Formelsammlung zur Klausur „Mathematische Grundlagen der Wirtschaftsinformatik“

Notationen

Summenzeichen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1$$

Einfaches Rechnen

Betrag

Für eine reelle Zahl x ist der **(Absolut-)Betrag** definiert durch:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

Rechnen mit Beträgen

Für reelle Zahlen x,y und eine nicht-negative reelle Zahl p gelten die folgenden Regeln:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \iff x = 0$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$
$$|x \cdot p| = |x| \cdot p \qquad |x \cdot (-p)| = |x| \cdot p$$
$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad |x - y| \geq ||x| - |y||$$
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Bruchrechnen

Für alle Zahlen a, b, c, d mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd}$$
$$\frac{c \cdot a}{c \cdot d} = \frac{a}{d} \qquad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$
$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Potenzrechengesetze

Für reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$, reelle Zahlen r und s falls $a > 0$ und rationale Zahlen r und s falls $a < 0$ ist gilt:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$
$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s \qquad a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$$
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Für positive Zahlen a kann man die Potenz durch Exponentialfunktion und Logaritmus ausdrücken:

$$x^r = \exp\left(r \cdot \ln(x)\right)$$

Wurzelrechnengesetze

Für positive Zahlen a und b und $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$

Höhere Wurzeln aus positiven Zahlen x kann man wie jede Potenz durch Exponentialfunktion und Logarithmus ausdrücken:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right)$$

Logarithmengesetze

Für reellen, positive Zahlen a, b, x, y mit $a, b \neq 1$, einem reellen r und einer natürlichen Zahl n gilt:

$$\log_a(1) = 0$$
$$\mathrm{lb}(x) = \log_2(x) \qquad \ln(x) = \log_e(x) \qquad \lg(x) = \log_{10}(x)$$
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$
$$\log_a(x + y) = \log_a(x) + \log_a\left(1 + \frac{x}{y}\right)$$
$$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_b\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log_b x$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Binomische Formeln

Für reelle Zahlen x und y gelten die folgenden Regeln:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

Binomischer Lehrsatz

Für zwei reelle Zahlen x, y und eine natürliche Zahl n gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^{n-k} y^k$$

Normalform von Polynomgleichungen

Jede Polynomgleichung (2. Grades) der Form $ax^2 + bx + c = d$, mit $a \neq 0$ lässt sich umformen in **Normalform** der Art $x^2 + px + q = 0$.

Diskriminante

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) ist die **Diskriminante** definiert durch $D = \frac{p^2 - 4 \cdot q}{4}$.

Es gilt:

- $D < 0$: die Gleichung hat keine (reelle) Lösung!
- $D = 0$: die Gleichung hat eine Lösung nämlich $-\frac{p}{2}$.
- $D > 0$: die Gleichung hat zwei Lösungen. (-> pq-Formel)

pq-Formel

Für eine Polynomgleichung (2. Grades) mit positiver Diskriminante findet sich die Nullstellen $x_{1/2}$ durch

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Satz von Vieta

Für die Lösungen x_1 und x_2 einer Polynomgleichung (2. Grades) in Normalform gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \text{ und } -(x_1 + x_2) = p$$

Mengenlehre

Für beliebige Mengen A und B gilt:

Element
: Ist a ist ein **Element** von A, dann schreiben wir $a \in A$.

Teilmenge
: $A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Echte Teilmenge
: $A \subsetneq B \iff (A \subset B \land \exists z \in B : z \notin A)$

Gleichheit von Mengen
: $A = B \iff A \subset B \land B \subset A$

Vereinigungsmenge zweier Mengen
: $A \cup B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$

Schnittmenge zweier Mengen
: $A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$

Kompliment einer Menge
: $A^c = \{x | x \in U \land x \notin A\}, U$ ein Universum mit $A \subset U$

Differenz von Mengen
: $A \setminus B = \{x | x \in A \land x \notin B\} = A \cap B^c$

Gleichmächtigkeit von Mengen
: A und B sind gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f : A \leftrightarrow B$ gibt.

Endlichkeit
: Eine Menge ist **endlich**, wenn sie **gleichmächtig** zu einem Element von $\mathbb{N}_0$ im Sinne von von Neumann ist.

Abzählbar
: Eine Menge ist **abzählbar**, wenn sie **endlich** ist oder **gleichmächtig** zu einer **Teilmenge** von $\mathbb{N}$ ist.

Unendlichkeit
: Eine nicht **endliche** Menge ist **unendlich**

Mächtigkeit von Mengen (allgemein)
: $|A|$ heißt **Betrag** der Menge A und bezeichnet die Mächtigkeit der Menge.

Mächtigkeit von endlichen Mengen
: $|A|$ ist die Anzahl der unterscheidbaren Elemente der (endlichen) Menge A.

Potenzmenge
: $\mathcal{P}(A) = \{U | U \subset A\}$

Satz von Cantor
: Für jede Menge A gilt: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Produktmenge
: $A \times B = \{(x; y) | x \in A \land y \in B\}$

De Morgansche Regeln
: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Disjunktheit
: A und B sind **disjunkt** $\iff A \cap B = \emptyset$

Zerlegung / Partition
: Die Mengen $A_1, ..., A_n$ mit $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $0 \leq i \neq j \leq n$ heißt **Partition** oder **Zerlegung** von A.

