Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

III СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

Автор: *Киселев Николай*

Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Ну-с, начнем

1.1 Определения

Определение 1.1. Граф — $G = (V, E)$, $|V| < \infty$. V — множество вершин, E — множество ререр (подмножество $V \times V$). По умолчанию, граф неориентированный, в нем нет петель и ребер. Приставка **ор** будет означать, что граф ориентированный, приставка **мульти** будет означать, что разрешены кратные ребра, а приставка **псевдо** будет означать, что граф разрешены петли. Другими словами, псевдомультиорграф — граф, в котором разрешено все.

Определение 1.2. Маршрут — последовательность $v_1e_1v_2e_2 \dots v_{n-1}e_{n-1}v_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$

Определение 1.3. Путь (цепь) — незамкнутый маршрут, в котором все ребра разные.

Определение 1.4. Цикл — замкнутый маршрут, в котором все ребра разные.

Определение 1.5. Простой путь (цепь) — путь, в котором все вершины разные.

Определение 1.6. Простой цикл — цикл, в котором все вершины разные (кроме, возможно, начальной и конечной).

Определение 1.7. Граф связен, если $\forall v, u \in V$ существует простая цепь с концами в v, u.

Замечание. Отношние $u \sim v$, где $\sim$ — "связны ли две вершины" является отношением эквивалентности.

Определение 1.8. Классы эквивалентности по отношению выше называются компонентами связности.

Определение 1.9. Пусть $v \in V$. Степень вершины v — $\deg v$ — количество ребер, которое исходит из данной вершины (петля добавляет 2 к степени вершины). $indeg\ v, outdeg\ v$ — входящие и исходящие степени для орграфов.

Замечание.

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

Определение 1.10. Граф называется d-регулярным, если $\forall v \in V \deg v = d$.

Замечание. Всего существует $2^{C_n^2}$ графов на n вершинах (верны пронумерованы числами от 1 до n).

Определение 1.11. Граф называется деревом, если он связен и в нем нет циклов.

Замечание. В дереве на n вершинах $n - 1$ ребро.

Положим τ_n — количество деревьев на n вершинах.

1.2 Асимптотика количества унициклических графов

Утверждение 1.1. $\tau_n = n^{n-2}$

Доказательство. (Коды Прюфера) Построим по дереву следующую последовательность: на каждой итерации будем находить лист с самым маленьким номером, запишем его соседа, а лист удалим. Далее нужно доказать, что по кодам Прюфера однозначно восстанавливается дерево и получить биекцию между кодами длины $n-2$ и деревьями на n вершинах. $\square$

Определение 1.12. Унициклический граф — связный граф, в котором n вершин и n ребер.

Положим u_n — количество унициклических графов на n вершинах

Лемма 1.1. *$F(n,r)$ — количество лесов с r деревьями на n вершинах. $F(n,r) = r\cdot n^{n-1-r}$.*

Пусть $r = 3,\dots n$ — количество вершин в цикле. Тогда

$$u_n = \sum_{r=3}^{n}\left(C_n^r\frac{(r-1)!}{2}F(n,r)\right) = \sum_{r=3}^{n}\left(C_n^r\frac{(r-1)!}{2}r\cdot n^{n-1-r}\right)$$

Утверждение 1.2. $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}}\cdot n^{n-\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n^r}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{n^r}{r!}e^{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\ln\left(1-\frac{r-1}{n}\right)} = (*) \leqslant \frac{n^r}{r!}e^{-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\dots-\frac{r-1}{n}} = \frac{n^r}{r!}e^{-\frac{r(r-1)}{2n}}$$

С другой стороны

$$(*) = \frac{n^r}{r!}e^{-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\dots-\frac{r-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\dots+\frac{(r-1)^2}{n^2}\right)} = \frac{n^r}{r!}e^{-\frac{r(r-1)}{2n}+O\left(\frac{r^3}{n^3}\right)}$$

Итого

$$u_n = \sum_{r=3}^{n}\left(C_n^r\frac{(r-1)!}{2}r\cdot n^{n-1-r}\right) \leqslant \frac{1}{2}n^{n-1}\sum_{r=3}^{n}e^{-\frac{r(r-1)}{2n}}$$

$$u_n = \sum_{r=3}^{n}\left(C_n^r\frac{(r-1)!}{2}r\cdot n^{n-1-r}\right) = \frac{1}{2}n^{n-1}\sum_{r=3}^{n}e^{-\frac{r(r-1)}{2n}+O\left(\frac{r^3}{n^3}\right)}$$

$$u_n = \sum_{r=3}^{n}\left(C_n^r\frac{(r-1)!}{2}r\cdot n^{n-1-r}\right) = \frac{1}{2}n^{n-1}\left(\underbrace{\sum_{r=3}^{[n^{0.6}]}C_n^r r! n^{-r}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n}C_n^r r! n^{-r}}_{S_2}\right)$$

$$S_2 \leqslant \sum_{r=[n^{0.6}+1]}^{n}e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} \leqslant n\cdot e^{\frac{n^{0.2}}{2}(1+o(1))}$$

Помним, что $r \geqslant n^{0.6}$.

$$e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} = e^{-\frac{r^2}{2n}(1+o(1))} \leqslant e^{-\frac{n^{1.2}}{2n}(1+o(1))} = e^{-\frac{n^{0.2}}{2}(1+o(1))}$$

Докажем, что $\sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}}$.

$$\sum_{r=0}^{2} e^{\frac{-r^2}{2n}} = O(1)$$

$$\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{\infty} e^{\frac{-r^2}{2n}} = \underbrace{\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n^2} e^{\frac{-r^2}{2n}}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{r=n^2+1}^{\infty} e^{\frac{-r^2}{2n}}}_{(2)}$$

Для (1):

$$r \geqslant n^{0.6} \Rightarrow e^{\frac{-r^2}{2n}} \leqslant e^{\frac{-n^2}{2n}} = e^{-\frac{n}{2}} \Rightarrow (1) \leqslant n^2 e^{-\frac{n}{2}}$$

Для (2):

$$\frac{e^{\frac{-(r+1)^2}{2n}}}{e^{\frac{-r^2}{2n}}} = e^{\frac{-(r+1)^2+r^2}{2n}} = e^{\frac{-2r-1}{2n}} = e^{-\frac{r}{n}-\frac{1}{2n}} < e^{-\frac{r}{n}} < e^{n}$$

Тогда $(2) \leqslant e^{-\frac{-(n^2+1)^2}{2n}}$ (ограничили сверху геометрической прогрессией). Тогда:

$$S_1 = \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r(r-1)}{2n}+O\left(\frac{r^3}{n^3}\right)} \sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} \sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim_{\text{сх.}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} dr =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{n} dx = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{n} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{2} = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

□

2 Число независимости и кликовое число графа

Определение 2.1. Пусть $n, r, s \in \mathbb{N}, r < n, s \in \{0, 1, \ldots r-1\}$. $G(n, r, s)$ — такой, граф, что $V = \{A \subset \{1, 2, \ldots n\} : |A| = r\}$, $E = \{(A, B) : |A \cap B| = s\}$.

Определение 2.2. Клика в графе G — полный подграф

Определение 2.3. Кликовое число $\omega(G)$ — количесто вершин в самой большой клике.

Определение 2.4. Независимое множество — такое множество вершин W, что $\forall x, y \in W (x, y) \notin E$.

Определение 2.5. Число независимости $\alpha(G)$ — количесто вершин в самом большом независимом множестве.

Рассмотрим $\omega\left(G\left(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)\right)$. Заметим, что если записать матрицу Адамара в нормальной форме, то у нас получится следующее:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ 1 & & B & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Тогда в A все столбцы будут ортогональны. При этом, каждые две строки B (если не рассматривать первую) пересекаются по $\frac{n}{4}$ элементам. При этом, попарно ортогональные векторы с $\frac{n}{2}$ единичками и $\frac{n}{2}$ минус единичками живут в $n-1$ мерном пространстве. Таким образом, $\omega\left(G\left(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)\right) \leqslant n-1$, а матрица Адамара позволяет привести пример для $n-1$. Таким образом, Гипотеза Адамара равносильна тому, что $\omega\left(G\left(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)\right) = n-1$.

Посчитаем теперь число ребер $\left|E\left(G\left(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)\right)\right| = \frac{C_n^{\frac{n}{2}}\left(C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}}\right)^2}{2}$. Это верно, т.к. $\forall v \in V$: $\deg v = \left(C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}}\right)^2$.

Посчитаем теперь число треугольников в данном графе. Для этого выберем ребро и посчитаем количество треугольников, присоединенных к этому ребру. Просуммируем полученные числа и разделим на 3. Для каждого конкретного ребра AB рассмотрим вершину C, которая соединена с ними обоими. Тогда: пусть $|C \cap (A \setminus B)| = x \Rightarrow |C \cap (A \cap B)| = \frac{n}{4} - x \Rightarrow |C \cap (B \setminus A)| = x \Rightarrow |C \setminus (A \cup B)| = \frac{n}{4} - x$. Тогда для конкретного x, количество вершин C равняется:

$$C_{\frac{n}{4}}^{x} C_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{4}-x} C_{\frac{n}{4}}^{x} C_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{4}-x} = \left(C_{\frac{n}{4}}^{x}\right)^4$$

Но тогда число треугольников:

$$= \frac{C_n^{\frac{n}{2}}\left(C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}}\right)^2 \cdot \sum_{x=0}^{\frac{n}{4}}\left(C_{\frac{n}{4}}^{x}\right)^4}{6}$$

Определение 2.6. Энтропия — $H(a) = -a\ln a - (1-a)\ln(1-a)$

Теорема 2.1. *Пусть* $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Тогда*

$$\ln\left(C_n^{[an]}\right) \sim \left(-a\ln a - (1-a)\ln(1-a)\right)n = H(a)n$$

Следствие.

$$C_n^{[an]} = \left(\frac{1}{a^a(1-a)^{(1-a)}} + o(1)\right)^n$$

Утверждение 2.1 (Формула Стирлинга)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Доказательство. Было на матане. □

Определение 2.7. $C(n,k)$ — количество связных графов на n верщинах с k ребрами.

Замечание. 1. $k \leqslant n-2 \Rightarrow C(n,k) = 0$

2. $k = n-1 \Rightarrow C(n,k) = t_n = n^{n-2}$

3. $k = n \Rightarrow C(n,k) = u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot n^{n-\frac{1}{2}}$

4. (б/д) $k = n+1 \Rightarrow C(n,k) \sim \frac{5}{24} n^{n+1}$

5. (б/д) $C(n, n+k) \sim \gamma(k) n^{n+\frac{3k+1}{2}}$, при $k = O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$

2.1 Хроматическое число графа

Определение 2.8. $\chi(G) = \min\{k : V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k : \forall i \forall x, y \in V_i (x,y) \notin E\}$ — называется хроматическое число графа.

