标准答案及评分标准**2019年1月11日**

一、填空（每小题4分，共20分）

1 e^2

2． $-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

3. $a=b\neq 0$

4. $6(e^2-1)$

5. $2+Ce^{-x^2}$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$$ **…………3分**

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}$$ **…………5 分**

2. 解：当 $x=0$ 时，得 $y=1$ **…………1分**

方程 $2^{xy}=x+y$ 两边对 x 求导，得

$2^{xy}\ln^2(y+xy')=1+y'$ **…………3分**

将 $x=0, y=1$ 代入上式，

得到 $y'|_{x=0}=\ln^2-1$

于是，$dy|_{x=0}=(\ln^2-1)dx$. **…………5分**

3. 解:定义域 $(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{10}{3}\square\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$，一阶导数不存在的点为 $x_1=0$; $f'(x)=0$ 得驻点 $x_2=1$. **………… 1 分**

列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	□	极大值 0	□	极小值 −3	□

$f(x)$ 有单调递增区间为：$(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$；

单调递减区间为：$(0,1)$；

极大值为: $f(0)=0$, 极小值为: $f(1)=-3$. **………… 5分**

4. 解I: 设 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ …………. 2分

代入原方程，得：$p(y\dfrac{dp}{dy}-p)=0$

于是有 $p=0$ 或 $y\dfrac{dp}{dy}-p=0$

由后一方程分离变量法得：$p=C_1y,$

即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y,$ ………….4 分

故原方程的通解为：$y=C_2e^{C_1x}$.

由 $p=0,$ 即 $y'=0,$ 得 $y=C,$ 此式包含在通解中($C_1=0$ 的情况).

………….5 分

解II: 两端同乘不为零因子 $\frac{1}{y^2}(y\neq 0)$,（$y=0$ 也是解.)

则 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y'}{y})=0,$ …………. 2分

故 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y,$ ………….4 分

故原方程的通解为：$y=C_2e^{C_1x}$. ………….5 分

解III: 原方程变为：$\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{y'}{y},$ …………. 2分

两边积分，得 $\ln y'=\ln y+\ln C_1,$ 即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y,$ ………….4 分

故原方程的通解为：$y=C_2e^{C_1x}$. ………….5 分

三、解：$\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

$\displaystyle=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ …………. 3分

$\displaystyle=-\int\arctan x\,d(\frac{1}{x})-\int\arctan x\,d(\arctan x)$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}(\arctan x)^2-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$ …………. 6分

$\displaystyle=-\frac{1}{2}(\arctan x)^2-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}(\arctan x)^2-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ …………. 8分

四、解: $\lim\limits_{x\to c} y=\lim\limits_{x\to c}\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)\neq\infty,$

所以曲线没有垂直渐近线.

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)=\infty,$$

所以曲线没有水平渐近线…………**1** 分

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)\right)=1$$ …………**4**分

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x\right)=\frac{\pi}{2}$$ …………**7**分

故曲线有斜渐近线 $y=x+\frac{\pi}{2}$. ………… **8**分

五、(1)证明：由题意 $x_2=\sin x_1, 0<x_2\le 1,$ 因此当 $n\ge 2$ 时，

$x_{n+1}=\sin x_n\le x_n, \{x_n\}$单调减少；

又 $x_n>0, \{x_n\}$有下界，故$\{x_n\}$有极限.

$x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限得， $A=\sin A,$ 故有极限 $A=0.$…………**3** 分

(2)解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}},$ 为1^∞ 型

离散型不能直接用洛必达法则

先考虑 $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

故， $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$ …………**6** 分

六、解：（1）画草图，解交点 $(0,0), (1,1)$

$A=\int_0^1(x-x^2)dx$ …………**2** 分

$=\frac{1}{6}$ …………**4** 分

（2）$V=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2dy-\pi\int_0^1 y^2dy$ …………**6** 分

$=\frac{1}{6}\pi$ …………**8** 分

七、解：以上底作为 y 轴，两底的中垂线作为 x 轴建立直角坐标系.
在 x 轴的区间 $[0,20]$ 上任取小区间 $[x,x+dx]$，

得面积微元等于 $(10-\frac{x}{5})dx$. **…………2分**

（1） x 处水的压强为 μgx, 故

$$dP=\mu gx(10-\frac{x}{5})dx,$$

积分得所求压力 $P=\int_0^{20}\mu gx(10-\frac{x}{5})dx=\frac{4400}{3}\mu g$; **…………5 分**

（2） x 处水深为 $x+2$, 故水的压强为 $\mu g(x+2)$, 于是

$$dP=\mu g(x+2)(10-\frac{x}{5})dx,$$

积分得所求压力 $P=\int_0^{20}\mu g(x+2)(10-\frac{x}{5})dx=\frac{5360}{3}\mu g$. **…………8 分**

八、解：由 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x})=1$, 可知

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}+f(x))=0$, 从而

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1$. ……………**3分**

$1=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x-x}{x^2})=f'(0)+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$ ……………**6分**

$=f'(0)+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=f'(0)-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=f'(0)$.

所以，$f'(0)=1$. ……………**8分**

九、解：令 $u=x-t$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$

代入方程可得：$\int_0^x f(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1$ ……………**2 分**

再对 x 求导得：$f(x)=\int_0^x f(t)dt-e^{-x}$，……………**4 分**

由于 $f(x)$ 连续，可知 $\int_0^x f(t)dt$ 可导，从而 $f(x)$ 也可导. 上式两边再求导得

$f'(x)=f(x)+e^{-x}$

则 $f(x)$ 满足初值问题：$\begin{cases} f'(x)=f(x)+e^{-x} \\ f(0)=-1 \end{cases}$ ……………**6 分**

解此微分方程可得 $f(x)=-\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}$ ……………**8 分**

十、证明：(1) 由于 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0,$

由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(0,1),$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1. \text{ ………….2 分}$$

(2) 令 $\varphi(x)=f'(x)+f(x),$ $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，由拉格朗日定理，

存在 $\eta\in(-1,1),$ 使得

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{1-(-1)}=\varphi'(\eta). \text{ ………….4 分}$$

$$\frac{f'(1)+f(1)-f'(-1)-f(-1)}{2}=\varphi'(\eta),$$

由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数，且 $f(1)=1,$ 得

$$\varphi'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)=1. \text{ ………….6分}$$