Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

III СЕМЕСТР

Лектор: *Вадим Витальевич Редкозубов*

h\nu

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Методы вычисления кратного интеграла

1.1 Сведение кратного интеграла к повторному

Обозначение: μ_n — Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

Определение 1.1. Интерграл по мере μ_n называется n-кратным и обозначается

$$\int_E f d\mu_n, \int_{E\subset\mathbb{R}^n} f(x)d\mu_n(x), \int\int\cdots\int_E f(x_1, x_2, \dots x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Обозначение: $x = (x_1, x_2, \dots x_n), y = (y_1, y_2, \dots y_n)$.

Определение 1.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}, x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $E_x = \{y \in \mathbb{R}^m | (x, y) \in E\}$, E_x называется сечением E по переменной x.

Утверждение 1.1. *Пусть* $\{E_i\}_{i\in I} \subset 2^{R^{m+n}}$. *Тогда*

1. $\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)_x = \left(\bigcup_{i\in I} (E_i)_x\right)$
2. $(E \setminus F)_x = E_x \setminus F_x$
3. $\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)_x = \left(\bigcap_{i\in I} (E_i)_x\right)$

Доказательство. 1. $y \in \left(\bigcup_i E_i\right)_x \Leftrightarrow (x, y) \in \left(\bigcup_i E_i\right) \Leftrightarrow y \in \left(\bigcup_i (E_i)_x\right)$ Остальные пункты доказываются аналогично

□

Теорема 1.1 (Принцип Кавальери). *Пусть $E \in \mathbb{R}^{n+m}$ — измеримо. Тогда справедливо следующее:*

1. *Сечение E_x измеримо в $\mathbb{R}^m$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.*
2. *$x \mapsto \mu_m(E_x)$ измерима на $\mathbb{R}^n$*
3. *$\int_{\mathbb{R}^m} \mu_m(E_x)d\mu_n(x) = \mu_{n+m}(E)$*

Доказательство. 1. Пусть E — брус. Тогда $B = B' \times B''$, где B', B'' — брусы в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ соответственно. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верно

$$B_x = \begin{cases} B'', x \in B' \\ \varnothing, x \notin B' \end{cases} \Rightarrow \mu_m(B_x) = \begin{cases} \mu_m(B''), x \in B' \\ 0, x \notin B' \end{cases}$$

Функция $x \mapsto \mu_m(B'')I_{B'}$ — измерима (как произведение индикатора на константу)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_n(B_x)d\mu(x) = \mu_m(B'') \int_{\mathbb{R}^n} \mu_n(B') = \mu_{n+m}(B)$$

2. Пусть $E \subset G$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$, тогда $G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где B_k — брусья. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем: $G_x = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(B_k)_x$ — измеримо, тогда $\mu_m(G_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m((B_k)_x)$. Функция $\mu_m(G_x)$ измерима, как сумма ряда измеримых функций. По теореме Леви для рядов,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(G_x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m((B_k)_x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n+m}(B_k) = \mu(G)$$

3. Пусть $E = \bigcap G_k$ — пересечение вложенных ограниченных открытых множеств ($G_k \supset G_{k+1} \forall k$). Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $(G_k)_x \supset (G_{k+1})_x$, $\mu(G_1)_x < \infty$, тогда $E_x = \bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k)_x$ по непрерывности меры. $\mu_m(E_x) = \lim_{k\to\infty} \mu_m((G_k)_x)$. Т.к.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m((G_1)_x) d\mu(x) = \mu_{n+m}(G_1) < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E_x) d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m((G_k)_x) d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n+m}(G_k) = \mu_{n+m}(E)$$

4. Пусть $E = Z$ — ограниченное множество меры нуль в $\mathbb{R}^{n+m}$. По критерию измеримости, существует G_δ-множество $A \supset Z$ и $\mu_{n+m}(A) = 0$. Можно считать, что A ограничено (иначе заменим на пересечение с открытым шаром, содержащим Z). Тогда по предыдущему пункту, $\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(A_x) d\mu(x) = 0 \Rightarrow \mu_m(A_x) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Т.к. $A_x \supset Z_x$, то $\mu_m(Z_x) = 0$, и Z_x измеримо для таких x. Следовательно, функция $x \mapsto \mu_m(Z_x)$ нулевая почти всюду и тогда она измерима. Также,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(Z_x) d\mu(x) = 0 = \mu_{n+m}(Z)$$

5. Пусть E — ограниченное измеримое множество. По критерию измеримости, $\exists \Omega$— G_δ-множество, $\Omega \supset E$ и Z — множество меры нуль, что $E = \Omega \setminus Z$ (считаем, что Ω ограниченное). По свойству сечений, $E_x = \Omega_x \setminus Z_x$. Пусть E — произвольное измеримое множество. Тогда $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(E \cap A_k)$, где $A_k = \{x \in \mathbb{R}^{n+m}\}, k-1 \leqslant |x| \leqslant k$

$\square$

Теорема 1.2 (Тонелли). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и функция $f : E \to [0, +\infty]$ измерима. Тогда*

1. *Функция $f(x, \cdot)$ измерима на E_x для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$*

2. *Функция $\mathcal{G}(x) = \int_{E_x} f(x, y) d\mu(y)$ измерима на $\mathbb{R}^n$*

3. *$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu$*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^{n+m}, x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^m$ верно: $I_A(x, y) = \begin{cases} 1, y \in A_x \\ 0, y \notin A_x \end{cases} = I_{A_x}(y)$, поэтому для индикатора теорема верна (а, значит, и для всех простых функций). Пусть $f : E \to [0, +\infty]$ — произвольная измеримая функция. По теореме о приближении, $\exists \{\varphi_k\}$ — простые функции, т.ч. $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots, \varphi_k \to_E f$. Для любого $x \in \mathbb{R}^n \exists \{\varphi_k(x, \cdot)\}, 0 \leqslant \varphi_1(x, \cdot) \leqslant \varphi_2(x, \cdot) \leqslant \ldots, \varphi_k(x, \cdot) \to_E f(x, \cdot)$. $\exists Z_k$ — множество меры нуль в $\mathbb{R}^n$, что $\varphi_k(x, \cdot)$ измерима (простая функция) на Z_k^c. Положим $Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$ — множество меры нуль и для $x \in \mathbb{Z}^c$ функция измерима (как предел измеримых функций) (доказали 1). По теореме Леви для $x \in Z^c$ имеем

$$\mathcal{G}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{E_x} \varphi_k(x, y) d\mu(y) =: \lim_{k\to\infty} \mathcal{G}_k(x)$$

Следовательно, $\mathcal{G}$ измерима (как предел измеримых функций $\mathcal{G}_k$) на Z^c, а значит, и на $\mathbb{R}^n$. Снова по Теореме Леви,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_x d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_k(x) d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k d\mu_{n+m} = \int_E f d\mu_{n+m}$$

□

Следствие. Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Функция f интегрируема на E тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} |f(x,y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

Теорема 1.3 (Фубини)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}^n}$ интегрируема. Тогда*

1. *Функция $f(x, \cdot)$ измерима на E_x для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$*
2. *Функция $\mathcal{G}(x) = \int_{E_x} f(x,y) d\mu(y)$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$*
3. *$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu$*

Доказательство. Пусть $f \geqslant 0$. Тогда по т. Тонелли, $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu < \infty$, следовательно, $\mathcal{G}$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$ (доказали 2). В частности, функция $\mathcal{G}$ конечна почти всюду (доказали 1). В случае f произвольного знака, применяем утверждение для $f^\pm$:$f = f^+ - f^-$, пользуясь тем, что $f^\pm(x, \cdot) = (f(x, \cdot))^\pm$, заключаем, что утверждение верно и для f. □

Замечание. В предыдущих теоремах переменные x, y равноправны, поэтому

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_E f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

Внешний интеграл (в среднем выражении) можно брать не по всему $\mathbb{R}^n$, а только по тем x, для которых $E_x \neq \varnothing$

Определение 1.3. $\operatorname{Pr}_x E = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists (x,y) \in E\}$ — проекция E на $\mathbb{R}^n_x$

Пример. Проекция измеримого множества может оказаться неизмеримым: Рассмотрим $e \subset \mathbb{R}$ — неизмеримое. Тогда проекция $e \times \{c\}, c \in \mathbb{R}$ — измеримо (его мера равна 0), но его проекция на первую координату равна e — неизмеримо.

Следствие. Если дополнительно (с условием теорем выше) $\operatorname{Pr}_x E$ измеримо, то

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\operatorname{Pr}_x E} \left(\int_{E_x} f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x)$$

Пример. Доказать интегрируемость и найти интеграл $f(x,y) = y \sin x \cdot e^{-xy}$ на $E = (0, +\infty) \times (0, 1)$

Доказательство.

$$\iint_E |f(x,y)| dx dy \leqslant \iint_E y e^{-yx} dx dy = \int_{(0,1)} \left(\int_{0,+\infty} y e^{-xy} dx \right) dy =$$

$$= \int_{(0,1)} \left(\int_0^{+\infty} y e^{-yx} dx \right) dy = \int_{(0,1)} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} dt \right) dy = 1$$

□

По теореме Фубини, $F(y) = \int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx \overset{\text{после нетрудных преобразований}}{=} \frac{y}{y^2+1}, y \in (0,1)$

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,+\infty)} f(x,y)dx \right) dy = \int_0^1 \frac{y}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \ln(y^2+1)|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Замечание. Если $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, то $\tilde{g} : E \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} : \tilde{g}(x,t) = g(x)$ также измерима.

Доказательство. Вытекает из того, что если $A = \{x \in E : g(x) < a\}$ измеримо, то $\{(x,t) : \tilde{g}(x,t) < a\} = A \times \mathbb{R}$. $\square$

Задача. *Проверить, что $A \times \mathbb{R}$ измеримо и тогда доказать замечание.*

Рассмотрим важнейшее приложение принципа Кавальери:

Следствие. Пусть $f : E \to [0,1]$ измерима, то подграфик: $S_f = \{(x,t) : x \in E0 < t < f(x)\}$ измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu_{n+1}(S_f) = \int_E f d\mu$

Доказательство. По замечанию, $F(x,t) = t - f(x)$ измерима. Тогда $S_f = \{(x,t) : t > 0\} \cap \{(x,t) : F(x,t) < 0\}$ измеримо.

$$(S_f)_x \begin{cases} (0, f(x)), x \in E \\ \varnothing, x \notin E \end{cases} \Rightarrow \mu_1((S_f)_x) = f(x)$$

Тогда по принципу Кавальери, $\mu_{n+1}(S_f) = \int_E f d\mu$. $\square$

Задача. *Доказать, что $\mu_{n+1}(S_f) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E : f(x) > t\})dt$*

Задача. *Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимое линейное отображение и $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Докажите, что $\mu(T(E)) = |\det T|\mu(E)$. Указание: $\Delta = [0,1)^n$.*

1.2 Замена переменных в кратном интеграле

Определение 1.4. Пусть U, V открыты в $\mathbb{R}^n$. Отображение $g : U \to V$ называется C^r-диффеоморфизмом, если g — биекция, $g \in C^r(U,V), g^{-1} \in C^r(V,U)$.

Определение 1.5. Всюду далее за $Dg(x)$ обозначается матрица Якоби отображения g в точке x. Определитель $J_g(x) = |\det Dg(x)|$ называется Якобианом.

Определение 1.6. Если g — диффеоморфизм, то $g \circ g^{-1} = I_U$ — тождественное отображение U. По правилу дифференцирования композиции для матриц Якоби, $Dg^{-1}(g(x))Dg(g^{-1}(x)) = E$. Следовательно, $Dg(x)$ невырождена и $Dg^{-1}(g(x)) = (Dg(x))^{-1}$

Теорема 1.4. *Пусть $g : U \to V$ — диффеоморфизм открытых $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $E \subset U$ — измеримо по Лебегу. Если f — неотрицательная измеримая или интегрируемая на $g(E)$ функция, то*

$$\int_{g(E)} f(y)d\mu(y) = \int_E f \circ g(x)|\det Dg(x)|d\mu(x)$$

Пример. Вычислить меру n-мерного шара $B_R(a)$

Решение. По свойству преобразования меры при сдвиге и гомотетии, имеем:

$$\mu_n(B_R(a)) = \mu_n(B_R(0)) = R^n \mu_n(B_1(0))$$

Положим $B = B_1(0), \mu_n(B) = \omega_n$. Рассмотрим сечение $B_{(x_1,x_2)} = \{y : |y|^2 < 1 - x_1^2 - x_2^2\} \Rightarrow$ $B_{(x_1,x_2)} = \begin{cases} B_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}(0), x_1^2+x_2^2 < 1 \\ \varnothing, \text{иначе} \end{cases}$ Следовательно, по принципу Кавальери,

$$\omega_n = \int_{x_1^2+x_2^2<1} \mu_{n-2}(B_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}(0))dx_1dx_2 = \int_{x_1^2+x_2^2<1} \sqrt{R^n}\omega_{n-2}dx_1dx_2 =$$

$$= \omega_{n-2}\int_{x_1^2+x_2^2<1} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n-1}{2}}dx_1dx_2 = (*)$$

Рассмотрим $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Пусть $U = [0, 2\pi] \times [0, +\infty), V = \mathbb{R}^2$. Тогда при замене, мы должны домножить на $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$.

$$(*) = \omega_{n-2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr = \frac{-2\pi}{2}\omega_{n-2}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} = -\pi\omega_{n-2}\frac{(1-r^2)^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}$$

1. $n = 2k$
$$\omega_{2k} = \frac{2\pi}{2k}\omega_{2k-2} = \dots = 2\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}$$

2. $n = 2k+1$
$$\omega_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1}\omega_{2k-1} = \dots = 2\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k-1)!!}\omega_1 = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k-1)!!}$$

□

В основе доказательства будет лежать следующее утверждение:

Лемма 1.1. *Пусть $x_0 \in U, \varepsilon > 0$. Положим $l(Q)$ — длина ребра куба Q. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что для всягого замкнутого куба $Q, x_0 \in Q \subset U, l(Q) < \delta$ справедливо равенство:*

$$\frac{\mu(g(Q))}{\mu(Q)} \leqslant |\det J_g(x_0)| + \varepsilon$$

Доказательство. Все мы помним, что в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны. Будем рассматривать норму $\|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| = \|\cdot\|_\infty$. Тогда $C_r(y) = \{x : \|x - y\| \leqslant r\}$ — замкнутый куб и $l(C) = 2r$. Сначла рассмотрим случай $Dg(x_0) = E$ и $g(x_0) = 0$. По определению диффеоморфизма, имеем:

$$g(x) = x + \alpha(x)\|x - x_0\|, \alpha(x) \to 0, x \to x_0$$

На лекции была ошибка, на самом деле $g(x) = x - x_0 + \alpha(x)\|x - x_0\|, \alpha(x) \to 0, x \to x_0$, но это фиксится параллельным переносом на x_0. Выберем $\eta > 0$ так, что $(1 + \alpha\nu)^n < 1 + \varepsilon$ и пусть $\delta > 0$ такое, что если $x \in U(\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\alpha(x)\| < \eta)$. Пусть Q — замкнутый куб, такой, что $Q, x \in Q \subset U, l(Q) < \delta$. Положим $s = L(Q)$ Если a — центр Q, то $Q = C_{\frac{s}{2}}(a)$. Пусть $x \in Q$. Тогда $\|x - x_0\| < \|x - a\| + \|a - x_0\| \leqslant \frac{s}{2} + \frac{s}{2} < s < \delta \Rightarrow \|\alpha(x)\| \leqslant \eta$. Следовательно, $\|g(x) - a\| \leqslant \|x - a\| + \|\alpha(x)\| \cdot \|x - x_0\| < \frac{s}{2} + \eta s = \frac{s}{2}(1 + 2\eta) \Rightarrow g(x) \in C_{\frac{s}{2}(1+2\eta)}(a) \Rightarrow g(Q) \subset C_{\frac{s}{2}(1+2\eta)}(a)$. По монотонности меры, $\mu(g(Q)) \leqslant s^n(1 + 2\eta)$. Учитывая, что $\mu(Q) = s^n \Rightarrow \frac{\mu(g(Q))}{\mu(Q)} \leqslant (1 + 2\eta)^n < 1 + \varepsilon$.

Для общего случая, рассмотрим $h = T^{-1}g - T^{-1}g(x_0)$ — диффеоморфизм. $Dh(x_0) = T^{-1}T = E$. Следовательно, $\exists \delta > 0 : l(Q) < \delta \Rightarrow \frac{\mu(h(Q))}{\mu(Q)} \leqslant |J_g(x_0)| + \frac{\varepsilon}{|\det T|} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{|\det T|}$.

$$\mu(h(Q)) = \mu(T^{-1}g(Q)) = |\det T^{-1}|\mu(g(Q)) = \frac{\mu(g(Q))}{|\det T|} \Rightarrow \frac{\mu(g(Q))}{\mu(Q)} \leqslant |\det T| + \varepsilon$$

Получили желаемое. □

Следствие. Пусть $\{Q_k\}$ — последовательность замкнутых, вложенных кубов и $l(Q_k) \to 0$. Если x_0 — единственная точка из $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\mu(g(Q_k))}{\mu(Q_k)} \leqslant |J_g(x_0)|$

Лемма 1.2. *Если G — открытое в U, то $g(G)$ открыто в V и $\mu(g(G)) \leqslant \int_G |J_g| d\mu (*)$.*

Доказательство. По свойству счетной аддитивности меры Лебега и счетной аддитивности интеграла, достаточно установить $(*)$ для двоичного куба.

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \text{где } Q_k \text{ — двоичные кубы} \Rightarrow Q_k = \left[\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}\right)^n, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

Т.к. $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q} - \frac{1}{2^q \cdot i}\right]^n$ — σ-компакт, тогда и $g(Q)$ — σ-компакт — измеримое множество.

