BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.

1/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực AX = B dưới đây (*nghiệm duy nhất*) và kiểm nghiệm lại Định lý Kronecker – Capelli:

a) $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ y+2z+5x=29 \\ z+3x-y=10 \\ z+2y-7x=-8 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ z+2x+y=2 \\ y+5z+x=-7 \\ -3z+3y+2x=14 \end{cases}$. c) $\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ 3y-z-t+2x=-6 \\ -2t+3x-y-z=-4 \\ 3z-t+x+2y=-4 \end{cases}$. d) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ 2z-2x+3t+y=-2 \\ 2y+2t+3x-z=-5 \\ t+2z-3y+2x=11 \end{cases}$.

2/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực AX = B dưới đây (*vô nghiệm*) và kiểm nghiệm lại Định lý Kronecker – Capelli:

a) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ y-2z+2x=1 \\ z+x+y=3 \\ 2y+x-3z=1 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 2t+5x+y-z=-1 \\ 2z-8t+3x-2y=2 \\ -y+z-3t+2x=4 \end{cases}$. c) $\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3z+3x-t-7y=-1 \\ 2t+6z-9y+5x=7 \\ -6y-t+4x+3z=8 \end{cases}$. d) $\begin{cases} 2x-2y+z-t+u=1 \\ t-z-2u+2y+x=1 \\ 7u+5z-10y+4x-5t=1 \\ 7z+2x-7t+11u-14y=1 \end{cases}$.

3/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực AX = B dưới đây (*vô số nghiệm*) và kiểm nghiệm lại Định lý Kronecker – Capelli:

a) $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 3z+2x+y=0 \\ 5y+4z+3x=0 \\ 4z-17y+x=0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 3x+4y-5z+7t=0 \\ 16t+4x+11y-13z=0 \\ 3z-2t+2x-3y=0 \\ -2y+z+3t+7x=0 \end{cases}$. c) $\begin{cases} x-y+2z-3t=1 \\ 3z+x-2t-4y=-2 \\ 4y-2t+x-z=-2 \\ -2t+5z-8y+x=-2 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} 3x+3y+7z-3t+6u=3 \\ -t+4z+3u+2y+2x=-2 \\ -3u-5z-3y-3x+2t=-1 \\ 8z+2x-3t+9u+2y=2 \end{cases}$. e) $\begin{cases} x-2y+2z+7t-3u=1 \\ -6y-5u+15t+3x+4z=2 \\ -5t-2x+4y-z+u=-1 \\ -20u+14z+8x-16y+50t=7 \end{cases}$. f) $\begin{cases} x+2y-z+t-2u=1 \\ z+2x-t+u-2y=1 \\ 7u+5z-10y+4x-5t=1 \\ -7t+11u+2x+7z-14y=-1 \end{cases}$.

4/ Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính thực AX = B dưới đây theo các tham số thực m, a, b, c và d rồi kiểm nghiệm lại Định lý Kronecker – Capelli cho mỗi trường hợp biện luận:

a) $\begin{cases} x+3y+8z-t=-3 \\ 5z-2x-5t+y=m \\ 13t-19z-5y+4x=2 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 3x+4y+4z-17t=11m+7 \\ 8z+5x-27t+6y=18m+10 \\ 3y-12t+2x+2z=8m+5 \\ -19t+2z+5y+3x=13m+8 \end{cases}$. c) $\begin{cases} x+y-z+2t=1 \\ -3z+x+4t+2y=2 \\ -y-t+x+4z=m \\ mt-z+3y+4x=m^2-6m+4 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x-2y+z-t+u=m \\ 2t-z+2x-2u+y=3m \\ -u+3x+t-2y-z=m+1 \\ z+2u-5y+2x-2t=m-1 \end{cases}$. e) $\begin{cases} x+2y+z+2t-3u=a \\ 6y+13u-8t+3x+5z=b \\ t+4x+8y+5z-u=c \\ -5u-3z-2x-4y+3t=d \end{cases}$. f) $\begin{cases} x+y-z+3t=12 \\ -2z+x+t+2y=3 \\ -y+2x+3z=9 \\ mt-z+y+2x=21 \end{cases}$.

g) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ mz+2x+3y=3 \\ my+3z+x=2 \end{cases}$. h) $\begin{cases} x-2y+z+2t=m \\ t-z+y+x=2m+1 \\ 7y-t+x-5z=-m \end{cases}$. i) $\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ (m-1)z+mx+y=m \\ my+z+x=1 \end{cases}$. j) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ mz+2x+y=m+1 \\ my+3z+x=2 \end{cases}$.

<u>CHƯƠNG II:</u> TÍNH TOÁN MA TRẬN VÀ MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH.

1/Cho các ma trận thực $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\\2&4\\4&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$ và $D=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\3&1&0&4\\2&-3&1&-2\end{pmatrix}$.

Tính E = CDBA, F = DBAC và G = ACDB.

2/ Tính A^k theo k nguyên ≥ 0 nếu A là một trong các ma trận thực sau:

a) $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}a&0\\1&b\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. f) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. g) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. h) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. i) $\begin{pmatrix}0&1&\sin t\\-1&0&-\cos t\\\sin t&-\cos t&0\end{pmatrix}$.

3/ Cho đa thức thực $f(x)=2x^3-5x^2+4x-3$. Tính ma trận $f(A)$ nếu $A=\begin{pmatrix}2&-4\\3&2\end{pmatrix}$ hay $A=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$.

4/ Giải các phương trình ma trận thực sau (X là ma trận ẩn phải tìm):

a) $\begin{pmatrix}-1&1&2\\4&0&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&-1\\4&5\end{pmatrix}$. b) $X\begin{pmatrix}1&-4\\0&2\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\-2&3\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}$. d)* $X^2=I_2$.

e) $X-\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}$. f) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. g)* $X^2=X\in M_2(\mathbf{R})$.

h) $\begin{pmatrix}2&-3\\5&-4\end{pmatrix}X+X^t\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-8\\-11&-8\end{pmatrix}$. i) $\begin{pmatrix}3&-4\\-1&2\end{pmatrix}X^t+X\begin{pmatrix}-2&-5\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&11\\8&8\end{pmatrix}$.

5/ Cho các ma trận thực $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ và $D=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

Chứng minh $\forall$n nguyên ≥ 2, $(AB)^n\ne A^nB^n$ và $(CD)^n\ne C^nD^n$.

6/ Cho $A, B, C\in M_n(\mathbf{R})$ và số nguyên $k\ge 1$.
a) Khai triển biểu thức $(5A-2B+3C)(6B-C-4A)(2C+3A+B)$.
b) Giả sử $A^2=A$. Khai triển và rút gọn các biểu thức $(ABA-AB)^2$ và $(ABA-BA)^2$.
c) Giả sử $C^2=I_n$. Tính C^k.

d) Giả sử $A^2 = A$ và $B = (2A - I_n)$. Tính A^k và B^k.
e) Giả sử $A^2 = \mathbf{O}_n$ và $C = (A + I_n)$. Tính C^k và $S_k = I_n + C + C^2 + \cdots + C^k$.
f) Giả sử $A^k = \mathbf{O}_n$ và $AB = BA$. Tính $(AB)^k$ và A^m với m nguyên $\geq k$.
g) Giả sử $AB = \mathbf{O}_n$.Chứng minh $\forall m$ nguyên ≥ 2, $(BA)^m = \mathbf{O}_n$. Cho ví dụ để thấy có thể $BA \neq \mathbf{O}_n$.
h)* Giả sử $A^3 = \mathbf{O}_n = B^4$ và $AB = BA$. Chứng minh $\forall c, d \in \mathbf{R}$, $(cA + dB)^6 = \mathbf{O}_n$.
Tổng quát hóa kết quả trên khi có r, s nguyên ≥ 1 thỏa $A^r = \mathbf{O}_n = B^s$ và $AB = BA$.
i)* Ký hiệu Tr là hàm vết (trace) lấy tổng các hệ số trên đường chéo chính của một ma trận vuông.
Chứng minh $Tr(A \pm B) = Tr(A) \pm Tr(B)$ và $Tr(AB) = Tr(BA)$. Suy ra $\forall c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $(AB - BA) \neq cI_n$.

