2011-2012-第一学期　　工科数学分析期中试题解答（**2011.11**）

一. **1.** $y = 2x$

2. $\dfrac{y-2x}{x+2y}$

3. 2

4. $3+\dfrac{2}{\ln 2}$

5. $(\sin x)^x(\ln\sin x + x\cot x)$

二. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{ 分})$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{4}}\right]^{\frac{4x}{x-3}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{ 分})$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-3}} = e^4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8\text{ 分})$$

三. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = 1-\sqrt{1-t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{ 分})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = -t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8\text{ 分})$$

四. $x=0, x=2$ 是间断点 ……………………(2 分)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -e^{-\frac{1}{2}}$　　　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$

$x=0$ 是第一类间断点 ……………………..(5 分)

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

$x=2$ 是第二类间断点 ………..…………(8 分)

五.
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$ ……………….(2 分)

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}$$ ……………….(5 分)

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}$$ ………………..(6 分)

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}$$ ………………..(8 分)

$$=\frac{1}{2}$$ …………………..(9 分)

六. 当 $x>0$
$$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}$$
$$=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$ ……………….(3 分)

当 $x<0$
$$f'(x)=\frac{3\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x-\tan^3 x}{x^2}$$
$$=\frac{3x\tan^2 x-\tan^3 x\cos^2 x}{x^2\cos^2 x}$$ …………………(6 分)

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\tan^3 x}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan^3 x}{x^2}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}x\cos\frac{1}{x}=0$$

$$f'(0)=0$$ …………………(9 分)

七.
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(2Rh-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(2Rh^2-h^3)$$ ……………….(3 分)

$$\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi(4Rh-3h^2)$$ …………………..(6 分)

令 $\frac{dV}{dh}=0$ 得 $h=\frac{4}{3}R$

由问题的实际意义, ….., 故当 $h=\frac{4}{3}R$ 时 V 最大 …………….(8 分)

八． 令 $f(x)=x-\sin x$ ………………(1 分)

$f'(x)=1-\cos x\geq 0$ ………………(2 分)

且等号成立的点是孤立的，故 $f(x)$ 单调增加，又 $f(0)=0$

故当 $x>0$ 时 $f(x)>0$ 即 $\sin x<x$ ………………(4 分)

令 $g(x)=\sin x+\frac{x^3}{3!}-x$ …………………(5 分)

$g'(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$ …………………(6 分)

$g''(x)=-\sin x+x>0$ ……………………(7 分)

故 $g'(x)$ 单调增加，又 $g'(0)=0$ 故当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$ ……………(9 分)

因此 $g(x)$ 单调增加，由于 $g(0)=0$

所以当 $x>0$ 时 $g(x)>0$，即 $x<\sin x+\frac{x^3}{3!}$ ……………..(10 分)

九． 定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 1}y=\infty$ 有垂直渐近线 $x=1$ ……………..(1 分)

$\lim\limits_{x\to\infty}y=1$ 有水平渐近线 $y=1$ ……………..(2 分)

$$y'=\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}$$

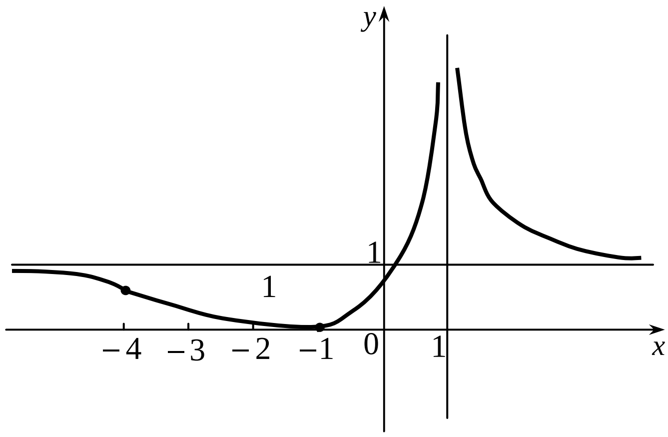
令 $y'=0$ 得 $x=-1$ …………..(4 分)

$$y''=\frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}$$

令 $y''=0$ 得 $x=-1, x=-4$ …………………(6 分)

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$		$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$		$+$
y	$\searrow$	拐点 $(-4,(\frac{3}{5})^4)$	$\searrow$	极小值 0	$\nearrow$	间断	$\searrow$

………..(10 分)



……………………(12 分)

十. 由题设，有 $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 1$ ……………..(1 分)

$$\sqrt{4+\ln(1+x^3)} - 2 = 2(\sqrt{1+\frac{1}{4}\ln(1+x^3)} - 1) \sim \frac{1}{4}x^3$$ …………….(3 分)

$$f(x) - \cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) - (1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))$$

$$= (f(0)-1) + f'(0)x + (\frac{f''(0)}{2!} + \frac{1}{2!})x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$ …………….(7 分)

得 $f(0) - 1 = 0$ $f'(0) = 0$ $\frac{f''(0)}{2!} + \frac{1}{2!} = 0$ $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{4}$

$f(0) = 1$ $f'(0) = 0$ $f''(0) = -1$ $f'''(0) = \frac{3}{2}$ ……………….(9 分)

十一. 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ …………………….(1 分)

由题设及 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 2$ 有 $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ….………..(2 分)

$$F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$ ………………(4 分)

$$= \frac{xf'(x) - (f(x) - f(0))}{x^2}$$

$$= \frac{xf'(x) - xf'(\xi)}{x^2} \quad (\xi \in (0,x))$$ ……………..(6 分)

$$= \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x}$$

$$= \frac{f''(\eta)(x-\xi)}{x} \quad (\eta \in (\xi, x) \subset (0,x))$$ …………(8 分)

$$> 0$$

所以 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加 ……………….(9 分)