

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
III СЕМЕСТР

Лектор: *Андрей Михайлович Райгородский*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Ну-с, начнем	2
1.1 Определения	2
1.2 Асимптотика количества унициклических графов	3
2 Число независимости и кликовое число графа	4
2.1 Хроматическое число графа	6
3 Гамильтоновость графа	8
4 Случайные графы	11
4.1 Связность случайного графа	13
4.2 Хроматическое число случайного графа	16
5 Гиперграфы	20
5.1 Изучение $f(n, k, t)$	20
5.1.1 Случай $f(n, k, 1)$	21
5.1.2 Результаты в общем случае	22
5.2 Изучение $m(n, k, t)$	22
5.2.1 Случай $m(n, 3, 1)$	22
5.2.2 Случай $m(n, 5, 2)$	22
6 Кнезеровские графы	25
7 Хроматическое число пространства	27

1 Ну-с, начнем

1.1 Определения

Определение 1.1. Граф — $G = (V, E)$, $|V| < \infty$. V — множество вершин, E — множество ребер (подмножество $V \times V$). По умолчанию, граф неориентированный, в нем нет петель и ребер. Приставка **ор** будет означать, что граф ориентированный, приставка **мульти** будет означать, что разрешены кратные ребра, а приставка **псевдо** будет означать, что граф разрешены петли. Другими словами, псевдомультиорграф — граф, в котором разрешено все.

Определение 1.2. Маршрут — последовательность $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$

Определение 1.3. Путь (цепь) — незамкнутый маршрут, в котором все ребра разные.

Определение 1.4. Цикл — замкнутый маршрут, в котором все ребра разные.

Определение 1.5. Простой путь (цепь) — путь, в котором все вершины разные.

Определение 1.6. Простой цикл — цикл, в котором все вершины разные (кроме, возможно, начальной и конечной).

Определение 1.7. Граф связен, если $\forall v, u \in V$ существует простая цепь с концами в v, u .

Замечание. Отношение $u \sim v$, где \sim — "связны ли две вершины" является отношением эквивалентности.

Определение 1.8. Классы эквивалентности по отношению выше называются компонентами связности.

Определение 1.9. Пусть $v \in V$. Степень вершины v — $\deg v$ — количество ребер, которое исходит из данной вершины (петля добавляет 2 к степени вершины). $\text{indeg } v, \text{outdeg } v$ — входящие и исходящие степени для орграфов.

Замечание.

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

Определение 1.10. Граф называется d -регулярным, если $\forall v \in V \deg v = d$.

Замечание. Всего существует $2^{C_n^2}$ графов на n вершинах (вершины пронумерованы числами от 1 до n).

Определение 1.11. Граф называется деревом, если он связан и в нем нет циклов.

Замечание. В дереве на n вершинах $n - 1$ ребро.

Положим τ_n — количество деревьев на n вершинах.

1.2 Асимптотика количества унициклических графов

Утверждение 1.1. $\tau_n = n^{n-2}$

Доказательство. (Коды Прюфера) Построим по дереву следующую последовательность: на каждой итерации будем находить лист с самым маленьким номером, запишем его соседа, а лист удалим. Далее нужно доказать, что по кодам Прюфера однозначно восстанавливается дерево и получить биекцию между кодами длины $n - 2$ и деревьями на n вершинах. \square

Определение 1.12. Унициклический граф — связный граф, в котором n вершин и n ребер.

Положим u_n — количество унициклических графов на n вершинах

Лемма 1.1. $F(n, r)$ — количество лесов с r деревьями на n вершинах. $F(n, r) = r \cdot n^{n-1-r}$.

Пусть $r = 3, \dots, n$ — количество вершин в цикле. Тогда

$$u_n = \sum_{r=3}^n \left(C_n^r \frac{(r-1)!}{2} F(n, r) \right) = \sum_{r=3}^n \left(C_n^r \frac{(r-1)!}{2} r \cdot n^{n-1-r} \right)$$

Утверждение 1.2. $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot n^{n-\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} C_n^r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) = \\ &= \frac{n^r}{r!} e^{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)} = (*) \leq \frac{n^r}{r!} e^{-\frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \dots - \frac{r-1}{n}} = \frac{n^r}{r!} e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} \end{aligned}$$

С другой стороны

$$(*) = \frac{n^r}{r!} e^{-\frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \dots - \frac{r-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(r-1)^2}{n^2}\right)} = \frac{n^r}{r!} e^{-\frac{r(r-1)}{2n} + O\left(\frac{r^3}{n^3}\right)}$$

Итого

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{r=3}^n \left(C_n^r \frac{(r-1)!}{2} r \cdot n^{n-1-r} \right) \leq \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^n e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} \\ u_n &= \sum_{r=3}^n \left(C_n^r \frac{(r-1)!}{2} r \cdot n^{n-1-r} \right) = \frac{1}{2} n^{n-1} \sum_{r=3}^n e^{-\frac{r(r-1)}{2n} + O\left(\frac{r^3}{n^3}\right)} \\ u_n &= \sum_{r=3}^n \left(C_n^r \frac{(r-1)!}{2} r \cdot n^{n-1-r} \right) = \frac{1}{2} n^{n-1} \left(\underbrace{\sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} C_n^r r! n^{-r}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^n C_n^r r! n^{-r}}_{S_2} \right) \\ S_2 &\leq \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^n e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} \leq n \cdot e^{\frac{n^{0.2}}{2}(1+o(1))} \end{aligned}$$

Помним, что $r \geq n^{0.6}$.

$$e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} = e^{-\frac{r^2}{2n}(1+o(1))} \leq e^{-\frac{n^{1.2}}{2n}(1+o(1))} = e^{-\frac{n^{0.2}}{2}(1+o(1))}$$

Докажем, что $\sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}}$.

$$\sum_{r=0}^2 e^{-\frac{r^2}{2n}} = O(1)$$

$$\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} = \underbrace{\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n^2} e^{-\frac{r^2}{2n}}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{r=n^2+1}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}}}_{(2)}$$

Для (1):

$$r \geq n^{0.6} \Rightarrow e^{-\frac{r^2}{2n}} \leq e^{-\frac{n^2}{2n}} = e^{-\frac{n}{2}} \Rightarrow (1) \leq n^2 e^{-\frac{n}{2}}$$

Для (2):

$$\frac{e^{-\frac{-(r+1)^2}{2n}}}{e^{-\frac{-r^2}{2n}}} = e^{\frac{-(r+1)^2+r^2}{2n}} = e^{\frac{-2r-1}{2n}} = e^{-\frac{r}{n}-\frac{1}{2n}} < e^{-\frac{r}{n}} < e^n$$

Тогда (2) $\leq e^{-\frac{-(n^2+1)^2}{2n}}$ (ограничили сверху геометрической прогрессией). Тогда:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r(r-1)}{2n} + O\left(\frac{r^3}{n^3}\right)} \sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} \sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim_{\text{cx.}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} dr = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{n} dx = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{n} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{2} = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \end{aligned}$$

□

2 Число независимости и кликовое число графа

Определение 2.1. Пусть $n, r, s \in \mathbb{N}, r < n, s \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. $G(n, r, s)$ — такой, график, что $V = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\} : |A| = r\}$, $E = \{(A, B) : |A \cap B| = s\}$.

Определение 2.2. Клика в графике G — полный подграф

Определение 2.3. Кликовое число $\omega(G)$ — количество вершин в самой большой клике.

Определение 2.4. Независимое множество — такое множество вершин W , что $\forall x, y \in W (x, y) \notin E$.

Определение 2.5. Число независимости $\alpha(G)$ — количество вершин в самом большом независимом множестве.

Рассмотрим $\omega(G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}))$. Заметим, что если записать матрицу Адамара в нормальной форме, то у нас получится следующее:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ 1 & & B & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Тогда в A все столбцы будут ортогональны. При этом, каждые две строки B (если не рассматривать первую) пересекаются по $\frac{n}{4}$ элементам. При этом, попарно ортогональные векторы с $\frac{n}{2}$ единичками и $\frac{n}{2}$ минус единичками живут в $n-1$ мерном пространстве. Таким образом, $\omega(G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4})) \leq n-1$, а матрица Адамара позволяет привести пример для $n-1$. Таким образом, Гипотеза Адамара равносильна тому, что $\omega(G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4})) = n-1$.

Посчитаем теперь число ребер $|E(G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}))| = \frac{C_n^{\frac{n}{2}} (C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}})^2}{2}$. Это верно, т.к. $\forall v \in V : \deg v = \left(C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}}\right)^2$.

Посчитаем теперь число треугольников в данном графе. Для этого выберем ребро и посчитаем количество треугольников, присоединенных к этому ребру. Просуммируем полученные числа и разделим на 3. Для каждого конкретного ребра AB рассмотрим вершину C , которая соединена с ними обоими. Тогда: пусть $|C \cap (A \setminus B)| = x \Rightarrow |C \cap (A \cap B)| = \frac{n}{4} - x \Rightarrow |C \cap (B \setminus A)| = x \Rightarrow |C \setminus (A \cup B)| = \frac{n}{4} - x$. Тогда для конкретного x , количество вершин C равняется:

$$C_{\frac{n}{4}}^x C_{\frac{n}{4}}^{x-n} C_{\frac{n}{4}}^x C_{\frac{n}{4}}^{x-n} = \left(C_{\frac{n}{4}}^x\right)^4$$

Но тогда число треугольников:

$$= \frac{C_n^{\frac{n}{2}} (C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}})^2 \cdot \sum_{x=0}^{\frac{n}{4}} \left(C_{\frac{n}{4}}^x\right)^4}{6}$$

Определение 2.6. Энтропия — $H(a) = -a \ln a - (1-a) \ln(1-a)$

Теорема 2.1. Пусть $a \in (0, \frac{1}{2})$. Тогда

$$\ln(C_n^{[an]}) \sim (-a \ln a - (1-a) \ln(1-a)) n = H(a)n$$

Следствие.

$$C_n^{[an]} = \left(\frac{1}{a^a (1-a)^{(1-a)}} + o(1) \right)^n$$

Утверждение 2.1 (Формула Стирлинга).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Доказательство. Было на матане. □

Определение 2.7. $C(n, k)$ — количество связных графов на n вершинах с k ребрами.