Предположим, что $\exists Q$ — двоичный куб, такой, что $\overline{Q} \subset U$, для которого $\mu(g(Q)) > \int_Q |J_g| d\mu + \varepsilon\mu(Q)$. Деля каждое ребро пополам, получаем разбиение Q на 2^n двоичных кубов $\{Q_i\}$. Предположим, что для каждого из Q_i выполнена лемма. Тогда пользуясь конечной аддитивностью меры и интеграла, для Q выполнена лемма. Тогда Б.О.О, $\mu(g(Q_1)) > \int_{Q_1} |J_g| d\mu + \varepsilon\mu(Q_1)$. Положим $C_1 = \overline{Q}, C_2 = \overline{Q_1}, \ldots$. По индукции строим последовательность замкнутых вложенных кубов, $l(C_k) \to 0$, такую, что $\forall k \mu(g(C_k)) > \int_{C_k} |J_g(x)| d\mu(x) + \varepsilon(\mu(C_k))$. Т.к. J_g — непрерывна, то $\frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} |J_g| d\mu \to_{k\to\infty} |J_g(x)| \Rightarrow \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\mu(g(C_k))}{\mu(C_k)} \geqslant |J_g(x_0)| + \varepsilon$. □

Лемма 1.3. *Если $E \subset U$ измеримо, то $g(E)$ измеримо и $\mu(g(E)) \leqslant \int_E |J_g(x)| d\mu$*

Доказательство. Для $m \in \mathbb{N}$ определим $W_m = \{x \in U | \|x\| < m, |J_g(x)| < m\}$. Из непрерывности функций $\|x\| J_g(x)$ и открытоти множеств $(-\infty, m)$ заключаем, что $W_m \subset U$ открыто и $\bigcap_{m=1}^{\infty} W_m = U$. Докажем утверждение для $E \subset W_m$

1. Пусть $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, где G_k — открыто и $G_k \supset G_{k+1}$. Б.О.О. можно считать, что все $G_k \subset W_m$ (иначе заменим G_k на $G_k \cap W_m$). Тогда $g(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} g(G_k)$ измеримо и по непрерывности меры, $\mu(g(E)) = \lim_{k\to\infty} \mu(g(G_k))$ (т.к. $\{x \in U : \|x\| \leqslant m, |J_g(x)| \leqslant m\}$ — компакт $\Rightarrow$ ограничен)

$$\mu(g(E)) = \lim_{k\to\infty} \mu(g(G_k)) \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{G_k} |J_g(x)| d\mu(x) = \int_E |J_g(x)| d\mu$$

Последнее равенсво выполняется по теореме Лебега, примененной к функции $f_k = |J_g(x)| \cdot I_{G_k}$

2. Пусть $E = Z \subset W_m, \mu(Z) = 0$. По критерию измеримости, $\exists \Omega_0$ — G_δ множество, такое, что $\Omega_0 \supset E, \mu(\Omega_0) = 0$. Без ограничения счиатем, что $\Omega_0 \in W_m$. Тогда

$$\mu^*(g(E)) \leqslant \mu^*(g(\Omega_0)) = \mu(g(\Omega_0)) \leqslant \int_{\Omega_0} |J_g(x)| d\mu(x) = 0$$

То есть $g(E)$ измеримо и $\mu(g(E)) = 0$.

3. Пусть E — произвольное измеримое множество в W_m. Тогда $E = \Omega \setminus Z$, где Ω — G_δ-множество, а $\mu(Z) = 0$. Тогда $g(E) = g(\Omega) \setminus g(Z)$. Т.к $\mu(g(Z)) = 0$ и по первому пункту $g(\Omega)$ — измеримо, то $g(E)$ — тоже измеримо. Следовательно,

$$\mu(g(E)) \leqslant \mu(g(\Omega)) \leqslant \int_\Omega |J_g(x)| d\mu(x) = \int_E |J_g(x)| d\mu(x)$$

4. Пусть E — произвольное измеримое множество в U. Тогда $E = \bigcup_{m=1}^\infty E_m$, где $E_m = E \cap W_m$. По доказанному, $\mu(g(E_m)) \leqslant \int_E |J_g(x)| d\mu$. Получаем

$$\mu(g(E)) = \lim_{m\to\infty} \mu(g(E_m)) \leqslant \lim_{m\to\infty} \int_{E_m} |J_g(x)| d\mu = \int_E |J_g(x)| d\mu$$

Последнее равенство получено по теореме Леви для $f_m = |J_g| \cdot I_{E_m}$.

□

Доказательство. Для любого $a \in \mathbb{R}$ условия $f \circ g(x) \leqslant a \Leftrightarrow g(x) \in \{y : f(y) < a\}$. Поэтому, $\{x : f(g(x)) < a\} = g^{-1}(\{y : f(y) < a\})$. Поскольку диффеоморфизм сохраняет измеримость $\Rightarrow$ множества $\{x : f(g(x)) < a\}, \{y : f(y) < a\}$ измеримы одновременно, т.е. функции $f \circ g$ на E и f на $g(E)$ измеримы одновременно.

Рассмотрим $F : U \times \mathbb{R} \to V \times \mathbb{R}, F(x,t) = (g(x), t)$ — диффеоморфизм. Получаем:

$$DF = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Dg & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |J_F| = |J_g|$$

Пололжим $B = \{(y,t) : y \in g(E), 0 < t < f(y)\}, A = \{(x,t) : x \in E, 0 < t < f(g(x))\}$. Т.к. f — неотрицательная измеримая функция, то $\mu(B) = \int_{g(E)} f(y) d\mu$. Имеем $F(A) = B, \mu(B) = \mu(F(A)) \leqslant \int_A |J_F| d\mu(x,t)$. По теореме Тонелли $\int_A |J_F| d\mu = \int_E \left(\int_{(0, f(g(x)))} |J_g| dt \right) dx = \int_E f \circ g(x) |J_g| dx$. Итак, справедлива формула:

$$\int_{g(E)} f(y) d\mu(y) \leqslant \int_E f \circ g(x) |J_g| d\mu(x)$$

В правом интеграле сделам замену $x = g^{-1}(y)$.

$$\int_E f \circ g(x)|J_g|d\mu(x) \leqslant \int_E f(y) \underbrace{|J_g(g^{-1}(y))| \cdot |J_{g^{-1}}(y)|}_{1} d\mu(y) \leqslant \int_{g(E)} f(y)d\mu(y)$$

□

Следствие. В условиях теоремы, $\mu(g(E)) = \int_E |J_g(x)|d\mu(x)$

Замечание. В теореме о замене переменной условие на g можно ослабить, а именно: Пусть $U \subset W \subset \mathbb{R}^n$, U — открыто, $g : W \to \mathbb{R}^n, g|_U$ — диффеоморфизм и $\mu(W \setminus U) = \mu(g(W) \setminus g(U)) = 0$. Тогда для $E \in W$ — измеримого справедлива формула замены

$$\int_{g(E)} f(y)d\mu(y) \int_E f \circ g(x)|\det Dg(x)|d\mu(x)$$

Доказательство. Пренебрегая множествами меры 0, имеем:

$$\int_{g(E)} f(y)d\mu(y) = \int_{g(E\cap U)} f(y)d\mu(y) = \int_{E\cap U} f \circ g(x)|J_g(x)|d\mu(x) = \int_E f \circ g(x)|J_g(x)|d\mu(x)$$

□

Пример (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Решение.

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint_{(0,+\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$$

Заменяем координаты на полярные:

$$= \iint_{(0,\pi/2)\times(0,+\infty)} e^{-r^2}rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

□

2 Теоремы об обратной и неявной функциях

Определение 2.1. $B \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если $\forall x, y \in B : [x, y] \subset B$

Лемма 2.1. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, \dots d_m)$ — дифференцируема на $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытом множестве и пусть $B \subset U$ открыто. Если $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant M$ для всех $x \in B$, то $\forall x, y \in B : |f(y) - f(x)| \leqslant nmM|y - x|$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in B$, тогда для $i = 1, \dots m$ рассмотрим функцию $g_i(t) = f_i(x + t(y - x)), t \in [0, 1]$ — дифференцируема. Тогда про теореме Лагранжа о среднем:

$$f_i(y) - f_i(x) = g(1) - g_i(0) = g_i'(c_i), c_i \in (0, 1)$$

$$g_i'(c_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + c_i(y-x))(y_j - x_j) \Rightarrow |g_i'(c_i)| \leqslant M \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \leqslant nM|y-x|$$

Откуда $|f_i(y) - f_i(x)| \leqslant nM|y-x|$. При этом, $|a| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|$. Получаем $f(y) - f(x) \leqslant nmM|y-x|$ □

Следствие. Если частные производные f непрерывны в $a \in U$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in B_\delta(a) : |f(y) - f(x) - df_a(y-x)| \leqslant \varepsilon |y-x|$

Доказательство. Применим лемму к $g(z) = f(z) - df_a(z)$. Т.к. дифференциал линейного отображения совпадает с ним, то $dg_z = df_z - df_a$, откуда $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) - \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)$. В силу непрерывноси частных производных, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in B_\delta(a) \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{mn} \Rightarrow |g(y) - g(x)| \leqslant \varepsilon|y-x|$. □

Теорема 2.1 (Банах). *Пусть C — непустое замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$. Пусть $f : C \to C$, такое, что $\exists \lambda \in (0,1)$, что $\forall x, y \in C |F(x) - F(y)| \leqslant \lambda |x-y|$. Тогда $\exists! x^* \in C : F(x^*) = x^*$*

Доказательство. Пусть $x_0 \in C$ и рассмотрим $x_{k+1} = F(x_K)$. Тогда $\forall k |x_{k+1} - x_k| \leqslant \lambda^k |x_1 - x_0|$. Следовательно $|x_{n+p} - x_n| |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| = (\lambda^{n+p-1} + \dots + \lambda^n) |x_1 - x_0| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$. Т.к. $\lambda^n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Следовательно, $x_n \to x^*$. В силу замкнутости, $x^* \in C$. Т.к. $x_{n+1} = F(x_n)$, то F непрерывна и $F(x^*) = x^*$. Пусть y^* — другая точка, такая, что $F(y^*) = y^*$. Но тогда $|y^* - x^*| = |F(y^*) - F(x^*)| \leqslant \lambda |y^* - x^*| \Rightarrow |y^* - x^*| = 0 \Rightarrow y^* = x^*$. □

2.1 Теорема об обратной функции

Теорема 2.2 (Об обратной функции). *Пусть U — открыто в $\mathbb{R}^n$ и $a \in U$. Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 и $\det Df(a) \neq 0$, то $\exists$ открытые $W, V : a \in W \subset U, f(a) \in V$, такие, что $f^{-1} : V \to W$ — диффеоморфизм.*

Доказательство. Можно считать, что $Df(a) = E$: положим $T = Df(a)$ и заменим f на $\tilde{f} = T^{-1} f$. Такая замена не меняет обратимости, при этом f^{-1} и $\tilde{f}^{-1} = f^{-1} T$ одновременно лежат в C^1.

Рассмотрим $g(x) = f(x) - x_j, x \in U$. $g \in C^1, Dg(a) = 0$. Тогда $\exists \overline{B}_r(a)$, что $\forall x \in \overline{B}_r(a) \left(\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \forall i, j = 1, \dots n\right)$. Следовательно, $\forall x, x' \in \overline{B}_r(a) (|g(x) - g(x')| \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|)$. Покажем, что $\forall y \in B_{\frac{r}{2}}(f(a)) \exists! x \in B_r(a) (y = f(x))$. Для этого рассмотрим отображение $F_y(x) = y - g(x), x \in U$. Тогда $\forall x \in \overline{B}_r(a)$ имеем:

$$|F_y(x) - a| \leqslant |F(x) - F(a)| + |F(a) - a| \leqslant |g(x) - g(a)| + |y - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|x-a| + |y - f(a)| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

То есть, $F(\overline{B}_r(a)) \subset B_r(a)$. Кроме того, $\forall x, x' \in \overline{B}_r(a), |F(x) - F(x')| = |g(x) - g(x')| \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|$. По теореме Банаха, $\exists! x : F(x) = x \Leftrightarrow y = f(x)$. Более того, $x \in B_r(a)$. Положим $V = B_{\frac{r}{2}}(f(a)), W = f^{-1}(V) \cap B_r(a)$. Тогда W, V — открыты и f биективно отображает W на V по построению, т.е. определена обратная функция $f^{-1} : V \to W$.

По неравенству треугольника, имеем: $|f(x) - f(x')| \geqslant |x - x'| + |g(x) - g(x')| = (*), x, x' \in W$. Т.к. g — сжимающее, то $(*) \geqslant \frac{1}{2}|x - x'| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(y')|$. Тогда:

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \leqslant 2|y - y'| \forall y, y' \in V (1)$$

Так что f^{-1} непрерывно, а значит, f — гомеоморфизм. Так как J_f непрерывна и $J_f(a) \neq 0$, то можно считать, что $J_f \neq 0$ на W. Зафиксируем $y \in V$ и пусть $x = f^{-1}(y)$. Покажем, что f дифференцируема в y. В силу биективности $f, \forall y + k \in V \exists! n : y + k = f(x+h)$. Положим $h(k) = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$. Тогда $h(k) \to_{k\to 0} 0$. Функция f дифференцируема в x, т.е. $f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \alpha(h)|h|$, где α непрерывна и $\alpha(0) = 0, h = h(k)$. Положим $A = [df_x]^{-1}$, получим $Ak = h(k) + A\alpha(h(k))|h(k)|$ или $f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = Ak + \beta(k)|k|$, где $\beta(k) = -A\alpha(h(k))\frac{|h(k)|}{|k|}$. В силу (1), $\frac{|h(k)|}{|k|} \leqslant 2$. Следовательно, $\beta(k) \to 0$, при $k \to 0$, тогда f^{-1} дифференцируема в y и $df_y^{-1} = [df_x]^{-1}$. В частности, матрица Якоби $Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$.

Из курса линейной алгебры известно, что элементы $Df^{-1}(y)$ есть рациональные функции от $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(f^{-1}(y))$ со знаменателем $J_f(f^{-1}(y))$. В силу класса C^1 функции f и непрерывности f^{-1}, заключаем, что $f^{-1} \in C^1(V)$. $\square$

Замечание. Если в условиях Теоремы об обратной функции, $f \in C^r$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $f^{-1} \in C^r$.

Доказательство. Ведем индукцию по n

База: $n = 1$ — Теорема об обратной функции

Переход: Если $f \in C^{n+1}$, то $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^n$ и $f^{-1} \in C^n \Rightarrow \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial x_j} \in C^n$, т.е. $f^{-1} \in C^{n+1}$

$\square$

Следствие. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто и $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса C^1. Если $J_f \neq 0$ на U, то $f(U)$ открыто

Доказательство. Пусть $b \in f(U), b = f(a)$. По теореме об обратной функции, $\exists W \subset U, V$ — открытые, такие, что $f : W \to V$ — дифференцируема. Т.к. $V \subset f(U) \Rightarrow b \in int\ f(U)$ $\square$

Определение 2.2. Если $\forall x \in U \exists W_x \subset U$ — открытое, такое, что $f|_W$ — диффеоморфизм, то f называется локальным диффеоморфизмом.

Замечание. Таким образом мы показали, что если $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 с $J_f \neq 0$, то f — локальный диффеоморфизм.

Замечание. Верно и обратное.

Задача. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 и инъективно. Если $J_f \neq 0$ на U, то f — диффеоморфизм*

Задача (Проблема Якобиана)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f_i$ — полиномы, причем $J_f \equiv 1$. Верно ли, что f инъективна?*

Пример (Полярные координаты)**.** Пусть $U = \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}, V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geqslant 0\}$. Тогда $g : U \to V, g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ — диффеоморфизм

Доказательство. Покажем, что g — биекция. $\forall (x, y) \in V \exists! (r, \varphi) \in V : g(r, \varphi) = (x, y)$. Тогда $g^{-1}(x, y) =$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, y > 0, x \geqslant 0 \\ \pi - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, x < 0 \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, y < 0 \end{cases}$$

Проверять, что g^{-1} — диффеоморфизм очень долго и неприятно, поэтмоу воспользуемся теоремой об обратной функции. $g \in C^1(U), Dg = \begin{pmatrix} \cos & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_g = r > 0$. Следовательно, $g^{-1} \in C^1(V)$. $\square$

Задача. *Пусть* $U = \{(r,\varphi,\psi), r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}\}, V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z), x \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$. *Докажите, что* $g : U \to V$*:*

$$g(r,\varphi,\psi) = (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)$$

Является диффеоморфизмом

Определение 2.3. Если $g : U \to V$ — диффеоморфизм, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открыты, то говорят, что на V введена криволинейная система координат. Точке x сопоставляется точка $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ — декартова координата $a = g^{-1}(x)$.

Замечание. Локальный диффеоморфизм при $n > 1$ необратим.

Пример. $g : U \to V$, где $U = \{(r,\varphi) : r > 0, \varphi \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^2, g(r,\varphi) = (r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ не является диффеоморфизмом, хотя $J_f \neq 0$ (т.к. это не биекция).

Задача. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *класса* C^1 *и* $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. *Докажите, что* f *— диффеоморфизм*

2.2 Теорема о неявной функции

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открыто, $F : U \to \mathbb{R}^m, F = (F_1, F_2, \ldots F_n)$ дифференцируема в точке $p = (a,b)$. Тогда матрица Якоби $DF(p)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p)\right)$$

Где $\frac{\partial F}{\partial x}(p)$ — матрица Якоби $x \mapsto F(x,b)$ в точке a, а $\frac{\partial F}{\partial y}(p)$ — матрица Якоби $y \mapsto F(a,y)$ в точке b.

