电光、计控学院本科生2014—2015学年线性代数课程期末考试试卷（A卷）参考答案：

一、（每小题2分，共8小题）

1 对；　2 错；　3 对；　4 C；　5 C；　6 D；　7 C；　8 A

二、行列式计算　　（本题共14分，第1小题6分，第2小题8分）

1、

解法（一）：

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \qquad （3分）$$

据拉普拉斯定理：

$$= (a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4) \qquad （3分）$$

解法（二）：按照第一行展开得：

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad （3分）$$

$$= a_1a_4(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1b_4(a_2a_3 - b_2b_3)$$

$$= a_1a_2a_3a_4 - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 + b_1b_2b_3b_4 \qquad （3分）$$

2、
$$d_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{i} & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)n!$$

3分　　　　3分　　　　2分

三、解：

(1) 证明：由 $AB = A + B$ 得 $AB - A - B = O$　　（1分）

得到 $(A-E)(B-E) = E$　　（2分）

故 $A-E$ 是可逆矩阵。　　（1分）

说明：　若直接利用下面的A的值，得到

$$|A-E| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2-5 = -3 \neq 0$$ 或者用初等变换法得到 $(A-E)^{-1}$ 说明 $A-E$ 可逆

得 1 分。

(2) 由$AB=A+B$得$AB-B=A$，从而$(A-E)B=A$，（1 分）

据上面$A-E$可逆得到$B=(A-E)^{-1}A$ （2 分）

用各种方法求得（分块矩阵法、初等变换法等）

$$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 5/3 & 0\\ 1/3 & -2/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ （2 分）

故$B=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}2/3 & 5/3 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ (1 分)

四、解：该方程组的增广矩阵为：

$$B=\left[A\vdots b\right]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & \vdots & b\\ 3 & 2 & 1 & a & \vdots & -1\end{bmatrix}$$ （2 分）

对增广矩阵进行初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$B\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b\\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{pmatrix},$$ （3 分）

因此当$a\neq 1$时，系数矩阵的秩为 4，增广矩阵的秩也为 4，此时方程组有唯一解；（1 分）

当$a=1$时，系数矩阵的秩为 2，此时若$b=-1$，增广矩阵的秩也为 2，因此方程组将有无穷多组解（1 分）；若$b\neq -1$，则增广矩阵的秩为 3，方程组将无解（1 分）。

方程组有无穷多组解时$a=1$且$b=-1$，此时方程组为：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$$ （1 分）

取x_3,x_4为自由未知量，方程组化为$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\ x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$ （1 分）

因此方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1=-1+\tilde{x}_3+\tilde{x}_4\\ x_2=1-2\tilde{x}_3-2\tilde{x}_4\\ x_3=\tilde{x}_3\\ x_4=\tilde{x}_4\end{cases}$$ （2 分），写成向量形式：$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\tilde{x}_3\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\tilde{x}_4\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ （1 分），

其中$\tilde{x}_3,\tilde{x}_4$为任意实数。（1 分）

五、解：设过渡矩阵为 M，则有：

$(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3，\alpha_4)=(e_1，e_2，e_3，e_4)$ M （2 分）

所以$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　（ 3 分）

设向量$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$在后一组基下的坐标为$(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$，根据坐标变换公式有：

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
（2 分）

所以：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{M}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

由初等变换求得 M 的逆矩阵为：

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$
（2 分）

所求坐标为：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ -\frac{1}{6}x_1+\frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_1-\frac{1}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4 \\ -\frac{1}{30}x_1+\frac{1}{15}x_2-\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4 \end{pmatrix}$$
（1 分）

六、解：此二次型的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，（1 分）

矩阵的特征多项式为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&-1\\0&0&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}^2=(\lambda^2-1)^2=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$ ，（2 分）

因此A的四个特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1$。（1 分）

解方程组$(\lambda_1E-A)X=0$，方程组为$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_3-x_4=0\end{cases}$，

求得的基础解系，也是A的关于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为：

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$ ，（2 分）

经简单计算即知X_1和X_2已经正交，因此无须正交化。（1 分）

将X_1和X_2单位化，得到向量$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}X_1,\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{2}}X_2$。（1 分）

类似的，解方程组$(\lambda_3E-A)X=0$，求A的关于$\lambda_3=\lambda_4=-1$的特征向量为，并进行正交化和单位化，得到

$$X_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},X_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}X_3,\varepsilon_4=\frac{1}{\sqrt{2}}X_4$$ ，（2 分）

