线性代数之六

吴民

南开大学 计控学院

October 20, 2017

线性方程组的一般形式：

线性方程组

线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_2 \end{cases}$$

线性方程组

线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_2 \end{cases}$$

$x_1,x_2,\ldots,x_n$为待求的未知数；a_{ij}称为未知数的系数；b_j为常数项。n个未知数，m个方程。m与n未必相等。

线性方程组

线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_2 \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$为待求的未知数；a_{ij}称为未知数的系数；b_j为常数项。n个未知数，m个方程。m与n未必相等。

方程组的解的定义：使方程组的几个方程**同时**满足。

根据向量相加和数乘的定义，以上方程组等价于求$x_1,\ldots,x_n$使

根据向量相加和数乘的定义，以上方程组等价于求$x_1,\ldots,x_n$使

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

成立。

线性方程组

根据矩阵乘法和相等的定义，以上方程组等价于求$x_1, \ldots, x_n$使

根据矩阵乘法和相等的定义，以上方程组等价于求$x_1,\ldots,x_n$使

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

成立。

根据矩阵乘法和相等的定义，以上方程组等价于求$x_1,\ldots,x_n$使

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

成立。

解出以上三种形式方程组中的一种，就意味着解出其他两种。

根据矩阵乘法和相等的定义，以上方程组等价于求$x_1,\ldots,x_n$使

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

成立。

解出以上三种形式方程组中的一种，就意味着解出其他两种。

一般还是求解方程组。

线性组合与线性表出

设$k_1, k_2, \ldots, k_n$为n个数。形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} k_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} k_n$$

的式子称为向量$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$的线性组合。

线性组合与线性表出

如果存在数$x_1, x_2, \ldots, x_n$，使得

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则称 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 可被 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ 线性表出。

因此，解线性方程组，就是看一个向量是否能被其他几个向量线性表出。

因此，解线性方程组，就是看一个向量是否能被其他几个向量线性表出。

考虑 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 的特殊情形。

线性组合与线性表出

因此，解线性方程组，就是看一个向量是否能被其他几个向量线性表出。

考虑$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$的特殊情形。

0向量必定可被其他向量线性表出，因为取$x_1 = \cdots = x_n = 0$，就能使上页式子成立。

因此，解线性方程组，就是看一个向量是否能被其他几个向量线性表出。

考虑$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$的特殊情形。

0向量必定可被其他向量线性表出，因为取$x_1 = \cdots = x_n = 0$，就能使上页式子成立。

加强条件。若要求$x_1, x_2, \ldots, x_n$不全为0，则0向量未必能写成几个向量线性组合的形式。

线性相关

向量组的线性表出：$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$为一向量组。$\beta_1, \ldots, \beta_s$为另一向量组。若$\beta_1, \ldots, \beta_s$中的每个向量都可被$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性表出，则称$\beta_1, \ldots, \beta_s$可被$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性表出。

线性相关

向量组的线性表出：$\alpha_1,\dots,\alpha_m$为一向量组。$\beta_1,\dots,\beta_s$为另一向量组。若$\beta_1,\dots,\beta_s$中的每个向量都可被$\alpha_1,\dots,\alpha_m$线性表出，则称$\beta_1,\dots,\beta_s$可被$\alpha_1,\dots,\alpha_m$线性表出。

引理：若$\beta_1,\dots,\beta_s$可被$\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 线性表出，而向量组$\gamma_1,\dots,\gamma_n$又可被$\beta_1,\dots,\beta_s$ 线性表出，则$\gamma_1,\dots,\gamma_n$可被$\alpha_1,\dots,\alpha_m$线性表出。

线性相关

向量组的线性表出：$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$为一向量组。$\beta_1, \ldots, \beta_s$为另一向量组。若$\beta_1, \ldots, \beta_s$中的每个向量都可被$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性表出，则称$\beta_1, \ldots, \beta_s$可被$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性表出。

引理：若$\beta_1, \ldots, \beta_s$可被$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性表出，而向量组$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$又可被$\beta_1, \ldots, \beta_s$ 线性表出，则$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$可被$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性表出。

写出式子，代入即可证明。

线性相关

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$是一组向量，若这$s$个向量中至少有一个向量$\alpha_i$可被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$中的其余$s-1$个向量线性表出，则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$是线性相关的向量组，也称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关。

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是一组向量，若这$s$个向量中至少有一个向量$\alpha_i$可被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$中的其余$s-1$个向量线性表出，则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是线性相关的向量组，也称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关。

若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$不线性相关，则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关。

线性相关

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是一组向量，若这$s$个向量中至少有一个向量$\alpha_i$可被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$中的其余$s-1$个向量线性表出，则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是线性相关的向量组，也称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关。

若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$不线性相关，则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关。

也就是，

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是一组向量，若这$s$个向量中至少有一个向量$\alpha_i$可被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$中的其余$s-1$个向量线性表出，则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是线性相关的向量组，也称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关。

若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$不线性相关，则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关。

也就是，若其中每个向量都不能写成其他向量的线性组合的形式，则称$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关。

补充定义只含1个向量α的向量组。$\alpha=0$，则称向量组线性相关，$\alpha\neq 0$则称向量组线性无关。

线性相关

定理：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关的充要条件是：存在不全为0的数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0.$$

线性相关

定理：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关的充要条件是：存在不全为0的数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0.$$

证明：必要性。由线性相关证上式成立。

线性相关

定理：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关的充要条件是：存在不全为0的数$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$，使得

