信息学院本科生 **2011——2012** 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（**A** 卷）
答案：

一、（每小题 **2** 分，共 **8** 小题）

1 对；　**2** 错；　**3** 对；　**4 C**；　**5 D**；　**6 B**；　**7 D**；　**8 C**

二、行列式计算　（每小题 **7** 分，共 **14** 分）

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$

解:

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ x+a+b+c+d & x+b & c & d \\ x+a+b+c+d & b & x+c & d \\ x+a+b+c+d & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \quad \text{过程5分}$$

$$=(x+a+b+c+d)x^3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad \text{结果2分}$$

2. 计算 ***n***（***n***>**2**）阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$ ……… 过程4分

$$=(n-1)!$$ ……… 结果3分

三、求矩阵 X，使下式成立：（8 分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$ 3 分

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 3 分

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ，2 分

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

四．本题共 13 分

此线性方程组的增广矩阵为：（**2 分**）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 & 2 \\ 5 & \lambda+3 & \lambda+2 & 6 \end{pmatrix}。$$

对此增广矩阵作初等行变换：（**4 分**）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 & 2 \\ 5 & \lambda+3 & \lambda+2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 1 \end{pmatrix}。$$

因此，当$\lambda \neq 2$且$\lambda \neq 3$时，系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，且等于未知数的个数。此时方程组有唯一解；

当$\lambda = 3$时，系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，方程组无解；

当$\lambda = 2$时，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩都为 2，方程组有无穷多组解。（**共 3 分**）

当$\lambda \neq 2$且$\lambda \neq 3$时，方程组经前面的初等变换化为：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (\lambda-2)x_2 = 0 \\ (\lambda-3)x_3 = 1 \end{cases}$，解得唯一

解为：$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{1}{\lambda-3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \dfrac{1}{\lambda-3} \end{cases}$。（**1 分**）

$\lambda = 2$时，方程组经前面的初等变换化为：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \\ x_3 = -1 \end{cases}$，取$x_2$为自由未知量，则

方程组的解表示为：$\begin{cases} x_1 = 2-k \\ x_2 = k \\ x_3 = -1 \end{cases}$，写成向量形式为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} k$，其中$k$为给定数域中的任意数。

（**3 分**）

五、本题共 **12** 分

设有k_1,k_2,k_3使得

$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0,$ (1分)

即k_1（$2\alpha_1$+$3\alpha_2$+$3\alpha_3$）+k_2（$2\alpha_1$+α_2+$2\alpha_3$）+k_3（α_1+$5\alpha_2$+$3\alpha_3$)=0，整理得：

（$2k_1+2k_2+k_3$）α_1+（$3k_1+k_2+5k_3$）α_2+（$3k_1+2k_2+3k_3$）α_3=0 (1) (1分)

1） 又因为α_1，α_2，α_3是三维向量空间的一个基，所以α_1，α_2，α_3线性无关，

因此得到方程（1）中α_1，α_2，α_3的系数均为零，即：

$$\begin{cases} 2k_1+2k_2+k_3=0 \\ 3k_1+k_2+5k_3=0 \\ 3k_1+2k_2+3k_3=0 \end{cases}$$ (2分)

解之得到：$k_1=k_2=k_3=0$，所以β_1，β_2，β_3线性无关， (1分)

因此得证β_1，β_2，β_3也是R^3的一个基。 (1分)

2）.

β_1，β_2，β_3到α_1，α_2，α_3的过渡矩阵为

$$M_1=M^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(2 分) (1 分) 注：公式对即得 2 分

3）.

