，所以不能适用对偶等效，
三种串并联和T型，都是有公共节点的
这个时候还是要靠互感和同名端来计算

例　求等效电感 L_{ab}

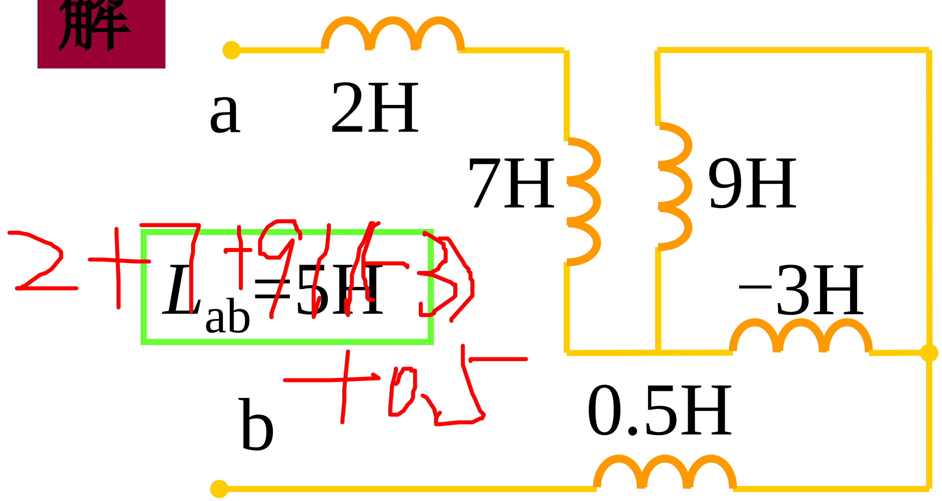


M=3H
a
2H
4H
6H
0.5H
b

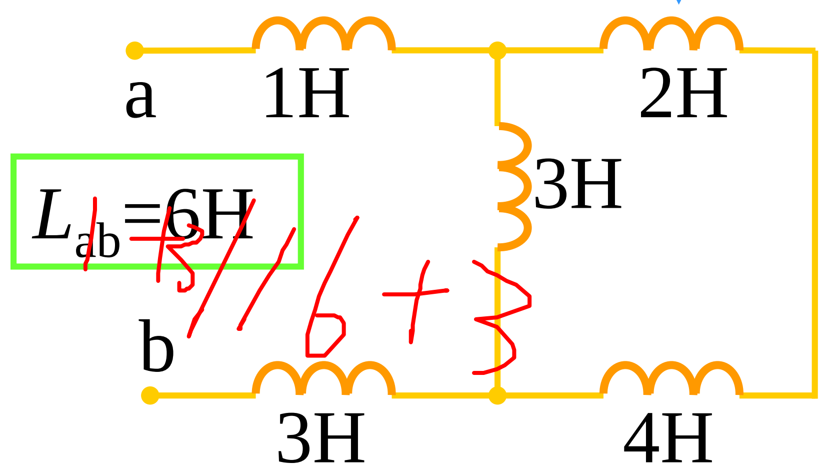


M=4H
a
5H
6H
2H
3H
b
M=1H

解



a
2H
7H
9H
−3H
b
0.5H
L_{ab}=5H



a
1H
2H
3H
b
3H
4H
L_{ab}=6H

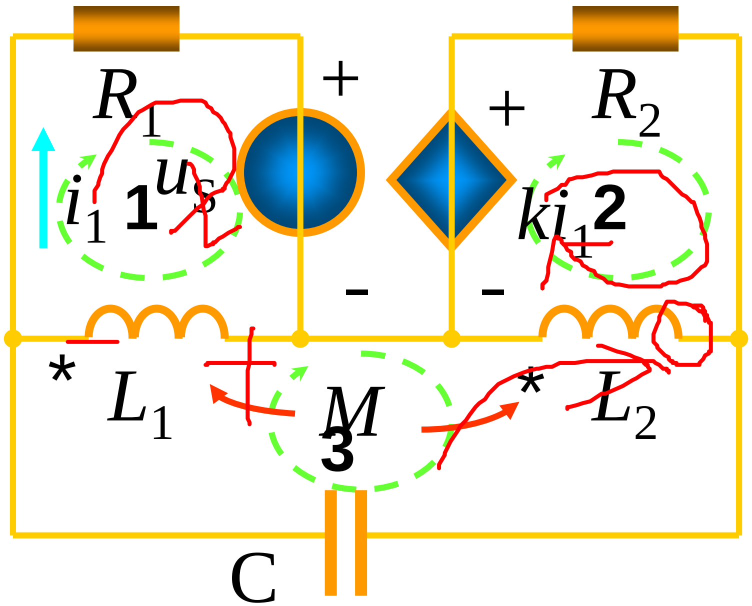
5. 有互感电路的计算

①在正弦稳态情况下，有互感的电路的计算仍应用前面介绍的相量分析方法。

②注意互感线圈上的电压除自感电压外，还应包含互感电压。

③一般采用支路法和回路法计算。

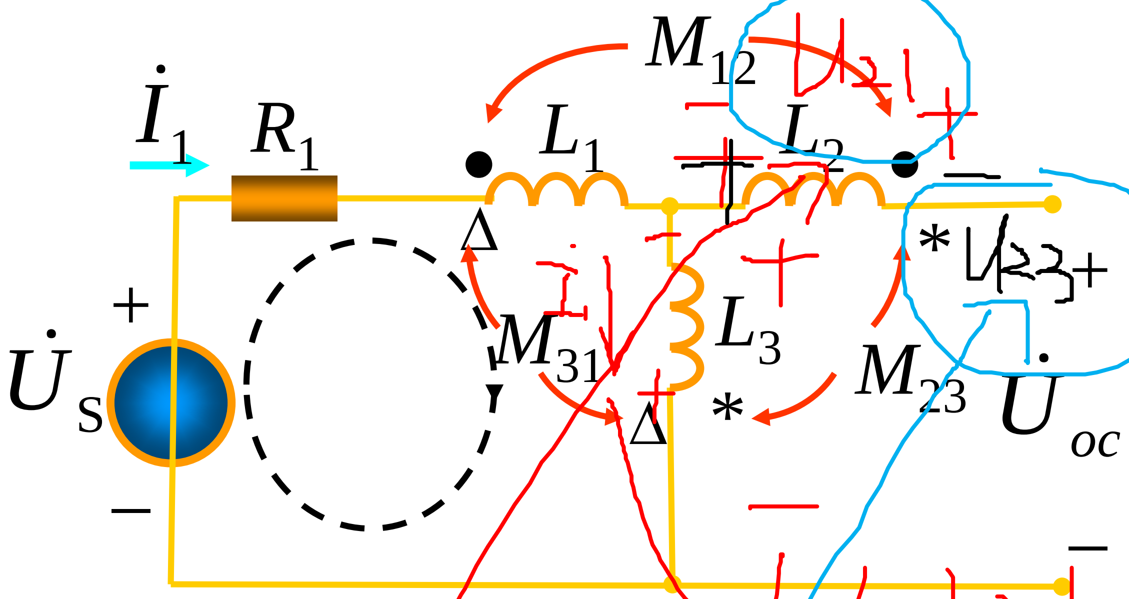
例1 **列写电路的回路电流方程。**



解

$$
\begin{cases}
(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_3 + \mathrm{j}\omega M(\dot{I}_2 - \dot{I}_3) = -\dot{U}_S \\
(R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_3 + \mathrm{j}\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_3) = k\dot{I}_1 \\
(\mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_2 - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C})\dot{I}_3 - \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \\
+ \mathrm{j}\omega M(\dot{I}_3 - \dot{I}_1) + \mathrm{j}\omega M(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = 0
\end{cases}
$$

例2 **求图示电路的开路电压。**



解1

$$\dot I_1 = \frac{\dot U_S}{R_1 + j\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})}$$ =Leq

