Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

IV СЕМЕСТР

Лектор:

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1 Введение

1.1 Предисловие

Ну чето рассказали там про принцип устойчивости частот, про то, что ля-ля-ля тополя

1.2 Напоминание с ОВиТМа

Определение 1.1. $\mathcal{F}$ — алгебра над Ω, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

Замечание. Элементы Ω называются элементарными событиями.

Замечание. Элементы $\mathcal{F}$ называются событиями.

Определение 1.2. $\mathcal{F}$ — σ-алгебра над Ω, если

1. $\mathcal{F}$ — алгебра
2. $A_1, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Определение 1.3. Функция $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ называется вероятностной мерой, если $P(\Omega) = 1, P$ — σ-аддитивна.

Замечание. 1. $P(\varnothing) = 0$

2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$ — **монотонность меры**
3. P конечно аддитивна
4. Для P верна формула включений-исключений.
5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) =\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Теорема 1.1 (О непрерывности вероятностной меры)**.** *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F})$ *таково, что* $\mathcal{F}$ *— алгебра над* Ω*,* P *— мера и* $P(\Omega) = 1$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. P *—* σ*-аддитивна на* $\mathcal{F}$

2. P *непрерывна в нуле, т.е.* $\bigcap A_i = \varnothing \Rightarrow P(A_i) \to P(A)$

3. P *непрерывна сверху, т.е.* $\bigcap A_i = A \Rightarrow P(A_i) \to P(A)$

4. P *непрерывна снизу, т.е.* $\bigcup A_i = A \Rightarrow P(A_i) \to P(A)$

Определение 1.4. Вероятностное пространство — это измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, т.е. Ω — множество, $\mathcal{F}$ — некая σ-алгебра над Ω, P — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Определение 1.5. Система $\mathcal{M}$ подмножеств Ω называется π-системой, если $\mathcal{M}$ замкнуто относительно счетного пересечения

Определение 1.6. Система $\mathcal{M}$ подмножеств Ω называется λ-системой, если

1. $\Omega \in \mathcal{M}$
2. $A, B \in \mathcal{M}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$
3. $A_i \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{M}$

Теорема 1.2 (Первая теорема о λ-системах)**.** *Система $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй над Ω тогда и только тогда, когда она является λ-системой и π-системой.*

Утверждение 1.1. *Для любой системы $\mathcal{M}$ подмножеств Ω существует минимальная по включению, содержащаяся в $\mathcal{M}$*

Замечание. $\sigma(\mathcal{M}), \alpha(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$ — порожденные (минимальные) σ-алгебра, алгебра, π-система, λ-система соответственно.

Теорема 1.3 (Вторая теорема о λ-системах)**.** *Если $\mathcal{M}$ — π-система на Ω, то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$*

Доказательство. См. доказательство из курса ОВиТМа □

Пример (Борелевская σ-алгебра)**.** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (или, что равносильно, всеми полуинтервалами)

Пример (Борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$)**.** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (или, что равносильно, всеми кубами, где куб — декартово произведение борелевских множеств).

Пример. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ — σ-алгебра, порожденная всеми цилиндрами. Цилиндр — множество $x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots x_n) \in B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Пример (Борелевская σ-алгебра в общем случае)**.** Пусть (S, ρ) — метрическое пространство, тогда $\mathcal{B}(S)$ — σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

2 Вероятностная мера на прямой

Пусть P — вероятностная мера на $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Определение 2.1. Функцией распределения называется функция $F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.1 (О свойствах функции распределения)**.**

1. *F не убывает*
2. *$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$*
3. *F непрерывна справа*

Доказательство.

