

工科数学分析期中试题

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 九个大题, 试卷后面空白纸撕下做草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{4+x-a}}{x \arctan(x-b)}$, 已知 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=3$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $y = f(\arctan x^2) + \arcsin f^2(x)$, 其中 f 是可导函数, 则

$$dy = \underline{\hspace{4cm}}.$$

3. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = e^{t^2} \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 抛物线 $y = (x-2)^2$ 与 $y = -4 + 6x - x^2$ 的交点的横坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$,
此二曲线在交点处切线的夹角 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知方程 $\sin(xy) + \ln y = x + 1$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $x(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x})$ 是 x 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 阶无穷小, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 四根 10cm 长的木条用铆钉连成活动的菱形, 若一对角线的增长率为 6cm/sec, 则当此
对角线的长为 16cm 时菱形面积的增长率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 反思求导。 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二. (9 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x^2}}$.

三. (9 分) 设 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ (k 为常数), 判断方程 $f(x) = 0$ 有几个实根.

四. (9 分) 设 $x_1 = 1$, $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ ($n = 2, 3, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

五. (11 分) 研究函数 $y = \frac{3x^4 + x^3 + 1}{x^3}$ 的性态, 并画出它的图形.

六. (9 分) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 2}$, 问 a, b 为何值时, $f(x)$ 处处可导.

七. (9 分) 将一盏灯悬挂在半径为 r 的圆桌中心的上方, 问灯的高度 h (相对于桌面)为多少时桌子边上的物体的亮度最好(亮度与光线入射角的余弦成正比, 与离光源距离的平方成反比). (提示: 若 c 与 a 成正比, 与 b 成反比, 则有 $c = k \frac{a}{b}$, 其中 k 是比例系数).

八. (10 分) 证明当 $x > -1$ 时, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

九. (6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($a > 0$) 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$, 证明在 (a, b) 内存在 ξ , 使 $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$.