

# Unbalanced Random Matching Markets: The Stark Effect of Competition

Ashlagi, I., Kanoria, Y. & Leshno, J.

Por Nicolás Leiva, Parte 1 de 2. Electivo Magíster en Economía: Diseño de Mercados.

12 de octubre de 2023

# Agenda

- 1 Planificación
- 2 Sobre el paper
- 3 El Modelo
- 4 Principales Resultados
  - Resultado Previo
  - Tamaño del Núcleo
  - Caracterización Resultados Estables
- 5 Simulaciones
  - Ejercicio Computacional
  - Resultados Ejercicio Computacional
- 6 Próxima Semana
- 7 Bibliografía

La presentación y discusión del paper se dividirá en dos partes:

- 1 Esta Semana: Presentación del paper, principales resultados y réplica de los resultados computacionales del paper para preferencias independientes.
- 2 Próxima Semana: Demostración de los principales teoremas y resultados de extender las simulaciones del paper a las preferencias correlacionadas y otras alternativas.

# Agenda

- 1 Planificación
- 2 Sobre el paper
- 3 El Modelo
- 4 Principales Resultados
  - Resultado Previo
  - Tamaño del Núcleo
  - Caracterización Resultados Estables
- 5 Simulaciones
  - Ejercicio Computacional
  - Resultados Ejercicio Computacional
- 6 Próxima Semana
- 7 Bibliografía

Los autores estudian la competencia en mercados de emparejamientos con preferencias heterogéneas aleatorias y un número desigual de agentes en cada lado. En primer lugar, muestran que incluso el más mínimo desequilibrio produce un emparejamiento estable esencialmente único. En segundo lugar, dan una descripción precisa de los resultados estables, mostrando que los mercados de emparejamientos son extremadamente competitivos. A cada agente en el lado más pequeño del mercado se le asigna una de sus mejores opciones, y cada agente en el lado más grande no tiene rival o casi no obtiene mejores resultados que ser emparejado con una pareja aleatoria. Los resultados sugieren que cualquier mercado de emparejamientos probablemente tenga un núcleo pequeño, lo que explica por qué los núcleos pequeños son empíricamente ubicuos.

# Estudio de Competencia

El paper introduce la competencia en mercados de emparejamiento al tener más agentes en un lado del mercado y analiza sus efectos desde dos puntos de vista:

- Multiplicidad de emparejamientos estables: Estudios previos como [Pittel \(1989b\)](#) o [Roth & Peranson \(1999\)](#) muestran que el núcleo es típicamente un conjunto con gran cantidad de elementos bajo condiciones más restrictivas (misma cantidad de agentes en ambos lados del mercado). La primera contribución de los autores es mostrar como lo anterior es un caso particular, pues la competencia resultante de desbalancear el mercado, aunque sea de forma pequeña, produce prácticamente un único emparejamiento estable ya sea en mercados con pocos o muchos agentes, sugiriendo que para cualquier mercado de emparejamiento es probable tener un núcleo pequeño.
- Como las características del mercado determinan la estructura de los resultados estables: cuantificar la magnitud del efecto de aumentar los agentes en un lado del mercado. El emparejamiento estable puede ser totalmente caracterizado por la distribución de preferencias y el número de agentes en cada lado del mercado, bajo cualquier emparejamiento estable los agentes del lado pequeño son emparejados con una preferencia *top* ( $\text{app } \log(n)$ ) mientras que los agentes del lado grande del mercado quedan solos o no mejoran mucho respecto a ser emparejado aleatoriamente ( $\text{app } n / \log(n)$ ).

# Agenda

- 1 Planificación
- 2 Sobre el paper
- 3 El Modelo**
- 4 Principales Resultados
  - Resultado Previo
  - Tamaño del Núcleo
  - Caracterización Resultados Estables
- 5 Simulaciones
  - Ejercicio Computacional
  - Resultados Ejercicio Computacional
- 6 Próxima Semana
- 7 Bibliografía

