信息学院本科生2009－2010学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A卷）参考答案

一、　(每小题2分，共16分)

1. √　2. √　3. ×　4. C　5. D　6. D　7. B　8. B

二、　三阶方阵 A,B 满足 $AB+E=A^2+B$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，求 B。 (10分)

解：$AB-B=A^2-E$，$(A-E)B=(A-E)(A+E)$　　——3分

$|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故|A－E|可逆　　——3分

上式两端同时左乘 $(A-E)^{-1}$ 得 $B=A+E$　　——2分

$$=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$　　——2分

另解：（复杂，没有考虑相消）

$AB-B=A^2-E$，$(A-E)B=A^2-E$　　——2分

$A-E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$(A-E)^{-1}=A-E$，　——3分

$A^2-E=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{bmatrix}$　——2分，　　$B=(A-E)^{-1}(A^2-E)=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$　——3分

三、　计算 $n(n>2)$ 阶行列式 (两小题分别6、8分，共14分)

1. $\begin{vmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$　　2. $\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1&1\\1&0&x&\dots&x&x\\1&x&0&\dots&x&x\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&x&x&\dots&0&x\\1&x&x&\dots&x&0\end{vmatrix}$，$x\neq 0$

解：1. 原式＝$\begin{vmatrix}a+(n-1)&1&\cdots&1\\a+(n-1)&a&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\a+(n-1)&1&\cdots&a\end{vmatrix}$＝$[a+(n-1)]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$　——3分

$$=[a+(n-1)]\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&a-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\1&0&\cdots&a-1\end{vmatrix}=[a+(n-1)](a-1)^{n-1}$$

——2 分 ——1 分

法 2：原式$=\begin{vmatrix}a&1-a&\cdots&1-a\\1&a-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\1&0&\cdots&a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+n-1&0&\cdots&0\\1&a-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\1&0&\cdots&a-1\end{vmatrix}=(a+n-1)(a-1)^{n-1}$

——2 分 ——2 分 ——2 分

注：不能第 2 到 n 列的$\dfrac{-1}{a-1}$倍加到第一列，因$a-1$有可能为 0，这样做的扣 1 分。

2. 原式$=\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1&1\\1&-x&0&\dots&0&0\\1&0&-x&\dots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\dots&-x&0\\1&0&0&\dots&0&-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(n-1)/x&1&1&\dots&1&1\\0&-x&0&\dots&0&0\\0&0&-x&\dots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\dots&-x&0\\0&0&0&\dots&0&-x\end{vmatrix}$

——3 分 ——3 分

$=\dfrac{n-1}{x}(-x)^{n-1}=(n-1)(-1)^{n-1}x^{n-2}$ ——2 分

四、 参数λ分别取什么值时，方程组$\begin{cases}x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\\(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\end{cases}$无解、有无穷多解、有唯一解？并求方程组有解时的解。(14 分)

$B=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2-\lambda&1\\3-2\lambda&2-\lambda&1&\lambda\\2-\lambda&2-\lambda&1&1\end{array}\right)$ ——1 分

$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2-\lambda&1\\1-\lambda&0&0&\lambda-1\\2-\lambda&2-\lambda&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2-\lambda&1\\0&\lambda-1&-(\lambda-1)(\lambda-2)&2(\lambda-1)\\0&0&-(\lambda-1)(\lambda-3)&\lambda-1\end{array}\right)$ ——3 分

（其他如：$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&2-\lambda&1\\0&\lambda-1&\lambda^2+7\lambda-5&3(\lambda-1)\\0&0&-(\lambda-1)(\lambda-3)&\lambda-1\end{array}\right)$均可，

但是变换过程中λ不应出现在分母上，否则扣 1 分）

因此：

(1) $\lambda=3$时，$R(A)=2\neq 3=R(B)$，无解 ——2 分

(2) $\lambda\neq 3$且$\lambda\neq 1$时，$R(A)=3=R(B)$有唯一解 ——2 分

此时$B\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -(\lambda-2) & 2\\ 0 & 0 & -(\lambda-3) & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -(\lambda-3) & 1\end{array}\right)$，

故解为$\left(-1,\ \dfrac{\lambda-4}{\lambda-3},\ \dfrac{1}{3-\lambda}\right)^T$ ——2 分

(3) $\lambda=1$时，$R(A)=R(B)<3$有无穷解 ——2 分

此时$B\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，解为$\left(c_1,\ \ c_2,\ \ 1-c_1-c_2\right)^T$，$c_1,c_2\in R$ ——2 分

五、 求正交变换$X=PY$,将二次型化为标准形，并写出其标准形。（16 分）

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

解：二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ ——1 分

则$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3-\lambda & (3-\lambda)(\lambda-1)\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$ ——3 分

故特征根为$\lambda_1=3$(二重)，$\lambda_2=0$ ——1 分

对于$\lambda_1=3$，代入$(\lambda E-A)X=0$得$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}X=0$，解得基础解系

$X_1=[-1,1,0]^T,X_2=[-1,0,1]^T$ ——2 分

正交化得$\xi_1=X_1=[-1,1,0]^T$，$\xi_2=X_2-\dfrac{\langle\xi_1,X_2\rangle}{\langle\xi_1,\xi_1\rangle}\xi_1=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)$ ——3 分

归一化$\eta_1=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}=[\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0]^T,\eta_2=\dfrac{\xi_2}{|\xi_2|}=[\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}]^T$ ——1 分

对于$\lambda_2=0$，代入$(\lambda E-A)X=0$得$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}X=0$，解得基础解系

