信息学院本科生 2010－2011 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　姓名：　　　　　　成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积.

得 分

一.客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)

1. n 阶实对称矩阵的特征根必为实数.　　　　(√)

2. 若矩阵 A, B 具有相同的秩，则 AX= 0 与 BX= 0 是同解方程组.　　(×)

3. 非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq 0)$ 的全部解构成线性空间 R^n 的一个子空间.　　(×)

4. 在下列构成 6 阶行列式展开式的各项中，取“+”的有　　（ A ）

A. $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$；　**B.** $a_{11}a_{26}a_{32}a_{24}a_{53}a_{65}$；

C. $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$；　**D.** $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{25}a_{66}$

5. 设 α、β 是相互正交的 n 维实向量，则下列式中错误的是 (D)

A. $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　**B.** $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$

C. $|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　**D.** $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

6. 设 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T$ 是齐次线性方程组 AX = 0 的基础解系，则矩阵 A 可能是：　　（ C ）

A. $\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\2&3&-5\end{pmatrix}$　**B.** $\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&1\end{pmatrix}$　**C.** $\begin{pmatrix}1&1&-2\end{pmatrix}$　**D.** 以上都不对

7. 设 n 阶方阵 A 与 B 等价，则必有：　　（ C ）

A. $|A|=|B|$　　**B.** $|A|\neq|B|$

C. 若$|A|\neq 0$，则有$|B|\neq 0$　　**D.** $|A|=-|B|$

8. 设 A 为 n 阶方阵，AB = 0，且矩阵 B ≠ 0，则必有：　（　C　）

A．A 的列向量组线性无关　　　B．A=0

C．A 的列向量组线性相关　　　D．A 的行向量组线性无关

得 分

二、行列式计算（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分）

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解：原式 $\overset{C2-C1}{\underset{C4-2C1}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6$

其中过程占 4 分，结果占 2 分

2. 计算 n（n>2）阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \dots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & n & n & n & n \\ n & n & n & n & n & n \end{vmatrix}$

解：原式 $\overset{r_n - r_{n-1}}{\underset{\substack{\vdots \\ r_2 - r_1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 21)} n = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} n$

其中过程占 6 分，结果占 2 分

得 分

设矩阵 **X** 满足 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

求矩阵 **X** **(本题 8 分)**

解：因为矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 都是初等矩阵，可逆，所以

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

其中矩阵求逆占 4 分，其它过程占 2 分，结果占 2 分

得 分

三、 线性方程组$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & \lambda+2\\ 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$，问：

（**1**）当λ取何值时，方程组无解，有解？

（**2**）当方程组有无穷多组解时，求方程组的通解。

（本题 **13** 分）

解：方程组的增广矩阵为：

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & \lambda+2 & 3\\ 1 & \lambda & -2 & 0\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-2 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(\lambda-2)r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & (\lambda-3)(\lambda+1) & \lambda-3\end{pmatrix}$$ （**5** 分）

则当$\lambda=-1$时，**R(A)＝2， R(B)=3,** 方程组无解。 （**2** 分）

当$\lambda\neq-1$时，**R(A)=R(B),** 方程组有解。 （**1** 分）

当$\lambda=3$时，**R(A)=R(B)＝2**，方程组有无穷多解。此时，

$$B\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ （**1** 分）

取 x_3 为自由未知量，则当 $x_3=0$ 时，$x_1=3,\ x_2=-1$,

即方程组有一个特解 $\eta^{\times}=(3,\ -1,0)^T$ （**1** 分）

取 $x_3=1$，方程组导出组的基础解系为$\xi=(-7,3,1)^T$ （**2** 分）

则方程组的通解为：$\eta=k\begin{pmatrix}-7\\ 3\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$, （$k\in R$） （**1** 分）

得 分

已知线性空间R^3的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P$，

且 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$**，** $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$**，** $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$**；** $P=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&-2\\4&3&0\end{pmatrix}$

试求：(1) 基β_1,β_2,β_3；

(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量

（本题 12 分）

（1）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则$B=AP$，故

$$\beta_1=\begin{pmatrix}6\\11\\10\end{pmatrix}，\beta_2=\begin{pmatrix}5\\8\\8\end{pmatrix}，\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}；$$ （2 分）

（2）设所求向量的坐标为x ，则$Ax=APx$，即$A(P-E)x=0$，

因为A为可逆矩阵，得$(P-E)x=0$ ，由 （4 分）

$$(P-E)=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&-2\\4&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得$x=k(1,-1,1)^T$， （6 分）

