2014-2015-第二学期　工科数学分析期中试题解答（**2015.5**）

一. 1.　81

2.　$\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{13}}$

3.　$\int_{-1}^{0}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)dy$

4.　$\dfrac{327}{13}$

5.　$\dfrac{4}{15}\pi(a^2+b^2+c^2)$

二.　L_1 与 π 的交点为 $(-4,5,-2)$ ……………….(2 分)

L_1 的方向向量　$\vec{s}_1=\{2,-1,1\}$ ……………….(4 分)

π 的法向量 $\vec{n}=\{1,1,1\}$ ……………….(5 分)

$\vec{s}=\vec{n}\times\vec{s}=\{2,1,-3\}$ ……………….(7 分)

$L:\ \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$ ……………….(9 分)

三.　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+2xyf_2'$ ……………….(3 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+2xyf_{12}''+2yf_2'+2xy(f_{21}''+2xyf_{22}'')$ ……………….(5 分)

$=f_{11}''+4xyf_{12}''+4x^2y^2f_{22}''+2yf_2'$ ……………….(6 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''+x^2f_{12}''+2xf_2'+2xy(f_{21}''+x^2f_{22}'')$ ……...………….(8 分)

$=f_{11}''+(x^2+2xy)f_{12}''+2x^3yf_{22}''+2xf_2'$ ……………….(9 分)

四.　$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_{0}^{-2\cos\theta}\dfrac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho$ ……………….(4 分)

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}(2-2\sin\theta)d\theta$ ……………….(7 分)

$=\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}$ ……………….(9 分)

五. 当 $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x'(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\quad \text{……….(2 分)}$$

$$f_y'(x,y)=\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^3-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2y-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\quad \text{……….(4 分)}$$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1\quad \text{……….(6 分)}$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-1}{y}\ \text{不存在}\quad \text{…………….(8 分)}$$

六. (1) $$3x^2+2y^2+2z^2=12\quad \text{……………….(2 分)}$$

（2） $$\vec{n}=\{6x,4y,4z\}\big|_M=2\{3\sqrt{2},\sqrt{6},-\sqrt{6}\}\quad \text{……………….(4 分)}$$

$$\pi:3\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+\sqrt{6}(y-\sqrt{\frac{3}{2}})-\sqrt{6}(z+\sqrt{\frac{3}{2}})=0\quad \text{……………….(6 分)}$$

即 $$3\sqrt{2}x+\sqrt{6}y-\sqrt{6}z-12=0\quad \text{……………….(7 分)}$$

（3） $$d=\frac{12}{\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{6})^2}}=\frac{12}{\sqrt{30}}\quad \text{……………….(9 分)}$$

七. $$f_1'\cdot d(x^2-z^2)+f_2'\cdot d(x+y)+f_3'\cdot d(x-u)=0\quad \text{……………….(2 分)}$$

$$f_1'\cdot(2xdx-2zdz)+f_2'\cdot(dx+dy)+f_3'\cdot(dx-du)=0\quad \text{……………….(4 分)}$$

$$du=\frac{(2xf_1'+f_2'+f_3')dx+f_2'dy-2zf_1'dz}{f_3'}\quad \text{……………….(6 分)}$$

$$\mathrm{grad}\,u=\{\frac{2xf_1'+f_2'+f_3'}{f_3'},\frac{f_2'}{f_3'},\frac{-2zf_1'}{f_3'}\}\quad \text{……………….(8 分)}$$

八. $$I_1=2\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 dx\int_0^{1-x}(x+z)dz\quad \text{……………….(3 分)}$$

$$=\int_0^1 dy\int_{y^2}^1(1-x^2)dx\quad \text{……………….(5 分)}$$

$$=\int_0^1(\frac{2}{3}-y^2+\frac{1}{3}y^6)dy\quad \text{……………….(7 分)}$$

$$=\frac{8}{21}\quad \text{……………….(8 分)}$$

$$I_2=0\quad \text{……………….(10 分)}$$

九. $$\begin{cases} y = e^u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = e^u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$ ……………….(3 分)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{e^u - ue^u + v}$$ ……………….(4 分)

$$\begin{cases} x = e^u \dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = e^u \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$ ……………….(7 分)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x-u}{e^u - ue^u + v}$$ ……………….(8 分)

十. 设三角形顶点为 $A(0,1)$，$B(-x,y),C(x,y)$ ……………….(1 分)

则三角形面积 $S = x(1-y)$ ……………….(2 分)

其中 $$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$ ……………….(3 分)

设 $$F(x,y) = x(1-y) + \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1)$$ ……………….(4 分)

$$\begin{cases} F_x' = 1 - y + \dfrac{\lambda}{2}x = 0 \\ F_y' = -x + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$ …..…………….(6 分)

解得 $x = \sqrt{3}$ $y = -\dfrac{1}{2}$ ……………….(8 分)

由问题实际意义,... 故当 $x = \sqrt{3}$, $y = -\dfrac{1}{2}$ 时 S 取得最大值，且

$$S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$ ..………...(9 分)

十一. (1) 两曲面有两条交线$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$和 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ …………(1 分)

$$M=\iiint\limits_V dV$$ ……………….(2 分)

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi(\frac{z}{2}-z^2)dz+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi(1-\frac{z}{2})dz-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(1-z^2)dz$$ ...…………….(4 分)

$$=\frac{3}{8}\pi$$ ……………….(5 分)

(2) $$\bar{x}=\bar{y}=0$$ ……………….(7 分)

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_V zdV$$ ……………….(8 分)

$$=\frac{1}{M}(\int_0^{\frac{1}{2}}\pi z(\frac{z}{2}-z^2)dz+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi z(1-\frac{z}{2})dz-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi z(1-z^2)dz)$$ ……….(10 分)

$$=\frac{41}{36}$$ ……………….(11 分)

质心 $(0,0,\dfrac{41}{36})$