北京理工大学 2008-2009 学年第一学期

# 2008 级《微积分 A》期中试卷

班级_______________学号______________姓名_______________成绩________

一、　填空（每小题 3 分，共 30 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}=$____________.

2．设 $y=\arcsin\sqrt{x}+f^{2}(\arctan\dfrac{1}{x})$， $f$ 为可微函数，则 $dy=$__________________.

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^{2}} & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导，则 $a=$_____,$b=$_______.

4．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，则 $f(b)-f(a),(b-a)f'(a),$ $(b-a)f'(b)$ 按由大到小的排列次序是：__________________________________.

5．曲线 $\begin{cases}x=1+t^{2}\\ y=t^{3}\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的法线方程为_____________________________.

6．求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{6})^{n}=$_______________.

7. 设 $f(x)=(x^{200}-1)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $g(1)=5,$ 则 $f'(1)=$_____.

8． $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-2x}=1+ax+bx^{2}+o(x^{2})$，则 $a=$_____，$b=$_______.

9．函数 $f(x)=xe^{-\frac{x^{2}}{2}}$ 的带皮亚诺余项的五阶麦克劳林公式为____________________.

10．设 $y=\dfrac{1}{x^{2}+5x-6}$，则 $y^{(n)}=$_________________________________

.

二、（10 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+y^{3}-5x=0$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\left.\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{x=0}$.

三、（10 分）证明不等式：当 $x>1$ 时，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

四、（10 分）利用导数研究函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的性态，并画出其图形.

五、（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x^3\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$，

（1） 求 $f'(x)$；（2）讨论 $f'(x)$ 的连续性.

六、（10 分）设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处相切，且在这一点曲线 $y=f(x)$ 的曲率 $k_1$ 比 $y=g(x)$ 的曲率 $k_2$ 大，$f''(x_0)>0, g''(x_0)>0$.问在 $(x_0,y_0)$ 附近，$y=f(x)$ 是在 $y=g(x)$ 的上方还是下方？并说明理由.

七、（10 分）在坐标平面上通过点 $(2,3)$ 引一条直线，要使它在两坐标轴上的截距均为正，且两截距之和为最小，求此直线的方程.

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $f(0)=0$，求证：

至少存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $2f'(\xi)=\tan\dfrac{\xi}{2}f(\xi)$.