Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1 Пространство Лебега

1.1 Пространства L_p

Определение 1.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что $f : E \to \mathbb{C}$ измерима (интегрируема) по Лебегу, если $\Re f, \Im f$ измеримы (интегрируемы) по Лебегу.

Определение 1.2. В случае интегрируемости положим $\int_E f = \int_E \Re f + i \int_E \Im f$. Полученный интеграл линеен и аддитивен по множествам

Замечание.

$$\left\| \int_E f \right\| \leqslant \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\int_E f = \left\| \int_E f \right\| e^{i\theta} \Rightarrow \int_E f e^{-i\theta} = \left\| \int_E f \right\| = \int_E \Re(e^{-i\theta} f) \leqslant \int_E |e^{i\theta} f| = \int_E |f|$$

□

Определение 1.3. Пусть $1 \leqslant p \leqslant < \infty$ и E измеримо. Определим:

$$L_p(E) = \{f : E \to \mathbb{C} | \int_E |f|^p < \infty\}$$

В таком случае положим $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Пусть $f, g \in L_p(E)$. Если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\lambda f \in L_p(E)$ и ввиду $|f + g|^p \leqslant (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$ выполнено $f + g \in L_p$. Получили, что L_p является линейным пространством относительно $+, \lambda\cdot$.

Лемма 1.1. *Пусть $a, b \geqslant 0$. Если $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$*

Доказательство. Можно считать, что $ab > 0$. Ввиду выпуклости экспоненты, имеем:

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leqslant \frac{1}{p} e^x + \frac{1}{q} e^y$$

Положим $x = p \ln a, y = q \ln b$ и получаем желаемое. □

Теорема 1.1 (Гельдер). *Пусть $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если $f \in L_p(E), g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$*

Доказательство. Если $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. $\Rightarrow fg = 0$ п.в. $\Rightarrow$ утверждение доказано. Аналогично и для случая $\|g\|_q = 0$. В противном случае, получаем:

$$\|f\|_p \|g\|_q > 0$$

По предыдущей лемме, имеем:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_E |fg| \leqslant \frac{1}{p}\left(\int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right) = 1$$

□

Замечание. В неравенстве гельдера равенство имеет место тогда и только тогда, когда $|f|^p = c|g|^q$ п.в. на E для некоторого $c > 0$.

Теорема 1.2 (Минковский). *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Если* $f, g \in L_p(E)$, *то* $f + g \in L_p(E)$ *и* $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Доказательство. При $p = 1$ применим $|f + g| \leqslant |f| + |g|$. Далее при $p \geqslant 1$: Применим неравенство Гельдера для $p, q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\|f + g\|_p^p = \int_E |f + g|^p \leqslant \int_E |f||f + g|^{p-1} + \int_E |g||f + g|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \|f + g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

□

Замечание. Равенство в теореме Минковского выполняется тогда и только тогда, когда $f = cg$ п.в. для некоторой $c > 0$

Определение 1.4. На L_p введем отношение $\sim$. Будем говорить, что $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ п.в. на E.

Замечание. $\sim$ — отношение эквивалентности на L_p, согласованное с операциями сложения и умножения на скаляр. Факторпространство $L_p(E)/_\sim$ будем также обозначать $L_p(E)$

Следствие. Пространство L_p относительно нормы $\|\cdot\|_p$ является нормированным линейным пространством

Доказательство.

1. $\|f\|_p \geqslant 0, \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$
2. $\|\lambda f\|_p = \lambda\|f\|_p$
3. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

□

Задача. *Если* $\mu(E) < \infty, 1 \leqslant p < q < \infty$, *то* $L_q(E) \subsetneq L_p(E)$

Напоминание. Полное метрическое пространство — такое, что любая фундаментальная последовательность сходится

Теорема 1.3 (Рисса). *Пространство* L_p *банахово (т.е. является полным относительно метрики, порожденной p-нормой).*

Доказательство. Будет позднее □

Напоминание. Напомним, что $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Будем называть функции с компактным носителем финитными.

