2009-2010 第二学期工科数学分析期末试题解答(A 卷)

一. 1. $\sqrt{11}$， $\arccos\dfrac{5}{6}$ (2 分, 2 分)

2. $(1,2,7)$， 4 (2 分, 2 分)

3. $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $\{\dfrac{1}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\}$ (2 分, 2 分)

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$， $\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n4^n}(x-1)^n$ (2 分, 2 分)

5. $dx-\sqrt{2}dy$， $\{1,-\sqrt{2}\}$ (2 分, 2 分)

6. $x^y\ln x$， $\ln\dfrac{4}{3}$ (2 分, 2 分)

7. 0， $\dfrac{4+2\pi}{3\pi}$， 0， $\dfrac{\pi}{2}+1$ (1 分，1 分，1 分，1 分)

二.

$$I_y=\int_L x^2\mu dl$$ ……………………….(2 分)

$$=\mu\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x^2\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}dx$$ ……………………(6 分)

$$=\mu\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{56}{3}\mu$$ ……………………(9 分)

三. 设 V 在第一卦限部分为 V_1

$$I=6\iiint\limits_V x^2dV=48\iiint\limits_{V_1}x^2dV$$ ……………(3 分)

$$=48\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz$$ ……………..(6 分)

$$=48\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$$ ………………..(7 分)

$$=24\int_0^1x^2(1-x^2)dx$$ …………………(8 分)

$$=\frac{4}{5}$$ …………………(9 分)

四．　令　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0$　，　$\frac{\partial z}{\partial y}=4y-1=0$　………………(2 分)

解得　$x=0$，$y=\frac{1}{4}$，　得驻点　$(0,\frac{1}{4})$，　………………..(3 分)

由　$x^2+y^2=1$，得 $x^2=1-y^2$，代入目标函数得

$$z=y^2-y+6\quad(-1\le y\le 1)$$ ………………..(4 分)

令 $\frac{dz}{dy}=2y-1=0$，得 $y=\frac{1}{2}$，此时 $x=\pm\frac{3}{2}$，得两点 $(\pm\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ ………..(6 分)

当 $y=\pm1$ 时，$x=0$，得两点 $(0,\pm1)$　………………..(7 分)

$z(0,\frac{1}{4})=\frac{39}{8}$，　$z(\pm\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\frac{23}{4}$，　$z(0,-1)=8$，　$z(0,1)=6$

$z_{\max}=8$，　$z_{\min}=\frac{39}{8}$　……………..(9 分)

五．由题意，有　$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$　………………………(1 分)

$$\frac{-3(x+y)^{\lambda}-(y-3x)\lambda(x+y)^{\lambda-1}}{(x+y)^{2\lambda}}=\frac{3(x+y)^{\lambda}-(3y-3)\lambda(x+y)^{\lambda-1}}{(x+y)^{2\lambda}}$$ …….(3 分)

即　$3x+3y-\lambda x-\lambda y=0$，　$\lambda=3$　…………………….(4 分)

$$u(x,y)=\int_{(1,1)}^{(x,y)}\frac{3y-x}{(x+y)^3}dx+\frac{y-3x}{(x+y)^3}dy+C_1$$ …………………….(6 分)

$$=\int_1^x\frac{3-x}{(x+y)^3}dx+\int_1^y\frac{y-3x}{(x+y)^3}dy+C_1$$ …………………….(8 分)

$$=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$$ …………………….(10 分)

注：没有加 C 不扣分。

六. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^{n+1}$ (1)

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, 得 (1) 的收敛半径 $R=1$ ……………(1 分)

$t=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$t=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，

故级数 (1) 的收敛域为$t\in[-1,1)$ ……………..(3 分)

由 $-1\le\frac{x+2}{3}<1$, 得原级数收敛域 $-5\le x<1$ ………………..(4 分)

设 $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$ ， $S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$ …………………(6 分)

$$S(t)=-\ln(1-t)$$ …………………(8 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x+2}{3})^{n+1}=-\frac{x+2}{3}\ln(1-\frac{x+2}{3})$$ ……………………..(9 分)

七. 由$\begin{cases}z=4-x^2-y^2\\x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$，消去$z$得$x^2+y^2=3$ …………………（1）

$$V_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le3}[(4-x^2-y^2)-(2-\sqrt{4-x^2-y^2})]dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le3}(2-x^2-y^2)+\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy$$ …………………（3）

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(2-\rho^2+\sqrt{4-\rho^2})\rho d\rho$$ …………………（5）

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(2\rho-\rho^3+\rho\sqrt{4-\rho^2})d\rho$$

$$=\frac{37}{6}\pi$$ …………………（7）

$$V_2=\frac{4}{3}\pi\times2^3-V_1=\frac{27}{6}\pi$$ …………………（8）

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{27}{37}$$ …………………（9）

八.　（1）$I=\iint\limits_{S} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$ ………………..(1 分)

（2）设曲面 $S_1: z=-1$， $x^2+y^2\le 1$

$$I=\oiint\limits_{S+S_1^+} - \iint\limits_{S_1^-} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy \quad \text{………………..(1 分)}$$

$$\oiint\limits_{S+S_1^+} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}(3x^2+3y^2+3z^2)dV \quad \text{……………..(4 分)}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{-1}^{-\rho}(3\rho^2+3z^2)dz \quad \text{……………..(6 分)}$$

$$=\frac{349}{30}\pi \quad \text{……………..(7 分)}$$

$$-\iint\limits_{S_1^-} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_1^+} z^3dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-1)^3dxdy=-\pi$$

$$I=\frac{9}{10}\pi-\pi=-\frac{1}{10}\pi \quad \text{……………..(9 分)}$$

九.（1）$|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|\le k|u_n-u_{n-1}|$

$$\le k^2|u_{n-1}-u_{n-2}|\le\cdots\le k^{n-1}|u_2-u_1|$$

$$=k^{n-1}|f(f(x_0))-f(x_0)|\le k^{n-1}|b-a| \quad \text{……………..(4 分)}$$

由于$0<k<1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^{n-1}(b-a)$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$收敛 ……………..(5 分)

（2） 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$收敛， ……………..(6 分)

故其部分和 $S_n=u_{n+1}-u_1=u_{n+1}-f(x_0)$有极限 ……………..(8 分)

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}$ 存在，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在 ……………..(9 分)