数学分析 B 期中试题解答(2008.11.22)

一. 1. e

2. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi^2}{144}+\frac{1}{2})$，$(\frac{5\pi}{6},\frac{25\pi^2}{144}+\frac{1}{2})$ (2 分, 2 分)

3. $x=1$， 一 (2 分, 2 分)

4. $\frac{1}{2}, 3$ (2 分, 2 分)

5. $(e,2e)$， $e^{\frac{1}{2e}}$ (2 分, 2 分)

6. $5A$

7. $-\frac{1}{2}$， $\frac{1}{8}$ (2 分, 2 分)

二.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+t}$$ …………………………………..(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}=-\frac{1}{4}\sqrt{1-t}$$ ……………………………………(8 分)

三.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}$$ ……………………………………(1 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos-2x}{4x^3}$$ ……………………………………(4 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}$$ ……………………………………(6 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{12x}=-\frac{1}{3}$$ …………………………………..(8 分)

四. 当 $x>0$ $f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1}$ ……………………………….(.2 分)

当 $x<0$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}(e^{\frac{\pi}{2}x^2}-1)+\pi e^{\frac{\pi}{2}x^2}$ ……………………………….(4 分)

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{x}(e^{\frac{\pi}{2}x^2}-1)}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ $f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$ …………..(6 分)

$$df(x)=\begin{cases}(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1})dx & x>0\\ 0 & x=0\\ [-\frac{1}{x^2}(e^{\frac{\pi}{2}x^2}-1)+\pi e^{\frac{\pi}{2}x^2}]dx & x<0\end{cases}$$ …………………………..(8 分)

五. 令 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\sqrt{x^2-1}$ …………………………….(1 分)

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ …………………….(3 分)

$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$ ………………………………..(5 分)

$f'(x)$ 单调增，又 $f'(1)=0)$，故当 $x>1$时， $f'(x)>0$ ……………………..(7 分)

$f(x)$ 单调增，又 $f(1)=0)$，故当 $x>1$时， $f(x)>0$

即 $x\ln(x+\sqrt{x^2-1})>\sqrt{x^2-1}$ …………………………….(9 分)

六. 令 $f(x)=3x^5-5x^3+1$ ………………………..(1 分)

$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x+1)(x-1)$ ………………………..(2 分)

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，$x=1$，$x=-1$ ………………………...(4 分)

$f(x)$在$[-2,-1]$，$[-1,0]$，$[0,1]$，$[1,2]$单调，又

$f(-2)=-55<0$ $f(-1)=3>0$ $f(0)=1>0$

$f(1)=-1<0$ $f(2)=57>0$ ……………………..(7 分)

故 $f(x)=0$在$[-2,-1]$，$[0,1]$，$[1,2]$内个有一根，

因而方程$3x^5-5x^3+1=0$在区间$[-2,2]$上有三个不同实根. …………………..(9 分)

七. $p(v)=\frac{1}{100}(30+\frac{v}{2})L+18\frac{L}{v}$ …………………………(3 分)

$p'(v)=\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}L-18\frac{L}{v^2}$ …………………………(5 分)

令 $p'(v)=0$，得 $v=60$ …………………………(7 分)

由于 $p''(v)=\frac{36L}{v^3}>0$ 故当 $v=60$ 时，$p(v)$ 是极小值，也是最小值. ………………..(9 分)

八. 定义域为 $(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$ ……………………………(1 分)

$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$，故 $x=1$ 是垂直渐近线 ……………………………(2 分)

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-x^2}=-1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x+2}{1-x}+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x}{1-x}=1$

$y=-x+1$ 是斜渐近线 ……………………………..(4 分)

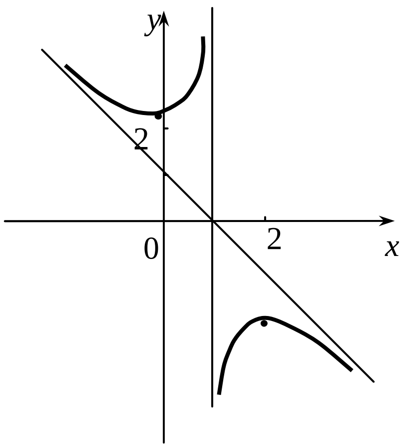
$y'=\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$ ……………………………(5 分)

令 $y'=0$，得 $x=0$，$x=2$ ..…………………………..(6 分)

$y''=\frac{-2}{(x-1)^3}$ …...………………………..(7 分)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$		$-$		$-$
y	↘	极小值 2	↗	间断	↗	极大值 -2	↘

…………(11 分)



………………………(13 分)

九. 令 $F(x)=(x-1)^3 f''(x)$ 则 $F(x)$ 可导, ……………………………(2 分)

由于 $f(0)=f(\frac{1}{2})=f(1)$

$\exists c_1 \in (0,\frac{1}{2})$，使 $f'(c_1)=0$ $\exists c_2 \in (\frac{1}{2},1)$，使 $f'(c_2)=0$ ………………………..(4 分)

故 $\exists c \in (c_1,c_2) \subset (0,1)$，使 $f''(c)=0$ ……………………………(6 分)

又 $F(1)=0$

故 $\exists \xi \in (c,1) \subset (0,1)$，使 $F'(\xi)=0$

即 $3(\xi-1)^2 f''(\xi)+(\xi-1)^3 f'''(\xi)=0$

$$f'''(\xi)=\frac{3f''(\xi)}{1-\xi}.$$ ………………………………..(8 分)