课程编号：A071001　　北京理工大学 2007-2008 学年第一学期

数学分析期中试题

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{1-\cos x}=$__________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$，则 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=$_____，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=$_____，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第_____类间断点.

3. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则化成最简形式时，$f'(x)=$__________________.

4. 方程 $x^3-3x+1=0$ 有_____个实根，其中有_____个正实根，_____个负实根.

5. $f(x)=xe^{2x}$ 的带皮亚诺型余项的三阶麦克劳林公式______________________________.

6. 一动点沿抛物线 $y=x^2$ 向右移动，已知动点经过点 $(2,4)$ 时沿 x 轴方向的分速度为 $3cm/s$，则它沿 y 轴方向的分速度为_______ cm/s.

7. 设当 $x\to 0$ 时 $\sin x-x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则 $c=$______，$k=$______.

8. 设 $y=f(\arctan x)+\sqrt{1+g^2(x)}$，其中 f,g 可导，则 $dy=$__________________________.

9. 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2-3x+2}$ 有斜渐近线____________________.

10. 函数 $f(x)=(x-1)\left|x^2-x\right|$ 在点_________________处导数不存在.

二. (8 分) 已知方程 $ye^x+\ln(xy)=e$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

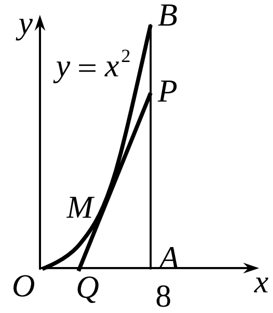
三. (8 分) 设 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

四. (8 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)(x^2+2)} & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，求 a,b 的值.

五. (8 分) 证明不等式 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2 \quad (x>0)$.

六. (12 分) 利用导数研究函数 $y=\dfrac{1-2x}{x^2}+1$ 的的性态，并作出其图形.

七. (10 分) 由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=8$ 和 x 轴围成一曲边三角形 OAB (如图)，在曲线 OB 上求一点 M，使过 M 点所作抛物线的切线与 OA, AB 所围成的三角形 APQ 具有最大面积.



.八. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim_{x\to 0}(1+\frac{f(x)-1}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$.

(1) 求 $f(0)$，$f'(0)$；　　(2) 求 $\lim_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)-1}{x})^{\frac{1}{x}}$.

九. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=f(2)=1$，证明在区间 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=2\xi-1$.