1. $x \leqslant y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$

2. $x_n \to -\infty \Rightarrow (-\infty, x_n] \to \varnothing \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0 = \lim_{x\to+\infty} F(x)$, $x_n \to +\infty \Rightarrow (-\infty, x_n] \to \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 1 = \lim_{x\to+\infty} F(x)$

3. Если $x_n \searrow x$, то $(-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x]$ и $F(x_n) \to F(x)$

$\square$

Теорема 2.1 (О взаимно-однозначном соответствии функции распределения и вероятностной меры)**.** *Пусть F удовлетворяет условиям 1-3 из предыдущей теоремы. Тогда существует единственная вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, т.ч. F — её функция распределения.*

2.1 Классификация вероятностных мер

Далее мы будем отождествлять понятия распределения и вероятностной меры.

2.1.1 Дискретные распределения

Определение 2.2. Вероятностная мера P на $(R, \mathcal{B}(R))$ называется дискретной, если $\exists X$ — не более. чем счетое множество на $\mathbb{R}$, такое, что $P(\mathbb{R} \setminus X)$ и $\forall x \in X P(\{x\}) > 0$.

Примеры

1. Распределение Бернулли: $P \sim Bern(p)$, если $X = \{0, 1\}, P(\{1\}) = p, P(\{0\}) = 1 - p$

2. Равномерное распределение: $X = 1, 2, \dots n$, $P(\{i\}) = \frac{1}{n}$

3. Биномиальное распределение: $P \sim Bin(n, p)$, если $X = \mathbb{N}, P(\{k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, P(\{0\})$, моделирует количество успехов среди n испытаний.

4. Пуассоновское распределение: $P \sim Pois(n, p)$, если $X = \mathbb{N}, P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, P(\{0\})$, моделирует редкие события

5. Геометрическое распределение: $P \sim Geom(p)$, если $X = \mathbb{N}, P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}, P(\{0\})$, моделирует первый момент удачи в бесконечной схеме испытаний Бернулли

2.1.2 Абсолютно непрерывные распределения

Определение 2.3. $F(x)$ называется абсолютно непрерывной, если $\exists p(t) \geqslant 0 : \forall x \in \mathbb{R} F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$. В таком случае мы говорим, что $p(t)$ является плотностью функции F или соответствующего распределения (вероятностной меры).

Замечание. В таком случае $F'(x) = p(x)$ почти всюду по мере Лебега.

Примеры

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ — $U(a, b)$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a \leqslant x \leqslant b \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leqslant x \leqslant b \\ 1, x > b \end{cases}$$

   Моделирует случайную точку из отрезка $[a, b]$

2. Нормальное распределение — $N(a, \sigma^2)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

   Моделирует измерение с ошибкой

3. Экспоненциальное распределение — $N(a, \sigma^2)$:

$$p(x) = \lambda e^{\lambda x} I\{x > 0\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Моделирует время ожидание

4. Гамма-распределение: $\Gamma(\lambda, \alpha), \lambda, \alpha > 0$.

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} I\{x > 0\}$$

   Где:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

   Нам в дальнейшем потребуются различные свойства Γ-функции: $\Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

5. Распределение Коши $K(\sigma), \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\sigma}$$

   Модель

2.1.3 Сингулярные распределения

Определение 2.4. Точка x называется точкой роста фукнции распределения $F(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 : F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$

Определение 2.5. Функция распределения $F(x)$ наызвается сингулярной, если она непрерывна, и множество точек ее роста имеет $\mu = 0$.

Примеры

1. Канторова лестница — ее точками роста является канторово множество.

Теорема 2.2 (Лебега о разложении). *Если $F(x)$ — функция распределения на прямой, тогда $\exists!$ разложение вида: $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, где $\alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ и F_1 — дискретная, F_2 — абсолютно непрерывная, F_3 — сингулярная.*

3 Вероятностные меры в $\mathbb{R}^n$

Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Определение 3.1. Функцией распределения P называется $F(x_1, \dots x_n) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$

Замечание (Обозначения). 1. $\vec{x} = (x_1, \dots x_n)$

2. $\vec{x} \geqslant \vec{y} \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i$

3. $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$

4. $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$ если $\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n$ и $\vec{x}_n \geqslant \vec{x}_{n+1}$.

