Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

Б О Л Ь Ш О Е Н А З В А Н И Е К У Р С А

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Репозиторий на Github

осень 2022

Содержание

«««< HEAD

1 Продолжение ДП

1.1 Рюкзак с оптимизацией

$\longrightarrow$ w предметов

$\longrightarrow$ w_i - вес

$\longrightarrow$ c_i - стоимость

Решение мы помним с прошлой лекции, а сейчас займемся оптимизацией памяти:
$dp[i][\circ]$ зависят только от $dp[i-1][\circ]$, поэтому нам достаточно хранить не всю таблицу целиком, а всего 2 слоя, с которыми мы работаем.
Итог - память $O(W)$

1.1.1 Альтернативный вариант

Будем действовать от стоимости предметов:

1. Заводим массив $dp[0\ldots n-1][0\ldots C-1]$, где $C = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$
2. $dp'[i][b]$ - min суммарный вес предметов, имеющих номера $\leqslant i$, и общую стоимость b
3. $dp'[i][b] = min(dp[i-1][b], dp'[i-1][b-c_i] + w_i)$

Это используется, если суммарная стоимость значительно меньше суммарного веса.

1.2 Динамическое программирование с помощью матриц

Попробуем найти $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ с методом матриц.

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

Бинарное возведение матрицы в степень
Проводится так же, как и для натуральных чисел:

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2, & \text{если } n \text{ четно} \\ a \cdot a^{n-1}, & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases} \tag{1.1}$$

Если две матрицы имеют размеры $k \times k$, то их произведение можно найти за $O(k^3)$
Тогда A^n описанным алгоритмом находится за $O(k^3 \log n)$
<u>Задача</u> $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2} + 1$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Взяв произведение этих матриц, получим ответ за $O(3^3 \log n)$

Задача Пусть G – невзвешенный ориентированный граф. Найти количество путей длины ровно k из вершины x в вершину y

На ввод дается матрица смежности M, где $m_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ есть ребро $i \to j$, а 0 иначе.

Пусть $dp[v][l]$ - количество путей длины l от x до v.

Тогда $dp[v][l] = \sum_{u \in v: M_{uv}=1} dp[u][l-1]$

$$\begin{pmatrix} dp[1][l] \\ dp[2][l] \\ \ddots \\ dp[v][l] \\ \ddots \\ dp[n][l] \end{pmatrix} = M^T \cdot \begin{pmatrix} dp[1][l-1] \\ dp[2][l-1] \\ \ddots \\ dp[v][l-1] \\ \ddots \\ dp[n][l-1] \end{pmatrix}$$

Комментарий от эксперта:

`Пересчет динамики получается домножением столбца` $dp[v][i-1]$ `на транспонированную матрицу смежности слева`

Утверждение 1.1. *M^k - количество путей из u в v длины ровно k.*

1.3 Задача

Найти количество путей длины $\leqslant k$ из x в y.

Можно найти ответ из суммы $(M^0 + M^1 + \cdots + M^k)_{xy}$, но как ее посчитать быстро?

Введем $f(M,k) = (M^k, M^0 + M^1 + \cdots + M^{k-1})$.

1. $k = 0 \to f(M,k) = (E, E)$
2. $k \not\vdots 2 \to f(M, k-1) = (M^{k-1}, M^0 + M^1 + \cdots + M^{k-2})$, откуда $f(M,k) = f(M,k-1)$, в котором умножили первый элемент на M, предварительно прибавив его ко второму.
3. $k \vdots 2$, $f(M,k)$ получается из $f(M, \frac{k}{2})$ умножением первой части, увеличенной на 1, на вторую и возведением первой части в квадрат.

