

Chương 3. KHÔNG GIAN VECTƠ

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

3.1 Vectơ

Để khởi tạo một vectơ ta sử dụng các hàm sau

- `vector(list_of_elements)`, trong đó `list_of_elements` là danh sách các phần tử có dạng $[x_1, x_2, \dots, x_n]$.
- `vector(n, element)`: Tạo ra vectơ n chiều với các phần tử có giá trị là `element`.
- `randvector(n)`: Tạo ngẫu nhiên một vectơ n chiều với các thành phần có giá trị nguyên thuộc $[-99, 99]$.

Ngoài ra,

- `v[i]`: Xác định thành phần thứ i của vectơ v .

```
> u := vector([1, 2, -1, 2]);
                                     [1 2 -1 2]
> v := vector(4, 2);
                                     [2 2 2 2]
> randvector(5); # Kết quả ngẫu nhiên
                                     [-7, 22, -55, -94, 87]
> u[3];
                                     -1
```

3.2 Các phép toán trên vectơ

Cho u, v là hai vectơ và c là số. Khi đó:

- `u+v`: Cộng hai vectơ u và v .
- `c*v`: Nhân c với vectơ v .

Lưu ý: Để in ra giá trị của vectơ v ta dùng lệnh `evalm(v)`.

```
> u := vector([1, 2, -1, 2]);
                                     [1 2 -1 2]
> v := vector([2, 3, 1, -2]);
                                     [2 3 1 -2]
> evalm(3*u);
                                     [3 6 -3 6]
```

```
> evalm(3*u-2*v);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

3.3 Một số bài toán liên quan tới tập hợp vectơ

Ví dụ 1. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, -1, 1)$, $u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không? Nếu có hãy biểu diễn u theo u_1 , u_2 và u_3 .

Phương pháp. Lập ma trận $A = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top)$ là ma trận gồm các cột là các vectơ u_1, u_2, u_3 . Sau đó giải phương trình ma trận $AX = u^\top$ để có kết luận.

```
> u1 := vector([1, 2, 1]): u2 := vector([-1, -1, 1]): u3 := vector([-2, 1, 1]):
```

```
> A := matrix([u1, u2, u3]): A := transpose(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> u := vector([-3, 1, 4]):
```

$$u := [-3, 1, 4]$$

```
> linsolve(A, u);
```

$$[1, 2, 1]$$

Dựa vào kết quả trên, ta thấy u là tổ hợp tuyến tính của u_1 , u_2 và u_3 và $u = u_1 + 2u_2 + u_3$.

Ví dụ 2. Trong không gian \mathbb{R}^4 cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1, 3); u_2 = (2, 3, 2, -2); u_3 = (5, 8, 5, -1).$$

Tìm điều kiện để vectơ $u = (a, b, c, d)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 .

Phương pháp. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \ | \ u^\top)$. Sau đó đưa \tilde{A} về dạng bậc thang. Dựa vào ma trận này để tìm điều kiện cho hệ phương trình tương ứng có nghiệm. Khi đó, điều kiện này chính là kết quả.

```
> u1 := vector([1, 2, 1, 3]): u2 := vector([2, 3, 2, -2]):
```

```
u3 := vector([5, 8, 5, -1]): u := vector([a, b, c, d]):
```

```
> A := matrix([u1, u2, u3, u]): A := transpose(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 3 & 8 & b \\ 1 & 2 & 5 & c \\ 3 & -2 & -1 & d \end{bmatrix}$$

```
> A := pivot(A, 1, 1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & -1 & -2 & -2a + b \\ 0 & 0 & 0 & -a + c \\ 0 & -8 & -16 & -3a + d \end{bmatrix}$$

```
> A := pivot(A, 2, 2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3a + 2b \\ 0 & -1 & -2 & -2a + b \\ 0 & 0 & 0 & -a + c \\ 0 & 0 & 0 & 13a - 8b + d \end{bmatrix}$$

Dựa vào kết quả, ta thấy điều kiện để u là tổ hợp tuyến của u_1, u_2, u_3 là $-a + c = 0$ và $13a - 8b + d = 0$.

Ví dụ 3. Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ và $u_3 = (1, 5, 3)$;

b) $u_1 = (0, 3, 3, 6)$, $u_2 = (2, 2, 0, 2)$ và $u_3 = (-3, 0, 3, 3)$.

