线性代数之二

吴民

南开大学 计控学院

September 18, 2017

行列式的性质（续）

利用前面已证明的性质，很容易证明下式：

利用前面已证明的性质，很容易证明下式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为0，则行列式值为0；

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为0，则行列式值为0；
- 互换行列式的两列，行列式反号；

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为0，则行列式值为0；
- 互换行列式的两列，行列式反号；
- 若行列式的某一列元均分别表为两个数的和，则行列式可表为两个行列式的和；

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为0，则行列式值为0；
- 互换行列式的两列，行列式反号；
- 若行列式的某一列元均分别表为两个数的和，则行列式可表为两个行列式的和；
- 若行列式的某一列元均乘以c，则行列式值将被乘以c；

行列式的性质（续）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+\lambda a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij}+\lambda a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+\lambda a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的计算

采用**适当**的计算方法，行列式的计算会很容易。

行列式的计算

采用**适当**的计算方法，行列式的计算会很容易。不同的行列式，可能有完全不同的适当的计算方法。

行列式的计算

采用**适当**的计算方法，行列式的计算会很容易。不同的行列式，可能有完全不同的适当的计算方法。行列式的计算无统一方法可言，要靠尝试、摸索和积累经验。

行列式的计算

采用**适当**的计算方法，行列式的计算会很容易。不同的行列式，可能有完全不同的适当的计算方法。行列式的计算无统一方法可言，要靠尝试、摸索和积累经验。

- 将行列式化为上三角。

行列式的计算

采用**适当**的计算方法，行列式的计算会很容易。不同的行列式，可能有完全不同的适当的计算方法。行列式的计算无统一方法可言，要靠尝试、摸索和积累经验。

- 将行列式化为上三角。
- 让行列式中出现尽可能多的0。

行列式的计算

采用**适当**的计算方法，行列式的计算会很容易。不同的行列式，可能有完全不同的适当的计算方法。行列式的计算无统一方法可言，要靠尝试、摸索和积累经验。

- 将行列式化为上三角。
- 让行列式中出现尽可能多的0。

观察行列式的特点，决定如何去尝试。

行列式的算例一

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

行列式的算例一

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

行列式的算例一

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

行列式的算例一

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

行列式的算例一

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

行列式的算例一

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

n阶行列式，用定义展开的方法很难奏效。

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 左式第二行乘yz，第三行乘xz，第四行乘xy。

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 左式第二行乘yz，第三行乘xz，第四行乘xy。
- 左式第一列乘$\frac{1}{xyz}$。

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 左式第二行乘yz，第三行乘xz，第四行乘xy。
- 左式第一列乘$\frac{1}{xyz}$。
- 左式第二列乘$\frac{1}{x}$，第二列乘$\frac{1}{y}$，第三列乘$\frac{1}{z}$。

行列式的算例三

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的思考算例一

$$d_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ & \dots & & \dots & \\ -a & -a & -a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

行列式的思考算例二

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

行列式的思考算例二

- 自最后一行向上，逐个用上一行减下一行，就会让第2行至第n行中每行的所有数除一个外都为1。

行列式的思考算例二

- 自最后一行向上，逐个用上一行减下一行，就会让第2行至第n行中每行的所有数除一个外都为1。
- 再把所有列都加到第1行上，提出公因子$\frac{n(n+1)}{2}$。

- 自最后一行向上，逐个用上一行减下一行，就会让第2行至第n行中每行的所有数除一个外都为1。
- 再把所有列都加到第1行上，提出公因子$\frac{n(n+1)}{2}$。

$$D = \frac{(n+1)n}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

行列式的思考算例二

- 自最后一行向上，逐个用上一行减下一行，就会让第2行至第n行中每行的所有数除一个外都为1。
- 再把所有列都加到第1行上，提出公因子$\frac{n(n+1)}{2}$。

$$D = \frac{(n+1)n}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

上式中的行列式为$n-1$阶。

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算n阶行列式：

- 先把某一行（如第i行）逐行互换到第1行：

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算n阶行列式：

- 先把某一行（如第i行）逐行互换到第1行：
    - 先第i行和第$i-1$行交换；

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算n阶行列式：

- 先把某一行（如第i行）逐行互换到第1行：
  - 先第i行和第$i-1$行交换；
  - 再第$i-1$行和第$i-2$行交换；

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算n阶行列式：

- 先把某一行（如第i行）逐行互换到第1行：
  - 先第i行和第$i-1$行交换；
  - 再第$i-1$行和第$i-2$行交换；
  - 直到第i行成为第1行。