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0.$$

证明：必要性。由线性相关证上式成立。

当$s=1$时，由定义，$\alpha_1=0$。因$1\alpha_1=0$，所以上式成立。

定理：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关的充要条件是：存在不全为0的数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0.$$

证明：必要性。由线性相关证上式成立。

当$s = 1$时，由定义，$\alpha_1 = 0$。因$1\alpha_1 = 0$，所以上式成立。

当$s > 1$时，由定义，某个α_j可表示为其它向量的线性组合：

$$\alpha_j = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{j-1}\alpha_{j-1} + \lambda_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s.$$

定理：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关的充要条件是：存在不全为0的数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0.$$

证明：必要性。由线性相关证上式成立。

当$s = 1$时，由定义，$\alpha_1 = 0$。因$1\alpha_1 = 0$，所以上式成立。

当$s > 1$时，由定义，某个α_j可表示为其它向量的线性组合：

$$\alpha_j = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{j-1}\alpha_{j-1} + \lambda_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s.$$

移项即得：$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + (-1)\alpha_j + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0$。

线性相关

即存在不全为0的数使前式成立。

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

于是当$s > 1$时有，$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1 + \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_j}\alpha_s$，

线性相关

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

于是当$s>1$时有，$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1 + \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_j}\alpha_s$，

即α_j可由$\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_s$线性表出，

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

于是当$s > 1$时有，$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1 + \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_j}\alpha_s$，

即α_j可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_s$线性表出，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关。

线性相关

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

于是当$s > 1$时有，$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1 + \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_j}\alpha_s$，

即α_j可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_s$线性表出，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关。

若$s = 1$，则原式变为$\lambda_1\alpha_1 = 0$，因已知$\lambda_1 \neq 0$，所以$\alpha_1 = 0$。

线性相关

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

于是当$s > 1$时有，$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1 + \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_j}\alpha_s$，

即α_j可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_s$线性表出，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关。

若$s = 1$，则原式变为$\lambda_1\alpha_1 = 0$，因已知$\lambda_1 \neq 0$，所以$\alpha_1 = 0$。

由线性相关的定义，$\alpha_1 = 0$这个向量组线性相关。

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

于是当$s > 1$时有，$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1 + \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_j}\alpha_s$，

即α_j可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_s$线性表出，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关。

若$s = 1$，则原式变为$\lambda_1\alpha_1 = 0$，因已知$\lambda_1 \neq 0$，所以$\alpha_1 = 0$。

由线性相关的定义，$\alpha_1 = 0$这个向量组线性相关。

推论：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关的充要条件是：

线性相关

即存在不全为0的数使前式成立。

充分性。若存在不全为0的数使前式成立，不妨设$\lambda_j \neq 0$，

于是当$s > 1$时有，$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1 + \cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_j}\alpha_s$，

即α_j可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_s$线性表出，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关。

若$s = 1$，则原式变为$\lambda_1\alpha_1 = 0$，因已知$\lambda_1 \neq 0$，所以$\alpha_1 = 0$。

由线性相关的定义，$\alpha_1 = 0$这个向量组线性相关。

推论：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关的充要条件是：

由$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0$推导出$\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$。

线性相关

若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$线性相关，则向量$\beta$可被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表出。

线性相关

若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$线性相关，则向量$\beta$可被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表出。

证明：因为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$线性相关，

线性相关

若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$线性相关，则向量$\beta$可被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表出。

证明：因为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$线性相关，

所以存在不全为0的数$\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda$，使得

线性相关

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$线性相关，则向量$\beta$可被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表出。

证明：因为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$线性相关，

所以存在不全为0的数$\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\lambda$，使得

$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\lambda\beta=0,$

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$线性相关，则向量$\beta$可被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表出。

证明：因为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$线性相关，

所以存在不全为0的数$\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\lambda$，使得

$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\lambda\beta=0,$

若$\lambda=0$，则上式成为下式，其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ 不全为0:

$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0,$

线性相关

若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$线性相关，则向量$\beta$可被$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性表出。

证明：因为$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$线性相关，

所以存在不全为0的数$\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda$，使得

$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s + \lambda\beta = 0$,

若$\lambda = 0$，则上式成为下式，其中$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 不全为0:

$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0$,

但已知$\alpha_1, \dots, \alpha_s$线性无关。矛盾。

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$线性相关，则向量$\beta$可被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表出。

证明：因为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$线性相关，

所以存在不全为0的数$\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\lambda$，使得

$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\lambda\beta=0,$

若$\lambda=0$，则上式成为下式，其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ 不全为0：

$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0,$

但已知$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$线性无关。矛盾。

所以$\lambda\neq 0$。因此β可以被$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$线性表出。

线性相关

定理：n 阶行列式 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$ 的充要条件是它的 n 个行（列）向量线性相关。

线性相关

定理：n 阶行列式 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$ 的充要条件是它的 n 个行（列）向量线性相关。

证明：充分性。若 A 的行向量线性相关。A 的第 i 行记为 α_i，

定理：n 阶行列式 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$ 的充要条件是它的 n 个行（列）向量线性相关。

证明：充分性。若 A 的行向量线性相关。A 的第 i 行记为 α_i，即 A 的某一行（行向量）可以写成其他行的线性组合。

定理：n 阶行列式 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$ 的充要条件是它的 n 个行（列）向量线性相关。

