线性代数第八讲

吴民

南开大学　计控学院

November 3, 2017

线性方程组的解法

线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_2 \end{cases}$$

线性方程组的解法

线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_2 \end{cases}$$

此方程组的向量形式和矩阵形式：

线性方程组的解法

线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_2 \end{cases}$$

此方程组的向量形式和矩阵形式：

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

$$AX = b$$

以上方程组的系数矩阵和增广矩阵为：

以上方程组的系数矩阵和增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

线性方程组的解法

以上方程组的系数矩阵和增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

定理：线性方程组有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。

以上方程组的系数矩阵和增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

定理：线性方程组有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。

证明：必要性。方程组有解，即 β 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出。

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$,

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$，

则 β 可被 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性表出，

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$,

则 β 可被 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性表出,

所以 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ 的极大线性无关组。

线性方程组的解法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$，

则 β 可被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，

所以 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组。

即 $R(A)=R(A,b)$。

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$，

则 β 可被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，

所以 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组。

即 $R(A)=R(A,b)$。

充分性。设 $R(A)=R(A,b)=r$。

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$，

则 β 可被 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性表出，

所以 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ 的极大线性无关组。

即 $R(A) = R(A, b)$。

充分性。设 $R(A) = R(A, b) = r$。

即 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组包含 r 个向量。

线性方程组的解法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$,

则 β 可被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出,

所以 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组。

即 $R(A)=R(A,b)$。

充分性。设 $R(A)=R(A,b)=r$。

即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组包含 r 个向量。

不妨设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组,

线性方程组的解法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$，

则 β 可被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，

所以 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组。

即 $R(A)=R(A,b)$。

充分性。设 $R(A)=R(A,b)=r$。

即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组包含 r 个向量。

不妨设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组，

若 β 不能被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性表出，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta$ 线性无关。

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$，

则 β 可被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，

所以 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组。

即 $R(A)=R(A,b)$。

充分性。设 $R(A)=R(A,b)=r$。

即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组包含 r 个向量。

不妨设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组，

若 β 不能被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性表出，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta$ 线性无关。

这与 $R(A,b)=r$ 矛盾。因此 β 能被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性表出。

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$，

则 β 可被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，

所以 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ 的极大线性无关组。

即 $R(A)=R(A,b)$。

充分性。设 $R(A)=R(A,b)=r$。

即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组包含 r 个向量。

不妨设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的极大线性无关组，

若 β 不能被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性表出，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta$ 线性无关。

这与 $R(A,b)=r$ 矛盾。因此 β 能被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 线性表出。

因此 β 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出。即方程组有解。

练习：P.119，第17题。

练习：P.119，第17题。

因为：

$$R(A) \leqslant R(A,b) \leqslant R\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

练习：P.119，第17题。

因为：

$$R(A) \leqslant R(A,b) \leqslant R\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

又已知：

$$R(A) = R\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

练习：P.119，第17题。

因为：

$$R(A) \leqslant R(A,b) \leqslant R\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

又已知：

$$R(A) = R\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R(A) = R(A,b)$。方程组有解。

