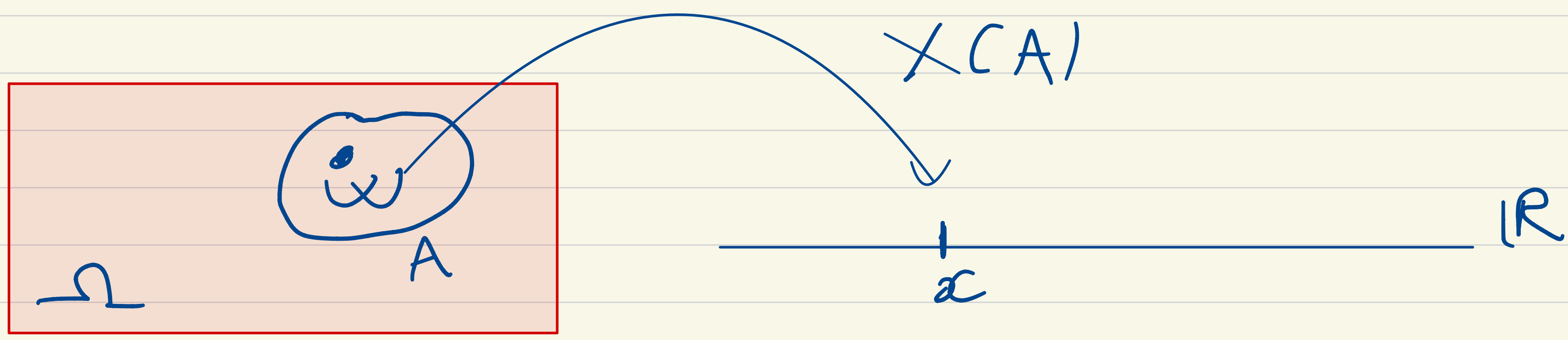


X = chỉ cao 1 SV lớp 22CTT3 (cm)

$X = 168 = x_1$

$X = 170 = x_2$

$X = 159 = x_3$

$\vdots$

X = chiều cao của thanh niên nam VN (cm)

$$\underbrace{P(X > 170)} = 1 - P(X \leq 170)$$
$$= 1 - F(170)$$
↳ gs ta biết F

$$P(160 \leq X < 170) = F(170) - F(160).$$

Ví dụ 4

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân phối xác suất cho bởi

$$p(x) = \frac{2x+1}{25}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(a) *Lập bảng phân phối xác suất.*

(b) *Tính* $\mathbb{P}(X \leq 1)$ và $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$.

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1/25 & , 0 \leq x < 1 \\ 4/25 & , 1 \leq x < 2 \\ 9/25 & , 2 \leq x < 3 \\ 16/25 & , 3 \leq x < 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

Bảng ppxs cho X:

X	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}_X$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$

x

$p(x) = P(X = x)$

$x \in \{0, 1, \dots, 4\}$

$$\sum_{x=0}^{4} p(x) = 1.$$

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{25} + \frac{3}{25} = \frac{4}{25}.$$

$$P(2 \leq X < 4) = P(X=2) + P(X=3)$$
$$= 5/25 + 7/25 = 12/25.$$

Ví dụ 5

Một xạ thủ có 4 viên đạn, bắt lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0.7. Nếu có một viên trúng hoặc hết đạn thì dừng. Gọi X là số viên đạn đã bắn, lập bảng phân phối xác suất cho X.

X = số viên đạn mà xạ thủ bắn.

$X \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Bảng pp xs cho X:

X	1	2	3	4
P_X	0,7	0,21	0,063	0,027

$p(1) = P(X=1)$
$= 0{,}7.$

$p(2) = P(X=2)$
$= 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21.$

$$P(X=3) = 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}063.$$

$$P(\overline{A_1} A_2) = \underset{\downarrow \atop 0.3}{P(\overline{A_1})}\; \underset{\downarrow \atop 0.7}{P(A_2)}$$ khi A_1 độc lập với A_2

$$P(X=4) = 1 - [P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]$$
$$= 1 - (0{,}7 + 0{,}21 + 0{,}063) = 0.027.$$

$P(X=4) = 0,3^3 \times 0,7 + 0,3^4$

$= 0,3^3(\underbrace{0,7+0,3}_{=1}) = 0,027$

Xét bnn X nhận các g/trị $x_1, x_2, \dots, x_n$ với xs tương ứng là $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$\mathbb{P}_X$	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

x

$P(X \le x)$

$=$

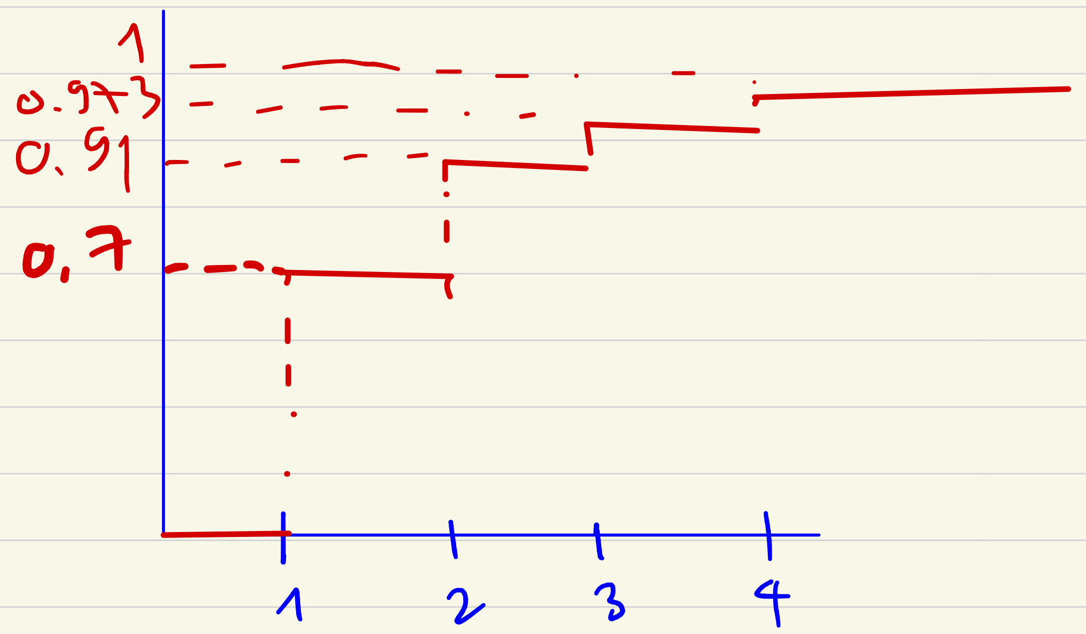
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < x_1 \\ p_1 & , \ x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & , \ x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & , \ x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 & , \ x > x_n \end{cases}$$

