第十一章 二端口电路

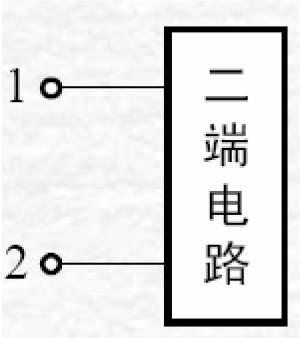
本章教学目的和教学要求

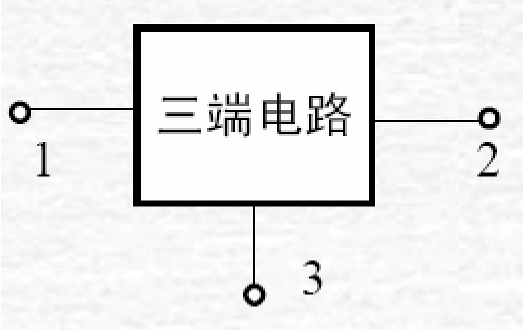
双口网络在工程中应用广泛，如互感器、变压器、晶体管放大器、滤波网络等。当不研究内部形状时，都属于双口网络。本章介绍讨论双口网络的分析方法，主要内容包括：

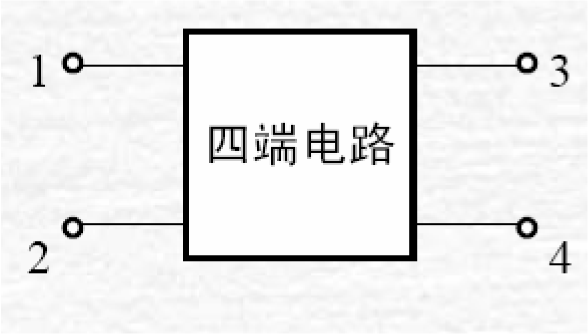
- 掌握双口网络的方程和参数；
- 熟悉线性无源双口网络的等效电路；
- 掌握无源双口网络的联接及含受控源的双口网络。

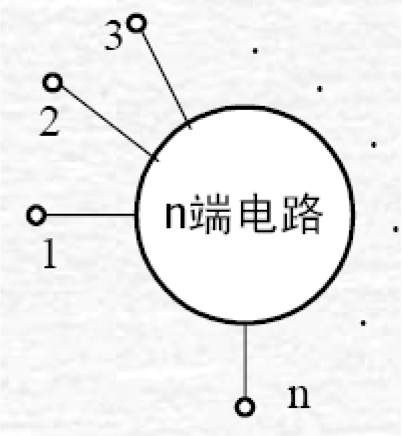
1. 多端网络(电路)：

实际的电路通常比较复杂，除使用二端元件外，还广泛使用多端子元件或电路，称为多端电路（网络）。









2. 端口(port)的概念：

电路中与外电路相连的某两个端子，如k、k'，若在任意时刻t，流入端子k的电流i_k恒等于流出另一端子k'的电流$i_{k'}$，则称这一对端子为一个端口。

端口电流的关系：$\boxed{i_k=i_{k'}}$ (11.1-1)

称为端口条件，即端口电流一进一出相等。

1) 一端口：显然二端电路的两个端子满足端口条件，故又常称为一端口电路或单口电路(one-port circuit)。

2) 二端口：前面讨论的耦合电感元件和理想变压器，由于初级和次级都满足端口条件，故称为二端口元件或双口元件。

二端口电路或双口电路(two-port circuit)是研究多端口电路的基础。**本章重点介绍描述二端电路特性的方法**。

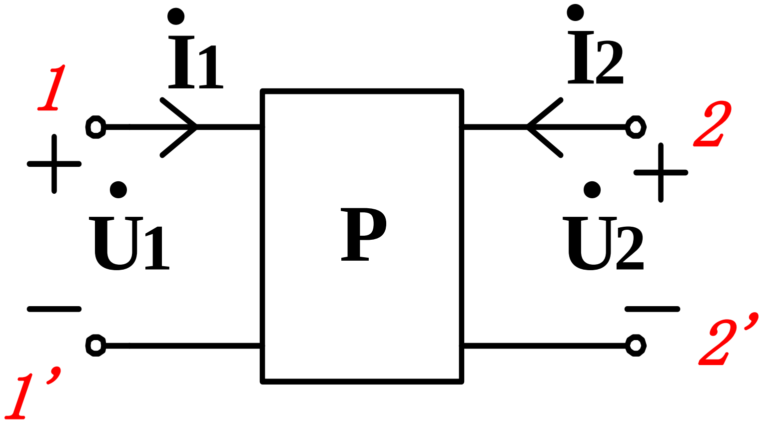
3. 双口网络概述

1）定义

对外具有两个端口的网络称为二端口网络，简称为双口网络。双口网络的每一个端口的电流必须是一进一出相等。如图所示。

2）参考方向

双口网络的参考方向如图所示。



图示二端口电路。左端常接信号源，称为**输入端口**(入口)；右端常接负载，称为**输出端口**(出口)。

我们约定：<u>*N*中不含独立源，并处于零状态下。</u>

端口电压电流对*N*取关联方向。

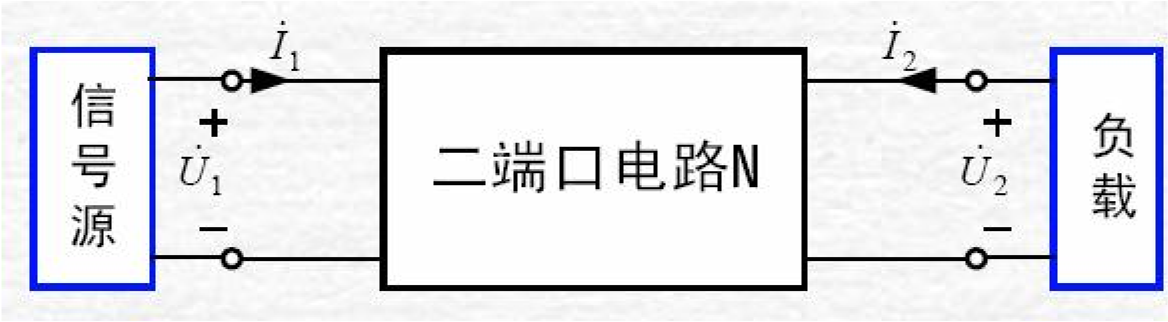
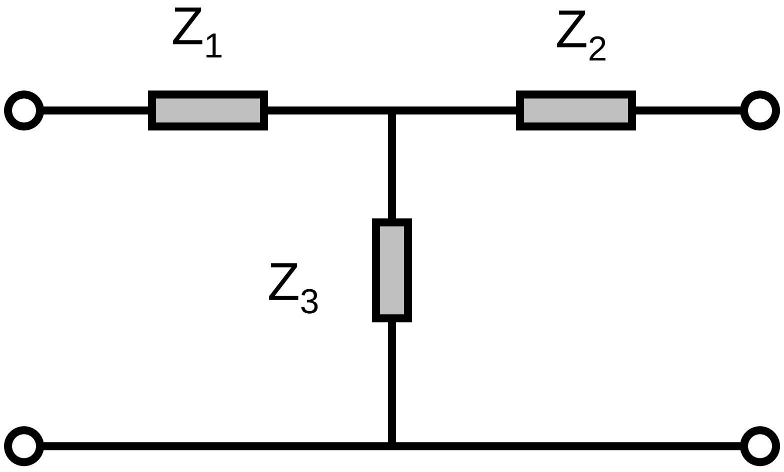


图11.1-1 二端口网络

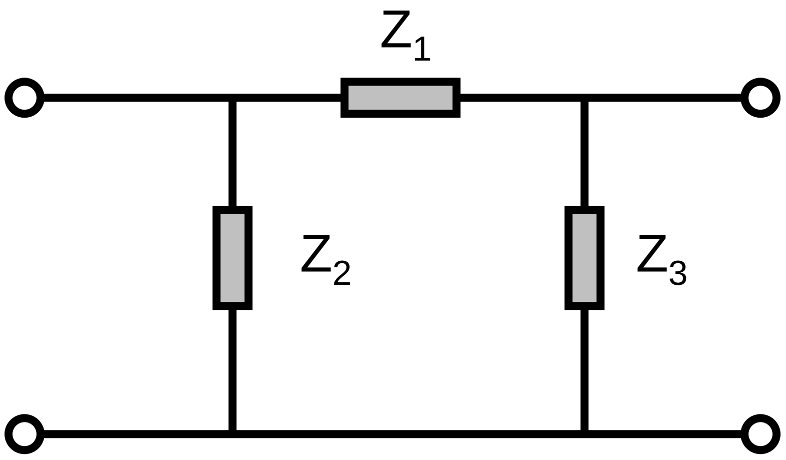
二端口网络分析可在时域(电阻电路)、频域或复频域（s域）中进行，本章主要是在正弦稳态下（即频域）进行讨论。

1921年波里森(Brisig)首先提出二端口电路的概念，指出：一个由线性元件组成的二端口电路，不论其内部参数和结构如何，总可以用一组方程描述其外部特性。他的这种黑箱方法目前已应用于许多领域。

4. 简单二端口示例:

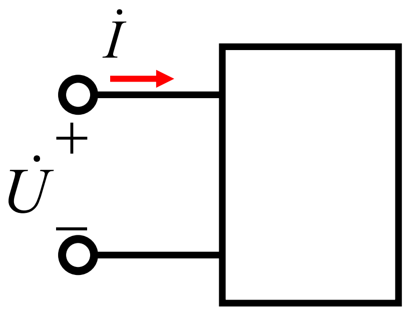


T形网络



π 形网络

11.1 二端口的VCR方程和参数·等效电路



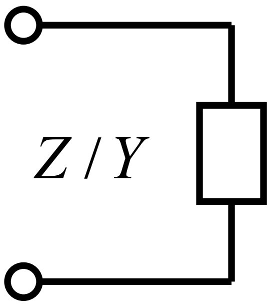
$\dot{U}$、$\dot{I}$

$\dot{U} = Z\dot{I}$

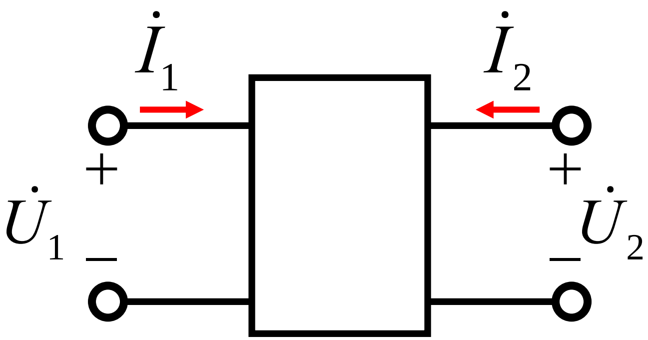
$\dot{I} = Y\dot{U}$

Z

Y



一端口(无独立源)	变量	VCR方程	参数	等效电路



$\dot{U}_1$、$\dot{I}_1$

$\dot{U}_2$、$\dot{I}_2$

?

?

?

二端口(无独立源)	变量	VCR方程	参数	等效电路

单端口网络有两个端口变量 $\dot{U}$、$\dot{I}$ ，端口电压电流之间的关系（VCR）用一个参数 Z 或 Y 表示。

双口网络有四个端口变量 $\dot{U}_1$、$\dot{I}_1$、$\dot{U}_2$、$\dot{I}_2$。若任选两个作自变量，另两个作应变量，则可列出描述双口电路端口电压和端口电流关系（VCR）的6组不同的方程（和参数）。

根据所选变量不同，一个双口网络共有6种特性参数：

短路参数Y： $\dot{U}_1,\dot{U}_2 \longrightarrow \dot{I}_1,\dot{I}_2$

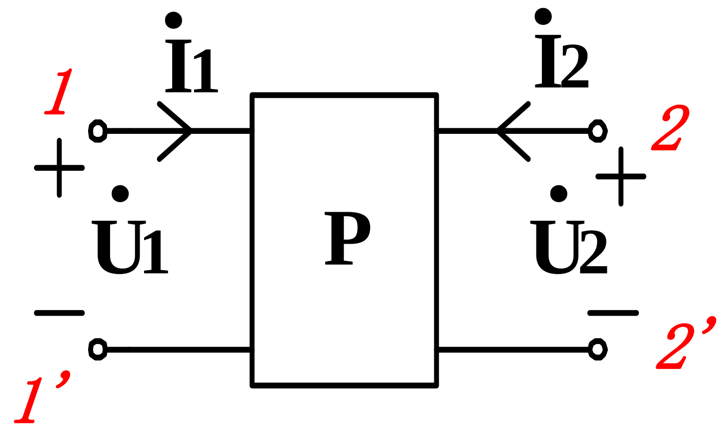
开路参数Z： $\dot{I}_1,\dot{I}_2 \longrightarrow \dot{U}_1,\dot{U}_2$

传输参数T： $\dot{U}_2,\dot{I}_2 \longrightarrow \dot{U}_1,\dot{I}_1$

逆传输参数T '

混合参数H： $\dot{I}_1,\dot{U}_2 \longrightarrow \dot{U}_1,\dot{I}_2$

逆混合参数H '



一、阻抗方程和Z参数

1. 阻抗方程：

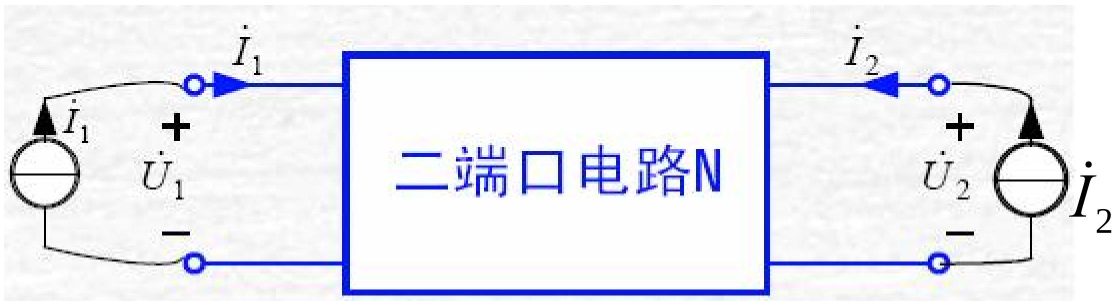


图11.1-2 二端口网络

选 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 为自变量,以 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 为应变量描述端口VCR，为此，端口外加电流源。

由叠加原理有

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2\end{aligned}\right\} \qquad (11.1\text{-}1)$$

称二端口电路N的Z方程。z_{11}、z_{12}、z_{21}、z_{22}称Z参数。

Z方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (11.1\text{-}2)$$

矩阵**Z**=$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$称为**z(参数)矩阵**。

可见，一般情况下二端口由四个独立参数描述。

2. Z参数的物理意义：

由Z方程知，

$$\left.\begin{aligned}
z_{11}&=\left.\frac{\dot U_1}{\dot I_1}\right|_{\dot I_2=0} && \text{出口开路时的输入阻抗}\\
z_{21}&=\left.\frac{\dot U_2}{\dot I_1}\right|_{\dot I_2=0} && \text{出口开路时的转移阻抗（正向传递阻抗、跨阻）}\\
z_{12}&=\left.\frac{\dot U_1}{\dot I_2}\right|_{\dot I_1=0} && \text{入口开路时的转移阻抗（反向传递阻抗、跨阻）}\\
z_{22}&=\left.\frac{\dot U_2}{\dot I_2}\right|_{\dot I_1=0} && \text{入口开路时的输出阻抗}
\end{aligned}\right\}\quad(11.1\text{-}3)$$

