第6章　储能元件

本章重点

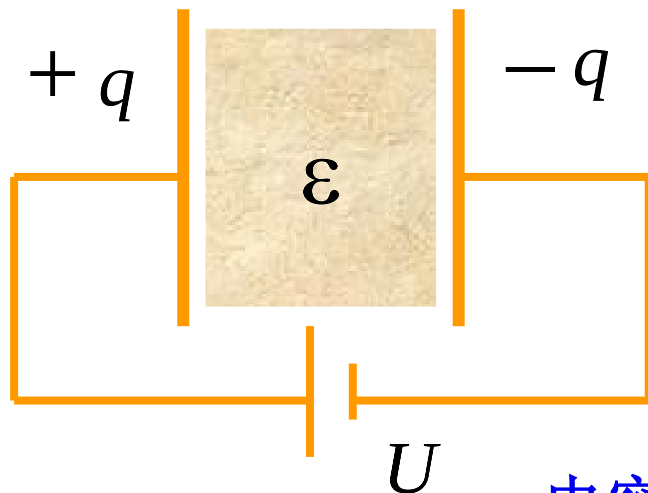
● 重点:

1. 电容元件的特性
2. 电感元件的特性
3. 电容、电感的串并联等效

6.1 电容元件

电容器

在外电源作用下，正负电极上分别带上等量异号电荷，撤去电源，电极上的电荷仍可长久地聚集下去，是一种储存电能的部件。



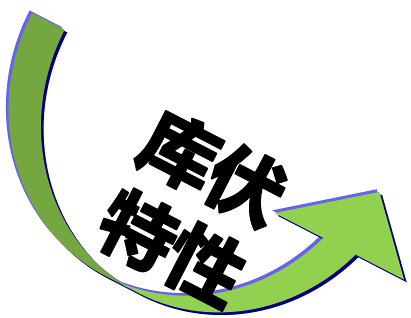
电容以电场形式存储能量。

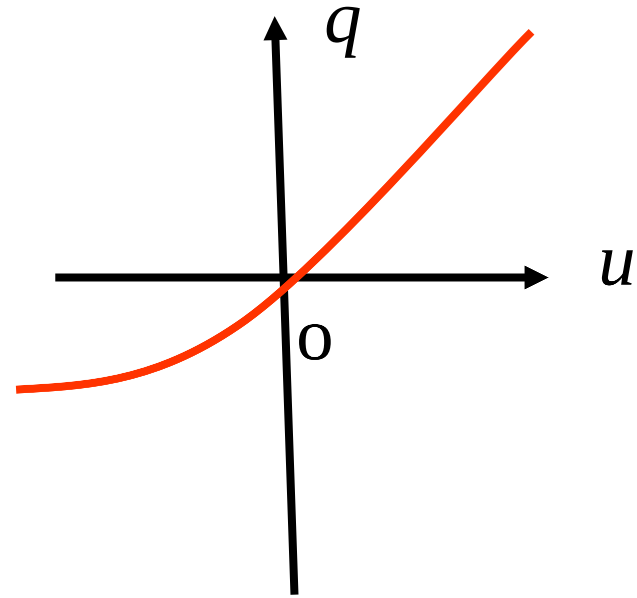
注意　电导体由绝缘材料分开就可以产生电容。

1. 定义

电容元件 → 储存电能的两端元件。任何时刻其储存的电荷 q 与其两端的电压 u能用$q \sim u$ 平面上的一条曲线来描述。

$$f(u,q)=0$$





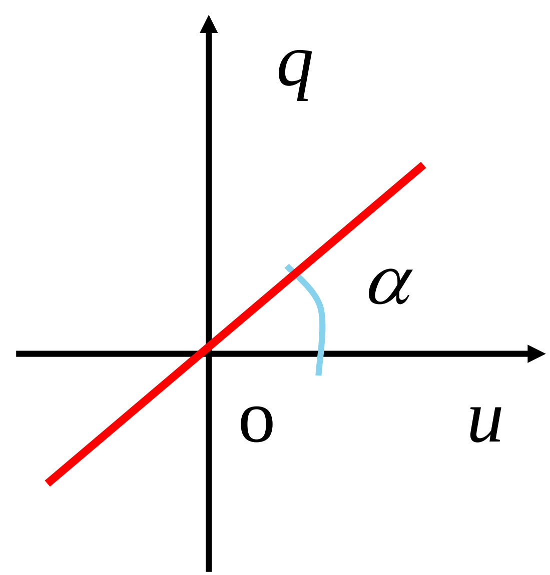
2.线性时不变电容元件

任何时刻，电容元件极板上的电荷 q 与电压 u 成正比。q~u 特性曲线是过原点的直线。

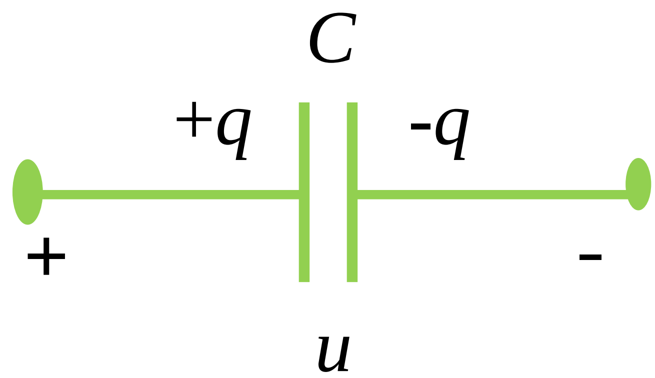
$$q = Cu$$

电容器的电容

$$C = \frac{q}{u} \propto \tan\alpha$$



电路符号



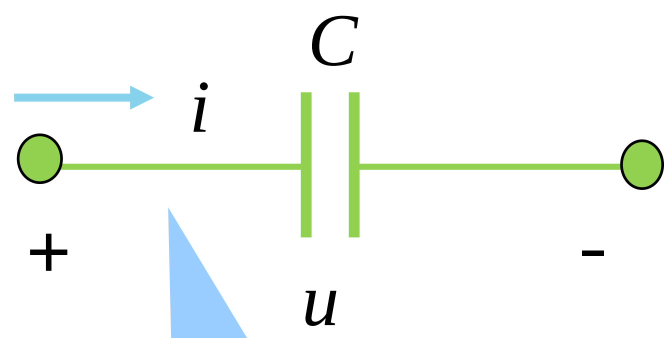
单位

F (**法拉**)，**常用**μF，pF**等表示**。

$$1\text{F}=10^6\ \mu\text{F}$$

$$1\ \mu\text{F}=10^6\text{pF}$$

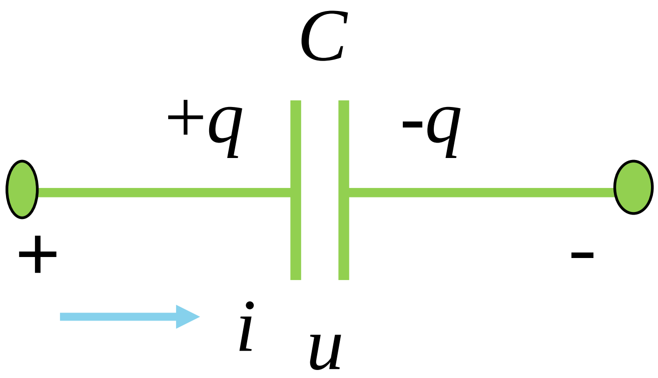
3. 电容的电压—电流关系



u、i 取关联参考方向

电容元件VCR的微分形式

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Cu}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$



