线性代数第十二讲

吴民

南开大学 信息学院

November 27, 2013

二次型

二次型是n元二次齐次多项式。

二次型

二次型是n元二次齐次多项式。

齐次是指多项式所有项的次数相同。

二次型

二次型是n元二次齐次多项式。

齐次是指多项式所有项的次数相同。

设其变元为$x_1, x_2, \ldots, x_n$，则和式中所有的项只可能为

x_1^2, x_1x_2, $\ldots$, x_1x_n, x_2^2, x_2x_3, $\ldots$, x_2x_n,

x_3^2, x_3x_4 $\ldots$, x_{n-1}^2, $x_{n-1}x_n$, x_n^2 中的某一个。

二次型

二次型是n元二次齐次多项式。

齐次是指多项式所有项的次数相同。

设其变元为$x_1, x_2, \ldots, x_n$，则和式中所有的项只可能为

x_1^2, x_1x_2, $\ldots$, x_1x_n, x_2^2, x_2x_3, $\ldots$, x_2x_n,

x_3^2, x_3x_4 $\ldots$, x_{n-1}^2, $x_{n-1}x_n$, x_n^2 中的某一个。

二次型的一般形式：

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =& a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdot + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

二次型

限定数域为实数域，称为n元实二次型。

二次型

限定数域为实数域，称为n元实二次型。

定义$A=(a_{ij})$和$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

二次型

限定数域为实数域，称为n元实二次型。

定义$A=(a_{ij})$和$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$，

则$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$，

二次型

限定数域为实数域，称为n元实二次型。

定义$A=(a_{ij})$和$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$，

则$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$，

即将二次型写为矩阵乘积的形式。

二次型

限定数域为实数域，称为n元实二次型。

定义$A=(a_{ij})$和$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

则$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$，

即将二次型写为矩阵乘积的形式。

其中拆项是把那些交叉项平分为两项。保证了最后得到的矩阵A是实对称矩阵。

二次型

限定数域为实数域，称为n元实二次型。

定义$A=(a_{ij})$和$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$,

即将二次型写为矩阵乘积的形式。

其中拆项是把那些交叉项平分为两项。保证了最后得到的矩阵A是实对称矩阵。

矩阵乘积形式，特别是A，是被二次型所唯一确定。

二次型

给出对称矩阵A，则由$X^{\mathrm{T}}AX$又得到二次型。

二次型

给出对称矩阵A，则由$X^{\mathrm{T}}AX$又得到二次型。

所以，对称矩阵A 称为**二次型**$f(x_1, \ldots, x_n)$**的矩阵**。

二次型

给出对称矩阵A，则由$X^{\mathrm{T}}AX$又得到二次型。

所以，对称矩阵A 称为**二次型**$f(x_1,\ldots,x_n)$**的矩阵**。

矩阵A的秩**定义**为二次型$f(x_1,\ldots,x_n)$的秩。

二次型

给出对称矩阵A，则由$X^{\mathrm{T}}AX$又得到二次型。

所以，对称矩阵A 称为**二次型**$f(x_1,...,x_n)$**的矩阵**。

矩阵A的秩**定义**为二次型$f(x_1,...,x_n)$的秩。

$x_1,...,x_n$和$y_1,...,y_n$是两组变量，数域P中的一组关系式：

$$\begin{cases} x_1 & = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 & = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ & \ldots \\ x_n & = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \end{cases}$$

称为由$x_1,...,x_n$到$y_1,...,y_n$的线性替换。

如果行列式$\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

二次型

如果行列式$\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为$X = CY$。

二次型

如果行列式$\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为$X = CY$。

要作非退化线性替换。

二次型

如果行列式$\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为$X = CY$。

要作非退化线性替换。

线性替换后得到的仍是二次型。

$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y,$

还可以从二次型的一般形式中验证。

二次型

如果行列式$\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为$X = CY$。

要作非退化线性替换。

线性替换后得到的仍是二次型。

$f(x_1, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y,$

还可以从二次型的一般形式中验证。

$C^{\mathrm{T}}AC$是对称矩阵，

如果行列式$\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为$X = CY$。

要作非退化线性替换。

线性替换后得到的仍是二次型。

$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y,$

还可以从二次型的一般形式中验证。

$C^{\mathrm{T}}AC$是对称矩阵，

所以线性替换后得到的二次型的矩阵是$C^{\mathrm{T}}AC$。

如果行列式$\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和$C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为$X = CY$。

要作非退化线性替换。

线性替换后得到的仍是二次型。

$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y$,

还可以从二次型的一般形式中验证。

$C^{\mathrm{T}}AC$是对称矩阵，

所以线性替换后得到的二次型的矩阵是$C^{\mathrm{T}}AC$。

定理：二次型$X^{\mathrm{T}}AX$经过非退化线性替换$X = CY$化为二次型$Y^{\mathrm{T}}BY$，其中$B = C^{\mathrm{T}}AC$。

二次型

定义：数域**P**上的$n \times n$矩阵A, B。如果存在数域**P**上的可逆矩阵C，使$B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

定义：数域**P**上的$n \times n$矩阵A, B。如果存在数域**P**上的可逆矩阵C, 使$B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

合同关系具有：

二次型

定义：数域**P**上的$n \times n$矩阵A, B。如果存在数域**P**上的可逆矩阵C, 使$B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。

二次型

定义：数域$\mathbf{P}$上的$n \times n$矩阵A, B。如果存在数域$\mathbf{P}$上的可逆矩阵C, 使$B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A与自身合同，因为$A = E^{\mathrm{T}}AE$。

定义：数域**P**上的$n \times n$矩阵A, B。如果存在数域**P**上的可逆矩阵C, 使$B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A与自身合同，因为$A = E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若A与B合同，则B与A也合同。

定义：数域**P**上的$n \times n$矩阵A, B。如果存在数域**P**上的可逆矩阵C, 使$B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A与自身合同，因为$A = E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若A与B合同，则B与A也合同。

  因为若$B = C^{\mathrm{T}}AC$, 则$A = (C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$。

定义：数域**P**上的$n \times n$矩阵A, B。如果存在数域**P**上的可逆矩阵C, 使$B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A与自身合同，因为$A = E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若A与B合同，则B与A也合同。

  因为若$B = C^{\mathrm{T}}AC$, 则$A = (C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$。
- 传递性。A_1与A_2合同，A_2与A_3合同，则A_1与A_3合同。

定义：数域**P**上的$n\times n$矩阵A,B。如果存在数域**P**上的可逆矩阵C, 使$B=C^{\mathrm{T}}AC$，则称A与B是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A与自身合同，因为$A=E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若A与B合同，则B与A也合同。

  因为若$B=C^{\mathrm{T}}AC$, 则$A=(C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$。
- 传递性。A_1与A_2合同，A_2与A_3合同，则A_1与A_3合同。

  因为若$A_1=C_1^{\mathrm{T}}AC_1$和$A_2=C_2^{\mathrm{T}}A_1C_2$，

  则$A_2=C_2^{\mathrm{T}}A_1C_2=C_2^{\mathrm{T}}(C_1^{\mathrm{T}}AC_1)C_2=(C_1C_2)^{\mathrm{T}}A(C_1C_2)$。

