(数学分析) 参考答案 (2005.11)

一. 1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{2x}{1-x})^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2}{1-x}}$ ……………………….(4 分)

$= e^2$ ……………………….(6 分)

2. $y' = \cos f(x^2)\cdot f'(x^2)2x + f'(\tan^2 x)\cdot 2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$ ………………. (5 分)

$dy = [\cos f(x^2)\cdot f'(x^2)2x + f'(\tan^2 x)\cdot\frac{2\sin x}{\cos^3 x}]dx$ ………………..(6 分)

3. 间断点 $x=-1$, $x=0$ ………………..(1 分)

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{1+x}} = 0$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{1+x}} = +\infty$ ………………..(3 分)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{1+x}} = e$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1+\sin x}-1} = 2$ ……………..(5 分)

$x=-1$是第二类间断点, $x=0$是第一类间断点. …………..….(6 分)

4. $e^{xy}(y + x\frac{dy}{dx}) + 2y\frac{dy}{dx}\ln x + \frac{y^2}{x} = 0$ ……………………..…(4 分)

在已知方程中令$x=1$，得$y=\ln 2$ ………….…………(5 分)

代入上式解得 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{2}\ln^2 2 - \ln 2$. ……………………..(6 分)

二. 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-e^t}{2-e^t}}{e^t + te^t} = \frac{1}{(e^t-2)(t+1)}$ …………….………….(3 分)

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{e^t(t+1)+e^t-2}{(e^t-2)^2(t+1)^2}}{e^t+te^t} = \frac{2-2e^t-te^t}{(e^t-2)^2(t+1)^3 e^t}$ ……………………….(6 分)

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0} = 0$ ………………..…..(7 分)

2. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$ ……………………….(2 分)

(洛必达法则) $$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$$ ………………………..(5 分)

(洛必达法则) $$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$ …………………………(7 分)

3. 当 $x\neq 0$，$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot\frac{-2}{x^3}=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1}$ …………(3 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}$$ ………………………(5 分)

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1}\right)=\frac{\pi}{2}=f'(0)$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续 ………………….….(7 分)

4. (1) $f(x)=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^6}{8}+o(x^6)\right)$ ……(4 分)

$$=-\frac{1}{12}x^4+\frac{7}{360}x^6+o(x^6)$$ ……………….(5 分)

(2) $-\frac{1}{12}=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ $f^{(4)}(0)=-2$ $f^{(5)}(0)=0$ …………………(7 分)

三. 令 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}=\ln x-2+\frac{4}{x+1}$ ………………(2 分)

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$$ ..………………(5 分)

$f(x)$ 单调增，又 $f(1)=0$，故当 $x>1$，$f(x)>0$，即

$$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$$ ………………..(8 分)

四. $\cos\theta=\dfrac{x^2+60}{\sqrt{x^4+136x^2+3600}}=f(x)\quad(x>0)$ ………………(4 分)

$$f'(x)=\frac{16(x^2-60)}{(x^4+136x^2+3600)^{\frac{3}{2}}}$$ ………………(6 分)

令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{60}$

由问题的实际意义，θ 确有最大值，当 $x=\sqrt{60}$ 时，θ 取得最大值. ………….(8 分)

五. 由题设，$f(0)=0\qquad f'(0)=0\qquad f''(0)=-5$ ……………………(2 分)

$$R=\frac{(1+(f'(0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(0)|}=\frac{1}{5}$$ ……………………(4 分)

$\because \lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0\qquad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{f'(x)}$ ………………....….(5 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{2}{f''(0)}=-\frac{2}{5}$$ ……………………(6 分)

六. 在方程中令 $x=0$，得 $f(0)=0$， $\therefore f(5)=0$ ……………………(2 分)

$$\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}=2+\frac{\alpha(x)}{\sin x}$$ ……………………..(4 分)

令 $x\to0$，得 $f'(0)=2$， $\therefore f'(5)=2$ ……………………..(5 分)

所求切线为 $y=2(x-5)$ ……………………..(6 分)

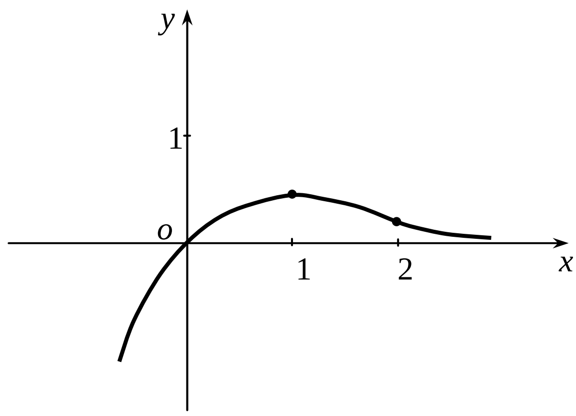
七. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$， $y=0$ 为水平渐近线 ……………………..(1 分)

$y'=e^{-x}(1-x)$， 令 $y'=0$， 得 $x=1$ ……………………(2 分)

$y''=e^{-x}(x-2)$， 令 $y''=0$， 得 $x=2$ ……………………...(3 分)

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	–		–
y''	–		–	0	+
y	↗ ∩	极大值 $\frac{1}{e}$	↘ ∩	拐点 $(2,\frac{2}{e^2})$	↘ ∪

…………..(6 分)



……………………….(8 分)

(2) 考察 $y = xe^{-x}$ 与 $y = a$ 的交点,

当 $a > \frac{1}{e}$，方程无实根,

当 $a = \frac{1}{e}$，有一实根 $x = 1$,

当 $0 < a < \frac{1}{e}$，有两实根，位于 $(0,1),(1+\infty)$,

当 $a \le 0$，有一实根，位于 $(-\infty,0]$. ……………………(12 分)

八. (1) 令 $F(x) = f(x) - \frac{M}{n}x$, ……………………..(1 分)

$F(0) = 0$, $F(1) = -\frac{M}{n} < 0$, 设 $F(c) = M \quad c \in (0,1)$

$F(c) = M - \frac{M}{n}c = \frac{M}{n}(n-c) > 0$

由介值定理，$\exists \xi \in (c,1)$，使 $F(\xi) = 0$ ……………………..(4 分)

由洛尔定理，$\exists x_n \in (0,\xi) \subset (0,1)$，使 $F'(x_n) = 0$

即 $f'(x_n) - \frac{M}{n} = 0$, $f'(x_n) = \frac{M}{n}$ …………………….(5 分)

因为 $F''(x) = f''(x) < 0$，$F'(x)$ 单调，x_n 惟一 ……………………..(6 分)

(2) 由于 $f''(x) < 0$，$f'(x)$ 单调减，而

$f'(x_n) = \frac{M}{n} > \frac{M}{n+1} = f'(x_{n+1})$, $\therefore x_n < x_{n+1}$ …………………….(7 分)

又 $x_n < 1$，故数列 $\{x_n\}$ 有极限. ……………………..(8 分)