线性代数之五

吴民

南开大学　计控学院

October 13, 2017

矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} A$$

矩阵的初等变换

- 对一般矩阵 A，计算上页的矩阵乘法。
- 左侧矩阵是将单位矩阵的第 i 行和第 j 行交换得到的。
- 一般将左侧矩阵记为 E_{ij}。
- 计算结果是交换矩阵 A 的第 i 行和第 j 行所得到的矩阵。
- E_{ij} 是可逆的，其逆矩阵是其本身。
- 也就是 $E_{ij}^2 = E$。

矩阵的初等变换

对一般矩阵A，计算如下的矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} A$$

矩阵的初等变换

- 左侧矩阵是将单位矩阵的第 i 行第 i 列的 1 改为 λ。
- 也可以理解为将单位矩阵的第 i 行乘以 λ。
- 要求 $\lambda \neq 0$。
- 一般将左侧矩阵记为 $E_{ii}(\lambda)$。
- 计算结果是将矩阵 A 的第 i 行所有元乘 λ 倍所得到的矩阵。
- $E_i(\lambda)$ 是可逆的，其逆矩阵是 $E_{ii}(\frac{1}{\lambda})$。
- 这也是要求 $\lambda \neq 0$ 的原因。

矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 & \gamma & & \\ & & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} A$$

矩阵的初等变换

- 对一般矩阵 A，计算上页的矩阵乘法。
- 左侧矩阵是将单位矩阵的第 i 行第 j 列元改为 γ。
- 也可以理解为将单位矩阵的第 j 行的 γ 倍加到第 i 行。
- 一般将左侧矩阵记为 $E_{ij}(\gamma)$。
- 计算结果是矩阵 A 的第 j 行的 γ 倍加到第 i 行所得到的矩阵。
- $E_{ij}(\gamma)$ 是可逆的。
- $E_{ij}(\gamma)^{-1} = E_{ij}(-\gamma)$。

矩阵的初等变换

- 以下三种变换统称为矩阵的**初等行变换**:
  - 互换矩阵两行的位置。
  - 将矩阵的某行所有元都乘以 λ 倍（$\lambda \neq 0$）。
  - 将矩阵的某行的 γ 倍加到另一行上。
- 对矩阵 A 作初等行变换，相当于将 A 左乘一个初等矩阵。
- 计算 $E_{ij}, E_{ii}(\lambda), E_{ij}(\gamma)$ 右乘矩阵 A 的情形。
- 类似可定义矩阵的**初等列变换**。
- 对矩阵 A 作初等列变换，相当于将 A 右乘一个初等矩阵。
- 左（右）乘一个初等矩阵相当于作初等行（列）变换。

矩阵的初等变换

- 矩阵的初等行变换和初等列变换又统称为**初等变换**。
- 矩阵 A 经初等变换得到矩阵 B 用符号 $A \to B$ 表示。
- E_{ij}，$E_{ii}(\lambda)$，$E_{ij}(\gamma)$ 统称为**初等矩阵**。
- 初等矩阵都是可逆的。且其逆很容易写出。
- 若矩阵 A 经一种初等变换得到矩阵 B，则 B 可用同一种初等变换得到 A。
- 如果 n 阶方阵 A 经过一系列行初等变换化成单位矩阵，
- 矩阵形式是：$F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1 A = E$，$F_.$ 是初等矩阵。
- 则 $A^{-1} = F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1$。

矩阵的初等变换

- 对一个 n 阶方阵 A，能否用初等行变换化成单位矩阵？
- 显然并非对所有的方阵 A，都能做到这一点。
- 因为若 A 不可逆，则 A 不可能经初等行变换化成单位阵。
- A 的行列式值为 0；单位阵的行列式值为 1。
- 但是成立：若 A 是 n 阶可逆矩阵，则 A 可经一系列初等行变换化成单位矩阵。
- 因为 $|A| \neq 0$，所以 $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ 不全为 0。

