2006-2007 学年第二学期期中考试参考答案及评分标准

一、1 (1) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\quad\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ 即 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})=0$

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}^{\,2}+(2k+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^{\,2}=4k+2=0$$

$\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}.$ **3** 分

(2) $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(\vec{a}+2\vec{b})\times(k\vec{a}+\vec{b})=(1-2k)\vec{a}\times\vec{b},$

由题意，$\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right|=|1-2k|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=2|1-2k|=10$ ，

$k=-2或k=3.$ **7** 分

2 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+2yf_2'$ **3** 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''(-\frac{x}{y^2})+2y\ f_{21}''(-\frac{x}{y^2})+2f_2'$$

$$=-\frac{x}{y^2}\ f_{11}''-\frac{2x}{y}\ f_{21}''+2f_2'.$$ **7** 分

3 由原方程知 $z(1,0)=0.$ 两端对 x 求偏导，得

$1+yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{y+z}\dfrac{\partial z}{\partial x},$ 将 $x=1,y=0,z=0$ 代入，得 $z_x'(1,0)=1.$

两端对 y 求偏导，得 **2** 分

$xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{y+z}(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}),$ 将 $x=1,y=0,z=0$ 代入，得 $z_y'(1,0)=-1.$

又 **5** 分

$$z+y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{y+z}\frac{\partial z}{\partial x}(1+\frac{\partial z}{\partial y})+e^{y+z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

将 $x=1,y=0,z=0$ 代入，得 $z_{xy}''(1,0)=1.$ **7** 分

4 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ae^{ax}(x+y^2+by)+e^{ax}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2,-2)}=ae^{2a}(2+4-2b)+e^{2a}=0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{ax}(2y+b)\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}|_{(2,-2)}=e^{2a}(-4+b)=0$$

$\Rightarrow b=4,a=\dfrac{1}{2}.$ **4** 分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=a^2e^{ax}(x+y^2+by)+2ae^{ax}\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=ae^{ax}(2y+b),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e^{ax}.$$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(2,-2)}=\frac{e}{2}>0,\qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}|_{(2,-2)}=0,\qquad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(2,-2)}=2e.$$

$B^2-AC=-e^2<0,$ 所以 $f(x,y)$ 在驻点 $(2,-2)$ 处取得极值，且为极小值。 **7** 分

5 $I=\int_1^2 dy\int_y^{y^3}\sin\dfrac{x}{y}dx=\int_1^2 -y\cos\dfrac{x}{y}|_y^{y^3}\ dy$ **4** 分

$=-\int_1^2 y(\cos y^2-\cos 1)dy=\dfrac{-\sin 4+\sin 1+3\cos 1}{2}.$ **7** 分

二、1　方程组两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} x+y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ x+y\dfrac{dy}{dx}-z\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases},\quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases},$$ **2** 分

得在点(2,1,1)处的切向量为；$\vec{T}=\{1,-2,0\}$ **5** 分

法平面方程为：$x-2y=0.$ **7** 分

2 $$I=\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz$$

$=\int_0^1 dy\int_0^y dx\int_0^{x+y}(x+y-z)dz$ **3** 分

$$=\int_0^1 dy\int_0^y \frac{1}{2}(x+y)^2 dx$$

$=\dfrac{7}{6}\int_0^1 y^3dy=\dfrac{7}{24}.$ **7** 分

3 $x\varphi_1'+\varphi_3'u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-x\varphi_1'}{u\varphi_3'},$

$$y\varphi_2' + \varphi_3' u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y\varphi_2'}{u\varphi_3'},$$

$$\varphi_3'(2u\frac{\partial u}{\partial z} - 2z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{u},$$ **3 分**

$$gradu = \{-\frac{x\varphi_1'}{u\varphi_3'}, -\frac{y\varphi_2'}{u\varphi_3'}, \frac{z}{u}\}$$ **5 分**

$$du = -\frac{x\varphi_1'}{u\varphi_3'}dx - \frac{y\varphi_2'}{u\varphi_3'}dy + \frac{z}{u}dz.$$ **7 分**

