第2章 电阻电路的等效变换

本章重点

● 重点：

1. 电路等效的概念；
2. 电阻的串、并联；
3. 电阻的Y—Δ 变换;
4. 电压源和电流源的等效变换；

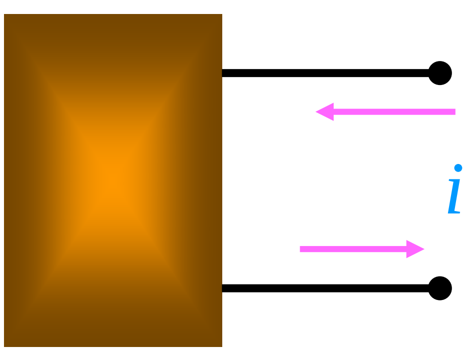
电阻电路 → 仅由电源和线性电阻构成的电路

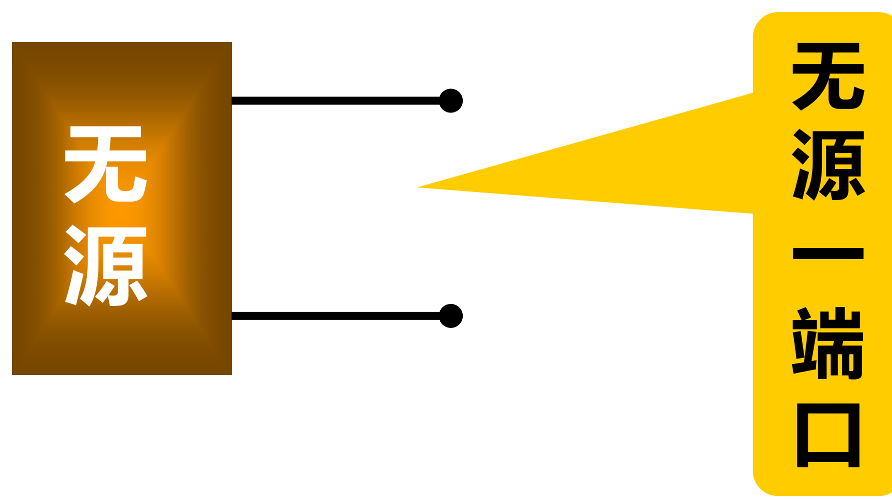
分析方法 → ①欧姆定律和基尔霍夫定律是分析电阻电路的依据；

②等效变换的方法,也称化简的方法。

2.2 电路的等效变换

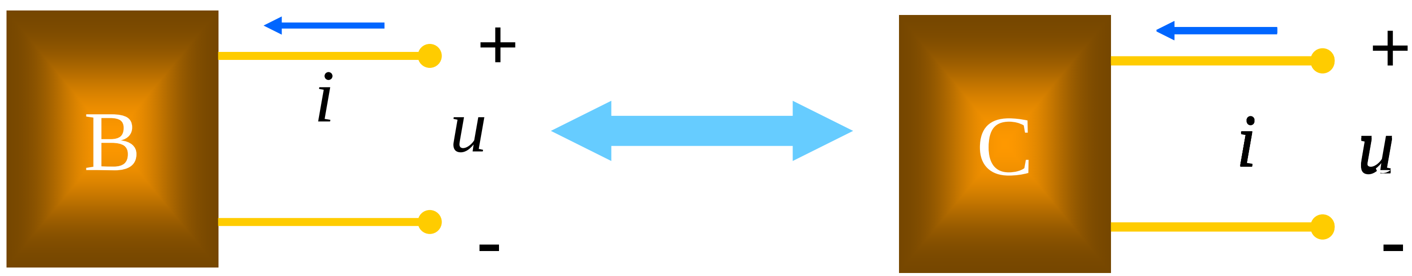
任何一个复杂的电路, 向外引出两个端子，且从一个端子流入的电流等于从另一端子流出的电流，则称这一电路为二端网络 (或一端口网络)。



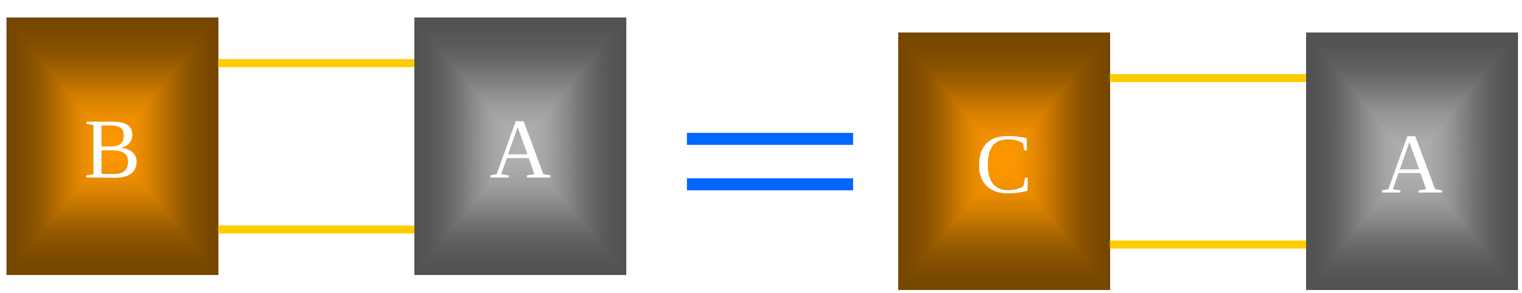


2.两端电路等效的概念

两个两端电路，端口具有相同的电压、电流关系,则称它们是等效的电路。



对A电路中的电流、电压和功率而言，满足：



明确

→ 两电路具有相同的VCR；

②电路等效变换的对象：

→ 未变化的外电路A中的电压、电流和功率；（即对外等效，对内不等效）

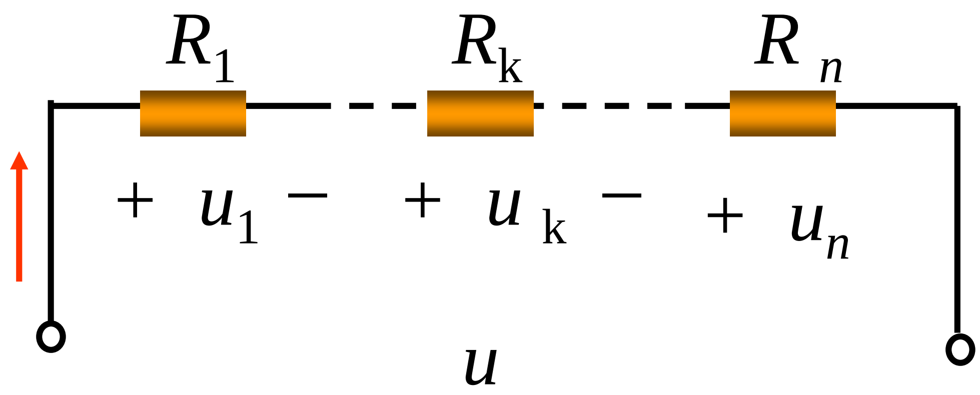
③电路等效变换的目的：

→ 化简电路，方便计算。

2.3 电阻的串联和并联

1.电阻串联

①电路特点

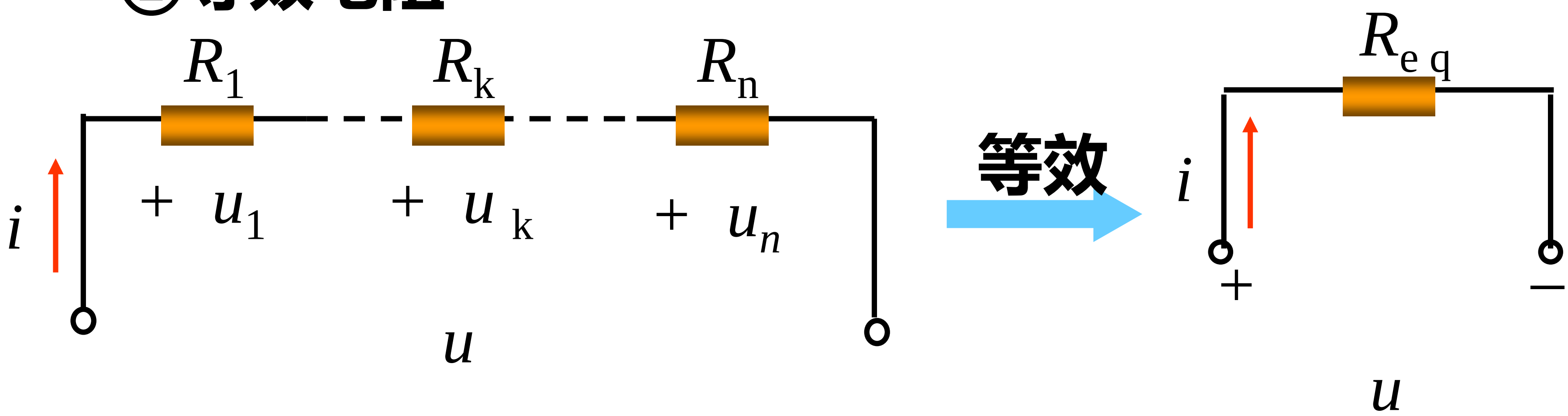


(a) **各电阻顺序连接，流过同一电流** (KCL)；

(b) **总电压等于各串联电阻的电压之和** (KVL)。

$$u = u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

②等效电阻



由欧姆定律

$$u = R_1 i + \cdots + R_K i + \cdots + R_n i = (R_1 + \cdots + R_n) i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k > R_k$$

结论 **串联电路的总电阻等于各分电阻之和。**

③串联电阻的分压

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u < u$$

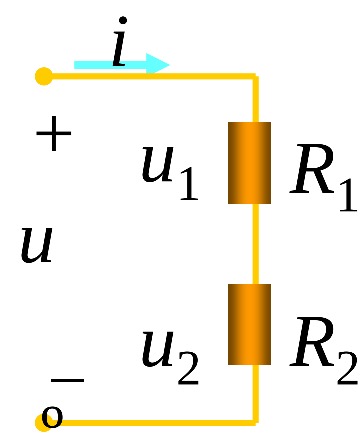
表明

电压与电阻成正比，因此串联电阻电路可作分压电路。

例

两个电阻的分压：

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \qquad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$



④功率

$$p_1=R_1 i^2,\quad p_2=R_2 i^2,\quad \dots,\quad p_n=R_n i^2$$

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n$$

总功率

$$p=R_{eq} i^2 = (R_1 + R_2 + \dots + R_n)\, i^2$$

$$=R_1 i^2 + R_2 i^2 + \dots + R_n i^2$$

$$=p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

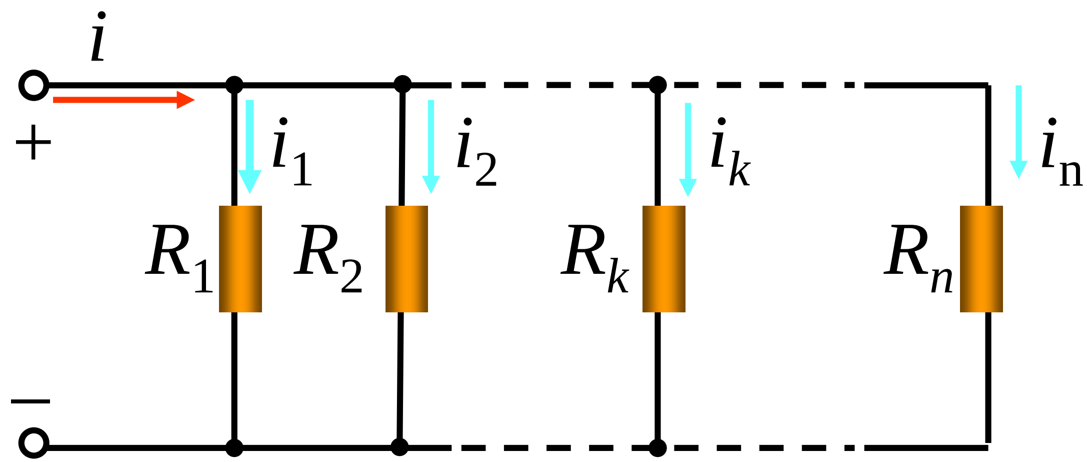
表明

①电阻串联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成正比；

②等效电阻消耗的功率等于各串联电阻消耗功率的总和。

2. 电阻并联

①电路特点

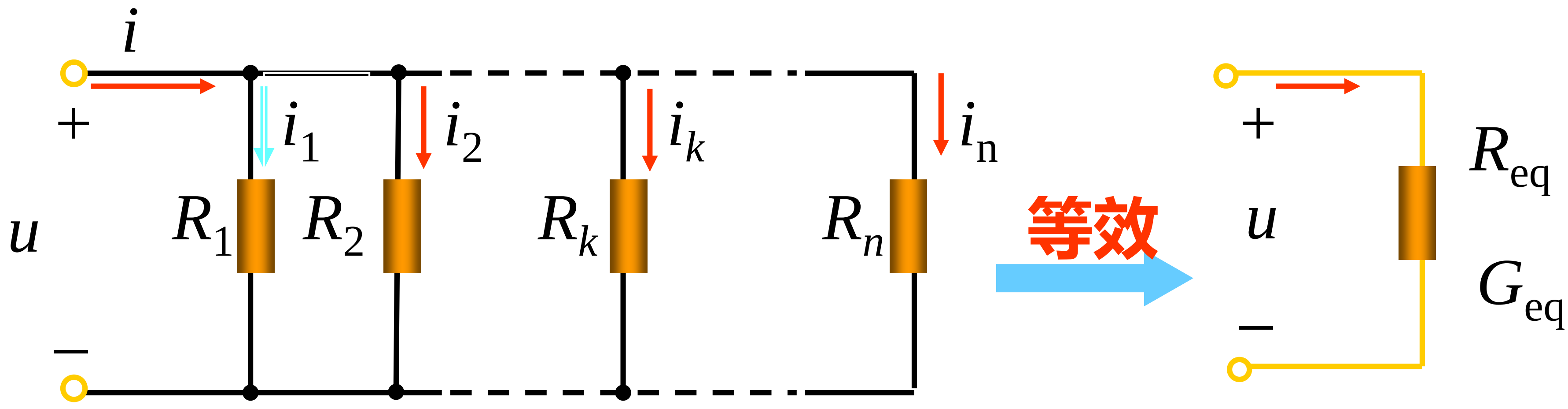


(a)各电阻两端为同一电压（KVL)；

(b)总电流等于流过各并联电阻的电流之和(KCL)。

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots + i_n$$

②等效电阻



由KCL: $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots + i_n$

$$= u/R_1 + u/R_2 + \ldots + u/R_n$$

$$= u(1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n) = uG_{eq}$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k > G_k$$

结论 **等效电导等于并联的各电导之和。**

$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad 即 \quad R_{eq} < R_k$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k > G_k$$

③并联电阻的分流

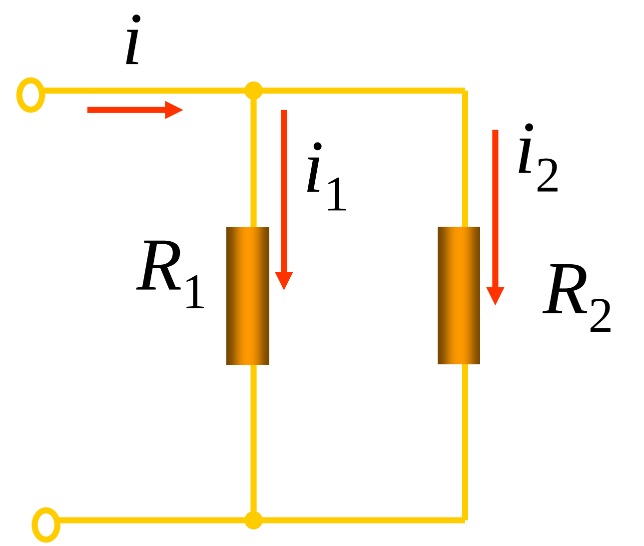
电流分配与电导成正比

$$\frac{i_k}{i} = \frac{u / R_k}{u / R_{\mathrm{eq}}} = \frac{G_k}{G_{\mathrm{eq}}} \quad \longrightarrow \quad i_k = \frac{G_k}{G_{\mathrm{eq}}} i$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} i$$

两电阻的分流：



$$G_{eq} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_1 i}{R_1 + R_2} = (i - i_1)$$

④功率

$$p_1=G_1u^2,\quad p_2=G_2u^2,\quad \dots,\quad p_n=G_nu^2$$

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = G_1 : G_2 : \dots : G_n$$

总功率

$$p=G_{eq}u^2 = (G_1+G_2+\dots+G_n)\,u^2$$
$$=G_1u^2+G_2u^2+\dots+G_nu^2$$
$$=p_1+p_2+\dots+p_n$$

