

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
IV СЕМЕСТР

Лектор: Редкозубов Вадим Витальевич

h\nu

Автор: Киселев Николай
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1	Пространство Лебега	2
1.1	Пространства L_p	2
1.2	Свертка и аппроксимация функции	6
2	Тригонометрический ряд Фурье	8
2.1	Поточечная сходимость рядов Фурье	10

1 Пространство Лебега

1.1 Пространства L_p

Определение 1.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ измерима (интегрируема) по Лебегу, если $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ измеримы (интегрируемы) по Лебегу.

Определение 1.2. В случае интегрируемости положим $\int_E f = \int_E \operatorname{Re} f + i \int_E \operatorname{Im} f$. Полученный интеграл линеен и аддитивен по множествам

Замечание.

$$\left\| \int_E f \right\| \leq \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\int_E f = \left\| \int_E f \right\| e^{i\theta} \Rightarrow \int_E f e^{-i\theta} = \left\| \int_E f \right\| = \int_E \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq \int_E |e^{i\theta} f| = \int_E |f|$$

□

Определение 1.3. Пусть $1 \leq p < \infty$ и E измеримо. Определим:

$$L_p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_E |f|^p < \infty\}$$

В таком случае положим $\|f\|_p = (\int_E |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

Пусть $f, g \in L_p(E)$. Если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\lambda f \in L_p(E)$ и ввиду $|f + g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ выполнено $f + g \in L_p$. Получили, что L_p является линейным пространством относительно $+, \lambda \cdot$.

Лемма 1.1. Пусть $a, b \geq 0$. Если $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$

Доказательство. Можно считать, что $ab > 0$. Ввиду выпуклости экспоненты, имеем:

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p} e^x + \frac{1}{q} e^y$$

Положим $x = p \ln a, y = q \ln b$ и получаем желаемое. □

Теорема 1.1 (Гельдер). Пусть $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если $f \in L_p(E), g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Доказательство. Если $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. $\Rightarrow fg = 0$ п.в. \Rightarrow утверждение доказано. Аналогично и для случая $\|g\|_q = 0$. В противном случае, получаем:

$$\|f\|_p \|g\|_q > 0$$

По предыдущей лемме, имеем:

$$\frac{|f(x)| |g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_E |fg| \leq \frac{1}{p} \left(\int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \right) = 1$$

□

Замечание. В неравенстве гельдера равенство имеет место тогда и только тогда, когда $|f|^p = c|g|^q$ п.в. на E для некоторого $c > 0$.

Теорема 1.2 (Минковский). *Пусть $1 \leq p < \infty$. Если $f, g \in L_p(E)$, то $f + g \in L_p(E)$ и $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Доказательство. При $p = 1$ применим $|f + g| \leq |f| + |g|$. Далее при $p \geq 1$: Применим неравенство Гельдера для $p, q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_E |f + g|^p \leq \int_E |f| |f + g|^{p-1} + \int_E |g| |f + g|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|f\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p) \end{aligned}$$

□

Замечание. Равенство в теореме Минковского выполняется тогда и только тогда, когда $f = cg$ п.в. для некоторой $c > 0$

Определение 1.4. На L_p введем отношение \sim . Будем говорить, что $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ п.в. на E .

Замечание. \sim — отношение эквивалентности на L_p , согласованное с операциями сложения и умножения на скаляр. Факторпространство $L_p(E)/\sim$ будем также обозначать $L_p(E)$

Следствие. Пространство L_p относительно нормы $\|\cdot\|_p$ является нормированным линейным пространством

Доказательство.

1. $\|f\|_p \geq 0, \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$
2. $\|\lambda f\|_p = \lambda \|f\|_p$
3. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

□

Задача. Если $\mu(E) < \infty, 1 \leq p < q < \infty$, то $L_q(E) \subsetneq L_p(E)$

Напоминание. Полное метрическое пространство — такое, что любая фундаментальная последовательность сходится

Теорема 1.3 (Рисса). *Пространство L_p банахово (т.е. является полным относительно метрики, порожденной p -нормой).*

Доказательство. Будет позднее □

Напоминание. Напомним, что $\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Будем называть функции с компактным носителем финитными.

Лемма 1.2. Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда \exists простая финитная функция φ такая, что $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.

