Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1 Паросочетания (в двудольных графах)

Определение 1.1. $G = (V, E)$ - граф, $M \subset E$ называется паросочетанием, если никакие два ребра из M не имеют общих концов.

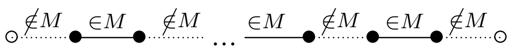
Подобные темы будут часто встречаться в задачах о назначениях, где нужно находить максимальное паросочетание

Определение 1.2.

1. Назовем ребро e насыщенным, если $e \in M$
2. Назовем вершину v насыщенной, если есть насыщенное ребро с этой вершиной.

Определение 1.3. Путь P в графе называется увеличивающим относительно паросочетания M, если:

1. P - простой
2. $|P| \geqslant 1$, то есть содержит хотя бы 1 ребро
3. Концы P - ненасыщенные
4. Типы ребер вдоль P чередуются



Теорема 1.1 (Берж)**.** *Паросочентание M - максимальное (то есть самое большое по размеру среди всех паросочетаний) $\Longleftrightarrow$ относительно M нет увеличивающих путей.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$ От противного. Пусть M - максимальное, но существует увеличивающий путь P. Выполнив чередование вдоль P, заменяя ребра не из M на ребра из M, мы его увеличим.

$\Longleftarrow$ От противного. Пусть M' - максимальное паросочетание, $H = (V, M \Delta M')$. Тогда в H степень каждой вершины не превосходит 2, так как каждое ребро берется из паросочетания, в котором степень каждой вершины равна 1.

Лемма 1.1. *Если $\Delta(H) \leqslant 2$, то любая компонента связности в H - либо простой путь, либо простой цикл.*

$\Delta(H)$ - *максимальная степень вершины*

Доказательство. Ходим, ходим, ходим - либо зациклились (тогда предпериода нет), либо дошли до конца пути. □

Теперь заметим, что H не содержит нечетных циклов, то есть циклов нечетной длины. Ведь цикл получен из ребер M и M', а значит, в нем ребра вида M и вида M' чередуются $\Longrightarrow$ длина цикла четна.

Итог: В H могут быть только

$\Rightarrow$ четные циклы

$\Rightarrow$ четные пути

$\Rightarrow$ нечетные пути

Первые два типа содержат одинаковое число ребер из M и M', тогда по нашему предположению существует хотя бы 1 нечетный путь, причем в нем количество ребер из M' больше. Тогда это будет увеличивающим для M. Противоречие. □

Замечание. Для поиска наибольшего паросочетания можно находить увеличивающий путь, делать из него паросочетание и т. д.

1.1 Алгоритм Куна:

G - двудольный граф. Положим M максимальное паросочетание, равное изначально $\varnothing$. Пока в G есть увеличивающий путь относительно M, выполняем вдоль него чередование, увеличивая $|M|$.

Как находить увеличивающий путь?

Заметим, что увеличивающий путь в двудольном графе - это просто путь в ориентированном графе из ненасыщенной вершины левой доли в ненасыщенную вершину правой доли. А значит, нам нужно просто запустить dfs.

```
// L - левая доля
// R - правая доля
vector<vector<int>> g; // g[v] - список соседей вершин L
vector<int> match; // match[u] = -1, если u (из R) не насыщенна, и сосед слева иначе
vector<bool> used = {false, false, ..., false};

// функция проверки "есть ли увеличивающий путь с начальной вершиной v"
bool Augment(int v) {
  if (used[v]) return false;
  used[v] = true;
  for (int to : g[v]) {
    if ((match[to] == -1) || Augment(match[to])) {
      match[to] = v; return true;
    }
  }
  return false;
}

for (int v = 0; v < n; ++v) {
  if (Augment(v)) {
    used = {false, false, ..., false};
  }
}
```

Асимптотика $O(ans \cdot m)$

Замечание. Кажется, что после $Augment(v) = true$ надо начинать проверку с самой первой вершины, но это не так.

Утверждение 1.1. *Пусть M получено из M чередованием вдоль увелчивающего пути. Пусть из v $\nexists$ увеличающего пути относительно M. Тогда из v $\nexists$ увеличивающего пути относительно M'.*

Доказательство. Пусть x, y - ненасыщенные концы увеличивающего путя L, из которого M была получена. Пусть существует увеличивающий путь K из v относительно M'. Понятно, что v лежит вне L. Пусть пути K и L пересекаются в вершине z (Почему пересекаются?), тогда какой-то из путей $v \to z \to x$ или $v \to z \to y$ будет увеличивающим относительно M, то есть будет рассмотрен нами. □

Определение 1.4. Независимое множество графа G - подмножество вершин, где никакие 2 вершины не соединены ребром.

Определение 1.5. Вершинное покрытие графа G - подмножество вершин C такое, что любое ребро графа содержит хотя бы один элемент C.

Теорема 1.2 (Кёниг). *В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.*

Доказательство. Предъявим алгоритм:

1. Находим максимальное паросочетание.
2. Ориентируем все ребра так, чтобы ребра не из M вели из левой доли в правую, а ребра из M - из правой в левую.
3. Запустим обход графа из всех ненасыщенных вершин L.

   Обозначим за L^+, R^+ - посещенные вершины из соответсвующих долей графа, а L^-, R^- - непосещенные
4. $L^+ \cup R^-$ - максимальное независимое множество, $(L^- \cup R^+)$ - минимальное вершинное покрытие.

   Это так, так как не существует ребер из

   (a) $L^+ \to R^-$
   (b) $R^+ \to L^-$
   (c) $R^- \to L^+$

Почему $(L^- \cup R^+)-$ минимальное вершинное покрытие?

Заметим, что все вершины в этом множестве насыщенные.

L^- : все ненасыщенные из левой доли лежат в L^+

R^+ : если есть ненасыщенная, то мы нашли увеличивающий путь.

При этом каждое ребро M пересекается с $L^- \cup R^+$ не более чем 1 концом. А тогда размер этого множества не больше размера паросочетания. Оценка в другую сторону очевидна. □