2014-2015-第一学期　工科数学分析期中试题解答（**2014.11**）

一．1. $\frac{1}{2}$,　5

2. $\frac{15}{4\sqrt{\pi}}$ cm^3/sec

3. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

4. $-\frac{3}{2}$

5. 16

二. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}+x^2+2x-1}{x\ln(1+\frac{x}{4})}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}+x^2+2x-1}{\frac{x^2}{4}}$$ ……………………..(2 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2e^{-2x}+2x+2}{\frac{x}{2}}$$ ………………….(4 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{4e^{-2x}+2}{\frac{1}{2}}$$ ………………….(6 分)

$$=12$$ ………………….(8 分)

三. $x>0$　$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$ ……………(3 分)

$x<0$　$f'(x)=\frac{1}{1+\tan^2 x}2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=2\tan x$ ……………(6 分)

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}x\cos\frac{1}{x}=0$$ …………(7 分)

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan^2 x}{x}=0$$ ………………(8 分)

$$f'(0)=0$$ ……………(9 分)

四. $$e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx})=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$$ …………(左 3+右 4=7 分)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-(x^2+y^2)e^{x+y}}{x+(x^2+y^2)e^{x+y}}$$ ……………(9 分)

五. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{-2t}{1-t^2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{-2t}$$ ……………..(1+2+1=4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{\sqrt{1-t^2}}{-2t})}{\frac{dx}{dt}}$$ ……………………..(5 分)

$$=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}t-\sqrt{1-t^2}}{t^2}}{\frac{-2t}{1-t^2}}$$ …………………….(8 分)

$$=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$$ ……………………..(9 分)

六. $y'=2k(x^2-3)2x=4k(x^3-3x)$ ………………..(2 分)

$y''=4k(3x^2-3)$ ……...……..(3 分)

令 $y''=0$ 得 $x=1$ ……..……….(4 分)

此时 $y=4k$, $y'=-8k$ ……..………(6 分)

法线 $y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$ ………………(7 分)

把(0,0)代入得 $-4k=-\frac{1}{8k}$ $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ ………………(9 分)

七. 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ …………..(1 分)

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\mathbf{\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0}$ ……..(6 分)

$f(x)$ 单调增，又由于 $f(0)=0$ 所以 $f(x)>0$

即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0$

$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ ………...…….(9 分)

八 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$$ ……………………(3 分)

$$=e^{2c}$$ ………………(4 分)

设 $y=x^{\frac{1}{x}}$ $\ln y=\frac{\ln x}{x}$ ………………(5 分)

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$ ………………(7 分)

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$$ ………………(8 分)

$e^{2c}=3$ $c=\frac{1}{2}\ln 3$ ………………(9 分)

九. $\lim_{x\to 1}y=\infty$ 有垂直渐近线 $x=1$ ……………(1 分)

$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=-1$ $\lim_{x\to\infty}(y+x)=-2$ 有斜渐近线 $y=-x-2$ ……..….(3 分)

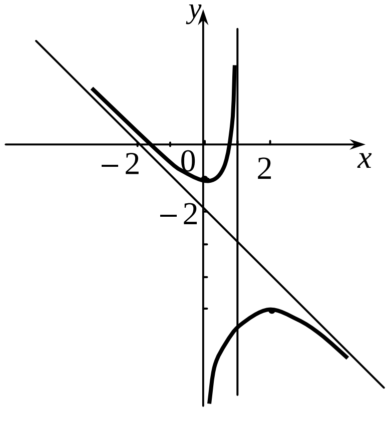
$$y'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$ ………………..(4 分)

令 $y'=0$ 得 $x=0$ $x=2$ …………………(6 分)

$$y''=\frac{-2}{(x-1)^3}$$ ………………(7 分)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$		$-$		$-$
y	↘	极小值 -1	↗	间断	↗	极大值 -5	↘

…………………(10 分)



……………………..(12 分)

十. 不妨设底边及侧壁每单位费用为 1，矩形的宽度为 t，建造费用为 y，

$$\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2+xt=a \qquad \text{…………….(1 分)}$$

$$y=\frac{3}{2}\cdot\pi\frac{x}{2}+x+2t=\frac{\pi}{2}x+x+\frac{2a}{x} \qquad \text{…………….(3 分)}$$

$$y'=\frac{\pi}{2}+1-\frac{2a}{x^2} \qquad \text{…………….(6 分)}$$

令 $y'=0$ 得 $x=2\sqrt{\frac{a}{\pi+2}}$ …………….(8 分)

由问题的实际意义，….，故当 $x=2\sqrt{\frac{a}{\pi+2}}$ m 时建造费用最省 ……….(9 分)

十一. 令 $F(x)=f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ ………………….(1 分)

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导

由题设 $f(0)=0$ …………….(2 分)

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ …………….(4 分)

故 $F(0)=F(1)=0$

根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$ …………(6 分)

即 $f'(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}+f(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}(-\xi)=0$

$e^{-\frac{\xi^2}{2}}\neq0$ $\therefore f'(\xi)=\xi f(\xi)$ ………………….(7 分)