北京理工大学2013-2014学年第一学期

《微积分A》（I）A卷试题答案及评分标准

一、填空题（每题4分）

(1) 1; (2) $(\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)})\mathrm{d}x$; (3) $1-\sqrt{2}$;

(4) $2x\ln x+x$, $x^2\ln x+x^2+C$; (5) $e^x-\frac{1}{x}e^x$.

二、将$x=0$带入原方程，得$y=1$ ……………………………… 2 分

方程两边同时求导：$y+xy'+e^y y'=0$ ……………………………… 4 分

解得：$y'=-\frac{y}{x+e^y}$ ……………………………… 6 分

将$x=0,\, y=1$带入求得：$y'(0)=-1/e$ ……………………………… 8 分

其它方法，如用微分法，类比上述标准给分。

三、$\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ ……………………………… 1 分

$[\int_0^x(x-t)f(t)dt]'=\int_0^x f(t)dt$ ……………………………… 2 分

$x\int_0^x f(x-t)dt=x\int_0^x f(u)du$ ……………………………… 3 分

$[x\int_0^x f(x-t)dt]'=\int_0^x f(u)du+xf(x)$ ……………………………… 4 分

原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$ ……………………………… 7分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=1/2$ ……………………………… 8分

四、原式$=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx$ ....4 分

$=(x-\frac{1}{2}x^2)|_0^1+(\frac{1}{2}x^2-1)|_1^2$ ....7 分

$=1$ ....8 分

若能用定积分的几何意义，画图计算面积也可。其它情形酌情给分

五、联立曲线与直线的方程，解得：$x_1=-1, x_2=2$ ....2 分

$S=\int_{-1}^2[1+x-(x^2-1)]dx=\int_{-1}^2(2+x-x^2)dx$ 5分

$=(2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)|_{-1}^2$ ....7 分

$=9/2$ ....8 分

六、$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-a}{x^2}$存在，故$a=1$......................................2分

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1=b$，故$b=1$......................................4分

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 6分

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}-2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{x^2}-2}{3x}$ 7分

$=0$......................................8 分

七、$y' = 4x^3 - 6x^2$ 1分

$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$ 2分

令$y'' = 0$，得到$x = 0$ 或$x = 1$ 3分

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y''	$+$	0	-	0	$+$
y	$\bigcup$		$\bigcap$		$\bigcup$

拐点$(0, 1)$, 和$(1, 0)$. 5分

凹区间$(-\infty, 0)$；和$(1, +\infty)$ 7分

凸区间$(0, 1)$ 8分

不画图，直接分析，能够得出正确结论也给分。

八、特征方程为：$r^2 - 2r = 0$ 2分

解得特征根为：$r_1 = 0$, $r_2 = 2$ 3分

原方程对应的齐次方程的通解为：$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}$ 5分

令$y^* = x(ax+b) = ax^2 + bx$为原非齐次方程的特解 6分

$(y^*)' = 2ax + b$, $(y^*)'' = 2a$, 代入原方程得到$a = -1/2$, $b = -1/2$

即$y^* = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ 9分

原方程的通解为：$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ 10分

九、$V(t)=\int_0^t \pi(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2\mathrm{d}x$ 3分

$F(t)=\pi(\frac{e^t+e^{-t}}{2})^2$ 6分

$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{V(t)}{F(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t \pi(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2\mathrm{d}x}{\pi(\frac{e^t+e^{-t}}{2})^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t (e^{2x}+e^{-2x}+2)\mathrm{d}x}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)}$ 8分

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{2e^{2t}-2e^{-2t}}=\frac{1}{2}$ 10分

十、克服重力做功由三部分组成：克服抓斗自重做功W_1，克服缆绳重力做功W_2，克服污泥重力做功W_3。

$W_1=400*30=12000$焦耳 2分

建立适当的坐标系，依据坐标系方向的不同，dW_2可以有不同的形式。

$dW_2=x\rho dx=x50dx$, 或者$dW_2=(30-x)\rho dx=(30-x)50dx$ 4分

$W_2=\int_0^{30}dW_2=22500$焦耳 5分

提升时间为：$30/3=10$秒，据此建立坐标系，$t\in[0,10]$

$dW_3=(2000-20t)3dt$, $W_3=\int_0^{10}dW_3=57000$焦耳 7分

$W=W_1+W_2+W_3=12000+22500+57000=91500$焦耳.............8分

十一、证明:不妨设$f(x)$单增，$g(x)$恒为正。则$f(a) \le f(x) \le f(b)$

且有：$\int_a^b f(a)g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b f(b)g(x)dx$，即

$f(a)\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le f(b)\int_a^b g(x)dx$ 1分

设$F(x) = \int_a^b f(t)g(t)dt - f(a)\int_a^x g(t)dt - f(b)\int_x^b g(t)dt$ 2分

因为$g(x)$可积，$\int_a^x g(t)dt$ 与$\int_x^b g(t)dt$ 连续，所以$F(x)$在$[a,b]$上连续.

$F(a) = \int_a^b f(t)g(t)dt - f(b)\int_a^b g(t)dt \le 0$

$F(b) = \int_a^b f(t)g(t)dt - f(a)\int_a^b g(t)dt \ge 0$

若$F(a) = 0$ 或$F(b) = 0$，则a 或b 就是要证的ξ.

否则有：$F(a) \cdot F(b) < 0$.

由连续函数的介值定理（或零点存在定理），$\exists \xi \in (a,b)$，s.t. $F(\xi) = 0$

即：$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx - f(b)\int_\xi^b g(x)dx$ 4分