

一. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. $\frac{31}{10}$

3. $I_2, \quad I_4$

4. $-\frac{\pi^2}{2} - \frac{3}{2}$

5. $\frac{2(\pi-2)}{5\pi}$

二.
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} dy && \dots\dots\dots(3 \text{ 分}) \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} y \Big|_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 (\sin x - x \sin x) dx && \dots\dots\dots(6 \text{ 分}) \\ &= 1 - \sin 1 && \dots\dots\dots(8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

三. $f'_x = 2x(2+y^2) \quad f'_y = 2x^2y + \ln y + 1 \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$

令 $f'_x = 0 \quad f'_y = 0 \quad \text{得 } x=0 \quad y = \frac{1}{e} \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$

$$f''_{x^2} = 2(2+y^2) \quad f''_{xy} = 4xy \quad f''_{y^2} = 2x^2 + \frac{1}{y} \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

在点 $(0, \frac{1}{e})$ $A = 2(2 + \frac{1}{e^2}) \quad B = 0 \quad C = e$

$$AC - B^2 = 2e(2 + \frac{1}{e^2}) > 0 \quad \text{且 } A > 0$$

故 $(0, \frac{1}{e})$ 是极小值点, 极小值为 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

四. 两方程两端分别对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 1 + \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \frac{dz}{dx} \\ yz + xz \frac{dy}{dx} + xy \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

将点 P 代入得 $\begin{cases} 1 + \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} \\ 3 + \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$

解得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{5} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{5} \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$

$$\vec{s} = \{1, -\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}\} \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

切线 $\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{-9} = \frac{z-1}{-2} \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

五. $I = \iint_{D_{xy}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$= \frac{3}{2} \pi \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

六. (1) $\vec{n} = \{-x, -2y, -1\}|_P = \{-2, -2, -1\} \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$

切平面为 $2(x-2) + 2(y-1) + (z+4) = 0$

即 $2x + 2y + z = 2 \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

(2) $I = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-2x-2y} dz \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$

$$= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (2-2x-2y) dy \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 x(1-x)^2 dx \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{12} \dots\dots\dots(11 \text{ 分})$$

七. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1 \quad R=1 \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$x = \pm 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$ 收敛, 收敛域为 $x \in [-1, 1]$ $\dots\dots\dots(3 \text{ 分})$

令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{2n-2} \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$

$= \frac{x^2}{1+x^2} \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

$S(x) = \int_0^x \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - \arctan x \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n-1} = x^2 - x \arctan x \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$

八. $\oint_{L+AO} (e^{-x} \cos y - 2y^3) dx + (e^{-x} \sin y - xy^2) dy = \iint_D 5y^2 dx dy \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$

$= 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 \sin^2 \theta d\rho \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

$= 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$

$= \frac{25}{8} \pi \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

$\int_{AO} (e^{-x} \cos y - 2y^3) dx + (e^{-x} \sin y - xy^2) dy = - \int_{OA} (e^{-x} \sin y - xy^2) dy \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$

$= - \int_0^2 \sin y dy \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

$= \cos 2 - 1 \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$

$I = \oint_{L+AO} - \int_{AO} (e^{-x} \cos y - 2y^3) dx + (e^{-x} \sin y - xy^2) dy$
 $= \frac{25}{8} \pi + 1 - \cos 2 \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$

九. $f(x) = (-1 + (x+1))\ln(1 + (x+1))$ (2 分)

$$= (-1 + (x+1)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+1)^n$$
(4 分)
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+1)^{n+1}$$
(6 分)
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} (x+1)^n$$
(7 分)
$$= -(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) (x+1)^n$$
(8 分)

收敛域为 $-2 < x \leq 0$ (9 分)

十. $\frac{\partial Y}{\partial x} = -2y \sin x - 2x \sin y = \frac{\partial X}{\partial y}$

故所给方程是全微分方程(2 分)

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$$
(4 分)
$$= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$$
(6 分)
$$= y^2 \cos x + x^2 \cos y$$
(8 分)

通解为 $y^2 \cos x + x^2 \cos y = C$ (9 分)

十一. $I = \oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^3 dxdy$ (1 分)

$$= -\iiint_V (2x + 2y + 3z^2) dxdydz$$
(3 分)
$$= -\iiint_V 3z^2 dxdydz$$
(4 分)
$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} 3r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi dr$$
(6 分)
$$= -\frac{6\pi}{5} 2^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \sin\varphi d\varphi$$
(8 分)
$$= -\frac{24\pi}{5}$$
(9 分)