Con motivo del Día Escolar de las Matemáticas

Otras actividades de

Música y Matemáticas

VICENTE LIERN CARRIÓN - TOMÁS QUERALT LLOPIS

12 de mayo de 2008 **Día Escolar de las Matemáticas**

1. Introducción

La relación entre Música y Matemáticas ha sido tan estrecha a lo largo de más de veinticinco siglos, que sin una explicación en clave numérica sería difícil comprender la evolución histórica de la música. Pero las posibilidades no acaban con la Historia, esta relación ha proporcionado, y proporciona, herramientas muy útiles para las técnicas de composición y la afinación.

Sabemos que el Partenón, una tarjeta de crédito o el DNI tienen algo en común: el número áureo. Esta proporción exacta también la podemos encontrar en algunas obras de Bach, las sonatas de Mozart o la Quinta Sinfonía de Beethoven, por ejemplo. Las simetrías, los fractales, la aleatoriedad o algunos algoritmos sirven para crear musica. Por ejemplo, en 'El espejo', una plasmación clara de la idea de simetría, fue puesta en práctica en un dueto por Mozart. El compositor austríaco permitió que dos violinistas tocasen, a la vez, la misma partitura, pero en sentido inverso.

Pitágoras fue pionero en crear este vínculo, que algunos atribuyen a los chinos. Pero los pitagóricos hicieron una cosa más completa: el *quadrivium*. Es decir, la astronomía, la música, la aritmética y la geometría constituían la base del saber. En el siglo XII, compositores y ejecutantes empezaron a separarse de la tradición pitagórica. Un cambio de paradigma musical con el que se pasó del canto monódico gregoriano a la polifonía con diferentes estilos y voces. A su vez, se buscó alternativas en la afinación, lo que desató rencillas entre ambas disciplinas que perduran hasta nuestros días.

La incorporación progresiva y explícita de métodos matemáticos e informáticos en música es criticada por los que opinan que esto puede dar origen a una música más automática. No cabe duda de que la música persigue la belleza y va dirigida a los sentimientos, pero esto no significa que no haya mucha ciencia de por medio. El escritor no piensa 'voy a utilizar una metáfora porque queda mejor', lo hace de forma espontánea. Si ha llegado ahí es porque tiene una formación y ha sido capaz de plasmarla. El pentagrama no es más que una fórmula y como tal, una pequeña modificación la puede cambiar drásticamente. Las notas no suenan de forma aleatoria, sobre todo cuando se toca en conjunto, debe haber una simultaneidad pensada y pactada. Cuando alguien improvisa es porque ha tocado muchas cosas que luego le salen así.

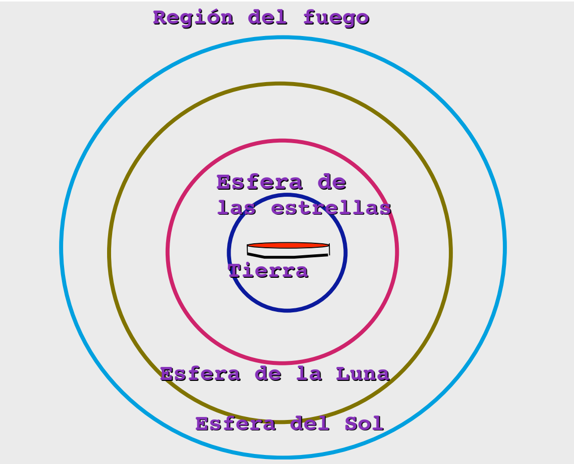
La necesidad de nuevas mezclas de sonido impulsa en el siglo XX la búsqueda de nuevas herramientas de inspiración. Quizá fuera el músico contemporáneo Joseph Schillinger el primero en crear un sistema de composición musical basado explícitamente en principios científicos. De hecho, hay quien considera que anticipó la música por ordenador. La obra de Iannis Xenakis también está plagada de traducciones de conceptos matemáticos al plano musical; un ejemplo, en una de sus composiciones más conocidas, Metástasis.

Como ocurre en todos los campos en los que las matemáticas intentan expresar criterios subjetivos, en música el gusto del oyente no es fácil de plasmar. No existe la ecuación de la canción perfecta. Sin embargo, si que contamos con la posibilidad de predecir gustos musicales mediante el ordenador. La minería de datos, por ejemplo, permite coger obras que gustan a casi todo el mundo y buscar patrones musicales que agraden a la mayoría. Con esto, está claro que, en el último siglo, la música se ha servido de las matemáticas para enriquecerse.

