

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设  $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \arctan \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$  是连续函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

2. 曲线  $\rho = 2e^\theta$  上  $\theta = 0$  的点处的切线方程为\_\_\_\_\_.

3. 已知  $\cos x - e^{x^2} = ax^2 + bx^4 + o(x^4)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.

4. 微分方程  $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = 1$  的通解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

5. 质量为  $m$  的质点从液面由静止开始在液体中下降, 假定液体的阻力与速度  $v$  成正比, 则质点下降的速度  $v = v(t)$  所满足的微分方程为\_\_\_\_\_.

二. (9 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

三. (9 分) 求不定积分  $\int (x \arctan x + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}) dx$ .

四. (9 分) 求  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$  在区间  $[-1, 3]$  上的最大值和最小值.

五. (8 分) 判断  $f(x) = \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$  ( $x \geq 1$ ) 是否恒为常数.

六. (9 分) 设  $\arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

七. (10 分) 求下列反常积分. (1)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$ ; (2)  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ .

八. (8 分) 一垂直立于水中的等腰梯形闸门, 其上底为 3m, 下底为 2m, 高为 2m, 梯形的上底与水面齐平, 求此闸门所受到的水压力. (要求画出带有坐标系的图形)

九. (10 分) 求微分方程  $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$  的通解.

十. (10 分) 设  $f(x)$  可导, 且满足方程  $f(x)(x^2 + x) = \int_a^x f(t)dt + a$  ( $a > 0$ ), 求  $f(x)$  的表达式. 又若曲线  $y = f(x)$  与直线  $x = 0, x = 1, y = 0$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积为  $\frac{7}{6}\pi$ , 求  $a$  的值.

十一. (8 分) 设  $f(x)$  在  $[0,2]$  上可导, 且  $f(0) = f(2) = 0$ ,  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) \sin x dx = 1$ , 证明在  $(0,2)$  内存在  $\xi$

使  $f'(\xi) = 1$ .