试卷(一)详解

一、是非题

1. 任何实对称矩阵都可表示成一系列初等矩阵的乘积．（　　）

分析　此题涉及初等矩阵的概念,以及初等矩阵与矩阵的关系．

解　非．（本题得分率为 0.85）

点评　矩阵可逆的充要条件是此矩阵可分解成若干个初等矩阵的乘积,而实对称矩阵未必可逆．

2. 极大线性无关组唯一的向量组未必是线性无关的向量组．（　　）

分析　本题涉及向量组的极大无关组的概念,正确命题应该是“极大线性无关组唯一的非零向量组必是线性无关的向量组。”

解　是．（本题得分率为 0.78）

点评　要注意的是一种特殊情况,即向量组中若含有零向量时,如 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的唯一极大无关组,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关．

3. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与其转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值,从而有相同的特征向量．（　　）

分析　本题涉及矩阵的特征值及特征向量,以及某些矩阵的特征值间的关系与特征向量之间的关系．

解　非．（本题得分率为 0.80）

点评　由矩阵的特征值和特征向量的性质可知,方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式,故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值,但对应的特征向量不一定相同．例如:矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值 1 和 -2,

而$\boldsymbol{A}$对应的特征向量是$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$对应的特征向量是$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$.

4. 任意两个同阶的对角矩阵都可以相似于同一个对角矩阵.

( )

分析 本题涉及相似矩阵的性质.

解 非. (本题得分率为0.70)

点评 两个同阶但秩不相等的矩阵一定不相似于同一个对角矩阵.要注意的是若矩阵$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$相似,即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.满足$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,这实际上也是矩阵$\boldsymbol{A}$经若干次初等行变换和初等列变换而成为矩阵$\boldsymbol{B}$的.而初等变换不改变矩阵的秩.即等价矩阵的秩相同.所以相似矩阵当然也是等价矩阵,也具有相同的秩.

5. 对应于实矩阵的相异特征值的实特征向量必是正交的.

( )

分析 涉及实对称矩阵特征值和特征向量的性质.

解 非.

例如:对应于实矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}$的两个相异特征值1和$-2$的实特征向量$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$不是正交的. (本题得分率为0.76)

点评 这里应当指出的是实对称矩阵与实矩阵的区别:不同的特征值对应的特征向量是正交的,此乃是实对称矩阵具有的性质,而实矩阵不同的特征值对应的特征向量是线性无关的.

6. 设$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,若$\boldsymbol{A}$为正定矩阵,$|\boldsymbol{P}|\neq 0$.则$\boldsymbol{B}$必为正定矩阵. ( )

分析 涉及到合同矩阵的概念及性质.

解 是.

与正定矩阵合同的矩阵必是正定矩阵. (本题得分率为0.79)

点评　这是两个矩阵合同具有的性质．合同矩阵除了等价、具有相同的秩外，还具有相同的正惯性指数，故正定性相同．

二、单项选择题

1. 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ e & 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 & h \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix}$ 的值等于　　（　　）

(A) $aehd - bfgc$；　　(B) $aehd + bfgc$；

(C) $(ae - bf)(hd - gc)$；　　(D) $(eh - fg)(ad - bc)$.

分析　本题为计算一个 4 阶行列式．

解　应选 D.

对行列式的第 1，4 行用拉普拉斯(Laplace)展开定理：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ e & 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 & h \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4+2+3} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = (ad - bc)(eh - fg).$$

（本题得分率为 0.76）

点评　计算行列式的值可以有很多种方法．本题也可用按某行或某列展开的办法，但比较起来，用拉普拉斯展开定理最简单，因为在选定的第 1，4 行中非零的二阶子式只有一个．

2. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆，且其逆矩阵为　　（　　）

(A) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$；　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$；

(C) $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$；　　(D) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

分析　若证某矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆及求其逆矩阵，只要能够找到矩阵 $\boldsymbol{B}$，使其满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$，或者从 4 个选项中直接找出矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 的逆矩阵 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$.