Лемма 1.2. *Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда $\exists$ простая финитная функция φ такая, что $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.*

Доказательство. Можно считать, что f вещественнозначная (иначе приближаем $\Re f, \Im f$) отдельно. Т.к. $|f - I_{B_k(0)}|^p \leqslant |f|^p$. Тогда по Теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\|f - fI_{B_k(0)}\|_p \to 0, k \to \infty$. Заменяя функцию f на $fI_{B_k(0)}$ для достаточно большого k, заключаем, что она финитная. Пусть сначала $f \geqslant 0$. По теореме о приближении, найдется последовательность $\{\varphi_k\}$ — простых функций, т.ч. $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \ldots, \varphi_k \to f$. Т.к. $|f - \varphi_k|^p \leqslant |f|^p$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $f - \varphi_k \to 0, k \to \infty$, причем все φ_k финитны, т.к. $0 \leqslant \varphi_k \leqslant f$ на E. Пусть f теперь произвольного знака $\Rightarrow f = f^+ - f^-$. Тогда по доказанному найдутся простые финитные функции φ^+, φ^-, такие, что $\|f^+ - \varphi^+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \|f^- - \varphi^-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Тогда φ — простая финитная функция и по неравенству треугольника:

$$\|f - \varphi\|_p \leqslant \|f^+ - \varphi^+\| + \|f^- - \varphi^-\| < \varepsilon$$

□

Теорема 1.4. *Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\|f - g\|_p < \varepsilon$*

Доказательство. По предыдущей лемме, любую функцию можно приблизить финитной простой функцией. Всякая простая функция есть линейная комбинация индикаторов. Из этого заключаем, что достаточно доказать теорему для случая $f = I_A$, где A — ограниченное измеримое множество. По свойству регулярности меры Лебега, $\exists G, H$ — открытые, такие, что $G \supset A, H \supset A^c$ и $\mu(G \backslash A) < \frac{\varepsilon}{2}, \mu(H \backslash A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $k = H^c$ — замкнутое и ограниченное (т.к. лежит в A), т.е. компакт, лежащий в A. $\mu(G \backslash A) \leqslant \mu(G \backslash A) + \mu(H \backslash A^c) < \varepsilon$. По теореме о гладком разбиении единицы, $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ с носителем в G, такая, что $0 \leqslant g \leqslant 1$ и $g|_K = 1$. Поэтому $\|I_A - g|_E\|_p^p = \int_E |I_A - g|^p \leqslant \int_{(G \cap E) \backslash K} |I_A - g|^p \leqslant \mu(G \setminus K) < \varepsilon$ □

Теорема 1.5 (Кантора)**.** *Пусть $f : U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто. Тогда, если K — компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на нем, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in K \forall h \in \mathbb{R}^n (h < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x - h)| < \delta)$$

Доказательство. От противного. Тогда $\exists \{x_k\} \subset K \exists \{h_k\} \subset \mathbb{R}^m |f(x_k) - f(x_k - h_k)| \geqslant \varepsilon_0, h_k \to 0$. Т.к. K — компакт, то $\exists x_{n_k} \to x_0 \in K$ и $x_{n_k} + h_{n_k} \to x_0$. Тогда по непрерывности, $f(x_{n_k}) \to f(x_0), f(x_{n_k} - h_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k} - h_{n_k})| \to 0$ □

Определение 1.5. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^m$. Функция $f_h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}, f_h(x) = f(x - h)$ называется сдвигом функции f на h.

