Pregledni članak | Review Paper | UDK 556.535.06
Primljeno (Received): 26.8.2014.; Prihvaćeno (Accepted): 24.4.2015.

MODELIRANJE MORFOLOGIJE OTVORENIH KORITA ZA PROVEDBU JEDNODIMENZIJSKE ANALIZE TOKA

doc. dr. sc. Vanja Travaš, dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci
Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka
vanja.travas@uniri.hr

Nino Krvavica, dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci
Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

Josip Rubeša, dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci
Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

U radu je predložen protokol za modeliranje geometrije otvorenih korita putem kojeg se definiraju geometrijske veličine potrebne za provedbu jednodimenzijske analize stacionarnog ili nestacionarnog tečenja u koritima općenitog i varijabilnog poprečnog presjeka. U tu se svrhu geometrija korita rekonstruira iz zadanih, odnosno izmjerenih poprečnih presjeka koji se mogu nalaziti na različitim stacionažama i koji mogu imati različiti broj mjernih točaka. Priprema geometrije korita za 1D analizu toka započinje interpolacijom poprečnih presjeka te se u tu svrhu ispitala linearna, kvadratna, kubična i Hermiteova interpolacija. Geometrija korita se definira Hermiteovom interpolacijom te se u tu svrhu tangente interpolacijskih krivulja na poprečnim presjecima definiraju tako da se omogući adaptacija simetrale modela korita sa simetralom modeliranog korita. Uzorkovanje poprečnih presjeka za 1D analizu toka se bazira na poznatim obrascima iz analitičke i diferencijalne geometrije. Protokol je implementiran u programskom paketu MathCAD 15 te se koristio u svrhu izrade primjera koji prate izlaganje sadržaja rada.

Ključne riječi: Bézierova interpolacija, Hermiteova interpolacija, linearna interpolacija, kvadratna interpolacija, kubična interpolacija, jednodimenzijska analiza toka, modeliranje otvorenih korita

1. UVOD

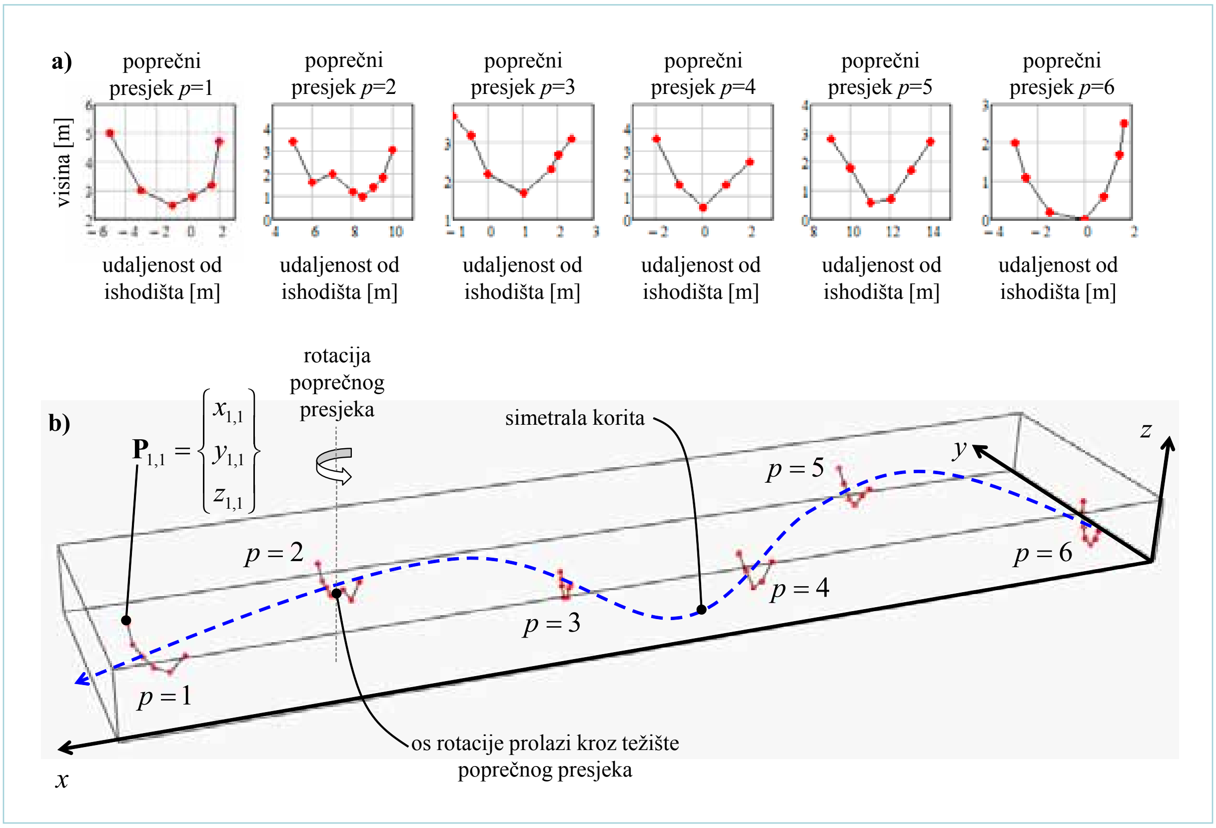
Neovisno o dimenzionalnosti teorijskog, pa onda i numeričkog modela strujanja u otvorenim koritima, modeliranje ovakvih hidrodinamičkih procesa u prvom redu iziskuje definiranje prostorne domene toka, odnosno geometrije otvorenog korita. Ako se razmatranja ograniče na jednodimenzijske modele strujanja, kao što je slučaj u ovom radu, modeliranje strujanja vode u otvorenim koritima iziskuje definiranje funkcijske zavisnosti između dubine vode $h(x)$ u svakom proračunskom presjeku na koordinati x i rezultirajućih geometrijskih, odnosno hidrauličkih veličina. Gotovo redovito se navedeno svodi na aproksimiranje funkcije *živog presjeka* $A(h,x)$, tj. funkcije poprečne površine protočnog presjeka okomite na lokalni vektor srednje brzine toka $\mathbf{v}_{sr}$; te za takvu površinu treba još aproksimirati funkciju omočenog oboda $O(h,x)$ i funkciju ostvarene širine vodnog lica $B(h,x)$, potrebne za kategorizaciju toka obzirom na Froudeov broj. Naravno, ukoliko se tok odvija u prizmatičnom koritu, tj. u koritu konstantnog pada i poprečnog presjeka potrebno je definirati funkcije samo za jedan poprečni presjek. Štoviše, ako se tok odvija u prizmatičnom koritu u kojem se navedene funkcijske zavisnosti mogu definirati poznatim eksplicitnim funkcijama (Szymkiewicz, 2010), kao što je slučaj pravokutnog, trapeznog ili polukružnog poprečnog presjeka, preliminarna digitalna rekonstrukcija geometrije korita nije potrebna za provedbu 1D analize toka. S druge strane, ukoliko se razmatra strujanje vode u koritu kojem je poprečni presjek nepravilan te još i varijabilan, modeliranje geometrije korita je neophodno (Sanders i Chrysikopoulos, 2004).