解　应选 A.

方法 1 因为 $(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}B+E)(A+B)^{-1}A$

$$=A^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}A$$

$$=E.$$

方法 2 因为 $B(A+B)^{-1}A=[A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1}$

$$=(B^{-1}+A^{-1})^{-1}.$$

(本题得分率为 0.63)

点评 这里要用到许多矩阵的运算性质,如矩阵乘法的分配律、结合律、矩阵乘积的逆矩阵等,没有固定的规律,要根据题目的条件熟练地运用运算性质,逐步化简从而得到所求的结果.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ 为两个 6 维向量组,若存在两组不全为零的数 a, b, c 和 k, l, m,使

$(a+k)\boldsymbol{\alpha}+(b+l)\boldsymbol{\beta}+(c+m)\boldsymbol{\gamma}+(a-k)\boldsymbol{\xi}+(b-e)\boldsymbol{\eta}+(c-m)\boldsymbol{\zeta}=0.$
则 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ 都线性相关;

(B) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ 都线性无关;

(C) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}$ 线性相关;

(D) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}$ 线性无关.

分析 此题可以按照向量组线性相关、线性无关的定义去判断.

解 应选 C.

将题目中的等式整理后得

$a(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi})+b(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta})+c(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta})+k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi})+l(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\eta})+m(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta})=\boldsymbol{0}$,
其中 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}$ 是一个向量组,且 a, b, c, k, l, m 是不全为零的数,符合向量组线性相关的定义.

(本题得分率为 0.64)

点评 注意到两组不全为零的数 a, b, c 和 k, l, m,若将其组成另一组数 $a+k, b+l, c+m$ 或 $a-k, b-l, c-m$,有可能其中一组全为零,所以无法分别判断 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ 都线性相关,或都线性无关. 另外,判断两组向量各自的线性相关性,不可以将两组向量放在一个组合式里.

4. 已知全体 2 阶反对称实方阵构成实线性空间 $M^{2\times 2}$ 的线性子空

间,它的一组基为 ( )

(A) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$;

(B) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$;

(D) $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$.

分析 首先要清楚反对称矩阵的概念与形式,其次涉及线性空间基的概念.

解 应选 D.

因为选项 A, B, C3 个选项中的矩阵都不是反对称矩阵,所以可排除.另外,2 阶反对称矩阵构成的线性子空间的维数是一维的,故它的一组基包含一个矩阵. (本题得分率为 0.68)

点评 反对称矩阵的主对角线元必是零,这是由于反对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 有 $a_{ij}=-a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 当 $i=j$ 时即有 $a_{ii}=-a_{ii}$,所以 $a_{ii}=0(i=1, 2, \cdots, n)$,即反对称矩阵的主对线元都为零.

三、填空题

1. 设 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\4 & 3 & -5 & 1\\-2 & 5 & 2 & 1\\3 & -2 & 1 & 1\end{vmatrix}$, A_{i2} 为 a_{i2} 的代数余子式 $(i=1, 2, 3, 4)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{4}A_{i2}=$ ________.

分析 求行列式 D 中第 2 列各元素的代数余子式之和,可将第 2 列元素都改写为 1,也就是说将 $\sum\limits_{i=1}^{4}A_{i2}$ 看做是以第 2 列的每个元素与各自的代数余子式乘积之和,即是一个第 2 列元素都为 1,其他列是与题

设行列式中元素相同的 4 阶行列式的值.

解 应填 29.

因为

$$\sum_{i=1}^{4}A_{i2}=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\4&1&-5&1\\-2&1&2&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\4&0&-5&1\\-2&0&2&1\\3&0&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&-5&1\\-2&2&1\\3&1&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}4&-5&1\\-6&7&0\\-1&6&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-6&7\\-1&6\end{vmatrix}=-(-36+7)=29.$$

(本题得分率为 0.71)

点评 此题的类型为行列式的有关代数余子式的练习中最常见的形式.

