

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА
V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h/nu

Автор: *Павел Дуров*
Проект на Github

осень 2022

Содержание

Короче, как-то будем сдавать какой-то экзамен. Очень сложно, ничего не понятно

1 Вступление

Вот у нас были натуральные числа:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \\ &\vdots \\ n+1 &= \{0, 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Вопрос: что будет в бесконечности?

$$\begin{aligned} \omega &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \omega + 1 &= \{0, 1, 2, \dots, \omega\} \\ \omega + 2 &= \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} \\ &\vdots \\ 2\omega &= \dots \\ 2\omega + 1 &= \dots \\ &\vdots \\ 3\omega &= \dots \\ &\vdots \\ \omega \cdot \omega &= \dots \end{aligned}$$

Таким образом, получаем различные многочлены от ω , если продолжать этот абсурд, то получится ω^ω , потом получится $\underbrace{\omega^{\omega^{\dots\omega}}}_{\omega}$ и короче всякое такое.

2 Фундированные множества

Определение 2.1. Пусть S — ЧУМ. Тогда S называется Фундированным, если $\forall A \subset S \exists \min A$

Пример (Фундированные).

1. \mathbb{N}, \leq
2. $\mathbb{N}, |$
3. $\{a, b\}^*, \sqsubset$

Пример (Не фундированные).

1. \mathbb{Z}, \leq
2. \mathbb{N}, \geq
3. $[0, 1], \leq$
4. $\{a, b\}^*, \leq_{lex}$

2.1 Свойства, эквивалентные фундированности

1. (БС) Невозможность бесконечного спуска

$$\nexists a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

2. (Ст) Стабилизация

$$\forall a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \Rightarrow \exists k : \forall n > k (a_k = a_n)$$

3. (ТИ) Трансфинитная индукция

$$\forall x (\forall y < x \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \forall z \varphi(z)$$

Теорема 2.1. Свойства Фундированность, БС, Ст, ТИ эквивалентны.

Доказательство.

1. $\neg\Phi \Rightarrow \neg\text{БС}$. Пусть $A \neq \emptyset$, $\nexists \min A$. Тогда $\forall a_1 \in A \exists a_2 \in A : a_2 < a_1$. Используя аксиому выбора (выбирая по одному элементу из оставшихся), получается бесконечную убывающую последовательность.
2. $\neg\Phi \Leftarrow \neg\text{БС}$. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Рассмотрим это множество, в нем не будет минимального элемента.
3. $\neg\text{БС} \Rightarrow \neg\text{Ст}$. Тогда существует $a_1 > a_2 > a_3 \dots$. Заметим, что для этой последовательности неверна стабилизация.
4. $\neg\text{БС} \Leftarrow \neg\text{Ст}$. Рассмотрим последовательность, которая не стабилизируется. Тогда $\forall n \exists k : a_n > a_k$. Тогда \exists бесконечная убывающая цепочка.
5. $\neg\Phi \Rightarrow \neg\text{ТИ}$. $A \neq \emptyset$ — множество без минимального элемента, $\varphi(x) \Leftrightarrow x \notin A \Rightarrow \varphi(x) \neq 1$.

$$\forall y < x \ y \notin A \Rightarrow x \notin A$$

Утверждение вверху верно, т.к. $\forall y < x (y \notin A, x \in A) \Rightarrow x = \min A$.

6. $\neg\Phi \Leftarrow \neg\text{ТИ}$. Тогда для некоторого φ верно, что

$$\forall x (\forall y < x \varphi(y) \rightarrow \varphi(x))$$

Но

$$\neg \forall z \varphi(z) (1)$$

Пусть $A = \{z | \varphi(z) = 0\}$. Причем A непусто, т.к. (1). Тогда рассмотрим минимальный элемент в A и получим противоречие с определением ТИ.

□

Определение 2.2. Вполне упорядоченное множество — Линейная упорядоченность + Фундированность

Пример.

\mathbb{N}, \leq	ω
$\{1 - \frac{1}{n} n \in \mathbb{N}_+\}$	ω
$\{1 - \frac{1}{n} n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{2 - \frac{1}{n} n \in \mathbb{N}_+\}$	$\omega \cdot 2$
$\{k - \frac{1}{n} k, n \in \mathbb{N}_+\}$	ω^2
$\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} m, n \in \mathbb{N}_+\}$	ω^2
$\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k} m, n, k \in \mathbb{N}_+\}$	ω^3
$\left\{1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \dots - \frac{1}{n_k} k - \text{произвольное}\right\}$	не фундированное
$\left\{k - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \dots - \frac{1}{n_k} k - \text{произвольное}\right\}$	ω^ω

Определение 2.3. Пусть S — ВУМ. Тогда $K \subset S$ называется начальным отрезком, если $\forall x, y((x \in K \wedge y < x) \rightarrow y \in K)$

Эквивалентные свойства:

$$\begin{aligned} \forall x \in K \forall y \notin K x < y \\ \forall x, y((x \notin K \wedge y > x) \rightarrow y \notin K) \end{aligned}$$

2.2 Непосредственно следующие элементы

Утверждение 2.1. S — ВУМ, $x \in S$, x — не наибольший в $S \Rightarrow \exists! y(y > x \wedge \neg \exists z y > z > x)$.