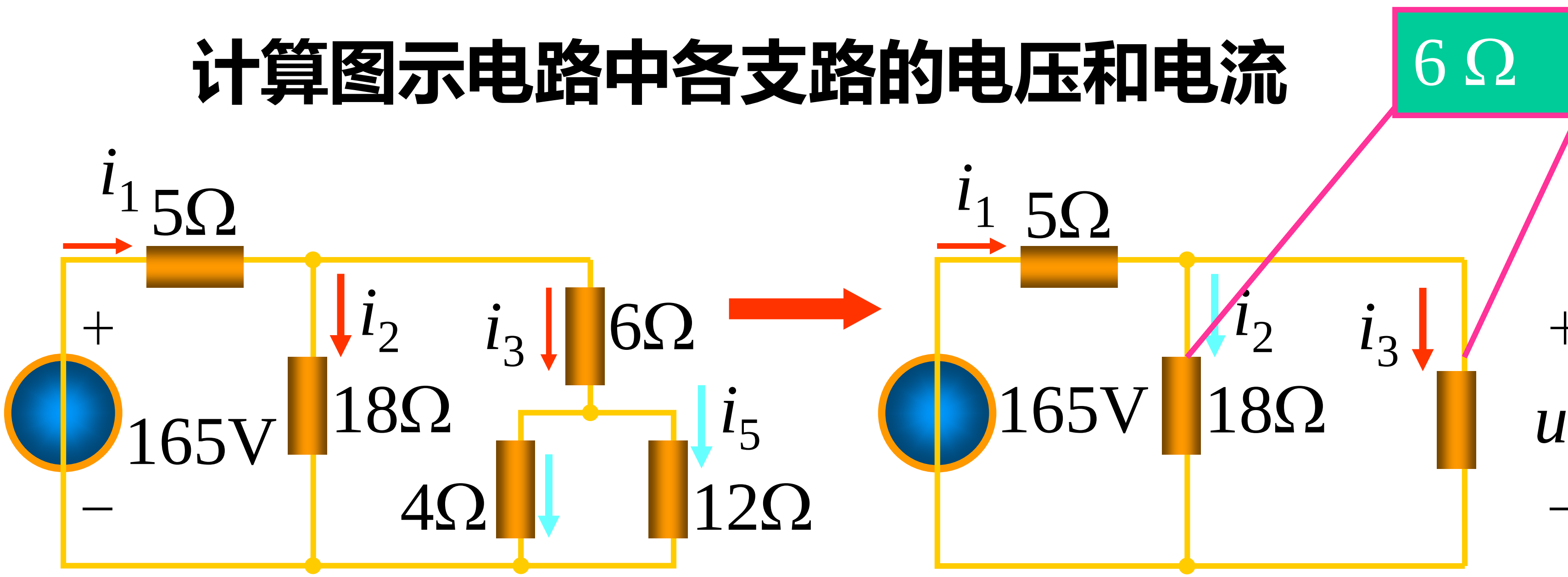
表明

①电阻并联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成反比；

②等效电阻消耗的功率等于各并联电阻消耗功率的总和

电路中有电阻的串联，又有电阻的并联，这种连接方式称电阻的串并联。

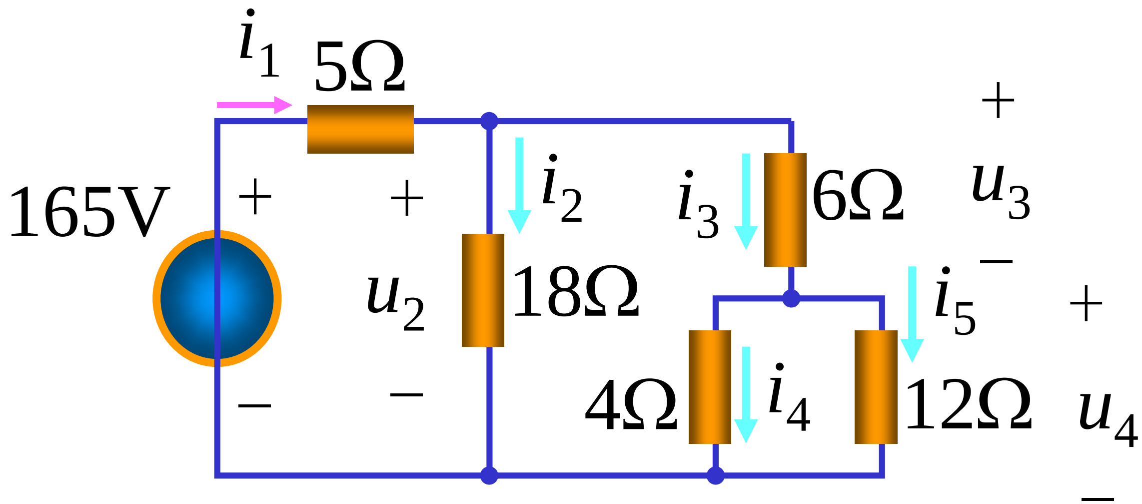
计算图示电路中各支路的电压和电流



$$i_1 = 165/11 = 15\text{A}$$

$$u_2 = 165\text{V} - 5\Omega \times 15\text{A} = 90\text{V}$$

$$u_2 = 6i_1 = 6 \times 15 = 90\text{V}$$



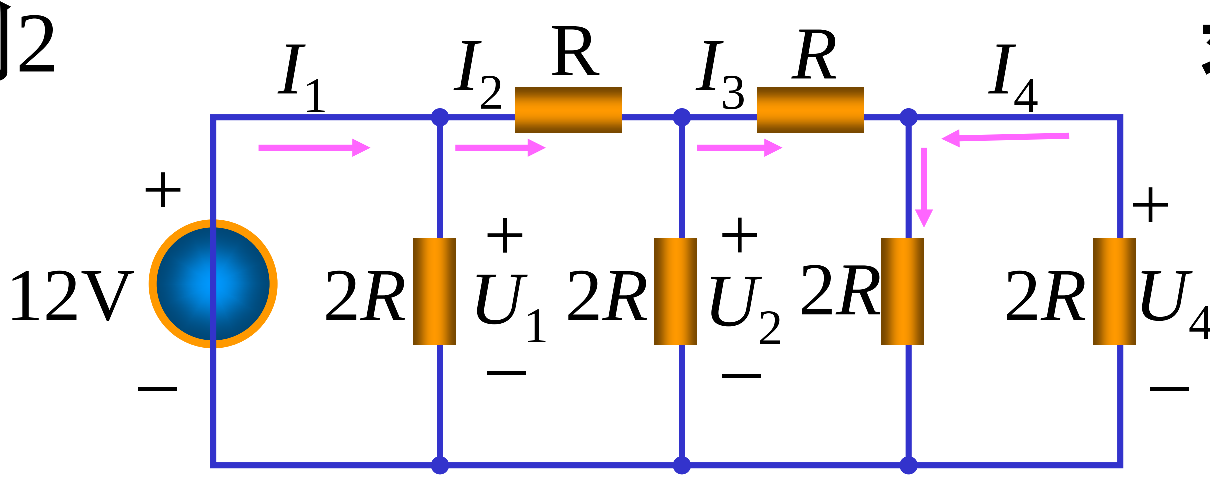
$$i_2 = 90/18 = 5\text{A} \qquad u_3 = 6i_3 = 6\times 10 = 60\text{V}$$

$$i_3 = 15 - 5 = 10\text{A} \qquad u_4 = 3i_3 = 30\text{V}$$

$$i_4 = 30/4 = 7.5\text{A} \qquad i_5 = 10 - 7.5 = 2.5\text{A}$$

例2

求：I_1, I_4, U_4



解

①用分流方法做

$$I_4 = -\frac{1}{2} I_3 = -\frac{1}{4} I_2 = -\frac{1}{8} I_1 = -\frac{1}{8}\frac{12}{R} = -\frac{3}{2R}$$

$$U_4 = -I_4 \times 2R = 3\text{V} \qquad I_1 = \frac{12}{R}$$

②用分压方法做

$$U_4 = \frac{U_2}{2} = \frac{1}{4} U_1 = 3\text{V} \qquad I_4 = -\frac{3}{2R}$$

从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤：

①求出等效电阻或等效电导；

②应用欧姆定律求出总电压或总电流；

③应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压

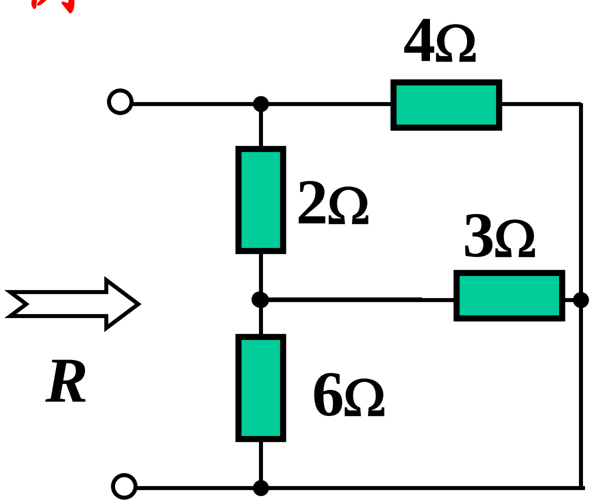
以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

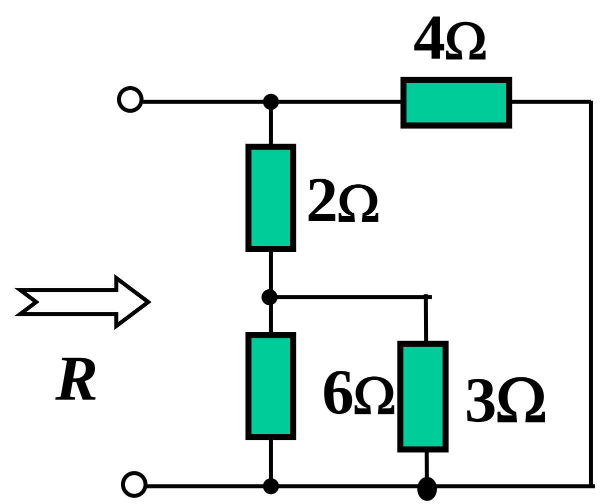
电阻串并联

如何看出串联和并联的连接方式?

法1：节点的移动、元件的拉伸

例

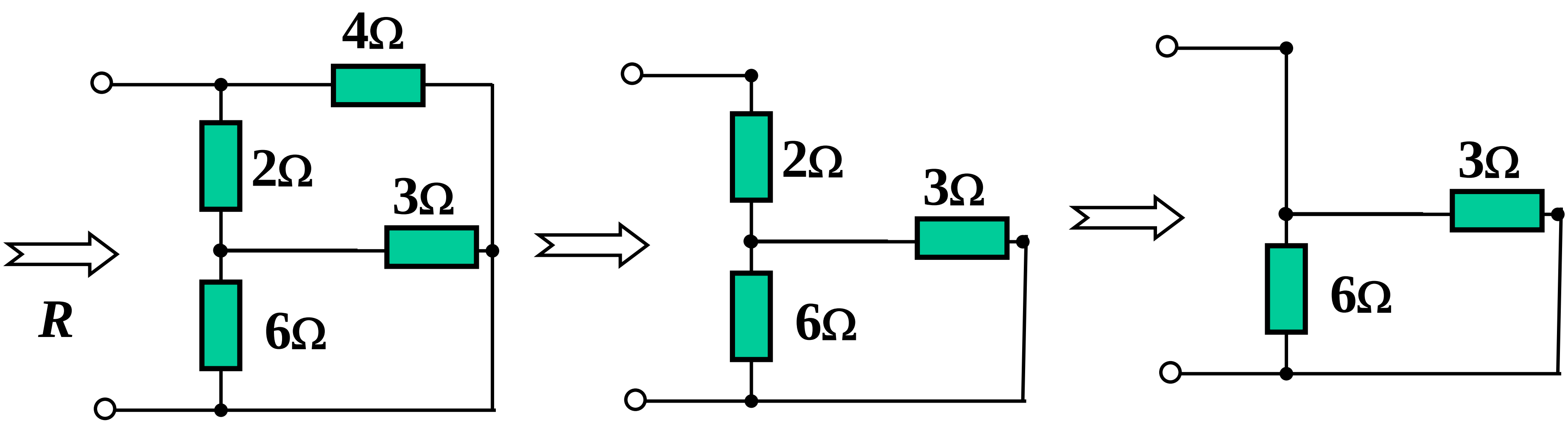




$$R = 4 // (2+3 // 6) = 2\ \Omega$$

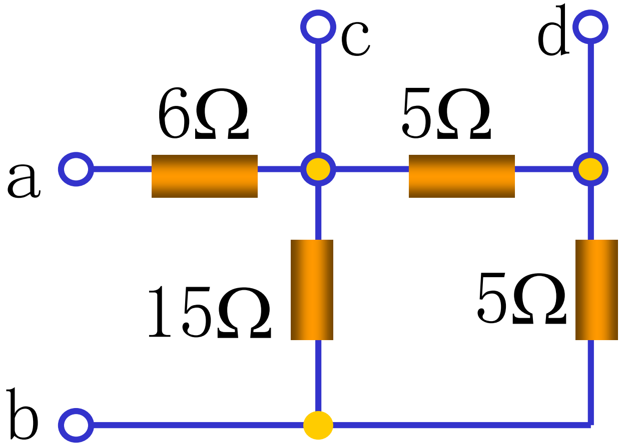
例

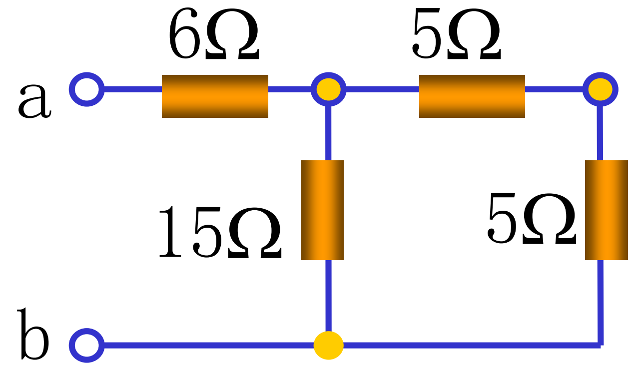
法2：去掉已知(串联短路，并联开路)



