hwk07

P187. 习题 10.1　(A) 2，6，10；(B) 2

P224. 习题 11.1　(A) 1，2-2，2-4，2-7

2. 计算曲线积分 $I=\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}l$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $y=x$ 相交的圆周，$a>0$.

6. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，计算 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}l$.

10. 计算曲线积分 $\oint_L (z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$，其中 L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去，L 取顺时针方向.

2. 计算 $\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$，其中 L 为椭圆 $2x^2+y^2=1$，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法向量(即指向椭圆外侧的法向量)，$f(x,y)=(x-2)^2+y^2$.

1. 用两种方法(化为定积分方法与用格林公式方法)计算曲线积分

$$\oint_L (2xy-x^2)\,\mathrm{d}x+(x+y^2)\,\mathrm{d}y,$$

其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围区域的正向边界曲线.

(2) $\oint_L (3xy^4+x^3y^2)\,\mathrm{d}y-(3x^4y+x^2y^3)\,\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的正方向；

(4) 计算 $\int_L y(1+\cos x)\,\mathrm{d}x+\sin x\,\mathrm{d}y$，其中 L 为自点 $(0,1)$ 沿抛物线 $y^2=1-x$ 到点 $(1,0)$ 的一段；

(7) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向是逆时针方向.

P187 习题 10.1

2. 计算曲线积分 $I=\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,dl$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $y=x$ 相交的圆周，$a>0$.

A.2. 解. 依题意，

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow 2y^2+z^2=a^2 \Rightarrow I=a\int_L dl=2\pi a^2$$

6. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，计算 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,dl$.

A.6. 解. 依题意，由对称性知

$$\text{原式}=\oint_L (3x^2+4y^2)\,dl=12\oint_L dl=12a$$

P187 习题 10.1

10. 计算曲线积分 $\oint_L (z-y)\,dx + (x-z)\,dy + (x-y)\,dz$，其中 L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去，L 取顺时针方向.

A.10. 解. 依题意，记

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 - x + y = 2 - \cos t + \sin t \end{cases} \qquad t: 2\pi \to 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{原式} = & \int_{2\pi}^{0} \Big((2-\cos t)(-\sin t) + (2\cos t - \sin t - 2)\cos t \\
& + (\cos t - \sin t)(\sin t + \cos t) \Big)\, dt \\
= & \int_{2\pi}^{0} \Big(2\cos^2 t - 2\sin^2 t + 1 - 2\sin t - 2\cos t \Big)\, dt \\
= & -2\pi + 2(\cos t - \sin t)\Big|_{2\pi}^{0} = -2\pi
\end{aligned}$$

2. 计算 $\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} ds$，其中 L 为椭圆 $2x^2+y^2=1$，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法向量(即指向椭圆外侧的法向量)，$f(x,y)=(x-2)^2+y^2$.

B.2. 解. 依题意，记椭圆上点的逆时针方向的单位切向量为 $e_n=(a,b)$，则其外法线方向为 $n=(b,-a)$，

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial n}=f_x b-f_y a \quad \Rightarrow \text{原式}=\oint_L \big(f_x b-f_y a\big)\,ds=\int_{L+}\big(-f_y\,dx+f_x\,dy\big)$$

取椭圆参数方程 $x=2^{-1/2}\cos t, y=\sin t, t:0\to 2\pi$，则

$$\text{原式}=\int_{L+}\big(2(x-2)\,dy-2y\,dx\big)$$
$$=\int_0^{2\pi}\big(\sqrt{2}\cos^2 t-4\cos t+\sqrt{2}\sin^2 t\big)\,dt=2\sqrt{2}\pi-4\sin t\Big|_0^{2\pi}=2\sqrt{2}\pi$$

P224 习题 11.1

1. 用两种方法(化为定积分方法与用格林公式方法)计算曲线积分

$$\oint_L (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy,$$

其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 所围区域的正向边界曲线.

A.1. 解. 依题意, $p = 2xy - x^2, q = x + y^2$

$$原式 = \iint_D (q_x - p_y)\,dxdy = \iint_D \left(1 - 2x\right)\,dxdy$$

$$其中 D : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 原式 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy(1 - 2x)$$

$$= \int_0^1 dx\left(\sqrt{x} - x^2 - 2x^{3/2} + 2x^3\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} - \frac{4x^{5/2}}{5} + \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{30}$$

(2) $\oint_L (3xy^4 + x^3y^2)\,dy - (3x^4y + x^2y^3)\,dx$，其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的正方向；

A.2-2. 解. 依题意 $p = -(3x^4y + x^2y^3), q = 3xy^4 + x^3y^2$

$$q_x - p_y = 3y^4 + 3x^2y^2 + 3x^4 + 3x^2y^2 = 3(x^2 + y^2)^2$$

$$\text{原式} = \iint_D 3(x^2 + y^2)^2\,dxdy$$

$$\text{其中} D : x^2 + y^2 \le a^2 \Rightarrow \text{极坐标下} r \le a, \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \text{原式} = 3\int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta r^5 = \frac{1}{2} r^6 \Big|_0^a 2\pi = \pi a^6$$

P224 习题 11.1

(4) 计算 $\int_L y(1+\cos x)\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$，其中 L 为自点(0,1)沿抛物线 $y^2=1-x$ 到点(1,0)的一段；

A.2-4. **解**. 记 $p=y(1+\cos x), q=\sin x$, 则 $p_y-q_x=1$
取 l 为连接 $A(1,0)$, $O(0,0)$ $B(0,1)$ 的有向线段, 则

$$\int_L (p\,dx+q\,dy)+\int_l (p\,dx+q\,dy)=\iint_D dxdy$$

$$\text{其中}D: 0\le y\le 1, 0\le x\le 1-y^2$$

$$AO: x=0, y=t, t:1\to 0 \quad OB: x=t, y=0, t:0\to 1$$

$$\iint_D dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y^2} dx=\int_0^1 dy(1-y^2)=(y-\frac{y^3}{3})\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\int_l (p\,dx+q\,dy)=\int_1^0 \sin 0\,dt+\int_0^1 0\,dt=0$$

$$\Rightarrow \text{原式}=\frac{2}{3}$$

P224 习题 11.1

(7) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向是逆时针方向.

A.2-7. 解. 记 $p = \frac{y}{2(x^2+y^2)}$, $q = \frac{-x}{2(x^2+y^2)}$

$$q_x = \frac{-1}{2(x^2+y^2)} + \frac{2x^2}{2(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}$$

$$p_y = \frac{1}{2(x^2+y^2)} - \frac{2y^2}{2(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2} = q_x$$

$$\text{取} l: x^2+y^2=\varepsilon^2 (\varepsilon > 0 \text{较小})$$

$$\Rightarrow \oint_{L+} (p\,dx + q\,dy) + \oint_{l-} (p\,dx + q\,dy) = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = \oint_{l+} (p\,dx + q\,dy) = \oint_{l+} \frac{y\,dx - x\,dy}{2\varepsilon^2}$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} (-1-1)\,dxdy = \frac{-1}{\varepsilon^2} S(D_\varepsilon) = -\pi$$