x: g/trị bất kì

Bảng pp xs cho X:

X	1	2	3	4
P_x	0,7	0,21	0,063	0,027

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}7, & 1 \le x < 2 \\ 0{,}91, & 2 \le x < 3 \\ 0{,}973, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$



Ví dụ 6

Một lô hàng có 300 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên lần lượt 2 sản phẩm không hoàn lại. Gọi X là số sản phẩm kém chất lượng trong 2 sản phẩm được chọn.

(a) *Lập bảng phân phối xác suất cho X.*

(b) *Tìm hàm phân phối xác suất của X.*

X = số sp kém trong 2 sp đc chọn.

$X \in \{0, 1, 2\}$

Lập bảng ppxs cho X:

X	0	1	2
P_x	0,694	0.279	0.027

1.5

$P(X=0) =$

P("K° có sp nào kém")

$= \frac{250}{300} \times \frac{249}{299} =$

$$P(X=1) = \frac{250}{300} \times \frac{50}{299} + \frac{50}{300} \times \frac{250}{299} = 0{,}279.$$

$P(X=2) = 1 - 0,694 - 0.279 = 0,027.$

Hàm ppxs cho X:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,694, & 0 \le x < 1 \\ 0,973, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$F(1,5) = 0,973.$

Ví dụ 7

Xét biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị thuộc $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Giả sử phân phối xác suất của X cho bởi

$$p_X(k) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) *Chứng tỏ rằng $p_X(\cdot)$ thỏa các điều kiện của một hàm khối xác suất và tìm hàm phân phối xác suất của X.*

(b) *Tính* $\mathbb{P}(2 < X \le 5)$.

(c) *Tính* $\mathbb{P}(X > 4)$.

a) $p_X(k) \geq 0 \;\; \forall k,$

$p(k) = \frac{1}{2^k} \geq 0 \;\; \forall k.$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \, ?$ → chuỗi hình học

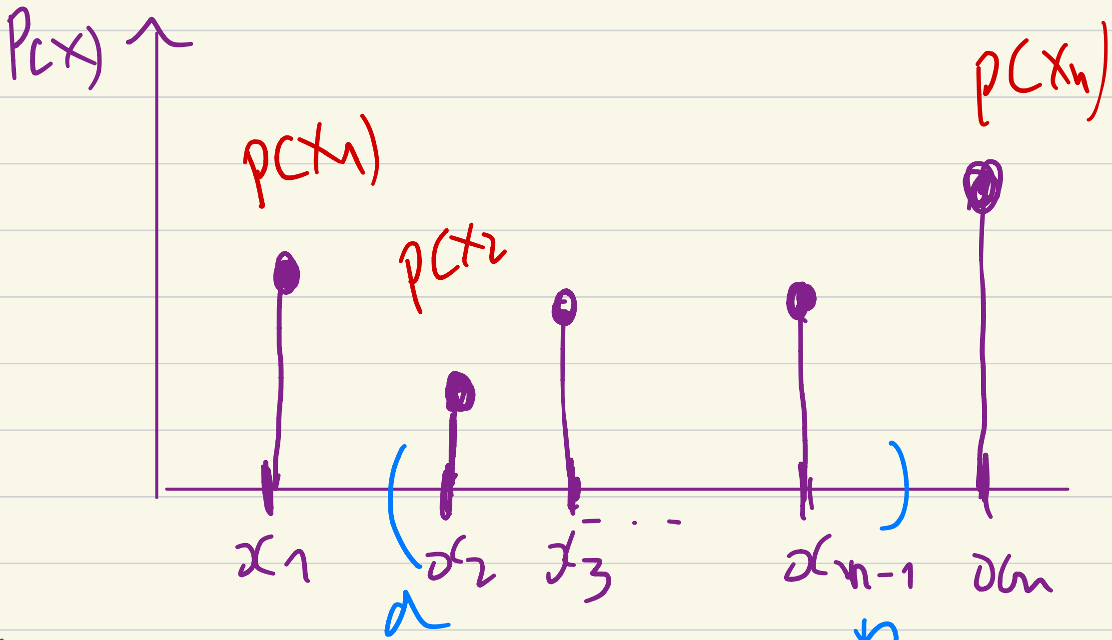
$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

nếu $|r| < 1$.