Este trabajo que tiene como objetivo complementar a la guía didáctica, "Música y Matemáticas" (elaborada con motivo del Día Escolar de las Matemáticas), no pretende ser exhaustivo, ni siquiera ser una guía para la puesta en práctica de las actividades en el aula. Sin embargo, nos ha parecido interesante ponerlo a vuestra disposición porque se trata de recoger actividades que habíamos preparado par la guía y que, por razones de espacio, no pudieron aparecer.

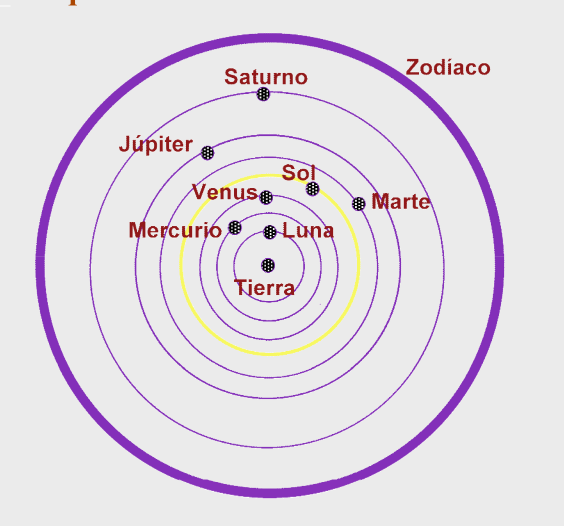
2. La música de las esferas. Del Universo de Anaximandro al de Kepler

Desde los primeros pitagóricos, la relación Música-Astronomía se ha mantenido a lo largo de los siglos. De hecho, la idea de esferas celestes que al girar producen la música de las esferas se ha repetido en muchas escuelas que, normalmente, atribuían la imposibilidad de escuchar esta música a la costumbre. Si desde que nacemos estamos escuchando incesantemente una melodía dejamos de ser conscientes de su existencia.

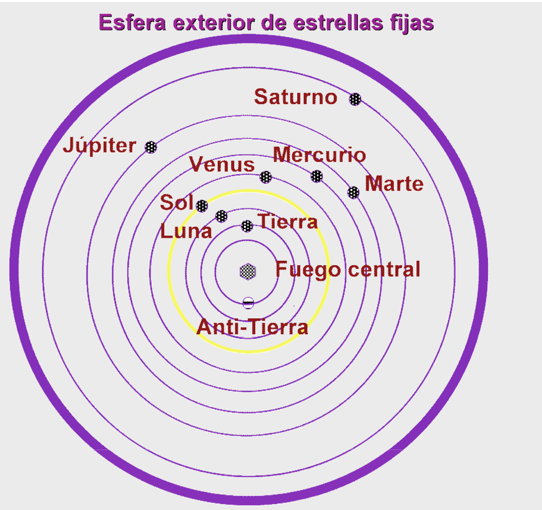


Esquema del Universo de Anaximadro

A la concepción pitagórica del Universo de Anaximandro, los pitagóricos le incorporan de forma explícita la armonía musical.
Pitagóricos y neopitagóricos propusieron varias cosmologías en las que la armonía musical y la universal dependían de las mismas relaciones numéricas. En todas ellas, la Música juega un papel fundamental, que les lleva a descartar propuestas que, vistas desde la perspectiva actual resultarían más verosímiles.



Esquema de los primeros pitagóricos

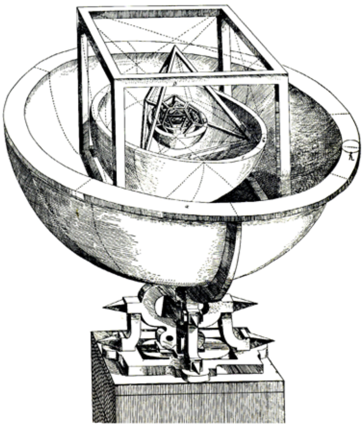


Filolao (s. V - IV a. C)

Los pitagóricos se valen de la perfecta armonía universal para determinar las consonancias: "los sonidos serán más consonantes cuanto más se parezcan a la música de las esferas". Asumir esto supone aceptar que la esencia del Universo y de la Música era la misma: el Número. Y es más, ambas cosas debían estar regidas por las mismas cantidades.

