北京理工大学2014-2015学年第一学期

《微积分A》（I）A卷试题答案及评分标准

一、填空题（每题4分）

(1) $e^{a+b}$; (2) $3/4$; (3) $\sqrt{2}/2$; (4) $-\frac{1}{2}x^2+C$; (5) $2\sqrt{2}-1$;

(6) $e-7/6$; (7) $y''-2y'+y=0$. (若有其他答案，代入验证)

二、解：对方程两边分别关于$x$求导，$1+y'=\frac{1-y'}{1+(x-y)^2}$ ................4 分

整理得：$-(x-y)^2=[(x-y)^2+2]y'$,

$y'=\frac{-(x-y)^2}{(x-y)^2+2}$. ................................................7 分

若用其它方法，如用微分法，类比上述标准给分。

三、解：$D(x)=(-\infty,-1)\bigcup(-1,+\infty)$ ........................................

$f'(x)=\frac{3x^2+x^3}{(1+x)^3}$ ...............................................1分

$f''(x)=\frac{6x}{(1+x)^4}$ ...............................................2分

令$f'(x)=0$, 得到$x=0$ 或$x=-3$, 令$f''(x)=0$, 得到$x=0$;

| $x$ | $(-\infty,-3)$ | $-3$ | $(-3,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | 不存在 | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | 凸 | 极大值 | 凸 | | 凸 | (0,3)拐点 | 凹 |

单增区间：$(-\infty,-3]$, $(-1,+\infty)$; 单减区间: $[-3,-1)$;

凸区间：$(-\infty,-1)$, $(-1,0)$; 凹区间: $(0,+\infty)$;

单调区间判断1分，凹凸区间判断1分，极值点和拐点判断1分； ........5分

因为$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$, 所以，$x=-1$是铅直渐近线；

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$不存在，所以，曲线无水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-x=1$,所以，曲线有斜渐近线$y=x+1$, ......7分

每种形式的渐近线判断和计算各1分。

四、解：$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t^4}-1)}{-x^\alpha}$ ……………………………………1分

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^8}-1)\cdot 2x}{-\alpha x^{\alpha-1}}$ ……………………………………3分

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^8\cdot 2x}{-\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^9}{-\alpha x^{\alpha-1}}$ ……………………………………5分

若使得该极限存在且等于$\beta \neq 0$，只要$\alpha = 10$即可，此时$\beta = -\frac{1}{10}$ ……7分

五、解：$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ x^2, & x \leq -1 \end{cases}$ ……………………………………2分

$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x \geq 1 \\ x + C_2, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x \leq -1 \end{cases}$ ……………………………………4 分

$F(0) = 1$, 得到$C_2 = 1$, 因为$F(x)$连续，所以，$C_1 + \frac{1}{3} = C_2 + 1 = 2$, 得$C_1 = \frac{5}{3}$;

以及$C_3 - \frac{1}{3} = C_2 - 1 = 0$，得$C_3 = \frac{1}{3}$;

所求的$F(x)$为：$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}, & x \geq 1 \\ x + 1, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}, & x \leq -1 \end{cases}$ ……………………………………7分

六、解：$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}|\cos x|dx$ ......................................2分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos x dx$ ......................................3分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}d\sin x$

$=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ ......................................6分

$=4/3$ ......................................7分

计算过程出错，酌情扣分

七、解：令$t=\frac{\pi}{2}-x$, 则,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$ ......................................4分

因此，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\sqrt{\sin x})-\ln(1+\sqrt{\cos x})+\sin^3 x}{2}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{2}dx$ ......................................5分

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{2}d\cos x$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ ......................................7分

八、解：令$u=tx$，则$\int_0^1 f(tx)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，

即$x\int_0^1 f(tx)dt=\int_0^x f(u)du$ ........................................ 2 分

方程两边关于$x$求导：

$f(x)=2f(x)+f(x)+xf'(x)+3x^2$, 即$f'(x)+\frac{2}{x}f(x)=-3x$ ............ 5分

$f(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int(-3x)e^{\int\frac{x}{2}dx}+C\right)$ =- $\frac{3}{4}x^2+\frac{C}{x^2}$ ........................ 7分

将$f(1)=0$ 代入，得$C=\frac{3}{4}$,

即，$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4x^2}$ ............................................... 8分

九、解：因为$x\sin x\le x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以，围成图形的面积

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx$ ................................................ 2分

$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos x$

$=\frac{\pi^2}{8}+x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$

$=\frac{\pi^2}{8}-1$ ............................................................ 4分

体积的微元：$dv=\pi(x^2-x^2\sin^2 x)dx$ .................................. 5分

体积：$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dv$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(x^2-x^2\sin^2 x)dx$ ............................................. 7分

$=\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi^2}{8}$ ............................................................ 8分

十、选$x$作为积分变量，则$x \in [0, L]$, 沿$x$方向引力的微元：

$dF = \frac{km\rho dx}{b^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}$ ............................................3分

$F = \int_0^L dF$

$= \int_0^L \frac{km\rho}{b^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} dx$ ........................................6 分

$= \frac{1}{2}\int_0^L kmp(b^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} d(x^2+b^2)$

$= km\rho(\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}})$ ............................................8分

十一、因$f(x)$连续，故其原函数存在，设为$F(x)$, 即$F'(x) = f(x)$ ...1分

根据牛顿-莱布尼兹公式：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ....................3分

显然，$F(x)$在区间$[a, b]$上满足微分中值定理的条件，

因此，$\exists \xi \in (a, b)$ 使得：

$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$ ..............................5分

故，$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ..............................................6分

若用最值定理证明，$\exists \xi \in [a, b]$，使得命题成立，但未能正确说明是开区间的，给3分。