定义：如果两个二次型$X^{\mathrm{T}}AX$和$Y^{\mathrm{T}}BY$可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

二次型

定义：如果两个二次型$X^{\mathrm{T}}AX$和$Y^{\mathrm{T}}BY$可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个n元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

定义：如果两个二次型$X^{\mathrm{T}}AX$和$Y^{\mathrm{T}}BY$可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个n元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个n元二次型等价，那么它们有相同的秩。

定义：如果两个二次型$X^{\mathrm{T}}AX$和$Y^{\mathrm{T}}BY$可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个n元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个n元二次型等价，那么它们有相同的秩。

将一个二次型$f(x_1,\dots,x_n)$经过非退化线性替换后化成平方和的形式，则这个平方和就叫做$f(x_1,\dots,x_n)$的**标准形**。

二次型

定义：如果两个二次型$X^{\mathrm{T}}AX$和$Y^{\mathrm{T}}BY$可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个n元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个n元二次型等价，那么它们有相同的秩。

将一个二次型$f(x_1,...,x_n)$经过非退化线性替换后化成平方和的形式，则这个平方和就叫做$f(x_1,...,x_n)$的**标准形**。

标准形的矩阵为对角形矩阵。

定义：如果两个二次型$X^{\mathrm{T}}AX$和$Y^{\mathrm{T}}BY$可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个n元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个n元二次型等价，那么它们有相同的秩。

将一个二次型$f(x_1,...,x_n)$经过非退化线性替换后化成平方和的形式，则这个平方和就叫做$f(x_1,...,x_n)$的**标准形**。

标准形的矩阵为对角形矩阵。

所以标准形的秩等于其非0平方项的个数。

二次型

定理：任意二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$必可经过非退化线性替换$X=CY$化成标准形，其中$r$为$f(x_1,\ldots,x_n)$的秩：

$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：任意二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$必可经过非退化线性替换$X=CY$化成标准形，其中$r$为$f(x_1,\ldots,x_n)$的秩：

$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域P上，任意一个对称矩阵$A=(a_{ij})$都合同于一个对角矩阵。即存在可逆矩阵C，使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

二次型

定理：任意二次型$f(x_1,\dots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$必可经过非退化线性替换$X=CY$化成标准形，其中$r$为$f(x_1,\dots,x_n)$的秩：

$f(x_1,\dots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域P上，任意一个对称矩阵$A=(a_{ij})$都合同于一个对角矩阵。即存在可逆矩阵C，使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

C为可逆矩阵，所以C可表示为一系列初等矩阵的乘积：

$C=E_1E_2\cdots E_t,$

定理：任意二次型$f(x_1,\dots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$必可经过非退化线性替换$X=CY$化成标准形，其中$r$为$f(x_1,\dots,x_n)$的秩：

$f(x_1,\dots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域P上，任意一个对称矩阵$A=(a_{ij})$都合同于一个对角矩阵。即存在可逆矩阵C，使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

C为可逆矩阵，所以C可表示为一系列初等矩阵的乘积：

$C=E_1E_2\cdots E_t$，

所以$C^{\mathrm{T}}AC=(E_1E_2\cdots E_t)^{\mathrm{T}}A(E_1E_2\cdots E_t)$

定理：任意二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$必可经过非退化线性替换$X=CY$化成标准形，其中$r$为$f(x_1,\ldots,x_n)$的秩：

$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域P上，任意一个对称矩阵$A=(a_{ij})$都合同于一个对角矩阵。即存在可逆矩阵C，使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

C为可逆矩阵，所以C可表示为一系列初等矩阵的乘积：

$C=E_1E_2\cdots E_t,$

所以$C^{\mathrm{T}}AC=(E_1E_2\cdots E_t)^{\mathrm{T}}A(E_1E_2\cdots E_t)$

$$=E_t^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}AE_1E_2\cdots E_t=E_t^{\mathrm{T}}\cdots[E_2^{\mathrm{T}}(E_1^{\mathrm{T}}AE_1)E_2]\cdots E_t,$$

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行E_j^{T}对应的行初等变换所得到的矩阵。

二次型

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行E_j^{T}对应的行初等变换所得到的矩阵。

E_j^{T}对应的行初等变换与E_j对应的列初等变换之间有对应关系。

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行E_j^{T}对应的行初等变换所得到的矩阵。

E_j^{T}对应的行初等变换与E_j对应的列初等变换之间有对应关系。

所以$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行相应的行初等变换。

二次型

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行E_j^{T}对应的行初等变换所得到的矩阵。

E_j^{T}对应的行初等变换与E_j对应的列初等变换之间有对应关系。

所以$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行相应的行初等变换。

将这种先后作两个行和与之相应的列初等变换的对矩阵的操作称为行列初等变换。

二次型

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行E_j^{T}对应的行初等变换所得到的矩阵。

E_j^{T}对应的行初等变换与E_j对应的列初等变换之间有对应关系。

所以$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$是对A先进行E_j对应的列初等变换，再进行相应的行初等变换。

将这种先后作两个行和与之相应的列初等变换的对矩阵的操作称为行列初等变换。

所以前面定理等价于：

定理：任意一个对称矩阵都可经过一系列的行列初等变换化成对角形矩阵。

二次型

证明：分情况施行以下行列初等变换，可将A的第1行和第1列中，只有a_{11}可能非0，其它元素都为0：

- 若$a_{11} \neq 0$，则对第j行，$j = 2, \ldots, n$，将A的第1行乘以$-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$加到第j行，再作相应的列变换。

证明：分情况施行以下行列初等变换，可将A的第1行和第1列中，只有a_{11}可能非0，其它元素都为0：

- 若$a_{11} \neq 0$，则对第j行，$j = 2, \ldots, n$，将A的第1行乘以$-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$加到第j行，再作相应的列变换。
- 当$a_{11} = 0$，则若某个$a_{jj} \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。则交换第1行与第j行，再交换第1列与第j列，如此得到的矩阵即满足$a_{11} \neq 0$。以下按前面的方法处理。

证明：分情况施行以下行列初等变换，可将A的第1行和第1列中，只有a_{11}可能非0，其它元素都为0：

- 若$a_{11} \neq 0$，则对第j行，$j = 2, \ldots, n$，将A的第1行乘以$-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$加到第j行，再作相应的列变换。
- 当$a_{11} = 0$，则若某个$a_{jj} \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。则交换第1行与第j行，再交换第1列与第j列，如此得到的矩阵即满足$a_{11} \neq 0$。以下按前面的方法处理。
- 当$a_{11} = 0$, 且$a_{jj} = 0$，$j = 1, \ldots, n$。但某对$a_{1i} = a_{i1} \neq 0$。则将第i行加到第1行上，再将第i列加到第1列上，如此得到的矩阵即满足$a_{11} \neq 0$。以下按(1)中的方法处理。

当实现了第1行与第1列只有a_{11}可能非0后，可再用以上办法处理A的由第2行至第n行、第2列至第n列构成的分块矩阵。如此下去，就将A经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

当实现了第1行与第1列只有a_{11}可能非0后，可再用以上办法处理A的由第2行至第n行、第2列至第n列构成的分块矩阵。如此下去，就将A经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将A经行列初等变换的过程求出C？

当实现了第1行与第1列只有a_{11}可能非0后，可再用以上办法处理A的由第2行至第n行、第2列至第n列构成的分块矩阵。如此下去，就将A经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将A经行列初等变换的过程求出C？

注意到$C = E_1E_2\cdots E_t$，

当实现了第1行与第1列只有a_{11}可能非0后，可再用以上办法处理A的由第2行至第n行、第2列至第n列构成的分块矩阵。如此下去，就将A经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将A经行列初等变换的过程求出C？

注意到$C = E_1E_2\cdots E_t$，

$C = EE_1\cdots E_t$，说明对E进行处理A矩阵所使用的那一系列行列初等变换中的列初等变换，就得到C。

二次型

当实现了第1行与第1列只有a_{11}可能非0后，可再用以上办法处理A的由第2行至第n行、第2列至第n列构成的分块矩阵。如此下去，就将A经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将A经行列初等变换的过程求出C?

