2013-2014 第二学期　　《微积分 A》期中试题

解答及参考评分标准（2014.4）

一. 1. $\{2, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$

2. $x - y + z = 0$

3. $dz = \dfrac{z}{x+z}dx + \dfrac{z^2}{y(x+z)}dy$

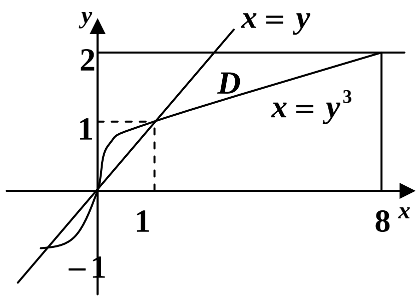
4. $\int_{-1}^{0}dy\int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_{0}^{2}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)dx$

5. 否，是

二. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^y f_1' + 2xf_2' - \dfrac{y}{x^2}g'$ ……………….(4 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^y f_1' + xe^{2y} f_{11}'' + 2e^y(x^2 - y)f_{12}'' - 4xyf_{22}'' - \dfrac{1}{x^2}g' - \dfrac{y}{x^3}g''$ ………….(8 分)

三. 积分区域如图



$I = \int_1^2 dy\int_y^{y^3} \sin\dfrac{x}{y}dx$ ……………….(4 分)

$= \int_1^2 y(\cos 1 - \cos y^2)dy$ ……………….(6 分)

$= \dfrac{1}{2}\sin 1 + \dfrac{3}{2}\cos 1 - \dfrac{1}{2}\sin 4.$ ……………….(8 分)

四. $\overrightarrow{AB} = \{0,4,3\}$, $\overrightarrow{AB}^0 = \{0, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\}$ ……………….(1 分)

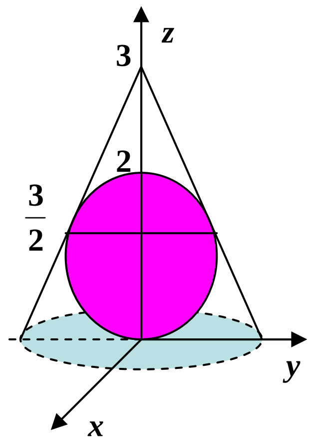
$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^x\ln y+\frac{z}{x^2+z^2}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=xy^{x-1}\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-x}{x^2+z^2}$$ …….(4 分)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A=8\ln 2-\frac{1}{6}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P=12\qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P=-\frac{1}{6}$$ ……………….(6 分)

$$gradu\,|_A=\{8\ln 2-\frac{1}{6},12,-\frac{1}{6}\}$$ ……………….(7 分)

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}}=0\times(8\ln z-\frac{1}{6})+\frac{4}{5}\times 12+\frac{3}{5}\times(-\frac{1}{6})=\frac{19}{2}$$ ………….(8 分)

五．两曲面交线为：$\begin{cases} z=3-\sqrt{3(x^2+y^2)} \\ z=1+\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$ ，



变形为：$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases}$,

交线在 xoy 面的投影为： $x^2+y^2=\frac{3}{4}$

立体 V 在 xoy 面上的投影区域为 D： $x^2+y^2\le\frac{3}{4}$ ……………….(2 分)

解法 1：立体V的体积 $=\iint\limits_D[3-\sqrt{3(x^2+y^2)}-(1+\sqrt{1-x^2-y^2})]dxdy$:….(4 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(2-\sqrt{3}\rho-\sqrt{1-\rho^2})\rho d\rho$$ …………….(6 分)

$$=\frac{\pi}{6}.$$ …………….(8 分)

解法 2：

立体V的体积 $=$ 半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$高为$\frac{3}{2}$的圆锥的体积 $-$ 半径为1高为$\frac{1}{2}$球缺的体积

$$=\frac{1}{3}\pi(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\times\frac{3}{2}-\pi(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2})=\frac{3}{8}\pi-\frac{5}{24}\pi=\frac{\pi}{6}.$$

六. 曲线参数方程 $x = t, y = \dfrac{-3t-1}{2}, z = t^2$

切向量 $\vec{T}\big|_P = \{1, -\dfrac{3}{2}, 2t\}\big|_P = \{1, -\dfrac{3}{2}, 2\} // \{2, -3, 4\}$ …….(2 分)

切线 L 的标准方程为：$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$ ……………….(4 分)

直线 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1 = \{3, -5, 5\} \times \{1, 0, 5\} = \{-25 - 10, 5\}$ ……….(6 分)

由于 $\vec{T} \cdot \vec{s}_1 = 1 \times (-25) + \dfrac{3}{2} \times 10 + 2 \times 5 = 0$

所以 $\vec{T} \perp \vec{s}_1$， 故切线 L 垂直于 L_1. ……….(8 分)

七. 令 $f'_x(x, y) = 2x + 4y - 2 = 0$

$f'_y(x, y) = 4x + 18y + 1 = 0$

得驻点：$M(2, -\dfrac{1}{2})$ ……………….(3 分)

