Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

III СЕМЕСТР

Лектор: *Жуковский Сергей Евгеньевич*

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Введение

1.1 Определения

Определение 1.1. Пусть даны $n, m, k \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{k+1}, F : \Omega \to \mathbb{R}$. $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}$ $, \dots x^{(k)}) = 0$ называется Обыкновенным Дифференциальным Уравнением.

Определение 1.2. $x : I \to \mathbb{R}^n$ — называется решением, если

1. $I \subset \mathbb{R}^n$
2. $x \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$
3. $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots x^{(k)}) \equiv 0, t \in I \Leftrightarrow = 0 \forall t \in I$

Определение 1.3. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{k}$ $x^{(k)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x} \dots x^{(k-1)})$ называется Нормальным Обыкновенным Дифференциальным Уравнением.

1.2 Примеры

Пример. $t^2 + x^2 + \dot{x}^2 = 0$ — нет решений

Пример. $\dot{x} = x \Rightarrow x = ce^t, t \in I$.

Определение 1.4 (Задача Коши). Пусть даны $x_0, \dot{x_0}, \ddot{x_0}, \dots x_0^{(k)} \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots x^{(k)}) = 0 \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}\ (t_0) = \dot{x_0}, \dots x^{(k)}(t_0) = x_0^{(k)} \end{cases} \tag{1.1}$$

Называется Задаей Коши.

Замечание. $x(\cdot)$ — решение задачи Коши, если $x(\cdot)$ — решение (1.1) и $x(t_0) = x_0, \dot{x_0}$ $(t_0) = \dot{x_0}, \dots x_0^{(k)}(t_0) = x_0^{(k)}$

Теорема 1.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}, k = 1, \Gamma = \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (t_0, x_0) \in \Gamma \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Рассмотрим $B((t_0, x_0), r) = \{(t, x) : |t - t_0|^2 + |x - x_0|^2 \leqslant r^2\} \subset \Gamma$. *Пололжим* $M = \sup_{(t,x) \in B}(f(t, x)), d = \frac{r}{\sqrt{1+M^2}}$

Γ — *открыто,* f — *непрерывно* $\Rightarrow \exists$ *решение* $x : (t_0 - d, t_0 + d) \to \mathbb{R}^n$

Пример (Условие непрерывности критично)**.** Рассмотрим $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1, x \leqslant 0 \\ -1, x > 0 \end{cases}$ и задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда не существует решений.

Доказательство. Пусть существует решение $x(\cdot)$. Тогда $\dot{x}\ (0) = f(x(0)) = f(0) = 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \dot{x}\ (t) > 0 \forall t \in [0, \varepsilon) \Rightarrow \dot{x}\ (0) = 1, x(0) = 0 \Rightarrow x(t) > 0 \forall t \in (0, \varepsilon) \Rightarrow \dot{x}\ (t) = f(x(t)) < 0 \forall t \in (0, \varepsilon)$. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть Γ — открыто, f — непрерывна, $\frac{\delta f_i}{\delta x_j} \exists$ и непрерывна $\Rightarrow \exists$ решение x задачи Коши (1.2) и $\forall$ решения $\tilde{x} : I \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши (1.2) $x(t) = \tilde{x}(t), t \in I \cap (t_0 - d, t_0 + d)$.*

Пример (Существенность непрерывность производной (гладкости функции))**.**

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt[3]{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. $x \equiv 0$ — решение
2. $x(t) \equiv at^b$
3. $abt^{b-1} \equiv a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$.

$$\begin{cases} b - 1 = \frac{b}{3} \\ ab = a^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}, t > 0 \text{ — решение } \dot{x} = \sqrt[3]{x}$$

Теперь рассмотрим $\tau \in \mathbb{R}$. По нему можно построить $a(t-\tau)^b$, удовлетворяющая решению.

2 Решения различных дифференциальных уравнений

2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 2.1. Пусть дана $h \in \mathcal{G} \to \mathbb{R}, g : I \to \mathbb{R}, \mathcal{G}, I \subset \mathbb{R}$ — интервалы.

Пример.

$$(3)\ \dot{x} = h(x) \cdot g(t)$$
$$\frac{dx}{dt} = h(x) \cdot g(t)$$
$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt$$
$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt$$
$$H(x) = G(x) + c$$

И далее алгебраически находим x.

Почему так можно делать. Пусть $h(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{G}, H(x)$ — первообразная $x = \frac{1}{h(x)}, G(x)$ — первообразная $g(x), x$ — непрерывная дифференцируемая функция $(t, x(t)) \in I \times \mathcal{G}$. Заметим, что x — решение $\Leftrightarrow \dot{x}\ (t) \equiv h(x(t))g(t) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))} \equiv g(t) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : H(x(t)) \equiv G(t) + c$.

$\square$

Пусть $x_0 \in \mathcal{G}, t_0 \in I$ даны, $h(x_0) = 0, h(x) \neq 0$ при $x \neq x_0, g(t_0) \neq 0, H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)}$ сходится при всех $x \in \mathcal{G}$. Тогда

1. $x(t) \equiv x_0, t \in I$ является решением (3).
2. $\tilde{x}(t) : H(x(t)) = G(t)$ является решением (3) $(G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds)$.
3. $x(t) = \begin{cases} x_0, t \leqslant t_0 \\ \tilde{(x)}(t), t > t_0 \end{cases}$

2.2 Однородные уравнения

Задача. *Пусть $f \in C(I, \mathbb{R}), I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Решить уравнение:*

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Решение. Введем y:

$$x(t) = ty(t)$$
$$x' = (ty(t))' = f(y(t)) \Rightarrow y't + y = f(y)$$
$$x' = (ty(t))' = f(y(t)) \Rightarrow y't = f(y) - y$$

□

2.3 $x' = f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$

2.3.1 Прямые пересекаются

Задача. *Пусть прямые $a_1t+b_1x+c_1, a_2t+b_2x+c_2$ пересекаются в точке (t_0, x_0). Решить уравнение:*

$$x' = f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$$

Решение. Сделаем замену $x(t) = y(t - t_0) + x_0 \Leftrightarrow x(t + t_0) - x_0 = y(t)$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}x(t+t_0) = f\left(\frac{a_1(t+t_0)+b_1x(t+t_0)+c_1}{a_2(t+t_0)+b_2x(t+t_0)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1t+b_1(x(t_0+t)-x_0)}{a_2t+b_2(x(t+t_0)-x_0)}\right) =$$
$$= f\left(\frac{a_1t+b_1y(t)}{a_2t+b_1y(t)}\right) = \tilde{f}\left(\frac{y}{t}\right)$$

□

2.3.2 Прямые не пересекаются

Задача. *Пусть прямые $a_1t+b_1x+c_1, a_2t+b_2x+c_2$ не пересекаются. Решить уравнение:*

$$x' = f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$$

Решение. Тогда $\exists k \neq 0 : a_2 = ka_1, b2 = kb_1$. Сделаем замену $y = a_1t + b_1x$

$$y' = a_1 + b_1 f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{ka_2t + kb_2x + c_2}\right) = a_1 + b_1 f\left(\frac{y + c_1}{ky + c_2}\right)$$

$$y' = a_1 + b_1 f\left(\frac{y + c_1}{ky + c_2}\right)$$

□

2.4 Линейные уравнения

Пусть даны $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $a, b \in C(I, \mathbb{R})$.

Определение 2.2. $x' = a(t)x + b(t)$ — линейное неоднородное уравнение I-ого порядка

Определение 2.3. $x' = a(t)x$ — линейное однородное уравнение I-ого порядка.

Задача. *Найти решение однородного уравнения первого порядка.*

Решение.

$$x(t) = C \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), t, t_0 \in I, c \in \mathbb{R}$$

□

2.5 Метод вариации постоянной

Задача. *Найти решение неоднородного уравнения первого порядка.*

Решение. Решение будет выглядеть аналогично однаромному уравнению, только C мы заменим на $C(t)$

$$x(t) = C(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

$$x'(t) = C'(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + C(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) a(t) = C(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) a(t) + b(t)$$

$$C'(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = b(t)$$

$$C'(t) = b(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

□

2.6 Уравнение Бернулли

Задача. *Пусть даны* $I \subset \mathbb{R}$ *— интервал,* $a, b \in C(I, \mathbb{R}), \alpha \neq 0, 1$. *Решить уравнение*

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha$$

Решение. Решение $x(t) \equiv 0$ очевидно подходит. Будем искать решение в виде $x(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

$$\frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y' = a y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$
$$y' = (1-\alpha)(ay + b)$$

□

2.7 Уравнение Риккати

Задача. *Пусть даны* $I \subset \mathbb{R}$ *— интервал,* $a, b, c \in C(I, \mathbb{R}), x_0 \in C^1(I, \mathbb{R})$. *Решить уравнение:*

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

Доказательство. Пусть $x_0(\cdot)$ — решение. Будем искать решения в виде $x(t) = x_0(t) + y(t)$.

$$x_0' + y' = ax_0^2 + 2ax_0y + ay^2 + bx_0 + by + c$$

$$y' = (2ax_0 + b)y + ay^2$$

□

2.8 Уравнения в дифференциалах

Пусть даны $\Omega \subset \mathbb{R}^2, M, N : \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение 2.4. Уравнение

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0 \tag{2.1}$$

Называется уравнением в дифференциалах

Определение 2.5. Решением (2.1) называются функции $x(t)$ и $t(x)$, являющиеся решением однородного дифференциального уравнения: $M(t, x) + N(t, x)x' = 0$ и $M(t, x)t' + N(t, x) = 0$

2.8.1 Уравнения в полных дифференциалах

Определение 2.6. Если Ω открыто и $M, N \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Тогда (2.1) называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{dg}{dt}(t, x) = M(t, x), \frac{dg}{dx}(t, x) = N(t, x)$.

Если (2.1) является УВПД, то (1) $\sim g(t, x) = c, c \in \mathbb{R}$:

$$g(t, x(t)) \equiv c, g(t(x), x) \equiv c$$

x_0 является решением (1) $\Leftrightarrow M(t,x(t)) + N(t,x(t))x'(t) \equiv 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dg}{dt}(t,x(t)) + \frac{dg}{dx}(t,x(t))x' \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}g(t,x(t)) \equiv 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : g(t,x(t)) \equiv c$$

1. Если (2.1) — УВПД и $\Omega = I \times J$ ($I, J \subset \mathbb{R}$ — интервалы), то

$$g(t,x) = \int_{t_0}^{t} M(s,x)ds + \gamma(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{t_0}^{t} M(s,x)sx + \gamma(x)\right) = N(t,x)$$

Теорема 2.1. *Если Ω — выпуклое и $\frac{dM}{dx}(t,x) \equiv \frac{dM}{dt}(t,x)$, то (2.1) является уравнением в полных дифференциалах.*

2.8.2 Интегрирующий множитель

Пусть Ω — открыто, $M, N \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

Определение 2.7. $\mu(t,x) \in C^1(\Omega,\mathbb{R}), \mu(t,x) \neq 0 \forall (t,x) \in \Omega$ называется интегрирующим множителем для (2.1), если

$$\mu(t,x)M(t,x)dt + \mu(t,x)N(t,x)dx = 0$$

Является УВПД

Утверждение 2.1. *Пусть $\frac{\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dt}}{N}$ зависит только от t, $N(t,x) \neq 0 \forall (t,x) \in \Omega$. Тогда существует интегрирующий множитель μ, зависящий только от t.*

$$\frac{d}{dx}(\mu M) = \mu\frac{dM}{dx}$$

$$\frac{d}{dt}(\mu N) = \mu' N + \mu\frac{dN}{dt}$$

$$\mu' N + \mu\frac{dN}{dt} = \mu\frac{dM}{dx}$$

$$\mu' = \mu\left(\frac{\frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dx}}{N}\right)$$

3 Принцип сжимающих отображений

3.1 Напоминание с Матана

Определение 3.1. Пусть $X \neq \varnothing, \rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Тогда (X, ρ) называется метрическим пространством, а ρ — метрикой, если выполнены следующие условия:

1. $\rho(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
2. $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$
3. $\rho(x_1, x_2) \leqslant \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2)$

Определение 3.2. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется сходящейся, если $\exists x \in X :$ $\rho(x_n, x) \to 0$.

