第四章 常用的电路定理

4.1 叠加原理和齐次定理

若某线性电阻电路有唯一解，则该电路中任一支路电流和电压均可表示为电路中所有独立源的线性组合。体现为两个重要特性—齐次性（比例性）和叠加性。

设线性电路输入为$f(t)$，输出为$y(t)$。

- 齐次性：若： $f(t) \to y(t)$

  则： $af(t) \to ay(t)$ （又称比例性）

- 叠加性：若： $f_1(t) \to y_1(t)$， $f_2(t) \to y_2(t)$，

  则： $f_1(t) + f_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

- 若有 $f_1(t) \to y_1(t)$， $f_2(t) \to y_2(t)$，

  且有 $af_1(t) + bf_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$，

  则这样的系统称为线性系统。

一、叠加原理（principle of superposition）

先看一个例子。如图电路，计算电流i_1和a点电位。

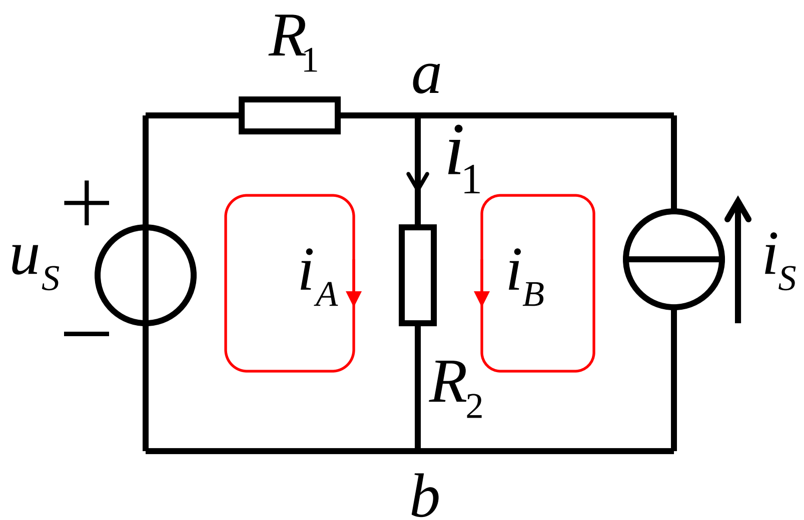
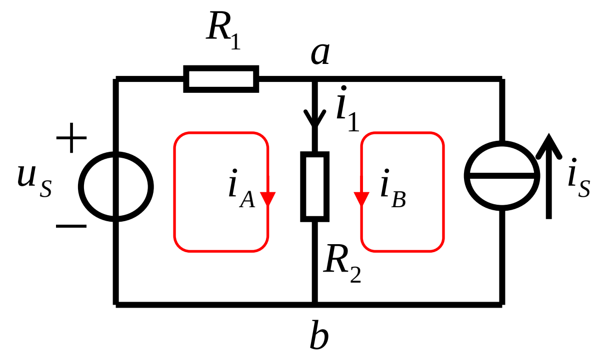


图 4.1-1 说明叠加定理的一个例

求电流i_1，我们可用网孔法。设网孔电流为i_A，i_B。由图可知$i_B=i_s$，对网孔A列出的KVL方程为



$$(R_1+R_2)i_A+R_2 i_s=u_s$$

可得

$$i_A=\frac{u_s}{R_1+R_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}i_s$$

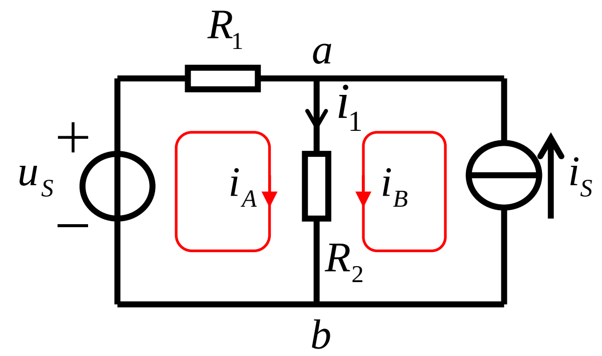
故

$$i_1=i_A+i_B=\frac{u_s}{R_1+R_2}+\frac{R_1}{R_1+R_2}i_s$$

如令 $i_1'=u_s/(R_1+R_2), i_1''=R_1 i_s/(R_1+R_2)$，则可将电流$i_1$写为

$$i_1=i_1'+i_1''$$

求电位v_a，采用节点法，以b为参考点



$$(G_1+G_2)v_a=G_1u_s+i_s$$

得a点电位

$$v_a=\frac{G_1u_s+i_s}{(G_1+G_2)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}u_s+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_s$$

令

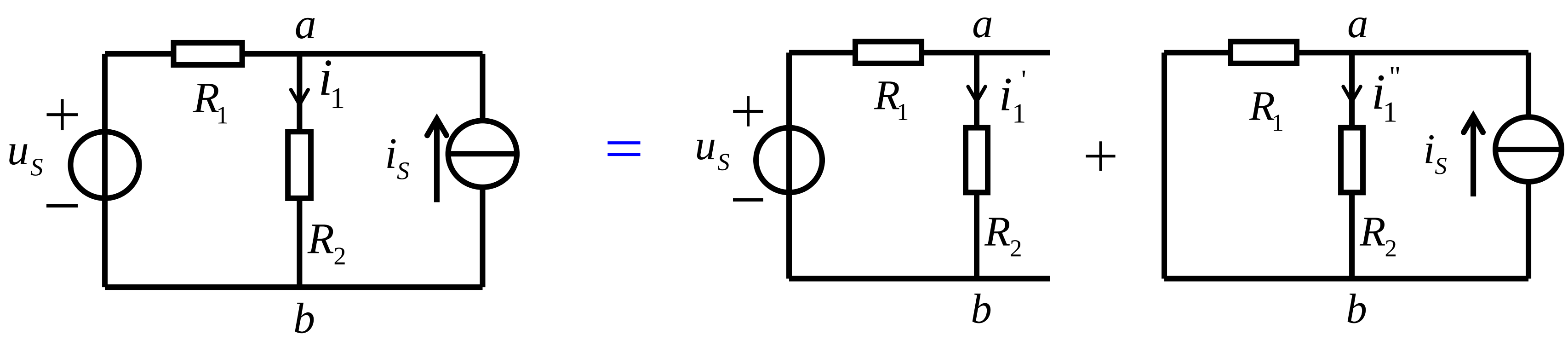
$$v_a^{'}=\frac{R_2}{R_1+R_2}u_s \qquad v_a^{''}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_s$$

则可将电流v_a写为

$$v_a=v_a^{'}+v_a^{''}$$

$$i_1 = i_1^{'} + i_1^{''} \qquad i_1^{'} = \frac{u_s}{R_1 + R_2} \qquad i_1^{''} = \frac{R_1 i_s}{R_1 + R_2}$$

$$v_a = v_a^{'} + v_a^{''} \qquad v_a^{'} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s \qquad v_a^{''} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s$$



原电路　　　　　　分电路1　　　　　　分电路2

可见，$i_1^{'}, v_a^{'}$ 是电压源单独激励（电流源置零，电流源支路相当于开路）时的响应；$i_1^{''}, v_a^{''}$ 是电流源单独激励（电压源置零，电压源支路相当于短路）时的响应。原电路总响应等于两个独立源单独激励时响应之和。各独立源单独作用时的电路称为分电路。

1. 叠加原理内容：

叠加原理可表述为：在任何由线性元件、线性受控源及独立源组成的线性电路中，每一支路的响应（电压或电流）都可以看成是各个独立电源单独作用时，在该支路中产生响应的代数和。

考虑某个独立源单独作用时，其他独立源置零，即电压源短路、电流源开路。

【证明】 设电路的网孔方程为

$$\left.\begin{aligned} R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + \cdots + R_{1m}i_m &= u_{s11} \\ R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + \cdots + R_{2m}i_m &= u_{s22} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad\ \ \vdots \\ R_{m1}i_1 + R_{m2}i_2 + \cdots + R_{mm}i_m &= u_{smm} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1\text{-}1)$$

u_{sjj}为第j个网孔独立电压源的代数和。

根据克莱姆法则，解(4.1-1)式求i_1：

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_{s11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ u_{s22} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{smm} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{vmatrix} \tag{4.1-2}$$

$$= \Delta_{11}u_{s11} + \Delta_{21}u_{s22} + \cdots + \Delta_{j1}u_{sjj} + \cdots + \Delta_{m1}u_{smm}$$

(4.1-2)式中：Δ_{j1}为Δ中第一列第j行元素对应的代数余子式，j=1, 2, …, m，例如

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} & \cdots & R_{2m} \\ R_{23} & R_{33} & \cdots & R_{3m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{m2} & R_{m3} & \cdots & R_{mm} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} & \cdots & R_{1m} \\ R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{m2} & R_{m3} & \cdots & R_{mm} \end{vmatrix}$$

所以

$$i_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}u_{s11}+\frac{\Delta_{21}}{\Delta}u_{s22}+\cdots+\frac{\Delta_{m1}}{\Delta}u_{smm} \qquad (4.1\text{-}3)$$

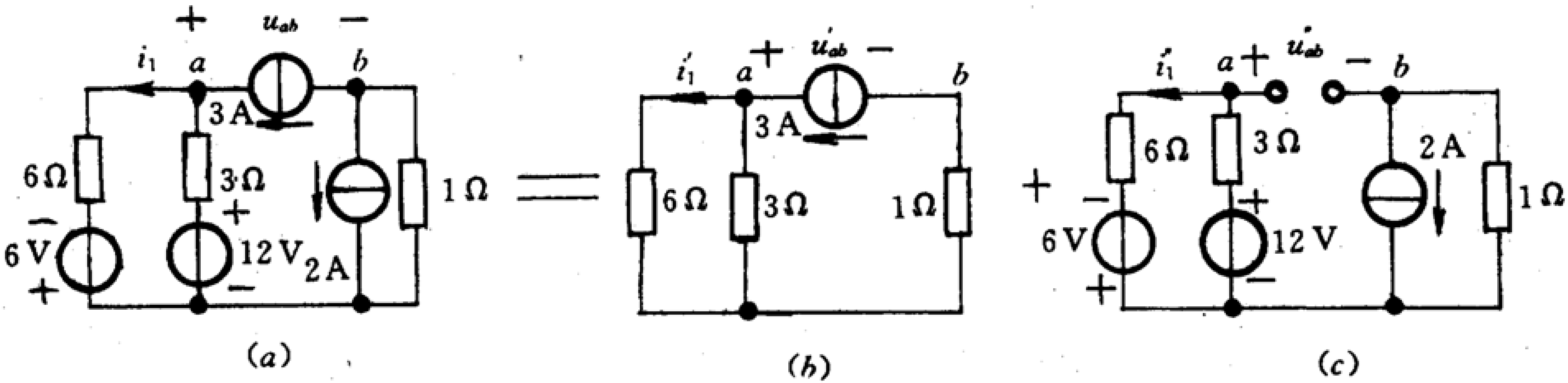
若令$k_{11}=\Delta_{11}/\Delta$，$k_{21}=\Delta_{21}/\Delta$，…，$k_{m1}=\Delta_{m1}/\Delta$，代入(4.1-3)式，得

$$i_1 = k_{11}u_{s11} + k_{12}u_{s22} + \cdots + k_{m1}u_{smm} \qquad (4.1\text{-}4)$$

式中，k_{11}，k_{21}，…，k_{m1}是与电路结构、元件参数及线性受控源有关的常数。其它网孔电流与式(4.1-4) 类似。

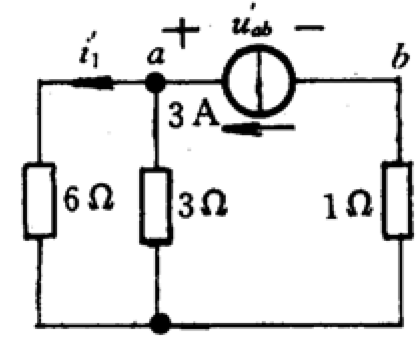
【证毕】

例 **4.1-1** 如图4.1-2(*a*)所示电路，求电压u_{ab}和电流i_1。

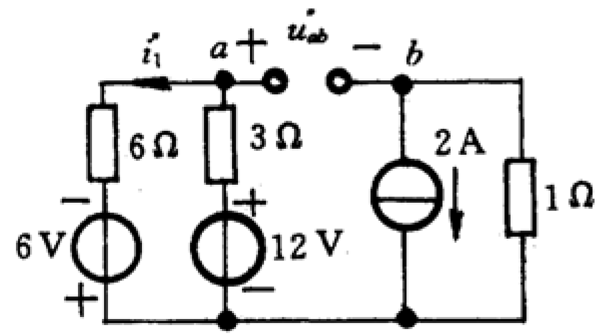


原电路　　分电路1　　分电路2

图 4.1-2　例4.1-1用图



(b)



(c)

解

$$u_{ab}' = [6//3+1]\times 3 = 9V$$

$$i_1' = \frac{3}{3+6}\times 3 = 1A$$

$$i_1'' = \frac{6+12}{6+3} = 2A$$

$$u_{ab}'' = 6i_1'' - 6 + 2\times 1 = 6\times 2 - 6 + 2 = 8V$$

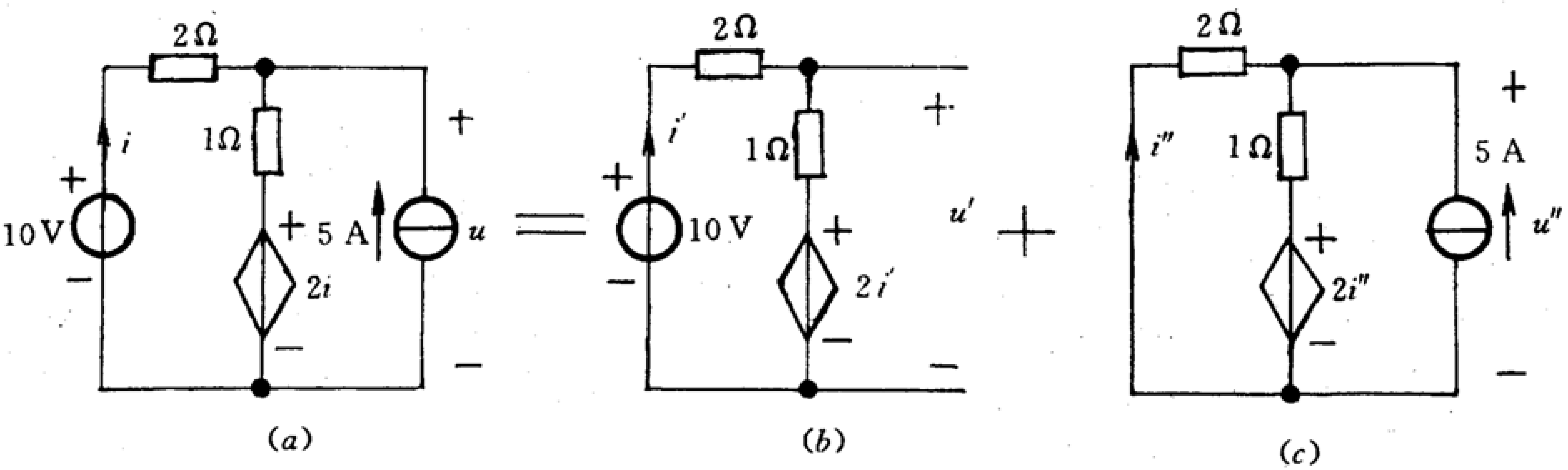
由叠加定理得

$$u_{ab} = u_{ab}' + u_{ab}'' = 9+8 = 17V$$

$$i_1 = i_1'' + i_1'' = 1+2 = 3A$$

本例说明： 叠加方式是任意的，可以一次一个独立源单独作用，也可以一次几个独立源同时作用，取决于使分析计算简便。

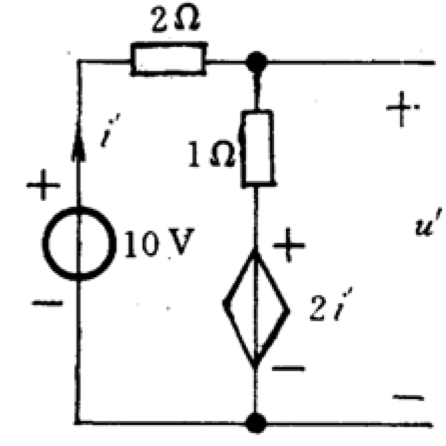
例4.1-2 如图4.1-3(*a*)电路，含有一受控源，求电流i 、电压u 。



原电路　　分电路1　　分电路2

图4.1-3 例4.1-2用图

解　从分电路1，有



(b)

$$i' = \frac{10-2i'}{2+1},\quad u' = 1\times i' + 2i' = 3i'$$

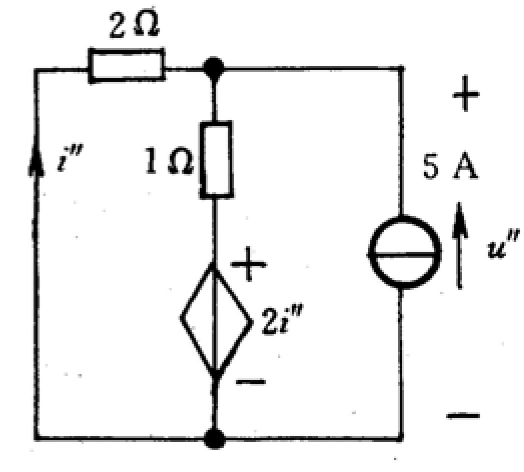
$$i' = 2A,\quad u' = 3i' = 3\times 2 = 6V$$

从分电路2，有

$$2i'' + 1\times(5+i'') + 2i'' = 0$$

$$i'' = -1A,\quad u'' = -2i'' = -2(-1) = 2V$$

根据叠加原理，原电路响应为，



(c)

$$i = i' + i'' = 2 + (-1) = 1A$$

$$u = u' + u'' = 6 + 2 = 8V$$

注意：受控源始终保留在各分电路中。

2. 应用叠加原理时应注意的问题：

(1)叠加原理只适用于线性电路。这是因为线性电路中的电压和电流都与激励（独立源）呈一次函数关系。

(2)叠加原理仅适用于线性电路求解电压和电流响应而功率不能用叠加定理计算(因为功率为电压和电流的乘积，不是独立电源的一次函数)。

(3) 应用叠加原理求电压、电流或电压是代数量的叠加，应特别注意各代数量的符号。（各分电路中电压、电流的参考方向最好与原电路一致。）

(4) 当一独立源作用时，其他独立源都应置零：即独立理想电压源短路，独立理想电流源开路 。

(5) 若电路中含有受控源，应用叠加定理时，受控源不要单独作用（这是劝告**!** 若要单独作用只会使问题的分析求解更复杂化），在独立源每次单独作用时受控源要保留其中，其数值随每一独立源单独作用时控制量数值的变化而变化。

(6) 叠加的方式是任意的，可以一次使一个独立源单独作用， 也可以一次使几个独立源同时作用，方式的选择取决于对分析计算问题简便与否。

叠加原理也可表述为，电路中每一个响应（电压或电流）都是各独立源的线性叠加。这在研究未知结构的网络特性时很有用。

例4.1-3 图4.1-4为一线性纯电阻网络N_R，其内部结构不详。已知两激励源u_s、i_s是下列数值时的实验数据为

当u_s=1V，i_s=1A时，响应u_2=0;

当u_s=10V，i_s=0时，响应u_2=1V。

问当u_s=30 V，i_s=10 A时，响应u_2=?

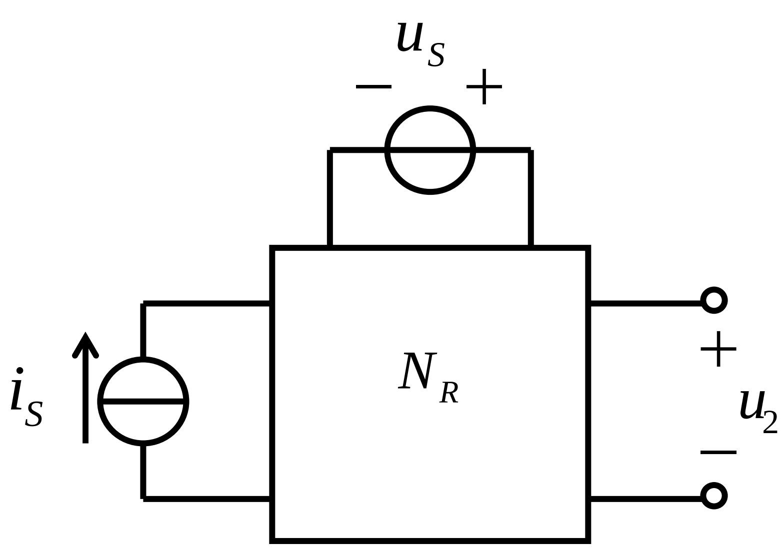


图 4.1-4 例4.1-3用图

解 根据叠加原理

$$u_2 = k_1 u_s + k_2 i_s$$

式中：k_1，k_2为未知的比例常数，其中k_1无量纲，k_2的单位为Ω。

由已知条件可列方程组

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \times 1 + k_2 \times 1 = 0 \\ k_1 \times 10 + k_2 \times 0 = 1 \end{array}\right\}$$

解方程得， $k_1 = 0.1,\qquad k_1 = -0.1\Omega$

故网络的输入一输出关系为 $u_2 = 0.1u_s - 0.1i_s$

当u_s=30V、i_s=10A时，

$$u_2 = 0.1 \times 30 + (-0.1) \times 10 = 2V$$

本例给出了研究激励和响应关系的实验方法。

二、齐次定理

齐次定理表述为：当一个激励源（独立电压源或独立电流源）作用于线性电路，其任意支路的响应（电压或电流）与该激励源成正比。

【证明】设

$$u_{s11}=u_s, u_{s22}=0,\cdots,u_{smm}=0$$

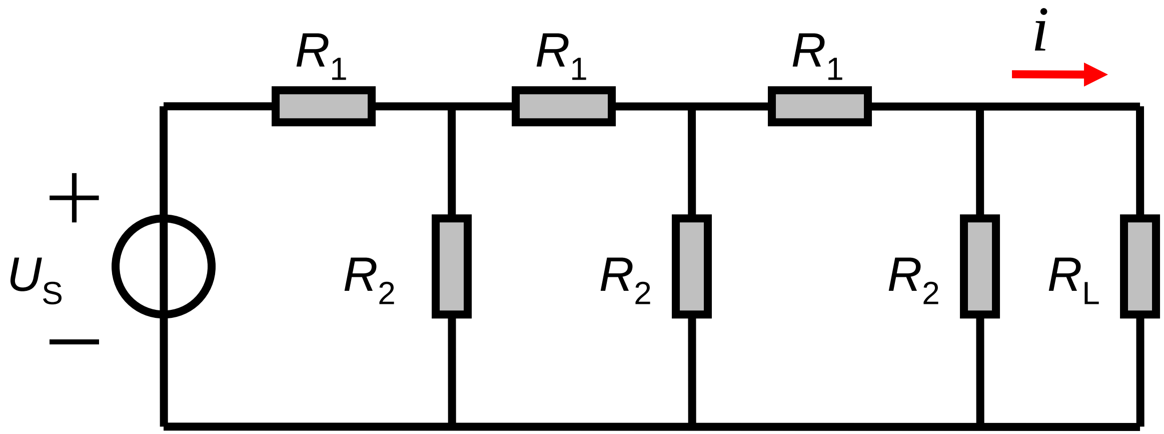
与叠加原理的证明过程类似，从式(4.1-4)可得

$$i_1=k_{11}u_s$$ 【证毕】

只含一个激励源（独立电源）的线性电路中，当激励源增大到***k*** **(*k***为任意常数**)** 倍，其电路中任何处的响应**(**电压或电流**)** 亦增大到***k***倍。

