

## 2013级《微积分A上》期末试卷(A)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(注: 本试卷共6页, 十一个大题。请撕下试卷最后一张空白纸做草稿)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
评阅人												

一、填空 (每小题4分, 共20分)

(1) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(1+x) - \ln x] =$  \_\_\_\_\_

(2) 已知  $y = x \arctan \sqrt{x}$ , 其中  $x > 0$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_

(3) 曲线  $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$  上对应于  $t = \frac{\pi}{4}$  点处的切线斜率: \_\_\_\_\_

(4) 设  $x^2 \ln x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_,

不定积分  $\int x f'(x) dx =$  \_\_\_\_\_

(5) 微分方程  $y' + \frac{1}{x}y = e^x$  满足  $y(1) = 0$  的解  $y =$  \_\_\_\_\_

二、(8分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy + e^y = e$ 确定, 求 $y'(0)$ 的值.

三、(8分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$ , 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$ .

四、(8分) 计算定积分 $\int_0^2 |x-1|dx$ .

五、(8分) 求曲线 $y + 1 = x^2$ 与直线 $y = 1 + x$ 所围成区域的面积.

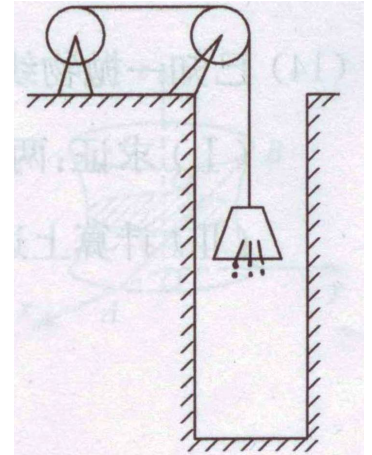
六、(8分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-a}{x^2}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$ 可导, 求 $a, b$ 的值, 并用导数的定义求 $f'(0)$ .

七、(8分) 求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的拐点及凹凸区间.

八、(10分)求微分方程 $y'' - 2y' = 2x$ 的通解.

九、(10分)曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x = 0, x = t$  ( $t > 0$ )及 $y = 0$ 围成一曲边梯形。该曲边梯形绕 $x$ 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$ ，在 $x = t$ 处的底面积为 $F(t)$ ，请写出 $V(t)$ ,  $F(t)$ 的表达式，并求极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{V(t)}{F(t)}$ 。

十、(8分)为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口（如图），已知井深30m，抓斗自重400N，缆绳每米重50N，抓斗抓起的污泥重2000N，提升速度为3m/s，在提升过程中，污泥以20N/s的速率从抓斗缝隙中漏掉。现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需做多少焦耳的功？（说明： $1\text{N}\times 1\text{m}=1\text{J}$ ；m,N,s,J分别表示米，牛顿，秒，焦耳；抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计。）



十一、(4分) 设在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可积,  $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调,  $g(x)$ 恒大于0。求证, 存在 $\xi \in [a, b]$ , 使得:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(a) \cdot \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \cdot \int_{\xi}^b g(x) dx.$$