

# 第二章 控制系统的数学模型

**2-1** 控制系统的时域数学模型

**2-2** 控制系统的传递函数

**1-3** 控制系统的结构图与信号流图

**1-4** 数学模型的实验测定法(自学)

- 总学时数：10学时（2.5~4周）
- 基本内容：数学模型的基本概念，控制系统的结构图、信号流图、微分方程和传递函数及相互转换关系，数学模型的等效变换。
- 基本要求：数学模型的一般建立方法，数学模型之间的关系和相互等效变换方法，传递函数的概念及其性质。

# 学习重点

- 微分方程式的列写
- 传递函数的定义及其性质
- 微分方程和传递函数的相互转换
- 应用传递函数求系统的响应
- 系统动态结构图及简化
- 信号流图和Mason公式
- 闭环系统的传递函数

## 2-1 控制系统的时域数学模型

- 数学模型：系统内部各变量之间的数学表达式
- 静态模型：静态条件下的代数方程；
- 动态模型：描述动态关系的微分方程。
- 分析建模法：利用数学物理方程或者化学规律来得到表达式；
- 实验建模法：采集输入-输出数据，然后进行曲线拟合（系统辨识）



# 一. 控制系统微分方程的建立

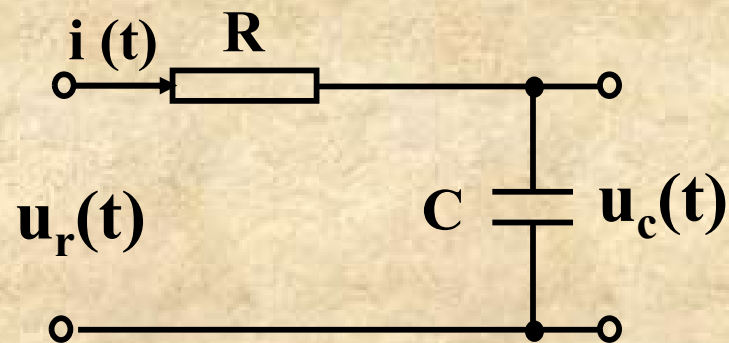
## 系统微分方程的建立步骤:

- ① 确定系统的输入、输出变量;
- ② 输入端开始, 按照信号的传递顺序, 根据各变量所遵循的物理定理写出各微分方程;
- ③ 消去中间变量, 写出输入、输出变量的微分方程;
- ④ 变换成标准形式。

## 例1：RC电路

$$u_r = iR + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt$$



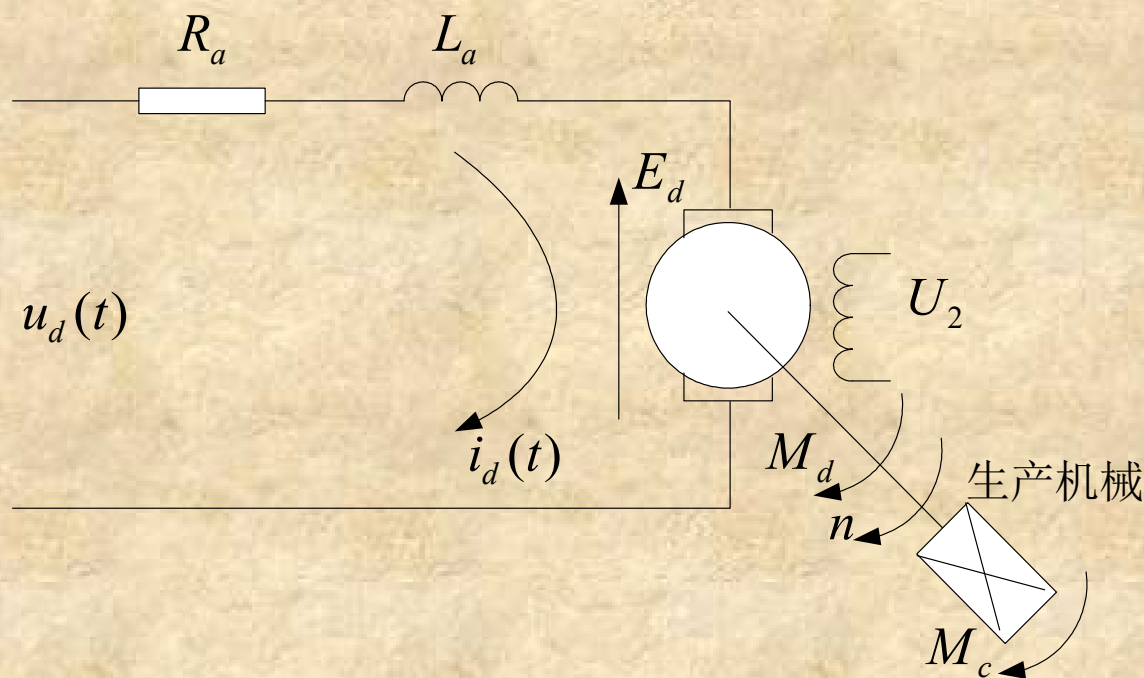
消去中间变量后得到:

$$T \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

$$T = RC$$

时间常数

## 例2：直流电动机



$R_a$ :电枢电阻;  $L_a$ :电枢总电感;

$M_d$ :电机转矩;  $M_c$ :负载 (取为零);

$u_d(t)$ :电枢电压(输入);  $n(t)$ :电机转速 (输出)

微分方程：

$$\begin{cases} u_d(t) = R_a i_d + L_a \frac{di_d(t)}{dt} + E_d \\ M_d - M_c = \frac{1}{375} GD^2 \cdot \frac{dn(t)}{dt} \\ M_d = C_M \phi i_d \\ E_d = C_e \phi n \end{cases}$$

$$M_c = 0 \quad \longrightarrow \quad i_d = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{1}{C_M \phi} \cdot \frac{dn(t)}{dt}$$



$$u_d(t) = C_e \phi T_M \frac{dn}{dt} + T_a T_m C_e \phi \frac{d^2 n}{dt^2} + C_e \phi n$$



$$T_a = \frac{L_a}{R_a} \quad : \quad \text{电磁时间常数}$$

$$T_M = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{R_a}{C_M \phi C_e \phi} \quad : \quad \text{机电时间常数}$$

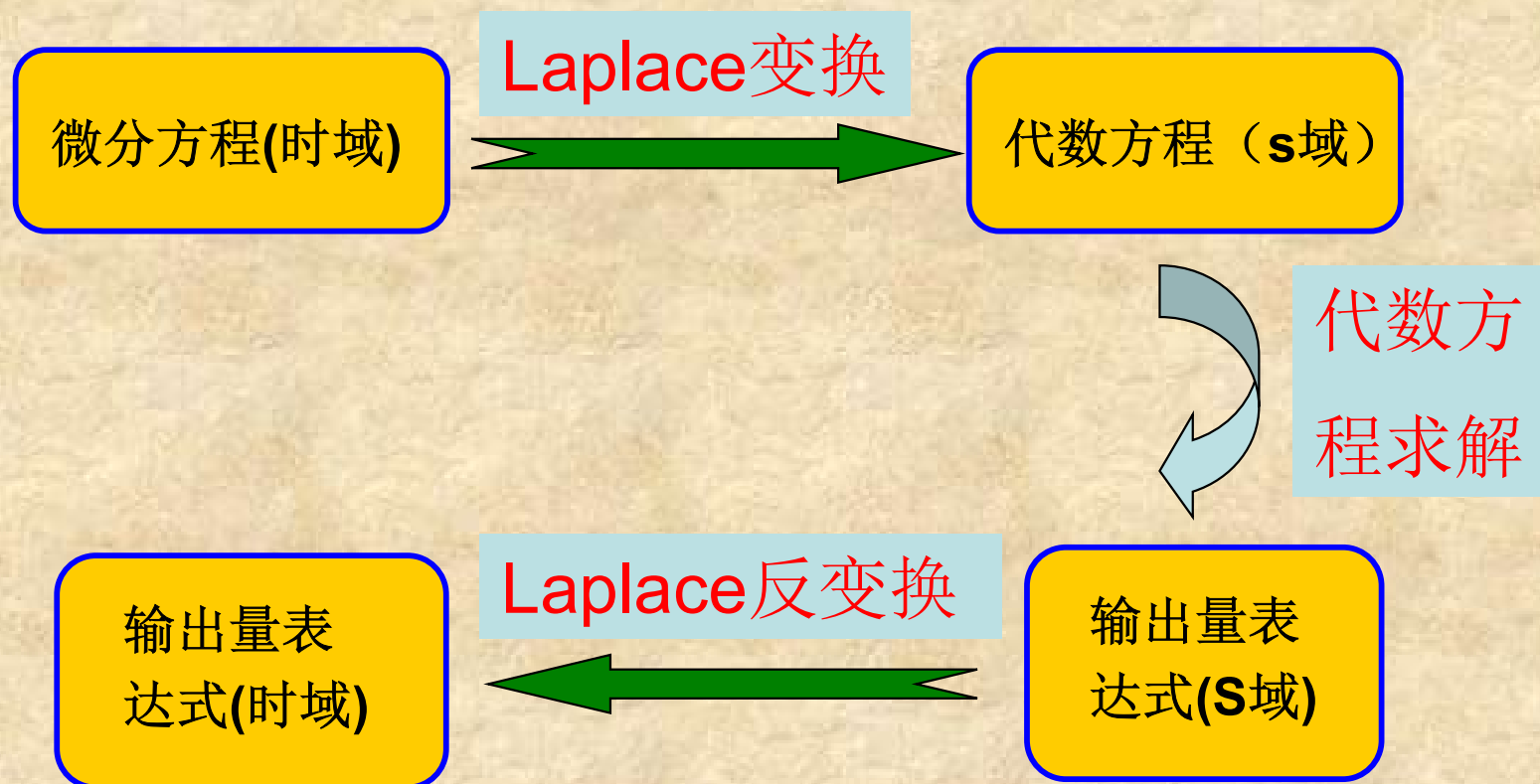


二阶系统:

$$T_a T_M \frac{d^2 n}{dt^2} + T_M \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d(t)}{C_e \phi}$$

## 二. 用拉氏变换求解线性定常微分方程

求解过程:



拉氏变换定义:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

常用函数的拉氏变换

拉氏变换的性质

拉氏反变换

例: RC电路:

$$T \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

设  $u_r(t) = 1(t)$ , 初始条件为:  $u_c(0) = 0$ , 试求系统响应  $u_c(t)$ 。



解：对上式取拉氏变换得到：

$$TsU_c(s) - Tu_c(0) + U_c(s) = U_r(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow$$

$$U_c(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1/T}{(s+1/T)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/T}$$

其中，

$$\begin{cases} A = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \right] \cdot s = 1 \\ B = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \left[ \frac{1/T}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s} \right] \cdot (s+1/T) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_c(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}, t > 0$$

### 三. 非线性微分方程的线性化

- 忽略非线性特性：非线性特性不强，精确度要求不高情况下
- 偏差法：将非线性方程在平衡点附近进行线性化

平衡点（状态不再发生变化）： $y_0 = f(x_0)$

当受到干扰偏离平衡点时，

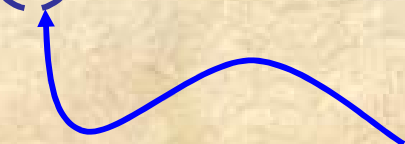
$$x = x_0 + \Delta x \quad \longrightarrow \quad y = y_0 + \Delta y$$

泰勒展开：

$$y = f(x) = f(x_0) + \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} \Delta x + o(\Delta x)$$

所以得到如下的增量线性化方程：

$$\Delta y = \overset{\text{虚线圈}}{K} \cdot \Delta x$$



$$K = \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0}$$

## 四. 运动的模态

- 微分方程的解 = 特解 + 通解

决定于微分方程的特征根，代表自由运动

- 运动的模态：若  $n$  阶微分方程的特征根是  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\dots$ 、 $\lambda_n$ ，且无重根，则把函数  $e^{\lambda_1 t}$ 、 $e^{\lambda_2 t}$ 、 $\dots$ 、 $e^{\lambda_n t}$ ，称为该微分方程所描述运动的模态（振型）。



## 特征根与运动模态的对应关系：

特征根的形式	特征根	运动包含的模态
单特征根	$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$	$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$
重特征根	$\lambda^m$	$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$
共轭复根	$\sigma \pm j\omega$	$e^{(\sigma \pm j\omega)t}$ $e^{\sigma t} \sin \omega t + e^{\sigma t} \cos \omega t$

## 2-2 控制系统的传递函数

- 传递函数的定义与基本性质
- 应用传递函数来计算系统的响应
- 传递函数的零极点及其对输出的影响
- 典型环节的传递函数

## 一. 传递函数的定义与基本性质

**例：**已知某二阶系统的微分方程为：

$$\ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 2c(t) = 2r(t)$$

当初始条件为零时，试计算系统分别在单位阶跃和单位斜坡信号作用下的响应。

**例：**已知某二阶系统的微分方程为：

$$a_0\ddot{c}(t) + a_1\dot{c}(t) + a_2c(t) = b_0\dot{r}(t) + b_1r(t)$$

当初始条件为零时，试计算系统分别在输入信号

$r(t) = 1, t > 0$  和  $r(t) = t, t > 0$  作用下的响应。

**解：**当初始条件为零时，对系统微分方程求拉氏变换得到：

$$\left[ a_0 s^2 + a_1 s + a_2 \right] C(S) = \left[ b_0 s + b_1 \right] R(s)$$

整理后得到：

$$C(S) = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} R(s)$$

然后可以代入输入信号的拉氏变换来求响应。



更一般地，对于  $n$  阶系统：

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m r(t) \end{aligned}$$

在零初始条件下，取拉氏变换可以得到：

$$C(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} R(s)$$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \text{确定的分式}$$

**事实：** 零初始条件下，对于线性系统而言， $\frac{C(s)}{R(s)}$  为确定的函数！

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \text{确定的分式}$$



计算响应  
有何便利



对于不同的输入，**避免重复**对微分方程取拉氏变换来进行求解。

**传递函数定义：** 一个系统或环节在零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，称为该系统或环节的传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

**例：** 对于电机系统，其微分方程为：

$$T_a T_M \frac{d^2 n}{dt^2} + T_M \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d(t)}{C_e \phi}$$

对其求拉氏变换可以得到传递函数

$$G(s) = \frac{N(s)}{U_d(s)} = \frac{1}{C_e \phi (T_a T_M s^2 + T_M s + 1)}$$

## 传递函数的性质：

- 传递函数是对系统输入-输出特性的描述。不同物理系统可用同类型的传函表示；
- 传递函数只反映系统自身特性，它决定于系统的结构与参数，而与输入量无关；
- 传递函数是线性系统的特性。对于非线性系统，通常不定义传递函数！为什么？

非线性系统不满足叠加原理，因此对于不同的输入信号，其比值不一样。



## 传递函数的性质：

- 传递函数与微分方程有相通性；
- 传递函数是在零初始条件下定义的！如果计算非零初始条件响应，必须还原出微分方程来进行计算！
- 传递函数是复变量 $s$ 的有理真分式，具有复变函数的所有性质；

如果是假分式，则存在： $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ 。设  $G_1(s) = s$   
则对于输入信号  $r(t) = 1(t) \xrightarrow{\quad} c(t) = \delta(t)$

