北京理工大学 2015-2016 学年第二学期

《微积分 A》期中试题

班级________________ 学号__________________ 姓名___________________

(本试卷共 6 页，十个大题解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设$\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{v}=3\vec{a}-\vec{b}$,其中$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1,(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$，则以$\vec{u},\vec{v}$为邻边的平行四边形的面积$S=$________________.

2. 设 L 是以点 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界曲线，则 $I=\oint_L (x+y)dl=$____________________.

3. 平面$x+y-9=0$与直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$的夹角$\varphi=$_____________.

4. 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，则$dz\big|_{(0,1)}=$____________________________ .

5. 平面$3x+2y+z=1$被椭圆柱面$2x^2+y^2=1$截下的部分的面积$S=$_____.

二、(8 分) 设$z=g(x^2-y^2)+f(xy,\dfrac{x}{y})$，其中$g$二阶可导，$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

三、(10 分) 二重积分 $I=\iint_D ydxdy$，其中 D 是直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

(1) 试写出 $I=\iint_D ydxdy$ 在直角坐标系(两种)和极坐标系下的累次积分；

(2) 计算 $I=\iint_D ydxdy$ 的值.

四、(8 分) 求直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 在平面 $\pi: x+y-2z-2=0$ 上的投影直线 L_0 的方程.

五、（8 分）计算三重积分$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} e^{\frac{y}{1-x-z}}dz.$

六、(8 分)用变换$\begin{cases} u = x \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$化简方程$y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$，并求$z(x,y)$的表达式.

七、（10 分）求由曲面 $y^2+2z^2=4x$ 和平面 $x=2$ 所围成的质量分布均匀的立体 Ω 的重心坐标.

八、（10 分）计算 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$，其中 V： $x^2+y^2+z^2\le 1$，

$$f(x,y,z)=\begin{cases} 0, & z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2}, & 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}, & z<0 \end{cases}.$$

九、（10 分）曲线$\begin{cases}4z=x^2\\ y=0\end{cases}$绕 z 轴旋转得一旋转曲面 S，曲面 S 上某点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面为 π，若平面 π 通过曲线$\begin{cases}x=t^2\\ y=t\\ z=3(t-1)\end{cases}$上对应于 $t=1$ 点处的切线 L，（1）写出曲面 S 的方程；（2）写出切线 L 的标准方程；（3）求平面 π 的方程.

十、（8 分）设$M(x_0,y_0,z_0)$是椭圆$\begin{cases}2x^2-y^2+z^2=5\\ x+y=0\end{cases}$上的点，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$是函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在$M$点处沿方向$\vec{e}=\{1,-1,1\}$的方向导数，求使$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$取得最大值和最小值的$M$点的坐标及$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$的最大值和最小值.