Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

С 243 чертежами в тексте

УНИВЕРСАЛЬНОЕ НАУЧНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО „УНИЗДАТ"
1930

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

НОВАЯ КНИГА

ЖИВАЯ АЛГЕБРА

Я. И. Перельмана и О. А. Вольберга.

Авторы пытаются изложить и проработать начатки алгебры на жизненных интересных для учащихся задачах, взятых из разнообразных областей техники, естествознания (физики, астрономии, биологии) и экономики. Задачи подбирались лишь с такими сюжетами, которые знакомы учащимся или же могут быть легко разъяснены и усвоены без напряжения. В отличие от других книг, стремящихся сблизить математику с практической жизнью, здесь главное внимание обращено на то, чтобы учащиеся сознательно овладевали математическими методами и научались применять их к жизненным вопросам, а не просто усваивали готовые рецепты решения некоторых практических задач.

Курс алгебры авторы связали с курсом арифметики предшествующих лет. Это дало возможность значительно упростить изложение некоторых отделов. В арифметической части курса последовательно проведена идея расширения понятия „число“, в алгебраической части—идея функциональной зависимости. Эти две идеи проходят через весь курс, тесно переплетаясь между собой. Много внимания уделено также приближенным вычислениям. Полагая, что единственное назначение приближенных вычислений в школе состоит в том, чтобы облегчать вычислительную работу, авторы максимально упростили этот отдел.

Программа курса приблизительно соответствует программе ГУС'а для 5-го, 6-го и 7-го годов обучения в единой трудовой школе.

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

С 245 ЧЕРТЕЖАМИ

УНИВЕРСАЛЬНОЕ НАУЧНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО „УНИЗДАТ“
ХАРЬКОВ — 1930 г. — КИЕВ.

Библиографическое описание этого издания помещено в „Літопису Українського Друку", „Карточном репертуаре" и других указателях Украинской Книжной Палаты

Укрглавлит 879 к (1236)
Трест „Киев-Печать"
6-я тип., ул. Ленина, 19
З. № 1372—10.000—1929 г.
8 лист.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Эта книга излагает геометрические сведения в том объеме, в каком они проходятся в 5, 6 и 7 классах трудовой школы. Изложение представляет некоторые особенности, облегчающие усвоение предмета:

1) Материалу придано концентрическое расположение. Это значит, что в первой части книги излагается краткий, но по-своему законченный круг наиболее существенных сведений (первый концентр), который во второй части дополняется и углубляется новыми, составляющими в совокупности второй концентр предмета. Для усвоения первого концентра почти достаточно знания арифметики; второй концентр требует знания алгебры.

2) Небольшой объем этой книги объясняется тем, что число излагаемых в ней геометрических фактов доведено до минимума: включались только те положения, которые имеют более или менее широкое применение на практике или же необходимы для обоснования других, практически применимых положений. Все бесполезные в указанном смысле положения, по традиции фигурирующие в курсах геометрии, в этой книге отсутствуют. Учащийся должен усвоить сравнительно небольшое число геометрических фактов*, но зато должен уметь уверенно распоряжаться ими для решения практических задач и для самостоятельного вывода новых соотношений, если они ему понадобятся. Никакое обилие знаний не может заменить умения ими пользоваться.

3) Благодаря указанным особенностям, а также некоторым дидактическим приемам (например, предварительным упражнениям), прохождение предмета для начинающего облегчается настолько, что представляется возможным с первых же страниц

* В предлагаемом курсе всего 60 теорем.

логически обосновывать почти все его положения. Доказательства нужны в курсе геометрии не столько для того, чтобы оправдать ее положения, сколько для того, чтобы придать им внутреннюю связанность и систематическую упорядоченность; без этого невозможно ни твердо удерживать их в памяти, ни безошибочно применять их к разрешению практических задач. Предлагаемые доказательства в общем не труднее для усвоения, чем те их суррогаты, к которым приходится прибегать, чтобы обойтись без доказательств.

Советы занимающимся.

Работу по этой книге надо начинать, конечно, с внимательного чтения ее текста. Читать необходимо с карандашом в руке, чтобы самому зачерчивать на бумаге все относящиеся к тексту чертежи. Точно так же нужно отмечать у себя на бумаге все то, что в книге выражено математическими обозначениями, и на бумаге же проделывать выкладки и преобразования как бы под диктовку книги. Читая так, вы прежде всего лучше уясните себе смысл читаемого, — а только хорошо поняв мысль, можно ее твердо запомнить. Кроме того, запоминание облегчается, когда в чтении участвуют не только глаза (зрительная память), но и мускулы (двигательная память). При чтении старайтесь дословно запоминать лишь определения и основные положения. Объяснения же и доказательства затверживать наизусть нет надобности: достаточно уловить ход мыслей, их порядок и взаимную связь.

Прочтя параграф раза два, постарайтесь, не глядя на текст, ответить на относящиеся к нему „повторительные вопросы", воспроизводя также на память и соответствующие чертежи. Заботьтесь при этом, чтобы не только помнить содержание параграфа, но и излагать усвоенное ясно, четко, с правильным употреблением терминов. Если это достигнуто, можно читать дальше; если нет, — приходится восполнять пробелы по книге и снова пытаться повторить прочитанное. Только хорошо поняв и усвоив один отдел, можно переходить к дальнейшим. Не спешите чрезмерно с прохождением курса, торопясь забежать вперед, чтобы скорее покончить с предметом. Поспешность только замедлит его усвоение. И еще совет: подвигаясь вперед, почаще заглядывайте в пройденное. Каждый раз, когда почувствуете, что какое-нибудь место из ранее пройденного потускнело в вашей памяти, не ленитесь разыскать соответствующую страницу книги и освежить забытое. Работая над учебной книгой, надо перелистывать ее назад больше, чем вперед, — в этом залог прочного усвоения. Будьте уверены, что, продвигаясь медленно, не спеша, вы достигнете твердого овладения предметом гораздо вернее и быстрее.

Еще одно важное замечание. В геометрии, как и во всех математических науках, можно немного з н а т ь, зато необходимо много у м е т ь. Эта книга содержит менее сотни параграфов;

однако ошибочно думать, что, выучив их, вы овладеете геометрией: нет, вы только ознакомитесь с содержанием предмета; будете з н а т ь, но не будете у м е т ь. Уменье придет только тогда, когда проделаете значительное число разнообразных упражнений. Усвоил геометрию тот, кто не только твердо знает правила, но и умеет уверенно их применять. „При изучении наук, — писал Ньютон, — задачи (примеры) важнее правил". Каждый параграф предлагаемой книги сопровождается поэтому указанием на его применения. Но эти указания объясняют лишь, как надо решать соответствующие задачи. Для овладения предметом их недостаточно: надо самостоятельно проделать множество упражнений. Подбор таких задач для самостоятельного решения вы найдете в составленном автором этой книги, применительно к ней, „Новом задачнике по геометрии", ГИЗ (включен в список учебных книг, рекомендованных Государственным Ученым Советом для трудовой школы).

Правила действий с приближенными числами.

Большая часть числовых данных, приводимых в упражнениях этой книги, получена путем измерения. Но так как ни одно измерение не может быть выполнено абсолютно точно, то все подобные числа — числа приближенные. Правила выполнения действий с приближенными числами таковы:

Округление. Округление числа состоит в том, что его укорачивают на одну или несколько значащих цифр. Если первая из отбрасываемых цифр не больше 4, то оставшихся цифр не изменяют, а вместо отброшенных пишут нули (в случае целого числа). Например 354,3 округляют в 354 или в 350.

Если первая из отбрасываемых цифр больше 4, то последнюю остающуюся цифру увеличивают на 1. Например, 267,86 округляют в 267,9 в 268 или в 270.

Но в тех случаях, когда отбрасывается только цифра 5 (или 5 с последующими нулями), принято округлять число так, чтобы последняя остающаяся цифра оказывалась четной. Например, 4,25 округляют в 4,2, число 3750 — в 3800.

Результат сложения или вычитания не должен оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, которых нет хотя бы в одном из данных чисел. Если такие цифры получаются, их следует заменять нулями. (Нули, стоящие между значащими цифрами, также считаются значащими)

Примеры:

$$\begin{array}{r} 28{,}3 \\ +146{,}85 \\ 108 \\ \hline 283 \end{array} \text{ [а не 283,15]} \qquad \begin{array}{r} 176{,}3 \\ -\ 0{,}46 \\ \hline 175{,}8 \end{array} \text{ [вместо 175,84]}$$

Результат умножения и деления не должен состоять из большего числа значащих цифр, чем их имеется в том из данных чисел, которое содержит наименьшее число значащих цифр.

Примеры:

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 245 \\ \hline 9100 \end{array} \text{ [вместо 9065]}$$

$57{,}8 : 3{,}2 = 18$ [вместо 18,06]

$25 : 3{,}14 = 8{,}0$ [вместо 7,961]

Число значащих цифр степени или корня не должно превышать числа их в основании или в подкоренном количестве.

Примеры:

$$157^2 = 24\,600 \text{ [вместо } 24\,649]$$

$$5{,}81^3 = 196 \text{ [вместо } 196{,}122\,941]$$

$$\sqrt{329} = 18{,}1 \text{ [вместо } 18{,}1384]$$

$$\sqrt[3]{0{,}638} = 0{,}861 \text{ [вместо } 0{,}86088]$$

Указанные правила выполнения действий относятся только к окончательным результатам выкладок. Если же выполняемое действие не окончательное, т.-е. если с полученным результатом предстоит выполнять еще и другие действия, то в результате оставляют одною цифрою больше, чем указано в предыдущих правилах. Например вычисление:

$$\frac{36 \times 1{,}4}{3{,}4}$$

выполняют так:

$$36 \times 1{,}4 = 50{,}4 \text{ (а не } 50)$$
$$50{,}4 : 3{,}4 = 15.$$

Этими правилами следует руководствоваться не только при собственных выкладках, но и при пользовании готовыми результатами из таблиц.

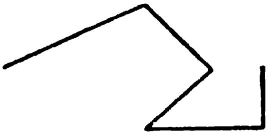
ПЕРВЫЙ КОНЦЕНТР.

I. Прямая линия и ее измерение.

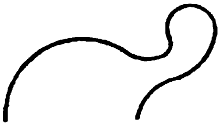
§ 1. Прямая линия.

Среди линий мы нередко встречаем такие, которые имеют форму туго натянутой нити. Линии эти называются **прямыми** линиями, а каждая часть их — **отрезком** прямой линии. Для удобства часто говорят коротко: „прямая“, „отрезок“, без слова „линия“.

Линии иного вида носят другие названия. Те не-прямые линии, которые составлены из отрезков прямой (черт. 1), назы-



Черт. 1.



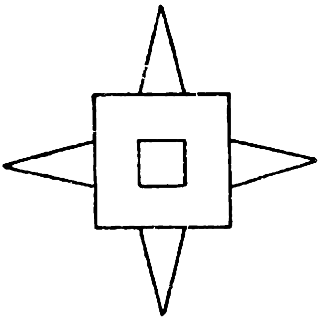
Черт. 2.

ваются **ломаными**. Все прочие линии — не прямые и не ломаные — называются **кривыми** (черт. 2).

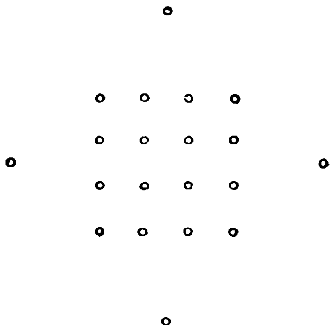
Прямые линии чертят на бумаге, пользуясь линейкой.

Через одну точку можно провести сколько угодно прямых линий. Но через **две** точки сразу может проходить не более **одной** прямой: нельзя через две точки провести больше одной прямой так, чтобы проведенные линии не сливались в одну. Этим свойством прямых линий пользуются для перекалывания узоров, составленных из прямых линий. Предположим, что вы желаете изобразить в точности узор черт. 3 a, т. е. желаете, как говорят, „снять с него копию“. Вы можете поступить так: подложить под узор чистую бумагу и проколоть иглой (или ножкой циркуля) конечные точки всех его линий. У вас получится на чистой бумаге то, что вы видите на черт. 3 b. Если затем, глядя на узор, вы соедините точки черт. 3 b по линейке прямыми линиями — у вас получится точная копия узора; так как между двумя точками можно провести только одну прямую линию, то ясно, что отрезки, соединяющие точки черт. 3 b, должны быть те самые, что и на черт. 3 a.

На классной доске мы можем чертить прямые линии помощью шнура, натертого мелом. Натянув его между теми двумя точками, через которые мы желаем провести прямую, приподнимают немного шнур посредине и отпускают: шнур отпечатывает на доске свою форму, т. е. прямую линию. Это называется „отбить" прямую. Плотники, отбивая прямые на бревнах, брусьях или досках, натирают шнур не мелом, а углем.



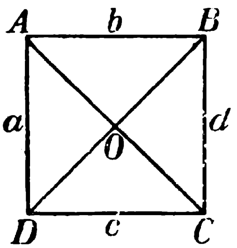
Черт. 3 a.



Черт. 3 b.

Чтобы обозначить прямую линию на поле, на лугу, в лесу, вообще, как говорят, „на местности", ее не прочерчивают на земле, а втыкают лишь на ее концах по шесту („вехе"): этого достаточно, потому что через две точки (вехи) может проходить только одна прямая.

Чтобы не указывать на чертеже пальцем, о каком отрезке идет речь, ставят у его концов буквы; желая указать этот отрезок, называют буквы, стоящие у его конечных точек; этого достаточно, потому что через две точки может проходить только одна прямая. Левый стоячий отрезок на черт. 4, например, надо называть AD, нижний лежачий — DC, и т. д. Для таких обозначений принято употреблять прописные буквы латинского алфавита.



Черт. 4.

Другой способ обозначения отрезков состоит в том, что возле их середины ставят одну малую букву. Например, прямую AB можно назвать просто b, а AD — a, и т. п.

Называя ломаную линию, надо перечислить попорядку буквы, поставленные у концов всех ее отрезков. Например, говорят „ломаная $ABCOD$" (найдите ее на черт. 4).

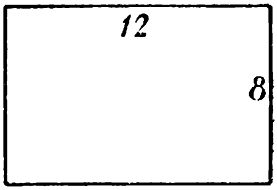
Буквы для обозначения точек и линий принято в математике употреблять не русские, а латинские. Они не слишком отличаются от русских, поэтому к употреблению их легко привыкнуть.

Повторительные вопросы.

Начертите несколько прямых, ломаных и кривых линий. — Сколько прямых может проходить через одну точку? А через две? — Во скольких местах могут пересекаться две прямые? — Как перекалывают узоры? — Как „отбивают“ прямые линии? — Как отмечают их на местности? — Как обозначают прямые линии буквами? Как обозначают ломаные линии? — Когда употребляют прописные буквы и когда — малые?

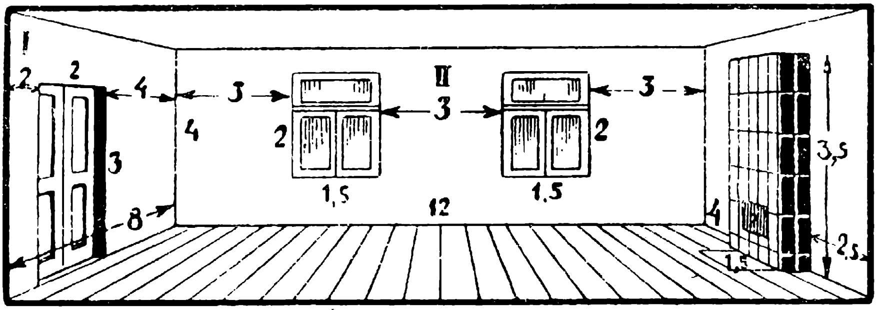
§ 2. Масштаб.

Изображение участка земли, пола комнаты или квартиры в уменьшенном виде называется планом этого участка, комнаты или квартиры. При этом необходимо изготовить уменьшенное изображение так, чтобы по плану участка или комнаты легко было узнать их настоящие размеры. Проще всего возле каждого отрезка на плане надписать его истинную длину. Часто так и делают, — например, когда зарисовывают план от руки, вчерне. На черт. 5 мы видим подобный план комнаты, изображенной на черт. 6. Но не всегда это бывает удобно. Обычно на плане приходится показывать много подробностей, — например, не только размеры самой комнаты, но и ширину окон, дверей, стен, печи и т. п. Если все эти размеры надписать на плане, в нем трудно будет разобраться.



Черт. 5.

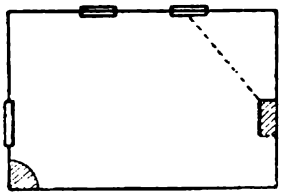
Чтобы план был ясен и нагляден, его изображают „в масштабе“. Это значит, что взамен каждого метра действительно длины чертят на плане определенный небольшой отрезок, — напр.,



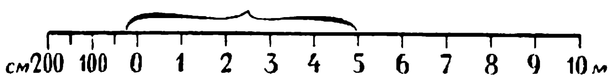
Черт. 6

½ *см;* тогда длина комнаты (черт. 6) 12 *м* изобразится на плане отрезком в 6 *см;* ширина ее 8 *м* — отрезком в 4 *см;* ширина окна 1,5 *м* — отрезком 0,75 *см*, или 7,5 *мм* и т. д. (черт. 7). И наоборот, если на плане ширина дверей равна 1 *см*, то это показывает, что настоящая ее ширина - 2 метра. О таком плане говорят, что он начерчен в масштабе „2 метра в 1 *см*“.

К планам, начерченным в масштабе, обычно прилагают так называемый „линейный масштаб“, который служит для того, чтобы по длине отрезков на плане удобно было находить их истинную длину. Образец такого масштаба изображен на черт. 8. Пользуются им следующим образом. Предположим, мы желаем узнать, как велико истинное расстояние от середины правого угла комнаты до ближайшего угла печки; оно показано на плане черт. 7 точечной линией (пунктиром). Раздвинув ножки циркуля на расстояние, равное этому отрезку, переносим взятое расстояние на линейный масштаб (черт. 8) так, чтобы правое острие циркуля было у одной из отметок целых метров (т. е. направо от нуля) а левое острие — налево от нуля. В нашем случае правое острие окажется у отметки „5 метров“, левое — у отметки „25 *см*“ (число 25 на масштабе не написано, но подразумевается). Значит, истинное расстояние от окна до печки — 5 *м* 25 *см*.



Черт. 7.



Черт. 8.

Зная, скольким метрам истинной длины отвечает каждый сантиметр плана, легко рассчитать, во сколько раз расстояния на плане меньше их настоящей величины. В нашем случае расстояния плана меньше их истинной („натуральной“) величины во столько раз, во сколько 1 *см* меньше 2 метров, т. е. в 200. Другими словами, план выполнен в $\frac{1}{200}$ натуральной величины. Дробь $\frac{1}{200}$ называется „численным масштабом“ плана. Если бы он был начерчен в масштабе „1 *м* в 1 *см*“, то численный масштаб плана был бы $\frac{1}{100}$. Масштабу „$\frac{1}{2}$ *м* в 1 *см*“ отвечает численный масштаб $\frac{1}{50}$ и т. п.

Повторительные вопросы.

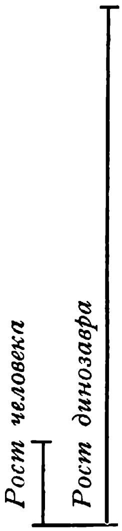
Что называется планом? — Что значит „начертить план в масштабе“? — В каком масштабе исполнен план черт. 7? В какую долю натуральной величины? — Каким численным масштабам соответствуют следующие: „1 *м* в 1 *см*“, „2 *м* в 1 *см*“, „0,5 *м* в 1 *см*“?

§ 3. Диаграммы.

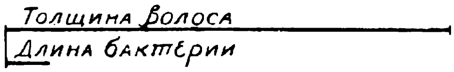
Масштабом пользуются не только для черчения планов, но и для того, чтобы наглядно изображать соотношения различных длин. Пусть, например, вы узнали, что огромный ящер, „динозавр“, когда-то живший на земле, имел в высоту 12 метров. Мы желаем наглядно сопоставить рост этого вымершего чудовища с ростом среднего человека (1,7 *м*). Для этого начертим отрезок (черт. 9), изображающий рост динозавра в каком-нибудь масштабе, например, 2 *м* в 1 *см*, — а рядом с ним другой отрезок, изображающий в том же масштабе рост человека. Первый отрезок будет иметь в длину 6 *см*, второй — только 8,5 *мм*. Глядя на такой чертеж (черт. 9), мы, конечно, гораздо яснее представляем себе огромный рост динозавра, чем обдумывая число 12 метров.

Если пожелаем сравнить рост динозавра также с ростом средней лошади (2 *м*) и с ростом жираффа (5,5 *м*), то должны будем рядом с сейчас начерченными двумя прямыми начертить еще две: одну — длиною в 1 *см* — для лошади, и другую — длиною 2,8 *см* — для жираффа. (Сделайте это в вашей тетради.) То, что мы начертили, есть „диаграмма“ роста животных.

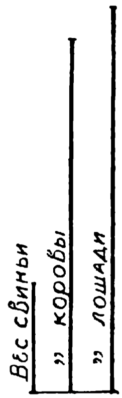
В рассмотренном сейчас случае мы изображали рост человека и животных в уменьшенном масштабе. Бывают, однако,



Черт. 9.



Черт. 10.



Черт. 11.

случаи, когда надо пользоваться для диаграммы не уменьшенным, а увеличенным масштабом Пусть, мы желаем составить себе наглядное представление о малости бактерии, длина которой равна 0,004 *мм*. Сопоставим ее длину, например, с толщиною волоса (0,05 *мм*). Изберем масштаб „0,001 *мм* в 1 *мм*“. Тогда толщина волоса изобразится отрезком в 50 *мм*, а длина бактерии — всего в 4 *мм* (черт. 10). Когда мы смотрим на такой чертеж, крошечные размеры бактерии представляются нам гораздо нагляднее, чем раньше.

Подобным же способом можно изображать не только соотношение длин, но также соотношение весов, промежутков времени, — вообще, всякого рода величин. Мы можем, например, представить на диаграмме соотношение веса различных животных. На черт. 11 мы имеем диаграмму веса свиньи (120 *кг*), коровы (400 *кг*) и лошади (440 *кг*). На этом чертеже каждый миллиметр отвечает 10 килограммам веса. Поэтому вес свиньи изображен отрезком в 12 *мм*, коровы — 40 *мм*, лошади — 44 *мм*.

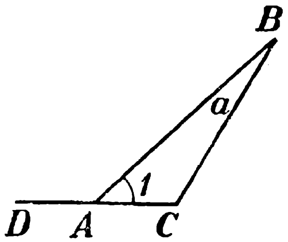
Наконец, рассмотрим, как изображаются на диаграмме промежутки времени, — например, продолжительность жизни человека и некоторых животных. Крупные черепахи могут жить до 300 лет, слон — до 200, человек — до 100 лет, орангутанг — до 60 лет, лошадь — до 50 лет, жаба — до 40 лет, олень — до 30 л., курица — до 20 л., собака — до 12 л., кролик — до 7 л. Будем изображать один год каким-нибудь отрезком, например, в $1/5$ *мм* (выбираем мелкий масштаб, чтобы чертеж уместился на листке бумаги). Тогда век черепахи изобразится отрезком в 60 *мм*, слона — в 40 *мм*, человека — в 20 *мм*, и т. д. до собаки и кролика, продолжительность жизни которых надо будет изображать черточками в 2 *мм* и в $1^1/_2$ *мм*. (Начертите это в вашей тетради.)

II. Углы. Первые сведения об окружности. Параллельные прямые.*

§ 4. Углы и их обозначения.

Когда прямые линии встречаются, они образуют в местах встречи „углы". Угол — две прямые, исходящие из одной точки. Прямые эти называются сторонами угла, а точка, в которой они сходятся, — вершиной угла.

Для обозначения углов употребляют три буквы: две ставятся у сторон, третья — у вершины. Называя угол, начинают с буквы, стоящей у одной стороны, затем называют букву у вершины и, наконец, — букву возле другой стороны. В том же порядке и записывают углы. Например, верхний угол фигуры черт. 12 есть *ABC* (или *CBA*); левый угол той же фигуры — *BAC*, правый — *ACB* (последние два угла можно также назвать *CAB* и *BCA*).



Черт. 12.

Употребляются и иные способы обозначения углов. Можно, например, называть одну только букву, стоящую у вершины: верхний угол фигуры черт. 12 можно по этому способу назвать: уг. *B*. Но угол *BAC* нельзя назвать „уг. *A*", так как у точки *A* лежат вершины двух углов: *BAC* и *BAD*.

Нередко обозначают угол малой буквой или цифрой, ставя их внутри угла, близ вершины. Например, уг. *ABC* можно обозначить как „уг. *a*", уг. *BAC* — как „уг. 1". Между сторонами угла проводят иногда для ясности дужку (см. уг. 1 черт. 12).

---

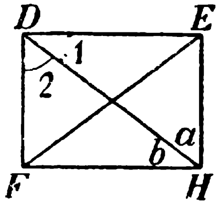
* Сведения из арифметики, которые должны быть предварительно усвоены: обыкновенные дроби, их сокращение, действия с обыкновенными дробями, превращение их в десятичные.

Повторительные вопросы.

Какая фигура называется углом? — Покажите на чертеже, где вершина угла, и где его стороны? — Какие вы знаете способы обозначения углов?

§ 5. Сравнение углов. Сложение и вычитание углов.

Углы различают по их величине. Бóльшим считается не тот угол, стороны которого длиннее, а тот, стороны которого сильнее расходятся врозь. На черт. 13 уг. EDF больше, чем угол 2, потому, что у первого стороны сильнее расходятся врозь. Встречаются углы, стороны которых расходятся врозь совершенно одинаково; такие углы можно наложить один на другой так, что их вершины совпадут, а стороны сольются. Углы, которые можно таким образом наложить друг на друга, считаются *равными*, хотя бы стороны их были неодинаковой длины.



Черт. 13.

На черт. 13 равны, например, уг. DEH и уг. DFH, уг. 2 и уг. a; вы можете убедиться в этом, если обведете один угол на прозрачной бумаге и покроете им другой.

Если при наложении сравниваемых углов их вершины и одна сторона совпали, вторая же сторона накладываемого угла оказалась внутри или вне другого угла, то такие углы, конечно, не равны. Тот угол, который оказался внутри другого, считается меньшим.

Рассмотрите на том же черт. 13 углы, вершины которых лежат в точке D. Здесь три угла: уг. EDF, уг. EDH и уг. HDF. Вы видите, что оба меньших угла как-раз заполняют собою уг. EDF, который составляется из них, как целое из своих частей. Когда углы так расположены, то говорят, что уг. EDF есть *сумма* углов EDH и HDF. *Сложить* два угла значит найти их сумму, т.-е. тот угол, который составится, если приложить их друг к другу, как показано на чертеже 13.

Если на черт. 13 от угла EDF отнять угол EDH, то останется уг. HDF; этот угол называется *разностью* углов EDF и EDH. Вычесть один угол из другого значит найти их разность.

Повторительные вопросы.

Какие углы называются равными? — Зависит ли величина угла от длины сторон? — Покажите на чертеже, что называется суммой и разностью двух углов.

§ 6. Развернутый угол.

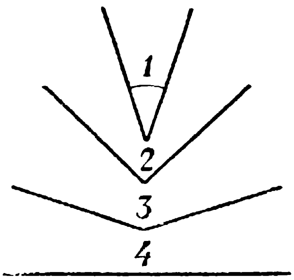
Представьте себе, что мы разводим врозь стороны какого-нибудь угла, — напр. уг. 1 (черт. 14). От этого угол станет увеличиваться: он превратится сначала в уг. 2, потом в уг. 3 и, наконец, в уг. 4, стороны которого составляют одну прямую линию, Такие углы, как уг. 4, называются *развернутыми* углами.

Может ли один развернутый угол быть больше или меньше другого развернутого? Конечно, нет: ведь всякие прямые линии, если их наложить одну на другую, сливаются между собою; значит, должны слиться при наложении и всякие развернутые углы. Итак:

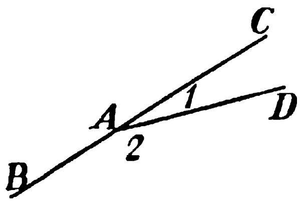
Все развернутые углы равны между собою.

§ 7. Смежные углы. Прямой угол

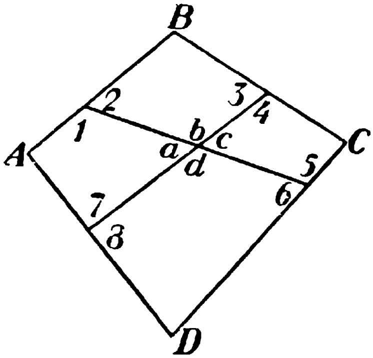
На черт. 15 вы видите углы 1 и 2, которые расположены так, что вершины их совпадают (в точке A) и одна сторона (AD) у них общая, т.-е. принадлежит одновременно обоим углам, другие



Черт. 14.



Черт. 15.



Черт. 16.

же стороны AB и AC этой пары углов составляют одну прямую линию. Углы, которые так расположены, называются смежными. На черт. 16 вы видите несколько пар смежных углов: уг. 1 и уг. 2; уг. 3 и уг. 4; уг. 5 и уг. 6; уг. a и уг. b; уг. c и уг. d, и др.

Если углы, составляющие одну пару смежных углов, равны между собою, — как уг. 7 и 8 на черт. 16, — то каждый из них называется прямым углом. Значит:

Прямой угол есть один из двух равных смежных углов.

Так как оба равных смежных угла составляют вместе один развернутый угол, то прямой угол есть половина развернутого угла. Но все развернутые углы равны друг другу; поэтому равны и их половины, т. е. прямые углы. Значит:

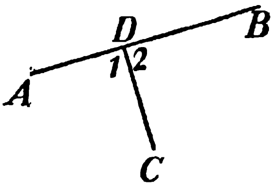
Все прямые углы равны друг другу.

Прямые линии, встречающиеся под прямым углом (черт. 17), называются перпендикулярными друг к другу. На черт. 17, например, уг. 1 = уг. 2, а так как эти углы смежные и притом равные, то они — прямые. Поэтому CD перпендикулярно к AB и AB перпендикулярно к CD.

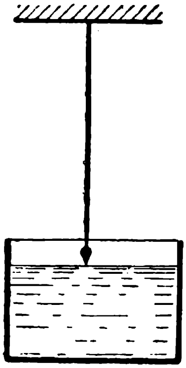
Слово „перпендикулярный“ не надо смешивать со словом „вертикальный“. Вертикальной, или отвесной, называют всякую прямую линию, имеющую направление свободно свешивающейся нагруженной нити.

Все те линии, которые составляют с вертикальной линией прямой угол, называются г о р и з о н т а л ь н ы м и. Горизонтальны, например, все линии, проведенные по поверхности воды (черт. 18). Отвесное направление проверяют отвесом (черт. 18); горизонтальное — плотничьим ватерпасом.

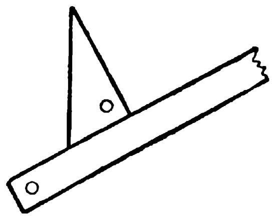
На бумаге прямой угол чертят помощью линейки и чертежного треугольника (черт. 19). Проверить, правильно ли изготовлен чертежный треугольник, можно так. Проведя по линейке прямую линию и начертив помощью треугольника другую прямую, к ней перпендикулярную, прикладывают чертежный треугольник прямым углом к смежному углу: если эти углы равны, то треугольник изготовлен правильно.



Черт. 17.



Черт. 18.



Черт. 19.

Углы, меньшие, чем прямой, называются о с т р ы м и; большие, чем прямой, — т у п ы м и.

Повторительные вопросы к §§ 6 и 7.

Какой угол называется развернутым? — Какие углы называются смежными (начертите несколько таких углов)? — Какой угол называется прямым? — Как называется угол, который равен смежному с ним? — Могут ли прямые углы иметь различную величину? — Объясните значение слов: перпендикулярный, вертикальный, отвесный, горизонтальный. — Как чертить перпендикулярные прямые помощью чертежного треугольника? — Какие углы называются острыми? Тупыми? Начертите несколько острых и несколько тупых углов.

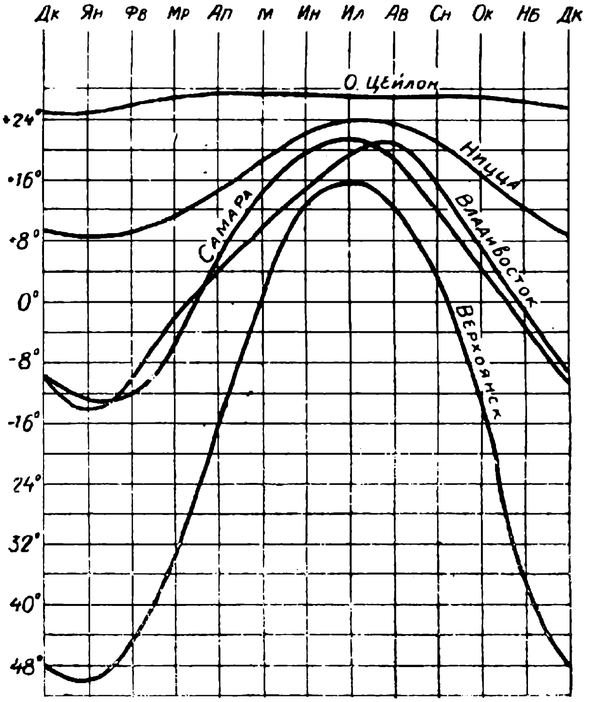
Применения.

1. Уменье чертить взаимно-перпендикулярные прямые позволяет строить так наз. „графики“, т. е. ломаные (или кривые) линии, наглядно показывающие ход изменения явлений. Пусть требуется построить график температуры за неделю по следующим данным:

воскр.	пон.	вторн.	среда	четв.	пятн.	субб.
11°	8°	9°	10,5°	12°	7,5°	6°

Изобразим эти температуры рядом перпендикуляров к одной прямой, проведенных на равных расстояниях друг от друга: длина перпендикулярных отрезков будет изображать температуру дня. Верхушки перпендикуляров соединим прямыми линиями: полученная ломаная линия и есть „график температуры“.

2. На черт. 20 изображены графики годового хода температуры воздуха в разных местах земного шара: на о-ве Цейлоне, в Ницце, в Самаре, во Владивостоке и в Верхоянске. Рассматривая эти графики, мы можем ответить себе на ряд могущих возникнуть вопросов. Например:



Черт. 20.

a) Какова температура (в среднем за много лет) во всех названных местах 1 мая?

Ответ. На Цейлоне + 27 °, в Ницце + 18 °, в Самаре + 15°, во Владивостоке + 9°, в Верхоянске 0 °.

b) Какие дни в году (в среднем) самые жаркие и самые холодные в Верхоянске?

Ответ. 1-е июля + 15 °, 1 января — минус 50 °.

c) В каких городах в апреле средняя температура ниже 0 ?

Ответ. В Верхоянске, Владивостоке и Самаре.

d) Какова разница между самой высокой и самой низкой средней температурой в Ницце? В Самаре?

Ответы. В Ницце средняя температура колеблется от + 9° до + 24 °; в Самаре — от минус 10 ° до + 21 °.

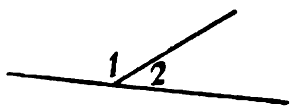
§ 8. Свойство смежных углов.

Сумма обоих смежных углов, очевидно, равна развернутому углу. Но развернутый угол равен двум прямым углам, взятым вместе. Поэтому:

Сумма обоих смежных углов равна двум прямым углам.

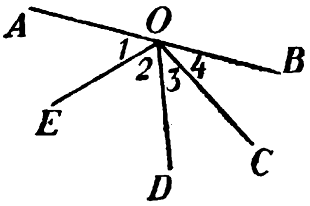
Например, на черт. 21 уг. 1 + уг. 2 = двум прямым углам.

Бывает, что по одну сторону прямой расположено не два угла, как в случае смежных углов, а несколько углов, — как на черт. 22. Легко убедиться, что сумма этих углов также равна двум прямым: из них всегда можно составить одну пару смежных углов (на черт. 22 углы AOD и DOB, или AOE и EOB).

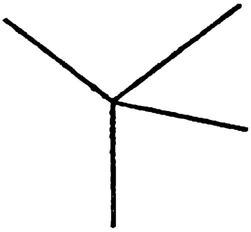


Черт. 21.

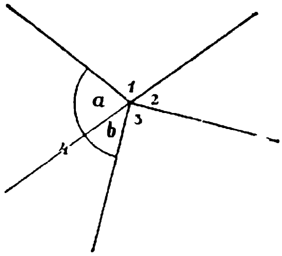
Подобным же образом можно найти, чему равна сумма углов, расположенных вокруг общей вершины, как на черт. 23. Продолжив одну из сторон за общую вершину (черт. 24), получим две группы углов: группу 1 и a, сумма которых равна двум прямым (почему?), и группу углов 2, 3, b, сумма которых равна также двум прямым углам; значит, сумма всех углов вокруг общей вершины равна 4 прямым углам.



Черт. 22.



Черт. 23.



Черт. 24.

Повторительные вопросы

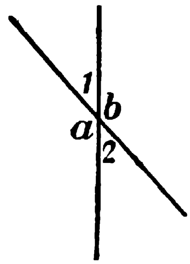
Чему равна сумма смежных углов? — Сумма нескольких углов, расположенных по одну сторону прямой линии? — Сумма всех углов, расположенных вокруг общей вершины?

§ 9. Противоположные углы.

Предварительные упражнения.

1) На черт. 25 уг. $1 = 48°$. Найти прочие углы.
2) На черт. 25 уг. $b = 136°$. Найти прочие углы.

Когда две прямые линии пересекают друг друга (черт. 25), они образуют две пары углов, стороны которых составляют продолжение одни других: одна пара — уг. 1 и уг. 2; другая — уг. a и уг. b. Особенность противоположных углов та, что углы, составляющие такую пару, всегда равны между собою: уг. 1 = уг. 2, уг. a = уг. b. Действительно, если например (черт. 25) уг. $1 = 40°$, то уг. $b = 180° - 40° = 140°$, уг. $2 = 180° - 140° = 40°$, и уг. $a = 180° - 40° = 140°$; мы видим, что уг. 1 = уг. 2, и уг. a = уг. b. Вообще, так как уг. 1 вместе с углом a равен двум прямым (почему?), а уг. 2 вместе с тем же углом a тоже равен двум прямым, то ясно, что уг. 1 должен равняться уг. 2. Итак:



Черт. 25.

П р о т и в о п о л о ж н ы е у г л ы р а в н ы.

Повторительные вопросы.

Какие углы называются противоположными? — Какое вы знаете свойство противоположных углов?

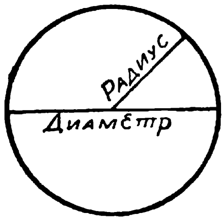
§ 10. Окружность.

До сих пор мы говорили только о прямых линиях. Из к р и в ы х линий остановимся на о к р у ж н о с т и (черт. 26). Окружность чертят циркулем. Острие ножки раздвинутого циркуля втыкают в бумагу, другую же ножку с карандашом вращают вокруг первой; когда карандаш сделает полный оборот, он проведет на бумаге замкнутую кривую — окружность. Та точка, в которую было воткнуто острие циркуля, называется центром окружности. Понятно, что все точки окружности удалены от центра на одинаковое расстояние; это расстояние называется радиусом окружности. Значит:

Окружность есть кривая линия, все точки которой одинаково удалены от одной точки, называемой центром.

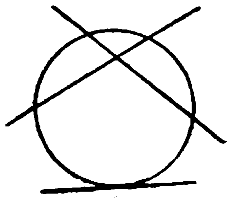
Прямая, соединяющая две точки окружности через центр, называется диаметром.

Всякая часть окружности называется ее дугою (черт. 27).



Черт. 26.

Черт. 27.



Черт. 28.

Плоская фигура, ограниченная окружностью, называется кругом.

Повторительные вопросы.

Что такое окружность? Центр? Радиус? Дуга? — Покажите все это на чертеже.— Все ли радиусы одной окружности равны между собою? — Что больше: диаметр или радиус? Во сколько раз?

Применения.

3. Гудок завода слышен на 4 *км.* Начертить в масштабе 1 *км* в 1 *см* границу местности, где слышен гудок этого завода.

Решение. Вокруг точки, обозначающей положение завода, начертить окружность радиусом 4 *см.*

4. Радиус круга 100 *см.* Некоторая точка удалена от центра на 40 *см.* Лежит ли она внутри круга или вне его? Каково ближайшее расстояние от этой точки до окружности?

Решение. Точка лежит внутри круга. Ближайшее расстояние ее от окружности надо считать вдоль диаметра, проведенного через эту точку; оно равно 60 *см.* Дальнейшее расстояние (вдоль того же диаметра) — 140 *см.*

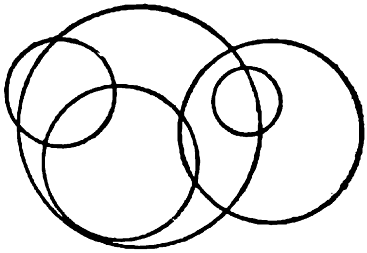
§ 11. Пересечение окружности с прямою и с другою окружностью.

Две прямые линии могут пересечься друг с другом только в одной точке; более одной общей точки две разные прямые иметь не могут, — иначе они сливаются одна с другой. В скольких же точках могут пересекаться друг с другом прямая и окружность?

Начертите одну или несколько окружностей и пересеките их прямыми линиями (черт. 28). Вы убедитесь, что прямая и окружность могут встречаться или в двух точках или в одной. Более двух общих точек прямая и окружность иметь не могут.