## 传递函数的另一种求法:

**定义:** 若输入为  $\delta(t)$ , 则输出  $g(t)$  称为单位脉冲响应。

已知系统的单位脉冲响应  $g(t)$ , 则系统传递函数为  $G(s)$ 。

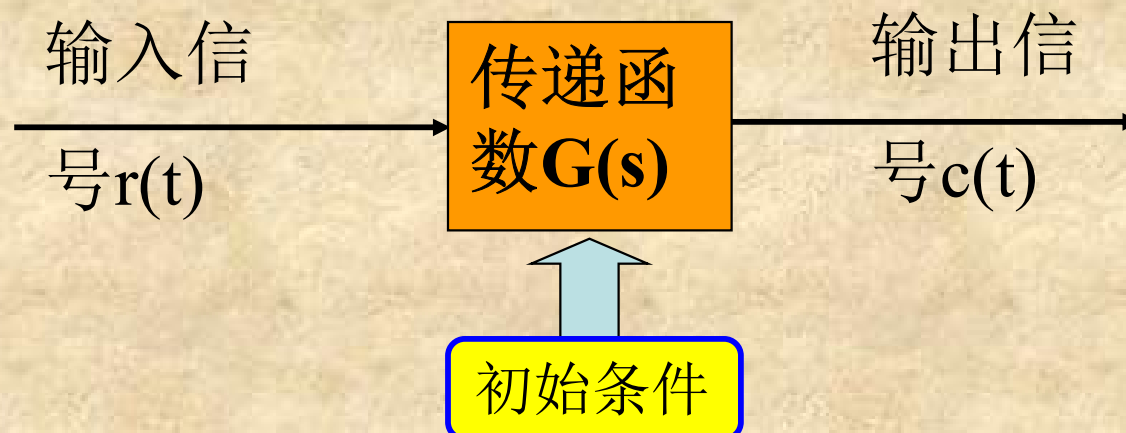
对输入信号:  $R(s) = L(\delta(t)) = 1$ , 则有:

$$C(s) = G(s) \cdot R(s) = G(s)$$



$$G(s) = L[g(t)]$$

## 二. 应用传递函数计算系统响应



- 零初始条件响应
- 非零初始条件时，响应计算

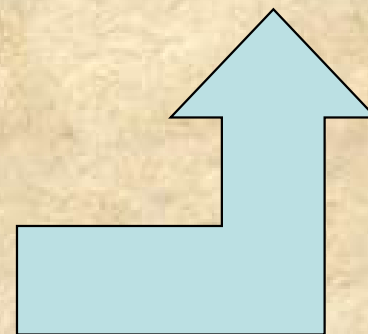
零初始条件下响应计算:

计算过程: Step 1. 计算  $R(s) = L(r(t))$ ;

Step 2.  $C(s) = G(s)R(s)$  ;

Step 3. 输出信号:  $c(t) = L^{-1}(C(s))$

分式有理化



**例：**已知某系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

且初始条件为零，试计算单位阶跃下的响应。

**解：**对于输入  $r(t) = 1(t)$ ，有  $R(s) = 1/s$ ，则：

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

其中：

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s} \cdot s = 1; B = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s} \cdot (s+1) = -2$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s} \cdot (s+2) = 1$$



所以,

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$



$$c(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}, t \geq 0$$

## 非零初始条件下响应计算:

### 计算过程:

**Step 1.**通过传递函数得到系统的微分方程;

**Step 2.**考虑初始条件, 用拉氏变换方法求解微分方程来得到系统的输出响应。

**例：**已知某系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

且初始条件为  $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ ，试计算单位阶跃下的响应。

**解：**根据系统的传递函数得到：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

即：

$$C(s)(s^2 + 3s + 2) = 2R(s)$$

还原得到微分方程如下：

$$\ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 2c(t) = 2r(t)$$

对上式求拉氏变换后得到：

$$\left[ s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) \right] + 3 \left[ sC(s) - c(0) \right] + 2C(s) = 2R(s)$$

整理后得到：

$$C(s) = \frac{2R(s)}{[s^2 + 3s + 2]} + \frac{[(s + 3)c(0) + \dot{c}(0)]}{[s^2 + 3s + 2]}$$

代入初始条件和  $R(s) = \frac{1}{s}$ ，并整理后得到：

$$C(s) = \frac{2}{s(s^2 + 3s + 2)} - \frac{(s+3)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

其中,

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} s = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} \cdot (s+1) = -4$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} \cdot (s+2) = 2$$



$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2} \xrightarrow{\text{green arrow}} c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}, t \geq 0$$



### 三. 传递函数的零极点及其对输出的影响

系统的传递函数:

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (n > m)$$

分子分母改写成因式相乘的形式:

$$G(s) = \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \cdots}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \cdots} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

零点

传递系数/  
根轨迹增益

极点

## 传递函数的零极点对输出的影响：

- 传递函数的极点是微分方程的特征根，它们决定所描述系统自由运动的模态。
- 传递函数的零点不形成自由运动的模态，但它们影响各模态响应中所占的比重，因而也影响响应曲线的形状。

**规律：**距离原点较近，且离极点较远的零点对系统相应影响大（超调增大，响应加快）。

## 四. 典型环节的传递函数




① 比例环节:


$$x_c(t) = Kx_r(t) \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = K$$

## ② 惯性环节:

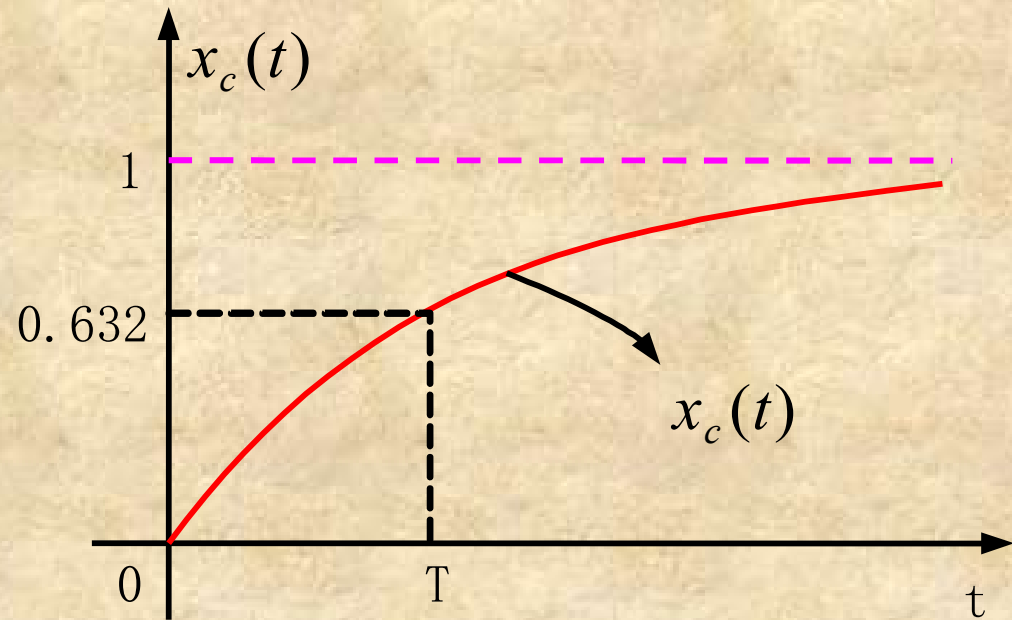
$$T \frac{dx_c(t)}{dt} + x_c(t) = x_r(t) \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$



$$x_r(t) = 1(t)$$



$$x_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$



### ③ 积分环节:

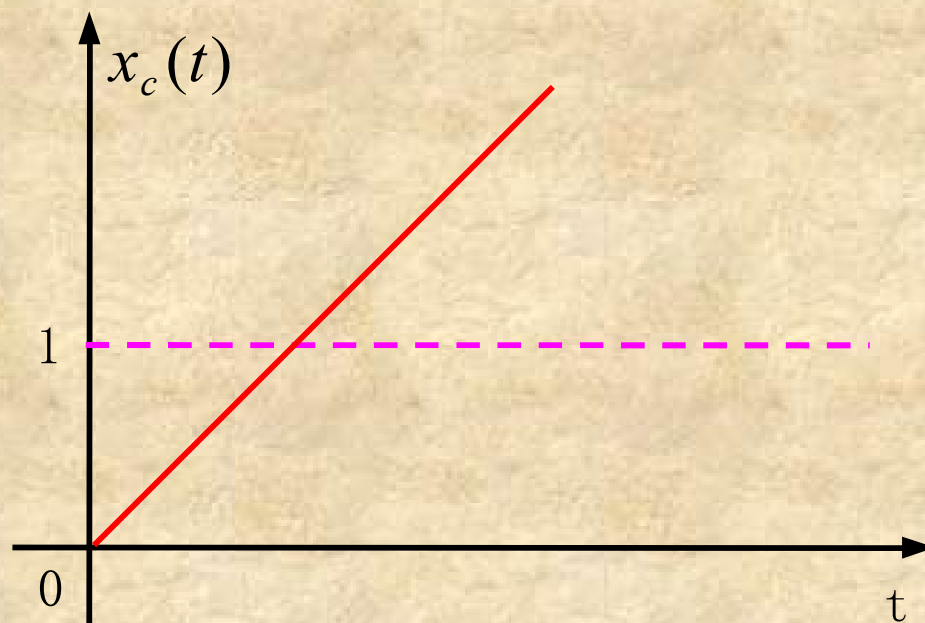
$$x_c(t) = k \int x_r(t) dt \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{k}{s}$$



$$x_r(t) = 1(t)$$



$$x_c(t) = t, t \geq 0$$





④ 微分环节:

$$x_c(t) = k \frac{dx_r(t)}{dt}$$



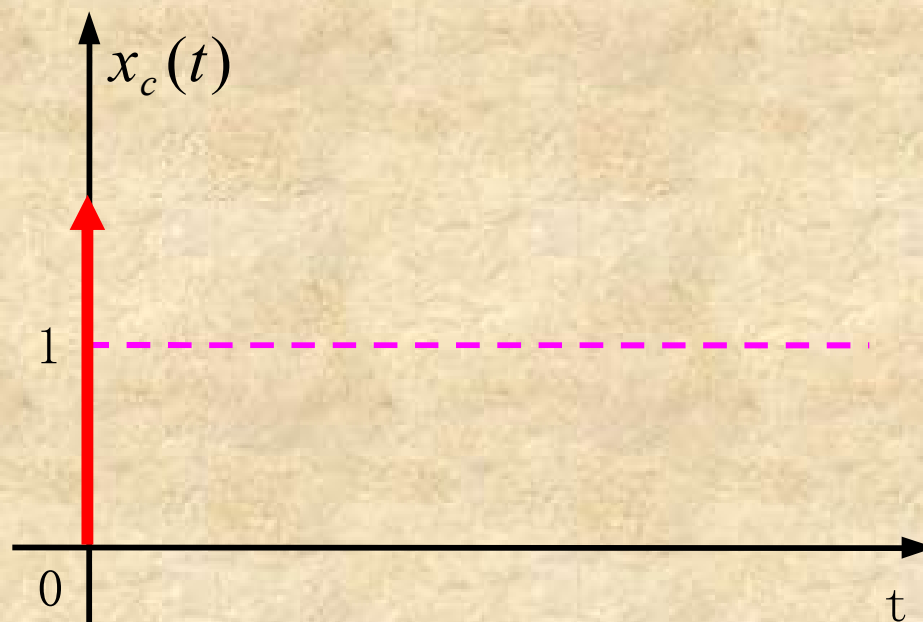
$$G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = ks$$



$$x_r(t) = 1(t)$$




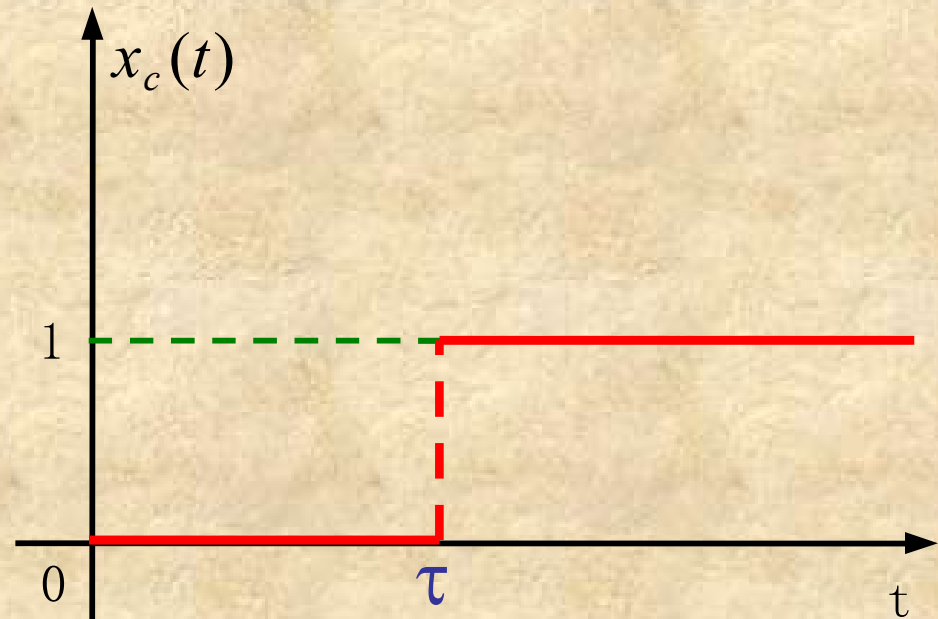
$$x_c(t) = \delta(t)$$



⑤ 滞后环节：

$$x_c(t) = x_r(t - \tau) \quad \longrightarrow \quad X_c(s) = X_r(s)e^{-\tau s}$$


