

Глава 1

Адаптированный алгоритм Роббинса-Монро к задаче спуска к параметру бернуллевской величины, заданной логистической регрессией

Ключевым результатом работы является предложение алгоритма обновления сложности d , обеспечивающего оптимальную сходимость вероятности решения задачи s к методически рекомендованной s^* .

Приложение содержит:

1. краткое описание постановки и предметный обзор
2. предложенный алгоритм, определяющий оптимальные параметры спуска
3. численный эксперимент, сравнивающий предложенный

1.1 Предметный обзор

Постановка представляет тест как стохастический ряд вида $\{x\}_{t=0}$ каждый элемент, которого является случайной бернуллевской величиной с параметром s . Для ввода управляющей переменной задается сложность задачи d , параметризующий в совокупности с функцией отклика учащегося f , переменную $s_t = f(d)$.

Таким образом, задача алгоритма предложить функцию $f(d_{t+1}, x_{i=0}^t)$, обеспечивающую оптимальную сходимость $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(s(d_t), s^*) = 1$ согласно условиям:

- метрика $\rho(x, x') = (x - x')^2$ евклидова
- предполагается наличие банка W , возвращающего задачу произвольной сложности d
- функция отклика $f(d_t)$ ограничена числом M и монотонно убывает

Алгоритм, отвечающий заданным требованиям был предложен в работе [12]. Авторы предложили правило обновления сложности:

$$d_{t+1} = \Pi(d_t + \lambda(x(t) - s^*)), \quad (1.1)$$

где функция Π является ограничивающим оператором вида

$$\Pi_H(d) = \begin{cases} d, & \text{при } 1 < d < 0 \\ 1, & d \geq 1 \\ 0, & \text{при } d \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Алгоритм по форме соответствует алгоритму Роббинса-Монро[9], известному в теории стохастической аппроксимации. Отметим, что поскольку коэффициент λ является постоянной, то сходимость по алгоритму Роббинса-Монро не гарантируется.

Теорема. *Алгоритм Роббинса-Монро.* Алгоритм, выполняющий пересчет по правилу $d_{n+1} = d_n + a_d(s^* - s)$ сходится в L^2 норме при выполнении

1. значения функции отклика монотонны и s ограничены: $\exists N \forall x : |s(x)| \leq N$
2. $\sum_{t=0}^{\infty} a_t = \infty$
3. $\exists M : |\sum_{t=0}^{\infty} a_t^2| < M$.

Доказательство теоремы приведено в аппендиксе работы 1.4.1.

Если функция отклика s строго выпукла и дважды дифференцируема, то асимптотическая скорость сходимости равна $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ [10].

Выбор коэффициент a_n существенно образом влияет на число шагов сходимости последовательности. Авторы оригинального алгоритма предлагают $a_n = \frac{\lambda}{n}$. В работах [5] используется альтернативный подход, исходящий из

1. несмещенности оценки $\mathbf{E}d_n = d$.
2. минимизации дисперсии $\mathbf{D}d_n = 0$.

Современный подход направлен на учет априорного представления в виде нормального распределения

1. нормальным распределением [4]
2. многомерных биномиальных распределений [11]
3. цепи гауссовых распределений [6].

Подвергается изменениям и сама схема доказательства как в работе [4]. Автор предлагает заменить оптимизируемый коэффициент s^* на параметр b_n :

$$x_{n+1} = x_n - a_n(x - b_n).$$

Существенный вклад в развитие методов стохастической аппроксимации внёс Борис Теодорович Поляк [8], предложивший метод усреднения управляющего параметра s :

$$\hat{s}_{n+1} = \sum_{i=0}^n s_i. \quad (1.3)$$

Такой подход позволяет подавлять высокочастотные шумовые компоненты при аппроксимации ряда, что позволяет использовать методы с большим шагом спуска. Условия эффективной применимости состоят в малом изменении коэффициентов a_n :

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = o(a_n). \quad (1.4)$$

1.2 Вклад

Схема доказательства

1. используем модифицированный алгоритм Роббинса-Монро, используя
2. зададим связь между функцией отклика $s(d)$ и параметрами a_n и b_n через условия несмещенности оценки $E(x_n)$ и минимизации дисперсии $\mathbf{D}(x_n) \rightarrow \min$ [3] [2]
3. определим явное выражение a_n и b_n для априорного представления о функции отклика в виде параметрической модели Эло $s(d, \alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (d - \alpha))}$

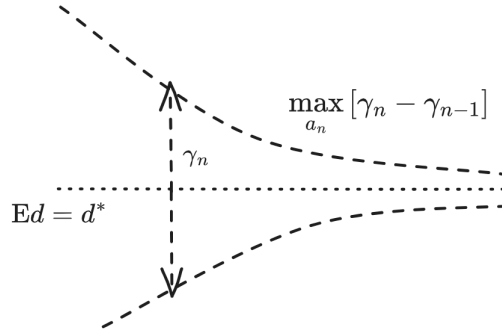


Рис. 1.1: Использование несмещенной оценки с постепенной редукцией дисперсии

Теорема. Адаптированный алгоритм Роббинса-Монро для случая наблюдений, имеющих бернулевское распределение. При условии $\forall n \hookrightarrow x_n \sim \text{Bern}(s(d_n))$ выполняются следующие утверждения.

