数学分析 B 第一学期期末试题(B)解答(2008.1)

一. 1. $-\dfrac{f'(\frac{1}{x})}{x^2 f(\frac{1}{x})}dx$ (没有 dx 扣 1 分)

2. 2

3. $y = 3ex - 2e^2$

4. -16

5. 4

6. $y'' + 2y' + y = 0$

7. $\dfrac{3\pi}{8}$

8. 1, -2, 4 (1 分, 1 分, 1 分)

9. $\dfrac{128}{5}\pi$

10. $y = Ce^{-2x^2} + \dfrac{1}{2}$ (没写 y 扣 1 分) (只写出通解公式没算出积分给 1 分)

二. $$\int_0^\pi \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \frac{\pi}{2})\sin x dx \quad \text{……….(2 分)}$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) d\cos x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) d\cos x \quad \text{………….(3 分)}$$

$$= -(\frac{\pi}{2} - x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - (x - \frac{\pi}{2})\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \quad \text{………..(6 分)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2 \quad \text{…….…………….(8 分)}$$

三. $$f'(x) = \frac{2(2x-2)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4(x-1)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{…………………………(2 分)}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$

当 $x = 0$, $x = 2$ 时, $f'(x)$ 不存在 …………………………….(5 分)

$f(0) = 0$ $f(2) = 0$ $f(1) = 1$

$f(3) = \sqrt[3]{9}$ $f(-2) = 4$

$M = 4$ $m = 0$ …………………………….(8 分)

四. $$f'(x)=ax^2-4x$$ .. …………………………(1 分)

$$f''(x)=2ax-4$$ …………………………..(2 分)

$$f''(-1)=-2a-4=0 \qquad a=-2$$ …………………………..(.4 分)

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2-4x)dx=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$$ ……………(6 分)

由 $f(-1)=\frac{2}{3}-2+C=\frac{8}{3}$ 得 $C=4$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+4$$ ……………………………(8 分)

五. 设 t 时刻物体表面温度为 $T=T(t)$，则

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$$ ……………………………(2 分)

$$\frac{dT}{T-20}=-kdt$$ ……………………………….(3 分)

$$\ln|T-20|=-kt+C_1$$

$$T=20+Ce^{-kt}$$ ……………………………(4 分)

由 $T(0)=100$ 得 $C=80$

$$T=20+80e^{-kt}$$ ……………………………(6 分)

由 $T(20)=60$ 得 $e^{-k}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{20}}$

$$T=20+\frac{80}{2^{\frac{t}{20}}}$$ ….…………………………(8 分)

六. $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=xe^x-f(x)$ …………………………(1 分)

$\int_0^x f(t)dt=e^x+xe^x-f'(x)$ …………………………..(2 分)

$f(x)=e^x+e^x+xe^x-f''(x)$

$f''(x)+f(x)=(2+x)e^x$ …………………………..(3 分)

$f(0)=0 \qquad f'(0)=1$ …………………………...(5 分)

$r^2+1=0 \qquad r=\pm i$ ……………………………..(7 分)

$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ……………………………..(8 分)

设 $f^*(x)=(Ax+B)e^x$ ……………………………(9 分)

代入微分方程得 $A=\dfrac{1}{2} \qquad B=\dfrac{1}{2}$

$f^*(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)e^x$ …..………………..(11 分)

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}(x+1)e^x$ ……………………(12 分)

由初始条件得 $C_1=-\dfrac{1}{2} \qquad C_2=0$

$f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}(x+1)e^x$ ...……………………(14 分)

七. 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(0)$ ……………………(2 分)

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$ …………………..(4 分)

$=f(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(x)+f(0)$ ……..…………….(6 分)

$=f(x+0)=f(x)$ ……….……………(7 分)

故 $f(x)$ 在 x 处连续，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 ………………………(8 分)

八. 由题设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ……………………………..(1 分)

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{a(-\frac{1}{2}x^2)\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{-\frac{a}{4}x^4}$$ ……..……..……..(3 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x^{4k})}{x^2}2x}{-ax^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x^{4k})}{-ax^4}$$ …………………….(5 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^{4k}}{-ax^4}$$ ….…………………(6 分)

故 $2=-a$ $4k=4$

得 $a=-2$ $k=1$ ….……………………(8 分)

九. $$\left|\int_0^a f(x)dx-af(a)\right|$$

$$=\left|\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(a)dx\right|=\left|\int_0^a (f(x)-f(a))dx\right|$$ ……………….(2 分)

$$=\left|\int_0^a f'(\xi)(x-a)dx\right| \qquad (\xi\in(0,a))$$ …………………….(4 分)

$$\le\int_0^a\left|f'(\xi)(x-a)\right|dx$$ ……………………….(5 分)

$$\le M\int_0^a|x-a|dx$$ ……..…………………...(6 分)

$$=M\int_0^a(a-x)dx$$ ……..……………………(7 分)

$$=\frac{Ma^2}{2}$$ ……..……………………(8 分)