

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
IV СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*



Автор: *Киселев Николай*  
*Репозиторий на Github*

весна 2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Пространство Лебега</b>	<b>2</b>
1.1	Пространства $L_p$ . . . . .	2
1.2	Свертка и аппроксимация функции . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Тригонометрический ряд Фурье</b>	<b>8</b>
2.1	Поточечная сходимость рядов Фурье . . . . .	10

# 1 Пространство Лебега

## 1.1 Пространства $L_p$

**Определение 1.1.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$ . Будем говорить, что  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  измерима (интегрируема) по Лебегу, если  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  измеримы (интегрируемы) по Лебегу.

**Определение 1.2.** В случае интегрируемости положим  $\int_E f = \int_E \operatorname{Re} f + i \int_E \operatorname{Im} f$ . Полученный интеграл линеен и аддитивен по множествам

**Замечание.**

$$\left\| \int_E f \right\| \leq \int_E |f|$$

*Доказательство.*

$$\int_E f = \left\| \int_E f \right\| e^{i\theta} \Rightarrow \int_E f e^{-i\theta} = \left\| \int_E f \right\| = \int_E \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq \int_E |e^{i\theta} f| = \int_E |f|$$

□

**Определение 1.3.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$  и  $E$  измеримо. Определим:

$$L_p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_E |f|^p < \infty\}$$

В таком случае положим  $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Пусть  $f, g \in L_p(E)$ . Если  $\lambda \in \mathbb{C}$ , то  $\lambda f \in L_p(E)$  и ввиду  $|f + g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$  выполнено  $f + g \in L_p$ . Получили, что  $L_p$  является линейным пространством относительно  $+$ ,  $\lambda \cdot$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $a, b \geq 0$ . Если  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $a^p = b^q$

*Доказательство.* Можно считать, что  $ab > 0$ . Ввиду выпуклости экспоненты, имеем:

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p} e^x + \frac{1}{q} e^y$$

Положим  $x = p \ln a$ ,  $y = q \ln b$  и получаем желаемое. □

**Теорема 1.1** (Гельдер). Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Если  $f \in L_p(E)$ ,  $g \in L_q(E)$ , то  $fg \in L_1(E)$  и  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

*Доказательство.* Если  $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$  п.в.  $\Rightarrow fg = 0$  п.в.  $\Rightarrow$  утверждение доказано. Аналогично и для случая  $\|g\|_q = 0$ . В противном случае, получаем:

$$\|f\|_p \|g\|_q > 0$$

По предыдущей лемме, имеем:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_E |fg| \leq \frac{1}{p} \left( \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \right) + \frac{1}{q} \left( \int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \right) = 1$$

□

**Замечание.** В неравенстве Гельдера равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $|f|^p = c|g|^q$  п.в. на  $E$  для некоторого  $c > 0$ .

**Теорема 1.2** (Минковский). Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Если  $f, g \in L_p(E)$ , то  $f + g \in L_p(E)$  и  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

*Доказательство.* При  $p = 1$  применим  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Далее при  $p \geq 1$ : Применим неравенство Гельдера для  $p, q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_E |f + g|^p \leq \int_E |f| |f + g|^{p-1} + \int_E |g| |f + g|^{p-1} \leq \\ &\leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p) \end{aligned}$$

□

**Замечание.** Равенство в теореме Минковского выполняется тогда и только тогда, когда  $f = cg$  п.в. для некоторой  $c > 0$

**Определение 1.4.** На  $L_p$  введем отношение  $\sim$ . Будем говорить, что  $f \sim g \Leftrightarrow f = g$  п.в. на  $E$ .