$$R = 4\,/\!/\,(2+3\,/\!/\,6) = 2\ \Omega$$

例3

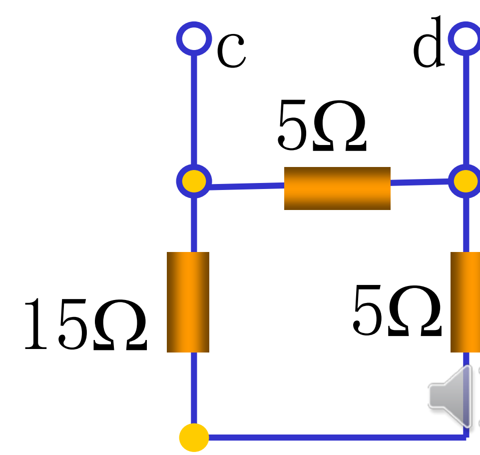




求: R_{ab} , R_{cd}

$$R_{ab}=(5+5)//15+6=12\Omega$$

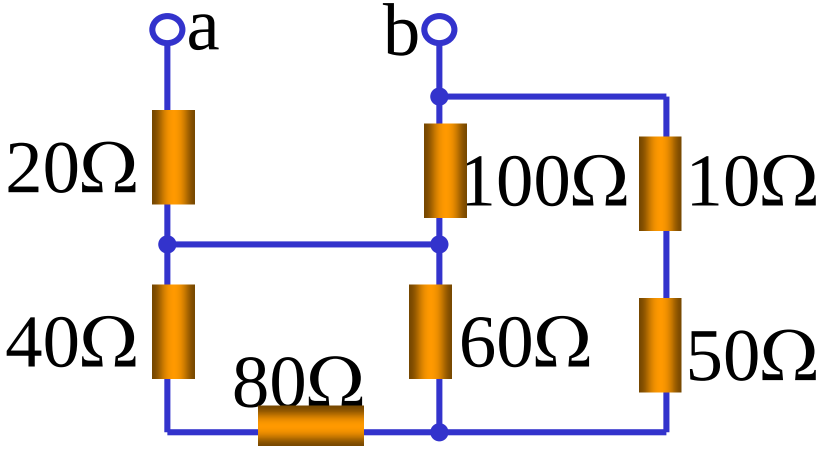
$$R_{cd}=(15+5)//5=4\Omega$$

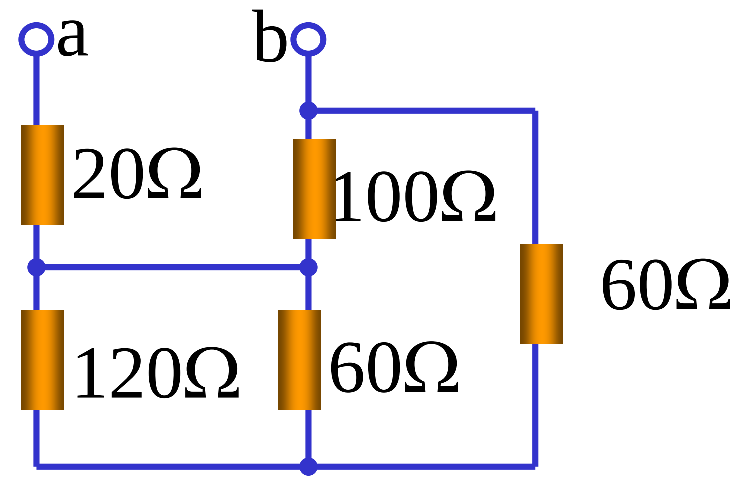


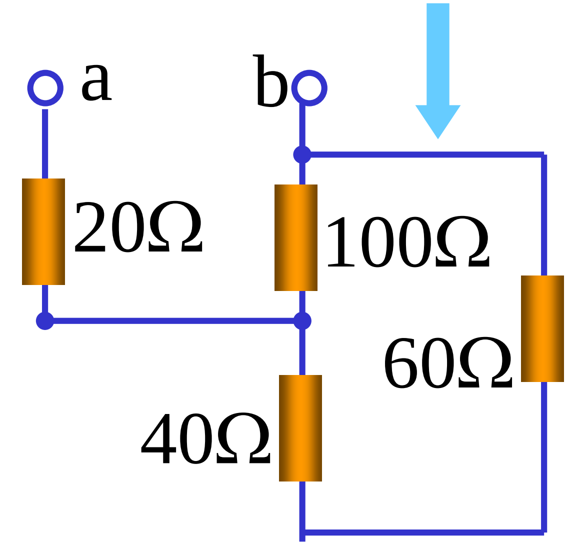
等效电阻针对端口而言

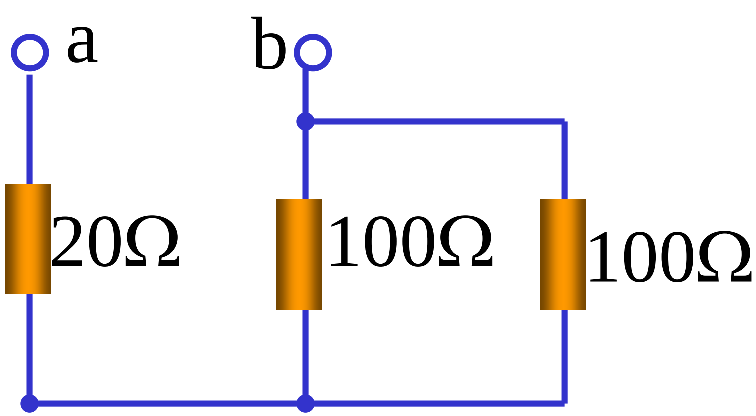
例4

求: R_{ab}



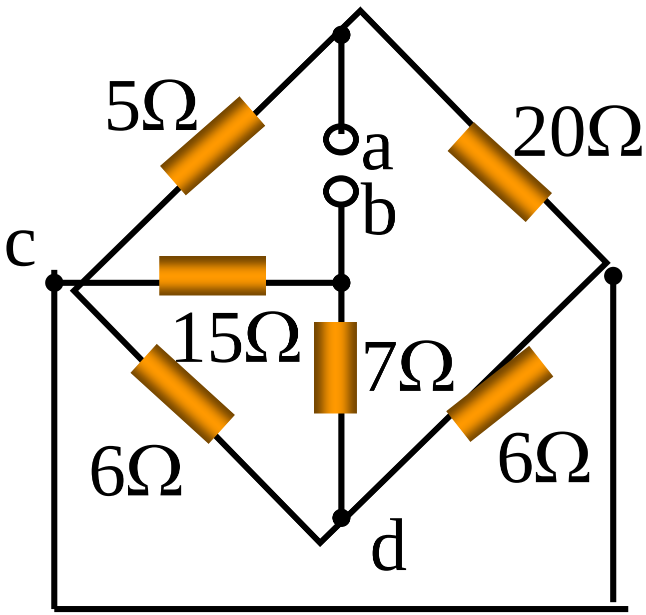


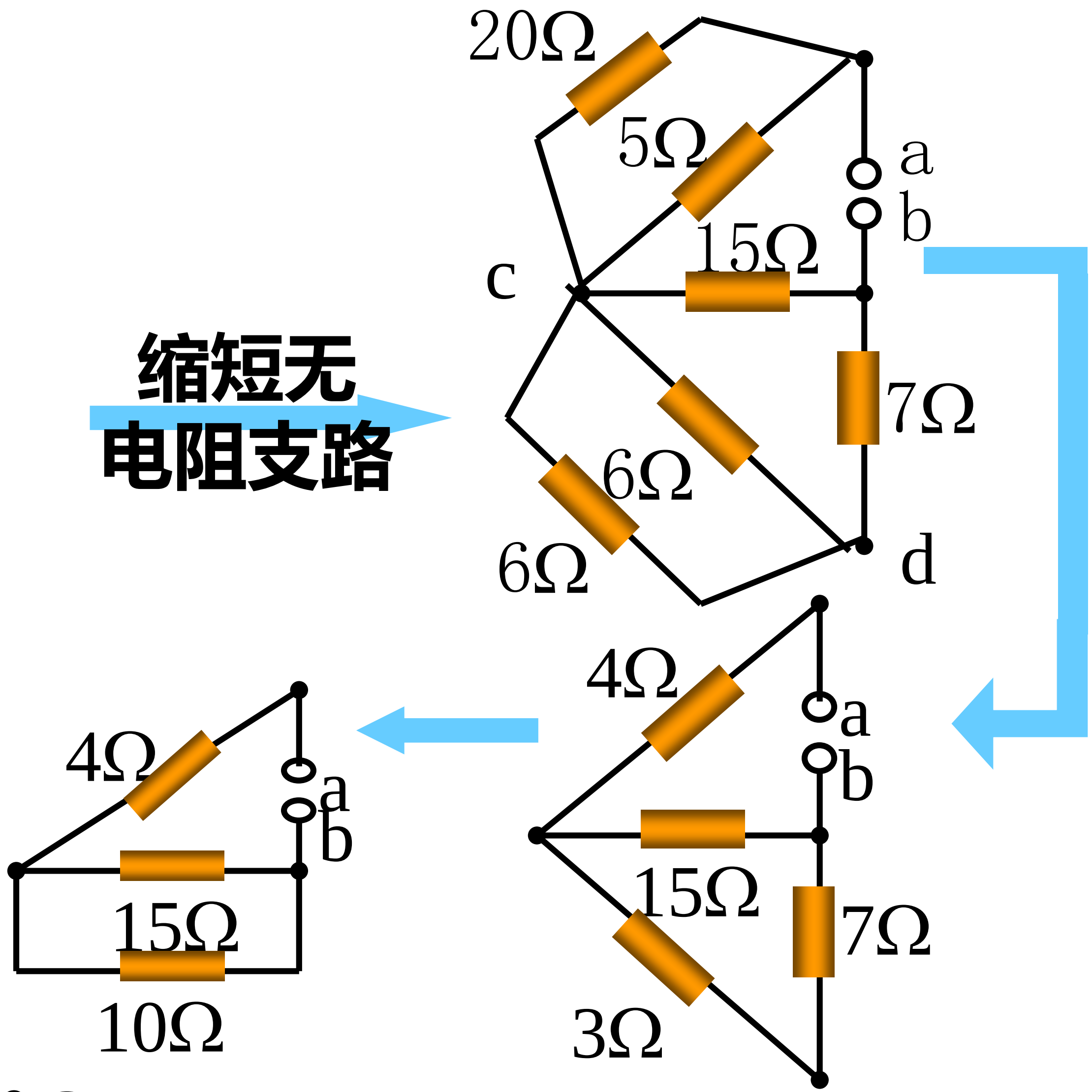




$$R_{ab} = (100//(40+60))+20=70\Omega$$

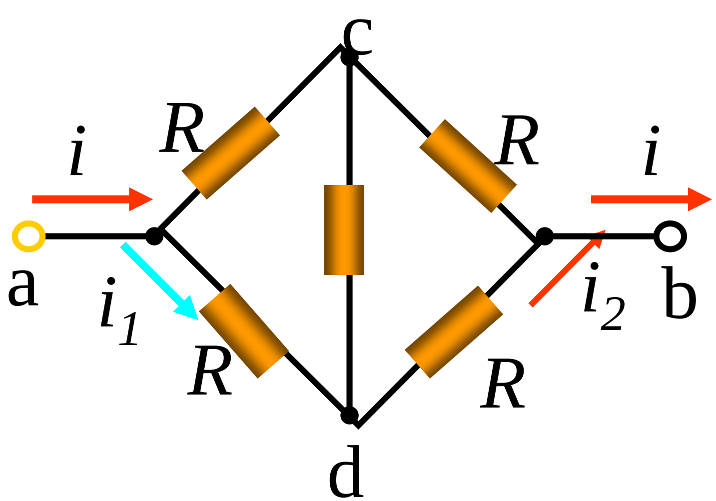
例5　　**求:** R_{ab}

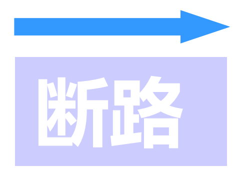


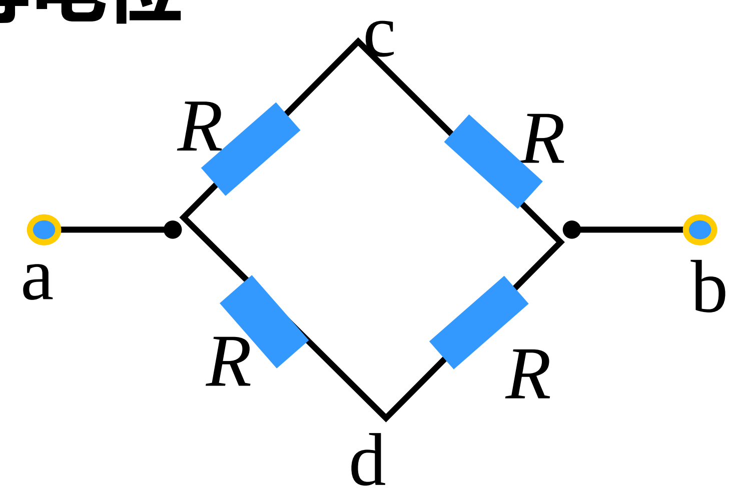


$$R_{ab} = 4+15//10=10\Omega$$

例6　**求**：R_{ab}　**对称电路** c、d**等电位**







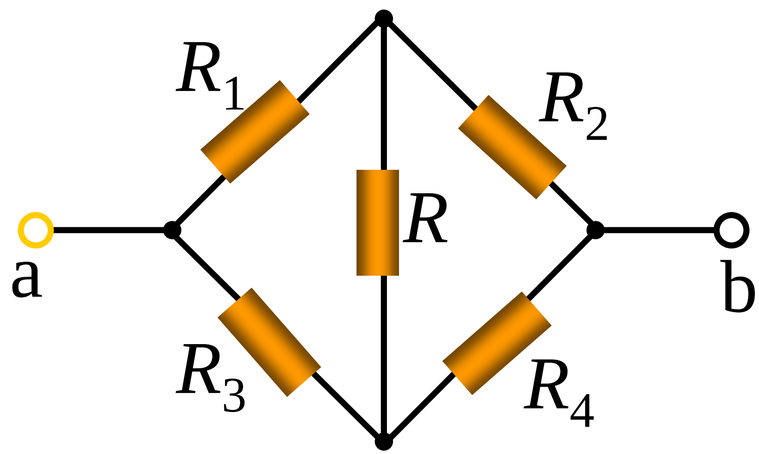
根据电流分配　→　$i_1 = \frac{1}{2} i = i_2$　　$R_{ab} = R$

$$u_{ab} = i_1 R + i_2 R = (\frac{1}{2} i + \frac{1}{2} i) R = iR$$

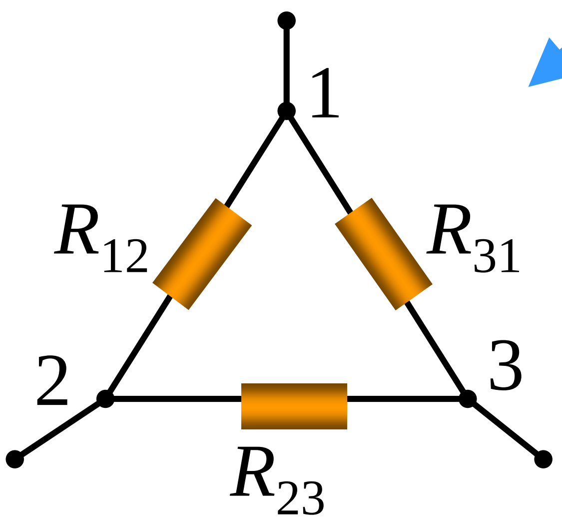
$$R_{ab} = \frac{u_{ab}}{i} = R$$

2.4 电阻的Y形连接和Δ形连接的等效变换

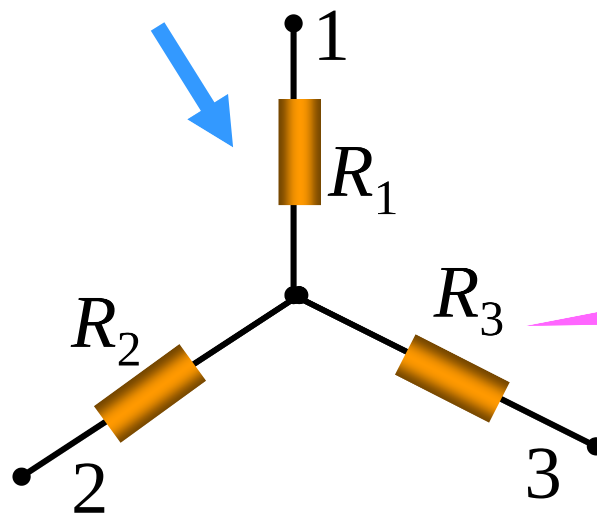
1. 电阻的Δ 、 Y形连接



包含



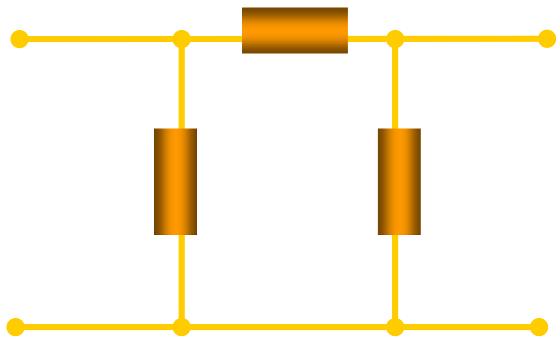
Δ 形网络



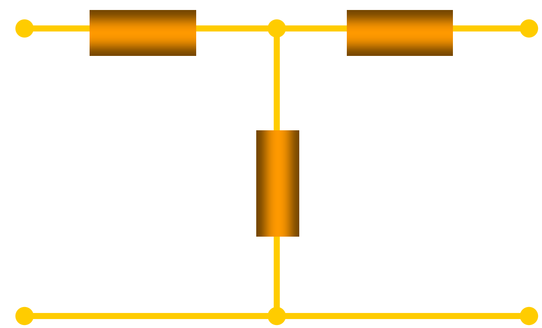
三端
网络

Y形网络

Δ ， Y 网络的变形：



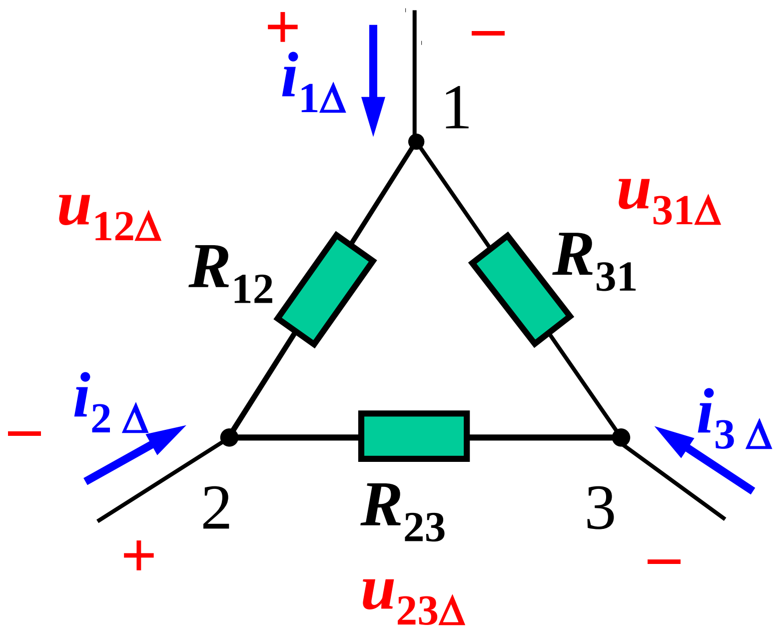
π 型电路 (Δ 型)

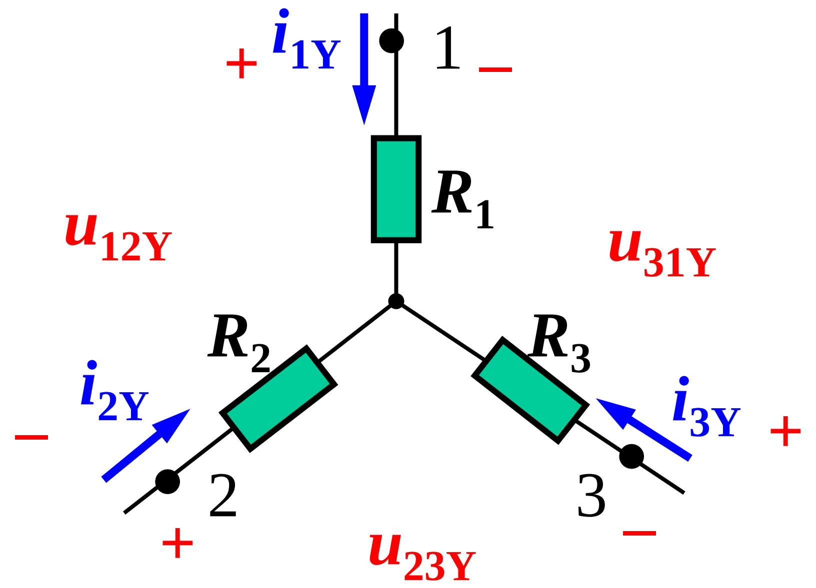


T 型电路 (Y、星型)

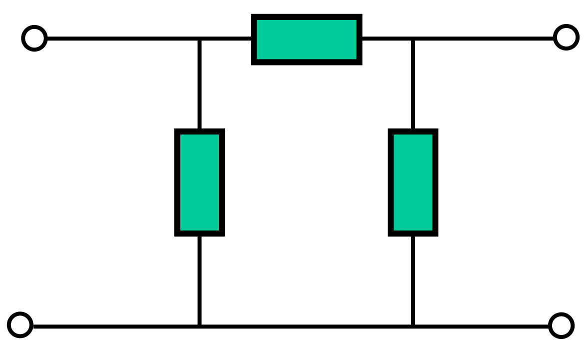
注意

这两个电路当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效 。

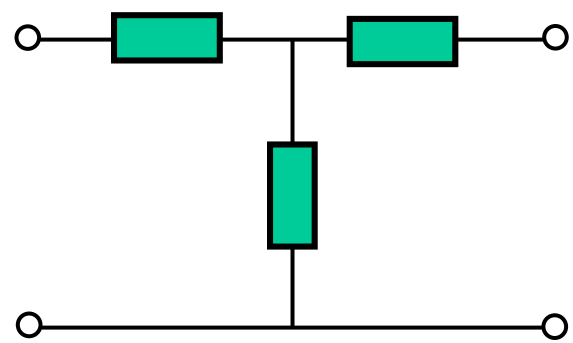




Δ型，Y型网络的变形

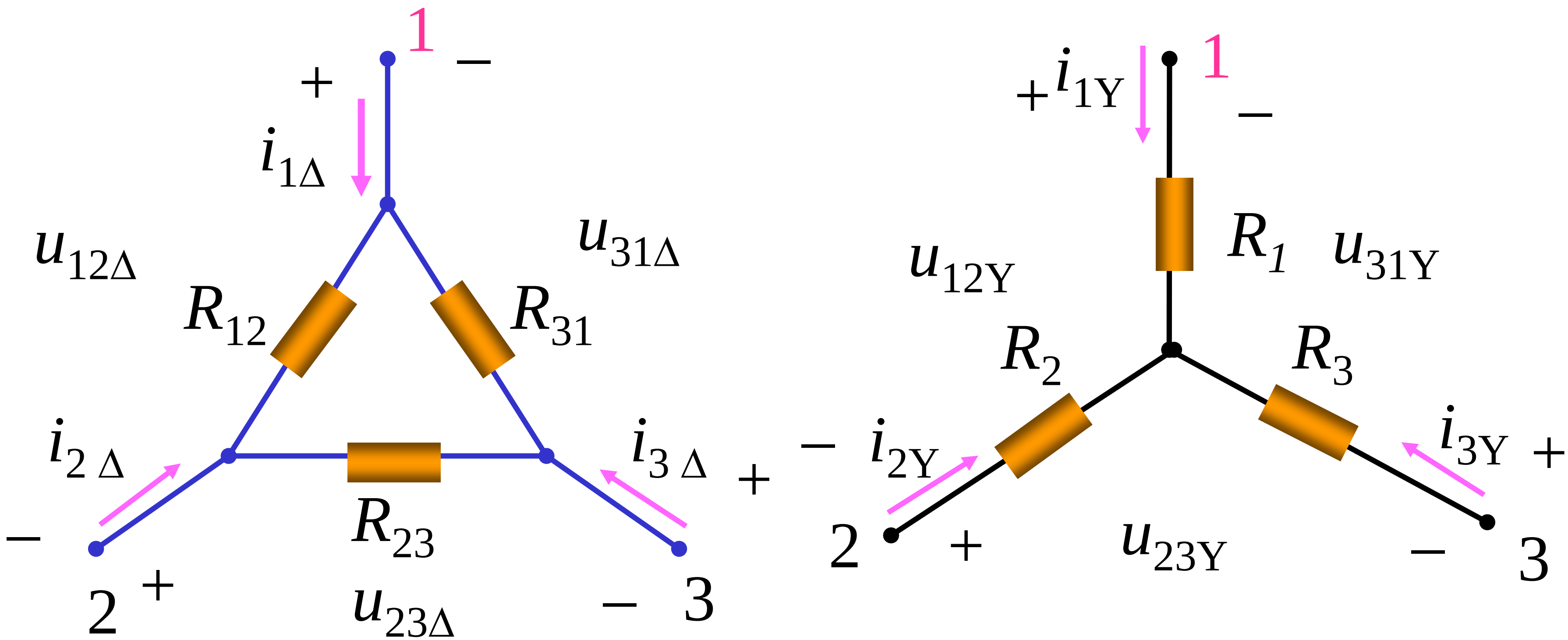


π 型网络 (Δ)



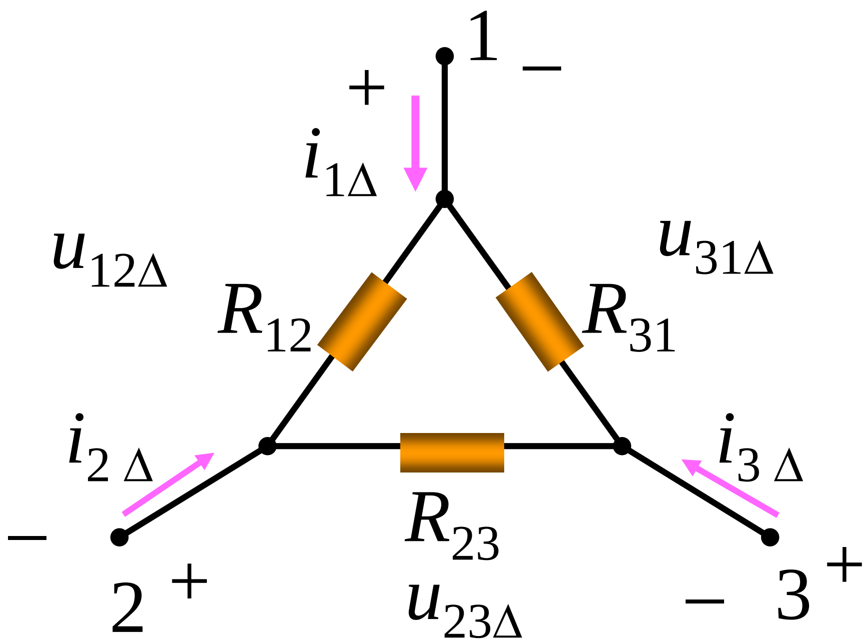
T 型网络 (Y)

