课程编号：A071001　　北京理工大学 2006-2007 学年第一学期

数学分析期中试题

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$.

2.. 已知 f 是可导函数，且 $\frac{d}{dx}f(\arctan\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$，求 $f'(\frac{\pi}{4})$.微分法，可以补用考虑微分次数，不断向下推。导数法，比需两边对同一变量求导。

3. 求出 $f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并指出是第几类间断点.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，试确定其中常数 a,b.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2. 试确定常数 a,b 的值，使点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^4+bx^3$ 的拐点，并求出曲线的凹凸区间.

3. 求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.复合函数与函数求导公式可以一起用。

三.(9 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-1<x_0<0$，$x_{n+1}=x_n^2+2x_n\,(n=0,1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四.(9 分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(0)=0$，$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x\neq0 \\ f'(0), & x=0 \end{cases}$，求 $g'(x)$

并讨论 $g'(x)$ 的连续性.

五. (9 分) 一个体积给定的观察站底部是一个直圆柱，顶部是一个半球形，如果顶部单位面积的造价是侧面单位面积造价的二倍，问圆柱的底半径 r 与高 h 分别为多少时可使总造价最低?

六.(8 分）证明，当 $x>1$ 时，$\ln x \geq \dfrac{x-1}{x+1}$.

七. (9 分）(1)已知当 $x\to 0$ 时，$\cos x - e^{x^2}$ 与 cx^k 是等价无穷小，求 c 与 k 的值;

(2)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$.

八.(4 分)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f'(x)\neq 0$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.最后一道题一定要会拼与凑。