2008 级《微积分 A》第一学期期末

参考答案　　2009.1.16

一、每小题 3 分，共 30 分.

1. e^4；　　2. $\frac{1}{2}\arctan^2 x + x\ln x - x + C$;

3. $x=1$，第一类；　　4. $y' = 10^{x\tan(2x)}[\tan(2x) + 2x\sec^2(2x)]\ln 10$;

5. $y = \frac{1}{x}$;　　6. $\frac{16}{15}$;

7. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{t^3}$;　　8. $\ln 2$;

9. $a=1,\quad b=-\frac{3}{2}$;　　10. $-e^2$.

二、（9 分）解：对应齐次方程的特征方程：$r^2+1=0$　　**…………2 分**

对应齐次方程的特征根：　$r_1=-i, r_2=i$　　**…………3 分**

对应齐次方程的通解：　$Y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$　　**…………5 分**

由于 $w=0$ 不是对应齐次方程的特征根，故非齐次方程的特解可设为：

$\bar{y} = ax^2+bx+c$，　　**…………7 分**

$\bar{y}' = 2ax+b,\qquad \bar{y}'' = 2a,$

代入原方程，得　　$2a+ax^2+bx+c = x^2+x$

比较 x 的同次幂系数，得　$a=1,\ b=1,\quad 2a+c=0$，$\Rightarrow c=-2$

故原方程的特解为：　$\bar{y} = x^2+x-2$　　**…………8 分**

故原方程的通解为：　$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 + x - 2$　**….9 分**

三、（9 分）解：1. 连续性： $f(0)=0,\ f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0=f(0-)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 **…………4** 分

2. 可导性：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\int_0^x te^t dt)'=\lim\limits_{x\to 0^+} xe^x=0$ **…………6** 分

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2)'=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0$ **…………8** 分

$f'_+(0)=f'_-(0),$ 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0.$ **…………9** 分

四、（10 分）证明：法 1： 先证：$1-x^2\le e^{-x^2}\quad (x>0)$

设 $f(x)=e^{-x^2}-1+x^2$，则 $f(0)=0$ **…………2** 分

$f'(x)=-2xe^{-x^2}+2x=2x(1-e^{-x^2})$ **…………3** 分

由于 $x>0$时，$e^{-x^2}<1$，所以当 $x>0$时，$f'(x)>0$

当$x>0$时, $f(x)$单增, $\Rightarrow x>0$时，有$f(x)>0.$

即当$x\ge 0$时，有$1-x^2\le e^{-x^2}.$ **…………5** 分

再证：$e^{-x^2}\le\dfrac{1}{1+x^2}\quad (x>0)$

亦即证：$1+x^2\le e^{x^2}$

设 $g(x)=e^{x^2}-1-x^2$，则 $g(0)=0$ **…………7** 分

$g'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x(e^{x^2}-1)\ge 0$ **…………8** 分

当$x>0$时, $g(x)$单增, $\Rightarrow x>0$时，有$g(x)>0.$

即当$x\ge 0$时，有$e^{-x^2}\le\dfrac{1}{1+x^2}.$

综合 1，2，结论得证。 **…………10** 分

法 2：由泰勒公式 $e^x=1+x+\dfrac{e^{\theta x}}{2!}x^2\quad (0<\theta<1)$

由于当 $x \geq 0$ 时，$\frac{e^{\theta x}}{2!}x^2 \geq 0$，所以 $e^x \geq 1+x$　　(1)

由(1)可得：$e^{x^2} \geq 1+x^2$　(2)，　$e^{-x^2} \geq 1-x^2$　(3)

由(2)可得：$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$　(4)

综合(3)、(4)，结论得证

五、（10 分）证明：（1）$\int_a^{a+2} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt + \int_2^{a+2} f(t)dt$

…………2 分

又 $\int_2^{a+2} f(t)dt \underline{\underline{做换元，令 u=t-2}} \int_0^a f(u+2)du$

$\underline{\underline{f(u+2)=f(u)}} \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(t)dt$　　…………4 分

从而 $\int_a^{a+2} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$

$= \int_0^2 f(t)dt$　　…………5 分

（2）$F(x+2) = \int_0^{x+2} [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds]dt$　　…………7 分

$= \int_0^x [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds]dt + \int_x^{x+2} [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds]dt$

$= F(x) + 2\int_x^{x+2} f(t)dt - \int_x^{x+2} [\int_t^{t+2} f(s)ds]dt$

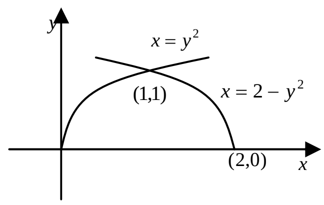
$= F(x) + 2\int_0^2 f(t)dt - \int_x^{x+2} [\int_0^2 f(s)ds]dt$　（由（1）的结论）

$= F(x) + 2\int_0^2 f(t)dt - \int_0^2 f(s)ds \cdot \int_x^{x+2} dt$

$= F(x)$

所以$F(x)$是周期为2的周期函数。 …………10 分

六、（10 分）解：（1）画草图，解交点$(1,1)$



$$A=\int_0^1(2-y^2-y^2)dy=\frac{4}{3}$$

（2）$V=\pi\int_0^1(2-y^2)^2dy-\pi\int_0^1 y^4dy=\frac{8}{3}\pi$

七、（8 分）解：$f'(x)=(x-1)(x-2)^2$，

令 $f'(x)=0$,得驻点：$x_1=1,x_2=2$，列表

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑	非极值	↑

极小值：$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)^2dt=-\frac{17}{12}$

又 $f''(x)=(x-2)^2+2(x-1)(x-2)=(x-2)(3x-4)$

令 $f''(x)=0$，得 $x=2,x=\frac{4}{3}$

列表

x	$(-\infty,4/3)$	$4/3$	$(4/3,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	$\cup$	拐点	$\cap$	拐点	$\cup$

所以拐点横坐标为：$x=2,x=\frac{4}{3}$.

八、（8 分）解：打开降落伞时刻记为$t=0$时刻，由牛顿第二定律有

$$m\frac{dv}{dt}=mg-\frac{mg}{16}v,$$

$$v(0)=176$$

方程化简得：$\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{g}{16}(v-16)$

分离变量并积分得：$v=16+Ce^{-\frac{g}{16}t}$

由初始条件得：$C=160$

所以　　$v=16+160e^{-\frac{g}{16}t}$

极限速度为：$v_{极}=\lim\limits_{t\to+\infty}(16+160e^{-\frac{g}{16}t})=16.$

九、（6 分）证明：构造辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$，

由题设有$F(a)=F(b)=0$. 又$f(x),g(x)$在(a,b)内具有相等的最小值,

不妨设存在$x_1\le x_2$，$x_1,x_2\in(a,b)$使得

$$f(x_1)=m=\min_{[a,b]}f(x),\quad g(x_2)=m=\min_{[a,b]}g(x),$$

1）若$x_1=x_2$，令$c=x_1$，则$F(c)=0$

2）若$x_1<x_2$，因

$$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\le 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\ge 0$$

从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使$F(c)=0$

在区间$[a,c],[c,b]$上分别利用罗尔定理知，存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，

使得　$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

再对$F'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理，知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，

有

$$F''(\xi)=0,\quad 即\quad f''(\xi)=g''(\xi)$$