TOÁN HỌC TỔ HỢP

Chương 1.

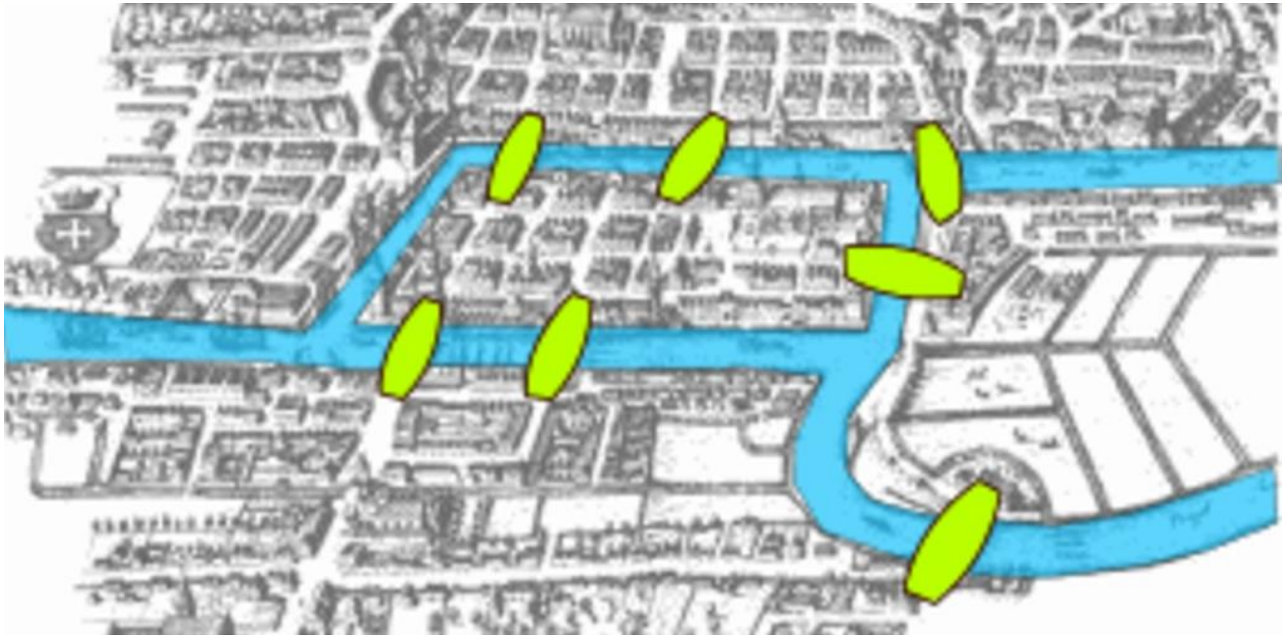
ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

LVL @2021

Nội dung

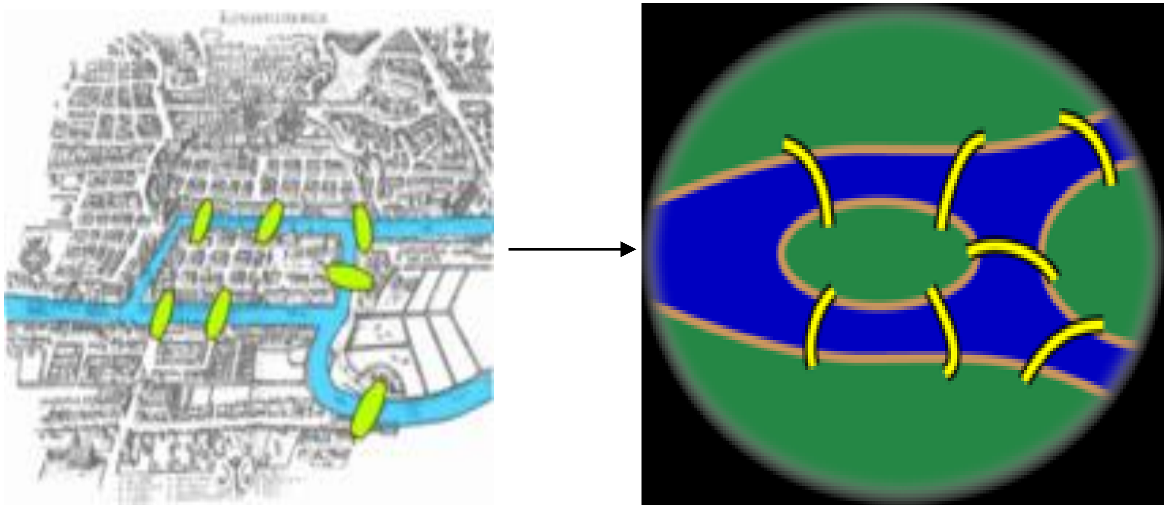
1. Giới thiệu
2. Các khái niệm cơ bản
3. Biểu diễn đồ thị
4. Đẳng cấu đồ thị
5. Đường đi, chu trình

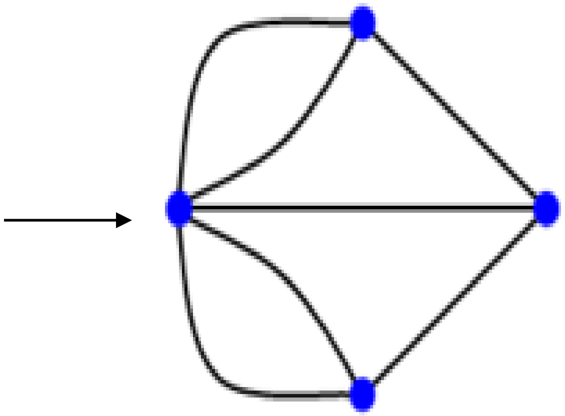
1. Giới thiệu



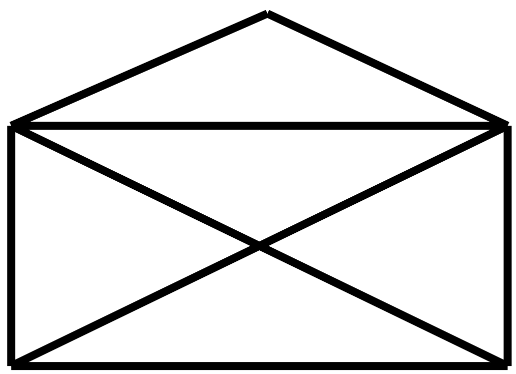
Bài toán 1. Thành phố Königsberg, Phổ (nay là Kaliningrad, Nga) có hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu. Bài toán đặt ra là có thể đi theo một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu đúng một lần rồi quay lại điểm xuất phát hay không?

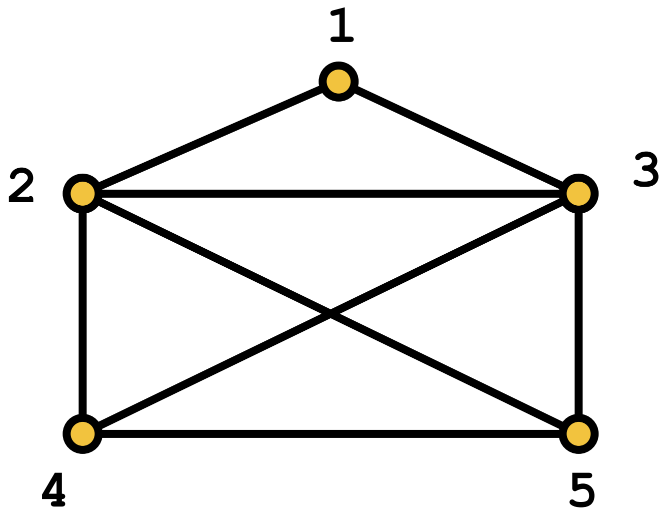
Năm 1736, nhà toán học **Leonhard Euler** đã chứng minh rằng điều đó là không thể được.



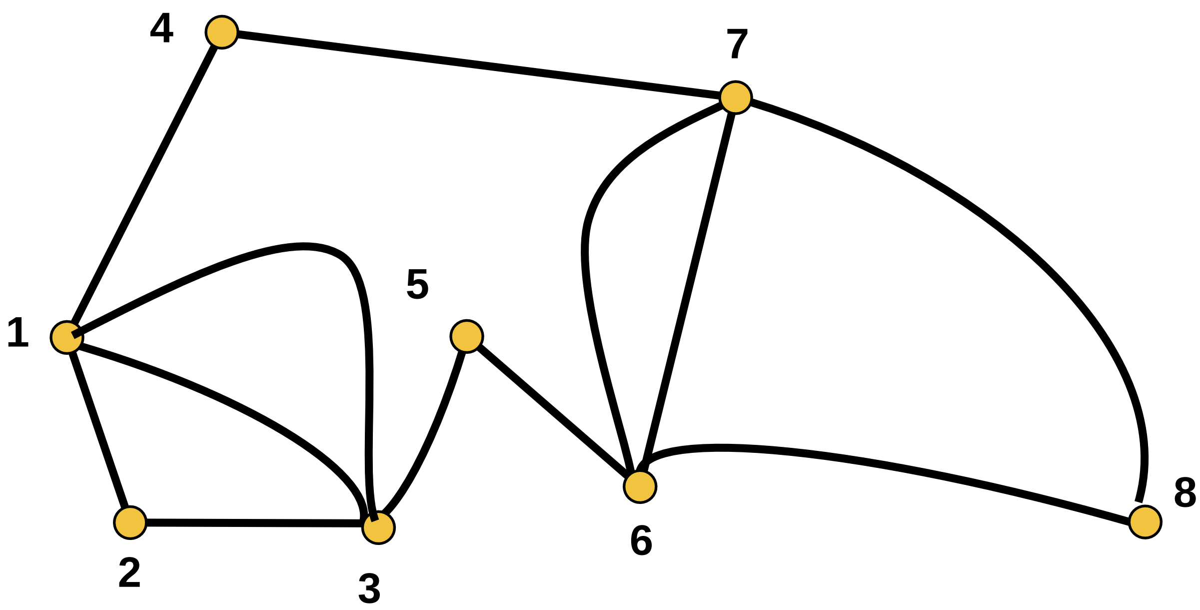


Bài toán 2. Có thể vẽ hình phong bì thư bởi một nét bút hay không? Nếu có hãy chỉ ra tuần tự các nét vẽ

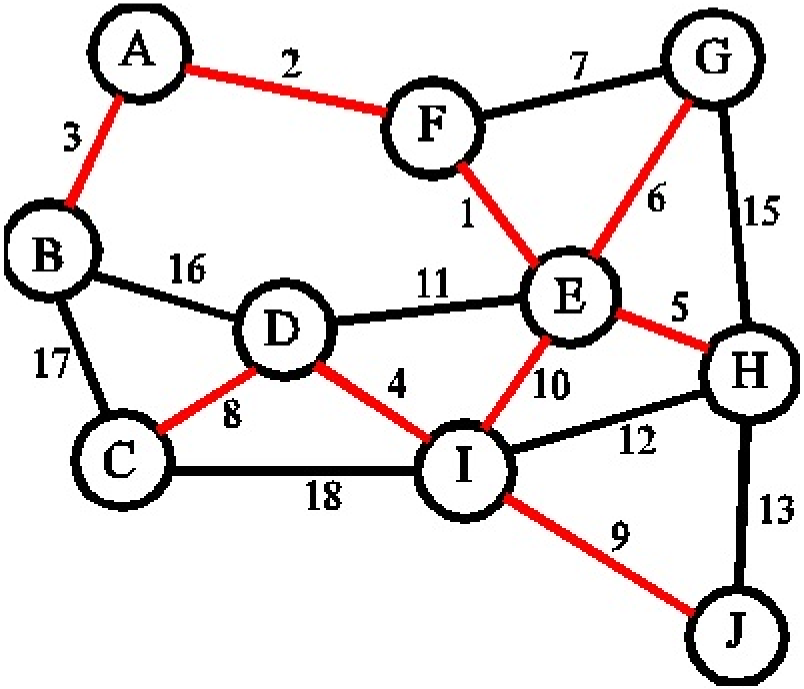




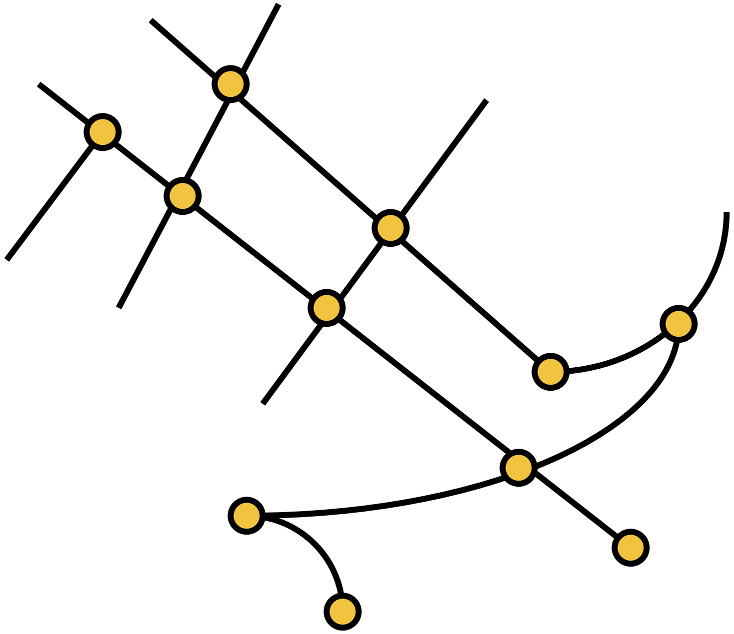
Bài toán 3. Một đoàn kiểm tra chất lượng các con đường. Để tiết kiệm thời gian, đoàn kiểm tra muốn đi qua mỗi con đường đúng 1 lần. Kiểm tra xem có cách đi như vậy không?



Bài toán 4. Xây dựng hệ thống các con đường để kết nối các khu vực sao cho chi phí thấp nhất.

