课程编号：A072001　　北京理工大学 2005-2006 学年第二学期

2005 级《微积分 A》期末试卷 (A 卷)

一、完成下列各题（每小题 6 分）

1. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=2x^2 \\ z=2-y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,2,-2)$ 处的切线方程和法平面方程.

2. 设 $u=f(xy,x-y)$，其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

3. 计算二重积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2 e^{y^2}dy$.

4. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n})$ 的敛散性.

二、求解下列各题（每小题 7 分）

1. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS$，其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上介于平面 $z=1$ 和 $z=2$ 之间的部分.

2. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $x^2+4y^2=2z^2$ 在 $P(2,1,2)$ 点处与 z 轴正向夹角为锐角的法线向量，求函数 $u=f(x,y,z)=x\sqrt{5y+z^2}$ 在 P 点处的梯度及 $f(x,y,z)$ 在 P 点处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

3. 设 $S(x)$ 是 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1] \\ x-1, & x\in(1,\pi) \end{cases}$ 的以 2π 为周期的余弦级数展开式的和函数，写出 $S(x)$ 在区间 $(-\pi,0)$ 内的表达式，并求 $S(-4)$ 和 $S(2\pi-1)$ 的值.

4. 求 $f(x,y)=e^y(x^2-4x+2y)$ 的极值，并判别是极大值还是极小值.

三、（8 分）把函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)}$ 展成 $(x-1)$ 的幂级数，并指出收敛域.

四、(8 分) 设 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 位于第一卦限内的部分，试将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$ 分别在直角坐标系及球坐标系下化为累次积分，并任选一种方法计算 I 的值.

五、（8 分） 利用格林公式计算积分 $I=\int_L(\sin y-y)dx+(x\cos y-1)dy$，其中 L 为半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段.

六、（8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛区间及和函数.

七、（8 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{2axdydz+(z-a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad(a>0)$ 的上侧.

八、（8 分）设函数 $f(y)$ 在 $-\infty<y<+\infty$ 内有连续的导函数，且 $\forall y$，$f(y)\ge 0$，$f(1)=1$； 已知对右半平面 $\{(x,y)\,|-\infty<y<+\infty,x>0\}$ 内任意一条封闭曲线 Γ，都有 $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{ydx-xdy}{x^2+f(y)}=0$，求 $f(y)$ 的表达式.