Подобным же испытанием мы найдем, что и две окружности не могут иметь более двух общих точек: они встречаются или в одной или в двух общих точках (черт. 29). Итак, запомним:

Прямая и окружность или две окружности не могут иметь более двух общих точек.



Черт. 29.

Применения.

5. В городе два завода в 8 *км* друг от друга. Гудок одного слышен на 5 *км*, другого — на 6 *км*. Изобразите, в выбранном вами масштабе, границы местности, где слышны гудки обоих заводов.

Решение. Выберем масштаб 2 *км* в 1 *см*. Взаимное удаление заводов изобразится тогда отрезком в 4 *см*. Наметив на чертеже две точки в расстоянии 4 *см* одна от другой, проведем вокруг одной из них (как около центра) окружность радиусом $2^1/_2$ *см*, а вокруг другой — радиусом 3 *см*. Окружности пересекутся, и общая часть обоих кругов будет изображать местность, где слышны гудки обоих заводов.

6. Две радиостанции расположены в 600 *км* одна от другой. Дальность приема одной 400 *км*, другой — 300 *км*. Начертите, в масштабе 100 *км* в 1 *см*, границу местности, где можно принимать обе станции.

Решение сходно с решением предыдущей задачи.

§ 12. Измерение углов.

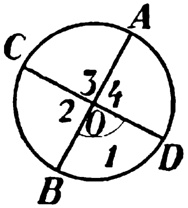
Какою мерою измеряются углы? Длину линий измеряют длиною определенной линейки (метром); вес вещей — весом определенной гири. Так и углы измеряют определенным углом, который принимают за меру углов. Мерою для углов избран прямой угол, потому что все прямые углы имеют одну и ту же величину. Но прямой угол слишком велик, чтобы служить удобной единицей меры; поэтому пользуються некоторою долею его — именно 90-й. Прямой угол делят на 90 равных частей, и такими частями измеряют все прочие углы, т.-е. узнают, сколько этих частей заключается в измеряемом угле. 90-я доля прямого угла называется угловым градусом. Угол в один градус весьма мал; все же для точных измерений приходится пользоваться даже долями такого угла. Принято употреблять для этого 60-ю долю градуса; она называется угловою минутою. Итак:

прямой угол = 90 углов. градусам,
градус = 60 углов. минутам.

На письме градус сокращенно обозначается маленьким кружком (как и градус температуры), а минута — знаком $'$. Например, $23^\circ\ 27'$ означает 23 градуса 27 минут.

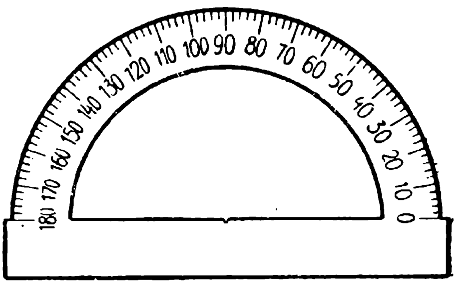
Объясним теперь, каким образом производится измерение углов на практике.

Проведем в какой-нибудь окружности два диаметра под прямым углом друг к другу (черт. 30). Получим четыре угла (1, 2, 3 и 4), вершины которых лежат в центре. Угол, вершина которого лежит в центре круга, называется центральным углом.



Черт. 30.

У нас имеется, следовательно, 4 равных центральных угла. Легко убедиться, что в этом случае равны и те 4 дуги, которые лежат между сторонами наших углов, т. е. что дуга AD=дуге DB=дуге BC= дуге CA. Для этого достаточно лишь мысленно перегнуть окружность по начерченным диаметрам. При перегибании по диаметру AB прямая OD должна пойти по OC, потому что угол 4 равен углу 3; точка D должна оказаться в точке C, потому что OD= OC (как радиусы одной окружности). Значит, начала (A) и концы дуг AD и CA совпадут; но при этом непременно совпадут и все промежуточные точки обеих дуг, потому что они удалены от центра O одинаково. Таким же образом можно убедиться, что равны между собою все 4 дуги. Вообще, равные центральные углы одной окружности имеют всегда и равные дуги между их сторонами. Поэтому, если каждый из 4-х прямых углов 1, 2, 3, 4 разделить на 90 равных частей, то и дуги между ними разделятся на равные части, которые будут составлять 360-ю долю полной окружности. Эта 360-я часть полной окружности тоже называется „градусом", но—в отличие от углового—дуговым. Мы видим, что каждому дуговому градусу отвечает один угловой градус; поэтому сколько между сторонами какого-нибудь центрального угла содержится дуговых градусов. столько же в этом угле угловых градусов. Узнать же, сколько между сторонами измеряемого угла дуговых градусов, можно при помощи особого чертежного инструмента — транспортира.



Черт. 31.

Транспортир—это металлический или бумажный полукруг (черт. 31), дуга которого разделена на градусы (т.-е. на 180 равных частей).

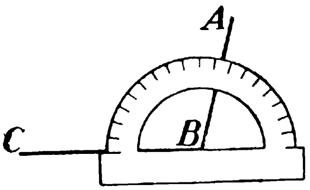
При измерении угла накладывают на него транспортир так, чтобы вершина угла была в центре полуокружности. Таким образом, измеряемый угол превращается в центральный, и тогда число градусов в его дуге легко отсчитать по делениям, нанесенным на краю транспортира. Диаметр дуги транспортира должен при этом сливаться с одной стороной измеряемого угла. Черт. 32 поясняет сказанное.

Прибавим еще, что 60-я доля дугового градуса называется „дуговой минутой“.

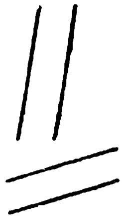
Над числами, которые получаются от измерения углов, можно производить различные действия — складывать, вычитать, умножать, делить. Если, например, надо сложить два угла: в $14^\circ\,32'$ и $19^\circ\,45'$, то подписывают их один под другим, как здесь показано:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 14^\circ\ 32' \\ 19^\circ\ 45' \end{array} \\
\hline
\end{array}
$$

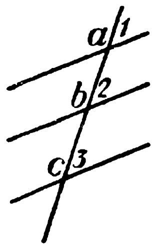
Затем складывают минуты с минутами, градусы с градусами. Так как минут в этом случае получается 77, т. е. на 17 минут больше



Черт. 32.



Черт. 33.



Черт. 34.

одного градуса, то в столбце минут записываем 17 минут, а 1 градус прибавляем к сумме градусов. В результате имеем:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 14^\circ\ 32' \\ 19^\circ\ 45' \end{array} \\
\hline
34^\circ\ 17'
\end{array}
$$

Сходным образом выполняются и другие действия.

Повторительные вопросы.

Что называется угловым градусом? Угловой минутой? — Как они обозначаются? — Какой угол называется центральным? — Что называется дуговым градусом? — Что такое транспортнр? — Покажите на чертеже, как им пользоваться.

§ 13. Параллельные прямые. Углы при них.

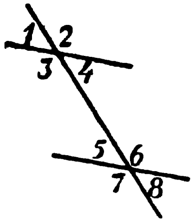
Мы знаем, что прямые линии при встрече образуют углы. Бывает, однако, и такое расположение прямых на плоскости, когда они вовсе не встречаются, сколько бы их ни продолжали. Такие непересекающиеся линии называются п а р а л л е л ь н ы м и (черт. 33). Примером параллельных линий могут быть рельсы прямолинейного железнодорожного пути, линовка тетради и т. п.

Важнейшее свойство параллельных линий с л е д у ю щ е е: когда прямая линия пересекает ряд параллельных (черт. 34), то образующиеся при этом так называемые с о о т в е т с т в е н н ы е углы равны. На черт. 34 соответственные углы 1, 2, 3, а также углы *a, b, c* — равны.

На черт. 35 из 8 образовавшихся углов равны между собою следующие соответственные углы:

1 и 5
2 и 6
3 и 7
4 и 8

Поэтому, если на черт. 35 уг. 1=50°, то и уг. 5=50°; если уг. 2=130°, то уг. 6 также равен 130°, — и т. д.



Черт. 35.

Предварительные упражнения.

1) На черт. 35 уг. 1 равен 25°. Найти все прочие углы.
2) На черт. 35 уг. 6 равен 150°. Найти все прочие углы.
3) На черт. 35 уг. 1 равен *a*. Найти все прочие углы.

Из равенства соответственных углов вытекает равенство еще и других углов. Действительно, если уг. 1=уг. 5, то и уг. 4=уг. 5 (почему?). Далее: из того, что уг. 2=уг. 6, следует, что и уг. 3=уг. 6 (почему?). Рассуждая подобным образом, мы можем установить равенство следующих пар так наз. перекрестных углов:

4 и 5
3 и 6
2 и 7
1 и 8

Итак, мы установили:

При параллельных линиях соответственные, а также перекрестные углы равны.

Предварительные упражнения.

1) На черт. 35 уг. 3 = 160°. Чему равен уг. 5?
2) На черт. 35 уг. 4 = 28°. Чему равен уг. 6?
3) На черт. 35 уг. 2 = 156°. Чему равен уг. 8?

Кроме перечисленных ранее углов, особые названия даются также следующим парам углов при параллельных линиях:

$\left.\begin{matrix} 3 \text{ и } 5 \\ 4 \text{ и } 6 \end{matrix}\right\}$ внутренние односторонние;

$\left.\begin{matrix} 1 \text{ и } 7 \\ 2 \text{ и } 8 \end{matrix}\right\}$ внешние односторонние

Углы этих пар не должны быть непременно равны между собою; они имеют другую особенность: сумма их составляет два прямых угла. Легко понять, почему это так: уг. 3 + уг. 4 = двум прямым углам; заменяя уг. 4 равным ему углом 5, узнаем, что уг. 3 + уг. 5 = двум прямым углам. Таким же образом убеждаемся, что углы остальных перечисленных пар в сумме равны двум прямым.

Итак, запомним:

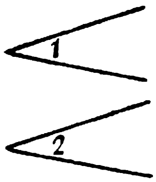
Соответственные углы, а также перекрестные при параллельных равны между собою; пара односторонних составляет вместе два прямых угла.

§ 14. Углы с параллельными сторонами.

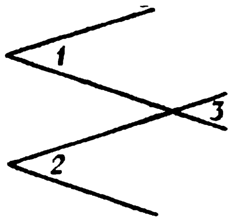
Предварительные упражнения.

Начертите несколько пар углов, расположенных так, что стороны одного угла параллельны сторонам другого. Какие здесь возможны случаи? Возможно ли, чтобы обе пары параллельных сторон имели одинаковое направление (например, все направлялись бы влево от вершин углов)? Возможно ли, чтобы параллельные стороны имели встречное направление? Еще какое возможно здесь расположение?

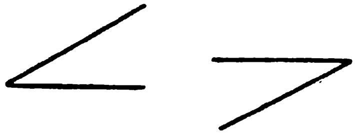
Рассмотрим свойство углов, расположенных так, что стороны одного угла параллельны сторонам другого и притом одинаково



Черт. 36.

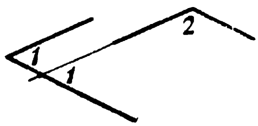


Черт. 37.



Черт. 38.

направлены (считая от вершины; см. черт. 36). Нетрудно убедиться, что такие углы всегда равны: продолжив сторону одного угла до пересечения со стороною другого угла (черт. 37), видим, что уг. 2=уг. 3; уг. 1 = уг. 3; значит, уг. 1=уг. 2. Это верно и при ином расположении углов с параллельными сторонами: когда обе стороны угла направлены противоположно обеим сторонам другого (черт. 38). Убедиться в этом можно таким же образом, как и в сейчас рассмотренном случае.



Черт. 39.

Но если параллельные стороны двух углов имеют в одной паре одинаковое направление, в другой же паре — противоположное, то такие углы не равны (уг. 1 и уг. 2 на черт. 39). Продолжив одну сторону одного угла до пересечения со стороною другого угла, видим, что уг. 2 вместе с уг. 1 составляют два прямых угла (почему?);

Повторительные вопросы к §§ 13 и 14.

Какие линии называются параллельными? — Покажите на чертеже соответственные углы, перекрестные, односторонние. — Какие из них при параллельных линиях равны? — Какое вам известно свойство односторонних углов? Углов с параллельными сторонами? Какие углы с параллельными сторонами равны и какие не равны? — Каким свойством отличаются неравные углы с параллельными сторонами?

Применения §§ 13 и 14.

7. Прямая линия перпендикулярна к одной из параллельных. Под каким углом встречает она другую параллельную?

Решение. Тоже под прямым углом, так как соответственные углы при параллельных линиях равны.

8. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных третьей прямой линией, равен 64°. Чему равны остальные 7 углов (сделайте чертеж и надпишите на нем размеры углов).

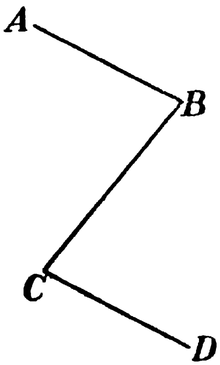
Решение. Углы, смежные с данным = 116°; противоположный = 64°. Такие же размеры имеют и углы, с ними соответственные.

III. Первые сведения о треугольниках. Параллелограммы.

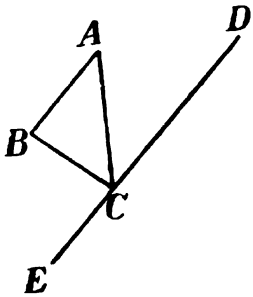
§ 15. Сумма углов треугольника.

Предварительные упражнения.

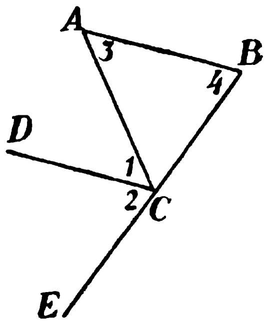
1) На черт. 40 линии AB и CD параллельны. Укажите в фигуре $ABCD$ равные углы.
2) На черт. 41 DE параллельно AB. Укажите равные углы в этой фигуре.
3) На черт. 42 CD параллельно AB. Укажите равные углы в этой фигуре.
4) Докажите, что на черт. 42 уг. 1 + уг. 2 = уг. 3 + уг. 4.



Черт. 40.



Черт. 41.



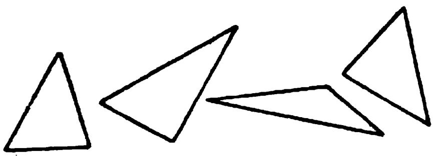
Черт. 42.

Познакомившись со свойствами отдельных прямых линий и углов, перейдем к изучению замкнутых фигур. Начнем с фигуры, называемой треугольником. Это—фигура, ограниченная тремя прямыми линиями; у нее три угла, вершины которых называются вершинами треугольника. Треугольники могут иметь весьма разнообразную форму, в зависимости от величины углов (черт. 43).

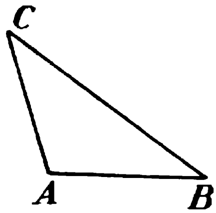
Главное свойство всякого треугольника состоит в том, что какова бы ни была длина его сторон и какую бы форму он ни имел, сумма его трех углов всегда одинакова: она равна двум прямым углам. Покажем, как в этом убедиться.

Рассмотрим для примера треугольник ABC (черт. 44). Продолжим сторону AC за вершину C, как показано на черт. 45

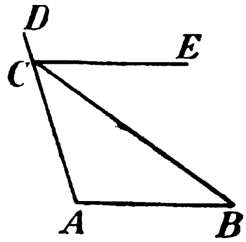
Получим угол BCD; такие углы называются внешними углами треугольника (в отличие от внутренних). Легко убедиться, что этот угол должен равняться сумме несмежных с ним внутренних углов A и B. Для этого достаточно лишь провести через вершину C прямую CE, параллельную противолежащей стороне AB. Тогда из двух углов, на которые разделится внешний угол DCB, один — угол DCE — равен углу A, потому что это соответственные углы при параллельных CE и AB; а другой угол ECB равен углу B, потому что это перекрестные углы



Черт. 43.



Черт. 44.



Черт. 45.

при тех же параллельных. Отсюда угол $A +$ уг. $B =$ углу DCB. Следовательно, уг. $A +$ уг. $B +$ уг. $ACB =$ уг. $DCB + ACB =$ $=$ двум прямым углам.

Приведенное рассуждение мы можем приложить ко всякому треугольнику, какой бы формы и величины он ни был. Во всех случаях мы убедимся, что

Сумма углов треугольника равна двум прямым углам, т.-е. $180°$.

Повторительные вопросы.

Какая фигура называется треугольником? — Сколько у треугольника вершин? Покажите их на чертеже. — Покажите на чертеже внешний угол. — Какая зависимость существует между внешним углом и несмежными с ним внутренними? Как в этом убедиться? — Чему равна сумма углов всякого треугольника?

§ 16. Следствия предыдущего параграфа.

Предварительные упражнения.

1) Попробуйте начертить треугольник с двумя тупыми углами. С одним тупым и одним прямым. С двумя прямыми.

2) Какой из углов на черт. 46 больше: уг. 1 или уг. 3? Уг. 1 или уг. 2?

3) Из точки D (черт. 47) проведен к прямой BC перпендикуляр DA. Можно ли через ту же точку D провести к BC еще один перпендикуляр, который не сливался бы с DA?

4) К прямой AB (черт. 48) проведены три перпендикуляра. Пересекутся ли они между собой, если продолжить их в обе стороны?

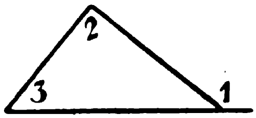
5) Прямую AB (черт. 49) встречают две прямые CD и EF под равными соответственными углами. Пересекутся ли эти две прямые, если продолжить их в обе стороны?

Из свойств суммы углов треугольника вытекает ряд других свойств фигур. Заметим некоторые из них:

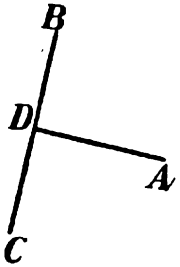
1) *В треугольнике не может быть больше одного тупого угла* (подумайте, какова должна была бы быть сумма всех углов треугольника, если бы три или два его угла были тупые, т.-е. больше прямого).

2) *В треугольнике не может быть больше одного прямого угла* (почему?)

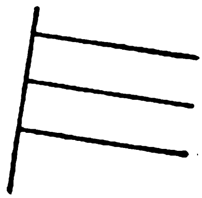
3) *Внешний угол треугольника больше каждого несмежного с ним внутреннего* (см. черт. 45).



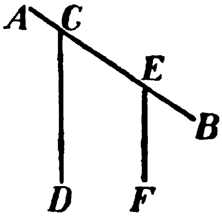
Черт. 46.



Черт. 47.



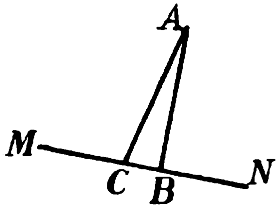
Черт. 48.



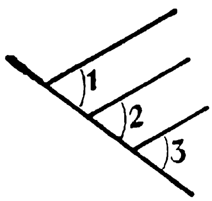
Черт. 49.

4) *Через точку, лежащую вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр.*— Если бы, например (черт. 50), к прямой MN можно было провести из точки A больше одного перпендикуляра,—скажем, кроме AB еще AC,—то в треугольнике ABC оказалось бы два прямых угла, а это, мы знаем, невозможно.

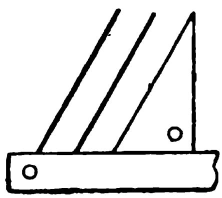
5) *Несколько перпендикуляров к одной прямой линии* (черт. 48) *всегда параллельны между собою.* Если бы они были не параллельны, т.-е. если бы они встречались, то составились бы треугольники с двумя прямыми углами каждый.



Черт. 50.



Черт. 51.



Черт. 52.

6) *Прямые линии, встречающие одну и ту же прямую под равными соответственными углами* (черт. 51), *параллельны между собой.*—Если бы они были не параллельны, т. е. если бы встречались, то уг. 2, например, оказался бы внешним углом треугольника, а *равный ему* уг. 1—внутренним углом того же треугольника; но это невозможно (см. следствие 3-е).

На последнем свойстве основан способ проводить параллельные линии помощью линейки и чертежного треугольника (черт. 52).

Повторительные вопросы.

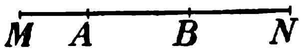
Могут ли три угла треугольника быть тупыми? А только два угла? — Может ли в треугольнике быть три прямых угла? А два прямых угла? (Попробуйте начертить такой треугольник). — Сколько перпендикуляров можно провести к прямой линии из внешней точки? — Каким свойством обладают два перпендикуляра к одной прямой? — Каким свойством обладают две прямые, встречающие третью под равными соответственными углами? — Как чертят параллельные помощью линейки и чертежного треугольника?

§ 17. Как построить треугольник по трем сторонам.

Рассмотрим следующую задачу:

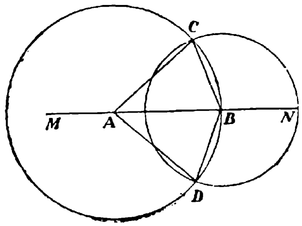
Расстояния между тремя селениями 7 *км,* 5 *км* и 6 *км.* Начертить расположение этих селений в масштабе 1 *км* в 1 *см.*

Ясно, что точки, изображающие селения, нужно расположить на вершинах треугольника, стороны которого 7 *см,* 5 *см* и 6 *см.* Объясним, как начертить („построить") этот треугольник



Черт. 53.

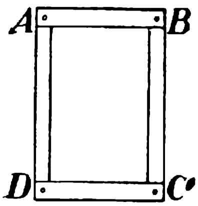
Проведем (черт. 53) по линейке прямую линию MN и отложим на ней помощью циркуля одну из сторон треугольника — напр., в 6 *см.* Концы этого отрезка обозначим буквами A и B. Остается найти такую третью точку, которая удалена от A на 7 *см* и от B на 5 *см* (или наоборот): это и будет третья вершина треугольника со сторонами 7 *см,* 5 *см* и 6 *см.* Чтобы эту точку разыскать, раздвигают сначала концы циркуля на 7 *см* и описывают окружность вокруг точки A, как около центра (черт. 54). Все точки этой окружности отстоят от A на 7 *см*; среди них нужно найти ту, которая отстоит от вершины B на 5 *см.* Для этого вокруг B, как около центра, описывают окружность радиусом 5 *см.* Где обе окружности пересекаются, там лежат точки, удаленные от A на 7 *см* и от B на 5 *см* (черт. 54). Наши окружности пересекутся в двух точках C и D. Соединив их с A и B, получим два треугольника CAB и DAB, имеющие стороны в 6 *см,* в 7 *см* и в 5 *см.*



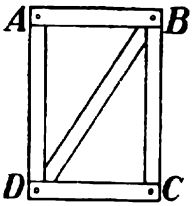
Черт. 54.

Нетрудно убедиться, что треугольники эти равны, т.-е. будут совпадать, если их наложить один на другой. Для этого перегнем черт. 54 так, чтобы линией перегиба была прямая MN, и чтобы верхняя часть чертежа покрыла нижнюю. Обе окружности перегнутся при этом по их диаметрам, и верхние полуокружности совпадут с нижними (почему?); но если совпадают все точки обеих полуокружностей, то должны совпадать и точки их пересечений C и D, а тогда сольются и стороны обоих треугольников. Значит, треугольники CAB и DAB — равны.

Мы могли бы вести построение треугольника и в другом порядке: отложить на MN сначала сторону в 7 *см* и описать окружность радиусами 5 *см* и 6 *см*. Или же отложить сначала сторону в 5 *см*, и описать окружность радиусами в 6 *см* и в 7 *см*. При любом порядке построения у нас будут получаться одни и те же треугольники, только различно повернутые (или перевернутые на левую сторону). В подробных учебниках математики доказывается, что все треугольники, составленные из одинаковых сторон, равны между собою (т.-е. при наложении совпадают всеми точками). Другими словами, если три стороны одного треугольника порознь равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники можно наложить друг на друга так, чтобы все их точки совпали. Это выражают короче так:



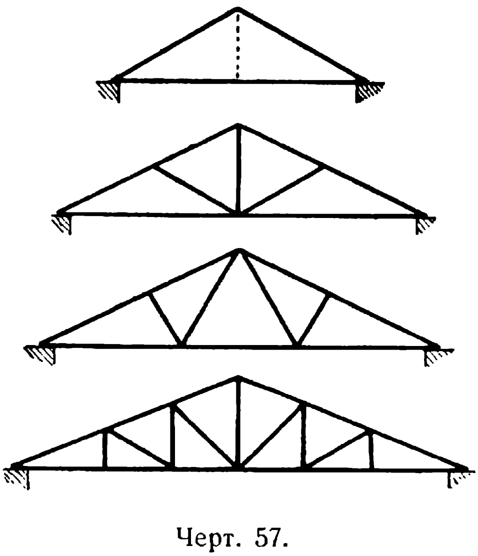
Черт. 55.



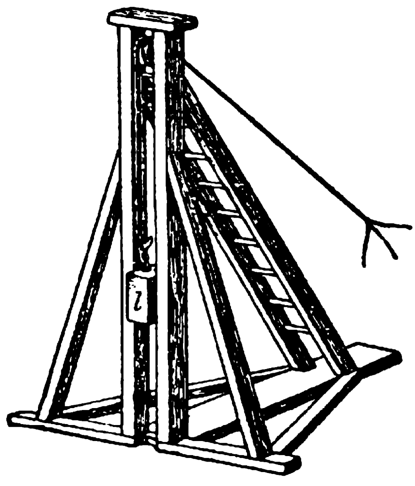
Черт. 56.

Треугольники равны по трем сторонам.

Так как при совпадении сторон треугольников совпадают и их углы, то ясно, что в равных треугольниках между равными сторонами (и против равных сторон) лежат и равные углы. Равенство трех сторон треугольников есть признак того, что у этих треугольников равны и углы. Значит, в треугольнике



Черт. 57.



Черт. 58.

нельзя изменить углов, не меняя длины его сторон: иначе оказалось бы возможным получить треугольники с одинаковыми сторонами и в то же время с неодинаковыми углами. Этим свойством треугольника часто пользуются на практике. Например, чтобы рама $ABCD$ (черт. 55) прочно сохраняла свою форму, ее разбивают перекладкой BD на два треугольника (черт. 56). То же назначение имеет и сеть треугольников в частях мостов и др. сооружений (черт. 57 и 58).

Всегда ли по трем сторонам можно построить треугольник? Вникая в описанное раньше построение, мы поймем, что третья вершина треугольника отыскивается только тогда, когда окружности пересекаются. Если бы на черт. 54 сторона AB была не в 6 *см*, а в 15 *см*, то другие две стороны (7 *см* и 5 *см*) давали бы слишком короткие радиусы, чтобы окружности могли пересечься, и тогда треугольник нельзя было бы построить. Вообще, если один отрезок больше, чем сумма двух других, то из таких отрезков нельзя построить треугольника. Это и прямо видно из фигуры всякого треугольника (черт. 44): прямая линия — самая короткая из всех, проведенных между ее концами; поэтому AC меньше, чем $AB+BC$; AB меньше, чем $AC+BC$; BC меньше, чем $AB+AC$. Вообще:

В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других.

Повторительные вопросы.

Постройте треугольник, стороны которого 44 *мм*, 58 *мм* и 66 *мм*. — Какие углы равны в равных треугольниках? — Из всяких ли трех отрезков можно построить треугольник? — Какая зависимость существует между сторонами треугольника?

Применения.

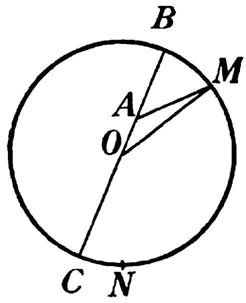
9. В городе три завода, взаимно удаленные на 4,8 *км*, 2,4 *км* и 3,2 *км*. Начертите их расположение в масштабе 80 *м* в 1 *мм*.

Решение. Строят треугольник со сторонами 6 *см*, 3 *см* и 4 *см*.

10. Возможен ли треугольник со сторонами в 10 *см*, 20 *см* и 30 *см*? 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*? 6 *см*, 6 *см* и 13 *см*?

Решение. В первом случае невозможен, так как $10+20$ не больше 30. Во втором случае возможен. В третьем случае невозможен: $6+6$ не больше 13.

11. Почему кратчайшее и дальнейшее расстояние от точки до окружности надо считать по прямой, проходящей через центр круга?

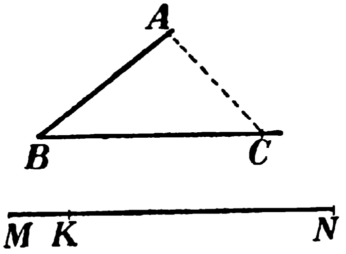


Черт. 59.

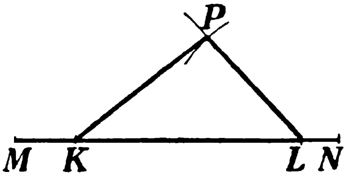
Решение. Рассмотрим задачу для точки A (черт. 59), расположенной внутри круга. Покажем что AB короче AM. Соединив OCM, рассуждаем так: $OA+AM$ больше OM (почему?); но $OM=OB$; значит $OA+AM$ больше OB. Отняв по OA от обоих сравниваемых расстояний, мы имеем: AM больше AB. Сходным образом можно показать, что дальнейшее расстояние точки A равно AC, т.-е. что AC больше, напр., AN. Предлагаем читателю самому это доказать, а также рассмотреть случаи, когда точка лежит вне окружности.

§ 18. Как построить угол, равный данному.

Часто нужно бывает начертить („построить“) угол, который был бы равен данному углу, причем построение необходимо выполнить без помощи транспортира, а обходясь только циркулем и линейкой. Умея строить треугольник по трем сторонам, мы сможем решить и эту задачу. Пусть на прямой MN (черт. 60 и 61) требуется построить у точки K угол, равный начерченному углу B. Это значит, что надо из точки K провести прямую, составляю-



Черт. 60 и 61.



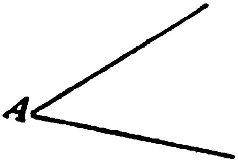
Черт. 62.

щую с MN угол, равный B. Для этого отметим на каждой из сторон данного угла по точке, например A и C, и соединим A и C прямой линией. Получим треугольник ABC. Построим теперь на прямой MN этот треугольник так, чтобы вершина его B находилась в точке K: тогда у этой точки и будет построен угол, равный углу B. Строить же треугольник по трем сторонам BC, BA и AC мы умеем: откладываем (черт. 62) от точки K отрезок KL, равный BC; получим точку L; вокруг K, как около центра, описываем окружность радиусом BA, а вокруг L — радиусом CA. Точку P пересечения окружностей соединяем с K и L, — получим треугольник KPL, равный треугольнику ABC; в нем угол K = уг. B.

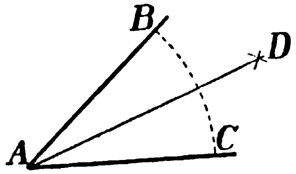
Это построение выполняется быстрее и удобнее, если от вершины B отложить р а в н ы е отрезки (одним расстворением циркуля) и, не сдвигая его ножек, описать тем же радиусом окружность около точки K, как около центра.

§ 19. Как разделить угол пополам.

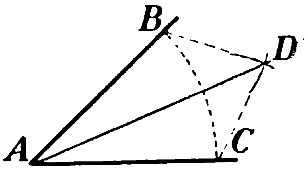
Пусть требуется разделить угол A (черт. 63) на две равные части помощью циркуля и линейки, не пользуясь транспортиром. Покажем, как это сделать.



Черт. 63.



Черт. 64.



Черт. 65.

От вершины A на сторонах угла отложим равные отрезки AB и AC (черт. 64; это делается одним расстворением циркуля). Затем ставим острие циркуля в точки B и C и описываем равными радиусами дуги, пересекающиеся в точке D. Прямая, соединяющая A и D, делит угол A пополам.

Объясним, почему это. Если точку D соединим с B и C (черт. 65), то получатся два треугольника ADC и ADB, у которых есть общая сторона AD; сторона AB равна стороне AC, а BD равна CD. По трем сторонам треугольники равны, а значит, равны и углы BAD и DAC, лежащие против равных сторон BD и CD. Следовательно, прямая AD делит угол BAC пополам.

Применения.

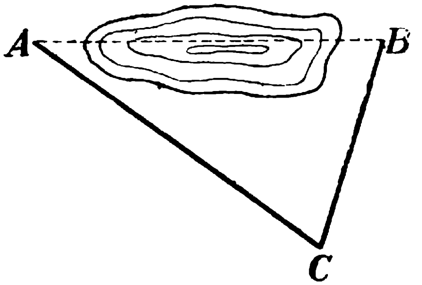
12. Построить без транспортира угол в 45°. В 22° 30′. В 67° 30′.

Решение. Разделив прямой угол пополам, получим угол в 45°. Разделив угол в 45° пополам, получим угол в 22° 30′. Построив сумму углов 45° + 22° 30′, получим угол в 67° 30′.

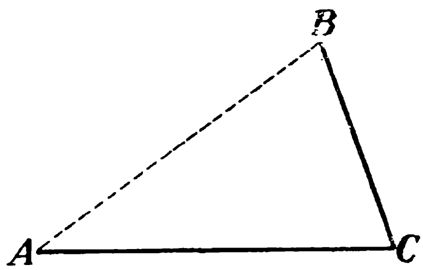
§ 20. Как построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Пусть требуется на местности узнать расстояние между двумя вехами A и B (черт 66), разделенными непроходимым болотом. Как это сделать?

Мы можем поступить так: в стороне от болота выберем такую точку C, откуда видны обе вехи и возможно измерить расстоя-



Черт. 66.

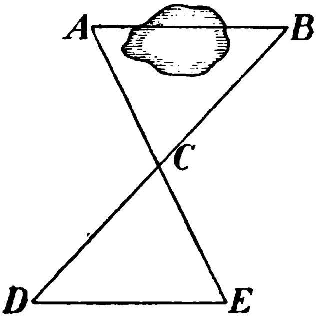


Черт. 67.

ния AC и BC. Угол C измеряем помощью особого угломерного прибора (называемого астролябией). По этим данным, т.-е. по измеренным сторонам AC и BC и углу C между ними, построим треугольник ABC где-нибудь на удобной местности следующим образом. Отмерив по прямой линии одну известную сторону (черт. 67), например AC, строят при ней у точки C угол C; на другой стороне этого угла отмеряют известную сторону BC. Концы известных сторон, т.-е. точки A и B соединяют прямой линией. Получается треугольник, в котором две стороны и угол между ними имеют наперед указанные размеры.

Из способа построения ясно, что по двум сторонам и углу между ними можно построить только один треугольник. Поэтому, если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого и углы между этими сторонами одинаковы, то такие треугольники можно друг на друга наложить всеми точками, т. е. у них должны быть равны также третьи стороны и прочие углы. Это значит, что равенство двух сторон треугольников и угла между ними может служить признаком полного равенства этих треугольников. Короче говоря:

Треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.



Черт. 68.

Применения.

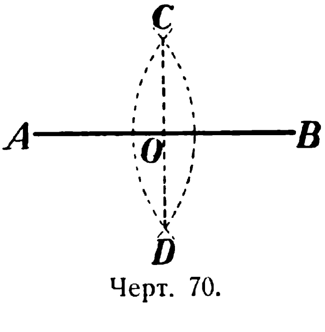
13. Чтобы определить расстояние от A до B через озеро (черт. 68), выбирают такую точку C, из которой видны обе точки A и B. На продолжении прямой AC отмеривают от точки C длину AC, а на продолжении линии BC отмеривают от C длину BC; получают точки E и D Расстояние между ними равно искомому расстоянию A B. Почему?

Решение. Треугольники ACB и DCE равны по двум сторонам $(AC = CE$; $BC = CD)$ и углу между ними (уг. $ACB =$ уг. DCE, как противоположные). Значит стороны DE и AB равны, как лежащие в равных треугольниках против равных углов.

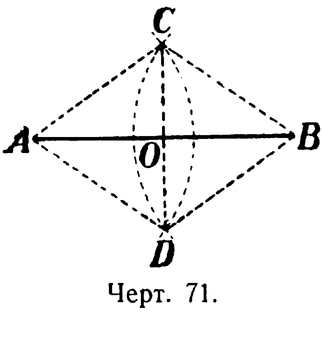
§ 21. Как разделить отрезок пополам.

Зная, что треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, мы можем помощью циркуля и линейки делить данный отрезок на две равные части. Если, например, требуется разделить пополам отрезок AB (черт. 69), то помещают острие циркуля в точки A и B и описывают вокруг них, как около центров, одинаковым радиусом две пересекающиеся дуги (черт. 70). Точки их пересечения C и D соединяют прямою, которая и разделит отрезок AB пополам: $AO = OB$.

Черт. 69.



Черт. 70.



Черт. 71.

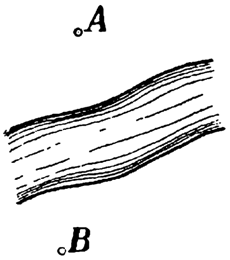
Чтобы убедиться, что отрезки AO и OB должны быть равны, соединим точки C и D с концами A и B отрезка (черт. 71). Получатся два треугольника ACD и BCD, у которых три стороны соответственно равны: $AC = BC$; $AD = BD$; CD — общая, т. е. принадлежит обоим треугольникам. Отсюда вытекает полное равенство указанных треугольников, а следовательно и равенство всех углов. Значит, между прочим, равны углы ACD и BCD. Сравнивая теперь треугольники ACO и BCO, видим, что у них сторона OC — общая, $AC = CB$, а угол между ними $ACO =$ уг. BCO. По двум сторонам и углу между ними треугольники равны; следовательно, равны стороны AO и OB, т. е. точка O есть середина отрезка AB.

§ 22. Как построить треугольник по стороне и двум углам.

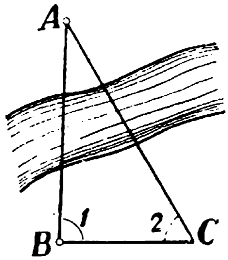
Рассмотрим, наконец, задачу, решение которой приводит к построению треугольника по стороне и двум углам:

На другом берегу реки (черт. 72) видна веха A. Требуется, не переправляясь через реку, узнать расстояние до нее от вехи B на этом берегу.

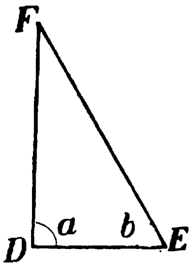
Поступим так. Отмерим от точки B по прямой линии какое-нибудь расстояние BC и у концов его B и C измерим углы 1 и



Черт. 72.



Черт. 73.



Черт. 74.

2 (черт. 73). Если теперь на удобной местности отмерить расстояние DE, равное BC, и построить у его концов углы a и b (черт. 74), равные углам 1 и 2, то в точке пересечения их сторон получим третью вершину F треугольника DEF. Легко убедиться, что треугольник DEF равен треугольнику ABC; действительно, если представим себе, что треугольник DEF наложен на ABC так, что сторона DE совпала с равной ей стороною BC, то уг. a совпадет с углом 1, угол b — с углом 2, и сторона DF пойдет по стороне BA, а сторона EF по стороне CA. Так как две прямые могут пересечься только в одной точке, то и вершина F должна совпасть с вершиной A. Значит, расстояние DF равно искомому расстоянию BA.

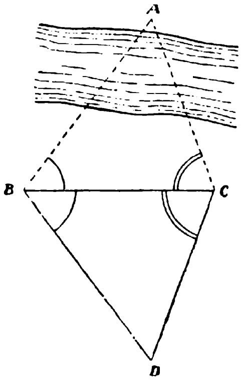
Задача, как видим, имеет только одно решение. Вообще по стороне и двум углам, прилегающим к этой стороне, можно построить только один треугольник; других треугольников с такою же стороною и такими же двумя углами, прилегающими к ней в тех же местах, быть не может. Все треугольники, имеющие по одной одинаковой стороне и по два одинаковых угла, прилегающих к ней в тех же местах, могут быть наложением приведены в полное совпадение. Значит, это признак, по которому можно установить полное равенство треугольников.

Вместе с прежде установленными признаками равенства треугольников, мы знаем теперь следующие три:

Треугольники равны:
по трем сторонам;
по двум сторонам и углу между ними;
по стороне и двум углам.

Эти три случая равенства треугольников мы будем в дальнейшем обозначать ради краткости так:

по трем сторонам: *ССС;*
по двум сторонам и углу между ними: *СУС;*
по стороне и двум углам: *УСУ.*



Черт. 75.

Применения.

14. Чтобы узнать расстояние до точки A на другом берегу реки от точки B на этом берегу (черт. 75), отмеряют по прямой линии какую-нибудь линию BC, затем при точке B строят угол, равный ABC, по другую сторону BC, а при точке C — таким же образом угол, равный ACB. Расстояние точки D пересечения сторон обеих сторон углов до точки B равно искомому расстоянию AB. Почему?

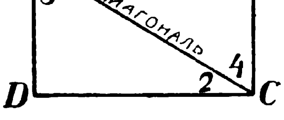
Решение. Треугольники ABC и BDC равны по одной стороне (BC) и двум углам (уг. DCB = уг. ACB; уг. DBC = уг. ABC.) Следовательно, $AB = BD$, как стороны, лежащие в равных треугольниках против равных углов.

§ 23. Параллелограммы.

От треугольников перейдем к четыреугольникам, т. е. к фигурам, ограниченным 4-мя сторонами. Примером четыреугольника может служить квадрат — такой четыреугольник, все стороны которого равны, а все углы—прямые (черт. 76). Другой вид четыреугольника, тоже часто встречающийся, — прямоугольник:


Черт. 76

Черт. 77 и 78.

