行列式按行（列）展开

计算机学院
黄申为
shenweihuang@nankai.edu.cn

一般来说, 低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，于是, 自然地考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 本节我们要解决的问题是：如何把高阶行列式降为低阶行列式, 从而把高阶行列式的计算转化为低阶行列式的计算. 为了解决这个问题，先学习余子式和代数余子式的概念.

一、余子式和代数余子式

定义 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 剩下的元素按它们在原行列式中的相对位置组成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij}； 记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

行列式按行（列）展开

- 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,\mathrm{A}_{11} + a_{12}\,\mathrm{A}_{12} + a_{13}\,\mathrm{A}_{13}$$

- 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

行列式按行（列）展开

定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n).$$

这个定理叫做行列式按行（列）展开法则.

二、引理

一个 n 阶行列式, 如果其中第i 行所有元素除 a_{ij} 外都为0, 那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积, 即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

证明 **先证 a_{ij} 位于第 1 行第 1 列的情形，此时**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这是上一节我们学习过的例子当 $k=1$ 时的特殊情形，

按该例的结论，即有 $D=a_{11}M_{11}$.

又 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$，从而 $D=a_{11}A_{11}$.

再证一般情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

为了利用前面的结果，把 D 的行列作如下变换：

把 D 的第i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、…、第 1 行对调，这样 a_{ij} 就调到原来 a_{1j} 的位置上，调换的次数为 $i-1$. 再把第 j 列依次与第 $j-1$列、第 $j-2$ 列、…、第1列对调，这样 a_{ij} 就调到左上角，调换的次数为 $j-1$.

总之，经 $i+j-2$ 次调换，把 a_{ij}调到左上角，所得的行列式

$$D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D,$$

而元素 a_{ij} 在 D_1 中的余子式仍然是 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij} .

由于 a_{ij} 位于 D_1 的左上角, 利用前面的结果, 有

$$D_1 = a_{ij}M_{ij} ,$$

于是

$$D = (-1)^{i+j}D_1 = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij} \; .$$

证毕

三、行列式按行(列)展开法则

定理2 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n).$$

这个定理叫做**行列式按行（列）展开法则**.

证明 由行列式的 **性质5** 得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据 引理 即得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

类似地, 若按列证明, 可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

证毕

例 12 行列式

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶范德蒙德 (Vandermonde) 行列式.

证明

$$d=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j).$$

证明 对 n 作归纳法．当 $n=2$ 时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 ,$$

结论成立．设对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立，现在来看 n 阶的情形．在 n 阶范德蒙德行列式中，第 n 行减去第 $n-1$ 行的 a_1 倍，第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 a_1 倍．也就是由下而上依次地从每一行减去它上一行的 a_1 倍，有

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，并把列的公因子(a_i-a_1) 提出，得

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

上式右端行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有 $(a_i - a_j)$ 因子的乘积，其中 $2 \le j < i \le n$. 故

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$$

证毕

由 **定理2** 还可得下述重要推论.

推论 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ i \neq j.$$

证明 把行列式 $D = \det(a_{ij})$ 按第 j 行展开，

有

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

在上式中把 a_{jk} 换成 a_{ik} ($k = 1, 2, \cdots, n$)，可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{array}{|ccc|l}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & & \vdots & \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\
\vdots & & \vdots & \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} & \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\
\vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

当 $i \neq j$ 时，上式右端行列式中有两行对应元素相同，故行列式等于零，即得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\text{，}\ i \neq j\,.$$

上述证法如按列进行，即可得

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0\ ,\ \ i \neq j\ .$$

证毕

综合 **定理2** 及其推论，有关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j, \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$$

仿照上述推论证明中所用的方法，在行列式det(a_{ij})按第 i 行展开的展开式中，用 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 依次代替 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}.$$

例13 设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的(i,j)元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij}和 A_{ij}，求

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} \quad 及 \quad M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}.$$

解 由 **公式** 可知 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 等于用 1 , 1 , 1 , 1 代替 D 的第 1 行所得的行列式，即

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

计 算

$$\overline{\overline{\qquad}}\ 4.$$

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

由 公式 可知

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$$

$$= A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

计 算

$$= 0.$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$