

Formelsammlung zur Klausur „Mathematische Grundlagen der (Wirtschafts-)Informatik“

Notationen

Summenzeichen

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$
$$0! = 1$$

Einfaches Rechnen

Betrag

Für eine reelle Zahl x ist der **(Absolut-)Betrag** definiert durch:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

Rechnen mit Beträgen

Für reelle Zahlen x, y und eine nicht-negative reelle Zahl p gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0 & |x| &= 0 \iff x = 0 \\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \\ |x \cdot p| &= |x| \cdot p & |x \cdot (-p)| &= |x| \cdot p \\ |x + y| &\leq |x| + |y| & |x - y| &\geq ||x| - |y|| \\ \left| \frac{x}{y} \right| &= \frac{|x|}{|y|} \end{aligned}$$

Bruchrechnen

Für alle Zahlen a, b, c, d mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} &= \frac{ad + bc}{cd} & \frac{a}{c} - \frac{b}{d} &= \frac{ad - bc}{cd} \\ \frac{c}{c \cdot a} &= \frac{a}{a} & \frac{c}{c} \cdot \frac{b}{d} &= \frac{ab}{cd} \\ \frac{\frac{a}{c}}{d} &= \frac{a}{cd} & \frac{\frac{c}{d}}{b} &= \frac{cd}{bc} \end{aligned}$$

Potenzrechengesetze

Für reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$, reelle Zahlen r und s

falls $a > 0$ und rationale Zahlen r und s falls $a < 0$ ist gilt:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 & a^{-r} &= \frac{1}{a^r} \\ a^{r+s} &= a^r \cdot a^s & a^{r-s} &= \frac{a^r}{a^s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \\ (a^r)^s &= a^{r \cdot s} \end{aligned}$$

Für positive Zahlen a kann man die Potenz durch Exponentialfunktion und Logarithmus ausdrücken:

$$x^r = \exp(r \cdot \ln(x))$$

Wurzelrechengesetze

Für positive Zahlen a und b und $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} & \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[k \cdot n]{a} & a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \\ a^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \end{aligned}$$

Höhere Wurzeln aus positiven Zahlen x kann man wie jede Potenz durch Exponentialfunktion und Logarithmus ausdrücken:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right)$$

Logarithmengesetze

Für reellen, positive Zahlen a, b, x, y mit $a, b \neq 1$, einem reellen r und einer natürlichen Zahl n gilt:

$$\begin{aligned} \log_a(1) &= 0 \\ \text{lb}(x) &= \log_2(x) & \ln(x) &= \log_e(x) & \lg(x) &= \log_{10}(x) \\ \log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a(x^r) &= r \cdot \log_a(x) \\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_a(x) \\ \log_a(x + y) &= \log_a(x) + \log_a\left(1 + \frac{y}{x}\right) \\ \log_b(\sqrt[n]{x}) &= \log_b\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log_b x \\ \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \end{aligned}$$

Binomische Formeln

Für reelle Zahlen x und y gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ (x - y)(x + y) &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz

Für zwei reelle Zahlen x, y und eine natürliche Zahl n gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Normalform von Polynomgleichungen

Jede Polynomgleichung (2. Grades) der Form $ax^2 + bx + c = d$, mit $a \neq 0$ lässt sich umformen in **Normalform** der Art $x^2 + px + q = 0$.

Diskriminante

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) ist die **Diskriminante** definiert durch $D = \frac{p^2 - 4 \cdot q}{4}$.

Es gilt:

- $D < 0$: die Gleichung hat keine (reelle) Lösung!
- $D = 0$: die Gleichung hat eine Lösung nämlich $-\frac{p}{2}$.
- $D > 0$: die Gleichung hat zwei Lösungen. (\rightarrow pq-Formel)

pq-Formel

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) mit positiver Diskriminante findet sich die Nullstellen $x_{1/2}$ durch

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Satz von Vieta

Für die Lösungen x_1 und x_2 einer Polynomgleichung (2. Grades) in Normalform gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \text{ und } -(x_1 + x_2) = p$$

Logik

Aussagen

Sätze, die entweder **wahr** oder **falsch** sind, heißen **Aussagen**.

Aussageformen / offene Aussagen

Hängt die Wahrheit einer Aussage von einem Parameter x ab, so nennt man die Aussage $A(x)$ eine **offene Aussage** oder **Aussageform**.