BNN Rời rạc → Hàm khối xs (pmf) $p_X(x) = P(X = x)$

BNN Rời rạc → Hàm phân phối xs $F(x) = P(X \le x)$

$X \in \{x_1, \dots, x_n\}$ $\quad p(x) = P(X = x)$



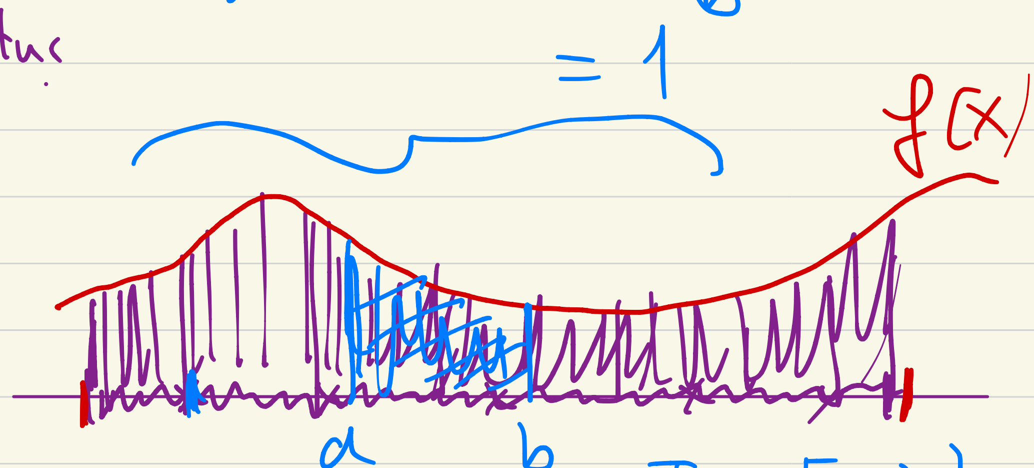
prob mass func

i) $p(x) \geq 0 \ \forall x$

ii) $\sum_x p(x) = 1$

$\sum_{x=a}^{b} p(x) = P(a \leq X \leq b)$

Liên tục



$I = [a, b]$

i) $f(x) > 0$

ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$

$P(X = c) = \int_c^c f(x)\,dx = 0.$

Hàm pp xs:

$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x)$

$= \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = f(x)$

$f(x, y) = c(x + y),$

$P((X, Y) \in D) = \iint f(x, y)\,dx\,dy.$

Ví dụ 8

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \neq \end{cases}$$

(a) *Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên X,*

(b) *Tìm hàm phân phối $F(x)$,*

(c) *Tính xác suất $\mathbb{P}(1 \le X \le 3/2)$.*

a) $f(x) \geq 0 \ \forall x$ do định nghĩa.

Kiểm tra:

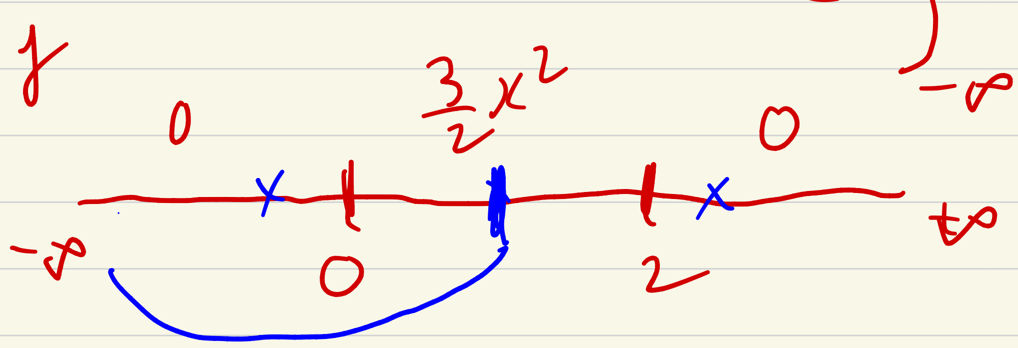
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0.dx + \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx + \int_2^{+\infty} 0.dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{3}{8}\times\frac{8}{3} = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ là hmđxs của 1 bnn X.

b) Hàm ppxs: $F(x) = P(X \le x)$.

$$= \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du.$$



TH: $x < 0$. $F(x) = 0$.

TH: $0 \le x \le 2$.

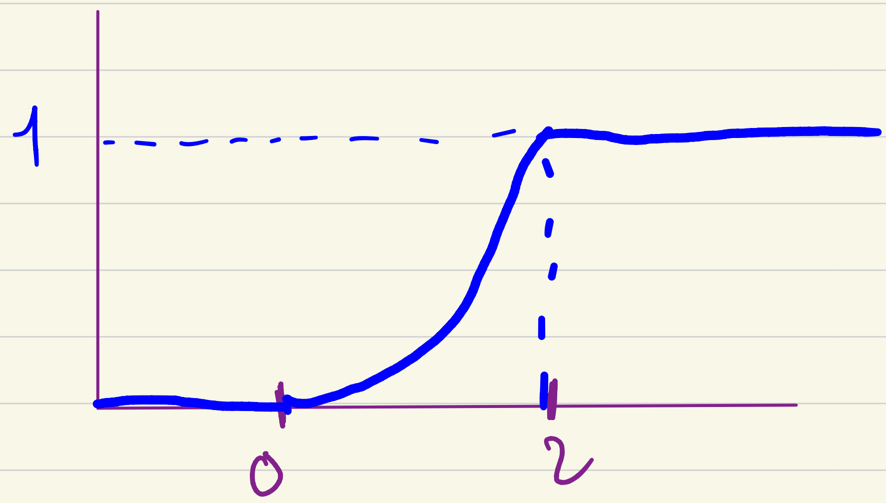
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0.du}_{=0} + \int_0^x \frac{3}{8}u^2 du$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_0^x = \frac{x^3}{8}.$$ Vậy $F(x) = \frac{x^3}{8}$, khi $0 \le x \le 2$.