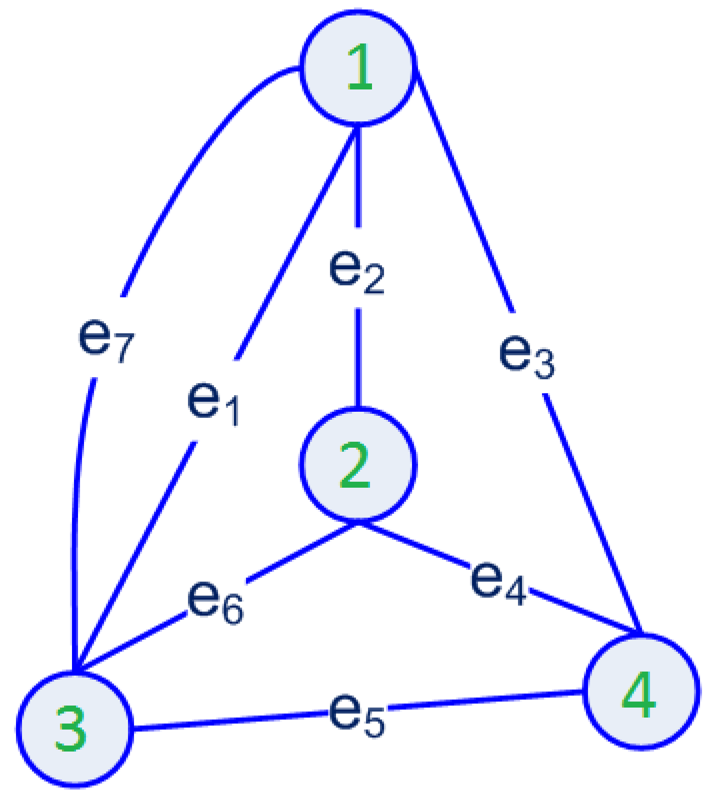


Bài toán 5. Một sinh viên muốn đi từ nhà đến trường thì phải đi như thế nào? Cách đi nào là ngắn nhất?



2. Các khái niệm cơ bản

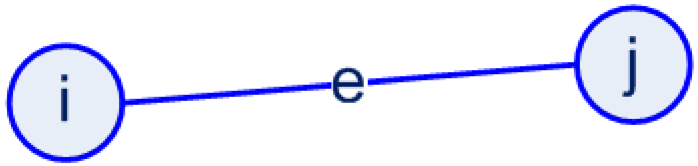
Định nghĩa. Một ***đồ thị vô hướng*** (undirected graph) **G=(V, E)** được định nghĩa bởi:



- Tập hợp **V ≠ ∅** được gọi là tập các **đỉnh** (vertex) và số phần tử của **V** gọi là cấp của đồ thị;
- Tập hợp **E** là tập các **cạnh** (edge) của đồ thị; Mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh {i, j}, không phân biệt thứ tự.

Đỉnh kề

Định nghĩa. Trên đồ thị vô hướng, xét cạnh e được liên kết với cặp đỉnh {i, j}:



- Cạnh e **kề** với đỉnh i và đỉnh j (hay đỉnh i và đỉnh j kề với cạnh e); có thể viết tắt e=ij
- Đỉnh i và đỉnh j được gọi là 2 đỉnh **kề nhau**
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh được gọi là **hai cạnh song song**.
- Cạnh có hai đỉnh trùng nhau gọi là một ***khuyên***

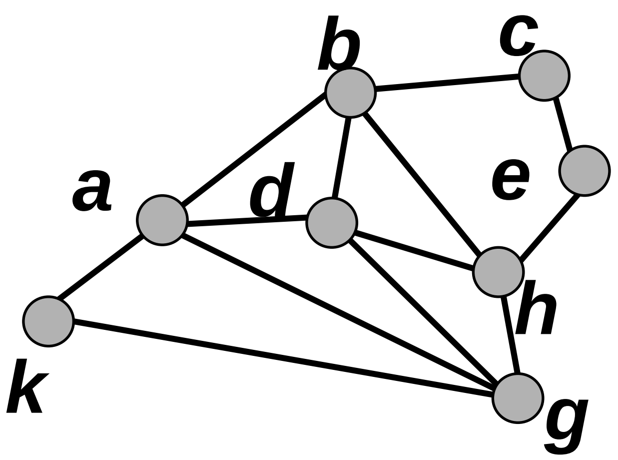
Một số loại đồ thị vô hướng

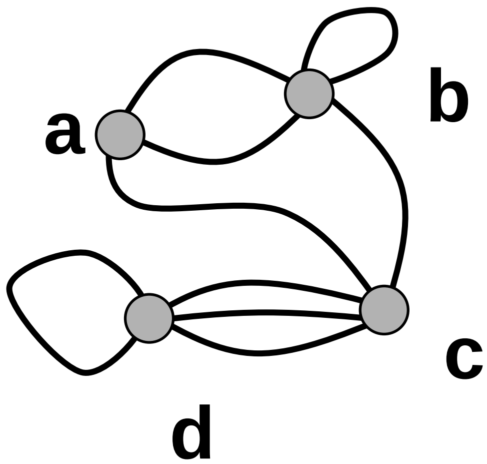
Định nghĩa. Cho G là đồ thị vô hướng. Khi đó G được gọi là:

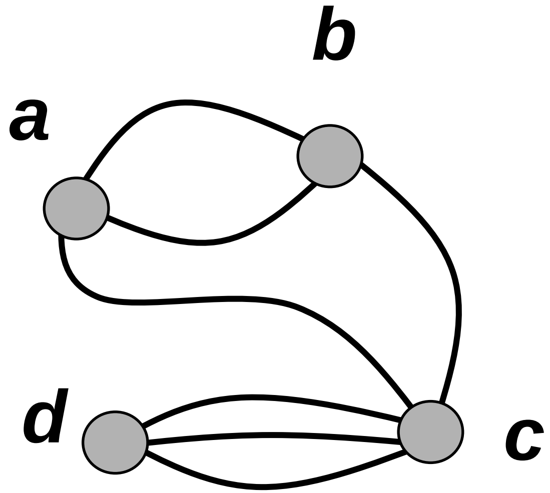
a) **đơn đồ thị** (hay **đồ thị đơn**) nếu G không có khuyên và không có cạnh song song

b) **đa đồ thị** nếu G không có khuyên, cho phép có cạnh song song

c) **giả đồ thị** nếu G cho phép có cạnh song song và có khuyên


b
c
a
d
e
h
k
g


a
b
c
d


b
a
d
c

Đỉnh kề

Tập các đỉnh kề với đỉnh v được viết là

$$\Gamma(v) = \{u \in V : \{v,u\} \in E\}$$

Nhận xét. Đồ thị đơn G hoàn toàn được xác định nếu chúng ta biết

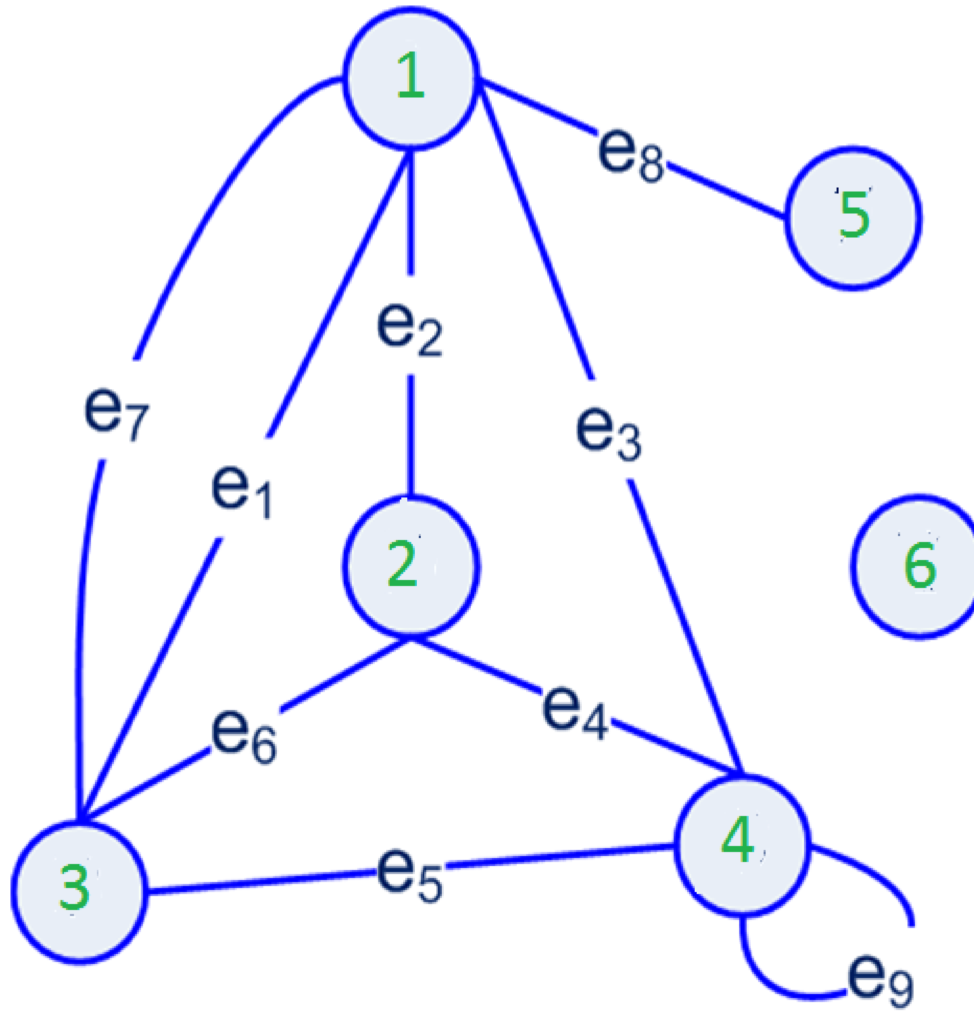
$$\Gamma(v), \forall v \in V$$

nên đồ thị đơn G cũng có thể định nghĩa như sau:

$$G = (V, \Gamma)$$

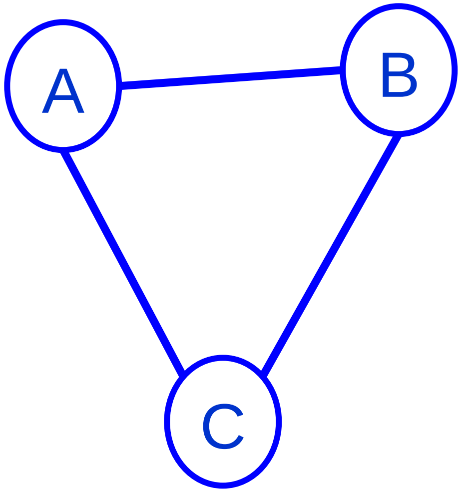
Đỉnh kề

- Cạnh song song: e_1, e_7
- Khuyên: e_9
- Đỉnh treo: 5
- Đỉnh cô lập: 6
- $\Gamma(2) = \{1, 3, 4\}$



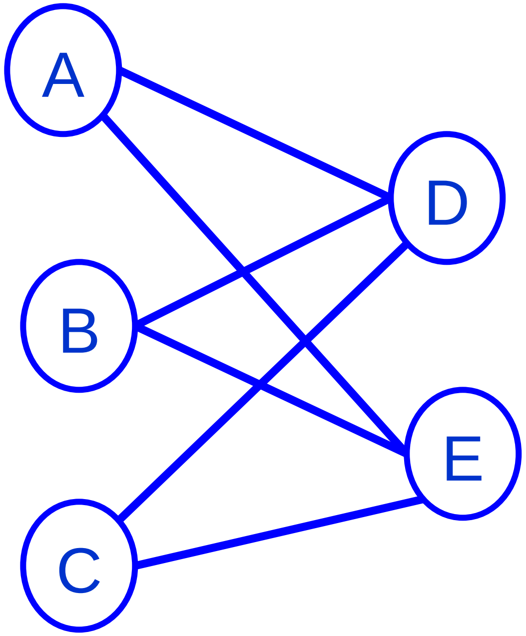
Các dạng đồ thị

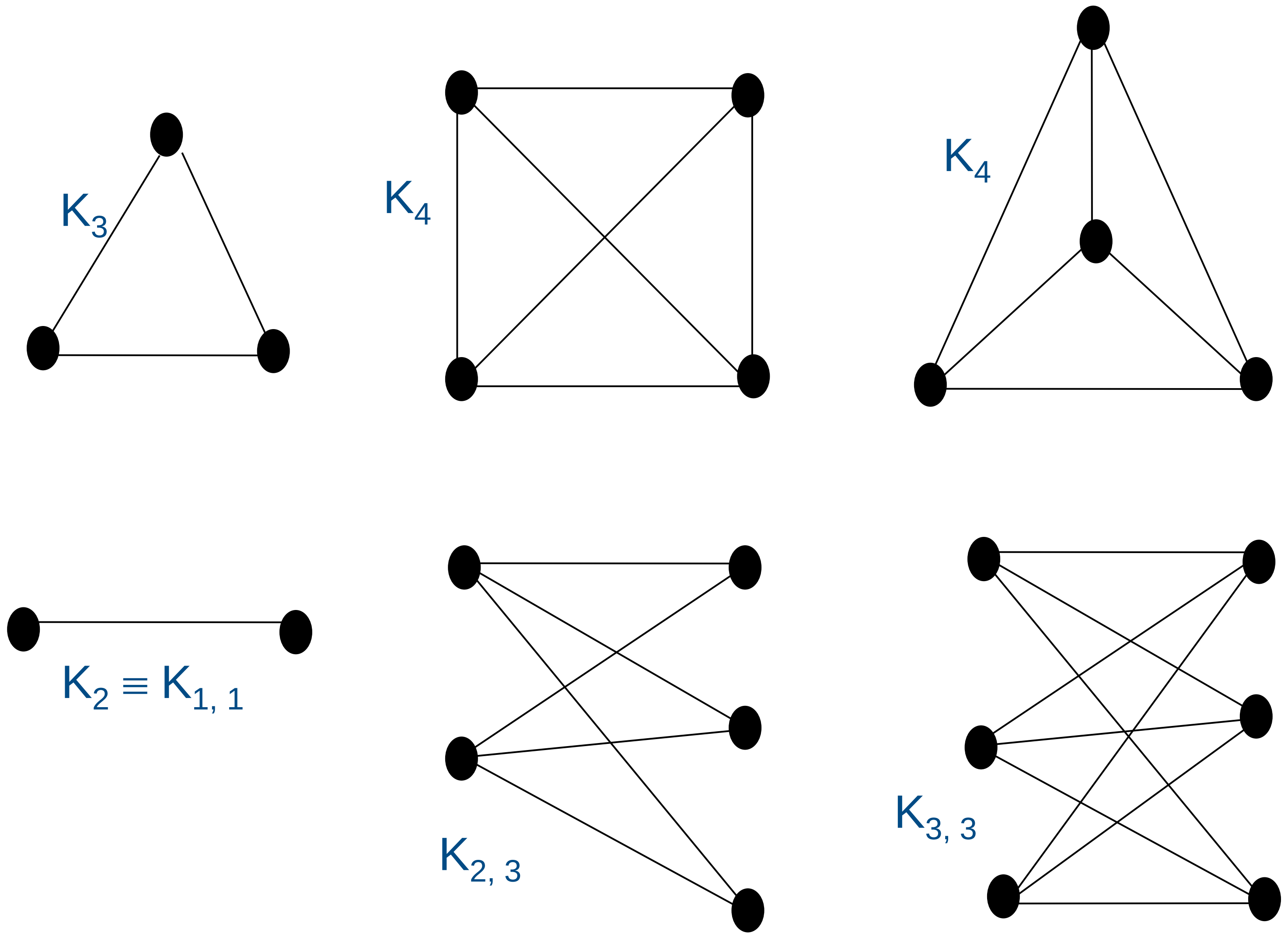
- **Đồ thị rỗng**: tập cạnh là tập rỗng
- **Đồ thị đủ:** đồ thị vô hướng, đơn, giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một cạnh.
  - Đồ thị đủ n đỉnh ký hiệu là K_n.
  - K_n có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh.
- **Đồ thị k-đều:** là đồ thị mà mọi đỉnh đều kề với đúng k đỉnh khác.