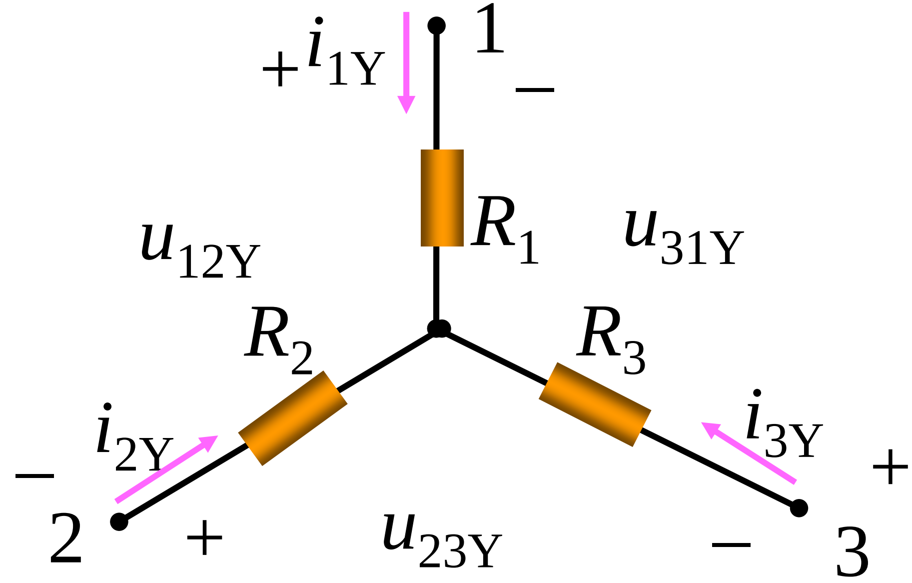
2. Δ—Y 变换的等效条件



等效条件: $i_{1\Delta}=i_{1Y}$, $i_{2\Delta}=i_{2Y}$, $i_{3\Delta}=i_{3Y}$,

$u_{12\Delta}=u_{12Y}$, $u_{23\Delta}=u_{23Y}$, $u_{31\Delta}=u_{31Y}$





Δ接: 用电压表示电流

$$\left.\begin{aligned} i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\ i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\ i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Y接: 用电流表示电压

$$\left.\begin{aligned} u_{12Y} &= R_1 i_{1Y} - R_2 i_{2Y} \\ u_{23Y} &= R_2 i_{2Y} - R_3 i_{3Y} \\ u_{31Y} &= R_3 i_{3Y} - R_1 i_{1Y} \\ i_{1Y} + i_{2Y} &+ i_{3Y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

由式(2)解得：

$$i_{1Y}=\frac{u_{12Y}R_3-u_{31Y}R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

$$\mathbf{i}_{2Y}=\frac{\mathbf{u}_{23Y}\mathbf{R}_1-\mathbf{u}_{12Y}\mathbf{R}_3}{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_3\mathbf{R}_1} \quad (3)$$

$$i_{3Y}=\frac{u_{31Y}R_2-u_{23Y}R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

$$i_{1\Delta}=u_{12\Delta}/R_{12}-u_{31\Delta}/R_{31}$$

$$i_{2\Delta}=u_{23\Delta}/R_{23}-u_{12\Delta}/R_{12} \quad (1)$$

$$i_{3\Delta}=u_{31\Delta}/R_{31}-u_{23\Delta}/R_{23}$$

根据等效条件，比较式(3)与式(1)，得Y→Δ的变换条件：

等效条件： $i_{1\Delta}=i_{1Y}$， $i_{2\Delta}=i_{2Y}$， $i_{3\Delta}=i_{3Y}$，

$u_{12\Delta}=u_{12Y}$， $u_{23\Delta}=u_{23Y}$， $u_{31\Delta}=u_{31Y}$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

或

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

类似可得到由Δ→Y的变换条件：

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} G_{31}}{G_{23}} \\ G_2 &= G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23} G_{12}}{G_{31}} \\ G_3 &= G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31} G_{23}}{G_{12}} \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned}\right\}$$

简记方法：

$$R_{Y}=\frac{\Delta\text{相邻电阻乘积}}{\sum R_{\Delta}}$$

Δ变Y

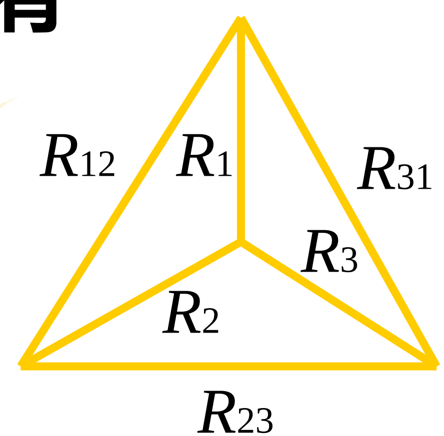
$$G_{\Delta}=\frac{\text{Y相邻电导乘积}}{\sum G_{Y}}$$

Y变Δ

特例：若三个电阻相等(对称)，则有

$$R_{\Delta}=3R_{Y}$$

外大内小



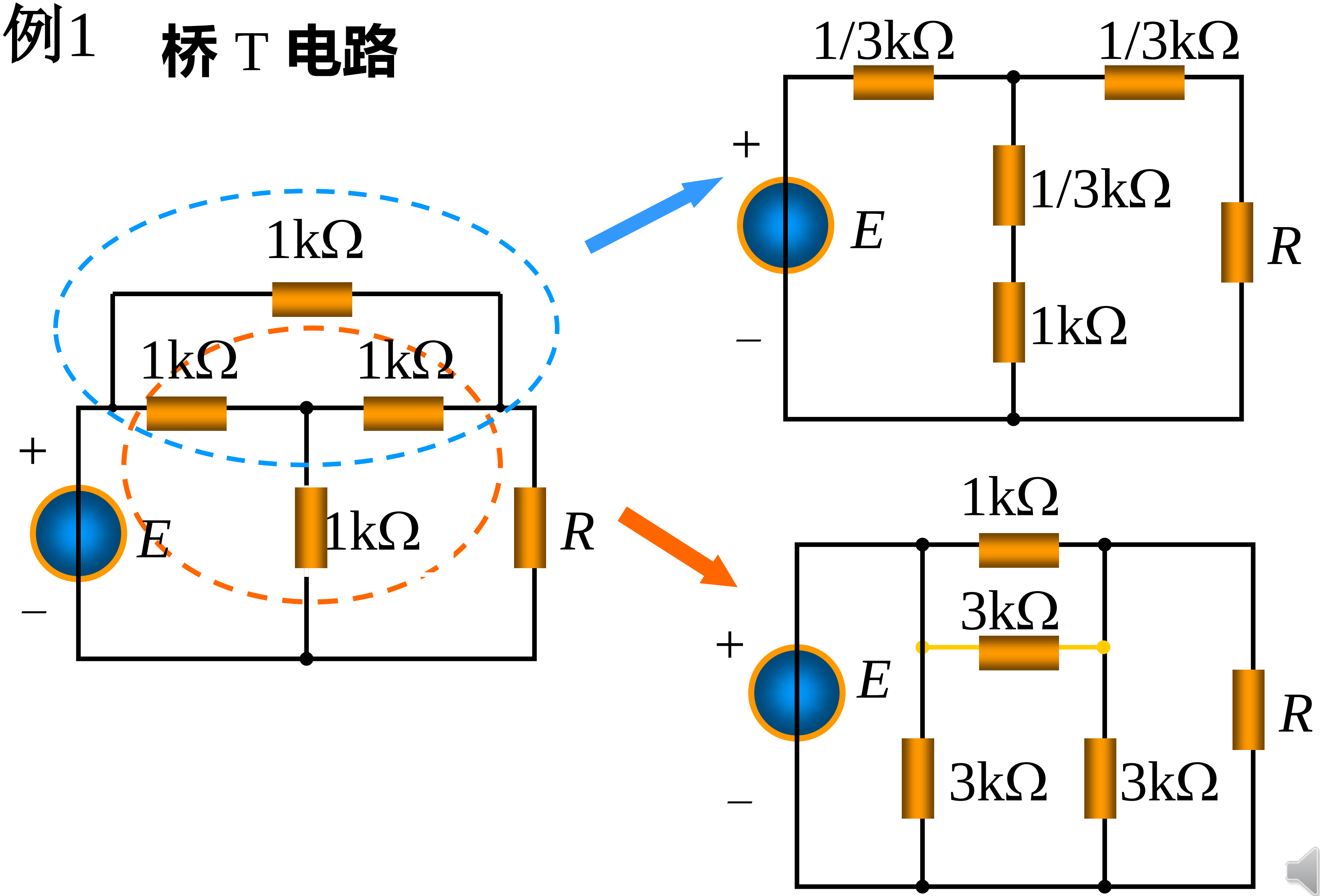
注意

①等效对外部(端钮以外)有效，对内不成立。

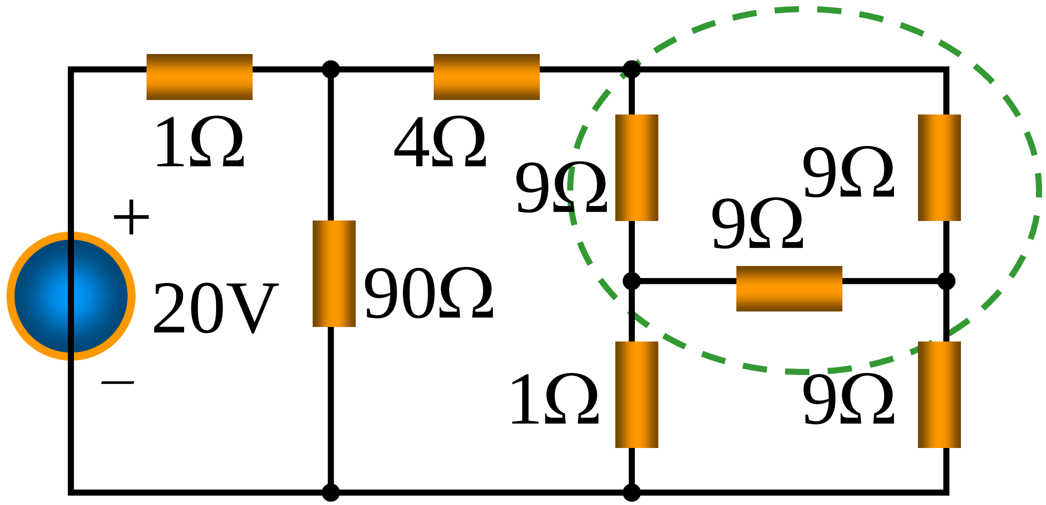
②等效电路与外部电路无关。

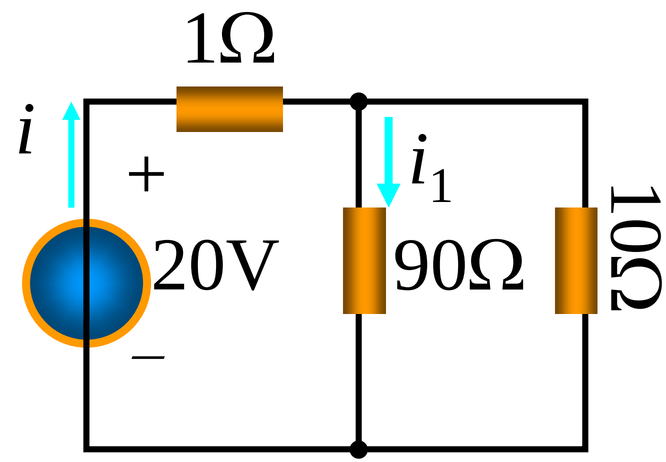
③用于简化电路

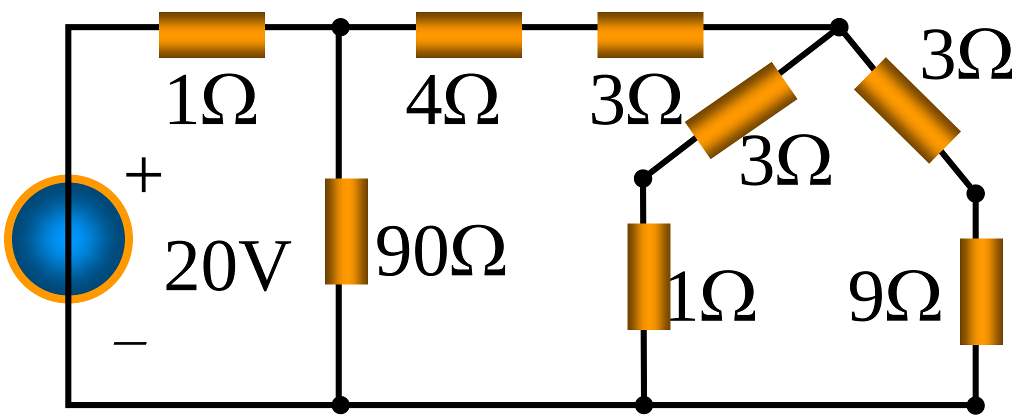
例1 **桥** T **电路**



例2　　**计算90Ω电阻吸收的功率**







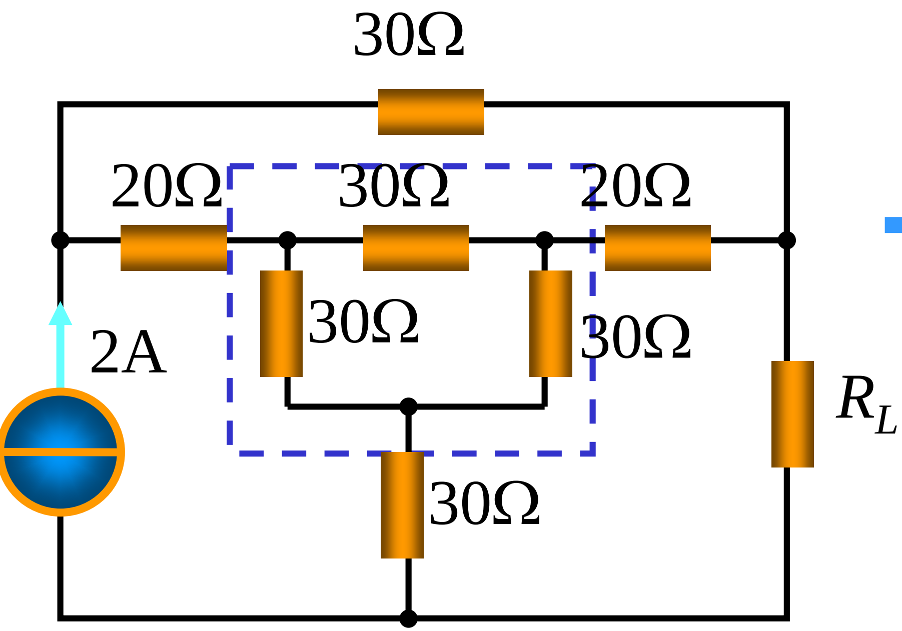
$$R_{eq} = 1 + \frac{10 \times 90}{10 + 90} = 10\Omega$$

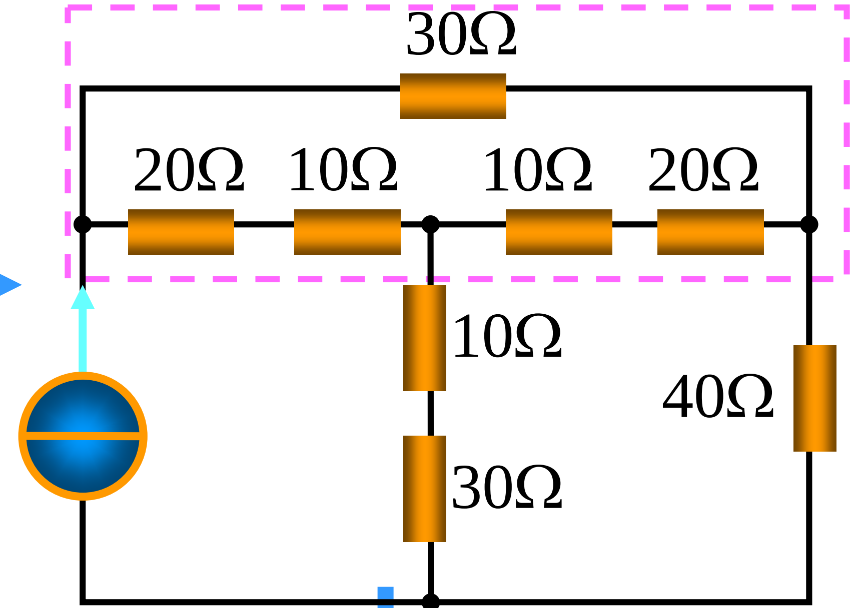
$$i = 20/10 = 2\text{A}$$

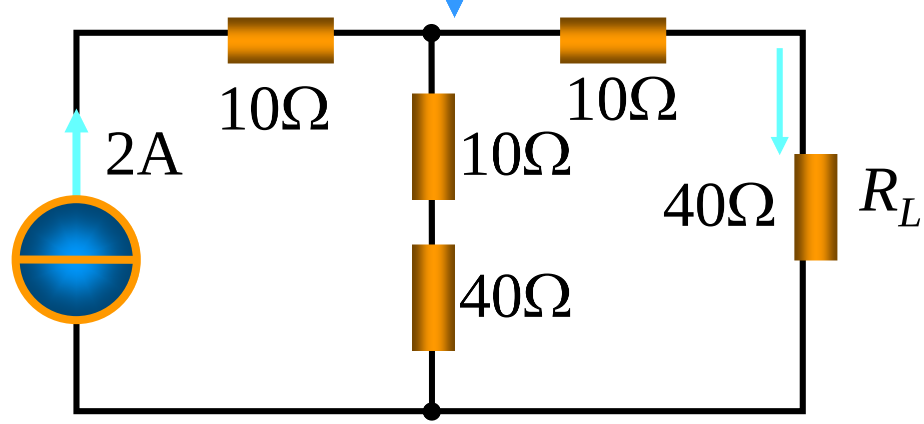
$$i_1 = \frac{10 \times 2}{10 + 90} = 0.2\text{A}$$

