北京理工大学 2010-2011 学年第二学期

《微积分 A》（下）期末试题解答及评分标准(A 卷)

2011.6.29

一、1. $3x+y-z+2=0;$　　2. $\pi;$

3. $p>\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2}<p\le\frac{1}{2};$　　4. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^{2\sin\theta}\rho^2 d\rho,\quad \frac{16}{9};$

5. $\frac{2\pi}{3},\quad \pi^2.$

二、设点 $M(x_0,y_0,z_0)$，

曲面在点 M 处的法向量为：$\vec{n}=\{y,x,-1\}|_M=\{y_0,x_0,-1\}$ …………3 分

由题意知：$\vec{n}//\{1,3,1\}$，有

$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1},\ \Rightarrow x_0=-3,\quad y_0=-1,\quad z_0=x_0y_0=3$ …………5 分

所以点 M 的坐标为：$(-3,-1,3)$， …………6 分

曲面在点 M 处的法线方程为：$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$ …………8 分

三、交线 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$

在柱坐标系下计算，有 …………2 分

$$I=\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$ …………5 分

$$=\pi\int_0^1\rho^2(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$

$=\dfrac{34}{105}\pi.$ …………8 分

四、构造拉格朗日函数：$F(x,y,z)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$ …2 分

$$\begin{cases} F_x'=y+2\lambda x=0 \\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0 \\ F_z'=2y+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=10 \end{cases}$$ …………5 分

$\Rightarrow\begin{cases} z=2x \\ y^2=5x^2 \end{cases}$，代入约束条件，得可疑点

$M_1(1,\sqrt{5},2)$，$M_2(1,-\sqrt{5},2)$，$M_3(-1,\sqrt{5},-2)$，$M_4(-1,-\sqrt{5},-2)$，

$u(M_1)=u(M_4)=5\sqrt{5}$，$u(M_2)=u(M_3)=-5\sqrt{5}$

比较得，$u_{最大值}=5\sqrt{5}$，$u_{最小值}=-5\sqrt{5}$ …………8 分

五、面密度为：$\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， …………2 分

$J_z=\iint\limits_S\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)dS$ …………4 分

$=\iint\limits_{D:x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy$ …………5 分

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^4d\rho$ …………6 分

$=\dfrac{4\pi}{5}.$ …………8 分

六、收敛域为：$(-1,1)$. …………2 分

记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'$

$$= x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'$$

$$= x(\frac{x}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$$ …………6 分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} = s(\frac{1}{3}) = \frac{3}{4}.$$ …………8 分

七、$\frac{\partial z}{\partial x} = f' + e^y g_2'$, …………3 分

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2f' + g_1' + xe^y g_2'$, …………6 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f'' + e^y(g_2' + g_{21}'' + xe^y g_{22}'')$. …………8 分

八、记 $S: x+y+z=0$ 为被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所截部分，取上侧，

由斯托克斯公式，有

$$I = \oint_L ydx + zdy + xdz$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$ …………4 分

$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(-1-1-1)dS$$ …………6 分

$$= -\sqrt{3}\iint_S dS = -\sqrt{3}\pi$$ （利用几何意义） …………8 分

（其他方法）

九、添加辅助面 $S: z=0,\quad (x^2+y^2 \le R^2)$ 取下侧. …………2 分

$$I = \oiint_{\Sigma \cup S} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

$$-\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+(z^3+x^2+y^2)dxdy$$

$$=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iint_{D:x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdy$$ …………5 分

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\, dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^3d\rho$$ …………7 分

$$=\frac{6}{5}\pi R^5+\frac{\pi}{2}R^4.$$ …………8 分

十、 $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)(x+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3})$ …………2 分

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}]$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x-1)^n$$ …………5 分

其收敛域为：$-1<x<3.$ …………6 分

$$a_{10}=\frac{1}{2^{12}}-\frac{1}{2^{23}}=\frac{f^{(10)}(1)}{10!},$$

$$f^{(10)}(1)=(\frac{1}{2^{12}}-\frac{1}{2^{23}})10!.$$ …………8 分

十一、设 L 为右半平面内的一条路径，起点为 (x_0,y_0)，终点为 (x_1,y_1).

$$W=\int_L\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_L-\frac{kx}{r^3}dx-\frac{ky}{r^3}dy \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=-k\int_L\frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$ …………4 分

$$=-k\int_L\frac{d(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$=k\int_L d\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=k(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}})$$ **…6 分**

所以在此立场中，场力所做的功与所取的路径无关，只与路径的起点和终点坐标有关.

…………8 分

【或：记 $X(x,y)=\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$， $Y(x,y)=\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$ **…………6 分**

又 X,Y 在右半平面有一阶连续偏导数，且上式成立，所以在此立场中，场力所做的功与所取的路径无关，只与路径的起点和终点坐标有关.】

…………8 分