

Содержание

1 Математические основы машинного обучения	4
1.1 Методы оптимизации	4
1.1.1 Градиентный спуск	5
1.1.2 Распределенное обучение	7
1.1.3 Стохастическая аппроксимация	9
1.2 Методы оптимального обучения	11
1.2.1 Оптимизация графа	12
1.3 Оптимальный транспорт	15
2 Методы машинного обучения	18
2.1 Нейросетевые подходы	18
2.2 Генеративные подходы	26
2.2.1 Энергетические модели	28
2.3 Обработка естественного языка	29
2.3.1 Формальные языки	30
2.3.2 Представление языка в виде вложений	32
2.3.3 Большие языковые модели	34
3 Математические методы в педагогике	36
3.1 Значение образования	36
3.1.1 Функция блага	37
3.1.2 Механизм	38
3.1.3 Систем наград	41
3.2 Структура методического материала	42
3.2.1 Дидактический подход	42
3.2.2 Психологические подходы	45
3.3 Методическая задача	47
3.3.1 Организация	48
3.3.2 Тестовые системы	49
4 Описание работы	52
4.1 Подготовка данных для обучения	52
4.1.1 Разметка	52

4.1.2	Распознание текста	53
4.2	Приложение	56
4.2.1	Проект интеллектуального ассистента	56
4.2.2	Подготовка веб-приложения	58
4.3	Игры	58
4.3.1	Игры	58
4.4	Рейтинговая система	60
4.4.1	Адаптация рейтинговой системы	60
4.4.2	Численные эксперименты	65
4.4.3	66
4.4.4	Случай $\Delta d/\beta \approx 0$	66
4.4.5	Случай значительного отличия априорных представлений о на- клоне кривой от действительного	67
4.4.6	Модификация скользящим средним	68
5	Заключение	70
5.1	Итоги работы	70
5.2	Дальнейшая работа	70
5.2.1	Благодарности	71
Список литературы		71
5.3	Дополнительные материалы	77
5.3.1	Использованная литература	77
5.3.2	Численное моделирование	78
5.3.3	Приложение	79

Генеративное моделирование в сфере образования актуально и активно развивающееся направлением научной работы. Начиная с 2019 года всемирное общество UNESCO регулярно публикует аналитические доклады [72][3], посвященные обзору применений искусственного интеллекта в всемирном образовании. Наиболее актуальность имеют направления развития интеллектуальных ассистентов для профессионального обучения. Ключевыми задачами в такой постановке являются выбор тематических текстов, адаптация научного знания под потребности учащегося и создание образовательных материалов под уровень и интересы учащегося.

Развитие техник распределенных вычислений и обработки больших данных привели к созданию больших языковых моделей, приближающихся в навыках общения к человеку. Также Модели уже повсеместно используются в практических постановках, помогая исследователям программировать, изучать предметные корпуса и расширять эрудицию в областях интереса. Также существенно и влияние на коммерческие компании. Модели прекрасно справляются с задачами перевода, выделения ключевых слов и пересказа. Такие навыки имеют большую ценность в составлении описания товаров под интересы покупателей, автоматический ответ клиентов банков и выборе книги.

Цель данной работы исследовать применимость больших языковых моделей к постановкам образования. Выделить и изучить ключевые преимущества подхода и предложить техники компенсации недостатков. Исходя из цели были поставлены задачи:

- сбор корпуса образовательных данных на русском языке
- подготовка среды эффективной эксплуатации большой языковой модели
- разработка адаптивного алгоритма подбора сложности

Для выполнения задач поэтапно автор проводит предметный обзор текущих подходов к формированию образовательных технологий и современного направления машинного обучения. Внимание обращено к самым актуальным прорывам в сфере машинного обучения. Главы работы разделены на 4 основных части, содержащие описание

В первой части работы описан теоретический аппарат оптимизации и статистического моделирования. Описаны методы градиентного стохастического спуска, обучения графовых вероятностных моделей, постановка оптимального транспорта. Приведены ключевые теоремы

Во второй части работы приведены современные подходы генеративного моделирования. Описаны современные техники генерации

Третья часть работы посвящена математическому описанию постановок образования. Описаны методы модельного описания. 3

Ключевыми результатами работы можно выделить

- алгоритма обновления сложности d , обеспечивающего оптимальную сходимость вероятности решения задачи s к методически рекомендованной s^* .
- совмещение большой языковой модели с системой адаптивного подбора сложности задач

Апробация работы была выполнена на конференции МФТИ в ходе двух докладов

- Оценка влияния кредитных условий на конкурентные предложения малых поставщиков в сфере образования
- Разработка пакетного модуля ShuemacherOCR на языке Python для работы с методической литературой

Глава 1

Математические основы машинного обучения

Математический аппарат искусственного интеллекта был преимущественно описан в 60-е годы Борисом Теодоровичем Поляком в теории оптимизации [36], Вапником Владимиром Наумовичем и Алексеем Яковлевичем Червоненкисом [83] в теории минимизации эмпирического риска и Леонидом Кантаровичем в теории оптимального планирования [36]. Современные достижения во многом являются результатом осмысления разработанного аппарата применительно к современному времени с по-всеместным распространением мощных вычислительных средств. наиболее удачной экспериментальной

В секции будут описаны математические методы, использующиеся для описания моделей

1.1 Методы оптимизации

Современная задача оптимизации с учетом случайности в данных обучения записывается как [51]:

$$f(x) = \mathbb{E} f(x, \xi) \rightarrow \min_x \quad (1.1)$$

где пара (x, ξ) является результатом наблюдения. В секции будут разобраны только методы порядка.

Определение Функция f называется L -липшицевой для метрики ρ , если $\forall x, y \rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq L \cdot \rho(x, y)$. Для оптимизации в качестве метрики как правило выбирают $\rho(x, y) = \|x - y\|^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|^2 \quad (1.2)$$

Определение μ -гладкой называется $f(X)$ функция, для которой выполнено

$$\forall x_1, x_2 \in S \rightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2, \quad (1.3)$$

где S - выпуклое множество и $\mu > 0$.

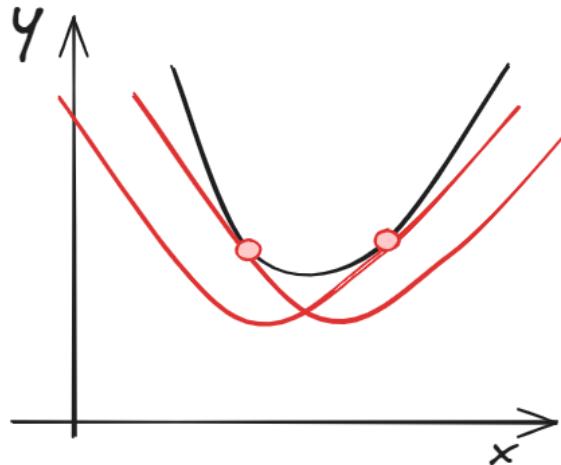


Рис. 1.1: Сильная выпуклость позволяет выполнить квадратичную оценку снизу

Для выпуклых функций справедливо неравенство Йенсена

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i), \quad (1.4)$$

причем равенство выполняется только при $x_1 = \dots = x_k$.

Практически важным для выпуклой функции является результат для ее матожидания:

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X) \quad (1.5)$$

Кубическая регуляризация []

Определение **Усредненным по подвыборке** мощностью B стохастическим градиентом называется $\nabla^B f(x, \xi) = \sum_{j=i}^B \nabla f(x, \xi_i)$.

1.1.1 Градиентный спуск

Определение **Метод градиентного спуск** метод нахождения экстремума функции посредством обновления с учетом градиента функции.

$$x_{t+1} = x_t - f(\nabla L(x_t)) \quad (1.6)$$

Известными разновидностями методами являются:

1. Метод Полякова:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t + \mathbf{v}_t \\ v_t &= \mu v_{t-1} - \eta \nabla L(x_t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. RMSProp - AdaGrad + exponential decay:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - \frac{\eta}{\sqrt{g_t + \epsilon}} \cdot \nabla L(x_t) \\ g_t &= \mu g_{t-1} + (1 - \mu) \nabla L(x_t) \cdot \nabla \end{aligned} \quad (1.8)$$

3. Adam [40]:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - \frac{\eta}{\sqrt{g_t + \epsilon}} \cdot \frac{v_{t+1}}{1 - \beta^t} \\ v_{t+1} &= \beta v_t + (1 - \beta) \nabla L(x_t) \\ g_t &= \mu g_{t-1} + (1 - \mu) \nabla L(x_t) \cdot \nabla L(x_t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Борис Теодорович Поляк показал, для функции с L -липшицевым градиентом оптимальной будет разностная схема:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{L} \nabla f(x^K) \quad (1.10)$$

В этом случае ошибка будет убывать как $\frac{1}{N}$:

$$f(x^N) - f(x_*) \leq \frac{LR^2}{N}, \quad (1.11)$$

где $R = \|x^0 - x_*\|_2$. Докажем этот факт используя μ выпуклость и L -гладкость функции.

Теорема Пусть необходимо задать $x_* = \arg \min_x f(x)$, где f - L гладкая и и μ -гладкая, тогда градиентный метод 1.10 имеет линейную скорость сходимости.

Доказательство В силу L -гладкости функции f

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|_2^2 \quad (1.12)$$

Тогда

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|_2^2 \quad (1.13)$$

С другой стороны из μ -выпуклости получаем:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x^k)\|_2^2. \quad (1.14)$$

Объединяя выражения получаем:

$$f(x^{k+1}) - f(x_*) \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right) (f(x^k) - f(x_*)). \quad (1.15)$$

Рекурсивное применение неравенства задает:

$$f(x^k) - f(x_*) \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x^0) - f(x_*)) \quad (1.16)$$

Схема пересчета нового шага по методу сопряженных градиентов записывается как:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k) + \beta_k(x^k - x^{k-1}) \quad (1.17)$$

, где $(\alpha_k, \beta_k) \in \arg \min_{\alpha, \beta} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k) + \beta(x^k - x^{k-1}))$ дает оценку скорости сходимости как

$$f(x^N) - f(x_*) \leq \frac{LR^2}{N^2} \quad (1.18)$$

Метод тяжелого шарика Поляка учитывает значение с предыдущего шага пересчета x^{k-1} :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2} \nabla f(x^k) + \frac{(\sqrt{L} - \sqrt{\mu})^2}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2} (x^k - x^{k-1}) \quad (1.19)$$

Усоп

Ускоренные тензорные методы

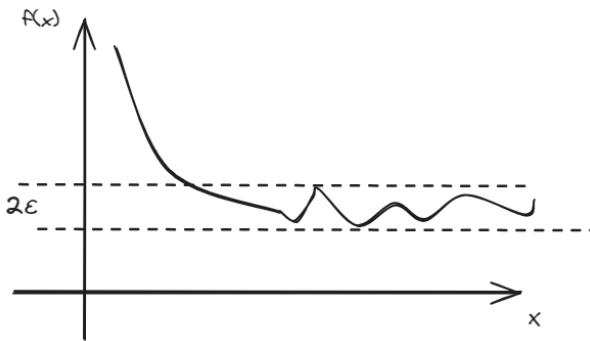


Рис. 1.2: Устойчивость метода при выходе на плато

Зададим через $\sigma = \mathbf{E} [\nabla f(x_*, \xi) \nabla f(x_*, \xi)^T]$ матрицу Гессе в точке сходимости:

$$(\hat{x}^N - x_*) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (1.20)$$

1.1.2 Распределенное обучение

Существенным препятствием распределенного обучения является проблема передачи данных и обновление представлений участников об общем состоянии системы. В секции будут разобраны проблемы и пути решения, включающие ролевые

Виды распределенного обучения

- кластерное - единая организация с доверенными узлами
- коллаборативное - распределенная организация
- федеративное - на устройствах пользователей с применением

Ключевыми вопросами для разработки алгоритма являются определение

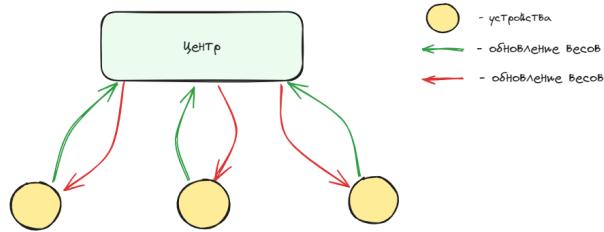


Рис. 1.3: Распределенное обучение включает

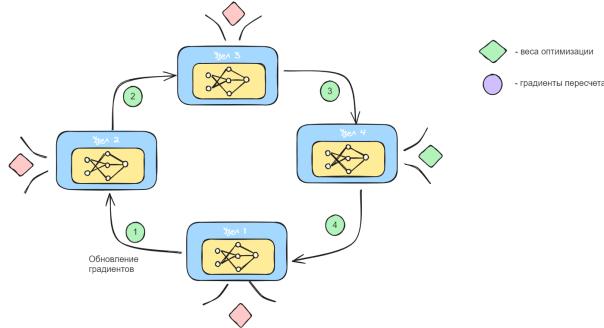


Рис. 1.4: Одной из распространенных архитектур взаимодействия является кольцевая.

- число пересчетов на вычислительных узлах N
- число коммуникаций при вычислениях K
- степень компрессии при коммуникациях β

Определение Несмешенной компрессией называется компрессия Π со свойствами

- $\mathbb{E}[\Pi(x)] = x$
- $\mathbb{E}[\|\Pi(x)\|_2^2] \leq \omega \|x\|_2^2$, где $\omega \geq 1$

Определим современные подходы к компрессии в постановке распределенных систем.

Определение Случайной спарсификацией [61] называется оператор, выбирающий из вектора компоненты по правилу

$$\text{Rankd}(x) = \frac{d}{k} \sum_{i \in S} x_i e_i, \quad (1.21)$$

где i - случайно выбранные компоненты из базиса.

Определение Трехуровневая \downarrow_2 квантизация задается оператором $Q(x) = \|x\|_2 \text{sign}(x) \xi_i$, $i = 1, \dots, d$ и x_i -бернулевская случайная величина с параметром определяемым вкладом компоненты в модуль $\frac{|x_i|}{\|x\|_2}$.

Определение Пусть round_ν^- оператор округляющий число до ближайшей степени $\nu \in \mathcal{N}$ снизу, round_ν^+ аналогичный оператор для округления в большую сторону.

Тогда **Натуральная компрессия** задается оператором

$$\text{Nat}(x)_i = \begin{cases} \text{round}_2^-(x_i), & \text{с вероятностью } p = \frac{x_i - \text{round}_2^-(x)}{\text{round}_2^+(x) - \text{round}_2^-(x)} \\ \text{round}_2^+(x_i) & \end{cases} \quad (1.22)$$

Теорема Если все функции f_m являются μ -сильно выпуклыми и имеют L -Липшицев градиент, тогда при шаге $\eta \leq L^{-1}(\frac{2\omega}{M} + 1)^{-1}$:

$$\mathcal{O} \left((1 - \gamma\mu)^K \|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{K} \frac{2\omega}{\mu M^2} \sum_{m=1}^M \|\nabla f_m(x^*)\|^2 \right) \quad (1.23)$$

Локальный градиентный спуск [37]

[68]

[69]

Достижение консенсуса выполняется через алгоритмы распределенных вычислений.

Определение **Консенсус** является результатом достижения согласованного состояния между несколькими независимыми процессами или узлами в системе, которые могут взаимодействовать друг с другом.

Для достижения консенсуса необходимо выполнить условия

1. корректности: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, если $\text{input}(N_i) = v$, то $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\text{output}(N_j) = v$. Все узлы начинают с одним и тем же начальным значением v , то любое значение, принятное в результате выполнения протокола консенсуса, должно быть равно v .
2. единогласие: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, если $\text{output}(N_i) = v$, то $\text{output}(N_j) = v$. Если один узел завершает протокол с некоторым значением v , то все другие узлы, которые также завершили протокол, должны иметь то же самое значение v .
3. завершение: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, узел N_i завершает выполнение протокола в конечное время.

Наиболее популярными алгоритмами достижения консенсуса являются Raft [44] и Paxos [56]. Методы предлагают разделение на роли.

1.1.3 Стохастическая аппроксимация

Для случая, в котором Стохастическая аппроксимация

Определение **Стохастическая аппроксимация** - метод решения задач статистического оценивания, строящихся в виде последовательного приближения на основании наблюдений, представленных случайной величиной.

Стохастическая аппроксимации

$$P(\mathbf{T}|\mathbf{X}, \Theta)$$

Наиболее известным результатом является Алгоритм Роббинса-Монро

Теорема. Алгоритм Роббинса-Монро. Алгоритм, выполняющий пересчет по правилу $d_{n+1} = d_n + a_d(s^* - s)$ сходится в L^2 норме при выполнении

1. значения функции отклика монотонны и s ограничены: $\exists N \forall x : |s(x)| \leq N$
2. $\sum_{t=0}^{\infty} a_t = \infty$
3. $\exists M : |\sum_{t=0}^{\infty} a_t^2| < M$.

Доказательство теоремы Роббинса-Монро Следуя доказательству [7], используем рекуррентную схему связи между ошибками на каждом шаге алгоритма b_1, \dots, b_n . В этом случае правило обновления Роббинса-Монро запишется как:

$$\mathbb{E}_{x_t \sim p(x|s(d))}(d_n + a_t(s^* - x_t) - d^*)^2. \quad (1.24)$$

Раскрываем квадрат разности:

$$(d_n - d^*)^2 + a_t^2 \mathbb{E}_{x_t \sim p(x|s(d))}(s^* - x_t)^2 - 2a_t \mathbb{E}_{x_t \sim p(x|s(d))}[(s^* - x_t)(d_n - d^*)]. \quad (1.25)$$

Используем несмещенность оценки $\mathbb{E}_{x \sim p(x|s)} x = s$:

$$d_n = 2a_t(s^* - s(d))(d_n - d^*). \quad (1.26)$$

Положительна, исходя из монотонности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 c_j - 2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j d_j < \infty. \quad (1.27)$$

Сходимость обоснуем через два последовательных шага:

- $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 c_j < \infty$, поскольку при $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty$ и c_j -ограничены.
- $\sum_{j=1}^{\infty} a_j d_j < \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 c_j$, т.к. $b_n \geq 0$.

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ нулю следует из $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$. Действительно, зададим ряд $m_n = \frac{b_n}{d_n}$, т.к. он неотрицателен, то $\sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i = \infty$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i b_N < \infty$. Из сходимости ряда из неотрицательных элементов следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. ■

Если функция отклика s строго выпукла и дважды дифференцируема, то асимптотическая скорость сходимости равна $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ [64].

Выбор коэффициент a_n существенно образом влияет на число шагов сходимости последовательности. Авторы оригинального алгоритма предлагают $a_n = \frac{\lambda}{n}$. В работах [43] используется альтернативный подход, исходящий из

1. несмещенности оценки $Ed_n = d$.
2. минимизации дисперсии $\mathbf{D}d_n = 0$.

Современный подход направлен на учетом априорного представления в виде нормального распределения

1. нормальным распределением [35]
2. многомерных биноминальных распределений [78]
3. цепи гауссовых распределений [47].

Подвергается изменениям и сама схема доказательства как в работе [РэСГРэСГСТРъРчР,Р

Автор предлагает заменить оптимизируемый коэффициент s^* на параметр b_n :

Случай $b_n \neq s^$* Общая схема доказательства приведена в [43]. ■

Теорема[78] Пусть \vec{x} - вектор бернулевских случайных величин с параметрами $\vec{s} = f(\vec{d})$, где $f(\vec{x})$ - выпуклая. Тогда схема пересчета $d_t = \vec{x}_t + A^{(t)}(s - \vec{x}_t)$ с шагами $A^{(t)}$ удовлетворяющих условиям: $\forall t, j \rightarrow a_{jj}^{(t)} > 0, \sum_{t=1}^{\infty} a_{jj}^{(t)} = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} (a_{jj}^{(t)})^2 < \infty$ сходится по вероятности к целевому значению \bar{s}^*

Существенный вклад в развитие методов стохастической аппроксимации внёс Борис Теодорович Поляк [58], предложивший метод усреднения управляющего параметра s :

$$\hat{s}_{n+1} = \sum_{i=0}^n s_i. \quad (1.28)$$

Такой подход позволяет подавлять высокочастотные шумовые компоненты при аппроксимации ряда, что позволяет использовать методы с большим шагом спуска. Условия эффективной применимости состоят в малом изменении коэффициентов a_n :

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = o(a_n). \quad (1.29)$$

Схема Поляка-Руперта-Юдицкого. Стохастической аппроксимации, изложенному в работе Герберта Робинсона и Суттона Монро [62]

$$x^{k+1} = x^k - \gamma_k \phi(\nabla_x f(x^k, \xi^k)) \quad (1.30)$$

Шаги $h_k \sim k^{-\alpha}, \alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. При этом ошибка считается для среднего

$$\bar{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^k \quad (1.31)$$

1.2 Методы оптимального обучения

Вероятностные графовые модели позволяют описать модель явления через связь случайных величин.

Отметим, также что в отличие от классического подхода, в котором параметрические модели $f(x, \theta)$, не имеют заданного вероятностного распределения, байесов вывод требует задания априорного распределения на θ :

$$P(\theta|X) = \frac{P(X|\theta)P(\theta)}{P(X)} \quad (1.32)$$

, разделены на два основных класса: марковские случайные поля и байесовы сети. Принципиальным отличием является наличие ориентированных ребер.

1.2.1 Оптимизация графа

Задача оптимального транспорта (Optimal Transport)[74] является одним из ключевых понятий в области теории вероятностей и машинного обучения. Она представляет собой проблему определения оптимального способа перемещения вероятностной массы из одной распределенной системы в другую с минимальными затратами или стоимостью. Формально задача состоит в составлении транспортного плана $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, которое переводит распределение μ в распределение ν , минимизируя некоторую функцию стоимости. Функция стоимости с обычно является мерой сходства между элементами из \mathcal{X} и \mathcal{Y} , такой как квадрат расстояния.

