线性代数第九讲

吴民

南开大学 计控学院

November 3, 2017

线性空间

数学中的空间说的是集合，或者说是全集。

线性空间

数学中的空间说的是集合，或者说是全集。

线性空间就是给满足一定条件的集合起个名字叫线性空间。除线性空间外，还有度量空间、拓扑空间等名词。

线性空间

数学中的空间说的是集合，或者说是全集。

线性空间就是给满足一定条件的集合起个名字叫线性空间。除线性空间外，还有度量空间、拓扑空间等名词。

我们不是要构造一个具体的空间，把它起名字叫线性空间。像构造向量就是具体的构造。

线性空间

数学中的空间说的是集合，或者说是全集。

线性空间就是给满足一定条件的集合起个名字叫线性空间。除线性空间外，还有度量空间、拓扑空间等名词。

我们不是要构造一个具体的空间，把它起名字叫线性空间。像构造向量就是具体的构造。

而是把任何满足“线性空间”所要求的条件的任何集合都称为线性空间。

线性空间

数学中的空间说的是集合，或者说是全集。

线性空间就是给满足一定条件的集合起个名字叫线性空间。除线性空间外，还有度量空间、拓扑空间等名词。

我们不是要构造一个具体的空间，把它起名字叫线性空间。像构造向量就是具体的构造。

而是把任何满足“线性空间”所要求的条件的任何集合都称为线性空间。

线性空间是个抽象的概念。

线性空间的定义

设 V 是一个非空集合（它将被称为线性空间）。

设 V 是一个非空集合（它将被称为线性空间）。

F 是一个数域（线性空间的全称为数域 F 上的线性空间 V）。

线性空间的定义

设 V 是一个非空集合（它将被称为线性空间）。

F 是一个数域（线性空间的全称为数域 F 上的线性空间 V）。

集合 V 中定义了一个加法运算。对任意 $\alpha,\beta \in V$，$\alpha+\beta$ 有意义，$\alpha+\beta \in V$。称为 α 与 β 的和。

线性空间的定义

设 V 是一个非空集合（它将被称为线性空间）。

F 是一个数域（线性空间的全称为数域 F 上的线性空间 V）。

集合 V 中定义了一个加法运算。对任意 $\alpha, \beta \in V$，$\alpha + \beta$ 有意义，$\alpha + \beta \in V$。称为 α 与 β 的和。

在集合 V 中的元与数域 F 中的数之间定义了一个数乘运算。对任意 $\alpha \in V$，$\lambda \in F$，$\lambda\alpha$ 有意义，$\lambda\alpha \in V$。称为 λ 与 α 的乘积。

线性空间的定义

设 V 是一个非空集合（它将被称为线性空间）。

F 是一个数域（线性空间的全称为数域 F 上的线性空间 V）。

集合 V 中定义了一个加法运算。对任意 $\alpha, \beta \in V$，$\alpha + \beta$ 有意义，$\alpha + \beta \in V$。称为 α 与 β 的和。

在集合 V 中的元与数域 F 中的数之间定义了一个数乘运算。对任意 $\alpha \in V$，$\lambda \in F$，$\lambda\alpha$ 有意义，$\lambda\alpha \in V$。称为 λ 与 α 的乘积。

加法运算与数乘运算满足：

线性空间的定义

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$。

线性空间的定义

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$。
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。

线性空间的定义

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$。
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。
- 存在零元素 0，即对任意 $\alpha\in V$，都有 $0+\alpha=\alpha$。

线性空间的定义

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$。
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。
- 存在零元素 0，即对任意 $\alpha\in V$，都有 $0+\alpha=\alpha$。
- 对 V 中每个元素 α，都能找到负元素 $-\alpha\in V$，使得 $\alpha+(-\alpha)=0$。

线性空间的定义

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$。
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。
- 存在零元素 0，即对任意 $\alpha\in V$，都有 $0+\alpha=\alpha$。
- 对 V 中每个元素 α，都能找到负元素 $-\alpha\in V$，使得 $\alpha+(-\alpha)=0$。
- $1\cdot\alpha=\alpha$。

线性空间的定义

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$。
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。
- 存在零元素 0，即对任意 $\alpha\in V$，都有 $0+\alpha=\alpha$。
- 对 V 中每个元素 α，都能找到负元素 $-\alpha\in V$，使得 $\alpha+(-\alpha)=0$。
- $1\cdot\alpha=\alpha$。
- $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$，$(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$。

