线性代数
2020-2021 第一学期
行列式作业

黄申为

10月8日

1. 令$P(-1,1)$和$Q(1,1)$是平面上的两个点。求由向量$\vec{OP}$和$\vec{OQ}$张成的平行四边形的面积。

2. 用定义计算三阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

3. 写出4阶行列式含$a_{12}a_{23}$的项。

4. 判断排列$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的奇偶性。

5. 若$j_1j_2\ldots j_n$的逆序数为k，求$j_n\ldots j_2j_1$的逆序数。

6. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

7. 设
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$
D的(i,j)元的代数余子式记作A_{ij}，求$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

8. 计算下列行列式（D_k为k阶行列式）：

(a)

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

(b)

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}.$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix},$$

这里$n > 2$.

(d)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

9. 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足对所有 $i, j = 1, 2, \ldots, n$有$a_{ij} = -a_{ji}$。证明当n为奇数时$D_n = 0$。

10. • 一个图G是一个二元组(V, E)，其中V称为G的顶点集，而E是V中若干二元子集的集合，称为G的边集。比如

$$G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\})$$

是一个图。直观的我们可以用一个圆圈代表V中的每个顶点，并且如果$\{v, u\}$是E中的元素，那么我们在代表u和v的圆圈之间连一条线，如下图所示。

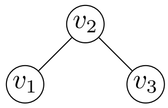

图 1: 一个图的例子.

- 给定一个图$G = (V, E)$，其中$V = \{1, 2, \dots, n\}$，我们可以按照如下方式定义一个与G关联的多元多项式：

$$A(G) = \prod_{i<j:\{i,j\}\in E} (x_j - x_i),$$

其中x_j是对应顶点j的变量。比如与$G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\})$关联的多项式为

$$A(G) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

注意到上述式子乘开后，若不合并同类项应该有$2^3 = 8$项：每项对应从每个$x_j - x_i$中选择一个变量的选择方式，也就是

$$A(G) = x_2x_3^2 - x_1x_2x_3 - x_1x_3^2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 + x_2^2x_1 + x_1x_2x_3 + x_1^2x_2.$$

但是合并同类项后，其中$+x_1x_2x_3$与$-x_1x_2x_3$抵消，最后只剩下6项：

$$A(G) = x_2x_3^2 - x_1x_3^2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 + x_2^2x_1 + x_1^2x_2.$$

对于一个一般的有m条边的图G，合并同类项前$A(G)$展开中应该有2^m项，但是合并同类项后剩下的项数可能会小于2^m。

- 给定一个图G，如果G中任何两条顶点之间都有边，那么G就称为是完全图。有n个顶点的完全图记做K_n。 问题：求K_n的关联多项式$A(K_n)$合并同类项后的项数。