2015 级《微积分 A》期中试卷参考答案及评分标准（2015.11.28）

一、　填空（每小题 4 分，共 20 分）

1．$-\dfrac{1}{2}$;　　　　2. $e^{x}\quad (x\neq 0),\quad x=0,$ 第一类（可去型）;

3. $\dfrac{2}{\pi}x+y-\dfrac{\pi}{2}=0;$　　　　4. $n(n-1)\ln^{n-2}2;$

5. $(\tan 2x)^{\arcsin x}[\dfrac{\ln(\tan 2x)}{\sqrt{1-x^2}}+2\arcsin x\dfrac{\sec^2 2x}{\tan 2x}]dx.$

或 $(\tan 2x)^{\arcsin x}[\dfrac{\ln(\tan 2x)}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{4\arcsin x}{\sin 4x}]dx.$

二、（8 分）证明：设 $f(x)=(x+1)-e^{2x}(1-x)$，有 $f(0)=0.$ ....2 分

$f'(x)=1-e^{2x}+2xe^{2x}$，又有 $f'(0)=0$

$f''(x)=4xe^{2x},$ ....4 分

当 $x>0$ 时，有 $f''(x)>0,$ 所以 $f'(x)$ 单增，

所以有 $f'(x)>f'(0)=0\quad (x>0)$，所以 $f(x)$ 单增，

所以有 $f(x)>f(0)=0\quad (x>0)$

即　$f(x)=(x+1)-e^{2x}(1-x)>0$

又当 $x>0$ 时，$(x+1)>0,$ 所以 $\dfrac{1-x}{x+1}<e^{-2x}.$ ....8 分

三、（8 分）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t},$ ....2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3},$$ ....4 分

点 $(\ln 2,\dfrac{\pi}{4})$ 对应的参数值为 $t=1$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\frac{1}{2},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\frac{1}{2},$$

曲率 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$, ...7 分

曲率半径 $R=\dfrac{1}{k}=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$. ....8 分

四、(8 分) 由泰勒公式知：

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$$

$$=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)$$

$$=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)$$ ....4 分

$$\sim kx^3\quad (x\to 0)$$

由此得：$1+a=0,\quad b-\dfrac{a}{2}=0,\quad \dfrac{a}{3}=k$

得：$a=-1,\quad b=-\dfrac{1}{2},\quad k=-\dfrac{1}{3}$. ....8 分

五、(8 分) 解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}=0=f(0)$ (当$\alpha>0$时),

(无穷小与有界变量的乘积)。所以 $f(x)$在$x=0$处连续. ....2 分

(2) 当$x\neq 0$时，$f'(x)=\left(x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}},$$

当且仅当$\alpha>1$ 时，上述极限存在，故当$\alpha>1,\beta>0$时$f'(x)$存在.

此时， $f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ …………5 分

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}})=0=f'(0)$，

上式当且仅当 $\alpha>1$，且$\alpha>\beta+1$时成立，所以要使 $f'(x)$在$x=0$处连续，只需

$\alpha>\beta+1.$ ……………………8 分

六、（8 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{\tan x(\sqrt{1+x^{2}}-1)}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{x^{3}}$ ……………………2 分

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-1-2x}{3x^{2}}$

$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x}\cos x-2}{2x}$

$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\cos x-e^{x}\sin x}{1}=\dfrac{2}{3}.$ ……………………8 分

或应用泰勒公式：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{\tan x(\sqrt{1+x^{2}}-1)}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{x^{3}}$ ……………………2 分

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+\dfrac{x^{2}}{2!}+o(x^{2}))(x-\dfrac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right))-x(1+x)}{x^{3}}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^{3}}{2!}-\dfrac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)}{x^{3}}=\dfrac{2}{3}.$ ……………………8 分

七、（8 分）方程两边同时对自变量x求导得

$$-2\cos(xy)\sin(xy)(y+xy')+\frac{1-y'}{x-y}=1$$ ……………………2 分

整理解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-(x-y)[y\sin(2xy)+1]}{1+x(x-y)\sin(2xy)}$. ……………………4 分

又当 $x=0$时，$y=-\frac{1}{e}$，代入上式得 ……………………6 分

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1-\frac{1}{e}.$$ ……………………8 分