Определение(Монже) **Оптимальный транспорт** по вводится путем рассмотрения вероятностных распределений μ и ν на метрических пространствах \mathcal{X} и \mathcal{Y} :

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} c(x, y) d\gamma(x, y), \quad (1.33)$$

, где $\Pi(\mu, \nu)$ обозначает множество всех возможных совместных распределений γ на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ с фиксированными маргинальными распределениями μ и ν , а $c(x, y)$ — функция стоимости перевозки массы из x в y .

Определение(Канторович) **Оптимальный транспорт** по Канторовичу вводится через потенциала ϕ , который минимизирует функционал стоимости:

$$\inf_{\phi} \left(\int_{\mathcal{X}} \phi(x) d\mu(x) + \int_{\mathcal{Y}} \psi(y) d\nu(y) \right), \quad (1.34)$$

где ψ — обратная функция к ϕ . Таким образом, отображение $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ получается из градиента потенциала.

Заметим, что постановка Канторовича является более общей [**monge _ vs _ kantarovich**]. В отличие постановки Монже оптимальный транспорт по Канторовичу допускает распределение вероятностной массы в непрерывном случае.

Итоговая стоимость оптимального транспортного плана называется метрикой Вассерштейна.

Определение **Метрика Вассерштейна** Пусть (X, d) — метрическое пространство, $P(X)$ — множество всех вероятностных мер на X . Для двух вероятностных

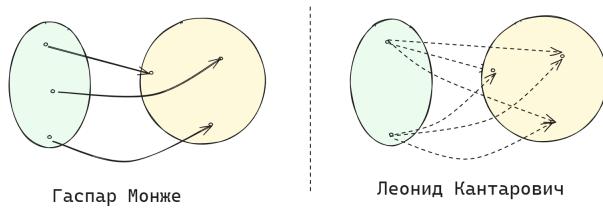


Рис. 1.5: Различие в подходе по Монге и Л.В.Канторовичу. В постановке Л.В.Канторовича задача релаксирует до непрерывного распределения

мер μ и ν на X метрика Вассерштейна порядка p , где $p \geq 1$, определяется как:

$$W_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y) \right)^{1/p}, \quad (1.35)$$

где $\Gamma(\mu, \nu)$ — множество всех сопряжённых мер γ на $X \times X$ с маргиналами μ и ν .

Метрика имеет практическое применение для задач физики, биологии и машинного обучения, поскольку задает дифференцируемую разность между распределениями.

Определение Метрическая производная кривой $\rho_t, t \in [0, T]$ в вероятностном пространстве $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^N)$ записывается как:

$$|\rho'_t| = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathcal{W}_2(\rho_t, \rho_{t+dt})}{dt} \quad (1.36)$$

Оптимальный транспорт также активно применяется для анализа стохастических процессов. Базовой моделью, описывающей стохастическое движение с смещением является процесс Ланжевена.

Определение Процесс Ланжевена с коэффициентом сноса, задающимся потенциалом $\Phi(X)$ задается

$$dX_t = -\nabla \Phi(x) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dW_t \quad (1.37)$$

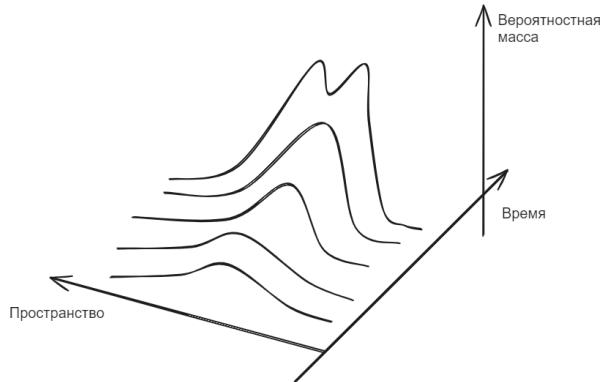


Рис. 1.6: Эволюция вероятностной массы в уравнение Ланжевена

Стохастическое усреднение процесса Ланжевена описать через уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка, задающие в дифференциальной форме эволюцию вероятностной

массы $\rho_t(x)$:

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla \Phi(x) \rho_t) + \beta^{-1} \Delta \rho_t \quad (1.38)$$

Для естественной работы в энергетических постановках водится функционал, задающий коэффициента сноса через потенциал Φ . Таким образом, исходное уравнение можно переписать в вариационной постановке 1.10.

Определение **Функционал Фоккера-Планка** для распределения ρ записывается как:

$$\mathcal{F}_{FP}(\rho) = \int \Phi(x) d\rho(x) + \beta^{-1} \int \log \rho(x) d\rho(x) \quad (1.39)$$

Научная группа Йордана Кинана Отто в работе [34] показала, что маргинальные

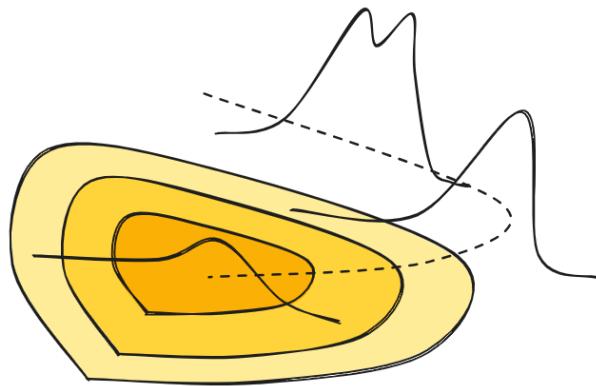


Рис. 1.7: Визуализация постановки уравнения Фоккера-Планка в вариационной форме

вероятностные меры процесса Ланжевена подчиняются градиентному потоку Вассерштейна относительно функционала Фоккера-Планка.

Определение Схема Йордана-Кинана-Отто (JKO) задает правило обновления уравнения вероятности через минимизацию функционала энергии и расстояния:

$$\rho^{n+1} = \operatorname{argmin}_\rho \left(\frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho^n) + \mathcal{F}(\rho) \right), \quad (1.40)$$

где:

- $\tau > 0$ — шаг по времени,
- $W_2(\rho, \rho^n)$ — метрика Вассерштейна порядка 2 между плотностями ρ и ρ^n ,
- $\mathcal{F}(\rho)$ — функционал свободной энергии, который может включать в себя энтропийный член и потенциальную энергию системы.

Функционал свободной энергии $\mathcal{F}(\rho)$ задается через

$$\mathcal{F}(\rho) = \int_V f(\rho(x)) dx + \int_V V(x)\rho(x) dx, \quad (1.41)$$

где $f(\rho)$ — внутренний энергетический термин, зависящий от плотности, а $V(x)$ — внешний потенциал.

1.3 Оптимальный транспорт

Задача оптимального транспорта (Optimal Transport)[74] является одним из ключевых понятий в области теории вероятностей и машинного обучения. Она представляет собой проблему определения оптимального способа перемещения вероятностной массы из одной распределенной системы в другую с минимальными затратами или стоимостью. Формально задача состоит в составлении транспортного плана $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, которое переводит распределение μ в распределение ν , минимизируя некоторую функцию стоимости. Функция стоимости c обычно является мерой сходства между элементами из \mathcal{X} и \mathcal{Y} , такой как квадрат расстояния.

Определение(Монже) **Оптимальный транспорт** по вводится путем рассмотрения вероятностных распределений μ и ν на метрических пространствах \mathcal{X} и \mathcal{Y} :

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} c(x, y) d\gamma(x, y), \quad (1.42)$$

, где $\Pi(\mu, \nu)$ обозначает множество всех возможных совместных распределений γ на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ с фиксированными маргинальными распределениями μ и ν , а $c(x, y)$ — функция стоимости перевозки массы из x в y .

Определение(Канторович) **Оптимальный транспорт** по Канторовичу вводится через потенциала ϕ , который минимизирует функционал стоимости:

$$\inf_{\phi} \left(\int_{\mathcal{X}} \phi(x) d\mu(x) + \int_{\mathcal{Y}} \psi(y) d\nu(y) \right), \quad (1.43)$$

где ψ — обратная функция к ϕ . Таким образом, отображение $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ получается из градиента потенциала.

Заметим, что постановка Канторовича является более общей [monge_vs_kantarovich]. В отличие постановки Монже оптимальный транспорт по Канторовичу допускает распределение вероятностной массы в непрерывном случае.

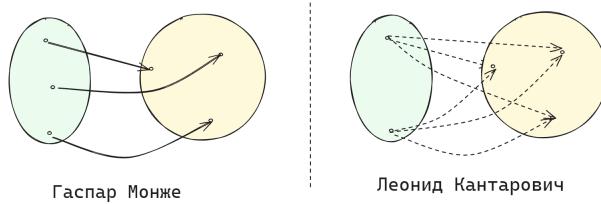


Рис. 1.8: Различие в подходе по Монже и Л.В.Кантаровичу. В постановке Л.В.Кантаровича задача релаксирует до непрерывного распределения

Итоговая стоимость оптимального транспортного плана называется метрикой Вассерштейна.

Определение **Метрика Вассерштейна** Пусть (X, d) — метрическое пространство, $P(X)$ — множество всех вероятностных мер на X . Для двух вероятностных

мер μ и ν на X метрика Вассерштейна порядка p , где $p \geq 1$, определяется как:

$$W_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y) \right)^{1/p}, \quad (1.44)$$

где $\Gamma(\mu, \nu)$ — множество всех сопряжённых мер γ на $X \times X$ с маргинами μ и ν .

Метрика имеет практическое применение для задач физики, биологии и машинного обучения, поскольку задает дифференцируемую разность между распределениями.

Определение Метрическая производная кривой $\rho_t, t \in [0, T]$ в вероятностном пространстве $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^N)$ запишется как:

$$|\rho'_t| = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathcal{W}_2(\rho_t, \rho_{t+dt})}{dt} \quad (1.45)$$

Оптимальный транспорт также активно применяется для анализа стохастических процессов. Базовой моделью, описывающей стохастическое движение с смещением является процесс Ланжевена.

Определение Процесс Ланжевена с коэффициентом сноса, задающимся потенциалом $\Phi(X)$ задается

$$dX_t = -\nabla \Phi(x) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dW_t \quad (1.46)$$

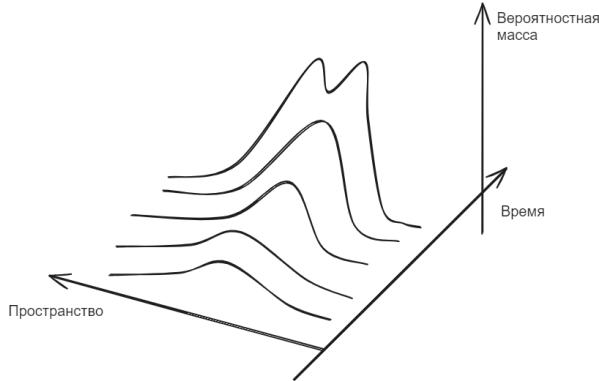


Рис. 1.9: Эволюция вероятностной массы в уравнение Ланжевена

Стохастическое усреднение процесса Ланжевена описать через уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка, задающие в дифференциальной форме эволюцию вероятностной массы $\rho_t(x)$:

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \text{div}(\nabla \Phi(x) \rho_t) + \beta^{-1} \Delta \rho_t \quad (1.47)$$

Для естественной работы в энергетических постановках водится функционал, задающий коэффициента сноса через потенциал Φ . Таким образом, исходное уравнение можно переписать в вариационной постановке 1.10.

Определение Функционал Фоккера-Планка для распределения ρ записывается как:

$$\mathcal{F}_{FP}(\rho) = \int \Phi(x) d\rho(x) + \beta^{-1} \int \log \rho(x) d\rho(x) \quad (1.48)$$

Научная группа Йордана Кинана Отто в работе [34] показала, что маргинальные

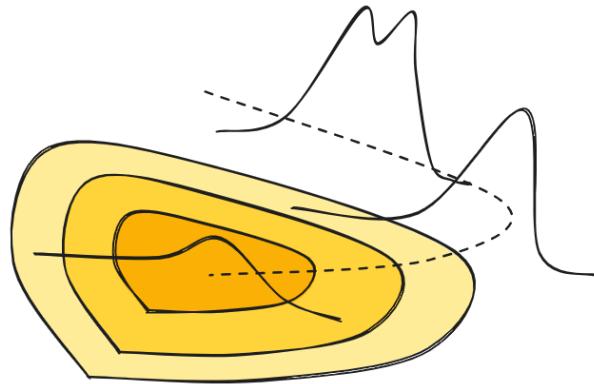


Рис. 1.10: Визуализация постановки уравнения Фоккера-Планка в вариационной форме

вероятностные меры процесса Ланжевена подчиняются градиентному потоку Вассерштейна относительно функционала Фоккера-Планка.

Определение Схема Йордана-Кинана-Отто (JKO) задает правило обновления уравнения вероятности через минимизацию функционала энергии и расстояния:

$$\rho^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\rho} \left(\frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho^n) + \mathcal{F}(\rho) \right), \quad (1.49)$$

где:

- $\tau > 0$ — шаг по времени,
- $W_2(\rho, \rho^n)$ — метрика Вассерштейна порядка 2 между плотностями ρ и ρ^n ,
- $\mathcal{F}(\rho)$ — функционал свободной энергии, который может включать в себя энтропийный член и потенциальную энергию системы.

Функционал свободной энергии $\mathcal{F}(\rho)$ задается через

$$\mathcal{F}(\rho) = \int_V f(\rho(x)) dx + \int_V V(x)\rho(x) dx, \quad (1.50)$$

где $f(\rho)$ — внутренний энергетический термин, зависящий от плотности, а $V(x)$ — внешний потенциал.

Глава 2

Методы машинного обучения

2.1 Нейросетевые подходы

Изначально искусственные нейронные сети строились как модель коры головного мозга человека. В отличие от своего биологического аналога нейронная сеть как правило имеет дифференцируемые функции активации, необходимые для эффективного обучения в ходе обратного распространения ошибки.

Определение **Функцией активации** в нейронной сети называется *нелинейная* функция, связывающая выходной сигнал и активацию нейрона

На практике широко используются функции активации как сигмоида σ , ReLU [2] и GeLU [26]

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \frac{1}{1 + \exp(-x)} \\ \text{ReLU}(x) &= \min(0, x)p \\ \text{Tanh}(x) &= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \\ \text{Gelu}(x) &= \sigma(x)x\end{aligned}\tag{2.1}$$

Функция активации обычно вводится для добавления нелинейности в модель, что позволяет нейронной сети моделировать сложные нелинейные зависимости в данных. Некоторые из распространенных функций активации включают в себя сигмоидальную функцию (σ), гиперболический тангенс (\tanh), ReLU (Rectified Linear Unit) и их вариации.

Определение Перцептроном называется параметрическая математическая модель нейрона. Перцептрон задается матрицей весов W , смещением b и функцией активации σ

$$\mathbf{y} = \sigma(W\mathbf{x} + \vec{b}),\tag{2.2}$$

Определение **Нейронные сети** параметрическая аппроксимирующая модель, состоящая из слоев нейронов.

В случае многослойной нейронной сети, выходы нейронов одного слоя становятся

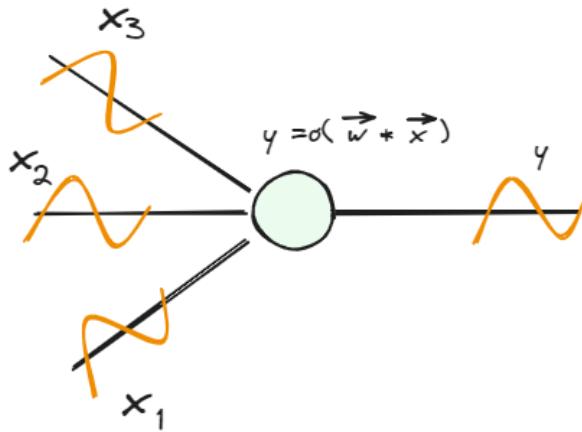


Рис. 2.1: Прямой процесс зашумления и обратный процесс коррекции ошибки
[stablediffusion]

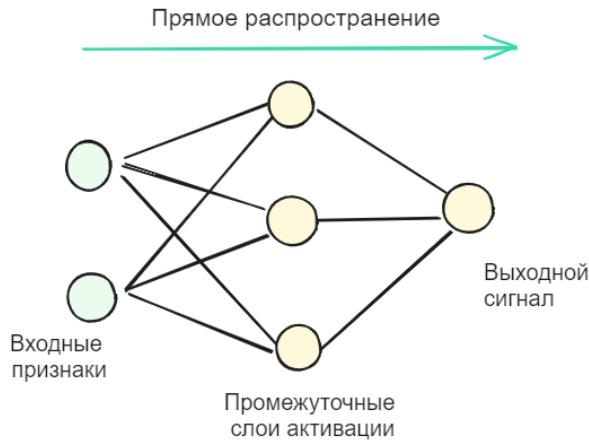


Рис. 2.2: Преобразование сигнала выполняется в промежуточных слоях активации
в ходе прямого распространения сигнала

входами для следующего слоя, образуя цепочку преобразований. Процесс распространения через нейроны последовательных слоев называется прямым распространением (forward propagation).

Во время обучения модель минимизирует функцию потерь L , которая оценивает разницу между предсказанным результатом y_i и истинным значением y_i :

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(y_i, \hat{y}_i), \quad (2.3)$$

обучение нейронной сети выполняется путем настройки весов \mathbf{w} и смещений b с использованием алгоритмов оптимизации, таких как градиентный спуск ??.

Кодировщики и декодировщики

Архитектура кодировщик-декодировщик широко распространена в машинном обучении, теории кодирования, компрессии и криптографии. Нейросети также исполь-

зуют этот подход для задач

- генерации перевода и пересказа
- классификации текста
- распознания частей речи и выделения имен собственных

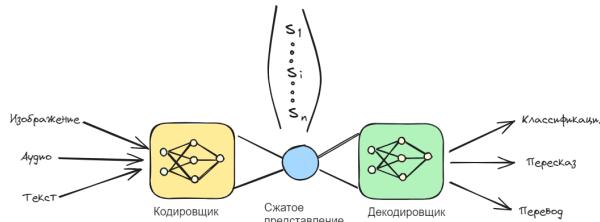


Рис. 2.3: Преобразование сигнала выполняется в промежуточных слоях активации в ходе прямого распространения сигнала

Такая архитектура

Определение Рекуррентными нейронными сетями называют называется слои, использующие предыдущие скрытые состояния для расчета следующих.

$$\begin{aligned} h_t &= \sigma(W_x x_t + W_h h_{t-1} + b_h) \\ y_t &= \sigma(W_y h_t + b_y), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

- x_t, h_t, y_t векторы входного, скрытого и выходного слоя
- W_x, W_h, W_y матрицы обновления состояния.

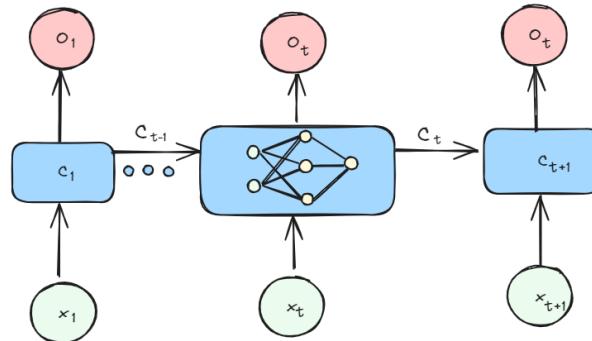


Рис. 2.4: Каждая ячейка рекуррентной нейронной сети выполняет обновление представления.

Ошибка модели для случая обработки последовательностей одинаковой длины записывается как:

$$\mathcal{L}(\hat{y}, y) = \sum_{t=1}^{T_y} \mathcal{L}(\hat{y}_t, y_t) \tag{2.5}$$

На практике матрицы обновления постоянные для каждой ячейки, поэтому правило обновления матрицы весов W запишется как:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(T)}}{\partial W} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial \mathcal{L}^{(T)}}{\partial W} \quad (2.6)$$

Такой подход называется распространением ошибки во времени. Также существуют модификации механизма нейронной сети заключающие в добавлении параллельного блока памяти

- Долгая короткая память [ochreiter1997long]
- Управляемый рекуррентный блок [14]

Механизм внимания, основанный на модели рабочей памяти моделей рабочей памяти [75], позволил значительно улучшить результаты задач перевода, пересказ и понимания языка [4]. Механизм внимания вычисляет вектор внимания α , который определяет важность каждого элемента входной последовательности на текущем временном шаге [4]:

$$\alpha_t = \text{softmax}(f(h_t, X)) \quad (2.7)$$

где f - функция, которая вычисляет важность каждого элемента входной последовательности, а softmax применяется для получения нормированных весов внимания.



Рис. 2.5: Механизм внимания в архитектуре Transformer (Self Attention) [73]

Механизм внимания позволяет модели сосредоточиться на наиболее значимых частях входных данных в каждый момент времени, что делает его особенно полезным для задач, требующих адаптивности и контекстного понимания, таких как машинный перевод, генерация текста и вопросно-ответные системы. Этот механизм стал ключевым инструментом в области генеративного моделирования естественного языка, позволяя моделям эффективно работать с различными типами данных и контекстами.

Transformer. Представление внимания

Модель Transformer является архитектурой глубокого обучения, предназначеннной для обработки последовательных данных, таких как тексты или временные ряды. Она была предложена в статье [73] и стала одной из самых инновационных архитектур в области обработки естественного языка.