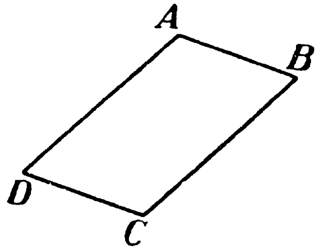


Черт. 79.

так называется всякий четыреугольник с 4-мя прямыми углами (черт. 77 и 78). Квадрат — тоже прямоугольник, но с равными сторонами.

Особенность прямоугольника (и квадрата) та, что обе пары его противоположных сторон параллельны. В прямоугольнике $ABCD$, например (черт. 78), AB параллельно DC, а AD параллельно BC. Это следует из того, что обе противолежащие стороны перпендикулярны к одной и той же прямой, а мы знаем, что два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собою (§ 16).

Другое свойство каждого прямоугольника то, что противоположные его стороны **равны** между собою. В этом можно убедиться, если соединить противоположные вершины прямоугольника прямой линией, т. е. провести в нем **диагональ**. Соединив A с C (черт. 79) мы получим два треугольника ABC и ADC. Легко показать, что эти треугольники равны друг другу: сторона AC — общая, уг. $1 =$ уг. 2, потому что это перекрестные углы при параллельных AB и CD; по такой же причине равны углы 3 и 4. По стороне же и двум углам треугольники ABC и ACD равны; следовательно, сторона $AB =$ стороне DC, и сторона $AD =$ стороне BC.



Черт. 80.

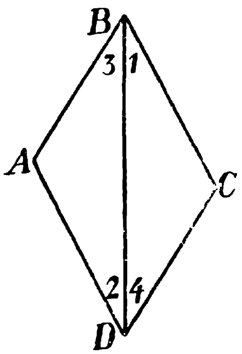
Такие четыреугольники, у которых, как у прямоугольников, противоположные стороны **параллельны**, называются параллелограммами. На черт. 80 изображен пример параллелограмма: AB параллельно DC, а AD параллельно BC. Прямоугольник — один из параллелограммов, а именно такой, у которого все углы прямые.

Легко убедиться, что каждый параллелограмм обладает следующими свойствами:

Противоположные углы параллелограмма равны; противоположные стороны параллелограмма равны.

Чтобы убедиться в этом, проведем в параллелограмме $ABCD$ (черт. 81) прямую BD (диагональ) и сравним треугольники ABD и BDC. Эти треугольники равны (случай $УСУ$): BD — общая сторона; уг. $1 =$ уг. 2, уг. $3 =$ уг. 4 (почему?). Отсюда вытекают перечисленные раньше свойства.

Параллелограмм с четырьмя равными сторонами называется **ромбом**.



Черт. 81.

Повторительные вопросы.

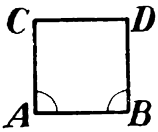
Какая фигура называется квадратом? Прямоугольником? — Что называется диагональю? — Какая фигура называется параллелограммом? Ромбом? — Укажите свойства углов и сторон всякого параллелограмма. — Какой прямоугольник называется квадратом? — Какой параллелограмм называется прямоугольником? — В чем сходство и различие между квадратом и ромбом?

Применения.

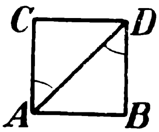
15. Квадрат чертят так: отложив одну сторону проводят к ней на концах перпендикуляры, откладывают на них такие же длины и соединяют концы прямой линией (черт. 82). Как убедиться, что четвертая сторона начерченного четыреугольника равна трем остальным и что все углы его прямые?

Решение. Если построение велось так, что к стороне AB в точках A и B были проведены перпендикуляры, на которых отложены: $AC = AB$ и $DB = AB$, то остается доказать. что углы C и D прямые и что CD равно AB. Для этого проведем (черт. 83) диагональ AD. Уг. $CAD = ADB$, как соответственные (при каких параллельных?); $AC = DB$, а потому треугольники CAD и BAD равны (по признаку *СУС*). Отсюда выводим, что $CD = AB$ и уг. C = прямому углу B. Как доказать, что четвертый угол CDB тоже прямой?

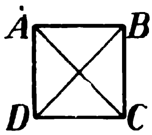
16. Как начертить прямоугольник? Почему начерченная фигура может быть названа прямоугольником? (Показать, что все углы начерченной фигуры прямые).



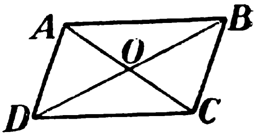
Черт. 82.



Черт. 83.



Черт. 84.



Черт. 85.

Решение сходно с решением предыдущей задачи.

17. Докажите, что обе диагонали прямоугольника равны.

Решение (черт. 84) вытекает из равенства треугольников ABC и ABD (по признаку *СУС*).

18. Докажите, что диагонали параллелограмма делят друг друга пополам.

Решение Сравнивая (черт. 85) треугольники ABO и DCO, убеждаемся, что они равны (по признаку *УСУ*). Отсюда $AO = OC$, $OB = OD$.

19. Длина общего перпендикуляра между двумя параллельными прямыми называется расстоянием между ними. Докажите, что расстояние между параллельными всюду одинаково.

Указание: Какую фигуру образуют параллельные линии с двумя перпендикулярами между ними?

IV. Измерение площадей.

§ 24. Квадратные меры. Палетка.

В фигурах часто приходится измерять не только длину линий и углы между ними, но и величину того участка, который они охватывают, — т. е. их площадь. В каких мерах измеряется площадь? За меру длины принята определенная длина (метр, сантиметр), за меру углов — определенный угол (1°); за меру же площадей принята определенная площадь, а именно, площадь квадрата со стороною в 1 метр, в 1 *см* и т. д. Такой квадрат называется „квадратным метром“, „квадратным сантиметром“ и т. д. Измерить площадь, значит узнать, сколько в ней квадратных единиц меры.

Если измеряемая площадь не велика (умещается на листе бумаги), ее можно измерить следующим образом. Прозрачную бумагу разграфляют на сантиметровые квадраты и накладывают на измеряемую фигуру. Тогда нетрудно прямо сосчитать, сколько квадратных сантиметров содержится в границах фигуры. При этом неполные квадраты близ границы принимают (на-глаз) за полквадрата, за четверть квадрата и т. п., или мысленно соединяют их по несколько в целые квадраты. Разграфленная так прозрачная бумага называется палеткой. Этим способом часто пользуются для измерения площадей неправильных участков на плане.

Но не всегда бывает возможно и удобно накладывать сеть квадратов на измеряемую фигуру. Нельзя, например, измерять таким образом площадь пола или земельного участка. В таких случаях, вместо прямого измерения площади, прибегают к непрямому, состоящему в том, что измеряют только длину некоторых линий фигуры и производят над полученными числами определенные действия. В дальнейшем мы покажем, как это делается.

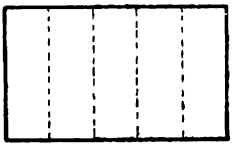
Повторительные вопросы.

В каких мерах определяют площадь фигур? — Что такое палетка и как ею пользуются?

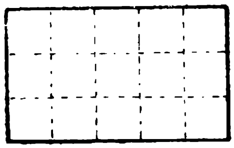
§ 25. Площадь прямоугольника.

Пусть требуется определить площадь какого-нибудь прямоугольника, например, $ABDC$ (черт. 86). Измеряют линейной еди-

Черт. 86.



Черт. 87.



Черт. 88.

ницей, напр. метром, длину этого участка. Предположим, что метр укладывается в длине 5 раз. Разделим участок на поперечные полоски шириною в метр, как показано на черт. 87. Таких полос получится, очевидно, 5. Далее измерим метром ширину участка; пусть она равна 3 метрам. Разделим участок на продольные полосы в 1 метр ширины, как показано на черт. 88; их получится, конечно, 3. Каждая из пяти поперечных полос рассечется при этом на 3 квадратных метра, а весь участок будет разделен на $5 \times 3 = 15$ квадратов со стороною в 1 метр: мы узнали, что участок заключает в себе 15 кв. метров. Но мы могли получить то же число 15, не разграфляя участка, а только перемножив его длину на его ширину. Итак, чтобы узнать, сколько квадратных метров в прямоугольнике, нужно измерить его длину, его ширину и перемножить оба числа.

В рассмотренном случае единица длины — метр — укладывалась в обеих сторонах прямоугольника целое число раз. В подробных учебниках математики доказывается, что установленное сейчас правило верно и тогда, когда стороны прямоугольника не содержат целого числа единиц длины. Во всех случаях:

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину, или, как говорят в геометрии,— его „основания" на его „высоту".

Если длина основания прямоугольника обозначена буквою a, а длина высоты — буквою b, то площадь его S равна

$$S = a \times b,$$

или просто $S=ab$, потому что знак умножения между буквами не ставится.

Легко сообразить, что для определения площади квадрата надо умножить длину его стороны на себя, т. е. „возвысить в квадрат". Другими словами:

Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Если длина стороны квадрата a, то площадь его S равна

$$S = a \times a = a^2.$$

Зная это, можно установить соотношение между различными квадратными единицами. Например, в квадратном метре содержится квадратных дециметров 10×10, т. е. 100, а квадратных сантиметров 100×100, т. е. 10 000, — потому что линейный сантиметр укладывается в стороне квадратного дециметра 10 раз, а квадратного метра — 100 раз.

Для измерения земельных участков употребляется особая мера — гектар, содержащая 10 000 квадратных метров. Квадратный участок со стороною 100 метров имеет площадь в 1 гектар; прямоугольный участок с основанием 200 метров и высотою 150 метров имеет площадь 200×150, т. е. в 30 000 *кв. м* или 3 гектара. Обширные площади — например, округа и районы, — измеряются квадратными километрами.

Сокращенное обозначение квадратных мер таково:

квадр. метр	*кв м* или *м*^{2}
квадр. дециметр . .	*кв. дм* или *дм*^{2}
квадр. сантиметр . .	*кв. см* или *см*^{2}
квадр. миллиметр .	*кв. мм* или *мм*^{2}
гектар	*га*

Повторительные вопросы.

Как вычисляется площадь прямоугольника? Квадрата? — Сколько *кв. см* в *кв. м?* Сколько *кв. мм* в *кв. м?* — Что такое гектар? – Сколько гектаров в *кв. км*? Как сокращенно обозначают квадратные меры?

Применения.

20. Требуется окрасить пол комнаты, изображенный на черт 6. Размеры обозначены в метрах. Сколько понадобится для этого материалов и рабочей силы, если известно, что для окраски одного кв. метра деревянных полов, с замазкою щелей и сучьев по прежде окрашенному, за два раза, требуется (по Урочному Положению):

Маляров	0,044
Олифы, килограммов	0,18
Охры светлой, *кг*	0;099
Замазки, *кг*	0,00225
Пемзы, *кг*	0,0009.

Решение. Площадь пола равна $8 \times 12 = 96$ *кв. м.* Расход материалов и рабочей силы таков

Маляров . .	$0{,}044 \times 96 = 4{,}2$ *
Олифы	$0{,}18 \times 96 = 17$ *кг.*
Охры	$0{,}099 \times 96 = 9{,}9$ *кг.*
Замазки	$0.00225 \times 96 = 0{,}22$ *кг.*
Пемзы	$0{,}0009 \times 96 = 0{,}09$ *кг.*

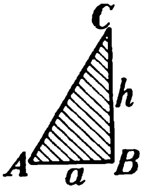
21. Составьте ведомость расхода рабочей силы и материалов для оклейки обоями комнаты предыдущ. задачи. На оклейку стен простыми обоями с бордюрами требуется (по Уроч. Положению) на кв. метр:

Маляров или обойщиков	0,044
Обоев (шир. 44 *см*) кусков . .	0,264
Бордюр (по расчету)	
Крахмала граммов	90.

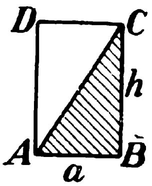
Решение — по образцу, указанному в предыдущей задаче. Заметим лишь, что при подсчете необходимого количества обоев на практике отверстия стен из их площади не вычитают (так как при пригонке фигур в смежных полотнищах часть обоев теряется).

§ 26. Площадь треугольника.

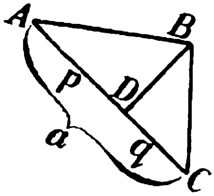
Рассмотрим сначала, как вычисляется площадь прямоугольного треугольника. Пусть требуется определить площадь тре-



Черт. 89.



Черт. 90.



Черт. 91.

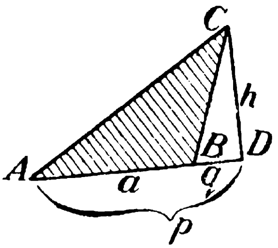
угольника ABC (черт. 89), в котором угол B — прямой. Проведем через вершины A и C прямые, параллельные противолежащим сторонам. Получим (черт. 90) прямоугольник $ABCD$ (почему эта фигура — прямоугольник?), который делится диагональю AC

---

* Это значит, что один маляр выполнит эту работу в 4,2 дня, два — в 2,1 дня и т. п.

на два равные треугольника (почему?). Площадь этого прямоугольника равна ah; площадь же нашего треугольника составляет половину площади прямоугольника, т. е. равна $^1|_2\, ah$. Итак, площадь всякого прямоугольного треугольника равна половине произведения его сторон, заключающих прямой угол.

Пусть теперь требуется определить площадь треугольника косоугольного (т. е. не прямоугольного), — напр. ABC (черт. 91). Проводим через одну из его вершин перпендикуляр к противоположной стороне; такой перпендикуляр называется высотою этого треугольника, а сторона, к которой он проведен — основанием треугольника. Обозначим высоту через h, а отрезки, на которые она делит основание, через p и q. Площадь прямоугольного треугольника ABD, как мы уже знаем, равна $^1|_2\, ph$; площадь $BDC = {}^1|_2\, qh$. Площадь S треугольника ABC равна сумме этих площадей* : $S = {}^1|_2\, ph + {}^1|_2\, qh = {}^1|_2\, h\,(p+q)$. Но $p + q = a$; следовательно $S = {}^1|_2\, ah$.



Черт. 92.

Рассуждение это нельзя прямо применить к треугольнику с тупым углом (черт. 92), потому что перпендикуляр CD встречает не основание AB, а его продолжение. В этом случае приходится рассуждать иначе. Обозначим отрезок AD через p, BD — через q, так что основание a треугольника равна $p - q$. Площадь нашего треугольника ABC равна разности площадей двух треугольников $ADC - BDC = {}^1|_2\, ph - {}^1|_2\, qh = {}^1|_2\, h\,(p-q) = {}^1|_2\, ah$.

Итак, во всех случаях площадь треугольника равна половине произведения любого его основания на соответствующую высоту.

Отсюда следует, что треугольники с равными основаниями и высотами имеют одинаковые площади, или, как говорят, равновелики. Равновеликими вообще называются фигуры, имеющие равные площади, хотя бы сами фигуры не были равны (т. е. не совпадали при наложении).

Повторительные вопросы.

Что называется высотою треугольника? Основанием треугольника? — Сколько высот можно провести в одном треугольнике? — Начертите треугольник с тупым углом и проведите в нем все высоты. — Как вычисляется площадь треугольника? Как выразить это правило формулой? — Какие фигуры называются равновеликими?

Применения.

22. Огород имеет форму треугольника с основанием 13,4 *м* и высотою 37,2 *м*. Сколько (по весу) требуется семян, чтобы засадить его капустой, если на *кв. м* идет 0,5 грамма семян?

---

* Далее мы прибегаем к равенству вида $xy + xz = x\,(y + z)$. Оно вытекает из того, что умножить каждое слагаемое на какое-нибудь число значит умножить сумму; напр. $7 \times 3 + 8 \times 3 = (7 + 8) \times 3$.

Решение. Площадь огорода равна $13{,}4 \times 37{,}2 = 498$ *кв. м.* Семян потребуется 250 *г.*

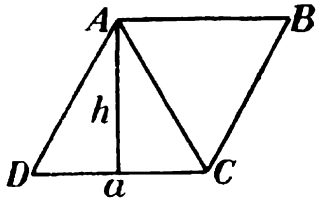
23. Параллелограмм разбивается диагоналями на 4 треугольные части. Какая из них имеет наибольшую площадь?

Решение. Все 4 треугольника равновелики, так как имеют равные основания и высоты.

§ 27. Площадь параллелограмма.

Правило вычисления площади параллелограмма устанавливается весьма просто, если разбить его диагональю на два треугольника. Например, площадь параллелограмма $ABCD$ (черт. 93) равна удвоенной площади каждого из двух равных треугольников, на которые он разбивается диагональю AC. Обозначив основание треугольника ADC через a, а высоту через h, получаем площадь S параллелограмма

$$S = ah.$$



Черт. 93.

Перпендикуляр h называется „высотою параллелограмма", а сторона a, к которой он проведен, — „основанием параллелограмма". Поэтому установленное сейчас правило можно высказать так:

Площадь параллелограмма равна произведению любого его основания на соответствующую высоту.

Повторительные вопросы.

Что называется основанием и высотою параллелограмма? Как вычисляется площадь параллелограмма? — Выразите это правило формулой. — Во сколько раз площадь параллелограмма больше площади треугольника, имеющего одинаковые с ним основание и высоту? — При равных высотах и основаниях какая фигура имеет бо̀льшую площадь: прямоугольник или параллелограмм?

Применение.

24. Квадрат со стороною 12,4 *см* равновелик параллелограмму с высотою 8,8 *см.* Найти основание параллелограмма.

Решение. Площадь этого квадрата, а следовательно и параллелограмма равна $12{,}4^2 = 154$ *кв. см.* Искомое основание равно $154 : 8{,}8 = 18$ *см.*

§ 28. Площадь трапеции.

Кроме параллелограммов, рассмотрим еще один вид четырехугольников — именно те, которые имеют только одну пару параллельных сторон (черт. 94). Такие фигуры называются трапециями. Параллельные стороны трапеции называются ее основаниями, а непараллельные — боками.

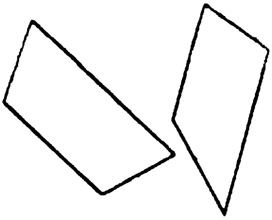
Установим правило вычисления площади трапеции. Пусть требуется вычислить площадь трапеции $ABCD$ (черт. 95), длина оснований которой a и b. Проведем диагональ AC, которая разрезает трапецию на два треугольника ACD и ABC. Мы знаем, что

$$\text{площ. } ACD = \tfrac{1}{2}\, ah$$
$$\text{площ. } ABC = \tfrac{1}{2}\, bh$$

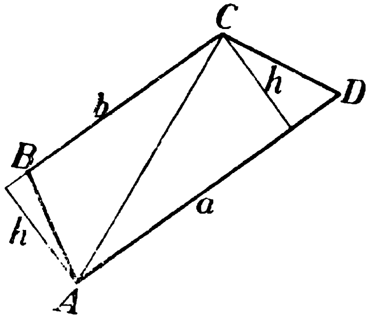
Значит:

$$\text{площ. } ABCD = \tfrac{1}{2}\, ah + \tfrac{1}{2}\, bh = \tfrac{1}{2}\,(a+b)\, h$$

Так как расстояние h между основаниями трапеции называется ее высотою, то правило вычисления площади трапеции можно высказать так:



Черт. 94.



Черт. 95.

Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту.

Повторительные вопросы.

Какая фигура называется трапецией? Что называется основаниями трапеции, ее боками и высотой? — Как вычисляется площадь трапеции?

Применения.

25. Участок улицы имеет форму трапеции с основаниями 180 *м* и 170 *м* и высотою 8,5 *м*. Сколько деревянных шашек потребуется для его настилки, если на *кв. м* идет 48 шашек?

Решение. Площадь участка равна $8{,}5 \times \frac{180 + 170}{2} = 1490$ *кв. м*. Число шашек = 72.000.

26. Скат крыши имеет форму трапеции, основания которой 23,6 *м* и 19,8 *м*, а высота 8,2 *м*. Сколько материала и рабочей силы потребуется на его покрытие, если на *кв. м* требуется:

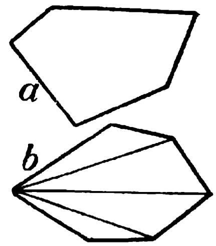
Железных листов	1,23
Гвоздей кровельных *кг*	0,032
Олифы *кг*	0,036
Кровельщиков	0,45.

Решение. Площадь ската равна $8{,}2 \times \frac{23{,}6 + 19{,}8}{2} = 178$ *кв. м*. Остается умножить на 178 все числа таблички.

§ 29. Площадь многоугольника и неправильных фигур.

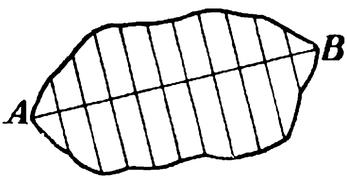
Фигуры, ограниченные более чем 4-мя линиями, называются многоугольниками (черт. 96). Прямые, соединяющие две несоседние вершины многоугольника, называются диагоналями (черт. 96, *b*). Так как всякий многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники, то площадь многоугольника легко вычислить, найдя площадь каждой его треугольной части.

Если, например, план участка имеет форму многоугольника, то, проведя в нем диагонали, измеряют длину оснований и высот образовавшихся треугольников. По этим данным определяют площадь каждого треугольника, а зная это, вычисляют площадь составляемого ими многоугольника.



Черт. 96.

При измерении площади участка, ограниченного линией неправильной формы, приходится довольствоваться лишь приближенным результатом. Пусть требуется определить площадь фигуры, изображенной на черт. 97. Для этого проводят прямую AB и через равные расстояния—к ней перпендикуляры. Фигура будет разрезана ими на узкие полосы, каждую из которых можно рассматривать как трапецию. Измерив параллельные стороны каждой трапеции, а также высоту (одинаковую для всех, потому что перпендикуляры проведены на равных расстояниях), вычисляют их площади; сумма отдельных площадей приближенно равна площади данной фигуры. Чем ближе проведены друг к другу перпендикуляры, тем точнее определение площади всей фигуры.



Черт. 97.

В некоторых случаях можно определить приближенно площадь фигуры посредством в з в е ш и в а н и я. Если, например, фигура, площадь которой требуется определить, начерчена на картоне, то, вырезав ее, узнают тщательным взвешиванием, во сколько раз эта фигура тяжелее сантиметрового квадрата из того же картона; во столько же раз, очевидно, больше и площадь.*

V. Поверхность и об'ем некоторых тел. **

§ 30. К у б.

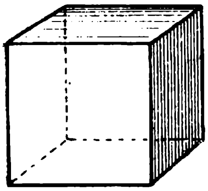
До сих пор мы занимались только плоскими фигурами, т.-е. такими, которые всеми своими точками расположены на плоскости. Плоскими поверхностями или плоскостями называются

* О других способах определения площади многоугольника, применяемых в землемерии, будет сказано далее, в главе „Занятия на открытом воздухе“.

** Сведения из алгебры, которые должны быть предварительно усвоены: буквенное обозначение, понятие о степени, нахождение стороны квадрата по данной площади подбором чисел и по таблицам, употребление скобок, вычисление по формулам.

такие поверхности, которые ровны и гладки, как поверхность зеркала или полированной доски; край линейки, приложенный в любом месте к плоскости, примыкает к ней всеми своими точками.

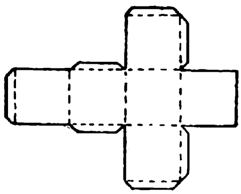
Теперь перейдем к фигурам, которые имеют не только длину и ширину, но также и высоту или толщину. Такие фигуры называются **телами**.



Черт. 98.

Начнем с рассмотрения наиболее общеизвестного тела — куба (черт. 98). Куб ограничен 6-ю равными квадратами, которые называются его **гранями**; стороны же граней называются **ребрами**. Одна из особенностей куба та, что его противоположные грани лежат в плоскостях, которые не встречаются, сколько бы их ни продолжали; такие плоскости называются **параллельными**.

Чтобы склеить куб из бумаги (либо изготовить из жести), надо начертить его выкройку, или, как ее называют, „развертку". На черт. 99 изображена такая развертка куба для склеивания из бумаги (полоски у краев граней оставлены для клея).



Черт. 99.

Повторительные вопросы.

Что называется плоскостью? Телом? Кубом? Гранями куба? Ребрами? — Сколько у куба граней? Сколько ребер? — Начертите развертку куба.

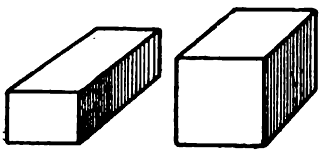
Применения.

27. Надо изготовить куб, полная поверхность которого равна 600 *кв. см.* Каково должно быть ребро этого куба?

Решение. Площадь каждой из шести квадратных граней куба равна $600 : 6 = 100$ *кв. см.* Ребро куба равно стороне квадрата, т.-е. $\sqrt{100} = 10$ *см.*

§ 31. Прямоугольный параллелепипед.

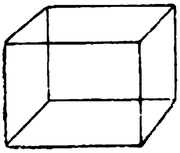
Куб может служить примером тел, которые в математике называются „прямоугольными параллелепипедами". Прямоугольный параллелепипед, это — тело, имеющее форму прямоугольного ящика или бруса; оно ограничено 6-ю **прямоугольниками**; противоположные грани его параллельны и равны (черт. 100).



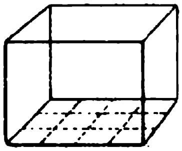
Черт. 100.

Часто нужно бывает определить, как велик **объем** прямоугольного параллелепипеда, — например, узнать вместимость ящика, „кубатуру" комнаты, объем бруса и т. п. Единицею меры для объемов служит объем такого куба, ребро которого равно 1 *см*, 1 *м*, — вообще какой-нибудь единице длины („линейной" единице). Такая единица меры называется „кубическим сантиметром", „кубическим метром" и т. п., — в зависимости от длины ребра кубической единицы. Подобно тому как площадь фигуры можно определить, измерив лишь некоторые линии этой фигуры, так и объем многих тел возможно вычислить, если измерить некоторые их линии. Покажем, как это делается для прямоугольного параллелепипеда.

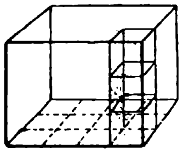
Пусть требуется определить объем (кубатуру) комнаты (черт. 101). Измеряем линейным метром длину и ширину пола: предположим, что длина его 4 *м*, а ширина 3 *м*. Мы можем, следова-



Черт. 101.



Черт. 102.



Черт. 103.

тельно, расчертить пол на $4 \cdot 3$, т.-е. на 12 метровых квадратов, как показывает черт. 102. Измерим теперь высоту комнаты; пусть она равна 3 метрам. Тогда очевидно, что на каждом метровом квадрате пола можно вообразить себе квадратный столб в 3 метра высоты, т.-е. составленный из 3 кубических метров (черт. 103). Так как всех подобных столбов 12, то в комнате поместится $12 \cdot 3 = 36$ кубических метров. Мы получили это число перемножением длины комнаты, ее ширины и высоты ($4 \cdot 3 \cdot 3$).

Итак, чтобы узнать, сколько кубических метров в комнате, нужно измерить линейным метром ее длину, ширину, высоту и перемножить эти три числа.

Сказанное относится ко всякому телу в форме прямоугольного параллелепипеда, — даже если его длина, ширина или высота содержит дробное число единиц меры. Во всех случаях —

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты (или, как говорят, — произведению трех его измерений).

Обозначая длину параллелепипеда через a, ширину — через b, высоту — через c, имеем, что объем v параллелепипеда

$$v = abc.$$

Так как у куба длина, ширина и высота равны, то

Объем куба равен кубу его ребра.

Обозначая ребро куба через a, имеем, что объем его

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Отсюда следует, что в кубическом метре $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ куб. дециметров, или $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$ куб. сантиметров, или $1\,000 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 1\,000\,000\,000$ куб. миллиметров.

Для измерения весьма больших объемов (например высокой горы) употребляют кубический километр. В кубическом километре $1\,000 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 1\,000\,000\,000$ (миллиард) куб. метров.

Итак:

куб. метр = миллиону *куб. см* = миллиарду *куб. мм.*
куб. километр = миллиарду куб. метров.

Сокращенное обозначение кубических мер таково:

куб. метр	*куб. м*	или $м^3$
„ дециметр	*куб. дм*	или $дм^3$
„ сантиметр	*куб. см*	или $см^3$
„ миллиметр	*куб. мм*	или $мм^3$
„ километр	*куб. км*	или $км^3$

Повторительные вопросы.

Какое тело называется прямоугольным параллелепипедом? — Какие у него грани? — Есть ли у него равные ребра? — Начертите развертку прямоугольного параллелепипеда. — Какие вы знаете кубические меры? — Как вычисляется объем прямоугольного параллелепипеда? Объем куба? — Напишите формулу объема этих тел. — Каковы соотношения между кубическими мерами? Каковы их сокращенные обозначения?

Применения.

28. На прямоугольное поле шириною 135 *м* и длиною 240 *м* выпало дождевой воды 3 *мм.* Сколько куб. метров воды выпало на все поле?

Решение. Искомый объем равен

$$135 \cdot 240 \cdot 0{,}003 = 100 \text{ куб. м.}$$

29. Прямоугольный бак в 1 *м* ширины и 140 *см* длины налит водою. Когда под воду окунулся человек, уровень воды поднялся на 4 *см.* Как велик объем тела этого человека?

Решение. Объем тела человека равен

$$100 \cdot 140 \cdot 4 = 60\,000 \text{ куб. см.}$$

30. Если куб с ребром 1 *см* представить себе разделенным на кубики с ребром в 0,1 *мм*, то во сколько раз общая поверхность всех этих мелких кубиков будет больше поверхности первоначального куба?

Решение. Поверхность куба с ребром 1 *см* равна 6 *кв. см* = 600 *кв. мм.* Поверхность кубика с ребром 0,1 *мм* равна $6 \cdot 0{,}01 = 0{,}06$ *кв. мм.* Число этих кубиков равно $= 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$. Общая поверхность кубиков будет $0{,}06 \cdot 1\,000\,000 = 60\,000$ *кв. мм*, т. е. общая поверхность увеличится в 100 раз.

§ 32. Призмы.

Прямою призмою называется тело, две грани (основания) которого представляют собою треугольники, четыреугольники или многоугольники, а все остальные (боковые) — прямоугольники (черт. 104). Рассмотренный раньше прямоугольный параллелепипед можно отнести к призмам: это прямая призма с прямоугольными основаниями. Если основания прямой призмы треугольники, то призма „треугольная“, если квадрат, то призма „квадратная“; если вообще четыреугольники, то „четыреугольная“; если какие-нибудь многоугольники, то „многоугольная“, напр. „восьмиугольная“, и т. п.

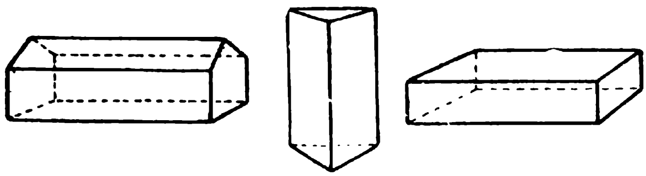
Объем прямоугольной призмы, т.-е. прямоугольного параллелепипеда, мы уже умеем вычислять: для этого нужно умножить ее длину на ширину и на высоту. Так как произведение длины прямоугольника на его ширину дает его площадь, то предыдущее правило мы можем высказать иначе, а именно так:

объем прямоугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Если площадь основания такой призмы обозначить через s, а высоту — через h, то объем ее

$$V = sh$$

Можно убедиться, что та же формула применима и ко всякой прямой призме, какую бы форму ни имело ее основание. Действительно, на каждый квадратный сантиметр основания прямой призмы опирается столб, высота которого равна высоте призмы (h). Все эти столбы,



Черт. 104.

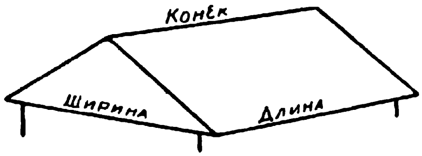
вместе взятые, составляют объем призмы. Но объем каждого столба равен 1 *кв. см.* $\times$ *h см* = *h куб. см;* число же столбов равно числу *кв. см,* заключающихся в основании призмы. Если площадь основания *s кв. см,* то число призм будет s, а сумма их объемов $s \times h = sh$ куб. см. Это и будет объем призмы.

Итак,

объем всякой прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Повторительные вопросы.

Что называется прямой призмой? — Что такое прямая прямоугольная призма? Квадратная? Треугольная? Шестиугольная? — Как вычисляется объем всякой прямой призмы? — Выразите это правило формулой.



Черт. 105.

Применения.

31. Вычислить объем прямой треугольной призмы, если ее высота 16 *см,* а треугольник, лежащий в основании призмы, имеет основание 7 *см* и высоту — 5 *см.*

Решение. Вычисление объема начнем с определения площади основания; она равна $0{,}5 \cdot 7 \cdot 5 = 18$ *кв. см.* Умножив основание призмы на высоту, $18 \cdot 16$, узнаем ее объем — 290 *куб. см.*

32. Чердачное помещение (черт. 105) имеет форму прямой треугольной призмы. Длина его — 14 *м,* ширина — 8,1 *м,* а высота конька — 3,2 метра. Найти объем („кубатуру") этого помещения.

Решение. Кубатура равна

$$\tfrac{1}{2} \cdot 8{,}1 \cdot 3{,}2 \cdot 14 = 180 \text{ куб. м.}$$

33. Какова площадь основания прямой многогранной призмы, объем которой 720 *куб. см*, а высота 18 *см*?

Решение. Основание определится, если разделить объем (720) на высоту (18). Получим 40 *см*.

§ 33. Объем и вес.

В метрической системе мер единицей веса служит вес одного кубического сантиметра чистой воды — *грамм* (*г*). Тысяча граммов составляют *килограмм* (*кг*), а тысяча килограммов — *тонну* (*т*). Нетрудно сообразить, какой объем занимают эти количества воды. 1 грамм воды занимает, конечно, 1 *куб. см*. Килограмм воды занимает объем в 1000 раз больший, т.-е. 1000 *куб. см* = 1 куб. дециметру; значит, килограмм есть вес 1 куб. дециметра воды. Далее, тонна воды занимает объем в 1000 раз больший, чем килограмм, т. е. 1000 *куб дм*; но 1000 *куб. дм* = 1 куб. метру; значит, тонна есть вес 1 куб. метра воды. Запомним эти соотношения:

1 *куб. см*	воды весит	1 грамм
1 *куб. дм*	„ „	1 килограмм
1 *куб. м*	„ „	1 тонну.

Зная это, можно по объему воды вычислить ее вес (без взвешивания), и наоборот, по весу воды найти (без измерения) ее объем. Покажем на нескольких примерах, как это делается.

34. В прямоугольный аквариум, ширина которого 20 *см*, а длина 35 *см*, налито воды до высоты 12 *см*. Сколько весит вода в аквариуме?

Решение. Находим сначала объем воды в аквариуме; он равен 20 · 35 · 12, т. е. 8 400 куб см. Так как каждый *куб. см* воды весит 1 грамм, то вода в аквариуме весит 8400 граммов, или 8,4 *кг*.

35. Сколько весит вода в прямоугольном баке длиною 1,5 *м* и шириною 1 *м*, если она налита до высоты 0,6 *м*?

Решение. Объем воды в баке равен 1,5 · 1 · 0,6 = 0,9 *куб. м*. Так как 1 куб. метр воды весит 1 тонну, то вода в баке весит 0,9 тонны.

Подобным же образом можно по объему вычислять вес тел и из любого другого материала, если знать, сколько весит 1 куб. сантиметр этого материала. Очень полезно поэтому располагать таблицей, в которой указано, сколько весит 1 куб. сантиметр различных веществ. Вес 1 куб. сантиметра вещества называются **удельным весом** этого вещества. Краткая табличка удельных весов наиболее употребительных материалов здесь приведена.

Таблица удельных весов.

Твердые тела.

Золото	19,3	грамма
Свинец	11,4	„
Серебро	10,5	„
Медь кованая	8,9	„

Латунь	8,5	грамма
Железо, сталь, чугун	7,8	„
Олово	7,3	„
Цинк	7,1	„
Алюминий	2,6	„
Гранит	2,5	„
Стекло оконное	2,5	„
Лед	0,9	„
Дерево сосновое сухое	0,5	„
Пробка	0,20	„

Жидкости:

Ртуть	13,6	грамма
Вода чистая	1	„
Спирт (100) керосин	0,8	„
Нефть	0,76	„

Числа этой таблицы показывают:

1) сколько граммов весит 1 *куб. см* данного вещества;

2) сколько килограммов весит 1 куб. дециметр этого вещества;

3) сколько тонн весит 1 куб. метр этого вещества.

Действительно, если 1 куб. см, например, алюминия весит 2,6 грамма, то 1 *куб. дм* должен весить в 1000 раз больше, т.-е. такое же число *килограммов*, а 1 куб. метр еще в 1000 раз больше, т.-е. такое же число *тонн*.

Из следующих примеров видно, как надо пользоваться этой таблицей для разных расчетов.

36. Сколько весит железный брусок длиною 0,6 *м*, шириною 2,5 *см* и толщиною 1,5 *см*?

Решение. Объем бруска в *куб. см* равен $60 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}5 = 225$. В таблице находим, что 1 *куб. см* железа весит 7,8 *г*; следовательно, брусок весит

$$7{,}8 \cdot 225 = 1800 \text{ г} = 1{,}8 \text{ кг}.$$

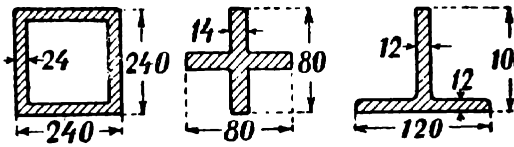
37. Какой объем занимает полкилограмма свинца?

Решение. Каждые 11,4 грамма свинца занимают объем в 1 *куб. см.* (см. таблицу). Значит, наш кусок свинца имеет в объеме столько *куб. см*, сколько раз в его весе заключается 11,4 *г*. Разделив 0,5 *кг* на 11,4 *г* получаем

$$500 : 11{,}4 = 44.$$

Итак, объем 0,5 *кг* свинца — 44 *куб. см.*

38. Найти вес 1 *м* железа, размеры поперечного сечения которого указаны в *мм* на черт. 106.



Черт. 106.

Решение — по образцу предыдущих задач.

Повторительные вопросы.

Какие вам известны единицы веса? — Что такое грамм? Килограмм? Тонна? — Какой объем занимает грамм воды? Килограмм воды? — Что такое удельный вес? — Что означают числа в таблице удельных весов?

VI. Круглые фигуры*.

§ 34. Длина окружности.

Предварительное упражнение.

Обтяните ниткой какой-нибудь круглый предмет (стакан, кастрюлю, решето) по окружности и, вытянув нитку, измерьте ее. Определите затем, во сколько раз длина окружности этого предмета больше ее диаметра.

На практике часто нужно бывает определять длину окружности. Чтобы заготовить, например, железную полосу для шины колеса, кузнецу нужно заранее знать длину этой полосы, т.-е. длину окружности колеса. Всего проще в этом случае обтянуть обод колеса ниткой и затем, вытянув, измерить ее длину. Не всегда, однако, бывает удобно поступать так, а часто способ этот и вовсе неприменим: нельзя, например, найти по этому способу длину окружности, начерченной на бумаге.

Другой способ определения длины окружности состоит в том, что измеряют только диаметр и по нему узнают длину окружности, пользуясь следующим свойством окружности:

длина всякой окружности больше ее диаметра примерно в 3,14 раза.

Если, например, длина диаметра 75 *см*, то длина окружности $75 \cdot 3{,}14 \times 240$ *см*. Правило это справедливо для всякой окружности, как бы малы или как бы велики ни были ее размеры.

Проверяя правильность этого соотношения непосредственным измерением (диаметра — масштабной линейкой, окружности — ниткой или лентой), мы получаем числа лишь более или менее близкие к 3,14. Несовпадение результатов объясняется ошибками измерения: очень трудно измерить совершенно точно диаметр и окружность, а потому нельзя поручиться за строгую точность их отношения, полученного таким способом. Но в математике существуют иные пути к нахождению этого отношения, которых мы изложить здесь не можем, но которые дают отношение длины окружности к диаметру с точностью, более чем достаточною для практических целей.

Число, показывающее, во сколько раз окружность длиннее диаметра (т.-е. выражающее отношение длины окружности к диаметру), условились ради краткости обозначать греческою буквою π (произносится: „пи“). Приближенно $\pi = 3{,}14$; более точные значения этой величины выражаются большим числом цифр после запятой. На практике в большинстве случаев достаточно пользо-

---

* Сведения из арифметики, которые должны быть предварительно усвоены: кратное отношение, выражение отношения двух чисел в процентах, относительная погрешность и ее выражение в $^0/_0$, прямая пропорциональность, обратная пропорциональность.

ваться сейчас приведенным значением ($\pi = 3,14$), которое поэтому нужно твердо запомнить*.

Итак,

отношение длины всякой окружности к ее диаметру равно π, т.-е. 3,14 или $3^1/_7$.

Отсюда следует, что если диаметр окружности d, то длина ее

$$C = \pi \cdot d, \text{ или } \pi d$$

(произносится: „пи дэ“).

Если радиус окружности R, то длина ее

$$C = 2\,R \cdot \pi = 2\pi R$$

(„два пи эр“).

Пользуясь этими формулами, вычисляют длину окружности по ее диаметру или радиусу.

Наоборот, зная длину окружности, можно по тем же формулам вычислить ее диаметр или радиус:

$$d = \frac{C}{\pi};\quad R = \frac{C}{2\pi}$$

Пусть, например, мы желаем определить поперечник дерева (т.-е. диаметр его сечения). Измерив лентой окружность дерева, получаем, скажем, 86 *см*: это — длина окружности. Ее диаметр, т.-е. поперечник, равен $86 : 3,14 = 27$ *см*.

