2007-2008 学年第二学期期中试题(A 卷)参考解答及评分标准

2008 年 4 月 18 日

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $3x^2+2y^2+2z^2=13,\quad \vec{n}=\pm\{3,-2,4\}$, or $\vec{n}=\pm\{6,-4,8\}$

2. $\vec{b}=\{\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0\}$;　　3. $\lambda=2,\quad d=\frac{29}{\sqrt{30}}$;

4. $dz(1,0)=2dx-3dy$;　　5. 最大值为 5；　6. $I=\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dy.$

二、（10 分）

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'+\frac{1}{y}f_2'$;　…………………………………..**3 分**

$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1'-\frac{x}{y^2}f_2'$;　…………………………………..**6 分**

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+2x^3yf_{11}''-\frac{x^2}{y}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$　…………………..**10 分**

三、（10 分）

解：$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+y-2x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=x-2y=0\end{cases}$，得驻点：$(0,0),\quad (\frac{1}{4},\frac{1}{8}).$ 又

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$　……………………..**4 分**

在点$(0,0)$处：$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$ 且

$B^2-AC=-3<0,$　又$A=-2<0,$ 所以

$f(x,y)$在$(0,0)$处取得极大值，$f_{\max}=0$, $(0,0)$为极大值点；…………..**7 分**

同理在点$(\frac{1}{4},\frac{1}{8})$处：$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=1,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$ 且

$B^2-AC=3>0,$ 所以 $f(x,y)$在$(\frac{1}{4},\frac{1}{8})$处不取得极值 ………………..**10 分**

四、（12 分） 解：（1）切线 L 的方程：

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+4z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$，在点 $M(1,-2,1)$ 处解得：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$，

可得切向量为 $\vec{\tau}=\{4,-3,-5\}$，所以切线 L 的方程为：$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{-5}.$

(注：此处求切向量还可用第八题的方法) ………………………………**5 分**

（2）切平面 π 的方程：

法向量 $\vec{n}=\{4x,-2y,2\}|_M=2\{2,2,1\}$，所以切平面 π 的方程为：

$2x+2y+z+1=0.$ ………………………………………**9 分**

（3）夹角：

$\sin\varphi=\dfrac{|\vec{\tau}\cdot\vec{n}|}{|\vec{\tau}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$，所以夹角 $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$. ……………………**12 分**

五、（10 分）解：$z+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}-e^{x^2}=0,\Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^{x^2}-z}{x+e^z}.$ ……………**3 分**

$x\dfrac{\partial z}{\partial y}+e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}+2e^{4y^2}=0,\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2e^{4y^2}}{x+e^z}.$ ……………**6 分**

$\dfrac{\partial z}{\partial y}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$ ……………**8 分**

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial z/\partial y+e^z\,\partial z/\partial y\,\partial z/\partial x}{x+e^z}=\frac{2e^{4y^2}(x+e^z)+2e^{z+4y^2}(e^{x^2}-z)}{(x+e^z)^3}.$$

…………………………**10 分**

六、（12 分） 解：求交点：$\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ x=y^2 \end{cases}$，得 $(1,1)$，其极坐标为 $(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$,

又曲线 $x=y^2$ 的极坐标方程为：$\rho=\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$， ……………………**3 分**

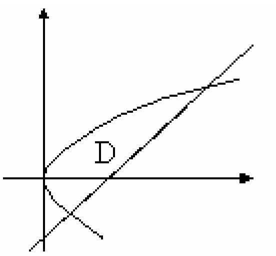
故 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

………………………**7 分**

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \rho^2 d\rho$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi+\frac{2}{45}(1+\sqrt{2}).$$ ………..………….**12** 分

七、（10 分）　　解：$V=\iint_D |2-x+y|dxdy$　…………..**3** 分



$$=\iint_D (2-x+y)dxdy$$

$$=\int_{-1}^{2} dy\int_{y^2}^{2+y} (2-x+y)dx$$ ………..…..**6** 分

$$=\frac{81}{20}$$ ……………………..**10** 分

八、（12 分）

解：构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(4-x-y-z)$$

$$\begin{cases} F_x'=2x-2\lambda x-\mu=0 \\ F_y'=2y-2\lambda y-\mu=0 \\ F_z'=2z+\lambda-\mu=0 \\ z=x^2+y^2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$，得驻点：$(-2,-2,8),\quad (1,1,2)$，…………..**5** 分

又 $u(-2,-2,8)=72,\quad u(1,1,2)=6$，

所以最大值为$u_{\max}=72$，最大值点为：$M(-2,-2,8)$.　…………..**8** 分

Γ 在上述最大值点 M 处的切向量为：

$$\vec{\tau}=\{2x,2y,-1\}|_M\times\{1,1,1\}=\{-4,-4,-1\}\times\{1,1,1\}=\{-3,3,0\}$$

又点 M 的向径为：$\overrightarrow{OM}=\{-2,-2,8\}$，

$\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{OM}=\{-3,3,0\}\cdot\{-2,-2,8\}=0$，所以$\tau\perp\overrightarrow{OM}$，即

曲线Γ在上述取得最大值点处的切向量与最大值点的向径正交.

……………..……..**12** 分