矩阵的初等变换

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

矩阵的初等变换

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

设某个 $a_{i1} \neq 0$，则可以交换第 i 行与第 1 行，从而使得矩阵的第 1 行第 1 列元非 0。

矩阵的初等变换

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

设某个 $a_{i1} \neq 0$，则可以交换第 i 行与第 1 行，从而使得矩阵的第 1 行第 1 列元非 0。

所以不妨设 $a_{11} \neq 0$，将第 1 行乘以适当的倍数加到第 2 行，使第 2 行第 1 列元消为 0；$\dots$；第 1 行乘适当的倍数加到第 n 行，使第 n 行第 1 列元消为 0。

于是得到如下矩阵:

$$A \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

于是得到如下矩阵：

$$A \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

因 $|A| \neq 0$，$|B|$ 等于 $|A|$ 乘以若干初等矩阵的行列式，

于是得到如下矩阵：

$$A \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

因 $|A| \neq 0$，$|B|$ 等于 $|A|$ 乘以若干初等矩阵的行列式，所以 $|B| \neq 0$，由行列式按第 1 列展开式，

知 b_{11} 的余子式不为 0。

知 b_{11} 的余子式不为 0。

所以 $b_{22},\ldots,b_{2n}$ 不全为 0。

知 b_{11} 的余子式不为 0。

所以 $b_{22},\ldots,b_{2n}$ 不全为 0。

设某个 $b_{i2}\neq 0$，则可以交换第 i 行与第 2 行，从而使得矩阵的第 2 行第 2 列元非 0。

知 b_{11} 的余子式不为 0。

所以 $b_{22},\ldots,b_{2n}$ 不全为 0。

设某个 $b_{i2}\neq 0$，则可以交换第 i 行与第 2 行，从而使得矩阵的第 2 行第 2 列元非 0。

所以不妨设 $b_{22}\neq 0$，将第 2 行乘以适当的倍数加到第 1 行，使第 1 行第 2 列元消为 0；$\ldots$；第‘2 行乘适当的倍数加到第 n 行，使第 n 行第 2 个元消为 0。

于是得到如下矩阵：

$$A \to \cdots \to B \to \cdots \to C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的初等变换

于是得到如下矩阵：

$$A \to \cdots \to B \to \cdots \to C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

其中 $c_{11} \neq 0$，$c_{22} \neq 0$。

于是得到如下矩阵：

$$A \to \cdots \to B \to \cdots \to C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

其中 $c_{11} \neq 0$，$c_{22} \neq 0$。

如此重复前面的步骤，最终可通过一系列初等行变换将 A 化为

$$A \to \cdots \to B \to \cdots \to \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的初等变换

$$A \to \cdots \to B \to \cdots \to \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

再将以上矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{x_{11}}$，第 2 行乘以 $\frac{1}{x_{22}}$，……，第 n 行乘以 $\frac{1}{x_{nn}}$，

$$A \to \cdots \to B \to \cdots \to \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

再将以上矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{x_{11}}$，第 2 行乘以 $\frac{1}{x_{22}}$，$\dots$，第 n 行乘以 $\frac{1}{x_{nn}}$，便得到单位阵了。

$$A \to \cdots \to B \to \cdots \to \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

再将以上矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{x_{11}}$，第 2 行乘以 $\frac{1}{x_{22}}$，$\dots$，第 n 行乘以 $\frac{1}{x_{nn}}$，便得到单位阵了。

所以任意可逆矩阵都可经过一系列初等行变换化为单位阵。

前面的式子

$$F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1 A = E, \tag{1}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1. \tag{2}$$

式 (2) 直观含义是:

前面的式子

$$F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1 A = E, \tag{1}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1. \tag{2}$$

式 (2) 直观含义是：将每次 A 所作的初等行变换所对应的初等矩阵依次左乘起来，就得到 A 的逆矩阵。

前面的式子

$$F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1A=E, \tag{1}$$

$$\therefore \quad A^{-1}=F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1. \tag{2}$$

