XÍCH MARKOV RỜI RẠC

TRẦN HÀ SƠN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN-ĐHQG TPHCM

Ngày 19 tháng 5 năm 2024

Overview

Ví dụ

Thống kê tình trạng nghiện hút trong một cộng đồng gồm 1200 người, người ta thu được số liệu ban đầu như sau: 1000 người không nghiện và 200 người nghiện. Sau một thời gian, các hoạt động buôn bán ma túy và chống buôn bán ma túy diễn ra song song, xuất hiện những tình huống sau:

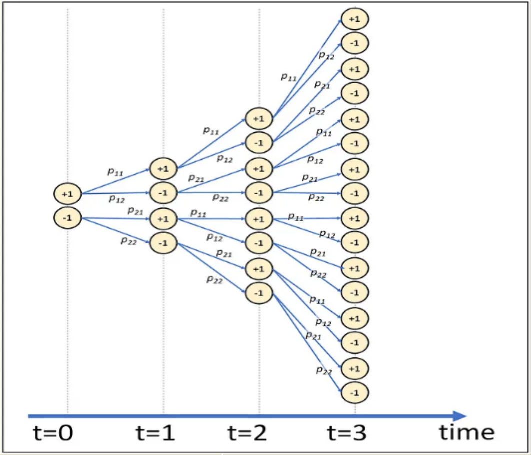
- Xác suất một người trước không nghiện, nay vẫn không nghiện là p_{11}.
- Xác suất một người trước đó không nghiện, nay bị nghiện là p_{12}.
- Xác suất một người trước đó nghiện, nay vẫn nghiện là p_{21}.
- Xác suất một người trước đó nghiện, nay không nghiện là p_{22}.

Câu hỏi: Sau 3 tháng, 6 tháng,. . ., n tháng nữa thì tỉ lệ số người không nghiện ở cộng đồng đó là bao nhiêu?

Giới thiệu bài toán

Ví dụ

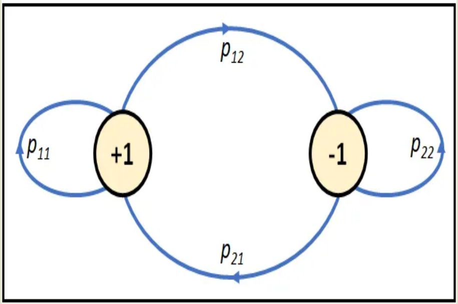
Kí hiệu $+1$ là trạng thái không bị nghiện, -1 là trạng thái bị nghiện của một người trong cộng đồng. Theo sự thay đổi của thời gian:



Giới thiệu bài toán

Ví dụ

Kí hiệu $+1$ là trạng thái không bị nghiện, -1 là trạng thái bị nghiện của một người trong cộng đồng. Lược đồ minh họa:



Định nghĩa xích Markov

Định nghĩa (Không gian trạng thái)

Cho tiến trình ngẫu nhiên $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, tập hợp S gồm tất cả các giá trị của dãy biến ngẫu nhiên $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ được gọi là **không gian trạng thái** của tiến trình ngẫu nhiên $(X_n)_n$.

Định nghĩa xích Markov

Ví dụ

- Trong mô hình khảo sát cộng đồng nghiện-không nghiện,

$$S = \{+1, -1\}.$$

- Giả sử thời tiết trong ngày chỉ có thể là nắng hoặc mưa, gọi X_n là tình trạng thời tiết ở ngày thứ n. Khi đó không gian trạng thái của tiến trình ngẫu nhiên $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ là

$$S = \{R(rainy), S(sunny)\}.$$

- $X(t)$ là số người xếp hàng để rút tiền vào thời điểm t, khi đó tập hợp không gian trạng thái của tiến trình ngẫu nhiên $\{X_t\}$ là

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Định nghĩa xích Markov

Định nghĩa

Xét một tiến trình ngẫu nhiên $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ và không gian trạng thái $S \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$. Một tiến trình ngẫu nhiên là một xích Markov (Markov chain) nếu

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

với mọi $n, i, j, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$.

Lưu ý

- Nếu tập S là hữu hạn thì ta có một xích Markov hữu hạn.
- Đặt $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, khi đó p_{ij} không phụ thuộc vào n, cụ thể:

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_2 = j | X_1 = i) = P(X_3 = j | X_2 = i) = \ldots$$

Định nghĩa xích Markov

Định nghĩa

Xét một tiến trình ngẫu nhiên $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ và không gian trạng thái $S \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$. Một tiến trình ngẫu nhiên là một xích Markov (Markov chain) nếu

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

với mọi $n, i, j, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$.

