北京理工大学 2005-2006 学年第一学期

2005 级《微积分 A》期末试卷参考答案

一、求解下列各题（每小题 7 分，共 35 分）

1. $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+x-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\arctan\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}})$$

2. $$I=\int\frac{x^9}{\sqrt{4-x^{20}}}\,\mathrm{d}\,x+\int\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}\,x^{10}}{\sqrt{4-x^{20}}}+x\ln(1+x)-\int\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{10}\arcsin\frac{x^{10}}{2}+x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)+C$$

3. $\because\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a^x=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x+e)=1,$

且 $f(0)=1,\ \ \therefore\ f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}[\ln(x+e)]'=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+e}=\frac{1}{e}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(a^x)'=\lim_{x\to 0^-}a^x\ln a=\ln a$$

要使 $f'(0)$ 存在，即 $f'_+(0)=f'_-(0)$，于是 $\ln a=\frac{1}{e}\Rightarrow a=e^{1/e}$，所以，当 $a=e^{1/e}$ 时，$f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=\frac{1}{e}$.

4. $$\int_{-\infty}^{0}x^2e^x\,\mathrm{d}\,x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x^2e^x\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[x^2e^x\Big|_a^0-2xe^x\Big|_a^0+2e^x\Big|_a^0]$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[-a^2e^a+2ae^a+2-2e^a$$

5. 方程变形为：$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，这是一阶线性非齐次方程。通解为：

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}\,x}[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}[\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x+\mathrm{C}] \qquad =\frac{x}{3}\ln x-\frac{x}{9}+\frac{\mathrm{C}}{x^2}$$

由初始条件 $y(1)=-\frac{1}{9}$，得 $\mathrm{C}=0$． 所以，原方程的解为：

$$y=\frac{x}{3}\ln x-\frac{x}{9}$$

二、完成下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1. $$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{1/\ln x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln\sin x/\ln x}$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\bigg/\frac{1}{x}\right)\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{\sin x}\right)=e$$

2.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2(1+t)^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{2(1+t)^2}.$$

当 $t=1$ 时， $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{8}$， $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{32}$.

曲率半径 $$\mathbf{R}=\left.\frac{[1+y'^2]^{3/2}}{|y''|}\right|_{t=1}=\frac{[1+\frac{1}{64}]^{3/2}}{\frac{1}{32}}=\frac{65}{16}\sqrt{65}$$

3. 对应齐次方程的特征方程：$r^2+4=0$. 于是，特征根为：$r_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$.

对应齐次方程的通解为：$Y(x)=\mathrm{C}_1\cos 2x+\mathrm{C}_2\sin 2x$

方程 $y''+4y=x$ 有型如 $y_1^*=\mathrm{A}x+\mathrm{B}$ 的特解，由待定系数法得：

$$\mathrm{A}=\frac{1}{4},\mathrm{B}=0.\therefore y_1^*=\frac{1}{4}x.$$

又方程 $y''+4y=e^x$ 有型如 $y_2^*=ae^x$ 的特解， 代入方程得

$ae^x+4ae^x=e^x$，于是 $a=\frac{1}{5}$，从而 $y_2^*=\frac{1}{5}e^x$.

因此，方程 $y''+4y=e^x+x$ 的一个特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}e^x$.

故原方程的通解为：$y=\mathrm{C}_1\cos 2x+\mathrm{C}_2\sin 2x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}e^x$

4. 解法一，取 x 为积分变量

$$\mathbf{V}=\int_0^1 2\pi(3-x)\cdot 2x^2\,\mathrm{d}\,x$$

$$=4\pi[\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}\,x-\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}\,x]$$

$$=3\pi$$

解法二，取 y 为积分变量

$$\mathrm{V}=\int_0^2 \pi(3-\sqrt{y/2})^2\,\mathrm{d}\,y-\pi\cdot 2^2\cdot 2.$$

$$=3\pi.$$

三、证： $F'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}+\dfrac{\sqrt{1/x}}{1+1/x^3}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}-\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}=0$

$\therefore F(x)$ 恒为常数.

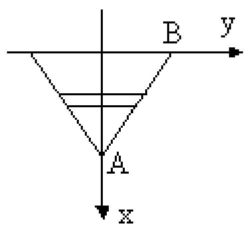
令 $x=1$，有 $F(1)=2\int_0^1\dfrac{\sqrt{t}}{1+t^3}\mathrm{d}\,t$.

