2013-2014-第二学期　工科数学分析期中试题解答（**2014.4**）

一． 1.　$\dfrac{17}{\sqrt{14}}$

2.　$\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{21}}$

3.　$x+2y-\dfrac{1}{2}(x^2+4xy+4y^2)+o(\rho^2)$

4.　(1,7,2)

5.　$\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$

二．　(1)　$\vec{AB}=\{0,-2,2\}$　　$\vec{AC}=\{1,2,1\}$　……………….(2 分)

$\vec{AB}\times\vec{AC}=\{-6,2,2\}$　……………….(3 分)

$S=\dfrac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\sqrt{11}$　……………….(4 分)

(2)　$\vec{AD}=\{1,2,9\}$　……………….(5 分)

$V=\dfrac{1}{6}\left|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})\right|$　……………….(6 分)

$=\dfrac{1}{6}\left|\{-6,2,2\}\cdot\{1,2,9\}\right|=\dfrac{1}{6}\left|-6+4+18\right|=\dfrac{8}{3}$　……………….(8 分)

三.　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$　……………….(3 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+2x(2xf_{11}''+yf_{12}'')+y(2xf_{21}''+yf_{22}'')$　……………….(5 分)

$=2f_1'+4x^2f_{11}''+4xyf_{12}''+y^2f_{22}''$　……………….(6 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(-2yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+y(-2yf_{21}''+xf_{22}'')$　………….(8 分)

$=-4xyf_{11}''+(2x^2-2y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$　……………….(9 分)

四　$I=\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}zdz$　……………….(3 分)

$=\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$　……………….(5 分)

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1x^2(1-x)^2dx$　……………….(7 分)

$=\dfrac{1}{60}$　……………….(9 分)

五. 方程两端对 x 求导 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\sin x^2=0$ ……………(2 分)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z\sin x^2}{z+1}$$ ………………(3 分)

方程两端对 y 求导 $\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}-\sin y^2=0$ ………………(5 分)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z\sin y^2}{z+1}$$ ………………(6 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\sin x^2\cdot(z+1)-z\sin x^2\frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}$$ ………………(8 分)

$$=-\frac{\sin x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}=-\frac{z\sin x^2\cdot\sin y^2}{(z+1)^3}$$ ………………(9 分)

六. 由 $f''_{x^2}(x,y)=2y$ 得 $f'_x(x,y)=2xy+\varphi(y)$ ………………(3 分)

根据 $f'_x(0,y)=e^y$ 得 $\varphi(y)=e^y$

故 $f'_x(x,y)=2xy+e^y$ ………………(4 分)

积分得 $f(x,y)=x^2y+xe^y+\psi(y)$ ………………(7 分)

由 $f(1,y)=0$ 得 $\psi(y)=-y-e^y$

$$f(x,y)=x^2y+(x-1)e^y-y$$ ………………(8 分)

七. $V=\iiint\limits_V dV$ ………………(1 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\rho d\rho\int_0^{2-\rho\cos\theta}dz$$ ………………(4 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\rho(2-\rho\cos\theta)d\rho$$ ………………(6 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta-\frac{7}{3}\cos^4\theta)d\theta$$ ………………(8 分)

$$=\frac{5}{8}\pi$$ ………………(9 分)

八. (1) $$\begin{cases} 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}=z\dfrac{dz}{dx} \end{cases}$$ ……………….(2 分)

将点(1,1,2)代入解得 $\dfrac{dy}{dx}=-1 \quad \dfrac{dz}{dz}=0$ ……………….(3 分)

$\vec{s}=\{1,-1,0\}$ ……………….(4 分)

$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$ ……………….(5 分)

(2) 设 $\pi: x+5y-z+10+\lambda(2x+y+z+1)=0$

即 $(1+2\lambda)x+(5+\lambda)y+(-1+\lambda)z+10+\lambda=0$ …………….(7 分)

由题设，有 $\{1+2\lambda,5+\lambda,-1+\lambda\}\perp\vec{s}$ ……………….(8 分)

$1+2\lambda-(5+\lambda)=0 \qquad \lambda=4$ ……………….(9 分)

$\pi: 9x+9y+3z+14=0$ …………(10 分)

九. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}(r\cos\varphi+r)r^2\sin\varphi dr$ ……………….(4 分)

$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi(\cos^5\varphi+\cos^4\varphi)d\varphi$ ……………….(7分)

$=\dfrac{229}{80}\pi$ ……………….(9分)

十. 设$M(x,y,z)$，则有 $2x^2+y^2+z^2=3$ ……………….(1 分)

切平面为 $2x(X-x)+y(Y-y)+z(Z-z)=0$

即 $2xX+yY+zZ=3$ ……………….(3 分)

$V=\dfrac{1}{6}\dfrac{3}{2x}\dfrac{3}{y}\dfrac{3}{z}=\dfrac{9}{4xyz}$ ……………….(4 分)

设 $f(x,y,z)=xyz$ ……………….(5 分)

$F(x,y,z)=xyz+\lambda(2x^2+y^2+z^2-3)$ ……………….(6 分)

$$\begin{cases} F'_x=yz+4\lambda x=0 \\ F'_y=xz+2\lambda y=0 \\ F'_z=xy+2\lambda z=0 \\ 2x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$$ ……………….(8 分)

解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $y=1$ $z=1$ ……………….(10 分)

由问题实际意义,... 故 $M(\dfrac{1}{\sqrt{2}},1,1)$ 为所求点. ………....(11 分)

十一. $\text{grad}\, f(x,y,z)=\{ay^2+3cx^2z^2, 2axy+bz, by+2cx^3z\}$ ……….(1 分)

$\text{grad}\, f(1,2,-1)=\{4a+3c, 4a-b, 2b-2c\}$ ………….(2 分)

由题意 $\dfrac{4a+3c}{0}=\dfrac{4a-b}{1}=\dfrac{2b-2c}{0}$ ……………….(3 分)

$4a+3c=0$ $2b-2c=0$ ……………….(4 分)

且 $|\text{grad}\, f(1,2,-1)|=|4a-b|=4a-b=48$ ……………….(6 分)

解得 $a=9$ $b=-12$ $c=-12$ ……………….(8 分)