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

如果两个线性方程组有相同的解集合，那么就称它们为同解的。

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

如果两个线性方程组有相同的解集合，那么就称它们为同解的。

解方程组的方法：方程组的同解变换，也可能作非同解变换。

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

如果两个线性方程组有相同的解集合，那么就称它们为同解的。

解方程组的方法：方程组的同解变换，也可能作非同解变换。

解线性方程组，通常只用同解变换：线性方程组的初等变换。

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

如果两个线性方程组有相同的解集合，那么就称它们为同解的。

解方程组的方法：方程组的同解变换，也可能作非同解变换。

解线性方程组，通常只用同解变换：线性方程组的初等变换。

- 交换两个方程的位置；

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

如果两个线性方程组有相同的解集合，那么就称它们为同解的。

解方程组的方法：方程组的同解变换，也可能作非同解变换。

解线性方程组，通常只用同解变换：线性方程组的初等变换。

- 交换两个方程的位置；
- 用一个非 0 的数乘某个方程的两边；

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

如果两个线性方程组有相同的解集合，那么就称它们为同解的。

解方程组的方法：方程组的同解变换，也可能作非同解变换。

解线性方程组，通常只用同解变换：线性方程组的初等变换。

- 交换两个方程的位置；
- 用一个非 0 的数乘某个方程的两边；
- 把一个方程的倍数加到另一个方程上；

线性方程组的解法

线性方程组的解集合：解的全体构成的集合。

求解线性方程组：找出方程组的解集合。

如果两个线性方程组有相同的解集合，那么就称它们为同解的。

解方程组的方法：方程组的同解变换，也可能作非同解变换。

解线性方程组，通常只用同解变换：线性方程组的初等变换。

- 交换两个方程的位置；
- 用一个非 0 的数乘某个方程的两边；
- 把一个方程的倍数加到另一个方程上；

定理：线性方程组的初等变换是同解变换。

线性方程组的解法

已知的能求出解的方程组的形式：克莱姆法则描述。

线性方程组的解法

已知的能求出解的方程组的形式：克莱姆法则描述。

更一般的形式：阶梯形方程组。

线性方程组的解法

已知的能求出解的方程组的形式：克莱姆法则描述。

更一般的形式：阶梯形方程组。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - x_4 + x_5 = -4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

已知的能求出解的方程组的形式：克莱姆法则描述。

更一般的形式：阶梯形方程组。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ x_3-x_4+x_5=-4 \\ x_4+x_5=1 \end{cases}$$

变形为：
$$\begin{cases} x_1+x_3+x_4=2-x_2-x_5 \\ x_3-x_4=-4-x_5 \\ x_4=1-x_5 \end{cases}$$

