**UNIP – Universidade Paulista**

**Ciência da Computação e Sistemas de Informação**

**Disciplina: Pesquisa Operacional**

**Exemplo 01: Maximização - Resolução**

Fonte:
Pesquisa Operacional – Curso Introdutório – 2ª edição - Daniel Augusto Moreira – Página 14

## Enunciado

Uma fábrica produz dois produtos: A e B. Cada um deles deve ser processado por duas máquinas: M1 e M2. Devido à programação de outros produtos, que também utilizam essas máquinas, a máquina M1 tem 24 horas de tempo disponível para os produtos A e B, enquanto a máquina M2 tem 16 horas de tempo disponível.

Para produzir uma unidade do produto A são gastos 4 horas em cada uma das máquinas M1 e M2. Para produzir uma unidade do produto B são gastos 6 horas na máquina M1 e 2 horas na máquina M2.

Cada unidade vendida do produto A gera um lucro de R$80,00 e cada unidade do produto B gera um lucro de R$60,00. Existe uma previsão máxima de demanda para o produto B de 3 unidades, não havendo restrição quanto à demanda do produto A.

Quantas unidades de A e B devem ser produzidas de forma a maximizar o lucro?

## Solução

As variáveis de decisão são as quantidades que devem ser fabricadas dos produtos A e B para maximizar o lucro.

Sumarizando o problema em uma tabela temos:

| Produto | Horas gastas em M1 | Horas gastas em M2 | Demanda máxima | Lucro unitário (R$) |
|---|---|---|---|---|
| A | 4 | 4 | ilimitada | 80 |
| B | 6 | 2 | 3 | 60 |
| Horas disponíveis | 24 | 16 | | |

## Função objetivo

Representaremos:

- x = quantidade de produtos A
- y = quantidade de produtos B

$$80x + 60y$$

já que cada unidade de A gera um lucro de R$80,00 e cada unidade de B gera um lucro de R$60,00.

É essa função, então, que deve ser maximizada. Mas as restrições devem ser observadas.

**Restrições**

Há um número limitado de horas de máquina, tanto para M1 como para M2:

- Horas consumidas na máquina M1 $\leq 24$
- Horas consumidas na máquina M2 $\leq 16$

Cada unidade de A consome 4 horas de trabalho na máquina M1, e cada unidade de B consome 6 horas de trabalho nessa mesma máquina.

Da mesma forma, cada unidade de A consome 4 horas de trabalho na máquina M2, e cada unidade de B consome 2 horas de trabalho nessa mesma máquina.

Portanto:

- Horas consumidas na máquina M1 = $4x + 6y$
- Horas consumidas na máquina M2 = $4x + 2y$

Resumindo:

- $4x + 6y \leq 24$
- $4x + 2y \leq 16$

Mas ainda há mais uma restrição, que é o fato de não poder fabricar mais que 3 unidades do produto B. Portanto:

- $y \leq 3$

A solução procurada (quantidade de produtos A e B) não pode ser um valor negativo e, portanto, o modelo matemático deve ser informado disso através das restrições:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$

**Formulação completa**

Reunindo todos os parâmetros e restrições temos:

- Maximizar $80x + 60y$
- $4x + 6y \leq 24$
- $4x + 2y \leq 16$
- $0x + 1y \leq 3$ (é o mesmo que $y \leq 3$)
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$

**Resolvendo**

Z = 80x + 60y, portanto:

Z – 80x – 60y = 0 (esta é a função objetivo de lucro a maximizar)

Acrescentando as variáveis de folga temos:

- 4x + 6y + s1 ≤ 24
- 4x + 2y + s2 ≤ 16
- 0x + 1y + s3 ≤ 3 (é o mesmo que y ≤ 3)
- x ≥ 0
- y ≥ 0

**<u>Construindo a Tabela 1:</u>**

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1a | 1 | -80 | -60 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2a | 0 | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 | 24 |
| 3a | 0 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 16 |
| 4a | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

Essa coluna entrará no cálculo

Na 1ª linha, ou seja, na linha da função objetivo, procuramos o maior número negativo ou o maior número absoluto, que no caso é o -80.

