数学分析 B 参考解答(2007.11)

一. 1. 8

2. 0, 1, 一 (各 1 分)

3. $\dfrac{-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ (没化成最简形式扣 1 分)

4. 3, 2, 1 (各 1 分)

5. $x+2x^2+2x^3+o(x^3)$

6. 12

7. $-\dfrac{1}{6}$, 3 (1 分, 2 分)

8. $\left(\dfrac{f'(\arctan x)}{1+x^2}+\dfrac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}\right)dx$ (其中两个导数各 1 分)

9. $y=2x+6$

10. $x=0$

二. 方程两端对 x 求导

$$y'e^x+ye^x+\frac{1}{xy}(y+xy')=0 \qquad \text{…………………………(4 分)}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ye^x+\frac{1}{x}}{e^x+\frac{1}{y}} \qquad \text{…………………………(6 分)}$$

在已知方程中令 $x=1$，得 $ye+\ln y=e$，$y=1$ ………………………(7 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=-1 \qquad \text{…………………………(8 分)}$$

三. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{\frac{-\sin t}{\cos t}}=-t\cos t \qquad \text{…………………………(4 分)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\cos t+t\sin t}{\frac{-\sin t}{\cos t}}=\frac{\cos^2 t-t\sin t\cos t}{\sin t} \text{………………………(8 分)}$$

四. 由题设得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)(x^2+2)}=2$ ……………………………(1 分)

故 $\lim\limits_{x\to1}(x^3+ax+b)=1+a+b=0$ ………………………(3 分)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)(x^2+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax-a-1}{(x-1)(x^2+2)}$$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1+a}{x^2+2}=\dfrac{3+a}{3}=2$ ……………………………(6 分)

$a=3 \qquad b=-a-1=-4$ ……………………………(8 分)

五. 设 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$ ……………………………(1 分)

$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$ ……………………………(2 分)

$f''(x)=2\ln(1+x)\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x}-2$ ……………………………(3 分)

$f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^2}-\dfrac{2\ln(1+x)}{(1+x)^2}-\dfrac{2}{(1+x)^2}=-\dfrac{2\ln(1+x)}{(1+x)^2}<0$ …………………(4 分)

$f''(x)\searrow$ 又 $f''(0)=0$ $\therefore f''(x)<0$ ………………………(6 分)

$f'(x)\searrow$ 又 $f'(0)=0$ $\therefore f'(x)<0$ ………………………(7 分)

$f(x)\searrow$ 又 $f(0)=0$ $\therefore f(x)<0$

即 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$ ……………………………(8 分)

六. 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1-2x}{x^2}+1)=+\infty$， $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1-2x}{x^2}+1)=1$，

故 $x=0$ 是垂直渐近线，$y=1$ 是水平渐近线……………………………(2 分)

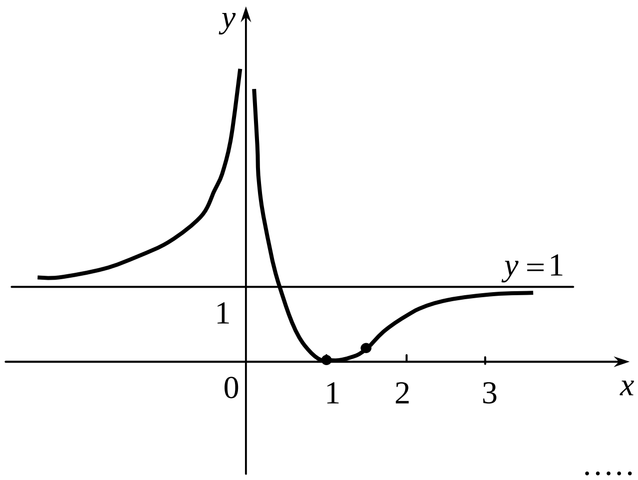
$y'=\dfrac{-2}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x-1)}{x^3}$ ……………………………(3 分)

$y''=\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{-4}{x^3}=\dfrac{2(3-2x)}{x^4}$ ……………………………(4 分)

令 $y'=0$，得 $x=1$，令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{3}{2}$ ……………………………(6 分)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},+\infty)$	
y'	$+$		$-$	0	$+$		$+$	..(7 分)
y''	$+$		$+$		$+$	0	$-$	..(8 分)
y	↗ ∪	间断	↘ ∪	极小值 0	↗ ∪	拐点 $(\frac{3}{2},\frac{1}{9})$	↗ ∩	

…………………(10 分)



………………………(12 分)

七. 设$M(x,x^2)$，则过M 点的切线斜率为$(x^2)'=2x$ ……………………(1 分)

切线方程为 $Y-x^2=2x(X-x)$ …………………………(2 分)

令 $Y=0$，得 $X=\frac{x}{2}$， 令 $X=8$，得 $Y=16x-x^2$ ………………(4 分)

$$S(x)=\frac{1}{2}QA\cdot PA=\frac{1}{2}(8-\frac{x}{2})(16x-x^2) \qquad (0<x<8)$$ ………………(6 分)

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(16x-x^2)+\frac{1}{2}(8-\frac{x}{2})(16-2x)$$

$$=\frac{1}{4}(3x^2-64x+256)$$ ………………………(8 分)

令 $\frac{dS}{dx}=0$， 得 $x=\frac{16}{3}$ …………………………(9 分)

由问题的实际意义，三角形的面积确有最大值，且驻点惟一，故点 $(\frac{16}{3},(\frac{16}{3})^2)$ 为所求. …………………………(10 分)

八. (1) 由题设，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)-1}{x})}{x}=3$ ……………………………(1 分)

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\dfrac{f(x)-1}{x})=0$ ……………………………(2 分)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)=0$ ……………………………(3 分)

$\therefore\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ ……………………………(4 分)

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$ ……………………………(5 分)

(2) $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)-1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}$ ……………………………(6 分)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+\frac{f(x)-1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\frac{f(x)-1}{x}}{x}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=1+3=4$ ……………………………(7 分)

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)-1}{x})^{\frac{1}{x}}=e^4$ ……………………………(8 分)

九. 令 $F(x)=f(x)-x^2+x$ ……………………………(2 分)

则 $F(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上可导(没此叙述不扣分)

$F(0)=0$， $F(1)=1>0$， $F(2)=-1<0$ ………………………(4 分)

由介值定理， $\exists c\in(1,2)$， 使 $F(c)=0$ ……………………………(6 分)

由洛尔中值定理，$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,2)$，使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-2\xi+1=0$ $f'(\xi)=2\xi-1$ ……………………………(8 分)