2007-2008 学年《微积分 A》第二学期期末考试

参考答案及评分标准

2008 年 6 月 18 日

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1. $f_x'(0,0)=2,\quad f_y'(0,0)=-3;$　　　2.　-10;

3.极小值点为(2,1),极大值点为(0,0);　　4. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2});$

5. $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy;$　　6.绝对收敛；7. $R=\frac{1}{2}.$

二、 $\frac{\partial u}{\partial x}=y+yf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'.$ ………… 3 分

$\because f$有二阶连续偏导数，

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ ………… 5 分

$=1+f_1'-\frac{1}{x^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''.$ …………..8 分

三、解交点：$(1,1),(\frac{1}{2},2)$, (2,2) ……………..2 分

$I=\iint\limits_D \frac{1}{x^2y^2}dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{1}{x^2y^2}dx$ …………… .5 分

$=\int_1^2(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3})dy=\ln 2-\frac{3}{8}.$ ……………...8 分

或　$I=\iint\limits_D \frac{1}{x^2y^2}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{1}{x^2y^2}dy+\int_1^2 dx\int_x^2\frac{1}{x^2y^2}dy$

四、$\Sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$ …….2 分

Σ在xoy面的投影区域为$D: x^2+y^2\le R^2,$ ……..4 分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint_{D}(x^2+y^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$ ……..6 分

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho$$ ……………..8 分

$$=\frac{4\pi R^4}{3}.$$ …………….10 分

五、 $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2},$$ ………………..1 分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k,k=1,2,\cdots\\ -\dfrac{2}{n^2\pi} & n=2k-1,k=1,2,\cdots\end{cases}$$ …………………3 分

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$ …… ……..5 分

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\},\quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

……..……..7 分

$$S(x)=\begin{cases}0 & x\in(\pi,2\pi]\\ x-2\pi & x\in(2\pi,3\pi)\end{cases}.$$ ……………..10 分

六、补充平面$S:z=4,x^2+y^2\le 4,$取下侧，则由 Gauss 公式…..2 分

$$I=\iint_{\Sigma+S}-\iint_{S}=-\iiint_{V}(2x+2y+2z)dxdydz+\iint_{D:x^2+y^2\le 4}4^2dxdy$$ ……..4 分

$$=-2\iiint_{V}zdV+64\pi$$ （由对称性） …………..6 分

$$=-2\int_0^4 zdz\iint_{D_z:x^2+y^2\le z}dxdy+64\pi$$ …………..8 分

$=-2\int_0^4 \pi z^2 dz + 64\pi = \dfrac{64\pi}{3}$ …………..10 分

七、由比值法：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 2|x|^2$ ， ……….1 分

当$2x^2<1$,即:$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，幂级数绝对收敛； ……..2 分

当$2x^2>1$,即：$x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，幂级数发散； ……..3 分

所以收敛区间为： $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ …………4 分

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^{2n}}{2n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^{2n-1}}{2n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\int_0^x x^{2n-2}dx$ ……..6 分

$=2x\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x^2)^{n-1}dx=2x\int_0^x\dfrac{1}{1-2x^2}dx$ ……..8 分

$=x\int_0^x(\dfrac{1}{1-\sqrt{2}x}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}x})dx=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}.\quad x\in[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}].$

…………………10 分

八、Ω在xoy面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le 2x.$ ……………2 分

$J_z=\iiint\limits_V \mu(x^2+y^2)dV$ ……………..3 分

$=\mu\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x}dz$ ……………..5 分

$=\mu\iint\limits_D(x^2+y^2)(2x-x^2-y^2)dxdy$

$=\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2(2\rho\cos\theta-\rho^2)\rho d\rho$ ………………7 分

$=\dfrac{2^6\mu}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta=\dfrac{2\mu\pi}{3}.$ ………………8 分

九、法 1： 记 $X = x^2 y^3 + 2x^5 + ky,\quad Y = xf(xy) + 2y,$ 由题意，有

$\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x},$ 即 $3x^2 y^2 + k = f(xy) + xyf'(xy)$； ……..**2 分**

记 $u = xy,$ 有 $f'(u) + \dfrac{1}{u} f(u) = 3u + \dfrac{k}{u}$

解得： $f(u) = u^2 + k + \dfrac{C}{u}.$ (1) ……..**3 分**

选择折线路径:$(0,0) \to (t,0) \to (t,-t),$ 则有

$$\int_0^t 2x^5 dx + \int_0^{-t} [tf(ty) + 2y] dy = 2t^2$$

即:$\dfrac{t^6}{3} + \displaystyle\int_0^{-t^2} f(u) du = t^2$

对t求导，得$f(-t^2) = -1 + t^4$，令$u = -t^2,$得 $f(u) = u^2 - 1.$

与(1)式比较得： $k = -1, C = 0.$ …………..**5 分**

此时 $(x^2 y^3 + 2x^5 + ky)dx + [xf(xy) + 2y]dy$

$$= (x^2 y^3 + 2x^5 - y)dx + [x^3 y^2 - x + 2y]dy$$

$$= d(\frac{1}{3} x^3 y^3 + \frac{1}{3} x^6 - xy + y^2)$$

故此全微分的原函数为:$u(x,y) = \dfrac{1}{3} x^3 y^3 + \dfrac{1}{3} x^6 - xy + y^2 + C.$…..**8 分**

（注：还可用曲线积分法和不定积分法求原函数。）

法 2： 选择折线路径:$(0,0) \to (0,-t) \to (t,-t),$ 则有

$\displaystyle\int_0^{-t} 2y dy + \int_0^t (-t^3 x^2 + 2x^5 - kt) dx = 2t^2$，**得**

$t^2 - kt^2 = 2t^2$，$\Rightarrow k = -1$ ……..**3 分**

（其余可同上）