**Московский физико-технический институт**
**Физтех-школа прикладной математики и информатики**

# КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

III СЕМЕСТР

Лектор: *Вадим Витальевич Редкозубов*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
*Репозиторий на Github*

осень 2025

# Содержание

# 1 Методы вычисления кратного интеграла

## 1.1 Сведение кратного интеграла к повторному

**Обозначение:** $\mu_n$ — Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

**Определение 1.1.** Интерграл по мере $\mu_n$ называется $n$-кратным и обозначается

$$\int_E f d\mu_n, \int_{E\subset\mathbb{R}^n} f(x)d\mu_n(x), \int\int\cdots\int_E f(x_1,x_2,\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

**Обозначение:** $x=(x_1,x_2,\ldots x_n), y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$.

**Определение 1.2.** Пусть $E\subset\mathbb{R}^{n+m}, x\in\mathbb{R}^n$. Тогда $E_x=\{y\in\mathbb{R}^m|(x,y)\in E\}$, $E_x$ называется сечением $E$ по переменной $x$.

**Утверждение 1.1.** *Пусть* $\{E_i\}_{i\in I}\subset 2^{R^{m+n}}$. *Тогда*

1. $\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)_x=\left(\bigcup_{i\in I}(E_i)_x\right)$
2. $(E\setminus F)_x=E_x\setminus F_x$
3. $\left(\bigcap_{i\in I}E_i\right)_x=\left(\bigcap_{i\in I}(E_i)_x\right)$

*Доказательство.* 1. $y\in\left(\bigcup_i E_i\right)_x\Leftrightarrow(x,y)\in\left(\bigcup_i E_i\right)\Leftrightarrow y\in\left(\bigcup_i(E_i)_x\right)$ Остальные пункты доказываются аналогично

□

**Теорема 1.1** (Принцип Кавальери). *Пусть $E\in\mathbb{R}^{n+m}$ — измеримо. Тогда справедливо следующее:*

1. *Сечение $E_x$ измеримо в $\mathbb{R}^m$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$.*
2. *$x\mapsto\mu_m(E_x)$ измерима на $\mathbb{R}^n$*
3. *$\int_{\mathbb{R}^m}\mu_m(E_x)d\mu_n(x)=\mu_{n+m}(E)$*

*Доказательство.* 1. Пусть $E$ — брус. Тогда $B=B'\times B''$, где $B',B''$ — брусы в $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ соответственно. Для любого $x\in\mathbb{R}^n$ верно

$$B_x=\left\{\begin{array}{l}B'', x\in B'\\ \varnothing, x\notin B'\end{array}\right.\Rightarrow\mu_m(B_x)=\left\{\begin{array}{l}\mu_m(B''), x\in B'\\ 0, x\notin B'\end{array}\right.$$

Функция $x\mapsto\mu_m(B'')I_{B'}$ — измерима (как произведение индикатора на константу)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mu_n(B_x)d\mu(x)=\mu_m(B'')\int_{\mathbb{R}^n}\mu_n(B')=\mu_{n+m}(B)$$

2. Пусть $E\subset G$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$, тогда $G=\bigsqcup_{k=1}^\infty B_k$, где $B_k$ — брусья. Для любого $x\in\mathbb{R}^n$ имеем: $G_x=\bigsqcup_{k=1}^\infty(B_k)_x$ — измеримо, тогда $\mu_m(G_x)=\sum_{k=1}^\infty\mu_m((B_k)_x)$. Функция $\mu_m(G_x)$ измерима, как сумма ряда измеримых функций. По теореме Леви для рядов,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mu_m(G_x)d\mu(x)=\sum_{k=1}^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\mu_m((B_k)_x)d\mu(x)=\sum_{k=1}^\infty\mu_{n+m}(B_k)=\mu(G)$$

3. Пусть $E = \bigcap G_k$ — пересечение вложенных ограниченных открытых множеств ($G_k \supset G_{k+1} \forall k$). Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $(G_k)_x \supset (G_{k+1})_x$, $\mu(G_1)_x < \infty$, тогда $E_x = \bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k)_x$ по непрерывности меры. $\mu_m(E_x) = \lim_{k\to\infty}\mu_m((G_k)_x)$. Т.к.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m((G_1)_x)d\mu(x) = \mu_{n+m}(G_1) < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E_x)d\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m((G_k)_x)d\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\mu_{n+m}(G_k) = \mu_{n+m}(E)$$

4. Пусть $E = Z$ — ограниченное множество меры нуль в $\mathbb{R}^{n+m}$. По критерию измеримости, существует $G_\delta$-множество $A \supset Z$ и $\mu_{n+m}(A) = 0$. Можно считать, что $A$ ограничено (иначе заменим на пересечение с открытым шаром, содержащим $Z$). Тогда по предыдущему пункту, $\int_{\mathbb{R}^n}\mu_m(A_x)d\mu(x) = 0 \Rightarrow \mu_m(A_x) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Т.к. $A_x \supset Z_x$, то $\mu_m(Z_x) = 0$, и $Z_x$ измеримо для таких $x$. Следовательно, функция $x \mapsto \mu_m(Z_x)$ нулевая почти всюду и тогда она измерима. Также,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(Z_x)d\mu(x) = 0 = \mu_{n+m}(Z)$$

5. Пусть $E$ — ограниченное измеримое множество. По критерию измеримости, $\exists\Omega$— $G_\delta$-множество, $\Omega \supset E$ и $Z$ — множество меры нуль, что $E = \Omega \setminus Z$ (считаем, что $\Omega$ ограниченное). По свойству сечений, $E_x = \Omega_x \setminus Z_x$. Пусть $E$ — произвольное измеримое множество. Тогда $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(E \cap A_k)$, где $A_k = \{x \in \mathbb{R}^{n+m}\}, k-1 \leqslant |x| \leqslant k$

□

**Теорема 1.2** (Тонелли). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и функция $f : E \to [0, +\infty]$ измерима. Тогда*

1. *Функция $f(x,\cdot)$ измерима на $E_x$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$*
2. *Функция $\mathcal{G}(x) = \int_{E_x} f(x,y)d\mu(y)$ измерима на $\mathbb{R}^n$*
3. *$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{G}(x)d\mu(x) = \int_E f d\mu$*

*Доказательство.* Пусть $A \subset \mathbb{R}^{n+m}, x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^m$ верно: $I_A(x,y) = \begin{cases} 1, y \in A_x \\ 0, y \notin A_x \end{cases} = I_{A_x}(y)$, поэтому для индикатора теорема верна (а, значит, и для всех простых функций). Пусть $f : E \to [0, +\infty]$ — произвольная измеримая функция. По теореме о приближении, $\exists\{\varphi_k\}$ — простые функции, т.ч. $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots, \varphi_k \to_E f$. Для любого $x \in \mathbb{R}^n \exists\{\varphi_k(x,\cdot)\}, 0 \leqslant \varphi_1(x,\cdot) \leqslant \varphi_2(x,\cdot) \leqslant \ldots, \varphi_k(x,\cdot) \to_E f(x,\cdot)$. $\exists Z_k$ — множество меры нуль в $\mathbb{R}^n$, что $\varphi_k(x,\cdot)$ измерима (простая функция) на $Z_k^c$. Положим $Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$ — множество меры нуль и для $x \in \mathbb{Z}^c$ функция измерима (как предел измеримых функций) (доказали 1). По теореме Леви для $x \in Z^c$ имеем

$$\mathcal{G}(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{E_x}\varphi_k(x,y)d\mu(y) =: \lim_{k\to\infty}\mathcal{G}_k(x)$$

Следовательно, $\mathcal{G}$ измерима (как предел измеримых функций $\mathcal{G}_k$) на $Z^c$, а значит, и на $\mathbb{R}^n$. Снова по Теореме Леви,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{G}_x d\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{G}_k(x)d\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k d\mu_{n+m} = \int_E f d\mu_{n+m}$$

□

**Следствие.** Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Функция $f$ интегрируема на $E$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{E_x} |f(x,y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

**Теорема 1.3** (Фубини)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}^n}$ интегрируема. Тогда*

1. *Функция $f(x, \cdot)$ измерима на $E_x$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$*
2. *Функция $\mathcal{G}(x) = \int_{E_x} f(x,y) d\mu(y)$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$*
3. *$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu$*

*Доказательство.* Пусть $f \geqslant 0$. Тогда по т. Тонелли, $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu < \infty$, следовательно, $\mathcal{G}$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$ (доказали 2). В частности, функция $\mathcal{G}$ конечна почти всюду (доказали 1). В случае $f$ произвольного знака, применяем утверждение для $f^{\pm}$:$f = f^+ - f^-$, пользуясь тем, что $f^{\pm}(x, \cdot) = (f(x, \cdot))^{\pm}$, заключаем, что утверждение верно и для $f$. □

**Замечание.** В предыдущих теоремах переменные $x, y$ равноправны, поэтому

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{E_x} f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_E f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

Внешний интеграл (в среднем выражении) можно брать не по всему $\mathbb{R}^n$, а только по тем $x$, для которых $E_x \neq \varnothing$

**Определение 1.3.** $\operatorname{Pr}_x E = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists (x,y) \in E\}$ — проекция $E$ на $\mathbb{R}^n_x$

**Пример.** Проекция измеримого множества может оказаться неизмеримым: Рассмотрим $e \subset \mathbb{R}$ — неизмеримое. Тогда проекция $e \times \{c\}, c \in \mathbb{R}$ — измеримо (его мера равна 0), но его проекция на первую координату равна $e$ — неизмеримо.

**Следствие.** Если дополнительно (с условием теорем выше) $\operatorname{Pr}_x E$ измеримо, то

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\operatorname{Pr}_x E} \left( \int_{E_x} f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x)$$

**Пример.** Доказать интегрируемость и найти интеграл $f(x,y) = y \sin x \cdot e^{-xy}$ на $E = (0, +\infty) \times (0,1)$

*Доказательство.*

$$\iint_E |f(x,y)| dx dy \leqslant \iint_E y e^{-yx} dx dy = \int_{(0,1)} \left( \int_{0,+\infty} y e^{-xy} dx \right) dy =$$

$$= \int_{(0,1)} \left( \int_0^{+\infty} y e^{-yx} dx \right) dy = \int_{(0,1)} \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \right) dy = 1$$

□

По теореме Фубини, $F(y) = \int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx \overset{\text{после нетрудных преобразований}}{=} \frac{y}{y^2+1}, y \in (0,1)$

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_{(0,1)} \left( \int_{(0,+\infty)} f(x,y)dx \right) dy = \int_0^1 \frac{y}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \ln(y^2+1)|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

**Замечание.** Если $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, то $\tilde{g} : E \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} : \tilde{g}(x,t) = g(x)$ также измерима.

*Доказательство.* Вытекает из того, что если $A = \{x \in E : g(x) < a\}$ измеримо, то $\{(x,t) : \tilde{g}(x,t) < a\} = A \times \mathbb{R}$. □

**Задача.** *Проверить, что $A \times \mathbb{R}$ измеримо и тогда доказать замечание.*

Рассмотрим важнейшее приложение принципа Кавальери:

**Следствие.** Пусть $f : E \to [0,1]$ измерима, то подграфик: $S_f = \{(x,t) : x \in E 0 < t < f(x)\}$ измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu_{n+1}(S_f) = \int_E f d\mu$

*Доказательство.* По замечанию, $F(x,t) = t - f(x)$ измерима. Тогда $S_f = \{(x,t) : t > 0\} \cap \{(x,t) : F(x,t) < 0\}$ измеримо.

$$(S_f)_x \begin{cases} (0, f(x)), x \in E \\ \varnothing, x \notin E \end{cases} \Rightarrow \mu_1((S_f)_x) = f(x)$$

Тогда по принципу Кавальери, $\mu_{n+1}(S_f) = \int_E f d\mu$. □

**Задача.** *Доказать, что $\mu_{n+1}(S_f) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E : f(x) > t\})dt$*

**Задача.** *Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимое линейное отображение и $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Докажите, что $\mu(T(E)) = |\det T|\mu(E)$. Указание: $\Delta = [0,1)^n$.*

## 1.2 Замена переменных в кратном интеграле

**Определение 1.4.** Пусть $U, V$ открыты в $\mathbb{R}^n$. Отображение $g : U \to V$ называется $C^r$-диффеоморфизмом, если $g$ — биекция, $g \in C^r(U,V), g^{-1} \in C^r(V,U)$.

**Определение 1.5.** Всюду далее за $Dg(x)$ обозначается матрица Якоби отображения $g$ в точке $x$. Определитель $J_g(x) = |\det Dg(x)|$ называется Якобианом.

**Определение 1.6.** Если $g$ — диффеоморфизм, то $g \circ g^{-1} = I_U$ — тождественное отображение $U$. По правилу дифференцирования композиции для матриц Якоби, $Dg^{-1}(g(x))Dg(g^{-1}(x)) = E$. Следовательно, $Dg(x)$ невырождена и $Dg^{-1}(g(x)) = (Dg(x))^{-1}$

**Теорема 1.4.** *Пусть $g : U \to V$ — диффеоморфизм открытых $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $E \subset U$ — измеримо по Лебегу. Если $f$ — неотрицательная измеримая или интегрируемая на $g(E)$ функция, то*

$$\int_{g(E)} f(y)d\mu(y) = \int_E f \circ g(x)|\det Dg(x)|d\mu(x)$$

**Пример.** Вычислить меру $n$-мерного шара $B_R(a)$

*Решение.* По свойству преобразования меры при сдвиге и гомотетии, имеем:

$$\mu_n(B_R(a)) = \mu_n(B_R(0)) = R^n\mu_n(B_1(0))$$

Положим $B = B_1(0), \mu_n(B) = \omega_n$. Рассмотрим сечение $B_{(x_1,x_2)} = \{y : |y|^2 < 1 - x_1^2 - x_2^2\} \Rightarrow$ $B_{(x_1,x_2)} = \begin{cases} B_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}(0), x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ \varnothing, \text{иначе} \end{cases}$ Следовательно, по принципу Кавальери,

$$\omega_n = \int_{x_1^2+x_2^2<1} \mu_{n-2}(B_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}(0))dx_1dx_2 = \int_{x_1^2+x_2^2<1} \sqrt{R^n}\omega_{n-2}dx_1dx_2 =$$

$$= \omega_{n-2}\int_{x_1^2+x_2^2<1}(1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-1}{2}}dx_1dx_2 = (*)$$

Рассмотрим $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Пусть $U = [0, 2\pi] \times [0, +\infty), V = \mathbb{R}^2$. Тогда при замене, мы должны домножить на $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$.

$$(*) = \omega_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}rdr = \frac{-2\pi}{2}\omega_{n-2}\int_0^1(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} = -\pi\omega_{n-2}\frac{(1-r^2)^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}$$

1. $n = 2k$
$$\omega_{2k} = \frac{2\pi}{2k}\omega_{2k-2} = \dots = 2\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}$$

2. $n = 2k + 1$
$$\omega_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1}\omega_{2k-1} = \dots = 2\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k-1)!!}\omega_1 = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k-1)!!}$$

□

В основе доказательства будет лежать следующее утверждение:

**Лемма 1.1.** *Пусть $x_0 \in U, \varepsilon > 0$. Положим $l(Q)$ — длина ребра куба $Q$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что для всягого замкнутого куба $Q, x_0 \in Q \subset U, l(Q) < \delta$ справедливо равенство:*

$$\frac{\mu(g(Q))}{\mu(Q)} \leqslant |\det J_g(x_0)| + \varepsilon$$

*Доказательство.* Все мы помним, что в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны. Будем рассматривать норму $\|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| = \|\cdot\|_\infty$. Тогда $C_r(y) = \{x : \|x - y\| \leqslant r\}$ — замкнутый куб и $l(C) = 2r$. Сначала рассмотрим случай $Dg(x_0) = E$ и $g(x_0) = 0$. По определению диффеоморфизма, имеем:

$$g(x) = x + \alpha(x)\|x - x_0\|, \alpha(x) \to 0, x \to x_0$$

*На лекции была ошибка, на самом деле $g(x) = x - x_0 + \alpha(x)\|x - x_0\|, \alpha(x) \to 0, x \to x_0$, но это фиксится параллельным переносом на $x_0$.* Выберем $\eta > 0$ так, что $(1 + \alpha\nu)^n < 1 + \varepsilon$ и пусть $\delta > 0$ такое, что если $x \in U(\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\alpha(x)\| < \eta)$. Пусть $Q$ — замкнутый куб, такой, что $Q, x \in Q \subset U, l(Q) < \delta$. Положим $s = L(Q)$ Если $a$ — центр $Q$, то $Q = C_{\frac{s}{2}}(a)$. Пусть $x \in Q$. Тогда $\|x - x_0\| < \|x - a\| + \|a - x_0\| \leqslant \frac{s}{2} + \frac{s}{2} < s < \delta \Rightarrow \|\alpha(x)\| \leqslant \eta$. Следовательно, $\|g(x) - a\| \leqslant \|x - a\| + \|\alpha(x)\| \cdot \|x - x_0\| < \frac{s}{2} + \eta s = \frac{s}{2}(1 + 2\eta) \Rightarrow g(x) \in C_{\frac{s}{2}(1+2\eta)}(a) \Rightarrow g(Q) \subset C_{\frac{s}{2}(1+2\eta)}(a)$. По монотонности меры, $\mu(g(Q)) \leqslant s^n(1+2\eta)$. Учитывая, что $\mu(Q) = s^n \Rightarrow \frac{\mu(g(Q))}{\mu(Q)} \leqslant (1 + 2\eta)^n < 1 + \varepsilon$.

Для общего случая, рассмотрим $h = T^{-1}g - T^{-1}g(x_0)$ — диффеоморфизм. $Dh(x_0) = T^{-1}T = E$. Следовательно, $\exists \delta > 0 : l(Q) < \delta \Rightarrow \frac{\mu(h(Q))}{\mu(Q)} \leqslant |J_g(x_0)| + \frac{\varepsilon}{|\det T|} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{|\det T|}$.

$$\mu(h(Q)) = \mu(T^{-1}g(Q)) = |\det T^{-1}|\mu(g(Q)) = \frac{\mu(g(Q))}{|\det T|} \Rightarrow \frac{\mu(g(Q))}{\mu(Q)} \leqslant |\det T| + \varepsilon$$

Получили желаемое. □

**Следствие.** Пусть $\{Q_k\}$ — последовательность замкнутых, вложенных кубов и $l(Q_k) \to 0$. Если $x_0$ — единственная точка из $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\mu(g(Q_k))}{\mu(Q_k)} \leqslant |J_g(x_0)|$

**Лемма 1.2.** *Если $G$ — открытое в $U$, то $g(G)$ открыто в $V$ и $\mu(g(G)) \leqslant \int_G |J_g| d\mu (*)$.*

*Доказательство.* По свойству счетной аддитивности меры Лебега и счетной аддитивности интеграла, достаточно установить $(*)$ для двоичного куба.

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \text{где } Q_k \text{ — двоичные кубы} \Rightarrow Q_k = \left[\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}\right)^n, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

Т.к. $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q} - \frac{1}{2^q \cdot i}\right]^n$ — $\sigma$-компакт, тогда и $g(Q)$ — $\sigma$-компакт — измеримое множество.

