线性代数第十一讲

吴民

南开大学　信息学院

November 20, 2013

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V是实线性空间。

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V是实线性空间。如果对V内任意一对向量α, β，按某一法则在$\mathbf{R}$中有唯一确定的实数，记为$\langle \alpha, \beta \rangle$与之对应，且满足：

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V是实线性空间。如果对V内任意一对向量α,β，按某一法则在$\mathbf{R}$中有唯一确定的实数，记为$\langle\alpha,\beta\rangle$与之对应，且满足：

- $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$对所有$\alpha,\beta\in V$都成立，

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V是实线性空间。如果对V内任意一对向量α, β，按某一法则在$\mathbf{R}$中有唯一确定的实数，记为$\langle \alpha, \beta \rangle$与之对应，且满足：

- $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$对所有$\alpha, \beta \in V$都成立，
- $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$，

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V是实线性空间。如果对V内任意一对向量α, β，按某一法则在$\mathbf{R}$中有唯一确定的实数，记为$\langle \alpha, \beta \rangle$与之对应，且满足：

- $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$对所有$\alpha, \beta \in V$都成立，
- $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$，
- $\langle k\alpha, \beta \rangle = k\langle \alpha, \beta \rangle$，

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V是实线性空间。如果对V内任意一对向量α, β，按某一法则在$\mathbf{R}$中有唯一确定的实数，记为$\langle \alpha, \beta \rangle$与之对应，且满足：

- $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$对所有$\alpha, \beta \in V$都成立，
- $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$，
- $\langle k\alpha, \beta \rangle = k \langle \alpha, \beta \rangle$，
- $\alpha \neq 0$时，$\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$。

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V是实线性空间。如果对V内任意一对向量α,β，按某一法则在$\mathbf{R}$中有唯一确定的实数，记为$\langle\alpha,\beta\rangle$与之对应，且满足：

- $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$对所有$\alpha,\beta\in V$都成立，
- $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$，
- $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$，
- $\alpha\neq 0$时，$\langle\alpha,\alpha\rangle>0$。

则称$\langle\alpha,\beta\rangle$是向量$\alpha$和$\beta$的**标准内积**。简称内积。

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$中的内积定义：

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$中的内积定义：

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$中的内积定义：

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$中的内积定义：

$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$

$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

欧几里德空间中内积的性质：

- 对任意的$\alpha \in V$，$\langle 0, \alpha \rangle = 0$。

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$中的内积定义：

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

欧几里德空间中内积的性质：

- 对任意的$\alpha \in V$，$\langle 0, \alpha \rangle = 0$。
- 如果$\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$，则$\alpha = 0$。

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$中的内积定义：

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

欧几里德空间中内积的性质：

- 对任意的$\alpha \in V$，$\langle 0, \alpha \rangle = 0$。
- 如果$\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$，则$\alpha = 0$。
- $\left\langle \sum_{i=1}^{l} a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{t} b_j \beta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{t} a_i b_j \langle \alpha_i, \beta_i \rangle$

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \beta_t \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \alpha_l, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_l, \beta_t \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_t \end{pmatrix}$$

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \beta_t \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \alpha_l, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_l, \beta_t \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_t \end{pmatrix}$$

此式使用了1阶矩阵与数相等的概念。

欧几里德空间

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \beta_t \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \alpha_l, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_l, \beta_t \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_t \end{pmatrix}$$

此式使用了1阶矩阵与数相等的概念。

欧几里德空间中基本定理：Cauchy-Schwarz定理。

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α, β，恒有

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2\leqslant\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α, β，恒有

$\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α, β，恒有

$\langle\alpha, \beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

证明：若α, β线性相关，则$\alpha = 0$或者$\beta = k\alpha$，

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α, β，恒有

$\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

证明：若α, β线性相关，则$\alpha = 0$或者$\beta = k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α, β，恒有

$\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

证明：若α, β线性相关，则$\alpha = 0$或者$\beta = k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若α, β线性无关，则对任意的实数k，都有$k\alpha + \beta \neq 0$，从而

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2\leqslant\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

