2005-2006 学年《微积分 A》第二学期期末考试

参考答案及评分标准

2006 年 6 月 22 日

一、1 对 x 求导，得 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=4x \\ \dfrac{dz}{dx}=-2y\dfrac{dy}{dx}=-8xy \end{cases}$，在点 $(1,2,-2)$ 处，$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=4 \\ \dfrac{dz}{dx}=-16 \end{cases}$，

曲线 Γ 在点 $(1,2,-2)$ 处的切向量为 $\vec{\tau}=\{1,4,-16\}$， ………………..**3 分**

切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+2}{-16}$ ………………...**5 分**

法平面方程为：$x+4y-16z-41=0$ ………………..**6 分**

2 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf_1'+f_2'$ ……………………………………………… **3 分**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-f_{12}'')+xf_{21}''-f_{22}''$$

$$=f_1'+xyf_{11}''+(x-y)f_{12}''-f_{22}''$$ ……………….**6 分**

3 $I=\iint\limits_D x^2e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{y^2}dx$ ……..………………… .**3 分**

$=\int_0^1\dfrac{1}{3}y^3e^{y^2}dy=\dfrac{1}{6}\int_0^1 y^2e^{y^2}dy^2=\dfrac{1}{6}$ ……………………...**6 分**

4 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}(n-\sqrt{n})}>0$，…. .**2 分**

此级数为正项级数，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{3/2}}{\sqrt{n}(n-\sqrt{n})}=1$，………... **4 分**

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，由正项级数的比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n})$ 收敛。 ……………………………………………………….**6 分**

二、1　解：　Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D:1\le x^2+y^2\le 4.$

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ ………………………….**3** 分

$$I=\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=\iint_D\sqrt{2(x^2+y^2)}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy$$ **5** 分

$$=2\iint_D\sqrt{(x^2+y^2)}dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^2d\rho=\frac{28}{3}\pi$$ ……………..**7** 分

2　曲面的法向量：$\{-2x,-8y,4z\}$，在 P 点：$\vec{n}=\{-4,-8,8\}$

$$\vec{n}^0=\{-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}$$ ………………………………...**2** 分

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{5y+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{5x}{2\sqrt{5y+z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{xz}{\sqrt{5y+z^2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_P=3,\quad \frac{\partial u}{\partial y}|_P=\frac{5}{3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}|_P=\frac{4}{3}.$$ ……………………………….**4** 分

$$\mathrm{grad}\,u|_P=\{3,\frac{5}{3},\frac{4}{3}\},\ \frac{\partial f}{\partial n}|_P=-\frac{1}{3}\times 3-\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=-\frac{11}{9}$$ ……**7** 分

3　由狄里克雷收敛定理得：$S(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1)\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ x-1, & x\in(1,\pi)\end{cases}$

由题意，$f(x)$ 需做偶延拓，$\therefore\quad S(-x)=S(x)$ …………………**2** 分

$S(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 内的表达式为：

$$S(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-1,0)\\ \frac{1}{2}, & x=-1\\ -x-1, & x\in(-\pi,1)\end{cases},$$ ……………………………………**5** 分

$$S(-4)=S(2\pi-4)=2\pi-5,\quad S(2\pi-1)=S(-1)=\frac{1}{2}$$ …**7** 分

4 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^y(2x-4)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=e^y(x^2-4x+2y+2)=0\end{cases}$，解得驻点：$x=2, y=1$ ……...**2 分**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2e^y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^y(2x-4),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^y(x^2-4x+2y+4).$$

在驻点处有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2e,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e.$$ ………………….**4 分**

$$B^2-AC=-4e^2<0,\quad 又A=2e>0,$$

$\therefore$ $f(x)$在点（2,1）处取得极小值，极小值$=f(2,1)=-2e.$ …..**7 分**

三、$f(x)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{3}[\dfrac{1}{(x-1)-2}-\dfrac{1}{1+(x-1)}]$

$$=\frac{1}{3}[-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{1+(x-1)}]$$ ………………………………… **3 分**

$$=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n](x-1)^n$$ ………………………………. .**6 分**