7/ Dùng phương pháp Gauss - Jordan để xét tính khả nghịch của các ma trận thực sau và tìm ma trận nghịch đảo của chúng (nếu có):

$$a)\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \quad b)\underset{\mathbf{B}}{\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}} \quad c)\underset{\mathbf{C}}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad d)\underset{\mathbf{D}}{\begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}} \quad e)\underset{\mathbf{E}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}} \quad f)\underset{\mathbf{F}}{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}}$$

g) Từ đó tính nhanh $(-4A)^{-1}$, $(A^t)^{-1}$, $(2^{-1}A^{-1})^{-1}$, $(A^3)^{-1}$, $(-A^{-4})^{-1}$, $(BA)^{-1}$, $(A^{-1}B)^{-1}$, $(AB^{-1})^{-1}$ và $(B^{-1}A^{-1})^{-1}$.

8/ Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.
a) Giả sử A khả nghịch. Chứng minh $(A^{-1}BA)^k = A^{-1}B^kA$, $\forall k \geq 1$.
Chứng minh $(A + B)$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ $(I_n + A^{-1}B)$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ $(I_n + BA^{-1})$ khả nghịch.
b)* Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh $A = I_n$.
c)* Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = B^8A^4 = I_n$. Chứng minh $A = I_n = B$.

9/ Áp dụng ma trận khả nghịch để giải các phương trình ma trận thực sau (X là ma trận ẩn phải tìm):

a) $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. b) $X \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. e) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -7 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

g*) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}^{-4}$. h*) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}^3 X^5 \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2$.

10/ Cho $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$, số nguyên $k \geq 1$ và $c, d \in \mathbf{R}$.
a) Giả sử $A^k = \mathbf{O}_n$ và $L = (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$.
Chứng minh $H = (I_n - A)$ khả nghịch và $H^{-1} = L$.
Suy ra $K = (I_n + A)$ cũng khả nghịch và tính K^{-1} theo A.
b) Giả sử $A^2 = cA$ và $cd \neq -1$. Đặt $Q = \left(I_n - \dfrac{d}{cd+1} A \right)$.
Chứng minh $P = (I_n + dA)$ khả nghịch và $P^{-1} = Q$.
c) Giả sử A, B và C khả nghịch.
Tìm X và Y nếu $A^{-5}XB^6 = -7A^{-3}C^2B^4$ và $A^9C^8YB^{-4}C^{-2} = 2A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2}$.

CHƯƠNG III: ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG.

1/ Tính các định thức sau (chúng lần lượt là định thức của các ma trận thực A, B, C và D) :

a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 3m & 2m(1-m) & -7m \\ 4 & 5(1-m) & 2 \\ 2 & 4(m-1) & 4 \end{vmatrix}$ .c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5a & 8 \\ -3b & 2b & 4ab & -6b \\ 2 & -5 & -7a & 5 \\ 4(b-a) & 3(a-b) & 5a(a-b) & 6(b-a) \end{vmatrix}$.

Từ đó suy ra các định thức liên quan $|A^t|$, $|B^5|$, $|C^{-4}|$, $|2D|$, $|-4A|$, $|-3CD^t|$ và $|(B^2)^t(A^t)^{-5}B^3|$.

2*/ Khi nào các ma trận thực sau có định thức bằng 0 ?

a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} x & 1 & x^3 \\ a & 1 & a^3 \\ b & 1 & b^3 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$. e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$. f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

g) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. h) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$. i) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$. j) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ c & a & b & 1 \\ b & c & a & 1 \\ a+b & b+c & c+a & 2 \end{vmatrix}$.

