Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Проект на Github

осень 2022

Содержание

Короче, как-то будем сдавать какой-то экзамен. Очень сложно, ничего не понятно

1 Вступление

Вот у нас были натуральные числа:

$$\begin{gathered} 0 = \varnothing \\ 1 = \{\varnothing\} \\ 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\ \vdots \\ n + 1 = \{0, 1, 2, \dots n\} \end{gathered}$$

Вопрос: что будет в бесконечности?

$$\begin{gathered} \omega = \{0, 1, 2, \dots\} \\ \omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\} \\ \omega + 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} \\ \vdots \\ 2\omega = \dots \\ 2\omega + 1 = \dots \\ \vdots \\ 3\omega = \dots \\ \vdots \\ \omega \cdot \omega = \dots \end{gathered}$$

Таким образом, получаем различные многочлены от ω, если продолжать этот абсурд, то получится ω^ω, потом получится $\underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}}}}_{\omega}$ и короче всякое такое.

2 Фундированные множества

Определение 2.1. Пусть S — ЧУМ. Тогда S называется Фундированным, если $\forall A \subset S \exists \min A$

Пример (Фундированные)**.**

1. $\mathbb{N}, \leqslant$
2. $\mathbb{N}, |$
3. $\{a, b\}^*, \sqsubset$

Пример (Не фундированные)**.**

1. $\mathbb{Z}, \leqslant$
2. $\mathbb{N}, \geqslant$
3. $[0, 1], \leqslant$
4. $\{a, b\}^*, \leqslant_{lex}$

2.1 Свойства, эквивалентные фундированности

1. (БС) Невозможность бесконечного спуска

$$\nexists a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

2. (Ст) Стабилизация

$$\forall a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \dots \Rightarrow \exists k : \forall n > k (a_k = a_n)$$

3. (ТИ) Трансфинитная индукция

$$\forall x (\forall y < x \;\; \varphi(y) \to \varphi(x)) \Rightarrow \forall z \varphi(z)$$

Теорема 2.1. *Свойства Фундированность, БС, Ст, ТИ эквивалентны.*

Доказательство.

1. $\neg\Phi \Rightarrow \neg$БС. Пусть $A \neq \varnothing, \nexists \min A$. Тогда $\forall a_1 \in A \exists a_2 \in A : a_2 < a_1$. Используя аксиому выбора (выбирая по одному элементу из оставшихся), получается бесконечную убывающую последовательность.

2. $\neg\Phi \Leftarrow \neg$БС. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Рассмотрим это множество, в нем не будет минимального элемента.

3. $\neg$БС $\Rightarrow \neg$Ст. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Заметим, что для это последовательности неверна стабилизация.

4. $\neg$БС $\Leftarrow \neg$Ст. Рассмотрим последовательность, которая не стабилизируется. Тогда $\forall n \exists k : a_n > a_k$. Тогда $\exists$ бесконечная убывающая цепочка.

5. $\neg\Phi \Rightarrow \neg$ТИ. $A \neq \varnothing$ — множество без минимального элемента, $\varphi(x) \Leftrightarrow x \notin A \Rightarrow \varphi(x) \not\equiv 1$.

$$\forall y < x \; y \notin A \Rightarrow x \notin A$$

   Утверждение вверу верно, т.к. $\forall y < x (y \notin A, x \in A) \Rightarrow x = \min A$.

6. $\neg\Phi \Leftarrow \neg$ТИ. Тогда для некоторго φ верно, что

$$\forall x (\forall y < x \; \varphi(y) \to \varphi(x))$$

   Но

$$\neg \forall z \varphi(z) (1)$$

   Пусть $A = \{z | \varphi(z) = 0\}$. Причем A непусто, т.к. (1). Тогда рассмотрим минимальный элемент в A и получим противоречие с определением ТИ.

$\square$

Определение 2.2. Вполне упорядоченное множество — Линейная упорядоченность + Фундированность

Пример.

$$\mathbb{N}, \leqslant \qquad \omega$$

$$\left\{1-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_{+}\right\} \qquad \omega$$

$$\left\{1-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_{+}\right\} \cup\left\{2-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_{+}\right\} \qquad \omega \cdot 2$$

$$\left\{k-\frac{1}{n} | k, n \in \mathbb{N}_{+}\right\} \qquad \omega^{2}$$

$$\left\{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m} | m, n \in \mathbb{N}_{+}\right\} \qquad \omega^{2}$$

$$\left\{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{k} | m, n, k \in \mathbb{N}_{+}\right\} \qquad \omega^{3}$$

$$\left\{1-\frac{1}{n_{1}}-\frac{1}{n_{2}}-\cdots-\frac{1}{n_{k}} | k - \text{произвольное}\right\} \quad \text{не фундированное}$$

$$\left\{k-\frac{1}{n_{1}}-\frac{1}{n_{2}}-\cdots-\frac{1}{n_{k}} | k - \text{произвольное}\right\} \qquad \omega^{\omega}$$