式 (2) 直观含义是：将每次 A 所作的初等行变换所对应的初等矩阵依次左乘起来，就得到 A 的逆矩阵。

考虑矩阵的初等变换与矩阵的初等乘积的对应关系，

前面的式子

$$F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1 A = E, \tag{1}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1. \tag{2}$$

式 (2) 直观含义是：将每次 A 所作的初等行变换所对应的初等矩阵依次左乘起来，就得到 A 的逆矩阵。

考虑矩阵的初等变换与矩阵的初等乘积的对应关系，

式 (2) 也是在做一系列的初等行变换，可以认为是在 F_1 基础上作一系列的初等行变换。

更好的写法是，$A^{-1}=F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1\cdot E$，上式变为：

$$E=F_m\{F_{m-1}\{\cdots[F_2(F_1\cdot A)]\cdots\}\}.$$

$$A^{-1}=F_m\{F_{m-1}\{\cdots[F_2(F_1\cdot E)]\cdots\}\}.$$

矩阵的初等变换

更好的写法是，$A^{-1}=F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1\cdot E$，上式变为：

$$E=F_m\{F_{m-1}\{\cdots[F_2(F_1\cdot A)]\cdots\}\}.$$

$$A^{-1}=F_m\{F_{m-1}\{\cdots[F_2(F_1\cdot E)]\cdots\}\}.$$

也就是，另写一个 E 矩阵，每当对以 A 起始的矩阵作初等行变换时，就对以 E 起始的矩阵作完全相同的初等行变换。反复作，当 A 起始的矩阵变为 E 时，E 起始的矩阵就是 A^{-1}。

矩阵的初等变换

更好的写法是，$A^{-1}=F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1\cdot E$，上式变为：

$$E=F_m\{F_{m-1}\{\cdots[F_2(F_1\cdot A)]\cdots\}\}.$$

$$A^{-1}=F_m\{F_{m-1}\{\cdots[F_2(F_1\cdot E)]\cdots\}\}.$$

也就是，另写一个 E 矩阵，每当对以 A 起始的矩阵作初等行变换时，就对以 E 起始的矩阵作完全相同的初等行变换。反复作，当 A 起始的矩阵变为 E 时，E 起始的矩阵就是 A^{-1}。

将 A 与 E 并排成一个 n 行 $2n$ 列矩阵。对此大矩阵作初等行变换，等于同时对 A 起始和 E 起始的矩阵作同一初等行变换。

矩阵的初等变换

若干说明：

- 使用初等变换求任意矩阵 A 的逆矩阵，无需先判断 A 是否可逆。求的过程中自然在验证。
- 在求逆矩阵过程中，无需按照矩阵可经一系列初等行变换化成单位阵的证明过程对矩阵作初等变换。该证明是在说明目标一定能作到，而求逆矩阵则应怎么方便怎么做。
- 使用初等列变换也可求逆矩阵，其原理式子需另外推导。
- $A^{-1} = F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1$ 不易表为一系列初等列变换。

定理：可逆矩阵必可表为若干个初等矩阵的乘积。

证明：

定理：可逆矩阵必可表为若干个初等矩阵的乘积。

证明：

1. A 可逆，则有 $F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1A=E$，其中 $F_1,\ldots,F_m$ 是初等矩阵。

定理：可逆矩阵必可表为若干个初等矩阵的乘积。

证明：

1. A 可逆，则有 $F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1A=E$，其中 $F_1,\ldots,F_m$ 是初等矩阵。
2. 所以 $A=(F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1)^{-1}$。

定理：可逆矩阵必可表为若干个初等矩阵的乘积。

证明：

1. A 可逆，则有 $F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1A=E$，其中 $F_1,\ldots,F_m$ 是初等矩阵。
2. 所以 $A=(F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1)^{-1}$。
3. 所以 $A=F_1^{-1}F_2^{-1}\cdots F_m^{-1}$。

矩阵的初等变换

定理：可逆矩阵必可表为若干个初等矩阵的乘积。

证明：

1. A 可逆，则有 $F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1A=E$，其中 $F_1,\ldots,F_m$ 是初等矩阵。
2. 所以 $A=(F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1)^{-1}$。
3. 所以 $A=F_1^{-1}F_2^{-1}\cdots F_m^{-1}$。
4. 初等矩阵的逆仍是初等矩阵，所以 F_1^{-1} 等都是初等矩阵。

