

## 2010 级《微积分 A》期末试卷(A)

班 级\_\_\_\_\_ 学 号\_\_\_\_\_ 姓 名\_\_\_\_\_

(注: 本试卷共 6 页, 十一个大题。请撕下试卷最后一张空白纸做草稿。)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得 分												
评 阅 人												

一、填空 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 定积分  $\int_{-1}^1 \frac{1-x^4 \arcsin x}{\sqrt{4-x^2}} dx =$  \_\_\_\_\_.

2. 设  $y = y(x)$  由方程  $y^2 f(x) + xf(y) = x^2$  确定, 其中  $f(x)$  是  $x$  的可微函数, 则

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 已知  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = x^2 + C$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_;

4. 微分方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$  满足初始条件  $y(\pi) = 1$  的特解为 \_\_\_\_\_.

5. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right) =$  \_\_\_\_\_.

二 (9 分) 计算广义积分  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

三 （9 分）讨论函数  $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$  的单调性，凹凸性，并求其极值、曲线的拐点及渐近线.

四 (9 分) 证明等式  $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx$ , 其中  $f(x)$  连续,  $a > 0$ .

并计算  $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin(x^2) dx$ .

五 (9 分) 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = e^{-x} + x$  的通解.

六、(9 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt}{(e^x - 1) \ln(1 + x)}$ .

七 (9 分) 记曲线段  $x^2 + y^2 = 4$  ( $y \geq 0, 0 \leq x \leq 1$ ) 与直线  $x = 0, x = 1$  及  $x$  轴所围的平面图形为  $D$ . (1) 求平面图形  $D$  的面积;  
(2) 求图形  $D$  分别绕  $x$  轴、 $y$  轴旋转一周所成旋转体的体积.

八 (9 分) 设曲线  $C$  的方程为  $\begin{cases} x = (t-1)e^t \\ y = 1-t^4 \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$  及曲线  $C$  在参数  $t=0$  对应点处的曲率半径.

九、(9 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$ , 讨论  $f(x)$  在  $x=0$  处的连续性和可导性,

并求  $f'(x)$ .

十、(9 分) 跳伞运动员从高空自飞机上跳下，经若干秒后打开降落伞。开伞后的运动过程中所受空气阻力为  $kv^2$ ，其中常数  $k > 0$ ， $v$  为下落速度，设人与伞的质量共为  $m$ ，且不计空气浮力。试证明：只要打开降落伞后有足够的降落时间才着地，则降落的速度将近似地等于  $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ 。

十一、(9 分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续，在  $(0,1)$  内可导，且满足  $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{1-x} f(x) dx$ ，

证明：至少存在一点  $\xi \in (0,1)$ ，使得  $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$ 。