证明：若α,β线性相关，则$\alpha=0$或者$\beta=k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若α,β线性无关，则对任意的实数k，都有$k\alpha+\beta\neq 0$，从而

$\langle k\alpha+\beta,k\alpha+\beta\rangle>0$对所有$k$都成立，

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α, β，恒有

$\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

证明：若α, β线性相关，则$\alpha = 0$或者$\beta = k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若α, β线性无关，则对任意的实数k，都有$k\alpha + \beta \neq 0$，从而

$\langle k\alpha + \beta, k\alpha + \beta \rangle > 0$对所有$k$都成立，

即$k^2 \langle \alpha, \alpha \rangle + 2k \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle > 0$，

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2\leqslant\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

证明：若α,β线性相关，则$\alpha=0$或者$\beta=k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若α,β线性无关，则对任意的实数k，都有$k\alpha+\beta\neq0$，从而

$\langle k\alpha+\beta,k\alpha+\beta\rangle>0$对所有$k$都成立，

即$k^2\langle\alpha,\alpha\rangle+2k\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle>0$，

因$\langle\alpha,\alpha\rangle>0$。根据二次函数的性质知成立：$\langle\alpha,\beta\rangle^2<\langle\alpha,\alpha\rangle$。

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量α, β，恒有

$\langle\alpha, \beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是α和β线性相关。

证明：若α, β线性相关，则$\alpha = 0$或者$\beta = k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若α, β线性无关，则对任意的实数k，都有$k\alpha + \beta \neq 0$，从而

$\langle k\alpha + \beta, k\alpha + \beta\rangle > 0$对所有$k$都成立，

即$k^2\langle\alpha, \alpha\rangle + 2k\langle\alpha, \beta\rangle + \langle\beta, \beta\rangle > 0$，

因$\langle\alpha, \alpha\rangle > 0$。根据二次函数的性质知成立：$\langle\alpha, \beta\rangle^2 < \langle\alpha, \alpha\rangle$。

即待证不等式成立。

欧几里德空间

前面已经推导出若α, β线性相关，则等号成立。后面推导出若α, β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是α, β线性相关。

前面已经推导出若α, β线性相关，则等号成立。后面推导出若α, β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是α, β线性相关。

定义：欧氏空间V中，向量α的**模**$|\alpha|$定义为：

欧几里德空间

前面已经推导出若α, β线性相关，则等号成立。后面推导出若α, β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是α, β线性相关。

定义：欧氏空间V中，向量α的**模**$|\alpha|$定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}。$$

前面已经推导出若α, β线性相关，则等号成立。后面推导出若α, β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是α, β线性相关。

定义：欧氏空间V中，向量α的**模**$|\alpha|$定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}。$$

模为1的向量称为**单位向量**。

欧几里德空间

前面已经推导出若α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是α,β线性相关。

定义：欧氏空间V中，向量α的**模**$|\alpha|$定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}。$$

模为1的向量称为**单位向量**。

$|a\alpha| = |a| \cdot |\alpha|$。

前面已经推导出若α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是α,β线性相关。

定义：欧氏空间V中，向量α的**模**$|\alpha|$定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}。$$

模为1的向量称为**单位向量**。

$|a\alpha| = |a|\cdot|\alpha|$。

当$|\alpha|\neq 0$时，$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$是单位向量。

前面已经推导出若α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是α,β线性相关。

定义：欧氏空间V中，向量α的**模**$|\alpha|$定义为：

$$|\alpha|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}。$$

模为1的向量称为**单位向量**。

$|a\alpha|=|a|\cdot|\alpha|$。

当$|\alpha|\neq 0$时，$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$是单位向量。

练习：证明$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$。

欧几里德空间

由Cauchy-Schwarz定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

欧几里德空间

由Cauchy-Schwarz定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β是欧几里德空间中的任意两个非零向量，

角$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$称为向量$\alpha$与$\beta$之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

欧几里德空间

由Cauchy-Schwarz定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β是欧几里德空间中的任意两个非零向量，

角$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$称为向量$\alpha$与$\beta$之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非0向量夹角为$\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

