2015-2016-第一学期　工科数学分析期中试题解答及评分标准（**2015.11.28**）

一．1.　e^6；

2.　$\ln 2 \ln 3 \cdots \ln n$；

3.　-2；

4.　$[2xf(\arctan x)+\dfrac{x^2}{1+x^2}f'(\arctan x)]dx$；

5.　$-\dfrac{100!}{98}$。

二．$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x+x-2e^x+2}{x^3}$ ……………………………（2 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+xe^x+1-2e^x}{3x^2}$ ……………………………（4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{6}$ ……………………………（6 分）

$=\dfrac{1}{6}$ ……………………………（8 分）

三．$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t\cos t}{t\sin t}=\cot t$ ……………………………（4 分）

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{d}{dt}(\cot t)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{\sin^2 t}}{t\sin t}=-\dfrac{1}{t\sin^3 t}$ …………………（8 分）

四．由题意 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$， ………………………（2 分）

则 $\lim\limits_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=\lim\limits_{h\to 0}[a+b-1]f(0)=0$，

由　$f(0)\neq 0$　$\Rightarrow$　$a+b-1=0$　(1)　……………………（4 分）

又　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=\lim\limits_{h\to 0}(a+2b)f'(0)=0$

又由　$f'(0)\neq 0$　$\Rightarrow$　$a+2b=0$　(2)　……………………（6 分）

由(1)(2)式，解得　$a=2, b=-1$。 ………………………（8 分）

五. 间断点为： $x=0$ ， $x=1$ ， $x=2$ ……………………（2 分）

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=-\infty,$$

所以 $x=0$ 为第二类间断点； ……………………（4 分）

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=\infty,$$

所以 $x=2$ 也为第二类间断点； ……………………（6 分）

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x(2x-3)}=-1,$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点。 ……………………（8 分）

六. $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x^2-1}}=0$ ， ……………………（1 分）

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax^4-bx+1)=a-b+1,$ ……………………（2 分）

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，首先要 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，即 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$，得

$a-b+1=0$ （1）， ……………………（3 分）

$f(1)=0$ ……………………（4 分）

又 $$f_-'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x^2-1}\cdot(x+1)=2\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$\xlongequal{令t=\frac{1}{x^2-1}}2\lim_{t\to-\infty}te^t=2\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}}=2\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}}=0$$ ……………………（5 分）

$$f_+'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax^4-bx^2+1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(4ax^3-2bx)=4a-2b$$ …………（6 分）

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，必须 $f_-'(1)=f_+'(1)$，即 $4a-2b=0$（2） ……………（7 分）

由（1）（2）两式解得：$a=1,b=2$ ……………………（8 分）

七. 设 $f(x)=e^{-x}+\sin x-1-\dfrac{x^2}{2}$， $f(0)=0$ ……………………………（1 分）

$f'(x)=-e^{-x}+\cos x-x$， $f'(0)=0$ ……………………………（3 分）

$f''(x)=e^{-x}-\sin x-1<0$（$0<x<1$） ……………………………（5 分）

则当$0<x<1$时， $f'(x)$单减， $f'(x)<f'(0)=0$， ……………………………（6 分）

从而当$0<x<1$时， $f(x)$单减， $f(x)<f(0)=0$，即 ……………………………（7 分）

$e^{-x}+\sin x-1-\dfrac{x^2}{2}<0$， 亦即$e^{-x}+\sin x<1+\dfrac{x^2}{2}$。 ……………………………（8 分）

八. 设t时刻水槽中水的深度为h，水的体积为V，则

$V=\dfrac{1}{2}(0.3+h+0.3)\cdot h\cdot 10=5h^2+3h$ ……………………………（3 分）

$\dfrac{dV}{dt}=10h\cdot\dfrac{dh}{dt}+3\cdot\dfrac{dh}{dt}=0.2$，

$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1}{5(10h+3)}$ ……………………………（6 分）

当$h=0.3m$时， $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=0.3}=\dfrac{1}{30}m/\min=\dfrac{10}{3}cm/\min$，

故当水深$0.3m$时水位的增长速度为 $\dfrac{1}{30}m/\min$。……………………………（8 分）

九. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$ 有水平渐近线 $y=0$； ……………………（1 分）

$f'(x) = e^{x} + xe^{x} = e^{x}(1+x)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$ ……………………（2 分）

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单减，

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单增，

$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值（也是最小值）为 $f(-1)=-e^{-1}$。………（4 分）

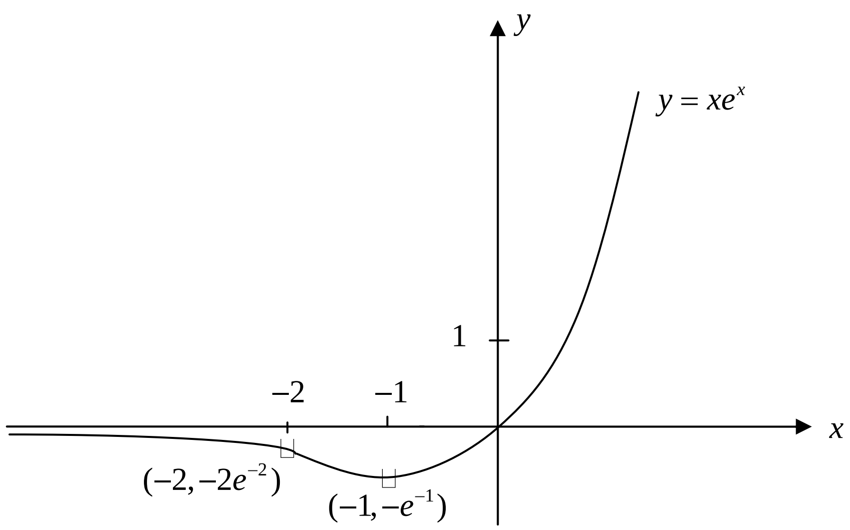
$f''(x) = 2e^{x} + xe^{x} = e^{x}(2+x)$，令 $f''(x)=0$ 得 $x=-2$ ……………………（5 分）

当 $x<-2$ 时，$f''(x)<0$，$f(x)$ 的图形在 $(-\infty,-2)$ 是凸曲线，

当 $x>-2$ 时，$f''(x)>0$，$f(x)$ 的图形在 $(-2,+\infty)$ 是凹曲线，

$(-2,-2e^{-2})$ 是 $f(x)$ 的拐点， ……………………（6 分）

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$		
$f(x)$		拐点 $(-2,-2e^{-2})$		极小值 $-e^{-1}$	



……………………（8 分）

十. 因为$0<a\le 1$，所以$0<x_1=\dfrac{a}{2}<1$，假设$0<x_n<1$， $0<x_{n+1}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}<\dfrac{a+1}{2}<1$，

因此$\{x_n\}$有界。 ……………………………(3 分)

又$x_2=\dfrac{a}{2}+\dfrac{x_1^2}{2}>\dfrac{a}{2}=x_1$，假设$x_n>x_{n-1}$， $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n^2}{2}-\dfrac{x_{n-1}^2}{2}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n-1})(x_n-x_{n-1})>0$，

即 $x_{n+1}>x_n$，所以$\{x_n\}$单调增加。 ……………………………（6 分）

由单调有界原理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 ……………………………（7 分）

$A=\dfrac{a}{2}+\dfrac{A^2}{2}$，解得， $A=1-\sqrt{1-a}$， $A=1+\sqrt{1-a}$（舍去），故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-a}\text{。}$$ ……………………………（8 分）

十一. 做辅助函数 $F(x)=f(x)f^2(1-x)$， ……………………………（2 分）

则$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且

$$F(0)=0 \quad , \quad F(1)=0$$ ……………………………（4 分）

根据拉格朗日中值定理, 存在$\xi\in(0,1)$, 使$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)f^2(1-\xi)+f(\xi)\cdot 2f(1-\xi)f'(1-\xi)(-1)=0\text{，}$$ ……………………………（6 分）

又由题意， $f(1-\xi)\ne 0$，则 $f'(\xi)f(1-\xi)-2f(\xi)f'(1-\xi)=0$，即

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{2f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$ ……………………………（8 分）