Утверждение 2.2. $\chi(G) \geqslant \omega(G)$

Доказательство. В самом большом полном подграфе точно все вершины должны быть разного цвета, откуда и следует оценка □

Утверждение 2.3. $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$

Доказательство. $|V| = |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_k| \leqslant k\alpha(G) \Rightarrow k \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$ □

Утверждение 2.4. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, $\Delta(G)$ *— максимальная степень вершины в* G

Доказательство. Ведем индукцию по n — количеству вершин

База: $n = 1$ — очевидно

Переход: Уберем вершину с максимальной степенью. В оставшемся графе по предположению индукции можно вершины правильным образом покрасить в $\Delta(G) + 1$ цвет. А новую вершину мы покрасим в тот цвет, которого нет среди ее соседей.

□

Теорема 2.2 (Брукса)**.** *Пусть* G *— не клика и не нечетный цикл. Тогда* $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$

Определение 2.9. G называется двудольным графом, если $\chi(G) = 2$.

Утверждение 2.5. *Граф двудолен тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть есть, тогда этот цикл нельзя правильным образом покрасить в два цвета

$\Leftarrow$ Рассмотрим $f(s,u)$ — множество всех длин путей $s \to u$. Т.к. в G нет нечетных циклов, то в $f(u,v)$ все числа одинаковой четности. Зафиксируем вершину s и покрасим каждую вершину v в цвет, равный $f(s,v) \mod 2$. Тогда $\forall l \in f(u,v) : l \equiv_2 0$

□

Теорема 2.3. *Доля тех графов, у которых* $\omega(G) < w \log_2 n$*, стремится к* 0 *при* $n \to \infty$

Замечание. Утверждение теоремы равносильно тому, что $\lim_{n\to\infty} P(\omega(G) \leqslant 2\log_2 n)$.

Доказательство. Заметим, что

$$P(\omega(G) \geqslant k) = P(\exists \text{ множество вершин мощности } k, \text{ которое является кликой в } G) =$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{C_n^k}\{G : i\text{-ое } k\text{-элементное множество вершин образуют клику в } G\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{C_n^k} P(i\text{-ое } k\text{-элементное множество образует клику}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{C_n^k} \frac{2^{C_n^2 - C_k^2}}{2^{C_n^2}} = \sum_{i=1}^{C_n^k} 2^{-C_k^2} = C_n^k 2^{-C_k^2} = C_n^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^k}{k!} 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} = \frac{2^{k\log_2 n - \frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{2\log_2^2 n - 2\log_2^2 n}}{k!} \to 0$$

Для нецелого $2\log_2 n$ используем $k = [2\log_2 n]$, в силу того, что $k!$ растет сильно быстрее, доказательство не поменяется. □

Рассмотрим граф $G = G(n, 3, 1)$, т.е. такой, что $V = \{A \subset \{1, 2, \dots n\} : |A| = 3\}, E = \{(A, B) : |A \cap B| = 1\}$.

Утверждение 2.6. $\omega(G) \leqslant n$.

Задача. $\omega(G) \geqslant \left[\frac{n-1}{2}\right], n \geqslant 7$

Теорема 2.4. $\alpha(G) = \begin{cases} n, n \equiv_4 0 \\ n-1, n \equiv_4 1 \\ n-2, n \equiv_4 2 \text{ или } 3 \end{cases}$

Доказательство.

Пример: Берем все тройки, являющиеся подмножествами множеств $\{4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+4, k \leqslant \frac{n}{4}\}$ и еще тройки из множества $\{n - mod(n, 4) + 1, \dots, n\}$

Оценка: Ведем индукцию по n

База: $n = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \alpha(n) = 0, 0, 1, 4$.

Переход: пусть $A_1, \dots A_s$ — вершины независимого множества в $G(n, 3, 1)$.

i. $\forall i, j A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow s \leqslant \frac{n}{3}$, это хуже заявленного примера.

ii. $\exists i, j : |A_i \cap A_j| = 2$ Тогда Б.О.О. это элементы $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$.

A. Больше нет множеств, содержащих $1, 2$. Тогда все A_i либо лежат внутри $\{1, 2, 3, 4\}$, либо лежат внутри $\{5, 6, \dots n\}$. Тогда по предположению индукции, утверждение верно.

B. Пусть Б.О.О. существуют еще $r-2$ множества: $\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \dots \{1, 2, r\}, r \geqslant 5$. Все остальные A_i находятся среди $\{r+1, \dots n\}$ и их $\leqslant n - r$. Но тогда $s \leqslant r - 2 + (n - r) \leqslant n - 2$

□

Замечание. Доказать, что $s \leqslant n$ можно, используя линейную алгебру. Сопоставим каждому множеству вектор из n нулей или единиц (маску множества). Докажем, что они линейно независимы над $\mathbb{Z}_2$ (таким образом поймем, что их $\leqslant n$).

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_sx_s = 0$$

$$c_1(x_1, x_i) + c_2(x_2, x_i) + \dots c_s(x_s, x_i) = 0$$
$$3c_i = 0 \Rightarrow c_i = 0$$

Следствие. Для графа $G(n, 3, 1)$ верно:

$$\omega(G) \leqslant n, \lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \rceil \geqslant \frac{C_n^3}{n} \sim \frac{n^2}{6}$$

Таким образом, графы $G(n, 3, 1)$ предъявляют пример, в котором оценка $\chi(G) \geqslant \lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \rceil$ лучше, чем $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

3 Гамильтоновость графа

Определение 3.1. Граф $G-$гамильтонов, если $\exists$ простой цикл, проходящий по всем вершинам графа.

Теорема 3.1. *Дирака Пусть $G = (V, E), n = |V|, \forall v \in V$ deg $v \geqslant \frac{n}{2}$. Тогда граф G гамильтонов.*

Определение 3.2. $\varkappa$ - вершинная связность, то есть минимальное количество вершин, которое нужно удалить из графа, чтобы нарушить его связность:

$$\varkappa(G) = min\{k : \exists W \subseteq V : |W| = k, G|_{V \setminus W} \text{несвязный}\}$$

Теорема 3.2. *(Эрдеш, Хватал) Пусть $\varkappa(G) \geqslant \alpha(G)$. Тогда G гамильтонов.*

Доказательство.

1. Случай, когда в G нет циклов. Тогда G — дерево $\Rightarrow$ есть хотя бы 2 висячих вершины $\Rightarrow \alpha(G) \geqslant 2$, но есть и не висячие вершины $\Rightarrow \varkappa(G) \leqslant 1$.

2. Случай, когда в G есть циклы. Рассмотрим любой самый длинный простой цикл $C = \{x_1, x_2, \dots x_k\}, k < n$ (при $k = n$ граф будет гамильтонов). Тогда удалим C из G, получим граф G'. Пусть W — связная компонента в G'. Положим $N_W(G) = \{x \in V \setminus W : \exists y \in W : (x, y) \in E\}$.

   Утверждение 3.1. *$N_W(G) \subset C$.*

   Доказательство. Это правда, т.к. ребра не могут вести в другие компоненты связности графа G'. □

   Утверждение 3.2. *Если $x_i = N_W(G) \Rightarrow x_{i+1} \notin N_W(G)$.*

   Доказательство. Пусть $\exists i : x_i \in N_W(G), x_{i+1} \in N_W(G)$. Тогда существует цикл большей длины, проходящий через x_i, заходящий в компоненту W и выходящий через x_{i+1}. □

Следствие. $N_W(G) \subsetneq C$

Утверждение 3.3. $\varkappa(G) \leqslant |N_W(G)|$.

Доказательство. Удалим $N_W(G)$. Т.к. $C \setminus N_W(G) \neq \varnothing$, то граф распался на $\geqslant 2$ компоненты связности. Но тогда $\varkappa(G) \leqslant |N_W(G)|$. □

Утверждение 3.4. *Рассмотрим* $M = \{x_{i+1} | x_i \in N_W(G)\}$. *Тогда* M *— независимое множество.*

Доказательство. Заметим, что $|M| = |N_W(G)|, M \cap N_W(G) = \varnothing$. Предположим, что $\exists x_{i+1}, x_{j+1} \in M : (x_{i+1}, x_{j+1}) \in E$. Но т.к. $x_i, x_j \in N_W(G)$, то существует путь $x_{i+1} \to x_{j+1} \to$ по циклу $\to x_i \to$ по $W \to x_j \to$ обратно по циклу $\to x_{i+1}$. □

Рассмотрим $x \in W$. Заметим, что $M \cup \{x\}$ — тоже независимое множество. Но тогда $\alpha(G) \geqslant |M| + 1 = |N_W(G)| + 1 > \varkappa(G)$. Пришли к противоречию.

□

Замечание. В 2 предыдущих теоремах связность графа следует из условия. В теореме Дирака все компоненты связности должны быть $ge\frac{n}{2} + 1 \Longrightarrow$ их не более 1. А в теореме Эрдеша-Хватала $\alpha(G) \geqslant 1 \Longrightarrow \varkappa(G) \geqslant 1$

Пример. Рассмотрим граф $G(n, 3, 1) : V = \{A \subset \{1, 2, \dots n\} : |A| = 3\} \Rightarrow |V| = C_n^3, E = \{(A, B) : |A \cap B| = 1\}$. Известно, что $\alpha(G(n, 3, 1)) \leqslant n$.

Признак дирака на таком графе не работает, т.к. граф разреженный, т.е. deg каждой вершины $= 3C_{n-3}^2 \sim \frac{3n^2}{2}$.

Однако, $\varkappa(G) \geqslant \min_{v,w \in V} f(v, w)$, где f — количество общих соседей у v, w. Рассмотрим, какие тройки могут быть аргументами f. Б.О.О, положим первую тройку $1, 2, 3$, вторую будем подбирать для того, чтобы было $0, 1, 2$ пересечений с первой тоже не ограничивая общность.

A	B	$f(A, B)$
$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	$9(n - 6)$
$\{1, 2, 3\}$	$\{3, 4, 5\}$	$C_{n-5}^2 + 4(n - 5)$
$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	$2C_{n-4}^2 + n - 4$

Теперь заметим, что теорема Эрдеша-Хватала доказывает гамильтоновость графа (т.к. $\varkappa(G) \geqslant n \geqslant \alpha(G)$), в то время, как Дирак тут бессилен :(((.