**Замечание.**  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $L_p$ , согласованное с операциями сложения и умножения на скаляр. Факторпространство  $L_p(E)/\sim$  будем также обозначать  $L_p(E)$

**Следствие.** Пространство  $L_p$  относительно нормы  $\|\cdot\|_p$  является нормированным линейным пространством

*Доказательство.*

1.  $\|f\|_p \geq 0, \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$
2.  $\|\lambda f\|_p = \lambda \|f\|_p$
3.  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

□

**Задача.** Если  $\mu(E) < \infty, 1 \leq p < q < \infty$ , то  $L_q(E) \subsetneq L_p(E)$

**Напоминание.** Полное метрическое пространство — такое, что любая фундаментальная последовательность сходится

**Теорема 1.3** (Рисса). Пространство  $L_p$  банахово (т.е. является полным относительно метрики, порожденной  $p$ -нормой).

*Доказательство.* Будет позднее □

**Напоминание.** Напомним, что  $\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ . Будем называть функции с компактным носителем финитными.

**Лемма 1.2.** Пусть  $f \in L_p, \varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists$  простая финитная функция  $\varphi$  такая, что  $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $f$  вещественнозначная (иначе приближаем  $\text{Re } f, \text{Im } f$  отдельно). Т.к.  $|f - I_{B_k(0)}|^p \leq |f|^p$ . Тогда по Теореме Лебега о мажорируемой сходимости,  $\|f - f I_{B_k(0)}\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ . Заменяя функцию  $f$  на  $f I_{B_k(0)}$  для достаточно большого  $k$ , заключаем, что она финитная. Пусть сначала  $f \geq 0$ . По теореме о приближении, найдется последовательность  $\{\varphi_k\}$  — простых функций, т.ч.  $0 \leq \varphi_1 \leq \dots, \varphi_k \rightarrow f$ . Т.к.  $|f - \varphi_k|^p \leq |f|^p$ . По теореме Лебега о мажорируемой сходимости  $f - \varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , причем все  $\varphi_k$  финитны, т.к.  $0 \leq \varphi_k \leq f$  на  $E$ . Пусть  $f$  теперь произвольного знака  $\Rightarrow f = f^+ - f^-$ . Тогда по доказанному найдутся простые финитные функции  $\varphi^+, \varphi^-$ , такие, что  $\|f^+ - \varphi^+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \|f^- - \varphi^-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Положим  $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ . Тогда  $\varphi$  — простая финитная функция и по неравенству треугольника:

$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f^+ - \varphi^+\|_p + \|f^- - \varphi^-\|_p < \varepsilon$$

□

**Теорема 1.4.** Пусть  $f \in L_p, \varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ , т.ч.  $\|f - g\|_p < \varepsilon$

*Доказательство.* По предыдущей лемме, любую функцию можно приблизить финитной простой функцией. Всякая простая функция есть линейная комбинация индикаторов. Из этого заключаем, что достаточно доказать теорему для случая  $f = I_A$ , где  $A$  — ограниченное измеримое множество. По свойству регулярности меры Лебега,  $\exists G, H$  — открытые, такие, что  $G \supset A, H \supset A^c$  и  $\mu(G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}, \mu(H \setminus A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Положим  $K = H^c$  — замкнутое и ограниченное (т.к. лежит в  $A$ ), т.е. компакт, лежащий в  $A$ .  $\mu(G \setminus A) \leq \mu(G \setminus A) + \mu(H \setminus A^c) < \varepsilon$ . По теореме о гладком разбиении единицы,  $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  с носителем в  $G$ , такая, что  $0 \leq g \leq 1$  и  $g|_K = 1$ . Поэтому  $\|I_A - g\|_p^p = \int_E |I_A - g|^p \leq \int_{(G \cap E) \setminus K} |I_A - g|^p \leq \mu(G \setminus K) < \varepsilon$  □

**Теорема 1.5** (Кантора). Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открыто. Тогда, если  $K$  — компакт и  $f$  непрерывна на нем, то  $f$  равномерно непрерывна на нем, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in K \forall h \in \mathbb{R}^n (h < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x - h)| < \varepsilon)$$