Теорема 2.3 (О неявной функции)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *— открыто,* $a, b \in U$ *и задана* $F : U \to \mathbb{R}^m$ *класса* C^1*. Если*

1. $F(a,b) = 0$
2. $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$

То существуют открытые $W \ni a, V \ni b$ *и функция* $f : W \times V \subset U$ *и* $\forall x, y \in W \times V (F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x))$*.*

Доказательство. Рассмотрим $\Phi : U \to \mathbb{R}^{n+m}, \Phi(x,y) = (x, F(x,y))$. Функция $\Phi \in C^1(U)$ и

$$D\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

Тогда $J_\Phi = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, а, значит, по теореме об обратной функции, существуют открытые $O_1 \ni (a,b), O_2 \ni (a,0)$, что $\Phi : O_1 \to O_2$ — диффеоморфизм. Из вида Φ получаем, что $\Phi^{-1}(u,v) = (u, g(u,v))$ для некоторой $g \in C^1$. Композиции $\Phi^{-1} \circ \Phi, \Phi \circ \Phi^{-1}$ приводят к равенствам

$$(x,y) = \Phi^{-1}(x, F(x,y)) \Rightarrow y = g(x, F(x,y)) \quad (1)$$
$$(u,v) = \Phi(u, g(u,v)) \Rightarrow v = F(u, g(u,v)) \quad (2)$$

Положим $W = \{x : (x,0) \in O_2\}$ и функцию $f(x) = g(x,0), x \in W$. Тогда W открыто и $f \in C^1(W)$. Уменьшая W, если необходимо, можно выбрать открытое $V \ni b, V \subset \mathbb{R}^n$ так, что $W \times V \subset O_1$. Пользуясь непрерывностью f, уменьшим W так, что $f(W) \subset V$. Проверим заключение теоремы. Пусть фиксирована точка $x, y \in W \times V$, тогда

1. $F(x,y) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = g(x,0)$, т.е. $y = f(x)$
2. $y = f(x) \overset{(2)}{\Rightarrow}_{(u,v)=(x,0)} 0 = F(x, f(x))$

□

Следствие (О неявном дифференцировании)**.** В условиях теоремы о неявной функции, матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}$ на W имеем вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$

Доказательство. $F(x, f(x)) \equiv 0$ на W. Дифференцируя это равенство, получим

$$\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}\right)}_{m\times(m+n)} \underbrace{\begin{pmatrix} E \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}}_{(m+n)\times n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Т.к. $\det \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ на W, получаем ответ. □

Замечание. В условиях теоремы о неявной функции, если $F \in C^r$, то и неявно заданная функция $f \in C^r$ на своей области определения.

Задача. *Докажите, что теоремы о неявной функции и обратной функции эквивалентны.*

3 Гладкие многообразия и гладкие отображения

3.1 Соглашения

1. Под окрестностью точки будем понимать любое открытое множество, содержащее эту точку
2. Зафиксируем $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Под гладкостью функции далее будем понимать принадлежность ее классу C^r, т.е. под "гладкостью" понимается C^r-гладкость

3.2 Основные определения

Определение 3.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n$. Множество M в $\mathbb{R}^n$ называется гладким m-мерным многообразием, если $\forall p \in M \exists W \ni p$ — открытое в $\mathbb{R}^n$, $\exists V \subset \mathbb{R}^m$ — открытое и $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, такое, что

1. φ — гладкое
2. $\varphi : V \to M \cap W$ — гомеоморфизм
3. $rk\ D\varphi(x) = m$ на V

При этом, φ называется локальной параметризацией в окрестности p, а $\varphi^{-1} : M \cap W \to V$ называется картой.

Пример. Параметризация плоскости Π_p, проходящей через p:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}_{p} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Где векторы $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ неколлинеарны.

Пример.

$$S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Параметризация сферы в окрестности любой точки $p \in S^2 \setminus \{Oxz, x \geqslant 0\}$.

$$r : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3, r(\varphi, \psi) = (\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\psi)$$

$$Dr = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \Rightarrow rk\ Dr = 2$$

Задача. *Зафершите доказательство*

Задача. *Докажите, что гладкое n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ открыто.*

Пример. Пусть V открыто в $\mathbb{R}^m$ и функция $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ гладкая. Тогда $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in V\}$ — гладкое m-мерное многообразием в $\mathbb{R}^n$

Доказательство. Рассмотрим $\varphi : V \to \mathbb{R}^n, \varphi(x) = (x, f(x))$, тогда φ — гладкая, причем $D\varphi = \begin{pmatrix} E \\ Df \end{pmatrix}$ имеет ранг m и обратное отображение $\psi : \Gamma_f \to V$, где $\psi(x, f(x)) = x$ — непрерывно. Следовательно, φ является параметризацией Γ_f в области каждой точки. □

Теорема 3.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *M — гладкое m-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$*

2. *$\forall p \in M \exists U \ni p, W$ — открытые в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\Phi : U \to W$, такой, что $\Phi(M \cap U) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ $(0 \in \mathbb{R}^{n-m})$.*

3. *$\forall p \in M \exists U \ni p$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ и гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, такая, что $M \cap U = F^{-1}(0)$ и $rk\, Df(x) = n - m \forall x \in M \cap U$.*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация M в окрестности $p = \varphi(a)$. По определению, столбцы матрицы $D\varphi(a)$ линейно независимы. Дополним их до базиса. Следовательно, найдется матрица $A \in M_{n\times(n-m)}$, что $\det \begin{pmatrix} D\varphi(a) & A \end{pmatrix} \neq 0$. Рассмотрим $f : V \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n, F(x, y) = \varphi(x) + Ay$. Эта функция гладкая и $DF(a, 0) = \begin{pmatrix} DF(a) & A \end{pmatrix}$ — невырожденная. Тогда по теореме об обратной функции, $\exists \tilde{V} \subset V \times \mathbb{R}^{n-m}, (a, 0) \in \tilde{V}, \tilde{U}$ — открытые в $\mathbb{R}^n$, т.ч. $F : \tilde{V} \to \tilde{U}$ является диффеоморфизмом. Пусть $V_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in \tilde{V}\}$. Тогда V_0 открыто, а значит, $\varphi(V_0) = F(V_0 \times \{0\})$ открыто в M ($\varphi : V \to \varphi(V)$ — гомеоморфизм). Найдется открытое $U_0 \in \mathbb{R}^n$, т.ч. $M \cap U_0 = \varphi(V_0)$. Положим $U = U_0 \cap \tilde{U}, W = F^{-1}(U), \Phi = F^{-1}$. Покажем, что Φ — искомое отображение. $U \ni p, \Phi : U \to W$ — диффеоморфизм, как сужение диффеоморфизма F^{-1}. $\Phi(M \cap U) = \Phi(\varphi(V_0)) = F^{-1}(F(V_0 \times \{0\})) = V_0 \times \{0\} = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть $\Phi = (\Phi_1, \dots \Phi_n)$ на U, положим $F = (\Phi_{m+1}, \dots \Phi_n)$. Докажем, что полученная функция удовлетворяет пункту (3). $x \in M \cap U \Leftrightarrow F(x) = 0, rk\, DF = n - m$, т.к. Φ — диффеоморфизм.

(3) $\Rightarrow$ (1) Зафиксируем $p \in M$. Без ограничения общности, можно считать, что последние $n-m$ столбцов $DF(p)$ линейно независимы (иначе заменим F на композицию с перестановкой координат). Положим $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^{n-m}_y, p = (a, b)$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial y}$ невырождена и $(x, y) \in M \cap U \Leftrightarrow F(x, y) = 0$. Тогда по теореме о неявной функции, $\exists V' \ni a$ — открытое в $\mathbb{R}^n, \exists V''$ — открытое в $\mathbb{R}^{n-m}, \exists V_0 = V' \times V''$ и $f : V' \to \mathbb{R}^{n-m}$, т.ч. $M \cap U = \{(x, y) : F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in V'\} = \Gamma$. Пользуясь предыдущим утверждением, получаем желаемое.

□

Пример. Покажем, что S^{n-1} — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$

Доказательство. $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, F(x) = |x|^2 - 1 \nabla F(x) = 2x \neq 0$. Следовательно, $S^{n-1} = F^{-1}(0)$ — $(n-1)$-мерное многообразие □

3.3 Гладкие отображения

Определение 3.2 (Гладкость по Милнеру)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^l, f : X \to Y$. Отображение f называется гладким, если $\forall x \in X \exists U$ — окрестность x и гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^l$, т.ч. $F|_{X\cap U} = f|_{X\cap U}$. Функция F называется гладким продолжением f в окрестности x.

Замечание. Если $f : X \to Y, g : Y \to Z$ — гладкие по Милнеру, то их композиция тоже гладкая.

Пусть M — гладкое m-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$

Лемма 3.1. *Если $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация в окрестности p, $\varphi(V) = U_0$, то $\varphi^{-1} : U_0 \to V$ — гладкое.*

Доказательство. Из доказательства пункта 2 предыдущей теоремы следует, что диффеоморфизм $\Phi : U \to W$ можно выбрать так, что $M \cap U \subset U_0$. Тогда $\Phi(q) = (\varphi^{-1}(q), 0)$ для всех $q \in M \cap U$. Сужая W, если необходимо, можно считать, что $W = W' \times W''$, где W' — открытое в $\mathbb{R}^m, W''$ — открытое в $\mathbb{R}^{n-m}$. Рассмотрим $\pi : W \to W', \pi(x, y) = x$ — проектирование на W'. Положим $f = \pi \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^m$. Тогда F гладкое и $F|_{M\cap U} = \varphi^{-1}|_{M\cap U}$. Поскольку такие рассуждения можно провести в окрестности каждой точки из U_0, это доказывает, что отображение φ^{-1} гладкое. □

Следствие. Отображение φ^{-1} локально липшицево, т.е. $\forall p \in U_0 \exists C > 0 \exists W_0 \subset U_0$ — открытое в M и содержащее p, верно $\forall x, y \in W_0 |\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x - y|$

Доказательство. Рассмотрим гладкое продолжение $F = (F_1, F_2)$ функции φ^{-1} в окрестности p. Тогда $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ограничены в некотором шаре B с центром p. Тогда $\exists C > 0 \forall x, y \in B |F(x) - F(y)| \leqslant C|x - y| \Rightarrow \forall x, y \in B \cap U_0 = W_0 |\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x - y|$ □

Определение 3.3. Пусть M — гладкое многообразие. Отображение $f : M \to N$ называется дифференцируемым, если f — биекция, f, f^{-1} — гладкие.

Следствие. Пусть $\varphi : V \to U_0$ — параметризация окрестности U_0 в M. Тогда φ является диффеоморфизмом

Замечание. $U_0 :$ — точке$q \in U_0$ сопостовляется $(U_1, \dots U_m)$ точки $\varphi^{-1}(q)$ в $\mathbb{R}^m$

Следствие (О функциях перехода)**.** Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n \psi : W \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация, $O = \varphi(V) \cap \psi(W) \neq \varnothing$. Тогда $g : \psi^{-1}(O) \to \varphi^{-1}(O), g = \varphi^{-1} \circ \psi$ является диффеоморфизмом.

Гладкость можно определить в координатах

Лемма 3.2. *Пусть M — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}^l$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *f — гладкое по Милнеру*
2. *$\forall p \in M, \varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризации в окрестности точки p, верно $f \circ \varphi$ — гладкая*
3. *$\forall p \in M \exists \varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризации в окрестности точки p, такая, что $f \circ \varphi$ — гладкая*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризация M в окрестности точки p и пусть $a \in V$. Рассмотрим F — гладкое продолжение f в окрестности $q = \varphi(a)$. Тогда $f \circ \varphi = F \circ \varphi$ в некоторой окрестности a. Следовательно, $f \circ \varphi$ гладкая в некоторой окрестности точки a.

$2 \Rightarrow 3$ Очевидно

$3 \Rightarrow 2$ $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ — гладкое как композиция гладких отображений.

$\square$

Определение 3.4. Пусть M, N — гладкие многообразия и гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^l$, такое, что $f(M) \subset N$. Если φ, ψ — параметризации многообразий в окрестностях $p, f(p)$ соответственно, то $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ называется координатным представлением f в окрестности точки p. Если N — открыто в $\mathbb{R}^l$, то ψ будем полагать только тождественным.

Пример. Пусть γ — гладкая параметризованная кривая на многообразии M, т.е. $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, где I — интервал, такое, что $\gamma(I) \subset M$ — гладкое. Если $p \in \gamma(I)$ и $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация f в окрестности p, то $\beta = \varphi^{-1} \circ \gamma$ — координатное представление γ в окрестности точки p. Таким образом на гладкую кривую γ можно смотреть локально как на образ гладкой кривой β под действием φ.

Определение 3.5. Пусть M — гладкое m-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n, p \in M$. Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ называется касательным вектором к M в точке p, если найдется такая гладкая кривая γ, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Множество касательных векторов к M в точке p обозначается T_pM и называется касательным пространством к M в точке p.

Теорема 3.2. *Пусть M — гладкое m-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n, p \in M$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризация M в окрестности $p = \varphi(a)$. Тогда $T_pM = d\varphi_a(\mathbb{R}^m)$*
2. *Пусть $U \ni p, W$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $\Phi : U \to W$ — такой диффеоморфизм, что $\Phi(M \cap U) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}), 0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Тогда $T_pM = d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$*
3. *Пусть U — открыто в $\mathbb{R}^n, F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ — гладкая, т.ч. $M \cap U = F^{-1}(0)$ и $rk\ DF = n - m$ на $M \cap U$. Тогда $T_pM = \ker dF_p$*

Доказательство.

1, 2. Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ из пункта 1, а $\Phi : U \to W$ из пункта 2. Покажем, что $d\varphi_a(\mathbb{R}^m) \subset T_pM \subset d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим $B_r(a) \subset V$. Выберем такое δ, что $\delta|h| < r$, тогда $a+th \in V$ для всех $|t| < \delta$. Определим $\gamma(t) = \varphi(a+th), t \in (-\delta, \delta)$. Тогда $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ — гладкая, $\gamma(0) = \varphi(a) = p, \gamma'(0) = d\varphi_a(h)$, т.е. $d\varphi_a(h) \in T_pM$. Пусть $v \in T_pM$. Тогда $\exists \gamma(-\delta, \delta) \to M$ — гладкая, такая, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Уменьшая δ, если это необходимо, можно считать, что $\gamma(-\delta, \delta) \subset M \cap U$. Следовательно $\Phi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ при $|t| < \delta$, а значит, $d\Phi_p(v) = d\Phi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}\big|_0 \Phi(\gamma(t)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$, т.е. $d\Phi_p(v) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ или $v \in d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Таким образом доказано желаемое вложение. Поскольку $d\varphi_a, d\Phi_p^{-1}$ — инъекции, то $d\varphi_a(\mathbb{R}^m)$ и $d\Phi_p^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ — m-мерные линейные пространства в $\mathbb{R}^n$. Тогда заключаем, что они равны.

3. Пусть $v \in T_pM$, тогда $\exists \gamma : (-\delta, \delta) \to M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v, \gamma$ — гладкая. Следовательно, в некоторой окрестности $t = 0$ выполнено $F(\gamma(t)) \equiv 0$. Продифференцируем тождество при $t = 0$. $0 = dF_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dF_p(v)$, т.е. $v \in \ker dF_p$ или $T_pM \subset \ker dF_p$. Равенство выполняется из совпадения размерностей.

$\square$

Замечание. Во втором пункте неважно, мы берем $(d\Phi)^{-1}$ или $d(\Phi^{-1})$, т.к. Φ — диффеоморфизм.

Пользуясь известными фактами из линейной алгебры, получим несколько следствий:

Следствие. Отображение $d\varphi_a$ задает линейный изоморфизм между $\mathbb{R}^m, T_pM$.

Доказательство. Пусть $(u_1, u_2, \dots u_m)$ — координаты в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) = d\varphi_a(e_1)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) = d\varphi_a(e_2), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_m}(u) = d\varphi_a(e_m)$ образуют базис в T_pM. Если $h = (h_1, h_2, \dots h_m) \in \mathbb{R}^m$, то по линейности, $d\varphi_a(h) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(a)h_i$. Причем, геометрический смысл у h — $\gamma = \varphi \circ \beta, v = d\varphi_a(\beta'(0)) \Rightarrow h = \beta'(0)$. $\square$

Следствие. Если M локально задано уравнением $F(x) = v$ (из пункта 3) и $F = (F_1, F_2, \dots F_n)$, то T_pM задается СЛУ:

$$\begin{cases} (\nabla F_1(p), v) = 0 \\ (\nabla F_2(p), v) = 0 \\ \vdots \\ (\nabla F_{n-m}(p), v) = 0 \end{cases}$$

В частности, векторы $\nabla F_1(p), \nabla F_2(p), \dots \nabla F_{n-m}(p)$ образуют базис в T_pM.

Пример. Пусть S^{n-1} — $n-1$-мерная сфера в $\mathbb{R}^n$, задается уравнением $F(x) = 0$, где $F(x) = |x|^2 - 1$. Заметим, что $\nabla F(x) = 2x \Rightarrow T_xS^{n-1} = x^\perp$.

Определение 3.6. Аффинное пространство $\Pi_p = p + T_pM$ называется касательной плоскостью к M в p.

Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация M в окрестности $p = \varphi(a)$. Тогда $p + d\varphi_a(u-a) \in \Pi_p$ и $\varphi(u) = p + d\varphi_a(u-a) + o(|u-a|), u \to a$. Следовательно, расстояние от $x = \varphi(u)$ до Π_p есть $d(x, \Pi_p) = \inf_{y\in\Pi_p} |x-y| \leqslant o(|u-a|), u \to a$. Но φ^{-1} локально Липшицево, т.е. $|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x-y|$. А значит, $d(x, \Pi_p) = o(|x-p|), x \to p$.

Лемма 3.3 (О почти изометрии)**.** *Для любого $\varepsilon > 0, p \in M$ найдутся окрестности $U \subset M, W \subset \Pi_p$ и диффеоморфизм $\psi : U \to W$, что* $(1-\varepsilon)|x-y| \leqslant |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant (1+\varepsilon)|x-y|$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\varphi : \tilde{V} \to \tilde{U}$ — параметризация в окрестности $p = \varphi(a)$ и $L(u) = p + d\varphi_a(u-a)$. Отображение φ^{-1} локально Липшицево. Сужая $\tilde{U}$, если необходимо, можно считать, что $|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant C|x-y| \forall x, y \in \tilde{U}$. Известно, что найдется $V \ni a$ — окрестность, такая, что $|\varphi(u) - \varphi(v) - d\varphi_a(u-v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C}$. Определим $U = \varphi(V), W = L(V), \psi = L^{-1}$. Тогда ψ — диффеоморфизм из U в W. Пусть $x = \varphi(u), y = \varphi(v)$. Имеем: $|\psi(x) - \psi(y)| = |L(u) - L(v)| = |d\varphi_a(u-v)|$. Прибавив $\varphi(u) - \varphi(v)$, получим: $|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant |x-y| + \frac{\varepsilon}{C}|u-v| \leqslant (1+\varepsilon)|x-y|$. Второе неравенство доказывается аналогично $\square$

Пример. $M = \{(x,y) : y = |x|\}$. Покажем, что M — не одномерное многообразие. Докажем от противного. Пусть M — одномерное многообразие, тогда найдется гладкая кривая $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, такая, что $\gamma(0) = 0, \gamma'(0) \neq 0$. Имеем: $\gamma_1^2(t) = \gamma_2^2(t)$. Дифференцируя это равенство, получаем $2\gamma_1(t)\gamma_1'(t) = 2\gamma_2(t)\gamma_2'(t)$. $\gamma_2(t) \geqslant 0 \Rightarrow$ если $\gamma_2(t) = 0 \Rightarrow \gamma_2'(t) = 0 \Rightarrow \gamma_1'(t) = 0$, противоречие, т.к. $\gamma'(t) = 0$, противоречие.

