课程编号：　A071001

北京理工大学 2004—2005 学年第一学期

2004 级《微积分 A》期末试卷（A 卷）

一、　计算下列各题（每小题 6 分）

1．计算不定积分 $\int(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})dx$.

2．求方程 $y''+y=e^{2x}$ 的通解.

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t^2)dt}{x^3}$.

4．设 $f(x)=x^2\ln(1+x^2)$．利用 Taylor 公式求 $f^{(8)}(0)$.

5．求对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=(e^{\pi/2},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程.

二、　求解下列各题（每小题 7 分）

1．　计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}$.

2．试确定 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} ae^x+be^{-x}, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}\ln(1+x), & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

可导，并求 $f'(x)$.

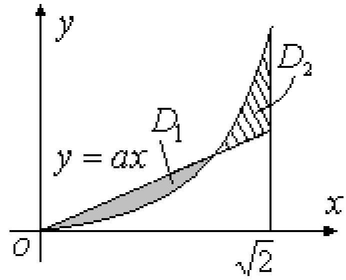
3．　求微分方程 $\begin{cases} yy'+2xy^2-x=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 的特解.

4. 求特殊和式的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

三、（8 分）设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，且 $F(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$．又设当 $x>0$ 时，

有 $f(x)F(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，试求 $f(x)$ 的表达式.

四 （12 分）设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 围成平面图形 D_1；记直线 $y=ax$ 、抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=\sqrt{2}$ 围成的曲边三角形为 D_2，其中 $0<a<\sqrt{2}$.



(1) 求 a 的适当值，使平面图形 D_1 与 D_2 的面积之和取最小值；

(2) 对上述 a 的值，求 D_1 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V_1 和 D_2 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_2 .

五 （8 分）求证：对任意的 $x>0$，$x\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} > 2\sqrt{1+x^2}-2$.

六 （8 分）某游艇在速度为 $5m/s$ 时关闭发动机靠惯性在河道中滑行. 假设游艇滑行时所受到的阻力与其速度成正比. 已知 4 秒钟后游艇的速度为 $2.5m/s$. 求游艇速度 v 与时间 t 的关系 $v(t)$，并求游艇滑行的最长距离.

七 （6 分）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\ a]$ 内可导，且 $f(0)=g(0)=0$.

又设在 $[0,\ a]$ 内 $g'(x)>0$. 求证：若 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 在 $(0,\ a)$ 内单调递增，

则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $(0,\ a)$ 内也单调递增.