

工科数学分析期中试题

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 曲线 $y = x^2 + 1$ ($x \geq 0$) 的经过点(0,0)的切线方程为_____.

2. 设 $\arctan \frac{x}{y} = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} =$ _____.

4. 已知曲线 $y = x \cdot 2^{\frac{a-3}{x}}$ 有斜渐近线 $y = x + 2$, 则 $a =$ _____.

5. 设 $y = (\sin x)^x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 则 $y' =$ _____.

二. (8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$.

三. (8 分) 设 $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = t - \arcsin t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

四. (8 分) 设 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} e^{\frac{1}{x-2}}$, 指出 $f(x)$ 的间断点, 并判断是第几类间断点.

五. (9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

六. (9 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\tan^3 x}{x} & x < 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

七. (8 分) 将一半径为 R 的球体切割成一圆锥, 问圆锥的高 h 为多少时可使圆锥的体积最大.

八. (10 分) 证明不等式 $\sin x < x < \sin x + \frac{x^3}{3!}$ ($x > 0$).

九. (12 分) 设 $y = (\frac{1+x}{1-x})^4$, 研究函数的性态, 并作出函数的图形.

十. (9 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有 4 阶导数, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - \cos x}{\sqrt{4 + \ln(1+x^3)} - 2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } f(0), f'(0), f''(0), f'''(0).$$

十一. (9 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.