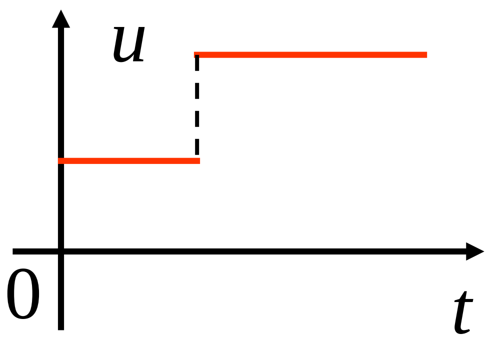
$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

表明

①某一时刻电容电流 i 的大小取决于电容电压 u 的变化率,而与该时刻电压 u 的大小无关。电容是动态元件;

②当 u 为常数(直流)时，i =0。电容相当于开路，电容有隔断直流作用;

③实际电路中通过电容的电流 i 为有限值，则电容电压 u 必定是时间的连续函数。



$$\frac{du}{dt} \to \infty \quad i \to \infty$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\mathrm{d}\xi$$

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\mathrm{d}\xi$$

电容元件VCR的积分形式

表明

①某一时刻的电容电压值与-∞到该时刻的所有电流值有关，即电容元件有记忆电流的作用，故称电容元件为记忆元件。

②研究某一初始时刻t_0以后的电容电压u(t)，需要知道t_0时刻开始作用的电流 i 和t_0时刻的电压 u（t_0）。

注意

①当电容的 u，i 为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

$$i=-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t)=u(t0)-\frac{1}{C}\int_{t0}^{t}i\mathrm{d}\xi$$

②上式中$u(t_0)$称为电容电压的初始值，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

4.电容的功率和储能

功率 $p = ui = u \cdot C \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

u、*i* 取关联参考方向

①当电容充电， $p>0$, 电容吸收功率。

②当电容放电，$p<0$, 电容发出功率。

表明

电容能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为电场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电容元件是储能元件，它本身不消耗能量。

电容的储能

$$W_C = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{t} Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}Cu^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}Cu^2(t) - \cancel{\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)} = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

从t_0到 t 电容储能的变化量：

$$W_C = \frac{1}{2}Cu^2(\xi)\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(t_0)$$

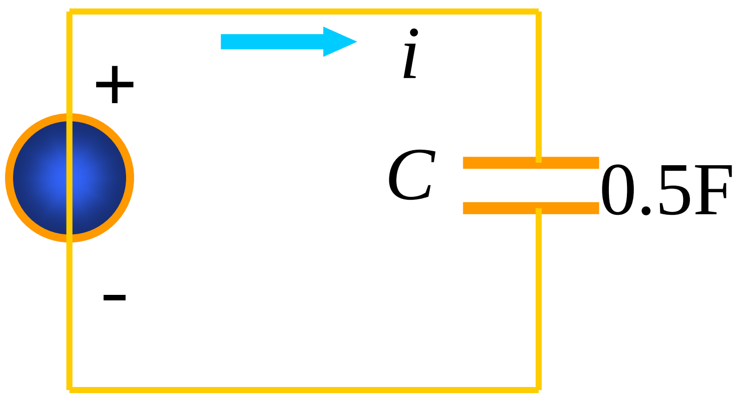
$$W_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)\geq 0$$

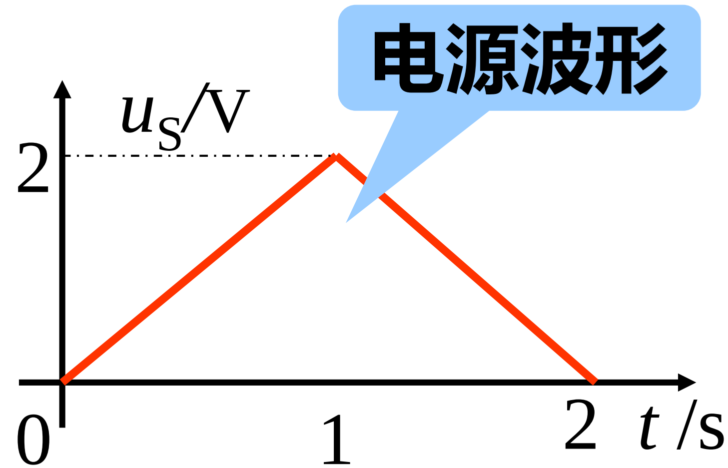
表明

① **电容的储能只与当时的电压值有关，电容电压不能跃变，反映了储能不能跃变；**

② **电容储存的能量一定大于或等于零。**

例　　**求电容电流i、功率$P(t)$和储能$W(t)$**

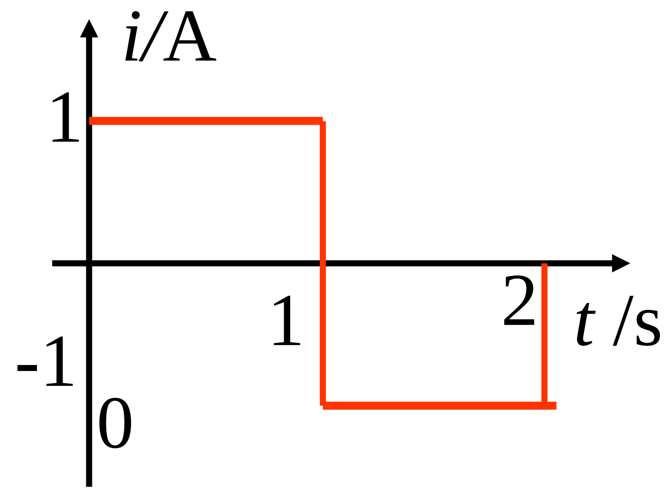




解　　$u_S(t)$**的函数表示式为:**

$$u_S(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1\text{s}\\ -2t+4 & 1\le t\le 2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$

$$u_{\mathrm{S}}(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1\mathrm{s}\\ -2t+4 & 1\le t\le 2\mathrm{s}\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$