Основной компонент модели Transformer это механизм внимания. Он позволяет модели сосредоточиться на наиболее важных частях входных данных при выполнении задач, таких как машинный перевод или обработка текста.

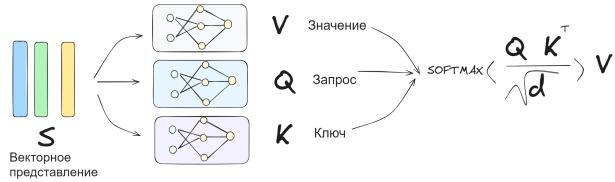


Рис. 2.6: Механизм внимания в архитектуре Transformer (Self Attention) [73]

Подробнее опишем механизм внимания. Механизм внимания в Transformer состоит из трех основных частей:

- расчета векторов запроса, ключа и значения. Они используются для вычисления весов входных данных и определения их важности для каждого элемента:

$$\begin{aligned} q &= W_q x \\ k &= W_k x \\ v &= W_v x, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где W_q, W_k, W_v - матрицы весов, которые модель обучает.

- вычисления векторов запроса и ключа, для каждого элемента x_i вычисляются логиты e_{ij} :

$$e_{ij} = \frac{q \cdot k_j}{\sqrt{d_k}}, \tag{2.9}$$

где d_k - длина запроса,

- преобразуются в веса внимания α_{ij} с помощью функции softmax:

$$\alpha_{ij} = \frac{\exp(e_{ij})}{\sum_{j'} \exp(e_{ij'})}. \tag{2.10}$$

Эти веса показывают, какую важность модель придает каждому элементу данных при решении конкретной задачи. После вычисления весов внимания, они умножаются на соответствующие значения (value) и суммируются, чтобы получить итоговый взвешенный вектор, который представляет собой выход механизма внимания.

Применение

Методы решения задач компьютерного зрения включают как классические подходы, так и глубокие нейронные сети.

Классические методы основываются на внутренней структуре и симметрии изображения, его семантике и характеристиках объектов на нем. Эти методы включают в себя алгоритмы обработки изображений, фильтрацию, выделение признаков

(например, метод гистограмм градиентов или методы локтевых точек), шаблонное сопоставление и классификацию на основе характеристик объектов.

Определение Сверточные нейронные сети (CNN) [lecun1989handwritten] представляют собой класс глубоких нейронных сетей, использующих специально разработанных для обработки структурно связанных данных как изображения. Эффективность сетей связывают с их способностью автоматически извлекать иерархические признаки из входных данных.

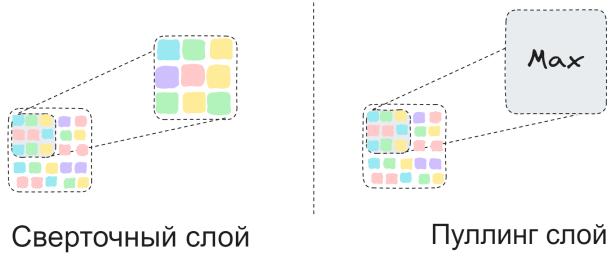


Рис. 2.7: Сверточный слой содержит параметрическое ядро, обеспечивающее выделение ключевых признаков. Пуллинг слои выполняют заранее заданную аналитическую операцию

Глубокие методы, основанные на сверточных нейронных сетях (CNN), стали широко распространеными и эффективными в решении задач компьютерного зрения. Эти методы автоматически изучают признаки изображений на различных уровнях абстракции, начиная от низкоуровневых признаков, таких как грани и текстуры, до высокоуровневых семантических признаков, связанных с объектами и их распознаванием.

Основными компонентами сверточных нейронных сетей являются

- сверточные слои выполняют операции свертки над входными данными с использованием фильтров или ядер, чтобы извлечь локальные пространственные признаки, такие как грани, углы и текстуры. Это позволяет модели обнаруживать абстрактные особенности изображений на разных уровнях детализации.
- пулинг слои предназначены для уменьшения пространственных размеров активаций, полученных после сверточных операций, путем объединения значений пикселей в заданных областях. Это позволяет модели быть инвариантной к небольшим трансляциям объектов на изображении и уменьшает количество параметров, что способствует предотвращению переобучения и повышению эффективности вычислений.
- полносвязанные слои обычно располагаются в конце архитектуры нейронной сети и используются для объединения высокоуровневых признаков, извлеченных предыдущими слоями, в предсказания или классификации.

Во время обучения сверточной нейронной сети параметры каждого слоя оптимизируются с использованием методов оптимизации, таких как обратное распространение ошибки и стохастический градиентный спуск, с целью минимизации заданной

функции потерь. Этот процесс позволяет модели настраивать свои параметры для эффективного извлечения признаков и выполнения конкретной задачи, такой как классификация изображений или сегментация объектов.

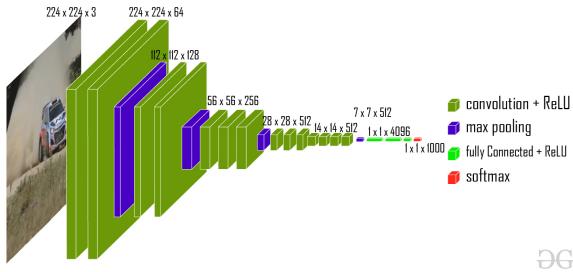


Рис. 2.8: Архитектура VGG16 [simonyan2014very]

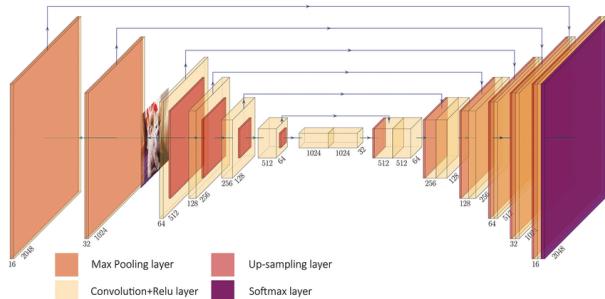


Рис. 2.9: Архитектура Unet [ronneberger2015u]

Архитектуры U-Net и ResNet 2.9 привнесли существенные модификации в оригинальный архитектуры сверточных сетей

- использование симметричной структуры, включающие деконволюционные слои (upsampling) для восстановления пространственного разрешения
- блоки с пропуском, обеспечивающие плавное обучение глубоких сетей $x_{t+1} = x_t + \phi_t(x_t)$, где $\phi_t(x)$ - функция активации промежуточного слоя t

Методы аугментации изображений в компьютерном зрении представляют собой техники, используемые для увеличения размера и разнообразия тренировочного набора данных путем применения различных преобразований к изображениям. Целью аугментации является создание дополнительных вариаций изображений, что помогает улучшить обобщающую способность моделей машинного обучения и уменьшить риск переобучения.

Основные методы аугментации включают в себя

- изменение размера изображения (путем масштабирования)
- повороты и отражения
- изменение яркости, контраста и насыщенности цвета
- добавление шума или размытия.

Дополнительно, могут применяться специфические трансформации, такие как сдвиги, обрезки или изменение геометрии изображения.

Применение методов аугментации позволяет модели машинного обучения обучаться на более разнообразных данных, что способствует повышению их устойчивости к различным условиям и изменениям в данных во время работы. Кроме того, аугментация может помочь справиться с проблемой несбалансированных классов и улучшить обобщающую способность моделей.

Модель YOLO (You Only Look Once) представляет собой популярную архитектуру для обнаружения объектов на изображениях. Ее основной идеей является выполнение обнаружения объектов и классификации в одной сети, что делает ее быстрой и эффективной. [kirillov2023segment] Порядок работы модели YOLO начинается с входного изображения, которое подается на вход нейронной сети. Затем изображение проходит через сверточные слои, которые извлекают признаки из изображения на различных уровнях абстракции.

Далее, полученные признаки пропускаются через сверточные слои, которые прогнозируют боксы (ограничивающие рамки) для объектов и их вероятности принадлежности к различным классам. Эти сверточные слои производят прогнозы на основе якорей (anchors), которые представляют разные размеры и соотношения сторон боксов.

После этого выполняется пост-обработка, включающая подавление неоднородных предсказаний (non-maximum suppression), чтобы получить финальные прогнозы объектов. Этот шаг удаляет лишние дубликаты и уверенно прогнозирует объекты с наибольшей уверенностью (confidence).

В результате работы модели YOLO получается набор боксов с классами и оценками уверенности, представляющих объекты, найденные на изображении. Эта информация может быть использована для обнаружения объектов и их классификации в реальном времени.

Для любых матриц A и B выполняется

$$\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B)) \quad (2.11)$$

Низкоранговый адаптер Lora работает путем сжатия параметров модели с использованием низкоранговых матриц. Основная идея заключается в том, чтобы аппроксимировать исходные параметры модели с помощью матриц меньшего ранга, что позволяет снизить объем памяти. Это позволяет снизить объем памяти, необходимый для хранения параметров и ускорить вычисления.

Наиболее популярным вариантом адаптера является Lora [27]:

$$\hat{W} = W + AB, \quad (2.12)$$

где AB - низкоранговая матрица, полученная произведением матриц A размерности

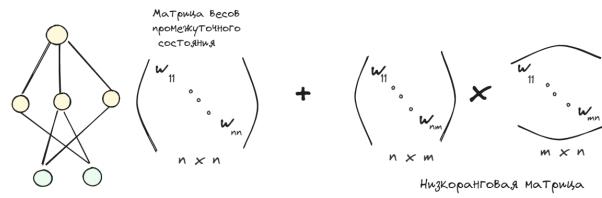


Рис. 2.10: Модель адаптера Lora [27]

$m \times r$ и B размерности $r \times n$, где r - это ранг аппроксимации.

2.2 Генеративные подходы

Порождающие модели современное и быстро развивающее направление работы с данными.

Ключевыми достижениями в дисциплине были

1. порождающие грамматики [13]
2. графические вероятностные модели [55]
3. состязательные порождающие модели [25]
4. диффузионные порождающие модели [67]

Порождающие модели задают совместное распределение наблюдаемого объекта x и его черт y - $p(x, y)$. В этом заключается ключевое различие между порождающими и дискриминирующими моделями $p(y|x)$ 2.11.

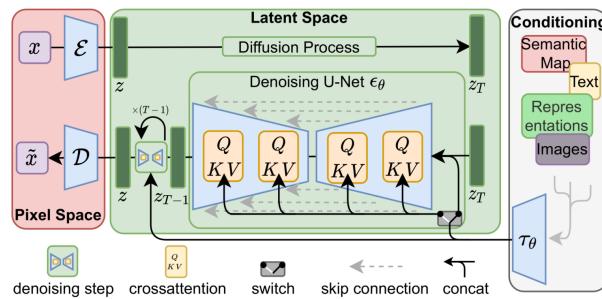


Рис. 2.11: Генеративные отличаются

Порождающие модели, используют параметрические модели p_θ для аппроксимации истинных функций распределений. Таким образом, аппроксиматором может выступить древо или нейросеть.

Определение f -дивергенцией называется выпуклая функция, удовлетворяющая равенству $f(1) = 0$

$$D_f \pi \| \rho = \mathbb{E}_{\rho(x)} f \left(\frac{\pi(x)}{\rho(x)} \right)$$

Семейство f -дивергенций включает функции

1. Кульбака-Лейбнера $f(u) = ulogu$

Нижней вариационной оценкой называется техника максимизации подпирающей границы параметрического распределения $p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ вторым $q(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, где переменная \mathbf{z} называется скрытой . В аналитической форме нижняя граница записывается как

$$\mathcal{L}(\phi, \theta; x) = \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \left[\ln \frac{p_\theta(x, z)}{q_\phi(z|x)} \right],$$

Ключевым свойством полученной оценки является выражение:

$$\ln p_\theta(x) \leq \mathcal{L}(\phi, \theta; x)$$

полученное из частного случая неравенств Йенсена.

Определение ЕМ-алгоритм - алгоритм для нахождения оценок максимального правдоподобия параметров вероятностных моделей с скрытыми переменными θ .

Алгоритм состоит из двух шагов.

- E(expectation) шага $q^{(t)}$ =. Шаг обновляет распределение при фиксированных параметрах
- M(maximization) Θ является значением, максимизирующим на шаге M условное матожидание E логарифма правдоподобия при данных значениях наблюдаемых переменных и предыдущем значении параметров.

Модели потоков

Определение Авторегрессионные модели представляют собой класс порождающих моделей, с вычислимой вероятностью, выполняющие генерацию через цепочку последовательных преобразований

$$p(x^{(1)}, \dots, x^{(t)}) = \prod_{t=1}^T p(x^{(t)}|x^{(1)}, \dots, x^{(t-1)}) \quad (2.13)$$

Авторегрессионные модели могут быть реализованы с использованием различных подходов, включая марковские модели, рекуррентные нейронные сети и модели с авторегрессионными свойствами, такие как GPT (Generative Pre-trained Transformer) и LSTM (Long Short-Term Memory). Они находят применение в широком спектре задач обработки естественного языка, включая генерацию текста, машинный перевод, синтез речи и другие.

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dx \approx \frac{1}{n} \sum_i = 1^n f(x_i) \quad (2.14)$$

Определение Модели потоков называют генеративные модели основанные на

последовательных обратимых дифференцируемых преобразованиях.

$$\log p_K(z_K) = \log p_0(z_0) - \sum_{i=1}^K \log \left| \det \frac{df_i(z_{i-1})}{dz_{i-1}} \right| \quad (2.15)$$

Ключевым для постановки является простота вычисления логарифма детерминанта и его невырожденность.

2.2.1 Энергетические модели

Энергетические подходы стали популярны с публикацией прорывных работ по диффузионным порождающим моделям [67]. Ключевым отличием класса является неявная работа с вероятностной через ненормированный потенциал. Такой подход позволяет исследователям адаптировать физические модели для изучения и генерации данных. Так, например, процесса Ланжевена, описывающий смещение частицы с случайным брождением, может быть использован для генерации из распределения, заданного исключительно потенциалом, без потребности в численно дорогостоящей операции нормировки.

Определение Энергетическими подходы в машинном обучении называют класс статистических моделей, параметризующих вероятность состояния согласно энергии E :

$$p(x) \sim \frac{\exp(-E(x))}{Z}, \quad (2.16)$$

где $Z = \int \exp(-E(x))$.

На практике энергетический потенциал задается через параметрическую функцию $E(\mathbf{x}, \theta, x)$, позволяющую выполнять адаптацию модели через методы градиентного спуска [45].

Определение Диффузионные модели представляют класс вероятностных моделей, использующих уравнение Ланжевена ?? для генерации элементов x из вероятного распределения p .

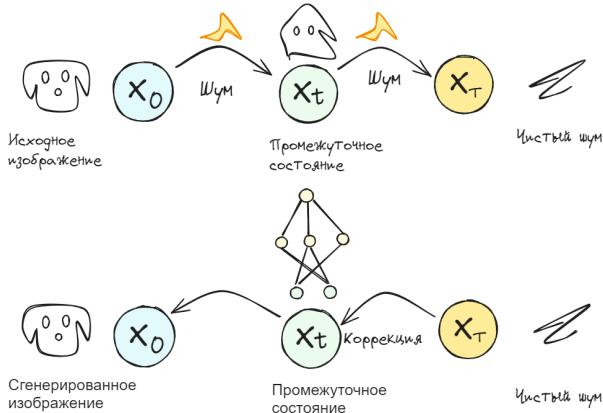


Рис. 2.12: Прямой процесс зашумления и обратный процесс коррекции ошибки [stablediffusion]

Диффузионных модели выполняют генерация последовательными шагами, заключающихся в последовательном исправлении ошибок из начального изображения. Обучение исправлению ошибок выполняется путем предсказания шума между текущим и предыдущим шагом.

Прямым процессом диффузионной модели называется постепенное зашумление:

$$x_t = \sqrt{1 - \beta_t} x_{t-1} + \sqrt{\beta_t} z_t, \quad (2.17)$$

где $z_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$. Тогда итоговое вероятностное распределение запишется как:

$$q(x_T) = q(x_0)q(x_1|x_0)\dots q(x_T|x_{T-1}) = q(x_0)\mathcal{N}(x_1|\sqrt{1-\beta_1}x_0, \beta_1\mathbf{I})\dots\mathcal{N}(x_T|\sqrt{1-\beta_T}x_0, \beta_T\mathbf{I}) \quad (2.18)$$

В компактной форме:

$$\ln q(x_T) = \ln q(x_0) - \sum_{t=1}^T \frac{1}{2\beta_t} \|x_t - \sqrt{1-\beta_t}x_{t-1}\|^2 + C \quad (2.19)$$

Обратный процесс заключается в составлении цепочки $\mathcal{N}(x_{t-1}|\mu(x_t, t), \Sigma(x_t, t))$, восстанавливающей элемент из шума:

$$p_\theta(x_T) = \mathcal{N}(x_T|0, I); p_\theta(x_{t-1}|x_t) = \mathcal{N}(x_{t-1}|\mu_\theta(x_t, t), \Sigma_\theta(x_t, t)) \quad (2.20)$$

Для введения параметрической модели используем нижнюю вариационную границу ELBO:

$$\mathbb{E}_{x_0 \sim q} \ln p_\theta(x_0) \geq \mathbb{E} \ln p_\theta(x_T) - \ln() \quad (2.21)$$

Тогда функция ошибки запишется как:

$$\begin{aligned} L(\theta) = & - \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{x_{t-1}, x_t \sim q} [-\ln p_\theta(x_{t-1}|x_t)] + \\ & + \mathbb{E}_{x_0 \sim q} \mathbf{D}_{KL}(q(x_T|x_0) \parallel p_\theta(x_T)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

На практике функция ошибки упрощается до предсказания шума:

$$\mathbb{E}_{x_0 \sim q; z \sim \mathcal{N}(0, I)} [\|\varepsilon_\theta(x_t, t) - z\|^2] \quad (2.23)$$

2.3 Обработка естественного языка

Анализ естественного языка это межпредметная дисциплина.

Формальные языки широко используются в математике, логике, лингвистике и компьютерных науках. В программировании, например, формальные языки включают языки программирования и описания данных, где синтаксис строго определён для обеспечения корректности и предсказуемости выполнения программ.

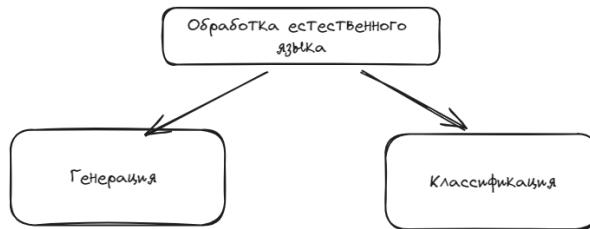


Рис. 2.13: Таксономия современных подходов обработки естественного языка

особенно важным для развития генеративного моделирования. В областях обработки естественного языка стала популярна аналитическая форма механизма внимания [73], приведшая к созданию больших лингвистических моделей [radford2019language], имеющих важное практическое применение.

2.3.1 Формальные языки

В секции будут рассмотрена формальная вычислительная теория языка. Подход был предложен Ноамом Хомски разработанной для разработки в его работе "Синтаксические структуры" [13]. Направление изучает алгоритмические методы по изменению морфемного состава слова, формированию представления о связи слов в тексте.

Введем ключевые предметные определения, позволяющие формализовать анализ и синтез предложений в естественном языке, что важно для многих приложений в области обработки естественного языка и вычислительной лингвистики.

Определение Формального языка является совокупностью:

- *алфавита* Σ - конечного множества символов, из которых строятся строки языка.
- *строки* - последовательности символов из алфавита, которые принадлежат языку.
- *грамматики* - набора правил, которые определяют, какие строки являются допустимыми в языке.



Рис. 2.14: Обучение разбито на три ключевых этапа: подготовка, адаптация на корпусе

Определение Автоматом называется:

- *алфавита* Σ - конечного множества символов, из которых строятся строки языка.
- *строки* - последовательности символов из алфавита, которые принадлежат языку.
- *грамматики* - набора правил, которые определяют, какие строки являются допустимыми в языке.

Определение Формальный язык — строго определённое множество строк S , составленных из конечного алфавита символов Ω , которые подчиняются определённым правилам или грамматике. Эти правила определяют синтаксис языка, то есть допустимые последовательности символов, и часто могут быть представлены с помощью формальных грамматик, таких как контекстно-свободные или регулярные грамматики.

Для определения синтаксических связей как правило используют графовые методы.

Определение Синтаксическое дерево(parse tree) описывается как взаимодействие между

- упорядоченным деревом T , которое представляет синтаксическую структуру предложения.
- синтаксической категории (например, S, NP, VP), либо терминальному символу, присваиваемому множеству вершин дерева $T|N$.
- корню дерева $T|r$, обозначающем всю структуру предложения.
- Листья представляют собой слова в предложении. Листья** $L \subseteq N$ — это узлы, которые не имеют дочерних узлов.
- Синтаксические категории или промежуточные составляющие, соответствующие $I = N \setminus L$ — это узлы, у которых имеется хотя бы одного потомка.

Тогда дерево разбора T для строки $w = w_1w_2 \dots w_n$ запишется как четверка $T = (N, E, r, L)$, где

- N — конечное множество узлов,
- $E \subseteq N \times N$ — множество ребер, каждое из которых соединяет пару узлов (родитель — потомок),
- $r \in N$ — корень дерева,
- $L = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq N$ — множество листьев, соответствующих словам в предложении.

Определение Морфологическим анализом называют процесс разложения слова w на его морфемы, например, префикс P , корень R и суффикс S , из словаря S

Определение Морфологическим синтезом называется функция f , формирующая слова w из леммы l и морфологических характеристик m . Примерами морфологических характеристик являются число, род, падеж.