注意到$C = E_1 E_2 \cdots E_t$,

$C = EE_1 \cdots E_t$，说明对E进行处理A矩阵所使用的那一系列行列初等变换中的列初等变换，就得到C。

所以写法是将A与E构造成$2n \times n$矩阵，作行列初等变换。当上半部分变为对角形矩阵时，下半部分就是矩阵C。

再根据C写出非退化线性替换$X = CY$。

再根据C写出非退化线性替换$X=CY$。

书上的练习。

再根据C写出非退化线性替换$X = CY$。

书上的练习。

当把实二次型化为标准形，也就是平方和后，可再通过适当的非退化线性替换，将每个系数不为0的平方和的系数变为$+1$或-1。

这就得到二次型的所谓**规范形**。

再根据C写出非退化线性替换$X = CY$。

书上的练习。

当把实二次型化为标准形，也就是平方和后，可再通过适当的非退化线性替换，将每个系数不为0的平方和的系数变为$+1$或-1。

这就得到二次型的所谓**规范形**。

复数域上的二次型的规范形，平方项的系数是0或1。

再根据C写出非退化线性替换$X = CY$。

书上的练习。

当把实二次型化为标准形，也就是平方和后，可再通过适当的非退化线性替换，将每个系数不为0的平方和的系数变为$+1$或-1。

这就得到二次型的所谓**规范形**。

复数域上的二次型的规范形，平方项的系数是0或1。

定理：一个二次型$f(x_1, \ldots, x_n)$化为规范形时，系数为$+1$的项的个数是唯一确定的，系数为-1的项的个数也是唯一确定的。

再根据C写出非退化线性替换$X=CY$。

书上的练习。

当把实二次型化为标准形，也就是平方和后，可再通过适当的非退化线性替换，将每个系数不为0的平方和的系数变为$+1$或-1。

这就得到二次型的所谓**规范形**。

复数域上的二次型的规范形，平方项的系数是0或1。

定理：一个二次型$f(x_1,\dots,x_n)$化为规范形时，系数为$+1$的项的个数是唯一确定的，系数为-1的项的个数也是唯一确定的。

此定理称为惯性定理。

证明：设$f(x_1,\ldots,x_n)$经过非退化线性替换$X=CY$化成规范形

$$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

其中r为f的秩。

证明：设$f(x_1,\ldots,x_n)$经过非退化线性替换$X=CY$化成规范形

$$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

其中r为f的秩。

又$f(x_1,\ldots,x_n)$经另一非退化线性替换$X=DZ$化成规范形

$$f(x_1,\ldots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

证明：设$f(x_1,\dots,x_n)$经过非退化线性替换$X=CY$化成规范形

$f(x_1,\dots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,

其中r为f的秩。

又$f(x_1,\dots,x_n)$经另一非退化线性替换$X=DZ$化成规范形

$f(x_1,\dots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$,

因非退化线性替换不改变二次型的秩，所以两个规范形都有r个非0项。要证明的是$p=q$。

证明：设$f(x_1,...,x_n)$经过非退化线性替换$X=CY$化成规范形

$$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

其中r为f的秩。

又$f(x_1,...,x_n)$经另一非退化线性替换$X=DZ$化成规范形

$$f(x_1,\ldots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

因非退化线性替换不改变二次型的秩，所以两个规范形都有r个非0项。要证明的是$p=q$。

反证法。如果$p<q$。由$X=CY$与$X=DZ$有$Y=C^{-1}DZ$。

证明：设$f(x_1,\ldots,x_n)$经过非退化线性替换$X=CY$化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,

其中r为f的秩。

又$f(x_1,\ldots,x_n)$经另一非退化线性替换$X=DZ$化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$,

因非退化线性替换不改变二次型的秩，所以两个规范形都有r个非0项。要证明的是$p=q$。

反证法。如果$p<q$。由$X=CY$与$X=DZ$有$Y=C^{-1}DZ$。

记$C^{-1}D=(g_{ij})$，则$Y=C^{-1}DZ$即写为

二次型

$$\begin{cases} y_1 & = g_{11}z_1 + g_{12}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n \\ y_2 & = g_{21}z_1 + g_{22}z_2 + \cdots + g_{2n}z_n \\ & \cdots \\ y_n & = g_{n1}z_1 + g_{n2}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n \end{cases}$$

二次型

$$
\begin{cases}
y_1 &= g_{11}z_1 + g_{12}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n \\
y_2 &= g_{21}z_1 + g_{22}z_2 + \cdots + g_{2n}z_n \\
 & \ldots \\
y_n &= g_{n1}z_1 + g_{n2}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n
\end{cases}
$$

构造齐次线性方程组：
$$
\begin{cases}
g_{11}z_1 + g_{12}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n = 0 \\
\ldots \\
g_{p1}z_1 + g_{p2}z_2 + \cdots + g_{pn}z_n = 0 \\
z_{q+1} = 0 \\
\ldots \\
z_n = 0
\end{cases}
$$

二次型

此方程组的前p个方程就是$0 = C^{-1}DZ$中的前p个式子，

二次型

此方程组的前p个方程就是$0 = C^{-1}DZ$中的前p个式子，

后$n-q$个方程限定了若干个z_j为0。

此方程组的前p个方程就是$0 = C^{-1}DZ$中的前p个式子，

后$n-q$个方程限定了若干个z_j为0。

此方程组所含方程的个数为$p+n-q<n$，

此方程组的前p个方程就是$0=C^{-1}DZ$中的前p个式子，

后$n-q$个方程限定了若干个z_j为0。

此方程组所含方程的个数为$p+n-q<n$，

因此此方程组有非0解。

此方程组的前p个方程就是$0 = C^{-1}DZ$中的前p个式子，

后$n-q$个方程限定了若干个z_j为0。

此方程组所含方程的个数为$p+n-q<n$，

因此此方程组有非0解。

设其一个非0解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_q & z_{q+1} & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_q & k_{q+1} & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

此方程组的前p个方程就是$0 = C^{-1}DZ$中的前p个式子，

后$n-q$个方程限定了若干个z_j为0。

此方程组所含方程的个数为$p+n-q<n$，

因此此方程组有非0解。

设其一个非0解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_q & z_{q+1} & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_q & k_{q+1} & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$k_{q+1} = \cdots = k_n = 0$。