Определение 3.2. Для $i = 1, \dots n, a_i < b_i$ введем:

$$\Delta^i_{a_i,b_i} F(x_1, \dots x_n) = F(x_1, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots x_n) - F(x_1, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots x_n)$$

Лемма 3.1 (Свойства многомерных функций распределения). *1. Если $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$, то $F(\vec{x}_n) \to F(\vec{x})$*

2. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, \dots x_n) = 1$

3. $\forall i = 1, \dots n : \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, \dots x_n) = 0$.

4. Для любых $a_i < b_i, i = 1, \dots n$:

$$\Delta^1_{a_1,b_1} \circ \Delta^2_{a_2,b_2} \circ \dots \circ \Delta^n_{a_n,b_n} F(x_1, \dots x_n) \geqslant 0$$

Доказательство.

1. Если $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$, то $(-\infty, \vec{x}_n] \downarrow (-\infty, \vec{x}] \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностной меры, получаем $F(\vec{x}_n) \to F(\vec{x})$

2. Если $\vec{x}_n \uparrow (+\infty, \dots + \infty)$, то $(-\infty, \vec{x}_n] \uparrow \mathbb{R}^n \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностной меры, получаем $F(\vec{x}_n) \to P(\mathbb{R}^n) = 1$

3. Если $x_i \downarrow -\infty$, то $(-\infty, \vec{x}_n] \downarrow \varnothing \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностной меры, получаем $F(\vec{x}_n) \to P(\varnothing) = 0$

4. Для $n = 2$:

   $\Delta^1_{a_1,b_1} \circ \Delta^2_{a_2,b_2} F(x_1, x_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geqslant 0$

   В общем случае:

   $$\Delta^i_{a_i,b_i} P(A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times (-\infty, x_i) \times A_{i+1} \times \dots \times A_n) =$$

   $$= P(A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times (a_i, b_i] \times A_{i+1} \times \dots \times A_n)$$

   Получаем, что

   $$\Delta^1_{a_1,b_1} \circ \Delta^2_{a_2,b_2} \circ \dots \circ \Delta^n_{a_n,b_n} F(x_1, \dots x_n) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]) \geqslant 0$$

□

Теорема 3.1 (О взаимно однозначном соответствии)**.** *Если F удовлетворяет свойствами 1-3 из леммы, то $\exists!$ вероятностная мера P на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, такая, что F — ее функция распределения*

Доказательство. См. ОВиТМ □

Замечание. Свойство 3 нельзя заменить на неубывание по каждой из переменнх.

Доказательство. Рассмотрим $F(x, y) = \begin{cases} 1, x + y \geqslant 0 \\ 0, x + y < 0 \end{cases}$. Заметим, что F удовлетворяет свойствам 1, 2 и не убывает по обеим переменным. При этом, если мы возьем:

$$\Delta^x_{-1,1} \circ \Delta^y_{-1,1} F(x, y) = F(1, 1) - F(-1, 1) - F(1, -1) + F(-1, -1) = 1 - 2 + 0 < 0$$

Получаем, что F — не двумерная функция распределения. □

3.1 Примеры

1. Пусть $F_1, F_2, \dots F_n$ — одномерные функции распределения. Рассмотрим $F(x_1, \dots x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$ — многомерная функция распределения. Свойства 1, 2 очевидны, проверим 3:

   $$\Delta^1_{a_1,b_1} \circ \Delta^2_{a_2,b_2} \circ \dots \circ \Delta^n_{a_n,b_n} F(x_1, \dots x_n) = \prod_{k=1}^{n} (F_k(b_k) - F_k(a_k)) \geqslant 0$$

2. Пусть $p(t_1, \dots t_n) \geqslant 0$, т.ч.

   $$\int_{\mathbb{R}^n} p(t_1, \dots t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1$$

   Тогда:

   $$(*) \quad F(x_1, \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Свойства 1, 2 очевидны, проверим 3:

$$\Delta^1_{a_1,b_1} \circ \Delta^2_{a_2,b_2} \circ \cdots \circ \Delta^n_{a_n,b_n} F(x_1, \dots x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} p(t_1, \dots t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Определение 3.3. Если имеет место представление $(*)$, то $p(t_1, \dots t_n)$ называется плотностью функции распределения F.