3.4 Дифференциал гладкого отображения

Определение 3.7. Пусть M — гладкое многообразие, $f : M \to \mathbb{R}^l$ — гладкое отображение. Дифференциал $df_p : T_pM \to \mathbb{R}^l$ определяется следующим образом: Пусть $\gamma(-\delta, \delta)$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$, тогда

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t)) \tag{3.1}$$

Теорема 3.3. *Пусть M — гладкое m-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ и задано гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^l$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *(3.1) не зависит от выбора γ*
2. *$df_p : M \to \mathbb{R}^l$ линейное*
3. *Если N — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^l, f(M) \subset N$, то $df_p(T_pM) \subset T_qN$, где $q = f(p)$.*

Доказательство.

1. Пусть $v \in T_pM$. Выебрем гладкую кривую $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ так, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Рассмотрим $F : U \to \mathbb{R}^l$ — гладкое продолжение f в некоторой окрестности U точки p в $\mathbb{R}^n$. Т.к. $\gamma(t) \in M \cap U$ при малых $|t|$, то если обозначить через $DF(p)$ матрицу Якоби отображение F в точке p, имеем:
$$DF(p)v = DF(\gamma(0))\gamma'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t))$$
Заметим, что $DF(p)v$ не зависит от γ, а $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\gamma(t))$ — от F.
2. Линейность следует из того, что $df_p(v) = DF(p)v$
3. Если $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ — гладкая кривая, то $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$, то $\beta = f \circ \gamma : (-\delta, \delta) \to N$ — гладкая кривая, $\beta(0) = f(p) = q, \beta'(0) = df_p(v)$. Тогда $df_p(v) \in T_qN$.

□

Следствие. Если в пункте 3 дополнительно $g : N \to \mathbb{R}^s$ — гладкое, то справедливо цепное правило:
$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

Доказательство. Достаточно продифференцировать функцию $g(f(t))$ в $t = 0$ по правилу дифференцирования композиции. □

Следствие. Пусть M — гладкое m-мерное многообразие, N — гладкое r-мерное многообразие. Если $f : M \to N$ — диффеоморфизм, то $m = r$.

Доказательство. Пусть $p \in M, q = f(p) \in N$. Обозначим через $g = f^{-1} : N \to M$, тогда $g \circ f = \mathrm{id}_M, f \circ g = \mathrm{id}_N$, откуда:

$$dg_q \circ df_p = \mathrm{id} : T_pM \to T_pM$$

$$df_p \circ dg_q = \mathrm{id} : T_qN \to T_qN$$

Следовательно, $df_p : T_pM \to T_qN$ — линейный изоморфизм и $(df_p)^{-1} = dg_p$. Следовательно $m = \dim T_pM = \dim T_qN = r$. □

Замечание. Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризация M в окрестности точки $p = \varphi(a)$, $v \in T_pM$ и $d\varphi_a(h) = v$, тогда

$$df_p(v) = df_p(d\varphi_a(h)) = d(f \circ \varphi)_a(h)$$

В частности, в координатах df_p задается матрицей Якоби координатного представления $f \circ \varphi$.

Определение 3.8. Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N. Точка $q \in N$ называется регулярным значением f, если $df_p : T_pM \to T_qN$ сюръективен $\forall p \in f^{-1}(q)$.

Теорема 3.4 (О регулярном значении)**.** *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладкого m-мерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^s$ в гладкое n-мерное многообразие N, $n < m$ и $q \in N$ — регулярное значение f. Тогда $P = f^{-1}(q) = \{p \in M : f(p) = q\}$ является гладким $m - n$ мерным многообразием в $\mathbb{R}^s$.*

Доказательство. Зафиксируем $p \in f^{-1}(q)$ и рассмотрим параметризации $\varphi : U_0 \to U$ в окрестности p в M, $\psi : V_0 \to V$ в окрестности q в N. Уменьшая U, если это необходимо, и пользуясь непрерывностью f в точке p, можно считать, что $f(U) \subset V$. Тогда определено отображение $f_0 = \psi \circ f \circ \varphi : U_0 \to V_0$ — координатное представление f. Пусть $b = \psi^{-1}(q)$. Если $a \in U_0$ такая, что $f_0(a) = b$, то $\varphi(a) = p \in U \cap P$ и отображения $d\varphi_a : \mathbb{R}^m \to T_pM, df_p : T_pM \to T_qN, d\psi_q^{-1} : T_qN \to \mathbb{R}^n$ сюръективны, а значит сюръективна и их композиция, т.е. $d(f_0)_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Следовательно, b — регулярное значение f_0. Множества $f_0^{-1}(b) = \{x \in U_0 : f(\varphi(x)) = q\} = \varphi^{-1}(U \cap P)$ является $m - n$ мерным гладким многообразием в $\mathbb{R}^s$. Уменьшая U_0, если это необходимо, найдем открытые $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ и параметризацию $\alpha : W \to \varphi^{-1}(U \cap P)$. Следовательно, $\varphi \circ \alpha : W \to U \cap P$ — параметризация P в окрестности p. □

Задача. *Докажите, что $T_pP = \ker df_p$*

4 Экстремумы функций многих переменных

4.1 Безусловный экстремум

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, где U — открыто в $\mathbb{R}^n$

Определение 4.1. Точка $a \in U$ называется точкой локального максимума f, если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta (a)(f(x) \leqslant f(a))$. Аналогично определяются локальный минимум, и локальные строгие максимум и минимум (если соответствующий знак строгий).

Замечание. Все такие точки называются точками локального экстремума

Теорема 4.1. *Если a — точка экстремума f и существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$*

Доказательство. Заметим, что a_k — экстремум функции $\varphi(t) = f(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots a_n)$. По условию, $\varphi(t)$ дифференцируема в точке a, поэтому по теореме Ферма, $0 = \varphi'(a_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ □

Следствие. Если a — точка экстремума функции f и f дифференцируема в точке a, то $df_a = \nabla f(a) = \vec{0}$

Определение 4.2. Точка $a \in U$ называется стационарной точкой функции f, если f дифференцируема в этой точке и $df_a = 0$.

Напоминание. Если $f \in C^2(U)$, то $d^2 f_a(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$ относительно компонент вектора h.

Определение 4.3. Матрица $d^2 f_a$ обозначается через $Hf(a)$, причем

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Называется матрицей Гессе

Теорема 4.2. *Пусть $f \in C^2(U)$ и a — стационарная точка f. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $d^2 f_a(h) > 0 \forall h \neq 0 \Rightarrow a$ — точка строгого минимума*
2. *Если $d^2 f_a(h) < 0 \forall h \neq 0 \Rightarrow a$ — точка строгого максимума*
3. *Если $\exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n$, такие, что $d^2 f_a(h_+) > 0, d^2 f_a(h_-) < 0$, то a не является точкой экстремума функции f.*

Доказательство.

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, имеем:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h) + \alpha(h)|h|^2 = f(a) + \frac{1}{2}|h|^2 \left(d^2 f_a \left(\frac{h}{|h|} \right) + \alpha(h) \right)$$

Где $\alpha(h) \to 0, h \to 0$. Функция $d^2 f_a(h)$ — непрерывная функция относительно h и $S = \{h \in \mathbb{R}^n : |h| = 1\}$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда по теореме Вейерштрасса, $\exists m = \inf_{|h|=1} d^2 f_a(h) > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $|\alpha(h)| \leqslant \frac{m}{4}|h|^2 \forall h : 0 < |h| < \delta$. Тогда $f(a+h) - f(a) \geqslant \frac{m}{4} > 0 \forall h \in \overset{\circ}{B}_\delta(0)$. Это доказывает, что a — точка строгого локального минимума.

2. Доказывается аналогично

3. По формуле Тейлора,

$$f(a + th_+) = f(a) + t^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f_a(h_+) + \alpha(th_+)|h_+|^2 \right)$$

Заметим, что $\lim_{t \to 0} \frac{1}{2} d^2 f_a(h_+) + \alpha(th_+)|h_+|^2 > 0$, поэтому $\exists \delta_1 > 0 : f(a + th_+) - f(a) > 0 \forall t : 0 < |t| < \delta_1$. Аналогично, $\exists \delta_2 > 0 : f(a + th_-) - f(a) < 0 \forall t : 0 < |t| < \delta_2$. Выражение $f(x) - f(a)$ не сохраняет знак ни в какой окрестности точки a, т.е. a не является точкой локального экстремума функции f

□

Замечание. Если $d^2 f_a$ как квадратичная форма полуопределена, то теорема не позволяет сделать вывод о наличии экстремума в точке a.

Пример. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Тогда $d^2 f_O(h_1, h_2) = 2h_1^2$ — положительно полуопределенная квадратичная форма. Однако при четных n, O является точка строгого минимума f, а при нечетных — не является.

Замечание. Для исследования формы на определенность можно либо привести ее к диагональному виду, либо воспользоваться критерием Сильвестра.

4.2 Условный экстремум

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто и задана функция $g : U \to \mathbb{R}^m, g = (g_1, g_2, \dots g_m), 0 < m < n$. Изучим $f : U \to \mathbb{R}$ на экстремум на множестве нулей $M = g^{-1}(0)$.

Определение 4.4. Точка $p \in M$ называется точкой локального условного максимума функции f на множестве M, если $\exists \delta > 0 \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta (p) \cap M (f(x) \leqslant f(p))$. Аналогично определяются точки других типов условного экстремума.

Теорема 4.3 (Лагранж). *Пусть $f \in C^1(U, g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)), rk\ Dg(p) = m$. Если p — точка условного экстремума f на M, то $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \in \mathbb{R} : \nabla f(p) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla g_k(p)$.*

Доказательство. Т.к. $rk\ Dg(p) = m$, то матрица Якоби имеет минор порядка m, $\neq 0$. Учитывая, что $g \in C^1$, то этот минор будет отличен от 0 в некоторой окрестности точки p. Б.О.О. можно считать, что $rk\ Dg(x) = m \forall x \in U$. Тогда M является гладким $m-n$ мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$. Пусть $v \in T_p M$. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, такую, что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Функция $f \circ \gamma$ имеет экстремум в точке $t = 0$, поэтому

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t)) = (\nabla f(p), v)$$

То есть $\nabla f(p) \in (T_p M)^\perp$. Т.к. $\nabla g_1(p), dots \nabla g_m(p)$ образуют базис в $(T_p M)^\perp$, поэтому такие $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ найдутся □

Замечание. Из Теоремы Лагранжа следует метод множителей Лагранжа: если p — точка условного экстремума f на M, то p — стационарная точка функции Лагранжа:

$$L : U \to \mathbb{R}, L(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)$$

Теорема 4.4. *Пусть $f \in C^2(U), g \in C^2(U, \mathbb{R}^m), rk\ Dg(p) = m$, где p — стационарная точка функции Лагранжа, соответствующая множителям $\lambda_1, \dots \lambda_n$.*

1. *Если $d^2 L_p(h) > 0 \forall h \in T_p M \setminus \{0\}$, то p — точка условного минимума f на M*
2. *Если $d^2 L_p(h) < 0 \forall h \in T_p M \setminus \{0\}$, то p — точка условного максимума f на M*
3. *Иначе p не является точкой условного экстремума.*

Доказательство. Пусть $x = \varphi(y)$ — локальная параметризация многообразия M в окрестности $p = \varphi(a)$. Точка p — точка условного минимума (максимума) f на M тогда и только тогда, когда a — точка безусловного минимума (максимума) функции $H = f \circ \varphi$. Функции f, L совпадают на M, поэтому $H = L \circ \varphi$. Поскольку $\forall v \in \mathbb{R}^{n-m}$ выполнено:

$$dH_a(v) = dL_p(d\varphi_a(v)) = 0$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что p — стационарная точка функции L. Тогда a — стационарная точка функции H. Найдем d^2H_a

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y_l \partial y_k}$$

Т.к. p — стационарная точка L, то $\frac{\partial L}{\partial x_i}(p) = 0$ для всех i. Но тогда

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_l \partial y_k}(a) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(p)\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(a)\cdot\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(a)$$

$$d^2H_a = \sum_{k=1}^{n-m}\sum_{l=1}^{n-m}\frac{\partial^2 H}{\partial y_l \partial y_k}(a)v_l v_k = \sum_{k=1}^{n-m}\sum_{l=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(p)\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(a)\cdot\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(a)v_k v_l =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(p)\left(\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_l}v_l\right)\left(\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k}v_k\right) = d^2L_p(d\varphi_a(v))$$

Отметим, что $d\varphi_a$ — изоморфизм $\mathbb{R}^{n-m}$ на T_pM, причем $\ker d\varphi_a = \{0\}$. □

Определение 4.5. Назовем шар $B_r(x)$ в $\mathbb{R}^n$ рациональным, если $r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}^n$.

Замечание. Любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ представимо в виде объединения рациональных шаров, которые в нем содержатся

Лемма 4.1. *Если M — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, то существует его покрытие $\{U_i\}$ координатными окрестностями (т.е. образами параметризаций).*

Доказательство. Рассмотрим $\{U_p\}_{p\in M}$ — произвольное покрытие M координатными окрестностями. $\forall p \exists \tilde{U_p}$ — открытое в $\mathbb{R}^n$: $\tilde{U_p} \cap M = U_p$. Положим $\{B_j\} : \forall j \exists p = p(j)(B_j \cap M \subset U_p) \Rightarrow \{B_j \cap M\}$. Для каждого j выберем ровно одно p_j: $B_j \cap M \subset U_p$. Следовательно, $\{U_p\}$ образует искомое покрытие. □

5 Интегрирование на многообразиях

5.1 Мера на многообразии

Пусть M — гладкое m-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n, m < n$.

Определение 5.1. Множество $E \subset M$ называется измеримым, если $\forall \varphi : V \to U$ — параметризации окрестности U в M, множество $\varphi^{-1}(E \cap U)$ измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

Замечание. Для измеримости E достаточно проверить измеримость по Лебегу множеств $\varphi_j^{-1}(E \cap U_j)$ для счетного набора параметризаций $\{\varphi_j\}$, образы U_j которых покрывают M.

Доказательство. Пусть W — образ параметризации ψ. Имеем: $W = \bigcup_j (W \cap U_j) \Rightarrow \psi^{-1}(E \cap W) = \bigcup_j \psi^{-1}(E \cap W \cap U_j)$. Для любого j, $\varphi_i^{-1}(E \cap W \cap U_j) = \varphi_i^{-1}(E \cap U_j) \cap \varphi_j^{-1}(W)$ измеримо в $\mathbb{R}^m$, поэтому $\psi^{-1}(E \cap W \cap U_j) = \psi^{-1} \circ \varphi_j(\varphi_j^{-1}(E \cap W \cap U_j))$ — измеримо в $\mathbb{R}^n$ как образ измеримого множества под действием диффеоморфизма. $\mathcal{A}_M = \{E \subset M | E \text{ измеримы}\}$ □

Лемма 5.1. *$\mathcal{A}_M$ — σ-алгебра, содержащая $\mathcal{B}(M)$*

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{A}_M$ измеримо и $\varphi : V \to U$ — параметризация U в M. Тогда:$\varphi^{-1}(E \cap U)$ измеримо в $\mathbb{R}^n$. Имеем: $\varphi^{-1}(E^c \cap U) = \varphi^{-1} \setminus \varphi^{-1}(E \cap U)$. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_M$ — измеримы в $\mathcal{A}_M$. Тогда: $\varphi^{-1}\left(\left(\bigcup E_i\right) \cap U\right) = \varphi^{-1}\left(\bigcup E_j \cap U\right) = \bigcup \varphi^{-1}(E_j \cap U)$ — измеримо в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup E_j \in \mathcal{A}_M$. Очевидно, что $M \subset \mathcal{A}_M$. Пусть O — открытое в $M \Rightarrow \varphi^{-1}(O \cap U)$ — открытое в $\mathbb{R}^m \Rightarrow O \in \mathcal{A}_M \Rightarrow \mathcal{B}(M) \subset \mathcal{A}_M$. □

Определение 5.2. Набор $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ назовем счетным измеримым разбиением M, соответствующим набору параметризаций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, если $M = \bigsqcup_{i=1} E_i$, причем E_i измеримы и $\forall i : E_i \in U_i$ — образе параметризации φ_i.

Замечание. Измеримое разбиение существует

Доказательство. $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ — образы параметризаций. Положим $E_1 = U_1$. $E_i = U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$. □

В случае аффинных пространств на $\mathcal{A}_M$ можно каноническим образом ввести меру. Пусть Π — m-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\exists \Phi$ — движение, такое, что $\Phi(\mathbb{R}^m) = \Pi$. Для $A \in \mathcal{A}_\Pi$ положим $\mu_\Pi(A) = \mu(\Phi^{-1}(A))$. Покажем, что это определение корректно. Пусть ψ — движение в $\mathbb{R}^n$, такое, что $\psi(\mathbb{R}^m) = \Pi$. Тогда $H = \psi^{-1} \circ \Phi|_{\mathbb{R}}$ — движение в $\mathbb{R}^m$ и $\psi^{-1}(A) = H(\Phi^{-1}(A)) \forall A \subset \mathbb{R}^m$. Т.к. движение сохраняет меру в $\mathbb{R}^n$, то $\mu(\psi^{-1}(A)) = \mu(\Phi^{-1}(A)) \forall A \in \mathcal{A}_M$. Тогда мера μ_Π называется мерой Лебега на подпространстве Π.

