

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА
V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h/nu

Автор: *Павел Дуров*
Проект на Github

осень 2022

Содержание

1	Алгебра многочленов	2
1.1	Операции над многочленами	2
1.2	Операции над новыми многочленами	2

1 Алгебра многочленов

Определение 1.1. Многочленом называется функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Определение 1.2. $\mathbb{F}[x]$ — множество всех многочленов над \mathbb{F} (с коэффициентами в \mathbb{F})

1.1 Операции над многочленами

1. $+$ — сложение
2. \cdot — умножение
3. $\cdot \lambda$ — домножение на константу

Замечание. Многочлены над \mathbb{R} образуют коммутативное кольцо

Определение 1.3. Алгебра над полем \mathbb{F} называется множеством A , с определенными на нем операциями $+$, \cdot , $\cdot \lambda$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1. $(A, +, \cdot \lambda)$ — линейное пространство над \mathbb{F}
2. $(A, +, \cdot)$ — кольцо (необязательно коммутативное)
3. $\lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $x, y \in A$

Пример.

1. $\mathbb{R}[x]$
2. $M_n(\mathbb{F})$
3. $\mathbb{Z}_p[x]$

Замечание. Возникает проблема: в $\mathbb{Z}_p[x]$ существует многочлен $x^p - x \equiv 0 \forall x \in \mathbb{Z}_p$. Но тогда у нас будет конечный базис в $\mathbb{Z}_p[x]$, чего не хотелось бы. Определим многочлен по-другому:

Определение 1.4. Многочленом над кольцом R называется бесконечная последовательность a_0, a_1, \dots , в которой лишь конечное число коэффициентов отличны от 0. Такие последовательности называются финитными.

1.2 Операции над новыми многочленами

Пусть $A = (a_i), B = (b_i)$

1. $A + B = C \Leftrightarrow c_i = a_i + b_i$
2. $A \cdot B = C \Leftrightarrow c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$
3. $A \cdot \lambda = C \Leftrightarrow c_k = \lambda \cdot a_i$