2. 设方阵 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&4\\\sqrt{3}&-1&0\\1&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

分析 关于分块对角矩阵的逆矩阵,应牢记公式:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&&&\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_s^{-1}\end{bmatrix}$$

与

$$\begin{bmatrix}&&&\boldsymbol{A}_1\\&&\boldsymbol{A}_2&\\&\iddots&&\\\boldsymbol{A}_s&&&\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&&\boldsymbol{A}_s^{-1}\\&&\iddots&\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}&&\\\boldsymbol{A}_1^{-1}&&&\end{bmatrix}.$$

解 应填$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}&1\\0&-1&\sqrt{3}\\1&0&0\end{bmatrix}$.

将题设矩阵记为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \end{bmatrix}$，其中$\boldsymbol{B}=(2)$．$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{B}^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)$．注意到$\boldsymbol{C}$为正交矩阵，所以$\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$．于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

（本题得分率为 0.79）

点评　(1) 识别出$\boldsymbol{C}$是正交矩阵，则求其逆矩阵的运算大为减少，这应该作为经验，不要错过使用的机会．

(2) 若不把矩阵前面的常数$\frac{1}{2}$乘到每个元素上，也可为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\left[\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1}=2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=2\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这样其中的分块矩阵$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$就不是正交矩阵了，但由于仅是二阶方阵，故求其逆矩阵也不是太麻烦．

3. 设 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $k(<m)$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 中独立方程有________个，多余方程有________个，其基础解系含________个解向量.

分析 解本题应依据齐次线性方程组解的结构定理，并且牢记一点：

基础解系含解向量的个数＝未知量的个数－系数矩阵的秩.

解 应填 k，$n-k$，$m-k$.

由于齐次线性方程组的系数矩阵为 $n\times m$ 阶矩阵，所以此方程组有 m 个未知量、n 个方程．因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=k$，所以独立方程有 k 个，其余的 $n-k$ 个方程为多余方程，并且基础解系含向量的个数＝未知量的个数－系数矩阵的秩＝$m-k$.　　（本题得分率为 0.80）

点评 系数矩阵的阶很重要，本题为 $\boldsymbol{A}_{n\times m}$，它的行数 n 代表方程个数，列数 m 代表未知量个数.

4. 由 $\mathbb{R}^5$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_7$ 生成的线性子空间的维数 $\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_7)=$________.

分析 涉及线性空间的生成子空间的基、维数的概念.

解 应填 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_7)$.

由于向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_7$ 的生成子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_7)$ 中任一个向量都是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_7$ 的线性组合，而向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_7$ 是由其极大无关组线性表示的，所以 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_7)$ 中的任一向量都是极大无关组的线性组合．因为极大无关组含向量的个数为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_7$ 的秩，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_7)$，所以也是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_7$ 生成子空间的维数.　　（本题得分率为 0.61）

点评 线性空间作为一个向量集合，基是它的极大无关组，而维数是它的秩.

5. $\boldsymbol{\beta}$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量，它在 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为________.

分析 向量空间中的任一向量都是一组基的线性组合，而组合系数即是此向量在这组基下的坐标.

解 应填$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})\\\vdots\\(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})\end{bmatrix}$.

设$\boldsymbol{\beta}$在标准正交基下的坐标为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$,即$\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i$,由于$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,…,$\boldsymbol{\alpha}_n$是标准正交基,故有

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}1 & (i=j),\\0 & (i\neq j),\end{cases}$$

所以

$$(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_k,\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i)=x_k(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_k)=\boldsymbol{x}_k\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

故

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})\\\vdots\\(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})\end{bmatrix}.$$

(本题得分率为0.48)

点评 由于题设中只有向量$\boldsymbol{\beta}$与标准正交基$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,…,$\boldsymbol{\alpha}_n$,所以要以已知的向量来表示向量的坐标.正是欧氏空间中的内积运算解决了这个问题.