$$P = 90 i_1^2 = 90 \times (0.2)^2 = 3.6\text{W}$$

例3 **求负载电阻R_L消耗的功率**







$$I_L = 1\text{A}$$

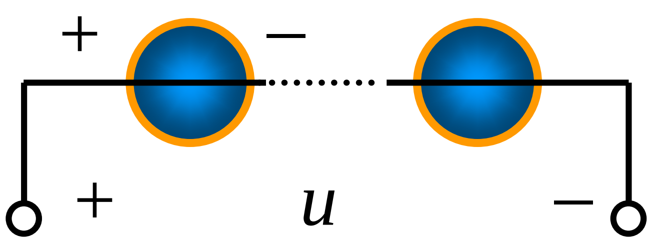
$$P_L = R_L I_L^2 = 40\text{W}$$

2.5 电压源、电流源的串联和并联

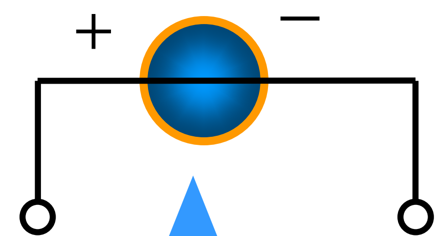
1.理想电压源的串联和并联

注意参考方向

①串联 $u = u_{s1} + u_{s2} = \sum u_{sk}$

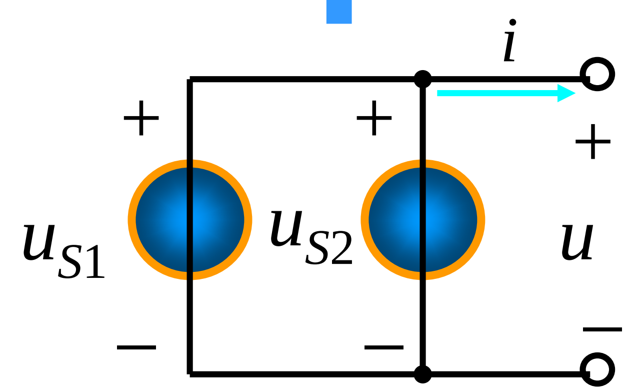


等效电路



等效电路

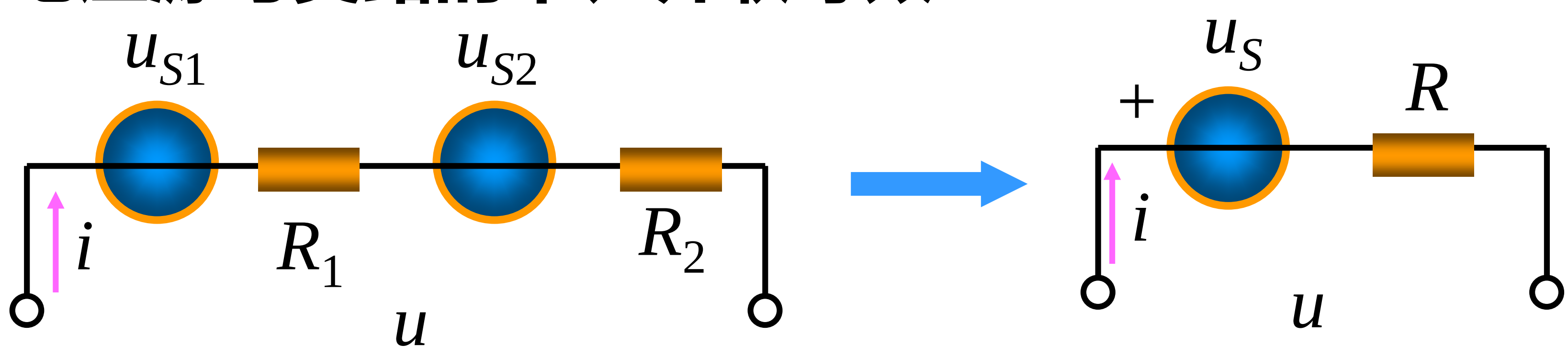
②并联 $u = u_{s1} = u_{s2}$



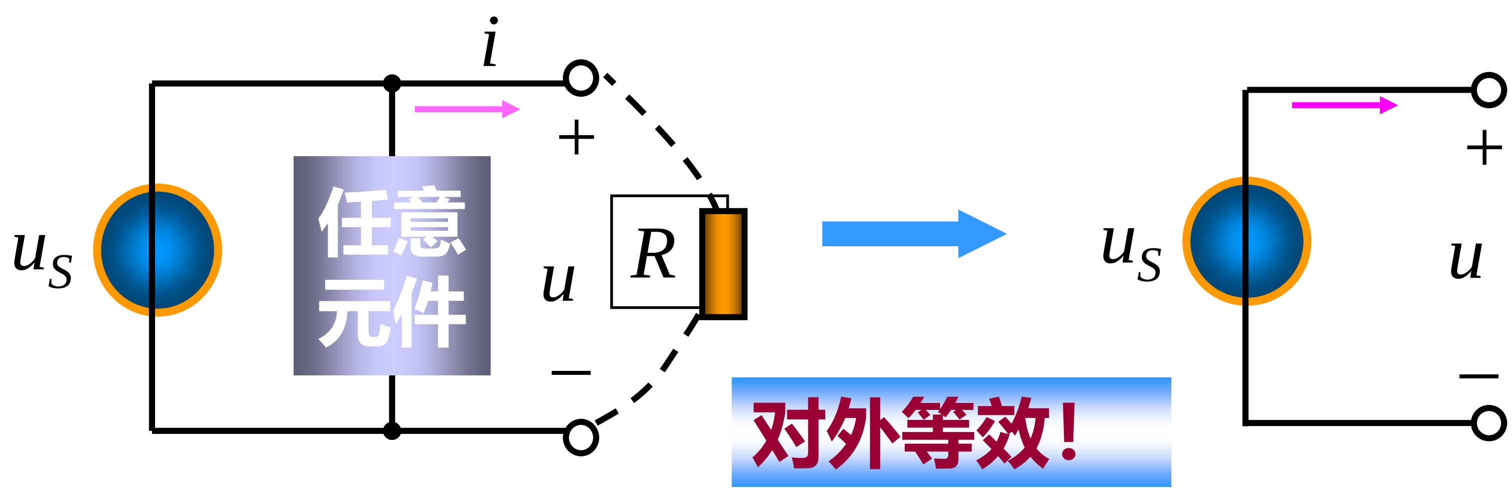
注意

相同电压源才能并联，电源中的电流不确定。

③电压源与支路的串、并联等效



$$u = u_{s1} + R_1 i + u_{s2} + R_2 i = (u_{S1} + u_{S2}) + (R_1 + R_2)i = u_s + Ri$$

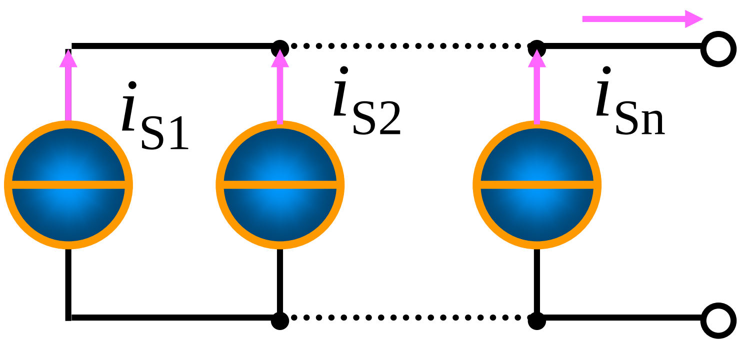


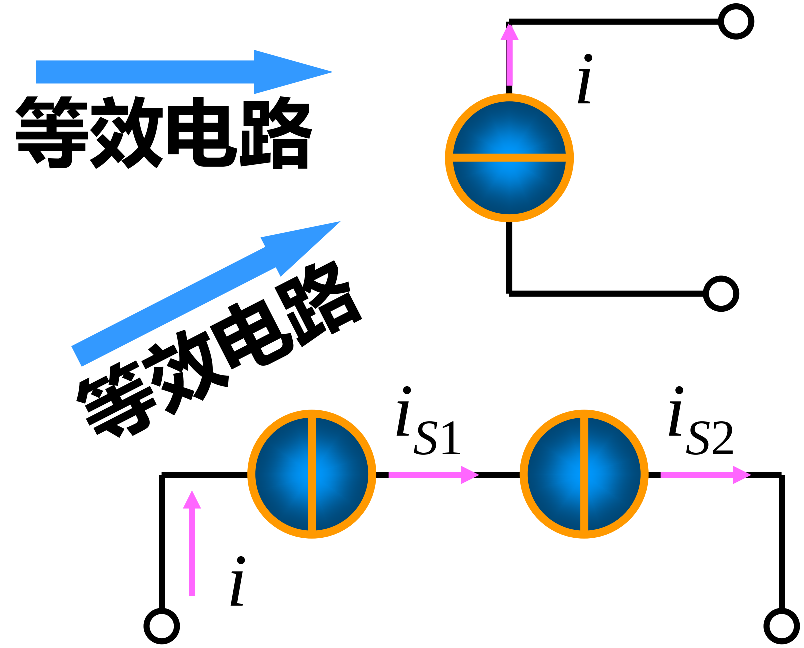
2. 理想电流源的串联并联

注意参考方向

①并联

$$i = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum i_{sk}$$





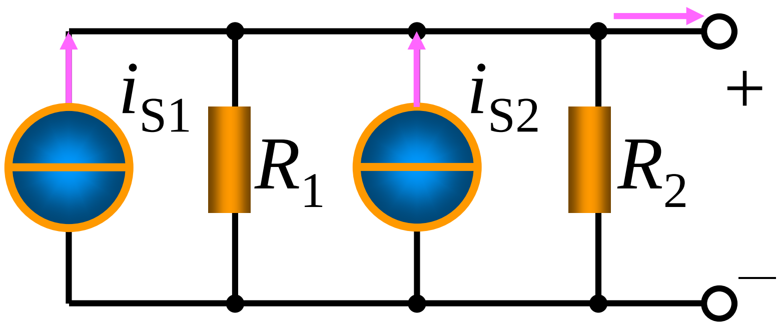
②串联

$$i = i_{s1} = i_{s2}$$

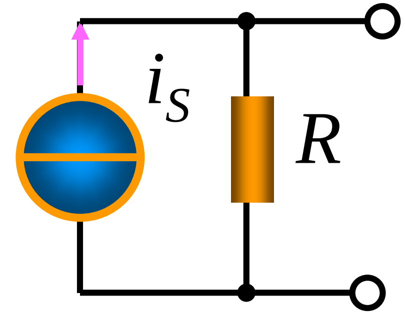
注意

相同的理想电流源才能串联，每个电流源的端电压不能确定。

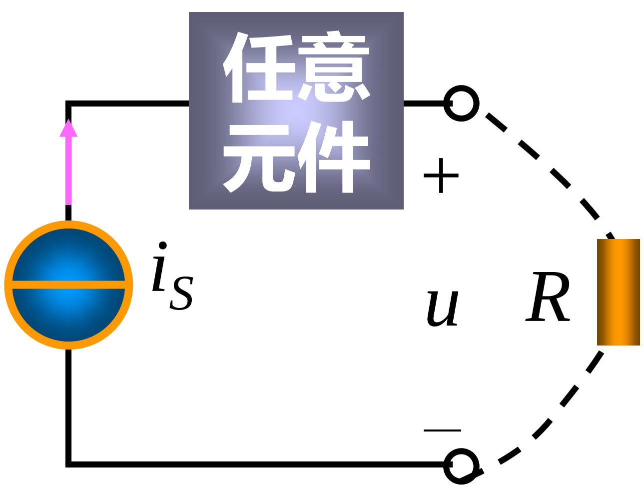
3.电流源与支路的串、并联等效



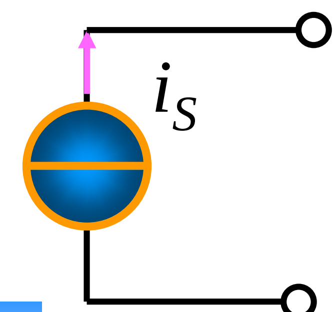
等效电路



$$i = i_{s1} - u/R_1 + i_{s2} - u/R_2 = i_{s1} + i_{s2} - (1/R_1 + 1/R_2)u = i_s - u/R$$



