(工科数学分析 B 期中) 参考答案 (2006.4)

一. 1. $(\lambda\vec{a}+17\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=3\lambda\vec{a}^{2}+(51-\lambda)\vec{a}\cdot\vec{b}-17\vec{b}^{2}$

$$=12\lambda+(51-\lambda)\times 2\times 5\times(-\frac{1}{2})-17\times 5^{2}=17\lambda-680=0$$ ………….(5 分)

$$\lambda=40$$ ………………..(6 分)

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(1+\varphi')$ $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-\varphi')+f_2'$ ……………….(4 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f_{11}''\cdot(-\varphi')+f_{12}''](1+\varphi')-f_1'\cdot\varphi''$$ …………………(6 分)

3. 〈**解 1**〉 $\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$,

将点 $(1,-2,1)$ 代入，解得 $\frac{dy}{dx}=0$，$\frac{dz}{dx}=-1$， $\vec{n}=\{1,0,-1\}$ …………………(4 分)

切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$

法平面 $(x-1)-1(z-1)=0$ 即 $x-z=0$ …………………(6 分)

〈**解 2**〉 $\vec{n}=\{2x,2y,2z\}\times\{1,1,1\}=\{2,-4,2\}\times\{1,1,1\}=6\{-1,0,1\}$ …………（4 分）

切线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}$

法平面 $-(x-1)+(z-1)=0$ 即 $x-z=0$ ………………..(6 分)

4. 原式 $=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}ye^{xy}dx+\int_{1}^{2}dy\int_{1}^{2}ye^{xy}dx$ …………….……(2 分)

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{xy}\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}dy+\int_{1}^{2}e^{xy}\Big|_{1}^{2}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e^{2y}-e)dy+\int_{1}^{2}(e^{2y}-e^{y})dy$$

$$=\frac{1}{2}e^{4}-e^{2}$$ ……………….……..(6 分)

二. 1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ ……….............(2 分)

$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_M=-\dfrac{1}{27}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_M=-\dfrac{2}{27}$ $\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_M=\dfrac{2}{27}$ ……………..(3 分)

$\vec{T}=\{1,4t,-8t^3\}\big|_{t=1}=\{1,4,-8\}$ $\vec{T}^0=\{\dfrac{1}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{8}{9}\}$ …………….(5 分)

$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{T}}=-\dfrac{1}{27}\times\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{27}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{27}(-\dfrac{8}{9})=-\dfrac{25}{243}$ ………………….(7 分)

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+2f\cdot f'\cdot(-\dfrac{\partial z}{\partial x})$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+2f\cdot f'}$ ………………..(3 分)

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2f\cdot f'\cdot(1-\dfrac{\partial z}{\partial y})$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2f\cdot f'}{1+2f\cdot f'}$ ………………..(6 分)

$dz=\dfrac{1}{1+2f\cdot f'}dx+\dfrac{2f\cdot f'}{1+2f\cdot f'}dy$ ………………….(7 分)

3. 〈**解 1**〉 $d=\dfrac{\left|\{1,1,1\}\times\{2,-2,1\}\right|}{\left|\{2,-2,1\}\right|}=\dfrac{\left|\{3,1,-4\}\right|}{3}=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$ …………………..(7 分)

〈**解 2**〉 过点 $(1,0,2)$ 与已知直线垂直的平面为

$2x-2y+z-4=0$ ………………….(2 分)

它与直线的交点为 $N(\dfrac{2}{9},-\dfrac{11}{9},\dfrac{10}{9})$, ………………….(5 分)

$d=MN=\sqrt{(1-\dfrac{2}{9})^2+(\dfrac{11}{9})^2+(2-\dfrac{10}{9})^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$ ………………….(7 分)

4. 原式 $=\int_0^1 f(z)dz\int_0^{1-z}dx\int_0^{1-x-z}dy$ ………………….(3 分)

$=\int_0^1 f(z)dz\int_0^{1-z}(1-x-z)dx$ …………………(5 分)

$=\int_0^1 f(z)(\dfrac{1}{2}-z+\dfrac{z^2}{2})dz=\int_0^1 f(z)\dfrac{1}{2}(z-1)^2dz$ …..………(7 分)

三. $\frac{\partial z}{\partial x}=4y-2xy-y^2=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}=4x-x^2-2xy=0$

解得 $x=y=\frac{4}{3}$ 得驻点 $P_1(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ ………………..(4 分)

在边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上, $z\equiv 0$ ………………..(5 分)

由 $x+y=6$ 得 $y=6-x$, 代入目标函数得

$$z=2(x^2-6x)$$

$\frac{dz}{dx}=2(2x-6)=0$ 得 $x=3$ 故 $y=3$ 得点 $P_2(3,3)$ …………(7 分)

$z(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{64}{27}$ $z(3,3)=-18$ …………….(8 分)

$z_{\max}=\frac{64}{27}$ $z_{\min}=-18$ ……………..(9 分)

四. 解 $\begin{cases} x+2z=0 \\ y+z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$ 得 L_1 与 π 的交点 $(0,-1,0)$ ……………(3 分)

L_1 的方向向量为 $\bar{s}_1=\{1,0,2\}\times\{0,1,1\}=\{-2,-1,1\}$ ……………….(5 分)

L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,1,1\}\times\{-2,-1,1\}=\{2,-3,1\}$ ……………….(7 分)

$L:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$ ………………..(9 分)

五. (1) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\cos\varphi dr$ ………………….(3 分)

$=\frac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^6\varphi d\varphi$ …………………..(5 分)

$=-\frac{64\pi}{35}\cos^7\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{64}{35}\pi$ …………………..(7 分)

(2) $$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_1^{\sqrt{2-\rho^2}}z\sqrt{\rho^2+z^2}dz$$ ……………………(10 分)

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1\rho(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\sqrt{2-\rho^2}}d\rho$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1\rho[2^{\frac{3}{2}}-(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}]d\rho$$ ……………………(12 分)

$$=\frac{2\pi}{3}[\sqrt{2}\rho^2-\frac{1}{5}(\rho^2+1)^{\frac{5}{2}}]\Big|_0^1=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}\pi$$ ………………(14 分)

六. $$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho d\rho\int_0^h(z^2+f(\rho^2))dz$$ …………………(2 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho d\rho\int_0^h z^2dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho\int_0^h dz$$

$$=\frac{1}{3}\pi t^2h^3+2\pi h\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho$$ …………………(4 分)

$$\frac{dF}{dt}=\frac{2}{3}\pi th^3+2\pi htf(t^2)$$ ……………………(6 分)

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{2t}=\lim_{t\to0^+}[\frac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(t^2)]$$

$$=\frac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(0)$$ …………………(8 分)

七. $f_x'=ay^2+3cx^2z^2$ $f_y'=2axy+bz$ $f_z'=by+2cx^3z$

$$gradf(M)=\{4a+3c,4a-b,2b-2c\}$$ ……………….(3 分)

$4a+3c=0$ $4a-b=0$ $2b-2c=64$ ……………….(6 分)

解得 $a=6$ $b=24$ $c=-8$ ………………..(8 分)