Рассмотрим жадный алгоритм: будем красить вершины последовательно, причем каждую новую вершину будем красить в минимальный возможный цвет (иначе, добавляем новый цвет). Пусть $\chi_{ж}(G)$ — количество цветов, в которое наш алгоритм покрасил граф, $\alpha_{ж}(G)$ — максимальное количество вершин одного цвета при покраске жадным алгоритмом.

Замечание. $\alpha_{ж}(G) \leqslant \alpha(G), \chi_{ж}(G) \geqslant \chi(G)$.

Замечание. Когда $P(\dots) \to 1$, говорят, что ... происходит "асимптотически почти наверное" (а.п.н.)

Теорема 3.3. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0 P\left(\frac{\alpha(G)}{\alpha_{ж}(G)} \leqslant 2 + \varepsilon\right) \to 1, n \to \infty$, *т.е.* $\frac{\alpha(G)}{\alpha_{ж}(G)} \leqslant 2 + \varepsilon$ *(а.п.н.)*

Доказательство. Известно, что а.п.н. $\alpha(G) \leqslant 2\log_2 n \Rightarrow$ достаточно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ а.п.н. $\alpha_{ж} \geqslant (1-\varepsilon)\log_2 n$. Докажем, что $P(\alpha_{ж}(G) < (1-\varepsilon)\log_2 n) \to 0$. Положим за A событие $\alpha_{ж}(G) < (1-\varepsilon)\log_2 n$. Положим $m = \left[\frac{n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n}\right]$ и рассмотрим следующее событие B:

$$B = \begin{cases} \exists a_1, a_2, \dots a_m : \forall i : a_i < (1-\varepsilon)\log_2 n \\ \exists C_1, C_2, \dots C_m : \forall i : |C_i| < a_i, \forall i, j : C_i \cap C_j = \varnothing \\ \forall x \notin \bigcup_{i=1}^m C_i \forall i \exists y \in C_i : (x, y) \in E \end{cases}$$

Зафиксируем x, i. $P(\exists y \in C : (x,y) \in E) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}$. Т.к. ребра выбираются независимо, множества ребер, ведущие в C_i, C_j выбираются тоже независимо. Тогда:

$$P(\forall i \exists y \in C_i (x,y) \in E) = \prod_{i=1}^n P(\exists y \in C : (x,y) \in E) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)$$

События $\forall i \exists y \in C_i(x,y) \in E$ также независимы по всем вершинам x, т.к. ребра ведущие из одной вершины в $\bigcup_{i=1}^n C_i$ выбираются независимо от ребер другой такой же вершины. Тогда:

$$P\left(\forall x \notin \bigcup_{i=1}^n C_i \forall i \exists y \in C_i (x,y) \in E\right) = \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{n - a_1 - a_2 - \dots - a_m} <$$

$$< \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^{(1-\varepsilon)\log_2 n}}\right)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{mn}{2}} \leqslant e^{-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2\log_2 n}} = e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}}$$

Итого, получаем:

$$P(B) \leqslant \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \sum_{\substack{C_1, C_2, \dots C_m : \forall i : |C_i| = a_i \\ \forall i, j : C_i \cap C_j = \varnothing}} e^{-\frac{n^{(1+\varepsilon)}}{4\log_2 n}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} C_n^{a_1} C_n^{a_2} \dots C_n^{a_m} < e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} n^{a_1 + a_2 + \dots + a_m} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} 1 =$$

$$= e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n} + \frac{n}{2}\ln n} (\log_2 n)^n \leqslant e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n} + \frac{n}{2}\ln n + \frac{n}{(1-\varepsilon)\log_2 n}\ln(\log_2 n)} \to 0$$

$\square$

Заметим, что жадный алгоритм полиномиальный (работает за $O(n^2)$), причем он ошибается всего в 2 раза. Возникает вопрос: можно ли придумать полиномиальный алгоритм лучше, который может ошибаться в меньшее количество раз. Ответ: никто не знает. Кокнуло?

4 Случайные графы

Теорема 4.1 (Кучера). $\forall\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists$ *последовательность графов* G_n *на* n *вершинах,* $\exists n_0 : \forall n > n_0$ *доля тех нумераций, в которых окажется, что* $\frac{\alpha(G)}{\alpha_{жс,\sigma}} \geqslant n^{1-\varepsilon}$*, не меньше, чем* $1-\delta$.

Определение 4.1. $g(G)$ *(от английского girth)* — обхват графа — длина кратчайшего простого цикла.

Определение 4.2. $G(n,p)$ — модель случайного графа Эрдеша и Реньи (также называется биномиальная модель). В данной модели граф выбирается случайно, каждое ребро проводится с вероятностью p

Теорема 4.2 (Эрдеш). $\forall k, l \in \mathbb{N} : \exists G : \chi(G) > k, g(G) > l$.

Доказательство. Положим $\theta = \frac{1}{2l}, p = p(n) = n^{\theta-1}$. Пусть $X_l(G)$ — количество простых циклов длины $\leqslant l$ в G. $\mathbb{E}X_l = \sum_{r=3} \mathbb{E}(\text{число циклов длины } r)$. Представив каждое из слагаемых как индикаторы конкретных циклов, получаем:

$$\mathbb{E}X_l = \sum_{r=3}^{l} \mathbb{E}(\text{число циклов длины } r) = \sum_{r=3}^{l} \underbrace{C_n^r \frac{(r-1)!}{2}}_{\text{максимальное количество циклов длины } r} p^r \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=3}^{l} \frac{n^r}{r!} \cdot \frac{(r-1)!}{2} p^r \leqslant \sum_{r=3}^{l} (np)^r = \sum_{r=3}^{l} n^{\theta r} < ln^{\theta l} = l\sqrt{n}$$

По неравенству Маркова, имеем:

$$P\left(X_l > \frac{n}{2}\right) \leqslant \frac{l\sqrt{n}}{n/2} \to 0 \Rightarrow \exists n_1 : \forall n \geqslant n_1 P\left(X_l \leqslant \frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}$$

Рассмотрим $x = \left\lceil \frac{3\ln n}{p} \right\rceil \to \infty$. Т.к. $p = n^{1-\theta}$, то $x \to \infty, n \to \infty$. Докажем, что $P(\alpha(G) \geqslant x) \to 0$. Положим $Y_x(G)$ —количество независимых множеств на x вершинах в G. Тогда $P(\alpha(G) \geqslant x) \Leftrightarrow P(Y_x \geqslant 1)$. По неравенству Маркова, имеем:

$$P(Y_x \geqslant 1) \leqslant EY_x = C_n^x (1-p)^{C_x^2} \leqslant n^x e^{-pC_x^2} = e^{x\ln n - p\frac{x(x-1)}{2}} = e^{x\left(\ln n - \frac{p(x-1)}{2}\right)}$$

При этом, $x \sim \frac{3\ln n}{p}$, поэтому $\ln n - \frac{p(x-1)}{2} = \ln n - (1+o(1)) \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{3\ln n}{p} \to -\infty$, но тогда

$$e^{x\left(\ln n - \frac{p(x-1)}{2}\right)} \to 0$$

Тогда $P(\alpha(G) < x) \to 1 \Rightarrow \forall n > n_2 P(\alpha(G) < x) > \frac{1}{2}$. Но тогда $\forall n > \max\{n_1, n_2\} \exists G : X_l(G) \leqslant \frac{n}{2}, \alpha(G) < x$. Получим граф G', удалив по одной вершине из каждого "плохого" цикла. Тогда: $g(G') > l, |V(G')| > \frac{n}{2}$. Тогда:

$$\alpha(G') < x \Rightarrow \chi(G') \geqslant \frac{n/2}{x} \sim \frac{np}{2 \cdot 3\ln p} = \frac{n^\theta}{6\ln n} > k \text{ начиная с какого-то } n_3$$

Но тогда $\forall n > \max\{n_1, n_2, n_3\} g(G') > l, \chi(G') > k$ $\square$

Теорема 4.3 (Эрдеш, Реньи, 1959). *Пусть* $p = p(n) = \frac{c\ln n}{n}, c > 0$. *Тогда если* $c > 1$, *то а.п.н.* $G(n,p)$ *связен, а если* $c < 1$, *то а.п.н.* $G(n,p)$ *несвязен.*

1. *Если* $c > 1$, *то а.п.н.* $G(n,p)$ *связен*

2. *Если* $c < 1$, *то а.п.н.* $G(n,p)$ *несвязен*

3 (б/д). Если $c = 1$, *то* $P(G(n,p)$ *связен*$) \to \frac{1}{e}$

Идея доказательства. Положим $X(G)$ — число изолированных вершин графа G. Тогда

$$\mathbb{E}X = nq^{n-1} = n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-(1+o(1))np} =$$

$$= ne^{-(1+o(1))n\frac{c\ln n}{n}} = n \cdot n^{-(1+o(1))c} \to \begin{cases} 0, c > 1 \\ +\infty, c < 1 \end{cases}$$

□

Доказательство.

1. $c < 1$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X \leqslant 0) = 1 - P(-X \geqslant 0) =$$

$$= 1 - P(\mathbb{E}X - X \geqslant \mathbb{E}X) \geqslant 1 - P(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \mathbb{E}X) \geqslant 1 - \frac{\operatorname{Var} X}{(\mathbb{E}X)^2}$$

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 = E\left(X_1^2 + \dots + X_n^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}\left(\sum_{i \neq j} X_i X_j\right) =$$

$$= \mathbb{E}X + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$$

Итого:

$$\frac{\operatorname{Var} X}{(\mathbb{E}X)^2} = \frac{\mathbb{E}X + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - (\mathbb{E}X)^2}{(\mathbb{E}X)^2} = o(1) - 1 + \underbrace{\frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}}}_{\sim 1} \to 0$$

2. $c > 1$. Положим теперь $X(G)$ — количество компонент связности G на $1, 2, \dots n-1$ вершинах.

$$P(X \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{C_n^k} P(j\text{-е } k\text{-элементное множество является компонентой}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{C_n^k} (1-p)^{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k$$

Для доказательства, что данная сумма $\to 0$, докажем, что $\sum_{k=1}^{n/2} C_n^k \to 0$ (сумма до $n-1$ симметрична относитнельно $n/2$). Положим $a_k(n) = C_n^k(1-p)^{k(n-k)}$. Тогда

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} = \frac{C_n^{k+1}(1-p)^{(k+1)(n-k-1)}}{C_n^k(1-p)^{k(n-k)}} = \frac{n-k}{k+1}(1-p)^{-k+n-k+1} < n(1-p)^{n-1-2k}$$

