

## 标准答案及评分标准

2018年1月12日

## 一、填空 (每小题4分, 共20分)

1.  $\frac{1}{2}$

2.  $\frac{x^2}{1-x^4}$

3.  $\infty(+\infty, \text{不收敛})$

4.  $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

5.  $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + ce^{-x}$

## 二、计算题 (每小题5分, 共20分)

1. 解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^3}} \quad \text{令 } t = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - \frac{1}{2} \sin(2t)}{t^3}$$

..... 2分

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

..... 4分

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

..... 5分

注: 此题也可以用泰勒公式。

2. 解:  $\frac{dy}{dx} = (e^{\sin x \ln x})' + 2 \sin x \cos x$

..... 2分

$$= e^{\sin x \ln x} \cdot (\sin x \ln x)' + \sin 2x$$

$$= x^{\sin x} \cdot (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}) + \sin 2x$$

..... 4分

$$\text{因此, } dy = (x^{\sin x} \cdot (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}) + \sin 2x) dx .$$

..... 5分

3. 解: 原式 =  $\int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$

$$= 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$$

..... 2分

$$= 4 \int_0^1 \frac{x^2(1 - \sqrt{1-x^2})}{1 - (1-x^2)} dx$$

$$= 4 - 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= 4 - \pi \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

4. 解: 令  $u = x + y$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$  ..... 2分

代入原方程, 得:  $\frac{du}{dx} = 1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$

分离变量法得:  $\tan \frac{u}{2} = x + c$  ..... 4分

将  $u = x + y$  代入上式,

得通解为:  $\tan \frac{x+y}{2} = x + c$ . ..... 5分

三、解: 由条件知:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b}{x} = 0$  得

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

四、解:  $b_n = \frac{1}{2} \left( b_{n-1} + \frac{b}{b_{n-1}} \right) \geq \sqrt{b_{n-1} \cdot \frac{b}{b_{n-1}}} = \sqrt{b}$ , ..... 2分

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b}{b_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b}{b} \right) = 1.$$

所以数列  $\{b_n\}$  单调递减有下界,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  存在. ..... 4分





设  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ , 则有  $a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{b}{a} \right)$ , 得  $a = \sqrt{b}$ ,  $a = -\sqrt{b}$ . (舍去)

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{b}$ . ..... 6分

五、解: 定义域  $x \neq 0$

$$y' = -\frac{4(x+2)}{x^3}, \quad y' = 0 \text{ 得 } x_1 = -2; \quad y'' = \frac{8(x+3)}{x^4}, \quad y'' = 0 \text{ 得 } x_2 = -3. \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

列表:

$x$	$(-\infty, -3)$	$-3$	$(-3, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$y'$	$-$		$-$	$0$	$+$	不存在	$-$
$y''$	$-$	$0$	$+$		$+$		$+$
$y$		拐点		极小值		间断点	
		$(-3, -\frac{26}{9})$		$(-2, -3)$			

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{4(x+1)}{x^2} - 2) = -2, \quad \text{有水平渐近线: } y = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{4(x+1)}{x^2} - 2) = +\infty, \quad \text{有垂直渐近线: } x = 0. \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

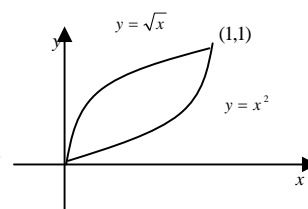
六、解: (1) 画草图, 解交点  $(0,0), (1,1)$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\dots\dots\dots 2 \text{分}$

$\dots\dots\dots 4 \text{分}$



$$(2) V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy - \pi \int_0^1 y^4 dy$$

$\dots\dots\dots 6 \text{分}$

$$= \frac{3}{10} \pi$$

$\dots\dots\dots 8 \text{分}$

七、解: 建立坐标系, 使细杆位于区间  $[0, l]$  上, 质点位于  $l+a$  处.

$$(1) \quad dF = G \frac{m\mu dx}{(a+l-x)^2}$$

$\dots\dots\dots 2 \text{分}$

$$F = \int_0^l \frac{Gm\mu}{(a+l-x)^2} dx = Gm\mu \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{Gm\mu l}{a(a+l)}.$$

$\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) 当质点向右移至距杆端  $x(x \geq a)$  处时, 细杆与质点间的引力为

$$F(x) = \frac{Gm\mu l}{x(x+l)}.$$

将质点由  $a$  处移到  $b$  处与无穷远处时克服引力所做的功分别记作  $W_b$  和  $W_\infty$ .

$$dW = F(x)dx = \frac{Gm\mu l dx}{x(x+l)}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

积分得

$$W_b = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \frac{Gm\mu l}{x(x+l)} dx = Gm\mu \int_a^b \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+l} \right) dx = Gm\mu \ln \frac{b(a+l)}{a(b+l)},$$

$$W_\infty = \lim_{b \rightarrow +\infty} W_b = \lim_{b \rightarrow +\infty} Gm\mu \ln \frac{b(a+l)}{a(b+l)} = Gm\mu \ln \frac{a+l}{a}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

八、解: 由麦克劳林公式,  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(\eta)}{3!}x^3, \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$

其中  $\eta$  在 0 与  $x$  之间, 从而  $0 = f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} - \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}, -1 < \xi_1 < 0,$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}, 0 < \xi_2 < 1,$$

两式相减, 得  $f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2) = 6.$  .....5 分

$f^{(3)}(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2] \subset (-1, 1)$  上连续, 所以  $f^{(3)}(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上必有最小值  $m$  和最大值  $M$ ,

从而  $m \leq \frac{f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)}{2} \leq M,$  .....7 分

由介值定理, 至少存在一点  $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1, 1)$ , 使得

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)}{2} = 3. \quad \text{.....8 分}$$

九、解:  $f(x) = xe^x + \int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^x + x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$

上式两端对  $x$  求导, 得:  $f'(x) = (x+1)e^x + \int_0^x f(t)dt$  .....2 分

再对  $x$  求导得:  $f''(x) = (x+2)e^x + f(x),$

则  $f(x)$  满足初值问题:  $\begin{cases} f''(x) - f(x) = (x+2)e^x \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \end{cases}$  .....4 分

对应齐次方程的通解为:  $Y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$

设非齐次方程的特解为:  $y^* = x(ax+b)e^x$ , 代入原方程, 得:  $4ax + 2a + 2b = x + 2$

解得:  $a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{3}{4}, \quad y^* = \frac{1}{4}(x^2 + 3x)e^x.$  .....6 分

通解为:  $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 + 3x)e^x$

由初始条件, 得:  $C_1 = \frac{1}{8}, \quad C_2 = -\frac{1}{8}.$

所以  $f(x) = \frac{1}{8}e^x - \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 + 3x)e^x.$  .....8 分

十、证明: 构造辅助函数  $F(x) = e^x(f(x) - 2x)$  .....2 分

有  $F(1) = e(f(1) - 2) = 3e > 0, \quad F(5) = e^5(f(5) - 10) = -9e^5 < 0.$

$F(x)$  在  $[1, 5]$  上连续, 由零点定理可知, 至少存在一点  $\eta \in (1, 5)$ ,

使得  $F(\eta) = 0.$  .....4 分

又因为  $F(x)$  在  $[\eta, 6]$  上连续, 在  $(\eta, 6)$  内可导, 且

$$F(6) = e^6(f(6) - 12) = 0 = F(\eta),$$

由罗尔定理可知, 存在  $\xi \in (\eta, 6) \subset (1, 6)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) + f(\xi) - 2\xi = 2 \quad \text{.....6 分}$$