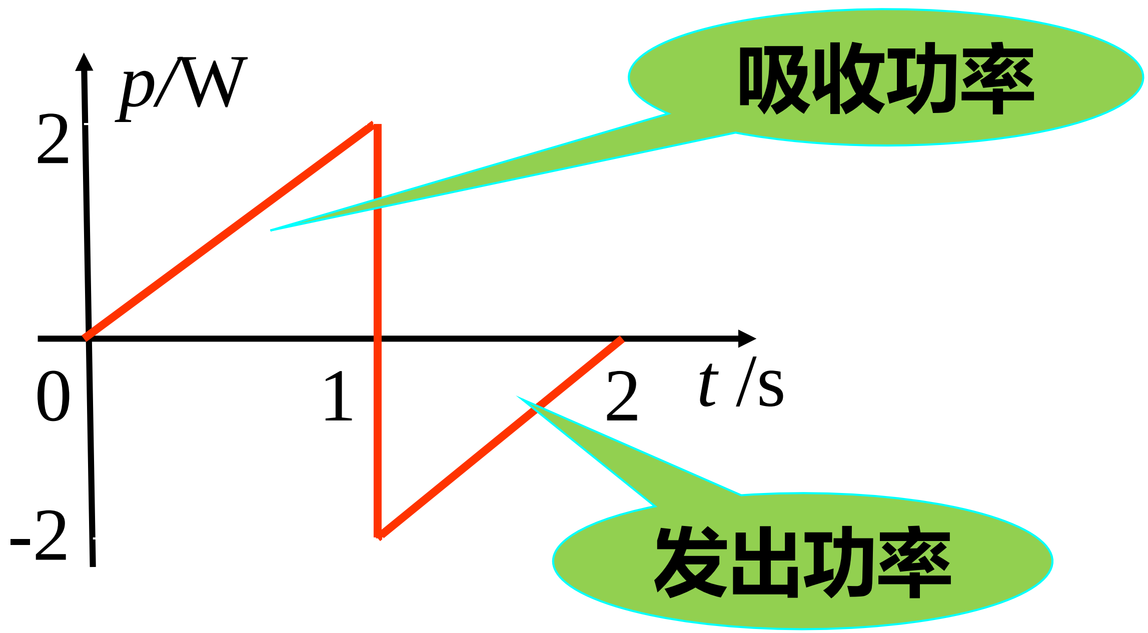


解得电流

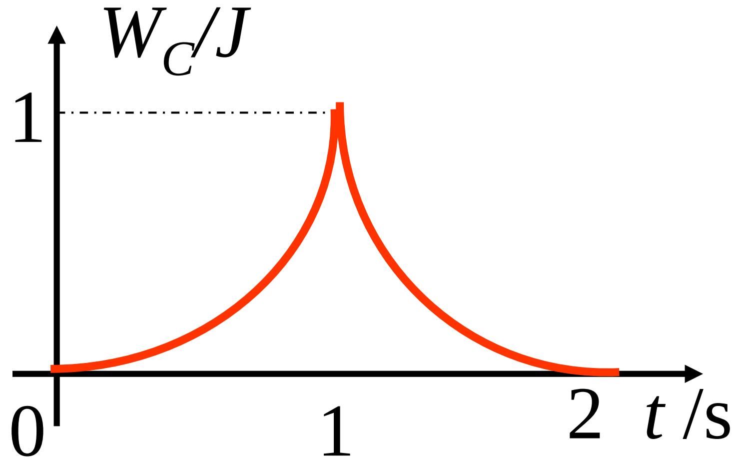
$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1\mathrm{s}\\ -1 & 1\le t<2\mathrm{s}\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$

$$\mathbf{0.5}\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\mathbf{0.5}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{2t}}{\mathrm{d}t}\\ \mathbf{0.5}\dfrac{\mathrm{d}(-\boldsymbol{2t}+\mathbf{4})}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

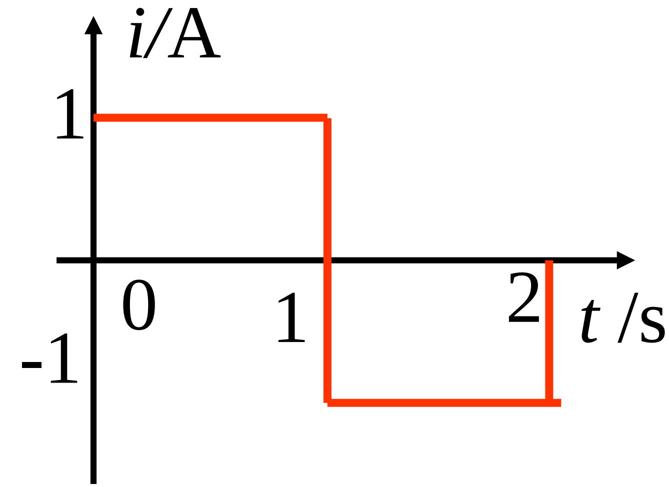
$$p(t)=u(t)i(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1\text{s}\\ 2t-4 & 1\le t\le 2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$



$$W_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t^2 & 0\le t\le 1\text{s}\\ (t-2)^2 & 1\le t\le 2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$



若已知电流求电容电压，有



$$i(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1\mathrm{s}\\ -1 & 1\le t<2\mathrm{s}\\ 0 & t\ge 2\mathrm{s}\end{cases}$$

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\mathrm{d}\xi$$

$2\times(t-0)$

$$0\le t\le 1\mathrm{s}\qquad u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}1\mathrm{d}\xi=0+2t=2t$$

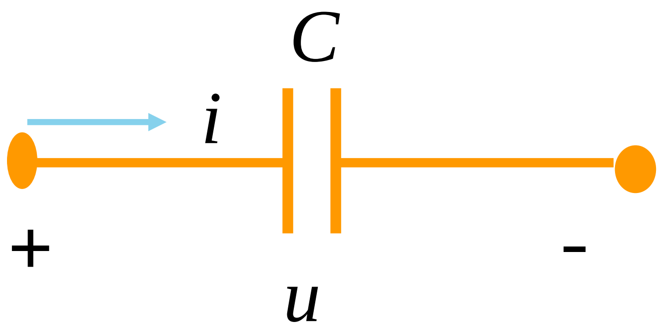
$2\times 1=2$ $\quad 2(1-t)=$

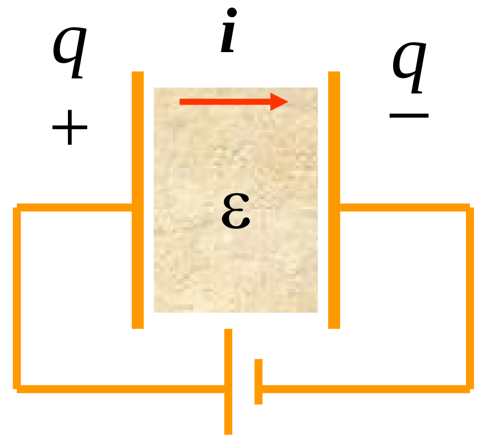
$$1\le t\le 2\mathrm{s}\qquad u_C(t)=u(1)+\frac{1}{0.5}\int_{1}^{t}(-1)\mathrm{d}\xi=4-2t$$