TH: $x > 2$. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^2 \frac{3}{8}u^2 du$

$$+ \int_2^x 0.du = 1,$$

Vậy:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^3/8 & , 0 \le x \le 2 \\ 1 & , x > 2 \end{cases}$$



c) $P(1 \le X \le \frac{3}{2})$
$= F(\frac{3}{2}) - F(1)$
$= \frac{(3/2)^3}{8} - \frac{1}{8} = \dots$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{8}) = \int_1^{3/2} f(x)\,dx = \int_1^{3/2} \frac{3}{8}x^2\,dx = \dots$$

Ví dụ 12

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	-1	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.1	0.3	0.4	0.2

(a) *Lập bảng phân phối xác suất cho biến ngẫu nhiên* $Y = 2X + 3$,
(b) *Lập bảng phân phối xác suất cho biến ngẫu nhiên* $Z = X^2$.

a) $y = u(x) = 2x + 3 \to Y = u(X) = 2X + 3$.

Bảng ppxs cho Y:

Y	1	3	5	7
P_Y	0.1	0.3	0.4	0.2

$P_Y(3) = P(Y = 3)$
$= P(X = 0) = 0.3$

$P_Y(1) = P(Y = 1) = P(X = -1) = 0.1$

b) $Z = X^2$

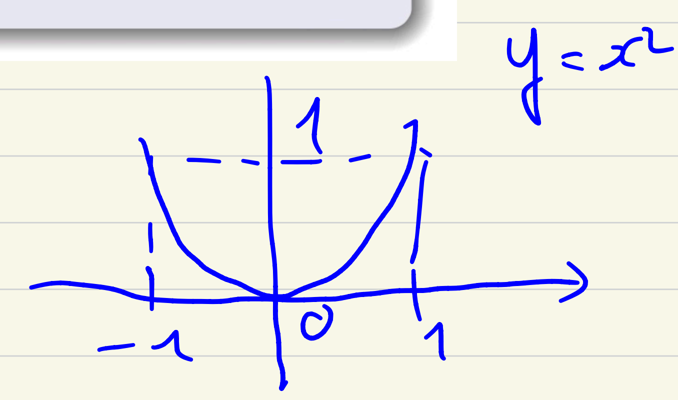
Z	0	1	4
P_Z	0.3	0.5	0.2

$P(Z = 0) = P(X = 0) = 0.3$
$P(Z = 1) = P(X = -1$
hoặc $X = 1)$
$= P(X = -1) + P(X = 1)$
$= 0.1 + 0.4 = 0.5$.

Ví dụ 13

Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = X^2$ với X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{khi } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$



$Y = X^2$, tìm pp xs cho Y.

$Y \in [0, 1)$

gọi $G(y) = P(Y \leq y)$ là hàm phân phối xs của Y.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \longrightarrow \text{dùng hàm mật độ của } X$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\right] = \sqrt{y}.$$

Vậy $G(y) = \sqrt{y}$, $\forall\, y \in [0, 1)$.

$\Rightarrow$ Hàm mđxs của y:

$$g(y) = G'(y) = (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 \leq y < 1.$$

Ví dụ 7

Xét biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị thuộc $S = \{1, 2, 3, \dots\}$. Giả sử phân phối xác suất của X cho bởi

$$p_X(k) = \frac{1}{2^k},\ k = 1, 2, 3, \dots$$

(a) *Chứng tỏ rằng $p_X(\cdot)$ thỏa các điều kiện của một hàm khối xác suất và tìm hàm phân phối xác suất của X.*

(b) *Tính* $\mathbb{P}(2 < X \le 5)$.

(c) *Tính* $\mathbb{P}(X > 4)$.

a) Xác định: $F(k) = P(X \le k)$, $\forall k \in \{1, 2, ..\}$

· $k < 1$: $F(k) = 0$.

· $1 \le k < 2$: $F(k) = \frac{1}{2}$

· $2 \le k < 3$: $F(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

⋮

Tổng quát: với $1 < k \le x < k+1$

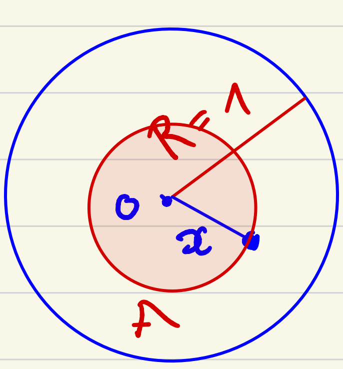
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{2^\ell} \dots$$

Ví dụ 11

Một người bắn tên vào một tấm bia hình tròn tâm O, bán kính $R = 1$. Giả sử người này luôn bắn trúng bia. Gọi X là khoảng cách từ điểm tên trúng bia đến tâm O. Hãy xác định hàm phân phối xác suất của X.

$X \in [0, 1]$

Xđ hàm ppxs $F(x) = P(X \le x)$.



· Nếu $x < 0$: $F(x) = 0$

· Nếu $x \ge 1$: $F(x) = 1$

· Nếu $x \in [0, 1)$:

CT tính xs hình học

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

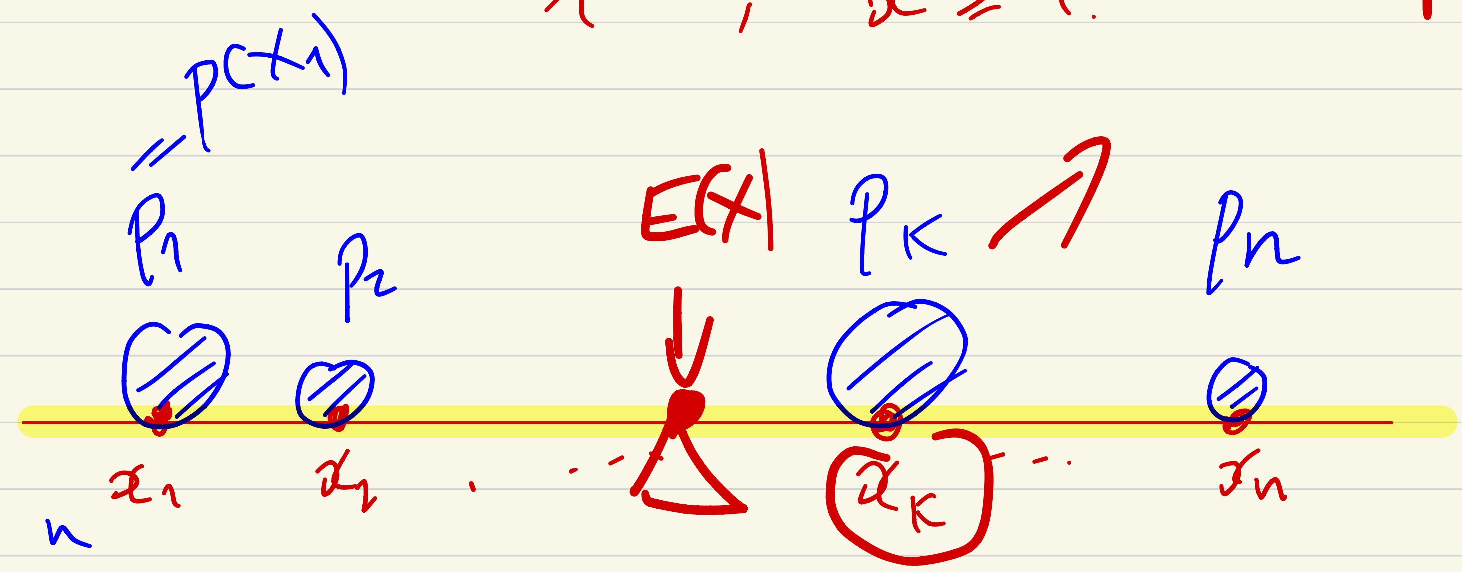
$$F(x) = P(\underbrace{X \le x}_{A}) = \frac{\text{Diện tích của } A}{\text{Diện tích của } \Omega} = \frac{\pi . x^2}{\pi . 1^2} = x^2.$$

$A = \{X \le x\}$

Hàm pp xs của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$\frac{5}{140} \times 10$



$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

rời rạc

$\int x f(x)\,dx = E(X)$

Ví dụ 15

Một hộp chứa 10 viên bi, trong đó có 3 viên bi nặng 10g, 5 viên nặng 50g, 2 viên nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên ra 1 viên bi và gọi X là khối lượng của viên bi đó. Tính $\mathbb{E}(X)$.

X = K/lượng của viên bi đc chọn (g).

X	10	20	50
P_x	0,3	0,2	0,5

$E(X) = 32.$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 32^2.$

$E(X^2) = \sum x^2 p(x) = 10^2 \times 0{,}3 + 20^2 \times 0{,}2 + 50^2 \times 0{,}5$

$= 1360 - 32^2 = 336.$

Ví dụ 16

Có một trò chơi với luật chơi như sau: tung đồng thời 3 con xúc sắc. Nếu xuất hiện cả 3 mặt sáu điểm thì thắng được 10.000 đ, nếu xuất hiện 2 mặt sáu thì được 5000 đ, 1 mặt sáu thì được 1000 đ. Nếu không xuất hiện mặt sáu điểm nào thì không nhận được gì cả. Một người chơi sẽ đóng d đồng cho một lần chơi. Hỏi d phải bằng bao nhiêu để trò chơi công bằng?

Gọi X = số tiền người chơi thắng (hoặc thua) khi tham gia trò chơi.

$X \in \{-d, 1000-d, 5000-d, 10000-d\}$

Lập bảng PPXS cho X:

X	$-d$	$1000-d$	$5000-d$	$10000-d$
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$P(X=-d) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$ | $P(X=10000) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

$P(X=1000) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times 3 = \frac{75}{216}$

$P(X=5000) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} \times 3 = \frac{15}{216}$

Số tiền trung bình người chơi thắng đc:

$E(X) = (-d) \times \frac{125}{216} + \frac{(1000-d) \times 75}{216} + (5000-d) \times \frac{15}{216}$

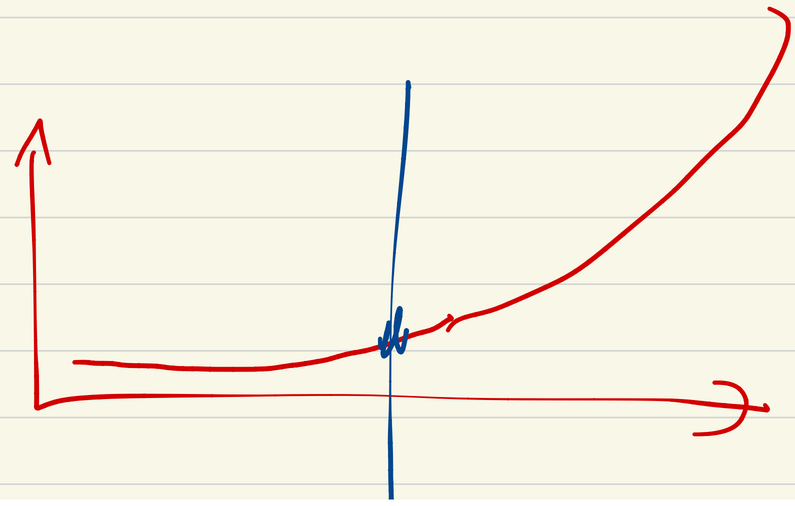
$(1000-d) \times \frac{1}{216} = \frac{160000 - 216d}{216}$.

Để trò chơi công bằng: $E(X) = 0$.