Определение 3.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N(\rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$

Замечание. Последовательность сходится $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ она фундаментальна (есть примеры метрических пространств, в которых нет следствия влево, например в $(0, 1)$, последовательность $\frac{1}{n}$ фундаментальна, но не сходится).

Замечание. В $\mathbb{R}^n$ определения фундаментальности и сходимости равносильны

Определение 3.4. Метрическое пространство. (x, ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Пример. $(\mathbb{R}^n, \rho(x, y) = |x - y|)$

Пример. Пусть $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — непустой компакт, $I \subset \mathbb{R}, I \neq \varnothing$. Положим $X = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : (t, x(t)) \in K \forall t \in I\}, \rho(x, y) = \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|$. Тогда (X, ρ) — полное метрическое пространство

Доказательство. Нетрудно проверить, что ρ — метрика. Рассмотрим $\{x_n\} \subset X$ — фундаментальную последовательноость, $\forall t \in I |x_i(t) - x_j(t)| \leqslant \rho(x_i, x_j) \Rightarrow \{x_i(t)\} \subset \mathbb{R}^n$ — фундаментальна. Тогда $\exists x(t) \in R^n : x_i(t) \to x(t)$. $\{x_j\} \subset X$ — фундаментальна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N :$ $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon \forall i, j > N$. Тогда $\forall \varepsilon > 0, i \geqslant N, t \in I |x(t) - x_i(t)| \leqslant |x(t) - x_j(t)| + |x_j(t) - x_i(t)| <$ $|x(t) - x_j(t)| + \varepsilon \to_{j \to \infty} \varepsilon \Rightarrow x_j \rightrightarrows x \Rightarrow x \in C(I, \mathbb{R}^n)$. $\forall t \in I (t, x_j(t)) \to_{j \to \infty} (t, x(t)) \Rightarrow$ $(t, x(t)) \in K$, т.к. K — замкнуто. Но тогда $x \in X$. Таким образом, получили, что любая фундаментальная последовательность сходится. □

Определение 3.5. Пусть $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ — метрические пространства, $\Phi : X \to Y$. Тогда Φ называется непрерывной, если $\forall \{x_j\} \subset X, \forall x \in X : (x_j \to x \Rightarrow \Phi(x_j) \to \Phi(x))$.

Определение 3.6. Φ называется липшицевым, если $\exists L \geqslant 0 : \tilde{\rho(\Phi(x_1), \Phi(x_2))} \leqslant L\rho(x_1, x_2)$.

Утверждение 3.1. *Φ липшицево $\Rightarrow \Phi$ непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим $x_j \to x \Rightarrow \rho(x_j, x) \to 0 \Rightarrow \rho(\Phi(x_j), \Phi(x)) \tilde{\leqslant} L\rho(x, x_j) \to 0$. □

Пример (Обратное неверно)**.** Рассмотрим $X = [0, 1], \Phi(x) = \sqrt{x}$. Тогда $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot |x - 0|$, но $\frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty \Rightarrow \sqrt{x}$ — не липшицево.

Определение 3.7. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — линейный оператор. Будем через A обозначать его матрицу. Тогда норма линейного оператора $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |A_i|^2}$

Утверждение 3.2. *Пусть* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *— линейный оператор. Тогда* $\forall x \in \mathbb{R}^n |Ax| \leqslant \|A\||x|$.

Доказательство.

$$|Ax| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(a_j, x)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{k}|a_j|^2|x|^2} = \|A\||x|$$

□

Следствие. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — линейный оператор. Тогда A — липшицево.

Доказательство.

$$|Ax_1 - Ax_2| = A(x_1 - x_2) \leqslant \|A\||x_1 - x_2|$$

□

Утверждение 3.3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *— открыто,* $K \subset \Omega, K$ *— непустой компакт,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *— непрерывна,* $\forall (t, x) \in \Omega : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$ *существует и непрерывна и* $\forall t \in \mathbb{R} : K_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in K\}$ *выпукло. Тогда* $\exists L > 0$*:*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \forall t \in \mathbb{R} \forall x_1, x_2 \in K_t$$

Доказательство. Положим $\forall t \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in K_t$, $\gamma(s) = f(t, x_1 + s(x_2 - x_1)), s \in [0, 1]$.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |\gamma(0) - \gamma(1)| = \left|\int_0^1 \gamma'(s)ds\right| \leqslant \left|\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1))\right\| |x_2 - x_1| ds$$

□

3.2 Принцип сжимающих отображений

Определение 3.8. $\Phi : X \to X$ называется сжимающих, если $\exists \beta \in [0, 1) : \rho(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leqslant \beta\rho(x_1, x_2) \forall x_1, x_2 \in X$

Утверждение 3.4. *Если* Φ *— сжимающее отображение, то* $\exists! \xi \in X : \xi = \Phi(\xi)$

Доказательство. См. Теорему Банаха в третьей лекции Матана □

Следствие. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $\Phi : X \to X, \exists N : \Phi^N$ — сжимающее. Тогда $\exists! \xi \in X : \xi = \Phi(\xi)$

Доказательство. **Существование:** Φ — сжимающее отображение, тогда $\exists! \xi \in X : \xi = \Phi^N(\xi)$. $\Phi(\xi) = \Phi(\Phi^N(\xi)) = \Phi^N(\Phi(\xi)) \Rightarrow \Phi(\xi) = \xi$

Единственность:. $\tilde{\xi} \in X : \tilde{\xi} = \Phi(\tilde{\xi}) \Rightarrow \tilde{\xi} = \Phi^N(\tilde{\xi}) \Rightarrow \xi = \tilde{\xi}$.

□

4 Существование решений задачи Коши

Задача (Коши)**.** *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *— открыто,* $(t_0, x_0) \in \Gamma, f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$*. Найти все* x*, удовлетворяющие системе:*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Теорема 4.1 (О существовании и единственности решения задачи Коши)**.** *В задаче Коши (4.1), Положим* $r > 0 : B = B((t_0, x_0), r) \subset \Gamma, M = \sup_{(t,x)\in B} |f(t,x)|, d = \frac{r}{\sqrt{1+M^2}}$*. Тогда, если* f *— непрерывна, а* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *существуют и непрерывны, то*

1. $\exists$ *решение* $x : (t_0 - d, t_0 + d) \to \mathbb{R}^n$ *задачи Коши (4.1).*
2. $\forall$ *решения* $y : I \to \mathbb{R}^n$ *задачи Коши (4.1), верно:* $y(t) = x(t) \forall t \in I \cap (t_0 - d, t_0 + d)$*.*

Доказательство. Положим $T \subset (t_0-d, t_0+d), t_0 \in T, R = \sqrt{r^2 - d^2}, L = \max_{(t,x)\in B} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|, X = C(T, B(x_0, R))$. Тогда:

1. $x \in X \Rightarrow (t, x(t)) \in B \forall t \in T$.

$$\forall t \in T : |t - t_0|^2 + |x(t) - x_0|^2 \leqslant d^2 + r^2 - d^2 = r^2$$

2. Рассмотрим $\Phi : X \to X, \Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, x \in X, t \in T$.

$$\forall x \in X, t \in T : |\Phi(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))|ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^r Mds \right| \leqslant$$

$$Md = M\frac{r}{\sqrt{1+M^2}} = R$$
$$M^2r^2 = R^2(1+M^2)$$
$$M^2r^2 = (r^2 - d^2)(1+M^2)$$
$$0 = r^2 - d^2 - d^2M^2$$
$$d^2(1+M^2) = r^2$$

3. $x \in X \Leftarrow x \in C(T, R^n)$.

$$x = \Phi(x) \Rightarrow x(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \Leftrightarrow \begin{cases} x \in C(T, \mathbb{R}^n) \\ x'(t) \equiv f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in C(T, \mathbb{R}^n) \\ x \text{ — решение (4.1)} \end{cases}$$

Заметим, что достаточно доказать, что $x \in X$, то есть, что $|x(t) - x_0| \leqslant R \forall t \in T$. Пусть $\exists t \in T : t > t_0 : |x(t) - x_0| > R$. Тогда $\exists \tau > t_0 : |x(\tau) - x_0| > R$ и $|x(t) - x_0| < R, t \in [t_0, R)$.

$$|x(\tau) - x_0| = \left| \int_{t_0}^\tau f(s, x(s))sx \right| \leqslant M \int_{t_0}^\tau ds \leqslant Md = R$$

4. Докажем, по индукции, что $|\Phi^N(x_1)(t) - \Phi^N(x_2)(t)| \leqslant \frac{L^N}{N!}|t-t_0|^N\rho(x_1,x_2)\forall x_1, x_2 \in X, \forall t \in T, \forall N$.

   База: $N = 1$.

$$|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}\left(f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))\right)ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t}|f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))|\,ds\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds\right| \leqslant L|t-t_0|\rho(x_1,x_2)$$

   Переход:

$$|\Phi^N(x_1)(t) - \Phi^N(x_2)(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}\big(f(s,\Phi^{N-1}(s)) - f(s,\Phi^{N-1}(x_2)(s))\big)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t}|\Phi(x_1)^{N-1}(s) - \Phi(x_2)^{N-1}(s)|\right| \leqslant L\left|\frac{L^{N-1}}{(N-1)!}|s-t_0|^N\rho(x_1,x_2)ds\right| =$$

$$= \frac{L^N}{(N-1)!}\rho(x_1,x_2)\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^{N-1}ds\right| = \frac{L^N}{N!}|t-t_0|^N\rho(x_1,x_2)$$

5. Тогда $\Phi : \exists N : \Phi^N : X \to X$ является сжимающим отображением, т.к. $\frac{L^N}{N!}|t-t_0|^N \leqslant \frac{L^N}{N!}d^N < 1$ при достаточно больших N. Тогда $\exists! x \in X : x = \Phi(x) \Rightarrow \exists!$ на T решение x задачи Коши (4.1). Возьмем любое решение $y : I \to \mathbb{R}^n$. Положим $T = I \cap (t_0 - d, t_0 + d)$. Тогда на T верно, что $x(t) = y(t)$

□

4.1 В общем случае

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — открытое, $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^{(n)} = g(t, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0^1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{4.2}$$

Сделаем замену $y_1 = x, y_2 = x', \ldots y_n = x^{(n-1)}$. Тогда мы получим систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = g(t, y_1, y_2, \ldots y_n) \end{cases} \tag{4.3}$$

Покажем, что полученная система в действительности эквивалентна задаче Коши (4.2). Заметим, что

$$\begin{cases} y_1(t_0) = x_0 \\ y_2(t_0) = x_0^1 \\ \vdots \\ y_n(t_0) = x_0^{n-1} \end{cases}$$

Тогда:

$$x \text{ — решение (4.2) } \Rightarrow \begin{pmatrix} x(\cdot) \\ x'(\cdot) \\ x''(\cdot) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(\cdot) \end{pmatrix} \text{ — решение (4.3)}$$

$$y_1 \text{ — решение (4.2) } \Leftarrow \begin{pmatrix} y_1(\cdot) \\ y_2(\cdot) \\ y_3(\cdot) \\ \vdots \\ y_n(\cdot) \end{pmatrix} \text{ — решение (4.3)}$$

Следствие. Если g — непрервна, и $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ существуют и непрерывны, то

1. $\exists d > 0 : \exists$ решение $x : (t_0 - d, t_0 + d) \to \mathbb{R}$ задачи Коши (4.2)
2. $\forall$ решения $\tilde{x} : I \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши (4.3), $x(t) \equiv \tilde{x}(t), t \in I \cap (t_0 - d, t_0 + d)$.

Доказательство.

