

工科数学分析期中试题

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1 + \tan^5 x} - 1$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 $c =$ _____, $k =$ _____.
2. 一金属球受热膨胀, 已知当球的表面积为 25 cm^2 时, 表面积的增长率为 $3 \text{ cm}^2/\text{sec}$, 此时球的体积的增长率为_____.
3. 已知 $y = f(x)$ 是单调可导函数, $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 又知 $f(5) = 7$,

$$f'(5) = 1 + \sqrt{2}, \text{ 则 } \varphi'(7) = \text{_____}.$$

$$4. \text{ 已知 } f(1) = 0, f'(1) = 3, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \sin^2 x)}{e^{2x^2} - 1} = \text{_____}.$$

$$5. \text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + bx + 3b}{x + 4} = 8, \text{ 则 } b = \text{_____}.$$

$$\text{二. (8 分) 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} + x^2 + 2x - 1}{x \ln(1 + \frac{x}{4})}.$$

$$\text{三. (9 分) 设 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ \ln(1 + \tan^2 x) & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 求 } f'(x).$$

$$\text{四. (9 分) 设 } e^{x+y} = \arctan \frac{x}{y}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{五. (9 分) 设 } \begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = \arcsin t \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

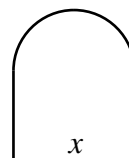
六. (9 分) 试确定 $y = k(x^2 - 3)^2$ ($x > 0$) 中 k 的值, 使此曲线的拐点处的法线经过原点.

七. (9 分) 证明 $1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) > \sqrt{1 + x^2}$ ($x > 0$).

八. (9 分) 已知 $c \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$, 求 c 的值.

九. (12 分) 设 $y = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$, 研究函数的性态, 并作出函数的图形.

十. (9 分) 某隧道的截面拟建成矩形加半圆的形状(如图), 已知截面面积为常数 $a(\text{m}^2)$, 拱形部分每单位的费用是底边及侧壁每单位费用的 1.5 倍, 问底边长 x 为多少时能使建造的费用最省(要求使用微积分的方法).



十一. (7 分) 设 $f(x)$ 是可导函数, 曲线 $y = f(x)$ 过原点, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 6$, 证明在 $(0,1)$ 内存在 ξ , 使得 $f'(\xi) = \xi f(\xi)$.