2017-2018 第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）参考答案

一.客观题： (每小题 2 分，共 16 分)。

1 √　2 √　3 ×　4 D　5 B　6 B　7 C　8 D

二、行列式计算

1、答案

$$\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$$

第 2,3,4 列加到第 1 列$=\begin{vmatrix} 10+a & 2 & 3 & 4 \\ 10+a & 2+a & 3 & 4 \\ 10+a & 2 & 3+a & 4 \\ 10+a & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$　（1 分）

$=(10+\mathrm{a})\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$　（1 分）

第 2,3,4 行分别减去第 1 行$=(10+\mathrm{a})\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$　（2 分）

$=a^4+10a^3$　（2 分）

2、答案

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & 0 & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & 0 & \dots & x & x & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 & x & 1 \\ x & x & x & \dots & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

前 n-1 行每行都减去 x 倍的第 n 行$=\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　（3 分）

前 n-1 列都乘以 1/x 倍，加到第 n 列上去=

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dfrac{n-1}{x} \end{vmatrix}$$ （3 分）

$$=(-1)^{n-1}\cdot(\mathrm{n}-1)\cdot \mathrm{x}^{n-2}$$ （2 分）

三．解：

写出矩阵$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$，再进行初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$ （4 分）

因此，$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$。 （2 分）

前面已经算出 A 可逆，因此， （2 分）

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3+(-1)\times 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ （2 分）

四、当λ为何值时，线性方程组： **（本题 14 分）**

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$$ **有唯一解，无解和有无穷多解？当方程组有无穷多组解时，求其通解。**

解：设增广矩阵为 B，对其进行初等变换：

$$B=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3(\lambda-1) \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & 3(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

(3 分)

可知，当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，矩阵 B 的秩为$R(B)=3$，此时方程组有唯一解。 (2 分)

当$\lambda=-2$时，方程组无解。当$\lambda=1$时，$R(B)=1$，方程组有无穷多解。 (2 分)

当$\lambda=1$时，增广矩阵 B 变为：$B=\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$**，并有：**$x_1=-x_2-x_3-2$**，取**

$x_2=0,x_3=0$**，得方程组的一个解：**$\eta^T=\begin{pmatrix}-2&0&0\end{pmatrix}$。 **（2 分）**

再分别取$x_2=0,x_3=1$**及**$x_2=1,x_3=0$**可得齐次线性方程组的一组基础解系：**

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T \qquad \xi_2=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^T$$ **（3 分）**

于是所求通解为：

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix} \qquad c_1,c_2\in R$$ **（2 分）**

五 （1）证明 T 是线性变换

证明：设 A 和 B 是空间 V 中的两个二阶实对称矩阵，k 为实数

则有 $T(A+B)=P^T(A+B)P=P^TAP+P^TBP=T(A)+T(B)$ （2 分）

同时有 $\mathrm{T(kA)}=\mathrm{P}^T\mathrm{(kA)\,P}=\mathrm{kP}^T AP=kT(\mathrm{A})$ （2 分）

所以 T 是线性变换。

（2）求 T 对应的矩阵

$$\mathrm{T(A_1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=[\mathrm{A_1,A_2,A_3}]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ （1 分）

$$\mathrm{T(A_2)}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=[\mathrm{A_1,A_2,A_3}]\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$ （1 分）

$$\mathrm{T(A_3)}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=[\mathrm{A_1,A_2,A_3}]\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ （1 分）

所以 T **在基**$[\mathrm{A_1,A_2,A_3}]$**下的矩阵为**$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$ **（2 分）**

六．解：

该二次型的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, （2 分）

计算 A 的特征多项式：

$$\phi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)[(\lambda-1)^2-1]=(\lambda-3)^2(\lambda-1),$$ （2 分）

因此 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 和 $\lambda_3=1$。（1 分）

求 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量，即解齐次线性方程组 $(3E-A)X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,

得到此方程组的一个基础解系，也就是 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. （2 分）

由于 X_1, X_2 已经正交，所以无需再作施密特正交化。（1 分）

求 A 的对应于 $\lambda_3=1$ 的特征向量，即解齐次线性方程组 $(1E-A)X=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,