- **Đồ thị lưỡng phân**: là đồ thị vô hướng G=(V, E) có tập V được chia thành hai tập V_1 và V_2 thỏa:
  - V_1 và V_2 phân hoạch V;
  - Cạnh chỉ nối giữa V_1 và V_2.
- **Đồ thị lưỡng phân đủ**: là đồ thị lưỡng phân thỏa điều kiện mỗi đỉnh trong V_1 kề với mọi đỉnh trong V_2.

Nếu $|V_1|$=n và $|V_2|$=m, ta ký hiệu $\mathbf{K_{n,m}}$



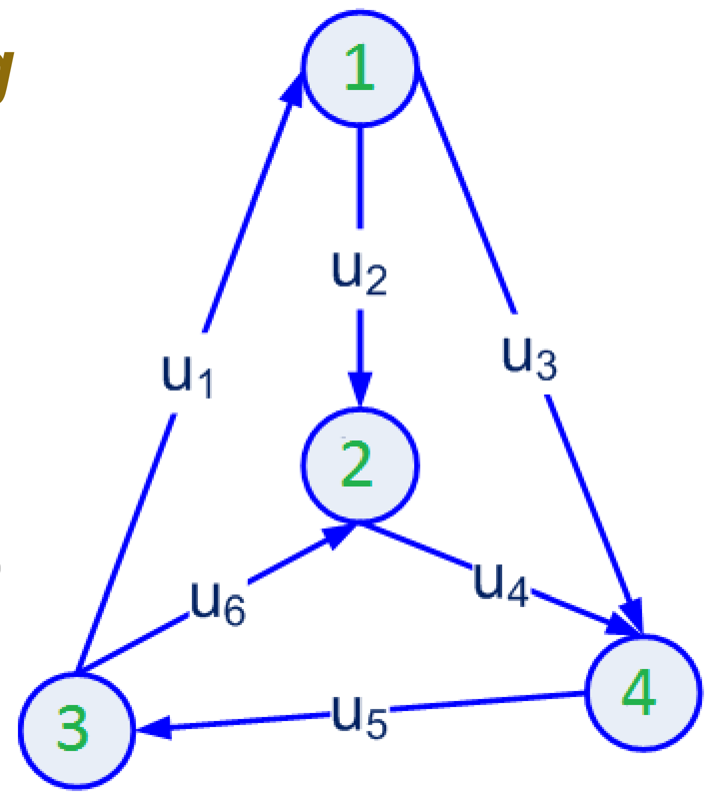


K_3
K_4
K_4
$K_2 \equiv K_{1,\,1}$
$K_{2,\,3}$
$K_{3,\,3}$

Đồ thị có hướng

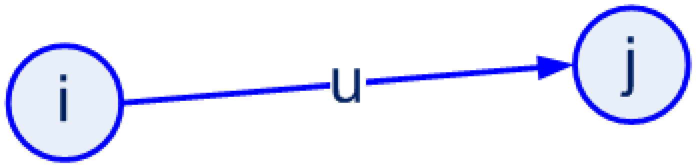
Định nghĩa. Một ***đồ thị có hướng*** (directed graph) **G=(V, U)** được định nghĩa bởi:

- Tập hợp **V** $\neq \varnothing$ được gọi là tập các đỉnh.
- Tập hợp **U** là tập các cạnh (**cung**) của đồ thị; Mỗi cạnh u$\in$U được liên kết với một cặp đỉnh **(i, j)**$\in V^2$. Ký hiệu **u=(i,j)** hoặc **u=ij.**



Đỉnh kề

Trên đồ thị có hướng, xét cạnh u được liên kết với cặp đỉnh (i, j):



- i được gọi là **đỉnh đầu**, j được gọi là **đỉnh cuối**
- Cạnh u **kề** với đỉnh i và đỉnh j, có thể viết tắt u=(i, j).

Đỉnh kề

Định nghĩa. Cho đồ thị có hướng G=(V, U) và e=(u,v)$\in$U

- v là **đỉnh sau** của u
- u là **đỉnh trước** của v
- Tập hợp các đỉnh sau và đỉnh trước của v lần lượt là

$$\Gamma(v), \quad \Gamma^{-}(v)$$

Nhận xét. Đơn đồ thị G hoàn toàn được xác định nếu chúng ta biết

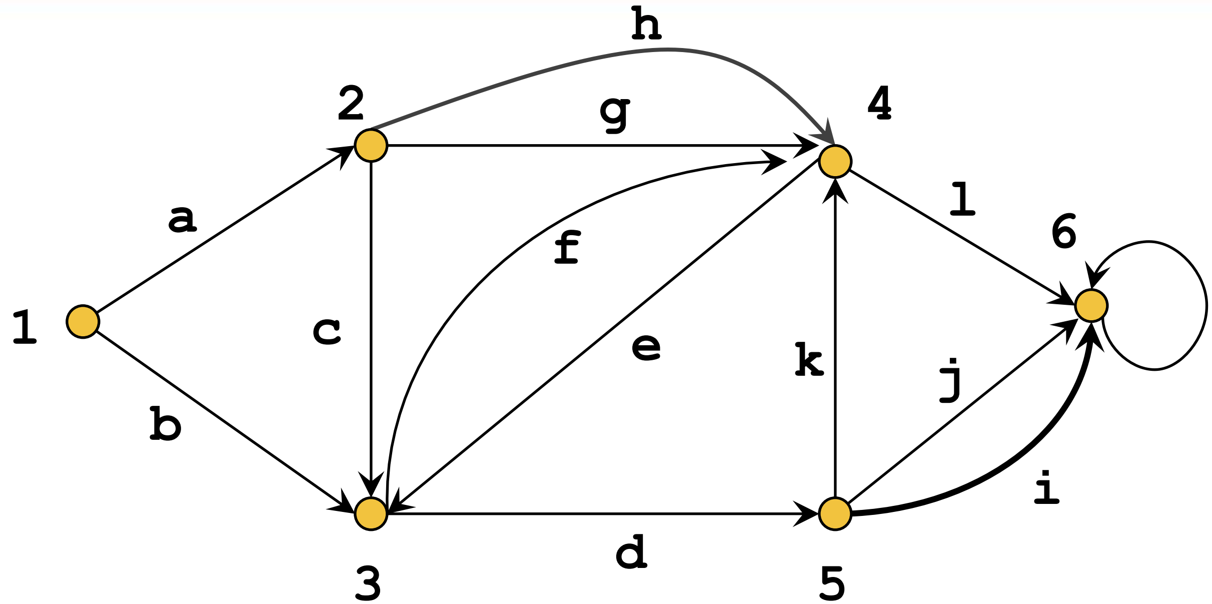
$$\Gamma(v), \forall v \in V$$

nên đồ thị G cũng có thể được định nghĩa như sau:

$$G = (V, \Gamma)$$

Đỉnh kề

Ví dụ.



v	$\Gamma(v)$	$\Gamma^{-}(v)$
1		
2		
3		
5		
6		

- Cạnh song song

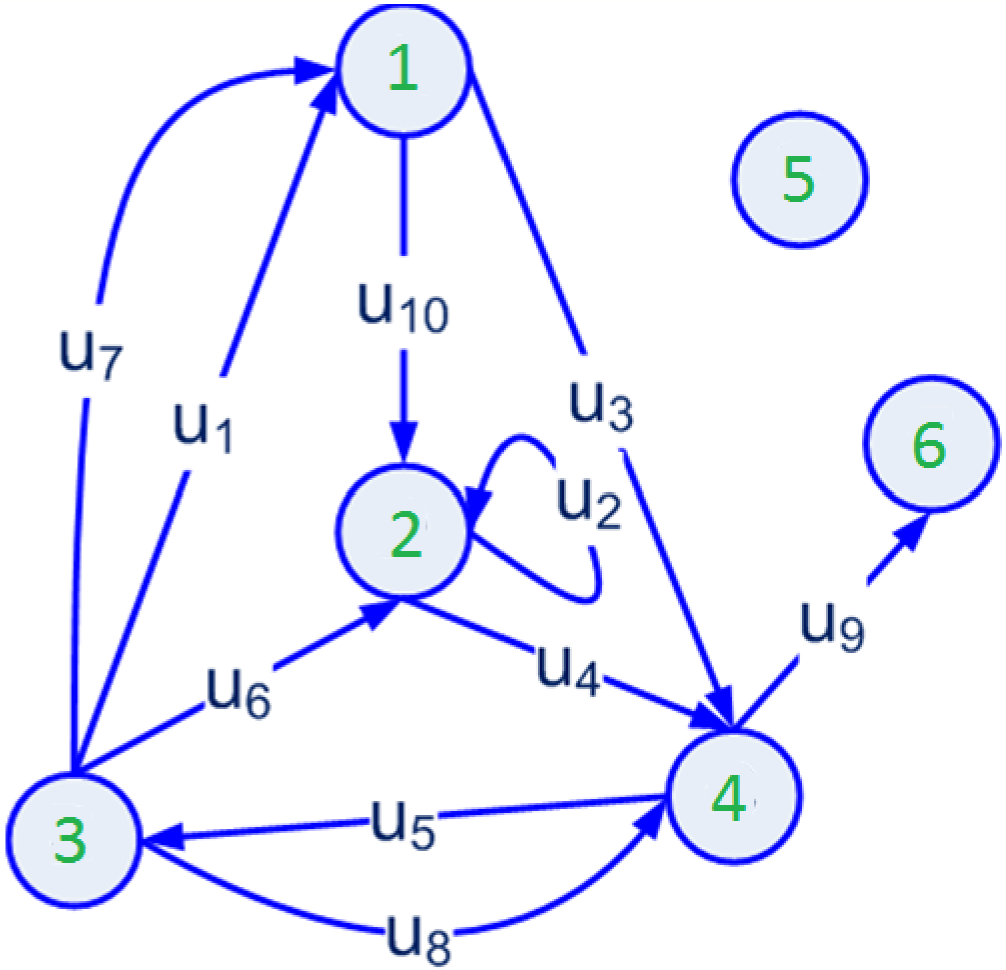
  - u_1, u_7 cùng chiều

  - u_5, u_8 ngược chiều

- Khuyên: u_2

- Đỉnh treo: 6

- Đỉnh cô lập: 5



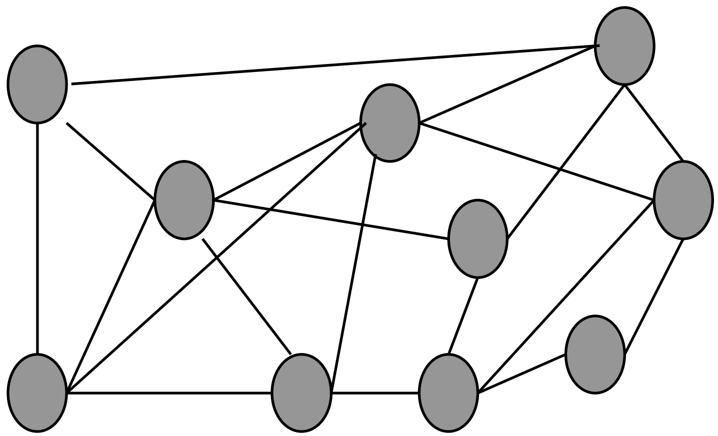
Đồ thị hữu hạn

- Đồ thị có tập đỉnh và tập cạnh hữu hạn được gọi là ***đồ thị hữu hạn***
- Trong học phần này ta chỉ làm việc với các đồ thị hữu hạn. Để ngắn gọn chúng ta chỉ dùng thuật ngữ **ĐỒ THỊ** và hiểu ngầm đó là đồ thị hữu hạn.

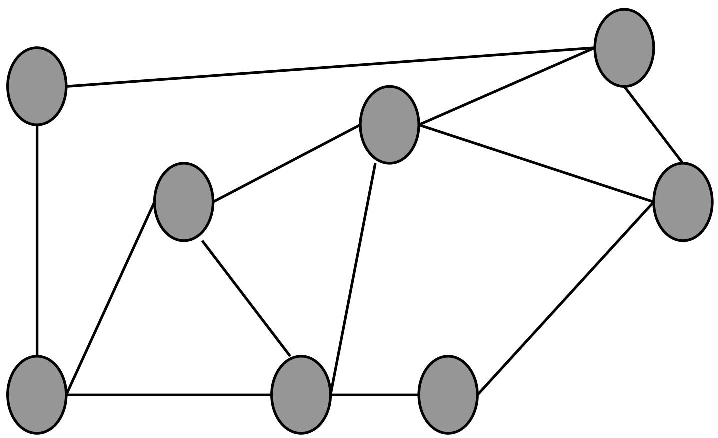
Đồ thị con

Định nghĩa. Cho hai đồ thị G = (V,E) và G' = (V',E') (cùng vô hướng hoặc cùng có hướng).