定理：可逆矩阵必可表为若干个初等矩阵的乘积。

证明：

1. A 可逆，则有 $F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1A=E$，其中 $F_1,\ldots,F_m$ 是初等矩阵。
2. 所以 $A=(F_mF_{m-1}\cdots F_2F_1)^{-1}$。
3. 所以 $A=F_1^{-1}F_2^{-1}\cdots F_m^{-1}$。
4. 初等矩阵的逆仍是初等矩阵，所以 F_1^{-1} 等都是初等矩阵。
5. 即 A 可表示为初等矩阵的乘积。

矩阵的转置运算

矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，A的转置，记为A^{T}定义如下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵的转置运算

转置运算成立以下运算规律：

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$。

矩阵的转置运算

转置运算成立以下运算规律：

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$。
- $(A \pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}$。

矩阵的转置运算

转置运算成立以下运算规律:

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$。
- $(A \pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}$。
- $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$。

矩阵的转置运算

转置运算成立以下运算规律：

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$。
- $(A \pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}$。
- $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$。
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$。

矩阵的转置运算

转置运算成立以下运算规律：

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$。
- $(A \pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}$。
- $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$。
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$。
- $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$。

矩阵的转置运算

转置运算成立以下运算规律：

- $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$。
- $(A \pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}$。
- $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$。
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$。
- $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$。

最后一式，因 $(A^{-1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E$。

矩阵的转置运算

证 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

矩阵的转置运算

证 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

思路同证矩阵乘法结合律。证 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元对应相等。

证 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

思路同证矩阵乘法结合律。证 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元对应相等。

$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元为 AB 的第 j 行第 i 列元。

为 $a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$,

证 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

思路同证矩阵乘法结合律。证 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元对应相等。

$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元为 AB 的第 j 行第 i 列元。

为 $a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$，

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元为 B^{T} 的第 i 行与 A^{T} 的第 j 列元对应乘积求和，为

矩阵的转置运算

证 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

思路同证矩阵乘法结合律。证 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元对应相等。

$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元为 AB 的第 j 行第 i 列元。

为 $a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$，

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元为 B^{T} 的第 i 行与 A^{T} 的第 j 列元对应乘积求和，为

$$b_{1i}a_{1j} + \cdots + b_{ni}a_{jn}$$

证 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$。

思路同证矩阵乘法结合律。证 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元对应相等。

$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元为 AB 的第 j 行第 i 列元。

为 $a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$，

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 j 列元为 B^{T} 的第 i 行与 A^{T} 的第 j 列元对应乘积求和，为