Лемма 5.2. *Пусть $\Pi = L(\mathbb{R}^m)$ где $L(x) = Ax + b$ — аффинное отображение, причем $rk\ A = m$. Тогда $\mu_\Pi(L(E)) = \sqrt{\det A^T A}\mu(E) \forall E$ — измеримого в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Пусть Π_p — касательная плоскость к M в точке p. Если φ — параметризация M в окрестности $p = \varphi(a)$, то $\Pi_p = L(\mathbb{R}^m)$, где $L(u) = p + d\varphi_a(u - a)$. Пусть $a = (a_1, \dots a_m), h > 0, Q_h = [a_1, a_1 + h) \times \dots \times [a_m, a_m + h)$. Возьмем за основу, что ν на M должна сохраняться при изометриях. По лемме о почти изометрии, имеем:

$$\lim_{n \to 0} \frac{\nu(\varphi(Q_n))}{\mu_\Pi(L(Q_n))} = 1$$

$$\nu(\varphi(Q_n)) \sim_{n \to 0} \sqrt{g_\varphi(a)} h^m$$

Где $g_\varphi = G_\varphi, G_\varphi = D\varphi(a)^T D\varphi(a)$ — матрица Грама. □

Теорема 5.1. *Существует единственная мера ν на $\mathcal{A}_\mathcal{M}$, такая, что $\forall$ параметризации $\varphi : V \to U$ окрестности U в M и любого измеримого $A \subset U$ выполнено:*

$$\nu(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{g_\varphi} d\mu$$

Доказательство. Определим ν на σ-алгебре измеримых множеств $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ таким образом, потом докажем, что продолжение ν на $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ единственно.

1. Покажем, что $\nu(A)$ не зависит ни от координатной окрестности A, ни от ее параметризации. Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}^n, \psi : W \to \mathbb{R}^n$ — локальные параметризации, $A \subset O = \varphi(V) \cap \psi(W)$. Тогда $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(O) \to \psi^{-1}(O)$ — диффеоморфизм. Обозначим матрицу Якоби Φ через S, тогда дифференцируя равенство $\varphi = \psi \circ \Phi$, имеем:
$$D\varphi = D\psi \cdot S$$
Тогда $G_\varphi = S^T G_\psi S, g_\varphi = g_\psi (\det S)^2$. Теперь независимость следует из теоремы о замене переменной в кратном интеграле:
$$\int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{g_\psi} dy =_{y=\Phi x} \int_{\Phi^{-1}(\psi^{-1}(A))} \sqrt{g_\psi \circ \Phi} |\det S| dx = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{g_\varphi} dx$$

2. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ — измеримое координатное разбиение M. Для $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ определим $A_i = A \cap E_i$. Тогда A_i измеримо и лежит в образе некоторой параметризации и $A = \bigsqcup +i = 1^\infty A_i$. Любая мера на ν на $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет равенству $\nu(A) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i)$. Поскольку $\nu(A_i)$ определены однозначно, то и $\nu(A)$ на A также определено однозначно. Это дает способ продолжения ν с A_U на A_M

3. Покажем, что ν является мерой. Пусть дано измеримое разбиение $A = \bigsqcup_{k=1}^\infty B_k$. Определим $B_{ki} = B_k \cap E_i$. Тогда $B_k = \bigsqcup_{i=1}^\infty B_{ki}, A_i = A \cap E_i = \bigsqcup_{k=1}^\infty B_k \cap E_i = \bigsqcup_{k=1}^\infty B_{ki}$. Поскольку интеграл Лебега счтено аддитивен, имеем:
$$\nu(A_i) = \sum_{k=1}^\infty \nu(B_{ki})$$
Меняя порядок суммирования, имеем:
$$\nu(A) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) = \sum i = 1^\infty \sum_{k=1}^\infty \nu(B_{ki}) = \sum k = 1^\infty \sum_{i=1}^\infty \nu(B_{ki}) = \sum_{k=1}^\infty B_k$$

В частности, показана независимость продолжения ν от выбора $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ $\square$

Определение 5.3. Мера ν называется поверхностной мерой на M.

Определение 5.4. Пусть $E \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция f называется измеримой, если $\{p \in E : f(p) < a\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ для любого a.

Лемма 5.3. *Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *f измерима*
2. *$f \circ \varphi$ измерима на $\varphi^{-1}(E)$ для любой параметризации φ*
3. *$f \circ \varphi_j$ измерима на $\varphi_j^{-1}(E)$ для счетного набора параметризаций φ_j, образы которых покрывают M*

Доказательство.

(1) ⇒ (2) Вытекает из равенства $\{x \in \varphi^{-1}(E) | f(\varphi(x)) < a\} = \varphi^{-1}(\{p \in E | f(p) < a\})$.

(2) ⇒ (3) Очевидно

(3) ⇒ (1) Пусть $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ — набор координатных окрестностей, покрывающих M, причем U_j — образ параметризации φ_j. Пусть $F = f^{-1}([-\infty, a))$. По равенству из первого следствия получаем, что $\varphi_j^{-1}(F \cap U_j)$ измеримо $\forall j$. Тогда результат следует по первому замечанию после определения измеримости.

□

5.2 Интеграл на многообразии

Определение 5.5. Пусть функция $f : A \to [0, +\infty]$ измерима, $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ — измеримое координатное разбиение M, соответствующее набору параметризаций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Определим

$$\int_A f d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(A \cap E_i)} f \circ \varphi_i \sqrt{g_{\varphi_i}} d\mu$$

Замечание. Определение не зависит ни от выбора измеримого координатного разбиения, ни от выбора параметризаций φ_i. Для этого достаточно в доказательстве теоремы заменить $\sqrt{g_\varphi}$ на $f \circ \varphi \sqrt{g_\varphi}$.

Определение 5.6. Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ называется интегрируемой, если $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима и $\int_A f^{\pm} d\nu < \infty$. В этом случае

$$\int_A f d\nu = \int_A f^+ d\nu - \int_A f^- d\nu$$

5.3 Примеры

Пример. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ — гладкая с $\gamma'(t) \neq 0$ на I. Если $\gamma : I \to \gamma(I)$ — гомеоморфизм, то $\Gamma = \gamma(I)$ является гладким одномерным многообразием в $\mathbb{R}^n$, покрытым образом одной параметризации γ. Если $f : \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательно измеримая или интегрируема, то:

$$\int_\Gamma f ds = \int_I f(\gamma(I))\gamma'(t) dt$$

Такой интеграл называется криволинейным интегралом I рода. Если $\tilde{\Gamma} = \gamma([a, b])$, то $\nu(\tilde{\Gamma}) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ — длина кривой $\gamma|_{[a,b]}$

Пример. Пусть $V \subset \mathbb{R}^2$ — открыто, $r : V \to \mathbb{R}^n, rk\ Dr = 2$ на V, $r : V \to r(V)$ — гомеоморфизм, то $M = r(V)$ является 2-мерным многообразием, покрытым образом одной параметризации r, причем:

$$(Dr)^T Dr = \begin{pmatrix} (r'_u, r'_u) & (r'_u, r'_v) \\ (r'_v, r'_u) & (r'_v, r'_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Если $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательно измерима или интегрируема, то, если положить $S = \nu$

$$\int_M f dS = \iint_V f(r(u, v))\sqrt{EG - F^2} du dv$$

Такой интеграл называется криволинейным интегралом I рода.

Пример. Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — открыто, $h : U \to \mathbb{R}$ гладкая, тогда $M = \{(x, h(x)) | x \in U\}$ — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, покрытое образом одной параметризации $\varphi : U \to M, phi(x) = (x, h(x))$. Имеем:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla h^T \end{pmatrix}, (D\varphi)^T D\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \nabla h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla h^T \end{pmatrix} = E_{n-1} + \nabla h (\nabla h)^T$$

$$\det G_\varphi = 1 + |\nabla h|^2$$

Если $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательно измерима или интегрируема, то

$$\int_M f d\nu = \int_U f(x, h(x)) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2} d\mu$$

5.4 Площадь поверхности сферы

Пример. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, x_n > 0\}$ — верхняя полусфера. Тогда M — график функции $h(y) = \sqrt{r^2 - |y|^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{r^2 - |y|^2}}, 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{r^2}{r^2 - |y|^2}$$

$$\int_M f d\nu = \int_{B_r(0)} f(y, \sqrt{r^2 - |y|^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |y|^2}} dy = \int_{B_r(0)} f(rt, r\sqrt{1 - |t|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - |t|^2}} dt$$

В частности,

$$\nu(M) = r^{n-1} \int_{B_1(0)} \frac{dt}{\sqrt{1 - |t|^2}} = r^{n-1} \nu(M_1)$$

Где M_1 — единичная полусфера.

Лемма 5.4. *Пусть $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\nu(A) = 0$
2. $\mu(\varphi^{-1}(A \cap U)) = 0$ *для любой параметризации φ (здесь U — образ φ)*
3. $\mu(\varphi_j^{-1}(A \cap U)) = 0$ *для счетного набора параметризаций φ_j (здесь U_j — образ φ_j), образы которых покрывают M.*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Поскольку $A \cap U$ измерима, то $0 = \nu(A) \geqslant \nu(A \cap U) = \int_{\varphi^{-1}(A \cap U)} \sqrt{g_\varphi} d\mu$. Т.к. $\sqrt{g_\varphi}$ положительно, то $\varphi^{-1}(A \cap U)$ имеет меру 0.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно

(3) $\Rightarrow$ (1) Имеем $A = A \cap \bigcup_{j=1}^\infty U_j = \bigcup_{j=1}^\infty (A \cap U_j)$. По условию, $\mu(\varphi_j^{-1}(A \cap U_j)) = 0 \Rightarrow \nu(A \cap U_j) = 0$. По счетной аддитивности, $\nu(A) = 0$.

□

Следствие. Пусть $P \subset M$ — гладкое k-мерное многообразие, $k < m$. Тогда $\nu(P) = 0$ (ν — поверхностная мера на M.

Определение 5.7. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладким m-мерным многообразием, если $M = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, где N, P_i — гладкие многообразия, $\dim N = m, \dim P_i < m$

Теорема 5.2 (Формула коплощади). *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} (n > 1)$ интегрируемо по Лебегу, тогда для почти всех $r \in \mathbb{R}_+$ функция f интегрируема по сфере $S_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ и справедлива формула:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_r(0)} f(x) d\nu(x) \right) d\mu(r)$$

Доказательство. Введем обозначения $x = (y, x_n), y = (y_1, \dots y_{n-1}), H_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^n, \pm x_n > 0\}, B = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| < 1\}$. Рассмотри отображение $\varphi : B \times \mathbb{R}_+ \to H_+, \varphi(y, r) = (ry, r\sqrt{1 - |y|^2})$. Отображение φ обратимо, причем $\varphi^{-1}(x) = \left(\frac{y}{|x|}, |x| \right)$. Следовательно, φ-дифференциируема. Запишем ее матрицу Якоби:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{n-1} \\ -\frac{rx_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & -\frac{rx_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & -\frac{rx_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} & \sqrt{1 - |y|^2} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\det D\varphi = \begin{vmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{n-1} \\ -\frac{rx_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & -\frac{rx_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & -\frac{rx_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} & \sqrt{1 - |y|^2} \end{vmatrix} =$$

$$= r^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & -\frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} & \sqrt{1 - |y|^2} \end{vmatrix} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - |y|^2}}$$

По формуле замены переменной в интеграла и по теореме Фубини:

$$\int_{H_+} f d\mu = \int_{B \times \mathbb{R}_+} f(ry, r\sqrt{1 - |y|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - |y|^2}} dy dr =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_B f(ry, r\sqrt{1 - |y|^2}) dy \right) dr = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_r(0) \cap H_+} f(x) d\nu(x) d\mu(r) \right)$$

Аналогично проверяется и для замены H_+ на H_-. Складывая полученные формулы, получаем требуемую формулу. Осталось заметить, что так как f интегрируема, то теорема Фубини дает, тчо внутренний интеграл должен быть конечен для почти всех r. □

Следствие. Поверхностная мера сферы σ_{n-1} сферы $S_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ считается через меру ω_n единичного шара $B_1(0)$:

$$\omega_n = \int_{R^n} I_{B_1}(x)d\mu = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_r(0)} I_{B_1}(x)d\nu(x) \right) d\mu(r) =$$

$$= \int_{R^n} I_{B_1}(x)d\mu = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_r(0)} d\nu(x) \right) d\mu(r) = \int_{R^n} I_{B_1}(x)d\mu = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_1(0)} r^{n-1}d\nu(x) \right) d\mu(r) =$$

$$\sigma_{n-1} \int_0^1 r^{n-1}dr = \frac{\sigma_{n-1}}{n}$$

Задача. *Покажите, что если $x \mapsto f(|x|)$ неотрицательна или интегрируема, то справедлива формула:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)d\mu(x) = \sigma_{n-1} \int_0^{+\infty} f(r)r^{n-1}dr$$

6 Дифференциальные формы

6.1 Дифференциальные 1-формы

Определение 6.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто. Дифференциальной 1-формой на U называется $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$. ($X^*$ — сопряженное пространство к X)

Замечание. На дифференциальную 1-форме можно смотреть как на функцию $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, линейную по второму аргументу. Действительно, $\omega(x, h) = (\omega(x))(h)$, но т.к. $\omega(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$, то замечание верно.

Пусть $e_1, \dots e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда по линейности $\omega(x, h) = \sum_{i=1}^n h_i\omega(x, e_i)$. Функции $f_i : U \to \mathbb{R}^n : f_i(x) = \omega(x, e_i)$ называются коэфициентами формы ω.

Напоминание. $\{dx_1, \dots dx_n\}$, где $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, dx_i(h) = h_i$ — базис $(\mathbb{R}^+)^*$, двойственный к стандартному базису $\{e_1, \dots e_n\}$.

Следовательно, имеет место координатное представление 1-формы:

$$\omega = f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)d_n$$

Замечание. Сложение и умножение на скаляр производятся поточечно. Множества дифференциальных 1-форм относительно этих операций образует линейное пространство.

Определение 6.2. Будем говорить, что 1-форма непрерывна, если все ее коэфициенты непрерывны.

Аналогично определяется 1-форма класса $C^r(U)$

Пример. Если $f \in C^1(U)$, то df — 1-форма на U.

Определение 6.3. Пусть $\gamma : [a, b] \to U$ — гладкая параметризованная кривая, ω-непрерывная 1-форма на U. Интеграл от ω по кривой γ (криволинейный интеграл второго рода) определяется по формуле:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))dt = \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma'1(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)dt$$

Замечание. Интеграл не зависит от параметризации, т.е. пусть $\tilde{\gamma} : [c, d] \to U$ — гладкая кривая, эквивалентная γ. Тогда $\exists h : [c, d] \to [a, b]$ — C^1-сюрьекция с $h' > 0$ на $[c, d]$, такой, что $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(h(u)) \forall u \in [c, d]$. Поэтому $\tilde{\gamma} = \gamma' \cdot h'$ и по формуле замены переменной:

$$\int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))dt = \int_c^d \omega(\gamma(h(u)), \gamma'(h(u)))h'(u)du =$$

$$= \int_c^d \omega(\tilde{\gamma}(u), \tilde{\gamma}^{-1}(u))du$$

То есть

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$$

6.2 Свойства интеграла от 1-форм

Утверждение 6.1. *Пусть* $\tilde{\gamma} : [a, b] \to U, \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, *тогда:*

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = -\int_\gamma \omega$$

Утверждение 6.2. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *тогда*

$$\int_\gamma \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2$$

Утверждение 6.3. *Пусть* $a < c < b, \gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ *и* $\gamma_2 = \gamma_{[c,b]}$, *тогда:*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Утверждение 6.4.

$$\left|\int_\gamma \omega\right| \leqslant \max_{x \in \underbrace{[\gamma]}_{\text{носитель}}} |f(x)| \underbrace{L(\gamma)}_{\text{длина } \gamma}, f = (f_1, \ldots f_n)$$

Доказательство.

$$\left|\sum_{i=1}^n f_i(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\right| = |(f(\gamma(t)), \gamma'(t))| \leqslant |f(\gamma(t))||\gamma'(t)| \leqslant \max_{x \in [\gamma]} |f(x)||\gamma'(t)|$$

□

Напоминание. Напомним, что кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладкой, если сущесвует такое $T = \{t_k\}_{k=0}^N$ — разбиение $[a, b]$, что каждое сужение $\gamma_{[x_i, x_{i+1}]}$ является гладким. В частности, если каждое сужение $\gamma_{[x_i, x_{i+1}]}$ постоянна, то γ называтеся ломаной

Определение 6.4. Интеграл от 1-формы по кусночно-гладкой кривой определяется как сумма интегралов по отрезкам гладкости

Теорема 6.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, F \in C^1(U)$ и $\gamma : [a, b] \to U$ — кусочно-гладкая криавая, $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$. Тогда:*

$$\int_\gamma dF = F(q) - F(p)$$

Доказательство. Предположим, что γ — гладкая. Тогда по определению:

$$\int_\gamma dF = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F(\gamma(t))|_{t=a}^{t=b}$$

Для кусочно-гладкой кривой утверждение получается по аддитивности. □

Следствие. Если $\gamma : [a, b] \to U$ замкнутая, т.е. $\gamma(a) = \gamma(b)$, то $\int_\gamma dF = 0$

Определение 6.5. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, \omega$ — 1-форма в U.

1. Функция $F : U \to \mathbb{R}^n$ называется первообразной ω, если $dF = \omega$ на U.

2. Форма ω называется точной в U, если она имеет там первообразную

Лемма 6.1. *Если U — область в $\mathbb{R}^n$, то любую пару точек из U можно соединить ломаной со сторонами, параллельными осям координат.*

Доказательство. Отметим, что шар $B \subset U$ обладает указанным свойством. Теперь, пусть $x_0 \in U$. Рассмотрим $A = \{x \in U : \exists \gamma_{x_0,x}\}$, где $\gamma_{x_0,x}$ — ломаная со сторонами, параллельными осям, соединяющая x_0, x. Если $x \in A \to \exists r : B_r(x) \subset A$. Тогда A — открыто. Аналогично, $U \setminus A$ — открыто. Т.к. $U = \underbrace{A}_{\text{открыто}} \sqcup \underbrace{(U \setminus A)}_{\text{открыто}}$. Т.к. $A \ni x_0 \Rightarrow U \setminus A = \varnothing$. Тогда $U = A$. □

Теорема 6.2. *Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, ω — непрерывная 1-форма в U. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *ω точна в U*

2. *$\int_\gamma \omega = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ с носителем U.*

3. *$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ для любых γ_1, γ_2 со сторонами, параллельными осям координат, с совпадающими концами.*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Вытекает из следствия теоремы 1.

