Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

О С Н О В Ы К О М Б И Н А Т О Р И К И И Т Е О Р И И Ч И С Е Л

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

Определение 0.1. Пусть $\{x_n\} \subset X, a \in X$. Говорят, что x_n сходится к a, если $\rho(x_n, a) \to 0$. Пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Замечание.
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (x_n \in B_\varepsilon(a))$$

Следствие. $x_n \to a, x_n \to b \Leftrightarrow a = b$

Доказательство. $0 \leqslant \rho(a, b) \leqslant \underbrace{\rho(a, x_n)}_{\to 0} + \underbrace{\rho(x_n, b)}_{\to 0}$ □

Следствие. $x_n \to a \Rightarrow \{x_n\}$ — ограничена (то есть $\{x_n\}$ ограничено как множество).

Доказательство. $\rho(x_n, a) \to 0 \Rightarrow \{\rho(x_n, a)\}$ ограничена $\Rightarrow \exists R \in \mathbb{R} : R > \sup\{\rho(x_n, a)\} \Rightarrow x_n \in B_R(a)$. □

Следствие. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} : x_n \to a, y_n \to b$ — последовательности в нормированном линейном пространестве, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R} : \alpha_n \to \alpha$. Тогда

1. $x_n + y_n \to a + b$
2. $\alpha_n x_n \to \alpha a$

Доказательство.

1. $\|x_n + y_n - (a + b)\| \leqslant \underbrace{\|x_n - a\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n - b\|}_{\to 0}$
2. $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha a\| \leqslant \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\to 0} \|x_n\| + |\alpha| \underbrace{\|x_n - a\|}_{\to 0}$

□

0.1 Топология метрических пространств

Определение 0.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$.

1. $x \in int\ E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset E$. Множество $int\ E$ называются множеством внутренних точек
2. $x \in ext\ E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$. Множество $ext\ E$ называются множеством внешних точек
3. $x \in \delta E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing, B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing$. Множество δE называются множеством граничных точек

Определение 0.3.

1. $X = int\ E \sqcup ext\ E \sqcup \delta E$
2. $ext\ E = int\ (X \setminus E)$

Определение 0.4. Множество $G \subset X$ называется открытым, если все его точки являются внутренними ($G = int\ G$)

Определение 0.5. Множество $G \subset X$ называется открытым, если $X \setminus G$ открыто

Утверждение 0.1.

1. *Открытый шар $B_r(a)$ открыт*
2. *Замкнутый шар $\overline{B_r}(a)$ замкнут*
3. *$int\ E$ открыто*

Доказательство.

1. $x \in B_r(a)$. Положим $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Тогда если $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow \rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) \leqslant \varepsilon + \rho(x, a) \leqslant r \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.
2. $x \in X \setminus \overline{B_r}(a)$. $\varepsilon = \rho(x, a) - r \Rightarrow$ аналогично пункту 1), $X \setminus \overline{B_r}(a)$ — открыто, т.е. $\overline{B_r}(a)$ — замкнуто
3. $x \in int\ E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset int\ E$, т.к. $B_\varepsilon(x)$ — открыто.

□

Лемма 0.1. *Объединение любого количества открытых множеств и пересечение конечного количества открытых множеств является открытым множеством*

Доказательство. Аналогично случаю для $\mathbb{R}$ □

Определение 0.6. $\overset{\circ}{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$

Определение 0.7. Точка $x \in X$ называется предельной множества E, если $\forall \varepsilon > 0\ \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$

Множество всех предельных точек принято обозначать через E'

Теорема 0.1 (Критерий замкнутости)**.** *Следующие утверждения равносильны:*

1. *E — замкнуто*
2. *$E \supset \delta E$*
3. *$E \supset ext\ E$*
4. *$\forall \{x_n\} \subset E (x_n \to x \Rightarrow x \in E)$*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $x \in X \setminus E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$, т.е. x — внешняя точка E. Тогда $\delta E \subset E$

$2 \Rightarrow 3$: Пусть x — предельная точка тогда она либо внутренняя, и тогда $x \in E$, либо граничная, но $\delta E \subset E \Rightarrow x \in E$

$3 \Rightarrow 4$: Пусть $\{x_n\} \subset E, x_n \to x$. Тогда либо $\exists x_n = x$ и тогда $x \in E$, либо x — предельная точка, и она $\in E$.

