2015-2016 学年第二学期《微积分 A》期中试题解答及评分标准（2016.5.7）

一、1. $7\sqrt{3}$；　　2. $1+\sqrt{2}$；

3. $\dfrac{\pi}{6}$；　　4. $-dx+2dy$；

5. $\sqrt{7}\pi$.

二、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xg'+yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$；　…………4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyg''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$　…………8 分

三、（1）直角坐标系下

$$I=\int_0^2 ydy\int_{-2}^{\sqrt{2y-y^2}}dx；\quad I=\int_{-2}^0 dx\int_0^2 ydy+\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}ydy.$$　…………3 分

极坐标系下

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\sin\theta d\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta}}\rho^2\sin\theta d\rho+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{-2}{\cos\theta}}\rho^2\sin\theta d\rho$$

…………6 分

（2）$I=\int_{-2}^0 dx\int_0^2 ydy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\sin\theta d\rho$

$=4+\dfrac{\pi}{2}.$　…………10 分

四、L 的一般方程为：$\begin{cases}x+2y-7=0\\3x-2z+1=0\end{cases}$,

设过直线 L 的平面束方程为：$x+2y-7+\lambda(3x-2z+1)=0$

整理得：$(1+3\lambda)x+2y-2\lambda z+\lambda-7=0$　…………3 分

其法向量为：$\vec{n}=\{1+3\lambda,2,-2\lambda\}$

已知平面的法向量为：$\vec{n}_1=\{1,1,-2\}$

平面束中与已知平面垂直的平面的法向量应满足：$\vec{n}\bullet\vec{n}_1=0$

即 $1+3\lambda+2+4\lambda=0$，$\Rightarrow \lambda=-\dfrac{3}{7}$

代入平面束方程中得与已知平面垂直的平面方程为：

$x-7y-3z+26=0$ ………..6 分

故 L_0 得方程为：$\begin{cases} x-7y-3z+26=0 \\ x+y-2z-2=0 \end{cases}$ ………..8 分

五、$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} e^{\frac{y}{1-x-z}}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dz\int_0^{1-x-z} e^{\frac{y}{1-x-z}}dy$ ………..3 分

$$=(e-1)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-z)dz$$ ………..6 分

$$=\frac{e-1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx$$

$$=\frac{e-1}{6}.$$ ………..8 分

六、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+2x\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y\dfrac{\partial z}{\partial v}$ ………..4 分

代入原方程得：$y\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$

即 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ ………..6 分

$z=\int\dfrac{\partial z}{\partial u}du=\int\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+\varphi(v)$ （其中 φ 为任意可微函数）

故 $z=z(x,y)=\arcsin x+\varphi(x^2-y^2)$ （其中 φ 为任意可微函数）

………..8 分

七、由对称性可知：$\bar{y}=\bar{z}=0$， ………..2 分

$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\mu dV}{\iiint\limits_{\Omega}\mu dV}$，其中 μ 为物体的体密度恒等于常数. ………..3 分

$$\iiint\limits_{\Omega} xdV = \int_0^2 xdx \iint\limits_{D_x:y^2+2z^2\le 4x} dydz = \int_0^2 2\sqrt{2}\pi x^2 dx = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3};$$ ………..6 分

$$\iiint\limits_{\Omega} dV = \int_0^2 dx \iint\limits_{D_x:y^2+2z^2\le 4x} dydz = \int_0^2 2\sqrt{2}\pi xdx = 4\sqrt{2}\pi;$$ ………..9 分

故 $\bar{x} = \dfrac{4}{3}$

所以重心坐标为：$(\dfrac{4}{3},0,0)$. ………..10 分

八、记 $V_1 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{且} z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$;

$V_2 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{且} 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$;

$V_3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{且} z < 0.$

$$I = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} fdV + \iiint\limits_{V_2} fdV + \iiint\limits_{V_3} fdV$$

$$= 0 + \iiint\limits_{V_2} \sqrt{x^2 + y^2} dV + \iiint\limits_{V_3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$ ………..3 分

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin^2\varphi dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \sin\varphi dr$$ ………..7 分

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{5\pi}{8}.$$ ………..10 分

九、（1）$S : 4z = x^2 + y^2$ ………..2 分

（2）切点坐标$(1,1,0)$，切向量$\vec{\tau} = \{2,1,3\}$

所以切线方程为 $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{3}$ ………..5 分

（3）平面π的法向量为：$\vec{n} = 2\{x_0, y_0, -2\}$,

平面π的方程为：$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - 2(z - z_0) = 0$

由于平面π过直线 L，所以在直线 L 上任取两点$(1,1,0),(3,2,3)$,则这两点也在平面π上，因此有下列等式：

$$\begin{cases} x_0(1-x_0)+y_0(1-y_0)+2z_0=0 \\ x_0(3-x_0)+y_0(2-y_0)-2(3-z_0)=0 \\ 4z_0=x_0^2+y_0^2 \end{cases}$$

解得: $x_0=y_0=z_0=2$ 或 $x_0=\dfrac{12}{5},y_0=\dfrac{6}{5},z_0=\dfrac{9}{5}$,

代入平面π的方程，得

π： $x+y-z-2=0;$ 或

π： $6x+3y-5z-9=0.$ ………..10 分

十、$\vec{e}^{\,0}=\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x_0-y_0+z_0)$ ………..2 分

此问题为条件极值问题，目标函数为：$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x_0-y_0+z_0)$，

约束条件为：$\begin{cases} 2x_0^2-y_0^2+z_0^2=5 \\ x_0+y_0=0 \end{cases}$,

构造拉格朗日函数：

$$F(x_0,y_0,z_0)=x_0-y_0+z_0+\lambda(2x_0^2-y_0^2+z_0^2-5)+\mu(x_0+y_0)$$

$$\begin{cases} F'_{x_0}=1+4\lambda x_0+\mu=0 \\ F'_{x_0}=-1-2\lambda y_0+\mu=0 \\ F'_{z_0}=1+2\lambda z_0=0 \\ 2x_0^2-y_0^2+z_0^2=5 \\ x_0+y_0=0 \end{cases}$$ ………..4 分

解得驻点为：$M_1(-2,2,-1),\quad M_2(2,-2,1)$ ………..6 分

经计算得 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}\right|_{M_1}=-\dfrac{10}{\sqrt{3}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}\right|_{M_2}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

故$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$在$M_1$点取得最小值$-\dfrac{10}{\sqrt{3}}$；$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$在$M_2$点取得最大值$\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. ……..8 分