2013—2014 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷参考答案（A 卷）

一、（每小题 **2** 分，共 **8** 小题）

1 错；　**2** 对；　**3** 对；　**4 C**；　**5 B**；　**6 B**；　**7 A**；　**8 B**

二、行列式计算　　　　（本题共 **14** 分，第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **8** 分）

1、计算四阶行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$.

解：根据行列式的性质，原行列式等于：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r1+(r2+r3+r4)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2分$$

$$\overset{r1/3}{=} 3*\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r2-r1 \\ r3-r1 \\ r4-r1}}{=} 3*\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad 2分$$

$$=3*(-1)^{4*3/2}*1*(-1)*(-1)*(-1)=-3 \qquad 2分$$

2、计算 ***n*** 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \cdots & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \cdots & \mathbf{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \cdots & \boldsymbol{n} \end{vmatrix} \qquad (\boldsymbol{n}>2) \quad .$$

解：根据行列式的性质，原行列式等于：

原式 $\overset{r_n-r_{n-1}}{\underset{r_2-r_1}{\overset{\vdots}{=}}}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$ 6分

$=1$ 2分

三、矩阵 ***X***，***A***，***B*** 满足 $\boldsymbol{AX=3X+B}$, 其中 （本题共 **8** 分）

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&5&0\\3&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&2&-2\\3&6&9\end{pmatrix}$，求矩阵 ***X*** 。

解：

由 $\boldsymbol{AX=3X+B}$ 可得：

$\boldsymbol{(A-3E)X=B}$ 2 分

又因为 $\boldsymbol{A-3E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ 且它是可逆矩阵 1 分

所以 $\boldsymbol{X=(A-3E)^{-1}B}$ 1 分

通过计算可得：$\boldsymbol{(A-3E)^{-1}}=\begin{pmatrix}0&0&1/3\\0&1/2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 2 分

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 2 分

四、当 ***a*** 取何值时，线性方程组：

$$\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1\\ ax_2-3x_3=3\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$$ 无解，有惟一解，有无穷多解？并在方程组有无穷多解时求其通解。（本题 **14** 分）

解：方程组的增广矩阵为：

$\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & a & -3 & 3\\ 1 & 3 & a+1 & 0\end{pmatrix}$。（**2** 分）

对增广矩阵进行初等行变换，得到：

$$\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & a & -3 & 3\\ 1 & 3 & a+1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a+2 & 1\\ 0 & a & -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & a^2+2a-3 & a+3\end{pmatrix}。$$

（**2** 分）

因此，当 $a=-3$ 或 $a=1$ 时系数矩阵的秩为 **2**。当 $a=-3$ 时，增广矩阵的秩也为 **2**，此时，方程组有无穷多解（**2** 分）；

当 $a=1$ 时，增广矩阵的秩为 **3**，因此此时方程组无解。（**2** 分）

当 $a\neq-3$ 且 $a\neq1$ 时，系数矩阵的秩为 **3**，等于未知数的个数，此时，方程组有唯一解。（**2** 分）

方程组有无穷多解时即 $a=-3$ 时，此时方程组的增广矩阵通过初等行变换得到：

$$\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

因此方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+5k\\ -1-k\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意实数（给定数域中的数）。

（**4** 分）。

五、设R^2中的两组基分别为：（本题 12 分）

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \text{和}\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

已知线性变换σ在基α_1，α_2下的矩阵为$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$。

1）求由基α_1，α_2到基β_1，β_2的过渡矩阵 **M**

2）求σ在基β_1，β_2下的矩阵。

解：**1**）

显然 $\beta_1=\alpha_2$ **[1 分]**

$\beta_2=-\alpha_1+3\alpha_2$ **[2 分]**

故$[\beta_1,\beta_2]=[\alpha_1,\alpha_2]\begin{bmatrix}0&-1\\1&3\end{bmatrix}$，$M=\begin{bmatrix}0&-1\\1&3\end{bmatrix}$ **[3 分]**

令解 $M=(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}$ **【式子 2 分，求逆 2 分，结果 2 分】**

2）令 **A=**$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$

则σ在基β_1,β_2下的矩阵：$B=M^{-1}AM=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\0&3\end{pmatrix}$

【式子 2 分，求逆 2 分，结果 2 分】

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ （本题 14 分）

求一个正交变换$X=PY$，把f化为标准形，并写出该标准型；

指出该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定)。

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ **[1 分]**

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda-1&-1\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$$

因此特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3,$ **[2 分]**

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0,$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$ 得 $\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}X=0$，

解得基础解系 $X_1=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^T$，$X_2=\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T$， **[2 分]**

正交化得 $\xi_1=X_1=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^T$，

$$\xi_2=X_2-\frac{\left\langle X_2,\xi_1\right\rangle}{\left\langle \xi_1,\xi_1\right\rangle}\xi_1=\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}^T$$ **[2 分]**

