2004 级《微积分 A》期末试卷(A 卷)参考答案及评分标准

一、1. $\int(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})dx$

$= \int \arcsin x dx - \int x\sqrt{1-x^2}dx$

$= x\arcsin x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$ …….2 分

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ …………….6 分

2. 对应齐次方程的特征方程：$r^2+1=0$

特征根：$r=\pm i$

对应齐次方程的通解：$Y(x)=C_1\cos x + C_2\sin x$ …….2 分

设非齐次方程的特解为 $\bar{y}=Ae^{2x}$

代入原方程，得 $4Ae^{2x}+Ae^{2x}=e^{2x}$

故 $A=\frac{1}{5}$，$\bar{y}=\frac{1}{5}e^{2x}$ ……..……….5 分

原方程的通解：$Y(x)=C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{5}e^{2x}$

其中 C_1, C_2 为任意常数. ……..……….6 分

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}\ln(1+t^2)dt}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+4x^2)}{3x^2}$ ……….………….4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\times 4x^2}{3x^2}=\frac{8}{3}$ ……………………6 分

4. $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展式为：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

$$\therefore \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+o(x^8)$$

$$f(x)=x^2\ln(1+x^2)=x^4-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{3}-\frac{x^{10}}{4}+o(x^{10})$$ ……….4 分

由 Taylor 公式中系数的唯一性知

$$a_8=\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore f^{(8)}(0)=\frac{8!}{3}=13440$$ ………. 6 分

5. 由极坐标与直角坐标的关系有：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}，\quad \theta=\frac{\pi}{2}\text{时，}\quad \begin{cases} x_0=e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}=0 \\ y_0=e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$ ….2 分

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$$ ………5 分

切线方程为：$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-x$，即 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$. ……… 6 分

二、1. 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}=\int_1^{+\infty}\frac{t\cdot 2tdt}{1+t^3}=\frac{2}{3}\int_1^{+\infty}\frac{d(1+t^3)}{1+t^3}$$

$$=\left.\frac{2}{3}\ln(1+t^3)\right|_1^{+\infty}=+\infty$$

$$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}\text{发散.}$$ ………………7 分

2. 因为，当$x<0$时，$f(x)=ae^{x}+be^{-x}$，

当$x>0$时，$f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$，均可导，

故要使$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，只须$f(x)$在$x=0$处可导即可.

由可导与连续的关系知，$f(x)$在$x=0$处应连续．又

$f(0)=a+b$，$f(0^{-})=\lim\limits_{x\to 0^{-}}(ae^{x}+be^{-x})=a+b$，　………………3 分

$$f(0^{+})=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x}{x}=1,$$

$\therefore a+b=1$

$$f_{-}'(0)=\lim_{x\to 0^{-}}(ae^{x}+be^{-x})'=\lim_{x\to 0^{-}}(ae^{x}-be^{-x})'=a-b$$

$$f_{+}'(0)=\lim_{x\to 0^{+}}[\frac{1}{x}\ln(1+x)]'=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^{2}}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore a-b=-\frac{1}{2}$　………………6 分

结合$a+b=1$，解得$a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$.

所以当$a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$时$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{x}-\frac{3}{4}e^{-x} & x<0\\ -\frac{1}{2} & x=0\\ \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^{2}} & x>0\end{cases}$$ ………………7 分

3. 原方程为伯努利方程，作变换，令$u=y^2$，$\dfrac{du}{dx}=2yy'$，

原方程化为：$u'+4xu=2x$ ………………2 分

$$u=e^{-\int 4xdx}(\int 2xe^{\int 4xdx}dx+C)$$
$$=e^{-2x^2}(\int 2xe^{2x^2}dx+C)$$
$$=e^{-2x^2}(\frac{1}{2}e^{2x^2}+C)$$

$\therefore y^2=e^{-2x^2}(\dfrac{1}{2}e^{2x^2}+C)$ ………………6 分

由初值$y(0)=1$，得$1=\dfrac{1}{2}+C$，$\therefore C=\dfrac{1}{2}$，

特解为：$y^2=\dfrac{1}{2}(1+e^{-2x^2})$ ……………7 分

4. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-\dfrac{1^2}{n^2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-\dfrac{2^2}{n^2}}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4-\dfrac{n^2}{n^2}}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4-\dfrac{i^2}{n^2}}}\cdot\dfrac{1}{n}$ ……………4 分

又函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，因而可积，由定积分的定义，对$[0,1]$

n等分，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，特殊点ξ_i取为小区间的右端点，有

上式极限$=\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{6}$ ……………..7 分

三、　任取$x>0$，在等式$f(x)F(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$两边从 1 到$x$积分，

