Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ И ТРАНСЛЯЦИИ

III СЕМЕСТР

Лектор: *Павел Ибрагимович Ахтямов*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Конечные Автоматы

1.1 Напоминание

Определение 1.1. Алфавит — конечное непустое множество

Определение 1.2. Слово — кортеж из букв

Определение 1.3. Пусть L_1, L_2 — множества слов. $L_1 L_2 = \{uv | u \in L_1, v \in L_2\}$

Определение 1.4. $\Sigma^* = \bigcup_{\bigcup_{k=0}^{\infty}} \Sigma^k$ — звезда Клини

Определение 1.5. ε — пустое слово

1.2 Недетерминированный Конечный Автомат

Определение 1.6. Недетерминированный Конечный Автомат — кортеж $(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Q называется множеством состояний, Q конечное
2. Σ — Алфавит
3. $\Delta \subset Q \times \Sigma^* \times Q$ — переходы, Δ конечное
4. $q_0 \in Q$ — стартовое состояние
5. $F \subset Q$ — множество завершающих состояний

Определение 1.7. Конфигурация Автомата — элемент $Q \times \Sigma^*$. обозначается $\langle q, w \rangle$

Определение 1.8. $\vdash$ — наименьшее по включению рефлексивное транзитивное отношение над $Q \times \Sigma^*$, что $\forall u \in \Sigma^*, (\langle q_1, w \rangle \to q_2) \in \Delta \Rightarrow \langle q_1, wu \rangle \vdash \langle q_2, u \rangle)$.

Определение 1.9. $L(M) = \{w \in \Sigma^* | \exists q_F \in F : \langle q_0, w \rangle \vdash \langle q_F, \varepsilon \rangle\}$.

Определение 1.10. Язык L называется автоматным, если $\exists M$ — автомат, такой, что $L(M) = L$

Утверждение 1.1. *В определении автомата можно считать, что* $|F| = 1$.

Неформально. Добавим новое состояние q_F. Из всех конечных состоянии сделаем в него переходы по ε. Сделаем q_F единственным конечным. Тогда наш автомат успешно завершился $\Leftrightarrow$ мы перешли в q_F и слово закончилось, но в него можно было прийти только по ε-переходу, значит в исходном автомате мы бы остановились в конечном состоянии и на пустом слове. □

Доказательство. Рассмотрим автомат $M' = (Q \cup \{q_F\}, \Sigma, \Delta \cup F \times \{\varepsilon\} \times \{q_F\}, q_0, \{q_F\})$.

1. $L(M) \subset L(M')$
$$w \in L(M) \Rightarrow \exists q \in F : \langle q_0, w \rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon \rangle$$
$$\Delta \subset \Delta' \Rightarrow \langle q_0, w \rangle \vdash_{M'} \langle q, \varepsilon \rangle \vdash_{M'} \langle q_F, \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle q_0, w \rangle \vdash_{M'} \langle q_F, \varepsilon \rangle$$

2. $L(M) \supset L(M')$

$$w \operatorname{Im} L(M') \Rightarrow \langle q_0, w\rangle \vdash_{M'} \langle q_F, \varepsilon\rangle$$

$$\exists u, q_1 \in F : \langle q_0, w\rangle \vdash_{M'} \langle q_1, u\rangle \vdash_{M',1} \langle q_F, \varepsilon\rangle \Rightarrow u = \varepsilon \Rightarrow \langle q_0, w\rangle \vdash_{M'} \langle q_1, \varepsilon\rangle$$

□

Утверждение 1.2. *В определении автомата можно считать, что* $\forall\langle q_1, w\rangle \to q_2 \in \Delta : |w| \leqslant 1$.

Доказательство. Превращаем $q_1 \to_{abc} q_2$ в $q_1 \to_a q_3 \to_b q_4 \to_c q_2$. □

Теорема 1.1. *В определении автомата можно считать, что* $\forall\langle q_1, w\rangle \to q_2 \in \Delta : |w| = 1$.

Неформально. Делаем две операции:

1. В цепочку $q_1 \to_\varepsilon q_2 \to_\varepsilon q_3 \to_\varepsilon \dots \to_\varepsilon q_{n-1} \to_a q_n$ удаляем ε-переходы, вместо них добавим переходы вида $q_1 \to_a q_i$.