Desde el siglo VI a. C. hasta el siglo XVII fueron muchos los pensadores que se ocuparon de la armonía celestial, del Universo como un gran instrumento musical, pero quizá ninguno con la profundidad, la originalidad y la precisión de Johannes Kepler (1571-1630). Al determinar las proporciones armónicas, los pitagóricos buscaban una mística de los números confusa y apenas inteligible, pero Kepler se decidió desde el principio a seguir su propio camino. Su profundo sentimiento religioso le marcaba un punto de partida diferente del de los pitagóricos. Su gran meta era "erigir el magnífico edificio del sistema armónico o escala musical, un edificio cuya disposición no es caprichosa como podría pensarse, no es una invención humana susceptible de modificaciones, sino que se muestra tan acorde con la razón y con la naturaleza que el mismísimo Dios creador lo reprodujo al concertar los movimientos celestes" (Caspar, 2003)

En su obra *Harmonices Mundi* (1619), Kepler estableció que un astro debería emitir[1] un sonido que es más agudo cuando su movimiento fuese más rápido, por lo que existen intervalos musicales bien definidos que están asociados a los diferentes planetas. En un principio consideró que el movimiento de los planetas debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía. En su visión cosmológica no era casualidad que el número de planetas conocidos en su época fuera uno más que el número de poliedros perfectos. Intentó demostrar que las distancias de los planetas al Sol venían dadas por esferas en el interior de poliedros perfectos, anidadas sucesivamente unas en el interior de otras. El orden, desde la mayor hasta la menor, era el siguiente:

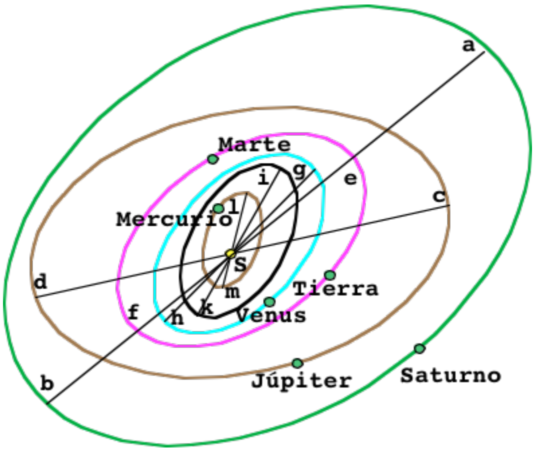


Saturno-Cubo-Júpiter-Tetraedro-
Marte-Dodecaedro-Tierra-
Icosaedro-Venus-Octaedro-Mercurio

Modelo presentado por Kepler en *Misterium Cosmographicum* (1596).

[1] A pesar de su neopitagorismo, Kepler es consciente de la imposibilidad de percibir la música de las esferas: ``Iam soni in coelo nulli existunt, nec tam turbulentus est motus, ut ex attritu aurae coelestis eliciatur stridor".

Pronto advirtió que este modelo de poliedros perfectos, que en principio le sirvió para celebrar la existencia de Dios, no explicaba[2] el movimiento de los planetas. La profunda religiosidad de Kepler, no le permitía aceptar que Dios no hubiera dispuesto que los planetas describieran figuras geométricas simples y con esta idea se dedicó a probar con toda suerte de combinaciones de círculos. Convencido de la imposibilidad de lograrlo con círculos, usó óvalos y finalmente, con gran decepción, empleó elipses. Con ellas llegó a las famosas tres leyes que le revelaron como el mejor astrónomo de su época, pero esta falta de simplicidad en el Universo, que Kepler vivió como un fracaso, fue compensada por la perfección de la Armonía Universal.



Modelo cosmológico de Kepler

Aseguró, por primera vez, que las órbitas de los planetas describen una elipse alrededor del Sol y que éste se encuentra en uno de los focos de la elipse. Si expresamos la velocidad angular de cada planeta en segundos, podemos considerar que representa el número de vibraciones de un cierto tono, pero como la velocidad cambia a lo largo de la revolución, este tono recorrerá un intervalo musical. De acuerdo con las leyes de Kepler, la amplitud de este intervalo dependerá de la excentricidad de la órbita

Las letras a, c, e, g, i, indican la distancia más grande de cada planeta al Sol, (afelio) y las restantes las distancias más pequeñas (perihelio). Los cálculos de las velocidades angulares proporcionaron la siguiente armonía de los planetas:

