吴民　整理

# 线性代数辅导（补充题）

（第三版）

二零一六年十月

# 前　言

计算机与控制工程学院（原信息学院）线性代数课程所使用的教材是四川大学数学学院编写的《高等数学》（物理类专业用）第三册的第一部分（线性代数）。在多年讲授该课程的过程中，不断整理使用的资料，形成这个小册子，作为课程的辅导材料。

本册为讲授时学生用书，主要内容是若干从相关教材或习题集（见参考文献）中筛选的习题，共 175 题。这些补充题中，有些题目具有教材没有出现的题型，另一些题目难度稍大。希望同学们能通过作补充题开阔眼界，也开拓思路。部分习题给出了多种解法或证法。

吴民

# 目录


**前言** . . . . . . . . . . i

**第一章 补充习题** . . . . . . . . . . 1

第一节 行列式 . . . . . . . . . . 1

第二节 矩阵 . . . . . . . . . . 7

第三节 线性方程组 . . . . . . . . . . 12

第四节 线性空间 . . . . . . . . . . 16

第五节 线性变换 . . . . . . . . . . 17

第六节 欧几里得空间 . . . . . . . . . . 20

第七节 实二次型 . . . . . . . . . . 21

第八节 提高类习题 . . . . . . . . . . 24

**第二章 历年考题** . . . . . . . . . . 33

第一节 模拟自测题 A . . . . . . . . . . 33

第二节 2015 级 A 卷 . . . . . . . . . . 34

第三节 2014 级 A 卷 . . . . . . . . . . 37

第四节 2012 级 A 卷 . . . . . . . . . . 41

第五节 2011 级 A 卷 . . . . . . . . . . 44

第六节 2010 级 A 卷 . . . . . . . . . . 47

第七节 2009级A卷 . . . . . . . . . . 52

第八节 2008级A卷 . . . . . . . . . . 56

**参考文献** . . . . . . . . . . 59

# 第一章　补充习题

本章习题为从其它教材、习题集中摘选出的题目，作为教材习题的补充。这些习题大部分同教材的习题一样在教学大纲的范围内，需要按照教材习题进行认真的学习和练习；小部分为较难的题目，供学有余力的同学练习。

## 第一节　行列式

**补充题 1:** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

的值。再考虑 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式分解。

**补充题 2:** 整数 $1798=31\cdot 58$，$2139=31\cdot 69$，$3255=31\cdot 105$，$4867=31\cdot 157$，都可被 31 整除，不用计算证明行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

可被 31 整除。

**补充题 3: 计算行列式：**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

**补充题 4: 计算行列式**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}, \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

**的值。**

**补充题 5: 计算行列式**

$$|A| = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**的值。**

**补充题 6: 计算行列式**

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ ax & a & -1 & \dots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \dots & a \end{vmatrix}$$

**的值。**

**补充题 7: 计算行列式**

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & & \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & & & \\ & -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ & & & & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

**的值。**

**补充题 8: 计算行列式**

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \dots & a & a \\ a & a+x_2 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \dots & a & a+x_n \end{vmatrix}$$

**的值。**

**补充题 9: 计算行列式**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

**的值。**

**补充题 10: 计算：**

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}$$

**的值。**

**补充题 11:** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

的值。

**补充题 12:** 计算行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & a_n & 0 \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$$

的值。

**补充题 13:** 用 Laplace 定理计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & w & 0 & 0 & w^2 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 & w^2 & c_2 & w \\ a_3 & b_3 & 1 & w & c_3 & w^2 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 & w & 0 \end{vmatrix},$$

其中 $w$ 满足 $w^3 = 1$。

**补充题 14:** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

的值。

**补充题 15:** 证明 $a \neq b$ 时：

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \quad (a \neq b)$$

**解:** 按第一行展开, 得

$$\begin{aligned} D_n &= (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

因为直接计算行列式知，

$$D_1 = a+b = \frac{a^2-b^2}{a-b}, \quad D_2 = a^2+ab+b^2 = \frac{a^3-b^3}{a-b}.$$

知对 $n=1$，$n=2$ 时命题都成立。假设当 $n<k$ 时等式成立，当 $n=k$ 时，

$$D_k = (a+b)D_{k-1} - abD_{k-2} = (a+b)\frac{a^k-b^k}{a-b} - ab\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b} = \frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}.$$

故等式对一切正整数都成立。

**补充题 16:** 计算行列式

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

的值。

**补充题 17:** 证明:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$$

成立。

**补充题 18:** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

的值。

**补充题 19:** 计算行列式

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_2 & \dots & n-1+a_{n-1} & n+a_n \\ 2+a_1 & 3+a_2 & \dots & n+a_{n-1} & 1+a_n \\ 3+a_1 & 4+a_2 & \dots & 1+a_{n-1} & 2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+a_1 & 1+a_2 & \dots & n-2+a_{n-1} & n-1+a_n \end{vmatrix}$$

的值。

**补充题 20:** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & x_1^2+x_1 & \dots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2} \\ 1 & x_2+1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} \\ 1 & x_3+1 & x_3^2+x_3 & \dots & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n+1 & x_n^2+x_n & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

的值。

**补充题 21:** 已知以下行列式, 记 $A_{ij}$ 为该行列式的第 $i$ 行第 $j$ 列元素的代数余子式。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & p \\ b_1 & b_2 & b_3 & p \\ c_1 & c_2 & c_3 & p \\ d_1 & d_2 & d_3 & p \end{vmatrix}.$$

求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$。

**补充题 22:** $\alpha, \beta, \gamma$ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，证明：

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

成立。

## 第二节　矩阵

**补充题 23:** 已知矩阵 $A, B$ 如下：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $4A^2-B^2-2BA+2AB$。

**补充题 24:** 已知矩阵 $B, C$ 如下：

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 $X, Y$ 满足 $X+Y=B$，$3X-Y=C$。求 $X, Y$。

**补充题 25:** 求与矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相乘可交换的所有矩阵 $B$。

**补充题 26:** 3 阶方阵如下，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 $A^n$。

**补充题 27:** 已知 $A$ 为如下三阶矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $A^n-2A^{n-1}$，（$n\geqslant 2$ 且为整数）。

**补充题 28:** 已知如下矩阵 $A,B,C$，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $A^{100},B^k,C^{51}$。

**补充题 29:** 求实数 $a$，使下式

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

成立。

**补充题 30:** 矩阵 $A$ 如下，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 $n \geqslant 3$ 时，恒有 $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$，并求 $A^{100}$。

**补充题 31:** 已知 $a_i \neq 0$，$i = 1, 2, \dots, n$。设

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

求 $X^{-1}$。

**补充题 32:** 已知 $AP = PB$, 其中 $B, P$ 如下，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 $A$ 和 $A^5$。

**补充题 33:** 已知方阵 $A, C$ 如下，

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

方阵 $B$ 满足 $AB = A - 2B$。矩阵 $D$ 满足 $C^2D - C - D = E$，$E$ 为 3 阶单位阵，求 $B$，$\det(D)$。

**补充题 34:** 矩阵 $X$ 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$，矩阵 $A$ 如下，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $X$。

**补充题 35:** 矩阵 $A$ 如下，$X$ 满足 $X = AX - A^2 + E$，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $X$。

**补充题 36:** $A,B$ 是 3 阶方阵，$A$ 可逆，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$。证明 $A-2E$ 可逆，若 $B$ 如下，

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

求 $A$。

**补充题 37:** $A$ 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$。求

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-10A^*\right|$$

的值。

**补充题 38:** $n$ 阶方阵 $A$。实数 $a$，证明：

1. $(aA)^*=a^{n-1}A^*$；
2. $A$ 可逆时，$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$。

**补充题 39:** 假定 $A,B$ 是 $n$ 阶矩阵，如果 $AB=A+B$，求证：$AB=BA$。

**补充题 40:** 方阵 $A$ 满足 $A^2+A-4E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，写出 $(A+2E)^{-1}$ 的表达式。

**补充题 41:** $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $2A(A-E)=A^3$，证明 $(E-A)^{-1}$ 有意义，写出它的表达式。

**补充题 42:** $A$ 为元都为 1 的 $n$ 阶方阵，证明

$$(E-A)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}A$$

成立。

**补充题 43:** $A$ 是 $m\times n$ 实矩阵，且 $AA^{\mathrm{T}}=0$。证明：$A=0$。

**补充题 44:** $A$ 是 $n$ 阶实方阵，$A\neq 0$ 且 $A^*=A^{\mathrm{T}}$。证明 $A$ 可逆。

**补充题 45:** 证明若矩阵 $B$ 满足 $B^{\mathrm{T}}B=E$，则 $(B^*)^{\mathrm{T}}=(B^*)^{-1}$。

**补充题 46:** $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$，且 $|A|<0$。求 $\det(A+E)$。

**补充题 47:** 方阵 $A$ 满足 $A^2=E$，且 $|A|=-1$，证明 $A+E$ 不可逆。

**补充题 48:** $n$ 阶方阵 $A,B$ 满足 $A^2=B^2=E$，且 $|A|+|B|=0$，证明 $A+B$ 不可逆。

**补充题 49:** $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，矩阵 $A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，$a$ 为非 0 实数，计算 $|aE-A^n|$。

**补充题 50:** 设 $\alpha$ 是三维行向量，且满足 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$。

**补充题 51:** $A=E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中 $E$ 为 $n$ 阶单位阵，$\alpha$ 为 $n$ 维非 0 列向量。证明：

1. $A^2=A$ 的充要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$。
2. 当 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$ 时，$A$ 不可逆。

