电光、计控学院本科生 2016—2017 学年线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

答案：

一、（每小题 2 分，共 8 小题）

1 对； 2 对； 3 对； 4 C； 5 C； 6 D； 7 D； 8 D

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

1．计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$。

解：原式=

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 42 = 57$$

(2 分) (2 分) (2 分)

2. 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & x \\ a & a & \dots & x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & x & \dots & a & a \\ x & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$，其中$n > 2$。

解：将第 2，3，⋯,n 列加到第一列，然后提出公因子

原式=

$$[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a & x \\ 1 & a & \dots & x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & \dots & a & a \\ 1 & a & \dots & a & a \end{vmatrix} = [(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x-a \\ 1 & 0 & \dots & x-a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x-a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x](-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-a)^{n-1}$$

(3 分) (3 分)

(2 分)

三、设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$2A^{-1}X = A^{*}+X$ （本题 10 分）

其中A^{*}是矩阵A的伴随矩阵，求矩阵X。

解：对于等式$2A^{-1}X = A^{*}+X$两端左乘以矩阵 A 可得：

$2\mathrm{X} = AA^{*} + AX$=$|A|E + AX$ （2 分）

进而有（2E-A）X=$|A|E$ （1 分）

由已知条件可得$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$=3， （1 分）

$(2E-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$=B

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ （2 分）

则 X=$3B^{-1}$=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ （4 分）

四、对于线性方程组：

$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(a-3)x_3=3 \\ 2x_1+(a+2)x_2-(a-2)x_3=4 \end{cases}$ ，a 为何值时，方程组无解、有唯一解和有无穷多组解？

并对方程组有无穷多组解的情形，求其通解。 （本题 **14** 分）

解：该方程组的增广矩阵为：

$$B=\left[A\vdots b\right]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a-3 & 3 \\ 2 & a+2 & a-2 & 4 \end{pmatrix}$$ （2 分）

对增广矩阵进行初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a-3 & 3 \\ 2 & a+2 & a-2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a & a & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-a^2 & 2-a \end{pmatrix}$$ （3 分）

因此当 $a\neq 2$ 且 $a\neq 0$ 时，系数矩阵的秩为 **3**，等于未知数个数，此时方程组有唯一解；（1 分）

当 $a=2$ 时，系数矩阵的秩为 **2**，增广矩阵的秩也为 **2**，因此方程组将有无穷多组解（**1** 分）；若 $a=0$，则增广矩阵的秩为 **3**，方程组将无解（**1** 分）。

方程组有无穷多组解时 $a=2$，此时方程组为：

$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ \quad x_2+x_3=1 \end{cases}$ （**1** 分）

取 x_3 为自由未知量，方程组化为 $\begin{cases} x_1=2x_3 \\ x_2=1-x_3 \end{cases}$ （**1** 分）

因此方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = 2\tilde{x}_3 \\ x_2 = 1-\tilde{x}_3 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \end{cases}$$ （2 分），写成向量形式：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$（1 分），其中 $\tilde{x}_3$ 为任意实数。

（1 分）

五、设 V 是二阶实对称矩阵全体的集合对于通常矩阵的加法与数乘运算所构成的实数域 R 上的线性空间，且 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 V 的一个基，试证：$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 也是 V 的一个基，并求 V 中向量 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 在基 $[B_1, B_2, B_3]$ 下的坐标。（本题 9 分）

证：$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A_1 + 0A_2 + 0A_3$，故 B_1 在基底 $[A_1, A_2, A_3]$ 下的坐标为 $X_1 = [2,0,0]^T$，

类似可得故 B_2, B_3 在基底 $[A_1, A_2, A_3]$ 下的坐标分别为 $X_2 = [0,0,3]^T, X_3 = [0,1,0]^T$。

（3 分，一个 1 分）

$$|(X_1, X_2, X_3)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1,3,2)} 2\times 1\times 3 = -6 \neq 0$$ ，故 X_1, X_2, X_3 线性无关，（2 分）

从而 B_1, B_2, B_3 线性无关，于是 $[B_1, B_2, B_3]$ 是 V 的一个基。（2 分）

显然 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2B_1 + B_2 + 2B_3$，故 A 在基 $[B_1, B_2, B_3]$ 下的坐标为 $[2,1,2]^T$。

（2 分）

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$， （题 14 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出所用的正交变换；

判定该二次型的是那种二次型(正定，负定，半正定，半负定，不定)。

解： 该二次型的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ (2 分)