故，z参数常称为开路阻抗参数，或简称开路参数。

(1) 对于互易二端口，有$z_{12} = z_{21}$。所以互易电路只有三个独立参数。

【证明】由互易二端口构成2个网络如图，

根据互易定理，有

$$\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} \quad \text{即} \quad z_{21} = z_{12}$$

➤不含受控源的无源电路一定是互易电路。

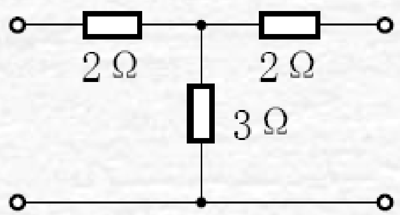
➤含受控源的电路一般是非互易的（一定条件下也可能是互易电路）。

若有$z_{12} = z_{21}$，则称该二端口电路为互易电路。

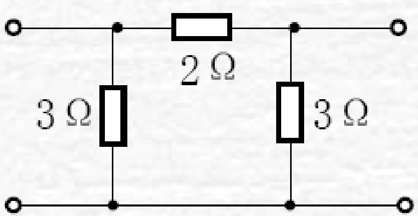
(2) 若有$z_{12}=z_{21}$， $z_{11}=z_{22}$，则称该二端口电路为**(电气)对称电路**。对称电路只有两个独立参数。

<u>结构对称电路一定是电气对称的，反之，则不一定。</u>

例，如下两图均为结构对称的，显然也是电气对称的。

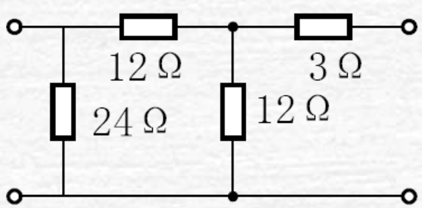


$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\Omega$$



$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}15/8 & 9/8\\ 9/8 & 15/8\end{bmatrix}\Omega$$

例，如下图的结构不对称，但电气对称。



$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{bmatrix}\Omega$$

3、Z参数的求解方法有两种：

1) 直接列Z方程并写成标准形式；

2) 利用物理意义。

例11.1-1 如图电路，求其Z参数矩阵。

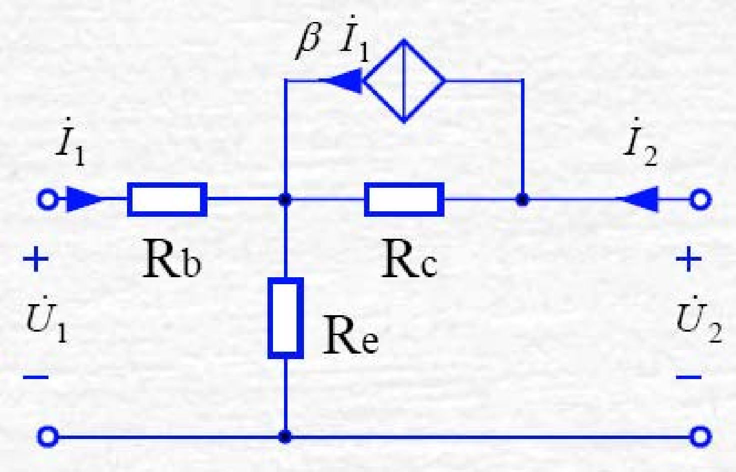


图11.1-3 例11.1-1用图

解：列KVL方程

$$\dot{U}_1 = R_b\dot{I}_1 + R_e(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (R_b + R_e)\dot{I}_1 + R_e\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = R_c(\dot{I}_2 - \beta\dot{I}_1) + R_e(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (R_e - \beta R_c)\dot{I}_1 + (R_c + R_e)\dot{I}_2$$

z参数矩阵为

$$Z = \begin{bmatrix} R_b + R_e & R_e \\ R_e - \beta R_c & R_c + R_e \end{bmatrix}$$

例11.1-2 如图电路，求其Z参数中的z_{21}、z_{12}和z_{11}。

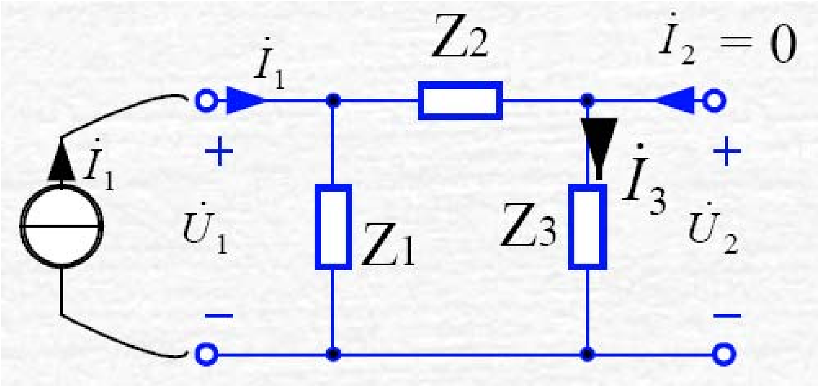


图11.1-4 例11.1-2用图

解：用物理含义求，比较简单。

端口1加电流源，端口2开路。先求z_{21}和z_{11}。

$$\dot{I}_3 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2 = Z_3\dot{I}_3 = \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}\dot{I}_1$$

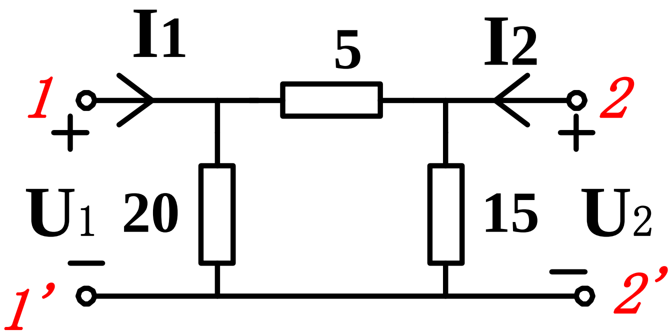
$$z_{21} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$z_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

该电路是互易的，故$z_{12}= z_{21}$。

$$z_{22} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} = \frac{(Z_1 + Z_2)Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

例11.1-3 如图电路，求Z参数。



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

解：由Z参数的定义，得：

$$Z_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{20\times(15+5)}{20+(15+5)} = 10 \quad \Omega$$

$$Z_{21} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\frac{1}{2}\dot{I}_1\times 15}{\dot{I}_1} = \frac{15}{2} \quad \Omega$$

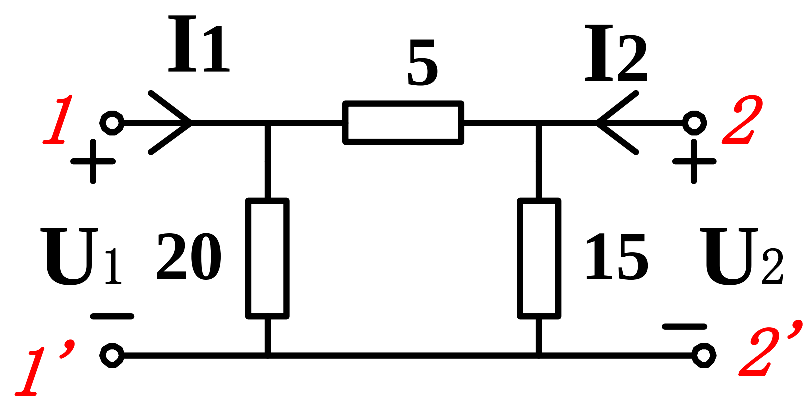
计算开路参数Z11和Z21时，端口1加电流I1，计算端口1和2的电压U1和U2。

纯电阻网络为互易网络，$Z_{12}=Z_{21}$

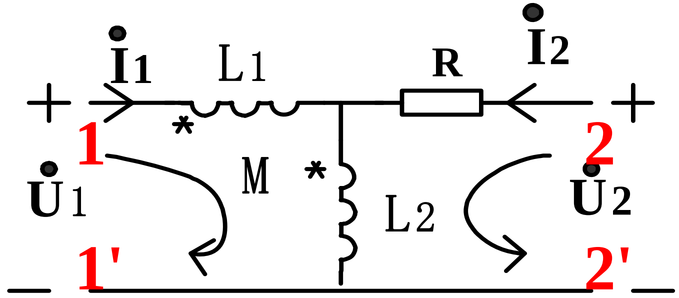
计算开路参数Z_{12}和Z_{22}时，端口2加电流$\dot{I}_2$，计算端口1和2的电压U_1和U_2。

$$Z_{12}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}=\frac{20\times\dfrac{15}{20+5+15}\dot{I}_2}{\dot{I}_2}=\frac{15}{2}\Omega$$

$$Z_{22}=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}=\frac{\dfrac{(20+5)\times15}{20+5+15}\dot{I}_2}{\dot{I}_2}=9.375\Omega$$



例4图示电路，已知 $R=3\Omega, \omega L_1=\omega L_2=3\Omega,$ $\omega M=1\Omega$，求双口网络的Z参数。



解：方法一

令$2-2'$端开路，$\dot{I}_2=0$，在 $1-1'$ 加电流，分别计算$\dot{U}_1$和 $\dot{U}_2$

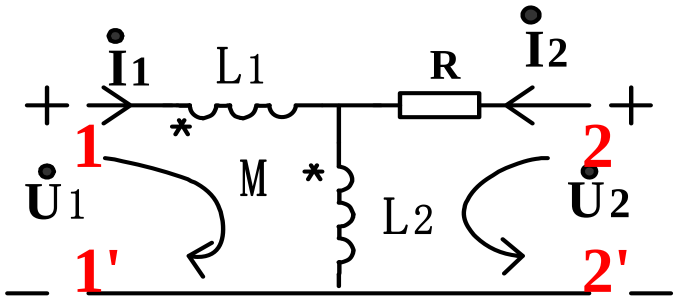
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2 + 2\times j\omega M\dot{I}_1 = 8j\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = 4j\dot{I}_1$$

由上式得

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0} = \frac{8j\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 8j \qquad Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0} = \frac{4j\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 4j$$



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

令1−1'端开路，$\dot{I}_1=0$，在 2−2'加电流，分别计算$\dot{U}_1$和$\dot{U}_2$

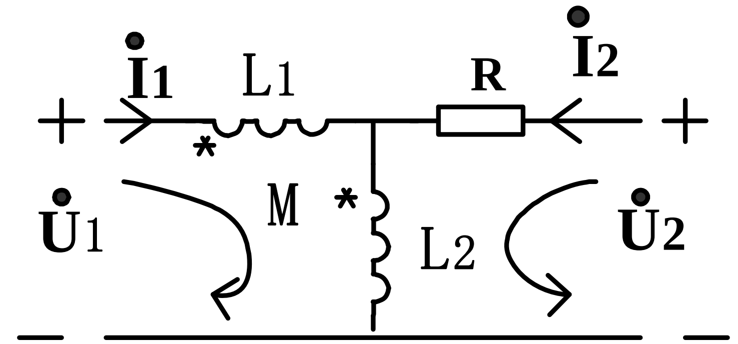
$$\dot{U}_1 = j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_2 = 4j\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = R\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_2 = (3+3j)\dot{I}_2$$

由上式得:

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0} = \frac{4j\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = 4j$$

$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_2=0} = \frac{(3+3j)\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = (3+3j)$$



方法二 在二个端口分别加电压源 $\dot{U}_1$和 $\dot{U}_2$，列回路电压方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + j\omega L_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + j\omega M\dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 = R\dot{I}_2 + j\omega L_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + j\omega M\dot{I}_1 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I}_1 + j\omega(L_1 + M)\dot{I}_2 = j8\dot{I}_1 + j4\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega(L_2 + M)\dot{I}_1 + (j\omega L_2 + R)\dot{I}_2 = j4\dot{I}_1 + (3+3j)\dot{I}_2 \end{cases}$$

比较上式与网络定义式，得

$$Z_{11} = j8 \quad Z_{12} = j4 \quad Z_{21} = j4 \quad Z_{22} = 3+3j$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

4. Z参数等效电路：

由z参数方程(11.1-1)，二端口与下图电路等效，

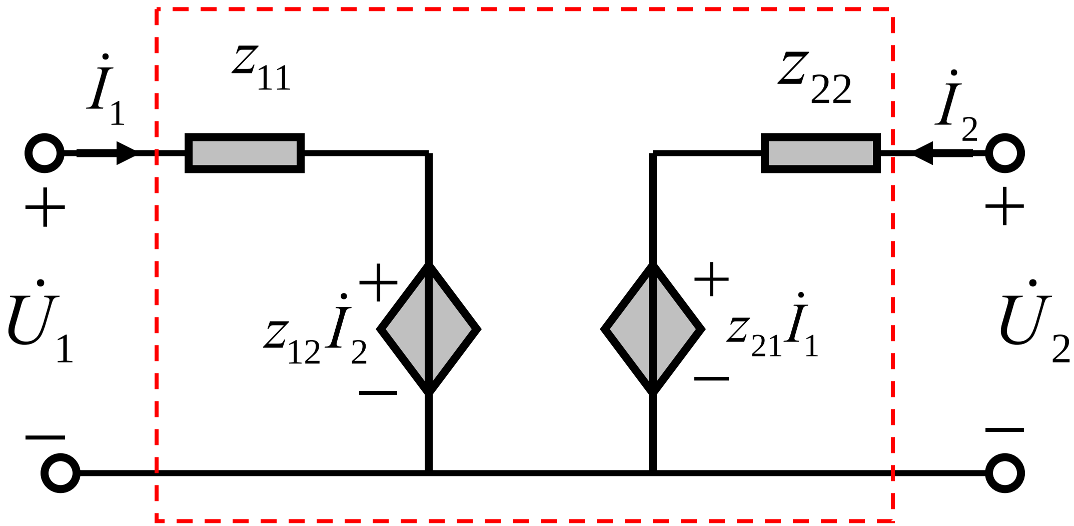


图11.1-5 二端口网络的Z参数等效电路

二、导纳方程和导纳参数

1. Y方程：

选$\dot{U}_1$和$\dot{U}_2$为自变量，以$\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$为应变量描述端口VCR，为此，端口外加电压源。

图11.1-6 二端口网络

由叠加原理有

$$\dot{I}_1 = y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2$$
$$\dot{I}_2 = y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 \qquad (11.1\text{-}4)$$

称二端口电路N的Y方程。 y_{11}、y_{12} 、y_{21} 、y_{22}称Y参数。

Y方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \qquad (11.1\text{-}5)$$

矩阵**Y=** $\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ 称为Y矩阵。

2. Y参数的物理意义：

由Y方程知，

$$
\left.
\begin{aligned}
& y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0} && \text{出口短路时的输入导纳} \\
& y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0} && \text{出口短路时的转移导纳（正向传递导纳）} \\
& y_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0} && \text{入口短路时的转移导纳（反向传递导纳）} \\
& y_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0} && \text{入口短路时的输出导纳}
\end{aligned}
\right\} \quad (11.1\text{-}6)
$$

故，常称为短路参数。

3. Y参数与Z参数的关系：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \qquad (11.1\text{-}7)$$

注意：$y_{11} \neq \dfrac{1}{z_{11}}$

Why?