Определение 2.3. Пусть S — ВУМ. Тогда $K \subset S$ называется начальным отрезком, если $\forall x, y((x \in K \wedge y<x) \rightarrow y \in K)$

Эквивалентные свойства:

$$\forall x \in K \forall y \notin K x<y$$

$$\forall x, y((x \notin K \wedge y>x) \rightarrow y \notin K)$$

2.2 Непосредственно следующие элементы

Утверждение 2.1. *S — ВУМ, $x \in S, x$ — не наибольший в $S \Rightarrow \exists! y(y>x \wedge \neg \exists z y>z>x)$.*

Доказательство. $\exists$ — из Фундированности, $y=\min \{t \in S | t>x\}$ □

Определение 2.4. y из предыдущего утверждения называется непосредственно следующим элементом после x и обозначается $x+1$.

Замечание.

$$[0, a]=[0, a+1)$$

Теорема 2.2. *K — начальный отрезок $S \Rightarrow K=S \vee K=[0, a)$*

Доказательство. Если $K=S$, то победили, иначе рассматриваем $a=\min (S \backslash K)$. Докажем, что $K=[0, a)$.

1. $K \subset[0, a)$: Если $x \in K, x>a$, то $a \in K$, но $a \in S \backslash K$
2. $K \supset[0, a)$: Если $x<a, x \notin K$, то $a \neq \min (S \backslash K)$ — противоречие.

□

Пример.

1. S
2. $[0, \alpha] = \{x | x \leqslant \alpha\}$
3. $[0, \alpha) = \{x | x < \alpha\}$

2.3 Предельные элементы

Определение 2.5. z назывется предельным элементом, если $\nexists y (z = y + 1)$.

или

Определение 2.6. z назывется предельным элементом, если

$$\forall y < z \exists t \in (y, z)$$

Теорема 2.3. *S — ВУМ, $x \in S \Rightarrow \exists l \in S, k \in \mathbb{N} : x = l + k = l + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k}$*

2.4 Сложение и умножение Фундированных множеств и ВУМов

Сложение и умножение определены так же, как и для ЧУМов.

Теорема 2.4.

1. *A, B — фундированные, тогда и $A + B$ — тоже.*
2. *A, B — ВУМ, тогда и $A + B$ — тоже.*
3. *A, B — фундированные, тогда и $A \cdot B$ — тоже.*
4. *A, B — ВУМ, тогда и $A \cdot B$ — тоже.*

Доказательство. $C \subset A \sqcup B$:

1. (a) $C \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \min(C \cap A)$ — существует, т.к. A — фундированное
   (b) $C \cap B \neq \varnothing \Rightarrow \min(C \cap B)$ — существует, т.к. B — фундированное
2. Подмножество ЛУМа — ЛУМ, поэтому победили по (1).

□

Замечание. Любое подмножество ВУМ — тоже ВУМ

Замечание. Множество предельных элемнтов ВУМа — ВУМ

Замечание. Между любыми двумя предельными элементами бесконечно много других

Замечание. Элементы между соседними предельными элементами образуют множество, $\approxeq \omega$

Теорема 2.5 (О структуре ВУМ)**.** *S — ВУМ, тогда $\exists L$ — тоже ВУМ, конечное множество K, такие, что $S \cong \omega \cdot L + K$*

Теорема 2.6 (О сравнимости ВУМов)**.** *Любые два ВУМа либо изоморфны, либо один из них изоморфен начальному отрезку другого.*

Доказательство. Рекурсивно построим $f : A \to B$. Пусть f определена на $[0, x) \subset A$. Тогда определим $f(x) = \min(B \setminus f([0, x)))$ (рекурсивно).

Теорема 2.7 (О трансфинитной рекурсии)**.** *Если задано правило $f(x) = F(f|_{[0,x)})$, то есть ровно одна f, которая соответствует правилу.*

Доказательство.

Единственность. Пусть f, g — 2 подходящие функции.

$$\{x|f(x) \neq g(x)\} \neq \varnothing \Rightarrow \exists m = \min\{x|f(x) \neq g(x)\} \Rightarrow f|_{[0,m)} = g|_{[0,m)}$$

Но тогда $f(m) = F(f|_{[0,m)}) = F(g|_{[0,m)}) = g(m)$, противоречие.

Существование. По трансфинитной индукции докажем сущесвование $f|_{[0,x)}$, соответствующее F.

$$\forall y < x \exists f|_{[0,y)} \Rightarrow \exists f|_{[0,x)}$$

(a) $x = w + 1 \Rightarrow \exists f|_{[0,w)}, f(w) = F(f|_{[0,w)})$

(b) x — предельное — в следующий раз

□

Теорема 2.8 (Обобщенная теорема о трансфинитной рекурсии)**.** *F может быть частично определена, тогда f определена на начальном отрезке.*

□