(2011-2012-2)工科数学分析期末试题(A 卷)解答（2012.6）

一. **1.** $\dfrac{13}{\sqrt{14}}$

2. 0

3. $ye^{xy}+x\cos(xy)+2xz\cos(xz^2)$

4. $\dfrac{7}{3}\pi a^4$

5. $\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(x-3)^n$

二. $$e^z\frac{\partial z}{\partial x}-z-x\frac{\partial z}{\partial x}=0$$ …………………………..(2 分)

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{e^z-x}$$ …………………………….(3 分)

$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial y}=1$$ …………………………..(5 分)

解得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^z-x}$$ …………………………….(6 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}(e^z-x)-z\cdot e^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-x)^2}$$ …………………………(7 分)

$$=\frac{(e^z-x-ze^z)\frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-x)^2}=\frac{e^z-x-ze^z}{(e^z-x)^3}$$ …………………………(8 分)

三. $$\begin{cases}2x-\dfrac{dz}{dx}=0\\[2mm] 3+2\dfrac{dy}{dx}=0\end{cases}$$ …………………(2 分)

将点 P 代入解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{dz}{dx}=2$ ………………….(3 分)

曲线的切向量为 $\vec{T}=\{1,-\dfrac{3}{2},2\}$ ……………….(4 分)

直线的方向向量为 $\vec{s}=\{3,-5,5\}\times\{1,0,5\}=\{-25,-10,5\}$ …………(7 分)

由于 $\vec{T}\cdot\vec{s}=-25+15+10=0$ $\vec{T}\perp\vec{s}$ 故得证 …………(8 分)

四. $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1-2x-y)$ $\frac{\partial z}{\partial y}=x(1-x-2y)$ ………………..(2 分)

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得驻点 $P_1(0,0)$ $P_2(0,1)$ $P_3(1,0)$ $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ………(4 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-2x-2y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$ ………………(6 分)

在点 $P_1(0,0)$，$A=0,B=1,C=0$ $AC-B^2=-1<0$

故 $P_1(0,0)$ 不是极值点 ……………….(7 分)

在点 $P_2(0,1)$，$A=-2,B=-1,C=0$ $AC-B^2=-1<0$

故 $P_2(0,1)$ 不是极值点 ………………..(8 分)

同理，$P_3(1,0)$ 不是极值点 ………………..(9 分)

在点 $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，$A=-\frac{2}{3},B=-\frac{1}{3},C=-\frac{2}{3}$ $AC-B^2=\frac{1}{3}>0$

又 $A<0$，故 $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 是极大值点，极大值为 $z\Big|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}=\frac{1}{27}$ ……………(11 分)

五. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\frac{d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}$ …………………………(4 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta$ ……………………….(7 分)

$=\frac{\pi^2}{32}$ ……………………..(9 分)

六. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$ $R=1$ …………………..(1 分)

$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$，发散

$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$，收敛

收敛域为 $[-1,1)$ ………………….(3 分)

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$

$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$ …………….(6 分)

$S(x)=-x-\ln(1-x)$ ……………..(8 分)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\begin{cases}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x) & x\in[-1,1),x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$ ……………..(9 分)

七. $I=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{1-y}x^2dz$ ……….…………..(4 分)

$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 x^2(1-y)dy$ ……….…………..(6 分)

$=2\int_0^1(\frac{1}{2}x^2-x^4+\frac{1}{2}x^6)dx$ ……….…………..(8 分)

$=\frac{8}{105}$ ……….…………..(9 分)

八. 由 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ ………………..(1 分)

$-\frac{x^2+y^2-(x-y+b)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-(ax+y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$ ……………(3 分)

得 $a=1 \quad b=0$ ………………..(4 分)

$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy+C$ ………………..(6 分)

$=\int_1^x\frac{1}{x}dx-\int_0^y\frac{x-y}{x^2+y^2}dy+C$ ………………(8 分)

$=-\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$ ………………(10 分)

九. $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$ ……………..(3 分)

$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$ ………………(5 分)

$S(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\\ 0 & x=0,\pm\pi\end{cases}$ ………………….(8 分)

十. 设曲面 $S_1: z=0 \quad (x^2+y^2\le 1)$

$I=\oiint\limits_{S+S_1^+}-\iint\limits_{S_1^+}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy$ ……….(1 分)

$\oiint\limits_{S+S_1^+}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy$

$=-\iiint\limits_{V}(z^2+x^2+y^2)dV$ ………………..(3 分)

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr$ ………………..(5 分)

$=-\frac{2}{5}\pi$ ………………..(6 分)

$\iint\limits_{S_1^+}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy$

$=\iint\limits_{S_1^+}(2xy+3)dxdy$ …………………..(7 分)

$=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy+3)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}3dxdy=3\pi$ ………………….(8 分)

$I=-\frac{2}{5}\pi-3\pi=-\frac{17}{5}\pi$ …………………(9 分)

十一. $f(x)=\sin x+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$ ………………..(1 分)

$f'(x)=\cos x+\int_0^x f(u)du$ ………………..(2 分)

$f(0)=0 \qquad f'(0)=1$ ………………..(3 分)

$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=x+o(x)$

$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$ ………………..(5 分)

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$发散 ………………..(6 分)

因为 $f'(0)=1>0$，且 $f'(x)$连续，故在$x=0$某邻域内 $f'(x)>0$，

$f(x)$单调增加，因此当n充分大时，$f(\frac{1}{n})$单调减少 ……………(8 分)

又 $\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=f(0)=0$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$收敛 ...…………………(9 分)