即

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_{22}}{\Delta_z} & \dfrac{-z_{12}}{\Delta_z} \\ \dfrac{-z_{21}}{\Delta_z} & \dfrac{z_{11}}{\Delta_z} \end{bmatrix} \qquad (11.1\text{-}8)$$

其中

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

Y参数的求法与Z参数求解方法相同，也可以从已知的或较容易求解的Z参数等，根据其与Y参数的关系换算出Y参数。

若二端口电路为互易电路，则有

$$y_{12} = y_{21}$$

若二端口电路为对称电路，则有

$$y_{12}= y_{21}，y_{11}= y_{22}。$$

4. Y参数等效电路：

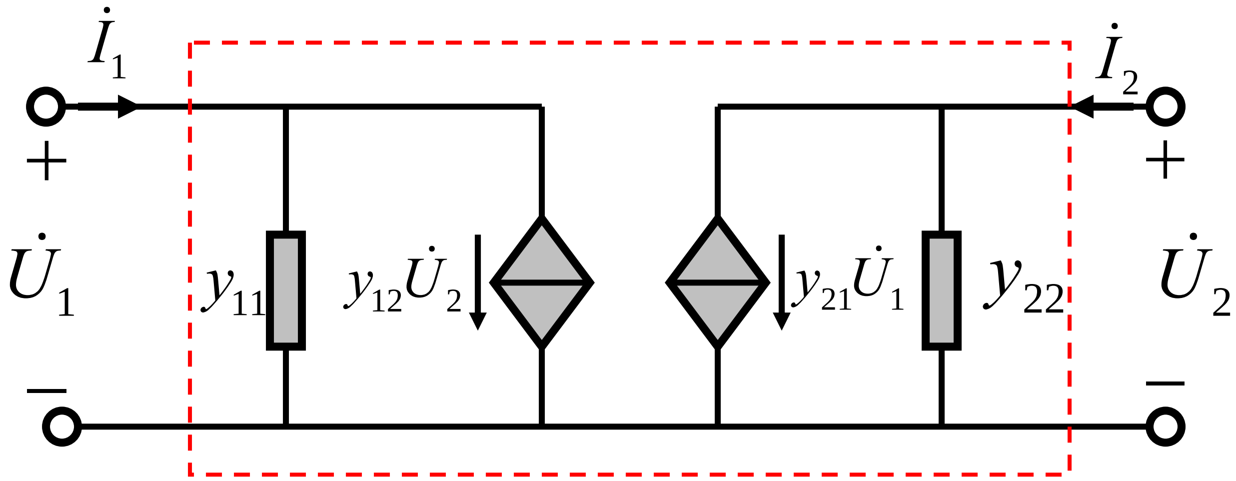


图11.1-7 二端口网络的y参数等效电路

三、传输方程和传输参数(T参数)

传输方程/参数有两组，分别成为A方程/参数、B方程/参数

1. A方程：

当研究信号从输入口到输出口传输的有关问题时，以输出端$\dot{U}_2$和$\dot{I}_2$作为自变量，以$\dot{U}_1$和$\dot{I}_1$作应变量比较方便。

由叠加原理，有

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 &= a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}(-\dot{I}_2) \end{aligned} \qquad (11.1\text{-}9)$$

称为二端口的A方程。a_{11}、a_{12}、a_{21}和a_{22}，称为电路的A参数，也称为传输参数(transmission parameters)。

A方程中$\dot{I}_2$之所以写成-，是因为$\dot{I}_2$的参考方向规定为流入电路，而用A方程分析问题时，以$\dot{I}_2$流出电路比较方便。

A参数矩阵（传输参数矩阵）为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (11.1\text{-}10)$$

2. A参数的物理意义：

由A方程知，

$$a_{11}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}$$ 出口开路时的电压增益（电压传递函数）

$$a_{21}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}$$ 出口开路时的转移导纳（传递导纳）

$$a_{12}=\left.\frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 出口短路时的转移阻抗（传递阻抗）

$$a_{22}=\left.\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 出口短路时的电流增益（电流传递函数）

(11.1-11)

对于互易电路，A参数满足$\triangle_A = a_{11} a_{22}- a_{12} a_{21}=1$。

若为对称电路，则有$\triangle_A = 1$，$a_{11}= a_{22}$。

3. A参数与Z、Y参数的关系：

A参数的常用求法有

1) 利用物理意义；

2) 由其他方程推出A方程。

例11.1-3 如图电路，求其传输参数矩阵。

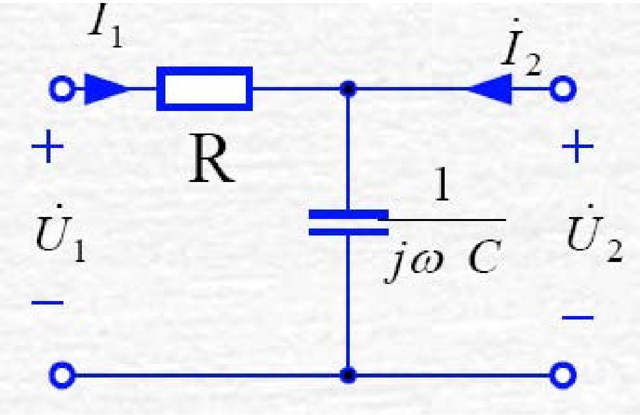


图11.1-8 例11.1-3用图

解法一： 根据物理意义

$$a_{11}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}=\frac{R+\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C}}=1+j\omega CR$$

$$a_{21}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}=\frac{\dot{I}_1}{\dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}_1}=j\omega C$$

$$a_{12}=\left.\frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}=\frac{R\dot{I}_1}{\dot{I}_1}=R$$

$$a_{22}=\left.\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1}=1$$

$$A=\begin{bmatrix}1+j\omega CR & R(\Omega)\\ j\omega C(S) & 1\end{bmatrix}$$

解法二： 先列Z方程，再转换为A方程

$$\dot{U}_1 = R\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (R + \frac{1}{j\omega C})\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2$$

由第二个方程得

$$\dot{I}_1 = j\omega C\dot{U}_2 + (-\dot{I}_2)$$

代入第一个方程得

$$\dot{U}_1 = R\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (1 + j\omega CR)\dot{U}_2 + R(-\dot{I}_2)$$

故

$$A = \begin{bmatrix} 1 + j\omega CR & R(\Omega) \\ j\omega C(S) & 1 \end{bmatrix}$$

***B方程和B参数：**

以$\dot{U}_1$、$\dot{I}_1$作为自变量，以$\dot{U}_2$、$\dot{I}_2$和作应变量，则有方程

$$\dot{U}_2 = b_{11}\dot{U}_1 + b_{12}(-\dot{I}_1)$$
$$\dot{I}_2 = b_{21}\dot{U}_1 + b_{22}(-\dot{I}_1)$$

称反向传输方程或B方程。

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

称为反向传输矩阵。

注意： **B** $\neq$ **A**$^{-1}$ 。

对于互易电路，B参数满足 $\triangle_B = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} = 1$。

若为对称电路，则有$\triangle_B = 1$，$b_{11} = b_{22}$。

实际中很少用。

四、H方程和混合参数(hybrid parameters)

1、 H方程或混合参数方程

在分析晶体管低频电路时，常以$\dot{I}_1$、$\dot{U}_2$为自变量，而以$\dot{U}_1$、$\dot{I}_2$为应变量，其方程称为混合参数方程或H方程。即

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= h_{11}\dot{I}_1 + h_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= h_{21}\dot{I}_1 + h_{22}\dot{U}_2\end{aligned} \qquad (11.1\text{-}12)$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$ 称为混合参数矩阵。

2. H参数的物理意义：

由H方程知，

$$
\left.
\begin{aligned}
h_{11} &= \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0} && \text{出口短路时的输入阻抗} \\
h_{21} &= \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0} && \text{出口短路时的正向电流增益} \\
h_{12} &= \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} && \text{入口开路时的反向电压增益} \\
h_{22} &= \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} && \text{入口开路时的输出导纳}
\end{aligned}
\right\} \quad (11.1\text{-}13)
$$

什么都有，故常称为混合参数。

对于互易电路，H参数满足$h_{12} = -h_{21}$。

若为对称电路，则有$\triangle_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$， $h_{12} = -h_{21}$。

3. H参数与Z、Y、A参数的关系：

4. H参数等效电路：

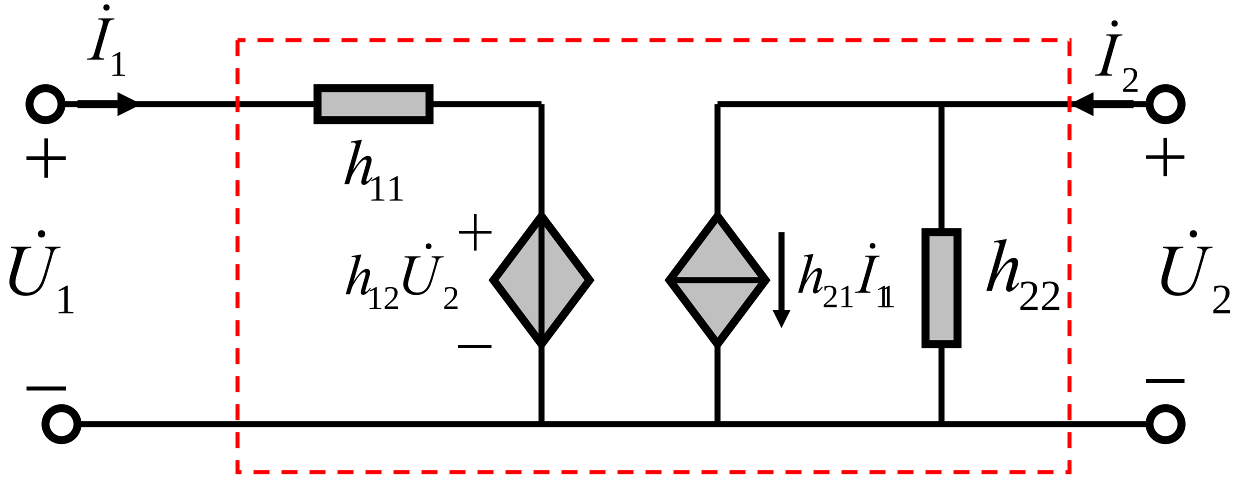


图11.1-9　二端口的h参数等效电路

***G方程和G参数：**

以$\dot{U}_1$、$\dot{I}_2$作为自变量，以$\dot{U}_2$、$\dot{I}_1$作应变量，则有方程

$$\dot{I}_1 = g_{11}\dot{U}_1 + g_{12}\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = g_{21}\dot{U}_1 + g_{22}\dot{I}_2$$

称二端口电路的G方程，也称混和方程。

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$ 也称为混合矩阵。

$$\mathbf{G = H^{-1}}$$

对于互易电路，G参数满足$g_{12} = -g_{21}$。

若为对称电路，则有$\triangle_G = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1$，$g_{12} = -g_{21}$。

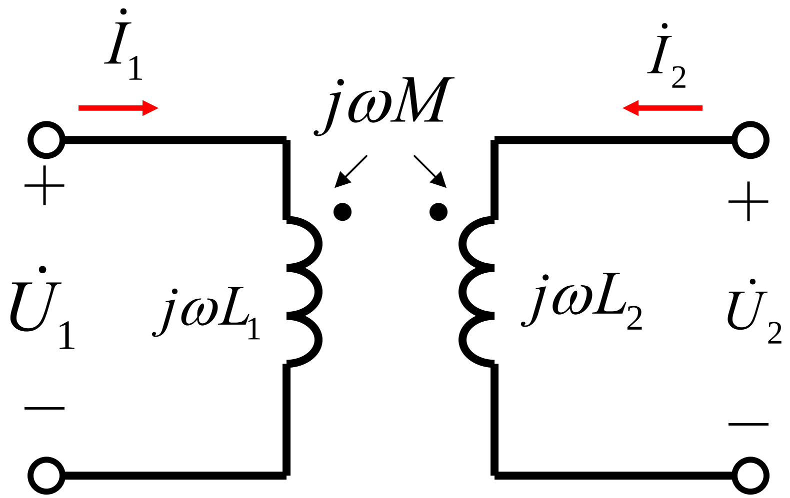
实际中很少用。

小结：

上面介绍了描述二端口电路的**6**种类型的方程和参数。即，同一电路可以用不同的方程和参数描述。因此，这**6**种方程和参数之间存在着确定的关系。**P378,**表**16-1**列出它们之间的相互关系。

注意：并非每个二端口电路都存在这**6**种参数，有些电路只存在其中某几种。

例11.1-6 有耦合的电感可视为一个二端口。求图示耦合电感的传输参数。



解 耦合电感的伏安关系为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \qquad (1)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \qquad (2)$$

式(2)又可写成

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{j\omega M}\dot{U}_2 - \frac{L_2}{M}\dot{I}_2 \qquad (3)$$

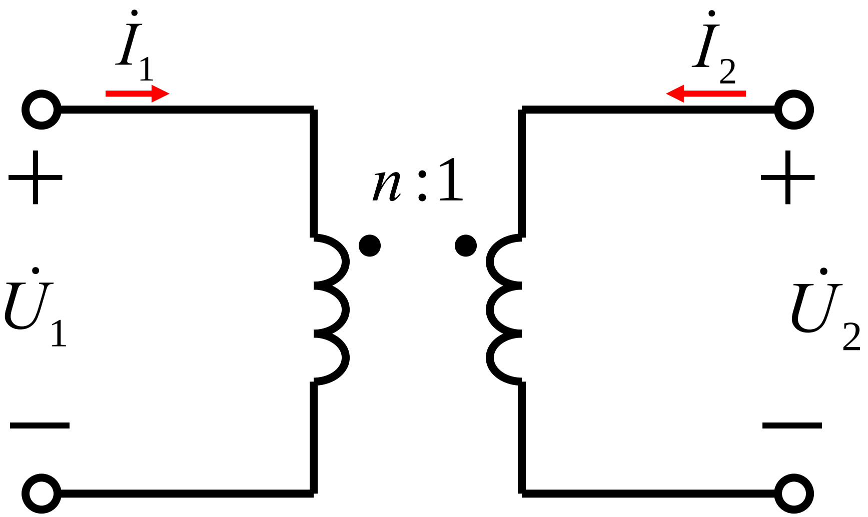
把上式代入$\dot{U}_1$的表达式，有

$$\dot{U}_1 = \frac{L_1}{M}\dot{U}_2 - j\omega(\frac{L_1 L_2}{M} - M)\dot{I}_2 \qquad (4)$$