□

Теорема 4.4 (б/д). *Если* $p(n) = \frac{\ln n+\gamma}{n}, \gamma \in \mathbb{R}$, *то* $P(G(n,p)$ *связен*$) \to e^{-e^{-\gamma}}$

Следствие (б/д). Если $c = 3, n \geqslant 100$, то $P(G(n,p)$ связен$) \geqslant 1 - \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \underbrace{C_n^k (1-p)^{k(n-k)}}_{a_k(n)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{[\frac{n}{\sqrt{\ln n}}]}}_{S_1} \dots + \underbrace{\sum_{k=[\frac{n}{\sqrt{\ln n}}]+1}^{\frac{n}{2}}}_{S_2}$$

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} \leqslant n(1-p)^{(n-2k-1)} \leqslant n(1-p)^{n(1+o(1))}$$

$$S_2 < n \cdot 2^n (1-p)^{\frac{n}{\sqrt{\ln n}} \cdot \frac{n}{2}} \leqslant n(1-p)^{n-2\frac{n}{\sqrt{\ln n}}-1} \leqslant$$

НЕ ЗАКОНЧЕНО

4.1 Связность случайного графа

Представим пьяницу, который ходит по целым точкам вещественной прямой либо вправо, либо влево, стартует в кабаке (в 0). Пусть ξ_n — куда дошел пьяница за n шагов. Тогда:

$$P(\xi_n \geqslant a) = P(\xi_n - \underbrace{\mathbb{E}\xi_n}_{0} \geqslant a) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\xi_n}{a^2}$$

При этом:

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

Где $\eta_i \in \{\pm 1\}$ — куда пошел пьяница на i-ом шаге. Тогда $\operatorname{Var}\xi_n = \mathbb{E}\xi_n^2 - (\mathbb{E}\xi_n)^2 = n$.

Утверждение 4.1 (Неравенство Хёффдинга). *В условиях предыдущей задачи,* $P(\xi_n \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2n}}$

Доказательство.

$$P(\xi_n \geqslant a) = P(\lambda\xi_n \geqslant \lambda a) = P(e^{\lambda\xi_n} \geqslant e^{\lambda a}) \leqslant e^{-\lambda a}\mathbb{E}(e^{\lambda\xi_n}) = e^{-\lambda a}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(e^{\lambda\eta_i}) =$$

$$= e^{-\lambda a}\left(\frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right) = e^{-\lambda a}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right)\right)^n = e^{-\lambda a}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2l}}{(2l)!}\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\lambda a}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2l}}{2^l l!}\right) = e^{-\lambda a + \frac{\lambda^2}{2}n}$$

При этом $-\lambda a + \frac{\lambda^2}{2}n$ — парабола, и ее минимум достигается в точке $\lambda = \frac{a}{n}$, подставляя данное значение для λ, получаем требуемое. □

Теорема 4.5 (Интегральная предельная теорема Муавра — Лапласа). *Пусть* $\xi \sim Bin(n,p)$. *Тогда:*

$$P\left(a \leqslant \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Замечание. Пусть $p : pn^2 \to 0$. $\mathbb{E}\,|E| = C_n^2 p \sim n^2 p \to 0$. Тогда по неравенству Маркова:

$$P(|E|) \leqslant \mathbb{E}\,|E| \to 0 \Rightarrow \text{а.п.н.}\chi(G) = 1$$

Утверждение 4.2. *Пусть* $pn^2 \to \infty, pn \to 0 \Rightarrow$ *а.п.н. ребра есть, тогда:*

$$\begin{cases} \text{а.п.н. ребра есть} \Rightarrow \text{а.п.н}\ \chi(G) \geqslant 2 \\ \text{а.п.н.}\ G(n,p)\ \text{— лес} \\ \text{а.п.н.}\ \chi(G) = 2 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $X(G)$ — число простых циклов.

$$\mathbb{E}X = \sum_{r=3}^{n} C_n^r p^r \leqslant \sum_{r=3}^{n} \frac{n^r}{r!}\frac{(r-1)!}{r}p^r < \sum_{r=3}^{n}(np)^r < \sum_{r=3}^{\infty}(np)^r =_{n\geqslant n_0} \frac{(np)^3}{1-np} \to 0$$

□

Задача. *Если* $p = \frac{c}{n}, c < 1$, *то а.п.н. все компоненты — либо деревья, либо унициклические графы* $\Rightarrow$ *а.п.н.* $\chi(G) = 3$

Замечание. Выведем интуицию, связывающую Хёффдинга из интегральной теоремы Муавра–Лапласа. Пусть $\xi \sim Bin(n,p)$.

$$P(\xi_n \geqslant a) = P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i \geqslant a\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i + 1}{1} \geqslant \frac{a+n}{2}\right) = (*)$$

Положим $\varphi_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p \\ 0, & \text{с вероятностью } q \end{cases}$. Тогда:

$$(*) = P\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \geqslant \frac{a+n}{2}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\varphi_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}} \geqslant \frac{a/2}{\sqrt{n/4}}\right) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Теорема 4.6. *Пусть* $p = \frac{c}{n}, c > 0$.

1. *Если* $c < 1$, *то* $\exists\beta(c)$, *такая, что а.п.н. каждая компонента* $G(n,p)$ *имеет* $\leqslant \beta\ln n$ *вершин.*

2. *Если* $c > 1$, *то* $\exists\beta(c),\gamma(c) \in (0,1)$, *такие, что а.п.н. в* $G(n,p)$ *есть ровно одна компонента в которой* $\geqslant \gamma n$ *вершин, а все остальные компоненты связности имеют* $\leqslant \beta\ln n$ *вершин.*

Доказательство. Запустим процесс: будем по очереди оживлять вершины. Пусть в момент времени t, Y_t — число живых вершин, Z_t — число потомков живых вершин, N_t — число нейтральных вершин. Тогда:

$$Y_0 = 1, N_0 = n-1, Z_1 \sim Bin(n-1,p)$$

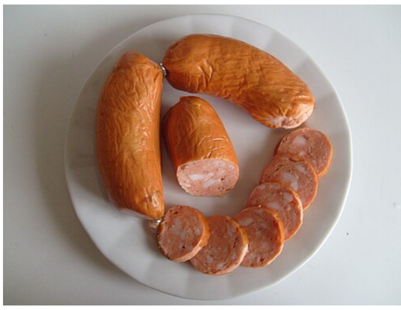


Рис. 1: Шпикачка

$$Y_t = Y_{t-1} + Z_t - 1, N_0 = n - 1, Z_1 \sim Bin(n-1, p), Z_t \sim Bin(N_{t-1}, p)$$

$$Y_t + N_t + t = n$$

Лемма 4.1. $Y_t = 1 - t + Bin(n-1, 1-(1-p)^t)$

Доказательство.

$$Y_t + N_t + t = n$$

$$N_t = n - 1 + 1 - t - Y_t = 1 - t + (n - 1 - Y_t)$$

Но тогда

$$Y_t = 1 - t + Bin(n-1, 1-(1-p)^t) \Leftrightarrow N_t = Bin(n-1, (1-p)^t)$$

Докажем последнее равенство по индукции по t.

База: $t = 0$, $N_0 \sim Bin(n-1, 1)$.

Переход:

$$Y_{t-1} + N_{t-1} + t - 1 = n \Rightarrow Y_{t-1} = n - (t-1) - N_{t-1}$$

$$N_t = n-1-t+1-Y_t = (n-1)-(t-1)-Y_{t-1}-Z_t+1 = (n-1)-(t-1)-n+N_{t-1}+(t-1)-Z_t+1 = N_{t-1}-Z$$

По предположению индукции, $N_{t-1} = Bin(n-1, (1-p)^{t-1})$, тогда:

$$N_t = Bin(N_{t-1}, 1-p) = Bin(n, (1-p)^t)$$

□

$$P(\text{существует компонента связности с} \geqslant \beta \ln n \text{ вершинами}) \leqslant$$

$$P(\text{существует вершина, такая, что } Y_t > 0 \text{ при } t = \beta \ln n) \leqslant nP(Y_t > 0) =$$

$$= nP(Bin(n-1, 1-(1-p)^t) \geqslant t) \leqslant nP(Bin(n-1, pt) \geqslant t) = (*)$$

Помним, что $p = \frac{c}{n}, c < 1$.

Теорема 4.7 (б/д)**.** *Пусть* $p = \frac{c}{n}, c < 1$. *Тогда* $P(Binom(n, pt) \geqslant t) \leqslant e^{-\gamma t}, \gamma = \gamma(c) > 0$.

Пояснение с использованием теоремы Муавра-Лапласа.

$$P\left(\frac{Bin(n,pt)-npt}{\sqrt{npt(1-pt)}} \geqslant \frac{\overbrace{t-npt}^{t(1-c)}}{\sqrt{npt(1-pt)}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{t(1-c)}{\sqrt{npt(1-pt)}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx e^{-\frac{(t(1-c))^2}{2npt(1-pt)}} \leqslant e^{-\gamma t}$$

□

Но тогда

$$(*) \leqslant nP(Bin(n,pt)\geqslant t) \leqslant ne^{-\gamma t} \leqslant ne^{\gamma\beta\ln n} = \frac{n}{n^{\gamma\beta}}$$

Причем можно выбрать β так, что $\frac{n}{n^{\gamma\beta}} \to 0 \Rightarrow$ утвеждение доказано □

4.2 Хроматическое число случайного графа

Теорема 4.8. *1. Если $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то а.п.н. $\chi(G) = 1$*

2. Если $pn^2 \to \infty$, но $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то а.п.н. $\chi(G) = 2$

3. Если $p = \frac{c}{n}, c < 1$, то а.п.н. $\chi(G) = 3$.

