北京理工大学2010-2011学年第二学期《微积分A》

期中试题解答及评分标准

一、填空题（每小题4分，共20分）

1. $x+3z=0;$

2. $gradu\,|_{M_0}=-\frac{1}{4}\{\pi,1,1\};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{12};$

3. $I=\int_0^3 dy\int_0^{\frac{y}{3}} e^{y^2}dx,\quad \frac{1}{6}(e^9-1);$

4. $\vec{n}^0=\pm\frac{1}{\sqrt{21}}\{2,4,-1\},\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-1};$

5. $f_x'(0,0)=-1,\quad f_y'(0,0)=1.$

二、 (1) $\vec{d}=\{5,-1,0\};$ ……………………………3分

(2) $(\vec{d})_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}|}=\frac{4\sqrt{3}}{3};$ ……………………………5分

(3) $\vec{a}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 0\end{vmatrix}=\{1,5,-6\}.$ ……………………………8分

三、 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'f_2',$ ……………………………2分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+g'f_2'+xyf_{11}''+y[g'(x)+g(x)]f_{12}''+yg'(x)g(x)f_{22}''$ …..5分

由题意知：$g'(1)=0,\quad g(1)=1,$所以 ……………………………6分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$ ……………………………8分

四、 $I=\iint_D 2(x^2+y^2)dxdy$

$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}2\rho^3d\rho$ …………………4分

$= 15\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta$ ……………………….6 分

$= 15 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{45}{16}\pi.$ …………………….8 分

五、 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x - 4y + 3y^2 = 0$

解得驻点：$(0,0), \quad (8,4)$ ……………………….2 分

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 + 6y.$ ………………………..4 分

在点 $(0,0)$

$A = 2, \quad B = -4, \quad C = -4$ ，$\Delta = B^2 - AC = 24 > 0$ ，

所以点 $(0,0)$ 不是极值点； ……………………….6 分

在点 $(8,4)$

$A = 2 > 0, \quad B = -4, \quad C = 20, \quad \Delta = B^2 - AC = -24 < 0$ ，

所以点 $(8,4)$ 是极小值点，且极小值为 $f(8,4) = -32.$ ………….8 分

六、 $I = \iiint\limits_{\Omega} x dx dy dz$

$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x dz$ ……………….4 分

$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) dy$ ……………………….6 分

$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx$

$= \frac{1}{48}.$ ……………………….8 分

七、 设直线L的方向向量为$\vec{s} = \{m, n, p\}$ ，

直线L_1的方向向量为$\vec{s}_1 = \{2,-1,-1\}$ ……………………….1 分

由题意，$L \perp L_1, \Rightarrow \vec{s} \cdot \vec{s}_1 = 0$ ，所以有 $2m - n - p = 0$ ………..3 分

取点 $M_1(1,0,2)\in L_1$，又因为 L与L_1相交，所以向量 $\vec{s}$，$\vec{s}_1,\overrightarrow{MM_1}=\{0,1,0\}$ 共面，

有

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=m+2p=0$$ ……………………………5 分

有 $m=-2p,\ n=-5p$ ……………………………6 分

所以 L的方向向量为：$\vec{s}=\{-5p,-2p,p\}//\{2,5,-1\}$ ……7 分

所以 L的参数方程为：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+5t \\ z=2-t \end{cases}$ ……………………………8 分

（注：此题还有其他解法）

八、用柱坐标，$F(t)=\iiint\limits_V [f(x^2+y^2)+z^2]dV$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t \rho d\rho\int_0^2[f(\rho^2)+z^2]dz$$ ……………………………4 分

$$=2\pi\int_0^t \rho[2f(\rho^2)+\frac{8}{3}]d\rho$$

$$=4\pi\int_0^t \rho f(\rho^2)d\rho+\frac{8}{3}\pi t^2.$$ ……………………………6 分

$$\frac{dF}{dt}=4\pi t f(t^2)+\frac{16\pi}{3}t.$$ ……………………………8 分

九、方程两边取微分，得

$$F_1'(dx+\frac{ydz-zdx}{y^2})+F_2'(dy+\frac{xdz-zdx}{x^2})=0$$

整理得

$$dz=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{x^2F_1'+xyF_2'}dx+\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{xyF_1'+y^2F_2'}dy$$ ……………………………4 分

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{x^2F_1'+xyF_2'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{xyF_1'+y^2F_2'}$$ ……………………………6 分

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$$ ……………………………8 分

（注：求偏导数时还有其他方法）

十、Ω在xoy面上的投影区域为$D: x^2+y^2\le 3$， …………………1 分

$z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}\Rightarrow r=4\cos\varphi$， $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

由对称性，知 ……………………….3 分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}z^3dxdydz$$ ……………………….4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^5\cos^3\varphi\sin\varphi dr$$ ……………………….6 分

$$=\frac{2^{12}\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{64}}\sin\varphi\cos^9\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1562}{15}\pi.$$ ……………………….8 分

十一、目标函数为：$V=\dfrac{1}{2}\pi R^2h$ ……………………….1 分

约束条件为：$S=\pi R^2+\pi Rh$ ……………………….2 分

构造拉氏函数： $F(R,h)=\dfrac{1}{2}\pi R^2h+\lambda(\pi R^2+\pi Rh-S)$

$$\begin{cases}F_R'=\pi Rh+\lambda(2\pi R+\pi h)=0\\ F_h'=\dfrac{1}{2}\pi R^2+\lambda\pi R=0\\ S=\pi R^2+\pi Rh\end{cases}$$ ……………………….4 分

解得唯一驻点为：$R=\dfrac{h}{2}=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}},\quad h=2\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ ………….6 分

由问题的实际意义知，当$R=\dfrac{h}{2}=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}},\quad h=2\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$时，此容器容积最大，

$$V_{最大}=\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$ ……………………….8 分