数学分析期中试题参考解答　(2007.5)

一. 1. $\vec{n}_1=\{1,-2,1\}\qquad \vec{n}_2=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}=\{-1,-1,2\}$ …………………..(3 分)

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{1}{2}$$ ..………………(5 分)

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$ …………………(6 分)

2. $|\vec{m}\times\vec{n}|=|(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+k\vec{b})|$

$=|2k\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}|=|2k-1||\vec{a}\times\vec{b}|$ …………………..(3 分)

$=|2k-1||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=3|2k-1|=9$ ………….………..(5 分)

$|2k-1|=3\qquad k=2$　或　$k=-1$ …………………..(6 分)

3. 点 $M(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4})$ ……..……………(1 分)

$\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\cos^2 t-\sin^2 t$, $\frac{dz}{dt}=-2\sin t\cos t$ …………(3 分)

$t=\frac{\pi}{3}$ 时　$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}\qquad \frac{dz}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\vec{s}=\{\sqrt{3},-1,-\sqrt{3}\}$ …………………..(5 分)

切线　$$\frac{x-\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{4}}{-\sqrt{3}}$$ …………………..(6 分)

4. $I=\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy$ ………(3 分+3 分)(6 分)

二.1. $f'_x=f'_y=\frac{1}{1+x+y}$ ………………..(1 分)

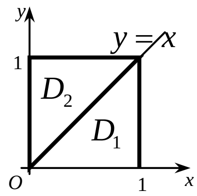
$f''_{x^2}(x,y)=f''_{xy}(x,y)=f''_{y^2}(x,y)=-\frac{1}{(1+x+y)^2}$ ……………..…..(3 分)

$f(0,0)=0\qquad f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1$

$f''_{x^2}(0,0)=f''_{xy}(0,0)=f''_{y^2}(0,0)=-1$ ………………..(5 分)

$f(x,y)=x+y-\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+o(\rho^2)$ ………………..(7 分)

2. $$I=\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{y^2}dxdy \quad \text{………………..(2 分)}$$



$$=2\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy=2\int_0^1dx\int_0^xe^{x^2}dy \quad \text{…………....(5 分)}$$

$$=2\int_0^1xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1 \quad \text{………………..(7 分)}$$

3. $$du+e^udu-2xydx-x^2dy+\frac{1}{z}dz=0 \quad \text{……..…………..(3 分)}$$

将 $x=1$， $y=1$， $z=e$ 代入已知方程得 $u=0$ ……….............(4分)

$$du(1,1,e)=dx+\frac{1}{2}dy-\frac{1}{2e}dz \quad \text{…………....……..(5分)}$$

沿方向 $gradu(1,1,e)=\{1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2e}\}$ $u(x,y,z)$ 增加得最快………………..(7 分)

4. $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2d\rho\int_0^2zdz \quad \text{……….….…………..(4 分)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}2\rho^2d\rho \quad \text{……………………..(5 分)}$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{32}{9} \quad \text{……….….…………..(7 分)}$$

三. $$\frac{\partial z}{\partial x}=e^yf_1'+f_2' \quad \text{…………………..(3 分)}$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=e^yf_1'+e^y(f_{11}''\cdot xe^y-f_{12}'')+f_{21}''\cdot xe^y-f_{22}''$$

$$=e^yf_1'+xe^{2y}f_{11}''+e^y(x-1)f_{12}''-f_{22}'' \quad \text{……………….…..(8分)}$$

四. $$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1r\cos\varphi\cdot\sqrt{1-r^2}\cdot r^2\sin\varphi dr \quad \text{…………………..(3 分)}$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\cdot\int_0^1r^3\sqrt{1-r^2}dr \quad \text{……………….…..(5 分)}$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{15}=\frac{\pi}{15} \quad \text{……………….…..(8 分)}$$

五. 解 1　设长, 宽, 高分别为 $x, y, z(m)$， 容积为 V，

$$V = xyz \qquad 2xz + 2yz + xy = 12 \qquad \text{……………………..(2 分)}$$

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)} \quad (x, y > 0) \qquad \text{………………..…..(3 分)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - x^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - y^2 - 2xy)}{2(x+y)^2} \qquad \text{…..……………..(6 分)}$$

令 $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$， $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$，得 $x = y = 2$，此时 $z = 1$

由问题实际意义, ∴当 $x = 2, y = 2, z = 1$ 时， V 取得最大值. …….(8 分)

解 2　设长, 宽, 高分别为 $x, y, z(m)$， 容积为 V，

$$V = xyz \qquad 2xz + 2yz + xy = 12 \quad (x, y, z > 0) \qquad \text{………..…….…..(2 分)}$$

设　$F(x, y, z) = xyz + \lambda(2xz + 2yz + xy - 12)$　…..……………..(3 分)

令
$$\begin{cases} F_x' = yz + \lambda(2z + y) = 0 \\ F_y' = xz + \lambda(2z + x) = 0 \\ F_z' = xy + \lambda(2x + 2y) = 0 \\ 2xz + 2yz + xy = 12 \end{cases} \qquad \text{…………….…..(6 分)}$$

解得　$x = 2$，　$y = 2$，　$z = 1$

由问题实际意义, ∴当 $x = 2, y = 2, z = 1$ 时， V 取得最大值. ....(8 分)

六. (1) 设切点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，则　$z_0 = x_0^2 + y_0^2$　……………….…..(1 分)

切平面法向量　$\vec{n} = \{2x_0, 2y_0, -1\}$　……………….…..(3 分)

由题意　$\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{4} = \frac{-1}{-1}$　……………….…..(4 分)

解得　$x_0 = 1$　$y_0 = 2$　$z_0 = 5$　……………….…..(5 分)

所求切平面为　$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$

即　$2x + 4y - z - 5 = 0$　……………….…..(6 分)

(2) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$ 消去 z 得 D_{xy} 边界 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ …………....(7 分)

$$V = \iint\limits_{D_{xy}} (2x + 4y - x^2 - y^2) dxdy$$ ..………….…..(9 分)

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (5 - (x-1)^2 - (y-2)^2) dxdy$$

（令 $x = 1 + \rho\cos\theta, y = 2 + \rho\sin\theta$）

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} (5 - \rho^2)\rho d\rho$$ ……………….…..(11 分)

$$= \frac{25}{2}\pi$$ …………….……..(12 分)

七. $$\begin{cases} \dfrac{dz}{dz} = f' \cdot (1 - \dfrac{dy}{dx}) \\ F'_x + F'_y \cdot \dfrac{dy}{dx} + F'_z \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$ ………..….(2 分+2 分)(4 分)

解得 $$\frac{dz}{dx} = \frac{f' \cdot (F'_x + F'_y)}{F'_y - f' \cdot F'_z}$$ …………………..…..(6 分)

八. 原式 $$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_0^{x^2} \arctan(1+y) dy}{\frac{1}{2}t^3}$$ …………………..…..(3 分)

$$= \frac{\pi}{6}$$ ……...…………….…..(6 分)

或 原式 $$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\int_0^{t^2} \arctan(1+y) dy \int_{\sqrt{y}}^t dx}{\frac{1}{2}t^3}$$ ……….……………..(3 分)

$$= \frac{\pi}{6}$$ ……………………..…..(6 分)