Лемма 4.2. *Пусть $p = n^{-\alpha}, \alpha \in \left(\frac{5}{6}, 1\right)$. Тогда*

$$P\left(\forall S \subset V, |S| \leqslant \sqrt{n}\ln n : \chi\left(G|_S\right) \leqslant 3\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Доказательство.

$$P\left(\exists S \subset V, |S| \leqslant \sqrt{n}\ln n : \chi\left(G|_S\right) \geqslant 4\right) =$$
$$= P\left(\exists S \subset V, 4 \leqslant |S| \leqslant \sqrt{n}\ln n : \chi\left(G|_S\right) \geqslant 4\right) =$$
$$P\left(\exists S \subset V, |S| \leqslant \sqrt{n}\ln n : \chi\left(G|_S\right) \geqslant 4, \forall x \in S : \chi\left(S|_{S\setminus\{x\}}\right) \leqslant 3\right)$$
$$\leqslant P\left(\exists s \in [4, \sqrt{n}\ln n]\exists S, |S| = s : |E\left(G|_S\right)| \geqslant \frac{3s}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{s=4}^{\sqrt{n}\ln n}\sum_{S\subset V, |S|=s} P\left(|E\left(G|_S\right)| \geqslant \frac{3s}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_s\sum_S C_{C_s^2}^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} = \sum_s C_n^s C_{C_s^2}^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} \leqslant \sum_s \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{eC_s^2}{3s/2}\right)^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} \leqslant \sum_s \left(\frac{en}{s}\right)^s s^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} =$$
$$= \sum_s \left(\frac{en}{s} s^{\frac{3}{2}} p^{\frac{3}{2}}\right)^s = \sum_s \left(en\sqrt{s}p^{\frac{3}{2}}\right)^s \leqslant \sum_s (en\sqrt[4]{n}\sqrt{\ln n}p^{\frac{3}{2}}) \sum_s \left(e\sqrt{\ln n}n^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\alpha}\right)^s \leqslant_{n\geqslant n_0}$$
$$\leqslant_{n\geqslant n_0} \sum_s \left(n^{-\frac{\beta}{2}}\right)^s < \frac{n^{-2\beta}}{1-n^{-\frac{\beta}{2}}} <_{n\geqslant n_1} \frac{1}{\ln n}$$

□

Определение 4.3. Пусть $f = f(G)$, в графе G на n вершинах. Тогда f липшицева по ребрам, если $\forall G, G'$, таких, что G и G' отличаются одним ребром, $|f(G) - f(G')| \leqslant 1$.

Определение 4.4. Пусть $f = f(G)$, в графе G на n вершинах. Тогда f липшицева по вершинам, если $\forall G, G'$, таких, что G и G' отличаются, быть может, только набором ребер, которые исходят из одной вершины, $|f(G) - f(G')| \leqslant 1$.

Пример. Число рёбер графа является липшицевым по рёбрам, а хроматическое число графа — липшицево по вершинам. Количество треугольников в графе не является липшицевым по рёбрам.

Теорема 4.9 (б/д)**.** *Пусть f липшицева по ребрам. Тогда*

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2C_n^2}}$$

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \leqslant -a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2C_n^2}}$$

Теорема 4.10 (б/д)**.** *Пусть f липшицева по вершинам. Тогда*

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}}$$

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \leqslant -a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}}$$

Теорема 4.11 (Боллобаш)**.** *Пусть $p = n^{-\alpha}, \alpha \in \left(\frac{5}{6}, 1\right)$. Тогда $\exists u(n, \alpha)$: а.п.н. $u \leqslant \chi(G) \leqslant u + 3$*

Доказательство теоремы Боллобаша. Зафиксируем α, n. Пусть u — минимальное число, такое, что:

$$P(\chi(G) \leqslant u) > \frac{1}{\ln n}, P(\chi(G) \leqslant u - 1) \leqslant \frac{1}{\ln n}$$

$$P(\chi(G) \geqslant u) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Положим $Y(G) = \min\{k : \exists S \subset V, |S| = k : \chi(G_{V \setminus S}) \leqslant u\}$. Эта функция является липшицевой по вершинам. Тогда:

$$P(Y - \mathbb{E}Y \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}} \leqslant \frac{1}{\ln n}$$

$$P(Y - \mathbb{E}Y \leqslant -a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}} \leqslant \frac{1}{\ln n}$$

Положим $a = \sqrt{2(n-1)\ln\ln n}$. Предположим, что $\mathbb{E}Y > a$. Тогда

$$\frac{1}{\ln n} \geqslant P(Y \leqslant \mathbb{E}Y - a) \geqslant P(Y \leqslant 0) = P(\chi(G) \leqslant u) > \frac{1}{\ln n}$$

Получили противоречие, тогда $\mathbb{E}Y \leqslant a$. Но тогда:

$$\frac{1}{\ln n} \geqslant P(Y \geqslant \mathbb{E}Y + a) \geqslant P(Y \geqslant 2a) \Rightarrow P(Y < 2a) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$$

$$P(Y < \sqrt{n}\ln n) \geqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Положим за $A = \{\chi(G) \geqslant u\}, B = \{\forall S \subset V, |S| \leqslant \sqrt{n}\ln n : \chi\left(G|_S\right) \leqslant 3\}, C = \{Y < \sqrt{n}\ln n\}$. Тогда:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}) \geqslant 1 - \frac{3}{\ln n}$$

Тогда утвеждение доказано, т.к. графы из $A \cap B \cap C$ нам подходят. □

Упражнение. *Докажите, что* $u(n, \alpha) \to \infty, n \to \infty$.

Теорема 4.12 (Боллобаш)**.** *Пусть* $p = \frac{1}{2}$. *Тогда* $\exists \varphi = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$: *а.п.н.* $\left|\chi(G) - \frac{n}{2\log_2 n}\right| \leqslant \varphi(n)$

Доказательство

1. $\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)}$, а.п.н. $\alpha(G) \leqslant 2\log_2 n \Rightarrow$ а.п.н. $\chi(G) \geqslant \frac{n}{2\log_2 n}$

2. а.п.н. $\chi(G) \leqslant \frac{n}{2\log_2 n} + \varphi(n)$, $\varphi(n) =?$. Рассмотрим $m = \left[\frac{n}{\ln^2 n}\right]$ — количество вершин в G и положим $X_k(G)$ — число независимых множеств на k вершинах. Рассмотрим $f_k(n) = \mathbb{E}X_k = C_n^k 2^{-C_k^2}, k = k(n) = [2\log_2 n] \Rightarrow f_k(n) \to 0$.

Утверждение 4.3. $\exists k_1 = k_1(n)$, *такая, что:*

1. $k_1(n) \sim 2\log_2 n$

2. $f_{k_1(n)}(n) = C_n^{k_1(n)} 2^{-C^2_{k_1(n)}} = n^{3+o(1)}$.

Набросок доказательства. Мы знаем, что $\mathbb{E}X_k \to 0$, если $k = [2\log_2 n] - 2\log_2 n$. Положим $k_0(n) = \min\{k : f_k(n) < 1\}$ и $k_1(m) = k_0(m) - 3$. Нетрудно проверить, что $k_0(n) \sim 2\log_2 n$. Тогда k_1 будет подходить. □

Тогда $k_1(m) \sim 2\log_2 m \sim 2\log_2 n$.

Лемма 4.3. *а.п.н.* $\forall S \subset V, |S| = m : \alpha\left(G|_S\right) \geqslant k_1(m)$

Доказательство.

$$P\left(\exists S \subset V, |S| = m : \alpha\left(G|_S\right) < k_1(m)\right) \leqslant \sum_{S \subset V, |S| = m} P(\alpha\left(G|_S\right) < k_1(m)) \leqslant$$

$$C_n^m P(\alpha(H) < k_1) < 2^n P(\alpha(H) < 1) = 2^n P(X_{k_1}(H) = 0)$$

Далее можно применить неравенство Чебышева, но это очень долго и муторно. Вместо этого рассмотрим:

$$Y_k(H) = \max\{s : \exists K_1, \ldots K_s \subset V \forall i : K_i \text{ — независимые мн-ва}, \forall i |K_i| = k, \forall i, j |K_j \cap K_i| \leqslant 1\}$$

Но тогда: $\alpha(H) < k_1 \Leftrightarrow Y_{k_1}(H) = 0$. При этом, Y_{k_1} — липшицева. Нам уже известно:

$$P\left(\exists S \subset V, |S| = m : \alpha\left(G|_S\right) < k_1(m)\right) < 2^n P(\alpha(H) < 1) =$$

$$= 2^n P(Y_{k_1}(H) = 0) = 2^n P(Y_{k_1}(H) \leqslant 0) = 2^n P(-Y_{k_1}(H) \geqslant 0) =$$

$$2^n P(\mathbb{E}Y_{k_1} - Y_{k_1} \geqslant \mathbb{E}Y_{k_1}) \leqslant 2^n e^{-\frac{(\mathbb{E}Y_{k_1}^2)}{2C_m^2}}$$

Лемма 4.4. $\mathbb{E}Y_{k_1} \geqslant \frac{m^2}{2k_1^4}(1 + o(1))$.

Доказательство. Рассотрим $G \to \mathcal{K}(K_1, K_2, \dots K_{X_k(G)})$ — совокупность всех независимых множеств G с k вершинами. Рассмотрим $q^* \in [0,1]$ — вероятность выбора K_i из $\mathcal{K}$. Получим таким выбором множество $C(G) \subset \mathcal{K}(G)$. Теперь положим $W(G) = \{\{K_i, K_j\} : K_i, K_j \in \mathcal{K}(G) : |K_i \cap K_j| \geqslant 2\}$, $W(G) = \{\{K_i, K_j\} : K_i, K_j \in C(G) : |K_i \cap K_j| \geqslant 2\}$. Пололжим $\mathbb{E}|W| = \frac{\Delta}{2}$. Из $C(G)$ удалим по одному K_i из каждой пары из $W'(G)$. Получится $C^*(G)$. Заметим, что $Y_k(G) \geqslant C^*(G)$. Тогда:

$$\mathbb{E}Y_k \geqslant \mathbb{E}|C^*| \geqslant \mathbb{E}|C| - \mathbb{E}|W'|$$

Положим для удобства $\mu = \mathbb{E}X_k$. Тогда $\mathbb{E}|C| = q^*\mu, \mathbb{E}|W'| = \frac{\Delta}{2}(q^*)^2$. Но тогда:

$$\mathbb{E}Y_k \geqslant \mu^* q - \frac{\Delta}{2}(q^*)^2 = (*)$$

Положим $q^* = \frac{\mu}{\Delta}$. Это можно сделать, т.к. $\mu = \mathbb{E}X_{k_1} = C_m^{k_1} 2^{-C_{k_1}^2 = m^{3+o(1)}}$. Тогда:

$$(*) = \frac{\mu^2}{2\Delta}$$

Докажем, что $\Delta \sim \frac{\mu^2 k_1^4}{m^2}$.

$$\Delta = \sum_{t=2}^{k-1} C_m^k C_k^t C_{m-k}^{k-t} \left(\frac{1}{2}\right)^{2C_k^2 - C_t^2}$$

Разделим все на $\mu^2 k^4$. Тогда слагаемое при $t = 2$:

$$\frac{C_m^k C_k^2 C_{m-k}^{k-2} 2^{-2C_k^2+1}}{(C_m^k)^2 2^{-2C_k^2} k^4} m^2 = \frac{C_k^2 C_{m-k}^{k-2} \cdot 2}{C_m^k k^4} m^2 \sim \frac{C_{m-k}^{k-2} m^2}{C_m^k k^2} \sim (*)$$

