2019 级 一元函数微分 参考答案

一、选择题（$4' \times 5 = 20'$）

(1) 当$x \to 1$，与$\ln x$等价的无穷小量为（D）

A. $\sin x$

B. $e^x - e$

C. $\cos x - \cos 1$

D. $1 - \frac{1}{x}$

解：简单的等价无穷小替换问题。设$t = x - 1$可以看得更清楚。

(2) 设$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in Q \\ \frac{1}{x}, x \notin Q \end{cases}$，则$f(x)$在$(-1,1)$内（B）

A. 有界

B. 无界

C. 连续

D. 可导

解：由于有理数和无理数的稠密性，$f(x)$必然是无界的，而它显然不连续，更称不上可导了。

(3) 若函数$f(x) = \begin{cases} x|x|, x \le 0 \\ x\ln x, x > 0 \end{cases}$，则在$x = 0$是$f(x)$的（C）

A. 可导点，极值点

B. 可导点，非极值点

C. 不可导点，极值点

D. 不可导点，非极值点

解：先判断可导性，求极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t\ln t - 0}{t}$$

极限不存在，不可导。而极值点意味着在$(-\delta, \delta)$邻域内，总有$f(0) = 0 > f(x)$，这一点是容易验证满足的。

(4) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f(a) = \max\{f(x) | a \le x \le b\}$，则（B）

A. $f'_+(a) = 0$

B. $f'_+(a) \le 0$

C. $f'_+(a) \geq 0$

D. $f'_+(a) < 0$

解：考虑a是$f(x)$取最大值的点，则它附近必为减函数，故$f'_+(a) \leq 0$.

(5) 设$f(x) = (x^2 + x - 2)|\sin 2\pi x|$则$f(x)$在区间$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$内，不可导点的个数是（A）

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

解：将含有绝对值的函数改写为分段函数总是有益的，故

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + x - 2)\sin 2\pi x, x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \\ (x^2 + x - 2)\sin 2\pi x, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ -(x^2 + x - 2)\sin 2\pi x, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ (x^2 + x - 2)\sin 2\pi x, x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

分段求导，得

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x + 1)\sin 2\pi x - 2\pi(x^2 + x - 2)\cos 2\pi x, x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \\ (2x + 1)\sin 2\pi x + 2\pi(x^2 + x - 2)\cos 2\pi x, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ -(2x + 1)\sin 2\pi x - 2\pi(x^2 + x - 2)\cos 2\pi x, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ (2x + 1)\sin 2\pi x + 2\pi(x^2 + x - 2)\cos 2\pi x, x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

计算分段点处的左右导数，得$x = 0, \frac{1}{2}$时，函数不可导，尽管$x = 1$也是分段点，但此刻左右导数均为零，可导。

二、填空题（$4' \times 5 = 20'$）

(1) 设$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$，则$f^{(3)}(0) = 0$.

解：求就完了。

(2) 设函数$f(x) = \begin{cases} e^x, x < 0 \\ ax + b, x \geq 0 \end{cases}$在$x = 0$处可导，则$a = 1, b = 1$.

解：考察可导的特性，首先分段点处应有两段函数值相等，故有

$$b = 1$$

再考虑可导的定义

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

由于是分段函数，故考虑左右极限

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t-1}{t}=1$$
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{at+b-1}{t}=a$$

这意味着

$$a=1$$

(3) 设函数$f(x)=\ln(1-2x), n\geq 2$，则$f^{(n)}(0)$为$-(2n-2)!!$

解：先求几阶导数查看规律

$$f^{(1)}(0)=-\frac{1}{1-2x}=-1$$
$$f^{(2)}(0)=-\frac{2}{(2x-1)^2}=-2$$
$$f^{(3)}(0)=\frac{8}{(2x-1)^3}=-8$$
$$f^{(4)}(0)=-\frac{48}{(2x-1)^4}=-48$$

猜测

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2x-1)^n}=(-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!!}{(2x-1)^n}, n\geq 2$$

显然对$n=2,3,4$成立，假设对$n=k$有

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\frac{(2k-2)!!}{(2x-1)^k}$$

则当$n=k+1$时

$$f^{(k+1)}(x)=(-1)^{k+2}\cdot 2k\frac{(2k-2)!!}{(2x-1)^{k+1}}=(-1)^{k+2}\frac{2k!!}{(2x-1)^{k+1}}$$

故证得

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2x-1)^n}=(-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!!}{(2x-1)^n}, n\geq 2$$

即

$$f^{(n)}(0)=-(2n-2)!!$$

(4) 设有界函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，且存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b$，则$b=0$.

