MSSV: 22120157
Họ tên: Nguyễn Nam Khánh, Lớp 22-2 Toán UDTK

Homework 4

Bài tập phân tích ma trận, chéo hoá

Bài ~~1~~ 3: Tìm trị riêng, vector riêng và chéo hoá ma trận (nếu có) sau đó tìm lũy thừa 100 của ma trận đó

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

① Đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda . I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (-1-\lambda)(4-\lambda) - (-2).3 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda = 1 & (\text{bội } 1) \\ \lambda = 2 & (\text{bội } 1) \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ Trị riêng: $\lambda = 1$, $\lambda = 2$

② Tìm vector riêng:

Với $\lambda = 1$, giải $(A - I_2)x = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = t . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$E(1) = \{t(3,2) \mid t \in \mathbb{R}\} \rightarrow \dim(E(1)) = 1$

Với $\lambda = 2$, $(A - 2I_2)x = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow E(2) = \{t(1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} \rightarrow \dim E(2) = 1$

③ Chéo hoá

Vì $\begin{cases} \dim E(1) = 1 = \text{bội của } \lambda = 1 \\ \dim E(2) = 1 = \text{bội của } \lambda = 2 \end{cases}$ nên A chéo hoá được

Thứ
Ngày
No.

$A = P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{100} = P.D^{100}.P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

+ Tìm trị riêng

Ta có: $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 9 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 9.2 = \lambda^2 - 7\lambda - 8$

$= (\lambda - 8)(\lambda + 1)$

$P_B(\lambda) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 8 \text{ (bội 1)} \\ \lambda = -1 \text{ (bội 1)} \end{array} \right.$

Vậy trị riêng là $\lambda = 8$, $\lambda = -1$

+ Tìm vector riêng

Với $\lambda = 8$: $(B - 8I_2)x = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 + 3d_2} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3x_1 + 2x_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}a \\ x_2 = a \end{cases}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow E(8) = \{a(\frac{2}{3}, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \dim E(8) = 1$

$\rightarrow$ Vector riêng ứng với $\lambda = 8$ có dạng $x_1 = a\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Chọn $a = 3 \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Với $\lambda = -1 \Rightarrow (B + I_2)x = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 - \frac{3}{2}d_1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad 6x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{3}a \\ x_2 = a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E(-1) = \{a(\frac{-1}{3}, 1) \mid a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim E(-1) = 1$

$\Rightarrow$ vector riêng ứng với $\lambda = -1$ có dạng $x_2 = a(\frac{-1}{3}, 1)$

Chọn $a = 3 \Rightarrow x_2 = (-1, 3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

② Chéo hoá

Có: $\begin{cases} \dim E(8) = 1 = \text{bội của } \lambda = 8 \\ \dim E(-1) = 1 = \text{bội của } \lambda = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ B chéo hoá được

$B = P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix}$

③ Lũy thừa

$\Rightarrow B^{100} = P.D^{100}.P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8^{100} & 0 \\ 0 & (-1)^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

① Tìm trị riêng

Tạo $P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda).(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$+ (-1).(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 4) + (-\lambda + 2) + (-3\lambda + 10)$

$= \cancel{-\lambda^3}\ \lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - \lambda + 2 - 3\lambda + 10$

$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 6$

$= -(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 2)$

Thứ . .
Ngày . . No.

$$P_C(\lambda)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda=-2 & (\text{bội } 1) \\ \lambda=2 & (\text{bội } 1) \\ \lambda=3 & (\text{bội } 1) \end{array}\right.$$

① Tìm vector riêng

Với $\lambda=-2$: $(C+2I_3)x=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ x_3=a \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+d_2]{3d_2-d_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}(x_2+x_3)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}a+a\right)=\frac{1}{4}a \\ x_2=-\frac{1}{4}a \\ x_3=a \end{cases} \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E(-2)=\left\{a\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4},1\right) \mid a\in\mathbb{R}\right\}$$

nên vector riêng ứng với $\lambda=-2$ dạng $x_1=a\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4},1\right)$

Chọn $a=4 \Rightarrow x_1=(1,-1,4)$

Với $\lambda=2$: $(C-2I_3)x=0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{C}: \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+d_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-(x_2+x_3)=-a \\ x_2=0 \\ x_3=a \end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}$$

Thứ
Ngày
No.