$$G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = e^{-\tau s}$$



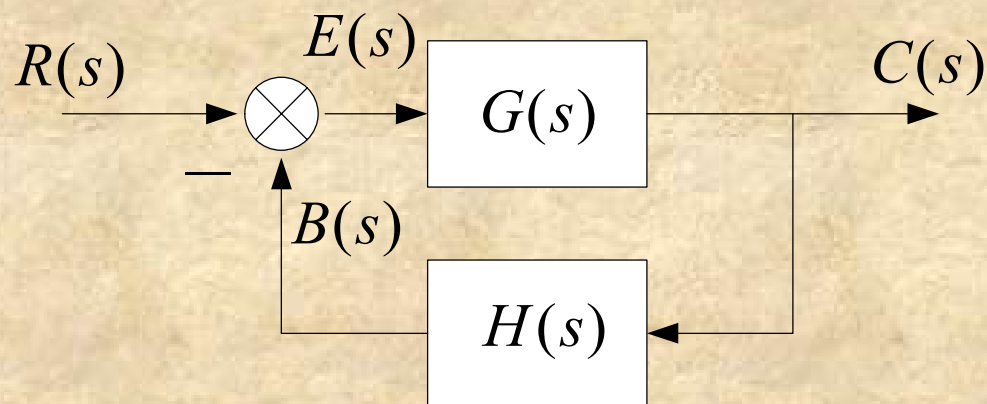
## 2-3 结构图与信号流图

- 系统结构图的绘制和简化
- 信号流图的绘制
- 利用Mason公式计算传递函数
- 系统的传递函数

# 一. 结构图的等效变换和简化

结构图（方框图）/ 信号流图：描述系统内信号传递的数学图形。

例：一个简单系统的结构图



结构图的基本组成：信号线、引出点（测量点）、比较点（综合点）、方框（环节）

动态结构图绘制步骤：

- 1) 把一个系统分解成若干环节；
- 2) 写出每个环节的传递函数，即输入和输出的传递关系；
- 3) 把每个环节的传递函数连接起来后，得系统动态结构图。



结构图的等效变换和简化：

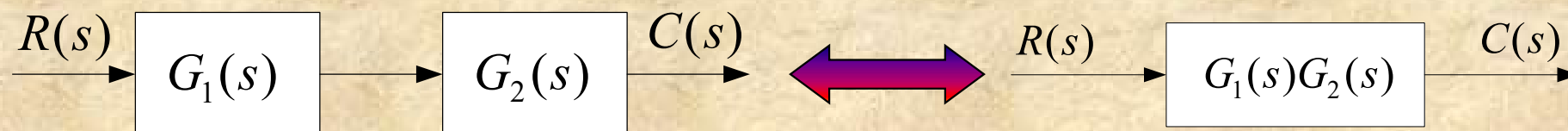
目标：消去中间变量，求取系统的传递函数或者输出响应。

简化原则：变换前后变量关系维持等效

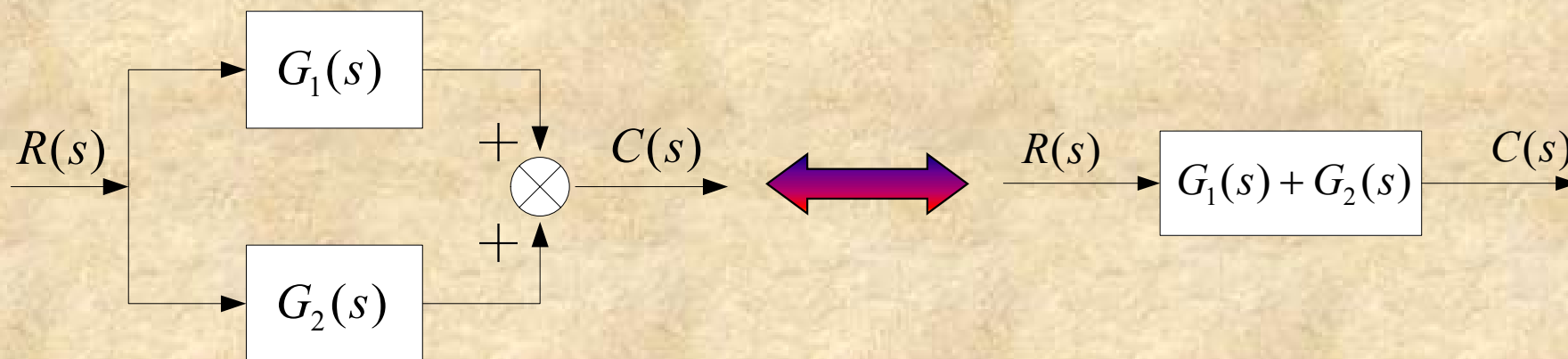
- ✓ 变换前后，前向通路中传递函数的乘积保持不变；
- ✓ 回路中传递函数的乘积保持不变。