**补充题 52:** $M$ 为 $m\times n$矩阵。$MM^{\mathrm{T}}$ 可逆。又 $P=E-M^{\mathrm{T}}(MM^{\mathrm{T}})^{-1}M$，证明 $P$ 对称且 $P^2=P$。

**补充题 53:** 设 $X=\begin{pmatrix}0 & A\\ C & 0\end{pmatrix}$，已知 $A^{-1},C^{-1}$ 存在。求 $X^{-1}$。

**补充题 54:** $A,B,C,D$ 都是 $n$ 阶矩阵。$|A|\neq 0$，$AC=CA$。证明：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|$$

成立。

**补充题 55:** 已知：

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 1 & 0 & b & 0\\ 0 & 1 & 0 & b\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & c & 0\\ 0 & 1 & 0 & c\\ 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & d\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

计算 $AB$ 及 $C^{-1}$。

**补充题 56:** $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，把 $A$ 的第 $i$ 行和第 $j$ 行互换, 所得的矩阵记为 $B$。证明 $B$ 可逆，求 $AB^{-1}$。

**补充题 57:** $A$ 为二阶复方阵，$\det(A)=1$。则 $A$ 可表为第三类初等矩阵的乘积。

**补充题 58:** 证矩阵的交换某两行的初等变换可以几次其他两种初等变换来实现。

## 第三节 线性方程组

**补充题 59:** 证明 $n+1$ 个 $n$ 维向量必定线性相关。

**解:** 记 $\varepsilon_i$ 为第 $i$ 个分量为 $1$，其它分量都为 $0$ 的列 (行) 向量，$i=1,\ldots,n$。对任意 $n+1$ 个向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$，$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ 可以被 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 线性表出，所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

**补充题 60:** 解方程组：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$$

求 $a,b$ 取值时方程组解的情况。

**补充题 61:** $a$ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3=0 \\ x_1+ax_2-2x_3=0 \end{cases}$$

有非零解。

**补充题 62:** 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，如果 $\eta$ 是线性方程组 $AX=b$ 的一个解，试求 $AX=b$ 的通解。

**补充题 63:** 四元线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$$

又齐次线性方程组 (II) 的基础解系为 $k_1\begin{pmatrix}0&1&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+k_2\begin{pmatrix}-1&2&2&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，求方程组 (I) 的基础解系，并求方程组 (I) 和 (II) 的公共解。

**补充题 64:** 已知四阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{pmatrix}$，其中 $\alpha_2,\alpha_3$ 和 $\alpha_4$ 线性无关。而

$$\alpha_1=2\alpha_2-3\alpha_3,$$

若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $AX=\beta$ 的通解。

**补充题 65:** 求以下向量组的秩和一个极大线性无关组。

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\begin{pmatrix}1&3&2&0\end{pmatrix},\\\alpha_2&=\begin{pmatrix}7&0&14&3\end{pmatrix},\\\alpha_3&=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\end{pmatrix},\\\alpha_4&=\begin{pmatrix}5&1&6&2\end{pmatrix},\\\alpha_5&=\begin{pmatrix}2&-1&4&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

并把其它向量用该极大线性无关组线性表出.

**补充题 66:** 已知两个向量组 $\beta_1=(1,1,0),\beta_2=(1,1,1),\beta_3=(2,a,b)$ 与 $\alpha_1=(0,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(1,0,-1)$ 的秩相同，且 $\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。求 $a,b$。

**补充题 67:** 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$（其中 $\alpha_1\neq 0$）线性相关的充要条件是至少有一个 $\alpha_i$，这里 $1<i\leqslant s$，可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$ 线性表出。

**补充题 68:** 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是 4 个 3 维向量，且 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2$ 线性无关。证明存在非零向量 $\gamma$，$\gamma$ 既可被 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表出，又可被 $\beta_1,\beta_2$ 线性表出。

**补充题 69:** 已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出。证明：这两个向量组等价。

**补充题 70:** 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的秩为 $r$，在其中任取 $m$ 个向量 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}$，证明 $\operatorname{rank}\{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}\}\geqslant r+m-s$。

**补充题 71:** $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是一组线性无关的向量，且

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j \qquad (i=1,2,\ldots,r),$$

证明 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ 线性无关的充要条件是 $\det(a_{ij})\neq 0$。

**补充题 72:** $\lambda$ 为实数，矩阵 $A$ 如下，

$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}.$$

求 $\operatorname{rank}(A)$。

**补充题 73:** $B$ 的秩为 3，求$k$。$n\geqslant 2$，其中

$$B=\begin{pmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix}a & b & \ldots & b\\ b & a & \ldots & b\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b & b & \ldots & a\end{pmatrix}.$$

讨论 $n$ 阶方阵 $A$ 的秩。

**补充题 74:** 矩阵 $C$ 为 4 阶方阵，且满足 $\operatorname{rank}(C)=2$，则 $\operatorname{rank}(C^*)=?$

**补充题 75:** 已知 $A$ 如下，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

求 $t$。

**补充题 76:** $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B$ 是 $s\times t$ 矩阵。证明

$$R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=R(A)+R(B).$$

**补充题 77:** $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B$ 是 $s\times t$ 矩阵。证明

$$R\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}\geqslant R(A)+R(B).$$

**补充题 78:** $A$ 是 $n\times n$ 阶矩阵，证明：存在一个 $n\times n$ 阶非零矩阵 $B$ 满足 $AB=0$ 的充分必要条件是 $\det(A)=0$。

**补充题 79:** $B$ 为一 $r\times r$ 阶矩阵，$C$ 为一 $r\times n$ 阶矩阵，且 $\operatorname{rank}(C)=r$。证明：

1. 如果 $BC=0$，则 $B=0$；
2. 如果 $BC=C$，则 $B=E$。

**补充题 80:** $A$ 为 $m\times n$ 矩阵。$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 为 $s$ 个 $n$ 维列向量。$\beta_i=A\alpha_i$，$i=1,\ldots,s$。

1. 如果 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 也线性无关；
2. 如果 $\operatorname{rank}(A)=n$，且 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 也线性无关。

**补充题 81:** $A$ 为 $n\times m$ 矩阵，$B$ 为 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$。若 $AB=E_{n\times n}$，证明 $B$ 的列向量线性无关。

**补充题 82:** $A$ 为 $m\times n$矩阵，$B$ 为 $n\times p$ 矩阵，若 $AB=C$，且矩阵 $C$ 的行向量线性无关，证明 $A$ 的行向量线性无关。

**补充题 83:** $A$ 为实矩阵，证明 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}}A)=\operatorname{rank}(A)$。

**补充题 84:** $A$ 是一 $n$ 阶方阵。$R(A)=1$。证明 $A$ 可表示为：

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \ldots & b_n\end{pmatrix}.$$

并且 $A^2$ 可表示为 $A^2=kA$，其中 $k$ 为某个数。

**补充题 85:** $A$ 是一 $2\times 2$ 矩阵，且已知对某个 $l\geqslant 2$，有 $A^l=0$ 。证明：$A^2=0$。

**补充题 86:** $m\times n$ 矩阵 $A$ 的秩为 $r$，则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 $P$ 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 $Q$，使 $A=PQ$。这称为矩阵的满秩分解。

**补充题 87:** $A$ 是一 $n\times n$ 矩阵，且 $R(A)=r$。证明存在一可逆矩阵 $P$，使 $PAP^{-1}$ 的后 $n-r$ 行全为 0。

**补充题 88:** $A$ 是 $n$ 阶方阵。证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$。

**补充题 89:** 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$，$1\leqslant i\leqslant s$，$\beta=(b_1,\ldots,b_n)$。证明: 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，那么 $\beta$ 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性表出。

## 第四节　线性空间

**补充题 90:** 实数域上矩阵 $A$ 的全体实系数多项式组成的空间，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \qquad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

求此线性空间的维数与一个基底。

**补充题 91:** $A$ 是 $n$ 阶方阵。证明：全体与 $A$ 相乘可交换的矩阵构成一个线

性空间。当

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&2&0&\dots&0\\0&0&3&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&n\end{pmatrix}$$

时，求该线性空间的维数和一个基底。

**补充题 92:** 线性空间 $V$。$\alpha,\beta,\gamma\in V$。数 $c_1,c_2,c_3$ 满足：

$$c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma=0.$$

且 $c_1c_3\neq 0$。证明 $L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$。

**补充题 93:** 线性空间 $V$。$V_1$ 和 $V_2$ 是 $V$ 的线性子空间。证明 $V_1\cap V_2$ 是 $V$ 的线性子空间。

**补充题 94:** 在向量 $\alpha_1=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,2,3,-3)^{\mathrm{T}}$ 的基础上添加两个向量，使之构成 $\mathbf{R}^4$ 的一个基底。

**补充题 95:** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个基底。$A$ 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\dots&\beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\dots&\alpha_n\end{pmatrix}A,$$

证明 $L(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s)$ 的维数等于 $A$ 的秩。

## 第五节 线性变换

**补充题 96:** 给定 $\mathbf{R}^3$ 的两个基底：

$$\varepsilon_1=(1,0,1),\varepsilon_2=(2,1,0),\varepsilon_3=(1,1,1)$$

$$\eta_1=(1,2,-1),\eta_2=(2,2,-1),\eta_3=(2,-1,-1).$$

定义线性变换 $A$：$A\varepsilon_i=\eta_i$，$i=1,2,3$。写出由基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 的过渡矩阵。写出 $A$ 在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵；写出 $A$ 在基底 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 下

的矩阵。

**补充题 97:** 以下矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，求 $x,y$：

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}.$$

**补充题 98:** 已知 $\xi$ 是 $A$ 的一个特征向量，求 $a,b$ 以及 $\xi$ 所对应的特征值。

$$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}.$$

**补充题 99:** 已知矩阵 $A$ 有三个线性无关的特征向量，求 $a$。

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&a\\1&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

