Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

Автор: *Павел Дуров*
Проект на Github

осень 2022

Содержание

1 Динамическое программирование **2**

1 Динамическое программирование

Задача: Пусть есть полоска $1 \times n$, где в $i-$ой клетке записано число a_i. В нулевой клетке находится кузнечик, способный прыгать на 1 или 2 позиции вправо. Хотим найти максимальную сумму

Доказательство.

Достаточно заметить, что попав на i-ую позицию, предыдущие прыжки никак не повлияют на максимальное значение с начальной точкой в текущей позиции.

Решение:

1. Заведем массив dp, где в dp[i] будет хранится максимальная сумма до данной клетки (то есть из всевозможных путей выбираем наибольший)

2. Запишем в $\mathrm{dp}[0] = 0$, в $\mathrm{dp}[1] = a_1$

3. Пусть k клеток заполнены. Тогда $k+1$-ая будет пересчитываться по формуле

$$\mathrm{dp}[k+1] = a_{k+1} + max(\mathrm{dp}[k], \mathrm{dp}[k-1])$$

4. Тогда наш ответ равен значению $\mathrm{dp}[n]$

   -Асимптотика O(n)

□

Доказательства во всех задачах ДП проводятся по индукции по шагу алгоритма

Общая концепция:

Придумываем, что хранить → Пишем пересчет → Находим ответ в конце

Задача с ЕГЭ: Есть таблица $n \times m$, где в каждой клетке написана ее цена. Хотим найти максимальный путь из нижнего левого угла в правый верхний.

P.S. двигаемся только вверх или вправо

Решение:

1. Создаем массив $n \times m$, где в каждой клетке хранится наибольшая цена среди путей до этой клетки.

2. Записываем во всех "крайних клетках"сумму на единственном пути до нее.

3. Для остальных клеток формула пересчета такая:

$$dp\left[i\right]\left[j\right] = a_{ij} + max(dp\left[i-1\right]\left[j\right], dp\left[i\right]\left[j-1\right])$$

4. Получаем ответ в клетке $dp[n][m]$

   -Асимптотика O(nm)

Еще задачка: НОП (наибольшая общая последовательность)

Ищем наибольшую по длине общую последовательность в двух s и t.

1. Пусть $\mathrm{dp}[i]\left[j\right]$ - длина НОП для последовательностей $s_{1,2,\ldots,i}$ и $t_{1,2,\ldots,j}$

2. $\text{dp}[0]\,[\circ] = 0$, $\text{dp}[\circ]\,[0] = 0$
3. Хотим найти $\text{dp}[i]\,[j]$:
   (a) s_i не участвует в НОП $\to \text{dp}[i-1]\,[j]$
   (b) t_j не учатствует в НОП $\to \text{dp}[i]\,[j-1]$
   (c) s_i и t_j участвуют в НОП, тогда они должны быть равны и ответ: $\text{dp}[i-1]\,[j-1] + 1$

<u>И еще одна:</u> НВП (наибольшая возрастающая последовательность)
Решение 1:

1. $\text{dp}[i]\,[k]$ - минимальное значение элемента, на котором заканчивается последовательности длины k, если рассматривать только элементы $a_1, a_2, \ldots, a_i$
2. $\text{dp}[0]\,[0] = -\infty, dp[0][k > 0] = +\infty$
3. Пусть известна $\text{dp}[i-1]\,[\circ]$

   Далее, есть 2 случая:
   (a) Не берем a_i, тогда ответ равен $\text{dp}[i-1]\,[j]$
   (b) Берем a_i Тогда найдем $min\ k$, что $\text{dp}[i]\,[k] \geqslant a_i$ и поменяем значение на a_i

   Заметим, что выполняется инвариант:
   $$\text{dp}[i]\,[0] < \text{dp}[i]\,[1] < \ldots < \text{dp}[i]\,[k]$$
   А тогда, кроме $\text{dp}[i]\,[k]$ под условие б) ничего не подойдет, а еще, это k можно найти с помощью бин поиска.

Таким образом, ДП в этой задаче будет заполняться построчно, где $i+1$-ая строка получается из i-ой изменением одного элемента
Асимптотика $O(n \log n)$
Решение 2:
Оживляем элементы по возрастанию, предварительно стабильно отсортировав их. $\text{dp}[i]$ - максимальная длина ВП, оканчивающейся в a_i на момент оживления этого элемента.

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp\,[i]$	×	×	×	×	×	×	×

$\to$

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp\,[i]$	×	×	1	×	×	×	×

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp\,[i]$	1	×	1	×	×	×	×

$\to$

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp\,[i]$	1	2	1	×	×	×	×

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp\,[i]$	1	2	1	×	3	×	×

$\to$

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp\,[i]$	1	2	1	3	3	×	4

a_i	2	3	1	5	4	6	5
$dp\,[i]$	1	2	1	3	3	4	4

Несложно заметить, что $dp\,[i]$ будет равно максимальному значению слева от текущей ячейки, что мы умеем находить за $O(\log n)$ через ДО

Тогда итог (максимальное значение в таблице) будет найдено за $O(n \log n)$

Последняя: (Рюкзак)

Есть n предметов, w_i - вес i-го элемента, а c_i - его стоимость. Вместимость рюкзака - W. Найти максимальную стоимость содержимого.

Обозначим за $dp\left[i\right]\left[a\right]$ максимальную стоимость предметов, если выбирать какие-то предметы из первых i с суммой веса a.

Тогда аналогично с предыдущей задачей будем вычислять $dp\left[i+1\right]\left[a\right]$, выбирая a_{i+1} или не выбирая его.

Это будет соответствовать значениям $dp\left[i\right]\left[a-w_i\right]+c_i$ и $dp\left[i\right]\left[a\right]$

Тогда поскольку $a \in 0, 1, \ldots, W$, окончательная асимптотика будет равна $O(nW)$