$\xi_3=[1,1,1]^T$ ——1 分

归一化得$\eta_3=\frac{\xi_3}{|\xi_3|}=[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^T$ ——1 分

构造正交矩阵$P=\left[\eta_1,\eta_2,\eta_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ ——2 分

则正交变换 $X=PY$,将二次型化为标准形 $f=3y_1^2+3y_2^2$. ——1 分

注：1. 配方法和合同变换法做对得 4 分，有错得 2 分，错多 0 分。

2. 二次型的矩阵写错，后面按错的二次型都对的话（1）若出现正交变换则扣 2 分，否者扣 3 分。

3. 构造的正交矩阵与标准化后的向量的对错没有关系。

六、 Q是一个n阶正交矩阵，证明$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q & Q\\ -Q & Q\end{pmatrix}$是一个$2n$阶正交矩阵。 (7 分)

证明：(多种方法)

由Q是正交矩阵可知$QQ^T=Q^TQ=E$，令$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q & Q\\ -Q & Q\end{pmatrix}$，则

$$MM^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q & Q\\ -Q & Q\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}Q^T & -Q^T\\ Q^T & Q^T\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}QQ^T+QQ^T & -QQ^T+QQ^T\\ -QQ^T+QQ^T & QQ^T+QQ^T\end{pmatrix}$$

——2 分 ——2 分

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}E+E & O\\ O & E+E\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2E & O\\ O & 2E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & O\\ O & E\end{pmatrix}$$，因此 M 为正交矩阵。

——2 分 ——1 分

七、 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性空间$V$ 的一个基底，$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1-\alpha_2\\ \beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3\\ \beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3\end{cases}$

证明β_1,β_2,β_3 也是V 的一个基底，并求向量$\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$在基底$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下的坐标。 (10 分)

证明：$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]M$ ——2 分

由于$|M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$ ——1 分

知β_1,β_2,β_3在同一个基底下的坐标列向量线性无关，从而β_1,β_2,β_3线性无关构成三维线性空间 V 的一个基底。 ——2 分

（注：其他方法证出是基底 得 5 分， 如证明β_1,β_2,β_3线性无关）

显然α在基底$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$下的坐标为$X=(2,-1,3)^T$， ——1 分

而基底$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$到$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$的过渡矩阵为 M，$M^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ ——2 分

因此α在基底β_1,β_2,β_3 下的坐标为$Y=M^{-1}X=[5.5000,-5.0000,6.5000]^T$.——2 分

八、 设在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m (m>2)$中，$\alpha_1\neq 0$，且每个$\alpha_i\ (i=2,3,\cdots,m)$都不能被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$线性表示，证明该向量组线性无关。(8 分)

证明：（多种方法，有 4 种以上方法）

（反证法）假设该向量组线性相关，则有一组非全零的数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0 \quad (1)$$ ——2 分

设$k_1,k_2,\ldots,k_m$中最后一个不为零的为k_r， ——1 分

则必有$r>1$，否则(1)化为$k_1\alpha_1=0$，从而$\alpha_1=0$，这与$\alpha_1\neq 0$矛盾。 ——2 分

此时(1)化为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r=0$，得到$\alpha_r=-\frac{1}{k_r}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{r-1})$ ——2 分

即α_r可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,k_{r-1}$线性表出，与已知条件矛盾，故假设错误，从而该向量组线性无关。 ——1 分

常见证明 2：设有则有一组数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0 \quad (1)$$

若$k_m\neq 0$，则(1)化为$\alpha_m=-\frac{1}{k_m}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{m-1})$，即 即$\alpha_m$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,k_{m-1}$线性表出，与已知条件矛盾，从而必有 $k_m=0$。此时(1)化为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{m-1}\alpha_{m-1}=0$$

类似可得$k_{m-1}=0,k_{m-2}=0,\cdots,k_2=0$，此时(1)化为$k_1\alpha_1=0$，由于$\alpha_1\neq 0$，故必有$k_1=0$。

因此仅当$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时(1)成立，从而该向量组线性无关。

证 3：数学归纳法，证 4：证明任何一个向量都不能被其它向量线性表出。

九、 设实矩阵$C_{m\times n}$（其中$m>n$）的秩为n。矩阵$A=C^{\mathrm{T}}C$。证明：（1）A是正定矩阵；（2）$|A+E|>1$，其中E为n阶单位阵。(共 5 分)

证明：（多种方法，注意，本题阅卷可出现 0.5 分，5＝2.5＋2.5。）

(1)由$R(C)=n$，知其次线性方程组$CX=0$只有零解， ——0.5 分

从而任取 n 维列向量 $Y \neq 0$，有 $CY \neq 0$， **——0.5 分**

显然 A 对称，而 $Y^T AY = Y^T C^{\mathrm{T}} CY = (CY)^T (CY) > 0$，故二次型 $Y^T AY$ 正定 **——1 分**

从而 A>0. **——0.5 分**

(2)由 A 对称知存在 n 阶正交矩阵 P 使得 $P^T AP = D$ 为对角形， **——0.5 分**

而 $A = PDP^T$，　因此 $|A+E| = |PDP^T + PP^T|$

$$= |P(D+E)P^T| = |P||D+E||P^T| = |D+E|$$ **——1 分**

由(1)知 A>0，从而 D 的对角元，即 A 的特征根，都大于零，故对焦矩阵 D+E 的对角元都大于 1,因此 $|A+E| = |D+E| > 1$. **——1 分**