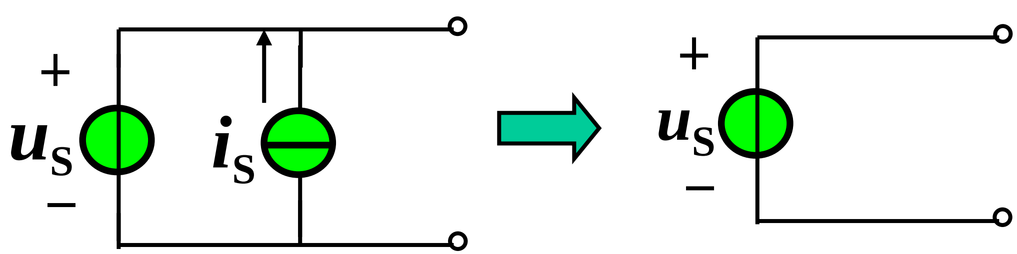
等效电路



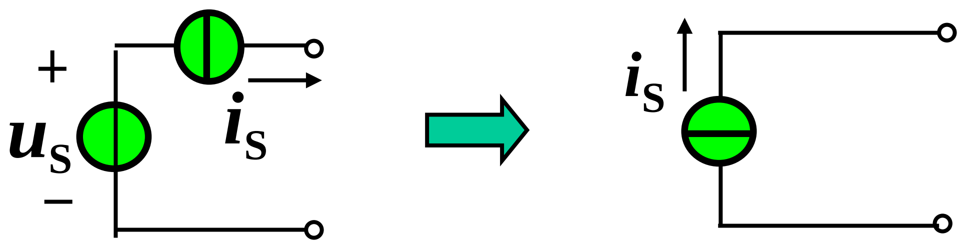
对外等效！

三、 理想电源的串并联

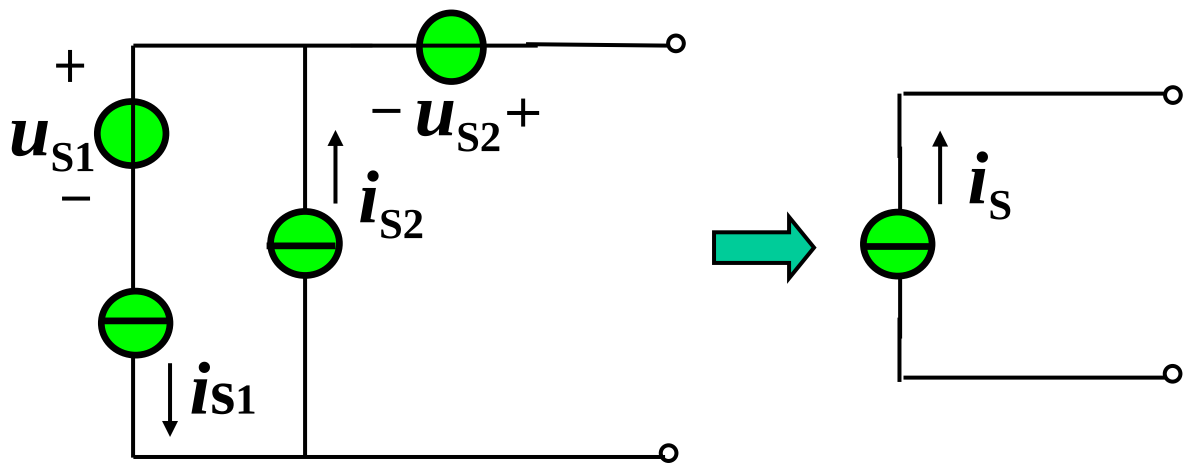
例1



例2



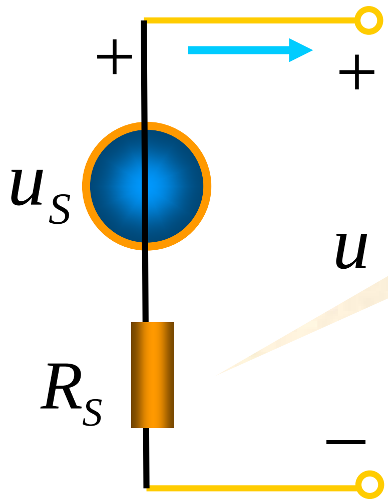
例3



$$i_S = i_{S2} - i_{S1}$$

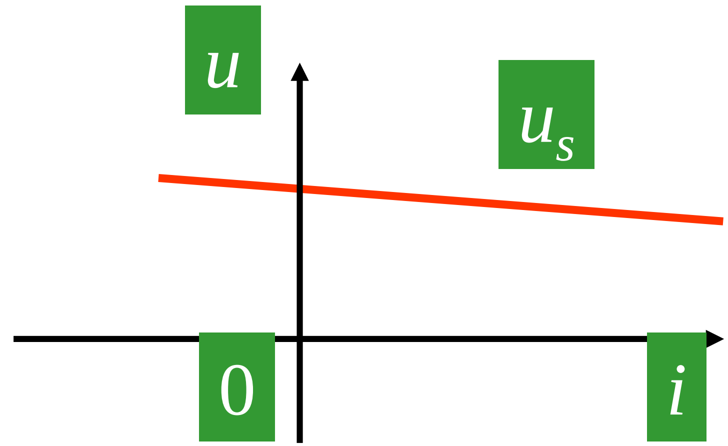
2.6 实际电源的两种模型及其等效变换

1. 实际电压源



考虑内阻

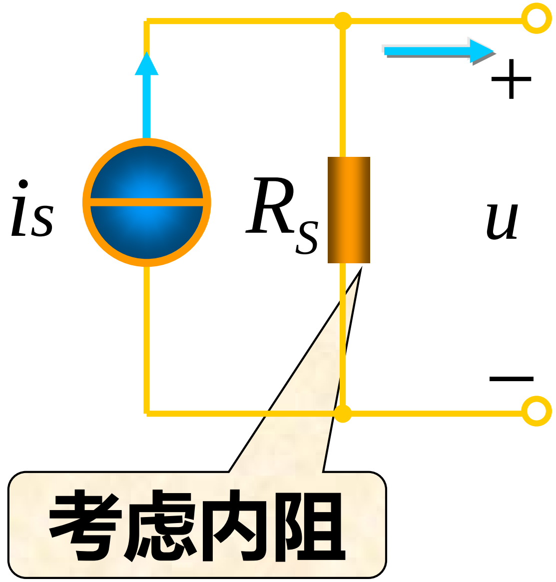
伏安特性： $u = u_S - R_S i$



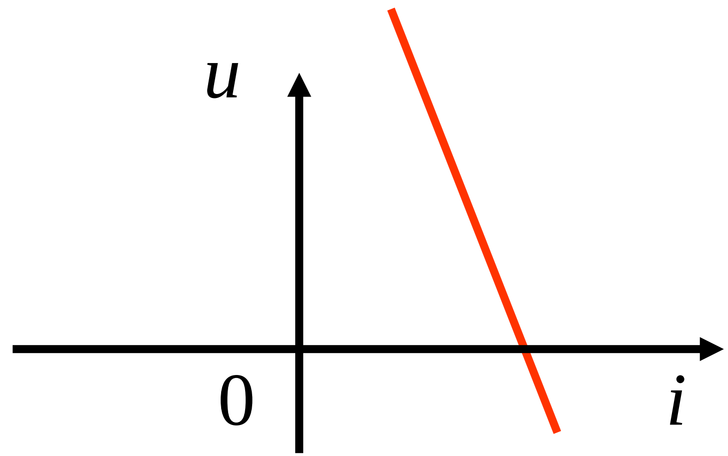
一个好的电压源要求 $R_S \to 0$

注意 实际电压源也不允许短路。因其内阻小，若短路，电流很大，可能烧毁电源。

2. 实际电流源



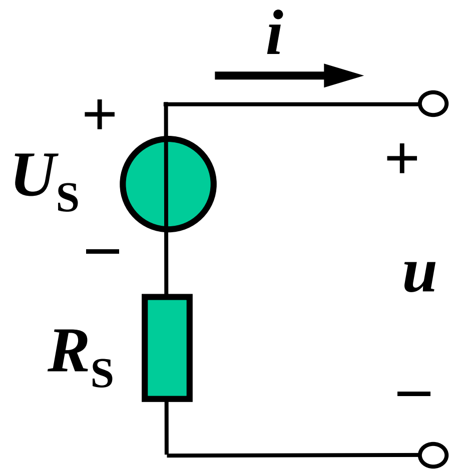
伏安特性：$i = i_S - \dfrac{u}{R_S}$

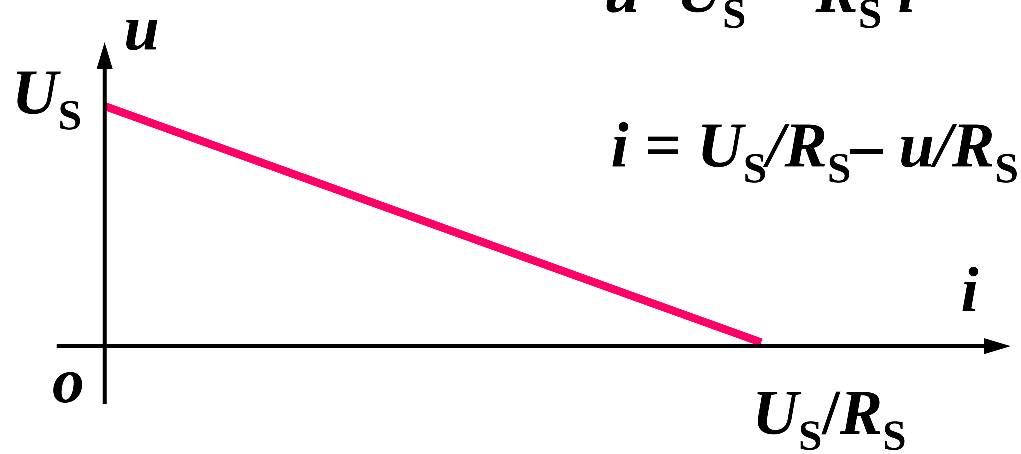


一个好的电流源要求 $R_S \to \infty$

注意 实际电流源也不允许开路。因其内阻大，若开路，电压很高，可能烧毁电源。

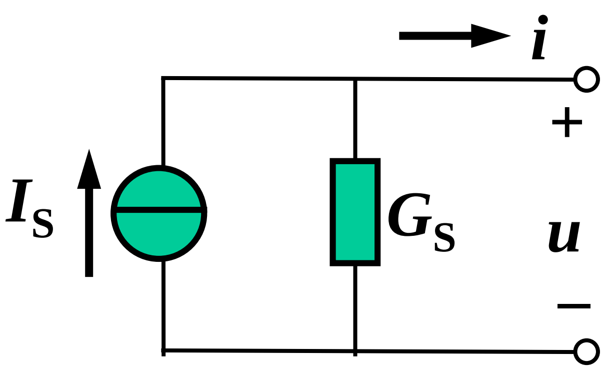
(c) 实际电源的模型

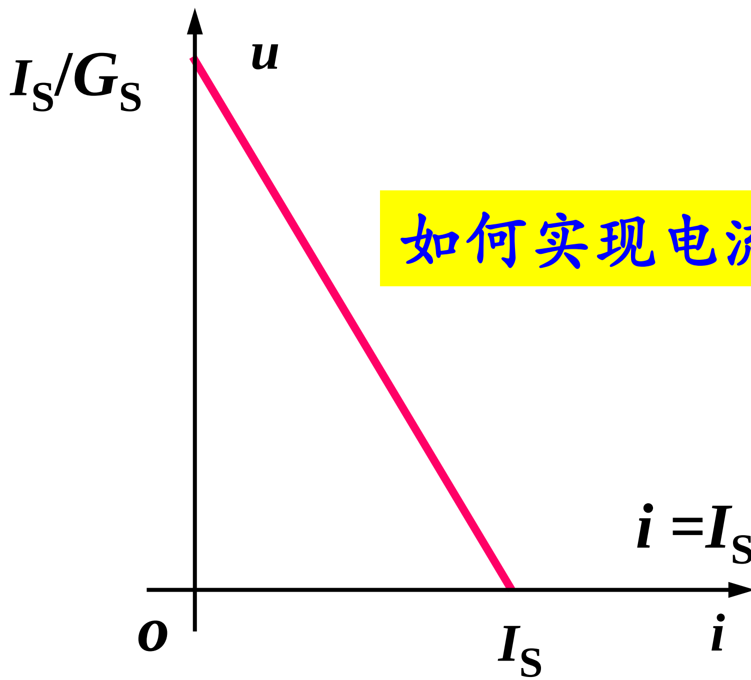




$u = U_S - R_S\, i$

$i = U_S/R_S - u/R_S$

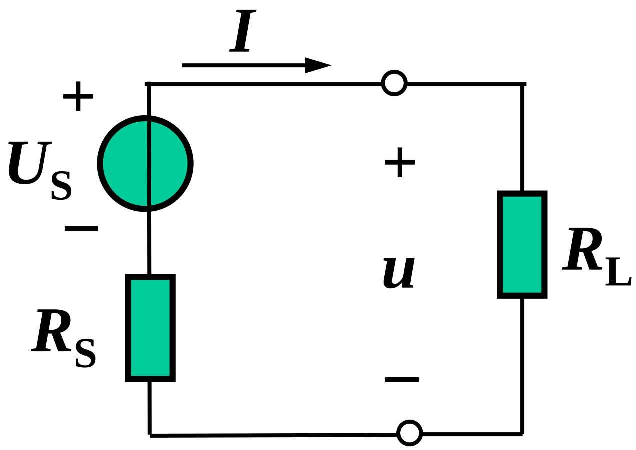




如何实现电流源?

$i = I_S - G_S u$

$I_S = U_S / R_S$ ， $G_S = 1/R_S$



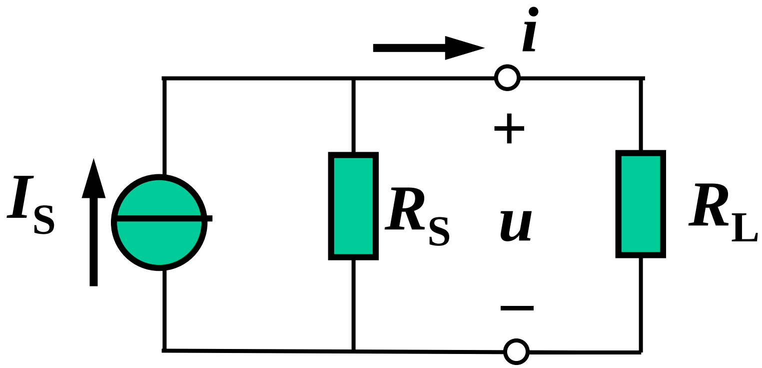
$$u = \frac{R_L}{R_L + R_S} U_S$$

阻抗匹配的作用

U_S：电压形式表示的信号源

负载电阻R_L相对越大，负载上得到的电压信号越大

电压源内阻R_S相对越小，为负载提供信号的能力越强



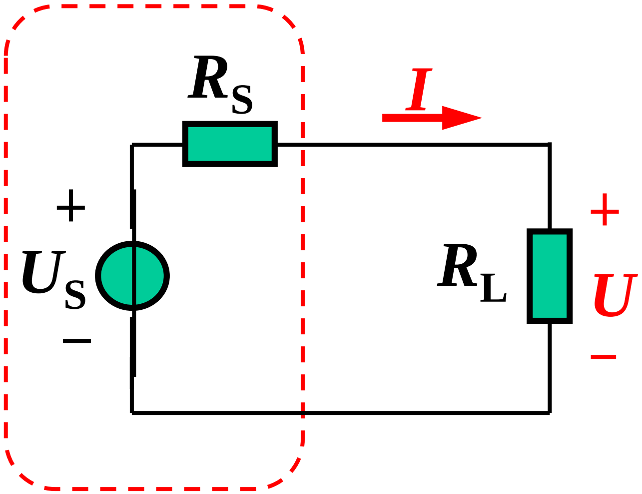
$$i = \frac{R_S}{R_L + R_S} I_S$$

I_S：电流形式表示的信号源

负载电阻R_L相对越小，负载上得到电流信号越大

电流源内阻R_S相对越大，为负载提供信号的能力越强

例3 求能够获得最大功率的 R_L 并求其获得的最大功率。



解

$$I = \frac{U_S}{R_S + R_L} \qquad P_L = I^2 R_L = \left(\frac{U_S}{R_S + R_L}\right)^2 R_L$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = U_S^2 \left(\frac{1}{\left(R_S + R_L\right)^2} - \frac{2R_L}{\left(R_S + R_L\right)^3}\right)$$

$$= U_S^2 \left(\frac{R_S - R_L}{\left(R_S + R_L\right)^3}\right)$$

$R_L = R_S$ 是 R_L 获得最大功率的充要条件

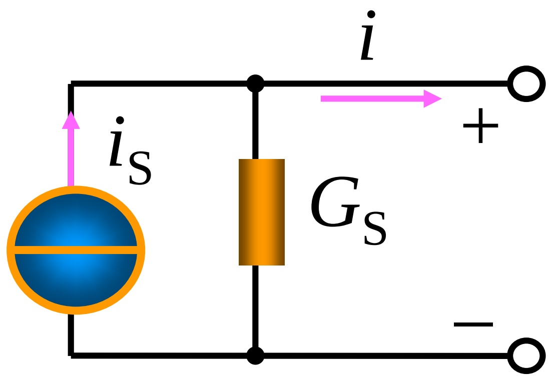
电阻匹配

$$U = \frac{U_S}{2}, \eta = 50\%, P_L = \frac{U_S^{\ 2}}{4R_S}$$

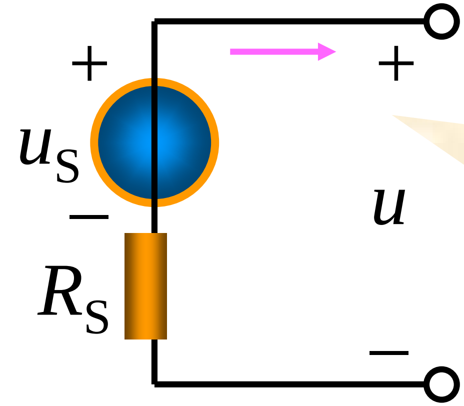
把负载获得最大电压和最大功率对比进行思考和记忆！！

3.电压源和电流源的等效变换

实际电压源、实际电流源两种模型可以进行等效变换，所谓的等效是指端口的电压、电流在转换过程中保持不变。



实际电流源



实际电压源

端口特性

$$i = i_S - G_S u$$

$$u = u_S - R_S\, i$$

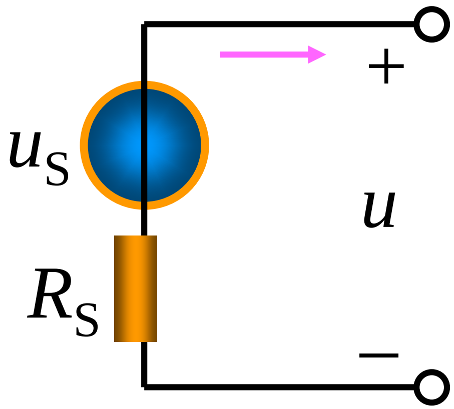
$$i = u_S/R_S - u/R_S$$

$$i_S = u_S / R_S$$
$$G_S = 1/R_S$$

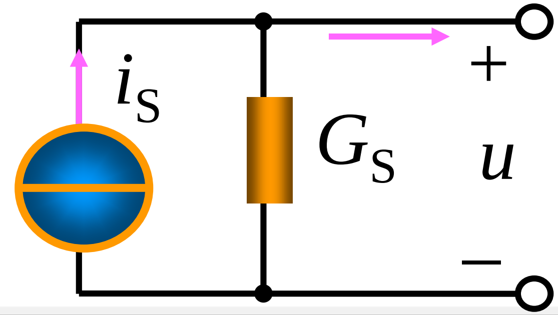
比较可得等效条件

小结

电压源变换为电流源：

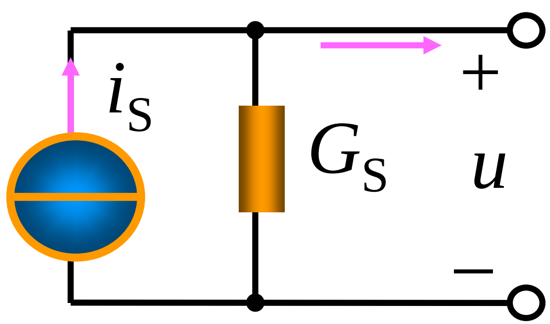


转换

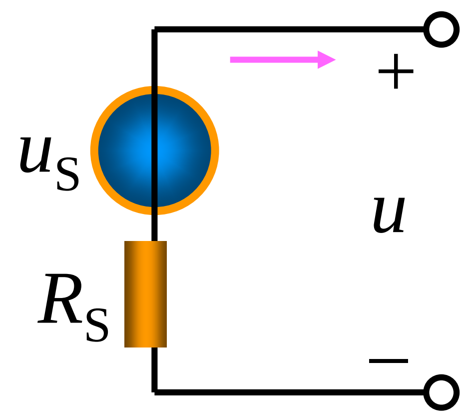


$$i_s = {u_s}/{R_S}\,,\quad G_S = {1}/{R_S}$$

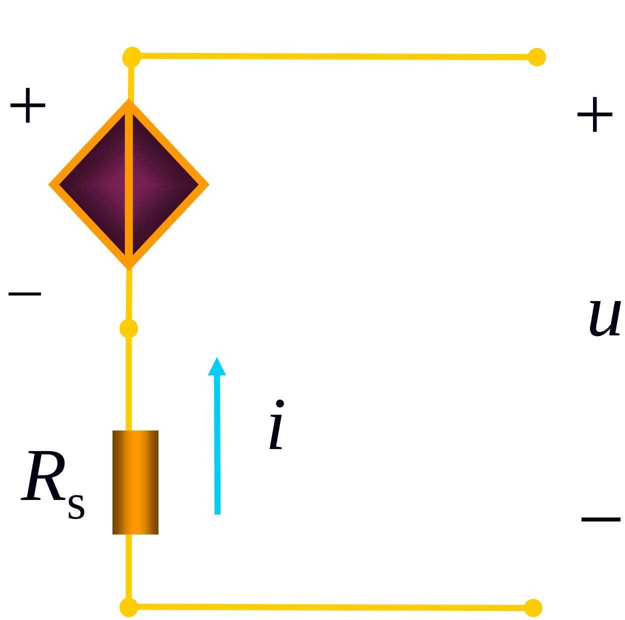
电流源变换为电压源：



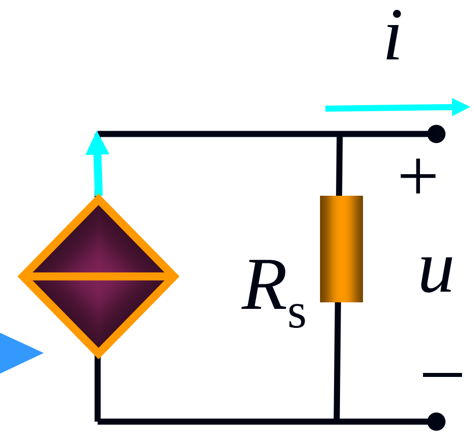
转换



$$u_S = {i_S}/{G_S}\,,\quad R_S = {1}/{G_S}$$



转换



$VCVL: nu_1\ (V)$

$CCVL: ri_1\ (V)$

转换

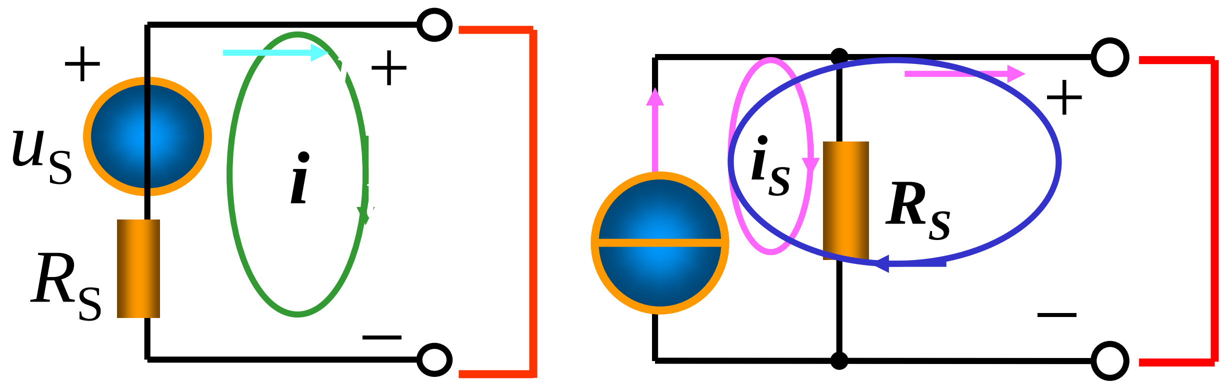
$VCCL: nu_1/Rs\ (A)$

$g=n/Rs\ (S)$

$CCCL: ri_1/Rs\ (A)$

$\beta=r/Rs$

注意



①变换关系

数值关系

方向：电流源电流方向与电压源电压方向相反。

②等效是对外部电路等效，对内部电路是不等效的。

表现在

- 电压源开路，R_S上无电流流过，输出功率为0

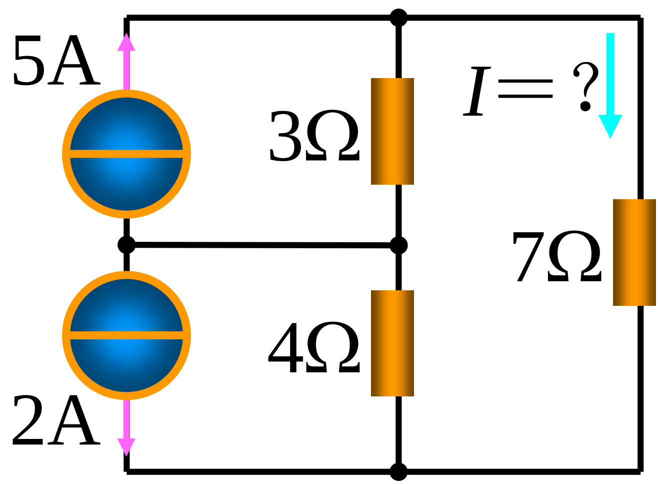
  电流源开路，G_S上有电流流过，有输出功率。
- 电压源短路，R_S上有电流，有输出功率；

