电光、计控学院本科生2015—2016学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A卷）参考答案

一　1. ×　2. √　3. ×　4. D　5 B　6 D　7B　8 D

二 、行列式计算　（第1小题6分，第2小题8分，共14分）

1．解：原式=2（*x+y*）$\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$　（2分）　=2（*x+y*）$\begin{vmatrix} 0 & y-x & x \\ 0 & y & x-y \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$　（1分）

=2（*x+y*）$\begin{vmatrix} y-x & x \\ y & x-y \end{vmatrix}$　（1分）　$=-2(x+y)(x^2-xy+y^2)$　$=-2(x^3+y^3)$　**（2分）**

2. 解：

原式=（a+9）$\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+5 & a+6 & 0 \\ 0 & a+7 & a+8 & 0 \\ a+3 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix}$**(2分)=**（a+9）$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{vmatrix}\left(-1\right)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} a+5 & a+6 \\ a+7 & a+8 \end{vmatrix}$**(2分)**

= （a+9）[(a+1) (a+4)- (a+2) (a+3)] [(a+5) (a+8)- (a+6) (a+7)] (2分)
=4（a+9）(2分)

三.

解法1：计算$|A|$：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$ 。（3分）

$|A| \neq 0$，因此A可逆。（1分）

计算A^*，A的第i行第j列元的代数余子式记为A_{ij}：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$，（4分）

所以$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$。（2分）

解法2：对$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$。（8 分）

（做对 2 个步骤以上，最后有计算错误扣 1-2 分。）

A 经一系列初等行变换得到单位阵，因此 A 可逆。且上式说明，$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2&2\\8&-4&2\\-3&2&-1\end{pmatrix}$。（2 分）

四．解：（1）对线性方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&-1&0\\0&a-1&1&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&a-2&0&b-1\end{pmatrix}$$

（1 分）　　　　（2 分）

故：当 $a=2,\quad b=1$ 时有无穷多解(2 分)；

当 $a\neq 2$ 时有唯一解(2 分)；

当 $a=2,\quad b\neq 1$ 时无解（2 分）

（2）当 $a=2,\quad b=1$ 时， $B\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，（1 分）

对应同解线性方程组为 $\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，**令** $x_3=0$ **得特解** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　（1 分）

令 $x_3=1$ **得对应导出组基础解析** $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$　（1 分）

故方程组的解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad k\in R$　（2 分）　**不说 $k\in R$ 扣 1 分**

五、　在 R^2 中定义变换 σ： $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$ **(1) 证明：变换 σ 为线性变换。**

(2) 求 σ 在基底 α_1,α_2 下的矩阵 A。

解：显然 $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}\in R^2$

设 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2,\beta=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2,k\in R,$ 则 $\alpha+\beta=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^2$

$$\sigma\alpha=\begin{pmatrix}b\\a+b\end{pmatrix},\sigma\beta=\begin{pmatrix}d\\c+d\end{pmatrix},\sigma(\alpha+\beta)=\begin{pmatrix}b+d\\a+c+b+d\end{pmatrix}=\sigma\alpha+\sigma\beta$$ （2 分）

$$\sigma\left(k\alpha\right)=\sigma\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kb\\ka+kb\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}b\\a+b\end{pmatrix}=k\sigma\alpha$$ （2 分）

所以变换 σ 为线性变换

$$\sigma\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\alpha_2-\alpha_1=\left(\alpha_1\alpha_2\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\qquad \sigma\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2=\left(\alpha_1\alpha_2\right)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$ （3 分）

则 σ 在基底α_1,α_2下的矩阵 A=$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$ （2 分）

六．解，二次型f的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，（2 分）

计算A的特征多项式：

$$\phi_A(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)。$$

因此A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$和$\lambda_3=4$。（3 分）

解方程组$(\lambda_1E-A)X=0$**，即**$\begin{cases}-x_2-x_3=0\\-x_2-x_3=0\end{cases}$**，得到该方程组的基础解系**