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ g(t, y_1, y_2, \dots y_n) \end{pmatrix}, (t, y) \in \Gamma$$

Положим $y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^{n-1} \end{pmatrix}$. Но тогда по теореме о существовании и единственности решений, $\exists d, x$, удовлетворяющие условию. □

5 Уравнения, не разрешенные относительно производной

Теорема 5.1 (О неявной функции)**.** *Даны $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, F : \Omega \to \mathbb{R}^n, (v_0, \sigma_0) \in \Omega, F(v, \sigma) = 0, v$ — неизвестная, σ — параметр. Пусть также $F(x_0, \sigma_0) = 0$. Тогда, если F непрерывно дифференцируема и* $\det \frac{\partial F}{\partial V}(v_0, \sigma_0) \neq 0$, *то $\exists$ окрестность V точки v_0, окрестность Σ точки σ_0, непрерывно дифференцируемая функция $g : \Sigma \to \mathbb{R}^n$, такая, что $F(g(\sigma), \sigma) \equiv 0$, $\forall \sigma \in \Sigma \forall v \in V : F(v, \sigma) = 0 \Rightarrow v = g(\sigma)$.*

Определение 5.1. Пусть даны $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — открыто, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируема. Уравнение

$$F(t, x', x'') = 0$$

Называется уравнением, не разрешенным относительно производной.

Определение 5.2 (Задача Коши)**.** Система

$$\begin{cases} F(t, x', x'') = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

С дополнительными условиями $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ называется задачей коши для данного вида уравнений.

Пример.

$$\begin{cases} x'^2 + x^2 = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Не имеет решений.

Пример.

$$\begin{cases} x'^2 - x^2 = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Имеет решение $x(t) = e^{\pm t}$

Теорема 5.2. *Пусть $F(t_0, x_0, v_0) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial v}(t_0, x_0, v_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ интервал $I \subset \mathbb{R}, x : I \to \mathbb{R}$, такие, что*

1. *x является решением задачи коши, $x'(t_0) = v_0$*

2. *$\forall$ решения $y : J \to \mathbb{R}$ задачи коши, $y'(t_0) = v_0$, $x(t) \equiv y(t), t \in I \cap J$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $F(t, x, v) = 0$ с неизвестным v и параметром $\sigma = (t, x)$. По теореме о неявной функции следует, что существуют окрестность Σ точки (t_0, x_0), окрестность V точки v_0, непрерывно дифференцируемая $g : \Sigma \to \mathbb{R}$, такие, что:

1. $F(t, x, g(t, x)) \equiv 0$

2. $\forall v \in V \forall (t, x) \in \Sigma : F(t, x, v) = 0 \Rightarrow v = g(t, x)$.

Решим следующую задачу коши для нормального уравнения:

$$\begin{cases} x' = g(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.2}$$

По теореме о решениях задачи коши для нормального уравнения, $\exists I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $x : I \to \mathbb{R}$, такая, что:

1. x — решение задачи Коши (5.2)

2. $\forall y : J \to \mathbb{R}$ — решения задачи Коши (5.2) $x(t) \equiv y(t), t \in I \cap J$.

Тогда x является решением (5.2), т.к. $F(t, x(t), x'(t)) \equiv F(t, x(t), g(t, x(t))) \equiv 0$. Но $x(t_0) = x_0$, поэтому $x'(t_0) = g(t_0, x(t_0) = g(t_0, x_0)) = v_0$.

Рассмотрим $y : J \to \mathbb{R}$ — произвольное другое решение (5.1). Пусть $\exists t \in I \cap J, t > t_0 : x(t) \neq y(t)$. Положим $\tau = \inf\{t \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\}$. Имеем:

1. $x(\tau) = y(\tau)$ (в силу непрерывности и определения τ)

2. $\exists \varepsilon > 0 : [\tau, \tau + \varepsilon \subset I \cap J]$ и $(t, y(t), y'(t)) \in \Sigma \times V$.

Тогда $y'(t) = g(t, y(y)), t \in [\tau, \tau + \varepsilon) \Rightarrow y$ является решением задачи Коши (5.2) при $t \in [t_0, \tau + \varepsilon) \Rightarrow x(t) = y(t), t \in [t_0, \tau + \varepsilon)$, получили противоречие с тем, что $\tau = \inf\{t \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\}$, противоречие. □

Рассмотрим уравнение:

$$F(t, x, x') = 0 \tag{5.3}$$

Определение 5.3. Функция $x : I \to \mathbb{R}$ называется особым решением уравнения (5.3), если x является решением и $\forall y$ — решения (5.3) верно, что $\forall t_0 \in I : y(t_0) = x(t_0) \Rightarrow y'(t_0) = x'(t_0)$.

Определение 5.4. Множество точек $D = \left\{(t, x, v) : F(t, x, v) = 0, \frac{\partial F}{\partial v}(t, x, v) = 0\right\}$ называется дискриминантной кривой.

Замечание. По предыдущей теореме, если x является особым решением, то $(t, x(t), x'(t)) \in D \forall t$.

Пример.

$$x'^2 - 4x^3(1 - x) = 0$$

Тогда:

$$x(t) = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 1 \text{ — особое решение} \\ \frac{1}{(t-c)^2+1} \end{array}\right.$$

Причем дискриминантная кривая имеет вид: $D = \{(t, x, v) : x = 0 \vee x = 1\}$. Таким образом, не все решения являются особыми, не все точки из дискриминантной кривой являются точками особого решения.

Лемма 5.1 (О дифференцируемом неравенстве)**.** *Пусть I — интервал или отрезок, $t_0 \in I, k > 0, m \in \mathbb{R}, r_0 \geqslant 0, z \in C^1 : \forall t \in I : |z'(t)| \leqslant k|z(t)| + m, |z(t_0)| \leqslant r_0$. Тогда*

$$\forall t \in I : |z(t)| \leqslant r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right)$$

Доказательство. Будем рассматривать только такие t, что $|z(t)| \neq 0$. Рассмотрим

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = \frac{d}{dt}(z(t), z(t)) = \frac{d}{dt}\left(z_1^2(t) + z_2^2(t) + \dots + z_n^2(t)\right)$$

$$= 2\left(z_1 z_1' + z_2 z_2' + \dots + z_n z_n'\right) = 2(z(t), z'(t))$$

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = 2|z(t)|\frac{d}{dt}|z(t)|$$

$$|z(t)|\frac{d}{dt}|z(t)| = (z(t), z'(t)) \leqslant |z(t)||z'(t)|$$

$$\frac{d}{dt}|z(t)| \leqslant |z'(t)|$$

Пусть $\exists \tilde{t} > t_0 : |z(\tilde{t})| > r_0 e^{k|\tilde{t}-t_0|} + \frac{m}{k}\left(e^{k|\tilde{t}-t_0|} - 1\right)$. Положим $\tau = \max\{s \in [t_0, \tilde{t}] : |z(s)| = |z(t_0)|\}$. $|z(t)| > 0$ при $t \in (\tau, \tilde{t}]$. Имеем: $\frac{d}{dt}|z(t)| \leqslant |z'(t)| \leqslant k|z(t)| + m$ при $t \in (\tau, \tilde{t}]$.

$$\frac{d}{dt}|z(t)|e^{-kt} - ke^{-kt}|z(t)| \leqslant me^{-kt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(|z(t)|e^{-kt}\right) \leqslant me^{-kt}$$

$$|z(t)e^{-kt}| - |z(\tau)|e^{-k\tau} \leqslant -\frac{m}{k}e^{-kt} + \frac{m}{k}e^{-k\tau}$$

$$|z(t)| \leqslant |z(\tau)|e^{k(t-\tau)} + \frac{m}{k}\left(e^{k(t-\tau)} - 1\right) \leqslant r_0 e^{k(\tilde{t}-t_0)} + \frac{m}{k}e^{k(\tilde{t}-t_0)}$$

□

6 Теоремы о продолжении решений

Теорема 6.1. *Пусть даны $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — открыто, $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n, (t_0, x_0) \in \Gamma$. Рассмотрим задачу Коши:*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Тогда, если выполнены условия теоремы о единственности, $D \subset \Gamma$ — открытое и ограниченное, такое, что $\overline{D} \subset \Gamma, (t_0, x_0) \in D$, то $\exists a, b \in \mathbb{R}, x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, такие, что

1. *$x(\cdot)$ — решение задачи Коши (6.1)*
2. *$(t, x(t)) \in D \forall t, \exists x(a+0), x(b-0) : (a, x(a+0)), (b, x(b-0)) \in \delta D$.*
3. *$y : J \to \mathbb{R}^n$ — решение задачи Коши (6.1), тогда $x(t) = y(t) \forall t \in J \cap (a,b)$.*

Доказательство. Положим $M = \max{(t,x) \in \overline{D}}|f(t,x)|$. Положим $r_0 = dist((t_0, x_0), \delta D), d_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1+M^2}}$. Тогда по теореме о существовании решения, $\exists \xi_0 : (t_0 - d_0, t_0 + d_0) \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши (6.1). Рассмотрим следующую последовательность функций и точек ξ_n, t_n, r_n, d_n: $\xi_0 : (t_0 - d_0, t_0 + d_0) \to \mathbb{R}^n$ — решение задачи Коши (6.1), t_0, r_0, d_0 — даны, а последовательность задается следующим образом:

$$t_n = t_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n-1}$$

$$r_n = dist((t_n, \xi_{n-1}), \delta D)$$

:

$$d_n = \frac{r_n}{\sqrt{1+M^2}}$$

$$\xi_n : (t_n - d_n, t_n + d_n) \to \mathbb{R}^n = \text{решение задачи Коши:}$$

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_n) = \xi_{n-1}(t_n) \end{cases} \tag{6.2}$$

Заметим, что $\{t_j\}$ возрастает и ограничена, тогда $\exists \lim_{j\to\infty} t_j = b$. Также, по теореме о существовании и единственности решения, $\xi_n(t) = \xi_{n+1}(t) \forall t \in (t_n - d_n, t_n + d_n) \cap (t_{n+1} - d_{n+1}, t_{n+1} + d_{n+1})$.

Тогда положим:

$$x(t) = \begin{cases} \xi_0(t), t \in (t_0 - d_0, t_1) \\ \xi_1(t), t \in (t_1 - d_1, t_2) \\ \vdots \\ \xi_n(t), t \in (t_n - d_n, t_{n+1}) \\ \vdots \end{cases}$$

Тогда x определена на $(t_0 - d_0, b)$ и гладкая, т.к. составлена из гладких функций ξ_n, у которых ξ_n, ξ_{n+1} совпадают (и, как следствие, x — гладкая на $t_n - d_n, t_{n+1} + d_{n+1}$). Так как любые два таких соседних интервала пересекаются, то x — гладкая. При этом, x — решение (6.1), т.к. $x(t_0) = \xi(t_0) = x_0$. Тогда $|x'(t)| = |f(t, x(t))| \leqslant M \forall t \in (t_0 - d_0, b) \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant M|t_1 - t_2| \forall t_1, t_2 \in (t_0 - d_0, b) \Rightarrow \exists x(b - 0)$.

Теперь докажем, что $(b, x(b-0)) \in \delta D$. Заметим, что:

$$t_n = t_0 + \frac{d_0}{2} + \frac{d_1}{2} + \cdots + \frac{d_{n-1}}{2} \to b \Rightarrow d_n \to 0 \Rightarrow dist((t_n, x(b-0)), \delta D) \to 0 \Rightarrow (b, x(b-0)) \in \delta D$$

Число a будет строиться аналогично.

Докажем теперь, что если $y : J \to \mathbb{R}^n$ — решение (6.1), то $y(t) = x(t), t \in J \cap (a, b)$. Пусть $\exists t \in (a, b) \cap J, t > t_0 : x(t) \neq y(t)$. Положим $\tau = \inf\{t \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\}$. Но тогда x, y удовлетворяют решению условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши:

$$\begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(\tau) = x(\tau) \end{cases}$$

Но тогда $\tau \neq \inf\{t \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\}$. Для случая $\exists t < t_0 : x(t) \neq y(t)$ заменяем inf на sup. □

Пример. $\sin\left(\frac{1}{t}\right), t > 0$ не может быть решением дифференциального уравнение для $\Gamma = \mathbb{R}^2$, т.к. если положить $D = (-2, +\infty) \times (-2, 2)$, то по теореме о продолжении решения, $\exists a : (a, x(a+0)) \in \delta D$, а это неправда.