Замечание. 1. $k \leq n-2 \Rightarrow C(n, k) = 0$

2. $k = n-1 \Rightarrow C(n, k) = t_n = n^{n-2}$

$$3. \ k = n \Rightarrow C(n, k) = u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot n^{n-\frac{1}{2}}$$

$$4. \ (6/\text{д}) \ k = n + 1 \Rightarrow C(n, k) \sim \frac{5}{24} n^{n+1}$$

$$5. \ (6/\text{д}) \ C(n, n + k) \sim \gamma(k) n^{n+\frac{3k+1}{2}}, \text{ при } k = O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$$

2.1 Хроматическое число графа

Определение 2.8. $\chi(G) = \min\{k : V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k : \forall i \forall x, y \in V_i (x, y) \notin E\}$ — называется хроматическое число графа.

Утверждение 2.2. $\chi(G) \geq \omega(G)$

Доказательство. В самом большом полном подграфе точно все вершины должны быть разного цвета, откуда и следует оценка \square

Утверждение 2.3. $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$

Доказательство. $|V| = |V_1| + |V_2| + \dots + |V_k| \leq k\alpha(G) \Rightarrow k \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ \square

Утверждение 2.4. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины в G

Доказательство. Ведем индукцию по n — количеству вершин

База: $n = 1$ — очевидно

Переход: Уберем вершину с максимальной степенью. В оставшемся графе по предположению индукции можно вершины правильным образом покрасить в $\Delta(G) + 1$ цвет. А новую вершину мы покрасим в тот цвет, которого нет среди ее соседей.

\square

Теорема 2.2 (Брукса). *Пусть G — не клика и не нечетный цикл. Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$*

Определение 2.9. G называется двудольным графом, если $\chi(G) = 2$.

Утверждение 2.5. *Граф двудолен тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.*

Доказательство. \Rightarrow Пусть есть, тогда этот цикл нельзя правильно образом покрасить в два цвета

\Leftarrow Рассмотрим $f(s, u)$ — множество всех длин путей $s \rightarrow u$. Т.к. в G нет нечетных циклов, то в $f(u, v)$ все числа одинаковой четности. Зафиксируем вершину s и покрасим каждую вершину v в цвет, равный $f(s, v) \bmod 2$. Тогда $\forall l \in f(u, v) : l \equiv_2 0$

\square

Теорема 2.3. *Доля тех графов, у которых $\omega(G) < w \log_2 n$, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$*

Замечание. Утверждение теоремы равносильно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega(G) \leq 2 \log_2 n) = 1$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 P(\omega(G) \geq k) &= P(\exists \text{ множество вершин мощности } k, \text{ которое является кликой в } G) = \\
 &= P\left(\bigcup_{i=1}^{C_n^k} \{G : i\text{-ое } k\text{-элементное множество вершин образуют клику в } G\}\right) \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^{C_n^k} P(i\text{-ое } k\text{-элементное множество образует клику}) = \\
 &= \sum_{i=1}^{C_n^k} \frac{2^{C_n^2 - C_k^2}}{2^{C_n^2}} = \sum_{i=1}^{C_n^k} 2^{-C_k^2} = C_n^k 2^{-C_k^2} = C_n^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{n^k}{k!} 2^{-\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}} = \frac{2^{k \log_2 n - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{2 \log_2 n - 2 \log_2 n}}{k!} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Для нецелого $2 \log_2 n$ используем $k = [2 \log_2 n]$, в силу того, что $k!$ растет сильно быстрее, доказательство не поменяется. \square

Рассмотрим граф $G = G(n, 3, 1)$, т.е. такой, что $V = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\} : |A| = 3\}$, $E = \{(A, B) : |A \cap B| = 1\}$.

Утверждение 2.6. $\omega(G) \leq n$.

Задача. $\omega(G) \geq \left[\frac{n-1}{2}\right], n \geq 7$

Теорема 2.4. $\alpha(G) = \begin{cases} n, n \equiv_4 0 \\ n-1, n \equiv_4 1 \\ n-2, n \equiv_4 2 \text{ или } 3 \end{cases}$

Доказательство.

Пример: Берем все тройки, являющиеся подмножествами множеств $\{4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+4, k \leq \frac{n}{4}\}$ и еще тройки из множества $\{n - \text{mod}(n, 4) + 1, \dots, n\}$

Оценка: Ведем индукцию по n

База: $n = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \alpha(n) = 0, 0, 1, 4$.

Переход: пусть A_1, \dots, A_s — вершины независимого множества в $G(n, 3, 1)$.

i. $\forall i, j : A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow s \leq \frac{n}{3}$, это хуже заявленного примера.

ii. $\exists i, j : |A_i \cap A_j| = 2$ Тогда Б.О.О. это элементы $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$.

A. Больше нет множеств, содержащих 1, 2. Тогда все A_i либо лежат внутри $\{1, 2, 3, 4\}$, либо лежат внутри $\{5, 6, \dots, n\}$. Тогда по предположению индукции, утверждение верно.

B. Пусть Б.О.О. существуют еще $r-2$ множества: $\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \dots, \{1, 2, r\}, r \geq 5$. Все остальные A_i находятся среди $\{r+1, \dots, n\}$ и их $\leq n-r$. Но тогда $s \leq r-2 + (n-r) \leq n-2$

\square

Замечание. Доказать, что $s \leq n$ можно, используя линейную алгебру. Сопоставим каждому множеству вектор из n нулей или единиц (маску множества). Докажем, что они линейно независимы над \mathbb{Z}_2 (таким образом поймем, что их $\leq n$).

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_sx_s = 0$$

$$c_1(x_1, x_i) + c_2(x_2, x_i) + \dots + c_s(x_s, x_i) = 0$$

$$3c_i = 0 \Rightarrow c_i = 0$$

Следствие. Для графа $G(n, 3, 1)$ верно:

$$\omega(G) \leq n, \lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \rceil \geq \frac{C_n^3}{n} \sim \frac{n^2}{6}$$

Таким образом, графы $G(n, 3, 1)$ предъявляют пример, в котором оценка $\chi(G) \geq \lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \rceil$ лучше, чем $\chi(G) \geq \omega(G)$.

3 Гамильтоновость графа

Определение 3.1. Граф G — гамильтонов, если \exists простой цикл, проходящий по всем вершинам графа.

Теорема 3.1. Дирака Пусть $G = (V, E), n = |V|, \forall v \in V \deg v \geq \frac{n}{2}$. Тогда граф G гамильтонов.

Определение 3.2. \varkappa — вершинная связность, то есть минимальное количество вершин, которое нужно удалить из графа, чтобы нарушить его связность:

$$\varkappa(G) = \min\{k : \exists W \subseteq V : |W| = k, G|_{V \setminus W} \text{ несвязный}\}$$

Теорема 3.2. (Эрдеш, Хватал) Пусть $\varkappa(G) \geq \alpha(G)$. Тогда G гамильтонов.

Доказательство. 1. Случай, когда в G нет циклов. Тогда G — дерево \Rightarrow есть хотя бы 2 висячих вершины $\Rightarrow \alpha(G) \geq 2$, но есть и не висячие вершины $\Rightarrow \varkappa(G) \leq 1$.

2. Случай, когда в G есть циклы. Рассмотрим любой самый длинный простой цикл $C = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, k < n$ (при $k = n$ граф будет гамильтонов). Тогда удалим C из G , получим граф G' . Пусть W — связная компонента в G' . Положим $N_W(G) = \{x \in V \setminus W : \exists y \in W : (x, y) \in E\}$.

Утверждение 3.1. $N_W(G) \subset C$.

Доказательство. Это правда, т.к. ребра не могут вести в другие компоненты связности графа G' . \square

Утверждение 3.2. Если $x_i = N_W(G) \Rightarrow x_{i+1} \notin N_W(G)$.

Доказательство. Пусть $\exists i : x_i \in N_W(G), x_{i+1} \in N_W(G)$. Тогда существует цикл большей длины, проходящий через x_i , заходящий в компоненту W и выходящий через x_{i+1} . \square

Следствие. $N_W(G) \subsetneq C$

Утверждение 3.3. $\varkappa(G) \leq |N_W(G)|$.

Доказательство. Удалим $N_W(G)$. Т.к. $C \setminus N_W(G) \neq \emptyset$, то граф распался на ≥ 2 компоненты связности. Но тогда $\varkappa(G) \leq |N_W(G)|$. \square

Утверждение 3.4. Рассмотрим $M = \{x_{i+1} \mid x_i \in N_W(G)\}$. Тогда M — независимое множество.

Доказательство. Заметим, что $|M| = |N_W(G)|$, $M \cap N_W(G) = \emptyset$. Предположим, что $\exists x_{i+1}, x_{j+1} \in M : (x_{i+1}, x_{j+1}) \in E$. Но т.к. $x_i, x_j \in N_W(G)$, то существует путь $x_{i+1} \rightarrow x_{j+1} \rightarrow$ по циклу $\rightarrow x_i \rightarrow$ по $W \rightarrow x_j \rightarrow$ обратно по циклу $\rightarrow x_{i+1}$. \square

Рассмотрим $x \in W$. Заметим, что $M \cup \{x\}$ — тоже независимое множество. Но тогда $\alpha(G) \geq |M| + 1 = |N_W(G)| + 1 > \varkappa(G)$. Пришли к противоречию.

\square

Замечание. В 2 предыдущих теоремах связность графа следует из условия. В теореме Дирака все компоненты связности должны быть $ge^{\frac{n}{2}} + 1 \implies$ их не более 1. А в теореме Эрдеша-Хватала $\alpha(G) \geq 1 \implies \varkappa(G) \geq 1$

Пример. Рассмотрим граф $G(n, 3, 1) : V = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\} : |A| = 3\} \Rightarrow |V| = C_n^3, E = \{(A, B) : |A \cap B| = 1\}$. Известно, что $\alpha(G(n, 3, 1)) \leq n$.

Признак дирака на таком графе не работает, т.к. граф разреженный, т.е. \deg каждой вершины $= 3C_{n-3}^2 \sim \frac{3n^2}{2}$.

Однако, $\varkappa(G) \geq \min_{v,w \in V} f(v, w)$, где f — количество общих соседей у v, w . Рассмотрим, какие тройки могут быть аргументами f . Б.О.О, положим первую тройку 1, 2, 3, вторую будем подбирать для того, чтобы было 0, 1, 2 пересечений с первой тоже не ограничивая общность.

A	B	$f(A, B)$
$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	$9(n - 6)$
$\{1, 2, 3\}$	$\{3, 4, 5\}$	$C_{n-5}^2 + 4(n - 5)$
$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	$2C_{n-4}^2 + n - 4$

Теперь заметим, что теорема Эрдеша-Хватала доказывает гамильтоновость графа (т.к. $\varkappa(G) \geq n \geq \alpha(G)$), в то время, как Дирак тут бессилен :(((.