八、（8 分）由题意知 $P(v)=\frac{1}{100}(30+\frac{v}{2})L+18\frac{L}{v}$ ……………………2 分

$$P'(v)=\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}L-18\frac{L}{v^2}$$ ……………………4 分

令 $P'(v)=0$，得 $v=60$ ……………………6 分

由于 $P''(v)=\frac{36L}{v^3}>0$，故当 $v=60$ 时，$P(v)$ 是极小值，也是最小值

此时总费用最小 …………………..….8 分

九、（8 分） （1） 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$y'=\frac{-x(x-2)}{(x-1)^2}$$

令 $y'=0$，得 $x=0$，$x=2$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$\downarrow$	极小值 2	$\uparrow$	间断	$\uparrow$	极大值 -2	$\downarrow$

……………………2 分

(2) $y''=\frac{-2}{(x-1)^3}$

没有二阶导为零的点也没有二阶导不存在的点，所以曲线没有拐点。

当$x<1$时，$y''>0,$ 曲线是凹的；当$x>1$时，$y''<0,$ 曲线是凸的。

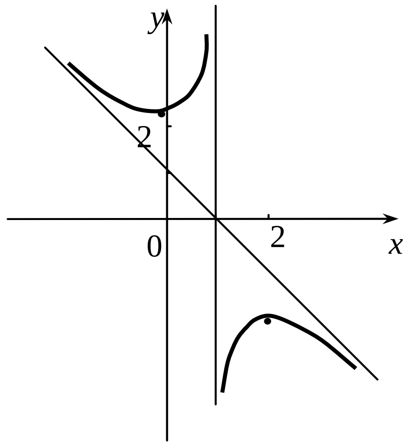
……………………4 分

（3）$\lim\limits_{x\to1} y=\infty$，故 $x=1$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-x^2}=-1$　　$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2-2x+2}{1-x}+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x}{1-x}=1$

$y=-x+1$ 是斜渐近线。　　　　**……………………6 分**

（4）　函数的图形为



……………………8 分

十、（8 分）证明：(1)单调性：由题知：$x_n>0$，$x_2=\dfrac{1+x_1^2}{2}=\dfrac{5}{8}>\dfrac{1}{2}=x_1,$

假设 $x_n>x_{n-1}$，则 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{(x_n+x_{n-1})(x_n-x_{n-1})}{2}>0,$

所以有 $x_{n+1}>x_n,$ 从而由数学归纳法知：$\{x_n\}$为单增数列. **………………3 分**

(2)有界性：$x_1=\dfrac{1}{2}<1,$ 假设 $x_n<1,$ 则 $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}<\dfrac{1+1}{2}=1,$

因此由数学归纳法知：$x_n<1$，即数列 x_n 有界。

由单调有界准则知：$\{x_n\}$有极限。　　　　**……………………6 分**

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,$ 在 $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}$ 两边取极限，得

$a=\dfrac{1+a^2}{2}$，$\Rightarrow$ $a=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$ ....**8 分**

十一、（8 分）曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,\ f(b))$ 处的切线方程为：

$$y-f(b)=f'(b)(x-b)$$

令 $y=0$，得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$ ....**3 分**

由 $f(a)=0,\ f'(x)>0,$ 知 $f(x)$ 严格单增，

故当 $b>a$ 时，有 $f(b)>f(a)=0$，又 $f'(b)>0,$ 知 $\dfrac{f(b)}{f'(b)}>0$，

所以有 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$ 成立. ....**5 分**

又 $x_0-a=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}-a=\dfrac{f'(b)(b-a)-f(b)}{f'(b)}$

$$=\frac{f'(b)(b-a)-[f(b)-f(a)]}{f'(b)}\quad(\because f(a)=0)$$

$$=\frac{f'(b)(b-a)-f'(\xi)(b-a)}{f'(b)}\quad(a<\xi<b)\text{（由拉氏中值定理）}$$

$$=\frac{[f'(b)-f'(\xi)](b-a)}{f'(b)}\qquad(1)$$

由 $f''(x)>0,$ 知 $f'(x)$ 单增，从而有 $f'(b)>f'(\xi),\quad(b>\xi>a)$

所以（1）式大于零。从而由 $x_0-a>0,\Rightarrow x_0>a.$

综上所述有 $a<x_0<b.$ 恒成立. ....**8 分**

注：后半段也可以这样证明：

要证 $x_0>a,$ 即 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}-a>0.$

设 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-a$，则 $g'(x)=1-\dfrac{f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f'^2(x)}$