При этом, $C_{m-k}^{k-2} \sim \frac{(m-k)^{k-2}}{(k-2)!}, C_m^k \sim \frac{m^k}{k!}$. Тогда:

$$(*) \sim \frac{C_{m-k}^{k-2} m^2}{C_m^k k^2}$$

$$\frac{C_{m-k}^{k-2}}{C_m^k} \sim \frac{k^2 (m-k)^{k-2}}{m^k} \sim \frac{k^2 m^{k-2}}{m^k} = \frac{k^2}{m^2}$$

Оставшуюся часть суммы расписывать не будем и просто поверим, что там все сойдется. Тогда $\frac{\mu^2}{2\Delta} \sim \frac{m^2}{k_1^4}$, что и требовалось □

Тогда

$$2^n e^{-\frac{(\mathbb{E}Y_{k_1}^2)}{2C_m^2}} \leqslant 2^n e^{-\frac{m^4}{4k_1^8 m^2}(1+o(1))} = 2^n e^{-\frac{m^2}{4k_1^8}(1+o(1))} = 2^n e^{-\frac{n^2}{(\ln^4)\cdot 256 \log_2^8 n}(1+o(1))} = (*)$$

Заметим, что $n^{\frac{\ln\ln n}{\ln n}} = n^{o(1)} = \ln n$. Тогда:

$$(*) = 2^n e^{-n^{2+o(1)}} \to 0$$

□

Теперь возьмем любой граф, обладающий свойством из леммы. Тогда мы можем удалять из графа независимые подграфы размера $k_1(m)$, пока количество вершин $\geqslant m$ и красить каждый из них в новый цвет. Тогда, после того, как осталось $< m$ вершин, мы задействуем $\left[\frac{n-m}{k_1(m)}\right]$ цветов. Оставшиеся вершины покрасим в новые цвета каждую. Тогда $\chi(G) \leqslant \left[\frac{n-m}{k_1(m)}\right] = \frac{n}{2\log_2 n} + \varphi(n)$, что и требовалось доказать.

5 Гиперграфы

Определение 5.1. Гиперграф — множество $H = (V, E)$, где $E \subset 2^V$.

Определение 5.2. Гиперграф называется k-однородным, если $\forall A \in E : |A| = k$.

Замечание. В k-однородном полном гиперграфе ровно $C_{|V|}^k$ вершин.

Определение 5.3. $h(n, r, s) = \max\{h : \exists r$-однородный гиперграф G, такой, что $|V| = n, |E| = h, \forall A, B \in E : |A \cap B| \leqslant s\}$

Определение 5.4. $f(n, r, s) = \max\{f : \exists r$-однородный гиперграф G, такой, что $|V| = n, |E| = f, \forall A, B \in E : |A \cap B| \geqslant s\}$

Определение 5.5. $m(n, r, s) = \max\{f : \exists r$-однородный гиперграф G, такой, что $|V| = n, |E| = f, \forall A, B \in E : |A \cap B| \neq s\}$

Напоминание. $G(n, r, s)$ — такой, граф, что $V = \{A \subset \{1, 2, \dots n\} : |A| = r\}$, $E = \{(A, B) : |A \cap B| = s\}$.

Замечание. $m(n, r, s) = \alpha(G(n, r, s))$.

Доказательство. $\alpha(G(n, r, s))$ — максимальное количество вершин, никакие две из которых не образуют ребра, т.е. что $|A \cap B| \neq s$. Из этого получаем желаемое. □

Утверждение 5.1. $h(n, r, s) \leqslant \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$

Доказательство. Пусть $A_1, \dots A_h$ — ребра r-однородного гиперграфа на n вершинах, такие, что $|A_i \cap A_j| \leqslant s$. Полоэим $\mathcal{A}_i$ — все $(s+1)$-элементные подмножества в A_i. Тогда $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \varnothing$, причем $|\mathcal{A}_i| = C_r^{s+1}$. Но тогда:

$$hC_r^{s+1} = |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + \dots + |\mathcal{A}_h| \leqslant C_n^{s+1} \Rightarrow h \leqslant \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$$

□

Теорема 5.1 ((б/д) Рёдль, 1980е)**.** *Пусть r, s фиксированны, $n \to \infty$. Тогда $h(n, r, s) \sim \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$.*

Теорема 5.2 ((б/д) Киваш, 2010е)**.** *При определенных условиях "делимости" и при $n \geqslant n_0$ верно: $h(n, r, s) = \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$.*

5.1 Изучение $f(n, k, t)$

Теорема 5.3 (б/д, 1961, Эрдёш-Ко-Радо)**.** *При $n \geqslant n_0(k, t)$ верно: $f(n, k, t) = C_{n-t}^{k-t}$*

5.1.1 Случай $f(n, k, 1)$

Мы докажем более слабую версию данного утверждения

Утверждение 5.2.

$$f(n, k, 1) = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1}, n \geqslant 2k \\ C_n^k, n < 2k \end{cases}$$

Доказательство. При $n < 2k$ утверждение очевидно. Докажем только для случая $n \geqslant 2k$. Заметим, что для $f(n, k, 1) = C_{n-1}^{k-1}$ существует очевидный пример (берем все k-элементные множества, содержащие один конкретный элемент). Докажем, что $f(n, k, 1) \leqslant C_{n-1}^{k-1}$. Рассмотрим $\mathcal{F}$ — такой набор k-элементных множеств, такой, что $f(n, k, 1) = |\mathcal{F}|$, удовлетворяющий усовию. Положим $\mathcal{A} = \{\{1, 2, \dots k\}, \{2, 3, \dots k+1\}, \dots \{n, \dots k-1\}\}$.

Лемма 5.1. *$\mathcal{F} \cap \mathcal{A} \leqslant k$.*

Доказательство. Если $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} = \varnothing \Rightarrow$ очевидно. Рассмотрим случай $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Б.О.О, $\{1, 2, \dots k\} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{A}$. Рассмотрим множества, которые пересекаются с $\{1, 2, \dots k\}$:

$\{2, \dots k+1\}$	$\{n-k+2, \dots 1\}$
$\{3, \dots k+2\}$	$\{n-k+3, \dots 2\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{k, \dots 2k-1\}$	$\{n, \dots k-1\}$

Мы разбили наше множество на пары. Заметим, что из каждой пары мы можем взять не более одного множества в $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} \Rightarrow |\mathcal{F} \cap \mathcal{A}| \leqslant k$ □

Для $\sigma \in S_n$ положим $A_\sigma = \{\sigma(1), \dots \sigma(k)\}$. Заметим, что тогда лемма верна и для $A_\sigma \forall \sigma \in S_n$. Обозначим $F_i : F = \{F_1, \dots F_r\}$Рассмотим функцию:

$$I(F_i, A_\sigma) = \begin{cases} 1, F_i \in A_\sigma \\ 10, F_i \notin A_\sigma \end{cases}$$

Посчитаем следующую сумму:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{\sigma \in S_n} I(F_i, A_\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{i=1}^{r} I(F_i, A_\sigma) \right) \leqslant kn!$$

С другой стороны:

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{\sigma \in S_n} I(F_i, A_\sigma) \right) = \sum_{i=1}^{r} k!(n-k)! \cdot n = r \cdot k!(n-k)! \cdot n$$

Получаем:

$$r \cdot k!(n-k)! \cdot n \leqslant kn!$$

$$r \cdot (k-1)!(n-k)! \leqslant (n-1)!$$

$$r \leqslant C_{n-1}^{k-1}$$

□

5.1.2 Результаты в общем случае

Теорема 5.4 (б/д, 1979, Франкл). *При $k \geqslant 15$ в теореме Эрдёша-Ко-Радо $n_0(k,t) = (k-t+1)(t+1)$*

Теорема 5.5 (б/д, 1983, Уилсон). *Пусть $n_0(k,t) = (k-t+1)(t+1)$. Тогда $n < n_0(k,t) \Rightarrow f(n,k,t) > C_{n-k}^{k-t}$.*

Теорема 5.6 (Алсведе-Хачатаряна). *Пусть n удовлетворяет следующему условию:*

$$(k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right) \leqslant n < (k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r}\right)$$

Тогда: $f(n,k,t) = \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = \{F \subset \{1,\dots n\}, |F| = k, |F \cap \{1,2,\dots t+2r\}| \geqslant t+r\}$.

Замечание. Таким образом, мы получили точное значение для $f(n,k,t)$. Действительно, при $n \geqslant n_0(k,t)$ ответ находится по теореме Эрдёша-Ко-Радо и равен C_{n-t}^{k-t}. В противном случае, $f(n,k,t)$ находится по теореме Алсведе-Хачатаряна: нужно подобрать такой r, чтобы выполнялось соответствующее равенство (получается, что отрезкок $\{1,\dots n\}$ разбивается на части при $r=0, r=1, \dots r=k$) и из неё получаем ответ.

Замечание. Если нам не нужна точная оценка на $f(n,k,t)$, то можно не искать соответствующее r, а просто взять максимальную из оценок.

5.2 Изучение $m(n,k,t)$

5.2.1 Случай $m(n,3,1)$

Напоминание. Мы уже считали $\alpha(G(n,3,1))$: 2.1

5.2.2 Случай $m(n,5,2)$

Утверждение 5.3. $m(n,5,2) \leqslant C_n^2 + 2C_n^1 \sim \frac{n^2}{2}$

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{F}$ — набор 5-элементных множеств, таких, что $\forall A,B \in \mathcal{F} : |A \cap B| \neq 2, |F| = m(n,5,2)$. Опять сопоставим маску $\vec{x_1}, \dots \vec{x_r}$ (пусть r таково, что $\mathcal{F} = \{F_1, \dots F_r\}$) каждому множеству, $\vec{x_i} \in \mathbb{Z}_3^n$. Положим $f_i(\vec{y_1}, \dots \vec{y_n}) = (\vec{x_i}, \vec{y})((\vec{x_i}, \vec{y}) - 1)$. Заметим, что $f_i \in Z_3[y_1, \dots y_n]$. Также, $\deg f_i \leqslant 2$. Таким образом, если $f_1, \dots f_r$ линейно независимы, то $r \leqslant \dim \mathbb{Z}_3[y_1, \dots y_n]^{1 \leqslant \deg \leqslant 2} = C_n^2 + 2C_n^1$. Последнее верно в силу того, что f_i — точно не константа, а базис в пространстве таких многочленов — это $y_1, \dots y_n, y_1^2 \dots y_n^2, \underbrace{y_1y_2, \dots y_{n-1}y_n}_{\text{всевозможыне попарные произведения}}$. Пусть $\exists \lambda_1, \dots \lambda_r$ такие, что:

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$

Заметим, что $f_i(x_j) = \begin{cases} 0 \mod 3, i \neq j \\ 2 \mod 3, i = j \end{cases}$. Тогда

$$\lambda_1 f_1(x_j) + \dots + \lambda_r f_r(x_j) = 0$$

$$\lambda_j \cdot 2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \forall j$$

□

Замечание. В утвержении выше верна оценка $m(n, 5, 2) \leqslant C_n^2 + C_n^1$.

