Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Жуковский Сергей Евгеньевич*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Продолжение автономных систем

Напоминание. Мы рассматриваем автономные системы, т.е. вида $x' = f(x)$.

1.1 Линейные системы

Будем рассматривать уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$x' = Ax \tag{1.1}$$

Где $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ — матрица, причем $\det A \neq 0$ (система простая)

1.1.1 Вещественные собственные числа у матрицы

Для начала рассмотрим случай наличия двух собственных векторов у матрицы A. Положим h_1, h_2 — собственные векторы, тогда они ЛНЗ. Заметим, что тогда:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

Рассмотрим плоскость в базисе (h_1, h_2). Пусть ξ_i — i-ая координатная функция решения. Тогда:

$$\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} = c_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\lambda_1 t} = c_2 \left(\frac{\xi_1}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Таким образом, в координатах h_1, h_2 и при $t \to \infty$, мы можем видеть следующую картинку (стрелки показывают движение решения при $t \to \infty$):

Случай $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, |\lambda_1| < |\lambda_2|$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *устойчиывм узлом.* Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 < \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *неустойчивым узлом.* Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *седлом.* Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 = \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *дикритическим узлом.* Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Для случая, когда собственный вектор один:

Случай одного собственного вектора с собственным числом λ Тогда пусть h_1 — собственный вектор, h_2 — присоединенный к нему. Тогда:

$$x(t) = c_1e^{\lambda t}h_1 + c_2e^{\lambda t}(h_1t + h_2) = h_1\underbrace{(c_1e^{\lambda t} + c_2e^{\lambda t}t)}_{\xi_1} + h_2\underbrace{c_2e^{\lambda t}}_{\xi_2}$$

Тогда имеем:

$$\xi_1 = \frac{c_1}{c_2}\xi_2 + \xi_2\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\xi_2}{c_2}$$

В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *дикритическим узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

1.1.2 Комплекснозначные собственные числа у матрицы

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$. Тогда $h = h_1 \pm ih_2$ — собственные векторы, где h_1, h_2 — ЛНЗ. Тогда:

$$x(t) = ce^{\lambda t}h + \overline{c}e^{\overline{\lambda}t}\overline{h}, c \in \mathbb{C}$$

Положим $c = \frac{r}{2}e^{i\varphi}$, тогда:

$$x(t) = \frac{r}{2}e^{\alpha t}\left(e^{i\varphi+i\beta t}(h_1 + ih_2)e^{-i\varphi-i\beta t}(h_1 - ih_2)\right) = re^{\alpha t}(\cos(\varphi + \beta t)h_1 - \sin(\varphi + \beta t)h_2)$$

Получаем:

$$\xi_1(t) = re^{\alpha t}\cos(\varphi + \beta t)$$

$$\xi_2(t) = re^{\alpha t}\sin(\varphi + \beta t)$$

Картинки в зависимости от ранзых α, β будут следующие:

тут должны быть картинки

1.2 Нелинейные системы

Будем рассматривать уравнение

$$x' = f(x), f : \Omega \to \mathbb{R}^2, f \in C^2, \Omega \text{ — открытое} \tag{1.2}$$

Пусть $\tilde{x} \in \Omega$ таково, что $f(\tilde{x}) = 0$, т.е. $\tilde{x}$ — положение равновесия. Рассмотрим еще одно уравнение:

$$y' = f'(\tilde{x})y, f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Теорема 1.1 (б/д). *Пусть* $\det f(\tilde{x}) \neq 0$, *(т.е. система (1.3) простая), причем* 0 *не является ее центром. Тогда* $\exists U$ *— окрестность* $\tilde{x}$, $\exists V$ *— окрестность* 0, $\exists \psi : U \to V$ *— гомеоморфизм, такие, что выполнены следующие условия:*

1. $\forall$ *траектории* $X \subset V$ *системы (1.2),* $\psi(X)$ *— тракетория системы (1.3)*
2. $\forall$ *траектории* $Y \subset U$ *системы (1.3),* $\psi^{-1}(Y)$ *— тракетория системы (1.2)*

Пример. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1|x| \\ x_2' = x_1 - x_2|x| \end{cases}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

И линеаризованная система имеет вид:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

Заметим, что тогда $\lambda \pm i$ и 0 — центр. Сделаем замену $x_1 = r\cos\varphi, x_1 = r\sin\varphi$, имеем:

$$\begin{cases} r'\cos\varphi - r(\sin\varphi)\varphi' = -r\sin\varphi - r^2\cos\varphi \\ r'\sin\varphi + r(\cos\varphi)\varphi' = r\cos\varphi - r^2\sin\varphi \end{cases}$$

$$\{r' = -r^2 - r\varphi' = -r \Rightarrow \varphi' = 1$$

Получили, что $\varphi = \varphi_0 + t$ и

$$x(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\varphi_0 + t) \\ r(t)\sin(\varphi_0 + t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, картинка будет следующей:

тут должна быть картинка

Т.е. одна траектория получилась не замкнутой. Но тогда между ними не может существовать гомеоморфизма. Таким образом, условие, что 0 — не центр существенно.

