线性代数第十讲

吴民

南开大学 信息学院

November 18, 2013

线性变换

映射是数学中的一个主要概念。

线性变换

映射是数学中的一个主要概念。

设X、Y是两个非空集合。如果有一个确定的法则f，使得X中每个元x在f之下有集合Y中唯一确定的元y与之对应，则称此法则f是X到Y，的一个映射，记为

线性变换

映射是数学中的一个主要概念。

设X、Y是两个非空集合。如果有一个确定的法则f，使得X中每个元x在f之下有集合Y中唯一确定的元y与之对应，则称此法则f是X到Y，的一个映射，记为

$$f : X \to Y$$

线性变换

映射是数学中的一个主要概念。

设X、Y是两个非空集合。如果有一个确定的法则f，使得X中每个元x在f之下有集合Y中唯一确定的元y与之对应，则称此法则f是X到Y，的一个映射，记为

$$f : X \to Y$$

若X中的元x通过映射f得到Y中的对应元y，则称y为元x在映射f下的**象**。记作$y = f(x)$。

映射是数学中的一个主要概念。

设X、Y是两个非空集合。如果有一个确定的法则f，使得X中每个元x在f之下有集合Y中唯一确定的元y与之对应，则称此法则f是X到Y，的一个映射，记为

$$f : X \to Y$$

若X中的元x通过映射f得到Y中的对应元y，则称y为元x在映射f下的**象**。记作$y = f(x)$。

x称为y在映射f下的**原象**。X和Y分别称为**原象集**和**象集**。

如果在映射f中，集合X、Y都是数集，则映射f称为**函数**。

如果在映射f中，集合X、Y都是数集，则映射f称为**函数**。

变换：V是线性空间，V到自身的映射T称为V的一个**变换**：

$$T : V \to V,$$

线性变换

如果在映射f中，集合X、Y都是数集，则映射f称为**函数**。

变换：V是线性空间，V到自身的映射T称为V的一个**变换**：

$$T : V \to V,$$

向量$\alpha \in V$在变换T作用下的象记为$T\alpha$。

线性变换

如果在映射f中，集合X、Y都是数集，则映射f称为**函数**。

变换：V是线性空间，V到自身的映射T称为V的一个**变换**：

$$T : V \to V,$$

向量$\alpha \in V$在变换T作用下的象记为$T\alpha$。

线性变换：线性空间V上的变换T如果满足：

如果在映射f中，集合X、Y都是数集，则映射f称为**函数**。

变换：V是线性空间，V到自身的映射T称为V的一个**变换**：

$$T : V \to V,$$

向量$\alpha \in V$在变换T作用下的象记为$T\alpha$。

线性变换：线性空间V上的变换T如果满足：

- 对任意$\alpha, \beta \in V$，都有$T(\alpha + \beta) = T\alpha + T\beta$，

如果在映射f中，集合X、Y都是数集，则映射f称为**函数**。

变换：V是线性空间，V到自身的映射T称为V的一个**变换**：

$$T : V \to V,$$

向量$\alpha \in V$在变换T作用下的象记为$T\alpha$。

线性变换：线性空间V上的变换T如果满足：

- 对任意$\alpha, \beta \in V$，都有$T(\alpha + \beta) = T\alpha + T\beta$，
- 对任意的$\alpha \in V$和$k \in F$，都有$T(k\alpha) = kT\alpha$，

线性变换

如果在映射f中，集合X、Y都是数集，则映射f称为**函数**。

变换：V是线性空间，V到自身的映射T称为V的一个**变换**：

$$T : V \to V,$$

向量$\alpha \in V$在变换T作用下的象记为$T\alpha$。

线性变换：线性空间V上的变换T如果满足：

- 对任意$\alpha, \beta \in V$，都有$T(\alpha + \beta) = T\alpha + T\beta$，
- 对任意的$\alpha \in V$和$k \in F$，都有$T(k\alpha) = kT\alpha$，

则称T为线性空间V上的一个**线性变换**。

线性变换

- **恒等变换**或称**单位变换E**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{E}(\alpha) = \alpha$。

线性变换

- **恒等变换**或称**单位变换E**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{E}(\alpha) = \alpha$。
- **零变换0**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{0}(\alpha) = 0$。

线性变换

- **恒等变换**或称**单位变换E**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{E}(\alpha) = \alpha$。
- **零变换0**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{0}(\alpha) = 0$。
- **数乘变换k**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{k}(\alpha) = k\alpha$。

线性变换

- **恒等变换**或称**单位变换E**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{E}(\alpha) = \alpha$。
- **零变换0**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{0}(\alpha) = 0$。
- **数乘变换k**：$\forall \alpha \in V$，$\mathbf{k}(\alpha) = k\alpha$。

都是线性变换。

- **恒等变换**或称**单位变换E**：$\forall\alpha\in V$，$\mathbf{E}(\alpha)=\alpha$。
- **零变换0**：$\forall\alpha\in V$，$\mathbf{0}(\alpha)=0$。
- **数乘变换k**：$\forall\alpha\in V$，$\mathbf{k}(\alpha)=k\alpha$。

都是线性变换。

线性空间V，V上的变换T。T是线性变换的充要条件是：对任意的$\alpha,\beta\in V$和数$a,b\in F$，恒有：$T(a\alpha+b\beta)=aT\alpha+bT\beta.$

线性变换

- **恒等变换**或称**单位变换E**：$\forall\alpha \in V$，$\mathbf{E}(\alpha) = \alpha$。
- **零变换0**：$\forall\alpha \in V$，$\mathbf{0}(\alpha) = 0$。
- **数乘变换k**：$\forall\alpha \in V$，$\mathbf{k}(\alpha) = k\alpha$。

都是线性变换。

线性空间V，V上的变换T。T是线性变换的充要条件是：对任意的$\alpha, \beta \in V$和数$a, b \in F$，恒有：$T(a\alpha + b\beta) = aT\alpha + bT\beta$.

必要性。T是线性变换，所以$T(a\alpha + b\beta) = T(a\alpha) + T(b\beta) = aT\alpha + bT\beta$.

- **恒等变换**或称**单位变换E**：$\forall\alpha\in V$，$\mathbf{E}(\alpha)=\alpha$。
- **零变换0**：$\forall\alpha\in V$，$\mathbf{0}(\alpha)=0$。
- **数乘变换k**：$\forall\alpha\in V$，$\mathbf{k}(\alpha)=k\alpha$。

都是线性变换。

线性空间V，V上的变换T。T是线性变换的充要条件是：对任意的$\alpha,\beta\in V$和数$a,b\in F$，恒有：$T(a\alpha+b\beta)=aT\alpha+bT\beta$.

必要性。T是线性变换，所以$T(a\alpha+b\beta)=T(a\alpha)+T(b\beta)=aT\alpha+bT\beta$.

充分性。分别令$a=1,b=1$和$b=0$。

线性变换

类似行向量的记法：$T(\alpha,\beta,\dots,\gamma)=(T\alpha,T\beta,\dots,T\gamma)$。

线性变换

类似行向量的记法：$T(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = (T\alpha, T\beta, \ldots, T\gamma)$。

则上页式子可记为：

线性变换

类似行向量的记法：$T(\alpha,\beta,\ldots,\gamma) = (T\alpha, T\beta, \ldots, T\gamma)$。

则上页式子可记为：

$$T\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right)$$

线性变换

类似行向量的记法：$T(\alpha, \beta, \dots, \gamma) = (T\alpha, T\beta, \dots, T\gamma)$。

则上页式子可记为：

$$T\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = T(a\alpha + b\beta)$$

类似行向量的记法：$T(\alpha, \beta, \dots, \gamma) = (T\alpha, T\beta, \dots, T\gamma)$。

则上页式子可记为：

$$T\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}\right) = T(a\alpha + b\beta) = aT\alpha + bT\beta$$

类似行向量的记法：$T(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = (T\alpha, T\beta, \ldots, T\gamma)$。

则上页式子可记为：

$$
\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= T(a\alpha + b\beta) = aT\alpha + bT\beta \\
&= \begin{pmatrix} T\alpha & T\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

类似行向量的记法：$T(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)=(T\alpha,T\beta,\ldots,T\gamma)$。

则上页式子可记为：

$$
\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right) &= T(a\alpha+b\beta)=aT\alpha+bT\beta\\
&= \begin{pmatrix}T\alpha & T\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\left[T\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

线性变换

类似行向量的记法：$T(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = (T\alpha, T\beta, \ldots, T\gamma)$。

