Unbalanced Random Matching Markets: The Stark Effect of Competition

Ashlagi, I., Kanoria, Y. & Leshno, J.

Por Nicolás Leiva, Parte 2 de 2. Electivo Magíster en Economía: Diseño de Mercados.

15 de octubre de 2023

Agenda

Planificación de Trabajo

La presentación y discusión del paper se ha dividido en dos partes:

1. Semana Anterior: Presentación del paper, principales resultados y réplica de los resultados computacionales del paper para preferencias independientes. Link.
2. Esta Semana: Introducción de Nuevo Algoritmo y resultados simulaciones con preferencias correlacionadas.

Agenda

El Modelo

- Sea un mercado bilateral compuesto por un grupo de hombres $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ y un grupo de mujeres $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n, \ldots, w_{n+k}\}$, con $k \in \mathbb{N}$.
- Cada individuo $h \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ tiene preferencias $\succ_h$ completas y estrictas sobre todos los miembros del otro grupo, considerando a todos los miembros del otro grupo mejor que quedarse sin pareja.
- Un *matching*, o emparejamiento, es una función $\mu : \mathcal{M} \cup \mathcal{W} \to \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ tal que:
  - $\mu(m) \in \mathcal{W} \cup \{m\}\ \forall m \in \mathcal{M}$ y $\mu(w) \in \mathcal{M} \cup \{w\}\ \forall w \in \mathcal{W}$.
  - $\forall m, w \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W} : \mu(m) = w \Rightarrow \mu(w) = m$.
  - $\forall w \in \mathcal{W} : \mu(w) = w$ significa que w queda sola bajo el *matching* μ.
- Un *matching* μ es estable si no hay ningún par $(m, w) \in \mathcal{M} \times \mathcal{W}$ tal que $w \succ_m \mu(m)$ y $m \succ_w \mu(w)$. El *core*, o núcleo, es el conjunto de los *matchings* estables.
- Se dice que $m \in \mathcal{M}$ $(w \in \mathcal{W})$ es un *stable partner*, o pareja estable, de $w \in \mathcal{W}$ $(m \in \mathcal{M})$ si existe algún *matching* estable μ tal que $\mu(w) = m$ $(\mu(m) = w)$. Con esta definición se provee una primera medida del tamaño del *core* como la fracción de agentes que tiene múltiples parejas estables.

El Modelo (II)

- Sea $|W| = n + k$ la cantidad de mujeres en el mercado y $|M| = n$ la cantidad de hombres en el mercado.
- Un *random matching market*, o mercado de emparejamiento aleatorio, es generado mediante realizaciones independientes y uniformes de preferencias completas para cada miembro del mercado. En otras palabras, para cada $m \in \mathcal{M}$ ($w \in \mathcal{W}$) se obtiene una realización de una preferencia completa $\succ_m$ ($\succ_w$) proveniente de una distribución uniforme sobre las $|W|!$ ($|M|!$) posibles preferencias.
- Un resultado conocido es que siempre existe al menos un *matching* estable y este puede ser encontrado mediante aplicar el algoritmo de Aceptación Diferida (*DA*) de Gale y Shapley (1962).
- Además de saber que cuando los hombres $m \in \mathcal{M}$ (las mujeres $w \in \mathcal{W}$) hacen las propuestas, este *matching* que resulta de aplicar *DA* es *men-optimal* (*women-optimal*) *stable matching MOSM* (*WOSM*), o el emparejamiento estable óptimo para los hombres (mujeres).

El Modelo (III)

- Sea el ranking de una mujer $w \in \mathcal{W}$ en las preferencias $\succ_m$ de un hombre $m \in \mathcal{M}$ la cantidad de mujeres $w' \in \mathcal{W}$ que son a lo menos igual de preferidas que w bajo $\succ_m$: $Rank_m(w) \equiv |\{w' : w' \succsim_m w\}|$.
- Sea el ranking de un hombre $m \in \mathcal{M}$ en las preferencias $\succ_w$ de una mujer $w \in \mathcal{W}$ la cantidad de hombres $m' \in \mathcal{M}$ que son a lo menos igual de preferidas que m bajo $\succ_w$: $Rank_w(m) \equiv |\{m' : m' \succsim_w m\}|$.
- Mientras más pequeño el ranking, mejor. La opción $m \in \mathcal{M}$ ($w \in \mathcal{W}$) más preferida de $w \in \mathcal{W}$ ($m \in \mathcal{M}$) es aquella tal que $Rank_w(m) = 1$ ($Rank_m(w) = 1$).