*Доказательство.* От противного. Тогда  $\exists \{x_k\} \subset K \exists \{h_k\} \subset \mathbb{R}^m |f(x_k) - f(x_k - h_k)| \geq \varepsilon_0, h_k \rightarrow 0$ . Т.к.  $K$  — компакт, то  $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$  и  $x_{n_k} + h_{n_k} \rightarrow x_0$ . Тогда по непрерывности,  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0), f(x_{n_k} - h_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k} - h_{n_k})| \rightarrow 0$  □

**Определение 1.5.** Пусть  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^m$ . Функция  $f_h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}, f_h(x) = f(x - h)$  называется сдвигом функции  $f$  на  $h$ .

**Замечание.** Функции  $f, f_h$  одновременно лежат в  $L_p(\mathbb{R}^m)$  и  $\|f\|_p = \|f_h\|_p$

**Теорема 1.6** (Непрерывность сдвига). Если  $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ , то  $\|f_h - f\|_p \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^m)$  (можно считать, что  $g = 0$  вне  $B_r(0)$ ), такая, что  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ . По неравенству треугольника:

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_h - g\|_p$$

Т.к.  $g$  непрерывна на  $\overline{B_r(0)}$ , то  $\exists \delta \in (0, 1] \forall h \in \mathbb{R}^m (|h| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x - h)| < \frac{\varepsilon}{3M})$ , где  $M^p = \mu(B_{r+1}(0))$ . Поэтому:

$$\|g_h - g\|_p^p = \int |g(x - h) - g(x)|^p dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^p \mu(B_{r+1}) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

Следовательно, при  $|h| < \delta$ , выполнено  $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$  □

**Следствие** (Непрерывность сдвига для периодических функций). Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодичная измеримая на  $\mathbb{R}$  функция. Если  $\int_{[-\pi, \pi]} |f(x)|^p dx < \infty$ , то

$$\int_{[-\pi, \pi]} |f(x - h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

*Доказательство.* Пусть  $g = \begin{cases} f, x \in (-2\pi, 2\pi) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ . Тогда  $g \in L_p(\mathbb{R})$ . Также, при  $x \in (-\pi, \pi)$  и  $|h| < \pi$  имеем:  $|g(x - h) - g(x)| = |f(x - h) - f(x)|$ , а значит,

$$\int_{[-\pi, \pi]} |f(x - h) - f(x)|^p dx = \int_{[-\pi, \pi]} |g(x - h) - g(x)|^p dx \leq \|g_h - g\|_p \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

□

**Теорема 1.7** (Римана об осцилляции). Пусть  $I$  — промежуток в  $\mathbb{R}$ ,  $f \in L_1(I)$ . Тогда

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \pm\infty$$

В частности,

$$\int_I f(x) \cos \lambda x dx \rightarrow 0, \int_I f(x) \sin \lambda x dx \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \pm\infty$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $I = \mathbb{R}$ . Сделаем в интеграле замену  $x = t - \frac{\pi}{\lambda}$ , тогда:

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)} dx = - \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda t} dx$$

Следовательно,

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{2} \left( \int_I f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_I f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx \right) = \frac{1}{2} \left( \int_I \left( f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda x} dx \right)$$

Следовательно,

$$\left| \int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{1}{2} \left( \int_I \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx \right) = \|f_h - f\|_1 \rightarrow 0$$

□

## 1.2 Свертка и аппроксимация функции

**Определение 1.6.** Пусть  $f, g$  — измеримы в  $\mathbb{R}^m$ , функция  $f * g$  определяемая по формуле

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - t)g(t)dt$$

называется сверткой функций  $f, g$ .