则上页式子可记为：

$$T\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}\right) = \left[T\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$$

这个形式的公式较常用。

线性变换的性质：

- 线性变换将零向量映射为零向量。

线性变换

线性变换的性质：

- 线性变换将零向量映射为零向量。
- 线性变换将$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$的线性组合映射为$T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n$的线性组合。

线性变换

线性变换的性质：

- 线性变换将零向量映射为零向量。
- 线性变换将$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$的线性组合映射为$T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n$的线性组合。
- 线性变换将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组。

线性变换

线性变换的性质：

- 线性变换将零向量映射为零向量。
- 线性变换将$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$的线性组合映射为$T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n$的线性组合。
- 线性变换将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组。

逆否命题：如果线性变换映射得到的象向量组线性无关，则原象向量组线性无关。

线性变换的性质：

- 线性变换将零向量映射为零向量。
- 线性变换将$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$的线性组合映射为$T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n$的线性组合。
- 线性变换将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组。

逆否命题：如果线性变换映射得到的象向量组线性无关，则原象向量组线性无关。

线性空间V。V上的线性变换T。象集合$TV = \{T\alpha | \alpha \in V\}$是线性子空间。称为在线性变换$T$下$V$的**象子空间**。

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。如果线性变换$\mathbf{A}$和线性变换$\mathbf{B}$对这个基的作用相同：$\mathbf{A}\epsilon_i = \mathbf{B}\epsilon_i$，$i = 1, \ldots, n$，则$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。

线性变换的矩阵

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。如果线性变换$\mathbf{A}$和线性变换$\mathbf{B}$对这个基的作用相同：$\mathbf{A}\epsilon_i = \mathbf{B}\epsilon_i$，$i = 1, \ldots, n$，则$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。

什么叫$\mathbf{A} = \mathbf{B}$？

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。如果线性变换$\mathbf{A}$和线性变换$\mathbf{B}$对这个基的作用相同：$\mathbf{A}\epsilon_i = \mathbf{B}\epsilon_i$，$i = 1, \ldots, n$，则$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。

什么叫$\mathbf{A} = \mathbf{B}$?

两个线性变换相等，是指对V中的任何一个向量，两个线性变换得到的象都相同。

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。如果线性变换$\mathbf{A}$和线性变换$\mathbf{B}$对这个基的作用相同：$\mathbf{A}\epsilon_i = \mathbf{B}\epsilon_i$，$i = 1, \ldots, n$，则$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。

什么叫$\mathbf{A} = \mathbf{B}$？

两个线性变换相等，是指对V中的任何一个向量，两个线性变换得到的象都相同。

证明：对任意的$\alpha \in V$，α可被$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$线性表出：

线性变换的矩阵

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。如果线性变换$\mathbf{A}$和线性变换$\mathbf{B}$对这个基的作用相同：$\mathbf{A}\epsilon_i = \mathbf{B}\epsilon_i$，$i = 1, \ldots, n$，

则$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。

什么叫$\mathbf{A} = \mathbf{B}$？

两个线性变换相等，是指对V中的任何一个向量，两个线性变换得到的象都相同。

证明：对任意的$\alpha \in V$，α可被$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$线性表出：

$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$，

线性变换的矩阵

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。如果线性变换$\mathbf{A}$和线性变换$\mathbf{B}$对这个基的作用相同：$\mathbf{A}\epsilon_i = \mathbf{B}\epsilon_i$，$i = 1, \ldots, n$，

则$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。

什么叫$\mathbf{A} = \mathbf{B}$?

两个线性变换相等，是指对V中的任何一个向量，两个线性变换得到的象都相同。

证明：对任意的$\alpha \in V$，α可被$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$线性表出：

$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{A}(x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n) = x_1\mathbf{A}\epsilon_1 + \cdots + x_n\mathbf{A}\epsilon_n$.

线性变换的矩阵

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。如果线性变换$\mathbf{A}$和线性变换$\mathbf{B}$对这个基的作用相同：$\mathbf{A}\epsilon_i = \mathbf{B}\epsilon_i$，$i = 1, \ldots, n$，则$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。

什么叫$\mathbf{A} = \mathbf{B}$?

两个线性变换相等，是指对V中的任何一个向量，两个线性变换得到的象都相同。

证明：对任意的$\alpha \in V$，α可被$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$线性表出：

$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{A}(x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n) = x_1\mathbf{A}\epsilon_1 + \cdots + x_n\mathbf{A}\epsilon_n$.

$\mathbf{B}\alpha = \mathbf{B}(x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n) = x_1\mathbf{B}\epsilon_1 + \cdots + x_n\mathbf{B}\epsilon_n$.

再由已知，知$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\alpha$对所有$\alpha$都成立。

再由已知，知$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\alpha$对所有$\alpha$都成立。

所以$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。证毕。

再由已知，知$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\alpha$对所有$\alpha$都成立。

所以$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。证毕。

这个结果就是所谓的一个线性变换完全被它在一个基上的作用所决定。下面结果说明线性变换在基上的作用是任意的。

线性变换的矩阵

再由已知，知$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\alpha$对所有$\alpha$都成立。

所以$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。证毕。

这个结果就是所谓的一个线性变换完全被它在一个基上的作用所决定。下面结果说明线性变换在基上的作用是任意的。

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$V$中的任意一组向量。则一定可以找到一个线性变换$\mathbf{A}$满足：

再由已知，知$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\alpha$对所有$\alpha$都成立。

所以$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。证毕。

这个结果就是所谓的一个线性变换完全被它在一个基上的作用所决定。下面结果说明线性变换在基上的作用是任意的。

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$V$中的任意一组向量。则一定可以找到一个线性变换$\mathbf{A}$满足：

$\mathbf{A}\epsilon_1 = \alpha_1, \mathbf{A}\epsilon_2 = \alpha_2, \ldots, \mathbf{A}\epsilon_n = \alpha_n,$

再由已知，知$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\alpha$对所有$\alpha$都成立。

所以$\mathbf{A} = \mathbf{B}$。证毕。

这个结果就是所谓的一个线性变换完全被它在一个基上的作用所决定。下面结果说明线性变换在基上的作用是任意的。

定理：$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$V$中的任意一组向量。则一定可以找到一个线性变换$\mathbf{A}$满足：

$\mathbf{A}\epsilon_1 = \alpha_1, \mathbf{A}\epsilon_2 = \alpha_2, \ldots, \mathbf{A}\epsilon_n = \alpha_n,$

一个变换（线性变换），作为一个映射规则，必须要做到对线性空间V中的每个元素，都能根据映射规则找到象。所以不能采用"定义一个变换满足$\mathbf{A}\epsilon_1 = \alpha_1$"这种形式的说法。

线性变换的矩阵

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

线性变换的矩阵

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n,$$

线性变换的矩阵

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

定义变换$\mathbf{A}$将ξ映射为$\mathbf{A}\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$,

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

定义变换**A**将ξ映射为$\mathbf{A}\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$,

以上给出的**A**的映射规则，显然它是V上的一个变换。

线性变换的矩阵

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

定义变换$\mathbf{A}$将ξ映射为$\mathbf{A}\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$,

以上给出的$\mathbf{A}$的映射规则，显然它是V上的一个变换。

下面证明它是线性变换。

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

定义变换$\mathbf{A}$将ξ映射为$\mathbf{A}\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$,

以上给出的$\mathbf{A}$的映射规则，显然它是V上的一个变换。

下面证明它是线性变换。

设$\beta, \gamma \in V$，则β与γ都可表为基的线性组合：

线性变换的矩阵

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n,$

定义变换$\mathbf{A}$将ξ映射为$\mathbf{A}\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$

以上给出的$\mathbf{A}$的映射规则，显然它是V上的一个变换。

下面证明它是线性变换。

设$\beta, \gamma \in V$，则β与γ都可表为基的线性组合：

$\beta = b_1\epsilon_1 + \cdots + b_n\epsilon_n$，$\gamma = c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n,$

线性变换的矩阵

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

定义变换$\mathbf{A}$将ξ映射为$\mathbf{A}\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$,

以上给出的$\mathbf{A}$的映射规则，显然它是V上的一个变换。

下面证明它是线性变换。

设$\beta, \gamma \in V$，则β与γ都可表为基的线性组合：

$\beta = b_1\epsilon_1 + \cdots + b_n\epsilon_n$，$\gamma = c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n$,

$\mathbf{A}\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$，$\mathbf{A}\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$,