则传输参数方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M} & j\omega(\dfrac{L_1 L_2}{M} - M) \\ \dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

理想变压器亦然：

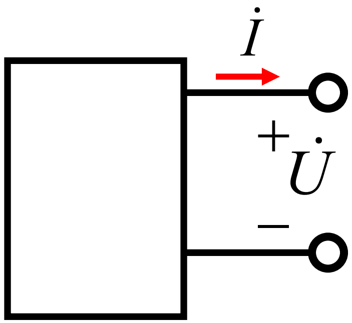


$$\dot U_1 = n\dot U_2$$

$$\dot I_1 = -\frac{1}{n}\dot I_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & 0\\ 0 & \dfrac{1}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_2\\ -\dot I_2\end{bmatrix}$$

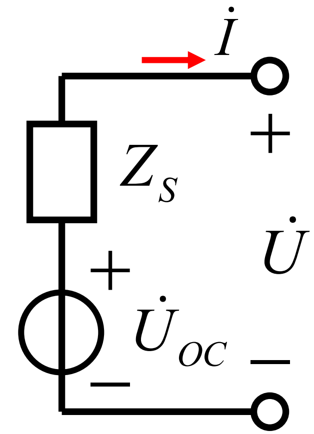
*五、含独立源二端口电路的等效



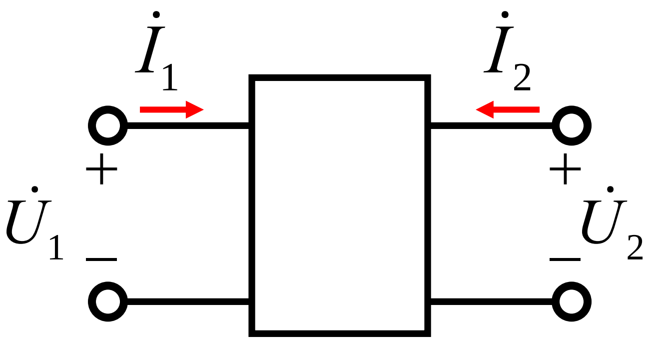
$\dot{U}$、$\dot{I}$

$\dot{U}=\dot{U}_{OC}-Z_S\dot{I}$ $\quad Z_S$、$\dot{U}_{OC}$

$\dot{I}=\dot{I}_{SC}-Y_S\dot{U}$ $\quad Y_S$、$\dot{I}_{SC}$



一端口(含独立源) 变量 VCR方程 参数 等效电路（戴维宁）



$\dot{U}_1$、$\dot{I}_1$

$\dot{U}_2$、$\dot{I}_2$

? ? ?

二端口(无独立源) 变量 VCR方程 参数 等效电路

对于如图含源电路，选$\dot{I}_1$和$\dot{I}_2$为自变量，以$\dot{U}_1$和$\dot{U}_2$为应变量描述端口VCR，为此，端口外加电流源。

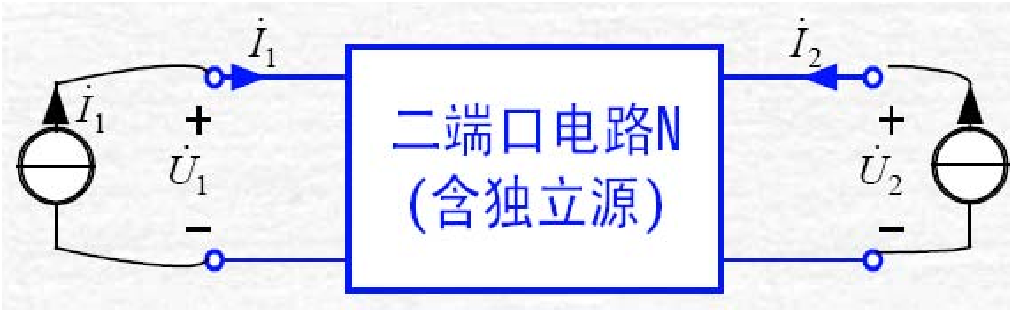


图10.1-10 含独立源的二端口

根据电路的线性性质，端口电压看作是激励电流源$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$和N内独立源分别作用的叠加。

（1）当仅由$\dot{I}_1$作用时($\dot{I}_2$=0，电路N内部独立源均为零)，根据齐次定理有

$$\dot{U}_1^{(1)} = z_{11}\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2^{(1)} = z_{21}\dot{I}_1$$

（2）当仅由$\dot{I}_2$作用时($\dot{I}_1$=0，电路N内部独立源均为零)，根据齐次定理有

$$\dot{U}_1^{(2)} = z_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2^{(2)} = z_{22}\dot{I}_2$$

（3）当仅由电路N内部的独立源作用时，入口、出口均开路，有

$$\dot{U}_1^{(3)} = \dot{U}_{OC1}$$

$$\dot{U}_2^{(3)} = \dot{U}_{OC2}$$

根据叠加定理得

$$\dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 + \dot{U}_{OC1}$$

$$\dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 + \dot{U}_{OC2}$$

等效电路为

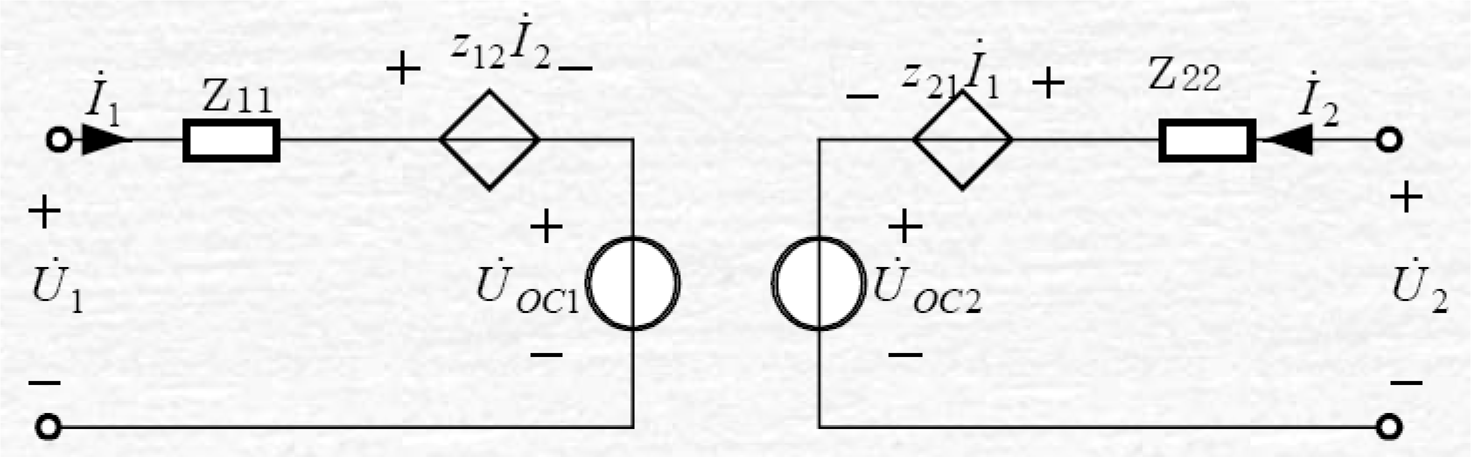


图11.1-11 含独立源二端口的等效

可看作是戴维宁定理在二端口电路中的推广。

若二端口电路不含独立源，相当于前面 $\dot{U}_{OC1}=0,\ \dot{U}_{OC2}=0$

$$\dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$

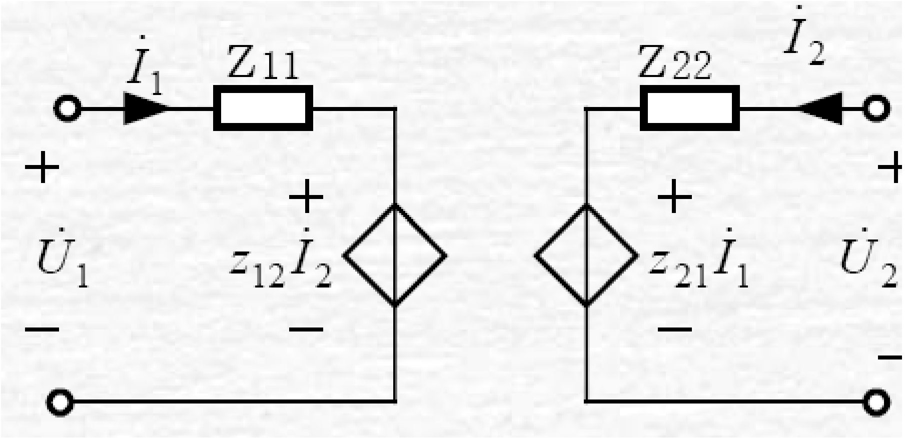


图11.1-12 不含独立源时退化为Z参数等效电路

类似地，用其它方程也可以作出相应的等效电路。

11.2 含二端口电路的分析

一. 含二端口的电阻电路/正弦稳态分析:

例11.2-1 如图电路，已知$U_S = 15V, R_S = 2\Omega$，N的z参数矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\Omega$$

。若$R_L = 2\Omega$，求U_2及二端口电路吸收的功率。

解：列二端口电路的Z方程，得

$$U_1 = 7I_1 + 3I_2 \qquad (1)$$

$$U_2 = 3I_1 + 4I_2 \qquad (2)$$

列出输入口KVL方程，有

$$U_S = 2I_1 + U_1 \qquad (3)$$

列输出口KVL方程，有

$$U_2 = -2I_1 \qquad (4)$$

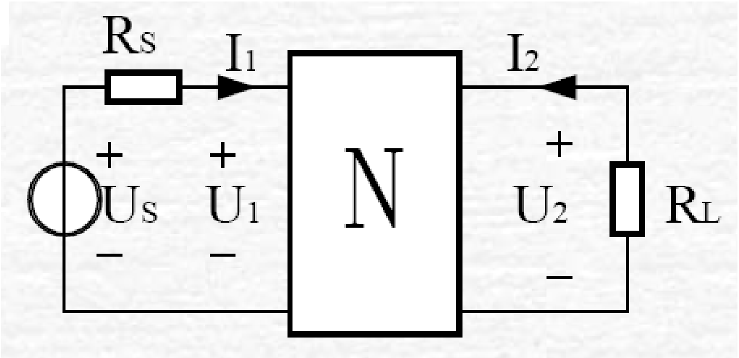


图11.2-1

(1)代入(3)、(2)代入(4)并整理得

$$9I_1+3I_2=U_S=15$$
$$3I_1+6I_2=0$$

解得 $I_1=2A,\quad I_2=-1A$

代入(1)、(4)得

$$U_1=11V,\quad U_2=2V$$

$$P_N=U_1I_1+U_2I_2=11\times2+2\times(-1)=20W$$

例11.2-2 如图电路， $U_S = 10V$，N中不含独立源，N的传输参数矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 2 & 8\Omega \\ 0.5S & 2.5 \end{bmatrix}$ R_L = ？，其上获得最大功率？ P_{Lmax}=?

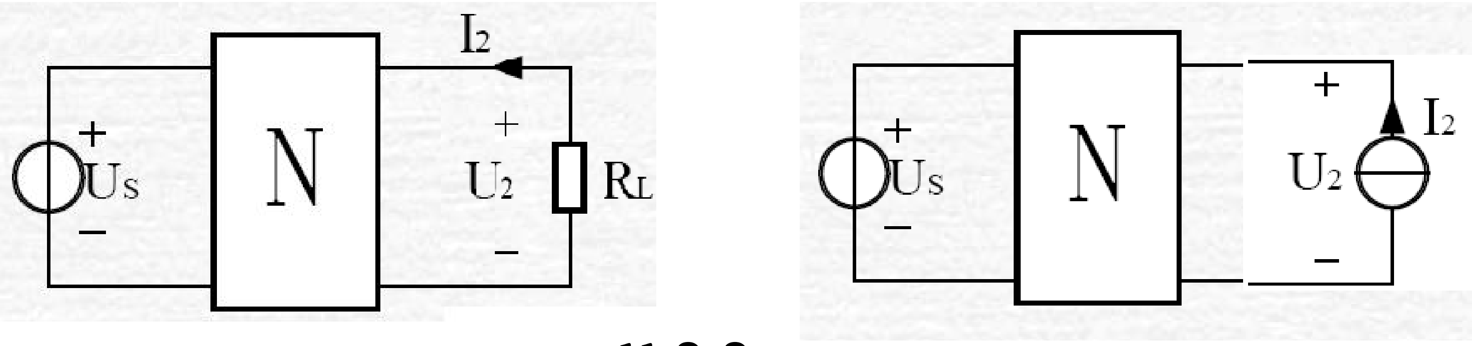


图11.2-2

解： 对除R_L之外的电路进行戴维宁等效，用外加电流源法求端口2的伏安关系：

列二端口电路的A方程，得

$$U_S = 2U_2 + 8(-I_2)$$

故

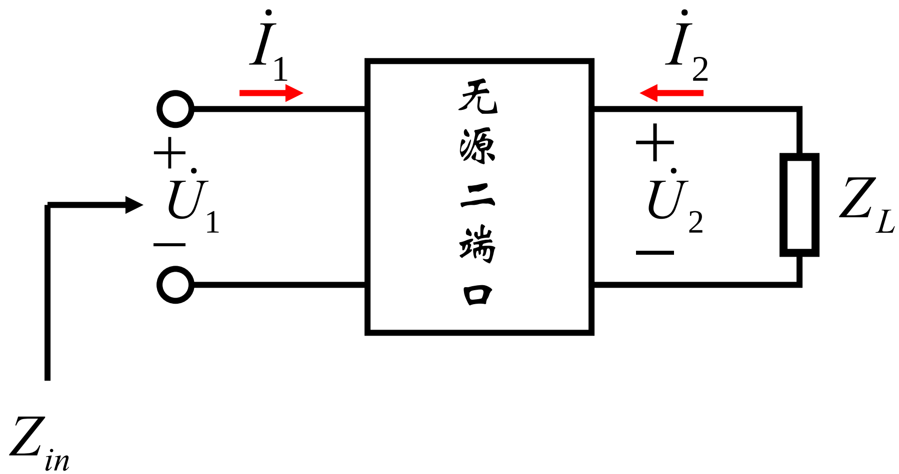
$$U_2 = 5 + 4I_2$$

所以U_{OC} = 5V， R_0 = 4Ω 。

因此R_L=R_0 = 4 Ω时，负载获得最大功率。最大功率为，

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} = \frac{25}{16}W$$

例11.2-3 阻抗变换作用（带载输入电阻）：

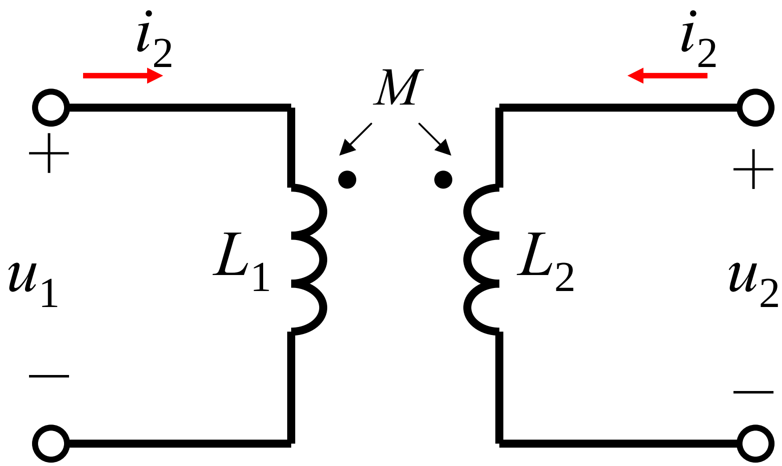


$$Z_L = \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2}$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{a_{11}\dot{U}_2 - a_{12}\dot{I}_2}{a_{21}\dot{U}_2 - a_{22}\dot{I}_2} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$$