Определение Правилами словообразования называют ограничения, определяющие трансформации между леммами и словоформами. Пусть T — множество таких правил. Каждое правило $t \in T$ можно представить в виде $t : (l, m) \rightarrow w$

Определение Лексикон называется декартово произведение лемм из словаря Σ и возможных атрибутов A . $L = \Sigma \times A$

Определение Формальная грамматика задается четверкой $G = (N, \Sigma, R, S)$, где N — множество нетерминальных символов, Σ — множество терминальных символов, R — множество правил, S — стартовый символ.

Эти формальные выражения и определения дают основу для создания и анализа алгоритмов в вычислительной морфологии, обеспечивая строгую и систематическую обработку естественного языка.

2.3.2 Представление языка в виде вложений

Определение N-граммы представляют собой последовательности из n элементов в тексте или последовательности символов, где n обозначает количество элементов в последовательности. Элементы могут быть символами, словами или более крупными фрагментами текста в зависимости от контекста применения. Анализ n -грамм является важным методом в обработке естественного языка (Natural Language Processing, NLP) для изучения частотности последовательностей слов или символов в текстовых данных.

Формально, n -гамма $ngram_n$ длины n в тексте T определяется как последовательность n элементов, где каждый элемент x_i может быть символом, словом или другими единицами текста:

$$ngram_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Использование n -грамм в анализе текста позволяет оценивать частотность последовательностей слов или символов и изучать лингвистические характеристики текста, такие как структура, стиль и тематика. Кроме того, n -граммы могут использоваться в задачах моделирования языка, предсказания следующего слова в предложении, а также в машинном переводе и других приложениях обработки естественного языка.

Определение Токенизация процесс в котором текст разбивается на токены. Это позволяет применить лемматизацию к каждому слову в тексте независимо от контекста.

Токенизация позволяет характерный порядок слова

Лемматизация часто используется в различных областях NLP, включая информационный поиск, анализ тональности, машинный перевод и другие.

Определение Векторное вложение(англ embedding) векторное представление \mathbb{R}^N слова w , проявляющие семантические и синтаксические при операциях сложения и взятия косинусного расстояния.

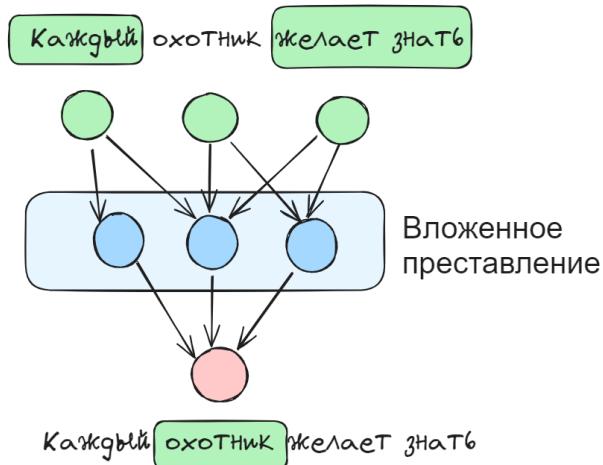


Рис. 2.15: Векторное позволяет выполнять семантические операции

Практически востребованной оказалась дистрибутивная гипотеза [Schutze], легшая в основу алгоритма Word2Vec (Вектор для Слова)[NIPS2013_9aa42b31]. Известны и другие подходы GloVe, FastText, улучшающие подход

$$\cos(\theta) = \frac{w_1 \cdot w_2}{\|w_1\| \|w_2\|} \quad (2.24)$$

Векторные вложения слов играют важную роль в генеративном моделировании естественного языка, так как они позволяют моделям представлять слова в виде непрерывных числовых значений, которые могут быть использованы как входные данные для алгоритмов машинного обучения. Это позволяет моделям эффективно изучать зависимости между словами и генерировать тексты семантически богатые и лингвистически осмыслиенные. Появление трансформерной архитектуры нейросетей позво-

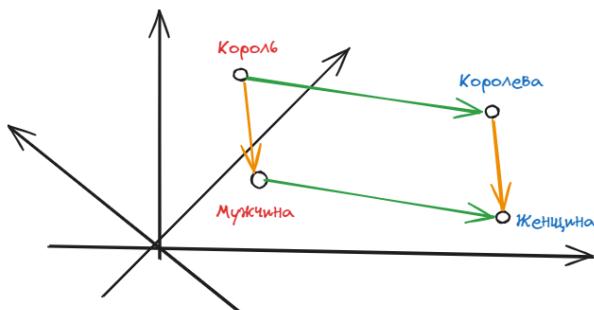


Рис. 2.16: Векторное позволяет выполнять семантические операции

лило улучшить результаты семантического представления до работы с предложени-

ями и параграфов [20]. Ключевым преимуществом модели является работа с макси-

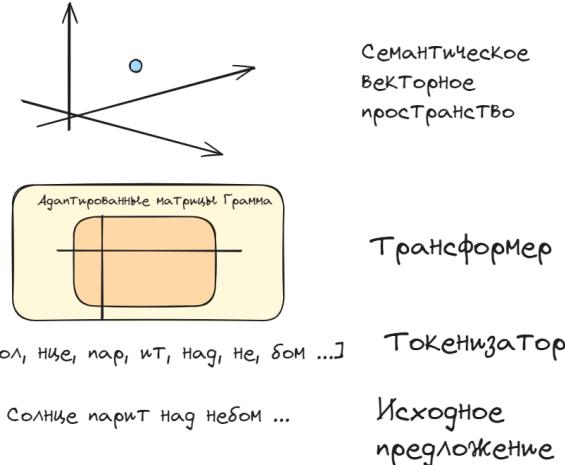


Рис. 2.17: Векторное позволяет выполнять семантические операции

рованным представлением языка, что позволяет изменить постановку обучения до предсказания промежуточного элемента.

$$P(w_i|w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n) \quad (2.25)$$

Зада

2.3.3 Большие языковые модели

Механизм внимания (attention) в генеративном моделировании естественного языка является ключевым компонентом в нейронных сетях, позволяющим модели фокусироваться на определенных частях входных данных при выполнении задач обработки текста. Также механизм стал

Основой современного ассистента является большая языковая модель. Термин большая на текущий момент означает число параметров модель большее одного миллиарда. Таким образом, физическая запись модель требует значительно ресурса памяти большое нескольких гигабайт, что и послужило причиной названия.

Обучение языковых моделей для задач ассистирования разделяется на два этапа предобучение (англ. pretrain) и инструкционное дообучение. В ходе первого этапа модель обучается синтаксической структуре языка. Во втором обучается под руководством эксперта на специализированных корпусах инструкций. Таковыми, например, могут являться дача структурированных определений, изложение информации в специальной стилистической форме, поиск ключевых слов в массивном тексте.

Предобучение требует значительных вычислительных ресурсов, не всегда доступных в образовательных и научных целях. В связи с этим компании, обладающие достаточным ресурсом выкладывают свои модели в общий доступ [32][33][70]

Для оценки способностей языковых моделей создаются специальные системы тестирования количественно оценивающие способности моделей к



Рис. 2.18: Обучение разбито на три ключевых этапа: подготовка, адаптация на корпусе

- способности к пересказу и перевода
- пониманию животного и растительного мира
- социальных правил и законов
- решение аналитических задач

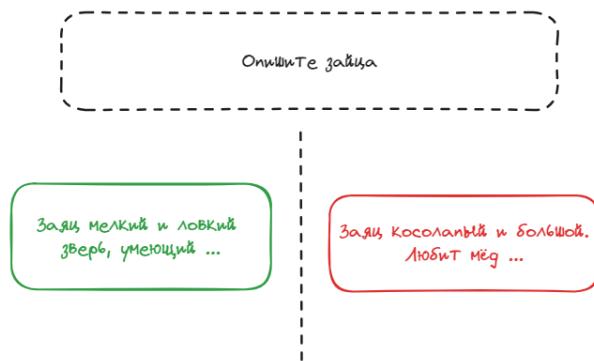


Рис. 2.19: Адаптация выполняется задачи проходит через взаимодействие с пользователем и работу эксперта

Для сравнения моделей также используется техника попарного сравнения модели. Таким образом, исходя из предпочтений пользователей, выносится оценка модели.

Большие языковые модели не гарантируют корректное исполнение даже базовых арифметических операций сложения . В обзоре [81] показано, что подобные проблемы возникают во многих строгих постановках, где соблюдение формы требует интеллектуального участия

- написание исполняемого языком программирования кода
- переход в математических выражениях.

Для разрешения проблемы исследователи предложили использование инструментов, которые используются моделью для качественного выполнения инструкции. На данный момент сложились

- обращения к информационным системам (RAG - retrieval augmented generation)[46]
- работа с средой исполнения программного кода [54]
- генерация сопровождающей иллюстрации [63]

Глава 3

Математические методы в педагогике

Педагогика активно развивающееся научное направление. Предметом изучения являются методы гармоничного развития личности в условиях образования. Существенно влияние на педагогику оказывает появление направление образовательных технологий,

Глава посвящена изучению педагогики и методов научной оценки качества задачи для обучающегося. Современные требования При создании педагогической задачи важно учитывать не только содержание обучения, но и индивидуальные особенности студентов, их уровень знаний и способности. Педагогическая задача должна быть четко сформулирована, чтобы студенты могли понять, что от них требуется, и чувствовать уверенность в выполнении задания.

Важным аспектом педагогической задачи является её реалистичность и актуальность. Задача должна иметь практическую ценность и быть связанной с реальными жизненными ситуациями или профессиональными задачами. Это поможет стимулировать интерес и мотивацию студентов к изучению материала.

Реализация педагогической задачи может включать использование различных методов обучения и оценки, таких как групповая работа, проектная деятельность, обсуждения, решение проблемных ситуаций и другие. Это позволит стимулировать активное участие студентов в образовательном процессе и способствовать их полноценному развитию.

3.1 Значение образования

Введение изменений в методику преподавания требует обоснования, выраженного в положительном изменении общественного блага.

В литературе популярен аналитический подход к расчету социального блага через функции утилитарности. В основе направления лежит идея, что общественное благо может быть определено путем суммирования утилитарных предпочтений индивидов в обществе. Этот подход связан с концепцией утилитаризма, которая утверждает, что действия должны быть оценены исходя из их способности максимизировать общую

полезность или счастье всех членов общества.

Известны чисто аналитические подходы к оценки общественного блага при планировании выборов, проектировании транспортных систем и сфере медицины.

3.1.1 Функция блага

Утилитарность может быть ординальна и абсолютна.

Определение Функция утилитарности - это концепция, разработанная в области экономики и принятая в теории принятия решений, которая описывает способность индивида оценивать полезность или степень удовлетворения от различных вариантов действий или состояний.

Происхождение функции утилитарности связано с развитием философской и экономической мыслью. Одним из основоположников утилитаризма был Джереми Бентам. В XVIII веке он разработал теорию, согласно которой целью действий является максимизация утилиты - суммарной пользы или счастья для всех членов общества.

Определение Равновесие по Нэшу Состояние, в котором ни один игрок не может получить дополнительную выгоду от своих измененных действий, если другие игроки продолжают свои стратегии.

Классическим примером является дилемма заключенного.

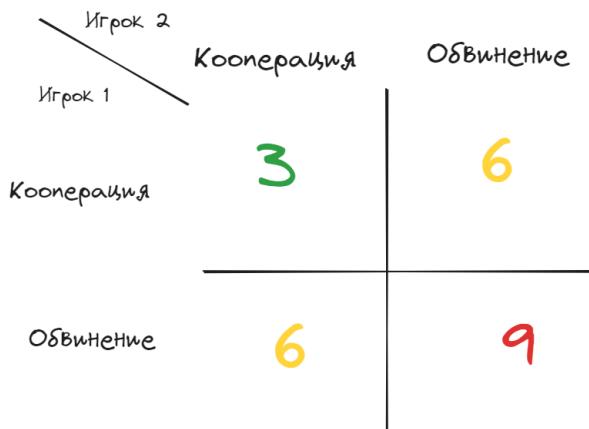


Рис. 3.1: Дилемма заключенного

Ординальная и абсолютная функции утилитарности представляют собой два различных подхода к измерению удовлетворения или полезности. В ординальном подходе утилитарное значение альтернатив оценивается лишь относительно других альтернатив, без установления конкретных числовых значений. Это позволяет определить порядок предпочтений между различными альтернативами, но не предоставляет количественной информации о различии в уровне удовлетворения. С другой стороны, в абсолютном подходе утилитарное значение измеряется в конкретных численных единицах, что позволяет проводить количественные сравнения между альтернативами и оценивать уровень удовлетворения более точно.

3.1.2 Механизм

Оптимальное распределение ресурсов в аналитических постановках изучается с помощью дизайна механизмов. Современный подход был предложен и развит Леонидом Гурвичем [30]. В его работе изучается проблемы доказательная эффективность организации рабочих процессов.

Механизм позволяет ограничить свободу действий игроков в системе таким образом, что действия агентов в доминантных стратегиях будут соответствовать ожиданиям принципала.

Строгое определение вводится через понятие байесовых игр с неполной информацией, предполагающих наличие нескольких многошаговых игр, направленных на формирование оптимальной стратегии.



Рис. 3.2: Дилемма заключенного

Определение Байесова игра это набор исходов (N, O, Θ) таких что,

- N конечное множество агентов n
- O множество исходов
- $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \dots \Theta_n$ множество
- $u = (u_1, \dots, u_N)$, где $u_i : O \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ функция полезности для игрока i

Определение Механизм для байесовой игры это пара (A, M) , где

- $A = A_1 \times \dots \times A_n$ набор действий доступный агенту i
- $M : A \rightarrow \Pi(O)$ соединяет действия с распределением возможностей

Изучение механизма заключается в анализе доминантных стратегий и равновесных состояний, к которым они приводят.

Определение В заданной байесовой игре, механизм является **воплощением доминантной стратегии** социального выбора функции C , если для любого вектора

полезности u , у игры есть равновесие в доминантной стратегии, и для любого равновесия a^* выполняется $M(a^*) = C(u)$

Теория механизмов используется в постановках с ассиметричной информацией и достаточно большим числом игроков, что как правило не позволяет наивно перебрать возможные исходы.

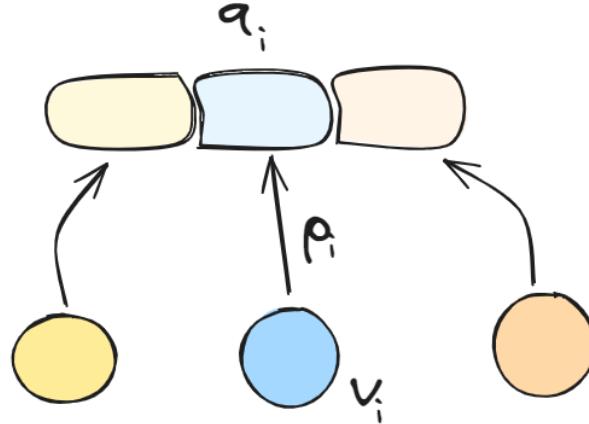


Рис. 3.3: Механизм определяет распределение ресурса \mathbf{x} и платежа \mathbf{p} в зависимости от ставок \mathbf{b}

Каждый игрок i имеет четверку (v_i, b_i, p_i) , соответствующую

- случайную величину v_i с функцией распределения F . Обозначим полученный квантиль распределения $q(v_i) = 1 - F(v_i)$.
- ставку на лот b_i .
- долю полученного ресурса x_i
- p_i итоговый платеж

Тогда функция полезности для каждого игрока i при заданном векторе ставок запишется как

$$u_i(\mathbf{b}; q_i) = v(q_i) \cdot x_i(\mathbf{b}) \quad (3.1)$$

Байес-Нэшевым равновесием называют результат распределения, в котором каждый участник аукциона максимизирует свою функцию утилитарности u_i как матожидание от квантилей q_{-i} .

$$\max_{\mathbf{q}, \mathbf{b}} \mathbb{E}_{\mathbf{q}_{-i}} [u_i(\mathbf{b}(\mathbf{q}); q_i)] \quad (3.2)$$

В теории [8] аукционов различают платеж . Формально опишем условия:

- $\tilde{x}_i(\mathbf{q}) = x_i(\mathbf{b}(\mathbf{q}))$ фактическое (от англ. ex-post) полученная доля ресурса;
- $\hat{x}_i(q_i) = \mathbb{E}_{\mathbf{q}} [x_i(\tilde{\mathbf{q}}, q_i)]$ текущее (от англ. interim) ресурсное ожидание;

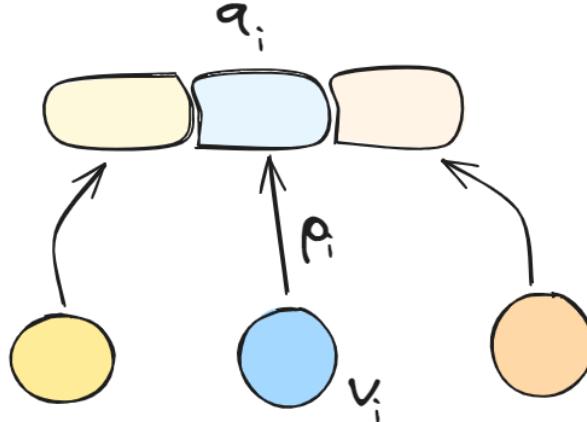


Рис. 3.4: Ресурсное распределение

- \hat{p} ожидаемый платеж.

Лемма Набор имеет Байес-Нэшево равновесие при условии

- $\hat{x}_i(q_i)$ монотонно убывает по q_i
- $\hat{p}_i(q_i) = v(q_i) \cdot \hat{x}_i(q_i) + \int_{q_i}^1 \hat{x}_i \cdot v'(z) dz$

Заданные условия достаточны для достижения уникально равновесия \mathbf{b} . Доказательство приведено в [50].

Одним из примером механизма являются рейтинг системы, широко распространенные в спортивных интеллектуальных соревнованиях.

Рейтинг-система – это модель, которая ранжирует участников в единый линейный порядок поданным сравнений небольших подмножеств этих игроков.

В этом случае рейтинг можно задать как оператор ζ принимающий на вход потенциалы, задающие силу объекта.

$$p(x_i \succ x_j) = \zeta(\phi(x_i), \phi(x_j)) \quad (3.3)$$

Согласно модели рейтинга Эло сила игрока задается случайной величиной ξ . Экспоненциальный вид графика связан с предположением о том, что в стратегических играх существенное различие в навыке гарантирует победу. Рейтинг задается матожиданием силы $E\xi$. Согласно модели Эло сила игрока задается нормально, причем дисперсия σ фиксирована для всех игроков. Тогда сила игры согласно предположению определяется как:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-s)^2} \quad (3.4)$$

Таким образом, рейтинг является латентной переменной. В литературе также популярна модель Брэдли-Терри, задающая вероятность победы зависит как:

$$P(\theta) \quad (3.5)$$

Заметим, что подмена $\gamma \exp(-\theta/\beta^2)$ позволяет отождествить подходы. В шахматной практике волатильность считается определенной и имеет стандартное отклонение равное 20:

$$\frac{1}{1 + 10^{\frac{R_B - R_A}{400}}} \quad (3.6)$$

3.1.3 Систем наград

Награды могут иметь разное происхождение, предназначение и формы. Например, в российском школьном образовании отличная учеба награждается медалями, а физкультурно-спортивные достижения сопровождаются знаками отличия. Награды поощряют вовлеченную учебу и совокупно позволяют выделять талантливых учащихся.

Известные компании, предоставляющие инструменты разработки, как Github¹ и Google Cloud², также используют систему знаков - бэйджей для поощрения пользователей ресурса к эффективному использованию ресурсов платформы и прохождению сертификации. Предполагается, что наличие таких наград может стать причиной для делового сотрудничества или предложения работы. Другим примером является платформа [Stack Overflow](<https://stackoverflow.com/>), на которой публикуются вопросы преимущественно технической тематики. Согласно ее правилам бейдж присваивается в случае наличие лучшего ответа на популярный вопрос. Такая награда поощряет положительную конкуренцию, поощряет к созданию конструктивных и этичных ответов [79].



Рис. 3.5: Упорядоченная система наград

Теория бэйджей основана на наличие системы упорядоченных наград [21]. Опишем постановку для линейного упорядоченного набора бэйджей $m > m - 1 > \dots > 0$ и n пользователей системы.

Определение Механизм бэйджа задается как функция $r : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ от вкладов игроков b_i :

$$S(t_i) = \frac{b_i}{v_i} \quad (3.7)$$

Задача механизма обеспечить максимизацию суммарного вклада участников:

$$\max_{P(m)} \sum_{i=1}^n b_i \quad (3.8)$$

¹<https://cloud.google.com/>

²<https://cloud.google.com/>

Объект изменения	Название практики	Резу
Учитель	Курсы повышения специализации	2
Учитель	Обеспечение	1
Ученик	Пороговый балл прохождения курса	1
Учитель	Предоставление частичного решения, подсказки	1
Учитель, Ученик	Вовлеченность в занятие	1
Ученик	Задание строго времени выполнения задания	1
Ученик	Упор на навыки письма и чтения	1
Домашнее окружение	Обучение с родителями	0
Учитель	Балловая оценка домашнего задания	0
Учитель	Поддержание духа класса	0
Ученик	Отбор учащихся на основании интеллектуальных способностей	0
Домашнее окружение	Изменение домашней обстановки	0
hline		

Таблица 3.1: Влияние образовательных практик

Определение Механизмом отсечки по порогу называется механизм распределения бейджа $j \in \{0, \dots, m\}$, исходя из преодоления линейно упорядоченных порогов $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, таким образом, что $b_i \in [\theta_j, \theta_{j+1})$.

