2014级《微积分A上》期末试卷（A）

班级__________________ 学号__________________ 姓名__________________

（注：本试卷共6页，十一个大题。请撕下试卷最后一张空白纸做草稿）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
评阅人												

一、填空（每小题4分，共28分）

(1) 已知a, b为常数，求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)^x=$________________

(2) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n\cdot n^2})=$________________

(3) 抛物线$y=x^2-x$在点$(1,0)$处的曲率是: ________________

(4) 已知e^{-x}是$f(x)$的一个原函数，则$\int x^2 f(\ln x)dx=$ ________________

(5) 曲线段$\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=\frac{3}{2}t^2-1 \end{cases}$ $(0\le t\le 1)$ 的弧长是:________________

(6) 设$f(x)=\begin{cases} x+x^2, & x<0 \\ e^x, & x\ge 0 \end{cases}$，则$\int_1^3 f(x-2)dx=$________________

(7) 已知二阶常系数齐次线性微分方程的一个特解为$y=xe^x$，则该方程为: ____

二、(7分) 设$y=y(x)$ 是由方程$x+y=\arctan(x-y)$ 所确定的隐函数，求导数$\frac{dy}{dx}$

三、(7分) 已知函数$f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}+3$，请列表给出:函数$f(x)$的增减区间、凹凸区间、极值点以及图像的拐点；并给出函数$f(x)$的所有渐近线.

四、(7分)求一组使得极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t^4}-1)dt}{\ln(1-x^\alpha)}=\beta\neq 0$，($\alpha$, β 为实数)成立的α, β的值.

五、(7分) 求函数$f(x)=\max\{1,x^2\}$在区间$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数$F(x)$，使得$F(0)=1$.

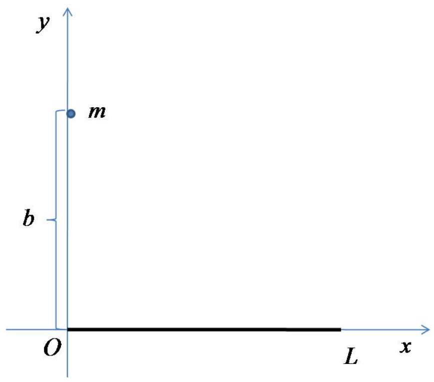
六、(7分) 计算定积分$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx.$

七、(7分) 已知函数$f(x)$连续，请讨论$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$的大小关系，并计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\sqrt{\sin x})-\ln(1+\sqrt{\cos x})+\sin^3 x}{2}dx.$

八、(8分) 函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有一阶连续导数，且对任意的$x \in (0,+\infty)$满足$x\int_0^1 f(tx)dt = 2\int_0^x f(t)dt + xf(x) + x^3$，且$f(1)=0$，求$f(x)$.

九、(8分) 求由平面曲线$y = x\sin x$, $y = x$, $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ 所围成图形的面积，及此图形绕x轴旋转所得旋转体的体积。

十、(8分) 水平放置着一根长为L，密度为ρ的均匀细棒，在其左端的垂线上与棒相距b处有一质量为m的质点，求棒对质点的引力沿x轴方向的分力(设引力常数为k).



十一、(6分) 证明：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.