课程编号: 07000150　　北京理工大学 2008-2009 学年第二学期

《微积分 A》(下)期末考试试卷(A 卷)

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1．经过点 $M(3,2,-1)$, 且与 x 轴，y 轴，z 轴正向的方向角分别为 $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$ 的直线的标准方程为________________________.

2．曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y^2+z^2=25 \end{cases}$ 在点 $(1,3,4)$ 处的法平面 π 的方程为_____________，原点到平面 π 的距离 $d=$______________.

3．设 $u(x,y,z)=x^y z$，则梯度 gradu =______________________，散度 div(gradu) =___________________ .

4．设 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 正向, 则曲线积分 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$_______________.

5. 设 $\sum$ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，则 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=$_______.

6．将 $I=\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)dy$ 转化为极坐标系下的累次积分(先 ρ 后 θ)，$I=$____________________________.

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，当 p 满足___________ 时级数绝对收敛. 当 p 满足_____________ 时级数收敛.

二、(8 分）求函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值点和极值.

三、(12 分) 设 Ω 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 所围成的均匀立体(密度 $\mu=1$).

（1） 求 Ω 的表面积；

（2） 求 Ω 绕 z 轴的转动惯量.

四、(8 分）若 $(3xy^2-y^m)dx+(3x^n y-3xy^2)dy$ 是某二元函数的全微分，求

m,n 的值，并对上述 m,n 的值计算曲线积分 $I=\int_L (3xy^2-y^m)dx+(3x^n y-3xy^2)dy$，其中 L 是摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的一段.

五、（8 分）将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-2)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数，并指出收敛域.

六、（10 分）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma \dfrac{(x^2 z+1)dxdy+y^2 xdydz+z^2 ydzdx}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

七、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

八、(8 分) 设 $S(x)$ 是函数 $f(x)=\pi+x \quad (0\le x\le \pi)$ 的以 2π 为周期的余弦级数的和函数. 求 $S(x)$ $(x\in[\pi,2\pi]$ 的表达式及 $S(-5)$ 的值，并求出余弦级数的系数.

九、(8 分)设 $u=f(x,y,z)$，其中 f 有连续偏导数，且 $\dfrac{f'_x}{x}=\dfrac{f'_y}{y}=\dfrac{f'_z}{z}$.

（1） 将 x,y,z 换成球坐标，求 $u=f(x,y,z)$ 的表达式；

（2） 求 $\dfrac{\partial u}{\partial \theta},\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$，并证明 u 仅为 r 的函数，(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).