El Modelo (IV)

- Dado un *matching* μ, el *men's average rank of wives*, o ranking promedio de esposas de hombres, está dado por

$$R_{MEN}(\mu) = \frac{1}{|\mathcal{M} \backslash \overline{\mathcal{M}}|} \sum_{m \in \mathcal{M} \backslash \overline{\mathcal{M}}} Rank_m \left(\mu(m)\right)$$

  Donde $\overline{\mathcal{M}}$ es el conjunto de hombres que quedan solos bajo μ.

- Dado un *matching* μ, el *women's average rank of husbands*, o ranking promedio de esposos de mujeres, está dado por

$$R_{WOMEN}(\mu) = \frac{1}{|\mathcal{W} \backslash \overline{\mathcal{W}}|} \sum_{w \in \mathcal{W} \backslash \overline{\mathcal{W}}} Rank_w \left(\mu(w)\right)$$

  Donde $\overline{\mathcal{W}}$ es el conjunto de mujeres que quedan solas bajo μ.

- Con estas definiciones se provee una segunda medida del tamaño del *core* como $R_{MEN}(MOSM) - R_{MEN}(WOSM)$.

Teorema 1

Dada una secuencia de eventos $\{\varepsilon_n\}$, se dirá que la secuencia ocurre con alta probabilidad si

$$\lim_{n\to\infty} P(\varepsilon_n) = 1$$

Teorema 1

Dada una secuencia de mercados de emparejamiento aleatorios, indexados por n, con n hombres y $n+k$ mujeres, para un $k = k(n)$ arbitrario y un $\varepsilon > 0$ fijo, se tiene con alta probabilidad que:

(i) La fracción de hombres (mujeres) que tiene múltiples parejas estables no es más que ε.

(ii) $R_{MEN}(WOSM) \leq (1+\varepsilon)R_{MEN}(MOSM)$ el ranking promedio de esposas de hombres es casi el mismo bajo todos los *matching* estables. Para cualquier *matching* estable μ sucede que $R_{MEN}(MOSM) \leq R_{MEN}(\mu) \leq R_{MEN}(WOSM)$

Teorema 2

Teorema 2

Dada una secuencia de mercados de emparejamiento aleatorios, indexados por n, con n hombres y $n+k$ mujeres, para un $k = k(n) \geq 1$ arbitrario y un $\varepsilon > 0$ cualquiera fijo, se tiene con alta probabilidad que:

$$R_{MEN}(\mu) \leq (1+\varepsilon)\left(\frac{n+k}{n}\right)\log\left(\frac{n+k}{n}\right)$$

$$R_{WOMEN}(\mu) \geq n \Bigg/ \left[1 + (1+\varepsilon)\left(\frac{n+k}{n}\right)\log\left(\frac{n+k}{n}\right)\right]$$

Conclusiones Resultados Simulaciones Computacionales

- A medida que hay desbalance ($|\mathcal{M}| \neq |\mathcal{W}|$) disminuye considerablemente la cantidad de hombres con múltiples parejas estables.
- El lado chico del mercado tiene una ventaja considerable sobre el lado grande:
  - Su ranking promedio de parejas es mucho mejor.
  - A medida que el lado grande se hace más grande respecto al lado chico aumenta su ranking promedio más rápido de lo que lo disminuye su ranking el lado chico al hacerse más chico.
- Para el lado grande del mercado su ranking promedio es mucho peor que un escenario aleatorio .
- A medida que aumenta el tamaño del mercado (más agentes en ambos lados) el lado grande empeora mucho más rápido que el lado chico.

Agenda

MOSM a WOSM Simplificado

La idea es calcular WOSM a partir de MOSM mediante divorciar a las mujeres y que los hombres les hagan propuestas. Por el momento se asume $|\mathcal{W}| > |\mathcal{M}|$.