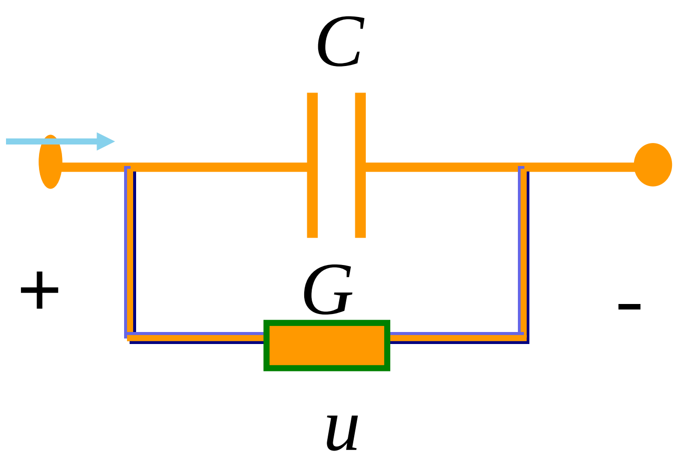
$$2\le t\qquad u_C(t)=u(2)+\frac{1}{0.5}\int_{2}^{t}0\mathrm{d}\xi=0$$

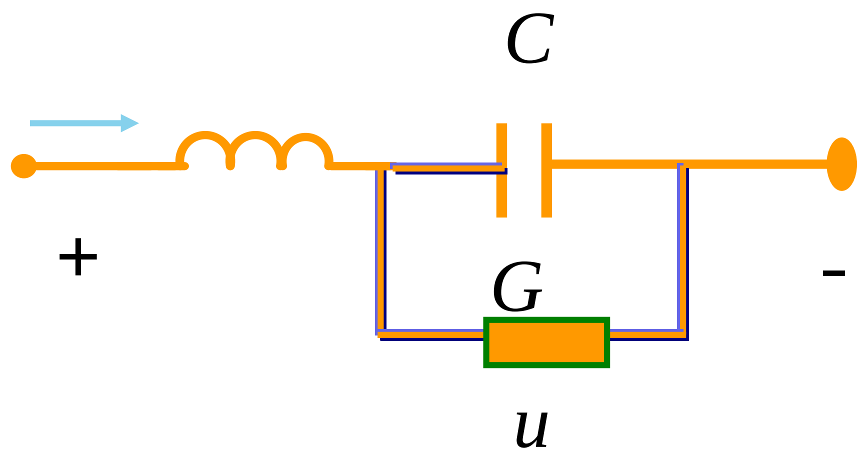
$4-2\times 2$
$=0$

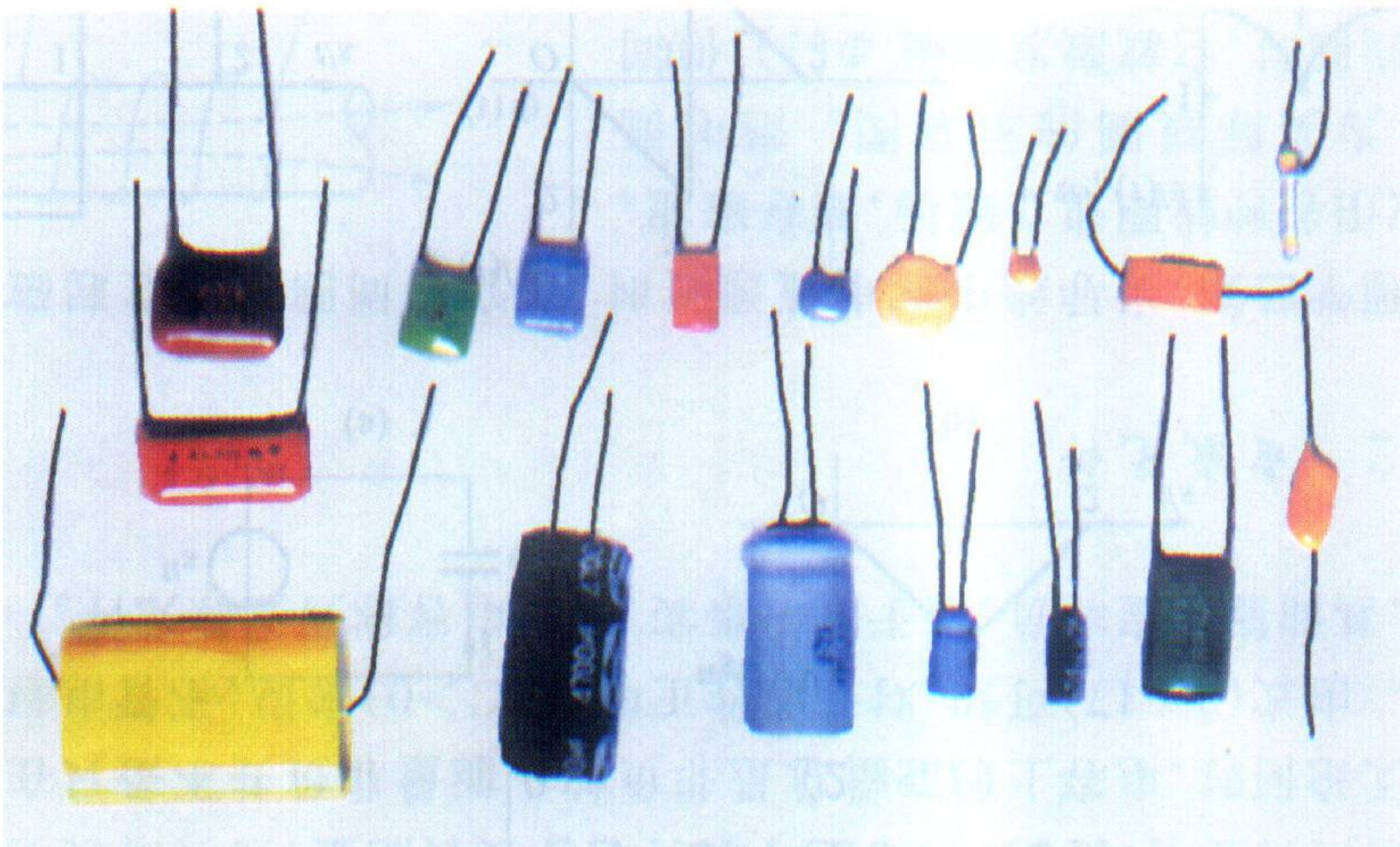
实际电容器的模型









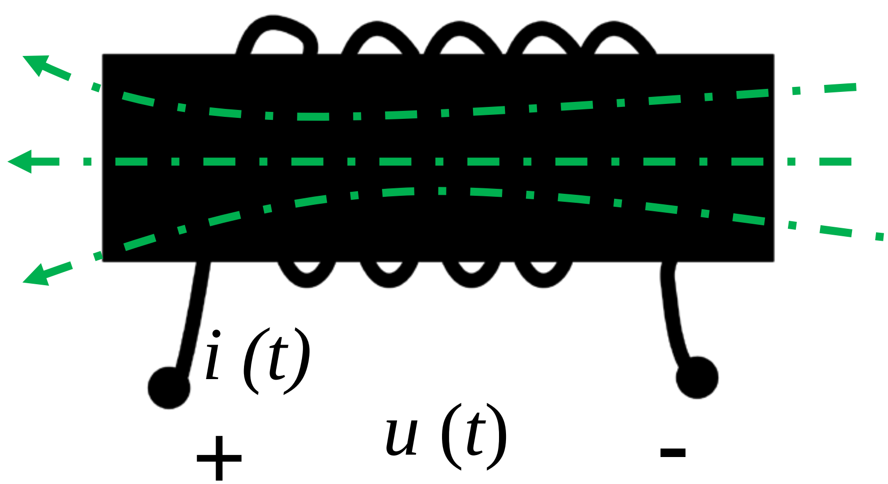


实际电容器

6.2 电感元件

电感线圈

把金属导线绕在一骨架上构成一实际电感线圈，当电流通过线圈时，将产生磁通，是一种抵抗电流变化、储存磁能的部件。