PLANETA	VELOCIDAD		ANGULAR		ARMONÍA	INTERVALO
Saturno	Afelio	1’ 46’’ **a**	entre	1’ 48’’	4/5	*Tercera*
	Perihelio	2’ 15’’ **b**	y	2’ 15’’		*mayor*
Júpiter	Afelio	4’ 30’’ **c**	entre	4’ 35’’	5/6	*Tercera*
	Perihelio	5’ 30’’ **d**	y	5’ 30’’		*menor*
Marte	Afelio	26’ 14’’ **e**	entre	25’ 21’’	2/3	*Quinta*
	Perihelio	38’ 1’’ **f**	y	38’ 1’’		
Tierra	Afelio	57’ 3’’ **g**	entre	57’ 28’’	15/16	*Semitono*
	Perihelio	61’ 18’’ **h**	y	61’ 18’’		
Venus	Afelio	94’ 50’’ **i**	entre	94’ 50’’	24/25	*Diesis*
	Perihelio	97’ 37’’ **k**	y	98’ 47’’		
Mercurio	Afelio	164’ 0’’ **l**	entre	164’ 0’’	5/12	*Octava+ter-*
	Perihelio	384’ 0’’ **f**	y	394’ 0’’		*cera mayor*

Velocidades angulares de los planetas
Fuente: Atlas de Música, 2, pág. 302

[2] A la muerte de Tycho Brahe (1602), Kepler accede a todos los datos recopilados por Tycho. Mucho más precisos que los manejados por Copérnico, especialmente los relativos al movimiento retrógrado de Marte. A partir de ellos, Kepler advierte que su sistema de poliedros no era sostenible.

Además, de esta armonía interna, existía otra armonía que regía las relaciones entre los planetas. Para esto, Kepler comparó el afelio y el perihelio de un planeta con los del más próximo a él, obteniendo así dos tipos de intervalos:

a) **Intervalo convergente**: se obtiene comparando la distancia donde la velocidad es menor (afelio) para el planeta más externo con la distancia donde la velocidad es mayor (perihelio) para el planeta más interno.

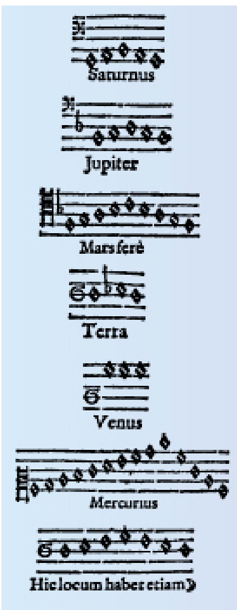
b) **Intervalo divergente**: se obtiene comparando la distancia donde la velocidad es menor (afelio) para el planeta más interno con la distancia donde la velocidad es mayor (perihelio) para el planeta más externo.

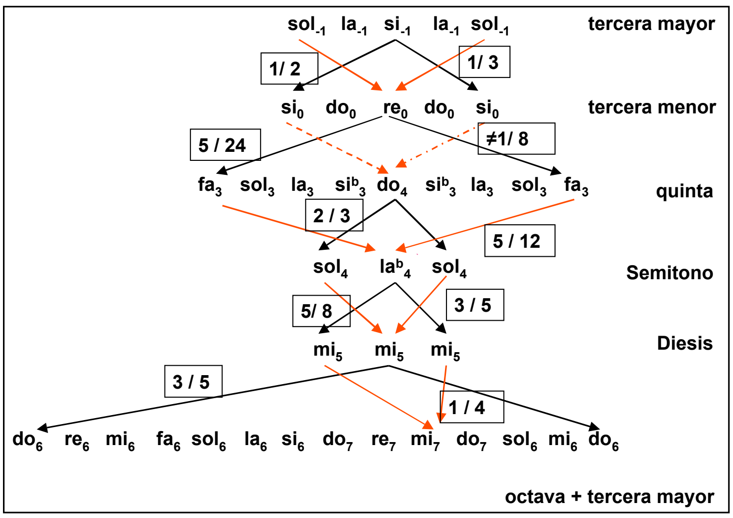
Con estos dos tipos de intervalos calculó las siguientes proporciones:

	CONVERGENCIA	DIVERGENCIA
Saturno-Júpiter	$\frac{a}{d}=\frac{1}{3}$	$\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$
Júpiter-Marte	$\frac{c}{f}=\frac{1}{8}$	$\frac{d}{e}=\frac{5}{24}$
Marte-Tierra	$\frac{c}{h}=\frac{5}{12}$	$\frac{f}{g}=\frac{2}{3}$
Tierra-Venus	$\frac{g}{k}=\frac{3}{5}$	$\frac{h}{i}=\frac{5}{8}$
Venus-Mercurio	$\frac{i}{m}=\frac{1}{4}$	$\frac{k}{l}=\frac{3}{5}$

Intervalos calculados por Kepler
Fuente: Atlas de Música, 2, pág. 302

El paso siguiente era asignar una melodía a cada planeta (y a la Luna). Para ello, no hay más que tomar una nota arbitraria y a partir de ella, y basándose en todas las proporciones obtenidas, las melodías son las siguientes:





En el gráfico de la izquierda se reproducen los pentagramas originales de Kepler. En el esquema de la derecha se recogen los dos tipos de armonía manejados. La armonía interna proporciona los intervalos de cada planeta[3] y la armonía externa relaciona los intervalos de cada planeta con los demás.