**Замечание.** Покажем измеримость функции  $f(x - t)g(t)$  в  $\mathbb{R}^{2m}$ . Т.к.  $g(t)$  измерима в  $\mathbb{R}^{2m}$ , достаточно показать измеримость  $f(x - t)$ . Положим  $E_a = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) < a\}$  и определим оператор  $L : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ ,  $L(x, t) = (x - t, t)$ . Тогда  $\{(x - t) : f(x - t) < a\} = \{(x, t) : x - t \in E_a\} = L^{-1}(E_a \times \mathbb{R}^m)$  — измеримо как образ измеримого при диффеоморфизме  $L^{-1}$

**Лемма 1.3.** Пусть  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ , тогда  $f * g$  определена почти всюду. Более того,  $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$  и  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

*Доказательство.* Определим  $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)||g(t)|dt$ . По теореме Тонелли:

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)|dx \right) |g(t)|dt = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|dy \right) |g(t)|dt = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Получаем:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x - t)g(t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^m} H(x)dx = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Тогда  $|f(x - t)g(t)|$  конечна почти всюду  $\Rightarrow (f * g)(x)$  определена почти всюду. □

**Теорема 1.8.** 1. Если  $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g \in L_q(\mathbb{R}^m), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то  $(f * g)$  существует, равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}^m$  и  $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

2. Если  $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g$  измерима и ограничена в  $\mathbb{R}^m$ , то  $(f * g)$  существует, равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}^m$  и  $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_\infty$ , где  $\|g\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^m} |g|$

*Доказательство.*

1.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)g(t)|dt \leq \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

Тогда  $f * g$  определена всюду на  $\mathbb{R}^m$ , и справедлива оценка из условия. Докажем равномерную непрерывность:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x - h) - (f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(x - h - t) - f(x - t))g(t)dt \right| = \\ &= |((f_h - f) * g)(x)| \leq \|f_h - f\|_p \|g\|_q \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Последнее стремление равномерное, т.е. не зависит от  $x$ , поэтому утверждение доказано

2.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)g(t)|dt \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

Равномерное стремление доказывается аналогично пункту 1.

□

**Утверждение 1.1.** Пусть  $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^m)$ , тогда:

1.  $(f * g) = (g * f)$
2.  $(f * g) * h = f * (g * h)$

*Доказательство.*

1.

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)dt = \left\{ \begin{array}{l} x-t=y \\ |J|=1 \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy = (g * f)$$

2. Следует из теоремы Фубини

□

**Определение 1.7.** Последовательность  $\{K_n\}_{n=1}^\infty$  интегрируемых на  $\mathbb{R}^m$  функций называется аппроксимацией единицы ( $\delta$ -образным семейством), если

1.  $K_n \geq 0 \forall n$
2.  $\int_{\mathbb{R}^m} K_n dx = 1$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} K_n(x) dx \rightarrow 0$  для всех  $\delta > 0$ .

**Пример.** Рассмотрим  $\varphi \in L_1(\mathbb{R}), \varphi \geq 0$  с  $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx = 1$ , положим  $K_n(x) = n^m \varphi(nx)$ . Тогда:

$$\int_{|x| \geq \delta} = \int_{|x| \geq \delta} n^m \varphi(nx) dx = \left\{ \begin{array}{l} y = nx \\ |J| = n^m \end{array} \right\} = \int_{|y| \geq n\delta} \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi I_{\{|y| \geq n\delta\}} dy \rightarrow 0$$

**Теорема 1.9.** Пусть  $\{K_n\}_{n=1}^\infty$  — аппроксимация единицы и  $f$  — ограниченная измеримая функция на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда справедливы утверждения:

1. Если  $f$  непрерывна в  $x \in \mathbb{R}^m$ , то  $K_n * f(x) \rightarrow f(x)$ .
2. Если  $f$  непрерывна в каждой точке компакта  $K \subset \mathbb{R}^m$ , то  $K_n * f \rightrightarrows f$  на  $K$

