2009 级第一学期工科数学分析期中试题解答

一. 1. 2, 3 (2 分, 2 分)

2. $(\frac{2x}{1+x^4} f'(\arctan x^2)+\frac{2f(x)f'(x)}{\sqrt{1-f^4(x)}})dx$ (每项 2 分，缺少 dx 扣 1 分)

3. $(1+t^2)e^{t^2}$，$(1+t^2)(2+t^2)e^{t^2}$ (2 分, 2 分)

4. $x=1, x=4$，$\arctan\frac{6}{7}$ (1 分, 1 分, 2 分)

5. $\frac{y-y^2\cos(xy)}{1+xy\cos(xy)}$，$e-e^2$ (2 分, 2 分)

6. 2, 3, $\frac{1}{6}$ (2 分, 1 分, 1 分)

7. -28cm^2/sec (缺少负号扣 1 分，缺少量纲扣 1 分)

二. 令 $y=(\cot x)^{\frac{1}{\ln x^2}}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{2\ln x}$ ……………………….(1 分)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{2}{x}}$$ ……….……………….(5 分)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{2}{x}}=-\frac{1}{2}$$ ………………………….(8 分)

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$ ………………………….(9 分)

三. $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$ …………………………..(1 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$ ……………………………(2 分)

在 $(0,e)$, $(e,+\infty)$, $f(x)$ 单调 ……………………………(3 分)

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$ $f(e)=k$ …………………….(6 分)

当 $k>0$, $f(x)=0$ 有两个实根

当 $k=0$, $f(x)=0$ 有一个实根

当 $k<0$, $f(x)=0$ 没有实根 ……………………….(9 分)

四. $x_2=1+\frac{1}{2}>x_1$，设 $x_n>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{1+x_n}-1-\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$$

$\therefore\{x_n\}$ 单调增加 ………………(3 分)

由于 $x_n>0$，故 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<2$，$\therefore\{x_n\}$ 有上界

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在 ………………6 分)

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 由 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 得 $A=1+\frac{A}{1+A}$ ………………(8 分)

解得 $A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$(舍去负值) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ………………(9 分)

五. 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0}y=\infty$ $x=0$ 是垂直渐近线 ………………..(1 分)

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=3$ $\lim\limits_{x\to\infty}(y-3x)=1$ $y=3x+1$ 是斜渐近线 ………………..(3 分)

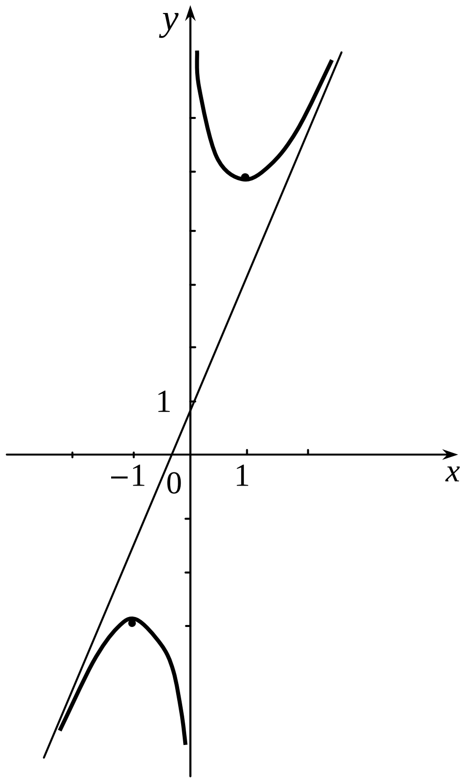
$$y'=\frac{3(x^4-1)}{x^4}$$ …..………………(4 分)

令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$ ……………………(5 分)

$$y''=\frac{12}{x^5}$$ ……………………(6 分)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−		+		+
y		极大值 -3		间断		极小值 5	

……………(9 分)



……………..(11 分)

六. 当 $x>1$ $f(x)=x^2$ 当 $x<1$ $f(x)=\dfrac{ax+b}{2}$

$$f(1)=\frac{1+a+b}{3}$$ ………………….(3 分)

由 $f(1-0)=f(1+0)$ 得 $\dfrac{a+b}{2}=1$ 即 $a+b=2$ …………………..(4 分)

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{ax+b}{2}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax-a}{2(x-1)}=\frac{a}{2}$$ ……………………(6 分)

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$ ……………………(7 分)

由 $f'_-(1)=f'_+(1)$ $\dfrac{a}{2}=2$ ……………………(8 分)

$a=4$ $b=-2$ ………………………..(9 分)

七. $$y=k\frac{\cos\theta}{h^2+r^2}=k\frac{h}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ………………………..(3 分)

$$\frac{dy}{dh}=k\frac{r^2-2h^2}{(h^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}$$ ...………………………(6 分)

令 $\dfrac{dy}{dh}=0$ 得 $h=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ ………………………….(8 分)

由问题的实际意义，h 确有最大值，又驻点惟一，故当 $h=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ 物体的亮度最好……….(9 分)

八. 令 $f(x)=\ln(1+x)-x$ ……………………….(1 分)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$$ ……………………….(2 分)

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0)=-1<0$$

故 $f(0)=0$ 是极大值也是最大值，所以 $f(x)\le 0$，即

$$\ln(1+x)\le x$$ ……………………….(5 分)

令 $g(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$ ……………………..(6 分)

$$g'(x)=\ln(1+x)$$ ……………………..(7 分)

令 $g'(x)=0$，得 $x=0$

$$g''(x)=\frac{1}{1+x} \qquad g''(0)=1>0$$

故 $g(0)=0$ 是极小值也是最小值，所以 $g(x)\ge 0$，即

$$(1+x)\ln(1+x)-x\ge 0 \qquad \frac{x}{1+x}\le \ln(1+x)$$ ……………….(10 分)

九. 令 $F(x)=(x-b)^a f(x)$ ……………………….(2 分)

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$

根据罗尔定理，在 (a,b) 内存在 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即

$$a(\xi-b)^{a-1}f(\xi)+(\xi-b)^a f'(\xi)=0$$ ……………………..(5 分)

由于 $(\xi-b)^{a-1}\ne 0$ 故 $af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$$ ……………………..(6 分)