有　$\int_1^x f(x)F(x)dx=\int_1^x \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　…………2 分

而

$$\int_1^x f(x)F(x)dx=\int_1^x F(x)dF(x)=\frac{1}{2}F^2(x)-\frac{1}{2}F^2(1)=\frac{1}{2}F^2(x)-\frac{\pi^2}{16}$$

$$\int_1^x \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int_1^x \frac{\arctan\sqrt{x}}{[1+(\sqrt{x})^2]}d\sqrt{x}=2\int_1^x \arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}$$

$$=\arctan^2\sqrt{x}\Big|_1^x=\arctan\sqrt{x}-\frac{\pi^2}{16}$$

$$\therefore \frac{1}{2}F^2(x)-\frac{\pi^2}{16}=\arctan\sqrt{x}-\frac{\pi^2}{16}$$

$\therefore F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x}$　…………6 分

$f(x)=F'(x)=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}$.　…………8 分

四、　解交点：$\begin{cases} y=ax \\ y=x^2 \end{cases}$，得交点$(0,0),(a,a^2)$.　…………2 分

(1)　$S=S_{D1}+S_{D_2}=\int_0^a (ax-x^2)dx+\int_a^{\sqrt{2}}(x^2-ax)dx$

$$=\left(\frac{a}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right)\Bigg|_a^{\sqrt{2}}$$

$=\dfrac{a^3}{3}-a+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　…………6 分

$\dfrac{dS}{da}=a^2-1$，令$\dfrac{dS}{da}=0$，得$a=1$，$(\because 0<a<\sqrt{2},\therefore a=-1$舍去$)$

又$\dfrac{d^2S}{da^2}=2a$，$\left.\dfrac{d^2S}{da^2}\right|_{a=1}=2>0$，

$\therefore a=1$时S取得极小值，唯一的极小值是最小值，

$\therefore a=1$时 S 取得最小值，$S_{最小}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$. …………8 分

(2) $V_1=\pi\int_0^1[(\sqrt{y})^2-y^2]dy=\pi\left(\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{6}\pi$，

$$V_2=\pi\int_1^{\sqrt{2}}(x^4-x^2)dx=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\pi(\sqrt{2}+1)}{15}.$$

……………12 分

五、 证明：设 $F(x)=x\int_0^x\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}-2\sqrt{1+x^2}+2$， …………...2 分

则$F(0)=0$，又

$$F'(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ …………...4 分

由积分中值定理知：存在$\xi\in(0,x)$，使得

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$\therefore F'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+\xi^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$$

$\because\sqrt{1+x^4}\geq 1$且仅当$x=0$时等号成立。又

$\therefore F'(x)$严格单增，$\therefore F'(x)>F'(0)$，对$\forall x>0$，

$\therefore x\int_0^x\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}>2\sqrt{1+x^2}-2$. …………...8 分

六、 解：由题意知

$$\begin{cases}m\dfrac{dv}{dt}=-kv\\ v(0)=5\end{cases}$$ …………3 分

分离变量，解方程，得$\ln v=-\frac{k}{m}t+\ln C$，

即$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$， 由$v(0)=5$，得$C=5$，

$\therefore v=5e^{-\frac{k}{m}t}$

又$v(t)=2.5$，有$2.5=5e^{-\frac{k}{m}\times 4}$， 得$\frac{k}{m}=\frac{\ln 2}{4}$，

$\therefore v=5e^{-\frac{\ln 2}{4}t}$ …………6 分

游艇滑行的最长距离：

$S=\int_0^{+\infty}v(t)dt=\int_0^{+\infty}5e^{-\frac{\ln 2}{4}t}dt=-\frac{20}{\ln 2}e^{-\frac{\ln 2}{4}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{20}{\ln 2}$． ………..8 分

七． 证明：对$\forall x\in(0,a)$，$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ ….2 分

$$=\frac{g'(x)}{g(x)}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$=\frac{g'(x)}{g(x)}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\right]$$

由已知条件知：$f(x),g(x)$在$[0,x]$上满足 Cauchy 中值定理

条件，知$\exists\xi\in(0,x)$,有

$$\text{上式}=\frac{g'(x)}{g(x)}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right]\geq 0$$

$(\because g'(x)>0,g(0)=0,\therefore g(x)>0,$ 又 $\because \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 单增,而$\xi<x)$

$\therefore \frac{f(x)}{g(x)}$在$(0,a)$内也单调递增. …………6 分