课程编号：MTH17005　　北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

《微积分 A》期中试题

班级________________ 学号__________________ 姓名___________________

(本试卷共 7 页，十个大题. 证明题、解答题必须有解题过程.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0 \\ \ln(1+x), & -1<x<0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内的间断点为（注明间断点的类型）：

____.

2. 曲线 $\rho=2e^{\theta}$ 上 $\theta=0$ 点处的切线方程为：____.

3. 设 $y=x^{\sin x}+f(\tan e^{x})$，其中 f 可导，则 $dy=$____.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $0<|x|<\delta$ 时，总有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon$ ______则

$f'(0)=$_____.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & x\ge 1 \\ x\cos(\frac{\pi}{2}x) & x<1 \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$_____，$b=$_____.

二. (10 分) 求极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{n})$.

(2) 设 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2,$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$.

三. (8 分) 证明对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

四. (10 分)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2},\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

五. (12 分) 设函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.(1)求 $f(x)$ 的单调区间和极值; (2)求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点; (3)求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 并画出 $y=f(x)$ 的草图.

六. (8 分) 设 $\tan(x+y)=x^2y+1, (0\le x<\dfrac{\pi}{2})$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dx}{dy},\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}$.

七. (8 分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x^2\cos\dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ ，求 $f'(x)$,并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

八. (8 分) 已知轮船的燃料费 P 与速度 v 的立方成正比，比例系数为 k . 当速度为 $10km/h$ 时，每小时的燃料费为 80 元，又其他费用每小时需要 480 元，问轮船的速度 v 为多大时，才能使 20km 航程的总费用 Q 最少？此时每小时的总费用等于多少？

九. (8 分) 设 $-1<x_1<0, x_{n+1}=x_n^2+2x_n, n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限.

十. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上具有二阶导数 $f''(x)$，且 $f(1)=f(2)=0$，如果 $F(x)=(x-1)f(x)$，证明至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $F''(\xi)=0$.