**补充题 100:** 证明：

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\cdots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\quad 与 \quad\begin{pmatrix}\lambda_{i_1}&&&\\&\lambda_{i_2}&&\\&&\cdots&\\&&&\lambda_{i_n}\end{pmatrix}$$

相似。其中$i_1i_2\dots i_n$是$1,2,\dots,n$的一个排列。

**补充题 101:** 已知 $A$ 可逆，证明 $AB$ 与 $BA$ 相似。

**补充题 102:** 如果 $A$ 与 $B$ 相似，则 $A^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}$ 相似。

**补充题 103:** 已知 $A$ 与 $B$ 相似，$C$ 与 $D$ 相似，证明

$$\begin{pmatrix}A&\\&C\end{pmatrix}\quad 与 \quad\begin{pmatrix}B&\\&D\end{pmatrix}$$

相似。

**补充题 104:** $n$ 阶矩阵 $A$ 的每一行 $n$ 个元的和都为 $a$，证明 $\lambda=a$ 是 $A$ 的特征根，且 $(1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A$ 的关于 $\lambda=a$ 的特征向量。

**补充题 105:** 假如矩阵 $A$ 满足 $A^2=E$，证明 $A$ 的特征根只能是 $\pm1$。再证明 $A$ 与对角形矩阵相似。

**补充题 106:** $A$ 是奇数阶正交矩阵。如果 $|A|=1$，证明 1 是 $A$ 的特征值。

**补充题 107:** 3 阶矩阵 $A$ 的特征值为 $1,-1,2$。矩阵 $B=A^3-5A^2$。求 $B$ 的特征值，$|B|$ 和 $|A-5E|$。

**补充题 108:** 矩阵 $A$ 满足 $A^2-3A+2E=0$。证明 $A$ 的特征值只能是 1 和 2，且 $A$ 可经过相似变换对角化。

**补充题 109:** $A,B$ 为两个 $n$ 阶矩阵。且 $A$ 有 $n$ 个不同的特征值，若 $A$ 的特征向量恒为 $B$ 的特征向量。证明：$AB=BA$。

**补充题 110:** 设三阶矩阵 $A,B$ 如下。判断 $A$ 与 $B$ 是否相似，求 $M$ 满足 $B=M^{-1}AM$。

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}.$$

**补充题 111:** $A$ 是三阶方阵，有 3 个特征值：$\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=3$，$B=(A-E)(A-2E)(A-3E)$，证明: $B=0$。

**补充题 112:** $B=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中 $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\alpha\neq0$。$a_i$ 都是实数。求矩阵 $P$，使

$$P^{-1}AP$$

成为对角形矩阵，并写出对角形矩阵。

**补充题 113:** $A$ 与 $B$ 均为 $n$ 阶方阵，且 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)<n$。证明存在某个向量 $\alpha$，它既是 $A$ 的特征向量，又是 $B$ 的特征向量。

**补充题 114:** 如果任意 $n$ 维向量都是 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征向量，证明 $A$ 是数量矩阵。

**补充题 115:** Fibonacci 数列。设数列 $F_1.F_2,\dots,F_n,\dots$ 满足条件

$$F_1=F_2=1;\qquad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\quad n\geqslant3.$$

求数列的通项公式。

## 第六节 欧几里得空间

**补充题 116:** 欧氏空间$V$。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$是$V$中的一个标准正交组。$\alpha$是$V$中的一个向量。设

$$\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle = a_i, \quad i=1,\ldots,k.$$

证明：$\langle\alpha,\alpha\rangle \geqslant a_1^2+\cdots+a_k^2$。

**补充题 117:** $n$ 维欧氏空间 $V$。$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ 是 $V$ 中的 $n-1$ 个线性无关的向量。$V$ 中另外两个向量 $\beta_1,\beta_2$。$\beta_i$ 与 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ 都正交，$i=1,2$。证明 $\beta_1,\beta_2$ 线性相关。

**补充题 118:** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是欧氏空间 $V$ 的一个标准正交基底。证明：

$$\alpha_1=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3), \quad \alpha_2=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3), \quad \alpha_2=\frac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$$

也是 $V$ 的一个标准正交基底。

**补充题 119:** $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 是欧氏空间 $V$ 的一个标准正交基底。线性子空间 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3)$。其中：

$$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5, \quad \alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4, \quad \alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$

求 $V_1$ 的一个标准正交基底。

**补充题 120:** $n$维欧氏空间$V$。$\eta$是$V$中的一个单位向量。对$V$中任意向量$\alpha$，定义

$$T\alpha=\alpha-2\langle\alpha,\eta\rangle\eta,$$

证明$T$是正交变换。

**补充题 121:** $n$维欧几里得空间$V$。$\alpha,\beta\in V$，$|\alpha|=|\beta|$。证明存在$V$上的正交变换$T$，满足$T\alpha=\beta$。

**补充题 122:** 欧几里得空间$V$中, 向量$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 满足$|\alpha_1|=|\beta_1|$, $|\alpha_2|=|\beta_2|$, 且

$$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\langle\beta_1,\beta_2\rangle,$$

证明: 存在$V$上的正交变换$T$, 满足$T\alpha_1=\beta_1$, $T\alpha_2=\beta_2$.

**补充题 123:** $\xi_1,\xi_2$是2维欧氏空间$V$的一个标准正交基底，$\eta_1=-\xi_1$，$\eta_2=\xi_1+2\xi_2$，$V$上的线性变换$T$在基底$\eta_1,\eta_2$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$T$是正交变换吗？

# 第七节　实二次型

**补充题 124:** 设实二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$，证明 $f$ 的秩等于下面矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的秩。

**补充题 125:** 证明以下两个矩阵合同。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

其中 $i_1i_2\ldots i_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列。

**补充题 126:** 已知矩阵 $A$ 如下，

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $P$，使得 $A=PP^{\mathrm{T}}$。

**补充题 127:** 已知二次型 $f(x_1,\dots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 的秩等于 $n$，证明：二次型 $f(x_1,\dots,x_n)$ 与二次型 $g(x_1,\dots,x_n)=X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 有相同的正、负惯性指数。

**补充题 128:** 已知 3 阶矩阵实对称矩阵 $A$ 的三个特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$。且关于 $\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量为$(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(2,3,-3)^{\mathrm{T}}$。求 $A$ 的关于 $\lambda_1$ 的特征向量，并求 $A$。

**补充题 129:** $A$ 与 $B$ 为实对称矩阵，证明：若 $A$ 与 $B$ 相似，则 $A$ 与 $B$ 合同；反之不成立。

**补充题 130:** 所有 3 阶实对称矩阵按合同关系可以分为几类? 写出每一类的一个对角形矩阵。（类似可以问，3 元二次型按二次型等价关系可以分成几类，写出每一类的规范形。）

**补充题 131:** 实二次型 $f$ 与 $-f$ 合同（经非退化线性替换得到)，证明 $f$ 的秩为偶数，且符号差为 0。

**补充题 132:** 某实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$，若有实 $n$ 维向量 $X_1,X_2$，使

$$X_1^{\mathrm{T}}AX_1>0,\quad X_2^{\mathrm{T}}AX_2<0,$$

证明必存在 $n$ 维实向量 $X_0\neq 0$，使 $X_0^{\mathrm{T}}AX_0=0$。

**补充题 133:** 如果二次型 $\sum a_{ij}x_ix_j$（其中 $a_{ij}=a_{ji}$）是正定二次型。那么

$$f(y_1,y_2,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型。

**补充题 134:** 设 $A$ 是实对称矩阵，证明只要实数 $t$ 充分大，$tE+A$ 是正定矩阵。

**补充题 135:** $f=X^{\mathrm{T}}AX=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2，且 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$是 $A$ 的特征向量。求正交变换 $X=QY$，将二次型化为标准形。

**补充题 136:** 已知二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_2x_3,$$

其特征值为 $2,2,b$。求 $a,b$。

**补充题 137:** 矩阵 $A$ 如下，写出以 $A$ 和 $A^{-1}$ 为矩阵的二次型；

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

求 $A$，$A^{-1}$ 和 $A^2+A$ 的特征值；求相应的 $A$ 和 $A^{-1}$ 的二次型的标准形。

**补充题 138:** 实对称矩阵 $A$ 正定，证明 $A^3$ 正定。$B$ 也正定，证明以下矩阵

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

正定。

**补充题 139:** 矩阵 $A$ 如下，$A$ 有一个特征值为 3，求 $y$，

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix},$$

并求正交矩阵 $P$，使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角形矩阵。

**补充题 140:** $A$ 是 $n$ 阶正定矩阵，证明 $|A+E|>1$。

**补充题 141:** $A$ 是 $n$ 阶正定矩阵。证明对任意正数 $\alpha$，

$$|A+\alpha E|>\alpha^n$$

都成立。

**补充题 142:** $n$ 阶实方阵 $A$ 有 $n$ 个两两正交的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，证明 $A$ 是对称矩阵。

**补充题 143:** $A$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$m<n$。证明矩阵 $AA^{\mathrm{T}}$ 正定的充要条件是 $\mathrm{rank}(A)=m$。

**补充题 144:** $A$ 为 $m\times n$ 实矩阵。$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$，证明方程组 $AX=0$ 只有 0 解的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}A$ 正定。

**补充题 145:** $A$ 为 $m$ 阶实正定矩阵，$B$ 为 $m\times n$ 实矩阵。证明：矩阵 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定的充要条件是 $\mathrm{rank}(B)=n$。

**补充题 146:** 欧几里得空间 $V$。$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 $V$ 中的 $n$ 个向量，定义

$$A=\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \dots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \dots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \dots & & & \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \dots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix},$$

