ÔN THI CUỐI KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 4:

Câu 1. *Các tập hợp V và W dưới đây có phải là không gian con của* $\mathbf{R}^4$ *không ? Tại sao ?*

$V = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/\, (5x + 4y + z - 6t)^2 + 3(9x - y + 7z + 2t)^4 \le -|\,8x - 6y + 3z - t\,|\}$

$W = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/\, x^2 + z^2 = y^2 + t^2 + 1 \}$.

Ta mô tả lại V dưới dạng tập hợp các nghiệm trên $\mathbf{R}^4$ của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất để khẳng định V là một không gian con của $\mathbf{R}^4$:

$V = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/\, 5x + 4y + z - 6t = 9x - y + 7z + 2t = 8x - 6y + 3z - t = 0 \}$

(để ý $\alpha^2 + 3\beta^4 \le -|\gamma| \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\beta^4 + |\gamma| \le 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$).

Ta giải thích W không phải là một không gian con của $\mathbf{R}^4$ theo một trong 3 cách sau:

Cách 1: $\mathbf{O} = (0, 0, 0, 0) \notin W$ vì $0^2 + 0^2 = 0 \neq 0^2 + 0^2 + 1 = 1$.

Cách 2: $\exists \alpha = (1, 0, 0, 0), \beta = (0, 0, 1, 0) \in W$ [vì $1^2 + 0^2 = 0^2 + 1^2 = 0^2 + 0^2 + 1 = 1$]

và $\alpha + \beta = (1, 0, 1, 0) \notin W$ [vì $1^2 + 1^2 = 2 \neq 0^2 + 0^2 + 1 = 1$].

Cách 3: $\exists \alpha = (1, 0, 0, 0) \in W$ [vì $1^2 + 0^2 = 0^2 + 0^2 + 1 = 1$], $\exists c = 2 \in \mathbf{R}$,

$c\alpha = (2, 0, 0, 0) \notin W$ [vì $2^2 + 0^2 = 4 \neq 0^2 + 0^2 + 1 = 1$].

Câu 2. *Cho* $\alpha = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

a) *Tìm một tập hợp hữu hạn* $S \subset \mathbf{R}^4$ *sao cho* $< S > = W$ *trong đó*

$W = \{ (b - 2a - 3c + 2d, a + 4b + 6c - d, 3a + 6c - 3d, d - a - 3b - 5c) \,/\, a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$.

b) *Khi nào* $\alpha \in W = < S >$ và *lúc đó hãy biểu diễn* α *thành một tổ hợp tuyến tính theo* S.

c) *Xét* $\delta = (2, -19, -9, 15)$ *và* $\varepsilon = (-3, 4, 1, -6) \in \mathbf{R}^4$. *Cho biết* δ *và* ε *có thuộc về* W *không ? Nếu có thì biểu diễn vector đó thành một tổ hợp tuyến tính của* S.

a) $W = \{\gamma = a(-2, 1, 3, -1) + b(1, 4, 0, -3) + c(-3, 6, 6, -5) + d(2, -1, -3, 1) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$

$= < S >$ với

$S = \{ X = (-2, 1, 3, -1), Y = (1, 4, 0, -3), Z = (-3, 6, 6, -5), T = (2, -1, -3, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

b) Ta có $\alpha \in W = < S > \Leftrightarrow \alpha$ là một tổ hợp tuyến tính của S

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T = \alpha$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét phương trình $c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T = \alpha$

$\Leftrightarrow c_1(-2, 1, 3, -1) + c_2(1, 4, 0, -3) + c_3(-3, 6, 6, -5) + c_4(2, -1, -3, 1) = (u, v, w, t)$.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -3 & 2 & u \\ 1 & 4 & 6 & -1 & v \\ 3 & 0 & 6 & -3 & w \\ -1 & -3 & -5 & 1 & t \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 3 & -1 & u+w \\ 0 & 1 & 1 & 0 & v+t \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -3u-2w \\ 0 & -2 & -2 & 0 & u+w+t \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 2 & -1 & u-v+w-t \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & v+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3u+3v-2w+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u+2v+w+3t \end{array}\right) \\ E_1 \;\; E_2 \end{array}$$

Vậy $\alpha = (u, v, w, t) \in W = < S > \Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (-3u + 3v - 2w + 3t = 0 = u + 2v + w + 3t)$ (*).

Lúc đó do hệ có vô số nghiệm nên có vô số cách biểu diễn $\alpha = c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T$

với $c_3 = p, c_4 = q$ ($p, q \in \mathbf{R}$), $c_1 = q - 2p + u - v + w - t$ và $c_2 = -p + v + t$ (□).

