2018-2019 第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）参考答案

一.客观题： (每小题 2 分，共 16 分)。

1 √　　2 ×　　3 ×　　4 C　　5 B　　6 A　　7 D　　8 C

二、行列式计算

1、答案

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{\tau(4321)}x^3 = x^4.$$

(2 分)　　(2 分)　　(2 分)

2、答案

$$\begin{vmatrix} a_1+y & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+y & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+y & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2}+y & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}+y & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+y & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -y & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y & 0 & 0 & \dots & y & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & \dots & 0 & y & 0 \\ -y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & y \end{vmatrix}$$

(3 分)

$$= \begin{vmatrix} a_1+\cdots+a_n+y & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 0 & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & y \end{vmatrix} = (a_1+\cdots+a_n+y)y^{n-1}$$

(3 分)　　(2 分)

三．解：

由题目给出条件得：$AB-2A-B+2E=2E$，即　$(A-E)(B-2E)=2E$，

又$\left|B-2E\right|=-8\neq 0$，所以$A-E=2(B-2E)^{-1}$。（4 分）

写出矩阵$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$，再进行初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix} B-2E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ （4 分）

因此，$A-E=2(B-2E)^{-1}=2\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。(2 分)

四、解：设增广矩阵为B，对其进行初等变换：

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & k & 4\\ -1 & k & 1 & k^2\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -4\\ 0 & 2 & k-2 & 8\\ 0 & k-1 & 3 & k^2-4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -4\\ 0 & 2 & k-2 & 8\\ 0 & 0 & -(k-1)(k-2)+6 & 2(k^2-4)-8(k-1)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -4\\ 0 & 2 & k-2 & 8\\ 0 & 0 & -(k-4)(k+1) & 2k(k-4)\end{bmatrix}$$

(3 分)

或$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & k & \vdots & 4\\ -1 & k & 1 & \vdots & k^2\\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & \vdots & -4\\ 0 & 2 & k-2 & \vdots & 8\\ 0 & 0 & \dfrac{(4-k)(1+k)}{2} & \vdots & k(k-4)\end{pmatrix}$.

(1)方程组有惟一解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)=3\Leftrightarrow\dfrac{(4-k)(1+k)}{2}\neq 0\Rightarrow k\neq -1$且$k\neq 4$,此时 (1 分)

$$B\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \dfrac{k^2+2k}{k+1}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \dfrac{k^2+2k+4}{k+1}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\dfrac{2k}{k+1}\end{pmatrix}$$

则解为$x_1=\dfrac{k^2+2k}{k+1},x_2=\dfrac{k^2+2k+4}{k+1},x_3=-\dfrac{2k}{k+1}$. (2 分)

(2)当$k=-1$时,$R(A)=2\neq R(B)=3$,方程组无解. (2 分)

(3)当$k=4$时,$R(A)=R(B)=2<3$,方程组有无穷多解,此时 (1 分)

$$B\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$ (2 分)

特解$\alpha_0=(0,4,0)^T$，导出组基础解系，$\alpha_1=(-3,-1,1)^T$ (2 分)

则通解为$x=\alpha_0+c\alpha_1$,其中c为任意常数. (1 分)

五 （1）由基 I：$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$到基 II：$[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]$的过渡矩阵易求，即

$$[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]B=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

因此，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ （或 A^{-1}） （求出 A^{-1} 得 4 分）

则由基 II 到基 I 的过渡矩阵 $A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。 (2 分)

（2）由题意，有：

$Y = B^{-1}X$， 因此， $Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ n-2 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$。

（公式给出即给 1 分） (2 分)

六．解：

该二次型的矩阵为：$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, (2 分)

计算 A 的特征多项式：

$\phi_A(\lambda) = \left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+3 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[\lambda(\lambda+7)-8] = (\lambda-1)^2(\lambda+8)$, (2 分)

因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = -8$。 (1 分)

求 A 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量，即解齐次线性方程组 $(E-A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

得到此方程组的一个基础解系， $X_1' = [2,0,1]^T, X_2' = [2,-1,0]^T$ (2 分)

