# (数学分析) 参考答案 (2006.11)

一. 1. $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}]^{n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=e$$ ……………………………………(6 分)

2. $$\frac{d}{dx}f(\arctan\frac{1}{x})=f'(\arctan\frac{1}{x})\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2})$$

$$=f'(\arctan\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2+1}=\frac{1}{x}$$ ………………………………(4 分)

$$f'(\arctan\frac{1}{x})=-\frac{x^2+1}{x}$$ ………………………………..(5 分)

$$f'(\frac{\pi}{4})=-\frac{x^2+1}{x}\Big|_{x=1}=-2$$ ………………………………...(6 分)

3. 间断点 $x=0,x=1,x=2$ ……………………….(3 分)

$\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$ $x=0$是第二类间断点,

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{2x-3}=-1$$

$x=1$是第一类间断点

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\ln x}{x^2-3x+2}=\infty$$

$x=2$是第二类间断点 …………………………..(6 分)

4. $$\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2-bx-1}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=2$$

$a=9$ ………………………….(3 分)

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-b}{6}=2$$

$b=-12$ ……………………………(6 分)

二. 1. $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(1+t)(3t+2)=3t^2+5t+2$ …………………..(4 分)

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}=\frac{6t^2+11t+5}{t}$ …………………..(7 分)

2. $y'=4ax^3+3bx^2$ $y''=12ax^2+6bx$

由题意 $a+b=3$ $12a+6b=0$

解得 $a=-3$ $b=6$ ………………… (3 分)

故 $y''=-36x(x-1)$

令 $y''=0$， 得 $x=0,\ x=1$

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | $\cap$ | 拐点 (0,0) | $\cup$ | 拐点 (1,3) | $\cap$ |

……………………(7 分)

3. $1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0$,

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}$ …………………….(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\frac{d}{dx}(2-\cos y)}{(2-\cos y)^2}=\frac{-2\sin y\cdot\frac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}$$

$$=\frac{-2\sin y\cdot\frac{2}{2-\cos y}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$$ …………………….(7 分)

4. 由题设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\sin 2x=0$ …………………….(1 分)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$ …………………….(4 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)2x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}f(x)=2$$ …………………….(6 分)

$$\lim_{x\to0}f(x)=6$$ …………………….(7 分)

三. $x_1 = x_0^2 + 2x_0 = (x_0+1)^2 - 1$，因 $-1 < x_0 < 0$，所以 $-1 < x_1 < 0$

设 $-1 < x_n < 0$， 由 $x_{n+1} = (x_n+1)^2 - 1$， 得 $-1 < x_{n+1} < 0$

故对 $\forall n$，有 $-1 < x_n < 0$ ……………………(3 分)

又由 $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$，及 $-1 < x_n < 0$，得 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x_n + 2 > 1$

故 $x_{n+1} < x_n$，即 $x_n$ 单调减少，所以 $\{x_n\}$ 收敛 ……………………..(6 分)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$， 得 $A = A^2 + 2A$

解得 $A = -1$，$A = 0$(舍去)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1$$ …………………………(9 分)

四. $x \neq 0$ 时，$g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ …………………………..(3 分)

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0)$$ …………………………..(6 分)

显然，当 $x \neq 0$ 时 $g'(x)$ 连续

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) + xf''(x) - f'(x)}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$$

$g'(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续，故 $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. ……………………(9 分)

五. $\pi r^2 h + \dfrac{2}{3}\pi r^3 = V$ $h = \dfrac{V}{\pi r^2} - \dfrac{2}{3}r$ ……………………(2 分)

设侧面单位面积造价为 $k$，总造价为 $p$，则

$$p = k\cdot 2\pi r h + 2k\cdot 2\pi r^2 = 2k\left(\frac{V}{r} + \frac{4}{3}\pi r^2\right)$$ ………………………(4分)

令 $\dfrac{dp}{dr} = 2k\dfrac{8\pi r^3 - 3V}{3r^2} = 0$ ……………………… (7 分)

得 $r = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$ $h = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$

由问题的实际意义…，当 $r = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$，$h = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$，$p$ 最小 ……………..(9 分)

六. 令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$ ……………………..(2 分)

当 $x>1$ $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$ ………………………(5 分)

所以 $f(x)$ 单调增加，由于 $f(1)=0$，故当 $x>1$时， $f(x)>0$

即 $\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}>0$ $\ln x>\dfrac{x-1}{x+1}$ ……………………….(8 分)

七. (1) $\cos x-e^{x^2}=(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2))-(1+x^2+o(x^2))$

$$=-\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \qquad \text{………………………..(4 分)}$$

$$c=-\frac{3}{2} \qquad k=2 \qquad \text{…………………………(5 分)}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(-\frac{3}{2}x^2)\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2})(\frac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2})}{(-\frac{3}{2}x^2)\cdot x^2(\frac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{4}}{-\frac{3}{2}x^4(\frac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}(\frac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2})}=-\frac{1}{12} \qquad \text{……………………(9 分)}$$

八. 由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ ……………(1 分)

根据柯西中值定理，$\exists\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta} \qquad \text{…………………(2 分)}$$

于是 $$f'(\xi)=\frac{e^b-e^a}{b-a}\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

即 $$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta} \qquad \text{……………………(4 分)}$$