En la actualidad, la música de las esferas sigue siendo motivo de inspiración de muchos compositores. Basta hacer una búsqueda en Internet para encontrar más de novecientas mil entradas (en castellano). Sirva como ejemplo del interés que despierta el tema que el último disco de Mike Oldfield 'Music of Spheres', en palabras del propio autor, está inspirado en el concepto pitagórico de música y armonía.

En la página http://www.divulgamat.net podéis encontrar aportaciones muy interesantes sobre este tema.

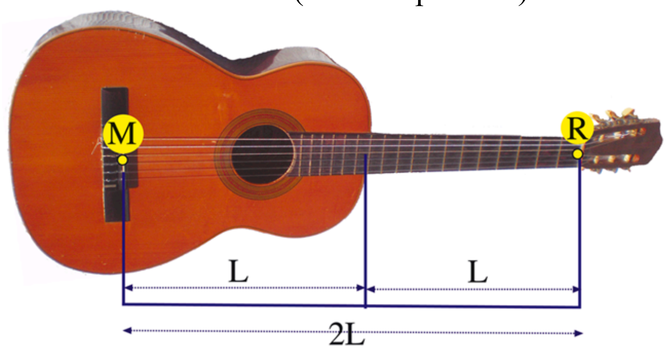
3. Las matemáticas de la guitarra

Mucho antes de que J. S. Bach diese a conocer definitivamente el sistema de afinación temperado con el Clave bien temperado (1722 y 1740), musicólogos e instrumentistas de los siglos XVI y XVII desarrollan métodos que permitían situar los trastes de instrumentos musicales de manera que sonasen con el sistema de afinación que ahora utilizamos. Desde el punto de vista matemático, la idea consiste en obtener 12 notas por octava multiplicando una frecuencia patrón f_0 por $2^0, 2^{1/12}, 2^{2/12}, \dots, 2^{11/12}$.

Por centrarnos en un instrumento de uso muy extendido, haremos el estudio sobre la guitarra. Si nos fijamos en la colocación de los trastes, está claro que a medida que nos alejamos del punto R éstos tienen una separación menor. Está claro que las matemáticas y las técnicas actuales permiten colocar los trastes de forma sencilla: Si las cuerdas miden 2L desde el punto R al punto M (como en la figura), para fijar el lugar de los trastes basta con calcular

$$\frac{2L}{2^{0/12}}, \frac{2L}{2^{1/12}}, \frac{2L}{2^{2/12}}, \dots$$

y situar sucesivamente a estas distancias (desde el punto R) los trastes 0, 1, 2, etc.



3 Es importante resaltar que el único planeta para el que la identificación *proporción-nota musical* no es exacta es para la Tierra, pero incluso este hecho sirvió a Kepler como muestra de la grandeza de Dios.

Sin embargo, en los siglos XVI y XVII los instrumentistas necesitaban disponer de métodos geométricos que paliasen las carencias técnicas que, básicamente, consistían en desarrollar construcciones con regla y compás. Estas formas de cálculo se consideraban propias del artesano y solían mantenerse en secreto.

Tal y como se hace en Stewart (1990), de entre todas las técnicas desarrolladas aquí destacaremos tres que, probablemente, fueron las más utilizadas.

En 1581, Vicenzo Galilei, padre de Galileo Galilei, propone considerar semitonos iguales dados por el número racional

$$\frac{18}{17} \cong 1{,}0588223529$$

Sin duda, la propuesta resultaba muy sencilla para la construcción, y esto motivó que fuese de uso común durante varios siglos. Sin embargo, los músicos eran conscientes de que este método originaba pequeñas desafinaciones[4]. En 1636, Marin Mersenne, propone aproximar el semitono por

