电光、计控学院本科生 2015—2016 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）参考答案

一　1. ×　2. √　3. ×　4. D　5 B　6 D　7B　8 D

二 、行列式计算　（第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

1．解：原式=2（*x+y*）$\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$　（2 分）　=2（*x+y*）$\begin{vmatrix} 0 & y-x & x \\ 0 & y & x-y \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$　（1 分）

=2（*x+y*）$\begin{vmatrix} y-x & x \\ y & x-y \end{vmatrix}$　（1 分）　$=-2(x+y)(x^2-xy+y^2)$　$=-2(x^3+y^3)$　（**2 分**）

2. 解：

原式=（a+9）$\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+5 & a+6 & 0 \\ 0 & a+7 & a+8 & 0 \\ a+3 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix}$**(2 分)=**（a+9）$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{vmatrix} -1^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} a+5 & a+6 \\ a+7 & a+8 \end{vmatrix}$**(2 分)**

=（a+9）［(a+1)（a+4)－（a+2)（a+3)］［(a+5)（a+8)－（a+6)（a+7)］(2 分)

=4（a+9）(2 分)

三.

解法 1：计算$|A|$：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$ 。（3 分）

$|A| \neq 0$，因此 A 可逆。（1 分）

计算 A^*，A 的第 i 行第 j 列元的代数余子式记为 A_{ij}：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$，（4 分）

所以 $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$。（2 分）

解法 2：对 $A\ E$ 作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0- & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$。（8 分）

（做对 2 个步骤以上，最后有计算错误扣 1-2 分。）

A经一系列初等行变换得到单位阵，因此A可逆。且上式说明，$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2&2\\8&-4&2\\-3&2&-1\end{pmatrix}$。（2 分）

四．解：（1）对线性方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&-1&0\\0&a-1&1&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&a-2&0&b-1\end{pmatrix}$$

（1 分）　　　　　　　　　　（2 分）

故：　当$a=2,\quad b=1$ **时有无穷多解(2 分)；**

当 $a\neq 2$ **时有唯一解(2 分)；**

当 $a=2,\quad b\neq 1$ **时无解（2 分）**

（2）当$a=2,\quad b=1$ **时，**$B\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$**，（1 分）**

对应同解线性方程组为$\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$**，令**$x_3=0$ **得特解**$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　　**（1 分）**

令$x_3=1$ **得对应导出组基础解析**$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$　　　　**（1 分）**

故方程组的解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad k\in R$　　**（2 分）　不说**$k\in R$**扣 1 分**

五、　在R^2**中定义变换 σ：**$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$**(1) 证明：变换 σ 为线性变换。**

(2) 求 σ 在基底α_1,α_2**下的矩阵 A。**

解：显然$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}\in R^2$

设$\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2,\beta=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2,k\in R,$**则**$\alpha+\beta=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2$

$$\sigma\alpha=\begin{pmatrix} b \\ a+b\end{pmatrix},\sigma\beta=\begin{pmatrix} d \\ c+d\end{pmatrix},\sigma(\alpha+\beta)=\begin{pmatrix} b+d \\ a+c+b+d\end{pmatrix}=\sigma\alpha+\sigma\beta$$ （2 分）

$$\sigma(k\alpha)=\sigma\begin{pmatrix} ka \\ kb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kb \\ ka+kb\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} b \\ b+a\end{pmatrix}=k\sigma\alpha$$ （2 分）

所以变换 σ 为线性变换

$$\sigma\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\alpha_2-\alpha_1=(\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\qquad \sigma\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2=(\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$ （3 分）

则 σ 在基底α_1,α_2下的矩阵 A=$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ （2 分）

六．解，二次型f的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，（2 分）

计算A的特征多项式：

$$\phi_A(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)。$$

因此A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$和$\lambda_3=4$。 （3 分）

解方程组$(\lambda_1E-A)X=0$**，即**$\begin{cases}-x_2-x_3=0\\-x_2-x_3=0\end{cases}$**，得到该方程组的基础解系**

$X_1=(1\ \ 0\ \ 0)^T$和$X_2=(0\ \ 1\ \ -1)^T$。（2 分）它们是A的对应与特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$的两个线性无关的特征向量。且X_1和X_2已经正交，无需再正交化。再单位化，得到：$\varepsilon_1=(1\ \ 0\ \ 0)^T$和$\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ \ 1\ \ -1)^T$。（2 分）

