电光 计控 软件学院本科生 2016——2017 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　年级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，
A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

草 稿 区

得 分

一 .客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 设矩阵 A 与 B 相似，则必有 A,B 同时可逆或不可逆。 (　　)

2. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$中，如果$\alpha_1$与$\alpha_m$对应的分量成比例，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$中线性相关。(　　)

3. n阶矩阵 A 是正交矩阵，它的行向量组可作 R^n 空间的一组标准正交基。 (　　)

4. 设 A 是 4 阶矩阵，且 A 的行列式$|A|=0$，则 A 中 (　　)

（A）必有一列元素全为 0　　（B）必有两列元素成比例

（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合　　（D）任意列向量是其余列向量的线性组合

5. 设n元齐次线性方程组$AX=0$，若$R(A)=r<n$，则其基础解系 (　　)

（A）唯一存在　　（B）共有 $n-r$ 个　　（C）含有 $n-r$ 个向量　　（D）含有无穷多个向量

6. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是欧式空间的标准正交基，则向量$\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3$的模长为 (　　)

（A）6　　（B）0　　（C）$\sqrt{6}$　　（D）$\sqrt{14}$

7. 矩阵 A,B 满足：$P^TAP=B$，其中矩阵 P 是可逆矩阵。则下列命题正确的有： (　　)

（1）矩阵 A 与 B 是合同关系　　（2）矩阵 A 与 B 是等价关系

（3）矩阵 A 与 B 的秩相同　　（4）矩阵 A 与 B 可能是相似关系

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

8. 向量$(1,-2,3)^T$与$(2,k,6)^T$正交，则 k 等于 (　　)

（A）−10　　（B）−4　　（C）4　　（D）10

得 分

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

1．计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$。

2. 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & x \\ a & a & \dots & x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & x & \dots & a & a \\ x & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$，其中$n > 2$。

草 稿 区

得 分

三、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $2A^{-1}X=A^{*}+X$ （本题 10 分）

其中 A^{*} 是矩阵 A 的伴随矩阵，求矩阵 X 。

草 稿 区

得 分

四、当a为何值时，线性方程组：（本题 **14** 分）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a-3)x_3 = 3 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 + (a-2)x_3 = 4 \end{cases}$$

有唯一解，无解和有无穷多解？

当方程组有无穷多组解时，求其通解。

草 稿 区

得 分

五、设V 是二阶实对称矩阵全体的集合对于通常矩阵的加法与数乘运算所构成的实数域R上的线性空间，且 $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是V 的一个基，试证：$\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{B}_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix},\mathbf{B}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 也是V 的一个基，并求V 中向量$A=\begin{pmatrix}4&2\\2&3\end{pmatrix}$ 在基 $[\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3]$下的坐标。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，（本题 14 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出所用的正交变换；

判定该二次型的是那种二次型(正定，负定，半正定，半负定，不定)。

草 稿 区

得 分

七、已知$\alpha=(1,2,3),\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设$A=\alpha^T\beta$，求$A^n$。$(n>2)$ （本题 9 分）

草 稿 区

得 分

八、向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ $(r>2)$线性无关, 设$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$, ..., $\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_r$

证明：向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$线性无关。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

九、设A是n阶矩阵，如果存在正整数k，使得$A^k=O$（O为n阶零矩阵），则称A是n阶幂零矩阵。证明：

(1) 如果A是n阶幂零矩阵，则矩阵A的特征值全为 0。

(2) 如果$A\neq O$是n阶幂零矩阵，则矩阵A不与对角矩阵相似。 （本题 5 分）

草 稿 区