证明：充分性。若 A 的行向量线性相关。A 的第 i 行记为 α_i，即 A 的某一行（行向量）可以写成其他行的线性组合。

设第 n 行可表示为第 $1, 2, \ldots, n-1$ 行的线性组合，

$\alpha_n = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}$，

定理：n 阶行列式 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$ 的充要条件是它的 n 个行（列）向量线性相关。

证明：充分性。若 A 的行向量线性相关。A 的第 i 行记为 α_i，即 A 的某一行（行向量）可以写成其他行的线性组合。

设第 n 行可表示为第 $1,2,\ldots,n-1$ 行的线性组合，

$\alpha_n = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}$，

根据行列式的性质，将第 1 行的 $-\lambda_1$ 倍，...，第 $n-1$ 行的 $-\lambda_{n-1}$ 倍加到第 n 行，行列式值不变。

定理：n 阶行列式 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$ 的充要条件是它的 n 个行（列）向量线性相关。

证明：充分性。若 A 的行向量线性相关。A 的第 i 行记为 α_i，即 A 的某一行（行向量）可以写成其他行的线性组合。

设第 n 行可表示为第 $1, 2, \ldots, n-1$ 行的线性组合，

$\alpha_n = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}$，

根据行列式的性质，将第 1 行的 $-\lambda_1$ 倍，...，第 $n-1$ 行的 $-\lambda_{n-1}$ 倍加到第 n 行，行列式值不变。

此时行列式的第 n 行所有元都为 0，所以 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$。

定理：n 阶行列式 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$ 的充要条件是它的 n 个行（列）向量线性相关。

证明：充分性。若 A 的行向量线性相关。A 的第 i 行记为 α_i，即 A 的某一行（行向量）可以写成其他行的线性组合。

设第 n 行可表示为第 $1,2,\ldots,n-1$ 行的线性组合，

$\alpha_n = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}$，

根据行列式的性质，将第 1 行的 $-\lambda_1$ 倍，...，第 $n-1$ 行的 $-\lambda_{n-1}$ 倍加到第 n 行，行列式值不变。

此时行列式的第 n 行所有元都为 0，所以 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$。

$n = 1$ 时，充分性也容易证明。

线性相关

必要性。若 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$。数学归纳法。$n = 1$ 时易证。

线性相关

必要性。若 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$。数学归纳法。$n = 1$ 时易证。假设定理对 $n-1$ 阶行列式成立。对 $n > 1$ 阶 $|A|$，将 A 的第 i 行（行向量）记为 α_i。讨论 α_1。

必要性。若 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$。数学归纳法。$n = 1$ 时易证。

假设定理对 $n-1$ 阶行列式成立。对 $n > 1$ 阶 $|A|$，将 A 的第 i 行（行向量）记为 α_i。讨论 α_1。

若 $\alpha_1 = 0$，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 必线性相关。必要性成立。

线性相关

必要性。若 $|A| = \det(a_{ij}) = 0$。数学归纳法。$n = 1$ 时易证。

假设定理对 $n-1$ 阶行列式成立。对 $n > 1$ 阶 $|A|$，将 A 的

第 i 行（行向量）记为 α_i。讨论 α_1。

若 $\alpha_1 = 0$，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 必线性相关。必要性成立。

若 $\alpha_1 \neq 0$，则其中必有非 0 分量。不妨设 $a_{11} \neq 0$，于是

线性相关

必要性。若 $|A|=\det(a_{ij})=0$。数学归纳法。$n=1$ 时易证。

假设定理对 $n-1$ 阶行列式成立。对 $n>1$ 阶 $|A|$，将 A 的

第 i 行（行向量）记为 α_i。讨论 α_1。

若 $\alpha_1=0$，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 必线性相关。必要性成立。

若 $\alpha_1\neq 0$，则其中必有非 0 分量。不妨设 $a_{11}\neq 0$，于是

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}|B|$$

其中 $|B| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式。

其中 $|B| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式。

且 $\begin{pmatrix} 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

其中 $|B| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式。

且 $\begin{pmatrix} 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

因 $a_{11} \neq 0$ 和 $|A| = 0$，所以 $|B| = 0$。

其中 $|B| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式。

且 $\begin{pmatrix} 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

因 $a_{11} \neq 0$ 和 $|A| = 0$，所以 $|B| = 0$。

由归纳假设，$\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$ 线性相关。

其中 $|B| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式。

且 $\begin{pmatrix} 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

因 $a_{11} \neq 0$ 和 $|A| = 0$，所以 $|B| = 0$。

由归纳假设，$\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$ 线性相关。

所以存在不全为 0 的数 $\lambda_2, \dots, \lambda_n$，使得

其中 $|B| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式。

且 $\begin{pmatrix} 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

因 $a_{11} \neq 0$ 和 $|A| = 0$，所以 $|B| = 0$。

由归纳假设，$\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$ 线性相关。

所以存在不全为 0 的数 $\lambda_2, \dots, \lambda_n$，使得

$\lambda_2 \begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} = 0.$

其中 $|B| = \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式。

且 $\begin{pmatrix} 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

因 $a_{11} \neq 0$ 和 $|A| = 0$，所以 $|B| = 0$。

由归纳假设，$\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$ 线性相关。

所以存在不全为 0 的数 $\lambda_2, \dots, \lambda_n$，使得

$\lambda_2 \begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} = 0.$

所以 $\lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} = 0.$

线性相关

前式代入，得 $\lambda_2\left(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right)+\cdots+\lambda_n\left(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1\right)=0$。

前式代入，得 $\lambda_2\left(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right)+\cdots+\lambda_n\left(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1\right)=0$。

