

高等数学期中试题(B 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 八大题, 试卷后面空白纸撕下作草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 设空间四点 $A(1,0,1), B(4,4,6), C(2,2,3), D(1,a,0)$, 已知 $\vec{AD} // -2\vec{j} + \vec{k}$, 则 $a =$ _____.以 A, B, C, D 为顶点的四面体的体积 $V =$ _____.2. 平面 $\pi_1: 2x - y - 3z + 2 = 0$ 与 $\pi_2: 2x - y - 3z - 5 = 0$ 之间的距离 $d =$ _____.3. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} (1 + \frac{1}{xy})^{\frac{x^2}{x+y}} =$ _____, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x^2 y^2}{x^4 + y^4} =$ _____.4. 设函数 $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y) + \arctan \frac{y}{z}$, 点 $A(-3, 1, 2), B(1, 3, 0)$, 则在点 A 处 $\text{grad } f =$ _____, $\frac{\partial f}{\partial \vec{AB}} =$ _____.5. 已知直线 $L_1: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$, $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$, 则 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1 =$ _____, L_1 与 L_2 的夹角 $\theta =$ _____.6. 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + \varphi(x^2 + y)$, 其中 φ 二阶可导, f 有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.7. $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy =$ _____.

二. (9 分)求过点 $A(-1,0,4)$, 与直线 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 相交, 且与直线 $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ 垂直的直线 L 的标准方程.

三. (9 分) 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 15 \end{cases}$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处的切向量 \vec{s} 及法平面 π 的方程.

四. (11 分)求函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ ($0 \leq x \leq 3\pi$) 的极值点与极值.

五. (9 分)计算 $I = \iiint_V \frac{y \sin x}{x} dV$, 其中 V 是由曲面 $y = \sqrt{x}$, 平面 $y = 0, z = 0$ 及 $x + z = \frac{\pi}{2}$ 所围成的空间有界闭区域.

六. (9 分) (1) 用变换 $u = x, v = x^2 - y^2$ 变换微分方程 $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}};$

(2) 求 $z(x, y)$.

七. (11 分)设 S 是曲线 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 2z & (z \geq \frac{1}{2}) \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转面, V 是曲面 S 与

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的空间有界闭区域. (1)求曲面 S 的方程; (2)求 V 在 xOy 面上

的投影区域的边界曲线 C 的方程; (3)计算积分 $I = \iiint_V (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5 dV$.

八. (14 分)在第一卦限内作曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使得切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求切点的坐标及四面体体积的最小值.