Повторительные вопросы.

Как определить длину окружности измерением? На чем основано нахождение длины окружности вычислением? — Чему равно отношение длины окружности к ее диаметру? Что условились обозначать буквою π? — Чему равно π? — Как определить длину окружности по диаметру? По радиусу? — Как определить диаметр по длине окружности? Радиус по длине окружности? – Как выразить эти соотношения формулами?

Применения.

39. Метр составляет 40 000 000-ю долю окружности земного шара. Найти радиус Земли.

Решение. Радиус найдем делением окружности на 2π, т.-е. на 6,28.

$$40\,000\,000 : 6,28 = 6\,370\,000 \text{ метров.}$$

40. Ведущее колесо паровоза делает в секунду 4 оборота. Диаметр колеса 1,3 *м*. Определить часовую скорость паровоза.

Решение. За один оборот колеса паровоз подвигается на $3,14 \cdot 1,3$ *м*. Поэтому секундная скорость $= 4 \cdot 3,14 \cdot 1,3$, а часовая

$$4 \cdot 3,14 \cdot 1,3 \cdot 3\,600 = 59\,000 \text{ м} = 59 \text{ км.}$$

41. Пассажирский паровоз проходит в час 60 *км*. Диаметр ведущего колеса 2,1 *м*. Сколько целых оборотов делает колесо в секунду?

Решение. За один оборот колеса паровоз перемещается на $3,14 \cdot 2,1 = 6,6$ *м*. Так как в секунду он подвигается на $\frac{60\,000}{3\,600} = 17$ метров, то искомое число оборотов равно $17 : 6,6$, т.-е. около $2^1/_2$.

---

* Чтобы легче запомнить цифры числа 3,14, можно держать в памяти слова: „это я знаю“: число букв каждого слова соответствует цифрам числа 3,14:

это	я	знаю
3	1	4

Если запомнить более длинную фразу; „это я знаю о кругах“, то будем иметь еще более точное выражение для π, а именно 3,1416.

42. Ленинград лежит в 25° к востоку от Гринвичского меридиана. Христиания — на том же параллельном круге на 11° восточнее Гринвичского меридиана. Радиус параллельного круга, на котором расположены эти города, 3 200 *км.* Определить взаимное расстояние этих городов по дуге параллельного круга.

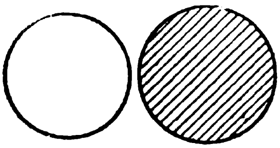
Решение. Расстояние между названными городами в градусах равно $25^0 - 11^0 = 14^0$. Длина параллельного круга $= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3\ 200 = 20\ 000$ *км.* Длина 1^0 этого круга $= 55$ *км.* Искомое расстояние равно 770 *км.*

§ 35. Площадь круга.

Предварительные упражнения.

Начертите несколько окружностей и измерьте их площадь палеткой. Во сколько раз площадь каждого круга больше площади квадрата, сторона которого равна радиусу? Если у вас есть роговые весы, то определите также отношение площадей названных фигур по весу, т.-е. узнайте, сколько бумажных квадратов надо взять, чтобы уравновесить вырезанный из той же бумаги круг, радиус которого равен стороне квадрата.

Та часть плоскости, которая охватывается окружностью, называется **кругом** (черт. 107). Площадь круга, т.-е. величину этой части плоскости, крайне неудобно, а иногда и невозможно находить помощью палетки, разделения на полосы или посредством взвешивания. Гораздо более точный и всегда применимый способ определения площади круга состоит в ее **вычислении** по длине диаметра или радиуса. Установим правило вычисления.



Черт. 107.

Представим себе, что в круге проведено близко друг к другу множество радиусов. Они разделяют круг на фигуры, которые можно принять за узкие треугольники. Короткая сторона каждого такого треугольника, строго говоря, есть не отрезок прямой, а дуга; но если радиусы проведены очень близко, то дуга эта мало отличается от отрезка прямой. Длину высоты каждого из наших треугольников можно считать равной радиусу (если короткая сторона — основание). Площадь одного такого треугольника равна произведению дуги на половину радиуса (почему?); а площадь всех этих треугольников вместе равна произведению всех дуг вместе на половину радиуса*. Но все треугольники вместе составляют площадь круга, а все дуги вместе составляют длину окружности. Значит,

площадь круга равна длине окружности, умноженной на половину радиуса.

Обозначив площадь круга через S, а длину, как раньше, через C, имеем

$$S = C \cdot \frac{R}{2} = 2\pi R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2,$$

т.-е. площадь круга равна π, умноженному на квадрат радиуса.

* По той же причине, по какой $3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = [3 + 4 + 7] \times 5$: умножить каждое слагаемое — то же, что умножить сумму.

На практике чаще приходится вычислять площадь круга не по радиусу, а по диаметру, который удобнее измерять, нежели радиус. Так как $d = 2R$, а $R = \frac{d}{2}$, то

$$S = \pi R^2 = \pi \left[\frac{d}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\pi d^2.$$

Эти формулы нужно твердо помнить.

Повторительные вопросы.

Как вычисляется площадь круга по радиусу? По диаметру? Как выразить эти соотношения формулами?

Применения.

43. Найти площадь просвета трубы, диаметр которой 17 *см*.

Решение. Искомая площадь равна

$$3{,}14 \cdot \frac{17^2}{4} = 230 \text{ кв. см.}$$

44. Окружность древесного ствола 91 *см*. Найти площадь поперечного сечения.

Решение. Сначала находим диаметр окружности ствола; он равен $91 : 3{,}14 = 29$ *см*. Искомая площадь равна

$$3{,}14 \cdot \frac{29^2}{4} = 660 \text{ кв. см.}$$

45. Две кадки с квашеной капустой покрыты лежащими на капусте деревянными кругами с камнями. В первой кадке круг имеет в поперечнике 24 *см* и нагружен 10 *кг*; во второй поперечник круга равен 32 *см*, а груз — 16 *кг*. В какой кадке капуста находится под большим давлением?

Решение. Площадь круга в первой кадке равна $3{,}14 \cdot 12^2 = 450$ *кв. см*; следовательно, на каждый *кв. см* под ним приходится нагрузка $10 : 450 = 22$ *г*. Площадь круга во второй кадке 800 *кв. см*, и нагрузка составляет $16 : 800 = 20$ *г*. В первой кадке капуста сдавлена сильнее.

46. Чтобы горячий чай скорее охладился, его переливают в блюдце. Во сколько раз увеличивается при этом свободная поверхность жидкости? Диаметр стакана примите равным 7 *см*, блюдца — 16 *см*.

Решение. Площади кругов относятся, как квадраты диаметров (почему?): Следовательно, поверхность жидкости увеличится в отношении $16^2 : 7^2$, т.-е. в 5 раз.

§ 36. Цилиндр.

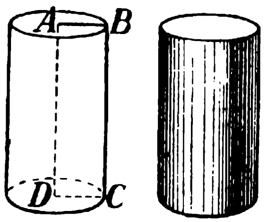
Представим себе, что прямоугольник $ABCD$ (черт. 108) вращается вокруг стороны AB, как дверь на петлях. При полном повороте этот прямоугольник словно вырежет из пространства тело, которое называется ц и л и н д р о м. С цилиндрами мы встречаемся в практической жизни довольно часто: бревна, круглые карандаши, валики, трубы, монеты и т. п. имеют форму, более или менее близкую к цилиндру.

Чтобы изготовить цилиндр (его „модель“) из бумаги, поступают следующим образом. Прежде всего чертят на бумаге два „основания“ цилиндра, т.-е. два одинаковых круга, диаметры которых равны поперечнику будущей модели. Затем чертят прямоугольник, высота которого равна высоте цилиндра, а длина — длине окружности основания. Такой чертеж называется разверткой цилиндра (края прямоугольника снабжаются полоской и зубчиками для удобства склеивания).

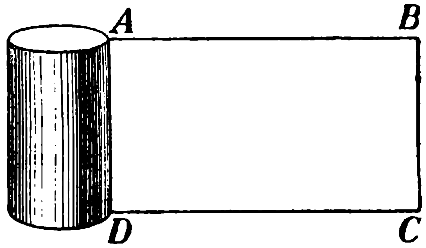
Развертка цилиндра указывает нам путь к вычислению „боковой поверхности“ цилиндра (черт. 109), т.-е. величины его кривой поверхности. Она, очевидно, равна площади прямоугольника $ABCD$, т.-е.

боковая поверхность цилиндра равна длине окружности основания цилиндра, умноженной на его высоту.

Если диаметр основания цилиндра d, а высота — h, то боковая поверхность цилиндра $= \pi d \cdot h = \pi d h$.



Черт. 108.



Черт. 109.

Вычисление объема цилиндра производится так же, как прямой призмы. Рассуждая подобным же образом (§ 32), найдем, что объем цилиндра равен площади его основания, умноженной на высоту, т.-е. $v = \frac{1}{4} \pi d^2 h$.

Повторительные вопросы.

Что называется цилиндром? Приведите примеры цилиндрических тел из окружающей вас обстановки. — Как изготовляется развертка цилиндра? — Как вычисляется объем цилиндра? — Как выражаются эти правила формулами?

Применения.

47. Нужно покрасить 200 фонарных столбов, имеющих форму цилиндров в 4,7 *м* высоты и 18 *см* в диаметре. Сколько рабочих дней понадобится на это, если на окраску 1 *кв. м* нужно 0,04 раб. дня.

Решение. Поверхность всех фонарных столбов равна

$$200 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}18 \cdot 4{,}7 = 530 \textit{ кв. м.}$$

Искомое число рабочих дней $= 0{,}04 \cdot 530 = 20$.

48. Сколько нужно взять бревен длиною 6 *м* и толщиною в середине 25 *см*, чтобы получить объем в 1 *куб. м*?

Решение. Объем не слишком суживающегося бревна можно вычислять, как объем цилиндра, диаметр основания которого равен толщине бревна посередине. Поэтому объем каждого из бревен $= 3{,}14 \cdot \frac{0{,}25^2}{4} \cdot 6 = 0{,}29$ *куб. м.* Надо 3,4 таких бревна.

49. Кусок медной проволоки толщиною 3 *мм*, весит 5,5 *кг*. Какой длины эта проволока?

Решение. Объем проволоки равен объему 5 500 *г* меди, т.-е. $\frac{5\,500}{8{,}9} = 620$ *куб. см*. Площадь поперечного сечения проволоки равна $3{,}14 \cdot \frac{0{,}3^2}{4} = 0{,}07$ *кв. см*. Разделив объем проволоки на площадь сечения, узнаем длину проволоки (проволока — цилиндрическое тело):

$$620 : 0{,}07 = 9\,000 \text{ метров.}$$

§ 37. Литр.

Для измерения объема жидких тел в метрической системе мер употребляется кружка, могущая вместить килограмм воды. Так как 1 *кг* воды занимает объем 1 *куб. дм* (§ 33), то литр есть объем 1 *куб. дм*, или 1 000 *куб. см*. В кубическом метре 1 000 литров (почему?).

Литру может быть придана различная форма, только бы вместимость его была 1 000 *куб. см*. Так, для молока употребляют обычно цилиндрический литр, диаметр основания и высота которого равны 10,84 *см*. Можно убедиться, что вместимость такой кружки действительно равна 1 000 *куб. см*: применяя правила вычисления объема цилиндра, имеем:

$$\frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}84^2 \cdot 10{,}84 = 1\,000.$$

Применения.

50. В цилиндрическом колодце, внутренний диаметр которого 2,1 *м*, вода прибыла на 28 *см* Сколько литров воды прибыло?

Решение. Объем прибывшей воды равен

$$3{,}14 \cdot \frac{210^2}{4} \cdot 28 = 970\,000 \text{ куб. см} = 970 \text{ литров.}$$

51. Сколько литров воды подает в секунду труба, внутренний диаметр которой 8,4 *см*. Скорость течения воды в ней 1,2 *м* в секунду.

Решение. Объем подаваемой воды равен

$$3{,}14 \cdot \frac{8{,}4^2}{4} \cdot 120 = 6\,600 \text{ куб. см} = 6{,}6 \text{ литра.}$$

VII. Занятия на открытом воздухе.

§ 38. Мерный шнур и работа с ним.

Чтобы производить измерения на местности, надо запастись мерным шнуром — веревкой в 10 метров длины, разделенной на метры. Такой шнур может заменить дорогую мерную ленту (рулетку) или цепь, которыми пользуются землемеры.

Для приготовления мерного шнура выбирают прочную веревку * длиною немного больше 10 метров; запас нужен для двух глухих

* Чтобы шнур не страдал от сырости советуют его выварить в конопляном масле, вытянуть и дважды осмолить. В продаже имеются и готовые осмоленные веревки; для мерного шнура это самые подходящие.

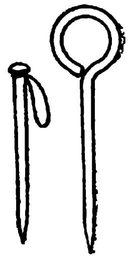
петель, которые завязываются по концам шнура с таким расчетом, чтобы расстояние между серединами петель вытянутого шнура как раз равнялось 10 метрам. Шнур при работе надевают петлями на особые колья примерно в метр высоты. Концы кольев заостряют, чтобы удобно было втыкать их в землю; близ острого конца обоих кольев прибивают поперечную палочку (можно пробить большой гвоздь), чтобы петли не соскальзывали (черт. 110).

Черт. 110.

На шнуре надо отметить отдельные метры. Для этого в соответствующие места шнура вплетают кожаные или холщевые цветные полоски, концы которых сшивают. Можно отмечать метры и иным каким-нибудь способом.

Принадлежностью мерного шнура являются 10 небольших заостренных колышков в 30—40 сантиметров длины. Колышки эти называются „бирками“ (черт. 111). Их можно сделать из дерева, просверлив в толстом конце дыру для продевания через нее проволочного кольца, или привязав к тупому концу веревочную петлю. Еще удобнее изготовить бирки из толстой проволоки, загнув ее на одном конце петлей. В том и другом случае бирки хранят надетыми на проволочное кольцо.

Объясним, как пользуются этими принадлежностями.



Черт. 111.

Предположим, вы желаете измерить длину забора. Работу эту (как и большинство землемерных работ) приходится выполнять не менее, чем вдвоем; без помощника обойтись здесь трудно. Вы втыкаете один из кольев мерного шнура в землю у начала забора, а помощник ваш идет вперед, держа в руках другой кол и вытягивая шнур; вытянув шнур на полную длину, он втыкает в землю у второго кола одну бирку и, предупредив вас, идет дальше. Вы вынимаете ваш кол и следуете за помощником, волочащим шнур по земле; дойдя до воткнутой в землю бирки, ставите на ее место ваш кол и ждете пока помощник, натянув шнур, воткнет у своего кола вторую бирку. Тогда вы извлекаете бирку и идете с помощником вперед, снова волоча шнур, останавливаетесь у второй бирки и т. д.

Дойдя до конца забора, помощник идет дальше по прямой линии, пока шнур не натянется. Тогда, оставив кол на месте последней бирки (вами подобранной), вы подходите к концу забора и считаете по меткам шнура, сколько метров уложилось между последней биркой и концом забора. Доли метра оцениваются на глаз: полметра, четверть метра (мельче не нужно). Заметив число отдельных метров, вы по числу бирок в ваших руках узнаете, сколько целых шнуров вы отмерили, — т.-е. сколько десятков метров в длине забора. Если, например, за последней биркой легло $6^3/_4$ метра, а колышков в вашей руке 7, то длина забора

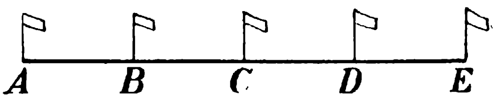
$$7 \cdot 10 + 6^3/_4 = 76^3/_4 \text{ м}.$$

Чтобы не ошибиться в числе целых шнуров, надо проверить, сколько бирок осталось на кольце у вашего помощника. Если ваши бирки вместе с теми, которые у него, составляют 10, — значит, ни одна бирка не была пропущена.

§ 39. Расстановка вех.

Когда приходится отмерять на местности более или менее длинное расстояние, нельзя обойтись только мерным шнуром. Пройти с мерным шнуром на открытом поле по прямой линии, нигде не уклоняясь в сторону — удается только на сравнительно небольшом расстоянии и при том на ровном, чистом месте. Если же расстояние подлинее, а в особенности, если местность пересечена ложбинами и зарослями — необходимо облегчить себе работу расстановкой вех.

„Веха“ — это шест, метра два длиною, с заостренным концом для более удобного втыкания в землю. Лучше, если веха окована у острого конца, чтобы он не размочаливался, и окрашена попеременно, участками, в белый и черный цвета для лучшей видимости. Но это не необходимо; надо только, чтобы веха была ровная (не кривая) и не чересчур толстая; для лучшей видимости можно снабдить каждую веху красным флажком.



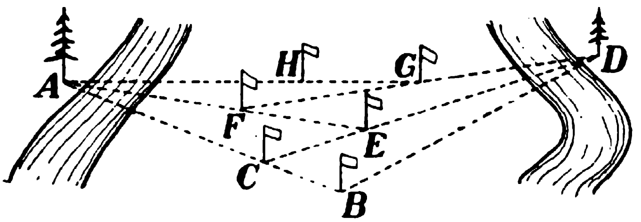
Черт. 112.

Рассмотрим сначала простейший случай „вешения“ (расстановки вех), — когда надо провешить длинную линию на ровной местности между двумя легко доступнуми точками A и E (черт. 112). Прежде всего вы устанавливаете вехи в эти крайние точки A и D, заботясь о том, чтобы они стояли отвесно. Затем становитесь позади вехи A так, чтобы вы могли видеть перед собою сразу обе вехи A и E. Помощник, отойдя с несколькими вехами метров на 20 — 30 вперед, должен установить первую из своих вех в точке B между A и E так, чтобы все три вехи были на одной прямой линии. В этом убедиться просто: веха B будет на одной прямой линии с вехами A и E тогда, когда, глядя на веху A, вы увидите, что она сразу покрывает собою обе другие вехи — B и E. Если помощник поставил веху не так, вы указываете ему поднятием правой или левой руки, в какую сторону он должен подвинуть свою веху.

Когда первая промежуточная веха B поставлена, помощник ваш идет дальше, и таким же образом устанавливается следующая веха — C. Теперь, глядя на веху A, вы должны видеть ее покрывающей сразу вехи B, C и E. Если измеряемое расстояние длинно, вы ставите затем 5-ю веху, 6-ю и т. д.

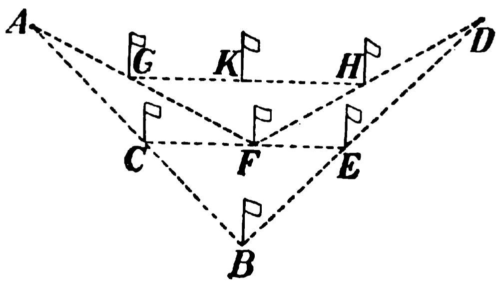
Измерение такого „провешенного“ расстояния значительно облегчается: вы идете с мерным шнуром от вехи к вехе.

Возможны и более сложные случаи „вешения“. Бывает, например, что обе конечные вехи недоступны для мерщиков — установлены, скажем, за речками; они хорошо видны, но к ним не подобраться. В этом случае расставляют промежуточные вехи между A и D (черт. 113). В какой-нибудь точке близ прямой AD ставим веху B. Затем междувехой B и A устанавливаем на прямой BA веху C: это удобно сделать, потому что веха B доступна. Потом на прямой CD ставим веху E. Между E и A помещаем веху F; между F и D — веху G; между G и A — веху H и т. д. Подвигаясь постепенно таким образом все ближе и ближе к прямой AD мы, наконец разместим последнюю пару вех как раз на этой прямой. А имея две доступные вехи, нетрудно уже расставить и сколько угодно других.



Черт. 113.

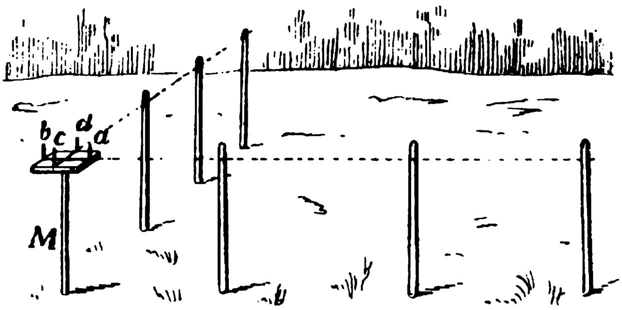
Сходным образом поступают и в том случае, когда между конечными точками A и D расположена горка, так что, стоя у одного конца линии, нельзя видеть другого. Здесь размещают вехи в таком порядке (черт. 114). Сначала ставят веху B, потом между A и B — веху C, а между B и D — веху E. Между C и E устанавливают веху F и с нею повторяют то, что делали с вехой B, — т. е. ставят на линии FA веху G, а между F и D ставят веху H — затем между G и H ставят веху K, и так постепенно подвигаются к прямой AD, пока, наконец, не очутятся на ней с последней парой вех.



Черт. 114.

§ 40. Эккер и его употребление.

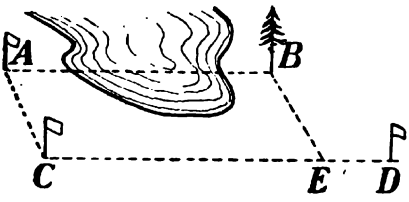
Взаимно перпендикулярные линии на земле проводятся при помощи инструмента, называемого эккером. Эккер — это две деревянные планки, скрепленные накрест и установленные на заостренной палке (черт. 115). У концов планок воткнуты 4 иглы (или прикреплены пластинки с прорезами) так, что прямые соединяющие противоположные иголки (или прорезы) пересекаются друг с другом под прямым углом. Впрочем, нег надобности делать эккер непременно из перекрещивающихся планок; можно просто прибить четырехугольную или круглую доску к палке, в виде одноногого столика, а на этой доске установить четыре булавки. Размещение булавок тоже дело не сложное: возьмите листок бумаги, перегните его раз, а затем второй раз так, чтобы линии первого сгиба совпадали. Когда вы развернете потом эту бумагу, на ней будут обозначены две линии, пересекающиеся под прямым углом. Расправьте этот листок на доске эккера и воткните булавки в линии сгиба, близ краев. Бумажку можно тогда убрать — эккер готов.



Черт. 115.

Объясним теперь, как пользоваться эккером. Преположим, вы хотите аккуратно отмерить на земле прямоугольную площадку 35 метров длины и 15 ширины.

Воткнув заостренный конец эккера в одну из вершин отмеряемого четырехугольника, вы глядите вдоль двух булавок, повернув эккер так, чтобы линия вашего взгляда шла по направлению одной стороны будущей площадки (черт. 115). Помощник, по вашему указанию, ставит одну или две вехи как раз на этой линии, т.-е. так, чтобы булавки покрывали расставляемые вехи. Когда это сделано и в провешенном направлении отмерена от эккера нужная длина, вы, не сдвигая эккера с места и не поворачивая его (даже не дотрагиваясь до него, чтобы не качнуть), смотрите вдоль двух других булавок. т.-е. под прямым углом к прежнему направлению (черт. 115). Поставив в этом направлении веху, отмеряют на ней длину и концы обеих длинных линий соединяют прямой. Получается прямоугольник требуемых размеров.



Черт. 116.

Впрочем, если надо провести перпендикуляр короткий, то при некотором навыке можно сделать это без эккера, на-глаз, – особенно, если линии при этом измеряются шагами, т.-е. измерение вообще ведется только приблизительно.

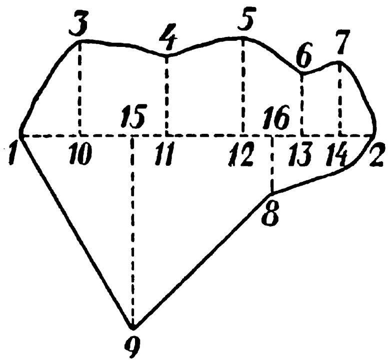
Эккером можно воспользоваться и тогда, когда приходится мерить линию, по которой нельзя пройти с мерным шнуром. Пусть, например, требуется измерить расстояние от точки A до точки B (черт. 116); между ними лежит озеро или непроходимое болото. Ставим эккер в точке A, направляем две его булавки вдоль линии AB, а по направлению двух других, под прямым углом к $A B$, провешиваем (черт. 116) линию $A C$. В точке C под прямым углом провешиваем линию CD и отыскиваем на ней такую точку E, чтобы линия BE встречала под прямым углом линию CD. Это делается тоже помощью эккера; когда одна пара булавок направлена по линии CD, другая должна покрывать точку B; после нескольких проб такую точку всегда удается найти. Найдя точку E, измеряем расстояние CE: оно в точности равно тому непроходимому расстоянию AB, которое мы желаем определить

Очень полезно тщательно выверить эккер, т.-е. убедиться, действительно ли равны между собою его четыре угла. Для этого, расставив вехи по двум перпендикулярным направлениям, поверните эккер и посмотрите, будут ли эти направления совпадать с линиями булавок при новом положении эккера. Если нет, нужно булавки немного п реместить, пока не добъетесь строгого равенства всех четырех его углов.

§ 41. Съемка плана небольшого участка.

При съемке плана небольшого участка помощью мерного шнура и эккера вы можете поступать различно, смотря по тому, какую форму имеет участок. Рассмотрим здесь несколько случаев.

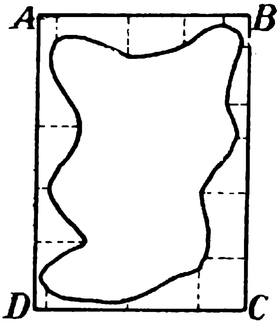
1) Пусть требуется снять план участка, изображенного на черт. 117. Начинаем с того, что провешиваем через него прямую линию 1 — 2 (цифры здесь имеют то же значение, что и буквы) так, чтобы она прорезывала его примерно посередине. Линию эту называют „магистралью". Потом через все поворотные точки границы — 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 — проводят прямые под прямыми углами к „магистрали"; выполняется это помощью эккера. Точки 10, 11, 12, 13, 14, 15 и 16, в которых перпендикуляры встречают магистраль, отмечают колышками. Теперь остается измерить длины всех перпендикуляров: 3 — 10, 15—9, 4—11, 5—12 и т. д., а также расстояния колышков 10, 15, 11 и т. д. от точки 1. Записав эти длины против линий наброска, который мы делаем попутно на бумаге на-глаз, мы имеем все данные, какие нам нужны для изготовления плана, а также для определения площади участка. Как вычерчивается план и определяется площадь по этим данным, будет объяснено далее.



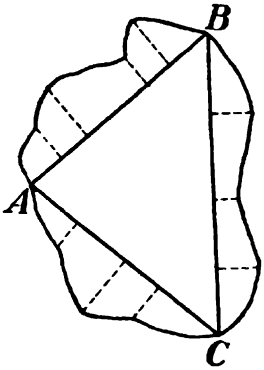
Черт. 117.

2) Если надо снять план участка, внутрь которого входить нельзя, — напр., план засеянного поля или озера (черт. 118), то обчерчивают его прямоугольником $ABCD$ снаружи и проводят к его сторонам перпендикуляры.

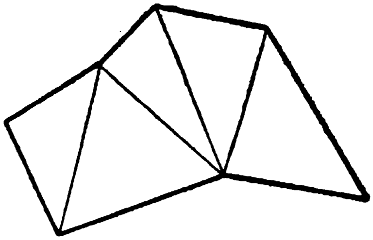
3) Бывают случаи, когда для магистральных линий удобно пользоваться не прямоугольником, а треугольником. Напр., очертания участка черт. 119 удобно изобразить на плане, если провешить внутри него три линии в форме треугольника ABC и пользоваться этими линиями, как магистралями. Измерять углы между сторонами этого треугольника не нужно: достаточно из-



Черт. 118.



Черт. 119.

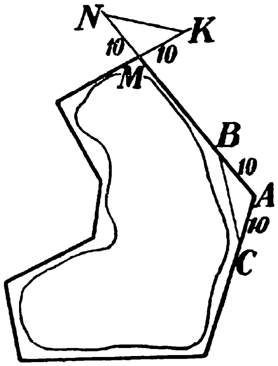


Черт. 120.

мерить лишь длину сторон, так как по трем сторонам можно построить только один треугольник.

Иногда приходится пользоватся не одним треугольником, а сеткой из нескольких треугольников (черт. 120).

Если форма участка такова, что он плохо укладывается в рамках прямоугольника, то обчерчивают его многоугольником (черт. 121) Измерить стороны этого многоугольника недостаточно, чтобы иметь возможность его начертить: необходимо знать величину углов между сторонами. Для этого отмеряют от вершины каждого угла 10 метров и затем измеряют расстояние между концами отмеренных отрезков, — как показано для угла A на черт. 121. Треугольник ABC можно будет построить, так как известна длина его трех сторон. В тех случаях, когда соединительная линия не может быть промерена, откладывают 10 метров на продолжении сторон, как показано для угла M.



Черт. 121.

Во всех случаях у вас в руках оказывается черновой набросок участка земли с указанием величины измеренных расстояний.

Заметим еще, что когда перпендикуляры к магистралям коротки — как на черт. 118 — их проводят на-глаз, без эккера, и измеряют не мерной веревкой, а шагами.

Остается объяснить, как по полученным нами данным чертится план участка, т.-е. как превратить имеющийся у вас набросок в аккуратно исполненный чертеж.

Чтобы изобразить на плане участок, показанный на черт. 117, проводят по линейке магистральную линию 1 — 2 и откладывают на ней, в заранее выбранном масштабе, расстояние 1 — 10, 1—15, 1 — 11, 1 — 12 и 1 — 16 и т. д., т.-е. отмечают точки 10, 15, 11, 12, 16 и т. д. Через эти точки проводят, помощью чертежного трехугольника, перпендикуляры и откладывают на них, в том же масштабе, расстояния: 10—3, 15 9. 11—4 и т. д. Когда это сделано, соединяют точки 1, 3, 4, 5... прямыми линиями или изогнутыми, делая изгибы такими, какими они изображены на черновом наброске; ошибка здесь может получиться лишь небольшая, потому что основные, поворотные точки границы нанесены вполне точно.

Сходным образом приходится поступать в тех случаях, когда магистрали составляют треугольник (см. черт. 119). Треугольник, длина всех трех сторон которого известна, строят, как объяснено в § 17. В случае сети из нескольких треугольников их строят последовательно, примыкая один к другому. Когда треугольники начерчены, остается только провести перпендикуляры и докончить чертеж, как объяснено было для других случаев.

В случае участка представленного на черт. 118, начинают с прямоугольника, размеры всех сторон которого известны и которые поэтому нетрудно начертить (в масштабе). А когда это сделано, намечают на сторонах точки, через которые проведены перпендикуляры, и чертят их в масштабе. Дальше поступают, как в предыдущих примерах.

В полученных нами планах изображены только границы участка. Часто бывает нужно изобразить и положение различных подробностей внутри этих границ — колодца, большого дерева на лугу, строения и т. п. Сделать это нетрудно, если выполняя измерения границ, провести от этих предметов перпендикуляры к магистрали и измерить их длину, а также расстояние от точки пересечения обеих линий.

§ 42. Измерение площади участка.

Задача съемки состоит не только в том, чтобы начертить план земельного участка, но и в том еще, чтобы определить его площадь. Нередко участок для того только и снимается на план, чтобы определить его площадь. Покажем, как определять площади участков, обмеренных указанными выше способами.

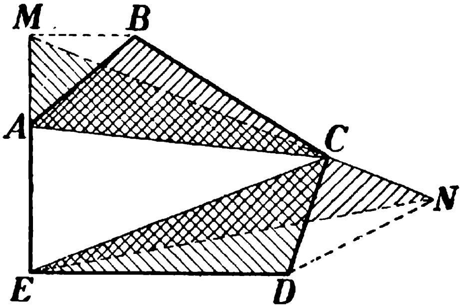
Рассмотрим сначала участок, изображенный на черт. 117. Он распадается на 9 частей, площади которых мы умеем вычислять, — если не строго точно, то приближенно. Фиг. 1 — 3 — 10 можно принять за треугольник; его основание и высота нам известны. Далее: соседняя часть (3 — 10 — 11 — 4) может быть рассматриваема как трапеция, у которой измерены параллельные стороны (3 — 10 и 4 — 11), а также и расстояние между их сторонами (10 — 11). Поэтому вычисление площади этой части фигуры тоже не составит труда.

Точно так же вычисляются площади прилегающих по порядку трапеций 4 — 11 — 12 — 5, 5 — 12 — 13 — 6, 6 — 13 — 14 — 7 и 15 — 9 — 8 — 16. Остальные части фигуры можно рассматривать как треугольники, для вычисления площади которых у нас тоже имеется достаточно данных.

Раз нам известна площадь каждой части фигуры, то сложив их вместе, определим площадь всего измеренного участка.

Переходя к черт. 118 видим, что здесь перед нами задача с такими же данными; только отдельных частей здесь больше. Все краевые участки надо отнять от площади наружного прямоугольника.

Площадь участка черт. 119 определяют подобным же образом. Затруднение представляет только вычисление площади треугольника ABC, так как высота его не была промерена на местности. Но мы всегда можем измерить ее на чертеже, пользуясь масштабом плана. Так же поступают и в случае сети треугольников.



Черт. 122.

Наконец, в случае участка черт. 121 начинаем с вычисления площади охватывающего его многоугольника. Мы можем сделать это, если разобьем его диагоналями на треугольники (§ 29), определив — пользуясь масштабом плана — длину их оснований и высот.

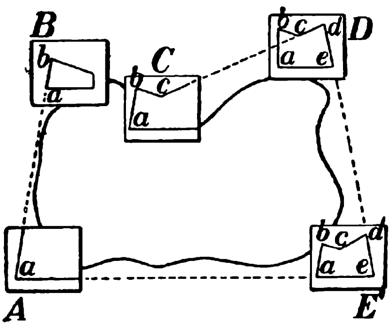
Другой способ состоит в том, что превращают многоугольник в равновеликий ему треугольник. Делается это следующим образом.

Пусть требуется превратить многоугольник $ABCDE$ (черт. 122) в равновеликий треугольник. Проведя диагональ AC, проводят через вершину B прямую, параллельную AC, до пересечения в точке M с продолжением стороны AE: треугольник ABC равновелик тр-ку AMC, потому что у них общее основание AC и равные высоты (§ 26). Следовательно, четырехугольник $MCDE$ равновелик пятиугольнику $ABCDE$. Затем таким же приемом превращаем $MCDE$ в равновеликий треугольник: проводим диагональ EC и через вершину D проводим DN параллельно EC до пересечения с продолжением MC в точке N Треугольник ECD равновелик тр-ку ECN (почему?); следовательно, треугольник MNE равновелик пятиугольнику $ABCDE$. Определив теперь площадь тр-ка MNE, мы тем самым находим искомую площадь многоугольника $ABCDE$.

§ 43. Маршрутная съемка.

Во время экскурсий план пройденного пути зачерчивают приблизительно помощью так называемой маршрутной съемки. Производится она следующим образом.

В месте выхода из города определяют по компасу направление на ближайшую точку пути (отдаленное дерево, валун, верстовой столб, угол здания), наносят это направление по глазомеру на бумагу, записав при нем соответствующий „румб“. Идя по этому направлению до замеченного предмета, измеряют расстояние шагами. Отложив по произвольному масштабу (на-глаз) это расстояние по прочерченному направлению, с соответствующей числовой пометкой, определяют по компасу направление на следующий ближайший этап, измеряют расстояние шагами и т. д., отмечая все это на черновом плане. По этому наброску и сделанным пометкам (относительно направлений и расстояний) изготовляют дома более аккуратно маршрутный план экскурсии. Все замеченные по пути особые места, лежащие вне дороги, также могут быть нанесены на этот план, если были измерены направления на них из определенных точек и соответствующие расстояния.



Черт. 123.

Ту же работу можне выполнить более тщательно помощью „планшета“, т.-е. дощечки с прикрепленным к ней компасом. К дощечке прикалывают кнопками лист бумаги, на котором и чертят план. Став в точку выхода, держат планшет горизонтально, повернув его так, чтобы вороненый конец стрелки показывал на юг. На планшет кладут трехгранную масштабную линейку, прикладывают ее край к точке, изображающей начальный пункт, и направляют ее так, чтобы, глядя вдоль ее верхней грани, видеть следующий пункт пути. Когда это сделано, прочерчивают прямую линию и откладывают на ней по масштабу отрезок, отвечающий длине этой линии в натуре. Перенеся затем планшет в следующий пункт, повертывают его как и в первый раз (так что все линии планшета на новом пункте остаются параллельными тому направлению, которое они имели на прежнем). Приставив край линейки к точке, изображающей место нахождения планшета, направляют ее на ближайший следующий пункт; измерив расстояние до него, откладывают на прочерченной линии в масштабе соответственную длину, переносят планшет на четвертый пункт и т. д.

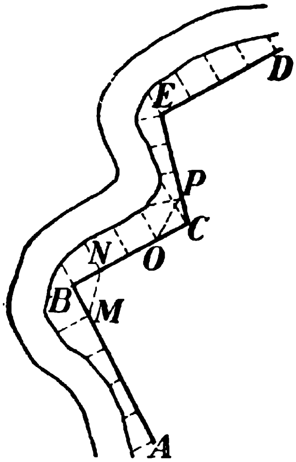
Этим приемом можно снимать не только маршруты, но и участки с несложными очертаниями, обходя его с планшетом вдоль границы. Съемка будет произведена более точно, если при этом пользоваться не планшетом, который держат в руках, а доской, устанавливаемой на треноге (такой столик называется м е н з у л о й). Перенося доску с места на место, ее располагают („ориентируют“ не по компасу, а приводят, помощью линейки, начерченные на ней линии в положение, параллельное соответствующим линиям местности. Ход работы ясен из чертежа 123.

§ 44. План речки.

Пусть наша речка извивается, как показано на черт. 124. Начинаем с того, что провешиваем близ ее берега магистраль AB. Через каждые 5 или 10 метров вбиваем в землю колышек: из этих точек и из концов магистрали восстановляем перпендикуляры (можно на-глаз), и помощник измеряет длину этих перпендикуляров (можно шагами).

Затем провешиваем вторую магистраль BC и с ней повторяем то же самое.

Чтобы иметь возможность построить угол между обеими магистралями, измеряем расстояние между двумя колышками M и N. Так как нам известно и расстояние этих колышков от точки B, то в треугольнике MBN мы знаем длину каждой из его трех сторон. Поэтому нам нетрудно будет начертить на плане этот треугольник. Чертя план, мы изобразим сначала магистраль AB и отметим на ней положение колышков. Потом начертим треугольник MBN. Продолжив сторону BN, отложим на ней длину магистрали BC и отметим на ней колышки. Таким образом мы и начертим обе магистрали под надлежащим углом одна к другой.



Черт. 124.

Но мы прервали наше измерение речки. Дойдя до точки C, провешиваем магистраль CE и измеряем расстояние между колышками O и P, чтобы иметь возможность построить угол C. Таким же образом поступаем у поворота E и т. д.

Ведя измерения, вы зарисовываете на черновом наброске все измеренные вами расстояния и записываете возле каждой линии ее длину. Зарисовывая магистральные линии, отмечая их длину и расстояния между колышками, вы одновременно (или ваш помощник) набрасываете на-глаз очертания берегов (наиболее крупные извилины) и отмечаете длину перпендикуляров к магистральным линиям.

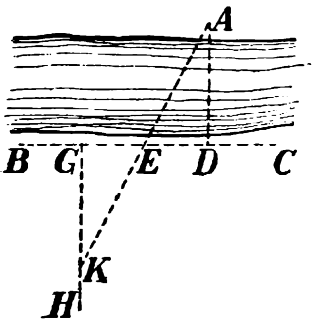
По этим наброскам и записям расстояний нетрудно изобразить на плане один берег реки. А зная ширину речки, можно изобразить и линию противоположного берега.

Подобным образом можно снять на план также и дорогу, — вообще любой извилистый контур.

§ 45. Измерение ширины речки.

Чтобы измерить ширину речки, не переправляясь на другой берег, а оставаясь все время на одном берегу, можно поступать следующим образом.

На противоположном берегу реки (черт. 125) намечаем какой-нибудь предмет A, хорошо видимый с этого берега На этом берегу провешиваем вдоль берега прямую линию BC и помощью эккера отыскиваем на этой линии точку D так, чтобы линия AD была перпендикулярна к BC. От точки D отмеряем два раза кряду какую-нибудь длину, например, 10 метров, и отмечаем концы ее вехами: расстояние DE и EG пусть равны 10 метрам. От точки G провешиваем помощью эккера линию GH под прямым углом к BC. Идя по этой линии, отыскиваем на ней такую точку K, глядя из которой веха E кажется покрывающей точку A. Другими словами, веха, установленная в точке K, должна быть по одной прямой с точками E и A. Нахождением этой точки наша работа кончается: расстояние GK равно расстоянию AD. Чтобы узнать теперь ширину реки, остается только вычесть из полученной длины небольшое расстояние от точки D до берега.



Черт. 125.

§ 46. Измерение расхода воды в речке.

Когда план реки сделан, вы, чтобы иметь о реке полное представление, можете еще определить количество воды, протекающей в ней в одну секунду, — то, что называется „расходом“ воды в реке.

Для этого понадобится сделать некоторые пзмерения и расчеты, которыми мы сейчас и займемся.