$4 \Rightarrow 1$: Рассмотрим $x \in X \setminus E$. Пусть она не является внутренней для $X \setminus E$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \Rightarrow$ рассмотрим последовательность точек $x_n \in \exists B_\varepsilon(x) \cap E : x_n \to x$. Такая последовательность существует по Аксиоме Выбора ($\exists \varphi : 2^X \to X : \varphi(x) \subset X \Rightarrow x_n = \varphi\left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)$). Но тогда $x \in E$. Противоречие

□

Определение 0.8. $\overline{E} = E \cup \delta E$ — замыкание множества E

Замечание.

1. $\overline{E} = X \setminus ext\ E$
2. $F \supset E$, причем F — замкнутое. Тогда $F \supset \overline{E}$

Доказательство.

1. $X = int\ E \cup ext\ E \cup \delta E$.
2. $X \setminus F \subset X \setminus E \Rightarrow X \setminus F \subset int\ (X \setminus E) \Rightarrow F \supset \overline{E}$.

□

Замечание. $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E(x_n \to x)$

Определение 0.9. $x \in X$ называется точкой прикосновения E, если $\forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$

0.2 Подпространство метрического пространства

Определение 0.10. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\varnothing \neq E \subset X$. Тогда $\rho|_{E \times E}$ — метрика на E. Пара $(E, \rho|_{E\times E})$ называется подпространством (X, ρ), $\rho|_{E\times E}$ называется индуцированной метрикой на E

Определение 0.11. $B_r^E(x) = \{y \in E | \rho(x, y) < \varepsilon\}$

Замечание. $B_r^E(x) = B_r^X(x) \cap E$

Лемма 0.2. *U открыто в $E \Leftrightarrow \exists V \subset X : U = V \cap E$, причем V открыто*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $x \in U \Rightarrow \exists B^E_{\varepsilon_x}(x) \subset U$, т.е. $U = \bigcup_{x \in U} B^E_{\varepsilon_x}(x)$. Положим $V = \bigcup_{x\in U} B^X_{\varepsilon_x}(x)$ — открытое в X. Тогда $V \cap E = \bigcup_{x\in U}(B^X_{\varepsilon_x}(x) \cap E) = \bigcup_{x \in U} B^E_{\varepsilon_x}(x) = U$

$\Leftarrow$ $x \in U = V \cap E$, где V открыто в $X \Rightarrow \forall x \in V \exists B^X_\varepsilon(x) \subset V \Rightarrow B^E_\varepsilon(x) = B^E_\varepsilon(x) \cap E \subset V \cap E$.

□

Пример. $X = \mathbb{R}, E = (-1, 3]$.

1. $A = (1, 3] = (1, 4) \cap E$ — открыто в E (но не в X)
2. $B = (-1, 0)$ замкнута в E (но не в X)
3. $C = (0, 1]$ — не замкнуто и не открыто

0.3 Компакты

Пусть (X, ρ) — метрические пространства, $K \subset X$ — подпространство.

Определение 0.12. Семейство $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $G_\lambda \subset X$ называется покрытием K, если $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$

Определение 0.13. Если $\forall \lambda G_\lambda$ — открытое множество, то $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ называется открытым покрытием

Определение 0.14. K называется компактом в X, если $\forall$ открытого покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, существует конечное подпокрытие, т.е. $\exists m \in \mathbb{N}, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \in \Lambda : K \subset \bigcup G_{\lambda_i}$

Пример. Замкнутый брус $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ является компактом в $\mathbb{R}^n$

Доказательство. Пусть это не так. Поделим ребра изначального бруса пополам и рассмотрим брусья, которые получаются произведением отрезков, каждый из которых является половиной изначального отрезка соответственно. Один из таких брусьев не покрывается конечным числом G_λ, полученный брус назовем B^2 Разделим его на 2^n частей и будем продолжать процесс — получатся брусья $B^k \forall k$. Заметим, что $|b_n^k - a_n^k| \to 0$ при $k \to \infty$ (каждый отрезок делится пополам). Тогда последовательность отрезков $u_k = [a_n^k, b_n^k]$ будет стягивающейся. Тогда $\forall n \exists c_n : c_n \in [a_n^k, b_n^k]$. Тогда $\exists C \in \mathbb{R}^n : C = (c_1, c_2, \dots c_n) \in B^k \forall k$, при этом $\exists G_\lambda : C \in G_\lambda \Rightarrow \exists \varepsilon : B_\varepsilon(C) \subset G_\lambda$. Выберем k так, чтобы $\sum_{i=1}^n (b_i^k - a_i^k) < \varepsilon$. Так можно сделать, т.к. $[a_n^k, b_n^k]$ — стягивающаяся по k. Но тогда $\forall T \in B^k \quad \rho(T, C) \leqslant \sum_{i=1}^n (b_i^k - a_i^k) < \varepsilon \Rightarrow B^k \subset B_\varepsilon(C) \subset G_\lambda \Rightarrow$ противоречие, т.к. B^k не должно покрываться конечнм числом G_λ $\square$

Замечание. K — компакт в $(X, \rho) \Leftrightarrow K$ компакт в (K, ρ).