Предположим, что $\exists Q$ — двоичный куб, такой, что $\overline{Q} \subset U$, для которого $\mu(g(Q)) > \int_Q |J_g| d\mu + \varepsilon\mu(Q)$. Деля каждое ребро пополам, получаем разбиение $Q$ на $2^n$ двоичных кубов $\{Q_i\}$. Предположим, что для каждого из $Q_i$ выполнена лемма. Тогда пользуясь конечной аддитивностью меры и интеграла, для $Q$ выполнена лемма. Тогда Б.О.О, $\mu(g(Q_1)) > \int_{Q_1} |J_g| d\mu + \varepsilon\mu(Q_1)$. Положим $C_1 = \overline{Q}, C_2 = \overline{Q_1}, \ldots$. По индукции строим последовательность замкнутых вложенных кубов, $l(C_k) \to 0$, такую, что $\forall k \mu(g(C_k)) > \int_{C_k} |J_g(x)| d\mu(x) + \varepsilon(\mu(C_k))$. Т.к. $J_g$ — непрерывна, то $\frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} |J_g| d\mu \to_{k\to\infty} |J_g(x)| \Rightarrow \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\mu(g(C_k))}{\mu(C_k)} \geqslant |J_g(x_0)| + \varepsilon$. □

**Лемма 1.3.** *Если $E \subset U$ измеримо, то $g(E)$ измеримо и $\mu(g(E)) \leqslant \int_E |J_g(x)| d\mu$*

*Доказательство.* Для $m \in \mathbb{N}$ определим $W_m = \{x \in U | \|x\| < m, |J_g(x)| < m\}$. Из непрерывности функций $\|x\| J_g(x)$ и открытоти множеств $(-\infty, m)$ заключаем, что $W_m \subset U$ открыто и $\bigcap_{m=1}^{\infty} W_m = U$. Докажем утверждение для $E \subset W_m$

1. Пусть $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, где $G_k$ — открыто и $G_k \supset G_{k+1}$. Б.О.О. можно считать, что все $G_k \subset W_m$ (иначе заменим $G_k$ на $G_k \cap W_m$). Тогда $g(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} g(G_k)$ измеримо и по непрерывности меры, $\mu(g(E)) = \lim_{k\to\infty} \mu(g(G_k))$ (т.к. $\{x \in U : \|x\| \leqslant m, |J_g(x)| \leqslant m\}$ — компакт $\Rightarrow$ ограничен)

$$\mu(g(E)) = \lim_{k\to\infty} \mu(g(G_k)) \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{G_k} |J_g(x)| d\mu(x) = \int_E |J_g(x)| d\mu$$

Последнее равенсво выполняется по теореме Лебега, примененной к функции $f_k = |J_g(x)| \cdot I_{G_k}$

2. Пусть $E = Z \subset W_m, \mu(Z) = 0$. По критерию измеримости, $\exists \Omega_0$ — $G_\delta$ множество, такое, что $\Omega_0 \supset E, \mu(\Omega_0) = 0$. Без ограничения счиатем, что $\Omega_0 \in W_m$. Тогда

$$\mu^*(g(E)) \leqslant \mu^*(g(\Omega_0)) = \mu(g(\Omega_0)) \leqslant \int_{\Omega_0} |J_g(x)| d\mu(x) = 0$$

То есть $g(E)$ измеримо и $\mu(g(E)) = 0$.

3. Пусть $E$ — произвольное измеримое множество в $W_m$. Тогда $E = \Omega \setminus Z$, где $\Omega$ — $G_\delta$-множество, а $\mu(Z) = 0$. Тогда $g(E) = g(\Omega) \setminus g(Z)$. Т.к $\mu(g(Z)) = 0$ и по первому пункту $g(\Omega)$ — измеримо, то $g(E)$ — тоже измеримо. Следовательно,

$$\mu(g(E)) \leqslant \mu(g(\Omega)) \leqslant \int_\Omega |J_g(x)| d\mu(x) = \int_E |J_g(x)| d\mu(x)$$

4. Пусть $E$ — произвольное измеримое множество в $U$. Тогда $E = \bigcup_{m=1}^\infty E_m$, где $E_m = E \cap W_m$. По доказанному, $\mu(g(E_m)) \leqslant \int_E |J_g(x)| d\mu$. Получаем

$$\mu(g(E)) = \lim_{m\to\infty} \mu(g(E_m)) \leqslant \lim_{m\to\infty} \int_{E_m} |J_g(x)| d\mu = \int_E |J_g(x)| d\mu$$

Последнее равенство получено по теореме Леви для $f_m = |J_g| \cdot I_{E_m}$.

$\square$

*Доказательство.* Для любого $a \in \mathbb{R}$ условия $f \circ g(x) \leqslant a \Leftrightarrow g(x) \in \{y : f(y) < a\}$. Поэтому, $\{x : f(g(x)) < a\} = g^{-1}(\{y : f(y) < a\})$. Поскольку диффеоморфизм сохраняет измеримость $\Rightarrow$ множества $\{x : f(g(x)) < a\}, \{y : f(y) < a\}$ измеримы одновременно, т.е. функции $f \circ g$ на $E$ и $f$ на $g(E)$ измеримы одновременно.

Рассмотрим $F : U \times \mathbb{R} \to V \times \mathbb{R}, F(x,t) = (g(x), t)$ — диффеоморфизм. Получаем:

$$DF = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & Dg & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots \; 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |J_F| = |J_g|$$

Положим $B = \{(y,t) : y \in g(E), 0 < t < f(y)\}, A = \{(x,t) : x \in E, 0 < t < f(g(x))\}$. Т.к. $f$ — неотрицательная измеримая функция, то $\mu(B) = \int_{g(E)} f(y) d\mu$. Имеем $F(A) = B, \mu(B) = \mu(F(A)) \leqslant \int_A |J_F| d\mu(x,t)$. По теореме Тонелли $\int_A |J_F| d\mu = \int_E \left( \int_{(0, f(g(x)))} |J_g| dt \right) dx \; = \int_E f \circ g(x) |J_g| dx$. Итак, справедлива формула:

$$\int_{g(E)} f(y) d\mu(y) \leqslant \int_E f \circ g(x) |J_g| d\mu(x)$$

В правом интеграле сделам замену $x = g^{-1}(y)$.

$$\int_E f \circ g(x)|J_g|d\mu(x) \leqslant \int_E f(y) \underbrace{|J_g(g^{-1}(y))| \cdot |J_{g^{-1}}(y)|}_{1} d\mu(y) \leqslant \int_{g(E)} f(y)d\mu(y)$$

□

**Следствие.** В условиях теоремы, $\mu(g(E)) = \int_E |J_g(x)|d\mu(x)$

**Замечание.** В теореме о замене переменной условие на $g$ можно ослабить, а именно: Пусть $U \subset W \subset \mathbb{R}^n$, $U$ — открыто, $g : W \to \mathbb{R}^n, g|_U$ — диффеоморфизм и $\mu(W \setminus U) = \mu(g(W) \setminus g(U)) = 0$. Тогда для $E \in W$ — измеримого справедлива формула замены

$$\int_{g(E)} f(y)d\mu(y) \int_E f \circ g(x)|\det Dg(x)|d\mu(x)$$

*Доказательство.* Пренебрегая множествами меры 0, имеем:

$$\int_{g(E)} f(y)d\mu(y) = \int_{g(E\cap U)} f(y)d\mu(y) = \int_{E\cap U} f \circ g(x)|J_g(x)|d\mu(x) = \int_E f \circ g(x)|J_g(x)|d\mu(x)$$

□

**Пример** (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

*Решение.*

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint_{(0,+\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$$

Заменяем координаты на полярные:

$$= \iint_{(0,\pi/2)\times(0,+\infty)} e^{-r^2}rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left( -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

□

# 2 Теоремы об обратной и неявной функциях

**Определение 2.1.** $B \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если $\forall x, y \in B : [x, y] \subset B$

**Лемма 2.1.** *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, \ldots d_m)$ — дифференцируема на $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытом множестве и пусть $B \subset U$ открыто. Если $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant M$ для всех $x \in B$, то $\forall x, y \in B : |f(y) - f(x)| \leqslant nmM|y - x|$.*

*Доказательство.* Пусть $x, y \in B$, тогда для $i = 1, \ldots m$ рассмотрим функцию $g_i(t) = f_i(x + t(y - x)), t \in [0, 1]$ — дифференцируема. Тогда про теореме Лагранжа о среднем:

$$f_i(y) - f_i(x) = g(1) - g_i(0) = g_i'(c_i), c_i \in (0, 1)$$

$$g_i'(c_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + c_i(y-x))(y_j - x_j) \Rightarrow |g_i'(c_i)| \leqslant M \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j| \leqslant nM|y-x|$$

Откуда $|f_i(y) - f_i(x)| \leqslant nM|y-x|$. При этом, $|a| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|$. Получаем $f(y) - f(x) \leqslant nmM|y-x|$ □

**Следствие.** Если частные производные $f$ непрерывны в $a \in U$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in B_\delta(a) : |f(y) - f(x) - df_a(y-x)| \leqslant \varepsilon|y-x|$

*Доказательство.* Применим лемму к $g(z) = f(z) - df_a(z)$. Т.к. дифференциал линейного отображения совпадает с ним, то $dg_z = df_z - df_a$, откуда $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) - \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)$. В силу непрерывноси частных производных, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in B_\delta(a) \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{mn} \Rightarrow |g(y) - g(x)| \leqslant \varepsilon|y-x|$. □

**Теорема 2.1** (Банах)**.** *Пусть $C$ — непустое замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$. Пусть $f : C \to C$, такое, что $\exists \lambda \in (0,1)$, что $\forall x, y \in C |F(x) - F(y)| \leqslant \lambda|x-y|$. Тогда $\exists! x^* \in C : F(x^*) = x^*$*

*Доказательство.* Пусть $x_0 \in C$ и рассмотрим $x_{k+1} = F(x_K)$. Тогда $\forall k |x_{k+1} - x_k| \leqslant \lambda^k |x_1 - x_0|$. Следовательно $|x_{n+p} - x_n||x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| = (\lambda^{n+p-1} + \cdots + \lambda^n)|x_1 - x_0| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$. Т.к. $\lambda^n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Следовательно, $x_n \to x^*$. В силу замкнутости, $x^* \in C$. Т.к. $x_{n+1} = F(x_n)$, то $F$ непрерывна и $F(x^*) = x^*$. Пусть $y^*$ — другая точка, такая, что $F(y^*) = y^*$. Но тогда $|y^* - x^*| = |F(y^*) - F(x^*)| \leqslant \lambda|y^* - x^*| \Rightarrow |y^* - x^*| = 0 \Rightarrow y^* = x^*$. □

## 2.1 Теорема об обратной функции

**Теорема 2.2** (Об обратной функции)**.** *Пусть $U$ — открыто в $\mathbb{R}^n$ и $a \in U$. Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса $C^1$ и $\det Df(a) \neq 0$, то $\exists$ открытые $W, V : a \in W \subset U, f(a) \in V$, такие, что $f^{-1} : V \to W$ — диффеоморфизм.*

*Доказательство.* Можно считать, что $Df(a) = E$: положим $T = Df(a)$ и заменим $f$ на $\tilde{f} = T^{-1}f$. Такая замена не меняет обратимости, при этом $f^{-1}$ и $\tilde{f}^{-1} = f^{-1}T$ одновременно лежат в $C^1$.

Рассмотрим $g(x) = f(x) - x_j, x \in U$. $g \in C^1, Dg(a) = 0$. Тогда $\exists \overline{B}_r(a)$, что $\forall x \in \overline{B}_r(a) \left(\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \forall i, j = 1, \dots n\right)$. Следовательно, $\forall x, x' \in \overline{B}_r(a)(|g(x) - g(x')| \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|)$. Покажем, что $\forall y \in B_{\frac{r}{2}}(f(a)) \exists! x \in B_r(a)(y = f(x))$. Для этого рассмотрим отображение $F_y(x) = y - g(x), x \in U$. Тогда $\forall x \in \overline{B}_r(a)$ имеем:

$$|F_y(x) - a| \leqslant |F(x) - F(a)| + |F(a) - a| \leqslant |g(x) - g(a)| + |y - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|x-a| + |y - f(a)| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

То есть, $F(\overline{B}_r(a)) \subset B_r(a)$. Кроме того, $\forall x, x' \in \overline{B}_r(a), |F(x) - F(x')| = |g(x) - g(x')| \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|$. По теореме Банаха, $\exists! x : F(x) = x \Leftrightarrow y = f(x)$. Более того, $x \in B_r(a)$. Положим $V = B_{\frac{r}{2}}(f(a)), W = f^{-1}(V) \cap B_r(a)$. Тогда $W, V$ — открыты и $f$ биективно отображает $W$ на $V$ по построению, т.е. определена обратная функция $f^{-1} : V \to W$.

По неравенству треугольника, имеем: $|f(x) - f(x')| \geqslant |x - x'| + |g(x) - g(x')| = (*), x, x' \in W$. Т.к. $g$ — сжимающее, то $(*) \geqslant \frac{1}{2}|x - x'| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(y')|$. Тогда:

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \leqslant 2|y - y'| \forall y, y' \in V(1)$$

Так что $f^{-1}$ непрерывно, а значит, $f$ — гомеоморфизм. Так как $J_f$ непрерывна и $J_f(a) \neq 0$, то можно считать, что $J_f \neq 0$ на $W$. Зафиксируем $y \in V$ и пусть $x = f^{-1}(y)$. Покажем, что $f$ дифференцируема в $y$. В силу биективности $f, \forall y + k \in V \exists! n : y + k = f(x + h)$. Положим $h(k) = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)$. Тогда $h(k) \to_{k \to 0} 0$. Функция $f$ дифференцируема в $x$, т.е. $f(x + h) - f(x) = df_x(h) + \alpha(h)|h|$, где $\alpha$ непрерывна и $\alpha(0) = 0, h = h(k)$. Положим $A = [df_x]^{-1}$, получим $Ak = h(k) + A\alpha(h(k))|h(k)|$ или $f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) = Ak + \beta(k)|k|$, где $\beta(k) = -A\alpha(h(k))\frac{|h(k)|}{|k|}$. В силу (1), $\frac{|h(k)|}{|k|} \leqslant 2$. Следовательно, $\beta(k) \to 0$, при $k \to 0$, тогда $f^{-1}$ дифференцируема в $y$ и $df_y^{-1} = [df_x]^{-1}$. В частности, матрица Якоби $Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$.

Из курса линейной алгебры известно, что элементы $Df^{-1}(y)$ есть рациональные функции от $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(f^{-1}(y))$ со знаменателем $J_f(f^{-1}(y))$. В силу класса $C^1$ функции $f$ и непрерывности $f^{-1}$, заключаем, что $f^{-1} \in C^1(V)$. □

**Замечание.** Если в условиях Теоремы об обратной функции, $f \in C^r$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $f^{-1} \in C^r$.

*Доказательство.* Ведем индукцию по $n$

**База:** $n = 1$ — Теорема об обратной функции

**Переход:** Если $f \in C^{n+1}$, то $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^n$ и $f^{-1} \in C^n \Rightarrow \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial x_j} \in C^n$, т.е. $f^{-1} \in C^{n+1}$

□

**Следствие.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто и $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса $C^1$. Если $J_f \neq 0$ на $U$, то $f(U)$ открыто

*Доказательство.* Пусть $b \in f(U), b = f(a)$. По теореме об обратной функции, $\exists W \subset U, V$ — открытые, такие, что $f : W \to V$ — дифференцируема. Т.к. $V \subset f(U) \Rightarrow b \in int\ f(U)$ □

**Определение 2.2.** Если $\forall x \in U \exists W_x \subset U$ — открытое, такое, что $f|_W$ — диффеоморфизм, то $f$ называется локальным диффеоморфизмом.

**Замечание.** Таким образом мы показали, что если $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса $C^1$ с $J_f \neq 0$, то $f$ — локальный диффеоморфизм.

**Замечание.** Верно и обратное.

**Задача.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса $C^1$ и инъективно. Если $J_f \neq 0$ на $U$, то $f$ — диффеоморфизм*

**Задача** (Проблема Якобиана)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f_i$ — полиномы, причем $J_f \equiv 1$. Верно ли, что $f$ инъективна?*

**Пример** (Полярные координаты)**.** Пусть $U = \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}, V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geqslant 0\}$. Тогда $g : U \to V, g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ — диффеоморфизм

*Доказательство.* Покажем, что $g$ — биекция. $\forall (x, y) \in V \exists! (r, \varphi) \in V : g(r, \varphi) = (x, y)$. Тогда $g^{-1}(x, y) =$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, y > 0, x \geqslant 0 \\ \pi - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x < 0 \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, y < 0 \end{cases}$$

Проверять, что $g^{-1}$ — диффеоморфизм очень долго и неприятно, поэтмоу воспользуемся теоремой об обратной функции. $g \in C^1(U), Dg = \begin{pmatrix} \cos & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_g = r > 0$. Следовательно, $g^{-1} \in C^1(V)$. $\square$

**Задача.** *Пусть* $U = \{(r,\varphi,\psi), r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}\}, V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z), x \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$. *Докажите, что* $g : U \to V$*:*

$$g(r,\varphi,\psi) = (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)$$

*Является диффеоморфизмом*

**Определение 2.3.** Если $g : U \to V$ — диффеоморфизм, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открыты, то говорят, что на $V$ введена криволинейная система координат. Точке $x$ сопоставляется точка $(u_1, u_2, \dots u_n)$ — декартова координата $a = g^{-1}(x)$.

**Замечание.** Локальный диффеоморфизм при $n > 1$ необратим.

**Пример.** $g : U \to V$, где $U = \{(r,\varphi) : r > 0, \varphi \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^2, g(r,\varphi) = (r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ не является диффеоморфизмом, хотя $J_f \neq 0$ (т.к. это не биекция).

**Задача.** *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *класса* $C^1$ *и* $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. *Докажите, что* $f$ *— диффеоморфизм*

## 2.2 Теорема о неявной функции

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открыто, $F : U \to \mathbb{R}^m, F = (F_1, F_2, \dots F_n)$ дифференцируема в точке $p = (a,b)$. Тогда матрица Якоби $DF(p)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p)\right)$$

Где $\frac{\partial F}{\partial x}(p)$ — матрица Якоби $x \mapsto F(x,b)$ в точке $a$, а $\frac{\partial F}{\partial y}(p)$ — матрица Якоби $y \mapsto F(a,y)$ в точке $b$.

