课程编号：A071001　　　　　北京理工大学 2006-2007 学年第一学期

2006 级《微积分 A》期中试卷

班级___________ 学号__________ 姓名__________ 成绩_________

一、　求解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1　设 $y=\sqrt{x}\,\mathbf{arccos}\sqrt{1-x^2}$**,** 求 dy.

2　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2x-\frac{1}{2}x\sin2x}{x^2(e^x-1)\ln(1+x)}$.

3　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos^2(xy)+\ln(x-y)=x$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

4　求当 $x\to0$ 时，无穷小 $e^x+\ln(1-x)-1$ 关于基本无穷小 x 的阶.

5　设 $y=x^2\sin(2x)$,求 $y^{(21)}(0)$.

二、　完成下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1　设 $\begin{cases}x=\sqrt{1-t}\\ y=\arcsin\sqrt{t}\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}})^n$.

3　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le1\\ ax+b & x>1\end{cases}$,求常数 a,b 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导．

并求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 点处的切线方程.

4　求曲线 $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线.

三 （8 分）求证：对任意实数 x，$2x\arctan x\ge\ln(1+x^2)$.

四、(8 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\ne0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是可导函数，且 $g(0)=g'(0)=0$, 试对任意实数 x，求 $f'(x)$.

五、(8 分）用薄铝板冲压制成圆柱形平底无盖铝锅，当铝锅表面积为定值 A 时，试求底半径 r 为多少时，可使铝锅的容积最大.

六 （7 分）设 $f(x)$ 有二阶连续导函数，且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1,$ 试判断 $f(0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值，是极大值还是极小值，并说明理由.

七、（6 分）(1) 设 n 为正整数，试利用拉格朗日中值定理证明不等式：

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n};$$

(2) 利用(1)的结果证明数列 $x_n=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})-\ln n$ 收敛.

七 （7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$.

证明：在 (a,b) 内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)$.