也就是 $\left(-\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{j1}\lambda_j\right)\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0$。

前式代入，得 $\lambda_2\left(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right)+\cdots+\lambda_n\left(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1\right)=0$。

也就是 $\left(-\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{j1}\lambda_j\right)\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0$。

上式中等号左侧数不全为 0，因此 A 的行向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关。由数学归纳法知定理对一切自然数成立。证毕。

前式代入，得 $\lambda_2\left(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right)+\cdots+\lambda_n\left(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1\right)=0$。

也就是 $\left(-\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{j1}\lambda_j\right)\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0$。

上式中等号左侧数不全为 0，因此 A 的行向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关。由数学归纳法知定理对一切自然数成立。证毕。

同样方法可证定理中列向量的情形。

前式代入，得 $\lambda_2\left(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right)+\cdots+\lambda_n\left(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1\right)=0$。

也就是 $\left(-\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^n a_{j1}\lambda_j\right)\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0$。

上式中等号左侧数不全为 0，因此 A 的行向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关。由数学归纳法知定理对一切自然数成立。证毕。

同样方法可证定理中列向量的情形。

推论：$\det(A)$ 的行（列）向量线性无关的充要条件是

$$\det(A)\neq 0.$$

前式代入，得 $\lambda_2\left(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right)+\cdots+\lambda_n\left(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1\right)=0$。

也就是 $\left(-\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{j1}\lambda_j\right)\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0$。

上式中等号左侧数不全为 0，因此 A 的行向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关。由数学归纳法知定理对一切自然数成立。证毕。

同样方法可证定理中列向量的情形。

推论：$\det(A)$ 的行（列）向量线性无关的充要条件是

$$\det(A)\neq 0.$$

这是定理的逆否命题。

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

线性相关

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

证明：设 $n+1$ 个 n 维向量为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$。

线性相关

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

证明：设 $n+1$ 个 n 维向量为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$。

若向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 线性相关。

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

证明：设 $n+1$ 个 n 维向量为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$。

若向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，则

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

证明：设 $n+1$ 个 n 维向量为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$。

若向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，则

考虑 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\alpha_{n+1}$，其中 $x_1,\ldots,x_n$ 为数。

线性相关

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

证明：设 $n+1$ 个 n 维向量为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$。

若向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，则

考虑 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\alpha_{n+1}$，其中 $x_1,\ldots,x_n$ 为数。

此为一 n 元 n 个方程的线性方程组。且系数行列式不等于 0。

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

证明：设 $n+1$ 个 n 维向量为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$。

若向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，则

考虑 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\alpha_{n+1}$，其中 $x_1,\ldots,x_n$ 为数。

此为一 n 元 n 个方程的线性方程组。且系数行列式不等于 0。

由克莱姆法则，知方程组有解。即 α_{n+1} 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出。所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

线性相关

推论：$n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

证明：设 $n+1$ 个 n 维向量为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$。

若向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，则

考虑 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\alpha_{n+1}$，其中 $x_1,\ldots,x_n$ 为数。

此为一 n 元 n 个方程的线性方程组。且系数行列式不等于 0。

由克莱姆法则，知方程组有解。即 α_{n+1} 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出。所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

由此，$n+2$ 个及更多个 n 维向量也必定相关。

定理：向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性表出。且 $m > n$。则 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 线性相关。

线性相关

定理：向量组 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出。且 $m>n$。
则 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 线性相关。

证明：$\beta_1,\ldots,\beta_m$ 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出，即存在
数 $t_{11},\ldots,t_{mn}$，使得

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= t_{11}\alpha_1+t_{12}\alpha_2+\cdots+t_{1n}\alpha_n \\
\beta_2 &= t_{21}\alpha_1+t_{22}\alpha_2+\cdots+t_{2n}\alpha_n \\
&\ldots \\
\beta_m &= t_{m1}\alpha_1+t_{m2}\alpha_2+\cdots+t_{mn}\alpha_n
\end{aligned}$$

线性相关

若数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m = 0$,

若数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$ 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0$，

将以上诸式代入，整理得到：

$$(t_{11}k_1+\cdots+t_{m1}k_m)\alpha_1+(t_{12}k_1+\cdots+t_{m2}k_m)\alpha_2 \\ +\cdots+(t_{1n}k_1+\cdots+t_{mn}k_m)\alpha_n=0.$$

线性相关

若数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$ 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0$，

将以上诸式代入，整理得到：

$$(t_{11}k_1+\cdots+t_{m1}k_m)\alpha_1+(t_{12}k_1+\cdots+t_{m2}k_m)\alpha_2 \\ +\cdots+(t_{1n}k_1+\cdots+t_{mn}k_m)\alpha_n=0.$$