**Теорема 2.3** (О неявной функции)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *— открыто,* $a, b \in U$ *и задана* $F : U \to \mathbb{R}^m$ *класса* $C^1$*. Если*

1. $F(a,b) = 0$
2. $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

*То существуют открытые* $W \ni a, V \ni b$ *и функция* $f : W \times V \subset U$ *и* $\forall x, y \in W \times V (F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x))$*.*

*Доказательство.* Рассмотрим $\Phi : U \to \mathbb{R}^{n+m}, \Phi(x,y) = (x, F(x,y))$. Функция $\Phi \in C^1(U)$ и

$$D\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

Тогда $J_\Phi = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, а, значит, по теореме об обратной функции, существуют открытые $O_1 \ni (a,b), O_2 \ni (a,0)$, что $\Phi : O_1 \to O_2$ — диффеоморфизм. Из вида $\Phi$ получаем, что $\Phi^{-1}(u,v) = (u, g(u,v))$ для некоторой $g \in C^1$. Композиции $\Phi^{-1} \circ \Phi, \Phi \circ \Phi^{-1}$ приводят к равенствам

$$(x,y) = \Phi^{-1}(x, F(x,y)) \Rightarrow y = g(x, F(x,y)) \quad (1)$$
$$(u,v) = \Phi(u, g(u,v)) \Rightarrow v = F(u, g(u,v)) \quad (2)$$

Положим $W = \{x : (x,0) \in O_2\}$ и функцию $f(x) = g(x,0), x \in W$. Тогда $W$ открыто и $f \in C^1(W)$. Уменьшая $W$, если необходимо, можно выбрать открытое $V \ni b, V \subset \mathbb{R}^n$ так, что $W \times V \subset O_1$. Пользуясь непрерывностью $f$, уменьшим $W$ так, что $f(W) \subset V$. Проверим заключение теоремы. Пусть фиксирована точка $x, y \in W \times V$, тогда

1. $F(x,y) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = g(x,0)$, т.е. $y = f(x)$
2. $y = f(x) \overset{(2)}{\Rightarrow}_{(u,v)=(x,0)} 0 = F(x, f(x))$

□

**Следствие** (О неявном дифференцировании)**.** В условиях теоремы о неявной функции, матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}$ на $W$ имеем вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$

*Доказательство.* $F(x, f(x)) \equiv 0$ на $W$. Дифференцируя это равенство, получим

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}}_{m\times(m+n)} \underbrace{\begin{pmatrix} E \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}}_{(m+n)\times n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Т.к. $\det \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ на $W$, получаем ответ. □

**Замечание.** В условиях теоремы о неявной функции, если $F \in C^r$, то и неявно заданная функция $f \in C^r$ на своей области определения.

**Задача.** *Докажите, что теоремы о неявной функции и обратной функции эквивалентны.*

# 3 Гладкие многообразия и гладкие отображения

## 3.1 Соглашения

1. Под окрестностью точки будем понимать любое открытое множество, содержащее эту точку
2. Зафиксируем $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Под гладкостью функции далее будем понимать принадлежность ее классу $C^r$, т.е. под "гладкостью" понимается $C^r$-гладкость

## 3.2 Основные определения

**Определение 3.1.** Пусть $m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n$. Множество $M$ в $\mathbb{R}^n$ называется гладким $m$-мерным многообразием, если $\forall p \in M \exists W \ni p$ — открытое в $\mathbb{R}^n$, $\exists V \subset \mathbb{R}^m$ — открытое и $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, такое, что

1. $\varphi$ — гладкое
2. $\varphi : V \to M \cap W$ — гомеоморфизм
3. $rk\ D\varphi(x) = m$ на $V$

При этом, $\varphi$ называется локальной параметризацией в окрестности $p$, а $\varphi^{-1} : M \cap W \to V$ называется картой.

**Пример.** Параметризация плоскости $\Pi_p$, проходящей через $p$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}_{p} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Где векторы $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ неколлинеарны.

**Пример.**

$$S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Параметризация сферы в окрестности любой точки $p \in S^2 \setminus \{Oxz, x \geqslant 0\}$.

$$r : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3, r(\varphi, \psi) = (\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\psi)$$

$$Dr = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \Rightarrow rk\ Dr = 2$$

**Задача.** *Зафершите доказательство*

**Задача.** *Докажите, что гладкое $n$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ открыто.*

**Пример.** Пусть $V$ открыто в $\mathbb{R}^m$ и функция $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ гладкая. Тогда $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in V\}$ — гладкое $m$-мерное многобразием в $\mathbb{R}^n$

*Доказательство.* Рассмотрим $\varphi : V \to \mathbb{R}^n, \varphi(x) = (x, f(x))$, тогда $\varphi$ — гладкая, причем $D\varphi = \begin{pmatrix} E \\ Df \end{pmatrix}$ имеет ранг $m$ и обратное отображение $\psi : \Gamma_f \to V$, где $\psi(x, f(x)) = x$ — непрерывно. Следовательно, $\varphi$ является параметризацией $\Gamma_f$ в области каждой точки. $\square$

**Теорема 3.1.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$M$ — гладкое $m$-мерное многобразие в $\mathbb{R}^n$*

2. *$\forall p \in M \exists U \ni p, W$ — открытые в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\Phi : U \to W$, такой, что $\Phi(M \cap U) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ $(0 \in \mathbb{R}^{n-m})$.*

3. *$\forall p \in M \exists U \ni p$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ и гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, такая, что $M \cap U = F^{-1}(0)$ и $rk\ Df(x) = n - m \forall x \in M \cap U$.*

*Доказательство.*

(1) ⇒ (2) Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация $M$ в окрестности $p = \varphi(a)$. По определению, столбцы матрицы $D\varphi(a)$ линейно независимы. Дополним их до базиса. Следовательно, найдется матрица $A \in M_{n\times(n-m)}$, что $\det \begin{pmatrix} D\varphi(a) & A \end{pmatrix} \neq 0$. Рассмотрим $f : V \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n, F(x, y) = \varphi(x) + Ay$. Эта функция гладкая и $DF(a, 0) = \begin{pmatrix} DF(a) & A \end{pmatrix}$ — невырожденная. Тогда по теореме об обратной функции, $\exists \tilde{V} \subset V \times \mathbb{R}^{n-m}, (a, 0) \in \tilde{V}, \tilde{U}$ — открытые в $\mathbb{R}^n$, т.ч. $F : \tilde{V} \to \tilde{U}$ является диффеоморфизмом. Пусть $V_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in \tilde{V}\}$. Тогда $V_0$ открыто, а значит, $\varphi(V_0) = F(V_0 \times \{0\})$ открыто в $M$ ($\varphi : V \to \varphi(V)$ — гомеоморфизм). Найдется открытое $U_0 \in \mathbb{R}^n$, т.ч. $M \cap U_0 = \varphi(V_0)$. Положим $U = U_0 \cap \tilde{U}, W = F^{-1}(U), \Phi = F^{-1}$. Покажем, что $\Phi$ — искомое отображение. $U \ni p, \Phi : U \to W$ — диффеоморфизм, как сужение диффеоморфизма $F^{-1}$. $\Phi(M \cap U) = \Phi(\varphi(V_0)) = F^{-1}(F(V_0 \times \{0\})) = V_0 \times \{0\} = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$

(2) ⇒ (3) Пусть $\Phi = (\Phi_1, \dots \Phi_n)$ на $U$, положим $F = (\Phi_{m+1}, \dots \Phi_n)$. Докажем, что полученная функция удовлетворяет пункту (3). $x \in M \cap U \Leftrightarrow F(x) = 0, rk\ DF = n - m$, т.к. $\Phi$ — диффеоморфизм.

(3) ⇒ (1) Зафиксируем $p \in M$. Без ограничения общности, можно считать, что последние $n-m$ столбцов $DF(p)$ линейно независимы (иначе заменим $F$ на композицию с перестановкой координат). Положим $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^{n-m}_y, p = (a, b)$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial y}$ невырождена и $(x, y) \in M \cap U \Leftrightarrow F(x, y) = 0$. Тогда по теореме о неявной функции, $\exists V' \ni a$ — открытое в $\mathbb{R}^n, \exists V''$ — открытое в $\mathbb{R}^{n-m}, \exists V_0 = V' \times V''$ и $f : V' \to \mathbb{R}^{n-m}$, т.ч. $M \cap U = \{(x, y) : F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in V'\} = \Gamma$. Пользуясь предыдущим утверждением, получаем желаемое.

□

**Пример.** Покажем, что $S^{n-1}$ — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$

*Доказательство.* $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, F(x) = |x|^2 - 1 \nabla F(x) = 2x \neq 0$. Следовательно, $S^{n-1} = F^{-1}(0)$ — $(n-1)$-мерное многообразие □

## 3.3 Гладкие отображения

**Определение 3.2** (Гладкость по Милнеру)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^l, f : X \to Y$. Отображение $f$ называется гладким, если $\forall x \in X \exists U$ — окрестность $x$ и гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^l$, т.ч. $F|_{X\cap U} = f|_{X\cap U}$. Функция $F$ называется гладким продолжением $f$ в окрестности $x$.

**Замечание.** Если $f : X \to Y, g : Y \to Z$ — гладкие по Милнеру, то их композиция тоже гладкая.

Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$

**Лемма 3.1.** *Если $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация в окрестности $p$, $\varphi(V) = U_0$, то $\varphi^{-1} : U_0 \to V$ — гладкое.*

*Доказательство.* Из доказательства пункта 2 предыдущей теоремы следует, что диффеоморфизм $\Phi : U \to W$ можно выбрать так, что $M \cap U \subset U_0$. Тогда $\Phi(q) = (\varphi^{-1}(q), 0)$ для всех $q \in M \cap U$. Сужая $W$, если необходимо, можно считать, что $W = W' \times W''$, где $W'$ — открытое в $\mathbb{R}^m, W''$ — открытое в $\mathbb{R}^{n-m}$. Рассмотрим $\pi : W \to W', \pi(x, y) = x$ — проектирование на $W'$. Положим $f = \pi \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^m$. Тогда $F$ гладкое и $F|_{M\cap U} = \varphi^{-1}|_{M\cap U}$. Поскольку такие рассуждения можно провести в окрестности каждой точки из $U_0$, это доказывает, что отображение $\varphi^{-1}$ гладкое. □

**Следствие.** Отображение $\varphi^{-1}$ локально липшицево, т.е. $\forall p \in U_0 \exists C > 0 \exists W_0 \subset U_0$ — открытое в $M$ и содержащее $p$, верно $\forall x, y \in W_0 |\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x - y|$

*Доказательство.* Рассмотрим гладкое продолжение $F = (F_1, F_2)$ функции $\varphi^{-1}$ в окрестности $p$. Тогда $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ограничены в некотором шаре $B$ с центром $p$. Тогда $\exists C > 0 \forall x, y \in B |F(x) - F(y)| \leqslant C|x - y| \Rightarrow \forall x, y \in B \cap U_0 = W_0 |\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x - y|$ □

**Определение 3.3.** Пусть $M$ — гладкое многообразие. Отображение $f : M \to N$ называется дифференцируемым, если $f$ — биекция, $f, f^{-1}$ — гладкие.

**Следствие.** Пусть $\varphi : V \to U_0$ — параметризация окрестности $U_0$ в $M$. Тогда $\varphi$ является диффеоморфизмом

**Замечание.** $U_0 :$ — точке$q \in U_0$ сопостовляется $(U_1, \dots U_m)$ точки $\varphi^{-1}(q)$ в $\mathbb{R}^m$

**Следствие** (О функциях перехода)**.** Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n \psi : W \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация, $O = \varphi(V) \cap \psi(W) \neq \varnothing$. Тогда $g : \psi^{-1}(O) \to \varphi^{-1}(O), g = \varphi^{-1} \circ \psi$ является диффеоморфизмом.

Гладкость можно определить в координатах

**Лемма 3.2.** *Пусть $M$ — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}^l$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$f$ — гладкое по Милнеру*
2. *$\forall p \in M, \varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризации в окрестности точки $p$, верно $f \circ \varphi$ — гладкая*
3. *$\forall p \in M \exists \varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризации в окрестности точки $p$, такая, что $f \circ \varphi$ — гладкая*

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$ Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризация $M$ в окрестности точки $p$ и пусть $a \in V$. Рассмотрим $F$ — гладкое продолжение $f$ в окрестности $q = \varphi(a)$. Тогда $f \circ \varphi = F \circ \varphi$ в некоторой окрестности $a$. Следовательно, $f \circ \varphi$ гладкая в некоторой окрестности точки $a$.

$2 \Rightarrow 3$ Очевидно

$3 \Rightarrow 2$ $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ — гладкое как композиция гладких отображений.

□

**Определение 3.4.** Пусть $M, N$ — гладкие многообразия и гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^l$, такое, что $f(M) \subset N$. Если $\varphi, \psi$ — параметризации многообразий в окрестностях $p, f(p)$ соответственно, то $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ называется координатным представлением $f$ в окрестности точки $p$. Если $N$ — открыто в $\mathbb{R}^l$, то $\psi$ будем полагать только тождественным.

**Пример.** Пусть $\gamma$ — гладкая параметризованная кривая на многообразии $M$, т.е. $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, где $I$ — интервал, такое, что $\gamma(I) \subset M$ — гладкое. Если $p \in \gamma(I)$ и $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация $f$ в окрестности $p$, то $\beta = \varphi^{-1} \circ \gamma$ — координатное представление $\gamma$ в окрестности точки $p$. Таким образом на гладкую кривую $\gamma$ можно смотреть локально как на образ гладкой кривой $\beta$ под действием $\varphi$.

**Определение 3.5.** Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n, p \in M$. Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ называется касательным вектором к $M$ в точке $p$, если найдется такая гладкая кривая $\gamma$, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Множество касательных векторов к $M$ в точке $p$ обозначается $T_pM$ и называется касательным пространством к $M$ в точке $p$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n, p \in M$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризация $M$ в окрестности $p = \varphi(a)$. Тогда $T_pM = d\varphi_a(\mathbb{R}^m)$*
2. *Пусть $U \ni p, W$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $\Phi : U \to W$ — такой диффеоморфизм, что $\Phi(M \cap U) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}), 0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Тогда $T_pM = d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$*
3. *Пусть $U$ — открыто в $\mathbb{R}^n, F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ — гладкая, т.ч. $M \cap U = F^{-1}(0)$ и $rk\ DF = n - m$ на $M \cap U$. Тогда $T_pM = \ker dF_p$*

*Доказательство.*

1, 2. Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ из пункта 1, а $\Phi : U \to W$ из пункта 2. Покажем, что $d\varphi_a(\mathbb{R}^m) \subset T_pM \subset d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим $B_r(a) \subset V$. Выберем такое $\delta$, что $\delta|h| < r$, тогда $a+th \in V$ для всех $|t| < \delta$. Определим $\gamma(t) = \varphi(a+th), t \in (-\delta, \delta)$. Тогда $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ — гладкая, $\gamma(0) = \varphi(a) = p, \gamma'(0) = d\varphi_a(h)$, т.е. $d\varphi_a(h) \in T_pM$. Пусть $v \in T_pM$. Тогда $\exists \gamma(-\delta, \delta) \to M$ — гладкая, такая, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Уменьшая $\delta$, если это необходимо, можно считать, что $\gamma(-\delta, \delta) \subset M \cap U$. Следовательно $\Phi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ при $|t| < \delta$, а значит, $d\Phi_p(v) = d\Phi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}\big|_0 \Phi(\gamma(t)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$, т.е. $d\Phi_p(v) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ или $v \in d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Таким образом доказано желаемое вложение. Поскольку $d\varphi_a, d\Phi_p^{-1}$ — инъекции, то $d\varphi_a(\mathbb{R}^m)$ и $d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ — $m$-мерные линейные пространства в $\mathbb{R}^n$. Тогда заключаем, что они равны.

3. Пусть $v \in T_pM$, тогда $\exists \gamma : (-\delta, \delta) \to M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v, \gamma$ — гладкая. Следовательно, в некоторой окрестности $t = 0$ выполнено $F(\gamma(t)) \equiv 0$. Продифференцируем тождество при $t = 0$. $0 = dF_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dF_p(v)$, т.е. $v \in \ker dF_p$ или $T_pM \subset \ker dF_p$. Равенство выполняется из совпадения размерностей.

□

**Замечание.** Во втором пункте неважно, мы берем $(d\Phi)^{-1}$ или $d(\Phi^{-1})$, т.к. $\Phi$ — диффеоморфизм.

Пользуясь известными фактами из линейной алгебры, получим несколько следствий:

**Следствие.** Отображение $d\varphi_a$ задает линейный изоморфизм между $\mathbb{R}^m, T_pM$.

*Доказательство.* Пусть $(u_1, u_2, \dots u_m)$ — координаты в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = d\varphi_a(e_1), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) = d\varphi_a(e_2), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m}(u) = d\varphi_a(e_m)$ образуют базис в $T_pM$. Если $h = (h_1, h_2, \dots h_m) \in \mathbb{R}^m$, то по линейности, $d\varphi_a(h) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(a) h_i$. Причем, геометрический смысл у $h - \gamma = \varphi \circ \beta, v = d\varphi_a(\beta'(0)) \Rightarrow h = \beta'(0)$. □

**Следствие.** Если $M$ локально задано уравнением $F(x) = v$ (из пункта 3) и $F = (F_1, F_2, \dots F_n)$, то $T_pM$ задается СЛУ:

$$\begin{cases} (\nabla F_1(p), v) = 0 \\ (\nabla F_2(p), v) = 0 \\ \vdots \\ (\nabla F_{n-m}(p), v) = 0 \end{cases}$$

В частности, векторы $\nabla F_1(p), \nabla F_2(p), \dots \nabla F_{n-m}(p)$ образуют базис в $T_pM$.

**Пример.** Пусть $S^{n-1}$ — $n-1$-мерная сфера в $\mathbb{R}^n$, задается уравнением $F(x) = 0$, где $F(x) = |x|^2 - 1$. Заметим, что $\nabla F(x) = 2x \Rightarrow T_x S^{n-1} = x^{\perp}$.

**Определение 3.6.** Аффинное пространство $\Pi_p = p + T_pM$ называется касательной плоскостью к $M$ в $p$.

Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация $M$ в окрестности $p = \varphi(a)$. Тогда $p + d\varphi_a(u-a) \in \Pi_p$ и $\varphi(u) = p + d\varphi_a(u-a) + o(|u-a|), u \to a$. Следовательно, расстояние от $x = \varphi(u)$ до $\Pi_p$ есть $d(x, \Pi_p) = \inf_{y \in \Pi_p} |x - y| \leqslant o(|u-a|), u \to a$. Но $\varphi^{-1}$ локально Липшицево, т.е. $|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x-y|$. А значит, $d(x, \Pi_p) = o(|x-p|), x \to p$.

