课程编号：H0172101 北京理工大学 2017-2018 学年第一学期

微积分 A（上）期末试题(A 卷)

座号 ______ 班级____________ 学号____________ 姓名____________

(试卷共 6 页,十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、填空（每小题4分，共20分）

1．若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin kx)}{x}$ ，则 $k=$____________.

2．已知 $xy=e^{x+y}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________________________.

3. $\int_0^1\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=$________________________.

4 . $\int\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx=$________________________.

5. 设 $xy'+y=xe^x$，则 $y=$________________________.

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3(\sin\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{n})$.

2. 设 $y=x^{\sin x}+\sin^2 x$，求 dy .

3. 计算 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

4. 求 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$ 的通解.

三、（8分）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax+b)=0$，试确定常数$a$和$b$的值.

四、（6分）已知 $y_1=10, y_{n+1}=\sqrt{6+y_n}\,(n=1,2,...)$. 证明:数列$\{y_n\}$极限存在；并求此极限.

五、（8分）求函数 $y=\dfrac{x^3-1}{x}$ 的单调区间和极值，凹凸区间和拐点，渐近线.

六、（8 分）设曲线 $x=y^2\ (y>0)$，$x=2-y^2\ (y>0)$ 及 $y=0$ 围成一平面图形 D.

(1) 求平面图形 D 的面积；

(2) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

七、（8分）由方程 $y=2x^2$，$y=4$ 所确定的抛物型薄片铅直地浸入水中，顶端与水面持平.

（1）试求薄片一侧所受到的水压力；

（2）如果此后水面以每秒0.5米的速度开始上涨，试计算薄片一侧所受水压力的变化率.（长度单位：m，重力加速度 $g(m/s^2)$，水的密度 $\rho(kg/m^3)$）.

八、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f^{'}(0)=0,$

证明在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f^{(3)}(\xi)=3$.

九、（8分）设 $f(x)=e^{-x}+\int_0^x (x-t)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$ 的表达式.

十、（6 分）已知 $f(x)$ 在闭区间 $[1,6]$ 上连续，在开区间 $(1,6)$ 内可导，且

$$f(1)=5,\qquad f(5)=1,\qquad f(6)=12.$$

证明：存在 $\xi\in(1,6)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)-2\xi=2$ 成立.