

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ
II СЕМЕСТР

Лектор: *Райгородский*



Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1	Функциональные последовательности и ряды	2
-------------------	--	-------------------

Рассмотрим $f(t) = \ln t$.

$$\int_1^{n+1} \ln t dt = t \ln t \Big|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dt = (n+1) \ln(n+1) - n$$

Следовательно, сходится последовательность

$$\begin{aligned} (n+1) \ln(n+1) - n - \sum_{k=1}^n \ln k - \frac{1}{2} \ln n &= (n+1) \left(\ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) - \ln n! - \frac{1}{2} \ln n - n = \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n + (n+1) \left(\frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) - \ln n! - \ln e^n \end{aligned}$$

Следовательно, сходится $\underbrace{\left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n + \ln n! + n \right\}}_{\ln \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}$

Поэтому, $\ln \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \rightarrow C > 0$ и $n! \sim C \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$. Найдем C , пользуясь формулой Валлиса

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

Имеем

$$\frac{1}{n} \left(\frac{(2n)(2n-2) \dots 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 1} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \sim \frac{2^{4n}}{n} \frac{C^4 n^{4n+2} e^{4n}}{e^{4n} C^2 (2n)^{4n+1}} = \frac{C^2}{2} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

Но тогда

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n, n \rightarrow \infty$$

1 Функциональные последовательности и ряды

Пусть $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ или \mathbb{C} (все утверждения тоже верны для \mathbb{R} или \mathbb{C}).

Определение 1.1. Говорят, что f_n поточечно сходится к f на E , если $\forall x \in E f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Пишут $f_n \rightarrow f$ на E , и f называют пределом функциональной последовательности f_n

Пример. $f_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \rightarrow f$, при $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, 1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$ Функция оказалась разрывна!

Распишем определение поточечной сходимости и по определению.

$$f_n \rightarrow f \text{ на } E \Leftrightarrow \forall x \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Определение 1.2. Говорят, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на множестве E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall x \forall n > N (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E , или $f_n \rightrightarrows_E f$

Замечание. Равномерная сходимость влечет поточечную

Замечание. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E , то f определена на E однозначно

Лемма 1.1 (Супремум критерий). $f_n \rightrightarrows_E f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$, где $\rho_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$

Доказательство.

$$\forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon), \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Эти условия равносильны, поэтому лемма верна □

Задача. $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \{x\} \subset E \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$

Определение 1.3. Функциональная последовательность поточечно (равномерно) сходится на множестве E , если найдется такая определенная на E функция, к которой последовательность поточечно (равномерно) сходится

Пусть задан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n : E \rightarrow \mathbb{R}$

Определение 1.4. Говорят, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится на E , если $\forall x \in E (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))$ сходится. При этом, функция $S : E \rightarrow \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Определение 1.5. Функциональный ряд поточечно (равномерно) сходится на E , если последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ поточечно (равномерно) сходится на E

Утверждение 1.1. Пусть $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена

1. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E , то $gf_n \rightrightarrows gf$ на E
2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E , то $\sum_{n=1}^{\infty} gu_n$ также равномерно сходится на E , причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} gu_n = g \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Доказательство.

1. Пусть $|g| \leq M$. Для любого $x \in E$ имеем

$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leq M|f_n(x) - f(x)|$$

$$\sup_{x \in E} |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leq M \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

2. Очевидно □

Утверждение 1.2.

1. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E , $g_n \rightrightarrows g$ на E , то $\lambda f_n + \mu g_n \rightrightarrows \lambda f + \mu g$ на E .

2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ равномерно сходятся на E , и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ равномерно сходитсся на E , причем $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Доказательство.

1. $f_n + g_n \Rightarrow f$ на E .

$$\forall x \in E |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

$$\sup_{x \in E} |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in E} |g_n(x) - g(x)|$$

□

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходитсся на E , то $u_n \Rightarrow 0$ на E

Доказательство. Если S_n — n -ая частичная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то $u_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow S - S = 0$ □

Задача. Пусть $f_n \Rightarrow f$ на E , $g : D \rightarrow E$, тогда $f_n \circ g \Rightarrow f \circ g$ на D

Теорема 1.1 (Критерий Коши). $\{f_n\}$ равномерно сходитсся на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon)(1)$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть $f_n \Rightarrow f$ на E . Зафиксируем $\varepsilon > 0, n \geq N$. Тогда $\forall x \forall n, m \geq N |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

\Leftarrow Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет (1). Тогда $\forall x \in E \{f_n(x)\}$ фундаментальна. Положим $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N из условия (1). Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \forall x \in E \forall n \geq N$$

Это означает, что $f_n \Rightarrow f$ на E .

□

Следствие (Критерий Коши). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходитсся на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \forall x \in E (|\sum_{k=m+1}^n u_k(x)| < \varepsilon)$

Следствие. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, все функции f_n непрерывны на \bar{E} . Если $\{f_n\}$ равномерно сходитсся на E , то $\{f_n\}$ равномерно сходитсся на \bar{E}

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по Критерию Коши, $\exists N \forall n, m > N \forall x \in E (|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon)$. Пусть $y \in \bar{E} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset E : (x_n \rightarrow y)$. В неравенстве $|f_n(x_k) - f_m(x_k)| \leq \varepsilon$ переходим к прелельному переходу, получаем, что $|f_n(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon$. Тогда $\{f_n\}$ равномерно сходитсся на \bar{E} □

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ — сходитсся на $(1, \infty)$ неравеномерно.

Доказательство. Предположим противное. Но тогда, по следствию 2, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ равномерно сходитсся на $[1, \infty)$, противоречие □

Теорема 1.2 (О непрерывности предельной функции). Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Если $f_n \Rightarrow f$ на E , и все функции f_n непрерывны на E , то f — непрерывна на E

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \forall n \geq N \forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3})$. Для любого $x \in E$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Т.к. f_N непрерывна в a , то $\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E (|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3})$. Но тогда $\forall x \in B_\delta(a) \cap E (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Значит f непрерывна в $\forall a \in E$. \square

Замечание. В условиях предыдущей теоремы, если a — предельная точка E , то $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

Следствие (О непрерывности суммы ряда). Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E и все функции u_n непрерывны на E , то сумма ряда также непрерывна на E .

Пример. $f_n(x) = n^\alpha x^n, x \in [0, 1], f_0 \equiv 0$

$$\rho_n = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \Rightarrow (f_n \Rightarrow_{[0,1]} f_0 \Leftrightarrow \alpha < 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n+1} = \int_0^1 f_0(x) dx = 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Теорема 1.3 (Об интегрируемости предельной функции). Если $f_n \Rightarrow_{[a,b]} f, f_n \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Доказательство. Докажем, что $f \in R[a, b]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной сходимости, $\exists N \forall n > N \forall x \in [a, b] (|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$. Оценим колебание f на $E \subset [a, b]$, то есть оценим $\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} |f(y) - f(x)|$. Т.к. $f = (f - f_N) + f_N \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq |f - f_N|(y) + |f - f_N|(x) + |f_N(y) - f_N(x)| \Rightarrow \omega(f, E) \leq \omega(f - f_N, E) + \omega(f_N, E), \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. По критерию Дарбу, $\exists T$ — разбиение $[a, b]$, такое, что $\Omega_T(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для разбиения T имеем $\Omega_T(f) \leq \sum \omega(f, E) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Но тогда $f \in R[a, b]$. При этом,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon$$

\square