

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
IV СЕМЕСТР

Лектор: Жуковский Сергей Евгеньевич

h\nu

Автор: Киселев Николай
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Продолжение автономных систем	2
1.1 Линейные системы	2
1.1.1 Вещественные собственные числа у матрицы	2
Случай $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 < \lambda_2 $	2
Случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 < \lambda_2$	2
Случай $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	2
Случай $\lambda_1 = \lambda_2$	2
Случай одного собственного вектора с собственным числом λ	3
1.1.2 Комплекснозначные собственные числа у матрицы	3
1.2 Нелинейные системы	3

1 Продолжение автономных систем

Напоминание. Мы рассматриваем автономные системы, т.е. вида $x' = f(x)$.

1.1 Линейные системы

Будем рассматривать уравнение в \mathbb{R}^2 :

$$x' = Ax \quad (1.1)$$

Где $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — матрица, причем $\det A \neq 0$ (система простая)

1.1.1 Вещественные собственные числа у матрицы

Для начала рассмотрим случай наличия двух собственных векторов у матрицы A . Положим h_1, h_2 — собственные векторы, тогда они ЛНЗ. Заметим, что тогда:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

Рассмотрим плоскость в базисе (h_1, h_2) . Пусть ξ_i — i -ая координатная функция решения. Тогда:

$$\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} = c_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1 t} = c_2 \left(\frac{\xi_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Таким образом, в координатах h_1, h_2 и при $t \rightarrow \infty$, мы можем видеть следующую картинку (стрелки показывают движение решения при $t \rightarrow \infty$):

Случай $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, |\lambda_1| < |\lambda_2|$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *устойчивым узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 < \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *неустойчивым узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *седлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 = \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *дикритическим узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Для случая, когда собственный вектор один:

Случай одного собственного вектора с собственным числом λ Тогда пусть h_1 — собственный вектор, h_2 — присоединенный к нему. Тогда:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} h_1 + c_2 e^{\lambda t} (h_1 t + h_2) = h_1 \underbrace{(c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} t)}_{\xi_1} + h_2 \underbrace{c_2 e^{\lambda t}}_{\xi_2}$$

Тогда имеем:

$$\xi_1 = \frac{c_1}{c_2} \xi_2 + \xi_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{c_2}$$

В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *дикритическим узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

1.1.2 Комплекснозначные собственные числа у матрицы

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда $h = h_1 \pm ih_2$ — собственные векторы, где h_1, h_2 — ЛНЗ. Тогда:

$$x(t) = ce^{\lambda t} h + \bar{c}e^{\bar{\lambda}t} \bar{h}, c \in \mathbb{C}$$

Положим $c = \frac{r}{2}e^{i\varphi}$, тогда:

$$x(t) = \frac{r}{2}e^{\alpha t} (e^{i\varphi+i\beta t} (h_1 + ih_2) e^{-i\varphi-i\beta t} (h_1 - ih_2)) = re^{\alpha t} (\cos(\varphi + \beta t) h_1 - \sin(\varphi + \beta t) h_2)$$

Получаем:

$$\xi_1(t) = re^{\alpha t} \cos(\varphi + \beta t)$$

$$\xi_2(t) = re^{\alpha t} \sin(\varphi + \beta t)$$

Картинки в зависимости от разных α, β будут следующие:

тут должны быть картинки

1.2 Нелинейные системы

Будем рассматривать уравнение

$$x' = f(x), f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, f \in C^2, \Omega — открытое \quad (1.2)$$

Пусть $\tilde{x} \in \Omega$ таково, что $f(\tilde{x}) = 0$, т.е. \tilde{x} — положение равновесия. Рассмотрим еще одно уравнение:

$$y' = f'(\tilde{x})y, f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Теорема 1.1 (б/д). Пусть $\det f(\tilde{x}) \neq 0$, (т.е. система (1.3) простая), причем 0 не является ее центром. Тогда $\exists U$ — окрестность \tilde{x} , $\exists V$ — окрестность 0, $\exists \psi : U \rightarrow V$ — гомеоморфизм, такие, что выполнены следующие условия:

1. \forall траектории $X \subset V$ системы (1.2), $\psi(X)$ — траектория системы (1.3)
2. \forall траектории $Y \subset U$ системы (1.3), $\psi^{-1}(Y)$ — траектория системы (1.2)

Пример. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 - x_1|x| \\ x'_2 = x_1 - x_2|x| \end{cases}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

И линеаризованная система имеет вид:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

Заметим, что тогда $\lambda \pm i$ и 0 — центр. Сделаем замену $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$, имеем:

$$\begin{cases} r' \cos \varphi - r(\sin \varphi)\varphi' = -r \sin \varphi - r^2 \cos \varphi \\ r' \sin \varphi + r(\cos \varphi)\varphi' = r \cos \varphi - r^2 \sin \varphi \end{cases}$$

$$\{ r' = -r^2 - r\varphi' = -r \Rightarrow \varphi' = 1$$

Получили, что $\varphi = \varphi_0 + t$ и

$$x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos(\varphi_0 + t) \\ r(t) \sin(\varphi_0 + t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, картинка будет следующей:

тут должна быть картинка

Т.е. одна траектория получилась не замкнутой. Но тогда между ними не может существовать гомеоморфизма. Таким образом, условие, что 0 — не центр существенно.