Zadatak modeliranja geometrije otvorenog korita se u suštini svodi na adekvatno interpoliranje izvodnica korita između izmjerenih poprečnih presjeka (Chow, 1959; Merwade, 2004). Neovisno o tome jesu li poprečni presjeci izmjereni putem relativno malog broja mjerenja s mjernom letvom ili modernim ADCP uređajima, poprečni presjeci ne moraju nužno imati isti broj izmjerenih točaka te ih je stoga potrebno prethodno interpolirati, odnosno pripremiti za digitalnu rekonstrukciju morfologije korita. Jedan se dio ovog rada odnosi na postupak digitalne rekonstrukcije korita, a preostali dio je posvećen obradi modela, odnosno procesu uzorkovanja poprečnih presjeka koji su potrebni za provedbu jednodimenzijske analize toka, a koji su dobiveni iz geometrijskog modela korita. Pritom je postupak interpolacije korita osmišljen tako da osigura mogućnost parametarske intervencije u vidu modeliranja geometrije korita, odnosno u svrhu prilagođavanja dobivenog digitalnog modela korita s geometrijom korita koja se nastoji reproducirati. Jednom kada je ovaj postupak proveden sa zadovoljavajućom točnošću, u nastavku se provodi uzorkovanje poprečnih presjeka za provedbu jednodimenzijske analize toka. Ovakvi se poprečni presjeci mogu kasnije koristiti za analizu toka koristeći uobičajene softverske pakete za analizu toka u otvorenim koritima (UNET, 2001; USACE, 2002). Ovakve analize se provode pod pretpostavkom da su linijski gubitci u svakom protočnom presjeku isti kao pri jednolikom strujanju. Osim navedenog, pretpostavlja se da je srednja brzina toka $\mathbf{v}_{sr}$ konstantna i jednaka po cijelom *živom* presjeku A te da je koeficijent hrapavosti konstantan i neovisan o lokalnoj dubini vode h. U skladu s navedenim, postepene promjene u toku uvjetuju okomitost strujnica u svim živim presjecima A, što posljedično opravdava i pretpostavku hidrostatskog rasporeda tlakova. Naime, u navedenim okolnostima je zakrivljenost strujnica zanemariva (Chaudhry, 2008.).

2. INTERPOLACIJA POPREČNIH PRESJEKA

Digitalna rekonstrukcija morfologije korita se provodi za područja između izmjerenih poprečnih presjeka. Ukoliko se s n_p označi broj izmjerenih, odnosno zadanih poprečnih presjeka, broj segmenata korita n_s za koje je potrebno provesti interpolaciju iznosi $n_p - 1$ (pod pretpostavkom da se ne radi o mreži vodotoka). Pritom se usvajaju polazne pretpostavke (*I.*) da su izmjereni poprečni presjeci karakteristični za pojedine dionice korita, (*II.*) da su izmjereni obzirom na neko unaprijed određeno referentno ishodište te (*III.*) da leže u ravnini okomitoj na lokalni vektor brzine $\mathbf{v}_{sr}$. Na taj se način svaki poprečni presjek, indeksiran oznakom p, definira serijom točaka $\mathbf{P}_{p,i} = \{x_{p,i}\ y_{p,i}\ z_{p,i}\}^T$ gdje i označava redni broj točke mjerenja presjeka p. Iako se u sklopu digitalne obrade ovakvih podataka može intervenirati u preslagivanju koordinata, prikladno je očuvati ustaljenu praksu mjerenja poprečnih presjeka korita u kojoj se prva točka mjerenja odnosi uvijek na istu stranu korita. Ovo je neophodno za automatizaciju izrade digitalnog modela korita iz relativno velike serije izmjerenih poprečnih presjeka, kao što je slučaj za relativno duga korita ili pak manja korita koja zahtijevaju veći broj poprečnih presjeka zbog izraženih izmjena u geometriji toka. Osim navedenog, numeracija, odnosno indeksacija poprečnih presjeka $p = [1,2,...,n_p]$ mora biti kontinuirana po simetrali korita. U ilustrativne svrhe je na slici 1 prikazan hipotetski slučaj korita definiran sa 6 poprečnih presjeka. Na slici 1b je prikazan prostorni raspored zadanih poprečnih presjeka, a na slici 1a geometrija poprečnih presjeka u ravnini okomitoj na smjer lokalnog vektora brzine $\mathbf{v}_{sr}$.

Broj točaka na poprečnim presjecima je najčešće uvjetovan samom geometrijom poprečnih presjeka, odnosno brojem izmjena nagiba stijenki korita u ravnini poprečnih presjeka. Drugim riječima, točke se na poprečnim presjecima moraju nalaziti na mjestima karakterističnih izmjena u geometriji poprečnih presjeka. Iz tog se razloga za korita prirodnog podrijetla rijetko događa da dva susjedna poprečna presjeka imaju isti broj izmjerenih točaka, te je iz tog razloga u ilustrativne svrhe i usvojen primjer u kojem broj točaka susjednih poprečnih presjeka ne koincidira (slika 1). S druge strane, kako bi se mogla provesti uzdužna interpolacija izvodnica korita,

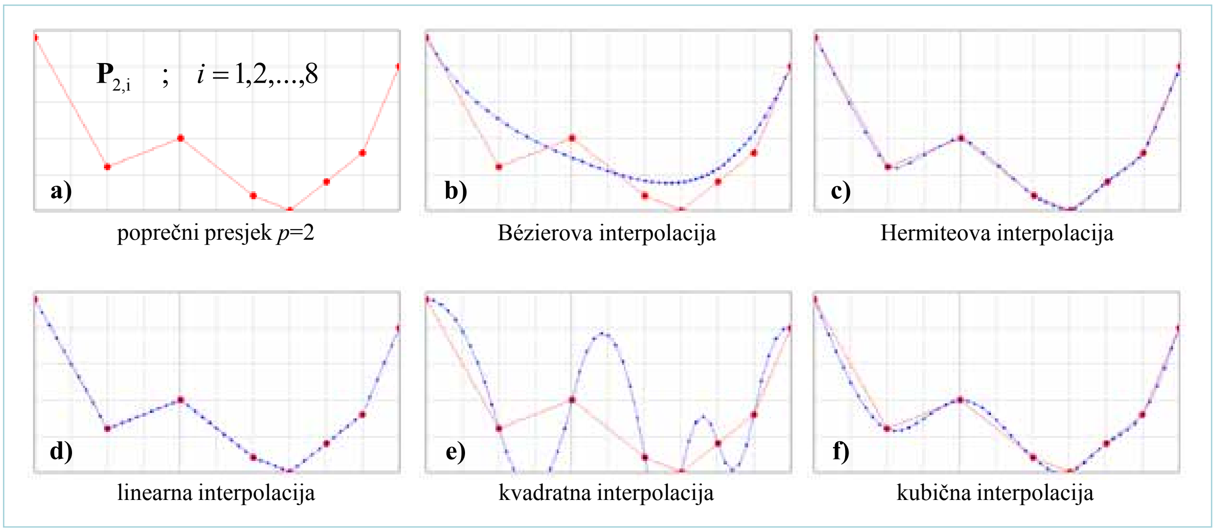


Slika 1: Hipotetsko korito definirano sa 6 poprečnih presjeka: a) geometrija poprečnih presjeka u ravnini okomitoj na smjer lokalnog vektora brzine $\mathbf{v}_{sr}$, b) prostorni raspored zadanih poprečnih presjeka.

između točaka s istim rednim brojem dvaju susjednih poprečnih presjeka, broj točaka na poprečnim presjecima je potrebno uskladiti putem interpolacije poprečnih presjeka. U tu svrhu Chown (1959.) predlaže da se za relativno mala korita prirodnog podrijetla interpolacija točaka poprečnog presjeka između izmjerenih točaka provede kvadratnom interpolacijom, ali treba napomenuti da su u literaturi poznate i primijenjene interpolacije višeg reda (Western et al., 1997; Buhman et al., 2002). Očito je da izbor interpolacije mora biti takav da opiše nedostajuću geometriju poprečnog presjeka te se tako ne može generalizirati. Naime, ponekad je zakrivljenost prirodnih korita takva da iziskuje interpolaciju višeg reda, a ponekad može biti i takva da iziskuje interpolaciju prvog reda, (što je prvenstveno slučaj poprečnih presjeka reguliranih dionica vodotoka).

