试卷(三)详解

一、单项选择题

1. 已知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵, $|\boldsymbol{A}|=1$, $|\boldsymbol{B}|=-2$, 则行列式 $|(2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}|=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{32}$;　　(B) $\dfrac{1}{8}$;

(C) 2;　　(D) $\dfrac{1}{2}$.

分析 以公式 $\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}$ 代入,用矩阵的运算性质将行列式中的矩阵化为最简,然后计算之.

解 应选 A.

$$|(2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}|=|(2\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}|=\left|\frac{1}{2|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right|$$

$$=\left(\frac{1}{2|\boldsymbol{B}|}\right)^3|\boldsymbol{B}|$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|^2}=\frac{1}{32}.$$

点评 将行列式中矩阵的系数提到行列式外面时,必须是这个数的 n 次幂,n 为行列式的阶数.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$, 则 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵;　　(B) $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵;

(C) $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;　　(D) $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵.

分析 由已知条件 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$, 看到这个关系式应该想到两点,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$ 或矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的列向量都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量. 再利用已知条件,由上述的某一点推出 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 是等于 n? 小于 n? 还是为零?

解 应选 D.

方法 1 因 $A(A-E)=O$, 故 $r(A)+r(A-E)\leqslant n$, 由题设 $A\neq E$ 可知 $A-E$ 不是零矩阵,所以 $r(A-E)\geqslant 1$, 得

$$r(A)\leqslant n-r(A-E)<n,$$

故 A 为不可逆矩阵.

方法 2 因 $A(A-E)=O$, 故矩阵 $A-E$ 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量. 由于 $A\neq E$, 所以 $A-E$ 必有非零列向量, 即线性方程组 $Ax=0$ 有非零解,则必有 $r(A)<n$. 故 A 为不可逆矩阵.

点评 此题容易陷入一个误区,即将 $A(A-E)=O$ 两边取行列式为 $|A|\cdot|A-E|=0$, 试图由 $A-E\neq O$ 得到 $|A-E|\neq 0$ 是不对的,因为非零矩阵的行列式有可能为零,这样只能得出 $|A|$ 的值可能为零,可能不为零的结果.

3. 设线性方程组 $Ax=b$, 其中 A 为 $m\times n$ 矩阵, $b\neq 0$, 且 $m<n$, 则方程组 $Ax=b$ ( )

(A) 有唯一解; (B) 有无穷多解;

(C) 无解; (D) 可能无解.

分析 非齐次线性方程组解的情况: $r(A)\neq r(\bar{A})$, 方程组无解; $r(A)=r(\bar{A})=n$, 方程组有唯一解, $r(A)=r(\bar{A})<n$, 方程组有无穷多解.

解 应选 D.

因为有可能 $r(A)\neq r(\bar{A})$.

点评 看到已知条件 $m<n$, 很容易认为系数矩阵的行数少于列数,故 $r(A)<n$, 得出方程组有无穷多解的结论. 所以要切记的是,必须要有前提 $r(A)=r(\bar{A})$, 不妨就记为 $r(A)=r(\bar{A})<n$ 时方程组有无穷多解.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则 ( )

(A) $t>s$; (B) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$;

(C) $s>t$; (D) $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

分析 关于一个向量组由另一个向量组线性表出时其秩的关系.

解 应选B.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$.

点评 这本身就是一个命题,经常在有关向量组的证明题中用到.

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,则(　　)时,$\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$.

(A) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;　　(B) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同型矩阵;

(C) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 正惯性指数相等;　　(D) A, B, C 同时成立.

分析 根据实二次型惯性定理的推论,即如果 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $g = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 都是 n 个变量的实二次型,它们有相同的秩与正惯性指数,则必有非退化的线性代换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$.

解 应选D.

因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,并且为同型矩阵,故 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为相同变量的两个实二次型的矩阵,且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 及 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 正惯性指数相等,即两个二次型有相同的秩和正惯性指数,据实二次型惯性定理的推论,则必有非退化的线性代换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$,由 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

点评 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的定义:$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵,如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.由惯性定理的推论可知,有了条件 A, B, C 才满足矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同定义中之规定.

