

《微积分 A》(下) 期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(试卷共 6 页, 十个大题, 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

- 过点 $M(3, 0, -1)$ 且与平面 $\pi: 3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程为_____.
- 函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 处沿 $\vec{n} =$ _____ 的方向导数最大, 最大方向导数为_____.
- 设 $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$, 则交换积分次序后 $I =$ _____.
- 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 计算 $\int_L x dl =$ _____.
- 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 是_____ 收敛.

二、计算题 (每小题 5 分, 共 20 分)

- 求点 $M(1, 0, 2)$ 到直线 $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ 的距离.

2. 设 $z = f(\frac{x}{y})$, 且 $f(u)$ 二阶可导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 计算 $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, S 为锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的部分.

4. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 计算 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,-2)}$ 的值.

三、(8 分) 求曲面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 2v$ 在 $u = 2, v = \frac{\pi}{4}$ 处的切平面方程.

四、(6 分) 设 D 是由直线 $y = x, y = 2x, y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为 1),
求 D 对于 y 轴的转动惯量.

五、(8 分) 求坐标原点到曲线 $\Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 的最长和最短距离.

六、(8 分) 设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内不取零值的可微函数, $\varphi(0) = 1$. 已知

$\varphi(x)(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + \varphi(x)(x^2 + y^2)dy$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分.

(1) 求 $\varphi(x)$ 满足的微分方程及 $\varphi(x)$ 的表达式; (2) 求 $u(x, y)$ 的表达式.

七、(8 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ 的收敛域及和函数.

八、(8 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数. 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$,

$f(x)$ 展开的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 且 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 求 b_3 及 $S(\pi)$.

九、(8 分) 计算 $I = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

十、(6 分) 流速 $\vec{v} = \{x^3, y^2, z^4\}$ 的不可压缩的密度为 1 的流体, 流过由 $z = 4 - (x^2 + y^2)$ 与 $z = 1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ 所围立体, 有平行于 xoz 面的平面截此立体, 问单位时间内沿 y 轴方向通过哪个截面的流量最大?

草紙

