人工智能/计算机/网络安全学院本科生 2018—2019 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业(大类)：____________________ 年级：20 _____ 学号：____________ 姓名：________________ 成绩:

说明：A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵, $R(A)$或 $r(A)$表示矩阵 A 的秩

A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$表示方阵 A 的行列式, $\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$ 的内积。

草 稿 区

得 分

一 .客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √ ”，错的后面括号中填“×”，

4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. A 是 $m\times n$ 矩阵， $R(A)=m$ ，则非齐次线性方程组 $Ax=b\ (b\neq 0)$ 有解。 (   )

2. 若$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 为 n 维欧式空间 V 的一个基底，T 为 V 中一个正交变换，则对于任意的$i,j=1,2,\cdots,n$ 有

$\left\langle \mathrm{T}\varepsilon_i,\mathrm{T}\varepsilon_j\right\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$。 (   )

3. 在五阶行列式中，项 $\alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{45}\alpha_{14}\alpha_{53}$ 的符号为-1。 (   )

4. n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件是： (   )

(A) A 是可逆矩阵　　(B) 对某个 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$ 有 $X^TAX>0$

(C) A 的所有的特征值均为正值　　(D) 可以找到一个正交矩阵 F，使 F^TAF 为对角矩阵

5. 设 A,B 均为 n 阶正交矩阵阵，$C=AB$, 则必有: (   )

(A) $A+B=O$　　(B) C 为正交矩阵　　(C) $|A|=0$或$|B|=0$　　(D) $|A|+|B|=0$

6. 矩阵 A,B 满足: $P^TAP=B$，其中矩阵 P 是可逆矩阵。则其中错误的是: (   )

(A) 矩阵 A 与 B 是相似关系　　(B) 矩阵 A 与 B 是合同关系

(C) 矩阵 A 和 B 的秩相同　　(D) 矩阵 A 与 B 是等价关系

7. 设 A,B 为满足 $AB=O$ 的两个 n 阶非零矩阵， 则必有: (   )

(A) $|A|\neq 0$　　(B) $|B|\neq 0$　　(C) A 的列向量组线性无关　　(D) 线性方程组 $AX=O$ 有非零解

8. 线性空间 R^5 中前 3 个分量和为 0 的全体向量构成的子空间的维数是: (   )

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

得 分

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

草 稿 区

1．计算四阶行列式 $|D|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$。

2. 计算n阶行列式 $|D|=\begin{vmatrix} a_1+y & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+y & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+y & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+y & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n+y \end{vmatrix}$，其中$n>2$。

得 分

三、设 A，B 均为三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵，已知 $AB=2A+B$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$， 求：$A-E$。

（本题 10 分）

草 稿 区

得 分

四、k 为何值时, 下面方程组有唯一解, 无解, 有无穷多组解?在有解情况下, 求出其全部解。 （本题 **14** 分）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

草 稿 区

得 分

五、设$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 是 n 维向量空间V 的一个基，$[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]$ 也是V 的一个基，

(1) 求后一个基 $[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]$ 到前一个基 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 的过渡矩阵 A。

(2) 已知向量β在前一个基$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$下的坐标$X=(n,n-1,\cdots,2,1)^T$，求$\beta$在后一个基

$[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]$ 下的坐标 Y。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=-3x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ （本题 14 分）

(1) 写出它的矩阵 A；

(2) 用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，并求出所用的正交变换；

(3) 判定该二次型是哪种二次型(正定，负定，半正定，半负定，不定)。

草 稿 区

得 分

七、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，$\beta_2$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$线性无关（其中$\lambda$为实数）。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

八、设实矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T$， $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位阵， $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维非零实列向量。

求证：(1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} = 1$;

(2) 当 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} = 1$ 时， $\boldsymbol{A}$ 不可逆。 （本题 9 分）

草 稿 区

得 分

九、A是n阶方阵，证明：$A^2=E$成立的充要条件是$R(A+E)+R(A-E)=n$。　　　（本题 5 分）

草 稿 区