2012 级第一学期《微积分 A》期中试卷参考答案及评分标准

一、（每小题 4 分，共 20 分）

1. e^6;　　　　　　　　2. $2e^2$;

3. $2x+y-1=0$;　　　　　4. 10

5. $[\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}e^{\cos\frac{1}{x}}+\frac{f'(\arcsin\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}]dx.$

二、（8 分）设 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，　　　　……………1 分

因为 $f(x)$为偶函数，故只需证 $0\le x<1$时，有$f(x)\ge 0$即可.

$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-2x,\ f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-2$ ..4 分

当$0\le x<1$时，因为$\frac{4}{(1-x^2)^2}\ge 4$,而$|\cos x|\le 1$，

所以 $f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-2\ge 1>0,$　　　　……………6 分

所以 $f'(x)$ 单增，又 $f'(0)=0$

故当$0\le x<1$时，有 $f'(x)\ge f'(0)=0$，

所以　$f(x)$ 单增，有 $f(x)\ge f(0)=0;$

所以有：当$-1<\mathrm{x}<1$时,有：$f(x)\ge 0$

即　$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},\quad(-1<x<1).$　　　……………8 分

三、（8 分）解：$\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{t}{2},$　　　　……………4 分

$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1+t^2}{4t}.$　　　　……………8 分

四、（10 分）（1） $a=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2}=1$$ ……….5 分

（2） $f(x)-a=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1=\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$

又 $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$ …………….6 分

$$x+x^2-\sin x-x\sin x=\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^2\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}x^2+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$$ …………….9 分

所以当 $x\to 0$ 时， $f(x)-a$ 与 x 是同阶无穷小。

故 $k=1.$ …………….10 分

五、 (8 分) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)\ln(1+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2-2\cos x}(e^{x^2-2+2\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^4}$ …………….2 分

$=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$ …………….4 分

$=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\frac{1}{4}.$ …………….8 分

六、(10 分)解：设漏斗的半径为 r, 高为h

由题意有：$2\pi r = R\theta,\quad h=\sqrt{R^2-r^2}$，$\Rightarrow r=\dfrac{R\theta}{2\pi}.$ …………….2 分

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{R^3\theta^2}{24\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$ …………….4 分

$V'=\dfrac{R^3(8\pi^2\theta-3\theta^3)}{24\pi\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}$ …………….6 分

令 $\mathrm{V}'=0,\quad \Rightarrow \theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ …………….7 分

又当$\theta<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$时，$\mathrm{V}'>0$,当$\theta>\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$时，$\mathrm{V}'<0.$ …………….8 分

$\therefore$当$\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$时，V取极大值，又驻点唯一，

$\therefore$当$\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$时，V取最大值，即此时漏斗的容积最大……..10 分

七、（8 分）$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\sin x)=0,$ …………….1 分

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\dfrac{2x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\sin x)=0,$ …………….2 分

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0=f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续。...3 分

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x})=1=f'_+(0),$ …………….4 分

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}(\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x})=2-1=1=f'_-(0),$ ….5 分

$f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。….6 分

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1+e^{\frac{1}{x}})+\frac{2}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}-\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{2(1+e^{\frac{1}{x}})+\frac{2}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}+\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$ …………..8 分

八、(8 分)（1）有界性：由递推关系式知：$x_n>0$，又

$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}<2$，所以数列$\{x_n\}$有界。…….3 分

（2）单调性：$x_1=1,\ \ x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}=\dfrac{3}{2}$, 且 $x_2-x_1=\dfrac{1}{2}>0,$

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1x_n)(1+x_{n-1})}$, 所以 $x_{n+1}-x_n$与x_2-x_1同号。

所以 $x_{n+1}-x_n>0$，所以数列$\{x_n\}$单增。

由单调有界准则知，数列$\{x_n\}$有极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. ……..6 分

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 在 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限，得

$a=1+\dfrac{a}{1+a},\Rightarrow a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.　……….8 分

九、 (12)(1) 定义域 $D:(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$y'=\dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$

令$y'=0$, 得驻点$x_1=-3, x_2=0$.列表如下

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty$
$f'(x)$	+	0	--	不存在	+	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓		↑	不是极值	↑

