

2015级《微积分A》期中试卷

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

(本试卷共六页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一、填空(每小题4分, 共20分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$ _____.

2. 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 在内 $(-\infty, +\infty)$ 的表达式 $f(x) =$ _____,
 $f(x)$ 的间断点及其类型: _____.

3. 曲线 L 的极坐标方程为 $\rho = \theta$, 则 L 在点 $(\rho, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程为 _____.

4. 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$ _____.

5. 设 $y = (\tan 2x)^{\arcsin x}$, 则 $dy =$ _____.

二、(8分) 证明: $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$, $0 < x < 1$.

三、(8分) 设曲线方程为 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$, 求曲线在点 $(\ln 2, \frac{\pi}{4})$ 处的曲率和曲率半径.

四、(8分) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$ ($k \neq 0$), 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小, 求常数 a, b, k 的值.

五、(8分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

- (1) 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性;
- (2) α, β 满足什么关系时 $f'(x)$ 存在, 并求 $f'(x)$ 的表达式;
- (3) 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 试确定 α 与 β 的关系.

六、(8分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{\tan x(\sqrt{1+x^2}-1)}$.

七、(8分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\cos^2(xy) + \ln(x-y) = x$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$.

八、(8分) 某公司用卡车运送产品, 卡车速度为每小时 v 千米, $50 \leq v \leq 70$, 假定每千米运行费用(汽油等)为 $\frac{1}{100}(30 + \frac{v}{2})$ 元, 每小时需支付给司机的工资为 18 元, 设行驶路程为 L 千米, 求卡车速度为多少时运送总费用 $P(v)$ 最小. (要求: 用微分学知识).

九、(8分) 设 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{1-x}$, 求:

- (1) 函数的增减区间及极值; (2) 函数图象的凹凸区间和拐点;
(3) 渐近线; (4) 作出函数的图形.

十、(8分) 设 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2}$ ($n=1,2,3,\dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

十一、(8分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有二阶导数, $f(a) = 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 设 $b > a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$. 证明: $a < x_0 < b$.