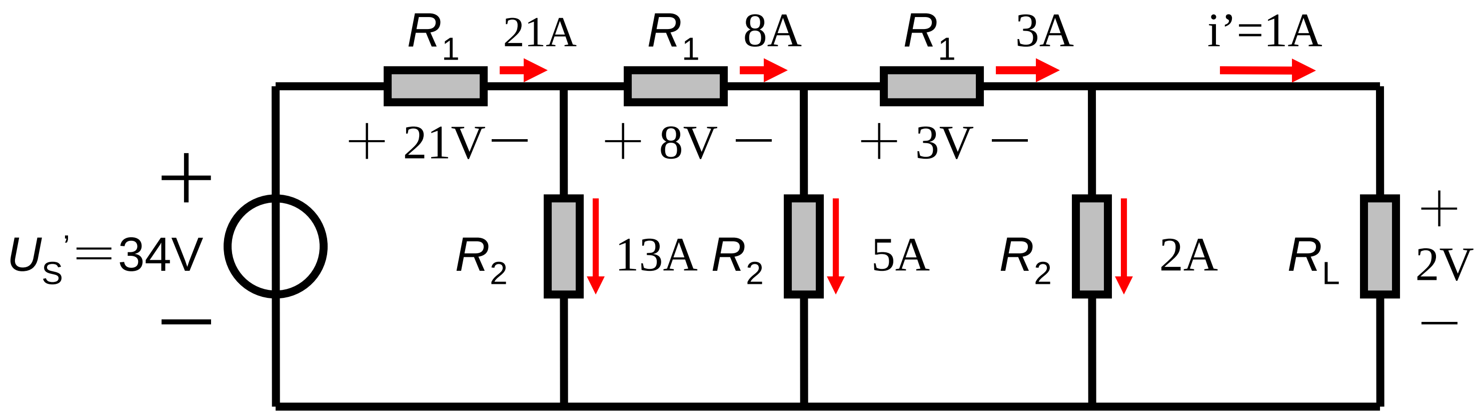
用齐次定理分析梯形电路(ladder network)特别有效。

例**4.1-4** 求图示电路的电流i，已知：R_L=2Ω、 R_1=1Ω 、R_2=1Ω U_S =51V。



例4.1-4图

解：采用倒推法：设i'=1A 。则各支路电流如下图所示，



此时电源电压为 $U_s^{'} = 34V$

根据齐性原理：当电源电压为 $U_S = 51V$ 时，满足关系：

$$\frac{i}{i^{'}} = \frac{u_s}{u_s^{'}}$$

即

$$i = \frac{u_s}{u_s^{'}} i^{'} = \frac{51}{34} \times 1 = 1.5A$$

根据齐次定理可知，对于一个不含独立源、仅含电阻和受控源的一端口，其端口输入电压与输入电流的比值为一个常量，这个比值就是第二章定义的该一端口的输入电阻或等效电阻。

三、推论

4.2 替代定理（substition theorem）

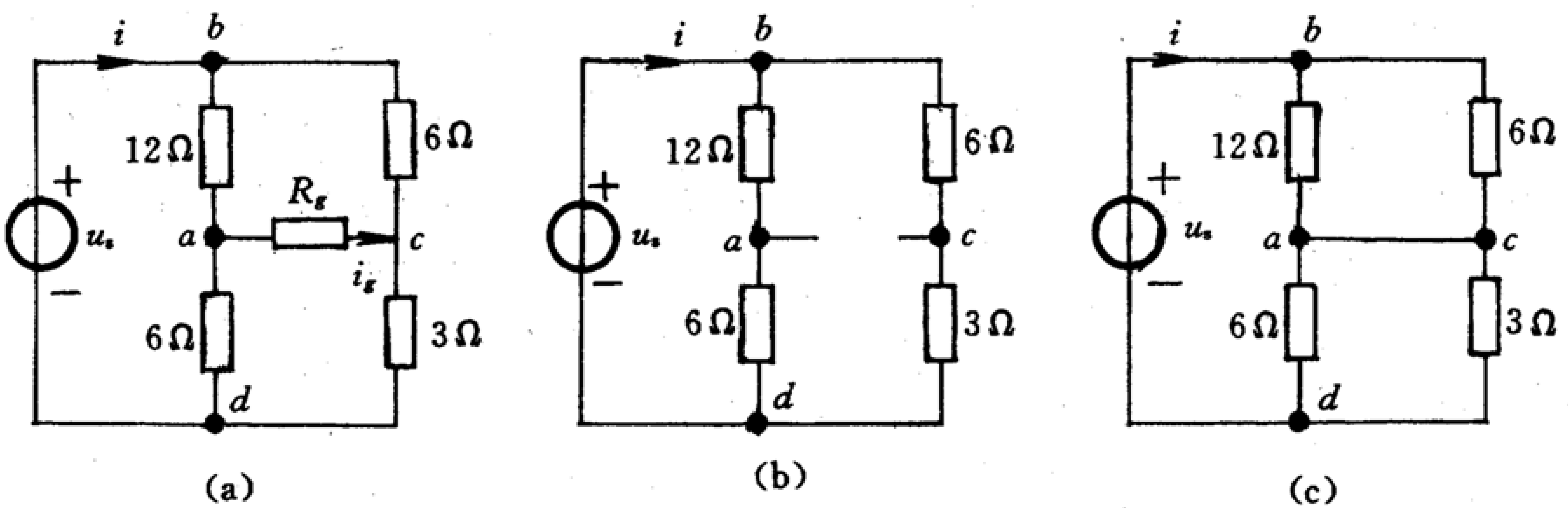


图 4.2-1 平衡电桥电路

图4.2-1(a)为一平衡电桥电路，桥路上电流i_g=0，桥路两端电压u_{ac}=0, 若要计算电流i，先来计算等效电阻R_{bd}。因i_g=0， 故可以将R_g开路，如(b)图，于是得

$$R_{bd} = (6+12)//(6+3) = 6\Omega$$

另一方面，由于R_g两端电压u_{ac}=0，所以又可将R_g短路，如(c)图，从而有

$$R_{bd} = 12//6 + 6//3 = 6\Omega$$

该例实际就是替代定理的应用。

1. 替代定理的内容

替代定理（又称置换定理）可表述为：具有唯一解的电路中，若知某支路k 的电压为u_k、电流为i_k，且该支路与电路中其他支路无耦合，则无论该支路是由什么元件组成的，该支路都可用下列任何一个元件去替代（置换）：

(1) 电压等于u_k的理想电压源；

(2) 电流等于i_k的理想电流源；

(3) 阻值为u_k/i_k的电阻。

替代后原电路的其余支路电路特性保持不变。

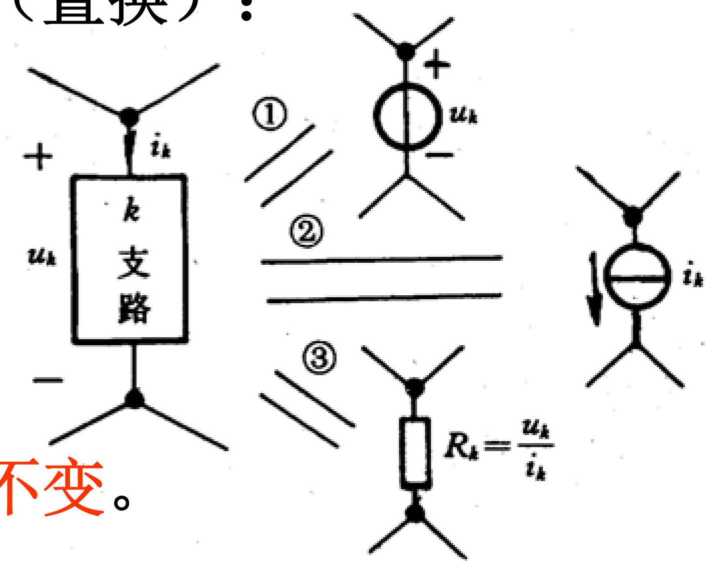


图 4.2-2 替代定理示意图

替代定理的正确性可作如下解释：

替代前后KCL、KVL关系相同，其余支路的u、i关系不变。k支路用理想电压源u_k替代后，其余支路电压保持不变(KVL)，因此其余支路电流也不变，故第k条支路i_k也不变(KCL)。同理k支路用理想电流源i_k替代后，其余支路电流不变(KCL)，因此其余支路电压不变，故第k条支路u_k也不变(KVL)。

如图4.2-3(a)所示电路，我们先应用节点法计算出各支路电流及ab支路电压。列写节点方程，得

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)v_a=-\frac{4}{2}+8=6 \qquad u_{ab}=v_a=4V$$

设出各支路电流i_1，i_2，i_3，由图可见i_1=8A，由欧姆定律得$i_2=u_{ab}/1=4/1=4A$，再由KCL得$i_3=i_1-i_2=8-4=4A$。这些结果的正确性无可置疑。

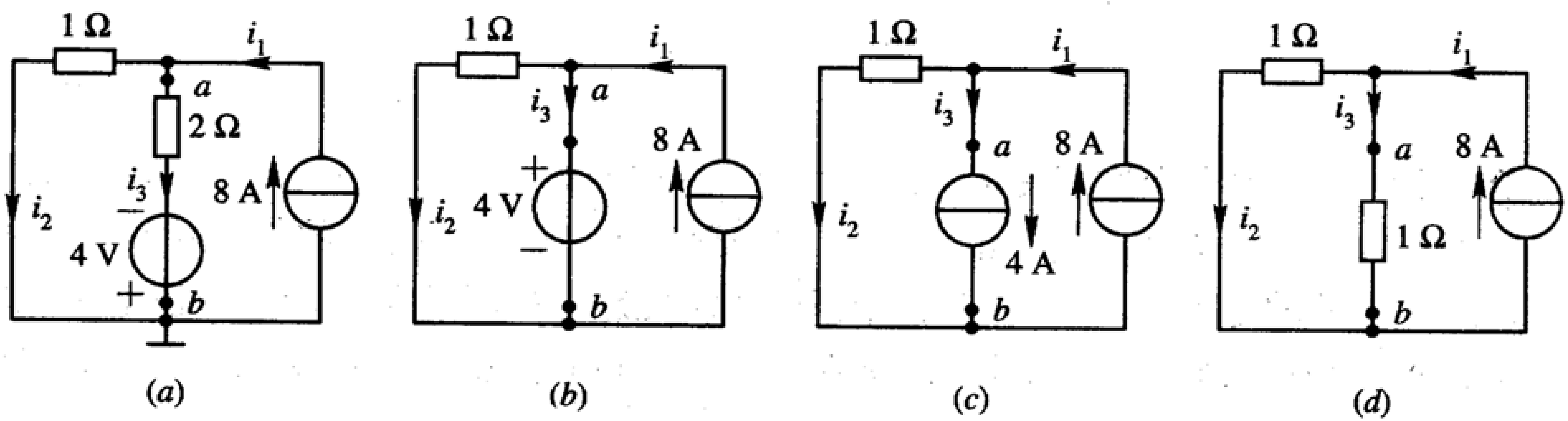


图 4.2- 3 验证替代定理正确性的一个电路

2.应用替代定理要注意的问题:

1) 从理论上讲，替代定理适用于线性电路，也适用于非线性电路。

2) 替代定理适用条件：替代前后电路必须均有唯一解。如替代后不能形成电压源回路和电流源节点。

3) 替代后其余支路及参数不能改变。

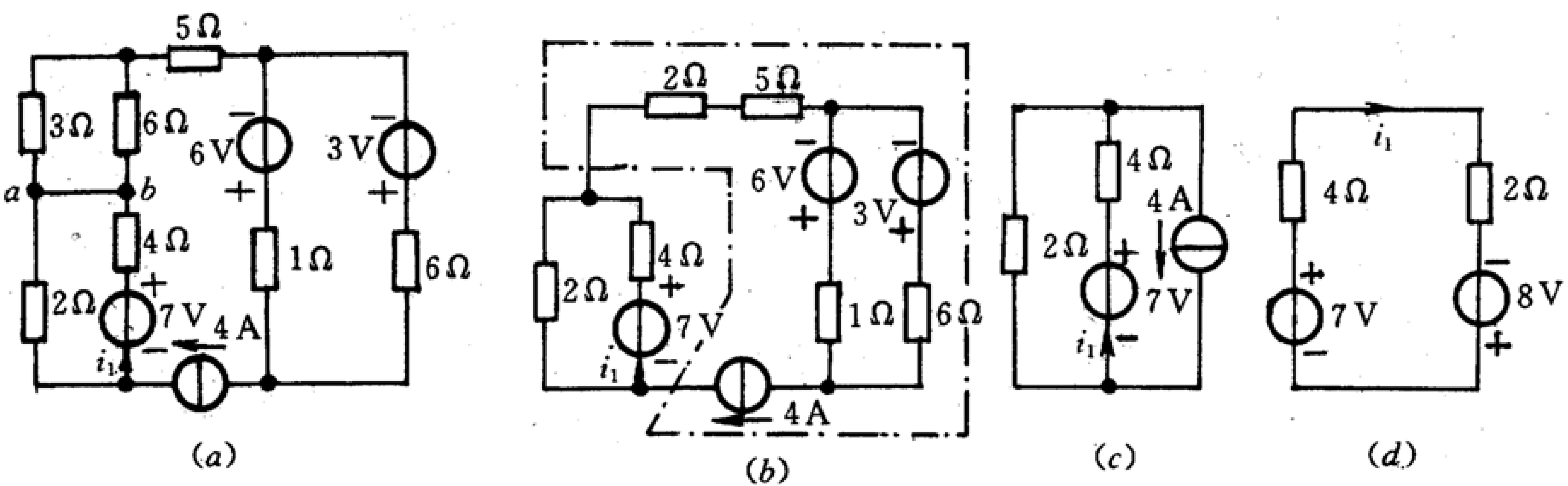
4) 被替代支路可无源，或含源，但不能与其余电路的任一支路存在耦合关系（如被替代支路既不能含受控源的控制量，也不能含受控源；或耦合电感的其中一个电感；或变压器的初级或次级）。

5) 同一支路不一定可以同时用电流源、电压源和电阻替代。

例 4.2-1 对图4.2-4(*a*)所示电路，求电流i_1。

解　　应用替代定理，图(a)简化为图(c)所示的电路，再用电源变换原理化为图d，于是，

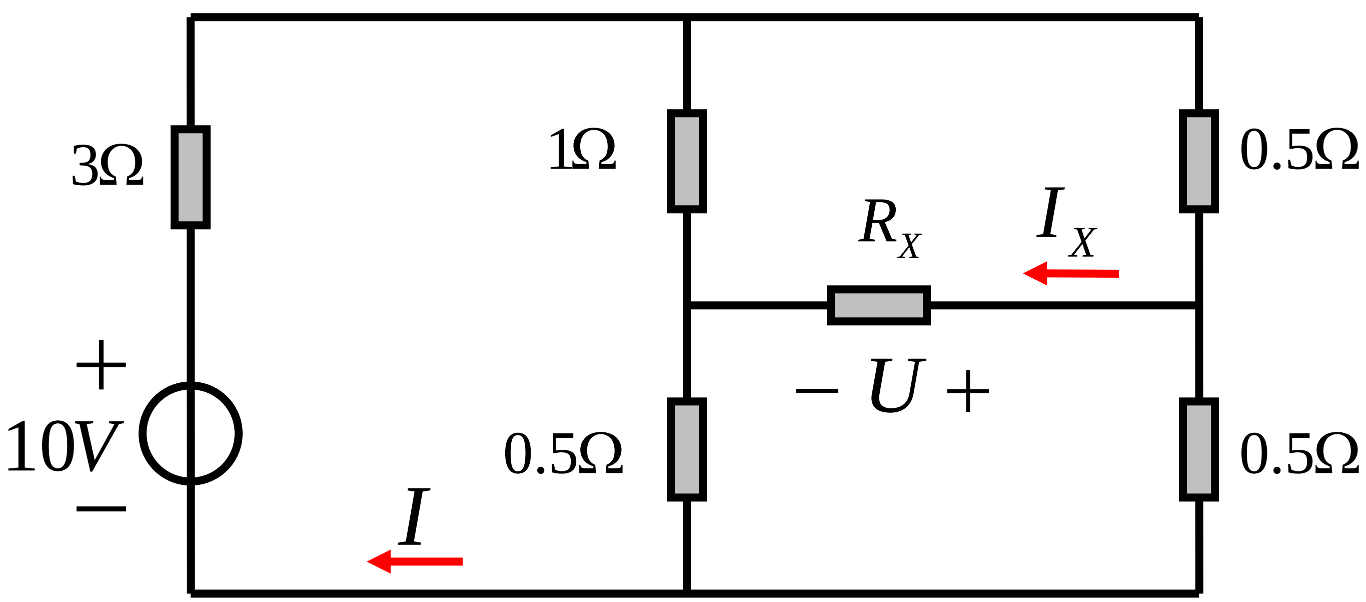
$$i_1 = \frac{7+8}{6} = 2.5A$$



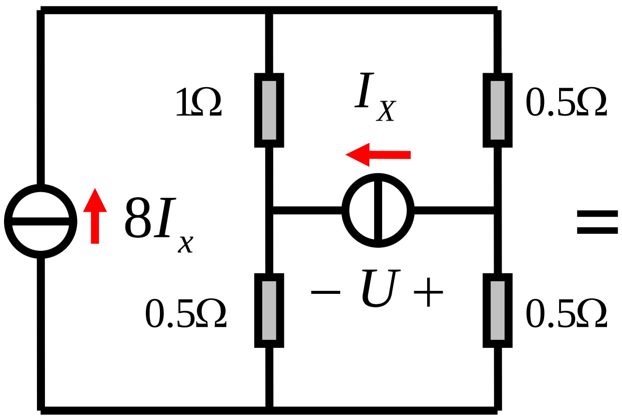
(*a*)　(*b*)　(*c*)　(*d*)

图 4.2-4

例4.2-2 若要使图示电路中的电流 $I_X = \frac{1}{8}I$ ，试求电阻$\boldsymbol{R_x}$ 。

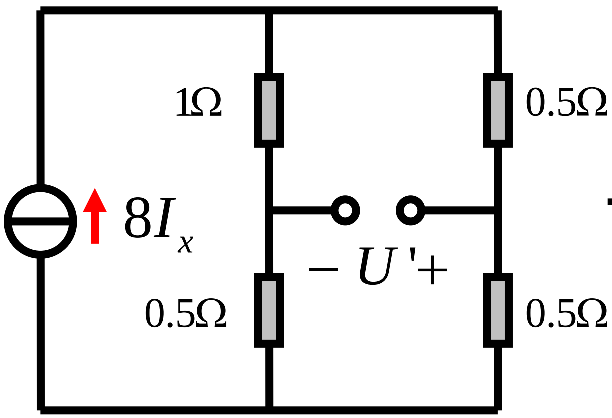


解：因为$R_x = U/I_x$ ，为避免求解复杂的方程，应用替代定理，把10V电压源和3 Ω 电阻串联支路用电流为I的电流源替代，电路如图(b)所示。然后应用叠加定理，分电路图如图(c)、(d)所示。



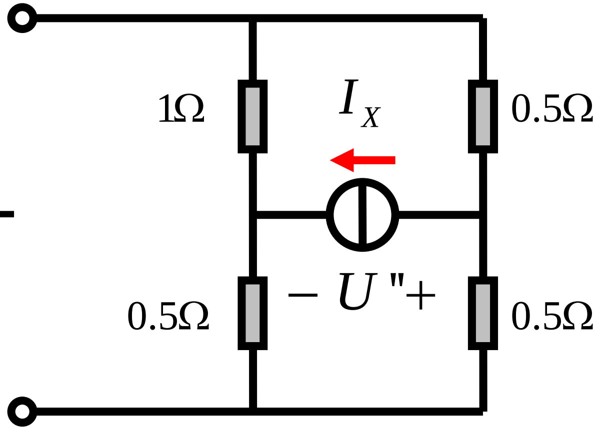
图(b)

=

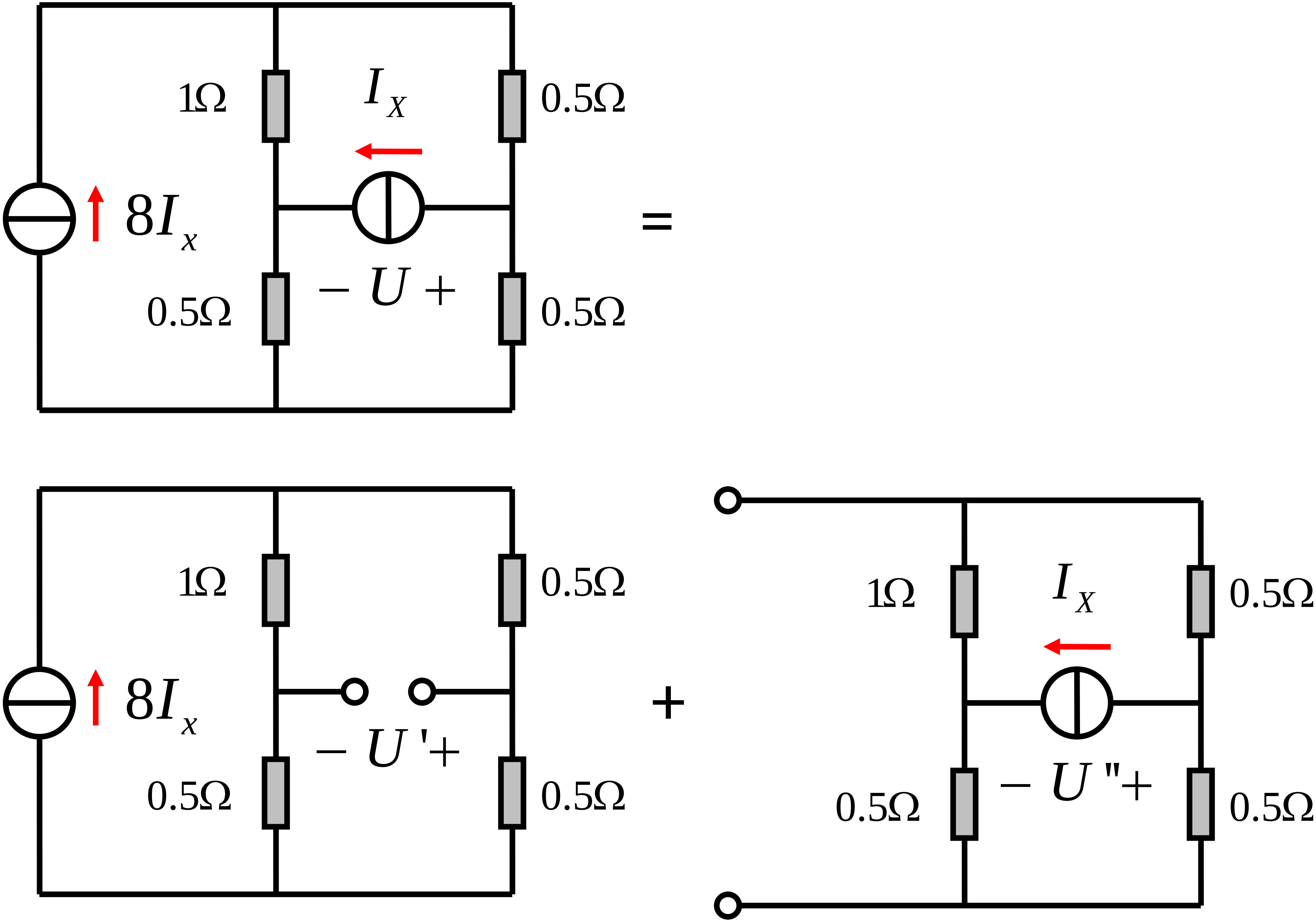


图(c)