Lưu ý

Nếu $m < n$ và $P(X_{n+h} = j | X_{m+h} = i) = P(X_n = j | X_m = i)$ với mọi h thì ta nói xích Markov này là **thuần nhất**.

Định nghĩa xích Markov

Lưu ý

Đặt biến cố $\begin{cases} A &= \{X_{n+1} = j\} \\ B &= \{X_n = i\} \\ C &= \{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \end{cases}$ thì tính Markov nghĩa là

$$P(A|B) = P(A|BC).$$

Suy ra $P(AC|B) = \dfrac{P(ABC)}{P(B)} = \dfrac{P(BC)P(A|BC)}{P(B)} = \dfrac{P(B)P(C|B)P(A|B)}{P(B)}$

$$= P(C|B) \cdot P(A|B).$$

$\Longrightarrow$ Quá khứ và tương lai độc lập với nhau khi biết hiện tại.

Ma trận chuyển trạng thái và lược đồ

Định nghĩa

Giả sử tập trạng thái $S = \{1, 2, 3, \ldots, r\}$, $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, khi đó ma trận

$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,r} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix},$$

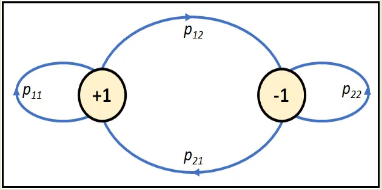
được gọi là ma trận xác suất chuyển trạng thái sau **một** bước.

Lưu ý

Ta luôn có $p_{ij} \geq 0$ với mọi i và $\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = \sum_{k=1}^{r} P(X_{n+1} = k | X_n = i) = 1$.

Ma trận chuyển trạng thái và lược đồ

Ví dụ

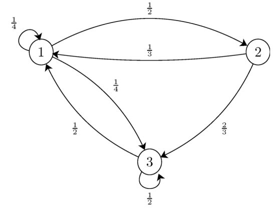


$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ p_{21} & 1 - p_{21} \end{bmatrix}$$

Ví dụ

Xét một xích Markov có ba trạng thái $1, 2, 3$ có ma trận xác suất chuyển và lược đồ tương ứng như sau:

$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$



a) Tính $P(X_4 = 3 | X_3 = 2)$.

b) Tính $P(X_3 = 1 | X_2 = 1)$.

c) Biết $P(X_0 = 1) = \frac{1}{3}$, tính $P(X_0 = 1, X_1 = 2)$ và $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3)$.

Ví dụ

a) $P(X_4 = 3|X_3 = 2) = p_{23} = \dfrac{2}{3}.$

b) $P(X_3 = 1|X_2 = 1) = p_{11} = \dfrac{1}{4}.$

c) $$P(X_0 = 1, X_1 = 2) = P(X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1) = \frac{1}{3} \cdot p_{12}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ

c) $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3)$
$= P(X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_2 = 3|X_1 = 2, X_0 = 1)$
$= P(X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_2 = 3|X_1 = 2)$ (do tính Markov)
$= \frac{1}{3} \cdot p_{12} \cdot p_{23}$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$

Phân phối xác suất trạng thái-State Probability Distributions

Định nghĩa (Xác suất chuyển sau n bước)

Xác suất chuyển sau n bước được định nghĩa như sau:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i),$$

với quy ước $p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$

Phân phối xác suất trạng thái-State Probability Distributions

Định nghĩa (Xác suất chuyển sau n bước)

Giả sử có không gian trạng thái $S = \{1, 2, 3, \cdots, r\}$, phân phối của biến X_n được cho bởi

$$\pi^{(n)} = \begin{bmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \cdots & P(X_n = r) \end{bmatrix}.$$

Phân phối của biến X_0

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} P(X_0 = 1) & P(X_0 = 2) & \cdots & P(X_0 = r) \end{bmatrix}$$

được gọi là phân phối ban đầu của hệ.

Phân phối xác suất trạng thái-State Probability Distributions

Định lý (Xác suất chuyển sau n bước)

Cho xích Markov $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ với ma trận xác xuất chuyển sau một bước là P, khi đó:

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)} P, \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n, \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Phân phối xác suất trạng thái-State Probability Distributions

Ví dụ

Xét một xích Markov có hai trạng thái $S = \{0, 1\}$ với ma trận xác suất chuyển sau một bước là

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

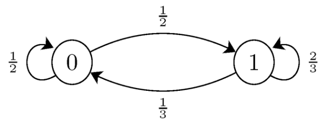
Giả sử hệ đang ở trạng thái 0 tại thời điểm $n = 0$

a) Vẽ lược đồ trạng thái của hệ.

b) Tính xác suất của hệ ở trạng thái 1 tại thời điểm $n = 3$.