1. Оптимальная сходимость достигается при $a_n = \frac{\mathbb{E}[d_n s(d_n)]}{\mathbb{E}s(d_n)(1 - \mathbb{E}s(d_n))}$, $b_n = \mathbb{E}s(d_n)$
2. Для функции отклика, представленной параметрической моделью Эло $s(d, \alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (d - \alpha))}$ и в предположении нормальности распределения $d \sim \mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$

получим аппроксимацию рядов a_n и b_n , обеспечивающих оптимальную сходимость как

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_n &= \frac{1}{b_n(1-b_n)} \frac{1}{4\beta\sqrt{1+\frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha-d^*)^2}{16\beta^2(1+\frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right) \\ \bullet \quad b_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha-d^*)}{4\sqrt{1+\frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right). \end{aligned}$$

Доказательство Сходимость метода приведена в аппендиксе работы 1.4.1. 1) Используем рекуррентное представление для поиска оптимальных параметров a_n, b_n

$$d_{n+1} = d_n - a_n(x_n - b_n). \quad (1.5)$$

Рассчитаем матожидание $E_{d_n} p(d_n)$ как:

$$Ed_{n+1} = Ed_n - a_n(Ex_n - b_n). \quad (1.6)$$

Запишем условия $Ed_{n+1} = d^*$ с учетом $Ed_n = \dots Ed_1 = d^*$:

$$a_n(Es(d_n) - b_n) = 0. \quad (1.7)$$

Следовательно,

$$b_n = Es(d_n). \quad (1.8)$$

Коэффициент a_n найдем из минимизации дисперсии $\mathbf{D}d_{n+1}$. Запишем $\mathbf{D}_{x_n \sim \text{Bern}(x|s(d_n))}$ для выражения 1.5:

$$\mathbf{D}d_{n+1} = \mathbf{D}d_n + a_n^2 \mathbf{D}(x_n - b_n) - 2a_n E[(x_n - b_n)d_n]. \quad (1.9)$$

Поскольку $x_n \sim \text{Bern}(s(d_n))$, то

$$\mathbf{D}(x_n - b_n) = Es(d_n)E(1 - s(d_n)) = Es(d_n)(1 - Es(d_n)). \quad (1.10)$$

С учетом $b_n = Es_d$ и $Ed_n = d^*$:

$$E[(x_n - b_n)d_n] = E[x_n d_n] - b_n Ed_n = E[s(d_n)d_n] - Es(d)d^*. \quad (1.11)$$

Тогда:

$$\mathbf{D}d_{n+1} = \mathbf{D}d_n + a_n^2 Es(d_n)E(1 - s(d_n)) - 2a_n E[s(d_n)(d_n - d^*)]. \quad (1.12)$$

Из условия $\frac{\partial \mathbf{D}d_{n+1}}{\partial a_n} = 0$ получаем:

$$a_n = \frac{E[(d_n - d^*)s(d_n)]}{Es(d_n)(1 - Es(d_n))}. \quad (1.13)$$

Тогда связь между дисперсиями на каждом шаге запишется как:

$$\mathbf{D}d_{n+1} = \mathbf{D}d_n - \frac{(\mathbf{E}[(d_n - d^*)s(d_n)])^2}{\mathbf{E}s(d_n)(1 - \mathbf{E}s(d_n))} \quad (1.14)$$

2) Определим оптимальные коэффициенты a_n и b_n для случая отклика согласно модели Эло: $s(d_n) = \sigma(d, \alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\frac{(d_n - \alpha)}{\beta})}$. Исходя из предположения d^* :

$$d^* = \alpha - \beta \log \left(\frac{s^*}{1 - s^*} \right). \quad (1.15)$$

Согласно условию d распределен нормально $\sim \mathcal{N}(\alpha_n, \gamma_n)$. $\alpha_n = d^*$, исходя из несмещенности оценки d_n . γ_n рекуррентно связан с значениям предыдущих операций согласно 1.13:

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} - \frac{(\mathbf{E}[(d_n - d^*)s(d_n)])^2}{\mathbf{E}s(d_n)(1 - \mathbf{E}s(d_n))}. \quad (1.16)$$

Найдем b_n из 1.8:

$$b_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, \alpha, \beta) \mathcal{N}_{d^*, \gamma_n} dx. \quad (1.17)$$

Для этого используем аппроксимацию логнормального интеграла через функцию ошибки $\text{erf}(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2) dt$:

$$\sigma(x, \alpha, \beta) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf} \left(\frac{(x - \alpha)\sqrt{\pi}}{4\beta} \right). \quad (1.18)$$

Свертка $\text{erf}(x)$ с плотностью вероятности гауссового распределения $\mathcal{N}(d^*, \gamma_n)$ является табличным интегралом [7]:

$$b_n \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\beta} (x - \alpha) \right) \right] \mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta \sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \right). \quad (1.19)$$

Найдем a_n из 1.13:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \int_{-\infty}^{\infty} d(\sigma(x, \alpha, \beta) - d^*) \mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x) dx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{1}{2} - d^* + \frac{1}{2} \text{erf} \left(\frac{(x - \alpha)\sqrt{\pi}}{4\beta} \right) \right] \mathcal{N}_{d^*, \gamma_n}(x) dx \\ &= \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \right) + \frac{1}{4\gamma_n^2} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \int_{-\infty}^{\infty} x \text{erf} \left(\frac{(x - \alpha)\sqrt{\pi}}{4\beta} \right) \exp \left(\frac{(x - d^*)^2}{2\gamma_n \frac{1}{b_n(1 - b_n)} n^2} \right) dx \\ &= \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \right) + \frac{1}{4\gamma_n^2} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} I(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Заметим, что полученный интеграл $I(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n)$ можно связать с табличным $T(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n) = \int \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\beta}(x - \alpha)\right) \exp\left(\frac{(x - d^*)^2}{2\gamma_n^2}\right) dx$ через дифференцирование по параметру d^* :

$$T'_{d^*} = -\frac{1}{2\gamma_n^2} I(\alpha, \beta, d^*, \gamma_n) + \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*\beta)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right). \quad (1.21)$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} T'_{d^*} &= \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right)'_{d^*} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}\beta} \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right) = \\ &= -\frac{1}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Приравнявая 1.21 и 1.22 получаем:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right) - \frac{d^*}{2\gamma_n^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}}\right). \quad (1.23)$$