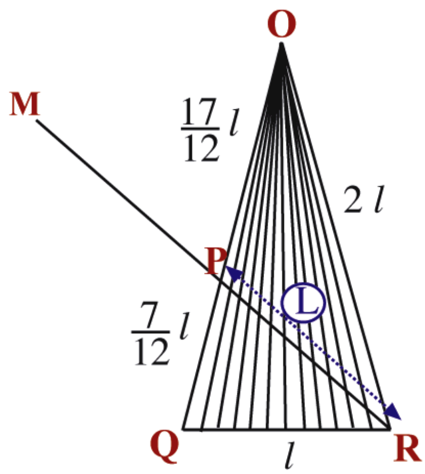
$$\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}} \cong 1{,}059732672\,.$$

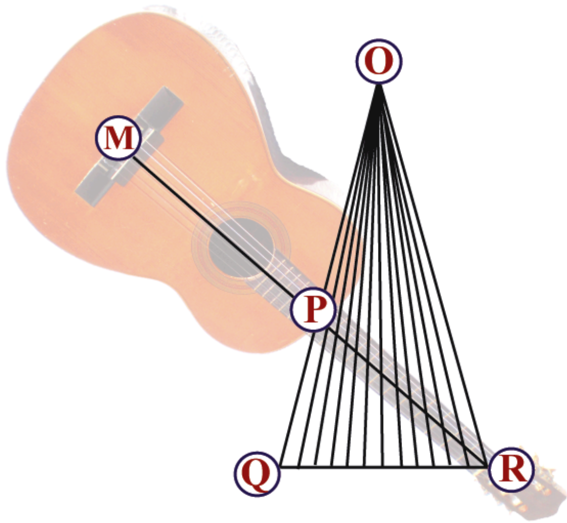
A pesar de la aparente complejidad de la propuesta de Mersenne, sólo aparecen raíces cuadradas y por tanto puede construirse con regla y compás. Sin embargo, aunque aproxima mucho mejor al semitono temperado que el método de Galilei, los errores de construcción se iban acumulando y resultó poco operativo.

En 1743, Daniel Strähle, un artesano sin formación matemática, publicó en los *Anales de la Academia Sueca* un método muy sencillo para situar los trastes que resultó extraordinariamente preciso. El método consiste en lo siguiente:

a) Se traza un segmento QR de longitud l y se divide en doce intervalos iguales.
b) Se determina un punto O de manera que long(OQ) = long(OR) = $2l$.
c) Se une O con los puntos de la división de QR.
d) El punto P se sitúa sobre el segmento OQ de forma que la longitud de QP sea 7/12 l.
e) Se traza el segmento RP y se prolonga hasta el punto M de modo que long(PM) = long(RP).
f) Si RM proporciona el tono fundamental, y por tanto PM la octava, los puntos de intersección de RP con las 11 rectas trazadas desde O se corresponden con los semitonos sucesivos dentro de la octava.

[4] La longitud exacta para el semitono temperado es $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}059463$.





Como podéis comprobar en Stewart (1990), la razón por la que el método de Strähle resultó tan preciso es que los puntos en los que se colocan los trastes se corresponden perfectamente con una aproximación de la función $2^{x/12}$ por una función de la forma

$$\frac{ax+b}{cx+d},$$

dando un ejemplo más de que, tanto en música, como en otras disciplinas e incluso en la vida diaria, utilizamos propiedades y razonamientos matemáticos, aunque, como en el caso de Strähle, sea de forma inconsciente.

4. Música, matemáticas y logaritmos

Hasta que en el siglo XVII aparecieron los logaritmos, de la mano de Joost Bürgi (1552-1632) o de John Napier, (1550 - 1617) -que a ambos se le atribuye la paternidad de la idea-, para los musicólogos y constructores de instrumentos, determinar las notas y los intervalos adecuados resultaba un auténtico problema cuya solución, en muchas ocasiones, se obtenía de forma aproximada.

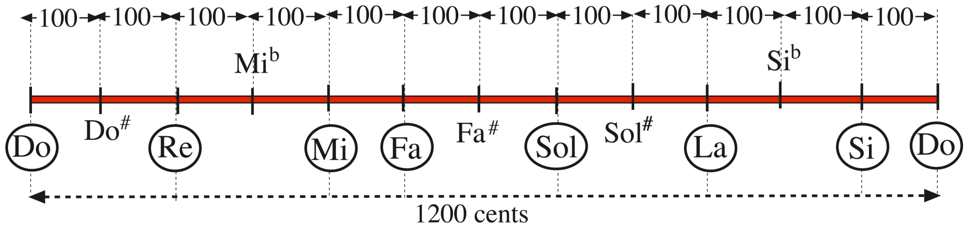
Logaritmos y percepción acústica

Para el oído humano, que es sensible únicamente a ondas cuya frecuencia está comprendida entre los 15 y los 20.000 Hz, la relación entre la magnitud de un estímulo físico y la percepción no es lineal. Se ha comprobado que en la zona central del campo de audibilidad, la sensación de altura es proporcional al logaritmo de la energía que produce la excitación (Ley de Weber-Fechner). Expresado de forma matemática[5] , dadas dos notas de frecuencias f_1, f_2, la diferencia de altura entre ellas viene dada por:

$$\mathrm{SA}= k \times \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right).$$

[5] La elección del 2 como base de los logaritmos se debe a razones de comodidad de cálculo.

