# 行列式的性质

计算机学院
黄申为
shenweihuang@nankai.edu.cn

# 几个应该经常问的问题

- 为什么概念是这样定义的？
- 能不能从其他角度去理解？有没有更简单的证明方法？
- 不同方法的优缺点是什么？局限在哪里？

# 上节内容回顾

- 通过二元线性方程组引入了二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其几何意义是平行四边形的面积。

- 定义了三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

思考：为什么这样定义？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

另一种写法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- 排列的逆序数、奇偶性

- 定理：对换改变排列的奇偶性
  - 证明思想：先理解特殊情况，然后将一般情况归约到特殊情况。

  - 思考：能否不利用相邻对换的结论直接证明？

# 练习

- 选择i和k使得1274i56k9成偶排列

# 两个推论

**推论1**：当$n \geq 2$时，奇排列的个数和偶排列的个数相等，均为$\frac{n!}{2}$。

**证明**：构造奇排列到偶排列的一个双射。

这是一个组合证明（combinatorial proof）

**推论2**：将一个奇排列通过对换变成标准排列的次数为奇数次，
将一个偶排列通过对换变成标准排列的次数为偶数次。

**证明**：有定理1知对换次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准
排列是偶排列，因此结论成立。

# n阶行列式的定义

- 从排列的观点看二阶和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1 j_1} a_{2 j_2}$$

- 二阶行列式有两项，对应于{1，2}的两个排列12和21，偶排列对应的项为正，奇排列对应的项为负。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}$$

- 3阶行列式有6项，每一项的行标是{1，2，3}的标准排列，列标对应于{1，2，3}的某个排列，其中偶排列对应的项为正，奇排列对应的项为负。

- 可以类比地将二阶和三阶的定义推广到一般的n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  - 这里是对所有{1，2，...n}的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和；
  - n阶行列式展开有n!项，每一项都是来自不同行不同列元素的乘积；
  - 每一项对应于{1，2，...n}的一个排列，偶排列对应的项为正，奇排列对应的项为负。

**注:**

1) 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 常简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

主对角线

副对角线

2) $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的数 $a_{ij}$ 称为行列式D处于第 $i$ 行第 $j$ 列的元素, $i$ 称为行指标, $j$ 称为列指标.

3) 一阶行列式|a|=a,不要与绝对值符号混淆。

例1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 24$$

$$\begin{vmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & 4 & & & \\ & 5 & & & & \\ 6 & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(654321)} a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$$

$$= -6! = -720$$

一般地,

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & d_1 \\ & & d_2 & \\ & ⋰ & & \\ d_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n$$

更一般地，

上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$



证明见教材

例2.

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$,求 $x^3$ 的系数.

**解:** 由$n$级行列式定义,$f(x)$是一个多项式函数,

且最高次幂为 $x^3$,显然含 $x^3$ 的项有两项:

$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 与 $(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$

即 $x^3$ 与 $-2x^3$

$\therefore$ $f(x)$ 中 $x^3$ 的系数为$-1$.

## **练习**：计算行列式

1) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & \\ & \iddots & \iddots & & \\ n-1 & \iddots & & & \\ 0 & & & & n \end{vmatrix}$$

# 行列式的性质

性质1：$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n} = D = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$

**证明思路：** 第一个求和式的项与第二个求和式的项一一对应相等。

例子： $(-1)^{\tau(4132)} a_{14} a_{21} a_{33} a_{42} = (-1)^{\tau(2431)} a_{21} a_{42} a_{33} a_{14}$

性质1： $$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

**证明：** 由定义，$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$。固定 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$。如果将列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 通过对换变成标准排列，则行标排列从标准排列变为 $i_1 i_2 \cdots i_n$，这个过程确定了从所有n级排列到其自身的一个映射f：如果数k出现在 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的第s个位置上，则 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的第k个位置上的数为s。

注意到按这种方式，只是交换了 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 中元素的次序，并且根据推论2有 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$，故 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$。

注意到f是一个双射，故第一个求和式的项与第二个求和式的项一一对应相等。

**由性质1可知，行列式的行和列具有相同的地位。**

性质2：对换行列式的两行，行列式变号。

**证明思路**：两个求和式中的项一一对应，并且对应的项差一个符号。

例子：现在假设对换4阶行列式中的第2行与第4行。考虑 $(-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$

$$(-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} = -(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{42}a_{33}a_{21}$$

性质2：对换行列式的两行，行列式变号。

**证明**：设D’是由D交换第i行与第j行而得到的。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $a_{kp}=b_{kp}, k\neq i, j$ 且 $b_{ip}=a_{jp}, b_{jp}=a_{ip}$ 。从而，

$$D' = \sum_{p_1 \cdots p_i \dots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \dots p_j \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \dots b_{np_n}$$ 行列式的定义

$$= \sum_{p_1 \cdots p_i \dots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \dots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \dots a_{np_n}$$ 假设条件

$$= \sum_{p_1 \cdots p_i \dots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \dots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \dots a_{np_n}$$ 乘法交换律

$$= -\sum_{p_1 \cdots p_i \dots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \dots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \dots a_{np_n}$$ 定理1

$$= -\sum_{p_1 \cdots p_j \dots p_i \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \dots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \dots a_{np_n}$$ 对换是双射

$$= -D$$ 行列式的定义

- 选择适当的数学语言将直观理解表述成严格的数学证明的能力
- 反之，将抽象的数学语言“翻译”成直观理解的能力

推论：如果行列式有两行完全相同，则此行列式为0。

性质3：行列式的某一行的所有元素都乘以同一个数k，等于用数k乘以此行列式。

**证明**: 用行列式的定义容易证明。

性质4：行列式如果有两行成比例，则此行列式等于0。

**证明**: 性质2+性质3。

性质5：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证明：** 自证。

性质6：把行列式的某一行的各个元素然后加到另一行对应的元素上去，行列式不变。

**证明**: 性质4+性质5。

# 行列式的性质

- 性质1
- 性质2
- 性质3
- 性质4
- 性质5
- 性质6

# 为什么要研究这些性质？

- 快速计算行列式

- 按定义计算O(n*n!)

# 行列式计算的常用方法

- 定义
- 化三角法
- 递推法

# 行列式的操作

- 提取公因子 $r_i \div k \quad c_i \div k$
- 交换两行 $r_i \leftrightarrow r_j \; c_i \leftrightarrow c_j$
- 数乘第i行加到第j行 $r_j + kr_i \; c_j + kc_i$
  - 这里要注意: rj+ri是把第i行加到第j行，也就是写在前面的是目标行，不能随意交换次序。

例1：计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

例2. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解:

$$D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

练习： 计算行列式

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

答案:

1) 160 2) $x^2y^2$

例3：设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明： $D=D_1D_2.$

证：对D1作行运算 $r_j+\lambda r_i$ ，把D1化为下三角行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}.$$

对D2作列运算 $c_j+\lambda c_i$ ，把D2化为下三角行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是，对D的前k行作行运算 $r_j+\lambda r_i$ ，再对后n列作列运算 $c_j+\lambda c_i$，把D化为下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}.$$

故 $D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$

思考：上述证明中能否对D1作列运算或者对D2作行运算？

- 思想：选择对D1和D2的适当操作使得这些操作不影响行列式D中除D1和D2外的其他元素。

- 例4：计算下列行列式，其中未写出元素为0

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

解：见教材。