欧几里德空间

由Cauchy-Schwarz定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β是欧几里德空间中的任意两个非零向量，

角$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$称为向量$\alpha$与$\beta$之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非0向量夹角为$\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

欧几里德空间

由Cauchy-Schwarz定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β是欧几里德空间中的任意两个非零向量，

角$\theta = \arccos\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$称为向量$\alpha$与$\beta$之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非0向量夹角为$\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

因此，α, β正交的充要条件是$\langle\alpha, \beta\rangle = 0$。

欧几里德空间

由Cauchy-Schwarz定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β是欧几里德空间中的任意两个非零向量，

角$\theta = \arccos\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$称为向量$\alpha$与$\beta$之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非0向量夹角为$\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

因此，α, β正交的充要条件是$\langle\alpha, \beta\rangle = 0$。

欧氏空间V中一组两两正交的非零向量，称为V的一个正交组。

欧几里德空间

由Cauchy-Schwarz定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β是欧几里德空间中的任意两个非零向量，

角$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$称为向量$\alpha$与$\beta$之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非0向量夹角为$\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

因此，α, β正交的充要条件是$\langle\alpha, \beta\rangle = 0$。

欧氏空间V中一组两两正交的非零向量，称为V的一个正交组。

若正交组中每个向量都是单位向量，则称为标准正交组。

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$是欧氏空间中的一个正交组。

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是欧氏空间中的一个正交组。

若数$k_1, k_2, \ldots, k_n$满足$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是欧氏空间中的一个正交组。

若数$k_1, k_2, \ldots, k_n$满足$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

则$0 = \langle 0, \alpha_i \rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i \rangle = k_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$,

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是欧氏空间中的一个正交组。

若数$k_1, k_2, \ldots, k_n$满足$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

则$0 = \langle 0, \alpha_i \rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i \rangle = k_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$,

但$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \neq 0$，所以$k_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$。

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是欧氏空间中的一个正交组。

若数$k_1, k_2, \ldots, k_n$满足$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

则$0 = \langle 0, \alpha_i \rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i \rangle = k_i\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$,

但$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \neq 0$，所以$k_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$。

所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关。

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是欧氏空间中的一个正交组。

若数$k_1, k_2, \ldots, k_n$满足$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

则$0 = \langle 0, \alpha_i \rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i \rangle = k_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$,

但$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \neq 0$，所以$k_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$。

所以$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关。

定理：欧氏空间V。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$V$中一组线性无关的向量，

则存在V的一个正交组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$，其中$\beta_k$是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$的

线性组合。

欧几里德空间

证明：取$\beta_1 = \alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1 \neq 0$。

证明：取$\beta_1 = \alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1 \neq 0$。

取$\beta_2 = \alpha_2 + k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1, \alpha_2$的线性组合。

欧几里德空间

证明：取$\beta_1=\alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1\neq 0$。

取$\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合。

无论k_1取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的k_1使$\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

欧几里德空间

证明：取$\beta_1 = \alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1 \neq 0$。

取$\beta_2 = \alpha_2 + k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1, \alpha_2$的线性组合。

无论k_1取为何值，$\beta_2 \neq 0$。取恰当的k_1使$\langle \beta_2, \beta_1 \rangle = 0$。

k_1要满足$\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle + k_1 \langle \beta_1, \beta_1 \rangle = 0$。

证明：取$\beta_1=\alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1\neq 0$。

取$\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合。

无论k_1取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的k_1使$\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1要满足$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出k_1，于是$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

证明：取$\beta_1 = \alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1 \neq 0$。

取$\beta_2 = \alpha_2 + k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1, \alpha_2$的线性组合。

无论k_1取为何值，$\beta_2 \neq 0$。取恰当的k_1使$\langle \beta_2, \beta_1 \rangle = 0$。

k_1要满足$\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle + k_1 \langle \beta_1, \beta_1 \rangle = 0$。

求出k_1，于是$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1$。

β_1, β_2满足定理的要求。

证明：取$\beta_1=\alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1\neq 0$。

取$\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合。

无论k_1取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的k_1使$\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1要满足$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出k_1，于是$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