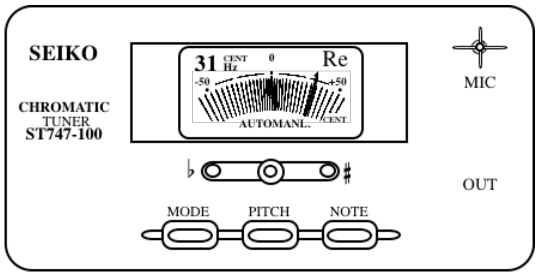
El valor de la constante k depende de las unidades en las que se mida. Actualmente suele medirse en cents[6], y en este caso el valor de k es 1200. Con ello, a la octava le corresponden 1200 cents y entre cada nota de la escala cromática temperada hay 100 cents:



Aunque sea de forma inconsciente, este hecho es utilizado por los músicos todos los días cuando comprueban la afinación de su instrumento. En realidad, lo que están haciendo es comparar la nota que emiten con las notas afinadas del sistema temperado, que son las siguientes[7]:

Nota	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa
Hz	261,6265	277,1826	293,6648	311,127	329,6275	349,2282
Nota	Fa#	Sol	Sol#	La	Sib	Si
Hz	369,9944	391,9954	415,3047	440	466,1638	493,8833

Así, si por ejemplo emiten un sonido de 299 Hz, pueden comprobar con un afinador electrónico si la nota está afinada y en qué grado. El afinador, en este caso proporciona la siguiente información: Nota: Re Desviación: 31,17 cents.



Pero, ¿qué cálculos realiza el afinador? Lo único que hace es evaluar cuál es la sensación de altura entre 299 Hz y la nota afinada más próxima (en este caso el Re = 293,6648 Hz), es decir

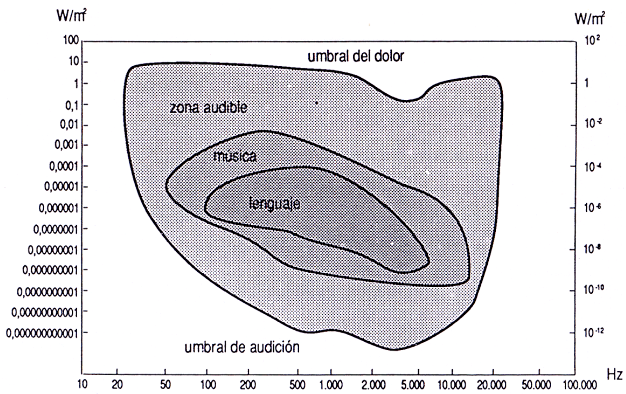
$$\mathrm{SA} = 1200 \cdot \log_2\left(\frac{299}{293{,}6648}\right) = 31{,}1702 \ \text{ cents.}$$

[6] El cent fue introducidas por H. H. Ellis (1859-1939) y su nombre se debe a que cada semitono temperado mide 100 cents.
[7] Estas frecuencias se han calculado fijando el diapasón en La_4=440 Hz.

Está claro que la nota en cuestión, 299 Hz, es un Re bastante desafinado y el músico debe corregirla, dependiendo del instrumento del que se trate, mediante la presión del aire, la tensión en la cuerda, etc.

Logaritmos, intensidad sonora y multas por contaminación acústica

El oído humano puede acomodarse a presiones e intensidades sonoras bastante dispares: Entre 2×10^{-5} y 20 N/m^2 para la amplitud de la presión y desde 10^{-12} hasta 1 vatios/m^2 para la intensidad. El valor más bajo, en ambos casos, se toma como umbral de audición, mientras que el más alto, que produce sensación dolorosa en la mayoría de las personas, es el umbral de dolor.



Área auditiva normal (véase Calvo-Manzano (1993)).

Si de nuevo tenemos en cuenta las Ley de Weber-Fechner, en la zona central del campo de audibilidad, "la sensación sonora de intensidad es sensiblemente igual al logaritmo de la energía que produce la excitación". Esto da lugar a la forma habitual para medir la 'intensidad':

$$\mathrm{SI} = 10 \times \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ decibelios (dB)}$$

donde *I*o es la intensidad que se considera como umbral.