2. В цепочке $q_1 \to_\varepsilon q_2 \to_\varepsilon q_3 \to_\varepsilon \dots \to_\varepsilon q_n$, где q_n — конечное состояние делаем все состояния конечными

Сначала до упора делаем 1, потом 2, потом удаляем оставшиеся ε-переходы. □

Доказательство. Положим $\Delta(q, w) = \{q' \in Q | \langle q, w\rangle \vdash \langle q', \varepsilon\rangle\}$, $M' = \{Q, \Sigma, \Delta', q_0, F'\}$, где $\Delta' = \{\langle q_1, w\rangle \to q_2 | \exists q_3 \in \Delta(q_1, \varepsilon) : \langle q_3, \varepsilon\rangle \to q_2 \in \Delta\}$, $F' = \{q' | \exists q \in F : \langle q', \varepsilon\rangle \vdash \langle q, \varepsilon\rangle\}$

1. $L(M) \subset L(M')$

$$w \in L(M), w = w_1 w_2 \dots w_k, w_i \in \Sigma$$

$$\exists q \in F \langle q_0, w\rangle \vdash \langle q, \varepsilon\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{array}{llllllll} \langle q_0, w_1 w_2 \dots w_k\rangle & \vdash_M & \langle q_1, w_1 w_2 \dots w_k\rangle & \vdash_{M,1} & \langle q_1', w_2 \dots w_k\rangle & \vdash_M & \\ & \vdash_M & \langle q_2, w_2 \dots w_k\rangle & \vdash_{M,1} & \langle q_2', w_3 \dots w_k\rangle & \vdash_M & \\ & & \vdots & & & & \\ & \vdash_M & \langle q_s, w_k\rangle & \vdash_{M,1} & \langle q_s', \varepsilon\rangle & \vdash_M & \langle q, \varepsilon\rangle \end{array}$$

□

1.3 Детерминированный Конечный Автомат

Определение 1.11. НКА $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ называется Детерминированным конечным автоматом, если

1. $\forall\langle q, w\rangle \to q_1 \in \Delta : |w| = 1$

2. $\forall\langle q, w\rangle \to q_1 \in \Delta : |\Delta(q, w)| \leqslant 1$

Определение 1.12. Если в определении выше $|\Delta(q, w)| = 1$, то такой ДКА называется полным

Теорема 1.2. *$\forall$ НКА M $\exists$ полный ДКА M', такой, что $L(M) = l(M')$, причем $M' = \langle 2^Q, \Sigma, \Delta', \{q_0\}, F' \rangle$, где*

$$\Delta(S, w) = \bigcup_{a \in S} \Delta(a, w)$$

$$F' = \{S \subset Q : S \cap F \neq \varnothing\}$$

$$\Delta' = \{\langle S, a \rangle \to \Delta(S, a)\}$$

Лемма 1.1. *В условиях теоремы,* $\Delta'(\{q_0, w\}) = \{\Delta(\{q_0\}, w)\}$

Доказательство. $\Delta'(\{q_0\}, w) = \Delta(q_0, w)$. Ведем индукцию по $|w|$

База: $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. $\Delta(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$, т.к. в M все переходы однобуквенные. $\Delta'(\{q_0\}, \varepsilon) = \{S | \langle \{q_0\}, \varepsilon \rangle\} \vdash_{M'} \langle S, \varepsilon \rangle = \{\{q_0\}\} \Rightarrow \{\Delta(q_0, \varepsilon)\} = \{\{q_0\}\} = \Delta'(\{q_0\}, \varepsilon)$

Переход:

$$\Delta'(\{q_0\}, w'a) = \{S | \langle \{q_0\}, w'a \rangle \vdash \langle S, \varepsilon \rangle\} = \{S | \exists T \subset Q : \langle \{q_0\}, w'a \rangle \vdash_{M'} \langle T, a \rangle \vdash \langle S, \varepsilon \rangle\} =$$

$$= \{S | \exists T \subset Q : T \in \Delta'(\{q_0\}, w), \langle T, a \rangle \vdash_{M', 1} \langle S, \varepsilon \rangle\} =$$

$$= \{S | \exists T \subset Q : T \in \{\Delta(\{q_0\}, w')\}, \langle T, a \rangle \vdash_{M', 1} \langle S, \varepsilon \rangle\} =$$

$$= \{S | \exists T \subset Q : T = \Delta(\{q_0\}, w'), S = \Delta(T, a)\} = \{\Delta(q_0, w'a)\}$$

$$\Delta(q_0, w'a) = \{q | \langle q_0, w'a \rangle \vdash \langle q, \varepsilon \rangle\} = \{q | \exists q' : \langle q_0, w'a \rangle \vdash \langle q', a \rangle \vdash_{M,1} \langle q, \varepsilon \rangle\} =$$

$$= \{q | \exists q' \in \Delta(q_0, w') : q \in \Delta(q', a)\} = \Delta(T, a) = S$$

$\square$

Доказательство Теоремы.

$$w \in L(m) \Leftrightarrow \exists q \in F : \langle q_0, w \rangle \vdash \langle q, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow \Delta(q_0, w) \cap F \neq \varnothing \Leftrightarrow \Delta(\{q_0\}, w) \cap F \neq \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta(\{q_0\}, w) \in F' \Leftrightarrow \Delta'(\{q_0\}, w) = \{\Delta(\{q_0\}, w)\} \subset F' \Leftrightarrow \Delta'(\{q_0\}, w) \cap F \neq \varnothing \Leftrightarrow w \in L(M')$$

