

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ
II СЕМЕСТР

Лектор: *Райгородский*



Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1	Продолжаем графы	2
1.1	2-КНФ	2
1.2	Эйлеровость	2
1.3	DFS на Неориентированных графах	3

1 Продолжаем графы

1.1 2-КНФ

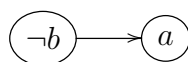
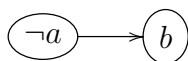
Дана 2-КНФ. Есть ли у нее решение?

Кто не помнит, что такое 2-КНФ, вот пример: $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) = 1$
Понятно, что решение найдется только в случае равенства всех скобок.

$$a \vee b = (\neg a \rightarrow b) = (\neg b \rightarrow a)$$

Перепишем все дизъюнкции через импликации по правилу выше

1. Введем граф: в нем $2n$ вершин (для каждой переменной будет она и ее отрицание) и $2m$ ребер, соответствующие импликациям.



Утверждение 1.1. Формула выполнима $\iff \forall p$ вершины p и $\neg p$ лежат в разных КСС

Доказательство. Пусть φ выполнима, но p и $\neg p$ лежат в одной КСС. Переходя по стрелкам, мы однозначно определяем, что $p = \neg p = 1$

В обратную сторону докажем, запустив алгоритм Косарайю:

1. Положим $p = 1$, если $id[p] > id[\neg p]$, и $p = 0$, если $id[\neg p] > id[p]$

Докажем, что это - выполняющий набор. Пойдем от противного. Есть скобка $(x \vee y) = 0$

$$(x \vee y) = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow id[\neg x] > id[x], id[\neg y] > id[y]$$

Как мы знаем по прошлой лекции, из наличия ребра $u \rightarrow v \Rightarrow id[u] \leq id[v]$. Получаем:

$$id[\neg x] > id[x] \geq id[\neg y] > id[y] \geq id[\neg x]$$

□

1.2 Эйлеровость

Определение 1.1. Эйлеровым циклом в графе называется цикл, проходящий по всем ребрам ровно по 1 разу.

Теорема 1.1. В ориентированном графе G существует эйлеровый цикл тогда и только тогда, когда после удаления всех изолированных вершин G становится сильно связным и $\forall v \text{ indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

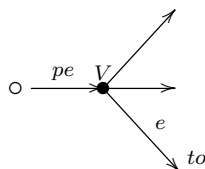
Доказательство. \Rightarrow Удалили все все изолированных вершины, получили граф, где есть цикл по всем ребрам. Тогда понятно, что количество вхождений в вершину равно количеству выходов из нее

⇐ Алгоритм. Пусть стек S - последовательность ребер на эйлеровом цикле.

Напишем **Псевдокод**:

```
def euler(v, pe):
    while из v есть неиспользованные исходящие ребра:
        пусть e - произвольное из них
        e - помечаем использованным
        e = (v, to); ++ptr[v]
        euler(to, e)
    S push(pe)
```

Дальше идет индукция по размеру стека, ограничимся рисунком происходящего



□

Как восстанавливать этот путь?

Лемма 1.1. Пусть граф G удовлетворяет условию на равенство количества входящих и исходящих ребер, тогда $euler(v, pe)$ первым положит ребро на стек, когда будет в вершине v .

Доказательство. Понятно из картинке. Мы кладем ребро, когда возвращаемся в v . □

Замечание. Как проверить наличие эйлерова пути? Найти 2 вершины, являющиеся началом и концом потенциального пути, провести ребро и запустить алгоритм.

У конечных вершин $indeg$ и $outdeg$ отличаются на 1, причем в разные стороны

Утверждение 1.2. Переложить описанный результат на неориентированный граф.

1.3 DFS на Неориентированных графах

Назовем дерево ребер графа, вдоль которых ходит алгоритм dfs , деревом dfs .

Замечание. Ребра в неориентированном графе могут быть 2 типов:

1. Прямые или древесные - ребра, по которым мы переходим в вершину в алгоритме
2. Обратные (остальные)

Определение 1.2. G - Неориентированный граф, e - ребро в нем. Ребро e называется мостом в нем, если при удалении e в нем количество компонент связности возрастет.

Определение 1.3. V - точка сочленения, если при удалении V количество компонент связности возрастет.

Утверждение 1.3. *Обратные ребра не являются мостами*

Пусть dfs поддерживает tin . Обозначим $\text{ret}[v] = \min(\text{tin}[v], \text{tin}[u])$, где последнее выбирается из тех вершин u в поддереве v , для которых существует обратное ребро $w \rightarrow u$, $w \in$ поддереву v

Утверждение 1.4. $\text{ret}[v]$ - минимум из следующих значений:

1. $\text{tin}[v]$
2. $\text{tin}[p]$ по всем обратным ребрам (v, p)
3. $\text{ret}[to]$ по всем прямым ребрам (v, to)

Утверждение 1.5. Ребро (u, v) является мостом $\Leftrightarrow (u, v)$ - древесное и $\text{ret}[v] = \text{tin}[v]$