Подставляя I в 1.20 получаем аппроксимацию a_n :

$$a_n \approx \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \frac{1}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right). \quad (1.24)$$

Также получим γ_n из 1.23 и 1.16:

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} - \frac{\gamma_{n-1}^2}{1 + \gamma_{n-1}} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \exp\left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})}\right)^2. \quad (1.25)$$

■

1.2.1 Адаптация к численному расчету

Явно приведем ключевые выражения для численного выражения: 1) Приближение оптимального корня:

$$d^* = \alpha - \beta \log\left(\frac{s^*}{1 - s^*}\right). \quad (1.26)$$

2) Коэффициенты a_n , b_n , γ_n рассчитываются рекурсивно

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \gamma_{n-1} - \frac{\gamma_{n-1}^2}{1 + \gamma_{n-1}} \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \exp \left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})} \right)^2 \\ a_n &= \frac{1}{b_n(1 - b_n)} \frac{1}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \exp \left(\frac{-\pi(\alpha - d^*)^2}{16\beta^2(1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8})} \right) \\ b_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}(\alpha - d^*)}{4\beta\sqrt{1 + \frac{\pi\gamma_n^2}{8}}} \right).\end{aligned}\tag{1.27}$$

Процедуру пересчета коэффициента можно выполнить до проведения испытания, тем самым ускорив исполнение программы.

1.3 Описание численных экспериментов

Численное моделирование исследует поведение предложенного алгоритма для функции логистической регрессии в сравнение с классическими подходам. Исходный код на языке Python доступен в открытом репозитории диссертации ¹.

Ключевым параметром для анализа является соотношение изменения параметра сложности задачи Δd к параметру роста β . Таким образом, были исследованы две

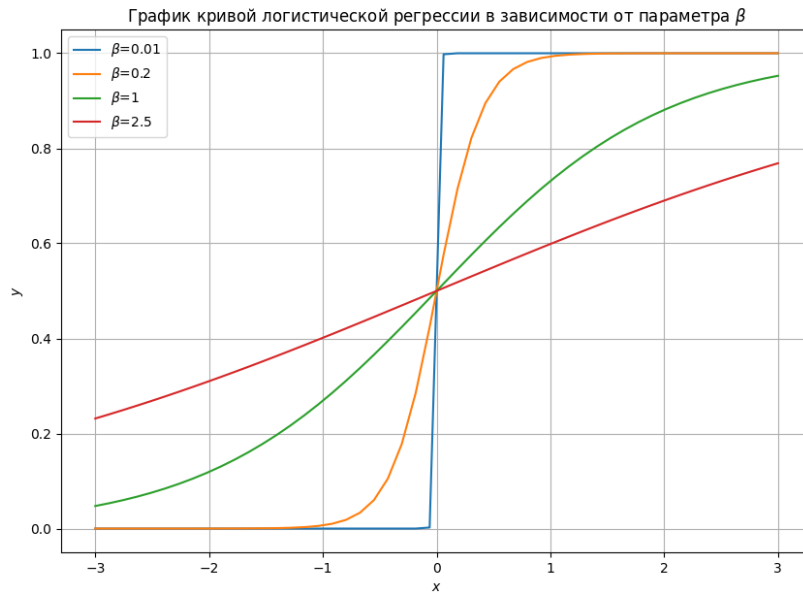


Рис. 1.2: Демонстрация изменения графика логистической регрессии от параметр роста

ключевые краевые постановки:

¹<https://github.com/NMashalov/EducationGenerativeModelApplication>

1. малые изменения $\Delta d/\beta \approx 0$
2. значительные изменения $\Delta d/\beta \approx 1$

В каждом эксперименте сравнивалась эффективность метода с классическим алгоритмом Роббинса-Монро и его аналогом с фиксированным коэффициент λ как в работе [12]. Дополнительно изучено влияние модификации по методу Поляка скользящим средним.

Гладкие графики траекторий получается путем визуализации среднего и перцентилей распределения. Для их численного расчета используется метод бутстрэп. Эксперимент проводится $B \gg 1$ раз, после чего статистики считаются путем расчета распределения.

В разделе приведены ключевые графики, полный набор доступен в приложении статьи. Отметим, что при анализе сходимости число шагов N определяется аналогично правилу предела. N считается шагом достижения сходимости, если все последующие точки не выходят за границу ϵ . ϵ выбирается индивидуально из соображений статистической значимости результата.

