

UNIP – Universidade Paulista
Ciência da Computação e Sistemas de Informação
Disciplina: Pesquisa Operacional
Exemplo 01: Método Simplex

Enunciado

Maximizar a função $Z = 2x + 3y + z$.

Restrições

$$x + y + z \leq 40$$

$$2x + y - z \leq 20$$

$$3x + 2y - z \leq 30$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

Resolvendo

$Z - 2x - 3y - z = 0$ (esta é a função objetivo a maximizar)

Acrescentando as variáveis de folga temos:

$$x + y + z + s1 = 40$$

$$2x + y - z + s2 = 20$$

$$3x + 2y - z + s3 = 30$$

Construindo a 1ª tabela:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
1a	1	-2	-3	-1	0	0	0	0
2a	0	1	1	1	1	0	0	40
3a	0	2	1	-1	0	1	0	20
4a	0	3	2	-1	0	0	1	30

Na 1ª linha, ou seja, na linha da função objetivo, procuramos o maior número negativo ou o maior número absoluto (1), que no caso é o -3.

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
1a	1	-2	-3	-1	0	0	0	0
2a	0	1	1	1	1	0	0	40
3a	0	2	1	-1	0	1	0	20
4a	0	3	2	-1	0	0	1	30

(1)

Essa coluna entrará no cálculo

Agora dividimos o valor da base pelo valor correspondente da coluna que entra:

- $40 / 1 = 40$ (2ª linha)
- $20 / 1 = 20$ (3ª linha)
- $30 / 2 = 15$ (4ª linha)

O 15 é o menor valor positivo, ou seja, é o que menos contribuirá na maximização, portanto a 4ª linha será retirada do processo de cálculo:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
1a	1	-2	-3	-1	0	0	0	0
2a	0	1	1	1	1	0	0	40
3a	0	2	1	-1	0	1	0	20
4a	0	3	2	-1	0	0	1	30

Essa linha sairá no cálculo

Elemento pivô

No cruzamento da coluna que entra com a linha que sai encontramos o número 2, que é o elemento pivô para prosseguir o cálculo.

Vamos, agora, recalcular a tabela. Não pode haver valores negativos na linha da função objetivo, porque eles diminuirão o valor da maximização.

Calculando a nova linha pivô, já que a 4ª linha sairá do cálculo. A linha pivô atual é a:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	3	2	-1	0	0	1	30

Dividir cada valor desta linha pelo elemento pivô (que é 2). Obteremos a nova linha pivô:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15

Como a 4ª linha saiu, essa nova linha pivô ocupará o lugar da 4ª linha anterior.

É necessário, agora, recalcular as demais linhas: 1ª, 2ª e 3ª. A 4ª linha é a nova linha pivô.

Recálculo da 1ª linha:

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o -3).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: $-3 \times -1 = 3$.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por 3:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15
	x 3							
1a provisória	0	4,5	3	-1,5	0	0	1,5	45

- À 1ª linha provisória soma-se a 1ª linha atual:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15
	x 3							
1a provisória	0	4,5	3	-1,5	0	0	1,5	45
1a atual	1	-2	-3	-1	0	0	0	0
Nova 1a	1	2,5	0	-2,5	0	0	1,5	45

- Essa nova 1ª linha irá para a nova tabela que dará continuidade aos cálculos.

Recálculo da 2ª linha:

- Pegar o segundo valor da coluna que entra (que é o 1).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: $1 \times -1 = -1$.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por -1:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15
	x (-1)							
2a provisória	0	-1,5	-1	0,5	0	0	-0,5	-15

- À 2ª linha provisória soma-se a 2ª linha atual:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15
	x (-1)							
2a provisória	0	-1,5	-1	0,5	0	0	-0,5	-15
2a atual	0	1	1	1	1	0	0	40
Nova 2a	0	-0,5	0	1,5	1	0	-0,5	25

- Essa nova 2ª linha irá para a nova tabela que dará continuidade aos cálculos.

Recálculo da 3ª linha:

- Pegar o terceiro valor da coluna que entra (que é o 1).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: $1 \times -1 = -1$.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por -1:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15
	x (-1)							
3a provisória	0	-1,5	-1	0,5	0	0	-0,5	-15

- À 3ª linha provisória soma-se a 3ª linha atual:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15
	x (-1)							
3a provisória	0	-1,5	-1	0,5	0	0	-0,5	-15
3a atual	0	2	1	-1	0	1	0	20
Nova 3a	0	0,5	0	-0,5	0	1	-0,5	5

- Essa nova 3ª linha irá para a nova tabela que dará continuidade aos cálculos.

