

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
IV СЕМЕСТР

Лектор:

**h\nu**

Автор: *Киселев Николай*  
*Репозиторий на Github*

весна 2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Предисловие . . . . .	2
1.2	Напоминание с ОВиТМа . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Вероятностная мера на прямой</b>	<b>3</b>
2.1	Классификация вероятностных мер . . . . .	4
2.1.1	Дискретные распределения . . . . .	4
	Примеры . . . . .	4
2.1.2	Абсолютно непрерывные распределения . . . . .	4
	Примеры . . . . .	5
2.1.3	Сингулярные распределения . . . . .	5
	Примеры . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Вероятностные меры в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>6</b>
3.1	Примеры . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Вероятностные меры в <math>\mathbb{R}^\infty</math></b>	<b>8</b>

# 1 Введение

## 1.1 Предисловие

Ну чето рассказали там про принцип устойчивости частот, про то, что ля-ля-ля тополя

## 1.2 Напоминание с ОВиТМа

**Определение 1.1.**  $\mathcal{F}$  — алгебра над  $\Omega$ , если

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
3.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

**Замечание.** Элементы  $\Omega$  называются элементарными событиями.

**Замечание.** Элементы  $\mathcal{F}$  называются событиями.

**Определение 1.2.**  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра над  $\Omega$ , если

1.  $\mathcal{F}$  — алгебра
2.  $A_1, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**Определение 1.3.** Функция  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  называется вероятностной мерой, если  $P(\Omega) = 1$ ,  $P$  —  $\sigma$ -аддитивна.

**Замечание.** 1.  $P(\emptyset) = 0$

2.  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$  — **монотонность меры**
3.  $P$  конечно аддитивна
4. Для  $P$  верна формула включений-исключений.
5.  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

**Теорема 1.1** (О непрерывности вероятностной меры). Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  таково, что  $\mathcal{F}$  — алгебра над  $\Omega$ ,  $P$  — мера и  $P(\Omega) = 1$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $P$  —  $\sigma$ -аддитивна на  $\mathcal{F}$
2.  $P$  непрерывна в нуле, т.е.  $\bigcap A_i = \emptyset \Rightarrow P(A_i) \rightarrow 0$
3.  $P$  непрерывна сверху, т.е.  $\bigcap A_i = A \Rightarrow P(A_i) \rightarrow P(A)$
4.  $P$  непрерывна снизу, т.е.  $\bigcup A_i = A \Rightarrow P(A_i) \rightarrow P(A)$

**Определение 1.4.** Вероятностное пространство — это измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , т.е.  $\Omega$  — множество,  $\mathcal{F}$  — некая  $\sigma$ -алгебра над  $\Omega$ ,  $P$  — вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Определение 1.5.** Система  $\mathcal{M}$  подмножеств  $\Omega$  называется  $\pi$ -системой, если  $\mathcal{M}$  замкнуто относительно счетного пересечения

**Определение 1.6.** Система  $\mathcal{M}$  подмножеств  $\Omega$  называется  $\lambda$ -системой, если

1.  $\Omega \in \mathcal{M}$
2.  $A, B \in \mathcal{M}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$
3.  $A_i \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{M}$

**Теорема 1.2** (Первая теорема о  $\lambda$ -системах). Система  $\mathcal{F}$  является  $\sigma$ -алгеброй над  $\Omega$  тогда и только тогда, когда она является  $\lambda$ -системой и  $\pi$ -системой.

**Утверждение 1.1.** Для любой системы  $\mathcal{M}$  подмножеств  $\Omega$  существует минимальная по включению, содержащаяся в  $\mathcal{M}$

**Замечание.**  $\sigma(\mathcal{M}), \alpha(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$  — порожденные (минимальные)  $\sigma$ -алгебра, алгебра,  $\pi$ -система,  $\lambda$ -система соответственно.

**Теорема 1.3** (Вторая теорема о  $\lambda$ -системах). Если  $\mathcal{M}$  —  $\pi$ -система на  $\Omega$ , то  $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$

*Доказательство.* См. доказательство из курса ОВиТМа □

**Пример** (Борелевская  $\sigma$ -алгебра).  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (или, что равносильно, всеми полуинтервалами)

**Пример** (Борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $\mathbb{R}^n$ ).  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (или, что равносильно, всеми кубами, где куб — декартово произведение борелевских множеств).