3/ Dùng phương pháp định thức để xét tính khả nghịch của các ma trận thực A, B, C, D, E và F dưới đây rồi tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của chúng:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 13 & -12 & 6 \\ 8 & -7 & 4 \\ -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ .f) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -1 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4/ Khi nào các ma trận thực sau khả nghịch và tìm ma trận nghịch của chúng lúc đó:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} m+3 & 1 & 2 \\ m & m-1 & 1 \\ 3m+3 & m & m+3 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sin a \\ -1 & 1 & -\cos a \\ \sin a & -\cos a & 1 \end{pmatrix}$.

5/ Giải các hệ phương trình tuyến tính thực sau bằng qui tắc CRAMER:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ -4 & 4 & -1 & -22 \\ 2 & 3 & 1 & -11 \end{array}\right)$. b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$. c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$. d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 15 \\ -3 & -5 & 6 & -19 \end{array}\right)$.

6/ Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính thực sau theo tham số thực m bằng qui tắc CRAMER:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{array}\right)$. b) $\left(\begin{array}{cc|c} m & m+2 & m+1 \\ m+2 & -1 & 0 \end{array}\right)$. c) $\left(\begin{array}{cc|c} m+1 & 1 & m+2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{array}\right)$. d) $\left(\begin{array}{cc|c} 2m+5 & 9 & m \\ -3 & m-4 & 1-m \end{array}\right)$.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5-m & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3m-1 & m+3 & 4 & 2 \end{array}\right)$. f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 4m-2 & -1 \\ 3 & m+1 & -9 & 0 \end{array}\right)$. g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 3 & 2 \end{array}\right)$. h) $\left(\begin{array}{ccc|c} m^2 & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 0 \\ m & 1 & m & -1 \end{array}\right)$.

<u>CHƯƠNG IV:</u> KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$.

1/ Tập hợp nào dưới đây là không gian vector con của $\mathbf{R}^n$ (n = 3, 4, 5) ? Tại sao ?

a) $W = \{ X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ 2x - |y| + 3z = 0 \}$. b) $W = \{ X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ xy + yz + zx = 0 \}$.

c) $W = \{ X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ y - 4x + 3z = 0 = 5x + 8y - 7z \}$.

d) $W = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ / \ x - y + 9z = 3t - x - z = 2t - 7y - 5z = 8x + 4y - t \}$.

e) $W = \{ X = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ / \ x + 5y - 2z - 4t \le 0 \}$. f) $W = \{ X = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ / \ x^2 - y + 3z - t^3 \ge 1 \}$.

g) $W = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ / \ (5x + 4y + z - 6t)^2 + (9x - y + 7z + 2t)^2 + (8x - 6y + 3z - t)^2 \le 0 \}$.

h) $W = \{ X = (x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 \ / \ 3x = -2y = 6z = -9t = 4u \}$.

2/ Khi nào $\alpha = (u, v, w)$ [hay $\alpha = (u, v, w, t)$] $\in W = < S >$ nếu:

a) $S = \{ X = (1, 1, 2), Y = (2, 3, 3) \} \subset \mathbf{R}^3$. b) $S = \{ X = (3,1,-1), Y = (-1,-5,7), Z = (1,-2,3) \} \subset \mathbf{R}^3$.

c) $S = \{ X = (1, 2, 1, 0), Y = (2, 1, 0, 1), Z = (0, 1, 2, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

d) $S = \{ X = (-2, 1, 3, -1), Y = (1, 4, 0, -3), Z = (-3, 6, 6, -5), T = (2, -1, -3, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

3/ Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp dưới đây:

a) $S = \{ X = (3, 1, -1), Y = (-1, -5, 7), Z = (1, -2, 3), T = (9, 0, 4) \} \subset \mathbf{R}^3$.

b) $S = \{ X = (-3, 2, 7,-1), Y = (9,-6,-21, 3) \} \subset \mathbf{R}^4$. c) $S = \{ X = (2,-1, 0, 9), Y = (-5, 7, 3,-4) \} \subset \mathbf{R}^4$.

d) $S = \{ X = (-1, -1, -7, 2), Y = (5, -1, 1, 18), Z = (-5, 2, 8, -16) \} \subset \mathbf{R}^4$.

e) $S = \{ X = (1, -2, 3, -4), Y = (3, 3, -5, 1), Z = (-5, -8, 13, -6) \} \subset \mathbf{R}^4$.

f) $S = \{ X = (1, 2, 3m + 1), Y = (3, 1, m - 3), Z = (m + 5, 2, -4) \} \subset \mathbf{R}^3$.

