

2009级《微积分A》期中试卷

一、填空(每小题4分, 共28分)

1. 设 $y = 2f(\arctan \sqrt{x}) + x^{\tan x}$, 2. f 为可微函数, 3. 则 $dy =$ _____.

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) =$ _____.

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - 2x = (x - y) \ln(x - y)$ 确定, 则 $y' =$ _____, $y'(0) =$ _____.

4. $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1 - 2x) = ax + bx^2 + o(x^2)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

5. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{n} + \cos \frac{1}{n} \right)^n =$ _____.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 3 \\ ax + b & x > 3 \end{cases}$ 在 $x = 3$ 处可导, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

7. 设 $y = \frac{x^2}{1 - x}$, 则 $y^{(n)} =$ _____.

二、(9分) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t} \\ y = \arcsin \sqrt{t} \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

三、(9分) 证明: 当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

四、(9分) 设函数

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性. 若不连续, 请指明间断点的类型.

五、(9分) 试利用导数研究函数 $f(x) = \frac{1+2x^2}{x} + 1$ 的性态. 即求: (1) 函数 $f(x)$ 的单调区间和极值; (2) $f(x)$ 的凹凸区间和曲线 $y=f(x)$ 的拐点; (3) 曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. (注: 请列表讨论)

六、(9分) 设 $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, ($n=1,2,\dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

七、(9分) 试利用泰勒公式确定当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\sqrt{1-x^2} - \cos x^2$ 的阶, 并写出其最简形式的等价无穷小.

八、(9分) 在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的第一象限部分求一点 P 的坐标, 使 P 点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小.

九、(9分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$,

试证: (1) 至少存在一点 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - 1 = \lambda[f(\xi) - \xi]$.