1.3.1 Случай $\Delta d/\beta \approx 1$

Эксперимент проводился для $s(d) = \frac{1}{1+\exp(-5(d-0.6))}$ с начальной сложностью $d_0 = 0.2$ и целевым параметром $s^* = 0.4$ ² Отметим также чувствительность алгоритм

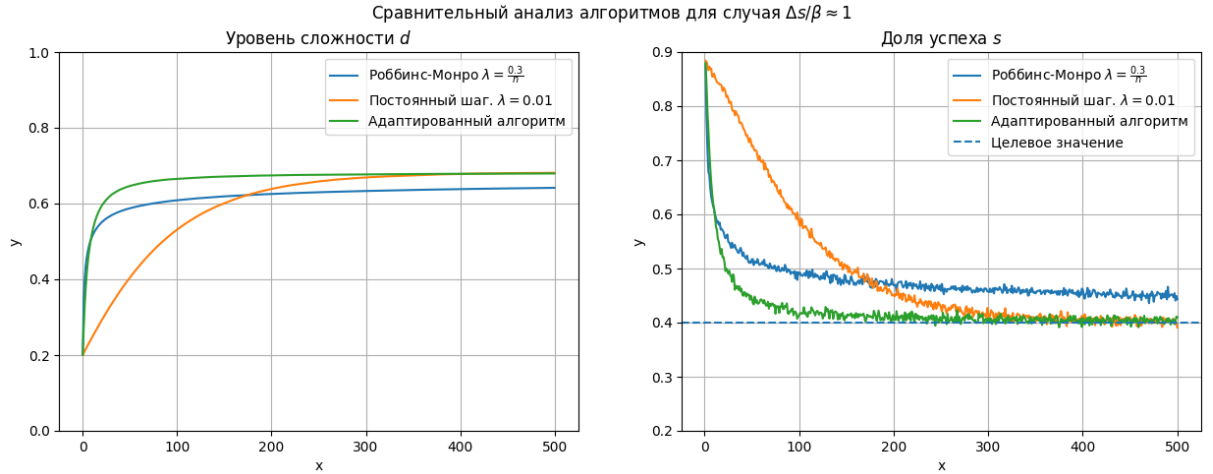


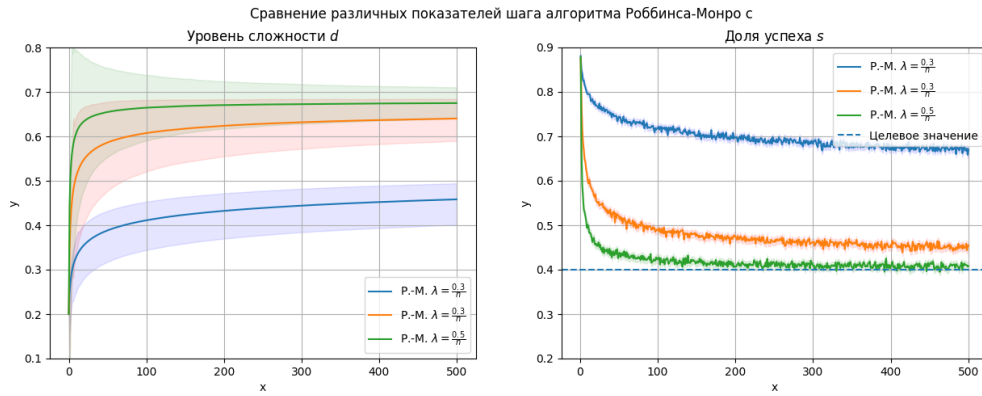
Рис. 1.3: Предложенный алгоритм

Роббинса-Монро к параметру шага. 1.4

1.3.2 Случай $\Delta d/\beta \approx 0$

Эксперимент проводился для $s(d) = \frac{1}{4(d-0.6)}$ с начальной сложностью $d_0 = 0.2$ и целевым параметром $s = 0.8$. Число раундов было выбрано минимальным для

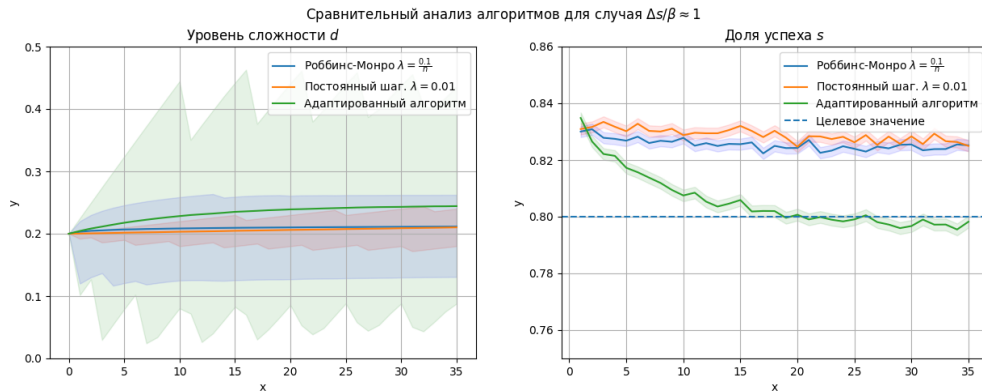
²Для наглядности в таблице классический алгоритм Роббинса-Монро сокращается до сокращения "Р.-М." с указанием параметра шага.

Рис. 1.4: Классический алгоритм Роббинса-Монро чувствителен к параметру λ

Название алгоритма	Число шагов
Постоянный $\lambda_n = 0.01$	400 ± 20
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.1$	Не сошелся
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.5$	250 ± 30
Адаптированный алгоритм Р.-М.	200 ± 35

Таблица 1.1: Сравнение числа шагов сходимости в постановке $\Delta d/\beta \approx 1$

3

Рис. 1.5: Предложенный алгоритм имеет высокую скорость реакции d

1.3.3 Случай значительного отличия априорных представлений о наклоне кривой от действительного

Рассмотрен случай, в котором β априорная значительно отличается β^* действительного.

³Для наглядности в таблице классический алгоритм Роббинса-Монро сокращается до сокращения "Р-М" с указанием параметра шага.

