北京理工大学 2017-2018 学年第二学期《微积分 A》（下）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准 **2018年6月28日**

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$

2. $\dfrac{98}{13}$

3. $\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f\left(x,y\right)dy$

4. $\dfrac{2\pi a^3}{3}$

5. $0\le a\le 1$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1． 解：设所给直线与平面的交点为 $M\left(x,y,z\right)$.

令 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{0}=t$, 则有 $x=2t+1, y=4t, z=1$,

代入平面方程 $x+y+z=2$, 得 $t=0$, 故交点为 $M\left(1,0,1\right)$. ……….. (3 分)

于是点 M 与点 $\left(3,4,1\right)$ 的距离为:

$$d=\sqrt{4+16+0}=2\sqrt{5}.$$ ……….. (5 分)

2． 解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+2yf_2'$ ……….. (2分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''(-\frac{x}{y^2})+2y\ f_{21}''(-\frac{x}{y^2})+2f_2'$$

$$=-\frac{x}{y^2}\ f_{11}''-\frac{2x}{y}\ f_{21}''+2f_2'.$$ ……….. (5 分)

3． 解：平面方程变形为 $2x+\dfrac{4}{3}y+z=4$

$$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

在 xoy 坐标面上的投影区域 $D_{xy}:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3-\dfrac{3}{2}x \end{cases}$

$$I=\iint_S (2x+\frac{4}{3}y+z)dS = 4\iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$ …………….(3 分)

$$=4\sqrt{61}$$ …………….(5 分)

4. 解：

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\left(\frac{\partial(ze^z)}{\partial y}-\frac{\partial(xyz)}{\partial z},\frac{\partial(xe^y)}{\partial z}-\frac{\partial(ze^z)}{\partial x},\frac{\partial(xyz)}{\partial x}-\frac{\partial(xe^y)}{\partial y}\right)=(-xy,0,yz-e^y)$$

………….. (3分)

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A})=\mathrm{div}(-xy,0,yz-e^y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(-xy)+\frac{\partial}{\partial y}(0)+\frac{\partial}{\partial z}(yz-e^y)$$

$$=0.$$ ………….. (5 分)

三、解: $\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}=2z^2+(2xz+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2x+2yz)\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ………….. (2 分)

由 $F(xz-y,x-yz)=0$ 得 $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=\dfrac{-F_2'-zF_1'}{xF_1'-yF_2'},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_1'+zF_2'}{xF_1'-yF_2'},$

故 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}=2z^2+2(1-z^2)=2,$ ………….. (6 分)

所以 $I=\iint_D (\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y})dxdy=2\pi$ ………….. (8 分)

四、 解: 求交线：$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2x \end{cases}$ 得 $x^2+y^2=2x$

区域 Ω 在 xoy 面上的投影域为：$x^2+y^2\le 2x.$ ………….. (2 分)

$$J_z=\iiint_\Omega y^2(x^2+y^2)dxdydz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho d\rho\int_{\rho^2}^{2\rho\cos\theta}\rho^4\sin^2\theta dz$$ ………….. (4 分)

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^5 \sin^2\theta (2\rho\cos\theta - \rho^2) d\rho$$

$$=2^9\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^8\theta - \cos^{10}\theta)d\theta = \frac{\pi}{8}.$$ …………..（6分）

五、解：因为 $f(x,y)$ 沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$f_x'(x,y)=1+y,\ f_y'(x,y)=1+x,$

故 $gradf(x,y)=\{1+y,1+x\}$，模为 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$,

此题目转化为对函数 $g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$

在约束条件 $C: x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值. 即为条件极值问题.

…………..（2 分）

为了计算简单，可以转化为对 $d(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$

在约束条件 $C: x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

构造函数：$F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$

$$\begin{cases} F_x'=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 \\ F_y'=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$$

得到 $M_1(1,1), M_2(-1,-1), M_3(2,-1), M_4(-1,2)$. …………..（6 分）

$d(M_1)=8, d(M_2)=0, d(M_3)=9, d(M_4)=9.$

所以最大值为 $\sqrt{9}=3.$ …………..（8 分）

六、**法 1：** 记 $X=x^2y^3+2x^5+ky,\quad Y=xf(xy)+2y$, 由题意，有

$\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$, 即 $3x^2y^2+k=f(xy)+xyf'(xy)$； …………..（2 分）

记 $u=xy$, 有 $f'(u)+\dfrac{1}{u}f(u)=3u+\dfrac{k}{u}$

解得： $f(u)=u^2+k+\dfrac{C}{u}.$ （1） …………..（3 分）

选择折线路径:$(0,0)\to(t,0)\to(t,-t)$,则有

$$\int_0^t 2x^5dx+\int_0^{-t}[tf(ty)+2y]dy=2t^2$$

即:$\dfrac{t^6}{3}+\int_0^{-t^2}f(u)du=t^2$

对t求导，得$f(-t^2)=-1+t^4$，令$u=-t^2$,得　$f(u)=u^2-1.$

与(1)式比较得：$k=-1,C=0.$　　…………..(5 分)

此时　$(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy$

$$=(x^2y^3+2x^5-y)dx+[x^3y^2-x+2y]dy$$

$$=d(\frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{3}x^6-xy+y^2)$$

故此全微分的原函数为:$u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3y^3+\dfrac{1}{3}x^6-xy+y^2+C.$

…………..(8 分)

（注：还可用曲线积分法和不定积分法求原函数。）

法 2： 选择折线路径:$(0,0)\to(0,-t)\to(t,-t)$,则有

$$\int_0^{-t}2ydy+\int_0^t(-t^3x^2+2x^5-kt)dx=2t^2，得$$

$t^2-kt^2=2t^2$，$\Rightarrow k=-1$　　（其余可同上）

七、解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{(n+1)(2n+1)}x^2=0$

收敛域为　$(-\infty,+\propto$　　………..(2 分)

设　$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n+1})'=(h(x))'$　　………..(4 分)

$h(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(x^2)^n=x(e^{x^2}-1)$　　……….. (7 分)

所以 $S(x)=(x(e^{x^2}-1))'=e^{x^2}(1+2x^2)-1.x\in(-\infty,+\infty)$　　………..(8 分)

八、解：因为 $f(x)=x^2$ 是偶函数．有

$$b_n = 0\ (n=1,2,\cdots) \qquad \text{………..}(2\text{分})$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2}(n=1,2,\cdots)$$

故 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$ ………..(6 分)

令 $x=\pi$, 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. ………..(8 分)

九、解：添加辅助面 $S: z=0, x^2+y^2\le a^2$, 取下侧， Ω 为 Σ 与 S 所围成的空间区域. …………..(2 分)

$$I=\oiint_{\Sigma+S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy-$$

$$\iint_S(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy \qquad \text{…………..}(4\text{分})$$

$$=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dv+\iint_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy \qquad \text{（利用高斯公式）}$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr+\int_0^{2\pi}a\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr \qquad \text{…………..}(6\text{分})$$

$$=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5$$

$$=\frac{29}{20}\pi a^5 \qquad \text{…………..}(8\text{分})$$

十、解：因

$$|a_n-a_{n-1}|=|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})|=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2})\right|\ (\xi\text{介于}a_{n-1}\text{与}a_{n-2}\text{之间})$$

…………..(3 分)

$$\le m|a_{n-1}-a_{n-2}|\le m^2|a_{n-2}-a_{n-3}|\le\cdots\le m^{n-1}|a_1-a_0|.$$

…………..(5 分)

由 $0<m<1$, 从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛. …………..(6 分)