Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Репозиторий на Github

осень 2022

Содержание

Утверждение 0.1 (Интегрирование по частям)**.** *Пусть f, g — дифференцируемы на $[a,b]$ и f', g' локально интегрируемы на $[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^{b-0} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Данную формулу нужно понимать так: существование двух конечных пределов из 3 влечет существование третьего и выполнения равенства

Доказательство. Используем предельный переход □

Утверждение 0.2 (Замена переменной)**.** *Пусть f непрерывна на $[a,b)$, $\varphi(x)$ — дифференцируема, φ строго монотонна на $[\alpha,\beta)$, причем φ' локально интегрируема на $[\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$. Тогда:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство. Определим функцию $F(c) = \int_a^c f(x)dx, \Phi(x) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. По формуле замены переменной в определнном интеграле:

$$F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma) \forall \gamma \in [\alpha, \beta)$$

. Пусть в $\overline{\mathbb{R}}$ существует $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда по свойству предела композиции существует

$$\lim_{\gamma\to b-0} \Phi(\gamma) = \lim_{c\to b-0} F(c) = I$$

так что

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I$$

□

В условиях предыдущего свойства φ обратима и $\varphi^{-1} \to \beta$ при $c \to b-0$. Поэтому по свойству предела композиции существование $\lim_{\gamma\to\beta-0}\Phi(\gamma)$ влечет существование равного $\lim_{c\to b-0} F(c)$, т.е. существовование правой части влечет существование левой.

Определение 0.1. Примем следующее соглашение:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Задача.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$$

Решение. Видно, что это несобственный интеграл, т.к. функция не определена в 0. Докажем, что он сходится.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)dx = x\ln x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}(\ln\frac{\pi}{2} - 1)$$

Заметим, что интеграл
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)dx$$
Сходится, т.к. сходится $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Теперь вычислим его значение.

$$I =_{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(2t))dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(t))dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))dt =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(t))dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(z))dz = \pi\ln 2 + 2I \Rightarrow I = \pi \ln 2$$

Теорема 0.1 (Коши). *Пусть f — локально интегрируема на $[a, b)$.*

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists b_\varepsilon \in [a, b) \forall \xi, \eta \in (b_\varepsilon, b) \left(\left|\int_\xi^\eta f(x)dx\right| < \varepsilon\right)$$

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b)$, то $\int_\xi^\eta f(t)dt = F(\eta) - F(\xi)$. Следовательно, доказательство утверждения — переформулировка крититерия Коши существования предела F. □

Определение 0.2. Пусть f — локально интегрируема на $[a, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$. Если несобственный интеграл сходится, но не сходится абсолютно, то он называется условно сходящимся.

Следствие. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Доказательство.
$$\forall[\xi, \eta] \subset [a, b] \left(\left|\int_\xi^\eta f(x)dx\right| \leqslant \int_\xi^\eta |f(x)|dx\right)$$
Поэтому, если интеграл от $|f|$ по $[a, b]$ удовлетворяет условию Коши, то по условию Коши удовлетворяет и интеграл от f по $[a, b)$. □

Замечание. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

0.1 Несобственный интеграл от неотрицательной функции

Лемма 0.1. *Пусть f локально интегрируема и $f \geqslant 0$ на $[a, b]$. Тогда*
$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ определена на } [a, b]$$

Доказательство. Функция F неотрицательна и нестрого возрастает на $[a, b)$, т.к. $\forall x_1, x_2 \in [a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \int_a^b f(t)dt \geqslant 0$. По теореме о пределе монотонной функции, существует
$$\lim_{x \to b-0} F(x) = \sup_{x \in [a,b)} F(x)$$

Следовательно, органиченность F на $[a,b)$ равносильна $\exists \lim_{x\to b-0} F(x) \in \mathbb{R}$, т.е. сходимость $\int_a^b f(x)dx$. $\square$

Замечание. Несобственный интеграл от неотрицательной функции либо сходится, либо расходится к $+\infty$. Для сходимости достаточно установить органиченность некоторой последовательности $I_n = \int_a^b f(x)dx$, где $c_n \in [a,b), c_n \to b-0$. Это следует из того, что $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_a^b f(x)dx$

Теорема 0.2 (Признак сравнения)**.** *Пусть f, g — локально интегрируемы на $[a,b)$ и $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a,b)$.*

1. *Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то $\int_a^b g(x)dx$ — тоже*
2. *Если $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ — тоже*

Доказательство. 1.

$$\forall x\ in[a,b) 0 \leqslant \int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt$$

Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то по Лемме 1, $\int_a^x g(t)dt$ определена на $[a,b)$, следовательно, ограничена $\int_a^x f(t)dt$ на $[a,b)$, что по Лемме 2 влечет сходимость $\int_a^b f(x)dx$.

2. Следует из контрпозиции первого

$\square$

Следствие. Пусть f, g локально интегрируемы на $[a,b)$ и $f, g \geqslant 0$ на $[a,b)$. Если $f(x) = O_{x\to b-0}(g(x))$, то справедливы утверждения 1, 2 теоремы

Доказательство. В силу неотрицательности f, g и определения символа $O, \exists C > 0, a^* \in [a,b) \forall x \in [a^*, b)(f(x) \leqslant Cg(x))$. Если $\int_{a^*}^b g(x)dx$ сходится, то $\int_{a^*}^b Cg(x)dx$ — тоже. Тогда по Теореме 2, сходится и $\int_{a^*}^b f(x)dx$, а значит, $\int_a^b f(x)dx$ — тоже. $\square$

Следствие. Пусть f, g локально интегрируемы на $[a,b)$ и $f, g > 0$ на $[a,b)$. Если $\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, то $\int_a^b f(x), \int_a^b g(x)$ сходятся или не сходятся одновременно.

Доказательство. В условиях теоремы 2 также $\exists \lim_{x\to b-0} \frac{g(x)}{f(x)} \in (0, +\infty)$. Тогда:

1. $f(x) = O_{x\to b-0}(g(x))$
2. $g(x) = O_{x\to b-0}(f(x))$

$\square$

Пример.
$\int_0^{+\infty} x^{2024} e^{-x^2} dx$ Посчитаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2026}}{e^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1013}}{e^t}$$

Применим правило Лопиталя 1014 раз:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1013}}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{0}{e^t} = 0$$

$$x^{2024}e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \to +\infty$$

Но при этом

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \text{ сходится}$$

Пример.

$\int_{\to 0}^1 \frac{dx}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}$

$$\operatorname{tg}^2\sqrt{x} \sim x, x \to +0$$

$$\int_{\to 0}^1 \frac{dx}{x} \text{ расходится}$$