**Лемма 3.3** (О почти изометрии). *Для любого $\varepsilon > 0, p \in M$ найдутся окрестности $U \subset M, W \subset \Pi_p$ и диффеоморфизм $\psi : U \to W$, что* $(1-\varepsilon)|x-y| \leqslant |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant (1+\varepsilon)|x-y|$

*Доказательство.* Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\varphi : \tilde{V} \to \tilde{U}$ — параметризация в окрестности $p = \varphi(a)$ и $L(u) = p + d\varphi_a(u-a)$. Отображение $\varphi^{-1}$ локально Липшицево. Сужая $\tilde{U}$, если необходимо, можно считать, что $|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x-y| \forall x, y \in \tilde{U}$. Известно, что найдется $V \ni a$ — окрестность, такая, что $|\varphi(u) - \varphi(v) - d\varphi_a(u-v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C}$. Определим $U = \varphi(V), W = L(V), \psi = L^{-1}$. Тогда $\psi$ — диффеоморфизм из $U$ в $W$. Пусть $x = \varphi(u), y = \varphi(v)$. Имеем: $|\psi(x) - \psi(y)| = |L(u) - L(v)| = |d\varphi_a(u-v)|$. Прибавив $\varphi(u) - \varphi(v)$, получим: $|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant |x-y| + \frac{\varepsilon}{C}|u-v| \leqslant (1+\varepsilon)|x-y|$. Второе неравенство доказывается аналогично □

**Пример.** $M = \{(x, y) : y = |x|\}$. Покажем, что $M$ — не одномерное многообразие. Докажем от противного. Пусть $M$ — одномерное многообразие, тогда найдется гладкая кривая $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, такая, что $\gamma(0) = 0, \gamma'(0) \neq 0$. Имеем: $\gamma_1^2(t) = \gamma_2^2(t)$. Дифференцируя это равенство, получаем $2\gamma_1(t)\gamma_1'(t) = 2\gamma_2(t)\gamma_2'(t)$. $\gamma_2(t) \geqslant 0 \Rightarrow$ если $\gamma_2(t) = 0 \Rightarrow \gamma_2'(t) = 0 \Rightarrow \gamma_1'(t) = 0$, противоречие, т.к. $\gamma'(t) = 0$, противоречие.

## 3.4 Дифференциал гладкого отображения

**Определение 3.7.** Пусть $M$ — гладкое многообразие, $f : M \to \mathbb{R}^l$ — гладкое отображение. Дифференциал $df_p : T_pM \to \mathbb{R}^l$ определяется следующим образом: Пусть $\gamma(-\delta, \delta)$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$, тогда

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t)) \tag{3.1}$$

**Теорема 3.3.** *Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ и задано гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^l$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *(3.1) не зависит от выбора $\gamma$*
2. *$df_p : M \to \mathbb{R}^l$ линейное*
3. *Если $N$ — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^l, f(M) \subset N$, то $df_p(T_pM) \subset T_qN$, где $q = f(p)$.*

*Доказательство.*

1. Пусть $v \in T_pM$. Выебрем гладкую кривую $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ так, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Рассмотрим $F : U \to \mathbb{R}^l$ — гладкое продолжение $f$ в некоторой окрестности $U$ точки $p$ в $\mathbb{R}^n$. Т.к. $\gamma(t) \in M \cap U$ при малых $|t|$, то если обозначить через $DF(p)$ матрицу Якоби отображение $F$ в точке $p$, имеем:
$$DF(p)v = DF(\gamma(0))\gamma'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t))$$
Заметим, что $DF(p)v$ не зависит от $\gamma$, а $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\gamma(t))$ — от $F$.
2. Линейность следует из того, что $df_p(v) = DF(p)v$
3. Если $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ — гладкая кривая, то $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$, то $\beta = f \circ \gamma : (-\delta, \delta) \to N$ — гладкая кривая, $\beta(0) = f(p) = q, \beta'(0) = df_p(v)$. Тогда $df_p(v) \in T_qN$.

$\square$

**Следствие.** Если в пункте 3 дополнительно $g : N \to \mathbb{R}^s$ — гладкое, то справедливо цепное правило:
$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

*Доказательство.* Достаточно продифференцировать функцию $g(f(t))$ в $t = 0$ по правилу дифференцирования композиции. $\square$

**Следствие.** Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие, $N$ — гладкое $r$-мерное многообразие. Если $f : M \to N$ — диффеоморфизм, то $m = r$.

*Доказательство.* Пусть $p \in M, q = f(p) \in N$. Обозначим через $g = f^{-1} : N \to M$, тогда $g \circ f = \mathrm{id}_M, f \circ g = \mathrm{id}_N$, откуда:

$$dg_q \circ df_p = \mathrm{id} : T_pM \to T_pM$$

$$df_p \circ dg_q = \mathrm{id} : T_qN \to T_qN$$

Следовательно, $df_p : T_pM \to T_qN$ — линейный изоморфизм и $(df_p)^{-1} = dg_p$. Следовательно $m = \dim T_pM = \dim T_qN = r$. $\square$

**Замечание.** Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризация $M$ в окрестности точки $p = \varphi(a)$, $v \in T_pM$ и $d\varphi_a(h) = v$, тогда

$$df_p(v) = df_p(d\varphi_a(h)) = d(f \circ \varphi)_a(h)$$

В частности, в координатах $df_p$ задается матрицей Якоби координатного представления $f \circ \varphi$.

**Определение 3.8.** Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладкого многообразия $M$ в гладкое многообразие $N$. Точка $q \in N$ называется регулярным значением $f$, если $df_p : T_pM \to T_qN$ сюръективен $\forall p \in f^{-1}(q)$.

**Теорема 3.4** (О регулярном значении). *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладкого $m$-мерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^s$ в гладкое $n$-мерное многообразие $N$, $n < m$ и $q \in N$ — регулярное значение $f$. Тогда $P = f^{-1}(q) = \{p \in M : f(p) = q\}$ является гладким $m - n$ мерным многообразием в $\mathbb{R}^s$.*

*Доказательство.* Зафиксируем $p \in f^{-1}(q)$ и рассмотрим параметризации $\varphi : U_0 \to U$ в окрестности $p$ в $M$, $\psi : V_0 \to V$ в окрестности $q$ в $N$. Уменьшая $U$, если это необходимо, и пользуясь непрерывностью $f$ в точке $p$, можно считать, что $f(U) \subset V$. Тогда определено отображение $f_0 = \psi \circ f \circ \varphi : U_0 \to V_0$ — координатное представление $f$. Пусть $b = \psi^{-1}(q)$. Если $a \in U_0$ такая, что $f_0(a) = b$, то $\varphi(a) = p \in U \cap P$ и отображения $d\varphi_a : \mathbb{R}^m \to T_pM, df_p : T_pM \to T_qN, d\psi_q^{-1} : T_qN \to \mathbb{R}^n$ сюръективны, а значит сюръективна и их композиция, т.е. $d(f_0)_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Следовательно, $b$ — регулярное значение $f_0$. Множества $f_0^{-1}(b) = \{x \in U_0 : f(\varphi(x)) = q\} = \varphi^{-1}(U \cap P)$ является $m - n$ мерным гладким многообразием в $\mathbb{R}^s$. Уменьшая $U_0$, если это необходимо, найдем открытые $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ и параметризацию $\alpha : W \to \varphi^{-1}(U \cap P)$. Следовательно, $\varphi \circ \alpha : W \to U \cap P$ — параметризация $P$ в окрестности $p$. □

**Задача.** *Докажите, что $T_pP = \ker df_p$*

# 4 Экстремумы функций многих переменных

## 4.1 Безусловный экстремум

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, где $U$ — открыто в $\mathbb{R}^n$

**Определение 4.1.** Точка $a \in U$ называется точкой локального максимума $f$, если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) (f(x) \leqslant f(a))$. Аналогично определяются локальный минимум, и локальные строгие максимум и минимум (если соответствующий знак строгий).

**Замечание.** Все такие точки называются точками локального экстремума

**Теорема 4.1.** *Если $a$ — точка экстремума $f$ и существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$*

*Доказательство.* Заметим, что $a_k$ — экстремум функции $\varphi(t) = f(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots a_n)$. По условию, $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $a$, поэтому по теореме Ферма, $0 = \varphi'(a_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ □

**Следствие.** Если $a$ — точка экстремума функции $f$ и $f$ дифференцируема в точке $a$, то $df_a = \nabla f(a) = \vec{0}$

**Определение 4.2.** Точка $a \in U$ называется стационарной точкой функции $f$, если $f$ дифференцируема в этой точке и $df_a = 0$.

**Напоминание.** Если $f \in C^2(U)$, то $d^2 f_a(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$ относительно компонент вектора $h$.

**Определение 4.3.** Матрица $d^2 f_a$ обозначается через $Hf(a)$, причем

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

Называется матрицей Гессе

**Теорема 4.2.** *Пусть $f \in C^2(U)$ и $a$ — стационарная точка $f$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $d^2 f_a(h) > 0 \forall h \neq 0 \Rightarrow a$ — точка строгого минимума*
2. *Если $d^2 f_a(h) < 0 \forall h \neq 0 \Rightarrow a$ — точка строгого максимума*
3. *Если $\exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n$, такие, что $d^2 f_a(h_+) > 0, d^2 f_a(h_-) < 0$, то $a$ не является точкой экстремума функции $f$.*

*Доказательство.*

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, имеем:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h) + \alpha(h)|h|^2 = f(a) + \frac{1}{2}|h|^2 \left(d^2 f_a\left(\frac{h}{|h|}\right) + \alpha(h)\right)$$

Где $\alpha(h) \to 0, h \to 0$. Функция $d^2 f_a(h)$ — непрерывная функция относительно $h$ и $S = \{h \in \mathbb{R}^n : |h| = 1\}$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда по теореме Вейерштрасса, $\exists m = \inf_{|h|=1} d^2 f_a(h) > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $|\alpha(h)| \leqslant \frac{m}{4}|h|^2 \forall h : 0 < |h| < \delta$. Тогда $f(a+h) - f(a) \geqslant \frac{m}{4} > 0 \forall h \in \overset{\circ}{B}_\delta(0)$. Это доказывает, что $a$ — точка строгого локального минимума.

2. Доказывается аналогично

3. По формуле Тейлора,

$$f(a+th_+) = f(a) + t^2\left(\frac{1}{2} d^2 f_a(h_+) + \alpha(th_+)|h_+|^2\right)$$

Заметим, что $\lim_{t\to 0} \frac{1}{2} d^2 f_a(h_+) + \alpha(th_+)|h_+|^2 > 0$, поэтому $\exists \delta_1 > 0 : f(a+th_+) - f(a) > 0 \forall t : 0 < |t| < \delta_1$. Аналогично, $\exists \delta_2 > 0 : f(a+th_-) - f(a) < 0 \forall t : 0 < |t| < \delta_2$. Выражение $f(x) - f(a)$ не сохраняет знак ни в какой окрестности точки $a$, т.е. $a$ не является точкой локального экстремума функции $f$

□

**Замечание.** Если $d^2 f_a$ как квадратичная форма полуопределена, то теорема не позволяет сделать вывод о наличии экстремума в точке $a$.

**Пример.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Тогда $d^2 f_O(h_1, h_2) = 2h_1^2$ — положительно полуопределенная квадратичная форма. Однако при четных $n$, $O$ является точка строгого минимума $f$, а при нечетных — не является.

**Замечание.** Для исследования формы на определенность можно либо привести ее к диагональному виду, либо воспользоваться критерием Сильвестра.

## 4.2 Условный экстремум

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто и задана функция $g : U \to \mathbb{R}^m, g = (g_1, g_2, \ldots g_m), 0 < m < n$. Изучим $f : U \to \mathbb{R}$ на экстремум на множестве нулей $M = g^{-1}(0)$.

**Определение 4.4.** Точка $p \in M$ называется точкой локального условного максимума функции $f$ на множестве $M$, если $\exists \delta > 0 \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta (p) \cap M (f(x) \leqslant f(p))$. Аналогично определяются точки других типов условного экстремума.

**Теорема 4.3** (Лагранж). *Пусть $f \in C^1(U, g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)), rk\ Dg(p) = m$. Если $p$ — точка условного экстремума $f$ на $M$, то $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R} : \nabla f(p) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla g_k(p)$.*

*Доказательство.* Т.к. $rk\ Dg(p) = m$, то матрица Якоби имеет минор порядка $m$, $\neq 0$. Учитывая, что $g \in C^1$, то этот минор будет отличен от 0 в некоторой окрестности точки $p$. Б.О.О. можно считать, что $rk\ Dg(x) = m \forall x \in U$. Тогда $M$ является гладким $m-n$ мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$. Пусть $v \in T_p M$. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, такую, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Функция $f \circ \gamma$ имеет экстремум в точке $t = 0$, поэтому

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = (\nabla f(p), v)$$

То есть $\nabla f(p) \in (T_p M)^\perp$. Т.к. $\nabla g_1(p), dots \nabla g_m(p)$ образуют базис в $(T_p M)^\perp$, поэтому такие $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ найдутся □

**Замечание.** Из Теоремы Лагранжа следует метод множителей Лагранжа: если $p$ — точка условного экстремума $f$ на $M$, то $p$ — стационарная точка функции Лагранжа:

$$L : U \to \mathbb{R}, L(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)$$

**Теорема 4.4.** *Пусть $f \in C^2(U), g \in C^2(U, \mathbb{R}^m), rk\ Dg(p) = m$, где $p$ — стационарная точка функции Лагранжа, соответствующая множителям $\lambda_1, \ldots \lambda_n$.*

1. *Если $d^2 L_p(h) > 0 \forall h \in T_p M \setminus \{0\}$, то $p$ — точка условного минимума $f$ на $M$*

2. *Если $d^2 L_p(h) < 0 \forall h \in T_p M \setminus \{0\}$, то $p$ — точка условного максимума $f$ на $M$*

3. *Иначе $p$ не является точкой условного экстремума.*

*Доказательство.* Пусть $x = \varphi(y)$ — локальная параметризация многообразия $M$ в окрестности $p = \varphi(a)$. Точка $p$ — точка условного минимума (максимума) $f$ на $M$ тогда и только тогда, когда $a$ — точка безусловного минимума (максимума) функции $H = f \circ \varphi$. Функции $f, L$ совпадают на $M$, поэтому $H = L \circ \varphi$. Поскольку $\forall v \in \mathbb{R}^{n-m}$ выполнено:

$$dH_a(v) = dL_p(d\varphi_a(v)) = 0$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $p$ — стационарная точка функции $L$. Тогда $a$ — стационарная точка функции $H$. Найдем $d^2H_a$

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y_l \partial y_k}$$

Т.к. $p$ — стационарная точка $L$, то $\frac{\partial L}{\partial x_i}(p) = 0$ для всех $i$. Но тогда

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_l \partial y_k}(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(a) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(a)$$

$$d^2H_a = \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{l=1}^{n-m} \frac{\partial^2 H}{\partial y_l \partial y_k}(a) v_l v_k = \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{l=1}^{n-m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(a) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(a) v_k v_l =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(p) \left( \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_l} v_l \right) \left( \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} v_k \right) = d^2L_p(d\varphi_a(v))$$

Отметим, что $d\varphi_a$ — изоморфизм $\mathbb{R}^{n-m}$ на $T_pM$, причем $\ker d\varphi_a = \{0\}$. □

**Определение 4.5.** Назовем шар $B_r(x)$ в $\mathbb{R}^n$ рациональным, если $r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}^n$.

**Замечание.** Любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ представимо в виде объединения рациональных шаров, которые в нем содержатся

**Лемма 4.1.** *Если $M$ — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, то существует его покрытие $\{U_i\}$ координатными окрестностями (т.е. образами параметризаций).*

*Доказательство.* Рассмотрим $\{U_p\}_{p \in M}$ — произвольное покрытие $M$ координатными окрестностями. $\forall p \exists \tilde{U}_p$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ : $\tilde{U}_p \cap M = U_p$. Положим $\{B_j\} : \forall j \exists p = p(j)(B_j \cap M \subset U_p) \Rightarrow \{B_j \cap M\}$. Для каждого $j$ выберем ровно одно $p_j$: $B_j \cap M \subset U_p$. Следовательно, $\{U_p\}$ образует искомое покрытие. □

# 5 Интегрирование на многообразиях

## 5.1 Мера на многообразии

Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n, m < n$.

**Определение 5.1.** Множество $E \subset M$ называется измеримым, если $\forall \varphi : V \to U$ — параметризации окрестности $U$ в $M$, множество $\varphi^{-1}(E \cap U)$ измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

**Замечание.** Для измеримости $E$ достаточно проверить измеримость по Лебегу множеств $\varphi_j^{-1}(E \cap U_j)$ для счетного набора параметризаций $\{\varphi_j\}$, образы $U_j$ которых покрывают $M$.

*Доказательство.* Пусть $W$ — образ параметризации $\psi$. Имеем: $W = \bigcup_j (W \cap U_j) \Rightarrow \psi^{-1}(E \cap W) = \bigcup_j \psi^{-1}(E \cap W \cap U_j)$. Для любого $j$, $\varphi_i^{-1}(E \cap W \cap U_j) = \varphi_i^{-1}(E \cap U_j) \cap \varphi_j^{-1}(W)$ измеримо в $\mathbb{R}^m$, поэтому $\psi^{-1}(E \cap W \cap U_j) = \psi^{-1} \circ \varphi_j(\varphi_j^{-1}(E \cap W \cap U_j))$ — измеримо в $\mathbb{R}^n$ как образ измеримого множества под действием диффеоморфизма. $\mathcal{A}_M = \{E \subset M | E \text{ измеримы}\}$ $\square$

**Лемма 5.1.** *$\mathcal{A}_M$ — $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathcal{B}(M)$*

*Доказательство.* Пусть $E \in \mathcal{A}_M$ измеримо и $\varphi : V \to U$ — параметризация $U$ в $M$. Тогда:$\varphi^{-1}(E \cap U)$ измеримо в $\mathbb{R}^n$. Имеем: $\varphi^{-1}(E^c \cap U) = \varphi^{-1} \setminus \varphi^{-1}(E \cap U)$. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_M$ — измеримы в $\mathcal{A}_M$. Тогда: $\varphi^{-1}\left(\left(\bigcup E_i\right) \cap U\right) = \varphi^{-1}\left(\bigcup E_j \cap U\right) = \bigcup \varphi^{-1}(E_j \cap U)$ — измеримо в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup E_j \in \mathcal{A}_M$. Очевидно, что $M \subset \mathcal{A}_M$. Пусть $O$ — открытое в $M \Rightarrow \varphi^{-1}(O \cap U)$ — открытое в $\mathbb{R}^m \Rightarrow O \in \mathcal{A}_M \Rightarrow \mathcal{B}(M) \subset \mathcal{A}_M$. $\square$

**Определение 5.2.** Набор $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ назовем счетным измеримым разбиением $M$, соответствующим набору параметризаций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, если $M = \bigsqcup_{i=1} E_i$, причем $E_i$ измеримы и $\forall i : E_i \in U_i$ — образе параметризации $\varphi_i$.

**Замечание.** Измеримое разбиение существует

*Доказательство.* $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ — образы параметризаций. Положим $E_1 = U_1$. $E_i = U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$. $\square$

В случае аффинных пространств на $\mathcal{A}_M$ можно каноническим образом ввести меру. Пусть $\Pi$ — $m$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\exists \Phi$ — движение, такое, что $\Phi(\mathbb{R}^m) = \Pi$. Для $A \in \mathcal{A}_\Pi$ положим $\mu_\Pi(A) = \mu(\Phi^{-1}(A))$. Покажем, что это определение корректно. Пусть $\psi$ — движение в $\mathbb{R}^n$, такое, что $\psi(\mathbb{R}^m) = \Pi$. Тогда $H = \psi^{-1} \circ \Phi|_{\mathbb{R}}$ — движение в $\mathbb{R}^m$ и $\psi^{-1}(A) = H(\Phi^{-1}(A)) \forall A \subset \mathbb{R}^m$. Т.к. движение сохраняет меру в $\mathbb{R}^n$, то $\mu(\psi^{-1}(A)) = \mu(\Phi^{-1}(A)) \forall A \in \mathcal{A}_M$. Тогда мера $\mu_\Pi$ называется мерой Лебега на подпространстве $\Pi$.