$\Rightarrow 160000 - 216d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 740,74}$.

prevalance rate

$N_0 e^{R_0 t}$



Ví dụ 17 (Xét nghiệm nhóm)

Để xét nghiệm một loại bệnh nào đó (chẳng hạn Covid-19), người ta thực hiện xét nghiệm máu của một nhóm 100 người. Tuy nhiên, thay vì xét nghiệm từng người một, người ta quyết định xét nghiệm gộp cho từng nhóm, mỗi nhóm 10 người. Đối với mỗi nhóm, người ta trộn mẫu máu của 10 người lại và thực hiện xét nghiệm chung một lần. Giả sử rằng mẫu gộp sẽ cho kết quả dương tính nếu như có ít nhất một người trong nhóm đó có bệnh. Nếu như cả 10 người trong nhóm đều không mắc bệnh, ta chỉ cần thực hiện 1 xét nghiệm là đủ. Tuy nhiên, nếu như mẫu gộp cho kết quả dương tính, ta cần thực hiện thêm 10 xét nghiệm cho từng người để xác định cụ thể ai mắc bệnh. Giả sử rằng xác suất một người mắc bệnh là 0.1, và độc lập với những người khác.

a) *Xác suất để ta chỉ cần thực hiện chỉ 1 xét nghiệm cho một nhóm 10 người bằng bao nhiêu?* 0.9^{10}

b) *Xác suất để phải thực hiện 11 xét nghiệm cho một nhóm 10 người bằng bao nhiêu?*

c) *Tính số xét nghiệm trung bình cần thực hiện cho một nhóm 10 người.*

d) *Để tối ưu hóa số lượng xét nghiệm cần thực hiện, thay vì chia 100 người thành các nhóm 10 người, hãy thử tính số xét nghiệm trung bình cần thực hiện nếu như ta chia thành các nhóm 2, 4, 5, 20, 25, 50? Kích cỡ nhóm nào cho số lượng xét nghiệm trung bình nhỏ nhất?*

B = "k' bị bệnh", $P(B) = 0.9^{10}$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.9^{10}$

Gọi: N = Số XN cần thực hiện.

N	1	11
P_N	$0,9^{10}$	$1 - 0.9^{10}$

$E[N] = 1 \times 0.9^{10} + 11 \times (1 - 0.9^{10}) = 7,5$.

Nghĩa là, với 1 nhóm 10 người, trung bình tốn 7,5 XN.

=> 100 người, trung bình cần $10E(N) = 75$ XN.

-> Gs chia 1 nhóm 5 người:

N	1	6
P_N	$0,9^5$	$1-0,9^5$

$E(N) = 1 \times 0,9^5 + 6 \times (1-0,9^5)$

$= 3,05$.

=> Trung bình 100 người cần:

$20E(N) = 20 \times 3,05 = 61$.

Ví dụ 18

Xét biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} C(1-x^2) & 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{nơi khác.} \end{cases} \quad C = \frac{3}{2}.$$

(a) *Tìm C.*

(b) *Tính $\mathbb{E}(X)$.*

$E(X) = \frac{3}{8}$.

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \left(\frac{3}{8}\right)^2$.

$$E(\underbrace{X^2}_{g(x)}) = E[g(X)] = \int g(x) f(x)\, dx$$

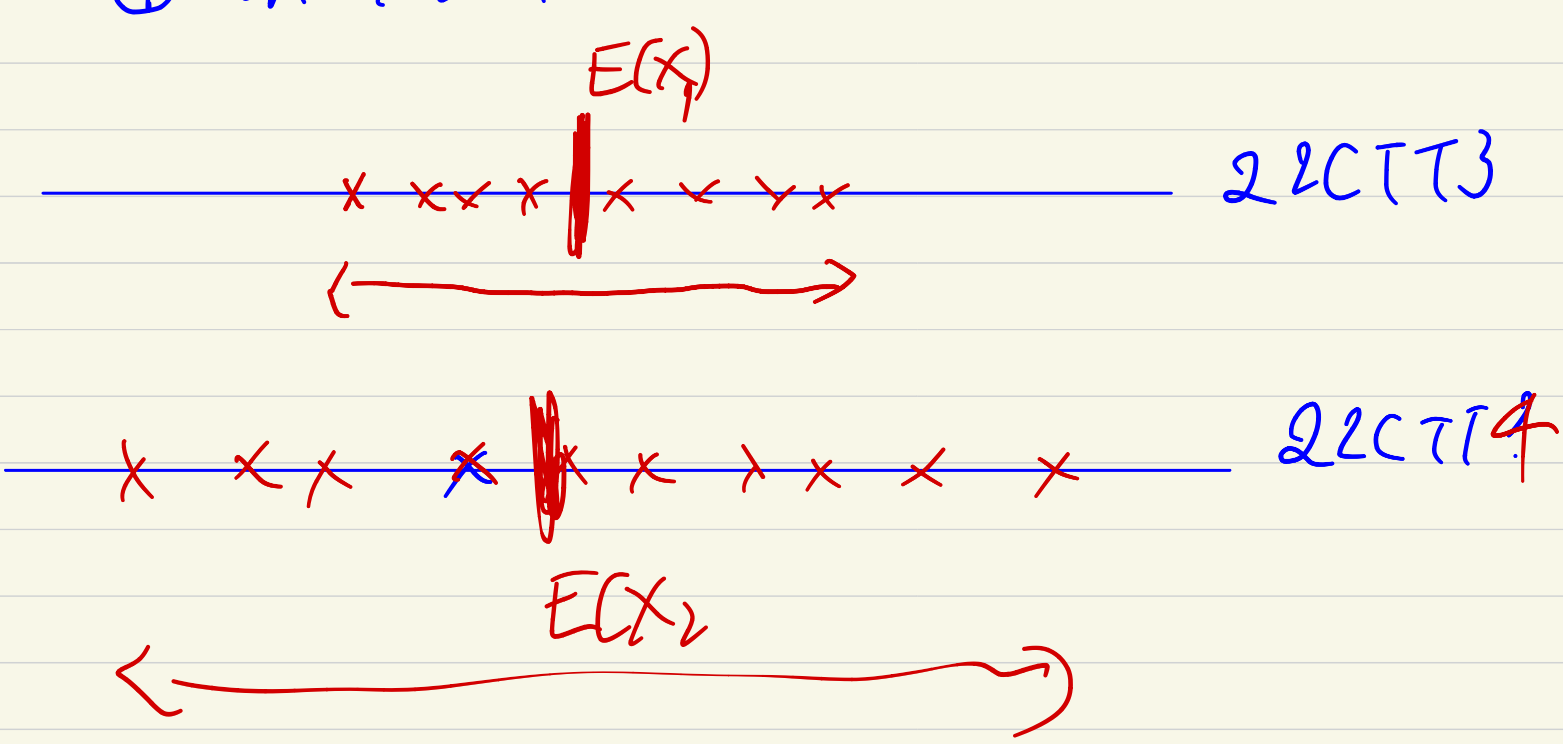
$$= \int_0^1 x^2 \times \frac{3}{2}(1 - x^2)\, dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right] = \ldots$$