# El Modelo

- Sea un mercado bilateral compuesto por un grupo de hombres  $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_n\}$  y un grupo de mujeres  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n, \dots, w_{n+k}\}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ .
- Cada individuo  $h \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$  tiene preferencias  $\succ_h$  completas y estrictas sobre todos los miembros del otro grupo, considerando a todos los miembros del otro grupo mejor que quedarse sin pareja.
- Un *matching*, o emparejamiento, es una función  $\mu : \mathcal{M} \cup \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$  tal que:
  - ▶  $\mu(m) \in \mathcal{W} \cup \{m\} \ \forall m \in \mathcal{M}$  y  $\mu(w) \in \mathcal{M} \cup \{w\} \ \forall w \in \mathcal{W}$ .
  - ▶  $\forall m, w \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W} : \mu(m) = w \Rightarrow \mu(w) = m$ .
  - ▶  $\forall w \in \mathcal{W} : \mu(w) = w$  significa que  $w$  queda sola bajo el *matching*  $\mu$ .
- Un *matching*  $\mu$  es estable si no hay ningún par  $(m, w) \in \mathcal{M} \times \mathcal{W}$  tal que  $w \succ_m \mu(m)$  y  $m \succ_w \mu(w)$ . El *core*, o núcleo, es el conjunto de los *matchings* estables.
- Se dice que  $m \in \mathcal{M}$  ( $w \in \mathcal{W}$ ) es un *stable partner*, o pareja estable, de  $w \in \mathcal{W}$  ( $m \in \mathcal{M}$ ) si existe algún *matching* estable  $\mu$  tal que  $\mu(w) = m$  ( $\mu(m) = w$ ). Con esta definición se provee una primera medida del tamaño del *core* como la fracción de agentes que tiene múltiples parejas estables.



## El Modelo (II)

- Sea  $|W| = n + k$  la cantidad de mujeres en el mercado y  $|M| = n$  la cantidad de hombres en el mercado.
- Un *random matching market*, o mercado de emparejamiento aleatorio, es generado mediante realizaciones independientes y uniformes de preferencias completas para cada miembro del mercado. En otras palabras, para cada  $m \in M$  ( $w \in W$ ) se obtiene una realización de una preferencia completa  $\succ_m$  ( $\succ_w$ ) proveniente de una distribución uniforme sobre las  $|W|!$  ( $|M|!$ ) posibles preferencias.
- Un resultado conocido es que siempre existe al menos un *matching* estable y este puede ser encontrado mediante aplicar el algoritmo de Aceptación Diferida (DA) de [Gale y Shapley \(1962\)](#).
- Además de saber que cuando los hombres  $m \in M$  (las mujeres  $w \in W$ ) hacen las propuestas, este *matching* que resulta de aplicar DA es *men-optimal* (*women-optimal*) *stable matching* MOSM (WOSM), o el emparejamiento estable óptimo para los hombres (mujeres).

## El Modelo (III)

- Sea el ranking de una mujer  $w \in \mathcal{W}$  en las preferencias  $\succsim_m$  de un hombre  $m \in \mathcal{M}$  la cantidad de mujeres  $w' \in \mathcal{W}$  que son a lo menos igual de preferidas que  $w$  bajo  $\succsim_m$ :  $Rank_m(w) \equiv |\{w' : w' \succsim_m w\}|$ .
- Sea el ranking de un hombre  $m \in \mathcal{M}$  en las preferencias  $\succsim_w$  de una mujer  $w \in \mathcal{W}$  la cantidad de hombres  $m' \in \mathcal{M}$  que son a lo menos igual de preferidas que  $m$  bajo  $\succsim_w$ :  $Rank_w(m) \equiv |\{m' : m' \succsim_w m\}|$ .
- Mientras más pequeño el ranking, mejor. La opción  $m \in \mathcal{M}$  ( $w \in \mathcal{W}$ ) más preferida de  $w \in \mathcal{W}$  ( $m \in \mathcal{M}$ ) es aquella tal que  $Rank_w(m) = 1$  ( $Rank_m(w) = 1$ ).

## El Modelo (IV)

- Dado un *matching*  $\mu$ , el *men's average rank of wives*, o ranking promedio de esposas de hombres, está dado por

$$R_{MEN}(\mu) = \frac{1}{|\mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{M}}|} \sum_{m \in \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{M}}} \text{Rank}_m(\mu(m))$$

Donde  $\overline{\mathcal{M}}$  es el conjunto de hombres que quedan solos bajo  $\mu$ .

- Dado un *matching*  $\mu$ , el *women's average rank of husbands*, o ranking promedio de esposos de mujeres, está dado por

$$R_{WOMEN}(\mu) = \frac{1}{|\mathcal{W} \setminus \overline{\mathcal{W}}|} \sum_{w \in \mathcal{W} \setminus \overline{\mathcal{W}}} \text{Rank}_w(\mu(w))$$

Donde  $\overline{\mathcal{W}}$  es el conjunto de mujeres que quedan solas bajo  $\mu$ .