Рассмотрим жадный алгоритм: будем красить вершины последовательно, причем каждую новую вершину будем красить в минимальный возможный цвет (иначе, добавляем новый цвет). Пусть $\chi_{\text{ж}}(G)$ — количество цветов, в которое наш алгоритм покрасил граф, $\alpha_{\text{ж}}(G)$ — максимальное количество вершин одного цвета при покраске жадным алгоритмом.

Замечание. $\alpha_{\text{ж}}(G) \leq \alpha(G), \chi_{\text{ж}}(G) \geq \chi(G)$.

Замечание. Когда $P(\dots) \rightarrow 1$, говорят, что ... происходит "асимптотически почти наверное" (а.п.н.)

Теорема 3.3. Тогда $\forall \varepsilon > 0 P\left(\frac{\alpha(G)}{\alpha_{\text{ж}}(G)} \leq 2 + \varepsilon\right) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty, m.e. \frac{\alpha(G)}{\alpha_{\text{ж}}(G)} \leq 2 + \varepsilon$ (а.п.н.)

Доказательство. Известно, что а.п.н. $\alpha(G) \leq 2 \log_2 n \Rightarrow$ достаточно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ а.п.н. $\alpha_{\text{ж}} \geq (1 - \varepsilon) \log_2 n$. Докажем, что $P(\alpha_{\text{ж}}(G) < (1 - \varepsilon) \log_2 n) \rightarrow 0$. Положим за A событие $\alpha_{\text{ж}}(G) < (1 - \varepsilon) \log_2 n$. Положим $m = \left\lceil \frac{n}{2(1-\varepsilon) \log_2 n} \right\rceil$ и рассмотрим следующее событие B :

$$B = \begin{cases} \exists a_1, a_2, \dots, a_m : \forall i : a_i < (1 - \varepsilon) \log_2 n \\ \exists C_1, C_2, \dots, C_m : \forall i : |C_i| < a_i, \forall i, j : C_i \cap C_j = \emptyset \\ \forall x \notin \bigcup_{i=1}^m C_i \forall i \exists y \in C_i : (x, y) \in E \end{cases}$$

Зафиксируем x, i . $P(\exists y \in C : (x, y) \in E) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}$. Т.к. ребра выбираются независимо, множества ребер, ведущие в C_i, C_j выбираются тоже независимо. Тогда:

$$P(\forall i \exists y \in C_i : (x, y) \in E) = \prod_{i=1}^n P(\exists y \in C : (x, y) \in E) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)$$

События $\forall i \exists y \in C_i : (x, y) \in E$ также независимы по всем вершинам x , т.к. ребра ведущие из одной вершины в $\bigcup_{i=1}^n C_i$ выбираются независимо от ребер другой такой же вершины. Тогда:

$$\begin{aligned} P\left(\forall x \notin \bigcup_{i=1}^n C_i \forall i \exists y \in C_i : (x, y) \in E\right) &= \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{n-a_1-a_2-\dots-a_m} < \\ &< \left(\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^{(1-\varepsilon) \log_2 n}}\right)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{mn}{2}} \leq e^{-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2 \log_2 n}} = e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4 \log_2 n}} \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$\begin{aligned} P(B) &\leq \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} \sum_{\substack{C_1, C_2, \dots, C_m : \forall i : |C_i| = a_i \\ \forall i, j : C_i \cap C_j = \emptyset}} e^{-\frac{n^{(1+\varepsilon)}}{4 \log_2 n}} \leq \\ &\leq e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4 \log_2 n}} \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} C_n^{a_1} C_n^{a_2} \dots C_n^{a_m} < e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4 \log_2 n}} \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} n^{a_1+a_2+\dots+a_m} \leq \\ &\leq e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4 \log_2 n}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} \dots \sum_{a_m=1}^{(1-\varepsilon) \log_2 n} 1 = \\ &= e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4 \log_2 n} + \frac{n}{2} \ln n} (\log_2 n)^n \leq e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4 \log_2 n} + \frac{n}{2} \ln n + \frac{n}{(1-\varepsilon) \log_2 n} \ln(\log_2 n)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Заметим, что жадный алгоритм полиномиальный (работает за $O(n^2)$), причем он описывается всего в 2 раза. Возникает вопрос: можно ли придумать полиномиальный алгоритм лучше, который может ошибаться в меньшее количество раз. Ответ: никто не знает. Кокнуло?

4 Случайные графы

Теорема 4.1 (Кучера). $\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists$ последовательность графов G_n на n вершинах, $\exists n_0 : \forall n > n_0$ для тех нумераций, в которых окажется, что $\frac{\alpha(G)}{\alpha_{\text{ес}, \sigma}} \geq n^{1-\varepsilon}$, не меньше, чем $1 - \delta$.

Определение 4.1. $g(G)$ (от английского *girth*) — обхват графа — длина кратчайшего простого цикла.

Определение 4.2. $G(n, p)$ — модель случайного графа Эрдеша и Ренни (также называется биномиальная модель). В данной модели граф выбирается случайно, каждое ребро проводится с вероятностью p

Теорема 4.2 (Эрдеш). $\forall k, l \in \mathbb{N} : \exists G : \chi(G) > k, g(G) > l$.

Доказательство. Положим $\theta = \frac{1}{2l}, p = p(n) = n^{\theta-1}$. Пусть $X_l(G)$ — количество простых циклов длины $\leq l$ в G . $\mathbb{E}X_l = \sum_{r=3}^l \mathbb{E}(\text{число циклов длины } r)$. Представив каждое из слагаемых как индикаторы конкретных циклов, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_l &= \sum_{r=3}^l \mathbb{E}(\text{число циклов длины } r) = \sum_{r=3}^l \underbrace{C_n^r \frac{(r-1)!}{2}}_{\text{максимальное количество циклов длины } r} p^r \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r=3}^l \frac{n^r}{r!} \cdot \frac{(r-1)!}{2} p^r \leqslant \sum_{r=3}^l (np)^r = \sum_{r=3}^l n^{\theta r} < ln^{\theta l} = l\sqrt{n} \end{aligned}$$

По неравенству Маркова, имеем:

$$P\left(X_l > \frac{n}{2}\right) \leq \frac{l\sqrt{n}}{n/2} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists n_1 : \forall n \geq n_1 P\left(X_l \leq \frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}$$

Рассмотрим $x = \left\lceil \frac{3 \ln n}{p} \right\rceil \rightarrow \infty$. Т.к. $p = n^{1-\theta}$, то $x \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Докажем, что $P(\alpha(G) \geq x) \rightarrow 0$. Положим $Y_x(G)$ — количество независимых множеств на x вершинах в G . Тогда $P(\alpha(G) \geq x) \Leftrightarrow P(Y_x \geq 1)$. По неравенству Маркова, имеем:

$$P(Y_x \geq 1) \leq EY_x = C_n^x (1-p)^{C_x^2} \leq n^x e^{-pC_x^2} = e^{x \ln n - p \frac{x(x-1)}{2}} = e^{x(\ln n - \frac{p(x-1)}{2})}$$

При этом, $x \sim \frac{3 \ln n}{p}$, поэтому $\ln n - \frac{p(x-1)}{2} = \ln n - (1 + o(1)) \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{3 \ln n}{p} \rightarrow -\infty$, но тогда

$$e^{x(\ln n - \frac{p(x-1)}{2})} \rightarrow 0$$

Тогда $P(\alpha(G) < x) \rightarrow 1 \Rightarrow \forall n > n_2 P(\alpha(G) < x) > \frac{1}{2}$. Но тогда $\forall n > \max\{n_1, n_2\} \exists G : X_l(G) \leq \frac{n}{2}, \alpha(G) < x$. Получим граф G' , удалив по одной вершине из каждого "плохого" цикла. Тогда: $g(G') > l, |V(G')| > \frac{n}{2}$. Тогда:

$$\alpha(G') < x \Rightarrow \chi(G') \geq \frac{n/2}{x} \sim \frac{np}{2 \cdot 3 \ln p} = \frac{n^\theta}{6 \ln n} > k \text{ начиная с какого-то } n_3$$

Но тогда $\forall n > \max\{n_1, n_2, n_3\} g(G') > l, \chi(G') > k$

□

Теорема 4.3 (Эрдеш, Ренни, 1959). Пусть $p = p(n) = \frac{c \ln n}{n}$, $c > 0$. Тогда если $c > 1$, то а.п.н. $G(n, p)$ связен, а если $c < 1$, то а.п.н. $G(n, p)$ несвязен.

1. Если $c > 1$, то а.п.н. $G(n, p)$ связен
2. Если $c < 1$, то а.п.н. $G(n, p)$ несвязен
- 3 (б/д). Если $c = 1$, то $P(G(n, p) \text{ связен}) \rightarrow \frac{1}{e}$

Иdeaя доказательства. Положим $X(G)$ — число изолированных вершин графа G . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= nq^{n-1} = n(1-p)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln(1-p)} = ne^{-(1+o(1))np} = \\ &= ne^{-(1+o(1))n\frac{c \ln n}{n}} = n \cdot n^{-(1+o(1))c} \rightarrow \begin{cases} 0, c > 1 \\ +\infty, c < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Доказательство.