令 $X=(1,-2,0)^T$，则α在β_1，β_2，β_3下的坐标为

$$Y=M^{-1}X=M_1X=\begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2 分) **(1 分)** 注：公式对即得 2 分

六、求一个正交变换 ***X=PY,*** 将下列二次型化成标准型

$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2}$ ；并求出该二次型的秩，同时说明该二次型的类型

(正定、负定、半正定、半负定、不定). （本题共 **15** 分）

解：二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ （**2** 分）

其特征值方程为：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$ （**1** 分）

因此的（λ-2）（λ-2）（λ-4）= 0， 即

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=4 \qquad （2 分）$$

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，对应的特征向量满足方程组：$(2E-A)X=0$

其系数矩阵为

$$(2E-A)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

取 x_2,x_3 为自由未知量分别令它们为$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，可得属于特征值 2 的特征向量子空间的一个基可为：

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，对应的标准正交基为：（1 分）

$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ （2 分）

当$\lambda_3=4$时，对应的特征向量满足方程组：$(4E-A)X=0$

其系数矩阵为

$$(4E-A)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

取 x_2 为自由未知量，令 $x_2=1$，可得属于特征值 4 的特征向量子空间的一个基可为：$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，对应的标准正交基为：（1 分）

$\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$ （1 分）

令矩阵$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$，它是一个正交矩阵。则当原二次型进行（2 分）

正交变换：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$后可得二次型的标准型为：

$f=2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$ （1 分）

二次型的秩为 3， 是正定二次型 （2 分）

七、本题共 10 分

因为已知 A 可逆，作分块矩阵乘积：

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & C \\ -BA^{-1}A+B & -BA^{-1}C+D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{pmatrix}$$，（3 分）

而行列式 $\begin{vmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{vmatrix}=1$（1 分），

所以：

$$左式=\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{vmatrix}$$，（3 分）

根据拉普拉斯定理，$左式=|A|\cdot|D-BA^{-1}C|$。又因为已知 $AB=BA$，

$$左式=|A(D-BA^{-1}C)|=|AD-ABA^{-1}C|=|AD-BAA^{-1}C|=|AD-BC|=右式$$。（3 分）

证毕。

八、本题 8 分

证明：依题意有： $AX^*=b,\ AX_i=0, i=1,2,\cdots,n-r$ (1 分)

设有数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使得

$$k_0X^*+k_1X_1+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}=0$$， (1 分)

用矩阵 A 左乘上式两端得： A（$k_0X^*+k_1X_1+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$)=0

即 $bk_0+0+0+\cdots+0=0$，从而 $bX^*=0$ (2 分)

而 $b\neq 0$， 故得 $k_0=0$ (1 分)

于是（1）变为 $k_1X_1+k_2X_2\cdots+k_{n-r}X_{n-r}=0$

由 X_1，X_2,…，X_{n-r} 为基础解系得 X_1，X_2,…，X_{n-r} 线性无关，从而可得

$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$ (2 分)

由定义可得 X^*，$X_1\cdots$，X_{n-r} 线性无关。 (1 分)

九、已知存在 n 阶非零实矩阵 C，使得矩阵 $A=C^TC$，证明 $|A+E|>1$

其中 E 为 n 阶单位矩阵。 （本题 4 分）

证明：因为$A^T=(C^TC)^T=C^TC=A$，且 C 为非零实矩阵，所以 A 是非零的实对称矩阵。对于任意的 n 维非 0 实向量 X，

$$X^TAX=X^TC^TCX=(CX)^T(CX)$$

令 Y = CX = $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，

则$X^TAX=Y^TY=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\geq 0$，

所以，矩阵 A 是半正定或者正定矩阵。（1 分）

A 的所有特征值都大于等于 0。A 是非零的实对称矩阵，一定能够找到可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\geq 0,i=1,2,\cdots,n,$$

且一定存在$\lambda_i>0$，否则 A = 0，与题设矛盾。不妨设$\lambda_1>0$。

则$A=P\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P^{-1}$（1 分）

$$|A+E|=\left|P\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P^{-1}+PP^{-1}\right|$$

$$=\left|P(\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}+E)P^{-1}\right|$$

$$=|P|\left|\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}+E\right|\left|P^{-1}\right|$$

$$=|P|\left|P^{-1}\right|(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)$$

$$\geq(\lambda_1+1)>1$$（2 分）

命题得证。