此方程组的前p个方程就是$0=C^{-1}DZ$中的前p个式子，

后$n-q$个方程限定了若干个z_j为0。

此方程组所含方程的个数为$p+n-q<n$，

因此此方程组有非0解。

设其一个非0解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_q & z_{q+1} & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_q & k_{q+1} & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$k_{q+1}=\cdots=k_n=0$。

所以$k_1,\dots,k_q$不全为0。

此方程组的前p个方程就是$0 = C^{-1}DZ$中的前p个式子，

后$n-q$个方程限定了若干个z_j为0。

此方程组所含方程的个数为$p+n-q<n$，

因此此方程组有非0解。

设其一个非0解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_q & z_{q+1} & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_q & k_{q+1} & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$k_{q+1} = \cdots = k_n = 0$。

所以$k_1, \dots, k_q$不全为0。

将这组数代入z所表达的规范形，得

$f(x_1, \dots, x_n) = k_1^2 + \cdots + k_q^2 > 0,$

二次型

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$l_1 = \cdots = l_p = 0$,

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$l_1 = \cdots = l_p = 0$,

将这组l带入y所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组l带入y所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以$p < q$不成立。

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组l带入y所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以$p < q$不成立。

同理可证$p > q$也不成立。所以$p = q$。

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组l带入y所表达的规范形，得

$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0$,

与前式矛盾。所以$p < q$不成立。

同理可证$p > q$也不成立。所以$p = q$。

正平方和的个数称为该二次型的**正惯性指数**;

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组l带入y所表达的规范形，得

$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0$，

与前式矛盾。所以$p < q$不成立。

同理可证$p > q$也不成立。所以$p = q$。

正平方和的个数称为该二次型的**正惯性指数**；

负平方和的个数称为该二次型的**负惯性指数**。

而z取这组k值时，对应的y值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知$l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组l带入y所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以$p < q$不成立。

同理可证$p > q$也不成立。所以$p = q$。

正平方和的个数称为该二次型的**正惯性指数**;

负平方和的个数称为该二次型的**负惯性指数**。

正惯性指数减负惯性指数为**符号差**。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵A称为**正定矩阵**。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵A称为**正定矩阵**。

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵A称为**正定矩阵**。

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵A称为**负定矩阵**。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵A称为**正定矩阵**。

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵A称为**负定矩阵**。

二次型$X^{\mathrm{T}}AX$负定的充要条件是$X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵A称为**正定矩阵**。

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵A称为**负定矩阵**。

二次型$X^{\mathrm{T}}AX$负定的充要条件是$X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

引理：n元实二次型（平方和）$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_n^2$正定的充要条件是所有的$c_i$都满足$c_i > 0$。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵A称为**正定矩阵**。

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵A称为**负定矩阵**。

二次型$X^{\mathrm{T}}AX$负定的充要条件是$X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

引理：n元实二次型（平方和）$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_n^2$正定的充要条件是所有的$c_i$都满足$c_i > 0$。

证明：必要性。原二次型正定，则对$X = \begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，二次型应大于0。

正定二次型

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵A称为**正定矩阵**。

定义：若对任意$X \neq 0$，都有$X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵A称为**负定矩阵**。

二次型$X^{\mathrm{T}}AX$负定的充要条件是$X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

引理：n元实二次型（平方和）$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_n^2$正定的充要条件是所有的$c_i$都满足$c_i > 0$。

证明：必要性。原二次型正定，则对$X = \begin{pmatrix} \ldots & 1 & \ldots \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，二次型应大于0。

而此时二次型的值为$c_i \cdot 1^2 = c_i$，所以$c_i > 0$。

正定二次型

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \ldots, x_n$不全为0，

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \ldots, x_n$不全为0，

不妨设$x_i \neq 0$，

正定二次型

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \dots, x_n$不全为0，

不妨设$x_i \neq 0$，

$c_1x_1^2 + \cdots + c_ix_i^2 + \cdots + c_nx_n^2 \geqslant c_ix_i^2 > 0$。

正定二次型

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \ldots, x_n$不全为0，

不妨设$x_i \neq 0$，

$c_1 x_1^2 + \cdots + c_i x_i^2 + \cdots + c_n x_n^2 \geqslant c_i x_i^2 > 0$。

即该二次型正定。

正定二次型

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \ldots, x_n$不全为0，

不妨设$x_i \neq 0$，

$c_1x_1^2 + \cdots + c_ix_i^2 + \cdots + c_nx_n^2 \geqslant c_ix_i^2 > 0$。

即该二次型正定。

引理：二次型$X^{\mathrm{T}}AX$正定，它经非退化线性替换$X = CY$得到二次型$Y^{\mathrm{T}}BY$。则$Y^{\mathrm{T}}BY$也正定。

正定二次型

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \ldots, x_n$不全为0，

不妨设$x_i \neq 0$，

$c_1x_1^2 + \cdots + c_ix_i^2 + \cdots + c_nx_n^2 \geqslant c_ix_i^2 > 0$。

即该二次型正定。

引理：二次型$X^{\mathrm{T}}AX$正定，它经非退化线性替换$X = CY$得到二次型$Y^{\mathrm{T}}BY$。则$Y^{\mathrm{T}}BY$也正定。

证明：因为$X = CY$成立时，$X^{\mathrm{T}}AX = Y^{\mathrm{T}}BY$。

正定二次型

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \ldots, x_n$不全为0，

不妨设$x_i \neq 0$，

$c_1x_1^2 + \cdots + c_ix_i^2 + \cdots + c_nx_n^2 \geqslant c_ix_i^2 > 0$。

即该二次型正定。

引理：二次型$X^{\mathrm{T}}AX$正定，它经非退化线性替换$X = CY$得到二次型$Y^{\mathrm{T}}BY$。则$Y^{\mathrm{T}}BY$也正定。

证明：因为$X = CY$成立时，$X^{\mathrm{T}}AX = Y^{\mathrm{T}}BY$。

对任意的$Y \neq 0$，$X = CY \neq 0$。

正定二次型

充分性。所有的$c_i > 0$。则对任意$X \neq 0$，则$x_1, \ldots, x_n$不全为0，

不妨设$x_i \neq 0$，

$c_1x_1^2 + \cdots + c_ix_i^2 + \cdots + c_nx_n^2 \geqslant c_ix_i^2 > 0$。

即该二次型正定。

引理：二次型$X^{\mathrm{T}}AX$正定，它经非退化线性替换$X = CY$得到二次型$Y^{\mathrm{T}}BY$。则$Y^{\mathrm{T}}BY$也正定。

证明：因为$X = CY$成立时，$X^{\mathrm{T}}AX = Y^{\mathrm{T}}BY$。

对任意的$Y \neq 0$，$X = CY \neq 0$。

因$X^{\mathrm{T}}AX$正定，所以$Y^{\mathrm{T}}BY = X^{\mathrm{T}}AX > 0$。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准型。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准型。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准型。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于0。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准型。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于0。

所以它的正惯性指数是n。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准型。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于0。

所以它的正惯性指数是n。

充分性类似可证。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准型。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于0。