$\Rightarrow E(2) = \{ a(-1,0,1), | a \in \mathbb{R} \}$

nên vector riêng ứng với $\lambda = 2$ dạng $x_2 = a(-1,0,1)$

Chọn $a = 1 \Rightarrow x_2 = (-1,0,1)$

Với $\lambda = 3$: $(C - 3I_3)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 + 3d_1]{d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases} (a \in \mathbb{R})$$

$\rightarrow E(3) = \{ a(-1,1,1) | a \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow$ Vector riêng ứng với $\lambda = 3$ dạng $x_3 = a(-1,1,1)$

Chọn $a = 1 \Rightarrow x_3 = (-1,1,1)$

① Chéo hoá

Ta có: C là ma trận vuông cấp 3 và có 3 trị riêng pb → C chéo hoá được

$$C = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \end{pmatrix}$$

④ Luỹ thừa

$$C^{100} = C D^{100} . P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \end{pmatrix}$$

(d) $D = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

① Tìm trị riêng

Có: $P_D(\lambda) = \det(D - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

VIBOOK
INTERNATIONAL

Thứ
Ngày No.

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda$

$= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$

$P_D(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 6 \end{array}\right.$ (bội 1)

① Tìm vector riêng

Với $\lambda = 0$: $(D + 0.I_4)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Có: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 5d_2]{d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 2x_3 = 2a - 2a = 0 \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow E(0) = \{a(0,1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow$ vector riêng ứng với $\lambda = 0$ dạng $x_1 = a(0,1,1)$

chọn $a = 1 \Rightarrow x_1 = (0,1,1)$

Với $\lambda = 3$: $(D - 3I_4)x = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Có: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 2d_1]{d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 = -a \\ x_2 = -a \\ x_3 = a \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$

Thứ
Ngày
Nº

$\to E(3) = \{ a(-1,-1,1) \mid a \in \mathbb{R} \}$

$\to$ vector riêng ứng với $\lambda = 3$ dạng $x_2 = a(-1,-1,1)$

Chọn $a = 1 \to x_2 = (-1,-1,1)$

Với $\lambda = 6 \to (D - 6I_3)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Có $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-d_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-d_2}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = -(x_2 - x_3) = -(-a-a) = 2a \\ x_2 = -a \\ x_3 = a \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$

$\to E(6) = \{ a(2,-1,1) \mid a \in \mathbb{R} \}$

$\to$ vector riêng ứng với $\lambda = 6$ dạng $x_3 = a(2,-1,1)$

Chọn $a = 1 \to x_3 = (2,-1,1)$

④ Chéo hóa

Vì D là ma trận vuông cấp 3 và có 3 trị riêng pb $\to$ chéo hóa được

$$D = P \cdot D_{\text{chéo}} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

④ Lũy thừa

$$D^{100} = P \cdot D_{\text{chéo}}^{100} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

VIBOOK

Thứ
Ngày
No.

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

① Tìm trị riêng

Có $P_E(\lambda) = \det(E - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$

$P_E(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \quad (\text{bội } 1) \\ \lambda = -2 \quad (\text{bội } 2) \end{array}\right.$

② Tìm vector riêng

Với $\lambda = 1$: $(E - I_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a \quad (a \in \mathbb{R}) \\ x_3 = a \end{cases}$

$\Rightarrow E(1) = \{ a(1, -1, 1) \mid a \in \mathbb{R} \}$ nên có vectơ riêng

dạng $v_1 = a(1, -1, 1)$. Chọn $a = 1 \Rightarrow v_1 = (1, -1, 1)$

Với $\lambda = -2$: $(A + 2I_3)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Có $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}$ (a, b

$\Rightarrow E(-2) = \{ (-a-b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ ~~nên có vectơ~~ riêng

~~dạng $v_2 = (-a-b, a, b)$~~

C~~ho~~

~~$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$~~

~~Có 2 vector riêng dạng $v_2 = a(...)$~~

Chọn $a=0, b=1 \Rightarrow v_2 = (-1,0,1)$

$a=2, b=2 \rightarrow v_3 = (-1,2,1)$

Có $\dim E(1)$, $\dim E(-2)$ bằng các bội đại số tương ứng nên có thể chéo hoá

$$E = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$E^{100} = PD^{100}.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{100} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

f)
$$F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

① Tìm trị riêng

$$P_E(\lambda) = \det(E - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27$$

$$= -(\lambda-3)^3$$

$P_E(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ (bội 3)

