课程编号：A072001　　　　北京理工大学 2006-2007 学年第二学期

2006 级《微积分 A》期末试卷 (A 卷)

一、完成下列各题（每小题 6 分）

1．已知直线 $L:\dfrac{x-1}{k}=\dfrac{y-a}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$ 在平面 $\pi:3x-2y+z=7$ 内，求 k 与 a 的值.

2．设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 f,φ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3．已知 $\vec{n}$ 是曲面 $x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{2}=5$ 在点 $(1,1,2)$ 处指向 x 增大方向的单位法向量，$u=e^x+\ln(1+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(0,1,1)}$.

4. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D y^2dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成的平面有界闭区域.

5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{4n-1}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ 的敛散性；若收敛，指出是条件收敛还是绝对收敛.

二、求解下列各题（每小题 7 分）

1．求二元函数 $z=f(x,y)=x^3+y^2-2xy$ 的极值点与极值.

2．计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma(x+y+z)dS$，其中曲面 Σ 为：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3．计算第二类曲线积分 $I=\int_L(e^y-yx^2)dx+(xe^y-2\sin y+xy^2)dy$，其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=1$（$y\ge 0$），积分沿从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$ 的方向.

4．设 $f(x)=\pi-2|x|$，$-\pi\le x\le\pi$，将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

三、(8 分) 求证：曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2-z=0\\3x+2y+1=0\end{cases}$ 上点 $P(1,-2,1)$ 处的切线与直线 $L:\begin{cases}3x-5y+5z=0\\x+5z=1\end{cases}$ 垂直.

四、（8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^n n}$ 的收敛域与和函数.

五、(8 分) 计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_S xy^2dydz+yx^2dzdx+zdxdy$，其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$（$0\le z\le 1$）的上侧.

六、（10 分）设 Ω 是由半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $3z^2=x^2+y^2$（$z\ge 0$）围成的实心

体，假设其质量分布是均匀的．求Ω的体积 V 和质心坐标$(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$．

七、（8 分）设$\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，其中$t>0$．已知$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续，

又设 $F(t)=\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

（1）求证：$F(t)$在$(0,+\infty)$内可导，并求$F'(t)$的表达式；

（2）设$f(0)\ne 0$，求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\lambda}F'(\frac{1}{n})$在$\lambda>0$时收敛，$\lambda\le 0$时发散.