Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Проект на Github

осень 2022

Содержание

Короче, как-то будем сдавать какой-то экзамен. Очень сложно, ничего не понятно

1 Вступление

Вот у нас были натуральные числа:

$$\begin{gathered} 0 = \varnothing \\ 1 = \{\varnothing\} \\ 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\ \vdots \\ n + 1 = \{0, 1, 2, \dots n\} \end{gathered}$$

Вопрос: что будет в бесконечности?

$$\begin{gathered} \omega = \{0, 1, 2, \dots\} \\ \omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\} \\ \omega + 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} \\ \vdots \\ 2\omega = \dots \\ 2\omega + 1 = \dots \\ \vdots \\ 3\omega = \dots \\ \vdots \\ \omega \cdot \omega = \dots \end{gathered}$$

Таким образом, получаем различные многочлены от ω, если продолжать этот абсурд, то получится ω^ω, потом получится $\underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\dots^{\omega}}}}}_{\omega}$ и короче всякое такое.

2 Фундированные множества

Определение 2.1. Пусть S — ЧУМ. Тогда S называется Фундированным, если $\forall A \subset S \exists \min A$

Пример (Фундированные)**.**

1. $\mathbb{N}, \leqslant$
2. $\mathbb{N}, |$
3. $\{a, b\}^*, \sqsubset$

Пример (Не фундированные)**.**

1. $\mathbb{Z}, \leqslant$
2. $\mathbb{N}, \geqslant$
3. $[0, 1], \leqslant$
4. $\{a, b\}^*, \leqslant_{lex}$

2.1 Свойства, эквивалентные фундированности

1. (БС) Невозможность бесконечного спуска

$$\nexists a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

2. (Ст) Стабилизация

$$\forall a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \dots \Rightarrow \exists k : \forall n > k (a_k = a_n)$$

3. (ТИ) Трансфинитная индукция

$$\forall x (\forall y < x \ \ \varphi(y) \to \varphi(x)) \Rightarrow \forall z \varphi(z)$$

Теорема 2.1. *Свойства Фундированность, БС, Ст, ТИ эквивалентны.*

Доказательство.

1. $\neg\Phi \Rightarrow \neg$БС. Пусть $A \neq \varnothing, \nexists \min A$. Тогда $\forall a_1 \in A \exists a_2 \in A : a_2 < a_1$. Используя аксиому выбора (выбирая по одному элементу из оставшихся), получается бесконечную убывающую последовательность.

2. $\neg\Phi \Leftarrow \neg$БС. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Рассмотрим это множество, в нем не будет минимального элемента.

3. $\neg$БС $\Rightarrow \neg$Ст. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Заметим, что для это последовательности неверна стабилизация.

4. $\neg$БС $\Leftarrow \neg$Ст. Рассмотрим последовательность, которая не стабилизируется. Тогда $\forall n \exists k : a_n > a_k$. Тогда $\exists$ бесконечная убывающая цепочка.

5. $\neg\Phi \Rightarrow \neg$ТИ. $A \neq \varnothing$ — множество без минимального элемента, $\varphi(x) \Leftrightarrow x \notin A \Rightarrow \varphi(x) \not\equiv 1$.

$$\forall y < x \ y \notin A \Rightarrow x \notin A$$

   Утверждение вверу верно, т.к. $\forall y < x (y \notin A, x \in A) \Rightarrow x = \min A$.

6. $\neg\Phi \Leftarrow \neg$ТИ. Тогда для некоторго φ верно, что

$$\forall x (\forall y < x \ \varphi(y) \to \varphi(x))$$

   Но

$$\neg \forall z \varphi(z) (1)$$

   Пусть $A = \{z | \varphi(z) = 0\}$. Причем A непусто, т.к. (1). Тогда рассмотрим минимальный элемент в A и получим противоречие с определением ТИ.

□

Определение 2.2. Вполне упорядоченное множество — Линейная упорядоченность + Фундированность

Пример.

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{N}, \leqslant & \omega \\
\left\{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+\right\} & \omega \\
\left\{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+\right\} & \omega \cdot 2 \\
\cup \left\{k - \frac{1}{n} | k, n \in \mathbb{N}_+\right\} & \omega^2
\end{array}
$$