4/ Tập hợp nào dưới đây là cơ sở của $\mathbf{R}^3$? (s = sinx và c = cosx):

a) $S = \{ X = (-3,2,7), Y = (8,-2,3) \}$. b) $S = \{ X = (-1,-1,-7), Y = (5,-1,1), Z = (-5,2,8), T = (4,0,-3) \}$.

c) $S = \{ X = (3,2,1), Y = (2,-1,-1), Z = (12, 1,-1) \}$. d) $S = \{ X = (2,-3,1), Y = (4,-5,-2), Z = (5,-7,3) \}$.

e) $S = \{ X = (1,1,-c), Y = (1,-1,s), Z = (s,-c,1) \}$. f) $S = \{ X = (0,-1,-s), Y = (1,0,c), Z = (-s,c,0) \}$.

5/ Giải thích B là một cơ sở của không gian $W = < B > \le V = \mathbf{R}^n$ (n = 3, 4, 5) rồi tìm điều kiện để:
$\alpha = (u, v, w)$ [hay $\alpha = (u, v, w, t)$ hay $\alpha = (u, v, w, t, z)$] $\in W$.
Nếu $W \ne V$, hãy bổ sung các vector vào B để được một cơ sở C của V.

a) $B = \{ X = (2, 3,-1), Y = (-4,-6, 5) \}(V = \mathbf{R}^3)$. b) $B = \{ X = (0, 3, 1,-2), Y = (0, 9, 3,-8) \}(V = \mathbf{R}^4)$.

c) $B = \{ X = (-1, 4, 2, -5), Y = (2, -5, -3, 9), Z = (1, 2, -1, 4) \}(V = \mathbf{R}^4)$.

d) $B = \{ X = (0, -2, 1, -7, 3), Y = (0, 6, 0, 25, -10), Z = (0, -4, -13, -34, 13) \}(V = \mathbf{R}^5)$.

e) $B = \{ X = (1, 2, -5, -2, 3), Y = (4, 8, -16, -7, 6) \}(V = \mathbf{R}^5)$.

6/ Tìm một cơ sở B cho không gian $W = < S > \le V = \mathbf{R}^n$ (n = 3, 4) rồi tìm điều kiện để $\alpha = (u,v,w) \in W$
[hay $\alpha = (u, v, w, t) \in W$]. Nếu $W \ne V$, hãy bổ sung các vector vào B để được một cơ sở C của V:

a) $S = \{ X = (2, -3, 1), Y = (3, -1, 5), Z = (1, -5, -3) \} \subset \mathbf{R}^3$.

b) $S = \{ X = (1, 2, -3), Y = (-2, -1, 4), Z = (-3, 0, 5), T = (2, 7, -8) \} \subset \mathbf{R}^3$.

c) $S = \{ X = (-1, -2, 4, 0), Y = (2, 3, 3, -1), Z = (1, -4, 2, -3), T = (-1, 9, 3, 5) \} \subset \mathbf{R}^4$.

d) $S = \{ X = (2, -17, 43, -12), Y = (0, 5, 5, 2), Z = (-1, 11, -19, 7), T = (1, -1, 29, -3) \} \subset \mathbf{R}^4$.

