

一、每小题 4 分，共 20 分

$$1. \ln 3; \quad 2. \sqrt{x^2+1}; \quad 3. \frac{1}{9}(2e^3+1);$$

$$4. \cos \frac{1}{x} + C; \quad 5. x(\frac{x^2}{2} + C).$$

$$\text{二、} 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{3x^2} \quad 3 \text{ 分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{6x} = -\frac{1}{3} \quad 5 \text{ 分}$$

$$2 \quad \text{方程两边同时对 } x \text{ 求导, 得: } e^y + xe^y \frac{dy}{dx} + e^x \frac{dy}{dx} + ye^x = 0 \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } dy = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y} \quad 5 \text{ 分}$$

$$3 \quad \int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx = \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx \quad 2 \text{ 分}$$

$$= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right] \quad 3 \text{ 分}$$

$$= 4(\sqrt{2} - 1) \quad 5 \text{ 分}$$

$$4 \quad \text{令: } u = x + y, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{代入原方程, 得: } \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \quad \text{解得: } \arctan u = x + c \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{代入, } \arctan(x + y) = x + c \quad \text{通解为: } y = \tan(x + c) - x \quad 5 \text{ 分}$$

三、由条件知： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - x}{x+1} - ax - b}{x} = 0$ 得

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{(x+1)x} = 2 \quad 3 \text{ 分}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x+1} - 2x = -3 \quad 6 \text{ 分}$$

四、(1) 设 $f(x) = x - \sin x$

$$\text{则 } f(0) = 0, \quad f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad (x > 0) \quad 2 \text{ 分}$$

所以 $f(x)$ 是单调增加函数，则有 $f(x) > f(0) = 0$,

即当 $x > 0$ 时，有 $x > \sin x$ 3 分

(2) 由 (1) 知，对自然数 n ，有 $x_n > \sin x_n = x_{n+1}$





又 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < 1$ ，所以 $\{x_n\}$ 单调有界必有极限， 5 分

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 则有 $a = \sin a \quad a = 0$ 6 分

五、定义域 $x \neq 0$

$$y' = \frac{-4(x+2)}{x^3}, \quad y' = 0 \text{ 得 } x_1 = -2; \quad y'' = \frac{8(x+3)}{x^4}, \quad y'' = 0 \text{ 得 } x_2 = -3. \quad 3 \text{ 分}$$

列表：

	$-\infty, -3$	-3	$-3, -2$	-2	$-2, 0$	0	$0, +\infty$
f'	-		-	0	+	不存在	-
f''	-	0	+		+		+
f		拐点		极值点			
		$(-3, -\frac{26}{9})$		-3			

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ 渐近线： $y = -2$ 及 $x = 0$

6 分

六、由对称性可知：

心形线长

$$s = 2 \int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = 4\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 8 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 16 \quad 3 \text{ 分}$$

心形线所围面积：

$$A = 2 \int_0^\pi \frac{1}{2} \rho^2(\theta) d\theta = 4 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = 6\pi \quad 6 \text{ 分}$$

七、(1) 由对称性可知：

$$V_\pi = 2 \int_0^1 \pi y^2(x) dx \quad 2 \text{ 分}$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt = 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt = \frac{32}{105} \pi, \quad 4 \text{ 分}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1, \quad 5 \text{ 分}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\sec^2 t}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t}, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \quad 6 \text{ 分}$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \quad 8 \text{ 分}$$

八、(1) 设注水 t 秒后，液面的高度为 $h = h(t)$ ，则容器内水的容积是

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^h \pi y^{\frac{2}{3}} dy \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{两边对 } t \text{ 求导} \quad \frac{dV}{dt} = \pi h^{\frac{2}{3}} \frac{dh}{dt},$$

$$\text{已知 } \frac{dV}{dt} = 3, \text{ 则 } \frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi h^{\frac{2}{3}}} \quad 4 \text{ 分}$$

(2) 选 y 为积分变量, $y \in [0,1]$,

$$dw = \pi x^2 dy \mu g (1-y) = \pi \mu g (1-y) y^{\frac{2}{3}} dy$$

(其中 μ 水的密度, g 重力加速度) 6 分

$$w = \int_0^1 \pi \mu g (1-y) y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{9}{40} \pi \mu g .$$
 8 分

九、(1) 证明: 作代换, 令 $u = x-t, du = -dt$ 1 分

$$\begin{aligned} \int_0^x t f(x-t) dt &= \int_x^0 (x-u) f(u) (-du) = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du \\ &= x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt \end{aligned}$$
 2 分

(2) 将 (1) 代入已知等式, 有

$$f(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + \sin x = 0, \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 有}$$

$$f'(x) + \int_0^x f(t) dt + \cos x = 0, \text{ 再求导, 有}$$

$$f''(x) + f(x) - \sin x = 0, \text{ 而 } f(0) = 0, f'(0) = -1, \text{ 即 } f(x) \text{ 满足:}$$

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$$
 4 分

$$y'' + y = 0 \text{ 的特征根为 } r = \pm i, \text{ 通解为 } Y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
 5 分

$$\text{作辅助方程: } y'' + y = e^{xi}, i \text{ 是特征方程的单根, 设 } \tilde{y} = A x e^{xi},$$
 6 分

$$\text{代入方程解出: } A = -\frac{1}{2}i, \tilde{y} = -\frac{1}{2}i x e^{xi}, \text{ 取虚部, 得特解:}$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}x \cos x, \text{ 通解为: } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$$
 7 分

$$\text{代入初始条件, 解得: } c_1 = 0, c_2 = -\frac{1}{2}, \text{ 故}$$

$$y = f(x) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$
 8 分

十、(1) 由 $f(x)$ 连续, 有

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)} (x-1) = 5 \cdot 0 = 0 \quad 1 \text{ 分}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)} = 5 \quad 3 \text{ 分}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\frac{\sin x}{x} - 1} \cdot \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \quad 5 \text{ 分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\frac{\sin x}{x} - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - x}{x^3} = 5 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{5}{6} \quad 6 \text{ 分}$$

十一、构造辅助函数 $F(x) = x^3 f(x)$ 2 分

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0) \cdot f(1) = -1$, 则必有一点 $\eta \in (0,1)$, 使得

$$f(\eta) = 0 \quad 3 \text{ 分}$$

即: $F(0) = F(\eta) = 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件,

则存在 $\xi \in (0, \eta) \subseteq (0,1)$, 使得

$$F'(\xi) = 0 \quad \text{即} \quad \xi^3 f'(\xi) + 3\xi^2 f(\xi) = 0$$

$$\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0 \quad 6 \text{ 分}$$