G' được gọi là ***đồ thị con*** của G, ký hiệu **G'≤ G**, nếu V' $\subseteq$ V và E' $\subseteq$ E



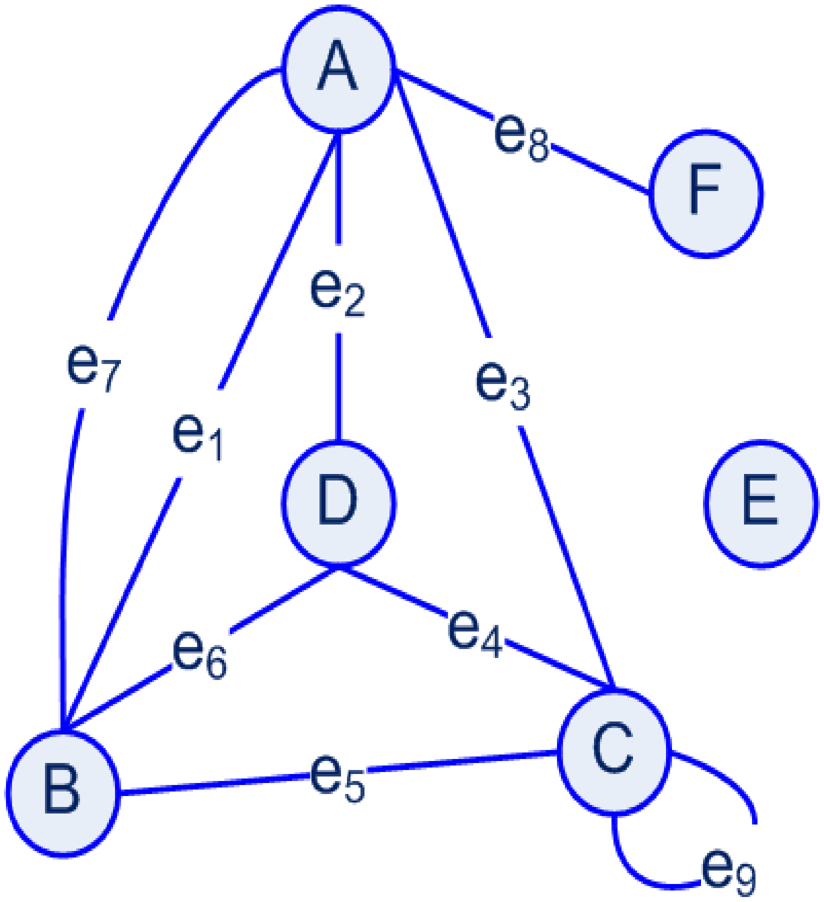
G



G'

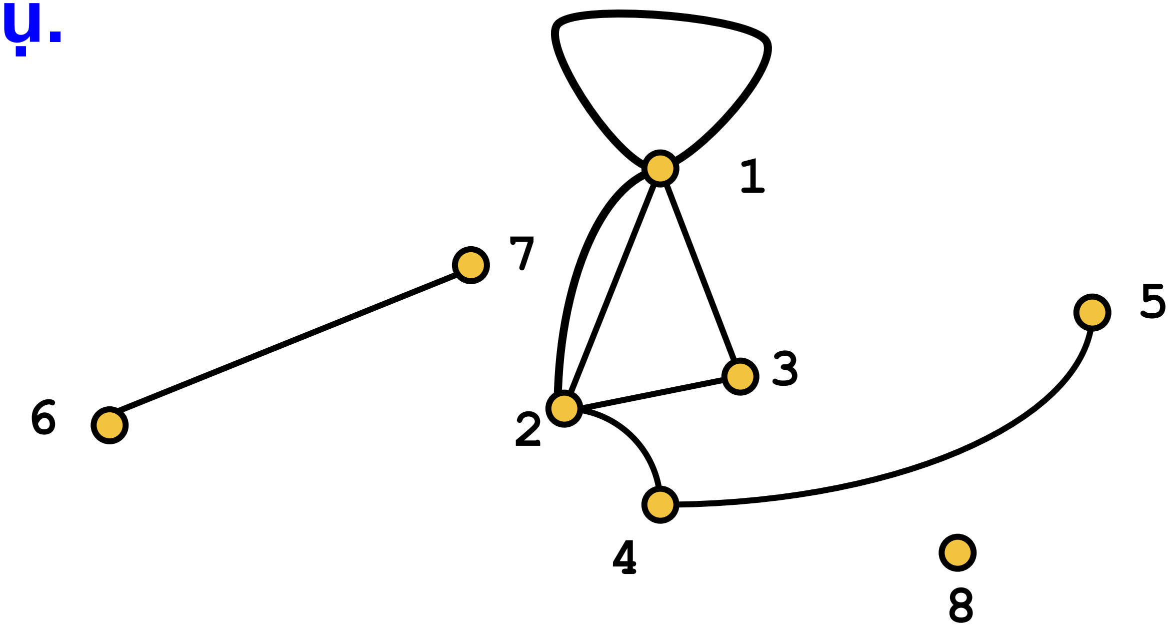
Bậc của đỉnh

Định nghĩa. Xét đồ thị vô hướng G, **bậc của đỉnh x** trong đồ thị G là số các cạnh kề với đỉnh x, mỗi khuyên được tính hai lần, ký hiệu là **$deg_G(x)$** (hay **deg(x)** nếu đang xét một đồ thị nào đó).



Bậc của đỉnh

Ví dụ.



i	1	2	3	4	5	6	7	8
deg(i)								

Bậc của đỉnh

Ví dụ. *H* là *đơn đồ thị vô hướng* có *n* đỉnh ($n \geq 2$).

a) Mỗi đỉnh của *H* có bậc tối đa là bao nhiêu? *H* có tối đa bao nhiêu cạnh ?

b) Chứng minh rằng *H* có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc.

Giải. a) Vì H là đồ thị đơn vô hướng nên mỗi đỉnh của H không có khuyên và chỉ có thể nối với các đỉnh khác không quá một cạnh, nghĩa là mỗi đỉnh của H có bậc tối đa là $(n – 1)$.

Suy ra H có tối đa là $n(n – 1) / 2$ cạnh

Bậc của đỉnh

b) Giả sử bậc của các đỉnh của H đều khác nhau. Khi đó bậc của n đỉnh của H lần lượt là 0, 1, ..., (n - 1), nghĩa là H phải có đỉnh bậc 0.

Do H có đỉnh bậc 0 nên các đỉnh khác của H có bậc tối đa là (n – 2) **mâu thuẫn**. Vậy có ít nhất 2 đỉnh của H có cùng bậc.

Ví dụ. Hãy vẽ một đồ thị đơn vô hướng (nếu có) gồm 6 đỉnh với bậc các đỉnh lần lượt là:

a) 2, 2, 3, 3, 3, 3

b) 1, 1, 2, 2, 3, 4

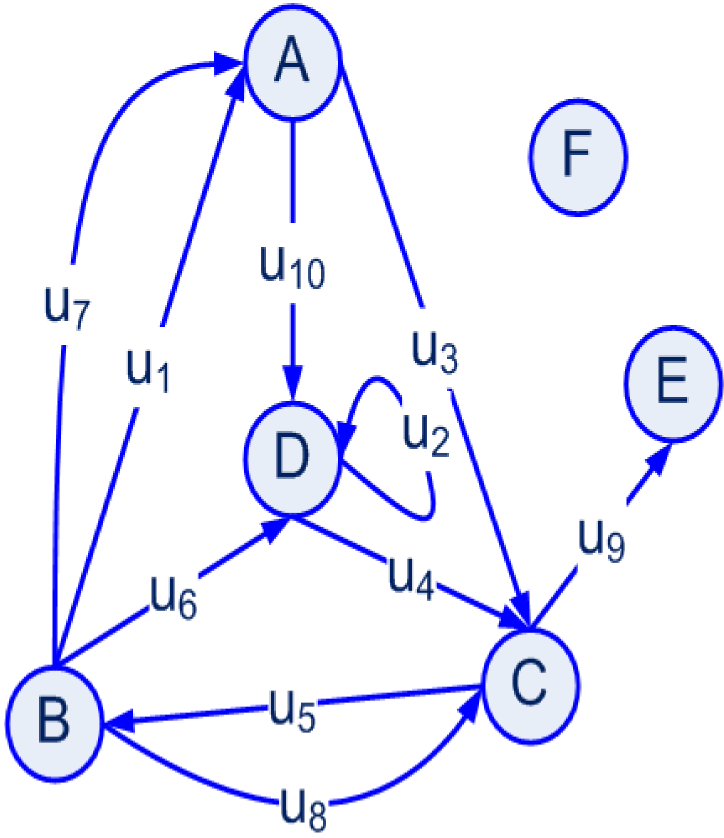
Câu b) không tồn tại đồ thị

Bậc của đỉnh

Định nghĩa. Xét đồ thị có hướng G

- Bậc ngoài của đỉnh x là số các cạnh đi ra khỏi đỉnh x, ký hiệu $deg^{+}(x)$.
- Bậc trong của đỉnh x là số các cạnh đi vào đỉnh x, ký hiệu $deg^{-}(x)$.
- Bậc của đỉnh x:

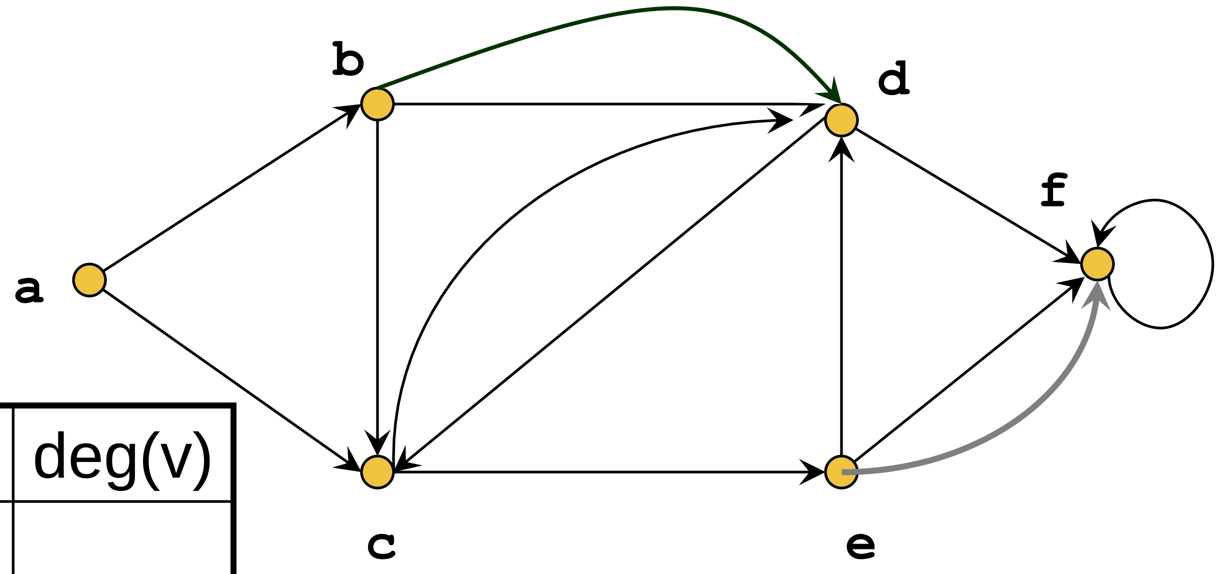
$$deg(x)=deg^{+}(x)+deg^{-}(x)$$



Bậc của đỉnh

Chú ý. 1 khuyên được tính 1 lần bậc ngoài và 1 lần bậc trong

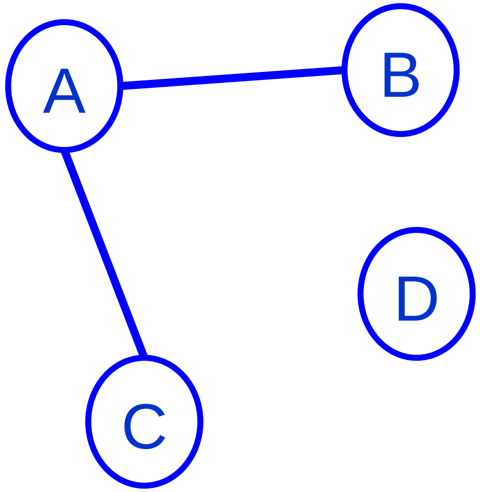
Ví dụ.



v	$deg^{-}(v)$	$deg^{+}(v)$	deg(v)
a			
b			
c			
d			
e			
f			

Bậc của đỉnh

- Đỉnh TREO là đỉnh có bậc bằng 1.
- Đỉnh CÔ LẬP là đỉnh có bậc bằng 0.



Mối liên hệ giữa bậc và số cạnh

Định lý.

- Xét đồ thị có hướng G=(V, U). Ta có:

$$\sum_{x\in V}\deg^{+}(x)=\sum_{x\in V}\deg^{-}(x) \quad \textit{và} \quad \sum_{x\in V}\deg(x)=2|U|$$

- Xét đồ thị vô hướng G=(V, E). Ta có:

$$\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|$$

Hệ quả. Số đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị là chẵn.

Ví dụ. Trong một bữa tiệc, mọi người bắt tay với nhau. Chứng minh rằng số người bắt tay với một số lẻ người khác là chẵn.

Giải. Lập đồ thị vô hướng G như sau:

- Mỗi đỉnh là đại diện cho một người
- Hai đỉnh nối với nhau bằng một cạnh nếu hai người đó bắt tay nhau

Một người bắt tay với một số lẻ người khác, có nghĩa đỉnh tương ứng có bậc là lẻ. Theo hệ quả trên ta có điều chứng minh.

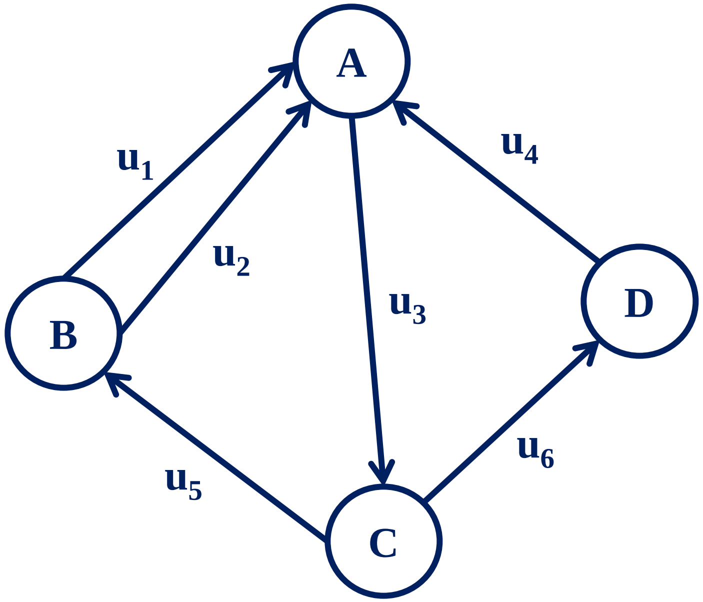
Ví dụ. Cho *G* là đồ thị vô hướng có 6 đỉnh với các bậc lần lượt là 1, 2, 2, 2, 3 và 4. Tính số cạnh của *G.* Hãy vẽ phác họa đồ thị *G.* (một trường hợp là đồ thị đơn và một trường hợp là đồ thị có cả khuyên và các cạnh song song).