- Inicio: En un *marriage market* con $|\mathcal{W}| = n + k$ y $|\mathcal{M}| = n$ se aplica DA con los hombres haciendo las propuestas para encontrar MOSM, el cual se denota por μ. Se define $S = \overline{\mathcal{W}} = \{w \in W : \mu(w) = w\}$. Se selecciona cualquier $\widehat{w} \in W \backslash S$.
- Nueva Etapa:
  1. Se define $\tilde{\mu} = \mu$.
  2. Se divorcia a la pareja $(\mu(\widehat{w}), \widehat{w})$, llamamos m a $\mu(\widehat{w})$ tal que $\widehat{w}$ rechaza a m.
  3. m le propone a la mujer w más preferida que no lo ha rechazado aún.
  4. w toma una decisión en el siguiente orden:
     (a) Si $w \neq \widehat{w}$ y $\mu(w) \succ_w m$, o $w = \widehat{w}$ y $\tilde{\mu}(w) \succ_{\widehat{w}} m$, entonces se vuelve al paso 3.
     (b) Si $w \notin \{\widehat{w}\} \cup \overline{W}$ y $m \succ_w \mu(w) = m'$, entonces w acepta a m (m pasa a ser el nuevo $\mu(w)$), rechaza a $\mu(w) = m'$ y se vuelve al paso 3 con $\mu(w) = m'$ como un nuevo m.
     (c) Nuevo *matching* estable: Si $w = \widehat{w}$ y $m \succ_{\widehat{w}} \tilde{m}$, para todo $\tilde{m} \in \mathcal{M}$ que le ha propuesto a w, entonces w acepta a m (m pasa a a ser el nuevo $\mu(w)$) y se ha encontrado un nuevo *matching* estable μ. Se selecciona un nuevo $\widehat{w} \in \mathcal{W} \backslash S$ y se vuelve al paso 1 considerando este *matching* μ.
     (d) Fin de la Etapa: Si $w \in \overline{\mathcal{W}}$, se añade $\widehat{w}$ a S y se consideran dos casos: (i) $S = W$, se termina y el *matching* final es el actual μ, (ii) en otro caso se selecciona un nuevo $\widehat{w} \in \mathcal{W} \backslash S$ y se vuelve al paso 1 con $\tilde{\mu}$ (MOSM) como μ.

MOSM a WOSM Simplificado - Ejemplo (I)

Un breve ejemplo, sea un *marriage market* con $|\mathcal{W}| = 3$ y $|\mathcal{M}| = 2$, con las siguientes preferencias:

m_1	m_2	w_1	w_2	w_3
w_1	w_2	m_1	m_1	m_2
w_2	w_1	m_2	m_2	m_1
w_3	w_3			

El matching MOSM es $\mu = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (w_3, w_3)\}$ y $S = \overline{W} = \{w_3\}$. Se selecciona $\widehat{w} = w_1$ y se comienza la etapa 1:

1. Se denota $\tilde{\mu} = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (w_3, w_3)\}$.
2. $\widehat{w} = w_1$ rechaza a $\mu(w_1) = m_1$.
3. m_1 le propone a w_2.
4. Como $w_2 \neq \widehat{w} = w_1$ y $m_1 \succ_{w_2} \mu(w_2) = m_2$ (caso b), entonces w_2 acepta a m_1 tal que ahora $\mu(m_1) = w_2$ y se divorcia de m_2.
5. Ahora m_2 propone a $\widehat{w} = w_1$.
6. Como $w_1 = \widehat{w}$ y $\tilde{\mu}(w_1) = m_1 \succ_{w_1} m_2$ (caso a), w_1 rechaza a m_2.
7. Ahora m_2 propone a w_3, como $w_3 \in \overline{W}$ (caso d) se añade w_1 a S, como $S = \{w_1, w_3\} \neq \mathcal{W}$ (caso d.ii) se vuelve al paso 1 con $\widehat{w} = w_2$ y $\tilde{\mu}$ como μ.