单增区间为：$(-\infty,-3]\cup(-1,+\infty)$；单减区间为：$[-3,-1)$

极大值为 $f(-3)=-\dfrac{27}{4}$.　　　　　　　　　　……………………...3 分

（2）$y''=\dfrac{6x}{(x+1)^4}$

令$y''=0$，得 $x=0$，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty$
$f''(x)$	--	不存在	--	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cap$	拐点	$\cup$

曲线的凸区间为：$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$；凹区间为：$[0,+\infty)$

拐点坐标：$(0,0)$　　　　　　　　　　……………………….6 分

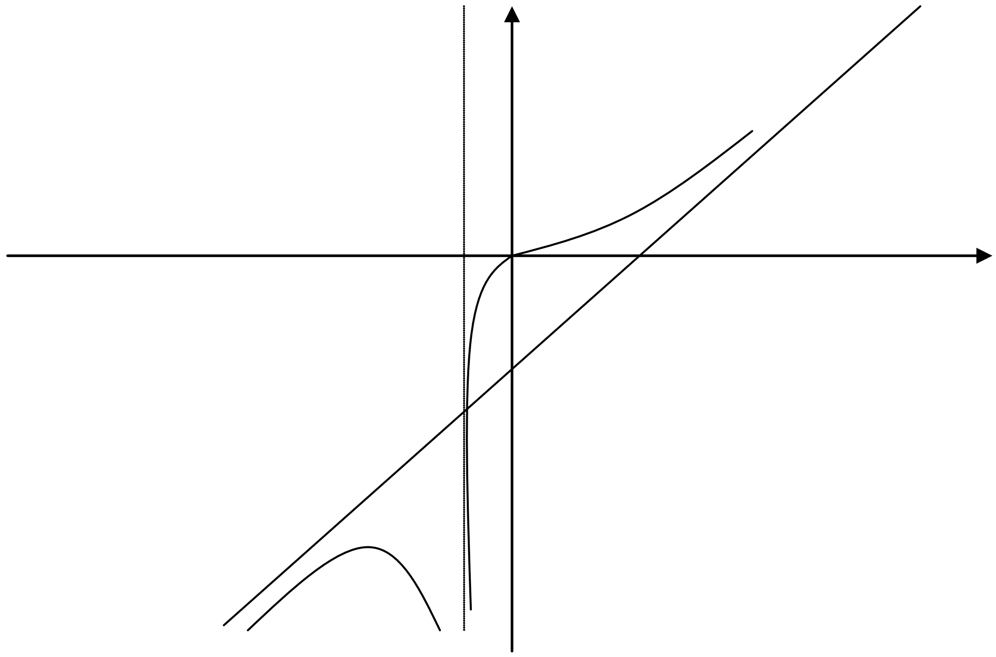
(3)曲线无水平渐近线。由于 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{(1+x)^2}=-\infty$，

所以 $x=-1$ 为曲线的垂直渐近线。又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(1+x)^2}=1=k,\ b=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^3}{(1+x)^2}-x]=-2,$$

所以 $y=x-2$ 为曲线的斜渐近线。　　　　…………………….9 分

（4）函数的图形如下：



……………..….12 分

十、(8 分)(1)设 $F(x)=f(x)-x$，由已知条件知：　　　　　　…….2 分

$$F(x)\in C[\frac{1}{2},1],\ 且F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0$$

所以由零点定理知：$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)\subset(0,1),$ 使得 $F(\eta)=0,\quad$ 即 $f(\eta)=\eta;$ ..4 分

(2)设 $G(x)=e^{x}[f(x)-x]$　　　　　　………. ….6 分

$G(x)\in C[0,\eta],\ G(x)\in D(0,\eta)$，$G(0)=0, G(\eta)=e^{\eta}[f(\eta)-\eta]=0$

$G(x)$在$[0,\eta]$上满足Rolle中值定理的条件，

所以至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ 使得 $G'(\xi)=0,$ 又

$G'(x)=e^{x}[f(x)-x]+e^{x}[f'(x)-1]$

$G'(\xi)=e^{\xi}[f(\xi)-\xi]+e^{\xi}[f'(\xi)-1]=0$

因为 $e^{\xi}\neq0$，所以有

$f(\xi)-\xi+f'(\xi)-1=0$。证毕　　　　　　…………………….8 分