1. $c < 1$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(-X \geq 0) = \\ &= 1 - P(\mathbb{E}X - X \geq \mathbb{E}X) \geq 1 - P(|X - \mathbb{E}X| \geq \mathbb{E}X) \geq 1 - \frac{\text{Var } X}{(\mathbb{E}X)^2} \\ \text{Var } X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \\ \mathbb{E}X^2 &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 = E\left(X_1^2 + \dots + X_n^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}\left(\sum_{i \neq j} X_i X_j\right) = \\ &= \mathbb{E}X + n(n-1)(1-p)^{2n-3} \end{aligned}$$

Итого:

$$\frac{\text{Var } X}{(\mathbb{E}X)^2} = \frac{\mathbb{E}X + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - (\mathbb{E}X)^2}{(\mathbb{E}X)^2} = o(1) - 1 + \underbrace{\frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}}}_{\sim 1} \rightarrow 0$$

2. $c > 1$. Положим теперь $X(G)$ — количество компонент связности G на $1, 2, \dots, n-1$ вершинах.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\leq \mathbb{E}X = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{C_n^k} P(j\text{-е } k\text{-элементное множество является компонентой}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{C_n^k} (1-p)^{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \end{aligned}$$

Для доказательства, что данная сумма $\rightarrow 0$, докажем, что $\sum_{k=1}^{n/2} C_n^k \rightarrow 0$ (сумма до $n-1$ симметрична относительно $n/2$). Положим $a_k(n) = C_n^k (1-p)^{k(n-k)}$. Тогда

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} = \frac{C_n^{k+1} (1-p)^{(k+1)(n-k-1)}}{C_n^k (1-p)^{k(n-k)}} = \frac{n-k}{k+1} (1-p)^{-k+n-k+1} < n(1-p)^{n-1-2k}$$

□

Теорема 4.4 (б/д). Если $p(n) = \frac{\ln n + \gamma}{n}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, то $P(G(n, p) \text{ связен}) \rightarrow e^{-e^{-\gamma}}$

Следствие (б/д). Если $c = 3, n \geq 100$, то $P(G(n, p) \text{ связен}) \geq 1 - \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \underbrace{C_n^k (1-p)^{k(n-k)}}_{a_k(n)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{\sqrt{\ln n}} \rceil}}_{S_1} \cdots + \underbrace{\sum_{k=\lceil \frac{n}{\sqrt{\ln n}} \rceil + 1}^{\frac{n}{2}}}_{S_2}$$

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} \leq n(1-p)^{(n-2k-1)} \leq n(1-p)^{n(1+o(1))}$$

$$S_2 < n \cdot 2^n (1-p)^{\frac{n}{\sqrt{\ln n}} \cdot \frac{n}{2}} \leq n(1-p)^{n-2\frac{n}{\sqrt{\ln n}}-1} \leq$$

НЕ ЗАКОНЧЕНО

4.1 Связность случайного графа

Представим пьяницу, который ходит по целым точкам вещественной прямой либо вправо, либо влево, стартует в кабаке (в 0). Пусть ξ_n — куда дошел пьяница за n шагов. Тогда:

$$P(\xi_n \geq a) = P(\xi_n - \underbrace{\mathbb{E}\xi_n}_0 \geq a) \leq \frac{\text{Var } \xi_n}{a^2}$$

При этом:

$$\xi_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$$

Где $\eta_i \in \{\pm 1\}$ — куда пошел пьяница на i -ом шаге. Тогда $\text{Var } \xi_n = \mathbb{E}\xi_n^2 - (\mathbb{E}\xi_n)^2 = n$.

Утверждение 4.1 (Неравенство Хёффдинга). В условиях предыдущей задачи, $P(\xi_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(\xi_n \geq a) &= P(\lambda \xi_n \geq \lambda a) = P(e^{\lambda \xi_n} \geq e^{\lambda a}) \leq e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{\lambda \xi_n}) = e^{-\lambda a} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{\lambda \eta_i}) = \\ &= e^{-\lambda a} \left(\frac{1}{2} e^\lambda + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \right) = e^{-\lambda a} \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right) \right)^n = e^{-\lambda a} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2l}}{(2l)!} \right) \leq \\ &\leq e^{-\lambda a} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2l}}{2^l l!} \right) = e^{-\lambda a + \frac{\lambda^2}{2} n} \end{aligned}$$

При этом $-\lambda a + \frac{\lambda^2}{2} n$ — парабола, и ее минимум достигается в точке $\lambda = \frac{a}{n}$, подставляя данное значение для λ , получаем требуемое. □

Теорема 4.5 (Интегральная предельная теорема Муавра — Лапласа). Пусть $\xi \sim Bin(n, p)$. Тогда:

$$P\left(a \leq \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Замечание. Пусть $p : pn^2 \rightarrow 0$. $\mathbb{E}|E| = C_n^2 p \sim n^2 p \rightarrow 0$. Тогда по неравенству Маркова:

$$P(|E|) \leq \mathbb{E}|E| \rightarrow 0 \Rightarrow \text{а.п.н. } \chi(G) = 1$$

Утверждение 4.2. Пусть $pn^2 \rightarrow \infty$, $pn \rightarrow 0 \Rightarrow$ а.п.н. ребра есть, тогда:

$$\begin{cases} \text{а.п.н. ребра есть} \Rightarrow \text{а.п.н. } \chi(G) \geq 2 \\ \text{а.п.н. } G(n, p) \text{ — лес} \\ \text{а.п.н. } \chi(G) = 2 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $X(G)$ — число простых циклов.

$$\mathbb{E}X = \sum_{r=3}^n C_n^r p^r \leq \sum_{r=3}^n \frac{n^r}{r!} \frac{(r-1)!}{r} p^r < \sum_{r=3}^n (np)^r < \sum_{r=3}^{\infty} (np)^r =_{n \geq n_0} \frac{(np)^3}{1-np} \rightarrow 0$$

□

Задача. Если $p = \frac{c}{n}$, $c < 1$, то а.п.н. все компоненты — либо деревья, либо унициклические графы \Rightarrow а.п.н. $\chi(G) = 3$

Замечание. Выведем интуицию, связывающую Хёффдинга из интегральной теоремы Муавра—Лапласа. Пусть $\xi \sim Bin(n, p)$.

$$P(\xi_n \geq a) = P\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \geq a\right) = P\left(\sum_{i=1}^n \frac{\eta_i + 1}{1} \geq \frac{a+n}{2}\right) = (*)$$

Положим $\varphi_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p \\ 0, & \text{с вероятностью } q \end{cases}$. Тогда:

$$(*) = P\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \geq \frac{a+n}{2}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}} \geq \frac{a/2}{\sqrt{n/4}}\right) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{\sqrt{n}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Теорема 4.6. Пусть $p = \frac{c}{n}$, $c > 0$.

1. Если $c < 1$, то $\exists \beta(c)$, такая, что а.п.н. каждая компонента $G(n, p)$ имеет $\leq \beta \ln n$ вершин.
2. Если $c > 1$, то $\exists \beta(c), \gamma(c) \in (0, 1)$, такие, что а.п.н. в $G(n, p)$ есть ровно одна компонента в которой $\geq \gamma n$ вершин, а все остальные компоненты связности имеют $\leq \beta \ln n$ вершин.

Доказательство. Запустим процесс: будем по очереди оживлять вершины. Пусть в момент времени t , Y_t — число живых вершин, Z_t — число потомков живых вершин, N_t — число нейтральных вершин. Тогда:

$$Y_0 = 1, N_0 = n - 1, Z_1 \sim Bin(n - 1, p)$$

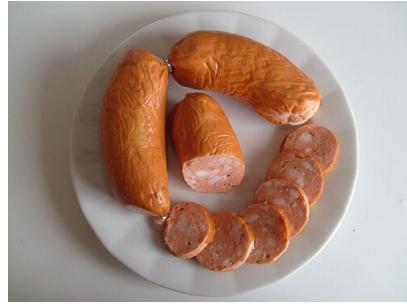


Рис. 1: Шпикачка

$$Y_t = Y_{t-1} + Z_t - 1, N_0 = n - 1, Z_1 \sim Bin(n - 1, p), Z_t \sim Bin(N_{t-1}, p)$$

$$Y_t + N_t + t = n$$

Лемма 4.1. $Y_t = 1 - t + Bin(n - 1, 1 - (1 - p)^t)$

Доказательство.

$$Y_t + N_t + t = n$$

$$N_t = n - 1 + 1 - t - Y_t = 1 - t + (n - 1 - Y_t)$$

Но тогда

$$Y_t = 1 - t + Bin(n - 1, 1 - (1 - p)^t) \Leftrightarrow N_t = Bin(n - 1, (1 - p)^t)$$

Докажем последнее равенство по индукции по t .

База: $t = 0, N_0 \sim Bin(n - 1, 1)$.

Переход:

$$Y_{t-1} + N_{t-1} + t - 1 = n \Rightarrow Y_{t-1} = n - (t - 1) - N_{t-1}$$

$$N_t = n - 1 - t + 1 - Y_t = (n - 1) - (t - 1) - Y_{t-1} - Z_t + 1 = (n - 1) - (t - 1) - n + N_{t-1} + (t - 1) - Z_t + 1 = N_{t-1} - Z_t$$

По предположению индукции, $N_{t-1} = Bin(n - 1, (1 - p)^{t-1})$, тогда:

$$N_t = Bin(N_{t-1}, 1 - p) = Bin(n, (1 - p)^t)$$

□

$$P(\text{существует компонента связности с } \geq \beta \ln n \text{ вершинами}) \leq$$

$$P(\text{существует вершина, такая, что } Y_t > 0 \text{ при } t = \beta \ln n) \leq n P(Y_t > 0) =$$

$$= n P(Bin(n - 1, 1 - (1 - p)^t) \geq t) \leq n P(Bin(n - 1, pt) \geq t) = (*)$$

Помним, что $p = \frac{c}{n}, c < 1$.

Теорема 4.7 (б/д). Пусть $p = \frac{c}{n}, c < 1$. Тогда $P(Binom(n, pt) \geq t) \leq e^{-\gamma t}, \gamma = \gamma(c) > 0$.

Пояснение с использованием теоремы Муавра-Лапласа.

$$P\left(\frac{Bin(n, pt) - npt}{\sqrt{npt(1-pt)}} \geq \frac{\overbrace{t-npt}^{t(1-c)}}{\sqrt{npt(1-pt)}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t(1-c)}{\sqrt{npt(1-pt)}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx e^{-\frac{(t(1-c))^2}{2npt(1-pt)}} \leq e^{-\gamma t}$$

□

Но тогда

$$(*) \leq nP(Bin(n, pt) \geq t) \leq ne^{-\gamma t} \leq ne^{\gamma \beta \ln n} = \frac{n}{n^{\gamma \beta}}$$

Причем можно выбрать β так, что $\frac{n}{n^{\gamma \beta}} \rightarrow 0 \Rightarrow$ утверждение доказано

□

4.2 Хроматическое число случайного графа

Теорема 4.8. 1. Если $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то а.н.н. $\chi(G) = 1$

2. Если $pn^2 \rightarrow \infty$, но $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то а.н.н. $\chi(G) = 2$

3. Если $p = \frac{c}{n}$, $c < 1$, то а.н.н. $\chi(G) = 3$.