线性方程组的解法

对于阶梯形方程组：

对于阶梯形方程组：

选定部分未知数，将每个方程里的这几个未知数项都移到等号的右边。

线性方程组的解法

对于阶梯形方程组：

选定部分未知数，将每个方程里的这几个未知数项都移到等号的右边。

这些移到等号右边的未知数称为自由未知量。

对于阶梯形方程组：

选定部分未知数，将每个方程里的这几个未知数项都移到等号的右边。

这些移到等号右边的未知数称为自由未知量。

留在等号左边的未知数个数等于方程的个数，

线性方程组的解法

对于阶梯形方程组：

选定部分未知数，将每个方程里的这几个未知数项都移到等号的右边。

这些移到等号右边的未知数称为自由未知量。

留在等号左边的未知数个数等于方程的个数，

且使得系数矩阵的行列式不等于 0。

线性方程组的解法

对于阶梯形方程组：

选定部分未知数，将每个方程里的这几个未知数项都移到等号的右边。

这些移到等号右边的未知数称为自由未知量。

留在等号左边的未知数个数等于方程的个数，

且使得系数矩阵的行列式不等于 0。

对每个自由未知量取定任意数值，方程组成为留在左边的未知数的方程组。

线性方程组的解法

对于阶梯形方程组：

选定部分未知数，将每个方程里的这几个未知数项都移到等号的右边。

这些移到等号右边的未知数称为自由未知量。

留在等号左边的未知数个数等于方程的个数，

且使得系数矩阵的行列式不等于 0。

对每个自由未知量取定任意数值，方程组成为留在左边的未知数的方程组。

根据克莱姆法则，此时方程组必定有解，且解唯一。

线性方程组的解法

对于阶梯形方程组：

选定部分未知数，将每个方程里的这几个未知数项都移到等号的右边。

这些移到等号右边的未知数称为自由未知量。

留在等号左边的未知数个数等于方程的个数，

且使得系数矩阵的行列式不等于 0。

对每个自由未知量取定任意数值，方程组成为留在左边的未知数的方程组。

根据克莱姆法则，此时方程组必定有解，且解唯一。

由此就能得到方程组的全部解（解集合）。

线性方程组的解法

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

线性方程组的解法

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

将方程组化成阶梯形方程组，相当于将增广矩阵化为阶梯形。

线性方程组的解法

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

将方程组化成阶梯形方程组，相当于将增广矩阵化为阶梯形。

增广矩阵化为阶梯形矩阵的同时，也求出了系数矩阵的秩和增广矩阵的秩。也就是对线性方程组是否有解进行了判定。

线性方程组的解法

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

将方程组化成阶梯形方程组，相当于将增广矩阵化为阶梯形。

增广矩阵化为阶梯形矩阵的同时，也求出了系数矩阵的秩和增广矩阵的秩。也就是对线性方程组是否有解进行了判定。

当将增广矩阵化成阶梯形矩阵的过程中，出现：

线性方程组的解法

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

将方程组化成阶梯形方程组，相当于将增广矩阵化为阶梯形。

增广矩阵化为阶梯形矩阵的同时，也求出了系数矩阵的秩和增广矩阵的秩。也就是对线性方程组是否有解进行了判定。

当将增广矩阵化成阶梯形矩阵的过程中，出现：

- 全 0 行，

线性方程组的解法

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

将方程组化成阶梯形方程组，相当于将增广矩阵化为阶梯形。

增广矩阵化为阶梯形矩阵的同时，也求出了系数矩阵的秩和增广矩阵的秩。也就是对线性方程组是否有解进行了判定。

当将增广矩阵化成阶梯形矩阵的过程中，出现：

- 全 0 行，相当于某个方程化为恒等式 $0 = 0$，可以考虑去解除去该方程的方程组。

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

将方程组化成阶梯形方程组，相当于将增广矩阵化为阶梯形。

增广矩阵化为阶梯形矩阵的同时，也求出了系数矩阵的秩和增广矩阵的秩。也就是对线性方程组是否有解进行了判定。

当将增广矩阵化成阶梯形矩阵的过程中，出现：

- 全 0 行，相当于某个方程化为恒等式 $0 = 0$，可以考虑去解除去该方程的方程组。
- 一行元素除最后一个外都为 0，而最后一个元非 0，

线性方程组的解法

对方程组作初等变换，相当于对其增广矩阵作行初等变换。

将方程组化成阶梯形方程组，相当于将增广矩阵化为阶梯形。

增广矩阵化为阶梯形矩阵的同时，也求出了系数矩阵的秩和增广矩阵的秩。也就是对线性方程组是否有解进行了判定。

当将增广矩阵化成阶梯形矩阵的过程中，出现：

- 全 0 行，相当于某个方程化为恒等式 $0 = 0$，可以考虑去解除去该方程的方程组。
- 一行元素除最后一个外都为 0，而最后一个元非 0，相当于某个方程化为 $0 = 1$ 这种不能成立的式子，方程组无解。

解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$$

解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4+6x_5=6 \\ 4x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=4 \end{cases}$$

增广矩阵为：

解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4+6x_5=6 \\ 4x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=4 \end{cases}$$

增广矩阵为：
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对增广矩阵作行初等变换：

对增广矩阵作行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对增广矩阵作行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \to$$

对增广矩阵作行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对增广矩阵作行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

线性方程组的解法

即解阶梯形方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_5 = -2 \\ -x_3 - x_4 - 5x_5 = -4 \end{cases}$$

即解阶梯形方程组：

$$\begin{cases} \quad x_1 + x_2 - 4x_5 = -2 \\ -x_3 - x_4 - 5x_5 = -4 \end{cases}$$

取 x_2, x_4, x_5 为自由未知量，得到方程组：

$$\begin{cases} x_1 = -2 - x_2 + 4x_5 \\ x_3 = 4 - x_4 - 5x_5 \end{cases}$$

即解阶梯形方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_5 = -2 \\ -x_3 - x_4 - 5x_5 = -4 \end{cases}$$

