标准答案及评分标准

2018 年 1 月 12 日

一、填空（每小题4分，共20分）

1. e^3

2. $-\dfrac{e^{x+y}-y}{e^{x+y}-x}$

3. $2\ln 2-1$

4. $\tan x\cdot\ln(\cos x)+\tan x-x+C$

5. $y=\dfrac{1}{x}[(x-1)e^x+c]$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}x^3(\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^3}}$　　令$t=\dfrac{1}{x}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t-\frac{1}{2}\sin(2t)}{t^3}$ ………… **2分**

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\dfrac{1-\cos t}{t^2}=\dfrac{1}{2}$ ………… **4分**

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}n^3(\sin\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{n})=\dfrac{1}{2}$ ………… **5分**

注：此题也可以用泰勒公式。

2. 解：$\dfrac{dy}{dx}=(e^{\sin x\ln x})'+2\sin x\cos x$ ………… **2分**

$=e^{\sin x\ln x}\cdot(\sin x\ln x)'+\sin 2x$

$=x^{\sin x}\cdot(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})+\sin 2x$ ………… **4分**

因此，$dy=(x^{\sin x}\cdot(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})+\sin 2x)dx$. ………… **5分**

3. 解：原式$=\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$ ………… **1分**

$=\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\cdot\sqrt{(1-\ln x)}}$

$$=2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\sqrt{\ln x})}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$ **…………3分**

$$=2(\arcsin(\sqrt{\ln x}))\Big|_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{6}$$ **………… 5分**

4. 解: 令 $u=x+y$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ **………… 2分**

代入原方程，得：$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}+1$

分离变量法得：$u-\ln(u+1)=x+c$ **………… 4 分**

将 $u=x+y$ 代入上式，

得通解为：$y-\ln(x+y+1)=c$，或 $x=c_1e^y-y-1.$ **…………5 分**

注：（另解）方程可先变形为 $\dfrac{dx}{dy}=x+y.$

三、 解：由条件知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-ax+b}{x}=0$ 得

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$ **………… 4 分**

$$b=-\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$$ **………… 6 分**

$$=-\lim_{x\to\infty}(\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1})=\frac{1}{2}$$ **…………8分**

四、解：（1）因 $y_1=10>y_2=\sqrt{6+10}=4$, 假设 $y_{k-1}>y_k$，下面证 $y_k>y_{k+1}$.

$y_k=\sqrt{6+y_{k-1}}>\sqrt{6+y_k}=y_{k+1}$, 由数学归纳法得 $\{y_n\}$ 单调递减. **…………2 分**

（2）由已知得 $y_n>0.$

数列 $\{y_n\}$ 单调递减有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在. **…………4 分**

（3）设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, 则有 $a=\sqrt{6+a}$, 得 $a=3,\ a=-2.$（舍去）

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=3.$ **………… 6 分**

五、解:定义域 $x \neq 0$

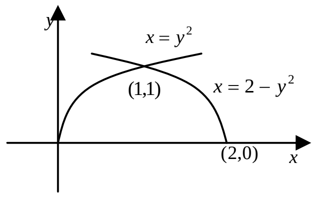
$y' = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$， $y'=0$ 得$x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$； $y'' = \dfrac{2x^3-2}{x^3}$ ， $y''=0$ 得$x_2 = 1$. …………. **2** 分

列表：

x	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0)$	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
y'	−	0	+	不存在	+	+	+
y''	+	+	+		−	0	+
y		极小值				拐点	
		$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},3\frac{\sqrt[3]{2}}{2})$				(1,0)	

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-1}{x} = +\infty$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-1}{x} = -\infty$，有垂直渐近线： $x=0$ …………. **8** 分