Для простоты проделаем сначала это не с речкой, а с канавой. Прежде всего измерим скорость течения в ней воды. Для этого отмерим вдоль нее какую-нибудь длину—например 20 метров—и у концов промеренной линии воткнем по шесту. Став у того шеста, который выше по течению, бросим в воду какой-нибудь поплавок (закупоренную пустую бутылку с вложенным в нее листком белой бумаги), заметив этот момент по часам с секундной стрелкой. Затем, перебежав к переднему шесту, подстережем момент, когда поплавок поравняется с ним. Измерение скорости закончено; остается лишь ее вычислить. Положим, расстояние в 20 метров поплавок проплыл в 50 секунд; значит, в одну секунду вода проносила его на 20 : 50, т.-е. на 0,4 *м,* или на 40 *см.*

Скорость, которую мы таким образом получаем, не есть, строго говоря, та с р е д н я я скорость, с какою движутся водяные частицы в канаве: это скорость н а и б о л ь ш а я. Ведь поплавок плыл по поверхности воды, а здесь вода проносится быстрее, чем у дна или боков канавы, где она трется о землю и замедляет этим свое течение. Однако, разница получается небольшая, и в данном случае мы можем не принимать ее в соображение.

Итак, мы узнали, с какою скоростью движутся частицы воды, текущей в канаве. Чтобы определить число протекающих мимо нас литров воды, нужно еще определить поперечную водяную площадь, или то, что называется площадью „живого сечения“ канавы, — величину $DABC$ (черт. 126). Если сечение канавы прямоугольное, то для вычисления площади живого сечения достаточно измерить ширину канавы и глубину воды в ней. Пусть ширина канавы 0,75 метра, а глубина воды 25 *см*, т.-е. 0,25 метра. Тогда площадь живого сечения этой канавы равна

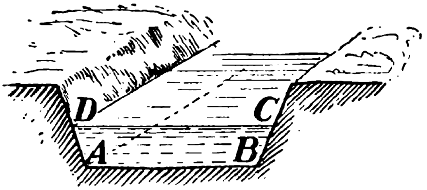
$$0{,}75 \,.\, 0{,}25 = 0{,}19 \textit{ кв. м.}$$

Нетрудно сообразить, что при скорости 0,4 метра через такое сечение ежесекундно проносится

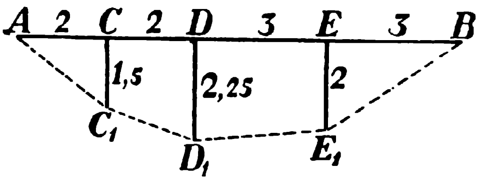
$$0{,}19 \,.\, 0{,}4 = 0{,}076 \textit{ куб. м} = 76 \text{ литров.}$$

Мы узнали, что мимо нас ежесекундно протекает в канаве 76 литров воды.

Если стенки канавы не отвесны, а наклонны, то живое сечение ее имеет форму не прямоугольника, а трапеции $DABC$,



Черт. 126.



Черт. 127.

(черт. 126). Чтобы определить площадь $DABC$, нужно измерить, кроме глубины, еще расстояние DC и AB. Найдя полусумму DC и AB, умножаем ее на глубину канавы (т.-е. на высоту трапеции). Пусть $DC = 1$ метру, $AB = 0{,}75$ *м*, а глубина попрежнему 0,25 *м*. Тогда площадь живого сечения канавы равна

$$0{,}5 \,.\, [1 + 0{,}76] \,.\, 0{,}25 = 0{,}22 \textit{ кв. м.}$$

При прежней скорости течения — 0,4 метра в секунду, — получаем, что через сечение ежесекундно проносится

$$0{,}22 \,.\, 0{,}4 = 0{,}09 \textit{ куб. м} = 90 \text{ литров.}$$

Количество протекающей воды принято называть расходом воды. То, что мы здесь вычисляли, есть „расход“ воды в канаве. Расход воды в речке вычисляется совершенно таким же образом.

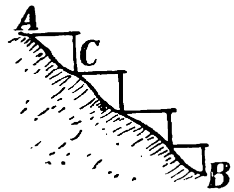
Пусть живое сечение реки имеет форму, указанную на черт. 127; AB — ширина реки, DD' — глубина ее, измеренная в самом глубоком месте. CC' и EE' — глубины посредине между точкою D и берегами. Соединим точки A, C', D', E' и B прямыми линиями. Наша задача сводится к тому, чтобы вычислить площадь фигуры $A\ C_1\ D_1\ E_1\ B$. Фигура эта состоит из двух треугольников и двух трапеций. Определив площадь каждой из этих фигур в отдельности, найдем площадь всего живого сечения, а умножив ее на скорость течения, получим расход воды.

Заметим еще, что приемом, указанным раньше, определяется, как было уже упомянуто, не средняя скорость течения, а **наибольшая**, т.-е. скорость ее самых быстрых струй. В реках средняя скорость меньше этой наибольшей примерно на $^1/_4$.

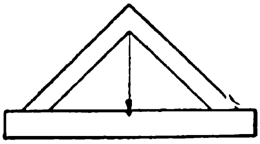
§ 47. Нивеллирование.

Часто нужно бывает определить, насколько одна точка земной поверхности выше или ниже другой. Это выполняется различными приемами, носящими общее название **нивеллирования**.

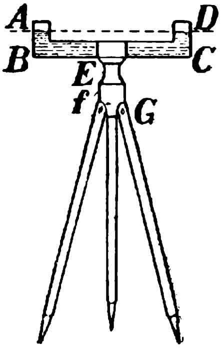
Если точки A и B (черт. 128), высоты которых сравниваются, расположены недалеко



Черт. 128.

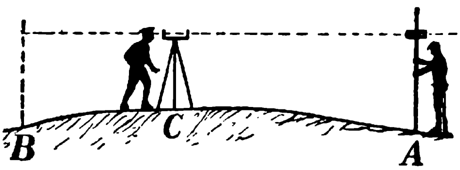


Черт. 129.



Черт. 130.

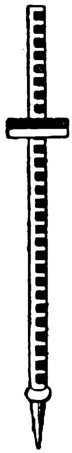
одна от другой, то нивеллирование можно выполнить помощью длинной, негнущейся планки и плотничьего ватерпаса (черт. 129). Планку кладут горизонтально так, чтобы один конец ее упирался в точку A, а другой подпирают отвесно поставленным колом C. Затем переносят планку дальше и кладут ее горизонтально так, чтобы один конец приходился у основания кола C, а другой опирался на новый кол. Так поступают до тех пор, пока не достигнут точки B, в которую должен быть вбит последний кол. Измерив тогда высоту всех кольев, складывают их и таким образом узнают, на сколько точка A лежит выше B.



Черт. 131.

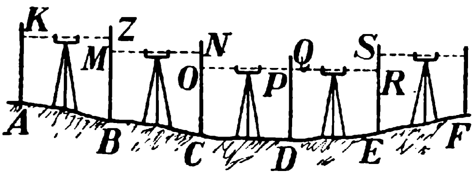
Способ этот очень хлопотлив и применим только для небольших расстояний. Нивеллирование на большом расстоянии выполняют иначе, — именно при помощи особого прибора, называемого нивелliром (черт. 130). Устройство прибора несложно: две отвесные трубки, сообщающиеся посредством соединительной трубки, установлены на треноге. В трубки налита вода; так как она в обоих сосудах стоит на одинаковом уровне, то прямая AD, проходящая через оба уровня, должна быть горизонтальна.

Разность высот точек A и B (черт. 131) определяют помощью нивеллира так. Помещают нивеллир в промежуточную точку C, а в точку A ставят отвесно рейку, разделенную на дециметры и сантимеры (черт. 132). Вдоль рейки ходит дощечка, которую подвигают до тех пор, пока ее средняя линия не будет видна наблюдателю у нивеллира на одной линии с обоими уровнями воды в сосудах. Заметив положение дощечки, переносят рейку в точку B, не изменяя положения нивеллира. Дощечку снова помещают на одной высоте с уровнями воды в сосудах. Разность высот дощечки покажет, насколько разнятся высоты точек A и B.



Ч. 132.

Если требуется определить высоту целого ряда точек местности (B, C, D на черт. 133) над или под горизонтальной плоскостью, проходящей через A, то поступают следующим образом. Поместив нивеллир между A и B, находят высоту A над B, как сейчас было объяснено. Затем, перенеся нивеллир между B и C, находят высоту B над C. Сложив обе разницы в высотах, находим возвышение A над C. Подвигаясь таким образом дальше, мы доходим до точки E, которая выше предыдущей точки D. Ясно, что тогда надо будет соответственно уменьшить разность высот A и D, чтобы узнать возвышение точки A над E. Таким путем к концу работы определятся разности высот для всех точек нивеллируемого „профиля“ $ABCDEF$.



Черт. 133.

Разность высот конечных точек A и F можно найти и не производя вычислений для каждой промежуточной точки. Обозначим положение дощечки на рейке в точке A через a; в точке B — через b при взгляде вперед и через b_1 при взгляде назад; в точке C — через c и c_1, в точке D — через d и d_1 и т. д. Чтобы найти разность высот A и F, мы произвели следующие действия:

$$[b - a] + [c - b_1] + (d - c_1) - (e - d_1) - [e_1 - f]$$

Раскрыв скобки, имеем

$$b - a + c - b_1 - c_1 + d - d_1 + e - e_1 + f$$

или

$$b + c + d + e + f - [a + b_1 + c_1 + d_1 + e_1].$$

Короче говоря, надо сложить отдельно все показания при взглядах вперед и все показания при взглядах назад, и из первой суммы вычесть вторую. В результате получим возвышение конечной точки над начальной; отрицательный результат покажет, насколько конечная точка н и ж е начальной.

ВТОРОЙ КОНЦЕНТР.

VIII. Дополнительные сведения о треугольниках.

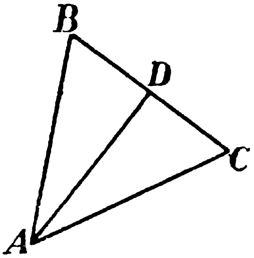
§ 48. Равнобедренный треугольник.

С основными свойствами всякого треугольника мы познакомились в §§ 15—22. Самые главные из них следующие: сумма углов треугольника равна 180°; треугольники равны друг другу или по трем сторонам, или по двум сторонам и углу между ними, или по одной стороне и двум углам (для краткости мы обозначили эти случаи так: *ССС*, *СУС*, *УСУ*). Теперь познакомимся с некоторыми новыми свойствами треугольников.

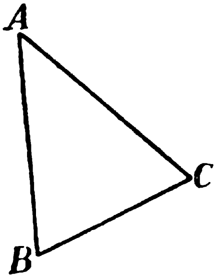
Предварительные упражнения.

Укажите равные треугольники в фигуре черт. 134, где $AB = AC$, а AD — равноделящая угла A.

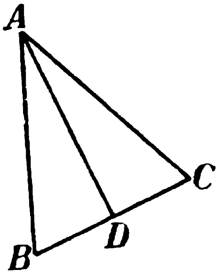
Каковы углы ADB и ADC на черт. 134: острые или тупые?



Черт. 134.



Черт. 135.



Черт. 136.

Мы знаем, что в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Покажем, что и

в одном и том же треугольнике против равных сторон лежат равные углы.

Пусть у нас взят треугольник ABC (черт. 135), в котором сторона AB равна стороне AC. Легко убедиться, что в таком треугольнике углы B и C, лежащие против равных сторон, равны между собой. Если в нашем треугольнике проведем (черт. 136) равноделящую AD угла A, она разобьет ABC на два треугольника: ADB и ADC, которые между собою равны (*СУС*). Поэтому угол B, лежащий против AD, равен углу C, лежащему против той же общей стороны.

Треугольник с двумя равными сторонами называется **равнобедренным**; его равные стороны называются **боковыми сторонами** этого треугольника, а третья сторона — его **основанием**.

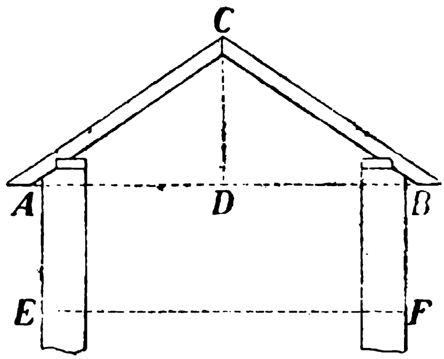
Поэтому рассмотренное сейчас свойство треугольника можно высказать короче так:

в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Можно удостовериться и в обратном соотношении: если в треугольнике имеются равные углы, то стороны, лежащие против этих углов, — равны; или — короче сказать:

в треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

Чтобы убедиться в этом, возьмем треугольник (черт. 135), в котором два угла равны: уг. $B =$ уг. C. Проведем (черт. 136) равноделящую AD; в образовавшихся двух треугольниках ADB и ADC сторона AD — общая, уг. $BAD =$ уг. CAD, уг. $B =$ уг. C; следовательно, треугольники равны ($УСУ$), и потому $AB = AC$.



Черт. 137.

Применения.

52. Огород имеет форму равнобедренного треугольника, одна сторона которого на 40 *м* длиннее другой. Обвод огорода 200 *м*. Какова длина каждой стороны? Сколько решений имеет эта задача?

Решение. Если основание этого треугольника **больше** боковых сторон, то, обозначив его через x, имеем уравнение

$$x + x - 40 + x - 40 = 200,$$

из которого находим: $x = \frac{280}{3} = 93\frac{1}{3}$ *м*. Значит, в таком случае стороны треугольника имеют длину: $93\frac{1}{3}$ *м*, $53\frac{1}{3}$ *м* и $53\frac{1}{3}$ *м*.

Если же основание **короче** боковых сторон, то составляем уравнение

$$y + y + 40 + y + 40 = 200,$$

из которого $y = 40$ *м*. Следовательно, второе решение задачи 40 *м*, 80 *м* и 80 *м*.

53. Кровля, в зависимости от материала, из которого она сделана, должна составлять с горизонтальной линией следующие углы (черт. 137):

Железная и цинковая	30°
Толевая	18°
Черепичная	40°
Тесовая	45°
Соломенная	60°

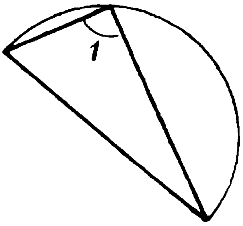
Зная это, определите, какой угол должны составлять между собою стропильные ноги двускатной крыши в каждом случае.

Решение. Для железной кровли искомый угол равен $180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$; для толевой $180^\circ - 2 \cdot 18^\circ = 144^\circ$; для черепичной $180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$; для тесовой $180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$; для соломенной $180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$.

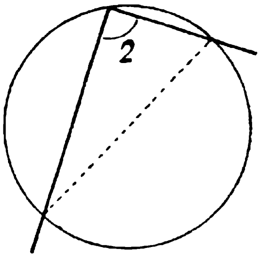
§ 49. Угол, опирающийся на диаметр.

Из свойств равнобедренного треугольника вытекает следующая особенность угла, вписанного в полукруг (черт. 138) или как его иначе называют — „опирающего на диаметр“:

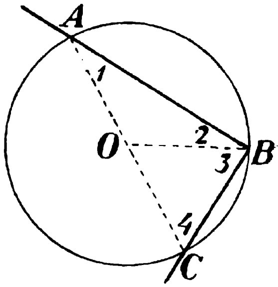
угол, опирающийся на диаметр, равен прямому.



Черт. 138.



Черт. 139.



Черт. 140.

„Опирающимся на диаметр“, или „вписанным в полукруг“ называют такой угол, вершина которого лежит на дуге окружности, а стороны проходят через концы диаметра; таковы углы: 1 на черт. 138 и 2 на черт. 139. Желая удостовериться, что такой угол во всех случаях равен 90°, мы соединяем центр O полукруга (черт. 140) с вершиной B угла. Получаем два равнобедренных треугольнника AOB и BOC (почему они равнобедренные?). В них

$$\text{уг. } 2 = \text{уг. } 1$$
$$\text{уг. } 3 = \text{уг. } 4.$$

Отсюда уг. $2 +$ уг. 3 (т. е. уг. ABC) $=$ уг. $1 +$ уг. 4. Но так как уг. $ABC +$ уг. $1 +$ уг. $4 = 180^\circ$, то уг. $ABC = 90^\circ$.

Этим свойством окружности пользуются нередко для того, чтобы в изделиях проверять полуокружность помощью чертежного треугольника (как?).

§ 50. Прямоугольный треугольник.

В треугольнике, мы знаем, может быть только один прямой угол. Такой треугольник называется прямоугольным. Стороны прямоугольного треугольника имеют особые названия: каждая из сторон, между которыми лежит прямой угол, называется катетом, а сторона против прямого угла называется гипотенузой.

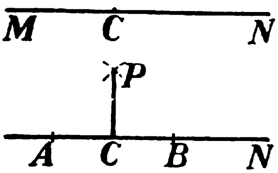
Применения.

54. Через точку C (черт. 141) на прямой MN нужно провести перпендикуляр. Как это сделать?

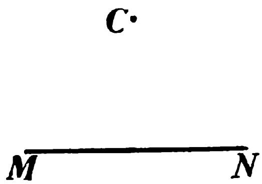
Решение. Отложив (черт. 142) от C в обе стороны по какому-нибудь равному отрезку, т.-е. $CA = CB$, описываем около A и B, как центров, каким-нибудь радиусом дуги; прямая PC, соединяющая точку P пересечения дуг с точкой, C, перпендикулярна к MN. Действительно, треугольники APC и BPC, получающиеся после соединения A и B с P, равны ($CУC$); следовательно, уг. $ACP =$ уг. BCP, а так как эти углы смежные, то они — прямые.

55. Через точку C (черт. 143) вне прямой MN провести к этой прямой перпендикуляр.

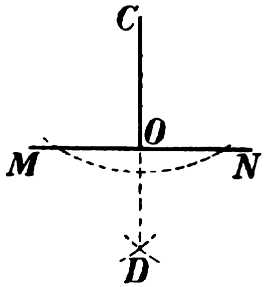
Решение. Около точки C, как около центра, описываем каким-нибудь радиусом дугу AB (черт. 144);



Черт. 141 и 142.



Черт. 143.

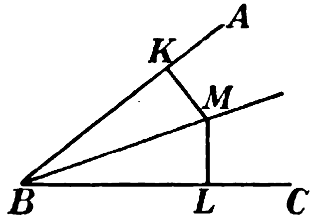


Черт. 144.

затем около точек A и B каким-нибудь радиусом описываем дуги D. Прямая DC перпендикулярна к MN. Чтобы убедиться в этом, соединим C и D с A и B. Треугольники ACD и BCD равны (CCC); следовательно, уг. $ACD =$ уг. DCB, и значит, треугольник $ACO = BCO$ ($CУC$). Отсюда уг. $AOC =$ уг. BOC, а так как эти углы смежные, то они прямые.

56. Объясните, почему каждая точка M прямой BM, делящей пополам угол ABC (черт. 145) одинаково отстоит от сторон AB и BC угла (т.-е. почему, например, $MK = ML$?).

Решение. Треугольники BML и BMK равны ($УCУ$).



Черт. 145.

§ 51. Равносторонний треугольник.

Треугольник с тремя равными сторонами называется равносторонним. Так как против равных сторон в одном и том же треугольнике лежат равные углы, то все углы равностороннего треугольника равны, и, следовательно, каждый из них равен $180° : 3 = 60°$.

Обратно: если каждый угол треугольника равен 60°, то все стороны такого треугольника одинаковы, — потому что против равных углов в одном и том же треугольнике лежат равные стороны.

Применения.

57. Без транспортира построить угол в 60°. В 30°. В 15°. В 120°. В 75°.

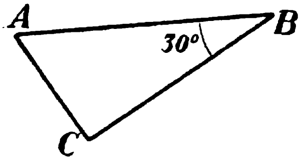
Решение. Строим равносторонний треугольник произвольных размеров; каждый его угол = 60°. Разделив угол этого треугольника пополам, получим угол в 30°. Разделив еще раз пополам, будем иметь угол в 15 . Угол в $120° = 90° + 30°$. Угол в $75° = 60° + 15° = 90° - 15°$.

§ 52. Катет против угла в 30°.

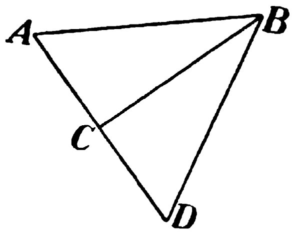
Предварительное упражнение.

Равносторонний треугольник разбит равноделящей одного из углов на два треугольника. Определить их углы.

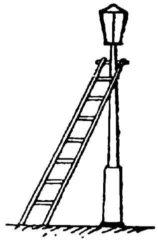
Пусть у нас имеется прямоугольный треугольник (черт. 146) ABC, один угол которого, именно B, равен 30°. Перегнем мысленно треугольник по катету BC. Тогда ABC займет положение BCD (черт. 147), при чем CD составит продолжение AC, потому



Черт. 146.



Черт. 147.



Черт. 148.

что уг. $BCD + BCA =$ развернутому. Уг. $CBD =$ уг. $ABC = 30°$; значит, уг. $A = 60°$; уг. $D = 60°$; а так как и уг. $ABD = 60°$, то треугольник ABD — равносторонний, и следовательно, $AD = AB$. Но $AC = {}^1/_2 AD$ (почему?); отсюда $AC = {}^1/_2 AB$.

Итак, мы убедились, что

катет против угла в 30° равен половине гипотенузы.

Применения.

58. Лестница длиною 6 *м* приставлена к фонарному столбу под углом 30° к нему (черт 148). Каковор асстояние от основания лестницы до основания фонаря?

Решение. Так как катет против 30° равен половине гипотенузы, то искомое расстояние $= 3$ *м*.

59. Длина стропильной ноги AC (черт. 137) вдвое больше высоты AD стропильной фермы. Определить угол наклона этой кровли к горизонту.

Решение. Искомый угол $CAD = 30°$, так как только при таком условии CD равно половине AC.

§ 53. Неравные стороны и углы.

Мы знаем, что если в треугольнике есть равные стороны, то углы, лежащие против них, тоже равны. Рассмотрим теперь, каково соотношение между сторонами и углами в случае неравных сторон.

Предварительное упражнение.

В фигуре черт. 149 укажите какой угол больше: уг. 1 или уг. 2?
В фигуре черт. 151 $AB = AD$. Какой угол больше; уг. C или уг. 1?

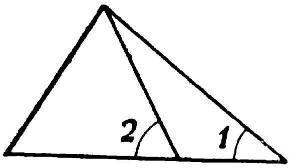
Покажем, что

в треугольнике с неравными сторонами против большей стороны лежит больший угол.

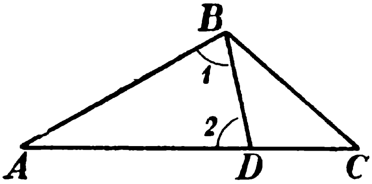
Пусть в треугольнике ABC (черт. 150) сторона AC больше стороны AB. Отложим от вершины образуемого ими угла меньшую сторону AB на большей AC; получим точку D. Соединив D с B, имеем равнобедренный треугольник ABD, в котором угол $1 =$ уг. 2. Угол C меньше угла 1, а значить, подавно меньше угла ABC. Таким образом мы убеждаемся, что против большей стороны $/AC/$ лежит больший угол $[ABC]$.

Нетрудно удостовериться, что и обратно: если в треугольнике имеются неравные углы, то

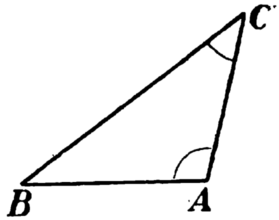
против большего угла лежит бóльшая сторона.



Черт. 149.



Черт. 150



Черт. 151.

Пусть мы знаем, что в треугольнике (черт. 151) ABC уг. A больше угла C. Тогда сторона BC не может быть равна AB: иначе уг. A равнялся бы углу C; не может сторона BC быть и меньше AB — тогда уг. A был бы меньше угла C (а мы знаем, что уг. A больше уг. C). Не равен и не меньше, значит, — больше.

Применения.

60 Что больше: гипотенуза или катет?

Решение. Гипотенуза, как сторона, лежащая против самого большого угла треугольника, длиннее каждого катета.

61. Угол при вершине равнобедренного треугольника $= 70^0$. Что длиннее: основание или боковая сторона?

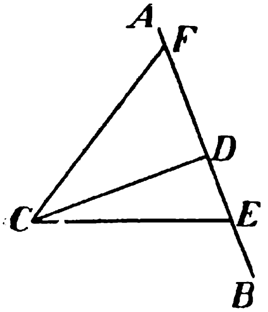
Решение. Углы при основании равны $\frac{180^0 - 70^0}{2} = 65^0$. Так как угол при вершине больше, то основание больше боковых сторон.

Повторительные вопросы к §§ 48 — 53.

Каково соотношение между углами треугольника, две стороны которого равны? — Каково соотношение между сторонами треугольника, имеющего два равных угла? — Каковы соотношения в треугольнике с неравными сторонами? — С неравными углами? — Какой треугольник называется равнобедренным? Какая сторона такого треугольника называется боковой? — Какая называется основанием? — Как называется треугольник, имеющий два равных угла? — Сколько градусов в угле, опирающемся на диаметр? — Какой треугольник называется прямоугольным? — Что называется гипотенузой? — Катетами? - По каким признакам можно установить равенство прямоугольных треугольников? — Какой треугольник называется равносторонним? — Как велики его углы? Каково соотношение между гипотенузой и катетом, лежащим против угла в $^1/_3$ прямого?

§ 54. Перпендикуляр, наклонная, проекция.

Если из точки проведен к прямой перпендикуляр, — например, CD (черт. 152), то точка D называется *основанием перпендикуляра*. Всякая другая линия, проведенная через точку C к прямой AB, встречает ее не под прямым углом (почему?) и называется *наклонной*; например, CE, CF — наклонные. Точки E, F — *основания* наклонных. Расстояния DE, DF от основания перпендикуляра до оснований наклонных называются *проекциями* этих наклонных: DE — проекция наклонной CE, а DF — проекция наклонной CF.

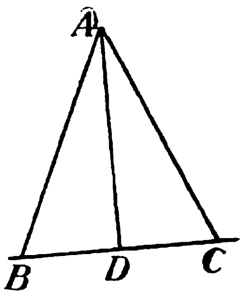


Черт. 152.

Рассмотрим некоторые соотношения между перпендикуляром, наклонными и их проекциями.

1) Перпендикуляр короче каждой наклонной, проведенной к той же прямой из той же точки. Например, CD на черт. 152 короче, чем CF и чем CE, потому что катет короче гипотенузы. Перпендикуляр есть поэтому самое короткое расстояние от точки до прямой. Когда говорят о расстоянии точки от какой-нибудь прямой, то имеют в виду именно *кратчайшее* расстояние, т. е. *перпендикуляр* из точки на эту прямую.

2) Если из какой-нибудь точки проведены к прямой две наклонные *одинаковой* длины, — напр., AB и AC на черт. 153, то проекции этих наклонных *равны*. В самом деле: треугольники ABD и ACD имеют общий катет AD, равные гипотенузы AB и AC и кроме того, уг. $B =$ уг. C (§ 52); поэтому они равны *(СУС)*, и значит, катет $OB =$ катету DC.



Черт. 153.

3) Обратно: если равны проекции двух наклонных, проведенных к прямой из одной точки, то эти наклонные имеют одинаковую длину. Если бы на черт. 153 нам не было известно, что наклонные AB и AC равны, но взамен этого мы знали бы, что $BD = DC$, то установили бы равенство AB и AC из равенства прямоугольных треугольников ADB и ADC (*СУС*).

§ 55. Следствие предыдущего параграфа.

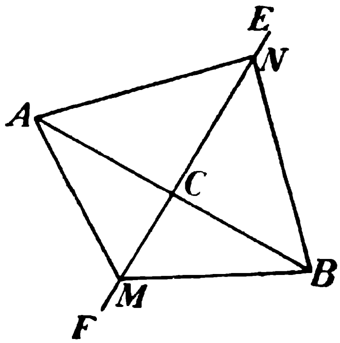
Сейчас мы установили, что при равных проекциях наклонные равны. Отсюда вытекает важное свойство перпендикуляра, проведенного через середину стороны. А именно: если через середину C отрезка AB (черт. 154) проведена перпендикулярно к нему прямая EF, то каждая точка этого перпендикуляра удалена от концов отрезка одинаково. Например, точка M одинаково отстоит от точек A и B. Это следует из того, что проекции BC и AC наклонных MB и MA равны, — значит, равны и наклонные. Точно также равны расстояния NA и NB. Вообще

каждая точка перпендикуляра, проведенного через середину отрезка, одинаково удалена от концов этого отрезка.

Другое следствие § 54 дает нам полезный признак равенства прямоугольных треугольников:

прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и катету.

Чтобы убедиться в этом, приложим друг к другу сравниваемые треугольники равными катетами (черт. 136). Тогда гипотенузы, как равные наклонные, должны иметь равные проекции, т.-е. другие катеты этих треугольников должны быть равны. Значит, треугольники равны (CCC).



Черт. 154.

Повторительные вопросы к §§ 54 — 55.

Покажите на чертеже, что называется наклонной линией, основанием перпендикуляра, основанием наклонной, проекцией. — Что длиннее: перпендикуляр или наклонная? — Что называется расстоянием от точки до прямой линии? — Каково соотношение между длиною наклонных в случае равенства проекций? — Каким свойством обладает прямая, проведенная перпендикулярно к отрезку через его середину? — Перечислите все известные вам признаки равенства прямоугольных треугольников.

Применения.

62. Извилистый ручей протекает между двумя селениями. Как разыскать все места ручья, одинаково удаленные от обоих селений?

Решение. Соединив селения прямой линией, провешивают через ее середину перпендикуляр. Все точки пересечения этого перпендикуляра с ручьем и будут искомые.

63. Где надо поместить фонарь внутри треугольного участка, чтобы все углы его были освещены одинаково?

Решение. Искомая точка должна быть одинаково удалена от всех вершин треугольника. Сначала найдем все те точки, которые одинаково отстоят от двух вершин: для этого проведем перпендикуляр через середину одной стороны треугольника. Затем проведем перпендикуляр через середину другой стороны: на нем расположены все точки, равноудаленные от двух других вершин. Искомая точка лежит на пересечении обоих перпендикуляров.

§ 56. Средняя линия треугольника.

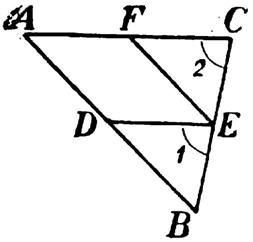
Предварительное упражнение.

В треугольнике ABC (черт. 155) точка D есть середина AB, а прямая EF параллельна AB. Докажите: 1) что треугольник FCE = треугольнику DBE; 2) что фигура $ADEF$ — параллелограмм.

Средней линией треугольника называется прямая, соединяющая середины двух его сторон (DE на черт. 155). Этот отрезок обладает следующими свойствами:

с р е д н я я л и н и я т р е у г о л ь н и к а п а р а л л е л ь н а п р о т и в о л е ж а щ е й с т о р о н е и р а в н а е е п о л о в и н е.

Удостоверимся в этом. Пусть в треугольнике ABC (черт. 155) прямая DE соединяет середины сторон; покажем, что она параллельна стороне AC и равна ее половине. Для этого через точку E проведем EF параллельно AB. Треугольники DBE и FEC равны (почему?), поэтому уг. $1 =$ уг. 2, и значит, DE параллельно AC; кроме того, $DE = FC$. А так как четыреугольник $ADEF$ есть параллелограмм (почему?), то $DE = AF$. Итак, $DE = FC = AF = \frac{1}{2} AC$.

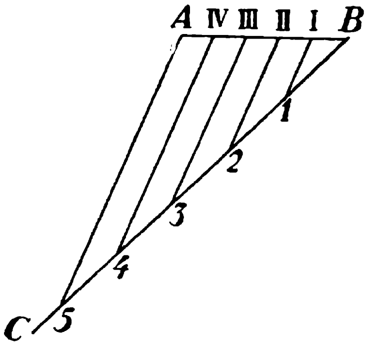


Черт. 155.

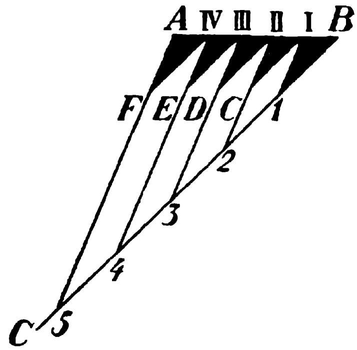
§ 57. Деление отрезка на равные части.

Мы умеем помощью циркуля и линейки делить отрезок только на 2, на 4, на 8 и т. д. число равных частей (§ 21). Укажем теперь способ делить отрезок на любое число равных частей.

Пусть требуется отрезок AB (черт. 156) разделить на 5 равных частей. Проведем от одного конца этого отрезка, например, от B, под произвольным углом прямую BC. На этой прямой отло-



Черт. 156.



Черт. 157.

жи от конца B пять раз какой-нибудь отрезок; получим точки 1, 2, 3, 4, 5. Последнюю точку 5 соединим с концом A данного отрезка и через точки 1, 2, 3, 4 проведем прямые, параллельные прямой $A5$. Можно указать, что эти прямые разделять отрезок AB на 5 равных частей в точках I, II, III, IV.

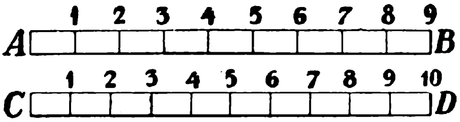
Для доказательства проведем через точки I, II, III, IV, прямые параллельные BC (черт. 157). Получим треугольники $B1I$, $IC II$, $II D III$, $III E IV$, $IV F A$, у которых $B—I$, $I—II$, $II—III$, $III—IV$, *IV*—*A* равны между собою (потому что каждая из них, кроме 1—*1*, равна противоположной стороне параллелограмма, а *B* 1, *B*—2, 2—3, 3—4, 4—5 равны друг другу). Из равенства же указанных треугольников *(СУС)* вытекает равенство отрезков *B*—*I*, *I*—*II*, *II*—*III*, *III*—*IV*, *IV*—*V*.

Применения.

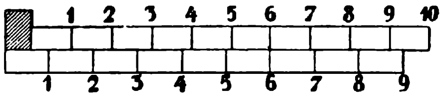
Нониус. Штанген-циркуль.

Умея делить прямолинейные отрезки на любое число частей, можно изготовить приспособление, полезное для точных измерений — так наз. „нониус".

Для примера рассмотрим следующий простейший нониус. Полоску *A B* (масштаб, черт. 158) длиною в 9 *см* разделим на 10 равных частей, по 0,9 *см* каждая;



Черт. 158.



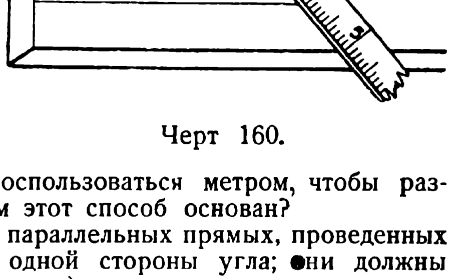
Черт. 159.

получим полоску *C D* (нониус). Пусть теперь требуется измерить длину небольшого предмета *M*. Прикладываем его к полоскам *A B* и *C D*, как показывает черт. 159, и замечаем, какие деления обеих полосок совпадают. Предположим, что совпали 6-е деления. Это показывает, что длина предмета равна разнице между 6-ю делениями масштаба *ПАВ* и 6-ю делениями нониуса. Но 6 делений полоски *A B* = 6 *см*, а 6 делений нониуса = 6 . 0,9 = 5,4 *см* Следовательно, длина предмета равна 6 — 5,4 = 0,6 *см*. Вообще, длина измеряемого предмета равна стольким десятым долям деления масштаба, сколько единиц в совпадающих делениях масштаба и нониуса.

Если бы мы для изготовления нониуса взяли не 9 сантиметров, а 9 миллиметров, и разделили их общую длину на 10 равных частей, то разность между одним делением масштаба и одним делением нониуса равнялась бы 0,01 *см*. Следовательно, помощью такого нониуса мы могли бы измерять мелкие предметы с точностью до 0,1 миллиметра.

Нониус обычно применяется в форме так наз. „штанген-циркуля", употребляемого для точного измерения мелких предметов. Иногда нониусом снабжается и „микрометр" — инструмент для точного измерения толщины.

Сходным образом может быть устроен нониус для точного измерения дуг. Если 9 градусных делений разделить на 10 частей, то так устроенный нониус позволит измерять дуги с точностью до 0,1 градуса, т.-е. до 6'.



Черт 160.

64. На черт. 160 показано, как можно воспользоваться метром, чтобы разделить ширину доски на равные части. На чем этот способ основан?

Решение. Мы имеем в этом случае ряд параллельных прямых, проведенных через равноудаленные друг от друга точки одной стороны угла; они должны отсечь от другой стороны угла (т.-е. от края доски) равные отрезки.

65. Середины сторон прямоугольника с диагональю 10 *см* последовательно соединены прямыми линиями. Найти обвод образовавшегося четыреугольника.

Решение. Каждая сторона этого четыреугольника равна половине диагонали (как линия, соединяющая середину двух сторон треугольника), т.-е. 5 *см*. Значит, обвод четыреугольника $= 20$ *см*.

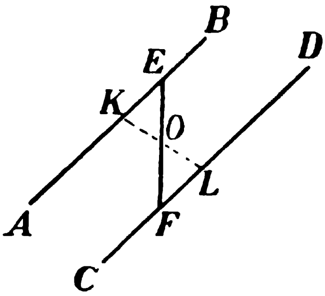
§ 58. Средняя линия трапеции.

Предварительные упражнения.

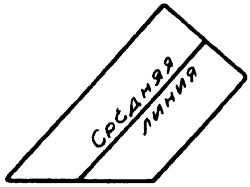
На черт. 161 прямые AB и CD параллельны Прямая KL проведена через середину O отрезка EF. Докажите, что треугольники KOE и FOL равны.

В четыреугольнике $AFED$ (черт 155) сторона $AF = DE$ и параллельна ей. Докажите, что этот четыреугольник есть параллелограмм.

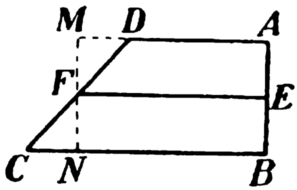
Средней линией трапеции называется прямая, соединяющая середины ее непараллельных сторон (черт. 162). Этот отрезок обладает следующим свойством:



Черт. 161.



Черт. 162.



Черт. 163.

средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

Удостовериться в этом можно так. Пусть в трапеции $ABCD$ (черт. 163) прямая EF есть средняя линия, т.-е. соединяет середины непараллельных сторон AB и DC. Проведем через точку F прямую, параллельную AB и продолжим AD до пересечения с сейчас проведенной линией. Треугольники FDM и FNC равны *(УСУ)*, следовательно, $MD = NC$. Четыреугольник $EBNF$ есть параллелограмм *(*$EB = {}^1/_2 AB$; $FN = {}^1/_2 MN$; $AB = MN$; значить, EB равно и параллельно FN и т. д.*)*; поэтому $EF = BN$. Точно так же $EF = AM$. Зная это, пишем:

$$\begin{array}{c} BC = BN + NC = EF + NC \\ \underline{MD = AD - DM = EF - NC} \\ BC + AD = EF + EF + CN - NC' \end{array}$$

а откуда:

$$EF = \frac{BC + AD}{2}.$$

Мы убедились, что во всякой трапеции средняя линия равна полусумме ее оснований. Вспомнив, что площадь трапеции равна полусумме ее оснований, умноженной на ее высоту, мы можем высказать следующим образом правило вычисления площади трапеции:

площадь трапеции равна ее средней линии, умноженной на высоту.

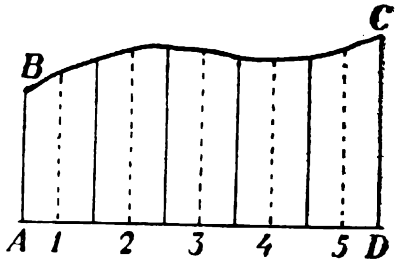
Повторительные вопросы к §§ 57 и 58.

Что называется средней линией треугольника? — Каким свойством она обладает? — Как разделить данный отрезок на несколько равных частей? — Начертите какой-нибудь отрезок и разделите его на 3 равные части. — Разделите взятый вами отрезок на 7 равных частей. — Что называется средней линией трапеции? — Каким свойством она обладает? — Как можно вычислить площадь трапеции, если известны ее высота и средняя линии?

Применения.

66. Фигура $ABCD$ (черт. 164) ограничена прямой AD, двумя перпендикулярами AB и CD и кривой BC. Чтобы определить ее площадь, отрезок AD разделен на 5 равных частей, и из середины этих отрезков 1, 2, 3, 4, 5 восстановлены перпендикуляры к AD. Длина отрезка $AD = 80$ *см*; длины перпендикуляров: в точке 1 — 28 *см*, в 2 — 31 *см*, в 3 — 31,5 *см*, в 4 — 32 *см*, в 5 — 34 *см*. Найти площадь $ABCD$.

Решение. Площадь первой слева полосы $= 28 . 16 = 448$ *кв. см*, второй — $31 . 16 = 496$ *кв. см*, третий — $31,5 . 16 = 504$, четвертый — $32 . 16 = 512$ *кв. см*, пятый — $34 . 16 = 544$. Искомая площадь $= 2\,500$ *кв. см*.



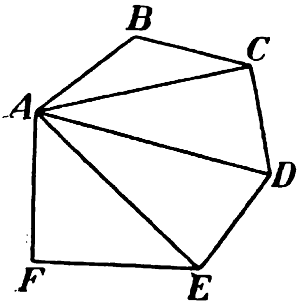
Черт. 164.

IX. Многоугольники.

§ 59. Сумма углов многоугольника.

