2006-2007 学年《微积分 A》第二学期期末考试

参考答案及评分标准

2007 年 7 月 10 日

一、1 在L上取点$M(1,a,2)$， 直线L的方向向量为$\vec{s}=\{k,1,-4\}$，

平面的法向量为：$\vec{n}=\{3,-2,1\}$， ………..3 分

由题意，有：$3-2a+2=7,\quad 3k-2-4=0$

解得：$a=-1, k=2.$ …………6 分

2 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}f+\dfrac{y}{x}f'+y\varphi'.$.……… 3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'\cdot x+\frac{1}{x}f'+\frac{y}{x}f''\cdot x+\varphi'+y\varphi''$$

$=yf''+\varphi'+y\varphi''$ …………6 分

3 曲面的法向量：$\{2x,4y,z\}$， $\vec{n}=\{\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\}$ ……..2 分

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{1+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{1+y^2+z^2}.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{(0,1,1)}=1,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}|_{(0,1,1)}=\dfrac{2}{3},\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}|_{(0,1,1)}=\dfrac{2}{3}.$ ……………4 分

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}|_{(0,1,1)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times 1+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ….……6 分

4 $I=\iint\limits_D y^2dxdy\ =\int_0^1 dx\int_{x^2}^x y^2dy$ …………… .3 分

$=\int_0^1\dfrac{1}{3}(x^3-x^6)dx=\dfrac{1}{28}.$ ……………..6 分

5 考虑正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n-1}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n-1}}=\frac{1}{2}$$ ，……… 2 分

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由正项级数的比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 发散。 ………….3 分

又原级数为交错级数，记 $u_n=\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})>0$ ，

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 易见，$u_{n+1}<u_n$ ，由莱布尼茨判敛法知，原级数收敛，从而原级数条件收敛。 …………….6 分

二、1 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-2y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2x=0\end{cases}$ ，解得驻点：$(0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ……..2 分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

在驻点$(0,0)$处有：

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

$B^2-AC=4>0,$ 所以$f(x,y)$在 $(0,0)$ 处不取极值。…………4 分

在驻点$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$处有：

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

$B^2-AC=-4<0,$ 且$A=4>0$

$\therefore$ $f(x)$在点 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 处取得极小值，极小值$=f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=-\frac{4}{27}.$

$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$为极小值点. ……………7 分

2 解:Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 1.$

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$ ……………2 分

$$I=\iint_D (x+y+\sqrt{1-x^2-y^2})\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$ ………..4 分

$$=\iint_D (x+y+\sqrt{1-x^2-y^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$ ……....5 分

$$=\iint_D dxdy=\pi$$ ……………..7 分

3 添加辅助线：$\overrightarrow{BA}$, 则 $L+\overrightarrow{BA}$ 构成封闭曲线。由 Green 公式，得

$$I=\int_{L+\overrightarrow{BA}}(e^y-yx^2)dx+(xe^y-2\sin y+xy^2)dy$$

$$-\int_{\overrightarrow{BA}}(e^y-yx^2)dx+(xe^y-2\sin y+xy^2)dy$$

$$=\iint_D (x^2+y^2)dxdy-\int_{-1}^{1}e^0dx$$ …………….. 4 分

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho-2=\frac{\pi}{4}-2$$ ……………....7 分

4 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上为偶函数，故$f(x)$的付氏级数为余弦级数.

$$b_n=0,\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)dx=0,$$ ………………..2 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nx dx=-\frac{4}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k,k=1,2,\cdots\\ \dfrac{8}{n^2\pi} & n=2k-1,k=1,2,\cdots\end{cases}$$ …………………4 分

$\therefore \quad f(x)=\pi-2|x|=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x, \quad -\pi\le x\le\pi.$ ..7 分

三、对 x 求导，得 $\begin{cases}\frac{dz}{dx}=2x\\ 3+2\frac{dy}{dx}=0\end{cases}$，在点 $(1,-2,1)$ 处，$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}\\ \frac{dz}{dx}=2\end{cases}$，

曲线 Γ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为 $\vec{\tau}=\{1,-\frac{3}{2},2\}$， ……..3 分

直线L的方向向量为：$\vec{s}=\{3,-5,5\}\times\{1,0,5\}=\{-25,-10,5\}$ …6 分

$\vec{\tau}\cdot\vec{s}=\{1,-\frac{3}{2},2\}\cdot\{-25,-10,5\}=0$ ，结论得证。 ……..8 分

四、$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n}{3^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{3}$，$\therefore \quad R=3$， ………1 分

收敛区间为：$|x-1|<3$,即 $-2<x<4.$ …………2 分

$x=-2$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,收敛； $x=4$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,发散。

所以幂级数的收敛域为：$[-2,4).$ ……………4 分

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n n},$

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{4-x}.$ ….6 分

$S(x)=S(1)+\int_1^x S'(x)dx=\int_1^x\frac{1}{4-x}dx=\ln\frac{3}{4-x}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n n}=\ln\frac{3}{4-x}, \quad x\in[-2,4)$ ………….8 分

五、补充平面 $S_1: z=1, x^2+y^2\le 1,$ 取下侧，则由 Gauss 公式

$I=\iint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1} \;=-\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+1)dxdydz+\iint\limits_{D:x^2+y^2\le 1}dxdy$ ……..4 分

$$=-\int_0^1 dz \iint_{D_z: x^2+y^2\le z} (x^2+y^2+1)dxdy+\pi$$

$$=-\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{z}} (\rho^2+1)\rho d\rho+\pi$$ ……………6 分

$$=\frac{\pi}{3}$$ ………….8 分

六、 $V=\iiint\limits_V dV=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi dr=\frac{\pi}{3}$ ……………..3 分

由对称性，有 $\bar{x}=\bar{y}=0$，设密度 $\mu=1$.则 ………….5 分

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V zdV}{\iiint\limits_V dV}$$ ， …………..7 分

而 $\iiint\limits_V zdV=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi r^2\sin\varphi dr=\frac{3\pi}{16}$ ………..9 分

$\therefore \bar{z}=\frac{3\pi}{16}\times\frac{3}{\pi}=\frac{9}{16}$. 所以质心坐标为：$(0,0,\frac{9}{16})$. ………….10 分

七、(1) $F(t)=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2 dr$ ..3 分

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，所以 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且

$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$. ……………4 分

(2 因为 $f(0)\ne 0$,不妨设 $f(0)>0$,由 $f(x)$ 连续,及连续函数的定义和极限的保号性知：存在零点的某个右邻域，使得 $f(x)$ 在此邻域内恒大于零，当 n 足够大时，原级数为正项级数，又原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\lambda}F'(\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi}{n^{1+\lambda}}f(\frac{1}{n^2})$,且有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\pi f(\frac{1}{n^2})}{n^{1+\lambda}} \Big/ \frac{1}{n^{1+\lambda}} = 4\pi f(0).$$ ………………6 分

由正项级数的比较判敛法知：

当 $\lambda > 0$ 时，有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi M}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，所以原级数收敛。

当 $\lambda \le 0$ 时，有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 发散，所以原级数发散。

结论得证。 …………8 分