Suy ra $\alpha = (u, v, w, t) \notin W = < S > \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (-3u + 3v - 2w + 3t \neq 0$ hay $u + 2v + w + 3t \neq 0)$ (**).

c) $\delta = (2, -19, -9, 15)$ thỏa (*) và $\varepsilon = (-3, 4, 1, -6)$ thỏa (**) nên $\delta \in W$ và $\varepsilon \notin W$

Để ý $[-3(2) + 3(-19) - 2(-9) + 3(15) = 0 = 2 + 2(-19) + (-9) + 3(15)]$ và

$[-3(-3) + 3(4) - 2(1) + 3(-6) = 1 \neq 0]$. Trong (□), thế $(u, v, w, t) = (2, -19, -9, 15)$

ta có $\delta = (2, -19, -9, 15) = (q - 2p - 3)X + (-p - 4)Y + pZ + qT$ với $p, q \in \mathbf{R}$.

Câu 3. *Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp dưới đây*:

a) $S = \{ X = (3, 1, -1), Y = (-1, -5, 7), Z = (1, -2, 3), T = (9, 0, 4) \} \subset \mathbf{R}^3$.

b) $D = \{ X = (-4, 2, 14, -6), Y = (6, -3, -21, 9) \} \subset \mathbf{R}^4$.

c) $E = \{ X = (2, -1, 0, 9), Y = (-5, 7, 3, -4) \} \subset \mathbf{R}^4$.

d) $F = \{ X = (-1, -1, -7, 2), Y = (5, -1, 1, 18), Z = (-5, 2, 8, -16) \} \subset \mathbf{R}^4$.

e) $G = \{ X = (1, -2, 3, -4), Y = (3, 3, -5, 1), Z = (-5, -8, 13, -6) \} \subset \mathbf{R}^4$.

f) $H = \{ X = (1, 2, 3m + 1), Y = (3, 1, m - 3), Z = (m + 5, 2, -4) \} \subset \mathbf{R}^3$ (*tham số thực* m).

a), b), c) : S phụ thuộc tuyến tính vì $|S| = 4 > \dim \mathbf{R}^3 = 3$. D phụ thuộc tuyến tính vì X tỉ lệ với Y [Y = (– 3/2)X]. E độc lập tuyến tính vì X không tỉ lệ với Y.

d) Trong F, lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -7 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 18 \\ -5 & 2 & 8 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -1^* & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 7 & 43 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2\ F_3} \begin{pmatrix} -1^* & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1^* & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -20^* & -40 \end{pmatrix} = S_A.$$

Ta có r(A) = 3 = | F | nên F độc lập tuyến tính.

e) Trong G, lập ma trận

$$B = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -5 & -8 & 13 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 9 & -14 & 13 \\ 0 & -18 & 28 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2} \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 9^* & -14 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B.$$

Ta có r(B) = 2 < | G | = 3 nên G phụ thuộc tuyến tính.

f) Trong H, tính $|C| = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m+1 \\ 3 & 1 & m-3 \\ m+5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & m+7 \\ 3 & 1^* & m-3 \\ m-1 & 0 & 2-2m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} -5 & m+7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$

= (m – 1)(3 – m). Khi đó H độc lập tuyến tính ⇔ | C | ≠ 0 ⇔ 1 ≠ m ≠ 3.

H phụ thuộc tuyến tính ⇔ | C | = 0 ⇔ (m = 1 hoặc m = 3).

Câu 4. *Tập hợp nào dưới đây là cơ sở của* $\mathbf{R}^3$ *? Tại sao ?*

a) S = { X = (– 3, 2, 7), Y = (8, – 2, 3) }.

b) C = { X = (– 1, – 1, – 7), Y = (5, – 1, 1), Z = (– 5, 2, 8), T = (4, 0, – 3) }.

c) H = { X = (1, 2, 3m + 1), Y = (3, 1, m – 3), Z = (m + 5, 2, – 4) } $\subset \mathbf{R}^3$ (*tham số thực* m).

a), b) : S và C không phải là cơ sở của $\mathbf{R}^3$ vì $|S| = 2 \neq \dim\mathbf{R}^3 = 3 \neq |C| = 4$.

c) Trong H, tính $|C| = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m+1 \\ 3 & 1 & m-3 \\ m+5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & m+7 \\ 3 & 1^* & m-3 \\ m-1 & 0 & 2-2m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} -5 & m+7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

= (m – 1)(3 – m). Khi đó H là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ ⇔ | C | ≠ 0 ⇔ 1 ≠ m ≠ 3.

H không phải là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ ⇔ | C | = 0 ⇔ (m = 1 hoặc m = 3).