欲使上式成立，只需让 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的系数都为 0 即可。

$$t_{11}k_1+\cdots+t_{m1}k_m=0$$

$$\cdots$$

$$t_{1n}k_1+\cdots+t_{mn}k_m=0$$

将 $k_1, \ldots, k_m$ 看作未知数。以上方程组含有 m 个未知数，n 个方程。又已知 $m > n$，

将 $k_1, \dots, k_m$ 看作未知数。以上方程组含有 m 个未知数，n 个方程。又已知 $m > n$，

所以方程组有非 0 解。即存在不全为 0 的数 $k_1, \dots, k_m$ 使得上面方程组成立。

将 $k_1,\ldots,k_m$ 看作未知数。以上方程组含有 m 个未知数，n 个方程。又已知 $m>n$，

所以方程组有非 0 解。即存在不全为 0 的数 $k_1,\ldots,k_m$ 使得上面方程组成立。

于是 $k_1,\ldots,k_m$ 使得 $k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$。

线性相关

将 $k_1,\ldots,k_m$ 看作未知数。以上方程组含有 m 个未知数，n 个方程。又已知 $m>n$，

所以方程组有非 0 解。即存在不全为 0 的数 $k_1,\ldots,k_m$ 使得上面方程组成立。

于是 $k_1,\ldots,k_m$ 使得 $k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$。

所以 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 线性相关。

将 $k_1,\ldots,k_m$ 看作未知数。以上方程组含有 m 个未知数，n 个方程。又已知 $m>n$，

所以方程组有非 0 解。即存在不全为 0 的数 $k_1,\ldots,k_m$ 使得上面方程组成立。

于是 $k_1,\ldots,k_m$ 使得 $k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$。

所以 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 线性相关。

推论:

将 $k_1,\ldots,k_m$ 看作未知数。以上方程组含有 m 个未知数，n 个方程。又已知 $m>n$，

所以方程组有非 0 解。即存在不全为 0 的数 $k_1,\ldots,k_m$ 使得上面方程组成立。

于是 $k_1,\ldots,k_m$ 使得 $k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$。

所以 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 线性相关。

推论：向量组 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出。

且 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 线性无关，则 $m\leqslant n$。

极大线性无关组：

极大线性无关组：若向量组的一个子组线性无关。但将向量组的一个向量添加到这个子组中，得到的新子组线性相关。则称该子组为向量组的极大线性无关组。

极大线性无关组：若向量组的一个子组线性无关。但将向量组的一个向量添加到这个子组中，得到的新子组线性相关。则称该子组为向量组的极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组中的向量应在原向量组中。

线性相关

极大线性无关组：若向量组的一个子组线性无关。但将向量组的一个向量添加到这个子组中，得到的新子组线性相关。则称该子组为向量组的极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组中的向量应在原向量组中。

若向量组线性无关，则该向量组就是它自己的极大线性无关组。

线性相关

极大线性无关组：若向量组的一个子组线性无关。但将向量组的一个向量添加到这个子组中，得到的新子组线性相关。则称该子组为向量组的极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组中的向量应在原向量组中。

若向量组线性无关，则该向量组就是它自己的极大线性无关组。

仅含零向量的向量组没有极大线性无关组。

极大线性无关组：若向量组的一个子组线性无关。但将向量组的一个向量添加到这个子组中，得到的新子组线性相关。则称该子组为向量组的极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组中的向量应在原向量组中。

若向量组线性无关，则该向量组就是它自己的极大线性无关组。

仅含零向量的向量组没有极大线性无关组。

一个向量组的极大线性无关组一般并不唯一。例如，α,β 线性无关，α,β 是向量组 $\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$ 的极大线性无关组；$\alpha,\alpha+\beta$ 也是该向量组的极大线性无关组。