$X_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$和$X_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}^T$。（2 分）它们是$A$的对应与特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$的两个线性无关的特征向量。且$X_1$和$X_2$已经正交，无需再正交化。再单位化，得到：$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$和$\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}^T$。（2 分）

解方程组$(\lambda_3E-A)X=0$**，即**$\begin{cases}2x_1=0\\x_2-x_3=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}$**，得到此方程组的基础解系**

$X_3=\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}^T$。再单位化，得到：$\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}^T$。（2 分）

因此构造正交矩阵$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，对二次型$f$作正交变换$X=PY$，得到$f$的标准形

$f=2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$。（2 分）该二次型矩阵的特征值都是正数，因此该二次型正定。（1 分）

七．证明：依题意得 $A\alpha_i = 0, i = 1,2,\cdots,s,\ A\beta \neq 0$。

设有一组数 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$k_0\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \cdots + k_s(\beta + \alpha_s) = 0$ **（2 分）**

即 $(k_0 + k_1 + \cdots + k_s)\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ **(1)**

上式两端同左乘矩阵 A 得 $(k_0 + k_1 + \cdots + k_s)A\beta + k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0$

得到 $(k_0 + k_1 + \cdots + k_s)A\beta = 0$ **（2 分）**

由于 $A\beta \neq 0$**，故有** $k_0 + k_1 + \cdots + k_s = 0$ **(2)** **（1 分）**

代入(1)式可得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **基础解系知它们线性无关，故可得** $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ **（2 分）**

则由(2)式可得 $k_0 = 0$ **（1 分）**

因此 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_s$ **线性无关。** **（1 分）**

八、 解：法 1：因为 $|M| = (-1)^{1+2+\cdots n+(n+1)+(n+2)+\cdots 2n}|A||C| \neq 0$**，所以 M 逆矩阵存在。（1 分）**

设 $M^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$,则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_3 & Ax_4 \\ Cx_1 + Dx_3 & Cx_2 + Dx_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ **（2 分）**

则有 $Ax_3 = E, Ax_4 = 0, Cx_1 + Dx_3 = 0, Cx_2 + Dx_4 = E$ **（2 分）**

$x_3 = A^{-1}, x_4 = 0, x_2 = C^{-1}, x_1 = -C^{-1}DA^{-1}$ **（2 分）**

所以 $M^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ **（2 分）**

法 2：构造矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A & E & 0 \\ C & D & 0 & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E & A^{-1} & 0 \\ E & C^{-1}D & 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$
$\to \begin{pmatrix} 0 & E & A^{-1} & 0 \\ E & 0 & -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & 0 & -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \\ 0 & E & A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ **（7 分）**

所以 $M^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ **（2 分）**

九．解：

（1）设 A 的特征值 λ 所对应的特征向量为 X。则

$0X = (A^2 - A - 2E)X = A^2X - AX - 2X = A(\lambda X) - \lambda X - 2X = (\lambda^2 - \lambda - 2)X$，

因 $X\neq 0$，所以 $\lambda^2-\lambda-2=0$。因此 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$。(2 分)

（2）A 的关于 $\lambda=2$ 的特征子空间的维数为 $n-R(A-2E)$，故可从中取 $n-R(A-2E)$ 个向量构成线性无关的向量组 S_1，A 的关于 $\lambda=-1$ 的特征子空间的维数为 $n-R(A+E)$，故可从中取 $n-R(A+E)$ 个向量构成线性无关的向量组 S_2。将 S_1 和 S_2 合并得到的向量组 S 依然是线性无关的向量组，且每一个都是 A 的特征向量。S 含有向量的个数为 $2n-[R(A+E)+R(A-2E)]$，但

由 $(A-2E)(A+E)=0$ 得到，$R(A+E)+R(A-2E)\leq n$；另一方面，

$R(A+E)+R(A-2E)\geq R(A+E-A+2E)=R(3E)=n$。

因此 $R(A+E)+R(A-2E)=n$。所以 S 含有 n 个向量，即 A 有 n 线性无关的特征向量，因此 A 与对角形矩阵相似。（3 分）