$$b_{1i}a_{1j} + \cdots + b_{ni}a_{jn}$$

显然二式相等。

对称矩阵

若实矩阵 A 满足 $A = A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为对称矩阵。

对称矩阵

若实矩阵 A 满足 $A = A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为对称矩阵。

对称矩阵必定是方阵。

对称矩阵

若实矩阵 A 满足 $A = A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为对称矩阵。

对称矩阵必定是方阵。

n 阶方阵是对称矩阵的充要条件是：

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (i,j = 1,\ldots,n).$$

对称矩阵

若实矩阵 A 满足 $A = A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为对称矩阵。

对称矩阵必定是方阵。

n 阶方阵是对称矩阵的充要条件是：

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (i,j = 1,\ldots,n).$$

A, B 都是 n 阶对称矩阵，则 $A+B$，λA 都是对称矩阵。

对称矩阵

若实矩阵 A 满足 $A = A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为对称矩阵。

对称矩阵必定是方阵。

n 阶方阵是对称矩阵的充要条件是：

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (i,j = 1,\dots,n).$$

A,B 都是 n 阶对称矩阵，则 $A+B$，λA 都是对称矩阵。

B 为任一实矩阵，则 BB^{T} 为对称矩阵。

对称矩阵

若实矩阵 A 满足 $A = A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为对称矩阵。

对称矩阵必定是方阵。

n 阶方阵是对称矩阵的充要条件是：

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (i,j = 1,\ldots,n).$$

A,B 都是 n 阶对称矩阵，则 $A+B$，λA 都是对称矩阵。

B 为任一实矩阵，则 BB^{T} 为对称矩阵。

若 A 满足 $A^{\mathrm{T}} = -A$，则称 A 为反对称矩阵。

对角形矩阵

除主对角线上元外，其它元都为 0 的方阵，称为对角形矩阵。

对角形矩阵

除主对角线上元外，其它元都为 0 的方阵，称为对角形矩阵。

A, B 为对角形矩阵，则 $A+B$，λA 都是对角形矩阵。

对角形矩阵

除主对角线上元外，其它元都为 0 的方阵，称为对角形矩阵。

A, B 为对角形矩阵，则 $A+B$，λA 都是对角形矩阵。

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix} =$$

对角形矩阵

除主对角线上元外，其它元都为 0 的方阵，称为对角形矩阵。

A, B 为对角形矩阵，则 $A+B$，λA 都是对角形矩阵。

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

对角形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

正交矩阵

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，则称 A 为正交矩阵。

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，则称 A 为正交矩阵。

单位阵符合正交矩阵的定义。

正交矩阵

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，则称 A 为正交矩阵。

单位阵符合正交矩阵的定义。

以下为一 3 阶正交矩阵：

正交矩阵

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，则称 A 为正交矩阵。

单位阵符合正交矩阵的定义。

以下为一 3 阶正交矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

正交矩阵

- n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$。

正交矩阵

- n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$。
- n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵的充要条件是：

正交矩阵

- n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$。
- n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵的充要条件是：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

正交矩阵

- n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$。
- n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵的充要条件是:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

正交矩阵

- n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$。
- n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵的充要条件是：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- A 为正交矩阵，则 $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$ 也是正交矩阵。

正交矩阵

- A 为正交矩阵，则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1。

正交矩阵

- A 为正交矩阵，则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1。
- 若 A, B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

正交矩阵

- A 为正交矩阵，则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1。
- 若 A,B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

练习：正交矩阵 A,B，$|A|=-|B|$。证明 $|A+B|=0$。

正交矩阵

- A 为正交矩阵，则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1。
- 若 A, B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

练习：正交矩阵 A, B，$|A| = -|B|$。证明 $|A+B| = 0$。

$$|A+B| = |A+AA'B|$$

正交矩阵

- A 为正交矩阵，则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1。
- 若 A,B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

练习：正交矩阵 A,B，$|A|=-|B|$。证明 $|A+B|=0$。

$$|A+B|=|A+AA'B|=|A(E+A'B)|=|A(B'B+A'B)|$$

正交矩阵

- A 为正交矩阵，则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1。
- 若 A,B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

练习：正交矩阵 A,B，$|A|=-|B|$。证明 $|A+B|=0$。

$$\begin{aligned}|A+B| &= |A+AA'B| = |A(E+A'B)| = |A(B'B+A'B)| \\ &= |A(B'+A')B| = -|A'+B'| = -|(A+B)'|\end{aligned}$$

正交矩阵

- A 为正交矩阵，则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1。
- 若 A,B 均为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。

练习：正交矩阵 A,B，$|A|=-|B|$。证明 $|A+B|=0$。

$$\begin{aligned}|A+B| &= |A+AA'B| = |A(E+A'B)| = |A(B'B+A'B)| \\ &= |A(B'+A')B| = -|A'+B'| = -|(A+B)'| \\ &= -|A+B|.\end{aligned}$$

分块矩阵

对任一 $m \times n$ 矩阵 A，用若干条横线和竖线把 A 划分成若干个行数和列数较少的矩阵，这些小矩阵称为矩阵 A 的子阵或子块。被划分了的矩阵 A 称为分块矩阵。