**Лемма 5.2.** *Пусть $\Pi = L(\mathbb{R}^m)$ где $L(x) = Ax + b$ — аффинное отображение, причем $rk\ A = m$. Тогда $\mu_\Pi(L(E)) = \sqrt{\det A^T A}\mu(E) \forall E$ — измеримого в $\mathbb{R}^m$.*

*Доказательство.* Пусть $\Pi_p$ — касательная плоскость к $M$ в точке $p$. Если $\varphi$ — параметризация $M$ в окрестности $p = \varphi(a)$, то $\Pi_p = L(\mathbb{R}^m)$, где $L(u) = p + d\varphi_a(u - a)$. Пусть $a = (a_1, \dots a_m), h > 0, Q_h = [a_1, a_1 + h) \times \dots \times [a_m, a_m + h)$. Возьмем за основу, что $\nu$ на $M$ должна сохраняться при изометриях. По лемме о почти изометрии, имеем:

$$\lim_{n \to 0} \frac{\nu(\varphi(Q_n))}{\mu_\Pi(L(Q_n))} = 1$$

$$\nu(\varphi(Q_n)) \sim_{n \to 0} \sqrt{g_\varphi(a)} h^m$$

Где $g_\varphi = G_\varphi, G_\varphi = D\varphi(a)^T D\varphi(a)$ — матрица Грама. $\square$

**Теорема 5.1.** *Существует единственная мера $\nu$ на $\mathcal{A}_\mathcal{M}$, такая, что $\forall$ параметризации $\varphi : V \to U$ окрестности $U$ в $M$ и любого измеримого $A \subset U$ выполнено:*

$$\nu(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{g_\varphi} d\mu$$

*Доказательство.* Определим $\nu$ на $\sigma$-алгебре измеримых множеств $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ таким образом, потом докажем, что продолжение $\nu$ на $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ единственно.

1. Покажем, что $\nu(A)$ не зависит ни от координатной окрестности $A$, ни от ее параметризации. Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n, \psi : W \to \mathbb{R}^n$ — локальные параметризации, $A \subset O = \varphi(V) \cap \psi(W)$. Тогда $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(O) \to \psi^{-1}(O)$ — диффеоморфизм. Обозначим матрицу Якоби $\Phi$ через $S$, тогда дифференцируя равенство $\varphi = \psi \circ \Phi$, имеем:
$$D\varphi = D\psi \cdot S$$
Тогда $G_\varphi = S^T G_\psi S, g_\varphi = g_\psi (\det S)^2$. Теперь независимость следует из теоремы о замене переменной в кратном интеграле:
$$\int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{g_\psi} dy =_{y=\Phi x} \int_{\Phi^{-1}(\psi^{-1}(A))} \sqrt{g_\psi \circ \Phi} |\det S| dx = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{g_\varphi} dx$$

2. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ — измеримое координатное разбиение $M$. Для $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ определим $A_i = A \cap E_i$. Тогда $A_i$ измеримо и лежит в образе некоторой параметризации и $A = \bigsqcup +i = 1^\infty A_i$. Любая мера на $\nu$ на $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет равенству $\nu(A) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i)$. Поскольку $\nu(A_i)$ определены однозначно, то и $\nu(A)$ на $A$ также определено однозначно. Это дает способ продолжения $\nu$ с $A_U$ на $A_M$

3. Покажем, что $\nu$ является мерой. Пусть дано измеримое разбиение $A = \bigsqcup_{k=1}^\infty B_k$. Определим $B_{ki} = B_k \cap E_i$. Тогда $B_k = \bigsqcup_{i=1}^\infty B_{ki}, A_i = A \cap E_i = \bigsqcup_{k=1}^\infty B_k \cap E_i = \bigsqcup_{k=1}^\infty B_{ki}$. Поскольку интеграл Лебега счтено аддитивен, имеем:
$$\nu(A_i) = \sum_{k=1}^\infty \nu(B_{ki})$$
Меняя порядок суммирования, имеем:
$$\nu(A) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) = \sum i = 1^\infty \sum_{k=1}^\infty \nu(B_{ki}) = \sum k = 1^\infty \sum_{i=1}^\infty \nu(B_{ki}) = \sum_{k=1}^\infty B_k$$

В частности, показана независимость продолжения $\nu$ от выбора $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ $\square$

**Определение 5.3.** Мера $\nu$ называется поверхностной мерой на $M$.

**Определение 5.4.** Пусть $E \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция $f$ называется измеримой, если $\{p \in E : f(p) < a\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ для любого $a$.

**Лемма 5.3.** *Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *$f$ измерима*
2. *$f \circ \varphi$ измерима на $\varphi^{-1}(E)$ для любой параметризации $\varphi$*
3. *$f \circ \varphi_j$ измерима на $\varphi_j^{-1}(E)$ для счетного набора параметризаций $\varphi_j$, образы которых покрывают $M$*

*Доказательство.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Вытекает из равенства $\{x \in \varphi^{-1}(E) | f(\varphi(x)) < a\} = \varphi^{-1}(\{p \in E | f(p) < a\})$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ — набор координатных окрестностей, покрывающих $M$, причем $U_j$ — образ параметризации $\varphi_j$. Пусть $F = f^{-1}([-\infty, a))$. По равенству из первого следствия получаем, что $\varphi_j^{-1}(F \cap U_j)$ измеримо $\forall j$. Тогда результат следует по первому замечанию после определения измеримости.

$\square$

## 5.2 Интеграл на многообразии

**Определение 5.5.** Пусть функция $f : A \to [0, +\infty]$ измерима, $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ — измеримое координатное разбиение $M$, соответствующее набору параметризаций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Определим

$$\int_A f d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(A \cap E_i)} f \circ \varphi_i \sqrt{g_{\varphi_i}} d\mu$$

**Замечание.** Определение не зависит ни от выбора измеримого координатного разбиения, ни от выбора параметризаций $\varphi_i$. Для этого достаточно в доказательстве теоремы заменить $\sqrt{g_\varphi}$ на $f \circ \varphi \sqrt{g_\varphi}$.

**Определение 5.6.** Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ называется интегрируемой, если $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима и $\int_A f^{\pm} d\nu < \infty$. В этом случае

$$\int_A f d\nu = \int_A f^+ d\nu - \int_A f^- d\nu$$

## 5.3 Примеры

**Пример.** Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ — гладкая с $\gamma'(t) \neq 0$ на $I$. Если $\gamma : I \to \gamma(I)$ — гомеоморфизм, то $\Gamma = \gamma(I)$ является гладким одномерным многообразием в $\mathbb{R}^n$, покрытым образом одной параметризации $\gamma$. Если $f : \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательно измеримая или интегрируема, то:

$$\int_\Gamma f ds = \int_I f(\gamma(I)) \gamma'(t) dt$$

Такой интеграл называется криволинейным интегралом I рода. Если $\tilde{\Gamma} = \gamma([a, b])$, то $\nu(\tilde{\Gamma}) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ — длина кривой $\gamma|_{[a,b]}$

**Пример.** Пусть $V \subset \mathbb{R}^2$ — открыто, $r : V \to \mathbb{R}^n, rk\ Dr = 2$ на $V$, $r : V \to r(V)$ — гомеоморфизм, то $M = r(V)$ является 2-мерным многообразием, покрытым образом одной параметризации $r$, причем:

$$(Dr)^T Dr = \begin{pmatrix} (r'_u, r'_u) & (r'_u, r'_v) \\ (r'_v, r'_u) & (r'_v, r'_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Если $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательно измерима или интегрируема, то, если положить $S = \nu$

$$\int_M f dS = \iint_V f(r(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Такой интеграл называется криволинейным интегралом I рода.

**Пример.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — открыто, $h : U \to \mathbb{R}$ гладкая, тогда $M = \{(x, h(x)) | x \in U\}$ — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, покрытое образом одной параметризации $\varphi : U \to M, phi(x) = (x, h(x))$. Имеем:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla h^T \end{pmatrix}, (D\varphi)^T D\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \nabla h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla h^T \end{pmatrix} = E_{n-1} + \nabla h (\nabla h)^T$$

$$\det G_\varphi = 1 + |\nabla h|^2$$

Если $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательно измерима или интегрируема, то

$$\int_M f d\nu = \int_U f(x, h(x)) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2} d\mu$$

## 5.4 Площадь поверхности сферы

**Пример.** Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, x_n > 0\}$ — верхняя полусфера. Тогда $M$ — график функции $h(y) = \sqrt{r^2 - |y|^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{r^2 - |y|^2}}, 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{r^2}{r^2 - |y|^2}$$

$$\int_M f d\nu = \int_{B_r(0)} f(y, \sqrt{r^2 - |y|^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |y|^2}} dy = \int_{B_r(0)} f(rt, r\sqrt{1 - |t|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - |t|^2}} dt$$

В частности,

$$\nu(M) = r^{n-1} \int_{B_1(0)} \frac{dt}{\sqrt{1 - |t|^2}} = r^{n-1} \nu(M_1)$$

Где $M_1$ — единичная полусфера.

**Лемма 5.4.** *Пусть $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\nu(A) = 0$
2. $\mu(\varphi^{-1}(A \cap U)) = 0$ *для любой параметризации $\varphi$ (здесь $U$ — образ $\varphi$)*
3. $\mu(\varphi_j^{-1}(A \cap U)) = 0$ *для счетного набора параметризаций $\varphi_j$ (здесь $U_j$ — образ $\varphi_j$), образы которых покрывают $M$.*

*Доказательство.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Поскольку $A \cap U$ измерима, то $0 = \nu(A) \geqslant \nu(A \cap U) = \int_{\varphi^{-1}(A \cap U)} \sqrt{g_\varphi} d\mu$. Т.к. $\sqrt{g_\varphi}$ положительно, то $\varphi^{-1}(A \cap U)$ имеет меру 0.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно

(3) $\Rightarrow$ (1) Имеем $A = A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap U_j)$. По условию, $\mu(\varphi_j^{-1}(A \cap U_j)) = 0 \Rightarrow \nu(A \cap U_j) = 0$. По счетной аддитивности, $\nu(A) = 0$.

$\square$

**Следствие.** Пусть $P \subset M$ — гладкое $k$-мерное многообразие, $k < m$. Тогда $\nu(P) = 0$ ($\nu$ — поверхностная мера на $M$.

**Определение 5.7.** Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладким $m$-мерным многообразием, если $M = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, где $N, P_i$ — гладкие многообразия, $\dim N = m, \dim P_i < m$

**Теорема 5.2** (Формула коплощади)**.** *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} (n > 1)$ интегрируемо по Лебегу, тогда для почти всех $r \in \mathbb{R}_+$ функция $f$ интегрируема по сфере $S_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ и справедлива формула:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S_r(0)} f(x) d\nu(x) \right) d\mu(r)$$

*Доказательство.* Введем обозначения $x = (y, x_n), y = (y_1, \dots y_{n-1}), H_\pm = \{x \in \mathbb{R}^n, \pm x_n > 0\}, B = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| < 1\}$. Рассмотри отображение $\varphi : B \times \mathbb{R}_+ \to H_+, \varphi(y, r) = (ry, r\sqrt{1 - |y|^2})$. Отображение $\varphi$ обратимо, причем $\varphi^{-1}(x) = \left(\frac{y}{|x|}, |x|\right)$. Следовательно, $\varphi$-дифференциируема. Запишем ее матрицу Якоби:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{n-1} \\ -\frac{rx_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & -\frac{rx_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & -\frac{rx_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} & \sqrt{1-|y|^2} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\det D\varphi = \begin{vmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{n-1} \\ -\frac{rx_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & -\frac{rx_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & -\frac{rx_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} & \sqrt{1-|y|^2} \end{vmatrix} =$$

$$= r^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & -\frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} & \sqrt{1-|y|^2} \end{vmatrix} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}}$$

По формуле замены переменной в интеграла и по теореме Фубини:

$$\int_{H_+} f d\mu = \int_{B \times \mathbb{R}_+} f(ry, r\sqrt{1-|y|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} dy dr =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left( \int_B f(ry, r\sqrt{1-|y|^2}) dy \right) dr = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S_r(0) \cap H_+} f(x) d\nu(x) d\mu(r) \right)$$

Аналогично проверяется и для замены $H_+$ на $H_-$. Складывая полученные формулы, получаем требуемую формулу. Осталось заметить, что так как $f$ интегрируема, то теорема Фубини дает, тчо внутренний интеграл должен быть конечен для почти всех $r$. $\square$

**Следствие.** Поверхностная мера сферы $\sigma_{n-1}$ сферы $S_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ считается через меру $\omega_n$ единичного шара $B_1(0)$:

$$\omega_n = \int_{R^n} I_{B_1}(x)d\mu = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S_r(0)} I_{B_1}(x)d\nu(x) \right) d\mu(r) =$$

$$= \int_{R^n} I_{B_1}(x)d\mu = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S_r(0)} d\nu(x) \right) d\mu(r) = \int_{R^n} I_{B_1}(x)d\mu = \int_0^{+\infty} \left( \int_{S_1(0)} r^{n-1}d\nu(x) \right) d\mu(r) =$$

$$\sigma_{n-1} \int_0^1 r^{n-1}dr = \frac{\sigma_{n-1}}{n}$$

**Задача.** *Покажите, что если $x \mapsto f(|x|)$ неотрицательна или интегрируема, то справедлива формула:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)d\mu(x) = \sigma_{n-1} \int_0^{+\infty} f(r)r^{n-1}dr$$

# 6 Дифференциальные формы

## 6.1 Дифференциальные 1-формы

**Определение 6.1.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто. Дифференциальной 1-формой на $U$ называется $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$. ($X^*$ — сопряженное пространство к $X$)

**Замечание.** На дифференциальную 1-форме можно смотреть как на функцию $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, линейную по второму аргументу. Действительно, $\omega(x, h) = (\omega(x))(h)$, но т.к. $\omega(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$, то замечание верно.

Пусть $e_1, \dots e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда по линейности $\omega(x, h) = \sum_{i=1}^n h_i\omega(x, e_i)$. Функции $f_i : U \to \mathbb{R}^n : f_i(x) = \omega(x, e_i)$ называются коэфициентами формы $\omega$.

**Напоминание.** $\{dx_1, \dots dx_n\}$, где $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, dx_i(h) = h_i$ — базис $(\mathbb{R}^+)^*$, двойственный к стандартному базису $\{e_1, \dots e_n\}$.

Следовательно, имеет место координатное представление 1-формы:

$$\omega = f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)d_n$$

**Замечание.** Сложение и умножение на скаляр производятся поточечно. Множества дифференциальных 1-форм относительно этих операций образует линейное пространство.

**Определение 6.2.** Будем говорить, что 1-форма непрерывна, если все ее коэфициенты непрерывны.

Аналогично определяется 1-форма класса $C^r(U)$

**Пример.** Если $f \in C^1(U)$, то $df$ — 1-форма на $U$.

**Определение 6.3.** Пусть $\gamma : [a, b] \to U$ — гладкая параметризованная кривая, $\omega$-непрерывная 1-форма на $U$. Интеграл от $\omega$ по кривой $\gamma$ (криволинейный интеграл второго рода) определяется по формуле:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))dt = \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma'1(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)dt$$

**Замечание.** Интеграл не зависит от параметризации, т.е. пусть $\tilde{\gamma} : [c, d] \to U$ — гладкая кривая, эквивалентная $\gamma$. Тогда $\exists h : [c, d] \to [a, b]$ — $C^1$-сюрьекция с $h' > 0$ на $[c, d]$, такой, что $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(h(u)) \forall u \in [c, d]$. Поэтому $\tilde{\gamma} = \gamma' \cdot h'$ и по формуле замены переменной:

$$\int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))dt = \int_c^d \omega(\gamma(h(u)), \gamma'(h(u)))h'(u)du =$$

$$= \int_c^d \omega(\tilde{\gamma}(u), \tilde{\gamma}^{-1}(u))du$$

То есть

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$$

## 6.2 Свойства интеграла от 1-форм

**Утверждение 6.1.** *Пусть* $\tilde{\gamma} : [a, b] \to U, \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$*, тогда:*

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = -\int_\gamma \omega$$

**Утверждение 6.2.** *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, тогда*

$$\int_\gamma \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2$$

**Утверждение 6.3.** *Пусть* $a < c < b, \gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ *и* $\gamma_2 = \gamma_{[c,b]}$*, тогда:*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

**Утверждение 6.4.**

$$\left|\int_\gamma \omega\right| \leqslant \max_{x \in \underbrace{[\gamma]}_{\text{носитель}}} |f(x)| \underbrace{L(\gamma)}_{\text{длина } \gamma}, f = (f_1, \dots f_n)$$

*Доказательство.*

$$\left|\sum_{i=1}^n f_i(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\right| = |(f(\gamma(t)), \gamma'(t))| \leqslant |f(\gamma(t))||\gamma'(t)| \leqslant \max_{x \in [\gamma]} |f(x)||\gamma'(t)|$$

□

**Напоминание.** Напомним, что кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладкой, если сущесвует такое $T = \{t_k\}_{k=0}^N$ — разбиение $[a, b]$, что каждое сужение $\gamma_{[x_i, x_{i+1}]}$ является гладким. В частности, если каждое сужение $\gamma_{[x_i, x_{i+1}]}$ постоянна, то $\gamma$ называтеся ломаной

**Определение 6.4.** Интеграл от 1-формы по кусночно-гладкой кривой определяется как сумма интегралов по отрезкам гладкости

**Теорема 6.1.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, F \in C^1(U)$ и $\gamma : [a,b] \to U$ — кусочно-гладкая криавая, $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$. Тогда:*
$$\int_\gamma dF = F(q) - F(p)$$

*Доказательство.* Предположим, что $\gamma$ — гладкая. Тогда по определению:
$$\int_\gamma dF = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F(\gamma(t))|_{t=a}^{t=b}$$

Для кусочно-гладкой кривой утверждение получается по аддитивности. □

**Следствие.** Если $\gamma : [a,b] \to U$ замкнутая, т.е. $\gamma(a) = \gamma(b)$, то $\int_\gamma dF = 0$

**Определение 6.5.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, \omega$ — 1-форма в $U$.

1. Функция $F : U \to \mathbb{R}^n$ называется первообразной $\omega$, если $dF = \omega$ на $U$.

2. Форма $\omega$ называется точной в $U$, если она имеет там первообразную

**Лемма 6.1.** *Если $U$ — область в $\mathbb{R}^n$, то любую пару точек из $U$ можно соединить ломаной со сторонами, параллельными осям координат.*

*Доказательство.* Отметим, что шар $B \subset U$ обладает указанным свойством. Теперь, пусть $x_0 \in U$. Рассмотрим $A = \{x \in U : \exists \gamma_{x_0,x}\}$, где $\gamma_{x_0,x}$ — ломаная со сторонами, параллельными осям, соединяющая $x_0$, $x$. Если $x \in A \to \exists r : B_r(x) \subset A$. Тогда $A$ — открыто. Аналогично, $U \setminus A$ — открыто. Т.к. $U = \underbrace{A}_{\text{открыто}} \sqcup \underbrace{(U \setminus A)}_{\text{открыто}}$. Т.к. $A \ni x_0 \Rightarrow U \setminus A = \varnothing$. Тогда $U = A$. □

**Теорема 6.2.** *Пусть $U$ — область в $\mathbb{R}^n$, $\omega$ — непрерывная 1-форма в $U$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$\omega$ точна в $U$*

2. *$\int_\gamma \omega = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$ с носителем $U$.*

3. *$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ для любых $\gamma_1, \gamma_2$ со сторонами, параллельными осям координат, с совпадающими концами.*

*Доказательство.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Вытекает из следствия теоремы 1.