Второй комментарий от эксперта:

`По формуле геометрической прогрессии` $\sum_{i=0}^{k} M^i = (M^{k+1} - E) \cdot (M-E)^{-1}$. `Если` $M - E$ `необратима, подкрутим её коэффициент на 0.00001.`

1.4 Задача

Пусть G - граф. Надо проверить, есть ли хотя бы 1 путь из x в y длины ровно k?

$$d[v][l] = \bigvee_u (dp[u][l-1] \wedge M_{uv})$$

Обозначим $A * B = C$, где $*$ - булевское умножение, такое выражение:

$$c_{ij} = \bigvee_k (A_{ik} \wedge B_{kj})$$

Утверждение 1.2. *$M_{uv}^{*k} = 1$, если есть пусть $u \to v$, а иначе 0*

Такое тоже работает за $O(n^3 \log k)$

1.5 Задача

G - взвешенный граф. Хотим найти min стоимость пути длины ровно k из x в y.

Пусть $dp[v][l]$ - минимальная стоимость пути $x \to v$ за l ребер. Тогда его можно найти по формуле $min(dp[u][l-1] + cost(u, v))$

Обозначим: $A \circ B = C$, где

$$c_{ij} = min_k(a_{ik} + b_{kj})$$

$(A \circ B) \circ C = A \circ (B\ circC)$

Утверждение 1.3. *$M^{\circ k}$ - минимальная стоимость пути из u в v, используя ровно k ребер.*

=======

Теорема 1.1 (О трансфинитной рекурсии)**.** *Пусть задано рекурсивное правило:*

$$F : f|_{[0,x)} \mapsto f(x) \in R$$

Тогда $\exists! f : S \to R$, т.ч. $\forall x f(x) = F(f|_{[0,x)})$

Доказательство.

Единственность. Пусть f, g — 2 подходящие функции.

$$\{x | f(x) \neq g(x)\} \neq \varnothing \Rightarrow \exists m = \min\{x | f(x) \neq g(x)\} \Rightarrow f|_{[0,m)} = g|_{[0,m)}$$

Но тогда $f(m) = F(f|_{[0,m)}) = F(g|_{[0,m)}) = g(m)$, противоречие.

Существование. По трансфинитной индукции докажем сущесвование $f|_{[0,x)}$, соответствующее F.

$$\forall y < x \exists f|_{[0,y)} \Rightarrow \exists f|_{[0,x)}$$

(a) $x = w + 1 \Rightarrow \exists f|_{[0,w)}, f(w) = F(f|_{[0,w)})$

(b) x — предельное

$$y < x \Rightarrow \exists z : y < z < x$$

$$z < x \Rightarrow \exists f : [0, z) \to R$$

Так и доопределяем $f(y)$ (если разные z дают разные значения, то противоречие аналогично с доказательством единственности). То есть $\forall y < x$ задано $f(y) \Rightarrow f$ задано на $[0, x)$.

По трансфинитной индукции получили, что $\forall x \varphi(x)$. Теперь нужно сделать последний переход ко всему множеству (*Прим. от автора:* мы научились делать ее на начальных отрезках $\Rightarrow$ для "самых больших элементов" потенциально могут быть проблемы, т.к. начальные отрезки — полуинтервалы. Их мы и будем чинить последним переходом). Если в множестве есть наибольший элемент, то доопределяем так же, как и в случае а) (Важно: наибольший элемент может быть предельным). Если наибольшего элемента нет, то доопределяем значение, как в пункте б). □

Теорема 1.2 (Обобщенная теорема о трансфинитной рекурсии)**.** *F может быть частично определена, тогда f определена на начальном отрезке.*

Доказательство. Добавим значение $f(x) = \perp$, если функция f не определена в точке x. Тогда по теореме о Трансфинитной рекурсии, $\exists! f : S \to R \cup \{\perp\}$. □

Теорема 1.3 (О сравнимости ВУМов)**.** *Любые два ВУМа либо изоморфны, либо один из них изоморфен начальному отрезку другого.*

Доказательство. Строим $f : S \to T$, заданное правилом $F(f|_{[0,x)}) = \min(T \setminus f([0,x)))$. По обобщенной теореме о трансфинитной рекурсии, $\exists! f$, соответствующая F. Есть два случая:

1. f определена на S. $Im_f = \left[\begin{array}{l} T \\ [0,t) \end{array} \right.$. Тогда иначе $\exists t_1 < t_2 : t_1, t_2 \notin Im_f$.

