信息学院本科生 2009－2010 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：________________年级：______学号：__________姓名：____________成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha, \beta\rangle$表示向量$\alpha, \beta$的内积.

得 分

一、 客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)

1. 方阵A,B满足$AB=BA$，则必有$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$。(　　　)

2. 若方阵A有$A^k=0$（$k>0$为整数），则必有$|A|=0$。　(　　　)

3. A,B为同型矩阵，且秩(A)＝秩(B)，则$AX=0$ 与$BX=0$是同解方程组。　(　　　)

4. n阶实对称矩阵A正定，则以下结论错误的是(　　　)

 (A) 可以找到一个正交矩阵F，使$F^{\mathrm{T}}AF$为对角矩阵。

 (B) A的所有的特征值均为正值。

 (C) A是不可逆矩阵。

 (D) 对某个$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，必有$X^TAX>0$。

5. n维向量α,β正交，则内积$\langle\alpha,\beta\rangle=$(　　　)

 (A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) 0

6. 下列说法不正确的是 (　　　)

 (A) 存在满足$PQ=0$的两个非零$n(n>1)$阶矩阵P和Q。

 (B) $n(n>1)$维实线性空间V中任何n个线性无关的向量都构成V的一个基底。

 (C) 设V是一个任意的n维欧式空间，T是V中一个任意的线性变换，则V中的零向量在T作用下的象一定也是零向量。

 (D) T是线性空间V中线性变换，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$线性无关。

7. 下列说法不正确的是（　　　）

(A) 相似矩阵有完全相同的特征多项式。

(B) 若T是欧式空间V中的一个正交变换，则T在V的任意一个基底下的矩阵为正交矩阵。

(C) 若V是一个n维线性空间，则V中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m(m>n)$的所有线性组合构成$V$的一个子空间。

(D) 二次型X^TAX与二次型Y^TBY等价，二次型Y^TBY与二次型Z^TCZ等价，则矩阵A与C等价。

8. A与B均为n阶方阵，则下列结论中成立的是（　　　）

(A) $|AB|=0$，则$A=0$或$B=0$。

(B) $|AB|=0$，则$|A|=0$或$|B|=0$。

(C) $AB=0$，则$A=0$或$B=0$。

(D) $AB\neq 0$，则$|A|\neq 0$或$|B|\neq 0$。

得　分

二、　三阶方阵A,B满足关系式 $AB+E=A^2+B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$，求B。(10 分)

得　分

三、　计算$n(n>2)$阶行列式（两小题分别 6、8 分，共 14 分）

1. $\begin{vmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$　　2. $\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1&1\\1&0&x&\dots&x&x\\1&x&0&\dots&x&x\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&x&x&\dots&0&x\\1&x&x&\dots&x&0\end{vmatrix}$，$x\neq 0$

得　分

四、　参数λ分别取什么值时，方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\\(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\end{cases}$$

无解、有无穷多解、有唯一解？并求方程组有解时的解。(14 分)

得 分

五、　求正交变换 $X = PY$,将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形，并写出其标准形。（16 分）

得 分

六、　Q 是一个 n 阶正交矩阵，证明

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$ 是一个 $2n$ 阶正交矩阵。 (7 分)

得 分

七、　设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性空间 V 的一个基底，

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\alpha_2 \\ \beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \\ \beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \end{cases}$$

证明 β_1,β_2,β_3 也是 V 的一个基底，并求向量 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 在基底 β_1,β_2,β_3 下的坐标。 (10 分)

得 分

八、　设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\,(m>2)$ 中， $\alpha_1\neq 0$ ，且每个 $\alpha_i\ (i=2,3,\cdots,m)$ 都不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$ 线性表示，证明该向量组线性无关。(8 分)

得 分

九、　设实矩阵 $C_{m\times n}$ （其中 $m>n$ ）的秩为 n。矩阵 $A=C^{\mathrm{T}}C$ 。证明：（1） A 是正定矩阵；（2） $|A+E|>1$ ，其中 E 为 n 阶单位阵。(共 5 分)