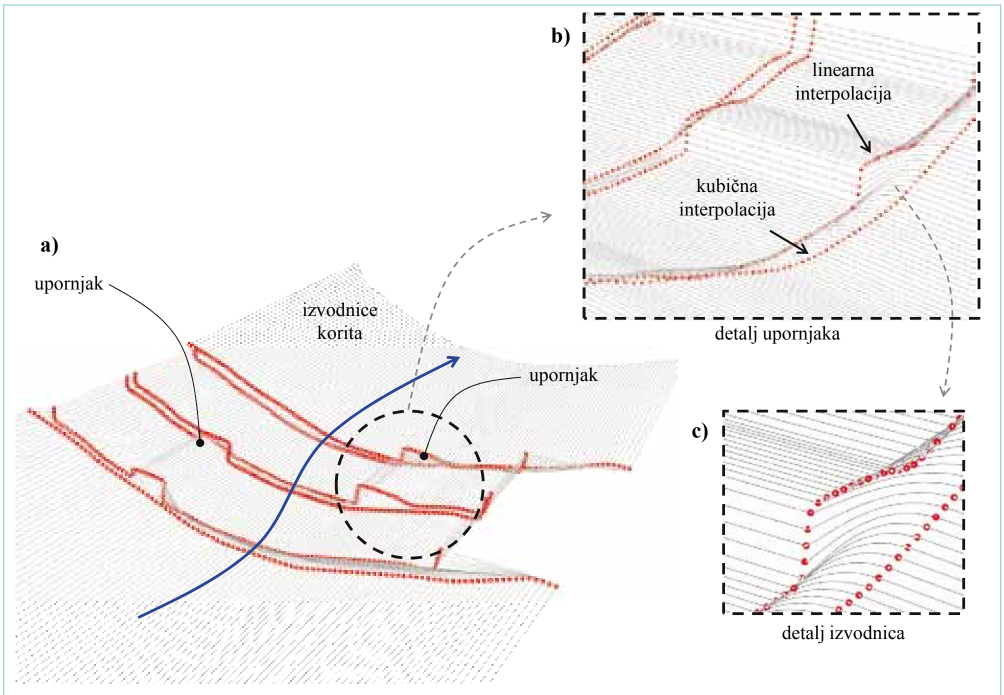
Interpolaciju poprečnih presjeka je najprikladnije provesti u ravnini. Pritom, obzirom da su zadani poprečni presjeci definirani u prostoru te obzirom da svaki od njih ima stanoviti kut zaokreta, obzirom na neku unaprijed definiranu vertikalnu referentnu ravninu, iste je potrebno rotirati tako da postanu paralelni s referentnom ravninom. Naime, na taj način jedna prostorna koordinata svih točaka poprečnih presjeka postaje konstantna, a preostale dvije koordinate se nalaze u ravnini u kojoj se provodi interpolacija. U napisanom programskom algoritmu (Mathsoft, 1993.) *yz* ravnina je usvojena kao referentna ravnina (slika 1). Proces rotacije poprečnih presjeka započinje određivanjem kuta između ravnine u kojoj su poprečni presjeci definirani i referentne ravnine. Nakon toga se svaki poprečni presjek rotira oko vertikalne osi koja prolazi kroz njegovo težište. Jednom kada se poprečni presjeci nalaze u paralelnim ravninama, postupak interpolacije se može poopćiti. Kako bi se prikazao utjecaj izbora interpolacije na geometriju poprečnih presjeka, na slici 2 je prikazan poprečni presjek $p = 2$ iz prethodnog primjera (slika 1) te 5 interpolacijskih varijanti. U svrhu komparativne analize provela se Bézierova interpolacija, Hermiteove interpolacija te linearna, kvadratna i kubična interpolacija (Press et al., 2002.; Salleh et al., 2008.).

Lako je primijetiti da kvadratna interpolacija (slika 2e) oslikava nerealno korito te da Bézierova interpolacija (slika 2b) definira korito koje značajno odstupa od zadanih točaka pa se iz tog razloga i ona isključuje iz daljnjih razmatranja (iako to za Bézierovu interpolaciju ne mora nužno uvijek biti slučaj). Sve ostale interpolacije se mogu uzeti u obzir kao potencijalno prikladne interpolacije te je jasno da je izbor najprikladnije uvjetovan realnom geometrijom korita koje se nastoji rekonstruirati. Zaključno bi se trebalo apostrofirati da izbor interpolacije poprečnih presjeka ne mora biti isti za sve izmjerene



Slika 2: a) Poprečni presjek $p = 2$ iz primjera prikazanog na slici 1 i pet varijanti interpolacija prikazanih plavom linijom: b) Bézierova, c) Hermiteova, d) linearna, e) kvadratna i f) kubična interpolacija.

poprečne presjeke te bi se trebao prilagođavati od poprečnog presjeka do poprečnog presjeka ovisno o tome radi li se o poprečnom presjeku snimljenom na segmentu korita prirodnog podrijetla ili na segmentu korita koji je reguliran. Naime, na reguliranom segmentu korita se linearna interpolacija može pokazati kao najprikladnija, posebno u slučaju pravilnog poprečnog presjeka kao što je pravokutni ili trapezni. S druge strane, iako se izbor interpolacije može i treba mijenjati, odnosno prilagođavati uzduž korita, broj točaka na svakom poprečnom presjeku mora na kraju koincidirati, i to u svrhu provedbe konzistentne interpolacije izvodnica korita. Ovaj zahtjev nameće još nekoliko geometrijskih adaptacija vezanih za preliminarnu obradu zadanih poprečnih presjeka. Naime, treba primijetiti da metodologija interpoliranja poprečnih presjeka linearnom ili kubičnom interpolacijom (slika 2 d i 2 f) iziskuje zadavanje ukupnog broja točaka uzduž interpoliranog poprečnog presjeka, dok metodologija Hermiteove interpolacije iziskuje zadavanje broja točaka između dvije susjedne izmjerene točke. Iz tog će razloga ukupni broj točaka kod Hermiteove interpolacije zavisiti o ukupnom broju segmenta koji dotični poprečni presjek ima te ne mora nužno odgovarati broju točaka koji se nalazi na ostalim poprečnim presjecima koji su interpolirani nekom drugom interpolacijskom metodom. U prilog navedenom se mogu usporediti rezultati interpolacija prikazani na slikama 2 c i 2 f koji su vrlo slični po geometriji (plava linija), a opet se bitno razlikuju



Slika 3: a) Ilustracija interpolacije poprečnog presjeka prirodnog korita i poprečnog presjeka na mjestu upornjaka, b) detalj upornjaka te c) detalj izvodnica između spoja poprečnog presjeka prirodnog podrijetla i poprečnog presjeka s upornjakom.

po rasporedu interpoliranih točaka (plave točke). Radi navedenog je potrebno provesti dodatnu diskretizaciju interpoliranih poprečnih presjeka, tj. potrebno je poprečne presjeke interpolirane plavom krivuljom na slici 2 podijeliti na jednaki broj segmenata. Nakon što je diskretizacija poprečnih presjeka provedena, iste je potrebno vratiti, tj. rotirati u ravnine koje definiraju poprečne presjeke u prostoru. Sve navedeno dovodi do poprečnih presjeka koji su zadani u prostoru s jednakim brojem točaka, te su točke jednoliko raspoređene po presjeku.