1)耦合电感：

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M} & j\omega(\dfrac{L_1L_2}{M}-M) \\ \dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$



$$Z_{in}=\frac{a_{11}Z_L+a_{12}}{a_{21}Z_L+a_{22}}=\frac{\dfrac{L_1}{M}Z_L+j\omega(\dfrac{L_1L_2}{M}-M)}{\dfrac{1}{j\omega M}Z_L+\dfrac{L_2}{M}}$$

$$=j\omega\frac{L_1Z_L+j\omega(L_1L_2-M^2)}{Z_L+j\omega L_2}$$

$$=j\omega\frac{L_1(Z_L+j\omega L_2)-j\omega M^2}{Z_L+j\omega L_2}$$

$$=j\omega L_1+\frac{\omega^2M^2}{Z_L+j\omega L_2}$$

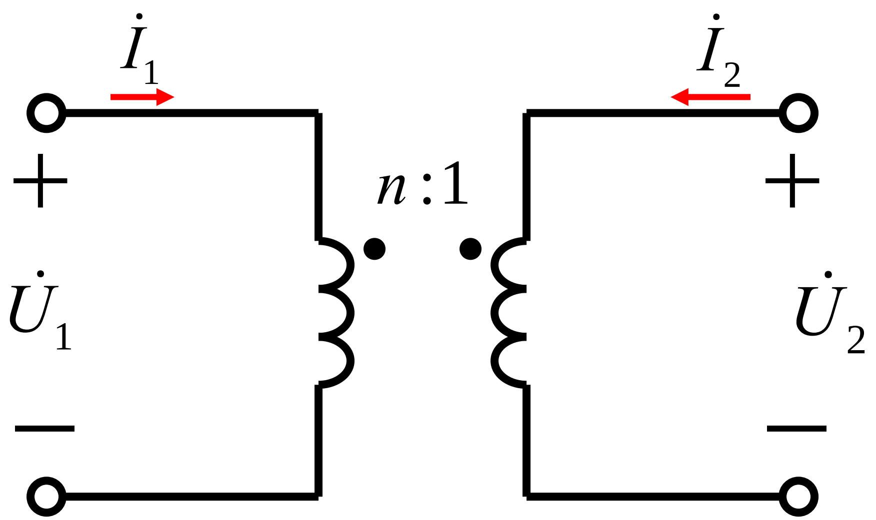
$$=Z_1+\frac{\omega^2M^2}{Z_2}$$

(7.5-6)式

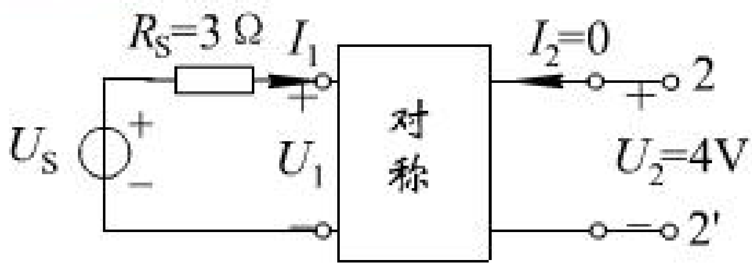
2)理想变压器：

$$A=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$Z_{in}=\frac{a_{11}Z_L+a_{12}}{a_{21}Z_L+a_{22}}=\frac{nZ_L+0}{0+\dfrac{1}{n}}=n^2Z_L$$



例11.2-4 图示某对称二端口网络，输入端接有内阻R_S=3Ω、电压 U_S=12V的电压源。已知当2-2’开路时，I_1=2A，U_2=4V。求：①该对称二端口网络的传输参数矩阵；②若2-2’端接一负载电阻R_L，R_L=?时可获得最大功率，并求此最大功率P_{max}。



解 ①首先写出传输参数方程

$$U_1 = a_{11}U_2 - a_{12}I_2$$

$$I_1 = a_{21}U_2 - a_{22}I_2$$

由已知条件，当I_2=0时U_2=4V，此时

$$U_1 = U_S - R_S I_1 = 16 - 3\times 2 = 10V$$

故可求得

$$a_{11}=\left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0}=\frac{10}{4}=2.5=a_{22} \qquad (因为对称)$$

$$a_{21}=\left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0}=\frac{2}{4}=0.5S$$

再由互易条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$

得

$$a_{12}=\frac{a_{11}a_{22}-1}{a_{21}}=\frac{5.25}{0.5}=10.5\Omega$$

所以

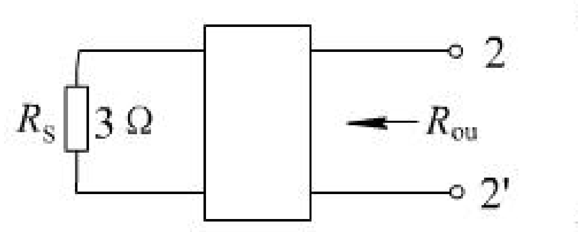
$$T=\begin{bmatrix}2.5 & 10.5\\ 0.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

②当2-2'端接有负载电阻R_L，由负载获最大功率得条件可知，当该负载电阻R_L等于从2-2'端看进去的**输出电阻**时(U_S应置零)，它才可获最大功率。

由输出电阻与传输参数之关系式(通过求网络函数可得)

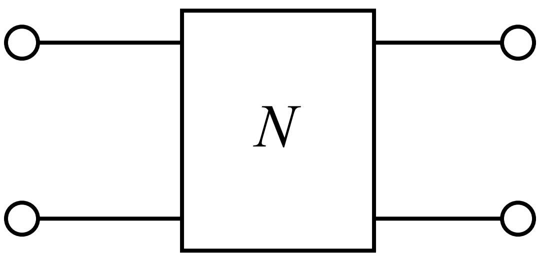
$$R_{out} = \frac{a_{12}+a_{22}R_S}{a_{11}+a_{21}R_S} = \frac{10.5+7.5}{2.5+1.5} = 4.5\Omega = R_L$$

最后，可由戴维宁等效电路($U_{OC}=U_2=4$V，$R_S=R_{out}=4.5\,\Omega$)求得负载电阻获得最大功率

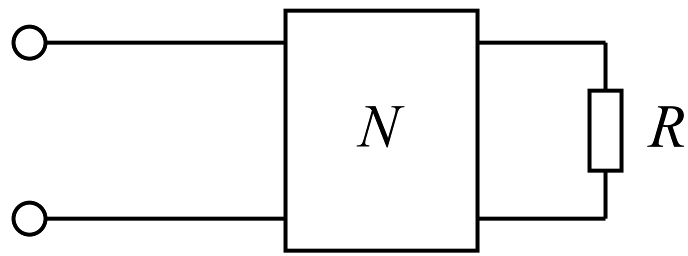


$$P_{\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_S} = 0.88W$$

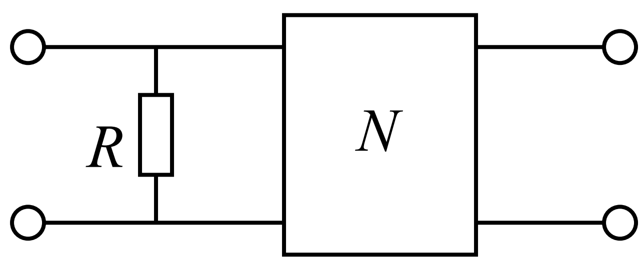
例11.2-5 图a所示二端口网络N的传输参数 $A=\begin{bmatrix} 2 & 30 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix}$。当电阻R并联在输出端，如图b所示，其输入电阻等于该电阻并联在输入端的6倍，如图c所示。试求电阻R。



图a



图b



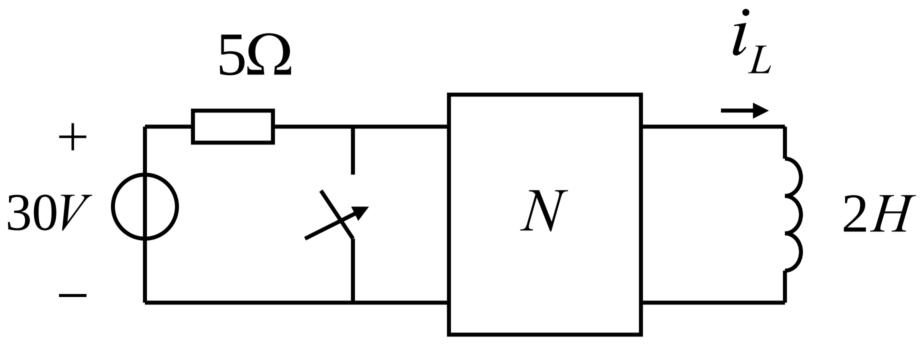
图c

$(R=3\Omega)$

二. 含二端口的动态电路分析：

例11.2-6 图示电路N不含独立源，其R参数矩阵为 $R=\begin{bmatrix}25 & 15\\15 & 15\end{bmatrix}\Omega$

电路原已稳定，t=0时K闭合，求$i_L(t)$ 。



$$i_L(t)=2e^{-3t}A \quad t\geq 0$$

11.3 二端口的联接

二端口网络也可以作为电路中的“端口器件”进行各种联接。二端口电路的联接方式有：级联(链接)、串联、并联、串并联、并串联等。

但是二端口的串联、并联和级联是需要满足一定条件的，即不能因为某种联接而破坏了端口处的端口条件。

几个二端口网络在做各种连接以后，可以用一个等效的二端口来等效。考虑到在做不同联接时的参数方程的特点，其等效二端口也应有不同的网络参数与其对应。

一、级联(链接，cascade)

级联是信号传输系统中最常见的联接方式。图11.3-1为两个二端口的级联联接，后一个二端口的输入端联接前一个二端口的输出端，即构成级联。

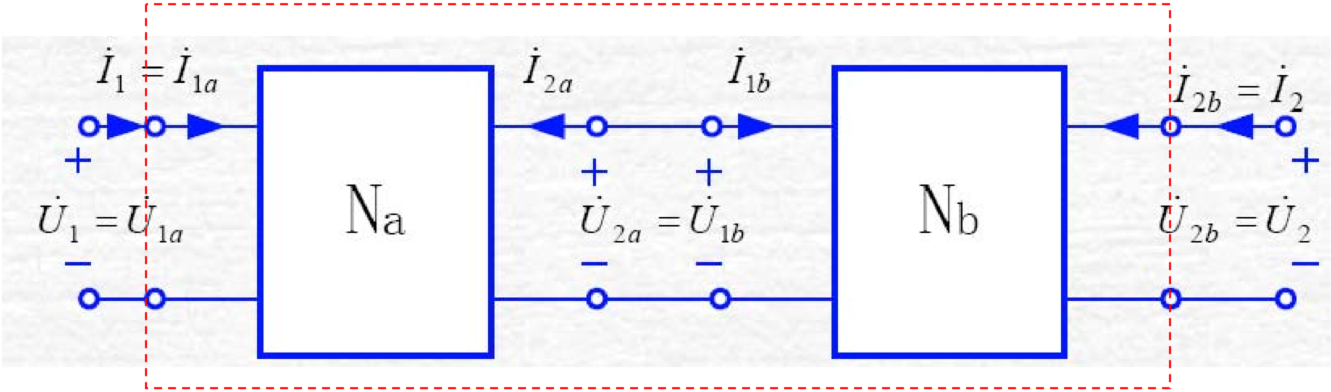


图11.3-1 二端口的级联

1、级联联接的条件：

显然，二端口的级联联接满足以下关系，

$$u_{1b}=u_{2a} \qquad i_{1b}=-i_{2a} \qquad (11.3\text{-}1)$$

2、级联联接的等效A参数：

设子电路（也称为部分二端口）N_a和N_b的传输矩阵分别为$\mathbf{A}_a$和$\mathbf{A}_b$，则其传输方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = A_a \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = A_b \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix}$$

对两个级联的二端口网络而言，存在(10.3-1)的端口条件，则有

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = A_a \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix} = A_a \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = A_a A_b \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = A_a A_b \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

故

$$\boxed{A = A_a A_b} \qquad (11.3\text{-}2)$$

等效A参数矩阵为两个级联二端口的A参数之矩阵之积。

例11.3-1 求图示电路的传输参数。

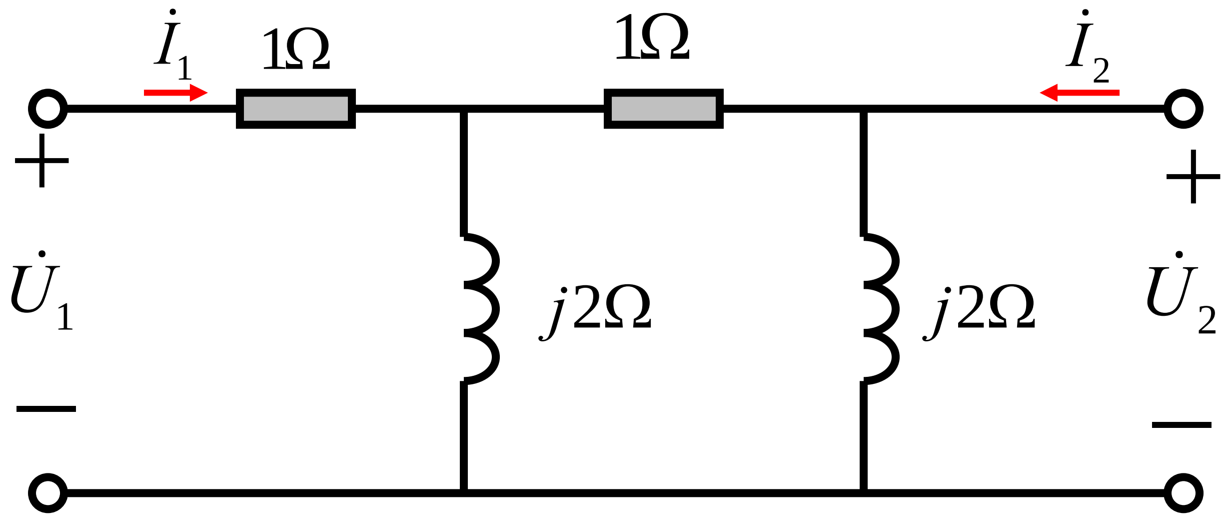
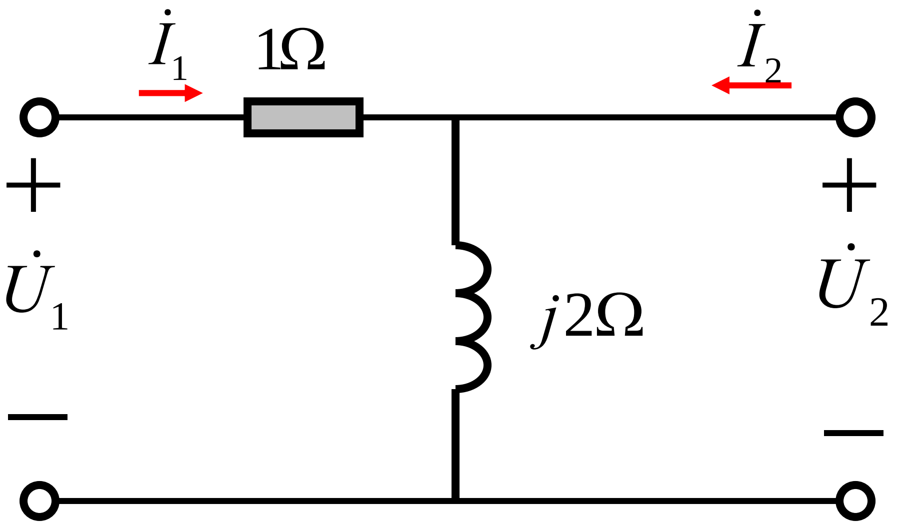