2 Устойчивость решений дифференциальных уравнений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, f \in C^1$. Будем рассматривать уравнение:

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

Пусть $\varphi(\cdot, \xi)$ — непрерывное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

Определение 2.1. Решение $\varphi(\cdot, \hat{\xi})$ называется устойчивым по Ляпунову, если

1. $\exists r > 0 : \forall \xi \in O(\hat{\xi}, r)$ $\varphi(\cdot, \xi)$ определена на $[0, +\infty)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \xi \in O(\hat{\xi}, \delta) \Rightarrow \varphi(t, \xi) \in O(\varphi(t, \hat{\xi}), \varepsilon) \forall t \in [0, +\infty)$

Определение 2.2. Решение $\varphi(\cdot, \hat{\xi})$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и $\exists d > 0 : \forall \xi \in O(\hat{\xi}, d) : |\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \hat{\xi})| \to 0$ при $t \to 0$

2.1 Примеры

1. **Логистическое уравнение.**

$$x' = rx\left(1-\frac{x}{k}\right), \varphi(t,\xi) = \frac{k\xi e^{rt}}{k-\xi+\xi e^{rt}}$$

тут должна быть картинка

Тогда: при $\hat{\xi} = k, \varphi(\cdot, \hat{\xi})$ — асимптотически устойчиво, а при $\hat{\xi} = 0$ оно не устойчиво по Ляпунову.

2. $$x' = Ax, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Тогда в зависимости от картинки решение будет иметь разный характер устойчивости:

- ▷ Седло $\Rightarrow$ не устойчиво по Ляпунову
- ▷ Центр $\Rightarrow$ устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически
- ▷ Устойчивый узел $\Rightarrow$ устойчиво асимптотически

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda_1 \dots \lambda_m$ — собственные числа матрицы A. Тогда:*

1. Если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0 \forall j$ то 0 асимптотически устойчив

2. Если

- ▷ $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0 \forall j \Rightarrow 0$
- ▷ $\exists j : \operatorname{Re}\lambda_j = 0$
- ▷ $\operatorname{Re}\lambda_j = 0 \Rightarrow$ *все соответствующие жордановы клетки имеют размер 1.*

то 0 устойчив по Ляпунову и не устойчив асимптотически.

3. Во всех остальных случаях 0 не устойчив по Ляпунову.

Доказательство. Нам известно, что:

$$x(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{2.2}$$

Причем $\deg P_j <$ размер наибольшей Жордановой клетки, соответствующей числу λ_j. Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$

1. Пусть $X(t)$ — ФМР, $X(0) = I$. Пусть $x(t)$ — один из столбцов ФМР. Тогда:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\lambda_j t}(\cos(\beta_j t) + i\sin(\beta_j t)) \to 0, t \to +\infty$$

Тогда

$$X(t) \to 0, t \to +\infty \Rightarrow \|X(t)\| \to 0, t \to +\infty \tag{2.3}$$

Получаем, что $\exists \gamma > 0 : \|X(t)\| \leqslant \gamma \forall t \geqslant 0$.

$$\varphi(t,\xi) = X(t)\xi, t \geqslant 0, \xi \in \mathbb{R}^n$$

$\forall \varepsilon > 0$ положим $\delta = \frac{2\varepsilon}{\gamma}$. Тогда при $\xi \in O(0,\delta)$, то $|\varphi(t,\xi)| = |X(t)\xi| \leqslant \|X(t)\| \cdot |\xi| \leqslant \gamma\delta < \varepsilon$. Таким образом, данное решение асимптотически устойчиво.

2. Из размера жордановых клеток и условия, что $\operatorname{Re} lambda_j \leqslant 0$ получаем, что каждый элемент матрицы $X(t)$ ограничен $\Rightarrow \exists \gamma > 0 : \|X(t)\| \leqslant \gamma$. Тогда аналогично получаем, что 0 устойчиво по Ляпунову.

   Докажем, что нет асимптотической устойчивости. Пусть $\alpha_1 = \operatorname{Re} \lambda_1 = 0, h_1 \in C^n$ — собственный вектор. Тогда $x(t) = e^{\lambda_1 t} h_1 = (\cos(\beta_1 t) + i \sin(\beta_1 t))h_1$ — решение. Тогда решением также являются функции: $x_k(t) = \frac{1}{k} \operatorname{Re} x(t), k \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall d > 0 \exists k : x_k(0) = \frac{1}{k} \operatorname{Re}(x(0)) \in O(0,d)$. Но $x_k(t) \not\to 0$, т.к.:

$$x_k(t) = \frac{1}{k}(\operatorname{Re} h_1 \cos(\beta_1 t) + \operatorname{Im} h_1 - \sin(\beta_1 t))$$

3. Нетрудно проверить, что тогда $\exists j : P_j(t)e^{\lambda_j t}$ не ограничено. Тогда: $x(t) = P_j(t)e^{\lambda_j t}$ — решение. Но тогда $x_k(t) = \frac{1}{k} \operatorname{Re} x(t), y_k(t) = \frac{1}{k} \operatorname{Im} x(t)$ — тоже решения. Но в таком случае, либо x_k, либо y_k не ограничены. Б.О.О., x_k не ограничено. Положим $\varepsilon = 1$. $\forall \delta > 0 \exists k : |x_k(0)| < \delta$, но $|x_k(t)|$ не ограничена при $t \in [0, +\infty) \Rightarrow 0$ не является устойчивым по Ляпунову.

$\square$