Formelsammlung zur Klausur „Mathematische Grundlagen der Wirtschaftsinformatik“

Wirtschaftswissenschaftliche Grundlagen

Preis-Absatz-Funktion

$P(x)$

Ertragsfunktion

$E(x) = P(x) \cdot x$

Kostenfunktion

$K(x) = K_{var}(x) + K_{fix}$

$K_{var}(x)$ - Variable Kosten

K_{fix} - Fixkosten

Gewinnfunktion

$G(x) = E(x) - K(x)$

Grenzkostenfunktion

$GK(x) = K'(x)$

Grenzertragsfunktion

$GE(x) = E'(x)$

Stück-/Durchschnittskostenfunktion

$DK(x) = \frac{K(x)}{x}$

Notationen

Summenzeichen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$0! = 1$

Einfaches Rechnen

Betrag

Für eine reelle Zahl x ist der **(Absolut-)Betrag** definiert durch:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

Rechnen mit Beträgen

Für reelle Zahlen x,y und eine nicht-negative reelle Zahl p gelten die folgenden Regeln:

$|x| \geq 0$ $\qquad$ $|x| = 0 \iff x = 0$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$|x \cdot p| = |x| \cdot p$ $\qquad$ $|x \cdot (-p)| = |x| \cdot p$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ $\qquad$ $|x - y| \geq ||x| - |y||$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Bruchrechnen

Für alle Zahlen a, b, c, d mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd}$$

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot d} = \frac{a}{d} \qquad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Potenzrechengesetze

Für reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$, reelle Zahlen r und s falls $a > 0$ und rationale Zahlen r und s falls $a < 0$ ist gilt:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s \qquad a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Für positive Zahlen a kann man die Potenz durch Exponentialfunktion und Logaritmus ausdrücken:

$$x^r = \exp(r \cdot \ln(x))$$

Wurzelrechnengesetze

Für positive Zahlen a und b und $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$

Höhere Wurzeln aus positiven Zahlen x kann man wie jede Potenz durch Exponentialfunktion und Logarithmus ausdrücken:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right)$$

Logarithmengesetze

Für reellen, positive Zahlen a, b, x, y mit $a, b \neq 1$, einem reellen r und einer natürlichen Zahl n gilt:

$$\log_a(1) = 0$$

$$\mathrm{lb}(x) = \log_2(x) \qquad \ln(x) = \log_e(x) \qquad \lg(x) = \log_{10}(x)$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a(x + y) = \log_a(x) + \log_a\left(1 + \frac{x}{y}\right)$$

$$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_b\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log_b x$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Binomische Formeln

Für reelle Zahlen x und y gelten die folgenden Regeln:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

Binomischer Lehrsatz

Für zwei reelle Zahlen x, y und eine natürliche Zahl n gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^{n-k} y^k$$

Normalform von Polynomgleichungen

Jede Polynomgleichung (2. Grades) der Form $ax^2 + bx + c = d$, mit $a \neq 0$ lässt sich umformen in **Normalform** der Art $x^2 + px + q = 0$.

Diskriminante

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) ist die **Diskriminante** definiert durch $D = \frac{p^2 - 4 \cdot q}{4}$.

Es gilt:

- $D < 0$: die Gleichung hat keine (reelle) Lösung!
- $D = 0$: die Gleichung hat eine Lösung nämlich $-\frac{p}{2}$.
- $D > 0$: die Gleichung hat zwei Lösungen. (-> pq-Formel)

pq-Formel

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) mit positiver Diskriminante findet sich die Nullstellen $x_{1/2}$ durch

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Satz von Vieta

Für die Lösungen x_1 und x_2 einer Polynomgleichung (2. Grades) in Normalform gilt:

$x_1 \cdot x_2 = q$ und $-(x_1 + x_2) = p$

Logik

Aussagen
: Sätze, die entweder **wahr** oder **falsch** sind, heißen **Ausagen**.

Aussageformen / offene Aussagen
: Hängte die Wahrheit einer Aussage von einem Parameter x ab, so nennt man die Aussage $A(x)$ eine **offene Aussage** oder **Aussageform**.

