Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Репозиторий на Github

осень 2022

Содержание

Короче, как-то будем сдавать какой-то экзамен. Очень сложно, ничего не понятно

1 Вступление

Вот у нас были натуральные числа:

$$
\begin{gathered}
0 = \varnothing \\
1 = \{\varnothing\} \\
2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\
\vdots \\
n + 1 = \{0, 1, 2, \dots n\}
\end{gathered}
$$

Вопрос: что будет в бесконечности?

$$
\begin{gathered}
\omega = \{0, 1, 2, \dots\} \\
\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\} \\
\omega + 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} \\
\vdots \\
2\omega = \dots \\
2\omega + 1 = \dots \\
\vdots \\
3\omega = \dots \\
\vdots \\
\omega \cdot \omega = \dots
\end{gathered}
$$

Таким образом, получаем различные многочлены от ω, если продолжать этот абсурд, то получится ω^ω, потом получится $\underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\dots^{\omega}}}}}_{\omega}$ и короче всякое такое.

2 Фундированные множества

Определение 2.1. Пусть S — ЧУМ. Тогда S называется Фундированным, если $\forall A \subset S \exists \min A$

Пример (Фундированные)**.**

1. $\mathbb{N}, \leqslant$
2. $\mathbb{N}, |$
3. $\{a, b\}^*, \sqsubset$

Пример (Не фундированные)**.**

1. $\mathbb{Z}, \leqslant$
2. $\mathbb{N}, \geqslant$
3. $[0, 1], \leqslant$
4. $\{a, b\}^*, \leqslant_{lex}$

2.1 Свойства, эквивалентные фундированности

1. (БС) Невозможность бесконечного спуска

$$\nexists a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

2. (Ст) Стабилизация

$$\forall a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \dots \Rightarrow \exists k : \forall n > k (a_k = a_n)$$

3. (ТИ) Трансфинитная индукция

$$\forall x (\forall y < x \;\; \varphi(y) \to \varphi(x)) \Rightarrow \forall z \varphi(z)$$

Теорема 2.1. *Свойства Фундированность, БС, Ст, ТИ эквивалентны.*

Доказательство.

1. $\neg\Phi \Rightarrow \neg$БС. Пусть $A \neq \varnothing, \nexists \min A$. Тогда $\forall a_1 \in A \exists a_2 \in A : a_2 < a_1$. Используя аксиому выбора (выбирая по одному элементу из оставшихся), получается бесконечную убывающую последовательность.

2. $\neg\Phi \Leftarrow \neg$БС. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Рассмотрим это множество, в нем не будет минимального элемента.

3. $\neg$БС $\Rightarrow \neg$Ст. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Заметим, что для это последовательности неверна стабилизация.

4. $\neg$БС $\Leftarrow \neg$Ст. Рассмотрим последовательность, которая не стабилизируется. Тогда $\forall n \exists k : a_n > a_k$. Тогда $\exists$ бесконечная убывающая цепочка.

5. $\neg\Phi \Rightarrow \neg$ТИ. $A \neq \varnothing$ — множество без минимального элемента, $\varphi(x) \Leftrightarrow x \notin A \Rightarrow \varphi(x) \not\equiv 1$.

   $$\forall y < x \; y \notin A \Rightarrow x \notin A$$

   Утверждение вверу верно, т.к. $\forall y < x (y \notin A, x \in A) \Rightarrow x = \min A$.

6. $\neg\Phi \Leftarrow \neg$ТИ. Тогда для некоторго φ верно, что

   $$\forall x (\forall y < x \; \varphi(y) \to \varphi(x))$$

   Но

   $$\neg \forall z \varphi(z) (1)$$

   Пусть $A = \{z | \varphi(z) = 0\}$. Причем A непусто, т.к. (1). Тогда рассмотрим минимальный элемент в A и получим противоречие с определением ТИ.

$\square$

Определение 2.2. Вполне упорядоченное множество — Линейная упорядоченность + Фундированность

Пример.

