2014 级《微积分 A》期末试卷(A)

评分标准与试题答案

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1. $5x+11y+z-4=0$;　2. $dz=\dfrac{\cos xdx+3dy}{1+e^z}$　3. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$;　4. $=\dfrac{4}{15}\pi$.

5. $div(gradu)=y(y-1)x^{y-2}z+x^y z\ln^2 x$;　6. $\frac{a}{(1-a)^2}$　7. π^2-1

二、$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ ……………………………………………..2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x^3}$ …………………………………………………………………3 分

$=2$ …………………………………………………………………4 分

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y,0)-f(0,0)}{y-0}$ ……………………………………………..6 分

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-3y^3}{y^3}$ ………………………………………………………………7 分

$=-3$ ………………………………………………………………8 分

三、令 $D_1=\left\{(\rho,\theta)\middle|-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}\right\}$,　$D_2=\{(\rho,\theta)|\dfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{7\pi}{4}\}$ …..2 分

$\iint_D|x+y|dxdy=\iint_{D_1}|x+y|dxdy+\iint_{D_2}|x+y|dxdy$

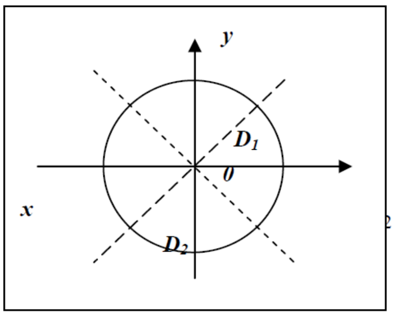
$=\iint_{D_1}(x+y)dxdy-\iint_{D_2}(x+y)dxdy$ ……………………….………5 分

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^1(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\theta\int_0^1(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ……………………………………………………………7 分

$=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ ……………………………………………………..……….8 分.

或者利用对称性（如图所示），简化计算得出结果，同样给分。



四、$y'=\dfrac{2x}{1+x^4}$ …………………………………………………………1 分

$=2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{4n+1}$，$x\in(-1,1)$ ……………3 分.

$y=\int_0^x y'dx+y(0)$ ……………………………………………………4 分

$=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{4n+1}\,dx+0$

$=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\int_0^x x^{4n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\dfrac{1}{4n+2}x^{4n+2}$ ……………6 分

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{4n+2}$，$x\in(-1,1)$ ……………7 分

当$x=-1,x=1$ 时，上式也满足，即 $x\in[-1,1]$ ………………8 分

五、由$dz=2xdx-2ydy$ 得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ ……………………1 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，得: $z=x^2+\varphi(y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y)=-2y$, 得: $\varphi(y)=-y^2+C$, 将 $f(1,1)=1$ 代入，得$C=2$.

即，$z=x^2-y^2+2$ ……………………………………………………3 分

由，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得唯一驻点$M_1(0,0)$ ……………………………4 分

将边界：$y^2=4-4x^2$，代入得: $z=5x^2-2$，$x\in[-1,1]$

得可能的最值点有：$M_2(0,2),M_3(0,-2),M_4(-1,0),M_4(1,0)$,

$f(0,0)=2,f(0,2)=f(0,-2)=-2,f(-1,0)=f(1,0)=3$ ……..7 分

比较上述各点对应的函数值，知最大值为：3, 最小值为 − 2, ..8 分

六、$X = x^2y^3 + 2x^5 + ky, \quad Y = xf(xy) + 2y$,由题意，有

$\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$， 即 $3x^2y^2 + k = f(xy) + xyf'(xy)$； ……. 2 分

记 $u = xy$,有 $f'(u) + \dfrac{1}{u}f(u) = 3u + \dfrac{k}{u}$ ……. 3 分

解得： $f(u) = u^2 + k + \dfrac{C}{u}$. (1) ……. 5 分

选择折线路径:$(0,0) \to (t,0) \to (t,-t)$,则有

$$\int_0^t 2x^5 dx + \int_0^{-t}[tf(ty) + 2y]dy = 2t^2$$

即:$\dfrac{t^6}{3} + \int_0^{-t^2} f(u)du = t^2$

对t求导，得$f(-t^2) = -1 + t^4$，令$u = -t^2$,得 $f(u) = u^2 - 1$.

与(1)式比较得：$k = -1, C = 0$. …………. 6 分

因为存在函数 $u(x,y)$，使得：

$du(x,y) = (x^2y^3 + 2x^5 - y)dx + (xf(xy) + 2y)dy$， 而，

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2y^3 + 2x^5 - y)dx + [xf(xy) + 2y]dy$$

$$= \int_0^x 2x^5 dx + \int_0^y (x^3y^2 - x + 2y)dy$$

$= \dfrac{1}{3}x^6 + \dfrac{1}{3}x^3y^3 - xy + y^2$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … ..9 分

故此全微分的原函数为:$u(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3y^3 + \dfrac{1}{3}x^6 - xy + y^2 + C$.…. 10 分

（注：用其他方法，如拼凑法，求原函数，同样是可行的。）

七、添加辅助曲面 S_1: $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$,取下侧 ………………………………………… 1 分

记 $X=xz, Y=2yz, Z=3xy$,　　则，$\dfrac{\partial X}{\partial x}=z, \dfrac{\partial Y}{\partial y}=2z, \dfrac{\partial Z}{\partial z}=0$ ………..3 分

由 Gauss 公式，$\iint_S \quad = \iint_{S+S_1} \quad - \iint_{S_1}$ ……………………………………..4 分

$= \iiint_V 3zdv - \iint_{S_1} xzdydz + 2yzdzdx + 3xydxdy$ ……………………..7 分

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho^2} 3zdz - \iint_{S_1} 3xydxdy$ ……………………………….9 分

$= \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$ …………………………………………….………………………….10 分

八、此级数为正项级数，$u_n = \dfrac{1}{n\ln^p n}$,　　设 $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^p x}$ ……………..1 分

考虑广义积分，$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x} dx$

当$p=1$ 时，$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d\ln x = \ln(\ln x)\ |_2^{+\infty} = +\infty$

即当$p=1$ 时，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ 发散 ……………………………………………….5 分

当$p\ne 1$ 时，$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln^p x} d\ln x$

$= \dfrac{1}{1-p}(\ln^{1-p} x)\ |_2^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & p<1 \\ \dfrac{1}{1-p}\ln^{1-p} 2 & p>1 \end{cases}$ ………………………..9 分

由积分判别法知，当$p\le 1$，原级数发散，当 $p>1$，原级数收敛 ………10 分

九、由对称性知：$F_x = F_y = 0$， ……………………..……………2 分

$$\mathrm{d}F_z = \frac{km\mu_0 z\mathrm{d}S}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$ ………………………………………………5 分

其中 $\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……….…8 分

Σ 在 xOy 面上的投影为 $D = \left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \le 1\right\}$，

$$F_z = \iint_\Sigma \frac{km\mu_0 z\mathrm{d}S}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = km\mu_0 \iint_\Sigma z\mathrm{d}S = km\mu_0 \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = km\mu_0\pi$$ ……10 分