Название алгоритма	Число шагов
Постоянный $\lambda_n = 0.01$	400 ± 20
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.1$	Не сошелся
Алгоритм Р.-М. $\lambda_n = 0.5$	250 ± 30
Адаптированный алгоритм Р.-М.	200 ± 35

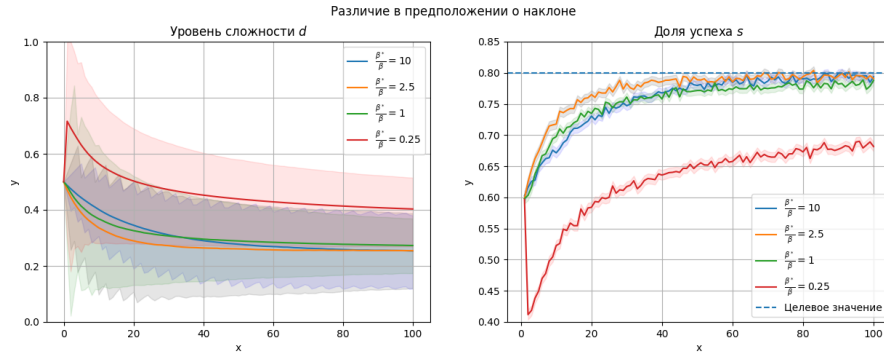
Таблица 1.2: Сравнение числа шагов сходимости в постановке $\Delta d/\beta \approx 0$ 

Рис. 1.6: Значительные различия в предположениях о наклоне логистической регрессии приводят к снижению эффективности алгоритма

1.3.4 Модификация скользящим средним

Численно исследуем применимость метода скользящего среднего к предложенному алгоритму и алгоритму с постоянным шагом.

Расходимость предложенного метода связана с нарушениями условий 1.4.

Таким образом, метод скользящего среднего

1. позволяет использовать больший шаг для обеспечения большей скорости сходимости
2. не применим к предложенному алгоритму

1.4 Итоги

Исследована постановка алгоритма Роббинса-Монро в условиях отклика, представленной случайной бернуллевской величины. Для случая ответа в виде логисти-

Название алгоритма	Число шагов
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 10$	400 ± 20
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 2.5$	Не сошелся
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 1$	250 ± 30
Адаптированный алгоритм Р.-М. $\frac{\beta^*}{\beta} = 0.25$	200 ± 35

Таблица 1.3: Сравнение числа шагов сходимости в постановке различающихся априорных представлений о наклоне кривой от действительного

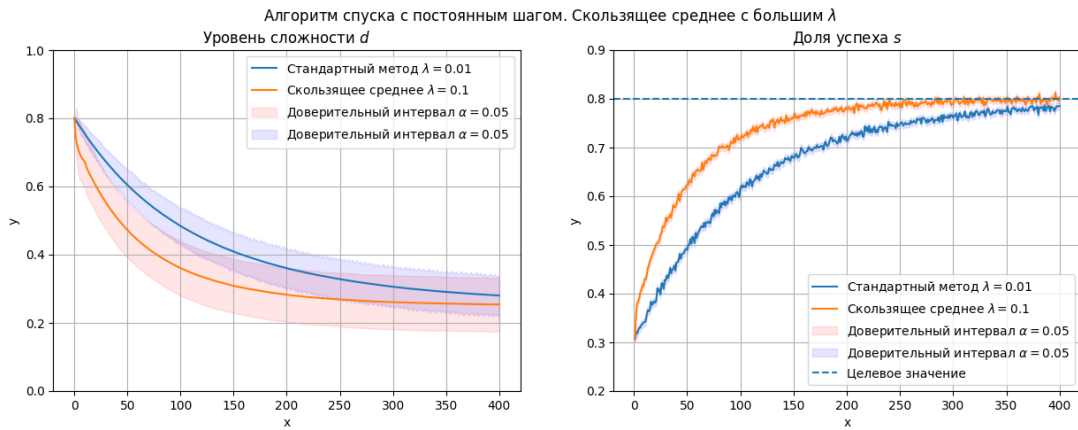


Рис. 1.7: Метод скользящего среднего позволяет использовать больший параметр шага, не теряя устойчивость метода

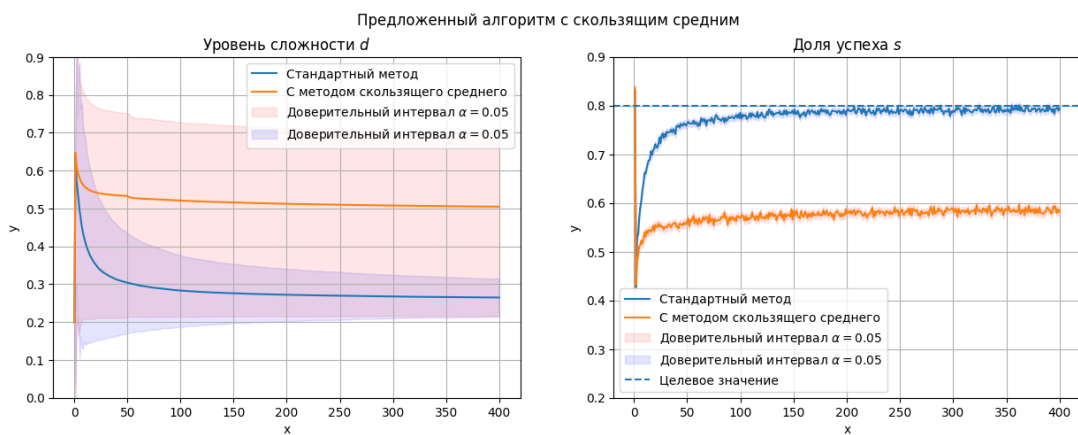


Рис. 1.8: Метод скользящего среднего не применим к предложенному алгоритму

ческой функции получен адаптивный численный алгоритм. К его ключевым преимуществам можно отнести:

- оптимальную скорость сходимости при выполнении условий теоремы 1.2
- стабильную дисперсию s и d на всех шагах оптимизации
- работу с естественными параметрами логистического распределения на всем интервале оптимизации. Это обстоятельство выгодно выделяет метод от классических методов, требующих подбора шага оптимизации.