(2) $\Rightarrow$ (3) Зафиксируем $\gamma_1, \gamma_2$ и рассмотрим кривую $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a,b] \\ \gamma_2(2b-t), t \in [b, 2b-a] \end{cases}$. Т.к. $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, то $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Зафиксируем $x_0 \in U$ и рассмотрим $F(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}}$, где интеграл берется по ломаной $\gamma_{x_0,x}$ со сторонами, параллельными осям координат и соединяет $x_0, x$. По пункту 3, $F$ не зависит от выбора $\gamma_{x_0,x}$. Покажем, что $F$ — первообразная для $\omega$, т.е. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$ на $U$, где $\omega = f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)dx_n$. Т.к. $x$ — внутренняя $U$, то $\exists \delta > 0 : \forall t \in$

$(-\delta, \delta)(x + te_j \in U)$. Параметризуем отрезок с концами $x$ и $x + te_i : \lambda_i \mapsto x + se_i$. При этом:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(F(x + te_i) - F(x)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{\gamma_i} \omega =$$
$$= \lim_{t \to 0} \int_0^t f(x + se_i) ds = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_0^t f_i(x + se_i) ds = f_i(x)$$

□

**Следствие.** При $n = 2$ для точности формы достаточно проверять равенство нулю интеграла по любому прямоугольнику со сторонами, параллельным осям.

**Замечание.** Пусть $F_1, F_2$ — первообразные 1-формы $\omega$ в области $U$, $x_0, x \in U$. Тогда

$$\int_{\gamma_{x_0,x}} \omega = F_1(x) - F_1(x_0) = F_2(x) - F_2(x_0)$$

Где $\gamma_{x_0,x}$ — кусочно-гладкая кривая из $U$ с концами $x_0, x$. Тогда $F_1 - F_2 = const$ на $U$.

**Следствие.** Итак, $f$ по своему дифференциалу $\omega$ восстанавливется следующим образом:

$$f(x) = C + \int_{\gamma_{x_0,x}} \omega = C + \int_a^b \left(f_1(\gamma_1(t)\gamma_1'(t)) + \dots + f_n(\gamma_n(t))\gamma_n'(t)\right) dt$$

Где $\gamma_{x_0,x} : [a, b] \to U, \gamma_{x_0,x}(a) = x_0, \gamma_{x_0,x}(b) = x$

**Лемма 6.2.** *(Лебега о покрытии) Пусть $X$ — компакт, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — открытое покрытие. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall E \subset X(diam\ E \leqslant \delta \Rightarrow (\exists \alpha \in \Lambda : E \subset U_\alpha))$*

*Доказательство.* См. 2 семестр. □

**Определение 6.6.** Непрерывная 1-форма называется локально точной в $U$, если $\forall x \in U \exists B \subset U$ — открытый шар, такой, что $x \in B$ и $\omega$ точна в $B$.

**Замечание.** В конце курса будет доказано, что 1-форма $\omega = f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)dx_n$ будет локально точна тогда и только тогда, когда:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \forall i, j = 1, 2, \dots n$$

**Пример.**

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Рассмотрим $P = -\frac{y^2}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Это верно на $U \Rightarrow \omega$ локально точна. Однако $\omega$ не является точной, т.к. если рассмотреть $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in (0, 2\pi)$, то:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi \neq 0$$

**Определение 6.7.** Пусть $\omega$ — локально точна в области $U$ и $\gamma : [a, b] \to U$ — непрерывный путь. Рассмотрим разбиение $P = \{t_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$, такое, что $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset B_i$ — шар, причем $\omega$ точна в $B_i$. Тогда интеграл от $\omega$ по $\gamma$ вычисляется по формуле:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^m (F_i(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1})))$$

Где $F_i$ — произвольная первообразная $\omega$ на $B_i$

**Лемма 6.3.** *Определение интеграла от $\omega$ корректно*

*Доказательство.* Покажем существование необходимого разбиения $P$. Рассмотрим $\{B_\alpha\}$ — покрытие $\gamma([a, b])$ открытыми шарами, в которых $\omega$ точна. Тогда $\{\gamma^{-1}(B_\alpha)\}$ — открытое покрытие $[a, b]$ и пусть $\delta$ — число из леммы Лебега о покрытии. Тогда в качестве $P$ можно взять любое разбиение $[a, b]$ мелкости $\leqslant \delta$. Покажем, что правая часть формулы не изменится при добавлении точки к $P$. Пусть $P \cup \{c\}$ — разбиение $[a, b], t_{j-1} < c < t_j$. Имеем:

$$F_j(\gamma(t)j) - F_j(\gamma(t_{j-1})) = F_j(\gamma(t)j) - F_j(\gamma(c)) + F_j(\gamma(c)) - F_j(\gamma(t_{j-1}))$$

Пусть $Q$ — другое разбиение $[a, b]$. Применяя предыдущий пункт к $P \cup Q$, получаем, что достаточно доказать утверждение для $P = Q$ и первообразных $F_1, F_2, \dots F_n$ на шарах $B_1, \dots B_n$ и $\tilde{F}_1, \dots \tilde{F}_n$ на шарах $\tilde{B}_1, \dots \tilde{B}_n$. Т.к. $B_i \cap \tilde{B}_i \neq \varnothing$ — область, то $\tilde{F}_i - F_i = const$. Это доказывает корректность определения. □

**Определение 6.8.** Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ — пути с общими концами. Пути $\gamma_1, \gamma_2$ называются гомотопными, если $\exists H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ — непрерывное (в таком случае $H$ называется гомотопией), т.е.

$$H(t, 0) = \gamma_1(t), H(t, 1) = \gamma_2(t), H(a, s) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), H(b, s) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$$

**Замечание.** $\gamma_s(t) = H(t, s)$ — семейство путей, непрерывно зависящих от $t$.

**Пример.** Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — пути с общими концами. Тогда $\gamma_1, \gamma_2$ гомотопны.

*Доказательство.* Действительно, при $H(t, s) = (1 - s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$ условие гомотопии выполняется. □

**Теорема 6.3.** *Пусть $\omega$ локально точна в области $U$. Тогда если $\gamma_1, \gamma_2$ гомотопны, то* $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

*Доказательство.* Пусть $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ — гомотопия для $\gamma_1, \gamma_2$. По лемме Лебега, $\exists\{t_0, \dots t_m\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\{s_0, \dots s_k\}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, такие что $\forall R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j] : H(R_{ij} \subset B_{ij})$ — шар, где $\omega$ точна. Для любого $j \in \{0, \dots k\}$ положим $\gamma^{(j)}(t) = H(t, s_j)$. Достаточно показать, что $\int_{\gamma^{(j)}} \omega = \int_{\gamma^{(j-1)}} \omega \forall j \in \{1, \dots k\}$. Зафиксируем $j \in \{1, \dots k\}$. Пусть $F_i$ — произвольная первообразная для $\omega$ в $B_{ij}$ $(i = 1, \dots m)$. Положим $x_i = \gamma^{(j-1)}(t_i)$. Тогда

$$\int_{\gamma^{(j)}} \omega - \int_{\gamma^{(j-1)}} \omega = \sum_{i=1}^m ((F_i(y_i) - F_i(y_{i-1})) - (F_i(x_i) - F_i(x_{i-1}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}((F_i(y_i) - F_i(x_i)) - (F_i(y_{i-1}) - F_i(x_{i-1}))) = (*)$$

Т.к. $F_i, F_{i-1}$ — первообразные $\omega$ на пересечении $B_{(i-1)j} \cap B_{ij}$ — что является областью, то $F_i - F_{i-1} = const$, а значит:

$$F_i(y_{i-1}) - F_i(x_{i-1}) = F_{i-1}(y_{i-1}) - F_{i-1}(x_{i-1}), i > 1$$

Тогда сумма $(*)$ телескопическая. Тогда:

$$\int_{\gamma^{(j)}} \omega - \int_{\gamma^{(j-1)}} \omega = (F_1(y_1)-F_1(x_1))-(F_1(y_0)-F_1(x_0))+(F_m(y_m)-F_m(x_m))-(F_1(y_1)-F_1(x_1)) =$$

$$= (F_m(y_m) - F_m(x_m)) - (F_1(y_0) - F_1(x_0)) = 0$$

Последне верно в силу того, что концы путей совпадают $\square$

**Определение 6.9.** Область $U \subset \mathbb{R}^n$ называется односвязной, если каждый замкнутый путь в $U$ гомотопен точке (тождественному пути).

**Следствие.** В односвязной области всякая локально точная форма точна.

## 6.3 Внешние формы

Пусть $V$ — вещественное линейное пространство, пусть $m = \dim V, k \in N$.

**Напоминание.** $S_k$ — множество перестановок (биекций в себя) множеста $\{1, 2, \dots k\}$. Четность перестановки $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$, $\nu(\sigma)$ = количество инверсий в $\sigma$, т.е. количество таких пар $i < j$, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

**Определение 6.10.** Полилинейная функция $\omega : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$ называется кососимметричной (внешней) $k$-формой, если

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(v_1, \dots v_k)$$

**Определение 6.11.** Линейное пространство всех кососимметрических $k$-форм будем обозначать $A_k(V)$. По определению: $A_0(V) = \mathbb{R}$, а если $\omega \in A_k(V)$, то $k$ называется степенью $\omega$.

**Задача.** *Доказать, что следующие утверждения эквивалентны*

1. $\omega$ — *кососимметрическая $k$-форма.*
2. $\omega(v_1, \dots w, \dots w, \dots v_k) = 0$
3. $\omega(v_1, \dots v_k) = 0$ *для любых линейно зависимых $v_1, \dots v_k$*

**Пример.** $A_1(V) = V^*$

**Пример.** $\Omega(v_1, \dots v_m) = \det A$ — $m$-форма

**Пример.** Пусть $A^T = -A$, тогда $\omega(\xi, \eta) = (\xi, A\eta)$ — 2-форма в $\mathbb{R}^n$

**Определение 6.12.** Пусть $e^1, \dots e^m$ — базис сопряженного пространства. Тогда $\forall I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ — перестановки, положим $e^I(v_1, \dots v_k) = \det \begin{pmatrix} e^{i_1}(v_1) & \dots & e^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i_k}(v_1) & \dots & e^{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$.

Тогда $e^I \in A_k(V)$

Положим $\mathbb{I}_k = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} : i \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m \right\}$.

**Теорема 6.4.** *Пусть $(e^1, \dots e^m)$ — базис в $V^*$, двойственный к $e_1, \dots e_m$. Тогда $E_k = \{e^I, I \in I_k\}$ образуют базис в $A_k(V)$.*

*Доказательство.* Отметим, что любую перестановку $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ можно упорядочить по возрастанию ровно одним способом и получить перестановку $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}, i_1 < \dots < i_k \Rightarrow i \in \mathbb{I}$. Тогда $e^I = \pm e^J \Leftrightarrow \varepsilon(J) = \pm\varepsilon(I)$. Для $f \in A_k(V)$ имеем $f = \sum_{J \in S_k} f(e_{j_1}, \dots e_{j_k}) e^J$. По замечению выше, заключаем, что $A_k(V)$ есть линейная оболочка $E_k$. Докажем линейную независимость этой системы. Пусть $\sum_{I \in \mathbb{I}_k} c_I e^I = 0$. Применим эту форму к набору $e_J = (e_{j_1}, \dots e_{j_k}), J \in \mathbb{I}_k$. Имеем:

$$e^I(e_J) = \begin{cases} 0, I \neq J \\ 1, I = J \end{cases}$$

Тогда $c_J = 0$. Это доказывает линейную независимость $E_k$. $\square$

**Следствие.** $\dim A_k(V) = C_m^k$.

**Следствие.** При $k > m$, имеем $A_k(V) = \{0\}$.

**Определение 6.13.** Пусть $k, l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $S_{k,l} = \{\sigma \in S_{k+l} : \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)\} \subset S_{k+l}$. Элемент $\sigma \in S_{k,l}$ называется $(k,l)$-перетасовкой.

**Определение 6.14.** Пусть $\omega \in A_k(V), \tau \in A_l(V)$, тогда внешним произведением $\omega, \tau$ называется функция, определяемая $\omega \wedge \tau(v_1, \dots v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}) \cdot \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots v_{\sigma(k+l)})$

**Замечание.** Введем обозначение $h = \omega \otimes \tau, h(v_1, \dots v_{k+l}) = \omega(v_1, \dots v_k)\tau(v_{k.+1}, \dots v_{k+l}), \sigma h = h(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)})$. Тогда $\omega \wedge \tau = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma) \cdot \sigma(\omega \otimes \tau)$.

**Замечание.** Покажем, что $\omega \wedge \tau \in A_{k+l}(V)$.

*Доказательство.* Полилинейность очевидна. Покажем кососимметричность. Для этого достаточно установить, что $\omega \wedge \tau(v_1, \dots v_{k+l}) = 0$ если в наборе $v_1, \dots v_{k+l}$ выполнено $v_r = v_{r+1}$. Пусть $A_1 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r), j = \sigma^{-1}(r+1) \leqslant k\} \Rightarrow h_i = 0$, т.к. $\omega(v_1, \dots v_k) = 0$. Аналогично, $A_2 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r), j = \sigma^{-1}(r+1) > k\} \Rightarrow h_i = 0$, т.к. $\tau(v_{k+1}, \dots v_{k+l}) = 0$.

Теперь рассмотрим $A_3 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r) \leqslant k, j = \sigma^{-1}(r+1) \geqslant k+1\}, A_4 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r) \geqslant k+1, j = \sigma^{-1}(r+1) \leqslant k\}$. Рассмотрим $t_r = (r\ r+1)$ — транспозиция. Имеем $t_r(A_4) = A_3, t_r(A_3) = A_4$. Поэтому

$$\varepsilon(\sigma)(\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l}) + \varepsilon(t_r\sigma)(t_r\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l}) =$$

$$= \varepsilon(\sigma)(\sigma h)((\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l}) - (\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l})) = 0$$

□

**Пример.** Пусть $\alpha, \beta \in V^*$ рассмотрим $\alpha \wedge \beta(u, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)$.

**Лемма 6.4.** *Внешнее произведение удовлетворяет следующим свойствам*

1. $w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) = (w_1 \wedge w_2) \wedge w_3$
2. $w_1 \wedge (w_2 + w_3) = w_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge w_3$.
3. $\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg \omega \deg \tau} \tau \wedge \omega$.

*Доказательство.*

1. Пусть $k_i = \deg \omega_i$, $k = k_1 + k_2 + k_3$, $S_{k_1,k_2,k_3} = \left\{ \sigma \in S : \begin{array}{c} \sigma(1) < \dots < \sigma(k_1) \\ \sigma(k_1+1) < \dots < \sigma(k_1+k_2) \\ \sigma(k_1+k_2+1) < \dots < \sigma(k_1+k_2+k_3) \end{array} \right\}$. Положим $\omega = \sum_{\sigma \in S_{k_1,k_2,k_3}} \varepsilon(\sigma)\sigma(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3)$. Т.к. $\otimes$ ассоциативно, то $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = \omega = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$.
2. Непосредственно следует из определения
3. Рассмотрим биекцию $S_{k,l} \to S_{l,k}, \sigma \mapsto \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(k+i), i = 1, \dots l \\ \sigma(i-l), i = l+1, \dots k+l \end{cases}$. В таком случае, $\varepsilon(\tilde{\sigma}) = (-1)^{kl} \varepsilon \sigma$. Тогда:

$$\omega \wedge \tau(v_1, \dots v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma k})\tau(v_{\sigma(k+1)}, \dots v_{\sigma k+l}) =$$

$$(-1)^{kl} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{k,l}} \varepsilon(\tilde{\sigma})\omega(v_{\tilde{\sigma}(l+1)}, \dots v_{\tilde{\sigma} k+l})\tau(v_{\tilde{\sigma}(1)}, \dots v_{\tilde{\sigma} l}) = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$$

□

**Определение 6.15.** Пусть $\Phi : V \to W$ — линейное отображение. Для $\omega \in A_k(W)$ можно рассмотреь $\Phi^*\omega \in A_k(V)$ по правилу

$$\Phi^*\omega(v_1, \dots v_k) = \omega(\Phi v_1, \dots \Phi v_k)$$

Данная операция называется pullback.

**Утверждение 6.5.**

1. *Отображение* $\Phi^* : A_k(W) \to A_k(V)$ *линейно и* $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau$.
2. *Для* $\Psi : W \to Z$ *— линейного отображения, верно, что* $(\Psi\Phi)^* = \Phi^*\Psi^*$

*Доказательство.*

1. Очевидно

2.
$$(\Psi\Phi)^*\omega(v_1, \dots v_k) = \omega(\Psi\Phi v_1, \dots \Psi\Phi v_k) = \omega(\Psi(\Phi v_1), \dots \Psi(\Phi v_k)) =$$
$$= \Psi^*\omega(\Phi v_1, \dots \Phi v_k) = \Phi^*\Psi^*\omega(v_1, \dots v_k)$$

$\square$

**Пример** (Правило детерминанта)**.** Пусть $\alpha^1, \dots \alpha^k \in V^*$, тогда

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k(v_1, \dots v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\alpha^1(v_{\sigma(1)}) \dots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) = \det(\alpha^i(v_j))$$

## 6.4 Дифференциальные формы на открытых подмножествах $\mathbb{R}^m$

Будем отождествлять $T_p\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. Более формально будет записать $(p, \mathbb{R}^m)$, т.е. для каждой точки у нас будет свое касательное пространство

**Определение 6.16.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открыто, $k \in \mathbb{N}$. Дифференциальной $k$-формой на $U$ называется функция $U \ni p \mapsto w_p \in A_k(\mathbb{R}^n)$.

Дифференциалы координатных функций $dx_1, \dots dx_n$ образуют базис в $(\mathbb{R}^m)^*$ (двойственнен к стандартному), тогда $\{dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k} : 1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant m\}$ образуют базис в $A_k(\mathbb{R}^m)$. Поэтому имеет место представление

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_1} = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} f_I dx^I$$

Функции $f_I : U \to \mathbb{R}$ называется координатным представлением формы $\omega$. Пусть $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Говорят, что дифференциальная форма $\omega$ класса $C^r(U)$, если все координатные функции $\in C^r(U)$.

В дальнейшем (если не указано иное) будем предполагать, что все рассматриваемые нами формы $\in C^\infty$, множество $k$-форм класса $C^\infty$ обозначается $\Omega^k(U)$. Напомним, что $A_0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$, поэтому $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$

1. Пусть $\omega, \tau \in \Omega^k(U), f \in C^\infty(U)$, тогда $f\omega \in \Omega^k(U), p \mapsto f(p)\omega_p, \omega + \tau \in \Omega^k(U), p \mapsto \omega_p + \tau_p$.