**Пример.**  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми цилиндрами. Цилиндр — множество  $x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots, x_n) \in B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

**Пример** (Борелевская  $\sigma$ -алгебра в общем случае). Пусть  $(S, \rho)$  — метрическое пространство, тогда  $\mathcal{B}(S)$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

## 2 Вероятностная мера на прямой

Пусть  $P$  — вероятностная мера на  $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$

**Определение 2.1.** Функцией распределения называется функция  $F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$ .

**Лемма 2.1** (О свойствах функции распределения).

1.  $F$  не убывает
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3.  $F$  непрерывна справа

*Доказательство.*

1.  $x \leq y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

2.  $x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow (-\infty, x_n] \rightarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ ,  $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow (-\infty, x_n] \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
3. Если  $x_n \searrow x$ , то  $(-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x]$  и  $F(x_n) \rightarrow F(x)$

□

**Теорема 2.1** (О взаимно-однозначном соответствии функции распределения и вероятностной меры). Пусть  $F$  удовлетворяет условиям 1-3 из предыдущей теоремы. Тогда существует единственная вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , т.ч.  $F$  — её функция распределения.

## 2.1 Классификация вероятностных мер

Далее мы будем отождествлять понятия распределения и вероятностной меры.

### 2.1.1 Дискретные распределения

**Определение 2.2.** Вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  называется дискретной, если  $\exists X$  — не более, чем счетное множество на  $\mathbb{R}$ , такое, что  $P(\mathbb{R} \setminus X) = 0$  и  $\forall x \in X P(\{x\}) > 0$ .

### Примеры

1. Распределение Бернулли:  $P \sim \text{Bern}(p)$ , если  $X = \{0, 1\}$ ,  $P(\{1\}) = p$ ,  $P(\{0\}) = 1 - p$
2. Равномерное распределение:  $X = 1, 2, \dots, n$ ,  $P(\{i\}) = \frac{1}{n}$
3. Биномиальное распределение:  $P \sim \text{Bin}(n, p)$ , если  $X = \mathbb{N}$ ,  $P(\{k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $P(\{0\})$ , моделирует количество успехов среди  $n$  испытаний.
4. Пуассоновское распределение:  $P \sim \text{Pois}(n, p)$ , если  $X = \mathbb{N}$ ,  $P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $P(\{0\})$ , моделирует редкие события
5. Геометрическое распределение:  $P \sim \text{Geom}(p)$ , если  $X = \mathbb{N}$ ,  $P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$ ,  $P(\{0\})$ , моделирует первый момент удачи в бесконечной схеме испытаний Бернулли

### 2.1.2 Абсолютно непрерывные распределения

**Определение 2.3.**  $F(x)$  называется абсолютно непрерывной, если  $\exists p(t) \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R} F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ . В таком случае мы говорим, что  $p(t)$  является плотностью функции  $F$  или соответствующего распределения (вероятностной меры).

**Замечание.** В таком случае  $F'(x) = p(x)$  почти всюду по мере Лебега.

**Примеры**

1. Равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$  —  $U(a, b)$ :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 1, x > b \end{cases}$$

Моделирует случайную точку из отрезка  $[a, b]$

2. Нормальное распределение —  $N(a, \sigma^2)$ :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Моделирует измерение с ошибкой

3. Экспоненциальное распределение —  $N(a, \sigma^2)$ :

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} I\{x > 0\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

Моделирует время ожидания

4. Гамма-распределение:  $\Gamma(\lambda, \alpha)$ ,  $\lambda, \alpha > 0$ .

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} I\{x > 0\}$$

Где:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Нам в дальнейшем потребуются различные свойства  $\Gamma$ -функции:  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ,  $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

5. Распределение Коши  $K(\sigma)$ ,  $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\sigma}$$

Модель

**2.1.3 Сингулярные распределения**

**Определение 2.4.** Точка  $x$  называется точкой роста функции распределения  $F(x)$ , если  $\forall \varepsilon > 0 : F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$

**Определение 2.5.** Функция распределения  $F(x)$  называется сингулярной, если она непрерывна, и множество точек ее роста имеет  $\mu = 0$ .