六、解：（1）画草图，解交点 $(1,1)$



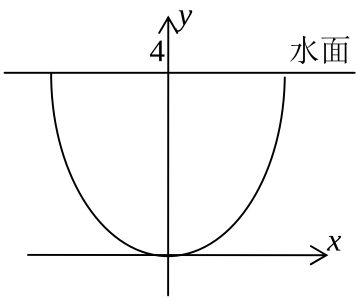
$$A = \int_0^1 (2-y^2-y^2)dy$$ …………**2** 分

$$= \frac{4}{3}$$ …………**4** 分

（2）$V = \pi\int_0^1 (2-y^2)^2 dy - \pi\int_0^1 y^4 dy$ …………**6** 分

$$= \frac{8}{3}\pi$$ …………**8** 分

七、解：(1)选 y 为积分变量， $y\in[0,4]$，



$dF = \sqrt{2}\rho g(4-y)\sqrt{y}dy$ …………**2** 分

$$F = \sqrt{2}\rho g\int_0^4 (4-y)\sqrt{y}dy = \frac{2^7}{15}\sqrt{2}\rho g = \frac{128}{15}\sqrt{2}\rho g.$$

…………**4** 分

(2) 设 t 秒后，水面上涨的高度为 $h=h(t)$，则薄片一侧所受到的水压力

$F(h) = \sqrt{2}\rho g\int_0^4 (h+4-y)\sqrt{y}dy = \dfrac{128}{15}\sqrt{2}\rho g + \dfrac{16}{3}\sqrt{2}\rho gh.$ …………**6** 分

两边对 t 求导:

$$\frac{dF(h)}{dt} = \frac{16}{3}\sqrt{2}\rho g\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\rho g.$$ …………**8** 分

八、解：由麦克劳林公式，有

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(\eta)}{3!}x^3, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{2}\text{ 分}$$

其中η在0与x之间，从而

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f^{''}(0)}{2!}-\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!},-1<\xi_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f^{''}(0)}{2!}+\frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!},0<\xi_2<1,$$

两式相减，得 $f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)=6.$ ……………**5** 分

$f^{(3)}(x)$在$[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$上连续，所以$f^{(3)}(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上必有最小值$m$和最大值$M$，

从而 $m\le\frac{f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)}{2}\le M$, ……………**7**分

由介值定理，至少存在一点$\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$，使得

$$f^{(3)}(\xi)=\frac{f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)}{2}=3. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{8}\text{分}$$

九、解： $f(x)=e^{-x}+\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^{-x}+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

上式两端对x求导，得： $f'(x)=-e^{-x}+\int_0^x f(t)dt$ ……………**2** 分

再对x求导得： $f''(x)=e^{-x}+f(x)$，

则$f(x)$满足初值问题：$\begin{cases} f''(x)-f(x)=e^{-x} \\ f(0)=1, \quad f'(0)=-1 \end{cases}$ ……………**4** 分

对应齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

设非齐次方程的特解为： $y^*=axe^{-x}$

代入原方程，得： $a=-\frac{1}{2}, \quad y^*=-\frac{1}{2}xe^{-x}.$ ……………**6** 分

通解为： $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}-\frac{1}{2}xe^{-x}$

由初始条件，得：$C_1=\frac{3}{4}, \quad C_2=\frac{1}{4}.$

所以 $f(x)=\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{2}xe^{-x}.$ ……………**8** 分

十、证明: 构造辅助函数 $F(x)=e^x(f(x)-2x)$ ……………**2** 分

有$F(1)=e(f(1)-2)=3e>0, \quad F(5)=e^5(f(5)-10)=-9e^5<0.$

$F(x)$在$[1,5]$上连续,由零点定理可知,至少存在一点$\eta\in(1,5)$,

使得 $F(\eta)=0.$ ……………**4** 分

又因为$F(x)$在$[\eta,6]$上连续, 在（η,6）内可导, 且

$$F(6)=e^6(f(6)-12)=0=F(\eta),$$

由罗尔定理可知, 存在$\xi\in(\eta,6)\subset(1,6)$， 使$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)+f(\xi)-2\xi=2$$ ……………. **6** 分