Теорема 6.2. *Пусть даны $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — открыто, $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n, (t_0, x_0) \in \Gamma$. Рассмотрим задачу Коши:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Тогда, если $\exists \alpha, \beta \in C(I, \mathbb{R}_+) : |f(t, x)| \leqslant \alpha(t)|x| + \beta(t) \forall (t, x) \in \Gamma$, то $\exists x : I \to \mathbb{R}^n$, такая, что:

1. *$x(\cdot)$ — решение задачи коши (6.3)*
2. *$\forall y : J \to \mathbb{R}^n$ — решения задачи коши (6.3), верно: $J \subset I, y(t) = x(t) \forall t \in J$.*

Доказательство. Пусть $a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j \forall j, a_j$ — убывают, b_j — возрастают $a_j < t_0 < b_j$, $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$. Положим $k_j = \max_{t \in [a_j, b_j] |\alpha(t)| + 1}, m_j = \max_{t \in [a_j, b_j]} \beta(t)$. Положим также

$$R_j = 1 + \max_{t \in [a_j, b_j]} \left(|x_0| e^{k_j |t - t_0|} + \frac{m_j}{k_j} \left(e^{x_j |t - t_0|} - 1 \right) \right) > |x_0|$$

$$D_j = (a_j, b_j) \times B_{\mathbb{R}^n}(0, R_j) \Rightarrow (t_0, x_0 \in D_j)$$

Но тогда существует решение $\xi_i : I_j \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши (6.3). Тогда $|\xi_i'(t)| = |f(t, \xi(t))| \leqslant k_j|\xi_j(t)| + m_j \forall t \in I_j$ тогда по лемме о дифференцируемом неравенстве, $|\xi_j(t)| \leqslant R_j \forall t \in I_j$. Из теоремы о продолжении решения, получаем, что $I_j = (a_j, b_j)$. Тогда $\forall t \in I \exists j : t \in (a_j, b_j)$, при этом $x(t) = \xi_j(t)$ при $t \in (a_j, b_j)$. Тогда по построению, x является искомой □

Упражнение. *Доказать единственность, пользуясь стандартным приемом с* $\tau = \inf\{t \in I \cap J, t > t_0, x(t) \neq y(t)\}$.

Пример (Не всегда можно продолжить решение на всю вещественную ось)**.** Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Решая уравнение, получаем: $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7 Системы линейных однородных дифференциальных уравнений

Пусть даны $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $n \in \mathbb{N}, a_{jk}, b_j \in C(I, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_n + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \sim x' = A(t)x + b(t) \tag{7.1}$$

Где

$$t \in I, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Следствие (Из предыдущей теоремы)**.** $\forall t_0 \in I \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ задача Коши (7.1) имеет единственное решение на I

Доказательство.

$$f(t, x) = A(t)x + b(t), t \in I, x \in \mathbb{R}^n$$

$$|f(t, x)| = |A(t)x + b(t)| \leqslant \underbrace{\|A(t)\|}_{\alpha(t)} |x| + \underbrace{|b(t)|}_{\beta(t)}$$

□

Пусть теперь $L \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ и уравнение имеет вид $Lx(t) = x'(t) - A(t)x(t)$. Тогда (7.1) можно переписать в виде $Lx = b$ и

$$\text{множество решений (7.1)} = \{x : Lx = b\} = \{x : Lx = 0\} + \tilde{x}$$

Где $\tilde{x}$ — любое (одно), такое, что $L\tilde{x} = b$. Поэтому нам надо решить уравнение

$$x' = A(t)x \tag{7.2}$$

Уравнение выше является системой линейных однородных дифференциальных уравнений.

Определение 7.1. Пусть $x^1, x^2 \dots x^k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Тогда они называются линейно независимыми, если $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ верно:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_k x^k(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall i \lambda_i = 0$$

Определение 7.2. Пусть $x^1, x^2 \dots x^k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Тогда они называются линейно зависимыми, если $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ такие, что:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_k x^k(t) \equiv 0, \exists i : \lambda_i = 0$$

Следствие. $x^1, x^2 \dots x^k$ линейно зависимы, тогда $\forall t \in I x^1(t), x^2(t) \dots x^k(t)$ линейно зависимы

Пример (Обратное неверно)**.** Рассмотрим:

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Определение 7.3. Пусть $x^1, x^2 \dots x^k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Тогда $\omega(x^1, x^2 \dots x^k)(t) = \det(x^1(t), x^2(t) \dots x^k(t)), t$ I — определитель Вронского

Следствие. $x^1, x^2 \dots x^k$ линейно зависимы, тогда $\omega(x^1, x^2 \dots x^k)(t) = 0$

Утверждение 7.1. *$x^1, x^2 \dots x^k$ — решение (7.2) и $\exists t_0 \in I : x^1(t_0), x^2(t_0) \dots x^k(t_0)$ линейно зависимы, то $x^1, x^2 \dots x^k$ линейно зависимы и $\omega(t) = 0$*

Доказательство.

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^j(t_0) = 0$$

Положим $x(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^j(t), t \in I$. Тогда $x(t_0) = 0, x$ — решение (7.2), из чего следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^j(t_0) \equiv 0 \Rightarrow x^1, x^2, \dots x^k \text{ ЛЗ}, \omega(t) = 0$$

□

Определение 7.4. Фундаментальная система решений — набор из n независимых решений.

Утверждение 7.2. *ФСР существует*

Утверждение 7.3. *$x^1, x^2, \dots x^k$ — ФСР $\Rightarrow$ множество решений (7.2) =*

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x^j : (c_1, c_2, \dots c_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

.

Доказательство.

$\supset$ очевидно

$\subset$ $\forall$ решения $\tilde{x}$ системы (7.2), $\forall t_0 \in I$ $x^1(t_0), x^2(t_0), \dots x^k(t_0)$ — ЛНЗ $\Rightarrow \exists!(c_1, \dots c_k) \in \mathbb{K}^n$, $\tilde{x}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^j(t_0)$. $\tilde{x}, \sum_{c_j x^j}$ являются решением задачи Коши $x' = A(t)x, x(t_0) = \tilde{x}(t_0) \Rightarrow \tilde{x} = \sum_{c_j x^j}$

□

Замечание. Пусть $x^1, x^2, \dots x^n$ — ФСР уравнения (7.2), $X(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots x^n(t)), t \in I$. Тогда:

1. $X'(t) = A(t)X(t), t \in I$
2. Общий вид решения (7.2) представим как $Xc, c \in \mathbb{R}^n$
3. $\omega(t) = \det X(t), t \in I$

Лемма 7.1. *Пусть*

$$\omega_j(t) = \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_j^1)'(t) & (x_j^2)'(t) & \dots & (x_j^n)'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

Тогда $\omega(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t)$

Доказательство.

$$\omega(t) = \sum_{\pi \in S_n} \sigma(\pi) x_1^{\pi(1)}(t) x_2^{\pi(2)}(t) \dots x_n^{\pi(n)}(t)$$

$$\omega'(t) = \sum_{\pi \in S_n} \sigma(\pi) \left(\left(x_1^{\pi(1)} \right)'(t) x_2^{\pi(2)}(t) \dots x_n^{\pi(n)}(t) + x_1^{\pi(1)}(t) \left(x_2^{\pi(2)} \right)'(t) \dots x_n^{\pi(n)}(t) + \dots \right) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t)$$

□

Теорема 7.1 (Формула Лиувилля-Остроградского)**.** *Пусть $x^1, x^2, \dots x^n$ — решение (7.2). Тогда: $\forall t_0, t \in I : \omega(t) = \omega(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\ A(s) ds \right)$*

Доказательство.

$$\omega_j(t) = \det\begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_j^1)'(t) & (x_j^2)'(t) & \dots & (x_j^n)'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix} = (*)$$

При этом, $(x^1)' = A(t)x^1(t) \Rightarrow (x_j^1)'(t) = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k^1(t)$.

$$(*) = \det\begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k^1(t) & \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k^2(t) & \dots & \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{jj}(t)x_j^1(t) & a_{jj}(t)x_j^2(t) & \dots & a_{jj}(t)x_j^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \equiv a_{jj}(t)\omega(t)$$

$$\omega'(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j(t) = \sum_{j=1}^n a_{jj}\omega(t) \equiv (tr\ A(t))\omega(t)$$

Но тогда:

$$\omega(t) = \omega(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t tr\ A(s)ds\right)$$

□

Метод вариации произвольной постоянной

Пусть $X(t)$ — ФСР. Мы хотим найти решения (7.1) в виде $X(t)c(t), t \in I$. Чему равно $c(t)$?

$$X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t)$$

$$A(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t)$$

$$X(t)c'(t) = b(t)$$

$$c'(t) = b(t)X^{-1}(t)$$

$$c(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s)ds$$

То есть частное решение (7.1) имеет вид

$$\tilde{x} \equiv \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds$$

Общий вид решения (7.1):

$$x(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds$$

8 Линейные уравнения старших порядков

Определение 8.1. Пусть $b, a_1, \dots a_n \in C(I, \mathbb{R}), a_0(t) \neq 0 \forall t \in I$. Тогда:

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n(t)x = b(t) \tag{8.1}$$

Называется линейным неоднородным уравнением. При $b(t) = 0$ уравнение становится линейным однородным уравнением:

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n(t)x = 0 \tag{8.2}$$

Рассмотрим $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C(I, \mathbb{R})$:

$$(Lx)(t) = a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n(t)x$$

8.1 Линейное однородное уравнение

Данное уравнение равносильно тому, что $Lx = 0$. Рассмотрим для него замену $y_1 = x, y_2 = x', \dots y_n = x^{(n-1)}$. Тогда:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}y_n - \dots - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y_1 \end{cases} \tag{8.3}$$

Имеем, что y является решением (8.3) $\Leftrightarrow$ x является решением (8.1). При этом, $\forall t_0 \in I \forall x_0^0, \dots x_0^{n-1} \in \mathbb{K} \exists!$ решение $x : I \to \mathbb{K}$ задачи Коши $Lx = 0, x(t_0) = x_0^0, x'(t_0) = x_0^1, \dots x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$.

Лемма 8.1. *Пусть $x_1(\cdot), \dots x_m(\cdot)$ — решения $Lx = 0$, $y^1(\cdot), \dots y^m(\cdot)$ — соответствующие решения (8.3). Тогда $x^1(\cdot), \dots x^m(\cdot)$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ $y^1(\cdot), \dots y^m(\cdot)$ линейно независимы.*

Доказательство.

$\Rightarrow$

$$\exists c_1, \dots c_m : c_1y^1 + \dots + c_my^m = 0 \Rightarrow c_1x^1 + \dots + c_mx^m = 0 \Rightarrow c_1, \dots c_m = 0$$

Тогда y^i линейно независимы.

$\Leftarrow$

$$\exists c_1, \dots c_m : c_1 x_1 + \dots + c_m x_m = 0 \Rightarrow c_1 x_1^{(j)} + \dots + c_m x_m^{(j)} = 0 \forall 0 \leqslant j \leqslant n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_1 y^1 + \dots + c_m y^m = 0 \Rightarrow c_1, \dots c_m = 0$$

Тогда x_i линейно независимы.