2. f определена на $[0,s) \Rightarrow Im_f = T$, иначе доопределим $f(s)$

□

Утверждение 1.4. *S — ВУМ, $s \in S \Rightarrow s \ncong [0,s)$*

Доказательство. Иначе $\exists$ монотонная $g : S \to [0,s) \Rightarrow$ т.к. $g(s) \geqslant s$ (нетрудно доказать) $\Rightarrow g(s) \notin [0,s)$, противоречие. □

Следствие. Из $S \cong T, S \cong [0,t), T \cong [0,s)$ выполнено ровно 1 утверждение

Теорема 1.4 (Цермело)**.** *У любого множества есть равномощный ему ВУМ*

Из теоремы Цермело и теоремы о сравнимости ВУМов:

Следствие.

$$\forall A, B \quad \left[\begin{array}{l} \exists B' \subset B : A \cong B' \\ \exists A' \subset A : B \cong A' \end{array} \right.$$

2 Ординалы

Определение 2.1. S — транзитивно, если $y \in S, x \in y \Rightarrow x \in S$.

Пример. $\varnothing, \{\varnothing\}$ и все элементы $\mathbb{N}$

Пример. $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

Определение 2.2. Ординал — транзитивное множество, любой элемент которого — транзитивен.

Неформально — порядковый тип (отношение эквивалентности на всех множествах)

Утверждение 2.1. *α — ординал, тогда $\beta \subset \alpha$ — тоже.*

Доказательство. β — транзитивно, т.к. β — элемент ординала. $\gamma \in \beta \Rightarrow$ по транизитивности $\alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha \Rightarrow \gamma$ — транзитивно. □

Утверждение 2.2. *α — ординал $\Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\}$ — ординал.*

Доказательство.
$$\beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$$

В обоих случаях, β транзитивно. Теперь рассмотрим $\gamma \in \beta$.

$$\beta \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$$
$$\beta = \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$$

Т.к. α — транзитивно, то и γ — тоже. □

Утверждение 2.3. *Объединение любого множества ординалов — ординал.*

Доказательство.
$$\alpha = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$$
$$\gamma \in \beta, \beta \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \beta, \beta \in \alpha_i \Rightarrow \beta, \gamma \in \alpha_i$$

$\Rightarrow \beta, \gamma$ транзитивны □

Утверждение 2.4. *Ординал — ВУМ с отношением $\in$ (как строгого порядка)*

Доказательство.

1. Антирефлексивность: По Аксиоме фундированности, $\neg\exists x_1 \ni x_2 \ni x_3 \cdots \Rightarrow x \notin x$
2. Антисимметричность: $\neg\exists x, y(x \in y \wedge y \in x) \Rightarrow$
3. Транзитивность: по определению
4. Линейность: x — минимальный элемент, не сравнимый с кем-то, а y — минимальный, не сравнимый с x. $z \in x \Rightarrow z$ сравнимо с y.

   Но $z \neq y$, поэтому $y \in z \Rightarrow y \in x$, тогда $z \in y \Rightarrow x \subset y$.

   Теперь, $w \in y \Rightarrow w$ — сравним с $x, w \neq x$. $x \in w \Rightarrow x \in y$. Поэтому $w \in x (\Rightarrow y \subset x)$. Но тогда $x = y$, противоречие.