Câu 5. a) *Tìm một cơ sở* B *cho không gian* $W = \langle S \rangle \le V = \mathbf{R}^4$ *và chỉ ra* $\dim W$ *nếu*

$S = \{\, X = (-1, -2, 4, 0),\ Y = (2, 3, 3, -1),\ Z = (1, -4, 2, -3),\ T = (-1, 9, 3, 5)\,\} \subset \mathbf{R}^4$.

b) *Cho* $\alpha = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$. *Khi nào* $\alpha \in W$ và lúc đó tìm tọa độ $[\,\alpha\,]_B$?

c) *Xét* $\delta = (-3, -2, 8, 2)$ *và* $\varepsilon = (5, -7, 10, -4) \in \mathbf{R}^4$. *Cho biết* δ *và* ε *có thuộc* W *không ? Nếu có thì tính tọa độ của vector đó theo cơ sở* B.

a) Đặt ma trận $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 60 & -3 \\ 0 & 0 & 120 & -6 \end{pmatrix}$

$$\to S_A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 20^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}.$$ Do đó W có một cơ sở là

$B = \{\gamma_1 = (-1, -2, 4, 0),\ \gamma_2 = (0, -1, 11, -1),\ \gamma_3 = (0, 0, 20, -1)\}$ và $\dim W = |B| = 3 = r(A)$.

b) Ta có $\alpha \in W = \langle S \rangle = \langle B \rangle \Leftrightarrow \alpha$ là một tổ hợp tuyến tính của B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = \alpha$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét phương trình $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = \alpha$

$\Leftrightarrow c_1(-1, -2, 4, 0) + c_2(0, -1, 11, -1) + c_3(0, 0, 20, -1) = (u, v, w, t)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & u \\ -2 & -1 & 0 & v \\ 4 & 11 & 20 & w \\ 0 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & -1 & 0 & v-2u \\ 0 & 9 & 20 & 2v+w \\ 0 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1^* & 0 & 2u-v \\ 0 & 0 & 11 & 2v+w+9t \\ 0 & 0 & -1 & 2u-v+t \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1^* & 0 & 2u-v \\ 0 & 0 & 1^* & v-2u-t \\ 0 & 0 & 0 & 22u-9v+w+20t \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \end{array}.$$ Vậy $\alpha = (u, v, w, t) \in W = \langle B \rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm (duy nhất) trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow 22u - 9v + w + 20t = 0$ (*).

Lúc đó ta có tọa độ của α theo cơ sở B là $[\alpha]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 2u - v \\ v - 2u - t \end{pmatrix}$ (□).

Ta có $\alpha = (u, v, w, t) \notin W \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow 22u - 9v + w + 20t \neq 0$ (**).

c) $\delta = (-3, -2, 8, 2) \in W$ vì δ thỏa (*) $[\ 22(-3) - 9(-2) + 8 + 20(2) = 0\ ]$ và

$\varepsilon = (5, -7, 10, -4) \notin W$ vì ε thỏa (**) $[\ 22(5) - 9(-7) + 10 + 20(-4) = 103 \neq 0\ ]$.

Với $\delta = (-3, -2, 8, 2) \in W$, từ (□), ta tính được $[\delta]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ 2(-3) - (-2) \\ (-2) - 2(-3) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Câu 6. *Tìm một cơ sở* B *cho không gian* $W = \{ X \in \mathbf{R}^5 \ /\ AX = \mathbf{O} \}$ (W *là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = \mathbf{O}$) *và chỉ ra* dimW *nếu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbf{R}).$$

Trước ta giải hệ $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ với $X = (x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5$ (để mô tả cụ thể không gian W).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[E_1]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 3 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 10 & -30 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1\ E_2]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm với 3 ẩn tự do $z, t, u \in \mathbf{R}$, $x = z - 2t + 2u$, $y = t - z - u$. Như vậy

$W = \{ X = (z - 2t + 2u, t - z - u, z, t, u) \mid z, t, u \in \mathbf{R} \}$

$= \{ X = z(1, -1, 1, 0, 0) + t(-2, 1, 0, 1, 0) + u(2, -1, 0, 0, 1) \mid z, t, u \in \mathbf{R} \}$, nghĩa là

$W = \langle D \rangle$ với $D = \{ \delta_1 = (1, -1, 1, 0, 0), \delta_2 = (-2, 1, 0, 1, 0), \delta_3 = (2, -1, 0, 0, 1) \} \subset \mathbf{R}^5$.

D độc lập tuyến tính nên D là một cơ sở của W và $\dim W = |D| = 3$ = số ẩn tự do của hệ.

Câu 7. *Trong* $\mathbf{R}^4$, *cho các tập hợp* $S = \{ X = (1, 2, 0, 1), Y = (2, 5, -1, 3), Z = (3, 1, 5, -2) \}$ *và* $T = \{ E = (2, 3, 1, 1), F = (3, 3, -2, 4) \}$. *Đặt* $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$ *và* $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^4$.

Tìm một cơ sở cho các không gian V, W *và* V + W. *Từ đó tính* $\dim(V \cap W)$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \end{pmatrix}$.

Ta thấy V có một cơ sở là $C = \{ \gamma_1 = (1, 2, 0, 1), \gamma_2 = (0, 1, -1, 1) \}$ và $\dim V = |C| = 2$.

$W = < T >$ và $T = \{ E, F \}$ độc lập tuyến tính (E và E có các thành phần không tỉ lệ với nhau) nên T là một cơ sở của W và $\dim W = |T| = 2$.