Лемма 4.2. Пусть $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in \left(\frac{5}{6}, 1\right)$. Тогда

$$P(\forall S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \leq 3) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(\exists S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \geq 4) &= \\ &= P(\exists S \subset V, 4 \leq |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \geq 4) = \\ P(\exists S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \geq 4, \forall x \in S : \chi(S|_{S \setminus \{x\}}) \leq 3) &\\ \leq P\left(\exists s \in [4, \sqrt{n} \ln n] \exists S, |S| = s : |E(G|_S)| \geq \frac{3s}{2}\right) &\leq \\ \leq \sum_{s=4}^{\sqrt{n} \ln n} \sum_{S \subset V, |S|=s} P\left(|E(G|_S)| \geq \frac{3s}{2}\right) &\leq \\ \leq \sum_s \sum_S C_{C_s^2}^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} &= \sum_s C_n^s C_{C_s^2}^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} \leq \sum_s \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{eC_s^2}{3s/2}\right)^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} \leq \sum_s \left(\frac{en}{s}\right)^s s^{\frac{3s}{2}} p^{\frac{3s}{2}} = \\ = \sum_s \left(\frac{en}{s} s^{\frac{3}{2}} p^{\frac{3}{2}}\right)^s &= \sum_s \left(en \sqrt{s} p^{\frac{3}{2}}\right)^s \leq \sum_s (en \sqrt[4]{n} \sqrt{\ln n} p^{\frac{3}{2}}) \sum_s \left(e \sqrt{\ln n} n^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\alpha}\right)^s \leq_{n \geq n_0} \\ \leq_{n \geq n_0} \sum_s \left(n^{-\frac{\beta}{2}}\right)^s &< \frac{n^{-2\beta}}{1 - n^{-\frac{\beta}{2}}} <_{n \geq n_1} \frac{1}{\ln n} \end{aligned}$$

□

Определение 4.3. Пусть $f = f(G)$, в графе G на n вершинах. Тогда f липшицева по ребрам, если $\forall G, G'$, таких, что G и G' отличаются одним ребром, $|f(G) - f(G')| \leq 1$.

Определение 4.4. Пусть $f = f(G)$, в графе G на n вершинах. Тогда f липшицева по вершинам, если $\forall G, G'$, таких, что G и G' отличаются, быть может, только набором ребер, которые исходят из одной вершины, $|f(G) - f(G')| \leq 1$.

Пример. Число рёбер графа является липшицевым по рёбрам, а хроматическое число графа — липшицево по вершинам. Количество треугольников в графе не является липшицевым по рёбрам.

Теорема 4.9 (б/д). Пусть f липшицева по ребрам. Тогда

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2C_n^2}}$$

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \leq -a) \leq e^{-\frac{a^2}{2C_n^2}}$$

Теорема 4.10 (б/д). Пусть f липшицева по вершинам. Тогда

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}}$$

$$\forall a > 0 : P(f - \mathbb{E}f \leq -a) \leq e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}}$$

Теорема 4.11 (Боллобаш). Пусть $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (\frac{5}{6}, 1)$. Тогда $\exists u(n, \alpha) : \text{a.н.н. } u \leq \chi(G) \leq u + 3$

Доказательство теоремы Боллобаша. Зафиксируем α, n . Пусть u — минимальное число, такое, что:

$$P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}, P(\chi(G) \leq u-1) \leq \frac{1}{\ln n}$$

$$P(\chi(G) \geq u) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Положим $Y(G) = \min\{k : \exists S \subset V, |S| = k : \chi(G_{V \setminus S}) \leq u\}$. Эта функция является липшицевой по вершинам. Тогда:

$$P(Y - \mathbb{E}Y \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}} \leq \frac{1}{\ln n}$$

$$P(Y - \mathbb{E}Y \leq -a) \leq e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}} \leq \frac{1}{\ln n}$$

Положим $a = \sqrt{2(n-1) \ln \ln n}$. Предположим, что $\mathbb{E}Y > a$. Тогда

$$\frac{1}{\ln n} \geq P(Y \leq \mathbb{E}Y - a) \geq P(Y \leq 0) = P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}$$

Получили противоречие, тогда $\mathbb{E}Y \leq a$. Но тогда:

$$\frac{1}{\ln n} \geq P(Y \geq \mathbb{E}Y + a) \geq P(Y \geq 2a) \Rightarrow P(Y < 2a) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$$

$$P(Y < \sqrt{n} \ln n) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$$

Положим за $A = \{\chi(G) \geq u\}, B = \{\forall S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} \ln n : \chi(G|_S) \leq 3\}, C = \{Y < \sqrt{n} \ln n\}$. Тогда:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \geq 1 - \frac{3}{\ln n}$$

Тогда утверждение доказано, т.к. графы из $A \cap B \cap C$ нам подходят. \square

Упражнение. Докажите, что $u(n, \alpha) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Теорема 4.12 (Боллобаш). Пусть $p = \frac{1}{2}$. Тогда $\exists \varphi = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$: а.п.н. $\left|\chi(G) - \frac{n}{2 \log_2 n}\right| \leq \varphi(n)$

Доказательство

1. $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$, а.п.н. $\alpha(G) \leq 2 \log_2 n \Rightarrow$ а.п.н. $\chi(G) \geq \frac{n}{2 \log_2 n}$
2. а.п.н. $\chi(G) \leq \frac{n}{2 \log_2 n} + \varphi(n)$, $\varphi(n) = ?$. Рассмотрим $m = \left[\frac{n}{\ln^2 n}\right]$ — количество вершин в G и положим $X_k(G)$ — число независимых множеств на k вершинах. Рассмотрим $f_k(n) = \mathbb{E}X_k = C_n^k 2^{-C_k^2}, k = k(n) = [2 \log_2 n] \Rightarrow f_k(n) \rightarrow 0$.

Утверждение 4.3. $\exists k_1 = k_1(n)$, такая, что:

1. $k_1(n) \sim 2 \log_2 n$
2. $f_{k_1(n)}(n) = C_n^{k_1(n)} 2^{-C_{k_1(n)}^2} = n^{3+o(1)}$.

Набросок доказательства. Мы знаем, что $\mathbb{E}X_k \rightarrow 0$, если $k = [2 \log_2 n] - 2 \log_2 n$. Положим $k_0(n) = \min\{k : f_k(n) < 1\}$ и $k_1(m) = k_0(m) - 3$. Нетрудно проверить, что $k_0(n) \sim 2 \log_2 n$. Тогда k_1 будет подходить. \square

Тогда $k_1(m) \sim 2 \log_2 m \sim 2 \log_2 n$.

Лемма 4.3. а.п.н. $\forall S \subset V, |S| = m : \alpha(G|_S) \geq k_1(m)$

Доказательство.

$$P(\exists S \subset V, |S| = m : \alpha(G|_S) < k_1(m)) \leq \sum_{S \subset V, |S|=m} P(\alpha(G|_S) < k_1(m)) \leq$$

$$C_n^m P(\alpha(H) < k_1) < 2^n P(\alpha(H) < 1) = 2^n P(X_{k_1}(H) = 0)$$

Далее можно применить неравенство Чебышева, но это очень долго и муторно. Вместо этого рассмотрим:

$$Y_k(H) = \max\{s : \exists K_1, \dots, K_s \subset V \forall i : K_i — независимые мн-ва, \forall i |K_i| = k, \forall i, j |K_j \cap K_i| \leq 1\}$$

Но тогда: $\alpha(H) < k_1 \Leftrightarrow Y_{k_1}(H) = 0$. При этом, Y_{k_1} — липшицева. Нам уже известно:

$$\begin{aligned} P(\exists S \subset V, |S| = m : \alpha(G|_S) < k_1(m)) &< 2^n P(\alpha(H) < 1) = \\ &= 2^n P(Y_{k_1}(H) = 0) = 2^n P(Y_{k_1}(H) \leq 0) = 2^n P(-Y_{k_1}(H) \geq 0) = \\ &2^n P(\mathbb{E}Y_{k_1} - Y_{k_1} \geq \mathbb{E}Y_{k_1}) \leq 2^n e^{-\frac{(\mathbb{E}Y_{k_1}^2)}{2C_m^2}} \end{aligned}$$

Лемма 4.4. $\mathbb{E}Y_{k_1} \geq \frac{m^2}{2k_1^4}(1 + o(1))$.

Доказательство. Рассмотрим $G \rightarrow \mathcal{K}(K_1, K_2, \dots, K_{X_k(G)})$ — совокупность всех независимых множеств G с k вершинами. Рассмотрим $q^* \in [0, 1]$ — вероятность выбора K_i из \mathcal{K} . Получим таким выбором множество $C(G) \subset \mathcal{K}(G)$. Теперь положим $W(G) = \{\{K_i, K_j\} : K_i, K_j \in \mathcal{K}(G) : |K_i \cap K_j| \geq 2\}$, $W'(G) = \{\{K_i, K_j\} : K_i, K_j \in C(G) : |K_i \cap K_j| \geq 2\}$. Положим $\mathbb{E}|W| = \frac{\Delta}{2}$. Из $C(G)$ удалим по одному K_i из каждой пары из $W'(G)$. Получится $C^*(G)$. Заметим, что $Y_k(G) \geq C^*(G)$. Тогда:

$$\mathbb{E}Y_k \geq \mathbb{E}|C^*| \geq \mathbb{E}|C| - \mathbb{E}|W'|$$

Положим для удобства $\mu = \mathbb{E}X_k$. Тогда $\mathbb{E}|C| = q^*\mu$, $\mathbb{E}|W'| = \frac{\Delta}{2}(q^*)^2$. Но тогда:

$$\mathbb{E}Y_k \geq \mu^*q - \frac{\Delta}{2}(q^*)^2 = (*)$$

Положим $q^* = \frac{\mu}{\Delta}$. Это можно сделать, т.к. $\mu = \mathbb{E}X_{k_1} = C_m^{k_1}2^{-C_{k_1}^2=m^{3+o(1)}}$. Тогда:

$$(*) = \frac{\mu^2}{2\Delta}$$

Докажем, что $\Delta \sim \frac{\mu^2 k^4}{m^2}$.

$$\Delta = \sum_{t=2}^{k-1} C_m^k C_k^t C_{m-k}^{k-t} \left(\frac{1}{2}\right)^{2C_k^2 - C_t^2}$$

Разделим все на $\mu^2 k^4$. Тогда слагаемое при $t = 2$:

$$\frac{C_m^k C_k^2 C_{m-k}^{k-2} 2^{-2C_k^2+1}}{(C_m^k)^2 2^{-2C_k^2} k^4} m^2 = \frac{C_k^2 C_{m-k}^{k-2} \cdot 2}{C_m^k k^4} m^2 \sim \frac{C_{m-k}^{k-2} m^2}{C_m^k k^2} \sim (*)$$