证明 $A$ 正定的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关。

**补充题 147:** $n$ 阶实对称矩阵 $A$。$A$ 为正定矩阵的充要条件是存在 $n$ 个线性无关的向量

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ni}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

使得 $A=\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}$。

**补充题 148:** $A$ 是 $n$ 阶实对称矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是 $A$ 的特征值，相应的标准正交的特征向量为 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$，证明：

$$A=\lambda_1\eta_1\eta_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\eta_2\eta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\eta_n\eta_n^{\mathrm{T}}.$$

**补充题 149:** 实对称矩阵 $A$ 的所有特征值的绝对值都是 1，证明 $A$ 是正交矩阵。

## 第八节　提高类习题

**补充题 150:** 在 $n$ 个元素的所有排列中，一共有多少个逆序？

**补充题 151:** $A$ 和 $B$ 均为 $n$ 阶方阵，且满足 $A^2=A$，$B^2=B$，$(A+B)^2=A+B$。证明:

$$AB=0.$$

**解:** 计算 $(A+B)^2$，

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+AB+BA+B=A+B,$$

$$\therefore\quad AB+BA=0. \tag{1.2}$$

上式分别左乘和右乘 $A$，得:

$$\begin{cases} A^2B+ABA=AB+ABA=0 \\ ABA+BA^2=ABA+BA=0 \end{cases} \implies AB=BA.$$

再由式 (1.2)，得 $AB=0$。

**补充题 152:** $n$ 阶方阵 $A,B$ 满足 $A^2=-A$，$B^2=-B$，$(A+B)^2=-A-B$，证明

$$AB=0.$$

**补充题 153:** 三阶实矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足：对任意 $1\leqslant i,j\leqslant 3$，$a_{ij}=A_{ij}$，其中 $A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式；并且 $a_{11}\neq 0$。证明 $A$ 可逆，求 $\det(A^{-1})$。

**补充题 154:** 两个矩阵$A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, 且$m\geqslant n$, 证明$|\lambda E-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E-BA|$. 这是Sylvester定理.

**解:** 当 $\lambda\neq 0$ 时, 通过分块矩阵的初等变换，容易证明如下分块行列式的等式:

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & \lambda E_n-BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & -\frac{1}{\lambda}A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m-\frac{1}{\lambda}AB & 0 \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}$$

所乘的两个分块初等矩阵的行列式值都为 1，因此有:

$$\begin{vmatrix} E_m-\frac{1}{\lambda}AB & 0 \\ B & \lambda E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & \lambda E_n-BA \end{vmatrix}.$$

因此有，$\lambda^{-m}|\lambda E-AB|\cdot\lambda^n=|\lambda E-BA|$，所以 $|\lambda E-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E-BA|$。

当$\lambda=0$时, $|\lambda E-AB|=|-AB|$, $|\lambda E-BA|=|-BA|$. 若$m=n$, 则由$|-AB|=|-BA|$, 知命题成立(此时, 写$\lambda^{m-n}$ 不合适); 若$m>n$, $-AB$为$m\times m$ 级矩阵, 而$A$, $B$的秩为$n$, 所以$|0\cdot E-AB|=0=0^{m-n}|0\cdot E-BA|$.

综上, 知命题成立.

**补充题 155:** $A$和$E+A$可逆. $B$满足$B=(E+A)^{-1}(E-A)$, 求$(B+E)^{-1}$.

**补充题 156:** $A,B$和$A+B$都为$n$阶可逆矩阵, 证明:

1. $A^{-1}+B^{-1}$可逆, 且$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$.
2. $A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

**补充题 157:** $A$ 为 $n$ 阶对称矩阵，且可逆，$B$ 为 $n$ 阶对称矩阵，且 $(E+AB)$ 可逆。证明 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵。

**补充题 158:** 矩阵 $A_{n\times k}$ 及 $B_{k\times m}$，证明：

$$\operatorname{rank}(AB)\geqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-k.$$

**证:** 设 $\operatorname{rank}(A)=s$，$\operatorname{rank}(B)=t$。因 $\operatorname{rank}(A)=s$，所以存在满秩矩阵 $P_{n\times n},Q_{k\times k}$，使

$$A=P\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}Q.$$

所以

$$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}\left(P\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}QB\right)=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}C\right),\quad C=QB.$$

而 $\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(QB)=\operatorname{rank}(B)=t$。矩阵 $\operatorname{diag}(E_s,0)C$ 的前 $s$ 行为 $C$ 的前 $s$ 行，后 $k-s$ 行为 $0$ 向量。$C$ 的前 $s$ 行的秩至少是 $t-(k-s)=s+t-k$。命题得证。

**证:** 设 $\operatorname{rank}(AB)=r_1$，找出 $AB$ 的列向量的极大线性无关组，设为 $AB$ 的第 $i_1,i_2,\dots,i_{r_1}$ 个列向量构成，共 $r_1$ 个向量，记为 $\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_{r_1}}$。因为 $B$ 的第 $i_1,i_2,\dots,i_{r_1}$ 个列向量 $\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_{r_1}}$ 经线性变换得到 $\gamma$ 这个向量组，所以向量组 $\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_{r_1}}$ 线性无关。再取 $AX=0$ 的基础解系，设为 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$。对 $B$ 的任意列 $\beta$，$A\beta$ 可表为 $A\beta=k_1\gamma_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\gamma_{i_{r_1}}$，即 $\beta$ 为

$$AX=k_1\gamma_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\gamma_{i_{r_1}}$$

的解，但 $k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\beta_{i_{r_1}}$ 是以上方程的一个特解，所以 $\beta$ 可表示为

$$\beta=t_1\alpha_1+\cdots+t_{r_2}\alpha_{r_2}+k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\beta_{i_{r_1}},$$

所以 $B$ 的每个列向量都可以被 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2},\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_{r_1}}$ 线性表出，所以 $B$ 的秩满足:

$$\operatorname{rank}(B)\leqslant r_1+r_2=k-R(A)+R(AB).$$

移项即得到要证的不等式。

**补充题 159:** 设 $n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足如下条件，证明 $|A|\neq 0$。

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\dots,n.$$

**证:** 只要证明齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解，即对于任意

$$Y=(y_1,\dots,y_n)^{\mathrm{T}}\neq 0,$$

必有 $AY\neq 0$，亦即只要证 $AY$ 的某个分量，如第 $i$ 个分量，不等于 $0$，即

$$a_{i1}y_1+\cdots+a_{in}y_n\neq 0.$$

设分量 $y_1,\dots,y_n$ 中绝对值最大的一个是 $y_s$，即 $|y_s|\geqslant|y_j|$，$j=1,\dots,n$。从而有

$$|a_{ss}y_s|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}|a_{sj}||y_s|\geqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}|a_{sj}||y_j|\geqslant\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}a_{sj}y_j\right|,$$

$$\therefore\quad\left|\sum_{j=1}^{n}a_{sj}y_j\right|\geqslant|a_{ss}y_s|-\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}a_{sj}y_j\right|>0.$$

所以 $AY$ 的第 $s$ 个分量 $a_{s1}y_1+\cdots+a_{ss}y_s+\cdots+a_{sn}y_n\neq 0$。于是，$AX=0$ 当且仅当 $X=0$，故$|A|\neq 0$。

**补充题 160:** 设$n$阶矩阵$A=(a_{ij})$满足如下条件, 证明$|A|>0$.

$$a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1.3}$$

**解:** 对$0\leqslant t\leqslant 1$, 作行列式

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}t & \dots & a_{1n}t\\ a_{21}t & a_{22} & \dots & a_{2n}t\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}t & a_{n2}t & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

显然对任意的$t\in[0,1]$, 行列式$D(t)$都满足上题的条件, 从而由上题知恒有$D(t)\neq 0$. 另一方面$D(t)$展开后是$t$的连续函数. 且由$D(t)$ 的定义,

$$D(0)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},\qquad D(1)=\det(A).$$

用反证法证$\det(A)>0$. 若$\det(A)=D(1)<0$, 但$D(0)>0$. 由$D(t)$的连续性, 必定存在一点$t_1$满足$D(t_1)=0$. 这与前一题的结论矛盾. 所以$\det(A)=D(1)>0$.

**补充题 161:** 三个矩阵 $A,B,C$，已知 $ABC$ 有意义。证明：

$$\operatorname{rank}(ABC)\geqslant \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}(B).$$

这是 **Frobenious 不等式。**

**补充题 162:** 若 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$，则 $\operatorname{rank}(ABC)=\operatorname{rank}(BC)$。

**解:** 因为 $Bx=0$ 的解必定满足 $ABx=0$。而又已知 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$，说明 $ABX=0$ 的解空间与 $BX=0$ 的解空间维数相同。因此 $BX=0$ 的解就是 $ABX=0$ 的全部解。

证明方程组$ABCx=0$与$BCx=0$同解. 易知$BCx=0$的解是$ABCx=0$的解. 而若$x$满足$ABCx=0$, 设$y=Cx$, 则$y$满足$ABy=0$, 因此$y$必定满足$By=0$. 也就是$BCx=0$. 所以$ABCx=0$的解是$BCx=0$的解. 因此必定$\operatorname{rank}(ABC)=\operatorname{rank}(AB)$.

**补充题 163:** 设$A$为$n$阶方阵, 证明$\operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+1})$.

**补充题 164:** 证$A$为$n$阶幂等方阵, 即$A^2=A$当且仅当$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$; 证$A$为$n$阶对合方阵, 即$A^2=I$当且仅当$\operatorname{rank}(I+A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$.

