

数学分析期末试题(A)

一. 解下列各题 (每小题 6 分)

1. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x = 0$ 处有极值 2, 曲线 $y = f(x)$ 有一拐点 $(-1, 4)$, 求 a, b, c, d 的值, 并指出 $f(0)$ 是极大值还是极小值.(拐点 驻点等基本概念)

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{\int_0^{x^5} (e^x - 1) dx}$. (等价变换 求极限)

3. 设 $y = f(\tan x)$, $f'(x) = e^{x^2 - 2x + 2}$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

4. 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{x dx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

二. 解下列各题 (每小题 7 分)

1. 求极坐标系下由方程 $\rho = \theta$ 所确定的曲线在点 $(\rho, \theta) = (\pi, \pi)$ 处的法线的直角坐标方程.

2. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \sin x}{1 + \cos x} dx$.

3. 设 $f(x)$ 的二阶导函数连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \cos x}{x^2} = 1$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

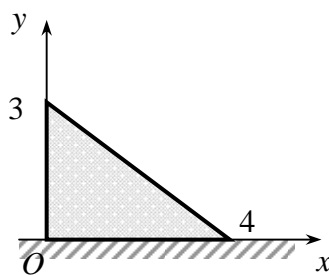
4. 求微分方程 $x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$ 的通解.

三. (8分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(\pi) = 2$,

$$\int_0^{\pi} [f''(x) + f(x)] \sin x dx = 5, \text{ 求 } f(0).$$

四. (8分) 设位于第一象限内的曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $M(x, y)$ 处的切线与两坐标轴及过点 M 平行于 y 轴的直线所围成的梯形面积等于常数 3, 且曲线经过点 $(1, 1)$, 求此曲线的方程.

五. (8分) 一块边长分别为 $3m, 4m, 5m$, 重为 $500kg$ 的直角三角形钢板水平放置在地板上, 现将此钢板铅直立起, 使其 $4m$ 长的边着地(如图), 设钢板的面密度为常数 λ , 求克服重力所作的功.



六. (10分) 设函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$y'(x) + 3y(x) + 2 \int_0^x y(x) dx + 2 \cos x = 0, \text{ 且 } y(0) = -1, \text{ 求 } y(x).$$

七. (7分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明当 $x \neq 0$ 时,

$$f(x) > x.$$

八. (7分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f(x) + f'(x) > 0$,

又设 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + f(\frac{1}{x})] = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(\frac{1}{x})] = 1$, 求证:

(1) 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内必有零点;

(2) 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内只有一个零点.