2012级《微积分A下》期中试卷答案

一、填空题（每小题4分，共20分）

(1). $\{3, \dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}\}$, $-\dfrac{11}{9}$; (2). $\sqrt{34}$; (3). 2;

(4). $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-2\sqrt{2}}$; (5). $(t-1)f(t)$.

二、选择题（每小题2分，共10分）

(1). B; (2). D; (3). B; (4). C; (5). B

三、（本题满分10分）求直线L的标准方程（点向式方程），使其满足：(1)过点$A(1,0,-2)$；(2)与平面π：$3x-y+2z+3=0$平行；(3)与直线L_1: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-1}$相交.

L_1的方向向量$\vec{s}_1=\{4,-2,-1\}$，其上有一点$A_1(1,3,0)$; AA_1构成的向量$\overrightarrow{AA_1}=\{0,3,2\}$ ……………… (2')

设所求直线L的方向向量为$\vec{s}$,

则$\vec{s}$垂直于平面π的方向向量$\vec{n}=\{3,-1,2\}$ ……………… (4')

同时，$\vec{s}$垂直于由$\vec{s}_1$和$\overrightarrow{AA_1}$所确定平面的法向量$\vec{n}_1$,

$\vec{n}_1=\vec{s}_1\times\overrightarrow{AA_1}=\{-1,-8,12\}$ ……………… (6')

从而$\vec{s}=\vec{n}\times\vec{n}_1=\{-4,38,25\}$ ……………… (8')

所求的直线方程为：$\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{38}=\frac{z+2}{25}$ ……………… (10')

四、（本题满分10分）设函数$u=x^kF(\frac{z}{x},\frac{y}{x})$,其中$k$是常数，函数$F$具有连续的一阶偏导数，求$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$, 并化为最简形式。

$\frac{\partial u}{\partial x}=kx^{k-1}F(\frac{z}{x},\frac{y}{x})-zx^{k-2}F_1'(\frac{z}{x},\frac{y}{x})-yx^{k-2}F_2'(\frac{z}{x},\frac{y}{x})$ ……………… (3')

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{k-1}F_2'(\frac{z}{x},\frac{y}{x})$ ……………… (6')

$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{k-1}F_1'(\frac{z}{x},\frac{y}{x})$ ....(9')

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=kx^kF(\frac{z}{x},\frac{y}{x})$ ....(10')

五、（本题满分10分）计算二重积分$I=\iint\limits_D|y-x^3|d\sigma$，其中，$D=\{(x,y)|-1\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1\}$

$I=\int_{-1}^1dx\int_{x^3}^1(y-x^3)dy+\int_{-1}^1dx\int_{-1}^{x^3}(x^3-y)dy=\frac{16}{7}$ ....(10')

根据情况酌情给分

六、（本题满分10分）设Ω是球体$x^2+y^2+z^2\leq R^2$ 位于第一卦限内的部分，试将三重积分$I=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dxdydz$ 分别在直角坐标系及球坐标系下化为累次积分，并任选一种方法计算I 的值。

直角坐标系下；$I=\int_0^Rdx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)dz$ ....(4')

球坐标系下；$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^Rr^4\sin^3\varphi\mathrm{dr}$ ....(8')

选取球坐标系计算:

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^Rr^4\sin^3\varphi dr=\frac{\pi R^5}{15}$ ....(10')

七、（本题满分10分）设均匀物体的形状Ω由曲面$x=\sqrt{y^2+z^2}$与曲面$x=\sqrt{4-y^2-z^2}$围成，求物体的质心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

由对称性得：$\bar{y}=\bar{z}=0$ ....(2')

变换坐标轴，或者利用球坐标$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi\cos\theta \\ z=r\sin\varphi\sin\theta \end{cases}$ 计算 ....(4')

设密度为a, $\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} xadv}{\iiint\limits_{\Omega} adv}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} xdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$ ....(7')

$=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^2 r^2\sin\varphi dr}=\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2})}=\frac{3}{4(2-\sqrt{2})}$ ....(10')

八、（本题满分10分）设常数$a>0$，平面π通过点$M(-4a,2a,3a)$，且在三坐标轴上的截距相等，

(1)求平面π的方程；(2)在平面π位于第一卦限部分求一点$P(x_0,y_0,z_0)$，使函数$u(x,y,z)=\frac{1}{x\sqrt{y}\sqrt[3]{z}}$ 在P点取得最小值。

设平面π的方程为$\frac{x}{D}+\frac{y}{C}+\frac{z}{D}=1$，将点$M$的坐标带入，可得：$D=a$

所求的平面π方程为：$x+y+z=a$ ....(3')

构造Lagrange函数$L(x,y,z,\lambda)=u(x,y,z)+\lambda(x+y+z-a)$ ....(6')

令$L_x^{'}=0$, $L_y^{'}=0$, $L_z^{'}=0$, 结合$x+y+z=a$ 得到：$x=2y=3z=\frac{6a}{11}$.(9')

由于驻点唯一，故P点坐标为$(\frac{6a}{11},\frac{3a}{11},\frac{2a}{11})$ ....(10')

九、（本题满分10分）设一礼堂的顶部是一个半椭球面，其方程为$z=4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}$，求下雨时过房顶上点$P(1,3,\sqrt{11})$处的雨水行走的路线方程。

雨水沿z下降最快的方向行走，即沿着z的梯度grad$z$=$\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{y}\}$ 的反方向行走，因而雨水从椭球面上流下的路线在坐标面xOy上的投影曲线上任一点处的切线应与grad$z$平行。…………………………………………(2')
设雨水流下的路线在xOy面上的投影曲线方程为$f(x,y)=0$，那么在该曲线上任一点处的切向量为dx,dy, 它应与grad$z$共线，即有：
$\{dx,dy\}//\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\}$ …………………………………………(5')
$z=4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}$, 所以$\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\}=\{-\frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}},-\frac{y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}}\}$ ………(7')
即$\frac{dy}{dx}=\frac{4y}{9x}$, 即$\frac{9}{y}dy=\frac{4}{x}dx$，得到$y=Cx^{\frac{4}{9}}$ ……………………………(8')
由于过房顶点$P(1,3,\sqrt{11})$，即$x=1,y=3$，带入得到$C=3$，即$y=3x^{\frac{4}{9}}$ (9')

故，雨水行走的路线方程为：$\begin{cases} z=4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}} \\ y=3x^{\frac{4}{9}} \end{cases}$ ……………(10')