4 Вероятностные меры в $\mathbb{R}^\infty$

Определение 4.1. Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$. Рассмотрим для $n \in \mathbb{N}$ вероятностную меру P_n на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, т.ч.

$$P_n(B) = P(Cyl(n, B)), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Тогда можно заметить, что $P_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = P_n(B)$.

Определение 4.2. Свойство выше называется согласованностью для последовательности вероятностных мер $\{P_n\}$

Теорема 4.1 (Колмогорова, о мерах в $\mathbb{R}^\infty$)**.** *Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность согласованных вероятностных мер, P_n — мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(R^\infty))$, такая, что $\forall n \in \mathbb{N} : \forall B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:*

$$(*) \quad P_n(B_n) = P(Cyl(n, B_n))$$

Доказательство. Зададим меру P на цилиндрах по правилу $(*)$. Цилиндры образуют алгебру $\mathcal{A}$. Проверим корректность задания P. Если $Cyl(n, B_n) = Cyl(n + k, B_{n+k})$, то $B_{n+k} = B_n \times \mathbb{R}^k$. Тогда в силу согласованности:

$$P_n(B_n) = P_{n+k}(B_{n+k})$$

Проверим, что P — конечно аддитивна на $\mathcal{A}$. Если $\tilde{B}_1, \dots \tilde{B}_N \in \mathcal{A}$ — непересекаются, то будем считать, что $\exists n : \tilde{B}_i = Cyl(n, B_i), i = 1, \dots N, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда:

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^N \tilde{B}_i\right) = P\left(Cyl\left(n, \bigsqcup_{i=1}^N \tilde{B}_i\right)\right) = P_n\left(\bigsqcup_{i=1}^N B_i\right) = \sum_{i=1}^N P_n(B_i) = \sum_{i=1}^N P(\tilde{B}_i)$$

Проверим, что P непрерывна в нуле (на $\mathcal{A}$). Пусть $\tilde{B}_n \downarrow \varnothing, \tilde{B}_n \in \mathcal{A}$. Без ограничения общности, считаем, что $\tilde{B}_n = Cyl(n, B_n)$.

От противного. Пусть $\lim_{n\to\infty} P(\tilde{B}_n) = \delta > 0$. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ выберем компактные $A_n \subset \mathbb{R}^n$, такие, что $A_n \subset B_n$ и $P(B_n \setminus A_n) \leqslant \frac{\delta}{2^{n+1}}$. Обозначим $\tilde{A}_n = Cyl(n, A_n)$. Тогда: $P(\tilde{B}_n \setminus \tilde{A}_n) = P_n(B_n \setminus A_n) \leqslant \frac{\delta}{2^{n+1}}$. Введем $\tilde{C}_n = \bigcap_{i=1}^n \tilde{A}_i$. Тогда $\tilde{C}_n \downarrow \varnothing, \tilde{C}_n = Cyl(n, C_n)$, где $C_n = A_n \cap (A_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap (A_{n-2} \times \mathbb{R}^2) \cap \cdots \cap (A_1 \times \mathbb{R}^{n-1})$ — тоже компакт в $\mathbb{R}^n$. Далее:

$$P(\tilde{B}_n \backslash \tilde{C}_n) \leqslant \sum_{i=1}^n P(\tilde{B}_n \backslash \tilde{A}_i) \leqslant |B_i \subset B_n, i \geqslant n| \leqslant \sum_{i=1}^n P(\tilde{B}_i \backslash \tilde{A}_i) \leqslant \frac{\delta}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\tilde{C}_n) \geqslant \frac{delta}{2} > 0$$

