第一章：行列式

计算机学院

黄申为

shenweihuang@nankai.edu.cn

本章主要内容

- 行列式的定义

- 行列式的性质和计算

- 行列式按行（列）展开

行列式的定义

- 二阶行列式的定义
- 三阶行列式的定义
- n阶行列式的定义

1. 二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

由方程组的四个系数确定.

为便于记忆和表达

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **表示** $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ **并称之为一个**

二阶(级)行列式，**即**

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

二阶行列式计算的对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

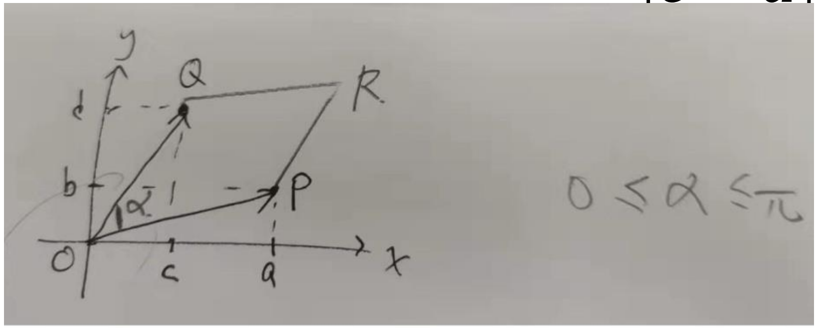
当 $D \neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

- 思考：若 $D=0$，方程组解的情况是什么样的？

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的几何意义

- 二阶行列式的绝对值是其行向量张成的平行四边形的面积。
  - (a, b)在xy-平面上对应点P;
  - (c, d)在xy-平面上对应点Q;
  - 则向量OP和OQ张成一个平行四边形OPQR，其面积恰好是行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的绝对值。



2. 三阶行列式

- 如何定义三阶行列式?

- 从解线性方程组的角度看，希望三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

的解也可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

的形式，其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

三阶行列式的定义

如果自己尝试去求解三元一次线性方程组，那么可以发现，下面的定义符合我们的要求。

定义

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \quad (4)$$

（4）式称为数表（3）所确定的三阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

列标

行标

三阶行列式的计算

沙路法

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$D= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

注：三阶行列式包括6=3!项，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，其中三项为正，三项为负。

例1　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} =$$

- 思考：三阶行列式的几何意义是什么？

3. n阶行列式

- n阶行列式如何定义？

- 定义n阶行列式需要用到排列。

排列

定义 由1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 级**排列**.

注： 所有不同 n 级排列的总数是

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots (n-1) n = P_n \quad (n\text{阶乘})$$

如，所有的3级排列是

123，132，213，231，312，321.

——共6=3！个.

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个标准次序，n 个不同的自然数，规定由小到大为标准次序.

定义 在一个排列中，如果一对数的前后位置与标准次序相反，即前面的数大于后面的数，则称这对数为一个**逆序**；

一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

注:

① 排列 $123\cdots n$ 称为标准排列，其逆序数为 0 .

② 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数常记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

③ $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

方法一

$+j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数 $+\cdots$

$+j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数.

或 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_2$ 前面比 j_2 大的数的个数

方法二

$+j_3$ 前面比 j_3 大的数的个数 $+\cdots$

$+j_n$ 前面比 j_n 大的数的个数.

例1．排列 31542 中，逆序有

31， 32， 54， 52， 42

$\therefore\quad \tau(31542)=5$

例2．求 n 级排列 $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$

的逆序数.

方法一

解：$$1\underset{\substack{\downarrow\\1}}{3}\underset{\substack{\downarrow\\2}}{5}\cdots\underset{\substack{\downarrow\\n-1}}{(2n-1)}\underset{\substack{\downarrow\\n-1}}{(2n)}(2n-2)\cdots\underset{\substack{\downarrow\\1}}{4}2$$

$$\tau=1+2+\cdots+(n-1)+(n-1)+\cdots+2+1=n(n-1)$$

排列的奇偶性

定义 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

注： 标准排列 $123\cdots n$ 为偶排列.

练习：求下列排列的逆序数并讨论其奇偶性.

（1） $n(n-1)\cdots 321$

（2） $(2n)1(2n-1)2(2n-2)3\cdots(n+1)n$

对换

定义 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，得到另一个排列，这一变换称为一个**对换**.

将相邻两个元素对调，叫做**相邻对换**.

定理1

对换改变排列的奇偶性．即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

证明　**1) 特殊情形：作相邻对换**

设排列为

$$a_1 \cdots a_l\, ab\, b_1 \cdots b_m \xrightarrow{\text{对换}\,\boldsymbol{a}\,\text{与}\,\boldsymbol{b}} a_1 \cdots a_l\, ba\, b_1 \cdots b_m$$

除$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 外，其它元素所成逆序不改变.

当$a<b$时，

经对换后 a 的逆序增加1个， b所成逆序不变;

当$a>b$时，

经对换后 a 所成逆序不变，b的逆序减少1个.

因此对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.

2) 一般情形

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$

现来对换 a 与b.

$$a_1 \cdots a_l \, a \, b_1 \cdots b_m \, b \, c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \, a b \, b_1 \cdots b_m \, c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \, b \, b_1 \cdots b_m \, a \, c_1 \cdots c_n$$

$$\therefore \quad a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n,$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n,$$

所以一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

两个推论

推论1：当 $n \geq 2$ 时，奇排列的个数和偶排列的个数相等，均为 $\frac{n!}{2}$。

证明：构造奇排列到偶排列的一个双射。

这是一个组合证明（combinatorial proof）

推论2：将一个奇排列通过对换变成标准排列的次数为奇数次，将一个偶排列变成标准排列的次数为偶数次。

证明：有定理1知对换次数就是排列奇偶性的变化次数，二标准排列是偶排列，因此结论成立。

n阶行列式的定义

- 从排列的观点看二阶和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 二阶行列式有两项，对应于12的两个排列12和21，偶排列对应的项为正，奇排列对应的项为负。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- 3阶行列式有6项，每一项的行标是123的标准排列，列表对应于123的1个排列，其中偶排列对应的项为正，奇排列对应的项为负。

- 由此，可以类比地将二阶和三阶的定义推广到一般的n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  - 这里是对所有12...n的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和；
  - n阶行列式展开有n!项，每一项都是来自不同行不同列元素的乘积；
  - 每一项对应于12...n的一个排列，偶排列对应的项为正，奇排列对应的项为负。

注:

1\) 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 常简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

主对角线

副对角线

2\) $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的数 a_{ij} 称为行列式D处于

第 i 行第 j 列的元素， i 称为行指标， j 称为列指标.

例1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 24$$

$$\begin{vmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & 4 & & & \\ & 5 & & & & \\ 6 & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(654321)} a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$$

$$= -6! = -720$$

一般地,

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & d_1 \\ & & d_2 & \\ & \iddots & & \\ d_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n$$

更一般地，

上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明见教材

例2.

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$,求$x^3$的系数.

解: 由n级行列式定义,$f(x)$是一个多项式函数,

且最高次幂为 x^3,显然含 x^3的项有两项:

$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 与 $(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$

即 x^3 与$-2x^3$

$\therefore$ $f(x)$ 中x^3的系数为−1.

练习：计算行列式

1) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & \\ & \iddots & \iddots & & \\ n-1 & \iddots & & & \\ 0 & & & & n \end{vmatrix}$$