北京理工大学 2016 级《微积分 A》第一学期期末试题解答及评分标准

2016 年 1 月 18 日

一、每小题 4 分，共 20 分

1. $\ln 3$ ； 2. $\sqrt{a^2-x^2}$ ； 3. $2\sqrt{3}-2$ ；

4. $-x\cos x+\sin x+C$ ； 5. $e^{-x^2}(\frac{x^2}{2}+C)$.

二、1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ **3 分**

$=\frac{1}{6}$ **5 分**

2 方程两边同时对 x 求导，得：$e^y\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$ ， **3 分**

解得：$dy=\frac{\cos(x+y)}{e^y-\cos(x+y)}dx$ **5 分**

3 $\int_0^2\left|x^2-x\right|dx=\int_0^1(x-x^2)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$ **2 分**

$=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1+(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})\Big|_1^2=1$ **5 分**

4 令：$u=x+y$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$ **2 分**

代入原方程，得：$\frac{du}{dx}=u^2+1$ 解得：$\arctan u=x+c$ **4 分**

代入，$\arctan(x+y)=x+c$ 通解为：$y=\tan(x+c)-x$ **5 分**

三、由条件知：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-x}{x+1}-ax-b}{x}=0$ 得

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x+1)x}=2$ **3 分**

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x+1}-2x=-3$ **6 分**

四、（1）设 $f(x)=x-\sin x$

则 $f(0)=0$， $f'(x)=1-\cos x\geq 0 \quad (x>0)$ 2 分

所以 $f(x)$ 是单调增加函数，则有 $f(x)>f(0)=0,$

即当 $x>0$ 时，有 $x>\sin x$ 3 分

（2）由（1）知，对自然数 n，有 $x_n>\sin x_n=x_{n+1}$

又 $0<x_{n+1}=\sin x_n<1$，所以 $\{x_n\}$ 单调有界必有极限， **5 分**

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则有 $a=\sin a \quad a=0$ **6 分**

五、定义域 $x\neq 0$

$y'=\dfrac{-4(x+2)}{x^3}$， $y'=0$ 得 $x_1=-2$； $y''=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$ ， $y''=0$ 得 $x_2=-3$ 。 3 分

列表：

	$-\infty,-3$	-3	$-3,-2$	-2	$-2,0$	0	$0,+\infty$
f'	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
f''	$-$	0	$+$		$+$		$+$
f		拐点		极值点			
		$(-3,-\frac{26}{9})$		-3			

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-2$ 渐近线： $y=-2$ 及 $x=0$ **6 分**

六、由对称性可知：

心形线长

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=8\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=16$$ **3 分**

心形线所围面积：

$$A=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta=4\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=6\pi$$ **6 分**

七、（1）由对称性可知：

$$V_\pi = 2\int_0^1 \pi y^2(x)dx \qquad \textbf{2 分}$$

$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)dt = 6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 tdt = \frac{32}{105}\pi\,, \qquad \textbf{4 分}$$

（2）$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$ ， $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$, **5 分**

$$\frac{d^{2y}}{dx^2} = \frac{-\sec^2 t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = \frac{1}{3\cos^4 t\sin t}\,,\quad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,, \qquad \textbf{6 分}$$

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \qquad \textbf{8 分}$$

八、（1）设注水t秒后，液面的高度为$h=h(t)$，则容器内水的容积是

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^h \pi y^{\frac{2}{3}} dy \qquad \textbf{2 分}$$

两边对t求导 $\dfrac{dV}{dt} = \pi h^{\frac{2}{3}}\dfrac{dh}{dt}$,

已知$\dfrac{dV}{dt}=3$，则 $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{3}{\pi h^{\frac{2}{3}}}$ **4 分**

（2）选y为积分变量， $y\in[0,1]$,

$$dw = \pi x^2 dy\mu g(1-y) = \pi\mu g(1-y)y^{\frac{2}{3}}dy$$

（其中μ水的密度， g重力加速度） **6 分**

$$w = \int_0^1 \pi\mu g(1-y)y^{\frac{2}{3}}dy = \frac{9}{40}\pi\mu g \text{。} \qquad \textbf{8 分}$$

九、（1）证明：作代换，令$u=x-t, du=-dt$ **1 分**

$$\int_0^x tf(x-t)dt = \int_x^0 (x-u)f(u)(-du) = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$ **2 分**

（2）将（1）代入已知等式，有

$f(x)+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+\sin x=0$，两边对$x$求导，有

$f'(x)+\int_0^x f(t)dt+\cos x=0$，再求导，有

$f''(x)+f(x)-\sin x=0$，而$f(0)=0, f'(0)=-1$，即$f(x)$满足：

$$\begin{cases} y''+y=\sin x \\ y(0)=0, y'(0)=-1 \end{cases}$$ **4 分**

$y''+y=0$的特征根为$r=\pm i$，通解为$Y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ **5 分**

作辅助方程：$y''+y=e^{xi}$，i是特征方程的单根，设$\tilde{y}=Axe^{xi}$， **6 分**

代入方程解出：$A=-\frac{1}{2}i$，$\tilde{y}=-\frac{1}{2}ixe^{xi}$，取虚部，得特解：

$\bar{y}=-\frac{1}{2}x\cos x$，通解为：$y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ **7 分**

代入初始条件，解得：$c_1=0, c_2=-\frac{1}{2}$， 故

$y=f(x)=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ **8 分**

十、由 $f(x)$ 二阶可导，有

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}(x-1)^2=5\cdot 0=0$$ **1 分**

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}(x-1)=5\cdot 0=0$$ **3 分**

将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处进行二阶泰勒展开，有

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+o(x-1)^2$$ **5 分**

由 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+o(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{f''(1)}{2}=5$　则 $f''(1)=10$ **6 分**

十一、构造辅助函数　$F(x)=xf(x)$ **2 分**

由积分中值定理，有

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\cdot\frac{1}{2}\eta f(\eta)\quad \eta\in[0,\frac{1}{2}]$$

即：$f(1)=\eta f(\eta)$　　$F(1)=F(\eta)$ **4 分**

由 $f(x)$ 及 $F(x)$ 构造可知，$F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，满足罗尔定理条件，必有 $\xi\in(\eta,1)\subseteq(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$ **6 分**