- Con estas definiciones se provee una segunda medida del tamaño del *core* como  $R_{MEN}(MOSM) - R_{MEN}(WOSM)$ .

# Agenda

- 1 Planificación
- 2 Sobre el paper
- 3 El Modelo
- 4 Principales Resultados**
  - Resultado Previo
  - Tamaño del Núcleo
  - Caracterización Resultados Estables
- 5 Simulaciones
  - Ejercicio Computacional
  - Resultados Ejercicio Computacional
- 6 Próxima Semana
- 7 Bibliografía

# Resultado Previo

La literatura previa había analizado mercados balanceados (igual número de hombres y mujeres), siendo un resultado importante el siguiente:

## Pittel (1989a) - Lemma 2

(I) En un mercado de emparejamiento aleatorio con  $n$  hombres y  $n$  mujeres, la fracción de agentes que tienen múltiples parejas estables converge a 1 en probabilidad a medida que  $n \rightarrow \infty$ .

(II) Además,

$$\frac{R_{MEN}(MOSM)}{\log(n)} \xrightarrow{p} 1 \quad , \quad \frac{R_{MEN}(MOSM)}{n/\log(n)} \xrightarrow{p} 1$$

En términos del trabajo de los autores significa que en un mercado balanceado el *core* es grande bajo ambas medidas propuestas por los autores pues: (I) la fracción de agentes que tiene múltiples parejas estables converge a 1 en probabilidad y (II) la diferencia entre  $R_{MEN}(MOSM)$  y  $R_{MEN}(WOSM)$  es significativamente diferente. Ambos resultados no se sostienen a la hora de introducir desbalances al mercado, lo cual se puede apreciar en las Figuras de las láminas 20, 21 y 22.

# Tamaño del Núcleo

Dada una secuencia de eventos  $\{\varepsilon_n\}$ , se dirá que la secuencia ocurre con alta probabilidad si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\varepsilon_n) = 1$$

## Teorema 1

Dada una secuencia de mercados de emparejamiento aleatorios, indexados por  $n$ , con  $n$  hombres y  $n + k$  mujeres, para un  $k = k(n)$  arbitrario y un  $\varepsilon > 0$  fijo, se tiene con alta probabilidad que:


- (i) La fracción de hombres (mujeres) que tiene múltiples parejas estables no es más que  $\varepsilon$ . ► Figura 1
- (ii)  $R_{MEN}(WOSM) \leq (1 + \varepsilon)R_{MEN}(MOSM)$  el ranking promedio de esposas de hombres es casi el mismo bajo todos los *matching* estables. Para cualquier *matching* estable  $\mu$  sucede que  $R_{MEN}(MOSM) \leq R_{MEN}(\mu) \leq R_{MEN}(WOSM)$

► Figura 2

## Teorema 2

Dada una secuencia de mercados de emparejamiento aleatorios, indexados por  $n$ , con  $n$  hombres y  $n + k$  mujeres, para un  $k = k(n) \geq 1$  arbitrario y un  $\varepsilon > 0$  cualquiera fijo, se tiene con alta probabilidad que:

$$R_{MEN}(\mu) \leq (1 + \varepsilon) \left( \frac{n + k}{n} \right) \log \left( \frac{n + k}{n} \right)$$
$$R_{WOMEN}(\mu) \geq n \left/ \left[ 1 + (1 + \varepsilon) \left( \frac{n + k}{n} \right) \log \left( \frac{n + k}{n} \right) \right] \right.$$

Este teorema ilustra la ventaja del lado del pequeño del mercado, los hombres emparejados están emparejados con alternativas *top*, mientras que el lado grande del mercado no logra mejorar respecto a una asignación aleatoria como *Random Serial Dictatorship* (RSD)  [Figura 3](#).

