北京理工大学2013-2014学年第二学期

《微积分A》（II）B卷试题答案及评分标准

一、填空题（每题4分）

(1) $-e^{-x}\sin\frac{x}{y}+e^{-x}\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$; (2) $9a$;

(3) $\frac{\sqrt{3}}{12}$; (4) 发散; (5) (1,5].

二、选择题（每题2分）

(1) A; (2) B; (3) A; (4) D; (5)D.

三、

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ ……………………………………………2 分

$=yf_1'+2xf_2'$ ……………………………………………………4 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\frac{\partial f_1'}{\partial y}+2x\frac{\partial f_2'}{\partial y}$ ……………………………………6 分

$=f_1'+y(xf_{11}''+2yf_{12}'')+2x(xf_{21}''+2yf_{22}'')$

$=f_1'+xyf_{11}''+(2x^2+2y^2)f_{12}''+4xyf_{22}''$ ……………………………9分

计算正确$\frac{\partial f_1'}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2'}{\partial y}$ 各给1分。

四、$X_1=-ye^{-\sin x}$, $Y_1=xe^{\sin y}$

$\frac{\partial X_1}{\partial y}=-e^{-\sin x}$, $\frac{\partial Y_1}{\partial x}=e^{\sin y}$, ... 2 分

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint\limits_D e^{\sin y}+e^{-\sin x}dxdy$ 4分

$X_2=-ye^{\sin x}$, $Y_2=xe^{-\sin y}$

$\frac{\partial X_2}{\partial y}=-e^{\sin x}$, $\frac{\partial Y_2}{\partial x}=e^{-\sin y}$, ... 6 分

$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint\limits_D e^{-\sin y}+e^{\sin x}dxdy$ 8分

由轮换对称性知，$\iint\limits_D e^{\sin y+e^{-\sin x}}dxdy=\iint\limits_D e^{-\sin y+e^{\sin x}}dxdy$，

故原等式成立。 9分

五、$D_1:\{(x,y)|y\geq x^2,-1\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2\}$,

$D_2:\{(x,y)|y<x^2,-1\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2\}$,

$\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}dxdy$ 4分

$=2[\int_0^1dx\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}dy+\int_0^1dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy]$ 6分

$=2[\int_0^1\frac{2}{3}(2-x^2)^{3/2}dx+\int_0^1\frac{2}{3}x^3dx]$ 8分

$=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$

$=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$ 9分

六、$\rho(x,y)=x^2+y^2, M=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ 2分

$=\int_0^1 dy\int_y^{2-y} x^2+y^2dx=\frac{4}{3}$ 3分

$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x(x^2+y^2)dxdy}{M}$ 4分

$=\frac{\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^3+xy^2)dx}{M}$ 5分

$=\frac{5/3}{M}=\frac{5}{4}$ 6分

$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y(x^2+y^2)dxdy}{M}$ 7分

$=\frac{\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2y+y^3)dx}{M}$ 8分

$=\frac{7/15}{M}=\frac{7}{20}$ 9分

七、解法1: $X = xy, Y = x^2, \frac{\partial Y}{\partial x} = 2x, \frac{\partial X}{\partial y} = x$ 2分

补L_1 : 沿x 轴负向从B点到A点，由格林公式得到：

$\int_L + \int_{L_1} = -\iint\limits_D (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})dxdy = -\iint\limits_D xdxdy$ 5分

$= 0$ 6分

而，$\int_{L_1} = \int_1^{-1} x \cdot 0dx + 0 = 0$ 8分

所以，$\int_L = (\int_L + \int_{L_1}) - \int_{L_1} = 0 - 0 = 0$ 9分

七、解法2: $\int_L = \int_{-1}^0 x(1+x)dx + x^2dx + \int_0^1 x(1-x)dx - x^2dy$ 6分

$= \int_{-1}^0 (x + 2x^2)dx + \int_0^1 (x - 2x^2)dx$ 8分

$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$ 9分

第一步中，写正确一个给3分, 第二步写正确一个给1分。

八、$X = x^3, Y = y^3, Z = -z, \frac{\partial X}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial Y}{\partial y} = 3y^2, \frac{\partial Z}{\partial z} = -1$ 2分

由高斯公式得:$\oiint\limits_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 1)dv$ 6分

$= 2\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1+z^2}} (3\rho^2 - 1)\rho d\rho$ 8分

$= \frac{44}{15}\pi$ 9分

九、解法一：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}(\frac{x^2}{2})^{n-1}$, 令$t=\frac{x^2}{2}$, 并记$S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}t^{n-1}$ 1分

关于t的级数收敛半径为1，由$t=\frac{x^2}{2}$知，原级数的收敛半径为$\sqrt{2}$,

当$x=\pm\sqrt{2}$时，级数发散，从而收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 3分

$S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}t^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}$

$=\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n\}'-\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}=(\frac{t}{1-t})'-\frac{1}{2(1-t)}=\frac{t+1}{2(1-t)^2}$ 5分

将$t=\frac{x^2}{2}$带入，得到原级数的和函数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}, x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 6分

将$x=1$带入，得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{3}{1}=3$ 8分

九、解法二：设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n-1}}{2^n})'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n})'$ 2分

$=(\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n})'=(\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n)'$，$x\neq 0$ 3分

$=(\frac{x}{2-x^2})'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，$x\neq 0$

又$x=0$时，$S(0)=\frac{1}{2}$，上式也成立，故$S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$ 4分

$R=\sqrt{2}$, 且当$x=\pm\sqrt{2}$时，级数发散，收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 6分

将$x=1$带入，得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{3}{1}=3$ 8分

备注；按点给分是，得出收敛域$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$给2分；得出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$给2分。

十、将$f(x)$延拓为周期为$T=2\pi$的奇函数，延拓后的函数满足狄氏条件.

设$f(x)$延拓后的函数的正弦级数表达式为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 2分

$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=\frac{1}{2}$ 3分

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, n\geq 2$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin nx dx$ 4分

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(n-1)x-\cos(n+1)x]dx$

$=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}]$ 6分

$f(x)$延拓后的函数在$(-\pi,0)$的正弦级数为：

$\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}]\sin nx.$

和函数$S(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}, & x=-\frac{\pi}{2} \\ \sin x, & -\frac{\pi}{2}<x<0 \end{cases}$ 8分

或者将答案写成如下形式：

$$b_n=\begin{cases} -\frac{8k}{(16k^2-1)\pi}, & n=4k, k=1,2,\cdots, \\ 0, & n=4k+1, k=1,2,\cdots \\ \frac{8k+4}{((4k+2)^2-1)\pi}, & n=4k+2, k=0,1,2,\cdots \\ 0, & n=4k+3, k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

$f(x)$延拓后的函数在$(-\pi,0)$的正弦级数为：

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{16k^2-1}\sin 4kx+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{(4k+2)^2-1}\sin(4k+2)x$$

和函数$S(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\\ -\frac{1}{2}, & x=-\frac{\pi}{2}\\ \sin x, & -\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$ ……………………………8分

备注；按点给分时，给出弦级数表达式为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，给2分；直接给出正确的和函数表达式，给2分。