*Доказательство.* Из пункта 2 определения  $K_n$  следует, что  $f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) K_n(t) dt$ , поэтому  $K_n * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} (f(x-t) - f(x)) K_n(t) dt$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Пользуясь равномерной непрерывностью  $f$  на  $K$ , найдем такое  $\delta > 0$ , что  $\forall x \in K \forall t \in \mathbb{R}^m (|t| < \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2})$ . Разобьем последний интеграл следующим образом:

$$K_n * f(x) - f(x) = \left( \int_{|t| < \delta} + \int_{|t| > \delta} \right) (f(x-t) - f(x)) K_n(t) dt = I_1 + I_2$$



Имеем:

$$|I_1| \leq \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| |K_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^m} K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_2| \leq \int_{|t| \geq \delta} (f(x-t) + |f(x)|) K_n(t) dt \leq 2C \int_{|t| \geq \delta} K_n(t) dt$$

Из пункт 3 определения  $K_n$ , найдем  $N = N(\delta)$  такое, что  $\forall n \geq N \left( 2C \int_{|t| \geq \delta} K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \right)$ , тогда при таких  $n$  выполнено  $|K_n * f(x) - f(x)| < \varepsilon$ , т.е.  $K_n * f \Rightarrow f$  на  $K$ .

Пункт 1 следует из пункта 2, где в качестве компакта рассматривается точка.  $\square$

**Задача.** Если  $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ , то  $K_n * f(x) \rightarrow f$  в  $L_p$ .

В периодическом случае свертка определяется аналогично.

**Определение 1.8.** Пусть  $f, g$  —  $2\pi$ -периодичны и измеримы на  $\mathbb{R}$ . Тогда:

$$f * g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

**Замечание.** Все утверждения для свертки верны и в периодическом случае, если заменить  $\mathbb{R}$  на  $[-\pi, \pi]$  и воспользоваться следующим утверждением:

**Утверждение 1.2.** Если  $f$  интегрируема на  $[-\pi, \pi]$ , то интеграл  $\int_a^{a+2\pi} f(t)dt$  не зависит от  $a$ .

*Доказательство.* Пусть  $b \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\forall a \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2\pi k \in [b, b + 2\pi)$ , тогда:

$$\int_a^{a+2\pi} = \int_{a+2\pi(k-1)}^{a+2\pi k} = \int_{a+2\pi(k-1)}^b + \int_b^{a+2\pi k} = \int_b^{a+2\pi k} + \int_{a+2\pi k}^{b+2\pi} = \int_b^{b+2\pi}$$

$\square$

**Определение 1.9.** Пусть  $p \geq 1$ , тогда определим  $L_p(T) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ — } 2\pi\text{-периодичная измеримая, } L_p(-\pi, \pi)\}$ . Норма определяется аналогично:

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Определение 1.10.**  $C(T) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ — } 2\pi\text{-периодическая непрерывная функции } \}$  с  $\|f\| = \sup_{[-\pi, \pi]} |f|$ .

## 2 Тригонометрический ряд Фурье

**Определение 2.1.** Ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (2.1)$$

Называется тригонометрическим рядом с коэффициентами  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ .

По формулам Эйлера:  $\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ ,  $\sin kx = -i \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right)$ , поэтому частичные суммы можно переписать в виде:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

Где  $c_{\pm k} = \frac{a_k \mp ib_k}{2}$ ,  $\frac{a_0}{2} = c_0$ .

**Определение 2.2.** Ряд:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (2.2)$$

Называется тригонометрическим рядом в комплексной форме, и его сумма считается как

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n c_k e^{ikx}$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $f \in L_1(-\pi, \pi)$  и тригонометрический ряд в форме (2.1) или (2.2) сходится почти всюду к  $f$  и существует  $g \in L_1(-\pi, \pi)$ , такая, что  $|S_n(x)| \leq g \forall n$  для почти всех  $x$ . Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt, c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $k \in \mathbb{Z}$ . По условию,  $S_n(x)e^{-ikx} \rightarrow f(x)e^{-ikx}$  почти всюду. При этом,  $|S_n(x)e^{-ikx}| \leq g$ . Поэтому, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Так как  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-ikx} dx = \begin{cases} 0, k \neq m \\ 2\pi, k = m \end{cases}$ , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n e^{-ikx} dx = 2\pi c_k, n \geq |k|$$