## 典型环节的连接：

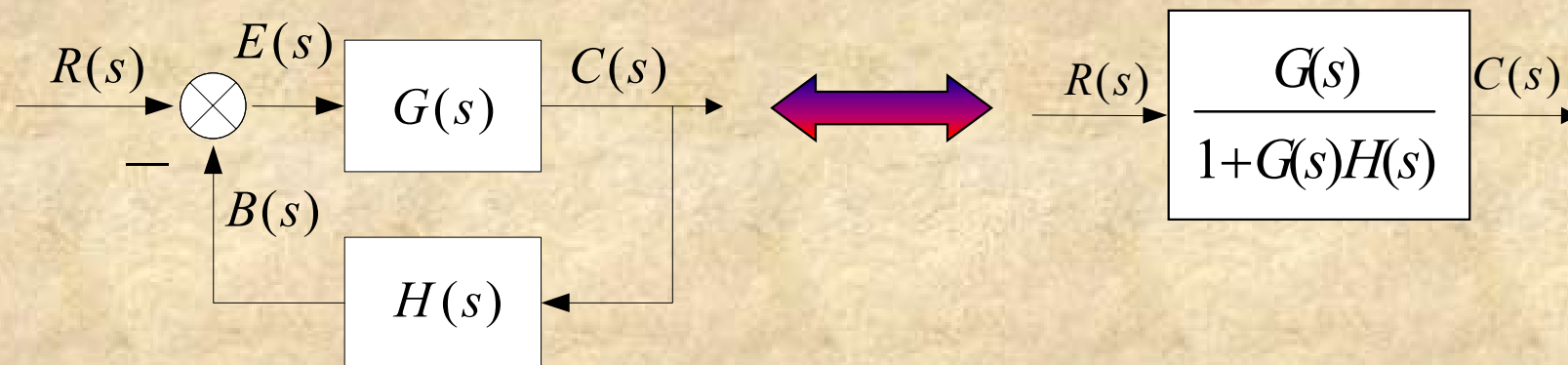
### ① 串联环节



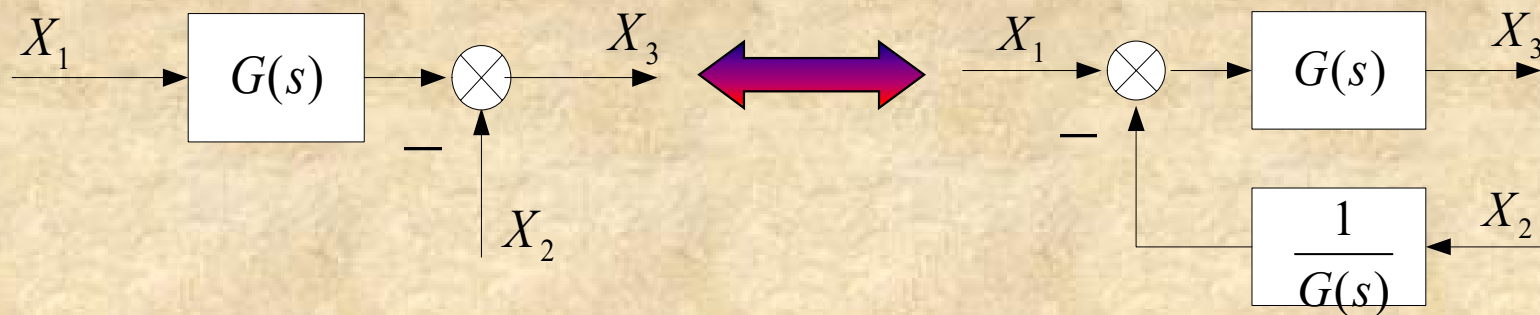
### ② 并联环节



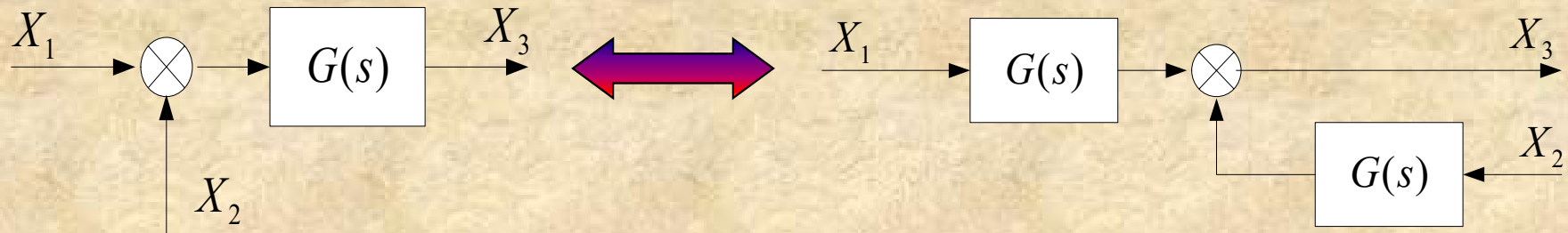
### ③ 反馈连接



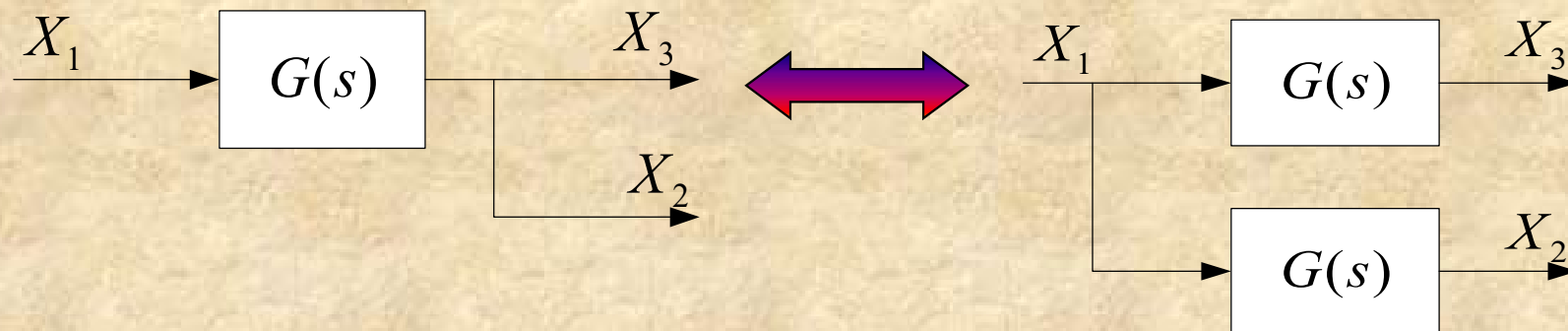
### ④ 比较点前移



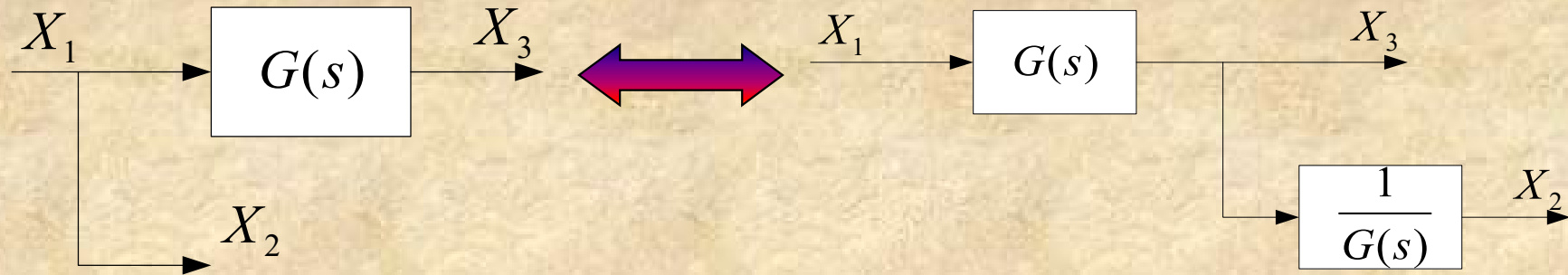
## ⑤ 比较点后移



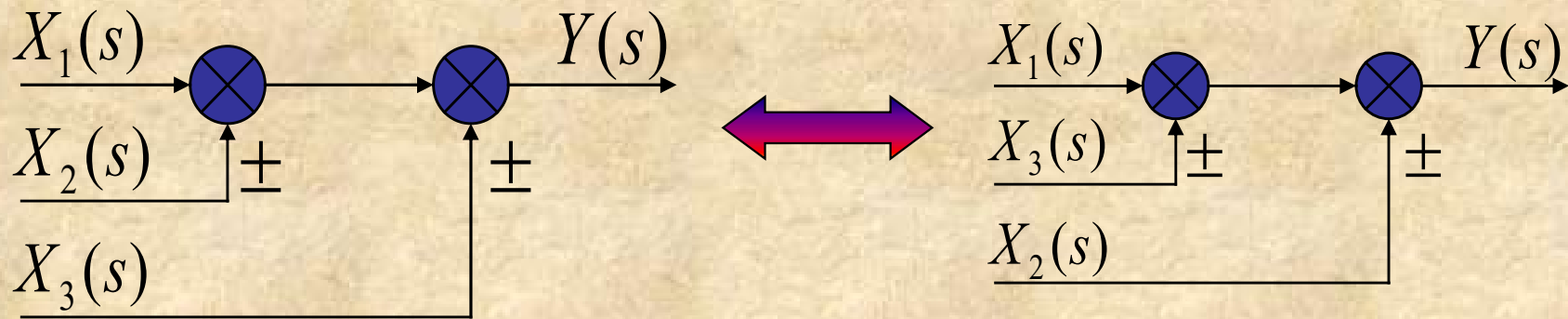
## ⑥ 引出点前移



## ⑦ 引出点后移

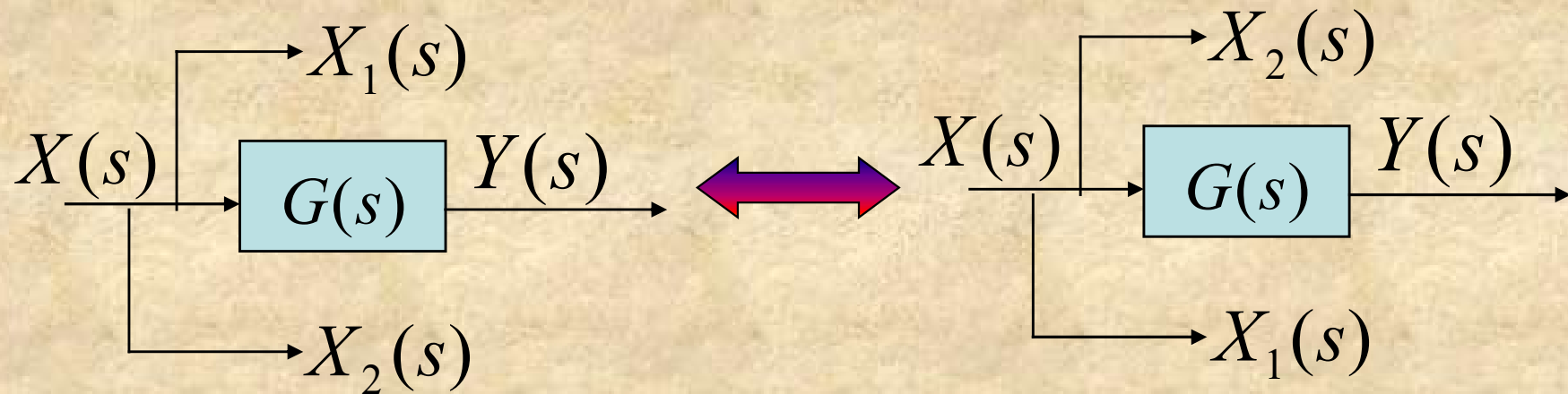


## ⑧ 相邻的信号相加点位置可以互换

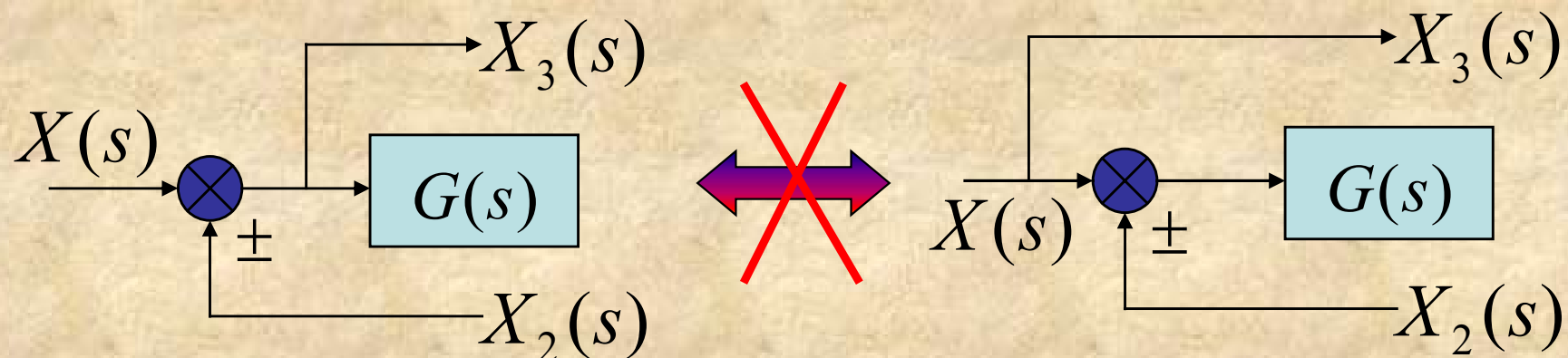




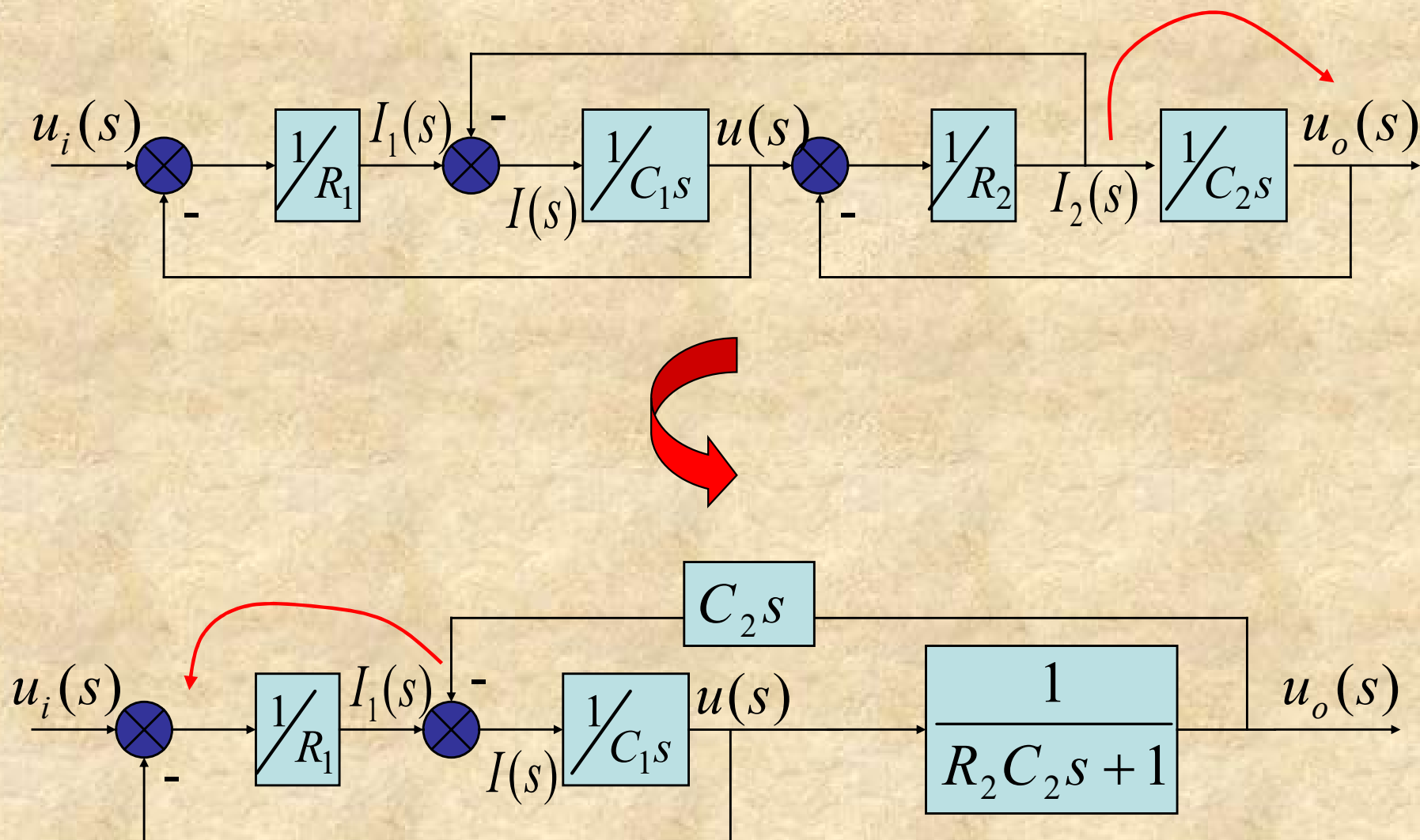
⑨ 同一信号的分支点位置可以互换



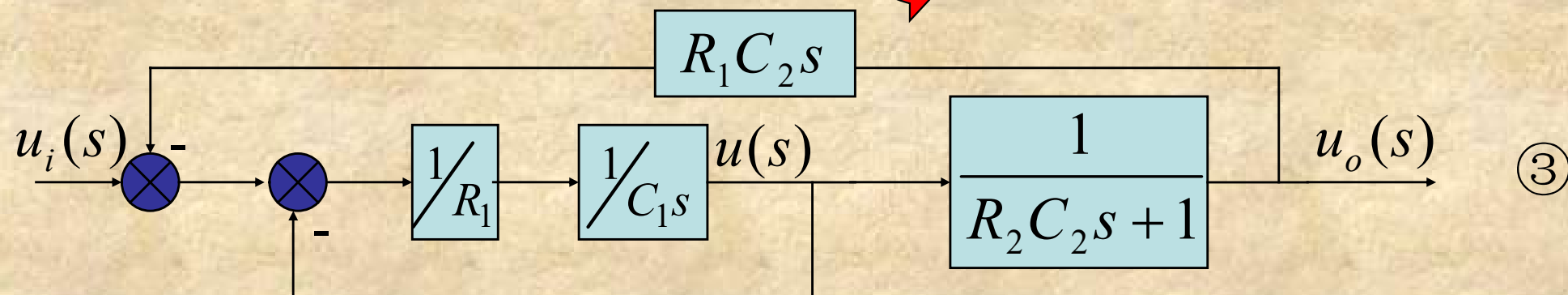
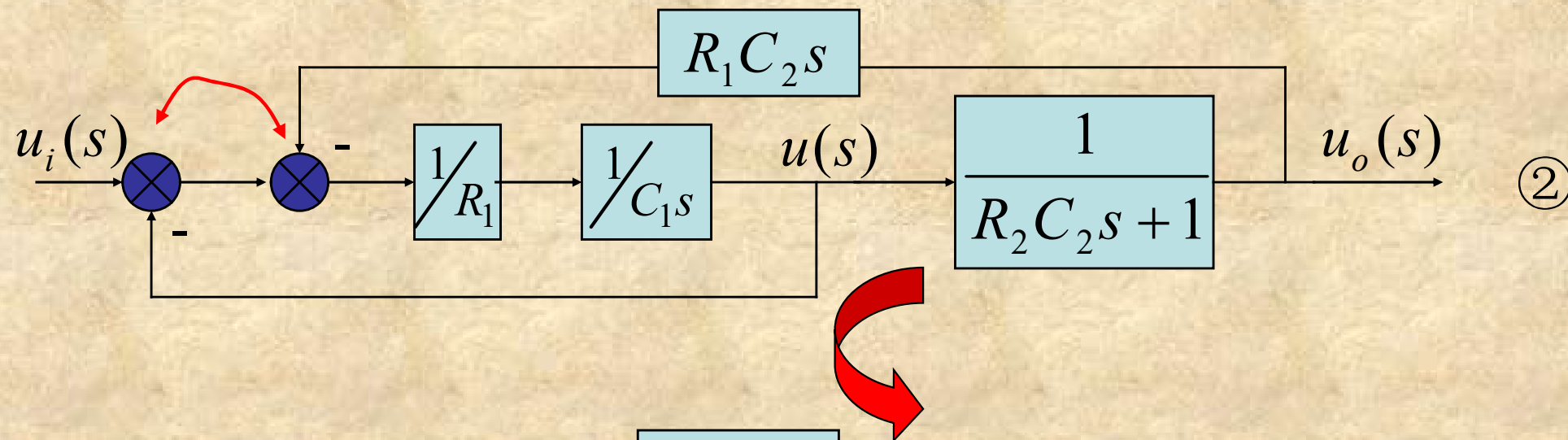
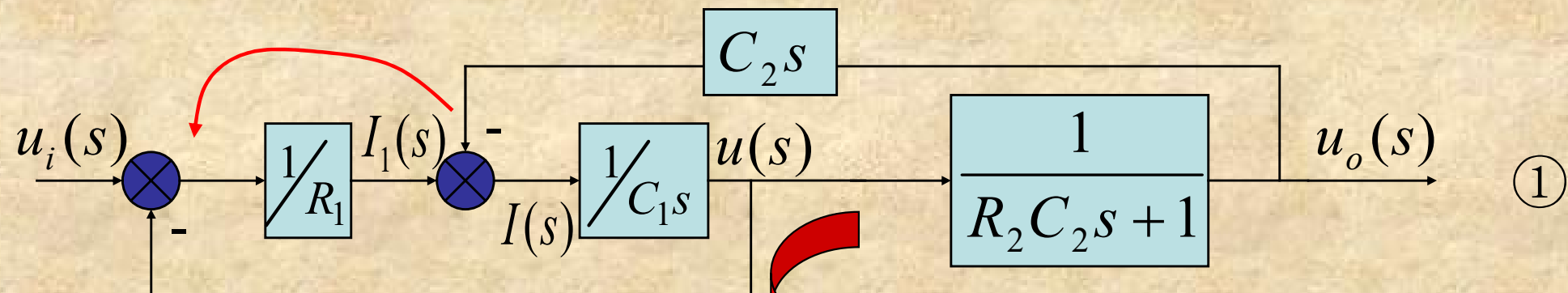
⑩ 相加点和分支点在一般情况下，不能互换

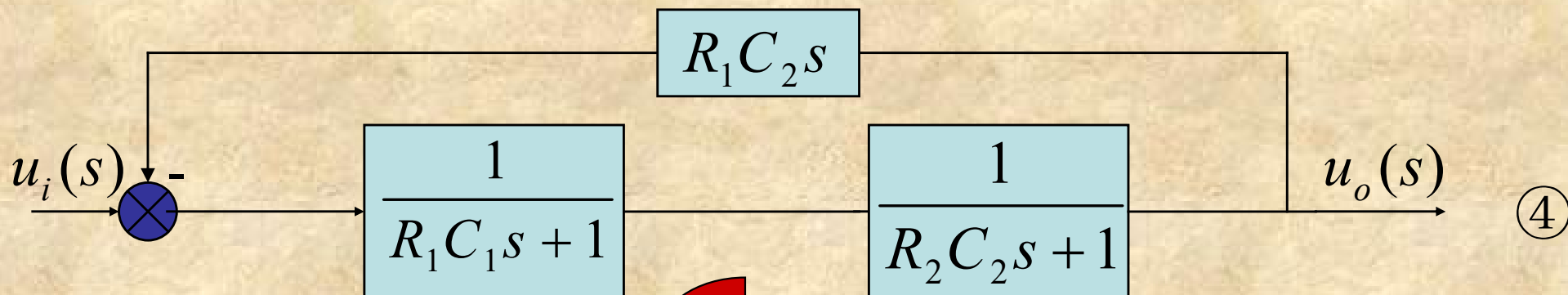
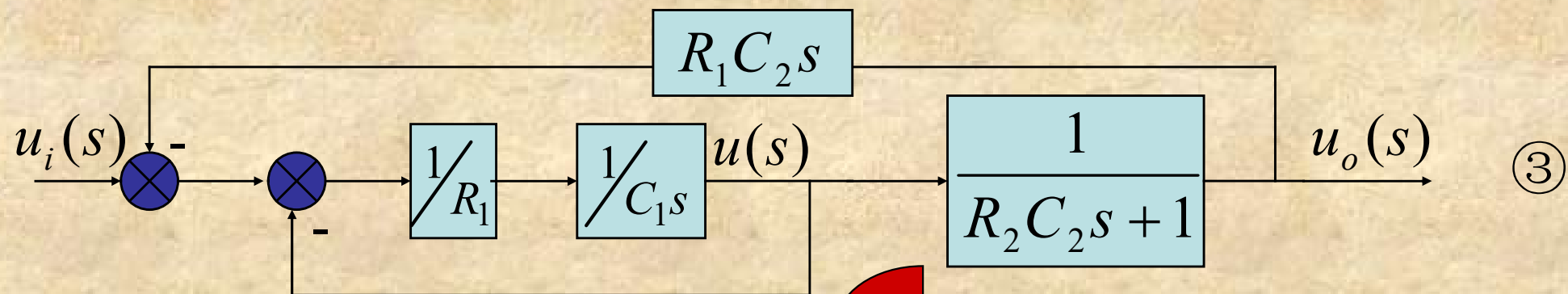


**例：** 已知某系统结构图如下， 试求其传递函数。



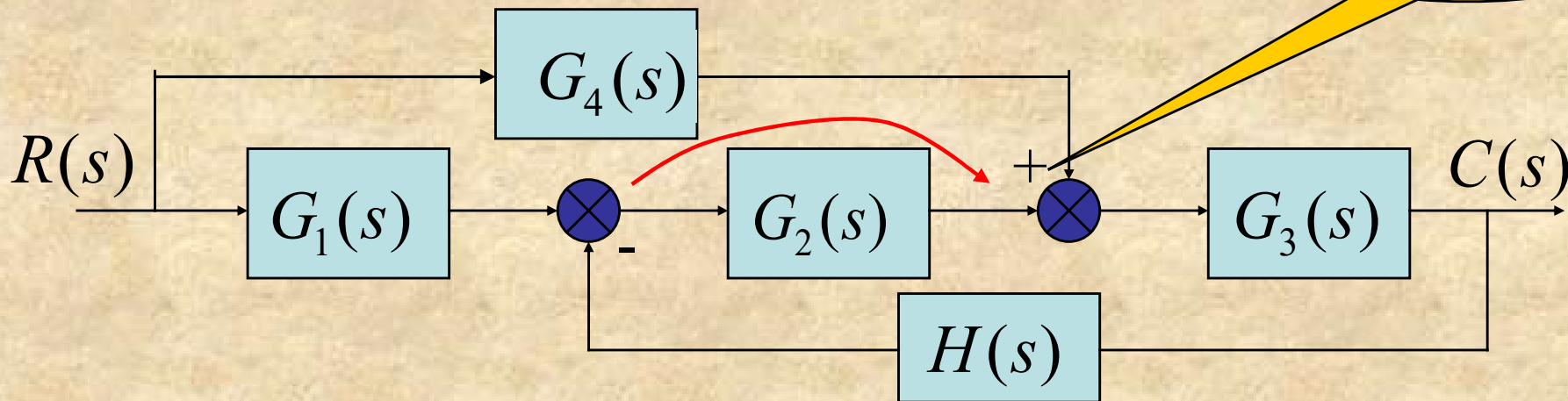
①





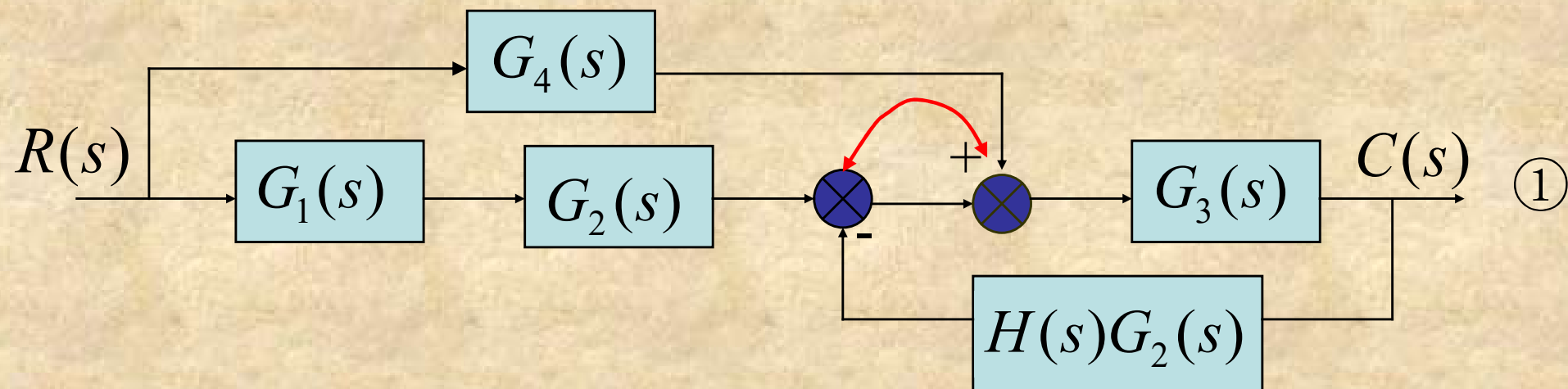
$$G(s) = \frac{u_o(s)}{u_i(s)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1C_2s}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}} = \frac{1}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + R_1C_2s}$$

