09 级第一学期工科数学分析期末试题(A 卷)解答(2010.1)

一. 1. $\dfrac{y}{e^y - x}$, $\dfrac{1}{e^2}$ (2 分, 2 分)

2. I_2, $\dfrac{1}{2}$ (2 分, 2 分)

3. $\dfrac{3\pi}{2}$, 0 (2 分, 2 分)

4. $u = \dfrac{y}{x}$, $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-4u^2}{1+3u}$ (2 分, 2 分)

5. $\dfrac{\pi a}{2}$, $2\pi a^2$ (2 分, 2 分)

6. $-1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ (多项式 3 分, 余项 1 分)

7. $-\dfrac{1}{x}$, $Cx + \dfrac{x^3}{2}$ (2 分, 2 分)

二. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)e^x + x + 2}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3}$ ……..(2 分)

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + (x-2)e^x + 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)e^x + 1}{3x^2}$ ……(5 分)

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + (x-1)e^x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{6}$ ……(8 分)

$= \dfrac{1}{6}$ ……..(9 分)

三. $\int x\ln(1+x)dx = \dfrac{1}{2}\int \ln(1+x)dx^2$ ……(1 分)

$= \dfrac{1}{2}(x^2\ln(1+x) - \int \dfrac{x^2}{1+x}dx)$ ……..(5 分)

$= \dfrac{1}{2}(x^2\ln(1+x) - \int (x - 1 + \dfrac{1}{1+x})dx)$ ……(6 分)

$= \dfrac{1}{2}(x^2\ln(1+x) - \dfrac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)) + C$ ……(9 分)

四. $ma = F \qquad a = \dfrac{dv}{dt} \qquad F = -kv$

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad \text{……(3 分)}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt \qquad \ln v = -\frac{k}{m}t + C_1$$

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} \qquad \text{……..(6 分)}$$

由 $v(0) = 6$ 得 $C = 6$ ……(8 分)

由 $v(5) = 3$ 得 $\dfrac{k}{m} = \dfrac{\ln 2}{5}$

故 $v = 6e^{-\frac{\ln 2}{5}t}$ ……(9 分)

五. 当 $x > 0 \qquad f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ ……(3 分)

当 $x < 0 \qquad f'(x) = \dfrac{\sin x^2 \cdot 2x^2 - 1 + \cos x^2}{x^2} = 2\sin x^2 + \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^2}$ ……(6 分)

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\cos x^2}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^4}{2}}{x^2} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$f'(0) = 0 \qquad \text{……..(8 分)}$$

六. $f(x) = e^{-x} + \int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt$ ……..(1 分)

$$f'(x) = -e^{-x} - \int_0^x f(t)dt \qquad \text{……(2 分)}$$

$$f''(x) = e^{-x} - f(x) \qquad f''(x) + f(x) = e^{-x} \qquad \text{……(3 分)}$$

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = -1 \qquad \text{……(5 分)}$$

$$r^2 + 1 = 0 \qquad r = \pm i \qquad \text{……(7 分)}$$

$$\bar{f}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x \qquad \text{……(8 分)}$$

设 $f^*(x) = Ae^{-x}$ ……(9 分)

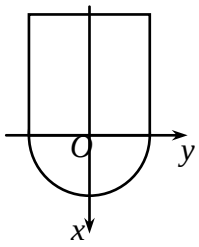
带入方程得 $A = \dfrac{1}{2} \qquad f^*(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$ ……(10 分)

通解为　　$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^{-x}$　　……(11 分)

由初始条件得　　$C_1=\frac{1}{2}$　　$C_2=-\frac{1}{2}$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x+e^{-x})$$　　……..(13 分)

七.



$dW=(h+x)\mu g\pi y^2dx=\mu g\pi(2+x)(1-x^2)dx$　　……(3 分)

$W=\int_0^1\mu g\pi(2+x)(1-x^2)dx$　　……(5 分)

$=\int_0^1\mu g\pi(2-2x^2+x-x^3)dx$

$=\frac{19}{12}\pi\mu g=\frac{19000}{12}\pi g\,(\mathrm{J})$　　……..(8 分)

八.　　令　　$F(x)=xf(x)$　　……..(2 分)

$F(0)=0$　　$F(3)=3f(3)=-3<0$　　……..(4 分)

由积分中值定理，$\exists c\in[1,2]$，使 $f(c)=\int_1^2 f(x)dx=1$，

故　　$F(c)=cf(c)=c>0$　　……..(6 分)

根据介值定理，$\exists\eta\in(c,3)$，使 $F(\eta)=0$，　　……..(7 分)

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,3)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$　　……(8 分)

九.　　由题设，有　　$\lim_{x\to0}(f(x)+f'(x))=0$　　……...(1 分)

由于　$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，　得　$\lim_{x\to0}f'(x)=0$　　……(3 分)

因为 $f'(x)$ 连续，故 $f'(0)=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点.　……(4 分)

由　$2=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$

$=f'(0)+f''(0)=f''(0)>0$　　……(7 分)

故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　……(8 分)