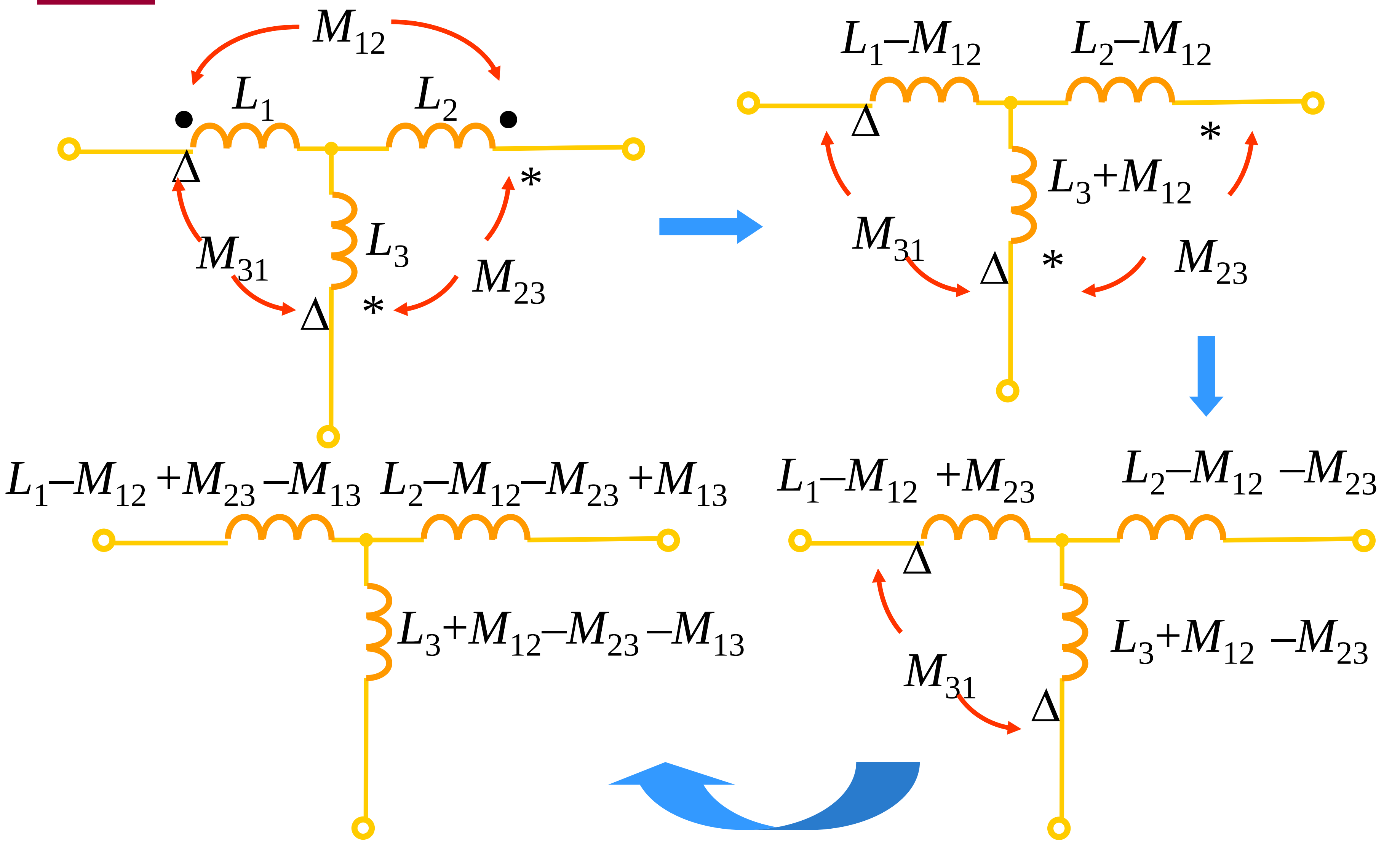
$$\dot U_{0c} = \mathrm{j}\omega M_{12}\dot I_1 - \mathrm{j}\omega M_{23}\dot I_1 - \mathrm{j}\omega M_{31}\dot I_1 + \mathrm{j}\omega L_3\dot I_1$$

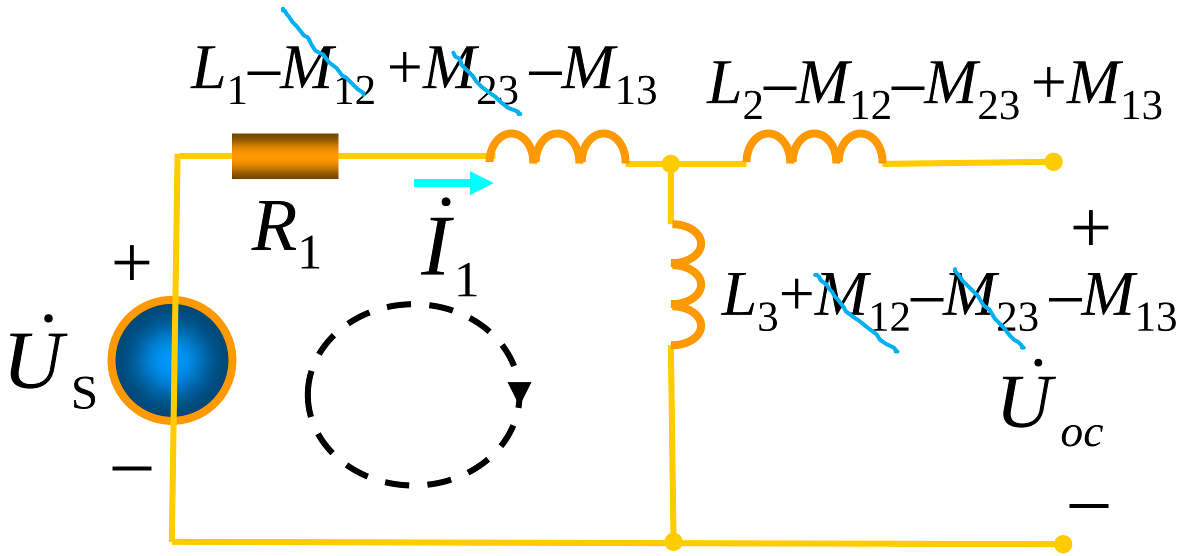
$$= \frac{\mathrm{j}\omega(L_3 + M_{12} - M_{23} - M_{31})\dot U_S}{R_1 + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})}$$

L1在L3上互引

L3自感

解2 **作出去耦等效电路，(一对一对消)：**



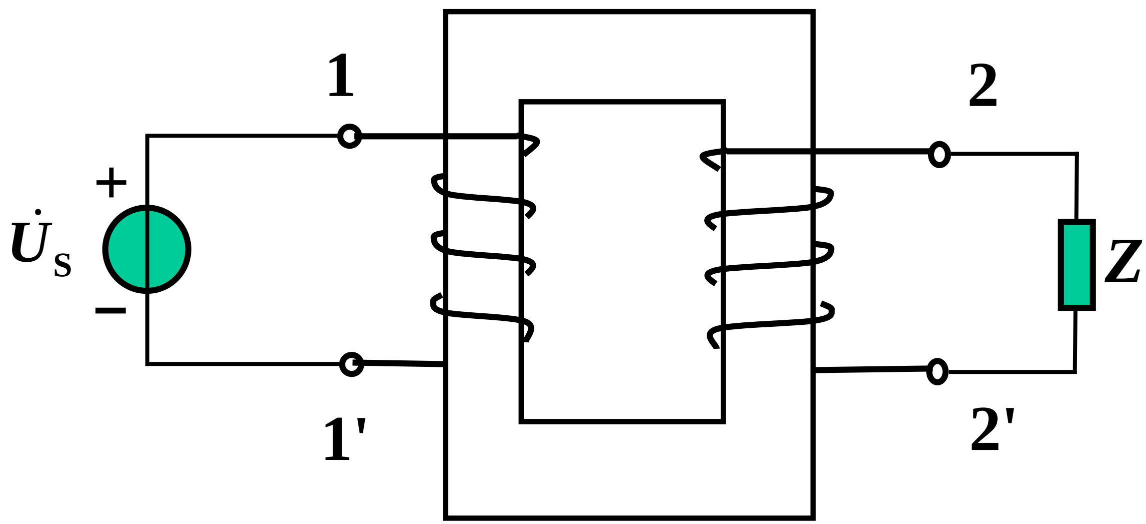


$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{R_1 + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})}$$

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j\omega(L_3 + M_{12} - M_{23} - M_{31})\dot{U}_S}{R_1 + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})}$$

10.4 变压器原理 (Transformer)

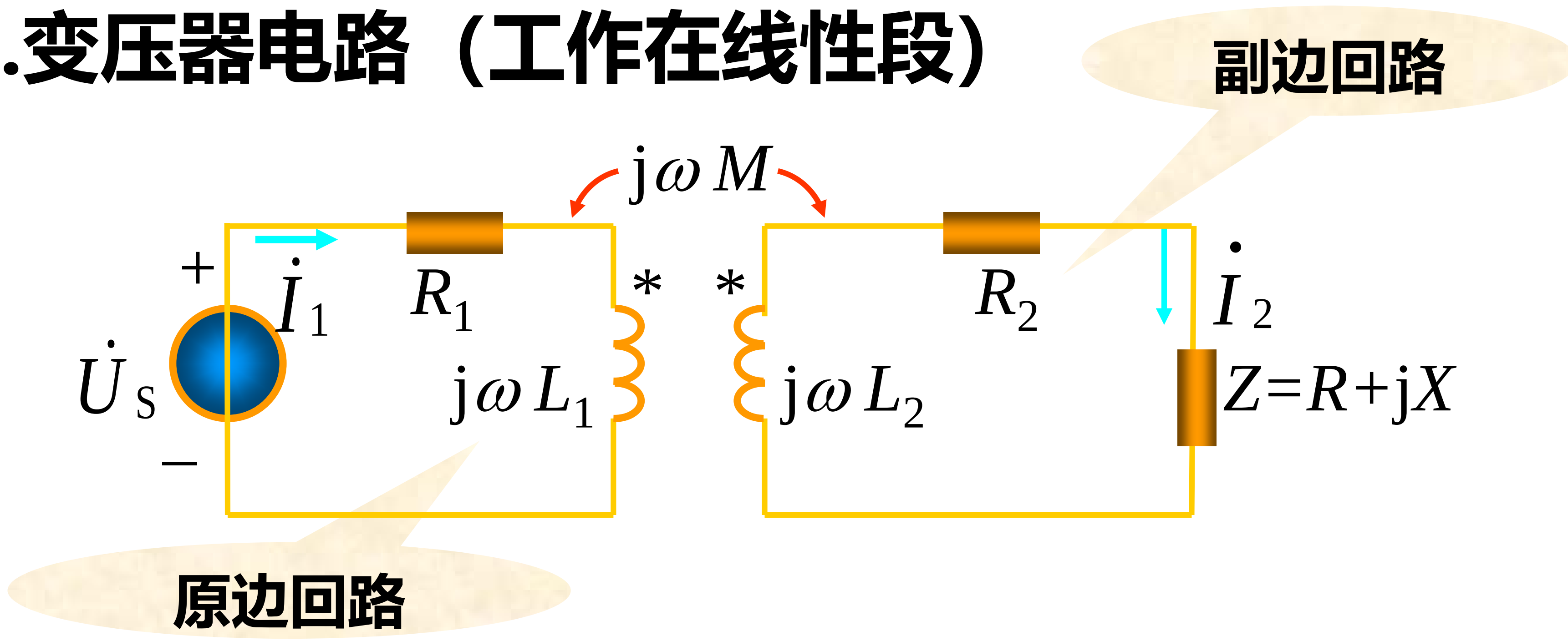
变压器由两个具有互感的线圈构成，一个线圈接向电源，另一线圈接向负载，变压器是利用互感来实现从一个电路向另一个电路传输能量或信号的器件。当变压器线圈的芯子为非铁磁材料时，称空心变压器。

