# 北京理工大学 2011-2012 学年第二学期《微积分 A》

# 期中试题解答及评分标准

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $S=30$;　　　　2. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1},\ x+y+z-2=0$;

3. $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$　　　　4. $\begin{cases} x^2+2y^2=2 \\ z=0 \end{cases}$;

5. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=4(2\ln 2+1)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=4.$

二、 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2\cos xf_1'+x^2ye^{xy}f_3'$,　　…………………………4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2x\sin yf_2'+x^2e^{xy}(3+xy)f_3'-x^2\sin y\cos xf_{12}''$$ ….8 分

$$+x^3\cos xe^{xy}f_{13}''-x^2ye^{xy}\sin yf_{32}''+x^3ye^{2xy}f_{33}''.$$

三、 $I=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho$$ …………………………4 分

$$=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{2R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$ …………………8 分

四、 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{2x}(2y+2)=0$　　…………………………2 分

解得驻点：$(\dfrac{1}{2},-1)$　　…………………………3 分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4e^{2x}(x+y^2+2y+1),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4e^{2x}(y+1),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e^{2x}$$ ..**5 分**

在点 $(\frac{1}{2},-1)$

$A=2e,\quad B=0,\quad C=2e$ ，$\Delta=B^2-AC=-4e^2<0$ ，

又 $A=2e>0$ ，所以点 $(\frac{1}{2},-1)$ 是极小值点； ………………………**7 分**

极小值为 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}.$ ………………………**8 分**

五、由于积分区域关于 $yoz$ 面对称，所以 $\iiint\limits_V 2xy^5z^4dxdydz=0$ ….**2 分**

$$I=\iiint\limits_V(2xy^5z^4+x^2y+z)dxdydz=\iiint\limits_V(x^2y+z)dxdydz$$

$$=2\int_0^1dx\int_{x^2}^1dy\int_0^{1-y}(x^2y+z)dz$$ ……………….**6 分**

$$=\int_0^1(\frac{2}{3}x^8-\frac{4}{3}x^6+x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3})dx$$

$$=\frac{184}{945}.$$ ………………………**8 分**

六、 设直线$L$的方向向量为$\vec{s}=\{1,1,1\}\times\{1,1,-1\}=\{-2,2,0\}$ ， ….**2 分**

$L_1$的参数方程为:$\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=-2-t\end{cases}$ ， ………………………**4 分**

代入平面π的方程，得$L_1$与π的交点坐标为$(3,2,-4)$ ….**6 分**

所以直线的标准方程为 $L:\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{0}$ ……………**8 分**

七、$V$在$xoy$面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le 1$ ， ………… …….**1 分**

$$I=\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r\sin\varphi dr$$ …………5 分

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$=(\sqrt{2}-1)\pi.$$ ………………………8 分

八、$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{yz}y\frac{\partial z}{\partial x}-(z+x\frac{\partial z}{\partial x})\sin xz$

方程 $f(x-y,xz)=0$ 两边对 $x$ 求偏导，得， $f_1'+f_2'(z+x\frac{\partial z}{\partial x})=0$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1'+zf_2'}{xf_2'}\ ,$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-ye^{yz}\frac{f_1'+zf_2'}{xf_2'}+\frac{f_1'}{f_2'}\sin xz.$$ ………………4 分

同理：$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{yz}(z+y\frac{\partial z}{\partial y})-x\sin xz\frac{\partial z}{\partial y},$

方程 $f(x-y,xz)=0$ 两边对 $y$ 求偏导，得，$-f_1'+xf_2'\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f_1'}{xf_2'}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial y}=ze^{yz}+ye^{yz}\frac{f_1'}{xf_2'}-x\sin xz\frac{f_1'}{xf_2'}.$$ ……………8 分

九 （1）曲面 $S$ 的方程为：$z=1-x^2-y^2$ ……………..2 分

（2）由题意，密度 $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ ……………..3 分

由对称性知：$\bar{x}=\bar{y}=0,$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz}{\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz}$$

而 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}\rho^2 dz=\frac{4\pi}{15}$

$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}z\rho^2 dz=\frac{8\pi}{105}$

$\bar{z}=\frac{2}{7}$,所以质心坐标为：$(0,0,\frac{2}{7})$. ……………………..8 分

十、$\vec{l}^{\,0}=\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\}$

所以目标函数为：$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\sqrt{2}(x-y)$ ……………………….2 分

约束条件为： $x^2+2y^2+3z^2=6$ ……………………….3 分

构造拉氏函数：$F(x,y,z)=(x-y)+\lambda(x^2+2y^2+3z^2-6)$

$$\begin{cases} F'_x=1+2\lambda x=0 \\ F'_y=-1+4\lambda y=0 \\ F'_z=6\lambda z=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=6 \end{cases}$$

解得驻点为：$A(-2,1,0),\quad B(2,-1,0)$ …………………….…….6 分

又 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_A=\sqrt{2}(x-y)|_A=-3\sqrt{2}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_B=\sqrt{2}(x-y)|_B=3\sqrt{2}$

比较知，满足题目要求的点的坐标为：$B(2,-1,0)$，方向导数的最大值为

$3\sqrt{2}$. ……………………………….8 分

十一、记 $f(t)=\iint\limits_{D}\arctan(1+y)dxdy$ （或 $=\int_0^t dx\int_0^{x^2}\arctan(1+y)dy$ ）

$$=\int_0^{t^2}dy\int_{\sqrt{y}}^{t}\arctan(1+y)dx$$

$$=\int_0^{t^2}(t-\sqrt{y})\arctan(1+y)dy$$

$$=t\int_0^{t^2}\arctan(1+y)dy-\int_0^{t^2}\sqrt{y}\arctan(1+y)dy$$

$f'(t)=\int_0^{t^2}\arctan(1+y)dy$ …………………3 分

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\iint\limits_{D}\arctan(1+y)dxdy}{t(1-\cos t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{\frac{t^3}{2}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{t\to0^+}\frac{f'(t)}{t^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{t^2}\arctan(1+y)dy}{t^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{t\to0^+}\frac{2t\arctan(1+t^2)}{2t}=\frac{\pi}{6}$$ …………..8 分