信息学院本科生2007－2008学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A卷）

专业：　　　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，O是零矩阵，A^{-1}表示可逆矩阵A的逆矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积.

得 分

一、　客观题：1−3小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−6为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (1−3每小题2分，4−6每小题3分，共15分)

1. 若A，B都是n阶方阵，满足$AB=O$，且$|A|\neq 0$，则$B=O$.　　(　　　)

2. 设T为n维线性空间V的线性变换，V中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$线性无关.　　(　　　)

3. 设向量组1：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组2：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，当$r<s$时，向量组2必线性相关.　　(　　　)

4. 设 -2是3阶方阵A的一个特征值，则A^2必有一个特征值为(　　　)

   (A) -8　　(B) -4　　(C) 4　　(D) 8

5. 下面说法中不正确的是　(　　　)

   (A) 排列经过一次互换改变其奇偶性.

   (B) 数量矩阵kE和任何同阶方阵可交换.

   (C) 若矩阵A中存在一个r阶子式不为零，则A的秩大于r.

   (D) 某些向量组没有极大线性无关组.

6. 设有齐次线性方程组$AX=0$和$BX=0$，其中A,B均为$m\times n$矩阵，现有4个命题：

   （1）若$AX=0$ 的解均是$BX=0$的解，则秩$(A)\geqslant$秩(B).

   （2）若秩$(A)\geqslant$秩(B)，则$AX=0$ 的解均是$BX=0$的解.

   （3）若$AX=0$ 与$BX=0$同解，则秩$(A)=$秩(B).

   （4）若秩$(A)=$秩(B)，则$AX=0$ 与$BX=0$同解.

   以上命题正确的是：　　(　　　)

   （A）(1) (2)　(B) (1)(3)　(C) (2)(4)　(D) (3)(4)

得 分

二、 计算题（第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1. 计算 $n(n>2)$ 阶行列式

$$|D_n|=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

2. 计算矩阵 A, B, C 的行列式，其中 A, B 为 $n(n>2)$ 阶方阵.

(依次为 4 分, 2 分, 2 分)

$$A=\begin{pmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}.$$

得 分

三、 若 $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \neq 0$，$A=\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，且 $n>1$，

求 A^{-1}. (8 分)

得 分

四、 有三个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且 α_3 不能被 α_1,α_2 线性表示，证明 α_1,α_2 线性相关. (8 分)

得 分

五、 已知线性方程组（共 13 分）

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=-2 \end{cases}$$

(1) a,b 为何值时，方程组有解？(5 分)

(2) 方程组有解时，求出其导出组的一个基础解系. (5 分)

(3) 方程组有解时，求出方程组的全部解. (3 分)

得 分

六、 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$ ，求正交变换 $x=Q\,y$，将该二次型化为标准形，并写出正交变换 $x=Q\,y$，最后给出该二次型的负惯性指数. (15 分)

得 分

七、 E 为 n 阶单位矩阵，P,Q 为 n 阶方阵，$|P-E|\neq 0$. 设

$$A=\begin{pmatrix} P & Q \\ O & E \end{pmatrix}$$，证明：对任意正整数 k，都有

$$A^k=\begin{pmatrix} P^k & Q_k \\ O & E \end{pmatrix},$$ 其中 $Q_k=(P^k-E)(P-E)^{-1}Q$. (10 分)

得 分

八、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基底，且 V 中向量 α_{n+1} 在该组基底下的坐标 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 中所有 x_i 全不为 0. (共 8 分)

(1)证明：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量必可构成 V 的基底.(4 分)

(2)求 α_1 在基底 $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}$ 下的坐标. (4 分)

得 分

九、 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵，证明：(共 8 分)

(1) 若存在可逆矩阵 U，使得 $A=U^TU$，则 A 的主对角线上的元全大于零. (5 分)

(2) 设列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 的 n 个两两正交的单位特征向量，对应的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$A=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^T.$$ (3 分)