

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
IV СЕМЕСТР

Лектор:

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1 Введение	2
1.1 Предисловие	2
1.2 Напоминание с ОВиТМа	2
2 Вероятностная мера на прямой	3
2.1 Классификация вероятностных мер	4
2.1.1 Дискретные распределения	4
Примеры	4
2.1.2 Абсолютно непрерывные распределения	4
Примеры	5
2.1.3 Сингулярные распределения	5
Примеры	6
3 Вероятностные меры в \mathbb{R}^n	6
3.1 Примеры	7
4 Вероятностные меры в \mathbb{R}^∞	8

1 Введение

1.1 Предисловие

Ну что рассказали там про принцип устойчивости частот, про то, что ля-ля-ля тополя

1.2 Напоминание с ОВиТМа

Определение 1.1. \mathcal{F} — алгебра над Ω , если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

Замечание. Элементы Ω называются элементарными событиями.

Замечание. Элементы \mathcal{F} называются событиями.

Определение 1.2. \mathcal{F} — σ -алгебра над Ω , если

1. \mathcal{F} — алгебра
2. $A_1, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Определение 1.3. Функция $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ называется вероятностной мерой, если $P(\Omega) = 1$, P — σ -аддитивна.

Замечание. 1. $P(\emptyset) = 0$

2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ — **монотонность меры**
3. P конечно аддитивна
4. Для P верна формула включений-исключений.
5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Теорема 1.1 (О непрерывности вероятностной меры). Пусть (Ω, \mathcal{F}) таково, что \mathcal{F} — алгебра над Ω , P — мера и $P(\Omega) = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. P — σ -аддитивна на \mathcal{F}
2. P непрерывна в нуле, т.е. $\bigcap A_i = \emptyset \Rightarrow P(A_i) \rightarrow P(A)$
3. P непрерывна сверху, т.е. $\bigcap A_i = A \Rightarrow P(A_i) \rightarrow P(A)$
4. P непрерывна снизу, т.е. $\bigcup A_i = A \Rightarrow P(A_i) \rightarrow P(A)$

Определение 1.4. Вероятностное пространство — это измеримое пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , т.е. Ω — множество, \mathcal{F} — некая σ -алгебра над Ω , P — вероятностная мера на (Ω, \mathcal{F}) .

Определение 1.5. Система \mathcal{M} подмножеств Ω называется π -системой, если \mathcal{M} замкнуто относительно счетного пересечения

Определение 1.6. Система \mathcal{M} подмножеств Ω называется λ -системой, если

1. $\Omega \in \mathcal{M}$
2. $A, B \in \mathcal{M}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$
3. $A_i \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{M}$

Теорема 1.2 (Первая теорема о λ -системах). *Система \mathcal{F} является σ -алгеброй над Ω тогда и только тогда, когда она является λ -системой и π -системой.*

Утверждение 1.1. Для любой системы \mathcal{M} подмножество Ω существует минимальная по включению, содержащаяся в \mathcal{M}

Замечание. $\sigma(\mathcal{M}), \alpha(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$ — порожденные (минимальные) σ -алгебра, алгебра, π -система, λ -система соответственно.

Теорема 1.3 (Вторая теорема о λ -системах). *Если \mathcal{M} — π -система на Ω , то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$*

Доказательство. См. доказательство из курса ОВиТМа □

Пример (Борелевская σ -алгебра). $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — σ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (или, что равносильно, всеми полуинтервалами)

Пример (Борелевская σ -алгебра в \mathbb{R}^n). $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — σ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (или, что равносильно, всеми кубами, где куб — декартово произведение борелевских множеств).

Пример. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ — σ -алгебра, порожденная всеми цилиндрами. Цилиндр — множество $x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots, x_n) \in B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Пример (Борелевская σ -алгебра в общем случае). Пусть (S, ρ) — метрическое пространство, тогда $\mathcal{B}(S)$ — σ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

2 Вероятностная мера на прямой

Пусть P — вероятностная мера на $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Определение 2.1. Функцией распределения называется функция $F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.1 (О свойствах функции распределения).

1. F не убывает
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3. F непрерывна справа

Доказательство.

1. $x \leq y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

2. $x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow (-\infty, x_n] \rightarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow (-\infty, x_n] \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
3. Если $x_n \searrow x$, то $(-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x]$ и $F(x_n) \rightarrow F(x)$

□

Теорема 2.1 (О взаимно-однозначном соответствии функции распределения и вероятностной меры). Пусть F удовлетворяет условиям 1-3 из предыдущей теоремы. Тогда существует единственная вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, т.ч. F — её функция распределения.

2.1 Классификация вероятностных мер

Далее мы будем отождествлять понятия распределения и вероятностной меры.

