Formelsammlung zur Klausur „Mathematische Grundlagen der (Wirtschafts-)Informatik“

Notationen

Summenzeichen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1$$

Einfaches Rechnen

Betrag

Für eine reelle Zahl x ist der **(Absolut-)Betrag** definiert durch:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

Rechnen mit Beträgen

Für reelle Zahlen x,y und eine nicht-negative reelle Zahl p gelten die folgenden Regeln:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x \cdot p| = |x| \cdot p \qquad |x \cdot (-p)| = |x| \cdot p$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad |x - y| \geq ||x| - |y||$$

$$\left|\tfrac{x}{y}\right| = \tfrac{|x|}{|y|}$$

Bruchrechnen

Für alle Zahlen a, b, c, d mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd}$$

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot d} = \frac{a}{d} \qquad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Potenzrechengesetze

Für reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$, reelle Zahlen r und s falls $a > 0$ und rationale Zahlen r und s falls $a < 0$ ist gilt:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s \qquad a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Für positive Zahlen a kann man die Potenz durch Exponentialfunktion und Logaritmus ausdrücken:

$$x^r = \exp\left(r \cdot \ln(x)\right)$$

Wurzelrechnengesetze

Für positive Zahlen a und b und $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$

Höhere Wurzeln aus positiven Zahlen x kann man wie jede Potenz durch Exponentialfunktion und Logarithmus ausdrücken:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right)$$

Logarithmengesetze

Für reellen, positive Zahlen a, b, x, y mit $a, b \neq 1$, einem reellen r und einer natürlichen Zahl n gilt:

$$\log_a(1) = 0$$

$$\text{lb}(x) = \log_2(x) \qquad \ln(x) = \log_e(x) \qquad \lg(x) = \log_{10}(x)$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a(x + y) = \log_a(x) + \log_a\left(1 + \frac{x}{y}\right)$$

$$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_b\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log_b x$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Binomische Formeln

Für reelle Zahlen x und y gelten die folgenden Regeln:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

Binomischer Lehrsatz

Für zwei reelle Zahlen x, y und eine natürliche Zahl n gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^{n-k} y^k$$

Normalform von Polynomgleichungen

Jede Polynomgleichung (2. Grades) der Form $ax^2 + bx + c = d$, mit $a \neq 0$ lässt sich umformen in **Normalform** der Art $x^2 + px + q = 0$.

Diskriminante

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) ist die **Diskriminante** definiert durch $D = \frac{p^2 - 4 \cdot q}{4}$.

Es gilt:

- $D < 0$: die Gleichung hat keine (reelle) Lösung!
- $D = 0$: die Gleichung hat eine Lösung nämlich $-\frac{p}{2}$.
- $D > 0$: die Gleichung hat zwei Lösungen. ($\rightarrow$ pq-Formel)

pq-Formel

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) mit positiver Diskriminante findet sich die Nullstellen $x_{1/2}$ durch

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Satz von Vieta

Für die Lösungen x_1 und x_2 einer Polynomgleichung (2. Grades) in Normalform gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \text{ und } -(x_1 + x_2) = p$$

Logik

Aussagen
: Sätze, die entweder **wahr** oder **falsch** sind, heißen **Aussagen**.

Aussageformen / offene Aussagen
: Hängte die Wahrheit einer Aussage von einem Parameter x ab, so nennt man die Aussage $A(x)$ eine **offene Aussage** oder **Aussageform**.

Lösungsmenge
: Die Menge der Werte x, die eine Aussageform $A(x)$ zu einer **wahren Aussage** machen heißt **Lösungemenge**

Es seien A und B Aussagen, dann gilt:

Implikation **(Aus A folge B)**
: $A \implies B$: falls A wahr ist, dann ist auch B wahr.

Äquivalenz
: $A \iff B$: A ist genau dann wahr, falls B wahr ist.

Konjunktion
: $A \land B$: A ist wahr und B ist wahr.

Disjunktion
: $A \lor B$: A ist wahr oder B ist wahr.

Negation
: $\neg A$ ist wahr $\iff$ A ist falsch.

Allquantor
: $\forall$: „Für alle“"

Existenzquantor
: $\exists$: „Es gibt ein“

Mengenlehre

Für beliebige Mengen A und B gilt:

Element
: Ist a ist ein **Element** von A, dann schreiben wir $a \in A$.