$\square$

Утверждение 1.3. *$\forall M$ — ДКА $\exists M'$ — ПДКА, такой, что $L(M) = L(M')$*

Идея доказательства. Добавим сток q_s, в который можно зайти, но нельзя выйти. Т.е. $M' = \langle Q \cup \{q_s\}, \Sigma, \Delta', q_0, F \rangle$, где $\Delta' = \Delta \cup \{\langle q_s, a \rangle \to a | a \in \Sigma\} \cup \{\langle q, a \rangle \to q_s | \nexists q : \langle q, a \rangle \to q'\}$. Таким образом, если мы попали в сток, то мы из него не выберемся $\square$

Теорема 1.3. *Пусть L_1, L_2 — автоматные языки. Тогда следующие языки также автоматные:*

1. $L_1 L_2$
2. $L_1 \cup L_2$
3. $L_1 \cap L_2$
4. $\overline{L}$
5. L^*

1.4 Регулярные выражения

Определение 1.13. Пусть Σ — алфавит. Регулярное выражение — конечная последовательность из $\Sigma, *, \cdot, +, 0, 1$, определяемая индуктивно:

1. 0 — регулярное выражение
2. 1 — регулярное выражение
3. a — регулярное выражение, $a \in \Sigma$
4. $\alpha + \beta$ — регулярные выражение, где α, β — регулярные выражения
5. $\alpha \cdot \beta$ — регулярные выражение, где α, β — регулярные выражения
6. α^* — регулярные выражение, где α — регулярное выражение

Определение 1.14. $L(\alpha) : \{\text{Множество регулярных выражений}\} \to 2^{\Sigma}$, где α — регулярное выражение задается рекурсивно:

1. $L(0) = \varnothing$
2. $L(1) = \{\varepsilon\}$
3. $L(a) = \{a\}, a \in \Sigma$
4. $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
5. $L(\alpha \cdot \beta) = L(\alpha)L(\beta)$
6. $L(\alpha^*) = (L(\alpha))^*$

Определение 1.15. Язык L называется регулярным, если $\exists \alpha$ — регулярное выражение, т.ч. $L(\alpha) = L$

Определение 1.16. Регулярный автомат — автомат, в котором на ребрах написаны регулярные выражения.

Теорема 1.4 (Клини). *Язык L регулярен тогда и только тогда, когда он автоматный*

Доказательство. $\Rightarrow$ Ведем индукцию по построению регулярного выражения

База:

R	Автомат
0	q_0, q_F
1	$q_0 \to_\varepsilon q_F$
a	$q_0 \to_a q_F$

Переход:

R	Автомат
$\alpha \cdot \beta$	$M(\alpha) \to_\varepsilon M(\beta)$
$\alpha + \beta$	соединяем параллельно $M(\alpha), M(\beta)$
α^*	Зацикливаем автомат $M(\alpha)$ с переходом $\to_\varepsilon$

$\Leftarrow$ Ведем индукцию по $|Q|$ в регулярном автомате

База: $Q = 1, 2$ — позже

Переход:

R	Автомат
$\alpha \cdot \beta$	$M(\alpha) \to_\varepsilon M(\beta)$
$\alpha + \beta$	соединяем параллельно $M(\alpha), M(\beta)$
α^*	Зацикливаем автомат $M(\alpha)$ с переходом $\to_\varepsilon$

$\square$

Лемма 1.2 (О разрастании)**.** *Пусть L — автоматный язык. Тогда:*

$$\exists P \forall w \in L : |w| \geqslant P \exists x, y, z : w = xyz, |xy| \leqslant P, |y| \neq 0 :$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : xy^k z \in L$$

Доказательство. L — автоматный $\Rightarrow \exists M$ — НКА с однобуквенными переходами, т.ч. $L(M) = L$. Положим $P = |Q|$, где Q — множество состояний M. Рассмотрим $w = w_1 w_2 \dots w_P \dots$.

$$\langle q_0, w_1 \dots w_P u \rangle \vdash_1 \langle q_1, w_2 \dots w_P u \rangle \vdash \dots \vdash \langle q_P, u \rangle \vdash \langle q, \varepsilon \rangle$$

Тогда $\exists k' < l' \leqslant P : q_{k'} = q_{l'}$ по принципу Дирихле (всего состояний P, а мы посетили больше). Положим $x = w_1 \dots w_{k'}, y = w_{k'+1} \dots w_{l'}, w = w_{l'+1} \dots w_P u$. Т.к. $k1 \neq l' \Rightarrow |y| = l' - k' > 0, l' \leqslant P \to |x| = l' \leqslant P$. Таким образом, $xy^k z \in L \forall k$. $\square$

