# 北京理工大学 2015 级《微积分 A》第一学期期末试题解答及评分标准

2016 年 1 月 22 日

**一、每小题 4 分，共 20 分**

1. $\frac{1}{2}$;　　　　2. 1;

3. $\frac{\pi^2}{4}$;　　　　4. $y = x + \frac{\pi}{2}$;

5. $2$,　$(0, f(0)), (x_2, f(x_2))$.

二、（1） $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$,　$x \neq \pm 1$　　…………**3 分**

（2）当 $x > 1$ 时； $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)} = 0$，

所以　$f(x) \equiv C =$ 常数　　…………**5 分**

又因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，故　$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = C$，

而　$f(1) = 2\arctan 1 + \arcsin 1 = \pi$

所以　$f(x) = 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \equiv \pi = C.$　　…………**8 分**

三、（1） $\int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = -\int \ln(1+e^x) de^{-x}$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx$$

$$= -(e^{-x}+1)\ln(1+e^x) + x + C$$

…………**4 分**

（2）令 $\sqrt{x} = t$,　$x = t^2$,　$dx = 2tdt$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{2t\,dt}{(1+t^2)t}$$

$$= 2\arctan t \mid_{1}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$ …………**8 分**

四、$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，　此为齐次方程， …………**1 分**

令 $u = \frac{y}{x}$，　$y = ux$，　$y' = u + xu'$，代入方程得，

$u + xu' = u\ln u$ ，　分离变量得， …………**3 分**

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$ （由初始条件知：$u \neq 0$，　$u \neq e$）

积分 $\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$，得 $u = e^{Cx+1}$，

原方程的通解为：$y = xe^{Cx+1}$ …………**6 分**

由 $y(1) = e^3$ 得 $C = 2$，从而原方程的特解为：

$y = xe^{2x+1}.$ …………**8 分**

五、$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{\sin t + t\cos t}$， …………**3 分**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{-\sin t}{\sin t + t\cos t}\right)'_t}{\sin t + t\cos t} = \frac{\sin t\cos t - t}{(\sin t + t\cos t)^3},$$ …………**7 分**

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}.$$ …………**8 分**

六、设星形线的直角坐标方程为：$y = y(x)$.

（1）$S = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 y(x)dx$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\, d$$

$$=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)dt=\frac{5\pi}{32}.$$ **…………4 分**

（2） $V=\frac{2\pi}{3}-\pi\int_0^1 y^2(x)dx$

$$=\frac{2\pi}{3}-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\, d$$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)dt=\frac{18\pi}{35}.$$ **…………8 分**

七、设任一时刻$t$该物体的温度为$T=T(t),$由题意有

$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)\quad (k>0),\quad T(0)=120,\quad T(30)=30.$ **…………3 分**

分离变量得方程的通解为：$T=20+Ce^{-kt}$，

由$T(0)=120,\quad T(30)=30$，得 $C=1000,\ k=\frac{\ln 10}{30},$

所以该物体的温度和时间的函数关系为：$T=20+100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}$， **………6 分**

令$T=21,$ 得 $21=20+100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}$，解得 $t=60(\mathrm{min}$

故若要物体的温度继续降至 21 度，还需要 60-30=30(min). **……8 分**

八、设 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，定义域为：$(-\infty,+\infty)$。

$f(x)$的零点即为原方程的根，下面讨论$f(x)$的零点个数.

$f'(x)=\frac{3-x^2}{1+x^2}$，令 $f'(x)=0$，得驻点：$x_1=-\sqrt{3},x_2=\sqrt{3}$. **……2 分**

列表如下:

| $x$ | $(-\infty,-\sqrt{3})$ | $-\sqrt{3}$ | $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\downarrow$ | 极小值 | $\uparrow$ | 极大值 | $\downarrow$ |

极小值 $f(-\sqrt{3})=0$, 极大值 $f(\sqrt{3})=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$。 **…………4 分**

可见 $x_1=-\sqrt{3}$为$f(x)$的一个零点. **…………5 分**

在$(-\infty,-\sqrt{3})$内，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在此区间内严格单减，有

$\forall x\in(-\infty,-\sqrt{3}),\quad f(x)>f(-\sqrt{3})=0$，所以在$(-\infty,-\sqrt{3})$内，$f(x)$ 无零点。