Lösungsmenge

Die Menge der Werte x , die eine Aussageform $A(x)$ zu einer **wahren Aussage** machen heißt **Lösungsmenge**

Es seien A und B Aussagen, dann gilt:

Implikation (**Aus A folge B**)

$A \implies B$: falls A wahr ist, dann ist auch B wahr.

Äquivalenz

$A \iff B$: A ist genau dann wahr, falls B wahr ist.

Konjunktion

$A \wedge B$: A ist wahr und B ist wahr.

Disjunktion

$A \vee B$: A ist wahr oder B ist wahr.

Negation

$\neg A$ ist wahr $\iff A$ ist falsch.

Allquantor

\forall : „Für alle“

Existenzquantor

\exists : „Es gibt ein“

Mengenlehre

Für beliebige Mengen A und B gilt:

Element

Ist a ist ein **Element** von A , dann schreiben wir $a \in A$.

Teilmenge

$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$

Echte Teilmenge

$A \subsetneq B \iff (A \subset B \wedge \exists z \in B : z \notin A)$

Gleichheit von Mengen

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Vereinigungsmenge zweier Mengen

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Schnittmenge zweier Mengen

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Komplement einer Menge

$A^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$, U ein **Universum** mit $A \subset U$

Differenz von Mengen

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$

Gleichmächtigkeit von Mengen

A und B sind gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f : A \leftrightarrow B$ gibt.

Endlichkeit

Eine Menge ist **endlich**, wenn sie **gleichmächtig** zu einem Element von \mathbb{N}_0 im Sinne von *{von Neumann}* ist.

Abzählbar

Eine Menge ist **abzählbar**, wenn sie **endlich** ist oder **gleichmächtig** zu einer **Teilmenge** von \mathbb{N} ist.

Unendlichkeit

Eine nicht **endliche** Menge ist **unendlich**

Mächtigkeit von Mengen (allgemein)

$|A|$ heißt **Betrag** der Menge A und bezeichnet die Mächtigkeit der Menge.

Mächtigkeit von endlichen Mengen

$|A|$ ist die Anzahl der unterscheidbaren Elemente der (endlichen) Menge A .

Potenzmenge

$\mathcal{P}(A) = \{U \mid U \subset A\}$

Satz von Cantor

Für jede Menge A gilt: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Produktmenge

$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

De Morgansche Regeln

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Disjunktheit

A und B sind **disjunkt** $\iff A \cap B = \emptyset$

Zerlegung / Partition

Die Mengen A_1, \dots, A_n mit $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $0 \leq i \neq j \leq n$ heißt **Partition** oder **Zerlegung** von A .

Zahlen

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Natürliche Zahlen mit Null:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \mid q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd} \right\}$

Reelle Zahlen

\mathbb{R}

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Es gilt:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform, die es für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen gilt

- **Induktionsanfang:** $A(1)$ gilt.
- **Induktionsschritt:** Unter der Annahme das $A(n)$ gilt zeigt man, dass $A(n + 1)$ gilt.
 - **Induktionsannahme:** Es gelte $A(n)$.
 - **Induktionsschluss:** Zu zeigen ist dann, dass $A(n + 1)$ gilt.

Kombinatorik

Summenregel

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Inklusion und Exklusion

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Produktregel

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

k -Permutationen / Variation

$$P(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Permutation

$$n! = P(n, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Für die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten k Objekte auszuwählen, gelten die folgenden Regeln:

| Auswahl | mit Beachtung der Reihenfolge (<i>Variation</i>) | ohne Beachtung der Reihenfolge (<i>Kombination</i>) |
|-------------------------|---|--|
| ohne Zurücklegen | $\frac{n!}{(n - k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |
| mit Zurücklegen | n^k | $\binom{n + k - 1}{k}$ |

Lineare Algebra

Lineares Gleichungssystem

Ein LGS mit m Gleichungen und n unbekannten Variablen hat die Form :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + & \cdots & + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + & \cdots & + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + & \cdots & + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

a_{ij} : Koeffizienten

b_i : rechte Seite

Homogene / Inhomogene LGS

Sind alle $b_i = 0$, nennt man das LGS **homogen**, sonst **inhomogen**

Homogene LGS besitzen immer eine **triviale Lösung**, bei der alle $x_i = 0$ sind.

Quadratische LGS

Ist $m = n$ so nennt man das LGS **quadratisch**

Elementare Zeilenumformungen

Man ändert die Lösungsmenge eines LGS nicht, wenn man

- zwei Zeilen vertauscht,
- eine Zeile auf beiden Seiten mit einer beliebigen Konstante $c \neq 0$ multipliziert,
- das Vielfache einer Zeile zu einer anderen hinzuaddiert oder
- das Vielfache einer Zeile von einer anderen subtrahiert.

