2014 级一元函数积分（信息类）

一、选择题(每小题 4 分)

（1）设 $f(x)=\int_{x}^{x+2\pi} e^{\cos t}\sin t dt$，则 $f(x)=$ （ C ）

(A) 为正常数; (B) 为负常数; (C) 恒为零; (D) 不为常数。

（2）设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1<x\le 2 \end{cases}$， $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)=$（ D ）

（A）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$ ；（B）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ 2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$ ；

（C）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{3}x^3+2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$ ；（D）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$

注 要使函数连续

(3) 设 $f(x)=\int_0^{x^2}(1-\cos t)dt, g(x)=x^4+x^5$，则当 $x\to 0$，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 (B)

（A）低阶无穷小; （B）高阶无穷小; (C) 等价无穷小; (D) 同阶, 不等价无穷小。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos t)dt}{x^4}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x(1-\cos x^2)}{4x^3}$$
$$=0$$

（4）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程 $\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt=0$，在 (a,b) 内的根有（ C ）

（A）0 个;（B）2 个;（C）1 个; （D）无穷多个

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$

则 F连续，$F'(x)>0$，$F(a)F(b)<0$

∴F有1个零点.

(5) 对函数 $z=f(x,y)$,下列结论正确的是(D)

(A) f 有偏导数，则 f 连续; (B) f 可微，则 f 有连续偏导数;

(C) f 偏导数存在，则 f 可微; (D) f 可微，则它有偏导数.

二、填空题（每小题 4 分）:

（1）$\int_0^{14}|x-7|\,dx=$

$\int_0^{14}|x-7|\,dx$

$=2\int_0^7(7-x)dx$ （对称性）

$=-(7-x)^2\Big|_0^7$

$=49$ （也可用三角形面积求）

（2）设 $\int f(x)dx=\arctan x^2+C$，则 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$

（3）设非零连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=\dfrac{3}{4}x^4$, 则 $f(x)=$

两边求导，$3x^2 f(x^3-1)=3x^3$

$f(x^3-1)=x$

$f(t)=\sqrt[3]{t+1}$

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

（4）原点到平面 $2x+2y+z+6=0$ 的距离是

$d=\dfrac{6}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2$

（5）$\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{\ln(1+x^6)}\right]=$

$$=(5)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{x^6}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x(e^{x^4}-1)}{6x^5}$$

$$=\frac{1}{3}$$

三、求下列不定积分：（每小题 5 分）

（1）$\int\frac{x^2}{(x-1)^8}dx$；

$$三(1)\overset{t=x-1}{=\!=}\int\frac{t^2+2t+1}{t^8}dt$$

$$=-\frac{1}{5}t^{-5}-\frac{1}{3}t^{-6}-\frac{1}{7}t^{-7}+C$$

$$=-\frac{1}{5}(x-1)^{-5}-\frac{1}{3}(x-1)^{-6}-\frac{1}{7}(x-1)^{-7}+C$$

（2）$\int x^2\arctan x dx$；

$$三(2)=\int\arctan x\, d\frac{x^3}{3}$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$$

（3）$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$；

$$三(3)\overset{t=\sqrt{x+1}}{=\!=}\int\frac{2t\,dt}{t+1}$$

$$=\int\left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt$$

$$=2t-2\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$$

（4）$\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x+2}dx$

$$三(4) = \int \frac{d\sin x}{3+2\sin x-\sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{3-\sin x}\right)d\sin x$$
$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{3-\sin x}+C$$

四、求下列定积分（含定积分的应用）（每小题 5 分）：

（1）$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$；

$$四(1) = \int_0^3\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$$
$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 - 2\sqrt{x+1}\Big|_0^3$$
$$= \frac{16}{3}-\frac{2}{3}-4+2$$
$$= \frac{8}{3}$$

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3+(\arcsin\frac{x}{2})^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$；

$$四(2) = 2\int_0^1\frac{\arcsin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx \quad （奇偶性）$$
$$= 2\int_0^1 \arcsin^2\frac{x}{2}\,d\arcsin\frac{x}{2}$$
$$= \frac{2}{3}\arcsin^3\frac{x}{2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{\pi^3}{324}$$

