北京理工大学2011-2012学年第二学期

《微积分A》（II）A卷试题答案及评分标准

一、填空题（每题4分）

(1)$\frac{1}{4}$;　(2) $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$;　(3) $\frac{2}{x^2+y^2+z^2}$;　(4) 发散;　$(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

二、

$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2f_1'+2xyf_2'$ 3分

$\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2'$ 6分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+y^2(2xyf_{11}''+x^2f_{12}'')+2xf_2'+2xy(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')$

$=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2x^3yf_{22}''$ 9分

三、

令$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

积分曲线L为：$\rho=2a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 3分

$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=\sqrt{4a^2}d\theta=2ad\theta$..5分

$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}dl=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho 2ad\theta$ 7分

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^2\cos\theta d\theta$

$=8a^2$ 9分

四、$J_z = \iint_S (x^2+y^2) a ds$ 2分

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

$ds = \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial x})^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}} dxdy$ 4分

$J_z = \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2) a \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}} dxdy$，其中$D_{xy}: x^2+y^2 \le 1$ 6分

$= \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2) a \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}} dxdy$，

$= a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho d\rho$，

$= 2\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\beta d\beta$，其中令$\rho = \sin\beta$

$= \frac{4}{3}\pi a$ 9分

五、$u = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2+2xe^{-y})dx + (3y^2-x^2e^{-y})dy$ 3分

$= \int_0^x (3x^2+2x)dx + \int_0^y (3y^2-x^2e^{-y})dy$ 6分

$= x^3+x^2+y^3+x^2e^{-y}-x^2 = x^3+y^3+x^2e^{-y}$

原方程的通解为: $x^3+y^3+x^2e^{-y}+C=0$ 9分

或者$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2+2xe^{-y}$ 2分

$u(x,y) = x^3+x^2e^{-y}+f(y)$ 4分

$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2e^{-y}+f'(y) = 3y^2-x^2e^{-y}$ 6分

$f'(y) = 3y^2$，即$f(y) = y^3+C$

原方程的通解为: $x^3+y^3+x^2e^{-y}+C$ 9分

六、补充曲面$S_1:\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=2 \end{cases}$，取下侧 ………………………… 1分

$\iint\limits_S+\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{S+S_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_V(1+1-1)dv$ … 4分

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2dz=-4\pi$ …………………………………… 6分

$\iint\limits_{S_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1}(-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1}(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ …… 7分

$=-\iint\limits_{D_{xy}}(-2)dxdy=8\pi$

$\iint\limits_S(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi-8\pi=-12\pi$ ……………… 9分

七、(1)令$X=yf(x),Y=-f(x),\frac{\partial X}{\partial y}=f(x),\frac{\partial Y}{\partial x}=-f'(x)$ ………… 1分

因为积分与路径无关，所以$f(x)=-f'(x)$， ………………………… 3分

即$f(x)=Ce^{-x}$ ………………………………………………… 4分

又因为$f(0)=1$，得：$f(x)=e^{-x}$ ………………………………… 5分

(2) $I=\int_0^2 0e^{-x}dx+\int_0^3-e^{-2}dy$

$=-3e^{-2}$ ……………………………………………………… 9分

八、令$a_n=\frac{n-1}{n!}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$ ....2 分

所以，幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$ ....3 分

$s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}(x+1)^n$ 4分

$s'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x+1)^{n-1}$ 5分

$=(x+1)\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x+1)^{n-2}=(x+1)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+1)^n$

$=(x+1)e^{x+1}$ 7分

$s(x)=\int_{-1}^{x}(x+1)e^{x+1}dx+s(-1)$ 8分

$=xe^{x+1}+1$ 9分

九、直线L方程：$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}$，参数方程：$x=ut,y=vt,z=wt$ 1分

$W=\int\limits_{L}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int\limits_{L}yzdx+xzdy+xydz$ 4分

$=\int_0^1 3uvwt^2dt=uvw$ 5分

构造拉格朗日函数: $G(x,y,z,\lambda)=uvw+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ 6分

分别求偏导，令其为0得：$\begin{cases} vw+\frac{2u\lambda}{a^2}=0 \\ uw+\frac{2v\lambda}{b^2}=0 \\ uv+\frac{2w\lambda}{c^2}=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ 7分

解得：$\lambda=\frac{abc}{2\sqrt{3}}$, $u=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $v=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $w=\frac{c}{\sqrt{3}}$ 8分

最大值$W_{max}=uvw=\frac{abc}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}abc}{9}$ 9分

十、$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(2+|x|)dx=5$ 1分

$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)dx$ 2分

$=\int_{-1}^{1}2\cos(n\pi x)dx+2\int_{0}^{1}x\cos(n\pi x)dx=\begin{cases}\frac{-4}{n^2\pi^2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$ 3分

$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)dx=0$ 4分

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x))$

$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\ x\in[-1,1]$

$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x,\ x\in[-1,1]$ 5分

$2=f(0)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, 得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ 6分

令$\sigma_3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$, 则$\sigma_3=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\sigma_2$

另外，$\sigma_2=\sigma_1+\sigma_3=\sigma_1+\frac{1}{4}\sigma_2$, 所以$\sigma_2=\frac{4}{3}\sigma_1=\frac{\pi^2}{6}$ 8分