得到此方程组的一个基础解系，也就是 A 的对应于 $\lambda_3=1$ 的特征向量为 $X_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$. （1 分）

将 X_1, X_2, X_3 分别单位化，得到：$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{2}}{2}X_1, \varepsilon_2=X_2, \varepsilon_3=\frac{\sqrt{2}}{2}X_3$. （1 分）

因此，构造出正交矩阵：$C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，和正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$, （1 分）

原二次型经过此正交变换化为 $f=3y_1^2+3y_2^2+y_3^2$, （1 分）

该二次型经过正交变换后得到的平方和平方项系数都为正数，因此该二次型正定。（2 分）

七、已知 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，求一组非零向量 α_2,α_3，使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交（本题 9 分）

解：设与 α_1 正交的向量为 $(x_1\quad x_2\quad x_3)^T$，那么有： $x_1+2x_2+3x_3=0$

求解此方程，分别令 $x_2=0, x_3=1$，$x_2=1, x_3=0$ 得到一组解： $\xi_1=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ **（5 分）**

对 ξ_1 和 ξ_2 进行施密特正交化可得: $\xi_2'=\xi_2-\frac{<\xi_2,\xi_1>}{<\xi_1,\xi_1>}\xi_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\ 1\\ -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$ **（2 分）**

（此处如果写出公式，即可给 2 分）

因此得到 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$**，** $\alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}^T$ **(2 分)**

此外，如果交换顺序：分别令 $x_2=0,x_3=1$**，** $x_2=1,x_3=0$ **得到一组解：**

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$ **(4 分)**

对 ξ_1 **和** ξ_2 **进行施密特正交化可得：** $\xi_2'=\xi_2-\frac{<\xi_2,\xi_1>}{<\xi_1,\xi_1>}\xi_1=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\-\frac{6}{5}\\1\end{bmatrix}$ **(3 分)**

因此得到 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$**，** $\alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 1\end{pmatrix}^T$ **(2 分)**

八、证明：

设存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_k$ 使得：

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots\lambda_kA^{k-1}\alpha=O \qquad (1)$$ （2 分）

（1）式左右两端同左乘 A^{k-1}，得：

$$\lambda_1A^{k-1}\alpha+\lambda_2A^k\alpha+\cdots\lambda_kA^{2(k-1)}\alpha=O \qquad (2)$$ （2 分）

因为 $A^k\alpha=O$，所以

$$A^{k+1}\alpha=A^{k+2}\alpha=\cdots=A^{2(k-1)}\alpha=O$$ （1 分）

所以（2）式变成： $\lambda_1A^{k-1}\alpha=O$

又因为 $A^{k-1}\alpha\neq O$，所以有： $\lambda_1=0$ （2 分）

同理可得： $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_k=0$ （1 分）

所以向量组线性无关 （1 分）

九．证：

(1) 因为 P 为正交矩阵，所以

$$\langle\beta,\beta\rangle=\beta^{\mathrm T}\beta=(P\alpha)^{\mathrm T}(P\alpha)=\alpha^{\mathrm T}P^{\mathrm T}P\alpha=\alpha^{\mathrm T}(P^{\mathrm T}P)\alpha=\alpha^{\mathrm T}\alpha=\langle\alpha,\alpha\rangle.$$ （1 分）

(2) 因为 A 为实对称矩阵，所以可以找到一个正交变换 $X=CY$，将二次型 $X^{\mathrm T}AX$ 化为平方和

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个实特征值。取 $u=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\ldots,|\lambda_n|\}$，则

$$|X^{\mathrm{T}}AX|=|\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2|\le|\lambda_1|y_1^2+|\lambda_2|y_2^2+\cdots+|\lambda_n|y_n^2$$
$$\le uY^{\mathrm{T}}Y=u(C^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}X)=uX^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})X=uX^{\mathrm{T}}X,$$

因此，取 $g_0\ge u$，就有 $\left|X^{\mathrm{T}}AX\right|\le g_0X^{\mathrm{T}}X$ 。（4 分）

说明：上面直接取 $g_0=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\ldots,|\lambda_n|\}$ 也可以。