β_1,β_2满足定理的要求。

同样方法求β_3，即令$\beta_3=\alpha_3+t_1\beta_1+t_2\beta_2$，

证明：取$\beta_1=\alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1\neq 0$。

取$\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合。

无论k_1取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的k_1使$\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1要满足$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出k_1，于是$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

β_1,β_2满足定理的要求。

同样方法求β_3，即令$\beta_3=\alpha_3+t_1\beta_1+t_2\beta_2$，

β_3是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合，且因$\alpha_3$的系数为1，所以$\beta_3\neq 0$。

证明：取$\beta_1=\alpha_1$。显然β_1是α_1的线性组合且$\beta_1\neq 0$。

取$\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，其中$k_1$为待定系数。$\beta_2$是$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合。

无论k_1取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的k_1使$\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1要满足$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出k_1，于是$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

β_1,β_2满足定理的要求。

同样方法求β_3，即令$\beta_3=\alpha_3+t_1\beta_1+t_2\beta_2$，

β_3是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合，且因$\alpha_3$的系数为1，所以$\beta_3\neq 0$。

求适当的t_1和t_2，使得$\langle\beta_3,\beta_1\rangle=0$且$\langle\beta_3,\beta_2\rangle=0$。

与前面类似便可求得。如此求得的$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足定理中的要求。

与前面类似便可求得。如此求得的$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

与前面类似便可求得。如此求得的$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

与前面类似便可求得。如此求得的$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

与前面类似便可求得。如此求得的$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

定义：如果n维欧氏空间的某个基又是正交组，那么就称该基是**正交基**。

与前面类似便可求得。如此求得的$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

定义：如果n维欧氏空间的某个基又是正交组，那么就称该基是**正交基**。

定义：如果正交基又是个标准正交组，就称为**标准正交基**。

与前面类似便可求得。如此求得的$\beta_1, \beta_2, \beta_3$满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

定义：如果n维欧氏空间的某个基又是正交组，那么就称该基是**正交基**。

定义：如果正交基又是个标准正交组，就称为**标准正交基**。

定理：任何n维欧氏空间一定有正交基，从而也必有标准正交基。

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

则$\langle \alpha, \epsilon_i \rangle = \langle x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n, \epsilon_i \rangle$

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

则$\langle \alpha, \epsilon_i \rangle = \langle x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n, \epsilon_i \rangle = x_i \langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle$

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

则$\langle \alpha, \epsilon_i \rangle = \langle x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n, \epsilon_i \rangle = x_i \langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle = x_i$.

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

则$\langle \alpha, \epsilon_i \rangle = \langle x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n, \epsilon_i \rangle = x_i \langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle = x_i$.

也就是在标准正交基下求向量的坐标只需要求n次内积。

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

则$\langle \alpha, \epsilon_i \rangle = \langle x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n, \epsilon_i \rangle = x_i \langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle = x_i$.

也就是在标准正交基下求向量的坐标只需要求n次内积。

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是欧氏空间$V$的一个标准正交基。$\alpha, \beta$在此基下的坐标为列向量$X$和$Y$。

欧几里德空间

n维欧几里德空间V，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

V中的任一向量α，α在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$下的坐标?

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

则$\langle \alpha, \epsilon_i \rangle = \langle x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n, \epsilon_i \rangle = x_i\langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle = x_i$.

也就是在标准正交基下求向量的坐标只需要求n次内积。

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是欧氏空间$V$的一个标准正交基。$\alpha, \beta$在此基下的坐标为列向量$X$和$Y$。

则$\langle \alpha, \beta \rangle = X^{\mathrm{T}}Y$。

正交变换

定义：欧氏空间V。T是V上的线性变换。如果对于任意$\alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称T为**正交变换**。

正交变换

定义：欧氏空间V。T是V上的线性变换。如果对于任意$\alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称T为**正交变换**。

定理：欧氏空间V上的线性变换T是正交变换的充要条件是对任意的$\alpha, \beta \in V$，恒有$\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$。