证明：对任意$\xi \in V$，ξ可以表示为基的线性组合。

$\xi = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$,

定义变换$\mathbf{A}$将ξ映射为$\mathbf{A}\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$,

以上给出的$\mathbf{A}$的映射规则，显然它是V上的一个变换。

下面证明它是线性变换。

设$\beta, \gamma \in V$，则β与γ都可表为基的线性组合：

$\beta = b_1\epsilon_1 + \cdots + b_n\epsilon_n$，$\gamma = c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n$,

$\mathbf{A}\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$，$\mathbf{A}\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\beta+\gamma) &= \mathbf{A}[(b_1+c_1)\epsilon_1 + \cdots + (b_n+c_n)\epsilon_n] \\ &= (b_1+c_1)\alpha_1 + \cdots + (b_n+c_n)\alpha_n\end{aligned}$$

所以有$\mathbf{A}(\beta+\gamma)=\mathbf{A}\beta+\mathbf{A}\gamma$。

所以有$\mathbf{A}(\beta+\gamma)=\mathbf{A}\beta+\mathbf{A}\gamma$。

线性变换定义中的另一式子类似验证。

线性变换的矩阵

所以有$\mathbf{A}(\beta+\gamma)=\mathbf{A}\beta+\mathbf{A}\gamma$。

线性变换定义中的另一式子类似验证。

再证明$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}\epsilon_i=\alpha_i$，$i=1,\ldots,n$。

线性变换的矩阵

所以有$\mathbf{A}(\beta+\gamma)=\mathbf{A}\beta+\mathbf{A}\gamma$。

线性变换定义中的另一式子类似验证。

再证明$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}\epsilon_i=\alpha_i$，$i=1,\ldots,n$。

$\epsilon_i=0\epsilon_1+\cdots+0\epsilon_{i-1}+1\epsilon_i+0\epsilon_{i+1}+\cdots+0\epsilon_n$，

线性变换的矩阵

所以有$\mathbf{A}(\beta+\gamma)=\mathbf{A}\beta+\mathbf{A}\gamma$。

线性变换定义中的另一式子类似验证。

再证明$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}\epsilon_i=\alpha_i$，$i=1,\ldots,n$。

$\epsilon_i=0\epsilon_1+\cdots+0\epsilon_{i-1}+1\epsilon_i+0\epsilon_{i+1}+\cdots+0\epsilon_n$,

所以$\mathbf{A}\epsilon_i=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_n=\alpha_i$,

所以有$\mathbf{A}(\beta+\gamma)=\mathbf{A}\beta+\mathbf{A}\gamma$。

线性变换定义中的另一式子类似验证。

再证明$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}\epsilon_i=\alpha_i$，$i=1,\ldots,n$。

$\epsilon_i=0\epsilon_1+\cdots+0\epsilon_{i-1}+1\epsilon_i+0\epsilon_{i+1}+\cdots+0\epsilon_n$，

所以$\mathbf{A}\epsilon_i=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_n=\alpha_i$，

证毕。

所以有$\mathbf{A}(\beta+\gamma) = \mathbf{A}\beta + \mathbf{A}\gamma$。

线性变换定义中的另一式子类似验证。

再证明$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}\epsilon_i = \alpha_i$，$i = 1, \ldots, n$。

$\epsilon_i = 0\epsilon_1 + \cdots + 0\epsilon_{i-1} + 1\epsilon_i + 0\epsilon_{i+1} + \cdots + 0\epsilon_n$，

所以$\mathbf{A}\epsilon_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_n = \alpha_i$，

证毕。

定理：$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是线性空间$V$的一个基，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$是$V$中的任意给定$n$个向量，则存在唯一的线性变换$\mathbf{A}$满足

$$\mathbf{A}\epsilon_i = \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

线性变换的矩阵

线性空间V。$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个基，

线性变换的矩阵

线性空间V。$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个基，

线性变换$\mathbf{A}$

线性变换的矩阵

线性空间V。$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个基，

线性变换$\mathbf{A}$

$$\Updownarrow$$

基底在$\mathbf{A}$作用下的象：$\mathbf{A}\epsilon_1, \ldots, \mathbf{A}\epsilon_n$。

线性变换的矩阵

线性空间V。$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个基，

线性变换$\mathbf{A}$

$$\Updownarrow$$

基底在$\mathbf{A}$作用下的象：$\mathbf{A}\epsilon_1, \ldots, \mathbf{A}\epsilon_n$。

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{A}\epsilon_1, \ldots, \mathbf{A}\epsilon_n$在基下的坐标。

线性变换的矩阵

线性空间V。$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是$V$的一个基，

线性变换$\mathbf{A}$

$$\Updownarrow$$

基底在$\mathbf{A}$作用下的象：$\mathbf{A}\epsilon_1, \ldots, \mathbf{A}\epsilon_n$。

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{A}\epsilon_1, \ldots, \mathbf{A}\epsilon_n$在基下的坐标。

这几个向量与坐标的关系式：

线性变换的矩阵

线性空间V。$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$是$V$的一个基，

线性变换$\mathbf{A}$

$$\Updownarrow$$

基底在$\mathbf{A}$作用下的象：$\mathbf{A}\epsilon_1, \dots, \mathbf{A}\epsilon_n$。

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{A}\epsilon_1, \dots, \mathbf{A}\epsilon_n$在基下的坐标。

这几个向量与坐标的关系式：

$$[\mathbf{A}\epsilon_1, \dots, \mathbf{A}\epsilon_n] = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n] \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

线性变换的矩阵

此矩阵的第i列为$\mathbf{A}\epsilon_i$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的坐标。

线性变换的矩阵

此矩阵的第i列为$\mathbf{A}\epsilon_i$在基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下的坐标。

此矩阵与线性变换相互唯一确定。因此该矩阵称为线性变换$\mathbf{A}$**在基**$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$**下的矩阵**。

线性变换的矩阵

此矩阵的第i列为$\mathbf{A}\epsilon_i$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的坐标。

此矩阵与线性变换相互唯一确定。因此该矩阵称为**线性变换$\mathbf{A}$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵**。

上面给出的n维线性空间上的线性变换与它在给定基底下的矩阵之间的对应是给定线性空间上的全体线性变换构成的集合与全体给定数域上的$n \times n$矩阵的全体构成的集合之间的一一对应。

线性变换的矩阵

此矩阵的第i列为$\mathbf{A}\epsilon_i$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的坐标。

此矩阵与线性变换相互唯一确定。因此该矩阵称为**线性变换$\mathbf{A}$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵**。

上面给出的n维线性空间上的线性变换与它在给定基底下的矩阵之间的对应是给定线性空间上的全体线性变换构成的集合与全体给定数域上的$n \times n$矩阵的全体构成的集合之间的一一对应。

设$\mathbf{A}$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$。

此矩阵的第i列为$\mathbf{A}\epsilon_i$在基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下的坐标。

此矩阵与线性变换相互唯一确定。因此该矩阵称为线性变换$\mathbf{A}$**在基**$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$**下的矩阵**。

上面给出的n维线性空间上的线性变换与它在给定基底下的矩阵之间的对应是给定线性空间上的全体线性变换构成的集合与全体给定数域上的$n\times n$矩阵的全体构成的集合之间的一一对应。

设$\mathbf{A}$在基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$下的矩阵为$A$。

ξ在基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$下的坐标为列向量$X$。

此矩阵的第i列为$\mathbf{A}\epsilon_i$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的坐标。

此矩阵与线性变换相互唯一确定。因此该矩阵称为线性变换**$\mathbf{A}$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵**。

上面给出的n维线性空间上的线性变换与它在给定基底下的矩阵之间的对应是给定线性空间上的全体线性变换构成的集合与全体给定数域上的$n \times n$矩阵的全体构成的集合之间的一一对应。

设$\mathbf{A}$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$。

ξ在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的坐标为列向量$X$。

则$\mathbf{A}\xi$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的坐标$Y$是

线性变换的矩阵

此矩阵的第i列为$\mathbf{A}\epsilon_i$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的坐标。

此矩阵与线性变换相互唯一确定。因此该矩阵称为线性变换**$\mathbf{A}$在基**$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$**下的矩阵**。

上面给出的n维线性空间上的线性变换与它在给定基底下的矩阵之间的对应是给定线性空间上的全体线性变换构成的集合与全体给定数域上的$n \times n$矩阵的全体构成的集合之间的一一对应。

设$\mathbf{A}$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$。

ξ在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的坐标为列向量$X$。

则$\mathbf{A}\xi$在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的坐标$Y$是$Y = AX$。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