Возьмем в каждом $\tilde{C}_n$ по точке $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots) \in \tilde{C}_n$. Тогда $(x_1^{(n)}, \dots x_n^{(n)}) \in C_n$. Рассмотирм последовательность $x_1^{(n)}$. Эти все точки лежат в C_1. Выберем подпоследовательность n_{k_i} $x_1^{(n_{k_i})} \to x_1^0 \in C_1$. Для $k \in \mathbb{N}$ построим последовательности $(x_1^{(n_{k_i})}, x_2^{(n_{k_i})}, \dots x_k^{(n_{k_i})})$, которая сходится к $x_k^{(0)}, \dots x_k^{(0)}$ в $_k$. Возьмем диагональ, т.е положим $m_k = n_{k_k}$. Тогда $\forall s \in \mathbb{N} : (x_1^{(m_k)}, \dots x_s^{(m_k)}) \to (x_1^{(0)}, \dots x_s^{(0)}) = x^{(0)}$. Получаем, что P счетно-аддитивна на $\mathcal{A}$. В таком случае по теореме о продолжении меры, P единственным образом продолжается до вероятностной меры на $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ □

5 Случайные величины и векторы

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство

Определение 5.1. Отображение $X : \Omega \to E$ называется случайным элементом, если X — измеримо, т.е. $\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) = \omega : X(\omega) \in B \in \mathcal{F}$

Определение 5.2. Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то X называется случайной величиной.

Определение 5.3. Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то X называется случайным вектором.

Напоминание (Критерий измеримости отображения)**.** Если $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ и $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$, то X — случайный элемент $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{M} X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

Следствие (Эквивалентные определения случайных величин и векторов)**.**

1. $\xi : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ — случайная величина $\Leftrightarrow \{\xi \leqslant x\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \{\xi < x\} \in \mathcal{F}$
2. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор $\Leftrightarrow \forall i : \xi_i$ измеримо

Доказательство.

1. Очевидно следует из критерия, т.к. лучи (замкнутые или открытые) порождают $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. В одну сторону. возьмем $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Т.к. $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times}_{i-1} B_i \times \dots \times \mathbb{R} = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то $\{\xi_i \in B_i\} = \{\xi \in B\} \in \mathcal{F}$. В другую: $\{\xi \in B_1 \times \dots \times B_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}$. Далее, по критерию измеримости, следствие верно (т.к. полуалгебра кубов порождает $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

□

5.1 Действия со случайными величинами

1. Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ — борелевская, ξ — случайная, то $f(\xi)$ — случайная.
2. Арифметические операции
3. Пусть ξ_n — последовательность случайных величин, тогда $\sup_n \xi_n, \inf_n \xi_n, \overline{\lim} \xi_n, \underline{\lim} \xi_n$ — тоже случайные величины

5.2 Характеристики случайных величин и векторов

Определение 5.4. Распределением случайной величины ξ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, определяемая по правилу $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P_\xi(B) = P(\xi \in B)$

Определение 5.5. Распределением случайного вектора ξ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, определяемая по правилу $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P_\xi(B) = P(\xi \in B)$

Упражнение. *P_ξ действительно является вероятностной мерой.*

Определение 5.6. Функция распределения случайной величины ξ — это функция $F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x]) = P(\xi \leqslant x)$.

Определение 5.7. Функция распределения случайного вектора $\vec{\xi}$ — это функция $F_{\vec{\xi}} = P_{\vec{\xi}}((-\infty, \vec{x}]) = P(\vec{\xi} \leqslant \vec{x}) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \dots \xi_n \leqslant x_n)$.

Замечание. Обозначение $\{\xi \leqslant x, \eta \leqslant y\}$ обозначает $\{\xi \leqslant x\} \cap \{\eta \leqslant y\}$.

Замечание. Случайные величины и векторы наследуют классификацию распределений.

Определение 5.8. σ-алгебра, порожденная случайной величиной ξ называется $\mathcal{F}_\xi = \{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Определение 5.9. σ-алгебра, порожденная случайным вектором ξ называется $\mathcal{F}_\xi = \{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$.

Упражнение. *Проверить, что $\mathcal{F}_\xi$ действительно является σ-алгебой.*

Определение 5.10. Пусть ξ — случайный вектор на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ — некая σ-алгебра. Тогда ξ является $\mathcal{C}$-измеримой, если $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{C}$.

