

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА  
V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

**h\nu**

Автор: *Павел Дуров*  
*Репозиторий на Github*

осень 2022

## Содержание

0.1	<a href="#">Несобственные интегралы от знакопеременных функций . . . . .</a>	2
-----	--	---

## 0.1 Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Изучим вопросы сходимости несобственных интегралов от функций ни в какой функции точки  $b$ .

**Лемма 0.1.** Пусть  $f, g$  — локально интегрируемы на  $[a, b)$  и  $\int_a^b g(x)dx$  — абсолютно сходится. Тогда несобственные интегралы

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$$

Либо одинаково расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

*Доказательство.* Абсолютная сходимость влечет сходимость, поэтому  $\int_a^b g(x)dx$  сходится. Тогда по линейности

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx - \int_a^b g(x)dx$$

И заключаем, что интегралы  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$  сходятся одновременно. При этом,

$$|f + g| \leq |f| + |g|, |f| \leq |f + g| + |g|$$

Тогда по критерию сравнения, получаем, что  $\int_a^b |f(x) + g(x)|dx, \int_a^b |f(x)|dx$  сходятся одновременно, т.е.  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$  абсолютно сходятся одновременно.  $\square$

**Теорема 0.1** (Признак Дирихле). Пусть  $f, g$  локально интегрируемы на  $[a, b)$ , причем

1.  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  ограничена на  $[a, b)$
2.  $g(x)$  — монотонна
3.  $g \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow b - 0$

Тогда  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  сходится.

*Доказательство.* Существует такая константа  $M : |F| \leq M$ . Тогда  $\forall \xi \in [a, b)$  имеем  $\left| \int_\xi^x f(t)g(t)dt \right| = |F(x) - F(\xi)| < 2M$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists b' \in [a, b) \forall x \in (b', b) (|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M})$ .

По лемме Абеля, для интервалов  $\forall [\xi, \eta] \subset (b', b)$  выполнено  $\left| \int_\xi^\eta f(x)g(x)dx \right| < 2 \cdot 2M(|g(\xi)| + |g(\eta)|) < \varepsilon$ . Далее применяем свойство Коши.  $\square$

**Замечание.** Условия 1, 2 выполнены если  $f$  непрерывна и имеет ограниченную первообразную на  $[a, b)$ , а  $g$  дифференцируема и  $g'$  сохраняет знак на  $[a, b)$ .

**Пример.** Исследуем сходимость и абсолютную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R} (k > 0)$$

Делаем замену  $t = kx$  и получаем следующее:

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

1.  $\alpha > 1$ .

$$\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt - \text{сходится}$$

То есть  $I(\alpha)$  сходится абсолютно

2.  $\alpha \leq 0$ . Проверим расходимость при помощи Коши.

$$\exists \varepsilon_0 = \forall \Delta > 1 \exists \xi = 2\pi n > \Delta, \eta = 2\pi n + \pi > \Delta$$

$$\left| \int_\xi^\eta \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \right| = \int_\xi^\eta t^{-\alpha} \sin t dt \geq (2\pi n)^{-\alpha} \int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} \sin t dt = (2\pi n)^{-\alpha} \cdot 2 \geq 2$$

Тогда по критерию Коши,  $I(\alpha)$  расходится.

3.  $\alpha \in (0, 1]$ .

$$f(x) = \sin t, g(t) = \frac{1}{t^\alpha}, F(t) = \int_1^t \sin s \, ds - \text{ограничена на } 1, +\infty$$

Тогда  $I(\alpha)$  сходится по признаку Дирихле. Теперь проверим абсолютную сходимость:

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{x^\alpha} \right) \geq 0$$

При этом  $\int \frac{1}{x^\alpha} - \text{расходится}$ , а  $\int \frac{\cos 2x}{x^\alpha} - \text{сходится}$ . Тогда их разность расходится.

Тогда  $I(\alpha)$  сходится при  $\alpha > 0$  и абсолютно сходится при  $\alpha > 1$