Мы знаем, что сумма углов у всех треугольников одна и та же (180°). Рассмотрим теперь, одинакова ли сумма углов у всех четыреугольников, у всех пятиугольников — вообще у всех „одноименных“ многоугольников.

Для примера возьмем шестиугольник (черт. 165). Проведем из какой-нибудь его вершины, напр., из A, диагонали к прочим вершинам. Мы разобьем этим наш шести угольник на 4 треугольника. Сумма углов каждого из них 180°, а всех четырех вместе — $180° \cdot 4$. Но это и есть, как легко понять, сумма всех углов нашего шестиугольника. Каковы бы ни были форма и размеры шестиугольника, он разбивается на 4 треугольника, и следовательно, сумма углов всякого шестиугольника $= 180° \cdot 4 = 720°$.



Черт. 165.

Если бы вместо шестиугольника, мы взяли многоугольник с другим числом сторон, например, девятиугольник, то разбили бы его диагоналями не на 4, а на 7 треугольников; поэтому сумма углов всякого девятиугольника равна $180° \cdot 7 = 1\,260°$.

Таким же образом найдем, что сумма углов всякого четыреугольника $180° \cdot 2 = 360°$, пятиугольника $180° \cdot 3 = 540°$ и т. д.

Нетрудно подметить общее правило:
сумма углов всякого многоугольника равна 180°, умноженным на число его сторон без двух.

§ 60. Правильные многоугольники.

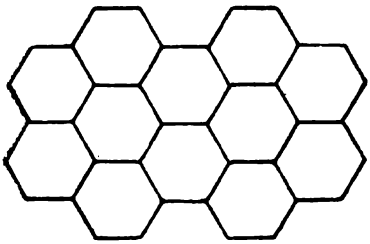
Многоугольник, у которого все углы и все стороны одинаковы, называются правильным.

Величину каждого угла правильного многоугольника легко вычислить, раз мы умеем вычислять сумму всех этих углов и знаем, что они одинаковы. Например, каждый угол правильного пятиугольника равен $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$, правильного шестиугольника равен $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$, и т. д.

Применения.

67. Как убедиться, что шестиугольными плитками можно покрыть пол сплошь, без промежутков?

Решение. Сумма углов правильного шестиугольника равна $180^0 \cdot [6 - 2] = 720^0$, и следовательно, каждый из внутренних его углов $= \frac{720^0}{6} = 120^0$. Так как сумма углов, расположенных вокруг общей вершины, равна 360^0, то разделив $360 : 120$, узнаем, что, углы трех соседних плиток должны плотно примкнуть друг к другу.



Черт. 166.

68. Можно ли сплошь покрыть пол восьмиугольными плитками?

Решение. Внутренний угол правильного восьмиугольника $= \frac{180^0 \cdot [8 - 2]}{8} = 125^0$. Так как этот угол не содержится в 360^0 целое число раз, то покрыть такими плитками пол сплошь нельзя.

X. Дополнительные сведения об окружностях.

§ 61. Разыскание центра. Хорды.

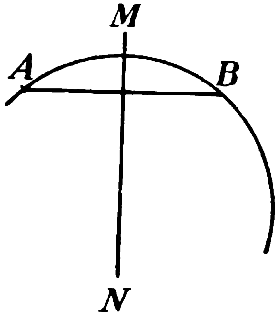
На практике нередко возникает надобность разыскать центр данной окружности или дуги. Покажем, как это делается.

Пусть требуется разыскать центр дуги, изображенной на чертеже 167. Возьмем на ней две произвольные точки, — напр., A и B (черт. 168). Центр круга должен быть, конечно, одинаково удален от каждой из них. А мы знаем, что все точки, одинаково удаленные от двух данных точек, расположены на перпендикуляре,

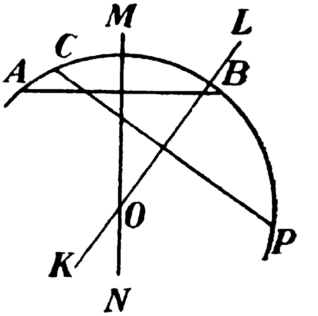
Черт. 167.

Черт. 168.

проведенном через середину отрезка, соединяющего эти две точки (§ 55). Проведя этот перпендикуляр, получаем прямую MN (черт. 169), на которой и должен находиться искомый центр дуги. Чтобы узнать, какая именно из точек этой прямой есть центр дуги, мы избираем на той же дуге другую пару точек, — например, C и P (черт. 170) и, прилагая к ним те же рассуждения, проводим перпендикуляр LK к середине соединяющей их прямой. Точка O пересечения обоих перпендикуляров и есть искомый центр дуги.



Черт. 169.



Черт. 170.

Прямая, соединяющая две точки окружности (или дуги), называется *хордой*. Поэтому сейчас установленное свойство можно высказать так:

перпендикуляр, проведенный через середину хорды, проходит через центр окружности.

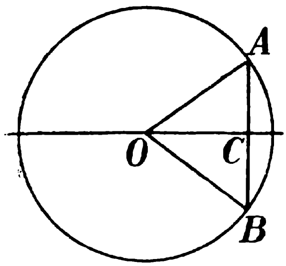
Справедливо и обратное утверждение, а именно:

перпендикуляр, проведенный к хорде через центр круга, проходит через середину хорды.

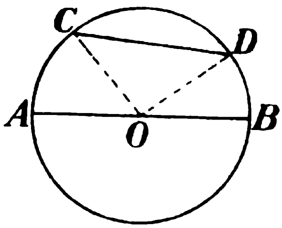
Или короче:

диаметр, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам.

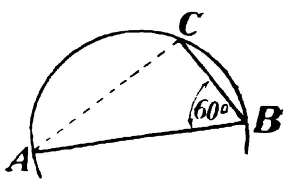
Действительно: если бы он не проходил через ее середину, то вышло бы (черт. 171), что равные наклонные [OA и OB] имеют



Черт. 171.



Черт. 172.



Черт. 173.

не равные проекции [AC и BC] — а этого, мы знаем, быть не может (§ 54).

Повторительные вопросы.

Что называется хордой? — Как называется хорда, проходящая через центр круга? — Как разыскать центр данной дуги, пользуясь хордами? — На каком свойстве хорд основан этот способ? — На какие части делит хорду перпендикуляр к ней, проведенный через центр?

Применения.

69. Как убедиться, что хорда не может быть больше диаметра того же круга?

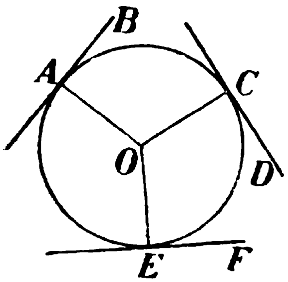
Решение. Хорда CD (черт. 172) короче суммы радиусов $CO + OD$ (сторона треугольника всегда меньше суммы двух других); следовательно, она меньше и диаметра AOB, так как $OC = OD = AO = OB$.

70. Чему равна хорда, составляющая с диаметром угол в 60°?

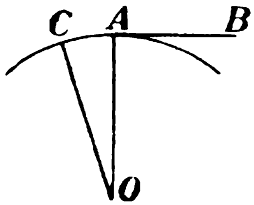
Решение. Соединив конец С хорды (черт. 173) с концом А диаметра, получим прямоугольный треугольник, так как угол C — прямой. Угол $A = 30^0$, и, значит, BC = половине диаметра AB = радиусу (§ 52).

§ 62. Касательные и их построение.

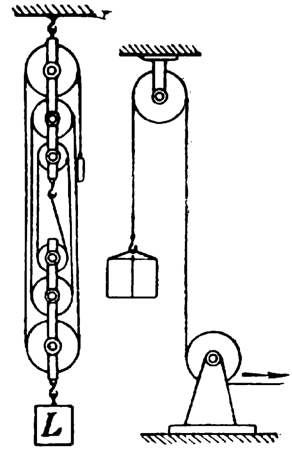
Другой способ нахождения центра (напр., точеных изделий) — помощью особого инструмента, „центроискателя“ — основан на свойствах так наз. касательных линий. **Касательной** к окружности называется всякая прямая линия, которая в точке встречи с окружностью перпендикулярна радиусу, проведенному к этой точке. Например, на черт. 174



Черт. 174.



Черт. 175.

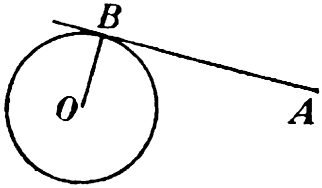


Черт. 176.

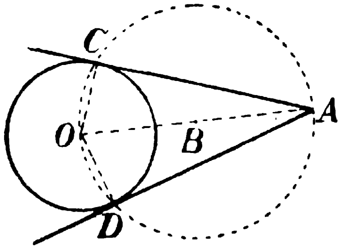
прямые AB, CD и EF — касательные к окружности ACE. Точки A, C, E называются „точками касания“. Особенность касательной линии та, что она **имеет с окружностью только одну общую точку**. Действительно, если бы у касательной AB (черт. 175) была с окружностью, кроме этой еще одна общая точка, напр., C, то, соединив ее с центром, мы получили бы равнобедренный треугольник COA с двумя прямыми углами CA, а это, мы знаем, невозможно (почему?).

С линиями, касательными к окружности, мы встречаемся весьма часто в практической жизни. Веревка, перекинутая через блок, занимает в своих натянутых частях положение касательных прямых к окружности блока. Ремни талей (сочетания нескольких блоков, черт. 176) располагаются по линии общих касательных к окружности колес. Передаточные ремни шкивов тоже занимают положение общих касательных к окружностям шкивов: „внешних“ касательных в так наз. открытой передаче и „внутренних“ — в закрытой.

Как через данную точку вне окружности провести к ней касательную? Другими словами: как через точку A (черт. 177) провести прямую AB, чтобы угол ABO был прямой? Выполняется это следующим образом. Соединяют A с центром O (чертеж 178). Прямую делят пополам и вокруг середины ее B, как центра, описывают окружность радиусом BO. Иначе говоря, на OA строят круг, как на диаметре. Точки пересечения C и D обеих окружностей соединяют с A прямыми линиями: это и будут касательные.



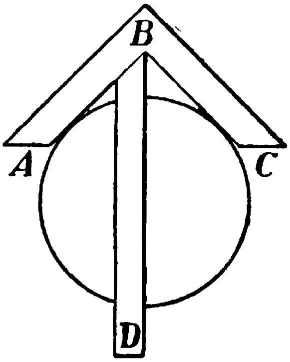
Черт. 177.



Черт. 178.

Чтобы в этом убедиться, проведем из центра к точкам C и D вспомогательные прямые OC и OD. Углы OCA и ODA — прямые, так как они вписаны в полуокружность. А это и значит, что OC и OD — касательные к окружности.

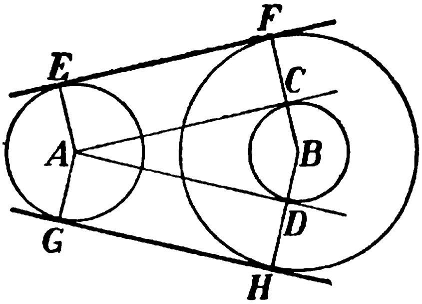
Рассматривая наше построение, мы видим, между прочим, что из каждой точки вне окружности можно провести к ней д в е касательные. Нетрудно убедиться, что обе эти касательные о д и н а к о в о й д л и н ы, т. е., что $AC = AD$. Действительно, точка O одинаково удалена от сторон угла A; значит OA — равноделящая, и следовательно, треугольники OAC и OAD равны ($СУС$).



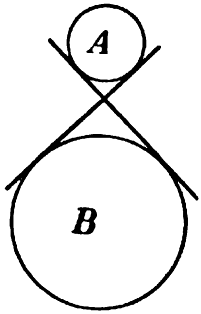
Черт. 179.

Попутно мы установили, что прямая, которая делит пополам угол между обеими касательными, проходит через центр круга. На этом основано устройство прибора для разыскания центра точеных изделий — ц е н т р о и с к а т е л я (черт. 179). Он состоит из двух линеек AB и AC, укрепленных под углом, и третьей линейки BD, край которой BD делит пополам угол между краями первых двух линеек. Прибор прикладывают к круглому изделию так, чтобы прилегающие к нему края линеек AB и BC соприкасались с окружностью изделия. Края будут при этом иметь с окружностью только по одной общей точке, поэтому край линейки должен, согласно сейчас указанному свойству касательных, пройти через центр круга. Прочертив на изделии по линейке диаметр круга, прикладывают центроискатель к изделию в другом положении и прочерчивают другой диаметр. Искомый центр окажется на пересечении обоих диаметров.

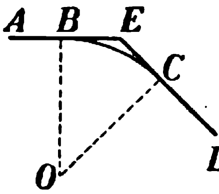
Если нужно провести общую касательную к **двум** окружностям, т.-е. провести прямую линию, которая касалась бы одновременно двух окружностей, то поступают следующим образом. Около центра одной окружности, например, около *B* (черт. 180), описывают вспомогательную окружность радиусом, равным раз-



Черт. 180.



Черт. 181.



Черт. 182.

ности радиусов обеих окружностей. Затем из точки *A* проводят касательные *AC* и *AD* к этой вспомогательной окружности. Из точек *A* и *B* проводят прямые, перпендикулярные к *AC* и *AD*, до пересечения с данными окружностями в точках *F*, *E*, *H* и *G*. Прямые, соединяющие *E* с *F*, *G* с *H*, будут общие касательные к данным окружностям, так как они перпендикулярны к радиусам *AE*, *CF*, *AG* и *DH*.

Кроме тех двух касательных, которые сейчас были проведены и которые называются **внешними**, возможно еще провести две другие касательные, расположенные так, как на черт. 181 (**внутренние** касательные). Чтобы выполнить это построение, описывают вокруг центра одной из данных окружностей — например, вокруг B — вспомогательную окружность радиусом, равным **сумме** радиусов обеих окружностей. Из точки *A* проводят к этой вспомогательной окружности касательные. Дальнейший ход построения читатели смогут найти сами.

Повторительные вопросы.

Что называется касательной? — Сколько общих точек у касательной и окружности? - Как провести касательную к окружности через точку, лежащую вне окружности? — Сколько можно провести таких касательных? — Что такое центроискатель? — На чем основано его устройство? — Как провести общую касательную к двум окружностям? — Сколько таких касательных?

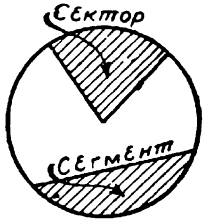
Применения

71. Два прямых участка дороги соединены дугою так, что прямые участки имеют направление касательных к этой дуге (черт. 182). Угол между прямыми участками — 155^0. Найти длину дуги, если радиус ее = 270 метров.

Решение. Из черт. 182 видим, что в четыреугольнике $OBEC$ уг. $E - 155°$, уг. OBE — прямой, уг. OCE — прямой. Так как сумма внутренних углов четыреугольника $= 180° \cdot [4 - 2] - 360°$, то угол $O = 360° - [155° + 90° + 90°] = 25°$. Длина полной окружности радиуса 270 *м* — $2 \cdot 3{,}14 \cdot 270 - 1\,700$ *м*, а длина дуги в $25 = \frac{1\,700 \cdot 25}{360} = 120$ *м*. Искомая длина дуги — 120 метров.

§ 63. Площадь частей круга.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой между ними, называется круговым сектором (черт. 183). Вычислить площадь сектора легко, если знать, какую часть полной окружности составляет его дуга: такую же долю площади полного круга составляет площадь сектора. Если, например, дуга сектора содержит $60°$, т.-е. составляет $\frac{1}{6}$ окружности, то площадь сектора в 6 раз меньше площади круга.



Черт. 183.

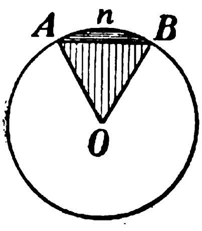
Если же число градусов в дуге сектора не известно, но известна длина этой дуги в линейных мерах, то площадь сектора вычисляется иначе. Рассуждая как в § 35, можно установить, что

площадь сектора равна длине его дуги, умноженной на половину радиуса.

Обозначив длину дуги через l, а радиус через R, имеем для площади S сектора формулу:

$$S = \frac{1}{2} l R$$

Другая часть круга, площадь которого приходится вычислять на практике, это та, которая отсекается от круга хордой. Часть круга, ограниченная хордой и дугою круга, называется круговым сегментом (черт. 183). Если требуется вычислить площадь сегмента AnB (черт. 184), то вычитают из площади сектора $OAnB$ площадь равнобедренного треугольника AOB.



Черт. 184.

Применения.

72. Участок луга имеет форму квадрата со стороною 24 *м*. К угловому колу на веревке в 10 *м* длиною привязана лошадь. Найти площадь участка, недоступного лошади.

Решение. Площадь всего луга $= 24^2 = 580$ *кв. м.* Из нее надо вычесть площадь сектора, угол которсго 90 , а радиус -- 10 *м*; она равна четверти площади круга того же радиуса, т.-е. 78 *кв. м.* Значит, искомая площадь $= 580 - 78 = 500$ *кв. м.*

73. Найти площадь сектора, обвод которого 1,36 *см*, а угол $20°$.

Решение. Обозначим радиус сектора через x. Длина дуги такого радиуса, содержащая $20°$, равна $\frac{2\pi x \cdot 20}{360} = \frac{\pi x}{9}$. Обвод этого сектора $= x + x + \frac{\pi x}{9}$. Имеем уравнение $2x + \frac{\pi x}{9} = 136$, откуда $x = 62$, и искомая площадь — 780 *кв. см.*

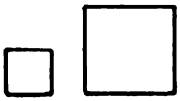
74. Дуга сегмента содержит 90°. Радиус его — 16 *см.* Найти его площадь.

Решение. Дуга составляет $^1/_4$ окружности. Площадь соответствующего сектора — 200 *кв. см.*, площадь его треугольной части $= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128$ *кв. см.* Значит, искомая площадь $= 200 - 128 = 70$ *кв. см.*

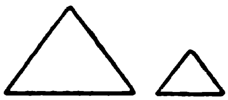
XI. Подобие фигур.

§ 64. Подобие многоугольников.

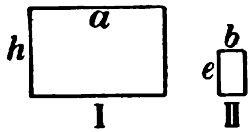
Сравнивая между собою фигуры, мы различали до сих пор только два случая: случай равенства фигур и случай их неравенства. Но возможен и третий случай, которого мы еще



Черт. 185.



Черт. 186.



Черт. 187.

не рассматривали: фигуры не равны, а похожи, так что одна представляет уменьшенное подобие другой. Например, большой и малый квадрат не равны, но имеют совершенно одинаковую форму: один представляет подобие другого (черт. 185). Два равносторонних треугольника, большой и малый, также имеют одинаковую форму (черт. 186).

Такие фигуры, которые имеют различную величину сторон, но одинаковы по форме, называются подобными фигурами.

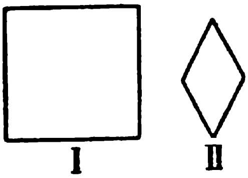
В каком же случае считаем мы, что у двух фигур одинаковая форма? Рассмотрим этот вопрос для двух многоугольников. Для одинаковости формы многоугольники должны прежде всего иметь соответственно равные углы. Если углы одного многоугольника не равны углам другого, мы не назовем эти фигуры одинаковыми по форме (см. фигуры черт. 188). Значит, равенство углов одной фигуры углам другой есть необходимое условие для одинаковости их формы, т.-е. для подобия этих фигур. Но достаточно ли одного этого условия? Всякие ли две фигуры с соответственно равными углами имеют одинаковую форму? Взгляните на прямоугольники черт. 187. Углы прямоугольника I равны углам прямоугольника II, — однако, мы не скажем, что они одинаковой формы. Почему? Потому что высота первого больше высоты второго в 2 раза, а основание первого больше основания второго в 5 раз. Стороны этих фигур, как говорят, не пропорциональны: из них нельзя составить пропорции (отношение двух из них не равно отношению двух других). Форма этих четыреугольников была бы одинакова только тогда, когда из их „сходственных“ сторон (т.-е. из сторон, прилегающих к равным углам) можно составить пропорцию

$$\frac{a}{b}=\frac{h}{l}$$

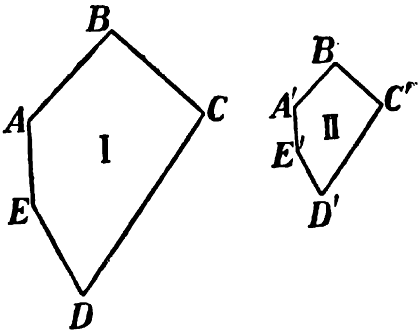
Короче мы можем высказать это условие подобия многоугольников так:

многоугольники подобны, когда их сходственные стороны пропорциональны (т.-е. отношение двух из них равно отношению двух других).

Стороны многоугольников могут быть пропорциональны и не будучи сходственными, т. е. не прилегая к равным углам. Например, на черт. 188 каждая сторона квадрата I вдвое длиннее каждой стороны ромба II; значит, стороны этих фигур пропорциональны. Но все-таки эти фигуры не подобны, потому что пропорциональные стороны их не прилегают к равным углам: они не сходственные.



Черт. 188.



Черт. 189.

Итак, для подобия, например, многоугольников $ABCDE$ и $A^1E^1C^1D^1E^1$ (черт. 189) необходимо:

во-первых, чтобы

$$\begin{aligned}
&\text{уг. } A=\text{уг. } A^1;\\
&\text{уг. } B=\text{уг. } B^1;\\
&\text{уг. } C=\text{уг. } C^1;\\
&\text{уг. } D=\text{уг. } D^1;\\
&\text{уг. } E=\text{уг. } E^1;
\end{aligned}$$

и, во-вторых, чтобы

$$\frac{AB}{A^1B^1}=\frac{BC}{B^1C^1}=\frac{CD}{C^1D^1}=\frac{DE}{D^1E^1}=\frac{EA}{E^1A^1}$$

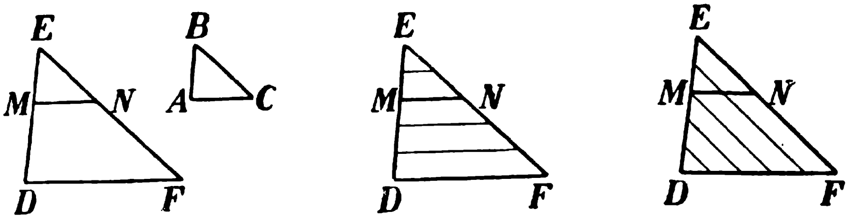
(A^1 — читается „А прим“, или „А со знаком“).

§ 65. Подобие треугольников.

Сейчас мы установили, что для подобия многоугольников необходимо равенство их углов и пропорциональность сходственных сторон (объясните, что это значит?). Теперь покажем, что для подобия треугольников достаточно одного лишь равенства углов, т. е., что в треугольнике с соответственно равными углами стороны пропорциональны.

Пусть нам известно, что в треугольниках ABC и DEF (черт. 190) угол $A=$ уг. D, уг. $B=$ уг. E, а значит и третий угол $C=$ углу F.

Убедимся, что в таком случае стороны этих треугольников пропорциональны. Для этого перенесем мысленно треугольник ABC на DEF и положим его так, чтобы вершина B попала в E, сторона BA пошла по стороне ED, а BC — по EF. Третья сторона AC займет положение MN, и так как уг. $A =$ уг. D, то MN ляжет параллельно DE В таком положении легко доказать, что стороны меньшего треугольника пропорциональны сторонам большего. Разделим сторону ED на такое число частей, чтобы одна из точек деления пришлась в M. Пусть между E и M уместилось 2 таких части, а между M и D — 3. Проведем через точки деления прямые, параллельные DF. Эти параллельные (черт. 191) рассекут сторону EF также на равные части (почему? См. § 57): две части — между E и N и 3 части — между N и F. Теперь ясно, что



Черт. 190. Черт. 191. Черт. 192.

$$\frac{ED}{EM} = \frac{5}{2} = \frac{EF}{EN}$$

Но так как $EF = AB$, а $EN = BC$, то

$$\frac{ED}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

Значит, стороны ED, AB, EF и BC — пропорциональны.

Для подобия треугольников необходимо еще, чтобы и отношение третьей пары сторон $DF:AC$ равнялось отношению ED: $:AB$ (или $EF:BC$). Чтобы и в этом удостовериться, проведем через точки деления стороны ED (черт 192) ряд прямых, параллельных EF. Сторона MN разделится тогда на 2 равные части (почему?), а DF — на 5 таких же частей (почему?), и станет ясно, что

$$\frac{DE}{AC} = \frac{5}{2} = \frac{ED}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

Итак, если углы одного треугольника равны углам другого, то стороны, прилегающие к равным углам (или лежащие против равных углов) пропорциональны.

Примечание. Стороны треугольников могут иметь такую длину, что невозможно выполнить деление их, как указано было на черт. 191: ни одна точка деления не приходится в точке M. Однако, рассмотренное сейчас свойство сохраняется и в таком случае (это доказывается в более полных учебниках).

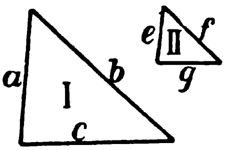
Мы сейчас доказали, что в двух треугольниках при равенстве углов стороны должны быть пропорциональны. Покажем теперь, что и наоборот: при пропорциональности сторон треугольники имеют соответственно равные углы.

Это надо понимать так Если длины сторон двух треугольников (напр. I и II на черт. 193) таковы, что

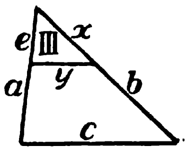
$$\frac{a}{e}=\frac{b}{f}=\frac{c}{g},$$

то угол против стороны a равен углу против стороны e, угол против $b=$ углу против f, и угол против $c=$ углу против g.

В этом легко убедиться, отложив (черт. 194) от вершины треугольника I на стороне a сторону e и проведя через конец ее прямую x, параллельную c. Она отсечет от треугольника I м ньший треугольник III, стороны которого обозначим через e, x y. Этот треугольник III имеет углы соответственно равные углам треугольника I. А мы сейчас доказали, что в таком случае



Черт. 193.



Черт. 194.

$$\frac{a}{e}=\frac{c}{x}=\frac{b}{y}.$$

Нам известно, что $\frac{a}{c}=\frac{b}{f}=\frac{c}{g}$. Значит,

$$\frac{b}{y}=\frac{c}{x}=\frac{b}{f}=\frac{c}{g}$$

Но если $\frac{b}{y}=\frac{b}{f}$,

то $y=f$. А из равенства

$$\frac{c}{x}=\frac{c}{g}$$

следует, что $x=g$.

Другими словами: все стороны треугольника III равны сторонам треугольника II; а так как углы треугольника III равны углам треугольника I, то и углы треугольника II равны углам треугольника I. Это и требовалось доказать.

Повторительные вопросы к §§ 64 и 65.

Как вы назовете фигуры, имеющие равные стороны и одинаковую форму?— Равные стороны и неодинаковую форму? Неравные стороны и одинаковую форму? — Какие стороны многоугольников называются сходственными? — Покажите пользуясь чертежом, какие условия необходимы для подобия двух многоугольников. Покажите, пользуясь чертежом, какие соотношения существуют в двух подобных треугольниках. — Какие стороны подобных треугольников называются сходственными? А в каком случае стороны называются соответственными?.

Применения.

75. Найти высоту дерева, пользуясь его тенью.

Решение Где-нибудь возле дерева воткнем отвесно шест MN (черт. 195). Так как лучи солнца параллельны, то уг. $P =$ уг. C; кроме того, мы знаем, что уг. B и уг. N — прямые. Значит, треугольники ABC и MNP подобны и, следовательно,

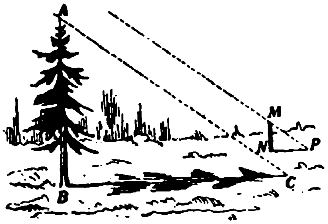
$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP},$$

откуда неизвестная высота дерева

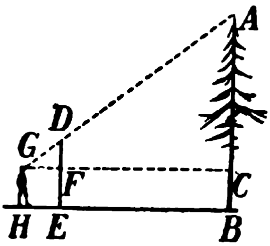
$$AB = MN \cdot \frac{BC}{NP}$$

Высоту шеста MN и длину теней DC и NP легко измерить, и тогда вычисляют высоту AB дерева.

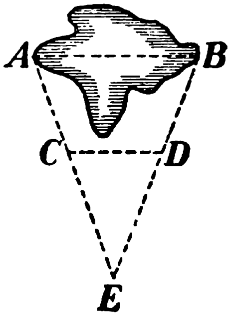
76. В пасмурный день можно пользоваться для определения высоты дерева способом, изображенным на черт. 196. В чем он состоит?



Черт. 195.



Черт. 196.



Черт. 197.

Решение. Наблюдатель помещает шест DE так, чтобы глядя на конец его D видеть его совпадающим с вершиной A. Измеряют DE, HE и HB; кроме того, надо знать возвышение GH глаза G над почвой. Из подобия треугольников GAC и GDF имеем

$$\frac{AC}{DF} = \frac{DC}{GF}$$

Дальнейшее—понятно без объяснений.

77. На черт. 197 изображен способ определения ширины AB озера. Прямая CD провешивается параллельно AB. Объясните, как найти искомую ширину (AB) озера.

Решение. Из подобия треугольников ABE и CDE имеем

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}, \text{ откуда } AB = CD \cdot \frac{BE}{DE};$$

так как длины CD, BE и DE можно измерить, то нетрудно вычислить искомую ширину (AB) озера.

78. Диаметр Солнца больше диаметра Земли в 109 раз; расстояние от Земли до Солнца 150 000 000 километров. Определить длину тени, отбрасываемой земным шаром (черт. 198).

Решение. Из подобия треугольников AOE и CPE (почему они подобны?) имеем

$$\frac{PE}{OE} = \frac{PC}{OA};$$

PE — есть искомая длина x тени; $DE = OP + PE = 150\,000\,000$ *км* $+ x$; PC —

радиус Земли; OA — радиус Солнца. Мы знаем, что радиус Солнца в 109 раз больше радиуса Земли. Подставив эти величины в пропорцию, имеем

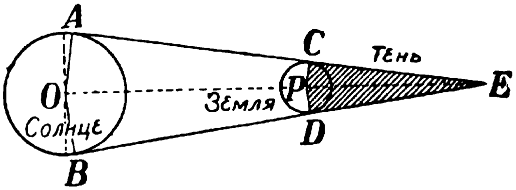
$$\frac{x}{150\,000\,000} = \frac{1}{109}$$

или $109\,x = 150\,000\,000 + x$, откуда

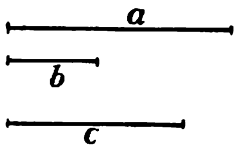
$$x = \frac{150\,000\,000}{109} = \text{около}\ \ 1\,400\,000\ \textit{км}.$$

§ 66. Построение четвертой пропорциональной.

На практике приходится нередко отыскивать отрезок такой длины, чтобы вместе с тремя данными отрезками могла быть со-



Черт. 198.



Черт. 199.

ставлена пропорция. Пусть, например, даны три отрезка a, b и c (черт. 199) и требуется отыскать четвертый отрезок x такой длины, чтобы возможна была пропорция:

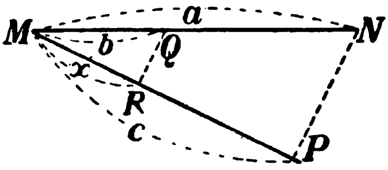
$$a : b = c : x.$$

Задача эта решается так. На прямой линии (черт. 200) откладывают от точки M отрезки a и b. Под произвольным углом к a от точки M проводят прямую, на которой откладывают отрезок c. Концы N и P отрезков a и c соединяют прямой и через конец Q отрезка b проводят QR параллельно NP. Отрезок MR и есть четвертая пропорциональная x, потому что

$$a : b = c : x.$$

Решение подобных задач называется „построением 4-й пропорциональной".

$$a : b = c : x.$$



Черт. 200.

Повторительные вопросы.

Что значит: „построить 4-ую пропорциональную"? — Какие вы знаете способы ее построения?

Применения.

79. Прямоугольник со сторонами a и h (черт. 201) превратить в равновеликий прямоугольник с основанием b.

Решение. Надо начертить прямоугольник с основанием b и такой высотой x, чтобы $bx = ah$. Из последнего равенства вытекает пропорция

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{x}$$

Следовательно, искомая высота x есть 4-я пропорциональная к a, h и b. Построив ее по указанному раньше способу, мы сможем начертить и искомый прямоугольник.

80. Начертить прямоугольник с высотою b, равновеликий треугольнику с основанием a и высотою h.

Решение сводится к нахождению основания прямоугольника такой длины x, чтобы $bx = \frac{ah}{2}$, т.-е., чтобы

$$x : \frac{a}{2} = h : b$$

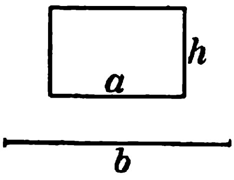
Значит, отрезок x есть 4-я пропорциональная к $\frac{a}{2}$, h и b.

81. Средняя линия трапеции p, высота — q. Построить равновеликий ей прямоугольник со стороною b.

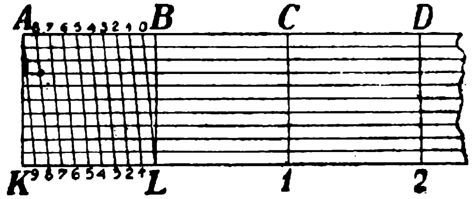
Решение. Прямоугольник легко можно построить, если найдена будет его другая сторона x такой длины, что $bx = pq$, и следовательно $x : p = q : b$. Значит, x есть 4-я пропорциональная к p, q и b.

§ 67. Поперечный масштаб.

На свойстве подобных треугольников основано устройство так называемого „поперечного масштаба", которым пользуются при черчении планов. Устройство его показано на черт. 202. Пусть расстояние BA соответствует на плане, в каком-



Черт. 201.



Черт. 202.

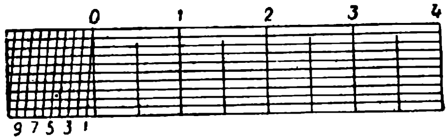
нибудь определенном масштабе, 1 километру (или 5, 10, 20 километрам) в натуре. Это расстояние разделено на 10 равных частей; на столько же частей разделено и расстояние $KL = AB$; AK перпендикулярно к AB и к KL; точки деления AB и KL соединены между собою наклонными линиями, как показано на чертеже. После сказанного в § 57 понятно, что отрезки параллельных прямых, отсекаемых углом OLB, составляют последовательно (считая от вершины L) 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 и т. д. отрезка OB. А так как отрезок OB сам составляет 0,1 длины AB, то указанные отрезки составляют 0,01, 0,2, 0,03 и т. д. длины AB.

Отсюда ясна возможность помощью поперечного масштаба получать весьма малые доли масштабной единицы AB. Если необходимо, например, раздвинуть ножки циркуля на 2,73 AB, то помещают одну ножку циркуля на пересечении 2-й поперечной линии масштаба и 3-й (снизу) продольной; другую же — на пересечении той же 3-й продольной линии и 7-й косой: тогда острия циркуля окажутся раздвинутыми на 2,73 AB. Чтобы раздвинуть их на 36,8 AB, надо одно острие поместить на пересечении 3-й поперечной и 8-й продольной линии, а другое — на пересечении 8-й продольной и 6-й косой, и т. д.

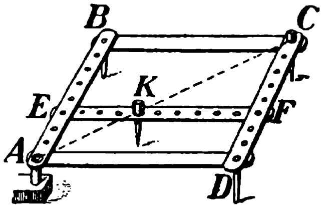
На черт. 203 изображен поперечный масштаб, дающий возможность откладывать отрезки с точностью до 0,1 миллиметра.

§ 68. Пантограф.

На подобии фигур основано также устройство и употребление прибора, называемого **п а н т о г р а ф о м** и служащего для перерисовывания фигур в измененном масштабе. Он состоит (черт. 204) из четырех планок AB. BC, CD и AD, соединенных в форме параллелограмма так, что планки могут свободно вращаться в углах; поперечная планка EF располагается параллельно AD и может быть перемещаема по желанию. При употреблении прибора его укрепляют неподвижно в A и обводят перерисовываемый контур штифтом K; тогда карандаш C вычерчивает тот же контур в увеличенном виде; все размеры получаются в



Черт. 203.



Черт. 204.

столько раз крупнее, во сколько раз AC больше AK (или AB больше AE). Если, например, штифт A (черт. 204) переместился в N, т.-е. прошел черту KN, то карандаш C переместился в M, т.-е. начертил линию CM; из подобия треугольников ACM и AKN (почему они подобны?) имеем, что $CM:KN = AC:AK$, или $AB:AE$. Отсюда следует, что желая увеличить рисунок, например, в 5 раз, мы должны поместить планку EF так, чтобы AB было в 5 раз больше AE.

Нетрудно догадаться, как следует пользоваться пантографом для перерисовывания фигур **и в у м е н ь ш е н н о м** масштабе.

§ 69. Площади подобных треугольников.

П р е д в а р и т е л ь н о е у п р а ж н е н и е (черт. 205). В треугольниках ABC и DEF уг. $= A =$ уг. D: BM и EN — высоты. Укажите все подобные треугольники в этих фигурах.

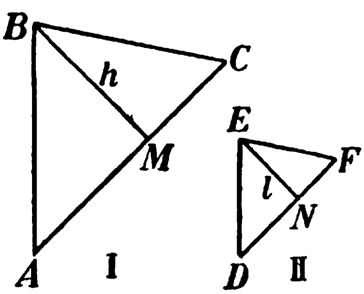
Между площадями подобных треугольников существует определенное соотношение, которое мы сейчас установим.

Пусть у нас имеются два подобных треугольника I и II (черт. 205). Проведем высоты $BM = h$ и $EN = l$ к сходственным сторонам $AC = b$ и $DF = e$. Площадь треугольника I равна bh, треугольника II — el. Отношение их равно

$$\frac{\text{площ. I}}{\text{площ. II}} = \frac{bh}{el} = \frac{b}{e} \cdot \frac{h}{l}$$

Но $\frac{h}{l} = \frac{AB}{DE}$ (почему?), а $\frac{AB}{DE} = \frac{b}{e}$; поэтому

$$\frac{\text{площ. I}}{\text{площ. II}} = \frac{b}{e} \cdot \frac{b}{e} = \frac{b^2}{e^2}$$



Черт. 205.

Значит,

п л о щ а д и п о д о б н ы х т р е у г о л ь н и к о в о т н о с я т с я к а к к в а д р а т ы с х о д с т в е н н ы х с т о р о н.

§ 70. Площади всяких подобных фигур.

То, что мы установили в предыдущем параграфе для подобных треугольников, справедливо, как сейчас увидим, и для всяких подобных многоугольников: их площади относятся, как квадраты сходственных сторон. Вообще,

площади всяких подобных фигур относятся между собою как квадраты их линейных размеров.

Это вытекает из следующих соображений.

Пусть у нас имеются две подобные фигуры, при чем линейные размеры первой фигуры в 10 раз меньше размеров второй фигуры. Покроем меньшую фигуру палеткой, разграфленной на миллиметровые квадратики, а большую фигуру — палеткой, разграфленной на сантиметровые квадратики. Так как все линейные размеры первой фигуры содержат столько миллиметров, сколько размеры второй фигуры содержат сантиметров, то первая фигура будет заключать столько же миллиметровых квадратиков, сколько вторая — сантиметровых. Число квадратиков в обеих фигурах одинаково, но каждый квадратик первой фигуры меньше квадратика второй фигуры. Значит, площадь первой фигуры меньше площади второй во столько раз, во сколько один миллиметровый квадратик меньше сантиметрового, т.-е. в $10 \times 10 = 100$ раз.

Если линейные размеры подобных фигур относятся не как $1:10$, а например, как $1:7$, то сходным рассуждением можно установить, что площадь первой фигуры меньше второй в 49 раз; при отношении линейных размеров $8:3$ — больше в $\frac{64}{9}$ раз и т. п.

Поэтому, если план здания исполнен в масштабе $\frac{1}{20}$, то каждый его участок меньше площади того же участка в натуре в $20 . 20$, т.-е. в 400 раз.

Повторительные вопросы к §§ 68—70.

Как относятся площади подобных треугольников? — Многоугольников? — Всяких вообще плоских фигур? — Справедливо ли это правило для кругов?

Применения.

82. С дуба сорвано два листа одинаковой формы, длиною один 12 *см.* другой 15 *см.* Во сколько раз площадь второго листа больше площади первого?

Решение. Отношение площадей равно $15^2 : 12^2 = \left[\frac{15}{12}\right]^2 = \left[\frac{5}{4}\right]^2 = 1{,}6$. Второй лист больше первого по площади в 1,6 раза.

83. План участка земли, исполненный в масштабе 5 *м* в 1 *см*, имеет площадь 78 *кв. см.* Найти площадь земельного участка.

Решение. Линейные размеры обеих фигур (участка и плана) относятся как $500:1$. Значит отношение площадей $500^2 : 1 = 250\,000$. Отсюда площадь участка $78 . 250\,000 = 19\,000\,000$ *кв. см.* $= 1\,900$ кв. метров.

XII. Теорема Пифагора и ее приложения.

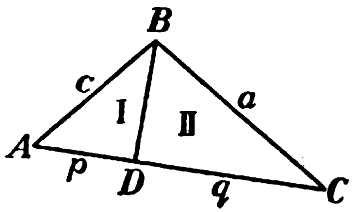
§ 71. Соотношение между сторонами прямоугольного треугольника.

Предварительные упражнения.

1) В прямоугольном треугольнике ABC проведена (черт. 206) высота BD. Какие углы в треугольниках ABD и ABC равны? Какие углы равны в треугольниках BCD и ABC?

2) Покажите на черт. 206 все подобные треугольники.

