第七章习题

刘忠信

Email: lzhx@nankai.edu.cn

南开大学 自动化系

November 18, 2013

内容提要

2.证明：秩为r的对称矩阵可以表为r个对称矩阵之和。

证明：设n阶对称矩阵A的秩为r，则存在n阶可逆矩阵C使得

$$C^TAC = D = diag\{d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0\};$$
$$d_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

设

$$D_i = diag\{0, \ldots, 0, \underset{i}{d_i}, 0, \ldots, 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

则$C^TAC = \sum_{i=1}^r D_i$，从而

$$A = (C^{-1})^T \sum_{i=1}^r D_i \cdot (C^{-1}) = \sum_{i=1}^r (C^{-1})^T D_i (C^{-1}),$$

而$(C^{-1})^T D_i (C^{-1})$为对称矩阵。

证毕。

2.证明：秩为r的对称矩阵可以表为r个对称矩阵之和。

证明：设n阶对称矩阵A的秩为r，则存在n阶可逆矩阵C使得

$$C^T AC = D = diag\{d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0\};$$

$$d_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

设

$$D_i = diag\{0, \ldots, 0, d_i, 0, \ldots, 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

$$i$$

则$C^T AC = \sum_{i=1}^{r} D_i$，从而

$$A = (C^{-1})^T \sum_{i=1}^{r} D_i \cdot (C^{-1}) = \sum_{i=1}^{r} (C^{-1})^T D_i (C^{-1}),$$

而$(C^{-1})^T D_i (C^{-1})$为对称矩阵。

证毕。

2.证明：秩为r的对称矩阵可以表为r个对称矩阵之和。

证明：设n阶对称矩阵A的秩为r，则存在n阶可逆矩阵C使得

$$C^TAC = D = diag\{d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0\};$$

$$d_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

设

$$D_i = diag\{0, \ldots, 0, \underset{i}{d_i}, 0, \ldots, 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

则$C^TAC = \sum_{i=1}^r D_i$，从而

$$A = (C^{-1})^T \sum_{i=1}^{r} D_i \cdot (C^{-1}) = \sum_{i=1}^{r} (C^{-1})^T D_i (C^{-1}),$$

而$(C^{-1})^T D_i (C^{-1})$为对称矩阵。

证毕。

3.若实二次型$f=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right)$，其中$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0,\sum_{i=1}^{n}b_i^2\neq 0$。证明：$f$的秩为2，符号差为0；或者$f$的秩为1，反过来也成立。(证明较复杂)

证明：正向(1)若a_i与b_i成比例，不妨设 $a_i=kb_i$，$(i=1,2,\dots,n)$，$k\neq 0$。显然a_i中至少有一个不为0，不妨设$a_1\neq 0$，做坐标变换

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \\ y_2=x_2 \\ \quad\vdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

则$f=ky_1^2$，即秩为1。

3.若实二次型$f=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)$，其中$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$。证明：$f$的秩为2，符号差为0；或者$f$的秩为1，反过来也成立。(证明较复杂)

证明：正向(1)若a_i与b_i成比例，不妨设 $a_i = kb_i$，$(i=1,2,\ldots,n)$，$k \neq 0$。显然a_i中至少有一个不为0，不妨设$a_1 \neq 0$，做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则$f = ky_1^2$，即秩为1。

3.若实二次型$f=\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_ix_i\right)$，其中$\sum_{i=1}^n a_i^2\neq 0,\sum_{i=1}^n b_i^2\neq 0$。证明：$f$的秩为2，符号差为0；或者$f$的秩为1，反过来也成立。(证明较复杂)

证明：正向(1)若a_i与b_i成比例，不妨设 $a_i=kb_i$，$(i=1,2,\ldots,n)$，$k\neq 0$。显然a_i中至少有一个不为0，不妨设$a_1\neq 0$，做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则$f=ky_1^2$，即秩为1。

3.若实二次型$f=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right)$，其中$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0,\sum_{i=1}^{n}b_i^2\neq 0$。证明：$f$的秩为2，符号差为0；或者$f$的秩为1，反过来也成立。(证明较复杂)

证明：正向(1)若a_i与b_i成比例，不妨设 $a_i=kb_i$，$(i=1,2,\ldots,n)$，$k\neq 0$。显然a_i中至少有一个不为0，不妨设$a_1\neq 0$，做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则$f=ky_1^2$，即秩为1。