Zahlen

Natürliche Zahlen
: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Natürliche Zahlen mit Null:
: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Ganze Zahlen
: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Rationale Zahlen
: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \middle| q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd} \right\}$

Reelle Zahlen
: $\mathbb{R}$

Komplexe Zahlen
: $\mathbb{C} = \{x + y \cdot i | x, y \in \mathbb{R}\}$

Es gilt:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform, die es für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen gilt

- **Induktionsanfang:** $A(1)$ gilt.
- **Induktionsschritt:** Unter der Annahme das $A(n)$ gilt zeigt man, dass $A(n+1)$ gilt.
  - **Induktionsannahme**: Es gelte $A(n)$.
  - **Induktionsschluss**: Zu zeigen ist dann, dass $A(n+1)$ gilt.

Kombinatorik

Summenregel
: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Inklusion und Exklusion
: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Produktregel
: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

k-Permutationen / Variation
: $$P(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutation
: $P(n, n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

Binomialkoeffizient
: $$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Für die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten k Objekte auszuwählen, gelten die folgenden Regeln:

Auswahl	**mit** Beachtung der Reihenfolge (*Variation*)	**ohne** Beachtung der Reihenfolge (*Kombination*)
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Differentialrechnung

Differentialquotient erster Ordnung
: Die **Ableitung** oder der **Differentialquotient** einer Funktion f an der Stelle x_0 ist, falls der Grenzwert existiert
$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Differentialquotient zweiter Ordnung
: Die **2. Ableitung** oder der **Differentialquotient 2. Ordnung** einer Funktion f an der Stelle $_x0$ ist, falls der Grenzwert existiert, die Ableitung der 1. Ableitung.

Ableitungsregeln:

Für differenzierbare, reelle Funktionen f, g, z und n gelten die folgenden Regeln:

Summenregel
: $[f \pm g]'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Produktregel
: $[f \cdot g]'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Produktregel für eine reelle Konstante c
: $[c \cdot f]'(x) = c \cdot f'(x)$

Quotientenregel
: $$\left[\frac{z(x)}{n(x)}\right]' = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Kettenregel
: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot f'(x)$

Ableitung elementarer Funktionen

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x} \qquad [e^x]' = e^x$$

$$[\log_a(x)]' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \qquad [a^x]' = a^x \cdot \ln(a)$$

$$\left[x^b\right]' = b \cdot x^{b-1} \qquad [c]' = 0$$

$$[\sin(x)]' = \cos(x) \qquad [\cos(x)]' = -\sin(x)$$

Multivariate Differentialrechnung

Partielle Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$$

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} = f_{xx}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} = f_{yy}(x,y)$$

Hesse-Matrix

Für eine bivariate (zweimal partiell stetig differenzierbare) Funktion $f(x,y)$ wird durch

$$A_{Hess(f(x,y))} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** definiert.

Satz von Schwarz

Für eine bivariate (zweimal partiell stetig differenzierbare) Funktion $f(x,y)$ gilt $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

Definitheit symmetrischer (2×2) Matrizen

Eine (2×2) Matrix A ist **definit**, falls

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = a \cdot b - c^2 > 0 \text{ und } a \neq 0$$

gilt. Eine solche **definite** Matrix ist für $a > 0$ **positiv definit** und für $a < 0$ **negativ definit**.

Extremstellen bivariater Funktionen

Kritischer Punkt

(x_0, y_0) ist ein **kritischer Punkt** von $f(x,y)$, falls $f_x(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) = 0$ gilt.

Extremstellen / Sattelpunkte

Ein kritischer Punkt (x_0, y_0) ist ein **Maximum** von $f(x,y)$, falls die **Hesse-Matrix** von $f(x,y)$ an der Stellte (x_0, y_0) **negativ definit** ist.
Ist die Hesse-Matrix dort **positiv definit**, dann hat $f(x,y)$ dort ein **Minimum**.
Ist die Hesse-Matrix dort **indefinit**, so handelt es sich um einen **Sattelpunkt**.

Integralrechnung

Stammfunktion

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f, falls gilt: $F'(x) = f(x)$

Unbestimmtest Integral

Damit gilt für das **unbestimmte Integral**:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \int F'(x)\,\mathrm{d}x F(x) + c$$

Elementare Stammfunktionen:

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad (\text{für } n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln(x) + c & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (\text{für } n \neq -1)$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \qquad (\text{für } a > 0 \text{ und } a \neq 1)$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$$

Rechenregeln:

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Punktregel

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Umkehrregel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)dx$$

Linearität

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Partielle Integration

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Substitionsregel für lineare Substitution

Sei $z = mx + d$ eine lineare Substitution und $F(z)$ die Stammfunktion von f(z), dann gilt:

$$\int_a^b f(mx+d)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\int_{m\cdot a+d}^{m\cdot b+d} f(z)\,\mathrm{d}z$$