2. Пусть $\omega \in \Omega^k(U), \tau \in \Omega^l(U)$, положим $\omega \wedge \tau \in \Omega^{k+l}(U), p \mapsto \omega_p \wedge \tau_p$.

Таким образом, $\Omega^k(U)$ является линейным пространством

**Пример.** Пусть $\omega = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} f_I dx^I, \tau = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} g_I dx^I$. Тогда:

$$\omega \wedge \tau = \sum_{I,J} f_I g_J dx^I \wedge dx^J$$

Пусть $f : U \to V$, $U$ открыто в $\mathbb{R}^m$, $V$ открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty$. Тогда для $p \in U : df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, поэтмоу если $\omega_p \in A_k(\mathbb{R}^n)$, то $(df_p)^* : A_k(\mathbb{R}^n) \to A_k(\mathbb{R}^m)$ и $(df_p)^*\omega_p = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots df_p(v_k))$.

**Определение 6.17.** Отображение $p \mapsto (df_p^*\omega)_p$ определяем дифференциальную форму на $U$, которая обозначается $f^*\omega$ и называется переносом формы $\omega$.

В частности, при $k = 0$, т.е. для $g \in C^\infty(V)$, имеем следующее:

$$f^*g = g \circ f$$

**Утверждение 6.6.** *1. Перенос линеен и $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*\omega \wedge f^*\tau$.*

*2. $f : \underbrace{U}_{\subset\mathbb{R}^m} \to \underbrace{V}_{\subset\mathbb{R}^n}, g : V \to \underbrace{W}_{\subset\mathbb{R}^k}$ — класса $C^\infty \Rightarrow (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

*Доказательство.*

1. Очевидно

2. Композиция $df_p^* : A_k(\mathbb{R}^b) \to A_k(\mathbb{R}^m), dg_q^* : A_k(\mathbb{R}^k) \to A_k(\mathbb{R}^n)$. Так как $dg_q \circ df_p = d(g \circ f)_p$, то:
$$f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega \forall \omega in \Omega^k(W)$$

□

Получим координатную запись $f^*$.

**Лемма 6.5.** *(Перенос как замена переменных) Пусть $f : \underbrace{U}_{\subset\mathbb{R}^m} \to \underbrace{V}_{\subset\mathbb{R}^n}$ класса $C^\infty, f = (f_1, \dots f_n)$. Если $\omega \in \Omega^k(V), \omega = \sum_{(i_1,\dots i_k)\in\mathbb{I}_k} a_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, то $f^*\omega = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} a_I \circ f df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$*

*Доказательство.* По определению, $f^*a_I = a_I \circ f$. $f(dx_i)(v) = dx_i(df(v)) = d(x_i \circ f)(v) = df_i(v)$. Поэтому, $f^*\omega = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} f^*a_I(f^*dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^*dx_{i_k}) = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} a_I \circ f df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$. □

**Следствие.** $f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ — то есть сохраняет гладкость.

*Доказательство.* $df_i \in \Omega^1(U), a_I \circ f \in C^\infty(U) \Rightarrow f^*\omega \in \Omega^k(U)$ □

**Пример.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открыто и задана $m$-форма, $\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ и пусть $g : W \to U$ — диффеоморфизм, $x = g(t)$, тогда

$$dg_1 \wedge \dots \wedge dg_m = \sum_{\sigma\in S_m} \frac{\partial g_1}{\partial t_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial g_m}{\partial t_{\sigma(m)}} dt_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dt_{\sigma(m)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon(\sigma) \frac{\partial g_1}{\partial t_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial g_m}{\partial t_{\sigma(m)}} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m = J_g dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m$$

В итоге:
$$g^*\omega = f \circ g dg_1 \wedge \dots \wedge dg_m = f \circ g \cdot J_g dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m$$

**Определение 6.18.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ открыто и $\omega = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} f_I dx^I \in \Omega^k(U)$. Внешним дифференциалом $\omega$ называется:

$$d\omega = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} df_I \wedge dx^I \in \Omega^{k+1}(U)$$

**Пример.** Пусть $\omega = Pdx + Qdy$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда:

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

**Задача.** *Покажите, что* $d\omega_p(v_1, \dots v_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1} \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \omega_p + tv_j(v_1, \dots v_{j-1}, v_{j+1}, \dots v_{k+1})$

Положжим $\Omega(U) = \bigcup_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$. Тогда внешний дифференциал порождает "послойное" отображение $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$.

**Лемма 6.6.** *Для всех форм* $\omega, \nu \in \Omega^k(U), \tau \in \Omega^l(U), c \in \mathbb{R}$ *выполнено:*

1. ***Линейность:*** $d(\omega + \nu) = d\omega + d\nu, d(c\omega) = cd\omega$
2. ***Правило Лейбница:*** $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$
3. $d(d\omega) = 0$.

*Кроме того, пусть есть* $D : \Omega(U) \to \Omega(U)$ *— линейный оператор, удовлетворяющий предыдущим свойствам и* $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ *верно:* $Df = df$. *Тогда* $D = d$

*Доказательство.*

1. **Линейность:** верна по опрелелению
2. **Правило Лейбница:** по линейности, достаточно доказать только для мономов вида $\omega = fdx^I, \tau = gx^J, I \in \mathbb{I}_k, J \in \mathbb{I}_l,\ f, g \in C^\infty(U)$. По определению внешнего произведения:
$$d(\omega \wedge \tau) = d(fgd^I \wedge d^J) = (dfg + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J =$$
$$= (df \wedge dx^I) \wedge (gdx^J) + (-1)^k (fdx^I) \wedge (dg \wedge dx^J) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$$
3. Для $f \in C^\infty(U)$ имеем:
$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_i\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j$$
Также из определения $ddx^I = 0 \forall I$, тогда:
$$d(d(fdx^I)) = d(df \wedge dx^I) = \underbrace{d(df)}_{0} \wedge dx^I - df \wedge \underbrace{d(dx^I)}_{0} = 0$$
Таким образом, для 0-форм и для мономов утверждение верно. Для всех остальных функций утерждение следует из линейности

Пусть теперь $D : \Omega(U) \to \Omega(U)$ удовлетворяет условиям 1-3. Достаточно показать равенство $D = d$ на мономах. Заметим, что $Ddx^i = DDx^i = 0 \Rightarrow$ по свойству 2, $Ddx^I = 0 \forall I \in \mathbb{I}_k$. Следовательно,

$$D(fdx^I) = df \wedge dx^I + fDdx^I = df \wedge dx^I = d(fdx^I)$$

□

**Теорема 6.5.** *Пусть* $f : U \to V$ *— гладкое отображение,* $U$ *— открытое в* $\mathbb{R}^n$*,* $V$ *— открытое в* $\mathbb{R}^m$*. Тогда:* $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ *для всех* $\omega \in \Omega^k(V)$*.*

*Доказательство.* Для $g \in C^\infty(U)$ имеем:

$$d(f^*g) = d(g \circ f) = dg \circ df = f^*(dg)$$

При этом для $I \in \mathbb{I}_k$ по правилу Лейбница:

$$d(f^*dy^I) = d(df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k})$$

Следовательно,

$$d(f^*gdy^I) = d(f^*g \wedge dy^I) = d(f^*g \wedge f^*dy^I) = d(f^*g) \wedge f^*dy^I + f^*g \wedge d(f^*dy^I) =$$

$$= f^*(dg) \wedge f^*(dy^I) = f^*(dg \wedge dy^I)$$

Равенство доказано для мономов вида $\omega = gdy^I$ □

# 7 Дифференциальные формы на многообразиях

Напомним, что под гладкостью мы понимаем принадлежность классу $C^\infty$

**Определение 7.1.** Пусть $M$ — гладоке $m$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. Дифференциальной формой $\omega$ на $M$ называется функция $M \ni p \mapsto \omega_p \in A_k(T_pM)$.

**Определение 7.2.** Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий $M, N$, $\omega$ — $k$-форма на $N$. Тогда $f^*\omega$ называется такая $k$-форма на $N$, что

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots df_p(v_k))$$

То есть $f^*\omega_p = df_p^*\omega_{f(p)}$.

Поскольку операция переноса поточечная, для нее выполняется линейность, сохранение внешнего произведения и следующего свойства:

Если $g : N \to P$ — гладкое, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

**Пример.** Пусть $i_M : M \to \mathbb{R}^n$, такое, что $i_M(x) = x$. Если на $U$ — открытом в $\mathbb{R}^n, U \supset M$ задана $k$-форма $\nu$, то ее можно перенести с $U$ на $M$: $i_M^*\nu$ — $k$-форма на $M$. Такая форма называется сужением формы $\nu$ на $M$ и обозначается $\nu|_M = i_M^*\nu$

Определить гладкость формы в точке можно как минимум двумя способами:

**Определение 7.3.** Форма $\omega$ называется гладкой в $p \in M$, если существует параметризация $\varphi : V \to U$ окрестности $p$ в $M$, что $\varphi^*\omega$ гладкая в $V$.

**Определение 7.4.** Форма $\omega$ называется гладкой в $p \in M$, если существует $W \ni p$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ и форма $\tilde{\omega} \in \Omega(W)$, что $\omega = \tilde{\omega}|_M$ на $W \cap M$

**Лемма 7.1.** *Два предыдущих определения эквивалентны.*

*Доказательство.* Пусть выбрана параметризация $\varphi : V \to W \cap M$, где $W$ открыто в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\varphi^*\omega \in \Omega(V)$. $\varphi^{-1}$ определена на $W$, т.е. существует такая глудкая функция $F : W \to V$, такая, что $F|_{W\cap M} = \varphi^{-1}$. Положим $\tilde{\omega} = F^*(\varphi^*\omega)$. Тогда $\tilde{\omega} \in \Omega(W)$ и $F \circ i_M = \varphi^{-1}$ на $W \cap M$, то $i_M^* \circ F^* \circ \varphi^*$ — тождественное, а значит $i_M^*\tilde{\omega} = \omega$ на $W \cap M$.

Докажем в другую сторону. Пусть $\tilde{\omega}|_M = \omega$ на $W \cap M$. Уменьшая $W$ если надо, можно считать, что существует параметризация $\varphi : V \to W \cap M$. Тогда $i_M \circ \varphi : V \to W$ и $\varphi^*\omega = (i_M \circ \varphi)^*\omega \in \Omega(V)$. □

**Замечание.** Из доказательства эквивалентности определений вытекает, что квантор существования можно заменить на квантор всеобщности.

**Определение 7.5.** Форма называется гладкой на $M$, если она является гдадкой в каждой точке.

Положим $\Omega(M) = \bigcup_{k=0}^n \Omega^k(M)$

**Лемма 7.2.** *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отобраение многообразий. Тогда $f^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$.*

*Доказательство.* Пусть $\omega \in \Omega^k(N)$. Для $p \in M$ и $q = f(p) \in N$ выберем параметризации $\varphi : U_0 \to U, \psi : V_0 \to V$ — $p \in U \subset M, q \in V \subset N$. Можно выбрать окрестности так, что $f(U) \subset V$. Тогда $g = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ — координатное представление и $\psi \circ g = f \circ \varphi$. Следовательно, $g^*(\psi^*\omega) = \varphi^*(f^*\omega)$. Поскольку $g \in C^\infty(U_0)$ и форма $\psi^*\omega$ гладкая, то в левой части стоит гладкая форма. Но тогда и форма, стоящая в правой части, является гладкой. □

**Определение 7.6.** Пусть $\omega \in \Omega(M), \varphi$ — параметризация окрестности $U$ в $M$. Определим $d\omega = (\varphi^{-1})^* d(\varphi^*\omega)$ на $U$.

Существование $d$ на всем $M$ следует из того, что локальное определение не зависит от параметризации. Пусть $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ — другая параметризация $M$, такая, что $O = \varphi(V) \cap \psi(W)$ непусто. Тогда $g : \varphi^{-1}(O) \cap \psi^{-1}(O), g = \psi^{-1} \circ \varphi$ — диффеоморфизм и $\varphi = \psi \circ g$. Следовательно,

$$d(\varphi^*\omega) = d(g^*\psi^*\omega^*) = \underbrace{g^*d}_{\text{на } \varphi^{-1}(O)} (\psi^*\omega) = \varphi^* \circ (\psi^{-1})^* d(\psi^*\omega)$$

Тогда:

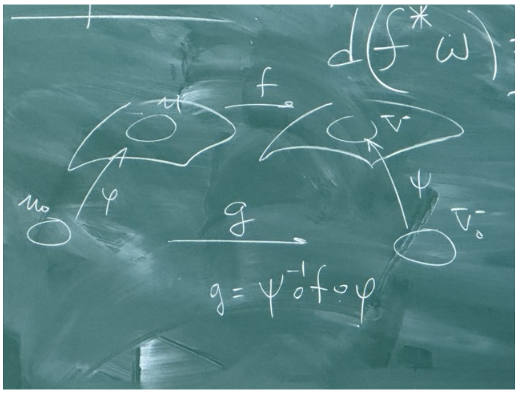
$$(\varphi^{-1})^* d(\varphi^*\omega) = \underbrace{(\psi^{-1})^* d(\psi^*\omega)}_{\text{на } O}$$

Кроме того, если $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, то внешний дифференциал на многообразии $df = (\varphi^{-1})^* d(f \circ \varphi) = d(f \circ \varphi)(d\varphi^{-1})$ — дифференциал функции $f$.

**Замечание.** Возможность продолжения $d$ на $M$ также следует из предыдущего утверждения о единственности дифференциала формы

**Теорема 7.1.** *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение, тогда: $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ для всех $\omega \in \Omega(N)$*

*Доказательство.* Рассмотрим следующую картинку:




Т.к. $\psi \circ g = f \circ \varphi$, то по определению $d$ свойствам переноса:

$$\varphi^* d(f^*\omega) = d(\varphi^* f^*\omega) = d((f\circ\varphi)^*\omega) = d((\psi \circ g)^*\omega) =$$

$$= d(g^*(\psi^*\omega)) = g^*(d(\psi^*\omega)) = g^*\psi^* d\omega = \varphi^* f^* d\omega$$

Тогда $d(f^*\omega) = f^* d\omega$. $\square$

**Следствие.** Пусть в $\mathbb{R}^n$ окрестность $W \supset M$ и $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$, т.ч. $i_M^*\tilde{\omega} = \omega$. Тогда $d\omega = i_M^* d\tilde{\omega}$.

# 8 Разбиение единицы

Вспомним функцию:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, t > 0 \\ 0, t \leqslant 0 \end{cases}$$

Рассмотрим

$$h(t) = \frac{f(R-t)}{f(R-t) + f(t-r)}$$

Рассмотрим $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\beta(x) = h(|x - x_0|^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$\beta$ — функция "шапочка".

**Определение 8.1.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда носителем $f = \operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

**Замечание.** $\operatorname{supp}\beta = \overline{B}_R(x_0)$.

**Задача** (Лемма об исчерпывании компактами)**.** *Для любого открытого множества $U$ существует $\{C_i\}_{i=0}^\infty$, где $C_i$ — компакты, что $C_i \subset C_{i+1}$, $\bigcup_{i=1}^\infty C_i = U$*

**Лемма 8.1.** *Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — семейство открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Тогда существует $\{B_i\}_{i=1}^\infty$, таких, что:*

1. $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = U$
2. $\forall i \exists \alpha : (\overline{B_i} \subset U_\alpha)$
3. $\forall p \in \mathbb{R}^n \exists U_p \subset U$ *— открытое,* $\exists N_p : \overline{B_i} \cap U_p = \varnothing \forall i > N_p$.

*Доказательство.* Возьмем $C_i$ из леммы об исчерпывании компактами. Положим $K_i = C_i \setminus int\ C_{i-1}, C_0 = \varnothing$. Тогда $K_i$ — компакт. $\forall x \in K_i$ выберем шар $B_x$, такой, что:

1. $B_x \ni x$
2. $\exists \alpha : \overline{B_x} \subset U_\alpha$
3. $B_x \subset int\ C_{i+1} \setminus C_{i-2}$.

$x \in C_{i+1}, x \notin int\ C_{i-1} \Rightarrow x \notin C_{i-2}$. Т.к. $K_i$ — компакт, то существует конечное подпокрытие, т.е. $K_i \subset B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_{N_i}}$. Рассмотрим $\{B_{i,r} : i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant r \leqslant N\} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ □

Пусть в условиях предыдущей леммы $R_i =$ радиус $B_i$. Рассмотрим функцию "шапочка" $\beta_i$ по числам $r = \frac{R_i}{2}, R = R_i$. Тогда:

1. $\beta_i \in C^\infty(U), \beta_i \geqslant 0$
2. $\forall p \in U \exists N_p \exists U_p$ — окрестность $p$ в $U$, что $\forall i > N_p(U_p \cap \operatorname{supp}(\beta_i) = \varnothing)$
3. $\forall i \exists \alpha : \operatorname{supp}(\beta_i) \subset U_\alpha$
4. $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ — гладкая функция, т.к. в каждой точке данный ряд превращается в конечную сумму.

Т.к. $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ образуют покрытие $U$, то $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i > 0$. Положим:

$$f_i = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i = 1$$

**Теорема 8.1.** *Пусть $M$ — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие $M$. Тогда существует $\rho_i \in C^\infty(M), i \in \mathbb{N}$, такое, что*

1. $\rho_i \geqslant 0 \forall i$
2. $\forall C \subset M$ *— компакта* $\exists N \forall i > N(\operatorname{supp}(\rho_i) \cap C = \varnothing)$
3. $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = 1$ *на* $M$
4. $\forall i \geqslant 1 \exists \alpha \in I : (\operatorname{supp}(\rho_i) \subset U_\alpha)$

*Доказательство.* Пусть $p \in M$. Тогда $\exists \alpha : p \in U_\alpha$. Выберем $O_p \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, содержащее $p$ так, что $\overline{O_p \cap M} \in U_\alpha$. Определим $O = \bigcup_{p \in M} O_p$ и рассмотрим $f_i \in C^\infty(O)$ (как мы определяли выше). Положим $\rho_i = f_i|_M$. Из условия $\overline{O_p \cap M} \subset U_\alpha$ следует, что $\operatorname{supp} \rho_i \subset U_\alpha$. Пусть $C \subset M$ — компакт. Тогда $C$ покрывается конечным числом $U_{p_i}$, таких, что $U_{p_i} \cap \operatorname{supp}(\rho_i) = \varnothing \forall i > N_{p_i}$. Положим $N = \max_i N_{p_i}$ — оно существует, т.к. существует лишь конечное число $N_{p_i}$. □

**Следствие.** Пусть $K \subset M$ — компакт, $\{U_j\}_{j=1}^N$ — конечное подпокрытие $K$ в $M$. Тогда существует $\varphi_j \in C^\infty(M), j = 1, \dots N$, такие, что:

1. $\varphi_j \geqslant 0$
2. $\forall j(\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j)$

3. $\sum_{j=1}^{N}\varphi_j = 1$ на $K$.