+



图(d)


1Ω
I_x
0.5Ω
$8I_x$
$- U +$
0.5Ω
0.5Ω
=
1Ω
0.5Ω
$8I_x$
$- U' +$
0.5Ω
0.5Ω
+
1Ω
I_x
0.5Ω
$- U'' +$
0.5Ω
0.5Ω

由图得：

$$U' = \frac{1.5}{2.5}8I_x \times 0.5 - \frac{1}{2.5}8I_x \times 0.5 = 0.8I_x$$

$$U'' = -\frac{1.5\times 1}{1.5+1}\times I_x = -0.6I_x$$

$$U = U' + U'' = (0.8 - 0.6)I_x = 0.2I_x$$

所以，

$$R = U / I_x = \frac{0.2I_x}{I_x} = 0.2\Omega$$

例4.2-3 如图4.2-5所示电路，已知u_{ab}=0，求电阻R。

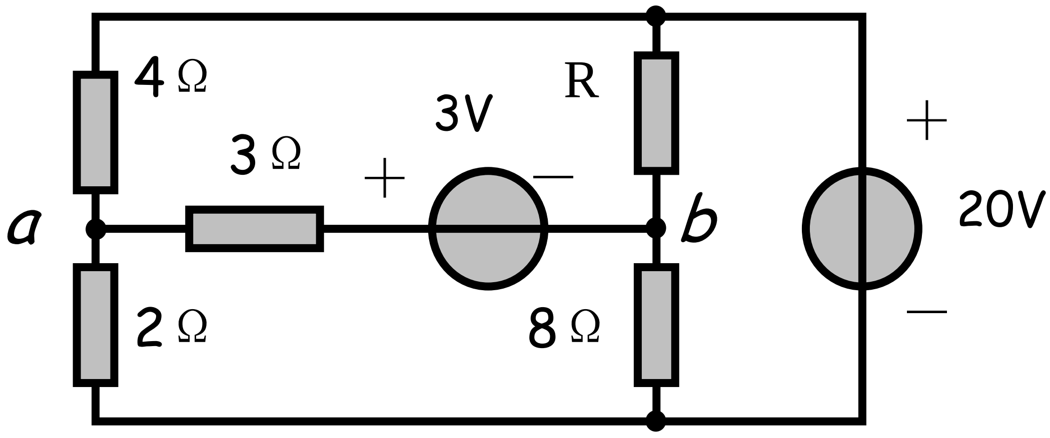


图 4.2-5 例4.2- 3用图

解 如果根据已知的u_{ab}=0的条件求得*ab*支路电流$_i$，即

$$u_{ab}=-3i+3=0\rightarrow i=1A$$

应用替代定理，把ab支路用1A电流源替代，电路如图(b)所示，其结点方程为：

$$v_C=20V$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)v_a-\frac{1}{4}\times 20=1$$

解之， 得

$$v_a=8V$$

因u_{ab}=0，所以v_b=v_a=8V。

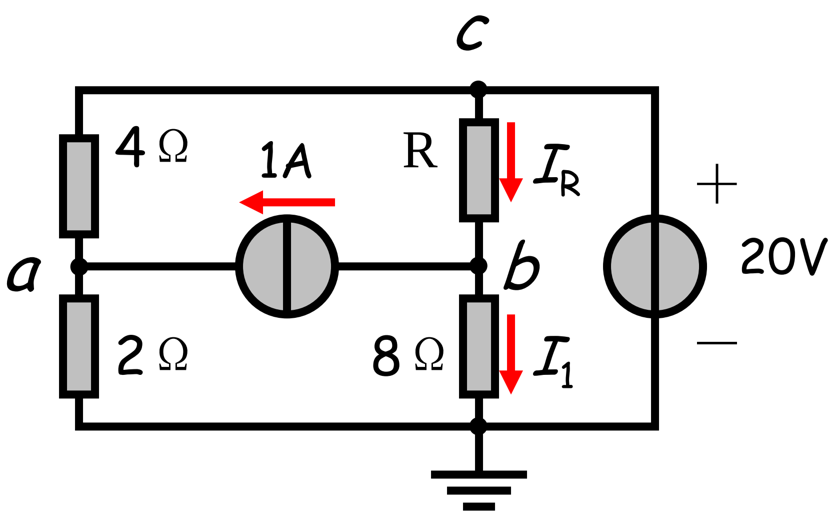


图 b

由电阻元件VCR及KCL，得

$$i_1 = \frac{v_b}{8} = \frac{8}{8} = 1A$$

$$i_R = i_1 + 1 = 1 + 1 = 2A$$

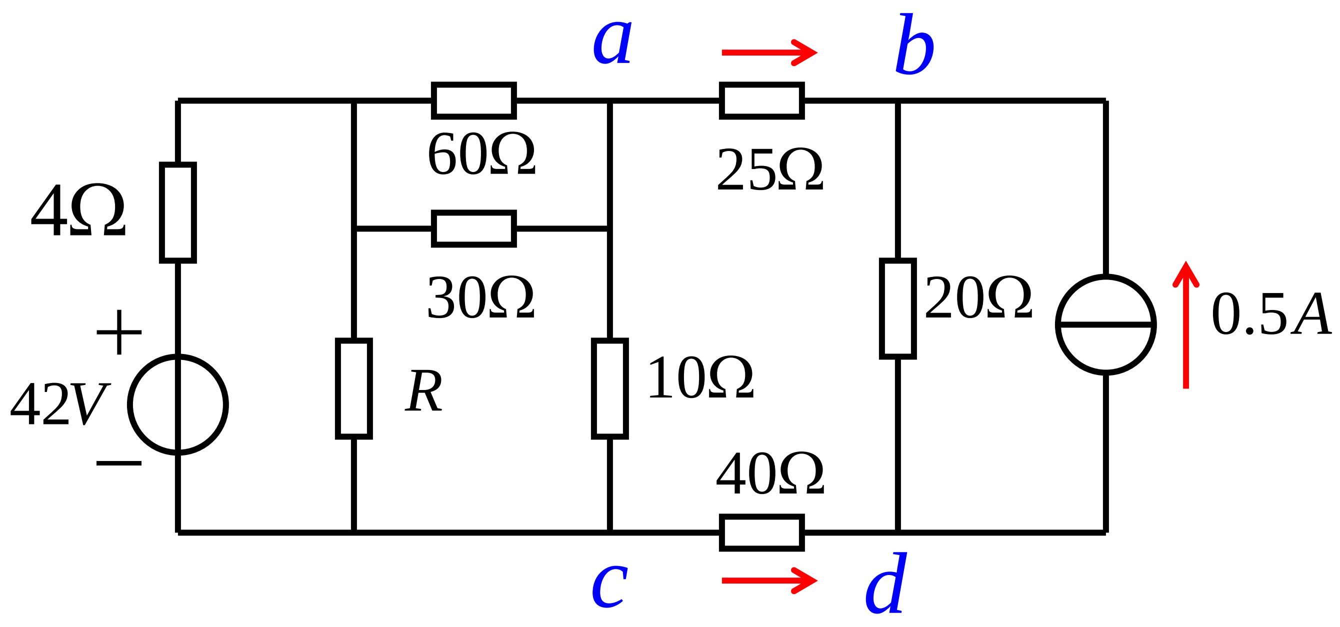
$$u_R = v_c - v_b = 20 - 8 = 12V$$

因此电阻 $R = \frac{u_R}{i_R} = \frac{12}{2} = 6\Omega$

思考:由于u_{ab}=0，可否用短路替代?

替代前后电路必须均有唯一解；
同一支路不一定可以同时用电流源、电压源和电阻替代。

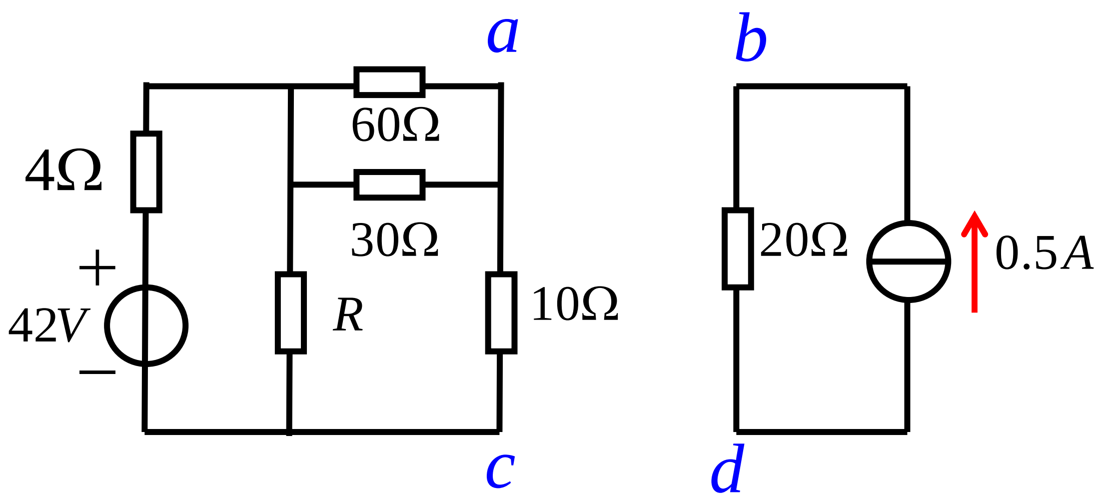
例4.2-4 已知图示电路中电压 U_{ab}=0，求电阻 R 的值 。



解：根据已知条件 $u_{ab}=0$,

得：$i_{ab}=i_{cd}=0$，$u_{cd}=0$ ，

用断路替代ab和cd支路，电路如图(b)所示，



得:

$$u_{bd}=u_{ac}=20\times0.5=10V$$

则10Ω电阻中的电流为1A，

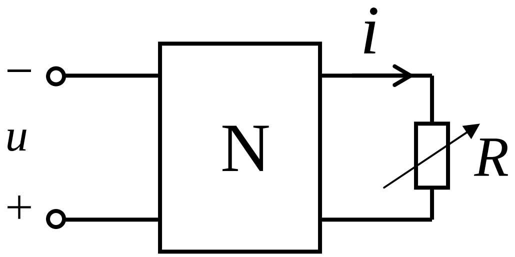
$$u_R=20\times1+10=30V \qquad i_R=(42-30)/4-1=2A$$

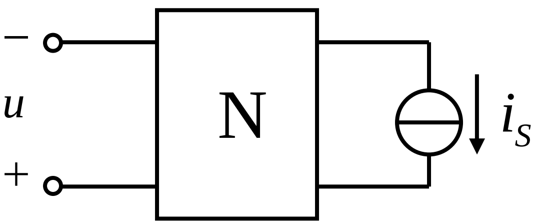
因此电阻

$$R=\frac{u_R}{i_R}=\frac{30}{2}=15\Omega$$

思考:由于u_{ab}==u_{cd}=0，可否用短路替代?

例**4.2-5**：如图电路中N为含源线性电阻网络，当改变外接电阻R时，电路中各处电压和电流将随之改变。当i=1A时，u=8V；当i=2A时，u=10V。求当i=6A时，u等于多少？





提示：本题可利用替代定理求解。已知的是R变化时通过R的电流i的变化，故可用电流源替代R支路。

解：将R支路用电流源替代，如图b所示，那么相应u可看作是由网络内部所有独立源e_S和i_S共同作用的结果。由线性电路的叠加性，相应u可表示为

$$u = k_1 i_S + k_2 e_S$$

由于网络N内部独立源是不变的，故上式可写为：

$$u = k_1 i_S + e_S'$$

根据已知条件，代入上式，得

$$\begin{cases} 8 = k_1 \times 1 + e_S' \\ 10 = k_1 \times 2 + e_S' \end{cases}$$

求得：$k_1 = 2 \quad e_S' = 6$

所以，当 $i_S = i = 6A$ 时

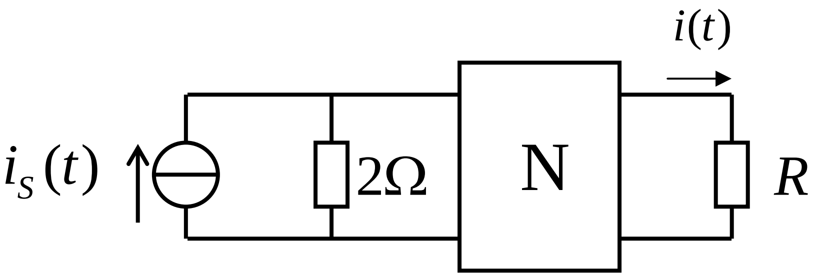
$$u = 2 \times 6 + 6 = 18V$$

例**4.2-6**：线性时不变电阻电路如图所示，N中含直流电源和电阻。已知：

（1）当$i_S(t)=2\cos 10t$ A，$R=2\Omega$ 时，电流$i(t)=(4\cos 10t+2)$ A；

（2）当$i_S(t)=4$ A，$R=4\Omega$ 时，电流 $i(t)=8$A。

试求：当$i_S(t)=5$ A，$R=10\Omega$ 时，电流i(t)为多少？



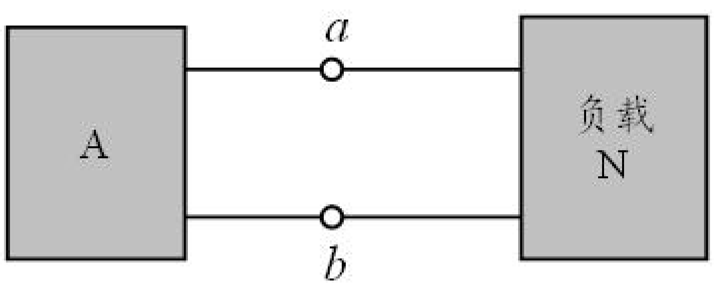
（提示：选择R两端电压u为响应，R支路用电流源替代，注意u = Ri。答案：6A）

4.3 戴维宁定理与诺顿定理

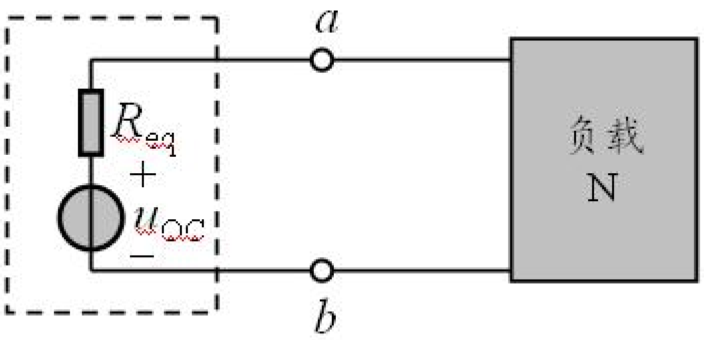
一、戴维宁定理（Thévenin's theorem）

1. 戴维宁定理表述：

一个含独立源、线性受控源、线性电阻的二端电路*A*，对其两个端子来说都可等效为一个理想电压源串联内阻的模型。其理想电压源的数值为有源二端电路*A*的两个端子间的开路电压u_{oc}，串联的内阻为*A*内部所有独立源置零(理想电压源短路，理想电流源开路)、受控源保留时两端子间的输入电阻（或等效电阻R_{eq}）。



(a)



(b)

图 4.3-1 戴维宁定理示意图

【证明】这里给出戴维宁定理的一般证明。图4.3-2(a)为线性有源一端口网络A与负载网络N相连，设负载上电流为i，电压为u。根据替代定理将负载用理想电流源i替代，如图4.3-2(b)所示。

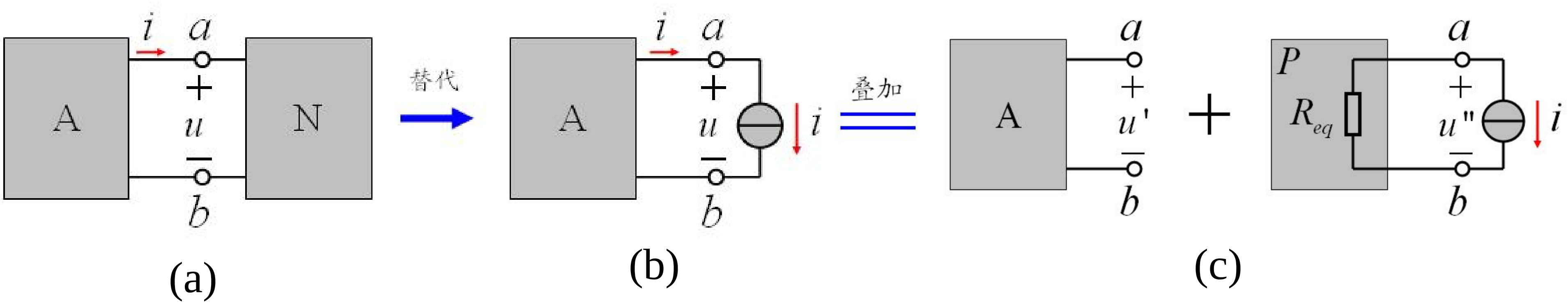


图 4.3-2 戴维宁定理证明用图

替代后不影响A中各处的电压和电流。由叠加定理u可以分为两部分，如图(c)所示，即：$u = u' + u''$ 其中 u'是A内所有独立源共同作用时在端口产生的开路电压，u'' 是仅由电流源i作用在端口产生的电压，即：$u' = u_{oc}$， $u'' = -R_{eq} i$

因此

$$u = u' + u'' = u_{OC} + R_{eq} i$$

上式表示的电路模型如图4.3-3所示。这就证明了戴维宁定理是正确的。

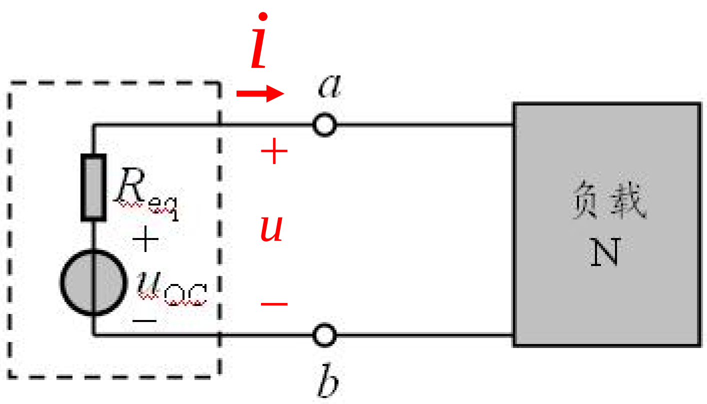


图 4.3-3 戴维宁等效源模型图

2. 应用戴维宁定理时要注意的问题：

1)含源一端口网络所接的外电路可以是任意的线性或非线性电路，外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变。

2)当含源一端口网络内部含有受控源时，控制支路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中（控制量可以是端口电压或电流）。

3)开路电压u_{oc}的计算：

戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压u_{oc}，电压源方向与所求开路电压方向有关。计算u_{oc}的方法视电路形式选择前面学过的任意方法，使易于计算。

4)等效电阻的计算：

等效电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后，所得无源一端口网络的输入电阻。常用下列三种方法计算：

①当网络内部不含有受控源时可采用电阻串、并联和△－ Y 互换的方法计算等效电阻；

②外加电源法（加电压求电流或加电流求电压）。如图 **4.3-4** 所示。

则 $R_{eq}=\dfrac{u}{i}$

③开路电压、短路电流法。即求得网络**A**端口间的开路电压后，将端口短路求得短路电流，如图**4.3-5**所示。

则：$R_{eq}=\dfrac{u_{OC}}{i_{SC}}$

以上方法中后两种方法更具有一般性。

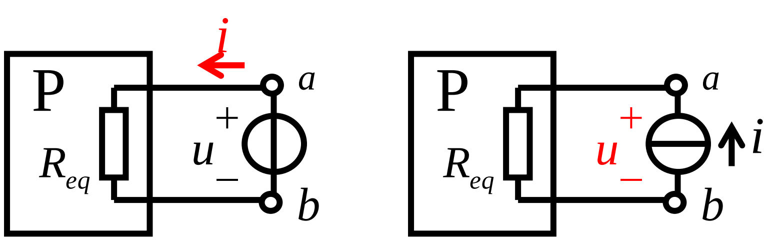


图4.3-4 用外加电源法求戴维宁等效电阻

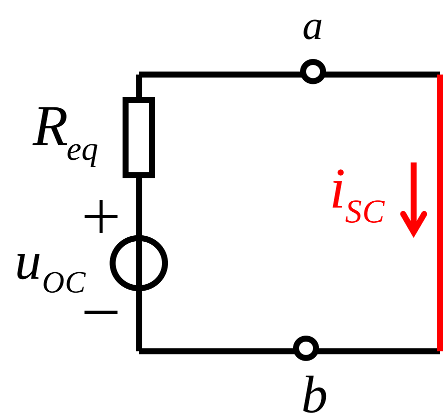


图 4.3-5 开路电压、短路电流和等效电阻的关系

5) 求戴维宁等效电路更一般的方法是：求该二端网络的**VCR**。直接得到等效电路（直接得到开路电压和等效电阻）。

例4.3-1 图4.3-10(a)所示电路，负载电阻R_L可以改变，求R_L=1Ω其上的电流i；若R_L改变为6Ω， 再求电流i。

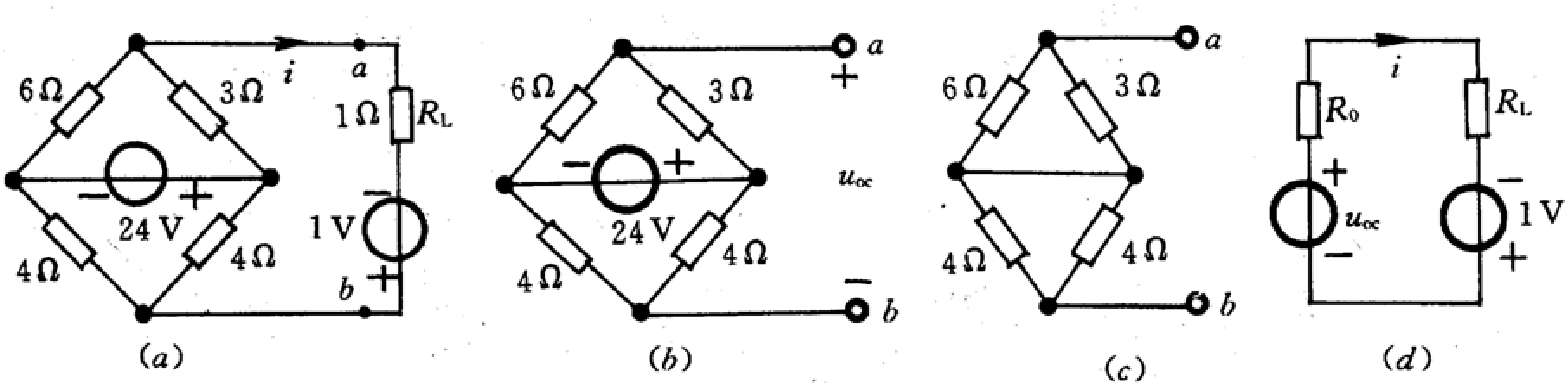


图 4.3-6 例4.3-1用图

解 (1)自a, b处断开待求支路(待求量所在的支路)，

(2)求开路电压u_{oc}。设u_{oc}参考方向如(b)图所示。由分压关系求得

$$u_{oc}=\frac{6}{6+3}\times 24-\frac{4}{4+4}\times 24=4V$$

(3) 求等效内阻R_{eq}。将(b)图中电压源短路，电路变为(c)图。应用电阻串并联等效，求得

$$R_{eq}=6//3+4//4=4\Omega$$

(4) 由求得的u_{oc}，R_{eq}画出等效电压源(戴维宁电源)，接上待求支路，如(d)图所示。注意画等效电压源时不要将u_{oc}的极性画错。若a端为所设开路电压u_{oc}参考方向的"+"极性端，则在画等效电压源时使正极向着a端。由(d)图求得