令 $\sqrt{t}=u$，则 $t=u^2,\mathrm{d}\,t=2u\,\mathrm{d}\,t$. $\therefore F(1)=2\int_0^1\dfrac{u\cdot 2u\,\mathrm{d}\,u}{1+u^6}$

$$=\frac{4}{3}\arctan u^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore F(x)\equiv\frac{\pi}{3}$$

四、建立如图所示坐标系，直线 AB 的方程为：



$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-x).$ ………………4 分

取 x 为积分变量：$x\in[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a]$. 选取 $[x,x+dx]$，则压力微元为：

$$dP=\rho gx\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)dx$$

水压力：$P=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\rho gx\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-x)dx$

$$=\frac{2\sqrt{3}\rho g}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}(\frac{\sqrt{3}}{2}ax-x^2)dx$$

$$=\frac{\rho g a^3}{8}$$

五、(10 分) (1). $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-3, x_2=0$， $x=-1$时 $f(x)$ 无定义。列表：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	－	不存在	+	0	+
$f(x)$	↑	极 大值	↓	无定义	↑	不 取极值	↑

单增区间：$(-\infty,-3),(-1,+\infty)$ ，单减区间：$(-3,-1)$

极大值： $f(-3)=\frac{-15}{4}$.

(2). $f''(x)=\frac{6x}{(1+x)^4}$.

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$，列表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	－	不存在	－	0	+
$f(x)$	$\cap$	无定义	$\cap$	拐点	$\cup$

上凸区间：$(-\infty,-1),(-1,0)$，上凹区间：$(0,+\infty)$，

拐点 $(0,3)$.

（3） $x=-1$ 为其垂直渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{3}{x}\right]=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(1+x)^2}+3-x\right]=1.$$

所以，曲线有斜渐近线： $y=x+1$

六、 (1) 过 $\mathrm{P}(x,y)$ 的 Γ 的切线方程为：$Y-y=y'(X-x)$

令 $X=0$，得该切线在 Y 轴上的截距 $Y=y-xy'$

$$\therefore \mathrm{A}(x)=\frac{1}{2}x[y-(y-xy')]=\frac{1}{2}x^2y',$$

$\mathrm{S}(x)=xy-\int_0^x y(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(2) 由 $\mathrm{A}(x)=2\mathrm{S}(x)$，得 $\frac{1}{2}x^2y'=2xy-2\int_0^x y(x)\,\mathrm{d}\,x$.

两端对 x 求导，并整理得：$xy''=2y'$.

方程不显含未知函数 y，令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，方程化为 $xp'=2p$.

分离变量并积分得：$p=C_1x^2$，即 $y'=C_1x^2$.

由 $y'(1)=1$，得 $C_1=1$，$\therefore$ $y'=x^2$.

再积分得 $y=\frac{x^3}{3}+C_2$，由 $y(1)=1$，得 $C_2=\frac{2}{3}$.

$\therefore y=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}$.

七、 证明：

(1) $F(x)=x^2\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t-\int_a^x t^2 f'(t)\,\mathrm{d}\,t$

$$F'(x)=2x\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t=2x[f(x)-f(a)]$$

由题意知 $F'(a_1)=2a_1[f(a_1)-f(a)]=0\Rightarrow f(a_1)=f(a)$（$a_1>a$）.

由条件知 $f(x)$ 在 $[a,a_1]$ 上满足 Rolle 定理条件，所以，至少存在一点 $\eta\in(a,a_1)$，使 $f'(\eta)=0$，即 η 为 $f(x)$ 的驻点.

因此，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内必有驻点。

（2）由 a 的任意性，对于 a 大于上述 η，$F(x)$ 有驻点 $a_2>a>\eta$，同（1）知，存在 $\lambda\in(a,a_2)$，$\lambda>\eta$，使得 $f'(\lambda)=0$.

对 $f'(x)$ 在 $[\eta,\lambda]$ 上应用 Rolle 定理,可知，存在 $\xi\in(\eta,\lambda)\subset(0,+\infty)$，使得

$$f''(\xi)=0$$