收敛域：$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1\\ |x-1|<1\end{cases}$，$\Rightarrow 0<x<2.$ ………………………………..**8 分**

四、在直角坐标系下：

$$I=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)dz.$$ …………………...**3 分**

在球坐标系下：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r^4\sin^3\varphi dr.$$ ……………………………….**5 分**

选取球坐标计算：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r^4\sin^3\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R r^4 dr$$

$$=\frac{\pi R^5}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi=\frac{\pi R^5}{15}.$$ ……………………………**8 分**

五、补充线段：$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BO}$，其中$B$点坐标为(1,0)，则 $L+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$ 构成封闭曲线。由 Green 公式，得

$$\int_{L+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}}(\sin y-y)dx+(x\cos y-1)dy$$

$$=-\iint_D(\cos y-\cos y+1)dxdy=-\frac{\pi}{4}$$ ………………………….. **3 分**

在 $\overrightarrow{AB}$ 上，$x=1, y:1\to 0,$

$$\int_{\overrightarrow{AB}}(\sin y-y)dx+(x\cos y-1)dy=\int_1^0(\cos y-1)dy=1-\sin 1$$ ….**5 分**

在 $\overrightarrow{BO}$ 上，$y=0, x:1\to 0,$

$$\int_{\overrightarrow{BO}}(\sin y-y)dx+(x\cos y-1)dy=0$$ ……………………………... ..**7 分**

$$I=\int_{L+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}}-\int_{\overrightarrow{AB}}-\int_{\overrightarrow{BO}}=-\frac{\pi}{4}-(1-\sin 1)-0=\sin 1-1-\frac{\pi}{4}.$$ …...**8 分**

六、$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}x^2=x^2$，由比值判别法知：

当 $x^2<1$ 时，级数收敛；当 $x^2>1$ 时，级数发散.

所以幂级数的收敛区间为：$(-1,1)$. ……………………………………**2 分**

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n},\ S'(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},$ …………….**3 分**

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2}.$$ ………………**5 分**

$$S'(0)=0,\ S'(x)=\int_0^x S''(x)dx=\int_0^x\frac{2}{1+x^2}dx=2\arctan x$$ ………...**6 分**

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x 2\arctan x dx$$

$$=2(x\arctan x|_0^x-\int_0^x \frac{x}{1+x^2}dx)$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$ ……………………………7 分

又 $S(0)=0$, 所以和函数为：$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$. ……8 分

七、$I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}2axdydz+(z-a)^2dxdy$ ……………………………………..1 分

补充平面 $S: z=0, x^2+y^2\le a^2$, 取下侧，则由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma+S}2axdydz+(z-a)^2dxdy=\iiint\limits_{V}[2a+2(z-a)]dxdydz$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^3\cos\varphi\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi a^4}{2}$$ …………………………………4 分

$$\iint\limits_{S}2axdydz+(z-a)^2dxdy=\iint\limits_{S}a^2dxdy=-a^2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}dxdy=-\pi a^4$$ …6 分

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+S}-\iint\limits_{S}=\frac{3\pi a^4}{2}, \quad I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}=\frac{3\pi a^3}{2}.$$ ………………………….. 8 分

八、$X(x,y)=\frac{y}{x^2+f(y)}$, $\quad Y(x,y)=\frac{-x}{x^2+f(y)}$.

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{x^2+f(y)-yf'(y)}{[x^2+f(y)]^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{x^2-f(y)}{[x^2+f(y)]^2}$$ ………………...4 分

由题意知：$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad yf'(y)-2f(y)=0$， ………………...6 分

解得 $f(y)=Cy^2$, 由 $f(1)=1$, 得

$f(y)=y^2$. ……………………………………………………… 8 分