2ª tabela:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
1a	1	2,5	0	-2,5	0	0	1,5	45
2a	0	0,5	0	1,5	1	0	-0,5	25
3a	0	0,5	0	-0,5	0	1	-0,5	5
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15

Variáveis básicas (vetor identidade): colunas y, s1 e s2

- $Z = 45$
- $y = 15$
- $s1 = 25$
- $s2 = 5$

Variáveis não básicas: x, z e s3

- $x = 0$
- $z = 0$
- $s3 = 0$

O Z (função objetivo) está na 1ª linha e o conteúdo é 1, portanto, $Z=45$. Nessa linha, contudo, ainda há um valor negativo (o -2,5), o que não pode ocorrer. Esta solução, portanto, não é ótima e os cálculos devem continuar.

Na 1ª linha da nova tabela, ou seja, na linha da função objetivo, procuramos o maior número negativo ou o maior número absoluto (2), que no caso é o -2,5.

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
1a	1	2,5	0	-2,5	0	0	1,5	45
2a	0	-0,5	0	1,5	1	0	-0,5	25
3a	0	0,5	0	-0,5	0	1	-0,5	5
4a	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15

(2)

Essa linha sairá no cálculo

Essa coluna entrará no cálculo

Elemento pivô

Agora dividimos o valor da base pelo valor correspondente da coluna que entra:

- $25 / 1,5 = 16,7$ (2ª linha)
- $5 / (-0,5) = -10$ (3ª linha) – Resultado negativo não interessa
- $15 / (-0,5) = -30$ (4ª linha) - Resultado negativo não interessa

Somente a 2ª linha tem resultado positivo, portanto a 2ª linha será retirada do processo de cálculo.

No cruzamento da coluna que entra com a linha que sai encontramos o número 1,5 que é o elemento pivô para prosseguir o cálculo.

Calcular a nova linha pivô, já que a 2ª linha sairá do cálculo. A linha pivô atual é a:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
2a	0	-0,5	0	1,5	1	0	-0,5	25

Dividir cada valor desta linha pelo elemento pivô (que é 1,5). Obteremos a nova linha pivô:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
2a	0	-0,5	0	1,5	1	0	-0,5	25
	/ 1,5							
2a	0	-0,34	0	1	0,67	0	-0,34	16,67

É necessário, agora, recalcular as demais linhas: 1ª, 3ª e 4ª. A 2ª linha é a nova linha pivô.

Recálculo da 1ª linha:

- Pegar o primeiro valor da coluna que entra (que é o -2,5).
- Inverter esse valor multiplicando-o por -1: $-2,5 \times -1 = 2,5$.
- Multiplicar os valores na nova linha pivô por 2,5:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
2a	0	-0,34	0	1	0,67	0	-0,34	16,67
	$\times 2,5$							
1a provisória	0	-0,85	0	2,5	1,68	0	-0,85	41,68

- À 1ª linha provisória soma-se a 1ª linha atual:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
2a	0	-0,34	0	1	0,67	0	-0,34	16,67
	x 2,5							
1a provisória	0	-0,85	0	2,5	1,68	0	-0,85	41,68
1a atual	1	2,5	0	-2,5	0	0	1,5	45
Nova 1a	1	1,65	0	0	1,68	0	0,65	86,68

Recálculo da 3ª linha:

- Repetindo-se o processo para a 3ª linha, obtém-se:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
2a	0	-0,34	0	1	0,67	0	-0,34	16,67
	x 0,5							
3a provisória	0	-0,17	0	0,5	0,34	0	-0,17	8,34
3a atual	0	0,5	0	-0,5	0	1	-0,5	5
Nova 3a	0	0,33	0	0	0,34	1	-0,67	13,34

Recálculo da 4ª linha:

- Repetindo-se o processo para a 4ª linha, obtém-se:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
2a	0	-0,34	0	1	0,67	0	-0,34	16,67
	x 0,5							
4a provisória	0	-0,17	0	0,5	0,34	0	-0,17	8,34
4a atual	0	1,5	1	-0,5	0	0	0,5	15
Nova 4a	0	1,33	1	0	0,34	0	0,33	23,34

3ª tabela:

Linha	Z	x	y	z	s1	s2	s3	b (base)
1a	1	1,65	0	0	1,68	0	0,65	86,68
2a	0	-0,34	0	1	0,67	0	-0,34	16,67
3a	0	0,33	0	0	0,34	1	-0,67	13,34
4a	0	1,33	1	0	0,34	0	0,33	23,34

Variáveis básicas: colunas y, z e s2

- $Z = 86,68$
- $y = 23,34$
- $z = 16,67$
- $s2 = 13,34$

Variáveis não básicas: colunas x , $s1$ e $s3$

- $x = 0$
- $s1 = 0$
- $s3 = 0$

O valor maximizado de $Z = 86,68$. Com a primeira tabela esse valor era 45.

A linha da função objetivo (Z) não apresenta valores negativos. A solução encontrada é, então, a solução ótima (a melhor possível).

Fonte: Profa. Patrícia Freitas