Chương 5: HÀM SINH

1. Định nghĩa
2. Hệ số hàm sinh
3. Phân hoạch
4. Hàm sinh mũ
5. Phương pháp tổng
6. Giải hệ thức đệ quy bằng hàm sinh

5.1 Định nghĩa

Hàm sinh đối với dãy $a_0, a_1, ..., a_k, ...$ các số thực là chuỗi vô hạn

$$G(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Ví dụ:

1. Hàm sinh của dãy $a_k = 3$ là $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 3x^k$
2. Hàm sinh của dãy $a_k = k + 1$ là $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$
3. Hàm sinh của dãy $a_k = 2^k$ là $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$
4. Hàm sinh của dãy $1, 1, 1, 1, 1, 1$ là $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

Lưu ý: vì $\frac{(x^6-1)}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ nên hàm sinh của dãy trên còn là $\frac{(x^6-1)}{x-1}$

Ví dụ: Cho m là số nguyên dương. Số tập con k phần tử của tập m phần tử là C_m^k. Hàm sinh cho dãy $a_0, a_1, .., a_m$ là

$$G(x) = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^k x^2 + ... + C_m^m x^m = (1+x)^m$$

Ví dụ: Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ với e_i là cá số nguyên không âm và $2 \leq e_1 \leq 5, 3 \leq e_2 \leq 6, 4 \leq e_3 \leq 7$

Giải: Số nghiệm nguyên không âm thỏa điều kiện là hệ số của x^{17} trong khai triển

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$

Dễ thấy rằng hệ số của x^{17} trong khai triển là 3 nên số nghiệm của pt trên là 3.

Ví dụ: Có bao nhiêu cách chia 8 cái bánh giống nhau cho 3 đứa trẻ khác nhau nếu mỗi đứa nhận ít nhất 2 cái và không quá 4 cái

Giải: Số cách chia là hệ số của x^8 trong khai triển

$$(x^2 + x^3 + x^4)^3$$

Dễ thấy rằng hệ số của x^8 trong khai triển là 6 nên số cách chia thỏa điều kiện là 6.

Nếu gọi a_k là số cách chia k cái bánh cho 3 đứa trẻ khác nhau thì số cách chia là hệ số của x^k trong khai triển trên, trong trường hợp này, hàm sinh của a_k là $(x^2 + x^3 + x^4)^3$

Ví dụ: Dùng hàm sinh để xác định số cách nhét các đồng xu 1Đ, 2Đ, 5Đ vào một máy bán hàng để trả một món hàng trị giá r Đ trong 2 trường hợp: không quan tâm đến trình tự nhét tiền và quan tâm đến trình tự đó.

TH không quan tâm đến trình tự nhét tiền: Số tiền dùng 1Đ là số mũ của x trong tổng $1 + x + x^2 + x^3 + ...$; số tiền dùng 2Đ là số mũ của x trong tổng $1 + x^2 + x^4 + ...$; Số tiền dùng 5Đ là 1/5 số mũ của x trong tổng $1 + x + x^5 + x^{10} + x^{15} + ...$ nên hàm sinh trong trường hợp này là

$$(1 + x + x^2 + x^3 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x + x^5 + x^{10} + x^{15} + ...)$$

Ví dụ để trả món hàng 7Đ thì có 6 cách

TH quan tâm đến trình tự nhét tiền: nếu trả món hàng trị giá 7Đ thì số cách là hệ số của x^7 trong khai triển: $(x + x^2 + x^5)^2 + (x + x^2 + x^5)^3 + (x + x^2 + x^5)^4 + (x + x^2 + x^5)^5 + (x + x^2 + x^5)^6 + (x + x^2 + x^5)^7$

Từ đó, ta có hàm sinh thỏa yêu cầu bài toán là:

$$1 + (x + x^2 + x^5) + (x + x^2 + x^5)^2 + (x + x^2 + x^5)^3 + ... = \frac{1}{1 - (x + x^2 + x^5)}$$

Ví dụ: Tìm hàm sinh của dãy a_k là cách chọn ra k viên bi từ 5 bi xanh, 5 bi đỏ, 4 bi vàng và 3 bi trắng

Giải: số cách chọn k viên bi từ các bi trên là số nghiệm của pt:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

với điều kiện $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq x_4 \leq 3$
Số nghiệm của phương trình trên là hệ số của x^k trong khai triển:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2(1 + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)$$

và đó cũng là hàm sinh cần tìm.

Ví dụ: Tìm hàm sinh.....???????????????

5.2 Hệ số hàm sinh

Các hàm sinh thường gặp:

1. $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + ... + x^n$
2. $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 ... + x^n$
3. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 ... + x^n + ...$
4. $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + ... + C_{n+k-1}^k x^k + ...$
5. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...,\ g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...$. Khi đó, $h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ với $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + ...a_i b_0$

Lưu ý cách tính ở 4): $\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 ... + x^n + ...)^n$. Hệ số của x^r trong khai triển là số nghiệm của pt

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = r, x_i \geq 0$$

Toán rời rạc, số nghiệm của pt trên là C_{n+r-1}^r

Ví dụ: Dùng hàm sinh để tìm số cách chọn r đối tượng trong n loại khác nhau nếu phải chọn được ít nhất một đối tượng cho mỗi loại.

Giải: Số cách chọn thỏa ycbt là số nghiệm nguyên của pt:
$x_1 + x_2 + ...x_n = r$ với $1 \leq x_i$
nó cũng là hệ số của x^r trong khai triển

$$(x + x^2 + ...)^n$$

Hàm sinh của dãy a_r, trong đó a_r là số cách chọn r đối tượng trong n loại khác nhau nếu ít nhất một đối tượng cho mỗi loại là
$G(x) = (x + x^2 + ...)^n = x^n(1 + x + x^2 + ...)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n} =$
$x^n(1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + ... + C_{n+k-1}^k x^k + ...)$
Từ đó $a_r = C_{r-1}^{r-n}$. Vậy có C_{r-1}^{r-n} cách chọn thỏa ycbt

Ví dụ: Tìm hệ số của x^{16} trong khai triển $(x^2 + x^3 + ...)^5$. Tổng quát, tìm hệ số x^r trong khai triển trên.

Giải: $(x^2 + x^3 + ...)^5 = x^{10}.(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^5 = x^{10}.\frac{1}{(1-x)^5}$

Để tìm hệ số của x^{16} ta tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(1+x+x^2+x^3+...)^5$. Theo công thức trên, hệ số của x^r là C^r_{4+r}. Hệ số của x^6 trong khai triển trên là $C^6_{10}=210$. Hệ số của x^r trong khai triển trên là hệ số của x^{r-10} trong kt $(1+x+x^2+x^3+...)^5$ là C^{r-10}_{r-6}.

Ví dụ: Dùng hàm sinh để tìm số cách lấy 15Đ từ 20 người khác nhau sau cho 19 người đầu đưa nhiều nhất 1Đ, người thứ 20 đưa 0Đ hoặc 1Đ hoặc 5Đ.

Giải: Gọi a_r là số cách lấy rĐ từ 20 người khác nhau sau cho 19 người đầu đưa nhiều nhất 1Đ, người thứ 20 đưa 0Đ hoặc 1Đ hoặc 5Đ. Số cách lấy rĐ thỏa ycbt là số nghiệm nguyên không âm của pt

$$x_1+x_2+...+x_{20}=r,\ 0\le x_i\le 1, i=1...19, x_{20}=0,1,5$$

cũng là hệ số a_r của x^r trong khai triển

$$G(x)=(1+x)^{19}(1+x+x^5)=(a_0+x+a_2x^2+...+a_{19}x^{19})(b_0+b_1x+b_5x^5)$$

trong đó: $a_0=1, a_1=C^1_{19}, a_2=C^2_{19}, ..., a_{19}=1, b_0=b_1=b_5=1$
đó là hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\ge 0}$.

