练习

例 1　设数列$\{x_n\}$满足递推公式

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \in N_+ \end{cases},$$

证明该数列收敛并求极限.

证明：显然$\{x_n\}$是正项数列，所以

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - 2| = \left|\sqrt{2+x_n} - 2\right| = \left|\frac{x_n - 2}{\sqrt{2+x_n}+2}\right| < \frac{1}{2}|x_n - 2| < \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - 2| \\ \cdots \\ < \frac{1}{2^n}|x_1 - 2| = \frac{2-\sqrt{2}}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}, n \in N_+ \end{aligned}$$

故当$n \to \infty$时，$|x_n - 2| \to 0$. 由数列极限的定义可知，数列$\{x_n\}$收敛于 2.

例 2　记斐波那契数列为$\{F_n\}$[1]，证明数列$\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\}$收敛，并求其极限.

证明：显然$\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\}$是正项数列，且恒大于 1，所以

$$\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \left|\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \left|\frac{F_{n-1}}{F_n} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| = \left|\frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right| = \left|\frac{\frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{F_n}{F_{n-1}}}\right|$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{F_n}{F_{n-1}}}\left|\frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left|\frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| < (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2\left|\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| \\ &\cdots \\ &< (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n-2}\left|\frac{F_3}{F_2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n-2}\left|2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|, n \in N_+ \end{aligned}$$

故当$n \to \infty$时，$(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n-2} \to 0$. 由数列极限的定义可知，数列$\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\}$收敛于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

总结

对于以或者可以变换成以递推公式表达的收敛数列，可以采用放缩法+数列极限定义的方法证明其收敛，同时计算出极限。以一阶线性递推数列为例，具体的操作是：

假设数列$\{x_n\}$满足递推公式

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in N_+ \end{cases}$$

要证明其收敛并计算出极限（这里假设极限为 L），可以先假设其收敛且极限为 L，由递推公式得到

$$\left|x_n - L\right| = \left|f(x_n) - L\right| = \cdots = a_n\left|x_{n-1} - L\right| < a\left|x_{n-1} - L\right|,$$

其中$|a| < 1$. 则有

$$\left|x_n - L\right| < a\left|x_{n-1} - L\right| < a^2\left|x_{n-2} - L\right| < \cdots < a^{n-1}\left|x_1 - L\right|.$$

注意到数列极限的$\varepsilon - N$ 语言定义[2]：

定义　设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正整数N，使得当$n > N$时，不等式

$$\left|x_n - a\right| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \to a(n \to \infty).$$

容易知道，当$n \to \infty$时，$a^{n-1} \to 0$，进而$a^{n-1}\left|x_1 - L\right| \to 0$. 由夹逼准则可知

$$\begin{cases} \{0\} \to 0 \\ a^{n-1}\left|x_1 - L\right| \to 0 \\ 0 \le \left|x_n - L\right| < a^{n-1}\left|x_1 - L\right| \end{cases} \Rightarrow \left|x_n - L\right| \to 0$$

由此即证明数列$\{x_n\}$收敛且极限为 L.

注释

[1] 斐波那契数列是二阶线性递推数列，满足：

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \in N_+ \end{cases}.$$

[2] 同济大学数学系.高等数学（第七版）上册[M].北京：高等教育出版社，2014.7:20-21