Определение Механизм таблицы лидеров называется механизм распределения бейджей в порядке убывания по вкладу b_i .

В работе [21] изучено объединение двух методов.

3.2 Структура методического материала

В секции рассматриваются современные теории образования. Рассматриваются подходы Различают дидактический и основанный на опыте методы преподавания.

Также в секции будут разобраны подходы к аналитической оценке системы рейтинга

3.2.1 Дидактический подход

Известный психолог педагог Бенжамин Блум в работе [6] изучает проблемы массового образования. Согласно его исследованию индивидуальное образование позволяют получать результаты в пределах до двух сигмах лучше общего образования. Для разрешения проблемы предлагаются методы, демонстрировавшие наибольшую эффективность 3.1

Акцент при обучении ставится на контроле за успеваемостью учащихся, регулярно проводятся контрольные занятия, представляющие количественную оценку знаний и навыков. Курсы как правило сопровождаются подготовленной средой: учебником, рабочей тетрадью и лабораторной установкой.

Особенность обучения заключается в прямом участии учителя в работе.

Минусами такого подхода служит необъективность отбора материала, отсутствие возможности учащегося повлиять на материал обучения, потребность в значительной подготовке преподавателя к занятию и ежегодной закупки расходных методических материалов.

Противопоставленным дидактическому методу обучения является проблемно-ориентированный подход. в отличие от дидактического подхода, который акцентирует внимание на передаче знаний от учителя к ученику, эмпирический подход ставит в центр обучения активное участие ученика в исследовании и поиске знаний через решение проблем и практическую деятельность. Этот подход поддерживает самостоятельное мышление, исследовательские навыки и обучение через самостоятельное осмысление опыта. Ученики, таким образом, сталкиваются с реальными проблемами или задачами, ищут способы их решения, экспериментируют и совместно с учителем извлекают уроки из этого опыта. Эмпирический подход часто ассоциируется с *активными методами обучения*, описанными в работах Кругликова [87]

- Решение казусов
- Исследовательские проекты
- Командная работа

Определение Практико-ориентированный подход подразумевает приобретение знаний с помощью выполнения задач, приближенных.

Такое обучение основано на принципе активного участия, где ученики самостоятельно формулируют и анализируют проблемы, разрабатывают стратегии исследования и находят решения. Учитель выступает скорее в роли наставника, который поддерживает и направляет учащихся в процессе решения проблемы, обеспечивает необходимую информацию и стимулирует критическое мышление и самостоятельность.

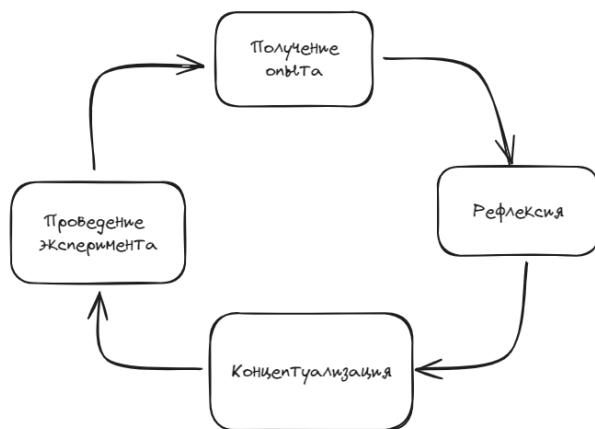


Рис. 3.6: Цикл Колба

Одной из известных моделей является цикл Колба [41]. Автор предлагает создать структурированной и поддерживающей среды для исследования, в которой учащиеся

могут самостоятельно исследовать определенную тему или проблему. В ходе организации таких проектов важно определить ясные цели и задачи исследования, а также обеспечить доступ к необходимым ресурсам и информации. Учитывается также выбор соответствующих методов исследования и инструментов для сбора и анализа данных. Кроме того, организация исследовательских проектов включает в себя установление сроков и этапов работы, распределение обязанностей между участниками команды и создание механизмов обратной связи и поддержки. Это позволяет учащимся эффективно планировать и осуществлять свои исследовательские усилия, развивать навыки самоорганизации, анализа и критического мышления, а также получать удовлетворение от процесса открытия новых знаний и исследовательской деятельности.

В рамках конкурса исследовательских проектов могут быть применены различные техники для оценки работ участников. Одна из таких техник - это использование экспертовых жюри, состоящих из опытных специалистов в соответствующей области, которые могут оценить проекты с точки зрения их научной значимости, методологии и оригинальности идей. Другой метод - это организация публичных презентаций проектов, во время которых участники представляют свои исследования перед широкой аудиторией и получают обратную связь от зрителей и экспертов.

Также важно обеспечить прозрачность и справедливость процесса оценки, предоставив участникам обратную связь и объяснив критерии и принципы оценки заранее. Это поможет участникам лучше понять ожидания и требования к их проектам, а также повысит доверие к результатам конкурса.

Определение Рефлексия в образовании играет значительную роль в стимулировании глубокого понимания и личностного развития учащихся. Этот процесс включает в себя осознанный анализ своего учебного опыта, рассмотрение своих мыслей, чувств и действий в контексте обучения.

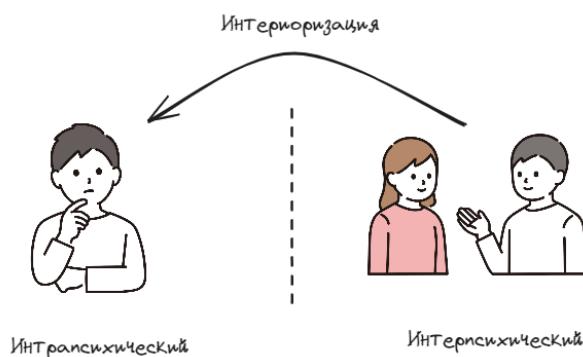


Рис. 3.7: Рефлексия по Выготскому [84]

Лев Выготский описывает рефлексию как результат интериоризации - перехода внешней речи во внутренний способ мышления, когда ребёнок способен уже в уме планировать свою деятельность

Рефлексия способствует развитию метакогнитивных навыков

- оценки своей деятельности и планирования
- осознания ценности знания и социума
- ведения высшей когнитивной деятельности по организации социальной деятельности

Таким навыки позволяют справляться с практическими заданиями, обучать и осваивать неизвестные областях знаний, выявить собственные пробелы в знаниях и развить критическое мышление.

Также в своих работах Выготский проблема обучению языку.

Педагогика использует лингвистические исследования для разработки методов обучения, таких как коммуникативный подход и логопедические методы, основанные на понимание языка.

Как правило, лингвисты сотрудничают с педагогами для создания учебных материалов, которые учитывают языковые особенности и когнитивные процессы усвоения языка.

3.2.2 Психологические подходы

Определение Когнитивное развитие

Когнитивное развитие как процесс прохождения стадий, соответствующих развитию интеллектуальных способностей, описано в работах Жана Пиаже [57].

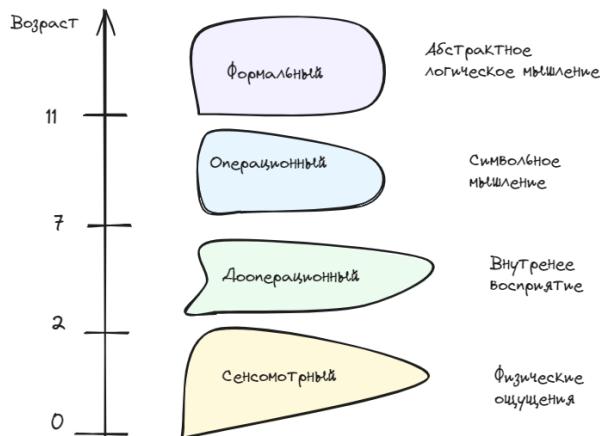


Рис. 3.8: Этапы развития детской психики по Жану Пиаже [57]

Этапы развития детской психики по Жану Пиаже

Лев Выготский оспоривает этот подход, приводя в пример детей, которые в ходе занятий со взрослыми продемонстрировали недетский уровень освоения шахмат, плавания и прочих дисциплин 3.9.

Определение Зона ближайшего развития — это пространство между тем, что ребёнок уже может сделать самостоятельно, и тем, что он может выполнить с помощью более знающего человека.

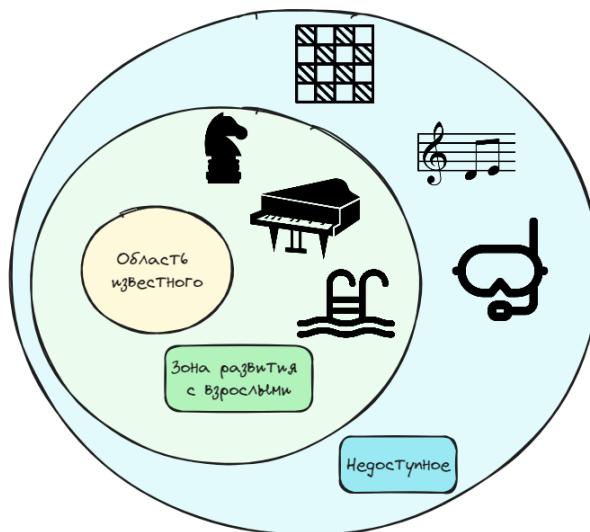


Рис. 3.9: Иллюстрация зоны ближайшего развития

Концепция, предложенная выдающимся советским психологом Львом Семёновичем Выготским в его теории социокультуры [Р ўСКРуР «СТБСФРЭРЧР€2014РёСКСЇРњРхР]. Согласно Выготскому для образования

Определение Высшие психологические функции

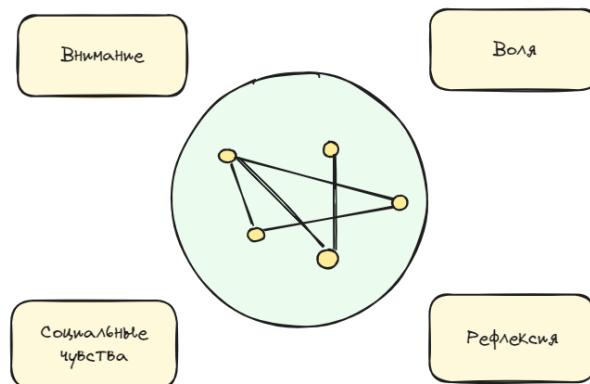


Рис. 3.10: Результатом высшей психической функции является базовая, воплощающаяся в действии

Определение Поток — это состояние сознания, характеризующееся полной вовлечённостью и концентрацией на текущей деятельности, сопровождающееся ощущением контроля, потерей чувства времени и высокой внутренней мотивацией.

Характеристиками потока согласно [19] являются

- Ясные цели и обратная связь: Деятельность имеет чёткие цели и предоставляет немедленную обратную связь.
- Баланс между сложностью задачи и навыками: Задача должна быть достаточно сложно, чтобы бросать вызов, но при этом соответствовать уровню навыков человека, чтобы избегать скуки и тревоги.

- Слияние действия и сознания: Человек настолько поглощён деятельностью, что все его действия становятся почти автоматическими и интуитивными.
- Потеря самосознания: В потоке человек забывает о себе, своих заботах и тревогах, полностью сосредоточившись на задаче.
- Искажение восприятия времени: Время может казаться летящим быстро или, наоборот, замедляться; часы могут пройти как минуты

Теория потока задает оптимальную уровень нагрузки согласно навыку [18]. Уровень сложности соответствует

Теория потока активно используется в играх [12] и программах непрерывного обучения [31]

Определение Гипотеза о врожденных знаниях (Innateness hypothesis) - теория в лингвистике и когнитивной науке, которая утверждает, что способность к языку является врождённой характеристикой человеческого мозга.

Гипотеза постулирует наличие:

- Врождённого языкового аппарата - врождённой способности к освоению языка.
- Универсальная грамматика - общего набора грамматических принципов и структур, присутствующих во всех языках и врождённых для каждого человека.
- Независимости от внешнего опыта: Основные аспекты языковой способности являются врождёнными и не зависят от окружающей среды.

Гипотеза имеет статистические подтверждения описанные в работах Ричарда Номски, использовавшего статистический аппарат синтаксических деревьев для анализа массивного корпуса естественного языка для [23][49].

3.3 Методическая задача

Задача является ключевым инструментом в обучении. Её цель состоит в том, чтобы обеспечить студентам определённые образовательные возможности и помочь им развить необходимые знания, умения и навыки.

Для этого педагогическая задача должна:

- предоставлять возможность для развития критического мышления и применения знаний на практике.
- быть структурированной и обеспечивать возможность оценки выполнения студентами поставленной задачи.
- иметь ясные и объективные критерии оценки, чтобы обеспечить справедливую оценку достижения учебных целей.

3.3.1 Организация

В разделе описаны основные направление электронного образования крайне популярно и имеет важную экономическую роль.

- классическое тестирование
- классификационное тестирование [CCT]
- адаптивное тестирование [CAT] В этом случае задания подбираются динамически во время тестирования

Платформы обучения языкам(ИСТ)

- Revita [39]

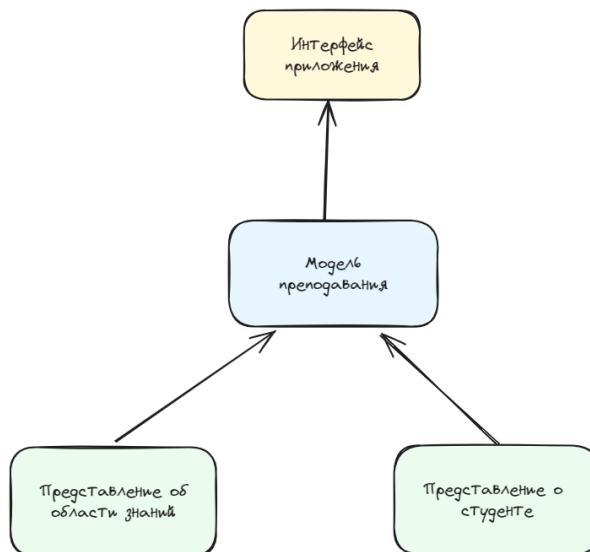


Рис. 3.11: Схема организации обучения

Алгоритмические методы позволяют разрешать классические проблемы образования, включающие

- адаптивное составление методической литературы,
- *прокторинг* пресечение недобросовестной кооперации обучающихся при индивидуальном контроле знаний
- формирование индивидуальной образовательной траектории.

В образование интеллектуальные ассистенты применяются

- для обучения русском языку [82]
- рисования поясняющих графиков [9]

Merlin Mind - ассистент направленный целиком на образовании. Взаимодействие с ассистентом выполняется через пульт, который воспринимает речь и имеет опции по управлению презентацией. Merlin Mind имеют открытую версию большой языковой модели, обученной на данных подготовленных с учетом общеобразовательной программы США.

3.3.2 Тестовые системы

Количественная оценка успеваемости выполняется на основании контрольных работ. Решение об оценки может выноситься как учителем, так и автоматически с использованием приложения. Оценка при обучении выполняют множество задач: - обучающегося - оценка перспектив его родителей - возможность сравнить различные подходы к изложению материала для педагога

Определение Психометрия- дисциплина, изучающая количественные способы оценки знания.

Для этого используются статистические методы оценки знания, учитывающий случайность в измерениях. Предполагается, что знание не подлежит явному измерению, а лишь косвенному путем проведения тестирования или анализа деятельности обучающегося.

Для построения теории вводятся скрытые от наблюдения переменные называемыми латентными θ . В области образования психометрические исследования наиболее активно выполняются для тестовых заданий. Основными подходами к оценке знаний, исходя из результатов, на текущий момент является классическая и (item response) теория.

Классическая теория предполагает, что результат тестирования задан случайной величиной. Её вид в виде правила предполагается нормальным:

$$s \sim N(\theta, \sigma^2) \quad (3.9)$$

, где s задает экзаменационный результат обучающегося, параметр θ - истинный уровень знания, σ^2 - задает волатильность измерений. распределения с дисперсией, определяемой

Как правило тесты подбирают таким образом, чтобы ошибка метода на всем промежутке результатов была минимальна

$$\int_0^1 \sigma^2(\theta) \rightarrow \min$$

Существенным недостатком такой системы является предположение о равной сложности задач в контрольной работе.

Система тестирования IRT была предложена институтом в 1950 году. Она активно используется в международных экзаменах языка и делового знания GMAT и

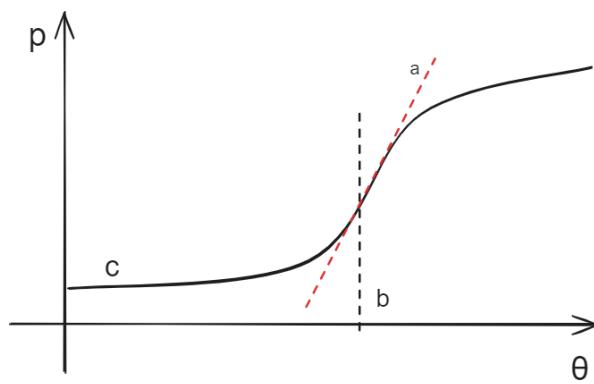


Рис. 3.12: Матрица исходов модели Байесовской оценки на шаге t

TOEFL. В отличие от классической теории также учитывают текущий уровень знаний, что позволяет составлять набор заданий индивидуально. Наиболее известным результатом системы является 3-х параметрическая логистическая модель 3.12, учитывающая сложность задачи, вероятность угадать и волатильность оценки Одним из ключевых [48]:

$$p_i(\theta) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + e^{-a_i(\theta - b_i)}}, \quad (3.10)$$

где

- b_i - сложность задания
- a_i - характерный масштаб
- c вероятность угадать решение



Рис. 3.13: Эволюция представлений о знаниях учащегося

Альтернативным путем является подход байесовской оценки знания, описанный в работе [16]. Модель учитывает вероятность ошибки и вероятность ошибиться при наличии знания 3.13:

- $P(L_0)$ начальные знания в предмете

- $P(S) = P(x = 0|L_t = 1)$ вероятность просчета при наличии знаний
- $P(G) = P(x = 1|L_t = 1)$ вероятность угадать при отсутствии знаний

Обновление представлений выполняется через Байесов подход согласно правилам:

$$P(L_t|obs_t = 1) = \frac{P(L_t)(1 - P(S))}{P(L_t)(1 - P(S)) + (1 - P(L_t))P(G)} \quad (3.11)$$

$$P(L_t|obs_t = 0) = \frac{P(L_t)P(S)}{P(L_t)P(S) + (1 - P(L_t))(1 - P(G))}$$

Отметим, что полученный вывод предполагает, что

- вероятность забыть знание равна нулю $P(L_{t+1} = 0|L_t = 1) = 0$
- $P(L_{t+1}) = P(L_t|obs_t) + (1 - P(L_t|obs_t)) P(T)$

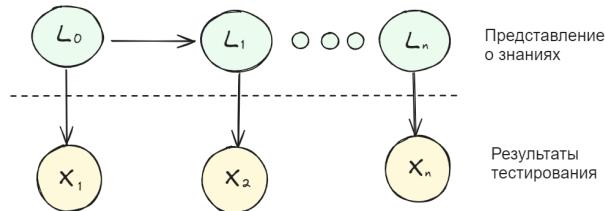


Рис. 3.14: Матрица исходов модели Байесовской оценки на шаге t

Таким образом тест можно представить в виде марковской цепи обновления представлений о знаниях учащегося 3.14.

Адаптация для случая IRT ?? позволяет учесть влияние сложности задания [10]:

$$P(Y_{ij} = 1|\theta_J, a_i, b_i, c_i) = \quad (3.12)$$

Глава 4

Описание работы

В главе описан порядок разработки педагогических инструментов, использующих интеллектуальных ассистентов. Глава разделена на секции

-
- разработка образовательных игр, обучающих использованию ассистентов

4.1 Подготовка данных для обучения

Цель этапа составить наборы данных для обучения большой языковой модели обработки Параллельный корпус изображение-текст и наиболее полное описание задачи

Процесс сбора данных осуществлялся при помощи технологий оптического распознавания символов (OCR), включая методы, разработанные в рамках данного исследования.

В состав открытого тренировочного набора входит более тысячи аннотированных изображений. Результат моделирования предоставлены на открытых ресурсах¹ с обязательным указанием источником данных.

4.1.1 Разметка

Специализированные сайты для исследователей содержат большое число датасетов, содержащих структурированные данные. К сожалению, большинство из них представлены на китайском и английский языках.

Современные большие языковые модели позволяют переводить
Перевод выполнялся с помощью языкового ассистента llama3. Перевод 7500 задач выполнялся в течении 12 часов.

2

¹<https://github.com/NMashalov/Generative-modeling-appliance-for-creating-educational-tasks>
и https://huggingface.co/datasets/NMashalov/task_illustrations_dataset

²https://huggingface.co/datasets/NMashalov/olympiad_task_translation

Раздел посвящен проблемам адаптации.

Одним из разобранных подходов Ключевым преимуществом ассистентов является их адаптивность /

Языковые ассистенты

Выполнялась с помощью специализированного

Перевод выполнялся с помощью языкового ассистента llama3. Перевод 7500 задач выполнялся в течении 12 часов.

3

Для адаптации корпуса задач также были подготовлены

4.1.2 Распознание текста

Прогресс в области машинного обучения и разработки интеллектуальных ассистентов ведет к росту потребности в высококачественных корпусах текстов и аннотированных изображений. Наиболее остро проявляется недостаток систематизированных методических материалов на русском языке.

Определение Оптическое распознавание символов (OCR) представляет собой процесс автоматического преобразования текста, представленного в виде изображения или сканированного документа, в текстовый формат.

Первоначально изображение документа подвергается предварительной обработке, такой как удаление шума или коррекция искажений. Затем происходит сегментация изображения, то есть разделение его на отдельные символы или группы символов.