6. 若3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$-1,0,1$,则与方阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$相似的对角矩阵为________.

分析 这是矩阵的特征值与特征向量的性质之一,即矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为λ,$\boldsymbol{\alpha}$为对应的特征向量,则矩阵$\boldsymbol{A}$的多项式$g(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{E}$的特征值为$g(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_m$,$\boldsymbol{\alpha}$为$g(\boldsymbol{A})$对应于特征值$g(\lambda)$的特征向量.可用两种方法

求解．

解 应填$\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

方法 1 由于 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为-1，0，1，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}+2\boldsymbol{E}$$
$$=\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}^3-\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}.$$

方法 2 由于 $\boldsymbol{B}=g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值λ 为-1，0，1，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为$g(\lambda)=\lambda^3-\lambda+2$，即 $f(-1)=-1+1+2=2$，$f(0)=2$，$f(1)=2$，故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的相似对角矩阵为$\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

（本题得分率为 0.82）

点评 在方法 1 中涉及到一个公式，即若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.（$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵），则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n$. 事实上，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$，故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n$.

四、计算题

1. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，n 为奇数．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+x&1&\cdots&1\\1&1+x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1+x\end{bmatrix},$$

$$
B=\begin{bmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} O & A \\ B^{-1} & O \end{bmatrix},
$$

其中 $x\neq 0$，求行列式$|A|$，$|B|$，$|C|$.

分析 本题包括求一般 n 阶行列式、对角行列式和分块矩阵的行列式，及矩阵的行列式与其逆矩阵的行列式的关系.

解

$$
|A|=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\sum_{i=1}^{n} c_i \to c_1}(n+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}(n+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=(n+x)\cdot x^{n-1},
$$

$$
|B|=\begin{vmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{vmatrix}=x^n,
$$

$$
|C|=\begin{vmatrix} O & A \\ B^{-1} & O \end{vmatrix}=(-1)^{n\times n}\,|A|\cdot|B^{-1}|=-|A|\frac{1}{|B|}
$$

$$
=-(n+x)x^{n-1}\frac{1}{x^n}=-\frac{n}{x}-1.
$$

（本题得分率为 0.71）

点评 应当注意：分块矩阵的行列式的求法用的是拉普拉斯展开定理. 记住下面这个公式是有益的：设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方

阵,则

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|.$$

事实上,由拉普拉斯展开定理可知前 m 行的非零 m 阶子式只有 $|A|$,它的代数余子式为 $(-1)^{1+2+\cdots+m+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)} \cdot |B| = (-1)^{2\cdot\frac{m(m+1)}{2}+nm} \cdot |B| = (-1)^{m(m+1)} \cdot (-1)^{mn} |B| = (-1)^{mn} |B|$.

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,矩阵 X 满足 $AX + B = 2X$,求矩阵 X.

分析 本题为求解矩阵方程.先运用矩阵的运算性质将未知矩阵 X 用已知矩阵表示出来,然后再计算.

解 由 $(2E-A)X = B$,故

$$X = (2E-A)^{-1}B,$$

$$(2E-A \vdots B) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(本题得分率为 0.83)

点评 此类题目也可先求出矩阵 $2E-A$,再求出其逆矩阵,然后再做矩阵的乘法.而用矩阵的初等变换求可使过程简单,但注意必须用初等行变换.

3. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad - x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b, \\ x_1 + \ \ x_2 \qquad\ = 1, \end{cases}$$

问：a, b 为何值时方程组有解？并分别求出方程组的解．

分析 涉及非齐次线性方程组解的情况、如何求解以及解的结构．

解 将增广矩阵 $\overline{\mathbf{A}}$ 用初等行变换化为规范阶梯形矩阵，即

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 & b-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & b-1 \end{bmatrix}.$$

当 $a = 2$, $b \neq 1$ 时，方程组无解；

当 $a \neq 2$, b 为任意数时，方程组有唯一解．此时

$$\overline{\mathbf{A}} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-1}{2-a} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+\dfrac{b-1}{2-a} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{b-1}{2-a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-1}{2-a} \end{bmatrix},$$

所以方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{b-1}{2-a}, \\ x_2 = \dfrac{1-b}{2-a}, \\ x_3 = \dfrac{b-1}{2-a}. \end{cases}$$

当 $a = 2$, $b = 1$ 时，方程组有无穷多组解，此时

$$\overline{\mathbf{A}} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{即} \begin{cases} x_1 = 1 + x_3, \\ x_2 = \ \ -x_3, \\ x_3 = \quad\ x_3, \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数． （本题得分率为 0.88）

点评 方程组中含有参数时，讨论参数为何值时方程组无解、有唯一解、有无穷多组解，然后在有解时求出方程组的解，这种题型是考试时常见的．关键是掌握非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 时，方程组无解；当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$ 时，方程组有唯一解；当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) < n$ 时，方程组有无穷多组解．

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 满足关系

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n, \\ y_{n+1} = \qquad 3y_n, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$．试求：

（1）$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（2）用 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}_n$；

（3）已知 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}_n$．

分析 本题除了要求方阵的特征值和特征向量外，还涉及到将方程组转化为矩阵表达式、递推公式以及利用方阵的对角化求方阵 $\boldsymbol{A}^n$，所以是比较综合性的试题．

解 题设关系式的矩阵表达式为

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},$$

即 $$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n.$$

（1）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)=0,$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.

当 $\lambda_1=1$ 时，由解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得对应的特征向量为 $k_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；

当 $\lambda_2=3$ 时，由解方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得对应的特征向量为 $k_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，其中 k_1，k_2 均为非零常数．

（2）由于 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$，据递推公式 $\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_{n-2}=\cdots=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_0,$$

即
$$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}.$$

（3）由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不相等的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&\\&3\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{\Lambda},$$

所以
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\text{，且 }\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中
$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{bmatrix}1&\\&3^n\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3^n-1\\0&3^n\end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_0=\begin{bmatrix}1&3^n-1\\0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^n\\3^n\end{bmatrix}.$$ （本题得分率为 0.47）

点评 若题目是求某个矩阵的特征值和特征向量，那么在表示一个特征值对应的特征向量时，应该是全部特征向量，并注明其中不包含零向量，也就是线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的全部非零的解向量．这点要特别注意．

5. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 得标准形 $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$，其中 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，试求所作的正交变换．

分析 本题是如何把实二次型化为标准形一类的题目．一般常见的是已知实二次型，求一正交变换化为标准形．而这里是已知标准形，且是由实二次型经正交变换所得，由此可知标准形中的平方项系数就是特征值，然后由不同的特征值与对应的特征向量正交，求出另外的特征向量．

解 由标准形可知二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1,1,-4$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\lambda=-4$ 对应的特征向量．设 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\lambda=1$ 对应的特征向量，则有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_3)=0$，即 $x_1+x_2+x_3=0$. 解此线性方程组，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

正交化、单位化后可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

所用的正交变换为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_3 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{cases}$$

（本题得分率为 0.72）

点评 用正交变换将实二次型化为标准形这部分内容几乎是逢考必有的，只是题目形式稍有变化．掌握好整个的步骤，即求实对称矩阵的特征值、特征值对应的特征向量，将特征向量正交化、单位化，写出正交变换及二次型的标准形，就一定可以解答不同的问法．

五、证明题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

(1) 证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=n$;

(2) 证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵，并求出它的相似对角矩阵．

分析 题(1)中要求证明有关矩阵秩的等式，一般要用到关于矩阵的秩的几个不等式．本题中将要用到：

① 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

② 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

题(2)中要求证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即要证明 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，并且当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵时，必有每个特征值的重数与对应的线性无关特征向量的个数相等，即代数重数=几何重数．

证 (1) 由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$, 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 都是 n 阶方阵，故有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

另一方面，由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\mathrm{r}(-\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$, 所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\\ =\ &\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(-\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\\ \geqslant\ &\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\mathrm{r}(4\boldsymbol{E})=n,\end{aligned}$$

即 $$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\geqslant n,$$
故 $$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=n.$$

(2) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $\lambda^2-2\lambda-3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值. 由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 -1 和 3.

