电光 计控学院本科生2017——2018学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A卷）

专业：　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，O是零矩阵，$R(A)$或$r(A)$表示矩阵A的秩，A^{-1}表示可逆矩阵A的逆矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

草 稿 区

得 分

一 .客观题：1−3小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−8为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题2分，共16分)。

1. 所有n阶实对角阵按照矩阵的线性运算规则构成$R^{n\times n}$（所有n阶方阵构成的线性空间）的一个子空间。 (　　)

2. 设$\lambda=0$ 是n阶方阵A的特征值，则方程组$AX=O$有非零解。 (　　)

3. 设A为$s\times n$阶矩阵，$r(A)=s$，则$s>n$。 (　　)

4. 排列14532的逆序数为 (　　)

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

5. 在R^3中，与向量$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,1)^T$ 都正交的单位向量是 (　　)

（A）$(-1,0,1)^T$　（B）$(1/\sqrt{2})(-1,0,1)^T$　（C）$(1,0,-1)^T$　（D）$(1/\sqrt{2})(1,0,1)^T$

6. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{13} \end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则$D$= (　　)

（A）$P_1AP_2^{-1}$　（B）P_1AP_2　（C）P_2AP_1　（D）$P_1AP_2^T$

7. 矩阵A，B是n阶正定矩阵，矩阵P是可逆矩阵，则以下矩阵不一定是正定矩阵的是： (　　)

（A）$A+B$　（B）B^{-1}　（C）AB　（D）P^TAP

8. 设A，B是$n(n>2)$阶方阵，$AB=O$ 且$B\neq O$，则必有 (　　)

（A）$(A+B)^2=A^2+B^2$　（B）$|B|\neq 0$　（C）$|B^*|\neq 0$　（D）$|A^*|=0$

得 分

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$。

2. 计算n阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & 0 & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & 0 & \dots & x & x & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 & x & 1 \\ x & x & x & \dots & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，其中$n>2, x\neq 0$。

草 稿 区

得 分

三、若 AX=B，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ，（1）求 A^{-1}；（2）求矩阵 X 。

（本题 10 分）

草 稿 区

得 分

四、当λ为何值时，线性方程组： （本题 **14** 分）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

有唯一解，无解和有无穷多解？

当方程组有无穷解时，求其所有解。

草 稿 区

得 分

五、设$\boldsymbol{V}$是二阶实对称矩阵全体的集合对于通常矩阵的加法与数乘运算所构成的实数域$\boldsymbol{R}$上的线性空间，

且$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},A_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是$\boldsymbol{V}$的一个基，在$\boldsymbol{V}$中

定义合同变换 $T(A)=P^TAP$，其中$P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$。

（1）证明 T 为线性变换。

（2）求 T 在基 $[A_1,A_2,A_3]$下的矩阵。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$ （本题 14 分）

（1）写出它的矩阵；（2）用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出所用的正交变换；

（3）判定该二次型是哪种二次型(正定，负定，半正定，半负定，不定)。

草 稿 区

得 分

七、已知$\alpha_1=(1,2,3)^T$，求一组非零向量α_2,α_3，使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交。 （本题 9 分）

草 稿 区

得 分

八、设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$阶矩阵，若存在正整数$\boldsymbol{k}$，使线性方程组$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 有解向量α，且

$\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha\neq\boldsymbol{O}$，证明：向量组$\alpha,\boldsymbol{A}\alpha,\dots,\boldsymbol{A}^{k-1}\alpha$是线性无关。 （本题 9 分）

草 稿 区

得 分

九、矩阵A是n阶实对称矩阵，R^n是n维欧氏空间，α属于R^n，P 是n阶正交矩阵，

$\beta = P\alpha$，证明：

(1) $\langle\alpha,\alpha\rangle = \langle\beta,\beta\rangle$。

(2)一定存在一个正实数g_0，对于任意的n维实向量X，都有$|X^T AX| \le g_0 X^T X$。 (本题 5 分)

草 稿 区