

2016 级工科数学分析（上）期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一、填空（每小题4分，共20分）

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 则 $a =$ _____.

2. 已知 $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

3. $\int_1^e x^2 \ln x dx =$ _____.

4. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx =$ _____.

5. 设 $y' - \frac{1}{x} y = x^2$, 则 $y =$ _____.

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3 \cos x}$ 。

2. 设 $xe^y + ye^x = 6$, 求 dy 。

3. 计算 $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx$ 。

4. 求 $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$ 通解。

三、(6分) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 试确定常数 a 和 b 的值。

四、(6分) (1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $x > \sin x$; (2) 设 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

证明: $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限。

五、(6分) 求函数 $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的单调区间和极值, 凹凸区间和拐点, 渐近线。

六、(6分) 求心形线 $\rho = 2(1 + \cos \theta)$ 的全长及所围成图形的面积。

七、(8分) 设星形线方程为:
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(1) 求星形线所围图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积;

(2) 求当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, 对应星形线上的点的曲率。

八、(8分) 设一容器是由曲线 $y = x^3 (0 \leq x \leq 1)$ 绕 y 轴旋转一周形成, y 轴垂直地面

(1) 以每秒3的速度向容器中注水, 求容器中水高为 $h (0 < h < 1)$ 时, 水面上升速度。

(2) 容器中注满水后, 全部把水抽出至少需要做多少功。

九、(8分) 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续, 二阶可导, 且对任意 x 有: $f(x) + \int_0^x tf(x-t)dt + \sin x = 0$

(1) 求证: 对任意 x 有: $\int_0^x tf(x-t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$;

(2) 试求出 $f(x)$ 的表达式。

十、(6分) 已知 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ 。

(1) 求 $f'(1)$; (2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\ln(1+x^2)}$

十一、(6分) 已知 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且

$$f(0) = -f(1) = 1$$

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$ 成立。