2012-2013-第一学期　工科数学分析期中试题解答（**2012.11**）

一．1.　$\cos f(x)\cdot f'(x)-f'(\cos x)\sin x$

2.　$\frac{1}{3}$，　5

3.　$(\alpha+\beta)A$

4.　82cm/sec

5.　$\frac{7}{2}$

二.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}=-\frac{1}{t}$$ ……………………………..(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$$ ……………………………….(8 分)

三.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right]^{\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}$$ ………(3 分)

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}$$ …………………………..(5 分)

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$$ …………………………..(6 分)

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$$ ……………………………….(9 分)

四.　当 $0<x<\frac{\pi}{2}$　$f'(x)=6x+\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}$ …………………….(3 分)

当 $x<0$　$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}+x\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot\frac{-2}{x^3}=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1}$ …..(6 分)

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+x\tan x}{x}=0$$

$f'(0)$ 不存在 ……………………………….(9 分)

五. $x_2=\sqrt{3x_1}=\sqrt{3\sqrt{3}}>\sqrt{3}=x_1$

设 $x_n>x_{n-1}$ 则有 $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}>\sqrt{3x_{n-1}}=x_n$

故 x_n 单调增加 ……………………….(3 分)

$x_1=\sqrt{3}<3$ 设 $x_{n-1}<3$ 则有 $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}<\sqrt{3\times 3}=3$

故 x_n 有上界，因此 $\{x_n\}$ 有极限， ……………………..(6 分)

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_n=\sqrt{3x_{n-1}}$ 两端取极限得

$A=\sqrt{3A}$，解得 $A=0$ (舍去)，$A=3$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$ …………………….(9 分)

六. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ……………………..(1 分)

将点 A,B 代入得 $-1=a+b+c$ $-1=a-b+c$ 故 $b=0$ ……..(2 分)

椭圆方程两端对 x 求导得 $8x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$ ………….(4 分)

由 $y=ax^2+c$ 得 $\dfrac{dy}{dx}=2ax$ …………………………..(5 分)

根据 $-\dfrac{4x}{y}\Big|_A=2ax\Big|_A$ 即 $4=2a$ 得 $a=2$ …………………(7 分)

将点 A 代入 $y=2x^2+c$ 得 $c=-3$

故所求抛物线方程为 $y=2x^2-3$ ……………………….(9 分)

七. 设 $f(x)=3x^4-4x^3-6x^2+12x-20$ ……………………….(1 分)

$f'(x)=12x^3-12x^2-12x+12=12(x-1)^2(x-1)$ ……………..(2 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ $x=-1$ ……………………….(3 分)

$f(1)=-15<0$ $f(-1)=-31<0$ ……………………..(5 分)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ …………………….(7 分)

方程在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内各有一实根，故有两个实根 ………….(8 分)

八. $S = 2\pi rh = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$ ……………………….(3 分)

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi\sqrt{R^2 - r^2} + 4\pi r\frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi\frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$ …………….(5 分)

令 $\frac{dS}{dr} = 0$ 得 $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ……………………….(7 分)

$h = 2\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{2}R$ ……………………….(8 分)

由问题的实际意义, …., 故当 $h = \sqrt{2}R$，$r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ 时侧面积最大 ………(9 分)

九. 设 $f(x) = (x+1)\ln\frac{x+1}{x} - 1$ ……………………….(1 分)

$$f'(x) = \ln\frac{x+1}{x} + (x+1)(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}) = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}$$ ………………..(2 分)

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$ ……………………….(3 分)

故 $f'(x)$ 单调增加,

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}) = 0$

故当 $x > 0$ 时，$f'(x) < 0$ …………………….(6 分)

因此 $f(x)$ 单调减少，又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln(1+\frac{1}{x}) - 1 = \lim_{x\to+\infty}(x+1)\frac{1}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

故当 $x > 0$ 时，$f(x) > 0$ 即 $(x+1)\ln\frac{x+1}{x} > 1$ ……………(9 分)

十. $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$ 有垂直渐近线 $x = 1$ …………….(1 分)

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(y - x) = 5$ 有斜渐近线 $y = x + 5$ …………….(3 分)

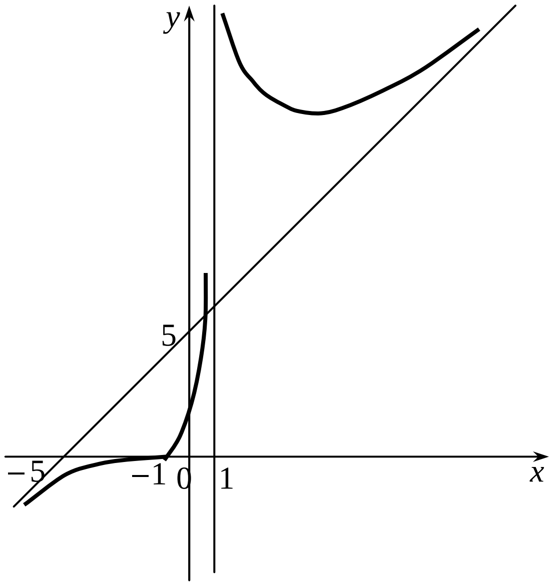
$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$$ ……………..(4 分)

令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ $x = 5$ ………………(5 分)

$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$ 令 $y'' = 0$ 得 $x = -1$ ……………(7 分)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$		$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$		$+$		$+$
y		拐点 $(-1,0)$		间断		极小值 13.5	

………………(10 分)



…………………..(12 分)

十一.　　令 $F(x)=(b-x)^{a}f(x)$　　……………………(2 分)

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

且由题设及 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=1$，有

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=0,$$ ……………………(4 分)

故　$F(a)=F(b)=0$　　……………………(5 分)

根据罗尔定理，在 (a,b) 内存在 ξ，使得　$F'(\xi)=0$

即　　$-a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)+(b-\xi)^{a}f'(\xi)=0$

由于 $a\neq 0$，可得　　$f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi).$　　……………………(8 分)