线性空间的定义

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$。
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$。
- 存在零元素 0，即对任意 $\alpha \in V$，都有 $0 + \alpha = \alpha$。
- 对 V 中每个元素 α，都能找到负元素 $-\alpha \in V$，使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$。
- $1 \cdot \alpha = \alpha$。
- $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$，$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$。
- $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$。

线性空间的定义

则称 V 为线性空间。

则称 V 为线性空间。

全称是 V 按所定义的线性运算构成数域 F 上的线性空间。

或 V 是 F 上的线性空间。

则称 V 为线性空间。

全称是 V 按所定义的线性运算构成数域 F 上的线性空间。

或 V 是 F 上的线性空间。

实数域上的线性空间称为实空间。

则称 V 为线性空间。

全称是 V 按所定义的线性运算构成数域 F 上的线性空间。

或 V 是 F 上的线性空间。

实数域上的线性空间称为实空间。

复数域上的线性空间称为复空间。

线性空间的定义

则称 V 为线性空间。

全称是 V 按所定义的线性运算构成数域 F 上的线性空间。

或 V 是 F 上的线性空间。

实数域上的线性空间称为实空间。

复数域上的线性空间称为复空间。

线性空间中的元素称为向量。

线性空间的例1

F 取为某个数域。n 为某个给定正整数。V 为 F 上的全体 n 维行向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

线性空间的例1

F 取为某个数域。n 为某个给定正整数。V 为 F 上的全体 n 维行向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

逐条验证知此 V 为线性空间。

线性空间的例1

F 取为某个数域。n 为某个给定正整数。V 为 F 上的全体 n 维行向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

逐条验证知此 V 为线性空间。

F 取为 R 时，V 称为实 n 维向量空间。记作 R^n。

线性空间的例1

F 取为某个数域。n 为某个给定正整数。V 为 F 上的全体 n 维行向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

逐条验证知此 V 为线性空间。

F 取为 R 时，V 称为实 n 维向量空间。记作 R^n。

F 取为 C 时，V 称为复 n 维向量空间。记作 C^n。

线性空间的例2

F 取为实数域。n 为某个给定正整数。V 为给定的某个 n 元齐次线性方程组的解向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

线性空间的例2

F 取为实数域。n 为某个给定正整数。V 为给定的某个 n 元齐次线性方程组的解向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

逐条验证知此 V 为线性空间。

线性空间的例2

F 取为实数域。n 为某个给定正整数。V 为给定的某个 n 元齐次线性方程组的解向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

逐条验证知此 V 为线性空间。

称为该线性方程组的解空间。

线性空间的例2

F 取为实数域。n 为某个给定正整数。V 为给定的某个 n 元齐次线性方程组的解向量的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的向量的加法运算。V 中的数量乘法就是通常的向量的数量乘积。

逐条验证知此 V 为线性空间。

称为该线性方程组的解空间。

零空间：只含有零向量的线性空间。

线性空间的例3

F 取为实数域。a,b 为给定实数。V 为 $[a,b]$ 上所有连续函数的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的函数的加法。V 中的数量乘法就是通常的函数与数相乘。

线性空间的例3

F 取为实数域。a,b 为给定实数。V 为 $[a,b]$ 上所有连续函数的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的函数的加法。V 中的数量乘法就是通常的函数与数相乘。

逐条验证知此 V 为线性空间。即 V 关于通常的函数加法和函数与数的乘法构成一个实线性空间。称为连续函数空间，记作 $C[a,b]$。

线性空间的例3

F 取为实数域。a,b 为给定实数。V 为 $[a,b]$ 上所有连续函数的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的函数的加法。V 中的数量乘法就是通常的函数与数相乘。

逐条验证知此 V 为线性空间。即 V 关于通常的函数加法和函数与数的乘法构成一个实线性空间。称为连续函数空间，记作 $C[a,b]$。

F 取为实数域。n 为给定正整数。V 为所有次数不超过 n 的一元实系数多项式的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的多项式加法。V中的数量乘法就是通常的多项式与数相乘。

