Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

Теорема 0.1. *Универсальная Машина Тьюринга существует.*

0.1 Тезис Черча-Тьюринга

Подробнее...

0.2 Проблема самоприменимости

Пусть нам дана УМТ U. Рассмотрим $S = \{p | U(p, p) \text{ остановится}\}$

Теорема 0.2 (Тьюринга)**.** *S — перечислимо, неразрешимо*

Доказательство.

Перечислимость: S перечислимо, т.к. $S = Dom\ d(p) = U(p, p)$ — область определения вычислимой функции

Нерезрешимость: от противного. Пусть S разрешимо $\Leftrightarrow \chi_S$ вычислимо. Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} 0, \chi_S(x) = 0 \\ \neq U(x, x), \chi_S(x) = 1 \end{cases}$$

Т.к. $U(p, p)$ — УВФ, то $\exists q \forall x U(q, x) = f(x)$.

(a) $q \in S \Rightarrow U(q, q) = f(q) \neq U(q, q)$

(b) $q \notin S \Rightarrow f(q) = 0$, но $U(q, q)$ не определено

Получили противоречие.

□

0.3 Проблема остановки

$H = \{(p, x) | U(p, x) \text{ остановится}\}$

Теорема 0.3. *H — перечислимо, неразрешимо*

Доказательство.

Перечислимость: H перечислимо, т.к. $S = Dom\ U(p, x)$ — область определения вычислимой функции

Нерезрешимость: от противного. Пусть H разрешимо, но тогда и $S = H \cap D$ тоже разрешимо, где $D = \{(p, p) | p \text{ проивольное}\}$, противоречие, т.к. S неразрешимо.

□

Рассмотрим множества:

1. $C = \{p | \forall x, y (U(p, x), U(p, y) \text{ определены } \Rightarrow U(p, x) = U(p, y))\}$

2. $T = \{p | \forall x (U(p, x) \text{ определено})\}$

3. $FD = \{p | \{x | U(p, x) \text{ определено}\} \text{ конечно}\}$

Определение 0.1. Множество X называется коперечислимым, если $\overline{X}$ перечислимо

Утверждение 0.1. *C — коперечислимо, неразрешимо*

Доказательство. $\overline{C} = \{p | \exists (x, y, t, s)\ \ U(p, x)$ ост. за t шагов, $U(p, y)$ ост. за s шагов, $U(p, x) \neq U(p, y)\}$, а оно перечислимо □

Утверждение 0.2. *T, FD — некоперечислимо, некоперечислимо*

0.4 m-сводимость

Определение 0.2. $A \leqslant_m B$, если $\exists$ вычислимая всюду определенная функция $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$, такая, что $\forall x (x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B)$.

0.4.1 Свойства m-сводимости

Утверждение 0.3. *$A \leqslant_m B, B$ разрешимо $\Rightarrow A$ — разрешимо*

Доказательство. $\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$ □

Утверждение 0.4. $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \overline{A} \leqslant_m \overline{B}$

Утверждение 0.5. $A \leqslant_m B, B \leqslant_m C \Leftrightarrow A \leqslant_m C$

Замечание. Т.к. $A \leqslant_m A$, получили, что $\leqslant_m$ — предпорядок

Утверждение 0.6. *$A \leqslant_m B, B$ перечислимо $\Rightarrow A$ — перечислимо*

Следствие. $A \leqslant_m B, A$ неперечислимо $\Rightarrow B$ неперечислимо

0.5 Как получать новые неперечислимые множества?

Докажем, что T неперечислимо и некоперечислимо. Заметим, что $\overline{H}$ — неперечислимое множество. Если мы покажем, что

$$\begin{cases} \overline{H} \leqslant_m T \\ \overline{H} \leqslant_m \overline{T} \end{cases}$$

То мы получим, что T — неперечислимо, некоперечислимо. Однако, удобнее доказывать, что

$$\begin{cases} H \leqslant_m T(1) \\ H \leqslant_m \overline{T}(2) \end{cases}$$

Для этого

1. $(p, x) \mapsto q$, так, что $\forall y U(q, y) = U(p, x)$. Тогда $q \in H \Leftrightarrow q \in T$
2. $(p, x) \mapsto q$, так, что

$$U(q, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } U(p, x) \text{ не оставновится за } y \text{ шагов} \\ \text{не определено, иначе} \end{cases}$$

$$(p, x) \in H \Rightarrow \exists t \forall y \geqslant t U(q, y) \text{ не определено } \Rightarrow q \notin T$$
$$(p, x) \notin H \Rightarrow \forall y U(q, y) = 1 \Rightarrow q \in T$$

Получили T, неперечислимое и некоперечислимое.

0.6 Существует ли универасальная тотально вычислимая функция?

Что мы хотим: $U_T : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, такую, что

1. $\forall p, x\ U_T(p,x)$ определена
2. U_T вычислима
3. $\forall f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, такая, что f — вычислима, всюду определена и $\exists p \forall x f(x) = U_T(p,x)$

Утверждение 0.7. $\nexists U_T$

Доказательство. Иначе рассмотрим $d'(x) = U_T(x,x) + 1$. Тогда $\exists p \forall x\ d'(x) = U_T(p,x) = d'(p) \Rightarrow U_T(p,p) + 1 = U_T(p,p)$ □

Рассмотрим множество $NED = \{p | \exists x U(p,x)$ определено$\}$. Оно перечислимо (можно добавить квантор, указывающий, за какое число шагов).

Утверждение 0.8. $\overline{NED}$ *неперечислимо*

Доказательство. Покажем, что $H \leqslant_m NED \Leftrightarrow \overline{H} \leqslant_m \overline{NED}$. Сопостивим $(p,x) \mapsto q$, так, что

$$U(q,y) = \begin{cases} \text{не определено}, U(p,x) \text{ не остановится за } y \text{ шагов} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}, (p,x) \in H \Leftrightarrow q \in NED$$

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — перечисление $\overline{NED}$. Рассмотрим

$$U'(n,x) = \begin{cases} \text{не определено, если } n = 0 \\ U(p_n, x), n > 0 \end{cases}$$

Заметим, что $NED_{U'} = \{n | \exists x U'(n,x)$ определено$\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ — разрешимо □