取 x_2, x_4, x_5 为自由未知量，得到方程组：

$$\begin{cases} x_1 = -2 - x_2 + 4x_5 \\ x_3 = 4 - x_4 - 5x_5 \end{cases}$$

令 $x_2 = \tilde{x_2}, x_4 = \tilde{x_4}, x_5 = \tilde{x_5}$，则

线性方程组的解法

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_2 \\ 4 - \tilde{x}_4 - 5\tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_2 \\ 4 - \tilde{x}_4 - 5\tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性方程组的解的结构

常数项都为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组。以下谈解方程组的解都是指向量形式的解，也就是满足 $AX = 0$ 的 X。

常数项都为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组。以下谈解方程组的解都是指向量形式的解，也就是满足 $AX=0$ 的 X。

- 若 X_1, X_2 都是 $AX=0$ 的解，则 X_1+X_2 是方程组的解。

线性方程组的解的结构

常数项都为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组。以下谈解方程组的解都是指向量形式的解，也就是满足 $AX = 0$ 的 X。

- 若 X_1, X_2 都是 $AX = 0$ 的解，则 $X_1 + X_2$ 是方程组的解。
- 若 X_1 是 $AX = 0$ 的解，则 cX_1 是方程组的解，c 为任意常数。

线性方程组的解的结构

常数项都为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组。以下谈解方程组的解都是指向量形式的解，也就是满足 $AX=0$ 的 X。

- 若 X_1, X_2 都是 $AX=0$ 的解，则 X_1+X_2 是方程组的解。
- 若 X_1 是 $AX=0$ 的解，则 cX_1 是方程组的解，c 为任意常数。

齐次线性方程组的解集合的极大线性无关组称为该方程组的基础解系。

线性方程组的解的结构

常数项都为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组。以下谈解方程组的解都是指向量形式的解，也就是满足 $AX=0$ 的 X。

- 若 X_1,X_2 都是 $AX=0$ 的解，则 X_1+X_2 是方程组的解。
- 若 X_1 是 $AX=0$ 的解，则 cX_1 是方程组的解，c 为任意常数。

齐次线性方程组的解集合的极大线性无关组称为该方程组的基础解系。

定理：齐次线性方程组的系数矩阵秩为 r 时，其基础解系包含 $n-r$ 个解向量。

证明：系数矩阵的秩为 r，所以自由未知量的个数为 $n-r$。不妨设自由未知量为 $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$。

证明：系数矩阵的秩为 r，所以自由未知量的个数为 $n-r$。不妨设自由未知量为 $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$。将 $\begin{pmatrix} x_{r+1} & x_{r+2} & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ 依次取为：

证明：系数矩阵的秩为 r，所以自由未知量的个数为 $n-r$。不妨设自由未知量为 $x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n$。将 $\begin{pmatrix} x_{r+1} & x_{r+2} & \dots & x_n \end{pmatrix}$ 依次取为：

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$，求出一个方程组的解，

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

证明：系数矩阵的秩为 r，所以自由未知量的个数为 $n-r$。不妨设自由未知量为 $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$。将 $\begin{pmatrix} x_{r+1} & x_{r+2} & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ 依次取为：

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$，求出一个方程组的解，

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$，求出一个方程组的解，

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} c_{21} & \ldots & c_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

证明：系数矩阵的秩为 r，所以自由未知量的个数为 $n-r$。不妨设自由未知量为 $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$。将 $\begin{pmatrix} x_{r+1} & x_{r+2} & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ 依次取为：

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$，求出一个方程组的解，
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$，求出一个方程组的解，
$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} c_{21} & \ldots & c_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$，求出一个方程组的解，
$$\alpha_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{n-r,1} & \ldots & c_{n-r,r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

- 以上 $n-r$ 个向量均是原方程组的解。

线性方程组的解的结构

- 以上 $n-r$ 个向量均是原方程组的解。
- 以上 $n-r$ 个解向量线性无关。

线性方程组的解的结构

- 以上 $n-r$ 个向量均是原方程组的解。
- 以上 $n-r$ 个解向量线性无关。
- 方程组的任意解 $\beta = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_n \end{pmatrix}$ 都可被 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ 线性表出：