当 $\lambda=-1$ 时,由齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得对应线性无关的特征向量的个数为 $n-r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. 由于 $r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$, 且 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=n$, 所以特征值 -1 对应的特征子空间的维数 $n-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.

同理,特征值 3 对应的特征子空间的维数为 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

从而 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵,其相似对角阵为

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\text{ 个}, \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\text{ 个}. \end{array}$$

(本题得分率为 0.48)

点评 题(1)中证明 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\leqslant n$, 若不直接使用公式,也可如下证明之.

由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的列向量都是方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,是由方程组的基础解系线性表示的,所以 $r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\leqslant n-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$, 即 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\leqslant n$.

2. 已知二维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}$; 并证明: $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$ 下的坐标与其在 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标相同.

分析 本题用到的概念是线性空间的维数、基和坐标，要熟练地掌握向量、基和坐标的计算．

证 由题设可知，有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix},$$

且设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\6&-3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3&1\\-6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 下的坐标与其在 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标相同．

（本题得分率为 0.44）

点评 要注意线性空间中的向量在不同的基下的坐标一般是不相同的，但不排除也会有相同的情况，比如本题．另外，线性空间中的向量在同一组基下的坐标是唯一的．

六、应用题

某城镇有电厂与煤矿，已知电厂生产阶值 1 万元的电需消耗 0.1 万元的煤，煤矿生产价值 1 万元的煤需耗电 0.2 万元．现要求在一个月内电厂向城镇提供价值 20 万元的电，煤矿向城镇提供价值 50 万元的煤，问：电厂和煤矿各生产多少产值的电和煤才能满足要求？

分析 应用问题应先根据题设条件列出关系式，然后根据问题的类型尽量运用线性代数中相应的方法去解．

解 设电厂生产产值为 x（万元），煤矿生产产值为 y（万元），则

$$\begin{cases}20 = x - 0.2y, \\ 50 = -0.1x + y,\end{cases}$$

即
$$\begin{bmatrix}20\\50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0.2\\-0.1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

故

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0.2\\-0.1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}20\\50\end{bmatrix}=\frac{1}{0.98}\begin{bmatrix}1 & 0.2\\0.1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\50\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{0.98}\begin{bmatrix}30\\52\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}30.6\\53.1\end{bmatrix},$$

即电厂和煤矿分别生产产值为30.6万元的电和产值为53.1万元的煤.

（本题得分率为0.46）

点评 题目中$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$的计算也可用矩阵初等变换的方法：

$$\begin{bmatrix}1 & -0.2 & 20\\-0.1 & 1 & 50\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -0.2 & 20\\0 & 0.98 & 52\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 30.6\\0 & 1 & 53.1\end{bmatrix},$$

则
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30.6\\53.1\end{bmatrix}.$$

试卷(一)考核内容分值表

考核内容	行列式及其计算	矩阵及其运算	向量与线性方程组	线性空间与线性变换	特征问题与相似对角矩阵	实二次型
分值	15	19	21	16	19	10

关于试卷(一)的说明

试卷(一)详解中每题给出的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,其取值范围在0与1之间.

由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同.因此,同一题目相对于不同的考生群体的得分率是不同的.为能准确反映重点大学本科生在每一题上的得分率,本书特意对试卷(一)抽取了上海交通大学六个学院的部分试卷,以此为样本进行了详细统计.读者根据得分率的高低,可自行判断该(类)题目的难易程度.显然,这对于非重点大学的学生同样具有重要的参考价值.