$V + W = < C \cup T >$ với $C \cup T = \{ \gamma_1, \gamma_2, E, F \}$.

Lập ma trận $B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2\ F_3} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5^* & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}$.

Suy ra V + W có một cơ sở là $D = \{ \gamma_1 = (1, 2, 0, 1), \gamma_2 = (0, 1, -1, 1), \gamma_3 = (0, 0, -5, 4) \}$.

Suy ra $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - |D| = 4 - 3 = 1$.

Câu 8. *Cho* $S = \{ X = (-2, 1, -7, 3), Y = (6, 0, 25, -10), Z = (-4, -13, -34, 13) \} \subset V = \mathbf{R}^4$ *và* $T = \{ E = (1, 2, -5, -2, 3), F = (4, 8, -16, -7, 6) \} \subset W = \mathbf{R}^5$. *Giải thích S và T độc lập tuyến tính và bổ sung thêm các vector vào S và T để được một cơ sở cho V và W.*

Lập $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 & 3 \\ 6 & 0 & 25 & -10 \\ -4 & -13 & -34 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -2^* & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -15 & -20 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2\ F_3} \begin{pmatrix} -2^* & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3^* & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* \end{pmatrix} = S_A$.

Ta thấy $r(A) = 3 = |S|$ nên S độc lập tuyến tính. Do cột 3 của A không bán chuẩn hóa được nên ta bổ sung thêm vector $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$ từ $\mathbf{R}^4$ vào S để có một cơ sở của $\mathbf{R}^4$ là $S' = \{ X, Y, Z, \varepsilon_3 \}$.

Ta có T độc lập tuyến tính vì E và F có các thành phần không tỉ lệ với nhau.

Lập ma trận $B = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -16 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4^* & 1 & -6 \end{pmatrix} = S_B$.

Do các cột 2, 4 và 5 của B không bán chuẩn hóa được nên ta bổ sung thêm các vector $\varepsilon'_2 = (0, 1, 0, 0,0)$, $\varepsilon'_4 = (0, 0, 0, 1,0)$ và $\varepsilon'_5 = (0, 0, 0, 0,1)$ từ $\mathbf{R}^5$ vào S để có một cơ sở của $\mathbf{R}^5$ là $T' = \{ E, F, \varepsilon'_2, \varepsilon'_4, \varepsilon'_5 \}$.

Câu 9. *Cho các cơ sở* $S = \{ X_1 = (-1, 1, 2), X_2 = (2, -1, 2), X_3 = (1, 0, 3) \}$ *và* $T = \{ Y_1 = (2, 5, -2), Y_2 = (2, 1, -3), Y_3 = (1, -2, -2) \}$ *của không gian* $\mathbf{R}^3$.

a) *Viết ma trận đổi cơ sở* $P = (S \to T)$.

b) *Cho* $[X]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = (4, 1, -2)$ *và* $[Z]_T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Tìm* X *và tính* $[Y]_S$ và $[Z]_S$.

a) Viết $P = (S \to T)$.

Cách 1: Tìm trực tiếp $P = (S \to T) = ([Y_1]_S\ [Y_2]_S\ [Y_3]_S)$ bằng cách giải 3 hệ phương trình tuyến tính (có vế trái y hệt nhau) được ma trận hóa như sau:

$$\left(X_1^t \;\; X_2^t \;\; X_3^t \,\middle|\, Y_1^t \,\middle|\, Y_2^t \,\middle|\, Y_3^t \right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 1 & 12 & 4 & -3 \\ 0 & 1^* & 1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -40 & -17 & 6 \end{array}\right) \\ E_1\ E_2 \qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & -28 & -13 & 3 \\ 0 & 1^* & 0 & -33 & -14 & 5 \\ 0 & 0 & 1^* & 40 & 17 & -6 \end{array}\right) \\ E_1\ E_2\ E_3 \qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} = (I_3 \mid [Y_1]_S\ [Y_2]_S\ [Y_3]_S)$$

Vậy $P = (S \to T) = ([Y_1]_S\ [Y_2]_S\ [Y_3]_S) = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$.

Cách 2: sử dụng cơ sở chính tắc $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \}$.

Đặt $H = (B_o \to S) = (X_1^t\ X_2^t\ X_3^t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có thể tìm trực tiếp H^{-1} như sau:

$$(H \mid \mathbf{I_3}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & | & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & | & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & | & 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = (\mathbf{I_3} \mid H^{-1}).\ \text{Vậy}\ H^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$E_1\ E_2\ E_3$

Đặt $K = (B_o \to T) = (Y_1^t\ \ Y_2^t\ \ Y_3^t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $P = H^{-1}K = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$.

b) Ta có $X = 2X_1 - X_2 + 3X_3 = 2(-1, 1, 2) - (2, -1, 2) + 3(2, -3, -4) = (2, -6, -10)$.