矩阵的特征值多项式（或者特征值方程）为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$ (2 分)

$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-1&-2\\1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

所以，A 的特征值为$\lambda_1=5$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$ （1 分）

对于$\lambda_1=5$，其特征向量 X 满足：（5E-A）X=0

$$(5E-A)=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

取x_3为自由未知量，令x_3=1，则可得属于$\lambda_1=5$的特征向量为 $\xi_1=(1\quad 1\quad 1)^T$ （1 分）

对于$\lambda_2=\lambda_3=-1$，其特征向量 X 满足：（-E-A）X=0

$$(-E-A)=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

取x_2，x_3为自由未知量，分别令$(x_2,x_3)^T=(1,0)^T,(0,1)^T$可得属于$\lambda_2=\lambda_3=-1$的特征向量为

$\xi_2=(-1\quad 1\quad 0)^T$， $\xi_3=(-1\quad 0\quad 1)^T$ （2 分）

将ξ_1，ξ_2，ξ_3正交化可得：$\zeta_1=\xi_1$，$\zeta_2=\xi_2$，

$\zeta_3=\xi_3-\frac{(\xi_3\ \ \zeta_2)}{(\zeta_2\ \ \zeta_2)}\zeta_2=(-1\quad 0\quad 1)^T-\frac{1}{2}(-1\quad 1\quad 0)^T=\left(-\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 1\right)$ （2 分）

将ζ_1，ζ_2，ζ_3归一化可得：$\eta_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$，$\eta_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\quad 0\right)^T$，$\eta_3=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\quad-\frac{\sqrt{6}}{6}\quad\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T$ （1 分）

令矩阵$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$, （1 分）

则原二次型经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$得到标准型：$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (1 分)

该二次型是不定二次型。 （1 分）

七、已知$\alpha=(1\quad 2\quad 3),\beta=\left(1\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\right)$，设$A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$，求$A^n(n>2)$。

（本题 9 分）

证法一： $A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$ （2 分）

$n>2$时，$A^n=(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^n=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\beta$， （3 分）

而$\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\left(1\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1+1+1)=(3)$， （2 分）

而向量乘 1 阶矩阵与向量作数乘是相等的，因此，

$$A^n=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\beta=3^{n-1}\alpha^{\mathrm{T}}\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$ （2 分）

八向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ $(r>2)$线性无关, 设$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，...，$\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_r$

证明：向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$线性无关。　　　　　　　　　　　　　　（本题 9 分）

证明：设存在$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in R$，使得$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_r\beta_r=0$　　　　（2 分）

也即　$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+\lambda_r(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)=0$　化简得

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r)\alpha_1+(\lambda_2+\cdots+\lambda_r)\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$　　　　（2 分）

又因为$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 线性无关，则$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r=0\\ \lambda_2+\cdots+\lambda_r=0\\ \ddots\\ \lambda_r=0\end{cases}$　　　　（3 分）

解得　$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$

所以，$\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$线性无关.　　　　（2 分）

九、设A是n阶矩阵，如果存在正整数k，使得$A^k=O$（O为n阶零矩阵），则称A是n阶幂零矩阵。证明：

(1) 如果A是n阶幂零矩阵，则矩阵A的特征值全为 0。

(2) 如果$A\neq O$是n阶幂零矩阵，则矩阵A不与对角矩阵相似。　　　（本题 5 分）

证明：**(1)** 设A是n阶幂零矩阵，则$A^k=0$

设 A 的特征值为λ，属于λ的特征向量为α，则有

$A\alpha=\lambda\alpha$

等式两端左乘以矩阵A^{k-1}，得到：

$A^k\alpha=A^{k-1}\lambda\alpha=\lambda^k\alpha=0$　　　　（1 分）

因为α为特征向量，所以α$\neq$0，则有：

$\lambda^k = 0$，所以λ=0

即A的特征值全为0　（1分）

（2）如果$A \neq O$是n阶幂零矩阵，根据上文，其特征值全为0，则它的特征向量X满足：

（λE-A）X=0,

即　AX=0

因为$A \neq O$,所以 R(A)=r>0,　（1分）

那么方程组AX=0的解向量组的基础解系有n-r<n向量，　（1分）

只有当n阶矩阵有n个线性无关的特征向量时，矩阵才可以与对角矩阵相似。显然，非零的n阶幂零矩阵不满足这一条件，所以不与对角矩阵相似。（1分）