

工科数学分析期末试题 (A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷背面也可做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} \right) =$ _____.

2. 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, $y_3 = e^x$ 的三阶常系数线性齐次微分方程为 _____.

3. 已知 $f(2) = 0$, $f'(2)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \arctan x^3)}{e^{2x^3} - 1} =$ _____.

4. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.

5. 设 $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数, 且 $\frac{dy}{dx} = xe^x$, 则当 $x > 0$ 时, $\frac{d^2x}{dy^2} =$ _____.

二. (8 分) 已知点 (1,3) 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 求 a, b 的值.

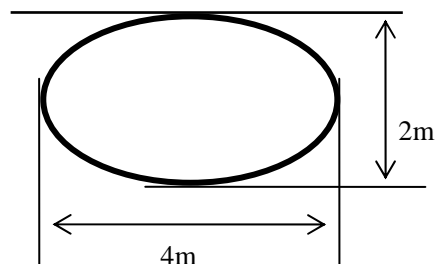
三. (8 分) 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 求不定积分 $\int xf'(x)dx$.

四. (8 分) 设方程 $x - y + \cos y = 1$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

五. (9 分) 求反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan x dx$.

六. (11 分) 求微分方程 $xdy - (x + 2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$, 直线 $x = 0$, $x = 1$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小.

七. (8 分) 一椭圆 (如图) 垂直立于水中, 水面与椭圆的最高点相齐, 求椭圆所受到的水压力. (要画出坐标系)



八. (11 分) 求微分方程 $y'' + y' - 2y = (x-1)e^x$ 的通解。

九. (8 分) 一单位质点 (质量为 1kg) 沿 x 轴运动。已知质点所受到的力为 $f(x) = -\sin x$ (单位: N , 方向与 x 轴平行)。若质点的初始位置在原点, 初速度 $v_0 = 2\text{m/sec}$, 求质点的位置 x 与速度 v 所满足的微分方程, 并求出此微分方程的解。

十. (9 分) 判断方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^1 e^{x^2} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有几个不同实根。

十一. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 单调增加, 且是奇函数, 设

$$F(x) = \int_0^x (2t - x)f(x-t)dt$$

证明 $F(x)$ 单调减少, 且是奇函数。