Замечание (Отрицание к лемме)**.** Пусть L — некоторый язык и

$$\forall P \exists w \in L : |w| \geqslant P \forall x, y, z : w = xyz, |xy| \leqslant P, |y| \neq 0 :$$

$$\exists k \in \mathbb{N} : xy^k z \notin L$$

Тогда L — не автоматный

Пример. Рассмотрим $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$. $\forall P \exists w = a^P b^P \in L$. Рассмотрим $w = xyz$. $|xy| < P \Rightarrow xy = a^k, |y| > 0 \Rightarrow y = a^l, l > 0$. Тогда $xy^2 z = a^{k-l} a^{2l} b^P = a^{P+l} b^P$. Т.к. $l > 0$, то $a^{P+L} b^P \notin L \Rightarrow L$ — не автоматный.

Утверждение 1.4. *Пусть L — язык, R — регулярное выражение, $L(R) \cap L$ — неавтоматный $\Rightarrow L$ — неавтоматный*

Доказательство. Пусть L — автоматный, но тогда $L \cap L(R)$ — тоже. $\square$

Пример. Рассмотрим $L = \{w | |w|_a = |w|_b\}$. Т.к. $L = \{a^k b^k | k \in \mathbb{N}\} \cap L(a^* b^*)$, то L — неавтоматный

1.5 Минимальный Полный Конечный Детерминированный Автомат?

Пусть есть два ПДКА: M_1, M_2. Проверим, что $L(M_1) = L(M_2)$. Это равносильно тому, что $L(M_1) \Delta L(M_2) = \varnothing$. Однако есть более удобный способ это проверять.

Далее M — ПДКА, L — автоматный язык.

Определение 1.17. Будем говорить, что $u \sim_L v,\ \ u, v \in \Sigma^* \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$.

Утверждение 1.5. $\sim_L$ *— отношение эквивалентности*

Доказательство. **Рефлексивность** $u \sim_L u : uw \in L \Leftrightarrow uw \in L$

Симметричность $u \sim_L v \Leftrightarrow (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L) \Leftrightarrow v \sim_L u$

Транзитивность $u \sim_L v, v \sim s \Leftrightarrow (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L) \wedge (vw \in L \Leftrightarrow sw \in L) \Rightarrow u \sim_L s$.

□

Замечание. $\Sigma^*/_{\sim_L}$ — фактормножество Σ^* по отношению $\sim_L$. Класс эквивалентности слова u будем обозначать $[u]$.

Определение 1.18. Будем говорить, что $q_1 \sim_M q_2,\ \ q_1, q_2 \in Q \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* \Delta(q_1, w) \subset F \Leftrightarrow \Delta(q_2, w) \subset F$.

Утверждение 1.6. $\sim_M$ *— отношение эквивалентности*

Доказательство. **Рефлексивность** $q_1 \sim_M q_1 : \Delta(q_1, w) \subset F \Leftrightarrow \Delta(q_1, w) \subset F$

Симметричность $q_1 \sim_M q_2 \Leftrightarrow (\Delta(q_1, w) \subset F \Leftrightarrow \Delta(q_2, w) \subset F) \Leftrightarrow q_2 \sim_M q_1$

Транзитивность $q_1 \sim_L q_2, q_2 \sim q_3 \Leftrightarrow (\Delta(q_1, w) \subset F \Leftrightarrow \Delta(q_2, w) \subset F) \wedge (\Delta(q_1, w) \subset F \Leftrightarrow \Delta(q_3, w) \subset F) \Rightarrow q_1 \sim_L q_3$.

□

Лемма 1.3. *Пусть* $L_q = \{w | \Delta(q_0, w) = q\}$. *Тогда каждый класс эквивалентности в* $\Sigma^*/_{\sim_L}$ *— объединение классов в* L_q.

Доказательство. Пусть $u, v \in L_q$. Тогда $\Delta(q_0, u) = q, \Delta(q_0, v) = q$. Рассмотрим произвольное $w \in \Sigma^*$. $\Delta(q_0, uw) = q'$.

$$\langle q_0, uw \rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle q_0, uw \rangle \vdash \langle q_1, w \rangle \vdash \langle q', \varepsilon \rangle \Rightarrow q' = \Delta(q, w)$$

Аналогично, $\Delta(q_0, vw) = \Delta(q, w)$. Но тогда $uw \in L \Leftrightarrow \Delta(q, w) \in F \Leftrightarrow w \in L$. □