例：系统结构图如下，求传函  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ 。

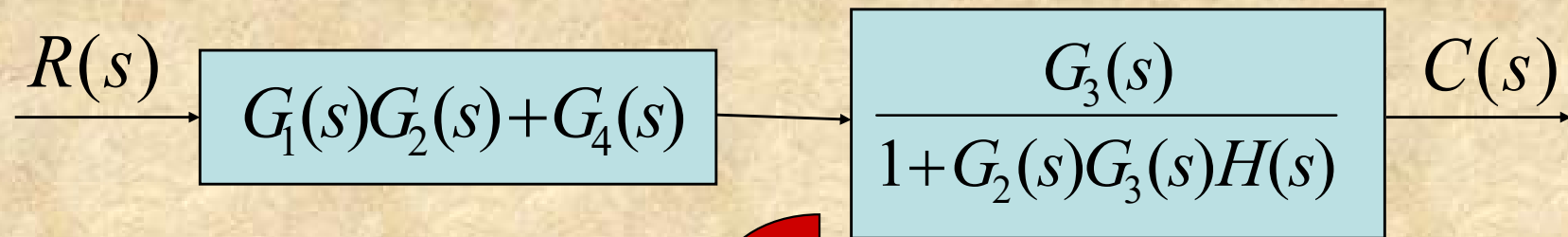
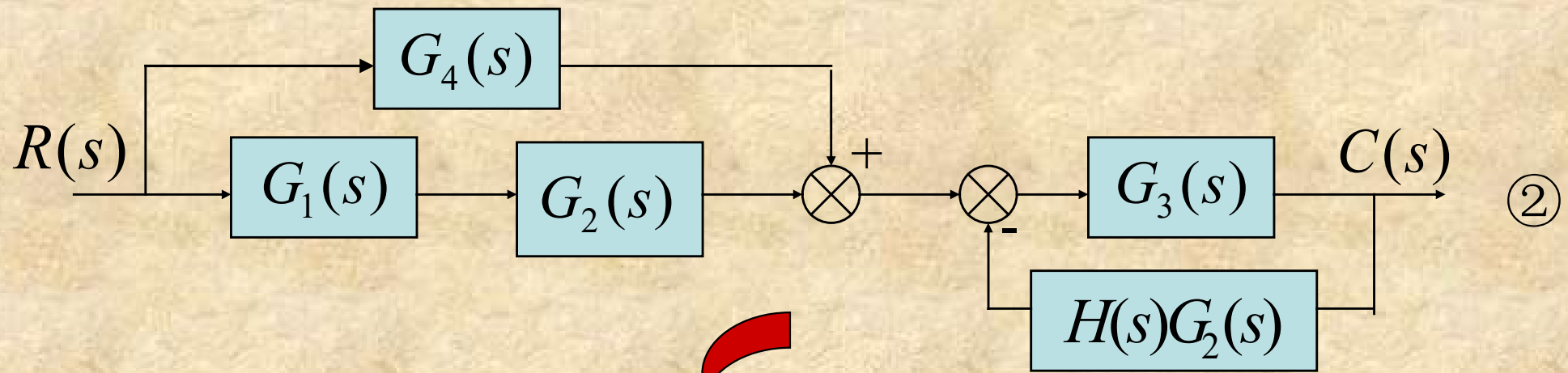


相加点移动

解：结构图等效变换如下：







$$G(s) = \frac{G_3(s)(G_1(s)G_2(s) + G_4(s))}{1 + G_2(s)G_3(s)H(s)}$$

**例： 2-14,2-15,2-16**

**作业： 2-17, 2-18, 2-21, 2-22， 下周交**

**本周开始做实验。**

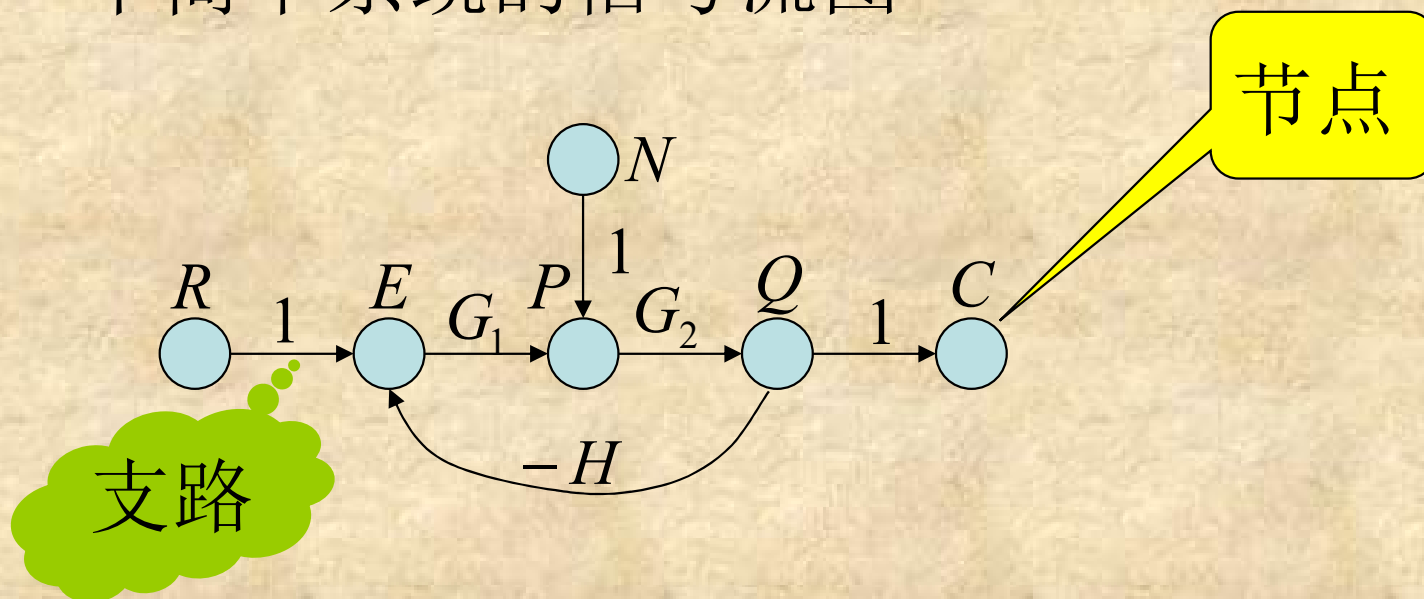
## 二. 信号流图的组成及绘制

**信号流图**：表示系统的结构和变量传递关系。

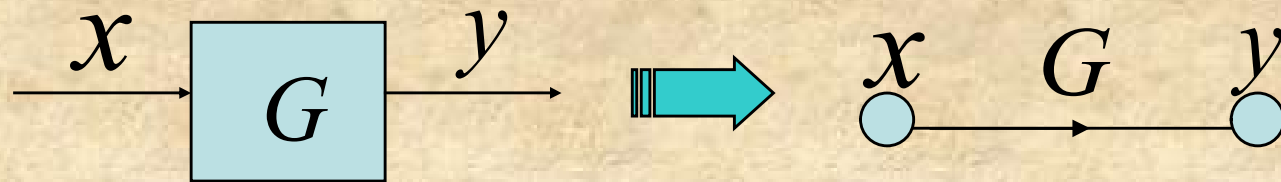
在求**复杂系统**的传递函数时较方便。

信号流图的组成：由节点和支路组成

**例：**一个简单系统的信号流图



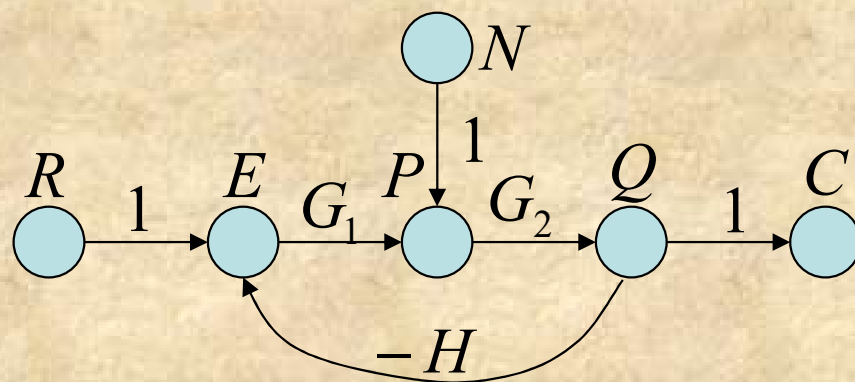
- 节点：节点表示变量。以小圆圈表示。
- 支路：连接节点之间的有向线段。支路上箭头方向表示信号传送方向，传递函数标在支路上箭头的旁边，称支路传输。



上图中，两者都具有关系： $y(s) = G(s)x(s)$ 。支路对节点 $x$ 来说是输出支路，对输出节点 $y$ 来说是输入支路。

## [有关术语]:

- ◆ 输入节点(源点)
- ◆ 输出节点(阱点)
- ◆ 混合节点: 既有输入支路又有输出支路的节点
- ◆ 前向通路: 从输入到输出, 每个节点至多经过一次的通路。