$\square$

Определение 8.2. $x_1, \dots x_n \in C^n(I, \mathbb{K})$ называется фундаментальной системой решений уравнение (8.2), если $x_1, \dots x_n$ являются его решениями и они линейно независимы

Следствие (Из леммы)**.** ФСР существует

Теорема 8.1. *Пусть $x_1(\cdot), \dots x_n(\cdot)$ — ФСР (8.2). Тогда общий вид решения имеет вид*

$$x(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j(\cdot), c_j \in \mathbb{K}$$

Доказательство. $x(\cdot)$ — решение (8.2), $y = \begin{pmatrix} x(\cdot) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(\cdot) \end{pmatrix}$.

$$\exists c_1, \dots c_n \in \mathbb{K} : y = c_1 y^1 + \dots + c_n y^y \Rightarrow x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$\square$

Определение 8.3. Определителем Вронского набора $x_1, \dots x_n \in C^{n-1}(I, \mathbb{K})$ называется

$$\omega(x_1, \dots x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}, t \in I$$

Утверждение 8.1. $x_1(\cdot), \dots x_n(\cdot)$ *линейно независимы* $\Rightarrow \omega(t) = 0$

Доказательство.

$$\exists (c_1, \dots c_n) \neq 0 : \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(s)} = 0 \Rightarrow \omega(t) = 0$$

$\square$

Замечание. Обратное неверно

Доказательство. Положим $n = 2, x_1(t) = t^2, x_2(t) = t|t|, t \in \mathbb{R}$:

$$\omega(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0$$

При этом, $c_1 t^2 + c_2 t|t| = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1, c_2 = 0$ $\square$

Теорема 8.2 (Формула Лиувилля-Остроградского)**.** *Пусть* $x_1(\cdot), \dots x_n(\cdot)$ *— ФСР (8.2). Тогда*

$$\omega(t) \equiv \omega(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right), t_0, t \in I$$

Доказательство. Известно, что $x_1, \dots x_n \in C^{n-1}(I, \mathbb{K})$.

$$\omega(x_1, \dots x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}, t \in I$$

Мы знаем, что:

$$\omega(t) \equiv \omega(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\ A(s) ds\right), t_0, t \in I$$

Где:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a_1}(t) \\ \tilde{a_2}(t) \\ \vdots \\ \tilde{a_n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1' = \langle \tilde{a_1}, y \rangle \\ y_2' = \langle \tilde{a_2}, y \rangle \\ \vdots \\ y_n' = \langle \tilde{a_n}, y \rangle \end{matrix}$$

Заметим, что $tr\ A = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}$, откуда имеем желаемое. □

Утверждение 8.2. *Пусть* $x_1(\cdot), \dots x_n(\cdot)$ *— решения (8.2). Тогда* $\exists t_0 \in I : \omega(t_0) = 0 \Rightarrow$ $x_1(\cdot), \dots x_n(\cdot)$ *линейно зависимы*

Доказательство. Пусть $y^1(\cdot), \dots y^n(\cdot)$ — решение (8.3). Тогда:

$$\omega(y^1, \dots y^n) = \omega(x_1, \dots x_n)(t) = 0$$

$$\Rightarrow y^1(t_0), \dots y^n(t_0) \text{ линено зависимы } \Rightarrow y^1(\cdot), \dots y^n(\cdot) \text{ линейно зависимы}$$
$$\Rightarrow x_1(\cdot), \dots x_n(\cdot) \text{ линейно зависимы}$$

□

8.2 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение 8.4. Если $a_0, \dots a_n \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0$, то уравнение

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \tag{8.4}$$

Называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами.

Определение 8.5. Многочлен:

$$M(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

Называется характеристическим многочленом (8.4)

Определение 8.6.

$$M(\lambda)=0 \tag{8.5}$$

Называется характеристическим уравнением (8.4)

Лемма 8.2. *Пусть* $\gamma\in\mathbb{C}, k$ *— кратность корня* $\lambda=\gamma$*. Тогда:*

$$L\left(t^s e^{\gamma t}\right)=\begin{cases}0, s\leqslant k-1\\ p(t)e^{\gamma t}, s\geqslant k\end{cases}, \deg p=s-k$$

Доказательство.

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(t^s e^{\lambda t}\right)=\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}e^{\lambda t}\right)=\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\frac{\partial^j}{\partial t^j}e^{\lambda t}\right)=\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\lambda^j e^{\lambda t}\right)$$

$$L\left(t^s e^{\lambda t}\right)\equiv\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(t^s e^{\lambda t}\right)\equiv\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\lambda^i e^{\lambda t}\right)\equiv\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(M(\lambda)e^{\lambda t}\right)\equiv$$
$$\equiv e^{\lambda t}\left(t^s M(\lambda)+C_s^1 t^{s-1}M'(\lambda)+\dots+M^{(s)}(\lambda)\right)$$

Получили, что:

$$L\left(t^s e^{\gamma t}\right)=\begin{cases}0, s\leqslant k-1\\ p(t)e^{\gamma t}, s\geqslant k\end{cases}, \deg p=s-k$$

□

Теорема 8.3. *Пусть* $\lambda_1,\dots\lambda_m$ *— корни* M*,* $k_1,\dots k_m$ *— их кратности,*

$$x_{js}=t^s e^{\lambda t}, j=1,\dots m, s=0,\dots k_j-1$$

Тогда x_{is} *образуют ФСР*

Доказательство. Заметим, что x_{js} — решение, причем их ровно n. Докажем их линейную независимость. Предположим противное.

$$\exists(c_{js})\neq 0:\sum_{j,s}c_{js}t^s e^{\lambda_j t}\equiv 0$$

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t}+\dots p_m(t)e^{\lambda_m t}\equiv 0, p_m(t)\neq 0$$
$$p_1(t)+p_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+\dots+p_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t}\equiv 0, p_m(t)\neq 0$$

Дифференцируя данное равенство достаточное количество раз и при условии, что $\lambda_1\neq\lambda_i$, получаем:

$$\tilde{p_2}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+\dots+\tilde{p_m}(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t}\equiv 0, p_m(t)\neq 0$$

Причем $\deg p_i=\deg\tilde{p}_i$. Действуя аналогично, получаем, что $p_m(t)=0$, что приводит нас к противоречию □

Пусть $a_0,\dots a_m\in\mathbb{R}, a_0\neq 0$. Пусть $\lambda_1,\dots\lambda_r\in\mathbb{C}$:

$$\lambda_{r+1}=\overline{\lambda_1},\dots,\lambda_{2r}=\overline{\lambda_r}$$
$$\lambda_{2r+1}+\dots+\lambda_m\in\mathbb{R}$$

Тогда:

$$\frac{1}{2}\left(x_{js}(t)+x_{j+r,s}\right)=\frac{t^{s}e^{\lambda_j t}+t^{s}e^{\overline{\lambda_j}t}}{2}=t^{s}\cos(\beta_j t)e^{\alpha_j},\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$$

$$\frac{1}{2i}\left(x_{js}(t)-x_{j+r,s}\right)=\frac{t^{s}e^{\lambda_j t}-t^{s}e^{\overline{\lambda_j}t}}{2}=t^{s}\sin(\beta_j t)e^{\alpha_j},\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$$

8.3 Линейные неоднородные уравнения

Данное уравнение равносильно тому, что $Lx=b$. В таком случае нетрудно показать, что общее решение $Lx=b$ получается из суммы частного решения и всех решений $Lx=0$.

8.4 Метод вариации произвольных постоянных

Пусть $x_1(\cdot),\ldots x_n(\cdot)$ — ФСР (8.2). Положим:

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t)\\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \ldots & x_n^{(n)}(t)\end{pmatrix},t\in I$$

Рассмотрим задачу коши:

$$y'=A(t)y+\tilde{b}(t) \tag{8.6}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} & -\frac{a_2(t)}{a_0(t)} & -\frac{a_3(t)}{a_0(t)} & \ldots & -\frac{a_n(t)}{a_0(t)}\end{pmatrix},\tilde{b}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \frac{b(t)}{a_0(t)}\end{pmatrix}$$

Заметим, что тогда x — решение (8.1) $\Rightarrow y=\begin{pmatrix}x(t)\\ x'(t)\\ \vdots\\ x^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$ — решение (8.6). В обратную сторону, если $y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{pmatrix}\Rightarrow x(t)=y_1(t)$ — решение (8.1).

Известно, что если $c(\cdot)=(c_1(\cdot),\ldots c_n(\cdot))$, такое, что $(*)=X(t)c'(t)=\tilde{(b)}(t)$, то $y(t)=X(t)c(t)$ является решением (8.6). Тогда y_1 является решением (8.1).

$$(*)\sim\begin{cases} x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t)=0\\ x_1'(t)c_1'(t)+x_2'(t)c_2'(t)+\cdots+x_n'(t)c_n'(t)=0\\ \vdots\\ x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0\\ x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=-\frac{b(t)}{a_0(t)}\end{cases}$$

И $y_1(t)=c_1(t)x(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t)$.

8.5 Решения уравнений специального вида

Теорема 8.4. *Пусть* $a_0 \neq 0, \dots a_n \in \mathbb{C}, b(t) = p(t)e^{\gamma t}, \gamma \in \mathbb{C}, p(t)$ *— многочлен с комплексными коэффициентами,* $\deg p = m$*. Тогда существует частное решение (8.1) в виде:*

$$x(t) = t^k q(t) e^{\gamma t}, t \in \mathbb{R}$$

Где k *— кратность* γ *как корня характеристического уравнения,* $q(t)$ *— многочлен,* $\deg q = m$

Доказательство. Ведем индукцию по m

База: $m = 0$. Тогда положим $y(t) = q_0 t^k e^{\gamma t}$. Тогда по лемме:

$$Ly(t) = q_0 e^{\gamma t} d_0 = p_0 e^{\gamma t} = p(t)e^{\gamma}t$$

Переход: Положим $\tilde{y}(t) = q_0 t^{k+m} e^{\gamma t}$. Тогда по лемме:

$$L\tilde{y}(t) \equiv (q_0 d_0 t^m + r(t))e^{\gamma t}$$

Существует многочлен $\tilde{q}(t) : \deg \tilde{q} \leqslant m - 1$ и

$$L(\tilde{q}(t)t^k e^{\gamma t}) \equiv (\underbrace{p(t) - r(t) - p_0 t^m}_{\deg \leqslant m-1})e^{\gamma t}$$

$$L(\tilde{y}(t) + \tilde{q}(t)t^k e^{\gamma t}) \equiv (q_0 d_0 t^m + r(t) + p(t) - r(t) - p_0 t^m) =_{q_0 = \frac{p_0}{d_0}} p(t)e^{\gamma t}$$

Тогда:

$$\tilde{y}(t) + \tilde{q}(t)t^k e^{\gamma t} \equiv t^k(\underbrace{q_0 t^m + \tilde{q}(t)}_{\deg = m})e^{\gamma t}$$

□

Пусть теперь $a_0 \neq 0, \dots a_n \in \mathbb{R}, b(t) = (P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t))e^{\alpha t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, p(t)$ — многочлен, $m = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$. Сведем все к комплексному случаю. Рассмотрим

$$\tilde{b}(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}(P_1(t) - P_2(t)) = e^{\alpha t}((P_1(t)\cos(\beta t) + P_2\sin(\beta t)) + i(P_1(t)\sin(\beta t) - P_2\cos(\beta t)))$$

Пусть $x(t) = t^k(Q_1(t) + iQ_2(t))e^{(\alpha+i\beta)t}$ — решение (8.1) при данном виде b, k — кратность корня характеристического многочлена, $m = \max\{\deg Q_1, \deg Q_2\}$. $Lx = \tilde{x} \Rightarrow L(\Re x) = \Re \tilde{x}$. Но тогда $L(t^k e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) - Q_2(t)\sin(\beta t))) = b(t)$.