(2)若a_i与b_i不成比例，不妨设$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$。做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则$f = y_1y_2$，再做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_i = z_i, \quad i = 3, \ldots, n \end{cases}$$

则$f = z_1^2 - z_2^2$，此时秩为2，符号差为0。

(2)若a_i与b_i不成比例，不妨设$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$。做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则$f = y_1y_2$，再做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_i = z_i, \quad i = 3, \ldots, n \end{cases}$$

则$f = z_1^2 - z_2^2$，此时秩为2，符号差为0。

(2)若a_i与b_i不成比例，不妨设$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$。做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

则$f = y_1y_2$，再做坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_i = z_i, \quad i = 3, \ldots, n \end{cases}$$

则$f = z_1^2 - z_2^2$，此时秩为2，符号差为0。

反向(1)若f的秩为1，则存在坐标变换$X = CY$(即$Y = C^{-1}X$，从而得$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$)使得

$$f = ky_1^2 = k(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} ka_ix_i\right)$$

(2)若f秩为2，符号差为0，则存在坐标变换$X = CY$使得

$$f = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$

其中y_1, y_2为$x_1, x_2, \cdots, x_n$的一次齐次式，即f可表为两个一次齐次式的乘积。

反向(1)若f的秩为1，则存在坐标变换$X=CY$(即$Y=C^{-1}X$，从而得$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$)使得

$$f=ky_1^2=k(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}ka_ix_i\right)$$

(2)若f秩为2，符号差为0，则存在坐标变换$X=CY$使得

$$f=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$$

其中y_1,y_2为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一次齐次式，即f可表为两个一次齐次式的乘积。

4.设A为n阶矩阵，证明

(1)A是反对称矩阵$\Leftrightarrow$对任意的n维列矩阵X，有$X^TAX=0$.

(2) 若A是对称矩阵，且对任意的n维列矩阵X，有$X^TAX=0$，则$A=0$。

证明：(1)充分性 设$A=(a_{ij})_n$，

取$X=e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$，$i=1,2,\ldots,n.$，则

$$0=e_i^TAe_i=a_{ii},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

再取$X=e_i+e_j,(i\neq j,i,j=1,2,\ \ldots,n)$，则

$$0=(e_i+e_j)^TA(e_i+e_j)=e_i^TAe_i+e_i^TAe_j+e_j^TAe_i+e_j^TAe_j$$

$$=0+a_{ij}+a_{ji}+0$$

$\therefore a_{ij}=-a_{ji},\quad (i\neq j,i,j=1,2,\ \ldots,n)$

$\therefore A=-A.$

即A为反对称矩阵。

4.设A为n阶矩阵，证明
(1)A是反对称矩阵$\Leftrightarrow$对任意的n维列矩阵X，有$X^TAX=0$.
(2) 若A是对称矩阵，且对任意的n维列矩阵X，有$X^TAX=0$，则$A=0$。

证明：(1)充分性 设$A=(a_{ij})_n$，
取$X=e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$，$i=1,2,\ldots,n.$，则

$$0=e_i^TAe_i=a_{ii},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

再取$X=e_i+e_j,(i\neq j,i,j=1,2,\ \ldots,n)$，则

$$0=(e_i+e_j)^TA(e_i+e_j)=e_i^TAe_i+e_i^TAe_j+e_j^TAe_i+e_j^TAe_j$$
$$=0+a_{ij}+a_{ji}+0$$

$\therefore a_{ij}=-a_{ji},\quad (i\neq j,i,j=1,2,\ \ldots,n)$
$\therefore A=-A.$

即A为反对称矩阵。

4.设A为n阶矩阵，证明
(1)A是反对称矩阵$\Leftrightarrow$对任意的n维列矩阵X，有$X^TAX=0$.
(2) 若A是对称矩阵，且对任意的n维列矩阵X，有$X^TAX=0$，则$A=0$。

证明：(1)充分性 设$A=(a_{ij})_n$，
取$X=e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$，$i=1,2,\dots,n.$，则

$$0=e_i^TAe_i=a_{ii},\quad i=1,2,\dots,n.$$

再取$X=e_i+e_j,(i\neq j,i,j=1,2,\ \dots,n)$，则

$$0=(e_i+e_j)^TA(e_i+e_j)=e_i^TAe_i+e_i^TAe_j+e_j^TAe_i+e_j^TAe_j$$
$$=0+a_{ij}+a_{ji}+0$$

