

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА
V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h/ν

Автор: *Павел Дуров*
Репозиторий на Github

осень 2022

Содержание

1	Динамическое программирование	2
-------------------	---	----------

1 Динамическое программирование

Задача: Пусть есть полоска $1 \times n$, где в i -ой клетке записано число a_i . В нулевой клетке находится кузнечик, способный прыгать на 1 или 2 позиции вправо. Хотим найти максимальную сумму

Доказательство.

Достаточно заметить, что понав на i -ую позицию, предыдущие прыжки никак не повлияют на максимальное значение с начальной точкой в текущей позиции.

Решение:

1. Заведём массив dp , где в $dp[i]$ будет храниться максимальная сумма до данной клетки (то есть из всевозможных путей выбираем наибольший)
2. Запишем в $dp[0] = 0$, в $dp[1] = a_1$
3. Пусть k клеток заполнены. Тогда $k + 1$ -ая будет пересчитываться по формуле

$$dp[k + 1] = a_{k+1} + \max(dp[k], dp[k - 1])$$

4. Тогда наш ответ равен значению $dp[n]$

-Асимптотика $O(n)$

□

Доказательства во всех задачах ДП проводятся по индукции по шагу алгоритма

ОБЩАЯ КОНЦЕПЦИЯ:



Задача с ЕГЭ: Есть таблица $n \times t$, где в каждой клетке написана ее цена. Хотим найти максимальный путь из нижнего левого угла в правый верхний.

R.S. двигаемся только вверх или вправо

Решение:

1. Создаем массив $n \times t$, где в каждой клетке хранится наибольшая цена среди путей до этой клетки.
2. Записываем во всех "крайних клетках" сумму на единственном пути до нее.
3. Для остальных клеток формула пересчета такая:

$$dp[i][j] = a_{ij} + \max(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1])$$

4. Получаем ответ в клетке $dp[n][t]$

-Асимптотика $O(nm)$

Еще задачка: НОП (наибольшая общая последовательность)

Ищем наибольшую по длине общую последовательность в двух s и t .

1. Пусть $dp[i][j]$ - длина НОП для последовательностей $s_{1,2,\dots,i}$ и $t_{1,2,\dots,j}$

2. $dp[0][0] = 0, dp[0][0] = 0$

3. Хотим найти $dp[i][j]$:

(a) s_i не участвует в НОП $\rightarrow dp[i-1][j]$

(b) t_j не участвует в НОП $\rightarrow dp[i][j-1]$

(c) s_i и t_j участвуют в НОП, тогда они должны быть равны и ответ: $dp[i-1][j-1] + 1$

И еще одна: НВП (наибольшая возрастающая последовательность)

Решение 1:

1. $dp[i][k]$ - минимальное значение элемента, на котором заканчивается последовательности длины k , если рассматривать только элементы a_1, a_2, \dots, a_i

2. $dp[0][0] = -\infty, dp[0][k > 0] = +\infty$

3. Пусть известна $dp[i-1][0]$

Далее, есть 2 случая:

(a) Не берем a_i , тогда ответ равен $dp[i-1][j]$

(b) Берем a_i Тогда найдем $\min k$, что $dp[i][k] \geq a_i$ и поменяем значение на a_i

Заметим, что выполняется инвариант:

$$dp[i][0] < dp[i][1] < \dots < dp[i][k]$$

А тогда, кроме $dp[i][k]$ под условие б) ничего не подойдет, а еще, это k можно найти с помощью бин поиска.

Таким образом, ДП в этой задаче будет заполняться построчно, где $i+1$ -ая строка получается из i -ой изменением одного элемента

Асимптотика $O(n \log n)$

Решение 2:

Оживляем элементы по возрастанию, предварительно стабильно отсортировав их. $dp[i]$ - максимальная длина ВП, оканчивающейся в a_i на момент оживления этого элемента.

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp[i]$	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times

 \rightarrow

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp[i]$	\times	\times	1	\times	\times	\times	\times

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp[i]$	1	\times	1	\times	\times	\times	\times

 \rightarrow

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp[i]$	1	2	1	\times	\times	\times	\times

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp[i]$	1	2	1	\times	3	\times	\times

 \rightarrow

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp[i]$	1	2	1	3	3	\times	4

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp[i]$	1	2	1	3	3	4	4

Несложно заметить, что $dp[i]$ будет равно максимальному значению слева от текущей ячейки, что мы умеем находить за $O(\log n)$ через ДО

Тогда итог (максимальное значение в таблице) будет найдено за $O(n \log n)$

Последняя: (Рюкзак)

Есть n предметов, w_i - вес i -го элемента, а c_i - его стоимость. Вместимость рюкзака - W . Найти максимальную стоимость содержимого.

Обозначим за $dp[i][a]$ максимальную стоимость предметов, если выбирать какие-то предметы из первых i с суммой веса a .

Тогда аналогично с предыдущей задачей будем вычислять $dp[i+1][a]$, выбирая a_{i+1} или не выбирая его.

Это будет соответствовать значениям $dp[i][a - w_i] + c_i$ и $dp[i][a]$

Тогда поскольку $a \in 0, 1, \dots, W$, окончательная асимптотика будет равна $O(nW)$