对于 $\lambda_3=3,$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$ 得 $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}X=0$，解得基础解系 $X_3=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$ **[1 分]**

单位化得

$P_1=\frac{\xi_1}{\left|\xi_1\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^T$，$P_2=\frac{\xi_2}{\left|\xi_2\right|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\end{pmatrix}^T$，$P_3=\frac{X_3}{\left|X_3\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$ **[2 分]**

令 $P=\begin{pmatrix}P_1&P_2&P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$ **[2 分]**

则 $X=PY$ 将二次型化为标准型 $f=3y_3^2$ **[1 分]**

该二次型为半正定二次型。 **[1 分]**

说明：求基础解系结果不惟一。没用正交变换全对给 **7** 分。

七、已知非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$

(本题 10 分)

（1）证明β_1，β_2，β_3线性相关；

（2）找到一组不全为零的实数k_1，k_2，k_3使$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$成立。

证明：方法 1

由已知可得 $\beta_3=2\beta_1+\beta_2$ （5 分）

所以β_1，β_2，β_3线性相关。 （2 分）

当k_1=2，k_2=1，k_3=−1 时，$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$ （3 分）

方法 2

令$l_1\beta_1+l_2\beta_2+l_3\beta_3=0$ （1） （2 分）

则$l_1(\alpha_1+\alpha_2)+l_2(\alpha_1-\alpha_2)+l_3(3\alpha_1+\alpha_2)=0$ （1 分）

$(l_1+l_2+3l_3)\alpha_1+(l_1-l_2+l_3)\alpha_2=0$ （2）

则当$l_1+l_2+3l_3=0$，且

$l_1-l_2+l_3=0$ 时，（1）一定成立

对于方程组$\begin{cases}l_1+l_2+3l_3=0\\ l_1-l_2+l_3=0\end{cases}$ （3） （2 分）

系数矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

取$l_3=1$, 则$l_2=-1, l_1=-2$

存在不全为 0 的数l_1, l_2, l_3使（1）式成立。所以

β_1，β_2，β_3线性相关　　　　　　　　　　　　　　　　　　（2 分）

当k_1=−2，k_2=−1，k_3=1 时，$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$　　　　　　　（3 分）

八、A，B 均为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $M=\begin{pmatrix} E & E+B \\ A & E+A+AB \end{pmatrix}$，求矩阵 M 的逆矩阵。　　　　　　　　　　　　（本题 **8** 分）

解：使用分块初等矩阵乘法，有：

$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E+B \\ A & E+A+AB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & E+B \\ 0 & E \end{pmatrix}$，（**2** 分）

$\begin{pmatrix} E & -(E+B) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E+B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$，（**2** 分）

所以$\begin{pmatrix} E & -(E+B) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E+B \\ A & E+A+AB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$，（**2** 分）

所以$\begin{pmatrix} E & E+B \\ A & E+A+AB \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} E & -(E+B) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E+A+BA & -E-B \\ -A & E \end{pmatrix}$。（**2** 分）

九、设 A 是 n 阶实对称矩阵，t 是一个正实数，证明：当 t 充分大时，$tE+A$ 是正定矩阵。（其中 E 是 n 阶单位矩阵）　　　　　　　　　　（本题 4 分）

证明：法 1

A 为 n 阶实对称矩阵，所以$A^T=A$

$(tE+A)^T=tE+A^T=tE+A$

所以 $tE+A$ 是 n 阶实对称矩阵　　　　　　　（1 分）

因为 A 为 n 阶实对称矩阵，所以 A 的特征值都是实数，（1 分）

设为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$。不妨假设其中$\lambda_1$的值最小。

则 **tE+A** 的特征值为$t+\lambda_1,t+\lambda_2,\ldots,t+\lambda_n$亦都是实数。（**1** 分）

当$t>-\lambda_1$时，$t+\lambda_i>0, i=1,2,\ldots,n$

即 **tE+A** 的特征值都大于 **0**，所以 ***tE+A*** 是正定矩阵。（1 分）

法 2

A 为 ***n*** 阶实对称矩阵，所以$A^T=A$

$$(tE+A)^T=tE+A^T=tE+A$$

所以 ***tE+A*** 是 ***n*** 阶实对称矩阵

因为 A 为 ***n*** 阶实对称矩阵，所以 A 的特征值都是实数，

设为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$。不妨假设其中$\lambda_1$的值最小。

存在正交矩阵 C 使得：

$$C^TAC=C^{-1}AC=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$$

(2 分)

则

$$C^T(tE+A)C=C^{-1}(tE+A)C=tE+C^{-1}AC$$

$$=tE+\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}=\mathrm{diag}\{t+\lambda_1,t+\lambda_2,\ldots,t+\lambda_n\}$$

当$t>-\lambda_1$时，$t+\lambda_i>0, i=1,2,\ldots,n$

即 **tE+A** 的特征值都大于 **0**，所以 ***tE+A*** 是正定矩阵。（2 分）