分块矩阵

对任一 $m \times n$ 矩阵 A，用若干条横线和竖线把 A 划分成若干个行数和列数较少的矩阵，这些小矩阵称为矩阵 A 的子阵或子块。

被划分了的矩阵 A 称为分块矩阵。

例如，

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

分块矩阵

则

分块矩阵

则

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

分块矩阵

则

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

也就是说，左边的符号的含义就是右边的矩阵。

分块矩阵

则

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

也就是说，左边的符号的含义就是右边的矩阵。

分块矩阵表示的仍是一个数的矩阵，切勿认为分块矩阵是以矩阵为元的“矩阵”。分块矩阵的元仍是数。而 A_{11} 等可称为矩阵的“分块元”。

则

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

也就是说，左边的符号的含义就是右边的矩阵。

分块矩阵表示的仍是一个数的矩阵，切勿认为分块矩阵是以矩阵为元的“矩阵”。分块矩阵的元仍是数。而 A_{11} 等可称为矩阵的“分块元”。

A 可简记为 $A = (A_{ij})_{2\times 2}$。

当每对 A_{ij} 与 B_{ij} 都具有相同的行数和列数时，成立

分块矩阵

当每对 A_{ij} 与 B_{ij} 都具有相同的行数和列数时，成立

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

分块矩阵

当每对 A_{ij} 与 B_{ij} 都具有相同的行数和列数时，成立

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} \end{pmatrix}$$

当每对 A_{ij} 与 B_{ij} 都具有相同的行数和列数时，成立

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} =$$

当每对 A_{ij} 与 B_{ij} 都具有相同的行数和列数时，成立

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的转置:

分块矩阵

分块矩阵的转置：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

分块矩阵

分块矩阵的转置：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \\ A_{13}^{\mathrm{T}} & A_{23}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的转置：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \\ A_{13}^{\mathrm{T}} & A_{23}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

分块矩阵乘法。设 A,B 为两个分块矩阵，且：

分块矩阵

分块矩阵的转置：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \\ A_{13}^{\mathrm{T}} & A_{23}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

分块矩阵乘法。设 A,B 为两个分块矩阵，且：

- A 的列数等于 B 的行数。

分块矩阵

分块矩阵的转置:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \\ A_{13}^{\mathrm{T}} & A_{23}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

分块矩阵乘法。设 A,B 为两个分块矩阵，且:

- A 的列数等于 B 的行数。
- A 的列的分块方式与 B 的行的分块方式相同。

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法公式形式上与数的矩阵乘法的定义式完全相同。

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法公式形式上与数的矩阵乘法的定义式完全相同。因为矩阵乘法交换律不成立，所以分块矩阵乘法公式里的小分块矩阵相乘不可以交换位置。

分块矩阵的乘法

用简单情形演示一下，证明：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AF+BH & AG+BK \\ CF+DH & CG+DK \end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、$\ldots$、$K=(k_{ij})$ 分别为 n 阶方阵。

分块矩阵的乘法

用简单情形演示一下，证明：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AF+BH & AG+BK \\ CF+DH & CG+DK \end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、...、$K=(k_{ij})$ 分别为 n 阶方阵。

$i \leqslant n$、$j \leqslant n$ 时，等号左边矩阵的第 i 行第 j 列元为：

用简单情形演示一下，证明：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AF+BH & AG+BK \\ CF+DH & CG+DK \end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、$\ldots$、$K=(k_{ij})$ 分别为 n 阶方阵。

$i \leqslant n$、$j \leqslant n$ 时，等号左边矩阵的第 i 行第 j 列元为：

$a_{i1}f_{1j}+\cdots+a_{in}f_{nj}+b_{i1}h_{1j}+\cdots+b_{in}h_{nj}$,

用简单情形演示一下，证明：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AF+BH & AG+BK \\ CF+DH & CG+DK \end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、$\ldots$、$K=(k_{ij})$ 分别为 n 阶方阵。