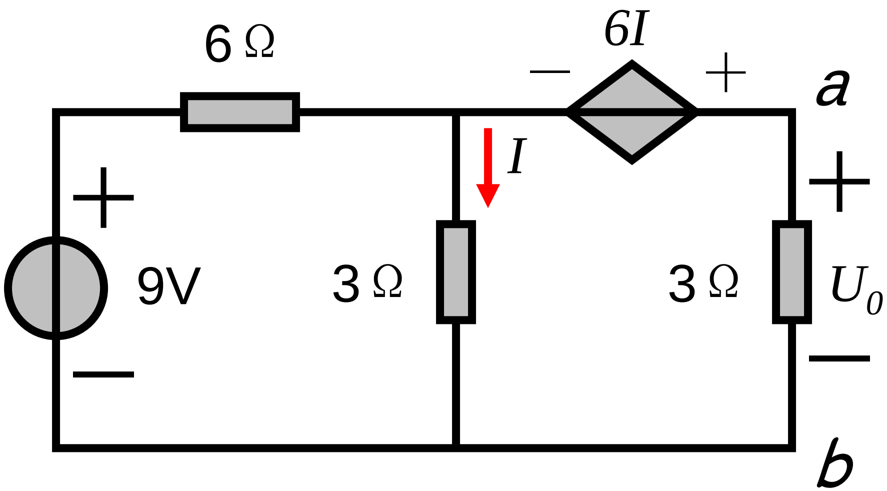
$$i=\frac{4+1}{4+1}=1A$$

由于R_L在二端电路之外，故当R_L改变为6Ω时，二端电路的u_{oc},R_{eq}均不变化，所以只需将图(d)中R_L由1Ω变为6Ω，从而可以非常方便地求得此时电流

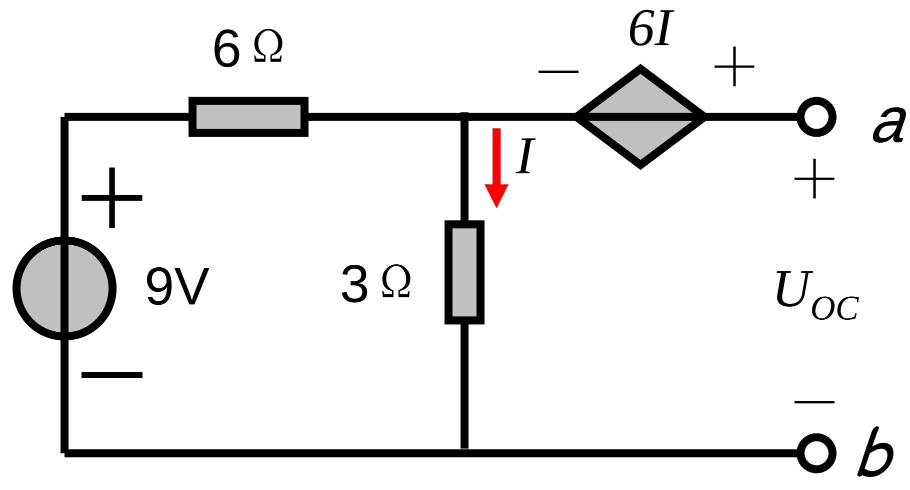
$$i=\frac{4+1}{4+6}=0.5A$$

求解本题时，若用网孔分析法，需列三个联立方程，再解出电流$\boldsymbol{i}$；用节点分析法，需先求$\boldsymbol{U}_{\mathbf{ab}}$，再算出$\boldsymbol{i}$。不论用上述的哪种方法，当1 Ω改换为其它电阻时，都需重新列出方程，重新求解。因此，在只需计算电路中某一支路电流时，常用本定理，该支路电阻如有变动，仍能很方便地算出新电流值。

例**4.3-2** 计算图示电路中的电压U_0。



(a)



(b)

解：应用戴维宁定理。

1)将待求之路点开：断开**3**Ω电阻支路，如图**(b)**所示，将其余一端口网络化为戴维宁等效电路：

2)求开路电压 U_{oc}

$$U_{OC}=6I+3I=9I=9\times9/9=9V$$

3)求等效电阻 *Req* ：

方法1：外加电压源如图(c)所示，求端口电压U和电流I_0的比值。注意此时电路中的独立电源要置零。

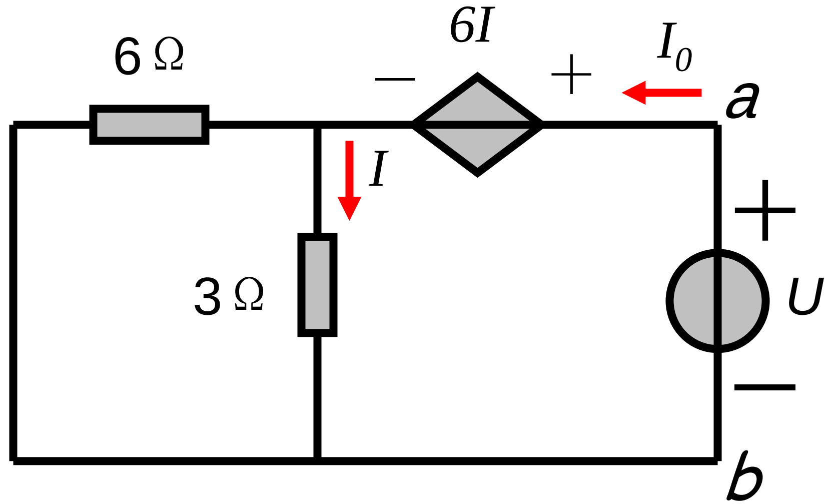
因为：

$$\begin{cases} U = 6I + 3I = 9I \\ I = \dfrac{2}{3} I_0 \end{cases}$$

$$U = 9 \times \frac{2}{3} I_0 = 6 I_0$$

所以

$$R_{eq} = \frac{U}{I_0} = 6\Omega$$



(c)

方法2：求开路电压和短路电流的比值。

把电路端口短路如图(d)所示。注意此时电路中的独立电源要保留。对图(d)电路右边的网孔l_1应用KVL，有：

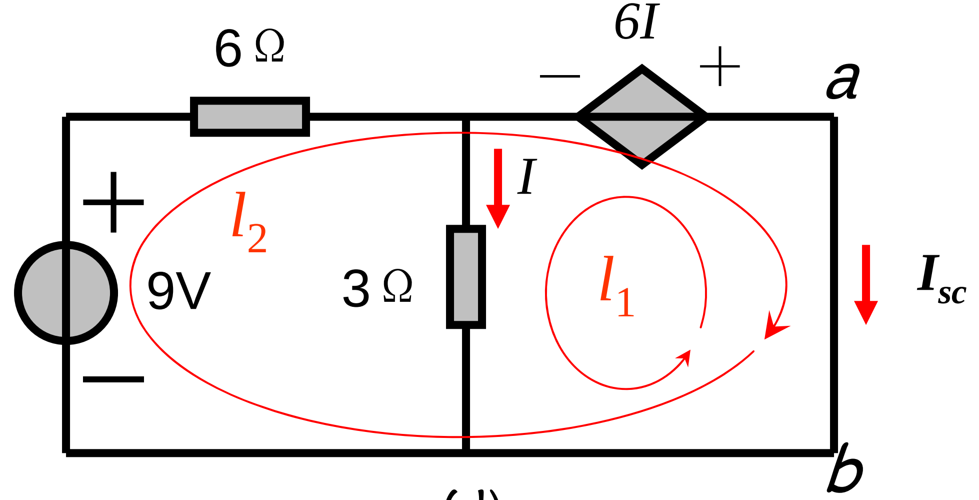
$$6I + 3I = 0$$

所以，I=0 。

对回路l_2应用KVL，　$6I_{SC} = 9$

则　$I_{sc} = \frac{9}{6} = 1.5A$

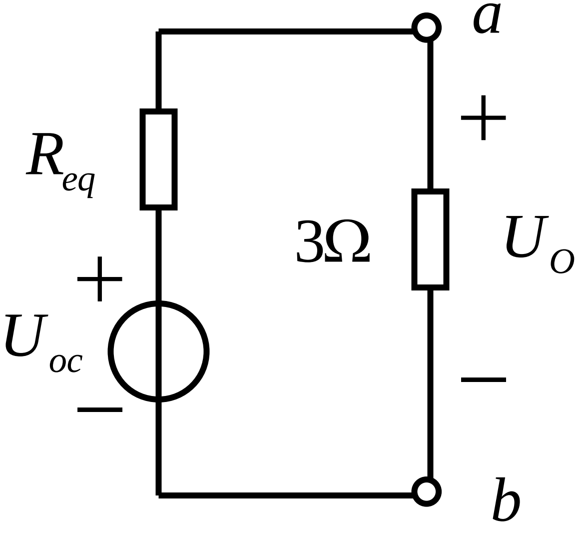
$$R_{eq} = \frac{U_{OC}}{I_{SC}} = \frac{9}{1.5} = 6\Omega$$



(d)

4) 画出等效电路，如图(e)所示，解得：

$$U_O = \frac{9}{R_{eq}+3} = \frac{9}{6+3} = 1V$$



(e)

注意：计算含受控源电路的等效电阻是用外加电源法还是开路、短路法，要具体问题具体分析，以计算简便为好。

例 4.3-3 对图4.3-7(a)所示电路，求负载电阻R_L上消耗的功率p_L。

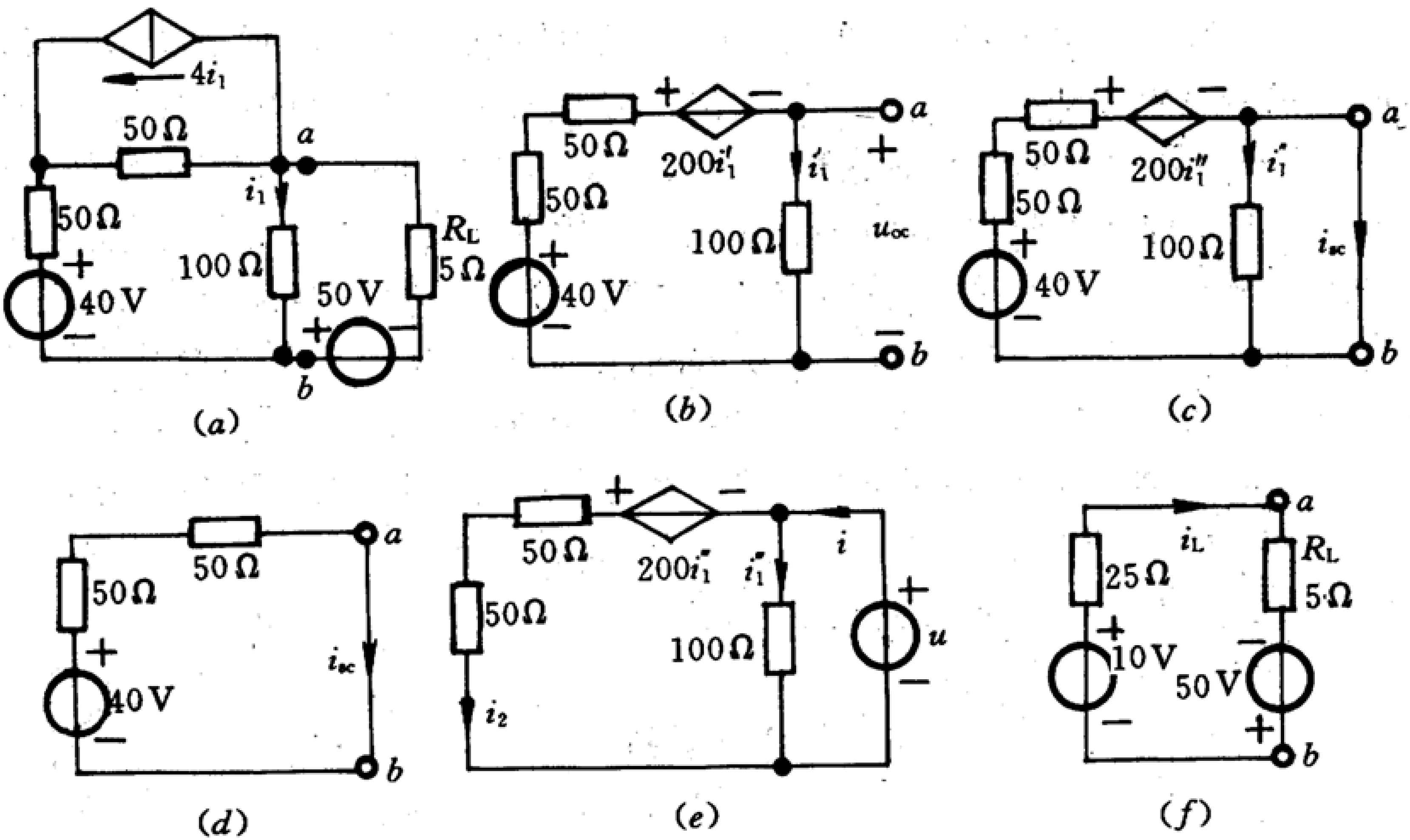


图 4.3-7 例4.3-3用图

解 应用戴维宁定理。断开电阻R_L所在支路，如图(b)所示，将其余一端口网络化为戴维宁等效电路。注意在图(b)中已经应用电源等效变换。

(1) 求u_{oc}：

由 KVL 得 $$100i'_1+200i'_1+100i'_1=40$$

所以 $i'_1=0.1A$, $$u_{oc}=100i'_1=100\times0.1=10V$$

(2) 求R_{eq}：用开路电压、短路电流法。

端口短路，电路如图(c)所示，短路电流为：

$$i''_1=0$$

$$200i''_1=0$$

$$isc=\frac{40}{100}=0.4A$$

因此 $$R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=\frac{10}{0.4}=25\Omega$$

再用外加电源法求R_{eq}。

$$i_1''' = \frac{u}{100}$$

$$i_2 = \frac{u + 200 i_1'''}{100}$$

$$i_2 = \frac{u + 200\dfrac{u}{100}}{100} = \frac{3}{100}u$$

$$i = i_1''' + i_2 = \frac{u}{100} + \frac{3}{100}u = \frac{1}{25}u$$

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 25\Omega$$

(3) 画出戴维宁等效源，接上待求支路，如(*f*)图。

由图可得

$$i_L = \frac{u_{oc} + 50}{R_{eq} + R_L} = \frac{10 + 50}{25 + 5} = 2A$$

所以负载R_L上消耗的功率

$$p_L = R_L i_L^2 = 5 \times 2^2 = 20W$$

二、 诺顿定理(Norton's Theorem)

诺顿定理可表述为：一个含独立电源、线性受控源和线性电阻的二端电路**A**，对两个端子来说都可等效为一个理想电流源并联内阻的模型。其理想电流源的数值为有源二端电路**A**的两个端子短路时其上的电流$\boldsymbol{i}_{\mathbf{sc}}$，并联的内阻等于**A**内部所有独立源置零时电路两端子间的等效电阻。

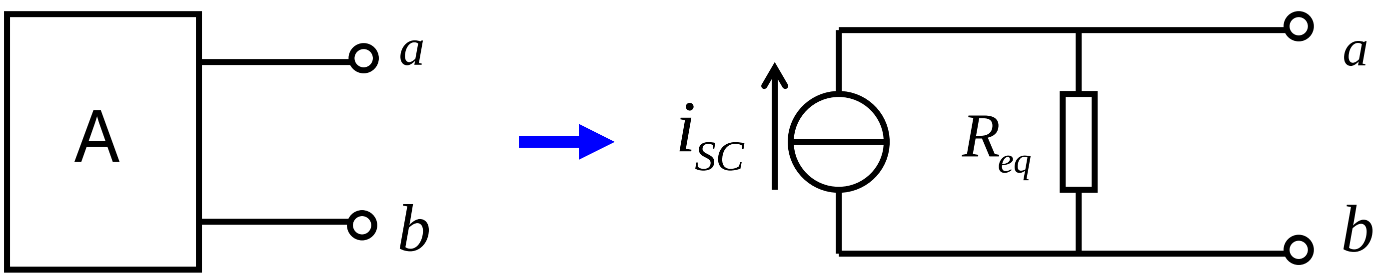
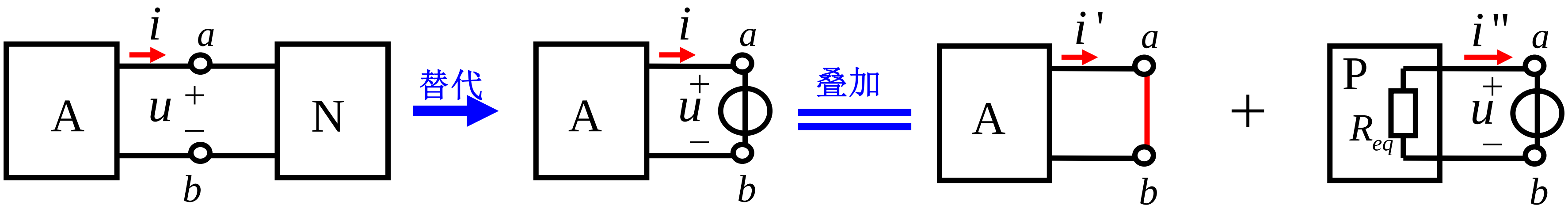


图 4.3-8 诺顿等效电路

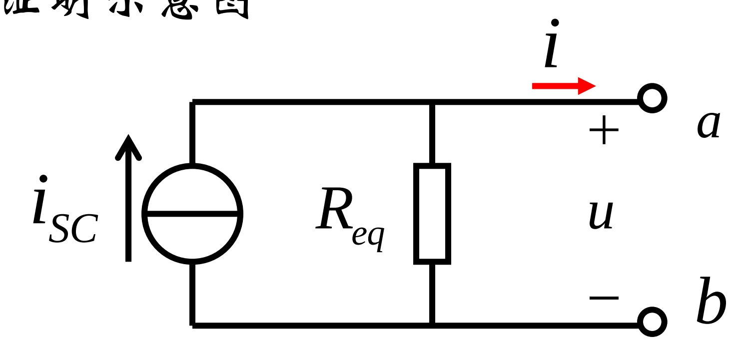
诺顿等效电路可由戴维宁等效电路经电源等效变换得到。也可采用与戴维宁定理类似的方法证明。

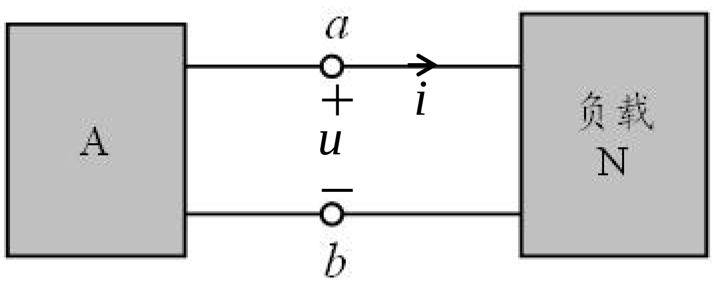


(a) (b) (c)

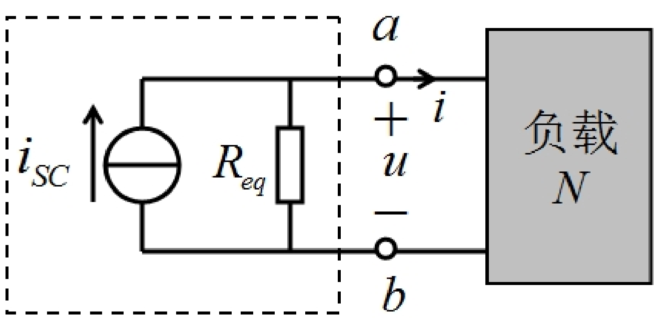
图 4.3-9 诺顿定理证明示意图

$$i = i' + i'' = i_{SC} - \frac{u}{R_{eq}}$$





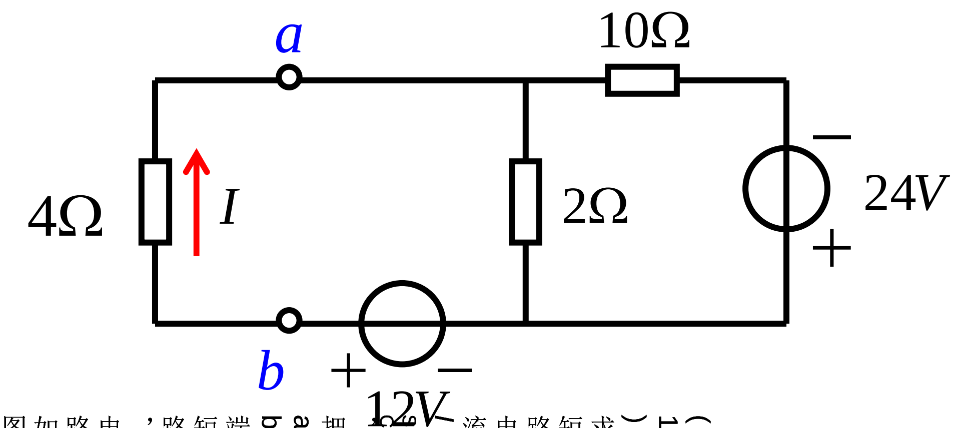
(a)



(b)

图 4.3-10 诺顿定理应用示意图

例4.3-4　应用诺顿定理求图示电路中的电流 I。



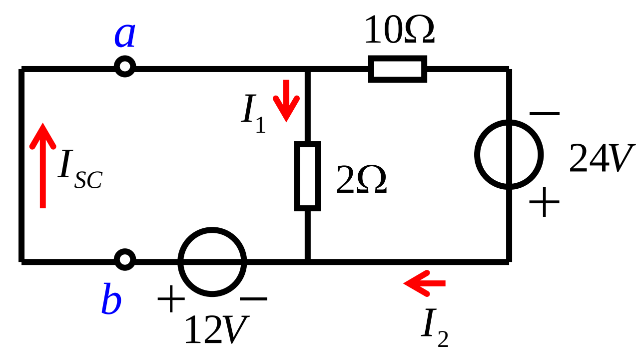
：得解：示所）b（图如路电，路短端ba把 流电路短求）1（

解：

(1) 求短路电流I_{SC}，把ab端短路，电路如图(b)所示，解得：

$$I_1 = \frac{12}{2} = 6A$$

$$I_2 = \frac{24+12}{10} = 3.6A$$



(b)

