课程编号：A071001　北京理工大学 2005-2006 学年第一学期

数学分析期中试题

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $y=\sin f(x^2)+f(\tan^2 x)$，其中 f 是可导函数，求 dy.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & x\le 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+\sin x}-1} & 0<x\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断间断点的类型.

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+y^2\ln x-2=0$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 设 $\begin{cases} x=te^t \\ y=\ln(2-e^t) \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2} & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

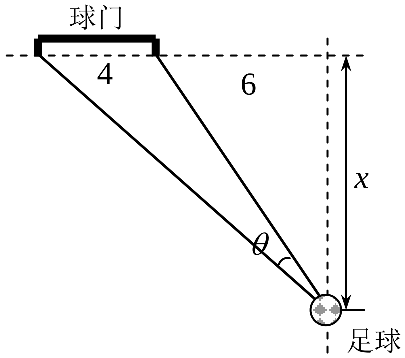
4. 设 $f(x)=\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$，

(1) 将 $f(x)$ 展成 6 阶麦可劳林公式(皮亚诺余项);

(2) 求 $f^{(4)}(0), f^{(5)}(0)$.

三.（8 分）当 $x>1$，证明 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$.

四.（8 分）如图所示，已知足球门宽为 4 米，在距离右门柱 6 米处有一球员沿垂直于底线的方向带球前进，问他在离底线的距离 x 为多少时将获得最大的射门张角 θ.



五. (6 分)设函数 $f(x)$ 二阶可导，$\left|f''(0)\right|=5$，曲线 $y=f(x)$ 是凸弧，并且在原点处与 x 轴相切，求此曲线在原点处的曲率半径，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{f(x)}$.

六.（6 分）已知 $f(x)$ 是以 5 为周期的函数，在 $x=0$ 处可导，在 $x=0$ 的某邻域内有 $f(\sin x)=2\sin x+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 当 $x\to 0$ 时是比 x 高阶的无穷小，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 处的切线.

七. （12 分）(1) 作出函数 $y=xe^{-x}$ 的图形;

(2) 试确定方程 $xe^{-x}=a$ 的实根的个数，并指出每一根所在的区间.

八. (8 分)设函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)内二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0,\quad f''(x)<0$，若 $f(x)$ 在[0,1]上的最大值 $M>0$，证明:

(1) 对任意给定的正整数 n，存在惟一的 $x_n\in(0,1)$，使得 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$;函数性质与第三章的结合。反正法，单调性法。

(2) 数列 $\{x_n\}$ 有极限.有极限的方法，数列的常见研究方法，单调性的反用。