2011 级第一学期《微积分 A》期中试卷参考答案及评分标准

一、1. $-\dfrac{1}{2}$; 2. $[(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\cos\dfrac{1}{x})e^{\sin\frac{1}{x}}+2\tan x\sec^2 x f'(\tan^2 x)]dx$;

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ 1 & x=0\\ -x & x>0\end{cases}$，$x=0$为第二类间断点（无穷型）；

4. $x+y-2=0$; 5. $y^{(10)}(0)=10$.

二、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\ln f(x)}$ …………….2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{\ln(1+f(x)-1)}$ ……4 分

$=f'(0)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-1}$

$=f'(0)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-f(0)}$ …….6 分

$=f'(0)\dfrac{1}{f'(0)}=1.$ …….8 分

三、设 $f(x)=e^x+e^{-x}-2-x^2$，

$f'(x)=e^x-e^{-x}-2x, f''(x)=e^x+e^{-x}-2$ …….2 分

$f'''(x)=e^x-e^{-x}$， $f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}>0$

所以 $f'''(x)$ 单增，又 $f'''(0)=0$

故当 $x<0$ 时，有 $f'''(x)<f'''(0)=0$，$f''(x)$ 单减，有 $f''(x)>f''(0)=0$;

当 $x>0$ 时，有 $f'''(x)>f'''(0)=0$，$f''(x)$ 单增，有 $f''(x)>f''(0)=0$;

所以 $f'(x)$ 单增，又 $f'(0)=0$ ……..5 分

故当 $x<0$ 时，有 $f'(x)<f'(0)=0$，$f(x)$ 单减，有 $f(x)>f(0)=0$;

当 $x>0$ 时，有 $f'(x)>f'(0)=0$， $f(x)$ 单增，有 $f(x)>f(0)=0;$

综上有：对任意的$x\in R,$有：$f(x)\geq 0$

即 $e^{x}+e^{-x}\geq 2+x^{2}$，$\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\geq 1+\dfrac{x^{2}}{2}.$ …….8 分

四、 $y'-2=(1-y')\ln(x-y)+(1-y')$ …….2 分

$\Rightarrow \quad y'=\dfrac{\ln(x-y)+3}{\ln(x-y)+2},$ …….3 分

$y''=-y''\ln(x-y)+\dfrac{(1-y')^{2}}{x-y}-y''$ …….5 分

$\Rightarrow y''=\dfrac{(1-y')^{2}}{(x-y)[\ln(x-y)+2]}$

$=\dfrac{[\ln(x-y)+3]^{2}}{(x-y)[\ln(x-y)+2]^{3}}$ …….6 分

又当 $x=0$时，$y=-\dfrac{1}{e},\quad y''(0)=4e.$ …….8 分

五、 (1) 定义域$D:(-\infty,+\infty)$

$y'=3x^{2}+6x-1,\quad y''=6x+6,$ …….1 分

令 $y''=0,$ 得 $x=-1,$ …….2 分

当 $x<-1$时， $y''<0$，曲线为凸弧，凸区间为：$(-\infty,-1)$；

当 $x>-1$时， $y''>0$，曲线为凹弧，凹区间为：$(-1,+\infty)$；…….3 分

拐点为：$(-1,2).$ …….4 分

(2)当 $2+\dfrac{1}{x}=0$时，$x=-\dfrac{1}{2},$ 且 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{-}} x\ln(2+\dfrac{1}{x})=\infty$

所以 $x=-\dfrac{1}{2}$ 为曲线的垂直渐近线；又 …….6 分

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(2+\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{2}\neq\infty$, 所以 $x=0$ 不是曲线的渐近线。又

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(2+\frac{1}{x})=\ln 2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x\ln 2)=\lim_{x\to\infty}x[\ln(2+\frac{1}{x})-\ln 2]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{2x})=\frac{1}{2},$$

所以曲线有斜渐近线：$y=x\ln 2+\dfrac{1}{2}$，无水平渐近线。 …….8 分

六、 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$ …….2 分

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}\quad(\dfrac{\infty}{\infty})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)(1+x^2)}$ …….4 分

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}\cdot\frac{x^2}{(1+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1+x^2}{x^2}=-1$ …….6 分

所以 原式=e^{-1} …….8 分

七、 由 $f(x)$在$x=0$处可导$\Rightarrow\begin{cases}f(0+)=f(0-)=f(0)\\ f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)\end{cases}$,得 …….2 分

