2014 级《微积分 A》（上）期中答案及评分标准　　2014.11.22

一．1　$\frac{1}{2}$　　2　3，$\frac{1}{2}x^3$;　　3　-720;

4　$x=-1,$第一类间断点（跳跃型），　$x=0,$第二类间断点（无穷型）；

5　$dy=-\frac{1}{1+x^2}f'(\arctan\frac{1}{x})dx.$

二．　1　D;　2　B;　3　D;　4　A;　5　C.

三．　考虑极限　$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})}$,　　..........................2 分

其中　$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})$　　令 $t=\frac{1}{x}$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\ln\tan t-\ln t}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{\sec^2 t}{\tan t}-\frac{1}{t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{t\sec^2 t-\tan t}{2t^2\tan t}=\lim_{t\to0+}\frac{t\sec^2 t-\tan t}{2t^3}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t\sec^2 t\tan t}{6t^2}=\frac{1}{3}.$$ ....5 分

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})}=e^{\frac{1}{3}}.$　　..........................6 分

由函数极限与子数列极限得关系知：$\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}.$ .....8 分

四．证明：设 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，　$f(1)=0.$　　.............2 分

$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,$　　$f'(1)=0.$

$f''(x)=\frac{x-1}{x^2}>0\quad(x>1)$，　　............. 4 分

知当 $x>1$时，$f'(x)$严格单增，所以有$f'(x)>f'(1)=0.$

这样当 $x>1$时，$f(x)$严格单增，所以有$f(x)>f(1)=0.$

即　$f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)>0$，又当 $x>1$时，$x+1>0,$

所以 $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1} \quad (x>1)$. .... 8 分

五. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(\cos t - 1)}{\sin\dfrac{t}{2}}$ .... 4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\sin t \sin\frac{t}{2} + 2(\cos t - 1)\cos\frac{t}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}}.$$ .... 8 分

六. $y = \dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{6}\ln|x^2 - x + 1| + \dfrac{1}{\sqrt{3}} arc\cot\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + (\sin x)^x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} - \frac{2}{3+(2x-1)^2} + (\sin x)^x(\ln\sin x + x\cot x).$$

（对数部分 3 分，反余切部分 3 分，幂指函数部分 4 分）

（不化简不扣分）

七. $f(0) = 1, \quad f(0-) = \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{a(\sqrt{1+x}-1)}{x} = \dfrac{a}{2}.$

$$f(0+) = \lim_{x\to 0+}[b(e^{-\frac{1}{x}} + 2) + c\ln(1+x)] = 2b.$$

要使 $f(x)$在$x=0$处连续，只需 $f(0+) = f(0-) = f(0)$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2} = 2b = 1, \quad \Rightarrow a = 2, b = \dfrac{1}{2}, c$ 任意. .... 3 分

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0-}\frac{2(\sqrt{1+x}-1)-x}{x^2} = -\frac{1}{4}$$ .... 5 分

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{x}} + 2) + c\ln(1+x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0+}[\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} + c\frac{\ln(1+x)}{x}] = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} + c$$ 令 $t = \dfrac{1}{x}$

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{e^t}+c=c$ .... 7 分

要使 $f(x)$在$x=0$处可导，只需 $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)$

故只要 $c=-\frac{1}{4}$, $\therefore a=2, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{4}$时$f(x)$在$x=0$处可导. ....8 分

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1+x}-x-2}{x^2\sqrt{1+x}} & x<0 \\ -\dfrac{1}{4} & x=0 \\ \dfrac{1}{2x^2}e^{-\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{4(1+x)} & x>0 \end{cases}$$ .... 1 0 分

八. 设 t 时刻漏斗水平面高度为 h,水桶水平面高度为 H.

则有 $\frac{1}{3}\pi(h\tan\frac{\pi}{6})^2h+\pi b^2H=\frac{1}{3}\pi a^2a\cot\frac{\pi}{6}$

即 $\frac{1}{9}\pi h^3+\pi b^2H=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$ .... 3 分

上式两边对 t 求导得： $\frac{1}{3}h^2\frac{dh}{dt}+b^2\frac{dH}{dt}=0$ .... 6 分

由题意知 $\frac{dh}{dt}=-\frac{dH}{dt}$

代入上式得 $\frac{1}{3}h^2-b^2=0$

得 $h=\sqrt{3}b$

故此时漏斗水平面的高度为$h=\sqrt{3}b$. ....8 分

九. 方程两边对 x 求导得：

$(y+xy')\cos(xy)-\frac{1}{x+1}+\frac{y'}{y}=0$ ....2 分

$y'=\frac{y[1-(x+1)y\cos(xy)]}{(x+1)[xy\cos(xy)+1]}$ ....4 分

又当 x=0 时，由原方程得， $y(0)=e$ ....6 分

代入上式知 $y'(0)=e(1-e)$ ....8 分

所以曲线在 x=0 时的切线方程为： $y-e=e(1-e)x$ ...10 分

十. 证明：构造辅助函数：$F(x)=f(a)g(x)+f(x)g(b)-f(x)g(x)$ …2 分

由题意知 $F(x)$在$[a,b]$上可导，又

$F(a)=f(a)g(b)=F(b)$， .... 4 分

所以$F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理知：

至少存在一点$\xi\in(a,b)$， 使得$F'(\xi)=0$. ....6 分

又 $F'(\xi)=f(a)g'(\xi)+f'(\xi)g(b)-f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)[g(b)-g(\xi)]-g'(\xi)[f(\xi)-f(a)]=0$

又因为$g'(x)\neq 0$， 所以$g'(\xi)\neq 0$，

所以$\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. 8