Teilmenge
: $A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Echte Teilmenge
: $A \subsetneq B \iff (A \subset B \land \exists z \in B : z \notin A)$

Gleichheit von Mengen
: $A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$

Vereinigungsmenge zweier Mengen
: $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

Schnittmenge zweier Mengen
: $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

Kompliment einer Menge
: $A^c = \{x \mid x \in U \land x \notin A\}, U$ ein **Universum** mit $A \subset U$

Differenz von Mengen
: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\} = A \cap B^c$

Gleichmächtigkeit von Mengen
: A und B sind gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f : A \leftrightarrow B$ gibt.

Endlichkeit
: Eine Menge ist **endlich**, wenn sie **gleichmächtig** zu einem Element von $\mathbb{N}_0$ im Sinne von *{von Neumann} ist.*

Abzählbar
: *Eine Menge ist **abzählbar**, wenn sie **endlich** ist oder **gleichmächtig** zu einer **Teilmenge** von* $\mathbb{N}$ *ist.*

Unendlichkeit
: *Eine nicht **endliche** Menge ist **unendlich***

Mächtigkeit von Mengen (allgemein)
: $|A|$ *heißt **Betrag** der Menge A und bezeichnet die Mächtigkeit der Menge.*

Mächtigkeit von endlichen Mengen
: $|A|$ *ist die Anzahl der unterscheidbaren Elemente der (endlichen) Menge A.*

Potenzmenge
: $\mathcal{P}(A) = \{U \mid U \subset A\}$

Satz von Cantor
: *Für jede Menge A gilt:* $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Produktmenge
: $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \land y \in B\}$

De Morgansche Regeln
: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *und* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Disjunktheit
: *A und B sind **disjunkt*** $\iff A \cap B = \emptyset$

Zerlegung / Partition
: *Die Mengen* $A_1, ..., A_n$ *mit* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$ *und* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für alle* $0 \leq i \neq j \leq n$ *heißt **Partition** oder **Zerlegung** von A.*

Zahlen

Natürliche Zahlen
: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Natürliche Zahlen mit Null:
: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Ganze Zahlen
: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Rationale Zahlen
: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \,\middle|\, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd} \right\}$

Reelle Zahlen
: $\mathbb{R}$

Komplexe Zahlen
: $\mathbb{C} = \{x + y \cdot i \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$

Es gilt:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform, die es für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen gilt

- **Induktionsanfang:** $A(1)$ gilt.
- **Induktionsschritt:** Unter der Annahme das $A(n)$ gilt zeigt man, dass $A(n + 1)$ gilt.
  - **Induktionsannahme**: Es gelte $A(n)$.
  - **Induktionsschluss**: Zu zeigen ist dann, dass $A(n+1)$ gilt.

Kombinatorik

Summenregel
: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Inklusion und Exklusion
: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Produktregel
: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

k-Permutationen / Variation
: $$P(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Permutation
: $n! = P(n, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1$

Binomialkoeffizient
: $$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Für die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten k Objekte auszuwählen, gelten die folgenden Regeln:

Auswahl	**mit** Beachtung der Reihenfolge (*Variation*)	**ohne** Beachtung der Reihenfolge (*Kombination*)
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Lineare Algebra

Lineares Gleichungssystem

Ein LGS mit m Gleichungen und n unbekannten Variabeln hat die Form :

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + & \cdots & + a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + & \cdots & + a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + & \cdots & + a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

a_{ij} : Koeffizienten

b_i : rechte Seite

Homogene / Inhomogene LGS

Sind alle $b_i = 0$, nennt man das LGS **homogen**, sonst **inhomogen**

Homogene LGS besitzen immer eine **triviale Lösung**, bei der alle $x_i = 0$ sind.

Quandratische LGS

Ist $m = n$ so nennt man das LGS **quadratisch**

Elementare Zeilenumformungen

Man ändert die Lösungsmenge eines LGS nicht, wenn man

- zwei Zeilen vertauscht,
- eine Zeile auf beiden Seiten mit einer beliebigen Konstante $c \neq 0$ multipliziert,
- das Vielfache einer Zeile zu einer anderen hinzuaddiert oder
- das Vielfache einer Zeile von einer anderen subtrahiert.