Далее, при помощи алгоритмов распознавания, включающих методы машинного обучения и компьютерного зрения, символы на изображении анализируются и сопоставляются с соответствующими символами из набора знаков. Этот этап включает в себя распознавание формы символов, их контекста и других характеристик, что позволяет определить, какие символы были изображены на сканированном документе.

В завершение, распознанные символы объединяются в слова, предложения и абзацы, формируя полноценный текстовый документ. Точность и эффективность процесса OCR зависят от качества изображения, используемых алгоритмов распознавания, а также от языка и структуры текста. В современных приложениях OCR широко используются в различных областях, включая сканирование документов, распознавание номеров автомобильных номеров, оптическое чтение рукописных текстов и другие приложения, где требуется автоматическое извлечение текста из изображений.

Существует множество пакетов для выполнения OCR

- Nougat [5]
- [66]

³https://huggingface.co/datasets/NMashalov/olympiad_task_translation

- LayoutParser [65]

К сожалению, доступные открытые решения либо не поддерживают русский язык, либо не предназначены для работы с формулами. Для решения автора был разработан открытый программный пакет для Python ShuemacherOCR , предназначенный для масштабного анализа русской естественно-научной методической литературы. В состав пакета входят модули как для обработки отдельных изображений, так и полноценных документов, позволяющие, извлекать данные в структурированном виде. Для решения задачи пакет использует нейросетевые алгоритмы. Ключевой особенностью пакета является возможность выделять в тексте на русском языке строчные математические формулы. Установка выполняется из открытого реестра пакетов PyPI с помощью менеджера pip или из репозитория ⁴.

Данные задачи были собраны из открытых педагогических источников [libmipt][mathedu] с обязательным указанием при публикации ссылок на источники.

Распознание текста по изображению выполняется нейросетью архитектуры Nougat [5]. Особенностью данной архитектуры является быстрая адаптация под новые виды данных и работа с целым изображением, без необходимости промежуточного поиска регионов с текстом.

Обучение сети проводилось на корпусе препринтов статей [15], переведенных на русский язык с помощью интеллектуального ассистента ChatGPT [53]. Выбор был связан с возможностью сохранять оригинальную разметку TeX-документов.

Для валидации результатов был разработан открытый датасет, позволяющий измерить качество распознавания ⁵.

Разметка для обучения проводилось с помощью обращения к сервису компании MathPix. Метрики качества приведены в таблице 1 и сопоставимы с результатами оригинальной модели Nougat.

Параметр	Тренировочная выборка	Отложенная выборка
BLEU	83.2	80.4
Edit distance	0.15	0.17

Для обучения на полученных данных была использована нейронная сеть YOLO [60]. Эта архитектура нейронной сети имеет способность эффективно дообучаться на небольших выборках данных, что позволяет достигать удовлетворительных результатов. Для ситуаций, где число аннотаций и число изображений на изображении не совпадало, применялся алгоритм на двудольном графе, направленный на максимизацию числа пар.

Для получения обучающей выборки была проведена разметка части датасета. Каждое изображение включает в себя текстовую информацию, а также различные чертежи и формулы, характерные для данной области знаний.

⁴<https://github.com/NMashalov/SchumacherOCR>

⁵https://huggingface.co/datasets/NMashalov/ru_educational_book_datasets

Процесс разметки включал создание аннотаций для каждого изображения, а именно выделение границ объектов, таких как текстовые блоки, формулы и чертежи. Этот процесс требовал точности и внимательности для корректного определения границ объектов на изображении и их соответствия с аннотациями.

Для расширения датасета и обеспечения его разнообразия была применена аугментация данных. Применялись повороты, масштабирование, изменение освещения и отражение, позволили создать дополнительные вариации входных данных. Это способствовало увеличению разнообразия обучающей выборки и повышению устойчивости модели к различным вариациям данных, что важно для обеспечения ее эффективности в реальных условиях различной разметки страницы.

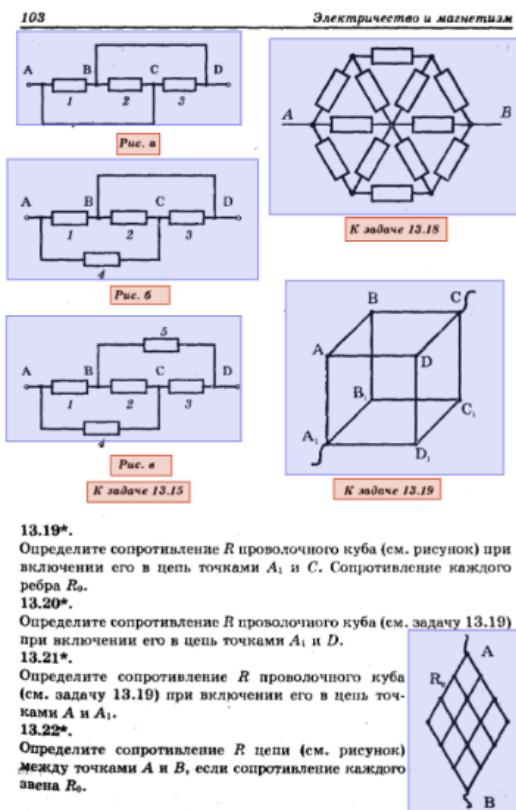


Рис. 4.1: Пример аннотированной иллюстрации из книги Генденштейн, Кирик, Гельфгат: 1001 задача по физике

Метрическая оценка результатов выделения иллюстрации и аннотации

Параметр	Тренировочная выборка	Отложенная
mAp	78.4	
Точность распознавания ребер “изображение-аннотация”	75.2	

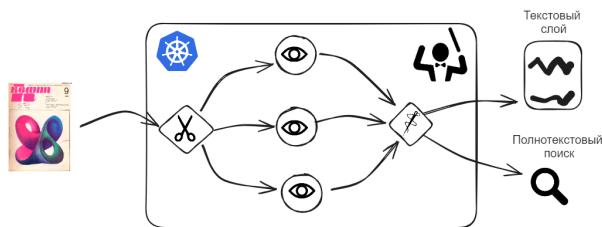


Рис. 4.2: Итоговая разметка выполняется посредством распределенных вычислений

4.2 Приложение

Современный ассистент

лежит большая языковая модель, обученная посредством техник оптимизации воспроизводить язык.

Успехи в области обработки и генерации естественного языка расширили возможности виртуальных ассистентов в помощи по решению повседневных и деловых задач. На данный мо

Определение Интеллектуальные ассистенты прикладное программное обеспечение, выполняющее задачи пользователя, согласно командам на естественном языке. Как правило чат-ботов разделяют по их применению:

- **разговорный** ассистент не имеет заранее заданной задачи и общается с пользователями для поддержания беседы
- **деловой** ассистент направлен на решение конкретной задачи

Для адаптации ассистента к задачам необходимо разработать интерактивное приложение.

4.2.1 Проект интеллектуального ассистента

Сбор корпуса выполняется через системы информационного поиска, выделяющие документы через ключевые слова и ссылки. Такой подход осложняется невозможностью в явной форме получить ответ на вопрос. Автоматические интеллектуальные ассистенты во многом разрешают проблемы, но даже приближающиеся к человеческим способностям большие языковые модели не способны на формальные логические операции: арифметического сложения, решения абстрактных логических задач, соблюдение правил стратегических игр.

Таким образом, для успешной адаптации ассистента необходимы

Итоговым решением

Совмещающий байесову рекомендательную систему как систему долгосрочного планирования и ассистента как эмпатического посредника.

Для адаптации открытой реализации для работы с детьми необходимо создание формата и предмета коммуникации.

Банные слова были исключены с помощью библиотеки PyMorphy [42], выделяющую нормальную форму слова для сравнения с опорным корпусом неэтичных слов.



Рис. 4.3: Модули PyMorphy [42] и CLIP позволяют исключить неэтичное общение и изображение

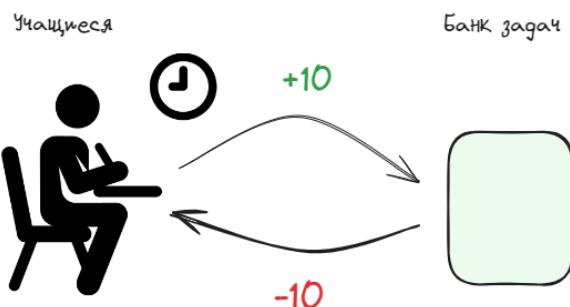


Рис. 4.4: Проект приложения

Байесовы рейтинговые модели задают правила обновления апостериорных представлений рейтинга. Наиболее известным примером байесовой модели рейтинга является модель Брэдли-Терри и эквивалентная ей модель Эло.

Ключевым преимуществом байесовых систем является возможность пересчета рейтинга сразу после матча. Таким образом система приобретает адаптивность, важную в коммуникациях в настоящем времени.

В такой постановке ассистент следит за эмоциональным откликом обучающегося на материал, узнает ее причину и в случае несоразмерной уровню нагрузке сообщает управляющей системе о потребности изменения сложности.

Плюсами такого подхода является

- интерпретируемость
- сужение ассистента до строгой постановки поиска наилучших навыков общения исходя из А/В тестирования.

4.2.2 Подготовка веб-приложения

Разработка сайта была выполнена согласно требованиям WAI-ARIA [17]. Компоненты веб-сайта имеют высокую контрастность и выраженные контуры, позволяющие выполнять навигацию слабовидящим людям. Также функционал приложения ограничено доступен и незрячими людям, использующим специальные приложения для аудио отображения содержания сайта.

Веб-приложение доступно при подключение через браузер по адресу доменного имени www.mathema-online.xyz. Технологии криптографии обеспечивают безопасность соединения, выпущенные сертификаты доменного имени исключают возможность подмены имени.

Современные образовательные материалы и инструменты требуют разработки интерфейсов. Одним из ключевых направлений является гештальт-дизайн [76], описанный в работах Гештальт группы.

Сайт выполнен в парадигме клиент-серверной разработки. Такая архитектура позволяет заменять интерфейс и программное обеспечение без необходимости в

Интерфейс реализован с помощью популярной библиотеки React для языка программирования JavaScript [[ackenheimer2015introduction](#)]. Такой подход позволяет дескриптивно описывать элементы вебсайта, программно реагируя на взаимодействие пользователя. Ключевой особенностью подхода является возможность использовать открытые профессионально подготовленные интерфейсы

При использовании данных из открытых источников используются ссылки согласно требованиям Гражданского кодекса Российской Федерации [86] [85].

4.3 Игры

В секции представлены разработанные игры, использующие современные технологии машинного обучения в задачах образования.

Занятиями стратегическими играми [11][77]

В работах показано, что интеллектуальные ассистенты, строящиеся сугубо на языковых моделях, пока не способны на проведение содержательной игры дольше 10 ходов . Ассистент забывает ход игры и нарушает правила.

4.3.1 Игры

Обучение игре в шахматы является одним из популярных подходов к формированию стратегического мышления.

В работе [38] проведен анализ в соревнованиях проприетарного решение ChatGPT демонстрировал рейтинг Эло 1600, соответствующий начальному уровню игрока в шахматы [22]. Открытое решение [24] использует архитектуру декодера для

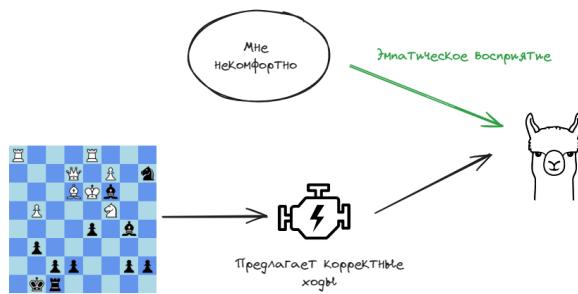


Рис. 4.5: Планирование игры выполняется шахматным движком Stockfish. Языковой ассистент комментирует игру и следит за сложностью

Исходя из этого был подготовлен совместный подход, использующий открытый шахматный движок StockFish [1] для ранжирования наилучшего хода.

Таким образом, интеллектуальный ассистент отвечает за эмпатическое понимание пользователя и коррекцию сложности, а шахматный движок предлагает ход согласно уровню игры.

Растровый рисунок использует сеточное заполнение цветом. Из-за этого при изменение разрешения изображения картина приобретает резкий вид, связанный с наблюдением резкой сетки вместо плавного изображения.

Тем не менее такой вид искусства популярен в силу простоты освоения и восприятия. Интерактивная игра предлагает

Для отображения используется открытая диффузионная модель 2.2.1 для составления рисунка по текстовому запросу.

Для выполнения рисунка она получает запрос на английском языке, лаконично описывающий стиль рисования и объекты на изображении. В силу случайности генерации пользователь может подобрать для себя наиболее интересный вариант изображения.

Модель дополнительно снабжена фильтром цензуры, позволяющей избегать неэтичного рисунка [59].

Интерактивное рисование

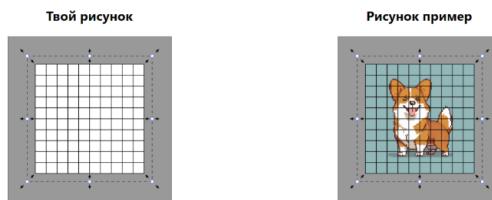


Рис. 4.6: Сложность задания задается организацией рисунка

Ассистент выполняет задачи

- транслирует запрос пользователя на русском языке на английский для генерации

Уровень сложности регулируется путем изменения композиции и наличия фона.



Рис. 4.7

4.4 Рейтинговая система

Приложение содержит:

1. краткое описание постановки и предметный обзор
2. предложенный алгоритм, определяющий оптимальные параметры спуска
3. численный эксперимент, сравнивающий предложенный

4.4.1 Адаптация рейтинговой системы

Постановка представляет тест как стохастический ряд вида $\{x\}_{t=0}$ каждый элемент, которого является случайной бернулевской величиной с параметром s . Для ввода управляющей переменной задается сложность задачи d , параметризующий в совокупности с функцией отклика учащегося f , переменную $s_t = f(d)$.

Таким образом, задача алгоритма предложить функцию $f(d_{t+1}^t, x_{i=0}^t)$, обеспечивающую оптимальную сходимость $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(s(d_t), s^*) = 1$ согласно условиям:

- метрика $\rho(x, x') = (x - x')^2$ евклидова
- предполагается наличие банка W , возвращающего задачу произвольной сложности d
- функция отклика $f(d_t)$ ограничена числом M и монотонно убывает

Алгоритм, отвечающий заданным требованиям был предложен в работе [80]. Авторы предложили правило обновления сложности:

$$d_{t+1} = \Pi(d_t + \lambda(x(t) - s^*)), \quad (4.1)$$

где функция Π является ограничивающим оператором вида

$$\Pi_H(d) = \begin{cases} d, & \text{прт } 1 < d < 0 \\ 1, & d \geq 1 \\ 0, & \text{при } d \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Алгоритм по форме соответствует алгоритму Роббинса-Монро[62], известному в теории стохастической аппроксимации. Отметим, что поскольку коэффициент λ является постоянной, то сходимость по алгоритму Роббинса-Монро не гарантируется.

$$x_{n+1} = x_n - a_n(x - b_n). \quad (4.3)$$

Схема доказательства

1. используем модифицированный алгоритм Роббинса-Монро, используя
2. зададим связь между функцией отклика $s(d)$ и параметрами a_n и b_N через условия несмещенностии оценки $E(x_n)$ и минимизации дисперсии $D(x_n) \rightarrow \min$ [29] [28]
3. определим явное выражение a_n и b_n для априорного представления о функции отклика в виде параметрической модели Эло $s(d, \alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (\mathbf{d} - \alpha))}$

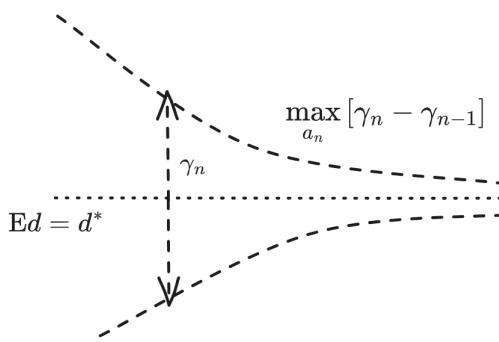


Рис. 4.8: Использование несмещенной оценки с постепенной редукцией дисперсии

Теорема. Адаптированный алгоритм Роббинса-Монро для случая наблюдений, имеющих бернульевское распределение. При условии $\forall n \rightarrow x_n \sim \text{Bern}(s(d_n))$ выполняются следующие утверждения.

1. Оптимальная сходимость достигается при $a_n = \frac{\mathbb{E}[d_n s(d_n)]}{\mathbb{E}s(d_n)(1 - \mathbb{E}s(d_n))}$, $b_n = \mathbb{E}s(d_n)$
2. Для функции отклика, представленной параметрической моделью Эло $s(d, \alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (d - \alpha))}$ и в предположении нормальности распределения $d \sim \mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$ получим аппроксимацию рядов a_n и b_n , обеспечивающих оптимальную сходимость как

- $a_n = \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \frac{1}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right)$
- $b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right).$

Доказательство Сходимость метода приведена в апPENDиксе работы 1.1.3. 1) Используем рекуррентное представление для поиска оптимальных параметров a_n, b_n

$$d_{n+1} = d_n - a_n(x_n - b_n). \quad (4.4)$$

Рассчитаем матожидание $E_{d_n} p(d_n)$ как:

$$Ed_{n+1} = Ed_n - a_n(Ex_n - b_n). \quad (4.5)$$

Запишем условия $Ed_{n+1} = d^*$ с учетом $Ed_n = \dots Ed_1 = d^*$:

$$a_n(Ed(d_n) - b_n) = 0. \quad (4.6)$$

Следовательно,

$$b_n = Es(d_n). \quad (4.7)$$

Коэффициент a_n найдем из минимизации дисперсии Dd_{n+1} . Запишем $D_{x_n \sim Bern(x|s(d_n))}$ для выражения 4.4:

$$Dd_{n+1} = Dd_n + a_n^2 D(x_n - b_n) - 2a_n E[(x_n - b_n)d_n]. \quad (4.8)$$

Поскольку $x_n \sim Bern(s(d_n))$, то

$$D(x_n - b_n) = Es(d_n)E(1 - s(d_n)) = Es(d_n)(1 - Es(d_n)). \quad (4.9)$$

С учетом $b_n = Es_d$ и $Ed_n = d^*$:

$$E[(x_n - b_n)d_n] = E[x_nd_n] - b_nEd_n = E[s(d_n)d_n] - Es(d)d^*. \quad (4.10)$$

Тогда:

$$Dd_{n+1} = Dd_n + a_n^2 Es(d_n)E(1 - s(d_n)) - 2a_n E[s(d_n)(d_n - d^*)]. \quad (4.11)$$

Из условия $\frac{\partial Dd_{n+1}}{\partial a_n} = 0$ получаем:

$$a_n = \frac{E[(d_n - d^*)s(d_n)]}{Es(d_n)(1 - Es(d_n))}. \quad (4.12)$$

Тогда связь между дисперсиями на каждом шаге запишется как:

$$Dd_{n+1} = Dd_n - \frac{(E[(d_n - d^*)s(d_n)])^2}{Es(d_n)(1 - Es(d_n))} \quad (4.13)$$

2) Определим оптимальные коэффициенты a_n и b_n для случая отклика согласно

модели Эло: $s(d_n) = \sigma(d, \alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\frac{(d_n - \alpha)}{\beta})}$. Исходя из предположения d^* :

$$d^* = \alpha - \beta \log \left(\frac{s^*}{1 - s^*} \right). \quad (4.14)$$

Согласно условию d распределен нормально $\sim \mathcal{N}(\alpha_n, \gamma_n)$. $\alpha_n = d^*$, исходя из несменности оценки d_n . γ_n рекуррентно связан с значениям предыдущих операций согласно 4.12:

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} - \frac{(\mathbb{E}[(d_n - d^*)s(d_n)])^2}{\mathbb{E}s(d_n)(1 - \mathbb{E}s(d_n))}. \quad (4.15)$$

Найдем b_n из 4.7:

$$b_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, \alpha, \beta)\mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}dx. \quad (4.16)$$

Для этого используем аппроксимацию логнормального интеграла через функцию ошибки $\text{erf}(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2)$:

$$\sigma(x, \alpha, \beta) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{(x - \alpha)\sqrt{\pi}}{4\beta}\right). \quad (4.17)$$

Свертка $\text{erf}(x)$ с плотностью вероятности гауссового распределения $\mathcal{N}(d^*, \gamma_n)$ является табличным интегралом [52]:

$$b_n \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\beta}(x - \alpha)\right) \right] \mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right). \quad (4.18)$$

Найдем a_n из 4.12:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \int_{-\infty}^{\infty} d(\sigma(x\alpha, \beta) - d^*)\mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x)dx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{1}{2} - d^* + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{(x - \alpha)\sqrt{\pi}}{4\beta}\right) \right] \mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x)dx \\ &= \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \text{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right) + \frac{1}{4\gamma_n^2} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \int_{-\infty}^{\infty} x \text{erf}\left(\frac{(x - \alpha)\sqrt{\pi}}{4\beta}\right) \exp\left(\frac{(x - d^*)^2}{2\gamma_{\frac{1}{b_n(1-b_n)}}^2 n^2}\right) dx \\ &= \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \text{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right) + \frac{1}{4\gamma_n^2} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} I(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Заметим, что полученный интеграл $I(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n)$ можно связать с табличным $T(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n) =$

$\int \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\beta}(x - \alpha)\right) \exp\left(\frac{(x-d^*)^2}{2\gamma_n^2}\right) dx$ через дифференцирование по параметру d^* :

$$T'_{d^*} = -\frac{1}{2\gamma_n^2} I(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n) + \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*\beta)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right). \quad (4.20)$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} T'_{d^*} &= \frac{1}{2} \operatorname{erf}'\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}\beta} \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right) = \\ &= -\frac{1}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Приравнивая 4.20 и 4.21 получаем:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right) - \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right). \quad (4.22)$$

Подставляем I в 4.19 получаем аппроксимацию a_n :

$$a_n \approx \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \frac{1}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right). \quad (4.23)$$

Также получим γ_n из 4.22 и 4.15:

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} - \frac{\gamma_{n-1}^2}{1 + \gamma_{n-1}} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right)^2. \quad (4.24)$$

■

Явно приведем ключевые выражения для численного выражения:

1. Приближение оптимального корня:

$$d^* = \alpha - \beta \log\left(\frac{s^*}{1 - s^*}\right). \quad (4.25)$$

Коэффициенты a_n , b_n , γ_n рассчитываются рекурсивно

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \gamma_{n-1} - \frac{\gamma_{n-1}^2}{1 + \gamma_{n-1}} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right)^2 \\ a_n &= \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \frac{1}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right) \\ b_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right).\end{aligned}\quad (4.26)$$

Процедуру пересчета коэффициента можно выполнить до проведения испытания, тем самым ускорив исполнение программы.