所以它的正惯性指数是n。

充分性类似可证。

推论：n元实二次型负定的充要条件是：它的负惯性指数是n。

正定二次型

定理：n元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准型。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于0。

所以它的正惯性指数是n。

充分性类似可证。

推论：n元实二次型负定的充要条件是：它的负惯性指数是n。

推论：二次型$X^{\mathrm{T}}AX$正定，则$\det(A) > 0$。

正定二次型

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

正定二次型

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有$d_i > 0$。

正定二次型

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有$d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

$C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$，其中所有$d_i>0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}|\cdot|A|\cdot|C|=d_1\cdots d_n$。

又因为$\det^2(C)>0$，所以有$\det(A)>0$。

正定二次型

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有$d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为$\det^2(C) > 0$，所以有$\det(A) > 0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

正定二次型

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有$d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为$\det^2(C) > 0$，所以有$\det(A) > 0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

第n个顺序主子式是取第$1, \ldots, n$行和列的主子式。

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有$d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为$\det^2(C) > 0$，所以有$\det(A) > 0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

第n个顺序主子式是取第$1, \ldots, n$行和列的主子式。

定理：n元实二次型$f = X'AX$为正定的充要条件是A的各阶顺序主子式都大于0。

证明：A正定。所以存在可逆矩阵C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有$d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为$\det^2(C) > 0$，所以有$\det(A) > 0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

第n个顺序主子式是取第$1, \ldots, n$行和列的主子式。

定理：n元实二次型$f = X'AX$为正定的充要条件是A的各阶顺序主子式都大于0。

因A正定，由上一个定理，$|A| > 0$。

正定二次型

对任意$k = 1, 2, \ldots, n$，只要$x_1, \ldots, x_k$不全为0，就有

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}' \neq 0.$$

对任意$k=1,2,\ldots,n$，只要$x_1,\ldots,x_k$不全为0，就有

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}' \neq 0.$$

因为$f(x_1,\ldots,x_n)$正定，所以$f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)>0$。

正定二次型

对任意$k=1,2,\ldots,n$，只要$x_1,\ldots,x_k$不全为0，就有

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}' \neq 0.$$

因为$f(x_1,\ldots,x_n)$正定，所以$f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)>0$。

但$f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$是关于$x_1,\ldots,x_k$的一个二次型。

对任意$k=1,2,\ldots,n$，只要$x_1,\ldots,x_k$不全为0，就有

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}' \neq 0.$$

因为$f(x_1,\ldots,x_n)$正定，所以$f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)>0$。

但$f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$是关于$x_1,\ldots,x_k$的一个二次型。

$$f_k(x_1,\ldots,x_k)=\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

正定二次型

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

正定二次型

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}$$

其中A_k为A的前k行前k列所构成的矩阵，其行列式就是A的第k个顺序主子式。

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}$$

其中A_k为A的前k行前k列所构成的矩阵，其行列式就是A的第k个顺序主子式。

上式说明A_k就是$f_k(x_1, \dots, x_k)$的矩阵。

正定二次型

前面已证明f_k正定，所以依前面已证的定理知$|A_k| > 0$。

正定二次型

前面已证明f_k正定，所以依前面已证的定理知$|A_k| > 0$。

充分性。n元二次型$X'AX$。已知A的各阶顺序主子式都大于0。

正定二次型

前面已证明f_k正定，所以依前面已证的定理知$|A_k| > 0$。

充分性。n元二次型$X'AX$。已知A的各阶顺序主子式都大于0。

对n进行数学归纳法。

正定二次型

前面已证明f_k正定，所以依前面已证的定理知$|A_k| > 0$。

充分性。n元二次型$X'AX$。已知A的各阶顺序主子式都大于0。

对n进行数学归纳法。

$n = 1$时，二次型为$f(x_1) = a_{11}x_1^2$，因为已知$a_{11} > 0$，所以二次型$f(x_1)$正定。

前面已证明f_k正定，所以依前面已证的定理知$|A_k| > 0$。

充分性。n元二次型$X'AX$。已知A的各阶顺序主子式都大于0。

对n进行数学归纳法。

$n = 1$时，二次型为$f(x_1) = a_{11}x_1^2$，因为已知$a_{11} > 0$，所以二次型$f(x_1)$正定。

故$n = 1$时定理成立。假设对$n - 1$，定理成立。

正定二次型

前面已证明f_k正定，所以依前面已证的定理知$|A_k| > 0$。

充分性。n元二次型$X'AX$。已知A的各阶顺序主子式都大于0。

对n进行数学归纳法。

$n = 1$时，二次型为$f(x_1) = a_{11}x_1^2$，因为已知$a_{11} > 0$，所以二次型$f(x_1)$正定。

故$n = 1$时定理成立。假设对$n-1$，定理成立。

对n，因为已知$a_{11} > 0$，将A的第1列乘$-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$加到第j列上，A的第1行乘$-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$加到第j行上，$j = 2, \ldots, n$。

正定二次型

前面已证明f_k正定，所以依前面已证的定理知$|A_k| > 0$。

充分性。n元二次型$X'AX$。已知A的各阶顺序主子式都大于0。

对n进行数学归纳法。

$n = 1$时，二次型为$f(x_1) = a_{11}x_1^2$，因为已知$a_{11} > 0$，所以二次型$f(x_1)$正定。

故$n = 1$时定理成立。假设对$n-1$，定理成立。

对n，因为已知$a_{11} > 0$，将A的第1列乘$-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$加到第j列上，A的第1行乘$-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$加到第j行上，$j = 2, \ldots, n$。

这是一系列行列初等变换，也是合同变换。即得到等式：

正定二次型

$$P'AP = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$P'AP = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意到所用的初等变换是第三类的，不改变行列式的值。所以

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{k-1,2} & \dots & b_{k-1,k-1} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1,2} & \dots & b_{k-1,k-1} \end{vmatrix},$$

$k = 2, \dots, n.$

正定二次型

因为已知$|A_k|>0$，所以上式表明矩阵$(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$的各阶顺序主子式都大于0。

正定二次型

因为已知$|A_k|>0$，所以上式表明矩阵$(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$的各阶顺序主子式都大于0。

但前面矩阵等式表明，二次型$X'AX$经非退化线性替换$X=PY$得到二次型

$$Y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} Y = a_{11}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n),$$

正定二次型

因为已知$|A_k|>0$，所以上式表明矩阵$(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$的各阶顺序主子式都大于0。

但前面矩阵等式表明，二次型$X'AX$经非退化线性替换$X=PY$得到二次型

$$Y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} Y = a_{11}y_1^2 + g(y_2,\dots,y_n),$$

上式中的$g(y_2,\dots,y_n)$是$y_2,\dots,y_n$的二次型，且该二次型的矩阵为$(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij})的各阶顺序主子式都大于0。

前面已经证明，(b_{ij})的各阶顺序主子式都大于0。

根据归纳法假设，$g(y_2, \ldots, y_n)$是正定的二次型。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij})的各阶顺序主子式都大于0。

根据归纳法假设，$g(y_2, \ldots, y_n)$是正定的二次型。

所以二次型$a_{11}y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n)$正定。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij})的各阶顺序主子式都大于0。