Opisani postupak je posebno koristan kada se u jednodimenzijskim modelima želi uzeti u obzir prisustvo upornjaka ili stupova mosta koji na nekoj stacionaži prelaze preko korita (Brunner, 2002.). Naime, prisustvo upornjaka ili stupova može značajno smanjiti protočnu površinu, a time i propusnu moć korita. U tom je slučaju potrebno modelirati poprečne presjeke koji se nalaze neposredno ispred upornjaka te zasebno poprečne presjeke kod kojih je upornjak sastavni dio. Pritom, obzirom da je projekcija upornjaka u ravninu okomitu na lokalni vektor brzine $\mathbf{v}_{sr}$ najčešće pravilnog, odnosno linijskog oblika (i za cilindrične upornjake ili stupove), ove poprečne presjeke je dobro interpolirati linearnom interpolacijom, a poprečne presjeke ispred i iza upornjaka interpolacijom koja odgovara geometriji korita na tom mjestu. Ako je riječ o koritu prirodnog podrijetla, tada se kubična ili Hermiteova interpolacija mogu smatrati najprikladnijim. Primjer navedenog je ilustriran na slici 3 na kojoj su prikazani poprečni presjeci neposredno prije upornjaka i poprečni presjek s upornjacima.

3. INTERPOLACIJA IZVODNICA KORITA

Nakon interpolacije i diskretizacije zadanih poprečnih presjeka provodi se interpolacija izvodnica korita. Dva su osnovna razloga zbog kojih se kubična Hermiteova interpolacija predlaže za provedbu rekonstrukcije izvodnica korita. Prvi razlog leži u činjenici da ovaj vid interpolacije osigurava kontinuiranost izvodnica i kontinuiranost prve derivacije izvodnica (atraktivna u svrhu osiguravanja glatkih funkcija u opisu geometrije toka). Drugi razlog slijedi iz motivacije za uvođenjem parametarskog opisa geometrije korita te će se isti podrobnije prikazati putem diskusije koja slijedi u nastavku. Valja još napomenuti da se Hermiteova interpolacija već pokazala izuzetno atraktivnom u oblasti računalne grafike, tj. u postupku digitalizacije geometrije različitih objekata (Catmull i Rom, 1974.).

Interpolacija izvodnica korita se provodi između točaka s istim rednim brojem i koje se nalaze na dva susjedna poprečna presjeka p i p+1, odnosno između točaka s koordinatama $\mathbf{P}_{p,i}$ i $\mathbf{P}_{p+1,i}$. Ukupni broj točaka i na ova dva presjeka mora unaprijed koincidirati što se postiže prethodno komentiranom interpolacijom i diskretizacijom poprečnih presjeka. Prostorna orijentacija izvodnice na mjestu izlaska iz točke $\mathbf{P}_{p,i}$ je definirana tangentom $\mathbf{m}_{p,i}$ u toj istoj točki, te je isto tako unaprijed potrebno definirati tangentu $\mathbf{m}_{p+1,i}$ tj. kutove prilaska izvodnice točki $\mathbf{P}_{p+1,i}$ na njenom drugom kraju. Na taj se način koordinata $\mathbf{P}(x)$ svake točke na izvodnici korita može izračunati Hermiteovom interpolacijskom formulom

$$\mathbf{P}(x) = h_{00}\left(t_{p,i}\right)\mathbf{P}_{p,i} + h_{10}\left(x_{p+1,i} - x_{p,i}\right)\mathbf{m}_{p,i} + h_{01}\left(t_{p,i}\right)\mathbf{P}_{p+1,i} + h_{11}\left(x_{p+1,i} - x_{p,i}\right)\mathbf{m}_{p+1,i} \tag{1}$$

u kojoj je $t_{p,i}$ lokalna prirodna koordinata definirana na intervalu od 0 do 1 te su bazične funkcije h_{00}, h_{01}, h_{01} i h_{11} definirane u obliku:

$$h_{00}\left(t_{p,i}\right) = 2t_{p,i}^3 - 3t_{p,i}^2 + 1 \tag{2}$$

$$h_{10}\left(t_{p,i}\right) = t_{p,i}^3 - 2t_{p,i}^2 + t_{p,i} \tag{3}$$

$$h_{01}\left(t_{p.i}\right) = -2t_{p,i}^3 + 3t_{p,i}^2 \tag{4}$$

$$h_{11}\left(t_{p.i}\right) = t_{p,i}^3 - t_{p,i}^2 \tag{5}$$

Lako je uočiti da za lokalnu koordinatu $t_{p,i}$ = 0 Hermiteova interpolacijska formula (1) definira koordinatu $\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}_{p,i}$ te za slučaj $t_{p,i}$ = 1 definira krajnju koordinatu izvodnice $\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}_{p+1,i}$. Na analogan način se interpolacijska formula (1) primjenjuje za rekonstrukciju svih ostalih izvodnica koje se između razmatranih poprečnih presjeka p i p+1 mogu definirati za preostale točke indeksirane na poprečnom presjeku s istim rednim brojem i Ono što ovaj vid interpolacije izvodnica korita čini posebno atraktivnim je adaptacija tangenata u Hermiteovoj formuli (1). Naime, kako bi navedena postavka došla do izražaja treba primijetiti da je osnovni prerekvizit za digitalnu rekonstrukciju morfologije korita osigurati da izvodnice korita prolaze okomito kroz ravninu u kojoj se nalaze poznati, tj. izmjereni poprečni presjeci. Ovo je uvjetovano činjenicom da su izmjereni poprečni presjeci utvrđeni upravo u ovakvim okolnostima, odnosno okomito na lokalni vektor brzine $\mathbf{v}_{sr}$. Dakle, u prvom redu treba osigurati prikladnu orijentaciju tangenta $\mathbf{m}_{p,i}$ koja se u tu svrhu može za poprečne presjeke definirane rednim brojevima od p = 2 do $p = n_p - 1$ (unutarnji poprečni presjeci) odrediti putem centralne diferencije na način

$$\mathbf{m}_{p.i} = \frac{\mathbf{P}_{p+1,i} - \mathbf{P}_{p,i}}{2\left(t_{p+1,i} - t_{p,i}\right)} + \frac{\mathbf{P}_{p,i} - \mathbf{P}_{p-1,i}}{2\left(t_{p,i} - t_{p-1,i}\right)} \tag{6}$$

te se za prvi poprečni presjek tangenta $\mathbf{m}_{p=1,i}$ može definirati diferencija unaprijed

$$\mathbf{m}_{p=1,i} = \frac{\mathbf{P}_{2,i} - \mathbf{P}_{1,i}}{2(t_{2,i} - t_{1,i})} \tag{7}$$

