

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

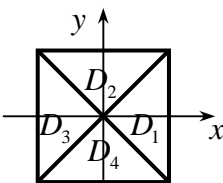
(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 中收敛的有_____.

2. 设 $\vec{A}(x, y, z) = xy\vec{i} + x \ln y \vec{j} + \ln(x^2 + z^2) \vec{k}$, 则 $\operatorname{div} \vec{A}(1, 2, 3) =$ _____.

3.  如图, 正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被对角线分成四个区域 D_1, D_2, D_3, D_4 , $I_k = \iint_{D_k} ye^x dx dy$, 则 $\max_k \{I_k\} =$ _____, $\min_k \{I_k\} =$ _____.

4. 设点 $M(x, y, z)$ 处力 \vec{F} 的大小等于此点到原点的距离, 而方向指向原点, 一质点在力 \vec{F} 的作用下沿曲线 $x = \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t$ 由点 $A(1, 0, 0)$ 移动到点 $B(0, 2, \pi)$, 则力 \vec{F} 所作的功 $W =$ _____.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是 $f(x) = x - 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的以 2π 为周期的正弦级数, 则 $b_5 =$ _____.

二. (8 分) 设 $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$, 交换积分次序, 并计算积分的值

三. (8 分) 求 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值点和极值.

四. (8 分) 求曲线 $\begin{cases} x + y - z = \ln z + 3 \\ xyz = 3 \end{cases}$ 在点 $P(1, 3, 1)$ 处的切线方程.

五. (9 分) 计算 $I = \iint_S \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS$, 其中 S 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 被柱面 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 所截下的有限部分.

六. (11 分) (1)求曲面 $z = -1 - \frac{x^2}{2} - y^2$ 在点 $P(2,1,-4)$ 处的切平面 π 的方程. (2)计算积分

$$I = \iiint_V x dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是平面 } \pi \text{ 与三个坐标面围成的有界区域.}$$

七. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n-1}$ 的收敛域及和函数.

八. (10 分) 利用格林公式计算 $I = \int_L (e^{-x} \cos y - 2y^3) dx + (e^{-x} \sin y - xy^2) dy$, 其中 L 为曲线

$$x = \sqrt{2y - y^2} \text{ 从点 } O(0,0) \text{ 到 } A(0,2).$$

九. (9 分) 把 $f(x) = x \ln(2+x)$ 展成 $x+1$ 的幂级数, 并指出收敛域.

十. (9 分) 证明 $(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy = 0$ 是全微分方程, 并求其通解.

十一. (9 分) 计算积分 $I = \oiint_S \frac{x^2 dy dz}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \frac{y^2 dz dx}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \frac{z^3 dx dy}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$, 其中 S

是曲面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 的内侧.