При этом, $C_{m-k}^{k-2} \sim \frac{(m-k)^{k-2}}{(k-2)!}$, $C_m^k \sim \frac{m^k}{k!}$. Тогда:

$$(*) \sim \frac{C_{m-k}^{k-2} m^2}{C_m^k k^2}$$

$$\frac{C_{m-k}^{k-2}}{C_m^k} \sim \frac{k^2(m-k)^{k-2}}{m^k} \sim \frac{k^2 m^{k-2}}{m^k} = \frac{k^2}{m^2}$$

Оставшуюся часть суммы расписывать не будем и просто поверим, что там все сойдется. Тогда $\frac{\mu^2}{2\Delta} \sim \frac{m^2}{k_1^4}$, что и требовалось \square

Тогда

$$2^n e^{-\frac{(\mathbb{E}Y_{k_1}^2)}{2C_m^2}} \leq 2^n e^{-\frac{m^4}{4k_1^8 m^2}(1+o(1))} = 2^n e^{-\frac{m^2}{4k_1^8}(1+o(1))} = 2^n e^{-\frac{n^2}{(\ln^4 \cdot 256 \log_2 n)(1+o(1))}} = (*)$$

Заметим, что $n^{\frac{\ln \ln n}{\ln n}} = n^{o(1)} = \ln n$. Тогда:

$$(*) = 2^n e^{-n^{2+o(1)}} \rightarrow 0$$

\square

Теперь возьмем любой граф, обладающий свойством из леммы. Тогда мы можем удалять из графа независимые подграфы размера $k_1(m)$, пока количество вершин $\geq m$ и красить каждый из них в новый цвет. Тогда, после того, как осталось $< m$ вершин, мы задействуем $\left\lceil \frac{n-m}{k_1(m)} \right\rceil$ цветов. Оставшиеся вершины покрасим в новые цвета каждую. Тогда $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{n-m}{k_1(m)} \right\rceil = \frac{n}{2 \log_2 n} + \varphi(n)$, что и требовалось доказать.

5 Гиперграфы

Определение 5.1. Гиперграф — множество $H = (V, E)$, где $E \subset 2^V$.

Определение 5.2. Гиперграф называется k -однородным, если $\forall A \in E : |A| = k$.

Замечание. В k -однородном полном гиперграфе ровно $C_{|V|}^k$ вершин.

Определение 5.3. $h(n, r, s) = \max\{h : \exists r\text{-однородный гиперграф } G, \text{ такой, что } |V| = n, |E| = h, \forall A, B \in E : |A \cap B| \leq s\}$

Определение 5.4. $f(n, r, s) = \max\{f : \exists r\text{-однородный гиперграф } G, \text{ такой, что } |V| = n, |E| = f, \forall A, B \in E : |A \cap B| \geq s\}$

Определение 5.5. $m(n, r, s) = \max\{m : \exists r\text{-однородный гиперграф } G, \text{ такой, что } |V| = n, |E| = m, \forall A, B \in E : |A \cap B| \neq s\}$

Напоминание. $G(n, r, s)$ — такой, граф, что $V = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\} : |A| = r\}$, $E = \{(A, B) : |A \cap B| = s\}$.

Замечание. $m(n, r, s) = \alpha(G(n, r, s))$.

Доказательство. $\alpha(G(n, r, s))$ — максимальное количество вершин, никакие две из которых не образуют ребра, т.е. что $|A \cap B| \neq s$. Из этого получаем желаемое. \square

Утверждение 5.1. $h(n, r, s) \leq \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$

Доказательство. Пусть A_1, \dots, A_h — ребра r -однородного гиперграфа на n вершинах, такие, что $|A_i \cap A_j| \leq s$. Положим \mathcal{A}_i — все $(s+1)$ -элементные подмножества в A_i . Тогда $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$, причем $|\mathcal{A}_i| = C_r^{s+1}$. Но тогда:

$$hC_r^{s+1} = |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + \dots + |\mathcal{A}_h| \leq C_n^{s+1} \Rightarrow h \leq \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$$

\square

Теорема 5.1 ((б/д) Рёдль, 1980e). Пусть r, s фиксированы, $n \rightarrow \infty$. Тогда $h(n, r, s) \sim \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$.

Теорема 5.2 ((б/д) Киваш, 2010e). При определенных условиях "делимости" и при $n \geq n_0$ верно: $h(n, r, s) = \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$.

5.1 Изучение $f(n, k, t)$

Теорема 5.3 (б/д, 1961, Эрдёш-Ко-Радо). При $n \geq n_0(k, t)$ верно: $f(n, k, t) = C_{n-t}^{k-t}$

5.1.1 Случай $f(n, k, 1)$

Мы докажем более слабую версию данного утверждения

Утверждение 5.2.

$$f(n, k, 1) = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1}, & n \geq 2k \\ C_n^k, & n < 2k \end{cases}$$

Доказательство. При $n < 2k$ утверждение очевидно. Докажем только для случая $n \geq 2k$. Заметим, что для $f(n, k, 1) = C_{n-1}^{k-1}$ существует очевидный пример (берем все k -элементные множества, содержащие один конкретный элемент). Докажем, что $f(n, k, 1) \leq C_{n-1}^{k-1}$. Рассмотрим \mathcal{F} — такой набор k -элементных множеств, такой, что $f(n, k, 1) = |\mathcal{F}|$, удовлетворяющий условию. Положим $\mathcal{A} = \{\{1, 2, \dots, k\}, \{2, 3, \dots, k+1\}, \dots, \{n, \dots, k-1\}\}$.

Лемма 5.1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} \leq k$.

Доказательство. Если $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} = \emptyset \Rightarrow$ очевидно. Рассмотрим случай $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Б.О.О, $\{1, 2, \dots, k\} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{A}$. Рассмотрим множества, которые пересекаются с $\{1, 2, \dots, k\}$:

$\{2, \dots, k+1\}$	$\{n-k+2, \dots, 1\}$
$\{3, \dots, k+2\}$	$\{n-k+3, \dots, 2\}$
\vdots	\vdots
$\{k, \dots, 2k-1\}$	$\{n, \dots, k-1\}$

Мы разбили наше множество на пары. Заметим, что из каждой пары мы можем взять не более одного множества в $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} \Rightarrow |\mathcal{F} \cap \mathcal{A}| \leq k$ \square

Для $\sigma \in S_n$ положим $A_\sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$. Заметим, что тогда лемма верна и для $A_\sigma \forall \sigma \in S_n$. Обозначим $F_i : F = \{F_1, \dots, F_r\}$. Рассмотрим функцию:

$$I(F_i, A_\sigma) = \begin{cases} 1, & F_i \in A_\sigma \\ 0, & F_i \notin A_\sigma \end{cases}$$

Посчитаем следующую сумму:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\sigma \in S_n} I(F_i, A_\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{i=1}^r I(F_i, A_\sigma) \right) \leq kn!$$

С другой стороны:

$$\sum_{i=1}^r \left(\sum_{\sigma \in S_n} I(F_i, A_\sigma) \right) = \sum_{i=1}^r k!(n-k)! \cdot n = r \cdot k!(n-k)! \cdot n$$

Получаем:

$$\begin{aligned} r \cdot k!(n-k)! \cdot n &\leq kn! \\ r \cdot (k-1)!(n-k)! &\leq (n-1)! \\ r &\leq C_{n-1}^{k-1} \end{aligned}$$

\square

5.1.2 Результаты в общем случае

Теорема 5.4 (б/д, 1979, Франкл). При $k \geq 15$ в теореме Эрдёша-Ко-Радо $n_0(k, t) = (k - t + 1)(t + 1)$

Теорема 5.5 (б/д, 1983, Уилсон). Пусть $n_0(k, t) = (k - t + 1)(t + 1)$. Тогда $n < n_0(k, t) \Rightarrow f(n, k, t) > C_{n-k}^{k-t}$.

Теорема 5.6 (Алсведе-Хачатаряна). Пусть n удовлетворяет следующему условию:

$$(k - t + 1) \left(2 + \frac{t - 1}{r + 1} \right) \leq n < (k - t + 1) \left(2 + \frac{t - 1}{r} \right)$$

Тогда: $f(n, k, t) = \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = \{F \subset \{1, \dots, n\}, |F| = k, |F \cap \{1, 2, \dots, t + 2r\}| \geq t + r\}$.

Замечание. Таким образом, мы получили точное значение для $f(n, k, t)$. Действительно, при $n \geq n_0(k, t)$ ответ находится по теореме Эрдёша-Ко-Радо и равен C_{n-k}^{k-t} . В противном случае, $f(n, k, t)$ находится по теореме Алсведе-Хачатаряна: нужно подобрать такой r , чтобы выполнялось соответствующее равенство (получается, что отрезок $\{1, \dots, n\}$ разбивается на части при $r = 0, r = 1, \dots, r = k$) и из неё получаем ответ.

Замечание. Если нам не нужна точная оценка на $f(n, k, t)$, то можно не искать соответствующее r , а просто взять максимальную из оценок.

5.2 Изучение $m(n, k, t)$

5.2.1 Случай $m(n, 3, 1)$

Напоминание. Мы уже считали $\alpha(G(n, 3, 1))$: [2.1](#)

5.2.2 Случай $m(n, 5, 2)$

Утверждение 5.3. $m(n, 5, 2) \leq C_n^2 + 2C_n^1 \sim \frac{n^2}{2}$

Доказательство. Рассмотрим \mathcal{F} — набор 5-элементных множеств, таких, что $\forall A, B \in \mathcal{F} : |A \cap B| \neq 2, |F| = m(n, 5, 2)$. Опять сопоставим маску $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$ (пусть r таково, что $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\}$) каждому множеству, $\vec{x}_i \in \mathbb{Z}_3^n$. Положим $f_i(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) = (\vec{x}_i, \vec{y})((\vec{x}_i, \vec{y}) - 1)$. Заметим, что $f_i \in Z_3[y_1, \dots, y_n]$. Также, $\deg f_i \leq 2$. Таким образом, если f_1, \dots, f_r линейно независимы, то $r \leq \dim \mathbb{Z}_3[y_1, \dots, y_n]^{1 \leq \deg \leq 2} = C_n^2 + 2C_n^1$. Последнее верно в силу того, что f_i — точно не константа, а базис в пространстве таких многочленов — это $y_1, \dots, y_n, y_1^2 \dots y_n^2$, $\underbrace{y_1 y_2, \dots, y_{n-1} y_n}_{\text{всевозможные попарные произведения}}$. Пусть $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$ такие, что:

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$

Заметим, что $f_i(x_j) = \begin{cases} 0 \pmod{3}, i \neq j \\ 2 \pmod{3}, i = j \end{cases}$. Тогда

$$\lambda_1 f_1(x_j) + \dots + \lambda_r f_r(x_j) = 0$$

$$\lambda_j \cdot 2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \forall j$$

□

Замечание. В утверждении выше верна оценка $m(n, 5, 2) \leq C_n^2 + C_n^1$.