线性相关

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

线性相关

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

0 向量组是特例。

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

0 向量组是特例。

定理：向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

线性相关

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

0 向量组是特例。

定理：向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

证明：极大线性无关组1（含 r_1 个向量）和极大线性无关组2（含 r_2 个向量）都可以和原向量组相互线性表出。

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

0 向量组是特例。

定理：向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

证明：极大线性无关组1（含 r_1 个向量）和极大线性无关组2（含 r_2 个向量）都可以和原向量组相互线性表出。

所以它们也可以相互线性表出。

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

0 向量组是特例。

定理：向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

证明：极大线性无关组1（含 r_1 个向量）和极大线性无关组2（含 r_2 个向量）都可以和原向量组相互线性表出。

所以它们也可以相互线性表出。

但两个都是线性无关组，

线性相关

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

0 向量组是特例。

定理：向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

证明：极大线性无关组1（含 r_1 个向量）和极大线性无关组2（含 r_2 个向量）都可以和原向量组相互线性表出。

所以它们也可以相互线性表出。

但两个都是线性无关组，

所以同时有 $r_1 \leqslant r_2$ 和 $r_2 \leqslant r_1$，

向量组可以被它的极大线性无关组线性表出。

0 向量组是特例。

定理：向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

证明：极大线性无关组1（含 r_1 个向量）和极大线性无关组2（含 r_2 个向量）都可以和原向量组相互线性表出。

所以它们也可以相互线性表出。

但两个都是线性无关组，

所以同时有 $r_1 \leqslant r_2$ 和 $r_2 \leqslant r_1$，

所以 $r_1 = r_2$。

向量组的秩：该向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

向量组的秩：该向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

仅含 0 向量的向量组，规定它的秩为 0。

线性相关

向量组的秩：该向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

仅含 0 向量的向量组，规定它的秩为 0。

解决线性相关无关和秩的问题，找极大线性无关组是个思路。

向量组的秩：该向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

仅含 0 向量的向量组，规定它的秩为 0。

解决线性相关无关和秩的问题，找极大线性无关组是个思路。

推论：秩为 r 的向量组中，$r+1$ 个向量必线性相关。

线性相关

向量组的秩：该向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

仅含 0 向量的向量组，规定它的秩为 0。

解决线性相关无关和秩的问题，找极大线性无关组是个思路。

推论：秩为 r 的向量组中，$r+1$ 个向量必线性相关。

思考题：对给定向量组，如何求向量组的秩？

线性相关

向量组的秩：该向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

仅含 0 向量的向量组，规定它的秩为 0。

解决线性相关无关和秩的问题，找极大线性无关组是个思路。

推论：秩为 r 的向量组中，$r+1$ 个向量必线性相关。

思考题：对给定向量组，如何求向量组的秩？

思考题：对给定向量组，如何求它的极大线性无关组？

线性相关

向量组的秩：该向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

仅含 0 向量的向量组，规定它的秩为 0。

解决线性相关无关和秩的问题，找极大线性无关组是个思路。

推论：秩为 r 的向量组中，$r+1$ 个向量必线性相关。

思考题：对给定向量组，如何求向量组的秩？

思考题：对给定向量组，如何求它的极大线性无关组？

思考题：如何判断一个向量组线性相关还是线性无关？

矩阵的行（列）秩：矩阵的行（列）向量组的秩。

矩阵的行（列）秩：矩阵的行（列）向量组的秩。

矩阵的 k 阶子式：对一个矩阵 A，取出 A 的 k 个不同行和 k 个不同列的交叉点的元，按照它们在 A 中的位置关系，构成 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_k$。

矩阵的秩

定理：矩阵 A 的行秩等于 A 的一切非 0 子式的最高阶数。

定理：矩阵 A 的行秩等于 A 的一切非 0 子式的最高阶数。

证明：设 $m\times n$ 矩阵 A 的一个 r 阶子式不为 0。不失一般性，设 A 的左上角 r 阶子式不为 0。而一切阶数高于 r 的子式都为 0。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

定理：矩阵 A 的行秩等于 A 的一切非 0 子式的最高阶数。

证明：设 $m \times n$ 矩阵 A 的一个 r 阶子式不为 0。不失一般性，设 A 的左上角 r 阶子式不为 0。而一切阶数高于 r 的子式都为 0。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

若 A 的前 r 个行向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性相关，则 D 的前 r 个行向量也线性相关。

矩阵的秩

定理：矩阵 A 的行秩等于 A 的一切非 0 子式的最高阶数。

证明：设 $m\times n$ 矩阵 A 的一个 r 阶子式不为 0。不失一般性，设 A 的左上角 r 阶子式不为 0。而一切阶数高于 r 的子式都为 0。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

若 A 的前 r 个行向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性相关，则 D 的前 r 个行向量也线性相关。所以有，$|D|=0$。但已知 $|D|\neq 0$，

所以 A 的前 r 个行向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性无关。

所以 A 的前 r 个行向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关。

以下证明向 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 中添加任何一个 A 的其它行向量 α_k，得到的向量组都线性相关。

所以 A 的前 r 个行向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性无关。

以下证明向 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 中添加任何一个 A 的其它行向量 α_k，得到的向量组都线性相关。

也就是证明存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\lambda_k$，使得

$\lambda_1 a_{1j}+\lambda_2 a_{2j}+\cdots+\lambda_r a_{rj}+\lambda_k a_{kj}=0, \quad j=1,\ldots,n$。

所以 A 的前 r 个行向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性无关。

以下证明向 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 中添加任何一个 A 的其它行向量 α_k，得到的向量组都线性相关。

也就是证明存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\lambda_k$，使得

$\lambda_1 a_{1j}+\lambda_2 a_{2j}+\cdots+\lambda_r a_{rj}+\lambda_k a_{kj}=0,\quad j=1,\ldots,n$。

考虑 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$，$r<k\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$。

当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 时，此行列式有两列相同，故等于 0。

矩阵的秩

当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 时，此行列式有两列相同，故等于 0。

当 $r < j \leqslant n$ 时，此行列式为 A 的一 $r+1$ 阶子式，由已知它也等于 0。

当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 时，此行列式有两列相同，故等于 0。

当 $r < j \leqslant n$ 时，此行列式为 A 的一 $r+1$ 阶子式，由已知它也等于 0。

所以此行列式无论 j 与 k 的取值，都等于 0。

当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 时，此行列式有两列相同，故等于 0。

当 $r < j \leqslant n$ 时，此行列式为 A 的一 $r+1$ 阶子式，由已知它也等于 0。

所以此行列式无论 j 与 k 的取值，都等于 0。

将以上行列式按最后一列展开，得到

当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 时，此行列式有两列相同，故等于 0。

当 $r < j \leqslant n$ 时，此行列式为 A 的一 $r+1$ 阶子式，由已知它也等于 0。

所以此行列式无论 j 与 k 的取值，都等于 0。

将以上行列式按最后一列展开，得到

$\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_r a_{rj} + |D| a_{kj} = 0$，

其中 λ_i 分别为上面行列式最后一列元的代数余子式。

当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 时，此行列式有两列相同，故等于 0。

当 $r < j \leqslant n$ 时，此行列式为 A 的一 $r+1$ 阶子式，由已知它也等于 0。

所以此行列式无论 j 与 k 的取值，都等于 0。

将以上行列式按最后一列展开，得到

$\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_r a_{rj} + |D| a_{kj} = 0$，

其中 λ_i 分别为上面行列式最后一列元的代数余子式。

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 与 j 的取值无关，故

当 $1 \leqslant j \leqslant r$ 时，此行列式有两列相同，故等于 0。

当 $r < j \leqslant n$ 时，此行列式为 A 的一 $r+1$ 阶子式，由已知它也等于 0。

所以此行列式无论 j 与 k 的取值，都等于 0。

将以上行列式按最后一列展开，得到

$\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_r a_{rj} + |D| a_{kj} = 0$，