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算n阶行列式：

- 先把某一行（如第i行）逐行互换到第1行：
  - 先第i行和第$i-1$行交换；
  - 再第$i-1$行和第$i-2$行交换；
  - 直到第i行成为第1行。
- 用加法公式化为n个第一行只有1个非0元的行列式之和；

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算n阶行列式：

- 先把某一行（如第i行）逐行互换到第1行：
    - 先第i行和第$i-1$行交换；
    - 再第$i-1$行和第$i-2$行交换；
    - 直到第i行成为第1行。
- 用加法公式化为n个第一行只有1个非0元的行列式之和；
- 再用行列式性质把第一行的非0元素都移动到第一列。

行列式按某一行（列）展开

以下推导暂未考虑符号。

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

以下推导暂未考虑符号。

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

以下推导暂未考虑符号。

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} a_{i1} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{i2} & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} & & & a_{in} \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a_{i1} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i2} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{in} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

$$\to \begin{vmatrix} a_{i1} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i2} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{in} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

$$\to a_{i1} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + a_{i2} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + \cdots + a_{in} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

a_{ij}所对应的$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$称为$a_{ij}$的余子式，常记为$M_{ij}$：

a_{ij}所对应的$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$称为$a_{ij}$的余子式，常记为$M_{ij}$：将原行列式的第$i$行第$j$列划去，所剩的$n-1$行、$n-1$列不改变相对位置，拼成一个$n-1$阶行列式。

a_{ij}所对应的$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$称为$a_{ij}$的余子式，常记为$M_{ij}$：将原行列式的第$i$行第$j$列划去，所剩的$n-1$行、$n-1$列不改变相对位置，拼成一个$n-1$阶行列式。

所对应的$a_{ij}$$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$前面的正负号：

a_{ij}所对应的$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$称为$a_{ij}$的余子式，常记为$M_{ij}$：将原行列式的第$i$行第$j$列划去，所剩的$n-1$行、$n-1$列不改变相对位置，拼成一个$n-1$阶行列式。

所对应的a_{ij} $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$前面的正负号：取决于将$a_{ij}$交换到第1行第1列的互换次数。

a_{ij}所对应的$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$称为$a_{ij}$的余子式，常记为$M_{ij}$：将原行列式的第$i$行第$j$列划去，所剩的$n-1$行、$n-1$列不改变相对位置，拼成一个$n-1$阶行列式。

所对应的a_{ij} $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$前面的正负号：取决于将$a_{ij}$交换到第1行第1列的互换次数。互换次数为

行列式按某一行（列）展开

a_{ij}所对应的$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$称为$a_{ij}$的余子式，常记为$M_{ij}$：将原行列式的第$i$行第$j$列划去，所剩的$n-1$行、$n-1$列不改变相对位置，拼成一个$n-1$阶行列式。

所对应的$a_{ij}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$前面的正负号：取决于将$a_{ij}$交换到第1行第1列的互换次数。互换次数为$i-1+j-1$。

a_{ij}所对应的$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$称为$a_{ij}$的余子式，常记为$M_{ij}$：将原行列式的第$i$行第$j$列划去，所剩的$n-1$行、$n-1$列不改变相对位置，拼成一个$n-1$阶行列式。

所对应的a_{ij} $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$前面的正负号：取决于将$a_{ij}$交换到第1行第1列的互换次数。互换次数为$i-1+j-1$。

定义$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=(-1)^{i-1+j-1}M_{ij}$。称$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式。

行列式按某一行（列）展开

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

同样结果对于列也成立：

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

同样结果对于列也成立：

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

行列式按某一行（列）展开

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

同样结果对于列也成立：

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

当$i \neq j$时，以下式子等于什么？

$$t_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

行列式按某一行（列）展开

$$t_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

$$t_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

行列式按某一行（列）展开

$$t_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

总结：书22页的**定理4**。

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 第$n-1$行乘$-x_1$加到第n行，将第n行第1列消为0。

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 第$n-1$行乘$-x_1$加到第n行，将第n行第1列消为0。
- 第$n-2$行乘$-x_1$加到第$n-1$行，将第$n-1$行第1列消为0。

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 第$n-1$行乘$-x_1$加到第n行，将第n行第1列消为0。
- 第$n-2$行乘$-x_1$加到第$n-1$行，将第$n-1$行第1列消为0。
- 如此重复。第1行乘$-x_1$加到第2行，将第2行第1列消为0。