根据归纳法假设，$g(y_2,\ldots,y_n)$是正定的二次型。

所以二次型$a_{11}y_1^2+g(y_2,\ldots,y_n)$正定。

所以f正定。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij})的各阶顺序主子式都大于0。

根据归纳法假设，$g(y_2, \ldots, y_n)$是正定的二次型。

所以二次型$a_{11}y_1^2 + g(y_2, \ldots, y_n)$正定。

所以f正定。

由数学归纳法，对一切正整数n，定理成立。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij})的各阶顺序主子式都大于0。

根据归纳法假设，$g(y_2,\ldots,y_n)$是正定的二次型。

所以二次型$a_{11}y_1^2+g(y_2,\ldots,y_n)$正定。

所以f正定。

由数学归纳法，对一切正整数n，定理成立。

推论：n元实二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=X'AX$为负定的充要条件是：矩阵A的所有奇数阶顺序主子式都为负，一切偶数阶顺序主子式都为正。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij})的各阶顺序主子式都大于0。

根据归纳法假设，$g(y_2,...,y_n)$是正定的二次型。

所以二次型$a_{11}y_1^2 + g(y_2,...,y_n)$正定。

所以f正定。

由数学归纳法，对一切正整数n，定理成立。

推论：n元实二次型$f(x_1,...,x_n) = X'AX$为负定的充要条件是：矩阵A的所有奇数阶顺序主子式都为负，一切偶数阶顺序主子式都为正。

定理指出，判定二次型正定与否只需要计算若干个行列式。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵A，可以找到实矩阵C，C可逆，而使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵A，可以找到实矩阵C，C可逆，而使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

如果进一步要求Q为正交矩阵，能否让$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵？

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵A，可以找到实矩阵C，C可逆，而使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

如果进一步要求Q为正交矩阵，能否让$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵？

看如果存在正交矩阵Q，使$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵，那么A会满足哪些条件：

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵A，可以找到实矩阵C，C可逆，而使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

如果进一步要求Q为正交矩阵，能否让$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵？

看如果存在正交矩阵Q，使$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵，那么A会满足哪些条件：

- 矩阵A的特征根必为实数。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵A，可以找到实矩阵C，C可逆，而使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

如果进一步要求Q为正交矩阵，能否让$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵？

看如果存在正交矩阵Q，使$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵，那么A会满足哪些条件：

- 矩阵A的特征根必为实数。
- A的关于不同特征根的特征向量彼此正交。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵A，可以找到实矩阵C，C可逆，而使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

如果进一步要求Q为正交矩阵，能否让$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵？

看如果存在正交矩阵Q，使$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵，那么A会满足哪些条件：

- 矩阵A的特征根必为实数。
- A的关于不同特征根的特征向量彼此正交。
- A的k重特征根λ_i的特征子空间的维数恰为k。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵A，可以找到实矩阵C，C可逆，而使$C^{\mathrm{T}}AC$为对角形矩阵。

如果进一步要求Q为正交矩阵，能否让$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵？

看如果存在正交矩阵Q，使$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角形矩阵，那么A会满足哪些条件：

- 矩阵A的特征根必为实数。
- A的关于不同特征根的特征向量彼此正交。
- A的k重特征根λ_i的特征子空间的维数恰为k。

将证明，实对称矩阵都满足这三条。

正交变换化二次型为标准形

根据以上三条，实对称矩阵A可通过正交变换化为对角形矩阵。

正交变换化二次型为标准形

根据以上三条，实对称矩阵A可通过正交变换化为对角形矩阵。

定理：n阶实对称矩阵的特征根必为实数。

正交变换化二次型为标准形

根据以上三条，实对称矩阵A可通过正交变换化为对角形矩阵。

定理：n阶实对称矩阵的特征根必为实数。

证明：设A为n阶实对称矩阵。λ为A的在复数域的一个特征根。

正交变换化二次型为标准形

根据以上三条，实对称矩阵A可通过正交变换化为对角形矩阵。

定理：n阶实对称矩阵的特征根必为实数。

证明：设A为n阶实对称矩阵。λ为A的在复数域的一个特征根。

X为A的关于λ的特征向量，也是在复数域。

正交变换化二次型为标准形

根据以上三条，实对称矩阵A可通过正交变换化为对角形矩阵。

定理：n阶实对称矩阵的特征根必为实数。

证明：设A为n阶实对称矩阵。λ为A的在复数域的一个特征根。X为A的关于λ的特征向量，也是在复数域。

$$AX = \lambda X, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

正交变换化二次型为标准形

根据以上三条，实对称矩阵A可通过正交变换化为对角形矩阵。

定理：n阶实对称矩阵的特征根必为实数。

证明：设A为n阶实对称矩阵。λ为A的在复数域的一个特征根。

X为A的关于λ的特征向量，也是在复数域。

$$AX = \lambda X, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上式两边左乘$\overline{X}^{\mathrm{T}}$，得$\overline{X}^{\mathrm{T}} AX = \lambda \overline{X}^{\mathrm{T}} X$。

正交变换化二次型为标准形

根据以上三条，实对称矩阵A可通过正交变换化为对角形矩阵。

定理：n阶实对称矩阵的特征根必为实数。

证明：设A为n阶实对称矩阵。λ为A的在复数域的一个特征根。X为A的关于λ的特征向量，也是在复数域。

$$AX = \lambda X, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上式两边左乘$\overline{X}^{\mathrm{T}}$，得$\overline{X}^{\mathrm{T}} AX = \lambda \overline{X}^{\mathrm{T}} X$。

注意$\overline{X}^{\mathrm{T}} X = \overline{x_1} x_1 + \cdots + \overline{x_n} x_n$是实数，且$> 0$。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1\times 1$的矩阵。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1\times 1$的矩阵。

因为A是实矩阵，又是对称矩阵。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1\times 1$的矩阵。

因为A是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{A} \cdot \overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1\times 1$的矩阵。

因为A是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}=\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X}=X^{\mathrm{T}}A\overline{X}=(X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$
$$=\overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1 \times 1$的矩阵。

因为A是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{A} \cdot \overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$
$$= \overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$的唯一一个元素是实数。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端，注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1\times 1$的矩阵。

因为A是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$= \overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$的唯一一个元素是实数。

所以$\lambda = \dfrac{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}{\overline{X}^{\mathrm{T}}X}$ 也是实数。证毕。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1 \times 1$的矩阵。

因为A是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{A} \cdot \overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$= \overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$的唯一一个元素是实数。

所以$\lambda = \dfrac{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}{\overline{X}^{\mathrm{T}}X}$ 也是实数。证毕。

定理说明在该实对称矩阵的特征向量中可以找到实向量。

前式等号的另一端, 注意到$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$是一个$1\times 1$的矩阵。

因为A是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$= \overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$的唯一一个元素是实数。

所以$\lambda = \dfrac{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}{\overline{X}^{\mathrm{T}}X}$ 也是实数。证毕。