Agora dividimos o valor da base pelo valor correspondente da coluna que entra:

- 24 / 4 = 6 (2ª linha)
- 16 / 4 = 4 (3ª linha)
- 3 / 0 = impossível (4ª linha)

O 4 é o menor valor positivo, ou seja, é o que menos contribuirá na maximização, portanto a 3ª linha será retirada do processo de cálculo:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1a | 1 | -80 | -60 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2a | 0 | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 | 24 |
| 3a | 0 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 16 |
| 4a | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

Essa linha sairá no cálculo

Elemento pivô

No cruzamento da coluna que entra com a linha que sai encontramos o número 4, que é o elemento pivô para prosseguir o cálculo.

Vamos, agora, recalcular a tabela. Não pode haver valores negativos na linha da função objetivo, porque eles diminuirão o valor da maximização.

Calculando a nova linha pivô, já que a 3ª linha sairá do cálculo. A linha pivô atual é a:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3a | 0 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 16 |

Dividir cada valor desta linha pelo elemento pivô (que é 4). Obteremos a <u>nova linha pivô</u>:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3a | 0 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 16 |
| | / 4 | | | | | | |
| 3a pivô | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 4 |

Como a 3ª linha saiu, essa nova linha pivô ocupará o lugar da 3ª linha anterior. Essa será a 3ª linha da Tabela 2.

É necessário, agora, recalcular as demais linhas: 1ª, 2ª e 4ª. A 3ª linha é a nova linha pivô.

<u>Recálculo da 1ª linha:</u>

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o -80).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: -80 x -1 = 80.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por 80:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3a | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 4 |
| | x 80 | | | | | | |
| 1a provisória | 0 | 80 | 40 | 0 | 20 | 0 | 320 |
| | + | | | | | | |
| 1a atual | 1 | -80 | -60 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | = | | | | | | |
| Nova 1a | 1 | 0 | -20 | 0 | 20 | 0 | 320 |

Essa nova 1ª linha será a 1ª linha da Tabela 2.

<u>Recálculo da 2ª linha:</u>

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o 4).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: 4 x -1 = -4.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por -4:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3a | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 4 |
| | x (-4) | | | | | | |
| 2a provisória | 0 | -4 | -2 | 0 | -1 | 0 | -16 |
| | + | | | | | | |
| 2a atual | 0 | 4 | 6 | 1 | 0 | 0 | 24 |
| | = | | | | | | |
| Nova 2a | 0 | 0 | 4 | 1 | -1 | 0 | 8 |

Essa nova 2ª linha será a 2ª linha da Tabela 2.

Recálculo da 4ª linha:

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o 0).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: 0 x -1 = 0.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por 0:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3a | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 4 |
| | x 0 | | | | | | |
| 4a provisória | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | + | | | | | | |
| 4a atual | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| | = | | | | | | |
| Nova 4a | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

Essa nova 4ª linha será a 4ª linha da Tabela 2.

**Construindo a Tabela 2:**

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1a | 1 | 0 | -20 | 0 | 20 | 0 | 320 |
| 2a | 0 | 0 | 4 | 1 | -1 | 0 | 8 |
| 3a | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 4 |
| 4a | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

- Variáveis básicas:
  - Z = 320
  - x = 4
  - s1 = 8
  - s3 = 3

- Variáveis não básicas:
  - y = 0
  - s2 = 0

O Z (função objetivo) está na 1ª linha/1ª coluna e o conteúdo é 1, portanto, Z=320. Nessa linha, contudo, ainda há um valor negativo (o -20), o que não pode ocorrer. Esta solução, portanto, não é ótima e os cálculos devem continuar.

Na 1ª linha da nova tabela, ou seja, na linha da função objetivo, procuramos o maior número negativo ou o maior número absoluto, que no caso é o -20.