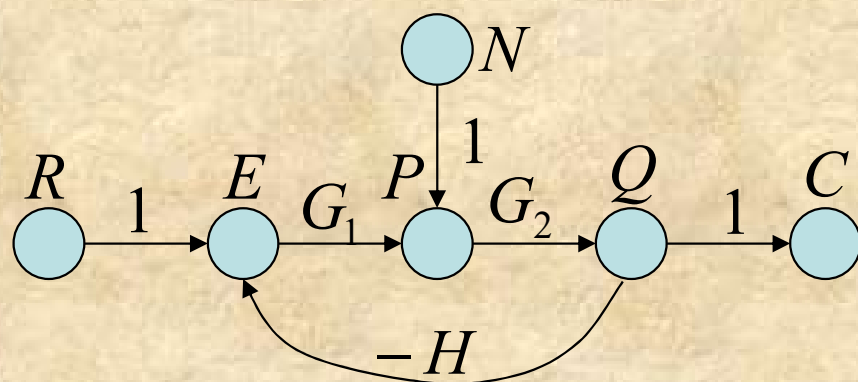




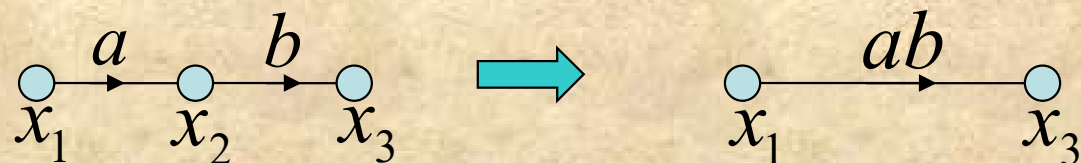
◆ 回路：起点和终点在同一节点，而且信号通过每一节点至多一次的闭合通路。

◆ 回路增益：所有支路增益之乘积

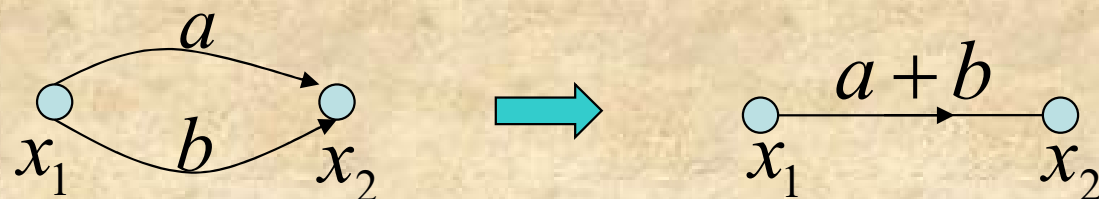
◆ 不接触回路：回路之间没有公共节点



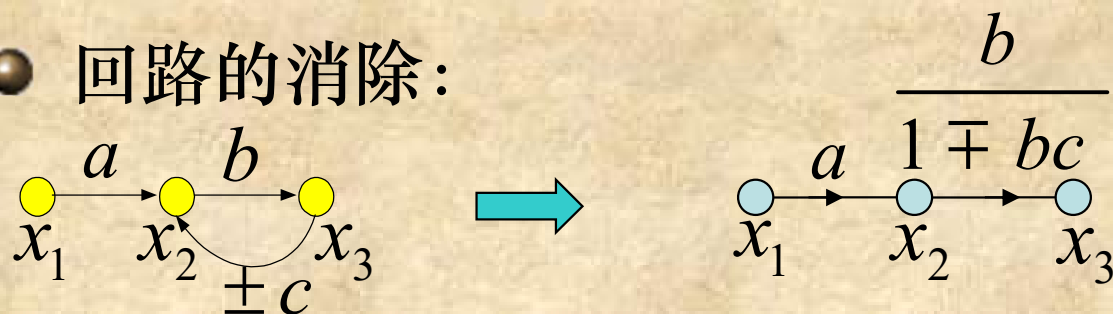
● 串联支路合并：



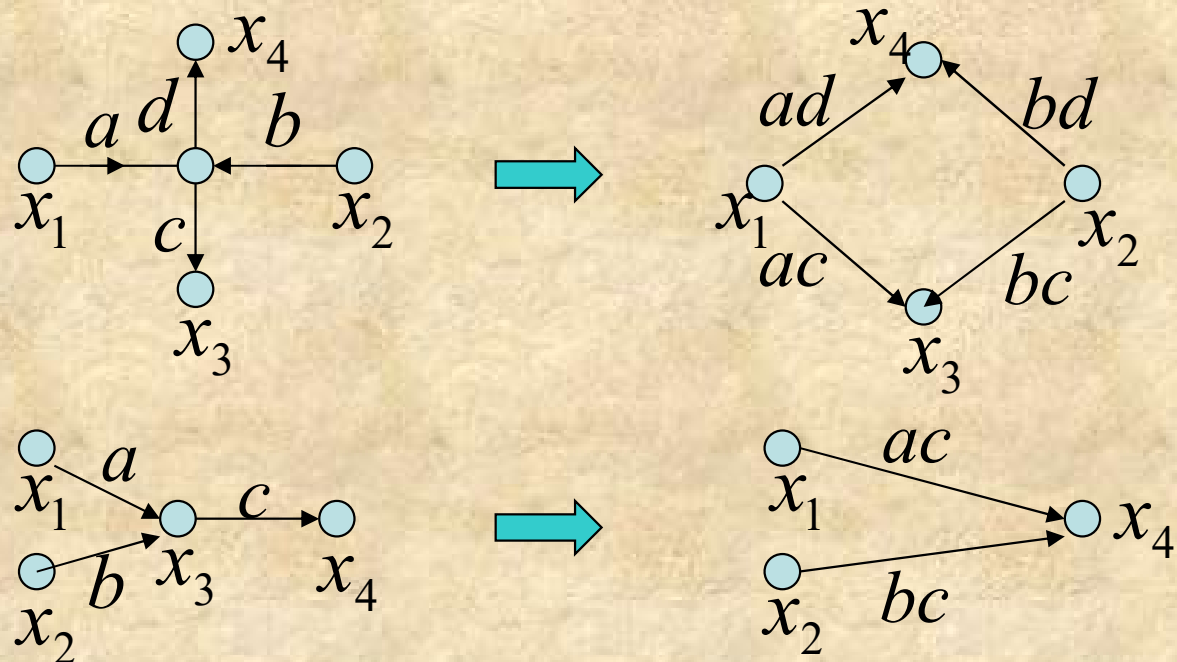
● 并联支路的合并：



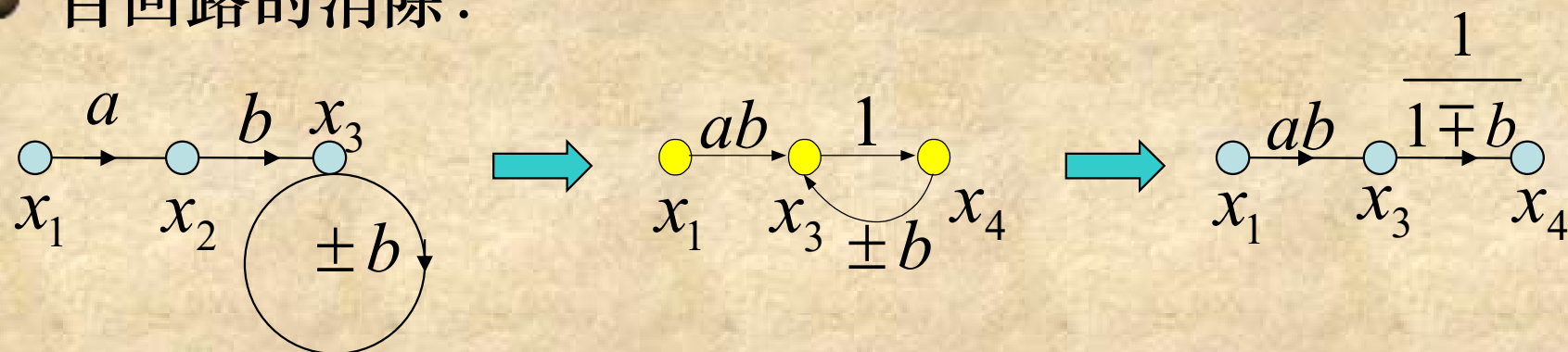
● 回路的消除：



## ● 混合支路的清除：



## ● 自回路的消除：



## 信号流图的性质

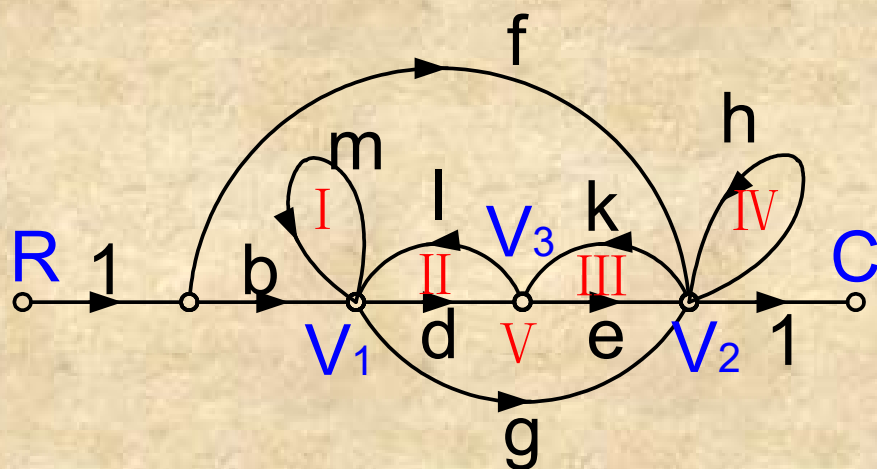
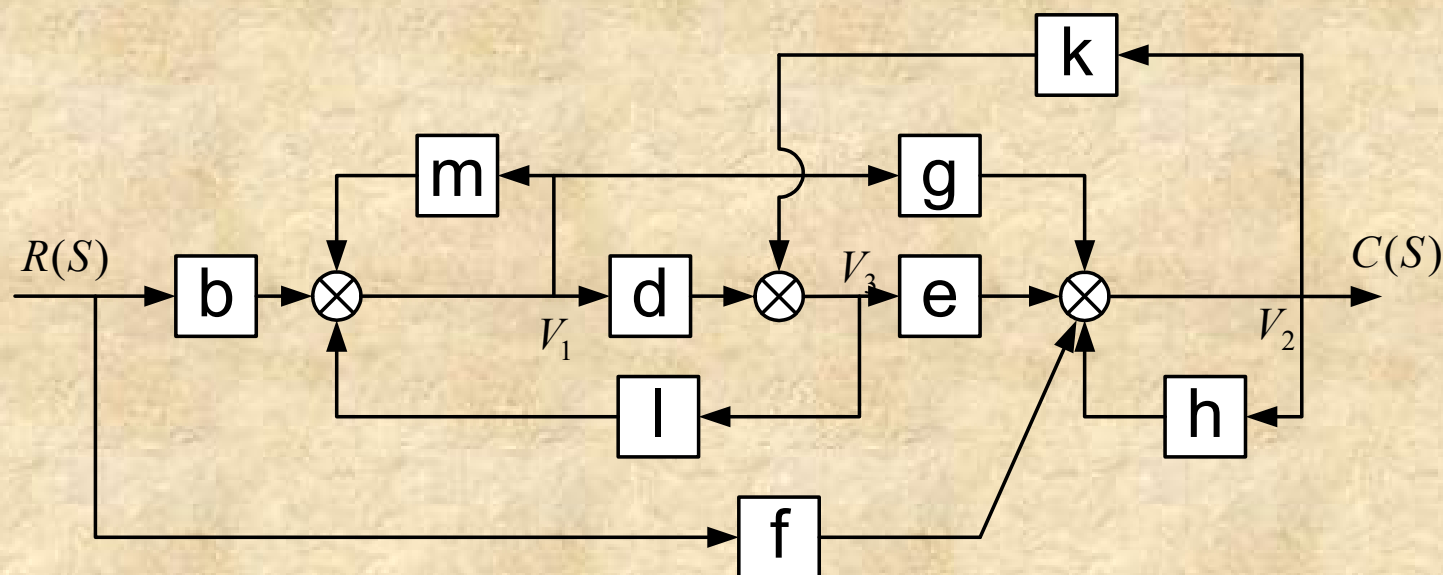
- 每个节点标志的变量是所有流向该节点的信号之代数和，而从同一节点流向各支路的信号均用该节点的变量表示。
- 支路相当于乘法器，信号在支路上单向传递。

## 由系统结构图绘制信号流图

- 小圆圈标志出信号：节点
- 标有传递函数的线段代替方框：支路

**例：**已知系统结构图如下，试画出其信号流图。

**解：**在结构图上标出节点，然后画出信号流图。





按微分方程拉氏变换后的代数方程所表示的变量间数学关系可以绘制信号流图。

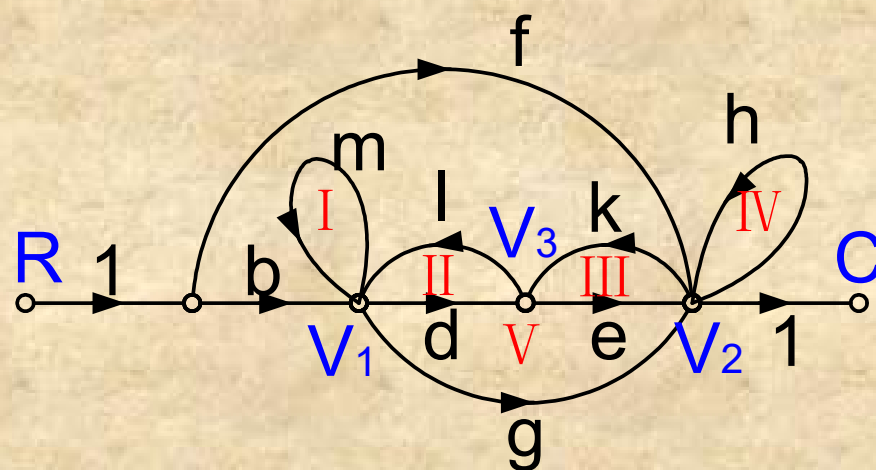
**例：**已知系统微分方程如下，绘制其信号流图。

$$V_1 = mV_1 + lV_3 + bR$$

$$C = V_2 = gV_1 + hV_2 + eV_3 + fR$$

$$V_3 = dV_1 + kV_2$$

**解：**按方程可绘制信号流图为：



### 三. 利用**Mason**公式计算系统的传递函数

**Mason**公式：直接求传函，来源于克莱姆法则

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

$\Delta$ ：特征式：

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_R \cdots$$

$P_k$ ：第k条从输入端到输出端前向通道传函

$\Delta_k$ ：在 $\Delta$ 中，把与第k条前向通道相接触的回路所在项去掉后余下部分，称为余子式。

$\Delta$  : 特征式的计算:

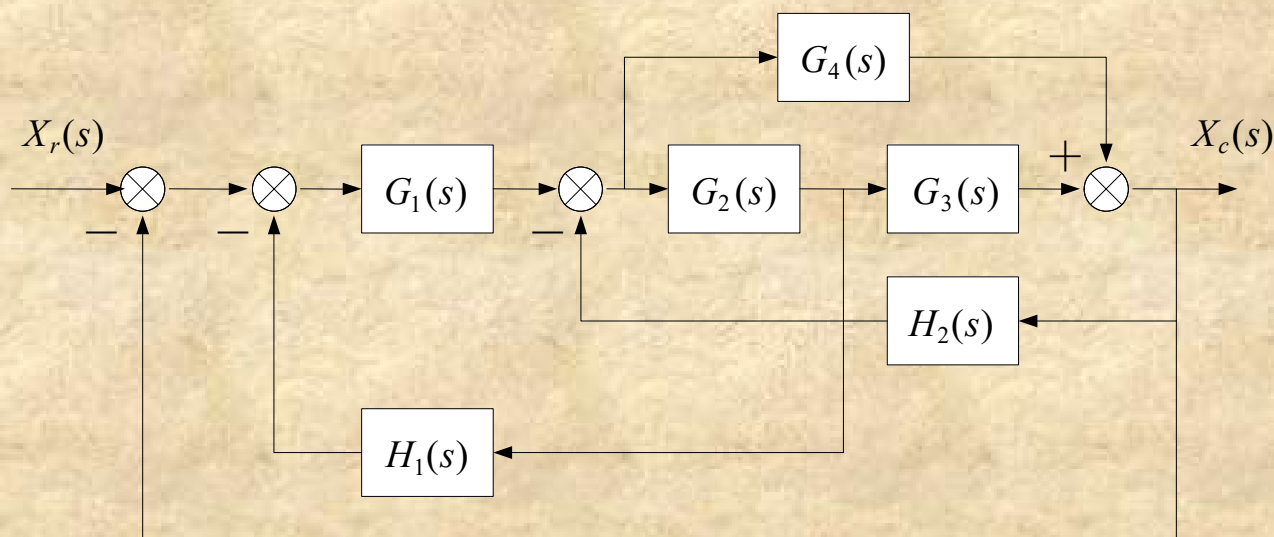
$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k \cdots$$

$\sum L_i$  : 各个回路的回路传递函数之和, 且带符号;

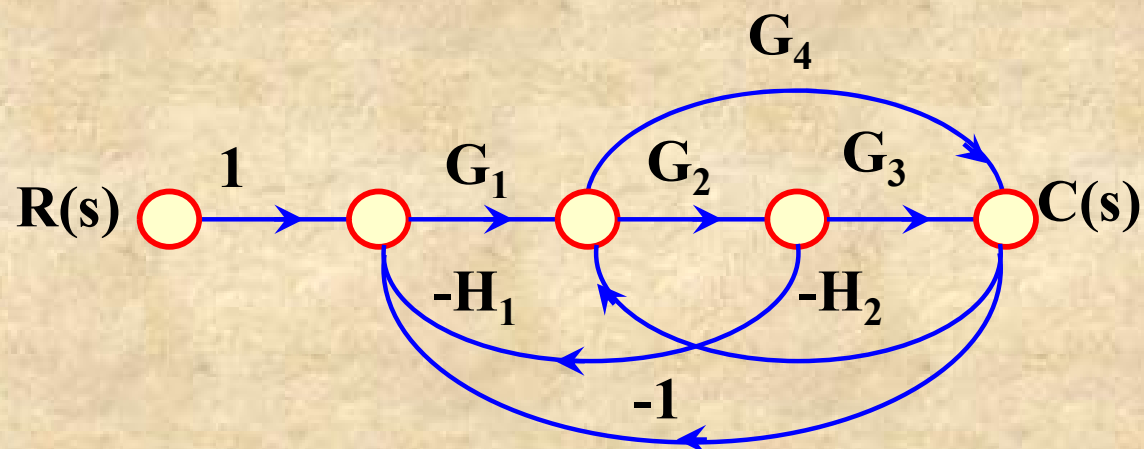
$\sum L_i L_j$  : 两两互不接触的回路传递函数乘积之和;

$\sum L_i L_j L_k$  : 所有三个互不接触回路传函乘积之和

**例：**试求如下系统的传递函数。



**解：**在结构图上标出节点，然后画出信号流图。





前向通道:  $P_1 = G_1 G_2 G_3$      $P_2 = G_1 G_4$

五个回路:  $L_1 = -G_1 G_2 G_3$      $L_2 = -G_1 G_4$      $L_3 = -G_1 G_2 H_1$

$L_4 = -G_2 G_3 H_2$      $L_5 = -G_4 H_2$

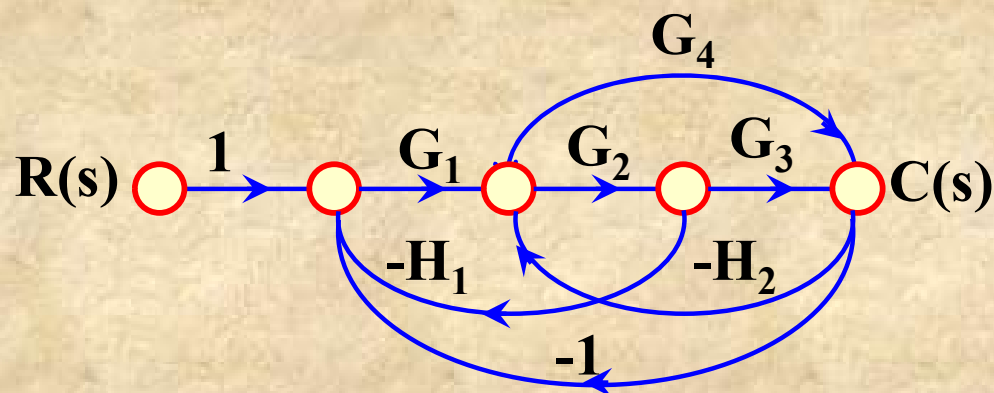
无不接触回路, 所以:

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 H_2$$

余因子式:  $\Delta_1 = 1$      $\Delta_2 = 1$

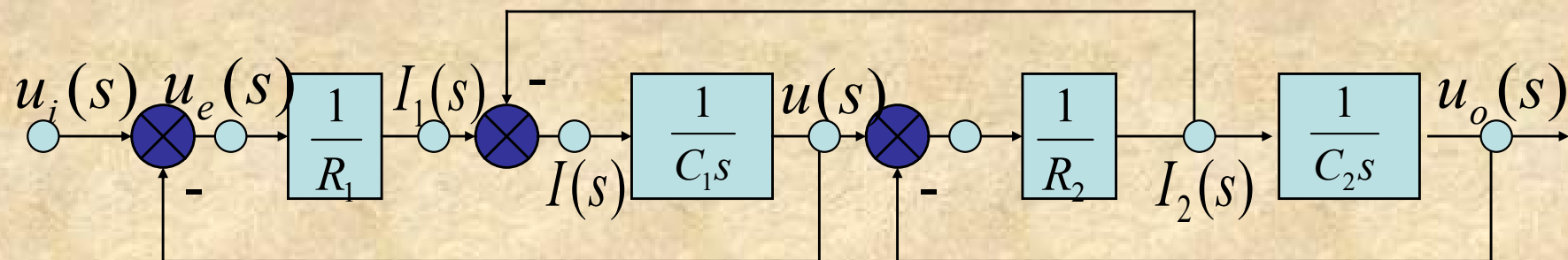


$$G_B(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{\Delta}$$

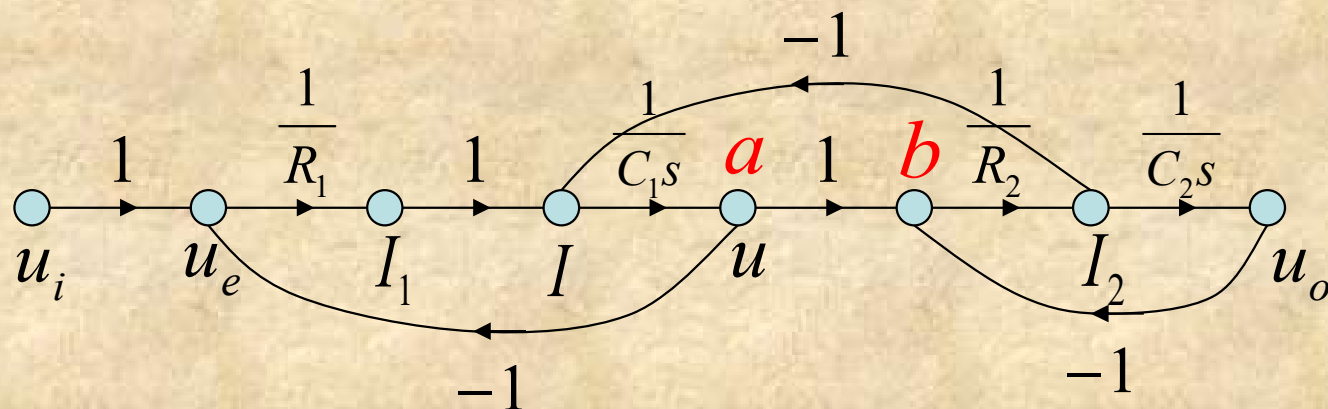


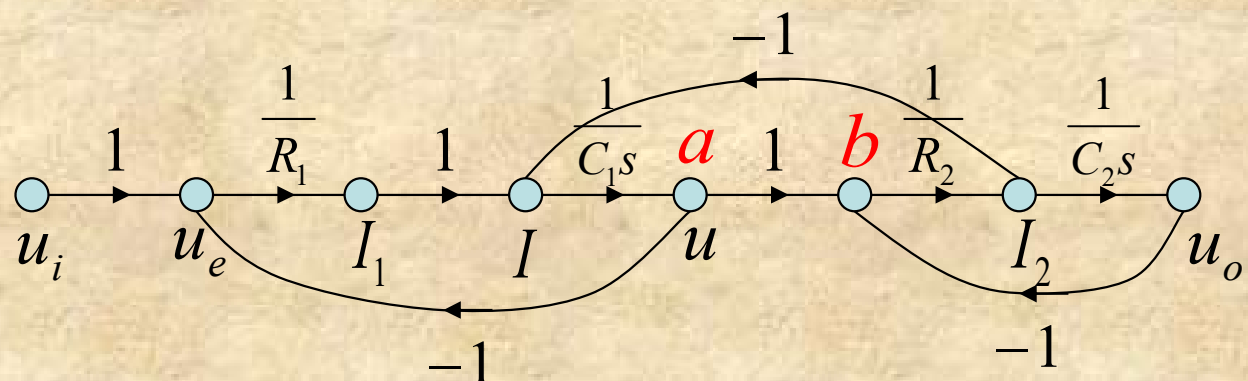


**例：**绘出下列系统的信号流图并计算传递函数。



**解：**先在结构图上标出节点，再根据逻辑关系画出信号流图如下：





回路：

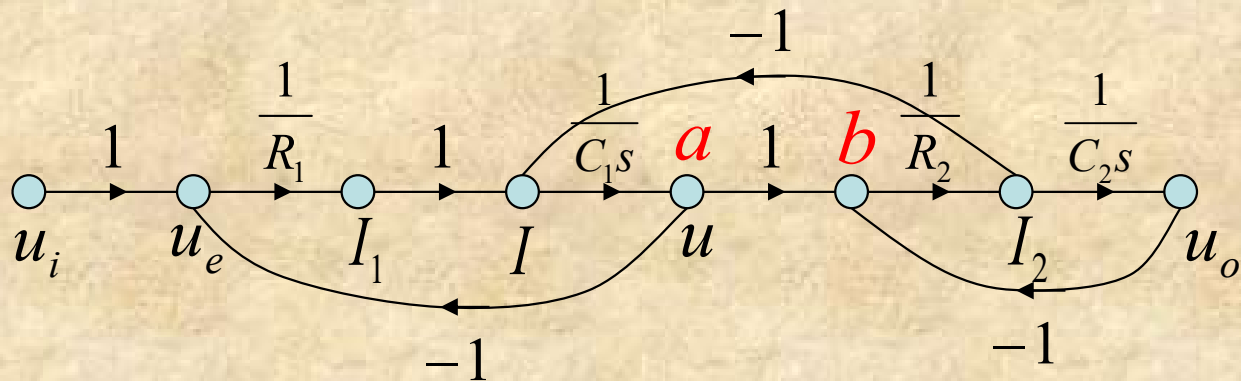
$$\sum L_a = \frac{-1}{R_1 C_1 s} + \frac{-1}{R_2 C_2 s} + \frac{-1}{R_2 C_1 s}$$

两两不接触回路：

$$\sum L_b L_c = \frac{-1}{R_1 C_1 s} \times \frac{-1}{R_2 C_2 s} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

无三三不接触回路

$$\Delta = 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$



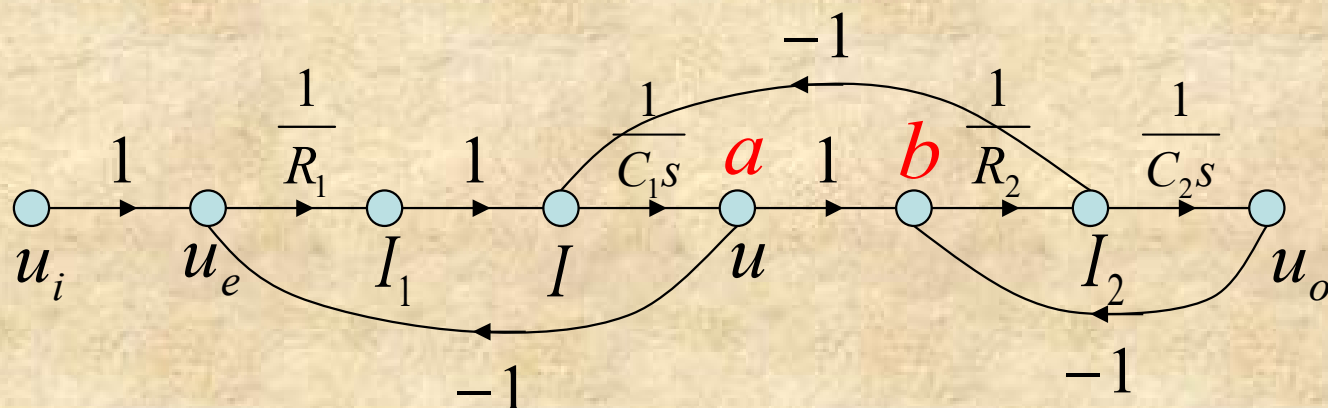
前向通道:

$$P_1 = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

三个回路都与前向通道接触  $\Rightarrow \Delta_i = 1$

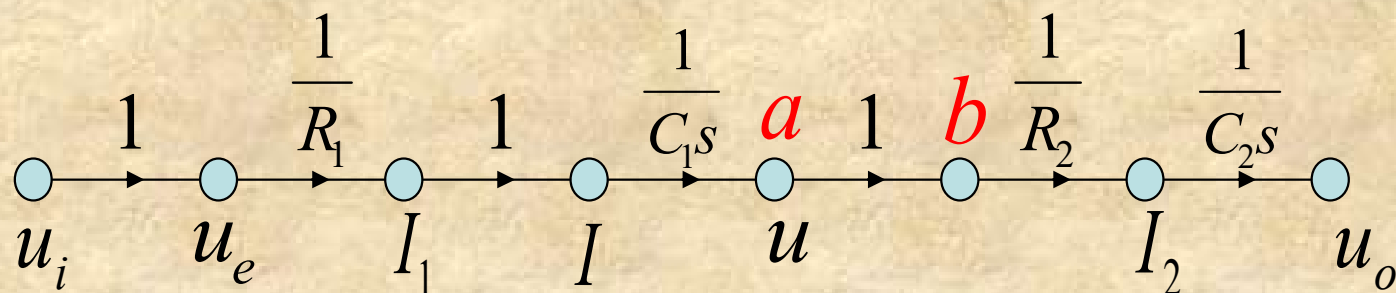
所以传递函数为:

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^1 P_k \Delta_k = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$



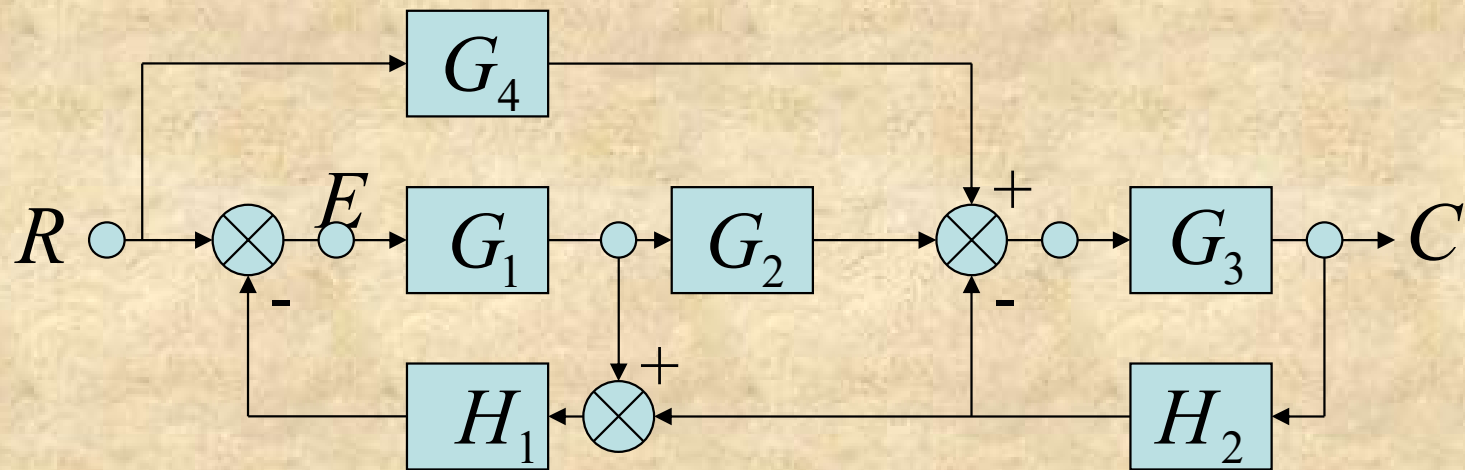
讨论：信号流图中，a点和b点之间的传输为1，是否可以将该两点合并？

不能合并！因为a、b两点的信号值不一样。

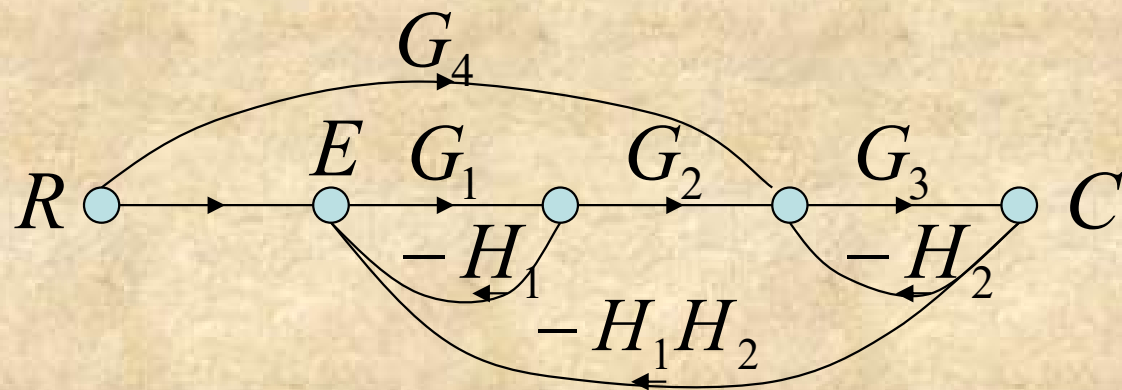


上图中， $u_i$ 和 $u_e$ ， $I_1$ 和 $I$ 可以合并吗？为什么？

例：计算下述结构图的传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$ ,  $\frac{E(s)}{R(s)}$

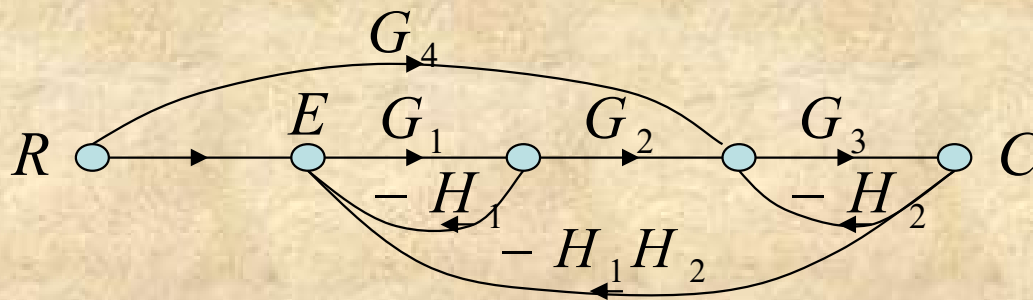


解：在结构图上标出节点，然后绘制信号流图：





◆ 求  $\frac{C(s)}{R(s)}$



前向通道为:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3, \quad P_2 = G_3 G_4$$

