homework13

P324. 习题 12.7 (A) 2-2, 2-3；5
P332. 习题 13.1 (A) 4；

2. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）：

(2) $f(x)=x^2-x\ (-2\leqslant x\leqslant 2)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1; & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3;\end{cases}$

5. 将 $f(x)=2x+3\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为余弦级数.

---

4. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

补 1. 将 $f(x)=1-x^2$ 用余弦级数展开，并求解 $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

补 2. 计算积分 $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$； $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

P324 习题 12.7

2. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式)：

(2) $f(x)=x^2-x(-2\leqslant x\leqslant 2)$；

A.2-2. 解. 依题意 $l=2$, $a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\cdots=\frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=-\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\cdots=\frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

$$\Rightarrow f(x)\sim S(x)=\frac{4}{3}+\sum_{n\geq 1}\frac{4(-1)^n}{n\pi}\left(\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}+\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$=\begin{cases} x^2-x & x\in(-2,2)\\ 4 & x=\pm 2\end{cases}$$

P324 习题 12.7

2. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1; & -3\leqslant x<0,\\ 1\quad, & 0\leqslant x<3;\end{cases}$

A.2-3. 解. $l=3$, $a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=\frac{1}{3}\left(\int_{0}^{3}dx+\int_{-3}^{0}(2x+1)\,dx\right)=-1$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx+\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$=\cdots=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0 & n=2m\\ \frac{12}{\pi^2(2m+1)^2} & n=2m+1\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx=\cdots=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x)\sim S(x)=\frac{-1}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{12}{\pi^2}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}+\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$=\begin{cases}2x+1 & x\in(-3,0)\\ 1 & x\in[0,3)\\ \frac{-4}{3} & x=\pm 3\end{cases}$$

P324 习题 12.7

5. 将 $f(x)=2x+3(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为余弦级数.

A.5. 解. 依题意

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+3)\,dx=\frac{2x^2+6x}{\pi}\bigg|_0^{\pi}=2\pi+6$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+3)\cos nx\,dx=\cdots\\
&=\frac{4(-1+(-1)^n)}{n^2\pi}=\begin{cases}0 & n=2m\\ \frac{-8}{\pi(2m+1)^2} & n=2m+1\end{cases}\\
\Rightarrow f(x)&\sim S(x)=(\pi+3)+\sum_{m\geq 0}\frac{-8}{\pi(2m+1)^2}\cos(2m+1)x\\
&=2x+3\quad x\in[0,\pi]
\end{aligned}$$

P332 习题 13.1

4. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

A.4. **解.** 令 $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2, dx=2t\,dt$

$$\text{原式}=\int_1^{\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{t^2+1}{t^2}2t\,dt=2\int_1^{\infty}\ln\frac{t^2+1}{t^2}\,dt$$

$$\int\ln\frac{t^2+1}{t^2}\,dt=t\ln\frac{t^2+1}{t^2}-\int\left(\frac{2t^2}{t^2+1}-2\right)dt$$

$$=t\ln\frac{t^2+1}{t^2}+2\int\frac{dt}{t^2+1}=t\ln\frac{t^2+1}{t^2}+2\arctan t+C$$

$$\text{而}\lim_{t\to\infty}t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)=\lim_{t\to\infty}t\frac{1}{t^2}=0$$

$$\Rightarrow\text{原式}=2\left(t\ln\frac{t^2+1}{t^2}+2\arctan t\right)\Big|_1^{\infty}=-2\ln 2+\pi$$

hwk13

补 1 、将 $f(x)=1-x^2$ 用余弦级数展开，并求解 $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

解. 依题意， $b_n=0, a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx=2-\dfrac{2}{3}\pi^2$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,dx=\cdots=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\Rightarrow f(x)\sim S(x)=(1-\frac{\pi^2}{3})+\sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx=1-x^2 \quad x\in[-\pi,\pi]$$

$$\text{取 } x=0\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}=\frac{\pi^2}{3}\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

补 2 、计算积分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

解. 取 $t=1/x$, 则 $x=1/t, dx=-t^{-2}\,dt$

$$原式 = \int_1^{1/2} \frac{-t^{-2}\,dt}{t^{-1}\sqrt{3t^{-2}-2t^{-1}-1}} = \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} = \arcsin \frac{t+1}{2}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$$

解. 取 $t=-1/x$, 则 $x=-1/t, dx=t^{-2}\,dt$

$$原式 = \int_{1/2}^{1} \frac{t^{-2}\,dt}{-t^{-1}\sqrt{t^{-2}-1}}$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t\Big|_{1/2}^{1} = \frac{-\pi}{3}$$