Ví dụ. Cho *H* là đồ thị vô hướng có 34 cạnh, 3 đỉnh bậc 6 và các đỉnh còn lại có bậc 5 và bậc 8. Hãy xác định số đỉnh của *H.*

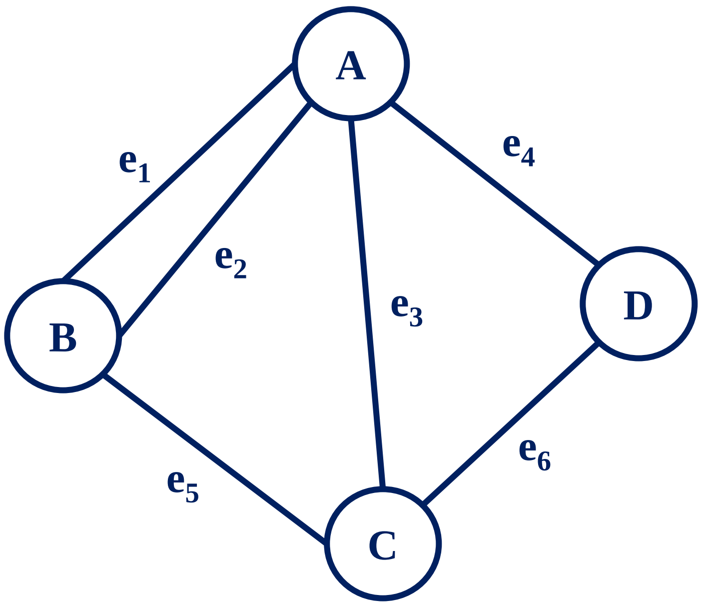
Ví dụ. Vẽ đồ thị đơn vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc

2, 2, 3, 3, 3, 5

3. Biểu diễn đồ thị



G



H

Ma trận liên kết

Định nghĩa. Cho G=(V,E) với V ={1,..,n} và E ={e_1,…e_m}. ***Ma trận liên kết*** **(incidence matrix)** của G là ma trận A=(a_{ij}) cấp nxm được định nghĩa như sau:

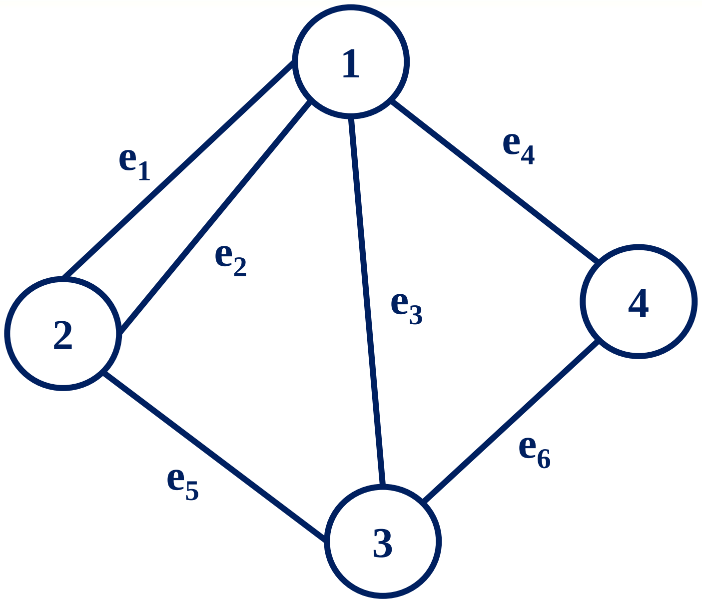
a) Nếu G vô hướng thì $a_{ij} \in$ {0,1} xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i \text{ kề với } e_j \\ 0 & \text{nếu } i \text{ không kề với } e_j \end{cases}$$

b) Nếu G có hướng thì $a_{ij} \in$ {-1,0,1} xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e_j \text{ rời khỏi } i \\ -1 & \text{nếu } e_j \text{ đi vào } i \\ 0 & \text{nếu } e_j \text{ không kề với } i \end{cases}$$

Ma trận liên kết



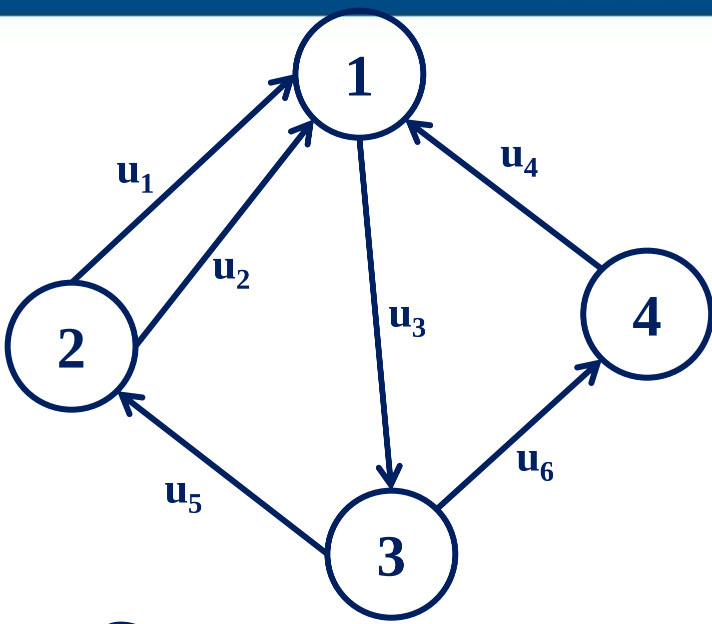
G

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hỏi. Có nhận xét gì về các số trên dòng và trên cột?

- Bậc của đỉnh i = tổng các số trên dòng i
- Mỗi cột luôn có tổng =2

Ma trận liên kết



G

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hỏi. Có nhận xét gì về các số trên dòng và trên cột?

- **deg^+(i)**= tổng các số **1** trên dòng **i**
- **deg^-(i)** = tổng các số **-1** trên dòng **i**
- Mỗi cột luôn có một số **1** và một số **-1**

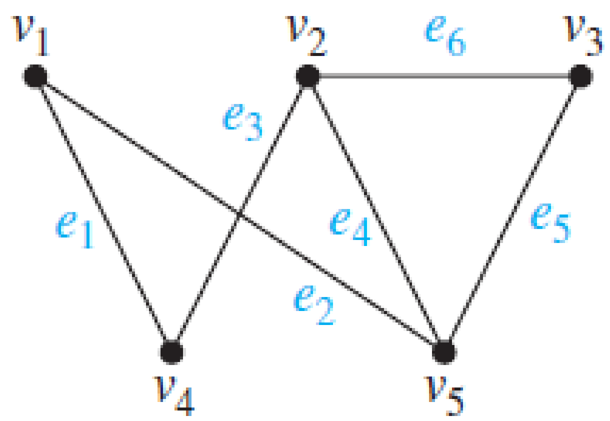
Ma trận liên kết

Ví dụ. Cho G là đồ thị có ma trận liên kết

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Hãy vẽ đồ thị G

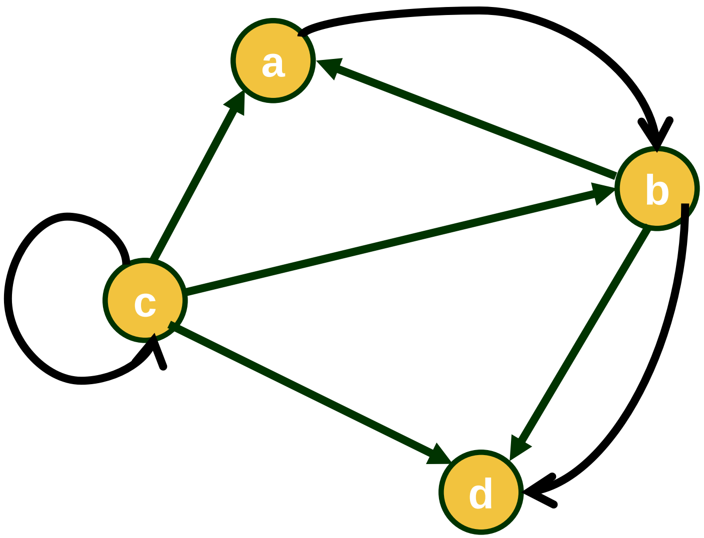
Đáp án.



Ma trận kề

Định nghĩa. Cho G=(V,E) với V ={1,..,n}. ***Ma trận kề*** (adjacency matrix) của G là ma trận vuông **$A=(a_{ij})$** cấp n xác định bởi

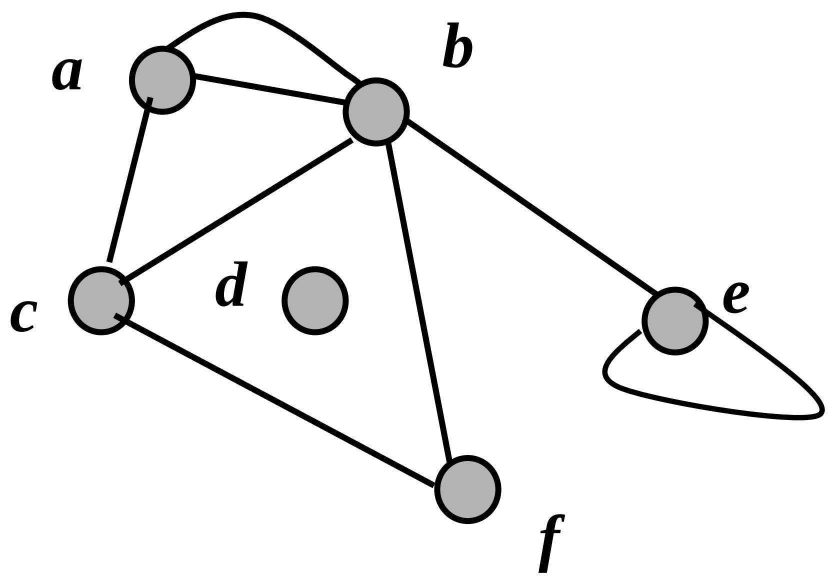
a_{ij}= số cạnh từ đỉnh i đến j



$$\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
\hline
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}
\end{array}$$

Ma trận kề

Ví dụ. Tìm ma trận kề của đồ thị sau ?



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

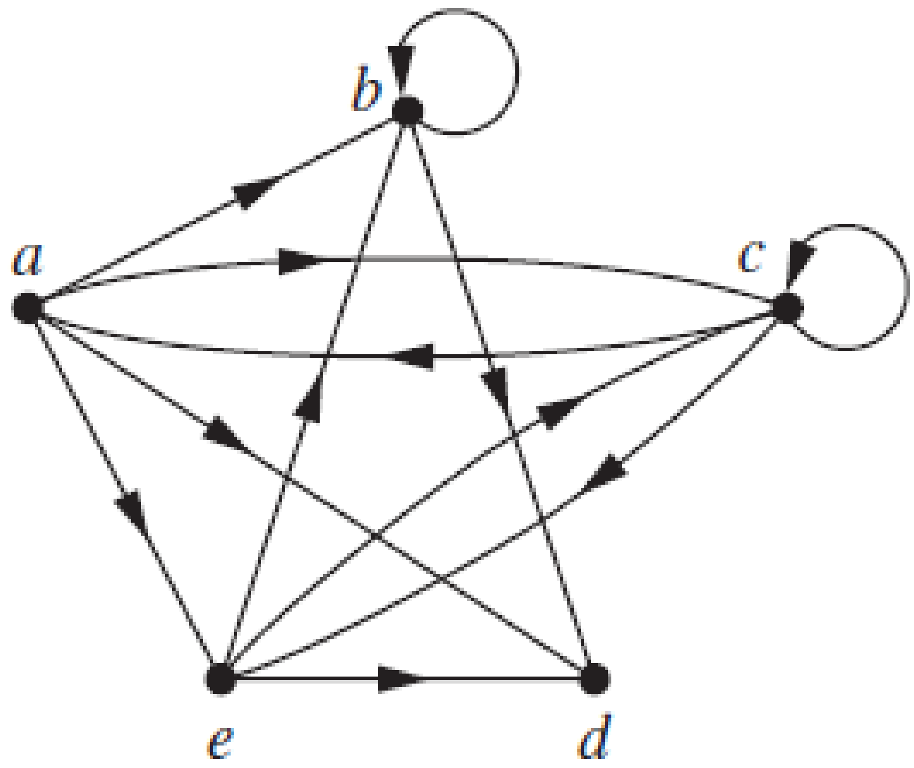
Lưu ý. Với đồ thị vô hướng, nếu đỉnh i có 1 khuyên thì a_{ii} được tính là 1.

