北京理工大学 2014-2015 学年第二学期《微积分 A》

期中试题解答及评分标准

一、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. -18;　$\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{14}$;　　　2. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

3. $-\dfrac{1}{3}(dx+2dy)$;　　　4. 0,　$-\dfrac{1}{2}$;

5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$;

6. $\dfrac{1}{4}$;　　　7. 6π.

二、 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x}\cos y f_2'$,　　…………………………4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2e^{2x}\sin y f_2' + 6e^{2x} y^2 \cos y f_{21}'' - e^{4x}\sin 2y f_{22}''$$ …..8 分

三、 过点 M 且平行于 π 的平面 π_1 的方程为：$3x-4y+z-1=0$.

L 的参数方程为：$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2t \end{cases}$,

将 L 的参数方程代入 π_1 的方程得：　$t=16$，

得 L 与 π_1 的交点坐标为：$(15,19,32)$　　　………………4 分

所求直线的方向向量可取为：$\overrightarrow{MA}=\{16,19,28\}$，

所求直线 L_1 的方程为：　$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$.　　………………8 分

四、 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-6y=0$$ …………………………2 分

解得驻点：$(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)$ …………………………3 分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y-6.$$ …………4 分

在点 $(0,0)$

$A=-6,\quad B=0,\quad C=-6$ ，$\Delta=B^2-AC=-36<0$ ，

又 $A=-6<0$ ，所以点 $(0,0)$ 是极大值点；

在点 $(0,2)$

$A=-6,\quad B=0,\quad C=6$ ，$\Delta=B^2-AC=36>0$ ，

所以点 $(0,2)$ 不是极值点；

在点 $(2,0)$

$A=6,\quad B=0,\quad C=-6$ ，$\Delta=B^2-AC=36>0$ ，

所以点 $(2,0)$ 不是极值点；

在点 $(2,2)$

$A=6,\quad B=0,\quad C=6$ ，$\Delta=B^2-AC=-36<0$ ，

又 $A=6>0$ ，所以点 $(2,2)$ 是极小值点； ……………8 分

五、 $$I=\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

$$=\int_0^a zdz\iint_{D_z:x^2+y^2\le 2x,y\ge 0}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^a zdz\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho$$ ………………6 分

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$=\frac{8}{9}a^2.$ ……………………10 分

六、（1）由题意知，切点坐标为：$(1,1,0)$

切线L的方向向量为$\vec{s}=\{2y,1,3\}|_{y=1}=\{2,1,3\}$，

切线L的方程为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ ………….5 分

（2）设平面π与曲面$x^2+y^2=4z$的切点坐标为$(x_0,y_0,\frac{x_0^2+y_0^2}{4})$,

则平面π的法向量为$\vec{n}=\{\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2},-1\}$,

平面π的方程为：$x_0x+y_0y-2z=\frac{x_0^2+y_0^2}{2}$

切线L的参数方程为：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=3t \end{cases}$，

代入平面π的方程，得 $(2x_0+y_0-6)t+x_0+y_0-\frac{x_0^2+y_0^2}{2}=0$

得 $\begin{cases} 2x_0+y_0-6=0 \\ x_0+y_0-\frac{x_0^2+y_0^2}{2}=0 \end{cases}$

解得：$x_0=2.4, y_0=1.2,$ 或$x_0=2, y_0=2$

故平面π的方程为：$6x+3y-5z=9$

或 $x+y-z=2.$ …………….10 分

七、$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^4\cos^2\varphi\sin\varphi dr$ ………….5 分

$$=\frac{4\pi R^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4\pi R^5}{15}(1-\frac{\sqrt{2}}{4}).$$ ……………………….10 分

八、$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\mu dxdy}{\iint\limits_D \mu dxdy}$,　$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\mu dxdy}{\iint\limits_D \mu dxdy}$ ………………………..2 分

$\iint\limits_D \mu dxdy=\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_0^1 x^2dx\int_{x^2}^x ydy=\frac{1}{35}$; ………………….4 分

$\iint\limits_D x\mu dxdy=\iint\limits_D x^3ydxdy=\int_0^1 x^3dx\int_{x^2}^x ydy=\frac{1}{48}$, ………………..6 分

$\iint\limits_D y\mu dxdy=\iint\limits_D x^2y^2dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_{x^2}^x y^2dy=\frac{1}{54}$; …………….8 分

$\bar{x}=\frac{35}{48}$,　$\bar{y}=\frac{35}{54}$,　$(\bar{x},\bar{y})=(\frac{35}{48},\frac{35}{54})$. ………..10 分

九、设$P(x,y)$为曲线C上任意一点，则f在P点的最大方向导数为：

$|\,gradf\,|_P|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$ ……………….2 分

所以可设目标函数为：$(1+x)^2+(1+y)^2$

约束条件为：　$x^2+y^2+xy=3$

构造拉氏函数：$F(x,y)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$

$$\begin{cases}F'_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0\\F'_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0\\x^2+y^2+xy=3\end{cases}$$ ………………5 分

解得驻点为：$A(2,-1)$,　$B(-1,-1)$,　$C(-1,2)$,　$D(1,1)$

又$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}|_A=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}\,|_A=3$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_B = \sqrt{(1+x)^2 + (1+y)^2}\,|_B = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_C = \sqrt{(1+x)^2 + (1+y)^2}\,|_C = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_D = \sqrt{(1+x)^2 + (1+y)^2}\,|_D = 2\sqrt{2}$$

比较知，函数 $f(x,y)$ 在点 $A(2,-1), C(-1,2)$ 处取得最大方向导数，且方向导数的最大值为 3. ……………………8 分