Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*

Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

Рассмотрим $f(t) = \ln t$.

$$\int_1^{n+1} \ln t dt = t \ln t|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dt = (n+1)\ln(n+1) - n$$

Следовательно, сходится последовательность

$$(n+1)\ln(n+1) - n - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{1}{2}\ln n = (n+1)\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \ln n! - \frac{1}{2}\ln n - n =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln n! - \ln e^n$$

Следовательно, сходится $\underbrace{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + \ln n! + n\right\}}_{\ln \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}$

Поэтому, $\ln \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \to C > 0$ и $n! \sim C\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$. Найдем C, пользуясь формулой Валлиса

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Имеем

$$\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \sim \frac{2^{4n}}{n}\frac{C^4 n^{4n+2}e^{4n}}{e^{4n}C^2(2n)^{4n+1}} = \frac{C^2}{2} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

Но тогда

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty$$

1 Функциональные последовательности и ряды

Пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (все утверждения тоже верны для $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 1.1. Говорят, что f_n поточечно сходится к f на E, если $\forall x \in E f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Пишут $f_n \to f$ на E, и f называют пределом функциональной последовательности f_n

Пример. $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \to f$, при $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$ Функция оказалась разрывна!

Распишем определение поточечной сходимост ипо по определению.

$$f_n \to f \text{ на } E \Leftrightarrow \forall x \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Определение 1.2. Говорят, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall x \forall n > N(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E, или $f_n \rightrightarrows_E f$

Замечание. Равномерная сходимость влечет поточечную

Замечание. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f определена на E однозначно

Лемма 1.1 (Супремум критерий). $f_n \rightrightarrows_E f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, *где* $\rho_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$

Доказательство.

$$\forall x \in E(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon), \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Эти условия равносильны, поэтому лемма верна □

Задача. $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall\{x\} \subset E \ \ \lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$

Определение 1.3. Функциональная последовательность поточечно (равномерно) сходится на множестве E, если найдется такая определенная на E функция, к которой последовательность поточечно (равномерно) сходится

Пусть задан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n : E \to \mathbb{R}$

Определение 1.4. Говорят, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится на E, если $\forall x \in E$ $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))$ сходится. При этом, функция $S : E \to \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Определение 1.5. Функциональный ряд поточечно (равномерно) сходится на E, если последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ поточечно (равномерно) сходится на E

Утверждение 1.1. *Пусть* $g : E \rightrightarrows \mathbb{R}$ *ограничена*

1. *Если* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E, *то* $gf_n \rightrightarrows gf$ *на* E
2. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходится на* E, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} gu_n$ *также равномерно сходится на* E, *причем*
$$\sum_{n=1}^{\infty} gu_n = g\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Доказательство.

1. Пусть $|g| \leqslant M$. Для любого $x \in E$ имеем
$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M|f_n(x) - f(x)|$$
$$\sup_{x\in E} |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$$
2. Очевидно

□

Утверждение 1.2.

1. *Если* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E, $g_n \rightrightarrows g$ *на* E, *то* $\lambda f_n + mug_n \rightrightarrows \lambda f + \mu g$ *на* E.

2. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *равномерно сходится на* E, *и* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n)$ *равномерно сходится на* E, *причем* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Доказательство.

1. $f_n + g_n \rightrightarrows f$ на E.

$$\forall x \in E |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

$$\sup_{x \in E} |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in E} |g_n(x) - g(x)|$$

□

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E, то $u_n \rightrightarrows 0$ на E

Доказательство. Если S_n — n-ая частичная сумма $sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то $u_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$ □

Задача. *Пусть* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E, $g : D \to E$, *тогда* $f_n \circ g \rightrightarrows f \circ g$ *на* D

Теорема 1.1 (Критерий Коши). $\{f_n\}$ *равномерно сходится на* $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)(1)$

Доказательство.

⇒ Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E. Зафиксируем $\varepsilon > 0, n \geqslant N$. Тогда $\forall x \forall n, m \geqslant N |f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

⇐ Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет (1). Тогда $\forall x \in E \{f_n(x)\}$ фундаментальна. Положим $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N из условия (1). Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \forall x \in E \forall n \geqslant N$$

Это означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

□

Следствие (Критерий Коши). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \forall x \in E \left(\left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon \right)$

Следствие. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, все функции f_n непрерывны на $\overline{E}$. Если $\{f_n\}$ равномерно сходится на E, то $\{f_n\}$ равномерно сходится на $\overline{E}$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по Критерию Коши, $\exists N \forall n, m > N \forall x \in E (|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon)$. Пусть $y \in \overline{E} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset E : (x_k \to y)$. В неравенстве $|f_n(x_k) - f_m(x_k)| \leqslant \varepsilon$ переходим к прелельному переходу, получаем, что $|f_n(y) - f_m(y)| \leqslant \varepsilon$. Тогда $\{f_n\}$ равномерно сходится на $\overline{E}$ □

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ — сходится на $(1, \infty)$ нераівеномерно.