4 $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$，由对称性知，$\bar{x} = \bar{y} = 0.$ **2 分**

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dv}{\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dv}$$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho^2} \rho dz = \frac{4\pi}{15}.$$

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho^2} z\rho dz = \frac{8\pi}{105}.$$ **5 分**

$\bar{z} = \dfrac{2}{7}$， 故重心坐标为 $(0,0,\dfrac{2}{7}).$ **7 分**

三、$I = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ **3 分**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$ **7 分**

四、 设直线 L 的方向向量为：$\vec{s} = \{m, n, p\}$

$\vec{s}_1 = \{2,1,0\}$， $\vec{n} = \{1,-1,2\}$， $M_1(1,0,-3) \in L_1$，$\overrightarrow{M_1M} = \{0,1,4\}$，

由 L 与 L_1 相交知：

$$(\vec{s},\vec{s}_1,\overrightarrow{M_1M})=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0,\quad \Rightarrow 4m-8n+2p=0$$ **3 分**

又 L 与 π 平行，有 $\qquad m-n+2p=0$ **5 分**

得 $\quad m=\dfrac{7}{3}n,\quad p=-\dfrac{2}{3}n.$ 所以直线 L 的标准方程为：

$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$ **7 分**

五、（1）曲面 Σ 的方程为：$z^2-4(x^2+y^2)=2,(z>0)$ **2 分**

设 $M(x_0,y_0,z_0)$. 则 M 点处的切平面的法向量为 $\vec{n}=\{-8x_0,-8y_0,2z_0\}$,

由题意有 $\dfrac{-8x_0}{1}=\dfrac{-8y_0}{1}=\dfrac{2z_0}{1}$，又切点在曲面上，有 $z_0^2-4(y_0^2+x_0^2)=2$。

解得 $(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},2)$, M 点处的切平面方程为 $\qquad x+y+z-1=0$

即 $\qquad z=1-x-y.$ 又曲面 $\Sigma: z=\sqrt{2+4(x^2+y^2)}.$ **5 分**

（2）$V=\iint\limits_D(\sqrt{2+4(x^2+y^2)}-1+x+y)dxdy$

$$=\iint\limits_D\sqrt{2+4(x^2+y^2)}dxdy-\pi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\sqrt{2+4\rho^2}d\rho-\pi=\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}-3}{3}\pi.$$ **8 分**

六、采用球坐标计算

$$I=\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^3\sin\varphi dr$$ **4 分**

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}d\varphi=\frac{(3\sqrt{6}-4)\pi}{9\sqrt{3}}.$$ **8 分**

七、设 $P(x_0,y_0,z_0)$，椭球面在 (1,1,1) 处的外法向量为：

$\vec{n}=\{4x,4y,2z\}|_{(1,1,1)}=\{4,4,2\}$. $\vec{n}^0=\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$. **1 分**

目标函数：$u=\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)$ **3 分**

约束条件：$2x_0^2+2y_0^2+z_0^2=5$

令 $F(x,y,z)=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)+\lambda(2x_0^2+2y_0^2+z_0^2-5)$

$$\begin{cases} F'_x=\frac{4}{3}+4\lambda x_0=0 \\ F'_y=\frac{4}{3}+4\lambda y_0=0 \\ F'_z=\frac{2}{3}+2\lambda z_0=0 \\ 2x_0^2+2y_0^2+z_0^2=5 \end{cases}$$

，得驻点 $(1,1,1)$, $(-1,-1,-1)$ **5 分**

又在(1,1,1)处：$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)=\frac{10}{3}$；

在(-1,-1,-1)处：$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)=-\frac{10}{3}$.

所以使方向导数最大的点为(1,1,1)，最大方向导数为$\frac{10}{3}$. **7 分**