所以

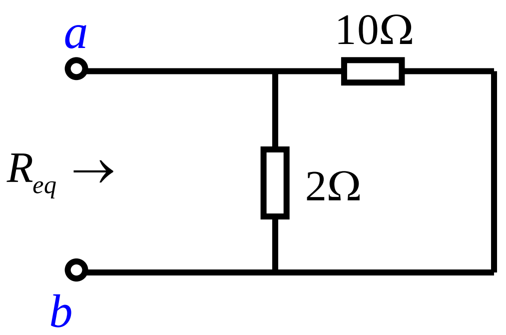
$$I_{SC} = I_1 + I_2 = 9.6A$$

(2) 求等效电阻R_{eq}，把独立电源置零，电路如图(c)所示。解得：

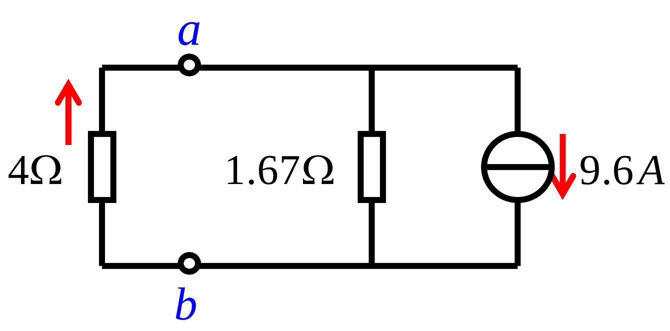
$$R_{eq} = 10//2 = 1.67\Omega$$

(3) 画出诺顿等效电路，接上待求支路如图(d)所示，应用分流公式得：

$$I = \frac{9.6 \times 1.67}{4 + 1.67} = 2.83A$$



(c)



(d)

注意：诺顿等效电路中电流源的方向。

例 **4.3-5** 对图4.3-9(a)所示电路，求电压u。

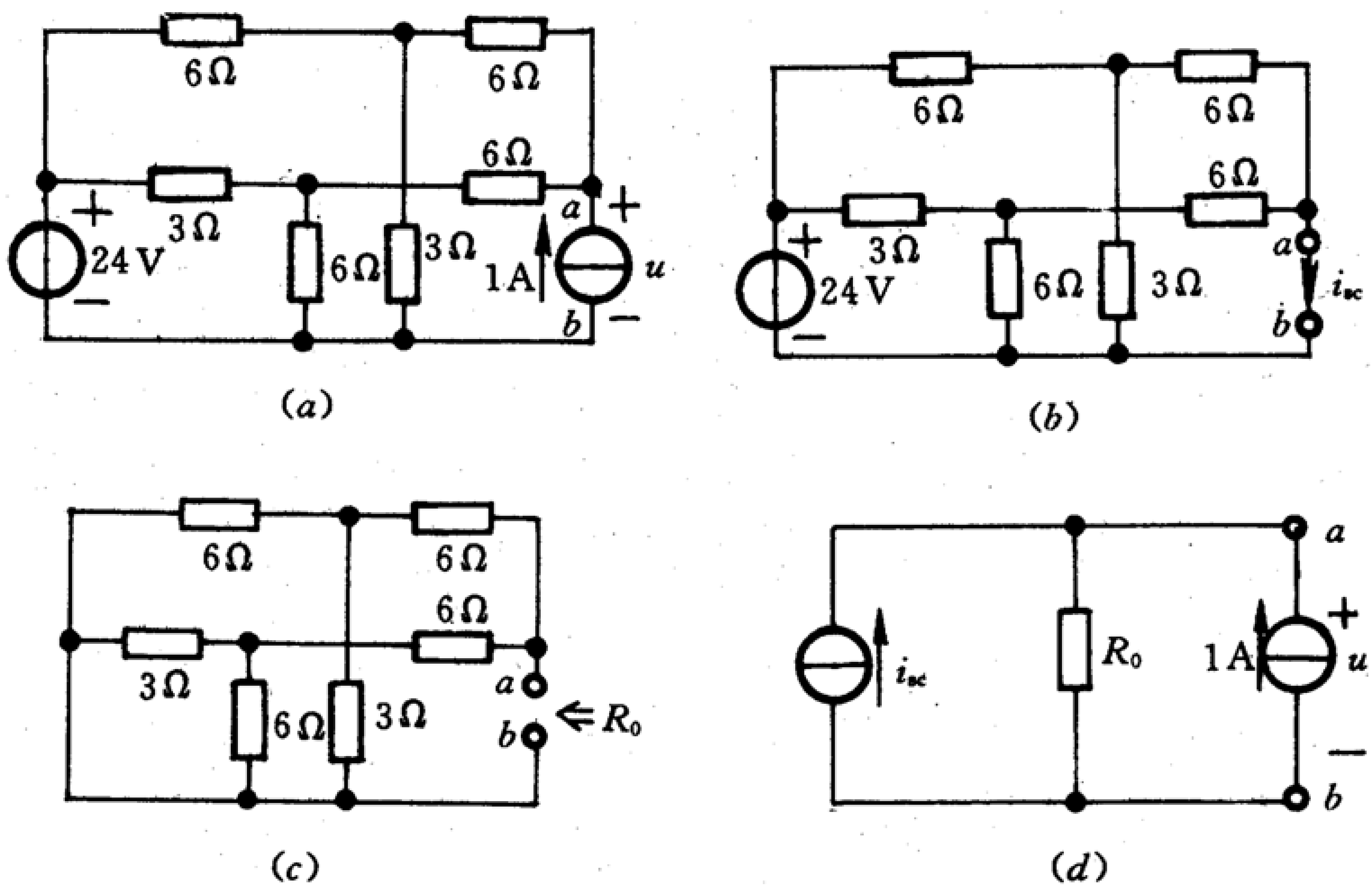


图 4.3-9

解本题用诺顿定理求比较方便。因a、b处的短路电流比开路电压容易求。

(1) 求短路电流i_{sc}。自a, b断开电流源，再将a, b短路，设i_{sc}参考方向如(b)图所示。由电阻串并联等效、分流关系及KCL可求得

$$i_{sc}=\frac{24}{6//6+3}\times\frac{6}{6+6}+\frac{24}{3//6+6}\times\frac{3}{3+6}=3A$$

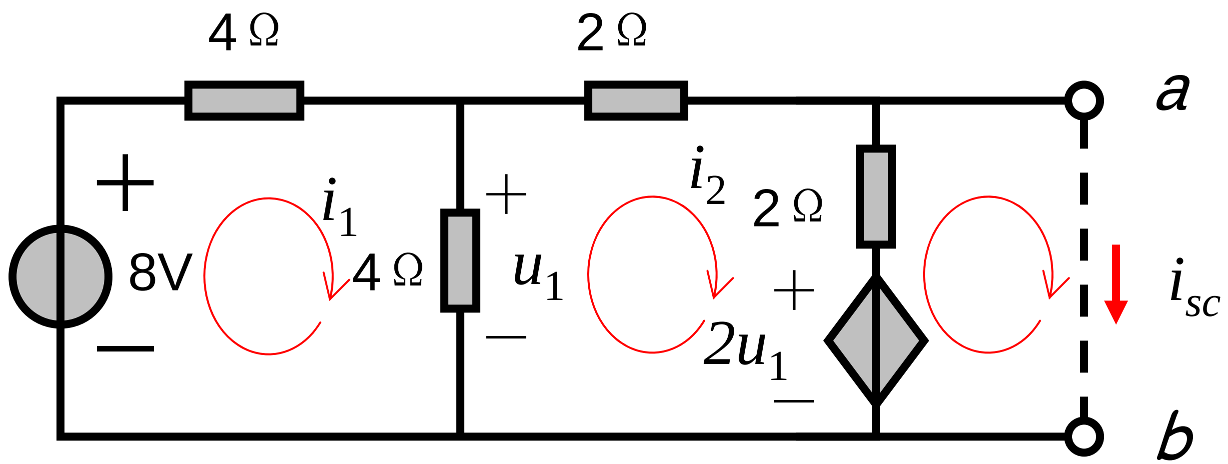
(2) 求等效内阻R_{eq}。把独立电源置零，电路如图(c)所示，为简单并联电路。

$$R_{eq}=[6//3+6]//[3//6+6]=4\Omega$$

(3) 画出诺顿等效电源，接上待求支路如图(d)所示，得：

$$u=(3+1)\times 4=16V$$

例 4.3-6 求如图二端网络的诺顿等效电路。



解： (1) 求短路电流。列网孔方程如下

$$8i_1 - 4i_2 = 8$$

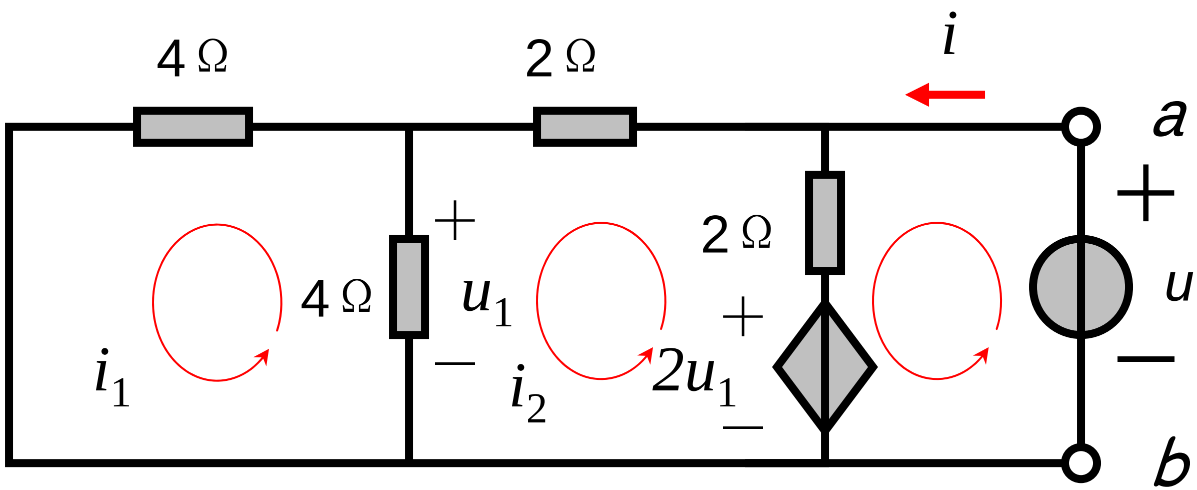
$$-4i_1 + 8i_2 - 2i_{sc} = -2u_1$$

$$-2i_2 + 2i_{sc} = 2u_1$$

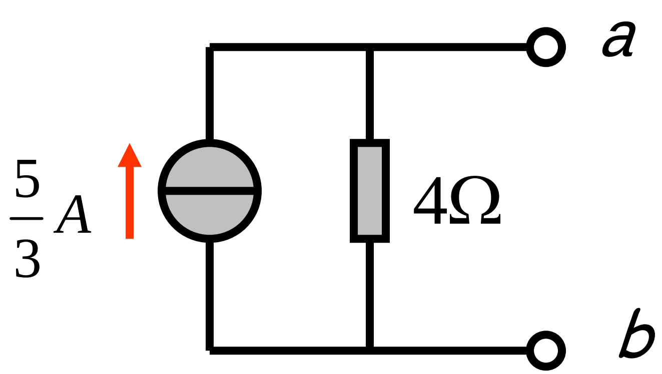
$$u_1 = 4(i_1 - i_2) \qquad \text{（辅助方程）}$$

解出， $i_{sc} = \dfrac{5}{3}A$

(2) 求等效电阻。将电压源置零，在端口a、b之间施加电压源u，列方程计算端口电流i。



$$8i_1 - 4i_2 = 0$$
$$-4i_1 + 8i_2 - 2i = 2u_1$$
$$-2i_2 + 2i = u - 2u_1$$
$$u_1 = 4(i_2 - i_1)$$



解得， $R_{eq} = \dfrac{u}{i} = 4\Omega$

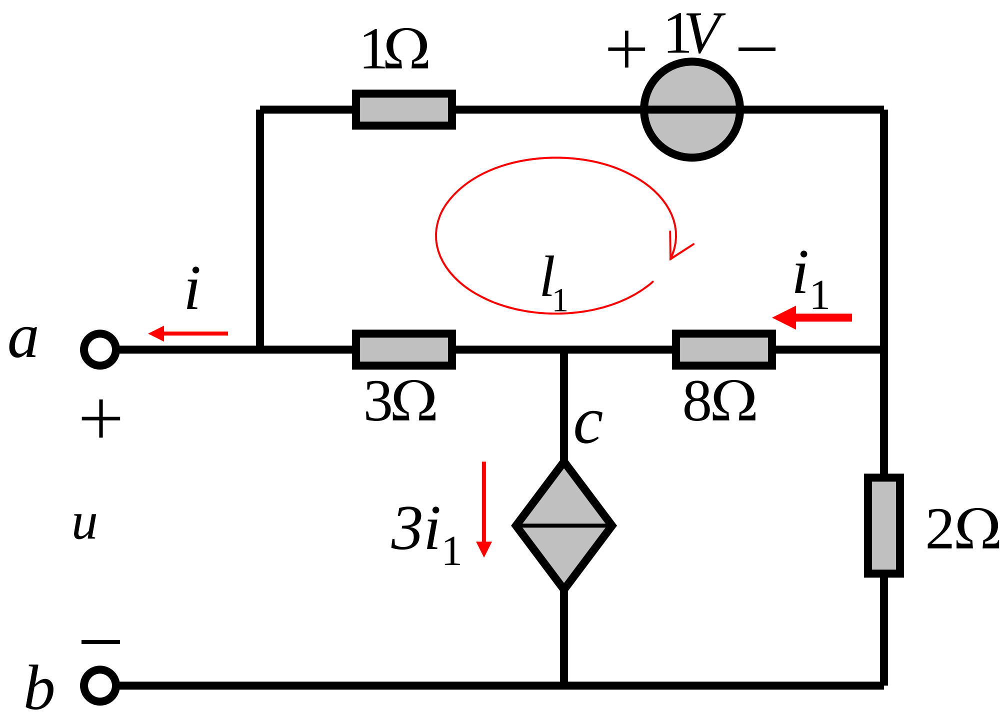
应用戴维宁、诺顿定理时需要注意的是：

（**1**）并非任何含源线性电阻单口网络都能找到戴维宁等效电路或诺顿等效电路。

（**2**）当含源一端口网络**A**的等效电阻 $R_{eq}=0$ 时，该网络只有戴维宁等效电路（为一电压源），无诺顿等效电路。

（**3**）当含源一端口网络**A**的等效电阻 $R_{eq}\to\infty$ 时，该网络只有诺顿等效电路（为一电流源），无戴维宁等效电路。

例 4.3-7 电路如图所示求端口a-b的最简等效电路。



解：端口开路时，对节点c应用KCL，流经3Ω电阻电流为

$$i_{ac} = 3i_1 - i_1 = 2i_1$$

对回l_1应用KVL，有 $8i_1 - (3+1)i_{ac} = -1$

将 $i_{ac} = 2i_1$ 带入上式，等号左边为零，该式无解。说明端口不能开路因而网络不存在戴维宁等效电路

现求网络的伏安特性。流经1Ω电阻的电流

$$i_{ea} = i + i_{ac} = i + 2i_1$$

对回l_1应用KVL，有

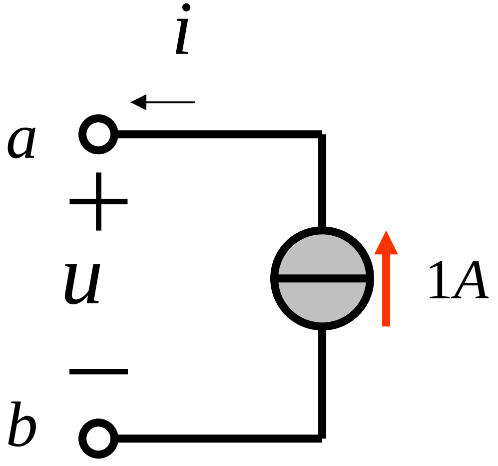
$$1 \times i_{ea} + 3i_{ac} = 1 + 8i_1$$

将i_{ea}和i_{ac}的表达式代入上式，有

$$i + 2i_1 + 6i_1 = 1 + 8i_1$$

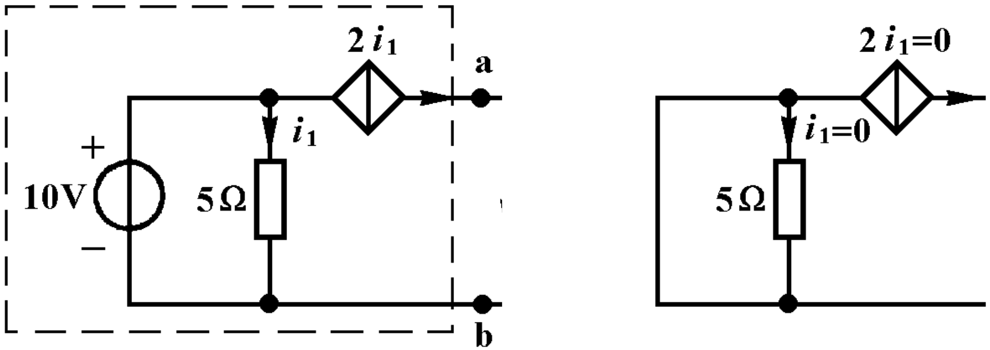
即

$$i = 1A$$



该式说明a-b端口的等效电路为1A的电流源，如图b所示。

例 **4.3-8** 求图**(a)**所示单口的戴维南-诺顿等效电路。



(a) (b) (c)

解：求$\boldsymbol{i}_{sc}$,将单口网络短路，并设$\boldsymbol{i}_{sc}$的参考方向。

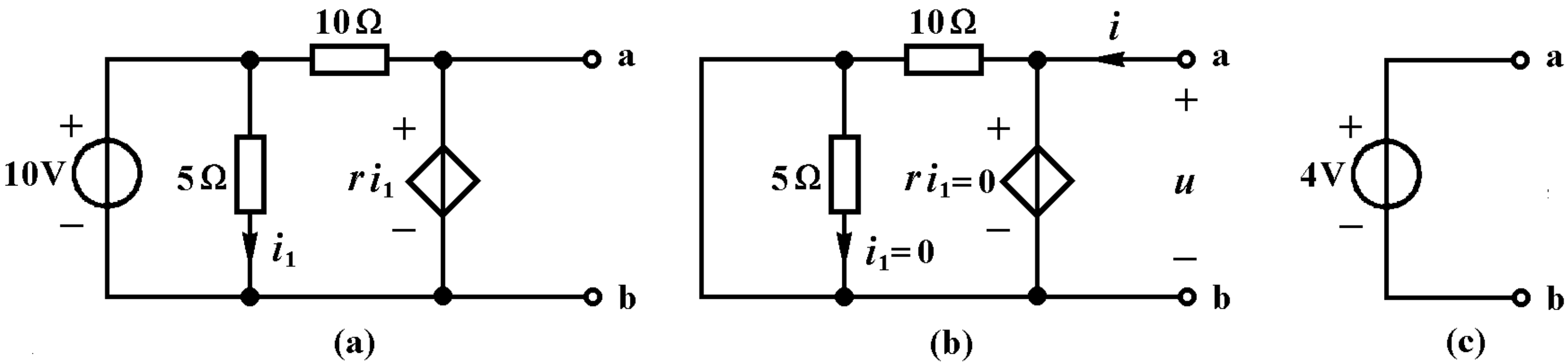
$$i_1 = \frac{10\text{V}}{5\Omega} = 2\text{A} \qquad 得 \qquad i_{\text{SC}} = 2i_1 = 4\text{A}$$

求$\boldsymbol{R}_o$，在端口外加电压源$\boldsymbol{u}$，图**(b)** $\boldsymbol{i_1 = 0}$

$$i = -2i_1 = 0 \qquad 得 \qquad R_o = \frac{1}{G_o} = \infty$$

可知，该单口等效为一个**4A**电流源，图**(c)**。该单口求不出确定的$\boldsymbol{u}_{oc}$，它不存在戴维南等效电路。

例 4.3-8 已知r =2Ω，试求该单口的戴维南等效电路。



解：标出u_{oc}的参考方向。先求受控源控制变量i_1

$$i_1=\frac{10\text{V}}{5\Omega}=2\text{A} \qquad u_{\text{oc}}=ri_1=2\Omega\times 2\text{A}=4\text{V}$$

将10V电压源短路，保留受控源，得图(b) 。由于5Ω电阻被短路，其电流i_1=0，u=(2Ω)i_1=0

$$R_{\text{o}}=\frac{u}{i}=\frac{0}{i}=0$$

该单口无诺顿等效电路。

4.4 最大功率传输原理 (Maximum Power Transfer)

一个含独立源线性一端口电路，当所接负载不同时，一端口电路传输给负载的功率就不同。讨论负载为何值时能从电路获取最大功率，及最大功率的值是多少的问题就是最大功率传输定理所要表述的。

计算最大功率问题结合应用戴维宁定理或诺顿定理最方便。将含源一端口电路等效成戴维宁电源模型，如图**4.4-1**所示。

图 4.4-1 等效电压源接负载电路

由图可知

$$i = \frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_L}$$

电源传给负载 R_L 的功率为

$$p_L = R_L i^2 = R_L \left(\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_L} \right)^2$$

为了找p_L的极值点，令$dp_L/dR_L=0$， 即

$$\frac{dp_L}{dR_L} = u_{oc}^2 \frac{(R_L + R_{eq})^2 - 2R_L(R_L + R_{eq})}{(R_L + R_{eq})^4} = 0$$

解上式得：

$$R_L = R_{eq} \qquad (4.4\text{-}1)$$

结论：有源线性一端口电路传输给负载的最大功率条件是：负载电阻R_L等于一端口电路的等效内阻。通常称这一条件为最大功率匹配条件。将这一条件代入功率表达式中，得负载获取的最大功率为：

$$p_{L\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} \qquad (4.4\text{-}2)$$