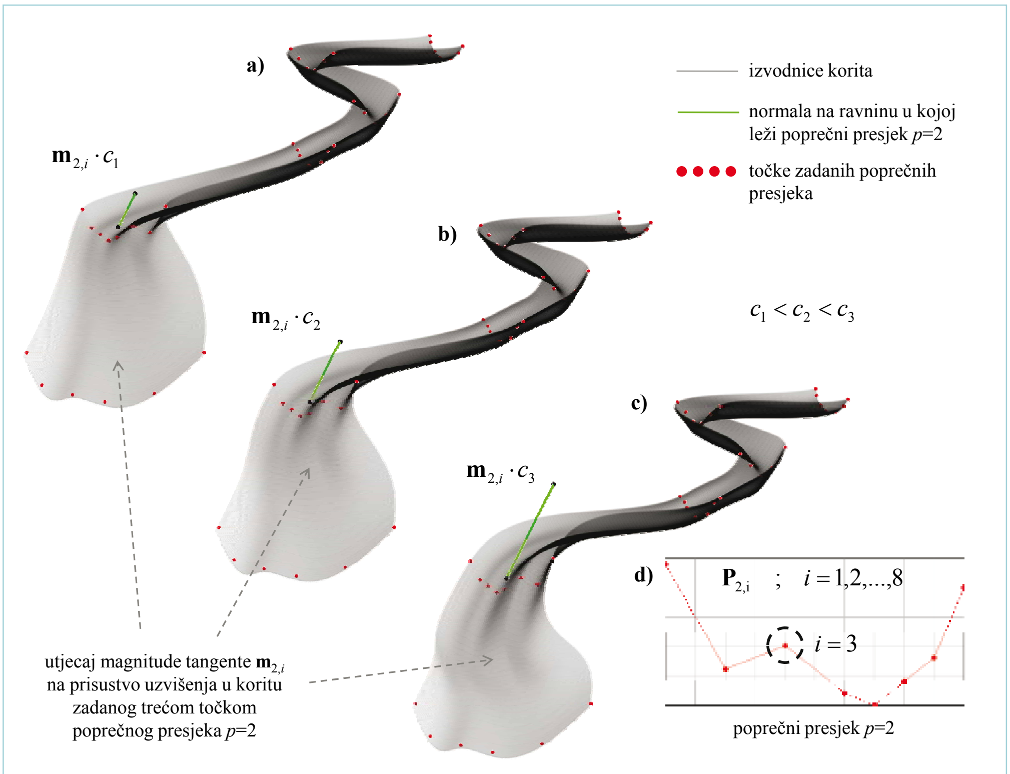
a tangenta $\mathbf{m}_{p=np,i}$ za zadnji poprečni presjek diferencijom unatrag (8).

$$\mathbf{m}_{p=n_p,i} = \frac{\mathbf{P}_{n_p,i} - \mathbf{P}_{n_p-1,i}}{2(t_{n_p,i} - t_{n_p-1,i})} \tag{8}$$

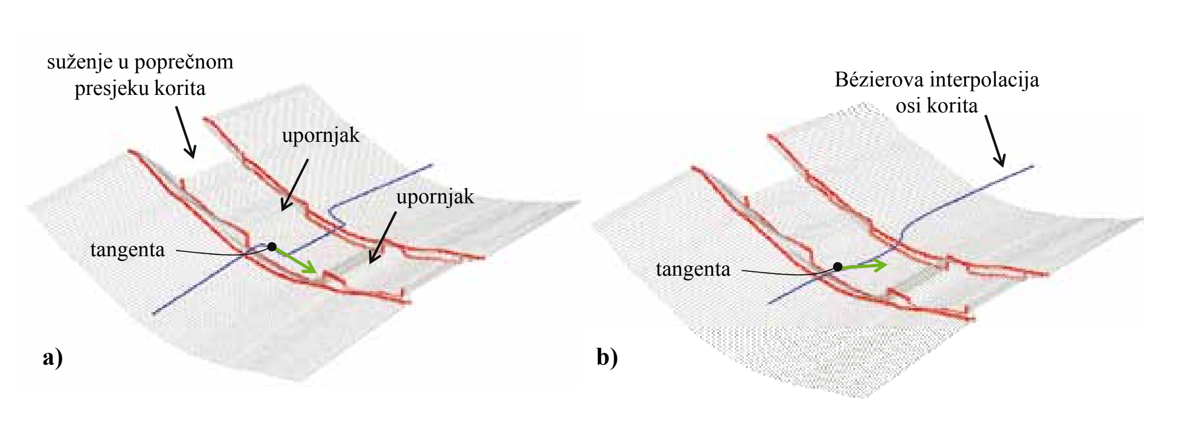
Na ovaj je način definirana orijentacija tangenata u točkama i koje se spajaju izvodnicama korita. Kako su tangente izvodnica koje prolaze kroz poprečni presjek p paralelne s normalom ravnine u kojoj leži sam presjek p, izvodnice će uvijek prilaziti s pravim kutom prema presjeku p te će se time osigurati da lokalni vektor brzine $\mathbf{v}_{sr}$ bude uvijek okomit na *živi presjek A*. S druge strane, treba primijetiti da se izmjenom magnitude tangenti može vrlo lako manipulirati lokalnom geometrijom korita, odnosno varirati zakrivljenost putem koje će se prilaziti pravom kutu. U svrhu postizanja ove parametarske adaptacije geometrije korita se za svaki poprečni presjek p uvodi skalarna veličina c_p s kojom se množi pripadajuća tangenta $\mathbf{m}_{p,i}$ te se na taj način geometrija korita može dodatno prilagođavati. Naime, porastom skalarne veličine c_p smanjuje se zakrivljenost izvodnica u neposrednoj blizini presjeka p i obrnuto. Treba dodatno primijetiti da se skalarna veličina c_p može uvesti posebno za svaku točku i nekog poprečnog presjeka p te bi tako bilo potrebno definirati veličinu $c_{p,i}$ čime se omogućava još detaljniji opis geometrije korita.

U svrhu ilustracije navedenog se za prethodni primjer korita, definiranog sa 6 poprečnih presjeka (slika 1), provela interpolacija izvodnica korita Hermiteovom formulom (1) te se za poprečni presjek $p = 2$ provela adaptacija magnituda tangente $\mathbf{m}_{2,i}$, i to tako da se u ista dva slučaja udvostručila. Utjecaj navedenog na rezultirajuću geometriju korita je prikazan na slici 4. Lako je primijetiti da se uvedeni parametar može koristiti za adaptiranje položaja infleksije, odnosno prijevoja u kojem se mijenja zakrivljenost trase vodotoka, ali isto tako i sirfleksije kao mjestu zajedničke tangente dviju istosmjernih zavoja trase vodotoka.

