线性代数
2020-2021 第一学期
行列式作业

黄申为

10月20日

1. 令$P(-1,1)$和$Q(1,1)$是平面上的两个点. 求由向量$\vec{OP}$和$\vec{OQ}$张成的平行四边形的面积.

   Solution. 平行四边形的面积就是二阶行列式
   $$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
   的绝对值, 因此为2.

2. 用定义计算三阶行列式
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

   Solution. 用沙路法计算得$(b-a)(c-a)(c-b)$.

3. 写出4阶行列式含$a_{12}a_{23}$的项.

   Solution. 根据行列式的定义, 含$a_{12}a_{23}$的项为$(-1)^{\tau(2341)}a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} = -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 与$(-1)^{\tau(2314)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} = a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$.

4. 判断排列$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的奇偶性.

   Solution. 首先计算该排列的逆序数为$1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. 因此, 当$n$被4除余0或1时, 为偶排列; 当$n$被4除余2或3时, 为奇排列.

5. 若$j_1j_2\dots j_n$的逆序数为k, 求$j_n\dots j_2j_1$的逆序数.

Solution. $\frac{n(n-1)}{2}-k$.

6. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Solution. 由行列式的定义可知, 行列式求和展开中只有两项是非零的, 即排列$12\cdots n$与$23\cdots n1$所对应的项. 所以, 该行列式就等于$x^n+(-1)^{n-1}y^n$.

7. 设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

D的(i,j)元的代数余子式记作A_{ij}, 求$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

Solution.

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\1&3&-2&2\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\-5&1&3&-4\\3&1&-1&2\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+5r_1,r_3-3r_1,r_4-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\0&16&-7&-6\\0&-8&5&-4\\0&-8&5&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+\frac{1}{2}r_2,r_4+\frac{1}{2}r_2}-\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\0&16&-7&-6\\0&0&\frac{3}{2}&-1\\0&0&\frac{3}{2}&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}-\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\0&16&-7&-6\\0&0&\frac{3}{2}&-1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=24.$$

8. 计算下列行列式（D_k为k阶行列式）：

(a)

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

Solution. 见行列式的性质PPT.

(b)

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}.$$

Solution. $\prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i)$, 解法与例题相同.

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix},$$

这里$n > 2$.

Solution. 从最后一列开始, 后一列减去前一列, 将副对角线以下的元素都变为0, 而副对角线上的元素为$1, 1, \ldots, 1, n$. 从而行列式等于$(-1)^{n(n-1)/2}n$.

(d)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Solution.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 - \frac{r_i}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_n}\right).$$

9. 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足对所有 $i, j = 1, 2, \ldots, n$有$a_{ij} = -a_{ji}$. 证明当n为奇数时$D_n = 0$.

Solution. 首先注意对任意的$i = 1, 2, \ldots, n$, 有$a_{ii} = 0$. 因此,

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{每行提取-1}}{=\!=\!=} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{a_{ij}=-a_{ji}}{=\!=\!=} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{行列式性质1}}{=\!=\!=} (-1)^n D_n.
\end{aligned}
$$

因此当n为奇数时有$D_n = -D_n$, 从而$D_n = 0$.

10. • 一个图G是一个二元组(V, E)，其中V称为G的顶点集，而E是V中若干二元子集的集合，称为G的边集.比如

$$G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\})$$

是一个图. 直观的我们可以用一个圆圈代表V中的每个顶点，并且如果$\{v, u\}$是E中的元素，那么我们在代表u和v的圆圈之间连一条线，如下图所示.

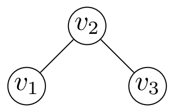

图 1: 一个图的例子.

• 给定一个图$G = (V, E)$，其中$V = \{1, 2, \ldots, n\}$，我们可以按照如下方式定义一个与G关联的多元多项式：

$$A(G) = \prod_{i<j:\{i,j\}\in E} (x_j - x_i),$$

其中x_j是对应顶点j的变量. 比如与$G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\})$关联的多项式为

$$A(G) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

注意到上述式子乘开后，若不合并同类项应该有$2^3=8$项：每项对应从每个x_j-x_i中选择一个变量的选择方式，也就是

$$A(G)=x_2x_3^2-x_1x_2x_3-x_1x_3^2+x_1^2x_3-x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_1x_2x_3+x_1^2x_2.$$

但是合并同类项后，其中$+x_1x_2x_3$与$-x_1x_2x_3$抵消，最后只剩下6项：

$$A(G)=x_2x_3^2-x_1x_3^2+x_1^2x_3-x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_1^2x_2.$$

对于一个一般的有m条边的图G，合并同类项前$A(G)$展开中应该有2^m项，但是合并同类项后剩下的项数可能会小于2^m.

- 给定一个图G，如果G中任何两条顶点之间都有边，那么G就称为是完全图.有n个顶点的完全图记做K_n. 问题：求K_n的关联多项式$A(K_n)$合并同类项后的项数.

Solution. 完全图K_n的关联多项式为

$$A(K_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

注意到范德蒙德行列式展开中的任何两项都不是同类项，故$A(K_n)$合并同类项后有$n!$项.