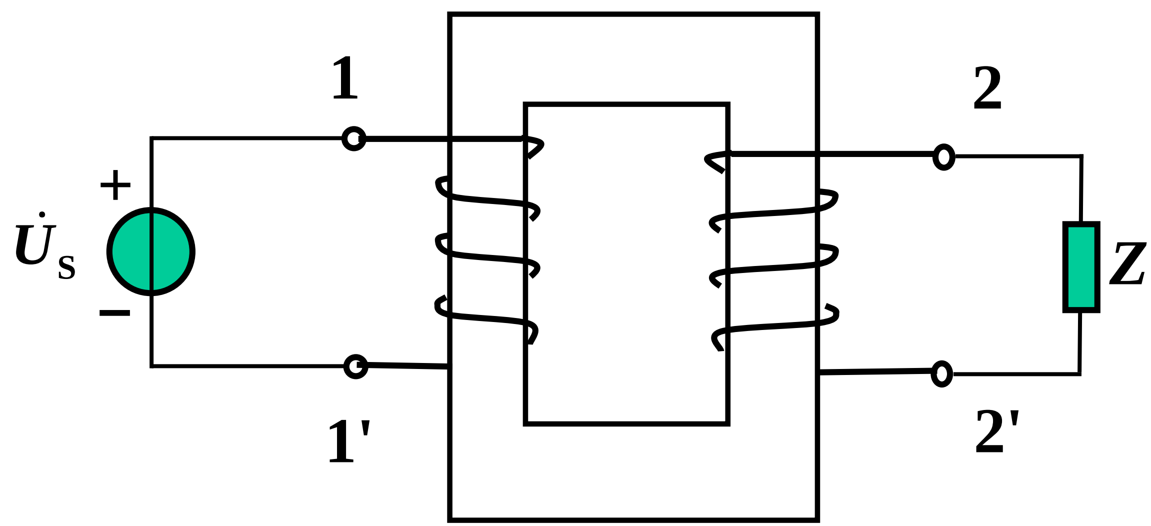


利用互感的作用来传递能量/信号

- 交流变压、变流
- 传送功率
- 电隔离
- 阻抗匹配

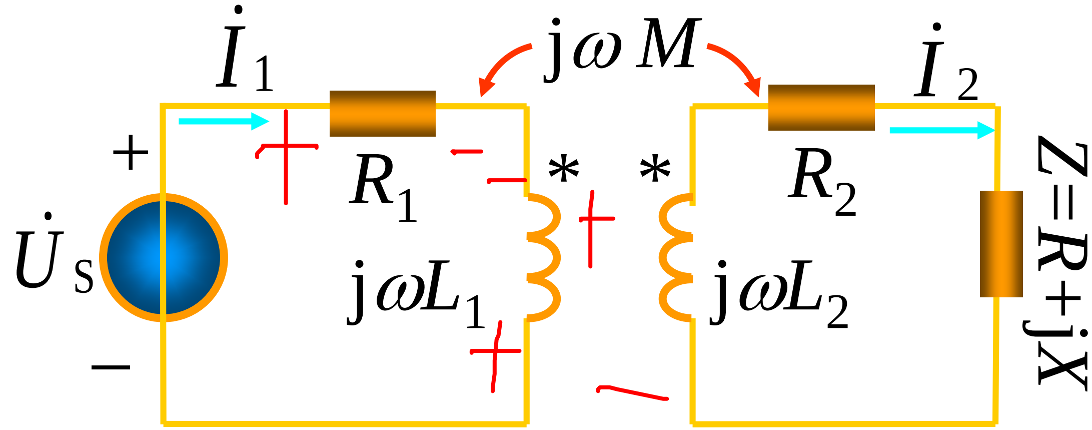
1.变压器电路（工作在线性段）





2. 分析方法

①方程法分析



回路方程：

$$\begin{cases}(R_1+j\omega L_1)\dot{I}_1-j\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_S\\-j\omega M\dot{I}_1+(R_2+j\omega L_2+Z)\dot{I}_2=0\end{cases}$$

令 $Z_{11}=R_1+j\omega L_1$， $Z_{22}=(R_2+R)+j(\omega L_2+X)$

$$\begin{cases}Z_{11}\dot{I}_1-j\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_S\\-j\omega M\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2=0\end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{U}_S}{(Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}})Z_{22}}$$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_S \\ -j\omega M \dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{j\omega M \dot{U}_S}{Z_{11}} \cdot \frac{1}{Z_{22} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}}$$

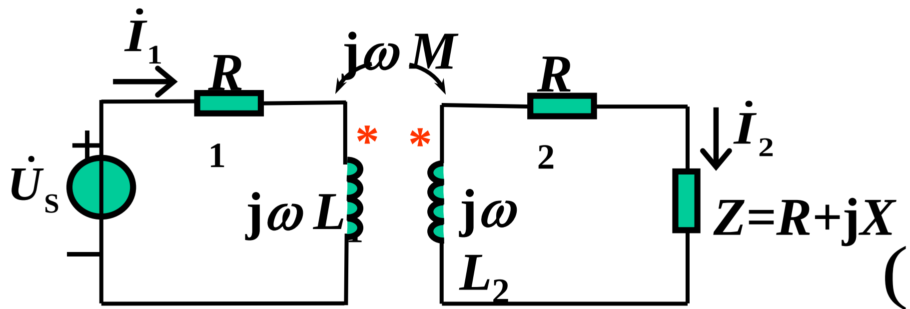
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}} \qquad Z_{in} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

②等效电路法分析

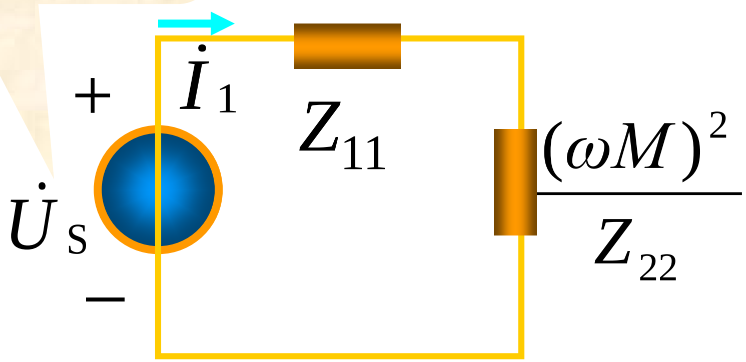
$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{U}_S}{Z_{11}} \cdot \frac{1}{Z_{22} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{11}}}$$

Uoc

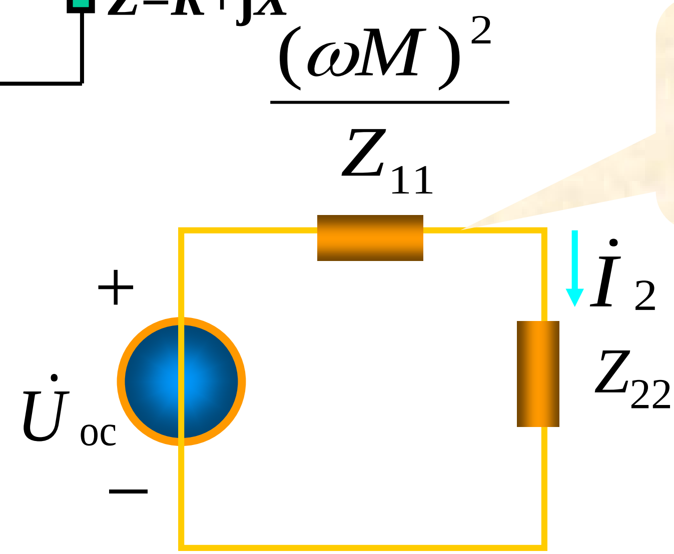
根据以上表示式得等效电路。



原边等效电路



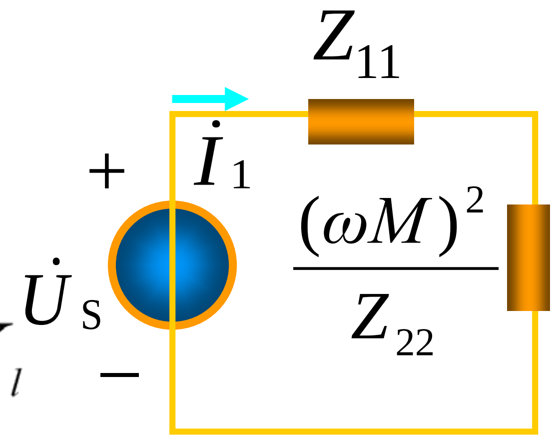
副边等效电路



Uoc

$$Z_l = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + \mathrm{j}X_{22}}$$

$$= \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - \mathrm{j}\frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = R_l + \mathrm{j}X_l$$



