

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 曲线 $\rho = \cos 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 所对应的点处的切线方程为_____.
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) =$ _____.
3. 反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$, $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$, $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ 中收敛的是_____.
4. 已知 $e^x \sin x - x^2(1+x) = ax + bx^3 + o(x^3)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
5. 设 $f(x)$ 是连续函数, $\varphi(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$, 则 $\varphi''(x) =$ _____.

二. (8 分) 计算 $I = \int_{-1}^1 (x^{10} + \sin x) \sqrt{1-x^2} dx$.三. (9 分) 求微分方程 $xy' + (1-x)y = e^{3x}$ 的通解.四. (9 分) 设 $y = 1 - xe^y$ 确定函数 $y = y(x)$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. (1) 求 $y(0), y'(0), y''(0)$.(2) 确定 a, b, c 的值, 使曲线 $y = f(x)$ 与 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处有共同的曲率圆.五. (9 分) 计算 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$.六. (9 分) 判断曲线 $y = \ln x$ 与 $y = \frac{x^2}{2} + a$ 的交点个数.七. (9 分) 求不定积分 $\int \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x+2)(x^2+1)} dx$.

八. (9 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(ax^3)}{x - \arcsin x} & -1 \leq x < 0 \\ 6 & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \ln(1 + \frac{x}{4})} & x > 0 \end{cases}$, 且 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 求 a 的值.

九. (9 分) 某河道长 100m, 截面是半径为 a (m) 的半圆, 现将其挖成矩形(如图), 设泥土的密度为 μ (kg/m³), 求将泥土运出所作的功. (要求画出坐标系)

十. (10 分) 求 $y'' + y' - 2y = 3xe^x$ 的通解.



十一. (9 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($a \geq 0$) 上非负连续且单调减少, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得由曲线

$y = f(x)$ 与直线 $y = f(\xi)$, $x = a$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_1

等于由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = f(\xi)$, $x = b$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转

体的体积 V_2 .