Ta tính tọa độ $[\,Y\,]_S$ từ $Y = (4, 1, -2) \in \mathbf{R}^3$.

Cách 1: dùng định nghĩa của tọa độ. Đặt $[\,Y\,]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$.

Ma trận hóa phương trình vectơ trên, ta có $\left(X_1^t\ \ X_2^t\ \ X_3^t \middle|\ Y^t\right) =$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 2 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -2 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 6 & 5 & | & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1^* & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & | & -24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & | & -18 \\ 0 & 1^* & 0 & | & -19 \\ 0 & 0 & 1^* & | & 24 \end{pmatrix}$$

$E_1 \qquad\qquad E_1\ E_2 \qquad\qquad E_1\ E_2\ E_3$

Vậy tọa độ của Y theo cơ sở S là $[\,Y\,]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Cách 2: dùng công thức thay đổi tọa độ theo cơ sở. Ta có

$[Y]_{B_o} = Y^t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ nên $[\,Y\,]_S = (S \to B_o)\,[Y]_{B_o} = H^{-1}Y^t = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Ta có tọa độ $[\,Z\,]_S = (S \to T)\,[\,Z\,]_T = P\,[\,Z\,]_T = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 104 \\ -126 \end{pmatrix}$.

Câu 10. *Cho* $X = (u, v, w) \in V = \mathbf{R}^3$. *Trong* V, *xét* $S = \{\,Y = (3, 2, 1), Z = (-1, 1, 2)\,\}$ *và* $T = \{\,E = (1, 4, 5), F = (-2, -3, -3)\,\}$. *Đặt* $W = \langle S \rangle \le V$.

a) *Tại sao* S *là một cơ sở của* W và tìm $\dim W$. *Tìm điều kiện để* $X \in W$ *và tính* $[\,X\,]_S$.

b) *Tại sao* T *cũng là một cơ sở của* W *và viết ma trận đổi cơ sở* P = (S → T).

Từ đó suy ra ma trận đổi cơ sở Q = (T → S) *và tính tọa độ* $[X]_T$.

c) *Cho* $\alpha, \beta \in V$ *có* $[\alpha]_S = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ *và* $[\beta]_T = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Tính các tọa độ* $[\alpha]_T$ *và* $[\beta]_S$.

a) S độc lập tuyến tính (vì Y và Z không tỉ lệ) nên S là một cơ sở của W = < S >.

Do đó dimW = | S | = 2. Ta có $X \in W = \langle S \rangle \Leftrightarrow$ X là một tổ hợp tuyến tính của S

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1Y + c_2Z = X$ (ẩn số $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$) có nghiệm (duy nhất) trên **R**.

Xét phương trình $c_1Y + c_2Z = X \Leftrightarrow c_1(3, 2, 1) + c_2(-1,1, 2) = (u, v, w)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & u \\ 2 & 1 & v \\ 1 & 2 & w \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & -2 & u-v \\ 0 & -3 & v-2w \\ 0 & 4 & v+w-u \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & 0 & 2^{-1}(u-v+w) \\ 0 & 1^* & 3^{-1}(2w-v) \\ 0 & 0 & 7v-3u-5w \end{array}\right) \\ E_1 \; E_2 \end{array}.$$

Vậy $X = (u, v, w) \in W \Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên **R** $\Leftrightarrow 3u - 7v + 5w = 0$ (*).

Lúc đó tọa độ của X theo cơ sở S là $[X]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-1}(u-v+w) \\ 3^{-1}(2w-v) \end{pmatrix}$ (**).

b) | T | = 2 = dimW và T độc lập tuyến tính (vì E và F không tỉ lệ nhau). Hơn nữa

$E, F \in W$ [vì E và F đều thỏa (*) : $3(1) - 7(4) + 5(5) = 0 = 3(-2) - 7(-3) + 5(-3)$]

Do đó T cũng là một cơ sở của W. Dùng (**) để tính tọa độ cho E và F theo S,

ta có $P = (S \to T) = ([E]_S \;\; [F]_S) = \begin{pmatrix} 2^{-1}(1-4+5) & 2^{-1}[(-2)-(-3)+(-3)] \\ 3^{-1}[2(5)-4] & 3^{-1}[2(-3)-(-3)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ và

$Q = (T \to S) = P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $[\alpha]_T = Q[\alpha]_S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ và $[\beta]_S = P[\beta]_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

CHƯƠNG 5:

Câu 1. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ có biểu thức

$$f(X) = (-x + 2y + 4z - 3t,\ 2x + y - 2z + 5t,\ 3x + 4y + 7t),\ \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4.$$

Tìm một cơ sở cho mỗi không gian $\mathrm{Im}(f)$ *và* $\mathrm{Ker}(f)$ *rồi chỉ ra số chiều của chúng.*

Đặt $A = B_o = \{\ \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)\ \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^4$ thì $< f(A) > = \mathrm{Im}(f) = f(\mathbf{R}^4)$.

