2007 级《微积分 A》期末试卷(A)

班级_______________学号_______________姓名_______________成绩________

一、　填空（每小题 3 分，共 30 分）

1．设 $f'(2)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-3h)-f(2)}{2h}=$____________.

2．设 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该微分方程为____________________________.

3．计算不定积分 $\int[\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln(1+x^2)]dx=$________________________________.

4．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{(e^{x^2}-1)\sin^2 x}=$________________.

5．已知 $x\to 0$ 时，$\ln(1-x^2)=ax^2+bx^3+cx^4+o(x^4)$, 则 $a=$_____，$b=$_____，$c=$_______.

6．定积分 $\int_{-1}^{1}[x^2\sqrt{1-x^2}+x\cos x\ln(1+x^4)]dx=$_______________________.

7．微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=x^3$ 的通解为_____________________________.

8．极坐标方程为 $\rho=e^{\theta}$ 的曲线 C 上 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处切线的直角坐标方程为_____________________.

9．设函数 $f(x)=\int_1^x(1-\dfrac{1}{\sqrt{t}})dt \quad (x>0)$，则 $f(x)$ 的单调增加区间为____________.

10．计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(1+x^2)}=$________________.

二、（10 分）设可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y=x-y$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$, 并判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

三、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求证：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx.$$

并由此计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx$ 的值.

四、（8 分） 求证：当 $x>0$ 时，$e^x>(1+\frac{x}{2})^2$.

五、（10 分）设 $A(x_0,y_0)$ 是曲线弧 $\Gamma: y=\sqrt{x}$ 上的一点，其中 $2\le x\le 6$;

（1） 求曲线弧 Γ 在 $A(x_0,y_0)$ 点的切线方程;（2）求 $x_0\in[2,6]$ 的适当值，使得上述切线与直线 $x=2, x=6$ 及曲线弧 Γ 所围成图形的面积 S 最小.

六、（10 分）已知曲线 $y=f(x)$ 上 (x,y) 点处切线的斜率为 $ax-6$，且当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极小值 -3.（1）求 a 的值及 $f(x)$ 的表达式;（2）求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围图形绕直线 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

七、（8 分）设有一块半径为 R 的的圆形平板竖直放立在水中，圆板的圆心与水平面的距离为 $2R$，求圆形平板一侧所受到的水压力（水密度取为 1）.

八、（10 分）设 $f(x)=xe^x+\int_0^x (x-t)f(t)dt$,其中 $f(x)$ 可导，求 $f(x)$ 的表达式.

九、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f(1)=\int_0^1 xf(x)dx$.证明：必存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.