Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Репозиторий на Github

осень 2022

Содержание

1 Числовые Ряды

Определение 1.1. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел. Выражение $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots$ Называется числовым рядом с n-ым членом a_n. При этом сумма $\sum_{i=1}^{N} a_i = S_N$ называется N-ой частичной суммой, а $\lim_{N\to\infty} S_N$ называется суммой ряда. Тогда кратко пишут: $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Причем, если указанный предел конечен, то ряд называется сходящимся, иначе — расходящимся.

Пример (Геометрический ряд)**.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} z^n$$

1. $|z| < 1$. Заметим, что $1+z+\dots+z^N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$. Тогда $\lim_{N\to\infty} z^{N+1} = 0$ и $\exists \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-z}$
2. $|z| \geqslant 1$. Заметим, что $z^N = S_N - S_{N-1} \to 0$. Но $z^N \not\to 0$, тогда этот ряд расходится. $\nexists \lim_{N\to\infty} S_N$.

Замечание. Геометрический ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$.

Лемма 1.1 (Телескопические ряды)**.** *Для числовой последовательности $\{s_n\}$ рассмотрим последовательность $a_n = s_n - s_{n+1}$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \textit{ сходится} \Leftrightarrow \{s_i\} \textit{ сходится}$$

В этом случае,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s_1 - \lim_{N\to\infty} s_N$$

Доказательство.

$$S_n = (s_1 - s_2) + (s_2 - s_3) + \dots + (s_n - s_{n+1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = s_1 - \lim_{n\to\infty} s_n$$

□

Пример.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$$

$$a_i = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Т.к. $\frac{1}{i}$ —

Утверждение 1.1 (Локализация)**.** *Для любого $m \in \mathbb{N}$ ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=m+1}^{\infty} a_n$$

Сходятся или не сходятся одновременно, причем, если сходятся, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{m} a_n + \sum_{i=m+1}^{\infty} a_n$$

Доказательство. При $N > m$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N} = \sum_{i=1}^{m} a_n + \sum_{i=m+1}^{N} a_n$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=m+1}^{\infty} a_n$$

Сходятся или не сходятся одновременно. В случае сходимости достаточно применить предельный переход для доказательства равенства. □

Определение 1.2. Ряд $r_N = \sum_{i=N+1}^{\infty} a_n$ называется N-ым остатком ряда

Утверждение 1.2 (Линейность)**.** *Пусть ряды* $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Тогда сходится и ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$, *причем*

$$\lambda \sum_{i=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{i=1}^{\infty} b_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$$

Доказательство. Очевидно при предельном переходе □

Утверждение 1.3 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если* $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} = 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1}$. Тогда $S_n - S_{n-1} \to \sum_{i=1}^{\infty} a_n - \sum_{i=1}^{\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$ □

Обратное неверно:

Пример (Гармонический ряд)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Но тогда:

$$H_{2n} - H_n \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Противоречие, т.к. если ряд сходится, то начиная с какого то момента все H_n удалены друг от друга не более чем на $\varepsilon \forall \varepsilon > 0$.

Теорема 1.1 (Коши)**.** $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall m, n \geqslant N \left(\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right)$

Доказательство. Утверждение является переформулировкой критерия Коши для последовательности s_n. □

Определение 1.3. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то его называют абсолютно сходящимся, иначе — условно сходящимся.

Следствие. Абсолютная сходимость влечет условную сходимоть

Доказательство.

$$\forall n > m \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_n|$$

□

Следствие. $a_n \in \mathbb{C}, a_n = u_n + iv_n$. Тогда ряд сходится $\Leftrightarrow$ сходятся ряды вещественной и мнимой частей. При этом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + i\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Пусть $a_n \in \mathbb{R}$ — последовательность вещественных чисел. Рассмотрим $f_a : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f_a(x) = a_n, n \leqslant x < n+1$

Лемма 1.2 (О равносходимости)**.** *Пусть $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \textit{ сходится } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f_a(x)dx \textit{ сходится}$$

Причем в случае сходимости, левая и правая части равны

Доказательство. Пусть интеграл сходится:

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow s_n = \int_1^{n+1} f_a(x)dx$$

Пусть ряд сходится, s_n — его частичная сумма ($n = [x]$). Тогда:

$$\left|\int_1^x f_a(t)dt - S\right| \leqslant \left|\int_1^x f_a(t)dt - S_n\right| + |S_n - S| \leqslant \left|\int_1^x f_a(t)dt - \int_1^{n+1} f_a(t)dt\right| + |S_n - S| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n| + |S_n - S|$$

□

1.1 Ряды с неотрицательными членами

Лемма 1.3. *Пусть $a_n \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд a_n сходится тогда и только тогда, когда $\{S_n\}$ — ограничена.*

Доказательство. Т.к. $S_{n+1} = S_n + a_n \Rightarrow S_n$ нестрого возрастает. По теореме о монотонной последовательности, она сходится $\Leftrightarrow$ она ограничена. □

Теорема 1.2 (Признак сравнения)**.** *Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \forall n \in \mathbb{N}$*

1. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — тоже*
2. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — тоже*

Доказательство. По лемме о равносходимости данная теорема равносильна признаку сходимости для интегралов □

Следствие. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = O(b_n), n \to \infty$. Тогда справедливо заключение предыдущей теоремы

Следствие. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно

Теорема 1.3 (Интегральный признак)**.** *Пусть f нестрого убывает и неотрицательна на $[1, +\infty]$. Тогда последовательность $u_n = f(1) + \dots + f(n) - \int_1^{n+1} f(t)dt$ сходится, в частности, $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \int_1^{+\infty} f(t)dt$ сходятся или расходятся одновременно*