

学号 \_\_\_\_\_ 班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 成绩 \_\_\_\_\_

一、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 已知  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , 又设  $\vec{b}$  是既垂直于  $\vec{a}$  又垂直于  $y$  轴, 且与  $z$  轴正向夹角为锐角的单位向量, 则  $\vec{b} =$  \_\_\_\_\_.

2. 曲线  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 8 \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转曲面  $\Sigma$  的方程为 \_\_\_\_\_,  
 $\Sigma$  在  $(-1, 2, 1)$  点处的法向量  $\vec{n} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $z = f(x, y) = 50 - 2x^2 - 4y^2$ . 已知  $f(x, y)$  在  $P(1, -2)$  点处沿方向  $\vec{e}$  的函数值减小最快, 则  $\vec{e}$  的单位向量为 \_\_\_\_\_.

4. 设有直线  $L: \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$  和平面  $\pi: Ax + By + z = 53$ , 已知  $L$  与  $\pi$  垂直, 则  
 $A =$  \_\_\_\_\_,  $L$  与  $\pi$  的交点坐标为 \_\_\_\_\_.

5. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $2x + 2y = z + e^{xz}$  确定的可微的隐函数, 则  $z(x, y)$  在  $(0, 1)$  点的一阶全微分  $dz(0, 1) =$  \_\_\_\_\_.

6. 设  $f(x, y)$  是连续函数, 将累次积分  $I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$  交换积分次序后的累次积分形式为  $I =$  \_\_\_\_\_.

二、(10 分) 设  $z = f(xy, e^{x-y})$ , 其中  $f$  有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

三、(12 分) 分别求曲线  $\Gamma: \begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$  上点  $M(1, -2, 1)$  处的法平面  $\pi$  的方程和直线  $L: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$  的标准方程, 并求直线  $L$  与法平面  $\pi$  的夹角.

四、(10 分) 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$  确定的可微函数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

五、(10 分) 设  $f(x, y) = y^3 - y^2 + xy - x^2$ . 求  $f(x, y)$  的极值点和极值.

六、(12 分) 设  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{8 - x^2}$  与  $2y = x^2$  所围成的区域在第一象限内的部分. 将二重积分  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  写成极坐标系下的累次积分, 并计算  $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ .

七、(10 分) 求柱面  $y = x^2$ , 平面  $x - y - z + 2 = 0$  与平面  $z = 0$  所围成立体的体积  $V$ .

八、(12 分) 求椭球面  $\Sigma: x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  上距离平面  $\pi: x - y + 2z = 6$  最近和最远的点的坐标, 并写出椭球面  $\Sigma$  在此两点处的切平面方程.