2018 级 场论与无穷级数 参考答案

一、判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{6n^2+5}$;

解：发散。注意到

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n+2}{6n^2+5}=\frac{1}{6}$$

故该级数发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

解：注意到这是交错级数，并注意到

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

其导函数

$$f'(x)=\frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

在$x>1$时恒小于零，故

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1}>\frac{\sqrt{n+1}}{n+2},n>1$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

根据莱布尼茨定理，知该级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

解：注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}3(n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{3}{e}>1$$

所以原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n}},a\in R$；

解：当$a>0$时，该级数为正项级数，注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}a\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=a$$

当$a>1$时，该级数发散，当$a<1$时，该级数收敛，当$a=1$时，原级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

级数显然发散。

当$a=0$时，级数自然收敛。

当$a<0$时，该级数为交错级数，当$-1<a<0$时该级数绝对收敛，当$a=-1$时该级数条件收敛，当$a<-1$时，注意到该级数的一般项

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n}{\sqrt{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|a|^x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x}\cdot|a|^x\cdot\ln|a|\neq 0$$

故该级数发散。综上所述，当$x\in[-1,1)$时该级数收敛，其他情况下该级数发散。

二、求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2(n+1)}$$

的收敛域与和函数，并求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

的和。

解：注意到

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+3)(2n+4)}|x|^2=|x|^2$$

故收敛半径为 1，当$x=\pm1$时，原级数显然收敛，故收敛域为$[-1,1]$.记和函数为$S(x)$，注意到

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2(n+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2(n+1)}$$

记

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2(n+1)}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2(n+1)}$$

不难发现这两个级数在$[-1,1]$上都收敛。记

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

逐项求导数得

$$g(x)=f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$$

积分，并注意到$f(0)=0$，得

$$f(x)=\arctan x$$

故

$$S_1(x)=xf(x)=x\arctan x\,,x\in[-1,1]$$

记

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2(n+1)}$$

类似的，解得

$$h'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}=\frac{x}{1+x^2}$$

积分，并注意到$h(0)=0$，得

$$h(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

故

$$S_2(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,,x\in[-1,1]$$

综上

$$S(x)=S_1(x)-S_2(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,,x\in[-1,1]$$

级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=S(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

三、将函数

$$f(x)=\frac{1+x}{(x-1)^2}$$

展开为x的幂级数，并说明其收敛域。

解：注意到

$$f(x)=\frac{x-1+2}{(x-1)^2}=-\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}$$

同时注意到

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,-1<x<1$$

对上式逐项求导数得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n,-1<x<1$$

故

$$\frac{2}{(1-x)^2}=2+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)x^n,-1<x<1$$

则

$$f(x)=-\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}=2+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)x^n-1-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n,$$

$$-1<x<1$$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解

(1) $y'(xy+x^3y)=1+y^2$；

解：这是可分离变量的微分方程，有

$$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

两边同时积分有

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$$\ln(1+y^2)=\ln x^2-\ln(x^2+1)+C$$

即

$$1+y^2=\frac{Cx^2}{1+x^2}$$

(2) $-y+xy'=4x^2$

解：先变形为

$$y'-\frac{1}{x}y=4x$$

这是一阶线性微分方程，根据公式有

$$y=x\left[\int 4dx+C\right]=4x^2+Cx$$

(3) $y''+4y'+4y=x+8$；

解：这是常系数二阶线性微分方程，其特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

解得

$$\lambda_1=\lambda_2=-2$$

故与之对应的齐次方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$$

注意到$f(x)=x+8$，故特解必然满足形式

$$y^*=Ax+B$$

显然，一个特解可写为

$$y^*=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$

综上，该方程的通解为

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}+e^{-2x}(C_1+C_2x).$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x},x\neq 0$；

