(2013-2014-1)微积分 **A** 期中试题解答及评分标准（**2013.11**）

一．**1.** $x=0$ 第一类间断点；$x=1$为第二类间断点

2. $y=x-2$

3. $dy=[x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})+e^x f'(\tan e^x)\sec^2 e^x]dx$

4. $f'(0)=1$

5. $a=-\frac{\pi}{4},b=\frac{\pi}{4}$

二. （1）$\lim\limits_{x\to\infty}x^3(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^3}}$ 令$t=\frac{1}{x}$ **……………2** 分

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin(2t)}{t^3}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$ **……………4** 分

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}n^3(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{n})=\frac{1}{2}$ **……………5** 分

注：此题也可以用泰勒公式。

（2）将 $f(x)$ 展开为具有皮亚诺余项的麦克劳林公式：

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$ **……………7** 分

$=x+x^2+o(x^2)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$ **……………8** 分

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=1$ **……………10** 分

三. 设 $f(x)=\arctan x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **……………2** 分

则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$ **……………5 分**

$\therefore f(x)=\arctan x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\equiv C$ $(C为常数)$ **……………7 分**

取 $x=0$,得$f(0)=0=C$ **,**$\therefore f(x)=\arctan x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\equiv 0$

即 $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **……………8 分**

四. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$; **……………4 分**

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$; **……………8 分**

$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(\frac{1+t^2}{4t})'_t}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{4t^3}$. **……………10 分**

五 (1,2) $f(x)$ 的定义域 D 为： $x\neq 0$

$f'(x)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$, $f''(x)=\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$ **……………2 分**

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$， $f(x)$ 在定义域内无不可导点，无二阶导为零的点和二阶导不存在的点. 列表讨论

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不	-	0	+
$f(x)''$	-	存	+		+
$f(x)$	$\uparrow\cap$	在	$\downarrow\cup$	极小值	$\uparrow\cup$

$f(x)$ 的单增区间：$(-\infty,0)$，$[1,+\infty)$；单减区间：$(0,1)$，

极小值为 $f(1)=e.$ ……………**5** 分

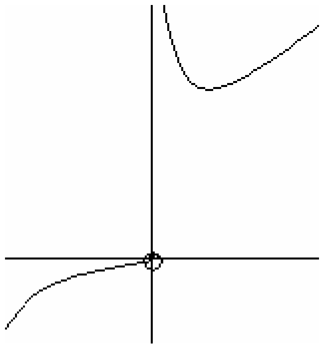
凹区间：$(0,+\infty)$；凸区间：$(-\infty,0)$。曲线无拐点。 ……………**8** 分

（**2**）$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} \underline{\underline{令t=\frac{1}{x}}} \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$

所以 $x=0$为曲线$y=f(x)$的垂直渐近线。

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}=0$ ……………**10** 分

$y=f(x)$ 的草图如下： ……………**12** 分



六. 方程两边同时对 y 求导，得

$\sec^2(x+y)(\frac{dx}{dy}+1)=2xy\frac{dx}{dy}+x^2$ ……………**3** 分

$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}=\frac{\sec^2(x+y)-x^2}{2xy-\sec^2(x+y)}$ ……………**5** 分

当 **y=0** 时，代入方程得：$\tan x=1$，

又 $0\le x<\frac{\pi}{2},\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ……………**7** 分

所以 $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{\substack{y=0\\x=\frac{\pi}{4}}}=\frac{\pi^2}{32}-1.$ ……………**8** 分

七. 当 $x<0$时，$f'(x)=2x;$ ……………**1** 分

当 $x>0$时，$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$ ……………**3** 分

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=0$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-0}{x}=0$，

所以 $f'(0)=0$ ……………5 分

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x\le0\\ 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$$ ……………6 分

又 $f'(0-)=\lim\limits_{x\to0^1}2x=0$

$f'(0+)=\lim\limits_{x\to0^1}[2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}]$ 极限不存在，

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。 ……………8 分

八. 由题意知每小时的燃料费用 $P=kv^3$, 又当 $v=10km/h$ 时， $P=80$

得 $k=\dfrac{2}{25}$，所以 $\boldsymbol{P=\dfrac{2}{25}v^3}$. ……………2 分

设轮船的航行时间为 t, 则 $t=\dfrac{20}{v}$

总费用：$Q=Pt+480t=\dfrac{8}{5}v^2+\dfrac{9600}{v}$ ……………4 分

令 $\dfrac{dQ}{dv}=\dfrac{16}{5}v-\dfrac{9600}{v^2}=0$，

得唯一驻点 $v=10\sqrt[3]{3}$， ……………6 分

由问题的实际意义知，当 $v=10\sqrt[3]{3}$ 时可使总费用最小。

此时每小时的总费用为：$P+480=\dfrac{2}{25}\times3000+480=720$ 元

……………8 分

九. （1）数列的有界性

由 $-1<x_1<0,\quad x_2=x_1^2+2x_1=(x_1+1)^2-1$

得 $0<x_1+1<1,\quad 0<(x_1+1)^2<1,\quad -1<(x_1+1)^2-1<0$

知 $-1<x_2<0$，假设 $-1<x_n<0$

由 $x_{n+1}=x_n^2+2x_n=(x_n+1)^2-1$，同理可得 $-1<x_{n+1}<0$

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有界。 ……………3 分

（2）数列的单调性

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n^2+2x_n}{x_n}=x_n+2,$$

由 $-1<x_n<0$，$\Rightarrow 1<x_n+2<2$，$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}>1$，$x_{n+1}<x_n$

知数列 $\{x_n\}$ 单调递减。

由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 极限存在。 **……………6** 分

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在 $x_{n+1}=x_n^2+2x_n$ 两边取极限得 $A=A^2+2A$

得 $A=0$(舍去）或 $A=-1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$. **……………8** 分

十. 由题设知 $F(x)\in C[1,2],\quad F(x)\in D(1,2)$

又 $F(1)=0,\quad F(2)=(2-1)f(2)=0$

由罗尔中值定理，至少存在一点 $c\in(1,2)$，使 $F'(c)=0$ **……………3** 分

又 $F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$ **……………5** 分

由 $f''(x)$ 在 $[1,2]$ 上存在知，$f'(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，知

$F'(x)\in C[1,2],\quad F'(x)\in D(1,2)$

又 $F'(1)=f(1)+(1-1)f'(1)=0,\quad F'(c)=0,$

对 $F'(x)$ 在区间 $[1,c]$ 应用罗尔定理知,

至少存在一点存在 $\xi\in(1,c)\subset(1,2)$, 使 $F''(\xi)=0$ 。 **……………8** 分