Доказательство. Заметим, что так как мы подставляем в многочлены f_i только 0 и 1, то можно заменить все одночлены y_i^2 на y_i и сумма не поменяется. Поэтому базис на самом деле будет $y_1, \dots, y_n, \underbrace{y_1 y_2, \dots, y_{n-1} y_n}_{\text{всевозможные попарные произведения}}$ \square

Теорема 5.7 (1981, Франкл, Уилсон). *Пусть $k - t = p^\alpha, k < 2p^\alpha, p$ — простое. Тогда $m(n, k, t) \leq \sum_{j=1}^{p^\alpha-1} C_n^j$*

Доказательство при $\alpha = 1$, иначе — δ/∂ . Рассмотрим множества $A_1, \dots, A_n \subset \{1, \dots, n\}, |A_i| = k, |A_i \cap A_j| \neq t$. Каждому множеству A_i сопоставим маску \vec{x}_i . Теперь рассмотрим многочлены f_i :

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = \prod_{l=1, l \neq t}^p ((\vec{x}, \vec{y}) - l), f_i \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_n]$$

Рассмотрим теперь $\tilde{f}_i = f_i$, в котором мы заменили все мономы y_i^2 на y_i . Тогда базис в пространстве, таких многочленов:

$$y_1, \dots, y_n, \underbrace{y_1 y_2, \dots, y_{n-1} y_n}_{\text{всевозможные попарные произведения}}, \dots, \underbrace{y_1 y_2 \dots y_{p-1}, \dots, y_{n-p+1} \dots y_{n-1} y_n}_{\text{всевозможные произведения } p-1 \text{ переменных}}$$

Осталось проверить, что \tilde{f}_i линейно независимы. Тогда $r \leq \dim V = \sum_{j=1}^{p-1} C_n^j$, где V — пространство соответствующих многочленов. Действительно:

$$\lambda_1 \tilde{f}_1(\vec{y}) + \dots + \lambda_r \tilde{f}_r(\vec{y}) = 0$$

Подставляя \vec{x}_i , получаем:

$$\lambda_1 \tilde{f}_1(\vec{x}_i) + \dots + \lambda_r \tilde{f}_r(\vec{x}_i) = 0$$

При этом, $\tilde{f}_j(\vec{x}_i) = f_j(\vec{x}_i) = \begin{cases} 0, j \neq i \\ \neq 0, j = i \end{cases}$ Получаем, что $\lambda_i = 0 \forall i$, т.е. линейную независимость \tilde{f}_i . \square

Замечание. $m(n, r, s) \geq f(n, r, s+1) \geq C_{n-s-1}^{r-s-1}$. Если r, s фиксированы, а $n \rightarrow \infty$, то

$$C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}$$

Таким образом, верхняя граница $m(n, r, s)$ точна, т.к. ее асимптотика также равна $\frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}$.

Теорема 5.8. *Пусть $r - s = p, r - 2p \geq 0$. Тогда:*

$$m(n, r, s) \leq \frac{C_n^{r-2p+1}}{C_r^{r-2p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$$

Доказательство. Пусть A_1, \dots, A_t — ребра нашего гиперграфа. Положим $d = r - 2p + 1 = r - 2(r-s) + 1 = 2s - r + 1$. Рассмотрим все d -элементные подмножества вершин:

$\{D_1, \dots, D_{C_n^d}\}$. Пусть $I(D_i, A_j) = \begin{cases} 1, & D_i \subset A_j \\ 0, & D_i \not\subset A_j \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{C_n^d} \sum_{j=1}^t I(D_i, A_j) = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^{C_n^d} I(D_i, A_j) = t C_r^d$$

Существует $i : \sum_{j=1}^t I(D_i, A_j) \geq \frac{t C_r^d}{C_n^d}$ (т.к. сумма C_n^d слагаемых равна $t C_r^d$). Это значит, что для этого i хотя бы $\frac{t C_r^d}{C_n^d}$ ребер содержат $D_i = D$. Но тогда, если мы обозначим эти ребра за $B_1, \dots, B_l, l \geq \frac{t C_r^d}{C_n^d}$, получим: $|B_i \cap B_j| \geq d$. Положим $B'_i = B_i \setminus D \Rightarrow |B'_i| = r - d = 2p - 1, |B'_i \cap B'_j| \neq s - d = p - 1$. Положим $n' = n - d, r' = 2p - 1, s' = p - 1$.

$$m(n', r', s') \leq \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$$

Неравенство верно по предыдущей теореме. Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} l \leq \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-d}^k \geq t \frac{C_r^d}{C_n^d} \Rightarrow t \leq \frac{C_n^d}{C_r^d} \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-d}^k \end{array} \right.$$

□

Замечание.

$$\frac{C_n^{r-2p+1}}{C_r^{r-2p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k \sim \frac{n^{2s-r-1} (2s-r+1)! (2r-2s-1)!}{(2s-r+1)! r!} \cdot \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!} = \frac{n^s (2r-2s-1)!}{r! (r-s-1)!}$$

При этом:

$$m(n, r, s) \geq f(n, r, s+1) \geq C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!}$$

И тогда:

$$r - 2p \geq 0 \Rightarrow r - 2(r-s) \geq 0 \Rightarrow 2s - r \geq 0 \Rightarrow r \leq 2s \Rightarrow r - s - 1 \leq s - 1$$

Рассмотрим $B_1 \subset \{1, \dots, n\}, |B_1| = 2r - s - 1$. Рассмотрим все C_{2r-s-1}^r ребер, окторые можно составить из вершин B_1 . Очевидно, они будут пересекаться по $p - 1$ вершине. Выберем как можно больше подмножеств B_1, \dots, B_t в $\{1, 2, \dots, n\}$, таких, что $|B_i| = 2r - s - 1$ и $|B_i \cap B_j| \leq s - 1$. Заметим, что $t = h(n, 2r - s - 1, s - 1)$. Тогда:

$$t \sim \frac{C_n^s}{C_{2r-s-1}}$$

Это верно по теореме Рёдля. Тогда:

$$m(n, r, s) \geq C_{2r-s-1}^r \frac{C_n^s}{C_{2r-s-1}} (1 + o(1)) \sim \frac{n^s}{s!} \cdot \frac{s! (2r-2s-1)!}{r! (r-s-1)!} = \frac{n^s (2r-2s-1)!}{r! (r-s-1)!}$$

Таким образом, полученная нами оценка тоже асимптотически неулучшаема.

6 Кнезеровские графы

Определение 6.1. $KG_{n,r} = G(n, r, 0)$ — Кнезеровский граф

Замечание. $|V| = C_n^r, |E| = \frac{1}{2}C_n^r C_{n-r}^r, \alpha(KG_{n,r}) = \begin{cases} C_n^r, & 2r > n \\ C_{n-1}^{r-1}, & 2r \leq n \end{cases}$

Также из предыдущих лекций, $\alpha(G(n, r, 0)) = f(n, r, 1)$

Замечание. $\omega(G(n, r, 0)) = \left[\frac{n}{r} \right], 2r \leq n.$

Получим теперь оценки на хроматическое число кнезеровского графа

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \geq \omega(KG_{n,r}) = \left[\frac{n}{r} \right]$

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(KG_{n,r})} \right\rceil = \left\lceil \frac{C_n^r}{C_{n-1}^{r-1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \leq n$

Доказательство. Действительно, будем красить все вершины, содержащие 1 в первый цвет. Из оставшихся вершин, покрасим во второй цвет все, которые содержат вершину 2. Аналогично будем красить оставшиеся вершины. \square

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \leq n - r + 1$

Доказательство. Будем действовать как в прошлый раз. Однако заметим, что на $n - r + 1$ -ой итерации все вершины исчерпаются. Тогда нам достаточно $n - r + 1$ цвета \square

Замечание. $\chi(KG_{n,r}) \leq n - 2r + 2$

Доказательство. Будем действовать как в прошлый раз. Однако заметим, что на $n - 2r + 2$ -ой итерации все оставшиеся вершины будут образовывать независимое множество \square

Несмотря на то, что верхняя и нижняя оценка расходятся достаточно сильно, есть примеры, для которых данные оценки равны:

Пример. $KG_{n,1} = K_n$ — клика на n вершинах. $\chi(KG_{n,1}) = n = \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil$

Пример. $KG_{n,\frac{n}{2}}$ — паросочетание. $\chi(KG_{n,\frac{n}{2}}) = 2 = \left\lceil \frac{n}{n/2} \right\rceil$

Пример. $KG_{5,2}$ — граф Петерсена. $\chi(KG_{5,2}) = 3 = \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil$

Теорема 6.1. Пусть S^{n-1} — $n - 1$ -мерная сфера. Пусть $S^{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_n$ и $\forall i : A_i$ замкнуто, то $\exists i, \vec{x} : \vec{x} \in A_i, -\vec{x} \in A_i$, т.е. A_i содержит антиподальные (или, диаметрально противоположные).

Доказательство. Тут в следующий раз появится доказательство \square

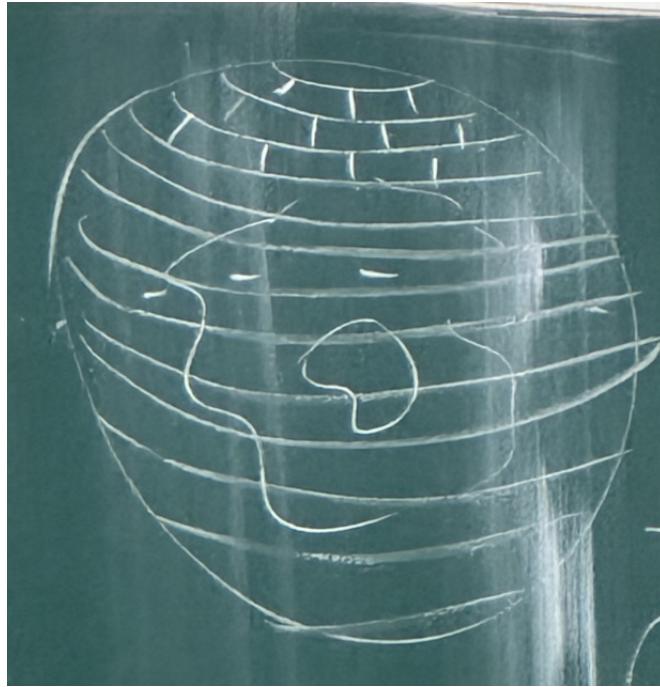
Замечание. Предыдущая теорема равносильна точно такому же утверждению в случае, когда все A_i открыты.