Phân phối xác suất trạng thái-State Probability Distributions

Ví dụ



$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} P(X_0 = 0) & P(X_0 = 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \pi^{(3)} = \pi^{(0)} P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^3$$

$$\Longrightarrow \pi^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{29}{72} & \frac{43}{72} \end{bmatrix}.$$

Xác suất sau n bước chuyển

Nhận xét

Cho xích Markov $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ và không gian trạng thái S. Ta có

$$p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j | X_0 = i)$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} &= P(X_2 = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) P(X_1 = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_2 = j | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i) \text{ (do tính Markov)} \\
&= \sum_{k \in S} p_{jk} p_{ki}
\end{aligned}$$

Nhận xét

Đặt

$$P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)}) = \begin{bmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & \cdots & p_{1,r}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & \cdots & p_{2,r}^{(2)} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ p_{(2)r1} & p_{r2}^{(2)} & \cdots & p_{rr}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Suy ra $P^{(2)} = P^2$.

Xác suất sau n bước chuyển

Định lý

Với mọi $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ *ta có:*

1. $p_{ij}^{(n+m)} = P(X_{m+n} = j | X_0 = i) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$.
2. $P^{(n)} = P^n$, *với* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Phân phối dừng

Định nghĩa

Cho ma trận xác suất chuyển trạng thái P, đặt $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$.

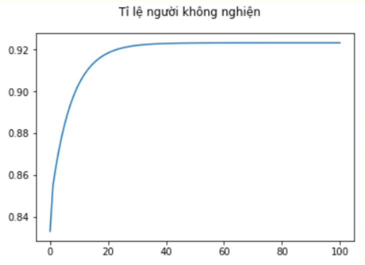
Ví dụ

Xét hiện tượng:

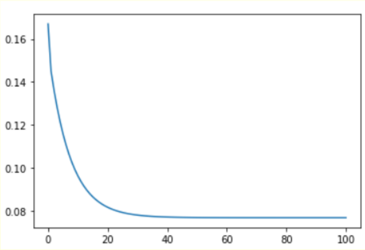
$P = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.12 & 0.88 \end{bmatrix}$ với trạng thái ban đầu $\pi = (0.833, 0.167)$.

Khảo sát $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \pi P^n$.

Phân phối dừng



(a) Tỉ lệ không nghiện



(b) Tỉ lệ nghiện

Hình: Giả lập mô hình sau 100 tháng

Phân phối dừng

Định nghĩa

Phân phối ban đầu được gọi là dừng nếu $\pi^{(n)}$ không phụ thuộc vào n, tức là

$$\pi = \pi^{(n)} P \text{ hay } \pi = \pi^{(n)}.$$

Định nghĩa

Cho vector hàng $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)$ thỏa $\pi_i \geq 0$ và $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ được gọi là phân phối dừng của xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P nếu

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j, \forall j \in S.$$

Nghĩa là π là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\pi P = \pi.$$

Ví dụ

Nếu xích Markov có xác suất chuyển trạng thái là

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.05 & 0.5 & 0.45 \end{bmatrix}.$$

Khi đó phân phối dừng $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ là nghiệm của hệ phương trình:

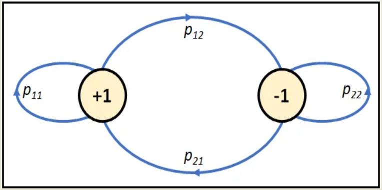
$$\begin{cases} 0.4\pi_1 + 0.05\pi_2 + 0.05\pi_3 = \pi_1 \\ 0.5\pi_1 + 0.7\pi_2 + 0.5\pi_3 = \pi_2 \\ 0.1\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.45\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $\pi = (1/13, 5/8, 31/104)$.

Phân phối dừng

Ví dụ

Quay trở lại ví dụ ban đầu



Giả sử

$$p_{11} = 0.99 \text{ và } p_{21} = 0.12.$$

Khi đó $P = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.12 & 0.88 \end{bmatrix}$ và $\lim_{n \longrightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} 0.923 & 0.077 \\ 0.923 & 0.077 \end{bmatrix}$.

Suy ra phân phối dừng $\pi = (0.923, 0.077)$.

Xích bất khả quy

Định nghĩa

Một xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P là bất khả quy nếu với mọi trạng thái $i, j \in S$, tồn tại một số nguyên dương n sao cho phần tử ở hàng i cột j của ma trận P^n là số dương.

Ví dụ

- Ma trận $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là bất khả quy vì P^3 có tất cả các phần tử đều dương.
- Ma trận $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ là khả quy.

Xích bất khả quy

Định lý

Với mọi xích Markov bất khả quy, tồn tại duy nhất một phân phối dừng, vector phân phối dừng có mọi thành phần đều dương.