$\mathbb{N}, \leqslant$	ω
$\left\{1-\frac{1}{n}\middle\| n \in \mathbb{N}_+\right\}$	ω
$\left\{1-\frac{1}{n}\middle\| n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \left\{2-\frac{1}{n}\middle\| n \in \mathbb{N}_+\right\}$	$\omega \cdot 2$
$\left\{k-\frac{1}{n}\middle\| k, n \in \mathbb{N}_+\right\}$	ω^2
$\left\{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\middle\| m, n \in \mathbb{N}_+\right\}$	ω^2
$\left\{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\middle\| m, n, k \in \mathbb{N}_+\right\}$	ω^3
$\left\{1-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}-\dots-\frac{1}{n_k}\middle\| k - \text{произвольное}\right\}$	не фундированное
$\left\{k-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}-\dots-\frac{1}{n_k}\middle\| k - \text{произвольное}\right\}$	ω^ω

Определение 2.3. Пусть S — ВУМ. Тогда $K \subset S$ называется начальным отрезком, если $\forall x, y((x \in K \land y < x) \to y \in K)$

Эквивалентные свойства:

$$\forall x \in K \forall y \notin K x < y$$

$$\forall x, y((x \notin K \land y > x) \to y \notin K)$$

2.2 Непосредственно следующие элементы

Утверждение 2.1. *S — ВУМ, $x \in S, x$ — не наибольший в $S \Rightarrow \exists! y(y > x \land \neg\exists z y > z > x)$.*

Доказательство. $\exists$ — из Фундированности, $y = \min\{t \in S | t > x\}$ □

Определение 2.4. y из предыдущего утверждения называется непосредственно следующим элементом после x и обозначается $x+1$.

Замечание.

$$[0, a] = [0, a+1)$$

Теорема 2.2. *K — начальный отрезок $S \Rightarrow K = S \lor K = [0, a)$*

Доказательство. Если $K = S$, то победили, иначе рассматриваем $a = \min(S \setminus K)$. Докажем, что $K = [0, a)$.

1. $K \subset [0, a)$: Если $x \in K, x > a$, то $a \in K$, но $a \in S \setminus K$
2. $K \supset [0, a)$: Если $x < a, x \notin K$, то $a \neq \min(S \setminus K)$ — противоречие.

□

Пример.

1. S
2. $[0, \alpha] = \{x | x \leqslant \alpha\}$
3. $[0, \alpha) = \{x | x < \alpha\}$

2.3 Предельные элементы

Определение 2.5. z назывется предельным элементом, если $\nexists y(z = y + 1)$.

или

Определение 2.6. z назывется предельным элементом, если

$$\forall y < z \exists t \in (y, z)$$

Теорема 2.3. *S — ВУМ, $x \in S \Rightarrow \exists l \in S, k \in \mathbb{N} : x = l + k = l + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k}$*

2.4 Сложение и умножение Фундированных множеств и ВУМов

Сложение и умножение определены так же, как и для ЧУМов.

Теорема 2.4.
1. *A, B — фундированные, тогда и $A + B$ — тоже.*
2. *A, B — ВУМ, тогда и $A + B$ — тоже.*
3. *A, B — фундированные, тогда и $A \cdot B$ — тоже.*
4. *A, B — ВУМ, тогда и $A \cdot B$ — тоже.*

Доказательство. $C \subset A \sqcup B$:

1. (a) $C \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \min(C \cap A)$ — существует, т.к. A — фундированное
   (b) $C \cap B \neq \varnothing \Rightarrow \min(C \cap B)$ — существует, т.к. B — фундированное
2. Подмножество ЛУМа — ЛУМ, поэтому победили по (1).

□

Замечание. Любое подмножество ВУМ — тоже ВУМ

Замечание. Множество предельных элемнтов ВУМа — ВУМ

Замечание. Между любыми двумя предельными элементами бесконечно много других

Замечание. Элементы между соседними предельными элементами образуют множество, $\approxeq \omega$

Теорема 2.5 (О структуре ВУМ)**.** *S — ВУМ, тогда $\exists L$ — тоже ВУМ, конечное множество K, такие, что $S \cong \omega \cdot L + K$*

Теорема 2.6 (О трансфинитной рекурсии)**.** *Пусть задано рекурсивное правило:*

$$F : f|_{[0,x)} \mapsto f(x) \in R$$

Тогда $\exists! f : S \to R$*, т.ч.* $\forall x f(x) = F(f|_{[0,x)})$

Доказательство.

Единственность. Пусть f, g — 2 подходящие функции.

$$\{x|f(x) \neq g(x)\} \neq \varnothing \Rightarrow \exists m = \min\{x|f(x) \neq g(x)\} \Rightarrow f|_{[0,m)} = g|_{[0,m)}$$

Но тогда $f(m) = F(f|_{[0,m)}) = F(g|_{[0,m)}) = g(m)$, противоречие.