Như vậy, số cách lấy thỏa ycbt là hệ số a_{15} của x^{15}.
$a_{15} = a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{10}b_5 = C_{19}^{15}.1 + C_{19}^{14}.1 + C_{19}^{10}.1 = 107882$

Ví dụ: Có bao nhiêu cách chia 25 quả bóng và 7 cái hộp khác nhau sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả và các hộp còn lại tùy ý

Giải: Gọi a_r là số cách chia r quả bóng và 7 cái hộp khác nhau sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả và các hộp còn lại tùy ý. Hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là

$$(1 + x + x^2 + ... + x^{10})(1 + x + x^2 + ...)^6 = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.\frac{1}{(1 - x)^6} = \frac{1 - x^{11}}{(1 - x)^7}$$

$= (1 - x^{11})(1 + C_7^1 x + C_8^2 x^2 + ...C_{6+k}^k x^k + ...)$
Số cách theo ycbt là hệ số a_{25} của x^{25}

$$a_{25} = a_0 b_{25} + a_{11} b_{14} = 1.C_{31}^{25} + (-1).C_{20}^{14} = 3906$$

Ví dụ: Có bao nhiêu cách chọn 25 thú bông từ 7 loại thú sao cho mỗi loại có ít nhất 2 và nhiều nhất 6.

Ví dụ: Dùng hàm sinh để chứng tỏ rằng $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$

Giải: C_{2n}^n là hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^{2n}$. Mặt khác,
$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \left(C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n\right)^2$
Hệ số của x^n trong biểu thức này là (lưu ý: $C_n^k = C_n^{n-k}$)

$$C_n^0.C_n^n + C_n^1.C_n^{n-1} + ... + C_n^n.C_n^0 = C_n^0.C_n^0 + C_n^1.C_n^1 + ... + C_n^n.C_n^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$$

5.3 Phân hoạch số nguyên dương

Định nghĩa Cho r là số nguyên dương. Dãy các số nguyên dương $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq r$ sao cho $a_1 + a_2 + ... + a_k = r$ gọi là một sự phân hoạch số nguyên dương r.

Ví dụ 5 có các sự phân hoạch sau:
$\{1,1,1,1,1\}$, $\{1,1,1,2\}$, $\{1,1,3\}$, $\{1,2,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{5\}$
Ta sẽ xây dựng hàm sinh cho dãy a_r, là số các phân hoạch của r. Gọi e_k là số lần xuất hiện của k trong một phân hoạch. Ta có
$1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + ... + ke_k + ... + re_r = r$
Hàm sinh của dãy a_r là
$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + ...)(1 + x^2 + x^4 + x^6 ...)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + ...)...$
$(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + ...)...(1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + ...)$

$$= \frac{1}{1-x} . \frac{1}{1-x^2} . \frac{1}{1-x^3} ... \frac{1}{1-x^k} ... \frac{1}{1-x^r} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^r)}$$

Ví dụ: Tìm hàm sinh của dãy a_r là số cách biểu diễn r là thành các số nguyên dương phân biệt

Giải: Ví dụ: $5 = 0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3$

$e_1 + e_2 + ...e_r = r$

e_1 bằng 0 hoặc 1; nhân tử của e_1 là $(1 + x)$

e_2 bằng 0 hoặc 2; nhân tử của e_2 là $(1 + x^2)$

e_3 bằng 0 hoặc 3; nhân tử của e_3 là $(1 + x^3)$

.....

Hàm sinh của dãy a_r là

$$G(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)....(1 + x^k).....$$

Ví dụ: Tìm hàm sinh của dãy a_r là số cách chọn rĐ từ các đồng 1Đ, 2Đ, 5Đ

Đáp số: Hàm sinh

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x + x^5 + x^{10} + x^{15} + ...)$$

Ví dụ:Dùng hàm sinh để chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều được biểu diễn duy nhất dạng tổng các lũy thừa khác nhau của 2

5.4 Hàm sinh mũ

Ví dụ: Có bao nhiêu chuỗi ký tự tạo thành từ $\{a, b, c\}$ sao cho a xuất hiện ít nhất 2 lần.