$$=\frac{f''(x)f(x)}{f'^2(x)}>0\quad(\text{当}x>a\text{时})$$

所以 $g(x)$ 单增，又 $g(a)=0$，故当 $x>a$ 时，有 $g(x)>0$。

令 $x=b,$ 有 $g(b)>0,$ 从而 $x_0>a,$

综上所述有　　$a<x_0<b.$　恒成立.　……………………8 分

方法 2：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,\ f(b))$ 处的切线方程为：

$y-f(b)=f'(b)(x-b)$　　　　　　………………2 分

即 $y=f(b)+f'(b)(x-b)$，由题意知：

要证结论可以转化为函数 $F(x)=f(b)+f'(b)(x-b)$ 在 (a,b) 内有零点.

显然 $F(x)\in C[a,b],\quad F(a)=f(b)+f'(b)(a-b),\quad F(b)=f(b).$

由 $f(a)=0,\ f'(x)>0,$ 知 $f(x)$ 严格单增，故当 $b>a$ 时，有 $f(b)>f(a)=0$，

从而知　$F(b)=f(b)>0,$　　　　　……………………5 分

又将 $f(x)$ 在点 b 进行一阶泰勒展开式，有　(ξ 介于 x，b 之间）

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-b)^2=F(a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-b)^2,$$

令 $x=a,$ 就有 $0=f(a)=F(a)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(a-b)^2$，就有

$$F(a)=-\frac{f''(\xi)}{2!}(a-b)^2<0\quad (\because f''(x)>0)$$

这样我们就有 $F(a)\cdot F(b)<0$，由零点定理可知 $F(x)$ 在 (a,b) 内有零点.

从而结论成立.　　　　　　……………………8 分

一、填空题详解

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}$$

2. 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}(1+\dfrac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+\dfrac{\sin t}{x})^{\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{x\sin t}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{x\sin t}{t}}=e^x$

当 $x=0$ 时，函数没有定义。$\therefore\ f(x)=e^{x}(x\neq 0)$

$x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，

又 $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{x}=1$，$\therefore\ x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类可去间断点

3. 将曲线 L 的极坐标方程化为参数方程 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases}$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$

$$\text{斜率}\quad k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

将 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 代入参数方程，得 $x=0, y=\frac{\pi}{2}$，故所求切线方程为

$$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)\text{，即 }\frac{2}{\pi}x+y-\frac{\pi}{2}=0\text{。}$$

4. 取 $u=2^{x}, v=x^{2}$，由莱布尼兹公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$，得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(2^x)^{(n-k)}(x^2)^k=(2^x)^{(n)}x^2+n(2^x)^{(n-1)}\cdot(x^2)'+\frac{n(n-1)}{2!}(2^x)^{(n-2)}(x^2)''$$

$$=(2^x\ln^n 2)x^2+n(2^x\ln^{(n-1)}2)\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}(2^x\ln^{n-2}2)\cdot 2$$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=n(n-1)\ln^{n-2}2$$

或利用泰勒公式，

$$\because\ x^2 2^x=x^2e^{x\ln 2}=x^2\left(1+x\ln 2+\frac{(x\ln 2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}\right)+o(x^{n-2}))$$

$$=x^2+x^3\ln 2+\frac{\ln^2 2}{2!}x^4+\cdots+\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!}x^n+o(x^n))$$

由 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，得 $f^{(n)}(0)=a_n n!=\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!}n!=n(n-1)\ln^{n-2}2$

5. 两边取对数 $\ln y = \arcsin x \ln(\tan 2x)$

两边对 x 求导 $\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(\tan 2x) + \arcsin x \frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x}$

$$\therefore y' = (\tan 2x)^{\arcsin x}\left(\frac{\ln(\tan 2x)}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x}\right)$$

$$dy = \left[(\tan 2x)^{\arcsin x}\left(\frac{\ln(\tan 2x)}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x}\right)\right]dx$$