

2011 级《微积分 A》期末试卷(A)

班 级_____ 学 号_____ 姓 名_____

(注: 本试卷共 6 页, 十一个大题。请撕下试卷最后一张空白纸做草稿。)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得 分												
评阅 人												

一、填空 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} =$ _____; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt =$ _____.

2. 设 $y = x^2 + \ln x$, 则 $\frac{dx}{dy} =$ _____; 设 f 可导, $y = f(\tan x) + \sqrt{1-x^2}$,

则 $dy =$ _____.

3. 广义积分 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} =$ _____; 定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.

4. 微分方程 $y'' = \frac{1}{1+x^2}$ 的通解为 _____;

以 $y_1 = -\cos x$, $y_2 = 5 \sin x$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程是 _____.

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+bx} - 1}{x} & x < 0 \end{cases}$ 是连续函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

二 (8 分) 求不定积分 $\int \left(\frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} + \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} \right) dx$

三 (8分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 及参数 $t=0$ 时的曲率。

四 (8分) 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 求证: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$,

并计算定积分 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi - 2x)} dx$.

五 (8 分) 求微分方程 $y'' + y' - 2y = e^{-2x} + \cos x$ 的通解.

六、(8 分) 设当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 满足微分方程 $xf'(x) - 3f(x) = -6x^2$, 且由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为最小, 求 $f(x)$ 的表达式及平面图形 D 的面积.

七、(8 分)设有一半径为 1 米的圆板,垂直放在水中,圆板的圆心与水平面距离为 2 米,
试求圆板的一侧所受水的侧压力.(注: 设水的比重为 μ)

八、(8 分) 设 $e < a < b < e^2$, 证明: $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

九、(8 分) 设 $\rho = \rho(\theta)$ 为非负函数, $\rho(0) = 1$, 且对任一 $\theta > 0$, 极坐标曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 在区间 $[0, \theta]$ 上所对应的一段弧长等于该区间所对应的曲边扇形面积的 2 倍, 求此曲线的方程。

十、(8 分) 设方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $y = y(x)$ 在 $x > 0$ 范围内的极值, 并判断是极大值还是极小值.

十一、(8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\int_0^\xi f(x)dx = 0$.