До сих пор мы знали следующие два соотношения сторон в прямоугольном треугольнике: то, что сумма двух его сторон больше третьей (это верно и для всякого треугольника) и то, что гипотенуза длиннее каждого из катетов. Установим теперь третье соотношение, имеющее широкое применение на практике. Оно состоит в том, что если возвысить длины катетов в квадрат и сложить полученные числа, то результат будет равен квадрату длины гипотенузы. Короче это можно высказать так:



Черт. 206.

сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Если, например, один катет равен 3 *м*, другой 4 *м*, то сумма их квадратов $3^2 + 4^2$, т.-е. 25, есть квадрат гипотенузы, и следовательно, длина гипотенузы — 5 метров.

Покажем, как убедиться, что указанное соотношение верно для всякого прямоугольного треугольника. Обозначим катеты прямоугольного треугольника (черт. 206) через a и c, гипотенузу — буквою b, а отрезки, на которые она делится, высотою — через p и q. Так как весь наш треугольник подобен треугольникам I и II (по каким признакам?), то

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{a} \text{ и } \frac{c}{b} = \frac{p}{c}$$

Следовательно:

$$a^2 = b\,q,$$
$$c^2 = b\,p.$$

Отсюда имеем:

$$a^2 + c^2 = b\,q + b\,p = (p + q)\,b = b \cdot b = b^2$$

Это равенство, $a^2 + c^2 = b^2$, и выражает соотношение, которое требовалось доказать.

Открытие установленного сейчас соотношения приписывается древнему математику Пифагору; отсюда название этого положения „теорема Пифагора“. (Теоремами в математике называются все те утверждения, истинность которых становится очевидной только после доказательства).

Применения.

84. Есть ли прямой угол в треугольнике со сторонами 5 *см*, 12 *см* и 13 *см*?

Решение. Если этот треугольник прямоугольный, то самая длинная его сторона, 13 *см*, есть гипотенуза, а тогда между нею и катетами (5 *см* и 12 *см*) должно существовать соотношение:

$$5^2 + 12^2 = 13^2 = 169.$$

Так как $25 + 144 = 169$, то требуемое соотношение между сторонами действительно существует, и значит в рассматриваемом треугольнике против стороны 13 *см* лежит прямой угол.

85. Найти гипотенузу треугольника, катеты которого 19 *см* и 40 *см*.

Решение. Гипотенуза $= \sqrt{19^2 + 40^2} = \sqrt{361 + 1600} = \sqrt{1961} = 44{,}26$ *см*.

86. Из гавани отплыл в северном направлении пароход со скоростью 18 морских миль в час. Одновременно из той же гавани отплыл другой пароход в западном направлении со скоростью 24 миль в час. Какое расстояние разделяло их через час?

Решение. Искомое расстояние есть гипотенуза треугольника, катеты которого равны 18 милям и 24 милям. По теореме Пифагора, гипотенуза $= \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{324 + 576} = \sqrt{900} = 30$. Пароходы будут отделены расстоянием в 30 миль.

87. Найти площадь равнобедренного треугольника, основание которого 15 *м*, а боковая сторона 19,5 *м*.

Решение. Высота, проведенная к основанию этого треугольника, вычисляется по теореме Пифагора; она равна $\sqrt{19{,}5^2 - 7{,}5^2} = \sqrt{380 - 56} = \sqrt{324} = 18$. Поэтому искомая площадь $= {}^1/_2 \,.\, 15 \,.\, 18 = 135$ *кв. м.*

88. Надо вырезать из листа жести равносторонний треугольник площадью 260 *кв. см.* Какой длины должна быть его сторона?

Решение. Если искомая длина x, то высота равностороннего треугольника равна $\sqrt{x^2 - \left[\frac{x}{2}\right]^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, а площадь $\frac{1}{2} x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Имеем уравнение $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 260$, откуда $x = \sqrt{\frac{1040}{\sqrt{3}}} = 24{,}5$. Длина искомой стороны — 24,5 *см*.

89. Каково соотношение между площадями квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника (черт. 207).

Решение. Так как площади квадратов построенных на сторонах прямоугольного треугольника, выражаются квадратами этих сторон, то, по теореме Пифагора, сумма квадратов, построенных на катетах, равна квадрату, построенному на гипотенузе.

Соотношение это сущестует, как легко понять, также между площадями кругов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника.

90. Начертить круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

Решение. Радиус искомого круга должен быть такой длины x, чтобы $\pi x^2 = \pi R^2 + \pi r^2$, где R и r — радиусы данных кругов. Сократив это уравнение на π, имеем: $x^2 = R^2 + r^2$. Отсюда ясно, что искомый радиус есть гипотенуза треугольника, катеты которого r и R.

§ 72. Другие соотношения в прямоугольном треугольнике.

1) Устанавливая в предыдущем параграфе зависимость между сторонами прямоугольного треугольника, мы попутно вывели, что (черт. 206).

$$a^2 = b\,q,$$
$$c^2 = b\,p.$$

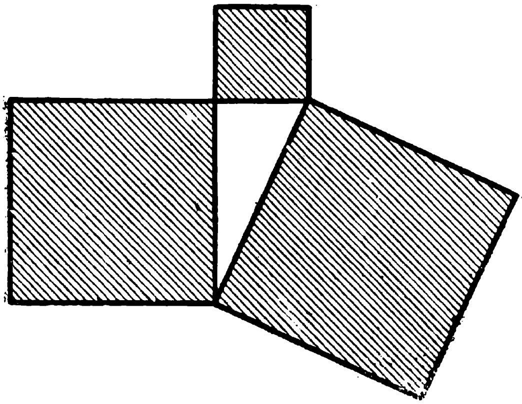
Выражая это соотношение словесно, мы скажем, что

квадрат каждого катета равен произведению из гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

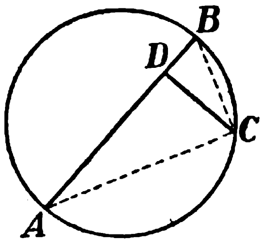
2) Кроме того, из подобия треугольников I и II следует, что

$$p:h = h:q, \text{ где } h \text{ — высота,}$$

т.-е. h (высота) есть повторяющийся член непрерывной пропорции, другие члены которой есть p и q. Повторяющийся член непрерывной кратной пропорции принято называть средне-пропорциональным (или средне-геометрическим) между двумя остальными членами. Поэтому сейчас установленную зависимость можно высказать так:



Черт. 207.



Черт. 208.

высота, проведенная к гипотенузе, есть среднепропорциональная между отрезками гипотенузы.

Далее, из пропорции $p:h = h:q$ следует, что $h^2 = pq$, т.-е.

квадрат высоты, проведенной к гипотенузе, равен произведению отрезков гипотенузы.

§ 73. Соотношения между отрезками перпендикулярных хорд.

Проведем через какую-нибудь точку окружности (черт. 208) перпендикуляр CD к диаметру AB. Легко видеть, это этот перпендикуляр есть высота, проведенная к гипотенузе треугольника ACB, так как угол ACB — прямой (почему?). Поэтому

$$AD:DC = DC:DB, \text{ или}$$
$$(DC)^2 = AD \cdot DB;$$

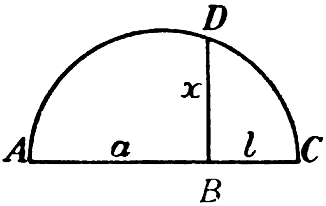
другими словами:

перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднепропорциональное между отрезками диаметра.

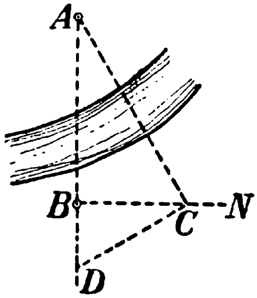
Этим свойством можно пользоваться, между прочим, в тех случаях, когда требуется построить к двум данным отрезкам средне-пропорциональный. Если данные отрезки a и l и требуется найти отрезок x такой длины, чтобы

$$a : x = x : l,$$

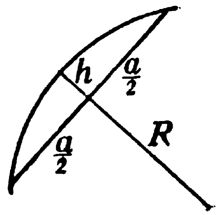
то откладывают рядом a и l (черт. 209), строят на AC, как на диаметре, полуокружность и из точки B восставляют перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке D: отрезок $BD = x$.



Черт. 209.



Черт. 210.



Черт. 211.

Повторительные вопросы к §§ 71—73.

Какое вы знаете соотношение между катетами и гипотенузой? — Между гипотенузой, катетом и его проекцией на гипотенузу? — Между высотой, проведенной к гипотенузе, и отрезком гипотенузы? — Между перпендикуляром, проведенным из точки окружности к диаметру и отрезками диаметра? — Что значит: найти средне-пропорциональное между двумя отрезками? Как это сделать?

Применения.

91. Чтобы определить расстояние от точки B (черт. 210) до недоступной точки A, провешивают прямую BN под прямым углом к направлению AB и из произвольной точки C этой прямой провешивают CD перпендикулярно к направлению AC. Как, пользуясь этим построением, определить искомое расстояние AB?

Решение. Надо измерить расстояния BC и BD. Расстояние AB определится из равенства:

$$(BC)^2 = AB \cdot BD,$$

откуда

$$AB = \frac{(BC)^2}{BD}$$

92. Начертить квадрат, равновеликий данному треугольнику с основанием a и высотою h.

Решение. Задача сводится к отысканию стороны квадрата такой длины x, чтобы $x^2 = \frac{1}{2}ah$, т.-е., чтобы $\frac{a}{2} : x = x : h$. Отсюда видно, что искомый отрезок есть среднепропорциональное между $\frac{a}{2}$ и h.

93. Найти стрелку h дуги (черт. 211) радиуса R, если длина стягивающей хорды $= a$.

Решение. Стрелкой дуги называется прилегающий к ней отрезок радиуса, перпендикулярного к стягивающей ее хорде, между хордой и дугой. Половину хорды $\frac{a}{2}$ можно рассматривать, как перпендикуляр, проведенный из точки окружности к диаметру. Поэтому

$$\left[\frac{a}{2}\right]^2 = h \cdot [2R - h],$$

или:

$$h^2 - 2Rh + \frac{a^2}{4} = O,$$

Искомую величину стрелки h можно вычислить из этого квадратного уравнения. Если стрелка, как часто бывает, весьма мала по сравнению с радиусом круга, то членом h^2 можно пренебречь, и тогда h приближенно равно $\frac{a^2}{8R}$. По этой формуле вычисляют, например, стрелку дуги железнодорожного закругления, радиус которого достигает 1000 метров и больше, стрелка же не превышает нескольких метров.

Сходным образом решается и обратная задача: вычисление радиуса закругления по длине хорды и стрелки, как видно из следующего примера.

94. Вычислить радиус кривизны часового стекла, поперечник которого 60 *мм*, а стрелка дуги — 3 *мм*.

Решение. Подставив значения a и h в уравнение, выведенное в предыдущем примере:

$$h^2 - 2Rh + \frac{a^2}{4} = 0,$$

олучаем

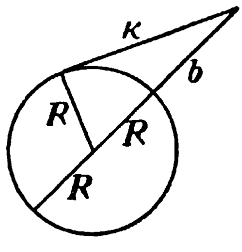
$$0{,}3^2 - 2R \cdot 0{,}3 + 9 = 0.$$

Отсюда $R =$ около 6 *см*.

§ 74. Длина касательной.

Пусть требуется определить длину касательной k (черт. 212), если радиус круга R, а кратчайшее расстояние от начала касательной до окружности — b. Проведя радиус к точке касания, имеем прямоугольный треугольник, в котором

$$[b + R]^2 = R^2 + k^2$$



Черт. 212.

Раскрыв скобки, получаем

$$b^2 + 2bR + R^2 = R^2 + k^2$$

Отсюда

$$k^2 = b^2 + 2bR = b[b + 2R]$$

Это соотношение можно выразить словесно так:

квадрат касательной равен произведению всей секущей, проведенной из начала касательной через центр, на внешний отрезок этой секущей.

Применения.

95. Как далеко можно видеть в море с маяка высотою 30 метров?

Решение. Так как поверхность моря шарообразна, то дальность видимости определяется длиною касательной, проведенной из верхушки маяка к кругу, радиус которого равен радиусу земного шара (6400 *км*). Поэтому искомая дальность x определяется из равенства

$$x^2 = 30\ [12\,800\,000 + 30].$$

(Слагаемым 30 в данном случае можно пренебречь). Получаем $x =$ около 20 *км*.

96. Как высоко должен подняться летчик, чтобы видеть за 200 километров?

Решение: В этом случае, в отличие от предыдущего, известна длина касательной, и ищется внешний отрезок секущей, проходящей через центр круга, радиус которого 6400 *км*. Поэтому искомая высота y определяется из уравнения

$$200^2 = y\ [12\,800 + y]$$

Слагаемое y, очевидно, весьма мало по сравнению с диаметром земного шара. Пренебрегая им, имеем

$$200^2 = 12\,800\ y,$$

откуда

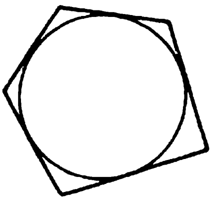
$$\frac{200^2}{12\,800} = 2{,}3\ км.$$

Следовательно, искомая высота $= 2{,}3$ *км*.

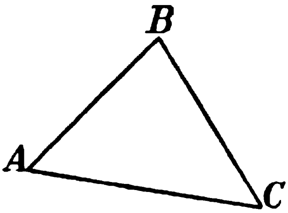
XIII. Вписанные и описанные фигуры.

§ 75. Определения.

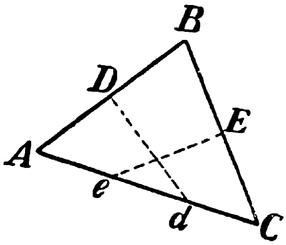
Треугольник или многоугольник называется вписанным в окружность, если все их вершины расположены на окружности (черт. 217). Они называются описанными около круга,



Черт. 213.



Черт. 214.



Черт. 215.

если все их стороны касаются окружности (черт. 213). Сейчас мы познакомимся с некоторыми свойствами описанных и вписанных фигур.

§ 76. Как описать окружность около данного треугольника.

Предварительное упражнение. Во скольких точках могут пересечься три прямые линии?

Докажем сначала, что описать окружность можно около всякого треугольника, какой бы формы он ни был. Пусть у нас имеется треугольник ABC (черт. 214). Около него можно будет описать окружность, если удастся найти такую точку O, которая одинаково удалена от трех его вершин A, B и C. Найдем сначала все точки, одинаково удаленные от точек A и B; они расположены, мы знаем (§ 55) на перпендикуляре Dd (черт. 215), проведенном через середину стороны AB. Затем найдем все точки, одинаково удаленные от вершин B и C; они расположены на перпендикуляре Ee, проведенном через середину BC. Точка O их пересечения одинаково удалена от трех вершин треугольника A, B и C, а следовательно, это и есть центр описанной окружности.

Так как подобное рассуждение применимо ко всякому треугольнику, то не существует такого треугольника, около которого нельзя было бы описать окружности. Способ же построения ее вытекает из сказанного: надо провести перпендикуляры через середины двух сторон треугольника; точка пересечения перпендикуляров есть центр описанной окружности; соединив ее с одной из вершин треугольника, найдем радиус этой окружности. Итак:

около всякого треугольника можно описать окружность; центр ее лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных через середину двух сторон треугольника.

Попутно мы можем установить следующее свойство треугольника. Так как точка пересечения перпендикуляров, проведенных через середины двух сторон треугольника, одинаково удалена от концов третьей стороны, то она должна находиться и на перпендикуляре, проведенном через середину этой стороны треугольника. Значит:

перпендикуляры, проведенные через середины трех сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

§ 77. Как вписать круг в данный треугольник.

Покажем сначала, что во всякий треугольник, какой бы он ни был формы, можно вписать круг. Пусть имеется треугольник ABC (черт. 214). В него можно будет вписать круг, если удастся найти такую точку, которая одинаково удалена от трех его сторон. Сначала найдем все точки, одинаково удаленные от двух сторон AB и AC; они расположены, мы знаем (§ 50), на равноделящей Aa угла A (черт. 216). Затем найдем все точки, одинаково удаленные от сторон AB и BC; они расположены на равноделящей Bb угла B. Точка O их пересечения одинаково удалена от трех сторон треугольника: AB, AC и BC, и, следовательно, это и есть центр вписанного круга.

Так как подобное рассуждение применимо ко всякому треугольнику, то не существует такого треугольника, в который нельзя бы вписать круг. Способ же построения круга вытекает из сказанного: надо разделить два угла пополам — точка пересечения равноделящих есть центр вписанного круга; проведя через него перпендикуляр к одной из сторон, найдем радиус этого круга. Итак:

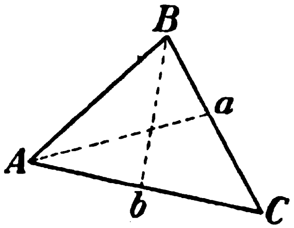
во всякий треугольник можно вписать круг; центр его лежит на пересечении равноделящих двух углов треугольника.

Легко видеть, что так как точка пересечения равноделящих двух углов одинаково удалена от сторон третьего угла, то она должна лежать и на равноделящей третьего угла треугольника. Значит:

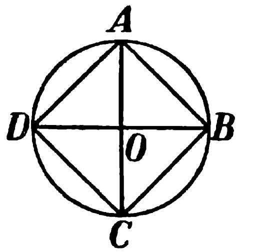
равноделящие трех углов треугольника пересекаются в одной точке.

§ 78. Вписанный и описанный квадраты.

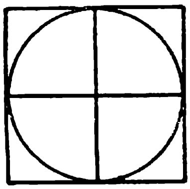
Вписать в данный круг квадрат весьма просто; надо провести в круге два диаметра, встречающиеся под прямым углом, и



Черт. 216.



Черт. 217.



Черт. 218.

концы их соединить прямыми линиями. (Объясните на черт. 217, почему получающийся при этом четырехугольник — квадрат).

Чему равна сторона вписанного квадрата, если радиус круга известен, легко вычислить из треугольника AOB (черт. 217), пользуясь теоремой Пифагора. Обозначив искомую длину стороны через a_4, а радиус — через R, имеем

$$a_4^2 = R^2 + R^2,$$

откуда

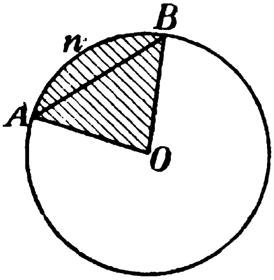
$$a_4 = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}.$$

Описать около данного круга квадрат можно так (черт. 218): начертив в нем два взаимноперпендикулярных диаметра, проводят через их концы перпендикуляры. (Докажите, что получающийся четырехугольник — квадрат).

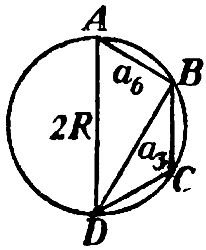
Легко убедиться, что сторона описанного квадрата равна диаметру круга (докажите это).

§ 79. Вписанный правильный шестиугольник.

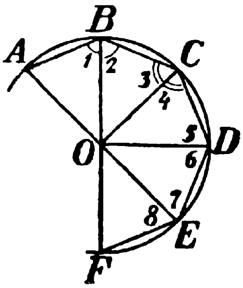
Чтобы найти способ вписать в данный круг правильный шестиугольник, определим сначала длину его стороны, считая радиус круга известным. Пусть AB (черт. 219) есть сторона правильного вписанного шестиугольника. Соединим вершины A и B с центром O круга. Так как дуга A и В составляет 6-ю часть полной окружности, то она содержит $\frac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$; столько же градусов заключает центральный угол AOB. Но если угол при вершине равнобедренного треугольника равен 60°, то углы при основании также равны 60° (почему?). Следовательно, треугольник AOB — равносторонний: $AB = AO = BO$.



Черт. 219.



Черт. 220.



Черт. 221.

Другими словами, сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу круга.

Отсюда вытекает способ вписать в круг правильный шестиугольник: надо растворить циркуль на величину радиуса и засечь вдоль окружности шесть раз, а затем соединить точки деления прямыми линиями.

§ 80. Вписанный равносторонний треугольник.

Чтобы вписать в круг равносторонний треугольник, можно воспользоваться способом построения правильного шестиугольника: разделив окружность на 6 равных частей соединяют точки деления через одну.

Длину стороны вписанного равностороннего треугольника, считая радиус круга известным (R), находят, пользуясь теоремой Пифагора. Если (черт. 220) A, B, C, D есть четыре вершины правильного вписанного шестиугольника, то $AD = a_6 = R$, $BD = a_3 =$ стороне вписанного равностороннего треугольника; $AD =$ диаметру круга $= 2R$. Из прямоугольного треугольника ABD (докажите, что уг. B — прямой) имеем

$$[AD]^2 = [AB]^2 + [BD]^2, \text{ т.-е.}$$
$$[2R]^2 = R^2 + a_3^2$$

откуда

$$a_3^2 = 4R^2 - R^2, \text{ и } a_3 = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}.$$

§ 81. Круг, вписанный в правильный многоугольник.

Мы знаем, что во всякий треугольник можно вписать круг. Покажем теперь, что можно вписать круг также во всякий правильный многоугольник.

Пусть имеется правильный многоугольник, часть которого $ABCD$ изображена на черт. 221. Проведем равноделящие двух соседних углов, напр., B и C, и точку O их пересечения соединим со всеми вершинами многоугольника. Так как уг. C многоугольника равен углу B, (почему?), то равны и их половины: уг. 2=уг. 3, а следовательно, и сторона OC=стороне OB (почему?). Треугольники OCD и OBC имеют по две равные стороны [$OC=OB$, $AB=BC$] и равные углы [уг. 3=уг. 4]; значит, они равны [$СУС$], и $OB=OC$, а уг. 3=уг. 5. Таким же образом убеждаемся (выполните это), что треугольник ODE=треугольнику OCD и т. д. В результате узнаем, что все треугольники, на которые разбит указанным образом наш многоугольник, равны между собою, а следовательно, равны и их высоты, проведенные из точки O. Так как точка O одинаково удалена от всех сторон многоугольника, то она и есть центр вписанного круга. Подобные рассуждения можно приложить ко всякому правильному многоугольнику, а следовательно, внутри всякого правильного многоугольника можно найти точку, которая служит центром вписанного круга. Другими словами,—

во всякий правильный многоугольник можно вписать круг.

Центр круга, вписанного в многоугольник, называется центром этого многоугольника, а радиус вписанного круга — апофемой многоугольника.

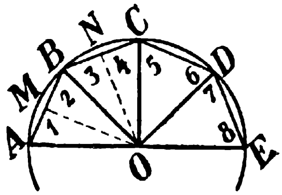
§ 82. Круг около правильного многоугольника.

Сходными рассуждениями можно убедиться, что

около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.

Пусть имеется правильный многоугольник, часть которого $ABCDE$ изображена на черт. 222. Проведем через середины M и N двух его соседних сторон перпендикуляры. Точку их пересечения O соединим со всеми вершинами многоугольника. Отрезки OA, NB и OC равны (почему?). Отсюда вытекает, что уг. 3=уг. 4. Так как углы B и C многоугольника равны (почему?), то уг. 3= =уг. 5 и треугольники OBC и OCD равны ($СУС$). Таким же образом доказываем, что треугольник OCD равен треугольнику ODE—и т. д. Мы убеждаемся, что прямые, соединяющие точку O со всеми вершинами многоугольника равны, т.-е. что точка O есть центр описанного круга.

Совпадают ли центры обеих окружностей — описанной и вписанной? Нетрудно убедиться, что они должны совпадать. Стороны многоугольника служат хордами описанного круга и касательными к вписанному. Мы знаем, что перпендикуляры к касательным в точке касания должны проходить через центр вписанного круга. А через центр описанного должны проходить перпендикуляры, проведенные через середины хорд. Но так как в данном случае те и другие перпендикуляры совпадают, то должны, конечно, совпадать и точки их пересечения, т.-е. центры обоих кругов.



Черт. 222.

Повторительные вопросы к §§ 75 — 82.

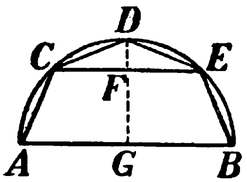
Какие прямоугольные фигуры называются вписанными? — Описанными? — Во всякий ли треугольник можно вписать окружность? А описать около него? Как это выполнить? — Как вписать в круг и описать около него квадрат? Правильный шестиугольник? Равносторонний треугольник? Чему равны стороны этих фигур, если считать радиус описанного около них круга известным? — Во всякий ли правильный многоугольник можно вписать круг? А описать около него? Совпадают ли центры обоих кругов? Как называется этот центр? — Как называется радиус круга, вписанного в правильный многоугольник?

Применения.

97. Найти диаметр круглого обрубка, предназначенного для того, чтобы вытесать из него шестиугольную шашку для торцовой мостовой. Сторона шашки $= 7$ *см.*

Решение. Так как сторона правильного вписанного шестиугольника = радиусу описанного круга, то искомый диаметр круга $= 14$ *см.*

98. На черт. 223 изображен контур стропил так наз. мансардной крыши, Он начерчен так: полуокружность разделена на 4 равные части и точки деления соединены прямыми. Определите длины CE и FD, если пролет $AB = 10$ *м.*



Черт. 223.

Решение. Дуга CE составляет $^1/_4$ окружности; значит, хорда CE равна стороне вписанного квадрата. Так как радиус окружности известен (5 *м*), то длина $CE = 5\sqrt{2} = 7$ *м.* Стрелка DF определяется как разность $GD - GF = 5 - 3{,}5 = 1{,}5$ *м.*

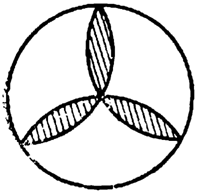
99. В круге радиуса 100 *см* проведены две хорды, дуги которых 90° и 120°.

На сколько сумма их длин отличается от длины полуокружности? Какой отсюда вытекает способ приближенного распрямления окружности?

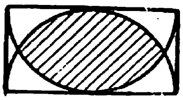
Решение. Хорда дуги в 90° равна стороне вписанного квадрата $= 100 \cdot \sqrt{2} = 141$. Хорда дуги в 120° равна стороне вписанного равностороннего треугольника $= 100\sqrt{3} = 173$. Сумма их $141 + 173 = 314$. Длина полуокружности радиуса 100 (при $\pi = 3{,}14$) равна также 314. Значит, сумма этих хорд равна длине полуокружности до 4-й значащей цифры. Выпрямляя окружность, можно отложить на прямой две стороны вписанного квадрата и две стороны вписанного равностороннего треугольника.

100. Вычислить площадь заштрихованных частей фигуры черт. 224, если радиус круга $= R$.

Решение. Легко видеть, что каждая из трех заштрихованных частей представляет собою два сегмента, отсекаемых стороною правильного вписанного шестиугольника. Все три заштрихованные части равны по площади шести таким сегментам, т.-е. разности между площадью круга и площадью вписанного в него правильного шестиугольника. Последняя площадь равна 6-кратной площади равностороннего треугольника со стороною R, т.-е. $6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. Значит, искомая площадь $= \pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = R^2\left[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right] = 0{,}55\,R^2$,



Черт. 224.



Черт. 225.

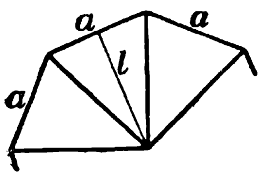
101. Какую долю площади наружного прямоугольника (черт. 225) составляет его заштрихованный участок.

Решение. Рассматривая чертеж, можно усмотреть, что заштрихованный участок представляет собою два сегмента, отсекаемые стороною такого вписанного многоугольника, апофема которого $= \frac{1}{2}$ радиуса. Обозначив радиус через R, имеем для длины этой стороны a выражение: $a = 2\sqrt{P^2 - \left[\frac{R}{2}\right]^2} = R\sqrt{3}$; очевидно, хорда есть сторона вписанного равностороннего треугольника. Площадь равносторонне треугольника со стороною a равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; площадь круга радиуса R равна πR^2; отсюда площадь заштрихованной части $\frac{2}{3}\left[\pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right] = 2R^2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right] = 1{,}23\,R^2$.

Так как площадь наружного прямоугольника $= 2R^2$, то искомое отношение $= 0{,}61$.

§ 83. Площадь правильного многоугольника.

Пусть у нас имеется правильный многоугольник о n сторонах. Чтобы определить его площадь, соединим его центр со всеми вершинами: многоугольник разделится на n равных треугольников (почему они равны?). Если сторона многоугольника a, а апофема т.-е. высота каждого треугольника — l, то площадь одного треугольника $= \frac{1}{2}al$, а всех треугольников в n раз больше: $n \cdot \frac{1}{2}al = \frac{1}{2}nal$. Это и есть формула для вычисления площади правильного многоугольника. Ее можно несколько видоизменить, если принять во



Черт. 226.

внимание, что na — есть сумма сторон многоугольника, т.-е. его периметр P. Поэтому полученную сейчас формулу можно представить в таком виде:

$$S = \frac{1}{2} Pl$$

Словесно правило вычисления площади правильного многоугольника можно высказать так:

площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на апофему.

Применения.

102. Какова должна быть сторона шестиугольной шашки торцовой мостовой, чтобы на 1 *кв. метр* шло 30 шашек?

Решение. Если искомая сторона шашки x, то площадь основания $= 6\, x\, {}^1/_2$ апофемы. Апофема $= \frac{x\sqrt{3}}{2}$; следовательно, площадь $= 6\, x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{3\, x^2\sqrt{3}}{4}$; 30 таких площадей равны 1 *кв. м* = 10 000 *кв. см.* Имеем уравнение

$$30 \cdot \frac{3\, x^2\sqrt{3}}{4} = 10\,000,$$

откуда x = около 27 *см.*

103. Чему равна площадь сегмента, отсекаемого хордой равной радиусу R круга.

Решение. Так как радиусу равна сторона правильного вписанного шестиугольника, то площадь его (см. предыдущий пример) $= \frac{3\, R^2\sqrt{3},}{2}$ а площадь 6 сегментов, отсекаемых его сторонами $\pi R^2 - \frac{3\, R^2\sqrt{3}}{4} = R^2 \left[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

Значит, площадь искомого сегмента $= \frac{1}{6} R^2 \left[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

XIV. Начальные сведения из тригонометрии.

§ 84. Конусность. Тангенс и котангенс острого угла.

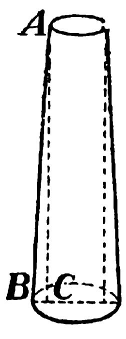
О круглых изделиях, суживающихся по прямой линии к одному концу, говорят, что они имеют „конусность“. Конусность измеряется величиною уменьшения радиуса круга поперечного сечения на каждый сантиметр длины изделия. Если, например, радиус круга поперечного сечения изделия уменьшается с каждым сантиметром на 0,25 *мм,* то конусность изделия равна 0,25 *мм* на 1 *см.* Легко расчитать, что если длина изделия — 40 *см,* то от одного конца к другому оно суживается на $2 \cdot 0{,}25$ *мм* $\cdot\, 40 =$ 20 *мм* = 2 *см.* Наоборот, если круглое изделие в 50 *см* длины имеет на концах разность толщины (диаметров) 30 *мм,* то на каждый сантиметр длины разность диаметров составляет 30 *мм*$:50=$ 0,6 *мм*, а разность радиусов — 0,3 *мм*; значит „конусность“ этого изделия 0,3 *мм* на 1 *см* (или $0{,}3:10=0{,}03$).

Итак, конусность измеряется отношением катетов (черт. 227) $BC:AC$ в прямоугольном треугольнике ABC. Это отношение определяет наклон прямой AB к LC и, следовательно, может служить мерою угла BAC.

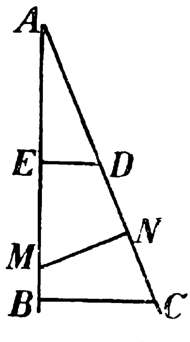
Мы видим из этого примера, что кроме уже известного нам градусного способа измерения острых углов, можно пользоваться еще и другим способом. Способ этот состоит в том, что за меру острого угла принимают отношение противолежащего ему катета к прилежащему катету в том треугольнике, который отсекается от этого угла перпендикуляром к одной из сторон. Например, угол A (черт. 228) можно измерять отношением $BC:AB$ или равным ему отношением $ED:AE$ (почему эти отношения равны?), или также равным им отношением $MN:AN$ (почему это отношение равно предыдущим?). Каждое из этих равных отношений называется т а н г е н с о м угла A и обозначается через *tang* или *tg*.

$$tg A=\frac{ED}{AE}=\frac{BC}{AD}=\frac{MN}{AN}$$

Легко понять, что каждому острому углу отвечает определенный тангенс. Найти значение тангенса для каждого угла возможно помощью чертежа, измерив длину соответствующих линий и вычислив их отношение. Таким путем можно составить таблицу тангенсов для всех углов от 1° до 90°. Способ этот прост, но не достаточно точен. Существуют способы (чересчур сложные, чтобы их рассматривать здесь) узнавать тангенсы с любою точностью посредством вычислений. Готовая таблица вычисленных таким путем тангенсов для всех острых углов от 0° до 90° приложена в конце книги (вместе с некоторыми другими величинами, о которых речь будет дальше).



Черт. 227.



Черт. 228.

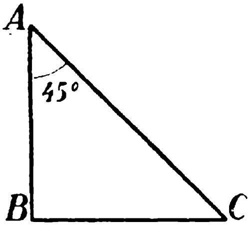
Если станем изменять величину угла от 0° до 90° и следить, как изменяется при этом величина тангенса, то заметим следующее. Когда угол близок к 0°, то и тангенс близок к нулю; поэтому условно пишут, что *tg* 0° = 0. С увеличением угла *tg* его быстро возрастает, а при 90° перпендикуляр к одной стороне угла вовсе не встречает другой: точка пересечения, как говорят, „удаляется в бесконечность“. Поэтому считают, что *tg* 90° = безконечности.

Для некоторых углов можно вычислить тангенс весьма несложным расчетом. Например, тангенс угла в 45° равен (черт. 229)

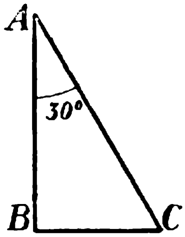
$BC:AB=1$ (почему?). Тангенс угла в 30° (черт. 230) равен $BC:AB$; но в треугольнике ACB сторона $BC=\frac{1}{2}AC$(почему?), а $[AB]^2=[AB]^2-[BC]^2=[AC]^2-\left[\frac{AC}{2}\right]^2=\frac{3}{4}[AB]^2$, откуда $AB=$ $=\frac{AC}{2}\sqrt{3}$; значит, $tg\,30^\circ=\frac{AC}{2}:\frac{AC\sqrt{3}}{2}=1:\sqrt{3}=1:1{,}73=0{,}58.$ Сходным вычислением можно найти $tg\,60^\circ$ (выполните это).

Вместо отношения противолежащего катета к прилежащему можно для измерения острых углов брать и обратное отношение прилежащего катета к противолежащему. Это отношение называется котангенсом угла и обозначается знаком *cotg*. Из черт. 228 имеем:

$$cotg\,A=\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{ED}=\frac{AN}{MN}=\frac{1}{tg\,A}.$$



Черт. 229.



Черт. 230.

Вообще между тангенсом и котангенсом существует следующая зависимость:

$$tg\,A=\frac{1}{cotg\,A};\qquad cotg\,A=\frac{1}{tg\,A}.$$

Легко сообразить, что с увеличением угла тангенс его увеличивается, а котангенс — уменьшается.

Рассмотрим еще одну зависимость между величиною тангенса и котангенса острых углов. Из прямоугольного треугольника ABC (черт. 231) видим:

$$tg\,A=\frac{BC}{AB};\qquad cotg\,C=\frac{BC}{AB}$$

т.-е.

$$tg\,A=cotg\,B;\ cotg\,A=tg\,B.$$

А так как сумма углов A и B равна 90° (эти углы, как принято говорить, „дополнительные“), то

$$tg\ A=cotg\ (90-A);\ cotg\ A=tg\ (90-A).$$

Например:

$$tg\ 30^0=cotg\ 60^0;\ tg\ 17^0=cotg\ 73^0 \text{ и т. п.}$$

Выражая эту зависимость словесно, устанавливаем правило: тангенс острого угла равен котангенсу дополнительного угла.

На этом основании таблицу тангенсов и таблицу котангенсов углов можно свести в одну таблицу, устройство которой мы сейчас объясним.

§ 85. Таблица тангенсов и котангенсов.

Чтобы успешно применять на практике понятия тангенса и котангенса, необходимо уметь отыскивать в таблице тангенсы и котангенсы различных углов, а также и наоборот — подыскивать угол, если известен его тангенс или котангенс.

Пусть требуется найти в таблице *tg* 24°. Против числа 24 левой колонки находим в графе „*tg*" (вверху) число 0,45; это и есть *tg* 24° (на графы *sin* и *cos* пока не будем обращать внимания).

Так же просто отыскивать в таблице тангенсы всех углов от 1° до 45°. Тангенсы углов от 45° до 89° находят несколько иначе. Например, *tg* 57° ищем в графе „*tg*", направляясь снизу, и находим его против числа 57° правой колонки: 1,54 (в то же время 1,54 — это *cotg* 33°, потому что 33 = 90° — 57°).

Сходным образом находим котангенсы и других углов, выражающихся целым числом градусов.

Чтобы найти *tg* угла, не выражающегося целым числом градусов, надо произвести маленькое дополнительное вычисление. Найдем, например, *tg* 38° 40¹. Отыскиваем *tg* 38° и *tg* 39°.

$$tg\ 38^0 = 0{,}78, \qquad tg\ 39^0 = 0{,}81$$

Разница в 1° или 60, обусловила, мы видим, увеличение тангенса на 0,03. Для небольшой разницы в углах можно считать, что разность тангенсов (и котангенсов) пропорциональна разности углов, т.-е., что

$$\frac{tg\ 38^0\ 40' - tg\ 38^0}{tg\ 39^0 - tg\ 38^0} = \frac{38^0\ 40' - 38^0}{39^0 - 38^0}$$

Или:

$$\frac{tg\ 38^0\ 40' - 0{,}78}{0{,}03} = \frac{40'}{60'} = \frac{2}{3}$$

Откуда:

$$tg\, 38^0\ 40' - 0{,}78 = 0{,}03 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}02$$

$$tg\ 38^0\ 40' = 0{,}78 + 0{,}02 = 0{,}80.$$

Итак, мы отыскали *tg* нужного нам угла, хотя прямо в таблице он не помещен.

Таким же образом находим:

$$tg\, 76^0\ 24' = 4{,}01 + 0.32 \cdot \frac{24}{60} = 4{,}14$$

$$cotg*\ 21^0\ 14' = 2{,}61 - 0{,}13 \cdot \frac{14}{60} = 2{,}58.$$

Обратно: нахождение угла, которого *tg* или *cotg* известен в случае, когда данная величина *tg* или *cotg* имеется в таблице, —

---

* Надо помнить, что с увеличением угла *cotg* не увеличивается, а уменьшается.

не требует пояснений. Например, угол, tg которого 0,27, есть 15°; угол, $cotg$ которого 0,78, есть 52° и т. п. Если же данного tg или $cotg$ в таблице нет, требуется дополнительное вычисление. Пусть, например, мы имеем угол, $cotg$ которого $=2{,}19$. Имеющийся в таблице $cotg$ ближайшего меньшего* угла есть 2,25, отличающийся от данного на 0,06. Разность же между этим углом и ближайшим большим, имеющимся в таблице (2,14), равна 11. Подобно предыдущему, составляем пропорцию

$$\frac{0{,}06}{0{,}11}=\frac{\text{неизв. угол} - 66^\circ}{60'}.$$

Откуда:

$$\text{неизв. уг.} - 66 = \frac{60' \cdot 0{,}06}{0{,}11} = 33'.$$

И, следовательно, неизв. угол $= 66^\circ\ 33'$ (с округлением $66^\circ\ 30'$).

Таким же образом найдем, что угол, тангенс которого 0,86, равен $40^\circ + 60 \cdot \frac{2}{3} = 40^\circ\ 40'$ и т. п.

(В виду малой точности таблиц, числа минут надо округлять до целых десятков).

Применения.

Рассмотрим теперь несколько задач, при решении которых применяется таблица тангенсов и котангенсов (такие вычисления называются тригонометрическими).

104. Найти величину острых углов треугольника, катеты которого 16 *см.* и 23 *см.*

Решение. Тангенс меньшего из искомых углов (черт. 231)

$$tgx = \frac{BC}{AB} = \frac{16}{23} = 0{,}69,$$

откуда (по таблице) искомый угол $x = 34^\circ\ 20'$.

105. Телеграфный столб 8 *м* высоты отбрасывает тень длиною 13,5 *м.* Под каким углом лучи солнца встречают землю?

Решение сводится, очевидно, к нахождению угла, tg которого $= \frac{8}{13{,}5} = 0{,}52$.

106. Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника, имеет длину 62 *см.* и делит противолежащую сторону на отрезки, длина которых 38 *см* и 29 *см.* Найти углы треугольника.

Решение. Сначала находим (черт. 232) величину угла A, tg которого $\frac{62}{29}$; затем величину угла C, tg которого $\frac{62}{38}$ (как найти третий угол?).

107. Острый угол прямоугольного треугольника 48°, прилежащий катет — 83 *см.* Найти другой катет.

---

* Опять напоминаем, что с уменьшением угла его $cotg$ увеличивается.