线性空间的例3

F 取为实数域。a,b 为给定实数。V 为 $[a,b]$ 上所有连续函数的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的函数的加法。V 中的数量乘法就是通常的函数与数相乘。

逐条验证知此 V 为线性空间。即 V 关于通常的函数加法和函数与数的乘法构成一个实线性空间。称为连续函数空间，记作 $C[a,b]$。

F 取为实数域。n 为给定正整数。V 为所有次数不超过 n 的一元实系数多项式的全体构成的集合。V 中的加法运算就是通常的多项式加法。V中的数量乘法就是通常的多项式与数相乘。

V 是一个实线性空间。记作 $P_n(x)$。

线性空间的性质

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

每个元素的负元素唯一。（反证法）。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

每个元素的负元素唯一。（反证法）。

由此可定义向量的减法：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

每个元素的负元素唯一。（反证法）。

由此可定义向量的减法：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$。

$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \beta_2$。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

每个元素的负元素唯一。（反证法）。

由此可定义向量的减法：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$。

$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \beta_2$。

$0\alpha = 0$。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

每个元素的负元素唯一。（反证法）。

由此可定义向量的减法：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$。

$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \beta_2$。

$0\alpha = 0$。

$\alpha = 1\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha + 0\alpha$。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

每个元素的负元素唯一。（反证法）。

由此可定义向量的减法：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$。

$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \beta_2$。

$0\alpha = 0$。

$\alpha = 1\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha + 0\alpha$。

$(-1)\alpha = -\alpha$，$\lambda 0 = 0$。

线性空间的性质

零向量唯一。（反证法）。

$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$。

每个元素的负元素唯一。（反证法）。

由此可定义向量的减法：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$。

$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = \beta_2$。

$0\alpha = 0$。

$\alpha = 1\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha + 0\alpha$。

$(-1)\alpha = -\alpha$，$\lambda 0 = 0$。

若 $\lambda\alpha = 0$，则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$。

线性相关与线性无关

线性空间中已经有加法运算和数乘运算。

线性相关与线性无关

线性空间中已经有加法运算和数乘运算。

有了加法运算和数乘运算就可以产生线性组合。

线性相关与线性无关

线性空间中已经有加法运算和数乘运算。

有了加法运算和数乘运算就可以产生线性组合。

有了线性组合就可以产生线性表出的概念。

线性相关与线性无关

线性空间中已经有加法运算和数乘运算。

有了加法运算和数乘运算就可以产生线性组合。

有了线性组合就可以产生线性表出的概念。

有了线性表出，就可以产生线性相关和线性无关。

线性相关与线性无关

线性空间中已经有加法运算和数乘运算。

有了加法运算和数乘运算就可以产生线性组合。

有了线性组合就可以产生线性表出的概念。

有了线性表出，就可以产生线性相关和线性无关。

有了线性相关和线性无关，可产生极大线性无关组和秩的概念。

线性相关与线性无关

线性空间中已经有加法运算和数乘运算。

有了加法运算和数乘运算就可以产生线性组合。

有了线性组合就可以产生线性表出的概念。

有了线性表出，就可以产生线性相关和线性无关。

有了线性相关和线性无关，可产生极大线性无关组和秩的概念。

前一章的很多定理和结论，仅建立在线性表出的概念之上的，其证明丝毫没有涉及向量的具体形式。因此它们在线性空间中也是成立的。它们的证明几乎可以照搬上一章的证明。但需要注意其中的加号和乘号的概念和 0 的含义发生了变化。