（3）求由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围的图形，绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

$$四(3)\ V=\pi\int_0^1(y-y^4)\,dy$$
$$= \frac{3}{10}\pi$$

（4）设 $f(2)=1, f'(2)=0, \int_0^2 f(x)dx=1,$ 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$。

四(4) $=\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\, d f'(2x)$

$=\frac{1}{2}x^2 f'(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 x f'(2x)dx$

$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}\int_0^1 x\, d f(2x)$

$=-\frac{1}{2}x f(2x)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx$

$=-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)dt$

$=-\frac{1}{4}$

五、（8 分）设函数 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数， $z=f(xy,\frac{x}{y})$，

（1）试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；（2）若 $f_u^{'}(0,1)=1, f_v^{'}(0,1)=-1,$ 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(x,y)=(0,1)}$

五(1) $z'_x=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}$ $(f''_{12}=f''_{21})$

(2) $z''_{xy}=f'_1+xyf''_{11}\cancel{-\frac{x}{y}f''_{12}}-\frac{1}{y^2}f'_2$

$\cancel{+\frac{x}{y}f''_{21}}-\frac{x}{y^3}f''_{22}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,1)}=f'_1(0,0)-f'_2(0,0)=2.$

本题有错，条件改为 $f'_u(0,0)=1$，$f'_v(0,0)=-1$.

六、（6 分）设函数 $f(x)$ 连续，$\phi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，（$A$ 为常数），

（1）求 $\phi^{'}(x)$；（2）证明：$\phi^{'}(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

六、$x\neq 0$ 时，令 $u=xt$，

$\phi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，

$\phi'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du$

$\phi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-0}$

其中 $\phi(0)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\lim\limits_{x\to 0}x=0$

$\therefore \phi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\phi'(x)$ (可见 φ' 在 $x=0$ 连续)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}A-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}$

$=\frac{A}{2}$

$\therefore \phi'(0)=\frac{A}{2}$ 且 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

七、(6 分) 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\cos t^2 dt$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

七、$f(x)=\int_x^{x+1}\frac{1}{2t}d(\sin t^2)$

$=\frac{\sin t^2}{2t}\Big|_x^{x+1}+\frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\sin t^2}{t^2}dt$

$=\frac{\sin(x+1)^2}{2(x+1)}-\frac{\sin x^2}{2x}+\frac{1}{2}\frac{\sin\xi^2}{\xi^2}$，$x<\xi<x+1$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2015 级一元函数积分（信息类）

一、选择题(每小题 4 分)

（1）在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(\sqrt{x}+1)\frac{dx}{\sqrt{x}}=$（　　C　　）:

（A） $F(\sqrt{x}+1)$；（B） $F(\sqrt{x}+1)+C$；（C） $2F(\sqrt{x}+1)+C$；（D） $\frac{1}{2}F(\sqrt{x}+1)+C$

(2) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t dt, g(x)=\int_0^{2x}\ln(1+t)dt$,则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比较是(B):

（A）等价无穷小; （B）同阶但非等价无穷小; (C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t\,dt}{\int_0^{2x}\ln(1+t)dt}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x\cos x}{2\ln(1+2x)}$$
$$=\frac{1}{4}$$

（3）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,令 $F(x)=\int_{1/x}^{\ln x}f(t)dt, x>0$,则 $F'(x)=$（ A ）:

（A）$\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(1/x)$;（B）$f(\ln x)+f(1/x)$;（C）$\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f(1/x)$;

（D） $f(\ln x)-f(1/x)$

(4) 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x,(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为(C):

(A) 4/3; (B) $\frac{2}{3}\pi$; (C) $\frac{4}{3}\pi$; (D) $\frac{4}{3}\pi^2$

$$V=\pi\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx$$
$$=-\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\,d\cos x$$
$$=\frac{4}{3}\pi$$

(5) 二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域存在偏导数 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$,则下列结论正确的是(D),

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续; (B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微;

(C) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 存在切平面; (D) 以上说法都不正确..

