Cuối kì II → giải tích lồi (tối ưu) → hàm lồi, các tiêu chuẩn kiểm tra

Hesse matrix

Hesse xđ dương → $f(x)$ lồi

xđ âm → lõm $\quad x \in \mathbb{R}^n$

→ Tìm min (max)

→ Data fitting → model: $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

(P² bình phương nhỏ nhất)

$$\boxed{Loss(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2} \to \min$$

→ Mô hình Markov

(Xích Markov rời rạc)

- Ma trận xs chuyển P.
- Phân phối ban đầu
- Phân phối dừng.

Câu 1 (2.5 *điểm*). Cho hàm số 3 biến được xác định bởi

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - z^2 - xy + xz - yz + 2x + 3y + 2z \to \mathbb{R}^3 \leftarrow \text{lồi}$$

a) Xét tính lồi/lõm của f.

b) Xác định các điểm cực tiểu(cực đại) toàn cục và giá trị nhỏ nhất(lớn nhất) tương ứng của f.

a)
$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x - y + z + 2 \\ -2y - x - z + 3 \\ -2z + x - y + 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Kiểm tra xđ dương (âm) → Tìm trị riêng:
→ D_1, D_2, D_3

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$ D_1, D_2, D_3

$D_1 = -4 < 0$; $D_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7 > 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 < 0$

$D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0 \Rightarrow \nabla^2 f$ xđ âm $\Rightarrow f$ là hàm lõm.

b) $\nabla f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -4x - y + z + 2 = 0 \\ -2y - x - z + 3 = 0 \\ -2z + x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - y + z = -2 \\ -x - 2y - z = -3 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 5/6 \\ z = 5/6 \end{cases}$

Vì f là hàm lõm nên f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $(1/2; 5/6; 5/6)$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}^3} f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right) = ?$

Câu 2 (3.0 *điểm*)**.** Khảo sát 2 đại lượng x, y. Cho bảng dữ liệu như sau:

x	2	3	5	6
y	0	-10	-48	-76

Với mỗi mô hình được cho sau, dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất (least squares) xác định các tham số $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ của mô hình, tính chuẩn vector phần dư (residual) và dự đoán giá trị của y tại $x_0 = 10$.

a) Mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x$. → tuyến tính (linear regression).

b) Mô hình $y = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + \theta_3$.

$f(x) = \theta_2 x + \theta_1$

a) Từ bảng dữ liệu, ta có

$$\begin{cases} \theta_2 . 2 + \theta_1 = f(2) = 0 \\ \theta_2 . 3 + \theta_1 = f(3) = -10 \\ \theta_2 . 5 + \theta_1 = f(5) = -48 \\ \theta_2 . 6 + \theta_1 = f(6) = -76 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -48 \\ -76 \end{bmatrix}}_{b} \quad (*)$$

*) Lưu ý: kiểm tra $A^T A$ có khả nghịch ko? (đi tính $\det(A^T A)$)

→ Nếu $\det(A^TA) \neq 0$ thì no cuối (*) là $X = (A^TA)^{-1}A^Tb = ? \begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_1\end{bmatrix}$

→ Nếu $\det(A^TA) = 0$ thì: $Ax = b$ (giải hệ này, có vô số no)

Lựa ra 1 no bất kì $(\theta_2, \theta_1) \to$ thay vào $f(x)$.

• Tính chuẩn vector phần dư: $r = \underbrace{\sqrt{(y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \dots + (y_4 - f(x_4))^2}}_{\text{chuẩn vector phần dư}}$

• $f(10) = \hat{y}$ ← dự đoán.

Câu b tương tự.

Câu 3 (3.5 *điểm*).

Cho *xích Markov* (Markov chain) $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ 3 trạng thái S = {1, 2, 3} với *ma trận chuyển* (transition matrix)

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}}$$ ← 1 bước chuyển.

Giả sử phân phối đầu là $\pi_0 = (0.3, 0.25, 0.45)$.

a) Tính $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 3)$,

b) Tính $P(X_2 = 1, X_4 = 2 \mid X_1 = 2, X_0 = 1)$,

c) Tính $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$, ← (slide)

d) Tìm phân phối dừng của xích.

a) $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 3)$

$X_1 \to X_4$: 3 bước

$P(X_4 = 2 \mid X_1 = 3) = p_{32}^{(3)}$

Tính ma trận P^3

$p_{32}^{(3)}$ là phần tử ở hàng 3

cột 2 của ma trận P^3.

b) $P(X_2 = 1, X_4 = 2 \mid X_1 = 2, X_0 = 1)$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

$$= \frac{P(\overbrace{X_4 = 2, X_2 = 1}^{A}, \overbrace{X_1 = 2, X_0 = 1}^{B})}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}$$

$$= \frac{P(X_4 = 1 \mid X_2 = 1, \overbrace{X_1 = 2, X_0 = 1}^{\text{xoá}}) \cdot P(X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1)}$$

$$= \frac{P(X_4 = 1 \mid X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1 \mid X_1 = 2, \overbrace{X_0 = 1}^{\text{bỏ}}) \cdot P(X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1)}$$ ← triệt tiêu

$= P(X_4 = 1 | X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1 | X_1 = 2)$

P^2

$= p_{11}^{(2)} \cdot p_{21}$

d) $\begin{cases} \pi = P\pi \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow \pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$

$\longrightarrow P(ABC) = P(A|BC) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$

c) $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$

$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(ABC) = P(A|BC) \cdot P(BC) = P(A|BC) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$

$= P(X_3 = 3 | X_1 = 2, X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1 | X_1 = 2) \cdot P(X_1 = 2)$

$= P(X_3 = 3 | X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1 | X_1 = 2) \cdot P(X_1 = 2)$

$= p_{13} \cdot p_{21} \cdot \boxed{P(X_1 = 2)} \longrightarrow ?$

thay vào

$\pi(X_1) = [X_1 = 1 \quad X_1 = 2, \quad X_1 = 3]$

$\pi(X_1) = \pi_1 = \pi_0 \cdot P = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \longleftarrow P(X_1 = 2) = \beta$