Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

Автор: *Киселев Николай*

Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

Следствие. Если f бесконечно дифферецируема на интервале, содержащем точку x_0 и $(x_0 - r, x_0 + r)$ и $\exists M > 0 \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \forall k |f^{(k)}(x)| \leqslant M$, то $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_0)^k$

Следствие. Ряды Маклорена $e^x, \sin x, \cos x$ сходятся к этим функциям $\forall x \in \mathbb{R}$, т.е.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Доказательство. $(e^x)^{(k)} = e^x, (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), (\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right)$. Поэтому при $|x| \leqslant \delta : (e^x)^{(k)} \leqslant e^\delta, (\sin x)^{(k)} \leqslant 1, (\cos x)^{(k)} \leqslant 1$ □

Теорема 0.1. *Пусть* $\alpha \neq \mathbb{N}_0, C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, C_\alpha^0 = 1$. *Тогда* $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, |x| < 1$

Доказательство. $f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = C_\alpha^n$. Имеем при $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_\alpha^{n+1} x^{n+1}|}{|C_\alpha^n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\alpha}{n+1}|x| = |x|$$

По признаку Даламбера при $|x| < 1$ ряд абсолютно сходится, при $|x| > 1$ — абсолютно расходится. Тогда $R = 1$. Обозначим $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n$ и покажем, что $g \equiv f$ на $(-1, 1)$, т.е. $g(x)(1+x)^{-\alpha} = 1 \forall x \in (-1, 1)$. Имеем

$$g(x)(1+x)^{-\alpha} = (1+x)^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n C_\alpha^n x^{n-1} - \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n =$$

$$(1+x)^{-\alpha-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n C_\alpha^n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n C_\alpha^n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n \right) =$$

$$(1+x)^{-\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_\alpha^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - n) C_\alpha^n \right) = 0$$

Следовательно, $g(x)(1+x)^{-\alpha}$ постоянна на $(-1, 1)$. $g(0) = 1 \Rightarrow g(x)(1+x)^{-\alpha} = 1$ □

Замечание. Покажем, что биномиальный ряд при $\alpha > 0$ сходится равномерно на $[-1, 1]$.

Доказательство. Рвссмотрим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |C_\alpha^n|$. Для него $\left|\frac{C_\alpha^{n+1}}{C_\alpha^n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Следовательно, по признаку Гаусса при $\alpha > 0$, ряд схоодтся на $[-1, 1]$. Но тогда $\forall x \in [-1, 1] |C_\alpha^n x^n| \leqslant |C_\alpha^n|$ □

Пример. Рассмотрим $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ на $(-1, 1)$. Тогда по следствию из теоремы $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$. Т.к. ряд сходится при $x = 1 \Rightarrow$ равномерно сходится на $[0, 1]$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \ln 2$.

Задача. *Разложить* arctg. *Получив разложение, найти сумму* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1 Метрические пространства

1.1 Метрики и нормы

Определение 1.1. Пусть $X \neq \varnothing$ — произвольное множество. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой на X, если $\forall x, y, z \in X$ выполнено

1. $\rho(x, y) \geqslant 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Определение 1.2. (X, ρ) — метрическое пространство.

Пример. Пусть X — произвольное непустое множество, $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$. Тогда (X, ρ) — метрическое пространство.

Доказательство. Предоставляется читателю в качестве нетрудного упражнения. □

Определение 1.3. ρ из прошлого примера называется называется дискретной метрикой

Определение 1.4. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. Функция $\|x\| : V \to \mathbb{R}$ называется нормой на V, если

1. $\|x\| \geqslant 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Определение 1.5. Пара $(V, \|x\|)$ называется нормированным линейным пространством

Лемма 1.1. *Всякое нормированное пространство является метрическим, для* $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Доказательство.

1. $\|x - y\| \geqslant 0, \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\|x - y\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\|$
3. $\|x - y\| + \|y - z\| \geqslant \|x - z\|$

□

Рассмотрим $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots x_n), y = (y_1, y_2 \ldots y_n)$.

Пример. $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ — норма, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$ — метрика.

Пример. $\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ — норма, $\rho(x, y) = (\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ — метрика.

Доказательство.

1. $\|x - y\| \geqslant 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — очев

2. $\|x-y\| = \|y-x\|$ — очев

3. Буквально неравество Минковского (см 1 семестр)

$\square$

Пример. $\|x\| = \max\{x_i\}$ — метрика, $\rho(x,y) = \max\{x_i - y_i\}$

Определение 1.6. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $a \in X, r > 0$. $B_r(a) = \{x \in X | \rho(x,a) < r\}$ называется открытым шаром в центре a и радиуса r

Определение 1.7. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $a \in X, r > 0$. $\overline{B_r}(a) = \{x \in X | \rho(x,a) \leqslant r\}$ называется замкнутым шаром в центре a и радиуса r

Определение 1.8. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Множество E называется ограниченным, если $\exists a \in X, r \in \mathbb{R} : E \subset B_r(a)$