7/ Chỉ ra một tập sinh hữu hạn S cho W để thấy $W \le V = \mathbf{R}^n$ (n = 3, 4).
Sau đó tìm một cơ sở B cho $W = < S >$ rồi tìm điều kiện để $\alpha = (u, v, w)$ [hay $\alpha = (u, v, w, t)$] $\in W$?
Nếu $W \ne V$, hãy bổ sung các vector vào B để được một cơ sở C của V:

a) $W = \{ U = (2a + 3b + c, -3a - b - 5c, a + 5b - 3c) / a, b, c \in \mathbf{R} \}$.
b) $W = \{ U = (a - 2b - 3c + 2d, 2a - b + 7d, -3a + 4b + 5c - 8d) / a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$.
c) $W = \{ U = (-a + 2b + c - d, -2a + 3b - 4c + 9d, 4a + 3b + 2c + 3d, 5d - b - 3c) / a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$.
d) $W = \{ U = (2a - c + d, 5b - 17a + 11c - d, 5b + 43a - 19c + 29d, 2b - 12a + 7c - 3d) / a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$.

8/ Tìm một cơ sở B cho không gian $W = \{ X \in \mathbf{R}^n / AX = \mathbf{O} \}$ (n = 4, 5) nếu A là:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 3 & -20 \\ 3 & 7 & 22 & 15 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & -11 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

Nếu $W \neq \mathbf{R}^n$, hãy bổ sung thêm các vector vào B để có một cơ sở C của $\mathbf{R}^n$.

9/ Kiểm tra S và T là các cơ sở của $\mathbf{R}^3$ rồi viết các ma trận đổi cơ sở $(S \to T)$ và $(T \to S)$.
Tìm X, $[X]_T$, $[Y]_S$, $[Y]_T$, Z và $[Z]_S$ nếu:
a) $S = \{ X_1 = (-1,1,2), X_2 = (2,-1,2), X_3 = (1,0,3) \}$, $T = \{ Y_1 = (2,5,-2), Y_2 = (2,1,-3), Y_3 = (1,-2,-2) \}$.

$$[X]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; Y = (4, 1, -2) \text{ và } [Z]_T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $S = \{ X_1 = (1,1,0), X_2 = (0,1,1), X_3 = (1,0,1) \}$, $T = \{ Y_1 = (-1,0,0), Y_2 = (1,-1,0), Y_3 = (1,1,-1) \}$.

$$[X]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \; Y = (3, -4, 0) \text{ và } [Z]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10/ Cho $S = \{ X, Y, Z \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ và $T = \{ E, F, G \} \subset \mathbf{R}^3$.
Kiểm tra T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ rồi viết các ma trận đổi cơ sở $(S \to T)$ và $(T \to S)$ nếu
a) $E = 2X - 2Y - 3Z$, $F = -3X + 2Y + 4Z$ và $G = -4X + 3Y + 6Z$.
b) $X = E - F + G$, $Y = 3E - F + 2G$ và $Z = E + 3F + G$.

11*/ Cho $S = \{ X = (a, c), Y = (b, d) \} \subset \mathbf{R}^2$ thỏa $ab + cd = 0$ và $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$.
Chứng minh S là một cơ sở của không gian vector $\mathbf{R}^2$. Tìm $[Z]_S$ nếu $Z = (u, v) \in \mathbf{R}^2$.

12*/ Cho $V = \mathbf{R}^3$ (hay $V = \mathbf{R}^4$) và $X = (u,v,w)$ [hay $X = (u,v,w,t)$] $\in V$. Xét $S, T \subset V$ và $W = \langle S \rangle \leq V$.
Tìm điều kiện để $X \in W$ rồi giải thích S và T là các cơ sở của W. Tính $[X]_S$ (khi $X \in W$) và viết ma trận đổi cơ sở $(S \to T)$. Từ đó suy ra ma trận đổi cơ sở $(T \to S)$ và $[X]_T$:
a) $S = \{ Y = (3, 2, 1), Z = (-1, 1, 2) \}$ và $T = \{ E = (1, 4, 5), F = (-2, -3, -3) \}$.
b) $S = \{ Y = (1, 1, -1, 0), Z = (-2, 3, 4, 1), U = (-1, 4, 3, 2) \}$ và
$T = \{ E = (1, 1, -1, -1), F = (2, 7, 0, 3), G = (3, 8, -1, 3) \}$.

