2012级高数期末

# 南开大学 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 1 页

一. 求下列微分方程通解

(1) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$

解: $y=e^{-\int\cos x dx}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos x dx}dx+C\right)$

$=e^{-\sin x}(x+C)$

$=xe^{-\sin x}+Ce^{-\sin x}$

(2) $y''=y'+x$

解: $y''-y'=x$

$\Rightarrow y'=e^{-\int -dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx+C\right)$

$=e^{x}\left(\int xe^{-x}dx+C\right)$

$=e^{x}(-xe^{-x}-e^{-x}+C)$

$=-x-1+Ce^{x}$

(3) $y''-10y'+24y=0$

解: 原微分方程的特征方程为

$\lambda^2-10\lambda+24=0$

特征根 $\lambda_1=4$, $\lambda_2=6$

∴通解 $y=C_1e^{4x}+C_2e^{6x}$

二. 求 $x^2y'+xy=y^2$ 的满足 $y(1)=1$ 的解

解: 原方程两边同除以 $x^2$: $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$

令 $y=ux$ 则原方程化为

$u+xu'+u=u^2 \Rightarrow xu'=u^2-2u \Rightarrow x\cdot\frac{du}{dx}=u^2-2u \Rightarrow \frac{1}{u(u-2)}du=\frac{1}{x}dx$

两边积分 $\int\frac{du}{u(u-2)}=\int\frac{1}{x}dx+C \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{u-2}{u}=\ln x+C \Rightarrow 1-\frac{2x}{y}=Cx^2$

三. 判定敛散性.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

解: ∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$

∴原积分发散

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^{n+2}}$

解: $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{(n+1)^{n+3}}\Big/\frac{(n+2)!}{n^{n+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot n^{n+2}}{(n+1)^{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+3}+3n^{n+2}}{n^{n+3}+(n+3)n^{n+2}+\sum_{k=2}^{n}C_{n+3}^{k}n^{n+3-k}}<1$

∴原积分收敛

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-2n}}$

解: ∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-2n}}\Big/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3-2n}}=1$

∴原积分收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

解: 令 $f(n)=n-\ln n$

则 $f'(n)=1-\frac{1}{n}\geq 0,(n\geq 1)$

∴ $f(n)$ 在 $\{n\geq 1, n\in Z\}$ ↑

∴ $u_n=\frac{1}{n-\ln n}$ ↓ 且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n}}=1$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散

∴原积分条件收敛

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{x^5}}dx$

解: ∵ $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{x^5}}dx$

$=\int_0^{1}\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{x^5}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{x^5}}dx$

且 $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{x^5}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^{\frac{5}{4}}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$

即 $x\to0$, $\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{x^5}}\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$, 收敛

又 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{x^5}}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$, 收敛

∴原积分收敛

四. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域并求其和函数

解：令 $u_n = n$.

则 $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$

$\therefore R=1$

当 $x=1$ 时，原积分 $= \sum_{n=1}^{\infty} n$，发散；$x=-1$ 时，原积分 $= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，发散

$\therefore$ 收敛域为 $(-1,1)$

又令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \Rightarrow \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Rightarrow \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = (\frac{x}{1-x})'$

即 $\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ ． $x\in(-1,1)$

五. 将函数 $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ 展开成 $x$ 的幂级数并求其收敛域

解：$\because f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

又 $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x}dx = -\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\int x^n dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$

$\therefore f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}[1+(-1)^{n+1}]$

又对于 $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. $\rho_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. $R_1 = 1$. 又 $x=1$ 时，散，$x=-1$. 收

$\therefore \ln(1-x)$ 的收敛域为 $[-1,1)$

同理可得 $\ln(1+x)$ 的收敛域为 $(-1,1]$

$\therefore f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}[1+(-1)^{n+1}]$ 的收敛域为 $(-1,1)$

六. 将 $f(x)=\pi^2-x^2\ (-\pi\le x\le\pi)$ 展开成以 $2\pi$ 为周期的傅利叶级数.

解: 令 $g(x)=x^2$.

则由于 $g(x)=x^2$ 为偶函数, 故其傅里叶级数中 $b_n=0$

又 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$, $\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{3}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x^2 d\sin nx=\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^\pi-\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\cdot 2x\,dx$

$=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi x\,d\cos nx=\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^\pi-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n-\frac{4}{n^3\pi}\sin nx\Big|_0^\pi$

$=\frac{4}{n^2}(-1)^n$

$\therefore\ g(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$

$\therefore\ f(x)=\pi^2-g(x)=\frac{2\pi^2}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$

七. 计算下列广义积分.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$

解: 令 $x=\tan t$, 则 $x=1, t=\frac{\pi}{4}$; $x\to+\infty, t=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 原积分化为 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan t}{\tan t(1+\tan^2 t)}$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t\,dt}{\tan t\cdot\sec^2 t}$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$=\ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{1}{2}\ln 2$

(2) $\int_0^1\ln x\,dx$

解: 令 $t=\ln x$, 则 $x\to 0, t\to-\infty$, $x=1, t=0$, $dx=e^t dt$

则原积分 $=\int_{-\infty}^0 t\,de^t$

$=te^t\Big|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 e^t dt$

$=te^t\Big|_{-\infty}^0-e^t\Big|_{-\infty}^0$

$=0-\lim_{t\to-\infty}te^t-(1-0)$

$=\lim_{-t\to+\infty}\frac{(-t)}{e^{-t}}-1$

$=\lim_{-t\to+\infty}\frac{1}{e^{-t}}-1$

$=-1$

八. 计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2x+\alpha^2\sin^2x)dx \quad (\alpha>0)$

解: $I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\sin^2x}{\cos^2x+\alpha^2\sin^2x}dx$

$=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha^2\sin^2x}{\cos^2x+\alpha^2\sin^2x}dx$

$=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-\frac{\cos^2x}{\cos^2x+\alpha^2\sin^2x}dx$

$=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\alpha^2\tan^2x}d\tan x$

$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{\tan x}{\alpha}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{2}{\alpha^2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha^2}$

$\therefore I(\alpha)-I(1)=\int_1^{\alpha}I'(t)dt$

$=\int_1^{\alpha}\frac{\pi}{t}-\frac{\pi}{t^2}dt$

$=\pi(\ln t+\frac{1}{t})\Big|_1^{\alpha}$

$=\pi(\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}-1)$

又 $I(1)=\ln(\sin^2x+\cos^2x)=0$

$\therefore I(\alpha)=\pi(\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}-1)$