

《数学分析 B》期末考试试卷(A 卷)

2008.6

一、填空 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f'_x(0, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f'_y(0, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 3x^2 - 12y^2$, 则 $f(x, y)$ 取得极小值的点为 $\underline{\hspace{2cm}}$,
 $f(x, y)$ 取得极大值的点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 函数 $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z^2$ 在 $P(-2, 2, 1)$ 点处沿着从 P 到 $O(0, 0, 0)$ 方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 L 是曲线弧 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ ($0 \leq t \leq 2$), 则曲线积分

$$\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n}$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散? 答: $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x < \pi \end{cases}$, 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数展开式的和函数, 则 $S(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $S(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$, $S(-2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$, $S(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ 的麦克劳林级数的展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}$,
其收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、(10 分) 设 $u(x, y)$ 是由方程 $u^2 - z^2 + 2y^2 - x = 0$ 确定的可微的隐函数, 其中

$z = z(x, y) = xy^2 + y \ln y - y$, 且 $u(x, y) > 0$, 求 $(2, 1)$ 点处 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

三、(8 分) 计算二重积分 $I = \iint_D (y^2 - x) dx dy$, 其中 D 是由抛物线 $x = y^2$ 与

$x = 3 - 2y^2$ 围成的有界闭区域.

四、(10 分) 在曲面 $\Sigma: z = xy$ 上求一点 P ，使曲面 Σ 在 P 点处的法线垂直于平面

$x + 3y + z + 9 = 0$ ，并写出 Σ 在 P 点处法线的标准方程.

五、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{2^{2n}} x^{2n-1}$ 的收敛区间及和函数.

六、(10 分) 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 2x$ 所围成的立体，其上质量分布是均匀的(密度为 μ)，求 Ω 绕 z 轴旋转的转动惯量.

七、(10 分) 计算第二类曲面积分 $I = \iint_S 2xdydz + (z+2)^2 dxdy$ ，其中 S 是曲面 $z = -\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧.

八、(8 分) 设 $f(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续的导函数， k 是一个待定常数. 已知曲

线积分 $\int_{\Gamma} (x^2 y^3 + 2x^5 + ky)dx + [xf(xy) + 2y]dy$ 与路径无关，且对任意的 t ，有

$$\int_{(0,0)}^{(t,-t)} (x^2 y^3 + 2x^5 + ky)dx + [xf(xy) + 2y]dy = 2t^2$$

求 $f(u)$ 的表达式和常数 k 的值.

九、(6 分) 设 $u_n > 0$ ， $v_n > 0$ ，且 $v_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1} \geq a > 0$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，其中 a 为常

数. 求证：(1) 数列 $\{u_n v_n\}$ 单调有界； (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。