二、填空题（每小题 4 分）:

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\bullet\bullet\bullet+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=$

二(1) $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$=\frac{2}{3}$

（2）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int\limits_0^1 f(t)dt$，则 $\int\limits_0^1 f(x)dx=$

二(2) 设 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(t)dt=A$

则 $A=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 Ax^3dx$

$=\arctan x\Big|_0^1+\frac{1}{4}Ax^4\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}A$

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$

（3）原点到平面 $2x-2y+z+15=0$ 的距离是

二(3) $d=\dfrac{15}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=5$

（4）设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$,且当 $y=0$ 时, $z=x^2$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$

二(4) $y=0$ 时，$x^2=z=e^{-x}-f(x)$

$\therefore f(x)=e^{-x}-x^2$

$z=e^{-x}-f(x-2y)$

$=e^{-x}-e^{2y-x}+(x-2y)^2$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-e^{-x}+e^{2y-x}+2x-4y$

（5）$\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^x\cos(x-t)^2dt=$

二(5) $\int_0^x \cos(x-t)^2 dt$

$\xlongequal{u=t-x} \int_{-x}^{0} \cos u^2 du$

原式 $= \frac{d}{dx}\int_{-x}^{0} \cos u^2 du$

$= \cos x^2$

三、求下列不定积分：（每小题 6 分）

（1）$\int \frac{x^2}{(x-1)^7} dx$；

三(1)

$\xlongequal{t=x-1} \int \frac{t^2+2t+1}{t^7} dt$

$= -\frac{1}{4}t^{-4} - \frac{2}{5}t^{-5} - \frac{1}{6}t^{-6} + C$

$= -\frac{1}{4}(x-1)^{-4} - \frac{2}{5}(x-1)^{-5} - \frac{1}{6}(x-1)^{-6} + C$

（2）$\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx$；

三(2) $= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$

（3）$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$；

三(3) $= -\int \arctan x \, d\frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$= -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) d(x^2)$

$= -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$

四、求下列定积分（每小题 7 分）：

（1）$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$；

四(1) $\overset{x=\sin t}{=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 t - 1) dt$

$= -\cot t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4}$

$= 1 - \frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$；

四(2) $= x\ln(1+\sqrt{x})\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})} dx$

$\overset{t=1+\sqrt{x}}{=\!=\!=} \ln 2 - \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t} dt$

$= \ln 2 - \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \ln t\right)\Big|_1^2$

$= \frac{1}{2}$

(3）$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x} dx$。

四(3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x} dx$

$\overset{t=\frac{\pi}{2}-x}{=\!=\!=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3 t}{\sin t + \cos t} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos x + \sin x} dx$

$\therefore I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x \cos x) dx$

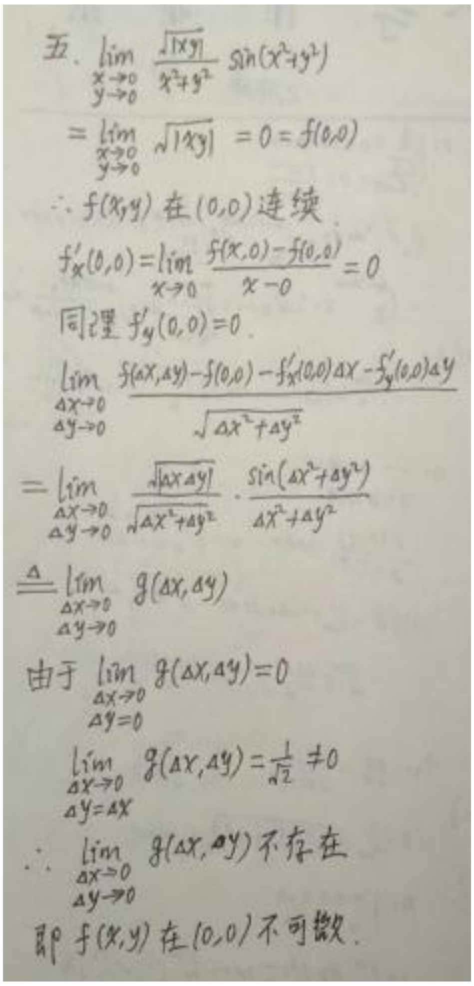
$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi - 1}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi - 1}{4}$

五、（8 分）设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), x^2+y^2>0 \\ 0, x=y=0 \end{cases}$

试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续、是否可微？



五. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0,0)$

$\therefore$ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$

同理 $f'_y(0,0)=0$.