$\therefore a_{ij}=-a_{ji},\quad (i\neq j,i,j=1,2,\ \dots,n)$

$\therefore A=-A.$

即A为反对称矩阵。

必要性 由于A为反对称矩阵，
则$a_{ij}+a_{ji}=0, i\neq j, i, j=1,2,\ldots,n$，从而

$$
\begin{aligned}
X^TAX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij}+a_{ji})x_ix_j \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(2) 由(1)知A为反对称矩阵，又A为对称矩阵，故

$$A=0.$$

必要性 由于A为反对称矩阵，
则$a_{ij}+a_{ji}=0, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$，从而

$$
\begin{aligned}
X^TAX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij}+a_{ji})x_ix_j \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(2) 由(1)知A为反对称矩阵，又A为对称矩阵，故

$$A=0.$$

必要性 由于A为反对称矩阵，
则$a_{ij}+a_{ji}=0, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$，从而

$$
\begin{aligned}
X^TAX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(2) 由(1)知A为反对称矩阵，又A为对称矩阵，故

$$A=0.$$

8.证明:

(1) A正定$\Leftrightarrow$ A 与E合同。

证明:A正定$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n
$\Leftrightarrow$ A的规范形为$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$, $\Leftrightarrow$ A 与E合同。

(2)A正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P使得 $A=PP^T$。

证明:必要性 若A正定,由(1)知存在可逆矩阵C使得$E=C^TAC$,从而$A=(C^{-1})^T((C^{-1})^T)^T=PP^T$,其中$P=(C^{-1})^T$为可逆矩阵。

充分性 若存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$,令$C=(P^{-1})^T$,则$E=C^TAC$,因此A正定。

(3)A正定,则A^{-1}正定。

证明:若$A>0$,则存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$,令$C=(P^{-1})^T$,则$A^{-1}=CC^T$,因此A正定。

8.证明：

(1) A正定$\Leftrightarrow$ A 与E合同。

证明：A正定$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n
$\Leftrightarrow$ A的规范形为$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$, $\Leftrightarrow$ A 与E合同。

(2)A正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P使得 $A=PP^T$。

证明：必要性 若A正定，由(1)知存在可逆矩阵C使得$E=C^TAC$，从而$A=(C^{-1})^T((C^{-1})^T)^T=PP^T$，其中$P=(C^{-1})^T$为可逆矩阵。

充分性 若存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$E=C^TAC$，因此A正定。

(3)A正定,则A^{-1}正定。

证明：若$A>0$，则存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$A^{-1}=CC^T$，因此A正定。

8.证明:

(1) A正定$\Leftrightarrow$ A 与E合同。

证明：A正定$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n
$\Leftrightarrow$ A的规范形为$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$, $\Leftrightarrow$ A 与E合同。

(2)A正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P使得 $A=PP^T$。

证明：必要性 若A正定，由(1)知存在可逆矩阵C使得$E=C^TAC$，从而$A=(C^{-1})^T((C^{-1})^T)^T=PP^T$，其中$P=(C^{-1})^T$为可逆矩阵。

充分性 若存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$E=C^TAC$，因此A正定。

(3)A正定,则A^{-1}正定。

证明：若$A>0$，则存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$A^{-1}=CC^T$，因此A正定。

8.证明：

(1) A正定$\Leftrightarrow$ A 与E合同。

证明：A正定$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n
$\Leftrightarrow$ A的规范形为$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$, $\Leftrightarrow$ A 与E合同。

(2)A正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P使得 $A = PP^T$。

证明：必要性 若A正定，由(1)知存在可逆矩阵C使得$E = C^TAC$，从而$A = (C^{-1})^T((C^{-1})^T)^T = PP^T$，其中$P = (C^{-1})^T$为可逆矩阵。

充分性 若存在可逆矩阵P使得$A = PP^T$，令$C = (P^{-1})^T$，则$E = C^TAC$，因此A正定。

(3)A正定,则A^{-1}正定。

证明：若$A > 0$，则存在可逆矩阵P使得$A = PP^T$，令$C = (P^{-1})^T$，则$A^{-1} = CC^T$，因此A正定。

8.证明：

(1) A正定$\Leftrightarrow$ A 与E合同。

证明：A正定$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n

$\Leftrightarrow$ A的规范形为$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$, $\Leftrightarrow$ A 与E合同。