回路分别为:  $-G_1 H_1, -G_3 H_2, -G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

两两不接触回路:  $(-G_1 H_1)(-G_3 H_2)$

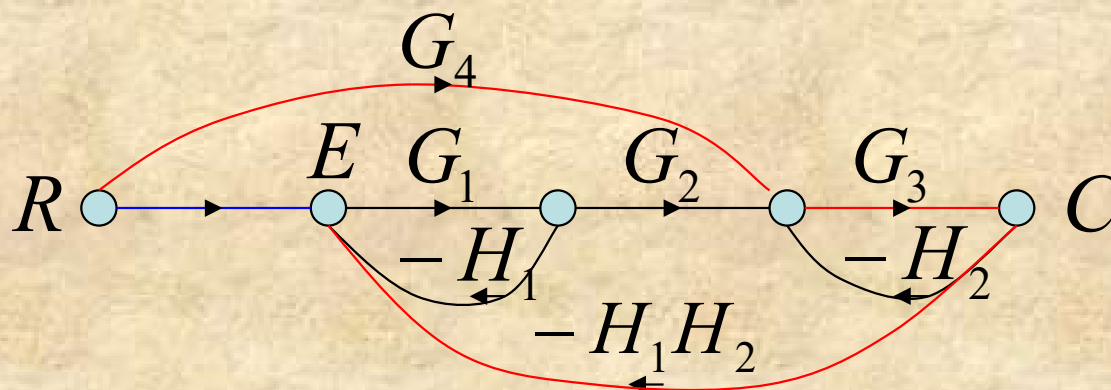
$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c = 1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_3 H_1 H_2$$

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1 + G_1 H_1$$



$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^2 P_k \Delta_k = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4 + G_1 G_3 G_4 H_1}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_3 H_1 H_2}$$

◆ 求  $\frac{E(s)}{R(s)}$



$\Delta$  不变

$$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 + G_3 H_2$$

(蓝线表示)



$$P = \frac{1 + G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 H_2}{\Delta}$$

$$P_2 = -G_3 G_4 H_1 H_2, \Delta_2 = 1$$

(红线表示)

**注意：** 对于一个给定的系统，特征表达式  $\Delta$  总是不变的，可以试着求一下。

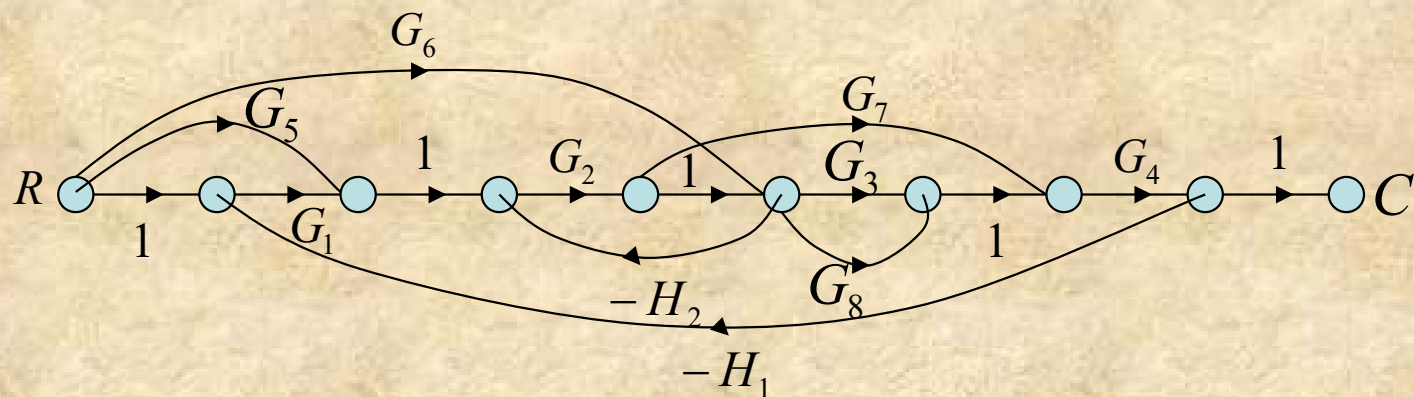
**注意：**梅森公式只能求系统的总增益，即输出对输入的增益。而输出对混合节点（中间变量）的增益就不能直接应用梅森公式。

对此问题有两种方法求其传递函数：

一、把该混合节点的所有输入支路去掉，然后再用梅森公式

二、分别用梅森公式求取输出节点及该节点对输入节点的传递函数，然后把它们的结果相比，即可得到输出对该混合节点的传递函数

**例：** 试统计以下信号流图有几个回路和前向通道。



**回路：**

$$-G_2H_2, -G_1G_2G_3G_4H_1, -G_1G_2G_7G_4H_1, -G_1G_2G_8G_4H_1$$

$$\therefore \Delta = 1 + G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_7G_4H_1 + G_1G_2G_8G_4H_1$$

**有九条前向通道，分别是：**

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4$$

$$P_4 = G_5G_2G_3G_4$$

$$P_7 = G_6G_3G_4$$

$$P_2 = G_1G_2G_7G_4$$

$$P_5 = G_5G_2G_7G_4$$

$$P_8 = G_6G_8G_4$$

$$P_3 = G_1G_2G_8G_4$$

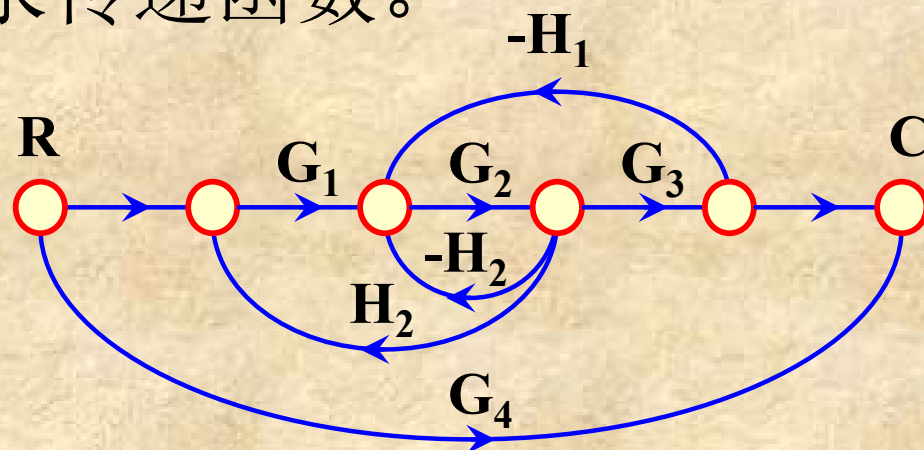
$$P_6 = G_5G_2G_8G_4$$

$$P_9 = -G_6H_2G_2G_7G_4$$



**例：**已知系统信号流图，求传递函数。

**解：**回路： $L_1 = -G_2 H_2$   
 $L_2 = G_1 G_2 H_2$      $L_3 = -G_2 G_3 H_1$



回路均相互接触，则：

$$\Delta = 1 - \sum L_a = 1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1 - G_1 G_2 H_2$$

前向通路：

$P_1 = G_1 G_2 G_3$ ，没有与之不接触的回路： $\Delta_1 = 1$

$P_2 = G_4$ ，与所有回路不接触： $\Delta_2 = \Delta$



$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1 - G_1 G_2 H_2} + G_4$$



**例：** 已知系统信号流图，求传递函数  $X_4/X_1$  及  $X_2/X_1$ 。

**解：** 回路：

$$\sum L_a = -d - eg - bcg$$

两两互不接触回路：

$$\sum L_b L_c = deg$$

则  $\Delta = 1 + d + eg + bcg + deg$

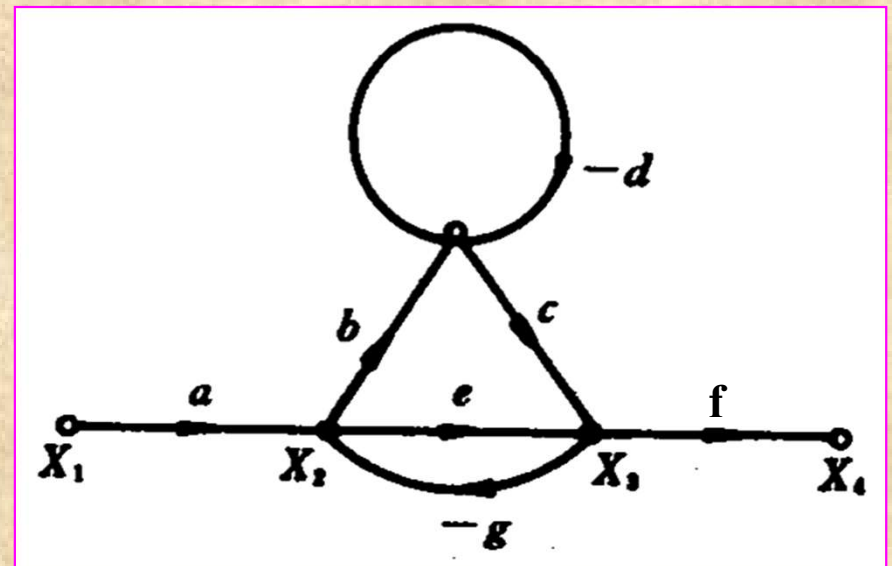
1.  $X_1 \rightarrow X_4, p_1 = aef, p_2 = abcf$

$$\Delta_1 = 1 + d, \Delta_2 = 1$$

$$\frac{X_4}{X_1} = \frac{1}{\Delta} (p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2) = \frac{aef(1+d) + abcf}{1 + d + eg + bcg + deg}$$

2.  $X_1 \rightarrow X_2, p_1 = a, \Delta_1 = 1 + d$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1}{\Delta} p_1 \Delta_1 = \frac{a(1+d)}{1 + d + eg + bcg + deg}$$

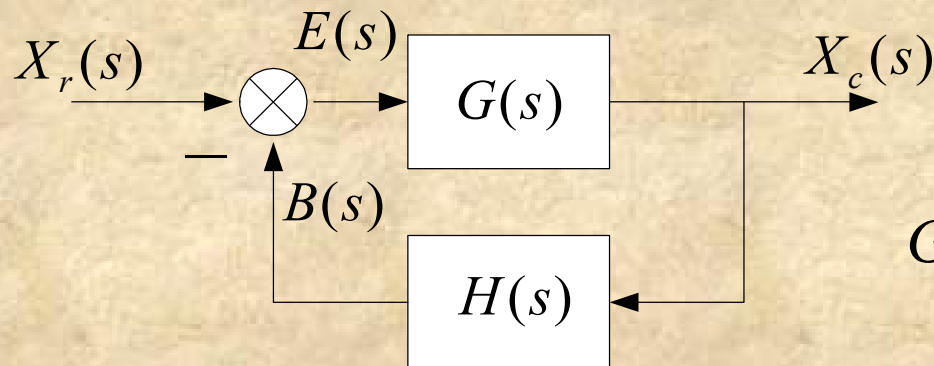


## 四. 系统的传递函数

基本概念：开环传递函数 **vs** 闭环传递函数

开环传递函数：把主反馈断开后，从输入信号到反馈信号之间的传递函数。

闭环传递函数：输出信号与输入信号的拉氏变换之比。



$$G_k(s) = G(s)H(s)$$

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_k(s)}$$

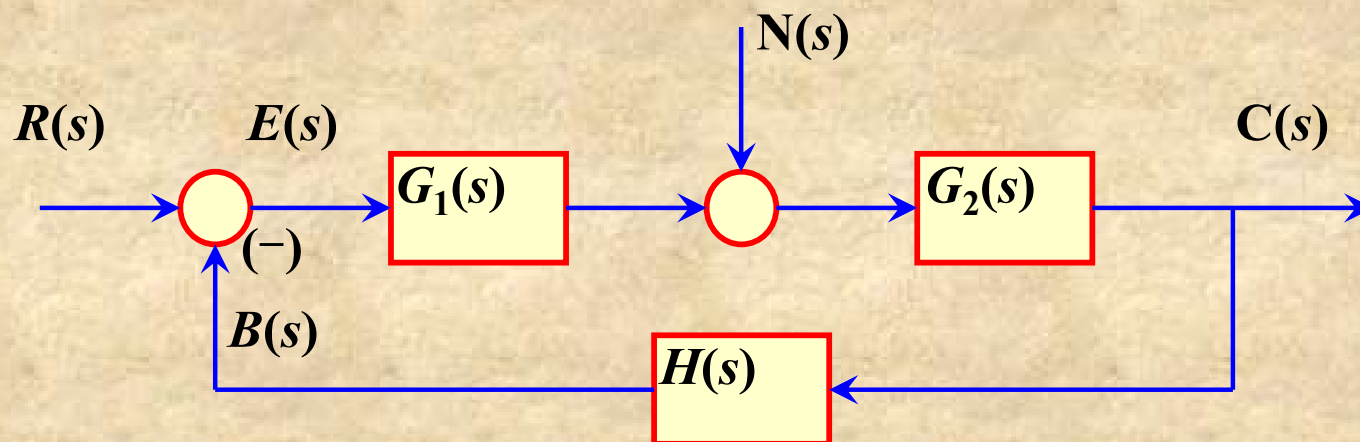
## 输出量对给定量和扰动量的传函

- 对给定量传函：（ $N(s) = 0$ ）

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 对扰动量传函：（ $R(s) = 0$ ）

$$\Phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1G_2H}$$



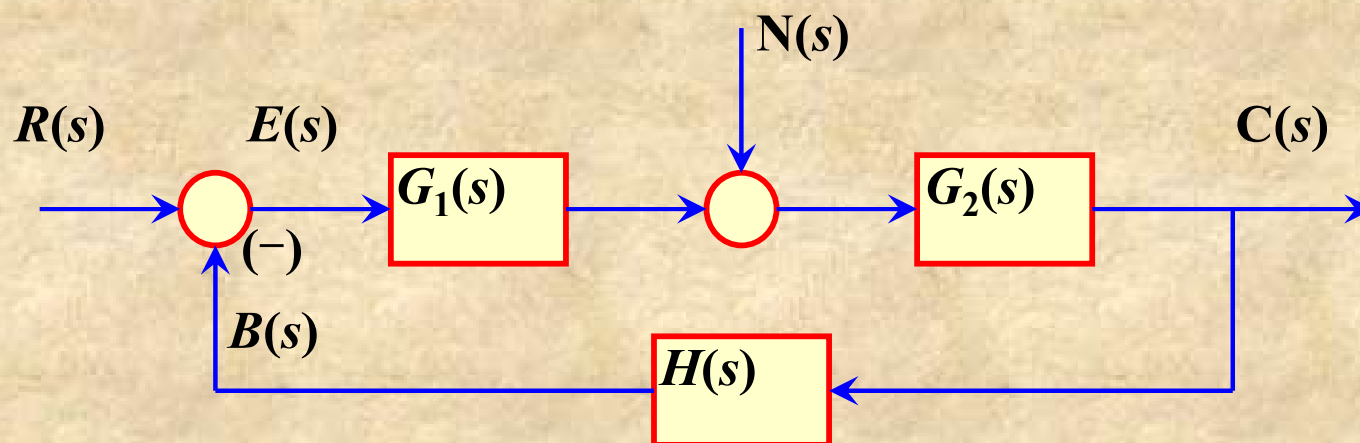
## 误差传递函数

- 对给定量传函：（ $N(s) = 0$ ）

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G_k(s)}$$

- 对扰动量传函：（ $R(s) = 0$ ）

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2H}{1 + G_1G_2H}$$



## 2-4 数学模型的实验测定

自 学



对本章内容有疑问？

