

2009 级《微积分 A》期中试卷参考答案

$$\text{一、1} \quad dy = \left[\frac{f'(\arctan \sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} + x^{\tan x} (\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x}) \right] dx;$$

$$2 \quad \frac{1}{3};$$

$$3 \quad y' = \frac{3 + \ln(x-y)}{2 + \ln(x-y)}, \quad y'(0) = 2;$$

$$4 \quad a = -2, \quad b = -2;$$

$$5 \quad e^x;$$

$$6 \quad a = 6, \quad b = -9;$$

$$7 \quad y^{(n)} = \begin{cases} \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} & n=1 \\ \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{二、解:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}} = -\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}t^{-3/2}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}} = -t^{-3/2}\sqrt{1-t}.$$

$$\text{三、解: 设 } f(x) = \frac{\tan x}{x}, \text{ 则}$$

$$f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \cos x \sin x}{x^2 \cos^2 x}$$

$$\text{当 } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 时, 有 } 0 < \cos x < 1, \quad \sin x < x,$$

$$\text{所以 } x - \cos x \sin x > x - \sin x > 0,$$

$$\text{有 } f'(x) > 0 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}), f(x) \text{ 在 } (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 内单增,}$$

对任意 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$

$$\text{即 } \frac{\tan x_1}{x_1} < \frac{\tan x_2}{x_2}, \Rightarrow \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(注意: 讨论 $f'(x)$ 的符号时还有其他方法!)

四、(1) 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(2) 又 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,

$x=0$ 是 $f'(x)$ 的第二类间断点。

五、定义域 $D: x \neq 0$, 函数无对称性。

(1) $f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2},$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

列表讨论增减区间, 极值

x	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	--		--	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓		↓	极小值	↑

单增区间为: $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty);$

单减区间: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

极大值: $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$, 极小值: $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$

(2) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

在定义域内没有二阶导数为 0 和二阶导数不存在的点, 列表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	--		+
$f(x)$	\cap		\cup

凸区间为: $(-\infty, 0)$; 凹区间为: $(0, +\infty)$; 曲线无拐点。

(3) 渐近线

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

所以垂直渐近线为: $x = 0$; 无水平渐近线,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + 2x^2}{x^2} + \frac{1}{x} \right] = 2 = k;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + 2x^2}{x} + 1 - 2x \right] = 1$$

所以有斜渐近线: $y = 2x + 1$

六、证明: 单调性:

$$x_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > \sqrt{3} = x_1, \text{ 假设 } x_n > x_{n-1}, \text{ 有}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n} > \sqrt{3 + x_{n-1}} = x_n, \text{ 由数学归纳法知: } \{x_n\} \text{ 单增。}$$

有界性:

$$x_1 = \sqrt{3} < \sqrt{3} + 1, x_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} < \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} + 1,$$

假设 $x_n < \sqrt{3} + 1$, 则

$$x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n} < \sqrt{3 + \sqrt{3} + 1} < \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} + 1$$

有归纳法可知数列 $\{x_n\}$ 有界, 由单调有界准则知:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 在等式 $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ 两边取极限, 得 $a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

七、解: $\because \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$

$$\therefore \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\sqrt{1-x^2} - \cos x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$\therefore x \rightarrow 0$, 无穷小 $\sqrt{1-x^2} - \cos x^2$ 的阶为 2,

其最简形式的等价无穷小为: $-\frac{1}{2}x^2$.

八、解: 设 P 点坐标为 (x_0, y_0) , 则过点 P 的切线方程为:

$$y - y_0 = -\frac{4x_0}{y_0}(x - x_0)$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y = \frac{4}{y_0}, \quad \text{令 } y = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{x_0}$$

则点 P 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为: $S = \frac{2}{x_0 y_0}$,

简化目标函数, 则问题转化为求函数: $A = x_0 y_0 = 2x_0 \sqrt{1-x_0^2} \quad (x_0 \in (0,1))$

最大值。

$$A'_{x_0} = \frac{1-2x_0^2}{\sqrt{1-x_0^2}}, \text{ 令 } A'_{x_0} = 0, \text{ 得唯一驻点 } x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{当 } x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } A'_{x_0} > 0; \text{ 当 } x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } A'_{x_0} < 0$$

所以 A 在 $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极大值, 有驻点唯一,

所以 A 在 $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最大值。

S 在 $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最小值。此时 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$, $S_{\text{最小}} = 2$

九、证明: (1) 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, 又

$$F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \quad F(1) = -1, \quad \text{所以 } F(\frac{1}{2}) \cdot F(1) < 0$$

由零点定理知: $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $F(\eta) = 0$,

$$\text{即 } f(\eta) = \eta.$$

(2) 构造辅助函数: $G(x) = e^{-\lambda x} [f(x) - x]$

$$\text{则 } G(x) \in C[0, \eta], \quad G(x) \in D(0, \eta)$$

$$\text{又 } G(0) = 0, \quad G(\eta) = 0$$

所以将 $G(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上应用罗尔定理, 有存在 $\xi \in (0, \eta)$

$$\text{使得 } G'(\xi) = 0$$

$$G'(\xi) = e^{-\lambda \xi} \{-\lambda[f(\xi) - \xi] + [f'(\xi) - 1]\} = 0$$

$$\text{又 } e^{-\lambda \xi} \neq 0, \text{ 得 } -\lambda[f(\xi) - \xi] + [f'(\xi) - 1] = 0$$

$$\text{即 } \lambda[f(\xi) - \xi] = f'(\xi) - 1$$

结论成立。