线性代数
2020-2021 第一学期
矩阵作业解答

黄申为

11月10日

1. 判断命题若$A^2=0$, 则$A=0$是否正确？若正确，请给出证明; 若不正确，请举出反例.

Solution. 命题不成立. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$是一个反例. 还有其他可能的反例.

2. 设A,B都是n阶对称阵, 证明AB是对称矩阵的充分必要条件是$AB=BA$.

Solution. AB是对称阵$\Leftrightarrow (AB)^T=AB \Leftrightarrow B^TA^T=AB \Leftrightarrow BA=AB$, 这里最后一个等价是根据假设条件而得到的.

3. 求所有和$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$可交换的矩阵.

Solution. 设B与A可交换, 即$AB=BA$. 首先, 因为AB与BA有定义, B必为3阶方阵. 设 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$. 对$A$按行分块有$A=(e_2,e_3,0)^T$, 而对$A$按列分块有$A=(0,e_1,e_2)$, 这里$e_i$是第$i$个分量为1的标准单位向量. 注意到$e_i$左乘一个矩阵就是该矩阵的第$i$行, 而$e_i$右乘一个矩阵就是该矩阵的第$i$列. 故$AB=BA$即

$$\begin{pmatrix}b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b_{11}&b_{12}\\0&b_{21}&b_{22}\\0&b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}.$$

从而有$b_{21}=b_{31}=b_{32}=0, b_{11}=b_{22}=b_{33}, b_{12}=b_{23}$. 因此与$A$可交换的矩阵$B$一定是如下形式的上三角阵

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

其中x, y, z为任意的实数.

4. 设$a=(2,1,-3)^T, b=(1,2,4)^T, A=ab^T$. 求$A^{101}$.

Solution. 由矩阵乘法的结合律, 有

$$A^{101}=(ab^T)(ab^T)\cdots(ab^T)=(b^Ta)^{100}(ab^T).$$

由已知有, $b^Ta=(1,2,4)(2,1,-3)^T=-8$且$ab^T=(2,1,-3)^T(1,2,4)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}$, 故

$$A^{101}=8^{100}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. 求$A^n$.

Solution. 不难用归纳法证明 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

6. 设A是n阶方阵且$AA^T=E, |A|=-1$. 证明$|A+E|=0$.

Solution. 由假设条件有

$$\begin{aligned} |A+E| &= |A+AA^T| \\ &= |A(E+A^T)| \\ &= |A(E^T+A^T)| \\ &= |A(E+A)^T| \\ &= |A||E+A| \\ &= -|A+E|, \end{aligned}$$

故$|A+E|=0$.

7. 在课堂中我们给出了矩阵乘法的定义：给定$A=(a_{ij})_{m\times s}$与$B=(b_{ij})_{s\times n}$，我们定义A与B的乘积为 $AB=(c_{ij})_{m\times n}$，其中对任意的$i=1,2,\dots,m$与$j=1,2,\dots,n$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

我们发现在这种定义下矩阵的乘法不满足交换律，也就是说AB不一定等于BA.

现在我们考虑在两个同型矩阵中定义一种乘法. 给定$A=(a_{ij})_{m\times n}$与$B=(b_{ij})_{m\times n}$，请给出一种定义 A和B乘积的方式，记做$A\otimes B$，使得$A\otimes B=B\otimes A$，并简单给出一个这种乘法可能的应用场景.（就好比课本中的乘法定义可以用来计算总收入与总利润或者线性变换的复合.）

Solution. 如下的定义满足交换律：

$$A\otimes B=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中$c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$. 这种乘积叫做矩阵的哈达玛积（Hadamard product）. 由于实数的乘积满足交换律，故哈达玛积满足交换律.

如你发现哈达玛积的应用，请告诉我.

8. 成语覆水难收描述的是矩阵中的什么概念？

Solution. 不可逆矩阵.

9. 写出一个不可逆的二阶非零方阵并说明为什么该方阵不可逆.

Solution. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 是一个不可逆矩阵, 因为$|A|=0$. 还有其他可能答案.

10. 设方阵A满足$A^2-A-2E=0$, 证明A及$A+2E$都可逆, 并求A^{-1}及$(A+2E)^{-1}$.

Solution. 由已知，$\frac{1}{2}A(A-E)=E$. 故由逆矩阵定义, $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$. 注意到$A+2E=A^2$, 故$(A+2E)^{-1}=(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=(\frac{1}{2}(A-E))^2=\frac{1}{4}(A^2-2A+E)=\frac{1}{4}(-A+3E)$.

11. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

Solution. $A* = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

12. 设矩阵A可逆, 证明其伴随矩阵也可逆, 且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Solution. 由伴随矩阵性质, $AA^* = |A|E$. 因为A可逆, 故$A^*\frac{A}{|A|} = E$. 由可逆矩阵定义, $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$. 另一方面, $A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$. 两边同时左乘$A$, $(A^{-1})^* = \frac{A}{|A|}$. 结论得证.

13. 设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*, 证明：

(a) 若$|A| = 0$, 则$|A^*| = 0$;

(b) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

Solution.

(a) 我们用反证法.假设$|A^*| \neq 0$.由伴随矩阵的性质，$AA^* = |A|E = 0$.因为$|A^*| \neq 0$，所以A^*可逆. 在$AA^* = 0$两边同时右乘$(A^*)^{-1}$得$A = 0$.从而$A^* = 0$，与假设矛盾.

(b) 由(a)知，若$|A| = 0$，则等式成立.现假设$|A| \neq 0$.在等式$AA^* = |A|E$两边取行列式，得

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

因为$|A| \neq 0$，所以$|A^*| = |A|^{n-1}$.

14. 设A为3阶方阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求$|(2A)^{-1} - 5A^*|$.

Solution. 注意到，$A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$. 所以，$|(2A)^{-1} - 5A^*| = |\frac{1}{2}A^{-1} - \frac{5}{2}A^{-1}| = | - 2A^{-1}| = (-2)^3\frac{1}{|A|} = -16$.

15. 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solution. 根据矩阵元素的特点, 将两个矩阵都分成4个2×2的矩阵进行计算, 具体计算从略.

16. 设n阶方阵A及s阶方阵B都可逆, 求 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}$.

Solution. $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.