Следствие. Существует многочлены $Q_1, Q_2 : \max\{\deg Q_1, \deg Q_2\} = m$ такие, что $x(t) = t^k(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2\sin(\beta t))e^{\alpha t}$ является решением линейного уравнения при данном b

8.6 Уравнение Эйлера

Пусть $a_0, \dots a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}, b \in C((0, +\infty), \mathbb{K})$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$a_0 t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t x' + a_n x = b(t)$$

Рассмотрим следующую замену: $t = e^s \Rightarrow y(s) = x(e^s)$. Тогда при подстановке получится линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пример. $a_0t^2x''(t) + a_1tx'(t) + a_2x = b(t), y(s) = x(e^s)$

$$\begin{aligned}
&y' = x'(e^s)e^s\\
&y'' = x''(e^s)e^2s + x'(e^s)e^s \Rightarrow x''(e^s) = e^{-2s}(y''(s) - x'(e^s)e^s) = e^{-2s}(y''(s) - y'(s))
\end{aligned}$$

Подставляя, получаем:

$$a_0e^{2s}e^{-2s}(y'' - y') + a_1e^se^{-s}y' + a_2y = b(e^s)$$

$$a_0y'' + (a_1 - a_0)y' + a_2y = b(e^s), s \in \mathbb{R}$$

8.7 Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение:

$$x' = Ax \tag{8.7}$$

Где $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Напоминание. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times m} \exists C \in \mathbb{C}^{n\times n} : \det C \neq 0$ и $B = C^{-1}AC$ является жордановой матрицей, т.е. $\exists s \in \mathbb{N}, n_j \in N, \lambda_j \in \mathbb{C}$, такие что:

$$B = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & K_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & K_s \end{pmatrix}, K_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Замечание.

$$\det(E - \lambda B) = \det(C^{-1}C - \lambda C^{-1}AC) = \det C^{-1}\det(E - \lambda A)\det C = \det(E - \lambda A)$$

Теорема 8.5. *Каждое решение (8.7) представимо в виде*

$$x(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{8.8}$$

Где $\lambda_1, \dots \lambda_m$ — попарно различные собственные числа A, где $P_j(t) = (P_{j1}(t), P_{j2}(t), \dots P_{jn}(t))$ причем $\deg P_{jk} \leqslant$ размера соответствующей Жордановой клетки.

Доказательство. Рассмотрим замену: $x(t) = Cy(t), t \in \mathbb{R}$. Тогда (8.7) равносильно:

$$Cy' = ACy \Leftrightarrow y' = By \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 + y_2\\ y_2' = \lambda_1 y_2 + y_3\\ \vdots\\ y_{n_1}' = \lambda_1 y_{n_1} \end{cases}\\ y_{n_1+1}' = \lambda_2 y_{n_1+1} + y_{n_1+2}\\ \vdots\\ y_{n_s}' = \lambda_s y_s \end{cases}$$

Сделаем еще одну замену: $y_j(t) = e^{\lambda_1 t} z_j(t), j = 1, \dots n_1$. Тогда $y_j' = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} z_1 + e^{\lambda_1 t} z_1'$. Тогда система превращается в следующую:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n_1}' = 0 \end{cases}$$

Тогда получаем:

$$\begin{cases} z_{n_1} = C_{n_1} \\ z_{n_1 - 1} = C_{n_1} x + C_{n_1} - 1 \\ \vdots \\ z_1' = C_{n_1} \frac{t^{n_1 - 1}}{(n_1 - 1)!} + C_{n_1 - 1} \frac{t^{n_1 - 2}}{(n_1 - 2)!} + \dots + C_1 \end{cases}$$

И, наконец, получаем:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 t} \left(C_{n_1} \frac{t^{n_1 - 1}}{(n_1 - 1)!} + C_{n_1 - 1} \frac{t^{n_1 - 2}}{(n_1 - 2)!} + \dots + C_1 \right) \\ \vdots \\ y_{n_1} = C_{n_1} e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

Откуда получаем желаемое. $\square$

Пусть теперь $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Пусть $x(\cdot)$ — решение (8.7). Тогда найдем решение в виде $x(t) = u(t) + iv(t), u(t), v(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Тогда $u(t), v(t)$ являются решением (8.7).

$$x'(t) = A(t)x(t) \Leftrightarrow u'(t) + iv'(t) = A(u(t) + iv(t)) \Rightarrow u'(t) = Au(t), v'(t) = Av(t)$$

Перенумеруем собственные числа следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \\ \lambda_{j+r} = \alpha_j - i\beta_j \\ \lambda_{2r+1}, \dots \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array} \right. , \beta_j \neq 0$$

Пусть $x(t), t \in \mathbb{R}$ — решение (8.7) в виде (8.8), $P_j(t) = U_j(t) + iV_j(t)$.

$$\Re x(t) = \Re \left(\sum_{j=1}^{n} (U_j(t) + iV_j(t))(\cos(\beta_j t) + i \sin(\beta_j t)) e^{\alpha_j t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{r} (U_{j+r}(t) + iV_{j+r}(t))(\cos(\beta_j t) - i \sin(\beta_j t)) e^{\alpha_j t} + \sum_{j=2r+1}^{m} e^{\lambda_j t} (U_j(t) + iV_j(t)) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} e^{\alpha_j t} \left(\tilde{U}_j(t) \cos(\beta_j t) + \tilde{V}_j(t) \sin(\beta_j t) \right) + \sum_{j=2r+1}^{n} e^{\lambda_j t} \tilde{U}_j(t)$$

Следствие. Каждое решение (8.7) представимо в виде:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{\alpha_j t}\left(\tilde{U}_j(t)s\cos(\beta_j t) + \tilde{V}\sin(\beta_j t)+\right) + \sum_{j=2r+1}^{m} e^{\lambda_j t}\tilde{U}_j(t)$$

Причем

$$\tilde{U}(t) = (U_{j1}(t), \dots U_{jn}(t))^T$$
$$\tilde{V}(t) = (V_{j1}(t), \dots V_{jn}(t))^T$$

И $\deg U_{jk}, \deg V_{jk} \leqslant$ размер наибольшей соответствующей Жордановой клетки.

8.8 Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение:

$$x' = Ax + b(t), b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \tag{8.9}$$

Пусть $b(t) \equiv e^{\mu t}P(t), t \in \mathbb{R}$.

Утверждение 8.3 ((б/д)). *$\exists$ решение (8.9), имеющее вид $x(t) = e^{\mu t}Q(t), t \in \mathbb{R}$, где $\deg Q \leqslant \deg P + l$, где l — размер Жордановой клетки, соответствующей собственному числу μ (если μ — не собственное число, подагаем $l = 0$).*

Если $b(t) = \sum_{i=1}^{d} e^{\mu_i t}P_i(t)$ — сумма квазиполиномов, то можно рассмотреть несколько систем $x' = Ax + b_j(t)$, где $b_j = e^{\mu_j t}P_j(t)$. Тогда по утверждению выше, для каждой из них $\exists$ решение $x_j(t) = Q_j(t)e^{\mu_j t}, t \in \mathbb{R}$. Тогда $x(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i(t)$ — решение (8.9)

9 Матричная экспонента

Пусть $n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Лемма 9.1. *Ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^j$ сходится равномерно и абсолютно на любом ограниченном $I \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство.

$$\left\|\frac{t^j}{j!}A^j\right\| \leqslant \frac{|t|^j}{j!}\|A\|^j, t \in (-r, r)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!}\|A\|^j = e^{|t|\cdot\|A\|} < e^{r\cdot\|A\|} < \infty$$

$\square$

Определение 9.1. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Положим:

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

Утверждение 9.1. $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$

Доказательство.
$$e^A e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \gamma_{j,k} A^j B^k$$
$$e^{A+B} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A+B)^j}{j!} = E + A + B + \frac{A^2 + AB + BA + B^2}{2!} + \dots = (*)$$
Т.к. $AB = BA$, заключаем:
$$(*) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \theta_{j,k} A^j B^k$$
Далее заметим, что $\gamma_{j,k}, \theta_{j,k}$ не зависят от n. Также, при $n = 1$ выполняется $\theta_{j,k} = \gamma_{j,k}$ по свойству численной экспоненты. Т.к. от n эти коэффициенты не зависят, получили желаемое. □

Пример (Условие коммутирования существенно)**.** Покажем, что условие коммутирования матриц существенно в предыдущем утверждении
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Тогда:
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Получаем:
$$e^A e^B = (E + A)(E + B) = E + A + B + AB$$
$$e^B e^A = (E + A)(E + B) = E + A + B + BA$$
В таком случае, либо $e^A e^B \neq e^{A+B}$, либо $e^B e^A \neq e^{A+B}$.

Утверждение 9.2. $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$

Доказательство. Рассмотрим $\frac{d}{dt} \frac{t^j A^j}{j!}$.
$$\frac{d}{dt} \frac{t^j A^j}{j!} = \begin{cases} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} A^j, j \geqslant 1 \\ 0, j = 0 \end{cases}$$
Заметим, что:
$$\left\| \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} A^j \right\| \leqslant \frac{|t|^{j-1}}{(j-1)!} \|A\|^j$$
Получаем:
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^{j-1}}{(j-1)!} \|A\|^j = \|A\| e^{t \cdot \|A\|} < \|A\| e^{r \cdot \|A\|} < \infty$$
Получили, что ряд из частных производных сходится абсолютно и равномерно при $t \in (-r, r)$. Тогда по теореме о дифференцировании рядов, получаем
$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^j}{j!} A^j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} A^j = A e^{tA}$$

□

Следствие. $X(t) = e^{tA}$ является решением Задачи коши: $X' = AX, X(0) = E$. В частности, $X(t)$ является ФСР системы $x' = Ax$

Утверждение 9.3. $\det(e^{tA}) = e^{t \cdot tr\ A}$.

Доказательство. Следует из свойств определителя Вронского □

9.1 Вычисление матричной экспоненты

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \lambda E + F$$

Найдем e^{tK}.

$$e^{t\lambda E} = e^{\lambda t} E$$

$$e^{tF} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$e^{tK} = e^{t\lambda E} e^{tF} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Также, если $B = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_s \end{pmatrix}$, то:

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tK_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tK_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tK_s} \end{pmatrix}$$

Утверждение 9.4. *Пусть* $A = C^{-1}BC, B$ *— ЖНФ матрицы* A, $\det C \neq 0$. *Тогда* $e^{tA} = C^{-1}e^{tB}C$.

Доказательство.

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(C^{-1}BC)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C^{-1}B^jC}{j!} = C^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}\right)C$$

$\square$

10 Теорема Штурма

Рассмотрим уравнение:

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, a, b \in C^1(I, \mathbb{R}) \tag{10.1}$$

При помощи замены $x(t) = u(t)y(t)$ данное уравнение можно свести к следующему:

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{10.2}$$

Действительно, заметим, что $x' = u'y + y'u, x'' = u''y + 2u'y' + uy''$. Тогда уравнение (10.1) преобразится следующим образом:

$$y''u + 2y'u' + yu'' + au'y + auy' + buy = 0$$

Подберем такое u, что $2u' + au = 0$, имеем:

$$u = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

Тогда:

$$y''u + 2y'u' + yu'' + au'y + auy' + buy = 0$$
$$y''u + yu'' + au'y + buy = 0$$
$$y'' + \underbrace{\frac{u'' + au' + bu}{u}}_{q(t)} y = 0$$

Замечание. $x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

Утверждение 10.1. *Пусть y — нетривиальное решение (10.2), $\hat{t} \in I, y(\hat{t}) = 0 \Rightarrow y'(\hat{t}) \neq 0$*

Утверждение 10.2. *Рассмотрим соответствующую задачу Коши и начальные условия $y(\hat{t}) = 0, y'(\hat{t}) = 0$. Тогда в некоторой окрестности, решение единственно и тривиально.*

Утверждение 10.3. *Пусть $y(t)$ — нетривиальное решение (10.2). Тогда $y^{-1}(0) = \{t \in I : y(t) = 0\}$ не имеет предельных точек.*

Доказательство. Рассмотрим $\hat{t} : y(\hat{(t)}) = 0 \Rightarrow y'(\hat{t}) \neq 0$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$|y(\hat{t} + \delta)| = |y'(\hat{t})\delta + o(\delta)| \geqslant |y'(\hat{t})| \cdot |\delta| - |o(\delta)| \geqslant |y'(\hat{t})| \cdot |\delta| - \frac{|y'(\hat{t})|}{2}|\delta| > 0$$