Тем не менее алгоритм требует выбора априорных представлений о наклоне функции логистического распределения 1.6. Выполнить такой расчет можно на эксперимен-

Название алгоритма	Число шагов
Алгоритм Р.-М. со скользящим средним $\lambda = 0.01$	Не сошелся
Алгоритм Р.-М. со скользящим средним $\lambda = 0.1$	250 ± 40
Адаптированный алгоритм Р.-М. со скользящим средним	Не сошелся

Таблица 1.4: Сравнение числа шагов с применением метода скользящего среднего

тальных данных, используя в качестве бинарного классификатора логистическую регрессию.

1.4.1 Аппендикс

Доказательство теоремы Роббинса-Монро Следуя доказательству [1], используем рекуррентную схему связи между ошибками на каждом шаге алгоритма b_1, \dots, b_n . В этом случае правило обновления Роббинса-Монро запишется как:

$$E_{x_t \sim p(x|s(d))}(d_n + a_t(s^* - x_t) - d^*)^2. \quad (1.28)$$

Раскрываем квадрат разности:

$$(d_n - d^*)^2 + a_t^2 E_{x_t \sim p(x|s(d))}(s^* - x_t)^2 - 2a_t E_{x_t \sim p(x|s(d))}[(s^* - x_t)(d_n - d^*)]. \quad (1.29)$$

Используем несмещенность оценки $E_{x \sim p(x|s)}x = s$:

$$d_n = 2a_t(s^* - s(d))(d_n - d^*). \quad (1.30)$$

Положительна, исходя из монотонности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_n^2 c_n - 2 \sum_{j=1}^{\infty} a_n d_n < \infty. \quad (1.31)$$

Сходимость обоснуем через два последовательных шага:

- $\sum_{j=1}^{\infty} a_n^2 c_n < \infty$, поскольку при $\sum_{j=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ и c_n -ограничены.
- $\sum_{j=1}^{\infty} a_n d_n < \sum_{j=1}^{\infty} a_n^2 c_n$, т.к $b_n \geq 0$.

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ нулю следует из $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$. Действительно, зададим ряд $m_n = \frac{b_n}{d_n}$, т.к. он неотрицателен, то $\sum_{i=1}^{\infty} a_n k_n = \infty$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_n k_n b_N < \infty$. Из сходимости ряда из неотрицательных элементов следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. ■

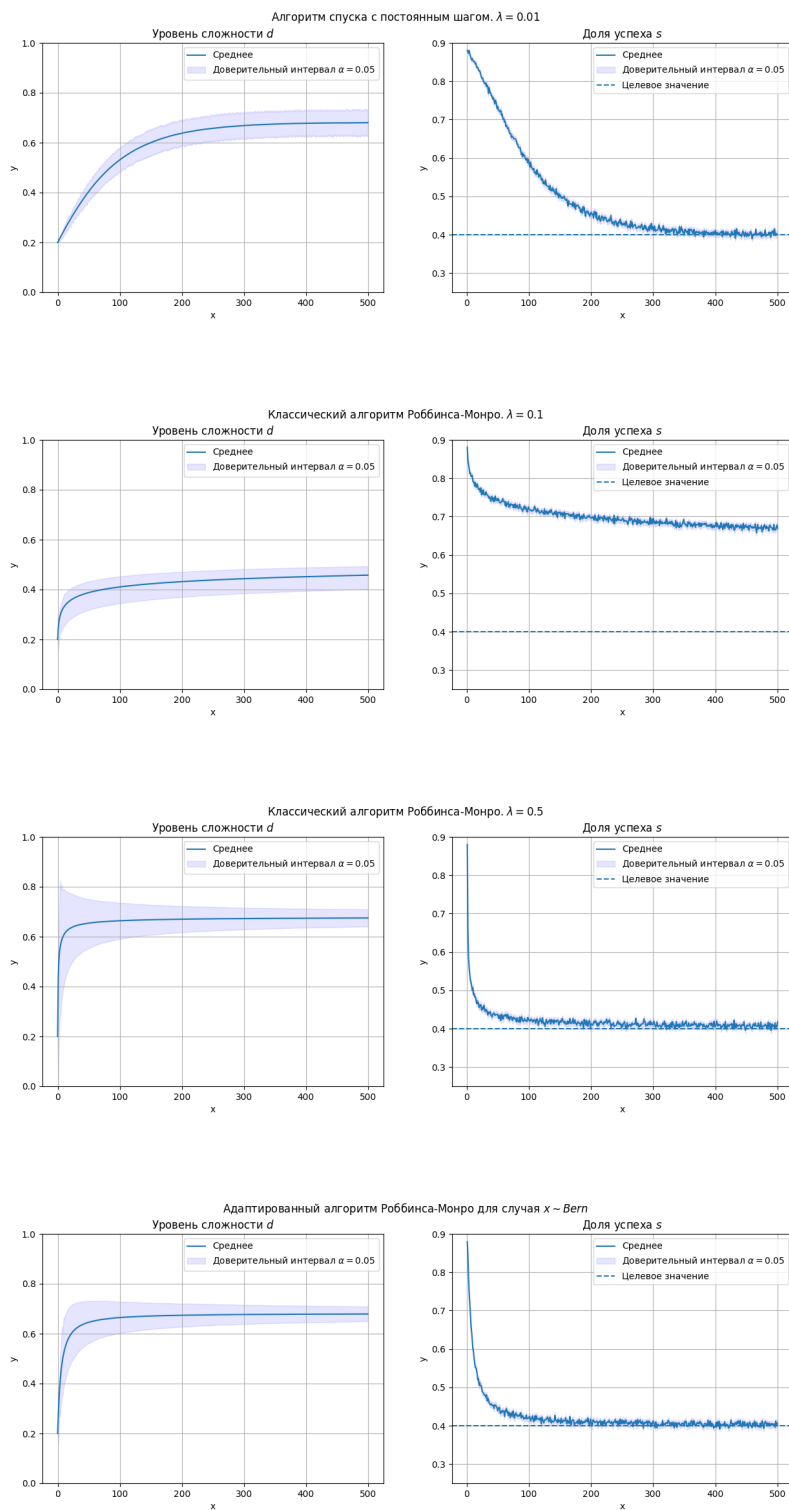
Случай $b_n \neq s^$* Общая схема доказательства приведена в [5]. ■