## Примеры

1. Канторова лестница — ее точками роста является канторово множество.

**Теорема 2.2** (Лебега о разложении). *Если  $F(x)$  — функция распределения на прямой, тогда  $\exists!$  разложение вида:  $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$ , где  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$  и  $F_1$  — дискретная,  $F_2$  — абсолютно непрерывная,  $F_3$  — сингулярная.*

## 3 Вероятностные меры в $\mathbb{R}^n$

Пусть  $P$  — вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ .

**Определение 3.1.** Функцией распределения  $P$  называется  $F(x_1, \dots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$

**Замечание** (Обозначения). 1.  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$2. \vec{x} \geq \vec{y} \Leftrightarrow x_i \geq y_i$$

$$3. (-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$$

$$4. \vec{x}_n \downarrow \vec{x} \text{ если } \vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n \text{ и } \vec{x}_n \geq \vec{x}_{n+1}.$$

**Определение 3.2.** Для  $i = 1, \dots, n$ ,  $a_i < b_i$  введем:

$$\Delta_{a_i, b_i}^i F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

**Лемма 3.1** (Свойства многомерных функций распределения). 1. Если  $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$ , то  $F(\vec{x}_n) \rightarrow F(\vec{x})$

$$2. \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n) = 1$$

$$3. \forall i = 1, \dots, n : \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

$$4. \text{ Для любых } a_i < b_i, i = 1, \dots, n:$$

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

*Доказательство.*

1. Если  $\vec{x}_n \downarrow \vec{x}$ , то  $(-\infty, \vec{x}_n] \downarrow (-\infty, \vec{x}] \Rightarrow$  в силу непрерывности вероятностной меры, получаем  $F(\vec{x}_n) \rightarrow F(\vec{x})$
2. Если  $\vec{x}_n \uparrow (+\infty, \dots, +\infty)$ , то  $(-\infty, \vec{x}_n] \uparrow \mathbb{R}^n \Rightarrow$  в силу непрерывности вероятностной меры, получаем  $F(\vec{x}_n) \rightarrow P(\mathbb{R}^n) = 1$
3. Если  $x_i \downarrow -\infty$ , то  $(-\infty, \vec{x}_n] \downarrow \emptyset \Rightarrow$  в силу непрерывности вероятностной меры, получаем  $F(\vec{x}_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$

4. Для  $n = 2$ :

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 F(x_1, x_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geq 0$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} \Delta_{a_i, b_i}^i P(A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times (-\infty, x_i) \times A_{i+1} \times \dots \times A_n) = \\ = P(A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times (a_i, b_i] \times A_{i+1} \times \dots \times A_n) \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]) \geq 0$$

□

**Теорема 3.1** (О взаимно однозначном соответствии). *Если  $F$  удовлетворяет свойствам 1-3 из леммы, то  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , такая, что  $F$  — ее функция распределения*

*Доказательство.* См. ОВиТМ

□

**Замечание.** Свойство 3 нельзя заменить на неубывание по каждой из переменных.

*Доказательство.* Рассмотрим  $F(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y \geq 0 \\ 0, & x + y < 0 \end{cases}$ . Заметим, что  $F$  удовлетворяет свойствам 1, 2 и не убывает по обеим переменным. При этом, если мы возьмем:

$$\Delta_{-1, 1}^x \circ \Delta_{-1, 1}^y F(x, y) = F(1, 1) - F(-1, 1) - F(1, -1) + F(-1, -1) = 1 - 2 + 0 < 0$$

Получаем, что  $F$  — не двумерная функция распределения.

□

### 3.1 Примеры

1. Пусть  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — одномерные функции распределения. Рассмотрим  $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$  — многомерная функция распределения. Свойства 1, 2 очевидны, проверим 3:

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n (F_k(b_k) - F_k(a_k)) \geq 0$$

2. Пусть  $p(t_1, \dots, t_n) \geq 0$ , т.ч.