正交变换

定义：欧氏空间V。T是V上的线性变换。如果对于任意$\alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称T为**正交变换**。

定理：欧氏空间V上的线性变换T是正交变换的充要条件是对任意的$\alpha, \beta \in V$，恒有$\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$。

证明：充分性。对任意的α，取$\beta = \alpha$，由已知，

正交变换

定义：欧氏空间V。T是V上的线性变换。如果对于任意$\alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称T为**正交变换**。

定理：欧氏空间V上的线性变换T是正交变换的充要条件是对任意的$\alpha, \beta \in V$，恒有$\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$。

证明：充分性。对任意的α，取$\beta = \alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

正交变换

定义：欧氏空间V。T是V上的线性变换。如果对于任意$\alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称T为**正交变换**。

定理：欧氏空间V上的线性变换T是正交变换的充要条件是对任意的$\alpha, \beta \in V$，恒有$\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$。

证明：充分性。对任意的α，取$\beta = \alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle \alpha, \alpha\rangle.$$

所以$|T\alpha| = |\alpha|$。所以T是V上的正交变换。

正交变换

定义：欧氏空间V。T是V上的线性变换。如果对于任意$\alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称T为**正交变换**。

定理：欧氏空间V上的线性变换T是正交变换的充要条件是对任意的$\alpha, \beta \in V$，恒有$\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$。

证明：充分性。对任意的α，取$\beta = \alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle \alpha, \alpha\rangle.$$

所以$|T\alpha| = |\alpha|$。所以T是V上的正交变换。

必要性。如果T是线性变换，则对任意的$\alpha, \beta \in V$，都有

正交变换

定义：欧氏空间V。T是V上的线性变换。如果对于任意$\alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称T为**正交变换**。

定理：欧氏空间V上的线性变换T是正交变换的充要条件是对任意的$\alpha, \beta \in V$，恒有$\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$。

证明：充分性。对任意的α，取$\beta = \alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

所以$|T\alpha| = |\alpha|$。所以T是V上的正交变换。

必要性。如果T是线性变换，则对任意的$\alpha, \beta \in V$，都有

$|T\alpha| = |\alpha|$，$|T\beta| = |\beta|$，$|T(\alpha + \beta)| = |\alpha + \beta|$。

正交变换

$$0 = |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha + T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2$$

正交变换

$$0 = |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2$$

$$= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle$$

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha + T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha + T\beta, T\alpha + T\beta\rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha\rangle + 2\langle T\alpha, T\beta\rangle + \langle T\beta, T\beta\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle - \langle \beta, \beta\rangle
\end{aligned}
$$

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha + T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha + T\beta, T\alpha + T\beta \rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha \rangle + 2\langle T\alpha, T\beta \rangle + \langle T\beta, T\beta \rangle - \langle \alpha, \alpha \rangle - 2\langle \alpha, \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle \\
&= 2\langle T\alpha, T\beta \rangle - 2\langle \alpha, \beta \rangle
\end{aligned}
$$

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha\rangle + 2\langle T\alpha, T\beta\rangle + \langle T\beta, T\beta\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle - \langle \beta, \beta\rangle \\
&= 2\langle T\alpha, T\beta\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle
\end{aligned}
$$

即$\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$。

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha\rangle + 2\langle T\alpha, T\beta\rangle + \langle T\beta, T\beta\rangle - \langle\alpha,\alpha\rangle - 2\langle\alpha,\beta\rangle - \langle\beta,\beta\rangle \\
&= 2\langle T\alpha, T\beta\rangle - 2\langle\alpha,\beta\rangle
\end{aligned}
$$

即$\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$。

推论：正交变换保持向量的夹角不变。

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\epsilon_1, T\epsilon_2, \ldots, T\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\epsilon_1, T\epsilon_2, \ldots, T\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\epsilon_1, T\epsilon_2, \ldots, T\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j \rangle = \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\ldots,T\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\epsilon_i,T\epsilon_j\rangle=\langle\epsilon_i,\epsilon_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

所以$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\ldots,T\epsilon_n$是标准正交组，

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\dots,T\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \langle \epsilon_i, \epsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