Phương pháp. Lập ma trận A gồm các dòng hoặc các cột là các vectơ u_1, u_2, u_3 . Sau đó tính hạng của A và so sánh với số vectơ để có kết luận.

```
> u1 := vector([0, 1, 1]): u2 := vector([1, 2, 1]): u3 := vector([1, 5, 3]):
```

```
> A := matrix([u1, u2, u3]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

3

```
> u1 := vector([0, 3, 3, 6]): u2 := vector([2, 2, 0, 2]): u3 := vector([-3, 0, 3, 3]):
```

```
> B := matrix([u1, u2, u3]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> rank(B);
```

2

Dựa vào kết quả trên, ta so sánh số vectơ và hạng của ma trận ta được

- Các vectơ $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ và $(1, 5, 3)$ độc lập tuyến.
- Các vectơ $(0, 3, 3, 6)$, $(2, 2, 0, 2)$ và $(-3, 0, 3, 3)$ phụ thuộc tuyến tính.

3.4 Cở sở của không gian con

Sau đây là một số hàm liên quan tới cơ sở của không gian vectơ con của \mathbb{R}^n

- **basis(S)**: Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ của tập hợp S . Kết quả trả về là tập con của S .

- **basis(A, 'rowspan')**: Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ dòng của ma trận A . Kết quả trả về là danh sách con của danh sách các vectơ dòng của ma trận A .
- **basis(A, 'colspace')**: Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ cột của ma trận A . Kết quả trả về là danh sách con của danh sách các vectơ cột của ma trận A .
- **rowspan(A)**: Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các dòng của ma trận A . Kết quả trả về là danh sách các vectơ khác không của một dạng bậc thang của A .
- **rowspace(A)**: Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các dòng của ma trận A . Kết quả trả về là danh sách các vectơ khác không của dạng bậc thang rút gọn của A .
- **nullspace(A)**: Tìm một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$.
- **sumbasis(S_1, S_2, \dots)**: Tìm một cơ sở của không gian tổng của các không gian sinh bởi các tập hợp S_1, S_2, \dots .
- **intbasis(S_1, S_2, \dots)**: Tìm một cơ sở của không gian giao của các không gian sinh bởi các tập hợp S_1, S_2, \dots .

Ví dụ 1. Trong không gian vectơ

R^4 xét các vectơ sau đây:

$$u_1 = (1, 2, 0, 1), u_2 = (2, 1, 3, 1), u_3 = (7, 8, 9, 5), u_4 = (1, 2, 1, 0),$$

$$u_5 = (2, -1, 0, 1), u_6 = (-1, 1, 1, 1), u_7 = (1, 1, 1, 1).$$

Đặt $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, W = \langle u_4, u_5, u_6, u_7 \rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con $U, W, U + W$ và $U \cap W$.

Cách 1. Cơ sở được tìm là tập con của tập sinh.

```
> u1 := vector([1, 2, 0, 1]): u2 := vector([2, 1, 3, 1]): u3 := vector([7, 8, 9, 5]):
  u4 := vector([1, 2, 1, 0]): u5 := vector([2, -1, 0, 1]): u6 := vector([6, 0, -3, 4]):
  u7 := vector([1, 1, 1, 1]):
> B1 := basis([u1, u2, u3]);
                                     [u1, u2]
> B2 := basis([u4, u5, u6, u7]);
                                     [u4, u5, u7]
> sumbasis(B1, B2);
                                     [u1, u2, u5, u7]
```

Từ kết quả tính toán, ta có:

- Không gian U có cơ sở $\{u_1, u_2\}$.
- Không gian W có cơ sở $\{u_4, u_5, u_7\}$.
- Không gian tổng $U + W$ có cơ sở $\{u_1, u_2, u_5, u_7\}$.

Cách 2.

> A := matrix([u1, u2, u3]); # Lập ma trận A từ u1, u2, u3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

> rowspan(A);

$$\{[0 \ -3 \ 3 \ -1], [1 \ 2 \ 0 \ 1]\}$$

> B := matrix([u4, u5, u6, u7]): rowspan(B);

$$\{[0 \ 0 \ 15 \ 0], [0 \ 6 \ -6 \ 2], [2 \ -1 \ 0 \ 1]\}$$

> AB := matrix([u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7]): rowspan(AB);

$$\{[0 \ -3 \ 3 \ -1], [0 \ 0 \ 0 \ 5], [0 \ 0 \ 15 \ -2], [1 \ 2 \ 0 \ 1]\}$$

> intbasis(B1, B2);

$$\{[0, \ 3 \ -3 \ 1]\}$$

Từ kết quả tính toán, ta có:

- Không gian U có cơ sở $\{(0, -3, 3, -1), (1, 2, 0, 1)\}$.
- Không gian U có cơ sở $\{(0, 0, 15, 0), (0, 6, -6, 2), (2, -1, 0, 1)\}$.
- Không gian tổng $U+W$ có cơ sở $\{(0, -3, 3, -1), (0, 0, 0, 5), (0, 0, 15, -2), (1, 2, 0, 1)\}$.
- Không gian giao $U \cap W$ có cơ sở $\{(0, 3, -3, 1)\}$.

Ví dụ 2. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

> A := matrix(3, 4, [2, -4, 5, 3, 3, -6, 4, 2, 4, -8, 17, 11]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix}$$

> nullspace(A);

$$\left\{ [2, 1, 0, 0], \left[\frac{-2}{5}, 0, 1, \frac{-7}{5} \right] \right\}$$

Vậy không gian nghiệm có số chiều là 2, và có cơ sở:

$$\left\{ (2, 1, 0, 0), \left(-\frac{2}{5}, 0, 1, -\frac{7}{5} \right) \right\}.$$

3.5 Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Bài toán. Cho V là không gian con của

\mathbb{R}^n , $\mathcal{B} := (u_1, u_2, \dots, u_m)$ là cơ sở được sắp của V và $u \in V$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Giải. Tọa độ của u trong \mathcal{B} chính là nghiệm của hệ phương trình $(u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_m^T \mid u^T)$. Trong Maple, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lần lượt thực hiện các lệnh sau:

```
> B := matrix([u1, u2,..., un]);
```

```
> B := transpose(B);
```

```
> linsolve(B, u);
```

Ngoài ra, nếu $\mathcal{B} := (u_1, u_2, \dots, u_m)$ và $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, \dots, v_m)$ là hai cơ sở của V thì việc tìm ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ được thực hiện thông qua việc tính $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_m]_{\mathcal{B}}$.

Ví dụ. Trong \mathbb{R}^4 , cho $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (-2, 3, 4, 1)$, $u_3 = (-1, 4, 3, 2)$, $v_1 = (1, 1, -1, -1)$, $v_2 = (2, 7, 0, 3)$ và $v_3 = (2, 7, 0, 2)$. Đặt $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ và $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

a) Kiểm tra \mathcal{A} và \mathcal{B} là hai cơ sở của một không gian vectơ W .

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ nếu biết $[u]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) Tính $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$.

```
> u1 := vector([1, 1, -1, 0]): u2 := vector([-2, 3, 4, 1]): u3 := vector([-1, 4, 3, 2]):  
v1 := vector([1, 1, -1, -1]): v2 := vector([2, 7, 0, 3]): v3 := vector([2, 7, 0, 2]):
```

```
> A:=matrix([u1, u2, u3]):
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

3

```
> B := matrix([v1, v2, v3]):
```

```
> equal(gaussjordan(A), gaussjordan(B));
```

true

Từ kết quả trên ta được $r(A) = 3$ nên \mathcal{A} độc lập tuyến tính, và do đó \mathcal{A} là cơ sở của W . Ma trận A và ma trận B có cùng dạng bậc thang rút gọn nên A và B tương đương dòng. Do đó không gian sinh bởi \mathcal{A} trùng với không gian sinh bởi \mathcal{B} . Hay \mathcal{A} và \mathcal{B} là hai cơ sở của một không gian vectơ.

```
> A := transpose(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```

> B := transpose(B);
                                      $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 

> uA := vector([5, 1, 4]);
                                      $[5 \ 1 \ 4]$ 

> u := evalm(A.uA)    # Lưu ý . là dấu chấm câu
                                      $[-1 \ 24 \ 11 \ 9]$ 

> uB := linsolve(B, u);
                                      $[-11 \ -12 \ 17]$ 

```

Từ kết quả tính toán trên ta có: $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ 17 \end{pmatrix}$.

```

> v1A := linsolve(A, v1):    # Tính các tọa độ  $v_i$  theo cơ sở  $\mathcal{A}$ 
v2A := linsolve(A, v2):
v3A := linsolve(A, v3):
> P := matrix([v1A, v2A, v3A]): P := transpose(P);
                                      $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 

```

Từ kết quả tính toán trên ta có:

$$P = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

► Bài tập thực hành - Không sử dụng các hàm của MAPLE

Xem một vectơ trong \mathbb{R}^n như là mảng một chiều, hãy viết các chương trình để:

- Kiểm tra các vectơ u_1, u_2, \dots, u_m có độc lập hay phụ thuộc tuyến tính không?
- Kiểm tra vectơ u có là tổ hợp tuyến tính các vectơ u_1, u_2, \dots, u_m không? Nếu có, hãy đưa ra dạng biểu diễn.
- Kiểm tra không gian con sinh bởi tập các vectơ $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ có trùng với không gian con sinh bởi các vectơ $\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ không?
- Tìm một cơ sở của không gian con sinh bởi tập các vectơ $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.
- Tìm một cơ sở của không gian giao của hai không gian con lần lượt sinh bởi $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ và $\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$.
- Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (u_1, u_2, \dots, u_m) vào cơ sở (v_1, v_2, \dots, v_t) .

Phần II. Bài tập

3.1 Thực hiện các phép tính:

a) $(3, -4, 5, -6) + (1, 1, -2, 4)$.

b) $-3(4, -5, -6) + 2(1, 3, 2)$.

3.2 Cho $u = (3, -2, 1, 4)$ và $v = (7, 1, -3, 6)$. Tính:

a) $u + v$.

b) $4u$.

c) $2u - 3v$.

3.3 Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (1, 3, 2), u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)$.

b) $u = (1, 4, -3), u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (1, 1, -2)$.

c) $u = (4, 1, 2), u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 1, 2), u_3 = (1, -1, -1)$.

d) $u = (1, 3, 5), u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (3, 2, 1), u_3 = (2, 1, 0)$.

3.4 Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (10, 6, 5, 3), u_1 = (1, 1, -1, 0), u_2 = (3, 1, 2, 1), u_3 = (2, 1, 3, 1)$.

b) $u = (1, 1, 1, 0), u_1 = (1, 1, 0, 1), u_2 = (1, 0, 1, 1), u_3 = (0, 1, 1, 1)$.

c) $u = (1, 3, 7, 2), u_1 = (1, 2, 1, -2), u_2 = (3, 5, 1, -6), u_3 = (1, 1, -3, -4)$.

3.5 Trong các câu sau, hãy tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để vectơ $u = (a, b, c, d)$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 .

a) $u_1 = (1, 2, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2, 1), u_3 = (1, 1, 1, 2)$.

b) $u_1 = (1, 1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 0, 1), u_3 = (1, 0, 1, 1)$.

c) $u_1 = (1, -2, 0, 3), u_2 = (2, 3, 0, -1), u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

3.6 Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 1, -1)$;

b) $u_1 = (-1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 5, 3)$;

c) $u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1, -1), u_3 = (0, 1, -2, 2)$.

d) $u_1 = (1, 2, 3, -4), u_2 = (3, 5, 1, 1), u_3 = (1, 1, -5, 9)$.

e) $u_1 = (1, 3, 1, -1), u_2 = (2, 5, 1, 1), u_3 = (1, 1, -3, 13), u_4 = (1, 3, 2, -5)$.

3.7 Xét xem các đa thức sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2, f_2 = -4 - t + 6t^2, f_3 = 6 + 3t - 4t^2$;

- b) $f_1 = 1 - 2t, f_2 = 1 - t + t^2, f_3 = 1 - 7t + 10t^2$;
 c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2, f_2 = 1 + t + 4t^2, f_3 = 2 + 5t + 9t^2$;
 d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3, f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3, f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$.

3.8 Xét xem các ma trận sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

- a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
 b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;
 c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$;
 d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

3.9 Cho V là một không gian vectơ và $u, v, w \in V$. Chứng minh rằng, $\{u, v, w\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u + v, v + w, w + u\}$ độc lập tuyến tính.

3.10 Trong các tập hợp W sau đây thì tập hợp nào là không gian con của không gian \mathbb{R}^3 ?

- a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \geq 0\}$.
 b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 2x_2 = 3x_3\}$.
 c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 3x_2 = 1\}$.
 d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 = x_3\}$.
 e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 = x_2x_3\}$.
 f) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1x_2 = 0\}$.

3.11 Tập hợp nào sau đây là không gian con của không gian $M_n(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n ?

- a) Tập các ma trận đường chéo cấp n .
 b) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 0$.
 c) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 1$.
 d) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho A khả nghịch.
 e) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^\top = A$.

3.12 Tập hợp nào sau đây là không gian con của không gian $\mathbb{P}[t]$?

- a) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(-t) = f(t)$.
 b) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(-t) = -f(t)$.
 c) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(0) = f(1) + f(2)$.
 d) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $(f(t))^2 = f(t)$.

