课程编号：MTH17005　　北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

《微积分 A》期中试题

班级________________　学号__________________　　姓名___________________

(本试卷共 7 页，十个大题. 证明题、解答题必须有解题过程.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=$________________________.

2. 当 $x\to 0$ 时，无穷小 $\sqrt{1+\tan^3 x}-1$ 的阶是__________，其最简形式的等价无穷小是_________.

3. 设 $y=x^3\sin x$，则 $y^{(10)}(0)=$_____________.

4. 函数 $y=\begin{cases} x^2 & x<-1 \\ x & -1\le x\le 0 \\ \frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ 的间断点为____

（注明间断点类型）.

5. 设 $y=f(\arctan\frac{1}{x})$，其中函数 f 可导，则 $dy=$____________________________.

二. 单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时 ，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列错误的是（　　）

$(A)\quad a=0,\quad (B)\quad b=1,\quad (C)\quad c=0,\quad (D)\quad d=\frac{1}{6}.$

2.　$f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的（　　）条件.

(A) 充分条件　(B) 必要条件　(C)　充要条件　(D)　既非充分也非必要

3．若函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=\sin^2[\sin(x+1)]$, $f(0)=4$，则 $f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 当自变量 y 取值为 4 时的导数值为（　　）

(A) $\dfrac{1}{\sin^2(\sin 4)}$　　(B) $\dfrac{1}{\sin^2(\sin 5)}$　　(C) 0　　(D) $\dfrac{1}{\sin^2(\sin 1)}$

4．设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^3)$ 当自变量 x 在 $x=1$ 处取得改变量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数改变量 Δy 的线性主部为 0.3，则 $f'(1)$ 等于(　　)

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.5.

5.　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$，其中 a，b 为常数，则(　　)

(A) $a=1,\ b=1$　　(B) $a=-1,\ b=1$　　(C) $a=1,\ b=-1$　　(D) $a=-1,\ b=-1$.

三. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$　(n为正整数).

四. (8 分) 证明：对 $\forall x>1$, 都有 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

五. (8 分)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2} \\ y=t-\sin t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

六. (10 分) 设 $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}arc\cot\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+(\sin x)^x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

七. (10 分) 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(\sqrt{1+x}-1)}{x} & x<0 \\ 1 & x=0 \\ b(e^{-\frac{1}{x}}+2)+c\ln(1+x) & x>0 \end{cases}$，试确定常数 a,b,c 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续且可导，并求 $f'(x)$.

八. (8 分) 顶角为 $\dfrac{\pi}{3}$，底圆半径为 a 的正圆锥形漏斗内盛满水，下接底圆半径为 b $(b<a)$ 的圆柱形水桶，水由漏斗注入水桶，问当漏斗水平面下降速度与水桶水平面上升速度相等时，漏斗中水平面高度是多少？

九. (10 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 以及 $x=0$ 时曲线 $y=y(x)$ 的切线方程.

十. (8 分) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$