所以$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\dots,T\epsilon_n$是标准正交组，

所以$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\dots,T\epsilon_n$构成$V$的一个标准正交基。

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\dots,T\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\epsilon_i,T\epsilon_j\rangle=\langle\epsilon_i,\epsilon_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

所以$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\dots,T\epsilon_n$是标准正交组，

所以$T\epsilon_1,T\epsilon_2,\dots,T\epsilon_n$构成$V$的一个标准正交基。

充分性。对V内任意向量α，α必可写成基的向量线性组合：

正交变换

$$\alpha = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n,$$

正交变换

$$\alpha = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n,$$

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

正交变换

$$\alpha = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n,$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

$$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = x_1^2\langle T\epsilon_1, T\epsilon_1 \rangle + \cdots + x_n^2\langle T\epsilon_n, T\epsilon_n \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

$\alpha = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

$\langle\alpha, \alpha\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,

$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = x_1^2\langle T\epsilon_1, T\epsilon_1\rangle + \cdots + x_n^2\langle T\epsilon_n, T\epsilon_n\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$,

所以$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha, \alpha\rangle$。故$T$是正交变换。

正交变换

$\alpha = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

$\langle \alpha, \alpha \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,

$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = x_1^2\langle T\epsilon_1, T\epsilon_1 \rangle + \cdots + x_n^2\langle T\epsilon_n, T\epsilon_n \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$,

所以$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$。故$T$是正交变换。

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵是正交矩阵。

正交变换

$\alpha = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

$\langle\alpha, \alpha\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,

$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = x_1^2\langle T\epsilon_1, T\epsilon_1\rangle + \cdots + x_n^2\langle T\epsilon_n, T\epsilon_n\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$,

所以$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha, \alpha\rangle$。故$T$是正交变换。

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵是正交矩阵。

证明：设T在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵是$H = (h_{ij})_{n\times n}$，即

正交变换

$\alpha = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

$\langle\alpha,\alpha\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$，

$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = x_1^2\langle T\epsilon_1, T\epsilon_1\rangle + \cdots + x_n^2\langle T\epsilon_n, T\epsilon_n\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$，

所以$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$。故$T$是正交变换。

定理：n维欧氏空间V。$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T$在基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$下的矩阵是正交矩阵。

证明：设T在基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$下的矩阵是$H = (h_{ij})_{n\times n}$，即

$$(T\epsilon_1,\ldots,T\epsilon_n) = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)H,$$

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

而$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\epsilon_1 + \cdots + h_{ni}\epsilon_j, h_{1j}\epsilon_1 + \cdots + h_{nj}\epsilon_n\rangle$,

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

而$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\epsilon_1 + \cdots + h_{ni}\epsilon_j, h_{1j}\epsilon_1 + \cdots + h_{nj}\epsilon_n\rangle$,

因为$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基,

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

而$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\epsilon_1 + \cdots + h_{ni}\epsilon_j, h_{1j}\epsilon_1 + \cdots + h_{nj}\epsilon_n\rangle$，

因为$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基，

所以上式等于$h_{1i}h_{1j} + \cdots + h_{ni}h_{nj}$。

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

而$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\epsilon_1 + \cdots + h_{ni}\epsilon_j, h_{1j}\epsilon_1 + \cdots + h_{nj}\epsilon_n\rangle$,

因为$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基,

所以上式等于$h_{1i}h_{1j} + \cdots + h_{ni}h_{nj}$。

于是T是正交变换等价于$h_{1i}h_{1j} + \cdots + h_{ni}h_{nj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

而$\langle T\epsilon_i, T\epsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\epsilon_1 + \cdots + h_{ni}\epsilon_j, h_{1j}\epsilon_1 + \cdots + h_{nj}\epsilon_n\rangle$,

因为$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个标准正交基,

所以上式等于$h_{1i}h_{1j} + \cdots + h_{ni}h_{nj}$。

于是T是正交变换等价于$h_{1i}h_{1j} + \cdots + h_{ni}h_{nj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

于是T是正交变换等价于H是正交矩阵。