Следствие. $|Q| \geqslant |\Sigma^*/_{\sim_L}|$

Доказательство. В каждом классе $[u]$ существует хотя бы один L_q. □

Лемма 1.4. *Пусть L — автоматный язык. Тогда $\exists$ ПДКА M', такой, что все состояния в M' попарно неэквивалентны.*

Доказательство. Построим автомат над классами $[q] \in Q/_{\sim_M}$:

$$M' = (Q/_{\sim_M}, \Sigma, \Delta', [q_0], F')$$

$$\Delta' = \{\langle [q], a \rangle \to [\Delta(q, a)]\}$$
$$F' = \{[q] | q \in F\}$$

1. **Согласованность переходов:**

$$q_1 \in [q] \Rightarrow \Delta(q_1, a) \in [\Delta(q, a)]$$

$$q_1 \in [q] \Rightarrow q_1 \sim q \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* \Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q, w) \in F$$
$$\forall w = au : \Delta(q_1, au) \in F \Leftrightarrow \Delta(q, au) \in F$$
$$\forall u : \Delta(\Delta(q_1, a), u) \in F \Leftrightarrow \Delta(\Delta(q, a), u) \in F$$
$$\Delta(q_1, a) \sim_M \Delta(q, a)$$

2. **Согласованность завершающих состояний:**

   Пусть $q \in F$
$$q_1 \sim q \Rightarrow \forall w(\Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q, w) \in F)$$
$$w = \varepsilon \Rightarrow ((\Delta(q_1, \varepsilon) = q_1 \in F) \Leftrightarrow (\Delta(q, \varepsilon) = q \in F)) \Rightarrow q_1 \in F$$

Покажем, что $\Delta([q_0], w) = [\Delta(q_0, w)]$ индукцией по $|w|$.

База: уже доказана

Переход: Пусть $w = ua$.

$$\Delta([q_0], ua) = \Delta(\Delta([q_0], u), a) = \Delta([\Delta(q_0, u)], a) = [\Delta(\Delta(q_0, u), a)] = [\Delta(q_0, ua)]$$

Тогда:
$$w \in L(M) \Leftrightarrow \Delta(q_0, w) \in F \Leftrightarrow \Delta([q_0], w) \in F' \Leftrightarrow w \in L(M')$$

Осталось показать, что состояния неэквивалентны. Пусть $[q_1] \sim_M [q_2]$.

$$\forall w : \Delta([q_1], w) \in F' \Leftrightarrow \Delta([q_2], w) \in F'$$

$$\forall w : [\Delta(q_1, w)] \in F' \Leftrightarrow [\Delta(q_2, w)] \in F'$$
$$\forall w : \Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q_2, w) \in F$$
$$q_1 \sim_M q_2$$
$$[q_1] = [q_2]$$

□

Определение 1.19. M — МПДКА, если M — ПДКА и $\nexists M'$, такой, что $L(M) = L(M'), |Q| > |Q'|$.

Теорема 1.5. *M — МПДКА, такой, что $L(M) = L \Leftrightarrow$ все состояния недостижимы из стартового и никакие два неэквивалентны.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть M — МПДКА. Если в нем есть два эквивалентных состояния, то строим автомат на $Q/_{\sim_M}$. Если же какое-то состояние недостижимо, то убираем его, таким образом всегда можно уменьшить число состояний

$\Leftarrow$ Пусть в M нет эквивалентных состояний. Пусть $\Delta(q_0, w_1) \neq \Delta(q_0, w_2)$

$$\exists u : \Delta(\Delta(q_0, w_1), u) \notin F, \Delta(\Delta(q_0, w_2), u) \in F$$

$$\exists u : \Delta(q_0, w_2u) \notin F, \Delta(q_0, w_2u) \in F$$
$$\exists u : w_1u \notin L, w_2u \in L$$
$$w_1 \not\sim_L w_2$$

Тогда $|\Sigma^*/_{\sim_L}| \geqslant |Q|$. Однако, $|Q| \geqslant |\Sigma^*/_{\sim_L}| \Rightarrow M$ — минимальный.

□

Замечание. $|Q| \leqslant |\Sigma^*/_{\sim_L}| \leqslant |Q| \Rightarrow |Q| = |\Sigma^*/_{\sim_L}|$

2 Грамматики

Определение 2.1. $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$, где

1. N — алфавит, называется множеством нетерминалов
2. Σ — алфавит, называется множеством терминалов
3. $P \subset (N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^* \times (N \cup \Sigma)^*$
4. S — стартовый нетерминал

Называется грамматикой

Определение 2.2. $\vdash_G$ — наименьшее транзитивное отношение, такое, что

$$\forall \alpha \to \beta, \varphi, \psi \in (N \cup \Sigma)^* : \varphi\alpha\psi \vdash_G \varphi\beta\psi$$

Следствие. Тогда $w \in L(G) \Leftrightarrow S \vdash w$

2.1 Иерархия Хомского

Определение 2.3 (Порождающие грамматики)**.** Порождающие грамматики — класс вообще всех грамматик

Определение 2.4 (Контекстно-зависимые грамматики)**.** Контекстно-зависимые грамматики — такие, в которых все правила имеют вид $\psi A\varphi \to \psi\alpha\varphi, \alpha \neq \varepsilon$

Определение 2.5 (Контекстно-свободные грамматики)**.** Контекстно-свободные грамматики — такие, в которых все правила имеют вид $A \to \alpha$

Определение 2.6 (Праволинейные грамматики)**.** Контекстно-свободные грамматики — такие, в которых все правила имеют вид $A \to wB, A \to w$.

