

电光、计控学院本科生 2016—2017 学年线性代数课程期末考试试卷 (A 卷)

答案:

一、(每小题 2 分, 共 8 小题)

1 对; 2 对; 3 对; 4 C; 5 C; 6 D; 7 D; 8 D

二、行列式计算 (第 1 小题 6 分, 第 2 小题 8 分, 共 14 分)

1. 计算四阶行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 。

解: 原式=

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 42 = 57$$

(2 分)

(2 分)

(2 分)

2. 计算  $n$  阶行列式  $\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & x \\ a & a & \dots & x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & x & \dots & a & a \\ x & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$ , 其中  $n > 2$ 。

解: 将第 2, 3, ...,  $n$  列加到第一列, 然后提出公因子

原式=

$$\begin{aligned}
 & [(n-1)a+x] \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a & x \\ 1 & a & \dots & x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & \dots & a & a \\ 1 & a & \dots & a & a \end{vmatrix} = [(n-1)a+x] \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x-a \\ 1 & 0 & \dots & x-a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x-a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 & = [(n-1)a+x](-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-a)^{n-1} \\
 & \quad (2 \text{ 分}) \qquad \qquad \qquad (3 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

三、设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ，矩阵  $X$  满足  $2A^{-1}X = A^* + X$  (本题 10 分)

其中  $A^*$  是矩阵  $A$  的伴随矩阵，求矩阵  $X$ 。

解：对于等式  $2A^{-1}X = A^* + X$  两端左乘以矩阵  $A$  可得：

$$2X = AA^* + AX = |A|E + AX \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{进而有 } (2E - A)X = |A|E \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{由已知条件可得 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{则 } X = 3B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

四、对于线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a-3)x_3 = 3 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - (a-2)x_3 = 4 \end{cases}, a \text{ 为何值时, 方程组无解、有唯一解和有无穷多组解?}$$

并对方程组有无穷多组解的情形, 求其通解。 (本题 14 分)

解: 该方程组的增广矩阵为:

$$B = [A:b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a-3 & 3 \\ 2 & a+2 & a-2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

对增广矩阵进行初等行变换化成阶梯形矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a-3 & 3 \\ 2 & a+2 & a-2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a & a & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-a^2 & 2-a \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

因此当  $a \neq 2$  且  $a \neq 0$  时, 系数矩阵的秩为 3, 等于未知数个数, 此时方程组有唯一解;  
(1 分)

当  $a = 2$  时, 系数矩阵的秩为 2, 增广矩阵的秩也为 2, 因此方程组将有无穷多组解 (1 分); 若  $a = 0$ , 则增广矩阵的秩为 3, 方程组将无解 (1 分)。

方程组有无穷多组解时  $a = 2$ , 此时方程组为:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

取  $x_3$  为自由未知量, 方程组化为  $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$  (1 分)

因此方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = 2\tilde{x}_3 \\ x_2 = 1 - \tilde{x}_3 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \end{cases} \quad (2 \text{ 分}), \text{ 写成向量形式: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分}), \text{ 其中 } \tilde{x}_3 \text{ 为任意实数.}$$

(1 分)

五、设  $V$  是二阶实对称矩阵全体的集合对于通常矩阵的加法与数乘运算所构成的实数

域  $R$  上的线性空间, 且  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  是  $V$  的一个基, 试证:

$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  也是  $V$  的一个基, 并求  $V$  中向量  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

在基  $[B_1, B_2, B_3]$  下的坐标。

(本题 9 分)

证:  $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A_1 + 0A_2 + 0A_3$ , 故  $B_1$  在基底  $[A_1, A_2, A_3]$  下的坐标为

$$X_1 = [2, 0, 0]^T,$$

类似可得故  $B_2, B_3$  在基底  $[A_1, A_2, A_3]$  下的坐标分别为  $X_2 = [0, 0, 3]^T, X_3 = [0, 1, 0]^T$ 。

(3 分, 一个 1 分)

$$|(X_1, X_2, X_3)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1,3,2)} 2 \times 1 \times 3 = -6 \neq 0, \text{ 故 } X_1, X_2, X_3 \text{ 线性无关,} \quad (2 \text{ 分})$$

从而  $B_1, B_2, B_3$  线性无关, 于是  $[B_1, B_2, B_3]$  是  $V$  的一个基。

(2 分)

显然  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2B_1 + B_2 + 2B_3$ , 故  $A$  在基  $[B_1, B_2, B_3]$  下的坐标为  $[2, 1, 2]^T$ 。

(2 分)

六、已知二次型： $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ ，（题 14 分）

用正交变换化  $f(x_1, x_2, x_3)$  为标准形，并求出所用的正交变换；

判定该二次型的是那种二次型(正定，负定，半正定，半负定，不定)。

解：该二次型的矩阵为： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  （2 分）

矩阵的特征值多项式（或者特征值方程）为：

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分}) \\ &= (\lambda - 5) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5) (\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