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_n(x_n-x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

得到$n-1$阶范德蒙行列式。

$$= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

得到$n-1$阶范德蒙行列式。如此重复下去，使用数学归纳法，便得到最终结果：

范德蒙行列式

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

得到$n-1$阶范德蒙行列式。如此重复下去，使用数学归纳法，便得到最终结果：

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

行列式的思考算例三

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (a \neq b)$$

行列式的思考算例三

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} \qquad (a \neq b)$$

按第一行展开，得到：

行列式的思考算例三

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

行列式的思考算例三

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

行列式的思考算例三

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) \end{aligned}$$

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$
\begin{aligned}
D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\
&= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots
\end{aligned}
$$

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) \end{aligned}$$

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$
\begin{aligned}
D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\
&= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.
\end{aligned}
$$

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$.

$$
\begin{aligned}
D_n-aD_{n-1}&=b(D_{n-1}-aD_{n-2})\\
&=b^2(D_{n-2}-aD_{n-1})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n.
\end{aligned}
$$

$$D_n=aD_{n-1}+b^n$$

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n. \end{aligned}$$

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n$$

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n \\ &= a^2(aD_{n-3} + b^{n-2}) + ab^{n-1} + b^n = \cdots \end{aligned}$$

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$
$$= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.$$

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n$$
$$= a^2(aD_{n-3} + b^{n-2}) + ab^{n-1} + b^n = \cdots$$

另一计算方法：$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^n$。

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$
\begin{aligned}
D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\
&= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_n &= aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n \\
&= a^2(aD_{n-3} + b^{n-2}) + ab^{n-1} + b^n = \cdots
\end{aligned}
$$

另一计算方法：$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^n$。与前面式子结合一起成为

行列式的思考算例三

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$
$$= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.$$

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n$$
$$= a^2(aD_{n-3} + b^{n-2}) + ab^{n-1} + b^n = \cdots$$

另一计算方法：$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^n$。与前面式子结合一起成为 二元一次方程组。求解即得到D_n。

整数$1798 = 31 \cdot 58$, $2139 = 31 \cdot 69$, $3255 = 31 \cdot 105$, $4867 = 31 \cdot 157$, 都可被31整除, 不用计算证明以下行列式可被31整除:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

行列式的思考算例五

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \ldots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \ldots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \ldots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & \beta & \beta & \beta & \ldots & \alpha \end{vmatrix}$$

作业

6（4），8（1）（3），10（1）（2）

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理：

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理： 在n阶行列式中任意选定k行（列），则n阶行列式等于位于这k个行（列）中一切k阶子式M_i与其代数余子式乘积的和。

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理： 在n阶行列式中任意选定k行（列），则n阶行列式等于位于这k个行（列）中一切k阶子式M_i与其代数余子式乘积的和。

$$|A| = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} M_i A_i.$$

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理： 在n阶行列式中任意选定k行（列），则n阶行列式等于位于这k个行（列）中一切k阶子式M_i与其代数余子式乘积的和。

$$|A| = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} M_i A_i.$$

证明过程简述：以$k = 3$来说明。

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理： 在n阶行列式中任意选定k行（列），则n阶行列式等于位于这k个行（列）中一切k阶子式M_i与其代数余子式乘积的和。

$$|A| = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} M_i A_i.$$

证明过程简述：以$k=3$来说明。

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}.$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4} \cdots a_{nj_n} +$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4} \cdots a_{nj_n} +$$

$$+ a_{11}a_{22}a_{34}$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| = & a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \\
& + a_{11}a_{22}a_{34} \sum_{124j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| =& a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \\
&+ a_{11}a_{22}a_{34} \sum_{124j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$\begin{aligned}|A| = & a_{11}a_{22}a_{33}\sum_{123j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}+ \\ & +a_{11}a_{22}a_{34}\sum_{124j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}+\cdots \\ & +a_{12}a_{23}a_{31}\sum_{231j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(231j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}+\cdots\end{aligned}$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| =& a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \\
&+ a_{11}a_{22}a_{34} \sum_{124j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31} \sum_{231j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(231j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots \\
&+ a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}} \sum_{\underline{n}\overline{n-1}\underline{n-2}\ldots j_n} (-1)^{\tau(\underline{n}\overline{n-1}\underline{n-2}\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1 \dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1 \cdots j_s \| j_{s+1} \cdots j_n.$$