再对 X'_1, X'_2 作施密特正交化，得到 $X_1 = [2,0,1]^T, X_2 = [2,-5,-4]$。 (1 分)

求 A 的对应于 $\lambda_3 = -8$ 的特征向量，即解齐次线性方程组

$(-8E-A)X = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,得到此方程组的一个基础解系， $X_3 = [1,2,-2]^T$ (1 分)

将 X_1, X_2, X_3 分别单位化，得到：$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} X_1, \varepsilon_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} X_2, \varepsilon_3 = \frac{1}{3} X_3$. (1 分)

因此，构造出正交矩阵：$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，和正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, (或 X=CY) (1 分)

原二次型经过此正交变换化为 $f = y_1^2 + y_2^2 - 8y_3^2$, (1 分)

该二次型经过正交变换后得到的平方和平方项系数有正有负，因此该二次型不定。 (2 分)

七、证明。反证法。

如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$线性相关， (2 分)

因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，从而$\lambda\beta_1+\beta_2$可以被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出。 (2 分)

即存在一组数$k_1,\ldots,k_n$，使$\lambda\beta_1+\beta_2=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$，所以 $\beta_2=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n-\lambda\beta_1$,

即β_2可以被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1$线性表出。 (2 分)

但已知β_1可以被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1$可以被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出， (2 分)

因此β_2可以被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出。这与已知矛盾。因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$线性无关。 (1 分)

八、证明：

（1）充分性。已知$b^{\mathrm{T}}b=1$。计算：

$A^2=(E-bb^T)(E-bb^T)=E-bb^TE-Ebb^T+bb^Tbb^T=E-bb^T-bb^T+b(b^Tb)b^T$， (2 分)

将$b^{\mathrm{T}}b=1$代入上式，得：$A^2=E-bb^T-bb^T+b(b^Tb)b^T=E-bb^T=A$，充分性得证。 (1 分)

必要性，已知$A^2=A$，即$A^2-A=0$。计算：

$0=A^2-A=(E-bb^T)(E-bb^T)-(E-bb^T)=-bb^T+b(b^Tb)b^T$， (2 分)

$b^{\mathrm{T}}b$为一个1×1矩阵，因此上式又可表示为：$0=(b^Tb-1)bb^T$。

因为b为非 0 列向量。因此bb^{T}是非 0 矩阵。所以由上式得：$b^Tb-1=0$，即$b^Tb=1$。必要性得证。 (1 分)

（充分性和必要性各 3 分）

（2）反证法。

如果A可逆。因已知$b^{\mathrm{T}}b=1$，由（1）知A满足$A^2=A$。此式等号两边都乘A^{-1}，得：$A=E$。 (1 分)

即$E-bb^{\mathrm{T}}=E$，因此$bb^{\mathrm{T}}=0$。 (1分)

但已知b为非 0 列向量，bb^{T}是非 0 矩阵。矛盾。因此A可逆不成立， 即A不可逆。 (1 分)

九．证：

必要性：已知$A^2=E$，因此$(A+E)(A-E)=0$，所以$R(A+E)+(A-E)\le n$， (1 分)

又$R(A+E)+R(A-E)=R(E+A)+R(E-A)\ge R[(E+A)+(E-A)]=R(2E)=n$， (1 分)

因此$R(A+E)+(A-E)=n$。 (1 分)

充分性：已知$R(A+E)+(A-E)=n$，则 $R\begin{pmatrix}A+E & 0\\ 0 & A-E\end{pmatrix}=n$，

又应用矩阵的分块初等变换，

$$\begin{pmatrix}A+E & 0\\ 0 & A-E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+E & 0\\ A-E & A-E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2E & E-A\\ A-E & A-E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2E & E-A\\ 2A-2E & 2A-2E\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2E & E-A\\ 0 & (E-A)(E-A)+2A-2E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2E & 0\\ 0 & A^2-E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & A^2-E\end{pmatrix},$$

因此$R\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & A^2-E\end{pmatrix}=n$，但$R(E)=n$，故 $R(A^2-E)=0$。

因此$A^2-E=0$，即$A^2=E$。 (共 2 分)