(2)A正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P使得 $A=PP^T$。

证明：必要性 若A正定，由(1)知存在可逆矩阵C使得$E=C^TAC$，从而$A=(C^{-1})^T((C^{-1})^T)^T=PP^T$，其中$P=(C^{-1})^T$为可逆矩阵。

充分性 若存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$E=C^TAC$，因此A正定。

(3)A正定,则A^{-1}正定。

证明：若$A>0$，则存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$A^{-1}=CC^T$，因此A正定。

8.证明：

(1) A正定$\Leftrightarrow$ A 与E合同。

证明：A正定$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n
$\Leftrightarrow$ A的规范形为$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$, $\Leftrightarrow$ A 与E合同。

(2)A正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P使得 $A=PP^T$。

证明：必要性 若A正定，由(1)知存在可逆矩阵C使得$E=C^TAC$，从而$A=(C^{-1})^T((C^{-1})^T)^T=PP^T$，其中$P=(C^{-1})^T$为可逆矩阵。

充分性 若存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$E=C^TAC$，因此A正定。

(3)A正定,则A^{-1}正定。

证明：若$A>0$，则存在可逆矩阵P使得$A=PP^T$，令$C=(P^{-1})^T$，则$A^{-1}=CC^T$，因此A正定。

8.证明：

(1) A正定$\Leftrightarrow$ A 与E合同。

证明：A正定$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n
$\Leftrightarrow$ A的规范形为$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$, $\Leftrightarrow$ A 与E合同。

(2)A正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P使得 $A = PP^T$。

证明：必要性 若A正定，由(1)知存在可逆矩阵C使得$E = C^TAC$，从而$A = (C^{-1})^T((C^{-1})^T)^T = PP^T$，其中$P = (C^{-1})^T$为可逆矩阵。

充分性 若存在可逆矩阵P使得$A = PP^T$，令$C = (P^{-1})^T$，则$E = C^TAC$，因此A正定。

(3)A正定,则A^{-1}正定。

证明：若$A > 0$，则存在可逆矩阵P使得$A = PP^T$，令$C = (P^{-1})^T$，则$A^{-1} = CC^T$，因此A正定。

(4)$A=(a_{ij})_n$正定，又$b_1,b_2,\ldots,b_n$是任意n个非零实数，则$B=(a_{ij}b_ib_j)_n$正定。

证明:

$$X^TBX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_ib_jx_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(b_ix_i)(b_jx_j).$$

令$Y=\begin{pmatrix} b_1x_1 \\ \vdots \\ b_nx_n \end{pmatrix}$，则$X^TBX=Y^TAY$，

由$b_1,b_2,\ldots,b_n$非零知，对任意$X\neq 0$，有$Y\neq 0$，而$A>0$，故$X^TBX=Y^TAY>0$，所以$B>0$。

(4)$A=(a_{ij})_n$正定，又$b_1,b_2,\ldots,b_n$是任意n个非零实数，则$B=(a_{ij}b_ib_j)_n$正定。
证明:

$$X^TBX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_ib_jx_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(b_ix_i)(b_jx_j).$$

令$Y=\begin{pmatrix}b_1x_1\\ \vdots\\ b_nx_n\end{pmatrix}$，则$X^TBX=Y^TAY$,
由$b_1,b_2,\ldots,b_n$非零知，对任意$X\neq 0$，有$Y\neq 0$，
而$A>0$，故$X^TBX=Y^TAY>0$，所以$B>0$。

(5)若A, B是同阶正定矩阵，则$A+B$也是正定的。

证明：依题意，对任意的$X \neq 0$，
有$X^TAX > 0$， $X^TBX > 0$，
因此，$X^T(A+B)X = X^TAX + X^TBX > 0$，
故$A+B > 0$。

(5)若A, B是同阶正定矩阵，则$A+B$也是正定的。

证明：依题意，对任意的$X \neq 0$，
有$X^TAX > 0$，　$X^TBX > 0$，
　因此，$X^T(A+B)X = X^TAX + X^TBX > 0$，
故$A+B > 0$。