Ta có $f(A) = \{\ f(\varepsilon_1) = (-1, 2, 3), f(\varepsilon_2) = (2, 1, 4), f(\varepsilon_3) = (4, -2, 0), f(\varepsilon_4) = (-3, 5, 7)\ \}$.

Lập ma trận $M = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \underset{F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1^* & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_1\ F_2}{\rightarrow} S_M = \begin{pmatrix} -1^* & 2 & 3 \\ 0 & 1^* & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}(f)$ có cơ sở $C = \{\ \gamma_1 = (-1, 2, 3), \gamma_2 = (0, 1, 2)\ \}$ và $\dim_{\mathbf{R}}[\ \mathrm{Im}(f)\ ] = |\ C\ | = 2 = r(M)$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{\ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid f(X) = \mathbf{O}\ \}$

$= \{\ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid (-x + 2y + 4z - 3t,\ 2x + y - 2z + 5t,\ 3x + 4y + 7t) = \mathbf{O}\ \}$

$= \{\ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -x + 2y + 4z - 3t = 2x + y - 2z + 5t = 3x + 4y + 7t = 0\ \}$.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính trên:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{E_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 12 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{E_1\ E_2}{\rightarrow} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & -8/5 & 13/5 & 0 \\ 0 & 1^* & 6/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $z = 5a$, $t = 5b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $x = 8a - 13b$, $y = b - 6a$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{\ X = (8a - 13b, b - 6a, 5a, 5b) = a(8, -6, 5, 0) + b(-13, 1, 0, 5) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Như vậy $\mathrm{Ker}(f) = < D >$ với $D = \{\ \delta_1 = (8, -6, 5, 0), \delta_2 = (-13, 1, 0, 5)\ \}$ độc lập tuyến tính.

Do đó $\mathrm{Ker}(f)$ có một cơ sở là $D = \{\ \delta_1, \delta_2\ \}$ và $\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Ker}(f) = |\ D\ | = 2 =$ số ẩn tự do của hệ phương trình $f(X) = \mathbf{O}$. Để ý $\dim\mathrm{Im}(f) + \dim\mathrm{Ker}(f) = 2 + 2 = 4 = \dim\mathbf{R}^4$.

Câu 2. $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ *và* $\mathbf{R}^4$ *có các cơ sở chính tắc lần lượt là* A, B *và* C. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ *có*

$f(X) = (-u + 2v + 4w - 3t, 2u + v - 2w + 5t, 3u + 4v + 7t), \forall X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

a) *Xét* $\alpha = (1, 1, -1, -1), \beta = (-2, 3, 1, 4) \in \mathbf{R}^4$ *và* $\gamma = (2, -6, 1), \delta = (-3, 4, 5) \in \mathbf{R}^3$.

Các khẳng định $\alpha, \beta \in \mathrm{Ker}(f)$ *và* $\gamma, \delta \in \mathrm{Im}(f)$ *có đúng không ? Tại sao ?*

b) D *và* E *lần lượt là các cơ sở của* $\mathbf{R}^2$ *và* $\mathbf{R}^3$ *như sau:*

$D = \{ \delta_1 = (5, -3), \delta_2 = (3, -2) \}$ *và* $E = \{\alpha_1 = (-5, 1, -3), \alpha_2 = (3, -1, 2), \alpha_3 = (1, 0, 1)\}$.

Viết $[f]_{C,B}$ *và tính* $[f]_{C,E}$.

c) *Xét* $g, h \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ *có các ma trận* $[g]_{B,A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $[h]_{E,D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Viết biểu thức của g *để tính* $g(1, -5, 2)$ *rồi tìm các ma trận* $[g]_{E,A}$, $[g]_{B,D}$, $[g]_{E,D}$.

Tìm các ma trận $[h]_{B,D}$, $[h]_{E,A}$, $[h]_{B,A}$ *để viết biểu thức của* h *và tính* $h(-1, 8, 1)$.

a) Ta có $f(\alpha) = (-1 + 2 - 4 + 3, 2 + 1 + 2 - 5, 3 + 4 - 7) = (0, 0, 0)$ nên $\alpha \in \mathrm{Ker}(f)$. Ta có

$f(\beta) = (2 + 6 + 4 - 12, -4 + 3 - 2 + 20, 6 + 0 + 7) = (0, -3, 13) \neq (0, 0, 0) : \beta \notin \mathrm{Ker}(f)$.

Ta giải hai hệ phương trình riêng biệt $f(X) = \gamma$ và $f(X) = \delta$ với ẩn $X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

Hai hệ trên có vế trái giống nhau nên được giải chung trong cùng một bảng :

$$\begin{array}{c} u \quad v \quad w \quad t \quad\;\; \gamma \quad \delta \\ \left(\begin{array}{cccc|c|c} -1 & 2 & 4 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 7 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1^* & -2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 12 & -2 & 7 & -4 \end{array}\right) \\ F_1 \end{array} \to \begin{array}{c} u \quad v \quad w \quad t \\ \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1^* & -2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5^* & 6 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \end{array}\right) \\ F_1 \quad F_2 \end{array}.$$

Hệ $f(X) = \gamma$ vô nghiệm (do phương trình cuối là $0u + 0v + 0w + 0t = 11 \neq 0$).
Hệ $f(X) = \delta$ có vô số nghiệm $X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$ với hai ẩn tự do là w và t.

