信息学院本科生2011——2012学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A卷）

专业：　　　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　姓名：　　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，O是零矩阵，
A^{-1}表示可逆矩阵A的逆矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

得 分

一 .客观题：1−3小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−8为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题2分，共16分)。

1. 若矩阵A与B相似，则A等价于B.　　　　(　　)

2. 设A是$m\times n$矩阵，$m<n$，且秩$R(A)=m$，则齐次方程组$AX=O$只有零解.　　　　(　　)

3. 在欧氏空间中只有零向量的模长为0.　　　　(　　)

4. 设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}=n$，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于　　　　(　　)

（A）$m+n$　　(B) $-(m+n)$　　(C) $m-n$　　(D) $n-m$

5. 设A为n阶方阵，C是n阶正交矩阵，且$B=C^TAC$，则下列结论不成立的是(　　)

（A）A与B相似　　（B）A与B等价

（C）A与B有相同的特征值　　（D）A与B有相同的特征向量

6. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$其中$a>b>0$且$a^2+b^2=1$，则$A$为　　　　(　　)

（A）初等矩阵　　(B) 正交矩阵　　(C) 正定矩阵　　(D) 负定矩阵

7. 对于n阶矩阵A，以下哪个条件不能得出“A与对角形矩阵相似”的结论　　　　(　　)

（A）A有n个互异的特征值　　（B）A有n个线性无关的特征向量

（C）A是实对称矩阵　　（D）A的秩为1

8. n阶矩阵A,B,C满足$ABC=E$,E为n阶单位矩阵，则B的逆矩阵等于　　　　(　　)

（A）$A^{-1}C^{-1}$　　(B) $C^{-1}A^{-1}$　　(C) CA　　(D) AC

得 分

二 、行列式计算（第1题6分，第2题8分，共14分）

1．计算四阶行列式$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$.

2. 计算n（n>2）阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$.

得 分

三、求矩阵 X，使下式成立：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ （本题 8 分）

得 分

四、λ为何值时，方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + (\lambda+3)x_2 + (\lambda+2)x_3 = 6 \end{cases}$$ 有惟一解，无解或有无穷多解？

并在有无穷多解时求出方程组的通解. （本题 13 分）

得 分

五、已知三维向量空间 R^3 的一个基：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$； （本题 12 分）

设$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$， $\beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$， $\beta_3 = \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3$.

1）证明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$也是 R^3 的一个基；

2）求由基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$到基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的过渡矩阵；

3）若向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为$(1,-2,0)$，求$\alpha$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标.

得 分

六、求一个正交变换 $X=PY$, 将下列二次型化成标准型 （本题 15 分）

$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2$ ；

并求出该二次型的秩，同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定).

得 分

七、设 A，B，C，D 均为 n 阶方阵，A 是可逆矩阵，且有 $AB=BA$，证明：

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = |AD - BC| .$$

（本题 10 分）

得 分

八、设 X^* 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一个解， $X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 是它导出组的

基础解系，证明：$X^*, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 线性无关。 （本题 8 分）

得 分

九、已知存在 n 阶非零实矩阵 C，使得矩阵 $A = C^TC$ ，证明$|A+E|>1$

其中 E 为 n 阶单位矩阵。 （本题 4 分）