2.1.1 Дискретные распределения

Определение 2.2. Вероятностная мера P на $(R, \mathcal{B}(R))$ называется дискретной, если $\exists X$ — не более, чем счетное множество на \mathbb{R} , такое, что $P(\mathbb{R} \setminus X) = 0$ и $\forall x \in X P(\{x\}) > 0$.

Примеры

1. Распределение Бернулли: $P \sim Bern(p)$, если $X = \{0, 1\}$, $P(\{1\}) = p$, $P(\{0\}) = 1 - p$
2. Равномерное распределение: $X = 1, 2, \dots, n$, $P(\{i\}) = \frac{1}{n}$
3. Биномиальное распределение: $P \sim Bin(n, p)$, если $X = \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $P(\{0\})$, моделирует количество успехов среди n испытаний.
4. Пуассоновское распределение: $P \sim Pois(n, p)$, если $X = \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $P(\{0\})$, моделирует редкие события
5. Геометрическое распределение: $P \sim Geom(p)$, если $X = \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$, $P(\{0\})$, моделирует первый момент удачи в бесконечной схеме испытаний Бернулли

2.1.2 Абсолютно непрерывные распределения

Определение 2.3. $F(x)$ называется абсолютно непрерывной, если $\exists p(t) \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R} F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$. В таком случае мы говорим, что $p(t)$ является плотностью функции F или соответствующего распределения (вероятностной меры).

Замечание. В таком случае $F'(x) = p(x)$ почти всюду по мере Лебега.

Примеры

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b] — U(a, b)$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Моделирует случайную точку из отрезка $[a, b]$

2. Нормальное распределение — $N(a, \sigma^2)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Моделирует измерение с ошибкой

3. Экспоненциальное распределение — $N(a, \sigma^2)$:

$$p(x) = \lambda e^{\lambda x} I\{x > 0\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Моделирует время ожидание

4. Гамма-распределение: $\Gamma(\lambda, \alpha), \lambda, \alpha > 0$.

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} I\{x > 0\}$$

Где:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Нам в дальнейшем потребуются различные свойства Г-функции: $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

5. Распределение Коши $K(\sigma), \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\sigma}$$

Модель

2.1.3 Сингулярные распределения

Определение 2.4. Точка x называется точкой роста функции распределения $F(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 : F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$

Определение 2.5. Функция распределения $F(x)$ называется сингулярной, если она непрерывна, и множество точек ее роста имеет $\mu = 0$.

Примеры

- Канторова лестница — ее точками роста является канторово множество.

Теорема 2.2 (Лебега о разложении). *Если $F(x)$ — функция распределения на прямой, тогда $\exists!$ разложение вида: $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, где $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ и F_1 — дискретная, F_2 — абсолютно непрерывная, F_3 — сингулярная.*

3 Вероятностные меры в \mathbb{R}^n

Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Определение 3.1. Функцией распределения P называется $F(x_1, \dots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$

Замечание (Обозначения).

- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

- $\vec{x} \geq \vec{y} \Leftrightarrow x_i \geq y_i$
- $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$
- $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$ если $\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n$ и $\vec{x}_n \geq \vec{x}_{n+1}$.

Определение 3.2. Для $i = 1, \dots, n$, $a_i < b_i$ введем:

$$\Delta_{a_i, b_i}^i F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Лемма 3.1 (Свойства многомерных функций распределения). 1. Если $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$, то $F(\vec{x}_n) \rightarrow F(\vec{x})$

$$2. \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n) = 1$$

$$3. \forall i = 1, \dots, n : \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

$$4. \text{Для любых } a_i < b_i, i = 1, \dots, n :$$

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

Доказательство.

- Если $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$, то $(-\infty, \vec{x}_n] \downarrow (-\infty, \vec{x}] \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностной меры, получаем $F(\vec{x}_n) \rightarrow F(\vec{x})$
- Если $\vec{x}_n \uparrow (+\infty, \dots + \infty)$, то $(-\infty, \vec{x}_n] \uparrow \mathbb{R}^n \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностной меры, получаем $F(\vec{x}_n) \rightarrow P(\mathbb{R}^n) = 1$
- Если $x_i \downarrow -\infty$, то $(-\infty, \vec{x}_n] \downarrow \emptyset \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностной меры, получаем $F(\vec{x}_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$

4. Для $n = 2$:

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 F(x_1, x_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geq 0$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} \Delta_{a_i, b_i}^i P(A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times (-\infty, x_i) \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n) = \\ = P(A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times (a_i, b_i] \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n) \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \cdots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = P((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]) \geq 0$$

□

Теорема 3.1 (О взаимно однозначном соответствии). *Если F удовлетворяет свойствами 1-3 из леммы, то $\exists!$ вероятностная мера P на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, такая, что F — ее функция распределения*

Доказательство. См. ОВиТМ

□

Замечание. Свойство 3 нельзя заменить на неубывание по каждой из переменных.