$f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}e^{ax}=1,\ f(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}b(1+2x)=b,\ f(0)=1$，有

$b=1.$ 又 …….4 分

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{b(1+2x)-1}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{ax}-1}{x}=a,\therefore a=2$$，…….6 分

且 $f'(0)=2,$ 又 $x>0$ 时，$f'(x)=(e^{2x})'=2e^{2x}$，

$x<0$ 时，$f'(x)=(1+2x)'=2$，所以

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ 2 & x=0.\\ 2e^{2x} & x>0\end{cases}$$ …….8 分

八、 当 $x\to 0$ 时，$c(\sqrt[3]{1+x^5}-1)\sim\frac{c}{3}x^5$，由泰勒公式，有 …….2 分

$$x-(a+b\cos x)\sin x=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin(2x)$$

$$=x-a(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))-\frac{b}{2}(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5))$$

$$=(1-a-b)x+(\frac{a}{3!}+\frac{4b}{3!})x^3-(\frac{a}{5!}+\frac{16b}{5!})x^5+o(x^5)\sim\frac{c}{3}x^5$$ …….6 分

$$\Rightarrow\begin{cases}1-a-b=0\\ \frac{a}{3!}+\frac{4b}{3!}=0\\ -(\frac{a}{5!}+\frac{16b}{5!})=\frac{c}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=-\frac{1}{3}.\\ c=\frac{1}{10}\end{cases}$$ …….8 分

九、由题意知，防空洞的周长最小时，可使所用材料最省。设防空洞的周长为 y,

矩形部分高为好 h, 则有 $\frac{\pi}{2}(\frac{x}{2})^2+hx=5$，$\Rightarrow h=\frac{5}{x}-\frac{\pi}{8}x$

$$y=\frac{\pi x}{2}+2h+x=(\frac{\pi}{4}+1)x+\frac{10}{x}，(x>0)$$ …….4 分

$y' = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{10}{x^2}$，令 $y' = 0,$ 得驻点： $x = 2\sqrt{\frac{10}{\pi + 4}}.$ ……6 分

由问题的实际意义，所用材料最省的防空洞一定存在，又驻点唯一，所以当底宽为 $x = 2\sqrt{\frac{10}{\pi + 4}}$ 时，可使建造防空洞所用材料最省. ……8 分

十 （1）有界性：由题意知： $x_n > 0,$ 又

$$x_{n+1} = \frac{3(1 + x_n)}{3 + x_n} = 3 - \frac{6}{3 + x_n} < 3\text{，所以对任意 } n \geq 1, \text{有} \quad 0 < x_n < 3.$$

（2）单调性：利用数学归纳法 ……3 分

$$x_2 - x_1 = \frac{3(1 + x_1)}{3 + x_1} - x_1 = \frac{3 - x_1^2}{3 + x_1} > 0 \quad (\because 0 < x_1 < \sqrt{3})\text{；}$$

假设 $x_k - x_{k-1} > 0$ 成立；则

$$x_{k+1} - x_k = \frac{3(1 + x_k)}{3 + x_k} - \frac{3(1 + x_{k-1})}{3 + x_{k-1}} = \frac{6(x_k - x_{k-1})}{(3 + x_k)(3 + x_{k-1})} > 0$$

所以 $\{x_n\}$ 为单增数列。

由单调有界准则知：数列 $\{x_n\}$ 极限存在。 ……6 分

设 $\lim_{n \to \infty} x_n = A,$ 则在 $x_{n+1} = \frac{3(1 + x_n)}{3 + x_n}$ 两边取极限，有

$A = \frac{3(1 + A)}{3 + A}$， $A = \sqrt{3}$，所以 $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{3}.$ ……8 分

十一、构造辅助函数： $F(x) = e^x f(x)$，由已知条件知： ……2 分

$F(x) \in C[a,b], F(x) \in D(a,b)$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理，

知至少存在一点 $\xi \in (a,b),$ 使得下式成立： $F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a},$ 即

$$e^{\xi}[f(\xi) + f'(\xi)] = \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a}\text{，又 } f(a) = f(b) = 1\text{，有}$$

$$= \frac{e^b - e^a}{b - a}$$ ……5 分

又因为函数e^x在$[a.b]$上满足拉氏中值定理，有 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta$

（$\eta\in(a,b)$），综上有：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]=e^\eta$.

…….8 分

（注：此题还有其他解法）