Lösungsmenge
: Die Menge der Werte x, die eine Aussageform $A(x)$ zu einer **wahren Aussage** machen heißt **Lösungemenge**.

Es seien A und B Aussagen, dann gilt:

Implikation **(Aus A folge B)**
: $A \Longrightarrow B$: falls A wahr ist, dann ist auch B wahr.

Äquivalenz
: $A \Longleftrightarrow B$: A ist genau dann wahr, falls B wahr ist.

Konjunktion
: $A \wedge B$: A ist wahr und B ist wahr.

Disjunktion
: $A \vee B$: A ist wahr oder B ist wahr.

Negation
: $\neg A$ ist wahr $\Longleftrightarrow$ A ist falsch.

Allquantor
: $\forall$: „Für alle“

Existenzquantor
: $\exists$: „Es gibt ein“

Mengenlehre

Für beliebige Mengen A und B gilt:

Element
: Ist a ist ein **Element** von A, dann schreiben wir $a \in A$.

Teilmenge
: $A \subset B \Longleftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Echte Teilmenge
: $A \subsetneq B \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge \exists z \in B : z \notin A)$

Gleichheit von Mengen
: $A = B \Longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Vereinigungsmenge zweier Mengen
: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Schnittmenge zweier Mengen
: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Kompliment einer Menge
: $A^c = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}, U$ ein Universum mit $A \subset U$

Differenz von Mengen
: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$

Gleichmächtigkeit von Mengen
: A und B sind gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f : A \leftrightarrow B$ gibt.

Endlichkeit
: Eine Menge ist **endlich**, wenn sie **gleichmächtig** zu einem Element von $\mathbb{N}_0$ im Sinne von von Neumann ist.

Abzählbar
: Eine Menge ist **abzählbar**, wenn sie **endlich** ist oder **gleichmächtig** zu einer **Teilmenge** von $\mathbb{N}$ ist.

Unendlichkeit
: Eine nicht **endliche** Menge ist **unendlich**

Mächtigkeit von Mengen (allgemein)
: $|A|$ heißt **Betrag** der Menge A und bezeichnet die Mächtigkeit der Menge.

Mächtigkeit von endlichen Mengen
: $|A|$ ist die Anzahl der unterscheidbaren Elemente der (endlichen) Menge A.

Potenzmenge
: $\mathcal{P}(A) = \{U | U \subset A\}$

Satz von Cantor
: Für jede Menge A gilt: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Produktmenge
: $A \times B = \{(x;y) | x \in A \wedge y \in B\}$

De Morgansche Regeln
: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Disjunktheit
: A und B sind **disjunkt** $\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Zerlegung / Partition
: Die Mengen $A_1, ..., A_n$ mit $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $0 \leq i \neq j \leq n$ heißt **Partition** oder **Zerlegung** von A.

Zahlen

Natürliche Zahlen
: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Natürliche Zahlen mit Null:
: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Ganze Zahlen
: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Rationale Zahlen
: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \middle| q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd} \right\}$

Reelle Zahlen
: $\mathbb{R}$

Komplexe Zahlen
: $\mathbb{C} = \{x + y \cdot i | x, y \in \mathbb{R}\}$

Es gilt:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform, die es für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen gilt.

- **Induktionsanfang:** $A(1)$ gilt.
- **Induktionsschritt:** Unter der Annahme das $A(n)$ gilt zeigt man, dass $A(n+1)$ gilt.
  - **Induktionsannahme**: Es gelte $A(n)$.
  - **Induktionsschluss**: Zu zeigen ist dann, dass $A(n+1)$ gilt.

Folgen

Konvergenz und Grenzwert
: Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen eine (reelle) Zahl a, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Folgenindex n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

  $|a_n - a| < \epsilon$

  Man schreibt dafür $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und nennt a den **Grenzwert** der Folge (a_n).

Divergenz
: Jede **nicht konvergente** Folge ist **divergent**.

Monotonie
: Eine Folge (a_n) heißt

  - **monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$
  - **monoton fallend**, falls $a_n \geq a_{n+1}$
  - **konstant**, falls $a_n = a_{n+1}$
  - **alterniered**, falls $a_n \cdot a_{n+1} < 0$

  gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$.