Замечание. Функции f, f_h одновременно лежат в $L_p(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_p = \|f_h\|_p$

Теорема 1.6 (Непрерывность сдвига)**.** *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то $\|f_h - f\|_p \to 0$ при $h \to 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^m)$ (можно считать, что $g = 0$ вне $B_r(0)$), такая, что $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. По неравенству треугольника:

$$\|f_h - f\|_p \leqslant \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_h - g\|$$

Т.к. g непрерывна на $\overline{B_r(0)}$, то $\exists \delta \in (0,1] \forall h \in \mathbb{R}^m (|h| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x-h)| < \frac{\varepsilon}{3M})$, где $M^p = \mu()B_{r+1}(0)$. Поэтому:

$$\|g_h - g\|_p^p = \int |g(x-h) - g(x)|^p dx \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^p \mu(B_{r+1}) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

Следовательно, при $|h| < \delta$, выполнено $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$ $\square$

Следствие (Непрерывность сдвига для периодических функций)**.** Пусть f — 2π-периодичная измеримая на $\mathbb{R}$ функция. Если $\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|^p dx < \infty$, то

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f(x-h) - f(x)|^p dx \to 0, h \to 0$$

Доказательство. Пусть $g = \begin{cases} f, x \in (-2\pi, 2\pi) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $g \in L_p(\mathbb{R})$. Также, при $x \in (-\pi, \pi)$ и $|h| < \pi$ имеем: $|g(x-h) - g(x)| = |f(x-h) - f(x)|$, а значит,

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f(x-h) - f(x)|^p dx = \int_{[-\pi,\pi]} |g(x-h) - g(x)|^p dx \leqslant \|g_h - g\|_p \to 0, h \to 0$$

$\square$

Теорема 1.7 (Римана об осцилляции)**.** *Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$, $f \in L_1(I)$. Тогда*

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \to 0, \lambda \to \pm\infty$$

В частности,

$$\int_I f(x) \cos x dx \to 0, \int_I f(x) \cos x dx \to 0, \lambda \to \pm\infty$$

Доказательство. Рассмотрим случай $I = \mathbb{R}$. Сделаем в интеграле замену $x = t - \frac{\pi}{\lambda}$, тогда:

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)} dx = -\int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda t} dx$$

Следовательно,

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{2}\left(\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_I f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_I \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) e^{i\lambda x} dx\right)$$

Следовательно,

$$\left|\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_I \left|f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| dx\right) = \|f_h - f\|_1 \to 0$$

□

1.2 Свертка и аппроксимация функции

Определение 1.6. Пусть f, g — измеримы в $\mathbb{R}^m$, функция $f*g$ определяемая по формуле

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)dt$$

называется сверткой функций f, g.

Замечание. Покажем измеримость функции $f(x-t)g(t)$ в $\mathbb{R}^{2m}$. Т.к. $g(t)$ измерима в $\mathbb{R}^{2m}$, достаточно показать измеримость $f(x-t)$. Положим $E_a = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) < a\}$ и определим оператор $L : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}, L(x,t) = (x-t,t)$. Тогда $\{(x-t) : f(x-t) < a\} = \{(x,t) : x-t \in E_a\} = L^{-1}(E_a \times \mathbb{R}^m)$ — измеримо как образ измеримого при диффеоморфизме L^{-1}

Лемма 1.3. *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, тогда $f*g$ определена почти всюду. Более того, $f*g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$*

Доказательство. Определим $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)||g(t)|dt$. По теореме Тонелли:

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)|dx\right)|g(t)|dt = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|dy\right)|g(t)|dt = \|f\|_1\|g\|_1$$

Получаем:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} H(x)dx = \|f\|_1\|g\|_1$$

Тогда $|f(x-t)g(t)|$ конечна почти всюду $\Rightarrow (f*g)(x)$ определена почти всюду. □

Теорема 1.8. 1. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g \in L_q(\mathbb{R}^m), \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, то $(f*g)$ существует, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$ и $|(f*g)(x)| \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$*

2. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g$ измерима и ограничена в $\mathbb{R}^m$, то $(f*g)$ существует, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$ и $|(f*g)(x)| \leqslant \|f\|_p\|g\|_\infty$, где $\|g\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^m}|g|$*

Доказательство.