在$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$内，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在此区间内严格单增，有

$\forall x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3}),\quad f(x)>f(-\sqrt{3})=0$，所以在$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$内，$f(x)$ 也无零点。

在$(\sqrt{3},+\infty)$内，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在此区间内严格单减，又

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，所以存在$x_0\in(\sqrt{3},+\infty)$，使得 $f(x_0)<0$，

又 $f(\sqrt{3})=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，且 $f(x)\in C[\sqrt{3},x_0]$，由零点定理知：$f(x)$ 在$(\sqrt{3},x_0)$内有零点，从而在$(\sqrt{3},+\infty)$内有零点，又 $f(x)$ 在此区间内严格单减，所以此区间内的零点唯一。

综上可知：$f(x)$ 有且仅有两个零点，即原方程有且仅有两个根. **……8 分**

九、当$x\in[0.1)$时，有 $F(x)=\int_0^x t^2dt=\dfrac{x^3}{3}$, **…………1 分**

当$x\in[1,2]$时，有 $F(x)=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$, **…………3 分**

所以 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}, & x\in[1,2]\end{cases}$ **…………4 分**

因为 $f(x)\in C[0,2]$，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 内连续且可导。 **…………8 分**

【或：显然 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 及 $(1,2)$ 内连续且可导，又

$\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=\dfrac{1}{3}$，故

$\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\dfrac{1}{3}=\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=F(1)$，

所以 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而在 $(0,2)$ 内连续。**…………6 分**

$$F_-'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}}{x-1}=1,$$

$$F_+'(1)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\right)=1,$$

所以 $F_-'(1)=F_+'(1)=1$，所以 $F(x)$ 在 $x=1$ 处可导，从而在 $(0,2)$ 内可导。】 **…………8 分**

十、原方程变形为：

$\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt=f(x)+\cos 2x$，令 $x=0$ 得，$f(0)=-1$，

上式两边求导得

$-\int_0^x f(t)dt=f'(x)-2\sin 2x$，令 $x=0$ 得，$f'(0)=0$，

上式再求导得：$f''(x)+f(x)=4\cos 2x$

令 $y=f(x)$，则其满足下列微分方程初值问题：$\begin{cases}y''+y=4\cos 2x\\ y(0)=-1,y'(0)=0\end{cases}$，

**…………3 分**

对应齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$， **…………4 分**

设非齐次方程的特解为：$y^* = a\cos 2x + b\sin 2x$，代入非齐次方程得

$a = -\frac{4}{3}, \quad b = 0$，所以 $y^* = -\frac{4}{3}\cos 2x,$ **…………6 分**

原方程的通解为：$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{4}{3}\cos 2x,$ **…………7 分**

由 $y(0) = -1$, 得 $C_1 = \frac{1}{3}$, 又

$y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{8}{3}\sin 2x$, 由 $y'(0) = 0$, 得 $C_2 = 0$,

所以 $f(x) = \frac{1}{3}\cos x - \frac{4}{3}\cos 2x.$ **…………8 分**

十一、（1）$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$，$\xi$介于0与$x$之间。 **…………3 分**

（2）由于 $f''(x) \in C[-a,a]$，由最值定理知：

$f''(x)$在$[-a,a]$上存在最大值$M$和最小值$m$，即

对 $\forall x \in [-a,a]$, 有$m \le f''(x) \le M$. 由 **…………4 分**

$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$，两边从-a 到 a 积分得，

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f'(0)xdx + \int_{-a}^{a} \frac{f''(\xi)}{2!}x^2dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f''(\xi)x^2dx$$ **…………5 分**

由 $m \le f''(x) \le M$ 得，

$$\frac{ma^3}{3} = \frac{m}{2}\int_{-a}^{a} x^2dx \le \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f''(\xi)x^2dx \le \frac{M}{2}\int_{-a}^{a} x^2dx = \frac{Ma^3}{3}$$

即 $\frac{ma^3}{3} \le \int_{-a}^{a} f(x)dx \le \frac{Ma^3}{3}$, **…………6 分**

即 $m \le \dfrac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx \le M$，

将 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 应用介值定理知，至少存在一点 $\eta \in [-a,a]$，使得

$f''(\eta) = \dfrac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx$，即 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 成立. **…………8 分**