9.设A为n阶对称矩阵，且$|A| < 0$，证明：必存在一个n维列向量$X \neq 0$，使得$X^TAX < 0$。

证明：由$|A| < 0$知A非半正定，且$R_A = n$，故A的负惯性指数至少为1。因此存在坐标变换$X = CY$使得

$$X^TAX = -y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2.$$

取$Y_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T$，则$X_0 = CY_0 \neq 0$，使得

$$X_0^TAX_0 = -1^2 + 0 + \cdots + 0 = -1 < 0.$$

9.设A为n阶对称矩阵，且$|A| < 0$，证明：必存在一个n维列向量$X \neq 0$，使得$X^T AX < 0$。

证明：由$|A| < 0$知A非半正定，且$R_A = n$，故A的负惯性指数至少为1。因此存在坐标变换$X = CY$使得

$$X^T AX = -y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2.$$

取$Y_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T$，则$X_0 = CY_0 \neq 0$，使得

$$X_0^T AX_0 = -1^2 + 0 + \cdots + 0 = -1 < 0.$$

9.设A为n阶对称矩阵，且$|A| < 0$，证明：必存在一个n维列向量$X \neq 0$，使得$X^TAX < 0$。

证明：由$|A| < 0$知A非半正定，且$R_A = n$，故A的负惯性指数至少为1。因此存在坐标变换$X = CY$使得

$$X^TAX = -y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2.$$

取$Y_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T$，则$X_0 = CY_0 \neq 0$，使得

$$X_0^TAX_0 = -1^2 + 0 + \cdots + 0 = -1 < 0.$$

12. 设A, B都是n阶对称矩阵。证明：A正交相似于B的充要条件是A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

证明：必要性 由于A与B正交相似，而相似矩阵具有相同的特征根和特征多项式，所以A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

充分性 若A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同，则A, B都正交相似同一个矩阵D，即存在正交矩阵P_1, P_2使得

$$P_1^{-1}AP_1 = D, \quad P_2^{-1}BP_2 = D.$$

故 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$，从而

$$A = P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1} = \left(P_2P_1^{-1}\right)^{-1}B\left(P_2P_1^{-1}\right) = P^{-1}BP$$

其中$P = P_2P_1^{-1}$，且满足$P^TP = (P_1^{-1})^TP_2^TP_2P_1^{-1} = (P_1^{-1})^TEP_1^{-1} = (P_1^TP_1)^{-1} = E$，即$P$为正交矩阵。 证毕。

12. 设A, B都是n阶对称矩阵。证明：A正交相似于B的充要条件是A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

证明：必要性 由于A与B正交相似，而相似矩阵具有相同的特征根和特征多项式，所以A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

充分性 若A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同，则A, B都正交相似同一个矩阵D，即存在正交矩阵P_1, P_2使得

$$P_1^{-1}AP_1 = D, \quad P_2^{-1}BP_2 = D.$$

故 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$，从而

$$A = P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1} = \left(P_2P_1^{-1}\right)^{-1}B\left(P_2P_1^{-1}\right) = P^{-1}BP$$

其中$P = P_2P_1^{-1}$，且满足$P^TP = (P_1^{-1})^TP_2^TP_2P_1^{-1} = (P_1^{-1})^TEP_1^{-1} = (P_1^TP_1)^{-1} = E$，即$P$为正交矩阵。证毕

12. 设A, B都是n阶对称矩阵。证明：A正交相似于B的充要条件是A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

证明：必要性 由于A与B正交相似，而相似矩阵具有相同的特征根和特征多项式，所以A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

充分性 若A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同，则A, B都正交相似同一个矩阵D，即存在正交矩阵P_1, P_2使得

$$P_1^{-1}AP_1 = D, \quad P_2^{-1}BP_2 = D.$$

故 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$，从而

$$A = P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1} = \left(P_2P_1^{-1}\right)^{-1} B \left(P_2P_1^{-1}\right) = P^{-1}BP$$

其中$P = P_2P_1^{-1}$，且满足$P^TP = (P_1^{-1})^TP_2^TP_2P_1^{-1} = (P_1^{-1})^TEP_1^{-1} = (P_1^TP_1)^{-1} = E$，即$P$为正交矩阵。证毕

12. 设A, B都是n阶对称矩阵。证明：A正交相似于B的充要条件是A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

证明：必要性 由于A与B正交相似，而相似矩阵具有相同的特征根和特征多项式，所以A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

充分性 若A, B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同，则A, B都正交相似同一个矩阵D，即存在正交矩阵P_1, P_2使得

$$P_1^{-1}AP_1 = D, \quad P_2^{-1}BP_2 = D.$$

故 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$，从而

$$A = P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1} = \left(P_2P_1^{-1}\right)^{-1} B \left(P_2P_1^{-1}\right) = P^{-1}BP$$