Giải: bằng toán rời rạc, các chuỗi ký tự thỏa ycbt được sắp xếp lại từ các tập hợp
$\{a, a, a, a\}$, $\{a, a, a, b\}$, $\{a, a, a, c\}$, $\{a, a, b, c\}$, $\{a, a, b, b\}$, $\{a, a, c, c\}$
Từ đó ta có số chuỗi ký tự thỏa ycbt là

$$\frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!2!} = 33$$

Gọi e_1, e_2, e_3 lần lượt là số lượng chữ a,b,c xuất hiện trong chuỗi ký tự. Ta có

$$e_1 + e_2 + e_3 = 4, \quad 2 \leq e_1, 0 \leq e_2, e_3 \quad (*)$$

Mỗi nghiệm của pt thì có $\frac{4!}{e_1!e_2!e_3!}$ chuỗi ký tự thỏa ycbt được tạo thành.

Tất cả các hệ số của hạng tử dạng $\frac{(e_1+e_2+e_3)}{e_1!e_2!e_3!}x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}$ thỏa (*) là số chuỗi ký tự cần tìm. Nó chính là hệ số của $\frac{x^4}{4!}$ được tính thông qua các hạng tử dạng $\frac{x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}}{e_1!e_2!e_3!}$ thỏa (*).

Định nghĩa: Hàm sinh mũ của dãy a_r, số cách sắp xếp r vật thỏa một điều kiện cho trước, là hàm sinh có dạng

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + ... + a_r \frac{x^r}{r!} + ...$$

Để xây dựng hàm sinh mũ, ta xây dựng mỗi đa thức nhân tử cho mỗi loại vật. Số mũ của x trong mỗi nhân tử là số lượng vật cùng loại được chọn. Lưu ý, mỗi số mũ x^r được chia bởi $r!$.
Trong ví dụ trên, hàm sinh của số cách chọn chuỗi r ký tự sao cho chữ a xuất hiện ít nhất 2 lần, các ký tự còn lại tùy ý là

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right)^2 \quad (*)$$

Hệ số của x^r trong (*) là tổng của các hệ số của tích $\frac{x^{e_1}}{e_1!}.\frac{x^{e_2}}{e_2!}.\frac{x^{e_3}}{e_3!}$ với $e_1 + e_2 + e_3 = r, \quad 2 \leq e_1, 0 \leq e_2, e_3$

Số hạng chứa x^r trong khai triển (*) là

$$\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=r} \frac{r!}{e_1!e_2!e_3!}\right)\frac{x^r}{r!}, \quad 2 \le e_1, \quad 0 \le e_2, e_3$$

Như vậy, có $\left(\sum_{e_1+e_2+e_3=r} \frac{r!}{e_1!e_2!e_3!}\right)$ chuỗi có r ký tự thỏa chữ a xuất hiện ít nhất 2 lần; b,c tùy ý.
Với $r = 4$ thì

$$a_4 = \frac{4!}{2!0!2!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!0!} + \frac{4!}{3!1!0!} + \frac{4!}{3!0!1!} + \frac{4!}{4!0!0!} = 33$$

Ví dụ: Tìm hàm sinh mũ của dãy a_r, chỉnh hợp chập r của n phần tử

Giải: $a_r = A_n^k$. Hàm sinh cần tìm là

$$G(x) = 1 + x + A_n^2.\frac{x^2}{2!} + A_n^3.\frac{x^3}{3!} + \ldots + n!.\frac{x^n}{n!} = (1+x)^n$$

Ví dụ: Tìm hàm sinh mũ của dãy a_r, số cách sắp xếp r vật được chọn từ 4 loại vật khác nhau sao cho mỗi loại có ít nhất là 2 và không quá 5.

Giải: Gọi e_1, e_2, e_3, e_4 là số vật loại 1, 2, 3, 4 được chọn.

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r, \quad 2 \leq e_i \leq 5$$

đa thức nhân tử cho e_i là $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$
Hàm sinh cần tìm

$$(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!})^4$$

Ví dụ: Tìm hàm sinh mũ của dãy a_r, số cách sắp xếp r người vào 3 phòng khác nhau sao cho:

1. mỗi phòng chứa ít nhất 1 người
2. số người trong mỗi phòng là số chẵn

Đáp số:

1. $(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}^3 + \dots)$
2. $(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots)^3$

Công thức hàm mũ cần nhớ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots \quad (1)$$

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots + \frac{n^rx^r}{r!} + \dots \quad (2)$$

Một số lưu ý:

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots = e^x - x - 1$$

$$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ví dụ: Có bao nhiều cách sắp xếp r vật được chọn tùy ý từ n loại vật khác nhau.