(2) $\Rightarrow$ (3) Зафиксируем γ_1, γ_2 и рассмотрим кривую $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(2b - t), t \in [b, 2b - a] \end{cases}$. Т.к. γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, то $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Зафиксируем $x_0 \in U$ и рассмотрим $F(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}}$, где интеграл берется по ломаной $\gamma_{x_0,x}$ со сторонами, параллельными осям координат и соединяет x_0, x. По пункту 3, F не зависит от выбора $\gamma_{x_0,x}$. Покажем, что F — первообразная для ω, т.е. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$ на U, где $\omega = f_1(x)dx_1 + \cdots + f_n(x)dx_n$. Т.к. x — внутренняя U, то $\exists \delta > 0 : \forall t \in$

$(-\delta, \delta)(x + te_j \in U)$. Параметризуем отрезок с концами x и $x + te_i : \lambda_i \mapsto x + se_i$. При этом:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F(x+te_i) - F(x)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\gamma_i} \omega =$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_0^t f(x+se_i)ds = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_0^t f_i(x+se_i)ds = f_i(x)$$

□

Следствие. При $n = 2$ для точности формы достаточно проверять равенство нулю интеграла по любому прямоугольнику со сторонами, параллельным осям.

Замечание. Пусть F_1, F_2 — первообразные 1-формы ω в области U, $x_0, x \in U$. Тогда

$$\int_{\gamma_{x_0,x}} \omega = F_1(x) - F_1(x_0) = F_2(x) - F_2(x_0)$$

Где $\gamma_{x_0,x}$ — кусочно-гладкая кривая из U с концами x_0, x. Тогда $F_1 - F_2 = const$ на U.

Следствие. Итак, f по своему дифференциалу ω восстанавливется следующим образом:

$$f(x) = C + \int_{\gamma_{x_0,x}} \omega = C + \int_a^b (f_1(\gamma_1(t)\gamma_1'(t)) + \dots + f_n(\gamma_n(t))\gamma_n'(t))\, dt$$

Где $\gamma_{x_0,x} : [a,b] \to U, \gamma_{x_0,x}(a) = x_0, \gamma_{x_0,x}(b) = x$

Лемма 6.2. *(Лебега о покрытии) Пусть X — компакт, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ — открытое покрытие. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall E \subset X(diam\ E \leqslant \delta \Rightarrow (\exists \alpha \in \Lambda : E \subset U_\alpha))$*

Доказательство. См. 2 семестр. □

Определение 6.6. Непрерывная 1-форма называется локально точной в U, если $\forall x \in U \exists B \subset U$ — открытый шар, такой, что $x \in B$ и ω точна в B.

Замечание. В конце курса будет доказано, что 1-форма $\omega = f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)dx_n$ будет локально точна тогда и только тогда, когда:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \forall i, j = 1, 2, \dots n$$

Пример.

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Рассмотрим $P = -\frac{y^2}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{y^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Это верно на $U \Rightarrow \omega$ локально точна. Однако ω не является точной, т.к. если рассмотреть $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in (0, 2\pi)$, то:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = 2\pi \neq 0$$

Определение 6.7. Пусть ω — локально точна в области U и $\gamma : [a, b] \to U$ — непрерывный путь. Рассмотрим разбиение $P = \{t_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$, такое, что $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset B_i$ — шар, причем ω точна в B_i. Тогда интеграл от ω по γ вычисляется по формуле:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^m (F_i(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1})))$$

Где F_i — произвольная первообразная ω на B_i

Лемма 6.3. *Определение интеграла от ω корректно*

Доказательство. Покажем существование необходимого разбиения P. Рассмотрим $\{B_\alpha\}$ — покрытие $\gamma([a, b])$ открытыми шарами, в которых ω точна. Тогда $\{\gamma^{-1}(B_\alpha)\}$ — открытое покрытие $[a, b]$ и пусть δ — число из леммы Лебега о покрытии. Тогда в качестве P можно взять любое разбиение $[a, b]$ мелкости $\leqslant \delta$. Покажем, что правая часть формулы не изменится при добавлении точки к P. Пусть $P \cup \{c\}$ — разбиение $[a, b], t_{j-1} < c < t_j$. Имеем:

$$F_j(\gamma(t)j) - F_j(\gamma(t_{j-1})) = F_j(\gamma(t)j) - F_j(\gamma(c)) + F_j(\gamma(c)) - F_j(\gamma(t_{j-1}))$$

Пусть Q — другое разбиение $[a, b]$. Применяя предыдущий пункт к $P \cup Q$, получаем, что достаточно доказать утверждение для $P = Q$ и первообразных $F_1, F_2, \dots F_n$ на шарах $B_1, \dots B_n$ и $\tilde{F}_1, \dots \tilde{F}_n$ на шарах $\tilde{B}_1, \dots \tilde{B}_n$. Т.к. $B_i \cap \tilde{B}_i \neq \varnothing$ — область, то $\tilde{F}_i - F_i = const$. Это доказывает корректность определения. □

Определение 6.8. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ — пути с общими концами. Пути γ_1, γ_2 называются гомотопными, если $\exists H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ — непрерывное (в таком случае H называется гомотопией), т.е.

$$H(t, 0) = \gamma_1(t), H(t, 1) = \gamma_2(t), H(a, s) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), H(b, s) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$$

Замечание. $\gamma_s(t) = H(t, s)$ — семейство путей, непрерывно зависящих от t.

Пример. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — пути с общими концами. Тогда γ_1, γ_2 гомотопны.

Доказательство. Действительно, при $H(t, s) = (1 - s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$ условие гомотопии выполняется. □

Теорема 6.3. *Пусть ω локально точна в области U. Тогда если γ_1, γ_2 гомотопны, то* $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

Доказательство. Пусть $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ — гомотопия для γ_1, γ_2. По лемме Лебега, $\exists \{t_0, \dots t_m\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\{s_0, \dots s_k\}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, такие что $\forall R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j] : H(R_{ij} \subset B_{ij})$ — шар, где ω точна. Для любого $j \in \{0, \dots k\}$ положим $\gamma^{(j)}(t) = H(t, s_j)$. Достаточно показать, что $\int_{\gamma^{(j)}} \omega = \int_{\gamma^{(j-1)}} \omega \forall j \in \{1, \dots k\}$. Зафиксируем $j \in \{1, \dots k\}$. Пусть F_i — произвольная первообразная для ω в B_{ij} $(i = 1, \dots m)$. Положим $x_i = \gamma^{(j-1)}(t_i)$. Тогда

$$\int_{\gamma^{(j)}} \omega - \int_{\gamma^{(j-1)}} \omega = \sum_{i=1}^m ((F_i(y_i) - F_i(y_{i-1})) - (F_i(x_i) - F_i(x_{i-1}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}((F_i(y_i) - F_i(x_i)) - (F_i(y_{i-1}) - F_i(x_{i-1}))) = (*)$$

Т.к. F_i, F_{i-1} — первообразные ω на пересечении $B_{(i-1)j} \cap B_{ij}$ — что является областью, то $F_i - F_{i-1} = const$, а значит:

$$F_i(y_{i-1}) - F_i(x_{i-1}) = F_{i-1}(y_{i-1}) - F_{i-1}(x_{i-1}), i > 1$$

Тогда сумма $(*)$ телескопическая. Тогда:

$$\int_{\gamma^{(j)}} \omega - \int_{\gamma^{(j-1)}} \omega = (F_1(y_1) - F_1(x_1)) - (F_1(y_0) - F_1(x_0)) + (F_m(y_m) - F_m(x_m)) - (F_1(y_1) - F_1(x_1)) =$$

$$= (F_m(y_m) - F_m(x_m)) - (F_1(y_0) - F_1(x_0)) = 0$$

Последне верно в силу того, что концы путей совпадают □

Определение 6.9. Область $U \subset \mathbb{R}^n$ называется односвязной, если каждый замкнутый путь в U гомотопен точке (тождественному пути).

Следствие. В односвязной области всякая локально точная форма точна.

6.3 Внешние формы

Пусть V — вещественное линейное пространство, пусть $m = \dim V, k \in N$.

Напоминание. S_k — множество перестановок (биекций в себя) множеста $\{1, 2, \dots k\}$. Четность перестановки $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$, $\nu(\sigma) =$ количество инверсий в σ, т.е. количество таких пар $i < j$, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Определение 6.10. Полилинейная функция $\omega : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$ называется кососимметричной (внешней) k-формой, если

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(v_1, \dots v_k)$$

Определение 6.11. Линейное пространство всех кососимметрических k-форм будем обозначать $A_k(V)$. По определению: $A_0(V) = \mathbb{R}$, а если $\omega \in A_k(V)$, то k называется степенью ω.

Задача. *Доказать, что следующие утверждения эквивалентны*

1. ω — *кососимметрическая k-форма.*
2. $\omega(v_1, \dots w, \dots w, \dots v_k) = 0$
3. $\omega(v_1, \dots v_k) = 0$ *для любых линейно зависимых* $v_1, \dots v_k$

Пример. $A_1(V) = V^*$

Пример. $\Omega(v_1, \dots v_m) = \det A$ — m-форма

Пример. Пусть $A^T = -A$, тогда $\omega(\xi, \eta) = (\xi, A\eta)$ — 2-форма в $\mathbb{R}^n$

Определение 6.12. Пусть $e^1, \dots e^m$ — базис сопряженного пространста. Тогда $\forall I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ — перестановки, положим $e^I(v_1, \dots v_k) = \det \begin{pmatrix} e^{i_1}(v_1) & \dots & e^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i_k}(v_1) & \dots & e^{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$.

Тогда $e^I \in A_k(V)$

Положим $\mathbb{I}_k = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} : i \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m \right\}$.

Теорема 6.4. *Пусть* $(e^1, \dots e^m)$ *— базис в* V^**, двойственный к* $e_1, \dots e_m$*. Тогда* $E_k = \{e^I, I \in I_k\}$ *образуют базис в* $A_k(V)$*.*

Доказательство. Отметим, что любую перестановку $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ можно упорядочить по возрастанию ровно одним способом и получить перестановку $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}, i_1 < \dots < i_k \Rightarrow i \in \mathbb{I}$. Тогда $e^I = \pm e^J \Leftrightarrow \varepsilon(J) = \pm\varepsilon(I)$. Для $f \in A_k(V)$ имеем $f = \sum_{J \in S_k} f(e_{j_1}, \dots e_{j_k}) e^J$. По замечению выше, заключаем, что $A_k(V)$ есть линейная оболочка E_k. Докажем линейную независимость этой системы. Пусть $\sum_{I \in \mathbb{I}_k} c_I e^I = 0$. Применим эту форму к набору $e_J = (e_{j_1}, \dots e_{j_k}), J \in \mathbb{I}_k$. Имеем:

$$e^I(e_J) = \begin{cases} 0, I \neq J \\ 1, I = J \end{cases}$$

Тогда $c_J = 0$. Это доказывает линейную независимость E_k. $\square$

Следствие. $\dim A_k(V) = C_m^k$.

Следствие. При $k > m$, имеем $A_k(V) = \{0\}$.

Определение 6.13. Пусть $k, l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $S_{k,l} = \{\sigma \in S_{k+l} : \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)\} \subset S_{k+l}$. Элемент $\sigma \in S_{k,l}$ называется (k,l)-перетасовкой.

Определение 6.14. Пусть $\omega \in A_k(V), \tau \in A_l(V)$, тогда внешним произведением ω, τ называется функция, определяемая $\omega \wedge \tau(v_1, \dots v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}) \cdot \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots v_{\sigma(k+l)})$

Замечание. Введем обозначение $h = \omega \otimes \tau, h(v_1, \dots v_{k+l}) = \omega(v_1, \dots v_k)\tau(v_{k.+1}, \dots v_{k+l}), \sigma h = h(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)})$. Тогда $\omega \wedge \tau = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma) \cdot \sigma(\omega \otimes \tau)$.

Замечание. Покажем, что $\omega \wedge \tau \in A_{k+l}(V)$.

Доказательство. Полилинейность очевидна. Покажем кососимметричность. Для этого достаточно установить, что $\omega \wedge \tau(v_1, \dots v_{k+l}) = 0$ если в наборе $v_1, \dots v_{k+l}$ выполнено $v_r = v_{r+1}$. Пусть $A_1 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r), j = \sigma^{-1}(r+1) \leqslant k\} \Rightarrow h_i = 0$, т.к. $\omega(v_1, \dots v_k) = 0$. Аналогично, $A_2 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r), j = \sigma^{-1}(r+1) > k\} \Rightarrow h_i = 0$, т.к. $\tau(v_{k+1}, \dots v_{k+l}) = 0$.

Теперь рассмотрим $A_3 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r) \leqslant k, j = \sigma^{-1}(r+1) \geqslant k+1\}, A_4 = \{\sigma \in S_{k,l} : i = \sigma^{-1}(r) \geqslant k+1, j = \sigma^{-1}(r+1) \leqslant k\}$. Рассмотрим $t_r = (r\ r+1)$ — транспозиция. Имеем $t_r(A_4) = A_3, t_r(A_3) = A_4$. Поэтому

$$\varepsilon(\sigma)(\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l}) + \varepsilon(t_r\sigma)(t_r\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l}) =$$

$$= \varepsilon(\sigma)(\sigma h)((\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l}) - (\sigma h)(v_1, \dots v_{k+l})) = 0$$

□

Пример. Пусть $\alpha, \beta \in V^*$ рассмотрим $\alpha \wedge \beta(u, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)$.

Лемма 6.4. *Внешнее произведение удовлетворяет следующим свойствам*

1. $w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) = (w_1 \wedge w_2) \wedge w_3$
2. $w_1 \wedge (w_2 + w_3) = w_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge w_3$.
3. $\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg \omega \deg \tau} \tau \wedge \omega$.

Доказательство.

1. Пусть $k_i = \deg \omega_i, k = k_1 + k_2 + k_3, S_{k_1,k_2,k_3} = \left\{ \sigma \in S : \begin{array}{c} \sigma(1) < \dots < \sigma(k_1) \\ \sigma(k_1+1) < \dots < \sigma(k_1+k_2) \\ \sigma(k_1+k_2+1) < \dots < \sigma(k_1+k_2+k_3) \end{array} \right\}$. Положим $\omega = \sum_{\sigma \in S_{k_1,k_2,k_3}} \varepsilon(\sigma)\sigma(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3)$. Т.к. $\otimes$ ассоциативно, то $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = \omega = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$.
2. Непосредственно следует из определения
3. Рассмотрим биекцию $S_{k,l} \to S_{l,k}, \sigma \mapsto \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(k+i), i = 1, \dots l \\ \sigma(i-l), i = l+1, \dots k+l \end{cases}$. В таком случае, $\varepsilon(\tilde{\sigma}) = (-1)^{kl}\varepsilon\sigma$. Тогда:
$$\omega \wedge \tau(v_1, \dots v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma k})\tau(v_{\sigma(k+1)}, \dots v_{\sigma k+l}) =$$
$$(-1)^{kl} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{k,l}} \varepsilon(\tilde{\sigma})\omega(v_{\tilde{\sigma}(l+1)}, \dots v_{\tilde{\sigma} k+l})\tau(v_{\tilde{\sigma}(1)}, \dots v_{\tilde{\sigma} l}) = (-1)^{kl}\tau \wedge \omega$$

□

Определение 6.15. Пусть $\Phi : V \to W$ — линейное отображение. Для $\omega \in A_k(W)$ можно рассмотреь $\Phi^*\omega \in A_k(V)$ по правилу

$$\Phi^*\omega(v_1, \dots v_k) = \omega(\Phi v_1, \dots \Phi v_k)$$

Данная операция называется pullback.

Утверждение 6.5.

1. *Отображение* $\Phi^* : A_k(W) \to A_k(V)$ *линейно и* $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau$.
2. *Для* $\Psi : W \to Z$ *— линейного отображения, верно, что* $(\Psi\Phi)^* = \Phi^*\Psi^*$

Доказательство.

1. Очевидно

2.
$$(\Psi\Phi)^*\omega(v_1,\dots v_k) = \omega(\Psi\Phi v_1,\dots \Psi\Phi v_k) = \omega(\Psi(\Phi v_1),\dots \Psi(\Phi v_k)) =$$
$$= \Psi^*\omega(\Phi v_1,\dots \Phi v_k) = \Phi^*\Psi^*\omega(v_1,\dots v_k)$$

□

Пример (Правило детерминанта)**.** Пусть $\alpha^1,\dots \alpha^k \in V^*$, тогда

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k(v_1,\dots v_k) = \sum_{\sigma\in S_k} \varepsilon(\sigma)\alpha^1(v_{\sigma(1)})\dots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) = \det(\alpha^i(v_j))$$

6.4 Дифференциальные формы на открытых подмножествах $\mathbb{R}^m$

Будем отождествлять $T_p\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. Более формально будет записать $(p,\mathbb{R}^m)$, т.е. для каждой точки у нас будет свое касательное пространство

Определение 6.16. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открыто, $k \in \mathbb{N}$. Дифференциальной k-формой на U называется функция $U \ni p \mapsto w_p \in A_k(\mathbb{R}^n)$.

Дифференциалы координатных функций $dx_1,\dots dx_n$ образуют базис в $(\mathbb{R}^m)^*$ (двойственнен к стандартному), тогда $\{dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k} : 1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant m\}$ образуют базис в $A_k(\mathbb{R}^m)$. Поэтому имеет место представление

$$\omega_p = \sum_{i_1<\dots<i_k} f_{i_1,\dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_1} = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} f_I dx^I$$

Функции $f_I : U \to \mathbb{R}$ называется координатным представлением формы ω. Пусть $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Говорят, что дифференциальная форма ω класса $C^r(U)$, если все координатные функции $\in C^r(U)$.

В дальнейшем (если не указано иное) будем предполагать, что все рассматриваемые нами формы $\in C^\infty$, множество k-форм класса C^∞ обозначается $\Omega^k(U)$. Напомним, что $A_0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$, поэтому $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$

1. Пусть $\omega,\tau \in \Omega^k(U), f \in C^\infty(U)$, тогда $f\omega \in \Omega^k(U), p \mapsto f(p)\omega_p, \omega+\tau \in \Omega^k(U), p \mapsto \omega_p + \tau_p$.
2. Пусть $\omega \in \Omega^k(U), \tau \in \Omega^l(U)$, положим $\omega \wedge \tau \in \Omega^{k+l}(U), p \mapsto \omega_p \wedge \tau_p$.