Доказательство. Рассмотрим $F(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y \geq 0 \\ 0, & x + y < 0 \end{cases}$. Заметим, что F удовлетворяет свойствам 1, 2 и не убывает по обеим переменным. При этом, если мы возьмем:

$$\Delta_{-1,1}^x \circ \Delta_{-1,1}^y F(x, y) = F(1, 1) - F(-1, 1) - F(1, -1) + F(-1, -1) = 1 - 2 + 0 < 0$$

Получаем, что F — не двумерная функция распределения.

□

3.1 Примеры

- Пусть F_1, F_2, \dots, F_n — одномерные функции распределения. Рассмотрим $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$ — многомерная функция распределения. Свойства 1, 2 очевидны, проверим 3:

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \cdots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n (F_k(b_k) - F_k(a_k)) \geq 0$$

- Пусть $p(t_1, \dots, t_n) \geq 0$, т.ч.

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1$$

Тогда:

$$(*) \quad F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Свойства 1, 2 очевидны, проверим 3:

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \cdots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

Определение 3.3. Если имеет место представление (*), то $p(t_1, \dots, t_n)$ называется плотностью функции распределения F .

4 Вероятностные меры в \mathbb{R}^∞

Определение 4.1. Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$. Рассмотрим для $n \in \mathbb{N}$ вероятностную меру P_n на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, т.ч.

$$P_n(B) = P(Cyl(n, B)), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Тогда можно заметить, что $P_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = P_n(B)$.

Определение 4.2. Свойство выше называется согласованностью для последовательности вероятностных мер $\{P_n\}$

Теорема 4.1 (Колмогорова, о мерах в \mathbb{R}^∞). Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность согласованных вероятностных мер, P_n — мера на \mathbb{R}^n . Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$, такая, что $\forall n \in \mathbb{N} : \forall B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$(*) \quad P_n(B_n) = P(Cyl(n, B_n))$$

Доказательство. Зададим меру P на цилиндрах по правилу (*). Цилиндры образуют алгебру \mathcal{A} . Проверим корректность задания P . Если $Cyl(n, B_n) = Cyl(n+k, B_{n+k})$, то $B_{n+k} = B_n \times \mathbb{R}^k$. Тогда в силу согласованности:

$$P_n(B_n) = P_{n+k}(B_{n+k})$$

Проверим, что P — конечно аддитивна на \mathcal{A} . Если $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_N \in \mathcal{A}$ — непересекаются, то будем считать, что $\exists n : \tilde{B}_i = Cyl(n, B_i), i = 1, \dots, N, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда:

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^N \tilde{B}_i\right) = P\left(Cyl\left(n, \bigsqcup_{i=1}^N \tilde{B}_i\right)\right) = P_n\left(\bigsqcup_{i=1}^N B_i\right) = \sum_{i=1}^N P_n(B_i) = \sum_{i=1}^N P(\tilde{B}_i)$$

Проверим, что P непрерывна в нуле (на \mathcal{A}). Пусть $\tilde{B}_n \downarrow \emptyset, \tilde{B}_n \in \mathcal{A}$. Без ограничения общности, считаем, что $\tilde{B}_n = Cyl(n, B_n)$.

От противного. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{B}_n) = \delta > 0$. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ выберем компактные $A_n \subset \mathbb{R}^n$, такие, что $A_n \subset B_n$ и $P(B_n \setminus A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$. Обозначим $\tilde{A}_n = Cyl(n, A_n)$. Тогда: $P(\tilde{B}_n \setminus \tilde{A}_n) = P_n(B_n \setminus A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$. Введем $\tilde{C}_n = \bigcap_{i=1}^n \tilde{A}_i$. Тогда $\tilde{C}_n \downarrow \emptyset, \tilde{C}_n = Cyl(n, C_n)$, где $C_n = A_n \cap (A_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap (A_{n-2} \times \mathbb{R}^2) \cap \cdots \cap (A_1 \times \mathbb{R}^{n-1})$ — тоже компакт в \mathbb{R}^n . Далее:

$$P(\tilde{B}_n \setminus \tilde{C}_n) \leq \sum_{i=1}^n P(\tilde{B}_n \setminus \tilde{A}_i) \leq |B_i \subset B_n, i \geq n| \leq \sum_{i=1}^n P(\tilde{B}_i \setminus \tilde{A}_i) \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{C}_n) \geq \frac{\delta}{2} > 0$$

Возьмем в каждом \tilde{C}_n по точке $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots) \in \tilde{C}_n$. Тогда $(x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \in C_n$. Рассмотрим последовательность $x_1^{(n)}$. Эти все точки лежат в C_1 . Выберем подпоследовательность $x_1^{(n_k)} \rightarrow x_1^0 \in C_1$ \square