Теорема 2.1. *Множество автоматных языков равно множеству языков, задаваемых праволинейными грамматиками.*

Доказательство. $\subset$ Пусть $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ — наша грамматика, $M = \langle N \cup \{q_f\}, \Sigma, \Delta, S, \{q_f\}\rangle$, $\Delta = \{\langle A, w\rangle \to B | A \to wB\} \cup \{\langle A, w\rangle \to q_f | A \to w\}$. Хотим доказать два утверждения:

(a) $< A, w > \vdash_M < B, \varepsilon > \Leftrightarrow A \vdash_G wB$

(b) $< A, w > \vdash_M < q_f, \varepsilon > \Leftrightarrow A \vdash_G w$

Докажем оба следствия вправо. Ведем индукцию по $| \vdash_M |$ — количеству шагов в выводе автомата.

База:

$$< A, w > \vdash_0 < B, \varepsilon > \Rightarrow A = B, w = \varepsilon \Rightarrow A \vdash_{G,0} B = A$$

$$< A, w > \vdash_1 < q_f, \varepsilon > \Rightarrow < A, w > \to q_f \in \Delta \Rightarrow A \to w \in P \Rightarrow A \vdash w$$

Переход: Положим, для общности, α так, что $< A, w > \vdash < \alpha, \varepsilon >$ $(\alpha \in N \cup \{q_0\})$
Положим $w = uv$

$$< A, uv > \vdash_1 < C, v > \vdash < \alpha, \varepsilon >$$

$$< A, uv > \to C \in \Delta \Rightarrow A \vdash_1 uC$$

Но, по предположению индукции:

$$\left[\begin{array}{l} C \vdash vB, B \in N(\alpha = B) \Rightarrow A \vdash_G uvB \\ C \vdash v, \alpha = q_f \Rightarrow A \vdash_G w \end{array} \right.$$

Докажем оба следствия влево. Ведем индукцию по $| \vdash_G |$ — длине вывода в грамматике

База:

$$A \vdash_0 wB \Rightarrow A = B, w = \varepsilon \Rightarrow < A, w > \vdash_0 < B, \varepsilon >$$

$$A \vdash_1 w \Rightarrow A \to w \in P \Rightarrow < A, w > \vdash_1 < q_s, \varepsilon >$$

Переход: Положим, для общности α так, что $A \vdash w\alpha, \alpha \in N \cup \{\varepsilon\}$

$$A \vdash_1 uC \vdash uv\alpha, w = uv$$

Тогда $< A, u > \vdash < C, \varepsilon >$, и по предположению индукции

$$\left[\begin{array}{l} < C, v > \vdash < B, \varepsilon >, B = \alpha \\ < C, v > \vdash < q_f, \varepsilon >, \alpha = \varepsilon \end{array} \right.$$

Тогда $w \in L(G) \Leftrightarrow S \vdash w \Leftrightarrow < S, w > \vdash < q_f, \varepsilon > \Leftrightarrow w \in L(M)$

$\supset$ Можно считать, что исходный автомат с одним завершающим состоянием, $M =< Q, \Sigma, \Delta, q_0, F = \{q_s\} >$. Построим по нему грамматику $G =< Q, \Sigma, P, q_0 >$, такую, что

$$P = \{q_1 \to wq_2 | < q_1, w > \to q_2 \in \Delta\} \cup \{q \to \varepsilon | q \in F\}$$

Теперь, построим по грамматике G автомат M'. Тогда $M' =< Q, \Sigma, \Delta', q_0, \{q'_f\} >$, где $\Delta' = \Delta \cup \{< q_f, \varepsilon > \to q'_f\}$. Тогда $w \in L(M) \Leftrightarrow < q_0, w > \vdash_M < q_f, \varepsilon > \Leftrightarrow < q_0, w > \vdash M' < q_f, \varepsilon > \vdash_1 < q'_f, \varepsilon > \Leftrightarrow w \in L(M')$. Но тогда $L(M) = L(M')$.

