2008-2009 第二学期期中试题(B 卷)解答

一. 1. $(4,4,5)$

2. $\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ (2 分, 2 分)

3. $\{-3,3\}$, $3\sqrt{2}$ (2 分, 2 分)

4. $1+x+\frac{1}{2}(x^2+2y^2)+o(\rho^2)$ (一次项 1 分，二次项 2 分，余项 1 分)

5. $yf_1'+e^x f_2'$, $f_1'+xyf_{11}''+(y+xe^x)f_{12}''+e^x f_{22}''$ (2 分, 2 分)

6. $\{1,-\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\}$

7. $\frac{y^2}{2}\arcsin x-\ln|\cos x|+\frac{y^2}{2}$

8. 25, 9 (2 分, 2 分)

二. $2xyz+x^2y\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})$ ……………………..(4 分)

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2xyz}{f'+x^2y}$ ……………………(5 分)

$x^2z+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial y})$ …………………….(9 分)

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'-x^2z}{f'+x^2y}$ ……………………(10 分)

三. $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}\rho\sqrt{4R^2-\rho^2}\,d\rho$ ……………………..(4 分)

$=-\frac{16}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-1)d\theta$ ……………………..(8 分)

$=-\frac{8(4-3\pi)}{9}R^3$ ……………………..(10 分)

四. 设 $L:\dfrac{x-2}{l}=\dfrac{y+1}{m}=\dfrac{z-3}{n}$ ……………….(2 分)

$\vec{s}=\{l,m,n\}$ $M(2,-1,3)\in L$ $N(1,0,-2)\in L_1$

L_1 的方向向量 $\vec{s}_1=\{2,-1,1\}$

由于 L,L_1 相交，有

$$(\vec{s},\vec{s}_1,\overrightarrow{MN})=\begin{vmatrix} l & m & n \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}=4l+9m+n=0$$ ………………….(7 分)

由 $L//\pi$，得 $3l-2m+n=0$ …………………..(9 分)

解得 $l=-11m$ $n=35m$ …..………………(11 分)

$$L:\frac{x-2}{-11}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{35}$$ …………………..(12 分)

五. 设切点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=4$ ……………………(2 分)

平面 π 法向量为 $\vec{n}=\{2x_0,2y_0,2z_0\}=2\{x_0,y_0,z_0\}$ ……………………(4 分)

L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,-1,1\}\times\{2,-1,3\}=\{-2,-1,1\}$ ……………………(6 分)

由于 $\pi\perp L$，有 $\dfrac{x_0}{-2}=\dfrac{y_0}{-1}=\dfrac{z_0}{1}$ ……………………..(8 分)

解得 $x_0=\pm2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $y_0=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $z_0=\mp\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ …………………..(10 分)

π 的方程为 $2x+y-z=\pm2\sqrt{6}$ ………………….(12 分)

六. 曲面 $y=x^2$ 将 V 分成 V_1,V_2，

$$I=\iiint\limits_{V_1}xz(y-x^2)dV+\iiint\limits_{V_2}xz(x^2-y)dV$$ ……………………(2 分)

$$=\int_0^1dx\int_{x^2}^1dy\int_0^1xz(y-x^2)dy+\int_0^1dx\int_0^{x^2}dy\int_0^1xz(x^2-y)dy$$ ………..(6 分)

$$=\frac{1}{2}\int_0^1xdx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\frac{1}{2}\int_0^1xdx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy$$ ……………(8 分)

$$=\frac{1}{2}\int_0^1x(\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}x^4)dx+\frac{1}{4}\int_0^1x^5dx$$ …………………(10 分)

$$=\frac{1}{12}$$ ………………….(12 分)

七. $\vec{e}=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ ……………………..(1 分)

$f'_x=2x \qquad f'_y=2y \qquad f'_z=2z$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-y+z)$$ ………………………….(3 分)

令 $g(x,y,z)=x-y+z$

$F(x,y,z)=x-y+z+\lambda(2x^2-y^2+z^2-5)+\mu(x+y)$ …………….(6 分)

$$\begin{cases} F'_x=1+4\lambda x+\mu=0 \\ F'_y=-1-2\lambda y+\mu=0 \\ F'_z=1+2\lambda z=0 \\ 2x^2-y^2+z^2=5 \\ x+y=0 \end{cases}$$ ……………...(8 分)

解得 $x=\mp 2 \qquad y=\pm 2 \qquad z=\mp 1$

得两点 $M_1(-2,2,-1) \qquad M_2(2,-2,1)$ ………………(10 分)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\Big|_{M_1}=-\frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\Big|_{M_2}=\frac{10}{\sqrt{3}}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 在曲线上确有最大值和最小值，故 M_1,M_2 为所求，且

$$\max_M\{\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\}=\frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \min_M\{\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\}=-\frac{10}{\sqrt{3}}$$ …………….(12 分)