Таким образом, $\Omega^k(U)$ является линейным пространством

Пример. Пусть $\omega = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} f_I dx^I, \tau = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} g_I dx^I$. Тогда:

$$\omega \wedge \tau = \sum_{I,J} f_I g_J dx^I \wedge dx^J$$

Пусть $f : U \to V$, U открыто в $\mathbb{R}^m$, V открыто в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty$. Тогда для $p \in U : df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, поэтмоу если $\omega_p \in A_k(\mathbb{R}^n)$, то $(df_p)^* : A_k(\mathbb{R}^n) \to A_k(\mathbb{R}^m)$ и $(df_p)^*\omega_p = \omega_{f(p)}(df_p(v_1),\dots df_p(v_k))$.

Определение 6.17. Отображение $p \mapsto (df_p^*\omega)_p$ определяем дифференциальную форму на U, которая обозначается $f^*\omega$ и называется переносом формы ω.

В частности, при $k = 0$, т.е. для $g \in C^\infty(V)$, имеем следующее:

$$f^* g = g \circ f$$

Утверждение 6.6. *1. Перенос линеен и $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*\omega \wedge f^*\tau$.*

2. $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^m} \to \underbrace{V}_{\subset \mathbb{R}^n}, g : V \to \underbrace{W}_{\subset \mathbb{R}^k}$ — класса $C^\infty \Rightarrow (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Доказательство.

1. Очевидно
2. Композиция $df_p^* : A_k(\mathbb{R}^b) \to A_k(\mathbb{R}^m), dg_q^* : A_k(\mathbb{R}^k) \to A_k(\mathbb{R}^n)$. Так как $dg_q \circ df_p = d(g \circ f)_p$, то:
$$f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega \forall \omega in \Omega^k(W)$$

□

Получим координатную запись f^*.

Лемма 6.5. *(Перенос как замена переменных) Пусть $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^m} \to \underbrace{V}_{\subset \mathbb{R}^n}$ класса $C^\infty, f = (f_1, \dots f_n)$. Если $\omega \in \Omega^k(V), \omega = \sum_{(i_1,\dots i_k)\in \mathbb{I}_k} a_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, то $f^*\omega = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} a_I \circ f df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$*

Доказательство. По определению, $f^* a_I = a_I \circ f$. $f(dx_i)(v) = dx_i(df(v)) = d(x_i \circ f)(v) = df_i(v)$. Поэтому, $f^*\omega = \sum_{I\in\mathbb{I}_k} f^* a_I (f^* dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^* dx_{i_k}) = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} a_I \circ f df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$. □

Следствие. $f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ — то есть сохраняет гладкость.

Доказательство. $df_i \in \Omega^1(U), a_I \circ f \in C^\infty(U) \Rightarrow f^*\omega \in \Omega^k(U)$ □

Пример. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открыто и задана m-форма, $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ и пусть $g : W \to U$ — диффеоморфизм, $x = g(t)$, тогда

$$dg_1 \wedge \dots \wedge dg_m = \sum_{\sigma \in S_m} \frac{\partial g_1}{\partial t_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial g_m}{\partial t_{\sigma(m)}} dt_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dt_{\sigma(m)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \frac{\partial g_1}{\partial t_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial g_m}{\partial t_{\sigma(m)}} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m = J_g dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m$$

В итоге:

$$g^*\omega = f \circ g dg_1 \wedge \dots \wedge dg_m = f \circ g \cdot J_g dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m$$

Определение 6.18. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ открыто и $\omega = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} f_I dx^I \in \Omega^k(U)$. Внешним дифференциалом ω называется:

$$d\omega = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} df_I \wedge dx^I \in \Omega^{k+1}(U)$$

Пример. Пусть $\omega = Pdx + Qdy$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда:

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Задача. *Покажите, что* $d\omega_p(v_1, \dots v_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega_p + tv_j(v_1, \dots v_{j-1}, v_{j+1}, \dots v_{k+1})$

Пололжим $\Omega(U) = \bigcup_{k=0}^n \Omega^k(U)$. Тогда внешний дифференциал порождает "послойное" отображение $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$.

Лемма 6.6. *Для всех форм* $\omega, \nu \in \Omega^k(U), \tau \in \Omega^l(U), c \in \mathbb{R}$ *выполнено:*

1. ***Линейность:*** $d(\omega + \nu) = d\omega + d\nu, d(c\omega) = cd\omega$
2. ***Правило Лейбница:*** $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k\omega \wedge d\tau$
3. $d(d\omega) = 0$.

Кроме того, пусть есть $D : \Omega(U) \to \Omega(U)$ *— линейный оператор, удовлетворяющий предыдущим свойствам и* $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ *верно:* $Df = df$. *Тогда* $D = d$

Доказательство.

1. **Линейность:** верна по опрелелению
2. **Правило Лейбница:** по линейности, достаточно доказать только для мономов вида $\omega = fdx^I, \tau = gx^J, I \in \mathbb{I}_k, J \in \mathbb{I}_l,\ f, g \in C^\infty(U)$. По определению внешнего произведения:

$$d(\omega \wedge \tau) = d(fgd^I \wedge d^J) = (dfg + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J =$$
$$= (df \wedge dx^I) \wedge (gdx^J) + (-1)^k(fdx^I) \wedge (dg \wedge dx^J) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k\omega \wedge d\tau$$

3. Для $f \in C^\infty(U)$ имеем:

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_i\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx_i \wedge dx_j$$

Также из определения $ddx^I = 0 \forall I$, тогда:

$$d(d(fdx^I)) = d(df \wedge dx^I) = \underbrace{d(df)}_{0} \wedge dx^I - df \wedge \underbrace{d(dx^I)}_{0} = 0$$

Таким образом, для 0-форм и для мономов утверждение верно. Для всех остальных функций утерждение следует из линейности

Пусть теперь $D : \Omega(U) \to \Omega(U)$ удовлетворяет условиям 1-3. Достаточно показать равенство $D = d$ на мономах. Заметим, что $Ddx^i = DDx^i = 0 \Rightarrow$ по свойству 2, $Ddx^I = 0 \forall I \in \mathbb{I}_k$. Следовательно,

$$D(fdx^I) = df \wedge dx^I + fDdx^I = df \wedge dx^I = d(fdx^I)$$

□

Теорема 6.5. *Пусть $f : U \to V$ — гладкое отображение, U — открытое в $\mathbb{R}^n$, V — открытое в $\mathbb{R}^m$. Тогда: $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ для всех $\omega \in \Omega^k(V)$.*

Доказательство. Для $g \in C^\infty(U)$ имеем:

$$d(f^*g) = d(g \circ f) = dg \circ df = f^*(dg)$$

При этом для $I \in \mathbb{I}_k$ по правилу Лейбница:

$$d(f^*dy^I) = d(df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k})$$

Следовательно,

$$d(f^*gdy^I) = d(f^*g \wedge dy^I) = d(f^*g \wedge f^*dy^I) = d(f^*g) \wedge f^*dy^I + f^*g \wedge d(f^*dy^I) =$$

$$= f^*(dg) \wedge f^*(dy^I) = f^*(dg \wedge dy^I)$$

Равенство доказано для мономов вида $\omega = gdy^I$ □

7 Дифференциальные формы на многообразиях

Напомним, что под гладкостью мы понимаем принадлежность классу C^∞

Определение 7.1. Пусть M — гладоке m-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. Дифференциальной формой ω на M называется функция $M \ni p \mapsto \omega_p \in A_k(T_pM)$.

Определение 7.2. Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий M, N, ω — k-форма на N. Тогда $f^*\omega$ называется такая k-форма на N, что

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots df_p(v_k))$$

То есть $f^*\omega_p = df_p^*\omega_{f(p)}$.

Поскольку операция переноса поточечная, для нее выполняется линейность, сохранение внешнего произведения и следующего свойства:

Если $g : N \to P$ — гладкое, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Пример. Пусть $i_M : M \to \mathbb{R}^n$, такое, что $i_M(x) = x$. Если на U — открытом в $\mathbb{R}^n, U \supset M$ задана k-форма ν, то ее можно перенести с U на M: $i_M^*\nu$ — k-форма на M. Такая форма называется сужением формы ν на M и обозначается $\nu|_M = i_M^*\nu$

Определить гладкость формы в точке можно как минимум двумя способами:

Определение 7.3. Форма ω называется гладкой в $p \in M$, если существует параметризация $\varphi : V \to U$ окрестности p в M, что $\varphi^*\omega$ гладкая в V.

Определение 7.4. Форма ω называется гладкой в $p \in M$, если существует $W \ni p$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ и форма $\tilde{\omega} \in \Omega(W)$, что $\omega = \tilde{\omega}|_M$ на $W \cap M$

Лемма 7.1. *Два предыдущих определения эквивалентны.*

Доказательство. Пусть выбрана параметризация $\varphi : V \to W \cap M$, где W открыто в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\varphi^*\omega \in \Omega(V)$. φ^{-1} определена на W, т.е. существует такая глудкая функция $F : W \to V$, такая, что $F|_{W\cap M} = \varphi^{-1}$. Положим $\tilde{\omega} = F^*(\varphi^*\omega)$. Тогда $\tilde{\omega} \in \Omega(W)$ и $F \circ i_M = \varphi^{-1}$ на $W \cap M$, то $i_M^* \circ F^* \circ \varphi^*$ — тождественное, а значит $i_M^*\tilde{\omega} = \omega$ на $W \cap M$.

Докажем в другую сторону. Пусть $\tilde{\omega}|_M = \omega$ на $W \cap M$. Уменьшая W если надо, можно считать, что существует параметризация $\varphi : V \to W \cap M$. Тогда $i_M \circ \varphi : V \to W$ и $\varphi^*\omega = (i_M \circ \varphi)^*\omega \in \Omega(V)$. □

Замечание. Из доказательства эквивалентности определений вытекает, что квантор существования можно заменить на квантор всеобщности.

Определение 7.5. Форма называется гладкой на M, если она является гдадкой в каждой точке.

Положим $\Omega(M) = \bigcup_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$

Лемма 7.2. *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отобраэение многообразий. Тогда $f^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega^k(N)$. Для $p \in M$ и $q = f(p) \in N$ выберем параметризации $\varphi : U_0 \to U, \psi : V_0 \to V - p \in U \subset M, q \in V \subset N$. Можно выбрать окрестности так, что $f(U) \subset V$. Тогда $g = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ — координатное представление и $\psi \circ g = f \circ \varphi$. Следовательно, $g^*(\psi^*\omega) = \varphi^*(f^*\omega)$. Поскольку $g \in C^\infty(U_0)$ и форма $\psi^*\omega$ гладкая, то в левой части стоит гладкая форма. Но тогда и форма, стоящая в правой части, является гладкой. □

Определение 7.6. Пусть $\omega \in \Omega(M), \varphi$ — параметризация окрестности U в M. Определим $d\omega = (\varphi^{-1})^* d(\varphi^*\omega)$ на U.

Существование d на всем M следует из того, что локальное определение не зависит от параметризации. Пусть $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ — другая параметризация M, такая, что $O = \varphi(V) \cap \psi(W)$ непусто. Тогда $g : \varphi^{-1}(O) \cap \psi^{-1}(O), g = \psi^{-1} \circ \varphi$ — диффеоморфизм и $\varphi = \psi \circ g$. Следовательно,

$$d(\varphi^*\omega) = d(g^*\psi^*\omega^*) = \underbrace{g^*d}_{\text{на } \varphi^{-1}(O)} (\psi^*\omega) = \varphi^* \circ (\psi^{-1})^* d(\psi^*\omega)$$

Тогда:

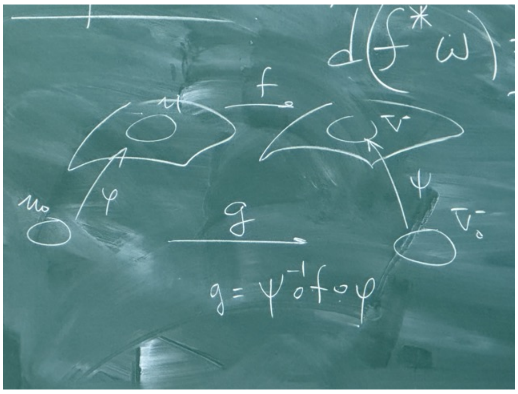
$$(\varphi^{-1})^* d(\varphi^*\omega) = \underbrace{(\psi^{-1})^* d(\psi^*\omega)}_{\text{на } O}$$

Кроме того, если $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, то внешний дифференциал на многообразии $df = (\varphi^{-1})^* d(f \circ \varphi) = d(f \circ \varphi)(d\varphi^{-1})$ — дифференциал функции f.

Замечание. Возможность продолжения d на M также следует из предыдущего утверждения о единственности дифференциала формы

Теорема 7.1. *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение, тогда: $d(f^*\omega) = f^*d\omega$ для всех $\omega \in \Omega(N)$*

Доказательство. Рассмотрим следующую картинку:



Т.к. $\psi \circ g = f \circ \varphi$, то по определению d свойствам переноса:

$$\varphi^* d(f^*\omega) = d(\varphi^* f^*\omega) = d((f \circ \varphi)^*\omega) = d((\psi \circ g)^*\omega) =$$

$$= d(g^*(\psi^*\omega)) = g^*(d(\psi^*\omega)) = g^*\psi^* d\omega = \varphi^* f^* d\omega$$

Тогда $d(f^*\omega) = f^* d\omega$. □

Следствие. Пусть в $\mathbb{R}^n$ окрестность $W \supset M$ и $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$, т.ч. $i_M^*\tilde{\omega} = \omega$. Тогда $d\omega = i_M^* d\tilde{\omega}$.

8 Разбиение единицы

Вспомним функцию:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, t > 0 \\ 0, t \leqslant 0 \end{cases}$$

Рассмотрим

$$h(t) = \frac{f(R-t)}{f(R-t) + f(t-r)}$$

Рассмотрим $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\beta(x) = h(|x - x_0|^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

β — функция "шапочка".

Определение 8.1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда носителем $f = \operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

Замечание. $\operatorname{supp} \beta = \overline{B}_R(x_0)$.

Задача (Лемма об исчерпывании компактами)**.** *Для любого открытого множества U существует $\{C_i\}_{i=0}^\infty$, где C_i — компакты, что $C_i \subset C_{i+1}$, $\bigcup_{i=1}^\infty C_i = U$*

Лемма 8.1. *Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Тогда существует $\{B_i\}_{i=1}^\infty$, таких, что:*

1. $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = U$
2. $\forall i \exists \alpha : (\overline{B_i} \subset U_\alpha)$
3. $\forall p \in \mathbb{R}^n \exists U_p \subset U$ *— открытое,* $\exists N_p : \overline{B_i} \cap U_p = \varnothing \forall i > N_p$.

Доказательство. Возьмем C_i из леммы об исчерпывании компактами. Положим $K_i = C_i \setminus int\ C_{i-1}, C_0 = \varnothing$. Тогда K_i — компакт. $\forall x \in K_i$ выберем шар B_x, такой, что:

1. $B_x \ni x$
2. $\exists \alpha : \overline{B_x} \subset U_\alpha$
3. $B_x \subset int\ C_{i+1} \setminus C_{i-2}$.

$x \in C_{i+1}, x \notin int\ C_{i-1} \Rightarrow x \notin C_{i-2}$. Т.к. K_i — компакт, то существует конечное подпокрытие, т.е. $K_i \subset B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_{N_i}}$. Рассмотрим $\{B_{i,r} : i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant r \leqslant N\} = \{B_i\}_{i=1}^\infty$ □

Пусть в условиях предыдущей леммы $R_i =$ радиус B_i. Рассмотрим функцию "шапочка" β_i по числам $r = \frac{R_i}{2}, R = R_i$. Тогда:

1. $\beta_i \in C^\infty(U), \beta_i \geqslant 0$
2. $\forall p \in U \exists N_p \exists U_p$ — окрестность p в U, что $\forall i > N_p(U_p \cap \operatorname{supp}(\beta_i) = \varnothing)$
3. $\forall i \exists \alpha : \operatorname{supp}(\beta_i) \subset U_\alpha$
4. $\sum_{i=1}^\infty \beta_i$ — гладкая функция, т.к. в каждой точке данный ряд превращается в конечную сумму.

Т.к. $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ образуют покрытие U, то $\sum_{i=1}^\infty \beta_i > 0$. Положим:

$$f_i = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^\infty \beta_j}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^\infty f_i = 1$$

Теорема 8.1. *Пусть M — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие M. Тогда существует $\rho_i \in C^\infty(M), i \in \mathbb{N}$, такое, что*

1. $\rho_i \geqslant 0 \forall i$
2. $\forall C \subset M$ — *компакта* $\exists N \forall i > N(\operatorname{supp}(\rho_i) \cap C = \varnothing)$
3. $\sum_{i=1}^\infty \rho_i = 1$ *на* M
4. $\forall i \geqslant 1 \exists \alpha \in I : (\operatorname{supp}(\rho_i) \subset U_\alpha)$

Доказательство. Пусть $p \in M$. Тогда $\exists \alpha : p \in U_\alpha$. Выберем $O_p \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, содержащее p так, что $\overline{O_p \cap M} \in U_\alpha$. Определим $O = \bigcup_{p \in M} O_p$ и рассмотрим $f_i \in C^\infty(O)$ (как мы определяли выше). Положим $\rho_i = f_i|_M$. Из условия $\overline{O_p \cap M} \subset U_\alpha$ следует, что $\operatorname{supp} \rho_i \subset U_\alpha$. Пусть $C \subset M$ — компакт. Тогда C покрывается конечным числом U_{p_i}, таких, что $U_{p_i} \cap \operatorname{supp}(\rho_i) = \varnothing \forall i > N_{p_i}$. Положим $N = \max_i N_{p_i}$ — оно существует, т.к. существует лишь конечное число N_{p_i}. □

Следствие. Пусть $K \subset M$ — компакт, $\{U_j\}_{j=1}^N$ — конечное подпокрытие K в M. Тогда существует $\varphi_j \in C^\infty(M), j = 1, \dots N$, такие, что:

1. $\varphi_j \geqslant 0$
2. $\forall j(\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j)$

3. $\sum_{j=1}^{N}\varphi_j = 1$ на K.