Доказательство. Заметим, что так как мы подставляем в многочлены f_i только 0 и 1, то можно заменить все одночлены y_i^2 на y_i и сумма не поменяется. Поэтому базис на самом деле будет $y_1, \dots y_n, \underbrace{y_1y_2, \dots y_{n-1}y_n}_{\text{всевозможыне попарные произведения}}$ □

Теорема 5.7 (1981, Франкл, Уилсон). *Пусть $k - t = p^\alpha, k < 2p^\alpha, p$ — простое. Тогда $m(n, k, t) \leqslant \sum_{j=1}^{p^\alpha - 1} C_n^j$*

Доказательство при $\alpha = 1$, иначе — б/д. Рассмотрим множества $A_1, \dots A_n \subset \{1, \dots n\}, |A_i| = k, |A_i \cap A_j| \neq t$. Каждому множеству A_i сопоставим маску $\vec{x_i}$. Теперь рассмотрим многочлены f_i:

$$f_i(y_1, \dots y_n) = \prod_{l=1, l\neq t}^{p} ((\vec{x}, \vec{y}) - l), f_i \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots y_n]$$

Рассмотрим теперь $\tilde{f_i} = f_i$, в котором мы заменили все мономы y_i^2 на y_i. Тогда базис в пространстве, таких многочленов:

$$y_1, \dots y_n, \quad \underbrace{y_1y_2, \dots y_{n-1}y_n}_{\text{всевозможыне попарные произведения}} \quad, \dots \quad \underbrace{y_1y_2 \cdots y_{p-1}, \dots y_{n-p+1} \cdots y_{n-1}y_n}_{\text{всевозможыне произведения } p-1 \text{ переменных}}$$

Осталось проверить, что $\tilde{f_i}$ линейно независимы. Тогда $r \leqslant \dim V = \sum_{j=1}^{p-1} C_n^j$, где V — пространство соответствующих многочленов. Действительно:

$$\lambda_1 \tilde{f_1}(\vec{y}) + \dots + \lambda_r \tilde{f_r}(\vec{y}) = 0$$

Подставляя $\vec{x_i}$, получаем:

$$\lambda_1 \tilde{f_1}(\vec{x_i}) + \dots + \lambda_r \tilde{f_r}(\vec{x_i}) = 0$$

При этом, $\tilde{f_j}(\vec{x_i}) = f_j(\vec{x_i}) = \begin{cases} 0, j \neq i \\ \neq 0, j = i \end{cases}$ Получаем, что $\lambda_i = 0 \forall i$, т.е. линейную независимость $\tilde{f_i}$. □

Замечание. $m(n, r, s) \geqslant f(n, r, s+1) \geqslant C_{n-s-1}^{r-s-1}$. Если r, s фиксированны, а $n \to \infty$, то

$$C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}$$

Таким образом, верхняя граница $m(n, r, s)$ точна, т.к. ее асимптотика также равна $\frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}$.

Теорема 5.8. *Пусть $r - s = p, r - 2p \geqslant 0$. Тогда:*

$$m(n, r, s) \leqslant \frac{C_n^{r-2p+1}}{C_r^{r-2p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$$

Доказательство. Пусть $A_1, \dots A_t$ — ребра нашего гиперграфа. Положим $d = r - 2p + 1 = r - 2(r-s) + 1 = 2s - r + 1$. Рассмотрим все d-элементные подмножества множества вершин:

$\{D_1, \dots D_{C_n^d}\}$. Пусть $I(D_i, A_j) = \begin{cases} 1, D_i \subset A_j \\ 0, D_i \not\subset A_j \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{C_n^d} \sum_{j=1}^{t} I(D_i, A_j) = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{C_n^d} I(D_i, A_j) = tC_r^d$$

Существует $i : \sum_{j=1}^{t} I(D_i, A_j) \geqslant \frac{tC_r^d}{C_n^d}$ (т.к. сумма C_n^d слагаемых равна tC_r^d). Это значит, что для этого i хотя бы $\frac{tC_r^d}{C_n^d}$ ребер содержат $D_i = D$. Но тогда, если мы обозначим эти ребра за $B_1, \dots B_l, l \geqslant \frac{tC_r^d}{C_n^d}$, получим: $|B_i \cap B_j| \geqslant d$. Положим $B_i' = B_i \setminus D \Rightarrow |B_i'| = r - d = 2p - 1, |B_i' \cap B_j'| \neq s - d = p - 1$. Положим $n' = n - d, r' = 2p - 1, s' = p - 1$.

$$m(n', r', s') \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$$

Неравенство верно по предыдущей теореме. Тогда:

$$\left\{ l \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-d}^k l \geqslant t\frac{C_r^d}{C_n^d} \right. \Rightarrow t \leqslant \frac{C_n^d}{C_r^d} \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-d}^k$$

□

Замечание.

$$\frac{C_n^{r-2p+1}}{C_r^{r-2p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k \sim \frac{n^{2s-r-1}(2s-r+1)!(2r-2s-1)!}{(2s-r+1)!r!} \cdot \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!} = \frac{n^s(2r-2s-1)!}{r!(r-s-1)!}$$

При этом:

$$m(n, r, s) \geqslant f(n, r, s+1) \geqslant C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}$$

И тогда:

$$r - 2p \geqslant 0 \Rightarrow r - 2(r-s) \geqslant 0 \Rightarrow 2s - r \geqslant 0 \Rightarrow r \leqslant 2s \Rightarrow r - s - 1 \leqslant s - 1$$

Рассмотрим $B_1 \subset \{1, \dots n\}, |B_1| = 2r - s - 1$. Рассмотрим все C_{2r-s-1}^r ребер, окторые можно составить из вершин B_1. Очевидно, они будут пересекаться по $p - 1$ вершине. Выберем как можно больше подмножеств $B_1, \dots B_t$ в $\{1, 2, \dots n\}$, таких, что $|B_i| = 2r - s - 1$ и $|B_i \cap B_j| \leqslant s - 1$. Заметим, что $t = h(n, 2r - s - 1, s - 1)$. Тогда:

$$t \sim \frac{C_n^s}{C_{2r-s-1}}$$

Это верно по теореме Рёдля. Тогда:

$$m(n, r, s) \geqslant C_{2r-s-1}^r \frac{C_n^s}{C_{2r-s-1}}(1 + o(1)) \sim \frac{n^s}{s!} \cdot \frac{s!(2r-2s-1)!}{r!(r-s-1)!} = \frac{n^s(2r-2s-1)!}{r!(r-s-1)!}$$

Таким образом, полученная нами оценка тоже асимптотически неулучшаема.

6 Кнезеровские графы

Определение 6.1. $KG_{n,r} = G(n,r,0)$ — Кнезеровский граф

Замечание. $|V| = C_n^r, |E| = \frac{1}{2}C_n^r C_{n-r}^r, \alpha(KG_{n,r}) = \begin{cases} C_n^r, 2r > n \\ C_{n-1}^{r-1}, 2r \leqslant n \end{cases}$

Также из предыдущих лекцияй, $\alpha(G(n,r,0)) = f(n,r,1)$

Замечание. $\omega(G(n,r,0)) = \left[\frac{n}{r}\right], 2r \leqslant n$.

Получим теперь оценки на хроматическое число кнезеровского графа

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \geqslant \omega(KG_{n,r}) = \left[\frac{n}{r}\right]$

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \geqslant \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(KG_{n,r})} \right\rceil = \left\lceil \frac{C_n^r}{C_{n-1}^{r-1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \leqslant n$

Доказательство. Действительно, будем красить все вершины, содержащие 1 в первый цвет. Из оставшихся вершин, покрасим во второй цвет все, которые содержат вершину 2. Аналогично будем красить оставшиеся вершины. □

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \leqslant n - r + 1$

Доказательство. Будем действовать как в прошый раз. Однако заметим, что на $n-r+1$-ой итерации все вершины исчерпаются. Тогда нам достаточно $n - r + 1$ цвет □

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \leqslant n - 2r + 2$

Доказательство. Будем действовать как в прошый раз. Однако заметим, что на $n-2r+2$-ой итерации все оставшиеся вершины будут образовывать независимое множество □

Несмотря на то, что верхняя и нижняя оценка расходятся достаточно сильно, есть примеры, для которых данные оценки равны:

Пример. $KG_{n,1} = K_n$ — клика на n вершинах. $\chi(KG_{n,1}) = n = \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil$

Пример. $KG_{n,\frac{n}{2}}$ — паросочетание. $\chi(KG_{n,\frac{n}{2}}) = 2 = \left\lceil \frac{n}{n/2} \right\rceil$

Пример. $KG_{5,2}$ — граф Петерсена. $\chi(KG_{5,2}) = 3 = \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil$

Теорема 6.1. *Пусть S^{n-1} — $n-1$-мерная сфера. Пусть $S^{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_n$ и $\forall i : A_i$ замкнуто, то $\exists i, \vec{x} : \vec{x} \in A_i, -\vec{x} \in A_i$, т.е. A_i содержит антиподальные (или, диаметрально противоположные).*

Доказательство. Тут в следующий раз появится доказательство □

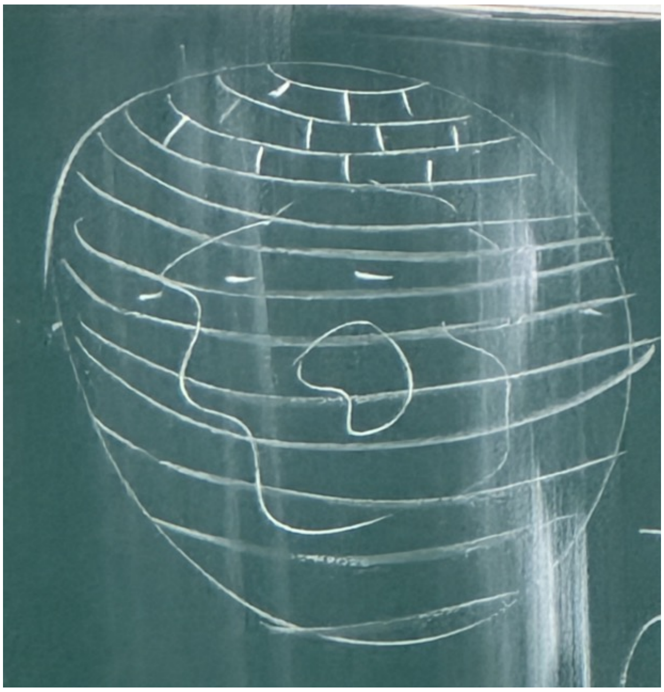
Замечание. Предыдущая теорема равносильна точно такому же утверждению в случае, когда все A_i открыты.