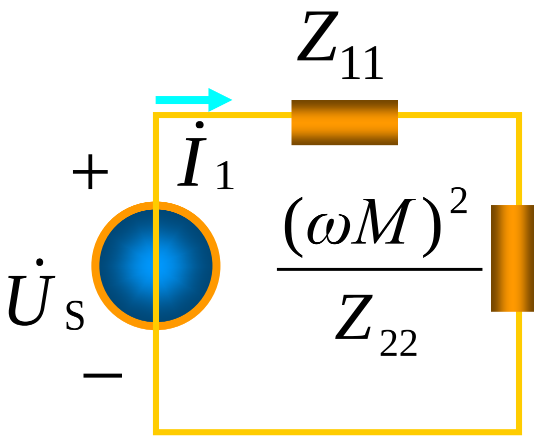
原边等效电路

Z_l → **副边电路对原边电路的引入阻抗。**

R_l → **引入电阻。恒为正，表示副边回路吸收的功率是靠原边供给的。**

X_l → **引入电抗。负号反映了引入电抗与副边电抗的性质相反。**

引入阻抗反映了副边回路对原边回路的影响。原副边虽然没有电的联接，但互感的作用使副边产生电流，这个电流又影响原边电流电压。



原边等效电路

$Z_l = R_l + \mathrm{j}\, X_l$ （引入阻抗）

副边电路通过互感反映在原边回路中的阻抗。

$$Z_l = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + \mathrm{j}X_{22}}$$

$$= \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - \mathrm{j}\frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = R_l + \mathrm{j}X_l$$

$\dot{I}_1 = \frac{U_s}{Z_{11}} \Longrightarrow U_s$

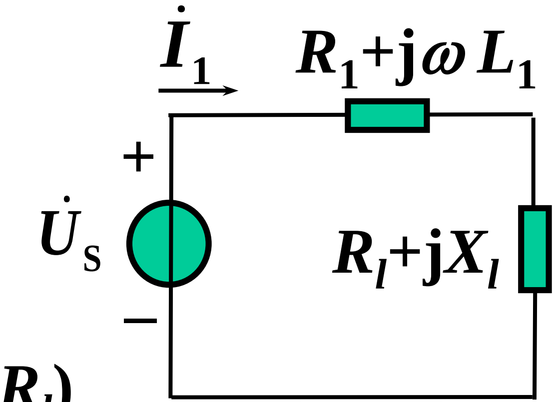
当$\dot{I}_2 = 0$，　即副边开路，$Z_{\text{in}} = Z_{11}$　　副边电流为零，在原边无互感

当$\dot{I}_2 \neq 0$，　$Z_{\text{in}} = Z_{11} + Z_l$　　副边无开路，原边的电流不同

$\dot{I}_1 = \frac{U_s}{Z_{11} + Z_l}$

能量角度分析

$$R_l = \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} > 0$$



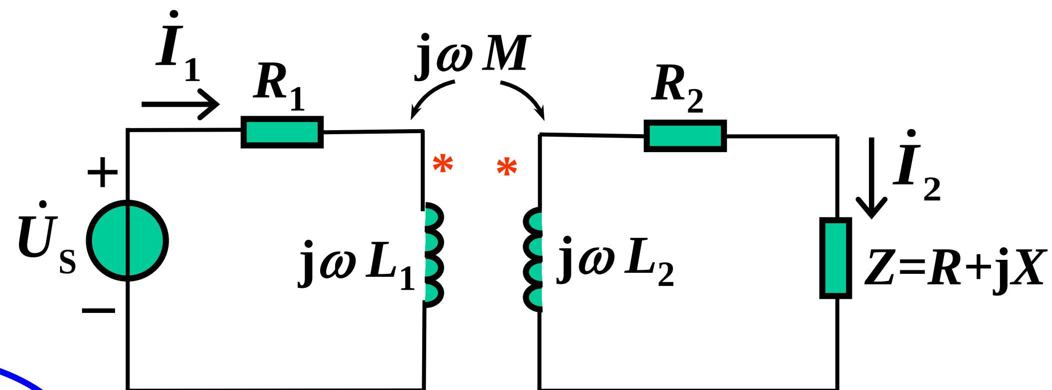
原边看：

电源发出有功 = 电阻吸收有功 = $I_1^2(R_1+R_l)$

$I_1^2R_1$ 消耗在原边；

$\boxed{I_1^2R_l \quad ?}$

副边看：



$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}$$

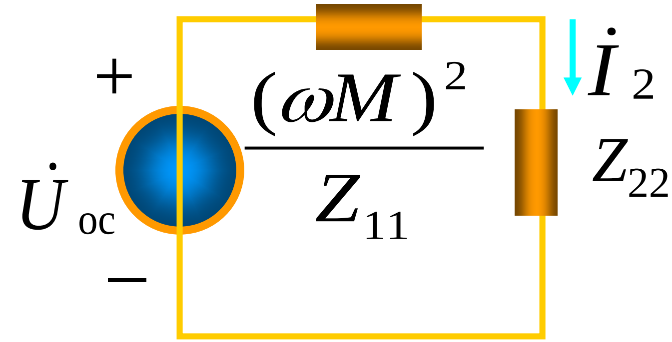
副边吸收的有功

$$I_2^2 R_{22} = I_1^2 \times \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

$$= I_1^2 R_l$$

互感线圈实现了功率的传送

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j\omega M \dot{U}_S}{Z_{11}} = j\omega M \dot{I}_1$$



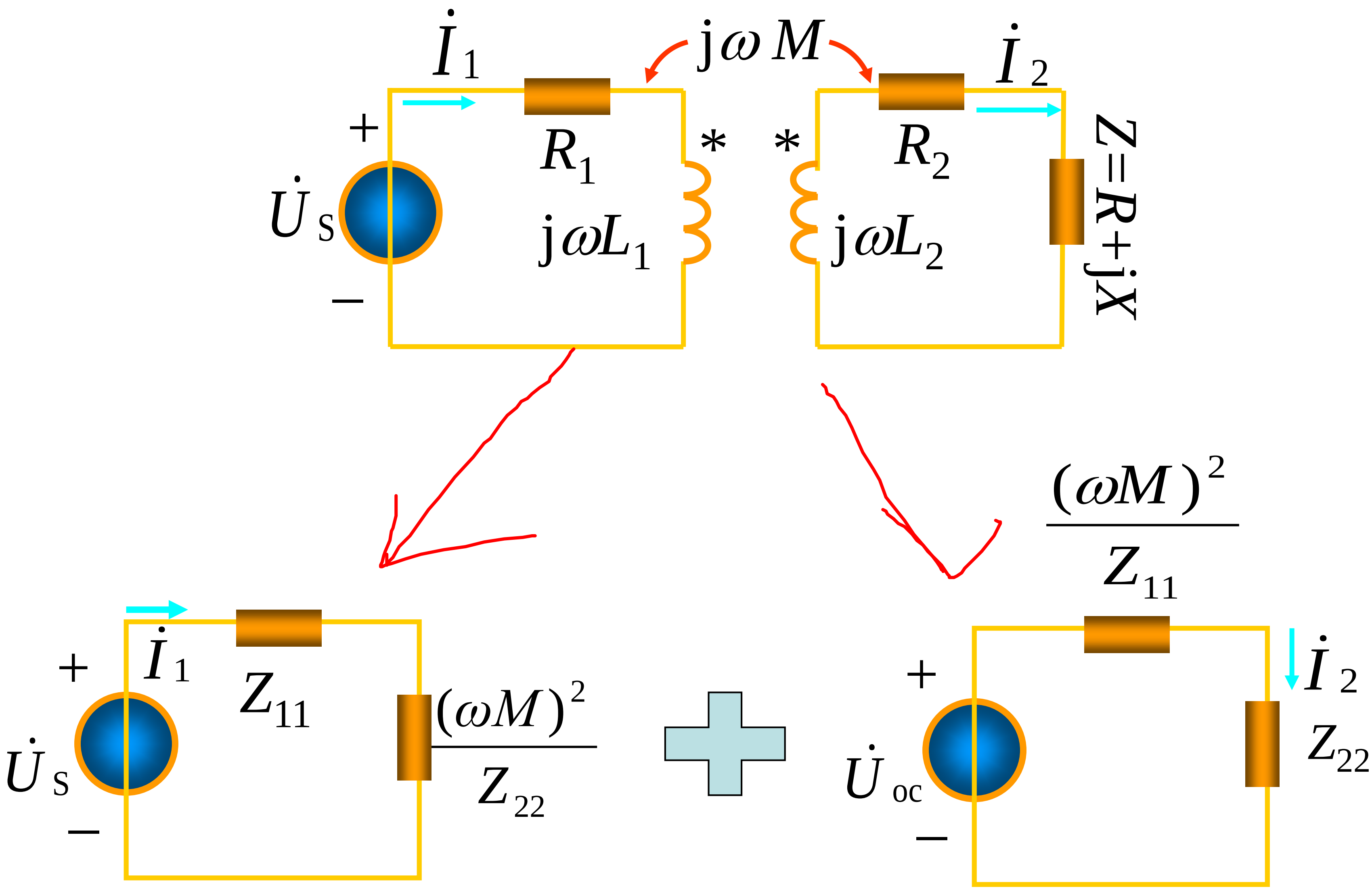
副边开路时，原边电流在副边产生的互感电压。

副边等效电路

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$$ → **原边对副边的引入阻抗。**

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

注意 **利用戴维宁定理可以求得变压器副边的等效电路 。**



$\dot{I}_1$
$\mathrm{j}\omega M$
$\dot{I}_2$
+
$\dot{U}_S$
−
R_1
$\mathrm{j}\omega L_1$
*
*
R_2
$\mathrm{j}\omega L_2$
$Z=R+\mathrm{j}X$
$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$
$\dot{I}_1$
Z_{11}
$\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$
$\dot{U}_S$
$\dot{U}_{oc}$
$\dot{I}_2$
Z_{22}