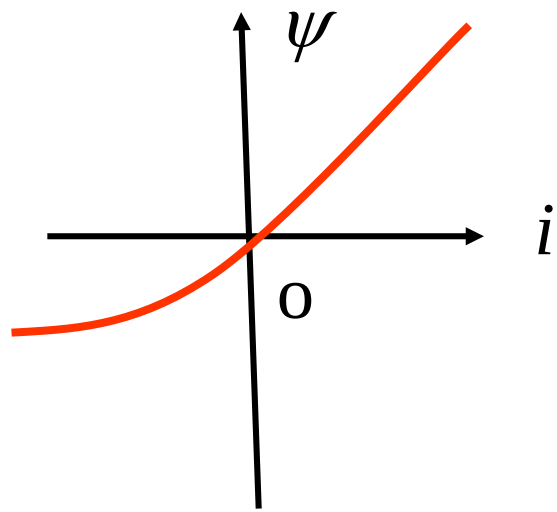
$$\psi(t) = N\,\Phi(t)$$

1. 定义

电感元件 → **储存磁能的两端元件。任何时刻，其特性可用$\psi \sim i$ 平面上的一条曲线来描述。**

$$f(\psi, i) = 0$$

韦安特性

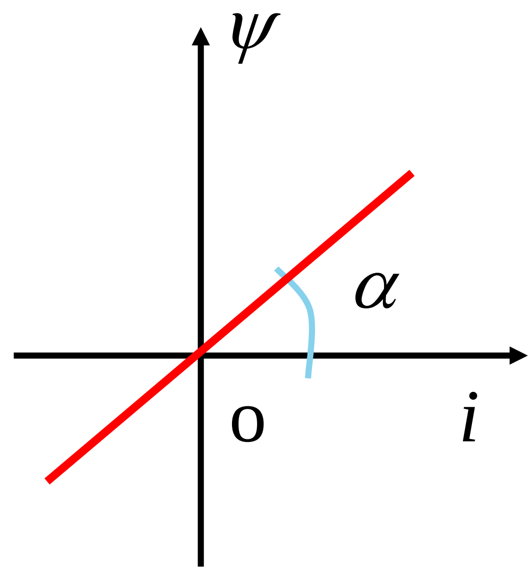


2. 线性时不变电感元件

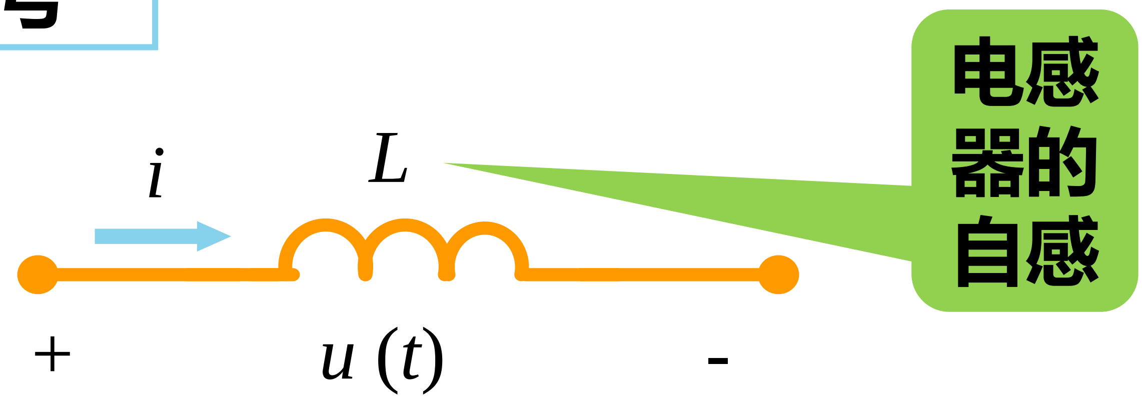
任何时刻，通过电感元件的电流 i 与其磁链 ψ 成正比。 $\psi \sim i$ 特性为过原点的直线。

