2011-2012-第二学期　**工科数学分析期中试题解答（2012.4）**

一．1. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$

2. -1

3. $\dfrac{2u}{|\vec{r}|}$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

5. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

二. 设 $\vec{s}_1=\{1,3,1\}$　$\vec{s}_2=\{1,4,2\}$　$M(2,2,3)$　$N(1,3,4)$

$$(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{MN})=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2-1 & 2-3 & 3-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$ ………………..(4 分)

$$=2\neq 0$$

两直线异面，故不相交　…………………(8 分)

三.

$$115\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left|(k\vec{a}+2\vec{b})\times(4\vec{a}-5\vec{b})\right|$$ …………………………(2 分)

$$=\frac{1}{2}\left|(-5k-8)(\vec{a}\times\vec{b})\right|=\frac{1}{2}|5k+8||\vec{a}\times\vec{b}|$$ …………………………(4 分)

$$=\frac{1}{2}|5k+8||\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3}=5\sqrt{3}|5k+8|$$ …………………………(6 分)

$$|5k+8|=23$$

$$k=3 \quad \text{或} \quad k=-\frac{31}{5}$$ …………………………(8 分)

四. 设 $D:(x-1)^2+y^2\le 1$ ……………………….(1 分)

$$V=\iint_D (2x^2+y^2+1)dxdy$$ ……………………….(3 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2+1)d\theta$$ ………………(6 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^6\theta+4\cos^4\theta+2\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{15}{4}\pi$$ ………………(9 分)

五. $f_x'=2x=0$ $f_y'=2y-1=0$

解得 $x=0$ $y=\frac{1}{2}$ 得驻点 $(0,\frac{1}{2})$ ……………………(3 分)

将边界 $y=0$ 代入目标函数得 $f(x,y)=x^2$ $(-1\le x\le 1)$

在此边界上 f 的最大值为 1，最小值为 0 ……………………….(5 分)

将边界 $y=1-x^2$ 代入目标函数得 $f(x,y)=(y-1)^2$ $(0\le y\le 1)$

在此边界上 f 的最大值为 1，最小值为 ……………………….(7 分)

又 $f(0,\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$

故 $M=1$ $m=-\frac{1}{4}$ ……………………..(9 分)

六.
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_x'+f_z'\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=2xg_1'+g_u'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$$ ………………………….(3 分)

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_x'+2xf_z'\cdot g_1'}{1-f_z'\cdot g_u'}$$ …………………………..(4 分)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_y'+f_z'\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^y g_2'+g_u'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$ ……………………………(7 分)

解得 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f_y'+e^y f_z'\cdot g_2'}{1-f_z'\cdot g_u'}$$ ……………………………(8 分)

$$du=\frac{f_x'+2xf_z'\cdot g_1'}{1-f_z'\cdot g_u'}dx+\frac{f_y'+e^y f_z'\cdot g_2'}{1-f_z'\cdot g_u'}dy$$ ………………………..(9 分)

七. (1) S_1在点M处的法向量 $\vec{n}_1=\{2x,2y,2z\}\big|_M=\{2,4,4\}$ …………..(2 分)

切平面为 $(x-1)+2(y-2)+2(z-2)=0$

即 $x+2y+2z-9=0$ ……………..(4 分)

(2) S_2在点M处的法向量 $\vec{n}_2=\{y,x-1\}\big|_M=\{2,1,-1\}$ ……………(6 分)

切线为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ ……………….(8 分)

(3) L在点M处的切向量 $\vec{s}=\dfrac{1}{2}\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,5,-3\}$ ……………..(11 分)

八. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}\dfrac{r^2\sin\varphi}{1+r^2}dr$ …………………….(4 分)

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi(\cos\varphi-\arctan\cos\varphi)d\varphi$ ……………………(7 分)

$=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2}\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\ln\dfrac{4}{3})\pi$ ……………………(9 分)

九. 设长，宽，高分别为 x,y,z，则表面积

$S=xy+2xz+2yz \qquad xyz=a$ ………………….(3 分)

设 $F=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-a)$ ………………….(4 分)

令 $\begin{cases}F_x'=y+2z+\lambda yz=0\\F_y'=x+2z+\lambda xz=0\\F_z'=2x+2y+\lambda xy=0\\xyz=a\end{cases}$ ………………….(7 分)

解得 $x=y=\sqrt[3]{2a} \qquad z=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$

由问题……，故当长，宽，高分别为$\sqrt[3]{2a},\sqrt[3]{2a},\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$所用材料最少

………………..(9 分)

十. $S: x^2+y^2=2z$ ……………………….(1 分)

$I_z=\iiint\limits_V \mu(x^2+y^2)dxdydz$ ……………………..(3 分)

$=\mu\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3 d\rho$ ……………………….(6 分)

$=2\pi\mu\int_2^8 z^2 dz$

$=336\pi\mu$ …………………….(9 分)

十一. $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$ …………………….(3 分)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)$ …………………….(6 分)

同理 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r)$ …………………….(7 分)

代入方程得 $f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0$ ……………………..(9 分)