Tính chất

1. Ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng $a_{ij} = a_{ji}$. Số khuyên của đỉnh i là a_{ii}
2. Nếu đồ thị vô hướng không khuyên
   Tổng dòng thứ i = Tổng cột thứ i = bậc của đỉnh i
3. Nếu đồ thị có hướng:
   - Tổng dòng i = bậc ngoài của i
   - Tổng cột i =bậc trong của i

Ma trận kề

Ví dụ. Lập ma trận kề của đồ thị sau:



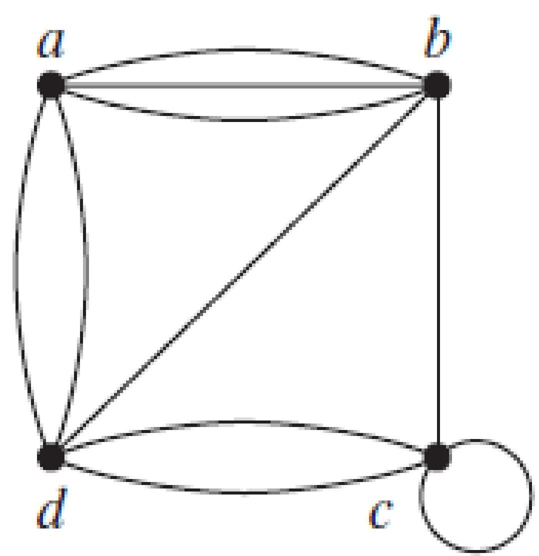
Ma trận kề

Ví dụ. Cho đồ thị vô hướng G với ma trận kề sau:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

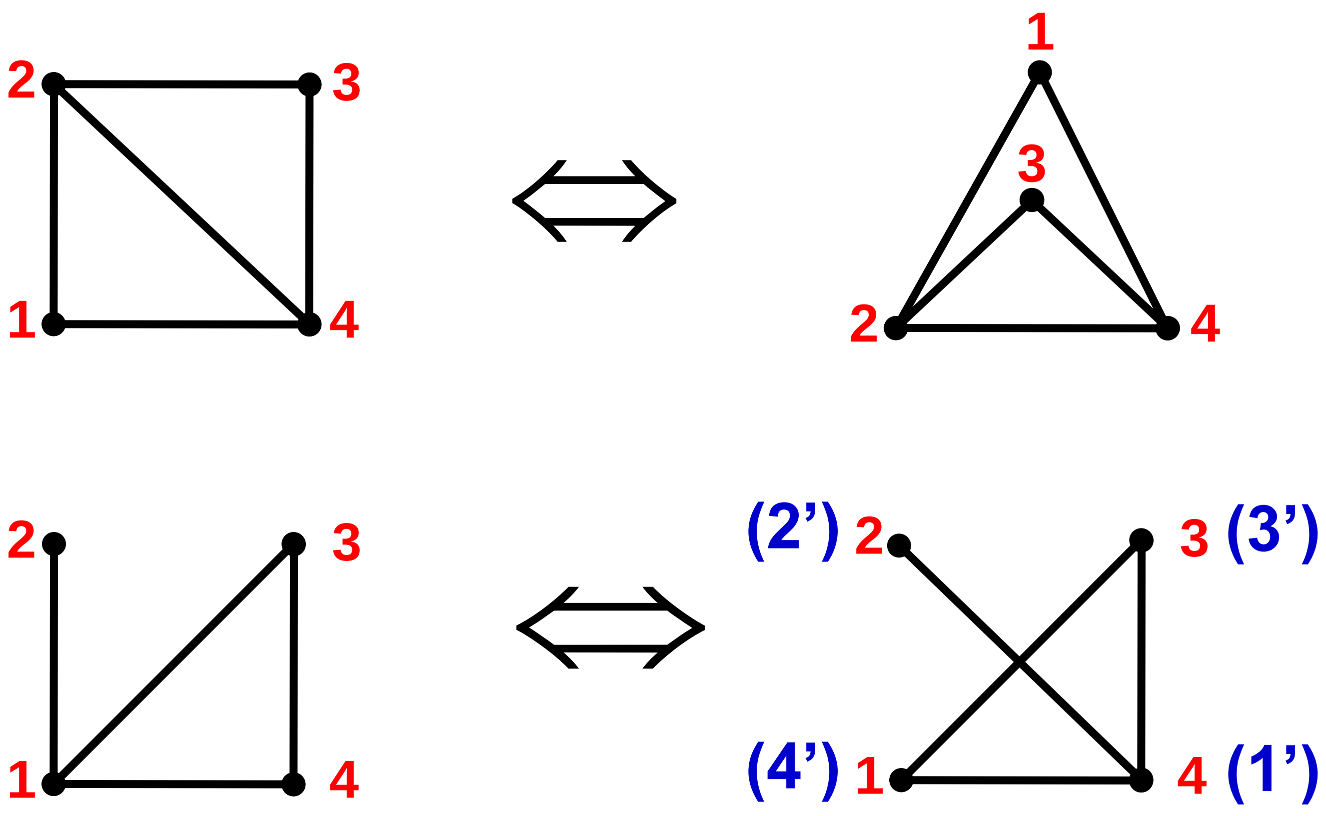
Hãy vẽ đồ thị G

Đáp án



4. Đẳng cấu đồ thị

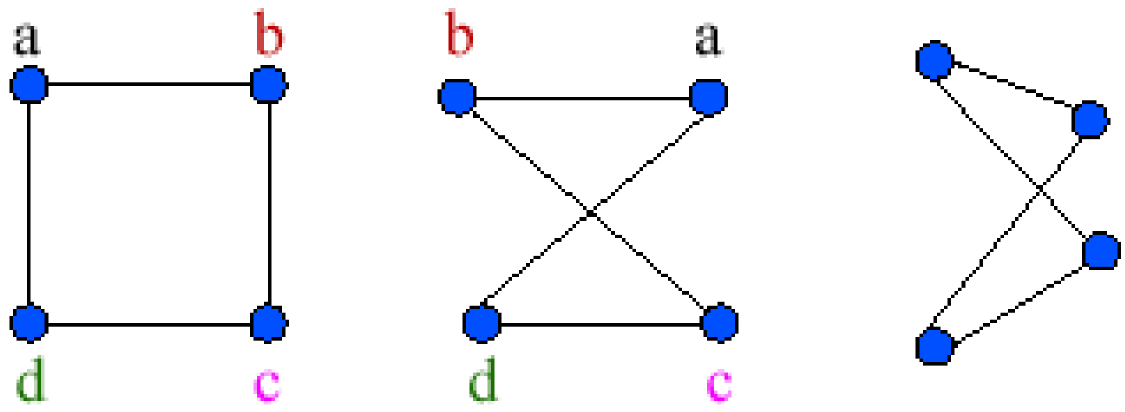
Xét hai đồ thị sau: chúng giống nhau hay khác nhau?



4. Đẳng cấu đồ thị

Định nghĩa. Cho hai đồ thị đơn G = (V,E) và G'=(V',E'). Ta nói rằng G ***đẳng cấu*** G', ký hiệu G ≅ G', nếu tồn tại song ánh f :V→ V'sao cho:

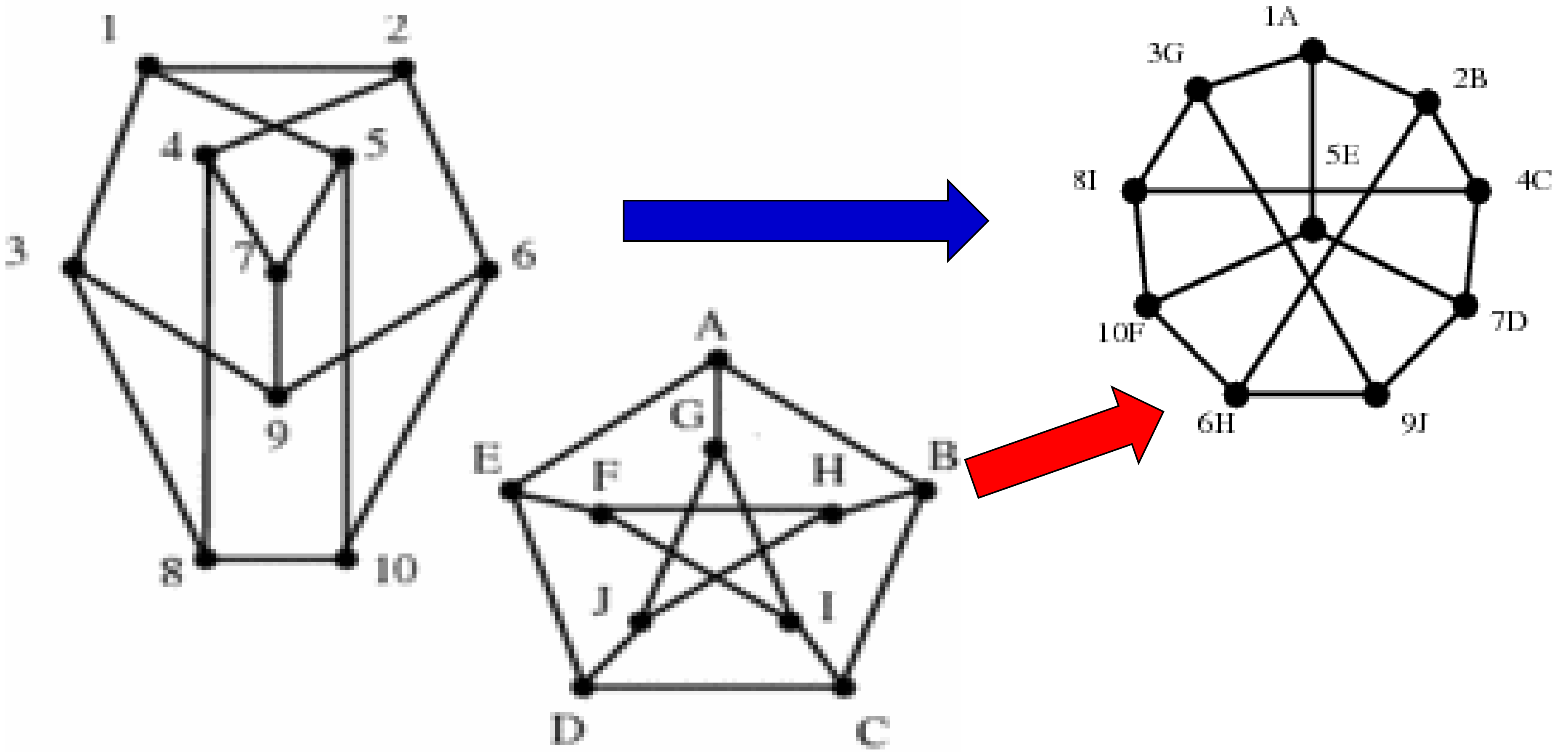
ij là cạnh của G ⇔ f(i)f(j) là cạnh của G'

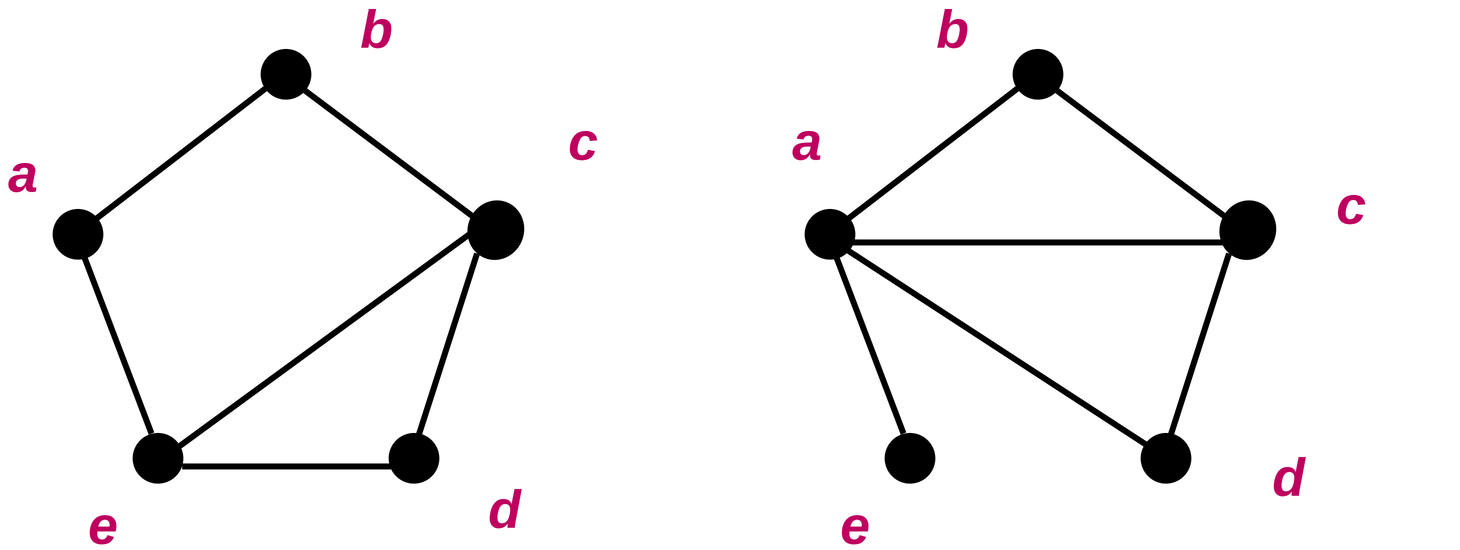


Chú ý. Nếu G và G' là các đồ thị đơn vô hướng đẳng cấu qua ánh xạ f thì chúng có:

- Cùng số đỉnh
- Cùng số cạnh
- Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn
- deg i = deg f(i)
- ….

Ví dụ.

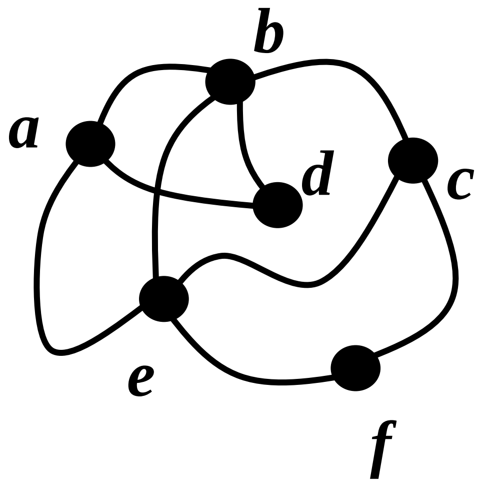


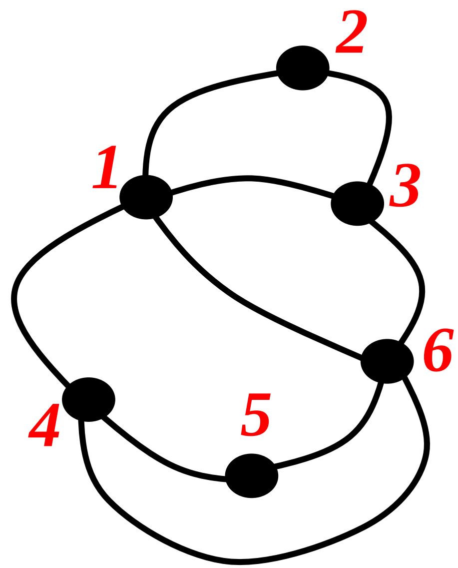


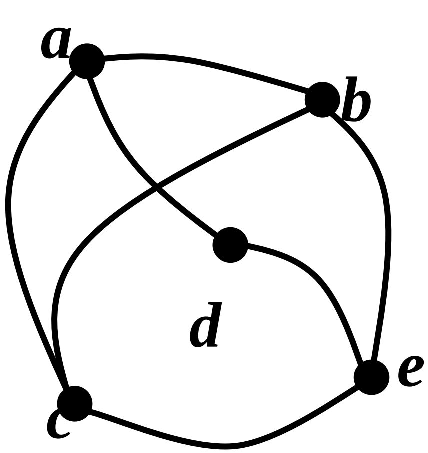
deg(e) = 1

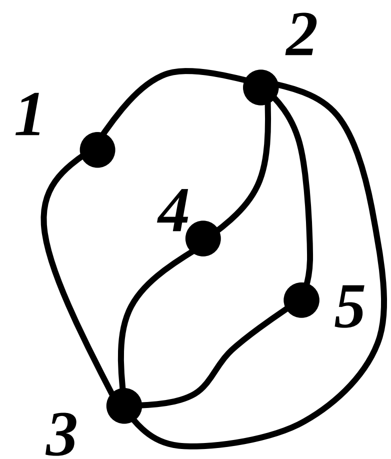
Không đẳng cấu

Ví dụ. Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Tại sao?