4.4.2 Численные эксперименты

Численное моделирование исследует поведение предложенного алгоритма для функции логистической регрессии в сравнение с классическими подходами. Исходный код на языке Python доступен в открытом репозитории диссертации⁶.

Ключевым параметром для анализа является соотношение изменения параметра сложности задачи Δd к параметру роста β . Таким образом, были исследованы две

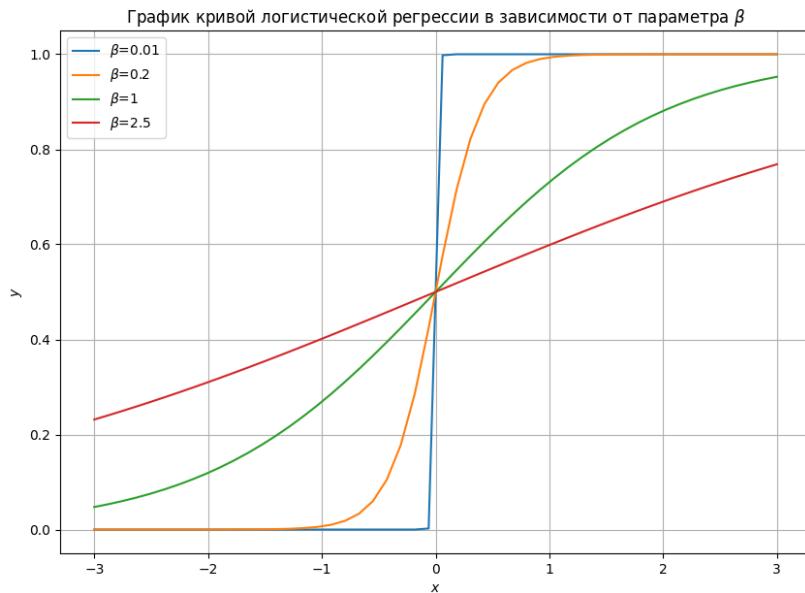


Рис. 4.9: Демонстрация изменения графика логистической регрессии от параметра роста

ключевые краевые постановки:

1. малые изменения $\Delta d/\beta \approx 0$

⁶<https://github.com/NMashalov/EducationGenerativeModelApplication>

2. значительные изменения $\Delta d/\beta \approx 1$

В каждом эксперименте сравнивалась эффективность метода с классическим алгоритмом Роббинса-Монро и его аналогом с фиксированным коэффициентом λ как в работе [80]. Дополнительно изучено влияние модификации по методу Поляка скользящим средним.

Гладкие графики траекторий получается путем визуализации среднего и перцентилей распределения. Для их численного расчета используется метод бутстрэп. Эксперимент проводится $B >> 1$ раз, после чего статистики считаются путем расчета распределения.

В разделе приведены ключевые графики, полный набор доступен в приложении статьи. Отметим, что при анализе сходимости число шагов N определяется аналогично правилу предела. N считается шагом достижения сходимости, если все последующие точки не выходят за границу ϵ . ϵ выбирается индивидуально из соображений статистической значимости результата.

Случай $\Delta d/\beta \approx 1$

4.4.3

Эксперимент проводился для $s(d) = \frac{1}{1+\exp(-5(d-0.6))}$ с начальной сложность $d_0 = 0.2$ и целевым параметром $s^* = 0.4$ ⁷ Отметим также чувствительность алгоритм

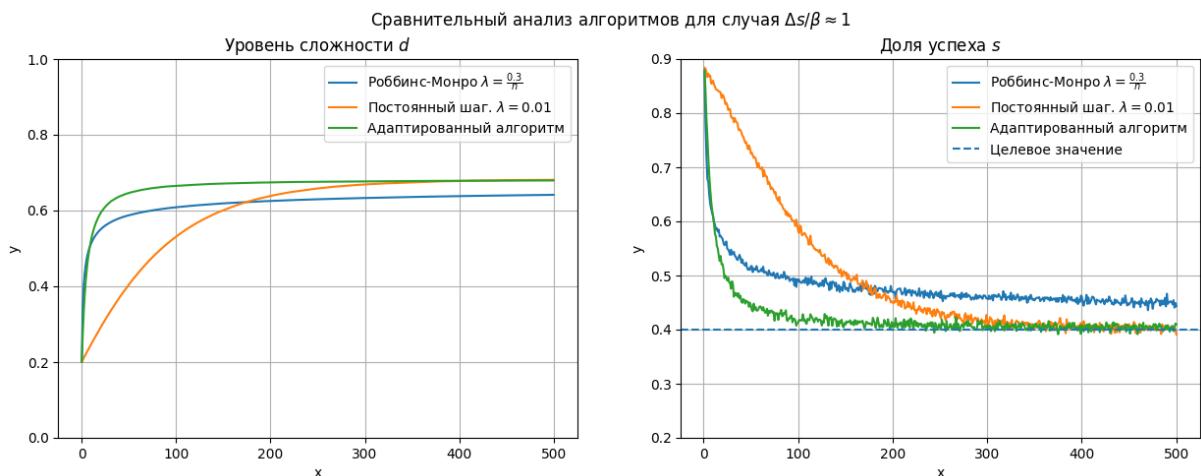


Рис. 4.10: Предложенный алгоритм

Роббинса-Монро к параметру шага. 4.11

4.4.4 Случай $\Delta d/\beta \approx 0$

Эксперимент проводился для $s(d) = \frac{1}{4(d-0.6)}$ с начальной сложность $d_0 = 0.2$ и целевым параметром $s = 0.8$. Число раундов было выбрано минимальным для

⁷Для наглядности в таблице классический алгоритм Роббинса-Монро сокращается до сокращения "Р.-М." с указанием параметра шага.

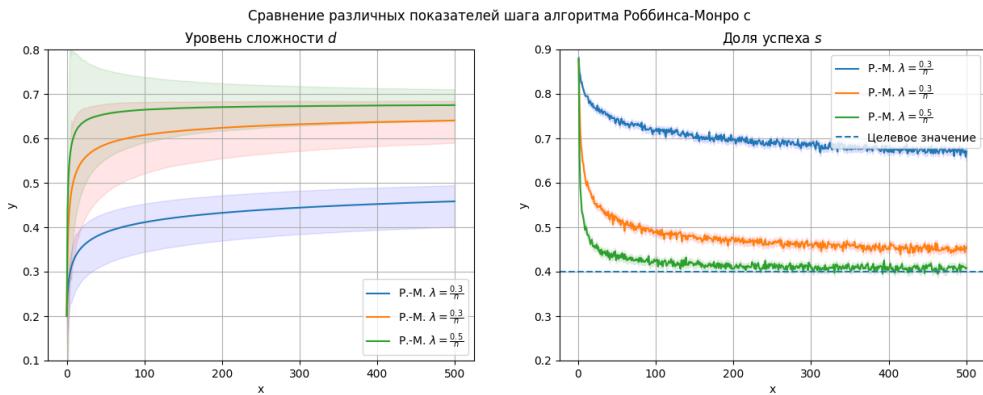


Рис. 4.11: Классический алгоритм Роббинса-Монро чувствителен к параметру λ

Название алгоритма	Число шагов
Постоянный $\lambda_n = 0.01$	400 ± 20
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.1$	Не сошелся
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.5$	250 ± 30
Адаптированный алгоритм Р.-М.	200 ± 35

Таблица 4.1: Сравнение числа шагов сходимости в постановке $\Delta d/\beta \approx 1$

8

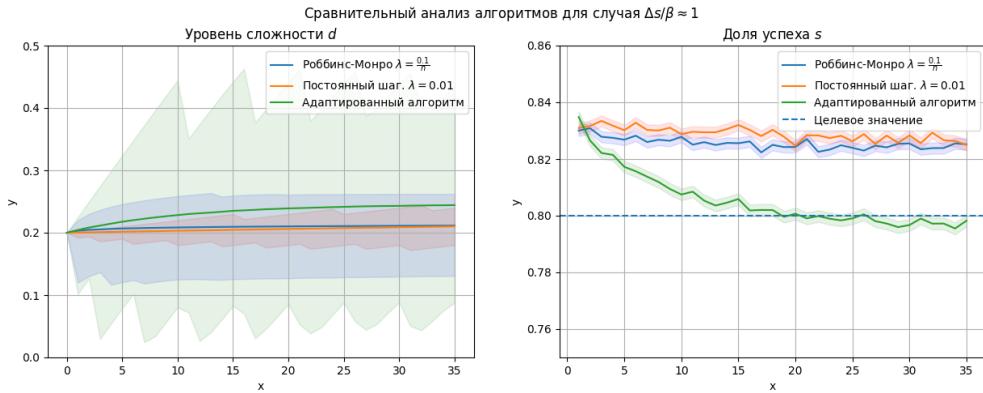


Рис. 4.12: Предложенный алгоритм имеет высокую скорость реакции d

4.4.5 Случай значительного отличия априорных представлений о наклоне кривой от действительного

Рассмотрен случай, в котором β априорная значительно отличается от β^* действительного.

⁸ Для наглядности в таблице классический алгоритм Роббинса-Монро сокращается до сокращения "Р-М" с указанием параметра шага.

Название алгоритма	Число шагов
Постоянный $\lambda_n = 0.01$	400 ± 20
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.1$	Не сошелся
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.5$	250 ± 30
Адаптированный алгоритм Р.-М.	200 ± 35

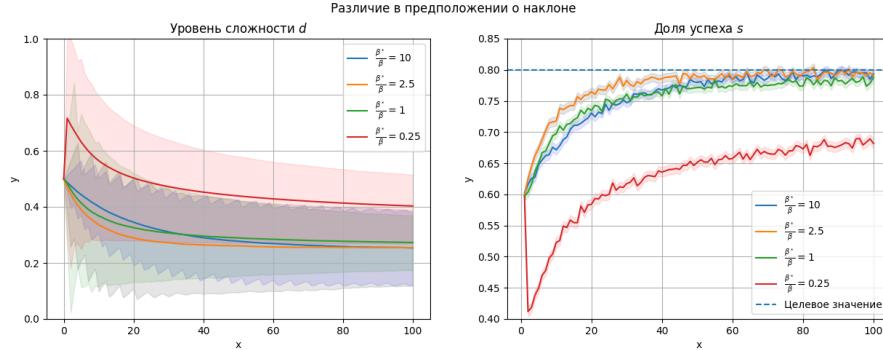
 Таблица 4.2: Сравнение числа шагов сходимости в постановке $\Delta d/\beta \approx 0$


Рис. 4.13: Значительные различия в предположениях о наклоне логистической регрессии приводят к снижению эффективности алгоритма

4.4.6 Модификация скользящим средним

Численно исследуем применимость метода скользящего среднего к предложенному алгоритму и алгоритму с постоянным шагом.

Расходимость предложенного метода связана с нарушениями условий 1.29.

Таким образом, метод скользящего среднего

1. позволяет использовать больший шаг для обеспечения большей скорости сходимости
2. не применим к предложенному алгоритму

Название алгоритма	Число шагов
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 10$	400 ± 20
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 2.5$	Не сошелся
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 1$	250 ± 30
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 0.25$	200 ± 35

Таблица 4.3: Сравнение числа шагов сходимости в постановке различающихся априорных представлений о наклоне кривой от действительного

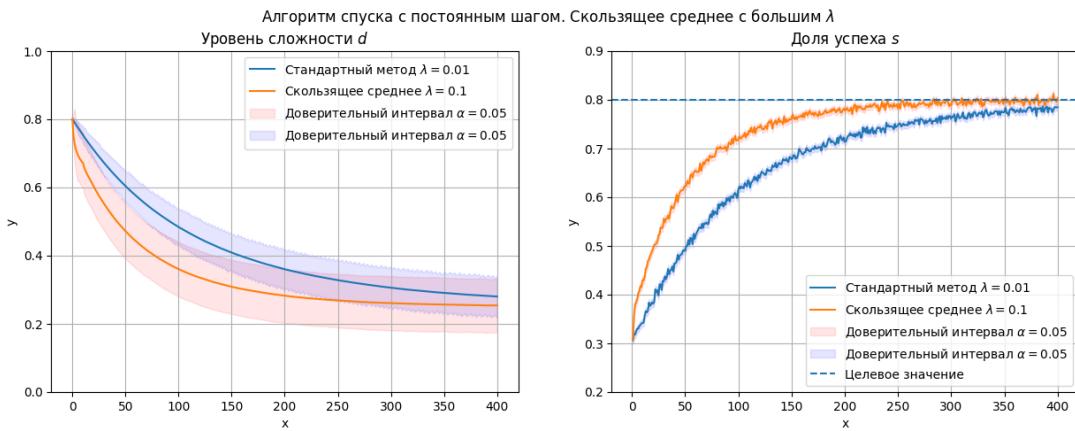


Рис. 4.14: Метод скользящего среднего позволяет использовать больший параметр шага, не теряя устойчивость метода

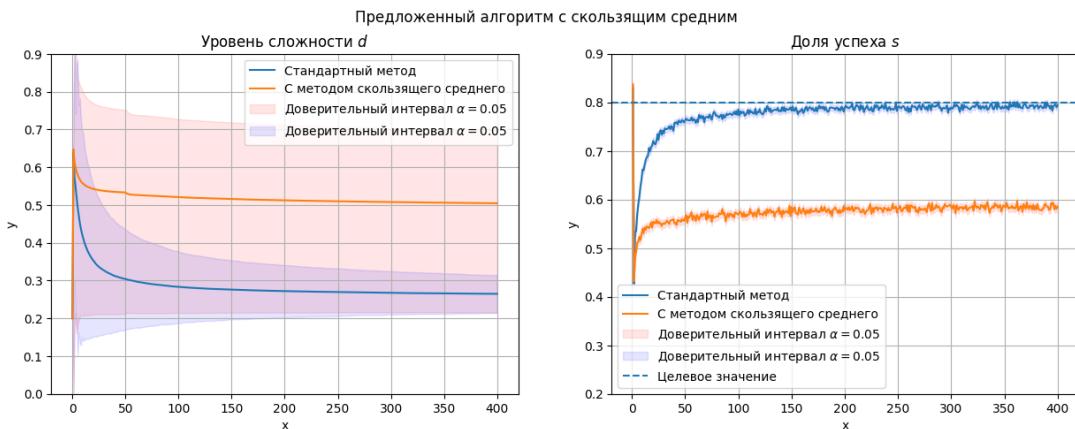


Рис. 4.15: Метод скользящего среднего не применим к предложенному алгоритму

Название алгоритма	Число шагов
Алгоритм Р.-М. со скользящим средним $\lambda = 0.01$	Не сошелся
Алгоритм Р.-М. со скользящим средним $\lambda = 0.1$	250 ± 40
Адаптированный алгоритм Р.-М. со скользящим средним	Не сошелся

Таблица 4.4: Сравнение числа шагов с применением метода скользящего среднего

Глава 5

Заключение

5.1 Итоги работы

Поставленные цели по адаптации большой языковой цели были успешно выполнены

1. Разработка ассистента

Исследована постановка алгоритма Роббинса-Монро в условиях отклика, представленной случайной бернуллевской величины. Для случая ответа в виде логистической функции получен адаптивный численный алгоритм. К его ключевые преимуществам можно отнести:

- оптимальную скорость сходимости при выполнение условий теоремы 4.4.1
- стабильную дисперсию s и d на всех шагах оптимизации
- работу с естественными параметрами логистического распределения на всем интервале оптимизации. Это обстоятельство выгодно выделяет метод от классических методов, требующих подбора шага оптимизации.

Тем не менее алгоритм требует выбора априорных представлений о наклоне функции логистического распределения 4.13. Выполнить такой расчет можно на экспериментальных данных, использовав в качестве бинарного классификатора логистическую регрессию.

5.2 Дальнейшая работа

Изученная постановка адаптации

Автор считает, что для задач всеобщего образования актуальны системы интерпретируемого автоматической оценки задач. Наибольшую потенциал на текущий

имеет в направлении имеет символная регрессия, использованная в известной работы команды DeepMind [71]. Предложенный метод позволяет решать задачи из международной олимпиады по математике на уровне победителей.

5.2.1 Благодарности

Автор благодарит кафедру инновационной педагогики Московского физико-технического института за помощь в подготовке работы. Особо хотел бы поблагодарить научного консультанта Щербакова Дмитрия Евгеньевича и научного руководителя Ященко Ивана Валерьевича за вдумчивые консультации. Также я признателен за поддержку секретарю кафедры Наталью Николаевну Парамонову в организации работы и рекомендации участия в научных конференциях.

Список литературы

- [1] Mathieu Acher, François Esnault. «Large-scale analysis of chess games with chess engines: A preliminary report». B: *arXiv preprint arXiv:1607.04186* (2016).
- [2] Abien Fred Agarap. «Deep learning using rectified linear units (relu)». B: *arXiv preprint arXiv:1803.08375* (2018).
- [3] Norbert Annus. «Education in the Age of Artificial Intelligence». B: *TEM Journal* 13.1 (2024), c. 404—413.
- [4] Dzmitry Bahdanau, Kyunghyun Cho, Yoshua Bengio. «Neural machine translation by jointly learning to align and translate». B: *arXiv preprint arXiv:1409.0473* (2014).
- [5] Lukas Blecher и др. «Nougat: Neural optical understanding for academic documents». B: *arXiv preprint arXiv:2308.13418* (2023).
- [6] Benjamin S Bloom. «The 2 sigma problem: The search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring». B: *Educational researcher* 13.6 (1984), c. 4—16.
- [7] Julius R Blum. «Approximation methods which converge with probability one». B: *The Annals of Mathematical Statistics* (1954), c. 382—386.
- [8] Jeremy Bulow, John Roberts. «The simple economics of optimal auctions». B: *Journal of political economy* 97.5 (1989), c. 1060—1090.
- [9] Arya Bulusu и др. «An Automated Graphing System for Mathematical Pedagogy». B: () .
- [10] Okan Bulut и др. «An introduction to Bayesian knowledge tracing with pyBKT». B: *Psych* 5.3 (2023), c. 770—786.
- [11] Alexander P Burgoyne и др. «The relationship between cognitive ability and chess skill: A comprehensive meta-analysis». B: *Intelligence* 59 (2016), c. 72—83.
- [12] Jenova Chen. «Flow in games (and everything else)». B: *Communications of the ACM* 50.4 (2007), c. 31—34.
- [13] Noam Chomsky. *Syntactic structures*. Mouton de Gruyter, 2002.
- [14] Junyoung Chung и др. «Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling». B: *arXiv preprint arXiv:1412.3555* (2014).
- [15] Colin B Clement и др. «On the use of arxiv as a dataset». B: *arXiv preprint arXiv:1905.00075* (2019).

- [16] Albert T Corbett, John R Anderson. «Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge». B: *User modeling and user-adapted interaction* 4 (1994), c. 253—278.
- [17] James Craig и др. «Accessible rich internet applications (WAI-ARIA) 1.0». B: *W3C Working Draft* (2009).
- [18] Mihaly Csikszentmihalyi. *Finding flow: The psychology of engagement with everyday life*. Hachette UK, 2020.
- [19] Mihaly Csikszentmihalyi, Sami Abuhamdeh, Jeanne Nakamura. «Flow». B: *Handbook of competence and motivation* (2005), c. 598—608.
- [20] Jacob Devlin и др. «Bert: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding». B: *arxiv preprint arxiv:1810.04805* (2018).
- [21] David Easley, Arpita Ghosh. «Incentives, Gamification, and Game Theory: An Economic Approach to Badge Design». B: *ACM Transactions on Economics and Computation* 4 (июнь 2016), c. 1—26.
- [22] Arpad E Elo. «The proposed uscf rating system, its development, theory, and applications». B: *Chess life* 22.8 (1967), c. 242—247.
- [23] Martin BH Everaert и др. «Structures, not strings: Linguistics as part of the cognitive sciences». B: *Trends in cognitive sciences* 19.12 (2015), c. 729—743.
- [24] Xidong Feng и др. «Chessgpt: Bridging policy learning and language modeling». B: *Advances in Neural Information Processing Systems* 36 (2024).
- [25] Ian Goodfellow и др. «Generative adversarial networks». B: *Communications of the ACM* 63.11 (2020), c. 139—144.
- [26] Dan Hendrycks, Kevin Gimpel. «Gaussian error linear units (gelus)». B: *arXiv preprint arXiv:1606.08415* (2016).
- [27] Edward J Hu и др. «Lora: Low-rank adaptation of large language models». B: *arXiv preprint arXiv:2106.09685* (2021).
- [28] Inchi Hu. «On sequential designs in nonlinear problems». B: *Biometrika* 85.2 (1998), c. 496—503.
- [29] Inchi Hu. «Strong consistency in stochastic regression models via posterior covariance matrices». B: *Biometrika* 84.3 (1997), c. 744—749.
- [30] Leonid Hurwicz. «Optimality and informational efficiency in resource allocation processes». B: *Mathematical methods in the social sciences* (1960).
- [31] Peter Jarvis. *The Routledge international handbook of lifelong learning*. Routledge London, 2009.
- [32] Albert Q Jiang и др. «Mistral 7B». B: *arXiv preprint arXiv:2310.06825* (2023).

