

Chương 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Với $f : V \rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính, ta dễ dàng tìm được ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở chính tắc của V và W . Hơn nữa, các bài toán liên quan đến ánh xạ f có thể được giải được thông qua ma trận biểu diễn của f .

4.1 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Giả sử A là ma trận biểu diễn theo cặp cơ sở chính tắc của ánh xạ tuyến tính f . Khi đó

- **kernel(A)** hay **nullspace(A)** : Tìm một cơ sở cho không gian nhân của f . Kết quả trả về là tập hợp các vectơ.
- **colspan(A)**: Tìm một cơ sở cho không gian ảnh của f . Kết quả trả về là tập hợp các vectơ.

Ví dụ 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(a, b, c) = (a - 2b + 2c, -a + 2b - 3c, 2a - 4b + 5c).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Ker } f$ và $\text{Im } f$.

```
> A := matrix(3, 3, [1, -2, 2, -1, 2, -3, 2, -4, 5]);  
  
       $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$   
  
> kernel(A);  
       $\{[2 \ 1 \ 0]\}$   
  
> colspan(A);  
       $\{[0 \ -1 \ 1], [1 \ -1 \ 2]\}$ 
```

Dựa vào kết quả tính toán trên ta có:

- $\text{Ker } f$ có một cơ sở là $\{(2, 1, 0)\}$.
- $\text{Im } f$ có một cơ sở là $\{(0, -1, 1), (1, -1, 2)\}$.

4.2 Tìm ánh xạ tuyến tính

Bài toán. Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của V và v_1, v_2, \dots, v_m là các vectơ thuộc W . Tìm ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$ thỏa $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \dots, f(u_n) = v_n$.

Phương pháp. Với $u \in V$, ta tìm tọa độ của u theo cơ sở \mathcal{B} . Giả sử $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, khi đó

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\alpha_1 u_1) + f(\alpha_2 u_2) + \dots + f(\alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \dots + \alpha_n f(u_n) \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Trong không gian \mathbb{R}^3 cho cơ sở

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (2, -1, 3)\} \text{ và } v_1 = (2, 1, -2), v_2 = (1, 2, -2), v_3 = (3, 5, -7).$$

Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, f(u_3) = v_3$.

```
> u1 := vector([1, -1, 1]): u2 := vector([1, 0, 1]): u3 := vector([2, -1, 3]):
  v1 := vector([2, 1, -2]): v2 := vector([1, 2, -2]): v3 := vector([3, 5, -7]):
> u:=vector([x, y, z]):
      u := [x y z]
> A := matrix([u1, u2, u3]): A:=transpose(A): s:=linsolve(A, u);      #Tìm [u]_{\mathcal{B}}
      s := [x - z - y 2x - z + y - x + z]
> evalm(s[1]*v1+s[2]*v2+s[3]*v3);      #Tính f(u)
      [x - y 2z + y x - 3z]
```

Dựa vào kết quả tính toán ta có $f(x, y, z) = (x - y, y + 2z, x - 3z)$.

4.3 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Bài toán. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Với $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ là hai cơ sở của \mathbb{R}^n và $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}$ là hai cơ sở của \mathbb{R}^m . Cho biết $[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0}$, hãy tính $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.

Phương pháp. Ta áp dụng công thức sau:

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = (\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}).$$

Nếu \mathcal{B}_0 và \mathcal{C}_0 là những cơ sở chính tắc thì việc tính $(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})$ và $(\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C})$ rất dễ dàng.

Ví dụ 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

Tìm ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\} \text{ và } \mathcal{C} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}.$$

```
> fBoCo := matrix(2, 3, [1, 1, 0, -1, 0, 2]);      # fBoCo := [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0}
      [ 1  1  0 ]
      [-1  0  2 ]
> u1 := vector([1, 0, -1]): u2 := vector([1, 1, 0]): u3 := vector([1, 0, 0]):
```

```

v1 := vector([1, 1]): v2 := vector([2, 1]):
> P := matrix([u1, u2, u3]): BoB := transpose(P);           # BoB := ( $\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ )


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


> Q := matrix([v1, v2]): CoC := transpose(Q);               # CoC := ( $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ )


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$


> fBC := multiply(inverse(CoC), fBoCo, BoB);                 # fBC :=  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ 


$$\begin{bmatrix} -7 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$