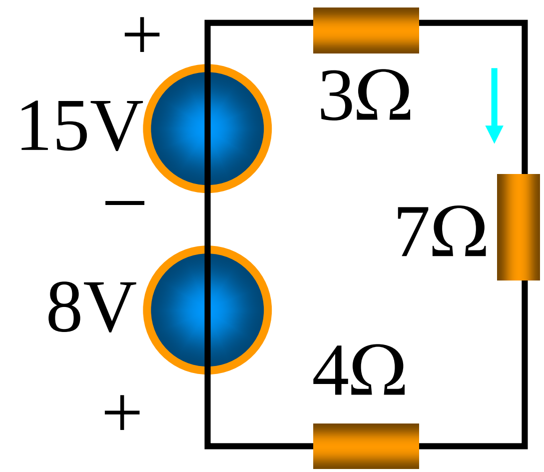
  电流源短路，G_S上无电流，输出功率为0。

③理想电压源与理想电流源不能相互转换。

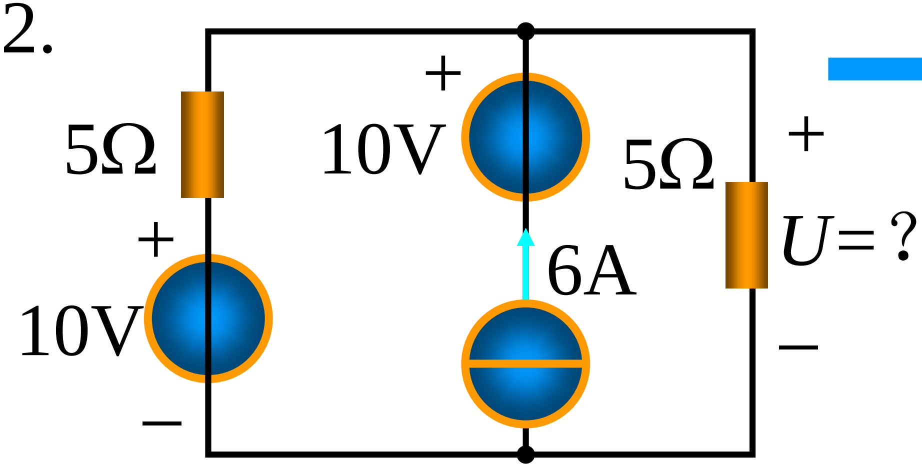
例1　**利用电源转换简化电路计算**

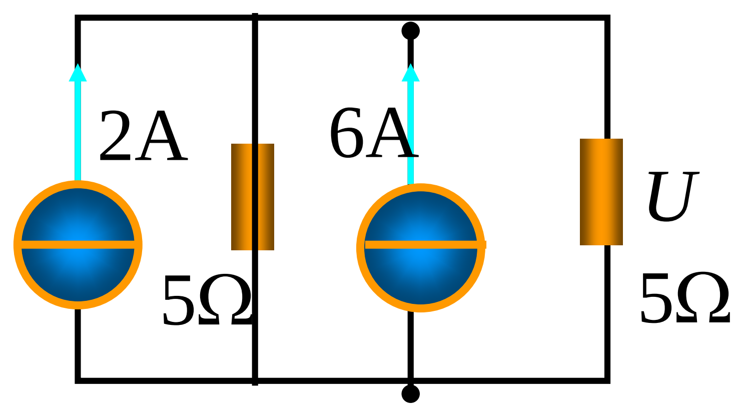
1.





2.

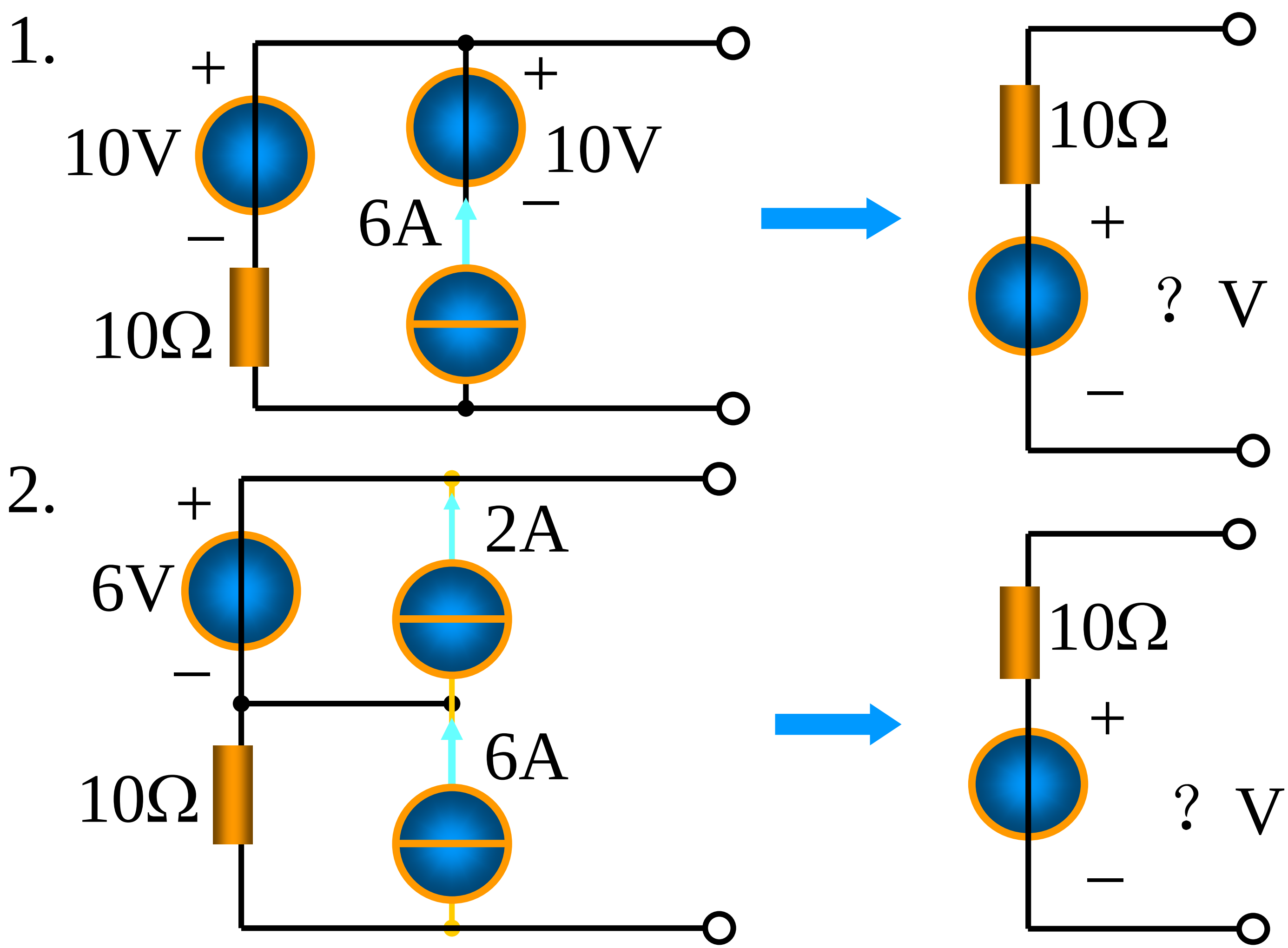




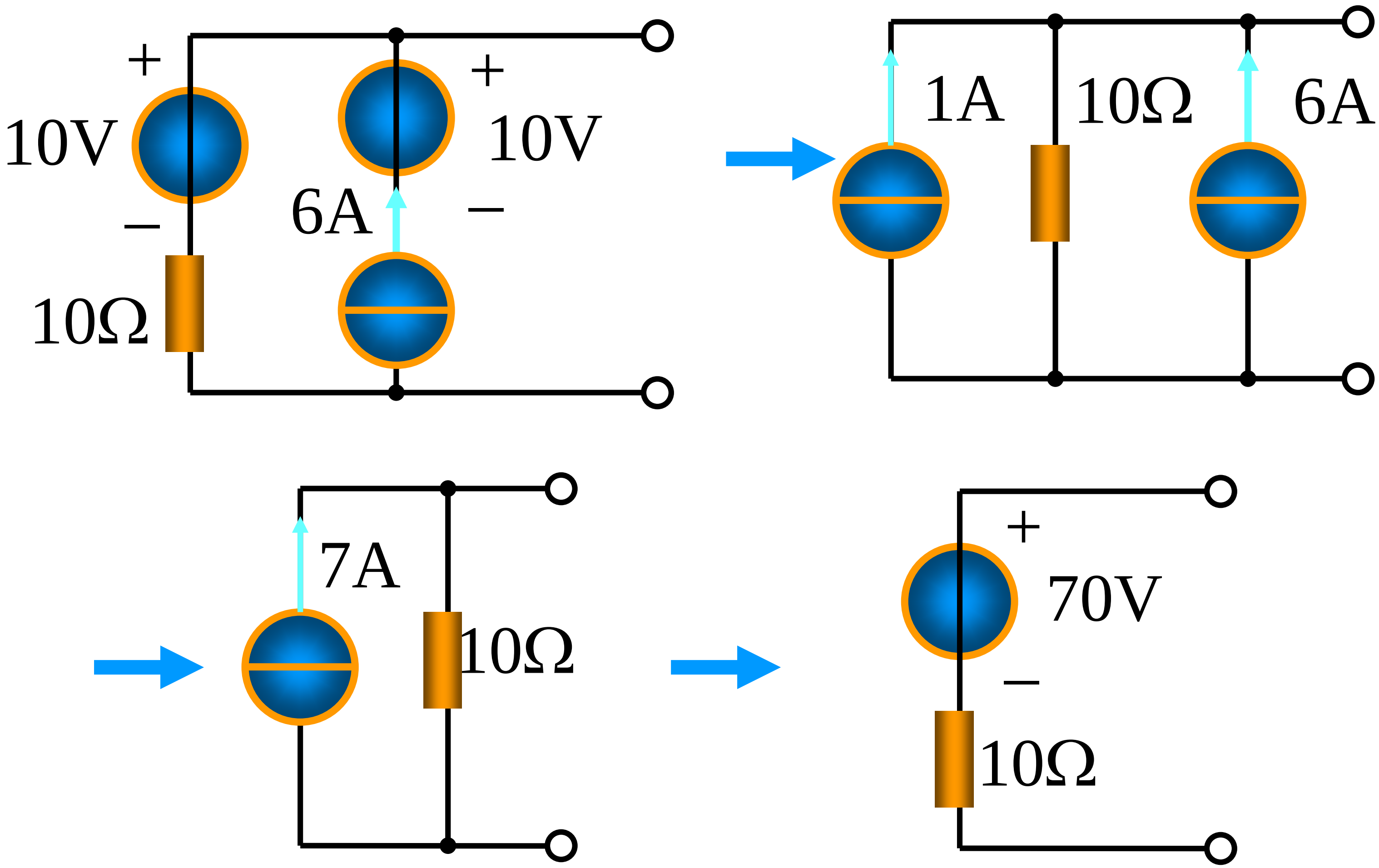
U=20V

例2

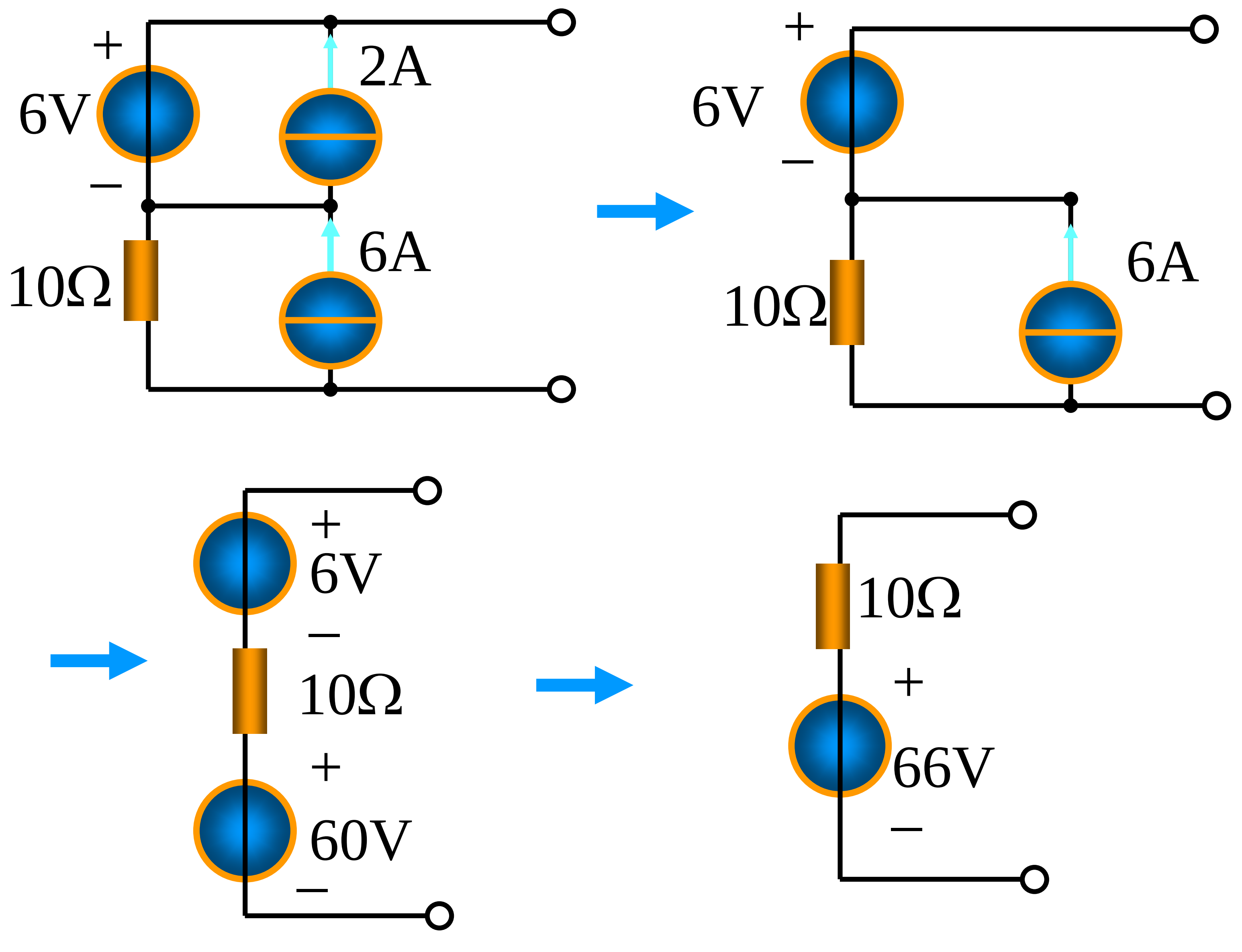
把电路转换成一个电压源和一个电阻的串联



1.

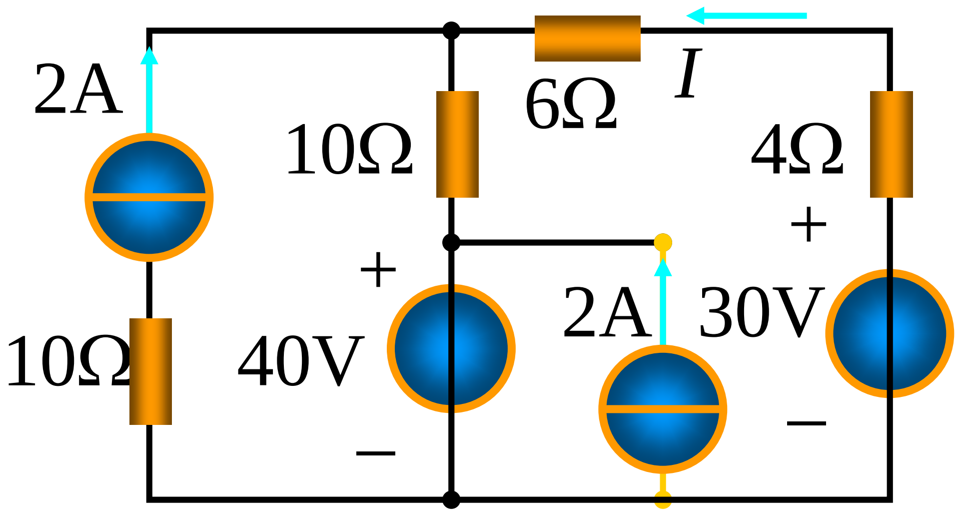


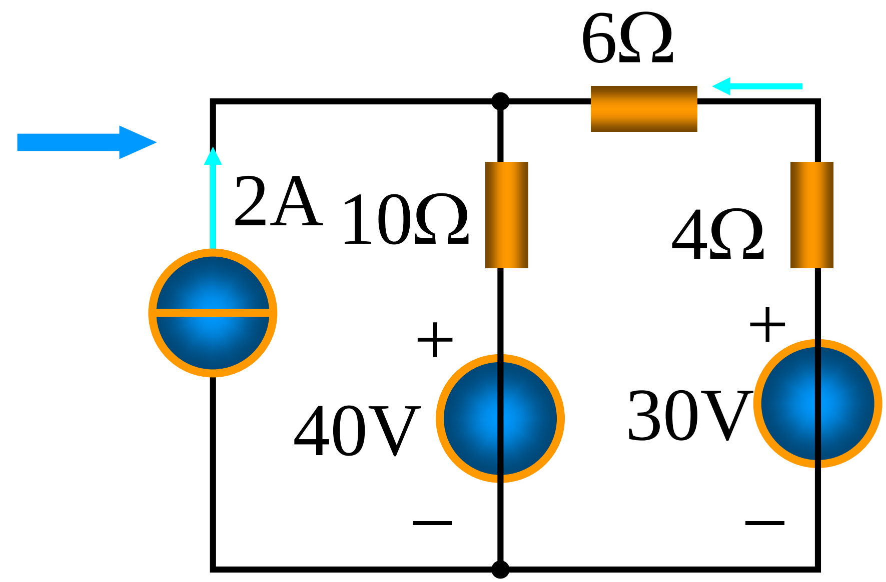
2.