Доказательство. \exists — из Фундированности, $y = \min\{t \in S | t > x\}$ □

Определение 2.4. y из предыдущего утверждения называется непосредственно следующим элементом после x и обозначается $x + 1$.

Замечание.

$$[0, a] = [0, a + 1)$$

Теорема 2.2. K — начальный отрезок $S \Rightarrow K = S \vee K = [0, a)$

Доказательство. Если $K = S$, то победили, иначе рассматриваем $a = \min(S \setminus K)$. Докажем, что $K = [0, a)$.

1. $K \subset [0, a)$: Если $x \in K$, $x > a$, то $a \in K$, но $a \in S \setminus K$
2. $K \supset [0, a)$: Если $x < a$, $x \notin K$, то $a \neq \min(S \setminus K)$ — противоречие.

□

Пример.

1. S
2. $[0, \alpha] = \{x | x \leq \alpha\}$
3. $[0, \alpha) = \{x | x < \alpha\}$

2.3 Предельные элементы

Определение 2.5. z называется предельным элементом, если $\nexists y(z = y + 1)$.

или

Определение 2.6. z называется предельным элементом, если

$$\forall y < z \exists t \in (y, z)$$

Теорема 2.3. $S - \text{ВУМ}, x \in S \Rightarrow \exists l \in S, k \in \mathbb{N} : x = l + k = l + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_k$

2.4 Сложение и умножение Фундированных множеств и ВУМов

Сложение и умножение определены так же, как и для ЧУМов.

Теорема 2.4. 1. $A, B - \text{фундированные}, \text{ тогда } A + B - \text{тоже}.$

2. $A, B - \text{ВУМ}, \text{ тогда } A + B - \text{тоже}.$

3. $A, B - \text{фундированные}, \text{ тогда } A \cdot B - \text{тоже}.$

4. $A, B - \text{ВУМ}, \text{ тогда } A \cdot B - \text{тоже}.$

Доказательство. $C \subset A \sqcup B$:

1. (a) $C \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \min(C \cap A) - \text{существует, т.к. } A - \text{фундированное}$
 (b) $C \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \min(C \cap B) - \text{существует, т.к. } B - \text{фундированное}$
2. Подмножество ЛУМа — ЛУМ, поэтому победили по (1).

□

Замечание. Любое подмножество ВУМ — тоже ВУМ

Замечание. Множество предельных элементов ВУМа — ВУМ

Замечание. Между любыми двумя предельными элементами бесконечно много других

Замечание. Элементы между соседними предельными элементами образуют множество, $\cong \omega$

Теорема 2.5 (О структуре ВУМ). $S - \text{ВУМ}, \text{ тогда } \exists L - \text{тоже ВУМ}, \text{ конечное множество } K, \text{ такие, что } S \cong \omega \cdot L + K$

Теорема 2.6 (О сравнимости ВУМов). *Любые два ВУМа либо изоморфны, либо один из них изоморфен начальному отрезку другого.*

Доказательство. Рекурсивно построим $f : A \rightarrow B$. Пусть f определена на $[0, x) \subset A$. Тогда определим $f(x) = \min(B \setminus f([0, x)))$ (рекурсивно).

Теорема 2.7 (О трансфинитной рекурсии). *Если задано правило $f(x) = F(f|_{[0, x)})$, то есть ровно одна f , которая соответствует правилу.*

Доказательство.

Единственность. Пусть f, g — 2 подходящие функции.

$$\{x | f(x) \neq g(x)\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists m = \min\{x | f(x) \neq g(x)\} \Rightarrow f|_{[0, m)} = g|_{[0, m)}$$

Но тогда $f(m) = F(f|_{[0, m)}) = F(g|_{[0, m)}) = g(m)$, противоречие.

Существование. По трансфинитной индукции докажем существование $f|_{[0, x)}$, соответствующее F .

$$\forall y < x \exists f|_{[0, y)} \Rightarrow \exists f|_{[0, x)}$$

$$(a) \quad x = w + 1 \Rightarrow \exists f|_{[0, w)}, f(w) = F(f|_{[0, w)})$$

$$(b) \quad x \text{ — предельное — в следующий раз}$$

□

Теорема 2.8 (Обобщенная теорема о трансфинитной рекурсии). *F может быть частично определена, тогда f определена на начальном отрезке.*

□