Eliminationsverfahren

Man benutzt die **elementaren Zeilenumformungen** um aus einem beliebigen LGS ein LGS in **Zeilenstufenform** oder **Diagonalgestalt** zu erhalten. Das Ziel ist dabei die Lösungen einfach oder gar direkt abzulesen.

Lösungsverhalten eines LGS

Ein **homogenes** LGS besitzt entweder

- genau **eine** Lösung, nämlich die triviale Lösung oder

- **unendlich viele** Lösungen.

Ein **inhomogenes** LGS besitzt entweder

- genau **eine** Lösung oder
- **unendlich viele** Lösungen oder
- überhaupt **keine** Lösung.

Matrizen

Matrizen sind geordnete, rechteckige Schemata von Zahlen oder Symbolen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

mit m und $n \in \mathbb{N}$.

m : Zeilen

n : Spalten

$m \times n$: Ordnung der Matrix

a_{11}, \dots, a_{mn} : Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

j : Spaltenindex

Vektoren

$n \times 1$ -Matrix heißt **Spaltenvektor mit n Komponenten**

$1 \times n$ -Matrix heißt **Zeilenvektor mit n Komponenten**

Skalar

Einen Wert aus dem Grundkörper (meistens \mathbb{R}) nennen wir einen **Skalar**.

Addition & Subtraktion von Matrizen und Vektoren

Die **Addition** und **Subtraktion** von Matrizen gleicher Ordnung erfolgt **komponentenweise**.

Multiplikation mit einem Skalar

Matrix werden mit einem **Skalar** multipliziert, in dem wir **jedes Element** mit dem **Skalar multipliziert**.

Linearkombination

v_1, \dots, v_n, v Vektoren. v ist **Linearkombination**, falls gilt:

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Lineare (Un-)abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren ist **linear unabhängig** falls keiner von ihnen als **Linearkombination** der anderen ausgedrückt werden kann.

Ansonsten sind sie **linear abhängig**.

Multiplikation von Matrizen

Sei $A_{n \times p}$, $B_{p \times m}$, dann lässt sich $C_{n \times m} = A \cdot B$ berechnen mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$.

Transposition

Die transponierte Matrix A^T einer Matrix A ergibt sich in dem jede Spalte von A , bei gleichbleibender Reihenfolge, zu einer Zeile von A^T wird.

Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier (Spalten-)Vektoren x und y lautet:

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$$

Einheitsmatrix

E_n heißt **Einheitsmatrix** mit $n \times n$ Elementen, wenn gilt:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Inverse einer Matrix

Gibt es zu $A_{n \times n}$ eine Matrix X mit

$$E_n = X \cdot A = A \cdot X = E_n$$

so nennen wir X die **Inverse der Matrix A** und schreiben dafür A^{-1} .

Finanzmathematik

Notationen

- K, K_0, K_t : Kapital (zum Zeitpunkt 0 oder t)
- t : Zeitpunkt oder Zeitraum
- Z, Z_t : Zinsen(für den Zeitraum t)
- i : Zins, Zinssatz
- $q = 1 + i$: Aufzinsungsfaktor

Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$$

Unterjährige Verzinsung

$$K_t = K_0 + Z \cdot t = K_0 + i \cdot K_0 \cdot t = K_0(1 + i \cdot t)$$
$$t = \frac{T_2 - T_1}{360}$$

T_2 : Auszahlungszeitpunkt in Zinstagen
 T_1 : Einzahlungszeitpunkt in Zinstagen
 T_i = (aktueller Monat – 1) · 30 + Tag im Monat

Gemischte Verzinsung

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i \cdot t_2)$$
$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{360 - T_0 + 1}{360}\right) \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T_1 - 1}{360}\right)$$

T_0 : Einzahlungszeitpunkt in Zinstagen im ersten Jahr

- t_0 : Anlagedauer in Zinstagen im ersten Jahr
- T_1 : Auszahlungszeitpunkt in Zinstagen im letzten Jahr
- t_1 : Anlagedauer in Zinstagen im letzten Jahr
- n : Anzahl der ganzen Jahre

Approximative Verzinsung

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t = K_0 \cdot q^t$$

t : Anlagedauer als nicht-ganzzahliger Wert