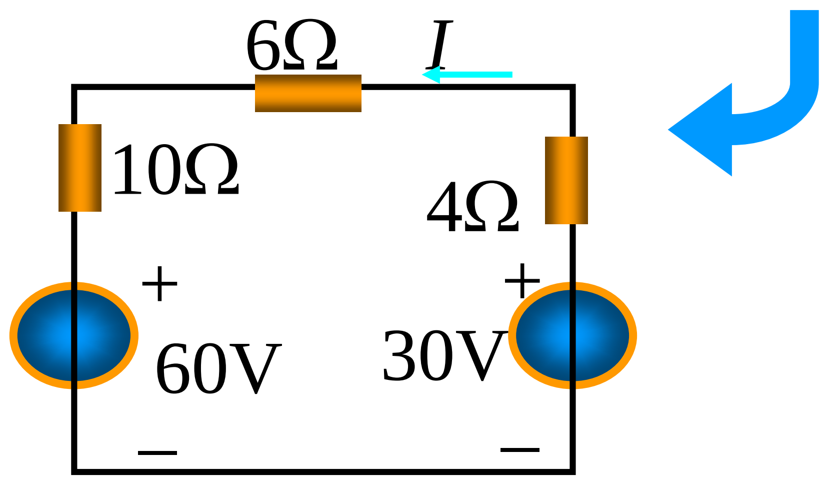


例3

求电路中的电流*I*







$$I = \frac{30-60}{20} = -1.5\text{A}$$

例4

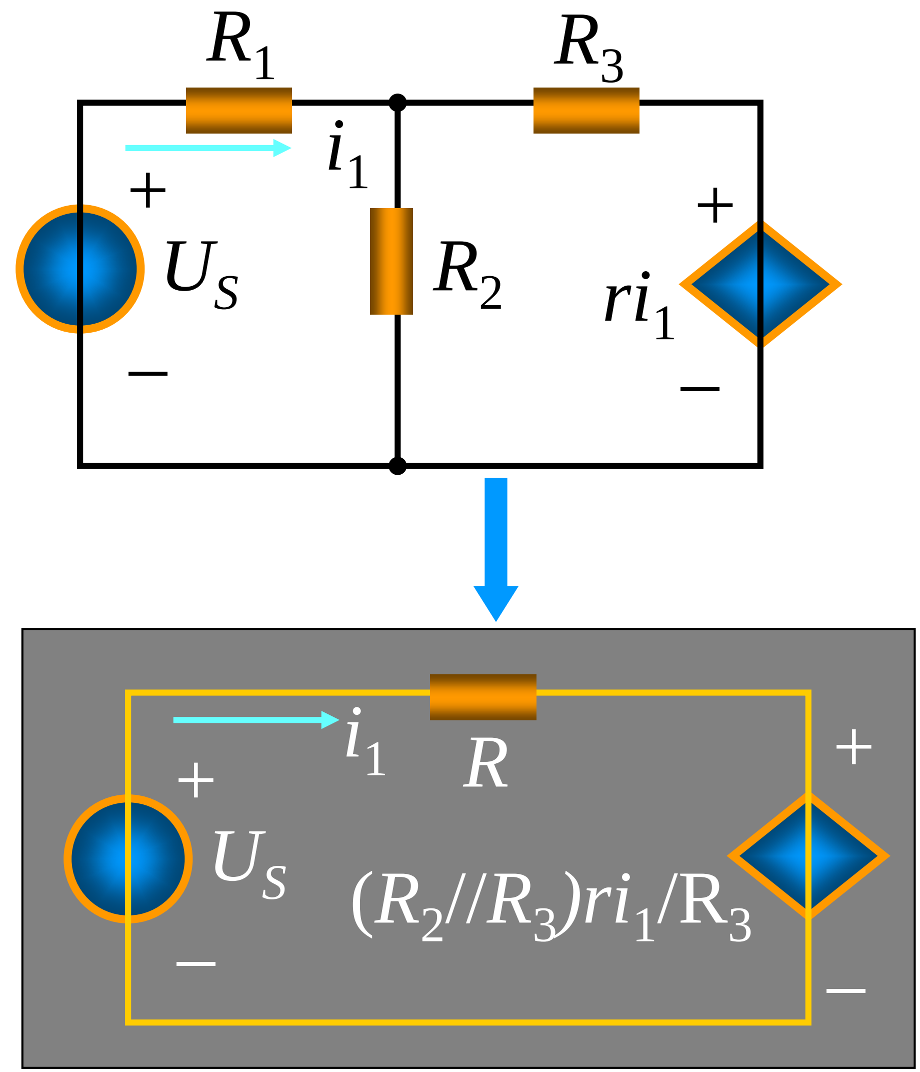
求电流 i_1

$$R = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$$

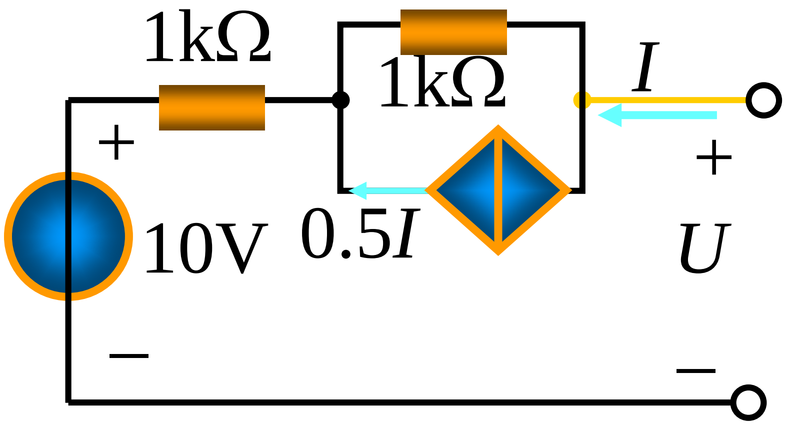
$$Ri_1 + (R_2 // R_3)ri_1 / R_3 = U_S$$

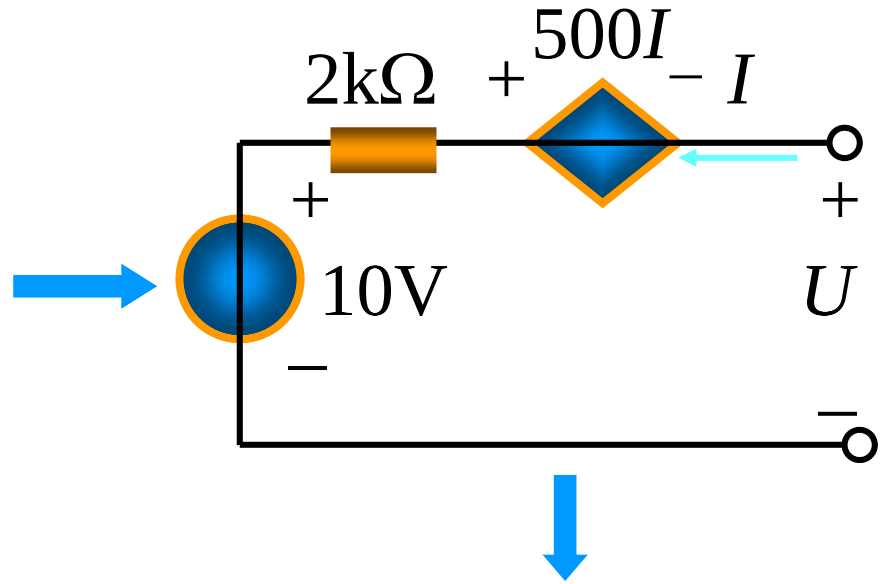
$$i_1 = \frac{U_S}{R + (R_2 // R_3)r / R_3}$$

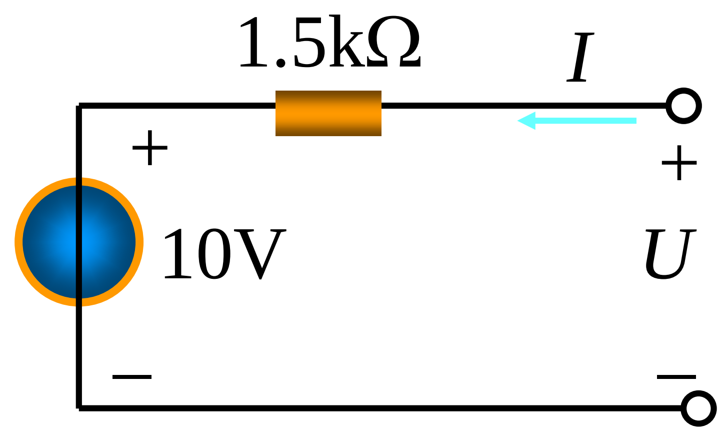
注意 **受控源和独立源一样可以进行电源转换；转换过程中注意不要丢失控制量。**



例5　**把电路转换成一个电压源和一个电阻的串连**





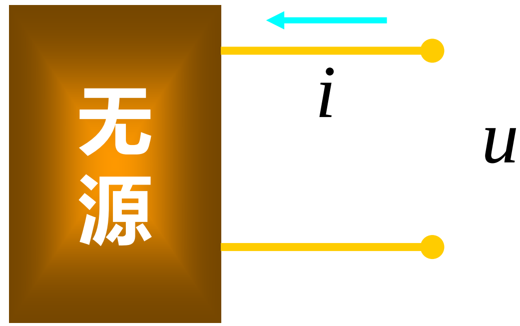


$$U = -500I + 2000I + 10$$

$$= 1500I + 10$$

2.7 输入电阻

1.定义



输入电阻

$$R_{in} = \frac{u}{i}$$

2.计算方法

①如果一端口内部仅含电阻，则应用电阻的串、并联和Δ—Y变换等方法求它的等效电阻；

②对含有受控源和电阻的两端电路，用电压、电流法求输入电阻，即在端口加电压源，求得电流，或在端口加电流源，求得电压，得其比值。

总结： 如何求二端网络的输入电阻

串并联

平衡电桥

Δ—Y变换

电阻二端网络求解顺序

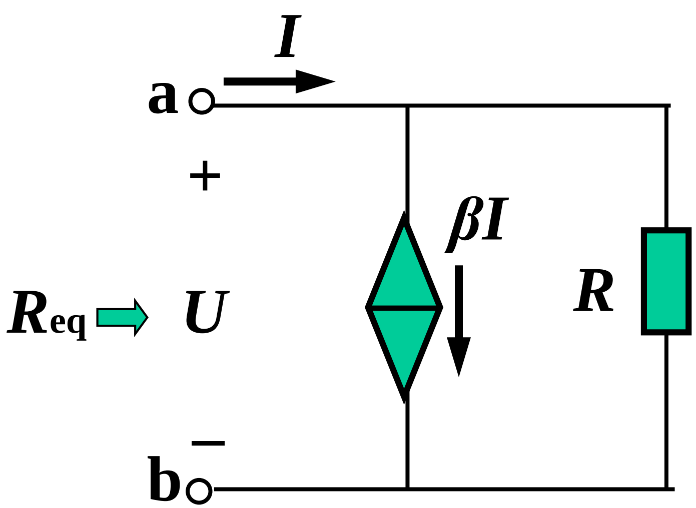
加压求流/

加流求压

含受控源二端网络入端电阻

含受控源二端网络的输入电阻

求入端等效电阻 ⇒ 求端口上的电压、电流关系 ⇒ 加压求流或加流求压



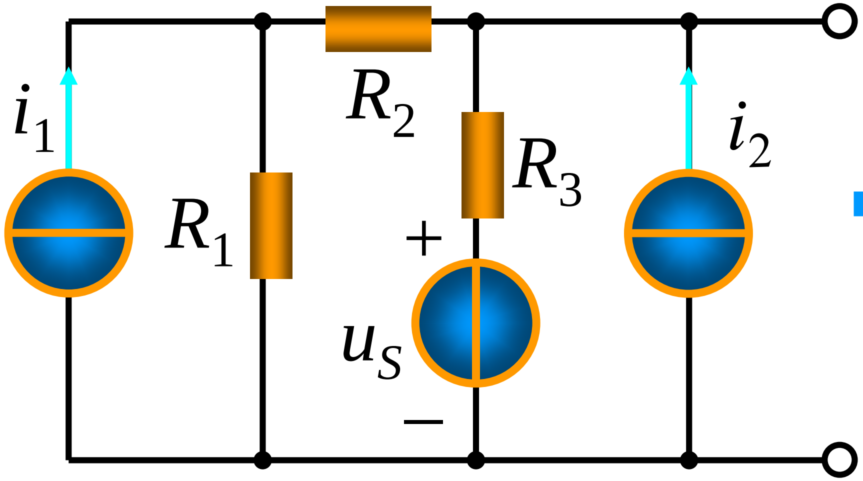
$$I = \beta I + \frac{U}{R} \Longrightarrow U = R(1-\beta)I$$

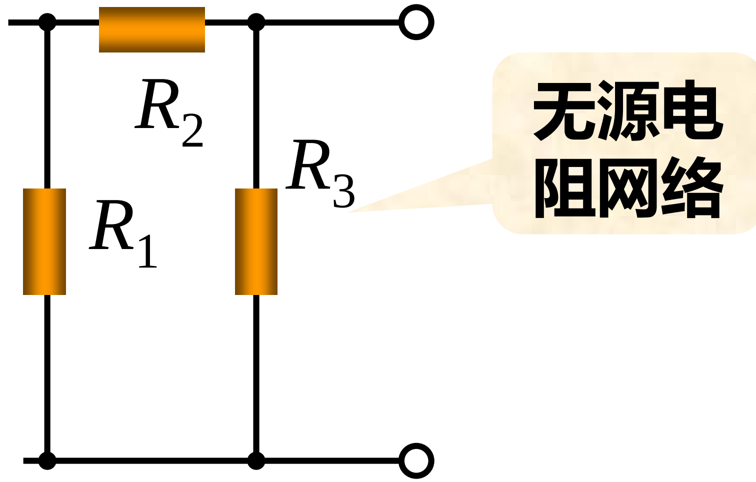
$$R_{eq}=U/I=(1-\beta)R$$

例

计算下例一端口电路的输入电阻

1.



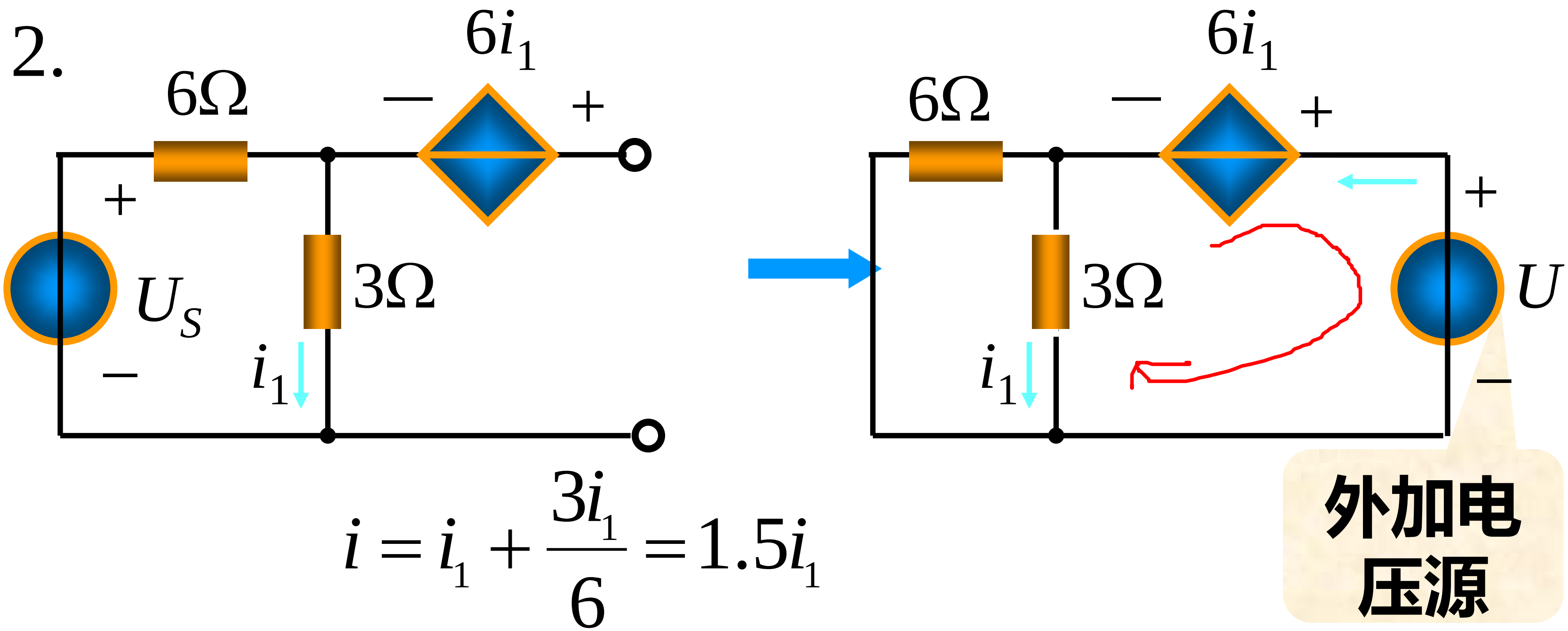


解

先把有源网络的独立源置零：电压源短路；电流源开路，再求输入电阻。

$$R_{in}=(R_1+R_2)//R_3$$

2.

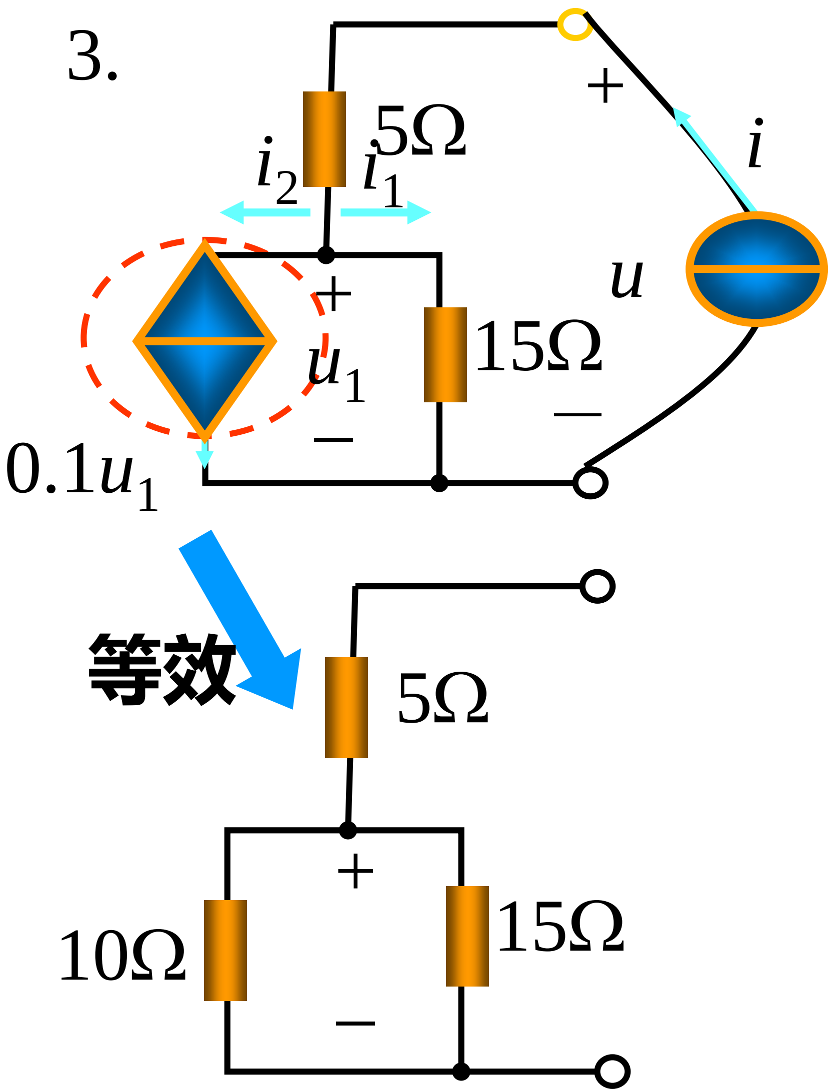


$$i = i_1 + \frac{3i_1}{6} = 1.5i_1$$

$$U = 6i_1 + 3i_1 = 9i_1$$

$$R_{in} = \frac{U}{i} = \frac{9i_1}{1.5i_1} = 6\Omega$$

3.



$$u_1 = 15i_1 \qquad i_2 = \frac{u_1}{10} = 1.5i_1$$

$$i = i_1 + i_2 = 2.5i_1$$

$$u = 5i + u_1 = 5 \times 2.5i_1 + 15i_1$$
$$= 27.5i_1$$

$$R_{in} = \frac{u}{i} = \frac{27.5i_1}{2.5i_1} = 11\Omega$$

$$R_{in} = 5 + \frac{10 \times 15}{10 + 15} = 11\Omega$$

Homework

2-4

2-11

2-12

2-14