**解:** 必要性. 由$A^2=A$, 得$A(I-A)=0$. 因此$I-A$ 的列向量是线性方程组$AX=0$的解. 因此$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)\leqslant n$. 但

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)\geqslant \operatorname{rank}(A+I-A)=\operatorname{rank}(I)=n.$$

充分性。对分块矩阵作初等变换:

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&0\\A&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&A\\A&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A-A^2&A\\0&I\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}A-A^2&0\\0&I\end{pmatrix}$$

由于作的是一系列的矩阵初等变换，因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I-A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(I-A)+\operatorname{rank}(A)=n.$$

这说明 $A-A^2$ 是零矩阵，因此 $A^2=A$。

**补充题 165:** 已知齐次线性方程组$AX=0$的通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}'+k_2\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}',$$

求此线性方程组.

**补充题 166:** 已知如下两个线性方程组为同解方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=1-t \end{cases}$$

求 $m,n,t$。

**补充题 167:** 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性方程组$AX=0$的一个基础解系,

$$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_3+t\alpha_4,\quad \beta_4=\alpha_4+t\alpha_1,$$

讨论$t$满足什么关系时, $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$AX=0$的一个基础解系.

**补充题 168 (北大):** 今天考了高代, 是蓝老师出的题, 又是最后一道 5 分的题, 本届三位金牌当时都未做出来. 给定数域 $K$ 内的数所组成的无穷序列 $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$, 对于任意的非负整数 $s,m$, 定义

$$A_{s,m}=\begin{pmatrix} a_s & a_{s+1} & \ldots & a_{s+m} \\ a_{s+1} & a_{s+2} & \ldots & a_{s+m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s+m} & a_{s+m+1} & \ldots & a_{s+2m} \end{pmatrix}.$$

如果存在非负整数 $n,k$，使当 $s\geqslant k$ 时，$|A_{s,n}|=0$。证明: 存在不全为 0 的数 $b_0,b_1,\ldots,b_n$ 及非负整数 $S$，使得当 $s\geqslant S$ 时，有

$$a_sb_n+a_{s+1}b_{n-1}+\cdots+a_{s+n}b_0=0$$

成立。

**补充题 169:** 线性空间$V$。$V_1$和$V_2$是$V$的非平凡子空间。证明$V$中必存在一个向量$\gamma$，

$$\gamma \notin V_1, \qquad \gamma \notin V_2.$$

**解:** 因为$V_1$是非平凡子空间, 故存在向量$\alpha \notin V_1$. 若$\alpha \notin V_2$, 则$\alpha$即为所求. 若$\alpha \in V_2$, 也就是$\alpha$满足$\alpha \notin V_1$, $\alpha \in V_2$. 用同样方法, 我们要么可以找到$\beta \notin V_1$且$\beta \notin V_2$, 也就是$\beta$即为所求, 要么找到$\beta \in V_1$且$\beta \notin V_2$, 则此时$\alpha+\beta$即为所求:

$$\alpha+\beta \notin V_1 \quad \text{且} \quad \alpha+\beta \notin V_2.$$

因为若$\alpha+\beta \in V_1$的话，就可以推出$\alpha \in V_1$；若$\alpha+\beta \in V_2$的话，则$\beta \in V_2$。都与已知矛盾。

**补充题 170:** 只与自身相似的矩阵必是数量矩阵。

**补充题 171:** $A$为一$n$阶实矩阵，$|A| \neq 0$。证明$A$可表示为：

$$A = QT,$$

其中$Q$是一正交矩阵，$T$是一上三角矩阵。且$T$的对角线上元素均大于0。并证明以上表示式是唯一的。

**补充题 172:** $A$是$n$阶实对称矩阵，且$A$是幂零矩阵，则$A=0$。

**补充题 173:** 证明：实反对称矩阵的特征根是零或纯虚数。

**补充题 174:** 证明：如果实对称矩阵 $A$ 正定，则存在正定矩阵 $B$，使 $A=B^2$。

**补充题 175:** $A$ 是正定矩阵，又是正交矩阵，证明 $A=E$。

**证:** $A$对称，且为正交矩阵，所以$A^2 = A'A = E$。所以

$$(A+E)(A-E) = 0,$$

又因为$A$正定，前面已证明$|A+E|>0$，所以$A+E$可逆。上式两边左乘$(A+E)^{-1}$，得到$A-E=0$，即$A=E$。

**证:** 因为 $A$ 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 $Q$，使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

成立，其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是 $A$ 的特征值。所以 $A=Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}Q^{\mathrm{T}}$。因已知 $A^{\mathrm{T}}A=E$，计算：

$$E=A^{\mathrm{T}}A=AA=Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}Q^{\mathrm{T}}=Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2\}Q^{\mathrm{T}},$$

所以 $\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2\}=Q^{\mathrm{T}}EQ=E$。因此 $\lambda_i=\pm1$，$i=1,\ldots,n$。但已知 $A$ 正定，所以有 $\lambda_i=1$，$i=1,\ldots,n$。所以

$$A=Q\,\mathrm{diag}\{1,\ldots,1\}Q^{\mathrm{T}}=QQ^{\mathrm{T}}=E.$$

证毕。

# 第二章　历年考题

若干概念补充：

- 可逆矩阵，又可称满秩矩阵、非退化矩阵。
- 两个矩阵 $A,B$ 可交换，是指 $A,B$ 相乘可交换，也就是 $AB=BA$。
- 两个**矩阵** $A,B$ **等价**，是指矩阵 $A$ 经过一系列初等变换（行、列变换都可以用）得到矩阵 $B$。容易证明，若矩阵 $A$ 和 $B$ 等价，则 $B$ 和 $A$ 等价。两个矩阵等价的充要是它们有相同的行数和列数，且有相等的秩。
- 二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 半正定，是指对任意 $X\neq 0$，都有 $f\geqslant 0$。类似的可以定义二次型半负定，若一个二次型既不半正定、也不半负定；则称此二次型为不定的。容易证明，二次型半正定的充要条件是二次型的负惯性指数为 0。半正定的另一充要条件是二次型的矩阵的所有特征值都大于等于 0。

## 第一节　模拟自测题 A

**补充题 176:** $k$ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$$

分别有唯一解、无解和无穷多解？求有解时的全部解。

**补充题 177:** 已知二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3,$$

用正交变换将二次型 $f$ 化为标准形，并写出相应的正交变换。

**补充题 178:** $A$ 是 $m\times n$ 矩阵。且 $\mathrm{rank}(A)=n$。如果 $AB=A$，证明：$B=E$。

## 第二节 2015 级 A 卷

**考题2.2.1:** 判断题和选择题：

1. 对于任意 $n$ 阶矩阵 $A,B$，有 $|A+B|=|A|+|B|$。
2. $n$ 阶实对称矩阵的特征根必为实数。
3. 同一线性变换在不同基底下的矩阵是合同的。
4. 下列是 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 展开式中的项，且取“+”号的是（）

$$(A)\ a_{11}a_{26}a_{33}a_{42}a_{54}a_{65},\quad (B)\ a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34},$$

$$(C)\ a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{25}a_{66},\quad (D)\ a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}.$$

5. 设 $A,B,C$ 是同阶可逆方阵，下面各等式中正确的是（）

$$(A)\ ABC=CBA,\quad (B)\ |ABC|=|A||B||C|,$$

$$(C)\ (ABC)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}},\quad (D)\ (ABC)^{-1}=A^{-1}B^{-1}C^{-1}.$$

6. 设有实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+x_3^2$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为（）二次型。
   (A) 正定 (B) 负定 (C) 不定 (D) 半正定
7. 设 3 阶矩阵 $A$ 的特征值为 $0,1,2$，其对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=$（）

$$(A)\ \mathrm{diag}\{2,1,0\}\qquad (B)\ \mathrm{diag}\{2,0,1\}$$

$$(C)\ \mathrm{diag}\{0,1,4\}\qquad (D)\ \mathrm{diag}\{2,0,2\}$$

8. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2=0$，$E$ 是 $n$ 阶单位矩阵，则（）
   (a) $|E-A|\neq 0$ 但 $|E+A|=0$。

(b) $|E-A|=0$ 但 $|E+A|\neq 0$。

(c) $|E-A|=0$ 且 $|E+A|=0$。

(d) $|E-A|\neq 0$ 且 $|E+A|\neq 0$。

**考题2.2.2: 计算行列式:**

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+5 & 0 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & a+9 & 0 & 0 \\ 0 & a+7 & 0 & a+8 & 0 \\ a+3 & 0 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix}.$$

**考题2.2.3: 设**

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

**判断 $A$ 是否可逆，若可逆求 $A^{-1}$。**

**考题2.2.4: 对于线性方程组**

$$\begin{cases} x_1+x_2 & =1 \\ x_1-x_3 & =1 \\ x_1+ax_2+x_3 & =b \end{cases}$$

1. **当 $a,b$ 取何值时，无解、有唯一解、有无穷多组解？**
2. **当方程组有无穷多组解时，求其通解。**

**考题2.2.5: 在线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中，给定一组基底:**

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**在 $\mathbf{R}^2$ 中定义变换 $\sigma$:**

$$\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix},$$

1. **证明：变换 $\sigma$ 为线性变换。**

2. 求 $\sigma$ 在基底 $\alpha_1,\alpha_2$ 下的矩阵。

**考题2.2.6:** 已知二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3,$$

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出所用的正交变换矩阵 $P$，同时说明该二次型的类型（正定、负定、半正定、半负定、不定）。

**考题2.2.7:** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$\beta$ 不是 $AX=0$ 的解，证明 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\ldots,\beta+\alpha_n$ 线性无关。