图11.3-2 二端口的级联例

解： 可视为两个图b所示电路的级联



对上图，

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{j2}\dot{U}_2 - \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_1 = 1 \times \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = (1 - j0.5)\dot{U}_2 - \dot{I}_2$$

传输参数为

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 - j0.5 & 1 \\ -j0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = A_a A_a = \begin{bmatrix} 1 - j0.5 & 1 \\ -j0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - j0.5 & 1 \\ -j0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 - j1.5 & 2 - j0.5 \\ -0.25 - j1 & 1 - j0.5 \end{bmatrix}$$

二、串联和并联：

1、串联：

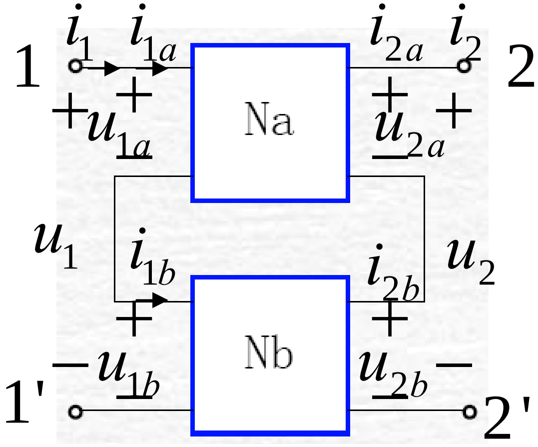
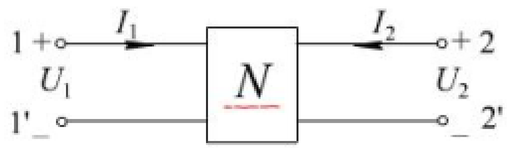


图11.3-3 二端口的串联



(1) 串联联接的条件：

图11.3-3为两个二端口的串联连接。只须满足条件，

$$i_{1a}=i_{1b} \qquad i_{2a}=i_{2b} \qquad (11.3\text{-}3)$$

即输入端口处电流应为同一个电流，输出端口处也一样，也应为同一个电流。这样就能保证

$$i_{1a}=i_{1a}^{'}\text{、}i_{2a}=i_{2a}^{'}\text{；}i_{1b}=i_{1b}^{'}\text{、}i_{2b}=i_{2b}^{'}$$

(2) 串联联接的等效Z参数：

对Na二端口，其Z参数方程

$$\begin{cases} \dot{U}_{1a} = z_{11a}\dot{I}_{1a} + z_{12a}\dot{I}_{2a} \\ \dot{U}_{2a} = z_{21a}\dot{I}_{1a} + z_{22a}\dot{I}_{2a} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{bmatrix} = [Z_a]\begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix}$$

对Nb二端口，其Z参数方程

$$\begin{cases} \dot{U}_{1b} = z_{11b}\dot{I}_{1b} + z_{12b}\dot{I}_{2b} \\ \dot{U}_{2b} = z_{21b}\dot{I}_{1b} + z_{22b}\dot{I}_{2b} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{bmatrix} = [Z_b]\begin{bmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix}$$

根据KVL，有 $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b} \qquad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b}$

注意到，对串联的两个二端口而言，存在有如下端口条件

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b} \qquad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b}$$

则有，

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (z_{11a} + z_{11b})\dot{I}_1 + (z_{12a} + z_{12b})\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = (z_{21a} + z_{21b})\dot{I}_1 + (z_{22a} + z_{22b})\dot{I}_2 \end{cases}$$

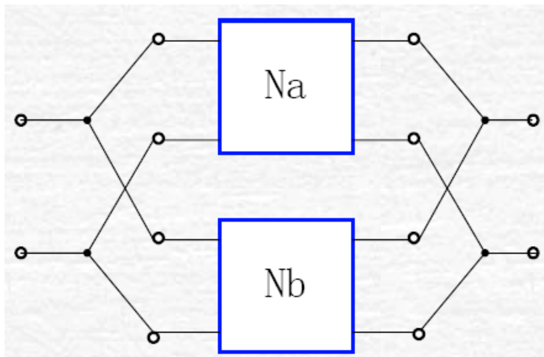
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

即若子电路Na和Nb都满足端口条件，对串联等效二端口网络N，其等效Z参数

$$Z = Z_a + Z_b \qquad (11.3\text{-}4)$$

为两个串联二端口的Z参数矩阵之和。

2、并联



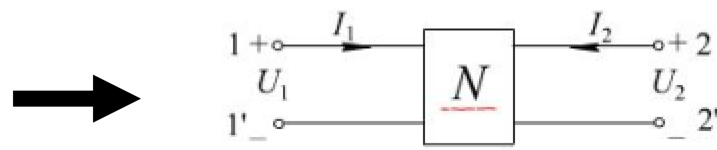
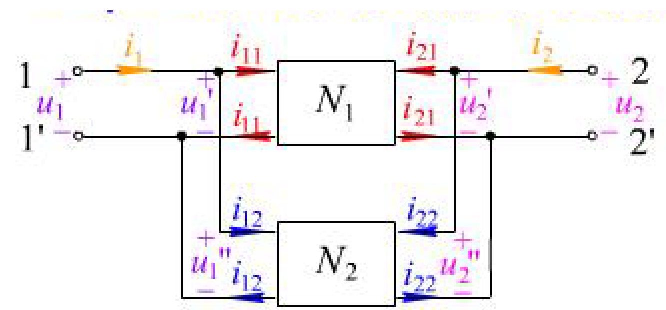


图11.3-4 二端口的并联



(1)并联联接的条件:

须满足的条件为:

端口处电压 $\dot{U}_{1a}=\dot{U}_{1b}=\dot{U}_{1}$ $\dot{U}_{2a}=\dot{U}_{2b}=\dot{U}_{2}$ (11.3-5)

端口处电流, N_1有 $i_{1a}=i_{1a}^{'}$ 、$i_{2a}=i_{2a}^{'}$

N_2有 $i_{1b}=i_{1b}^{'}$ 、$i_{2b}=i_{2b}^{'}$

(2) 并联联接的等效Y参数：

对Na二端口，其Y参数方程

$$\begin{cases} \dot{I}_{1a} = y_{11a}\dot{U}_{1a} + y_{12a}\dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{2a} = y_{21a}\dot{U}_{1a} + y_{22a}\dot{U}_{2a} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix} = [Y_a] \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{bmatrix}$$

对Nb二端口，其Y参数方程

$$\begin{cases} \dot{I}_{1b} = y_{11b}\dot{U}_{1b} + y_{12b}\dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{2b} = y_{21b}\dot{U}_{1b} + y_{22b}\dot{U}_{2b} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = [Y_b] \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{bmatrix}$$

根据KCL，有 $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}$ $\qquad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} + \dot{I}_{2b}$

注意到，对并联的两个二端口而言，存在有如下端口条件

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b} \qquad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b}$$

则有，

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (y_{11a} + y_{11b})\dot{U}_1 + (y_{12a} + y_{12b})\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = (y_{21a} + y_{21b})\dot{U}_1 + (y_{22a} + y_{22b})\dot{U}_2 \end{cases}$$

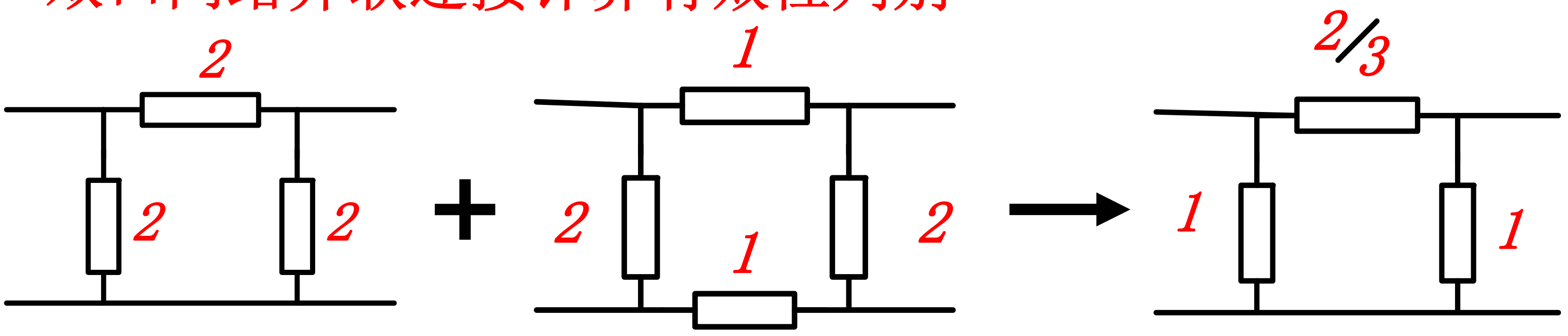
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

即若子电路Na和Nb都满足端口条件，对并联等效二端口网络N，其等效Y参数

$$Y = Y_a + Y_b \qquad (11.3\text{-}6)$$

为两个并联二端口的Y参数矩阵之和。

*双口网络并联连接计算有效性判别

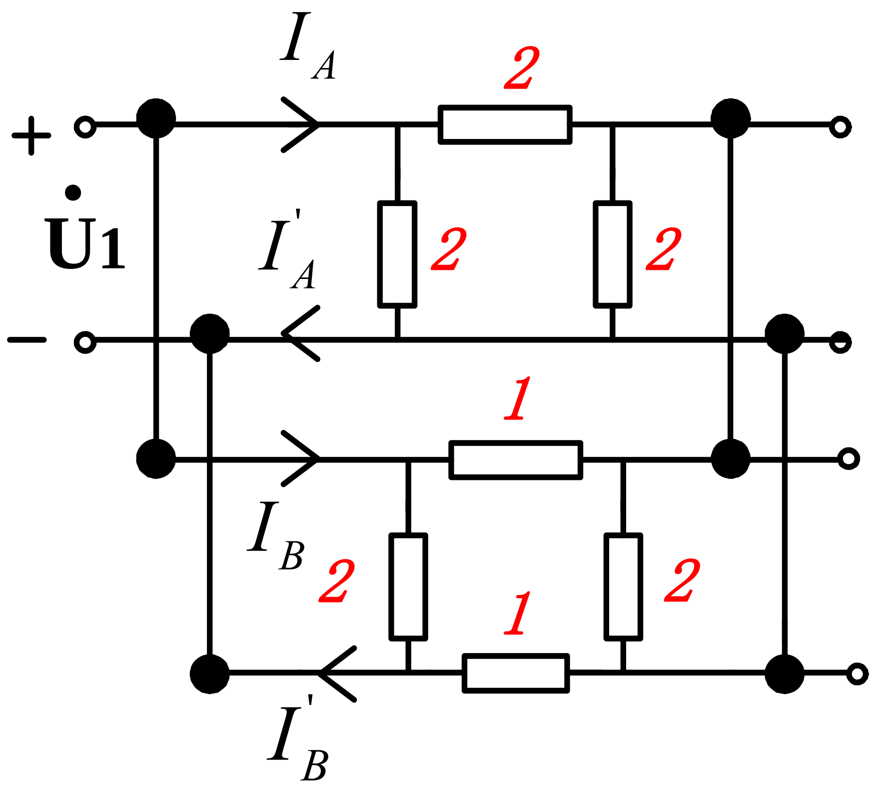


$$Y_1=\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{bmatrix}\qquad Y_2=\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{bmatrix}\qquad Y=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$Y \neq Y_1 + Y_2$$

并联联结有效性不成立.

原因: 原双口网络端口电流不保持两两成对.

