北京理工大学 2015-2016 学年第二学期

工科数学分析期中试题评分标准

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$， $|\vec{a}\times\vec{b}|=2$ ………………… 2 分，2 分

2. 切平面方程 $2x+y-4=0$， ……………………… 2 分

   法线方程 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{0}$ ……………………… 2 分

3. $I=\int_0^1 dy\int_{2y-2}^{2-2y} f(x,y)dx$ ……………………… 4 分

4. $dz=[y+f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x})]dx+[x+f'(\dfrac{y}{x})]dy$ ……………………… 4 分

5. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \overline{AB}}\right|_A=\dfrac{1}{2}$ ……………………… 4 分

二. (8 分) 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程。

解：将 L 化为一般式 $\begin{cases}x-y-1=0\\ y+z-1=0\end{cases}$， 则过 L 的平面束方程为

$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$， 即 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-1-\lambda=0$ ………… 2 分

由题意 $\{1,\lambda-1,\lambda\}\cdot\{1,-1,2\}=\lambda+2=0$， 解得 $\lambda=-2$ ………… 4 分

则直线 L 在平面 π 上的投影平面方程为：$x-3y-2z+1=0$， ………… 6 分

于是所求投影直线 L_0 的方程为 $\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\ x-y+2z-1=0\end{cases}$。 ………… 8 分

解 2：由题意，直线 L 的方向向量为 $\{1,1,-1\}$，平面 π 的法向量为 $\{1,-1,2\}$，

直线 L 在平面 π 上的投影平面的法向量为：

$\vec{n}=\{1,1,-1\}\times\{1,-1,2\}=\{1,-3,-2\}$ ………… 3 分

又直线过点 $(1,0,1)$，则直线 L 在平面 π 上的投影平面方程为

$x-1-3y-2(z-1)=0$， 即 $x-3y+z+1=0$ ………… 6 分

于是所求投影直线 L_0 的方程为 $\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\ x-y+2z-1=0\end{cases}$。 ………… 8 分

三. (8 分) 设 $z=\sin(xy)+\varphi(x,\frac{x}{y})$，其中 φ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\varphi_1'(x,\frac{x}{y})+\varphi_2'(x,\frac{x}{y})\frac{1}{y}$， ……………… 3 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi_2'(x,\frac{x}{y})$， ……………… 6 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi_{12}''(x,\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})+(-\frac{1}{y^2})\varphi_2'(x,\frac{x}{y})+\frac{1}{y}\varphi_{22}''(x,\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})$$

$$=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi_2'(x,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^2}\varphi_{12}''(x,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^3}\varphi_{22}''(x,\frac{x}{y})$$ ……… 8 分

四. (8 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明在点 $(0,0)$ 处， $f(x,y)$ 连续且偏导数存在，但不可微。

解：令 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，则

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{\rho\to0}\rho\cos^2\theta\sin^2\theta=0=f(0,0)$， $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续； …… 2 分

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，且 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$； ………… 4 分

下面证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 点不可微，

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}$$ ……………… 6 分

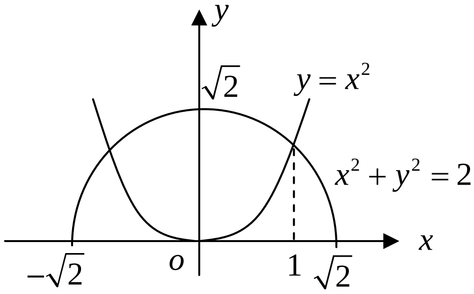
$$\overset{\text{沿}\Delta y=\Delta x}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^4}{4(\Delta x)^4}=\frac{1}{4}\neq0$$

故当 $\rho\to0$ 时， $\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]\neq o(\rho)$

所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。 ………………… 8 分

五. (8 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\right\}$

解：由奇偶对称性



$\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy$ ………… 1 分

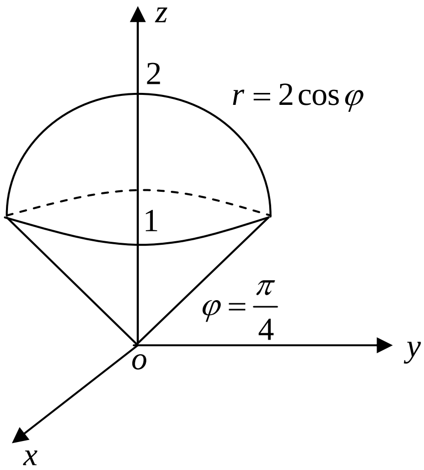
$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy$ ………… 3 分

$=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx-2\int_0^1 x^4dx$ ………… 5 分

$\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=\!=\!=\!=\!=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2tdt-\frac{2}{5}$ ………… 7 分

$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$ ………… 8 分

六. (8 分) 计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z(x+y+z)dxdydz$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 和锥面 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成立体。



解：在球坐标系下 $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le 2\cos\varphi$

则 由奇偶对称性

$I=\iiint\limits_\Omega z(x+y+z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$ …… 1 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$ …… 5 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4dr$

$=\frac{64}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi$ …… 7 分

$=\frac{3}{2}\pi$ …… 8 分

七. (8 分) 求第一类曲线积分 $I=\int_L ydl$，其中 L 是摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的一拱。