# Agenda

- 1 Planificación
- 2 Sobre el paper
- 3 El Modelo
- 4 Principales Resultados
  - Resultado Previo
  - Tamaño del Núcleo
  - Caracterización Resultados Estables
- 5 Simulaciones
  - Ejercicio Computacional
  - Resultados Ejercicio Computacional
- 6 Próxima Semana
- 7 Bibliografía



# Ejercicio Computacional (I)

Para la generación de las figuras

- ① Se fijó  $|\mathcal{W}| = 40$  y se combinó con una grilla para  $|\mathcal{M}| \in \{20, 21, \dots, 59, 60\}$ .
- ② Para cada una de las posibles combinaciones:  $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) \in \{(20, 40), (21, 40), \dots, (59, 40), (60, 40)\}$  se realizaron 10 mil simulaciones siguiendo los siguientes pasos:
  - ① Obtener para cada individuo realizaciones independientes y uniformes de preferencias completas.
  - ② Obtener MOSM ( $\mu_{MOSM}$ ) aplicando DA con los hombres haciendo las propuestas.
  - ③ Obtener WOSM ( $\mu_{WOSM}$ ) aplicando DA con las mujeres haciendo las propuestas.
  - ④ Obtener el *matching* resultante de aplicar *Random Serial Dictatorship* ( $\mu_{RSD}$ ) con los hombres eligiendo.
  - ⑤ Calcular la fracción de hombres con múltiples parejas estables como aquellos que resultaban emparejados con mujeres diferentes bajo  $\mu_{MOSM}$  y bajo  $\mu_{WOSM}$ .
  - ⑥ Para cada uno de los 3 *matchings* obtenidos:  $\mu_{MOSM}$ ,  $\mu_{WOSM}$  y  $\mu_{RSD}$ , se cálculo  $R_{MEN}(\mu)$ .

## Ejercicio Computacional (II)

- ③ De las 10 mil simulaciones para cada posible combinación:  $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) \in \{(20, 40), (21, 40), \dots, (59, 40), (60, 40)\}$  se obtuvo: (i) el promedio, (ii) percentil 2.5 y (iii) percentil 97.5, de: (A) la fracción de hombres con múltiples parejas estables, (B)  $R_{MEN}(\mu_{MOSM})$ , (C)  $R_{MEN}(\mu_{WOSM})$  y (D)  $R_{MEN}(\mu_{RSD})$ .

Para la generación de las tablas 1 y 2

- ① Para cada  $|\mathcal{M}| \in \{100, 200, 500, 1000, 2000, 5000\}$  se calculó  $|\mathcal{W}|$  en base a cada diferencia  $|\mathcal{W}| - |\mathcal{M}| \in \{-10, -5, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 10\}$ , obteniendo las combinaciones

$$(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) \in \{(100, 90), \dots, (100, 110), (200, 190), \dots, (5000, 5010)\}$$

- ② Para cada una de las combinaciones  $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|)$  se realizaron mil simulaciones de los mismos pasos del punto 2 de las figuras, más uno extra:

- ⑦ Calcular

$$EST(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) \begin{cases} \frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{M}|} \log \left( \frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}| - |\mathcal{M}|} \right) & \text{si } |\mathcal{W}| > |\mathcal{M}| \\ |\mathcal{W}| / \left( 1 + \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{W}|} \log \left( \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{M}| - |\mathcal{W}|} \right) \right) & \text{si } |\mathcal{W}| < |\mathcal{M}| \end{cases}$$

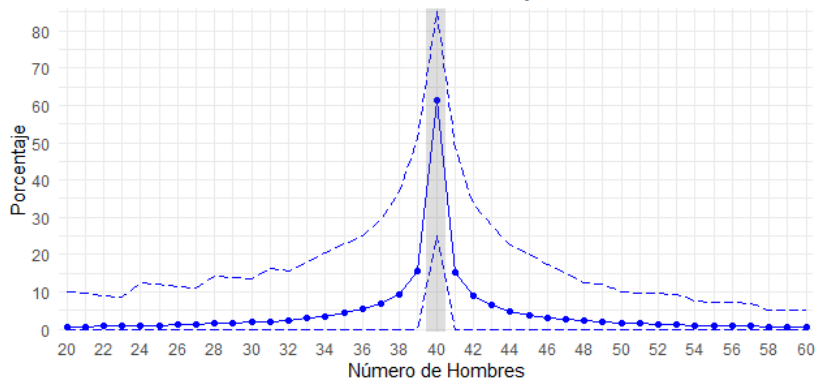
## Ejercicio Computacional (III)

- 3 Una vez obtenidas las 1000 simulaciones para cada una de las combinaciones  $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|)$  se obtuvo el promedio de estas mil simulaciones de: (A) la fracción de hombres con múltiples parejas estables, (B)  $R_{MEN}(\mu_{MOSM})$  y (C)  $R_{MEN}(\mu_{WOSM})$ .
- 4 Notar que  $EST(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|)$  no depende de las preferencias por lo cual se asigna directamente. La demostración de esto es consecuencia de la demostración del Teorema 2 por lo que se probará la próxima semana.

