北京理工大学 2015-2016 学年第二学期

工科数学分析期末试题（**A** 卷）评分标准

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $x-2y-z+2=0$； $(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2})$ ··················2 分，2 分

2. $\frac{1}{2}$ ··················4 分

3. $\frac{2}{3}\pi a^4$ ··················4 分

4. $\{0,1,y-1\}$ ··················4 分

5. $\ln x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$， $x\in(0,2]$ ··················2 分，2 分

二.

解： $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\cdot\rho d\rho$ ··················4 分

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^a\rho^4 d\rho$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}a^5$ ··················7 分

$=\frac{\pi}{10}a^5$ ··················8 分

三.

解：$f_x'(x,y)=3x^2-6x=0$，$f_y'(x,y)=3y^2-6y=0$，

得四个驻点$(0,0)$，$(0,2)$，$(2,0)$，$(2,2)$ ………………3 分

$A=f_{xx}''(x,y)=6x-6$，$B=f_{xy}''(x,y)=0$，$C=f_{yy}''(x,y)=6y-6$ ………………4 分

对$(0,0)$，$AC-B^2=36>0$，$A=-6<0$，

$(0,0)$是极大值点，$f(0,0)=0$为极大值； ………………5 分

对$(0,2)$，$AC-B^2=-36<0$，$(0,2)$不是极值点； ………………6 分

对$(2,0)$，$AC-B^2=-36<0$，$(2,0)$不是极值点； ………………7 分

对$(2,2)$，$AC-B^2=36>0$，$A=6>0$，

$(2,2)$是极小值点，$f(2,2)=-8$为极小值。 ………………8 分

四.

解：（1）抛物面$z=1+x^2+y^2$在点$(1,0,2)$处的法向量为

$$\vec{n}=\{2x,2y,-1\}\big|_{(1,0,2)}=\{2,0,-1\}$$

则所求切平面方程为 $2(x-1)-(z-2)=0$， 即 $z=2x$ ………………2 分

（2）所求立体在xoy平面的投影区域为$D_{xy}:x^2+y^2\le 2x$，则

$$M=\iiint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$ ………………3 分

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{[(1+x^2+y^2)-2x]}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$ ………………4 分

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{(1+\rho^2)-2\rho\cos\theta}{\rho}\cdot\rho d\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}[(1+\rho^2)-2\rho\cos\theta]d\rho$$ ………………6 分

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta-\frac{4}{3}\cos^3\theta)d\theta$$

$$=4-\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$$ ………………8 分

五.

解：因为 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dx}$， ………………2 分

方程 $e^{xy}-y=0$ 两边关于 x 求导，得 $e^{xy}(y+x\dfrac{dy}{dx})-\dfrac{dy}{dx}=0$，

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}=\dfrac{y^2}{1-xy}$ ………………4 分

方程 $e^z-xz=0$ 两边关于 x 求导，得 $e^z\dfrac{dz}{dx}-(z+x\dfrac{dz}{dx})=0$，

解得 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{e^z-x}=\dfrac{z}{xz-x}$ ………………6 分

故 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{ye^{xy}}{1-xy}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{z}{e^z-x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}$

或 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{y^2}{1-xy}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{z}{xz-x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}$ ………………8 分

六.

解：$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+(z+1)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+(z+1)^2dxdy$ ………………1 分

用高斯公式，加一个面 $\Sigma_1:z=0$，$x^2+y^2\le 1$ 取下侧， ………………2 分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+(z+1)^2dxdy$$

$$=[\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}+\iint\limits_{\Sigma_1^+}xdydz+(z+1)^2dxdy]$$ ………………3 分

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(3+2z)dxdydz+\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$ ………………5 分

$$=-3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz-2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz+\pi$$

$$=-2\pi-2\int_{-1}^{0}zdz\iint\limits_{D_z}dxdy+\pi$$

$$=-\pi-2\pi\int_{-1}^{0}z(1-z^2)dz$$

$$=-\frac{\pi}{2}$$ ………………8 分

七. 解1：L 的参数方程为：$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=\cos\theta+\sin\theta \end{cases}$ ，$\theta:0\to 2\pi$， ………………3分

$$I=\oint_L xzdx+xdy+y^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[(\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)(-\sin\theta)+\cos^2\theta+\sin^2\theta(\cos\theta-\sin\theta)]d\theta$$ …………6 分

