Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

Проделаем переход индукции с прошлой лекции, напомним, что хотим доказать:

Теорема 0.1.

$$p_{k+2} = a_{k+2}p_{k+1} + p_k$$

$$q_{k+2} = a_{k+2}q_{k1} + q_k$$

Доказательство. Пусть $[a_0; a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}, [a_1; a_2, \dots, a_k] = \frac{p'_k}{q'_k}$

$$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n]} = a_0 + \frac{1}{\frac{p'_n}{q'_n}} = a_o + \frac{q'_n}{p'_n} = \frac{a_0p'_n + q'_n}{p'_n}$$

$$p_n = a_0p'_n + q'_n = a_0(a_np'_{n-1} + p'_{n-2}) + a_nq'_{n-1} + q'_{n-2} = a_n\underbrace{(a_0p'_{n-1} + q'_{n-1})}_{p_{n-1}} + \underbrace{a_0p'_{n-2} + q'_{n-2}}_{p_{n-2}}$$

□

Замечание. $p_{n+2} \cdot q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = p_nq_{n+1} - q_np_{n+1}$

Так как $p_0q_1 - q_0p_1 = a_oa_1 - (a_1a_0 + 1) = -1$, $p_nq_{n+1} - q_np_{n+1} = (-1)^{n+1}$ и $\frac{p_n}{q_n}$ нельзя сократить.

Замечание. $p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n = a_{n+2}(-1)^n$

Из прошлого замечания получаем еще одно тождество:

$$p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n = a_{n+2}\underbrace{(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n)}_{(-1)^n}$$

Утверждение 0.1. *Из первого замечания можно понять очень выжный факт:*

1. *Дроби с нечетным n убывают*
2. *Дроби с четным n возрастают*
3. *Но все они отличаются друг от друга на небольшое число -* $\frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}$

0.1 Бесконечная цепная дробь

Формально почти все операции над цепными дробями остаются без изменений, но значение дроби определяется как предел подходящего ряда:

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots] = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

Теорема 0.2. *(Докажут на семинаре)*

Предел всегда существует.

Пример. $[1; 1, 1, \dots, 1] = ?$

Пусть $[1; 1, 1, \dots, 1] = \alpha$. $1 + \frac{1}{\alpha} = \alpha \implies \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Теорема 0.3. *Если цепная дробь периодична, то ее значение будет являться квадратичной иррациональностью (решением квадратного уравнения с иррациональными коэффициентами)*

Доказательство. $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m}]$.

Аналогично с примером обозначаем дробь $[b_1; b_2, \dots, b_m]$ за β. Тогда:

$$b_m + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta b_m + 1}{\beta}$$

$$\frac{\beta}{\beta b_m + 1} + b_{m-1} = \frac{\beta + \beta b_{m-1} b_m + b_{m-1}}{\beta b_m + 1}$$

Понятно, что если выражать дальше β, то в числителе и знаменателе будет получаться линейная функция от β. $\beta = \frac{c_1\beta + c_2}{c_3\beta + c_4} \implies \beta$ - квадратичная иррациональность. □

Теорема 0.4. *(б/д) Верно и обратное.*

Теорема 0.5. $\forall \psi : \psi(q) \to +\infty \ \exists \alpha > 0$: *неравенство* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\psi(q)}$ *имеет бесконечно много решений в дробях* $\frac{p}{q}$.

Доказательство. Пусть построили дробь $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$. Найдем теперь a_{n+1} из соображений:

$\alpha - \frac{p}{q} \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{\frac{1}{q_n}\psi(q_n) q_n} < \frac{1}{\psi(q_n)}$, тесли выбрать a_{n+1} $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} > \psi(q_n) \cdot \frac{1}{q_n}$ □

Определение 0.1. $\alpha \in A \iff \alpha$ является корнем какого-то многочлена с целыми коэффициентами.

Говорят, A - множество трансцедентных чисел

Замечание. Так как $\mathbb{R}$ - континум, а A - не больше множества всех многочленов, которых счетно, то есть числа не в A.

Теорема 0.6. *(Лиувилля) Пусть $\alpha \in A, deg\alpha = d$, тогда* $\exists c(\alpha) : \forall \frac{p}{q} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c(\alpha)}{q^d}$

Определение 0.2. $\alpha \in A$ называется алгебраическим числом степени d, если min степень многочлена, корнем которого является α, равна d.

$\alpha \in A, deg\alpha = d.$ $f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0$

1. $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1 \implies \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^d} \implies c_1(\alpha) = 1$

2. $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$

$\frac{p}{q} \neq 0, f(\frac{p}{q}) = \frac{a_d p^d + \dots + a_0 q^d}{q^d}$. $\left|f(\frac{p}{q})\right| \geqslant \frac{1}{q^d}$

Положим $c(\alpha) = min\{c_1(\alpha), c_2(\alpha)\}$

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|\alpha_1 - \frac{p}{q}\right| \cdot \dots \cdot \left|\alpha_{d-1} - \frac{p}{q}\right| \cdot a_d$$

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| = \left|\alpha_i - \alpha + \alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant |\alpha_i - \alpha| + \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \underbrace{|\alpha_i - \alpha|}_{\overline{c_i}(\alpha)}$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^d} \cdot \frac{1}{a_d \prod_{i=1}^{d-1} \overline{c_i}(\alpha)}$$