$$\psi(t) = Li(t)$$

$$L = \frac{\psi}{i} \propto \tan\alpha$$



电路符号



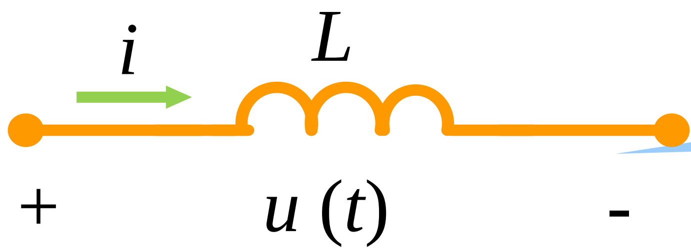
单位

H (亨利)，常用μH，mH表示。

$$1\text{H}=10^3\ \text{mH}$$

$$1\ \text{mH}=10^3\ \mu\text{H}$$

3.线性电感的电压、电流关系

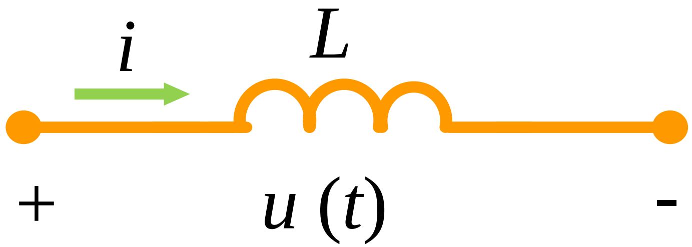


***u*、*i* 取关联参考方向**

根据电磁感应定律与楞次定律

$$u(t)=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

电感元件VCR的微分关系



$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

表明

①**电感电压**u **的大小取决于**i **的变化率，与** i **的大小无关，电感是动态元件；**

②**当**i**为常数(直流)时，**u =0**。电感相当于短路；**

③**实际电路中电感的电压** u**为有限值，则电感电流** i **不能跃变，必定是时间的连续函数.**

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u\,\mathrm{d}\xi$$

$$=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u\,\mathrm{d}\xi$$

电感元件VCR的积分关系

表明

①某一时刻的电感电流值与-∞到该时刻的所有电压值有关，即电感元件有记忆电压的作用，电感元件也是记忆元件。

②研究某一初始时刻t_0以后的电感电流，不需要了解t_0以前的电流，只需知道t_0时刻开始作用的电压 u 和t_0时刻的电流 i（t_0）。

注意

①当电感的 u，i 为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

$$u=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{i}(t)=i(t0)-\frac{1}{L}\int_{t0}^{t}u\,\mathrm{d}\xi$$

②上式中 $i(t_0)$称为电感电压的初始值，它反映电感初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

4.电感的功率和储能

u、 i 取关联参考方向

功率

$$p = ui = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cdot i$$

①当电流增大，$p>0$, 电感吸收功率。

②当电流减小，$p<0$, 电感发出功率。

表明

电感能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为磁场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电感元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

电感的储能

$$W_L = \int_{-\infty}^{t} Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}Li^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(-\infty) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

从t_0到 t 电感储能的变化量：

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(t_0)$$

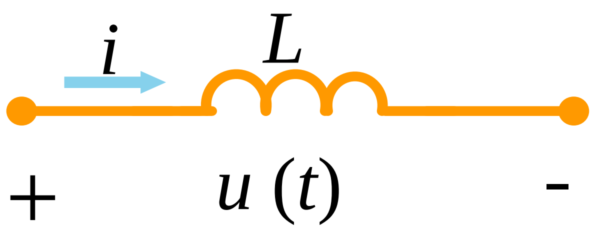
$$W_L = \frac{1}{2} L i^2(t) \geq 0$$

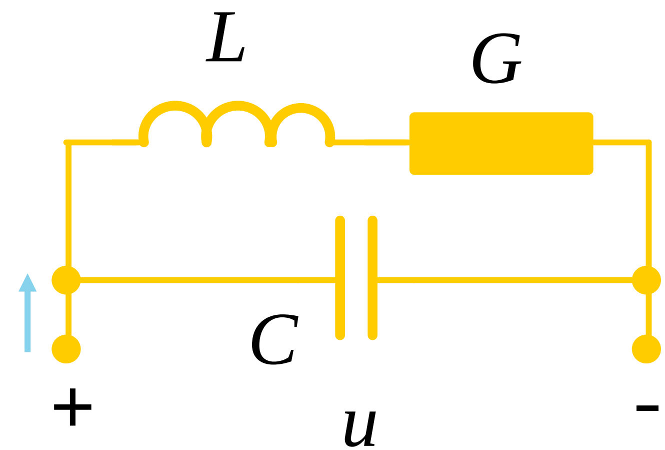
表明

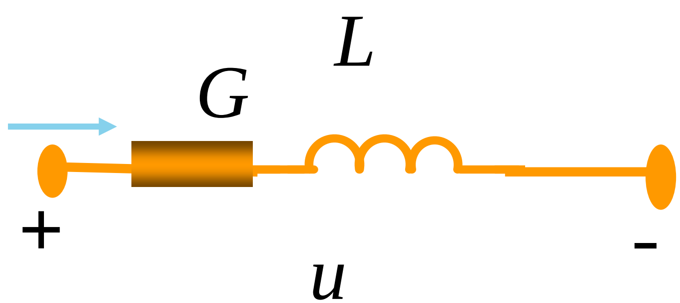
①电感的储能只与当时的电流值有关，电感电流不能跃变，反映了储能不能跃变。

②电感储存的能量一定大于或等于零。

实际电感线圈的模型







电容元件与电感元件的比较：

	电容 C	电感 L
变量	电压 u 电荷 q	电流 i 磁链 Ψ
关系式	$q = Cu$ $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $W_C = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{1}{2C}q^2$	$\Psi = Li$ $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $W_L = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2L}\Psi^2$

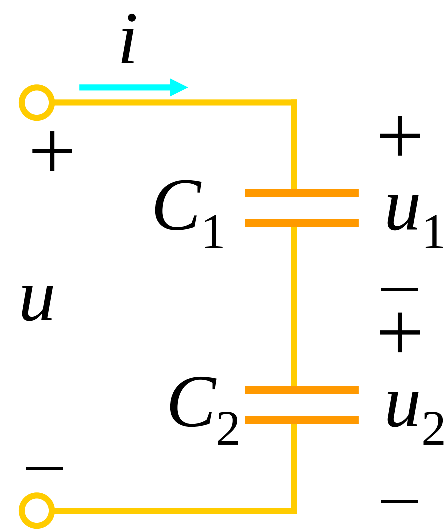
(1) 元件方程是同一类型；

(2) 若把 u-i，q-Ψ，C-L， i-u互换,可由电容元件的方程得到电感元件的方程；

(3) C 和 L 称为对偶元件, Ψ、q 等称为对偶元素。

6.3 电容、电感元件的串联与并联

1.电容的串联



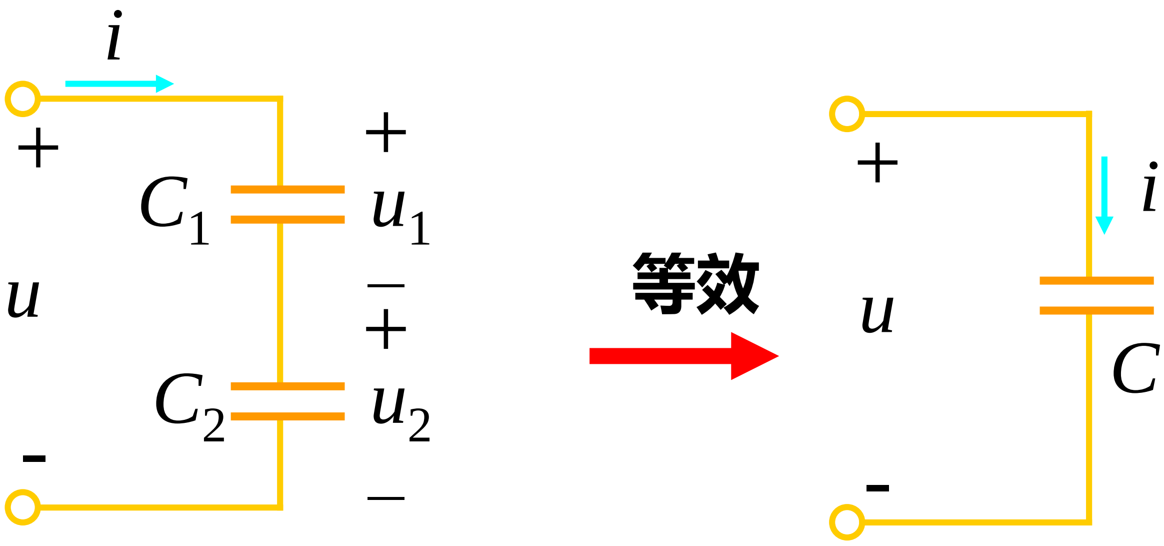
等效电容

$$u_1 = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u_2 = \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u = u_1 + u_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$



