

一. 1. $[2f(a^x) \cdot f'(a^x)a^x \ln a + \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}]dx$

2. 12 4

3. $-2^{n-1} \cos(2x + \frac{n\pi}{2})$

4. $\frac{5}{4\pi} \text{ m/min}$

5. $-1 \quad \frac{2}{3}$

二. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{1}{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2} \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}} = t\sqrt{1+t^2} \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

三. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + (\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} - 1))^{\frac{1}{\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} - 1}}]^{\frac{1}{x}(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} - 1)x} \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$

$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} - 1)x} \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

$= e^{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{x}} - 1)x} \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

$= e^{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} \ln 2) \cdot x} = e^{1 + \ln 2} = 2e \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

四.
$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

由 $f(0+0) = f(0-0) = f(0)$ 得 $a = 0$ (3 分)

当 $x > 0$
$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot x - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2x^2 - (1+x^2)\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$$
(2 分)

当 $x < 0$
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$
(7 分)

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$f'(0)$ 不存在(9 分)

五. 原式
$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \frac{e^{x-\sin x} - 1}{\ln(1+\tan^3 x)}$$
(1 分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \frac{e^{x-\sin x} - 1}{x^3}$$
(3 分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$
(5 分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$
(7 分)

$$= \frac{1}{6}$$
(8 分)

六. 将 (1,-1) 代入 $y = ax^2 + bx$ 得 $a + b = -1$ (1 分)

$xy^3 = 2y + 1$ 两端对 x 求导得 $y^3 + x3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{dx}$ (3 分)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{3xy^2 - 2} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,-1)} = 1$$
(5 分)

由 $y = ax^2 + bx$ 得 $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,-1)} = 2a + b$ (6 分)

故 $2a + b = 1$ (7 分)

解得 $a = 2$ $b = -3$ (9 分)

七. $y_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{27} > y_1$ 设 $y_n > y_{n-1}$

$$\text{则有 } y_{n+1} - y_n = \frac{1}{3}(y_n^2 - y_{n-1}^2) = \frac{1}{3}(y_n + y_{n-1})(y_n - y_{n-1})$$

由定义可知 $y_n > 0$, 故 $y_{n+1} - y_n > 0$ 所以 $\{y_n\}$ 单调增加(3 分)

已知 $0 < y_1 < 1$ 设 $0 < y_n < 1$

$$\text{则有 } y_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{y_n^2}{3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1 \quad \text{所以 } \{y_n\} \text{ 有上界}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在(6 分)

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \quad \text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1} = A \quad \text{由 } y_n = \frac{1}{3} + \frac{y_{n-1}^2}{3} \quad \text{得 } A = \frac{1}{3} + \frac{A^2}{3}$$

$$\text{解得 } A = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{由于 } y_n < 1, \text{ 应有 } A \leq 1 \quad \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{.....(9 分)}$$

八. 设运费为 y $y = (b - a \cdot c \tan \varphi)q + \sqrt{a^2 + a^2 \cdot c \tan^2 \varphi} p$

$$= bq - aq \cdot c \tan \varphi + \frac{ap}{\sin \varphi} \quad \text{.....(3 分)}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = aq \frac{1}{\sin^2 \varphi} - ap \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad \text{.....(6 分)}$$

$$\text{令 } \frac{dy}{d\varphi} = 0 \quad \text{得 } \varphi = \arccos \frac{q}{p} \quad \text{.....(8 分)}$$

由问题的实际意义,, 故当 $\varphi = \arccos \frac{q}{p}$ 时最经济(9 分)

九 证明 1 设 $f(x) = x + \ln(1-x) - x \ln(1-x)$ (1 分)

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{1-x} - \ln(1-x) + \frac{x}{1-x} = -\ln(1-x) \quad \text{.....(3 分)}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \quad \text{得 } x = 0 \quad \text{.....(4 分)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1-x} \quad f''(0) = 1 > 0 \quad \text{故 } f(0) \text{ 是极小值也是最小值.....(7 分)}$$

$$\text{又 } f(0) = 0 \quad \text{故 } \text{当 } x < 1 \quad f(x) \geq 0$$

$$\text{即 } x + \ln(1-x) - x \ln(1-x) \geq 0$$

$$x + \ln(1-x) \geq x \ln(1-x) \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

证明 2 设 $f(x) = x + \ln(1-x) - x \ln(1-x)$ $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{1-x} - \ln(1-x) + \frac{x}{1-x} = -\ln(1-x) \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

当 $0 < x < 1$ $f'(x) > 0$ 故 $f'(x)$ 单调增加,

又 $f(0) = 0$ 故 $f(x) > 0$ $\dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

当 $x < 0$ $f'(x) < 0$ 因此 $f(x)$ 单调减少,

又 $f(0) = 0$ $f(x) > 0$ $\dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

因此当 $x < 1$ 有 $f(x) \geq 0$

即 $x + \ln(1-x) - x \ln(1-x) \geq 0$

$$x + \ln(1-x) \geq x \ln(1-x) \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

十. $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$ 有垂直渐近线 $x = 1, x = -1$ $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$







$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = 0 \text{ 有斜渐近线 } y = x \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$y' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

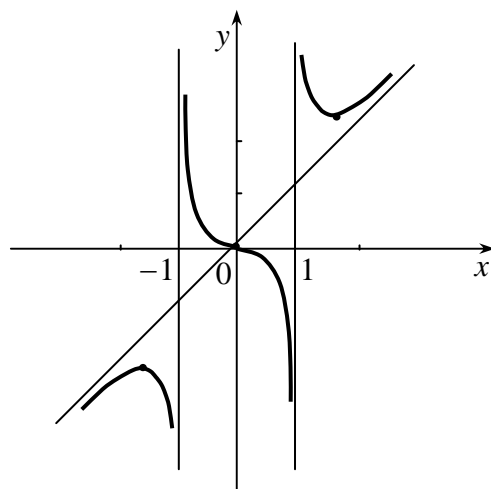
令 $y' = 0$ 得 $x = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$ $\dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ $\dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

| | | | | | | | | | | | |
|-------|---|------------------------------|---|------|---|-------------|---|-----|---|------------------------------|---|
| x | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $-\sqrt{3}$ | $(-\sqrt{3}, -1)$ | -1 | $(-1, 0)$ | 0 | $(0, 1)$ | 1 | $(1, \sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3}, +\infty)$ |
| y' | + | 0 | - | | - | 0 | - | | - | 0 | + |
| y'' | - | | - | | + | 0 | - | | + | | + |
| y |  | 极大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ |  | 间断 |  | 拐点 (0,0) |  | 间断 |  | 极小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ |  |

$\dots\dots\dots(11 \text{ 分})$



.....(13 分)

十一. 令 $F(x) = x^2 f(x)$ (2 分)

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导,

由于 $F(1) = f(1) = 1 > 0$ $F(2) = 4f(2) = -4 < 0$

根据零值定理, 存在 $c \in (1, 2)$, 使 $F(c) = 0$ (5 分)

又 $F(0) = 0$ 根据罗尔定理, $\exists \xi \in (0, c) \subset (0, 2)$ 使 $F'(\xi) = 0$

即 $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$

$$f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}. \quad \text{.....(8 分)}$$