信息学院本科生 **2012——2013** 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（**A** 卷）

参考答案及评分标准：

一、（每小题 **2** 分，共 **8** 小题）

1 对； **2** 错； **3** 对； **4 C**； **5 C**； **6 B**； **7 A**； **8 B**

二、行列式计算

1、计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

解：根据行列式的性质，原行列式等于：

$$\text{原式} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad 2\text{分}$$

$$= -\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad 2\text{分}$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times 5 = -(-3\times 2+3)\times 5 = 15 \qquad 2\text{分}$$

2、计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \quad a_i \neq 0 \quad i = 1,2\cdots n \, .$$

解：根据行列式的性质，原行列式等于：

$$原式=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} \qquad 2分$$

且因为已知 $a_i \neq 0$， $i=1,2,\dots,n$ 。 2 分

所以有：

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} \qquad 2分$$

$$=(1+a_1+\tfrac{a_1}{a_2}+\cdots+\tfrac{a_1}{a_n})a_2\cdots a_n=(1+\tfrac{1}{a_1}+\cdots+\tfrac{1}{a_n})a_1\cdots a_n \qquad 2分$$

三、求矩阵 *X*，使下式成立：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

解：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{\mathbf{-1}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{\mathbf{-1}} \qquad \mathbf{2}分$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{4}分$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{1}分$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{1}分$$

四．本题共 **13** 分

对于线性方程组：

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

，λ为何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多解？

并在方程组有无穷多解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

解：此线性方程组的增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \qquad （2 分）$$

对此增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3 \end{pmatrix} \qquad （4 分）$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 3\lambda-3 \end{pmatrix}$$

因此，当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，都等于 3，
且等于未知数的个数。此时方程组有唯一解；（1 分）
当$\lambda = -2$时，系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，方程组无解；（1 分）
当$\lambda = 1$时，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩都为 1，方程组有无穷多组解。（1 分）

$\lambda = 1$时，方程组的增广矩阵化为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （1 分）

取x_2和x_3为自由未知量，则非齐次方程组的导出组的基础解系为

$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （2 分）

非齐次方程组的特解为

$\xi^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

所以方程组通解表示为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k_2$， 或表示为:

$\begin{cases} x_1 = -2 - k_1 - k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \end{cases}$ 其中 k_1， k_2 为任意实数。 （1 分）

五、(本题共 12 分)

已知三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基：

I: $\boldsymbol{\alpha_1 = (1,0,0)^T}$, $\boldsymbol{\alpha_2 = (0,1,0)^T}$, $\boldsymbol{\alpha_3 = (0,0,1)^T}$；

II: $\boldsymbol{\beta_1 = (3,-5,4)^T}$, $\boldsymbol{\beta_2 = (2,-1,2)^T}$, $\boldsymbol{\beta_3 = (-2,5,-3)^T}$；

1）求由基 $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$, $\boldsymbol{\alpha_3}$ 到基 $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_3}$ 的过渡矩阵；

2）求在两组基下有相同坐标的向量。

解：根据已知，显然：

$\beta_1 = 3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 4\alpha_3,$

$\beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3,$ （2 分）

$\beta_3 = -2\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3\alpha_3,$

所以：$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ （2 分），

所以由 α 这组基到 β 这组基的过渡矩阵为：$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$。（1 分）

设在两组基下坐标相同的向量的坐标为 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，即：

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$ （1 分）

将前式代入得 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\-5 & -1 & 5\\4 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，（1 分）

因此有 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 满足：$\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\-5 & -1 & 5\\4 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$， （2 分）

解这个线性方程组，$\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\-5 & -2 & 5\\4 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，

得：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ，k 为数域中的任意数。 （2 分）

所以满足条件的向量为：$k\alpha_1+k\alpha_3=\begin{pmatrix}k\\0\\k\end{pmatrix}$，$k$ 为数域中的任意数。（1 分）

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出其正交变换矩阵 *P*;

同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定)。

（本题共 **15** 分）

解：二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\2 & 5 & -4\\-2 & -4 & 5\end{pmatrix}$$ （2 分）

其特征值方程为：$|A\text{-}\lambda E|=\begin{vmatrix} 2\text{-}\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5\text{-}\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5\text{-}\lambda \end{vmatrix}=0$ （1 分）