$i\leqslant n$、$j\leqslant n$ 时，等号左边矩阵的第 i 行第 j 列元为：

$a_{i1}f_{1j}+\cdots+a_{in}f_{nj}+b_{i1}h_{1j}+\cdots+b_{in}h_{nj}$,

等号右边矩阵的第 i 行第 j 列元是分块元 $AF+BH$ 的第 i 行第 j 列元。两者相等。

分块矩阵的乘法

用简单情形演示一下，证明：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & G \\ H & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AF+BH & AG+BK \\ CF+DH & CG+DK \end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、$\ldots$、$K=(k_{ij})$ 分别为 n 阶方阵。

$i\leqslant n$、$j\leqslant n$ 时，等号左边矩阵的第 i 行第 j 列元为：

$a_{i1}f_{1j}+\cdots+a_{in}f_{nj}+b_{i1}h_{1j}+\cdots+b_{in}h_{nj}$,

等号右边矩阵的第 i 行第 j 列元是分块元 $AF+BH$ 的第 i 行第 j 列元。两者相等。

其它情形类似验证。

分块矩阵的乘法

证明 $A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 的公式：

分块矩阵的乘法

证明 $A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 的公式：

将 B_1 与 B_2 写成列向量分块，$B_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \dots & \beta_{in_i} \end{pmatrix}$。

分块矩阵的乘法

证明 $A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 的公式：

将 B_1 与 B_2 写成列向量分块，$B_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \dots & \beta_{in_i} \end{pmatrix}$。

$$A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

证明 $A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 的公式：

将 B_1 与 B_2 写成列向量分块，$B_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \dots & \beta_{in_i} \end{pmatrix}$。

$$
\begin{aligned}
& A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \\
=& A\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1} & \beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

分块矩阵的乘法

证明 $A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 的公式：

将 B_1 与 B_2 写成列向量分块，$B_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \dots & \beta_{in_i} \end{pmatrix}$。

$$
\begin{aligned}
& A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \\
=& A\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1} & \beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} A\beta_{11} & \dots & A\beta_{1n_1} & A\beta_{21} & \dots & A\beta_{2n_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

证明 $A\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix}$ 的公式：

将 B_1 与 B_2 写成列向量分块，$B_i=\begin{pmatrix}\beta_{i1} & \dots & \beta_{in_i}\end{pmatrix}$。

$$
\begin{aligned}
& A\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix} \\
=& A\begin{pmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1} & \beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2}\end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix}A\beta_{11} & \dots & A\beta_{1n_1} & A\beta_{21} & \dots & A\beta_{2n_2}\end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix}A\begin{pmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1}\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}\beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

分块矩阵的乘法

证明 $A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 的公式：

将 B_1 与 B_2 写成列向量分块，$B_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \dots & \beta_{in_i} \end{pmatrix}$。

$$\begin{aligned}
& A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \\
=& A\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1} & \beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} A\beta_{11} & \dots & A\beta_{1n_1} & A\beta_{21} & \dots & A\beta_{2n_2} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1} \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} \beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

分块矩阵的乘法

证明 $A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ 的公式：

将 B_1 与 B_2 写成列向量分块，$B_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \dots & \beta_{in_i} \end{pmatrix}$。

$$
\begin{aligned}
& A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \\
=& A\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1} & \beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} A\beta_{11} & \dots & A\beta_{1n_1} & A\beta_{21} & \dots & A\beta_{2n_2} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n_1} \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} \beta_{21} & \dots & \beta_{2n_2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

类似公式可证。最终上页公式也可证。

准对角形矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}.$$

其中 $A_1, \ldots, A_n$ 均为方阵。

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_nB_n \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1} =$$