Suy ra $\forall X \in \mathbf{R}^4, f(X) \neq \gamma$ và $\exists X_o \in \mathbf{R}^4, f(X_o) = \delta$. Vậy $\gamma \notin \mathrm{Im}(f)$ và $\delta \in \mathrm{Im}(f)$.

b) Ta có $S = (A \to D) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, T = (B \to E) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và

$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $[f]_{C,B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}, [f]_{C,E} = T^{-1}[f]_{C,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & -6 & 22 \end{pmatrix}$.

c) Ta có $g(X) = (u - v + 2w, -2u + 3v), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$ và $g(1, -5, 2) = (10, -17)$.

$[\,g\,]_{E,A} = [\,g\,]_{B,A}.T = ?$, $[\,g\,]_{B,D} = S^{-1}.[\,g\,]_{B,A} = ?$ và $[\,g\,]_{E,D} = S^{-1}.[\,g\,]_{B,A}.T = ?$.

$[\,h\,]_{B,D} = [\,h\,]_{E,D}.T^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 13 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $[\,h\,]_{E,A} = S.[\,h\,]_{E,D} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 28 \\ -7 & -4 & -17 \end{pmatrix}$ và

$[\,h\,]_{B,A} = S.[\,h\,]_{E,D}.T^{-1} = \begin{pmatrix} -46 & 4 & 74 \\ 28 & -2 & -45 \end{pmatrix}$. Suy ra $\forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$,

$h(X) = (-46u + 4v + 74w, 28u - 2v - 45w)$ và $h(-1, -8, 1) = (88, -57)$.

Câu 3. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $f(X) = (x + 3y - 3z, 2x + y + z, -10x - 12z), \forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

Tìm một cơ sở cho mỗi không gian $\mathrm{Im}(f)$ *và* $\mathrm{Ker}(f)$ *rồi chỉ ra số chiều của chúng.*

Đặt $A = B_o = \{\, \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \,\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ thì

$f(A) = \{f(\varepsilon_1) = (1,2,-10), f(\varepsilon_2) = (3,1,0), f(\varepsilon_3) = (-3,1,-12)\}$ và $< f(A) > = \mathrm{Im}(f) = f(\mathbf{R}^3)$

Lập ma trận $M = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -12 \end{pmatrix} \to \underset{F_1}{\begin{pmatrix} 1^* & 2 & -10 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 7 & -42 \end{pmatrix}} \to \underset{F_1\ F_2}{\begin{pmatrix} 1^* & 2 & -10 \\ 0 & 1^* & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}(f)$ có cơ sở $C = \{\gamma_1 = (1, 2, -10), \gamma_2 = (0, 1, -6)\}$ và $\dim_{\mathbf{R}} [\,\mathrm{Im}(f)\,] = |\,C\,| = 2 = r(M)$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(\alpha) = (x + 3y - 3z, 2x + y + z, -10x - 12z) = \mathbf{O} = (0, 0, 0)\}$

$= \{\, X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y - 3z = 2x + y + z = -10x - 12z = 0 \,\}$.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính trên:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to \underset{E_1}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)} \to \underset{E_1\ E_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1^* & -7/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}.$$

Hệ có vô số nghiệm với ẩn tự do là $z = 5a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x = -6a$, $y = 7a$.

Do đó $\mathrm{Ker}(f) = \{\, X = (-6a, 7a, 5a) = a(-6, 7, 5) \mid a \in \mathbf{R} \,\}$.

Như vậy $\mathrm{Ker}(f) = < D >$ với $D = \{\, \delta = (-6, 7, 5) \,\}$ độc lập tuyến tính nên $\mathrm{Ker}(f)$ có một cơ sở là $D = \{\, \delta = (-6, 7, 5) \,\}$ và $\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Ker}(f) = |\,D\,| = 1 =$ số ẩn tự do của hệ phương trình tuyến tính $f(X) = \mathbf{O}$. Để ý $\dim\mathrm{Im}(f) + \dim\mathrm{Ker}(f) = 2 + 1 = 3 = \dim\mathbf{R}^3$.

Câu 4. $\mathbf{R}^3$ *có cơ sở chính tắc* B *và cơ sở* $E = \{\alpha_1 = (1, 0, 2), \alpha_2 = (2, -2, 1), \alpha_3 = (3, -3, 2)\}$.

a) *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $f(X) = (u + 3v - 3w, 2u + v + w, -10u - 12w), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

Viết $[f]_B$, $[f]_{E,B}$, $[f]_{B,E}$ *và* $[f]_E$.

b) *Xét* $g, h \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $[g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $[h]_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. *Viết biểu thức của* g

rồi tính $[g]_{E,B}$, $[g]_{B,E}$ và $[g]_E$. *Tính* $[h]_{B,E}$, $[h]_{E,B}$ *và* $[h]_B$ *rồi viết biểu thức của* h.