对任意排列$j_1\ldots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\cdots j_s\|j_{s+1}\cdots j_n.$$

$j_1\cdots j_s j_{s+1}\cdots j_n$的反序，可以分为三种情况：

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1\dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\dots j_s \| j_{s+1}\dots j_n.$$

$j_1\dots j_s j_{s+1}\dots j_n$的反序，可以分为三种情况：

- 在$j_1,\dots,j_s$中挑一对数构成反序；

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1 \dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1 \dots j_s \| j_{s+1} \dots j_n.$$

$j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_n$的反序，可以分为三种情况：

- 在$j_1, \dots, j_s$中挑一对数构成反序；
- 在$j_{s+1}, \dots, j_n$中挑一对数构成反序；

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1\ldots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\ldots j_s\big|\big|j_{s+1}\ldots j_n.$$

$j_1\ldots j_s j_{s+1}\ldots j_n$的反序，可以分为三种情况：

- 在$j_1,\ldots,j_s$中挑一对数构成反序；
- 在$j_{s+1},\ldots,j_n$中挑一对数构成反序；
- $j_1,\ldots,j_s$中挑一个数，$j_{s+1},\ldots,j_n$中挑一个数构成反序；

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1 \dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1 \dots j_s || j_{s+1} \dots j_n.$$

$j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_n$的反序，可以分为三种情况：

- 在$j_1, \dots, j_s$中挑一对数构成反序；
- 在$j_{s+1}, \dots, j_n$中挑一对数构成反序；
- $j_1, \dots, j_s$中挑一个数，$j_{s+1}, \dots, j_n$中挑一个数构成反序；

因此关于反序数，容易证明如下公式：

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1\dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\dots j_s\|j_{s+1}\dots j_n.$$

$j_1\dots j_s j_{s+1}\dots j_n$的反序，可以分为三种情况：

- 在$j_1,\dots,j_s$中挑一对数构成反序；
- 在$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一对数构成反序；
- $j_1,\dots,j_s$中挑一个数，$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一个数构成反序；

因此关于反序数，容易证明如下公式：

$$\tau(j_1\dots j_s j_{s+1}\dots j_n)=\tau(j_1\dots j_s)+\tau(j_{s+1}\dots j_n)$$
$$+\tau(j_1\dots j_s,j_{s+1}\dots j_n).$$

其中$\tau(j_1 \ldots j_s, j_{s+1} \ldots j_n)$为$j_1, \ldots, j_s$中取一个数，$j_{s+1}, \ldots, j_n$中取一个数构成反序的个数。

拉普拉斯定理

其中$\tau(j_1\ldots j_s,j_{s+1}\ldots j_n)$为$j_1,\ldots,j_s$中取一个数，$j_{s+1},\ldots,j_n$中取一个数构成反序的个数。

- $\tau(j_1\ldots j_s)$仅由$j_1,\ldots,j_s$取值决定，与$j_{s+1},\ldots,j_n$的排列无关。即$j_1,\ldots,j_s$给定，则$\tau(j_1\ldots j_s)$为常数。

其中$\tau(j_1\ldots j_s,j_{s+1}\ldots j_n)$为$j_1,\ldots,j_s$中取一个数，$j_{s+1},\ldots,j_n$中取一个数构成反序的个数。

- $\tau(j_1\ldots j_s)$仅由$j_1,\ldots,j_s$取值决定，与$j_{s+1},\ldots,j_n$的排列无关。即$j_1,\ldots,j_s$给定，则$\tau(j_1\ldots j_s)$为常数。
- $\tau(j_1,\ldots,j_s,j_{s+1}\ldots j_n)$仅决定于从$1,\ldots,n$中取哪些数作为$j_1,\ldots,j_s$，与$j_1\ldots j_s$ 或$j_{s+1}\ldots j_n$的排列方式无关。

其中$\tau(j_1\ldots j_s, j_{s+1}\ldots j_n)$为$j_1,\ldots,j_s$中取一个数，$j_{s+1},\ldots,j_n$中取一个数构成反序的个数。

- $\tau(j_1\ldots j_s)$仅由$j_1,\ldots j_s$取值决定，与$j_{s+1},\ldots,j_n$的排列无关。即$j_1,\ldots,j_s$给定，则$\tau(j_1\ldots j_s)$为常数。
- $\tau(j_1,\ldots,j_s,j_{s+1}\ldots j_n)$仅决定于从$1,\ldots,n$中取哪些数作为$j_1,\ldots,j_s$，与$j_1\ldots j_s$ 或$j_{s+1}\ldots j_n$的排列方式无关。