定理说明在该实对称矩阵的特征向量中可以找到实向量。

定理：设λ_1与λ_2是实对称矩阵A的两个不等特征根。X_1与X_2分别是A的关于λ_1和关于λ_2的特征向量，则X_1与X_2正交。

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

证明：由题设，$AX_1=\lambda_1X_1$，$AX_2=\lambda_2X_2$，

且$X_1\neq 0$。$X_2\neq 0$，都为实向量。

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且$X_1 \neq 0$。$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意A是实对称矩阵, 所以$X_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1=\lambda_1X_1$，$AX_2=\lambda_2X_2$，

且$X_1\neq 0$。$X_2\neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意A是实对称矩阵, 所以$X_1^{\mathrm{T}}A=\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘X_2，得

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且$X_1 \neq 0$。$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意A是实对称矩阵, 所以$X_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘X_2，得

$\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}} X_2 = X_1^{\mathrm{T}} A X_2 = X_1^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^{\mathrm{T}} X_2$。

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1=\lambda_1X_1$，$AX_2=\lambda_2X_2$，

且$X_1\neq 0$。$X_2\neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意A是实对称矩阵, 所以$X_1^{\mathrm{T}}A=\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘X_2，得

$\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}X_2=X_1^{\mathrm{T}}AX_2=X_1^{\mathrm{T}}\cdot\lambda_2X_2=\lambda_2X_1^{\mathrm{T}}X_2$。

所以$(\lambda_1-\lambda_2)X_1^{\mathrm{T}}X_2=0.$

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且$X_1 \neq 0$。$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意A是实对称矩阵, 所以$X_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘X_2，得

$\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}} X_2 = X_1^{\mathrm{T}} A X_2 = X_1^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^{\mathrm{T}} X_2$。

所以$(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^{\mathrm{T}} X_2 = 0.$

但$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$X_1^{\mathrm{T}} X_2 = 0$，即X_1与X_2正交。

证明：由题设，$AX_1=\lambda_1 X_1$，$AX_2=\lambda_2 X_2$，

且$X_1\neq 0$。$X_2\neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意A是实对称矩阵, 所以$X_1^{\mathrm{T}}A=\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘X_2，得

$\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}X_2=X_1^{\mathrm{T}}AX_2=X_1^{\mathrm{T}}\cdot\lambda_2 X_2=\lambda_2 X_1^{\mathrm{T}}X_2$。

所以$(\lambda_1-\lambda_2)X_1^{\mathrm{T}}X_2=0.$

但$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$X_1^{\mathrm{T}}X_2=0$，即X_1与X_2正交。

对将每个不同特征值取一个特征向量放到一起构成向量组的情形，用此定理就可以知道该向量组是一个正交组。

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1=\lambda_1X_1$，$AX_2=\lambda_2X_2$，

且$X_1\neq 0$。$X_2\neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意A是实对称矩阵, 所以$X_1^{\mathrm{T}}A=\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘X_2，得

$\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}X_2=X_1^{\mathrm{T}}AX_2=X_1^{\mathrm{T}}\cdot\lambda_2X_2=\lambda_2X_1^{\mathrm{T}}X_2$。

所以$(\lambda_1-\lambda_2)X_1^{\mathrm{T}}X_2=0.$

但$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$X_1^{\mathrm{T}}X_2=0$，即X_1与X_2正交。

对将每个不同特征值取一个特征向量放到一起构成向量组的情

形，用此定理就可以知道该向量组是一个正交组。

若每个不同特征值取多个向量，则未必是正交组。

但因为特征向量的线性组合，只要不是0向量，就是特征向量。

正交变换化二次型为标准形

但因为特征向量的线性组合，只要不是0向量，就是特征向量。

所以若找到l个A的关于特征根λ_i的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到l个两两正交的A的关于λ_i的特征向量。

但因为特征向量的线性组合，只要不是0向量，就是特征向量。所以若找到l个A的关于特征根λ_i的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到l个两两正交的A的关于λ_i的特征向量。

定理：设λ_0是n阶实对称矩阵的k重特征根，则A的关于λ_0的特征子空间的维数恰为k，即齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)X = 0$的基础解系恰有k个解向量。

但因为特征向量的线性组合，只要不是0向量，就是特征向量。

所以若找到l个A的关于特征根λ_i的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到l个两两正交的A的关于λ_i的特征向量。

定理：设λ_0是n阶实对称矩阵的k重特征根，则A的关于λ_0的特征子空间的维数恰为k，即齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)X = 0$的基础解系恰有k个解向量。

设A的关于λ_0的特征子空间的维数为l，矩阵的对角化那一节已经证明$l \leqslant k$。

正交变换化二次型为标准形

但因为特征向量的线性组合，只要不是0向量，就是特征向量。

所以若找到l个A的关于特征根λ_i的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到l个两两正交的A的关于λ_i的特征向量。

定理：设λ_0是n阶实对称矩阵的k重特征根，则A的关于λ_0的特征子空间的维数恰为k，即齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)X = 0$的基础解系恰有k个解向量。

设A的关于λ_0的特征子空间的维数为l，矩阵的对角化那一节已经证明$l \leqslant k$。

现在只要证$l < k$不可能。

但因为特征向量的线性组合，只要不是0向量，就是特征向量。

所以若找到l个A的关于特征根λ_i的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到l个两两正交的A的关于λ_i的特征向量。

定理：设λ_0是n阶实对称矩阵的k重特征根，则A的关于λ_0的特征子空间的维数恰为k，即齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)X = 0$的基础解系恰有k个解向量。

设A的关于λ_0的特征子空间的维数为l，矩阵的对角化那一节已经证明$l \leqslant k$。

现在只要证$l < k$不可能。

若$l < k$，即只能找到l个线性无关的A关于λ_0的特征向量。

正交变换化二次型为标准形

在这l个向量的基础上添加$n-l$个向量，构成n维向量空间的一组基底。将这组基底施密特正交化，再单位化，得到向量组设为$X_1, \ldots, X_l, X_{l+1}, \ldots, X_n$。

正交变换化二次型为标准形

在这l个向量的基础上添加$n-l$个向量，构成n维向量空间的一组基底。将这组基底施密特正交化，再单位化，得到向量组设为$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$。

由施密特正交化过程知，$X_1,\ldots,X_l$是关于λ_0 的特征向量。于是

$$A\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_l & X_{l+1} & \ldots & X_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_0 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & \ldots & \lambda_0 & * \\ & & 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

正交变换化二次型为标准形

在这l个向量的基础上添加$n-l$个向量，构成n维向量空间的一组基底。将这组基底施密特正交化，再单位化，得到向量组设为$X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$。

由施密特正交化过程知，$X_1,\ldots,X_l$是关于λ_0 的特征向量。于是

$$A\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_l & X_{l+1} & \ldots & X_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_0 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & \ldots & \lambda_0 & * \\ & & 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

此时$P=\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_l & X_{l+1} & \ldots & X_n \end{pmatrix}$是正交矩阵，所以$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP$，故$P^{\mathrm{T}}AP$仍是对称矩阵。