二、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,则 $a =$ ________, $b =$ ________.

分析 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组是两两正交的单位向量组.

解 应填$\frac{1}{3}$，0.

令 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ a\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ b\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{18}}\\ -\frac{4}{\sqrt{18}}\\ \frac{1}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$，

由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=0$可解得$a=\frac{1}{3}$，由$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=0$可解得$b=0$，从而使$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=0$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组两两正交．同时可计算出$|\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_3|=1$，所以当$a=\frac{1}{3}$，$b=0$时，$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵．

点评 涉及到向量的内积计算及向量长度的计算．

2. 设在$\mathbb{R}^2$中线性变换为$\mathscr{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ 2x_2\end{bmatrix}$，则$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$下的矩阵为________．

分析 本题涉及线性变换$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵的概念，即有公式$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 就是$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵．

解 应填$\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$．

根据题目给出的线性变换，有$\mathscr{A}\alpha_1=\mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$，

$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，因此由公式$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{A}$

可有$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{A}$，即$\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{A}$，

故
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

点评 记住线性变换和矩阵的关系式，以及熟练进行线性变换的运算是解决此类题目的关键．

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{bmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，则 $a=$ ________，$b=$ ________．

分析 由相似矩阵具有相同的特征值知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0，1，2，由此得 $|\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，于是由 a，b 的两个关系式可求出 a，b 的值．

解 应填 0，0．

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵具有相同的特征值 0，1，2．这 3 个特征值满足特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$．

当 $\lambda=0$ 时，有 $|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}-1 & -a & -1\\ -a & -1 & -b\\ -1 & -b & -1\end{bmatrix}=(a-b)^2=0$，得 $a=b$．

当 $\lambda=1$ 时，有 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}0 & -a & -1\\ -a & 0 & -b\\ -1 & -b & 0\end{bmatrix}=-2ab=0$，得 $ab=0$．

因此得到 $a=0$，$b=0$．

点评 当特征值 $\lambda=0$ 时，可由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$ 直接计算 $|\boldsymbol{A}|$，这比计算 $|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}|$ 简单一些．

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可能取值为 $\lambda=$ ________．

分析 与试卷(二)的填空题第 3 题的分析相同．

解 应填 3 或 -1．

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 有 $\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)$

$(\lambda+1)=0$ 得 $\lambda=3,-1$.

点评 类似试卷(二)填空题第3题.

5. $\boldsymbol{A}$ 为 2×3 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，则对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

分析 求齐次线性方程组的通解，关键是求出基础解系应含向量的个数，并且求出一个基础解系.

解 应填 $k\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

由于系数矩阵为 2×3 矩阵．故未知量个数 $n=3$，又因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，故基础解系含向量的个数 $=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3-2=1$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，且由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

可得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 仍是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

于是 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，且 $\boldsymbol{\eta}$ 是非零向量，故 $\boldsymbol{\eta}$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，从而对应的齐次线性方程组的通解

为 $k\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}$($k$ 为任意常数).

点评 这里应用了线性方程组解的两个性质:其一是若 $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$, …, $\boldsymbol{\gamma}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,则若 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots k_s\boldsymbol{\gamma}_s$ 仍是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,只有 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时. 由此,在解题过程中得到 $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍是题设方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解. 其二是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解的差是对应的齐次线性方程组的一个解,即 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$.

三、计算题

1. 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

分析 利用行列式的性质计算行列式,要根据这个行列式的特点,即每行各元素之和相等,及每列除位于主对角线上的元素之外其余元素都是相等的. 由此可用两种方法计算此行列式.

