试　卷　（一）

一、是非题（每题 1 分，共 6 分）

1. 任何实对称矩阵都可表示成一系列初等矩阵的乘积．（　　）

2. 极大无关组唯一的向量组未必是线性无关的向量组．（　　）

3. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与其转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值，从而有相同的特征向量．（　　）

4. 任意两个同阶的对角矩阵都可以相似于同一个对角矩阵．（　　）

二、单项选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ e & 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 & h \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix}$ 的值等于（　　）

(A) $aehd - bfgc$；　　(B) $aehd + bfgc$；

(C) $(ae - bf)(hd - gc)$；　　(D) $(eh - fg)(ad - bc)$.

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆，且其逆矩阵为（　　）

(A) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$；　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$；

(C) $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$；　　(D) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ 为两个 6 维向量组，若存在两组不全为零

的数 a, b, c 和 k, l, m,使

$(a+k)\boldsymbol{\alpha}+(b+l)\boldsymbol{\beta}+(c+m)\boldsymbol{\gamma}+(a-k)\boldsymbol{\xi}+(b-l)\boldsymbol{\eta}+(c-m)\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0}$.

则 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ 都线性相关;

(B) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ 都线性无关;

(C) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}$ 线性相关;

(D) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}$ 线性无关.

4. 已知全体 2 阶反对称实方阵构成实线性空间 $M^{2\times 2}$ 的线性子空间,它的一组基为 ( )

(A) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$;

(B) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}$;

(D) $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$.

三、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\4 & 3 & -5 & 1\\-2 & 5 & 2 & 1\\3 & -2 & 1 & 1\end{vmatrix}$, A_{i2} 为 a_{i2} 的代数余子式 $(i=1, 2, 3, 4)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{4}A_{i2}=$ ________.

2. 设方阵 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\\sqrt{3} & -1 & 0\\1 & \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

3. 设 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $k(<m)$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 中独立方程有________个,多余方程有________个,其基础解系含________

个解向量.

4. 由$\mathbb{R}^5$中向量$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_7$ 生成的线性子空间的维数 $\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_7)=$________.

5. $\boldsymbol{\beta}$为欧氏空间$\mathbb{R}^n$中任一向量,它在$\mathbb{R}^n$的标准正交基$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为________.

6. 若3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为-1, 0, 1,则与方阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$相似的对角矩阵为________.

四、计算题(每题9分,共45分)

1. 已知$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为n阶方阵,n为奇数.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix},$$

其中$x\neq 0$,求行列式$|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{B}|$, $|\boldsymbol{C}|$.

2. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{X}$,求矩阵$\boldsymbol{X}$.

3. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

问:a, b为何值时方程组有解?并分别求出方程组的解.

4. 设$\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$满足关系

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n, \\ y_{n+1} = 3y_n, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$. 试求：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

(2) 用 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}_n$；

(3) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}_n$.

五、证明题(每题 7 分,共 14 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,满足 $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$.

(1) 证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}) = n$;

(2) 证明:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵,并求出它的相似对角矩阵 .

2. 已知二维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}$;并证明:$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 下的坐标与其在 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标相同 .