解方程组$(\lambda_3E-A)X=0$**，即**$\begin{cases}2x_1=0\\x_2-x_3=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}$**，得到此方程组的基础解系**

$X_3=(0\ \ 1\ \ 1)^T$。再单位化，得到：$\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ \ 1\ \ 1)^T$。（2 分）

因此构造正交矩阵$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，对二次型$f$作正交变换$X=PY$，得到$f$的标准形

$f=2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$。（2 分）该二次型矩阵的特征值都是正数，因此该二次型正定。（1 分）

七．证明：依题意得 $A\alpha_i=0,i=1,2,\cdots,s,\ A\beta\neq 0$。

设有一组数$k_0,k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_s(\beta+\alpha_s)=0$ **（2 分）**

即 $(k_0+k_1+\cdots+k_s)\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ **(1)**

上式两端同左乘矩阵 A 得 $(k_0+k_1+\cdots+k_s)A\beta+k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$

得到 $(k_0+k_1+\cdots+k_s)A\beta=0$ **（2 分）**

由于$A\beta\neq 0$**，故有** $k_0+k_1+\cdots+k_s=0$ **(2)** **（1 分）**

代入(1)式可得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**基础解系知它们线性无关，故可得**$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ **（2 分）**

则由(2)式可得$k_0=0$ **（1 分）**

因此 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_s$**线性无关。** **（1 分）**

八、 解：法 1：因为$\left|M\right|=(-1)^{1+2+\cdots n+(n+1)+(n+2)+\cdots 2n}\left|A\right|\left|C\right|\neq 0$**，所以 M 逆矩阵存在。（1 分）**

设$M^{-1}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,则$\begin{pmatrix}0 & A\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax_3 & Ax_4\\ Cx_1+Dx_3 & Cx_2+Dx_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$ **（2 分）**

则有$Ax_3=E,Ax_4=0,Cx_1+Dx_3=0,Cx_2+Dx_4=E$ **（2 分）**

$x_3=A^{-1},\ x_4=0,\ x_2=C^{-1},\ x_1=-C^{-1}DA^{-1}$ **（2 分）**

所以$M^{-1}=\begin{pmatrix}-C^{-1}DA^{-1} & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$ **（2 分）**

法 2：构造矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & A & E & 0\\ C & D & 0 & E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & E & A^{-1} & 0\\ E & C^{-1}D & 0 & C^{-1}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & E & A^{-1} & 0\\ E & 0 & -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E & 0 & -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1}\\ 0 & E & A^{-1} & 0\end{pmatrix}$$ **（7 分）**

所以$M^{-1}=\begin{pmatrix}-C^{-1}DA^{-1} & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$ **（2 分）**

九．解：

（1）设A的特征值λ所对应的特征向量为X。则

$0X=(A^2-A-2E)X=A^2X-AX-2X=A(\lambda X)-\lambda X-2X=(\lambda^2-\lambda-2)X$，

因 $X \neq 0$，所以 $\lambda^2-\lambda-2=0$。因此 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$。(2 分)

（2）A 的关于 $\lambda=2$ 的特征子空间的维数为 $n-R(A-2E)$，故可从中取 $n-R(A-2E)$ 个向量构成线性无关的向量组 S_1，A 的关于 $\lambda=-1$ 的特征子空间的维数为 $n-R(A+E)$，故可从中取 $n-R(A+E)$ 个向量构成线性无关的向量组 S_2。将 S_1 和 S_2 合并得到的向量组 S 依然是线性无关的向量组，且每一个都是 A 的特征向量。S 含有向量的个数为 $2n-[R(A+E)+R(A-2E)]$，但

由 $(A-2E)(A+E)=0$ 得到，$R(A+E)+R(A-2E)\leq n$；另一方面，

$R(A+E)+R(A-2E)\geq R(A+E-A+2E)=R(3E)=n$。

因此 $R(A+E)+R(A-2E)=n$。所以 S 含有 n 个向量，即 A 有 n 线性无关的特征向量，因此 A 与对角形矩阵相似。（3 分）