其中 λ_i 分别为上面行列式最后一列元的代数余子式。

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 与 j 的取值无关，故

$\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_r a_{rj} + |D| a_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$。

写成向量形式就是:

写成向量形式就是:

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+|D|\alpha_k=0$。

写成向量形式就是:

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+|D|\alpha_k=0$。

因为 $|D|\neq 0$，所以知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_k$线性相关。

写成向量形式就是：

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+|D|\alpha_k=0$。

因为 $|D|\neq 0$，所以知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_k$线性相关。

因此 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组。

写成向量形式就是:

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+|D|\alpha_k=0$。

因为 $|D|\neq 0$，所以知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_k$线性相关。

因此 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组。

所以 A 的行秩为 r。

写成向量形式就是：

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+|D|\alpha_k=0$。

因为 $|D|\neq 0$，所以知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_k$线性相关。

因此 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组。

所以 A 的行秩为 r。

定理：矩阵的列秩等于行秩，都等于矩阵的非零子式的最高阶数。

写成向量形式就是：

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+|D|\alpha_k=0$。

因为 $|D|\neq 0$，所以知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_k$线性相关。

因此 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组。

所以 A 的行秩为 r。

定理：矩阵的列秩等于行秩，都等于矩阵的非零子式的最高阶数。

矩阵 A 的行秩，称为矩阵 A 的秩。记为 $R(A)$。

写成向量形式就是：

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r+|D|\alpha_k=0$。

因为 $|D|\neq 0$，所以知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_k$线性相关。

因此 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组。

所以 A 的行秩为 r。

定理：矩阵的列秩等于行秩，都等于矩阵的非零子式的最高阶数。

矩阵 A 的行秩，称为矩阵 A 的秩。记为 $R(A)$。

定理：$R(AB)\leqslant R(A)$，$R(AB)\leqslant R(B)$。

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

AB 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合，即可被 A 的列向量线性表出，

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

AB 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合，即可被 A 的列向量线性表出，

有AB 列向量的极大线性无关组 Γ 可被 A 列向量组线性表出。

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

AB 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合，即可被 A 的列向量线性表出，

有AB 列向量的极大线性无关组 Γ 可被 A 列向量组线性表出。

又 A 的列向量组可被 Θ 线性表出，

矩阵的秩

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

AB 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合，即可被 A 的列向量线性表出，

有AB 列向量的极大线性无关组 Γ 可被 A 列向量组线性表出。

又 A 的列向量组可被 Θ 线性表出，

所以 Γ 可被 Θ 线性表出。

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

AB 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合，即可被 A 的列向量线性表出，

有AB 列向量的极大线性无关组 Γ 可被 A 列向量组线性表出。

又 A 的列向量组可被 Θ 线性表出，

所以 Γ 可被 Θ 线性表出。

Γ 是线性无关组，

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

AB 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合，即可被 A 的列向量线性表出，

有AB 列向量的极大线性无关组 Γ 可被 A 列向量组线性表出。

又 A 的列向量组可被 Θ 线性表出，

所以 Γ 可被 Θ 线性表出。

Γ 是线性无关组，

所以 Γ 向量的个数不多于 Θ 向量的个数。

证明：取 A 列向量的极大线性无关组 Θ，AB 列向量的极大线性无关组 Γ。

AB 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合，即可被 A 的列向量线性表出，

有AB 列向量的极大线性无关组 Γ 可被 A 列向量组线性表出。

又 A 的列向量组可被 Θ 线性表出，

所以 Γ 可被 Θ 线性表出。

Γ 是线性无关组，

所以 Γ 向量的个数不多于 Θ 向量的个数。

即 $R(AB) \leqslant R(A)$。

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ)=R(Q)$，$R(PA)=R(P)$。

矩阵的秩

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ) = R(Q)$，$R(PA) = R(P)$。

证明：直接得到 $R(AQ) \leqslant R(Q)$，

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ)=R(Q)$，$R(PA)=R(P)$。

证明：直接得到 $R(AQ)\leqslant R(Q)$，

但因为 A 可逆，$Q=A^{-1}AQ$，所以 $R(Q)\leqslant R(AQ)$。

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ)=R(Q)$，$R(PA)=R(P)$。

证明：直接得到 $R(AQ)\leqslant R(Q)$，

但因为 A 可逆，$Q=A^{-1}AQ$，所以 $R(Q)\leqslant R(AQ)$。

综合两式，就有：$R(AQ)=R(Q)$。

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ)=R(Q)$，$R(PA)=R(P)$。

证明：直接得到 $R(AQ)\leqslant R(Q)$，

但因为 A 可逆，$Q=A^{-1}AQ$，所以 $R(Q)\leqslant R(AQ)$。