```

Từ kết quả tính toán ta có $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (1, 1, 0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 1); v_2 = (2, 1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm công thức của f .

```

> fBC := matrix(2, 3, [2, 1, -3, 0, 3, 4]);                 # fBC :=  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ 


$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$


> u1 := vector([1, 1, 1]): u2 := vector([1, 0, 1]): u3 := vector([1, 1, 0]):
  v1 := vector([1, 1]): v2 := vector([2, 1]):
> P := matrix([u1, u2, u3]): BoB := transpose(P);           # BoB := ( $\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ )


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$


> Q := matrix([v1, v2]): CoC := transpose(Q);               # CoC := ( $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ )


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$


```

$> \text{fBoCo} := \text{multiply}(\text{CoC}, \text{fBC}, \text{inverse}(\text{BoB})); \quad \# \text{fBoCo} := [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0}$

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dựa vào kết quả tính toán ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z)$.

Phần II. Bài tập

4.1 Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính từ \mathbb{R}^2 vào \mathbb{R}^2 ? Giải thích.

a) $f(x, y) = (xy, x + y)$.

b) $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

c) $f(x, y) = (x, 0)$.

d) $f(x, y) = (x^2, 0)$.

4.2 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 2y + z).$$

Chứng minh $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

4.3 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z).$$

Chứng minh f là toán tử tuyến tính trên \mathbb{R}^3 .

4.4 Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sao cho $f(1, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 1, 2) = (1, 3)$ và $f(1, 2, 1) = (2, -1)$.

4.5 Cho $u_1 = (1, -1)$, $u_2 = (-2, 3)$. Hãy xác định toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho $f(u_1) = u_2$ và $f(u_2) = -u_1$.

4.6 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z).$$

a) Kiểm tra các vectơ $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 0)$, $u_4 = (0, 1, 2)$ có thuộc $\text{Ker} f$ hay không?

b) Kiểm tra các vectơ $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 2)$, $v_3 = (0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 1, 1)$ có thuộc $\text{Im} f$ hay không?

4.7 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - 3y + z).$$

Tìm cơ sở cho $\text{Im} f$ và $\text{Ker} f$.

4.8 Cho f là toán tử tuyến tính trên \mathbb{R}^3 xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 3y - z, x - 2y + 4z, 2x - y + 5z).$$

Tìm cơ sở cho $\text{Im} f$ và $\text{Ker} f$.

4.9 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ có dạng ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tìm cơ sở cho $\text{Im} f$ và $\text{Ker} f$.

4.10 Cho ánh xạ tuyến tính

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z - t, x + 2y - z - 2t, x + 3y - 3z - 3t).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Ker} f$ và một cơ sở của $\text{Im} f$.

4.11 Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\text{Ker} f = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 2) \rangle$ và $\text{Im} f = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

4.12 Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\text{Ker} f = \langle (1, 1, 1) \rangle$ và $\text{Im} f = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 2) \rangle$.

4.13 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 3y + z).$$

a) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 và \mathbb{R}^2 .

b) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ (của \mathbb{R}^3) và $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (2, 3)\}$ (của \mathbb{R}^2).

4.14 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (x - 2y, 2x + y)$.

a) Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$, với \mathcal{B}_0 là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^2 .

b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$, với $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -3), u_2 = (-1, 2)\}$.

4.15 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y, 3y - z, 2x + z).$$

Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ của \mathbb{R}^3 , với $u_1 = (-1, 2, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, -3, -2)$.

4.16 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - 2z, x - 3y + 3z).$$

a) Tìm một cơ sở của $\text{Im} f$ và một cơ sở của $\text{Ker} f$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, -2, 0), (2, 1, 3)\}$ của \mathbb{R}^3 .

4.17 Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sao cho $f(u_1) = u_2 + u_3$, $f(u_2) = u_3 + u_1$ và $f(u_3) = u_1 + u_2$, với $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$.

a) Hãy xác định ánh xạ tuyến tính f .

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

4.18 Cho $\mathcal{B} = \{(1, -1), (-2, 3)\}$ là cơ sở của \mathbb{R}^2 . Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.19 Cho $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ là cơ sở của \mathbb{R}^3 . Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.20 Cho cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ (của \mathbb{R}^3) và $\mathcal{C} = \{(2, -1), (-3, 2)\}$ (của \mathbb{R}^2). Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$