Osim očitog utjecaja na lokalnu zakrivljenost izvodnica, koja opada porastom parametra c_p, prikladno je i primijetiti da se namjenski uvedeno uzvišenje, koje nastaje uslijed uzdignuća u poprečnom presjeku $p = 2$ definiranog točkom $i = 3$ (slika 4 d), proteže na različite udaljenosti uzduž korita kako se mijenja parametar c_p. Ukoliko se želi utjecati samo na bočne stranice korita, (a ne na dno korita), mijenjajući njihovu zakrivljenost do stanovite mjere, moguće je da se parametar c_p definira na ranije spomenuti način, odnosno u obliku $c_{p,i}$ te da se za točke i koje definiraju ovo uzvišenje isti usvoji s manjim iznosom. Na taj se način mogu postići različite varijante geometrije korita, ali i jednostavno prilagoditi digitalni model korita koritu koji se nastoji modelirati. Navedeno vrijedi čak i kada je korito okarakterizirano s oštrim meandrima (slika 4).



Slika 4: Primjer utjecaja magnitude tangente $\mathbf{m}_{2,i}$ na zakrivljenost izvodnica korita u blizini drugog poprečnog presjeka (obratiti pozornost na utjecaj uzdignuća definiranog točkom $i = 3$ u blizini poprečnog presjeka $p = 2$).



Slika 5: Definiranje osi korita na mjestu naglog suženja jedne strane korita: a) os definirana kriterijem jednake udaljenosti od obala korita, b) os definirana Bézierovom interpolacijom točaka osi korita.

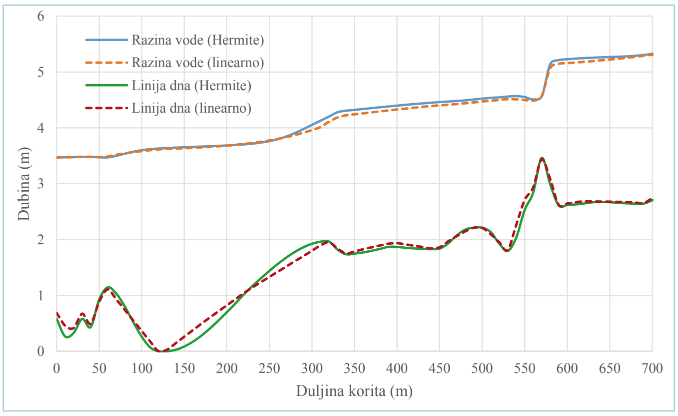
4. UZORKOVANJE POPREČNIH PRESJEKA ZA 1 D ANALIZU TOKA

Postupak aproksimacije morfologije otvorenog korita predstavlja prerekvizit za provedbu jednodimenzijske analize toka. Sljedeći korak se sastoji u tome da se za izabrani raspored prostornih inkrementa analize, koji razdvajaju susjedne proračunske poprečne presjeke, provede uzorkovanje poprečnih presjeka iz digitalnog modela korita. Pritom, jednako kao i za slučaj zadanih poprečnih presjeka iz kojih je rekonstruirano korito, proračunski poprečni presjeci moraju definirati presjek koji leži u ravnini okomitoj na lokalni vektor brzine $\mathbf{v}_{sr}$. Obzirom da polje brzine nije unaprijed poznato, ovom zadatku treba pristupiti uvodeći pretpostavku da se poprečna strujanja u koritu mogu zanemariti te da se orijentacija vektora $\mathbf{v}_{sr}$ podudara s osi korita (ili da barem ne odstupa bitno nje). U većini slučajeva je ova pretpostavka opravdana, a njena valjanost može biti eventualno ugrožena na područjima izraženih meandriranja (gdje se javljaju sekundarna strujanja) i naglih izmjena u geometriji toka (što će se uskoro podrobnije razmotriti s primjerom).

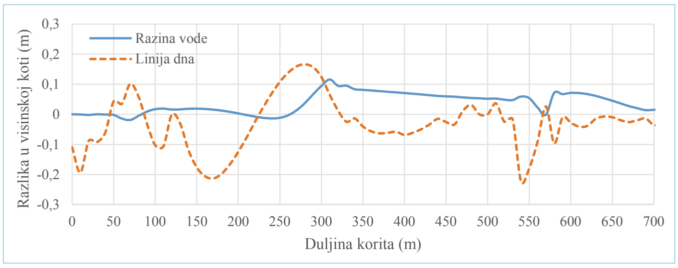
Ukoliko je navedena pretpostavka opravdana, protokol za definiranje proračunskih poprečnih presjeka započinje proračunom tangente na osi korita i to na mjestu korita na kojem se namjerava odrediti poprečni presjek. Tangenta na osi korita definira ravninu $R_p(x,y,z) = 0$ koja siječe prethodno definirane izvodnice korita (1). Koordinate presjecišta ravnine $R_p(x,y,z) = 0$ i izvodnica korita definiraju poprečni presjek koji je u prostornim koordinatama okomit na lokalni vektor brzine $\mathbf{v}_{sr}$. Analogan postupak se provodi i za ostale točke koje se nalaze na osima korita, a koje su definirane usvojenim rasporedom prostornih inkremenata analize. Treba primijetiti da su ovako dobiveni poprečni presjeci zaokrenuti obzirom na neku unaprijed definiranu referentnu ravninu te da ih je potrebno rotirati tako da ravnina u kojoj su definirani postane paralelna s referentnom ravninom. Tek tada se za provedbu jednodimenzijske analize toka isti mogu kategorizirati kao proračunski poprečni presjeci. Naime, u takvim ravninskim koordinatama je kasnije lako definirati sve hidrauličke odnose koji se iziskuju za provedbu numeričke analize toka ($A(h)$, $O(h)$, $B(h)$).

Sve prethodno navedeno vrijedi za slučaj da se geometrija korita ne mijenja naglo. Naime, ukoliko se geometrija korita mijenja naglo te su te izmjene još i nesimetrične, (obzirom na os korita), navedeni protokol neće definirati ispravne proračunske poprečne presjeke. U takvim okolnostima se os korita naglo zakreće, te ukoliko bi se zatražio poprečni presjek na mjestu naglih zakretanja, tangenta postavljena na os korita bi bitno odstupala od lokalnog vektora $\mathbf{v}_{sr}$. Ova nerealna predikcija slijedi i iz činjenice da se s osi korita, koja ima geometrijsko, a ne mehaničko podrijetlo, nastoji pobliže definirati načelna orijentacija gibanja vode koja zbog inercijalnih sila nije u stanju pratiti takve nagle izmjene u geometriji korita. Iz tog razloga je u ovim okolnostima potrebno redefinirati os korita tako da se njena zakrivljenost reducira (Merwade, 2004.). Navedeno je prikazano na slici 5 primjerom korita koji iz nereguliranog dijela prelazi u nesimetrični regulirani dio koji s jedne strane ima kontrakciju.

U svrhu redukcije ovakvih naglih zaokreta osi korita se predlaže upotreba Bézierove interpolacije između poligona točaka definiranog točkama osi korita na kritičnom mjestu. Za razliku od prethodne upotrebe Bézierove interpolacije (slika 2 b), u ovom slučaju karakteristika ove interpolacije da prolazi samo kroz prvu i zadnju točku niza točaka za koji se provodi interpolacija je posebno atraktivna jer sprječava upravo neželjeni efekt velikih zakrivljenosti. Ova interpolacija će istovremeno i očuvati trend osi korita jer su tangente Bézierove krivulje u prvoj i zadnjoj točki definirane prvim i zadnjim segmentom poligona točaka za koji se provodi interpolacija. Ukoliko se s $\mathbf{P}_i$ označe koordinate točaka na osi korita te s n ukupan broj točaka osi korita za koje se provodi Bézierova interpolacija, točke Bézierove krivulje $\mathbf{B}(t)$ su definirane parametarskom jednadžbom (Pobegailo, 2013.)



