线性代数
2020-2021 第一学期
线性方程组作业

黄申为

11月10日

1. 设$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (1) 求一个可逆矩阵P, 使PA为行最简形矩阵.

   (2) 求一个可逆矩阵Q, 使QA^T为行最简形矩阵.

2. 试利用矩阵的初等变换, 求 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

3. 在秩是r的矩阵中, 有没有等于0的$r-1$阶子式？有没有等于0的r阶子式？请给出证明或举出反例.

4. 求作一个秩是4的方阵, 它的两个行向量是$(1,0,1,0,0)$与$(1,-1,0,0,0)$.

5. 设有线性方程组

   $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

   问λ为何值时方程组有唯一解？无解？有无穷解？并在有无限多解时求其通解.

6. 写出一个以$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为通解的齐次线性方程组.

7. 判断下列命题的真伪: 若A, B为同型矩阵且$R(A) = R(B)$, 则$A \overset{r}{\sim} B$. 若正确给出证明; 若不正确, 请举出反例.

8. 设A是一个$m \times n$矩阵. 证明A总能经过有限次初等行变换化成行阶梯型矩阵. (提示: 对$m+n$作归纳.)

9. 设A, B是n阶方阵. 证明$R(AB + A + B) \leq R(A) + R(B)$.

10. 证明: 若$A_{m\times n}B_{n\times l} = C$且$R(A) = n$, 则$R(B) = R(C)$.

11. 设A为方阵. 用A的行列式给出一个齐次线性方程组$Ax = 0$有非零解的充分必要条件, 并给出充要性的证明.

12. 记$E(ij(k))$是第三类型的初等矩阵，也就是把单位阵的第j行乘上k倍加到第i行而得到的矩阵. 证明：若矩阵B是由矩阵A第j行乘上k倍加到第i行而得到的, 则$B = E(ij(k))A$.

附件题 设A是一个3×4矩阵, 且$Ax = 0$的通解为$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c为任意实数.

(a) 求$R(A)$.

(b) 求A的行最简形矩阵.

(c) 证明$Ax = b$对任意的b都有解.