Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

Определение 0.1. Пусть $\{x_n\} \subset X, a \in X$. Говорят, что x_n сходится к a, если $\rho(x_n, a) \to 0$. Пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Замечание.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (x_n \in B_\varepsilon(a))$$

Следствие. $x_n \to a, x_n \to b \Leftrightarrow a = b$

Доказательство. $0 \leqslant \rho(a, b) \leqslant \underbrace{\rho(a, x_n)}_{\to 0} + \underbrace{\rho(x_n, b)}_{\to 0}$ □

Следствие. $x_n \to a \Rightarrow \{x_n\}$ — ограничена (то есть $\{x_n\}$ ограничено как множество).

Доказательство. $\rho(x_n, a) \to 0 \Rightarrow \{\rho(x_n, a)\}$ ограничена $\Rightarrow \exists R \in \mathbb{R} : R > \sup\{\rho(x_n, a)\} \Rightarrow x_n \in B_R(a)$. □

Следствие. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} : x_n \to a, y_n \to b$ — последовательности в нормированном линейном пространестве, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R} : \alpha_n \to \alpha$. Тогда

1. $x_n + y_n \to a + b$
2. $\alpha_n x_n \to \alpha a$

Доказательство.

1. $\|x_n + y_n - (a + b)\| \leqslant \underbrace{\|x_n - a\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n - b\|}_{\to 0}$
2. $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha a\| \leqslant \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\to 0} \|x_n\| + |\alpha| \underbrace{\|x_n - a\|}_{\to 0}$

□

0.1 Топология метрических пространств

Определение 0.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$.

1. $x \in int\ E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset E$. Множество $int\ E$ называются множеством внутренних точек
2. $x \in ext\ E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$. Множество $ext\ E$ называются множеством внешних точек
3. $x \in \delta E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing, B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing$. Множество δE называются множеством граничных точек

Определение 0.3.

1. $X = int\ E \sqcup ext\ E \sqcup \delta E$
2. $ext\ E = int\ (X \setminus E)$

Определение 0.4. Множество $G \subset X$ называется открытым, если все его точки являются внутренними ($G = int\ G$)

Определение 0.5. Множество $G \subset X$ называется открытым, если $X \setminus G$ открыто

Утверждение 0.1.

1. *Открытый шар* $B_r(a)$ *открыт*
2. *Замкнутый шар* $\overline{B_r}(a)$ *замкнут*
3. $int\ E$ *открыто*

Доказательство.

1. $x \in B_r(a)$. Положим $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Тогда если $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow \rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) \leqslant \varepsilon + \rho(x, a) \leqslant r \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.
2. $x \in X \setminus \overline{B_r}(a)$. $\varepsilon = \rho(x, a) - r \Rightarrow$ аналогично пункту 1), $X \setminus \overline{B_r}(a)$ — открыто, т.е. $\overline{B_r}(a)$ — замкнуто
3. $x \in int\ E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset int\ E$, т.к. $B_\varepsilon(x)$ — открыто.

□

Лемма 0.1. *Объединение любого количества открытых множеств и пересечение конечного количества открытых множеств является открытым множеством*

Доказательство. Аналогично случаю для $\mathbb{R}$ □

Определение 0.6. $\overset{\circ}{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$

Определение 0.7. Точка $x \in X$ называется предельной множества E, если $\forall \varepsilon > 0\ \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$

Множество всех предельных точек принято обозначать через E'

Теорема 0.1 (Критерий замкнутости)**.** *Следующие утверждения равносильны:*

1. E *— замкнуто*
2. $E \supset \delta E$
3. $E \supset ext\ E$
4. $\forall \{x_n\} \subset E (x_n \to x \Rightarrow x \in E)$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $x \in X \setminus E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$, т.е. x — внешняя точка E. Тогда $\delta E \subset E$

$2 \Rightarrow 3$: Пусть x — предельная точка тогда она либо внутренняя, и тогда $x \in E$, либо граничная, но $\delta E \subset E \Rightarrow x \in E$

$3 \Rightarrow 4$: Пусть $\{x_n\} \subset E, x_n \to x$. Тогда либо $\exists x_n = x$ и тогда $x \in E$, либо x — предельная точка, и она $\in E$.

$4 \Rightarrow 1$: Рассмотрим $x \in X \setminus E$. Пусть она не является внутренней для $X \setminus E$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \Rightarrow$ рассмотрим последовательность точек $x_n \in \exists B_\varepsilon(x) \cap E : x_n \to x$. Такая последовательность существует по Аксиоме Выбора ($\exists \varphi : 2^X \to X : \varphi(x) \subset X \Rightarrow x_n = \varphi\left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)$). Но тогда $x \in E$. Противоречие

$\square$

Определение 0.8. $\overline{E} = E \cup \delta E$ — замыкание множества E

Замечание.

1. $\overline{E} = X \setminus ext\ E$
2. $F \supset E$, причем F — замкнутое. Тогда $F \supset \overline{E}$

Доказательство.

1. $X = int\ E \cup ext\ E \cup \delta E$.
2. $X \setminus F \subset X \setminus E \Rightarrow X \setminus F \subset int\ (X \setminus E) \Rightarrow F \supset \overline{E}$.

$\square$

Замечание. $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E(x_n \to x)$

Определение 0.9. $x \in X$ называется точкой прикосновения E, если $\forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$

0.2 Подпространство метрического пространства

Определение 0.10. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\varnothing \neq E \subset X$. Тогда $\rho|_{E \times E}$ — метрика на E. Пара $(E, \rho|_{E \times E})$ называется подпространством (X, ρ), $\rho|_{E \times E}$ называется индуцированной метрикой на E

Определение 0.11. $B_r^E(x) = \{y \in E | \rho(x, y) < \varepsilon\}$

Замечание. $B_r^E(x) = B_r^X(x) \cap E$

Лемма 0.2. *U открыто в $E \Leftrightarrow \exists V \subset X : U = V \cap E$, причем V открыто*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $x \in U \Rightarrow \exists B_{\varepsilon_x}^E(x) \subset U$, т.е. $U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}^E(x)$. Положим $V = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}^X(x)$ — открытое в X. Тогда $V \cap E = \bigcup_{x \in U} (B_{\varepsilon_x}^X(x) capE) = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}^E(x) = U$

$\Leftarrow$ $x \in U = V \cap E$, где V открыто в $X \Rightarrow \forall x \in V \exists B_\varepsilon^X(x) \subset V \Rightarrow B_\varepsilon^E(x) = B_\varepsilon^E(x) \cap E \subset V \cap E$.

$\square$

Пример. $X = \mathbb{R}, E = (-1, 3]$.

1. $A = (1, 3] = (1, 4) \cap E$ — открыто в E (но не в X)
2. $B = (-1, 0)$ замкнута в E (но не в X)
3. $C = (0, 1]$ — не замкнуто и не открыто