Доказательство. Предположим противное. Но тогда, по следствию 2, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ равномерно сходтися на $[1, \infty)$, противоречие □

Теорема 1.2 (О непрерывности предельной функции). *Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, и все функции f_n непрерывны на E, то f — непрерывна на E*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $existsN \forall n \geqslant N \forall x \in E \left(|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Для любого $x \in E$

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leqslant |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Т.к. f_N непрерывна в a, то $\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E \left(|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Но тогда $\forall x \in B_\delta(a) \cap E(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Значит f непрерывна в $\forall a \in E$. □

Замечание. В условиях предыдущей теоремы, если a — предельная точка E, то $\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$

Следствие (О непрерывности суммы ряда). Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E и все функции u_n непрерывны на E, то сумма ряда также непрерывна на E.

Пример. $f_n(x) = n^\alpha x^n, x \in [0, 1], f_0 \equiv 0$

$$\rho_n = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \Rightarrow (f_n \rightrightarrows_{[0,1]} f_0 \Leftrightarrow \alpha < 0)$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{n^\alpha}{n+1} = \int_0^1 f_0(x)dx = 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Теорема 1.3 (Об интегрируемости предельной функции). *Если $f_n \rightrightarrows_{[a,b]} f, f_n \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$, причем $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$*

Доказательство. Докажем, что $f \in R[a, b]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной сходимости, $\exists N \forall n > N \forall x \in [a, b] \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Оценим колебание f на $E \subset [a, b]$, то есть оценим $\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(y) - f(x)|$. Т.к. $f = (f - f_N) + f_N \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant |f - f_N|(y) - |f - f_N|(x)| + |f_N(y) - f_N(x)| \Rightarrow \omega(f, E) \leqslant \omega(f - f_N, E) + \omega(f_N, E), \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. По критерию Дарбу, $\exists T$ — разбиение $[a, b]$, такое, что $\Omega_T(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для разбиения T имеем $\Omega_T(f) \leqslant \sum \omega(f, E)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Но тогда $f \in R[a, b]$. При этом,

$$\left| \int_a^b f_n(x)fx - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon$$

□

Следствие (О почленном интегрировании ряда). Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$ и все $u_n \in R[a, b]$, то сумма ряда также $\in R[a, b]$

Доказательство.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right)$$

□

Замечание. В условиях предыдущей теоремы, $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Теорема 1.4 (О дифференцируемости предельной функции)**.** *Пусть I — некоторый промежуток и заданы функции $f_n : I \to \mathbb{R}$, такие, что:*

1. *$f_n \to f$ на I*
2. *Все f_n дифференцируемы на I*
3. *$f'_n \rightrightarrows g$ на I*

Тогда f дифференцируема на I, причем $f' = g$ на I.

Доказательство. Пусть $x \in I$. Рассмотрим $\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}, t \neq x \\ f'_n(x), t = x \end{cases}$ $\varphi_n \to \varphi$ на I, где $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, t \neq x \\ g(x), t = x \end{cases}$. Покажем, что сходимость равномерная. Действительно, при $t \neq x$

$$\varphi_n(t) - \varphi_m(t) = \frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(x) - f_m(x))}{t - x} = f'_n(c) - f'_m(c)$$

Для некоторой c, лежащей между t, x. Т.к. $\{f'_n\}$ равномерно сходится на I, то $\{f'_n\}$ удовлетворяет условию Коши. Тогда условию Коши удовлетворяет и $\{\varphi_n\}$. По критерию Коши, $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на I, все φ_n непрерывны в $x \Rightarrow \varphi$ непрерывна в точке x, т.е. $\lim_{t\to x} \varphi(t) = \varphi(x)$, или $f'(x) = g(x)$. □

Замечание. В условиях предыдущей теоремы, $\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$

Следствие (О почленном дифференцировании ряда)**.** Пусть I — невырожденный промежуток, и $u_n : I \to \mathbb{R}$, т.ч.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ почленно сходится на I
2. все u_n дифференцируемы на I
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на I

Тогда сумма ряда дифференцируема на I.

Доказательство.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

□

Замечание. В предыдущей теореме равномерную сходимость производных нельзя заменить равномерной сходимостью функций.

Пример. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} f_n(x) \to f(x) = |x|$. Предельная функция не дифференцируема в 0.