若含源一端口电路等效成诺顿电源模型，可得匹配时负载获得最大功率为：

$$p_{L\max} = \frac{1}{4} R_{eq} i_{sc}^2 \qquad (4.4\text{-}3)$$

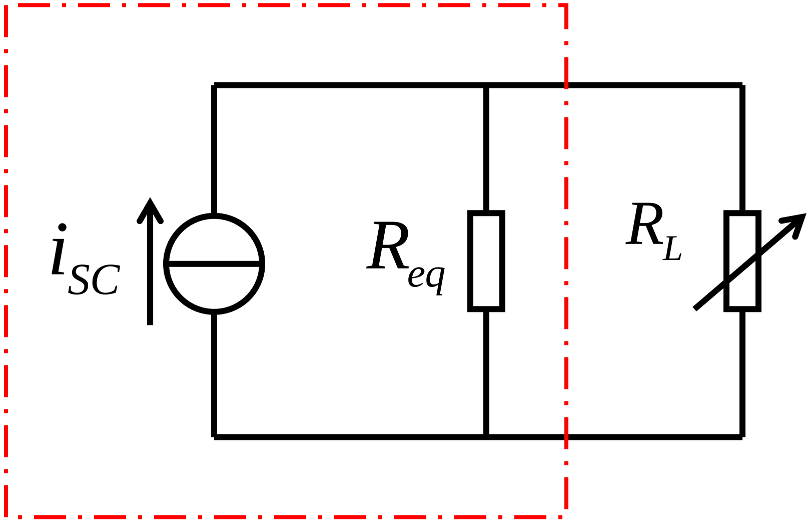


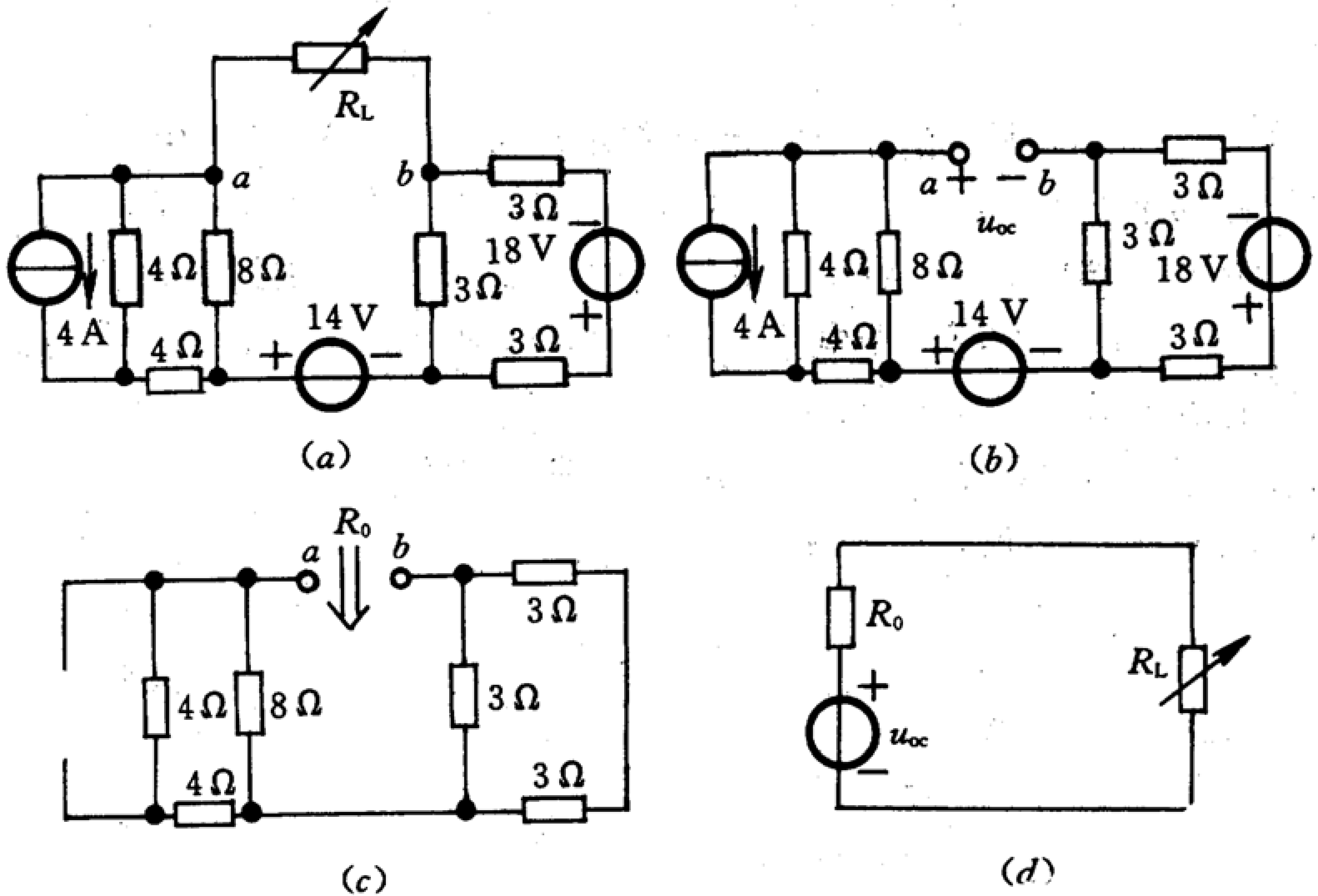
图 4.4-2 等效电流源接负载电路

例 4.4-1 如图4.4-3所示电路，若负载R_L可以任意改变，问负载为何值时其上获得的功率为最大？并求出此时负载上得到的最大功率p_{Lmax}。

解

(1) 求u_{oc}。从a,b断开R_L，设u_{oc}如(b)图所示。在(b)图中，应用电阻并联分流公式、欧姆定律及KVL求得

$$u_{oc}=-(\frac{4}{4+4+8}\times 4)\times 8+14+\frac{3}{3+3+3}\times 18=12V$$



R_L
a
b
3 Ω
18 V
4 Ω
8 Ω
3 Ω
4 A
4 Ω
14 V
3 Ω
(a)
a
b
u_{oc}
3 Ω
3 Ω
18 V
4 Ω
8 Ω
4 A
4 Ω
14 V
3 Ω
(b)
R_0
a
b
3 Ω
4 Ω
8 Ω
3 Ω
4 Ω
3 Ω
(c)
R_0
R_L
u_{oc}
(d)

图 4.4-3 例4.4-1用图

(2) 求R_{eq}。令(*b*)图中各独立源为零，如(*c*)图所示，可求得

$$R_{eq}=(4+4)//8+3//(3+3)=6\Omega$$

(3) 画出戴维宁等效源，接上待求支路R_L，如(*d*)图所示。由最大功率传输定理知，当

$$R_L=R_{eq}=6\Omega$$

时其上获得最大功率。此时负载R_L上所获得的最大功率为

$$p_{L\max}=\frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}=\frac{12^2}{4\times 6}=6W$$

例4.4-2 如图4.4-4(a)所示电路，含有一个电压控制的电流源，负载电阻R_L可任意改变。问R_L为何值时其上获得最大功率？并求出该最大功率p_{Lmax}。

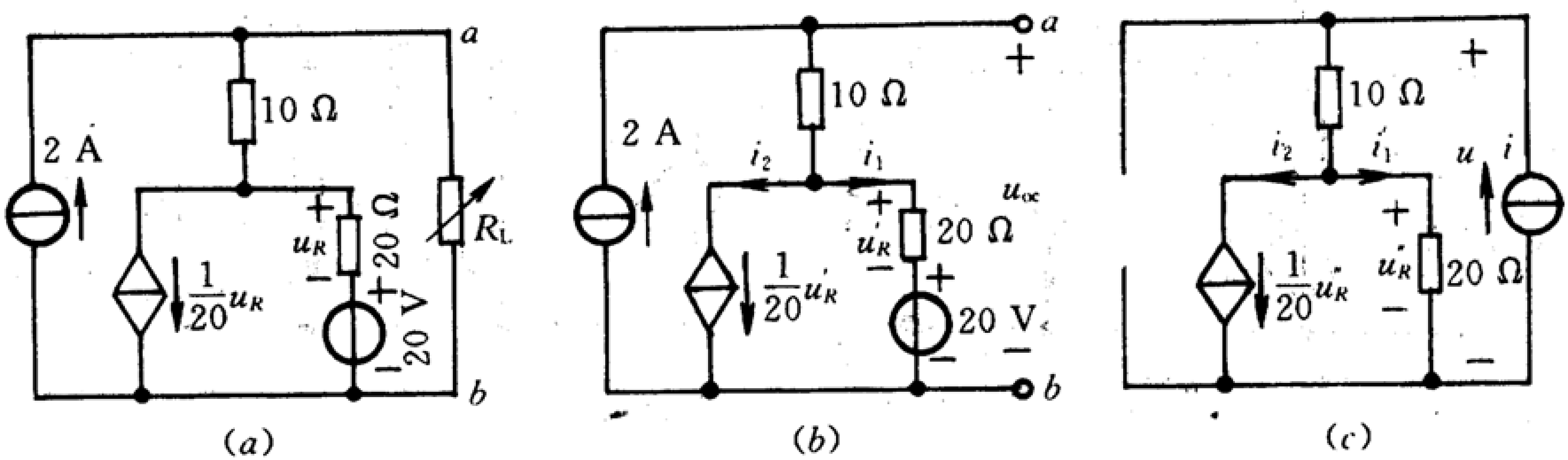
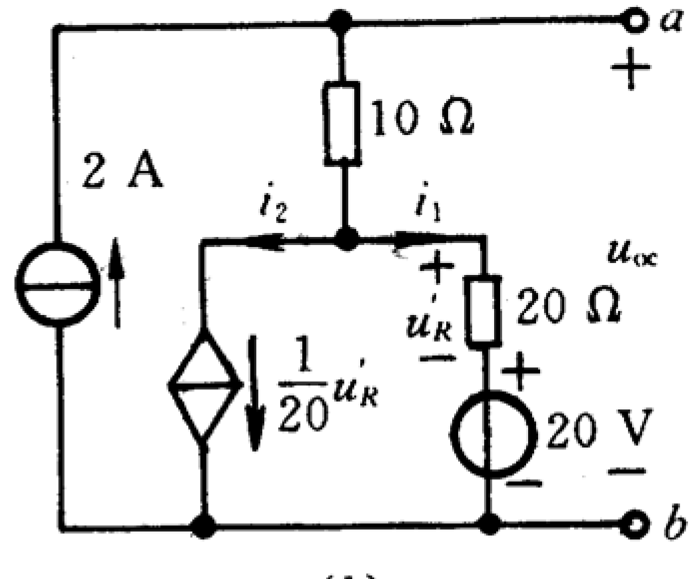


图 4.4-4 例4.4-2用图

解　应用戴维宁定理。自a, b断开R_L， 如(b)图所示。

(1) 求u_{oc}。在(b)图中设电流i_1, i_2。



(b)

因为　$i_1 = \frac{u_R'}{20}$,　$i_2 = \frac{u_R'}{20}$

又由KCL得　$i_1 + i_2 = 2$

所以　$i_1 = i_2 = 1A$

$$u_{oc} = 2\times10 + 20i_1 + 20 = 20 + 20\times1 + 20 = 60V$$

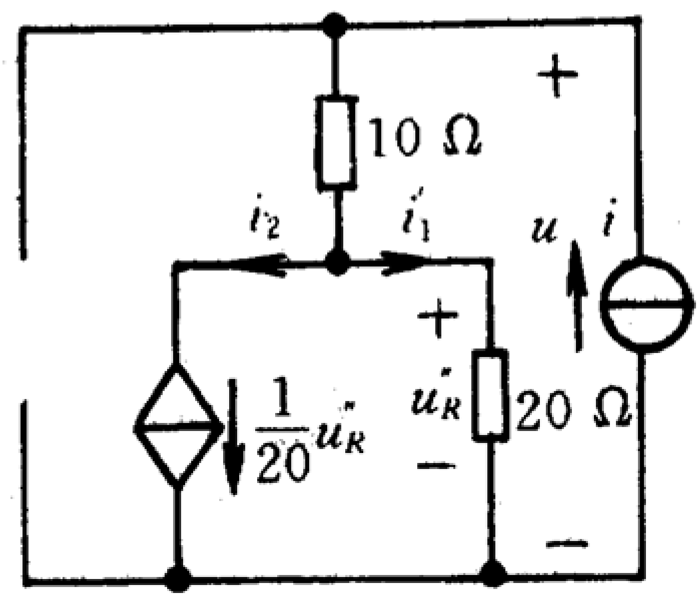
(2) 求R_{eq}。令(b)图中独立源为零，受控源保留，并在a，b端加电流源i 如(c)图所示。有关电流电压参考方向标示在图上。类同(b)图中求i_1，i_2，由(c)图可知

$$i_1' = i_2' = \frac{1}{2} i$$

$$u = 10i + 20 \times \frac{1}{2} i = 20i$$

所以

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 20\Omega$$



(c)

(3) 由最大功率传输定理可知

$$R_L = R_{eq} = 20\Omega$$

时，其上可获得最大功率。此时负载R_L上获得的最大功率为

$$p_{L\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4\times 20} = 45W$$

例 4.4-3 如图4.4-5(*a*)所示电路，负载电阻R_L可任意改变，问R_L=? 时其上获最大功率，并求出该最大功率$p_{L\max}$。

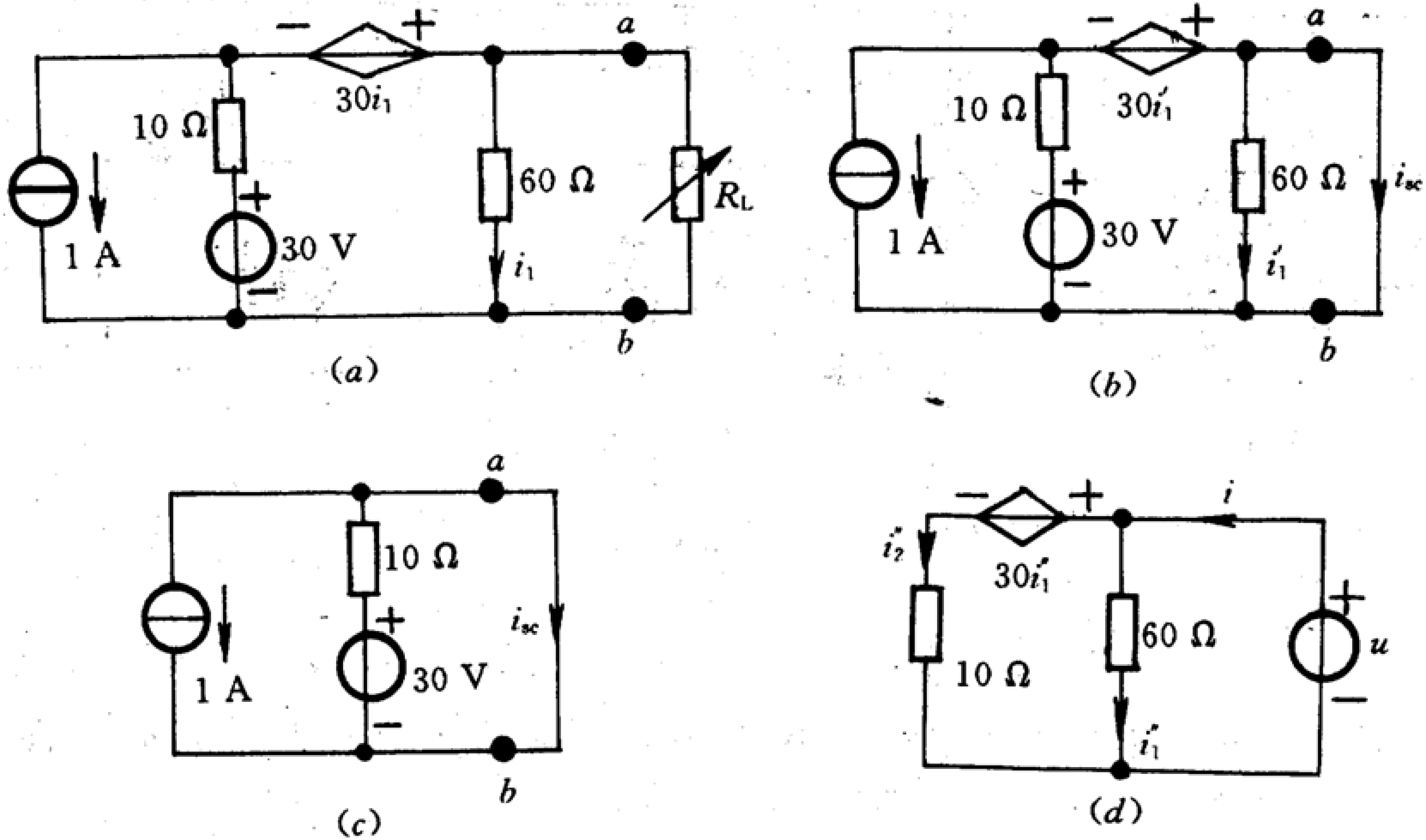
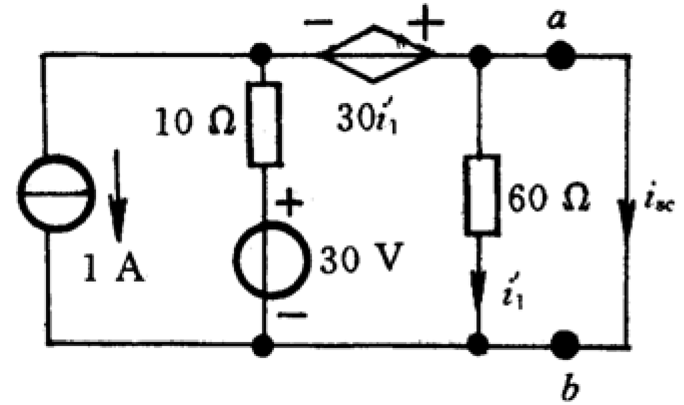


图 4.4-5 例4.4-3用图

解

(1) 求i_{sc}。自a, b断开R_L，将其短路并设i_{sc}如(b)图。由(b)图， 显然可知 $i_1'=0$ ，则 $30i_1'=0$ 即受控电压源等于零，视为短路，如(c)图所示。应用叠加定理，得

$$i_{sc}=\frac{30}{10}-1=2A$$



(b)

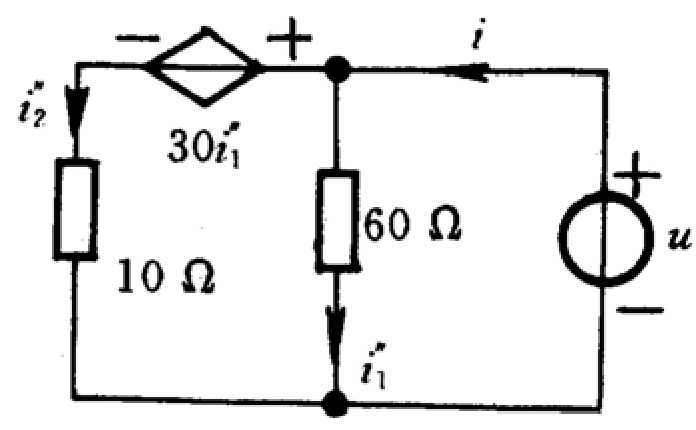
(2) 求R_{eq}。令(*b*)图中独立源为零、受控源保留，*a*, *b*端子打开并加电压源*u*，设 i_1''、i_2'' 及*i* 如(*d*)图所示。由(*d*)图，应用欧姆定律、KVL、KCL可求得

$$i_1''=\frac{1}{60}u$$

$$i_2''=\frac{u-30i_1''}{10}=\frac{u-30\times\frac{1}{60}u}{10}=\frac{1}{20}u$$

$$i=i_1''+i_2''=\frac{1}{60}u+\frac{1}{20}u=\frac{4}{60}u$$

$$R_{eq}=\frac{u}{i}=15\Omega$$



(*d*)

(3) 由最大功率传输定理可知

$$R_L = R_{eq} = 15\Omega$$

时，其上可获得最大功率。 此时负载R_L上获得的最大功率为

$$p_{L\max} = \frac{1}{4} R_{eq} i_{sc}^2 = \frac{1}{4} \times 15 \times 2^2 = 15W$$

最后，需要说明两点容易混淆的概念：

1）最大功率传输定理用于一端口电路给定，负载电阻可调的情况。如果R_s可变而R_L固定，则应使R_s尽量减小，才能使R_L获得得功率增大，当$R_s=0$时，R_L获得最大功率。

2）一端口等效电阻消耗的功率一般并不等于端口内部消耗的功率，因此当负载获取最大功率时,电路的传输效率并不一定是50%；

4.5 特勒根定理 （Tellegen's theorem）

1. 特勒根定理1—功率守恒

特勒根定理**1**表述为：对于一个具有n个结点和b条支路的集总电路，任何时刻，在各支路电流i_k和电压u_k取关联参考方向下，各支路电压与支路电流的乘积的代数和恒等于零。此定理可用下式表示为：

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0 \qquad (4.5\text{-}1)$$

或同一电路的2个不同时刻

2. 特勒根定理2—拟功率守恒

特勒根定理**2**表述为：对于两个具有***n***个结点和***b***条支路的集总电路***N*** 和 $\hat{N}$ ，当它们具有相同的拓扑图，但对应的支路的组成和参数不同，任何时刻，在两个电路的支路电流和电压u_k与i_k之间、$\hat{u}_k$ 与 $\hat{i}_k$ 之间分别取关联参考方向下，两电路中相对应的支路电压与支路电流的乘积的代数和恒等于零。可用下式表示为，

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 & (4.5\text{-}2a) \\ \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 & (4.5\text{-}2b) \end{cases}$$

此定理中所谓相同的拓扑图是指两电路具有相同的结构。

应用特勒根定理要注意的问题：

1)定理的正确性与元件的特征全然无关，因此特勒根定理对任何线性、非线性、时不变、时变元件的集总电路都适用。定理实质上是功率守恒的数学表达。

2)电路中的支路电压必须满足**KVL**，支路电流必须满足 **KCL**，支路电压和支路电流必须满足关联参考方向（否则公式中加负号）。

特勒根定理、**KCL**、**KVL**是电路的基本定律，三者之间，用任何两个可推出另一个。

4.6 互易二端口和互易定理

多端网络

端口的概念

二端口

一、互易二端口(互易网络)

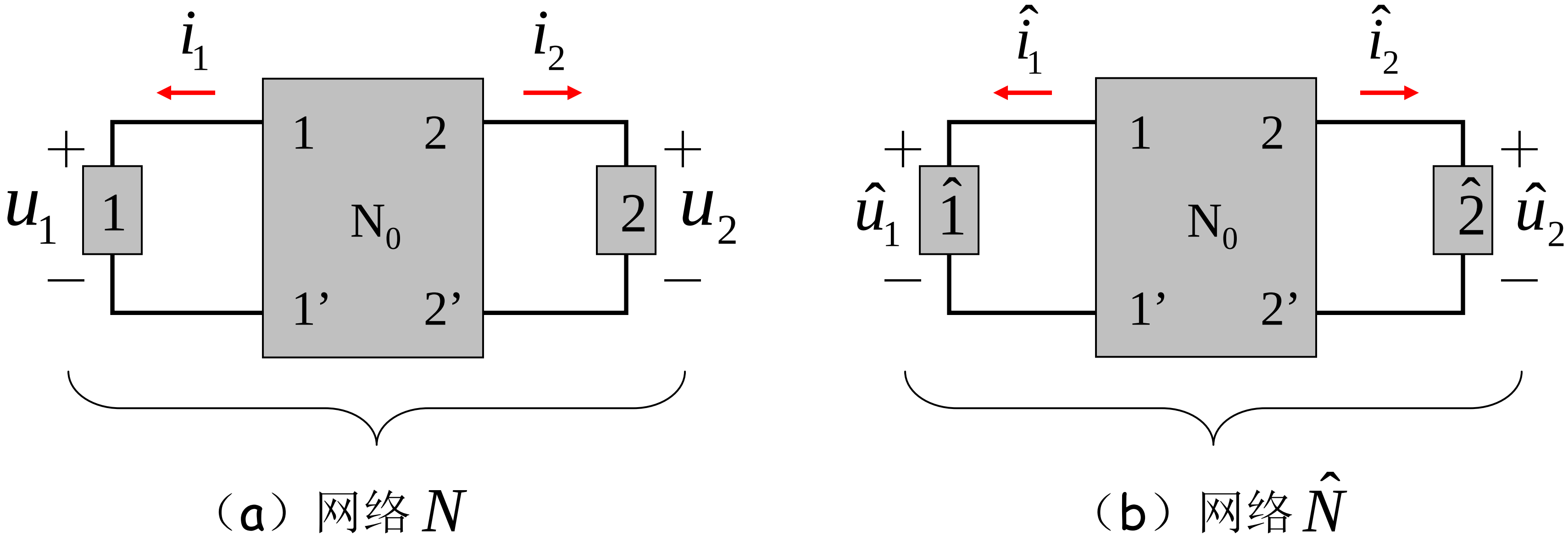


图4.6-1 互易网络N_0

互易二端口网络定义：对图4.6-1中由一个二端口N_0组成的两个网络N和$\hat{N}$，支路1、支路2具有不同的伏安关系。根据特勒根定理，有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \quad \text{或} \quad u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \quad \text{或} \quad \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \end{cases} \qquad (4.6\text{-}1)$$

若网络N_0满足

$$\sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k = \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k \qquad (4.6\text{-}2)$$

则有

$$\boxed{u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2} \qquad (4.6\text{-}3)$$

