2006 级第二学期期末数学分析 B 试题(A 卷)参考解答
(2007.7)

一. 1. $\{2,1,n\}\cdot\{3,-2,1\}=4+n=0$ …………………………..(2 分)

$n=-4$ …………………………..(3 分)

将点 $(a,-1,2)$ 代入平面方程得 $3a-4=0$ …………………………..(5 分)

$a=\dfrac{4}{3}$ …………………………..(6 分)

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x})+2x\varphi'(x^2+y^2)$ …………………………..(3 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})+4xy\varphi''(x^2+y^2)$ …………………………..(6 分)

3. $I_y=\iint\limits_D x^2dxdy$ …………………………..(2 分)

$=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}x^2dx$ …………………………..(4 分)

$=\dfrac{7}{24}\int_0^1 y^3dy=\dfrac{7}{96}$ …………………………..(6 分)

4. 当 $P>-\dfrac{1}{2}$，有 $\left|(-1)^n\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right|\sim\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$， …………………………..(1 分)

当 $\boldsymbol{P>-\dfrac{1}{2}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ 收敛，原级数绝对收敛 ……………………..(2 分)

当 $-\dfrac{1}{2}<P\le\dfrac{1}{2}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ 发散，

但当 n 充分大时 $\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 单调减少且趋于 0，原级数条件收敛 ………..(4 分)

当 $p\le-\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\neq 0}$，级数发散 ……………………..(6 分)

二. 1.　　曲面在点 $(1,1,2)$ 处的法向量为 $\{2x,4y,z\}\big|_{(1,1,2)}=\{2,4,2\}$

$$\vec{n}=\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\}$$ ……..………………..(2 分)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{1+y^2+z^2} \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{1+y^2+z^2}$$ ……………………..(5 分)

在点 $(0,1,1)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{3} \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2}{3}$ ……………………..(6 分)

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(0,1,1)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}}$$ ………………………..(7 分)

2.　　$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dxdy=\frac{2}{z}dxdy$ …………………………..(2 分)

$$\iint_S\frac{1}{z}dS=\iint_{D_{xy}}\frac{2}{4-x^2-y^2}dxdy$$ …………………………..(4 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2}{4-\rho^2}\rho d\rho$$ …………………………..(6 分)

$$=2\pi\ln 4$$ …………………………..(7 分)

3.　　$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\sin\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$ ..……………………..(3 分)

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^4\varphi d\varphi$$ …………………………..(6 分)

$$=\frac{\pi^2}{4}$$ ..…………………………..(7 分)

4.　　$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-2y=0 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-2x=0$ …………………………..(1 分)

解得　$x=y=0$　或　$x=y=\frac{2}{3}$ …………………………..(3 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

在点 $(0,0)$，$A=0,\ B=-2$，$C=2$

$AC-B^2=-4<0$，故 $(0,0)$ 不是极值点 …………………………..(5 分)

在点 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，$A=4,\quad B=-2$，$C=2$

$AC-B^2=4>0$，且 $A>0$，故 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 是极小值点

极小值 $z(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=-\frac{4}{27}$ …………………………..(7 分)

三. $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)dx=0$ …………………………..(2 分)

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nxdx$ …………………………..(3 分)

$=\frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi}$ …………………………..(5 分)

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{8}{(2k-1)^2\pi} & n=2k-1\end{cases}$$

$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\quad(-\pi\le x\le\pi)$ ..…………………..(8 分)

或 $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx\quad(-\pi\le x\le\pi)$ ..…………………..(8 分)

四. 令 $t=\frac{x-1}{3}$， 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ (1) …..…………………..(1 分)

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\qquad R_t=1$

$t=-1$ 时级数(1)收敛，$t=1$ 时级数(1)发散

级数(1)的收敛域为 $t\in[-1,1)$ ………………………..(3 分)

由 $-1\le\frac{x-1}{3}<1$ 得原级数收敛域 $-2\le x<4$ ………………………..(4 分)