Получили желаемое $\square$

Пусть $Q \in C(I, \mathbb{R})$. Рассмотрим уравнение:

$$z'' + Q(t)z = 0 \tag{10.3}$$

Теорема 10.1 (Штурма). *Пусть $q(t) \leqslant Q(t) \forall t \in I, t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$ (q, Q берутся из уравнений (10.2), (10.3)). Пусть y — решение (10.2), такое, что $y(t_1) = y(t_2) = 0, y(t) \neq 0 \forall t \in (t_1, t_2)$. Тогда если z — нетривиальное решение (10.3), то:*

$$\left[\begin{array}{l} \exists t \in (t_1, t_2) : z(t) = 0 \\ z(t_1) = z(t_2) = 0 \end{array}\right.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $y(t) > 0 \forall t \in I$ (другой случай доказывается аналогично). Тогда: $y'(t_1) \geqslant 0, y'(t_2) \leqslant 0 \Rightarrow y'(t_1) > 0, y'(t_2) < 0$ (не могут равняться нулю по утверждению выше). Рассмотрим:

$$(10.2)z - (10.3)y$$

$$y''z - yz'' = (Q - q)yz$$

$$\frac{d}{dt}(y'z - yz') = (Q - q)yz$$

$$y'(t_2)z(t_2) - y(t_2)z'(t_2) - y'(t_1)z(t_1) + y(t_1)z'(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q(s) - q(s))y(s)z(s)ds$$

$$y'(t_2)z(t_2) - y'(t_1)z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q(s) - q(s))y(s)z(s)ds$$

Предположим, что $z(t)$ постоянного знака на I (в противном случае получаем, что $z(t) = 0$ для какого-то $t \in (t_1, t_2)$). Рассмотрим только случай $z > 0$ (другой случай будет доказываться аналогично). Тогда существует несколько возможных случаев:

$$\left[\begin{array}{l} z(t) > 0 \forall t \in [t_1, t_2] \\ z(t) > 0 \forall t \in (t_1, t_2], z(t_1) = 0 \\ z(t) > 0 \forall t \in [t_1, t_2), z(t_2) > 0 \\ z(t_1) = z(t_2) = 0 \end{array}\right.$$

Покажем, что первые три случая невозможны заметим, что

$$\int_{t_1}^{t_2} (Q(s) - q(s))y(s)z(s)ds \geqslant 0$$

Но в первых трех случаях получаем, что $y'(t_2)z(t_2) - y'(t_1)z(t_1) < 0$. Но тогда $z(t_1) = z(t_2) = 0$. □

Следствие. Пусть $q(t) \leqslant 0 \forall t \in I$, y — нетривиальное решение (10.2). Тогда $|y^{-1}(0)| \leqslant 1$

Следствие. Пусть y_1, y_2 — линейно независимые решения (10.2), $y_1(t_1) = y_1(t_2) = 0, y_1(t) \neq 0 \forall t \in (t_1, t_2)$. Тогда существует единственное $t \in (t_1, t_2) : y_2(t) = 0$.

11 Преобразование Лапласа и Операционный метод

11.1 Преобразование Лапласа

Определение 11.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется оригиналом, если

1. $f(t) = 0 \forall t < 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b : f$ имеет конечное число точек разрыва на $[a, b]$, причем все точки разрыва — I рода.
3. $\exists M \geqslant 0, \alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}, \forall t \in \mathbb{R}$

Положим:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Лемма 11.1. *$F(p)$ сходится при $p \in \mathbb{C}$, таких, что $\Re p > \alpha$*

Доказательство.

$$|e^{-pt} f(t)| = |e^{-pt}||f(t)| \leqslant e^{-t\Re p} M e^{\alpha t} = M e^{\alpha - \Re p}$$

Но тогда $\alpha - \Re p < 0$. □

Определение 11.2. $f(t) \risingdotseq F(p), p > \Re\alpha$ — Преобразование Лапласа

Замечание. Пусть f_1, f_2 — оригиналы и $|f_1(t)| \leqslant M_1 e^{\alpha_1 t}, |f_2(t)| \leqslant M_2 e^{\alpha_2 t}, \forall t \in \mathbb{R}$. Пусть также $c_1, c_2 \in \mathbb{C}, f_i \risingdotseq F_i(p)$. Тогда:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$$

Замечание. Пусть f, f' — оригиналы, $|f(t)|, |f'(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \forall t \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \Rightarrow f'(t) \risingdotseq$$

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-pt}}_{u} \underbrace{f'(t) dt}_{dv} = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p e^{-pt} f(t) dt = -f(0+) + pF(p)$$

Тогда общем случае:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - f^{(n-1)}(0+) - p f^{(n-2)}(0+) - \ldots p^{n-1} f(0+)$$

Утверждение 11.1 (б/д)**.** *Оригинал $f(t)$ определен однозначно образом $F(p)$ при $t > 0$, в которых f дифференцируема*

Замечание. Если $f(t) = t^k e^{\lambda t}, t > 0$, то

$$f(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^k e^{\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt = t^k \underbrace{\frac{e^{-(p-\lambda)t}}{\lambda - p}\Bigg|_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{k}{p-\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^{k-1} dt =$$

$$= \frac{k!}{(p-\lambda)^k} \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = \frac{k!}{(p-\lambda)^k} \cdot \frac{e^{-(p-\lambda)t}}{\lambda - p}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$$

Утверждение 11.2. $\cos(\beta t) \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2}, \sin(\beta t) \risingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2}, \Re p > 0$

Доказательство.

$$\cos(\beta t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\beta} + \frac{1}{p+i\beta}\right) = \frac{p}{p^2+\beta^2}$$

$$\sin(\beta t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\beta} - \frac{1}{p+i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$$

□

11.2 Операционный метод

Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = f(t) \\ x(0+) = x_0 \\ x'(0+) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0+) = x_{n-1} \end{cases}, x_1, \ldots x_n \in \mathbb{C} \tag{11.1}$$

Где $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{C}, f$ — оригинал, $f(t) \risingdotseq F(p), p > \Re\alpha$, где α соответствует оригиналу f.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда:

$$\begin{cases} x'(t) \risingdotseq -x(0+) + pX(p) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \risingdotseq p^nX(p) - p^{n-1}x(0+) - p^{n-2}x'(0+) - \cdots - x^{(n-1)}(0+) \end{cases}$$

Тогда, если применить преобразование Лапласа к обеим частям (11.1), получим:

$$a_0(p^nX(p) - p^{n-1}x(0+) - p^{n-2}x'(0+) - \cdots - x^{(n-1)}(0+)) + \cdots + a_nX(p) = F(p)$$

$$\underbrace{(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n)}_{L(p)}X(p) - M(p) = F(p)$$

Тогда $X(p) = \frac{F(p)+M(p)}{L(p)}, \Re p > \alpha, \Re p > \Re\lambda_j$, где λ_j — корни L. Тогда необходимо сделать обратное преобразование Лапласа и по $X(p)$ получить $x(t)$, которое будет являться решением (11.1)

12 Зависимоть решения задачи Коши от параметра

Рассмотрим задачу Коши: пусть даны $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — открытое и $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ — непрерывна, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны, $(t_0, x_0) \in \Gamma$

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{12.1}$$

Пусть $\tilde{x} : I \to \mathbb{R}^n$ — решение (12.1) и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_0 \subset [t_1, t_2] \subset I$. Рассмотрим $d > 0$ и положим

$$V = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in \mathbb{R}^n, |x - \tilde{x}(t)| \leqslant d\} \subset \Gamma$$

Лемма 12.1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$ *если* $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна, а* $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ *существуют и непрерывны,* $|g(t, x) - f(t, x)| \leqslant \delta \forall (t, x) \in V, y_0 \in \mathbb{R}^n : |y_0 - x_0| < \delta$, *то непродолжаемое решение* y *задачи Коши*

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{12.2}$$

Существует, определена на $[t_1, t_2]$ *и*

$$|\tilde{x}(t) - y(t)| < \varepsilon \forall t \in [t_1, t_2]$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$ так, что

V — компакт $\Rightarrow \exists l : \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)\right| \leqslant l \forall (t, x) \in V$.

$$\Rightarrow \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)\right\| \leqslant ln^2 =: L \forall (t, x) \in V$$

$$\Rightarrow |f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L|x - y| \forall (t, x), (t, y) \in V$$

Возьмем g, y_0 из условия леммы. По теореме о единственности решения, $\exists!$ решение y задачи Коши (12.2). Пусть T — отрезок, содержащий $t_0, y(t) \in V \forall t \in T$.

$$|\tilde{x}'(t) - y'(t)| = |f(t, \tilde{x}(t)) - g(t, y)| \leqslant |f(t, \tilde{x}(t)) - f(t, y(t))| + |f(t, y(t)) - g(t, y(t))| \leqslant$$

$$L|\tilde{x}(t) - y(t)| + \delta \forall t \in T$$

Положим $z(t) = \tilde{x}(t) - y(t)$. Тогда $|z'(t)| \leqslant L(z(t)) + \delta \Rightarrow$ по лемме о дифференцируемом неравенстве:

$$|z(t)| \leqslant \delta e^{L|t - t_0|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t - t_0|} - 1\right) < \min\{\varepsilon, d\} \forall t \in T$$

Тогда y определена на $[t_1, t_2]$. □

Теперь рассмотрим задачу Коши: пусть $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — открыто, $f : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны, $M \subset \mathbb{R}^m$ — открыто, $a : M \to \mathbb{R}^n$ — непрерывна, $(t_0, a(\mu), \mu) \in \Sigma \forall \mu \in M$.

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = a(\mu) \end{cases} \tag{12.3}$$

Пусть $\varphi(\cdot, \mu)$ — непродолжаемое решение задачи Коши (12.3) $\forall \mu \in M$. Положим $\Omega = \{(t, \mu) : \varphi(t, \mu)$ определено$\}$.

Теорема 12.1. Ω *открыто,* φ *непрерывно*

Доказательство. $\forall (\tilde{t}, \tilde{\mu}) \in \Omega : \tilde{x} = \varphi(t, \tilde{\mu})$. $\tilde{x}$ определена на $[t_0, \tilde{t}] \Rightarrow \exists t_2 > \tilde{t} : \tilde{x}$определена на $[t_0, t_2]$. Тогда существует $d > 0$, такое, что для $V = \{(t, x) \in [t_0, t_2] \times \mathbb{R}^n : |\tilde{x}(t) - x| < d\}$ будет верно: $V \times \{\tilde{\mu}\} \subset \Sigma$ (предоставляется читателю в качестве нетрудного упражнения).

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: выполняется утверждение Леммы при $f(t, x) = f(t, x, \tilde{\mu}), x_0 = a(\tilde{\mu})$. Тогда $\exists O(\tilde{\mu}) \subset M : |f(t, x, \mu) - f(t, x, \tilde{\mu})| < \delta \forall (t, x) \in V$, $|a(\tilde{\mu}) - a(\mu)| < \delta \forall \mu \in O(\tilde{\mu})$. Первое неравенство является утверждением о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте (теорема Кантора), второе — непрерывность функции a в точке $\tilde{\mu}$. Тогда из Леммы следует, что $\varphi(\cdot,\mu)$ определена на $[t_1,t_2]$ и $|\varphi(t,\tilde{\mu})-\varphi(t,\mu)|<\varepsilon\forall t\in[t_1,t_2]\forall\mu\in O(\tilde{\mu})$. Но тогда Ω открыто.

$$|\varphi(t,\mu)-\varphi(\tilde{t},\tilde{\mu})|\leqslant|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\tilde{\mu})|+|\varphi(t,\tilde{\mu})-\varphi(\tilde{t},\tilde{\mu})|<\varepsilon+\varepsilon,\forall t\in(\tilde{t}-\tau,\tilde{t}+\tau)$$

Это верно при достаточно малых τ, т.к. φ непрерывна. □

Теперь будем рассматривать одномерный параметр. Пусть $\Sigma\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ — открыто, $f:\Sigma\to\mathbb{R}^n$ непрерывна, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны, $M\subset\mathbb{R}$ — открыто, $a:M\to\mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируема, $(t_0,a(\mu),\mu)\in\Sigma\forall\mu\in M$.