分块矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

分块初等矩阵与分块行（列）初等变换。

分块矩阵的乘法

分块初等矩阵与分块行（列）初等变换。

以下为三种分块初等矩阵的例子：

分块初等矩阵与分块行（列）初等变换。

以下为三种分块初等矩阵的例子：

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

其中 $|P| \neq 0$。

分块初等矩阵与分块行（列）初等变换。

以下为三种分块初等矩阵的例子：

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

其中 $|P| \neq 0$。

容易验证，用分块矩阵左乘一个分块矩阵 A，相当于对矩阵 A 作分块行初等变换，右乘矩阵 A 相当于对 A 作分块列初等变换。

分块初等矩阵与分块行（列）初等变换。

以下为三种分块初等矩阵的例子：

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

其中 $|P| \neq 0$。

容易验证，用分块矩阵左乘一个分块矩阵 A，相当于对矩阵 A 作分块行初等变换，右乘矩阵 A 相当于对 A 作分块列初等变换。

分块初等矩阵实际是一系列初等矩阵的乘积。

分块矩阵

练习：求以下矩阵的逆矩阵，其中 B,D 可逆。

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

分块矩阵

练习：求以下矩阵的逆矩阵，其中 B,D 可逆。

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

以下分块矩阵的逆矩阵好求：

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1}$$

分块矩阵

练习：求以下矩阵的逆矩阵，其中 B, D 可逆。

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

以下分块矩阵的逆矩阵好求：

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

分块矩阵

练习：求以下矩阵的逆矩阵，其中 B,D 可逆。

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

以下分块矩阵的逆矩阵好求：

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

原矩阵可以通过分块行初等变换化为上述矩阵。

分块矩阵

将分块的第一行在左边乘以　　　　加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。

分块矩阵

将分块的第一行在左边乘以 $-CB^{-1}$ 加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。

分块矩阵

将分块的第一行在左边乘以 $-CB^{-1}$ 加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。写成矩阵乘法形式的式子是:

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

分块矩阵

将分块的第一行在左边乘以 $-CB^{-1}$ 加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。写成矩阵乘法形式的式子是：

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

分块矩阵

将分块的第一行在左边乘以 $-CB^{-1}$ 加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。写成矩阵乘法形式的式子是:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

分块矩阵

将分块的第一行在左边乘以 $-CB^{-1}$ 加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。 写成矩阵乘法形式的式子是:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

而用逆矩阵的定义式，上页中的式子为:

分块矩阵

将分块的第一行在左边乘以 $-CB^{-1}$ 加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。写成矩阵乘法形式的式子是:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

而用逆矩阵的定义式，上页中的式子为:

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

将分块的第一行在左边乘以 $-CB^{-1}$ 加到分块第二行就可以将原矩阵中的 C 消为 0。写成矩阵乘法形式的式子是：

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

而用逆矩阵的定义式，上页中的式子为：

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

如何将这两个式子放到一起组成一个式子，来看出原矩阵的逆矩阵的表达式？

分块矩阵

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

分块矩阵

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix}$$

分块矩阵

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CB^{-1} & E \end{pmatrix}$$

练习：证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|.$$

矩阵补充习题

练习：求 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习：已知矩阵 B, C 如下。矩阵 X, Y 满足 $X+Y=B, 3X-Y=C$。求 X, Y。

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

练习：设 α 是三维行向量，且满足下式，求 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$。

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

练习：已知 A 为如下三阶矩阵。求 A^n-2A^{n-1}，（$n\geqslant 2$ 且为整数）。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

练习：求实数 a，使下式成立。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习：已知 $AP = PB$，其中 B、P 如下，计算 A 和 A^5。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习：已知方阵 A 如下，方阵 B 满足 $AB = A - 2B$。求 B。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

练习：矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，矩阵 A 如下，求 X：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵补充习题

练习：A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-10A^*\right|.$$

矩阵补充习题

练习：方阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$，证明 $A+2E$ 可逆。并写出 $(A+2E)^{-1}$。

矩阵补充习题

练习：A、B和 $A+B$ 都为 n 阶可逆矩阵。证明：

1. $A^{-1}+B^{-1}$可逆，且$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$.
2. $A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

练习：方阵 A 满足 $A^2=E$，且 $|A|=-1$。证明 $A+E$ 不可逆。

练习：A 为 n 阶对称矩阵，且可逆，B 为 n 阶对称矩阵，且 $(E+AB)$ 可逆。证明 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵。

练习：Q 为正交矩阵，证明 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$ 是正交矩阵。