**考题2.2.8:** 设 $A$ 和 $C$ 都是 $n$ 阶可逆矩阵，

$$M=\begin{pmatrix}0 & A\\ C & D\end{pmatrix},$$

$D$ 为 $n$ 阶矩阵，求 $M^{-1}$。

**考题2.2.9:** $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2-A-2E=0$。证明 $A$ 的特征值为 $-1$ 和 $2$，$A$ 与对角形矩阵相似。

**2015 级 A 卷参考答案**

**考题2.2.1:** 错、对、错、D, B, D, B, D。

**考题2.2.2:** 略。

**考题2.2.3:** $|A|=-1[1(-2)-2\cdot 2]\neq 0$，所以 $A$ 可逆。

**考题2.2.4:** 略。

**考题2.2.5:** 略。

**考题2.2.6:** $f$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

$A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$。

**求出的矩阵为**

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

$f$ 正定。

**考题2.2.7:** 略。

**考题2.2.8:** 略。

**考题2.2.9:** 略。

## 第三节 2014 级 A 卷

**考题2.3.1:** 判断题和选择题：

1. 若 $n$ 阶矩阵 $A$ 可逆，则其伴随矩阵 $A^*$ 满足 $(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$。
2. 若非齐次线性方程组 $AX=b(\neq 0)$ 有解，则它的解集合构成一个线性空间。
3. 若 $T$ 是欧氏空间 $V$ 中的一个正交变换，$V$ 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则必有 $T\alpha_1,T\alpha_2,T\alpha_3$ 线性相关。
4. $R^n(n>10)$ 中一组非全 0 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间的维数为（）。
   (A) 0 或 1 或 2 或 3　(B) 0 或 1 或 2　(C) 1 或 2　(D) 1 或 2 或 3
5. $n$ 阶方阵 $A$ 具有 $n$ 个线性无关的特征向量是 $A$ 与对角形矩阵相似的（）条件。
   (A) 充分　(B) 必要　(C) 充分必要　(D) 既不充分也不必要
6. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，则（）
   (a) $A-\lambda E=B-\lambda E$；
   (b) $A$ 与 $B$ 有相同的特征值和特征向量；

(c) $A$ 与 $B$ 都相似于一个对角矩阵；

(d) 对任意实数 $t$，$A-tE$ 与 $B-tE$ 相似。

7. 若方阵 $A_{n\times n}$ 不可逆，则 $A$ 的列向量中

(a) 必有一个向量为零向量；

(b) 必有两个向量对应分量成比例；

(c) 必有一个向量是其余向量的线性组合；

(d) 任一列向量是其余列向量的线性组合。

8. 设齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为 $X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，则系数矩阵 $A$ 为

$$(A)\ \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad (B)\ \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(C)\ \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad (D)\ \begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

**考题2.3.2:** 计算行列式：

$$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\0 & a_2 & b_2 & 0\\0 & b_3 & a_3 & 0\\b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}a_1+1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n\\a_1 & a_2+2 & \dots & a_{n-1} & a_n\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}+n-1 & a_n\\a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n+n\end{vmatrix},$$

其中 $n>2$。

**考题2.3.3:** 设 $n$ 阶方阵 $A$ 和 $B$ 满足 $AB=A+B$，$E$为 $n$ 阶单位矩阵，

1. 证明 $A-E$ 是可逆矩阵；
2. 若 $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $B$。

**考题2.3.4:** 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 & =0 \\ x_2+2x_3+2x_4 & =1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4 & =b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4 & =-1 \end{cases},$$

$a,b$ 为何值时，方程组无解，有唯一解和有无穷多组解？并对方程组有无穷多组解的情形，求其通解。

**考题2.3.5:** 设 $\mathbf{R}^4$ 中的一个基 $e_1,e_2,e_3,e_4$ 依次为以下 4 个向量：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

又

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix},$$

是 $\mathbf{R}^4$ 的另一组基。

1. 求由基 $e_1,e_2,e_3,e_4$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的过渡矩阵；
2. 求向量 $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 在后一组基下的坐标。

**考题2.3.6:** 已知二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_3x_4,$$

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 为标准形，并求出所用的正交变换，再求出该二次型的符号差。

**考题2.3.7:** 已知 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 线性无关，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关。

**考题2.3.8:** $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是欧氏空间 $V$ 中的一个向量组。令

$$D=\begin{vmatrix} \langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle \\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle \\ \ldots & & & \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle \end{vmatrix},$$

证明：若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，则 $D\neq 0$。

**考题2.3.9:** 自然数 $m,n$ 满足 $m>n>0$。$A$ 为 $m\times n$ 矩阵，$B$ 为 $n\times m$ 矩阵。且

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=n,$$

证明 $\mathrm{rank}(AB)=n$。

## 2014 级 A 卷参考答案

**考题2.3.1:** 对、错、对、C, C, D, C, A。

**考题2.3.2:** 略。

**考题2.3.3:** 略。

**考题2.3.4:** 略。

**考题2.3.5:** 略。

**考题2.3.6:** 略。

**考题2.3.7:** 反证。若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关，设它的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$。其中 $r$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩，$r<5$。因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 可以被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。又由题设给出的表达式，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表出，所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 可以被 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。但题设已知 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 线性无关，因此 $r\geqslant 5$。这与 $r<5$ 矛盾。因此假设不成立。故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关。

**考题2.3.8:** 略。

**考题2.3.9:** 因 $\operatorname{rank}(A)=n$，所以可以找到可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{n\times n}$，成立：

$$A=P\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}Q,$$

同理因 $\operatorname{rank}(B)=n$，所以可以找到可逆矩阵 $R_{n\times n}$ 和 $S_{m\times m}$，成立：

$$B=R\begin{pmatrix}E_n & 0\end{pmatrix}S,$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB)&=\operatorname{rank}\left[P\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}QR\begin{pmatrix}E_n & 0\end{pmatrix}S\right]=\operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}QR\begin{pmatrix}E_n & 0\end{pmatrix}\right]\\&=\operatorname{rank}(QR)=\operatorname{rank}(Q)=n.\end{aligned}$$

证毕。

## 第四节　2012 级 A 卷

**考题2.4.1:** 判断题和选择题：

1. 若两个 $n$ 维非零列向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 正交，则它们线性无关；
2. $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2-3A-2E=0$，其中 $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，则 $A$不可逆。
3. 若 $T$ 为线性空间 $V$ 中的正交变换，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 为 $V$ 中一个正交向量组，则 $T\alpha_1,T\alpha_2,\ldots,T\alpha_m$ 一定是一个正交向量组。
4. 下列行列式的值可能不为 0 的是
   (a) 行列式 $D$ 中有两列对应元素之和都为 0；
   (b) 行列式 $D$ 中某行元素全为 0；
   (c) 行列式 $D$ 中有两行含有相同的公因子；
   (d) 行列式 $D$ 中有一行与另一行元素对应成比例；
5. 如果一个非齐次方程组有解，则有唯一解的充要条件是它的导出组
   $(A)$ 有解　$(B)$ 无解　$(C)$ 只有零解　$(D)$ 有非零解;

6. 设 $n$ 阶矩阵 $A,B$ 和 $C$，则下列说法正确的是

$$(A)\ AB=AC \text{ 则 } B=C \quad (B)\ AB=0 \text{ 则 } |A|=0 \text{ 或 } |B|=0$$
$$(C)\ (AB)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \quad (D)\ (A+B)(A-B)=A^2-B^2;$$

7. 设 $\lambda=\frac{1}{2}$ 是可逆矩阵 $A$ 的一个特征值，则矩阵 $(3A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于

$$(A)\ \frac{4}{3} \quad (B)\ \frac{3}{4} \quad (C)\ \frac{1}{2} \quad (D)\ \frac{1}{4};$$

8. 设 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵，$A^*,B^*$分别为 $A,B$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则 $C$ 的伴随矩阵 $C^*$ 等于

$$(A)\ \begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix} \quad (B)\ \begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$$
$$(C)\ \begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix} \quad (D)\ \begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{pmatrix}$$

**考题2.4.2: 计算行列式：**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

**考题2.4.3: 求矩阵 $X$，使下式**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

成立。

**考题2.4.4:** 对于线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+2x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$$

$\lambda$ 为何值时方程组无解、有唯一解和有无穷多解?在方程组有无穷多解时,试用其导出组的基础解系表示全部解。

**考题2.4.5:** 已知三维向量空间 $R^3$ 的两个基:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$,

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}3 & -5 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \beta_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \beta_3=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩阵;求在两组基下有相同坐标的向量。

**考题2.4.6:** 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$,用正交变换把二次型化为标准形,并求出其正交变换矩阵 $P$,同时说明该二次型的类型。

**考题2.4.7:** 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵,且 $AA^{\mathrm{T}}=E$,$|A|=-1$,证明 $|A+E|=0$,(其中 $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵)。

**考题2.4.8:** 设 $X^*$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq 0)$ 的一个解,$n-r$ 个向量 $X_1,X_2,\dots,X_{n-r}$ 是它的导出组的基础解系,证明:$X^*,X^*-X_1,X^*-X_2,\dots,X^*-X_{n-r}$ 线性无关。

**考题2.4.9:** 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵,已知矩阵 $B=\lambda E+A^{\mathrm{T}}A$,其中 $E$ 是 $n$ 阶单位矩阵,证明:当 $\lambda>0$ 时,矩阵 $B$ 为正定矩阵。

## 2012 级 A 卷参考答案

**考题2.4.1:** 对、错、对、C, C, B, A, B。

**考题2.4.2:** 1. 将第 1 行的 $-1$ 倍加到第 3 行,第 1 行的 3 倍加到第 4 行,

得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

**考题2.4.3:** 等号左边两个常数矩阵分别记为 $A,B$，它们都可逆，且有：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将原式等号两边分别左乘 $A^{-1}$ 和右乘 $B^{-1}$，得