Список литературы

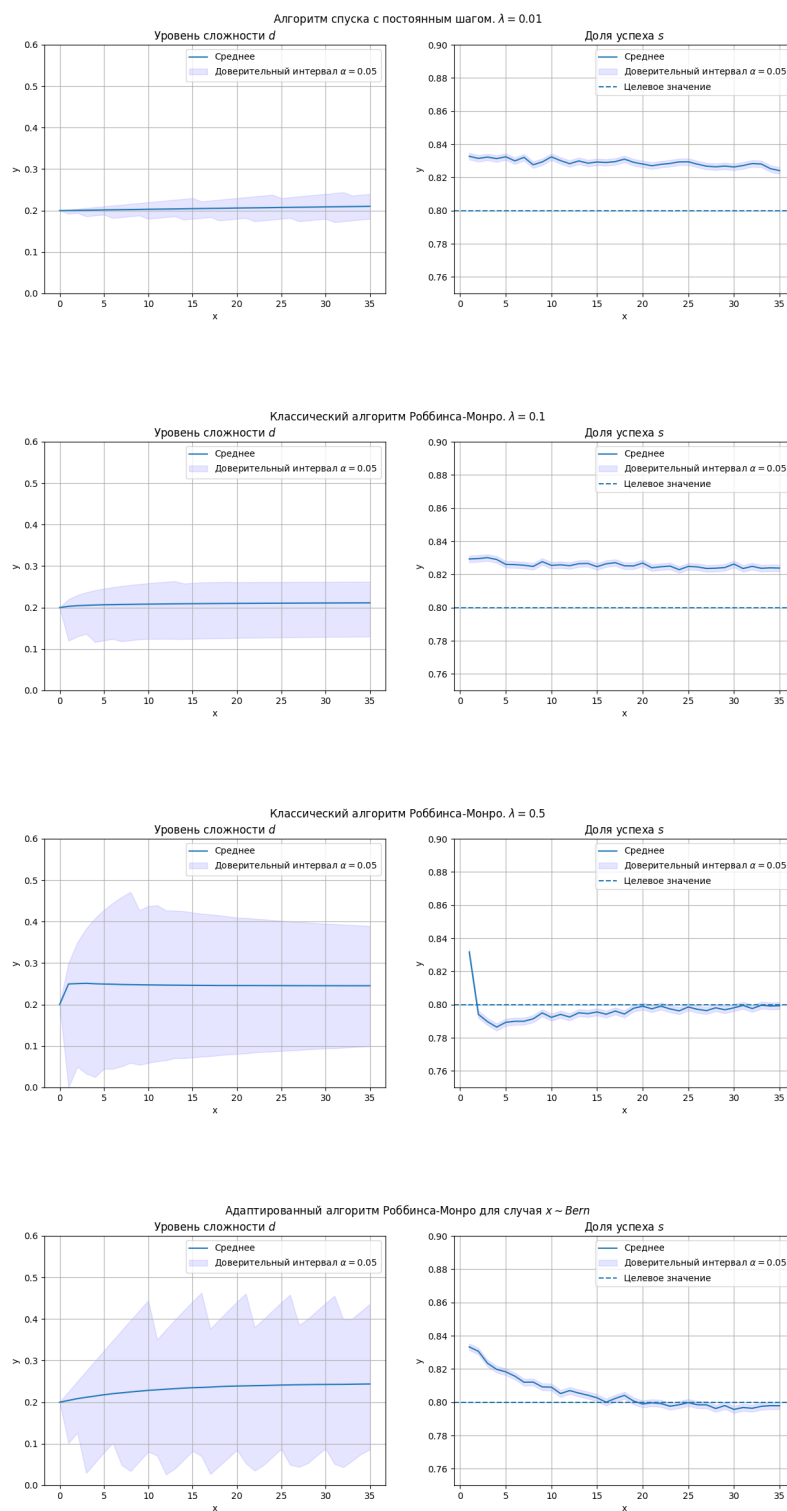
- [1] Julius R Blum. «Approximation methods which converge with probability one». В: *The Annals of Mathematical Statistics* (1954), с. 382—386.
- [2] Inchi Hu. «On sequential designs in nonlinear problems». В: *Biometrika* 85.2 (1998), с. 496—503.
- [3] Inchi Hu. «Strong consistency in stochastic regression models via posterior covariance matrices». В: *Biometrika* 84.3 (1997), с. 744—749.
- [4] V Roshan Joseph. «Efficient Robbins–Monro procedure for binary data». В: *Biometrika* 91.2 (2004), с. 461—470.
- [5] Tze Leung Lai, Herbert Robbins. «Adaptive design and stochastic approximation». В: *The annals of Statistics* (1979), с. 1196—1221.
- [6] Siwei Liu, Ke Ma, Stephan M Goetz. «A Robbins–Monro Sequence That Can Exploit Prior Information For Faster Convergence». В: *arXiv preprint arXiv:2401.03206* (2024).
- [7] Edward W Ng, Murray Geller. «A table of integrals of the error functions». В: *Journal of Research of the National Bureau of Standards B* 73.1 (1969), с. 1—20.
- [8] Boris T Polyak. «New stochastic approximation type procedures». В: *Automat. i Telemekh* 7.98-107 (1990), с. 2.
- [9] Herbert Robbins, Sutton Monro. «A stochastic approximation method». В: *The annals of mathematical statistics* (1951), с. 400—407.
- [10] Jerome Sacks. «Asymptotic distribution of stochastic approximation procedures». В: *The Annals of Mathematical Statistics* 29.2 (1958), с. 373—405.
- [11] Cui Xiong, Jin Xu. «Efficient Robbins–Monro procedure for multivariate binary data». В: *Statistical Theory and Related Fields* 2.2 (2018), с. 172—180.
- [12] Anis Yazidi и др. «Balanced difficulty task finder: an adaptive recommendation method for learning tasks based on the concept of state of flow». В: *Cognitive Neurodynamics* 14.5 (2020), с. 675—687.