MOSM a WOSM Simplificado - Ejemplo (II)

m_1	m_2	w_1	w_2	w_3
w_1	w_2	m_1	m_1	m_2
w_2	w_1	m_2	m_2	m_1
w_3	w_3			

$\mu = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (w_3, w_3)\}$ y $\widehat{w} = w_2$. Etapa 2:

1. Se denota $\tilde{\mu} = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (w_3, w_3)\}$.
2. $\widehat{w} = w_2$ rechaza a $\mu(w_1) = m_2$.
3. m_2 le propone a w_1.
4. Como $w_1 \neq \widehat{w} = w_2$ y $\mu(w_1) = m_1 \succ_{w_1} m_2$ (caso a), w_1 rechaza a m_2.
5. Ahora m_2 propone a w_3, como $w_3 \in \overline{W}$ (caso d) se añade w_2 a S, como $S = \{w_1, w_2, w_3\} = \mathcal{W}$ finaliza el algoritmo y el *matching* resultante es $\mu = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (w_3, w_3)\}$.

MOSM a WOSM (I)

A lo anterior se suman los siguientes conceptos:

- Cadena de rechazo: Secuencia de mujeres que han rechazado a sus emparejamientos bajo μ en una etapa.
- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_J\}$ un conjunto ordenado de mujeres en la cadena de rechazo actual.
- $\nu(w)$ el número actual de propuestas que ha recibido una mujera w.
- $R(m)$ el conjunto de mujeres que ha rechazado a un hombre m.

En base a estas definiciones el algoritmo en su versión más general es:

- Inicio: En un *marriage market* con $|\mathcal{W}| = n + k$ y $|\mathcal{M}| = n$ se aplica DA con los hombres haciendo las propuestas para encontrar MOSM, el cual se denota por μ, además de contabilizar $\nu(w)$ para todo $w \in \mathcal{W}$ y $R(m)$ para todo $m \in \mathcal{M}$. Se define $S = \overline{\mathcal{W}} = \{w \in W : \mu(w) = w\}$. Se selecciona cualquier $\widehat{w} \in W \backslash S$. Finalmente se define $t = 0$ el número de propuestas actuales.

MOSM a WOSM (I)

- Nueva Etapa:
  1. Se define $\tilde{\mu} = \mu$, $v_1 = \widehat{w}$ y $V = \{\widehat{w}\}$.
  2. Se divorcia a la pareja $(\mu(\widehat{w}), \widehat{w})$, llamamos m a $\mu(\widehat{w})$ tal que $\widehat{w}$ rechaza a m y se añade $\widehat{w}$ a $R(m)$.
  3. m le propone a la mujer w más preferida tal que $w \in \mathcal{W} \backslash R(m)$ que no lo ha rechazado aún. $\nu(w)$ y t aumentan en 1 cada uno.
  4. w toma una decisión en el siguiente orden:
     (a) Si $w \notin V$ y $\mu(w) \succ_w m$, o $w \in V$ y $\tilde{\mu}(w) \succ_w m$, entonces w rechaza a m, se añade w a $R(m)$ y se vuelve al paso 3.
     (b) Si $w \notin S \cup V$ y $m \succ_w \mu(w) = m'$, entonces w acepta a m (m pasa a ser el nuevo $\mu(w)$), rechaza a m', se añade w a $R(m')$ y se agrega w al final de V y se vuelve al paso 3 con m' como un nuevo m.
     (c) Nuevo *matching* estable: Si $w \in V$ y $m \succ_w \tilde{\tilde{\mu}}$, se encontró un *matching* estable. Se consideran dos casos:
        (i) Si $w = \widehat{w} = v_1$, m pasa a ser la nueva pareja de $\widehat{w}$ bajo μ, se selecciona otro $\widehat{w} \in \mathcal{W} \backslash S$ y se comienza una nueva etapa.
        (ii) Si $w = v_\ell$ para $\ell > 1$, se define $m' = \tilde{\mu}(w)$ y se le llama a todas las propuestas que ocurrieron desde que m' le propuse a w un *internal improvement cycle* (IIC) y se actualiza $\tilde{\mu}(v_j) = \mu(v_j)$ para todo $j = \ell, \ell+1, \ldots, J$. Se remueven $v_\ell, \ldots, v_J$ de V, se reduce $\nu(w)$ con t y se vuelve al paso 3 con m' como m.
     (d) Fin de la Etapa: Si $w \in S$ y $m \succ_w \mu(w)$, se añaden todas las mujeres en V a S y se consideran dos casos: (i) $S = W$, se termina y el *matching* final es el actual μ, (ii) en otro caso se selecciona un nuevo $\widehat{w} \in \mathcal{W} \backslash S$ y se vuelve al paso 1 con $\tilde{\mu}$ (MOSM) como μ.