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} B^{-1}.$$

$A^{-1},B^{-1}$ 仍是初等矩阵，对应的初等变换分别为第 1、2 行互换和将第 1 列的 $-1$ 倍加到第 3 列，因此

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

毕。

## 第五节 2011 级 A 卷

**考题2.5.1:** 判断题和选择题：

1. 若矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，则 $A$ 等价于 $B$；
2. 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，且 $R(A)=m$，则齐次方程组 $AX=0$ 只有零解；

3. 在欧氏空间中只有零向量的模长为 0；

4. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = n$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$ 等于

   $(A)\ m+n \quad (B)\ -(m+n) \quad (C)\ m-n \quad (D)\ n-m;$

5. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，$C$ 是 $n$ 阶正交矩阵，且 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，则下列结论不成立的是

   (a) $A$ 与 $B$ 相似；

   (b) $A$ 与 $B$ 等价；

   (c) $A$ 与 $B$ 有相同的特征值；

   (d) $A$ 与 $B$ 有相同的特征向量；

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$，其中 $a > b > 0$ 且 $a^2 + b^2 = 1$，则 $A$ 为

   $(A)$ 初等矩阵　$(B)$ 正交矩阵　$(C)$ 正定矩阵　$(D)$ 负定矩阵;

7. 对于 $n$ 阶矩阵 $A$，以下哪个条件不能得出“$A$ 与对角形矩阵相似”的结论

   (a) $A$ 有 $n$ 个互异的特征值

   (b) $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量；

   (c) $A$ 是实对称矩阵；

   (d) $A$ 的秩为 1；

8. $n$ 阶矩阵 $A,B,C$ 满足 $ABC = E$，$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，则 $B$ 的逆矩阵等于

   $(A)\ A^{-1}C^{-1} \quad (B)\ C^{-1}A^{-1} \quad (C)\ CA \quad (D)\ AC;$

**考题2.5.2: 计算行列式：**

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

**考题2.5.3:** 求矩阵 $X$，使下式成立：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

**考题2.5.4:** $\lambda$ 为何值时，方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\2x_1+\lambda x_2+2x_3=2\\5x_1+(\lambda+3)x_2+(\lambda+2)x_3=6\end{cases}$$

有解，有无穷多解，有唯一解？当方程组有解时，求其解。

**考题2.5.5:** 已知三维向量空间 $R^3$ 的一个基：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；设

$$\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$$
$$\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$$
$$\beta_3=\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3$$

证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 也是 $R^3$ 的一个基；求由基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵；若向量 $\alpha$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(1,-2,0)$，求 $\alpha$ 在 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下的坐标。

**考题2.5.6:** 求一个正交变换$X=PY$，使下列二次型化成标准型。

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2,$$

并求出该二次型的秩，说明该二次型的类型（正定、负定、半正定、半负定、不定）。

**考题2.5.7:** $A,B,C,D$ 均为 $n$ 阶方阵，$A$ 是可逆矩阵，且有 $AB=BA$，证明：

$$\begin{vmatrix}A&C\\B&D\end{vmatrix}=|AD-BC|.$$

**考题2.5.8:** 设 $X^*$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个解，$X_1,X_2,\ldots,X_{n-r}$ 是它的导出组的基础解系，证明：$X^*,X_1,X_2,\ldots,X_{n-r}$ 线性无关。

**考题2.5.9:** 已知存在 $n$ 阶非零实矩阵 $C$，使得矩阵 $A = C^{\mathrm{T}}C$，证明 $|A+E| > 1$，其中$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵。

## 第六节　2010 级 A 卷

**考题2.6.1:** 判断题和选择题：

1. $n$ 阶实对称矩阵的特征根必定为实数。
2. 若矩阵 $A$ 和 $B$ 具有相同的秩，则 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 是同解方程组。
3. 非齐次线性方程组 $AX = \beta(\beta \neq 0)$ 的全部解构成线性空间 $R^n$ 的一个子空间。
4. 设$\alpha, \beta$是相互正交的$n$维实向量，则下列式子中错误的是

   $$(1)\ |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2+|\beta|^2 \qquad (2)\ |\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$$
   $$(3)\ |\alpha-\beta|^2 = |\alpha|^2+|\beta|^2 \qquad (4)\ |\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$$

5. 设$\alpha_1 = (1\ \ 1\ \ 1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (2\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组$AX = 0$的基础解系，则矩阵$A$可能是：

   $$(A)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad (B)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (C)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   $(D)$ 以上都不对

6. 设$n$阶方阵$A$与$B$等价，则有

   $(A)$ $|A| = |B|$　$(B)$ $|A| \neq |B|$　$(C)$ 若$|A| \neq 0$，则有$|B| \neq 0$　$(D)$ $|A| = -|B|$

7. $A$为$n$阶方阵，$AB = 0$，且矩阵$B \neq 0$，则必有

   $(A)$ $A$的列向量组线性无关　　$(B)$ $A = 0$

   $(C)$ $A$的列向量组线性相关　　$(D)$ $A$的行向量组线性无关

**考题2.6.2:** 计算行列式，第二个中$n>2$。

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

**考题2.6.3:** 矩阵 $X$ 满足下式，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

求 $X$。

**解:** 矩阵$X$两边的矩阵都是初等矩阵，且都是第一种初等矩阵。因此知道它们都可逆，且各自的逆分别是它们自身。因此，

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最后一个式子计算结果是对中间那个矩阵进行一次行初等变换和列初等变换。因此，

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

计算完毕。

**考题2.6.4: 线性方程组**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**问：当λ取何值时，方程组无解、有解？当方程组有无穷多组解是，求方程组的通解。**

**解:** 方程组的增广矩阵是:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 & 3 \\ 1 & \lambda & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

对增广矩阵进行行初等变换，将它化成阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 & 3 \\ 1 & \lambda & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3+\lambda(\lambda-2) & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

因此，当 $\lambda$ 满足 $\lambda(\lambda-2)-3\neq 0$ 时，即当 $\lambda\neq 3$ 且 $\lambda\neq -1$ 时，系数矩阵的秩为 $3$，而增广矩阵的秩也为 $3$，此时方程组有唯一解。当 $\lambda$ 满足 $\lambda(\lambda-2)-3=0$ 时，系数矩阵的秩为 $2$，而 $\lambda=3$ 时，增广矩阵的秩也为 $2$，此时方程组有无穷多组解，当 $\lambda=-1$ 时，增广矩阵的秩为 $3$，因此此时方程组无解。

方程组有无穷多组解，即当$\lambda=3$时，方程组化为:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ \quad -x_2+3x_3=1 \end{cases}$$

取$x_3$为自由未知量，将方程组化为

$$\begin{cases} x_1=3-7x_3 \\ x_2=-1+3x_3 \end{cases}$$

取$x_3=\tilde{x_3}$，其中$\tilde{x_3}$为任意实数，则方程组的通解可表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-7\tilde{x_3} \\ -1+3\tilde{x_3} \\ \tilde{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x_3} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

计算完毕。

**考题2.6.5:** 已知线性空间$\mathrm{R}^3$的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵是$P$。其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

求：基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$。并求在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$和在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下有相同坐标的向量的全体。

**解:** 根据已知，成立式子:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} P,$$

因此，

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+4\cdot 2 \\ 2+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix},$$

设满足条件的向量在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，则有，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

即$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$满足线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解方程组，得到此方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

因此该方程组的解集合为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} k,$$

所以满足题目要求的向量的全体为

$$\left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} k, k \in R \right\} = \left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} k, k \in R \right\},$$

计算完毕。

**考题2.6.6:** 求一个正交变换$X = PY$，使下列二次型化成标准型。

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$$

并说明该二次型的类型（正定、负定、半正定、半负定、不定）。

**考题2.6.7:** $A$为$n$阶（$n > 2$）可逆矩阵，$\alpha$为$n$维列向量，$b$为实常数，记分块矩阵

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix},$$

其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$为单位矩阵。计算并化简$PQ$。证明$Q$可逆的充要条件是$\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \neq b$。

**解:** 计算$PQ$，得

$$PQ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^*A + |A|\alpha^{\mathrm{T}} & -\alpha^{\mathrm{T}}A^*\alpha + |A|b \end{pmatrix},$$

而$-\alpha^{\mathrm{T}}A^*A + |A|\alpha^{\mathrm{T}} = -\alpha^{\mathrm{T}|}|A|E + |A|\alpha^{\mathrm{T}} = 0$，所以

$$PQ = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & -\alpha^{\mathrm{T}}A^*\alpha + |A|b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha + b) \end{pmatrix},$$

$|PQ| = |A|^2 \cdot (-\alpha^{\mathrm{T}} A^{-1} \alpha + b)$。另一方面，$|P| = |E| \cdot |A| = |A|$，因已知$A$可逆，所以$|A| \neq 0$，所以$|P| \neq 0$。

所以如果$Q$可逆，则$|PQ| \neq 0$，根据上式知$-\alpha^{\mathrm{T}} A^{-1} \alpha + b \neq 0$，即

$$b \neq \alpha^{\mathrm{T}} A^{-1} \alpha,$$

反之，如果上式成立，则$|PQ| \neq 0$，所以$|Q| \neq 0$，所以$Q$可逆。

**考题2.6.8:** 设向量组$A$：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L$和向量组$B$：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_S$的秩分别是$p$和$q$。证明：若$A$可由$B$线性表示，则$p \leqslant q$。

**解:** 取向量组$A$的极大线性无关组，设为$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_p}$，其中$p$为题目中给出的，向量组$A$的秩。$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_p}$可以被向量组$A$线性表出；取向量组$B$的极大线性无关组，因已知向量组$B$的秩为$q$，所以设为$\beta_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_q}$，$B$向量组可以被$\beta_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_q}$线性表出。又已知向量组$A$可以被向量组$B$线性表出，所以$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_p}$可以被$\beta_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_q}$线性表出。又$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_p}$是线性无关组，所以$p \leqslant q$。

