06 数学分析第一学期期末试题(A)参考解答 (2007.1)

一. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}$ ……………………………(2 分)

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=9$, ……………………………(5 分)

$2a=\ln 9$, $a=\ln 3$. ……………………………(6 分)

2. $t=\frac{\pi}{3}$ 时, $x=-\ln 2$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$, ……………………………(1 分)

$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\frac{\sin t}{\cos t}}=-t\cos t$, ……………………………(4 分)

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6}$, ……………………………(5 分)

切线方程 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}(x+\ln 2)$. ……………………………(6 分)

3. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ ……………………………(2 分)

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$. ……………………………(6 分)

4. 解 1 令 $t=\arcsin x$, 原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\sin t dt$ ……………………………(2 分)

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{6}}td\cos t=-2(t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos tdt)$ ……………………(5 分)

$=-2(\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}})=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ ……………………………(6 分)

解 2 原式 $=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$ ………………(2 分)

$=-2(\arcsin x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}dx)$ ……………………………(5 分)

$=-2(\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}-x\Big|_0^{\frac{1}{2}})=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. ……………………………(6 分)

二. 1. $y' = 2xe^{y} + x^{2}e^{y}y'$, ……………………………….(2 分)

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$, ………………………………..(3 分)

代入已知方程得 $y = 1$, ………………………………...(4 分)

$y'' = 2e^{y} + 2xe^{y}y' + 2xe^{y}y' + x^{2}e^{y}(y')^{2} + x^{2}e^{y}y''$, ………………..(2 分)

$\because y''\big|_{x=0} = 2e > 0$, 故 $y\big|_{x=0} = 1$是极小值. ……….……………….…(7 分)

2. $\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}\int \arctan x d(x^{2})$ ……………………………(1 分)

$= \frac{1}{2}(x^{2}\arctan x - \int \frac{x^{2}}{1+x^{2}}dx)$ ……...……………………(4 分)

$= \frac{1}{2}(x^{2}\arctan x - \int (1 - \frac{1}{1+x^{2}})dx)$ ……………………….……(6 分)

$= \frac{1}{2}(x^{2}\arctan x - x + \arctan x) + C$. ………………….....……..(7 分)

3. $y_{2} - y_{1} = 3e^{x} - x$ 与 $y_{3} - y_{1} = -e^{x} + x$ ………..………………(2 分)

通解为 $y = C_{1}e^{x} + C_{2}x - x^{2}$. …………..……………(7 分)

4. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^{2}} - a}{x^{2}}\exists$, 得 $a = 1$, ……………………….(1 分)

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^{2}} - a}{x^{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^{2}} - 1}{x^{2}} = 1$,

所以 $b = 1$, …………………………(2 分)

当 $x \neq 0$, $f'(x) = (\frac{e^{x^{2}} - 1}{x^{2}})'$

$= \frac{2xe^{x^{2}}x^{2} - (e^{x^{2}} - 1)\cdot 2x}{x^{4}} = \frac{2x^{2}e^{x^{2}} - 2e^{x^{2}} + 2}{x^{3}}$, …………………(5 分)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^{2}} - 1}{x^{2}} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^{2}} - 1 - x^{2}}{x^{3}}$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^{2}} - 2x}{3x^{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x^{2}} - 2}{3x} = 0$. …………………...(7 分)

三. $y'=12x^3-12x^2-24x=12x(x-2)(x+1)$， ……………….…..(2 分)

当 $x\in(0,3)$，令 $y'=0$， 得 $x=2$， …………………..(3 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内单调, ……………………(4 分)

又 $y(0)=10>0$，$y(2)=-22<0$，$y(3)=37>0$ …………...……….(6 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内各有一个零点，故在 $(0,3)$ 内有两个零点…..…….(7 分)

四. $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$，

$f''(x)+f(x)=2e^x$， ………………………….(1 分)

$f(0)=0$， $f'(0)=g(0)=2$， …………………………..(2 分)

$r^2+1=0$， $r=\pm i$，

$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$， …………………………..(4 分)

设 $f^*(x)=Ae^x$，代入方程得 $A=1$， $f^*(x)=e^x$,…………………….(6 分)

通解 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$， ………………………..…(7 分)

由初始条件得 $C_1=-1$，$C_2=1$，

$f(x)=-\cos x+\sin x+e^x$. …………...……………….(8 分)

五. 令 $F(x)=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}dt$，

$F'(x)=\arcsin\sin x\cdot 2\sin x\cos x+\arccos\cos x\cdot(-2)\cos x\sin x$

$=2x\sin x\cos x-2x\cos x\sin x=0$， …………………….(3 分)

故 $F(x)=C$， ……………………..(4分)

又 $F(0)=\int_0^1\arccos\sqrt{t}dt$ (令 $\arccos\sqrt{t}=u$) ………………...(5 分)

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}ud\cos^2 u$

$=-u\cos^2 u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore C=\frac{\pi}{4}$. …………………….(7 分)

六. $\int_1^t \pi f^2(x)dx=\pi[t^2 f^2(t)-f^2(1)]$, ……………………………(3 分)

对 t 求导得 $f^2(t)=2tf^2(t)+2t^2 f(t)f'(t)$, ……………………………(5 分)

$f'(t)=\frac{1-2t}{2t^2}f(t)$, $\frac{df(t)}{f(t)}=(\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{t})dt$, ……………………………(8 分)

$\ln|f(t)|=-\frac{1}{2t}-\ln t+C_1$,

$f(x)=Ce^{-\frac{1}{2x}-\ln x}=\frac{C}{x}e^{-\frac{1}{2x}}$. ……………………………(10 分)

七. 设 t 时刻含盐量为 $m(t)$ 克，则

$dm=4\times 5dt-\frac{m}{100}\cdot 5dt$, ……………………………(3 分)

$\begin{cases}\frac{dm}{dt}+\frac{m}{20}=20\\ m(0)=0\end{cases}$, ……………………………(4 分)

通解为 $m(t)=Ce^{-\frac{t}{20}}+400$, ……………………………(7 分)

由初始条件得 $C=-400$,

$\therefore m(t)=400(1-e^{-\frac{t}{20}})$. ……………………………(8 分)

八. (1) 由于 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{x})}{\sin x}=3$，所以 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$, ……………………………(1 分)

故 $f(0)=0$, $f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$; ……………………………(3 分)

(2) 令 $F(x)=f'(x)e^x$, ……………………………(4 分)

根据积分中值定理，$\exists c\in[1,2]$，使

$f(c)=\int_1^2 f(x)dx=0$, ……………………………(5 分)

由洛尔定理，$\exists c_1\in(0,c)$，使 $f'(c_1)=0$, ……………………………(6 分)

$\therefore F(0)=F(c_1)$,

由洛尔定理，$\exists \xi\in(0,c_1)\subset(0,2)$，使 $F'(\xi)=0$,

即 $f''(\xi)e^{\xi}+f'(\xi)e^{\xi}=0$,

$f'(\xi)+f''(\xi)=0$. ……………………………(8 分)