线性方程组的解的结构

- 以上 $n-r$ 个向量均是原方程组的解。
- 以上 $n-r$ 个解向量线性无关。
- 方程组的任意解 $\beta = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_n \end{pmatrix}$ 都可被 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ 线性表出：

$$\beta = t_{r+1}\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n.$$

线性方程组的解的结构

- 以上 $n-r$ 个向量均是原方程组的解。
- 以上 $n-r$ 个解向量线性无关。
- 方程组的任意解 $\beta = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_n \end{pmatrix}$ 都可被 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ 线性表出：

$$\beta = t_{r+1}\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n.$$

因为 $t_{r+1}\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n$ 是方程组的解，且后 $n-r$ 个分量与 β 完全相同，也就是自由未知量部分完全相同。所以两个向量必定相等。

- 所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-r}$ 是方程组解集的一个极大线性无关组。它们就是方程组的一个基础解系。故方程组的基础解系含有 $n-r$ 个解向量。

线性方程组的解的结构

- 所以 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ 是方程组解集的一个极大线性无关组。它们就是方程组的一个基础解系。故方程组的基础解系含有 $n-r$ 个解向量。
- 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的导出组：$AX=0$。

- 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ 是方程组解集的一个极大线性无关组。它们就是方程组的一个基础解系。故方程组的基础解系含有 $n-r$ 个解向量。
- 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的导出组：$AX=0$。
- 若 X_1、X_2 都是 $AX=b$ 的解，则 X_1-X_2 是导出组的解。

- 所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-r}$ 是方程组解集的一个极大线性无关组。它们就是方程组的一个基础解系。故方程组的基础解系含有 $n-r$ 个解向量。
- 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的导出组：$AX=0$。
- 若 X_1、X_2 都是 $AX=b$ 的解，则 X_1-X_2 是导出组的解。

定理：$AX=b$ 的全部解可表为：

$X=X_0+k_1X_1+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$

其中，X_0 是 $AX=b$ 的一个特解，$X_1,\ldots,X_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的基础解系，$k_1,\ldots,k_{n-r}$ 为任意常数。

需要证两方面:

- 证明 $X_0 + k_1X_1 + \cdots + k_{n-r}X_{n-r}$ 是方程组的解。

需要证两方面：

- 证明 $X_0 + k_1X_1 + \cdots + k_{n-r}X_{n-r}$ 是方程组的解。
- 再证明若 X 是方程组的解，则 X 可表为上述形式。

需要证两方面：

- 证明 $X_0 + k_1X_1 + \cdots + k_{n-r}X_{n-r}$ 是方程组的解。
- 再证明若 X 是方程组的解，则 X 可表为上述形式。
- 若 X 是解，则 $X - X_0$ 是 $AX = 0$ 的解，故 $X - X_0$ 可被 $AX = 0$ 的基础解系线性表出：

$$X - X_0 = k_1X_1 + \cdots + k_{n-r}X_{n-r}.$$

需要证两方面：

- 证明 $X_0+k_1X_1+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$ 是方程组的解。
- 再证明若 X 是方程组的解，则 X 可表为上述形式。
- 若 X 是解，则 $X-X_0$ 是 $AX=0$ 的解，故 $X-X_0$ 可被 $AX=0$ 的基础解系线性表出：

$$X-X_0=k_1X_1+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}.$$

- 移项即得到要证的形式。

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

线性方程组的解的结构

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 1$ 时，对以上矩阵作行初等变换，得到：

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 1$ 时，对以上矩阵作行初等变换，得到：

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

消 x_3 的系数。

$\lambda \neq 1$ 时，对以上矩阵作行初等变换，得到：

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

消 x_3 的系数。 $\lambda = 1$ 时，方程组变为 2 个方程，且系数矩阵与增广矩阵秩相等。

$\lambda \neq 1$ 时，对以上矩阵作行初等变换，得到：

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

消 x_3 的系数。$\lambda = 1$ 时，方程组变为 2 个方程，且系数矩阵与增广矩阵秩相等。

$\lambda = 1$ 时，方程组有无穷多解，$\lambda = 10$ 时方程组无解，其余情况有唯一解。