**考题2.6.9:** 设$\alpha, \beta$是3维列向量，矩阵$A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{\mathrm{T}}$。证明：$A$的秩$R(A) \leqslant 2$；若$\alpha, \beta$线性相关，则$R(A) < 2$。

**解:** 因$\alpha, \beta$均为列向量，因此$R(\alpha) = 1$，$R(\beta) = 1$。所以

$$R(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) \leqslant R(\alpha) = 1, \qquad R(\beta\beta^{\mathrm{T}}) \leqslant R(\beta) = 1,$$

所以有$R(A) \leqslant R(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) + R(\beta\beta^{\mathrm{T}}) \leqslant 1 + 1 = 2$。又若$\alpha, \beta$线性相关，则其中一个可被另一个线性表出，不妨设$\beta$可被$\alpha$线性表出，即存在数$k$使$\beta = k\alpha$成立。此时，

$$A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{\mathrm{T}} = \alpha\alpha^{\mathrm{T}} + k\alpha(k\alpha)^{\mathrm{T}} = (1 + k^2)\alpha\alpha^{\mathrm{T}},$$

所以$R(A) \leqslant R(\alpha) = 1$。

## 第七节 2009级A卷

**考题2.7.1:** 判断题和选择题：

1. 方阵$A, B$满足$AB = BA$，则必有$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$。
2. 若方阵$A$有$A^k = 0$（$k$为整数）,则必有$|A| = 0$。
3. $A, B$为同型矩阵，且秩$(A)$＝秩$(B)$，则$AX = 0$与$BX = 0$是同解方程组。
4. $A$阶实对称矩阵$A$正定，则以下结论错误的是：
   (a) 可以找到一个正交矩阵$F$，使$F'AF$为对角矩阵。
   (b) $A$的所有的特征值均为正值。
   (c) $A$是不可逆矩阵。
   (d) 对某个$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \neq 0$，必有$X'AX > 0$。
5. $n$维向量$\alpha, \beta$正交，则内积$\langle \alpha, \beta \rangle =$：
6. 下列说法不正确的是：
   (a) $T$ 是线性空间 $V$ 中线性变换，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，则 $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_m$ 线性无关。
   (b) 存在满足 $PQ = 0$ 的两个非零 $n(n > 1)$ 阶矩阵 $P$ 和 $Q$。
   (c) $n$ 维实线性空间 $V$ 中任何 $n$ 个线性无关的向量都构成 $V$ 的一个基底。
   (d) 设 $V$ 是一个任意的 $n$ 维欧式空间，$T$ 是 $V$ 中一个任意的线性变换，则 $V$ 中的零向量在 $T$ 作用下的象一定也是零向量。
7. 下列说法不正确的是：
   (a) 若$T$是欧式空间$V$中的一个正交变换，则$T$在$V$的任意一个基底下的矩阵为正交矩阵。
   (b) 相似矩阵有完全相同的特征多项式。
   (c) 若$V$是一个$n$维线性空间，则$V$中向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m > n)$的所有线性组合构成的一个子空间。
   (d) 二次型$X'AX$与二次型$Y'BY$等价，二次型$Y'BY$与二次型$Z'CZ$等价，则矩阵$A$与$C$等价。
8. $A$与$B$均为$n$阶方阵，则下列结论中成立的是
   (a) $|AB| = 0$，则$A = 0$或$B = 0$。

(b) $|AB|=0$，则$|A|=0$或$|B|=0$。

(c) $AB=0$，则$A=0$或$B=0$。

(d) $AB\neq 0$，则$|A|\neq 0$或$|B|\neq 0$。

**考题2.7.2:** 计算$n(n>2)$阶行列式。

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

**考题2.7.3:** 三阶方阵$A,B$满足关系式$AB+E=A^2+B$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求$B$。

**解:** 将题目中等式整理为$(A-E)B=A^2-E$，而

$$\det(A-E)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\neq 0,$$

所以$A-E$可逆。因此，

$$B=(A-E)^{-1}(A^2-E)=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

计算完毕。

**考题2.7.4:** 参数$\lambda$分别取什么值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1 \\ (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda \\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1 \end{cases}$$

有解，有无穷多解，有唯一解？当方程组有解时，求其解。

**考题2.7.5:** 求正交变换$X=PY$，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形，并写出其标准形。

**考题2.7.6:** $Q$是一个$n$阶正交矩阵，证明$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$是一个$2n$阶正交矩阵。

**解:** 设

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix},$$

计算$MM^{\mathrm{T}}$，

$$\begin{aligned} MM^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{\mathrm{T}} & -Q^{\mathrm{T}} \\ Q^{\mathrm{T}} & Q^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 2E \end{pmatrix} = E, \end{aligned}$$

因此$M$是正交矩阵。

**考题2.7.7:** 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性空间$V$的一个基底，

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\alpha_2 \\ \beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \\ \beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \end{cases}$$

证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 也是 $V$ 的一个基底，并求向量 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 在基底 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下的坐标。

**考题2.7.8:** 设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m(m>2)$ 中，$\alpha_1\neq 0$，且每个 $\alpha_i(i=2,3,\ldots,m)$ 都不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$ 线性表出。证明该向量组线性无关。

**考题2.7.9:** 实矩阵$C_{m\times n}$（其中$m>n$）的秩为$n$。矩阵$A=C'C$。证明：$A$是正定矩阵；$|A+E|>1$，其中$E$为$n$阶单位矩阵。

# 第八节 2008级A卷

**考题2.8.1: 判断题和选择题：**

1. 若对于矩阵$A,B,C$有$BA=BC$且$|B|<0$，则必有$A=C$。
2. 任何方阵总可以经过一系列初等列变换化成对角形矩阵。
3. 设$A$为$n$阶矩阵，若$|\lambda E-A|\neq 0$，则$\lambda$不是$A$的特征根。
4. 设$A$为正交矩阵，且$|A|=-1$，则$A^*=A', -A', A, -A.$
5. 设$A,B$均为$n$阶正交矩阵，$C=AB$，则必有
   (a) $A+B=0$，
   (b) $C$为正交矩阵，
   (c) $|A|=0$或$|B|=0$，
   (d) $|A|+|B|=0$。
6. 设$n$阶方阵$A$与$B$合同，则必有
   (a) $|A|=|B|$，
   (b) $|A|\neq|B|$，
   (c) 若$|A|\neq 0$，则有$|B|\neq 0$，
   (d) $|A|=-|B|$。
7. $n$阶实对称矩阵$A$正定的充要条件是：
   (a) $A$是可逆矩阵，
   (b) $A$的所有的特征值均为正值
   (c) 可以找到一个正交矩阵$F$，使$F'AF$为对角矩阵
   (d) 对某个$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)'$有$X'AX>0$。
8. 零为方阵的特征值是不可逆的
   (a) 充分条件
   (b) 必要条件
   (c) 充要条件
   (d) 非充分，非必要条件

**考题2.8.2:** 计算行列式。$n>2$，$x_i\neq 0$，$i=1,2,\ldots,n$。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix} \qquad D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 2 & \ldots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \ldots & & & & \\ 1 & 2+x_2 & \ldots & n-1 & n \\ 1+x_1 & 2 & \ldots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

**考题2.8.3:** 矩阵$A,B$满足$AB-B=A$，其中$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$。

**考题2.8.4:** 证明：若 $n$ 维向量 $\alpha_1\neq 0$，$\alpha_2$ 不能由 $\alpha_1$ 线性表示，$\alpha_3$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

**考题2.8.5:** $a,b$为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有解，无解，有无穷多解？并求有无穷多解时方程组的通解。

**考题2.8.6:** 已知实二次型$f=2x_1^2+2x_2x_3$，写出二次型的矩阵表达式；用正交变换把二次型化为标准形，并写出相应的正交矩阵。

**考题2.8.7:** $R^3$ 的两个基

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\beta_1,\beta_2,\beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩阵 $P$；已知向量 $\alpha=\alpha_1+3\alpha_2$，求向量 $\alpha$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下的坐标。

**解:** 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩阵 $P$ 满足

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}P,$$

设 $P=(p_{ij})_{3\times 3}$，则上式就是

$$\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + p_{31}\alpha_3$$

$$\beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + p_{32}\alpha_3$$

$$\beta_3 = p_{13}\alpha_1 + p_{23}\alpha_2 + p_{33}\alpha_3$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 为列向量，所以以上式子可以表示为矩阵乘积形式，即

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} P = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。计算:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

因此

$$P = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

以下计算暂略。

**考题2.8.8:** 设$A$和$B$都是$n$阶正定矩阵，证明$A$合同于$B$。

**考题2.8.9:** 已知三阶矩阵$A$和三阶列向量$X$，且向量组$\{X, AX, A^2X\}$ 线性无关。

$$A^3X = 3AX - 2A^2X,$$

设矩阵$P = \begin{pmatrix}X & AX & A^2X\end{pmatrix}$，且

$$AP = PB,$$

求矩阵$B$。

# 参考文献

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编, **高等代数（第二版）**，高等教育出版社, 1988 年。

[2] 熊全淹、叶明训编，**线性代数**，高等教育出版社，1977 年。

[3] 谢邦杰, **线性代数**，人民教育出版社，1978 年。

[4] 刘丁酉主编, **高等代数习题精解**，中国科学技术大学出版社，2004 年 8 月。

[5] 樊恽, **线性代数学习指导**，科学出版社，2003 年 2 月。

[6] 李忠范等编, **线性代数与随机数学习题课教程**，高等教育出版社，2006 年 5 月。

[7] 李尚志主编，**线性代数**，高等教育出版社，2006 年 5 月。