解：这是齐次方程，令$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，故原式化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\tan u+u$$

$$x\frac{du}{dx}=\tan u$$

进一步令

$$\frac{1}{x}dx=\frac{1}{\tan u}du$$

两边同时积分得

$$\ln|x|=\ln|\sin u|+C$$

代回，整理，得

$$x=C_1\sin\frac{y}{x}$$

其中C_1为任意非零常数。

(5) $xy''=y',y(1)=1,y'(1)=2$；

解：这是可降阶的二阶微分方程，令$p=y',p'=y''$，原方程化为

$$x\frac{dp}{dx}=p$$

注意到$p\equiv 0$不满足初值条件，故

$$\frac{1}{p}dp = \frac{1}{x}dx$$

两边同时积分，得

$$\ln|p| = \ln|x| + C$$

即

$$p = y' = C_1 x$$

将初值条件代入，解得

$$C_1 = 2$$

故

$$y' = 2x$$

再次积分，得

$$y = x^2 + C_2$$

再将初值条件代入，得

$$C_2 = 0$$

故该方程的解为

$$y = x^2$$

五、计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$；

解：注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{d\sqrt{x}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = 2\arctan\sqrt{x}\,|_0^{+\infty} = \pi.$$

(2) $\int_0^1 \frac{(2-x)}{\sqrt{x}} dx$；

解：注意到$x=0$是瑕点，而该积分显然收敛。故令$t=\sqrt{x}$，则

$$\int_0^1 \frac{(2-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{2-t^2}{t} \cdot 2tdt = 2\int_0^1 (2-t^2)\, dt = \frac{10}{3}$$

六、将函数$f(x) = 1 - x^2\ (0 \le x \le \pi)$展开为（周期为$2\pi$的）余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的值。

解：对原函数作偶延拓，得

$$F(x) = 1 - x^2, -\pi \le x \le \pi$$

此时

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=-\frac{2}{3}(\pi^2-3)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot(-2n\pi\cos n\pi)\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{4}{n^2}(-1)^{n-1},n=1,2,\cdots$$

$$b_n=0$$

故

$$f(x)=\frac{1}{3}(3-\pi^2)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx\,,0\le x\le\pi.$$

注意到

$$f(0)=\frac{1}{3}(3-\pi^2)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

七、讨论广义积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$$

的敛散性，其中$\alpha>0$.

解：首先将原积分拆分为

$$I(\alpha)=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$$

当$\alpha\le2$时，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to0^+}x^{2-\alpha}=0$$

故$x=0$不是瑕点，左侧积分收敛。关注右侧无穷限积分，当$1<\alpha\le2$时，此时有

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2}{\alpha-1}\cdot x^{\frac{3-\alpha}{2}}=0$$

故无穷限积分收敛。当$\alpha=1$时，此时有

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x}=+\infty$$

故无穷限积分发散。当$0<\alpha<1$时，此时亦有

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=+\infty$$

故无穷限积分发散。

当$\alpha>2$时，第一个积分是瑕积分，当$2<\alpha<3$时，此时注意到

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=1$$

故原积分收敛。当$\alpha\geq 3$时，有

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=1$$

故原积分发散。而对于无穷限积分，此时有

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2}{\alpha-1}\cdot x^{\frac{3-\alpha}{2}}=0$$

故无穷限积分收敛。

综上所述，原积分在$\alpha\in(1,3)$上收敛，在其余取值上发散。

八、计算下列积分

$$I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\alpha\cos x)}{\cos x}dx\,,\alpha>0$$

被积函数在$x=\frac{\pi}{2}$处的值取其在该点处的极限。

解：根据题意，被积函数在$x=\frac{\pi}{2}$处的值存在，故$\frac{\pi}{2}$不是瑕点。注意到

$$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\alpha^2\cos^2 x}dx$$

作恒等变形，则原积分化为

$$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\alpha^2\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\alpha^2+1)\cos^2 x+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{(\alpha^2+1)+\tan^2 x}$$

令$t=\tan x$，则

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(\alpha^2+1)+t^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\alpha^2+1}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}$$

积分，得

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha I'(t)dt=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)+I(0)$$

注意到

$$I(0)=0$$

故

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right).$$