

2008 级《微积分 A》期末试题 A 卷

班级_____学号_____姓名_____

一、 填空 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____.

2. 不定积分 $\int (\frac{\arctan x}{1+x^2} + \ln x) dx =$ _____.

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$ 的间断点是_____, 是第_____类间断点.

4. 设 $y = 10^{x \tan(2x)}$, 则 $y' =$ _____.

5. 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____.

6. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\frac{x^3}{e^{x^2} + \ln(1+x^2)} + \cos^5 x] dx =$ _____.

7. 参数方程 $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = 1-t \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

8. 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} =$ _____.

9. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 1$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy + \ln y = 1$ 确定, 则 $y'(0) =$ _____.

二、(9 分) 求微分方程 $y'' + y = x^2 + x$ 的通解.

三、(9 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \int_0^x te^t dt & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性和可导性.

四、(10 分) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 有 $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$.

五、(10 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(1) 证明: 对任意实数 a 都有 $\int_a^{a+2} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$;

(2) 证明: $F(x) = \int_0^x [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s) ds] dt$ 是周期为 2 的周期函数.

六、(10 分) 设曲线 $x = y^2$ ($y > 0$), $x = 2 - y^2$ ($y > 0$) 及 $y = 0$ 围成一平面图形 D.

(1) 求平面图形 D 的面积;

(2) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周而成的立体的体积.

七、(8 分) 求函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ 的极值和它所表示的曲线的拐点的横坐标.

八、(8 分) 设已知跳伞运动员打开降落伞时, 其速度为 176m/s, 假定空气阻力是 $\frac{m}{16}v$ 千

克力 (其中 m 是人伞系统的总质量), 试求降落伞打开后 t 秒时的运动速度以及其极限速度.

九、(6 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最小值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.