满足(4.5-3)式关系的二端口N_0称为互易网络。

（1）当N_0仅由线性电阻构成时，二端口N_0是互易的(reciprocal)。亦即，**电阻二端口网络是互易网络。**

【证明】当方框内部（即网络N_0）仅为线性电阻时，有

$$u_k = R_k i_k \ , \ \hat{u}_k = R_k \hat{i}_k \quad (k = 3,4,5,\cdots b)$$

于是，

$$\begin{cases} \sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k = \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k \\ \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k = \sum_{k=3}^{b} R_k \hat{i}_k i_k \end{cases}$$

故有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

所以，电阻组成的二端口为互易网络。

（2）当N_0含有受控源时，一般来说N_0是非互易(nonreciprocal)的。亦即，含受控源的二端口一般是非互易网络（当然在一定条件下，也可能是互易网络．参见例4.6-5）。

例4.6-1 图示电路中已知：

（1）$R_1=R_2=2\,\Omega$,Us=8V 时,I_1=2A ,U_2=2V ，

（2）$R_1=1.4\,\Omega$, $R_2=0.8\,\Omega$, Us=9V 时 , I_1=3A,

求此时的U_2 。

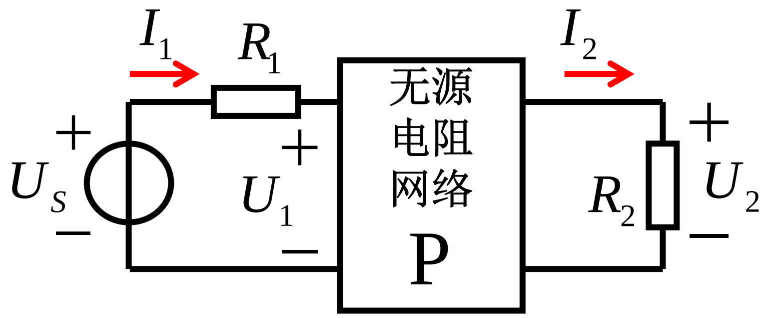


图4.6-2

解：把(1)、(2)两种情况看成是结构相同、参数不同的两个电路，利用特勒根定理有：

$$U_1(-\hat{I}_1)+U_2\hat{I}_2=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2I_2$$

由 (1) 得:

$U_1 = U_S - R_1 I_1 = 4V$, $I_1 = 2A$, $U_2 = 2V$, $I_2 = U_2 / R_2 = 1A$

由（2）得:

$$\hat{U}_1 = 9 - 3 \times 1.4 = 4.8V, \quad \hat{I}_1 = 3A, \quad \hat{I}_2 = \hat{U}_2 / R_2 = (5/4)\hat{U}_2$$

代入公式中得:

$$-4 \times 3 + 2 \times 1.25\hat{U}_2 = -4.8 \times 2 + \hat{U}_2 \times 1$$

解得:

$$\hat{U}_2 = 2.4 / 1.5 = 1.6V$$

注意：支路电压和电流取关联参考方向。式中由于U_1和I_1为非关联方向所以取负号。

例4.6-2　图4.6-3所示电路中已知：U_1=10V，I_1=5A，U_2=0，I_2=1A，$\hat{U}_2=10V$，求电压$\hat{U}_1$

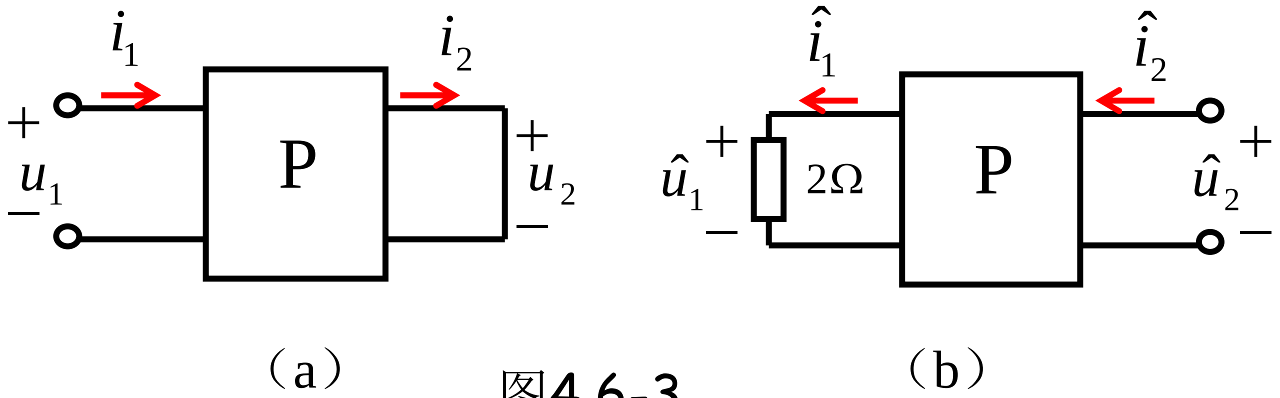


图4.6-3

解：应用特勒根定理有：

$$U_1\hat{I}_1+U_2(-\hat{I}_2)=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2I_2$$

由于　$$U_2=0,\quad \hat{I}_1=\frac{\hat{U}_1}{2}$$

所以：

$$U_1\times\frac{\hat{U}_1}{2}=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2I_2$$

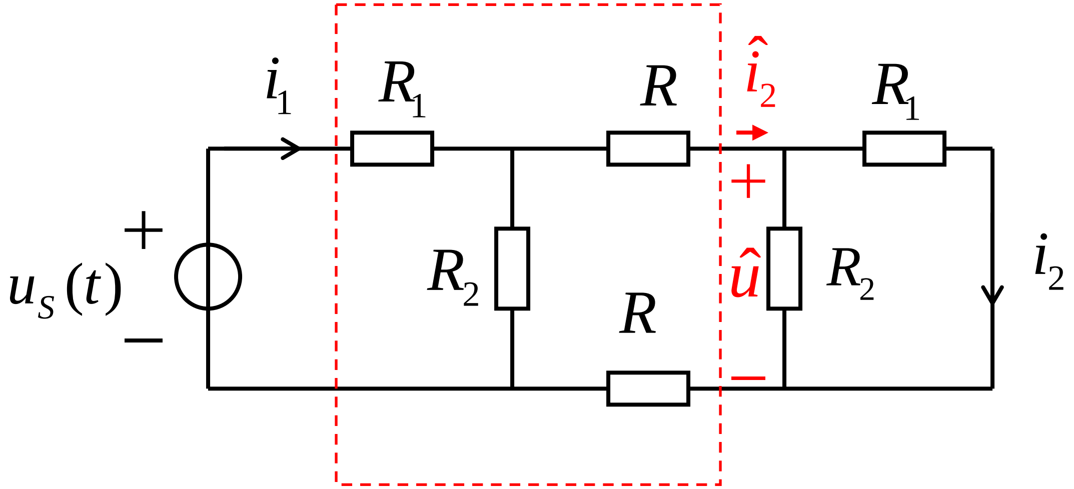
代入数据有：

$$10\times\frac{\hat{U}_1}{2}=\hat{U}_1(-5)+10\times 1$$

解得：

$$\hat{U}_1=1\text{V}$$

例4.6-3 图10中， 已知 $i_1 = 2A,\ i_2 = 1A$。若将电路中间的R支路断开，此时 i_1 为多大？



（答案：1A）

二、互易定理

互易定理表述为：对一个互易网络N_0，其中一个端口加激励源，另一个端口做响应端口。在只有一个激励源的情况下，当激励与响应互换位置时，同一激励所产生的响应相同。条件是：互易前后，当激励置零时，两电路拓扑相同

（概括地讲，所谓互易是指对互易网络而言，当只有1个激励源时，若激励和另外支路的响应互换位置，在电路其它结构不变的情况下，同一数值的激励所产生的响应在数值上不会改变。即激励与其在另外一个支路中的电压、电流响应可以等值地相互易换位置。）

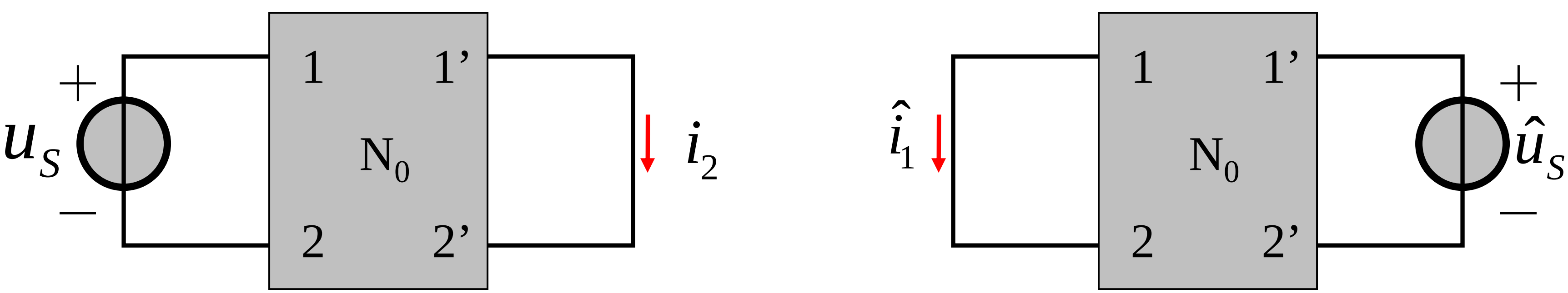
互易定理有以下3种形式：

1) **互易定理1**　对图 4.6-4所示电路取激励为电压源，响应为短路电流(a、b中电压源置零后，拓扑相同)，则满足：

$$u_S\hat{i}_1 = \hat{u}_S i_2 \quad \text{或} \quad \frac{i_2}{u_S} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_S}$$

上式表明：**互易二端口的两对端钮中，不论哪一对作为激励端、哪一对作为观测响应的场所，其(电流)响应对(电压)激励的比值是一样的，<u>传递电导相等</u>。这就是互易定理。**

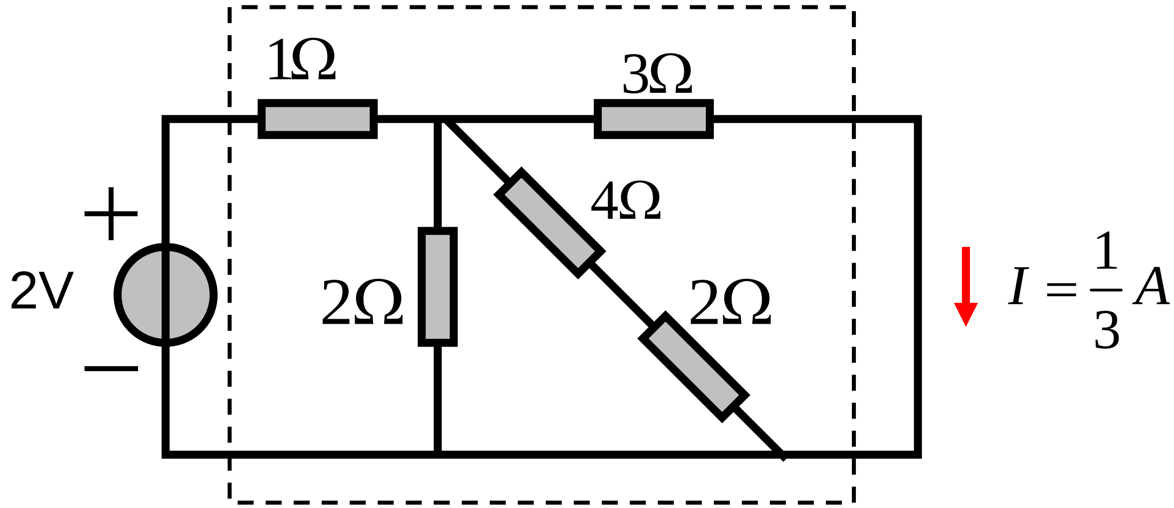
特别，当 $\hat{u}_S = u_S$时，有: $\hat{i}_1 = i_2$，形象地说，就是一个电压源和一个电流表可以互换位置而电流表地读数不变。



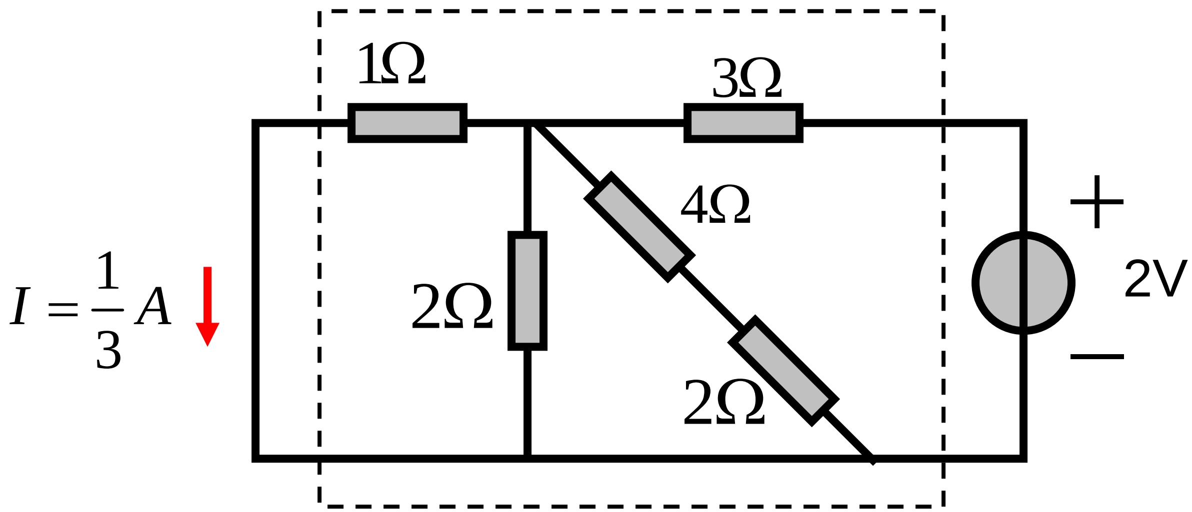
（a）网络 N　　　（b）网络 $\hat{N}$

图 4.6-4

例：



图(a)



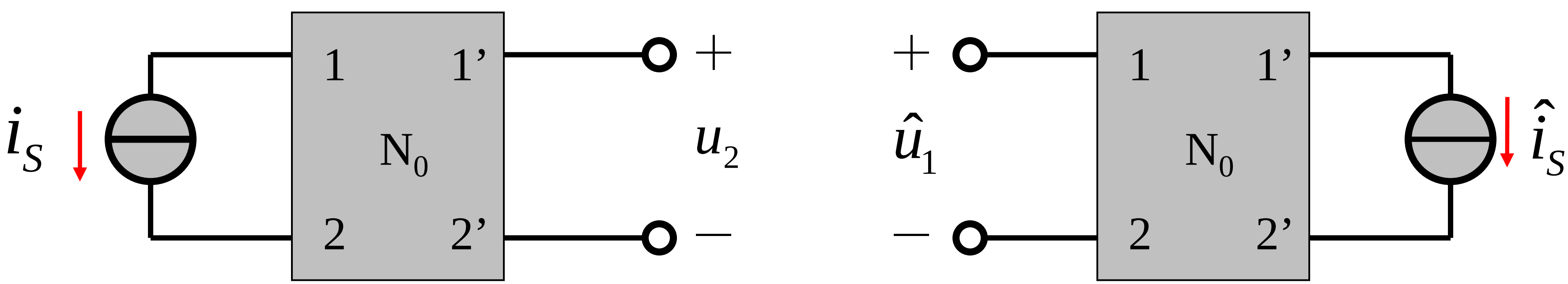
图(b)

2) 互易定理2 对图4.6-5所示电路取激励为电流源，响应为开路电压(a、b中电流源置零后，拓扑相同)，则满足：

$$\hat{u}_1 i_S = u_2 \hat{i}_S \quad 或 \quad \frac{u_2}{i_S} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{i}_S}$$

上式同样表明（电压）响应对（电流）激励地比值不因哪一对端子作激励源、哪一对端子作为响应端而不同，<u>传递电阻相等</u>。

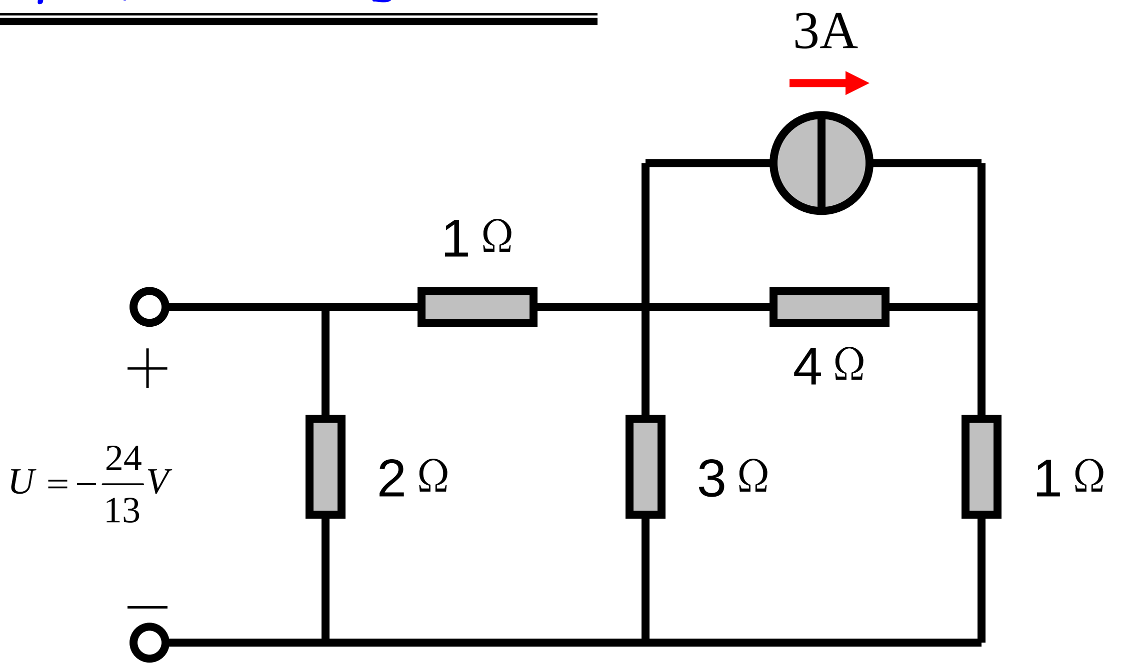
特别当 $i_S = \hat{i}_S$ 时，有：$u_2 = \hat{u}_1$ 。形象地说，就是一个电流源与一个电压表可以互换位置而电压表地读数不变。



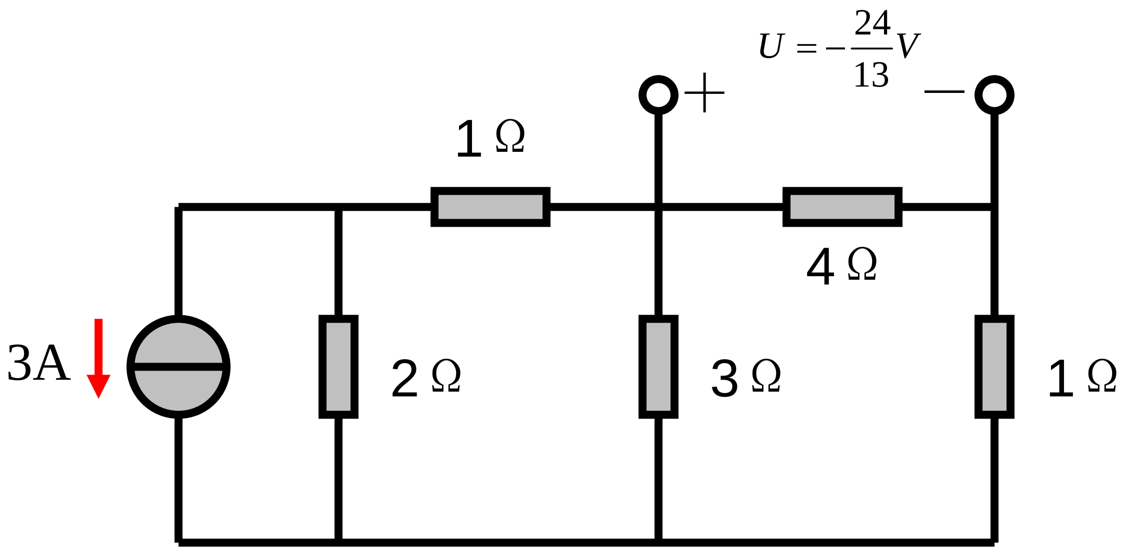
（a）网络 N （b）网络 $\hat{N}$

图 4.6-5

例：



图(a)



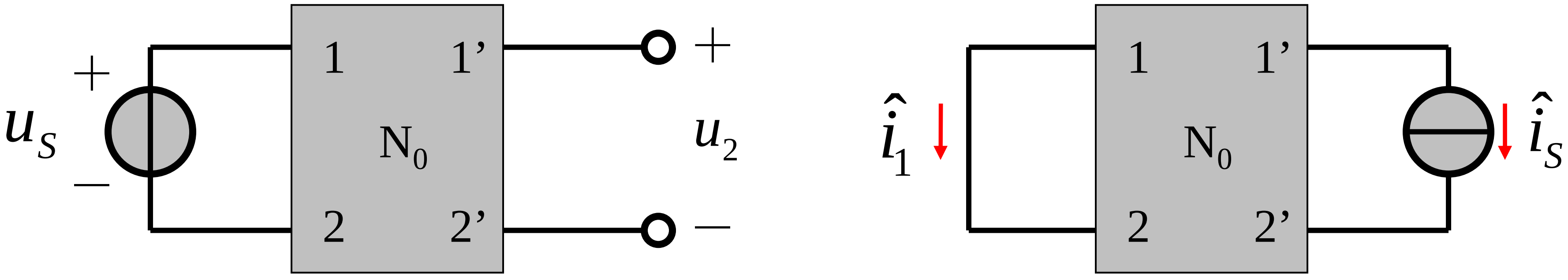
图(b)

3) 互易定理3 对图4.6-6所示电路取图(a)激励为电压源，响应为开路电压，取图(b)激励为电流源，响应为短路电流，(图a电压源、图b电流源置零后，拓扑相同)，则满足：

$$u_S\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_S = 0 \qquad \text{或} \qquad \frac{u_2}{u_S} = -\frac{\hat{i}_1}{\hat{i}_S}$$

上式表明激励与响应互易时，电压传递比＝电流传递比。

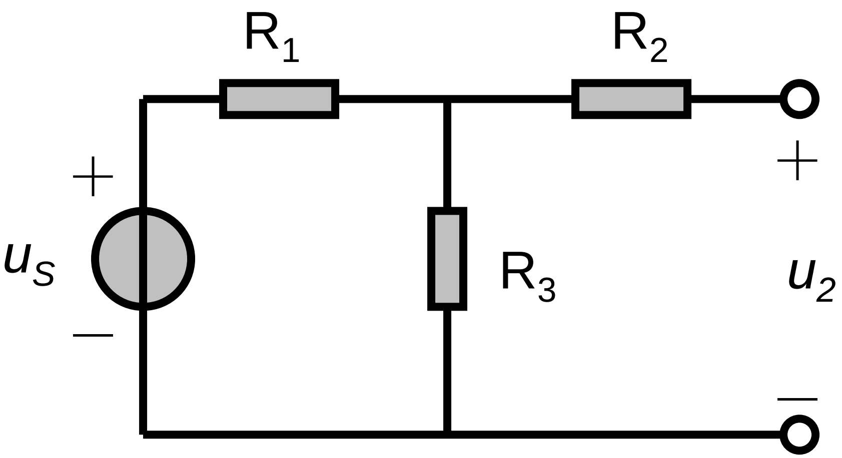
特别，当在数值上满足 $\hat{i}_S = u_S$ 时，有：$\hat{i}_1 = -u_2$



