北京理工大学 2016-2017 学年第二学期《微积分 A》（下）期末试题(A 卷)

参考答案及评分标准

2017 年 6 月 29 日

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $3x - 7y + 5z - 4 = 0$

2. $(2,-4,1), \sqrt{21}$

3. $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx,$

4. $\frac{13}{6}$

5. 绝对

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解1： $d = \frac{\left|\{1,1,1\} \times \{2,-2,1\}\right|}{\left|\{2,-2,1\}\right|} = \frac{\left|\{3,1,-4\}\right|}{3} = \frac{\sqrt{26}}{3}$ ……………..(5分)

解 2： 过点 (1,0,2) 与已知直线垂直的平面为

$$2x - 2y + z - 4 = 0$$ …………….. (1 分)

它与直线的交点为 $N(\frac{2}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{10}{9})$， …………….. (3 分)

$$d = MN = \sqrt{(1-\frac{2}{9})^2 + (\frac{11}{9})^2 + (2-\frac{10}{9})^2} = \frac{\sqrt{26}}{3}$$ …………….. (5 分)

2. 解： $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} f'$ ……………..(2分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = (-\frac{1}{y^2}) f' + \frac{1}{y}(f''(-\frac{x}{y^2}))'$$

$$= -\frac{1}{y^2} f' - \frac{x}{y^3} f''$$ ……………..(5 分)

3. 解： $dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=2dxdy$

在 xoy 坐标面上的投影区域　$D_{xy}: x^2+y^2\le 3$

$$\iint_S (x^2+y^2)dS=2\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\text{ 分})$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3 d\rho$$

$$=9\pi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{ 分})$$

4. 解: $gradr=\left\{\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right\}=\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}.$ ………….. (2 分)

再求

$$div(gradr)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r}).$$

$$=(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})+(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})+(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3})=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{2}{r}.\ldots\ldots..\ (4\text{ 分})$$

于是　$div(gradr)|_{(1,-2,-2)}=\frac{2}{r}|_{(1,-2,-2)}=\frac{2}{3}.$ ………….. (5 分)

三、解 1:　切点 $M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{2}),$ ………….. (1 分)

$$\text{微分得}\begin{cases}dx=\cos v du-u\sin v dv\\ dy=\sin v du+u\cos v dv\\ dz=2dv\end{cases}$$

$$dz=-2\frac{\sin v}{u}dx+2\frac{\cos v}{u}dy \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..\ (5\text{ 分})$$

$$\text{故}\frac{\partial z}{\partial x}=-2\frac{\sin v}{u},\frac{\partial z}{\partial x}|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{4}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\cos v}{u},\frac{\partial z}{\partial y}|_{\substack{u=2\\ v=\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

曲面在 M 处的法向量：$\vec{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2)$ ………….. (7 分)

曲面在 M 处的切平面：即 $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2z-\pi=0$ ………….. (8 分)

解2：切点$M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$, …………… (1 分)

$$\vec{n}_1=(x_u',y_u',z_u')|_{u=2,v=\frac{\pi}{4}}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$$

$$\vec{n}_2=(x_v',y_v',z_v')|_{u=2,v=\frac{\pi}{4}}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},2)$$ …………… (5 分)

曲面在M处的法向量：$\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2)$ …………… (7 分)

曲面在M处的切平面：即$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2z-\pi=0$ …………… (8 分)

四、解： $I_y=\iint\limits_D x^2dxdy$ ………………….(2 分)

$$=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}x^2dx$$ ………………….(4 分)

$$=\frac{7}{24}\int_0^1 y^3dy=\frac{7}{96}$$ ………………….(6 分)

五、解：设$P(x,y,z)$为曲线Γ上任一点, P到原点的距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

为简便, 另设目标函数$d^2=x^2+y^2+z^2$.

构造函数：$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$

…………(2 分)

$$\begin{cases}F_x'=2x+2\lambda x+\mu=0\\F_y'=2y+2\lambda y+\mu=0\\F_z'=2z-\lambda+\mu=0\\F_\lambda'=x^2+y^2-z=0\\F_\mu'=x+y+z-1=0\end{cases}$$ …………(4 分)

解得 $\lambda=-1$（舍）或$x=y$

$$P_1(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}),P_2(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$$ …………(6 分)

$$d_{P_1}=\sqrt{(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2+(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$$

$$d_{P_2}=\sqrt{(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$$

因而, 所求最长距离为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, 最短距离为$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$. …………(8 分)

六、解：(1) 由 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$， 得

$\varphi'(x)(x^2+y^2)+2x\varphi(x)=\varphi(x)(2x+x^2+y^2)$ …………..(2 分)

$\varphi'(x)=\varphi(x)$， $\varphi(0)=1$

$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=dx$ $\varphi(x)=e^x$ …………..(4 分)

(2) $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+e^x(x^2+y^2)dy+C$ ………..(5 分)

$=\int_0^x 0dx+\int_0^y e^x(x^2+y^2)dy+C$ ………….. (7 分)

$=e^x(x^2y+\frac{y^3}{3})+C$ …………..(8 分)

七、解： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$ $R=1$ …………..(1 分)

$x=1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$，发散

$x=-1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$，收敛

收敛域为 $[-1,1)$ …………(3 分)

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$

$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$ ……………..(5 分)

$S(x)=-x-\ln(1-x)$ ……………..(7 分)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\begin{cases}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x) & x\in[-1,1),x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$ ……………..(8 分)

八、解: $b_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 3xdx$ ……………..(3 分)

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(-\frac{1}{3})d\cos 3x$$

$$=-\frac{2}{3\pi}(x\cos 3x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 3xdx$$

$$=\frac{2}{3}$$ …………….(6 分)

$$S(\pi)=\frac{1}{2}(f(\pi-0)+f(-\pi+0))=0$$ ……………. (8 分)

九、解：设球面所围区域为V,则由 Gauss 公式,

$$I=\iiint_V(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz$$ …….. (3 分)

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$ ………(6 分)

$$=\frac{12\pi}{5}R^5$$ ………..(8 分)

十、解：截面$S:y=s,(-2\le s\le 2)$，取右侧，即法向量$\vec{n}=\{0,1,0\}$

在 xoz 面上的投影 $D_{xz}:\begin{cases}-\sqrt{4-s^2}\le x\le\sqrt{4-s^2}\\ 1-\frac{1}{4}(x^2+s^2)\le z\le 4-(x^2+s^2)\end{cases}$ ……..(1 分)

单位时间内通过截面S的流量:

$$\Phi(s)=\iint_S\vec{v}\cdot\vec{n}^0dS=\iint_S(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^4\cos\gamma)dS$$ ……..(3 分)

$$=\iint_S y^2dzdx=\iint_{D_{zx}}s^2dzdx$$

$$=s^2\int_{-\sqrt{4-s^2}}^{\sqrt{4-s^2}}dx\int_{1-\frac{1}{4}(x^2+s^2)}^{4-(x^2+s^2)}dz=s^2(4-s^2)^{\frac{3}{2}}.$$ ……..(5 分)

令 $\Phi'(s)=s(8-5s^2)(4-s^2)^{\frac{1}{2}}=0$，得 $s=\pm\sqrt{\frac{8}{5}}$，由问题的实际意义，通过 $y=\pm\sqrt{\frac{8}{5}}$ 两截面的流量最大. ……..(6 分)