所以，A 的特征值为  $\lambda_1 = 5$ ， $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$  （1 分）

对于  $\lambda_1 = 5$ ，其特征向量  $x$  满足： $(5E - A)x = 0$

$$(5E - A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取  $x_3$  为自由未知量，令  $x_3 = 1$ ，则可得属于  $\lambda_1 = 5$  的特征向量为  $\xi_1 = (1 \ 1 \ 1)^T$  （1 分）

对于  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ ，其特征向量  $x$  满足： $(-E - A)x = 0$

$$(-E - A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取  $x_2, x_3$  为自由未知量，分别令  $(x_2, x_3)^T = (1, 0)^T, (0, 1)^T$  可得属于  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$  的特征向量为

$$\xi_2 = (-1 \ 1 \ 0)^T, \quad \xi_3 = (-1 \ 0 \ 1)^T \quad (2 \text{ 分})$$

将  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  正交化可得： $\zeta_1 = \xi_1, \zeta_2 = \xi_2$ ,

$$\zeta_3 = \xi_3 - \frac{(\xi_3, \zeta_2)}{(\zeta_2, \zeta_2)} \zeta_2 = (-1 \ 0 \ 1)^T - \frac{1}{2}(-1 \ 1 \ 0)^T = \left(-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 1\right) \quad (2 \text{ 分})$$

将 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 归一化可得:  $\eta_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$ ,  $\eta_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right)^T$ ,  $\eta_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6} \quad -\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T$  (1分)

$$\text{令矩阵 } P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad (1 \text{ 分})$$

则原二次型经过正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  得到标准型:  $f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$  (1分)

该二次型是不定二次型。 (1分)

七、已知 $\alpha = (1 \quad 2 \quad 3), \beta = (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3})$ , 设 $A = \alpha^T \beta$ , 求 $A^n (n > 2)$ 。

(本题 9 分)

$$\text{证法一: } A = \alpha^T \beta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$n > 2 \text{ 时, } A^n = (\alpha^T \beta)^n = \alpha^T (\beta \alpha^T)^{n-1} \beta, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{而 } \beta \alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1+1+1) = (3), \quad (2 \text{ 分})$$

而向量乘 1 阶矩阵与向量作数乘是相等的, 因此,

$$A^n = \alpha^T (\beta \alpha^T)^{n-1} \beta = 3^{n-1} \alpha^T \beta = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

八向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  ( $r > 2$ ) 线性无关, 设  $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$

证明: 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性无关。

(本题 9 分)

证明: 设存在  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in R$ , 使得  $\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_r \beta_r = 0$  (2 分)

也即  $\lambda_1 \alpha_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha_2 + \dots + (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r) \alpha_r = 0$  化简得

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r) \alpha_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_r) \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

又因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 则

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = 0 \\ \lambda_2 + \dots + \lambda_r = 0 \\ \vdots \\ \lambda_r = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

解得  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$

所以,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性无关。 (2 分)

九、设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 如果存在正整数  $k$ , 使得  $A^k = O$  ( $O$  为  $n$  阶零矩阵), 则称  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵。证明:

(1) 如果  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵, 则矩阵  $A$  的特征值全为 0。

(2) 如果  $A \neq O$  是  $n$  阶幂零矩阵, 则矩阵  $A$  不与对角矩阵相似。 (本题 5 分)

证明: (1) 设  $A$  是  $n$  阶幂零矩阵, 则  $A^k = O$

设  $A$  的特征值为  $\lambda$ , 属于  $\lambda$  的特征向量为  $\alpha$ , 则有

$$A \alpha = \lambda \alpha$$

等式两端左乘以矩阵  $A^{k-1}$ , 得到:

$$A^k \alpha = A^{k-1} \lambda \alpha = \lambda^k \alpha = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

因为  $\alpha$  为特征向量, 所以  $\alpha \neq 0$ , 则有:

$$\lambda^k = 0, \text{ 所以 } \lambda = 0$$

即  $A$  的特征值全为 0 (1 分)

(2) 如果  $A \neq O$  是  $n$  阶幂零矩阵, 根据上文, 其特征值全为 0, 则它的特征向量  $X$  满足:

$$(\lambda E - A) X = 0,$$

$$\text{即 } AX = 0$$

因为  $A \neq O$ , 所以  $R(A) = r > 0$ , (1 分)

那么方程组  $AX = 0$  的解向量组的基础解系有  $n - r < n$  向量, (1 分)

只有当  $n$  阶矩阵有  $n$  个线性无关的特征向量时, 矩阵才可以与对角矩阵相似。

显然, 非零的  $n$  阶幂零矩阵不满足这一条件, 所以不与对角矩阵相似。 (1 分)