Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

0.1 Свойства, эквивалентные перечислимости

Далее будем считать, что наш алфавит — $\{0, 1\}$.

1. Можно выводить все элементы, но без повторов
2. Вычислима полухарактеристическая функция $\overline{\chi_A}(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ \text{не определено}, x \notin A \end{cases}$
3. A — область определения некоторой вычислимой функции
4. A — область значений некоторой вычислимой функции
5. $A = \varnothing$ или A — область значений всюду вычислимой функции.
6. A — проекция разрешимого множества пар $A = \{x | \exists y (x, y) \in B\}$, где $B \subset \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^*$

Утверждение 0.1. *A вычислимо $\Rightarrow$ 2)*

Доказательство.

```
chi_A(x) {
    fot i in A {
        if i == x { // если встретим x, то вернем 1
            return 1;
        }
    }
}
```

□

Утверждение 0.2. *2) $\Rightarrow$ 3)*

Доказательство. $A = Dom\ \overline{\chi_A(x)}$ □

Утверждение 0.3. *3) $\Rightarrow$ 4)*

Доказательство. Рассмотрим `f'(x)`:

```
f'(x) {
    f(x);
    return x;
}
```

Тогда $f'(x) = \begin{cases} x, x \in Dom\ f \\ \text{не определено, иначе} \end{cases}$ Заметим, что $Rad\ f' = Dom\ f$. □

Утверждение 0.4. *4) $\Rightarrow$ 5)*

Доказательство. Пусть $A = Ran\ f$. Если $A \neq \varnothing$, то положим a_0 — произвольный элемент в a_0. Положим $f' : \{0,1\}^* \times \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$, так, что

$$f'(x,t) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ остановится за } t \text{ шагов} \\ a_0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Заметим, что $Ran\ f = Ran\ f'$, а f' — вычислима. □

Утверждение 0.5. *5)* $\Rightarrow$ *6)*

Доказательство. Пусть $A = Ran\ f$. Положим $B = \{(y,(x,t)) : f(x) = y \text{ за } t \text{ шагов}\}$. □

Утверждение 0.6. *6)* $\Rightarrow$ A *вычислимо*

Доказательство. Обойдем все пары (x,y), и, если $(x,y) \in B \Rightarrow$ печатаем x. □

0.2 Универсальная машина Тьюринга

Гарвардская архитектура машины — когда есть фиксированная программа и данные, с которыми она работает.

Принстонская архитектура машины — когда есть некоторый процессор, который может запускать различные программы, которые, в свою очередь, будут взаимодействовать с данными

Определение 0.1. Универсальная Машина Тьюринга — такая функция $U(M,x) = M(x)$ — по сути, машина, которая запускает машину M с вводом x.

Определение 0.2. Будем считать, что код Машины Тьюринга записан (как-то) последовательностью $0,1$. Фунуция $U : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ называется универсальной вычислимой функцией, если

1. U вычислима как функция от двух аргументов
2. $\forall f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, где f — вычислима, верно $\exists p \forall x\ U(p,x) = f(x)$