2007 级数学分析 B 第二学期期末试题(A)解答(2008.6)

一. (每小题 4 分, 满分 28 分)

1. 2, -3 (2 分, 2 分)
2. (2,1), (0,0) (2 分, 2 分)
3. -10
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$
5. 绝对收敛
6. 1, π^2-1, 2, 3 (各 1 分)
7. $\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}}{4}-\frac{1}{12\times 3^n}]x^n$, $-1<x<1$ (3 分, 1 分) (其中展开式没合并扣 1 分)

二. 将 $x=2, y=1$ 代入已知方程得 $u=1, z=1$ ……………………………….(2 分)

$$\begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}-1=0 \\ \frac{\partial z}{\partial x}=y^2 \end{cases}$$ ……………………………….(4 分)

将 $x=2, y=1, u=1, z=1$ 代入得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=1$ ………………………….(6 分)

$$\begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}+4y=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=2xy+\ln y \end{cases}$$ ………………………………….(8 分)

将 $x=2, y=1, u=1, z=1$ 代入得 $\frac{\partial u}{\partial y}=2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=4$ …………………………..(10 分)

三. $I=2\int_0^1 dy\int_{y^2}^{3-2y^2}(y^2-x)dx$ …………………………………….(3 分)

$=\int_0^1(18y^2-9y^4-9)dy$ …………………………………….(6 分)

$=-\frac{24}{5}$ ……………………………………..(8 分)

四.　　设所求点为(x_0, y_0, z_0)，曲面在此点的法向量为

$$\vec{n} = \{y_0, x_0, -1\}$$ ……………………………………(3 分)

由题设 $\vec{n} // \{1,3,1\}$，故 $\dfrac{y_0}{1} = \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{-1}{1}$ ……………………………………(5 分)

得 $x_0 = -3$　$y_0 = -1$　$z_0 = x_0 y_0 = 3$

所求点为 $(-3,-1,3)$ ……………………………………(8 分)

法线为 $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{1}$ ……………………………………(10 分)

五.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2^{2n+2}}}{\frac{2n-1}{2^{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(2n-1)4} = \frac{1}{4}$$ …………………………(1 分)

$R = 2$　收敛区间为 $(-2,2)$ …………………………...(2 分)

令 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n}}x^{2n-2} = \sigma(x)$$

$$\int_0^x \sigma(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}x^{2n-1}$$ ……………………………(5 分)

$$= \frac{x}{4-x^2}$$ ……………………………(7 分)

$$\sigma(x) = \left(\frac{x}{4-x^2}\right)' = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$$ …………………………………(9 分)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n}}x^{2n-1} = x\sigma(x) = \frac{4x+x^3}{(4-x^2)^2}$$ ……………………………(10 分)

六.
$$I_z = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mu dV \qquad \text{………………………………….(2 分)}$$

$$= 2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho\int_{\rho^2}^{2\rho\cos\theta} dz \qquad \text{…………………………………...(5 分)}$$

$$= 2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta}(2\rho^4\cos\theta-\rho^5)d\rho \qquad \text{………………………………(7 分)}$$

$$= \frac{2^6}{15}\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta \qquad \text{…………………………………….(9 分)}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\mu \qquad \text{………………………………….(10 分)}$$

七.

$$\oiint\limits_{S+S_1^-} 2xdydz+(z+2)^2 dxdy = -\iiint\limits_V[2+2(z+2)]dV \qquad \text{…………………………….(2 分)}$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi\int_0^2 (6+2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr \qquad \text{…………………………..(4 分)}$$

$$= -24\pi \qquad \text{……………………………….(6 分)}$$

$$\iint\limits_{S_1^-} 2xdydz+(z+2)^2 dxdy$$

$$= -\iint\limits_{S_1^+} 4dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} 4dxdy = -16\pi \qquad \text{.. …………………………..(8 分)}$$

$$I = \oiint\limits_{S+S_1^-} - \iint\limits_{S_1^-} 2xdydz+(z+2)^2 dxdy$$

$$= -24\pi+16\pi = -8\pi \qquad \text{……………………………….(10 分)}$$

八.　由题意　$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$　…………………………………(1 分)

得　$f(xy)+xyf'(xy)=3x^2y^2+k$　…………………………………(2 分)

令 $u=xy$　得　$f(u)+uf'(u)=3u^2+k$　…………………………………(3 分)

解得　$f(u)=u^2+k+\dfrac{c}{u}$　…………………………………(4 分)

由题设可得　$f(0)=k$，$c=0$，故　$f(u)=u^2+k$　………………………………(5 分)

$$\int_{(0,0)}^{(t,-t)}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy$$

$$=\int_{(0,0)}^{(t,-t)}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+(x^3y^2+kx+2y)dy$$

$$=\int_0^t 2x^5dx+\int_0^{-t}(t^3y^2+kt+2y)dy$$ ………………………………(6 分)

$$=(1-k)t^2=2t^2$$ ………………………………..(7 分)

$$1-k=2\qquad k=-1$$ …………………………………(8 分)

九. (1)　由已知有　$\dfrac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{u_{n+1}}\geq a>0$

$$u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}>0\qquad u_nv_n>u_{n+1}v_{n+1}$$

又 $u_nv_n>0$，所以 $\{u_nv_n\}$ 单调减少且有界　……………………………(2 分)

(2)　由(1)得　$u_{n+1}\leq\dfrac{1}{a}(u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1})$　……………………………..(3 分)

$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 的部分和满足

$$S_n=u_2+u_3+\cdots+u_{n+1}\leq\frac{1}{a}(u_1v_1-u_{n+1}v_{n+1})\leq\frac{1}{a}u_1v_1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　……………………………(6 分)