Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

Б О Л Ь Ш О Е Н А З В А Н И Е К У Р С А

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Проект на Github

осень 2022

Содержание

1 Преобразование Абеля

Пусть a_n, b_n — последовательности комплексных чисел $m \in \mathbb{N}$ и $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Тогда $a_k = A_k - A_{k-1}$ (если считать, что $A_0 = 0$) и $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k$. Следовательно, справедливо тождество (Преобразование Абеля) $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$

Лемма 1.1 (Абеля)**.** *Пусть* a_n, b_n *— последовательности, причем* $\{b_n\}$ *монотонна. Если* $\left|\sum_{i=m}^{k} a_i\right| \leqslant M \forall k$, *то* $|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| \leqslant 2M(|b_n| + |b_m|)$

Доказательство. Считаем, что $a_k = 0$ при $k < m$. Тогда $|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| = |A_n b_n - \sum_{k=m}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)| \leqslant |A_n||b_n| - \sum_{k=m}^{n} |A_k||b_{k+1} - b_k| \leqslant M(|b_n| + \left|\sum_{k=m}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)\right|)$. Т.к. $\{b_n\}$ монотонна, то $b_{k+1} - b_k$ одного знака $\forall k$, тогда

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|b_n| + |b_n - b_m|)$$

□

Замечание. Если $m = 1, \{b_n\}$ нестрого убывает и неотрицательна, $c \leqslant A_k \leqslant C$, то

$$c b_1 \leqslant \sum a_k b_k \leqslant C b_1$$

Лемма 1.2 (Абель)**.** *Пусть* $f \in R[a, b], g$ *— монотонна на* $[a, b]$*. Если* $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant M$, *то*

$$\left|\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right| \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|)$$

Доказательство. Пусть $T_n = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей. Положим $\Delta_k g = g(x_k) - g(x_{k-1}), \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда $\alpha_n := \left|\int_a^b f(x) g(x) dx - \sigma_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f g dx - \right|$ □