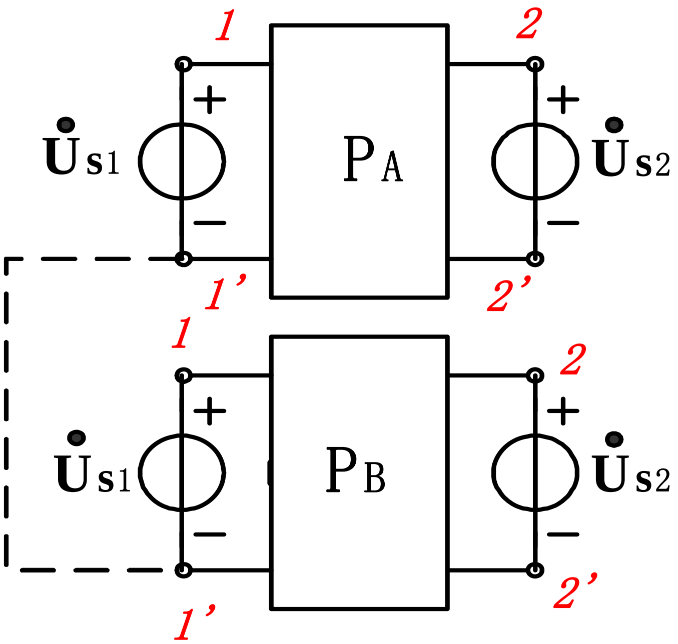


$$I_A \neq I'_A$$

$$I_B \neq I'_B$$

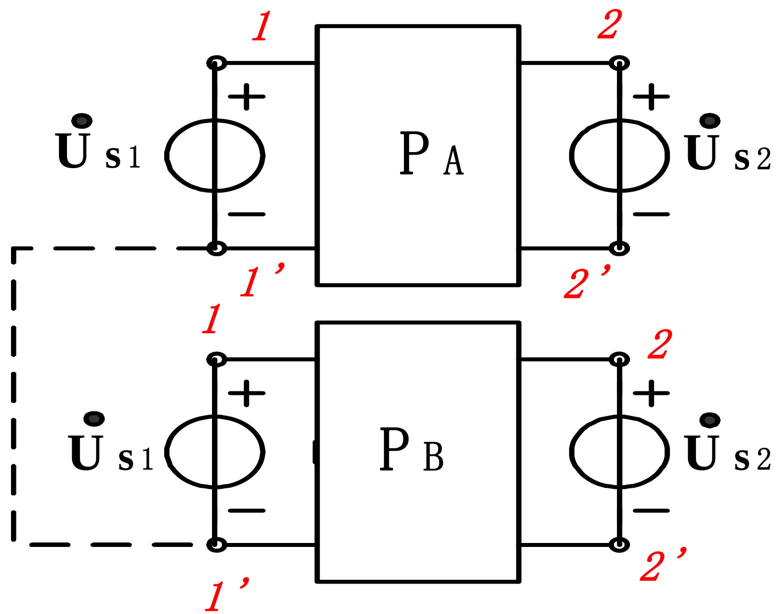
并联连接有效性判别法则

网络并联时，应保证原有网络的各端口电流流入和流出电流相等，否则不能用短路参数矩阵相加来计算。



网络连接有效性判别：

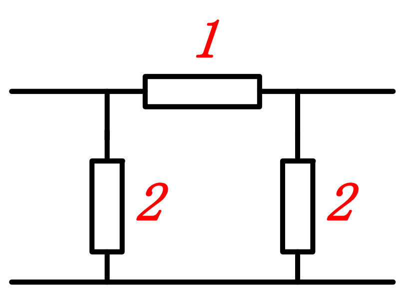
电路连接如图，对 P_A、P_B 二端分别加电压源$\dot{U}_{s1}$和$\dot{U}_{s2}$，计算或测量$\dot{U}_{A12}$ 和 $\dot{U}_{B12}$，若 $\dot{U}_{A12}=\dot{U}_{B12}$ 则满足并联有效性，可用并联计算式来计算合成后短路参数。

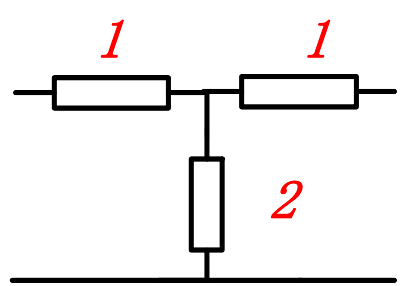


$$\dot U_{A12}=\dot U_{B12} \rightarrow \dot U_{A1'2'}=\dot U_{B1'2'}$$

两个网络中**1,2,2’**为等位点, 并联连接后不改变原网络各支路电压电流。原端口电流不变。

两个公共地线的二端口网络（即**T**型网络）必满足并联有效性条件。





3、串并联：

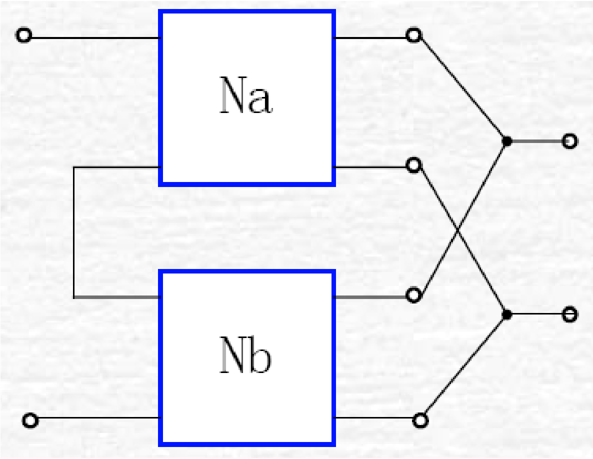


图11.3-5 二端口的串并联

若子电路N_a和N_b都满足端口条件，则有

$$H = H_a + H_b \qquad (11.3\text{-}7)$$

4、并串联：

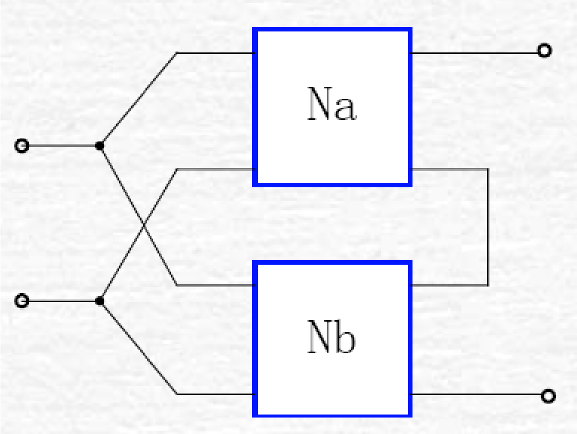


图11.3-6 二端口的并串联

若子电路N_a和N_b都满足端口条件，则有

$$G = G_a + G_b \qquad (11.3\text{-}8)$$

例11.3-2 如图11.3-7，易求得Z参数矩阵为，

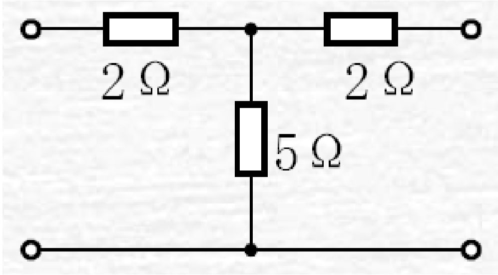
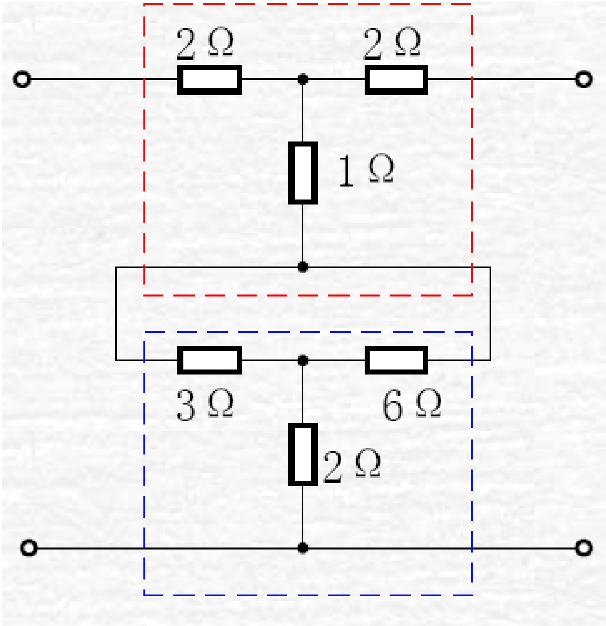


图11.3-7

$$Z=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 5 & 7\end{bmatrix}\Omega$$

如果视为如图两个二端口的串联，则



上面 $$Z_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\Omega$$

下面 $$Z_2=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{bmatrix}\Omega$$

$$Z_1+Z_2=\begin{bmatrix}8 & 3\\ 3 & 11\end{bmatrix}\Omega$$

显然，$\mathbf{Z}\neq \mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2$ 因为不满足端口条件。

由于串、并联需验证端口条件(验证方法见参考书【4】p260)，满足才能利用。因此实际中使用较少。

11.4 二端口的T和π等效电路

对任一给定的线性无源互易二端口来说，因为$Z_{12}=Z_{21}$(或$Y_{12}=Y_{21}$，$A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=1$，$H_{12}=-H_{21}$)，其外部特性可以用3个独立参数来确定。如果能找到一个由3个阻抗(或导纳)组成的简单二端口网络，且这个二端口与给定的二端口的参数分别对应相等，则这两个二端口外部特性也就完全相同，即它们是等效的。

由3个阻抗(导纳)组成的最简单二端口只有两种形式，即T形和π形电路。

一、T形等效电路的元件参数：

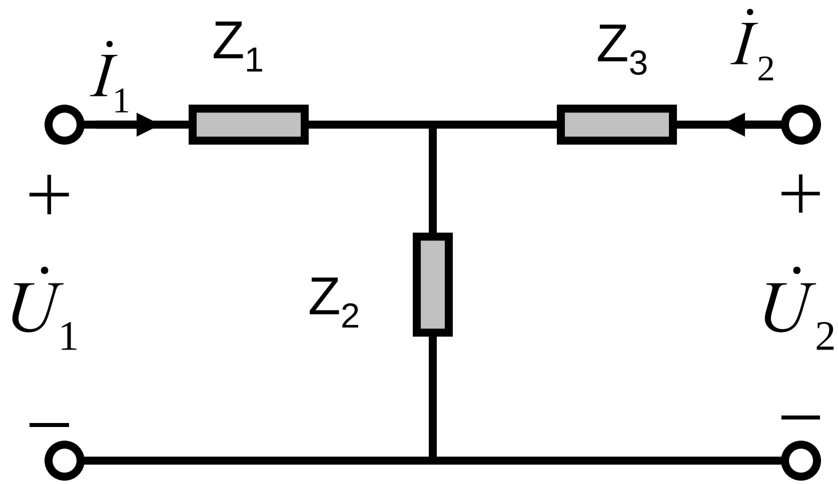


图11.4-1 T形网络

1)若给定某二端口的Z参数，须确定其等效T型电路中的元件Z_1、Z_2、Z_3的值。对图示T型电路，写出电压电流关系式

$$\dot{U}_1 = Z_1\dot{I}_1 + Z_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (Z_1 + Z_2)\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = Z_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + Z_3\dot{I}_2 = Z_2\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2$$

Z参数方程

$$\dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$

比较两组方程，对应项相等，则有T形电路元件与Z参数之关系为

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= z_{11} \\ Z_2 &= z_{12} = z_{21} \\ Z_2 + Z_3 &= z_{22} \end{aligned} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} Z_1 &= z_{11} - z_{12} \\ Z_2 &= z_{12} = z_{21} \\ Z_2 &= z_{22} - z_{21} \end{aligned}}$$

2)同样的方法，可以求得当给定二端口的A参数时，等效T形电路中的元件参数。由T形电路求得传输参数(注意$a_{12}=a_{21}$)如下，

$$a_{11}=\left.\frac{\dot U_1}{\dot U_2}\right|_{\dot I_2=0}=1+\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$a_{21}=\left.\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\right|_{\dot I_2=0}=\frac{1}{Z_2}$$

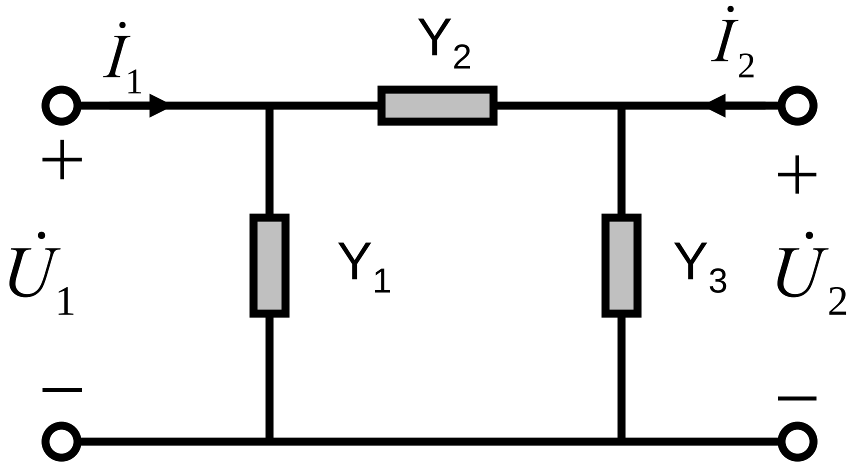
$$a_{22}=\left.\frac{\dot I_1}{-\dot I_2}\right|_{\dot U_2=0}=1+\frac{Z_3}{Z_2}$$

$$\longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}Z_1&=\frac{a_{11}-1}{a_{21}}\\ Z_2&=\frac{1}{a_{21}}\\ Z_3&=\frac{a_{22}-1}{a_{21}}\end{aligned}}$$

3)当给定二端口的Y参数时，可仿照上述过程求解T形电路中的参数。

二、π形等效电路的元件参数：



π形网络

1)若给定某二端口的Y参数，须确定其等效的π型电路中的元件Y_1、Y_2、Y_3的值。

对图示电路，可以采取对其求Y参数的办法，先将Y_1、Y_2、Y_3视作已知元件参数。故有：

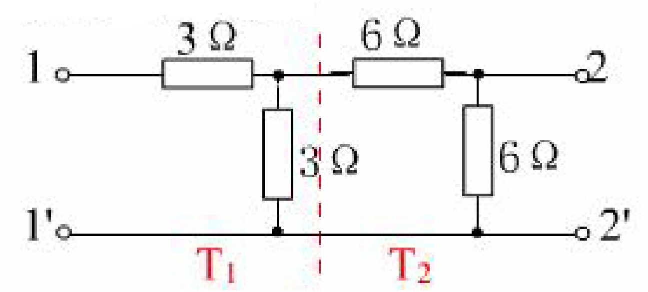
$$y_{11}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}=Y_1+Y_2 \qquad y_{21}=y_{12}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=-Y_2 \qquad y_{22}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=Y_2+Y_3$$

由此可求得π型等效电路中的元件参数与已知Y参数之间关系为

$$\boxed{Y_1 = y_{11} + y_{12} \qquad Y_2 = -y_{12} = -y_{21} \qquad Y_3 = y_{22} + y_{21}}$$

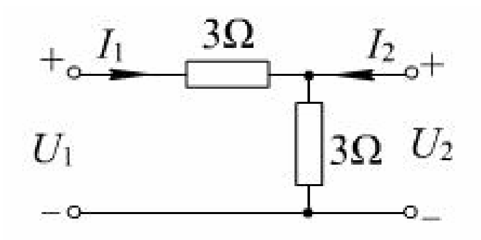
对T型和π型等效电路，采用上述思路和方法不难求得等效电路中的元件参数与给定的二端口各组参数之间的关系。

例11.4-1 对图示二端口网络，求其等效T型电路元件参数。



解 首先分析该二端口网络特点，不难发现，它可以视作两个结构相同，元件参数相似的二端口的级联构成。

对T_1二端口，可求得其传输参数如下，



$$a'_{11}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}=2 \qquad a'_{12}=\left.\frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}=3\Omega$$

$$a'_{21}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}=\frac{1}{3}\text{S} \qquad a'_{22}=\left.\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}=1$$

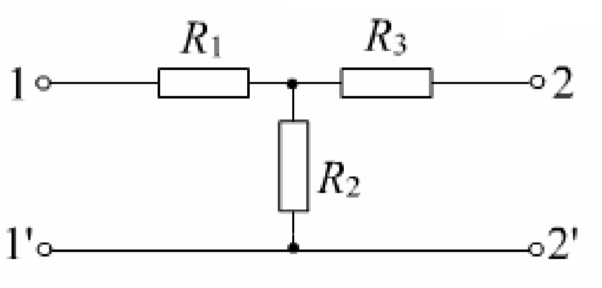
同样方法，可以求得相同结构的T_2二端口的传输参数如下

$$a_{11}^{"}=2 \qquad a_{12}^{"}=6\Omega \qquad a_{21}^{"}=\frac{1}{6}\ \mathrm{S} \qquad a_{22}^{"}=1$$