因此肯定A_1的上方的矩阵元素都为0，即上式中的$* = 0$。

因此肯定A_1的上方的矩阵元素都为0，即上式中的$* = 0$。

因为$l < k$，所以λ_0也是A_1的特征根。

正交变换化二次型为标准形

因此肯定A_1的上方的矩阵元素都为0，即上式中的$* = 0$。

因为$l < k$，所以λ_0也是A_1的特征根。

于是至少存在一个A_1的关于λ_0的实特征向量。

因此肯定A_1的上方的矩阵元素都为0，即上式中的$* = 0$。

因为$l < k$，所以λ_0也是A_1的特征根。

于是至少存在一个A_1的关于λ_0的实特征向量。

对A_1重复前面的步骤，即补充$n - l - 1$个向量形成线性无关组，

再正交化并单位化，得到一个$n - l$阶的正交矩阵P_1，

正交变换化二次型为标准形

因此肯定A_1的上方的矩阵元素都为0，即上式中的$* = 0$。

因为$l < k$，所以λ_0也是A_1的特征根。

于是至少存在一个A_1的关于λ_0的实特征向量。

对A_1重复前面的步骤，即补充$n - l - 1$个向量形成线性无关组，

再正交化并单位化，得到一个$n - l$阶的正交矩阵P_1，

于是$P_1^{-1} A_1 P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

因此肯定A_1的上方的矩阵元素都为0，即上式中的$* = 0$。

因为$l < k$，所以λ_0也是A_1的特征根。

于是至少存在一个A_1的关于λ_0的实特征向量。

对A_1重复前面的步骤，即补充$n-l-1$个向量形成线性无关组，

再正交化并单位化，得到一个$n-l$阶的正交矩阵P_1，

于是$P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

构造n阶矩阵：$Q = P \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & P_1 \end{pmatrix} = PP_2$。$Q$是正交矩阵。

计算$Q^{\mathrm{T}}AQ$：

$$P_2'P'APP_2=\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & 1 & \\ & & P_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \\ \cdots & \lambda_0 & 0 \\ & 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & 1 & \\ & & P_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_0 & \\ & & & P_1'A_1P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_0 & 0 & \\ & & 0 & \lambda_0 & \\ & & & & A_2\end{pmatrix}.$$

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了$l+1$个A的关于λ_0的线性无关的特征向量。

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了$l+1$个A的关于λ_0的线性无关的特征向量。

与反证法假设的只有l个A的关于λ_0的线性无关特征向量矛盾。

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了$l+1$个A的关于λ_0的线性无关的特征向量。

与反证法假设的只有l个A的关于λ_0的线性无关特征向量矛盾。

于是$l=k$。证毕。

这说明找到了$l+1$个A的关于λ_0的线性无关的特征向量。

与反证法假设的只有l个A的关于λ_0的线性无关特征向量矛盾。

于是$l=k$。证毕。

定理：任意n阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

其中$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$为矩阵$A$的特征根。

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了$l+1$个A的关于λ_0的线性无关的特征向量。

与反证法假设的只有l个A的关于λ_0的线性无关特征向量矛盾。

于是$l=k$。证毕。

定理：任意n阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

其中$\lambda_1, \dots, \lambda_n$为矩阵$A$的特征根。

证明：设A共有l个互异特征根$\lambda_1, \dots, \lambda_l$，其重数分别

为$t_1, \dots, t_l$。

这说明找到了$l+1$个A的关于λ_0的线性无关的特征向量。

与反证法假设的只有l个A的关于λ_0的线性无关特征向量矛盾。

于是$l=k$。证毕。

定理：任意n阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

其中$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$为矩阵$A$的特征根。

证明：设A共有l个互异特征根$\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，其重数分别

为$t_1, \ldots, t_l$。

显然$t_1 + \cdots + t_l = n$。

这说明找到了$l+1$个A的关于λ_0的线性无关的特征向量。

与反证法假设的只有l个A的关于λ_0的线性无关特征向量矛盾。

于是$l=k$。证毕。

定理：任意n阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

其中$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$为矩阵$A$的特征根。

证明：设A共有l个互异特征根$\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，其重数分别

为$t_1, \ldots, t_l$。

显然$t_1 + \cdots + t_l = n$。

前面已经证明对每个λ_i，可以找到t_i个线性无关的特征向量。

正交变换化二次型为标准形

将这t_i个向量正交化，单位化，得到t_i个两两正交的特征向量：$X_{i1}, \ldots, X_{it_i}$。

将这t_i个向量正交化，单位化，得到t_i个两两正交的特征向量：$X_{i1},\ldots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\ldots,X_{1t_1},X_{21},\ldots,X_{2t_2},\ldots,X_{l1},\ldots,X_{lt_l}.$

正交变换化二次型为标准形

将这t_i个向量正交化，单位化，得到t_i个两两正交的特征向量：$X_{i1},\dots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\dots,X_{1t_1},X_{21},\dots,X_{2t_2},\dots,X_{l1},\dots,X_{lt_l}$.

一共n个n维列向量。

正交变换化二次型为标准形

将这t_i个向量正交化，单位化，得到t_i个两两正交的特征向量：$X_{i1}, \ldots, X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11}, \ldots, X_{1t_1}, X_{21}, \ldots, X_{2t_2}, \ldots, X_{l1}, \ldots, X_{lt_l}.$

一共n个n维列向量。

由前面定理，这n个列向量两两正交，且都是单位向量。

正交变换化二次型为标准形

将这t_i个向量正交化，单位化，得到t_i个两两正交的特征向量：$X_{i1}, \ldots, X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11}, \ldots, X_{1t_1}, X_{21}, \ldots, X_{2t_2}, \ldots, X_{l1}, \ldots, X_{lt_l}$.

一共n个n维列向量。

由前面定理，这n个列向量两两正交，且都是单位向量。

于是将它们排成一个矩阵C，C是正交矩阵。且

$$C'AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_l, \ldots, \lambda_l\}.$$

正交变换化二次型为标准形

将这t_i个向量正交化，单位化，得到t_i个两两正交的特征向量：$X_{i1}, \ldots, X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11}, \ldots, X_{1t_1}, X_{21}, \ldots, X_{2t_2}, \ldots, X_{l1}, \ldots, X_{lt_l}.$

一共n个n维列向量。

由前面定理，这n个列向量两两正交，且都是单位向量。

于是将它们排成一个矩阵C，C是正交矩阵。且

$$C'AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_l, \ldots, \lambda_l\}.$$

证毕。

正交变换化二次型为标准形

将这t_i个向量正交化，单位化，得到t_i个两两正交的特征向量：$X_{i1},\ldots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\ldots,X_{1t_1},X_{21},\ldots,X_{2t_2},\ldots,X_{l1},\ldots,X_{lt_l}.$

一共n个n维列向量。

由前面定理，这n个列向量两两正交，且都是单位向量。

于是将它们排成一个矩阵C，C是正交矩阵。且

$$C'AC=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_1,\ldots,\lambda_l,\ldots,\lambda_l\}.$$

证毕。

证明过程就是求正交矩阵C的过程。

正交变换化二次型为标准形

n元实二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=X'AX$，其中A为实对称矩阵，都存在正交变换$X=CY$，把该二次型化为标准形

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$是$A$的特征根。

区分“相等”与“等价”：

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。
- 二次型的相等和二次型的等价。

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。
- 二次型的相等和二次型的等价。
- 线性变换的相等。

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。
- 二次型的相等和二次型的等价。
- 线性变换的相等。

初等变换：