故$\alpha=k(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)=k(2,1,3)^T$

得 分

六、求一个正交变换 **X=PY**，使下列二次型化成标准型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

并说明该二次型的类型（正定、负定、半正定、半负定、不定）（本题 **15** 分）

解：二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix},\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&-2-\lambda&4\\2&4&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

因此得到其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$。

再求属于特征值的特征向量。

解方程组 $(A-2E)x=0$，得对应于特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的两个线性无关的特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2&1&0\end{pmatrix}^T$，$\eta_2=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}^T$。

解方程组 $(A+7E)x=0$ 得对应于特征值为 $\lambda_3=-7$ 的一个特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix}1&2&-2\end{pmatrix}^T$。

再将 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2&1&0\end{pmatrix}^T$，$\eta_2=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}^T$ 正交化为 $p_1=\begin{pmatrix}-2&1&0\end{pmatrix}^T$，$p_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&1\end{pmatrix}^T$。由向量组

$p_1=\begin{pmatrix}-2&1&0\end{pmatrix}^T$，$p_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&1\end{pmatrix}^T$，$\eta_3=\begin{pmatrix}1&2&-2\end{pmatrix}^T$ 单位化后组成的矩阵即为所求的正交变换矩阵 $\begin{pmatrix}\frac{-2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$，其标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$。

得 分

七、A为n阶**(n>2)**可逆矩阵，α为n维列向量，b为实常数。记分块矩阵$p=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}$,$Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$,其中$A^*$为$A$的伴随矩阵。$E$为$n$阶单位矩阵。 **(本题 9 分)**

(1) 计算并化简PQ，

(2) 证明Q可逆的充要条件是$\alpha' A^{-1}\alpha \neq b$。

解：（**1**） **PQ =** $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & b|A|-\alpha^T A^*\alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}$ （**5** 分）

（**2**）矩阵 **Q** 可逆的充要条件是$|Q|\neq 0$ （**1** 分）

因为 **A** 可逆，所以$|A|\neq 0$，则有

$|P|=\begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix}=|A|\neq 0$，如果$|Q|\neq 0$，则有$|P||Q|=|PQ|\neq 0$（**2** 分）

因此，**Q** 可逆的充要条件是$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{vmatrix}=|A|^2(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)\neq 0$

又因为$|A|\neq 0$，所以Q可逆的充要条件是$\alpha' A^{-1}\alpha \neq b$。（**2** 分）

得 分

、设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_L$ 和向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_S$,的秩分别为 **p** 和 **q**，试证明：若 A 可由 B 线性表示，则 $p \le q$ 。

(本题 8 分)

证明：设向量组 **A** 的极大线性无关组为 $\mathbf{A_1}$(有 **p** 个向量)。

向量组 **B** 的极大线性无关组为 $\mathbf{B_1}$(有 **q** 个向量)。（**2** 分）

由极大线性无关组的性质，**B** 可由 $\mathbf{B_1}$ 线性表示。

$\mathbf{A_1}$ 是 **A** 的部分组，又 **A** 可由 **B** 线性表示，所以

$\mathbf{A_1}$ 可由 **B** 线性表示。也可以由 $\mathbf{B_1}$ 线性表示。　（**4** 分）

又因为 $\mathbf{A_1}$ 是线性无关的向量组，所以有

$p \le q$　　（**2** 分）

得 分

九、设 α，β 是 3 维列向量，矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$。

证明：(1)A 的秩 R（A）$\le$ 2;

(2)若 α，β 线性相关，则 R(A)<2

（本题 5 分）

证明：（1）因为 α，β 是 3 维列向量，所以 $R(\alpha)\le 1$, $R(\beta)\le 1$,

同时 $R(\alpha^T)\le 1$， $R(\beta^T)\le 1$ （1 分）

则 $R(\alpha\alpha^T)\le \min\{R(\alpha), R(\alpha^T)\}\le 1$

$R(\beta\beta^T)\le \min\{R(\beta), R(\beta^T)\}\le 1$ （1 分）

又 $R(A)\le R(\alpha\alpha^T)+R(\beta\beta^T)$ （1 分）

所以 $R(A)\le 2$

(2) 因为 α，β 线性相关，所以有 α＝kβ，或者 β＝kα，

k 为常数。 （1 分）

因此可得，$A=(1+k^2)\beta\beta^T$，或者 $A=(1+k^2)\alpha\alpha^T$

则 $R(A)=R(\alpha\alpha^T)\le 1$，或者 $R(A)=R(\beta\beta^T)\le 1$ （1 分）

所以有 R(A)<2