

《工科数学分析》(下) 期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(试卷共 6 页, 十个大题, 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 过点 $M(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $a = (2, 1, 1)$ 和 $b = (1, -1, 0)$ 的平面方程为_____.

2. 函数 $u = x + y + z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数为_____.

3. 设 $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ 则交换积分次序后 $I =$ _____.

4. 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 计算 $\int_L x dl =$ _____.

5. 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 是_____ 收敛.

二、计算题 (每小题 5 分, 共 20 分)

1. 求点 $M(1, 0, 2)$ 到直线 $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ 的距离.

2. 设 $z = y^x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 计算 $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, S 为锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的部分.

4. 设 $F(y) = \int_y^{y^2} \frac{\cos(xy)}{x} dx$, 求 $F'(y)$.

三、(8 分) 求曲面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 2v$ 在 $u = 2, v = \frac{\pi}{4}$ 处的切平面方程.

四、(6 分) 设 Ω 是由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围成的均匀立体 (密度 $\mu = 1$), 求 Ω 对于 z 轴的转动惯量.

五、(8 分) 求坐标原点到曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$ 的最短距离.

六、(8 分) 设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内不取零值的可微函数, $\varphi(0) = 1$. 已知

$\varphi(x)(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + \varphi(x)(x^2 + y^2)dy$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分.

(1) 求 $\varphi(x)$ 满足的微分方程及 $\varphi(x)$ 的表达式; (2) 求 $u(x, y)$ 的表达式.

七、(8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

八、(8 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数. 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$,

$f(x)$ 展开的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 且 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 求 b_3 及 $S(\pi)$.

九、(8 分) 计算 $I = \iint_S xy^2 dydz + yx^2 dzdx + zdx dy$, 其中 S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧.

十、(6 分) 流速 $\vec{v} = \{x^3, y^2, z^4\}$ 的不可压缩的密度为 1 的流体, 流过由

$z = 4 - (x^2 + y^2)$ 与 $z = 1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ 所围立体, 有平行于 xoz 面的平面截此立

体, 问单位时间内沿 y 轴方向通过哪个截面的流量最大?