T在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$，在基$\eta_1, \ldots, \eta_n$下的矩阵为$B$。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

T在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$，在基$\eta_1, \ldots, \eta_n$下的矩阵为$B$。

$T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, , \ldots, \epsilon_n)A$，$T(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)B$。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

T在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$，在基$\eta_1, \ldots, \eta_n$下的矩阵为$B$。

$T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, , \ldots, \epsilon_n)A$，$T(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)B$。

A与B之间的关系？

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

T在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$，在基$\eta_1, \ldots, \eta_n$下的矩阵为$B$。

$T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, , \ldots, \epsilon_n)A$，$T(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)B$。

A与B之间的关系？

需要知道$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ 和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$之间的关系。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

T在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$，在基$\eta_1, \ldots, \eta_n$下的矩阵为$B$。

$T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, , \ldots, \epsilon_n)A$，$T(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)B$。

A与B之间的关系？

需要知道$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ 和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$之间的关系。

设基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$到基$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$的过渡矩阵为$M$。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$和$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

T在基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$下的矩阵为$A$，在基$\eta_1,\ldots,\eta_n$下的矩阵为$B$。

$T(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,,\ldots,\epsilon_n)A$，$T(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\eta_1,\ldots,\eta_n)B$。

A与B之间的关系？

需要知道$\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$ 和$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$之间的关系。

设基$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$到基$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$的过渡矩阵为$M$。

$(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)M$。

线性变换在不同基下的矩阵

$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是线性空间$V$的两个基。

V上的一个线性变换T。

T在基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$下的矩阵为$A$，在基$\eta_1, \ldots, \eta_n$下的矩阵为$B$。

$T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, , \ldots, \epsilon_n)A$，$T(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)B$。

A与B之间的关系？

需要知道$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ 和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$之间的关系。

设基$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$到基$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$的过渡矩阵为$M$。

$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)M$。

可以进行如下推导：

线性变换在不同基下的矩阵

$$T(\eta_1,\ldots,\eta_n) = T[(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)M]$$

线性变换在不同基下的矩阵

$$
\begin{aligned}
T(\eta_1, \ldots, \eta_n) &= T[(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)M] \\
&= [T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)]M
\end{aligned}
$$

线性变换在不同基下的矩阵

$$
\begin{aligned}
T(\eta_1, \ldots, \eta_n) &= T[(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)M] \\
&= [T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)]M \\
&= (T\epsilon_1, \ldots, T\epsilon_n)M
\end{aligned}
$$

线性变换在不同基下的矩阵

$$
\begin{aligned}
T(\eta_1, \ldots, \eta_n) &= T[(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)M] \\
&= [T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)]M \\
&= (T\epsilon_1, \ldots, T\epsilon_n)M \\
&= [(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)A]M
\end{aligned}
$$

线性变换在不同基下的矩阵

$$
\begin{aligned}
T(\eta_1, \ldots, \eta_n) &= T[(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)M] \\
&= [T(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)]M \\
&= (T\epsilon_1, \ldots, T\epsilon_n)M \\
&= [(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)A]M \\
&= (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)(AM)
\end{aligned}
$$

线性变换在不同基下的矩阵

$$
\begin{aligned}
T(\eta_1,\ldots,\eta_n) &= T[(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)M] \\
&= [T(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)]M \\
&= (T\epsilon_1,\ldots,T\epsilon_n)M \\
&= [(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)A]M \\
&= (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)(AM) \\
&= [(\eta_1,\ldots,\eta_n)M^{-1}](AM)
\end{aligned}
$$

线性变换在不同基下的矩阵

$$
\begin{aligned}
T(\eta_1,\ldots,\eta_n) &= T[(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)M] \\
&= [T(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)]M \\
&= (T\epsilon_1,\ldots,T\epsilon_n)M \\
&= [(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)A]M \\
&= (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)(AM) \\
&= [(\eta_1,\ldots,\eta_n)M^{-1}](AM) \\
&= (\eta_1,\ldots,\eta_n)(M^{-1}AM)
\end{aligned}
$$

又已知$T(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\eta_1,\ldots,\eta_n)B$，由于线性变换矩阵的唯一性知：

线性变换在不同基下的矩阵

又已知$T(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\eta_1,\ldots,\eta_n)B$，由于线性变换矩阵的唯一性知：

$B=M^{-1}AM$。

又已知$T(\eta_1,\dots,\eta_n)=(\eta_1,\dots,\eta_n)B$，由于线性变换矩阵的唯一性知：

$B=M^{-1}AM$。

定义：n阶方阵A,B。如果存在满秩矩阵M，使$B=M^{-1}AM$成立，就称**矩阵**A**与**B**相似**，记为$A\sim B$。

又已知$T(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\eta_1,\ldots,\eta_n)B$，由于线性变换矩阵的唯一性知：

$B=M^{-1}AM$。

定义：n阶方阵A,B。如果存在满秩矩阵M，使$B=M^{-1}AM$成立，就称**矩阵A与B相似**，记为$A\sim B$。

有了相似概念，以上结果可以表达为：同一线性变换在不同基底下的矩阵是相似的。

又已知$T(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\eta_1,\ldots,\eta_n)B$，由于线性变换矩阵的唯一性知：

$B=M^{-1}AM$。

定义：n阶方阵A,B。如果存在满秩矩阵M，使$B=M^{-1}AM$成立，就称**矩阵A与B相似**，记为$A\sim B$。

有了相似概念，以上结果可以表达为：同一线性变换在不同基底下的矩阵是相似的。

反之也成立：如果两个矩阵相似，那么它们一定是某个线性变换在不同基底下的矩阵。

线性变换在不同基下的矩阵

矩阵的相似关系满足：

线性变换在不同基下的矩阵

矩阵的相似关系满足：

- 自反性：$A \sim A$对所有的方阵A都成立。

线性变换在不同基下的矩阵

矩阵的相似关系满足：

- 自反性：$A \sim A$对所有的方阵A都成立。
- 对称性：若$A \sim B$，$B \sim A$。

线性变换在不同基下的矩阵

矩阵的相似关系满足：

- 自反性：$A \sim A$对所有的方阵A都成立。
- 对称性：若$A \sim B$，$B \sim A$。
- 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$。

线性变换在不同基下的矩阵

矩阵的相似关系满足：

- 自反性：$A \sim A$对所有的方阵A都成立。
- 对称性：若$A \sim B$，$B \sim A$。
- 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$。

给定n维线性空间V上的一个线性变换T，能否找到V的一个基，使得T在此基下的矩阵“简单”？

线性变换在不同基下的矩阵

矩阵的相似关系满足：

- 自反性：$A \sim A$对所有的方阵A都成立。
- 对称性：若$A \sim B$，$B \sim A$。
- 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$。

给定n维线性空间V上的一个线性变换T，能否找到V的一个基，使得T在此基下的矩阵“简单”？

此问题的矩阵形式是：给定一个n阶方阵A，能否找到n阶可逆矩阵M使得$M^{-1}AM$“简单”？

矩阵的相似关系满足：

- 自反性：$A \sim A$对所有的方阵A都成立。
- 对称性：若$A \sim B$，$B \sim A$。
- 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$。

给定n维线性空间V上的一个线性变换T，能否找到V的一个基，使得T在此基下的矩阵“简单”？

此问题的矩阵形式是：给定一个n阶方阵A，能否找到n阶可逆矩阵M使得$M^{-1}AM$“简单”？

若简单指对角形矩阵，则就是要解答A能否与对角形矩阵相似？

矩阵的对角化

如果矩阵A与对角形矩阵相似，那么矩阵A要满足哪些条件？

矩阵的对角化

如果矩阵A与对角形矩阵相似，那么矩阵A要满足哪些条件？

若可以找到M，使$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，

矩阵的对角化

如果矩阵A与对角形矩阵相似，那么矩阵A要满足哪些条件？

若可以找到M，使$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，

则$AM = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$。（且$M$可逆）。

矩阵的对角化

用$X_1, X_2, \ldots, X_n$记M的列向量，即$M = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$。

矩阵的对角化

用$X_1, X_2, \ldots, X_n$记M的列向量，即$M = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$。
则上式为$\begin{pmatrix} AX_1 & \ldots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \ldots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$。

用$X_1, X_2, \dots, X_n$记M的列向量，即$M = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix}$。
则上式为$\begin{pmatrix} AX_1 & \dots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \dots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$。
也就是$AX_j = \lambda_j X_j$对$j = 1, \dots, n$都成立。