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$=\pi$$ ………………8 分

解 2：利用斯托克斯公式，平面 $\Sigma: z=x+y$ 取上侧，$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$

$$I=\iint_{\Sigma^+}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & y^2 \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma^+}2ydydz+xdzdx+dxdy$$ ……………4 分

$$=\iint_{D_{xy}}[2y(-1)+x(-1)+1]dxdy=\iint_{D_{xy}}(1-x-2y)dxdy$$ ………………6 分

$$\overset{\text{对称性}}{=\!=\!=\!=}\iint_{D_{xy}}dxdy=\pi$$ ………………8 分

八. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\bigg/\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}=1$，$R=1$

$x=\pm 1$ 时，级数发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$。 ………………2 分

当 $x\neq 0$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$$ ………………3 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1})'+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^{2n}dx$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}dx=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x},$$ ………………7 分

当 $x=0$ 时，$S(0)=3$ ………………8 分

九.

解：$b_n=0,\quad (n=1,2,\cdots)$ ………………1 分

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)dx=\pi-2，$$ ………………2 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(x-1)d\sin nx=\frac{2}{n\pi}[(x-1)\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nxdx]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0 & \text{当 } n \text{ 取偶数时}\\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{当 } n \text{ 取奇数时}\end{cases}$$ ………………4 分

则 $x-1=\frac{\pi}{2}-1-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots)\quad (0\le x\le\pi)$ ………………6 分

当 $x=0$ 时，$1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ ………………8 分

十.

解：对 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$ 两边关于 x 求积分，得

$$f(x,y)=\int(2x+1)e^{2x-y}dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)de^{2x-y}=\frac{1}{2}[(2x+1)e^{2x-y}-\int e^{2x-y}d(2x-y)]$$

$$=\frac{1}{2}[(2x+1)e^{2x-y}-e^{2x-y}]+\varphi(y)=xe^{2x-y}+\varphi(y)$$ ………………2 分

又 $f(0,y)=\varphi(y)=y$，得 $f(x,y)=xe^{2x-y}+y$， ………………3 分

则 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1$

$$I=\int_L\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=\int_L(2x+1)e^{2x-y}dx+(-xe^{2x-y}+1)dy$$ ………………4 分

设 $P=(2x+1)e^{2x-y}$，$Q=-xe^{2x-y}+1$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=-(2x+1)e^{2x-y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，与路径无关 ………………5 分

选路径 $y=x,\ x:0\to 1$，则

$$I=\int_L(2x+1)e^{2x-y}dx+(-xe^{2x-y}+1)dy=\int_0^1[(2x+1)e^x+(-xe^x+1)]dx$$ ………………7 分

$$=\int_0^1[(x+1)e^x+1)]dx=\int_0^1(x+1)d(e^x)+1$$

$$=(x+1)e^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1+1=e+1$$ ………………8 分

十一.

解：因 $f(x)$ 单增，所以级数为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n^p})-f(a)}{\frac{1}{n^p}}=f'(a)$$ ………………2 分

（1）若 $f'(a)\neq 0$，则此级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 有相同的敛散性，故

当 $\begin{cases}p>1\text{时，收敛}\\ p\le 1\text{时，发散}\end{cases}$， ………………4 分

（2）若 $f'(a)=0$，由泰勒公式知

$f(a+\frac{1}{n^p})-f(a)=\frac{f''(a)}{2!}(\frac{1}{n^p})^2+o((\frac{1}{n^p})^2)\sim\frac{f''(a)}{2!}\cdot\frac{1}{n^{2p}}$， ………………6 分

故此时原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 有相同的敛散性，故

当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 收敛，故原级数收敛；

当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 发散，故原级数发散， ………………8 分

综上所述：

当 $f'(a)\neq 0$ 时，有 $\begin{cases}p>1\text{时，收敛}\\ p\le 1\text{时，发散}\end{cases}$； 当 $f'(a)=0$ 时，有 $\begin{cases}p>\frac{1}{2}\text{时，收敛}\\ 0<p\le\frac{1}{2}\text{时，发散}\end{cases}$