

工科数学分析期中试题

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 7 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 $y = f^2(a^x) + \arcsin g(x)$, f, g 是可导函数, 则 $dy =$ _____.

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{f(x)}{\sin x}} - 1}{x^2 \arctan x} = 4$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim cx^k$, 则 $c =$ _____, $k =$ _____.

3. 设 $y = \sin^2 x$, 则当 $n \geq 1$, $y^{(n)} =$ _____.

4. 一个圆锥形的蓄水池, 高为 10m, 底半径为 4m, 水以 $5\text{m}^3/\text{min}$ 的速率流进水池, 当水深为 5m 时, 水面上升的速率为_____.

5. 已知 $xe^{-x} - \sin x = ax^2 + bx^3 + o(x^3)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

二. (8 分) 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

三. (8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} \right)^x$.

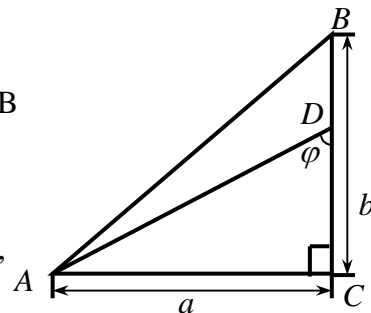
四. (9 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ 是连续函数, 求 a 的值, 并求 $f'(x)$.

五. (8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\ln(1 + \tan^3 x)}$.

六. (9 分) 已知曲线 $xy^3 = 2y + 1$ 与 $y = ax^2 + bx$ 在点 $(1, -1)$ 相切, 试确定 a 和 b 的值.

七. (9 分) 设 $y_1 = \frac{1}{3}, y_n = \frac{1}{3} + \frac{y_{n-1}^2}{3} \quad (n \geq 2)$, 证明数列 $\{y_n\}$ 有极限, 并求此极限.

八. (9 分) 如图, 从南至北的铁路经过 B 城, 某工厂 A 距此铁路的最短距离 AC 为 a (千米), BC 为 b (千米) ($b \neq 0$), 为了从 A 到 B 运输货物最经济, 要从工厂修一条侧轨 AD, 若每吨货物运输价格沿侧轨为 p (元/千米), 而沿主轨为 q (元/千米), 且 $(p > q)$, 问侧轨的角度 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 为多少时最经济. (用微积分的方法)



九. (9 分) 证明不等式 $x + \ln(1 - x) \geq x \ln(1 - x) \quad (x < 1)$.

十. (13 分) 设 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, 研究函数的性态, 并作出函数的图形.

十一. (8 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 且 $f(1) = 1, f(2) = -1$, 证明在 $(0, 2)$

内存在 ξ , 使得 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$.