

课程编号: A071001

北京理工大学 2003-2004 学年第一学期

2003 级《微积分 A》期末试题 (A 卷)

班级\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_成绩\_\_\_\_\_

一、计算下列各题 (每小题 6 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ ;

2. 设  $y = \arctan \sqrt{x} - \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

3. 设  $\begin{cases} x = (t-1)e^t \\ y = 1-t^4 \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ;

4. 计算不定积分  $\int \ln(1+x^2) dx$ ;

5. 求解微分方程初值问题  $\frac{dy}{dx} = (2x + e^x)y^2$ ,  $y(0) = -1$ ;

二、求解下列各题 (每小题 7 分)

1. 设  $y = f(x) = |x|e^{-x}$ , 试确定  $f(x)$  的增减区间并求所有极值;

2. 设  $f(x) = \int_{x^2}^1 \ln(2-\sqrt{t})dt$ , 求  $f'(x)$  及极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$ ;

3. 计算定积分  $\int_0^{4\pi} \sqrt{1-\cos x} dx$ ;

4. 求微分方程  $y'' - \frac{2}{x}y' = x^2$  的通解;

三 (6分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  内可导, 且当  $x \in [0, 1]$  时  $f'(x) > 0$ . 记

$A = \int_0^1 f(x) dx$ , 试研究  $A$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$  这三个值的大小顺序.

(说明理由)

四 (8分) 求证: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin x + \tan x > 2x$ .

五 (12分) 过原点  $(0, 0)$  向曲线  $\Gamma: y = \sqrt{x-1}$  做切线  $L$ , 记切点为  $(x_0, y_0)$ . 由曲线  $\Gamma$ , 直线  $L$  与  $X$  轴围成的平面图形记为  $D$ .

(1) 求证:  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 1$ , 并写出切线  $L$  的方程;

(2) 写出曲线  $\Gamma$  的弧微分; (3) 求平面图形  $D$  的面积;

(4) 求  $D$  绕  $Y$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

六 (8分) 设有一个边长为  $a$  的均匀实心正立方体  $\Omega$  沉入了一个面积很大的水池. 假设水池中水深为  $a$ , 并且  $\Omega$  的上表面恰好与水面重合, 又设水的密度为  $\rho$ , 立方体  $\Omega$  的密度为  $k\rho$ , 其中  $k > 1$  是常数. 试利用定积分计算将  $\Omega$  提升出水面需做多少功 (重力加速度为  $g$ ).

七、(8分) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 并且对任意的  $x$ ,

$$f(x) + 4 \int_0^x tf(x-t)dt = \frac{1}{3}x^3.$$

(1) 求证: 对任意的  $x$ ,  $\int_0^x tf(x-t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$ ;

(2) 试求出  $f(x)$  的表达式.