*Giải:*Gọi a_r là số cách sắp xếp r vật được chọn tùy ý từ n loại vật khác nhau.
Hàm sinh cho dãy a_r thỏa ycbt là

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^r}{r!} + ...)^n = e^{nx}$$

Hệ số a_r trong khai triển là $a_r = \frac{n^r}{r!}.r! = n^r$
Vậy có n^r cách thỏa ycbt

Ví dụ: Có bao nhiều cách sắp xếp 25 người vào 3 phòng sao cho mỗi phòng chứa ít nhất một người

Giải: Hàm sinh mũ của dãy a_r, số cách sắp xếp r người vào 3 phòng sao cho mỗi phòng chứa ít nhất một người

$$(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^r}{r!} + ...)^3 = (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

Số cách sắp xếp thỏa ycbt là hệ số a_{25} trong hàm sinh mũ.

$$a_{25} = 3^{25} - (3.2^{25}) + 3$$

Ví dụ: Có bao nhiêu chuỗi số có độ dài r chỉ chứa $0, 1, 2, 3$ trong đó số chữ số 0 là chẵn, số chữ số 1 là lẻ (ĐS: 4^{r-1})

5.5 Phương pháp tổng

Giả sử: $A(x) = \sum a_n x^n, B(x) = \sum b_n x^n, C(x) = \sum c_n x^n$

1. Nếu $b_n = da_n$ thì $B(x) = dA(x)$ với d là hằng số
2. Nếu $c_n = a_n + b_n$ thì $C(x) = A(x) + B(x)$
3. Nếu $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ thì $C(x) = A(x)B(x)$
4. Nếu $b_n = a_{n-k}$ và $b_i = 0, i < k$ thì $B(x) = x^k A(x)$

Lưu ý: nếu $G(x) = a_0 + a - 1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_rx^r + ...$ thì

$$\frac{d}{dx}G(x) = a_1 + 2a_2x + 3a - 3x^2 + ... + ra_rx^{r-1} + ...$$

Đặt $G^*(x) = x(\frac{d}{dx}G(x)) = a_1x + 2a_2x^2 + 3a - 3x^3 + ... + ra_rx^r + ...$
Khi đó $a_r^* = ra_r$

Ví dụ: Xây dựng hàm sinh với $a_r = 2r^2$.

Giải:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^r + ...$$

$$x\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + rx^r + ...$$

$$x\left(\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + ... + r^2x^r + ...$$

$$\frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} = 2x + 8x^2 + 18x^3 + ... + 2r^2x^r + ...$$

Định lý: Nếu $h(x)$ là hàm sinh của dãy a_r, thì $h^*(x) = \frac{h(x)}{1-x}$ là hàm sinh có hệ số của x^r là $a_r^* = a_0 + a_1 + ... + a_r$. Cụ thể

$$h^*(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + ... + \sum_{i=0}^{r} a_i x^r + ...$$

Ví dụ: Dùng kết quả trên để tính $2.1^2 + 2.2^2 + 2.3^2 + ... + 2.n^2$

Giải: Ta có hàm sinh của $a_r = 2r^2$ là

$$h(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} = 2x + 8x^2 + 18x^3 + ... + 2r^2x^r + ...$$

$$h^*(x) = \frac{h(x)}{1-x} = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^4} = (2x+2x^2)(1+C_4^1x+C_5^2x^2+...+C_{3+k}^kx^k+...)$$