Định lý

Nếu xích Markov $\{X_0, X_1, \ldots\}$ với ma trận xác suất chuyển P thỏa tồn tại một số nguyên dương m sao cho P^m có tất cả các phần tử đều dương, và có phân phối dừng π, thì $P(X_n = i)$ sẽ hội tụ tới π_i khi $n \longrightarrow \infty$. Khi đó mọi hàng của ma trận P^n sẽ hội tụ tới π khi $n \longrightarrow \infty$.

Tóm tắt

Mô hình một xích Markov rời rạc và thuần nhất là một bộ ba (X_n, π, P), trong đó:

- (X_n) là dãy đại lượng ngẫu nhiên rời rạc.
- π là phân phối ban đầu.
- P là ma trận xác suất chuyển trạng thái.

Câu hỏi: Phân phối dừng có tồn tại không? Có duy nhất không? Cách tìm phân phối dừng.

Mô hình phân chia thị trường

Bài toán (Mô hình phân chia thị trường)

Có N của hàng cùng bán một sản phẩm nào đó. Khách hàng có thể mua hàng ở N của hàng này, việc chọn cửa hàng để mua là tùy thuộc vào sở thích của cửa hàng và họ có thể bỏ cửa hàng này đến một cửa hàng khác. Các cửa hàng sẽ dùng các hình thức cạnh tranh như quảng cáo, khuyến mại,...để lôi kéo khách hàng.

Nhận xét: Coi N của hàng là N trạng thái và các khách hàng như là một điểm di chuyển qua lại giữa các trạng thái này một cách ngẫu nhiên. Ta được một xích Markov có N trạng thái, xác suất chuyển p_{ij} là xác suất để khách hàng hiện tại đang thích cửa hàng i, sau một chu kì thời gian chuyển qua mua ở cửa hàng j.

Mô hình phân chia thị trường

Ví dụ

Có ba cửa hàng và 1000 khách hàng với phân phối ban đầu ở tháng Giêng (X_0) như sau:

$$P(X_0 = 1) = 20\%, P(X_0 = 2) = 50\%, P(X_0 = 3) = 30\%$$

- Cửa hàng số 1 có chiếm 20% khách hàng (200 khách.)
- Cửa hàng số 2 có chiếm 50% khách hàng (500 khách.)
- Cửa hàng số 3 có chiếm 30% khách hàng (300 khách.)

Mô hình phân chia thị trường

Ví dụ

Sau 1 tháng (một chu kì thời gian), gọi X_1 là sự phân chia thị trường ở giai đoạn thứ nhất, thống kê được:

$$P(X_1 = 1) = 22\%, P(X_1 = 2) = 49\%, P(X_1 = 3) = 29\%$$

- Cửa hàng số 1 có chiếm 22% khách hàng (thu thêm được 2% khách.)
- Cửa hàng số 2 có chiếm 49% khách hàng, mất 1% khách.
- Cửa hàng số 3 có chiếm 29% khách hàng, mất 1% khách.

Mô hình phân chia thị trường

CH	Khách tháng 1	Khách có thêm	Khách mất đi	Khách tháng 2
1	200	60	40	220
2	500	40	50	490
3	300	35	45	290

CH	Khách tháng 1	Thu từ cửa hàng			Mất cho cửa hàng			Khách tháng 2
		1	2	3	1	2	3	
1	200	0	35	25	0	20	20	220
2	500	20	0	20	35	0	15	490
3	300	20	15	0	25	20	0	290

Mô hình phân chia thị trường

Ta có ma trận xác suất chuyển như sau:

$$\begin{bmatrix} p_{11} = \dfrac{160}{200} = 0.800 & p_{12} = \dfrac{20}{200} = 0.100 & p_{13} = \dfrac{20}{200} = 0.100 \\ p_{21} = \dfrac{35}{500} = 0.070 & p_{22} = \dfrac{450}{500} = 0.900 & p_{23} = \dfrac{15}{500} = 0.030 \\ p_{31} = \dfrac{25}{300} = 0.083 & p_{32} = \dfrac{20}{300} = 0.067 & p_{33} = \dfrac{255}{300} = 0.850 \end{bmatrix}$$

Mô hình phân chia thị trường

Mô hình Markov như sau:

- Không gian trạng thái $S = \{1, 2, 3\}$,
- Phân phối ban đầu $\pi = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.50 & 0.30 \end{pmatrix}$,
- Ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix}.$$

Mô hình phân chia thị trường

Dự báo phân chia thị trường cho tương lai:

- Trong tháng Ba thị trường sẽ thế nào?
- Trong tháng Mười Hai thị trường sẽ thế nào?
- Khi thị trường ổn định (cân bằng) thì lượng khách hàng phân bố thế nào?