

# 《微积分A》(下) 期末试题(A卷)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共6页, 九个大题, 试卷后面空白纸撕下作草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
签名										

## 一、填空题 (每小题4分, 共28分)

1. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $\sin x + 3y - z = e^z$  所确定, 则  $dz =$ \_\_\_\_\_.
2. 已知曲面  $z = 4 - x^2 - y^2$  上点  $P$  处的切平面平行于平面  $\pi: 2x + 2y + z - 1 = 0$ , 则点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.
3. 设  $L: x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3, -1 \leq t \leq 1$ , 则  $I = \int_L (x + y + z)dl =$ \_\_\_\_\_.
4. 向量场  $\vec{A} = \{e^x, \sin(xy), \sin(xz)\}$  在点  $P(1, 0, 0)$  处的散度  $\text{div} \vec{A} =$ \_\_\_\_\_.
5. 已知  $(axy^p - 3x^3)dx + (6x^qy^2 + 4y^5)dy$  是某二元函数的全微分, 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_,  $p =$ \_\_\_\_\_,  $q =$ \_\_\_\_\_.
6. 数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}$  的敛散性是\_\_\_\_\_. (若收敛, 请指明是绝对收敛还是条件收敛).
7. 函数  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$  的麦克劳林级数为\_\_\_\_\_; 收敛域为\_\_\_\_\_.

二、(9分)一平面  $\pi$  通过直线  $L: \begin{cases} 4x - y + 3z - 6 = 0 \\ x + 5y - z + 10 = 0 \end{cases}$  且与平面  $\pi_1: 2x - y + 5z - 5 = 0$  垂直, 求平面  $\pi$  的方程.

三、(9分)设  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $z = 1$  围成的实心体, 其质量分布是均匀的 (密度为  $k$ ), 求  $\Omega$  的体积和  $\Omega$  的质心坐标  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

四、(9分)设  $f(x, y) = xe^x - (1 + e^x)\cos y$ ，试判断点  $(0, 0)$  和点  $(-2, \pi)$  是否为  $f(x, y)$  的极值点，说明理由，并指出是  $f(x, y)$  极大值点还是极小值点.

五、(9分)设  $D$  是由直线  $y = x - 1$  和抛物线  $y^2 = 2x + 6$  所围成的闭区域，计算二重积分  $I = \iint_D y dx dy$  的值.

六、(9分)求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} x^{n-1}$  的收敛域及和函数.

七、(9分)设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数, 当  $x \in (-\pi, \pi]$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$ , 又设

$f(x)$  的Fourier级数展开式为  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 记其和函数为  $S(x)$ ,

求  $a_4$ 、 $S(x)$  在闭区间  $[-\pi, \pi]$  上的表达式及  $S(\frac{10}{3}\pi)$  的值.

八、(9分)设有曲线积分  $I = \oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + 4y^2}$ ，试在以下两种情况下求积分  $I$  的值：

- (1)  $L$  为椭圆  $x^2 + 4y^2 = 1$  的逆时针方向；
- (2)  $L$  为圆  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 36$  的逆时针方向.

九、(9分)利用高斯公式计算第二类曲线积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 + yz)dydz + (y^3 + e^x z)dzdx + (z^3 + 3)xdy, ,$$

其中 $\Sigma$ 为半球面 $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ，积分沿 $\Sigma$ 的上侧.