综合两式，就有：$R(AQ)=R(Q)$。

推论：初等变换不改变矩阵的秩。

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ)=R(Q)$，$R(PA)=R(P)$。

证明：直接得到 $R(AQ)\leqslant R(Q)$，

但因为 A 可逆，$Q=A^{-1}AQ$，所以 $R(Q)\leqslant R(AQ)$。

综合两式，就有：$R(AQ)=R(Q)$。

推论：初等变换不改变矩阵的秩。

如何求矩阵的秩？

矩阵的秩

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ)=R(Q)$，$R(PA)=R(P)$。

证明：直接得到 $R(AQ)\leqslant R(Q)$，

但因为 A 可逆，$Q=A^{-1}AQ$，所以 $R(Q)\leqslant R(AQ)$。

综合两式，就有：$R(AQ)=R(Q)$。

推论：初等变换不改变矩阵的秩。

如何求矩阵的秩？

什么样的矩阵，其秩可以比较容易（不用太多计算）的看出？

矩阵的秩

推论：若 A 为可逆矩阵，则 $R(AQ)=R(Q)$，$R(PA)=R(P)$。

证明：直接得到 $R(AQ)\leqslant R(Q)$，

但因为 A 可逆，$Q=A^{-1}AQ$，所以 $R(Q)\leqslant R(AQ)$。

综合两式，就有：$R(AQ)=R(Q)$。

推论：初等变换不改变矩阵的秩。

如何求矩阵的秩？

什么样的矩阵，其秩可以比较容易（不用太多计算）的看出？

对这个矩阵，要能容易找出一个非 0 的 r 阶子式，且能容易肯定任意 $r+1$ 阶子式都为 0。

如下形式的矩阵，容易看出它的秩为 4：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如下形式的矩阵，容易看出它的秩为 4：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任意 5 阶子式必定为 0，

如下形式的矩阵，容易看出它的秩为 4：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任意 5 阶子式必定为 0，

有一个4阶非0子式。

上页中的矩阵就是所谓的**阶梯形矩阵**。

上页中的矩阵就是所谓的**阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵的特点是:

上页中的矩阵就是所谓的**阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵的特点是：

- 若矩阵的第i行的前k_i个元为0，则矩阵的第$i+1$行的前k_i+1个元也为0。

上页中的矩阵就是所谓的**阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵的特点是：

- 若矩阵的第i行的前k_i个元为0，则矩阵的第$i+1$行的前k_i+1个元也为0。
- 若矩阵的第i行全为0，则第$i+1$行也全为0。

上页中的矩阵就是所谓的**阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵的特点是：

- 若矩阵的第i行的前k_i个元为0，则矩阵的第$i+1$行的前k_i+1个元也为0。
- 若矩阵的第i行全为0，则第$i+1$行也全为0。

任意矩阵可经过行初等变换化成阶梯形矩阵。

上页中的矩阵就是所谓的**阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵的特点是：

- 若矩阵的第i行的前k_i个元为0，则矩阵的第$i+1$行的前k_i+1个元也为0。
- 若矩阵的第i行全为0，则第$i+1$行也全为0。

任意矩阵可经过行初等变换化成阶梯形矩阵。

阶梯形矩阵可经过列初等变换化成$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$形式。

矩阵的秩

上页中的矩阵就是所谓的**阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵的特点是：

- 若矩阵的第i行的前k_i个元为0，则矩阵的第$i+1$行的前k_i+1个元也为0。
- 若矩阵的第i行全为0，则第$i+1$行也全为0。

任意矩阵可经过行初等变换化成阶梯形矩阵。

阶梯形矩阵可经过列初等变换化成$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$形式。

这称为该矩阵的标准形。

定理：$A=(a_{ij})_{m\times n}$的秩为r的充要条件是：存在可逆矩阵$P_{m\times m}$和$Q_{n\times n}$，使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

定理：$A=(a_{ij})_{m\times n}$的秩为r的充要条件是：存在可逆矩阵$P_{m\times m}$和$Q_{n\times n}$，使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q.$$

证明：充分性。

定理：$A=(a_{ij})_{m\times n}$的秩为r的充要条件是：存在可逆矩阵$P_{m\times m}$和$Q_{n\times n}$，使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

证明：充分性。

$$\begin{aligned} R(A)=&R\left(P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q\right)=R\left(P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=R\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =&r. \end{aligned}$$

必要性。

必要性。前面已经证明，A的秩为r，A可经过一系列行和列初等变换化成标准形。即：

必要性。前面已经证明，A的秩为r，A可经过一系列行和列初等变换化成标准形。即：

$$E_s\cdots E_2E_1AF_1F_2\cdots F_t=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中E_i和F_j都是初等矩阵。

必要性。前面已经证明，A的秩为r，A可经过一系列行和列初等变换化成标准形。即：

$$E_s \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_t = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中E_i和F_j都是初等矩阵。

因为初等矩阵可逆，所以

$$A = (E_s \cdots E_2 E_1)^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (F_1 F_2 \cdots F_t)^{-1}.$$

令$P=(E_s\cdots E_2E_1)^{-1}$，$Q=(F_1F_2\cdots F_t)^{-1}$。得证。

令$P=(E_s\cdots E_2E_1)^{-1}$，$Q=(F_1F_2\cdots F_t)^{-1}$。得证。

练习：$A_{m\times n}$秩为r的充要条件是：存在$m\times r$阶矩阵M（秩为r）和$r\times n$阶矩阵N（秩为r），使得$A=MN$。

矩阵的秩

令$P=(E_s\cdots E_2E_1)^{-1}$，$Q=(F_1F_2\cdots F_t)^{-1}$。得证。

练习：$A_{m\times n}$秩为r的充要条件是：存在$m\times r$阶矩阵M（秩为r）和$r\times n$阶矩阵N（秩为r），使得$A=MN$。

注意到：

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}$$

令$P=(E_s\cdots E_2E_1)^{-1}$，$Q=(F_1F_2\cdots F_t)^{-1}$。得证。

练习：$A_{m\times n}$秩为r的充要条件是：存在$m\times r$阶矩阵M（秩为r）和$r\times n$阶矩阵N（秩为r），使得$A=MN$。

注意到：

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q = \left[P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q\right].$$