解 *方法 1*

$$D=\begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{bmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n\end{bmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{bmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & x & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x\end{bmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)x^{n-1}.$$

方法 2

$$D\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1\to r_i}\begin{bmatrix}x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -x & x & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x & 0 & 0 & \cdots & x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & x & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x\end{bmatrix}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)x^{n-1}.$$

点评 方法 2 即根据行列式性质将行列式化为箭式行列式，然后把每一列都加到第 1 列，将行列式化为上三角行列式．

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

分析 将题设等式化为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的表达式，尽量要化成最简单的形式，以减少计算．

解 由于 $|\boldsymbol{A}|=-2$，故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-2\boldsymbol{A}^{-1}$.

对等式 $A^*BA=BA-2E$ 两边右乘 A^{-1}，且将 $A^*=-2A^{-1}$ 代入，即为 $-2A^{-1}B=B-2A^{-1}$，再两边左乘 A，得 $-2B=AB-2E$，于是 $AB+2B=2E$ 即 $(A+2E)B=2E$，$B=2(A+2E)^{-1}$，

$$(A+2E,E)=\begin{bmatrix}3&1&0&1&0&0\\0&4&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix},$$

得
$$B=2\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

点评 解题过程中得到 $-2A^{-1}B=B-2A^{-1}$，由此可得到

$$(E+2A^{-1})B=2A^{-1},$$

则

$$B=2(E+2A^{-1})^{-1}A^{-1}=2[A(E+2A^{-1})]^{-1}=2(A+2E)^{-1},$$

不管怎样都须将 B 的表达式化为最简形式.

3. 已知 α_1、α_2、α_3 是 3 维线性空间 V 的一组基，设 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=a\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

(1) a 取何值，β_1，β_2，β_3 也是 V 的基；

(2) 求 β_1，β_2，β_3 到 α_1，α_2，α_3 的过渡矩阵；

(3) 设 $\alpha=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，求 α 在基 β_1，β_2，β_3 下的坐标.

分析 熟练运用由一组基到另一组基的基变换公式与坐标变换公式.

解 (1) 已知 β_1，β_2，β_3 是由 α_1，α_2，α_3 线性表出的，故有

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha+\alpha_2,a\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$，

$$C=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}.$$

若 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 3$，则过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为满秩矩阵，

此时 $|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，即 a 为任意常数，

所以 a 为任意常数，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也是 V 的基．

(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{C}^{-1}$，

$$[\boldsymbol{CE}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$. 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}'$，由于 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$．由已知 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

点评 特别注意基变换公式中两组基的前后位置，由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的基变换公式为

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C},$$

且向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}'$，则坐标变换公式为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'$，或 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$．

在使用基变换和坐标变换公式时，基与坐标的对应关系必须一致．

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$．

问：λ 取何值时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？且在表示式不唯一时，求出所有的表示式．

分析　非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有解 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，即 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$．方程组有唯一解即表出系数唯一，方程组有无穷多解即表出系数不唯一．所以这个问题就是解非齐次线性方程，求 λ 为何值时，方程组有解，λ 为何值时，方程组有无穷多解．

解　设 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即有非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta},$$

其中
$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3),\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{bmatrix},$$

当 $\lambda \neq -2$ 时，使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组有解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．

当 $\lambda=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，方程组有无穷多解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式不唯一．此时有

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\text{对应}\begin{cases}x_1=1-x_2-x_3,\\x_2=\qquad x_2\qquad,\\x_3=\qquad\qquad x_3,\end{cases}$$

故

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-k_1-k_2\\k_1\\k_2\end{bmatrix},$$

则所有的表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=(1-k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中 k_1，k_2 是任意常数．

点评 此类题目通过解非齐次线性方程组求出的无穷多组解不是最后的答案，无穷多组解即 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的无穷多组表示系数，最后要写出所有的表示式才是最后的结果．

5. 已知线性方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)是同解方程组，其中

$$(\text{Ⅰ}):\begin{cases}x_1\qquad+x_4=1,\\\quad x_2\quad-2x_4=2,\\\qquad x_3+x_4=-1,\end{cases}$$

$$(\text{Ⅱ}):\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1,\\x_1+x_2-x_3+bx_4=4,\\3x_1+x_2+x_3+2x_4=c.\end{cases}$$