解：$I=\int_L ydl=\int_0^{2\pi} y\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$ ………………… 2 分

$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt$ ………………… 4 分

$=\int_0^{2\pi} 2a\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt$ ………………… 6 分

$=\frac{32}{3}a^2$ ………………… 8 分

八. (8 分) 求柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的体积和表面积。

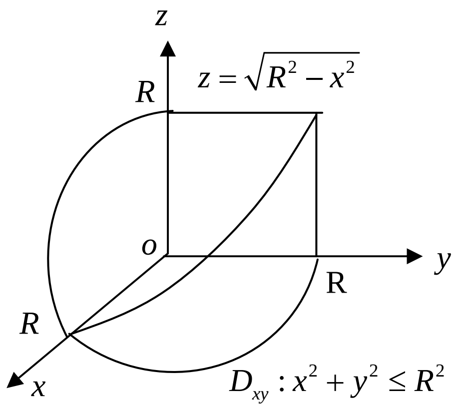
解：所围立体体积为：

$V=8\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2}dxdy$

$=8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy$ ………… 2 分

$=8\int_0^R (R^2-x^2)dx$

$=8(R^3-\frac{1}{3}R^3)=\frac{16}{3}R^3$ ………… 4 分



所围立体的表面积

$S=16\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy$

$=16\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy$ ………… 6 分

$=16\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dy$

$=16\int_0^R Rdx=16R^2$ ………… 8 分

九.（8 分）求由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值。

解：方程两边对 x 求导得 $2xz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0$ （1）

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，得 $xz+1=0$ ………… 1 分

方程两边对 y 求导得 $2yz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0$ （2）

令 $\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $yz+1=0$ ………… 2 分

联立 $\begin{cases}xz+1=0\\ yz+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=y\\ z=-\frac{1}{x}\end{cases}$，

代入原方程解得 $\begin{cases}x=-1\\ y=-1\\ z=1\end{cases}$，于是得唯一驻点 $P_0\left(-1,-1\right)$ ………… 4 分

（1）式两边再对 x 求导得：

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(\frac{-1}{z^2})(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

把 $(-1,-1,1)$ 代入上式得，$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,-1,1)}=-\frac{2}{3}$， ………… 5 分

（1）式两边再对 y 求导得：

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(\frac{-1}{z^2})\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

把 $(-1,-1,1)$ 代入上式得，$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$， ………… 6 分

（2）式两边再对 y 求导得：

$$2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+(\frac{-1}{z^2})(\frac{\partial z}{\partial y})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

把 $(-1,-1,1)$ 代入上式得，$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{3}$， ………… 7 分

则 $AC-B^2>0$，且 $A<0$，

故 P_0 是极大值点，且极大值为 $z\left(P_0\right)=1$ ………… 8 分

十. (8 分) 设曲线$\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所得的旋转曲面为Σ，Σ与平面$z = 2y$所围成的立体为Ω，假设Ω上各点的密度为常数μ。

（1）写出曲面Σ 的方程；　　（2）求Ω对z的转动惯量。

解：（1）曲面Σ 的方程为：$z = x^2 + y^2$ ………… 1 分

（2）由$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2y \end{cases}$ 消去z得 $x^2 + y^2 = 2y$， ………… 2 分

则Ω对z的转动惯量

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x^2 + y^2)dxdydz$$ ………… 3 分

$$= \mu\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{x^2+y^2}^{2y}(x^2 + y^2)dz$$ ………… 4 分

$$= \mu\iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)(2y - (x^2 + y^2))dxdy$$ ………… 5 分

$$= 2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta}(2\rho^4\sin\theta - \rho^5)d\rho$$ ………… 6 分

$$= \frac{64}{15}\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta$$ ………… 7 分

$$= \frac{64}{15}\mu\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\mu\pi$$ ………… 8 分

十一.（8 分）求函数 $f(x,y)=(x-4)(y+8)$ 在点 (x,y) 处的最大方向导数 $g(x,y)$，并求 $g(x,y)$ 在曲线 $x^2+y^2=20$ 上的最大值和最小值。

解：因为函数沿梯度方向的方向导数最大，且最大值就等于梯度的模，所以

$f'_x(x,y)=y+8$，$f'_y(x,y)=x-4$，$grad f(x,y)=\{y+8,x-4\}$，由题意

$$g(x,y)=\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}=\sqrt{(y+8)^2+(x-4)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ 2 \text{ 分}$$

求 $g(x,y)$ 在曲线 $x^2+y^2=20$ 上的最大值和最小值，就是求 $g(x,y)$ 在约束条件 $x^2+y^2=20$ 下的条件极值问题，为计算方便，令

$$F(x,y,\lambda)=(y+8)^2+(x-4)^2+\lambda(x^2+y^2-20) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ 4 \text{ 分}$$

由 $\begin{cases} F'_x=2(x-4)+2\lambda x=0 \\ F'_y=2(y+8)+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+y^2-20=0 \end{cases}$，解得 $M_1(2,-4)$，$M_1(-2,4)$ ………… 6 分

而 $g(2,-4)=\sqrt{(-4+8)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$，$g(-2,4)=\sqrt{(4+8)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{180}$

所以，$g(x,y)$ 在 $x^2+y^2=20$ 上的最大值为 $\sqrt{180}$，最小值为 $\sqrt{20}$。 ………… 8 分