各自独立的电路模块

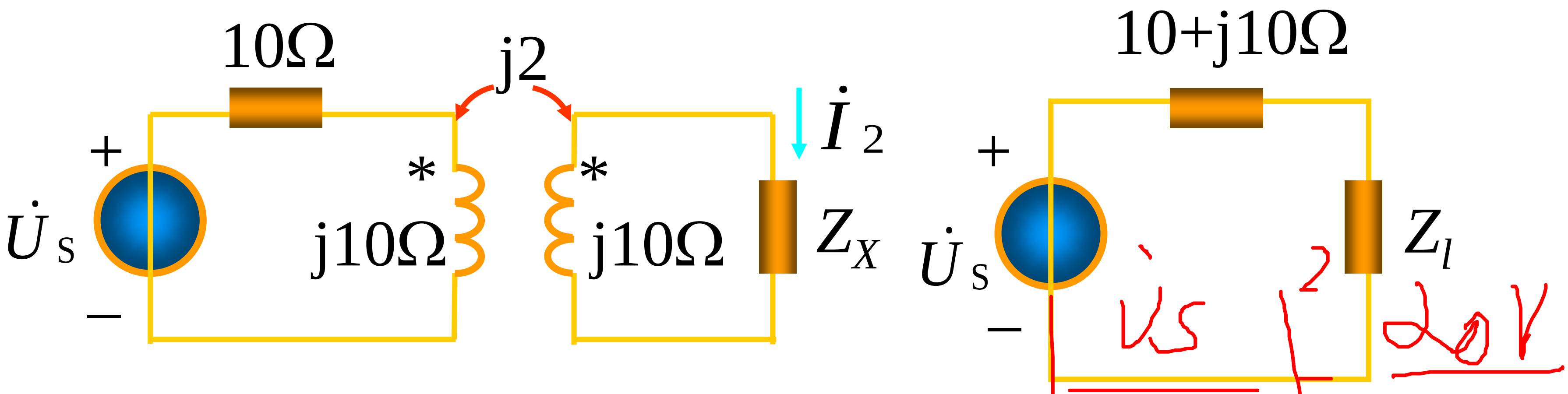
③去耦等效法分析

除了列方程，等效变换，无论原边还是副边，还可对含互感的电路进行去耦等效，再进行分析。

例1　已知 U_S=20 V，原边引入阻抗 Z_l=10–j10Ω.

R　X L

求: Z_X 并求负载获得的有功功率.



$Z_{11}+Z_l$

解　$Z_l=\dfrac{\omega^2M^2}{Z_{22}}=\dfrac{4}{Z_X+\text{j}10}=10-\text{j}10 \Rightarrow Z_X=0.2-\text{j}9.8\,\Omega$

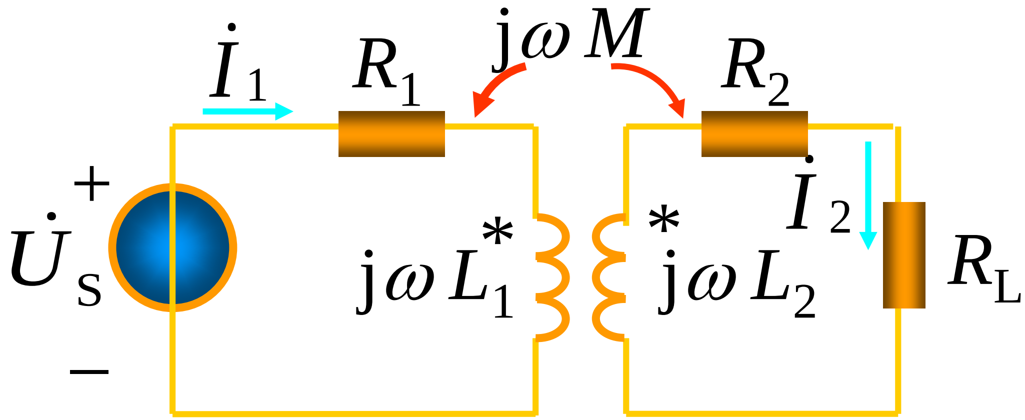
I^2

负载获得功率： $P=P_{R引}=(\dfrac{20}{10+10})^2R_l=10\text{ W}$

实际是最佳匹配： $Z_l=Z_{11}^*$，　$P=\dfrac{U_S^2}{4R}=10\text{ W}$

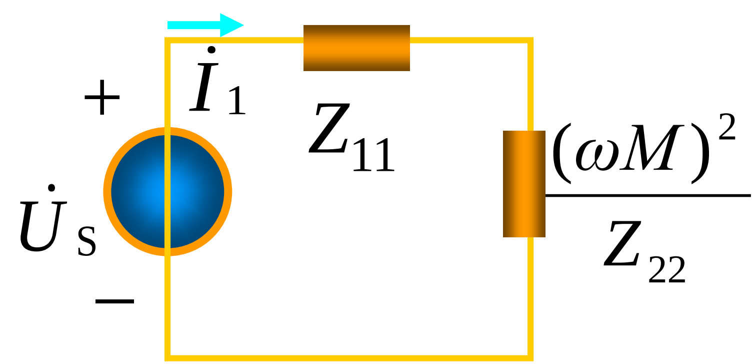
例2 L_1=3.6H , L_2=0.06H , M=0.465H , R_1=20Ω , R_2=0.08Ω , R_L=42Ω , ω=314rad/s, $\dot{U}_s = 115\angle 0^\circ$ V

求： $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$.



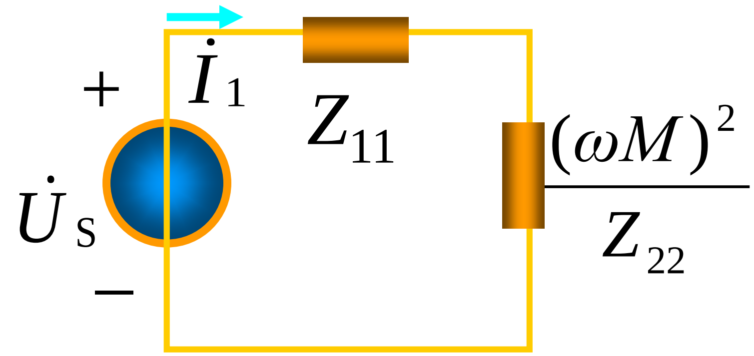
解1 **应用原边等效电路**

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 = 20 + j1130.4\Omega$$



$$Z_{22} = R_2 + R_L + j\omega L_2 = 42.08 + j18.85\ \Omega$$

$$Z_l = \frac{X_M^2}{Z_{22}} = \frac{146^2}{46.11\angle 24.1^\circ} = 422 - j188.8\Omega$$



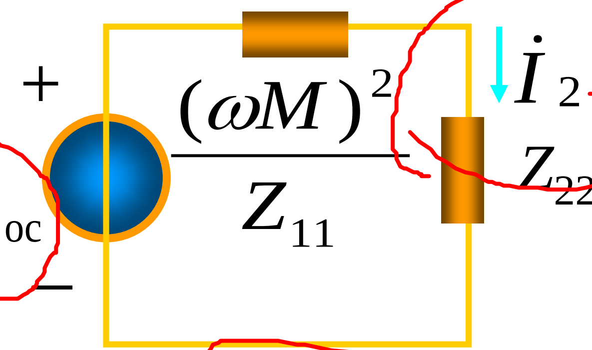
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{Z_{11}+Z_l}$$

$$=\frac{115\angle 0^\circ}{20+\mathrm{j}1130.4+422-\mathrm{j}188.8}=0.111\angle(-64.9^\circ)\,\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}=\frac{\mathrm{j}146\times 0.111\angle-64.9^\circ}{42.08+\mathrm{j}18.85}$$

$$=\frac{16.2\angle 25.1^\circ}{46.11\angle 24.1^\circ}=0.351\angle 1^\circ\,\mathrm{A}$$

应用副边等效电路



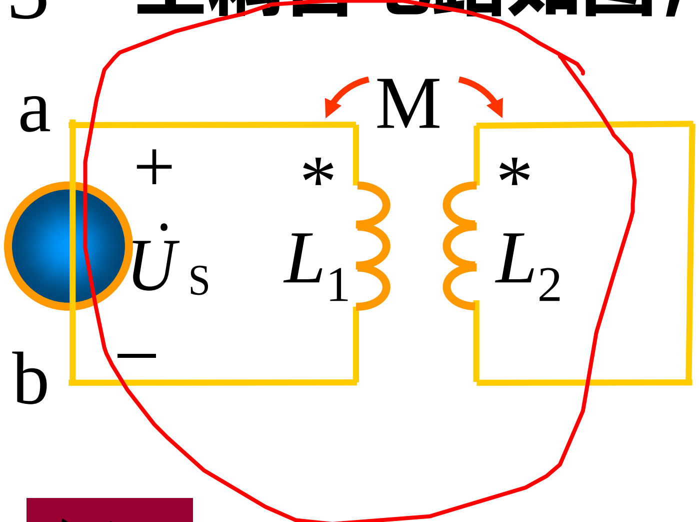
$$\dot{U}_{OC} = j\omega M \dot{I}_1 = j\omega M \cdot \frac{\dot{U}_S}{R_1 + j\omega L_1}$$