利用这些特点，前面式子等于

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\cdots+$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| = {} & a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)} \sum_{j_4\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)} \sum_{j_4\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + \cdots + \\
& + a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(132,4\ldots n)}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\cdots+$$

$$+a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(132,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\cdots+$$

$$
\begin{aligned}
|A| = {} & a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + \cdots + \\
& + a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(132,4\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + \cdots + \\
& + a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}}(-1)^{\tau(\cdot)}(-1)^{\tau(\cdot,\cdot)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\dots n)}\begin{vmatrix} a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\dots n)}\begin{vmatrix} a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\dots n)}\begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} & \dots & a_{4n} \\ a_{53} & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}}(-1)^{\tau(\cdot)}(-1)^{\tau(n\overline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4,n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}}(-1)^{\tau(\cdot)}(-1)^{\tau(n\overline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4,n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

而上式的项中含有因子$M_{4\ldots n} = \begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$的项有：

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\dots n)}M_{4\dots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\dots n)}M_{4\dots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^{\tau(213)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^{\tau(213)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}(-1)^{\tau(231)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}(-1)^{\tau(312)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}(-1)^{\tau(321)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^{\tau(213)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}(-1)^{\tau(231)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}(-1)^{\tau(312)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}(-1)^{\tau(321)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

这些项的和为：

拉普拉斯定理

$$(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}[(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}]$$

拉普拉斯定理

$$(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}[(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}]=(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

拉普拉斯定理

$$(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}[(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}]=(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$|A|$中的其它项也有类似的结果，因此：

拉普拉斯定理

$$|A| = (-1)^{\tau(123,4\ldots n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{\tau(124,35\ldots n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} & \ldots & a_{4n} \\ a_{53} & a_{55} & \ldots & a_{5n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n3} & a_{n5} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

上式的最后一项为：

上式的最后一项为：

$$(-1)^{\tau(n\,n-1\,n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

上式的最后一项为：

$$(-1)^{\tau(n\underline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

上式已经具备了拉普拉斯定理的主要形式。只是出现了$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$，与拉普拉斯定理不符。

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$(-1)^{\tau(n\underline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{41} & \dots & a_{4n-3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

上式已经具备了拉普拉斯定理的主要形式。只是出现了$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$，与拉普拉斯定理不符。$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$除了按定义计算外，还可以如下计算：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_1而起的反序数为：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3, j_4 \dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1 < j_2 < j_3$。

- $j_1j_2j_3, j_4 \dots j_n$的因j_1而起的反序数为：$j_1 - 1$。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1 j_2 j_3, j_4 \ldots j_n)$与$j_1 j_2 j_3$的排列方式无关。

假定$j_1 j_2 j_3$已经排好序：$j_1 < j_2 < j_3$。

- $j_1 j_2 j_3, j_4 \ldots j_n$的因$j_1$而起的反序数为：$j_1 - 1$。
- $j_1 j_2 j_3, j_4 \ldots j_n$的因$j_2$而起的反序数为：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3, j_4 \ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1 < j_2 < j_3$。

- $j_1j_2j_3, j_4 \ldots j_n$的因$j_1$而起的反序数为：$j_1 - 1$。
- $j_1j_2j_3, j_4 \ldots j_n$的因$j_2$而起的反序数为：$j_2 - 2$。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_1而起的反序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_2而起的反序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_3而起的反序数为：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_1而起的反序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_2而起的反序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_3而起的反序数为：j_3-3。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_1而起的反序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_2而起的反序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_3而起的反序数为：j_3-3。

$$\therefore\quad \tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)=j_1-1+j_2-2+j_3-3.$$

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_1而起的反序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_2而起的反序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_3而起的反序数为：j_3-3。

$$\therefore \quad \tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)=j_1-1+j_2-2+j_3-3.$$

又

$$(-1)^{j_1-1+j_2-2+j_3-3}=(-1)^{j_1+1+j_2+2+j_3+3},$$

拉普拉斯定理

$$|A| = (-1)^{1+2+3+1+2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+3+1+2+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} & \dots & a_{4n} \\ a_{53} & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

拉普拉斯定理

这就是拉普拉斯定理。

拉普拉斯定理

这就是拉普拉斯定理。

例题：P. 33(4)。