Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

0.1 Структура линейного оператора

Определение 0.1. $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ — характеристический многочлен линейного оператора A.

Утверждение 0.1 (О свойствах характеристического многочлена)**.**

1. *$\chi_A(\lambda) = 0, \lambda \in F$, тогда λ — собственное значение оператора A.*
2. *$\chi_A(\lambda)$ не зависит от выбора базиса, в котором записывается A.*

Доказательство.

1. $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$ имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$
2. $\det(SAS^{-1} - \lambda E) = \det(SAS^{-1} - \lambda SES^{-1}) = \det S \det S^{-1} \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$

□

Определение 0.2. Линейный оператор называется диагонализируемым, если существует базис, в котором его матрица является диагональной

Теорема 0.1 (Критерий диагонализируемости)**.** *Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор, $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ — все попарно различные корни характеристического многочлена. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *φ — диагонализируема*
2. *В V суеществует бащис, состоящий из собственных векторов для φ*
3. *$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Рассмотрим базис, в котором матрица имеет диагоанльный вид $\mathfrak{E}$. Но тогда $\forall e \in \mathfrak{E}$: $Ae = \lambda_i e$ для некоторого i. Но тогда этот базис состоит из собственных векторов.

$2 \Rightarrow 3$ Рассмотрим отдельно базисы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$. Они образуют базисы пространств $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots V_{\lambda_k}$. Но тогда $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

$3 \Rightarrow 1$ Рассмотрим объединение базисов этих пространств. Т.к. каждый вектор полученного базиса будет собственным, в каждой строке и каждом столбце матрицы будет записано ровно одно число. Но тогда можно поменять местами векторы базиса так, чтобы матрица была диагональной

□

0.2 Алгебраическая и Геометрическая кратности

Определение 0.3. Алгебраической кратностью собственного значения λ_0 многочлена $\chi_A(\lambda)$ называется кратность его как корня данного многочлена.

Определение 0.4. Геометрической кратностью собственного значения λ_0 называется $\dim V_{\lambda_0}$

Утверждение 0.2. *Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор, $U \leqslant V$, U инвариантно относительно phi, $\psi = \varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$. Тогда $\chi_\varphi \vdots \chi_\psi$*

Доказательство.

$$\mathfrak{E} = (\underbrace{\underbrace{e_1, e_2, \dots e_k}_{\text{Базис } U}, e_{k+1}, \dots e_n}_{\text{Базис } V})$$

Но тогда:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} A_\psi & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = |A_\varphi - \lambda E| = |A_\psi - \lambda E||C - \lambda E| = \chi_\psi(\lambda)\chi_C(\lambda)$$

□

Следствие. Пусть λ — собственное значение $\varphi : V \to V$. Тогда $geom(\lambda) \leqslant alg(\lambda)$

Доказательство. Рассмотрим $V_\lambda, \psi = \varphi|_{V_\lambda}$. Тогда

$$\psi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

И тогда $\chi_\psi(t) = (\lambda - t)^k$, где $k = \dim V_\lambda$ По вышедоказанному утверждению, $\chi_\varphi \vdots \chi_\psi \Rightarrow \chi_\varphi(t) \vdots (\lambda - t)^k \Rightarrow alg(\lambda) \geqslant geom(\lambda)$ □

Следствие. Если χ_φ — не линейно факторизуем, то φ — не диагонализируем

Теорема 0.2. *Пусть $\varphi : V \to V$ — линейные оператор. Тогда он диагонализируем тогда и только тогда, когда*

1. *φ — линейно факторизуем над F*
2. *$\forall i \;\; alg(\lambda_i) = geom(\lambda_i)$*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Т.к. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, то $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_k}$. Но тогда 1 и 2 верны, т.к. $alg(\lambda_i) \geqslant geom(\lambda_i)$, и, при этом $\sum alg(\lambda_i) = \sum geom(\lambda_i)$.

$\Leftarrow$ В таком случае $\sum alg(\lambda_i) = \sum geom(\lambda_i)$. Но тогда $\dim V = \sum geom(\lambda_i)$. Но тогда $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

□

Определение 0.5. Жорданова клетка порядка n, отвечающая собственному значению λ — это матрица:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Замечание. Линейной факторизуемости χ_φ недостаточно, чтобы утверждать диагонализируемость φ. Например, $J_n(\lambda)$ не диагонализируема, т.к. $J_n(\lambda) - \lambda E$ имеет размерность решений 2, но $\chi_{J_n(\lambda)}(t) = (\lambda - t)^n$.

Утверждение 0.3. *$\varphi : V \to V, \varphi_\lambda = \varphi - \lambda E$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Подпространство $U \leqslant V$ инвариантно относительно φ.*
2. *$\exists \lambda \in F : U$ — инвариантно относительно φ_λ.*
3. *$\forall \lambda \in F : U$ — инвариантно относительно φ_λ.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ очевидно, $\lambda = 0$

$2 \Rightarrow 3$ $(\varphi - \lambda E)x = \mu x \Rightarrow (\varphi - \lambda E - \lambda_1 E)x = (\mu - \lambda_1)x$

$3 \Rightarrow 1$ Тоже очевидно

□

Утверждение 0.4. *Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор и $\chi_\varphi(t)$ линейно факторизуем. Тогда у φ найдется $n-1$ мерное подпространство.*

Я СДАЮСЬ он победил