试 卷 (三)

一、单项选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 已知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = 1$, $|\boldsymbol{B}| = -2$, 则行列式 $|(2\boldsymbol{AB}^{*})^{-1}A| =$ ( )

(A) $\frac{1}{32}$; (B) $\frac{1}{8}$;

(C) 2; (D) $\frac{1}{2}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$, 则 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵; (B) $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵;

(C) $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵; (D) $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵.

3. 设线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, 且 $m < n$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ( )

(A) 有唯一解; (B) 有无穷多解;

(C) 无解; (D) 可能无解.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 则 ( )

(A) $t > s$;

(B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$;

(C) $s > t$;

(D) $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,则( )时,$\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$.

(A) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$; (B) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵;

(C) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 正惯性指数相等; (D) A, B, C 同时成立.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,则 $a=$ ________, $b=$ ________.

2. 设在 $\mathbb{R}^2$ 中线性变换为 $\mathscr{A}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2 \\ 2x_2\end{bmatrix}$,则 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$ 下的矩阵为________.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1\end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$,则 $a=$ ________, $b=$ ________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可能取值为 $\lambda=$ ________.

5. $\boldsymbol{A}$ 为 2×3 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1 \\ 2 \\ 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1 \\ -1 \\ 1\end{bmatrix}$,则对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

三、计算题(每题 9 分,共 54 分)

1. 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BA}-2\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性空间 V 的一组基，设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=a\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) a 取何值，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 V 的基；

(2) 求 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵；

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\lambda\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\ \lambda\\ 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \lambda\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\end{bmatrix}$.

问：λ 取何值时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？且在表示式不唯一时，求出所有的表示式.

5. 已知线性方程组（Ⅰ），（Ⅱ）是同解方程组，其中

$$(\text{Ⅰ}):\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_4 = 1, \\ \quad x_2 \quad - 2x_4 = 2, \\ \qquad x_3 + x_4 = -1, \end{cases}$$

$$(\text{Ⅱ}):\begin{cases} -2x_1 + x_2 + ax_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + bx_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = c. \end{cases}$$

(1) 求（Ⅰ）的通解；

(2) 求（Ⅱ）中的常数 a，b，c.

6. 已知三元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化为标准形

$y_1^2+y_2^2+5y_3^2$，且已知 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 $\lambda=5$ 有一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，试求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$.

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$. 证明：存在 n 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}$ 都是对角矩阵 . 证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.