信息学院本科生2012——2013学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A卷）

专业： 年级： 学号： 姓名： 成绩：

说明：A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，O是零矩阵，A^{-1}表示可逆矩阵A的逆矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

草 稿 区

得 分

一 .客观题：1–3 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √ ”，错的后面括号中填“×”，4–8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 若两个n维非零列向量α与β正交，则它们线性无关。 ( )

2. n阶矩阵A满足$A^2-3A-2E=O$，其中E为n阶单位矩阵，则A不可逆。 ( )

3. 若T为线性空间V中的正交变换，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$（$m>1$）为$V$中一个正交向量组，则$T\alpha_1,T\alpha_2\cdots,T\alpha_m$一定是一个正交向量组。 ( )

4. 下列行列式的值可能不为 0 的是 ( )

（A）行列式D中有两列对应元素之和都为 0　　（B）行列式D中某行元素全为 0

（C）行列式D中有两行含有相同的公因子　　（D）行列式D中有一行与另一行元素对应成比例

5. 如果一个非齐次方程组有解，则有惟一解的充要条件是它的导出组 ( )

（A）有解　　(B) 无解　　(C) 只有零解　　(D) 有非零解

6. 设n阶矩阵A，B和C，则下列说法正确的是 ( )

（A）$AB=AC$，则$B=C$　　（B）$AB=O$，则$|A|=0$或$|B|=0$

（C）$(AB)^T=A^TB^T$　　（D）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

7. 设$\lambda=\dfrac{1}{2}$是可逆矩阵A的一个特征值，则矩阵$\left(3A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于 ( )

（A）$\dfrac{4}{3}$　　(B) $\dfrac{3}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

8. 设A，B为n阶方阵，A^*，B^*分别为A，B对应的伴随矩阵，分块矩阵

$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$， 则$C$的伴随矩阵$C^*$等于 ( )

（A）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

得 分

二 、行列式计算 （第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **8** 分，共 **14** 分）

1．计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$ $a_i \neq 0 \quad i=1,2\cdots n$.

草 稿 区

得 分

三、求矩阵 X，使下式成立： （本题 8 分）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

草 稿 区

得 分

四、对于线性方程组：（本题 **13** 分）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

，λ为何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多解？

并在方程组有无穷多解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

草 稿 区

得 分

五、已知三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基：（本题 12 分）

草 稿 区

I： $\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,0)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$；

II： $\beta_1=(3,-5,4)^T$，$\beta_2=(2,-1,2)^T$，$\beta_3=(-2,5,-3)^T$；

1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

2）求在两组基下有相同坐标的向量。

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ （本题 15 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出其正交变换矩阵 P;

同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定)。

草 稿 区

得 分

七、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，且 $\boldsymbol{AA^T = E}$，$|\boldsymbol{A}| = -1$，证明 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = 0$ （本题 9 分）

（其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵）。

草 稿 区

得 分

八、设 X^* 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq O)$ 的一个解，$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是它导出组的基础解系，证明：$X^*,X^*-X_1,X^*-X_2,\cdots,X^*-X_{n-r}$ 线性无关。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

九、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 的实矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\lambda E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵，证明：当 $\boldsymbol{\lambda}>\boldsymbol{0}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。（本题 4 分）

草 稿 区