1.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)g(t)|dt \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)|^p dt\right)\frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(t)|^q dt\right)\frac{1}{q} = \|f\|_p\|g\|_q < \infty$$

Тогда $f*g$ определена всюду на $\mathbb{R}^m$, и справедлива оценка из условия. Докажем равномерную непрерывность:

$$|(f*g)(x-h) - (f*g)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^m} (f(x-h-t) - f(x-t))g(t)dt\right| =$$

$$= |((f_h - f)*g)(x)| \leqslant \|f_h - f\|_p\|g\|_q \to 0, h \to 0$$

Последнее стремление равномерное, т.е. не зависит от x, поэтому утверждение доказано

2.
$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)g(t)|dt \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

Равномерное стремление доказывается аналогично пункту 1.

□

Утверждение 1.1. *Пусть* $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^m)$, *тогда:*

1. $(f * g) = (g * f)$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$

Доказательство.

1.
$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)dt = \left\{ \begin{array}{c} x - t = y \\ |J| = 1 \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy = (g * f)$$

2. Следует из теоремы Фубини

□

Определение 1.7. Последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрируемых на $\mathbb{R}^m$ функций называется аппроксимацией единицей (δ-образным семейством), если

1. $K_n \geqslant 0 \forall n$
2. $\int_{\mathbb{R}^m} K_n dx = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geqslant\delta} K_n(x)dx \to 0$ для всех $\delta > 0$.

Пример. Рассмотрим $\varphi \in L_1(\mathbb{R}), \varphi \geqslant 0$ с $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)dx = 1$, положим $K_n(x) = n^m\varphi(nx)$. Тогда:

$$\int_{|x|\geqslant\delta} = \int_{|x|\geqslant\delta} n^m\varphi(nx)dx = \left\{ \begin{array}{c} y = nx \\ |J| = n^m \end{array} \right\} = \int_{|y|\geqslant n\delta} \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi I_{\{|y|\geqslant n\delta\}} dy \to 0$$

Теорема 1.9. *Пусть* $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— аппроксимация единицы и* f *— ограниченная измеримая функция на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если* f *непрерывна в* $x \in \mathbb{R}^m$, *то* $K_n * f(x) \to f(x)$.
2. *Если* f *непрервна в каждой точке компакта* $K \subset \mathbb{R}^m$, *то* $K_n * f \rightrightarrows f$ *на* K

Доказательство. Из пункта 2 определения K_n следует, что $f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)K_n(t)dt$, поэтому $K_n * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} (f(x-t) - f(x))K_n dt$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью f на K, найдем такое $\delta > 0$, что $\forall x \in K \forall t \in \mathbb{R}^m \left(|t| < \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Разобьем последний интеграл следующим образом:

$$K_n * f(x) - f(x) = \left(\int_{|t|<\delta} + \int_{|t|>\delta} \right) (f(x-t) - f(x))K_n(t)dt = I_1 + I_2$$

Имеем:

$$|I_1| \leqslant \int_{|t|<\delta} |f(x-t)-f(x)||K_n(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^m} K_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_2| \leqslant \int_{|t|\geqslant\delta} (f(x-t)+|f(x)|)K_n(t)dt \leqslant 2C\int_{|t|\geqslant\delta} K_n(t)dt$$

Из пункт 3 опрелеления K_n, найдем $N = N(\delta)$ такое, что $\forall n \geqslant N \left(2C\int_{|t|\geqslant\delta} K_n(t)dt \leqslant< \frac{\varepsilon}{2}\right)$, тогда при таких n выполнено $|K_n * f(x) - f(x)| < \varepsilon$, т.е. $K_n * f \rightrightarrows f$ на K.

Пункт 1 следует из пункта 2, где в качестве компакта рассматривается точка. □

Задача. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то $K_n * f(x) \to f$ в L_p.*

В периодическом случае свертка определяется аналогично.