$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\qquad S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$ …………………………..(6 分)

$S(t)=-\ln|1-t|$ …..…………………..(7 分)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}=-\ln\left|1-\frac{x-1}{3}\right|$ ...………………………..(8 分)

五. $$I=\oiint\limits_{S+S_1^-}-\iint\limits_{S_1^-}2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$$ ……………………………..(2 分)

$$=-\iiint\limits_V zdV-\iint\limits_{S_1^-}-z^2dxdy$$ ……………………………..(4 分)

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 zdz-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$ ……………………………..(6 分)

$$=-\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{5}{4}\pi$$ ……………………………..(8 分)

六. $$f(x)=\ln(3-2(x-1))=\ln 3+\ln(1-\frac{2}{3}(x-1))$$ ……………………….(2 分)

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{2}{3}(x-1))^n$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^n}{n\cdot 3^n}(x-1)^n$$ …………………………..(5 分)

由 $-1<-\frac{2}{3}(x-1)\le 1$，得收敛域 $-\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{2}$ …………………………..(7 分)

由 $\frac{f^{(5)}(1)}{5!}=\frac{-2^5}{5\cdot 3^5}$， 得 $f^{(5)}(1)=-(\frac{2}{3})^5 4!$ …………………………..(8 分)

七. (1) 由 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$， 得

$$\varphi'(x)(x^2+y^2)+2x\varphi(x)=\varphi(x)(2x+x^2+y^2)$$ ……………………….(3 分)

$$\varphi'(x)=\varphi(x)$$ ……………………………..(4 分)

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=dx \qquad \varphi(x)=Ce^x$$ ……………………………..(6 分)

(2) $$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}Ce^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+Ce^x(x^2+y^2)dy+C_1$$ ……………..(8 分)

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y Ce^x(x^2+y^2)dy+C_1$$ ……………………………..(9 分)

$$=Ce^x(x^2y+\frac{y^3}{3})+C_1$$ …...……………………..(10 分)

八. (1) $$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho\int_{\rho^2}^{t}dz$$

$$=2\pi t\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho-2\pi\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho^3 d\rho$$ …………………………..(2 分)

$f(\rho^2)\rho$ 与 $f(\rho^2)\rho^3$ 连续，故 $\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho$ 与 $\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho^3 d\rho$ 可导，因此 $F(t)$ 可导

$$F'(t)=2\pi\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho$$ ……………………………..(4 分)

(2) 由 $\frac{1}{\pi}F(t)=e^{-t}-\int_0^{t}f(x)dx$ 对 t 求导得

$$2\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho=-e^{-t}-f(t)$$

$$f'(t)+f(t)=e^{-t}$$ ……………………………..(5 分)

解得 $f(t)=e^{-t}(t+C)$

由 $f(0)=1$， 得 $C=1$

$$f(x)=e^{-x}(x+1)$$ ……………………………..(6 分)

或 (1) $$F(t)=\int_0^{t}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}f(\rho^2)\rho d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{t}dz\int_0^{\sqrt{z}}f(\rho^2)\rho d\rho$$ ……………………………..(2 分)

由于 $f(\rho^2)\rho$ 连续，故 $\int_0^{\sqrt{z}}f(\rho^2)\rho d\rho$ 可导，因此 $F(t)$ 可导

$$F'(t)=2\pi\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho$$ ……………………………..(4 分)

(2) 由 $\frac{1}{\pi}F(t)=e^{-t}-\int_0^{t}f(x)dx$ 对 t 求导得

$$2\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho=-e^{-t}-f(t)$$

$$f'(t)+f(t)=e^{-t}$$ ……………………………..(5 分)

解得 $f(t)=e^{-t}(t+C)$

由 $f(0)=1$， 得 $C=1$

$$f(x)=e^{-x}(x+1)$$ ……………………………..(6 分)