北京理工大学 2013-2014 学年第二学期

2013 级《微积分 A》期中试题

班级_______________ 学号_________________ 姓名___________________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸，试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设向量 $\vec{a}$ 的方向角分别为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，β 为锐角，$\gamma=\pi-\beta$，且 $|\vec{a}|=4$, 则 $\vec{a}=$_______________.

2. 与两直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 及 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 都平行，并且过原点的平面方程为：

   ________________________.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定，则 $dz=$________________________.

4. 设 $I=\int_0^2 dx\int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$，则交换积分次序后 $I=$________________________________.

5. 设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，则函数在 $(0,0)$ 点关于 x 的偏导是否存在：______ (是、否)

   在 $(0,0)$ 点关于 y 的偏导是否存在：______(是、否)

二. (8 分)设 $z=f(xe^y,x^2-y^2)+g(\dfrac{y}{x})$，其中 f 有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三. (8 分) 设 D 是由直线 $y=x, y=2$ 和曲线 $x=y^3$ 所围成的区域，计算二重积分

$$I=\iint_D \sin\frac{x}{y}dxdy \text{ 的值.}$$

四. (8 分) 设 $A(3,2,-3), B(3,6,0)$，求数量场 $u=y^x+\arctan\dfrac{x}{z}$ 在点 A 处的梯度及 u 在 A 点沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向的方向导数.

五. (8 分) 求锥面 $z=3-\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 与球面 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的立体 V 的体积.

六. (8 分) 求曲线 C: $\begin{cases} x^2-z=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ 在点 $P(1,-2,1)$ 处的切线 L 的标准方程; 并证明该切线 L 与直线 $L_1:\begin{cases} 3x-5y+5z=0 \\ x+5z+1=0 \end{cases}$ 垂直.

七. (8 分) 求函数 $f(x,y)=x^2+4xy+9y^2-2x+y$ 的极值点和极值.

八. (8 分) 计算 $I=\iiint\limits_V (x^3y^{10}+x^6y^5e^z+z^3)dV$，其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的空间区域.（注：取 $z\geq\sqrt{x^2+y^2}$ 部分）

九. (8 分) 设有椭球面 $S:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 及平面 $\pi:2x+2y+z+5=0$,

（1）在椭球面 S 上求一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 使其切平面与 π 平行；

（2）利用拉格朗日乘数法求 S 与 π 的最短距离.

十. (8 分) 设曲线 $\begin{cases} x^2=2z \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的曲面为 S, 曲面 S 与平面 $z=1, z=2$ 围成的空间区域记为 Ω. (1) 写出曲面 S 的方程；

(2) 计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz.$

十一. (8 分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶连续导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;　(2) 若 $f(1)=0,\ f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.