□

Утверждение 2.5. *α — ординал, $x \in \alpha \Rightarrow x = [0, x)$*

Доказательство. $y \in x \Rightarrow$ по транизитивности $y \in \alpha$. $y \in [0, x)$ (по определению начального отрезка). $y \in [0, x) \Rightarrow y < x \Leftrightarrow y \in x$ □

Теорема 2.1. *Любой ординал — ВУМ, с отношением порядка $\in$, при этом отношение "быть начальным отрезком" — тот же порядок. Подмножества являющиеся ординалами — тоълко начальные отрезки. То есть $\in, \subset$, "быть начальным отрезком" — один и тот же порядок, называемый ординальным*

Доказательство. очев □

Теорема 2.2 (О сравнимости ординалов). *α, β — ординалы $\Rightarrow \alpha = \beta, \alpha \in \beta, \beta \in \alpha$*

2.1 Конечные ординалы

$$\begin{aligned}
&0 = \varnothing \\
&1 = \{\varnothing\} \\
&2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
&\vdots \\
&n + 1 = \{0, 1, 2, \dots n\}
\end{aligned}$$

2.2 Сложение ординалов

Неформально: A — ВУМ, $A \cong \alpha$ — ординал; B — ВУМ, $B \cong \beta$ — ординал, тогда $\alpha + \beta$ — ординал, изоморфный $A + B$

Формально:

1. $\alpha + 0 = \alpha$
2. $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
3. $\alpha + \bigcup \gamma_i = \bigcup(\alpha + \gamma_i)$

Замечание.

$$1 + \omega = 1 + \bigcup n = \bigcup(1 + n) = \omega \neq \omega + 1$$

Утверждение 2.6.

$$B \neq \varnothing \Rightarrow A + B \ncong A$$

$$\beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > \alpha$$

Доказательство. Верно, т.к. α — начальный отрезок $\alpha + \beta$ □

Теорема 2.3 (О вычитании)**.** $\alpha \geqslant \beta \Rightarrow \exists! \gamma : \beta + \gamma = \alpha$

Доказательство. Рассмотрим $A \cong \alpha, B \cong \beta \Rightarrow C = A \setminus B$. Тогда C — ВУМ, γ — ординал, $\cong C$. □

2.3 Умножение ординалов

$\alpha \cdot \beta$ — ординал, изоморфный $A \cdot B$ (обратный лексикографический порядок)

1. $\alpha \cdot 0 = 0$
2. $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha$
3. $\alpha \cdot (\bigcup \gamma_i) = \bigcup(\alpha + \gamma_i)$

Замечание.

$$2 \cdot \omega = \omega, \omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega$$

Теорема 2.4 (О делении с остатком)**.** *Пусть* $\alpha \neq 0, \beta$ *— ординалы. Тогда* $\exists! \gamma, \delta : \beta = \alpha \cdot \gamma + \delta, \delta < \alpha$

Доказательство. Пусть μ таково, что $\alpha \cdot \mu > \beta$ □

2.4 Возведение в степень

1. $\alpha^0 = 1$
2. $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
3. $\alpha^{\bigcup \gamma_i} = \bigcup \alpha^{\gamma_i}$

Замечание.

$$2^\omega = \omega$$

2.4.1 ВУМ, изоморфный α^β

Рассмотрим все функции, которые $\neq 0$ на конечном числе элементов. Тогда: $f > g$, если:

1. $\underbrace{\max\{x|f(x) \neq 0\}}_{m_f} > \underbrace{\max\{x|g(x) \neq 0\}}_{m_g}$
2. $m_f = m_g, f(m_f) > g(m_g)$
3. $m_f = m_g, f(m_f) = g(m_g), \{x < m_f|f(x) \neq 0\} > \max\{x < m_g|g(x) \neq 0\}$

Или: рассмотрим конечное число точек, где $f \neq 0 \vee g \neq 0$, сравниваем обратно лексикографически.

Замечание. 2^ω по этому определению — обратная двоичная запись натуральных чисел

Теорема 2.5 (Об ординарной системе счисления)**.** *Пусть* $\gamma < \alpha^\beta$*. Тогда* $\exists!$ *представление* $\gamma = \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha_1 + \alpha^{\beta_2} \cdot \alpha_2 + \dots + \alpha^{\beta_n} \cdot \alpha_n$*, где* $\beta > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n, \alpha_i < \alpha$

»»»> a512ed6ef833219a868197b39231139ae0b07ca7