$$E[X] = \int x . f(x)\, dx \quad \Big| \quad E[g(x)] = \int g(x) . f(x)\, dx.$$

Phương sai:

X = Đ² thi XS TK.



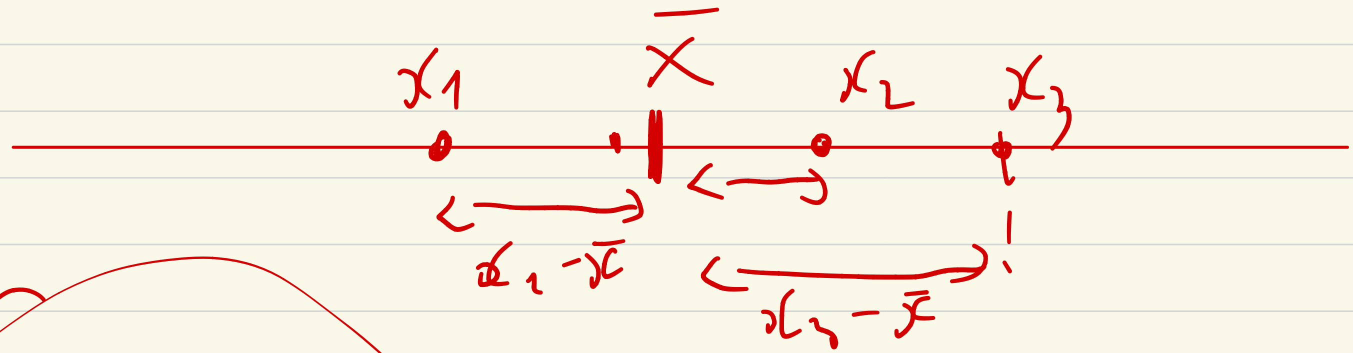
Định nghĩa 4.3

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ *thì phương sai (Variance) của X, ký hiệu* $\mathbb{V}ar(X)$*, được định nghĩa như sau*

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]. \tag{8}$$

trung bình của bình phương độ lệch so g/trị trung bình gs $\quad \overset{1/n}{x_1} \quad \overset{1/n}{x_2} \quad \dots \quad \overset{1/n}{x_n}$

$$\overline{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \sum \left(\frac{1}{n}\right) x_i$$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$$

$$\sum (x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{x}$$

$$= n\overline{x} - n\overline{x} = 0.$$

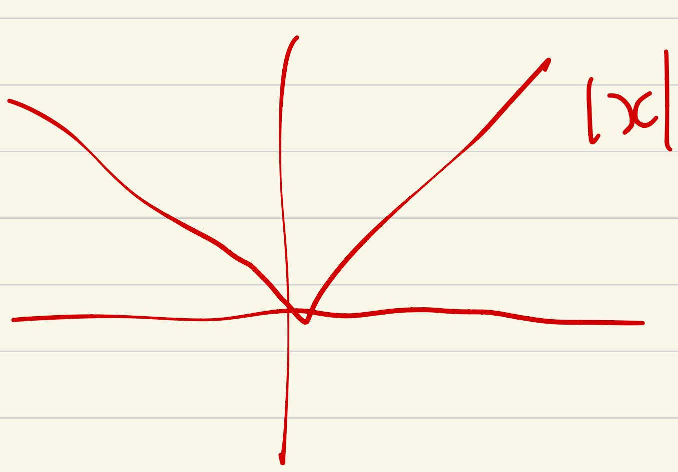
hằng số

$$E\left[X - E(X)\right] = E(X) - E\left[E(X)\right]$$

$$= E(X) - E(X) = 0.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| \qquad \Big| \qquad E\left[|X - E(X)|\right]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \qquad \Big| \qquad E\left[(X - E(X))^2\right] = Var(X)$$



$$E\left[(X - E(X))^2\right] = Var(X).$$

$D(X)$ → Dispersion

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[(X - E(X))^2] \\
&= E[X^2 - 2X.E(X) + E(X)^2] \\
&= E(X^2) - 2E[X\,E(X)] + E[E(X)^2] \\
&= E(X^2) - 2E(X).E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

Tính p/sai:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$p_i = P(X = x_i)$

$$Var(X) = E[(X - \underbrace{E(X)}_{\mu})^2]$$

$$= E[\underbrace{(X-\mu)^2}] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