用$X_1, X_2, \ldots, X_n$记M的列向量，即$M = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$。

则上式为$\begin{pmatrix} AX_1 & \ldots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \ldots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$。

也就是$AX_j = \lambda_j X_j$对$j = 1, \ldots, n$都成立。

因为已知M可逆，所以$X_j \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。

用$X_1, X_2, \ldots, X_n$记M的列向量，即$M = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$。

则上式为$\begin{pmatrix} AX_1 & \ldots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \ldots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$。

也就是$AX_j = \lambda_j X_j$对$j = 1, \ldots, n$都成立。

因为已知M可逆，所以$X_j \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。

定义：n阶方阵A。若数λ及n维非0列向量X使等式$AX = \lambda X$成立，则称λ为方阵A的**特征值**，X称为方阵A的关于λ的**特征向量**。

矩阵的对角化

用$X_1, X_2, \ldots, X_n$记M的列向量，即$M = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$。
则上式为$\begin{pmatrix} AX_1 & \ldots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \ldots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$。
也就是$AX_j = \lambda_j X_j$对$j = 1, \ldots, n$都成立。
因为已知M可逆，所以$X_j \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。

定义：n阶方阵A。若数λ及n维非0列向量X使等式$AX = \lambda X$成立，则称λ为方阵A的**特征值**，X称为方阵A的关于λ的**特征向量**。

前面的结果描述为：A与对角形矩阵相似，则该对角形矩阵主对角线上的元是A的特征值。

矩阵的对角化

用$X_1, X_2, \ldots, X_n$记M的列向量，即$M = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$。

则上式为$\begin{pmatrix} AX_1 & \ldots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \ldots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$。

也就是$AX_j = \lambda_j X_j$对$j = 1, \ldots, n$都成立。

因为已知M可逆，所以$X_j \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。

定义：n阶方阵A。若数λ及n维非0列向量X使等式$AX = \lambda X$成立，则称λ为方阵A的**特征值**，X称为方阵A的关于λ的**特征向量**。

前面的结果描述为：A与对角形矩阵相似，则该对角形矩阵主对角线上的元是A的特征值。

将等式$AX = \lambda X$改写为$(\lambda E - A)X = 0$。是齐次线性方程组。

矩阵的对角化

定理：λ是A的特征值的充要条件是$|\lambda E - A| = 0$。而A的关于λ的特征向量是齐次线性方程组$(\lambda E - A)X = 0$的非0解。

矩阵的对角化

定理：λ是A的特征值的充要条件是$|\lambda E-A|=0$。而A的关于λ的特征向量是齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$的非0解。

所以，A的关于λ的特征向量的全体，加上0向量，是齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$的全部解。是线性子空间。称为A的关于特征值λ的**特征子空间**。

定理：λ是A的特征值的充要条件是$|\lambda E-A|=0$。而A的关于λ的特征向量是齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$的非0解。

所以，A的关于λ的特征向量的全体，加上0向量，是齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$的全部解。是线性子空间。称为A的关于特征值λ的**特征子空间**。

定义：n阶方阵A。方程$|\lambda E-A|=0$称为A的**特征方程**。方程等号左边的多项式$\phi_A(\lambda)=|\lambda E-A|$ 称为A的**特征多项式**。

定理：λ是A的特征值的充要条件是$|\lambda E - A| = 0$。而A的关于λ的特征向量是齐次线性方程组$(\lambda E - A)X = 0$的非0解。

所以，A的关于λ的特征向量的全体，加上0向量，是齐次线性方程组$(\lambda E - A)X = 0$的全部解。是线性子空间。称为A的关于特征值λ的**特征子空间**。

定义：n阶方阵A。方程$|\lambda E - A| = 0$称为A的**特征方程**。方程等号左边的多项式$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A|$ 称为A的**特征多项式**。

A的特征值就是A的特征方程的根。

定理：λ是A的特征值的充要条件是$|\lambda E-A|=0$。而A的关于λ的特征向量是齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$的非0解。

所以，A的关于λ的特征向量的全体，加上0向量，是齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$的全部解。是线性子空间。称为A的关于特征值λ的**特征子空间**。

定义：n阶方阵A。方程$|\lambda E-A|=0$称为A的**特征方程**。方程等号左边的多项式$\phi_A(\lambda)=|\lambda E-A|$ 称为A的**特征多项式**。

A的特征值就是A的特征方程的根。

$A=(a_{ij})$，$\phi_A(\lambda)=|\lambda E-A|$的表达式是什么？

矩阵的对角化

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

矩阵的对角化

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 按行列式的定义，仅当排列取$12\dots n$时才能得到λ^n项。

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 按行列式的定义，仅当排列取$12\dots n$时才能得到λ^n项。
- 同样的，仅当排列取$12\dots n$时，才能得到λ^{n-1}项。

矩阵的对角化

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 按行列式的定义，仅当排列取$12\dots n$时才能得到λ^n项。
- 同样的，仅当排列取$12\dots n$时，才能得到λ^{n-1}项。
- 当λ取为0时，将得到多项式的常数项。

矩阵的对角化

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 按行列式的定义，仅当排列取$12\dots n$时才能得到λ^n项。
- 同样的，仅当排列取$12\dots n$时，才能得到λ^{n-1}项。
- 当λ取为0时，将得到多项式的常数项。

因此，得到书上的式子：

矩阵的对角化

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 按行列式的定义，仅当排列取$12\dots n$时才能得到λ^n项。
- 同样的，仅当排列取$12\dots n$时，才能得到λ^{n-1}项。
- 当λ取为0时，将得到多项式的常数项。

因此，得到书上的式子：

$$\phi_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|。$$

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

$$\phi_B(\lambda)$$

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

$$\phi_B(\lambda) = |\lambda E - B|$$

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

$$\begin{aligned}\phi_B(\lambda) &= |\lambda E - B| \\ &= |\lambda E - M^{-1}AM|\end{aligned}$$

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

$$\begin{aligned}\phi_B(\lambda) &= |\lambda E - B| \\ &= |\lambda E - M^{-1}AM| \\ &= |M^{-1}\lambda E \cdot M - M^{-1}AM|\end{aligned}$$

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

$$\begin{aligned}\phi_B(\lambda) &= |\lambda E - B| \\ &= |\lambda E - M^{-1}AM| \\ &= |M^{-1}\lambda E \cdot M - M^{-1}AM| \\ &= |M^{-1}(\lambda E - A)M|\end{aligned}$$

矩阵的对角化

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

$$\begin{aligned}
\phi_B(\lambda) &= |\lambda E - B| \\
&= |\lambda E - M^{-1}AM| \\
&= |M^{-1}\lambda E \cdot M - M^{-1}AM| \\
&= |M^{-1}(\lambda E - A)M| \\
&= |M^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |M|
\end{aligned}$$

定理：相似矩阵有相同的特征多项式，因此有相同的特征值。

证明：设$A \sim B$。故存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM = B$。

$$\begin{aligned}
\phi_B(\lambda) &= |\lambda E - B| \\
&= |\lambda E - M^{-1}AM| \\
&= |M^{-1}\lambda E \cdot M - M^{-1}AM| \\
&= |M^{-1}(\lambda E - A)M| \\
&= |M^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |M| \\
&= |\lambda E - A| = \phi_A(\lambda).
\end{aligned}$$

矩阵的对角化

定理：准对角形矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$的特征多项式为$|\lambda E - A_1| \cdot |\lambda E - A_2|$。

矩阵的对角化

定理：准对角形矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$的特征多项式为$|\lambda E - A_1| \cdot |\lambda E - A_2|$。

练习：$A \sim B$，$C \sim D$。证$\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$。

定理：准对角形矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$的特征多项式为$|\lambda E - A_1| \cdot |\lambda E - A_2|$。

练习：$A \sim B$，$C \sim D$。证$\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$。

定理：$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$是$A$的$r$个互不相同的特征值。$X_1, X_2, \ldots, X_r$分别是$A$的关于这$r$个特征值的特征向量，则$X_1, X_2, \ldots, X_r$线性无关。

定理：准对角形矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$的特征多项式为$|\lambda E - A_1| \cdot |\lambda E - A_2|$。

练习：$A \sim B$，$C \sim D$。证$\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$。

定理：$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$是$A$的$r$个互不相同的特征值。$X_1, X_2, \ldots, X_r$分别是$A$的关于这$r$个特征值的特征向量，则$X_1, X_2, \ldots, X_r$线性无关。