Agenda

El Modelo

En esta ocasión se realiza una modificación al modelo pues los agentes ya no tienen preferencias *iid* proveniente de una distribución uniforme. Ahora las preferencias vienen predeterminadas por la utilidad del agente i al ser emparejado con el agente j:

$$u_i(j) = \beta x_j^A - \gamma(x_i^D - x_j^D)^2 + \varepsilon_{ij}$$

Donde

- x_j^A una cualidad intrínseca al agente j y que es igualmente deseada por todos los agentes. $x_j^A \overset{iid}{\sim} U[0,1]$.
- β es el coeficiente de importancia que le dan los agentes a la característica x_j^A. $\beta \in [0,20]$ común para todos los agentes.
- x_i^D un coeficiente de posición para el agente i. $x_i^D \overset{iid}{\sim} U[0,1]$.
- γ es el coeficiente de importancia que le dan los agentes a la distancia con otros agentes. $\gamma \in [-20,20]$ común para todos los agentes.
- ε_{ij} un término idiosincrásico de cada posible pareja. Al seguir esta definición del paper no se pudo acercar a replicar los resultados, en cambio al entender ε_{ij} un término idiosincrásico del agente i al ser potencialmente emparejado con el agente j se logra un mayor acercamiento a replicar los resultados. $\varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} Logistica(0,1)$.

Preferencias Correlacionadas

$$u_i(j) = \beta x_j^A - \gamma(x_i^D - x_j^D)^2 + \varepsilon_{ij}$$

- $\beta = \gamma = 0$ caso estudiado la semana pasada.
- A medida que crece β con γ fijo, la correlación entre las preferencias crece. $\beta \to \infty$ implica que las preferencias serán las mismas para todos los agentes en un mismo lado del mercado.
- $\gamma \neq 0$ provoca simetría entre $u_m(w)$ y $u_w(m)$ para $(m, w) \in \mathcal{M} \times \mathcal{W}$

Ejercicio Computacional

Para replicar la Figura 4 del paper:

1. Se fijó $|\mathcal{W}| = 40$ y se combinó con las siguientes grillas:
   - Para $\mathcal{M} \in \{40, 41, 45, 60\}$
   - Para $\beta \in \{0, 1, \ldots, 20\}$
   - Para $\gamma \in \{-20, -19, \ldots, 19, 20\}$.
2. Para cada una de las combinaciones:

   $$(|\mathcal{M}|,|\mathcal{W}|,\beta,\gamma)\in\{(40,40,0,-20),(40,40,0,-19),\ldots,(40,40,0,20),(40,40,1,-20),\ldots,(60,40,20,20)\}$$

   Se realizaron 2 mil simulaciones siguiendo los siguientes pasos:
   1. Para cada individuo $i \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ simular $x_i^A \overset{iid}{\sim} U[0, 1]$.
   2. Para cada individuo $i \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ simular $x_i^D \overset{iid}{\sim} U[0, 1]$.
   3. Para cada $i \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ simular $\varepsilon_{mw} \overset{iid}{\sim} Logistica(0, 1)$.
   4. Para cada individuo $m \in \mathcal{M}$ ($w \in \mathcal{W}$) construir las utilidades $u_m(w)$ ($u_w(m)$) para todo $w \in \mathcal{W}$ ($m \in \mathcal{M}$).
   5. Obtener MOSM (μ_{MOSM}) aplicando DA con los hombres haciendo las propuestas.
   6. Obtener WOSM (μ_{WOSM}) aplicando DA con las mujeres haciendo las propuestas.
   7. Calcular la fracción de hombres con múltiples parejas estables como aquellos que resultaban emparejados con mujeres diferentes bajo μ_{MOSM} y bajo μ_{WOSM}.

