

2006 级《微积分 A》期末试卷(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

一、 求解下列各题 (每小题 7 分, 共 35 分)

1 设 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \arctan \sqrt{x^2 - 1}$, 求 y' .

2 求不定积分 $\int (\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} + x \ln x) dx$.

3 求极限 $\lim_{x \rightarrow +0} (\tan x)^{\frac{1}{1 + \ln x}}$.

4 计算定积分 $I = \int_0^a \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$, 其中 $a > 0$.

5 求微分方程 $y'' - 2y' = 4x + 1$ 的通解.

二、 完成下列各题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - ax^2 - bx - c$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a, b, c 的值.

2 求函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}(x - 4)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调区间和极值.

3 设 $y = y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x = \int_0^t \cos(u + t) du \\ y^2 \sin t - \cos t - 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

4 求证: $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

三、(8 分) 设 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增且可导, 又知对任意的 $x > 0$, 曲线 $y = y(x)$, 上点 $(0, 1)$ 到点 (x, y) 之间的弧长为 $s = \sqrt{y^2 - 1}$, 试导出函数 $y = y(x)$ 所满足的微分方程及初始条件, 并求 $y(x)$ 的表达式.

四、(8 分) 过点 $(-1, 0)$ 作曲线 $y = \sqrt{x}$ 的切线, 记此切线与曲线 $y = \sqrt{x}$ 、 x 轴所围成的图形为 D ,

(1) 求图形 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、(7 分) 求证: 方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2} dt = 0$ 有并且只有一个实根.

六、(8 分) 一圆柱形桶内有 500 升含盐溶液, 其浓度为每升溶液中含盐 10 克. 现用浓度为每升含盐 20 克的盐溶液以每分钟 5 升的速率由 A 管注入桶内(假设瞬间即可均匀混合), 同时桶内的混合溶液也以每分钟 5 升的速率从 B 管流出. 假设桶内的溶液始终保持为 500 升, 求任意 t 时刻桶内溶液的含盐量.

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且满足 $f(1) = \frac{2}{e} \int_0^{\frac{1}{2}} e^x f(x) dx$, 求证: 至少存在一

点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.