Доказательство. Следует из определения компактности и структуры подпространств $\square$

Лемма 0.3. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Если K — компакт, то K ограничено и замкнуто в X*

Доказательство. Пусть $a \in X$. Т.к $\{B_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — открытое покрытие $K \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие, т.е. $\exists N : K \subset \{B_n(a)\}_{n \leqslant N}$. Но тогда $K \subset B_N(a)$. Теперь, пусть $a \in X \setminus K$. Рассмотрим $\{X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Это тоже покрытие K. Но тогда $\exists N : K \subset \{X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n \leqslant N}$. Но тогда $K \in X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{N}}(a) \Rightarrow \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a) \cap K = \varnothing$. $\square$

Лемма 0.4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, K — компакт в X. Если $F \subset K$, F замкнуто в X, то F — компакт.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ для F. Тогда $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{X \setminus F\}$ — открытое покрытие K, т.к. $\bigcup G_\lambda \cup (X \setminus F) = X$. Поскольку K — компакт, то $K \subset \bigcup_{i \leqslant N} G_{\lambda_i} \cup (X \setminus F) \Rightarrow F \subset \bigcup_{i \leqslant N} G_{\lambda_i}$ $\square$

Лемма 0.5 (Лебега о покрытии)**.** *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$ — такое, что любая последовательность элементов из K имеет сходящуюся в K подпоследовательность. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — открытое покрытие K, тогда $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in K \exists \lambda \in \Lambda(B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda)$*

Доказательство. От противного. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K \forall \lambda \in \Lambda \left(B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset G_\lambda\right)$. По условию, $\exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to x \in K$. $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \exists \lambda_0 \in \Lambda(x \in G_{\lambda_0}) \Rightarrow \exists \alpha > 0 B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$ Начиная с какого-то момента, $x_{n_k} \in B_{\frac{\alpha}{2}}(x), \frac{1}{n_k} < \frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим $z \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Тогда $\rho(z,x) \leqslant \rho(z,x_{n_k}) + \rho(x,x_{n_k}) < \alpha$, т.е. $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$. Получили противоречие, т.к. $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset G_{\lambda_0}$ □

Теорема 0.2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *K — компакт*
2. *Любая полследовательность элементов из K имеет сходящуюся в K подпоследовательность.*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Предположим, что из последовательности $\{x_n\}$ нельзя выделить сходящуюся последовательность, т.е.

$$\forall a \in K \exists \delta_a > 0 \exists N_a \forall n \geqslant N_a (x_n \notin B_{\delta_a}(a))$$

Заметим, что $\{B_{\delta_a}(a)\}_{a \in K}$ — открытое покрытие K. Тогда $K = \bigcup_{i \leqslant N} B_{\delta_{a_i}}(a_i)$. Но тогда в каком-то из множеств $B_{\delta_{a_i}}(a_i)$ бесконечно много точек, противоречие, т.к. $\exists N_{a_i} \forall n \geqslant N_{a_i}(x_n \notin B_{\delta_{a_i}}(a_i)) \Rightarrow$ их должно быть конечно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть любая полследовательность элементов из K имеет сходящуюся в K. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, x_2 \dots x_n \subset K (K \subset \bigcup B_\varepsilon(x_i))$$

Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — открытое покрытие K по Лемме, $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in K \exists \lambda \in \Lambda (B_\varepsilon(x)) \subset G_\lambda$. Но тогда рассмотрим $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ такие, что $B_\varepsilon(x_i) \subset G_{\lambda_i} \Rightarrow K \subset \bigcup G_{\lambda_i}$

□

Следствие (Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$)**.** $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт $\Leftrightarrow$ K замкнуто и ограничено

Доказательство.

$\Rightarrow$ Лемма

$\Leftarrow$ K ограничено $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n, r > 0 : K \subset B_r(x)$. Рассмотрим $B = [x_1 - r_1, x_1 + r_1] \times [x_2 - r_2, x_2 + r_2] \times \dots \times [x_n - r_n, x_n + r_n]$. B — компакт, $K \subset B$ — замкнуто, тогда K — компакт.

□