Figura 4 - Panel A

Figura: $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) = (40, 40); \beta \in [0, 20]; \gamma \in [-20, 20]$

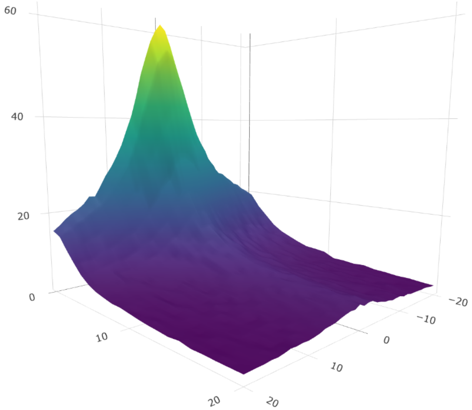


Figura: $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) = (41, 40); \beta \in [0, 20]; \gamma \in [-20, 20]$

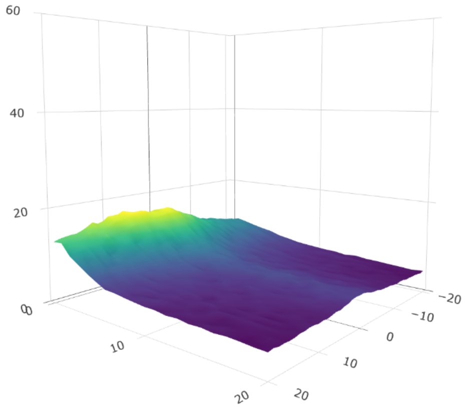


Figura 4 - Panel C

Figura: $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) = (45, 40); \beta \in [0, 20]; \gamma \in [-20, 20]$

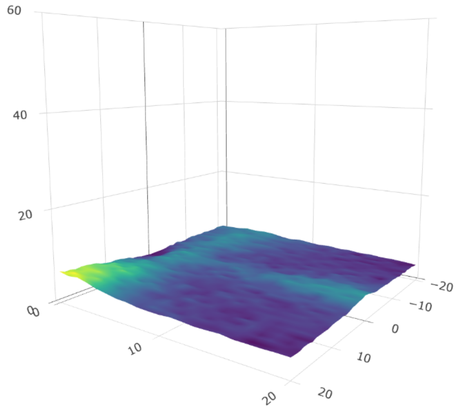
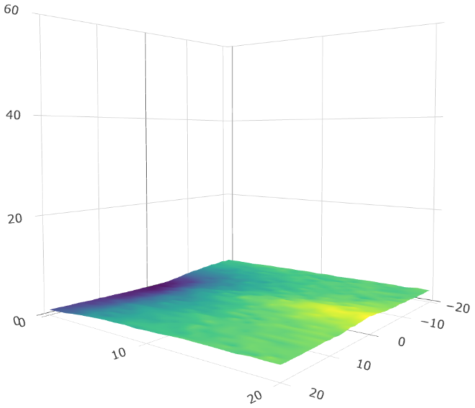


Figura 4 - Panel D

Figura: $(|\mathcal{M}|, |\mathcal{W}|) = (60, 40); \beta \in [0, 20]; \gamma \in [-20, 20]$



Ejercicio Computacional (II)

Para replicar la Figura 5 del paper:

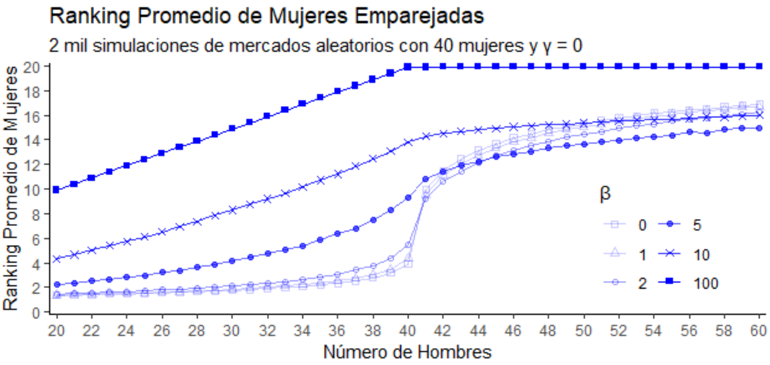
1. Se fijó $|\mathcal{W}| = 40$ y se combinó con las siguientes grillas:
   - Para $\mathcal{M} \in \{20, 21, \ldots, 60\}$
   - Para $\beta \in \{0, 1, 2, 5, 10, 100\}$
   - Para $\gamma \in \{0, 1, 2, 5, 10, 100, 1000\}$.
2. Para cada una de las combinaciones:

$$(|\mathcal{M}|,|\mathcal{W}|,\beta,\gamma)\in\{(20,40,0,0),(20,40,0,1),\ldots,(20,40,0,1000),(20,40,1,0),\ldots,(60,40,100,1000)\}$$

