标准答案及评分标准2020年1月8日

一、填空（每小题4分，共20分）

1． e^{-2}; 2． $-\dfrac{1}{2(1+t)^4}$;

3. $2e^2$; 4. $2\ln 2-1$; 5. $x=-y-1+Ce^y$或$y=\ln|1+x+y|+C$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1． 解：因 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0,$

所以， $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0,$ **…………1分**

令 $x^2+ax+b=(x-2)(x+k),$ 则

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+k)}{(x-2)(x-1)}=2+k=6,$ **…………3分**

所以, $k=4,$ 从而 $a=2,b=-8.$ **…………5分**

2. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arctan\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{1+x-1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ **…………3分**

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\arctan\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}).$ **…………5分**

3. 解：$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int\dfrac{2x^2}{1+x^2}dx$ **…………3分**

$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$ **…………5 分**

4.

解：令 $y'=p=p(x)$, 则原方程化为

$$p'-\frac{2}{x}p=x^2$$ …………2分

利用一阶线性微分方程的求解公式得：

$$p=Cx^2+\ x^3$$ …………4分

由 $y'=Cx^2+\ x^3$ 得原方程的通解为

$$y=C_1x^3+C_2+\frac{x^4}{4}$$ …………5分

三、解：$y'=1+\dfrac{1-\ln x}{x^2}, y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3},$

令 $y''=0,$ 得 $x=e^{\frac{3}{2}}$， **…………3 分**

又函数的定义域为：$x>0$，当 $x\in(0,e^{\frac{3}{2}})$ 时， $y''<0$，函数的图形为上凸的；

当 $x\in(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 时， $y''>0$，函数的图形为下凸的。

有拐点$(e^{\frac{3}{2}},e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$.............**6** 分

$\lim\limits_{x\to 0+} y=\lim\limits_{x\to 0+}(x+\frac{\ln x}{x})=\infty$，所以$x=0$为此曲线的垂直渐近线，又

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{\ln x}{x^2})=1+\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2x^2}=1=k$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0=b$

所以此曲线有斜渐近线：$y=x$ ....**8** 分

四、解：对于分段点$x=0$,因

$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=0,$

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x^2-1}=-\sin 1,$

故$x=0$是第一类跳跃型间断点；............**2**分

当$x>0$时，考虑$x=1$，极限

$\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x^2-1}$不存在,

故$x=1$是第二类震荡型间断点；............**4**分

当$x<0$时，函数在点列$x_k=-k\pi-\frac{\pi}{2},k=0,1,2\cdots$处没有定义，

$x_0=-\frac{\pi}{2}$时，有$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}F(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=-\frac{\pi}{2},$

故$x=-\frac{\pi}{2}$是第一类可去型间断点；............**6**分

$x_k=-k\pi-\frac{\pi}{2},k=1,2\cdots$时，$\lim\limits_{x\to x_k}F(x)=\lim\limits_{x\to x_x}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=\infty,$

故$x_k=-k\pi-\frac{\pi}{2},k=1,2\cdots$是第二类无穷型间断点；............**8**分

五、解：$x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1$，因$-1<x_0<0$，所以$-1<x_1<0$

设$-1<x_n<0$，由$x_{n+1}=(x_n+1)^2-1$，得$-1<x_{n+1}<0$

故对$\forall n$，有$-1<x_n<0$............**2**分

又由$x_{n+1}=x_n^2+2x_n$，及$-1<x_n<0$，得$\frac{x_{n+1}}{x_n}=x_n+2>1$

故$x_{n+1}<x_n$，即x_n单调减少有下界，所以$\{x_n\}$收敛............**4**分

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，　　得$A=A^2+2A$

解得$A=-1$，$A=0$(舍去)

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$. **6**分

六、解法一：取x为积分变量

$\mathrm{V}=\int_0^1 2\pi(3-x)\cdot 2x^2\,\mathrm{d}\,x$ **…………5分**

$=4\pi[\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}\,x-\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}\,x]$

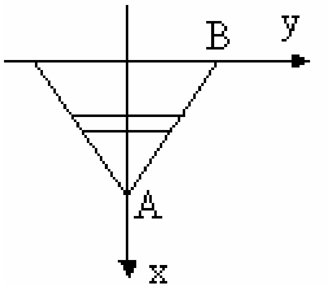
$=3\pi$ **…………8 分**

解法二：取 y 为积分变量

$\mathrm{V}=\int_0^2 \pi(3-\sqrt{y/2})^2\,\mathrm{d}\,y-\pi\cdot 2^2\cdot 2.$ **…………5分**

$=3\pi.$ **…………8分**

七、解：建立如图所示坐标系，



直线 AB 的方程为：

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-x).$ **…………4分**

取 x 为积分变量： $x\in[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a]$.选取$[x,x+dx]$，则压力微元为：

$$dP=\rho gx\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)dx$$

水压力：$P=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\rho gx\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-x)dx$ **…………6分**

$=\dfrac{2\sqrt{3}\rho g}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax-x^2)dx$

$=\dfrac{\rho ga^3}{8}$ **…………8分**

八、解：$\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式为：

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3),$

$\therefore \ln(1+x^2)=x^2-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^6}{3}+o(x^6),$ **…………4分**

$f(x)=x^2\ln(1+x^2)=x^4-\dfrac{x^6}{2}+\dfrac{x^8}{3}+o(x^8)$ **…………6分**

由$Taylor$公式中系数的唯一性,有

$$a_8=\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{1}{3} \qquad \therefore f^{(8)}(0)=\frac{8!}{3}=13440\ .$$ **…………8分**

九、（8 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足方程

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^x - f(x)，求\ f(x).$$

解：$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=xe^x-f(x)$ $\int_0^x f(t)dt=e^x+xe^x-f'(x)$

$f(x)=e^x+e^x+xe^x-f''(x)$

$f''(x)+f(x)=(2+x)e^x$ **…………2分**

$f(0)=0$ $f'(0)=1$

$r^2+1=0$ $r=\pm i$ **…………4分**

$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

设 $f^*(x)=(Ax+B)e^x$

代入微分方程得 $A=\dfrac{1}{2}$ $B=\dfrac{1}{2}$

$f^*(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)e^x$

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}(x+1)e^x$ **…………6** 分由初始条件得 $C_1=-\dfrac{1}{2}$ $C_2=0$

$f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}(x+1)e^x$ **…………8分**

十、解：(1)　由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{x})}{\sin x}=3$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

故 $f(0)=0$，　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$；　**…………2** 分

(2)　令 $F(x)=f'(x)e^x$，

根据积分中值定理，$\exists c\in[1,2]$，使

$f(c)=\int_1^2 f(x)dx=0,$ **…………4** 分

由罗尔定理，$\exists c_1\in(0,c)$，使 $f'(c_1)=0$，

$\therefore F(0)=F(c_1)$，

由罗尔定理，$\exists \xi\in(0,c_1)\subset(0,2)$，使 $F'(\xi)=0$，

即 $f''(\xi)e^{\xi}+f'(\xi)e^{\xi}=0$，

$f'(\xi)+f''(\xi)=0.$　　　**…………6** 分