MSSV: 22120157
Họ Tên: Nguyễn Nam Khánh
Lớp: 22-2 ; Môn Toán UDTK

Homework 6: Markov chains

Bài 1:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, \pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = P^1 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = P^2 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = P^3 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,35 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = P^4 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,375 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5 = P^5 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6125 \\ 0,3875 \end{pmatrix}$$

Bài 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}, \pi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = P^1 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = P^2 \pi_0 = P\pi_1 = \begin{pmatrix} 0,23 \\ 0,52 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = P^3 \pi_0 = P\pi_2 = \begin{pmatrix} 0,273 \\ 0,396 \\ 0,331 \end{pmatrix}$$

Bài 3:

$$\begin{array}{c} P(A,B,C) \\ P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}, \alpha = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(X_2 = 2, X_1 = 2 \mid X_0 = 1)$$

$$= \cancel{\frac{P(X_2 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} = \frac{P(X_2 = 2) \cdot P(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) \cdot P(X_0 = 1 \mid X_1 = 2, X_2 = 2)}{P(X_0 = 1)}}$$

$$\frac{P(X_2 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} = \frac{P(X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 2 \mid X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)}$$

$$= P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 2 \mid X_1 = 2, X_0 = 1)$$

$$= P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 2 \mid X_1 = 2)$$

$$= P_{12} \cdot P_{22} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$$

$P(A \mid B)$

$= \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

$P(AB) = P(A)\,P(B)$

$P(AB)$

b) $P(X_{10}=2 \mid X_7=1, X_6=3)$

$= P(X_{10}=2 \mid X_7=1) = P_{12}^{(3)}$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}29 & 0{,}296 \\ 0{,}464 & 0{,}23 & 0{,}301 \\ 0{,}474 & 0{,}244 & 0{,}29 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P(X_{10}=2 \mid X_7=1, X_6=3) = P_{12}^{(3)} = 0{,}254$

c) $P(X_4=1, X_3=1) = P_2 = 0{,}3$

Bài 4: a) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

Đặt $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ là phân phối dừng của P

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{9}{17} \\ \pi_2 = \frac{8}{17} \end{cases}$$

Vậy $\pi = \left(\frac{9}{17}, \frac{8}{17}\right)$

b) $P = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}26 \\ 0{,}19 & 0{,}74 \end{pmatrix}$

Đặt $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ là phân phối dừng của P

$$\begin{cases} 0{,}81\pi_1 + 0{,}26\pi_2 = \pi_1 \\ 0{,}19\pi_1 + 0{,}74\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \pi_1 = \frac{26}{45} \\ \pi_2 = \frac{19}{45} \end{cases}$$

Vậy $\pi = \left(\frac{26}{45}, \frac{19}{45}\right)$

c) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

Đặt $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ là pp dừng của P

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{19} \\ \pi_2 = \frac{4}{19} \\ \pi_3 = \frac{12}{19} \end{cases}$$

Vậy $\pi = \left(\frac{3}{19}, \frac{4}{19}, \frac{12}{19}\right)$