Figura: Réplica Figura 1

## Porcentaje de Hombres con Múltiples Parejas Estables

10 mil simulaciones de mercados aleatorios con 40 mujeres.

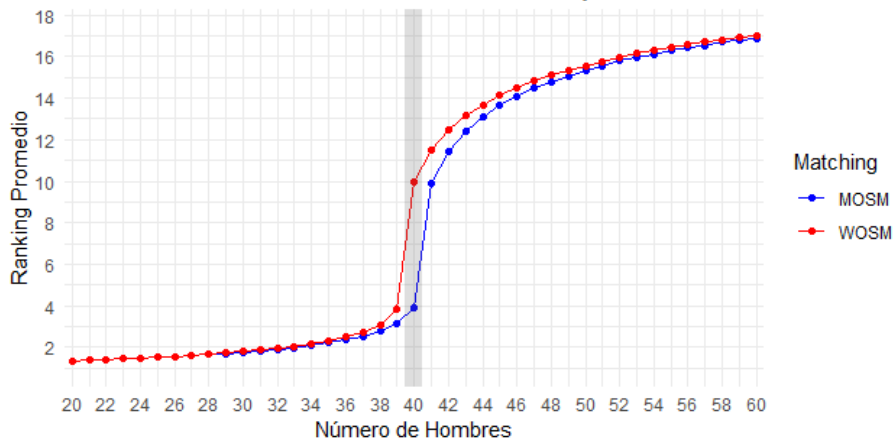


Línea con Puntos es la media de las 10 mil simulaciones.  
Área entre las líneas discontinuas representa el 95% de los datos.  
Área sombreada es un mercado balanceado.

Figura: Réplica Figura 2

## Ranking Promedio de Mujeres Emparejadas

10 mil simulaciones de mercados aleatorios con 40 mujeres.

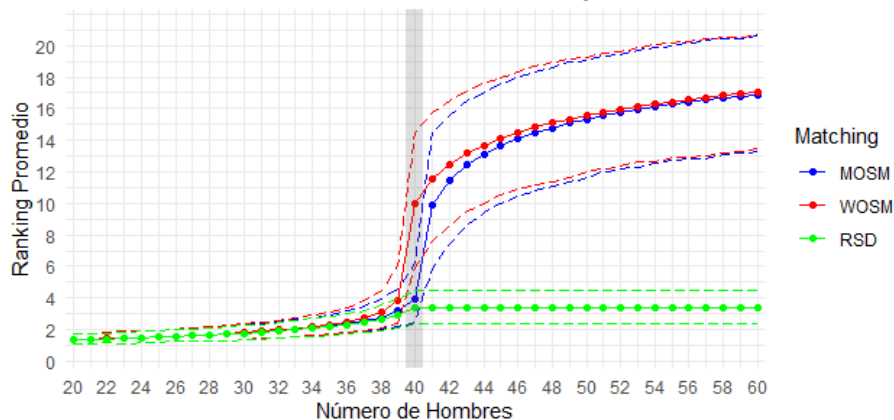


Línea con Puntos es la media de las 10 mil simulaciones.  
Área sombreada es un mercado balanceado.

Figura: Réplica Figura 3

## Ranking Promedio de Mujeres Emparejadas

10 mil simulaciones de mercados aleatorios con 40 mujeres.



Línea con Puntos es la media de las 10 mil simulaciones.  
 Área entre las líneas discontinuas representa el 95% de los datos.  
 Área sombreada es un mercado balanceado.

# Resultados Ejercicio Computacional (IV)

Cuadro: Réplica Tabla 1:  $R_{MEN}$  para diferentes  $|\mathcal{M}|$  - Parte 1

$ \mathcal{M} $	$ \mathcal{W}  -  \mathcal{M} $								
	-10	-5	-1	0	1	2	3	5	10
100:									
MOSM	29,4	27,1	19,9	4,9	4,1	3,7	3,4	3,0	2,6
WOSM	29,9	28,1	23,4	20,6	4,9	4,0	3,7	3,2	2,6
EST	25,3	22,9	17,5		4,7	4,0	3,6	3,2	2,6
200:									
MOSM	53,8	47,8	35,4	5,8	4,8	4,4	4,1	3,7	3,1
WOSM	54,9	49,5	40,9	35,8	5,7	4,8	4,4	3,8	3,2
EST	45,7	40,8	31,5		5,3	4,7	4,3	3,8	3,2
500:									
MOSM	115,4	101,8	75,6	6,7	5,8	5,3	4,9	4,5	3,9
WOSM	117,7	105,4	86,6	75,4	6,8	5,7	5,3	4,7	4,0
EST	98,2	87,6	69,0		6,2	5,5	5,2	4,7	4,0