Замечание. Предыдущая теорема равносильна следующему утверждению: Пусть $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда $\exists \vec{x} \in S^n : f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$.

Однако, существует усиление данных теорем:

Теорема 6.2. *Пусть S^{n-1} — $n-1$-мерная сфера. Пусть $S^{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_n$ и $\forall i : A_i$ замкнуто или открыто, то $\exists i, \vec{x} : \vec{x} \in A_i, -\vec{x} \in A_i$, т.е. A_i содержит антиподальные (или, диаметрально противоположные).*

Доказательство для $n = 3$. Будем считать, что диаметр сферы равен 1. Пусть $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \forall i : A_i$ замкнуто. Предположим противное. Рассмотрим A_1. Т.к. A_1 не содержит антиподальных точек, то $diam\ A_1 < 1$. Разобьем нашу сферу на кирпичики:



Причем пересечения могут быть только Т-образными Пусть G_1 — объединение кирпичиков, имеющих непустое пересечение с A_1. Тогда $diam\ G_1 < 1$. Заметим, что $\partial G_1 = L_1 \sqcup \dots \sqcup L_k$, где L_i — замкнутая, несамопересекающаяся ломаная. Рассмотрим G_1' — множество, симметричное G_1 относительно центра S^2. Тогда $G_1' \cap G_1 = \varnothing$, т.к. их диаметры < 1. Аналогично, $\partial G_1' = L_1' \sqcup \dots \sqcup L_k'$. Мы получили $2k$ связных ломаных. По теореме Жордана (б/д, просто используем этот факт), каждая ломаная делит сферу на две части: внутренняя и внешняя. Тогда мы получили $2k+1$ часть. Но тогда существует такой связный кусок, который симметричен относительно центра. □

Утверждение 6.1 (Гипотеза Кнезера)**.** $\chi(KG_{n,r}) = n - 2r + 2$

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\chi(KG_{n,r}) \leqslant n - 2r + 1 = d$. Положим $K_1, \dots K_n$ — вершины $KG_{n,r}$. $K_i \cap K_j = \varnothing \Rightarrow \chi(K_i) \neq \chi(K_j)$. Рассмотрим сферу $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Расположим на сфере S^d некоторые точки $\vec{x}_1, dots\vec{x}_n$ таким образом, чтобы на каждом "экваторе" было не больше d точек. Будем делать это так: каждый раз будем добавлять точку так, чтобы ничего не сломать. Нетрудно доказать, что такой алгоритм сработает. Сформируем Кнезеровский граф по этим точкам на S^d, т.е. обозначим за $L_1, \dots L_{C_n^r}$ — все возможные подмножества $\{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$ размера r и будем соединять их ребром, если $L_i \cap L_j = \varnothing$. Для них аналогично опредеделим раскраску χ. Положим $H(\vec{x})$ — открытая полусфера с центром в $\vec{x}$. Положим также для $i = 1, \dots d$, $A_i = \{x \in S^d : H(\vec{x}) \cap \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\} \supset L_j : \chi(L_j) = i\}$. Теперь определим $A_{d+1} = \{x \in S^d : |H(\vec{x}) \cap \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}| \leqslant r - 1\}$. Таким образом, $A_1, \dots A_d$ — открыты, $A_{d+1} = S^d \backslash (A_1 \cup \dots \cup A_d)$ — замкнуто. Итак, по предыдущей теореме, $\exists i, \vec{x} : \vec{x} \in A_i, -\vec{x} \in A_i$.

1. $i \leqslant d$. Тогда $H(\vec{x}) \cap \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\} \supset L_j : \chi(L_j) = i, H(-\vec{x}) \cap \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\} \supset L_k : \chi(L_k) = i$. Но тогда $L_k \cap L_j = \varnothing \Rightarrow \chi(L_k) \neq \chi(L_j)$. Получили противоречие

2. $i = d+1$. Тогда $|H(\vec{x}) \cap \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}| \leqslant r-1, |H(-\vec{x}) \cap \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}| \leqslant r-1$. Но тогда $S^d \setminus (|H(\vec{x}) \cup H(-\vec{x})) \cap \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}| \geqslant d+1$, то есть, проще говоря, на экваторе, разделяющем $H(\vec{x}), H(-\vec{x})$ лежит $\geqslant d+1$ точка, что противоречит тому, как мы выбирали их.

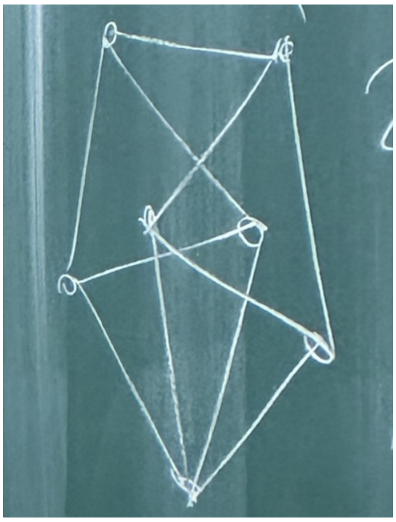
□

7 Хроматическое число пространства

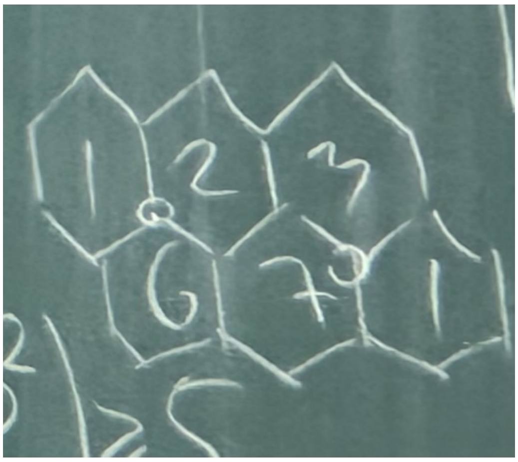
Определение 7.1. $\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi : \forall i, \forall x, y \in V_i : |x-y| \neq 1\}$

Замечание. $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$. Красим все полуинтервалы вида $[n, n+1)$.

Замечание. $\chi(R^2) \geqslant 4$



В 2018 году Обри ди Грей доказал, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$ (придумал очень очень большой граф). До этого (приблизительно за 40 лет было известно, что это верно, в случае, когда V_i измеримы). Известна верхняя оценка на 7:



Кроме того, доказано, что если запретить длины $[1, 1+\varepsilon]$, то оценка на 7 точна.

Утверждение 7.1. $\chi(\mathbb{R}^3) \in 6, \dots 15$

Утверждение 7.2. $\chi(\mathbb{R}^4) \in 10, \dots 49$

Утверждение 7.3. $\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (c\sqrt{n})^n$

Теорема 7.1 (Эрдеш-др Брёйна). *Если $\chi(G) < \infty$, то $\exists$ конечный подграф H, такой, что $\chi(H) = \chi(G)$.*

Определение 7.2. $G = (V, E)$ — дистанционный граф, если в $\mathbb{R}^n$, если $V \subset \mathbb{R}^n, E = \{(x, y) \in V^2 : |x - y| = a\}$

Замечание. $G(n, r, s)$ — дистанционный граф.

Доказательство. Мы сопоставляли каждому множеству, являющемуся вершиной, вектор из 0 и 1. Но тогда: $(x, y) = s \forall x, y \in V \Rightarrow |x-y| = \sqrt{2(r-s)} = a$, т.е. он дистанционный. □

Тогда получаем, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G(n, r, s)) \geqslant \frac{|V(n,r,s)|}{\alpha(G(n,r,s))} = \frac{C_n^r}{m(n,r,s)}$ Вспомним, что на отрезке $[x, x + Cx^{0.525\dots}]$ существует простое число. Для произвольного $r' \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ положим $r \sim r'n$. И выберем p — простое минимально так, чтобы $r - s = p, p > \frac{r}{2}$. Тогда $r - 2p < 0$. Тогда $p \sim \frac{r'}{2}n$

Выберем r, s так, что $r - s = p, r - 2p < 0, p > \frac{r}{2}$.

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G(n, r, s)) \geqslant \frac{|V(n, r, s)|}{\alpha(G(n, r, s))} = \frac{C_n^r}{m(n, r, s)} \geqslant \frac{C_n^r}{\sum_{k=0}^{p-1} C_n^k}$$

$$C_n^r = \left(\frac{1}{(r')^{r'}(1 - r')^{1-r'}} + o(1)\right)^n$$

$$C_n^{p-1} = \left(\frac{1}{\left(\frac{r'}{2}\right)^{\frac{r'}{2}}\left(1 - \frac{r'}{2}\right)^{1-\frac{r'}{2}}} + o(1)\right)^n \sim \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$$

Тогда подставляем в $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G(n, r, s))$:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \frac{\left(\frac{r'}{2}\right)^{\frac{r'}{2}}\left(1 - \frac{r'}{2}\right)^{1-\frac{r'}{2}}}{(r')^{r'}(1 - r')^{1-r'}} + o(1)$$

Прологарифмируем:

$$\frac{r'}{2}\ln\frac{r'}{2} + \left(1 - \frac{r'}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{r'}{2}\right) - r'\ln r' - (1 - r')\ln(1 - r')$$

И возьмем производную:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{r'}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{r'}{2}\right) - \frac{1}{2} - \ln r' - 1 + \ln(1 - r') + 1 = 0$$

$$\ln\frac{r'}{2} - \ln\left(1 - \frac{r'}{2}\right) - 2\ln r' + 2\ln(1 - r') = 0$$

$$\frac{r'}{2}(1-r')^2 = \left(1-\frac{r'}{2}\right) r'^2$$

$$1 - 2r' + (r')^2 = 2r' - (r')^2$$

$$2(r')^2 - 4r' + 1 = 0$$

$$r' = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow r' = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Подставляя в исходное неравенство, получаем:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\cdots + o(1))^n$$

Теорема 7.2 (1972, Ларман-Роджерс)**.**

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n$$