北京理工大学2012-2013学年第二学期

《微积分A》（II）A卷试题答案及评分标准

一、填空题（每题4分）

(1) $\pi[2\ln 2-1]$; (2) $\frac{2\pi}{3}$; (3) $2x+2y+2z$; (4) $\frac{1}{6}$; (5) x.

二、选择题（每题2分）

(1) B; (2) A; (3) B; (4) A; (5)C.

三、

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-6y$ …………………………………………2 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-6x$ …………………………………………4 分

令$\begin{cases} 2x-6y=0 \\ 3y^2-6x=0 \end{cases}$ 得驻点$(0,0)$ 和$(18,6)$ ……………………………5分

在$(0,0)$点处，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, ……………6 分

$AC-B^2=-36<0$, 故，$(0,0)$点不是极值点. ……………………7 分

在$(18,6)$点处，$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=36$, …………8 分

$AC-B^2=36>0$, 且$A>0$ 故，$(18,6)$点是极值点，极值（极小值）为-108. …………………………………………9 分

四、$J_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\mu dv$ ....5 分

$= 4\mu \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} dz$ ....8 分

$= 4\mu \int_0^a dx \int_0^a (x^2+y^2)^2 dy$

$= 4\mu \int_0^a (ax^4 + \frac{2}{3}a^3x^2 + \frac{1}{5}a^5) dx$

$= \frac{112}{45}\mu a^6$ ....9 分

五、$X = \frac{x-y}{x^2+y^2}, Y = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ .... 2 分

$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$, 积分与路径无关。 .... 4 分

选择连接$(1,0)$ 和$(-1,0)$的半圆，逆时针方向,

取$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le \pi$ .... 6 分

原积分$=\int_0^\pi [(\cos\theta - \sin\theta) * (-\sin\theta) + (\cos\theta + \sin\theta) * \cos\theta] d\theta$ ....8 分

$= \pi$ ....9 分

(直接计算，结果正确，也相应给分。)

六、$X=x(1+x^2z),\, Y=y(1-x^2z),\, Z=z(1-x^2z)$

$\frac{\partial X}{\partial x}=1+3x^2z$ .... 1 分

$\frac{\partial Y}{\partial y}=1-x^2z$ .... 2 分

$\frac{\partial Z}{\partial z}=1-2x^2z$ .... 3 分

补面：$S_0:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=1 \end{cases}$，取上侧 4分

$I=\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{S_0}-\iint\limits_{S_0}=\iiint\limits_{V}(1+3x^2z+1-x^2z+1-2x^2z)dv-\iint\limits_{S_0}$

$=\iiint\limits_{V}3dv-\iint\limits_{S_0}$ 6分

$=\pi-\iint\limits_{S_0}(1-x^2)dxdy$ 7分

$=\pi-\frac{3}{4}\pi$ 8分

$=\frac{\pi}{4}$ 9分

七、$X=\frac{y^2}{x}-xf(\frac{y}{x}),\, Y=y-xf'(\frac{y}{x})$

$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{2y}{x}-f'(\frac{y}{x})$ .... 2 分

$\frac{\partial Y}{\partial x}=-f'(\frac{y}{x})+\frac{y}{x}f''(\frac{y}{x})$ .... 4 分

利用积分与路径的无关性，可得：$\frac{2y}{x}=\frac{y}{x}f''(\frac{y}{x})$ .... 5 分

$f''(\frac{y}{x})=2$, 令$\frac{y}{x}=t$ .... 6 分

$f'(t)=2t+C_1,$ .... 7 分

$f(t)=t^2+C_1t+C_2$, 将$f(1)=f'(1)=1$代入 .... 8 分

$f(t)=t^2-t+1$, 即$f(x)=x^2-x+1$ .... 9 分

八、解法1: 用斯托克斯公式求解。投影区域的计算：消去z, $x+y+x^2+y^2=\frac{1}{2}$ .... 2 分

化简得到XoY面上的投影区域S：$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=1$ 3分

原式=$\iint\limits_S(-2)dxdy$ (给出正确的斯托克斯公式给5分)..................7 分

=$-2*\pi*1^2=-2\pi$ .... 9 分

解法2：直接计算。投影区域的计算：消去z, $x+y+x^2+y^2=\frac{1}{2}$ ...2 分

化简得到XoY面上的投影区域S：$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=1$ 3分

$$\begin{cases} x=\cos\theta-\frac{1}{2} \\ y=\sin\theta-\frac{1}{2} \\ z=1-\sin\theta-\cos\theta+\frac{1}{2} \end{cases} \quad -\pi\le\theta\le\pi$$ .... 6 分

原式=$\int_{-\pi}^{\pi}\{(\sin\theta-\frac{1}{2})*(-\sin\theta)-(\cos\theta-\frac{1}{2})*\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta\}d\theta$ .7 分

=-2π .... 9 分

备注：利用斯托克斯公式正确，给5分。投影区域正确3分，其他方法正确的酌情给分。

九、设$a_n=\frac{3n+5}{n(n-1)}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{an+1}{a_n}|=1$，故收敛半径为1................2 分

将$x=1$带入，可知级数发散。..3 分

将$x=-1$带入，可知级数收敛。故，收敛域为$[-1,1)$. ....4 分

令$S_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n+5}{n(n-1)}x^n$,

则$S_1'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n+5}{(n-1)}x^{n-1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}3x^{n-1}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{8}{n-1}x^{n-1}$

令$S_2(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{8}{n-1}x^{n-1}$, 则$S_2'(x)=8\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{8}{1-x}$

$S_2(x)=\int_0^x S_2'(x)dx+S_2(0)=-8\ln(1-x)$ ....6 分

$S_1(x)=\int_0^x S_1'(x)dx+S_1(0)=5x+5\ln(1-x)-8x\ln(1-x)$ ....7 分

将$x=-1$代入，得$S_1(x)=-5+13\ln 2$

所求的数项级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3n+5)}{n(n-1)}=5-13\ln 2$ ....8 分

十、(1) 记σ_n 为级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n})$的前$n$项和。

则$\sigma_n=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}$ ....2 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{S_1}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}}$ 存在。因此，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n})$ 收敛..........4分

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n_1}}{S_n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{S_n}-\frac{S_{n-1}}{S_n^2})$ =- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{S_{n-1}}{S_n^2}-\frac{1}{S_n})$ ....6 分

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{S_{n-1}}{S_n^2}-\frac{1}{S_n})\leq\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{S_{n-1}}{S_{n-1}^2}-\frac{1}{S_n})=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n})$,

因此，原级数绝对收敛...8 分