Доказательство. Применим теорему к набору $\{U_j\}_{j=1}^{N}$. Получим набор функций $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$. По свойству 2, только конечное множество носителей ρ_i не пересекается с K. Рассмотрим $A_1 = \{i \in \mathbb{N} : \operatorname{supp}\rho_i \subset U_1\}$. Положим $\varphi_1 = \sum_{i\in A_1}\rho_i$ — гладкое как конечная сумма гладких функций. Заметим, что $\operatorname{supp}\varphi_1 \subset \bigcup_{i\in A_1}\operatorname{supp}\rho_i \subset U_1$. Положим $A_2 = \{i \in \mathbb{N} : \operatorname{supp}\rho_i \subset U_2\}\setminus A_1$. Тогда $\varphi_2 = sum_{i\in A_2}\rho_i$ и так далее по индукции. Тогда $\sum\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i = 1$ на K □

Задача. *Пусть форма ω — гладкая k-форма на M. Покажите, что существует $W \supset M$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ и $\tilde\omega \in \Omega^k(W)$, т.ч. $\tilde\omega|_M = \omega$*

9 Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях

9.1 Регулярные области

Рассмотрим полупространство $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots x_m) : x_1 < 0\}$. Множество $\mathbb{H}^n$ открыто в $\mathbb{R}^n$, причем $\partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots x_m) : x_1 = 0\}$

Определение 9.1. Пусть M — гладкое m-мерное многообразие, $N \subset M$ открыто. Множество N называется регулярной областью в M, если $\forall p \in \partial M \exists \varphi : V \to U_{\ni p}^{\subset M}$ — параметризация в M, такая, что $\varphi(V \cap \mathbb{H}^m) = U \cap N$.

Замечание. По критерию непрерывности, φ переводит внутренние (внешние) точки $V \cap \mathbb{H}^m$ во внутренние (внешние) точки $U \cap M$. Следовательно, $\varphi(V \cap \partial\mathbb{H}^m) = U \cap \partial N$

Лемма 9.1. *Пусть M — гладкое m-мерное многообразие, N — регулярная область в M. Тогда ∂N — гладкое $m-1$ мерным многообразием.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $L : \mathbb{R}^{m-1} \to \partial\mathbb{H}^m$ по правилу: $L(x') = (0, x')$. Рассмотрим $V_0 \subset \mathbb{R}^{m-1}$, такое, что $\{0\} \times V_0 = V \cap \partial\mathbb{H}^m$. Положим $U_0 = U \cap \partial N$. Тогда $\varphi_0 : V_0 \to U_0, \varphi_0 = \varphi \circ L$. Проверим, что φ_0 — параметризация. Действительно:

1. φ_0 гдадкая как композиция гладких функций
2. $D\varphi_0(x')$ получается из $D\varphi(0, x')$ выкидыванием первого столбца.
3. φ_0^{-1} непрерывно, как сужение $\varphi^{-1}|_{U_0}$

□

Многообразие ∂N называется краем N

Теорема 9.1. *Пусть M — гладкое m-мерное многообразие и $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на M, такая, что $f^{-1}(0) \neq \varnothing$ и $\forall p \in f^{-1}(0) : df_p \neq 0$ (т.е 0 — регулярное значение f). Тогда $B = f^{-1}(-\infty, 0) = \{p \in M : f(p) < 0\}$ является регулярной областью в M с краем $\partial B = f^{-1}(0)$*

Доказательство. B открыто в M по критерию непрерывности. Пусть $p \in \partial B$. Тогда $p \in f^{-1}(0)$. Выберем произвольную параметризацию $\varphi : V \to U_{\ni p}^{\subset M}$ и рассмотрим $g = f \circ \varphi$. Если $\varphi(a) = p$, то $dg_a = df_p \circ d\varphi_a \neq 0$. Заменяя g на композицию с перестановкой, можно считать, что $\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Рассмотрим на V функцию $F(x) = (g(x), x_2, \dots x_m)$. Тогда:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_m}(a) \\ 0 & & & \\ \vdots & & E_{m-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

А значит, $\det DF(a) \neq 0$. Тогда по теореме об обратной функции $\exists W, V_0$ — открытые в $\mathbb{R}^m, a \in V_0 \subset V : F : V_0 \to W$ — диффеоморфизм. Положим $U_0 = \varphi(V_0), \psi = \varphi \circ F^{-1}$ — параметризация. Тогда на W имеем:

$$f \circ \psi(x) = f \circ \varphi \circ F^{-1}(x) = g(F^{-1}(x)) = x_1$$

Следовательно, $\psi(W \cap \mathbb{H}^m) = \psi(\{x \in W : x_1 < 0\}) = B \cap U_0$. Кроме того, если $p \in f^{-1}(0)$, то $x_1 = 0$, откуда $p \in \partial B$. □

Следствие. $B^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$ — регулярная область с краем $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$

Доказательство. Рассмотрим $f(x) = |x|^2 - 1$ — гладкая и $rk\ df_p = 1 \forall p \in S^{m-1} = f^{-1}(0)$. Тогда по теореме B^m — регулярная область с краем S^{m-1}. □

9.2 Ориентируемые многообразия

Определение 9.2. Пусть M — гладкое многообразие. Семейство параметризаций $\{\varphi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha, \alpha \in I\}$, образы которых покрывают M, называется атласом.

Определение 9.3. Атлас на M называется ориентирующим, если якобианы всех функций перехода положительны.

Определение 9.4. Гладкое многообразие, на котором задан ориентирующий атлас называется ориентированным

Определение 9.5. Если на гладком многообразии существует ориентирующий атлас, то оно называется ориентируемым

Определение 9.6. Атласы $\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}_\in$ эквивалентны, если $\mathcal{A}_\infty \cup \mathcal{A}_\in$ — ориентирующий атлас

Определение 9.7. Ориентация многообразия — класс эквивалентности ориентирующих атласов

Замечание. Любое непустое открытое множество $\mathbb{R}^n$ ориентируемо.

Задача. $M \subset \mathbb{R}^3$ *— гладкое двумерное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем существует непрерывное поле (вектор-функция) единичных нормалей*

Замечание. Существуют неориентируемые многообразия, например — лист Мёбиуса

Замечание. Пусть на M при помощи ориентирующего атласа $\mathcal{A}$ задана фиксированная ориентация и пусть φ — какая-то параметризация окрестности M. Будем говорить, что φ не соответствует ориентации, если $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ — не ориентирующий. Рассмотрим $\varphi \circ A$, где $A(x_1, \dots x_n) = (x_1, \dots, x_{m-1}, -x_m)$. Тогда $\varphi \circ A$ соответствует ориентации.

Теорема 9.2. *Пусть M гладкое m-мерное ориентируемое многообразие ($m > 1$) и N — регулярная область в M. Тогда ∂N — гладкое $m-1$-мерное ориентируемое многообразие.*

Доказательство. По определению регулярной области, ∂N покрывается образами параметризаций φ с условием $\varphi(V \cap \mathbb{H}) = U \cap N$. Из предыдущего замечания следует, что каждую из таких параметризаций можно считать соответствующей ориентации. Пусть φ, ψ — такие параметризации на M в окрестности точки $p \in \partial N$. Покажем, что если функция перехода между $\varphi \to psi$ имеет положительный Якобиан, то таким же свойством обладает функция перехода между параметризациями φ_0, ψ_0. Как мы определим psi_0, φ_0? Пусть $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi, \Phi = (\Phi_1, \dots \Phi_m), \Phi_0 = \psi_0^{-1} \circ \varphi_0$. Тогда $\Phi_0 = (\Phi_2 \circ L, \dots \Phi_m \circ L)$. Если $\varphi(0, a) = p$, то $\Phi(0, a) = (0, \Phi_0(a))$. Это верно и для достаточно близких к a точек. Следовательно, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}(0, a) = 0, i = 2 \dots m$. Тогда:

$$D\Phi(a, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & D\Phi_0(a) & \\ * & & & \end{pmatrix}$$

Следовательно, $\det D\Phi(a) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, a) \det D\Phi_0(a)$. Т.к. Φ отображает $\mathbb{H}^m$ в себя (т.е. $\Phi_1 < 0$), то $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \lim_{t \to -0} \frac{\Phi(t,a)}{t} \geqslant 0, \neq 0$, т.к. $J_\Phi \neq 0$. Заключаем, что $\det D\Phi(a)$ и $\det D\Phi_0(a)$. ☐

Замечание. Таким образом, заданная ориентация M индуцирует ориентации на N и на крае ∂N. Сначала сужаем ориентации с M на N (как на открытое множество), а потом по предыдущей теореме сузить на край. Тогда говорят, что ориентации N и ∂N согласованны.

Лемма 9.2. *Пусть гладкое m-мерное ориентируемое M в $\mathbb{R}^{m+1}$ задано уравнением, т.е. $M = f^{-1}(0)$, где $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — гладкая, с $rk\ df_p = 1 \forall p \in M \cap U$. Тогда M ориентируемо.*

Доказательство. По теореме, $M = \partial B$, где $B = f^{-1}(-\infty, 0)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^{m+1}$. Оно ориентируемо, и тогда по предыдущей теореме M — тоже. ☐

9.3 Теорема Стокса

Теорема 9.3 (Стокса)**.** *Пусть M — гладкое m-мерное многообразие, N — регулярная область в M. Тогда для любой $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$ выполнено:*

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} i^* \omega$$

Если ориентации $N, \partial N$ согласованы.

Лемма 9.3. *Теорема Стокса верна для $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{H}^m$.*

Доказательство. Пусть $\omega = \sum_{i=1}^m f_i(x)dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m$. Тогда:

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{H}^m} d\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

При $i > 1$ по теореме Фубини:

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{(-\infty,0)\times\mathbb{R}^{m-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i = f(\dots, x_i, \dots)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Это верно, потому что функция f имеет компактный носитель $\Rightarrow$ вне некоторого отрезка $f(\dots, x_i, \dots)$ обнуляется. Следовательно, из суммы остается только слагаемое при $i = 1$.

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_1(0, x_2, \dots x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

С другой стороны, вложение $i_0 : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ имеет вид $i_0(x') = (0, x') \Rightarrow i_0^*(\omega) = f_1(0, x_2, \dots x_m)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$. Значит,

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} i_0^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_1(0, x_2, \dots x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Что совпадает с $\int_{\partial\mathbb{H}^m} i_0^*\omega$, т.к. ориентации для $\partial\mathbb{H}^m$ для стандартной ориентации $\mathbb{H}^m$ соответствует $(x_2, \dots x_m)$ $\square$

Замечание.

$$\int_{\mathbb{R}^m} d\omega = 0$$

Доказательство теоремы Стокса. Для любой точки $p \in \mathrm{supp}(\omega)$ существует параметризация $\varphi : V \to U_p$ с условием:

1. Если $p \in \mathrm{supp}(\omega) \cap \partial N$, то $\varphi(V \cap \mathbb{H}^m) = U_p \cap N$
2. Если $p \in \mathrm{supp}(\omega) \setminus \partial N$, то $U_p \cap \partial N = \varnothing$

Можно считать, что окрестности U_p связны. Из покрытия U_p компакта $\mathrm{supp}(\omega)$ выделим конечное подпокрытие. Получим набор параметризаций $\varphi_i : V_i \to U_i, i = 1, \dots n$, соответствующих ориентации M и покрывающих $\mathrm{supp}(\omega)$. Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ — гладкое разбиение, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^n$. Поскольку $\omega = \sum_{i=1}^n \rho_i\omega$, $d\omega = \sum_{i=1}^n d(\rho_i\omega)$, то в силу линейности интеграла формулу можно доказывать для случая, когда $\mathrm{supp}(\omega)$ покрывается образом одной параметризации. $\varphi : V \to U$. Рассмотрим несколько случаев:

1. $U \cap \partial N \neq \varnothing$. Рассмотрим сужение $\varphi : V_0 \to U_0$, $i_0 : \underbrace{\mathbb{R}^{m-1}}_{\partial\mathbb{H}^m} \to \mathbb{R}^m$, $i : \partial N \to M$, тогда $i \circ \varphi_0 = \varphi \circ i_0$. Следовательно,
$$\int_N d\omega = \int_{V\cap\mathbb{H}^m} \varphi^*(d\omega) = \int_{\mathbb{H}^m} \varphi^*(d\omega) = \int_{\mathbb{H}^m} d(\varphi^*\omega)$$
$$\int_{\partial N} i^*\omega = \int_{V_0} \varphi_0^*(i^*\omega) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \varphi_0^*(i^*\omega) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} i_0^*(\varphi^*\omega) = \int_{\partial\mathbb{H}^m} i_0^*(\varphi^*\omega)$$
Два полученных интеграла равны по предыдущей Лемме

2. Пусть $U \subset int\ N$. Имеем:
$$\int_N d\omega = \int_V \varphi^*(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^m} d(\varphi^*\omega) = 0 = \int_{\partial N} i^*\omega$$
Последнее равенство верно, т.к. $i^*\omega = 0$ на ∂N.

3. $U \subset ext\ N$. Сужение ω на N и $i^*\omega$ нулевые, т.е. формула верна и в этом случае.

$\square$

Следствие. Пусть M — гладкое m-мерное ориентируемое многообразие, $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$. Тогда $\int_M d\omega = 0$.

Пусть $p \in \partial N$, тогда рассмотрим $v \in T_pM$

1. $v \in T_p\partial N$
2. $\varphi(V \cap \mathbb{H}^m) = U \cap N$, $d\varphi(w) = v, w = (w_1, \dots w_m), w_1 > 0$, тогда v называется внешним
3. Если в предыдущем пункте $w_1 < 0$, то v называется внутренним

Утверждение 9.1. *Пусть N — регулярная область в ориентируемом многообразии M. Тогда ориентации ∂N и N согласованы тогда и только тогда, когда $(\partial O)_{p\in\partial N} = [(v_1, \dots v_m)] \Rightarrow O_p = [(n, v_1, \dots v_m)]$.*

Следствие (Формула Грина)**.** Пусть G — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^2$, причем ориентация края согласована со стандартной (индуцированной из $\mathbb{R}^2$) ориентацией G, $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, то:
$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
Согласованность ориентации G и ∂G неформально означает, что "при обходе по краю, область будет слева"

Следствие (Формула Гаусса-Остроградского)**.** Пусть G — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^3$, причем ориентация края согласована со стандартной (индуцированной из $\mathbb{R}^3$) ориентацией G, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, то:
$$\int_{\partial G} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dz = \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdy$$
Согласованность ориентации G и ∂G означает, что ∂G ориентирован внешней нормалью

Следствие (Классическая формула Стокса)**.** Пусть M — гладкое 2-мерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, покрываемое образом параметризации $r : V \to \mathbb{R}^3$. Пусть S — ограниченная регулярная область в M и $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Тогда:

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Согласованность ориентаций G и ∂G означает, что: если $N(p) = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$, $n(p)$ — внешний, то вектор $\tau(p)$ выбирается так, что (n, τ, N) — положительно ориентированная тройка.

Замечание. Мнемоническое правило: записывать следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

9.4 Замкнутые точные дифференциальные формы

Пусть M — гладкое многообразие $\omega \in \Omega^k(M)$.

Определение 9.8. ω называется замкнутой, если $d\omega = 0$

Определение 9.9. ω называется точной, если $\exists \alpha \in \Omega^{k-1}(M) : d\alpha = 0$

Замечание. Из условия $d^2 = 0$ следует, что всякая точная форма замкнута.

Теорема 9.4 (Лемма Пуанкаре)**.** *Если $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 1$ и ω замкнута, то она точна.*

Доказательство. $(t, x_2, \dots x_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Тогда всякая k-форма в $\mathbb{R}^n$ есть сумма мономов вида $f(t, x) = dt \wedge dx^I$ и $g(t, x)dx^J$, где $I \in \mathbb{I}_{k-1}, J \in \mathbb{I}_k$. Определим на $\Omega(\mathbb{R}^n)$ линейный оператор Φ по правилу

$$\Phi(f(t, x)dx \wedge dx^I) = \left(\int_0^t f(s, x)ds\right) dx^I$$

$$\Phi(g(t, x)dx^I) = 0$$

Покажем, что значение Φ на ω удовлетворяет условию

$$d\Phi(\omega) + \Phi(d\omega) = \omega - \pi^*(i^*\omega)$$

Где $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}, \pi(t, x) = x, i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, i(x) = (0, x)$.

1. $\omega = g(t, x)dx^J \Rightarrow \Phi(\omega) = 0 \Rightarrow d\Phi(\omega) = 0$.

$$d\omega = \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^J + \omega_0$$

Тогда

$$\Phi(d\omega) = \Phi\left(\frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^J\right) = \left(\int_0^t \frac{\partial g}{\partial s} ds\right) dx^J = g(t, x)dx^J - g(0, x)dx^J$$

Т.к. $i \circ \pi(t, x) = (0, x)$, то $(i \circ \pi)^*\omega = g(0, x)dx^J$, тогда равенство выполняется.

2. $\omega = f(t,x)dt \wedge dx^I \Rightarrow \Phi(\omega) = \left(\int_0^t f(s,x)ds\right) dx^I$.

$$d\Phi(\omega) = f(t,x)dt \wedge dx^I + \sum_{i=2}^{n} \left(\int \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,x)ds\right) dx_i \wedge dx^I$$

$$d\omega = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)dx_i \wedge dt \wedge dx^I$$

$$\Phi(d\omega) = \sum_{i=2}^{n} \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,x)ds\right) dx_i \wedge dx^I$$

Но тогда:

$$d\Phi(\omega) + \Phi(d\omega) = 0$$

Полученное равенство позволяет доказать утверждение индукцией по n

База: $n = k \Rightarrow \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$, ω замкнута. $i^*\omega = 0$. Следовательно, $\omega = d\Phi(\omega)$

Переход: $n \to n{+}1$. Пусть $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$ и ω замкнута. Заметим, что $i^*\omega \in \Omega^k(R^n)$, $d(i^*\omega) = i^*d\omega = 0$. Следовательно, $\exists\alpha : d\alpha = i^*\omega$. Имеем:

$$d\Phi(\omega) = \omega - \pi^*(d\alpha) \Rightarrow \omega = d(\Phi(\omega) + \pi^*\alpha)$$

$\square$