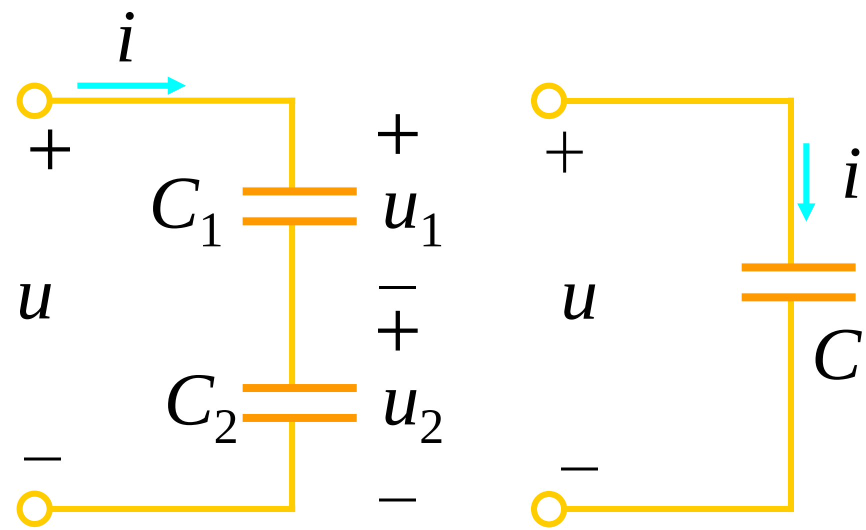
$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

串联电容的分压

$$u_1 = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u_2 = \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$



$$\mathrm{C} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$u_1 = \frac{C}{C_1}u = \frac{C_2}{C_1 + C_2}u \qquad u_2 = \frac{C}{C_2}u = \frac{C_1}{C_1 + C_2}u$$

2.电容的并联

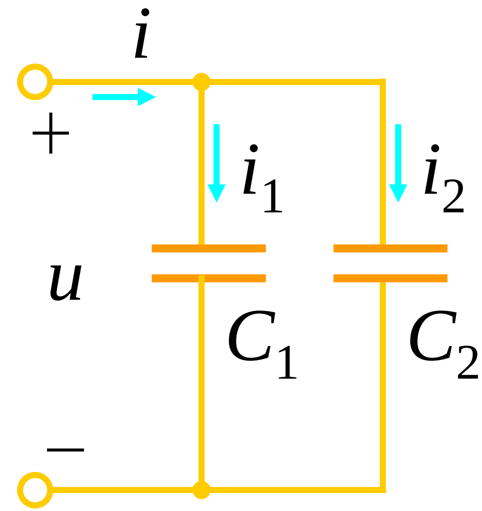
等效电容

$$i_1 = C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad i_2 = C_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

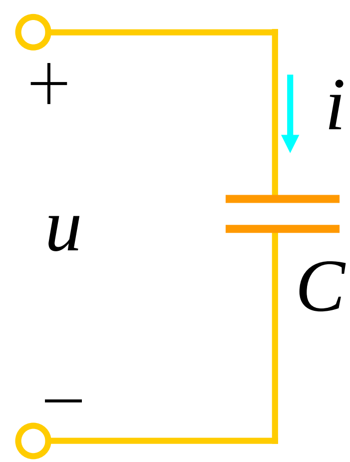
$$i = i_1 + i_2 = (C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$= C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

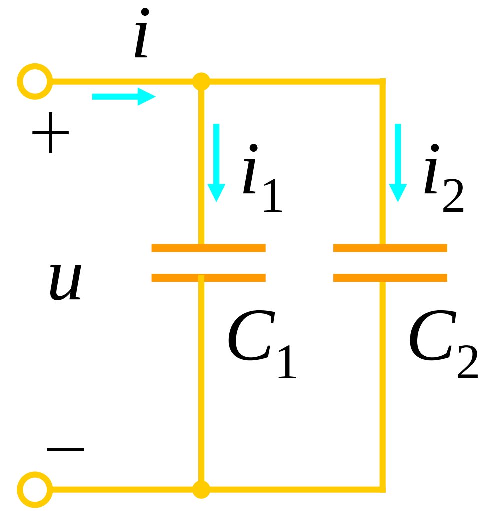
$$C = C_1 + C_2$$



等效



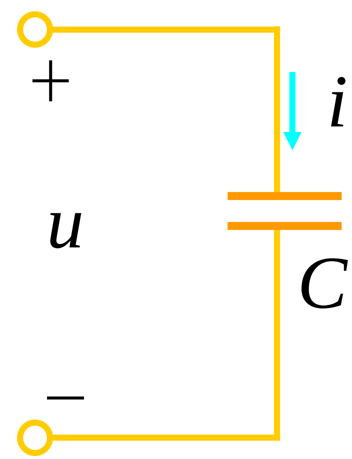
并联电容的分流



$$i_1 = C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad i_2 = C_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

