

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 $u = f(x^2, xy) + g(xz)$, f, g 是可微函数, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ _____.
2. 已知 $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, 则垂直于 \vec{a} 与 \vec{b} 且指向 z 增大方向的单位向量为_____.
3. 曲面 $e^z + z + xy = 4$ 在点 $(1, 3, 0)$ 处的切平面方程为_____.
4. 设 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 则 $I = \oint_L (2x^2 + 5y^2 + z)dl =$ _____.
5. 设 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是 $f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数, 则 $a_3 =$ _____.

二. (9 分) 设方程组 $\begin{cases} x + y = e^u + v \\ xy = e^u + u \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

三. (9 分) 计算 $I = \iint_D xy dx dy$, 其中 D 是曲线 $y = x^2$ 与 $y = x + 2$ 所围成的区域.

四. (10 分) 求函数 $z = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2} - 2y$ 的极值点和极值.

五. (10 分) 已知当 $x > 0, y > 0$, $(\frac{y}{x} + \frac{2x}{y})dx + ((\varphi(x) - \frac{x^2}{y^2})dy = 0$ 是全微分方程, 且 $\varphi(1) = 0$,

求 $\varphi(x)$ 以及此微分方程的通解.

六. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数.

七. (9 分) 设有一力场, 场力的大小与作用点到原点的距离成反比(比例系数为 k), 方向指向原点, 写出场力的表达式, 并求一质点沿螺旋线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ 从点 $A(1,0,0)$ 移到点 $B(0,1,\frac{\pi}{2})$ 时场力所作的功.

八. (9 分) 设 V 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$) 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ 所围成的立体, 其上任一点的密度等于此点到 z 轴的距离, 求 V 关于 z 轴的转动惯量.

九. (9 分) 把 $f(x) = \frac{1}{3-x} + \ln x$ 展成 $x-1$ 的幂级数, 并指出收敛域.

十. (9 分) 设 \vec{n} 是曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外法线方向, $u = x^4 + y^4 + z^4$, 将 $I = \oiint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$ 化成第二类曲面积分, 并计算 I 的值.

十一. (7 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 的收敛性.