

## 数学分析 B(下)期末试题(A 卷)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共 5 页, 九个大题)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
签名										

一. 填空(每小题 4 分, 共 28 分)

1. 已知直线  $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{n}$  与平面  $\pi: 2x - y + z = 5$  平行, 则  $n =$  \_\_\_\_\_,  
直线  $L$  到平面  $\pi$  的距离  $d =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知方程  $x^2 + y^3 + z^2 = 4z$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$  \_\_\_\_\_.

3.  $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy$  在极坐标系中的累次积分表达式为 \_\_\_\_\_,  
此积分的值  $I =$  \_\_\_\_\_.

4. 设  $f(u, v)$  具有连续偏导数, 且  $f'_u(u, v) + f'_v(u, v) = uv$ , 则  $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$  所满足的微分方程为 \_\_\_\_\_, 此微分方程的通解为 \_\_\_\_\_.

5. 曲线  $y = x^2$  与直线  $y = 1$  围成一均匀薄片  $D$ , 其面密度  $\mu = 1$ , 则  $D$  的质量  $m =$  \_\_\_\_\_,  
质心坐标为 \_\_\_\_\_.

6. 设  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  是  $f(x)$  的以  $2\pi$  为周期的正弦级数,  $S(x)$  是此级数的和函数, 则  $b_2 =$  \_\_\_\_\_,  $S(-\frac{\pi}{2}) =$  \_\_\_\_\_,  $S(\pi) =$  \_\_\_\_\_.

7. 设曲线  $L: x^2 + y^2 = R^2$ , 则  $I = \oint_L (3x^2 + 5y^2 + 2x \cos y + 5 \sin y + 4) dl =$  \_\_\_\_\_.

二. (8 分) 求曲面  $S: xyz = a^2$  (其中  $x, y, z > 0$ ) 上点  $M(x, y, z)$  处的法向量  $\vec{n}$  以及曲面  $S$  在点  $M$  处的切平面与三坐标面所围立体的体积.

三. (9 分) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$  的收敛域及和函数.

四. (9 分) 设  $V$  是曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  ( $z \geq 1$ ) 与  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的有界闭区域, 计算积分  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ .

五. (10 分) 设  $f(x, y) = x^2 y + y^3 - y$ , 求  $f(x, y)$  的极值点和极值.

六. (10 分) 已知沿平面任意闭曲线  $L$ , 都有  $\oint_L (2xy + \varphi(y))dx + (x - y)^2 dy = 0$ , 且  $\varphi(0) = 1$ ,

求  $\varphi(y)$  的表达式及积分  $I = \int_{(0,0)}^{(1,2)} (2xy + \varphi(y))dx + (x - y)^2 dy$  的值.

七. (8 分) 将  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} \ln(1 + x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  展成  $x$  的幂级数, 并指出收敛域.

八. (9 分) 设  $S$  是曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $1 \leq z \leq 2$ ) 的下侧, 利用高斯公式计算曲面积分

$$I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + (z + 1) dxdy.$$

九. (9 分) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内有二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a$  ( $a \geq 0$  为实数),

判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right)$  的敛散性, 若收敛指出是条件收敛还是绝对收敛.