证明：对r用数学归纳法。$r = 1$时，由于$X_1 \neq 0$，定理成立。

定理：准对角形矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$的特征多项式为$|\lambda E - A_1| \cdot |\lambda E - A_2|$。

练习：$A \sim B$，$C \sim D$。证$\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$。

定理：$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$是$A$的$r$个互不相同的特征值。$X_1, X_2, \ldots, X_r$分别是$A$的关于这$r$个特征值的特征向量，则$X_1, X_2, \ldots, X_r$线性无关。

证明：对r用数学归纳法。$r = 1$时，由于$X_1 \neq 0$，定理成立。设$r > 1$时，定理对$r-1$成立，以下证定理对r成立。

矩阵的对角化

如果存在$a_1, \ldots, a_r$满足$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_rX_r = 0$，

矩阵的对角化

如果存在$a_1, \ldots, a_r$满足$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_rX_r = 0$，

用A左乘上式，得$a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + \cdots + a_r\lambda_rX_r = 0$。

矩阵的对角化

如果存在$a_1, \ldots, a_r$满足$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_rX_r = 0$，

用A左乘上式，得$a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + \cdots + a_r\lambda_rX_r = 0$。

用λ_r乘前面式子两边减去上式两边得：

如果存在$a_1,\ldots,a_r$满足$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_rX_r=0$，

用A左乘上式，得$a_1\lambda_1X_1+a_2\lambda_2X_2+\cdots+a_r\lambda_rX_r=0$。

用λ_r乘前面式子两边减去上式两边得：

$a_1(\lambda_r-\lambda_1)X_1+\cdots+a_{r-1}(\lambda_r-\lambda_{r-1})X_{r-1}=0$。

如果存在$a_1,\dots,a_r$满足$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_rX_r=0$，

用A左乘上式，得$a_1\lambda_1X_1+a_2\lambda_2X_2+\cdots+a_r\lambda_rX_r=0$。

用λ_r乘前面式子两边减去上式两边得：

$a_1(\lambda_r-\lambda_1)X_1+\cdots+a_{r-1}(\lambda_r-\lambda_{r-1})X_{r-1}=0$。

由归纳法假设，$X_1,X_2,\dots,X_{r-1}$线性无关。而已知λ_i互不相同，所以$\lambda_r-\lambda_i$均不为0，$i=1,\dots,r$。

如果存在$a_1,\dots,a_r$满足$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_rX_r=0$，

用A左乘上式，得$a_1\lambda_1X_1+a_2\lambda_2X_2+\cdots+a_r\lambda_rX_r=0$。

用λ_r乘前面式子两边减去上式两边得：

$a_1(\lambda_r-\lambda_1)X_1+\cdots+a_{r-1}(\lambda_r-\lambda_{r-1})X_{r-1}=0$。

由归纳法假设，$X_1,X_2,\dots,X_{r-1}$线性无关。而已知λ_i互不相同，所以$\lambda_r-\lambda_i$均不为0，$i=1,\dots,r$。

所以有$a_1=\cdots=a_{r-1}=0$。再代入最上面式子，得到

如果存在$a_1, \ldots, a_r$满足$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_rX_r = 0$，

用A左乘上式，得$a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + \cdots + a_r\lambda_rX_r = 0$。

用λ_r乘前面式子两边减去上式两边得：

$a_1(\lambda_r - \lambda_1)X_1 + \cdots + a_{r-1}(\lambda_r - \lambda_{r-1})X_{r-1} = 0$。

由归纳法假设，$X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$线性无关。而已知$\lambda_i$互不相同，所以$\lambda_r - \lambda_i$均不为0，$i = 1, \ldots, r$。

所以有$a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$。再代入最上面式子，得到$a_rX_r = 0$，但$X_r \neq 0$，所以$a_r = 0$。

如果存在$a_1,\ldots,a_r$满足$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_rX_r=0$，

用A左乘上式，得$a_1\lambda_1X_1+a_2\lambda_2X_2+\cdots+a_r\lambda_rX_r=0$。

用λ_r乘前面式子两边减去上式两边得：

$a_1(\lambda_r-\lambda_1)X_1+\cdots+a_{r-1}(\lambda_r-\lambda_{r-1})X_{r-1}=0$。

由归纳法假设，$X_1,X_2,\ldots,X_{r-1}$线性无关。而已知λ_i互不相同，所以$\lambda_r-\lambda_i$均不为0，$i=1,\ldots,r$。

所以有$a_1=\cdots=a_{r-1}=0$。再代入最上面式子，得到

$a_rX_r=0$，但$X_r\neq 0$，所以$a_r=0$。

这就证明了$X_1,\ldots,X_{r-1},X_r$线性无关。

定理：λ_1, λ_2是A的两个不等的特征值。$X_1, \ldots, X_l$是A的关于λ_1的线性无关的特征向量，$Y_1, \ldots, Y_m$是A的关于λ_2的线性无关的特征向量。则$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$ 线性无关。

矩阵的对角化

定理：λ_1, λ_2是A的两个不等的特征值。$X_1, \ldots, X_l$是A的关于λ_1的线性无关的特征向量，$Y_1, \ldots, Y_m$是A的关于λ_2的线性无关的特征向量。则$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$ 线性无关。

证明：设一组数$s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m$满足：

矩阵的对角化

定理：λ_1, λ_2是A的两个不等的特征值。$X_1, \ldots, X_l$是A的关于λ_1的线性无关的特征向量，$Y_1, \ldots, Y_m$是A的关于λ_2的线性无关的特征向量。则$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$ 线性无关。

证明：设一组数$s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m$满足：

$s_1X_1 + \cdots + s_lX_l + t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m = 0$，

定理：λ_1, λ_2是A的两个不等的特征值。$X_1, \ldots, X_l$是A的关于λ_1的线性无关的特征向量，$Y_1, \ldots, Y_m$是A的关于λ_2的线性无关的特征向量。则$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$ 线性无关。

证明：设一组数$s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m$满足：

$s_1X_1 + \cdots + s_lX_l + t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m = 0$，

令$X = s_1X_1 + \cdots + s_lX_l$，$Y = t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m$，

定理：λ_1, λ_2是A的两个不等的特征值。$X_1, \ldots, X_l$是A的关于λ_1的线性无关的特征向量，$Y_1, \ldots, Y_m$是A的关于λ_2的线性无关的特征向量。则$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$ 线性无关。

证明：设一组数$s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m$满足：

$s_1X_1 + \cdots + s_lX_l + t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m = 0$，

令$X = s_1X_1 + \cdots + s_lX_l$，$Y = t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m$，

则$X \in V_{\lambda_1}$，$Y \in V_{\lambda_2}$。

矩阵的对角化

定理：λ_1, λ_2是A的两个不等的特征值。$X_1, \ldots, X_l$是A的关于λ_1的线性无关的特征向量，$Y_1, \ldots, Y_m$是A的关于λ_2的线性无关的特征向量。则$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$ 线性无关。

证明：设一组数$s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m$满足：

$s_1X_1 + \cdots + s_lX_l + t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m = 0$，

令$X = s_1X_1 + \cdots + s_lX_l$，$Y = t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m$，

则$X \in V_{\lambda_1}$，$Y \in V_{\lambda_2}$。

而上式变为$X + Y = 0$，此式说明X与Y线性相关。

定理：λ_1, λ_2是A的两个不等的特征值。$X_1, \ldots, X_l$是A的关于λ_1的线性无关的特征向量，$Y_1, \ldots, Y_m$是A的关于λ_2的线性无关的特征向量。则$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$ 线性无关。

证明：设一组数$s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_m$满足：

$s_1X_1 + \cdots + s_lX_l + t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m = 0$，