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}} \frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\frac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$\triangleq \lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}} g(\Delta x,\Delta y)$

由于 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y=0}} g(\Delta x,\Delta y)=0$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y=\Delta x}} g(\Delta x,\Delta y)=\frac{1}{\sqrt2}\neq0$

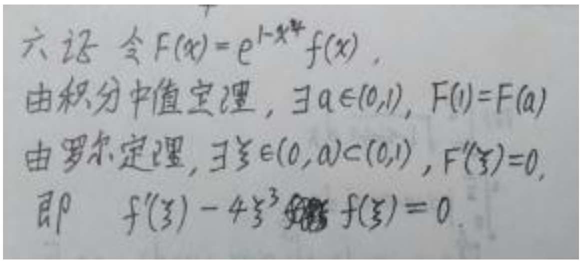
$\therefore$ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}} g(\Delta x,\Delta y)$ 不存在

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

六、（7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)=2\int_0^{1/2} e^{1-x^4} f(x)dx,$$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)-4\xi^3 f(\xi)=0$



六 证 令 $F(x)=e^{1-x^4}f(x)$.

由积分中值定理，$\exists\, a\in(0,1)$，$F(1)=F(a)$

由罗尔定理，$\exists\,\xi\in(0,a)\subset(0,1)$，$F'(\xi)=0$,

即 $f'(\xi)-4\xi^3 f(\xi)=0$.

七、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意 $x\in[0,1], 0<a\le f(x)\le b$，

证明: $\frac{1}{a}\int_0^1 f(x)dx + b\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le 1+\frac{b}{a}$

七. 证 易证 $g(t)=\frac{t}{a}+\frac{b}{t}$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 $g(a)=g(b)=1+\frac{b}{a}$.

$\therefore$ 左式 $=\int_0^1\left(\frac{f(x)}{a}+\frac{b}{f(x)}\right)dx$

$\leq\int_0^1\left(1+\frac{b}{a}\right)dx$

$=1+\frac{b}{a}$.

2016 级一元函数积分（信息类）

一、选择题(每小题 4 分)

(1) 设 $f(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\cos t}(2+\sin t)dt$，则 $f(x)=$ (B)：

(A) 为负常数；(B) 为正常数；(C) 恒为零； (D) 不为常数。

(2) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$F'(x)=f(x)$，则 $\int f(\sqrt{x}-1)\frac{dx}{\sqrt{x}}=$ (D)：

(A) $F(\sqrt{x}-1)$；(B) $F(\sqrt{x}-1)+C$；

(C) $\frac{1}{2}F(\sqrt{x}-1)+C$； (D) $2F(\sqrt{x}-1)+C$

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}\frac{\sin 2t}{t}dt, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，则当 a 取(A)时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续：

(A) 2； (B) 1；(C) -1；(D) 0

(4) 设 $f(x)$ 为可导函数，$z=e^x-f(2x+y)$，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 为 (C)：

(A) $e^x+f'(2x+y)$；B) $e^x-f'(2x+y)$；(C) $e^x-2f'(2x+y)$；(D) $e^x+2f'(2x+y)$

(5) 下列结论正确的是(D)，

(A) 若偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(B) 若偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微；

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，偏导数 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(D) 若偏导数 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

二、填空题（每小题 4 分）：

二题得分	

（1） $\int_0^{10}|x-5|\,dx=$ 25

（2） 设 $f(x)=4x-\int_0^1 f(t)dt$ 为连续函数，则 $f(x)=$ $4x-1$

（3） yOz 平面上的曲线 $y^2+3z^2=1$ 绕 z 轴旋转一周,所得旋转曲面的方程为 $x^2+y^2+3z^2=1$

（4） 设 $f(x)$ 为连续函数，满足 $\int_{-1}^{x^3-1} f(t)dt=x$,则 $f(7)=$ $\frac{1}{12}$

（5） 曲线 $y=1-x^2,(0\le x\le 1)$ 与 x 轴，y 轴所围的图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积= $\frac{8}{15}\pi$