# Resultados Ejercicio Computacional (V)

Cuadro: Réplica Tabla 1:  $R_{MEN}$  para diferentes  $|\mathcal{M}|$  - Parte 2

	$ \mathcal{W}  -  \mathcal{M} $								
$ \mathcal{M} $	-10	-5	-1	0	1	2	3	5	10
1000:									
MOSM	204,7	181,0	136,9	7,4	6,4	5,9	5,6	5,2	4,6
WOSM	208,5	187,2	155,2	137,0	7,4	6,5	5,9	5,4	4,7
EST	175,2	157,3	126,2		6,9	6,2	5,8	5,3	4,7
2000:									
MOSM	363,9	325,8	250,2	8,1	7,2	6,7	6,3	5,9	5,3
WOSM	370,2	335,1	280,8	249,1	8,2	7,1	6,7	6,0	5,3
EST	314,6	284,7	232,3		7,6	6,9	6,5	6,0	5,3
5000:									
MOSM	792,6	714,1	560,0	9,1	8,0	7,6	7,3	6,6	6,2
WOSM	804,5	733,4	622,2	560,2	9,1	8,1	7,7	7,0	6,4
EST	690,5	631,1	525,2		8,5	7,8	7,4	6,9	6,2



# Resultados Ejercicio Computacional (V)

**Cuadro:** Réplica Tabla 2: % Hombres con Múltiples Parejas Estables con diferentes  $|\mathcal{M}|$

$ \mathcal{M} $	$ \mathcal{W}  -  \mathcal{M} $								
	-10	-5	-1	0	1	2	3	5	10
100	2,3	4,0	15,3	75,7	15,0	8,8	6,6	4,2	2,4
200	2,2	4,0	14,1	83,6	13,9	8,4	6,7	4,2	2,2
500	2,1	3,6	12,9	91,0	13,7	7,5	5,6	3,7	2,1
1000	1,9	3,4	11,8	94,5	11,9	7,1	5,0	3,6	1,9
2000	1,8	2,9	10,9	96,7	11,0	6,4	4,9	3,1	1,5
5000	1,5	2,4	10,3	98,4	10,2	5,9	4,3	2,8	1,5

# Agenda

- 1 Planificación
- 2 Sobre el paper
- 3 El Modelo
- 4 Principales Resultados
  - Resultado Previo
  - Tamaño del Núcleo
  - Caracterización Resultados Estables
- 5 Simulaciones
  - Ejercicio Computacional
  - Resultados Ejercicio Computacional
- 6 Próxima Semana
- 7 Bibliografía

Los aspectos a ver la próxima semana son:

- 1 Extender simulaciones para figuras en cuánto a:
  - 1 Número de simulaciones.
  - 2 Tamaño desbalance.
  - 3 Tamaño de lados del mercado.
- 2 Demostraciones de Teoremas.
- 3 Introducción Nuevo Algoritmo como apoyo de la demostración de los teoremas.
- 4 Resultados con preferencias correlacionadas.

# Agenda

- 1 Planificación
- 2 Sobre el paper
- 3 El Modelo
- 4 Principales Resultados
  - Resultado Previo
  - Tamaño del Núcleo
  - Caracterización Resultados Estables
- 5 Simulaciones
  - Ejercicio Computacional
  - Resultados Ejercicio Computacional
- 6 Próxima Semana
- 7 Bibliografía

- Gale, D., & L. S. Shapley. 1962. "College Admissions and the Stability of Marriage." *American Math. Monthly* 69:9–15.
- Pittel, B. 1989a. "The Average Number of Stable Matchings." *SIAM J. Discrete Math.* 2 (4): 530–49.
- ———. 1989b. "On Likely Solutions of a Stable Matching Problem." In *Proceedings of the 3rd ACM Symposium on Discrete Algorithms*, 10–15. Philadelphia: Soc. Indus. and Appl. Math.
- Roth, A. E., and E. Peranson. 1999. "The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design." *A.E.R.* 89:748–80.