(1) 求(Ⅰ)的通解；

(2) 求(Ⅱ)中的常数 a，b，c．

分析 先求非齐次线性方程组(Ⅰ)的通解，然后由(Ⅰ)和(Ⅱ)是同解方程组，选择(Ⅰ)的解代入(Ⅱ)，以确定其中的参数 a，b，c．

解 (1) 由方程组(Ⅰ)可有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-2&2\\0&0&1&1&-1\end{bmatrix},\text{对应}\begin{cases}x_1=\ \ 1-\ x_4,\\x_2=\ \ 2+2x_4,\\x_3=-1-\ x_4,\\x_4=\qquad\ \ x_4,\end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

(2) 由于方程组(Ⅰ),(Ⅱ)是同解方程组,所以方程组(Ⅰ)的全部解都满足方程组(Ⅱ). 不妨选取

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\-2\\1\end{bmatrix},$$

代入方程组(Ⅱ),有

$$\begin{cases}4-2a-5=1,\\4+2+b=4,\\4-2+2=c,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=4.\end{cases}$$

6. 已知三元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $y_1^2+y_2^2+5y_3^2$,且已知 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 $\lambda=5$ 有一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$;试求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$.

分析 与试卷(一)中计算题第 5 题的分析相同.

解 由二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是经正交变换化为标准形 $y_1^2+y_2^2+5y_3^2$ 可知,二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 1, 5.

设 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1) = 0$，即 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，得线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

正交化：

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

单位化：

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

故正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_1) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

正交变换为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_3 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{cases}$$

点评 该试题中二次型的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$，按习惯写特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 5$．但题目中给出对应特征值 $\lambda = 5$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，因此可将 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量记为 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3$. 经正交化、单位化后依次记为 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$，但写正交矩阵时应为 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_1)$．因为只有这个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_1)\boldsymbol{y}$，才使二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$，即对角矩阵中特征值与正交矩阵中特征向量的顺序必须是一致的．

四、证明题

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $m < n$．证明：存在 n 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

分析 若存在一个以齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的非零解向量为列向量的矩阵，令其为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

证 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵可知方程组是 n 元齐次线性方程组，其解向量是 n 维向量．

因已知 $m < n$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant m < n$，则方程组有非零解即有无穷多组解．

令 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为 n 维列向量，且均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量，即 $\boldsymbol{A\beta}_j = 0(j = 1, 2, \cdots, n)$，并注意使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 中至少有一个向量是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的非零解向量．因此矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非零矩阵，则有

$$AB = A(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (A\boldsymbol{\beta}_1, A\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, A\boldsymbol{\beta}_n) = O.$$

点评 我们经常运用的命题是：设 A, B 分别是 $m \times p$ 和 $p \times n$ 矩阵，若 $AB = O$, 则 B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量．本题是此命题的翻版．

2. 设 A, B 为 n 阶矩阵，Q 为正交矩阵，且 $Q^T AQ$、$Q^T BQ$ 都是对角矩阵．证明：$AB = BA$．

分析 要利用对角矩阵和正交矩阵的性质，即两个对角矩阵相乘是可交换的，及正交矩阵 Q 满足 $Q^T Q = QQ^T = E$．

证 因为 $Q^T AQ$, $Q^T BQ$ 都是对角矩阵，所以有

$$Q^T AQQ^T BQ = Q^T BQQ^T AQ,$$

又 Q 为正交矩阵，由 $QQ^T = E$ 可得

$$Q^T ABQ = Q^T BAQ,$$

两边左乘 Q，右乘 Q^T，则

$$AB = BA.$$

点评 本题解决问题的关键除了对角矩阵和正交矩阵的性质外，还充分应用了矩阵相乘的结合律．

试卷(三)考核内容分值表

考核内容	行列式及其计算	矩阵及其运算	向量与线性方程组	线性空间与线性变换	特征问题与相似对角矩阵	实二次型
分值	12	23	27	12	14	12