Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Вадим Владимирович Редкозубов*

Автор: *Киселев Николай*
Проект на Github

весна 2025

Содержание

Пусть a_n, b_n — последовательности комплексных чисел $m \in \mathbb{N}$ и $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$. Тогда $a_k = A_k - A_{k-1}$ (если считать, что $A_0 = 0$) и $\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m}^n A_{k-1} b_k$. Следовательно, справедливо тождество (Преобразование Абеля) $\sum_{k=m}^n a_k b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$

Лемма 0.1 (Абеля)**.** *Пусть a_n, b_n — последовательности, причем $\{b_n\}$ монотонна. Если $\left|\sum_{i=m}^k a_i\right| \leqslant M \forall k$, то $|\sum_{k=m}^n a_k b_k| \leqslant 2M(|b_n| + |b_m|)$*

Доказательство. Считаем, что $a_k = 0$ при $k < m$. Тогда $|\sum_{k=m}^n a_k b_k| = |A_n b_n - \sum_{k=m}^n A_k (b_{k+1} - b_k)| \leqslant |A_n||b_n| - \sum_{k=m}^n |A_k||b_{k+1} - b_k| \leqslant M(|b_n| + \left|\sum_{k=m}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)\right|)$. Т.к. $\{b_n\}$ монотонна, то $b_{k+1} - b_k$ одного знака $\forall k$, тогда

$$\left|\sum_{k=m}^n a_k b_k\right| \leqslant M(|b_n| + |b_n - b_m|)$$

□

Замечание. Если $m = 1, \{b_n\}$ нестрого убывает и неотрицательна, $c \leqslant A_k \leqslant C$, то

$$c b_1 \leqslant \sum a_k b_k \leqslant C b_1$$

Лемма 0.2 (Абель)**.** *Пусть $f \in R[a,b], g$ — монотонна на $[a,b]$. Если $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant M$, то*

$$\left|\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right| \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|)$$

Доказательство. Пусть $T_n = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a,b]$ на n равных частей. Положим $\Delta_k g = g(x_k) - g(x_{k-1}), \sigma_n = \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда $\alpha_n := \left|\int_a^b f(x) g(x) dx - \sigma_n\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) g(t) dt - \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt\right| =$
$= \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) g(t) dt - \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)||g(t) - g(\xi_k)| dt$. Т.к. g — монотонна, $\Delta_k g$ все одного знака и $|g(x) - g(\xi_k)| \leqslant |\Delta_k g|$. Тогда $\alpha_n \leqslant \sum_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)||\Delta_k g| dx$. Т.к. $f \in R[a,b] \Rightarrow \exists c(|f| \leqslant c)$

$$\sum_{k=1}^n c|\Delta_k g|(\underbrace{x_k - x_{k-1}}_{\frac{b-a}{n}}) = c\frac{b-a}{n}\left|\sum_{k=1}^n \Delta_k g\right| = c\frac{b-a}{n}|g(x_n) - g(x_0)| = c\frac{b-a}{n}|g(b) - g(a)|$$

Таким образом, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant c\frac{b-a}{n}|g(b) - g(a)|$, но правая часть $\to 0$, поэтому $\alpha_n \to 0$. Тогда достаточно оценить σ_n. Применим лемму 1, где $b_k = g(\xi_k), a_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt$. Тогда b_n — монотонная последовательность.

$$\left|\sum_{i=1}^k a_i\right| = \left|\int_a^{x_k} f(t) dt\right| \leqslant M$$

Откуда получаем, что $|\sigma_n| \leqslant 2M(|b_1 + |b_n|) = 2M(|g(b)| + |g(a)|)$. Выбрав $\xi_1 = a, \xi_n = b$

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| = \left|\int_a^b f(x) g(x) dx + \sigma_n - \sigma_n\right| \leqslant \alpha_n + \sigma_n \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|) + \underbrace{\alpha_n}_{\to 0}$$

□

1 Несобственный интеграл

Определение 1.1. Функция f назывется локально интегрируемой по Риману, на промежутке I, если $\forall [a,c] \subset I (f \in R[a,c])$

Определение 1.2. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и f локально интегрируема на $[a,b]$. Предел $\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ называется несобственным интегралом f на $[a,b]$. Если предел существует и конечен, то $\int_a^b f(x)dx$ называют сходящимся, иначе — расходящимся.

Пусть $b \in \mathbb{R}$, f локально интегрируема на $[a,b)$ и ограничена, тогда $f \in R[a,b]$ (при любом доопределении в точке b) и по свойству непрерывности определенного интеграла с переменным пределом, несобственный интеграл сопадает с определенным

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b-0} \int_a^x f(t)dt$, т.е. новая ситуация имеет место в случае $b = +\infty$ или $b \in \mathbb{R}$ и f неограничена на $[a,b)$. Ряд свойств определенного интеграла перносится на несобственный, т.к. можно применить предельныйм переход.

Утверждение 1.1 (Принцип локализации)**.** *Пусть f локально интегрируема на $[a,b)$. Тогда для любого $a^* \in (a,b)$ несобственный интеграл $\int_{a^*}^b f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, причем, в случае сходимости:*

$$\int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Заметим, что по аддитивности (нормального интеграла)

$$\int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Но т.к.

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

В предельном переходе получаем требуемое. □

Утверждение 1.2 (Линейность)**.** *Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ сходятся и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то сходятся и несобственный интеграл*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Фигачим предельный переход □

Утверждение 1.3 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть f локально интегрируема на $[a,b)$, F — первообразная на $[a,b)$, тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Фигачим предельный переход □

Пример. Хотим узнать сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

В зависимости от α

$\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha < 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty$$

Пример. Аналогично проверяется, что

$$\exists \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Причем сходится к $\frac{1}{1-\alpha}$