Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1 И снова графы

Определение 1.1. Пусть G - неориентированный граф. v - точка сочленения (ТС), если после ее удаления количество компонент связности увеличивается хотя бы на 1.

Утверждение 1.1.

1. *Если v - корень, то v - точка сочленения $\iff$ у v в дереве dfs хотя бы 2 ребенка*

2. *Если v - не корень, то v - точка сочленения $\iff$ $\exists$ деревесное ребро (v, to) $ret[v] \geqslant tin[v]$*

Доказательство.

1. Корень либо является листом - тогда после его удаления количество компонент не изменится, либо у него есть 2 сына, которые образуют 2 компоненты связности, что удовлетворяет определению ТС.

   Подграфы сыновей не связаны, иначе по dfs это была бы 1 общая компонента.

2. Если есть сын to, что $ret[to] \geqslant tin[v]$, то после удаления v заведомо пропадает путь между to и p, родителем v.

   Если же, напротив, для всех сыновей $ret[to] < tin[v]$, то после удаления v сохраняется путь между p и поддеревьями v.

□

2 Кратчайшие пути. BFS

Определение 2.1. Взвешенным графом называется (V, E, w), где (V, E) - граф, $w : E \to \mathbb{R}$ Иначе говоря, просто граф с весами на каждом ребре.

Определение 2.2. Весом (стоимостью) пути назовем сумму весов рёбер в нем. $dist(s, t)$ определим, как минимальное значение среди весов путей от s до t.

Важное уточнение!

Замечание.

1. Если пути от s до t нет, то $dist(s, t) = +\infty$

2. Если есть отрицательный цикл, то считаем, что $dist(s, t) = -\infty$

Далее временно считаем, что $\forall e$ $w(e) \geqslant 0$, w = 1

2.1 BFS (breadth first search)

Цель: по фиксированной вершине s найти $dist(s, v) \forall v$

Понятно, что $dist(s, s) = 0, dist(s, x) = 1, \forall$ смежных с s вершин. Продолжим цепочку...

1. Заведем массив $d[v]$ - найденная длина пути от s до v.
2. Введем функцию $expand(int\ v)$ - раскрытие v:

```
for (edge e : g[v]) {
  обновляем d[e.to] через
  d[v] + e.w
  если нужно, кладем e.to в структуру
}
```

3. $d[0 \ldots n-1] = +\infty$, $d[s] = 0$, $queue\ q$; $q.push(s)$
4.
```
while (q непусто) {
  v = q.front(); q.pop();
  for (edge e: g[v]) {
    if (d[e.to] == +infty) {
      d[e.to] = d[v] + 1;
      q.push(e.to);
    }
  }
}
```

Утверждение 2.1. *К моменту рассмотрения последней вершины очереди с $d[v] = k$:*

1. *До всех вершин $u : dist(s, u) \leqslant k + 1$ найден правильный ответ ($d[u] = dist(s, u)$)*
2. *В очереди лежат все вершины с $dist(s, u) = k + 1$ (и только они)*

Проводится по индукции. Оставим в качестве упражнения для читателей:)

2.2 0-k BFS

Асимптотика O(V + E)

Похожая задача. Цель: $\forall v$ найти длину минимального найденного пути от s до v, но теперь веса $w \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$

1. Храним в $dp[v]$ длину минимального найденного пути от s до v
2. $d = +\infty$, $d[s] = 0$, $q[x]$ - очередь вершин с $d = x$

3.
```
expand(v):
  if (expanded[v]) return;
  expanded[v] = true;
  for (e: g[v]) {
    y = d[v] + e.w
    if (d[e.to] > g) {
      d[e.to] = y;
      q[y] push(e.to);
    }
  }
```

4. Заведем $q[0], q[1], \ldots, q[nk]$, $expanded = false,\ q[0].push(s)$

5.
```
for (x = 0 ... nk) {
  while (q[x] непусто):
    достаем из нее вершину u и раскрываем
}
```

Асимптотика: O(E + kV)

Упражнение. *К моменту завершения рассмотрения очереди $q[x]$ обработаны и раскрыты все вершины, для которых расстояние не больше x.*

2.3 Двусторонний BFS

Цель: найти $dist(s, t)$. **Общая идея:** Наращиваем слои по глубине k от двух вершин, пока области не пересекутся.

Решение:

1. Запускаем BFS параллельно. Назовем слоем k множество вершин, до которых можно добраться за k или меньше ребер.

2. Заметим, что $dist(s, t) = min_m(d_s[m] + d_t[m])$. Так что когда найдется такое k, что слои от s и t пересекутся, мы получим эту вершину m и, соответсвенно, путь между s и t.

Проверять пересечение слоев можно проверять быстро через хеш-таблицы.

2.4 Алгоритм Дейкстры

Цель: $w \geqslant 0, fixs$ Найти $dist(s, v)\ \forall v$.

1. $d = +\infty,\ expanded[v] = false \forall v,\ d[s] = 0$

2.
```
for i = 0 ... n-1:
  пусть v - вершина с min d[v] среди всех нераскрытых
  Йййййеессслииии d[v] = +\infty: break
```

Асимптотика $O(n + n \log n)$ через Фиб кучу и $O(m \log n)$ через бин кучу