3.13 Cho W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V . Chứng minh rằng $W_1 \cup W_2$ là không gian con của V khi và chỉ khi $W_1 \subseteq W_2$ hoặc $W_2 \subseteq W_1$.

3.14 Chứng minh rằng:

- a) $\mathcal{S} = \{(1, -1), (-2, 3)\}$ là một tập sinh của \mathbb{R}^2 .
- b) $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (2, -1)\}$ là một tập sinh của \mathbb{R}^2 .
- c) $\mathcal{S} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ là một tập sinh của \mathbb{R}^3 .

3.15 Chứng minh rằng tập hợp các đa thức $f_1 = 1 + 2t - 7t^2$, $f_2 = 3 + t + t^2$, $f_3 = 7 + 2t + 4t^2$ là một tập sinh của không gian $\mathbb{P}_2[t]$.

3.16 Cho S_1, S_2 là các tập hợp con của không gian vectơ V . Chứng minh rằng, nếu mọi phần tử thuộc S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của S_2 và ngược lại thì $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

3.17 Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ Chứng minh rằng tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính dạng $AX = B$ là không gian con của \mathbb{R}^n khi và chỉ khi $B = 0$.

3.18 Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của \mathbb{R}^3 ?

- a) $\mathcal{B} = \{u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 1, 2)\}$.
- b) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$.
- c) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 1, -1)\}$.
- d) $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 5, 3)\}$.

3.19 Chứng minh rằng tập hợp $\{1, t - 1, (t - 1)^2, \dots, (t - 1)^n\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_n[t]$.

3.20 Kiểm tra tập hợp $\{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, \dots, t^{n-1} + t^n\}$ có là cơ sở của $\mathbb{P}_n[t]$ hay không?

3.21 Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 2, 1, -1)$. Kiểm tra tập hợp $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ có là cơ sở của W hay không? Hãy xác định $\dim W$.

3.22 Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 2, 5), u_3 = (5, 3, 4)\}$ và $W = \langle \mathcal{S} \rangle$.

- a) Chứng minh $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ không là cơ sở của W .
- b) Tìm một cơ sở \mathcal{B} của W sao cho $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ và xác định $\dim W$.

3.23 Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 2, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

- a) Chứng minh \mathcal{S} độc lập tuyến tính.
- b) Cho $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm điều kiện của a, b, c sao cho $\mathcal{S} \cup \{u\}$ là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

3.24 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các vectơ sau:

- a) $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 3, 4), u_3 = (3, 4, 5)$.
- b) $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)$.

c) $u_1 = (1, 2, 3, 1), u_2 = (1, 2, 1, -2), u_3 = (1, 3, 2, 1), u_4 = (2, 1, 3, -7).$

d) $u_1 = (1, 1, -1, 2), u_2 = (1, -1, -2, 1), u_3 = (1, 3, 2, 1); u_4 = (2, 1, 2, -1).$

3.25 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức sau:

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2, f_2 = -4 - t + 6t^2, f_3 = 6 + 3t - 4t^2;$

b) $f_1 = 1 - 2t, f_2 = 1 - t + t^2, f_3 = 1 - 7t + 10t^2;$

c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2, f_2 = 1 + t + 4t^2, f_3 = 2 + 5t + 9t^2;$

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3, f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3, f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3.$

3.26 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các ma trận sau:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix};$

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix};$

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix};$

3.27 Cho $S = \{(1, 1, 2, 4), (2, -1, -5, 2), (1, -1, 4, 0), (2, 1, 1, 6)\}.$

a) Chứng tỏ rằng S phụ thuộc tuyến tính.

b) Tìm một cơ sở cho không gian $W = \langle S \rangle.$

3.28 Tìm cơ sở và chiều cho không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:

a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$$

3.29 Trong \mathbb{R}^4 cho các vectơ

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1, -1), u_3 = (1, 3, 1, 3),$$

$$v_1 = (1, 2, 0, 2), v_2 = (1, 2, 1, 2), v_3 = (3, 1, 3, 1).$$

Đặt $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ và $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con U , W , $U+W$ và $U \cap W$.

3.30 Trong \mathbb{R}^4 cho các vectơ

$$u = (1, 1, 0, -1), v = (1, 0, 0, -1) \text{ và } w = (1, 0, -1, 0).$$

Đặt $U = \langle u, v, w \rangle$ và

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

a) Chứng tỏ rằng W là một không gian con của \mathbb{R}^4 .

b) Tìm một cơ sở cho mỗi không gian con U , W , $U+W$ và $U \cap W$.