13*/ Cho $H, K \leq \mathbf{R}^4$ và các ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 12 & 3 \\ 4 & 4 & 17 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{và } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 2 & 2 & -9 & -13 \\ 3 & 3 & -14 & -19 \\ 5 & 5 & -23 & -32 \end{pmatrix}.$$

Tìm một cơ sở cho H, K, (H + K) và (H ∩ K) nếu:

a) H = < S >, K = < T >, S = { Y = (1,2,0,1), Z = (1,1,1,0) } và T = { E = (1,0,1,0), F = (1,3,0,1) }.
b) H = < S >, K = < T >, S = { Y = (1, 2, 1, 0), Z = (2, – 1, 0, 1), U = (– 1, 1, 1, 1), P = (1, 1, 1, 1) } và T = { E = (1, 2, 0, 1), F = (2, 1, 3, 1), G = (7, 8, 9, 5) }.
c) H = < S >, K = < T >, S = { Y = (1, 1, 1, 1), Z = (1, – 1, 1, – 1), U = (1, 3, 1, 3) } và T = { E = (1, 2, 0, 2), F = (1, 2, 1, 2), G = (3, 1, 3, 1) }.
d) H = < S >, S = { Y = (3, 6, 0, 2), Z = (– 1, – 1, 3, 3), U = (2, 3, 2, 4), E = (– 5, – 9, – 2, – 6) } và K = { X ∈ $\mathbf{R}^4$ / AX = **O** }.
e) H = { X ∈ $\mathbf{R}^4$ / BX = **O** } và K = { X ∈ $\mathbf{R}^4$ / CX = **O** }.

14*/ Cho H, K ≤ $\mathbf{R}^n$. Đặt L = (H ∪ K) ⊂ $\mathbf{R}^n$.
a) Chứng minh L ≤ $\mathbf{R}^n$ ⇔ (H ⊂ K hay K ⊂ H).
b) Cho một ví dụ cụ thể mà trong đó L không phải là một không gian con của $\mathbf{R}^n$.

CHƯƠNG V: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH.

1/ $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ có các cơ sở chính tắc lần lượt là A, B và C.
a) Cho f (u,v,w) = (u–2v+3w, v–w+3u, 4w–2u–3v, 5u–3v+5w), ∀(u,v,w) ∈ $\mathbf{R}^3$. Giải thích f ∈ L($\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$) và viết $[\,f\,]_{B,C}$. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào Y = (x, y, z, t) ∈ Im(f) ?
b) Giải thích D = { $\delta_1 = (-4,3)$, $\delta_2 = (-3,2)$ } và E = { $\alpha_1 = (1,-2,2)$, $\alpha_2 = (3,-2,3)$, $\alpha_3 = (2,-3,3)$ } lần lượt là các cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$. Xét g, h ∈ L($\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$) có $[\,g\,]_{A,B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ và $[\,h\,]_{D,E} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Tìm biểu thức của g và viết $[\,g\,]_{D,B}$, $[\,g\,]_{A,E}$ và $[\,g\,]_{D,E}$.
c) Viết $[\,h\,]_{D,B}$, $[\,h\,]_{A,E}$ và $[\,h\,]_{A,B}$ rồi suy ra biểu thức của h.

2/ $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ có các cơ sở chính tắc lần lượt là A, B và C.
a) Cho f (u,v,w,t) = (2v+4w–u–3t, 2u+v–2w+5t, 3u+4v+7t), ∀(u,v,w,t) ∈ $\mathbf{R}^4$. Giải thích f ∈ L($\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^3$) và viết $[\,f\,]_{C,B}$. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào Y = (x, y, z) ∈ Im(f) ?
b) Giải thích D = { $\delta_1 = (5,2)$, $\delta_2 = (3,1)$ } và E = { $\alpha_1 = (-5,1,-3)$, $\alpha_2 = (3,-1,2)$, $\alpha_3 = (1,0,1)$ } lần lượt là các cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$. Xét g,h ∈ L($\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^2$) có $[\,g\,]_{B,A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ và $[\,h\,]_{E,D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm biểu thức của g và viết $[\,g\,]_{B,D}$, $[\,g\,]_{E,A}$ và $[\,g\,]_{E,D}$.
c) Viết $[\,h\,]_{B,D}$, $[\,h\,]_{E,A}$ và $[\,h\,]_{B,A}$ rồi suy ra biểu thức của h.

