

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ
II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*



Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

0.1	Топология метрических пространств	2
0.2	Подпространство метрического пространства	4

Определение 0.1. Пусть $\{x_n\} \subset X, a \in X$. Говорят, что x_n сходится к a , если $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$. Пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$.

Замечание.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (x_n \in B_\varepsilon(a))$$

Следствие. $x_n \rightarrow a, x_n \rightarrow b \Leftrightarrow a = b$

Доказательство. $0 \leq \rho(a, b) \leq \underbrace{\rho(a, x_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho(x_n, b)}_{\rightarrow 0}$ □

Следствие. $x_n \rightarrow a \Rightarrow \{x_n\}$ — ограничена (то есть $\{x_n\}$ ограничено как множество).

Доказательство. $\rho(x_n, a) \rightarrow 0 \Rightarrow \{\rho(x_n, a)\}$ ограничена $\Rightarrow \exists R \in \mathbb{R} : R > \sup\{\rho(x_n, a)\} \Rightarrow x_n \in B_R(a)$. □

Следствие. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} : x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$ — последовательности в нормированном линейном пространстве, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R} : \alpha_n \rightarrow \alpha$. Тогда

1. $x_n + y_n \rightarrow a + b$
2. $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha a$

Доказательство.

1. $\|x_n + y_n - (a + b)\| \leq \underbrace{\|x_n - a\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|y_n - b\|}_{\rightarrow 0}$
2. $\|\alpha_n x_n - \alpha a\| = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha a\| \leq \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\rightarrow 0} \|x_n\| + |\alpha| \underbrace{\|x_n - a\|}_{\rightarrow 0}$

□

0.1 Топология метрических пространств

Определение 0.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$.

1. $x \in \text{int } E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset E$. Множество $\text{int } E$ называются множеством внутренних точек
2. $x \in \text{ext } E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$. Множество $\text{ext } E$ называются множеством внешних точек
3. $x \in \delta E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset, B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. Множество δE называются множеством граничных точек

Определение 0.3.

1. $X = \text{int } E \sqcup \text{ext } E \sqcup \delta E$
2. $\text{ext } E = \text{int } (X \setminus E)$

Определение 0.4. Множество $G \subset X$ называется открытым, если все его точки являются внутренними ($G = \text{int } G$)

Определение 0.5. Множество $G \subset X$ называется открытым, если $X \setminus G$ открыто

Утверждение 0.1.

1. Открытый шар $B_r(a)$ открыт
2. Замкнутый шар $\overline{B_r}(a)$ замкнут
3. $\text{int } E$ открыто

Доказательство.

1. $x \in B_r(a)$. Положим $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Тогда если $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) \leq \varepsilon + \rho(x, a) \leq r \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.
2. $x \in X \setminus \overline{B_r}(a)$. $\varepsilon = \rho(x, a) - r \Rightarrow$ аналогично пункту 1), $X \setminus \overline{B_r}(a)$ — открыто, т.е. $\overline{B_r}(a)$ — замкнуто
3. $x \in \text{int } E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \text{int } E$, т.к. $B_\varepsilon(x)$ — открыто.

□

Лемма 0.1. Объединение любого количества открытых множеств и пересечение конечного количества открытых множеств является открытым множеством

Доказательство. Аналогично случаю для \mathbb{R}

□

Определение 0.6. $\overset{\circ}{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$

Определение 0.7. Точка $x \in X$ называется предельной множества E , если $\forall \varepsilon > 0 \ \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$

Множество всех предельных точек принято обозначать через E'

Теорема 0.1 (Критерий замкнутости). Следующие утверждения равносильны:

1. E — замкнуто
2. $E \supset \delta E$
3. $E \supset \text{ext } E$
4. $\forall \{x_n\} \subset E (x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in E)$

Доказательство.

- 1 \Rightarrow 2: Пусть $x \in X \setminus E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$, т.е. x — внешняя точка E . Тогда $\delta E \subset E$
- 2 \Rightarrow 3: Пусть x — предельная точка тогда она либо внутренняя, и тогда $x \in E$, либо граничная, но $\delta E \subset E \Rightarrow x \in E$
- 3 \Rightarrow 4: Пусть $\{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow x$. Тогда либо $\exists x_n = x$ и тогда $x \in E$, либо x — предельная точка, и она $\in E$.

4 \Rightarrow 1: Рассмотрим $x \in X \setminus E$. Пусть она не является внутренней для $X \setminus E$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow$ рассмотрим последовательность точек $x_n \in \exists B_\varepsilon(x) \cap E : x_n \rightarrow x$. Такая последовательность существует по Аксиоме Выбора ($\exists \varphi : 2^X \rightarrow X : \varphi(x) \subset X \Rightarrow x_n = \varphi(B_{\frac{1}{n}}(x))$). Но тогда $x \in E$. Противоречие

□

Определение 0.8. $\overline{E} = E \cup \delta E$ — замыкание множества E

Замечание.

1. $\overline{E} = X \setminus ext E$
2. $F \supset E$, причем F — замкнутое. Тогда $F \supset \overline{E}$

Доказательство.

1. $X = int E \cup ext E \cup \delta E$.
2. $X \setminus F \subset X \setminus E \Rightarrow X \setminus F \subset int (X \setminus E) \Rightarrow F \supset \overline{E}$.

□

Замечание. $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E (x_n \rightarrow x)$

Определение 0.9. $x \in X$ называется точкой прикосновения E , если $\forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$

0.2 Подпространство метрического пространства

Определение 0.10. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\emptyset \neq E \subset X$. Тогда $\rho|_{E \times E}$ — метрика на E . Пара $(E, \rho|_{E \times E})$ называется подпространством (X, ρ) , $\rho|_{E \times E}$ называется индуцированной метрикой на E

Определение 0.11. $B_r^E(x) = \{y \in E | \rho(x, y) < r\}$

Замечание. $B_r^E(x) = B_r^X(x) \cap E$

Лемма 0.2. U открыто в $E \Leftrightarrow \exists V \subset X : U = V \cap E$, причем V открыто

Доказательство.

$\Rightarrow x \in U \Rightarrow \exists B_{\varepsilon_x}^E(x) \subset U$, т.е. $U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}^E(x)$. Положим $V = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}^X(x)$ — открытое в X . Тогда $V \cap E = \bigcup_{x \in U} (B_{\varepsilon_x}^X(x) \cap E) = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}^E(x) = U$

$\Leftarrow x \in U = V \cap E$, где V открыто в $X \Rightarrow \forall x \in V \exists B_{\varepsilon}^X(x) \subset V \Rightarrow B_{\varepsilon}^E(x) = B_{\varepsilon}^E(x) \cap E \subset V \cap E$.

□

Пример. $X = \mathbb{R}, E = (-1, 3]$.

1. $A = (1, 3] = (1, 4) \cap E$ — открыто в E (но не в X)
2. $B = (-1, 0)$ замкнута в E (но не в X)
3. $C = (0, 1]$ — не замкнуто и не открыто