三、求下列不定积分：（每小题 6 分）

（1） $\int \frac{x^2}{(x+1)^8}dx$；

$$=\int \frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{(x+1)^8}dx$$

$$=-\frac{1}{5}(x+1)^{-5}+\frac{1}{3}(x+1)^{-6}-\frac{1}{7}(x+1)^{-7}+C$$

（2） $\int e^x\ln(1+e^x)dx$；

$$=\int \ln(1+e^x)d(e^x)$$

$$=e^x\ln(1+e^x)-\int\frac{1+e^x-1}{1+e^x}d(e^x)$$

$$=e^x\ln(1+e^x)-e^x+\ln(1+e^x)+C$$

（3） $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$；

$$=\int\arctan x\,dx-\int\arctan x\,d\arctan x$$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

四、求下列定积分（每小题 7 分）：

（1）$\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$；

$$\underline{\underline{x=\sin t}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(2) $\int_{-1}^{1} (|x|+2016x)e^{-|x|} dx$；

$$= 2\int_0^1 x e^{-x} dx \quad （奇偶性）$$

$$= -2\int_0^1 x \, d(e^{-x})$$

$$= -2xe^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= -2e^{-1} - 2e^{-x}\Big|_0^1$$

$$= 2-4e^{-1}$$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+3^x}dx$

$$\underline{\underline{t=-x}}\ \int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}t)}{1+3^{-t}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+3^x}+\frac{1}{1+3^{-x}}\right)\sin^2\frac{\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-\cos(\pi x)}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}$$

五、（8 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos(x^2+2y^2)^{-1}, x^2+y^2>0\\ 0, x=y=0\end{cases}$，试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续、是否可微？

五题 得分	

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{无穷小}}\underbrace{\cos(x^2+2y^2)^{-1}}_{\text{有界}}=0=f(0,0)$ ∴ f 在 $(0,0)$ 连续.

(2) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x^2}=0$

同理 $f'_y(0,0)=0$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+2y^2}=0$$

∴ f 在 $(0,0)$ 可微

六、（7分）求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值。

$$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$

∴ f 在 $(-\infty,-1]$，$[0,1]$ ↓

在 $[-1,0]$，$[1,+\infty)$ ↑

$f(\pm1)=0$ 为极小值

$f(0)=\int_1^0(-te^{-t^2})dt=\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_1^0=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ 为极大值

七、（6分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可导，且 $f(\frac{a+b}{2})=0$，

取 $M=\max\{|f''(x)|;x\in[a,b]\}$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{24}(b-a)^3$$

$$f(x)=\overset{=0}{f(\tfrac{a+b}{2})}+f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\tfrac{a+b}{2})^2$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\underbrace{\left|\int_a^b f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})dx\right|}_{=0}+\left|\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-\tfrac{a+b}{2})^2dx\right|$$

$$\le\frac{M}{2}\int_a^b(x-\tfrac{a+b}{2})^2dx$$

$$=\frac{M}{24}(b-a)^3$$

最后一题是习题课讲义上册130页16.1

讲义答案上有提示，分部积分法

$$f(x)=f(\tfrac{a+b}{2})+f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\tfrac{a+b}{2})^2$$

$$=f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\tfrac{a+b}{2})^2$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})dx+\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-\tfrac{a+b}{2})^2dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|0+\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx\right|$$

$$\leq \int_a^b \frac{|f''(\xi)|}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$\leq \int_a^b \frac{M}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{24}M(b-a)^3$$

注意，这里$\xi=\xi(x)$与x有关，不可看作常数

法二 设F为f的一个原函数，则

$$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{F''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{F'''(\xi)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3$$

其中ξ在x与$\frac{a+b}{2}$之间.

$$F'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$$

$$\therefore F(b)-F(a)=\frac{F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \frac{|F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)|}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \leq \frac{M}{24}(b-a)^3$$