因此令四阶方阵$C=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3&\varepsilon_4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，$C$是正交矩阵（1 分），且

$$C^{\mathrm{T}}AC=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$ 。

对二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 作正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$（**1** 分），

二次型化为标准型：$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$，（**1** 分），

二次型的正惯性指数为 **2**，负惯性指数也为 **2**，因此符号差为 **0**。（**1** 分）

说明：求基础解系结果不惟一。

七、已知 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 线性无关，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关。（本题 **9** 分）

证法一： 反证法，假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关。 （**1** 分）

因为 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$ 线性无关，对任意一组数 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 有：

当 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_4+\alpha_5)+k_5(\alpha_5+\alpha_1)=0$ 时 （1）

$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=0$

或者 $k_1+k_2=k_2+k_3=k_3+k_4=k_4+k_5=k_5+k_1=0$ （2）

（**3** 分）

对（1）式整理有：

$(k_1+k_5)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4+(k_4+k_5)\alpha_5=0$ （3）

（**2** 分）

假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关，则（3）式中的系数不全为零。 （**2** 分）

这与（2）式结论矛盾，所以假设不成立，既 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关。（**1** 分）

证法二：

设任意一组数 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 使

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0$ （**2** 分）

即：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix}=0$。

又因为：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1)\bullet\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ （**2** 分）

所以有

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1)\bullet\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1&1\\1&-1&1&1&-1\\-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\\k_5\end{pmatrix}=0$$

因为$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$线性无关，所以有：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1&1\\1&-1&1&1&-1\\-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\\k_5\end{pmatrix}=0$$ （**2** 分）

又因为矩阵：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1&1\\1&-1&1&1&-1\\-1&1&-1&1&1\\1&-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$ 为可逆矩阵 （**1** 分）

所以有： $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=0$ （**1** 分）

因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关 （**1** 分）

八、证明：若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，则$D\neq 0$。

解：设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$在$V$中某标准正交基下的坐标列向量依次为$X_1,X_2,\ldots,X_n$, (2 分)

则 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=X_i^TX_j$

若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，则$X_1,X_2,\ldots,X_n$线性无关，

令$M=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，则M为n阶方阵且$|M|\neq 0$， （2 分）

于是 $D=\begin{vmatrix}X_1^TX_1&X_1^TX_2&\ldots&X_1^TX_n\\X_2^TX_1&X_2^TX_2&\ldots&X_2^TX_n\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\X_1^TX_1&X_n^TX_1&\ldots&X_n^TX_n\end{vmatrix}=|M^TM|$ （**3** 分）

$=|M^T|\cdot|M|=|M|^2\neq 0$ (2 分)

九、自然数m,n满足$m>n>0$。A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，且

秩$(A)=$**秩**$(B)=n$，

证明：**秩**$(AB)=n$。 （本题 **4** 分）

证明：因秩$(AB)\leq$秩$(B)=n$，（**2** 分），以下只需证明AB的列向量中确可找到n个线性无关的向量。

记B的第i列为列向量β_i，由矩阵乘法，AB的第i列为$A\beta_i$。

因已知秩$(B)=n$，因此$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$的秩为$n$，即$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$的极大线性无关组包含$n$个向量，设这个极大线性无关组为$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\ldots,\beta_{i_n}$。考虑$AB$的第$i_1,i_2,\ldots,i_n$列共$n$个列向

量 $A\beta_{i_1}, A\beta_{i_2}, \ldots, A\beta_{i_n}$。若数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使

$$k_1 A\beta_{i_1} + k_2 A\beta_{i_2} + \cdots + k_n A\beta_{i_n} = 0,$$

即 $A\begin{pmatrix}\beta_{i_1} & \beta_{i_2} & \cdots & \beta_{i_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix} = 0$,

因 秩$(A) = n$， A 的 n 个列向量线性无关，所以由上式有：

$$\begin{pmatrix}\beta_{i_1} & \beta_{i_2} & \cdots & \beta_{i_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix} = 0$$

但 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_n}$ 线性无关，所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$。

因此 $A\beta_{i_1}, A\beta_{i_2}, \ldots, A\beta_{i_n}$ 线性无关，故 秩$(AB) \geq n$。结合前面式子，知命题成立。（2 分）