Slika 6: Razlike u dubinama vode dobivene putem jednodimenzijske stacionarne analize toka za geometriju korita aproksimiranu linearnom interpolacijom i Hermiteovom interpolacijom.



Slika 7: Razlike u dubini vode i linije dna korita dobivene za slučaj linearne interpolacije geometrije korita i Hermiteove interpolacije geometrije korita.

$$\mathbf{B}(t)=\sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t)\,\mathbf{P}_i\ ;\quad t\in[0,1] \tag{9}$$

u kojoj parametar t može poprimiti vrijednost od 0 do 1 i u kojoj $b_{i,n}$ predstavlja Bernsteinov bazni polinom n-tog reda definira putem jednakosti

$$b_{i,n}(t)=\binom{n}{i} t^i\,(1-t)^{n-i}\ ;\quad i=0,1,\ldots,n \tag{10}$$

u kojoj je binomni koeficijent definiran u obliku

$$\binom{n}{i}=\frac{n\,!}{i\,!(n-i)!} \tag{11}$$

Dobro je još spomenuti da odsječak osi korita između kojeg se nalaze proračunski poprečni presjek može varirati te se na taj način u području od posebnog interesa može povećati gustoća proračunskih poprečnih presjeka. Naravno, sve uz pretpostavku da usvojena numerička metoda za računalnu simulaciju toka podržava varijabilni prostorni korak (kao npr. Preissmannov numerički algoritam).

Treba napomenuti da na mjestima gdje se geometrija korita mijenja naglo nije zadovoljen uvjet o jednodimenzionalnosti toka te je na takvim dionicama potrebno unijeti korekcije u numerički model tako da se uvaže posljedice nagle izmjene toka. Pritom, predložena metoda za digitalnu rekonstrukciju geometrije korita može koristiti i za izradu složenijih numeričkih analiza koje se provode za slučaj dvodimenzijskog ili trodimenzijskog modela toka. Štoviše, za ovakve napredne analize je predložena metoda vrlo atraktivna jer se može koristiti za definiranje krivolinijske prostorne domene toka.

5. NUMERIČKI PRIMJER

U svrhu validiranja predložene metode za digitalnu rekonstrukciju geometrije korita, u nastavku će se provesti komparativna analiza između rezultata dobivenih za različite aproksimacije geometrije korita u nizvodnom toku Rječine i to za jednodimenzijsko stacionarno strujanje. U tu će se svrhu koristiti implicitna trapezna metoda (Szymkiewicz, 2010.). Komparativna analiza se provodi za slučaj da je korito Rječine rekonstruirano na klasičan način (koristeći linearnu interpolaciju između izmjerenih poprečnih profila) i koristeći nelinearnu Hermiteovu interpolaciju na način kako je opisano u radu. Neovisno o metodi rekonstrukcije geometrije korita, prostorni korak se u oba slučaja zadao jednakim 10 m. Drugim riječima, digitalni model korita se diskretizirao za provedbu numeričke analize toka tako da su se iz geometrijskog modela korita uzorkovali poprečni profili međusobno razmaknuti 10 m. Razmatrana dionica toka se proteže od ušća Rječine do zadnjeg uzvodnog profila udaljenog 700 m. Na odabranom dijelu korita Rječine se nalazi 16 izmjerenih poprečnih profila između kojih je potrebno aproksimirati prostornu varijabilnost korita. Položaji izmjerenih poprečnih profila su definirani s položajem 8 mostova koji se nalaze na tom dijelu Rječine. Poprečni profili su izmjereni s jedne i s druge strane svakog mosta. Rubni uvjet u nizvodnom profilu je definiran razinom mora koja se za potrebe ovog proračuna usvojila jednakom 0 m n.m. Protok u koritu iznosi 50 m^3/s, čime se definiralo podkritično strujanje, odnosno tok okarakteriziran Froudeovim brojem manjim od 1. Rezultati numeričkog modela su prikazani na slici 6 na kojoj je prikazana linija dna korita dobivena linearnom interpolacijom, linija dna korita dobivena nelinearnom interpolacijom te pripadajuće dubine vode dobivene numeričkom analizom stacionarnog strujanja. Kako bi se razlika između proračuna podrobnije evidentirala, na slici 7 je prikazana razlika u koti linije dna korita i razlika u dubinama dobivena za različitu interpolaciju geometrije korita. Treba napomenuti da za razmatranu dionicu Rječine razlika postaje evidentna nakon poprečnog profila koji se nalazi 250 m uzvodno od zadnjeg nizvodnog profila te da je nezanemariva sve do kraja korita. Maksimalna razlika u dubini vode doseže 10 cm, što se može lako opravdati upotrebom nelinearne interpolacije geometrije korita. Naime, treba spomenuti da ova komparativna analiza nema za zadatak utvrditi metodu koja će rezultirati rezultatima veće točnosti jer se unaprijed može zaključiti da će metoda za opisivanje geometrije korita, prikazana u ovom radu, u tom smislu biti prikladnija. Štoviše, opcija lokalnog prilagođavanja geometrije izvodnici korita omogućuje rekonstrukciju lokalnih nepravilnosti koji možda nisu utvrđeni mjerenjem na terenu, već samo vizualnim pregledom korita.

