2010-2011 工科数学分析第二学期期中试题解答

一． 1. $\frac{2}{3}$

2. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$

3. $\{\frac{2}{e^2},\frac{4}{e},2\}$，（与此方向相同的都对）

4. $y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+o(\rho^2)$

5. $\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y,z)dy$

二． 设点 $B(-1,0,1)$，$\vec{s}=(1,1,2)$，

$$d=\frac{|\overrightarrow{BA}\times\vec{s}\,|}{|\vec{s}\,|}$$ …………………………(3 分)

$$=\frac{|\{2,2,-3\}\times\{1,1,2\}|}{|\vec{s}\,|}$$ ………………………(5 分)

$$=\frac{|\{7,-7,0\}|}{|\vec{s}\,|}$$ ……………………….(7 分)

$$=\frac{\sqrt{7^2+(-7)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$$ ……………………………(9 分)

三． $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$ …………………………(3 分)

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$ …………………………(6 分)

沿 $y=x$， $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x^4+x^2}=0$ ……………………………(7 分)

沿 $y=x^2$， $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$ ……………………….(8 分)

即 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在， $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续 ………………………..(9 分)

四. $\vec{AB}=\{1,1\}$， $\vec{AC}=\{0,-2\}$， $\vec{AB}^0=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$， $\vec{AC}^0=\{0,-1\}$ ……………(2 分)

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{AB}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial z}{\partial y}=2\sqrt{2}$$ ………………………………(4 分)

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{AC}}=-\frac{\partial z}{\partial y}=-3$$ ……………..……………..(5 分)

解得： $\frac{\partial z}{\partial x}=1$， $\frac{\partial z}{\partial y}=3$ …………………………………(7 分)

$\vec{AO}=\{-1,-2\}$， $\vec{AO}^0=\{-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\}$ ………………………………… .(8 分)

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{AO}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{7}{\sqrt{5}}$$ ……………………………(9 分)

五. $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'+2xg'$$ ………………………………(3 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}''+\frac{1}{y}(f_{21}''+\frac{1}{y}f_{22}'')+2g'+4x^2g''$$

$$=f_{11}''+\frac{2}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''+2g'+4x^2g''$$ …………………………………… (6 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''\cdot\frac{-x}{y^2}-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\cdot\frac{-x}{y^2}+4xyg''$$

$$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f''-\frac{1}{y^2}f_2'+4xyg''$$ …………………………….(9 分)

六. 由 $z=8-x^2-y^2$ 和 $z=2x$ 消去 z 得 D 的边界 $(x+1)^2+y^2=9$ …………… (2 分)

$$V=\iint_D(8-x^2-y^2-2x)dxdy$$ ………………………… (4 分)

令 $x=-1+\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$ ………………………... (5 分)

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3(9-\rho^2)\rho d\rho$$ …………………….... (7 分)

$$=2\pi\cdot\frac{81}{4}=\frac{81}{2}\pi$$ …………………….... (9 分)

七. $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} \\ 2x + 4y\dfrac{dy}{dx} + 6z\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$ ……………………………(3 分)

将点 $(1,-1,2)$ 代入得 $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2 - 2\dfrac{dy}{dx} \\ 1 - 2y\dfrac{dy}{dx} + 6\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$

解得： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{13}{14}$， $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{7}$ ………………………… (6 分)

切向量 $\vec{s} = \{1, \dfrac{13}{14}, \dfrac{1}{7}\}$ …………………………… (7 分)

切线 $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+1}{13} = \dfrac{z-2}{2}$ ……………………….. (9 分)

八. 设 (x,y,z) 是曲面上的任一点，此点处法向量为

$\vec{n} = \{x^{-\frac{1}{3}}, y^{-\frac{1}{3}}, z^{-\frac{1}{3}}\}$ .... (2 分)

切平面 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}(X - x) + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}(Y - y) + \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}(Z - z) = 0$ .... (4 分)

即 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}X + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}Y + \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}Z = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$ ………………… (6 分)

三截距为 $a = 4\sqrt[3]{x}$， $b = 4\sqrt[3]{y}$， $c = 4\sqrt[3]{z}$ .... (8 分)

$a^2 + b^2 + c^2 = 4^2(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}) = 4^2 \times 4 = 64$ ……………… (9 分)

九. 将 D 分成两块： $D_1 : x + y \le \pi$， $D_2 : x + y \ge \pi$

$I = \iint\limits_D \sqrt{2\cos^2\dfrac{x+y}{2}}\,dxdy$ .... (1 分)

$= \sqrt{2}\iint\limits_{D_1}\cos\dfrac{x+y}{2}dxdy - \sqrt{2}\iint\limits_{D_2}\cos\dfrac{x+y}{2}dxdy$ .... (3 分)

$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_y^{\pi-y}\cos\dfrac{x+y}{2}dx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\pi-x}^{x}\cos\dfrac{x+y}{2}dy$ .... (7 分)

$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \sin y)dy - 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x - 1)dx$ .... (8 分)

$= 2\sqrt{2}(\pi - 2)$ .... (9 分)

十. V 由曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成 .... (2 分)

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^1\frac{r^2\sin\varphi}{1+r^6}dr$$ .... (6 分)

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\frac{r^2}{1+r^6}dr$$ .... (7 分)

$$=\frac{\pi^2}{6}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$$ .... (9 分)

十一. 设 $C(x,y)$，ΔABC 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}|4x-y-2|$$ .... (2 分)

令 $f(x,y)=(4x-y-2)^2$

约束条件 $x^2-y^2=1$ .... (4 分)

设 $F(x,y)=(4x-y-2)^2+\lambda(x^2-y^2-1)$ .... (5 分)

令 $F_x'(x,y)=8(4x-y-2)+2\lambda x=0$

$F_y'(x,y)=-2(4x-y-2)-2\lambda y=0$ .... (7 分)

解得 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{15}}$，$x=\pm\frac{4}{\sqrt{15}}$（负值舍去） .... (8 分)

由实际问题，最小值存在，故当 $x=\frac{4}{\sqrt{15}}$，$y=\frac{1}{\sqrt{15}}$ 时，

ΔABC 的面积最小，点 $C(\frac{4}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}})$ 即为所求。 .... (9 分)