Tổng cần tính là hệ số a_n^* của x^n trong $h^*(x)$

$$a_n^* = 2.C_{n+2}^{n-1} + 2.C_{n+1}^{n-2} = 2.C_{n+2}^3 + 2.C_{n+1}^3$$

Ví dụ: Xây dựng hàm sinh $h(x)$ với $a_r = (r+1)r(r-1)$

Giải:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^r + ...$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + rx^{r-1} + ...$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + ... + r(r-1)x^{r-2} + ...$$

$$\frac{2x^3}{(1-x)^3} = 2x^3 + 6x^4 + ... + r(r-1)x^{r+1} + ...$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{2x^3}{(1-x)^3}\right) = \frac{6x^2}{(1-x)^4} = 2 + 12x + ... + (r+1)r(r-1)x^r + ...$$

là hàm sinh cầm tìm

Ví dụ:Dùng kết quả trên để tính $3.2.1 + 4.3.2 + ... + (n+1)n(n-1)$ (ĐS: $6C_{n+2}^4$)

Chúng ta có thể tìm nghiệm của hệ thức đệ qui bằng cách tìm một hàm sinh liên hợp.

Ví dụ: Giải hệ thức đệ qui $a_k = 3a_{k-1}$ với $k = 0, 1, 2, ...$ và điều kiện đầu $a_0 = 2$

Giải: Gọi $G(x)$ là hàm sinh của dãy a_r, nghĩa là $G(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1}x^k$$

$$G(x) - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1}x^k = 3x\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^{k-1} = 3x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 3xG(x)$$

$$(1-3x)G(x) = a_0 = 2 \Rightarrow G(x) = \frac{2}{1-3x} = 2\left(1 + (3x) + (3x)^2 + (3x)^3 + ..\right.$$

Từ đó, ta có $a_n = 2.3^n$

Ví dụ: Dùng hàm sinh giải hệ thức đệ qui $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-}$ với $k = 0, 1, 2, ...$ và điều kiện đầu $a_1 = 9$

Giải: Gọi $G(x)$ là hàm sinh của dãy a_k

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(8a_{k-1} + 10^{k-1}\right) x^k$$
$$= a_1 x + 8x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + 10x^2 \sum_{k=0}^{\infty} 10^k x^k = 9x + 8xG(x) + \tfrac{10x^2}{1-10x}$$

$$G(x) = \frac{9x}{1-8x} + \frac{10x^2}{(1-10x)(1-8x)} = \frac{9x}{1-8x} + 10x^2 \left(\frac{5}{1-10x} - \frac{4}{1-8x}\right)$$

Hệ số của a_n trong khai triển trên là

$$a_n = 9.8^{n-1} + 10(5.10^{n-2} - 4.8^{n-2}) = 4.8^{n-1} + 5.10^{n-1} = \frac{1}{2}(8^n + 10^n)$$

Ví dụ: Giải hệ thức đệ qui $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1), \quad n \geq 1$ và điều kiện đầu $a_0 = 1$

Giải: Gọi hàm sinh mũ của dãy a_n là $G(x) = \sum\limits_{n=0} a_n \frac{x^n}{n!}$

$$G(x) = \sum_{n=0} a_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=0} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 1 + \sum_{n=0} (n+1)\left(a_n - n + 1\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0} (a_n - n + 1) \frac{x^{n+1}}{n!} = 1 + x\left(\sum_{n=0} a_n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0} n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= 1 + x\left(G(x) - x \sum_{n=1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}\right) = 1 + x\left(G(x) - xe^x + e^x\right)$$

$$(1-x)\,G(x) = 1 + xe^x(1-x) \Rightarrow G(x) = \frac{1 + xe^x(1-x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} + xe^x$$

Hệ số a_n trong hàm sinh mũ trên là $n! + n$.

Vậy $a_n = n! + n$

Ví dụ: Giải hệ thức đệ qui $a_{n+1} = 2(n+1)a_n + (n+1)!, \quad n \geq 1$ và điều kiện đầu $a_0 = 0$

Giải:

$$G(x) = \sum_{n=0} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0} \left(2\left(n+1\right)a_n + (n+1)!\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= 2x \sum_{n=0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0} x^{n+1} = 2xG(x) + \frac{1}{1-x} - 1 = 2xG(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$G(x) = \frac{x}{\left(1-x\right)\left(1-2x\right)} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Hệ số của a_n trong hàm sinh trên là $a_n = -n! + n!2^n = n!(2^n - 1)$