

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1、极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 + \sin t) dt}{\cos x^2 - 1} =$  \_\_\_\_\_。

2、设  $y = f(x)$  是由方程  $y - x = e^{x(2-y)}$  确定, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(\frac{1}{n}) - 1] =$  \_\_\_\_\_。

3、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{x^3 \sin^2 x}{1 + \cos x} + |x|) dx =$  \_\_\_\_\_。

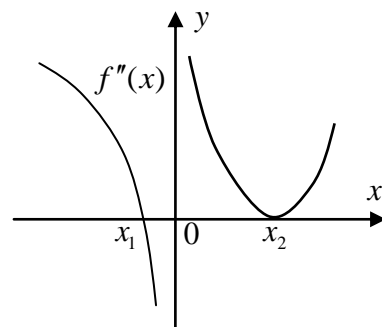
4、曲线  $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1-x^2)$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_。

5、设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 其二阶导数  $f''(x)$

的图形如右图所示, 则曲线  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上

拐点坐标为:

\_\_\_\_\_。



二、(8分) 设  $f(x) = 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 。 (1) 当  $x > 0$  时, 求  $f'(x)$ ;

(2) 证明当  $x \geq 1$  时,  $f(x)$  恒等于常数, 并确定此常数值。

三. (8分) 已知  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $F(x) = \int_{-1}^x f(x)dx$  在  $[-1, 1]$  上的表达式, 并讨论

$F(x)$  在  $[-1, 1]$  上的连续性。

四. (8 分) (1) 求不定积分  $\int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx$ ; (2) 求广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

五、(8 分) 设曲线方程为  $\rho=1+\cos\theta$ 。(1) 求曲线在  $\theta=\frac{\pi}{2}$  处的切线方程;  
(2) 求曲线在  $\theta=\frac{\pi}{2}$  处的曲率。

六. (8 分) 求微分方程  $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$  满足条件  $y(1) = e^3$  的解。

七. (8分) 求曲线  $y = 4 \arctan x$  和直线  $y = x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$  交点的个数。

八. (8 分) 已知一个高温物体放到一个温度较低的恒温环境中, 物体的冷却速度与该物体与环境的温度之差成正比。现将室温  $24^{\circ}\text{C}$  下的一瓶苏打汽水放入冰箱, 冰箱内的温度为  $4^{\circ}\text{C}$ , 30 分钟后汽水冷却到  $14^{\circ}\text{C}$ 。问还需要经过多长时间汽水能冷却到  $9^{\circ}\text{C}$ ?

九. (8 分) 设函数  $f(x)$  连续, 且满足方程  $\int_0^x (t-x)f(t)dt = f(x) + \cos 2x$ ,

求  $f(x)$  的表达式。

十. (8分) 设  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 与星形线  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ) 所围成的平面区域, (1) 求  $D$  的面积; (2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积。

十一. (8分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) 上有二阶连续导数, 且  $f(0) = 0$ ,

(1) 写出  $f(x)$  的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明至少存在一点  $\eta \in [-a, a]$ , 使  $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$ 。