解：这是一道趣题。直观上讲显然有$b=0$，考虑用反证法说明这一点，若$b\neq 0$，

不妨设$b>0$，此时存在充分大的X，使得$x>X$时，有

$$|f'(x)-b|<\epsilon$$

(5) 设函数$y=y(x)$由方程$\sin(x^2y)+\ln(y-x)=17x$确定，则$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=18$

解：隐函数求导。先代入原方程确定点为(0,1)，再求导

$$\cos(x^2y)\cdot(2xy+x^2y')+\frac{y'-1}{y-x}=17$$

解得

$$y'=18$$

三、求下列极限（$5'\times 3=15'$）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}\sqrt{1-8x}}{x}$;

解：这是典型的有理化问题，考虑平方差公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)(1-8x)}{x\left(1+\sqrt{1-x}\sqrt{1-8x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{9x-8x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x}\sqrt{1-8x}\right)}=\frac{9}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x$;

解：这是典型的幂指函数接洛必达法则求极限，作恒等变形

$$\lim_{x\to\infty}\exp\left[x\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)\right]=\lim_{t\to 0}\exp\left[\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\right]=\lim_{t\to 0}\exp\left[\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

解：这是典型的有理化问题，考虑平方差公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n-1}}=\frac{3}{2}$$

四、求下列函数的导数（$5'\times 3=15'$）

(1) 设$y=\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$，求$\frac{dy}{dx}$;

解：我们求导得

$$y'=-\frac{2x}{1+x^4}$$

(2) 设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=e^t+t\\ y=\sin t\end{cases}$所确定的函数，求$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$;

解：先求出一阶导数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t}{e^t+1}$$

再求出二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\sin t\,(e^t+1)-e^t\cos t}{(e^t+1)^3}$$

(3) 设$f(x)$有二阶导数，$y=f(e^x)$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：先求出一阶导数

$$y'=f'(e^x)e^x$$

再求出二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(e^x)e^{2x}+f'(e^x)e^x$$

五、证明下列不等式（$6'\times 2=12'$）

(1) 当$x>0$，$\ln(1+x+x^2)<x+\frac{x^2}{2}$；

解：构造函数

$$f(x)=x+\frac{x^2}{2}-\ln(1+x+x^2)$$

$$f(0)=0$$

求导得

$$f'(x)=1+x-\frac{1+2x}{1+x+x^2}=\frac{2x^2+x^3}{1+x+x^2}>0$$

故

$$f(x)>f(0)=0$$

证毕。

(2) 当$x>0$，$\arctan x>x-\frac{x^3}{3}$

解：构造函数

$$f(x)=\arctan x-x+\frac{x^3}{3}$$

$$f(0)=0$$

求导得

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2=\frac{x^4}{1+x^2}>0$$

$$f(x)>f(0)=0$$

原命题得证。

六、求函数极值（$6' \times 1 = 6'$）

设函数$y = y(x)$由方程

$$x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$$

所确定。

解：依然先求导，得

$$3x^2 + 3y^2y' - 3 + 3y' = 0$$

$$y' = -\frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$$

显然导函数有两零点

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

代回原方程，解得两个唯一满足的点

$$(-1,0), (1,1)$$

考虑导函数的增减性，容易知道，该函数的极大值为 1，在点$x = 1$处取得，极小值为0，在点$x = -1$处取得。

七、求最值（$6' \times 1 = 6'$）

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$$

在区间$[-4,3]$上。

解：先求导

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x - 1)(x + 3)$$

显然导函数有两零点$x_1 = -3, x_2 = 1$，这意味着原函数在$x_1 = -3$处取得极大值$y_1 = 16$，在$x_2 = 1$处取得极小值-16。

再考虑端点

$$f(-4) = 9$$

$$f(3) = 16$$

综上，该函数的最大值为$y = 16$，在$x = -3,3$处均可取得；最小值为$y = -16$，在$x = 1$处取得。

八、证明题（$6' \times 1 = 6'$）

设函数$f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$上可导，且$f(1) = f(2) = 0$，证明：存在不同的$\xi, \eta \in (1,2)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{\xi}-\frac{f(\xi)}{\xi^2}+\frac{2}{3}f'(\eta)=0$$

证：对于双变量中值定理问题，关键在于边界，我们先设

$$\xi\in(1,\alpha),\eta\in(\alpha,2),\alpha\in(1,2)$$

并定义

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}$$

$$g(1)=g(2)=0$$

取这样的ξ和η，使得

$$g'(\xi)=\frac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1}=\frac{g(\alpha)}{\alpha-1}=\frac{f(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}$$

$$f'(\eta)=\frac{f(2)-f(\alpha)}{2-\alpha}=-\frac{f(\alpha)}{2-\alpha}$$

故原命题等价为

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{2}{3}\frac{f(\alpha)}{2-\alpha}=0$$

若存在$f(\alpha)=0$，该命题显然成立；否则，只要令

$$\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{2}{6-3\alpha}$$

解得

$$\alpha=\frac{3}{2},\alpha=-2<1，舍去$$

将这样的α代回原式，满足题意，证毕。