  Man nutzt das Wort **streng**, falls jeweils $>$ bzw. $<$ statt $\leq$ bzw. $\geq$ gilt.

Beschränktheit
: Eine Folge \$(a_n) heißt

  - **nach oben beschränkt**, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - **nach unten beschränkt**, falls es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - **beschränt**, falls sie sowohl **nach oben** als auch **nach unten beschränkt** ist.

Arithmetische Folge
: Das sind Folgen die dem Bildungsgesetz $a_k = a_0 + k \cdot d$ mit einer Konstanten d gehorchen.

Geometrische Folge
: Das sind Folgen die dem Bildungsgesetz $a_k = a_0 \cdot q^k$ ist, mit einer Konstanten q gehorchen.

Bekannte Folgen und deren Grenzwerte

- $\lim_{n\to\infty} c = c$ für jedes konstante c
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ für eine feste natürliche Zahl k
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$ für alle reelen $s \geq 1$
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für alle reellen $|q| < 1$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b. Weiter sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

Reihen

Reihe
: Zu einer gegebenen Folge (a_n) nennt man den (formalen) Ausdruck $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ (**unendliche**) **Reihe**.

Partialsumme
: Für eine Folge (a_n) ist $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ die **n-te Partialsumme**.

Konvergenz und Grenzwert
: Konvergiert die Folge (s_n) der **Partialsummen** einer Reihe gegen einen Wert s, so nennt man die Reihe **konvergent**.
Man schreibt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = s.$$

Damit eine Reihe $\sum a_k$ **konvergiert** **muss** (a_k) eine **Nullfolge** sein.

Divergenz
: Eine nicht konvergente Reihe heißt **divergent**.

Absolute Konvergenz
: Konvergiert nicht nur $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, sondern auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, so heißt die Reihe **absolut konvergent**.
Jede **absolut konvergente** Reihe **konvergiert** auch gewöhnlich. Es gibt aber **konvergente** Reihen, die **nicht absolut konvergieren**.

Arithmetische Reihen
: Basieren auf **arithmetischen Folgen**, es gilt $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$.

Geometrische Reihen
: Basieren auf **geometrischen Folgen**, es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Für $|q| < 1$ ist die Reihe dann **konvergent** gegen $\frac{1}{1-q}$, für $|q| > 1$ ist sie **divergent**.

Majorantenkriterium
: Eine Reihe $\sum a_k$ **konvergiert absolut**, wenn es eine konvergente Reihe $\sum b_k$ gibt mit $b_k \geq 0$, so dass ab einem Index n_0 $|a_n| \leq b_n$ gilt für alle $n > n_0$.
Man nennt dann die Reihe $\sum b_k$ die **Majorante** zu $\sum a_k$.

Minorantenkriterium
: Eine Reihe $\sum a_k$ **divergiert**, wenn es eine divergente Reihe $\sum b_k$ gibt, so dass ab einem Index n_0 alle $a_n \geq b_n$ sind für alle $n > n_0$.
Man nennt dann die Reihe $\sum a_k$ eine **Minorante** zu $\sum a_k$.

Quotientenkriterium
: Eine Reihe $\sum a_k$ mit $a_k \neq 0$ **konvergiert absolut**, wenn es eine Zahl q gibt, mit $0 \leq 0 < 1$, so dass für alle k ab einem Index k_0 $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ gilt.
Das gilt insbesondere dann, falls $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$ ist.
Wenn dagegen für alle k ab einem Index k_0 $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ gilt, so ist die Reihe $\sum a_k$ **divergent**.
Das gilt insbesondere dann, falls $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q > 1$ ist.

Konvergenzkriterium von Leibniz
: Sei (a_n) eine reelle, monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die **alternierende Reihe**

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot a_n\right].$$

Kombinatorik

Summenregel
: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Inklusion und Exklusion
: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Produktregel
: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

k-Permutationen / Variation
: $P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Permutation
: $P(n,n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

Binomialkoeffizient
: $\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Für die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten k Objekte auszuwählen, gelten die folgenden Regeln:

Auswahl	**mit** Beachtung der Reihenfolge (*Variation*)	**ohne** Beachtung der Reihenfolge (*Kombination*)
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

In einem **Wahrscheinlichkeitsraum** (Ω, Σ, P) ist Ω die **Ergebnismenge**, Σ der **Ereignisraum** und P ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.