① Tìm vector riêng

$$(E - 3I_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = a \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow E(3) = \{(a,b,a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ có vector riêng bằng cách

Chọn $a=0, b=1 \rightarrow v_1 = (0,1,0)$

Vì $\dim E(3) = 2 <$ bội đại số $\lambda = 3$ ($=3$) nên E k° chéo hoá được

VIBOOK
INTERNATIONAL

g)

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Tìm trị riêng

$$P_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = -(\lambda-3)^3$$

$P_G(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ (bội 3)

① Tìm vector riêng

$$(G - 3I_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow E(3) = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ với vector riêng

dạng $v_1 \neq (0,0,0)$, $v_1 = (a, a, a)$

Chọn $a = 1 \rightarrow v_1 = (1, 1, 1)$

① Có $\dim E(3) = 1 \neq 3 =$ bội của $\lambda = 3$ nên G k° thể chéo hoá

$$h) H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

① Tìm trị riêng

$$P_H(\lambda) = \det(H - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$P_H(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda = 1 & (\text{bội } 1) \\ \lambda = 2 & (\text{bội } 2) \end{array}\right.$$

① Tìm vector riêng

Với $\lambda = 1$: $(H - I_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Thứ

Ngày   No.

$\to \begin{cases} x_1 = -2a \\ x_2 = a \quad , \quad a \in \mathbb{R} \\ x_3 = a \end{cases}$

$\Rightarrow E(1) = \{ (-2a, a, a), a \in \mathbb{R} \}$ có vector riêng

do $v_1 \neq (0,0,0)$, $v_1 = (-2a, a, a)$

Chọn $a = 1 \to v_1 = (-2, 1, 1)$

Với $\lambda = 2$:

$(H - 2I_3)x = 0 \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \\ x_3 = -a \end{cases}$

$\to E(2) = \{ (a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

Chọn $a = 1, b = 0 \to v_2 = (1, 0, -1)$

$a = 0, b = 1 \to v_3 = (0, 1, 0)$

Có $\begin{cases} \dim E(1) = 1 = \text{bội của } \lambda = 1 \\ \dim E(2) = 2 = \text{bội của } \lambda = 2 \end{cases}$

$\to$ H chéo hoá được

$H = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$H^{100} = PD^{100}.P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

17 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(1) Tìm trị riêng

$P_{(I)}\lambda = \det(I - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

VIBOOK
INTERNATIONAL

$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2$

$P_{(I)}\lambda = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 1 \text{ (bội 1)} \\ \lambda = 2 \text{ (bội 2)}\end{array}\right.$

② Tìm vector riêng

Với $\lambda = 1$: $(I - I_3)x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \\ x_3 = -2a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E(1) = \{(-a, a, -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Chọn $a = 1 \rightarrow v_1 = (-1, 1, -2)$

~~③ Vì dim E(1)~~

Với $\lambda = 2$: $(I - 2I_3)x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$

$\rightarrow E(2) = \{(0, 0, a), a \in \mathbb{R}\}$

Chọn $a = 1 \rightarrow$ vector riêng $v_2 = (0, 0, 1)$

③ Chéo hoá

Vì $\dim E(2) = 1 \neq 2 =$ bội của $\lambda = 2$ nên ma trận I k° chéo hoá được

j) $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

① Tìm trị riêng

$P_J(\lambda) = |J - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3\end{array}\right.$ (bội 1)

① Tìm vector riêng

Với $\lambda = 1$: $(J - I_3)x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = a, \quad a \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow E(1) = \{(0, a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Chọn $a = 1 \Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)$

Với $\lambda = 2$: $(J - 2I_3)x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -2a, \quad a \in \mathbb{R} \\ x_3 = -2a \end{cases}$

$\rightarrow E(2) = \{(a, -2a, -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Chọn $a = 1 \rightarrow v_2 = (1, -1, -2)$

Với $\lambda = 3$: $(J - 3I_3)x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a, \quad a \in \mathbb{R} \\ x_3 = a \end{cases}$

$\rightarrow E(3) = \{(-a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Chọn $a = 1 \rightarrow v_3 = (-1, 1, 1)$

Vì ma trận J vuông cấp 3 và có 3 trị riêng phân biệt

$\rightarrow$ J chéo hoá được.

② Chéo hoá

$J = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$J^{200} = PD^{200}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{200} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{200} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{200} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

VIBOOK INTERNATIONAL