北京理工大学 2018-2019 学年第二学期《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

# 标准答案及评分标准2018年6月24日

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $x+y-1=0$

2. $-\dfrac{11}{3}$

3. $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

4. $-2\pi$

5. $|a|<e$

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 解：由 $L$，视 $x$ 为自变量，有

$$\begin{cases} 4x+6y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0, \\ 6x+2y\dfrac{dy}{dx}-2z\dfrac{dz}{dx}=0. \end{cases}$$

以 $(x,y,z)=(1,-1,2)$ 代入并解出 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$，

得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{4},\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{7}{8}$， …………..（3 分）

所以切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{z-2}{\frac{7}{8}}$，

法平面方程为 $(x-1)+\dfrac{5}{4}(y+1)+\dfrac{7}{8}(z-2)=0$，

即 $8x+10y+7z-12=0$ …………..（5 分）

2. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x}))+2f'(\dfrac{x}{y})$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{x^3}f''(\dfrac{y}{x})+\dfrac{2}{y}f''(\dfrac{x}{y})$ ………….. (3 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})-\dfrac{2x}{y^2}f''(\dfrac{x}{y})$ $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$ ………….. (5 分)

3. 解：由题设，$S$ 的方程为 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，因此

$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=2dxdy$

在 $xoy$ 坐标面上的投影区域　$D_{xy}: x^2+y^2 \le 3$

$$I=\iint_S (x^2+y^2)dS = 2\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy \text{ ……………(3 分)}$$

$$=2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr$$

$$=9\pi \text{ ……………(5 分)}$$

4. 解：

$$gradu=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}) \text{ ……….. (2 分)}$$

$$div(gradu)=div(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2+z^2})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2+z^2})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

$$=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

………….. (5 分)

三、解: $\iint_D (\frac{t^2}{x}-6y)f(x)dxdy=\int_0^t f(x)dx\int_0^x(\frac{t^2}{x}-6y)dy=\int_0^t (t^2-3x^2)f(x)dx.$

……………(3 分)

记 $F(t)=\int_0^t (t^2-3x^2)f(x)dx=t^2\int_0^t f(x)dx-3\int_0^t x^2 f(x)dx$

$F'(t)=2t\int_0^t (f(x)-f(t))dx$ ……………(6 分)

由于 $f(x)$ 是单调减少的函数，因此， $f(x)\ge f(t), 0\le x\le t,$

故 $F'(t)\ge 0,$ 所以 $F(t)$ 关于 $t$ 单调增加.因 $F(0)=0,$ 故对任意 $t\ge 0, F(t)\ge 0,$ 亦即待证的不等式成立……………(8 分)

四、解: 设整个物体 $\Omega$ 的质心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}),$ 由对称性得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0,$ 而 $\bar{z}=\frac{\iiint_\Omega \rho z dv}{\iiint_\Omega \rho dv},$

根据题意，只需：$\iiint\limits_{\Omega} \rho z dv = \iiint\limits_{\Omega} z dv = 0$ 即可………….. (2 分)

$$0 = \iiint\limits_{\Omega} z dv = \int_{-h}^{0} z dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} dxdy + \int_{0}^{1} z dz \int\limits_{x^2+y^2 \le 1-z^2} dxdy$$

$$= \pi\int_{-h}^{0} z dz + \pi\int_{0}^{1} z(1-z^2) dz \text{ ………….. (4 分)}$$

$$= -\frac{\pi}{2}h^2 + \frac{1}{4}\pi$$

解得 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，整个物体的质心恰好在半球的球心处………….. (6 分)

五、解：设所求平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, a>0, b>0, c>0$. 由题意得

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=1$$

题目转化为对函数 $V=\frac{1}{6}abc$

在约束条件 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=1$ 下的最小值. 即为条件极值问题. ……….. (3 分)