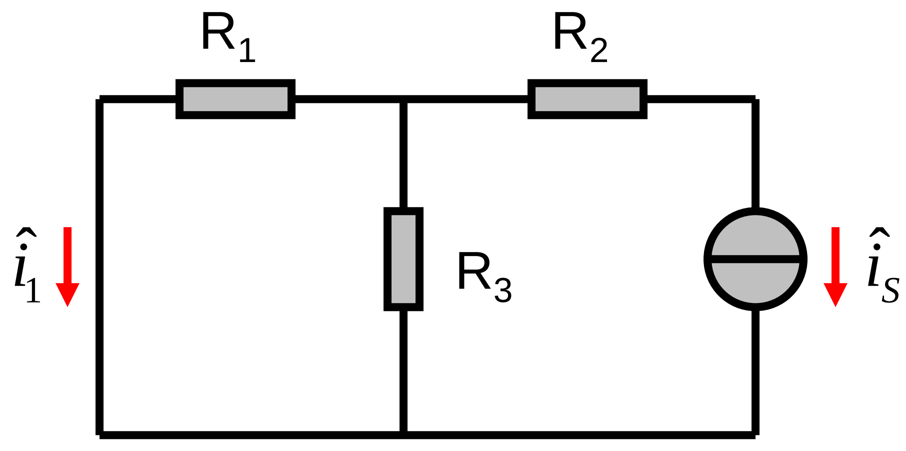
（a）网络 N （b）网络 $\hat{N}$

图 4.6-6

例：



图(a)



图(b)

$$\frac{u_2}{u_S} = \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

(分压)

$$\frac{\hat{i}_1}{\hat{i}_S} = -\frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

(分流)

应用互易定理要注意的问题：

1) 互易前后应保持网络的拓扑结构不变，仅理想电源搬移；

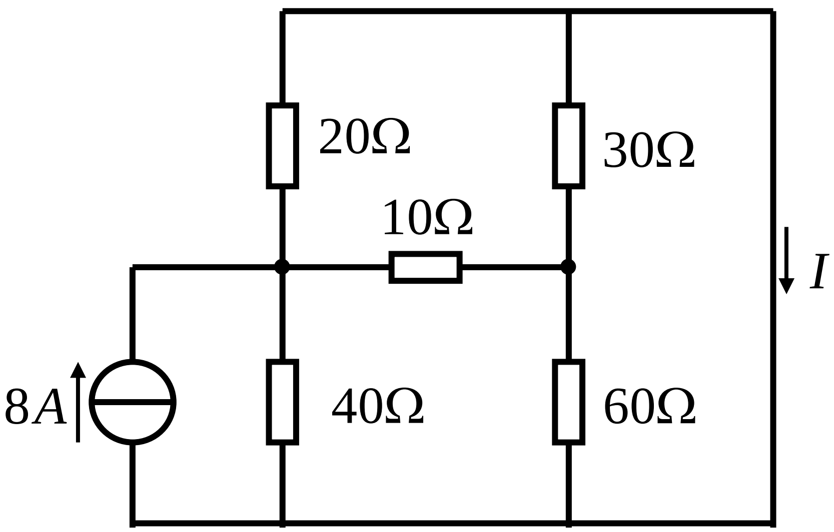
2) 互易前后端口处的激励和响应的极性保持一致（要么都关联，要么都非关联)；

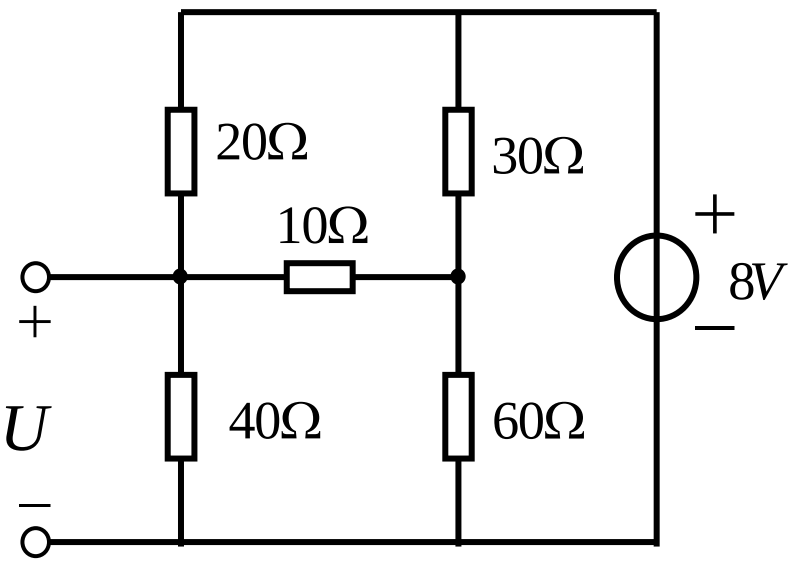
3) 互易定理只适用于线性电阻网络在单一电源激励下，两个支路电压电流关系。

4) 含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

5) 该定理的理论依据是特勒根定理。

求图示电路电流I





$\frac{16}{3}A$

例4.6-3　求图示电路中的电流 I。

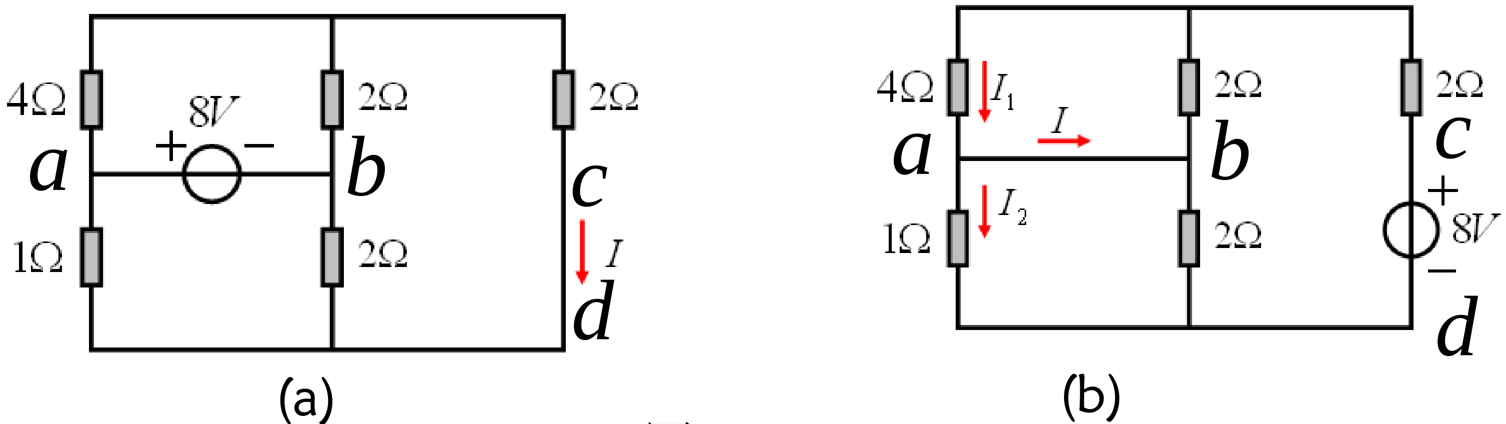


图 4.6-5

解：本例说明利用互易定理，有时可以简化电路的计算。

应用互易定理，把激励和响应互换得电路图如图(b)所示。根据互易定理：8V电压源在ab支路作用时，在cd支路中产生的电流I，相当于8V电压源在cd支路中作用，在ab支路中产生的电流I，见图(b)。在图(b)中求I，只需求解一个串、并联电阻电路，比较容易。

运用互易定理时 要特别注意电流的方向问题。与图4.6-2相对照，可知，如果图b中cd支路电压源的压降方向保持与图a中cd支路电流I的方向一致（关联），则在图b中ab支路电流I的方向应与图a中ab支路电压源的压降方向一致（关联）。

在图b中求I，

$$I' = \frac{8}{2+4//2+1//2} = \frac{8}{4} = 2A$$

根据分流关系得

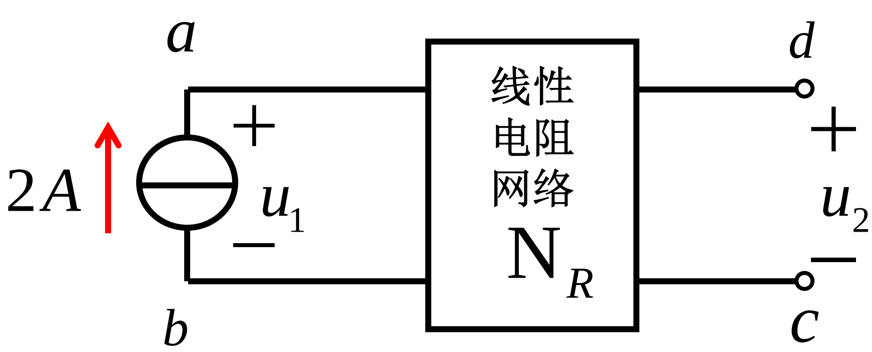
$$I_1 = \frac{2\times I'}{2+4} = \frac{2}{3}A \quad I_2 = \frac{2\times I'}{1+2} = \frac{4}{3}A$$

由KCL得

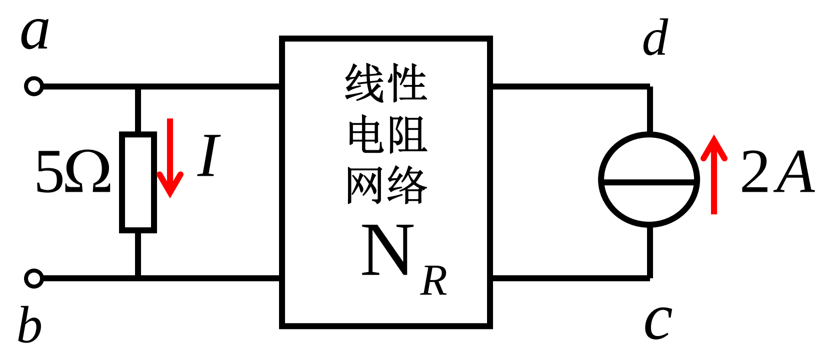
$$I = I_1 - I_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}A$$

故得原电路中所求电流为 $I = -\frac{2}{3}A$。

例4.6-4　测得(a)图中U_1=10V，U_2=5V，求(b)图中的电流 I。



(a)



(b)

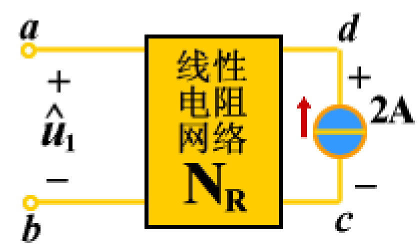
图 4.6-6

解法1：利用戴维宁定理求解。

因为线性电阻网络是互易网络，可利用互易定理求戴维宁等效电路。

(1) 把(b)图中5Ω电阻断开得(c)图，利用互易定理知(c)图的开路电压

$$\hat{u}_1 = 5V$$

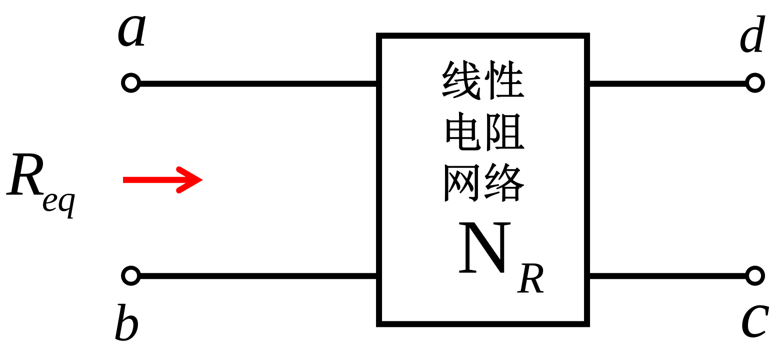


(c)

(2) 求(c)图的等效电阻，

断开电流源如(d)图所示，应用外加电源法，结合(a)图，知(d)图的等效电阻：

$$R_{eq}=\frac{u_1}{2}=\frac{10}{2}=5\Omega$$



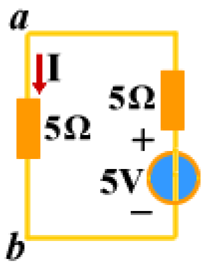
(d)

(3) 应用戴维宁定理

得等效电路如(e)图所示，

解得：

$$I=\frac{5}{5+5}=0.5A$$



(e)

解法2：

应用特勒根定理

$$u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

代入已知数据：

$$10\hat{i}_1 + 5\times(-2) = 5\hat{i}_1 \times(-2) + \hat{u}_2 \times 0$$

$$\hat{i}_1 = I = 0.5A$$

例4.6-5 问图(a)所示两端口电路，α 与 μ 取何关系时电路具有互易性。

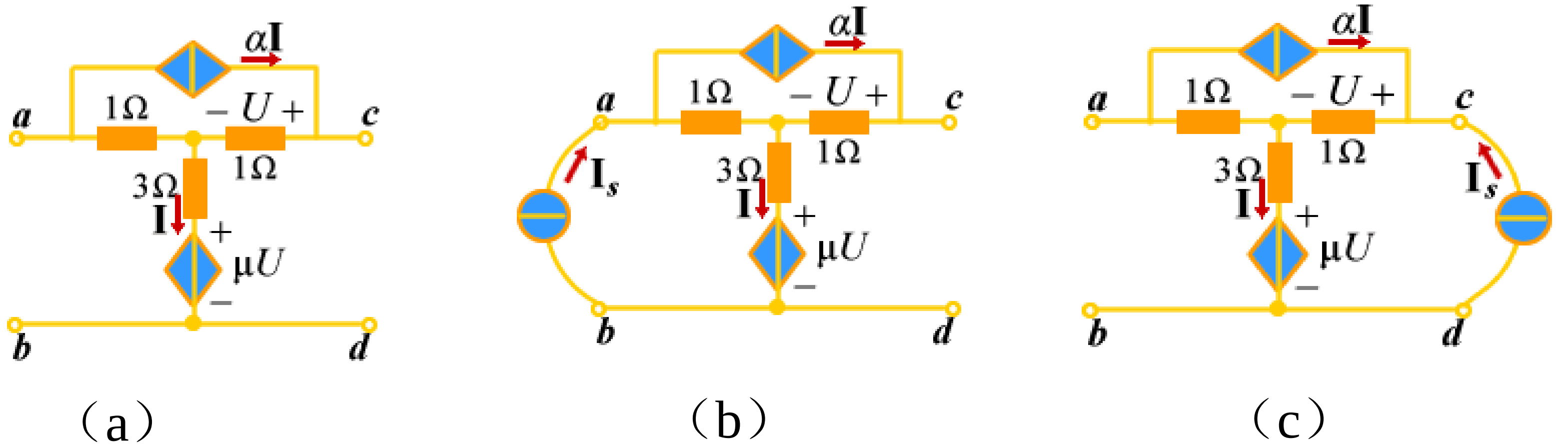


图 4.6-7

解：在 a-b 端口加电流源如图(b)所示，解得：

$$U_{cd} = U + 3I + \mu U = (\mu+1)\alpha I + 3I = [(\mu+1)\alpha + 3]I_S$$

在 c-d 端口加电流源如图(c)所示，解得：

$$U_{ab} = -\alpha I + 3I + \mu U = (3-\alpha)I + \mu(I_S + \alpha I) = [\mu + 3 - \alpha + \mu\alpha]I_S$$

如要电路具有互易性，则应满足： $U_{ab}=U_{cd}$

即：

$$[(\mu+1)\alpha+3]=(\mu+3-\alpha+\mu\alpha)$$

解得：

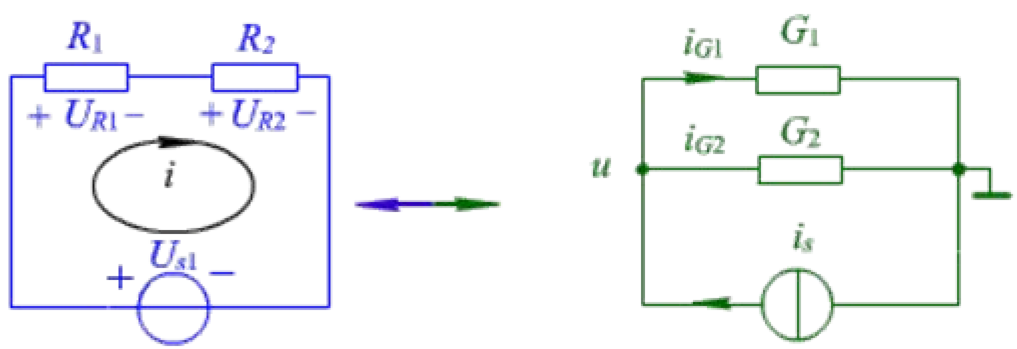
$$\alpha=\frac{\mu}{2}$$

注意：本题说明一般有受控源的电路不具有互易性。

4.7 对偶原理 (The Principle of Duality)

1 对偶关系:

实例1



(a) (b)

KVL: $u_s=u_{R1}+u_{R2}=(R_1+R_2)i$

KCL: $i_s=i_{G1}+i_{G2}=(G_1+G_2)u$

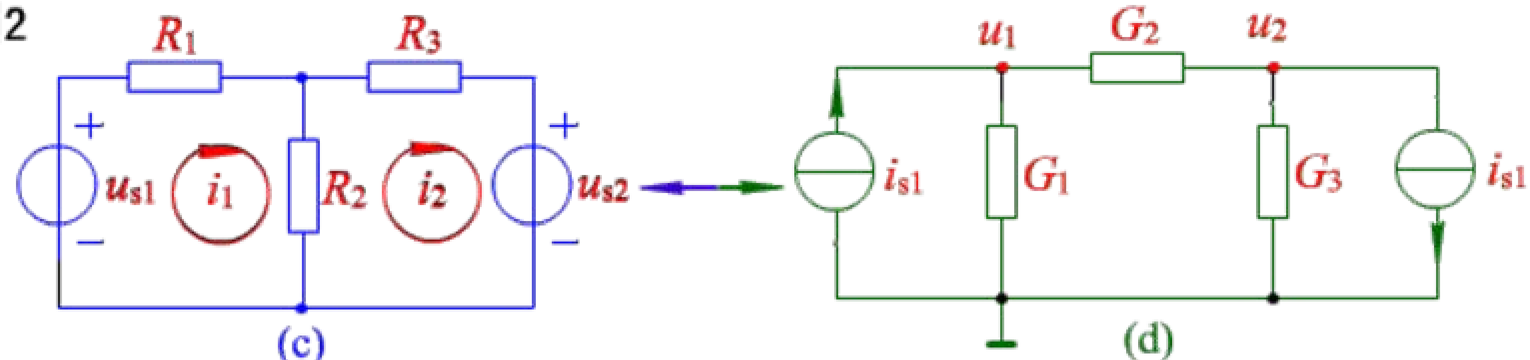
分压公式: $u_{R1}=\dfrac{u_S}{R_1+R_2}R_1$

$u_{R2}=\dfrac{u_S}{R_1+R_2}R_2$

分流公式: $i_{G1}=\dfrac{i_S}{G_1+G_2}G_1$

$i_{G2}=\dfrac{i_S}{G_1+G_2}G_2$

实例2



网孔方程组
$$\begin{cases}(R_1+R_2)\,i_1-R_2i_2=u_{s1}\\ -R_2i_1+(R_2+R_3)i_2=-u_{s2}\end{cases}$$

节点方程组：
$$\begin{cases}(G_1+G_2)u_1-G_2u_2=i_{s1}\\ -G_2u_1+(G_2+G_3)u_2=-i_{s2}\end{cases}$$

在电路理论中有很多成对出现的一一对应关系，这些关系称为对偶关系。

2 对偶电路：

在电路理论中，将两个存在一一对应关系的电路互称为对偶电路。如图(a)与图(b)、图(c)与图(d)互为对偶电路。

3 对偶元素：

在电路理论中，将成对出现的关于电路的元件、参数、结构、变量、定律和定理等对应关系中的要素相互称为对偶元素。

现将已学过的某些对偶元素列表如下：

对偶关系	变量	元件及参数				电路结构				定律和定理		关系式和方程		…
	u	R	u_s	VCVS	CCVS	串联	Y接	网孔	开路	KVL	戴维宁定理	电阻串联公式	网孔方程	…
	i	G	i_s	CCCS	VCCS	并联	△接	节点	短路	KCL	诺顿定理	电导并联公式	节点方程	…

4 对偶原理：

电路中某些元素之间的关系式（或方程），用它们的对偶元素对应地置换后，所得的新关系式（或新方程）也一定成立，后者和前者互为对偶。这就是对偶原理。

5 对偶原理应用：

虽然不常用对偶原理求解电路，但电路理论中有很多知识，完全符合对偶原理。用对偶原理学习理解和记忆这些知识可起到事半功倍的效果。这一点在今后的交流电路和动态电路的学习中会有更深的体会。

应注意：具有对偶的两电路之间并非等效、“对偶”和“等效”是两个不同的概念。

4.8 小 结

(1) 叠加定理是线性电路叠加特性的概括表征，它的重要性不仅在于可用叠加法分析电路本身，而且在于它为线性电路的定性分析和一些具体计算方法提供了理论依据。叠加定理作为分析方法用于求解电路的基本思想是“化整为零”，即将多个独立源作用的较复杂的电路分解为一个一个(或一组一组)独立源作用的较简单的电路，在各分解图中分别计算，最后代数和相加求出结果。若电路含有受控源，在作分解图时受控源不要单独作用。齐次定理是表征线性电路齐次性(均匀性)的一个重要定理，它常辅助叠加定理、戴维宁定理、诺顿定理来分析求解电路问题。

(2) 依据等效概念，运用各种等效变换方法，将电路由繁化简，最后能方便地求得结果的分析电路的方法统称为等效法分析。第二章中所讲的电阻、电导串并联等效，独立源串并联等效，电源互换等效，Π-T互换等效；本章中所讲的替代定理，戴维宁定理，诺顿定理都是应用等效法分析电路中常使用的等效变换方法。这些方法或定理都是遵从两类约束(即拓扑约束——KCL、KVL约束与元件VCR约束)的前提下针对某类电路归纳总结出的，务必理解其内容，注意使用的范围、条件、熟练掌握使用方法和步骤。

(3)替代定理(又称置换定理)是集总参数电路中的一个重要定理，它本身就是一种常用的电路等效方法，常辅助其他分析电路法(包括方程法、等效法)来分析求解电路。对有些电路，在关键之处、在最需要的时候，经替代定理化简等效一步，使读者会有"豁然开朗"或"柳暗花明又一村"之感(如节4.2例4.2-4(a)，(c)图)。在测试电路或实验设备中也经常应用替代定理。

(4) 戴维宁定理、诺顿定理是等效法分析电路最常用的两个定理。解题过程可分为三个步骤：①求开路电压或短路电流；②求等效内阻；③画出等效电源接上待求支路，由最简等效电路求得待求量。

(5) 最大功率这类问题的求解使用戴维宁定理(或诺顿定理)并结合使用最大功率传输定理最为简便。

功率匹配条件： $R_L = R_0$

最大功率公式： $p_{L\max} = \dfrac{u_{oc}^2}{4R_0}$

$$\left(p_{L\max} = \frac{1}{4} R_0 i_{sc}^2 \right)$$

(6) 方程法、等效法是电路中相辅相承的两类分析法。

(7) 互易网络，互易定理的三种形式。

(8) 本章末介绍了对偶定理。