- [33] Albert Q Jiang и др. «Mixtral of experts». B: *arXiv preprint arXiv:2401.04088* (2024).
- [34] Richard Jordan, David Kinderlehrer, Felix Otto. «The variational formulation of the Fokker–Planck equation». B: *SIAM journal on mathematical analysis* 29.1 (1998), c. 1–17.
- [35] V Roshan Joseph. «Efficient Robbins–Monro procedure for binary data». B: *Biometrika* 91.2 (2004), c. 461–470.
- [36] Leonid V Kantorovich. «Mathematical methods of organizing and planning production». B: *Management science* 6.4 (1960), c. 366–422.
- [37] Sai Praneeth Karimireddy и др. «Scaffold: Stochastic controlled averaging for federated learning». B: *International conference on machine learning*. PMLR. 2020, c. 5132–5143.
- [38] Adam Karvonen. *chessgpteval*. https://github.com/adamkarvonen/chess_gpt_eval. 2024.
- [39] Anisia Katinskaia, Javad Nouri, Roman Yangarber. «Revita: a language-learning platform at the intersection of ITS and CALL». B: *Proceedings of the eleventh international conference on language resources and evaluation (LREC 2018)*. 2018.
- [40] Diederik P Kingma, Jimmy Ba. «Adam: A method for stochastic optimization». B: *arXiv preprint arXiv:1412.6980* (2014).
- [41] David A Kolb. *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. FT press, 2014.
- [42] Mikhail Korobov. «Morphological Analyzer and Generator for Russian and Ukrainian Languages». English. B: *Analysis of Images, Social Networks and Texts*. Под ред. Mikhail Yu. Khachay и др. Т. 542. Communications in Computer and Information Science. Springer International Publishing, 2015, c. 320–332. ISBN: 978-3-319-26122-5. DOI: 10.1007/978-3-319-26123-2_31. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-26123-2_31.
- [43] Tze Leung Lai, Herbert Robbins. «Adaptive design and stochastic approximation». B: *The annals of Statistics* (1979), c. 1196–1221.
- [44] Leslie Lamport. «Time, clocks, and the ordering of events in a distributed system». B: *Concurrency: the Works of Leslie Lamport*. 2019, c. 179–196.
- [45] Yann LeCun и др. «A tutorial on energy-based learning». B: *Predicting structured data* 1.0 (2006).
- [46] Patrick Lewis и др. «Retrieval-augmented generation for knowledge-intensive nlp tasks». B: *Advances in Neural Information Processing Systems* 33 (2020), c. 9459–9474.

- [47] Siwei Liu, Ke Ma, Stephan M Goetz. «A Robbins–Monro Sequence That Can Exploit Prior Information For Faster Convergence». B: *arXiv preprint arXiv:2401.03206* (2024).
- [48] Frederic M Lord. «The measurement of growth». B: *ETS Research Bulletin Series* 1956.1 (1956), c. i—22.
- [49] Richard Montague и др. «Universal grammar». B: *1974* (1970), c. 222—46.
- [50] Roger B Myerson. «Optimal auction design». B: *Mathematics of operations research* 6.1 (1981), c. 58—73.
- [51] Yu Nesterov. «Universal gradient methods for convex optimization problems». B: *Mathematical Programming* 152.1 (2015), c. 381—404.
- [52] Edward W Ng, Murray Geller. «A table of integrals of the error functions». B: *Journal of Research of the National Bureau of Standards B* 73.1 (1969), c. 1—20.
- [53] Long Ouyang и др. «Training language models to follow instructions with human feedback». B: *Advances in neural information processing systems* 35 (2022), c. 27730—27744.
- [54] Aaron Parisi, Yao Zhao, Noah Fiedel. «Talm: Tool augmented language models». B: *arXiv preprint arXiv:2205.12255* (2022).
- [55] Judea Pearl. *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*. Morgan kaufmann, 1988.
- [56] Marshall Pease, Robert Shostak, Leslie Lamport. «Reaching agreement in the presence of faults». B: *Journal of the ACM (JACM)* 27.2 (1980), c. 228—234.
- [57] Jean Piaget, Margaret Cook и др. *The origins of intelligence in children*. T. 8. 5. International Universities Press New York, 1952.
- [58] Boris T Polyak. «New stochastic approximation type procedures». B: *Automat. i Telemekh* 7.98-107 (1990), c. 2.
- [59] Alec Radford и др. «Learning transferable visual models from natural language supervision». B: *International conference on machine learning*. PMLR. 2021, c. 8748—8763.
- [60] Joseph Redmon и др. «You only look once: Unified, real-time object detection». B: *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2016, c. 779—788.
- [61] Peter Richtárik, Martin Takáč. «Parallel coordinate descent methods for big data optimization». B: *Mathematical Programming* 156 (2016), c. 433—484.
- [62] Herbert Robbins, Sutton Monro. «A stochastic approximation method». B: *The annals of mathematical statistics* (1951), c. 400—407.

- [63] Robin Rombach и др. «High-resolution image synthesis with latent diffusion models». B: *Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition*. 2022, с. 10684—10695.
- [64] Jerome Sacks. «Asymptotic distribution of stochastic approximation procedures». B: *The Annals of Mathematical Statistics* 29.2 (1958), с. 373—405.
- [65] Zejiang Shen и др. «Layoutparser: A unified toolkit for deep learning based document image analysis». B: *Document Analysis and Recognition–ICDAR 2021: 16th International Conference, Lausanne, Switzerland, September 5–10, 2021, Proceedings, Part I* 16. Springer. 2021, с. 131—146.
- [66] Ray Smith. «An overview of the Tesseract OCR engine». B: *Ninth international conference on document analysis and recognition (ICDAR 2007)*. Т. 2. IEEE. 2007, с. 629—633.
- [67] Yang Song и др. «Score-based generative modeling through stochastic differential equations». B: *arXiv preprint arXiv:2011.13456* (2020).
- [68] Sebastian U Stich. «Unified optimal analysis of the (stochastic) gradient method». B: *arXiv preprint arXiv:1907.04232* (2019).
- [69] Rafał Szlendak, Alexander Tyurin, Peter Richtárik. «Permutation compressors for provably faster distributed nonconvex optimization». B: *arXiv preprint arXiv:2110.03300* (2021).
- [70] Hugo Touvron и др. «Llama: Open and efficient foundation language models». B: *arXiv preprint arXiv:2302.13971* (2023).
- [71] Trieu H Trinh и др. «Solving olympiad geometry without human demonstrations». B: *Nature* 625.7995 (2024), с. 476—482.
- [72] unesco. «Beijing consensus on artificial intelligence and education». B: *International Conference on Artificial Intelligence and Education, Planning Education in the AI Era: Lead the Leap*. 2019.
- [73] Ashish Vaswani и др. «Attention is all you need». B: *Advances in neural information processing systems* 30 (2017).
- [74] Cédric Villani и др. *Optimal transport: old and new*. Т. 338. Springer, 2009.
- [75] Anthony FC Wallace. *Plans and the structure of Behavior*. 1960.
- [76] Max Wertheimer. «Laws of organization in perceptual forms.» B: (1938).
- [77] Kristan J Wheaton. «Teaching strategic intelligence through games». B: *International Journal of intelligence and CounterIntelligence* 24.2 (2011), с. 367—382.
- [78] Cui Xiong, Jin Xu. «Efficient Robbins–Monro procedure for multivariate binary data». B: *Statistical Theory and Related Fields* 2.2 (2018), с. 172—180.

- [79] Stav Yanovsky и др. «One size does not fit all: A study of badge behavior in stack overflow». В: *Journal of the Association for Information Science and Technology* 72.3 (2021), с. 331—345.
- [80] Anis Yazidi и др. «Balanced difficulty task finder: an adaptive recommendation method for learning tasks based on the concept of state of flow». В: *Cognitive Neurodynamics* 14.5 (2020), с. 675—687.
- [81] Wayne Xin Zhao и др. «A survey of large language models». В: *arXiv preprint arXiv:2303.18223* (2023).
- [82] Алиса Назаровна Аль-Кайси, Алла Леонидовна Архангельская, Ольга Ивановна Руденко-Моргун. «Интеллектуальный голосовой помощник Алиса на уроках русского языка как иностранного (уровень А1)». В: *Филологические науки. Вопросы теории и практики* 12.2 (2019), с. 239—244.
- [83] Червоненкис АЯ Вапник ВН. «Теория распознавания образов. Статистические проблемы обучения». В: (1974).
- [84] Лев Семенович Выготский. *Мышление и речь*. Directmedia, 2014.
- [85] ГК РФ Статья 1260. Переводы, иные производные произведения. Составные произведения.
- [86] ГК РФ Статья 1274. Свободное использование произведения в информационных, научных, учебных или культурных целях.
- [87] Виктор Николаевич Кругликов, Евгений Владимирович Платонов, Юрий Александрович Шаранов. «Деловые игры и другие методы активизации познавательной деятельности». В: (2006).

5.3 Дополнительные материалы

5.3.1 Использованная литература

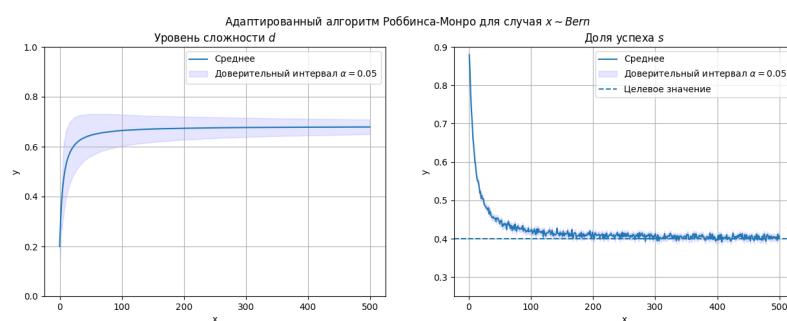
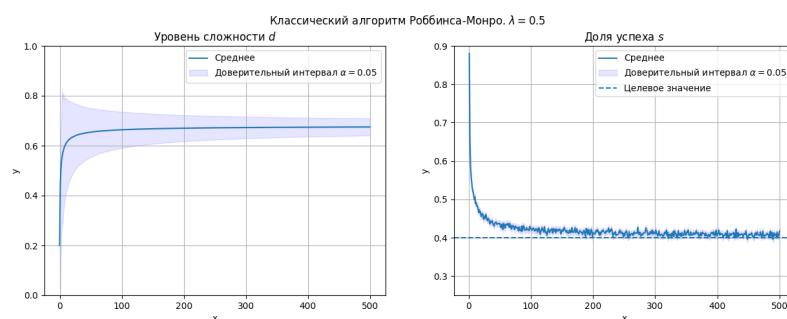
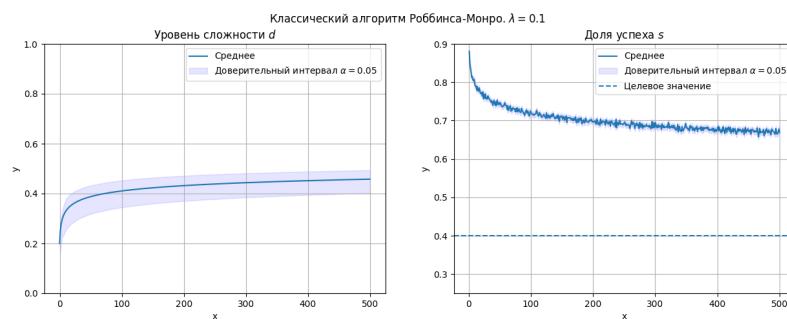
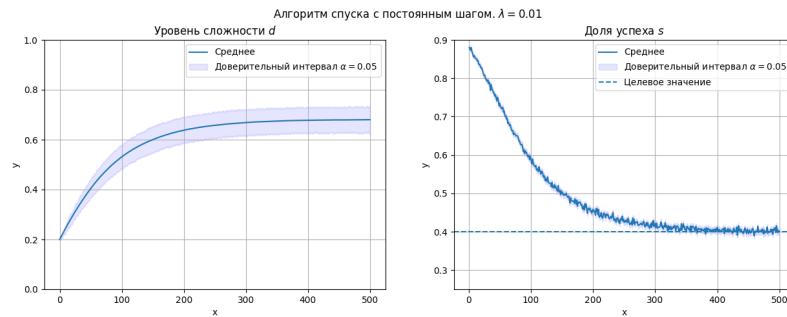
- Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа : учебное пособие для 10-го класса средней школы
- Алгебра и начала анализа, 9 класс / под ред. А. Н. Колмогорова. — 1975
- Перельман Я. И. Живая геометрия теория и задачи. — 1930
- Извольский Н. А. Геометрия на плоскости (планиметрия). — 1
- Беляева Э. С., Монахов В. М. Экстремальные задачи. — 1977
- Александров А. Д. и др. Геометрия пробный учебник для 9—10 классов средней школы. — 1983

- Гарднер М. Есть идея! — 1982
- Шень А. Х. Геометрия в задачах. — 2017
- Дорф П. Я. Наглядные пособия по математике и методика их применения в средней школе. — 1960
- Лиман М. М. Практические задачи по геометрии. — 1961
- Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия). — 1962
- Клопский В. М. и др. Геометрия : учебное пособие для 9—10 классов / В. М. Клопский, З. А. Скопец, М. И. Ягодовский ... 1978. — 256 с.
- Овчинкин В.А. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика - 2005
- Овчинкин В.А., Раевский А.О., Ципенюк Ю.М. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 3. Атомная и ядерная физика. Строение вещества 2009г
- Козел С.М., Лейман В.Г., Локшин Г.Р., Овчинкин В.А., Прут Э.В. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика 2000 г
- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры 2005г
- Генденштейн, Кирик, Гельфгат: 1001 задача по физике с ответами, указаниями, решениями

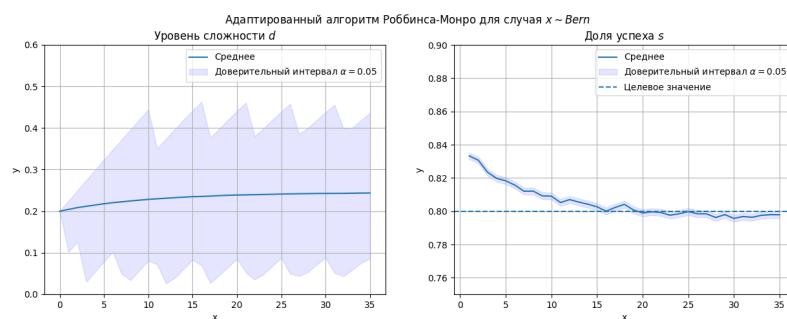
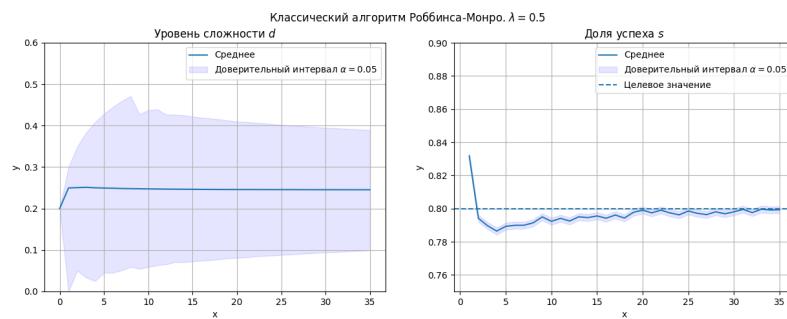
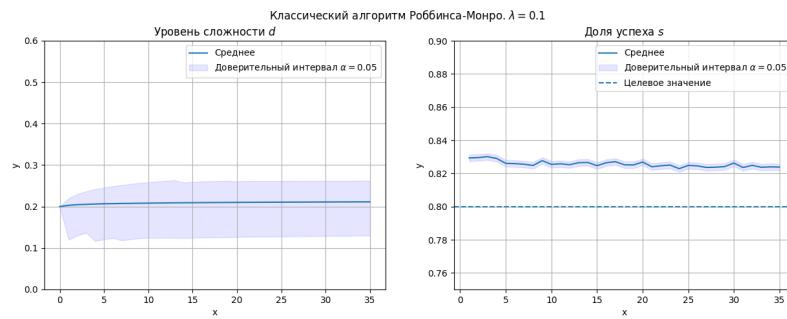
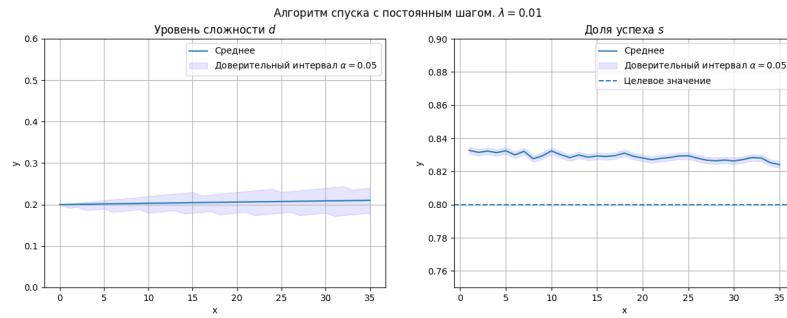
5.3.2 Численное моделирование

5.3.3 Приложение

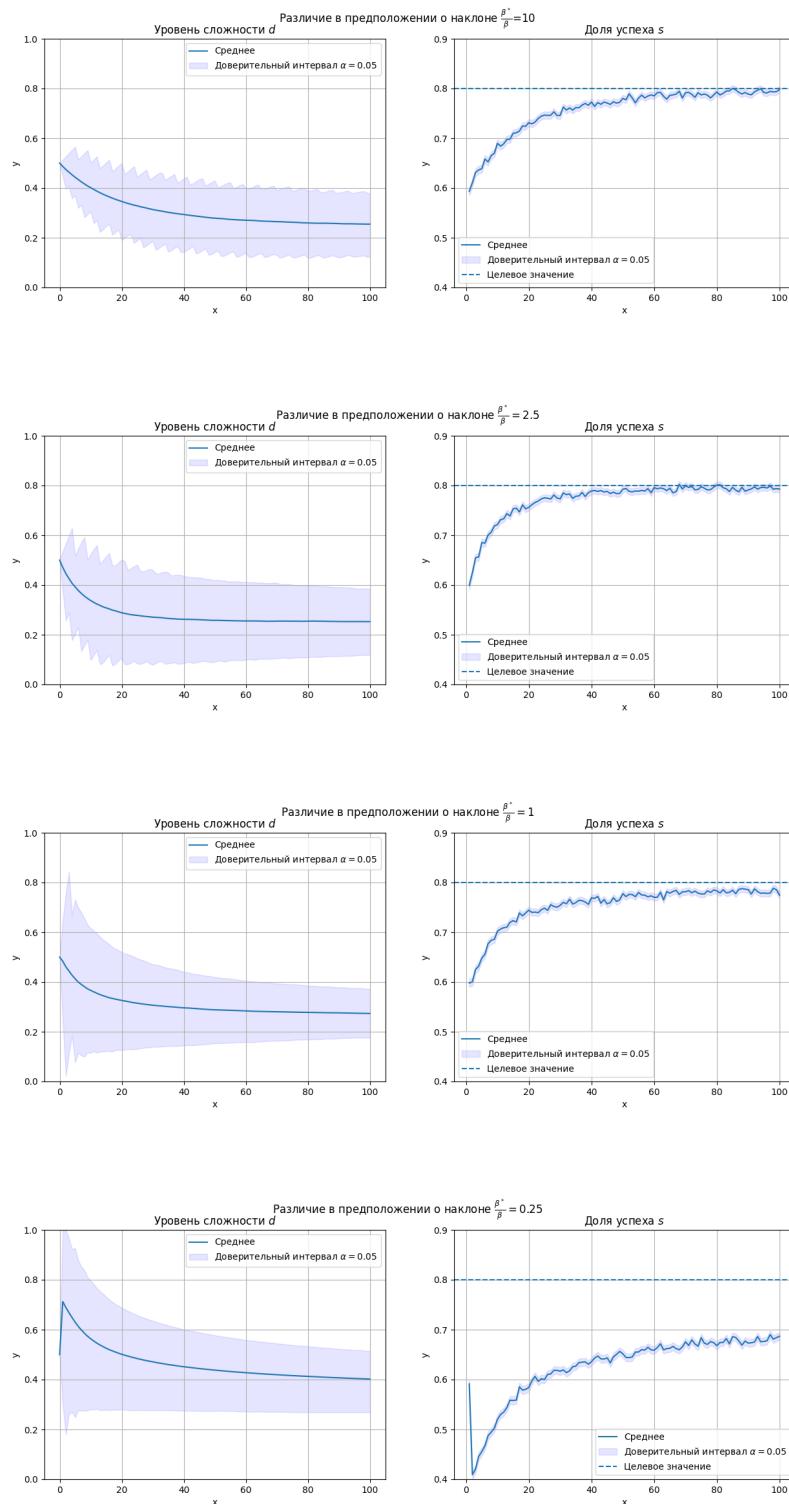
Эксперимент 1



Эксперимент 2



Эксперимент 3



Эксперимент 4