又记 $A = f''_{xx}(x, y) = 2, \quad B = f''_{xy}(x, y) = 4, \quad C = f''_{yy}(x, y) = 18$

有 $AC - B^2 = 20 > 0, \quad$ 且 $A = 2 > 0,$ ……………….(6 分)

知函数 $f(x, y)$ 在驻点 $M(2, -\dfrac{1}{2})$ 处取得极小值，$M(2, -\dfrac{1}{2})$ 为极小值点，

极小值为 $f(2, -\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{9}{4}.$ ……………….(8 分)

八. 积分区域 V 关于 zox 及 xoy 坐标面对称，$x^6 y^5 e^z$ 关于变量 y 为奇函数，

$x^3 y^{10}$ 关于变量 x 为奇函数，所以有

$$I = \iiint_V (x^3 y^{10} + x^6 y^5 e^z + z^3) dV$$

$$= \iiint_V z^3 dV$$ ……………….(2 分)

解法 1（球坐标变换）

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^5\cos^3\varphi\sin\varphi dr$$ …….(6 分)

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^5\cos^3\varphi\sin\varphi dr$$

$$=\frac{64}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^9\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{64}{3}\pi(-\frac{1}{10}\cos^{10}\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{31}{15}\pi.$$ ………….(8 分)

解法 2（轴截面法）$I=\int_0^1 z^3dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}dxdy+\int_1^2 z^3dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z-z^2}dxdy$ …….(6 分)

$$=\pi\int_0^1 z^3\cdot z^2dz+\pi\int_1^2 z^3\cdot(2z-z^2)dz$$

$$=\pi\frac{z^6}{6}\Big|_0^1+\pi(\frac{2}{5}z^5-\frac{z^6}{6})\Big|_1^2=\frac{1}{6}\pi+\frac{57}{30}\pi=\frac{31}{15}\pi$$ …….(8 分)

九. （1）切平面的法向量为：$\vec{n}=\{x_0,2y_0,\frac{z_0}{2}\}$

由题意有：$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{\frac{z_0}{2}}{1}$

$$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}=1$$

由此解得：$x_0=\pm1,\ y_0=\pm\frac{1}{2},\ z_0=\pm1$

切点坐标为：$(1,\frac{1}{2},1),\quad(-1,-\frac{1}{2},-1).$

切平面方程为：$2x+2y+z-4=0$及$2x+2y+z+4=0.$ ………….(4 分)

（2）设 $P(x,y,z)$为曲面 S上任意一点，则 P到平面 π的距离为:

$$d=\frac{|2x+2y+z+5|}{3}$$

构造拉格朗日函数：$F(x,y,z)=(2x+2y+z+5)^2+\lambda(\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}-1)$

解方程组：

$$\begin{cases} F_x'=4(2x+2y+z+5)+\lambda x=0 \\ F_y'=4(2x+2y+z+5)+2\lambda y=0 \\ F_z'=4(2x+2y+z+5)+\lambda\frac{z}{2}=0 \\ \frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1 \end{cases}$$

得驻点：　$P_1(1,\frac{1}{2},1)$,　$P_2(-1,-\frac{1}{2},-1)$.

在 $P_1(1,\frac{1}{2},1)$ 处，$d=\frac{|2x+2y+z+5|}{3}|_{P_1}=3$,

在 $P_2(-1,-\frac{1}{2},-1)$ 处，$d=\frac{|2x+2y+z+5|}{3}|_{P_2}=\frac{1}{3}$,

比较知，S 与 π 的最短距离为 $\frac{1}{3}$,　　　　　　……………….(8 分)

十.　（1）曲面 S 的方程为：$x^2+y^2=2z$　　　　　　……………….(2 分)

（2）记 $D_z: x^2+y^2\le 2z$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz.=\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\frac{\rho}{\rho^2+z^2}d\rho$$

$$=\pi\int_1^2[\ln(2z+z^2)-2\ln z]dz=3\pi\ln\frac{4}{3}.$$　　　……………(8 分)

十一.　　设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，　则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'.$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}f''+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f'$,　　　　……………….(2 分)

同理 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}f''+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f'$$

则 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}f''+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f'+\frac{y^2}{x^2+y^2}f''+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f'$$

$$=f''+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f'=0$$

即 $$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0;$$ ……………….(4 分)

(2) 令 $p=f'(u)$ 则原方程化为：$p'+\dfrac{p}{u}=0$

分离变量积分，得：$p=\dfrac{C_1}{u}$，即 $p=f'(u)=\dfrac{C_1}{u}$

由 $f'(1)=1$ 得：$C_1=1$

$f'(u)=\dfrac{1}{u}$，$\Rightarrow$ $f(u)=\ln u+C$

由 $f(1)=0$ 得：$C=0$

所以 $f(u)=\ln u.$ ……………….(8 分)