故两个级联二端口的等效传输参数T为T_1和T_2的矩阵之乘积

$$A=A_1A_2=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1/6 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.5 & 15\\ 5/6 & 3\end{bmatrix}$$

由此可求得题图所示二端口的等效T型电路中元件参数R_1、R_2和R_3分别为



$$R_1=\frac{A_{11}-1}{A_{21}}=\frac{3.5\times 6}{5}=4.2\Omega$$

$$R_2=\frac{1}{A_{21}}=1.2\Omega$$

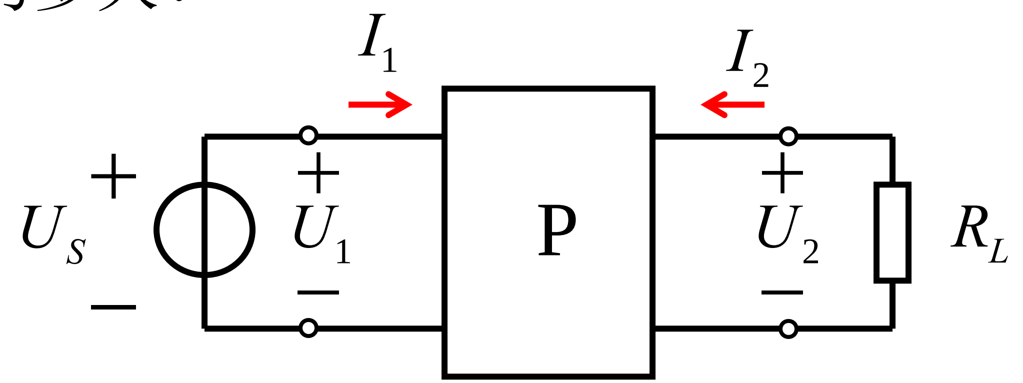
$$R_3=\frac{A_{22}-1}{A_{21}}=\frac{2\times 6}{5}=2.4\Omega$$

三. 利用二端口的T/π型等效电路分析电路：

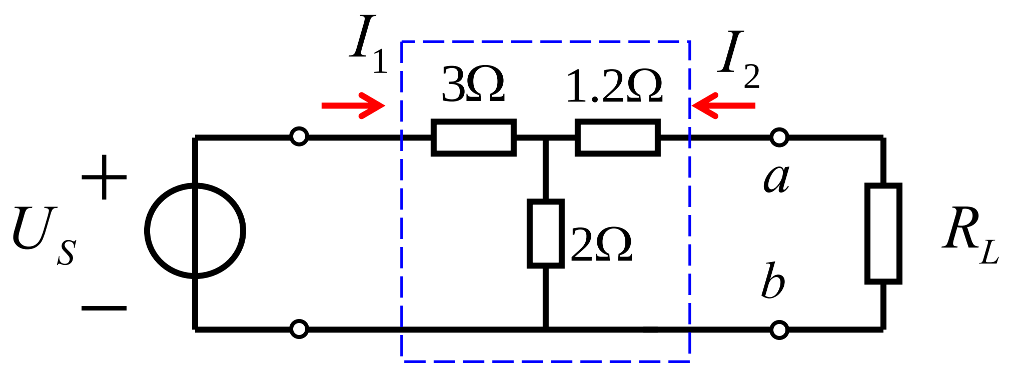
1、电阻/正弦稳态电路分析：

例1 已知无源二端口网络P的传输参数为 $A=\begin{bmatrix} 2.5 & 6 \\ 0.5 & 1.6 \end{bmatrix}$。

问(1)附在R_L为多少时其功率最大？(2)若U_S＝10V，R_L吸收最大功率为多大？



图a



图b

提示：本题用等效电路方法求解。先由已知条件将二端口网络P等效为T形电路，然后再求解。

解：

$$Z=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 3.2\end{bmatrix}$$

将图a中P网络等效为T形等效电路，其中间支路等效阻抗为 $z_{12}=2\Omega$， 两臂上阻抗分别为

$$z_{11}-z_{12}=5-2=3\Omega$$

$$z_{22}-z_{12}=3.2-2=1.2\Omega$$

故得图a中P网络的T形等效电路如图b虚线框内电路所示。对于图b，a、b以左电路等效电阻

$$R_{ab}=1.2+3//2=2.4\Omega$$

a、b以左电路开路电压 $U_{ab}=U_S\times\dfrac{2}{3+2}=\dfrac{2}{5}U_S$

(1)当$R_L=R_{ab}$=2.4Ω时，RL获得最大功率，且

$$P_{\max}=\frac{U_{ab}^2}{4R_{ab}}=\frac{(\frac{2}{5}U_S)^2}{4\times 2.4}=\frac{U_S{}^2}{60}$$

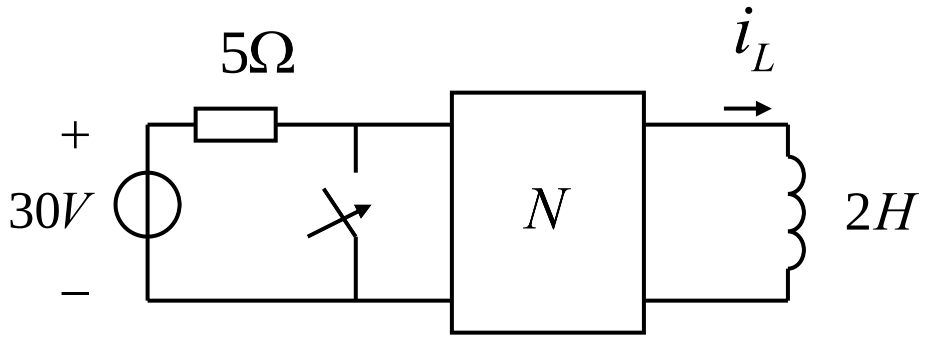
(2)若U_S=10V，则

$$P_{\max}=\frac{10^2}{60}=\frac{5}{3}\ \mathrm{W}$$

2、动态电路分析：

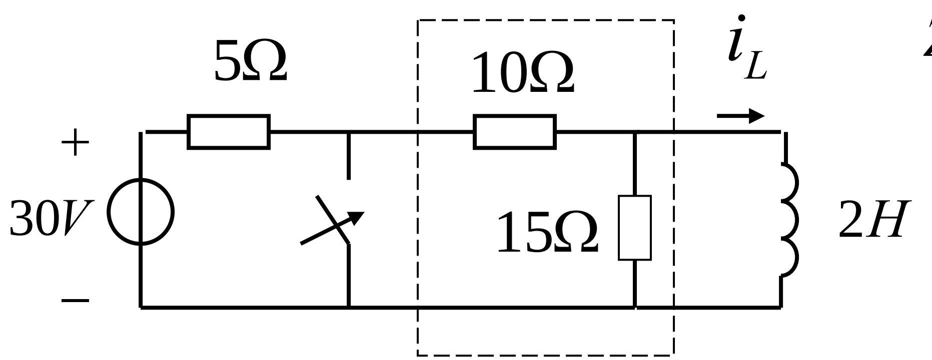
例11.4-2（例11.2-6） 图示电路N不含独立源，其Z参数矩阵为

$Z=\begin{bmatrix}25 & 15\\ 15 & 15\end{bmatrix}\Omega$ 。电路原已稳定，t=0时K闭合，求$i_L(t)$ 。



解二、用T形等效电路求解

$$Z_1=z_{11}-z_{12}=10\Omega$$
$$Z_2=z_{12}=15\Omega$$
$$Z_3=z_{22}-z_{12}=0\Omega$$



$$i_L(t)=2e^{-3t}A \quad t\geq 0$$

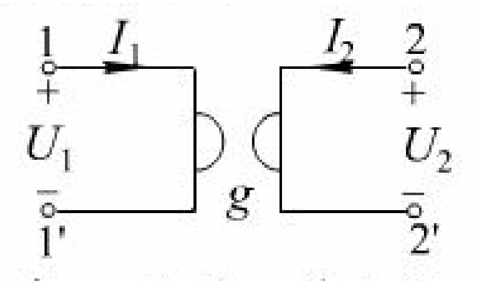
11.5 回转器和负阻抗变换器

随着电子技术的发展，各种二端口器件的应用日益广泛，如晶体管、运算放大器等。随之而来的就是出现了一些与前面介绍的无源二端口不同的有源二端口器件，本节介绍的回转器和负阻抗变换器就是其中的两种。

一、回转器

1、回转器方程(VCR)：

1)理想回转器可视为一个二端口，其电路符号如图所示。



在图示u、i参考方向下，其约束关系为：

导纳方程

传输方程

$$\begin{cases} i_1 = g u_2 \\ i_2 = -g u_1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{g} i_2 \\ i_1 = g u_2 \end{cases} \qquad (11.6\text{-}1)$$

式中，g称为回转电导，也称回转常数。

2)上述约束关系写成矩阵形式则有：

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$ 故有Y参数矩阵为 $$Y = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$ 故有T参数矩阵为 $$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix}$$

由上述Y参数矩阵可以看出，在回转器中不满足$y_{12}=y_{21}$的关系，故它是非互易的。

3)由回转器端口处的约束关系，可知其端口处吸收的功率

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = g u_1 u_2 - g u_1 u_2 = 0$$

可见，理想回转器不消耗功率，也不发出功率，为无源无损二端口器件。

2、回转器的特性：

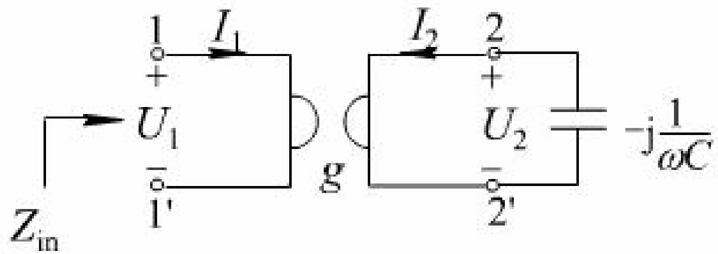
当回转器2-2'端接有负载阻抗Z_L时，1-1'端的入端阻抗

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{-\frac{1}{g}\dot{I}_2}{g\dot{U}_2}=\frac{1}{g^2}\cdot\frac{1}{Z_L}$$

（注意：$\frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2}=Z_L$。）

当 $Z_L=\frac{1}{j\omega C}$，即2-2'端接有电容元件C时，从1-1'看进去的入端阻抗

$$Z_{in}=j\omega\frac{C}{g^2}=j\omega L_{eq}$$



由此不难看出，回转器有把一个端口上的电压“回转”为另一端口的电流或相反过程的性质。正是由于这一性质，使回转器具有把一个电容“回转”为一个电感的本领。上式中，等效电感

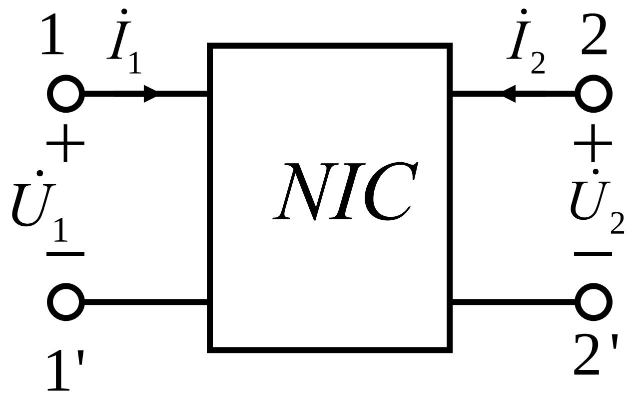
$$L_{eq}=\frac{C}{g^2}$$

如 $g=2\times10^{-5}S$，$C=1\mu F$，则$L_{eq}=2500H$。

同样，若2-2’端接有电感元件L时，从1-1’看进去的将是一个等效电容C_{eq}。

二、负阻抗变换器(negative impedance converter,NIC)：

负阻抗变换器也是一个二端口元件，其电路符号如图所示。



1、负阻抗变换器方程(VCR)：

在图示电压、电流参考方向下，其端钮特性可用T参数方程来表示，

其中k—正实常数

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}\quad \text{或} \quad \begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}$$

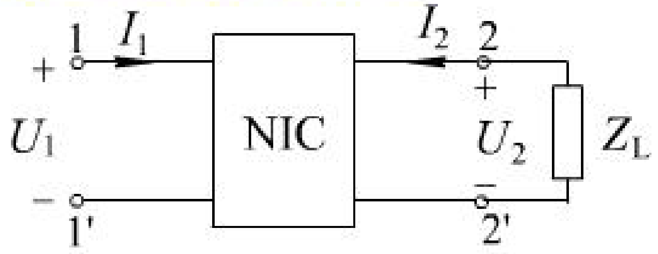
即 $\begin{cases}\dot{U}_1=\dot{U}_2\\ \dot{I}_1=k\dot{I}_2\end{cases}$ （电流反向型） $\begin{cases}\dot{U}_1=-k\dot{U}_2\\ \dot{I}_1=-\dot{I}_2\end{cases}$ （电压反向型）

2、负阻抗变换器的特性：

当负阻抗变换器2-2'端接有负载阻抗Z_L时，从1-1'端看进去的入端阻抗

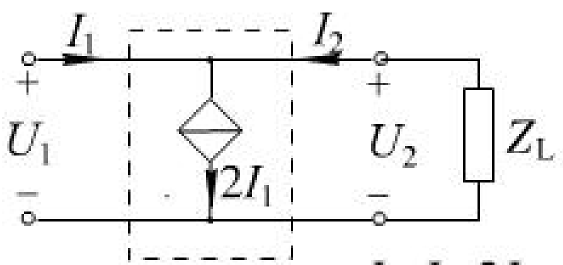
$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{U}_2}{k\dot{I}_2}=-\frac{1}{k}Z_L \qquad (注意\dot{U}_2=-Z_L\dot{I}_2)$$

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{-k\dot{U}_2}{-\dot{I}_2}=-kZ_L$$



由此可以看出，入端阻抗为负载阻抗的负值。所以，它具有把一个正阻抗变为另一数值（乘以1/*k*或*k*）的负阻抗的本领。负阻抗变换器为电路设计中实现负的*R*、*L*、*C*提供了可能。

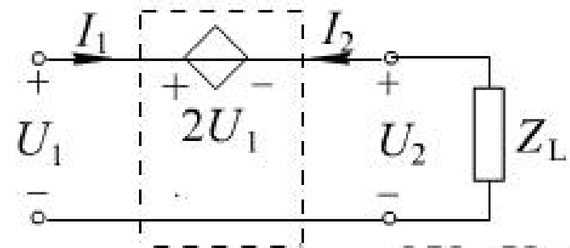
下面给出的两个含有受控源的二端口电路，分别对应了电流反向型和电压反向型的负阻抗变换器的实例。



$I_1+I_2=2I_1$

$$\begin{cases} U_1=U_2 \\ I_1=I_2 \end{cases} \quad (k=1)$$

$Z_{in}=-Z_L$



$2U_1+U_2=U_1$

$$\begin{cases} U_1=-U_2 \\ I_1=-I_2 \end{cases} \quad (k=1)$$

$Z_{in}=-Z_L$