因此的 $-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10)=0$， 即

$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$ （2 分）

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，对应的特征向量满足方程组：(A-E)X=0

其系数矩阵为

$$(A\text{-}E)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 x_2,x_3 为自由未知量分别令它们为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

可得属于特征值 1 的特征向量子空间的一个基可为：

$\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （1 分）

对应的标准正交基为：

$\xi_1=\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$ （2 分）

当 $\lambda_3=10$ 时，对应的特征向量满足方程组：(A-10E)X=0

其系数矩阵为

$$(A\text{-}10E)=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 x_3 为自由未知量，令 $x_3=1$，

可得属于特征值 10 的特征向量子空间的一个基可为：$\alpha_3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （1 分）

对应的标准正交基为：

$$\xi_3=\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ （1 分）

令矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ （2 分）

它是一个正交矩阵。则当原二次型进行

正交变换：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 后可得二次型的标准型为：

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$ （1 分）

该二次型是正定二次型 （2 分）

七、本题共 9 分

设 A 是 n 阶方阵，且 $AA^T=E$，$|A|=-1$，证明 $|A+E|=0$.

（其中 E 是 n 阶单位矩阵）。

证明： $\left|A+E\right|=\left|A+AA^T\right|$ （2 分）

$=\left|A(E+A^T)\right|$ （1 分）

$=\left|A\right|\left|E+A^T\right|$ （1 分）

$=-\left|E^T+A^T\right|$ （2 分）

$=-\left|(E+A)^T\right|$ （1 分）

$=-\left|A+E\right|$ （1 分）

所以 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=\mathbf{0}$ （1 分）

八、本题 9 分

设 X^* 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq O)$ 的一个解， $X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是它导出组的基础解系，证明： $X^*,X^*-X_1,X^*-X_2,\cdots,X^*-X_{n-r}$ 线性无关。

证明：依题意有 $AX^*=\beta,\ AX_i=0, i=1,2,\cdots,n-r$ (1 分)

设有一组数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使得

$$k_0X^*+k_1(X^*\text{-}X_1)+\cdots+k_{n-r}(X^*\text{-}X_{n-r})=0$$

即： $(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})X^*\text{-}k_1X_1\text{-}\cdots\text{-}k_{n-r}X_{n-r}=0$ （1） (2 分)

用矩阵 A 左乘（1）两端得 $(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\beta=0$ (2 分)

而 $\beta\neq0$，故得 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$ (1 分)

代入（1）式得 $\text{-}k_1X_1\text{-}k_2X_2\cdots\text{-}k_{n-r}X_{n-r}=0$

由 X_1， $X_2,\cdots$， X_{n-r} 为基础解系得 X_1， $X_2,\cdots$， X_{n-r} 线性无关，从而可得

$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$ (2 分)

由定义可得 X^*， $X_1\cdots$， X_{n-r} 线性无关。 (1 分)

九、（本题 4 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 的实矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\lambda E}+\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵,

证明：当 $\boldsymbol{\lambda}>\boldsymbol{0}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。

证明：

$$
\begin{aligned}
B^{T} &= (\lambda E + A^{T}A)^{T} \\
&= (\lambda E)^{T} + (A^{T}A)^{T} \\
&= \lambda E + A^{T}A \\
&= B
\end{aligned}
$$

（1 分）

又 A 是实矩阵

所以， B 是实对称矩阵

设任意 X=$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}\neq 0$ 是一 n 维实向量。

则

$$
\begin{aligned}
X^{T}BX &= X^{T}(\lambda E + A^{T}A)X \\
&= X^{T}(\lambda E)X + X^{T}(A^{T}A)X \\
&= \lambda X^{T}X + (AX)^{T}(AX)
\end{aligned}
$$

（1 分）

因为 X 是一不为 0 的实向量，所以有 $X^{T}X>0$

又 A 是 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 的实矩阵，所以 AX 是 m 维实向量。

则 $(AX)^{T}(AX)\geq 0$。（1 分）

所以对于任意不为 0 的 n 维实向量 X，满足

$X^{T}BX>0$

即 B 是正定矩阵（1 分）