

数学分析期末试题(A)

一. 解下列各题 (每小题 6 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a .
2. 设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, 求曲线在 $t = \frac{\pi}{3}$ 对应点处的切线方程.
3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
4. 计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

二. 解下列各题 (每小题 7 分)

1. 求由方程 $y = 1 + x^2 e^y$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的极值, 并判断该极值是极大值还是极小值.
2. 求不定积分 $\int x \arctan x dx$.
3. 已知 $y_1 = x - x^2$, $y_2 = 3e^x - x^2$, $y_3 = 2x - x^2 - e^x$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解, 求此微分方程的通解.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - a}{x^2} & x \neq 0 \\ b & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, 求 a, b 的值, 并求 $f'(x)$.

三. (7 分) 试确定函数 $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$ 在区间 $(0, 3)$ 内零点的个数.

四. (8 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0$, $g(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

五. (7 分) 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 证明 $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = C$, 并求常数 C 的值.

六. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导, 若由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$, $x = t$ ($t > 1$) 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$v(t) = \pi[t^2 f^2(t) - f^2(1)]$, 试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程的通解.

七. (8 分) 一容器内含有 100 升清水, 现将每升含盐量 4 克的盐水以每分钟 5 升的速率由 A 管注入容器, 假设瞬间即可混合均匀, 同时让混合液以同样的速率由 B 管流出容器(容器内的液体始终保持为 100 升), 问在任意时刻 t 容器内溶液的含盐量是多少?

八. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{x})}{\sin x} = 3$, $\int_1^2 f(x) dx = 0$, (1) 求 $f'(0)$; (2) 证明 $\exists \xi \in (0, 2)$, 使 $f'(\xi) + f''(\xi) = 0$.