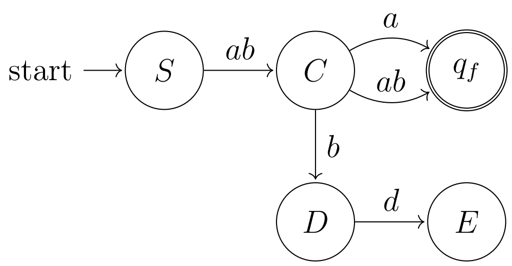
□

Пример. Пусть грамматика у нас следующая:

1. $S \to abC$
2. $C \to a$

3. $C \to ab$
4. $C \to bD$
5. $D \to dE$

Тогда для данной грамматики, автомат следующий:



2.2 Контекстно-свободные граммаики

Далее, для краткости, будем обозначать контекстно-свободные грамматики за КС

Определение 2.7. Дерево вывода — последовательность слов из $(N \cup \Sigma)^+$, каждый из элементов которой получается при переходе грамматики.

Определение 2.8. Дерево называется право(лево)сторонним, если для каждого слова, дерево его вывода единственно

Определение 2.9. Существенно неоднозначный язык — язык, которого не существует однозначной КС-грамматики, распознающей этот язык.

Задача. *Доказать, что языки* $\{a^k b^l c^m | k = l\}$, $\{a^k b^l c^m | m = l\}$ *существенно неоднозначные.*

2.3 Нормальная форма Хомского

Определение 2.10. КС грамматика G находится в нормальной форме Хомского, если все правила имеют вид:

1. $A \to BC, B \neq S, C \neq S$
2. $A \to a, a \in \Sigma$
3. $S \to \varepsilon$

Замечание.

1. $S \vdash \varepsilon \Rightarrow S \vdash_1 \varepsilon$
2. $A \vdash \varepsilon \Rightarrow A = S$

2.3.1 Удаление непорождающих нетерминалов

Определение 2.11. $D \in N$ называеся порождающим, если $\exists w : D \vdash w$.

Утверждение 2.1. *Пусть нам дана грамматика G_0. Рассмотрим грамматику G_1, такую, что $N_1 = N_0 \setminus \{D | D$ непорождающий$\}$. Тогда $L(G_0) = L(G_1)$.*

Доказательство. Пусть $\exists w \in L(G_0) \setminus L(G_1)$. $S \vdash_{G_0} w \Rightarrow \exists D$ — непорождающий, такой, что $S \vdash uDv \vdash uxv = w \Rightarrow D$ — порождающий, противоречие. Вложение в другую сторону очевидно. $\square$

Замечание. (Алгоритм для поиска непорождающих символов) Храним R_A — множество нетерминалов справа для каждого нетерминала A, создаем пустую очередь. Далее делаем следующие шаги, пока очередь не пуста:

1. Добавляем все нетерминалы с пустым R_X
2. Удаляем из всех R_Y нетерминал X

2.3.2 Удаление недостижимых нетерминалов

Определение 2.12. Нетерминал D называется достижимым, если $\exists \varphi, \psi \in (N \cup \Sigma)^*$, такие, что $S \vdash \varphi D \psi$.

Утверждение 2.2. *Пусть нам дана грамматика G_1. Рассмотрим грамматику G_2, такую, что $N_2 = N_1 \setminus \{D | D$ — недостижимый$\}$. Тогда $L(G_1) = L(G_2)$.*

Доказательство. Очевидно, что $L(G_1) \supset L(G_2)$. Пусть $w \in L(G_1) \setminus L(G_2)$. Тогда $\exists w \in \sigma^* :$ $S \vdash \varphi D \psi \vdash w \Rightarrow D$ — достижимый, противоречие $\square$

Замечание. Алгоритм для поиска недостижимых символов — просто запускаем `dfs`.

Утверждение 2.3. *Пусть нам дана грамматика G_1 без непорождающих символов. Рассмотрим грамматику G_2, такую, что $N_2 = N_1 \setminus \{D | D$ — недостижимый$\}$. Тогда в ней не нет непорождающих символов.*

Доказательство. Пусть есть непорождающий символ B. Тогда есть вывод $B \vdash_{G_1} \varphi C \psi \vdash_{G_1}$ u $\square$

2.3.3 Удаление смешанных правил

Упражнение. *Для каджого $a \in \Sigma$ заведем новый нетерминал X_a с единственным переходом $X_a \to a$. Заменим все вхождения буквы a в правила справа (слева a не может стоять) на X_a. Тогда полученная грамматика G_3 такова, что $L(G_3) = L(G_2)$*

2.3.4 Удаление длинных цепочек

Упражнение. *Если заменить $A \to A_1 A_2 \dots A_n$ в грамматике G_3 на $A \to A_1 A_1', A_1' \to A_2 \dots A_n \dots$, то $L(G_4) = L(G_3)$.*

2.3.5 Удаление ε-переходов

Утверждение 2.4. *Если в грамматике G_4 провести следующие операции:*

$$\left.\begin{array}{r} A \to BC \\ C \to \varepsilon \end{array}\right] \Rightarrow \text{ добавляем } A \to B$$

$$\left.\begin{array}{r} A \to BC \\ B \to \varepsilon \end{array}\right] \Rightarrow \text{ добавляем } A \to C$$

А после этого удалить все переходы вида $A \to \varepsilon$, то множество слов полученной грамматики G_5 не изменится, кроме, быть может, пустого слова (которое удалится).