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1a | 1 | 0 | -20 | 0 | 20 | 0 | 320 |
| 2a | 0 | 0 | 4 | 1 | -1 | 0 | 8 |
| 3a | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 4 |
| 4a | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

Elemento pivô

Essa linha sairá no cálculo

Essa coluna entrará no cálculo

Agora dividimos o valor da base pelo valor correspondente da coluna que entra:

- 8 / 4 = 2 (2ª linha)
- 4 / 0,5 = 8 (3ª linha)
- 3 / 1 = 3 (4ª linha)

A 2ª linha tem o menor resultado positivo. Vamos retirar a 2ª linha do processo de cálculo.

No cruzamento da coluna que entra com a linha que sai encontramos o número 4 que é o elemento pivô para prosseguir o cálculo.

Calcular a nova linha pivô, já que a 2ª linha sairá do cálculo. A linha pivô atual é a:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2a | 0 | 0 | 4 | 1 | -1 | 0 | 8 |

Dividir cada valor desta linha pelo elemento pivô (que é 4). Obteremos a <u>nova linha pivô</u>:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2a | 0 | 0 | 4 | 1 | -1 | 0 | 8 |
| | / 4 | | | | | | |
| 2a pivô | 0 | 0 | 1 | 0,25 | -0,25 | 0 | 2 |

Essa nova 2ª linha será a 2ª linha da Tabela 3.

É necessário, agora, recalcular as demais linhas: 1ª, 3ª e 4ª. A 2ª linha é a nova linha pivô.

<u>Recálculo da 1ª linha:</u>

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o -20).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: -20 x -1 = 20.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por 20:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2a | 0 | 0 | 1 | 0,25 | -0,25 | 0 | 2 |
| | x 20 | | | | | | |
| 1a provisória | 0 | 0 | 20 | 5 | -5 | 0 | 40 |
| | + | | | | | | |
| 1a atual | 1 | 0 | -20 | 0 | 20 | 0 | 320 |
| | = | | | | | | |
| Nova 1a | 1 | 0 | 0 | 5 | 15 | 0 | 360 |

Essa nova 1ª linha será a 1ª linha da Tabela 3.

Recálculo da 3ª linha:

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o 0,5).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: 0,5 x -1 = -0,5.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por -0,5:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2a | 0 | 0 | 1 | 0,25 | -0,25 | 0 | 2 |
| | x (-0,5) | | | | | | |
| 3a provisória | 0 | 0 | -0,5 | -0,13 | 0,13 | 0 | -1 |
| | + | | | | | | |
| 3a atual | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0 | 4 |
| | = | | | | | | |
| Nova 3a | 0 | 1 | 0 | -0,13 | 0,38 | 0 | 3 |

Essa nova 3ª linha será a 3ª linha da Tabela 3.

Recálculo da 4ª linha:

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o 1).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: 1 x -1 = -1.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por -1:

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2a | 0 | 0 | 1 | 0,25 | -0,25 | 0 | 2 |
| | x (-1) | | | | | | |
| 4a provisória | 0 | 0 | -1 | -0,25 | 0,25 | 0 | -2 |
| | + | | | | | | |
| 4a atual | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| | = | | | | | | |
| Nova 4a | 0 | 0 | 0 | -0,25 | 0,25 | 1 | 1 |

Essa nova 4ª linha será a 4ª linha da Tabela 3.

**Construindo a Tabela 3:**

| Linha | Z | x | y | s1 | s2 | s3 | b (base) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1a | 1 | 0 | 0 | 5 | 15 | 0 | 360 |
| 2a | 0 | 0 | 1 | 0,25 | -0,25 | 0 | 2 |
| 3a | 0 | 1 | 0 | -0,13 | 0,38 | 0 | 3 |
| 4a | 0 | 0 | 0 | -0,25 | 0,25 | 1 | 1 |

- Variáveis básicas:
  - Z = 360
  - x = 3
  - y = 2
  - s3 = 1

- Variáveis não básicas:
  - s1 = 0
  - s2 = 0

**Resposta:**

Para maximizar o lucro Z = R$360,00 devem ser produzidas 3 unidades do produto A e 2 unidades do produto B.

Como o limite de venda do produto B é de 3 unidades, e o cálculo aponta a venda de apenas 2 unidades para maximizar o lucro, a folga s3 é de 1 unidade (que, potencialmente, poderia ser vendida, mas não o será).