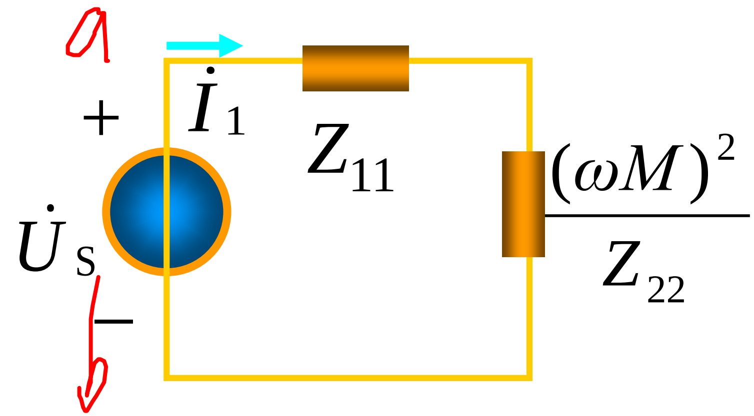
$$= j146 \times \frac{115\angle 0^\circ}{20 + j1130.4} = 14.85\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{146^2}{20 + j1130.4} = -j18.85\,\Omega$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{OC}}{-j18.5 + 42.08 + j18.85} = 0.353\angle 0^\circ \text{ A}$$

例3　**全耦合电路如图，求初级端ab的等效阻抗。**





解1

$$Z_{11} = j\omega L_1 \qquad Z_{22} = j\omega L_2$$

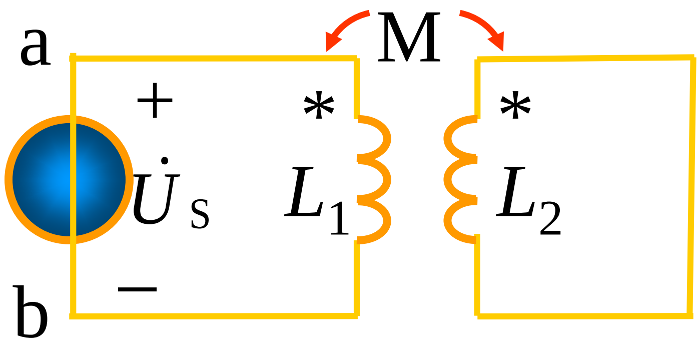
$$Z_l = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = -j\omega \frac{M^2}{L_2}$$

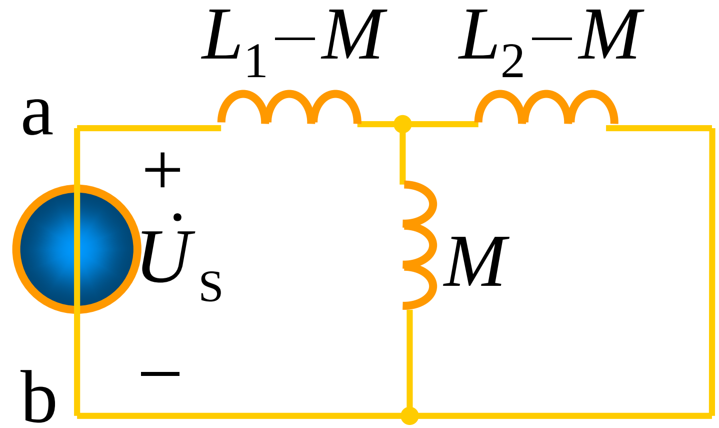
$$Z_{ab} = Z_{11} + Z_l = j\omega L_1 - j\omega \frac{M^2}{L_2}$$

$$= j\omega L_1 (1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}) = j\omega L_1 (1 - k^2)$$

$$k = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}$$

例3　**全耦合电路如图，求初级端ab的等效阻抗。**





解2　**画出去耦等效电路**

$$L_{ab}=L_1-M+\frac{M(L_2-M)}{L_2})$$

$$=\frac{L_1L_2-M^2}{L_2}=L_1(1-\frac{M^2}{L_1L_2})$$

$$=L_1(1-k^2)$$

10.5 理想变压器

理想变压器是实际变压器的理想化模型，是对互感元件的理想科学抽象，是极限情况下的耦合电感。

1.理想变压器的三个理想化条件

①无损耗 → 线圈导线无电阻

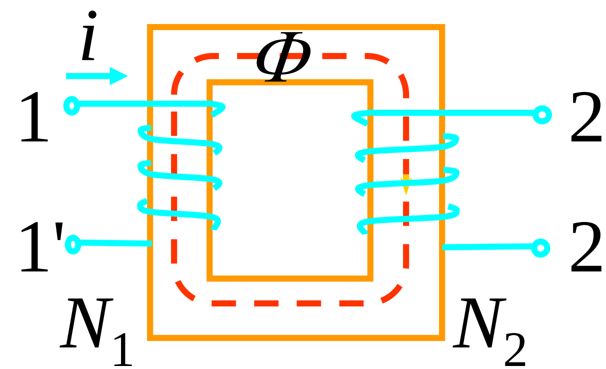
做芯子的铁磁材料的磁导率无限大。

②全耦合 → $k=1 \Rightarrow M=\sqrt{L_1 L_2}$

③参数无限大 → $L_1, L_2, M \Rightarrow \infty$，但 $\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}=\dfrac{N_1}{N_2}=n$

注意 以上三个条件在工程实际中不可能满足，但在一些实际工程概算中，在误差允许的范围内，把实际变压器当理想变压器对待，可使计算过程简化。

2.理想变压器的主要性能

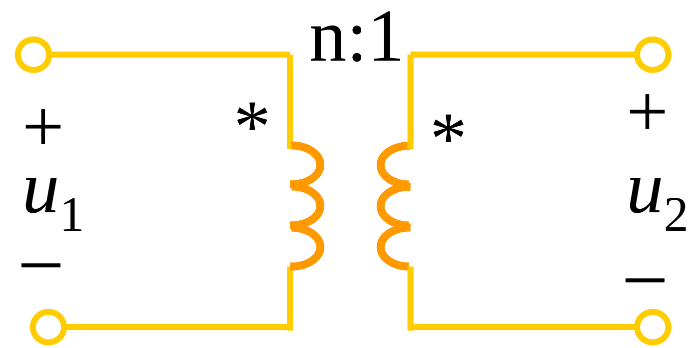


①变压关系

$$k = 1 \;\longrightarrow\; \phi_1 = \phi_2 = \phi_{11} + \phi_{22} = \phi$$

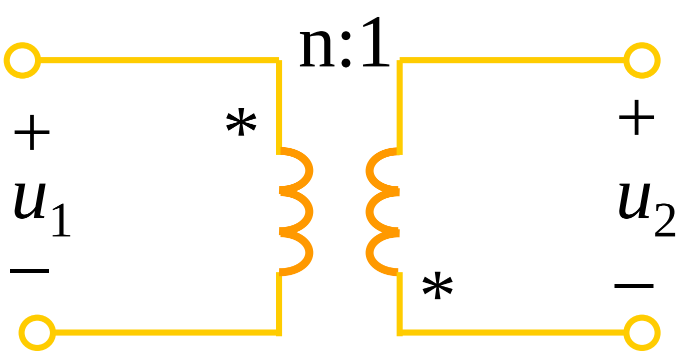
$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \qquad u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{N_1}{N_2}=n$$



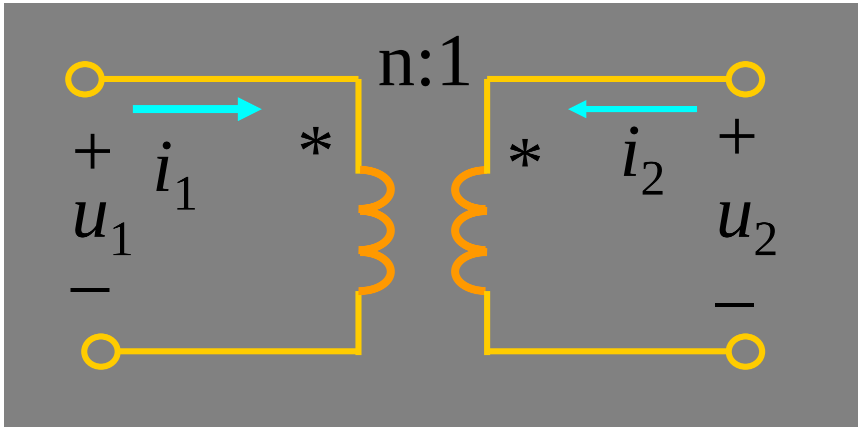
理想变压器模型

注意 **若**



$$\frac{u_1}{u_2}=-\frac{N_1}{N_2}=-n$$

②变流关系



$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$i_1(t) = \overset{0}{\frac{1}{L_1}\int_0^t u_1(\xi)d\xi} - \frac{M}{L_1}i_2(t)$$