令$X = s_1X_1 + \cdots + s_lX_l$，$Y = t_1Y_1 + \cdots + t_mY_m$，

则$X \in V_{\lambda_1}$，$Y \in V_{\lambda_2}$。

而上式变为$X + Y = 0$，此式说明X与Y线性相关。

若$X \neq 0$，则$Y \neq 0$。这时X和Y分别是A的关于λ_1和λ_2的特征向量。它们线性相关就与前面定理矛盾。

所以必有$X=0$，$Y=0$。

所以必有$X=0$，$Y=0$。

再由$X_1,\ldots,X_l$线性无关知$s_1=\cdots=s_l=0$。

所以必有$X=0$，$Y=0$。

再由$X_1,\ldots,X_l$线性无关知$s_1=\cdots=s_l=0$。

再由$Y_1,\ldots,Y_m$线性无关知$t_1=\cdots=t_m=0$。

矩阵的对角化

所以必有$X = 0$，$Y = 0$。

再由$X_1, \ldots, X_l$线性无关知$s_1 = \cdots = s_l = 0$。

再由$Y_1, \ldots, Y_m$线性无关知$t_1 = \cdots = t_m = 0$。

因此$X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m$线性无关。

所以必有$X=0$，$Y=0$。

再由$X_1,\dots,X_l$线性无关知$s_1=\cdots=s_l=0$。

再由$Y_1,\dots,Y_m$线性无关知$t_1=\cdots=t_m=0$。

因此$X_1,\dots,X_l,Y_1,\dots,Y_m$线性无关。

定理：设λ_0是n阶矩阵A的k重特征值，则A的关于λ_0的特征子空间的维数不超过k。

所以必有$X=0$，$Y=0$。

再由$X_1,\ldots,X_l$线性无关知$s_1=\cdots=s_l=0$。

再由$Y_1,\ldots,Y_m$线性无关知$t_1=\cdots=t_m=0$。

因此$X_1,\ldots,X_l,Y_1,\ldots,Y_m$线性无关。

定理：设λ_0是n阶矩阵A的k重特征值，则A的关于λ_0的特征子空间的维数不超过k。

实际是去证若A的关于λ_0的线性无关的特征向量有l个，则λ_0是矩阵A的至少l重特征值。

所以必有$X=0$，$Y=0$。

再由$X_1,\dots,X_l$线性无关知$s_1=\cdots=s_l=0$。

再由$Y_1,\dots,Y_m$线性无关知$t_1=\cdots=t_m=0$。

因此$X_1,\dots,X_l,Y_1,\dots,Y_m$线性无关。

定理：设λ_0是n阶矩阵A的k重特征值，则A的关于λ_0的特征子空间的维数不超过k。

实际是去证若A的关于λ_0的线性无关的特征向量有l个，则λ_0是矩阵A的至少l重特征值。

证明：若$X_1,\dots,X_l$是A的关于λ_0的线性无关的特征向量，

则可以添加$n-l$个向量$X_{l+1},\ldots,X_n$,

则可以添加$n-l$个向量$X_{l+1},\ldots,X_n$，

使$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性无关，构成$R^n$的一个基底。

则可以添加$n-l$个向量$X_{l+1},\ldots,X_n$，

使$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性无关，构成$R^n$的一个基底。

于是$AX_1=\lambda_0X_1$，$\ldots$，$AX_l=\lambda_0X_l$，

则可以添加$n-l$个向量$X_{l+1},\ldots,X_n$，

使$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性无关，构成$R^n$的一个基底。

于是$AX_1=\lambda_0X_1$，$\ldots$，$AX_l=\lambda_0X_l$，

而$AX_{l+1},\ldots,AX_n$可以被$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性表出，

则可以添加$n-l$个向量$X_{l+1},\ldots,X_n$，

使$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性无关，构成$R^n$的一个基底。

于是$AX_1=\lambda_0 X_1$，…，$AX_l=\lambda_0 X_l$，

而$AX_{l+1},\ldots,AX_n$可以被$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性表出，

$$AX_{l+1}=a_{1,l+1}X_1+\cdots+a_{l,l+1}X_l+a_{l+1,l+1}X_{l+1}+\cdots+a_{n,l}X_n,$$

$\ldots,$

$$AX_n=a_{1,n}X_1+\cdots+a_{l,n}X_l+a_{l+1,n}X_{l+1}+\cdots+a_{n,n}X_n,$$

矩阵的对角化

则可以添加$n-l$个向量$X_{l+1},\ldots,X_n$，

使$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性无关，构成$R^n$的一个基底。

于是$AX_1=\lambda_0 X_1$，…，$AX_l=\lambda_0 X_l$，

而$AX_{l+1},\ldots,AX_n$可以被$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$线性表出，

$AX_{l+1}=a_{1,l+1}X_1+\cdots+a_{l,l+1}X_l+a_{l+1,l+1}X_{l+1}+\cdots+a_{n,l}X_n$，

$\ldots$，

$AX_n=a_{1,n}X_1+\cdots+a_{l,n}X_l+a_{l+1,n}X_{l+1}+\cdots+a_{n,n}X_n$，

将这些式子写成矩阵的形式，

矩阵的对角化

$$A\begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0 & \dots & 0 & a_{1,l+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_0 & a_{l,l+1} & \dots & a_{ln} \\ 0 & \dots & 0 & a_{1+1,l+1} & \dots & a_{1+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0 & \dots & 0 & a_{1,l+1} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \lambda_0 & a_{l,l+1} & \dots & a_{ln}\\ 0 & \dots & 0 & a_{1+1,l+1} & \dots & a_{1+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

注意到$\begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix}$是一个满秩矩阵，

$$A\begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0 & \dots & 0 & a_{1,l+1} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \lambda_0 & a_{l,l+1} & \dots & a_{ln}\\ 0 & \dots & 0 & a_{1+1,l+1} & \dots & a_{1+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

注意到$\begin{pmatrix}X_1 & \dots & X_n\end{pmatrix}$是一个满秩矩阵，

此式说明矩阵A与右边的矩阵相似。因此特征多项式$\phi_A(\lambda)$为

矩阵的对角化

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_0 & \dots & 0 & -a_{1,l+1} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda - \lambda_0 & -a_{l,l+1} & \dots & -a_{ln} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - a_{1+1,l+1} & \dots & -a_{1+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n,l+1} & \dots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

矩阵的对角化

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_0 & \dots & 0 & -a_{1,l+1} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda-\lambda_0 & -a_{l,l+1} & \dots & -a_{ln} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda-a_{1+1,l+1} & \dots & -a_{1+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n,l+1} & \dots & \lambda-a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-\lambda_0)^l \begin{vmatrix} \lambda-a_{1+1,l+1} & \dots & -a_{1+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,l+1} & \dots & \lambda-a_{n,n} \end{vmatrix}$$

所以$\phi_A(\lambda)$含有因子$(\lambda-\lambda_0)^l$，因此，$\lambda=\lambda_0$ 是$\phi_A(\lambda)$的至少l重根。证毕。

所以$\phi_A(\lambda)$含有因子$(\lambda-\lambda_0)^l$，因此，$\lambda=\lambda_0$ 是$\phi_A(\lambda)$的至少l重根。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

所以$\phi_A(\lambda)$含有因子$(\lambda-\lambda_0)^l$，因此，$\lambda=\lambda_0$ 是$\phi_A(\lambda)$的至少l重根。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证明：必要性。A与对角形矩阵相似，

矩阵的对角化

所以$\phi_A(\lambda)$含有因子$(\lambda-\lambda_0)^l$，因此，$\lambda=\lambda_0$ 是$\phi_A(\lambda)$的至少l重根。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证明：必要性。A与对角形矩阵相似，

即存在矩阵M，满足$M^{-1}AM=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$，

矩阵的对角化

所以$\phi_A(\lambda)$含有因子$(\lambda-\lambda_0)^l$，因此，$\lambda=\lambda_0$ 是$\phi_A(\lambda)$的至少l重根。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证明：必要性。A与对角形矩阵相似，

即存在矩阵M，满足$M^{-1}AM=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$，

所以M的每个列向量X_i满足$AX_i=\lambda_i X_i$，且$X_i\neq 0$，

所以$\phi_A(\lambda)$含有因子$(\lambda-\lambda_0)^l$，因此，$\lambda=\lambda_0$ 是$\phi_A(\lambda)$的至少l重根。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证明：必要性。A与对角形矩阵相似，

