课程编号：MTH17005 北京理工大学2015-2016学年第一学期

2015级《微积分A》期末试卷（A卷）

班级__________________学号_________________姓名__________________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一、填空（每小题4分，共20分）

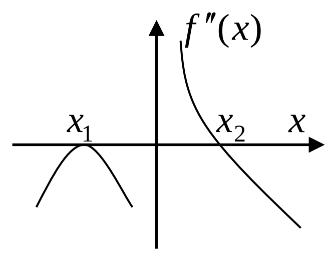
1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}=$__________________.

2. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(\dfrac{1}{n})-1]=$______________.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{x^3\sin^2 x}{1+\cos x}+|x|)dx=$_________________.

4. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为：________________________.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其二阶导数 $f''(x)$ 的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的拐点个数为______，拐点坐标为：________________________.



二、（8分）设函数 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$，（1）求 $f'(x)$；（2）证明：当 $x\geq 1$ 时，

$$f(x)=2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\equiv \text{常数}$$，并求此常数.

三、（8分）(1)求不定积分 $\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx$；(2)求广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

四、（8分）求微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足 $y(1) = e^3$ 的特解.

五、（8分）设 $\begin{cases} x = t\sin t \\ y = \cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 及 $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

六、（8分）设D是由曲线$y=\sqrt{1-x^2}\ (0\le x\le 1)$与星形线$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}(0\le t\le \frac{\pi}{2})$所围成的平面区域，（1）求$D$的面积；（2）求$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积.

七、（8分）已知高温物体放置于低温介质中，任一时刻物体的温度T对时间t的变化率与该时刻物体与介质的温度差成正比，现将一初始温度为$120^\circ C$的物体放在$20^\circ C$恒温介质中冷却，30分钟后该物体的温度降至$30^\circ C$，求该物体的温度T与时间t的函数关系；若要物体的温度继续降至$21^\circ C$，还需要多少时间？

八、（8分）证明方程$4\arctan x - x + \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$有且仅有两个实根.

九、（8分）设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1) \\ x, & x\in[1,2] \end{cases}$，求$F(x)=\int_0^x f(t)dt$在$[0,2]$上的表达式，并讨论$F(x)$在$(0,2)$内的连续性和可导性.

十、（8 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足方程 $\int_0^x (t-x)f(t)dt = f(x)+\cos 2x$，求 $f(x)$ 的表达式.

十一、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]\,(a>0)$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明至少存在一点 $\eta\in[-a,a]$，使 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx$.