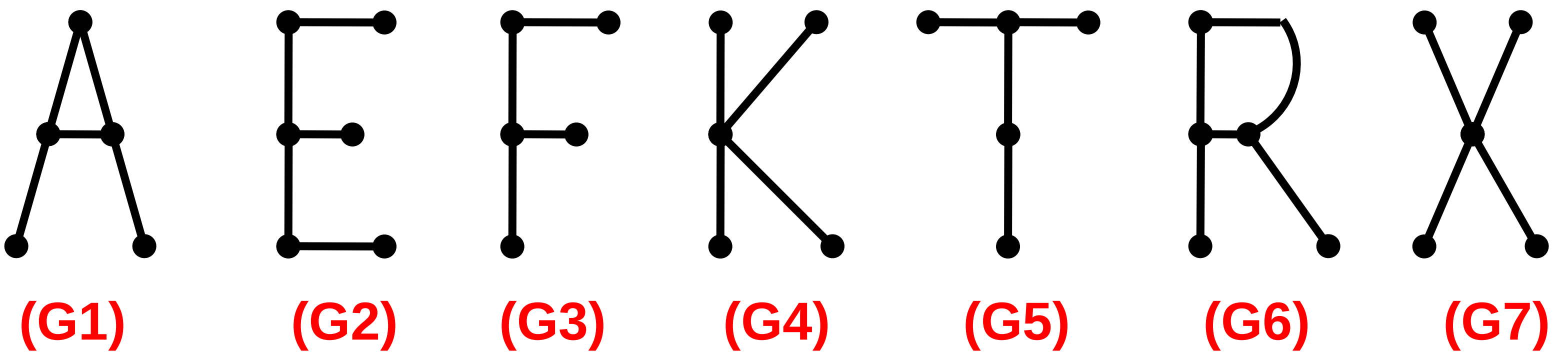








Ví dụ. Hãy tìm các đồ thị đẳng cấu trong các đồ thị sau:

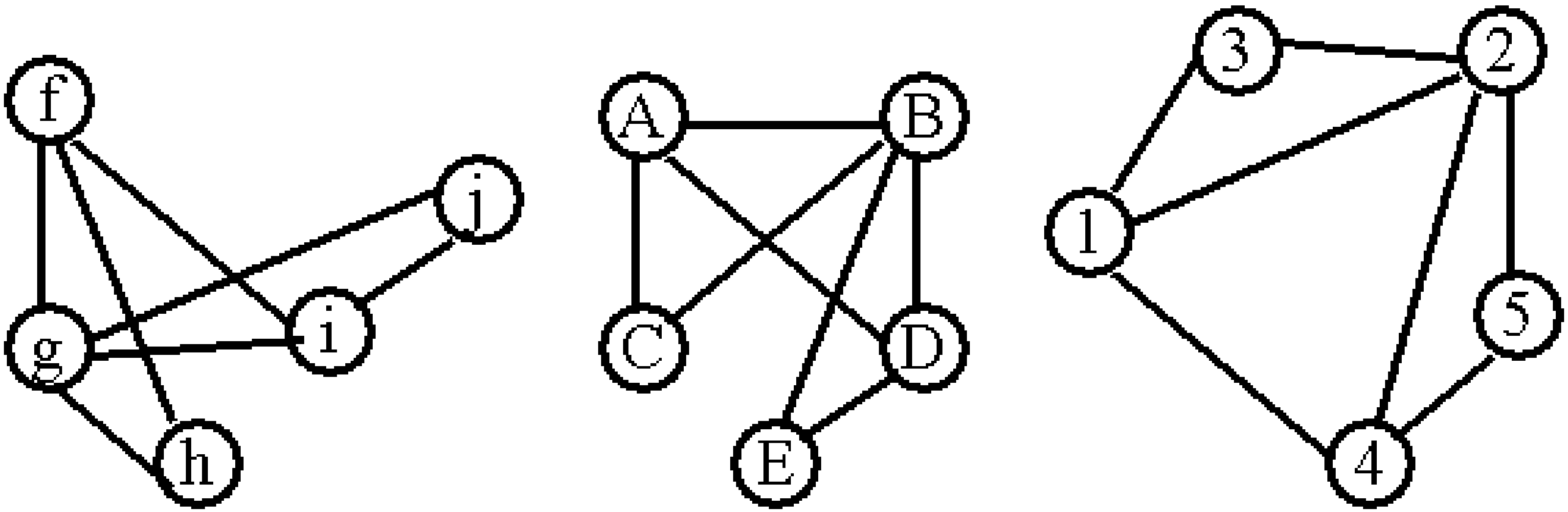


$$G_1 \cong G_6$$

$$G_3 \cong G_5$$

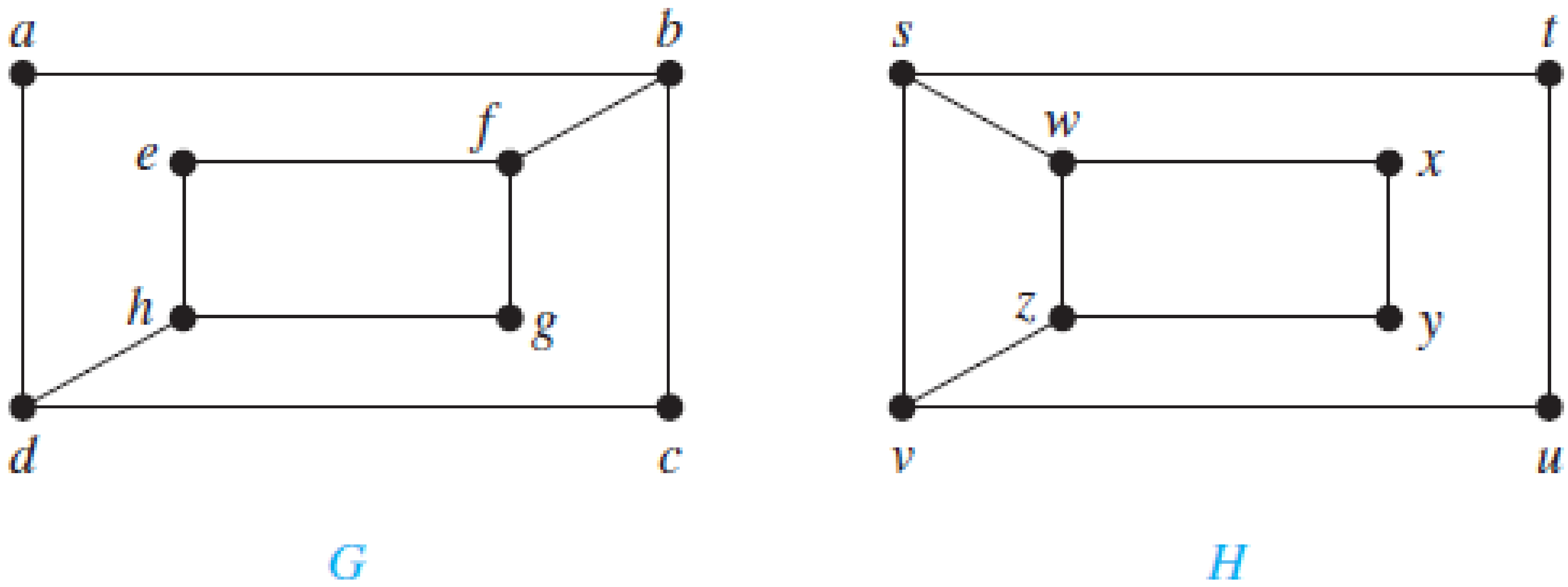
$$G_4 \cong G_7$$

Ví dụ. Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Tại sao?



g – B – 2
f – D – 4
i – A – 1
j – E – 5
h – C - 3

Ví dụ. Hai đồ thị sau có đẳng cấu không? Tại sao?



5. Đường đi, chu trình

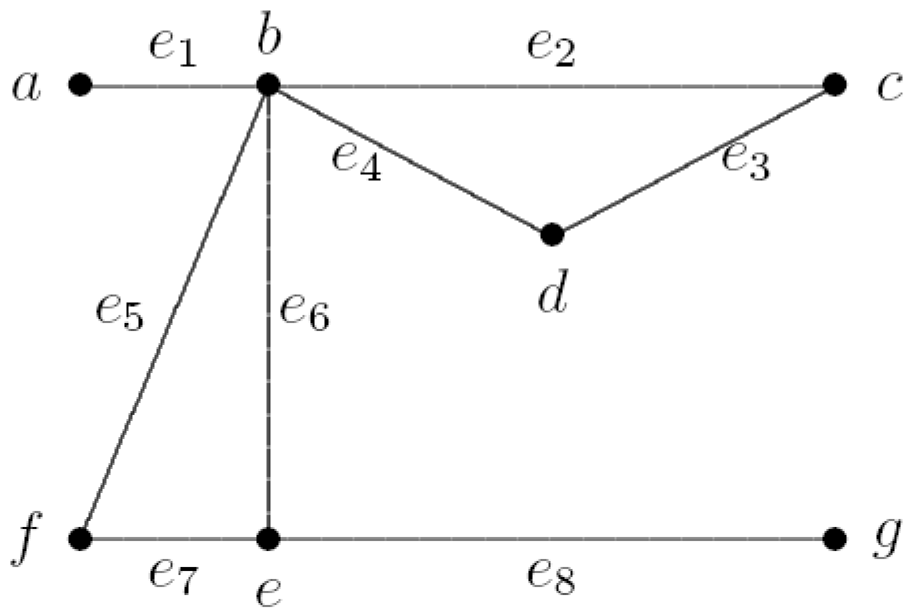
Định nghĩa. Cho G = (V, E) là đồ thị vô hướng và hai đỉnh u, v. Khi đó

a) ***Đường đi*** (**path**) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau $\mathbf{v_0e_1v_1e_2\ldots v_{k-1}e_kv_k}$ sao cho:

$$v_0=u,\ v_k = v \text{ và } e_i=v_{i-1}v_i\ ,\ i=1,2,\ldots,k$$

Đường đi ***đơn*** **(simple)** *là đường đi mà không có cạnh nào* xuất hiện quá một lần và gọi là **sơ cấp** nếu không có đỉnh nào xuất hiện quá một lần.

b) Nếu đường đi khép kín (u trùng với v) thì ta gọi nó là ***chu trình*** (**circuit**). Khái niệm chu trình đơn, sơ cấp tương tự như khái niệm đường đi.

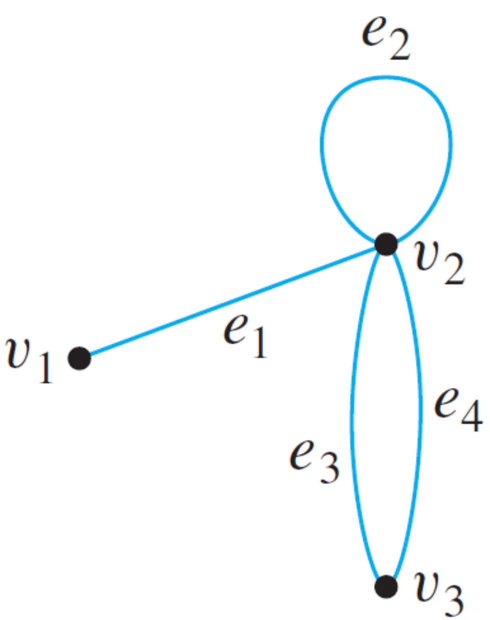


Chu trình sơ cấp nào không?

- $a,e_1,b,e_2,c,e_3,d,e_4,b$ là đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b có chiều dài là 4. Vì đồ thị đơn, nên ta có thể viết ngắn gọn là: (a,b,c,d,b)
- Chu trình sơ cấp: (b,c,d,b)   (b,f,e,b)

Đếm sồ đường đi cho chiều dài cho trước

Ví dụ. Xem xét đồ thị sau. Hỏi có bao nhiêu đường đi có độ dài 2 từ v_2 tới v_2.



Qua v_1: $v_2e_1v_1e_1v_2$.

Qua v_2: $v_2e_2v_2e_2v_2$.

Qua v_3: $v_2e_3v_3e_4v_2$,

$v_2e_4v_3e_3v_2$,

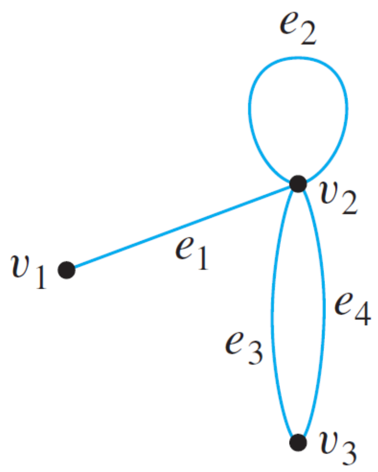
$v_2e_3v_3e_3v_2$,

$v_2e_4v_3e_4v_2$.