即存在矩阵M，满足$M^{-1}AM=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$，

所以M的每个列向量X_i满足$AX_i=\lambda_i X_i$，且$X_i\neq 0$，

即X_i是A的一个特征向量，再由M可逆，知$X_1,\ldots,X_n$是n个线性无关的A的特征向量。

充分性类似可证。

充分性类似可证。

与A相似的对角形矩阵，其主对角线上的元除排列顺序不同外，是被A的特征值唯一确定的。

充分性类似可证。

与A相似的对角形矩阵，其主对角线上的元除排列顺序不同外，是被A的特征值唯一确定的。

定理：如果n阶复矩阵A的特征值都是单根，则A必相似于对角形矩阵。

充分性类似可证。

与A相似的对角形矩阵，其主对角线上的元除排列顺序不同外，是被A的特征值唯一确定的。

定理：如果n阶复矩阵A的特征值都是单根，则A必相似于对角形矩阵。

证明：设A的特征多项式的根都是单根，则其根为n个互不相同的数。所以A的特征值是n个互不相同的数。

充分性类似可证。

与A相似的对角形矩阵，其主对角线上的元除排列顺序不同外，是被A的特征值唯一确定的。

定理：如果n阶复矩阵A的特征值都是单根，则A必相似于对角形矩阵。

证明：设A的特征多项式的根都是单根，则其根为n个互不相同的数。所以A的特征值是n个互不相同的数。

而对于每个特征值，至少存在一个关于该特征值的特征向量。

充分性类似可证。

与A相似的对角形矩阵，其主对角线上的元除排列顺序不同外，是被A的特征值唯一确定的。

定理：如果n阶复矩阵A的特征值都是单根，则A必相似于对角形矩阵。

证明：设A的特征多项式的根都是单根，则其根为n个互不相同的数。所以A的特征值是n个互不相同的数。

而对于每个特征值，至少存在一个关于该特征值的特征向量。

将这n个特征值的特征向量放在一起，得到n个特征向量。

矩阵的对角化

根据前面的定理，这n个向量线性无关。

矩阵的对角化

根据前面的定理，这n个向量线性无关。

由上面的定理，A与对角形矩阵相似。证毕。

根据前面的定理，这n个向量线性无关。

由上面的定理，A与对角形矩阵相似。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是：对于每个k_i重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E - A$的秩为$n - k_i$。

根据前面的定理，这n个向量线性无关。

由上面的定理，A与对角形矩阵相似。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是：对于每个k_i重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E - A$的秩为$n - k_i$。

证明：充分性。设A的特征值共l个：$\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，

根据前面的定理，这n个向量线性无关。

由上面的定理，A与对角形矩阵相似。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是：对于每个k_i重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E - A$的秩为$n - k_i$。

证明：充分性。设A的特征值共l个：$\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，

每个λ_i是$\phi_A(\lambda)$的k_i重根，

根据前面的定理，这n个向量线性无关。

由上面的定理，A与对角形矩阵相似。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是：对于每个k_i重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E - A$的秩为$n - k_i$。

证明：充分性。设A的特征值共l个：$\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，

每个λ_i是$\phi_A(\lambda)$的k_i重根，

成立：$k_1 + \cdots + k_l = n$。

根据前面的定理，这n个向量线性无关。

由上面的定理，A与对角形矩阵相似。证毕。

定理：n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是：对于每个k_i重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E - A$的秩为$n - k_i$。

证明：充分性。设A的特征值共l个：$\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，

每个λ_i是$\phi_A(\lambda)$的k_i重根，

成立：$k_1 + \cdots + k_l = n$。

因为已知$\lambda_i E - A$的秩为$n - k_i$，所以对于λ_i，可以找到k_i个线性无关的特征向量$X_{i1}, \ldots, X_{ik_i}$。

所以一共找到A的特征向量：

矩阵的对角化

所以一共找到A的特征向量：

$X_{11}, \dots, X_{1k_1}$,

所以一共找到A的特征向量：

$X_{11},\dots,X_{1k_1}$， $X_{21},\dots,X_{2k_2}$，

矩阵的对角化

所以一共找到A的特征向量：

$X_{11}, \ldots, X_{1k_1}$， $X_{21}, \ldots, X_{2k_2}$， $\ldots$，

所以一共找到A的特征向量：

$X_{11},\ldots,X_{1k_1}$，$X_{21},\ldots,X_{2k_2}$，$\ldots$，$X_{l1},\ldots,X_{lk_l}$。

所以一共找到A的特征向量：

$X_{11},\ldots,X_{1k_1}$， $X_{21},\ldots,X_{2k_2}$， $\ldots$，$X_{l1},\ldots,X_{lk_l}$。

共n个。前面已经证明这n个向量线性无关，所以A相似于对角形矩阵。

所以一共找到A的特征向量：

$X_{11},\ldots,X_{1k_1}$，$X_{21},\ldots,X_{2k_2}$，$\ldots$，$X_{l1},\ldots,X_{lk_l}$。

共n个。前面已经证明这n个向量线性无关，所以A相似于对角形矩阵。

必要性。A 与对角形矩阵相似。设 A 的特征值为$\lambda_1,\ldots,\lambda_l$，它们两两不等，共 l 个。每个 λ_i 是 $\phi_A(\lambda)$ 的 k_i 重根，成立：$k_1+\cdots+k_l=n$。

所以一共找到A的特征向量：

$X_{11},\dots,X_{1k_1}$， $X_{21},\dots,X_{2k_2}$， $\dots$，$X_{l1},\dots,X_{lk_l}$。

共n个。前面已经证明这n个向量线性无关，所以A相似于对角形矩阵。

必要性。A 与对角形矩阵相似。设 A 的特征值为$\lambda_1,\dots,\lambda_l$，它们两两不等，共 l 个。每个 λ_i 是 $\phi_A(\lambda)$ 的 k_i 重根，成立：$k_1+\cdots+k_l=n$。

A 与对角形矩阵相似，所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，将这 n 个向量根据其所对应的特征值进行分组。

关于同一特征值的特征向量分在一组。设对应于 λ_i 的组中含有 t_i 个特征向量。

关于同一特征值的特征向量分在一组。设对应于 λ_i 的组中含有 t_i 个特征向量。

前面已经证明，关于 k_i 重特征值的线性无关的特征向量的个数不超过 k_i 个。因此有 $t_i \leqslant k_i$。

关于同一特征值的特征向量分在一组。设对应于 λ_i 的组中含有 t_i 个特征向量。

前面已经证明，关于 k_i 重特征值的线性无关的特征向量的个数不超过 k_i 个。因此有 $t_i \leqslant k_i$。

如果对某个 λ_j ，特征值重数为 k_j 但 $R(\lambda_j E - A) > n - k_j$，

矩阵的对角化

关于同一特征值的特征向量分在一组。设对应于 λ_i 的组中含有 t_i 个特征向量。

前面已经证明，关于 k_i 重特征值的线性无关的特征向量的个数不超过 k_i 个。因此有 $t_i \leqslant k_i$。

如果对某个 λ_j ，特征值重数为 k_j 但 $R(\lambda_j E - A) > n - k_j$，则关于 λ_j 的线性无关的特征向量的最大个数小于 k_j。

关于同一特征值的特征向量分在一组。设对应于 λ_i 的组中含有 t_i 个特征向量。

前面已经证明，关于 k_i 重特征值的线性无关的特征向量的个数不超过 k_i 个。因此有 $t_i \leqslant k_i$。

如果对某个 λ_j ，特征值重数为 k_j 但 $R(\lambda_j E - A) > n - k_j$，则关于 λ_j 的线性无关的特征向量的最大个数小于 k_j。

则 $t_j < k_j$。

关于同一特征值的特征向量分在一组。设对应于 λ_i 的组中含有 t_i 个特征向量。

前面已经证明，关于 k_i 重特征值的线性无关的特征向量的个数不超过 k_i 个。因此有 $t_i \leqslant k_i$。

如果对某个 λ_j ，特征值重数为 k_j 但 $R(\lambda_j E - A) > n - k_j$，则关于 λ_j 的线性无关的特征向量的最大个数小于 k_j。

则 $t_j < k_j$。

则 $t_1 + \cdots + t_l < k_1 + \cdots + k_l = n$，

关于同一特征值的特征向量分在一组。设对应于 λ_i 的组中含有 t_i 个特征向量。

前面已经证明，关于 k_i 重特征值的线性无关的特征向量的个数不超过 k_i 个。因此有 $t_i \leqslant k_i$。

如果对某个 λ_j ，特征值重数为 k_j 但 $R(\lambda_j E - A) > n - k_j$，则关于 λ_j 的线性无关的特征向量的最大个数小于 k_j。

则 $t_j < k_j$。

则 $t_1 + \cdots + t_l < k_1 + \cdots + k_l = n$，

这与 A 有 n 个线性无关的特征向量矛盾。亦即与 A 与对角形矩阵相似矛盾。

因此必有 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n - k_i$ 对所有 i 都成立。

因此必有 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n - k_i$ 对所有 i 都成立。

必要性证毕。

因此必有 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n - k_i$ 对所有 i 都成立。

必要性证毕。

注意讨论矩阵的对角化时通常数域取为复数域。

因此必有 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n - k_i$ 对所有 i 都成立。

必要性证毕。

注意讨论矩阵的对角化时通常数域取为复数域。

并非每个矩阵都与对角形矩阵相似，但每个矩阵都可以通过相似变换化成“若当标准形”。