   Se realizaron 2 mil simulaciones siguiendo los siguientes pasos:

   1. Para cada individuo $i \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ simular $x_i^A \overset{iid}{\sim} U[0,1]$.
   2. Para cada individuo $i \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ simular $x_i^D \overset{iid}{\sim} U[0,1]$.
   3. Para cada $i \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ simular $\varepsilon_{mw} \overset{iid}{\sim} Logistica(0,1)$.
   4. Para cada individuo $m \in \mathcal{M}$ ($w \in \mathcal{W}$) construir las utilidades $u_m(w)$ ($u_w(m)$) para todo $w \in \mathcal{W}$ ($m \in \mathcal{M}$).
   5. Obtener MOSM (μ_{MOSM}) aplicando DA con los hombres haciendo las propuestas.
   6. Calcular el ranking promedio de esposas de hombres bajo MOSM $R_{MEN}(MOSM)$.

Figura 5 - A



ias correlacionadas dadas por la utilidad de un agente i al ser emparejado con un agente j: $u_i(j) = \beta x_j^A - \gamma(x_i^D - x_j^D)^2 + \varepsilon_{ij}$

Figura 5 - B

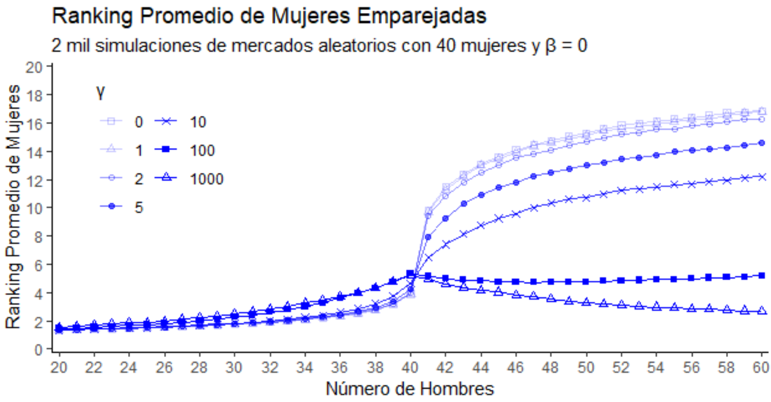
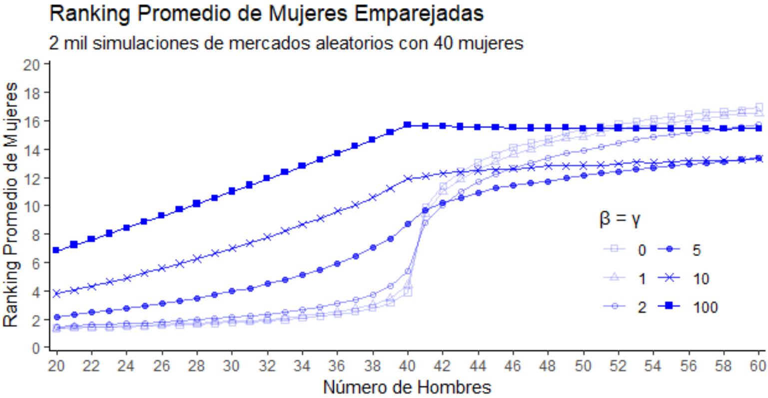

Ranking Promedio de Mujeres Emparejadas
2 mil simulaciones de mercados aleatorios con 40 mujeres y β = 0
γ
0
1
2
5
10
100
1000
Ranking Promedio de Mujeres
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60
Número de Hombres

Figura 5 - C



Ranking Promedio de Mujeres Emparejadas
2 mil simulaciones de mercados aleatorios con 40 mujeres
Ranking Promedio de Mujeres
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60
Número de Hombres
β = γ
0
5
1
10
2
100