2008-2009 第一学期期末数学分析 B(A 卷)参考解答及评分标准(2009.1)

一. 1. $-\dfrac{1}{x}$

2. $\dfrac{x^3}{6}-\sin x+2x$

3. 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2 分, 2 分)

4. $y=Cx+\dfrac{x^3}{2}$ (没有 y 扣 1 分)

5. $-1-\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{x^5}{4}+o(x^5)$

6. ± 2, $-\dfrac{1}{4}$ (2 分(没有 ± 扣 1 分), 2 分)

7. e

二. $r^2+r-2=0$ ……………………….(1 分)

$r_1=1 \quad r_2=-2$ ………………………(3 分)

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ …………………………(5 分)

设 $y^*=Axe^x$ ………………………….(6 分)

代入方程得 $A=\dfrac{1}{3}$ $y^*=\dfrac{1}{3}xe^x$ ……………………….(8 分)

通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\dfrac{1}{3}xe^x$ ……………………..(9 分)

三. $\int x^2\arctan x dx=\dfrac{1}{3}\int \arctan x d(x^3)$ …………………….(2 分)

$=\dfrac{1}{3}(x^3\arctan x-\int x^3\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx)$ ……………………..(5 分)

$=\dfrac{1}{3}[x^3\arctan x-\int (x-\dfrac{x}{1+x^2})dx]$ ……………………..(7 分)

$=\dfrac{1}{3}x^3\arctan x-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$ …………………….(9 分)

四.　　由题设，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-(ax+bx^2)\sim x^2$　　…………………(2 分)

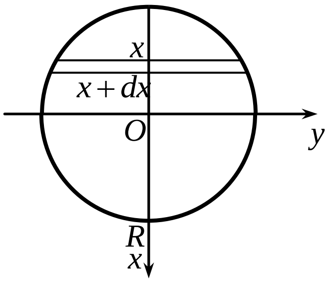
$$\ln(1+x)-(ax+bx^2)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)$$ ………………(4 分)

$$=(1-a)x+(-\frac{1}{2}-b)x^2+o(x^2)$$ ……………………(5 分)

$$1-a=0 \qquad -\frac{1}{2}-b=1$$ ……………………(7 分)

$$a=1 \qquad b=-\frac{3}{2}$$ ……………………(9 分)

五.　如图建立坐标系



$$dP=\mu g(x+R)2y\,dx$$ …..................................(2 分)

$$=2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$ ……………………...(3 分)

$$P=\int_{-R}^{R}2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$ ………………………(5 分)

$$=4\mu gR\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$ ………………………(6 分)

$$=\pi\mu gR^3=800\pi gR^3\,(\mathrm{N})$$ ………………………(9 分)

六. 令$t=\sqrt{x+1}$，即$x=t^2-1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt$$ …………………………(3 分)

$$=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$ …………………………(5 分)

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty}$$ …………………………(7 分)

$$=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$ …………………………(9 分)

七. 设曲线方程为$y=y(x)$

$$\int_1^t\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\int_1^t y\,dx$$ ……………………(2 分)

两端对t求导

$$\sqrt{1+(y')^2}=2y$$ ……………………(4 分)

$$y'=\sqrt{4y^2-1}$$ ……………………(5 分)

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^2-1}}=dx$$ ……………………(6 分)

积分得 $$\frac{1}{2}\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=x+C_1$$ ……………………(7 分)

由 $y\big|_{x=1}=\frac{1}{2}$，得 $C_1=-1$ ……………………(8 分)

$$\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=2(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}ch2(x-1)=\frac{e^{2(x-1)}+e^{-2(x-1)}}{4}$$ ………………(9 分)

八. (1) 在 $(0,\pi)$, $e^{\sin x}\sin x > 0$，故 $I_1 > 0$，在 $(\pi,2\pi)$， $e^{\sin x}\sin x < 0$，故 $I_2 < 0$

$$I_1 > I_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

(2)
$$F'(x) = e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi) - e^{\sin x}\sin x$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x}\sin x = 0$$

所以 $F(x)$ 为常数 …………………………(5 分)

令 $u = x - \pi$

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^{\sin(\pi+u)}\sin(\pi+u)du = -\int_0^{\pi} e^{-\sin u}\sin u\, du$$

$$F(0) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\sin t}\sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t}\sin t dt = I_1 + I_2$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\sin t}\sin t dt - \int_0^{\pi} e^{-\sin u}\sin u\, du$$

$$= \int_0^{\pi} \sin t(e^{\sin t} - e^{-\sin t})dt$$

当 $t \in (0,\pi)$， $\sin t > 0$， $e^{\sin t} > 1$， $e^{-\sin t} < 1$， $\sin t(e^{\sin t} - e^{-\sin t}) > 0$

故 $F(0) > 0$，因此 $F(x)$ 为正的常数 ……………………..(9 分)

九. (1) 由题设，得 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$， $f(1) = 0$ ……………………(2 分)

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 0$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在驻点 ……………………(4 分)

(2) 根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1 \in (0,1)$，$\exists\xi_2 \in (1,2)$，使

$$f'(1) - f'(0) = f''(\xi_1) \qquad f'(2) - f'(1) = f''(\xi_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots...(6\text{ 分})$$

$$|f'(0)| + |f'(2)| = |f'(1) - f'(0)| + |f'(2) - f'(1)| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots..(8\text{ 分})$$

$$= |f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| \le 1 + 1 = 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9\text{ 分})$$