Veamos en un ejemplo la utilidad de esta fórmula

Ejemplo: Una trompeta al interpretar una nota produce una sensación SI de 40 dB. ¿Qué sensación producirán dos trompetas interpretando la misma nota con idénticas condiciones?

Sabemos que con una trompeta la sensación es

$$40 = 10 \times \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

por tanto, para dos trompetas se tendrá

$$S = 10 \times \log_{10}\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10 \times \log_{10}\left(2 \times \frac{I}{I_0}\right) = 10 \times \log_{10}(2) + 10 \times \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \approx$$

$$\approx 3+40 = 43 \text{ dB.}$$

Es decir, la sensación sólo se ha incrementado en 3 decibelios.

Sabemos que el ruido es una de las principales causas de preocupación entre la población de las ciudades, ya que incide en el nivel de calidad de vida y además puede provocar efectos nocivos sobre la salud, el comportamiento y actividades del hombre. El incremento de los niveles de ruido ha crecido de forma desproporcionada en las últimas décadas y sólo en España se calcula que al menos 9 millones de personas soportan niveles medios de 65 decibelios (dB), siendo el segundo país, detrás de Japón, con mayor índice de población expuesta a altos

En cuanto a los niveles racionales, las cifras medias de las legislaciones europeas, marcan como límite aceptable 65 dB durante el día y 55 dB durante la noche, ya que la capacidad auditiva se deteriora en la banda comprendida entre 75 dB y 125 dB y pasa a un nivel doloroso, cuando se superan los 125 dB, el umbral de dolor llega a los 140 dB.

Algunos ruidos y sus niveles

- Pájaros trinando: 10 dB	- Conversación normal: 50 dB
- Claxon automóvil: 90 dB	- Motocicletas sin silenciador: 115 dB
- Rumor de hojas de árboles: 20 dB	- Ambiente oficina: 70 dB
- Zonas residenciales 40 dB	- Taladradores: 120 dB
- Interior discotecas: 110 dB	- Interior fábrica: 80 dB
	- Tráfico rodado: 85 dB

Recientemente, algunas concentraciones, fiestas populares o espectáculos musicales se han visto afectados por la prohibición de exceder determinados niveles de ruido.

Policía realizando mediciones de niveles de sonoridad

Sonómetro

Por ejemplo, la Ley 7/2002, de Protección contra la Contaminación Acústica de la Generalitat Valenciana, en su artículo 42, marca el siguiente límite:

> "En los trabajos que se realicen en la vía pública y en la edificación dentro de las zonas urbanas consolidadas no se autorizará el empleo de maquinaria cuyo nivel de presión sonora supere 90 dB(A) medidos a cinco metros de distancia"

El primer paso para establecer el nivel de sonoridad, se hace ha través del *sonómetro* que, básicamente funciona como el afinador: Mide la distancia entre el ruido analizado, R, y un sonido que se considera patrón R_o. Es decir, calcula

$$SI = 10 \times \log_{10}\left(\frac{R}{R_0}\right),$$

y este valor no debería exceder los límites fijados por la ley.

Agradecemos a D. Vicente Fco. Sanz Bayona, Inspector de la Policía Local de Alaquàs (València), su colaboración en este apartado

Referencias bibligráficas

[1] J. M. Barbour (1957), *A Geometrical Approximation to the Roots of Numbers*, The American Mathematical Monthly, 64, pp. 1-9.
[2] A. Calvo-Manzano Ruiz (1993), Acústica físico-musical, Ed. Real Musical, Madrid.
[3] M. Caspar (2003), Kepler, Ed. Acentos, Madrid.
[4] J. J. Goldáraz Gaínza (2004), Afinación y temperamentos históricos, Ed. Alianza Editorial, Madrid.
[5] http://it.wikipedia.org/wiki/Temperamento_(musica)
[6] V. Liern (2003), *Apuntes de Música y Matemáticas*, Curso de extensión universitaria. Universitat de València.
[7] U. Michels (1994), *Atlas de Música 1 y 2,* Ed. Alianza Editorial, Madrid.
[8] D. Randel (1986), The new Harvard dictionary of music, The Belknap press of Harvard university press, Cambridge.
[9] C. Solís, M. Sellés (2005), Historia de la ciencia, Ed. Espasa Calpe, Madrid.
[10] I. Stewart (1990), *Matemáticas de la escala musical*, Investigación y Ciencia, pp. 100-107.