Es gilt dann für die beliebigen Ereignisse A, B und C bzw. die **disjunkten** Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ aus Σ:

Gegenereignis von Ereignis A
: $\overline{A} = A^c = \Omega \setminus A$

Sicheres Ereignis
: Ω

Unmögliches Ereignis
: $\emptyset$ oder $\{\}$

Teilereignis A von B
: $A \subset B$

Disjunktheit / Unverträglichkeit
: A und B sind **disjunkt** oder **unverträglich** $\iff A \cap B = \emptyset$

Nichtnegativität der Wahrscheinlichkeitsfunktion
: $P(A) \in [0;1]$

Normiertheit der Wahrscheinlichkeitsfunktion
: $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von A
: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses
: $P(\emptyset) = 0$

Summeregel
: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Siebformel von Poincaré und Sylvester für drei Ereignisse
: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Additivität
: Für eine paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

Stochastische Unabhänigkeit
: A und B sind unabhängig $\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B
: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Multiplikationssatz

$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\{E_1, \ldots, E_k\}$ eine **Zerlegung** von Ω mit $P(E_i) > 0$. Dann ist

$$P(E) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(E \mid E_i)$$

Satz von Bayes

Für zwei Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$ gilt:

$$P(A \mid B) \;=\; \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Satz von Bayes für Gegenereignisse

Da ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\bar{A}$ stets eine Zerlegung der
Ergebnismenge darstellen, gilt insbesondere:

$$P(A \mid B) \;=\; \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}.$$

Laplace-Experiment

Ein Zufallsexperiment mit **endliche Ergebismenge** und **gleicher Wahrscheinlichkeit** aller Ergebnisse nennt man **Laplace-Experiment**.

Klassische Wahrscheinlichkeitsfunktion bei Laplace-Experimenten

$$P(A) = \frac{\text{„Anzahl der für A günstigen Fälle“}}{\text{„Anzahl der möglichen Fälle“}}$$

Differentialrechnung

Differentialquotient

Die **Ableitung** oder der **Differentialquotient** einer Funktion f an der Stelle x_0 ist, falls der Grenzwert existiert

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Ableitungsregeln:

Für differenzierbare, reelle Funktionen f, g, z und n gelten die folgenden Regeln:

Summenregel

$[f \pm g]'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Produktregel

$[f \cdot g]'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Produktregel für eine reelle Konstante c

$[c \cdot f]'(x) = c \cdot f'(x)$

Quotientenregel

$$\left[\frac{z(x)}{n(x)}\right]' = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Kettenregel

$[f\,(g(x))]' = f'\,(g(x)) \cdot g'(x)$

Ableitung elementarer Funktionen

$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$	$[e^x]' = e^x$
$[\log_a(x)]' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$[a^x]' = a^x \cdot \ln(a)$
$\left[x^b\right]' = b \cdot x^{b-1}$	$[c]' = 0$
$[\sin(x)]' = \cos(x)$	$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Monotonie und Krümmung

Für eine im Intervall $[a; b]$ differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt:

f ist in $[a; b]$ - (streng) monoton wachsend $\Longleftrightarrow f'(x) \geq (>) 0$ - (streng) monoton fallend $\Longleftrightarrow f'(x) \leq (<) 0$ - (streng) monoton konkav $\Longleftrightarrow f''(x) \leq (<) 0$ - (streng) monoton konvex $\Longleftrightarrow f''(x) \geq (>) 0$

Extremstellen

Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ ist definiert

Kritischer Punkt

Ein Wert x mit $f'(x) = 0$ heißt **kritischer Punkt**

Lokales Minimum

Ein **kritischer Punkt** x ist ein **lokales Minimum**, falls $f''(x) > 0$

Lokales Maximum

Ein **kritischer Punkt** x ist ein **lokales Maximum**, falls $f''(x) < 0$

Sattelpunkt

Ein **kritischer Punkt** x ist ein **Sattelpunkt**, falls $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

Wendepunkt

Ein Punkt x mit $f'(x) \neq 0$, $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ ist ein **Wendepunkt**.