课程编号：MTH17005　　　北京理工大学2009-2010学年第一学期

2009级《微积分A》期末试卷(A)

一、填空（每小题4分，共28分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ ____________.

设 $y=e^{f(\frac{1}{x})}$， f 为可微函数，则 $dy=$ ______________________________.

3. 不定积分 $\int\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}dx=$ ___________________________________;

定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=$ __________________________________.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{y+x}e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ _____________,
$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ _____________.

5. 微分方程 $y'+4xy=2x$ 的通解为___________________________________.

6. 曲线 $\begin{cases}x+t(1-t)=0\\ te^y+y+1=0\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为________________________,
法线方程为___________________________________.

7. 广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{2+x}}dx=$ _______________________.

二、（10分）已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ \arctan x, & x\ge 0\end{cases}$，求

（1） $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt\quad(-1\le x\le 1)$ 的表达式；

（2）研究 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性和可导性.

三、（9分）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{4+t}}dt}{x-\sin x}$，求常数 a,b 的值.

四、（9分）在曲线$y=\ln x$上求曲率最大的点的坐标及曲率的最大值.

五、（10分）设星形线的方程为$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$，

求星形线的弧长;

求星形线所围的图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

六、(10分) 设函数$y=y(x)$满足微分方程：$y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点的切线重合，求函数$y=y(x)$.

七、（9分）已知$f(x)$是连续函数，求证：

$$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx$$

并计算$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx.$

八、（9分）一容器内盛有10升盐水，其中含盐100克，今用3升/分的匀速将净水由A管注入容器，并以2升/分的匀速让盐水由B管流出，求30分钟末容器内溶液的含盐量（假定溶液在任一时刻都是均匀的）.

九、(6 分)设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2+f(x))}{x-1}=0,$ $f(0)=\int_0^1 f(x)dx$，证明：至少存在一点$\xi\in(0,2)$，使得$f'(\xi)+f''(\xi)=0$.