

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
II СЕМЕСТР

Лектор: *Вадим Владимирович Редкоzubов*



Автор: *Киселев Николай*
Проект на Github

весна 2025

Содержание

| | |
|--|----------|
| 1 Несобственный интеграл | 3 |
|--|----------|

Пусть a_n, b_n — последовательности комплексных чисел $m \in \mathbb{N}$ и $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$. Тогда $a_k = A_k - A_{k-1}$ (если считать, что $A_0 = 0$) и $\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m}^n A_{k-1} b_k$. Следовательно, справедливо тождество (Преобразование Абеля) $\sum_{k=m}^n a_k b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$

Лемма 0.1 (Абеля). Пусть a_n, b_n — последовательности, причем $\{b_n\}$ монотонна. Если $\left| \sum_{i=m}^k a_i \right| \leq M \forall k$, то $\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq 2M(|b_n| + |b_m|)$

Доказательство. Считаем, что $a_k = 0$ при $k < m$. Тогда $\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| = \left| A_n b_n - \sum_{k=m}^n A_k (b_{k+1} - b_k) \right| \leq |A_n| |b_n| + \sum_{k=m}^n |A_k| |b_{k+1} - b_k| \leq M(|b_n| + \sum_{k=m}^{n-1} (b_{k+1} - b_k))$. Т.к. $\{b_n\}$ монотонна, то $b_{k+1} - b_k$ одного знака $\forall k$, тогда

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq M(|b_n| + |b_n - b_m|)$$

□

Замечание. Если $m = 1$, $\{b_n\}$ нестрого убывает и неотрицательна, $c \leq A_k \leq C$, то

$$cb_1 \leq \sum a_k b_k \leq Cb_1$$

Лемма 0.2 (Абель). Пусть $f \in R[a, b]$, g — монотонна на $[a, b]$. Если $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M$, то

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq 2M(|g(a)| + |g(b)|)$$

Доказательство. Пусть $T_n = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей. Положим $\Delta_k g = g(x_k) - g(x_{k-1})$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда $\alpha_n := \left| \int_a^b f(x)g(x) dx - \sigma_n \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t) dt - \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)(g(t) - g(\xi_k)) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)| |g(t) - g(\xi_k)| dt$. Т.к. g — монотонна, $\Delta_k g$ все одного знака и $|g(x) - g(\xi_k)| \leq |\Delta_k g|$. Тогда $\alpha_n \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| |\Delta_k g| dx$. Т.к. $f \in R[a, b] \Rightarrow \exists c(|f| \leq c)$

$$\sum_{k=1}^n c |\Delta_k g| \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\frac{b-a}{n}} = c \frac{b-a}{n} \left| \sum_{k=1}^n \Delta_k g \right| = c \frac{b-a}{n} |g(x_n) - g(x_0)| = c \frac{b-a}{n} |g(b) - g(a)|$$

Таким образом, $0 \leq \alpha_n \leq c \frac{b-a}{n} |g(b) - g(a)|$, но правая часть $\rightarrow 0$, поэтому $\alpha_n \rightarrow 0$. Тогда достаточно оценить σ_n . Применим лемму 1, где $b_k = g(\xi_k)$, $a_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt$. Тогда b_n — монотонная последовательность.

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i \right| = \left| \int_a^{x_k} f(t) dt \right| \leq M$$

Откуда получаем, что $|\sigma_n| \leq 2M(|b_1| + |b_n|) = 2M(|g(b)| + |g(a)|)$. Выбрав $\xi_1 = a$, $\xi_n = b$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x)g(x) dx + \sigma_n - \sigma_n \right| \leq \alpha_n + \sigma_n \leq 2M(|g(a)| + |g(b)|) + \underbrace{\alpha_n}_{\rightarrow 0}$$

□

1 Несобственный интеграл

Определение 1.1. Функция f называется локально интегрируемой по Риману, на промежутке I , если $\forall [a, c] \subset I (f \in R[a, c])$

Определение 1.2. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$ и f локально интегрируема на $[a, b]$. Предел $\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x)dx$ называется несобственным интегралом f на $[a, b]$. Если предел существует и конечен, то $\int_a^b f(x)dx$ называют сходящимся, иначе — расходящимся.

Пусть $b \in \mathbb{R}$, f локально интегрируема на $[a, b)$ и ограничена, тогда $f \in R[a, b]$ (при любом доопределении в точке b) и по свойству непрерывности определенного интеграла с переменным пределом, несобственный интеграл совпадает с определенным

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(t)dt$, т.е. новая ситуация имеет место в случае $b = +\infty$ или $b \in \mathbb{R}$ и f неограничена на $[a, b)$. Ряд свойств определенного интеграла переносится на несобственный, т.к. можно применить предельный переход.

Утверждение 1.1 (Принцип локализации). Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$. Тогда для любого $a^* \in (a, b)$ несобственный интеграл $\int_{a^*}^b f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, причем, в случае сходимости:

$$\int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Заметим, что по аддитивности (нормального интеграла)

$$\int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Но т.к.

$$\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

В предельном переходе получаем требуемое. □

Утверждение 1.2 (Линейность). Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то сходятся и несобственный интеграл

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Фигачим предельный переход □

Утверждение 1.3 (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$, F — первообразная на $[a, b)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Фигачим предельный переход □

Пример. Хотим узнать сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

В зависимости от α

$\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha < 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$$

Пример. Аналогично проверяется, что

$$\exists \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Причем сходится к $\frac{1}{1-\alpha}$