线性代数
2020-2021 第一学期
矩阵作业

黄申为

10月22日

1. 判断命题若$A^2 = 0$, 则$A = 0$是否正确？若正确，请给出证明; 若不正确，请举出反例.

2. 设A, B都是n阶对称阵, 证明AB是对称矩阵的充分必要条件是$AB = BA$.

3. 求所有和$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可交换的矩阵.

4. 设$a = (2, 1, -3)^T, b = (1, 2, 4)^T, A = ab^T$. 求$A^{101}$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. 求$A^n$.

6. 设A是n阶方阵且$AA^T = E, |A| = -1$. 证明$|A + E| = 0$.

7. 在课堂中我们给出了矩阵乘法的定义：给定$A = (a_{ij})_{m\times s}$与$B = (b_{ij})_{s\times n}$，我们定义A与B的乘积为 $AB = (c_{ij})_{m\times n}$，其中对任意的$i = 1, 2, \ldots, m$与$j = 1, 2, \ldots, n$
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}.$$
我们发现在这种定义下矩阵的乘法不满足交换律，也就是说AB不一定等于BA.

现在我们考虑在两个同型矩阵中定义一种乘法. 给定$A=(a_{ij})_{m\times n}$与$B=(b_{ij})_{m\times n}$，请给出一种定义 A和B乘积的方式，记做$A\otimes B$，使得$A\otimes B=B\otimes A$，并简单给出一个这种乘法可能的应用场景. （就好比课本中的乘法定义可以用来计算总收入与总利润或者线性变换的复合.）

8. 成语覆水难收描述的是矩阵中的什么概念？

9. 写出一个不可逆的二阶非零方阵并说明为什么该方阵不可逆.

10. 设方阵A满足$A^2-A-2E=0$, 证明A及$A+2E$都可逆, 并求A^{-1}及$(A+2E)^{-1}$.

11. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

12. 设矩阵A可逆, 证明其伴随矩阵也可逆, 且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

13. 设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*, 证明：

    (a) 若$|A|=0$, 则$|A^*|=0$;

    (b) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

14. 设A为3阶方阵, $|A|=\frac{1}{2}$, 求$|(2A)^{-1}-5A^*|$.

15. 计算
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

16. 设n阶方阵A及s阶方阵B都可逆, 求 $\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}^{-1}$.