2007级《微积分A》第一学期期末

参考答案

2008.1.17

一、1　-3;　　　2　$y''-y'-2y=0$；

3　$\frac{1}{2}\arcsin^2 x+x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$（缺少$C$扣1分）;

4　$\frac{1}{2}$；　　　5　$a=-1, b=0, c=-\frac{1}{2}$（每空1分）;　　　6　$\frac{\pi}{8}$；

7　$y=\frac{1}{2}x^4+Cx^2$（缺少“$y=$”扣分）；

8　$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$；　　　9　$[1,+\infty)$,　或$(1,+\infty)$;　　　10　$\frac{1}{2}\ln 2$.

二、　解：　方程两端对x求导：　$y'\ln y+y'=1-y'$

$$y'=\frac{1}{\ln y+2},$$

上式两端再对x求导：　$y''\ln y+y'\frac{y'}{y}+y''=-y''$

$$y''=\frac{-y'^2}{y(\ln y+2)}=\frac{-1}{(\ln y+2)^3}$$

当$x=1, y=1$时，　$y'=\frac{1}{2}$;　$y''=-\frac{1}{8}<0$

故曲线$y=y(x)$在点$(1,1)$附近是向上凸的曲线.

三、证明：　令$x=\frac{\pi}{2}-u,\quad dx=-du$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{f(\cos u)}{f(\sin u)+f(\cos u)}(-du)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad I=\frac{\pi}{4}$$

四、证明：法 1：设 $f(x)=e^x-(1+\frac{x}{2})^2$，则 $f(0)=0,$

$$f'(x)=e^x-1-\frac{x}{2},\quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=e^x-\frac{1}{2}>0,\quad (x>0)$$

$\therefore f'(x)$ 单调增加，当 $x>0$ 时，有 $f'(x)>f'(0)=0$

$\therefore f(x)$ 单调增加，当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)=0$，

所以，当 $x>0$ 时，有 $e^x>(1+\frac{x}{2})^2.$

法 2：由泰勒公式 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{e^{\theta x}}{3!}x^3\qquad(0<\theta<1)$

当 $x>0$ 时，$\frac{e^{\theta x}}{3!}x^3>0$

故 $\quad e^x>1+x+\frac{1}{2!}x^2>1+x+\frac{1}{4}x^2=(1+\frac{x}{2})^2$

注：用泰勒公式证明不等式时，必须要注意余项为拉格朗日余项。

五、解：（1）切点 $A(x_0,y_0)=A(x_0,\sqrt{x_0}),$

切线方程为：$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$

即 $\qquad y=\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}.$

(2) $S=\int_2^6(\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2})dx-\int_2^6\sqrt{x}dx$

$=\frac{8}{\sqrt{x_0}}+2\sqrt{x_0}-\frac{4(3\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}$

$\frac{dS}{dx_0}=\frac{x_0-4}{x_0^{3/2}}$;令$\frac{dS}{dx_0}=0,$得唯一驻点$x_0=4$，又

当$x<4$时，$\frac{dS}{dx_0}<0$；当$x>4$时，$\frac{dS}{dx_0}>0$.

所以$x_0=4$是S的极小值点，又驻点唯一，所以$x_0=4$是S的最小值点.

即$x_0=4$时S取得最小值，$S_{最小}=8-\frac{4(3\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}$

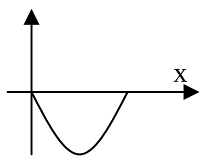
六、（1）由题意，知：$f'(x)=ax-6,\quad f'(1)=0,\quad f(1)=-3.$

所以，有 $a\times1-6=0,\Rightarrow a=6,$又

$f'(x)=6x-6,$，积分得$f(x)=3x^2-6x+C.$

由$f(1)=-3,\Rightarrow C=0$，所以$f(x)=3x^2-6x.$

（2）$f(x)$的草图如左图，

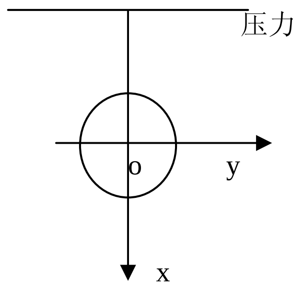


$V=\int_0^2\pi(3x^2-6x)^2dx$ （或 $V=2\int_0^1\pi(3x^2-6x)^2dx$

$=\frac{48\pi}{5}.$

七、解：建立如图所示坐标系，则圆方程为：$x^2+y^2=R^2$.

取x为积分变量，$x\in[-R,R]$.



压力微元为：$dP=g(2R+x)\times2ydx=2g(2R+x)\sqrt{R^2-x^2}dx$

$P=\int_{-R}^{R}2g(2R+x)\sqrt{R^2-x^2}dx$

$=2\pi gR^3.$

（本题压力微元及圆方程与所建坐标系有关，将圆心设为圆点则圆的方程简单，积分简单！）.

八、解： $f(x)=xe^x+\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^x + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$

上式两端对 x 求导，得： $f'(x)=(x+1)e^x+\int_0^x f(t)dt$

再对 x 求导得： $f''(x)=(x+2)e^x + f(x)$，

则 $f(x)$ 满足初值问题： $\begin{cases} f''(x)-f(x)=(x+2)e^x \\ f(0)=0, \quad f'(0)=1 \end{cases}$

对应齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$

设非齐次方程的特解为： $\bar{y}=x(ax+b)e^x$

代入原方程，得：$2a+4ax+2b=x+2$

得：$a=\dfrac{1}{4}, \quad b=\dfrac{3}{4}, \quad \bar{y}=\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x.$

通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x$

由初始条件，得：$C_1=\dfrac{1}{8}, \quad C_2=-\dfrac{1}{8}.$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{8}e^x-\dfrac{1}{8}e^{-x}+\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x.$

九、证明：由积分中值定理，知存在 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$f(1)=\int_0^1 xf(x)dx=\eta f(\eta),$$

构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则有 $F(\eta)=F(1),$

这样 $F(x)$在$[\eta,1]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1),$ 使得 $F'(\xi)=0,$ 又

$F'(x)=f(x)+xf'(x),$

所以有 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，结论成立.