

工科数学分析 I 期中试题

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____.

2. 设 $f(x) = \ln(1+x) \ln(2+x) \cdots \ln(n+x)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ _____.

3. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 则 $y''(0) =$ _____.

4. 设 $y = x^2 f(\arctan x)$, 则 $dy =$ _____.

5. 设 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 则 $f^{(100)}(0) =$ _____.

二. (8 分) 求极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + x - 2e^x + 2}{x \sin^2 x}$ 。

三. (8 分) 设 $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

四. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内具有连续的一阶导数, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$,

若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小量, 试确定 a, b 的值。

五. (8 分) 求函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2 - 3x + 2}$ 的间断点, 并讨论其类型。

六. (8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2-1}} & 0 < x < 1 \\ ax^4 - bx^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$, 讨论 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

七. (8 分) 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}$ 。

八. (8 分) 一个水槽长 $10m$, 横截面是下底为 $30cm$, 上底为 $80cm$ 的等腰梯形, 高为 $50cm$ 。

如果水槽以 $0.2 m^3 / \min$ 速度注满水, 问当水深 $30cm$ 时水位的增长速度为多少?

九. (8 分) 设 $y = xe^x$ 研究函数的性态, 并作出函数的图形。

十. (8 分) 设 $0 < a \leq 1$, $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{x_n^2}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值。

十一. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) \neq 0$,

证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{2f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ 。