MSSV: 22120457

Họ Tên: Nguyễn Nam Khánh

Môn: Toán UDTK ; Lớp: 22-2

Bài tập tối ưu lồi - data fitting

Bài 1: Xét tính lồi, lõm và tìm cực đại, cực tiểu nếu có

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2x_1 x_3$

Có: $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 6x_2 + 4x_1 + 2x_3 \\ 8x_3 + 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Ta có: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 12)(\lambda - 6)(2 - \lambda)$
$= 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 6 \\ \lambda = 12 \end{array}\right\} \geq 0$ ~~$\Rightarrow f$ là hàm lồi~~

$\Rightarrow \nabla^2 f(x) \succeq 0$ hay f là hàm lồi

Có $\nabla f = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \min f(x_1, x_2, x_3) =$
$f(0,0,0) = 0$

b> $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

G: $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -4x_1 + 4x_2 \\ -2x_2 + 4x_1 + 4x_3 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -2-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+8)$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -8 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = 4 \end{array} \right.$ $\rightarrow$ f k⁰ phải là hàm lồi/lõm

c> $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

G $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -6x_1 + 2x_2 \\ -4x_2 + 2x_1 + 2x_3 \\ -6x_3 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

G $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda+6)(\lambda+8)$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = -6 \\ \lambda = -8 \end{array} \right\} \leq 0$

$\rightarrow \nabla^2 f(x) \leq 0$ nên $f(x)$ là hàm lõm

$\nabla f(x) = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\rightarrow \max f(x) = f(0,0,0) = 0$

Bài 2:

Y	2	2	5	8

a) $y = \theta_1 + \theta_2 x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2 \\ \theta_1 + 2\theta_2 = 2 \\ \theta_1 + 3\theta_2 = 5 \\ \theta_1 + 4\theta_2 = 8 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}}_{b}$$

Có: $\det(A^T.A) \neq 0 \rightarrow A^T.A$ khả nghịch

$\Rightarrow$ Nghiệm bình phương tối tiểu $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2,1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\theta_1, \theta_2) = (-1, 2,1) \rightarrow y = -1 + 2,1x$

Chuẩn vector phần dư $\|r\| = \|Ax - b\|$

$= \|(-0,9; 1,2; 0,3; -0,6)\|$

$= 2,7$

b) $y = \theta_1 + \theta_2 x^2$

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2 \\ \theta_1 + 2^2\theta_2 = 2 \\ \theta_1 + 3^2\theta_2 = 5 \\ \theta_1 + 4^2\theta_2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1^2 \\ 1 & 2^2 \\ 1 & 3^2 \\ 1 & 4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Có $\det(A^T.A) = \begin{vmatrix} 4 & 30 \\ 30 & 354 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow A^T.A$ khả nghịch

$\Rightarrow$ nơ bp tối tiểu: $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b$

$= \begin{pmatrix} 1{,}023 \\ 0{,}43 \end{pmatrix}$

$\rightarrow (\theta_1, \theta_2) = (1{,}023, 0{,}43) \rightarrow y = 1{,}023 + 0{,}43x^2$

Chuẩn vector phần dư:

$\|r\| = \|Ax - b\| = \|(-0{,}547, 0{,}745, -0{,}107, -0{,}997)\|$

$\simeq 0{,}872$

c) $y = \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Có $\det(A^T.A) = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 10 & 100 & 354 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow A^T.A$ khả nghịch

$\rightarrow$ nơ bp tối tiểu: $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b = \begin{pmatrix} 2{,}75 \\ -1{,}65 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$

Chuẩn vector phần dư:

$\|r\| = \|Ax - b\| = \|(-0{,}15, 0{,}45, -0{,}45, 0{,}15)\|$

$\simeq 0{,}671$

a) $\log y = \theta_1 + \cancel{\theta_2 x + 0}\ \theta_2 \ln x$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \log 2 \\ \log 2 \\ \log 5 \\ \log 8 \end{pmatrix}}_{b}$$

Có $\det(A^T.A) \neq 0 \rightarrow A^T.A$ khả nghịch

→ bp tối tiểu: $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b = \begin{pmatrix} 0,201 \\ 0,44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

Chuẩn vector: $\|r\| = \|Ax - b\| = \|(-0,1; 0,205; -0,014; -0,092)\|$

$\simeq 0,246$

e) $\ln y = \theta_1 + \theta_2 \ln x$ (mô hình log - tuyến tính)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ln 1 \\ \ln 2 \\ \ln 3 \\ \ln 4 \end{pmatrix}}_{b}$$

Có $\det(A^T.A) \neq 0 \rightarrow A^T.A$ khả nghịch

→ bp tối tiểu $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,508 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

Chuẩn vector $\|r\| = \|Ax - b\| = \|(-0,186; 0,322; -0,087; -0,048)\|$

$\simeq 0,385$

f) ~~log~~ $\ln y = \theta_1 + \theta_2 \ln x$ (mô hình log-log)

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \ln 2 \\ \ln 5 \\ \ln 8 \end{pmatrix}$$

Có $\det(A^T.A) \neq 0 \to A^T.A$ khả nghịch

$\to$ nº bp tối tiểu $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b = \begin{pmatrix} 0,4063 \\ 1,014 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

Chuẩn vector: $\|r\| = \|Ax - b\| = \|(-0,233;\ 0,473;\ -0,072;\ -0,212)\|$

$\approx 0,568$

Bài 3:

$y = a + bx$

Có: $\begin{cases} 0 = a + 6,1b \\ 2 = a + 7,6b \\ 4 = a + 8,7b \\ 6 = a + 10,4b \end{cases} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 6,1 \\ 1 & 7,6 \\ 1 & 8,7 \\ 1 & 10,4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$

Có $\det(A^T.A) \neq 0 \to A^T.A$ khả nghịch

nº bp tối tiểu chính là: $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b = \begin{pmatrix} -8,643 \\ 1,42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\to$ Độ cứng lò xo là 1,42

Bài 4:

Gọi $y = ax + b$

đg thẳng qua 4 điểm $(0,1)$; $(1,3)$; $(2,4)$; $(3,4)$

$$\begin{cases} 1 = 0a + b \\ 3 = a + b \\ 4 = 2a + b \\ 4 = 3a + b \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{b}$$

Có $\det(A^T.A) \neq 0 \rightarrow A^T.A$ khả nghịch

no bp tối ưu: $x = (A^T.A)^{-1}.A^T.b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Đường thẳng cần tìm: $y = x + 1,5$