线性空间

但有些问题，需要根据线性空间中向量和运算的具体形式来证明。比如书上的上一章定理 2。

但有些问题，需要根据线性空间中向量和运算的具体形式来证明。比如书上的上一章定理 2。

例题：线性空间 $P_n[x]$ 中，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ 线性无关。

线性空间

但有些问题，需要根据线性空间中向量和运算的具体形式来证明。比如书上的上一章定理 2。

例题：线性空间 $P_n[x]$ 中，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ 线性无关。

证明：注意 $P_n[x]$ 中的零元素是取值恒为 0 的 x 的函数。

但有些问题，需要根据线性空间中向量和运算的具体形式来证明。比如书上的上一章定理 2。

例题：线性空间 $P_n[x]$ 中，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ 线性无关。

证明：注意 $P_n[x]$ 中的零元素是取值恒为 0 的 x 的函数。

以上几个向量的线性组合等于 0，是等于一个值恒为 0 的函数。

但有些问题，需要根据线性空间中向量和运算的具体形式来证明。比如书上的上一章定理 2。

例题：线性空间 $P_n[x]$ 中，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ 线性无关。

证明：注意 $P_n[x]$ 中的零元素是取值恒为 0 的 x 的函数。

以上几个向量的线性组合等于 0，是等于一个值恒为 0 的函数。

也就是如果 $n+1$ 个实数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

但有些问题，需要根据线性空间中向量和运算的具体形式来证明。比如书上的上一章定理 2。

例题：线性空间 $P_n[x]$ 中，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ 线性无关。

证明：注意 $P_n[x]$ 中的零元素是取值恒为 0 的 x 的函数。

以上几个向量的线性组合等于 0，是等于一个值恒为 0 的函数。

也就是如果 $n+1$ 个实数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

则在上式中的 x 中取任意实数，该式都成立。

但有些问题，需要根据线性空间中向量和运算的具体形式来证明。比如书上的上一章定理 2。

例题：线性空间 $P_n[x]$ 中，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ 线性无关。

证明：注意 $P_n[x]$ 中的零元素是取值恒为 0 的 x 的函数。

以上几个向量的线性组合等于 0，是等于一个值恒为 0 的函数。

也就是如果 $n+1$ 个实数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

则在上式中的 x 中取任意实数，该式都成立。

将 x 取 $n+1$ 个两两不等的实数 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，得到 $n+1$ 个等式。

这 $n+1$ 个等式同时成立，也就是 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ 满足：

这 $n+1$ 个等式同时成立，也就是 $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ 满足：

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1 x_0+\lambda_2 x_0^2+\cdots+\lambda_n x_0^n & =0 \\ \lambda_0+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_1^2+\cdots+\lambda_n x_1^n & =0 \\ \dots & \\ \lambda_0+\lambda_1 x_n+\lambda_2 x_n^2+\cdots+\lambda_n x_n^n & =0 \end{cases}$$

这 $n+1$ 个等式同时成立，也就是 $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ 满足：

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1 x_0+\lambda_2 x_0^2+\cdots+\lambda_n x_0^n & =0 \\ \lambda_0+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_1^2+\cdots+\lambda_n x_1^n & =0 \\ \ldots & \\ \lambda_0+\lambda_1 x_n+\lambda_2 x_n^2+\cdots+\lambda_n x_n^n & =0 \end{cases}$$

这个线性方程组系数矩阵的行列式是范德蒙行列式。

这 $n+1$ 个等式同时成立，也就是 $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ 满足：

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1 x_0+\lambda_2 x_0^2+\cdots+\lambda_n x_0^n & =0 \\ \lambda_0+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_1^2+\cdots+\lambda_n x_1^n & =0 \\ \dots & \\ \lambda_0+\lambda_1 x_n+\lambda_2 x_n^2+\cdots+\lambda_n x_n^n & =0 \end{cases}$$

这个线性方程组系数矩阵的行列式是范德蒙行列式。

因为 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 两两不等，所以此行列式不等于 0。

这 $n+1$ 个等式同时成立，也就是 $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ 满足：

$$
\begin{cases}
\lambda_0+\lambda_1x_0+\lambda_2x_0^2+\cdots+\lambda_nx_0^n & =0\\
\lambda_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_1^2+\cdots+\lambda_nx_1^n & =0\\
\ldots & \\
\lambda_0+\lambda_1x_n+\lambda_2x_n^2+\cdots+\lambda_nx_n^n & =0
\end{cases}
$$