$$\begin{cases}x'=f(t,x,\mu)\\x(t_0)=a(\mu)\end{cases}\tag{12.4}$$

Теорема 12.2. *φ непрерывно дифференцируемо, смешаные производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\mu}\exists$ существуют и непрерывны и $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(\cdot,\tilde{\mu})$ является решением уравнения в вариациях:*

$$\begin{cases}v'=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\tilde{\mu}),\tilde{\mu})v+\frac{\partial f}{\partial\mu}(t,\varphi(t,\tilde{\mu}),\tilde{\mu})v(t_0)=a'(\tilde{\mu})\end{cases}\tag{12.5}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\mu)=f(t,\varphi(t,\mu),\mu),(t,\mu)\in\Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t,\tilde{\mu})}_{v(t)}\right)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\tilde{\mu}),\tilde{\mu})}_{A(t)}\cdot\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t,\tilde{\mu})}_{v(t)}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial\mu}(t,\varphi(t,\tilde{\mu},\tilde{\mu}))}_{b(t)}$$

$$v'(t)=A(t)v(t)+b(t)$$

Также: $\varphi(t_0,\mu)=a(\mu)$. Тогда:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t_0,\tilde{\mu})=a'(\tilde{\mu})$$

$$v(t_0)=a'(\tilde{\mu})$$

□

13 Автономные системы

Определение 13.1. Пусть $\Sigma\subset\mathbb{R}^n$ открыто, $f:\Sigma\to\mathbb{R}^n,f\in C^1$. Уравнение

$$x'=f(x)\tag{13.1}$$

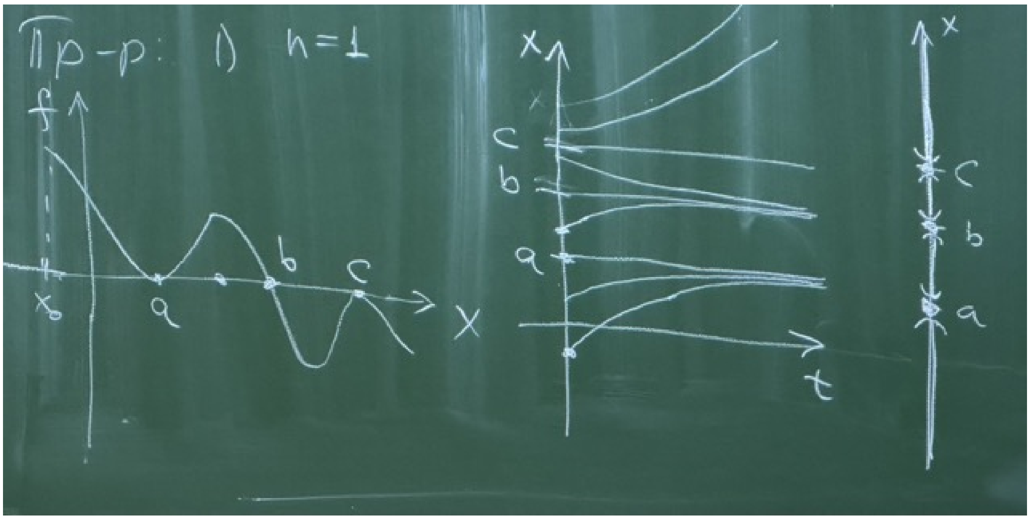
называется автономной системой, Σ называется фазовым пространством.

Пусть $x : I \to \mathbb{R}^n$ — непродолжимое решение, т.к. $\forall \tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ — решения верно, что если $\tilde{x}(t) = x(t) \forall t \in I \cap \tilde{I}$, то $\tilde{I} \subset I$.

Определение 13.2. Траектория — множество $\{x(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$

Определение 13.3. Интегральная кривая — множество $\{(t, x(t)), t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Пример. $n = 1$



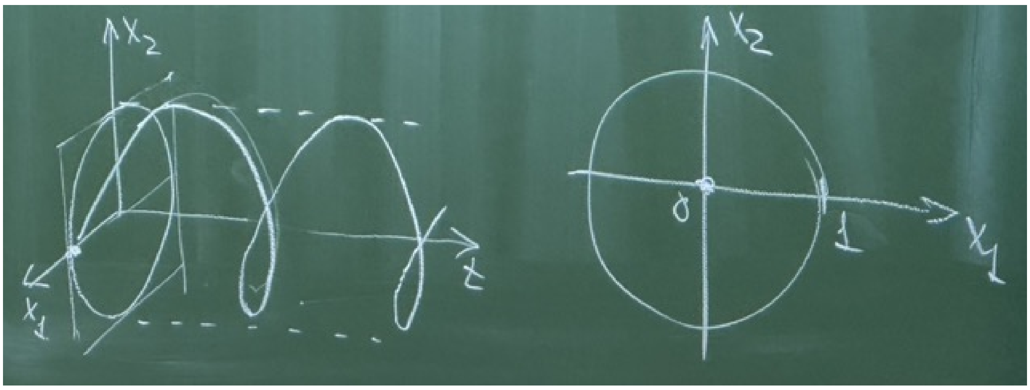
Пример. $n = 2$. Рассмотрим $f(x) = Ax, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ соответсвенно система будет следующая:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1' \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(t+\gamma) \\ \sin(t+\gamma) \end{pmatrix}$$

Тогда интегральная кривая (слева) и траектория (справа) будут выглядеть так:



Определение 13.4. Пусть $\tilde{x} \in \Sigma : f(\tilde{x}) = 0$. Тогда $x(t) = \tilde{x}$ является решением (13.1). В таком случае точка $\tilde{x}$ называется положением равновесия системы (13.1).

13.1 Свойства автономных систем

Некоторые очевидные свойства мы не будем указывать, например, следствия из теоремы о единственности решений.

Замечание. $x : I \to \mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение $\Rightarrow x_c(t) = x(t+c), t \in I - c$ является непродолжаемым решением $\forall c \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_c(t)) = \frac{d}{dt}(x(t+c)) = x'(t+c) = f(x(t+c)) = f(x_c(t)), t \in I - c$$

□

Утверждение 13.1. *Две любых траектории либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $x : I \to \mathbb{R}^n, y : J \to \mathbb{R}^n$ — непролжолжаемые решения (13.1). Пусть $\exists s \in I, \tau \in J : x(s) = y(\tau)$. Положим $z(t) = y(t + \tau - s)$, где $t \in J - (\tau - s)$. Из предыдущего утверждения, z — непродолжаемое решение (13.1). Но $z(s) = y(s + \tau - s) = y(tau) = x(s)$. Но тогда по теореме о существовании и единственности решений, получаем, что $z(t) = x(t)$ и $I = J - (\tau - s)$. Тогда траектория x, y, z совпадают. □

Пример. Рассмотрим $x' = f(t) \Rightarrow x = t^2 + C$. Но тогда траектория решения при данном C, равна $[C, +\infty)$.

Утверждение 13.2. *Пусть $x : I \to \mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение, $x(t_1) = x(t_2), t_1 < t_2$ и $x(t) \neq const$. Тогда $I = \mathbb{R}$ и $x(t)$ — периодичная функция.*

Доказательство. Положим $y(t) = x(t + t_2 - t_1), t \in I - (t_2 - t_1)$. Это непродолжаемое решение (13.1). Также, $y(t_1) = x(t_1 + t_2 - t_1) = x(t_1)$. Поэтому, по теореме о существовании и единственности решения, $y(t) = x(t) \forall t \in I = I - (\underbrace{t_2 - t_1}_{\neq 0}) \Rightarrow I = \mathbb{R}$. Кроме того, получили $x(t + (t_2 - t_1)) = x(t)$, то есть период этой функции (необязательно минимальный) равен $t_2 - t_1$. □

Следствие. Траектория является точкой, или замкнутой кривой без самопересечений, или незамкнутой кривой без самопересечений.

Замечание. Наличие самопересечений означает, что $\exists t_1 \neq t_2 \in \mathbb{R} : x(t_1) = x(t_2)$, но $t_2 - t_1$ не является периодом

Рассмотрим теперь систему:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi \end{cases} \tag{13.2}$$

Положим за $\varphi(\cdot, \xi)$ непродолжаемое решение задачи Коши (13.2), $\xi \in \Sigma$.

Утверждение 13.3. *φ определена на открытом множестве в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируема.*

Доказательство. Следует из аналогичной теоремы для Задачи Коши, зависимой от параметра. □

Утверждение 13.4 (Групповое свойство автономных систем)**.** $\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = \varphi(t + s, \xi)$.

Доказательство. Докажем утверждение в случае, когда φ определена на $\mathbb{R} \times \Sigma$ (иначе будет очень много технических выкладок). Положим $x(t) = \varphi(t, \varphi(s, \xi)), y(t) = \varphi(t + s, \xi), t \in \mathbb{R}$. Заметим, что функции x, y являются решением автономной системы (13.1). $x(0) = \varphi(0, \varphi(s, \xi)) = \varphi(s, \xi)$. Также, $y(0) = \varphi(s, \xi)$. Таким образом, x, y — непролжолжаемыми решениями задачи Коши $x' = f(x), x(0) = \varphi(s, \xi) \Rightarrow$ они совпадают. □

Замечание. Почему данное свойство называется групповым? Рассмотрим множество отображений $\{\varphi(t, \cdot) : \Sigma \to \Sigma, t \in \mathbb{R}\}$ с введенной на нем операцией композиции $\circ$. Тогда это будет группа. Действительно:

0. Корректность следует из группового свойства
1. Ассоциативность следует из свойств композиции.
2. Единица — это $\varphi(0)$
3. $(\varphi(t, \cdot))^{-1} = \varphi(-t, \cdot)$.

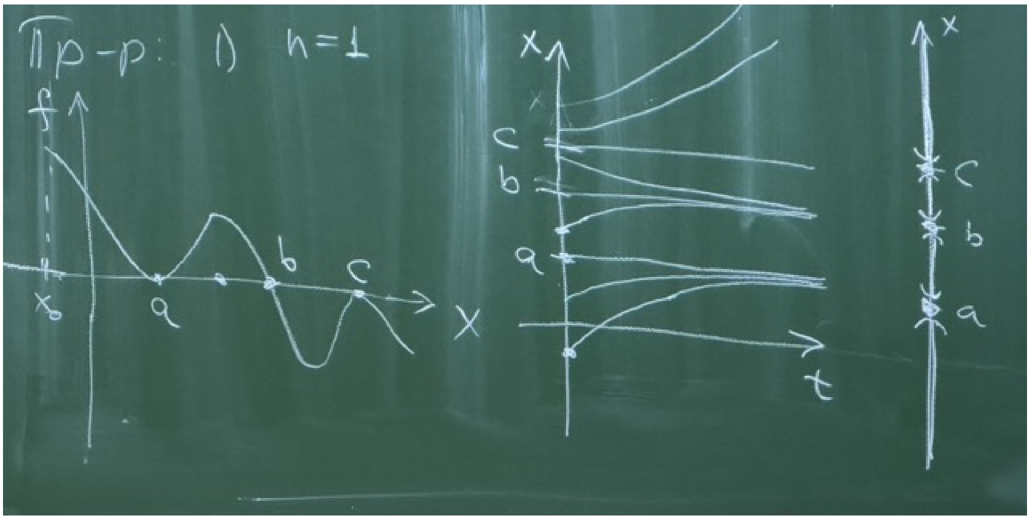
Более того, данная группа будет абелевой (по групповому свойству).

Определение 13.5. Пусть $x : (a, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ — решение, X — его траектория. $z \in \mathbb{R}^n$ называется ω-предельной, если $\exists \{t_j\} \subset (a, +\infty)$, такая, что $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$ и $\lim_{j\to\infty} x(t_j) \to z$. Положим $\Omega(X)$ — множество всех Ω-предельных точек X.

Теорема 13.1. *Пусть X ограничено и $\exists \varepsilon > 0$ такое, что ε-окрестность $X \subset \Sigma$. Тогда $\Omega(X) \neq 0$, ограничено, замкнуто, связно и состоит из тракеторий.*

Теорема 13.2 (Бендиксона)**.** *Пусть $n = 2$, $\Omega(X)$ ограничено, $\Sigma = \mathbb{R}^2$, $f(x) \neq 0 \forall x \in \Omega(X)$. Тогда $\Omega(X)$ — замкнутая траектория.*

Пример. Возьмем $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = |x|^2 \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Тогда траектории будут выглядеть так:



И $\Omega(X)$ — единичная окружность