2008-2009 二学期高等数学期中(A 卷)解答

一 1.　1, $2\sqrt{7}$　(2 分, 2 分)

2.　$\sqrt{\dfrac{26}{65}}$

3.　$\{4,4,2\}$, 6　(2 分, 2 分)

4.　(柱面)螺线, $\{-2,0,5\}$　(1 分, 3 分)

5.　$y+\dfrac{1}{2}(2xy-y^2)+o(\rho^2)$　(一次项 1 分, 二次项 2 分, 余项 1 分)

6.　$\dfrac{x^2}{2}\arctan y+\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+y-\dfrac{2}{3}$

7.　$2xf_1'+e^{x+y}f_2'$,　$4xyf_{11}''+2(x+y)e^{x+y}f_{12}''+e^{2(x+y)}f_{22}''+e^{x+y}f_2'$　(2 分, 2 分)

8.　-3,　-5　(2 分, 2 分)

二.

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-2)$$ ……………………………..(4 分)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-yf_1'+2f_2'}{f_2'-2z}$$ ……………………………..(5 分)

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$ ……………………………….(9 分)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-xf_1'}{f_2'-2z}$$ ……………………………….(10 分)

三. L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=\{3,-2,2\}$, $P_1(2,-1,3)\in L_1$

L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\{1,2,0\}\times\{0,1,1\}=\{2,-1,1\}$, $P_2(1,0,2)\in L_2$　…………(3 分)

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{-1,1-1\}$$

$$(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{P_1P_2})=\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

故 L_1,L_2 共面; ……………………….(8 分)

所求平面法向量为 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{0,1,1\}$ ……………………….(10 分)

所求平面方程为 $1\times(y-0)+1\times(z-2)=0$

即 $y+z=2$ ……………………….(12 分)

四. $I=\iint\limits_{D_1}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\dfrac{y-x}{x^2+y^2}dxdy$ ………………..(2 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(\cos\theta-\sin\theta)d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{\frac{2}{\sin\theta}}(\sin\theta-\cos\theta)d\rho$ ……….(6 分)

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)d\theta+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\sin\theta\cos\theta)d\theta$.(10 分)

$=1-\ln 2$ ……………(12 分)

五. 设切点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则 $3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16$ ……………….(2 分)

切平面法向量为 $\vec{n}=\{6x_0,2y_0,2z_0\}$ ……………….(4 分)

L_1,L_2 的方向向量分别为 $\vec{s}_1=\{4,5,8\}$，$\vec{s}_2=\{1,1,1\}$

$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{-3,4-1\}$ ………………(6 分)

由题意，有 $\vec{n}//\vec{s}$，故 $\dfrac{3x_0}{-3}=\dfrac{y_0}{4}=\dfrac{z_0}{-1}$ ………………..(8 分)

解得 $x_0=\pm\dfrac{2}{\sqrt5}$ $y_0=\mp\dfrac{8}{\sqrt5}$ $z_0=\pm\dfrac{2}{\sqrt5}$

所求点为 $(-\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{8}{\sqrt5},-\dfrac{2}{\sqrt5})$ 或 $(\dfrac{2}{\sqrt5},-\dfrac{8}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5})$ …………………(11 分)

六. $$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dz\int_0^{1-x-z}e^{\frac{y}{1-x-z}}dy$$ ……………………..(4 分)

$$=(e-1)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-z)dz$$ ……………………(7 分)

$$=\frac{1}{2}(e-1)\int_0^1(1-x)^2dx$$ ………………………(9 分)

$$=\frac{1}{6}(e-1)$$ ……………………(11 分)

七. $$\vec{e}=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$$ ……………………..(1 分)

$$f_x'=2x \qquad f_y'=2y \qquad f_z'=2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-y+z)$$ ………………………….(3 分)

令 $$g(x,y,z)=x-y+z$$

$$F(x,y,z)=x-y+z+\lambda(2x^2-y^2+z^2-5)+\mu(x+y)$$ …………….(6 分)

$$\begin{cases}F_x'=1+4\lambda x+\mu=0\\F_y'=-1-2\lambda y+\mu=0\\F_z'=1+2\lambda z=0\\2x^2-y^2+z^2=5\\x+y=0\end{cases}$$ ……………...(8 分)

解得 $x=\mp 2$ $y=\pm 2$ $z=\mp 1$

得两点 $M_1(-2,2,-1)$ $M_2(2,-2,1)$ ………………(10 分)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\Big|_{M_1}=-\frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\Big|_{M_2}=\frac{10}{\sqrt{3}}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 在曲线上确有最大值和最小值，故 M_1,M_2 为所求，且

$$\max_M\{\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\}=\frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \min_M\{\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\}=-\frac{10}{\sqrt{3}}$$ …………….(12 分)