PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI TIỂU

GIẢNG VIÊN: TRẦN HÀ SƠN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN-ĐHQG TPHCM

Ngày 11 tháng 3 năm 2024

Overview

1. Đặt vấn đề
2. Phép chiếu một vector lên một đường thẳng qua gốc tọa độ
3. Phép chiếu vuông góc xuống không gian con
4. Phương pháp bình phương tối tiểu

Nghiệm bình phương tối tiểu

Bài toán.

Hãy tìm vector $\hat{x}$ sao cho vector $A\hat{x}$ gần b nhất, tức là $\|A\hat{x} - b\|$ nhỏ nhất. Vector $\hat{x}$ thỏa tính chất trên được gọi là nghiệm bình phương tối tiểu của hệ

$$Ax = b.$$

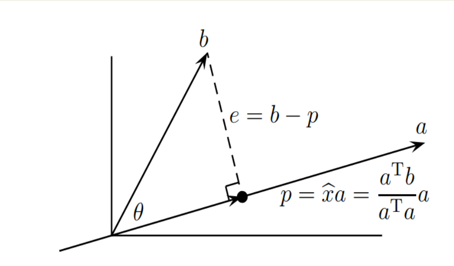
$\square$

Phép chiếu vuông góc một vector lên đường thẳng qua gốc tọa độ

Định lý

Hình chiếu của vector b lên đường thẳng đi qua gốc tọa độ O có phương là vector a là

$$p = \hat{x}a = \frac{a^T b}{a^T a} \cdot a.$$



Phép chiếu vuông góc một vector lên một không gian con

Định lý

Cho H là không gian con của không gian Euclide X, kho đó mọi vector x bất kì đều phân tích được duy nhất thành:

$$x = u + v,$$

trong đó $u \in H$ và $v \in H^{\perp}$. Phần tử u trong khai triển này được gọi là hình chiếu vuông góc của x xuống không gian con H và được ký hiệu là $p_H(x)$.

Phép chiếu vuông góc một vector lên một không gian con

Định lý

Cho không gian con H của không gian vector Euclide X và $x \in X$.

1. *Phần tử $p_H(x)$ là phần tử thuộc H gần x nhất, nói cách khác*

$$\|x - p_H(x)\| = \min_{y \in H} \|x - y\|.$$

2. *Nếu $e_1, e_2, \ldots, e_r$ là cơ sở trực chuẩn của H thì*

$$p_H(x) = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 + \cdots + (x, e_r)e_r.$$

Phép chiếu vuông góc một vector lên một không gian con

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, H = span(x_1, x_2).$$

Hãy biểu diễn x thành $x = u + v$, trong đó $u \in H, v \in H^{\perp}$.

Ví dụ

Xây dựng cơ sở trực chuẩn của H theo phương pháp $Gram - Schmidt$ như sau: Đặt $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - \dfrac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1$. Khi đó

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Phép chiếu vuông góc một vector lên một không gian con

Ví dụ

Với e_1, e_2 là cơ sở trực chuẩn của H, ta có $u = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2$. Nghĩa là

$$u = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{6} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

và $v = x - u = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

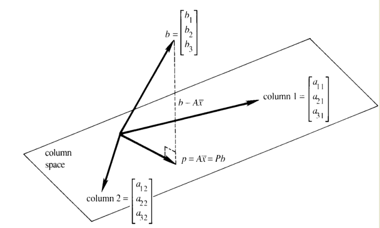
Phương pháp bình phương tối tiểu

Định lý

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *nghiệm bình phương tối tiểu của phương trình* $Ax = b$ *là vector* $\hat{x}$ *thỏa*

$$A\hat{x} = p_H(b),$$

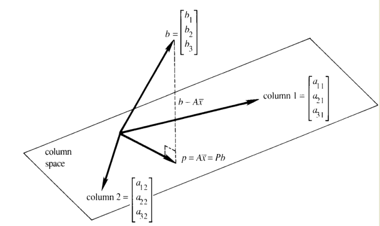
trong đó $H = span(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.



Nhận xét

Hệ $A\hat{x} = p_H(b)$ luôn có nghiệm và $b - p_H(x) = b - A\hat{x} \perp H$, tức là $b - A\hat{x}$ trực giao với tất cả các cột của A, nên

$$A^T(A\hat{x} - b) = 0 \Longrightarrow A^T A\hat{x} = A^T b.$$



Phương pháp bình phương tối tiểu

Nhận xét

Để tìm nghiệm bình phương tối tiểu, ta làm theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tìm cơ sở không gian cột H của ma trận A.
- **Bước 2.** Trực chuẩn hóa cơ sở của H.
- **Bước 3.** Tìm $p_H(b)$.
- **Bước 4.** Giải hệ $A\hat{x} = p_H(b)$ (hệ này luôn có nghiệm).

Định lý

Nếu ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ có hạng n thì $A^T A$ là ma trận vuông cấp n khả nghịch, nên phương trình $Ax = b$ có duy nhất một nghiệm bình phương tối tiểu là $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Áp dụng phương pháp bình phương tối tiểu.

Cho các hàm số $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)$ và m cặp giá trị $(t_1, b_1), (t_2, b_2), \ldots, (t_m, b_m)$. Hãy tìm hàm số có dạng

$$f(t) = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \cdots + x_n f_n(t)$$

thỏa mãn điều kiện $f(t_i) = b_i, i = 1, 2, \ldots, m$.
Tức là

$$\begin{cases} x_1 f_1(t_1) + x_2 f_2(t_1) + \cdots + x_n f_n(t_1) = b_1 \\ x_1 f_1(t_2) + x_2 f_2(t_2) + \cdots + x_n f_n(t_2) = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 f_1(t_n) + x_2 f_2(t_n) + \cdots + x_n f_n(t_n) = b_n \end{cases}$$

$\square$

Phương pháp bình phương tối tiểu

Ví dụ

Tìm hàm bậc nhất $y = ax + b$ thỏa mãn điều kiện

x	0	3	6
y	1	4	5

Chứng minh.

Đặt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Ta được $AX = C$.

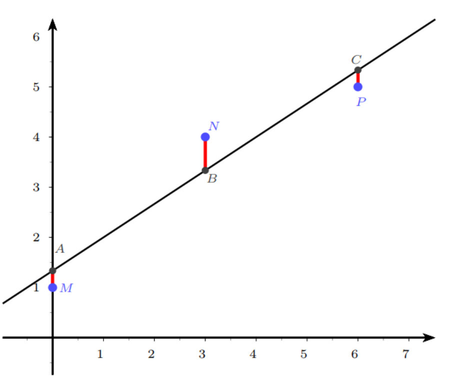
Nghiệm bình phương tối tiểu $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

Do đó $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}$. Tức là $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. $\square$

Phương pháp bình phương tối tiểu

Nhận xét

Đường thẳng Δ không đi qua các điểm $M(0,1), N(3,4), P(6,5)$ nhưng tổng $AM^2 + BN^2 + PC^2$ nhỏ nhất.



Ví dụ

Tìm hàm $y = C + Dt + Et^2$ thỏa mãn điều kiện

t	0	1	2
y	6	0	0

Đáp án: $\hat{x} = (C, D, E) = (6, -9, 3)$.

Phương pháp bình phương tối tiểu

Ví dụ

Tìm hàm $y = C + Dt + Et^2$ thỏa mãn điều kiện

t	-2	-1	0	1	2
y	0	0	1	0	0

Đáp án: $\hat{x} = (C, D, E) = (\frac{34}{70}, 0, -\frac{10}{70})$.