

2005 级《微积分 A》期末试卷(A 卷)

一、求解下列各题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 设 $y = \sqrt{x} \arctan \sqrt{x-1}$, 其中 $x > 1$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
2. 计算不定积分 $I = \int \left(\frac{x^9}{\sqrt{4-x^{20}}} + \ln(1+x) \right) dx$.
3. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+e), & x > 0 \\ a^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 试求 a 的值使 $f'(0)$ 存在, 并求 $f'(0)$.
4. 计算广义积分 $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx$.
5. 求微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解.

二、完成下列各题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$
2. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 及
曲线 $y = y(x)$ 在 $t = 1$ 对应点处的曲率半径.
3. 求微分方程 $y'' + 4y = x + e^x$ 的通解.
4. 求曲线 $y = 2x^2$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围平面图形绕直线 $x = 3$
旋转所得的旋转体的体积.

三、(8分) 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{1+t^3} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\sqrt{t}}{1+t^3} dt$, 其中 $x > 0$,

求证: $F(x)$ 恒为常数, 并求此常数.

四、(8分) 设有边长为 a 的等边三角形平板, 将其竖直放入水中, 使三角形的一边与水面重合, 设水的密度为 ρ , 求平板所受到的水压力.

五、(10分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2} + 3$,

- (1) 求函数的增减区间及极值;
- (2) 求函数的凹凸区间及拐点;
- (3) 求函数图形的渐近线.

六、(9分) 设函数 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内二阶可导, 又对任意的 $x > 0$,

$y'(x) > 0$, $y''(x) > 0$, 且 $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$. 过曲线 $\Gamma: y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$, 做曲线 Γ 的切线及 Y 轴的垂线 L_x . 对任意 $x > 0$, 记由上述切线、垂线及 Y 轴所围成的三角形面积为 $A(x)$, 记由垂线 L_x , Y 轴及曲线 Γ 围成的曲边三角形面积为 $S(x)$,

- (1) 对任意的 $x > 0$, 试写出 $A(x)$ 和 $S(x)$ 的表达式;
- (2) 若已知 $A(x) = 2S(x)$, 求函数 $y = y(x)$ 的表达式.

七、(7分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内二阶可导, 又设对任意的 $a > 0$,

函数 $F(x) = \int_a^x (x^2 - t^2) f'(t) dt$ 都有驻点 $a_1 > a$. 求证:

- (1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内必有驻点;
- (2) 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.