*Доказательство.* Применим теорему к набору $\{U_j\}_{j=1}^N$. Получим набор функций $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$. По свойству 2, только конечное множество носителей $\rho_i$ не пересекается с $K$. Рассмотрим $A_1 = \{i \in \mathbb{N} : \operatorname{supp}\rho_i \subset U_1\}$. Положим $\varphi_1 = \sum_{i\in A_1}\rho_i$ — гладкое как конечная сумма гладких функций. Заметим, что $\operatorname{supp}\varphi_1 \subset \bigcup_{i\in A_1}\operatorname{supp}\rho_i \subset U_1$. Положим $A_2 = \{i \in \mathbb{N} : \operatorname{supp}\rho_i \subset U_2\}\setminus A_1$. Тогда $\varphi_2 = sum_{i\in A_2}\rho_i$ и так далее по индукции. Тогда $\sum\varphi_i = \sum_{i=1}^\infty \rho_i = 1$ на $K$ □

**Задача.** *Пусть форма $\omega$ — гладкая $k$-форма на $M$. Покажите, что существует $W \supset M$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ и $\tilde\omega \in \Omega^k(W)$, т.ч. $\tilde\omega|_M = \omega$*

# 9 Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях

## 9.1 Регулярные области

Рассмотрим полупространство $\mathbb{H}^m = \{(x_1,\dots x_m) : x_1 < 0\}$. Множество $\mathbb{H}^n$ открыто в $\mathbb{R}^n$, причем $\partial\mathbb{H}^m = \{(x_1,\dots x_m) : x_1 = 0\}$

**Определение 9.1.** Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие, $N \subset M$ открыто. Множество $N$ называется регулярной областью в $M$, если $\forall p \in \partial M \exists\varphi : V \to U_{\ni p}^{\subset M}$ — параметризация в $M$, такая, что $\varphi(V\cap\mathbb{H}^m) = U \cap N$.

**Замечание.** По критерию непрерывности, $\varphi$ переводит внутренние (внешние) точки $V\cap\mathbb{H}^m$ во внутренние (внешние) точки $U \cap M$. Следовательно, $\varphi(V\cap\partial\mathbb{H}^m) = U\cap\partial N$

**Лемма 9.1.** *Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие, $N$ — регулярная область в $M$. Тогда $\partial N$ — гладкое $m-1$ мерным многообразием.*

*Доказательство.* Рассмотрим отображение $L : \mathbb{R}^{m-1} \to \partial\mathbb{H}^m$ по правилу: $L(x') = (0, x')$. Рассмотрим $V_0 \subset \mathbb{R}^{m-1}$, такое, что $\{0\}\times V_0 = V\cap\partial\mathbb{H}^m$. Положим $U_0 = U\cap\partial N$. Тогда $\varphi_0 : V_0 \to U_0, \varphi_0 = \varphi\circ L$. Проверим, что $\varphi_0$ — параметризация. Действительно:

1. $\varphi_0$ гдадкая как композиция гладких функций
2. $D\varphi_0(x')$ получается из $D\varphi(0, x')$ выкидыванием первого столбца.
3. $\varphi_0^{-1}$ непрерывно, как сужение $\varphi^{-1}|_{U_0}$

□

Многообразие $\partial N$ называется краем $N$

**Теорема 9.1.** *Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие и $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на $M$, такая, что $f^{-1}(0) \neq \varnothing$ и $\forall p \in f^{-1}(0) : df_p \neq 0$ (т.е $0$ — регулярное значение $f$). Тогда $B = f^{-1}(-\infty, 0) = \{p \in M : f(p) < 0\}$ является регулярной областью в $M$ с краем $\partial B = f^{-1}(0)$*

*Доказательство.* $B$ открыто в $M$ по критерию непрерывности. Пусть $p \in \partial B$. Тогда $p \in f^{-1}(0)$. Выберем произвольную параметризацию $\varphi : V \to U_{\ni p}^{\subset M}$ и рассмотрим $g = f \circ \varphi$. Если $\varphi(a) = p$, то $dg_a = df_p \circ d\varphi_a \neq 0$. Заменяя $g$ на композицию с перестановкой, можно считать, что $\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Рассмотрим на $V$ функцию $F(x) = (g(x), x_2, \dots x_m)$. Тогда:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_m}(a) \\ 0 & & & \\ \vdots & & E_{m-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

А значит, $\det DF(a) \neq 0$. Тогда по теореме об обратной функции $\exists W, V_0$ — открытые в $\mathbb{R}^m, a \in V_0 \subset V : F : V_0 \to W$ — диффеоморфизм. Положим $U_0 = \varphi(V_0), \psi = \varphi \circ F^{-1}$ — параметризация. Тогда на $W$ имеем:

$$f \circ \psi(x) = f \circ \varphi \circ F^{-1}(x) = g(F^{-1}(x)) = x_1$$

Следовательно, $\psi(W \cap \mathbb{H}^m) = \psi(\{x \in W : x_1 < 0\}) = B \cap U_0$. Кроме того, если $p \in f^{-1}(0)$, то $x_1 = 0$, откуда $p \in \partial B$. $\square$

**Следствие.** $B^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$ — регулярная область с краем $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$

*Доказательство.* Рассмотрим $f(x) = |x|^2 - 1$ — гладкая и $rk\ df_p = 1 \forall p \in S^{m-1} = f^{-1}(0)$. Тогда по теореме $B^m$ — регулярная область с краем $S^{m-1}$. $\square$

## 9.2 Ориентируемые многообразия

**Определение 9.2.** Пусть $M$ — гладкое многообразие. Семейство параметризаций $\{\varphi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha, \alpha \in I\}$, образы которых покрывают $M$, называется атласом.

**Определение 9.3.** Атлас на $M$ называется ориентирующим, если якобианы всех функций перехода положительны.

**Определение 9.4.** Гладкое многообразие, на котором задан ориентирующий атлас называется ориентированным

**Определение 9.5.** Если на гладком многообразии существует ориентирующий атлас, то оно называется ориентируемым

**Определение 9.6.** Атласы $\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}_\in$ эквивалентны, если $\mathcal{A}_\infty \cup \mathcal{A}_\in$ — ориентирующий атлас

**Определение 9.7.** Ориентация многообразия — класс эквивалентности ориентирующих атласов

**Замечание.** Любое непустое открытое множество $\mathbb{R}^n$ ориентируемо.

**Задача.** *$M \subset \mathbb{R}^3$ — гладкое двумерное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем существует непрерывное поле (вектор-функция) единичных нормалей*

**Замечание.** Существуют неориентируемые многообразия, например — лист Мёбиуса

**Замечание.** Пусть на $M$ при помощи ориентирующего атласа $\mathcal{A}$ задана фиксированная ориентация и пусть $\varphi$ — какая-то параметризация окрестности $M$. Будем говорить, что $\varphi$ не соответствует ориентации, если $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ — не ориентирующий. Рассмотрим $\varphi \circ A$, где $A(x_1, \dots x_n) = (x_1, \dots, x_{m-1}, -x_m)$. Тогда $\varphi \circ A$ соответствует ориентации.

**Теорема 9.2.** *Пусть $M$ гладкое $m$-мерное ориентируемое многообразие ($m > 1$) и $N$ — регулярная область в $M$. Тогда $\partial N$ — гладкое $m-1$-мерное ориентируемое многообразие.*

*Доказательство.* По определению регулярной области, $\partial N$ покрывается образами параметризаций $\varphi$ с условием $\varphi(V \cap \mathbb{H}) = U \cap N$. Из предыдущего замечания следует, что каждую из таких параметризаций можно считать соответствующей ориентации. Пусть $\varphi, \psi$ — такие параметризации на $M$ в окрестности точки $p \in \partial N$. Покажем, что если функция перехода между $\varphi \to psi$ имеет положительный Якобиан, то таким же свойством обладает функция перехода между параметризациями $\varphi_0, \psi_0$. Как мы определим $psi_0, \varphi_0$? Пусть $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi, \Phi = (\Phi_1, \dots \Phi_m), \Phi_0 = \psi_0^{-1} \circ \varphi_0$. Тогда $\Phi_0 = (\Phi_2 \circ L, \dots \Phi_m \circ L)$. Если $\varphi(0, a) = p$, то $\Phi(0, a) = (0, \Phi_0(a))$. Это верно и для достаточно близких к $a$ точек. Следовательно, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}(0, a) = 0, i = 2 \dots m$. Тогда:

$$D\Phi(a, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & D\Phi_0(a) & \\ * & & & \end{pmatrix}$$

Следовательно, $\det D\Phi(a) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, a) \det D\Phi_0(a)$. Т.к. $\Phi$ отображает $\mathbb{H}^m$ в себя (т.е. $\Phi_1 < 0$), то $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \lim_{t \to -0} \frac{\Phi(t,a)}{t} \geqslant 0, \neq 0$, т.к. $J_\Phi \neq 0$. Заключаем, что $\det D\Phi(a)$ и $\det D\Phi_0(a)$. $\square$

**Замечание.** Таким образом, заданная ориентация $M$ индуцирует ориентации на $N$ и на крае $\partial N$. Сначала сужаем ориентации с $M$ на $N$ (как на открытое множество), а потом по предыдущей теореме сузить на край. Тогда говорят, что ориентации $N$ и $\partial N$ согласованны.

**Лемма 9.2.** *Пусть гладкое $m$-мерное ориентируемое $M$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ задано уравнением, т.е. $M = f^{-1}(0)$, где $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — гладкая, с $rk\ df_p = 1 \forall p \in M \cap U$. Тогда $M$ ориентируемо.*

*Доказательство.* По теореме, $M = \partial B$, где $B = f^{-1}(-\infty, 0)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^{m+1}$. Оно ориентируемо, и тогда по предыдущей теореме $M$ — тоже. $\square$

## 9.3 Теорема Стокса

**Теорема 9.3** (Стокса)**.** *Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное многообразие, $N$ — регулярная область в $M$. Тогда для любой $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$ выполнено:*

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} i^* \omega$$

*Если ориентации $N, \partial N$ согласованы.*

**Лемма 9.3.** *Теорема Стокса верна для $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{H}^m$.*

*Доказательство.* Пусть $\omega = \sum_{i=1}^m f_i(x)dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m$. Тогда:

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{H}^m} d\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

При $i > 1$ по теореме Фубини:

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{(-\infty,0)\times\mathbb{R}^{m-2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i = f(\dots, x_i, \dots)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Это верно, потому что функция $f$ имеет компактный носитель $\Rightarrow$ вне некоторого отрезка $f(\dots, x_i, \dots)$ обнуляется. Следовательно, из суммы остается только слагаемое при $i = 1$.

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left( \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_1(0, x_2, \dots x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

С другой стороны, вложение $i_0 : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ имеет вид $i_0(x') = (0, x') \Rightarrow i_0^*(\omega) = f_1(0, x_2, \dots x_m)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$. Значит,

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} i_0^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_1(0, x_2, \dots x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Что совпадает с $\int_{\partial\mathbb{H}^m} i_0^*\omega$, т.к. ориентации для $\partial\mathbb{H}^m$ для стандартной ориентации $\mathbb{H}^m$ соответствует $(x_2, \dots x_m)$ □

**Замечание.**

$$\int_{\mathbb{R}^m} d\omega = 0$$

*Доказательство теоремы Стокса.* Для любой точки $p \in \operatorname{supp}(\omega)$ существует параметризация $\varphi : V \to U_p$ с условием:

1. Если $p \in \operatorname{supp}(\omega) \cap \partial N$, то $\varphi(V \cap \mathbb{H}^m) = U_p \cap N$
2. Если $p \in \operatorname{supp}(\omega) \setminus \partial N$, то $U_p \cap \partial N = \varnothing$

Можно считать, что окрестности $U_p$ связны. Из покрытия $U_p$ компакта $\operatorname{supp}(\omega)$ выделим конечное подпокрытие. Получим набор параметризаций $\varphi_i : V_i \to U_i, i = 1, \dots n$, соответствующих ориентации $M$ и покрывающих $\operatorname{supp}(\omega)$. Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ — гладкое разбиение, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^n$. Поскольку $\omega = \sum_{i=1}^n \rho_i\omega$, $d\omega = \sum_{i=1}^n d(\rho_i\omega)$, то в силу линейности интеграла формулу можно доказывать для случая, когда $\operatorname{supp}(\omega)$ покрывается образом одной параметризации. $\varphi : V \to U$. Рассмотрим несколько случаев:

1. $U \cap \partial N \neq \varnothing$. Рассмотрим сужение $\varphi : V_0 \to U_0$, $i_0 : \underbrace{\mathbb{R}^{m-1}}_{\partial \mathbb{H}^m} \to \mathbb{R}^m$, $i : \partial N \to M$, тогда $i \circ \varphi_0 = \varphi \circ i_0$. Следовательно,
$$\int_N d\omega = \int_{V \cap \mathbb{H}^m} \varphi^*(d\omega) = \int_{\mathbb{H}^m} \varphi^*(d\omega) = \int_{\mathbb{H}^m} d(\varphi^*\omega)$$
$$\int_{\partial N} i^*\omega = \int_{V_0} \varphi_0^*(i^*\omega) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \varphi_0^*(i^*\omega) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} i_0^*(\varphi^*\omega) = \int_{\partial \mathbb{H}^m} i_0^*(\varphi^*\omega)$$
Два полученных интеграла равны по предыдущей Лемме

2. Пусть $U \subset int\ N$. Имеем:
$$\int_N d\omega = \int_V \varphi^*(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^m} d(\varphi^*\omega) = 0 = \int_{\partial N} i^*\omega$$
Последнее равенство верно, т.к. $i^*\omega = 0$ на $\partial N$.

3. $U \subset ext\ N$. Сужение $\omega$ на $N$ и $i^*\omega$ нулевые, т.е. формула верна и в этом случае.

□

**Следствие.** Пусть $M$ — гладкое $m$-мерное ориентируемое многообразие, $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$. Тогда $\int_M d\omega = 0$.

Пусть $p \in \partial N$, тогда рассмотрим $v \in T_pM$

1. $v \in T_p\partial N$
2. $\varphi(V \cap \mathbb{H}^m) = U \cap N$, $d\varphi(w) = v, w = (w_1, \dots w_m), w_1 > 0$, тогда $v$ называется внешним
3. Если в предыдущем пункте $w_1 < 0$, то $v$ называется внутренним

**Утверждение 9.1.** *Пусть $N$ — регулярная область в ориентируемом многообразии $M$. Тогда ориентации $\partial N$ и $N$ согласованы тогда и только тогда, когда $(\partial O)_{p \in \partial N} = [(v_1, \dots v_m)] \Rightarrow O_p = [(n, v_1, \dots v_m)]$.*

**Следствие** (Формула Грина)**.** Пусть $G$ — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^2$, причем ориентация края согласована со стандартной (индуцированной из $\mathbb{R}^2$) ориентацией $G$, $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, то:
$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$
Согласованность ориентации $G$ и $\partial G$ неформально означает, что "при обходе по краю, область будет слева"

**Следствие** (Формула Гаусса-Остроградского)**.** Пусть $G$ — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^3$, причем ориентация края согласована со стандартной (индуцированной из $\mathbb{R}^3$) ориентацией $G$, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, то:
$$\int_{\partial G} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dz = \iiint \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdy$$
Согласованность ориентации $G$ и $\partial G$ означает, что $\partial G$ ориентирован внешней нормалью

**Следствие** (Классическая формула Стокса)**.** Пусть $M$ — гладкое 2-мерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, покрываемое образом параметризации $r : V \to \mathbb{R}^3$. Пусть $S$ — ограниченная регулярная область в $M$ и $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Тогда:

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Согласованность ориентаций $G$ и $\partial G$ означает, что: если $N(p) = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$, $n(p)$ — внешний, то вектор $\tau(p)$ выбирается так, что $(n, \tau, N)$ — положительно ориентированная тройка.

**Замечание.** Мнемоническое правило: записывать следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

## 9.4 Замкнутые точные дифференциальные формы

Пусть $M$ — гладкое многообразие $\omega \in \Omega^k(M)$.

**Определение 9.8.** $\omega$ называется замкнутой, если $d\omega = 0$

**Определение 9.9.** $\omega$ называется точной, если $\exists \alpha \in \Omega^{k-1}(M) : d\alpha = 0$

**Замечание.** Из условия $d^2 = 0$ следует, что всякая точная форма замкнута.

**Теорема 9.4** (Лемма Пуанкаре)**.** *Если $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 1$ и $\omega$ замкнута, то она точна.*

*Доказательство.* $(t, x_2, \dots x_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Тогда всякая $k$-форма в $\mathbb{R}^n$ есть сумма мономов вида $f(t, x) = dt \wedge dx^I$ и $g(t, x)dx^J$, где $I \in \mathbb{I}_{k-1}, J \in \mathbb{I}_k$. Определим на $\Omega(\mathbb{R}^n)$ линейный оператор $\Phi$ по правилу

$$\Phi(f(t, x)dx \wedge dx^I) = \left(\int_0^t f(s, x)ds\right) dx^I$$

$$\Phi(g(t, x)dx^I) = 0$$

Покажем, что значение $\Phi$ на $\omega$ удовлетворяет условию

$$d\Phi(\omega) + \Phi(d\omega) = \omega - \pi^*(i^*\omega)$$

Где $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}, \pi(t, x) = x, i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, i(x) = (0, x)$.

1. $\omega = g(t, x)dx^J \Rightarrow \Phi(\omega) = 0 \Rightarrow d\Phi(\omega) = 0.$

$$d\omega = \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^J + \omega_0$$

Тогда

$$\Phi(d\omega) = \Phi\left(\frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^J\right) = \left(\int_0^t \frac{\partial g}{\partial s} ds\right) dx^J = g(t, x)dx^J - g(0, x)dx^J$$

Т.к. $i \circ \pi(t, x) = (0, x)$, то $(i \circ \pi)^*\omega = g(0, x)dx^J$, тогда равенство выполняется.

2. $\omega = f(t,x)dt \wedge dx^I \Rightarrow \Phi(\omega) = \left(\int_0^t f(s,x)ds\right) dx^I$.

$$d\Phi(\omega) = f(t,x)dt \wedge dx^I + \sum_{i=2}^{n} \left(\int \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,x)ds\right) dx_i \wedge dx^I$$

$$d\omega = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)dx_i \wedge dt \wedge dx^I$$

$$\Phi(d\omega) = \sum_{i=2}^{n} \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,x)ds\right) dx_i \wedge dx^I$$

Но тогда:

$$d\Phi(\omega) + \Phi(d\omega) = 0$$

Полученное равенство позволяет доказать утверждение индукцией по $n$

**База:** $n = k \Rightarrow \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$, $\omega$ замкнута. $i^*\omega = 0$. Следовательно, $\omega = d\Phi(\omega)$

**Переход:** $n \to n{+}1$. Пусть $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\omega$ замкнута. Заметим, что $i^*\omega \in \Omega^k(R^n)$, $d(i^*\omega) = i^*d\omega = 0$. Следовательно, $\exists \alpha : d\alpha = i^*\omega$. Имеем:

$$d\Phi(\omega) = \omega - \pi^*(d\alpha) \Rightarrow \omega = d(\Phi(\omega) + \pi^*\alpha)$$

$\square$