1.4.2 Приложение

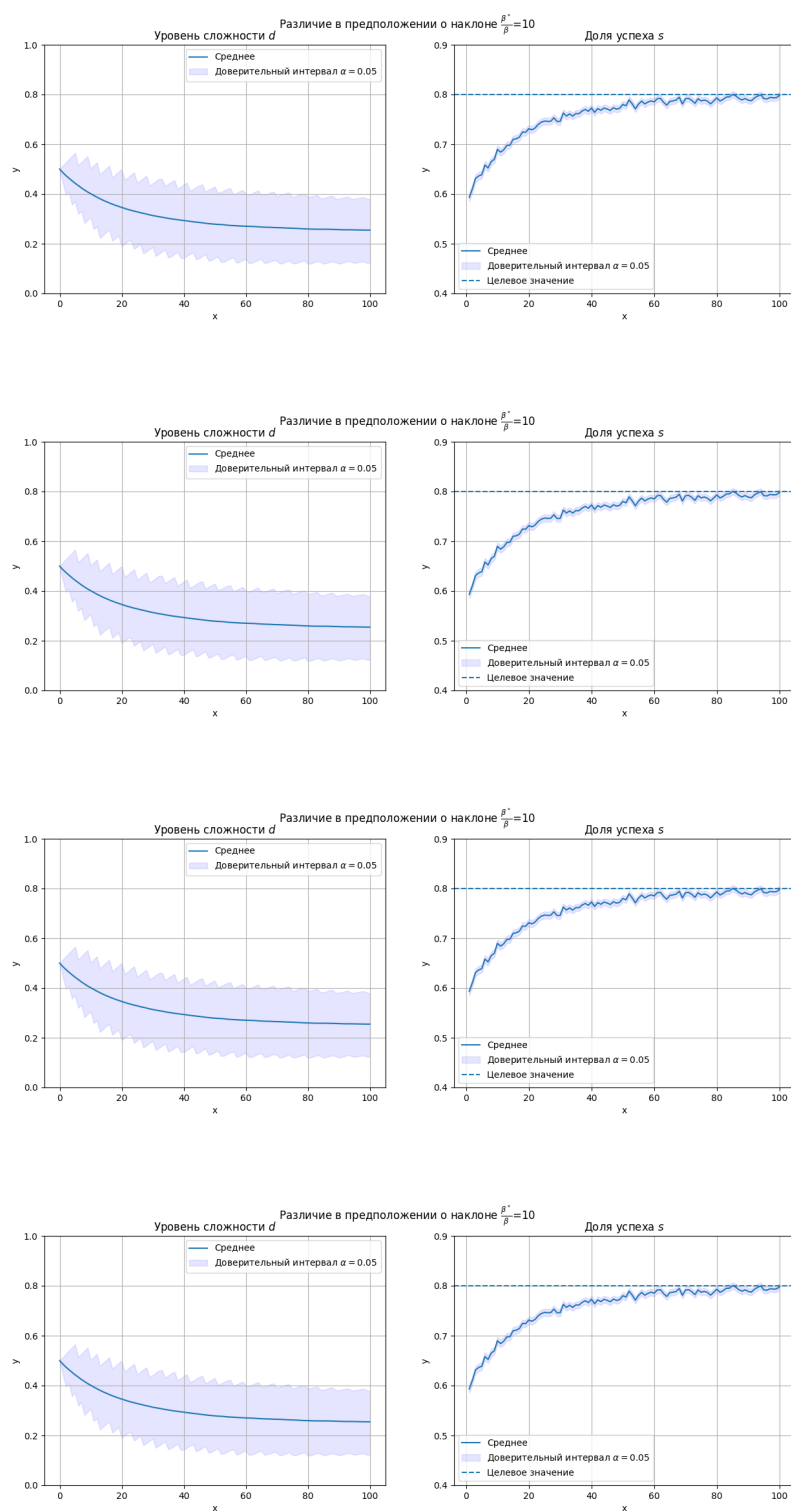
Эксперимент 1



Эксперимент 2



Эксперимент 3



Эксперимент 4