6. ZAKLJUČAK

U svrhu izrade jednodimenzijskih analiza tečenja u otvorenim koritima s općenitim i varijabilnim poprečnim presjecima, u radu je predložen protokol geometrijskih operacija potrebnih za rekonstrukciju morfologije takvih korita iz izmjerenih karakterističnih poprečnih presjeka. U tu se svrhu izmjereni poprečni presjeci prethodno interpoliraju te potom diskretiziraju u svrhu izjednačavanja broja točaka na istima. Izbor interpolacije poprečnih presjeka načelno zavisi o geometriji istih, odnosno o njihovoj prirodi (prirodni ili umjetni poprečni presjeci). Hermiteova interpolacijska metoda se predlaže kako bi se aproksimirale izvodnice korita koje su definirane između točaka s istim rednim brojem *i* koje se nalaze na dva susjedna poprečna presjeka. Naime, Hermiteova interpolacijska metoda se u tu svrhu pokazala kao posebno atraktivna nakon što se uvela parametarska kontrola rezultirajuće geometrije korita i to putem adaptacije tangenti izvodnica definiranih u točkama *i* u susjednim poprečnim presjecima. Pritom, kako bi izvodnice korita prilazile okomito poprečnim presjecima i time opisale okolnosti pod kojima su poprečni presjeci i izmjereni, tangente izvodnica u točkama zadanih poprečnih presjeka se postavljaju paralelnim s normalom ravnine u kojoj leže sami poprečni presjeci. Na taj se način osiguralo da su ravnine u kojima leže poprečni presjeci okomite na lokalni vektor srednje brzine toka. Posebno interesantno se pokazala uvedena parametarska adaptacija geometrije korita koja se provodi putem variranja magnitude ovih tangenti. Adaptacijom magnitude tangenti izvodnica se postiže mogućnost adaptiranja zakrivljenosti korita ispred i iza svakog poprečnog presjeka, a time se i postiže parametarska adaptacija simetrale korita. Iz tog se razloga opisana metodologija može koristiti i za geometrijsko modeliranje zahtjevnih meandriranih korita. Štoviše, ako se kontrola magnitude tangenta provede za svaku točku poprečnih profila, moguće je i kontrolirati lokalne neravnomjernosti kao što su udoline ili uzvišenja u koritu. Nakon što se geometrija korita rekonstruirala, u nastavku se opisuje protokol za definiranje proračunskih poprečnih profila za jednodimenzijsku analizu toka. Isti se bazira na postavljanju tangente na os korita koja na tom mjestu definira ravninu kroz koju prolaze prijašnje definirane izvodnice korita. Presjecišta izvodnica i postavljene ravnine definiraju koordinate točaka poprečnih profila na istom mjestu. Sukcesivnim pomicanjem tangente i provođenjem istog postupka se definira serija profila koja karakterizira modelirano korito. Poseban naglasak je postavljen na probleme koji se javljaju kada korito relativno naglo mijenja geometriju. Naime, u takvim okolnostima os korita naglo zakreće te više nije pogodna za postavljanje tangente jer ista bitno odstupa od lokalnog srednjeg vektora brzine. U svrhu rješavanja ovog problema se predlaže lokalna provedba Bézierove interpolacije koja je u tom smislu pogodna, jer ne prolazi kroz sve interpolacijske točke, već samo kroz prvu i zadnju točku na segmentu osi korita. Prikazani protokol za geometrijsku obradu izmjerenih poprečnih presjeka i rekonstrukcije morfologije korita je implementiran u računalni algoritam izrađen u programskom paketu MathCAD 15 (Mathsoft, 1993.).

LITERATURA

Brunner, G. W. HEC-RAS (2002.): *River Analysis System User's Manual*, US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, Davis, CA.

Buhman, D. L.; Gates, T. K.; Watson, C. C. (2002.): Stochastic variability of fluvial hydraulic geometry: Mississippi and Red rivers. *J Hydraul Eng*, 128, (1): 426–437.

Catmull, E.; Rom., R. (1974.): A class of local interpolating splines. *Computer Aided Geometric Design*.

Chaudhry, M. H. (2008.): *Open-Channel Flow*, Second Edition, Springer.

Chow, V. T. (1959.): *Open-channel hydraulics*. McGraw Hill.

Mathsoft (1993.): *Mathcad 15. User Guide*. Mathsoft Inc., Cambridge, MA.

Merwade, V. M. (2004.): *Geospatial Description of River Channels in Three Dimensions*, Disertacija, The University of Texas at Austin.

Pobegailo, A. P. (2013.): Interpolating rational Bézier spline curves with local shape control, *International Journal of Computer Graphics & Animation* (IJCGA) Vol. 3, No. 4.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (2002.): *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Press Syndicate of the University of Cambridge.

Salleh, S., Zomaya, A. Y., Bakar, S. A. (2008.): *Computing for Numerical Methods Using Visual* C++. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey.

Sanders, B. F., Chrysikopoulos, C. V. (2004.): Longitudinal interpolation of parameters characterizing channel geometry by piece-wise polynomial and universal kriging methods: effect on flow modeling. *Advances in Water Resources*, 27, 1061–1073.

Szymkiewicz, R. (2010.): *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York.

USACE (U.S. Army Corps of Engineers) (2002.): HEC-RAS: *River Analysis System*. Hydraulic Reference Manual, Version 3.1, Hydrologic Engineering Center, Davis, California.

UNET (US Army Corps of Engineers) (2001.): *One-dimensional unsteady flow through a full network of open channels*. User's manual, Hydrologic Engineering Center, Institute for Water Resources, Davis, CA.

Western, A. W.; Finlayson, B. L.; McMahon, T. A.; O' Neill, I. C. (1997.): A method for characterising longitudinal irregularity in river channels. *Geomorphology*, 21, 39–51.

MODELLING OF THE MORPHOLOGY OF OPEN RIVER BEDS FOR THE IMPLEMENTATION OF A ONE-DIMENSIONAL FLOW ANALYSIS

Abstract. The paper proposes a protocol for modelling the open river bed geometry for determination of geometric parameters required for the implementation of a one-dimensional flow analysis on stationary or unsteady flow in river beds with general or variable cross sections. For this purpose, river bed geometry is reconstructed from given or measured cross-sections which may be located at different chainages or have a different number of measuring points. The preparation of river bed geometry for 1D flow analysis starts with interpolation of cross-sections, for which reason the linear, quadratic, cubic and Hermite interpolations were applied. The river bed geometry is defined by application of the Hermite interpolation, and therefore all tangents of the interpolation curves on the cross-sections are defined in a manner to facilitate adaptation of the centreline of the river-bed model with the centreline of the modelled river. The sampling of the cross- sections for the 1D flow analysis was based on the recognized forms from analytic and differential geometry. The protocol is implemented within the programme package MathCAD 15, which was also applied to the preparation of examples used in this presentation.

Key words: Bézier interpolation, Hermite interpolation, linear interpolation, quadratic interpolation, cubic interpolation, 1D flow analysis, open river bed modelling.

MODELLIERUNG DER MORPHOLOGIE VON OFFENEN GERINNEN ZUR DURCHFÜHRUNG EINER EINDIMENSIONALEN STRÖMUNGSANALYSE

Im Artikel wird ein Algorithmus zur Modellierung der Geometrie von offenen Gerinnen vorgeschlagen, mit dem geometrische Größen definiert werden, die für die Durchführung der eindimensionalen Analyse des stationären oder instationären Abflusses in Gerinnen mit allgemeinen und variablen Querschnitten erforderlich sind. Zu diesem Zwecke wird die Gerinnegeometrie aus gegebenen bzw. gemessenen Querschnitten rekonstruiert, die sich auf verschiedenen Stationierungen befinden und unterschiedliche Anzahl von Messpunkten haben können. Die Vorbereitung der Gerinnegeometrie für die eindimensionale Strömungsanalyse beginnt mit der Interpolation der Querschnitte; so wird die lineare, quadratische, kubische und Hermite-Interpolation geprüft. Die Gerinnegeometrie ist mit der Hermite-Interpolation definiert, und die Tangenten an den Interpolationskurven an den Querschnitten sind so definiert, dass eine Anpassung der Symmetrieachse des digitalen Gerinnemodells an die Symmetrieachse der zu modellierenden Gerinne möglich ist. Das Festlegen von Querschnitten für die eindimensionale Strömungsanalyse beruht auf bekannten Konzepten der analytischen und Differentialgeometrie. Der Algorithmus wurde in das Programmpaket MathCAD 15 importiert und zur Anfertigung von Beispielen genutzt, die den Sachverhalt des Artikels erklären.

Schlüsselwörter: Bézier-Interpolation, Hermite-Interpolation, lineare Interpolation, quadratische Interpolation, kubische Interpolation, eindimensionale Strömungsanalyse, Modellierung von offenen Gerinnen