2006 级《微积分 A》期末试卷(A 卷)参考答案

一、1. $$y' = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} - \arctan\sqrt{x^2-1} - x\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}$$

$$= \frac{-x^2}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \arctan\sqrt{x^2-1}$$

2. 原式 $= \int \dfrac{-d\cos x}{1+\cos^2 x} + \int x\ln x dx$

$$= -\arctan(\cos x) + \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$= -\arctan(\cos x) + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

3. 原式 $= \lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{1+\ln x}\cdot\ln\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\tan x}{1+\ln x}}$

其中 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\tan x}{1+\ln x} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\tan x}\sec^2 x = 1$

原式 $= e$

4. 令 $x = a\sin t, dx = a\cos t dt$; $x=0, t=0; x=\dfrac{a}{2}, t=\dfrac{\pi}{6}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t dt}{a^3\cos^3 t} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 t dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3a^2}$$

5. 对应齐次方程的特征方程为：$r^2 - 2r = 0$

特征根：$r_1 = 0, r_2 = 2$；

齐次方程的通解：$Y(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$

设非齐次方程的特解为：$y^* = x(ax+b)$

代入方程得：$a=-1, b=-\frac{3}{2}$；$y^* = -x^2 - \frac{3}{2}x$

原方程的通解为：$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - x^2 - \frac{3}{2}x$

二、1. 由泰勒公式得，当 $x \to 0$ 时，$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$e^x - ax^2 - bx - c = (1-c) + (1-b)x + (\frac{1}{2} - a)x^2 + o(x^2)$

由题意，得 $1-c=0, 1-b=0, \frac{1}{2}-a=0$

故当 $a=\frac{1}{2}, b=1, c=1$ 时，$e^x - ax^2 - bx - c$ 是 x^2 的高阶无穷小。

（此题也可用高阶无穷小的定义及罗必达法则）

2. $f'(x) = \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，又 $x=0$ 时 $f'(x)$ 不存在，

列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	—	不存在	—	0	＋
$f(x)$	↓	不 取 极 值	↓	取 极 小 值	↑

$f(x)$ 的单增区间：$(1,+\infty)$; 单减区间：$(-\infty,0),(0,1)$；

极小值：$f(1)=-3.$

3. 令 $u+t=v, du=dv$；$x=\int_0^t \cos(u+t)du = \int_t^{2t} \cos v dv$

$\therefore x_t' = 2\cos(2t) - \cos t$

$y^2 \sin t - \cos t - 1 = 0$ 两边求导，得

$$2yy'_t\sin t+y^2\cos t+\sin t=0$$

$$\Rightarrow y'_t=-\frac{y^2\cos t+\sin t}{2y\sin t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{y^2\cos t+\sin t}{2y\sin t[2\cos(2t)-\cos t]}.$$

4. 证明：$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_{\pi}^{2\pi}-\sin^2 x d\frac{1}{x}$

$$=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_{\pi}^{2\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx \overset{令u=2x}{=\!=\!=} \int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin u}{u}du$$

$$=\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

三、 由题意知：$\sqrt{y^2-1}=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$

两边对 x 求导，得 $\frac{yy'}{\sqrt{y^2-1}}=\sqrt{1+y'^2}$

整理，得 $y'=\sqrt{y^2-1}$

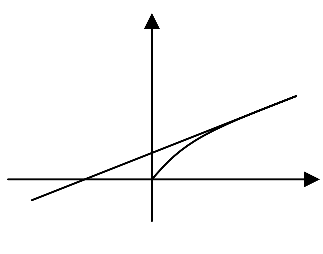
分离变量并积分，得 $y+\sqrt{y^2-1}=Ce^x$

由初条件 $y(0)=1$，得 $C=1$，得 $y+\sqrt{y^2-1}=e^x$

$y-\sqrt{y^2-1}=e^{-x}$， $\Rightarrow y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x.$

四、 设切点为$(x_0,\sqrt{x_0})$，则切线方程为：

$$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$



将点(-1,0)代入切线方程，得 $x_0=1$

所以切点为(1,1)，切线方程为：$y=\frac{x+1}{2}$.

(1) $S_D=\int_0^1[y^2-(2y-1)]dy=\frac{1}{3}$

(2) $V_x=\pi\int_{-1}^1(\frac{x+1}{2})^2dx-\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx=\frac{\pi}{6}.$

五、 证明：记 $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt$，则

$$F'(x)=\sqrt{1+x^4}+e^{-\cos^2 x}\sin x.$$

$\because\sqrt{1+x^4}\ge 1$且仅当$x=0$时等号成立。又

$0\le e^{-\cos^2 x}\le 1,\quad -1\le\sin x\le 1,\quad \therefore -1\le e^{-\cos^2 x}\sin x\le 1$，

则 $F'(x)>0,$即$F(x)$严格单增，又

$$F(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0,\quad F(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}dt>0$$

由零点定理知$F(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内至少有一实根，又$F(x)$严格单增，从而$F(x)$有且仅有一个实根。

六、 设任意t 时刻桶内溶液的含盐量为$m(t)$.

考虑时间间隔$[t,t+dt]$内含盐量的改变量，得

$$\begin{cases} dm=20\times 5dt-\frac{m(t)}{500}\times 5dt \\ m(0)=5000g \end{cases}$$ 化简，得

$$\begin{cases} dm=(100-\frac{m}{100})dt \\ m(0)=10g \end{cases}$$，解方程得 $m(t)=10^4+Ce^{-\frac{t}{100}}$，

由初条件得 $C=-5000$

任意t 时刻桶内溶液的含盐量为:

$$m(t)=10^4-5000e^{-\frac{t}{100}}.$$

七、　　证明：由积分中值定理知：$\exists\eta\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$f(1)=\frac{2}{e}e^{\eta}f(\eta)\times\frac{1}{2}$，即　$ef(1)=e^{\eta}f(\eta)$，

构造辅助函数　$F(x)=e^{x}f(x)$

则 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上满足 Rolla 定理的条件，知

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得　$F'(\xi)=0$，又

$F'(x)=e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)$，有 $F'(\xi)=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

即　$f(\xi)+f'(\xi)=0$.