这个线性方程组系数矩阵的行列式是范德蒙行列式。

因为 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 两两不等，所以此行列式不等于 0。

根据克莱姆法则，知此方程组有唯一解，且是 0 解。

即当且仅当 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时，成立：

即当且仅当 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时，成立：

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

即当且仅当 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时，成立：

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

所以这几个向量线性无关。

即当且仅当 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时，成立：

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

所以这几个向量线性无关。

线性子空间（子空间）的定义，它要满足：

即当且仅当 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时，成立：

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

所以这几个向量线性无关。

线性子空间（子空间）的定义，它要满足：

- V 是 F 上的一个线性空间。L 是 V 的一个非空子集。

即当且仅当 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时，成立：

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

所以这几个向量线性无关。

线性子空间（子空间）的定义，它要满足：

- V 是 F 上的一个线性空间。L 是 V 的一个非空子集。
- 在 L 中，使用 V 中的加法运算和数乘运算。

线性空间

即当且仅当 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时，成立：

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

所以这几个向量线性无关。

线性子空间（子空间）的定义，它要满足：

- V 是 F 上的一个线性空间。L 是 V 的一个非空子集。
- 在 L 中，使用 V 中的加法运算和数乘运算。
- L 满足线性空间的定义。

线性空间

按定义，验证一个子集是子空间，需要验证它是线性空间。

线性空间

按定义，验证一个子集是子空间，需要验证它是线性空间。

事实上，其中的多条不需要再验证。只需要验证封闭性即可。

线性空间

按定义，验证一个子集是子空间，需要验证它是线性空间。

事实上，其中的多条不需要再验证。只需要验证封闭性即可。

定理：L 是 V 的非空子集。若 L 关于加法运算和数乘运算封闭，则 L 是 V 的线性子空间。

线性空间

按定义，验证一个子集是子空间，需要验证它是线性空间。

事实上，其中的多条不需要再验证。只需要验证封闭性即可。

定理：L 是 V 的非空子集。若 L 关于加法运算和数乘运算封闭，则 L 是 V 的线性子空间。

部分证明：证 L 中存在零元素。

按定义，验证一个子集是子空间，需要验证它是线性空间。

事实上，其中的多条不需要再验证。只需要验证封闭性即可。

定理：L 是 V 的非空子集。若 L 关于加法运算和数乘运算封闭，则 L 是 V 的线性子空间。

部分证明：证 L 中存在零元素。

因为 L 非空，所以必有某个向量 $\alpha \in L \subset V$。因 L 关于数乘运算封闭，所以 $0\alpha \in L$。

线性空间

按定义，验证一个子集是子空间，需要验证它是线性空间。

事实上，其中的多条不需要再验证。只需要验证封闭性即可。

定理：L 是 V 的非空子集。若 L 关于加法运算和数乘运算封闭，则 L 是 V 的线性子空间。

部分证明：证 L 中存在零元素。

因为 L 非空，所以必有某个向量 $\alpha \in L \subset V$。因 L 关于数乘运算封闭，所以 $0\alpha \in L$。 但在 V 中 $0\alpha = 0$，而 L 中的运算继承了 V 中的运算，所以 V 中的零元素 $0 \in L$。

按定义，验证一个子集是子空间，需要验证它是线性空间。

事实上，其中的多条不需要再验证。只需要验证封闭性即可。

定理：L 是 V 的非空子集。若 L 关于加法运算和数乘运算封闭，则 L 是 V 的线性子空间。

部分证明：证 L 中存在零元素。

因为 L 非空，所以必有某个向量 $\alpha \in L \subset V$。因 L 关于数乘运算封闭，所以 $0\alpha \in L$。但在 V 中 $0\alpha = 0$，而 L 中的运算继承了 V 中的运算，所以 V 中的零元素 $0 \in L$。而对 L 中任意 α，有 $\alpha \in V$，所以 $0+\alpha=\alpha$ 在 V 内成立，也在 L 中成立。所以 0 是 L 中的零元素。

线性空间

L_1 和 L_2 都是 V 的线性子空间，则 $L_1 \cap L_2$ 仍是子空间。

线性空间

L_1 和 L_2 都是 V 的线性子空间，则 $L_1 \cap L_2$ 仍是子空间。

但 $L_1 \cup L_2$ 未必是线性子空间。

线性空间

L_1 和 L_2 都是 V 的线性子空间，则 $L_1 \cap L_2$ 仍是子空间。

但 $L_1 \cup L_2$ 未必是线性子空间。

线性空间 V。V 中的 m 个向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$。

线性空间

L_1 和 L_2 都是 V 的线性子空间，则 $L_1 \cap L_2$ 仍是子空间。

但 $L_1 \cup L_2$ 未必是线性子空间。

线性空间 V。V 中的 m 个向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$。

$$\text{Span}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m | k_1, \ldots, k_m \in F\}$$