Ta có $S = (B \to E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Ta có $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & -12 \end{pmatrix}$,

$[f]_{E,B} = [f]_B S = ?$, $[f]_{B,E} = S^{-1}.[f]_B = ?$ và $[f]_E = S^{-1}.[f]_B.S = ?$.

Từ $[g]_B$, ta có $g(X) = (u + 2v + 3w, -u + 2w, 2u + v + w), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

$[g]_{E,B} = [g]_B.S = ?$, $[g]_{B,E} = S^{-1}.[g]_B = ?$ và $[g]_E = S^{-1}.[g]_B.S = ?$.

$[h]_{B,E} = [h]_E.S^{-1} = ?$, $[h]_{E,B} = S.[h]_E = ?$ và $[h]_B = S.[h]_E.S^{-1} = ?$. Biểu thức h ?

Câu 5. $\mathbf{R}^3$ *và* $\mathbf{R}^4$ *có các cơ sở chính tắc lần lượt là* B *và* C.

a) *Tìm tọa độ* $[\alpha]_E$ *nếu* $\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$

và $E = \{ \alpha_1 = (2, -1, 5), \alpha_2 = (-1, 0, -1), \alpha_3 = (-4, -2, 1) \}$ *là một cơ sở của* $\mathbf{R}^3$.

b) *Cho* $\beta_1 = (-2, 3, 1), \beta_2 = (1, 0, -3)$ *và* $\beta_3 = (3, 4, 1) \in \mathbf{R}^3$.

Tìm $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *thỏa* $f(\alpha_j) = \beta_j, \forall j = 1, 2, 3$ (*dùng* $[\alpha]_E$ *hay* $[f]_{E,B}$).

c) *Cho* $\gamma_1 = (1, -1, 0, 1), \gamma_2 = (-2, 1, 3, 0)$ *và* $\gamma_3 = (3, 0, -4, -1) \in \mathbf{R}^4$.

Tìm $g \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ *thỏa* $g(\alpha_j) = \gamma_j, \forall j = 1, 2, 3$ (*dùng* $[\alpha]_E$ *hay* $[g]_{E,C}$).

a) Ta có $P = (B \to E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $Q = (E \to B) = P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $[\alpha]_E = (E \to B)[\alpha]_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 = -2u + 5v + 2w \\ c_2 = -9u + 22v + 8w \\ c_3 = u - 3v - w \end{pmatrix}$, nghĩa là

$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = (-2u + 5v + 2w)\alpha_1 + (-9u + 22v + 8w)\alpha_2 + (u - 3v - w)\alpha_3$ (*).

b) *Cách 1*: $\forall\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (*) ta có

$$f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + c_3 f(\alpha_3)$$

$$= (-2u + 5v + 2w)(-2, 3, 1) + (-9u + 22v + 8w)(1, 0, -3) + (u - 3v - w)(3, 4, 1)$$

$$= (-2u + 3v + w, -2u + 3v + 2w, 26u - 64v - 23w).$$

Cách 2: Ta có $[f]_B = [f]_{E,B}P^{-1} = ([f(\alpha_1)]_B \quad [f(\alpha_2)]_B \quad [f(\alpha_3)]_B).P^{-1}$

$$= ([\beta_1]_B \quad [\beta_2]_B \quad [\beta_3]_B).P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 26 & -64 & -23 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $f(\alpha) = (-2u + 3v + w, -2u + 3v + 2w, 26u - 64v - 23w), \forall\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

c) *Cách 1*: $\forall\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (*) ta có

$$g(\alpha) = g(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 g(\alpha_1) + c_2 g(\alpha_2) + c_3 g(\alpha_3)$$

$$= (-2u + 5v + 2w)(1,-1,0,1) + (-9u + 22v + 8w)(-2,1,3,0) + (u - 3v - w)(3,0,-4,-1)$$

$$= (19u - 48v - 17w, -7u + 17v + 6w, -31u + 78v + 28w, -3u + 8v + 3w).$$

Cách 2: Ta có $[g]_{B,C} = [g]_{E,C}P^{-1} = ([g(\alpha_1)]_C \quad [g(\alpha_2)]_C \quad [g(\alpha_3)]_C).P^{-1}$

$$= ([\gamma_1]_C \quad [\gamma_2]_C \quad [\gamma_3]_C).P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -48 & -17 \\ -7 & 17 & 6 \\ -31 & 78 & 28 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $g(\alpha) = (19u - 48v - 17w, -7u + 17v + 6w, -31u + 78v + 28w, -3u + 8v + 3w)$,

$\forall\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.