Đáp án = 6

Câu hỏi. Làm sao để đếm được số đường đi có độ dài k từ đỉnh này tới đỉnh kia

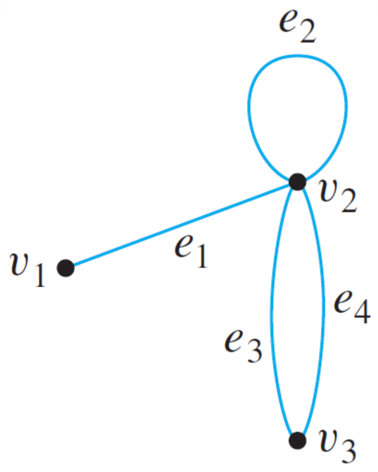
Ta xem xét ma trận kề của G



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Compute A^2:

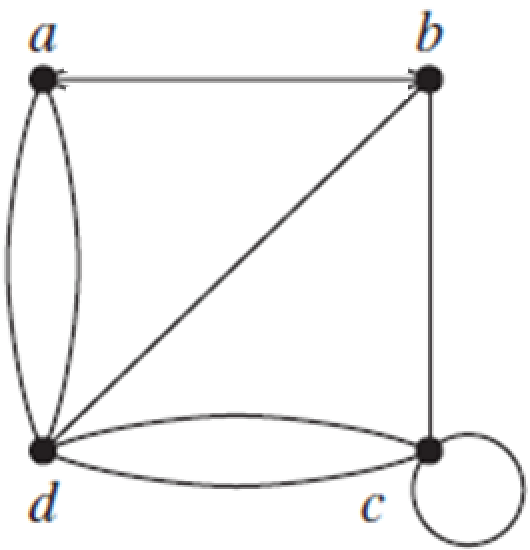
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$



Nhận thấy a_{22} = 6 bằng số đường đi có độ dài 2 v_2 tới v_2

Định lý. Cho G là đồ thị với các đỉnh v_1, v_2, …, v_n và A là ma trận kề của *G*. Khi đó với k>0 ta có phần tử thứ ij của ma trận A^k là số đường đi có chiều dài k *từ* v_i tới v_j.

Ví dụ. Tìm số đường đi có chiều dài 3 của a tới c.



Liên thông

Định nghĩa. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng. Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

u~v ⇔ u = v hay có một đường đi từ u đến v

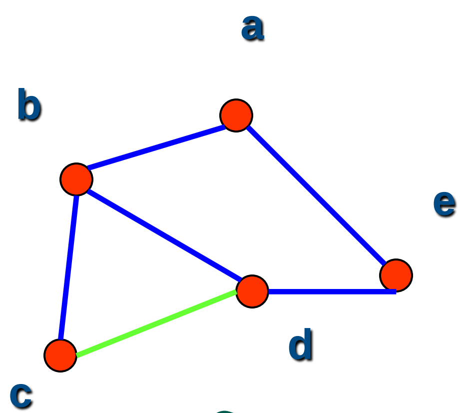
a) Nếu **u~v** thì ta nói hai đỉnh u và v ***liên thông*** với nhau

b) Đồ thị con tối đại được tạo bởi các đỉnh của một lớp tương đương được gọi là một ***thành phần liên thông*** của G

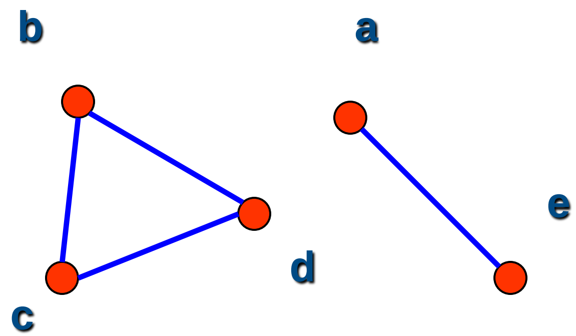
c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông thì G gọi là ***liên thông***

Liên thông

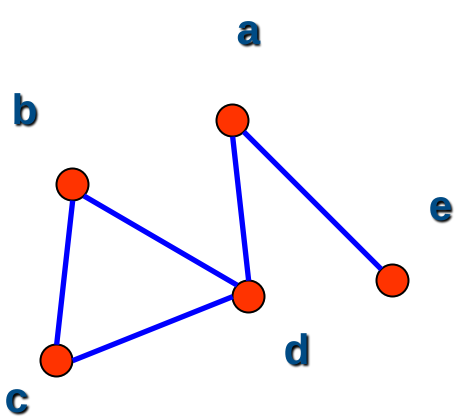
Ví dụ. Đồ thị nào sau đây liên thông?



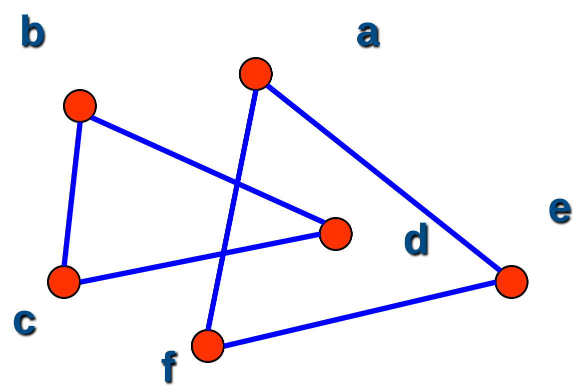
G_1



G_2



G_3



G_4

Liên thông

Ví dụ. Cho đồ thị đơn vô hướng G có 7 đỉnh trong đó có một đỉnh bậc 6. Hỏi G có liên thông không?

Giải. Đỉnh bậc 6 nối với 6 đỉnh còn lại. Do đó hai đỉnh bất kỳ đều có một đường đi qua đỉnh bậc 6. Suy ra G liên thông

Ví dụ. Cho đồ thị vô hướng G liên thông mà mỗi đỉnh đều có bậc bằng 10. Chứng minh rằng nếu xoá đi một cạnh bất kỳ thì đồ thị thu được vẫn còn liên thông

Liên thông

Giải. Giả sử ta xóa cạnh uv. Ta chỉ cần chứng minh vẫn có đường đi từ u đến v.

Ta dùng phản chứng. Giả sử không có đường đi từ u đến v. Khi đó ta có thành phần liên thông G' chứa u mà không chứa v.

Trong G', u có bậc 9, mọi đỉnh khác đều có bậc 10. Tổng các bậc trong G' là số lẻ. **Vô lý.**

Liên thông

Ví dụ. Xét đồ thị đơn vô hướng G với 6 đỉnh, trong đó có một đỉnh bậc 1 và 5 đỉnh bậc 3. Chứng minh rằng G liên thông.

Giải. Giả sử G không liên thông. Gọi $G_1, G_2, \ldots, G_k$ là các thành phần liên thông của G ($k \geq 2$).

Vì G không có đỉnh cô lập nên mỗi thành phần liên thông đều phải có ít nhất hai đỉnh. Như vậy mỗi thành phần liên thông đều phải có ít nhất một đỉnh bậc 3.

Suy ra mỗi thành phần liên thông phải có ít nhất 4 đỉnh. Vậy G phải có ít nhất $4k \geq 8$ đỉnh. Trái giả thiết

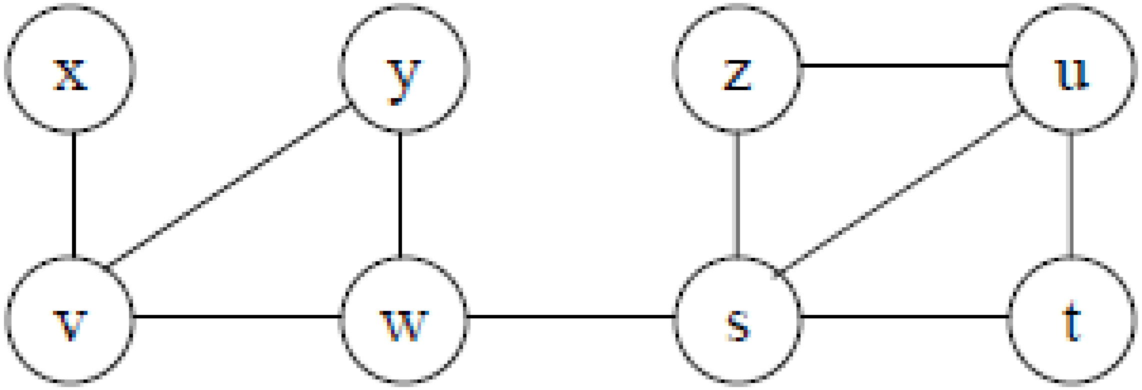
Liên thông

Định nghĩa. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông

a) Đỉnh v được gọi là ***đỉnh khớp*** nếu G – v không liên thông (**G – v** là đồ thị con của G có được bằng cách xoá v và các cạnh kề với v)

b) Cạnh e được gọi là ***cầu*** nếu G – e không liên thông (**G – e** là đồ thị con của G có được bằng cách xoá cạnh e).

Ví dụ. Tìm đỉnh khớp và cầu của đồ thị sau



Đáp án: Đỉnh khớp: w,s,v

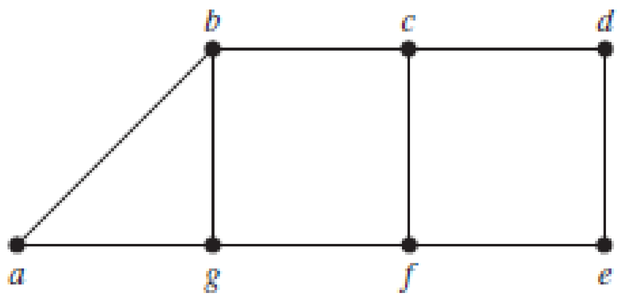
Cầu : ws, xv

Định nghĩa. Cho G = (V,E) vô hướng liên thông, không phải K_n, n>2.

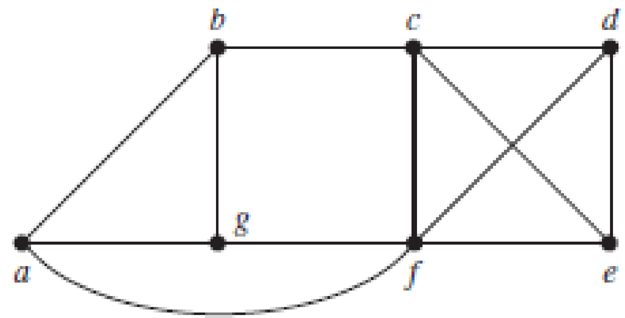
a) ***Số liên thông cạnh*** của G, ký hiệu **e(G)** là số cạnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.

b) ***Số liên thông đỉnh*** của G, ký hiệu **v(G)** là số đỉnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.

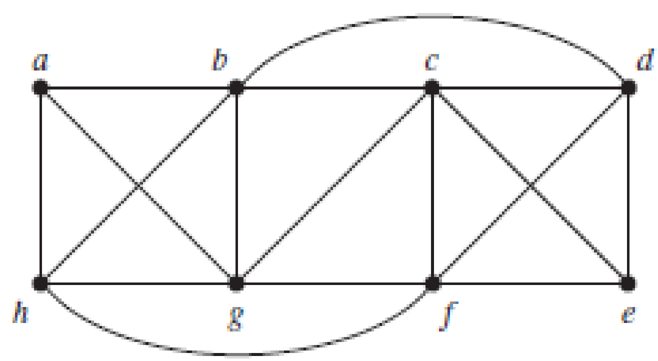
Ví dụ. Tìm số liên thông cạnh và liên thông đỉnh của các đồ thị sau



G_1



G_2



G_3

Liên thông mạnh

Định nghĩa. Cho G =(V,E) là đồ thị có hướng và hai đỉnh u và v. Khi đó

a) ***Đường đi*** có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau

$$\mathbf{v_0e_1v_1e_2....v_{k-1}e_kv_k}$$

sao cho:

$$v_0 = u,\ v_k = v$$

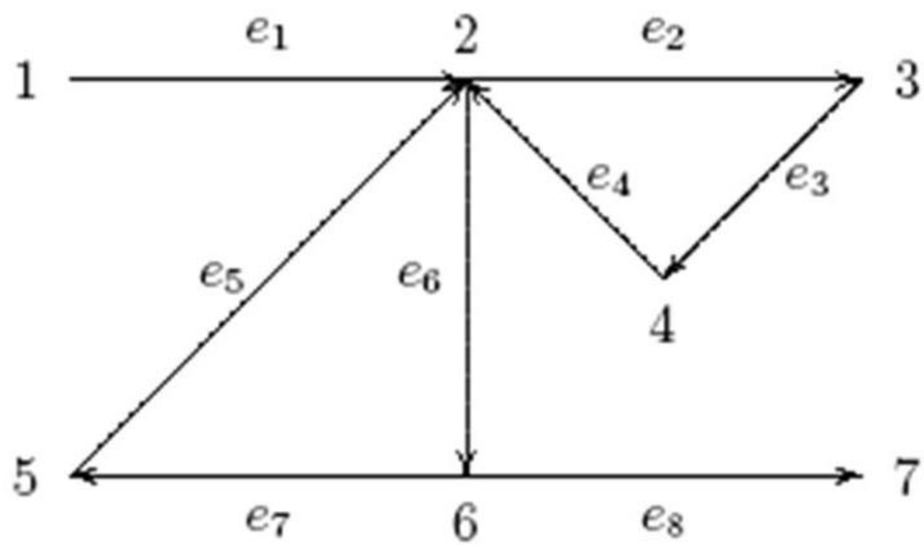
$$e_i = v_{i-1}v_i\ ,\ i = 1,2,,\ldots,k.$$

b) Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là ***đường đi đơn***.

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là ***đường đi sơ cấp***.

d) Đường đi được gọi là ***mạch*** *(chu trình)* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.

Ví dụ.



Đường đi có độ dài 4 từ đỉnh 1 tới đỉnh 2 là : (1,2,3,4,2)

Liên thông mạnh

Định nghĩa. Cho đồ thị có hướng G = (V,E). Trên tập đỉnh V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

u~v $\Leftrightarrow$ u = v hay có một đường đi từ u đến v và đường đi từ v đến u.

a) Nếu **u~v** thì ta nói hai đỉnh u và v ***liên thông mạnh*** *với nhau.*

b) Đồ thị con liên thông mạnh tối đại được tạo bởi các đỉnh của một lớp tương đương được gọi là một ***thành phần liên thông mạnh*** của G.

c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông mạnh thì G gọi là ***liên thông mạnh***.

Ví dụ. Đồ thị sau có liên thông mạnh không? Nếu không hãy xác định các thành phần liên thông mạnh.