L_1 和 L_2 都是 V 的线性子空间，则 $L_1 \cap L_2$ 仍是子空间。

但 $L_1 \cup L_2$ 未必是线性子空间。

线性空间 V。V 中的 m 个向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$。

$$\mathrm{Span}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m | k_1, \ldots, k_m \in F\}$$

是线性子空间。称为由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 生成的子空间。

线性空间

L_1 和 L_2 都是 V 的线性子空间，则 $L_1 \cap L_2$ 仍是子空间。

但 $L_1 \cup L_2$ 未必是线性子空间。

线性空间 V。V 中的 m 个向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$。

$$\mathrm{Span}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m | k_1, \ldots, k_m \in F\}$$

是线性子空间。称为由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 生成的子空间。

练习：集合 V 取为全体正实数 $\mathbf{R}^+$，加法与数乘分别定义为：

$$a \oplus b = ab$$

$$k \odot a = a^k$$

V 是实数域上的线性空间吗？

n 维线性空间

如果线性空间 V 中可以找到 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，使这 n 个向量是 V 的一个极大线性无关组。

如果线性空间 V 中可以找到 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，使这 n 个向量是 V 的一个极大线性无关组。

则称 V 为 n 维线性空间。

n 维线性空间

如果线性空间 V 中可以找到 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，使这 n 个向量是 V 的一个极大线性无关组。

则称 V 为 n 维线性空间。

V 的极大线性无关子组称为 V 的基底或基。

如果线性空间 V 中可以找到 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，使这 n 个向量是 V 的一个极大线性无关组。

则称 V 为 n 维线性空间。

V 的极大线性无关子组称为 V 的基底或基。

基底所含向量的个数称为线性空间 V 的维数。零空间维数为 0。

如果线性空间 V 中可以找到 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，使这 n 个向量是 V 的一个极大线性无关组。

则称 V 为 n 维线性空间。

V 的极大线性无关子组称为 V 的基底或基。

基底所含向量的个数称为线性空间 V 的维数。零空间维数为 0。

如果 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，就称 V 为无穷维空间。

n 维线性空间

如果线性空间 V 中可以找到 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，使这 n 个向量是 V 的一个极大线性无关组。

则称 V 为 n 维线性空间。

V 的极大线性无关子组称为 V 的基底或基。

基底所含向量的个数称为线性空间 V 的维数。零空间维数为 0。

如果 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，就称 V 为无穷维空间。

线性空间的有序基：基排成有序组。$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$

n 维线性空间

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基，则 V 中任何一个向量 α 都可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性表出，且表示式唯一。

n 维线性空间

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基，则 V 中任何一个向量 α 都可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性表出，且表示式唯一。
- 式中系数的有序数组称为 α 在基 $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ 下的坐标。

n 维线性空间

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基，则 V 中任何一个向量 α 都可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性表出，且表示式唯一。
- 式中系数的有序数组称为 α 在基 $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ 下的坐标。
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基，α 和 β 在这个基下的坐标为：$X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 和 $Y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$。则 $\alpha + \beta$ 的坐标为 $X + Y$，$k\alpha$ 的坐标为 kX。

n 维线性空间

- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基，则 V 中任何一个向量 α 都可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出，且表示式唯一。
- 式中系数的有序数组称为 α 在基 $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ 下的坐标。
- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基，α 和 β 在这个基下的坐标为：$X=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 和 $Y=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$。则 $\alpha+\beta$ 的坐标为 $X+Y$，$k\alpha$ 的坐标为 kX。
- 向量 $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$ 的坐标分别为 $X,Y,\ldots,Z$，则等式

$$a\alpha+b\beta+\cdots+c\gamma=0$$

成立的充要条件是 $aX+bY+\cdots+cZ=0$。

基底变换与坐标变换

线性空间的基底通常是不唯一的（记得有的空间没有基底）。

基底变换与坐标变换

线性空间的基底通常是不唯一的（记得有的空间没有基底）。

如果在一个 n 维线性空间 V 中找到两个基底：

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \quad \text{和} \quad \eta_1, \ldots, \eta_n$$

线性空间的基底通常是不唯一的（记得有的空间没有基底）。

如果在一个 n 维线性空间 V 中找到两个基底：

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \quad 和 \quad \eta_1, \ldots, \eta_n$$