Существование. По трансфинитной индукции докажем сущесвование $f|_{[0,x)}$, соответствующее F.

$$\forall y < x \exists f|_{[0,y)} \Rightarrow \exists f|_{[0,x)}$$

(a) $x = w + 1 \Rightarrow \exists f|_{[0,w)}, f(w) = F(f|_{[0,w)})$

(b) x — предельное

$$y < x \Rightarrow \exists z : y < z < x$$

$$z < x \Rightarrow \exists f : [0, z) \to R$$

Так и доопределяем $f(y)$ (если разные z дают разные значения, то противоречие аналогично с доказательством единственности). То есть $\forall y < x$ задано $f(y) \Rightarrow f$ задано на $[0, x)$.

По трансфинитной индукции получили, что $\forall x \varphi(x)$. Теперь нужно сделать последний переход ко всему множеству (*Прим. от автора:* мы научились делать ее на начальных отрезках $\Rightarrow$ для "самых больших элементов" потенциально могут быть проблемы, т.к. начальные отрезки — полуинтервалы. Их мы и будем чинить последним переходом). Если в множестве есть наибольший элемент, то доопределяем так же, как и в случае а) (Важно: наибольший элемент может быть предельным). Если наибольшего элемента нет, то доопределяем значение, как в пункте б). □

Теорема 2.7 (Обобщенная теорема о трансфинитной рекурсии)**.** *F может быть частично определена, тогда f определена на начальном отрезке.*

Доказательство. Добавим значение $f(x) = \perp$, если функция f не определена в точке x. Тогда по теореме о Трансфинитной рекурсии, $\exists! f : S \to R \cup \{\perp\}$. □

Теорема 2.8 (О сравнимости ВУМов)**.** *Любые два ВУМа либо изоморфны, либо один из них изоморфен начальному отрезку другого.*

Доказательство. Строим $f : S \to T$, заданное правилом $F(f|_{[0,x)}) = \min(T \setminus f([0, x)))$. По обобщенной теореме о трансфинитной рекурсии, $\exists! f$, соответствующая F. Есть два случая:

1. f определена на S. $Im_f = \left[\begin{array}{l} T \\ [0, t) \end{array} \right.$. Тогда иначе $\exists t_1 < t_2 : t_1, t_2 \notin Im_f$.

2. f определена на $[0, s) \Rightarrow Im_f = T$, иначе доопределим $f(s)$

$\square$

Утверждение 2.2. *S — ВУМ, $s \in S \Rightarrow s \ncong [0, s)$*

Доказательство. Иначе $\exists$ монотонная $g : S \to [0, s) \Rightarrow$ т.к. $g(s) \geqslant s$ (нетрудно доказать) $\Rightarrow g(s) \notin [0, s)$, противоречие. $\square$

Следствие. Из $S \cong T, S \cong [0, t), T \cong [0, s)$ выполнено ровно 1 утверждение

3 Ординалы

Определение 3.1. S — транзитивно, если $y \in S, x \in y \Rightarrow x \in S$.

Пример. $\varnothing, \{\varnothing\}$ и все элементы $\mathbb{N}$

Пример. $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

Определение 3.2. Ординал — транзитивное множество, любой элемент которого — транзитивен.

Неформально — порядковый тип (отношение эквивалентности на всех множествах)

Утверждение 3.1. *α — ординал, тогда $\beta \subset \alpha$ — тоже.*

Доказательство. β — транзитивно, т.к. β — элемент ординала. $\gamma \in \beta \Rightarrow$ по транизитивности $\alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha \Rightarrow \gamma$ — транзитивно. $\square$

Утверждение 3.2. *α — ординал $\Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\}$ — ординал.*

Доказательство.

$$\beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$$

В обоих случаях, β транзитивно. Теперь рассмотрим $\gamma \in \beta$.

$$\beta \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$$
$$\beta = \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$$

Т.к. α — транзитивно, то и γ — тоже. $\square$

Утверждение 3.3. *Объединение любого множества ординалов — ординал.*

Доказательство.

$$\alpha = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$$

$$\gamma \in \beta, \beta \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \beta, \beta \in \alpha_i \Rightarrow \beta, \gamma \in \alpha_i$$

$\Rightarrow \beta, \gamma$ транзитивны $\square$

Утверждение 3.4. *Ординал — ВУМ с отношением $\in$ (как строгого порядка)*

Доказательство. $\square$

Теорема 3.1. *Любой ординал — ВУМ, с отношением порядка $\in$, при этом отношение "быть начальным отрезком" — тот же порядок. Подмножества являющиеся ординалами — тоьлко начальные отрезки. То есть $\in, \subset$, "быть начальным отрезком" — один и тот же порядок, называемый ординальным*