课程编号：HO172101　　北京理工大学 2016-2017 学年第一学期

2016 级微积分 A（上）期末试题(A 卷)

班级________________　　学号__________________　　姓名___________________

(试卷共 6 页,十一个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一、填空（每小题4分，共20分）

1． 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=9$ ，则 $a=$____________.

2．已知 $a>0, y=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$ 则 $\frac{dy}{dx}=$________________________.

3. $\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=$____________________________.

4 . $\int x\sin x dx=$_______________________.

5. 设 $y'+2xy=xe^{-x^2}$，则 $y=$__________________________.

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3\cos x}$.

2. 设 $e^y=\sin(x+y)$，求 dy.

3. 计算 $\int_0^2 \left|x^2 - x\right| dx$.

4. 求 $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$ 通解.

三、（6分）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x^2 - x}{x+1} - ax - b) = 0$，试确定常数 a 和 b 的值.

四、（6分）（1）证明：当 $x>0$ 时，$x > \sin x$；（2）设 $0 < x_1 < \pi$，$x_{n+1} = \sin x_n \, (n = 1.2.\cdots)$
证明：$\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

五、（6分）求函数$y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$的单调区间和极值，凹凸区间和拐点，渐近线。

六、（6分）求心形线$\rho=2(1+\cos\theta)$的全长及所围成图形的面积。

七、（8分）设星形线方程为：$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$

（1）求星形线所围图形绕x轴旋转一周所成的旋转体的体积；

（2）求当$t=\dfrac{\pi}{4}$时，对应星形线上的点的曲率.

八、（8分）设一容器是由曲线$y=x^3(0\le x\le 1)$绕y轴旋转一周所成，y轴垂直地面.

（1）以每秒3的速度向容器中注水，求容器中水高为$h(0<h<1)$时，水面上升速度

（2）容器中注满水后，全部把水抽出至少需要做多少功。

九、（8分）设 $f(x)$ 在 R 上连续，二阶可导，且对任意 x 有：$f(x)+\int_0^x tf(x-t)dt+\sin x=0$

（1）求证：对任意 x 有：$\int_0^x tf(x-t)dt = x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

（2）试求出 $f(x)$ 的表达式。

十、（6分）已知 $f(x)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=5$。求 $f''(1)$。

十一、（6分）已知 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$ 成立。

草纸

第 8 页 （共 6 页）