Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1 Ряд и Интеграл **3**

2 Функциональные последовательности и ряды **4**

Теорема 0.1 (Римана)**.** *Если действительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то для любого $L \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, что$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = L$*

Доказательство. Положим b_i — положительные члены a_i, c_i — отрицательные члены a_i. Заметим, что т.к. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = 0, \lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Проверим, что b_i, c_i расходятся. Действительно, пусть это не так, тогда один из них сходится. Но тогда, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (это следует из того, что если мы сложим некоторые частичные суммы b_i, c_i, то получим частичную сумму a_i), получаем, что они либо оба сходятся, либо асболютно расходятся. Но a_i не сходится абсолютно, значит $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ — расходится, тогда один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — расходится, тогда они оба расходятся. Далее применяем предыдущую лемму и получаем требуемую перестановку. □

Теорема 0.2 (Коши)**.** *Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся к числам A, B соответственно $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, \varphi(n) = (i_n, j_n)$ — биекция, то $\sum_{n=1} a_{i_n} b_{j_n}$ сходится абсолютно к AB*

Доказательство. Покажем, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{j_n}|$ ограничены.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{i_n} b_{j_n}| \leqslant \sum_{i=1}^{(\max_{i \leqslant n \leqslant N} i_n)} \sum_{j=1}^{(\max_{i \leqslant n \leqslant N} j_n)} |a_i b_j| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right)$$

Поэтому, эта шняга сходится. К чему? Ха-ха...

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1)^{(1)} & (1,2)^{(2)} & (1,3)^{(5)} & (1,4)^{(10)} & (1,5)^{(17)} & \dots \\
(2,1)^{(4)} & (2,2)^{(3)} & (2,3)^{(6)} & (2,4)^{(11)} & (2,5)^{(18)} & \dots \\
(3,1)^{(9)} & (3,2)^{(8)} & (3,3)^{(7)} & (3,4)^{(12)} & (3,5)^{(20)} & \dots \\
(4,1)^{(16)} & (4,2)^{(15)} & (4,3)^{(14)} & (4,4)^{(13)} & (4,5)^{(19)} & \dots \\
(5,1)^{(25)} & (5,2)^{(24)} & (5,3)^{(23)} & (5,4)^{(22)} & (5,5)^{(21)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

(красным помечен порядок обхода)

Заметим, что частичные суммы с индексом $n^2, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $S_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{N} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right) \left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right) \to AB$. Тогда и вся последовательность $\to AB$. □

Определение 0.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n, c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$ называется произведением по Коши рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то их произведение по Коши сходится абсолютно к их произведению сумм рядов

Теорема 0.3 (Мертенс)**.** *Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то их произведеие Коши сходится к произведению их сумм*

Доказательство. B_N — N-ая частичная сумма, B — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда $B_N = B + \beta_N$, где $\beta_N \to 0$. Представим $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + b_1a_2) + \dots + (a_1b_N + \dots + b_1a_N) = a_1B_N + a_2B_{N-1} + \dots + a_NB_1 = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot B + \gamma_N$$

Где $\gamma_N = a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_N\beta_1$. Т.к. $\sum_{k=1}^N a_k B \to AB$, то достаточно показать, что $\gamma_N \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\sum_{n=m+1}^N |a_n| < \varepsilon, |\beta_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant m$. Пусть $N \geqslant 2m$, тогда (положим $C = \sum |\beta_n|$):

$$|\gamma_N| = |a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_N\beta_1| \leqslant |a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_m\beta_{N-m+1}| + |a_{m+1}\beta_{N-m} + \dots + a_N\beta_1|$$

$$|a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_m\beta_{N-m+1}| + |a_{m+1}\beta_{N-m} + \dots + a_N\beta_1| \leqslant \sum_{k=1}^m |a_k|\varepsilon + C\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + C\right)$$

□

1 Ряд и Интеграл

$$g(b) = \sum_{k=0}^m \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{m!}\int_a^b (b-t)^m g^{(m+1)}(t)dt$$

Утверждение 1.1.

