Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Репозиторий на Github

осень 2022

Содержание

0.1 Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Изучм вопросы сходимости несобственных интегралов от функций ни в какой функции точки b.

Лемма 0.1. *Пусть f, g — локально интегрируемы на $[a, b)$ и $\int_a^b g(x)dx$ — абсолютно сходится. Тогда несобственные интегралы*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$$

Либо одинаково расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Доказательство. Абсолютная сходимость влечет сходимость, поэтому $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Тогда по линейности

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx - \int_a^b g(x)dx$$

И заключаем, что интегралы $\int_a^b (f(x) + g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$ сходятся одновременно. При этом,

$$|f + g| \leqslant |f| + |g|, |f| \leqslant |f + g| + |g|$$

Тогда по критерию сравнения, получаем, что $\int_a^b |f(x) + g(x)|dx, \int_a^b |f(x)|dx$ сходятся одновременно, т.е. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходятся одновременно. $\square$

Теорема 0.1 (Признак Дирихле). *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$, причем*

1. *$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ограничена на $[a, b)$*
2. *$g(x)$ — монотонна*
3. *$g \to 0$ при $x \to b - 0$*

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Существует такая константа $M : |F| \leqslant M$. Тогда $\forall \xi \in [a, b)$ имеем $\left|\int_\xi^x f(t)g(t)dt\right| = |F(x) - F(\xi)| < 2M$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists b' \in [a, b) \forall x \in (b', b)$ $\left(|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right)$. По лемме Абеля, для интервалов $\forall [\xi, \eta] \subset (b', b)$ выполнено $\left|\int_\xi^\eta f(x)g(x)dx\right| < 2 \cdot 2M(|g(\xi)| + |g(\eta)|) < \varepsilon$. Далее применяем свойство Коши. $\square$

Замечание. Условия 1, 2 выполнены если f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$, а g дифференцируема и g' сохраняет знак на $[a, b)$.

Пример. Исследуем сходимость и абсолютную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R} (k > 0)$$

Делаем замену $t = kx$ и получаем следующее:

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

1. $\alpha > 1$.
$$\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \text{ — сходится}$$
То есть $I(\alpha)$ сходится абсолютно

2. $\alpha \leqslant 0$. Проверим расходимость при помощи Коши.
$$\exists \varepsilon_0 = \forall \Delta > 1 \exists \xi = 2\pi n > \Delta, \eta = 2\pi n + \pi > \Delta$$
$$\left|\int_\xi^\eta \frac{\sin t}{t^\alpha} dt\right| = \int_\xi^\eta t^{-\alpha} \sin t dt \geqslant (2\pi n)^{-\alpha} \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin t dt = (2\pi n)^{-\alpha} \cdot 2 \geqslant 2$$
Тогда по критерию Коши, $I(\alpha)$ расходится.

3. $\alpha \in (0, 1]$.
$$f(x) = \sin t, g(t) = \frac{1}{t^\alpha}, F(t) = \int_1^t \sin s \ \ ds \text{ — ограничена на } 1, +\infty$$
Тогда $I(\alpha)$ сходится по признаку Дирихле. Теперь проверим абсолютную сходимость:
$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\right) \geqslant 0$$
При этом $\int \frac{1}{x^\alpha}$ — расходится, а $\int \frac{\cos 2x}{x^\alpha}$ — сходится. Тогда их разность расходится.

Тогда $I(\alpha)$ сходится при $\alpha > 0$ и абсолютно сходится при $\alpha > 1$

Теорема 0.2 (Признак Абеля). *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$, причем*

1. *$\int_a^b f(x)dx$ сходится*
2. *g монотонна на $[a, b)$*
3. *g ограничена на $[a, b)$*

Тогда
$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$
сходится.

Доказательство. Из монотонности и ограниченности следует, что $\exists \lim_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Поэтому $\int_a^b f(x)(g(x)-c)dx$ сходится, но тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)(g(x)-c)dx + c\int_a^b f(x)dx$ — сходится ◻

Пример.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$$
$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} \sim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Так делать нельзя, т.к. свойство, котоыре мы использовали выше, рабоатет только для неотрициательных функций. Как правильно:

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x(\sqrt{x} - (\sqrt{x} - \sin x))}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sin x)}$$

$$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}})} \sim \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x}\right) \geqslant 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)dx \text{ — расходится}$$

$\boxed{\text{Короче говоря, принцип сравнения для знакопеременных функций не применим}}$

Следствие (Из теоремы 4)**.** Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$ и g монотонна на $[a, b)$, $\lim_{x \to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx, \int_a^b f(x)dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Доказательство. Из сходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует сходимость $int_a^b f(x)g(x)dx$ по теореме 4. Т.к. $c \neq 0$, то $\exists a^* \in [a, b) \forall x \in [a^*, b)(g(x) \neq 0)$. Следовательно, $f = fg \cdot \frac{1}{g}$ на $[a, b)$. По теореме 4, сходимость $\int_{a^*}^b f(x)g(x)dx$ влечет $\int_{a^*}^b f(x)dx$, а значит, $\int_a^b f(x)dx$ сходится □

0.2 Несобственные интегралы с несколькими особенностями

Определение 0.1. Пусть $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, функция f определена на a, b за исключением, быть может, конечного числа точек.

1. Точка $c \in (a, b)$ называется особенностью f, если $\forall[\alpha, \beta] : c \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$ функция $f \notin R[\alpha, \beta]$.

2. Точка b называется особенностью f, если либо $b = +\infty$, либо $b \in \mathbb{R}$ и $f \not\in R[\alpha, b] \forall a < \alpha < b$

   Заметим, что такое определение работает для любого доопределения f в точке b.

Замечание. f не имеет особенностей на $(c, d) \to f$ локально интегрируема на $(, d)$.

Доказательство. Пусть $[u,v] \subset (a,b)$ Докажем, что $f \in R[u,v]$ По условию $\forall x \in [u,v] \exists [\alpha_x, \beta_x]$

$$\bigcup_{x \in [u,v]} (\alpha_x, \beta_x) \supset [u, v]$$

Тогда по лемме Гейне-Бореля есть конечное покрытие этого отрезка. Рассмотрим его. По аддитивности f интегрируема на некотором отрезке, содержащем $[u, v] \Rightarrow$ и на $[u, v]$ □

Определение 0.2. Пусть $c_1 < c_2 < \cdots < c_{N-1}$ - все особенности функции f на (a, b), причем определим $c_0 = a, c_N = b$.

$\boxed{\xi_k \in (c_{k-1}, c_k), \text{ где } k \in \{1, 2, \ldots, N\}}$

Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ называется совокупность интегралов $\int_{c_{k-1}}^{\xi_k} f(x)dx$ и $\int_{\xi_k}^{c_k} f(x)dx$

Причем если все интегралы и их суммы имеют смысл в $\overline{\mathbb{R}}$ то несобственным интегралом называют именно сумму.