其中$P = P_2P_1^{-1}$，且满足$P^TP = (P_1^{-1})^T P_2^T P_2 P_1^{-1} = (P_1^{-1})^T E P_1^{-1} = (P_1^T P_1)^{-1} = E$，即$P$为正交矩阵。证毕。

12. 设A,B都是n阶对称矩阵。证明：A正交相似于B的充要条件是A,B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

证明：必要性 由于A与B正交相似，而相似矩阵具有相同的特征根和特征多项式，所以A,B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同。

充分性 若A,B的特征多项式的根全相同，且每个根的重数也相同，则A,B都正交相似同一个矩阵D，即存在正交矩阵P_1,P_2使得

$$P_1^{-1}AP_1 = D, \quad P_2^{-1}BP_2 = D.$$

故 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$，从而

$$A = P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1} = \left(P_2P_1^{-1}\right)^{-1} B \left(P_2P_1^{-1}\right) = P^{-1}BP$$

其中$P = P_2P_1^{-1}$，且满足$P^TP = (P_1^{-1})^TP_2^TP_2P_1^{-1} = (P_1^{-1})^TEP_1^{-1} = (P_1^TP_1)^{-1} = E$，即$P$为正交矩阵。 证毕。

13.设A, B都是n阶对称矩阵，且A正定。证明：存在一个可逆矩阵T，使得T^TAT和T^TBT同时成为对角形矩阵。

证明：因为 $A>0$，故存在可逆矩阵C使得$C^TAC=E$，且C^TBC仍为对称矩阵。对于这个对称矩阵，必存在正交矩阵P使得 $P^T(C^TBC)P=D_1$为对角形矩阵。同时$P^T(C^TAC)P=P^TEP=E$仍为对角形矩阵。

取$T=CP$则必有$T^TAT=E$和$T^TBT=D_1$同时成为对角形矩阵。

13.设A, B都是n阶对称矩阵，且A正定。证明：存在一个可逆矩阵T，使得T^TAT和T^TBT同时成为对角形矩阵。

证明：因为 $A > 0$，故存在可逆矩阵C使得$C^TAC = E$，且C^TBC仍为对称矩阵。对于这个对称矩阵，必存在正交矩阵P使得 $P^T(C^TBC)P = D_1$为对角形矩阵。同时$P^T(C^TAC)P = P^TEP = E$仍为对角形矩阵。

取$T = CP$则必有$T^TAT = E$和$T^TBT = D_1$同时成为对角形矩阵。

13.设A, B都是n阶对称矩阵，且A正定。证明：存在一个可逆矩阵T，使得T^TAT和T^TBT同时成为对角形矩阵。

证明：因为 $A > 0$，故存在可逆矩阵C使得$C^TAC = E$，且C^TBC仍为对称矩阵。对于这个对称矩阵，必存在正交矩阵P使得 $P^T(C^TBC)P = D_1$为对角形矩阵。同时$P^T(C^TAC)P = P^TEP = E$仍为对角形矩阵。

取$T = CP$则必有$T^TAT = E$和$T^TBT = D_1$同时成为对角形矩阵。

13.设A,B都是n阶对称矩阵，且A正定。证明：存在一个可逆矩阵T，使得T^TAT和T^TBT同时成为对角形矩阵。

证明：因为 $A>0$，故存在可逆矩阵C使得$C^TAC=E$，且C^TBC仍为对称矩阵。对于这个对称矩阵，必存在正交矩阵P使得 $P^T(C^TBC)P=D_1$为对角形矩阵。同时$P^T(C^TAC)P=P^TEP=E$仍为对角形矩阵。

取$T=CP$则必有$T^TAT=E$和$T^TBT=D_1$同时成为对角形矩阵。

13.设A, B都是n阶对称矩阵，且A正定。证明：存在一个可逆矩阵T，使得T^TAT和T^TBT同时成为对角形矩阵。

证明：因为 $A > 0$，故存在可逆矩阵C使得$C^TAC = E$，且C^TBC仍为对称矩阵。对于这个对称矩阵，必存在正交矩阵P使得 $P^T(C^TBC)P = D_1$为对角形矩阵。同时$P^T(C^TAC)P = P^TEP = E$仍为对角形矩阵。

取$T = CP$则必有$T^TAT = E$和$T^TBT = D_1$同时成为对角形矩阵。