一、计算题

（1）求 y=xarcsin$\frac{x}{2}$+$\sqrt{4-x^2}$ 的导数

（2）设函数 y=2x^3+3x^2-12x+14，试确定该函数的凹凸性及其拐点。

（3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx-x}{x^2\ln（1+2x）}$

（4）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx\cdot\ln(1-x)$

（5） 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

（6）

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \text{在 } t=2 \text{ 处.}$$

二、证明题

（1）当 x>0 时，ln（1+x）>$\frac{\arctan x}{1+x}$

（2） 设 $a>b>0, n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

（3）设a_0=0，a_{n+1}=1+sin（a_n-1）（n≥0）。证明数列极限存在并求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

（4） 设 $0\leqslant a<b$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：在(a,b)内必有 ξ 与 η 使 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}\cdot f'(\eta)$.

参考答案

一、

（1）解：

$$y' = \arcsin\frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}.$$

（2）解：

y’=6x^2+6x-12，y’’=12x+6.令 y’’=0 得 x=－1/2.当 x<－1/2 时,y’’<0,此时该函数为凸函数; x>－1/2 时,y’’>0，此时该函数为凹函数.点（－1/2，41/2）为该函数曲线的拐点.

（3）解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\ln(1+2x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

（4）

解：

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \cdot \frac{\ln(1-x)}{x} = -\lim_{x\to 0^-} x\ln x \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)}{-x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} x\ln x = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

（5）

解 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$.

令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$.

$$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1).$$

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $f(0)=0$.

因 $f''(-1)=f''(1)=0$，故用定理 3 无法判别. 考察一阶导数 $f'(x)$ 在驻点 $x_1=-1$ 及 $x_3=1$ 左右邻近的符号：

当 x 取 -1 左侧邻近的值时，$f'(x)<0$；当 x 取 -1 右侧邻近的值时，$f'(x)<0$；因为 $f'(x)$ 的符号没有改变，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有极值. 同理，$f(x)$ 在 $x=1$ 处也没有极值（图 3-13）.

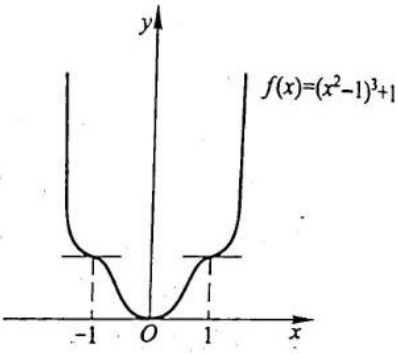

图 3-13

（6）

解

$$(2)\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{3at^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\frac{3at}{1+t^2}\right)'}=\frac{\frac{3a[2t(1+t^2)-t^2\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a[(1+t^2)-t\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}$$

$$=\frac{2t}{1-t^2},$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3},$$

$t=2$ 对应点 $\left(\frac{6}{5}a,\frac{12}{5}a\right)$. 曲线在点 $\left(\frac{6}{5}a,\frac{12}{5}a\right)$ 处的切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{6}{5}a\right),$$

即 $4x+3y-12a=0$. 法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}a\right),$$

即 $3x-4y+6a=0$.

二、

（1）解

(2) 取函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x\ (x>0)$.

>0 时，

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>0,$$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，因此，当 $x>0$ 时，

$$f(x)>f(0),$$

即 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$，亦即

$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}.$$

（2）

证　取函数 $f(x)=x^n$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$. 又 $0<b<\xi<a,n>1$，故

$$0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}.$$

因此

$$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$

即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

（3）

解　由题可知，$a_1=1-\sin1$，　$a_2=1-\sin(\sin1),\cdots$，　$a_n=1-\underbrace{\sin(\sin\cdots(\sin1))}_{n个},\cdots$

于是有 $0\leqslant a_n\leqslant2$，即数列 $\{a_n\}$ 有界. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin x<x$，故可得

$$\underbrace{\sin(\sin\cdots(\sin1))}_{(n+1)个}<\underbrace{\sin(\sin\cdots(\sin1))}_{n个}.$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=\underbrace{\sin(\sin\cdots(\sin1))}_{n个}-\underbrace{\sin(\sin\cdots(\sin1))}_{(n+1)个}$$

$$\geqslant\underbrace{\sin(\sin\cdots(\sin1))}_{n个}-\underbrace{\sin(\sin\cdots(\sin1))}_{n个}=0.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调增加，根据单调有界数列必有极限可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对 $a_{n+1}=1+\sin(a_n-1)$ 等式两端同时取极限得

$$A=1+\sin(A-1)\quad 即\quad \sin(A-1)=A-1.$$

解得 $A-1=0$，故 $A=1$.

亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

（4）

证　首先，由拉格朗日中值定理，必有 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 因此，问题转化为须证：存在 $\eta\in(a,b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta),\quad 或\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\eta-\frac{a+b}{2}f'(\eta)=0,$$

为此，令

$$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}f(x),$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且

$$F(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a^2}{2}-\frac{a+b}{2}f(a)=\frac{a^2f(b)-b^2f(a)}{2(b-a)}=F(b),$$

即 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，则存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $F'(\eta)=0$.