Замечание. Предыдущая теорема равносильна следующему утверждению: Пусть $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда $\exists \vec{x} \in S^n : f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$.

Однако, существует усиление данных теорем:

Теорема 6.2. Пусть S^{n-1} — $n-1$ -мерная сфера. Пусть $S^{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_n$ и $\forall i : A_i$ замкнуто или открыто, то $\exists i, \vec{x} : \vec{x} \in A_i, -\vec{x} \in A_i$, т.е. A_i содержит антиподальные (или, диаметрально противоположные).

Доказательство для $n = 3$. Будем считать, что диаметр сферы равен 1. Пусть $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \forall i : A_i$ замкнуто. Предположим противное. Рассмотрим A_1 . Т.к. A_1 не содержит антиподальных точек, то $diam A_1 < 1$. Разобьем нашу сферу на кирпичики:



Причем пересечения могут быть только Т-образными. Пусть G_1 — объединение кирпичиков, имеющих непустое пересечение с A_1 . Тогда $diam G_1 < 1$. Заметим, что $\partial G_1 = L_1 \sqcup \dots \sqcup L_k$, где L_i — замкнутая, несамопересекающаяся ломаная. Рассмотрим G'_1 — множество, симметричное G_1 относительно центра S^2 . Тогда $G'_1 \cap G_1 = \emptyset$, т.к. их диаметры < 1 . Аналогично, $\partial G'_1 = L'_1 \sqcup \dots \sqcup L'_k$. Мы получили $2k$ связных ломаных. По теореме Жордана (б/д, просто используем этот факт), каждая ломаная делит сферу на две части: внутренняя и внешняя. Тогда мы получили $2k + 1$ часть. Но тогда существует такой связный кусок, который симметричен относительно центра. \square

Утверждение 6.1 (Гипотеза Кнезера). $\chi(KG_{n,r}) = n - 2r + 2$

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\chi(KG_{n,r}) \leq n - 2r + 1 = d$. Положим K_1, \dots, K_n — вершины $KG_{n,r}$. $K_i \cap K_j = \emptyset \Rightarrow \chi(K_i) \neq \chi(K_j)$. Рассмотрим сферу $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Расположим на сфере S^d некоторые точки $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ таким образом, чтобы на каждом "экваторе" было не больше d точек. Будем делать это так: каждый раз будем добавлять точку так, чтобы ничего не сломать. Нетрудно доказать, что такой алгоритм сработает. Сформируем Кнезеровский граф по этим точкам на S^d , т.е. обозначим за L_1, \dots, L_{C_r} — все возможные подмножества $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ размера r и будем соединять их ребром, если $L_i \cap L_j = \emptyset$. Для них аналогично определим раскраску χ . Положим $H(\vec{x})$ — открытая полусфера с центром в \vec{x} . Положим также для $i = 1, \dots, d$, $A_i = \{x \in S^d : H(\vec{x}) \cap \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \supseteq L_j : \chi(L_j) = i\}$. Теперь определим $A_{d+1} = \{x \in S^d : |H(\vec{x}) \cap \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}| \leq r - 1\}$. Таким образом, A_1, \dots, A_d — открыты, $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$ — замкнуто. Итак, по предыдущей теореме, $\exists i, \vec{x} : \vec{x} \in A_i, -\vec{x} \in A_i$.

1. $i \leq d$. Тогда $H(\vec{x}) \cap \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \supset L_j : \chi(L_j) = i$, $H(-\vec{x}) \cap \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \supset L_k : \chi(L_k) = i$.
Но тогда $L_k \cap L_j = \emptyset \Rightarrow \chi(L_k) \neq \chi(L_j)$. Получили противоречие

2. $i = d+1$. Тогда $|H(\vec{x}) \cap \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}| \leq r-1$, $|H(-\vec{x}) \cap \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}| \leq r-1$. Но тогда $S^d \setminus (|H(\vec{x}) \cup H(-\vec{x})| \cap \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}) \geq d+1$, то есть, проще говоря, на экваторе, разделяющем $H(\vec{x}), H(-\vec{x})$ лежит $\geq d+1$ точка, что противоречит тому, как мы выбирали их.

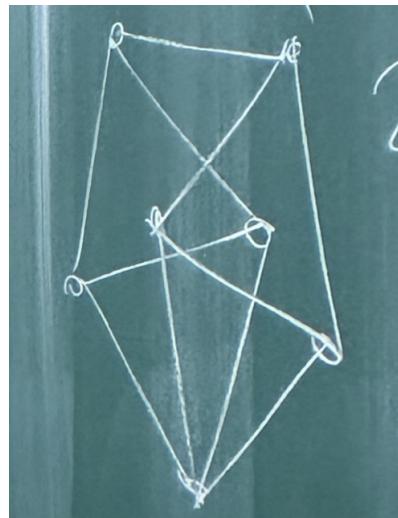
□

7 Хроматическое число пространства

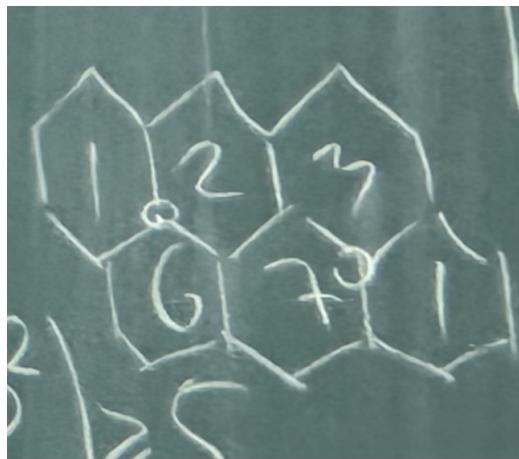
Определение 7.1. $\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi : \forall i, \forall x, y \in V_i : |x - y| \neq 1\}$

Замечание. $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$. Красим все полуинтервалы вида $[n, n+1]$.

Замечание. $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$



В 2018 году Обри ди Грей доказал, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$ (придумал очень очень большой граф). До этого (приблизительно за 40 лет было известно, что это верно, в случае, когда V_i измеримы). Известна верхняя оценка на 7:



Кроме того, доказано, что если запретить длины $[1, 1 + \varepsilon]$, то оценка на 7 точна.

Утверждение 7.1. $\chi(\mathbb{R}^3) \in 6, \dots 15$

Утверждение 7.2. $\chi(\mathbb{R}^4) \in 10, \dots 49$

Утверждение 7.3. $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (c\sqrt{n})^n$

Теорема 7.1 (Эрдеш-др Брёйна). *Если $\chi(G) < \infty$, то \exists конечный подграф H , такой, что $\chi(H) = \chi(G)$.*

Определение 7.2. $G = (V, E)$ — дистанционный граф, если в \mathbb{R}^n , если $V \subset \mathbb{R}^n, E = \{(x, y) \in V^2 : |x - y| = a\}$

Замечание. $G(n, r, s)$ — дистанционный граф.

Доказательство. Мы сопоставляли каждому множеству, являющемуся вершиной, вектор из 0 и 1. Но тогда: $(x, y) = s \forall x, y \in V \Rightarrow |x - y| = \sqrt{2(r - s)} = a$, т.е. он дистанционный. \square

Тогда получаем, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G(n, r, s)) \geq \frac{|V(n, r, s)|}{\alpha(G(n, r, s))} = \frac{C_n^r}{m(n, r, s)}$. Вспомним, что на отрезке $[x, x + Cx^{0.525\dots}]$ существует простое число. Для произвольного $r' \in (0, \frac{1}{2})$ положим $r \sim r'n$. И выберем p — простое минимально так, чтобы $r - s = p, p > \frac{r}{2}$. Тогда $r - 2p < 0$. Тогда $p \sim \frac{r'}{2}n$

Выберем r, s так, что $r - s = p, r - 2p < 0, p > \frac{r}{2}$.

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{R}^n) &\geq \chi(G(n, r, s)) \geq \frac{|V(n, r, s)|}{\alpha(G(n, r, s))} = \frac{C_n^r}{m(n, r, s)} \geq \frac{C_n^r}{\sum_{k=0}^{p-1} C_n^k} \\ C_n^r &= \left(\frac{1}{(r')^{r'} (1 - r')^{1-r'}} + o(1) \right)^n \\ C_n^{p-1} &= \left(\frac{1}{\left(\frac{r'}{2}\right)^{\frac{r'}{2}} \left(1 - \frac{r'}{2}\right)^{1-\frac{r'}{2}}} + o(1) \right)^n \sim \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k \end{aligned}$$

Тогда подставляем в $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G(n, r, s))$:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \frac{\left(\frac{r'}{2}\right)^{\frac{r'}{2}} \left(1 - \frac{r'}{2}\right)^{1-\frac{r'}{2}}}{(r')^{r'} (1 - r')^{1-r'}} + o(1)$$

Прологарифмируем:

$$\frac{r'}{2} \ln \frac{r'}{2} + \left(1 - \frac{r'}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{r'}{2}\right) - r' \ln r' - (1 - r') \ln(1 - r') + 1 = 0$$

И возьмем производную:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{r'}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r'}{2}\right) - \frac{1}{2} - \ln r' - 1 + \ln(1 - r') + 1 = 0$$

$$\ln \frac{r'}{2} - \ln \left(1 - \frac{r'}{2}\right) - 2 \ln r' + 2 \ln(1 - r') = 0$$

$$\frac{r'}{2}(1 - r')^2 = \left(1 - \frac{r'}{2}\right)r'^2$$

$$1 - 2r' + (r')^2 = 2r' - (r')^2$$

$$2(r')^2 - 4r' + 1 = 0$$

$$r' = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow r' = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Подставляя в исходное неравенство, получаем:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239 \cdots + o(1))^n$$

Теорема 7.2 (1972, Ларман-Роджерс).

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n$$