Eliminationsverfahren

Man benutzt die **elementaren Zeilenumformungen** um aus einem beliebigen LGS ein LGS in **Zeilenstufenform** oder **Diagonalgestallt** zu erhalten. Das Ziel ist dabei die Lösungen einfach oder gar direkt abzulesen.

Lösungsverhalten eines LGS

Ein **homogenes** LGS besitzt entweder

- genau **eine** Lösung, nämlich die triviale Lösung oder
- **unendlich viele** Lösungen.

Ein **inhomogenes** LGS besitzt entweder

- genau **eine** Lösung oder
- **unendlich viele** Lösungen oder
- überhaupt **keine** Lösung.

Matrizen

Matrizen sind geordnete, rechteckige Schemata von Zahlen oder Symbolen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

mit m und $n \in \mathbf{N}$.

m : Zeilen

n : Spalten

$m \times n$: Orndung der Matrix

$a_{11}, \dots, a_{mn}$: Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

j : Spaltenindex

Vektoren

$n \times 1$-Matrix heißt **Spaltenvektor mit n Komponenten**

$1 \times n$-Matrix heißt **Zeilenvektor mit n Komponenten**

Skalar

Einen Wert aus dem Grundkörper (meistens $\mathbb{R}$) nennen wir einen **Skalar**.

Addition & Subtraktion von Matrizen und Vektoren

Die **Addition** und **Subtraktion** von Matrizen gleicher Ordnung erfolgt **komponentenweise**.

Multiplikation mit einem Skalar

Matrix werden mit einem **Skalar** multiplizieren, in dem wir **jedes Element** mit dem **Skalar multipliziert**.

Linearkombination

$v_1, \dots v_n, v$ Vektoren. v ist **Linearkombination**, falls gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

Lineare (Un-)abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren ist **linear unabhängig** falls keiner von ihnen als **Linearkombination** der anderen ausgedrückt werden kann.

Ansonsten sind sie **linear abbhängig**.

Multiplikation von Matrizen

Sei $A_{n\times p}, B_{p\times m}$, dann lässt sich $C_{n\times m} = A \cdot B$ berechnen mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$.

Transposition

Die transponierte Matrix A^T einer Matrix A ergibt sich in dem jede Spalte von A, bei gleichbleibender Reihenfolge, zu einer Zeile von A^T wird.

Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier (Spalten-)Vektoren x und y lautet:

$$< x, y >= x^T \cdot y$$

Einheitsmatrix

E_n heißt **Einheitsmatrix** mit $n \times n$ Elementen, wenn gilt:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Inverse einer Matrix

Gibt es zu $A_{n\times n}$ eine Matrix X mit

$$E_n = X \cdot A = A \cdot X = E_n$$

so nennen wir X die **Inverse der Matrix A** und schreiben dafür A^{-1}.

Finanzmathematik

Notationen

K, K_0, K_t : Kapital (zum Zeitpunkt 0 oder t)
t : Zeitpunkt oder Zeitraum
Z,Z_t : Zinsen(für den Zeitraum t)
i : Zins, Zinssatz
$q = 1 + i$: Aufzinsungsfaktor

Zinseszinsformel

$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$

Unterjährige Verzinsung

$K_t = K_0 + Z \cdot t = K_0 + i \cdot K_0 \cdot t = K_0(1 + i \cdot t)$
$t = \frac{T_2 - T_1}{360}$
T_2 : Auszahlungszeitpunkt in Zinstagen
T_1 : Einzahlungszeitpunkt in Zinstagen
$T_i = (\text{aktueller Monat} - 1) \cdot 30 + \text{Tag im Monat}$

Gemischte Verzinsung

$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot t_2)$
$K_t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{360 - T_0 + 1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T_1 - 1}{360}\right)$
T_0 : Einzahlungszeitpunkt in Zinstagen im ersten Jahr
t_0 : Anlagedauer in Zinstagen im ersten Jahr
T_1 : Auszahlungszeitpunkt in Zinstagen im letzten Jahr
t_1 : Anlagedauer in Zinstagen im letzten Jahr
n : Anzahl der ganzen Jahre

Approximative Verzinsung

$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t = K_0 \cdot q^t$
t : Anlagedauer als nicht-ganzzahliger Wert