课程编号：MTH17005　　　北京理工大学2012-2013学年第一学期

2012级《微积分A》期中试卷

班级____________学号____________姓名____________成绩__________

(本试卷共六页，十个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空（每小题4分，共20分）

1． 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-2})^{2x-1}=$____________.

2．设 $y=xe^{y}+1$，则 $y''(0)=$____________________________.

3. 曲线$\begin{cases} x=e^{t}\sin 2t \\ y=e^{t}\cos t \end{cases}$在点$(0,1)$处的法线方程为__________________________.

4. 已知 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\dfrac{3}{n})-f(x_0-\dfrac{2}{n})]=$______________________.

5. 设 f 可导， $y=e^{\cos\frac{1}{x}}+f(\arcsin\sqrt{x}),$，则 $dy=$____________________________.

二、（8分）证明： $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^{2}}{2},\quad (-1<x<1).$

三、（8分）设 $x = t - \arctan t,\ y = \ln(1+t^2)$，求 $\dfrac{dx}{dy}$ 及 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

四、（10分）已知函数 $f(x) = \dfrac{1+x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$，记 $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$,

（1）求 a 的值；

（2）若 $x \to 0$ 时， $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

五、（8分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)\ln(1+x^2)}$.

六、（10 分）从一块半径为R的圆铁片上剪去一个扇形并做成一个漏斗。问留下的扇形的中心角θ为多大时，做成的漏斗的容积最大？ (要求：用微分学知识).

七、（8分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}+|\sin x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性；并写出 $f'(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 内的表达式.

八、（8 分）设 $x_1=1,\ \ x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=2,3,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

九、（12分）设 $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$，求：

（1）函数的增减区间及极值；（2）函数图象的凹凸区间和拐点；

（3）渐近线；（4）作出函数的图形.

十、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明：(1) $\exists\eta\in(0,1)$，使 $f(\eta)=\eta$；(2) $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)-1+f(\xi)-\xi=0$.