Решение (черт. 231). Если угол $A = 48^0$, а $AB - 83$ *см*, то

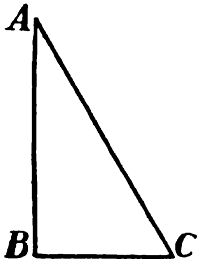
$$\frac{BC}{AB} = \frac{BC}{83} = tg\ A = tg\ 48^0 = 1{,}11,$$

откуда

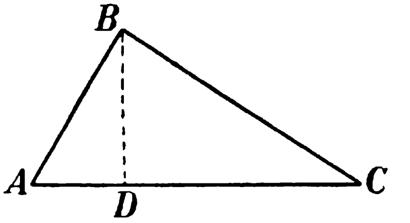
$$BC = 83 \cdot 1{,}11 = 92.$$

108. Найти сторону правильного 12-угольника, описанного около круга, радиус которого 80 *см.*

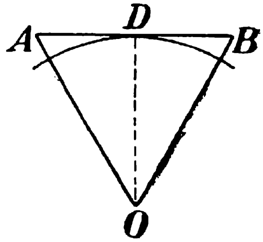
Решение (черт. 233). Если сторона 12-угольника AB, то, соединив концы ее с центром O, получаем равнобедренный треугольник, угол при вершине ко-



Черт. 231.



Черт. 232.



Черт. 233.

торого $\frac{360^0}{12} = 30^0$. Проведя OD перпендикулярно к AB, имеем прямоугольный треугольник AOD, в котором катет $AD = \frac{1}{2} AB$ (почему?). Далее:

$$\frac{AD}{OD} = \frac{AD}{80} = tg\ 15^0 = 0{,}26,$$

откуда:

$$AD = 0{,}26 \cdot 80 = 21.$$
$$AB = 2\,AD = 42.$$

Итак, искомая сторона 12-угольника 42 *см.*

§ 86. Синус и косинус острого угла.

Рассмотрим задачу:

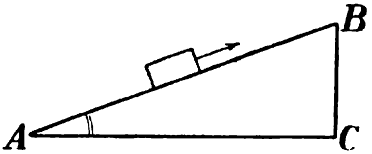
На плоскости AB (черт. 234), наклоненной под углом $35°$, лежит тело весом 20 *кг.* С какою силою нужно тянуть тело вдоль плоскости AB, чтобы удержать его от скольжения вниз (трения в расчет не принимать)?

Решение. Очевидно, нужно тянуть с силою, не меньшею той, с какою тело увлекается своим весом. В механике установлено правило, что тело, лежащее на наклонной плоскости, увлекается вдоль нее с силою, составляющей такую долю веса тела, какую высота BC наклонной плоскости составляет от ее длины AB. Это отношение зависит только от величины угла A, но не зависит от того, в какой точке наклонной плоскости (черт. 235) мы станем мерить ее высоту и длину: отношение $BC : AB$ = отношению $DE : AD$ = отношению $MN : AM$ и т. п. (почему?). Это отношение противолежащего катета к гипотенузе в треугольнике, отсекаемом от острого угла перпендикуляром к одной из его сторон, называется синусом этого угла и обозначается знаком *sin*:

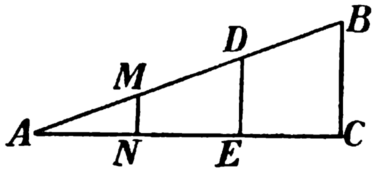
$$Sin\ A = \frac{BC}{AB}.$$

Каждый угол имеет определенный синус, величина которого всегда может быть вычислена (по способу, излагаемому в подробных учебниках математики) или, менее точно, найдена из чертежа.

Если станем изменять величину угла от 0° до 90° и следить, как изменяется при этом величина синуса, то заметим следующее.



Черт. 234.



Черт. 235.

Когда угол близок к 0°, то и синус его близок к нулю: $Sin\ 0° = 0$. С увеличением угла *sin* его возрастает, но никогда не превышает 1-цы (почему?). При 90° величина его равна 1, потому что при этом катете сливается с гипотенузой; следовательно, $sin\ 90° = 1$.

Синус некоторых углов вычисляется очень просто. Например, синус 30° (черт. 230) равен $\frac{BC}{AC}$; а так как $BC = \frac{1}{2}AC$ (почему?), то $Sin\ 30° = \frac{1}{2}$. Для $Sin\ 45°$ имеем $AB = BC$: но $[AB]^2 + [BC]^2 = [AC]^2$, поэтому $[AC]^2 = 2\ [BC]^2$, и $AC = [BC]\sqrt{2}$, откуда

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{[BC]\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71.$$

Вычисление *sin* 60° проделайте сами.

Отношение прилежащего катета к гипотенузе называется косинусом угла *A* и обозначается *cos*. Напр. (черт. 229 и 230) $cos\ 60° = BC : AC = 0{,}5$; $cos\ 45° = sin\ 45° = 0{,}71$.

Между синусом и косинусом острого угла и его дополнительного существует та же зависимость, что и между *tg* и *cotg*: синус острого угла равен косинусу дополнительного угла (выведите это правило). Поэтому таблицу синусов и косинусов можно свести в одну, как и сделано в таблице, напечатанной в конце книги.

§ 87. Таблица синусов и косинусов.

Нахождение в таблице *sin* и *cos* данных углов, а также обратное нахождение углов, отвечающих данным синусу или косинусу. выполняется так же, как и в случае *tg* и *cotg*. Например, *sin* $12° = cos\ 78° = 0{,}21$; *sin* $37°\ 30' = cos\ 52°\ 30' = 0{,}61$; *cos* $38°\ 40' = sin\ 51° 20' = 0{,}79$; *cos* $14° = sin\ 76° = 0{,}24$. Угол, *sin* которого 0,15, равен $8°\ 30'$, и т. п.

Возвращаясь к задаче о теле, скользящем по наклонной плоскости, находим *sin* $35° = 0{,}57$; следовательно, для удержания груза необходима сила в $20 \cdot 0{,}57 = 11$ *кг*.

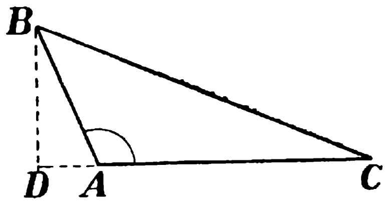
Применения.

109. Гипотенуза — 47 *см*, катет — 19 *см*. Найти величину противолежащего угла.

Решение. Синус искомого угла $\frac{19}{47} = 0{,}42$; отсюда угол $= 25^0$.

110. Боковая сторона равнобедренного треугольника — 96 *см*; угол при вершине — 67^0. Найти основание.

Решение. Синус половины угла при вершине, т.-е. *sin* $33^0\ 30'$ равен половине основания, деленной на длину боковой стороны; отсюда половина основания равна боковой стороне, умноженной на *sin* $33^0\ 30' = 96 \cdot 0{,}55 = 53$.



Черт. 236.

111. Одна сторона треугольника 57 *см*, а другая — 81 *см*. Угол между ними 47. Найти длину перпендикуляра, проведенного к большей из данных сторон через противоположную вершину.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (черт. 232) сторона $AB - 57$, $AC = 81$, а угол $A = 47^0$. Проведем BD под прямым углом к AC, видим, что

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BD}{57} = sin\ 47^0.$$

откуда $BD = 57 \cdot 0{,}68 = 39$ *см*.

Если бы данный угол был тупой, например в 125^0 (черт. 236), то длину BD мы узнали бы из отнош. $\frac{BD}{AB} = \frac{BD}{57} = Sin\,BAD = Sin\ [180^0 - 125^0] = Sin\,55' = 0{,}57$, откуда $BD = 32$ *см*.

112. По данным предыдущей задачи вычислить длину третьей стороны (черт. 232).

Решение. Из треугольника ABD находим длину отрезка AD (как?); вычтя эту длину из AC, узнаем DC; вычислив кроме того, длину BD, находим сторону BC из треугольника BDC по правилу Пифагора.

Произведите это вычисление. Рассмотрите случай, когда угол $= 125^0$, как н черт. 236.

113. Одна сторона треугольника 95 *см*; два угла его 35^0 и 61^0. Найти остальные стороны.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (черт. 232) сторона $BC = 95$ *см*. угол $A = 61^0$, угол $C = 35^0$. Проведя через B перпендикуляр BD, вычисляем его длину из треугольника BDC (как?), а зная BD, находим из треугольника ABD длину AB (как?). Для вычисления длины AC находим отрезки AD и DC (как?) и складываем их.

Другой ответ получим, если примем, что сторона в 95 *см* лежит против угла в 35^0.

114. Радиус круга 120 *см*. Найти длину хорды, „стягивающей“ дугу в 48^0. (О хорде говорят, что она „стягивает“ ту дугу, которая расположена между ее концами).

Решение. Если (черт. 219) дуга $AnB = 48^0$, то центральный угол $O = 48^0$. Нахождение длины AB сводится к вычислению основания равнобедренного треугольника по боковой стороне $[OA]$ и углу при вершине; задача эта уже рассмотрена нами ранее (см. зад. 110).

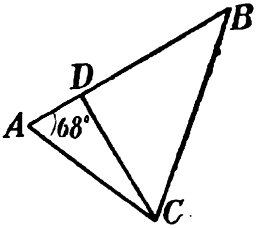
115. Вычислить сторону правильного семиугольника, вписанного в круг радиуса 30 *см.*

Решение. Если AB (черт. 219) есть сторона правильного вписанного семиугольника, то угол $O = \frac{360^0}{7} = 51^0\ 4'$. Следовательно, задача сводится к предыдущей.

116. Одна сторона треугольника равна 24 *см*, другая — 31 *см.* Угол между ними — 68^0. Найти площадь этого треугольника.

Решение. Проведем в треугольнике ABC высоту CD к стороне AB, длина которой 24 *см.* Высота эта $CD = AC \sin A = 31 \sin 68^0$. Следовательно, площадь ABC равна

$$\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 31 \cdot \sin 68^0 .$$



Черт. 237.

Нетрудно убедиться, что вообще, когда известный угол меньше прямого, то

площадь треугольника равна полупроизведению двух его сторон на синус угла между ними.

Пользуясь только сообщенными здесь знаниями нельзя решить, все задачи, могущие возникнуть на практике. Подробное ознакомление с отраслью математики, которая называется тригонометрией, открывает гораздо более широкие возможности. Однако, и помощью тех начальных сведений из тригонометрии, которые изложены в этой главе, удается все же успешно разрешать многие практические задачи.

Повторительные вопросы.

Что называется тангенсом? Котангенсом? Поясните ваш ответ чертежом. — Как они обозначаются? Укажите доступный вам приближенный способ определения тангенса и котангенса для любого острого угла. — Определите по этому способу *tg* и *cotg* нескольких углов и сравните ваши результаты с данными таблицы. — Как изменяется *tg* при изменении величины угла от 0^0 до 90^0? — Чему равен *cotg* 0^0? Чему равен *tg* 30^0? *tg* 45^0? *tg* 60^0? Чему равны *cotg* этих углов? Какая вообще зависимость между *tg* и *cotg* одного и того же угла? — Какие углы называются дополнительными? — Какая зависимость между *tg* острого угла и *cotg* дополнительного угла? Найдите по таблице *tg* 26^0, *tg* $38^0\ 30'$; *tg* 79^0? *cotg* 83^0? — Найдите угол, *tg* которого равен 0,08? 1,35? *cotg* которого = 2,3? 0.59? Приведите примеры задач, разрешаемых помощью *tg* или *cotg.*

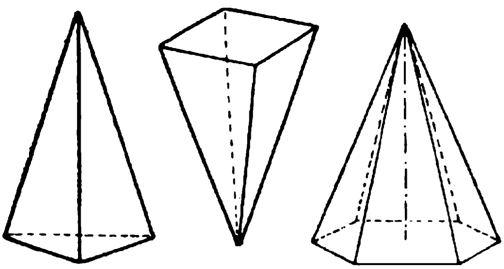
Что называется синусом? Косинусом? Как они обозначаются? Определите помощью чертежа *sin* и *cos* нескольких углов и проверьте ваш результат по таблице. Как изменяется *sin* и как изменяется *cos* при изменении величины угла от 0^0 до 90^0. Чему равен *sin* 45^0? *cos* 45^0? *sin* 30^0? *cos* 30^0? *sin* 60^0? *cos* 30^0. Какая зависимость между синусом острого угла и косинусом дополнительного угла? Найдите по таблице: *sin* 23^0, *sin* 65^0, *cos* 18^0, *cos* 71^0. Найдите углы, *sin* которых: 0,81; 0,13; 0,06; *cos* которых — 0,76; 0,18; 0,09. Приведите примеры задач, разрешаемых помощью *sin* или *cos.*

XV. Дополнительные сведения о телах.

В §§ 34—37 и 40 мы познакомились с правилами вычисления поверхности и объема призм и цилиндра. Теперь рассмотрим несколько других тел, часто встречающихся на практике: так наз. „пирамиды“, „конусы“ и „шары“.

§ 88. Пирамида. Ее боковая поверхность и объем.

Пирамидой называется тело, ограниченное с одной стороны треугольником или каким-нибудь многоугольником (основание пирамиды), а со всех других сторон—треугольниками, сходящимися в одной точке (в вершине пирамиды). Перпендикуляр, проведенный от вершины пирамиды к ее основанию, называется ее высотою (прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она составляет прямые углы с каждой прямой, проведенной в этой плоскости через точку встречи). Если основание пирамиды—треугольник, пирамида называется „треугольной“, если четыреугольник—„четыреугольной“ и т. д. На черт. 238 изображены треугольная, четыреугольная и шестиугольная пирамиды.



Черт. 238.

Если мы начертим развертку какой-нибудь пирамиды (сделайте это), то установим способ вычисления ее боковой поверхности: надо вычислить площадь каждой боковой треугольной грани и все эти площади сложить. В том случае когда все боковые грани одинаковы (такая пирамида называется правильною), вычисление упрощается: определяют площадь одной треугольной грани и умножают ее на число граней. Например, боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды равна $6 \cdot \frac{al}{2} = 3\,al$, где a—сторона шестиугольника, лежащего в основании пирамиды, а l—высота каждой треугольной грани; она называется „апофемой“ правильной пирамиды. Для правильной пирамиды о n гранях боковая поверхность равна

$$n \cdot \frac{al}{2} = \frac{nal}{2}.$$

Так как na—есть сумма сторон основания пирамиды, т.-е. ее периметр, то правило вычисления боковой поверхности правильной пирамиды можно словесно высказать так:

боковая поверхность правильной пирамиды равна полупроизведению периметра основания на апофему.

Правило вычисления объема пирамиды выводится в подробных учебниках математики. Мы приведем его здесь без доказательства, так как доказательство это чересчур сложно:

объем пирамиды равен одн й трети произведения ее основания на высоту

Обозначив площадь основания пирамиды через S, а высоту через h, получим такую формулу объема и пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S\, h.$$

Повторительные вопросы.

Что называется пирамидой? — Что называется основанием и что — вершиной? — Что называется высотою пирамиды? — Какая пирамида называется пятиугольной, десятиугольной, 12-угольной? — Какая пирамида называется правильной? — Что называется апофемой правильной пирамиды? — Припомните, что называется апофемой правильного многоугольника. — Как вычисляются боковая поверхность и объем правильной пирамиды? — Как выражаются эти правила формулами? — Как выражаются эти правила формулами?

Применения.

117. Величайшая из пирамид Египта (пирамида Хеопса) достигала в высоту 146 метров; ее квадратное основание имело 233 метра в ширину. Предполагая, что она сплошь сложена из камней, вычислите, какой высоты каменную стену. толщиною в полметра и длиною от Ленинграда до Москвы, можно было бы соорудить из ее материала (растояние — 640 километров).

Решение. Объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \,.\, 233^2 \,.\, 146 \text{ куб. м.}$$

Обозначив искомую высоту стены через x, имеем уравнение

$$6\,400\,000 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, x = \frac{1}{3} \,.\, 233^2 \,.\, 146,$$

откуда $x = 8{,}5$ *м.*

118. Стог соломы имеет форму прямоугольного параллелепипеда с пирамидальной верхушкой. Размеры основания стога 6×6 *м*; высота до основания пирамиды — 4 *м*, до вершины пирамиды — $5\frac{1}{2}$ *м*. Сколько килограммов соломы в этом стоге? Куб. метр соломы весит 100 *кг*.

Решение. Объем призматической части стога $6 \,.\, 6 \,.\, 4 = 144$ *куб. м.* Объем пирамидальной части $\frac{1}{3} \,.\, 6 \,.\, 6 \,. = 12$ *Куб. м.* Общий объем $144 + 12 = 156$ *куб. м.* В стоге 15600 *кг* соломы.

119. Вычислите объем и боковую поверхность правильной пятигранной пирамиды, сторона основания которой 45 *см*, а высота — 76 *см*.

Решение. Начнем с вычисления площади основания пирамиды, при чем воспользуемся тригонометрическими соотношениями. Площадь прав. пятиугольника со стороною 45 *см* равна

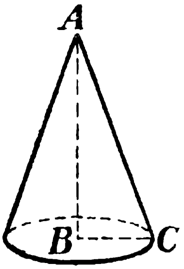
$$5 \,.\, 45 \,.\, \frac{1}{2}\, l,$$

где l — апофема. Так как центральный угол, опирающийся на сторону прав. вписанного пятиугольника, $=\frac{360^0}{5}=72^0$, то апофема $l=22{,}5\ cotg\ 36^0=16$ *см.* Следовательно, площадь основания пирамиды $5 . 45 . 8=1800$ *кв. см,* а искомый объем $=$ $=\frac{1}{3} . 1\,800 . 76=45\,600$ *куб. см.*

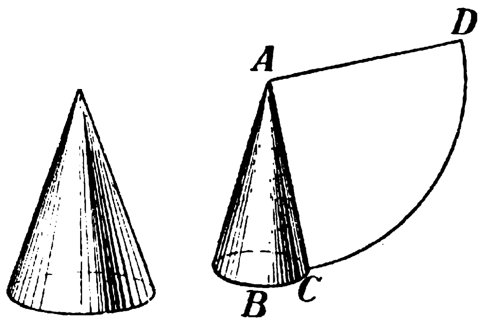
Для вычисления боковой поверхности необходимо определить длину апофемы пирамиды. Из чертежа (сделайте его) видно, что апофема есть гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого — высота пирамиды и апофема ее основания. Значит, апофема пирамиды $\sqrt{76^2+16^2}=78$. Отсюда боковая поверхность пирамиды $=6 . 45 . \frac{1}{2} . 78=10\,000$ *кв.см.*

§ 89. Конус. Его боковая поверхность и объем.

Вообразим, что прямоугольный треугольник ABC (черт. 239) вращается вокруг катета AB, как дверь на петлях; вращаясь, он словно вырежет из пространства тело, называемое конусом. Круг, описанный катетом BC, называется **основанием** конуса, отрезок AB **высотою** конуса, а AC—его образующей.



Черт. 239.



Черт. 240.

Чтобы найти правило для вычисления **боковой поверхности** конуса, представим себе ее развернутой на плоскости (черт. 240). Получится сектор, радиус которого равен „образующей" конуса, а длина дуги — длине окружности основания конуса. Площадь этого сектора равна боковой поверхности конуса. Мы знаем, что площадь сектора (§ 63) равна длине его дуги, умноженной на половину радиуса. Следовательно,

боковая поверхность конуса равна половине произведения длины его окружности на образующую.

Обозначив радиус основания конуса через R, а образующую через l, получаем для боковой поверхности S конуса формулу:

$$S=\frac{1}{2} . 2\pi R . l=\pi R l.$$

Правило вычисления объема конуса можно установить, рассматривая конус, как пирамиду с весьма большим числом боковых граней. Тогда можно применить к конусу правило вычисления объема пирамиды, заменив основание пирамиды основанием конуса, а ее высоту — высотой конуса. Для объема W конуса получим формулу

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где R — радиус основания конуса.

Повторительные вопросы.

Что называется конусом? — Что называется его основанием, высотою, образующей? — Как вычисляются боковая поверхность и объем конуса? — Как выражаются эти правила формулами?

Применения.

120. Вычислить полную поверхность и объем конуса, диаметр основания которого 92 *см*, а образующая — 85 *см*.

Решение. Полная поверхность этого конуса

$$\pi \,.\, 46 \,.\, 85 + \pi \,.\, 46^2 = 19\,000 \text{ кв. см.}$$

Для определения объема конуса вычисляем его высоту. Она равна $\sqrt{85^2 - 46^2} = 71$ *см*. Объем конуса

$$\frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, 46^2 \,.\, 71 = 160\,000 \text{ куб. см.}$$

121. Куча песку имеет форму конуса, окружность основания которого 14 *м*, а высота — 2 *м*. Сколько возов песку в этой куче? На воз идет 0,3 *куб. м* песку.

Решение. Радиус основания конической кучи $= \frac{16}{2\pi} = 2{,}6$ *м*. Площадь основания 5,1 *кв. м*, и, следовательно, объем кучи $= \frac{1}{3} \,.\, 5{,}1 \,.\, 2 = 3{,}4$ *куб. м*. В куче 11 с лишним возов.

122. Из цилиндра с диаметром основания 23 *см* и высотою 19 *см* надо выточить конус вчетверо меньшего объема с диаметром основания 20 *см*. Вычислить высоту конуса и угол при вершине.

Решение. Объем цилиндра $= \frac{1}{4} \,.\, \pi \,.\, 23^2 \,.\, 18 = 7\,500$ *куб. см*. Значит, объем конуса $= 1900$ *куб. см*. Его высота x определяется из уравнения

$$\frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, 10^2 \,.\, x = 1\,900,$$

откуда $x = 18$ *см*. Высота конуса должна равняться высоте цилиндра.

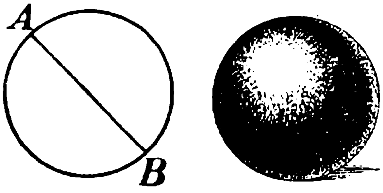
Тангенс половины угла при вершине равен $\frac{10}{18} = 0{,}56$, откуда искомый угол $= 58^0$.

§ 90. Шар. Его объем и поверхность.

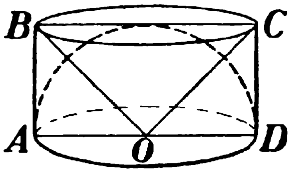
Шаром называется тело, которое можно представить себе образовавшимся от вращения полукруга около его диаметра (черт. 241). Все точки поверхности шара одинаково удалены от одной точки, называемой **центром** шара. Прямая, соединяющая центр шара с какой-нибудь точкой его поверхности, называется радиусом шара. Всякая прямая, соединяющая две точки его поверхности и проходящая через центр, называется **диаметром** шара.

Чтобы установить правило вычисления объема шара вообразим, что около полушара (черт. 242) описан цилиндр $ABCD$. Кроме того, вообразим себе конус, вершина которого в центре шара, а основание — совпадает с верхним основанием цилиндра.

Проведем теперь какую-нибудь плоскость, пересекающую все три тела параллельно основаниям цилиндра; эта плоскость MN (черт. 243) рассечет каждое из трех тел по кругу. Радиус круга,



Черт. 241.



Черт. 242.

по которому рассечется цилиндр, есть PZ, полушар — PS, а конус — PK. Проведя радиус OS шара, имеем по теореме Пифагора

$$[OS]^2 = [OP]^2 + [PS]^2.$$

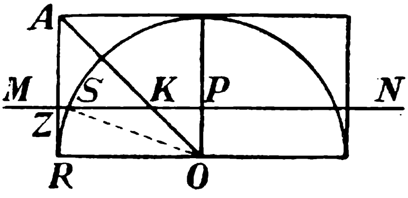
Обозначим радиус основания цилиндра через R (он равен радиусу шара); радиус сечения полушара PS через h, радиус сечения конуса — через k. Тогда $OS = OR = R$; $OP = PK = k$ (потому что против. углы $= 45°$); $PS = h$. Написанное выше представим в виде

$$R^2 = k^2 + h^2.$$

Умножив все члены равенства на π, имеем

$$\pi R^2 = \pi k^2 + \pi h^2.$$

Равенство это означает, что площадь сечения нашего цилиндра $[\pi R^2]$ равна площади сечения конуса $[\pi k^2]$, сложенной с площадью сечения полушара $[\pi h^2]$, лежащих в той же плоскости. Это справедливо для любой плоскости, пересекающей наши три тела параллельно основаниям цилиндра.



Черт. 243.

Представим себе теперь, что мы провели чрезвычайно много таких плоскостей в незначительном расстоянии H друг от друга. Назовем эти плоскости номерами: № 1, № 2, № 3 и т. д. Они разрежут наши три тела на множество весьма тонких слоев, которые можно принять за цилиндры с высотою H. Для плоскости № 1, № 2, № 3 и т. д. мы будем иметь следующие объемы лежащих на них слоев:

№ 1 . . . . . $\pi R^2H = \pi k_1{}^2H + \pi h_1{}^2H$
№ 2 . . . . . $\pi R^2H = \pi k_2{}^2H + \pi h_2{}^2H$
№ 3 . . . . . $\pi R^2H = \pi k_3{}^2H + \pi h_3{}^2H$
№ 4 . . . .

Сложив эти равенства почленно, мы получим в сумме первого столбца объем цилиндра $V_ц$; в сумме второго столбца — все слои конуса *, т.-е. его объем $V_к$, а в сумме третьего столбца — все слои полушара, т.-е. его объем $V_{пш}$. Короче говоря, мы устанавливаем, что

$$V_ц = V_к + V_{пш}$$

Так как объем цилиндра $v_ц = \pi R^2 . R = \pi R^3$, а объем конуса $\frac{1}{3} \pi R^2 . R = \frac{1}{3} \pi R^3$, то полученное сейчас равенство можно представить в виде

$$\pi R^3 = \frac{1}{3} \pi R^3 + V_{пш}$$

откуда объем полушара

$$Л_{пш} = \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

а объем полного шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Если бы мы пожелали выразить объем шара через диаметр, нам следовало бы только в этой формуле заменить R через $\frac{d}{2}$, где d — диаметр. Получим

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

Зная формулу для вычисления объема шара, можно вывести правило вычисления его поверхности.

Для этого вообразим, что шар составлен из большого числа весьма узких пирамид, сходящихся вершинами в центре шара. Объем одной такой пирамиды равен $\frac{1}{3}$ площади ее основания, умноженной на ее высоту. Так как эти пирамиды чрезвычайно узки (мы можем представить их себе сколь угодно узкими), то за площадь s их основания можно принять соответствующий участок a поверхности шара, а за высоту — радиус шара R. Тогда объемы наших пирамид выразятся последовательно через

$$\frac{1}{3} a_1 R$$

$$\frac{1}{3} a_2 R$$

$$\frac{1}{3} a_3 R$$

$$\frac{1}{3} a_4 R$$

и т. д.

* Не забудем, что слои могут быть сделаны сколь угодно тонкими, так как число плоскостей неограничено.

Сложив объемы всех этих пирамид и вынеся за скобку $\frac{1}{3}R$, получим, что объем v шара равен

$$v = \frac{1}{3} R\,[a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \text{ и т. д.}].$$

Но то, что в скобках, есть сумма всех участков шаровой поверхности, т.-е. полная поверхность S шара. Значит,

$$V = \frac{1}{3} R\,S$$

Мы узнали, следовательно, что

объем шара равен произведению трети его радиуса на поверхность.

Отсюда выводим, что поверхность шара

$$S = V : \frac{1}{3} R = \frac{3\,V}{R}$$

А так как мы уже узнали раньше, что $v = \frac{4}{3}\pi R^3$, то поверхность шара

$$S = 3 . \frac{4}{3} \pi R^3 : R = 4 \pi R^2$$

Другими словами:

поверхность шара равна учетверенной площади круга того же радиуса.

Повторительные вопросы.

Какое тело называется шаром? — Что называется центром шара, радиусом, диаметром? — Как вычислить поверхность и объем шара, если известен его радиус? — Если известен его диаметр? — Как высказать эти соотношения словесно?

Применения.

123. Сколько весит оболочка воздушного шара диаметром 15 метров? *Кв. м.* оболочки весит 300 граммов.

Решение. Поверхность этого шара $= 4 . \frac{1}{4} . \pi . 15^2 = 710$ *кв. м*, а следовательно, вес 210 *кг*.

124. Сколько свинцовых дробинок в 3 *мм* диаметром идет на 1 *кг*?

Решение. 1 *кг* свинца занимает объем $\frac{1\,000}{11{,}3} = 88{,}5$ *куб. см.* Объем одной дробинки $= \frac{1}{6} . \pi . 0{,}3^3 = 0{,}014$ *куб. см.* Следовательно, на 1 *кг* идет $\frac{88{,}5}{0{,}014} = 6\,300$ дробинок указанного диаметра.

125. Диаметр Марса вдвое меньше земного. Во сколько раз поверхность и этой планеты меньше, чем Земли?

Решение. Поверхности шаров относятся как квадраты диаметров, а объемы,— как кубы диаметров. Поэтому поверхность Марса меньше земной в 4 раза, а объем меньше земного в 8 раз.

126. „При обыкновенном дожде вес капель не превышает 0,065 грамма. Визнер на острове Яве во время сильнейшего дождя определил средний вес капель в 0,16 грамма" (Клоссовский, „Основы метеорологии"). — Определить соответствующие этим данным поперечники дождевых капель. считая их форму шарообразною.

Решение. 0,065 грамма воды занимают 0,065 куб. сантиметра или 65 куб. миллиметров. Диаметр шара такого объема получаем из уравнения

$$\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot x^3 = 65,$$

где x — диаметр в миллиметрах. Отсюда

$$x = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 65}{\pi}} = \text{около 5 миллиметров.}$$

Итак, крупная дождевая капля имеет в ширину полсантиметра. Диаметр самых больших измеренных капель (вес 0,16 грамма) равен 6,7 миллиметра.

127. Яблоко при печении сморщивается. На что это указывает?

Решение. На то, что объем яблока при печении уменьшается, кожура же сохраняет прежние размеры. Сделаем примерный расчет: вычислим какой избыток кожуры получается, когда яблоко диаметром 8 *см* уменьшается (вследствие потери воды при нагревании) на 4 миллиметра по диаметру. $4\pi \cdot 40^2 - 4\pi \cdot 38^2 = 4\pi\ [40^2 - 38^2] = 4\pi \cdot 78 \cdot 2 = 2\,000$ *кв. мм*, или 20 *кв. см*. Следовательно, общая поверхность всех морщин печеного яблока, при указанных размерах, равна 20 *кв. см*.

§ 91. Поверхность подобных тел.

Мы знаем (из § 70), что площади подобных фигур относятся, как квадраты их линейных размеров. То же правило верно и для поверхностей подобных тел (т.-е. таких тел, которые при одинаковой форме имеют различные размеры). Это значит, что

поверхности подобных тел относятся, как квадраты их линейных размеров.

Если у нас два подобных конуса (имеющие равные углы при вершине), и высота первого в 3 раза больше высоты другого, то поверхность первого в 9 раз больше поверхности другого.

Применения.

128. В „Путешествии Гулливера" рассказывается о лиллипутах, рост которых в 12 раз меньше нормального. Если на костюм человека нормального роста идет 4 кв. метра материала, то сколько материала идет на костюм лиллипута?

Решение. В 12^2, т.-е. в 144 раза меньше.

$$40\,000 \text{ кв. см} : 144 = 280 \text{ кв. см.}$$

129. Один человек на $^1/_4$ ниже другого. Каково отношение поверхностей их тел, считая что оба тела геометрически подобны?

Решение. Поверхность человека меньшего роста составляет $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ поверхности более высокого.

§ 92. Объем подобных тел.

Как относятся между собою объемы подобных тел? Чтобы установить это соотношение, будем рассуждать так. Вообразим два подобных тела (безразлично какой формы). Пусть линейные размеры первого тела в 10 раз меньше линейных размеров второго тела. Рассечем мысленно первое тело тремя рядами параллельных плоскостей на миллиметровые кубики, а второе тело такими же плоскостями на сантиметровые кубики. Так как все линейные размеры первого тела содержат столько миллиметров, сколько размеры второго тела — сантиметров, то объем первого тела заключает в себе столько же миллиметровых кубиков, сколько объем второго тела заключает кубиков сантиметров. Число кубиков в объеме обоих тел одинаково, только каждый кубик первого тела меньше каждого кубика второго тела в $10 . 10 . 10$, т.-е. в 1 000 раз. Во столько же раз, конечно, и объем первого тела меньше объема второго тела. Если бы первое тело имело линейные размеры не в 10, а в 3 или в $7\frac{1}{2}$ раза меньше, чем размеры второго, то объемы их относились бы как $1 : 3^3$ или как $1 : \left[7\frac{1}{2}\right]^3$. Вообще

объемы подобных тел относятся между собою, как кубы их линейных размеров.

Поэтому, например, уменьшенная модель изделия, все линейные размеры которого в 6 раз меньше размеров самого изделия, имеет объем в 6^3, т.-е. в 216 раз меньше. Если модель сделана из того же материала, как и изделие, то она весит в 216 раз меньше изделия.

Применения.

130. Самовар, окружность которого 55 *см*, вмещает 42 стакана. Сколько стаканов вмещает самовар такого же фасона, окружность которого 44 *см*?

Решение. Меньший самовар вмещает

$$42 . \left[\frac{44}{55}\right]^3 = 21 \text{ стакан.}$$

131. Какие яйца выгоднее покупать: 60-миллиметровые (длина) по 1 рублю десяток, или 55-миллиметровые по 75 копеек?

Решение. Объем меньшего яйца (т.-е. количество питательных веществ в нем), считая форму обоих яиц одинаковою, меньше объема крупного яйца в отношении $55^3 : 60^3 = 0{,}71$. Следовательно, меньшие яйца должны были бы продаваться по цене 71 коп., а не 75 коп. Крупные яйца в данном случае дешевле.

132. Средний палец гранитной статуи Мемнона в Египте имеет в длину 138 *см*. Зная, что гранит в 3 раза тяжелее человеческого тела, определить, сколько весит эта статуя.

Решение. Измерением находим длину среднего пальца человека — около 8 *см*. Следовательно, объем статуи превосходит объем человеческого тела в $\left[\frac{138}{8}\right]^3$ раз. Человек весит около 60 килограммов; сделанный из гранита в натуральную величину, он весил бы $60 . 3 = 180$ *кг*. Следовательно, статуя Мемнона весит

$$180 . \left[\frac{138}{8}\right]^3 = 910\,000 \textit{ кг.} = 910 \text{ тонн.}$$

Квадратные и кубические корни.

Числа	Квадр. корни	Кубич. корни	Числа	Квадр. корни	Кубич. корни	Числа	Квадр. корни	Кубич. корни	Числа	Квадр. корни	Кубич. корни
1	1,000	1,000	46	6,782	3,583	91	9,539	4,498	420	20,494	7,489
2	1,414	1,260	47	6,857	3,609	92	9,592	4.514	430	20,736	7,548
3	1,732	1,442	48	6,928	3 634	93	9,644	4,531	440	20,976	7,606
4	2,000	1,587	49	7,000	3.659	94	9,695	4,547	450	21,213	7,663
5	2,236	1,710	50	7.071	3,684	95	9,747	4,563	460	21,448	7,719
6	2,450	1,817	51	7,141	3 708	96	9 798	4,579	470	21,680	7,775
7	2,646	1.913	52	7,211	3,732	97	9,849	4,595	480	21,909	7,830
8	2,828	2,000	53	7,280	3.756	98	9,899	4.610	490	22.136	7,883
9	3,000	2,080	54	7,348	3,780	99	9,950	4,626	500	22,361	7,937
10	3,162	2,154	55	7,416	3,803	100	10.000	4,642	510	22,583	7.990
11	3,316	2,224	56	7,483	3,826	105	10,247	4,718	520	22,803	8,041
12	3,464	2,289	57	7,550	3,848	110	10,488	4,791	530	23,022	8,093
13	3,606	2,251	58	7,616	3;870	115	10,724	4,863	540	23,238	8,143
14	3,742	2,410	59	7,681	3,893	120	10,954	4,932	550	23,452	8,193
15	3.873	2,466	60	7,746	3 915	125	11,180	5 000	560	23,664	8,243
16	4,000	2,520	61	7.810	3,936	130	11,402	5,066	570	23 875	8,291
17	4;123	2 571	62	7.874	3,958	135	11,619	5,130	580	24.083	8,340
18	4,243	2.621	63	7.937	3,979	140	11,832	5,192	590	24,290	8,387
19	4,359	2,668	64	8,000	4.000	150	12.247	5,313	600	24,495	8,434
20	4,472	2,714	65	8,062	4.021	160	12.650	5,429	610	24,698	8,481
21	4,583	2,759	66	8,124	4,041	170	13,038	5,540	620	24,900	8,527
22	4,690	2.802	67	8,185	4,061	180	13,416	5,646	630	25,100	8,573
23	4,796	2,844	68	8 246	4,082	190	13,784	5,749	640	25,298	8.618
24	4,900	2.884	69	8,307	4,102	200	14.142	5,848	650	25,495	8 662
25	5,000	2,924	70	8,367	4,121	210	14,491	5,944	660	25,690	8,707
26	5,099	2,962	71	8,426	4,141	220	14,832	6,037	670	25,884	8 750
27	5,196	3,000	72	8,485	4,160	230	15,166	6,127	680	26 077	8,794
28	5.291	3,034	73	8.544	4,179	2.0	15,492	6,214	690	26,268	8,837
29	5,385	3,072	74	8,602	4 198	250	15,811	6,300	700	26,457	8,879
30	5,477	3,107	75	8,660	4,217	260	16,124	6,382	710	26,646	8,921
31	5,568	3,141	76	8,718	4,236	270	16,432	6,463	720	26 833	8,963
32	5.657	3,175	77	8,775	4.254	280	16,733	6,542	730	27,018	9,004
33	5,745	3,207	78	8,832	4,273	290	17.029	6,619	740	27.203	9,045
34	5,831	3.240	79	8,888	4,291	300	17,320	6,694	750	27,386	9,086
35	5,916	3,271	80	8,944	4,309	310	17,607	6.768	760	27.568	9,126
36	6,000	3,302	81	9,000	4,327	320	17,888	6,840	770	27,749	9,166
37	6,083	3,332	82	9,055	4 344	330	18,166	6,910	780	27,928	9,205
38	6,164	3,362	83	9,110	4,362	340	18,439	6,979	790	28 107	9,244
39	6,245	3,391	84	9,165	4 379	350	18,708	7,047	800	28,284	9,283
40	6 325	3,420	85	9,219	4.397	360	18,974	7,114	820	28,636	9,360
41	6,403	3,448	86	9,274	4,414	370	19.235	7,179	840	28,983	9,435
42	6,481	3,476	87	9,327	4,431	380	19,494	7,243	860	29,326	9,510
43	6,557	3,503	88	9.381	4,448	390	19.748	7.306	880	29,665	9,583
44	6,633	3,530	89	9,434	4,465	400	20,000	7,368	900	30,000	9,655
45	6,708	3,557	90	9 487	4,481	410	20,248	7 429	1000	31,623	10.000

$\pi = 3{,}142$	$\frac{1}{\pi} = 0{,}318$	$\sqrt{\pi} = 1{,}772$	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}465$	$\pi^2 = 9{,}869$

Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы углов от 0° до 90°.

°	sin	cos	tg	ctg	—
1	0,02	1,00	0,02	57,29	89
2	0,03	1,00	0.03	28.64	88
3	0,05	1,00	0,05	19,08	87
4	0,07	1,00	0,07	14,30	86
5	0,09	1,00	0,09	11,43	85
6	0,10	0,99	0,11	9,51	84
7	0,12	0,99	0,12	8.14	83
8	0,14	0,99	0,14	7,12	82
9	0,16	0.99	0,16	6,31	81
10	0,17	0,99	0,18	5,67	80
11	0,19	0,98	0,19	5,14	79
12	0,21	0,98	0,21	4,70	78
13	0,22	0,97	0,23	4.33	77
14	0,24	0.97	0,25	4,01	76
15	0,26	0 97	0,27	3,73	75
16	0,28	0,96	0,29	3.49	74
17	0,29	0.96	0,31	3,27	73
18	0,31	0,95	0,32	3,08	72
19	0.33	0,95	0,34	2,90	71
20	0,34	0,94	0,36	2,75	70
21	0,36	0,93	0,38	2,61	69
22	0,37	0,93	0,40	2,48	68
23	0,39	0,92	0,42	2,36	67
24	0,41	0 91	0,45	2,25	66
25	0,42	0,91	0,47	2,14	65
26	0,44	0,90	0,49	2,05	64
27	0.45	0,89	0.51	1.96	63
28	0,47	0,88	0,53	1,88	62
29	0,48	0,87	0,55	1 80	61
30	0,50	0,87	0,58	1,73	60
31	0,52	0,86	0,60	1,66	59
32	0,53	0,85	0,62	1,60	58
33	0,54	0,84	0,65	1,54	57
34	0,56	0,83	0.67	1.48	56
35	0,57	0,82	0,70	1,43	55
36	0.59	0,81	0,73	1,38	54
37	0,60	0,80	0,75	1,33	53
38	0,62	0,79	0,78	1,28	52
39	0,63	0,78	0,81	1.23	51
40	0,64	0,77	0,84	1,19	50
41	0,66	0,75	0,87	1,15	49
42	0,67	0,74	0,90	1,11	48
43	0,68	0,73	0,93	1,07	47
44	0,69	0,72	0,97	1,04	46
45	0,71	0,71	1,00	1,00	45
—	cos	sin	ctg	tg	°

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ВТОРОЙ КОНЦЕНТР.

Ц. 1 р. 40 к.

СКЛАД ИЗДАНИЯ:

ХАРЬКОВ, ул. Свободн. Академии, 18, „УНИЗДАТ". Тел. 27-35
ЛЕНИНГРАД, внутри Гост. Дв., 55, „УНИЗДАТ". Тел. 569-02