1. *Пусть* $f \in C^1[1, +\infty]$ *и* $\int_1^\infty |f'(t)|dt$ *сходится. Тогда* $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ *сходится одновременно с* $\left\{\int_1^n f(t)dt\right\}$

2. *Пусть* $f \int C^2[1, +\infty)$, $\int_1^+ \infty|f''(t)|dt$ *сходится. Тогда сходится ряд*

$$\left\{\int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n f(k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f'(k)\right\}$$

Доказательство. 1.

$$g(x) = \int_n^x f(t)dt$$

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n)\right| \leqslant \underbrace{\int_n^{n+1} |f'(t)|dt}_{\text{член сходящегося ряда}}$$

$\alpha_k = \int_k^{k+1} f(t)dt - f(k)$ — член сходящегося ряда.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = \int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n f(k) \text{ — сходится}$$

2.

$$\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2}\int_n^{n+1} (n+1-t)^2 f'(t)dt$$

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n) - \frac{1}{2}f'(n)\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}\int_n^{n+1} |f''(n)|dt}_{\text{Член сх. ряда}}$$

Но тогда

$$\int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f'(k)$$

Тоже сходится

$\square$

Рассмотрим $f(t) = \ln t$.

$$\int_1^{n+1} \ln t dt = t\ln t|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dt = (n+1)\ln(n+1) - n$$

Следовательно, сходится последовательность

$$(n+1)\ln(n+1) - n - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{1}{2}\ln n = (n+1)\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \ln n! - \frac{1}{2}\ln n - n =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln n! - \ln e^n$$

Следовательно, сходится $\underbrace{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + \ln n! + n\right\}}_{\ln \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}$

Поэтому, $\ln \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \to C > 0$ и $n! \sim C\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$. Найдем C, пользуясь формулой Валлиса

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Имеем

$$\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \sim \frac{2^{4n}}{n}\frac{C^4 n^{4n+2}e^{4n}}{e^{4n}C^2(2n)^{4n+1}} = \frac{C^2}{2} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

Но тогда

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty$$

2 Функциональные последовательности и ряды

Пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (все утверждения тоже верны для $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 2.1. Говорят, что f_n поточечно сходится к f на E, если $\forall x \in E f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Пишут $f_n \to f$ на E, и f называют пределом функциональной последовательности f_n

Пример. $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \to f$, при $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$ Функция оказалась разрывна!

Распишем определение поточечной сходимост ипо по определению.

$$f_n \to f \text{ на } E \Leftrightarrow \forall x \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Определение 2.2. Говорят, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall x \forall n > N(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E, или $f_n \rightrightarrows_E f$

Замечание. Равномерная сходимость влечет поточечную

Замечание. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f определена на E однозначно

Лемма 2.1 (Супремум критерий). $f_n \rightrightarrows_E f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, *где* $\rho_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$

Доказательство.

$$\forall x \in E(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon), \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Эти условия равносильны, поэтому лемма верна ☐

Задача. $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \{x\} \subset E \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$

Определение 2.3. Функциональная последовательность поточечно (равномерно) сходится на множестве E, если найдется такая определенная на E функция, к которой последовательность поточечно (равномерно) сходится

Пусть задан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n : E \to \mathbb{R}$

Определение 2.4. Говорят, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится на E, если $\forall x \in E$ $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))$ сходится. При этом, функция $S : E \to \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Определение 2.5. Функциональный ряд поточечно (равномерно) сходится на E, если последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ поточечно (равномерно) сходится на E

Утверждение 2.1. *Пусть* $g : E \rightrightarrows \mathbb{R}$ *ограничена*

1. *Если* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E, *то* $gf_n \rightrightarrows gf$ *на* E
2. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходится на* E, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} gu_n$ *также равномерно сходится на* E, *причем*
$$\sum_{n=1}^{\infty} gu_n = g\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Доказательство.

1. Пусть $|g| \leqslant M$. Для любого $x \in E$ имеем
$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M|f_n(x) - f(x)|$$
$$\sup_{x\in E} |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$$

2. Очевидно

$\square$

Утверждение 2.2.

1. *Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, $g_n \rightrightarrows g$ на E, то $\lambda f_n + mug_n \rightrightarrows \lambda f + \mu g$ на E.*
2. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ равномерно сходится на E, и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n)$ равномерно сходится на E, причем $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n$*

Доказательство.

1. $f_n + g_n \rightrightarrows f$ на E.

$$\forall x \in E |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

$$\sup_{x \in E} |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in E} |g_n(x) - g(x)|$$

$\square$

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E, то $u_n \rightrightarrows 0$ на E

Доказательство. Если S_n — n-ая частичная сумма $sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то $u_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$ $\square$

Задача. *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E, $g : D \to E$, тогда $f_n \circ g \rightrightarrows f \circ g$ на D*

Теорема 2.1 (Критерий Коши)**.** *$\{f_n\}$ равномерно сходится на E $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)(1)$*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E. Зафиксируем $\varepsilon > 0, n \geqslant N$. Тогда $\forall x \forall n, m \geqslant N |f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет (1). Тогда $\forall x \in E \{f_n(x)\}$ фундаментальна. Положим $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N из условия (1). Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \forall x \in E \forall n \geqslant N$$

Это означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

$\square$

Следствие (Критерий Коши)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \forall x \in E \left(\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| < \varepsilon\right)$