3.31 Trong \mathbb{R}^4 cho các vectơ $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 3, 0, 1)$ và $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Tính $\dim(U+W)$ và $\dim(U \cap W)$.

3.32 Trong không gian \mathbb{R}^3 , tìm tọa độ của vectơ $u = (3, 1, 4)$ theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)\}$.

3.33 Trong không gian $\mathbb{P}_2[t]$, cho các đa thức

$$f_1(t) = 1 + t - t^2, f_2(t) = t + t^2, f_3(t) = 3 + 4t - t^2.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_2[t]$.

b) Cho $f(t) = 3 + t - 2t^2$. Hãy tìm tọa độ của f theo cơ sở \mathcal{B} .

3.34 Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$, cho các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm tọa độ của A theo cơ sở \mathcal{B} .

3.35 Trong không gian \mathbb{R}^3 , cho các vectơ

$$u_1 = (2, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2), u_3 = (1, 1, -1).$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$, biết rằng $u = (1, 3, -2)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$, biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.36 Trong không gian \mathbb{R}^3 , cho các vectơ $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, -2)$, $u_3 = (0, -3, 2)$ và đặt $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

- a) Chứng minh \mathcal{B} là cơ sở của \mathbb{R}^3 .
- b) Tìm tọa độ của các vectơ $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ và $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ theo cơ sở \mathcal{B} .

3.37 Trong không gian \mathbb{R}^3 , cho các vectơ $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, -1)$, $u'_1 = (1, 1, 2)$, $u'_2 = (1, -2, 1)$, $u'_3 = (2, 1, 4)$.

- a) Chứng minh các tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là các cơ sở của \mathbb{R}^3 .
- b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ biết rằng $u = (1, 2, 3)$.
- c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$ biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- d) Tìm $[w]_{\mathcal{B}'}$ biết rằng $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- e) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$.

3.38 Trong không gian $\mathbb{P}_2[t]$, cho các đa thức $f_1(t) = 1 + t + t^2$, $f_2(t) = 2 + 2t + t^2$, $f_3(t) = 2 + 3t + t^2$, $g_1(t) = 1 + 2t$, $g_2(t) = t$, $g_3(t) = 1 + t^2$.

- a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{P}_2[t]$.
- b) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$.

3.39 Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$.

- a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W .
- b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy xác định $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d .
- c) Đặt $\mathcal{B}' = \{u'_1 = (0, 1, 2, -3), u'_2 = (2, 0, 1, 3), u'_3 = (0, 1, -2, 1)\}$. Chứng minh \mathcal{B}' là cơ sở của W và xác định $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$.

3.40 Cho W là không gian con của \mathbb{R}^4 sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 2, 1, -1)$ và $u_3 = (2, 3, 1, 1)$.

- a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W .
- b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d .
- c) Cho $u'_1 = (1, 1, -1, 2)$, $u'_2 = (2, 4, 1, -2)$, $u'_3 = (1, 0, 0, 5)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ \mathcal{B} sang \mathcal{B}' và từ \mathcal{B}' sang \mathcal{B} .

3.41 Trong không gian \mathbb{R}^4 , cho các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, 2, -2, 2)$ và $W = \langle \{u_1, u_2, u_3\} \rangle$.

- a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W .
- b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d .
- c) Cho $u'_1 = (2, 1, 0, 1)$, $u'_2 = (2, 3, -3, 4)$, $u'_3 = (3, 3, -2, 3)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ \mathcal{B} sang \mathcal{B}' và từ \mathcal{B}' sang \mathcal{B} .
- d) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$ biết $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.42 Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của không gian \mathbb{R}^3 có ma trận chuyển cơ sở từ \mathcal{B} sang cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 là $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Tìm tọa độ $[u]_{\mathcal{B}}$ theo cơ sở \mathcal{B} của vectơ $u = (2, 1, -1)$.
- b) Xác định các vectơ u_1, u_2, u_3 của cơ sở \mathcal{B} .

3.43 Trong không gian \mathbb{R}^3 cho các vectơ $u_1 = (3, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, -5)$, $u_3 = (-3, -1, 15)$. Đặt

$$\begin{cases} v_1 &= u_1 - u_2 - u_3, \\ v_2 &= -2u_1 + 5u_2 + 3u_3, \\ v_3 &= u_1 - 2u_2 - u_3. \end{cases}$$

- a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ là hai cơ sở của \mathbb{R}^3 .
- b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ \mathcal{B}' sang \mathcal{B} .