2015 级《微积分 A》(下)期末考试

参考答案及评分标准

2016 年 6 月 24 日

一、填空(每小题 4 分,共 20 分)

1. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$;　　$(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$;

2. $\{\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\}$,　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$;　　　3. 6π;

4. $\dfrac{1}{28}$;

5. 绝对收敛级数:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{3^n}$;条件收敛级数:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

发散级数:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$.

二、　$gradw=\{\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}\}$　　………2 分

$=\{f_1'+yzf_2',f_1'+xzf_2',xyf_2'\}$　　………4 分

$div(gradw)=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$　　………6 分

$=2f_{11}''+2z(x+y)f_{12}''+(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)f_{22}''$

………8 分

三、　$J_z=\iiint\limits_V \mu(x^2+y^2)dV$　(不妨设$\mu=1$)　　………2 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^4\sin^3\varphi dr$　　………6 分

$=\dfrac{64\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cos^5\varphi d\varphi$

$$=\frac{11}{30}\pi a^5.$$ ……… 8 分

四、 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-2y=0$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2y-2x=0$ 得驻点为 $(0,0),(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ……… 2 分

又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ ……… 4 分

在点 $(0,0)$ 处：$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$

$B^2-AC=4>0,$ 所以 $(0,0)$ 点不是极值点. ……… 6 分

在点 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 处：$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4,\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$

$B^2-AC=-4<0,$ 且 $A=4>0$，所以 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 点是极小值点，极小值

为：$z_{极小}=-\frac{4}{27}.$ ……… 8 分

五、记 $X=2xy+\varphi(y),\quad Y=(x-y)^2$

由题意知：$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ ……… 2 分

$\Rightarrow\quad 2(x-y)=2x+\varphi'(y)$

$\Rightarrow\quad \varphi'(y)=-2y$

$\Rightarrow\quad \varphi(y)=-y^2+C,$ 由 $\varphi(0)=1$，得 $C=1$

$\Rightarrow\quad \varphi(y)=-y^2+1$ ……… 4 分

由题意知曲线积分与路径无关，且路径的起点、终点坐标分别为：

$(0,0),(1,2)$，选择折线路径：$(0,0)\to(1,0)\to(1,2)$，则

$I=\int_0^1 \varphi(0)dx+\int_0^2 (1-y)^2 dy$ ……… 6 分

$=\frac{5}{3}$ ……… 8 分

六、 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$,所以收敛半径 $R=2$.所以幂级数的

收敛区间为：$|x-1|<2 \quad \Rightarrow -1<x<3$ ，

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，级数收敛；

当 $x=3$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，级数发散；所以收敛域为：$[-1,3)$.

……… 3 分

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$， $x\in[-1,3)$.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{3-x}. \qquad |x-1|<2,\quad 即 -1<x<3.$$

……… 5 分

$$S(x)-S(1)=\int_1^x S'(x)dx=\int_1^x \frac{1}{3-x}dx=-\ln(3-x)+\ln 2=\ln\frac{2}{3-x}$$

又 $S(1)=0$, 所以 $S(x)=\ln\frac{2}{3-x}$, $x\in(-1,3)$. ……… 7 分

又因为 $S(x)$在收敛域内连续，所以有$S(-1)=\lim\limits_{x\to-1}S(x)=-\ln 2$.

所以 $S(x)=\ln\frac{2}{3-x}$, $x\in[-1,3)$. ……… 8 分

七、 方程两边同时对 x 求偏导，得

$$\begin{cases} 1 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = 2v\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2u\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}\ln v + u^2\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad \text{……… 2 分}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{2(u^2 - v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-v}{2(u^2 - v^2)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u^2}{2(u^2 - v^2)}(2\ln v - 1). \qquad \text{……… 4 分}$$

方程两边同时对 y 求偏导，得

$$\begin{cases} 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = 2v\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2u\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}\ln v + u^2\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{……… 6 分}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-v}{2(u^2 - v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{2(u^2 - v^2)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u}{2(u^2 - v^2)v}(u^2 - v^2\ln v). \qquad \text{……… 8 分}$$

八、 $$f(x) = \frac{1}{3-x} + \ln x = \frac{1}{1-(x-2)} + \ln(2 + x - 2)$$

$$= \frac{1}{1-(x-2)} + \ln 2 + \ln(1 + \frac{x-2}{2}) \qquad \text{……… 2 分}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n2^n} \qquad \text{……… 4 分}$$

$$= 1 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}](x-2)^n \qquad \text{……… 6 分}$$

收敛域为：$\begin{cases} -1 < x-2 < 1 \\ -1 < \dfrac{x-2}{2} \le 1 \end{cases}$，$\Rightarrow \quad 1 < x < 3$ ……… 8 分

九、添加辅助面 $S: z=0, x^2+y^2\le R^2$, 取下侧， ……… 2 分

$$I=\frac{1}{R^2}\iint_{\Sigma}(x^2z+1)dxdy+y^2xdydz+z^2ydzdx \qquad \text{……… 4 分}$$

$$=\frac{1}{R^2}(\iint_{\Sigma+S}-\iint_{S}) \qquad \text{（利用高斯公式）}$$

$$=\frac{1}{R^2}[-\iiint_V(y^2+z^2+x^2)dxdydz+\iint_{D:x^2+y^2\le R^2}dxdy] \qquad \text{……… 6 分}$$

$$=-\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\, dr+\pi \qquad \text{（由球坐标）}$$

$$=-\frac{2\pi}{5}R^3+\pi. \qquad \text{……… 8 分}$$

十、记 S 为以 L 为边界的平面：$x+z=1$ 上的部分，取上侧，

则 S 的法向量为: $\vec{n}=\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\}$， ……… 2 分

由 Stokes 公式，得

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & -z & -x\end{vmatrix}dS \qquad \text{……… 4 分}$$

$$=\iint_S\frac{-1}{\sqrt{2}}dS=\frac{-1}{\sqrt{2}}\iint_D\sqrt{2}dxdy \qquad \text{……… 6 分}$$

其中 D 为曲线 L 在 xoy 面上的投影曲线所围成的平面区域，

L 在 xoy 面上的投影曲线为椭圆: $2x^2-2x+y^2=0$. 即

$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$, 则 D 为：$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}\le 1$,

所以 $I=\frac{-1}{\sqrt{2}}\iint\limits_D \sqrt{2}dxdy=-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$ ……… 8 分

解法 2：直接计算，L的参数方程为：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \qquad t:0\to 2\pi \\ z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t \end{cases}$$ ……… 4 分

$$I=\oint_L 2ydx-zdy-xdz$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos^2 t-\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\cos t\sin t)dt$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$ ……… 8 分

十一、将 $f(x)$ 进行偶延拓，由狄立克莱收敛定理知：

$$S(x)=\begin{cases} \pi+x & x\in(0,\pi] \\ \pi-x & x\in[-\pi,0] \end{cases}$$ ……… 2 分

由和函数的周期性，当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时， $x-2\pi\in[-\pi,0]$

$$S(x)=S(x-2\pi)=3\pi-x$$ ……… 4 分

又 $-5+2\pi\in(0,\pi), \quad \therefore \quad S(-5)=S(-5+2\pi)=3\pi-5.$ ……… 5 分

$$b_n=0, \qquad n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi+x)dx=3\pi,$$ …….6 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi+x)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases} 0 & n=2k,k=1,2,\cdots \\ -\frac{4}{n^2\pi} & n=2k-1,k=1,2,\cdots \end{cases}$$ ……… 8 分