Определение 1.8. Пусть f, g — 2π-периодичны и измеримы на $\mathbb{R}$. Тогда:

$$f * g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Замечание. Все утверждения для свертки верны и в периодическом случае, если заменить $\mathbb{R}$ на $[-\pi,\pi]$ и воспользоваться следующим утверждением:

Утверждение 1.2. *Если f интегрируема на $[-\pi,\pi]$, то интеграл $\int_a^{a+2\pi} f(t)dt$ не зависит от a.*

Доказательство. Пусть $b \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall a \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2\pi k \in [b, b+2\pi)$, тогда:

$$\int_a^{a+2\pi} = \int_{a+2\pi(k-1)}^{a+2\pi k} = \int_{a+2\pi(k-1)}^{b} + \int_b^{a+2\pi k} = \int_b^{a+2\pi k} + \int_{a+2\pi k}^{b+2\pi} = \int_b^{b+2\pi}$$

□

Определение 1.9. Пусть $p \geqslant 1$, тогда определим $L_p(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — 2π-периодичная измеримая, $L_p(-\pi,\pi)\}$. Норма определяется аналогично:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 1.10. $C(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — 2π-периодическая непрерывная функци $\}$ с $\|f\| = \sup_{[-\pi,\pi]} |f|$.

2 Тригонометриеский ряд Фурье

Определение 2.1. Ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{2.1}$$

Называется тригонометрическим рядом с коэффициентами $a_k, b_k \in \mathbb{C}$.

По формулам Эйлера: $\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}, \sin kx = -i\left(\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2}\right)$, поэтому частичные суммы можно переписать в виде:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

Где $c_{\pm k} = \frac{a_k \mp ib_k}{2}, \frac{a_0}{2} = c_0$.

Определение 2.2. Ряд:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{2.2}$$

Называется тригонометрическим рядом в комплексной форме, и его сумма считается как

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

Лемма 2.1. *Пусть $f \in L_1(-\pi,\pi)$ и тригонометрический ряд в форме (2.1) или (2.2) сходится почти всюду к f и существует $g \in L_1(-\pi,\pi)$, такая, что $|S_n(x)| \leqslant g \forall n$ для почти всех x. Тогда:*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt, c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikx}$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$. По условию, $S_n(x)e^{-ikx} \to f(x)e^{-ikx}$ почти всюду. При этом, $|S_n(x)e^{-ikx}| \leqslant g$. Поэтому, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-ikx}dx = \begin{cases} 0, k \neq m \\ 2\pi, k = m \end{cases}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n e^{-ikx}dx = 2\pi c_k, n \geqslant |k|$$

Следовательно, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = 2\pi c_k$ □

Определение 2.3. Пусть $f \in L_1(T)$. Числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt, b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt, c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikx}$$

Называются коэффициентами Фурье функции f, а ряд

$$S(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

Называется тригонометрическим рядом Фурье функции f

Замечание. По лемме Римана об осцилляции, $a_k(f), b_k(f) \to 0$ при $k \to \infty$ и $c_k(f) \to 0$ при $|k| \to 0$.

2.1 Поточечная сходимость рядов Фурье

Определение 2.4. $D_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$ называется n-ым ядром Дирихле.

Замечание. Функция D_n непрерывна, 2π-периодическая, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \pi$.

Имеем:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}ds\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-s)}ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_n(x-s)ds =$$

$$\frac{1}{\pi}D_n * f(x) = \frac{1}{\pi}f * D_n(x)$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2}e^{-nit}\left(1 + e^{it} + \dots + e^{2nit}\right) = \frac{1}{2}e^{-nit}\frac{e^{2(n+1)it}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)it} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)it}}{2\left(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_1(T)$ и $0 < \delta < \pi$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:*

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x-t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt + \varepsilon_n(x), \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(x) = 0$$

Доказательство. Имеем:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|t|<\delta}\frac{f(x-t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{f(x-t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

$h(t) = f(x-t)$ интегрируема на $(-\pi,\pi)$. Положим $g(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$. По непрерывности, доопределим $g(0) = 0$ — то есть g непрерывна на $[-\pi,\pi] \Rightarrow$ ограничена. Аналогично, $\frac{f(x-t)}{t}$ интегрируема на $\pi \geqslant |t| \geqslant \delta$. Но тогда по лемма Римана об осцилляции, получаем желаемое. $\square$