Следовательно,  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 2\pi c_k$  □

**Определение 2.3.** Пусть  $f \in L_1(T)$ . Числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt, b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt, c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}$$

Называются коэффициентами Фурье функции  $f$ , а ряд

$$S(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

Называется тригонометрическим рядом Фурье функции  $f$

**Замечание.** По лемме Римана об осцилляции,  $a_k(f), b_k(f) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $c_k(f) \rightarrow 0$  при  $|k| \rightarrow 0$ .

## 2.1 Поточечная сходимость рядов Фурье

**Определение 2.4.**  $D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$  называется  $n$ -ым ядром Дирихле.

**Замечание.** Функция  $D_n$  непрерывна,  $2\pi$ -периодическая,  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \pi$ .

Имеем:

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-s)} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(x-s) ds =$$

$$\frac{1}{\pi} D_n * f(x) = \frac{1}{\pi} f * D_n(x)$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} e^{-nit} (1 + e^{it} + \dots + e^{2nit}) = \frac{1}{2} e^{-nit} \frac{e^{2(n+1)it} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})it} - e^{-(n+\frac{1}{2})it}}{2(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}})} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

**Лемма 2.2.** Пусть  $f \in L_1(T)$  и  $0 < \delta < \pi$ . Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}$  выполнено:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + \varepsilon_n(x), \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(x) = 0$$

*Доказательство.* Имеем:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{f(x-t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left( \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt$$

$h(t) = f(x-t)$  интегрируема на  $(-\pi, \pi)$ . Положим  $g(t) = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ . По непрерывности, доопределим  $g(0) = 0$  — то есть  $g$  непрерывна на  $[-\pi, \pi] \Rightarrow$  ограничена. Аналогично,  $\frac{f(x-t)}{t}$  интегрируема на  $\pi \geq |t| \geq \delta$ . Но тогда по лемме Римана об осцилляции, получаем желаемое.  $\square$

**Теорема 2.1.** Пусть  $f \in L_1(T), x \in \mathbb{R}$ . Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = S \Leftrightarrow \exists \delta \in (0, \pi] : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x-t) - 2s}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt = 0 \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Функция  $t \mapsto \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}$  — четная, поэтому:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt + o(1)$$

Заметим, что для  $h \equiv 1, c_0(h) = 1, c_n(h) = 0 \Rightarrow S_n(h, x) = 1$ . Поэтому:

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt + o(1)$$

$$S_n(f, x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt + o(1)$$

□

Среди признаков сходимости рядов выделим 2: признак Дини и признак Дирихле.

**Утверждение 2.1** (Признак Дини). Пусть  $f \in L_1(T), x \in \mathbb{R}$ . Если для некоторого  $S \in \mathbb{C} \exists \delta > 0$ , такое, что выполнено

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2S|}{t} dt < \infty$$

Тогда ряд Фурье  $S(f, x)$  сходится в  $x$  к  $S$ .

*Доказательство.* По условию подынтегральная функция лежит в  $L_1(0, \delta)$ . Следовательно, по лемме Римана об осцилляции выполнено (2.3). Далее утверждение следует из предыдущей теоремы. □

**Следствие.** Пусть  $f \in L_1(T), x \in \mathbb{R}$ . Если существуют  $f(x \pm 0) \in \mathbb{R}$  и  $\alpha_I = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x+t) + f(x \pm 0)}{t} \in \mathbb{R}$ , то ряд Фурье  $S(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ .

*Доказательство.* Положим  $S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ . Рассмотрим  $\psi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x-0) - 2S}{t}, t > 0$ . Тогда:

$$\psi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-0) - f(x-0)}{t} \rightarrow_{t \rightarrow +0} \alpha_+ - \alpha_-$$

Данная функция ограничена на  $(0, \delta)$  □

**Следствие.** Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция, такая, что  $\forall x \in \mathbb{R} \exists f'_\pm(x) \in \mathbb{R}$  (в частности,  $f$  непрерывна). Тогда  $S(f, x) = f(x)$ .

**Лемма 2.3** (Абея). Пусть  $f \in L_1([a, b]), g$  монотонна на  $[a, b]$ . Если

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M$$

Тогда:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \leq 2M(|g(b)| + |g(a)|) \right|$$

*Доказательство.* См 2 семестр □

**Утверждение 2.2** (Принцип Дирихле). Пусть  $f \in L_1(T)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Если  $f$  монотонна на  $[x - \delta, x + \delta]$  при некотором  $\delta > 0$ , то  $S(f, x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

*Доказательство.* Пусть  $f$  нестрого возрастает на  $[x - \delta, x + \delta]$ . Рассмотрим:

$$\int_0^\sigma \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt, \sigma \in (0, \delta)$$

Также, пусть  $I(n) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \Rightarrow \exists M : |I(n)| \leq M$  на  $[0, +\infty)$ . Следовательно:

$$\left| \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t} dt \right| = \left| \int_0^{x(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq M$$

Т.к. монотонная функция имеет множество точек разрыва меры 0, и разрывы могут быть только первого рода, то заменим  $f(x)$  на  $f(x+0)$ , т.к. интеграл от этого не изменится. По неравенству Абеля:

$$\left| \int_0^\sigma \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \right| \leq 2M |f(x+\sigma) - f(x+0)|$$

Заметим, что по теореме Римана об осцилляции,

$$\int_\sigma^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Получаем, что

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \rightarrow 0$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \rightarrow 0$$

Из чего по теореме следует утверждение. □

**Лемма 2.4.** Пусть  $f \in L_1(T)$ ,  $0 < \delta \leq \pi$ . Тогда:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^\delta \frac{f(x-t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + \varepsilon_n(x), \varepsilon_n(x) \rightarrow 0 \text{ на } K - \text{компакте}, K \subset \mathbb{R}$$

**Лемма 2.5.** Пусть  $f, g \in L_1(T)$ , причем  $g$  ограничена. Тогда

$$\varphi_n(x) = \int_{-\pi}^\pi f(x-t)g(t)e^{int} dt \rightarrow 0 \text{ на любом компакте } K \subset \mathbb{R}$$

*Доказательство.*  $\varphi_n(x) \rightarrow 0 \forall x$  по лемме Римана об осцилляции. Предположим противное, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists \{n_k\} \exists \{x_k\} \subset K (\varphi_{n_k}(x_k)) \geq \varepsilon$$

У последовательности  $x_k$  имеется сходящаяся подпоследовательность, поэтому считаем,

что  $x_k \rightarrow x_0$ .

$$\varepsilon \leq |\varphi_{n_k}(x_k)| \leq |\varphi_{n_k}(x_k) - \varphi_{n_k}(x_0)| + \underbrace{|\varphi_{n_k}(x_0)|}_{\rightarrow 0}$$

Рассмотрим первый модуль:

$$\begin{aligned} |\varphi_{n_k}(x_k) - \varphi_{n_k}(x_0)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_k - t) - f(x_0 - t))g(t)e^{in_k t} dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_k - t) - \underbrace{f(x_0 - t)}_y| \underbrace{|g(t)|}_{\leq C} dt \leq \\ &\leq C \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_k - x_0 + y) - f(y)| dy \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Получили противоречие с тем, что правая часть  $\geq \varepsilon$ . □

**Замечание.** По ходу доказательства мы доказали, что семейство  $\{\varphi_{n_k}\}$  — компактное множество в пространстве непрерывных функций.