构造函数：$F(a,b,c,\lambda)=\frac{1}{6}abc+\lambda\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}-1\right)$

$$\begin{cases} F_a' = \frac{bc}{6} - \frac{2\lambda}{a^2} = 0 \\ F_b' = \frac{ac}{6} - \frac{\lambda}{b^2} = 0 \\ F_c' = \frac{ab}{6} - \frac{\lambda}{3c^2} = 0 \\ F_\lambda' = \frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}-1=0 \end{cases} \text{, ……….. (6 分)}$$

得唯一解 $a=6, b=3, c=1$, 所求平面为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$. ……….. (8 分)

六、**解：**（1）记 $X=2xy$, $Y=Q(x,y)$ 由题意，有

$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$, 即 $2x=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ , $Q(x,y)=x^2+C(y)$ ……….. (2

分) $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy = t^2 + \int_0^1 C(y)dy$

$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy = t + \int_0^t C(y)dy$

由条件得： $t^2 + \int_0^1 C(y)dy = t + \int_0^t C(y)dy$

求导得 $C(y) = 2y-1, Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$ ……….. (5 分)

（2）原函数 $u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2xydx + (x^2+2y-1)dy + C$

$= \int_0^x 0dx + \int_0^y (x^2+2y-1)dy + C$

$= \int_0^x 0dx + \int_0^y (x^2+2y-1)dy + C$

$= x^2y + y^2 - y + C$

所求原函数为 $u(x,y) = x^2y + y^2 - y + C$ ……….. (8 分)

七、解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}x^2 = x^2$

$|x|<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对收敛；$|x|>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$发散（因为$u_n(x)$不趋于 0）.

收敛半径$R=1$, 收敛域为$[-1,1]$. ……….. (3 分)

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\le x\le 1)$, 则

$S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \dfrac{1}{1+x^2}$

又因为 $S(x) = S(0) + \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt = \arctan x$, ……….. (7 分) 所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = xS(x) = x\arctan x (x\in[-1,1])$ ……….. (8 分)

八、解: $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x+1)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3})$

$= \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{4}}]$ ……….. (2 分)

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x-1)^n$$

其收敛域为： $-1<x<3$………..(6 分)

$$a_{10}=\frac{1}{2^{12}}-\frac{1}{2^{23}}=\frac{f^{(10)}(1)}{10!},$$

$$f^{(10)}(1)=(\frac{1}{2^{12}}-\frac{1}{2^{23}})10!\text{………..(8 分)}$$

九、解: 添加辅助面 $S_0: z=0, x^2+y^2\le 4$, 取上侧；

$S_1: z=1, x^2+y^2\le 3$, 取下侧.

$\Omega$ 为 $\Sigma$ 与 $S_0, S_1$ 所围成的空间区域. …………..(2 分)

$$I=\frac{1}{4}\iint_{\Sigma+S_0+S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy-\frac{1}{4}\iint_{S_0}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$-\frac{1}{4}\iint_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

…………..(4 分)

$$\frac{1}{4}\iint_{\Sigma+S_0+S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$$ （利用高斯公式）

$$=0-\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}zdv$$ （利用对称性）

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 zdz\iint_{x^2+y^2\le 4-z^2}dxdy=-\frac{\pi}{2}\int_0^1(4z-z^3)dz$$

$$=-\frac{7}{8}\pi\text{ …………..(6 分)}$$

$$\frac{1}{4}\iint_{S_0}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0$$

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=-\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\le 3}dxdy=-\frac{3}{4}\pi$$

$$I=-\frac{7}{8}\pi-(0-\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{8}\pi.\ \ldots\ldots\ldots\ldots..\ (8\text{ 分})$$

十、解: 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 而 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots..\ (2\text{ 分})$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林公式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot x^2(\xi\in(0,x).$$

所以 $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot\frac{1}{n^2}$, 其中 $(\xi\in(0,\frac{1}{n})$. …………..  (5 分)

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.  …………..  (6 分)