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1$$

Тогда:

$$(*) \quad F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Свойства 1, 2 очевидны, проверим 3:

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

**Определение 3.3.** Если имеет место представление (\*), то  $p(t_1, \dots, t_n)$  называется плотностью функции распределения  $F$ .

## 4 Вероятностные меры в $\mathbb{R}^\infty$

**Определение 4.1.** Пусть  $P$  — вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ . Рассмотрим для  $n \in \mathbb{N}$  вероятностную меру  $P_n$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , т.ч.

$$P_n(B) = P(\text{Cyl}(n, B)), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Тогда можно заметить, что  $P_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = P_n(B)$ .

**Определение 4.2.** Свойство выше называется согласованностью для последовательности вероятностных мер  $\{P_n\}$

**Теорема 4.1** (Колмогорова, о мерах в  $\mathbb{R}^\infty$ ). Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  — последовательность согласованных вероятностных мер,  $P_n$  — мера на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ , такая, что  $\forall n \in \mathbb{N} : \forall B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ :

$$(*) \quad P_n(B_n) = P(\text{Cyl}(n, B_n))$$

*Доказательство.* Зададим меру  $P$  на цилиндрах по правилу (\*). Цилиндры образуют алгебру  $\mathcal{A}$ . Проверим корректность задания  $P$ . Если  $\text{Cyl}(n, B_n) = \text{Cyl}(n+k, B_{n+k})$ , то  $B_{n+k} = B_n \times \mathbb{R}^k$ . Тогда в силу согласованности:

$$P_n(B_n) = P_{n+k}(B_{n+k})$$

Проверим, что  $P$  — конечно аддитивна на  $\mathcal{A}$ . Если  $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_N \in \mathcal{A}$  — непересекаются, то будем считать, что  $\exists n : \tilde{B}_i = \text{Cyl}(n, B_i), i = 1, \dots, N, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда:

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^N \tilde{B}_i\right) = P\left(\text{Cyl}\left(n, \bigsqcup_{i=1}^N \tilde{B}_i\right)\right) = P_n\left(\bigsqcup_{i=1}^N B_i\right) = \sum_{i=1}^N P_n(B_i) = \sum_{i=1}^N P(\tilde{B}_i)$$

Проверим, что  $P$  непрерывна в нуле (на  $\mathcal{A}$ ). Пусть  $\tilde{B}_n \downarrow \emptyset, \tilde{B}_n \in \mathcal{A}$ . Без ограничения общности, считаем, что  $\tilde{B}_n = \text{Cyl}(n, B_n)$ .

От противного. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{B}_n) = \delta > 0$ . Тогда для  $\forall n \in \mathbb{N}$  выберем компактные  $A_n \subset \mathbb{R}^n$ , такие, что  $A_n \subset B_n$  и  $P(B_n \setminus A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$ . Обозначим  $\tilde{A}_n = \text{Cyl}(n, A_n)$ . Тогда:  $P(\tilde{B}_n \setminus \tilde{A}_n) = P_n(B_n \setminus A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$ . Введем  $\tilde{C}_n = \bigcap_{i=1}^n \tilde{A}_i$ . Тогда  $\tilde{C}_n \downarrow \emptyset, \tilde{C}_n = \text{Cyl}(n, C_n)$ , где  $C_n = A_n \cap (A_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap (A_{n-2} \times \mathbb{R}^2) \cap \dots \cap (A_1 \times \mathbb{R}^{n-1})$  — тоже компакт в  $\mathbb{R}^n$ . Далее:

$$P(\tilde{B}_n \setminus \tilde{C}_n) \leq \sum_{i=1}^n P(\tilde{B}_n \setminus \tilde{A}_i) \leq |B_i \subset B_n, i \geq n| \leq \sum_{i=1}^n P(\tilde{B}_i \setminus \tilde{A}_i) \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{C}_n) \geq \frac{\delta}{2} > 0$$

Возьмем в каждом  $\tilde{C}_n$  по точке  $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots) \in \tilde{C}_n$ . Тогда  $(x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \in C_n$ . Рассмотрим последовательность  $x_1^{(n)}$ . Эти все точки лежат в  $C_1$ . Выберем подпоследовательность  $x_1^{(n_k)} \rightarrow x_1^0 \in C_1$   $\square$