课程编号：A071001　　　　北京理工大学 2006-2007 学年第二学期

2006 级数学分析 B 期末试题(A)

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 设直线 $L:\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{n}$ 在平面 $\pi:3x-2y+z-8=0$ 上，求 a 与 n 的值.

2. 设 $z=xf(\dfrac{y}{x})+\varphi(x^2+y^2)$，其中 f,φ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设 D 是由直线 $y=x$，$y=2x$，$y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为 1)，求 D 对于 y 轴的转动惯量.

4. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，指出 p 在什么范围内取值时级数绝对收敛，p 在什么范围内取值时级数条件收敛，p 在什么范围内取值时级数发散(要说明理由).

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 已知 $\vec{n}$ 是曲面 $x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{2}=5$ 在点 $(1,1,2)$ 处指向 x 增大方向的单位法向量，$u=e^x+\ln(1+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(0,1,1)}$.

2. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 位于平面 $z=1$ 上方的部分，计算曲面积分 $I=\iint\limits_S \dfrac{1}{z}dS$.

3. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dV$，其中 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围成的立体.

4. 求二元函数 $z=x^3+y^2-2xy$ 的极值点与极值.

三. (8 分) 设 $f(x)=\pi-2|x|$，$-\pi\le x\le\pi$，将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

四. (8 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^n n}$ 的收敛域与和函数.

五. (8 分) 计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_S 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ (0\le z\le 1)$ 的上侧.

六. (8 分) 将 $f(x)=\ln(5-2x)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，确定其收敛域，并求 $f^{(5)}(1)$ 的值.

七. (10 分) 设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内不取零值的可微函数，已知

$\varphi(x)(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+\varphi(x)(x^2+y^2)dy$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

(1) 求 $\varphi(x)$ 满足的微分方程及 $\varphi(x)$ 的表达式； (2)求 $u(x,y)$ 的表达式.

八. (6 分) 设 $t>0$，以 $\Omega(t)$ 表示由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=t$ 围成的有界闭区域. 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，又设 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2)dxdydz$.

(1) 求证：$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连可导，并求 $F'(t)$ 的表达式;

(2) 若 $\forall t>0$，有 $\frac{1}{\pi}F(t)=e^{-t}-\int_0^t f(x)dx$，且 $f(0)=1$，试求 $f(x)$ 的表达式.