Возникает вопрос: а что, если $\mathcal{C} = \mathcal{F}_\eta$?

Лемма 5.1. *Случайная величина ξ является $\mathcal{F}_\eta$-измеримой $\Leftrightarrow \exists$ борелевская функция f, такая, что $\xi = f(\eta)$.*

Доказательство.

- $\Leftarrow$ Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда $\{\xi \in B\} = \{f(\eta) \in B\} = \{\eta \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\} \in \mathcal{F}_\eta$.

- $\Rightarrow$ Пусть $\xi = I_A, A \in \mathcal{F}_\eta$. Тогда $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, т.ч. $A = \{\eta \in B\}$. Тогда $\xi = f(\eta), f(x) = I_B$. Следовательно, все простые $\mathcal{F}_\eta$-измеримые случайные величины тоже являются борелевскими функциями от η. Если ξ — произвольная случайная величина, то рассмотрим последовательность последовательность величин $\{\xi_n\}$, такую, что $\forall \omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, где ξ_m — простые случайные величины и $\forall m \in \mathbb{N} : \xi_m = g_m(\xi)$, где g — борелевская. Далее, $\mathcal{F}_{\xi_m} \subset \mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}_\eta \Rightarrow \exists$ борелевская функция f_m, т.ч. $\xi_m = f_m(\eta)$. Введем $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x)\}$. Положим $f(x) = \begin{cases} \lim_{m\to\infty} f_m(x), x \in B \\ 0, x \notin B. \end{cases}$. Заметим, что $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ — тоже борелевская функция. По построению $\forall \omega \in \Omega : \xi(\omega) = \lim_{m\to\infty} \xi_m(\omega) = \lim_{m\to\infty} f_m(\eta(\omega)) = f(\eta)$.

$\square$

6 Математическое ожидание

Пусть ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Определение 6.1. Математическое ожидание случайной величины ξ называется интеграл Лебега:

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) \int_\Omega \xi dP$$

Напоминание. Напомним, как мы строили интеграл Лебега:

1. Для простой функции как сумму
2. Для неотрицательной функции как предел
3. Для функции разных знаков, разбиваем $\xi = \xi^+ - \xi^-$

Далее говорим следующее:

1. Если $\mathbb{E}\xi^\pm$ конечно, то $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$.
2. Если одно из $\mathbb{E}\xi^\pm$ равно $+\infty$, то $\mathbb{E}\xi = \pm\infty$ (ставим соответствующий знак).
3. Если $\mathbb{E}\xi^+ = \mathbb{E}\xi^- = +\infty$, то говорим, что $\mathbb{E}\xi$ не определено.

6.1 Свойства матожидания

Из свойств интеграла:

1. Линейность: $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$
2. Сохраняет отношение порядка: $\xi \leqslant \eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$.
3. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$

Определение 6.2. Событие $A \in \mathcal{F}$ происходит почти наверное, если $P(A) = 1$. Мы будем писать это как "A п.н.".

И еще свойства математического ожидания:

4. Если $\xi \geqslant 0, \mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$ п.н.
5. Если $\xi = \eta$ п.н., то $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta$.
6. Если $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{E}(\xi \cdot I_A) \leqslant \mathbb{E}(\eta \cdot I_A) \Rightarrow \xi \leqslant \eta$ п.н.

Теорема 6.1 (Замена переменных в интеграле Лебега)**.** *Пусть ξ — случайный вектор из $\mathbb{R}^n$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — борелевская функция. Тогда $\mathbb{E}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P_\xi(dx)$.*

Доказательство. Пусть сначала $f(x) = I_B(x), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\mathbb{E}f(\xi) = E \cdot I\{\xi \in B\} = P(\xi \in B) = P_\xi(B) = \int_B P\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} I_B(x)P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P_\xi(dx)$$

Заключаем, что теорема верна для простых функцйи в силу линейности матожидания и интеграла Лебега. Далее осуществляем приближение простыми функциями в общем случае. □