理想变压器模型

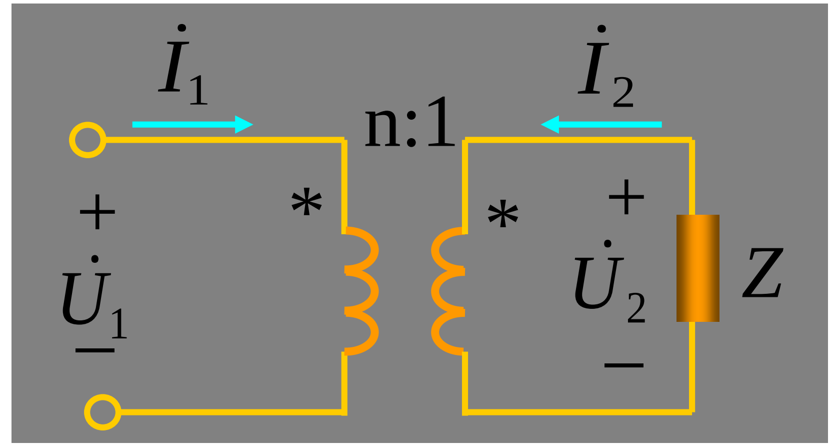
考虑理想化条件：

$$k = 1 \Rightarrow M = \sqrt{L_1L_2}$$

$$L_1 \Rightarrow \infty, \sqrt{L_1/L_2} = \mathrm{N}_1/\mathrm{N}_2 = n$$

$$\frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad i_1(t) = -\frac{1}{n}i_2(t)$$

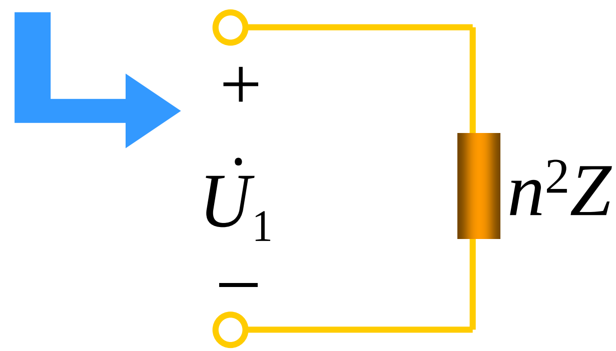
注意 若i_1、i_2一个从同名端流入，一个从同名端流出，则有：



$$i_1(t) = \frac{1}{n} i_2(t)$$

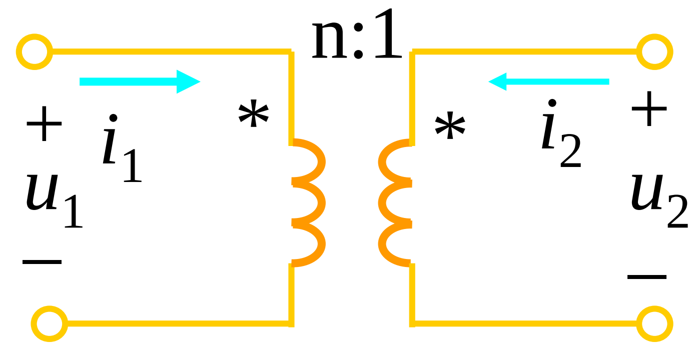
③变阻抗关系

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-1/n\dot{I}_2} = n^2\left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right) = n^2 Z$$



注意 理想变压器的阻抗变换只改变阻抗的大小，不改变阻抗的性质。

④功率性质



$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

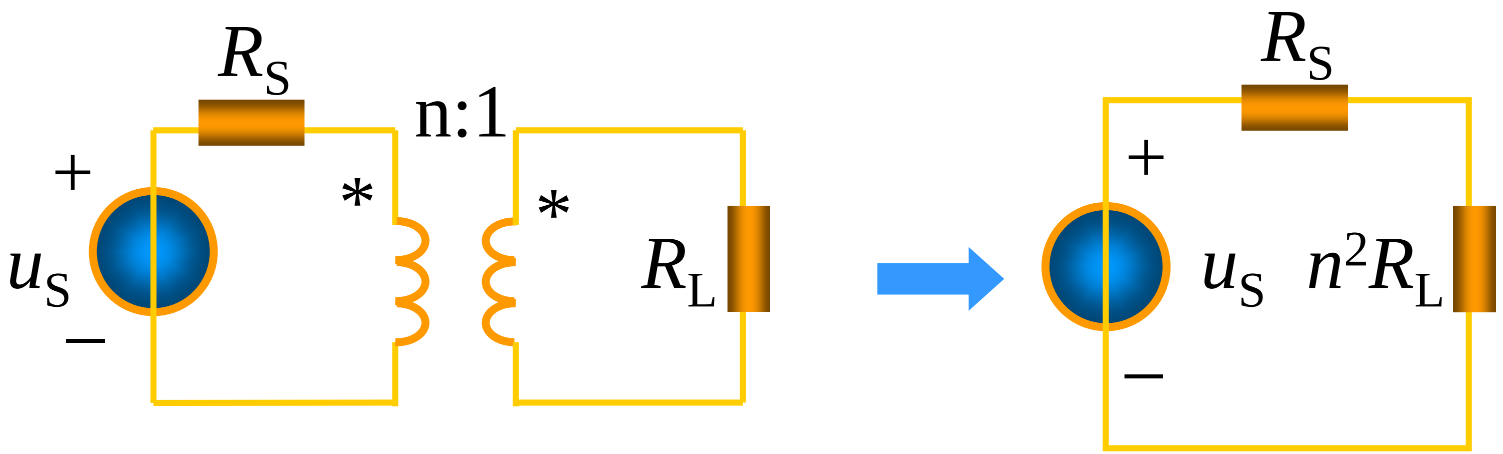
$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + \frac{1}{n} u_1 \times (-n i_1) = 0$$

表明

a)理想变压器既不储能，也不耗能，在电路中只起传递信号和能量的作用。

b)理想变压器的特性方程为代数关系，因此它是无记忆的多端元件。

例1 **已知电源内阻**R_S=1kΩ，**负载电阻**R_L=10Ω。**为使**R_L**获得最大功率，求理想变压器的变比**n。

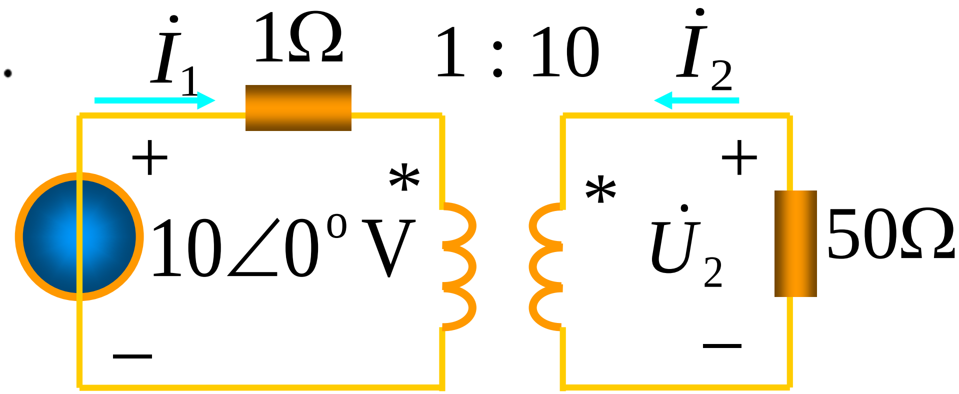


解 **应用变阻抗性质**

当 $n^2R_L=R_S$ **时匹配，即** $10n^2=1000$

$\therefore\ n^2=100$，$n=10$.

例2　求电压 $\dot{U}_2$.



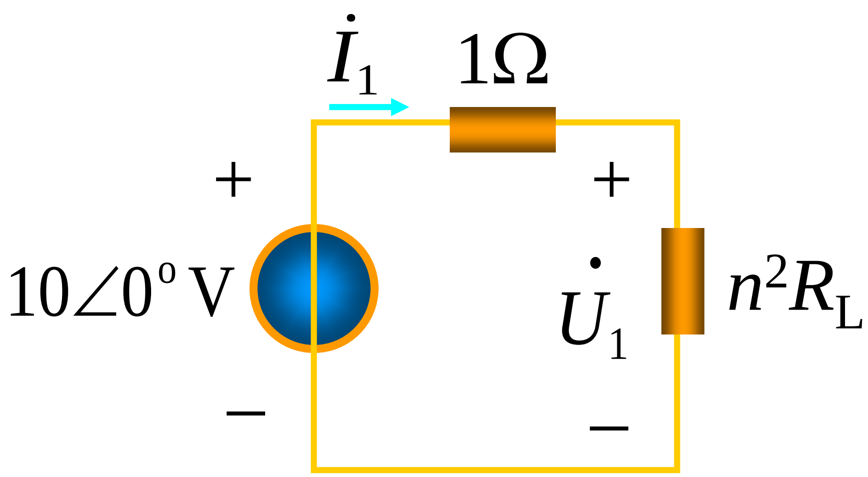
解　**方法1：列方程**

$$
\begin{cases}
1\times \dot{I}_1+\dot{U}_1=10\angle 0^{\circ} \\
50\dot{I}_2+\dot{U}_2=0 \\
\dot{U}_1=\dfrac{1}{10}\dot{U}_2 \\
\dot{I}_1=-10\dot{I}_2
\end{cases}
$$

解得

$$\dot{U}_2=33.33\angle 0^{\circ}\,\text{V}$$

方法2：阻抗变换



$$n^2 R_L = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times 50 = \frac{1}{2}\Omega$$

$$\dot{U}_1 = \frac{10\angle 0^\circ}{1+1/2} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}\angle 0^\circ \text{V}$$