3/ $\mathbf{R}^3$ có cơ sở chính tắc là B.
a) Cho f (u,v,w) = (u–3w+3v, v+w+2u, –10u–12w), ∀(u,v,w) ∈ $\mathbf{R}^3$. Giải thích f ∈ L($\mathbf{R}^3$) và viết $[\,f\,]_B$. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào Y = (x, y, z) ∈ Im(f) ?

b) Giải thích E = { $\alpha_1 = (1,0,2)$, $\alpha_2 = (2,-2,1)$, $\alpha_3 = (3,-3,2)$ } là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Xét g, h ∈ L($\mathbf{R}^3$) có

$$[\,g\,]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } [\,h\,]_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$. Tìm biểu thức của g và viết $[\,g\,]_{E,B}$, $[\,g\,]_{B,E}$ và $[\,g\,]_E$.

c) Viết $[\,h\,]_B$, $[\,h\,]_{B,E}$ và $[\,h\,]_{E,B}$ rồi suy ra biểu thức của h. Xác định các không gian Im(h) và Ker(h).

4/ $\mathbf{R}^3$ có cơ sở chính tắc là B.

a) Cho f (u,v,w) = (u+2w+3v, 4v+w+2u, 3u+7v+3w), $\forall$(u,v,w) $\in \mathbf{R}^3$. Giải thích f $\in$ L($\mathbf{R}^3$) và viết $[\,f\,]_B$.
Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f). Khi nào Y = (x, y, z) $\in$ Im(f) ?

b) Giải thích E = { α_1 = (–3,0,2), α_2 = (4,1,–3), α_3 = (6,1,–4) } là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Xét g, h $\in$ L($\mathbf{R}^3$) có

$$[\,g\,]_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ và } [\,h\,]_E = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$. Tìm biểu thức của g và viết $[\,g\,]_{E,B}$, $[\,g\,]_{B,E}$ và $[\,g\,]_E$.

c) Viết $[\,h\,]_B$, $[\,h\,]_{B,E}$ và $[\,h\,]_{E,B}$ rồi suy ra biểu thức của h. Xác định các không gian Im(h) và Ker(h).

5*/ $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ có các cơ sở chính tắc lần lượt là B và C.

a) Giải thích E = { α_1 = (2, – 1, 5), α_2 = (– 1, 0, – 1), α_3 = (– 4, – 2, 1) } là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.
Tìm $[\,\alpha\,]_E$ nếu α = (u, v, w) $\in \mathbf{R}^3$.

b) Cho β_1 = (– 2, 3, 1), β_2 = (1, 0, – 3) và β_3 = (3, 4, 1) $\in \mathbf{R}^3$.
Tìm f $\in$ L($\mathbf{R}^3$) thỏa f (α_j) = β_j , $\forall$ j = 1, 2, 3 (dùng $[\,\alpha\,]_E$ hay $[\,f\,]_{E,B}$).

c) Cho γ_1 = (1, – 1, 0, 1), γ_2 = (– 2, 1, 3, 0) và γ_3 = (3, 0, – 4, – 1) $\in \mathbf{R}^4$.
Tìm g $\in$ L($\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$) thỏa g(α_j) = γ_j , $\forall$ j = 1, 2, 3 (dùng $[\,\alpha\,]_E$ hay $[\,g\,]_{E,C}$).

Ghi chú: *Các bài và các câu có dấu * là để làm thêm nhằm nâng cao kỹ năng và kiến thức.*