课程编号：MTH17003　　北京理工大学 2011-2012 学年第一学期

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级________　　学号________　　姓名________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x) & x\ge 0 \\ b\arctan\dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases}$ 是连续函数，则 $b=$________.

2. 设 $f(x),g(x)$ 可导，$y=\arctan f(x)+g(\sqrt{x^2+1})$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=$________$+C$.

4. 要在某人群中推广新技术，设该人群总人数为常数 N，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (视其为连续可导函数)，已知 $x(t)$ 的变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比(比例系数为 k)，则 $x(t)$ 所满足的微分方程为________.

5. 已知当 $x>0$ 时，$f'(\ln x)=x, f(0)=\dfrac{3}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的平均值为________.

二. (9 分) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{e^{x^3}-1}$.

三. (9 分) 设 $\tan(x+y)=xy^2+1\quad(0\le y<\dfrac{\pi}{2})$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

四. (9 分) 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解.

五. (9 分) 设 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}-2x+1}{x^{n+1}+x^2+1}\quad(x\ge 0)$，求 $f(x)$ 的表达式及反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

六. (9 分) 在区间 $[0,\pi]$ 上研究方程 $\sin^3 x\cos x=a\quad(a>0)$ 的实根的个数.

七. (9 分) 一圆锥形贮水池(底面在上，顶点在下)，深 4m，底面直径 6m，水池中装满了水，如果将池中水全部抽出，求所做的功. (要画出带坐标系的图形)

八. (9 分) 求微分方程 $y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=2xe^{x}$ 的通解.

九. (11 分) 设曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 相切, 求 a 的值以及此二曲线与 x 轴所围成图形 D 的面积 A, 并求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

十. (9 分) 设 $g(x)$ 是可导函数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$, $f(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)dt$, 证明 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 并判断 $f(0)$ 是极大值还是极小值.

十一. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上可导, 且 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos^2 x dx=0$, 证明 $\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使

$$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi.$$