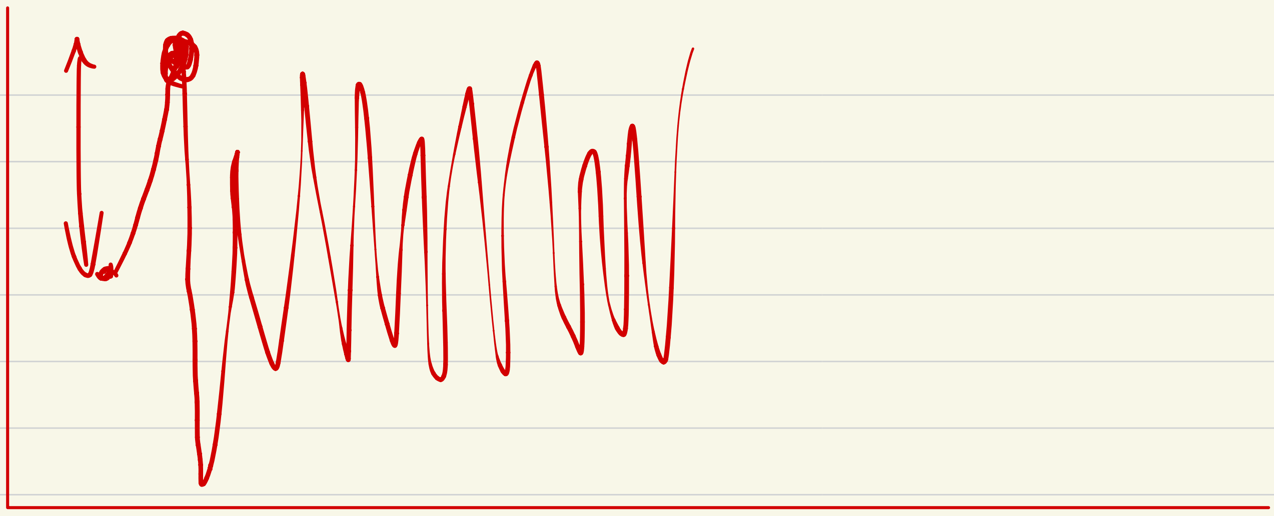
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

$$\rightarrow Var(X) = \sum x_i^2 p_i - \mu^2.$$

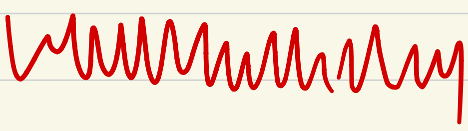
Nếu X liên tục, có hàm mđxs f.

$$Var(X) = \underbrace{E[X^2]}_{\int x^2 f(x)\,dx} - E(X)^2.$$

$$\int x^2 f(x)\,dx - \left(\int x f(x)\,dx\right)^2$$



Cổ phiếu p/sai lớn



$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

$$Var(cX) = E[(cX - E(cX))^2]$$
$$= c^2 \underbrace{E[(X - E(X))^2]}$$
$$= c^2 \times Var(X)$$

Nếu X, Y k° độc lập

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\underbrace{Cov(X,Y)}_{\text{Covariance}}$$

Ví dụ 2

Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất

(a) *Có đúng 7 vi mạch không đạt chất lượng.*

(b) *Có ít nhất 1 vi mạch không đạt chất lượng.*

K² tra 1 vi mạch

- Đạt 0,95
- K° đạt 0,05 = p

K^2 tra $n = 15$ vi mạch.

X = Số vi mạch k' đạt trong 15 vi mạch đã k² tra.

$X \sim B(15, 0.05)$

$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$k = 0, \dots, n.$

a) $P(X=7) = C_{15}^{7}\, 0.05^{7} \times 0.95^{8} = \dots$

b) $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=15)$

$= 1 - P(X=0) = 1 - 0.95^{15} = \dots$

Ví dụ 3

Giả sử màu mắt đen của một người được quy định bởi bởi một cặp gen A và a, trong đó A là gen trội và a là gen lặn. Kiểu hình AA gọi là trội thuần chủng, aa là lặn thuần chủng, và Aa là kiểu hình lai. Người có kiểu hình AA hay Aa sẽ có màu mắt giống nhau (màu đen). Những đứa con sẽ nhận mỗi một gen từ bố mẹ. Giả sử một cặp bố mẹ có màu mắt đen với kiểu hình lai Aa có 4 con, thì xác suất 3 trong 4 đứa trẻ có màu mắt giống bố mẹ là bao nhiêu?

Quan sát 1 gđ có 4 con.

1 trẻ < đen (giống bố mẹ) $p = 3/4$.
k' đen

Aa × Aa

A, a   A, a

AA, Aa, Aa, aa

3 : 1

X = số trẻ có màu mắt đen trong 4 trẻ.

$X \sim B(4, 3/4)$

$P(X = 3) = C_4^3\, 0.75^3 \times 0.25^1$

$= 0.42.$

Ví dụ 4

Một học sinh làm một bài thi trắc nghiệm có 60 câu hỏi, mỗi câu có 5 đáp án và chỉ có 1 đáp án đúng. Biết rằng học sinh không học bài và đánh ngẫu nhiên toàn bộ bài thi. Tính xác suất:

(a) Học sinh làm đúng ít nhất 1 câu.

(b) Học sinh làm đúng 30 câu.

(b) Số câu trả lời đúng trung bình mà học sinh làm được là bao nhiêu? Tính độ lệch chuẩn của số câu trả lời đúng.

Khi hs trả lời (ngẫu nhiên) 1 câu < Đ 0.2 / Sai 0.8

Hs trả lời nn 60 câu.

X = số câu hs trả lời đúng / 60 câu.

$X \sim B(60, 0.2)$

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.8^{60} \approx 1.$

b) $P(X=30) = C_{60}^{30}\, 0.2^{30} \times 0.8^{30} = 1{,}572 \times 10^{-7}.$

c) Số câu làm đúng trung bình:

$E(X) = np = 60 \times 0{,}2 = 12.$

$Var(X) = np(1-p) = 60 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 9{,}6$

$\Rightarrow$ Độ lệch chuẩn $= \sigma = \sqrt{9{,}6} \approx 3{,}1.$

$12 \pm 3{,}1$

$\mu \pm \sigma$

$2{,}5 \pm 1{,}5$

$X \sim B(10, 0.25)$

$E(X) = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5.$

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{10 \times 0{,}25 \times 0{,}75} = 1{,}4.$