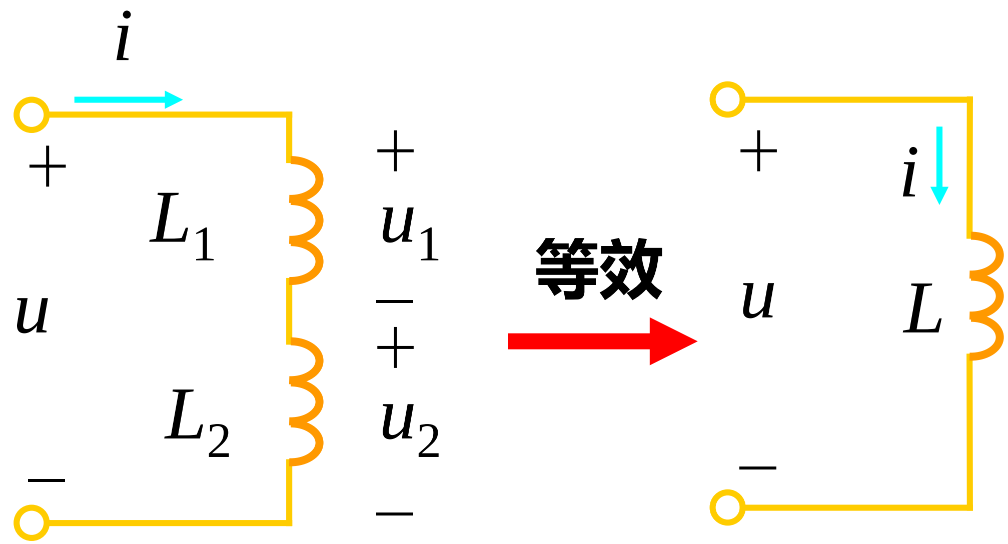
$$C = C_1 + C_2$$



$$i_1 = \frac{C_1}{C} i \qquad i_2 = \frac{C_2}{C} i$$

3. 电感的串联

等效电感



$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L = L_1 + L_2$$

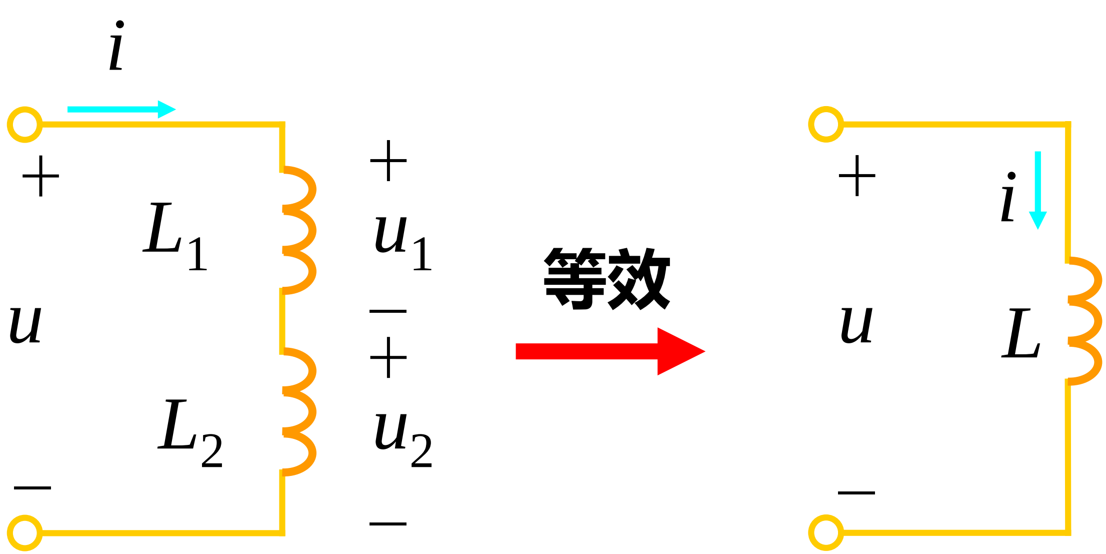
串联电感的分压

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{L_1}{L}u = \frac{L_1}{L_1 + L_2}u$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{L_2}{L}u = \frac{L_2}{L_1 + L_2}u$$

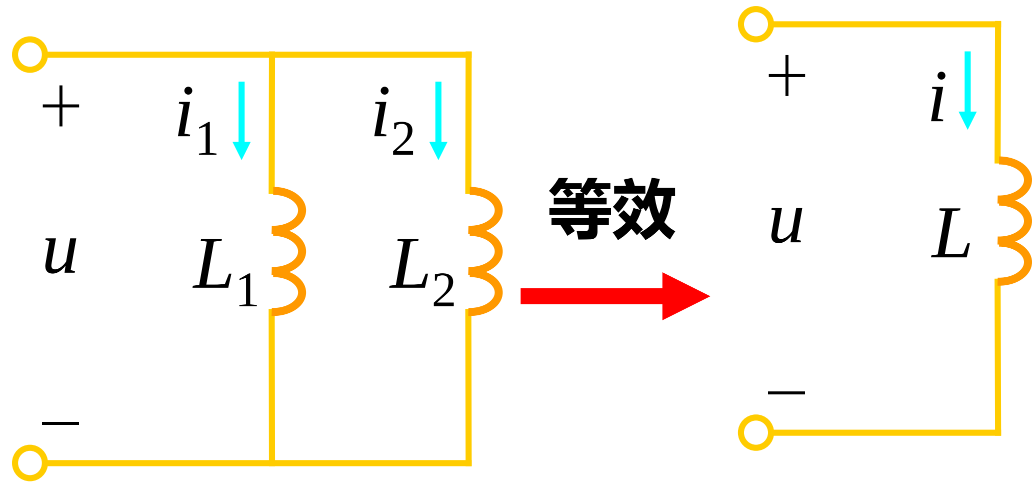


4.电感的并联

等效电感

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

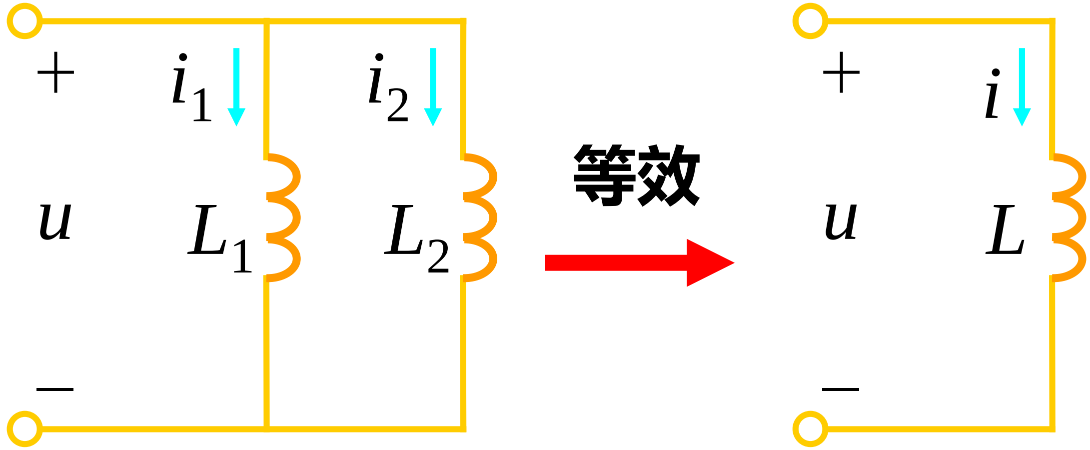
$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$



$$i = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi \ = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$L = 1\Big/\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

并联电感的分流



$$\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi = Li$$

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{L}{L_1} i = \frac{L_2 i}{L_1 + L_2}$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{L}{L_2} i = \frac{L_1 i}{L_1 + L_2}$$

注意

以上虽然是关于两个电容或两个电感的串联和并联等效，但其结论可以推广到 n 个电容或 n 个电感的串联和并联等效。

● 重点：

1. 电容元件的特性
2. 电感元件的特性
3. 电容、电感的串并联等效

Homework

6-4
6-6
6-7