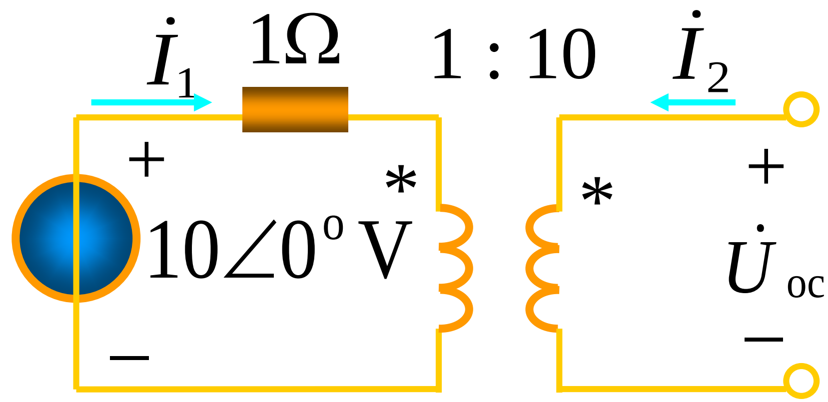
$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n}\dot{U}_1 = 10\,\dot{U}_1 = 33.33\angle 0^\circ \text{V}$$

方法3：戴维宁等效

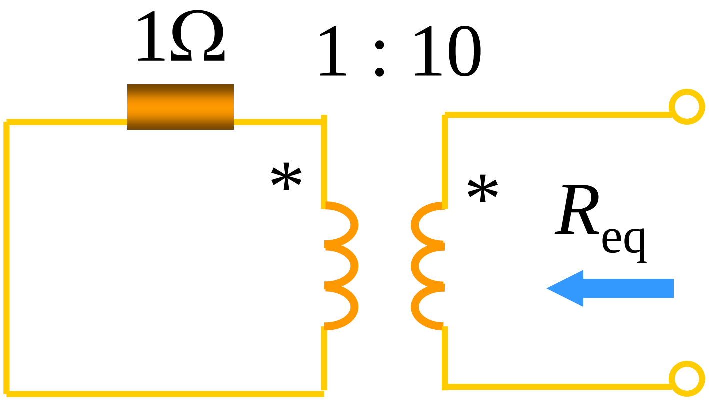
求$\dot{U}_{oc}$：

$$\because \dot{I}_2 = 0, \quad \therefore \dot{I}_1 = 0$$

$$\dot{U}_{oc} = 10\dot{U}_1 = 10\dot{U}_S = 100\angle 0^\circ \text{ V}$$



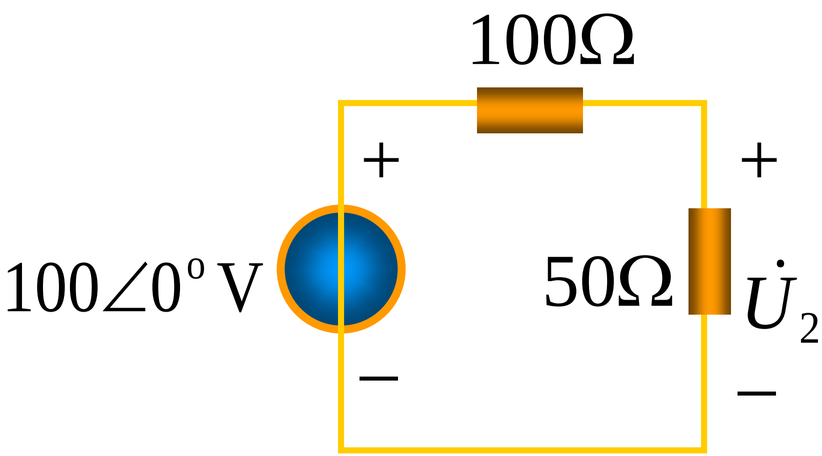
求 R_{eq}：



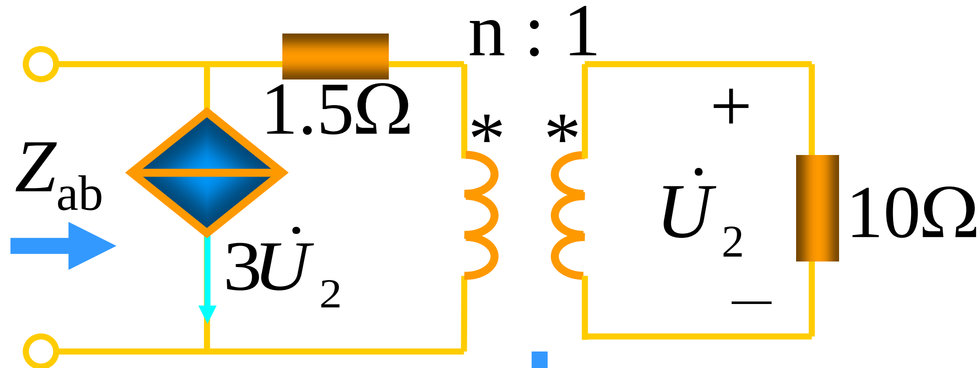
$$R_{eq}=10^2\times1=100\Omega$$

戴维宁等效电路：

$$\dot{U}_2=\frac{100\angle0^\circ}{100+50}\times50=33.33\angle0^\circ\,\text{V}$$

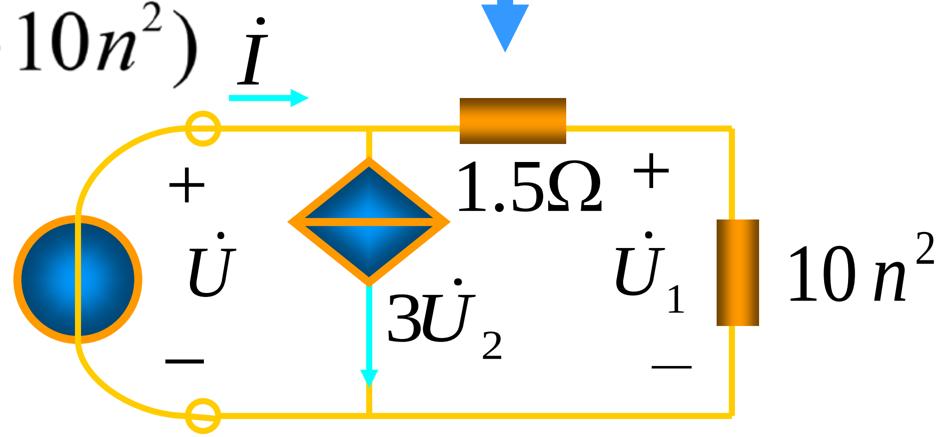


例3 **已知图示电路的等效阻抗Z_{ab}=0.25Ω，求理想变压器的变比n。**



解 **应用阻抗变换**

外加电源得：

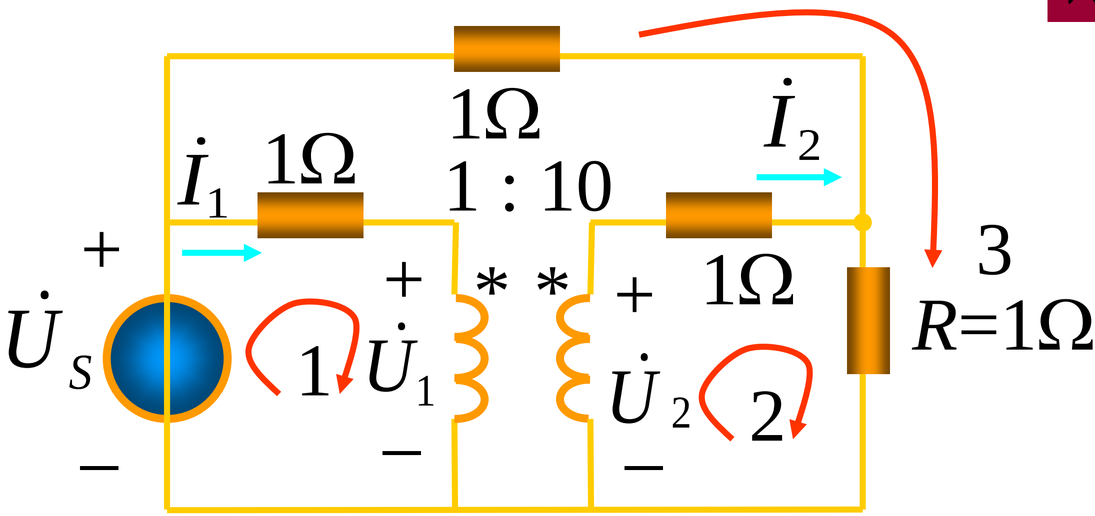


$$\begin{cases} \dot{U} = (\dot{I} - 3\dot{U}_2) \times (1.5 + 10n^2) \\ \dot{U}_1 = (\dot{I} - 3\dot{U}_2) \times 10n^2 \\ \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \dot{U}_2 = \frac{10n\dot{I}}{30n+1}$$

$$Z_{ab} = 0.25 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1.5 + 10n^2}{30n+1} \rightarrow \begin{cases} n=0.5 \\ n=0.25 \end{cases}$$

例5　**求电阻R 吸收的功率**



解　**应用回路法**

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{U}_S - \dot{U}_1 \\ 2\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 + 2\dot{I}_3 = \dot{U}_S \\ \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

解得

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_S(1/n + 2n - 1)}{3n + 2/n}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_S(1 - n/2)}{3n/2 + 1/n}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

$$P = RI^2$$

Homework

10-4
10-12
10-15
10-17
10-18