V 中的一个向量 α，

α 在基底 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

基底变换与坐标变换

线性空间的基底通常是不唯一的（记得有的空间没有基底）。

如果在一个 n 维线性空间 V 中找到两个基底：

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \quad 和 \quad \eta_1, \ldots, \eta_n$$

V 中的一个向量 α，

α 在基底 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

α 在基底 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

线性空间的基底通常是不唯一的（记得有的空间没有基底）。

如果在一个 n 维线性空间 V 中找到两个基底：

$$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n \quad 和 \quad \eta_1,\dots,\eta_n$$

V 中的一个向量 α，

α 在基底 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

α 在基底 $\eta_1,\dots,\eta_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 与 $\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 之间存在着什么联系？

基底变换与坐标变换

线性空间的基底通常是不唯一的（记得有的空间没有基底）。

如果在一个 n 维线性空间 V 中找到两个基底：

$$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \quad \text{和} \quad \eta_1,\ldots,\eta_n$$

V 中的一个向量 α，

α 在基底 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

α 在基底 $\eta_1,\ldots,\eta_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 与 $\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 之间存在着什么联系？

这取决于 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\ldots,\eta_n$ 之间的数量关系。

形式记法

向量的线性组合式：$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_k\varepsilon_k$ 可表示为

$$\xi = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k] \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \end{pmatrix}$$

形式记法

向量的线性组合式：$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_k\varepsilon_k$ 可表示为

$$\xi = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k] \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \end{pmatrix}$$

这是借用矩阵乘法的形式而采用的表示法。不能认为是矩阵乘法。类似，一组向量的线性组合式：

形式记法

向量的线性组合式：$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_k\varepsilon_k$ 可表示为

$$\xi = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k] \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \end{pmatrix}$$

这是借用矩阵乘法的形式而采用的表示法。不能认为是矩阵乘法。类似，一组向量的线性组合式：

$$\begin{cases} \eta_1 = x_{11}\varepsilon_1 + \cdots + x_{1k}\varepsilon_k \\ \quad \ldots \\ \eta_s = x_{s1}\varepsilon_1 + \cdots + x_{sk}\varepsilon_k \end{cases}$$

表示为 $[\eta_1,\ldots,\eta_s]=[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k]\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{s1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1k} & \ldots & x_{sk} \end{pmatrix}$

表示为 $[\eta_1,\ldots,\eta_s]=[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k]\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{s1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1k} & \ldots & x_{sk} \end{pmatrix}$

回到 η 这组基和 ε 这组基的关系。η 这组向量在 ε 基下都有坐标：

$$[\eta_1,\ldots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n]\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

表示为 $[\eta_1,\dots,\eta_s]=[\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k]\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{s1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1k} & \dots & x_{sk} \end{pmatrix}$
回到 η 这组基和 ε 这组基的关系。η 这组向量在 ε 基下都有坐标：

$$[\eta_1,\dots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n]\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

最后这个矩阵称为由 ε 这个基到 η 这个基的过渡矩阵。后面用 M 表示。

向量 α 在 ε 这个基下的坐标为 X，在 η 这个基下的坐标为 Y，

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

基底变换与坐标变换

向量 α 在 ε 这个基下的坐标为 X，在 η 这个基下的坐标为 Y，

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

于是有：

$$\begin{aligned} \alpha &= [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]X = [\eta_1, \ldots, \eta_n]Y \\ &= ([\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]M)Y = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n](MY) \end{aligned}$$

所以 $X = MY$。

所以 $X = MY$。

练习：R^3 的两个基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$；

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P。

由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P 满足

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} P,$$

设 $P=(p_{ij})_{3\times 3}$，则上式就是

$$\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + p_{31}\alpha_3$$

$$\beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + p_{32}\alpha_3$$

$$\beta_3 = p_{13}\alpha_1 + p_{23}\alpha_2 + p_{33}\alpha_3$$

由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P 满足

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} P,$$

设 $P=(p_{ij})_{3\times 3}$，则上式就是

$$\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + p_{31}\alpha_3$$

$$\beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + p_{32}\alpha_3$$

$$\beta_3 = p_{13}\alpha_1 + p_{23}\alpha_2 + p_{33}\alpha_3$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 为列向量，所以以上式子可以表示为矩阵乘积形式，即

基底变换与坐标变换

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} P = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

计算：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

计算：

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},
$$

因此 $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$。