Доказательство.

1. $L(G_4) \setminus \{\varepsilon\} \subset L(G_5)$. Ведем индукцию по длине слова $w \neq \varepsilon$

   База: $|w| = 1$. Очевидно выводим за один шаг

   Переход: пусть $A \vdash_{G_4,1} \alpha \vdash_{G_4} w$.

   i. $\alpha = B$. Тогда $A \to B \in P_4$

   ii. $\alpha = BC \Rightarrow B \vdash w_1, C \vdash w_2$.

      A. $w_1, w_2 \neq \varepsilon \Rightarrow B \vdash_{G_5} w_1, C \vdash_{G_5} w_2 \Rightarrow A \vdash_{G_5} w$.

      B. $w_1, w_2 \neq \varepsilon \Rightarrow B \vdash_{G_5} w_1, C \vdash_{G_5} w_2 \Rightarrow A \vdash_{G_5} w$.

      C. $w_1 = \varepsilon, w_2 \neq \varepsilon \Rightarrow A \vdash_{G_5} C, C \vdash_{G_5} w_2 \Rightarrow A \vdash_{G_5} C \vdash_{G_6} w$.

      D. $w_1 \neq \varepsilon, w_2 = \varepsilon$ — аналогично предыдущему

2. $L(G_4) \setminus \{\varepsilon\} \supset L(G_5)$. $A \vdash_{G_5} w \Rightarrow w \neq \varepsilon$.Докажем, что $A \vdash_{G_5} w \Rightarrow A \vdash_{G_4} w$. Ведем индукцию по длине слова $|\vdash_{G_5}|$.

   База: $|\vdash_{G_5}| = 1$. $A \to w \in P_5 \Rightarrow A \to w \in P_4$

   Переход:

   i. $A \vdash_{G_5,1} BC \vdash_{G_5} w_1 w_2 = w \Rightarrow A \to BC \in P_5 \to A \to BC \in P_4$, но по предположению индукции $B \vdash_{G_4} w_1, C \vdash G_4 w_2$

   ii. $\alpha = BC \Rightarrow B \vdash w_1, C \vdash w_2$, тогда $A \vdash_{G_4} BC \vdash_{G_4} w$.

   iii. $A \vdash_{G_5,1} B \vdash_{G_5} w$.

      A. $A \to B \in P_4$, по предположению индукции $B \vdash_{G_5} w \Rightarrow A \vdash_{G_4} B \vdash_{G_4} w$.

      B. $A \vdash_{G_4} CB \in P_4, C \vdash_{G_4} \varepsilon \Rightarrow A \vdash_{G_4} CB \vdash_{G_4} B \vdash_{G_4} w$.

      C. $A \vdash_{G_4} BC \in P_4, C \vdash_{G_4} \varepsilon \Rightarrow A \vdash_{G_4} BC \vdash_{G_4} B \vdash_{G_4} w$.

□

После этого добавим новый нетерминал S', с переходом $S' \to S$, таким образом он не будет стоять нигде справа и множество слов грамматики не изменится. При этом, если $S \vdash_{G_4} \varepsilon$, то добавим еще правило $S \to \varepsilon$. Тогда новая грамматика G_6 такова, что $L(G_4) = L(G_6)$.

2.3.6 Удаление одиночных правил

Сделаем аналогично удалению ε-переходов в автомате.
Бинго! Мы получили нормальную форму Хомского

Следствие.

1. В нормальной форме Хомского дерево вывода бинарное
2. Слово длины $n > 0$ выводится за $2n - 1$ шаг

Перед нами стоит задача проверки $w \in L(G)$, и, если да, построения вывода.

2.4 Разбор КС-грамматики

2.4.1 Рекурсивый спуск

Рекурсивно спускаемся и таким образом перебираем все возможные выводы. К сожалению, может не закончиться (если есть ε-переходы).

1. Определить функцию обработки для каждого нетерминала из N.
2. Для каждого правила сгенерировать обработку:
3. Если символ слова совпадает с символом правила, то обработать символ.
4. Если следующий символ правила - нетерминал, то обрабатываем рекурсивно.
5. Если символ не совпадает - то выполняем `backtrack`.

2.4.2 Алгоритм Кока-Янгера-Касами

См. презентацию