Доказательство. Можно считать, что f вещественновзначная (иначе приближаем $\text{Re } f, \text{Im } f$ отдельно). Т.к. $|f - I_{B_k(0)}|^p \leq |f|^p$. Тогда по Теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\|f - fI_{B_k(0)}\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Заменяя функцию f на $fI_{B_k(0)}$ для достаточно большого k , заключаем, что она финитная. Пусть сначала $f \geq 0$. По теореме о приближении, находится последовательность $\{\varphi_k\}$ — простых функций, т.ч. $0 \leq \varphi_1 \leq \dots, \varphi_k \rightarrow f$. Т.к. $|f - \varphi_k|^p \leq |f|^p$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $f - \varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, причем все φ_k финитны, т.к. $0 \leq \varphi_k \leq f$ на E . Пусть f теперь произвольного знака $\Rightarrow f = f^+ - f^-$. Тогда по доказанному найдутся простые финитные функции φ^+, φ^- , такие, что $\|f^+ - \varphi^+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \|f^- - \varphi^-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Тогда φ — простая финитная функция и по неравенству треугольника:

$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f^+ - \varphi^+\| + \|f^- - \varphi^-\| < \varepsilon$$

□

Теорема 1.4. Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, т.е. $\|f - g\|_p < \varepsilon$

Доказательство. По предыдущей лемме, любую функцию можно приблизить финитной простой функцией. Всякая простая функция есть линейная комбинация индикаторов. Из этого заключаем, что достаточно доказать теорему для случая $f = I_A$, где A — ограниченное измеримое множество. По свойству регулярности меры Лебега, $\exists G, H$ — открытые, такие, что $G \supset A, H \supset A^c$ и $\mu(G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}, \mu(H \setminus A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $K = H^c$ — замкнутое и ограниченное (т.к. лежит в A), т.е. компакт, лежащий в A . $\mu(G \setminus A) \leq \mu(G \setminus A) + \mu(H \setminus A^c) < \varepsilon$. По теореме о гладком разбиении единицы, $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ с носителем в G , такая, что $0 \leq g \leq 1$ и $g|_K = 1$. Поэтому $\|I_A - g\|_p^p = \int_E |I_A - g|^p \leq \int_{(G \cap E) \setminus K} |I_A - g|^p \leq \mu(G \setminus K) < \varepsilon$ □

Теорема 1.5 (Кантора). Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто. Тогда, если K — компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на нем, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in K \forall h \in \mathbb{R}^n (h < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x-h)| < \varepsilon)$$

Доказательство. От противного. Тогда $\exists \{x_k\} \subset K \exists \{h_k\} \subset \mathbb{R}^m |f(x_k) - f(x_k - h_k)| \geq \varepsilon_0, h_k \rightarrow 0$. Т.к. K — компакт, то $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ и $x_{n_k} + h_{n_k} \rightarrow x_0$. Тогда по непрерывности, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0), f(x_{n_k} - h_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k} - h_{n_k})| \rightarrow 0$ □

Определение 1.5. Пусть $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^m$. Функция $f_h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}, f_h(x) = f(x - h)$ называется сдвигом функции f на h .

Замечание. Функции f, f_h одновременно лежат в $L_p(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_p = \|f_h\|_p$

Теорема 1.6 (Непрерывность сдвига). Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то $\|f_h - f\|_p \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^m)$ (можно считать, что $g = 0$ вне $B_r(0)$), такая, что $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. По неравенству треугольника:

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_h - g\|$$

Т.к. g непрерывна на $\overline{B_r(0)}$, то $\exists \delta \in (0, 1] \forall h \in \mathbb{R}^m (|h| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x-h)| < \frac{\varepsilon}{3M})$, где $M^p = \mu(B_{r+1}(0))$. Поэтому:

$$\|g_h - g\|_p^p = \int |g(x-h) - g(x)|^p dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^p \mu(B_{r+1}) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

Следовательно, при $|h| < \delta$, выполнено $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$ □

Следствие (Непрерывность сдвига для периодических функций). Пусть f — 2π -периодичная измеримая на \mathbb{R} функция. Если $\int_{[-\pi, \pi]} |f(x)|^p dx < \infty$, то

$$\int_{[-\pi, \pi]} |f(x-h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Доказательство. Пусть $g = \begin{cases} f, & x \in (-2\pi, 2\pi) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $g \in L_p(\mathbb{R})$. Также, при $x \in (-\pi, \pi)$ и $|h| < \pi$ имеем: $|g(x-h) - g(x)| = |f(x-h) - f(x)|$, а значит,

$$\int_{[-\pi, \pi]} |f(x-h) - f(x)|^p dx = \int_{[-\pi, \pi]} |g(x-h) - g(x)|^p dx \leq \|g_h - g\|_p \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

□

Теорема 1.7 (Римана об осцилляции). *Пусть I — промежуток в \mathbb{R} , $f \in L_1(I)$. Тогда*

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \pm\infty$$

В частности,

$$\int_I f(x) \cos \lambda x dx \rightarrow 0, \int_I f(x) \sin \lambda x dx \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \pm\infty$$

Доказательство. Рассмотрим случай $I = \mathbb{R}$. Сделаем в интеграле замену $x = t - \frac{\pi}{\lambda}$, тогда:

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)} dt = - \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda t} dt$$

Следовательно,

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_I f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int_I \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) e^{i\lambda x} dx \right)$$

Следовательно,

$$\left| \int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{1}{2} \left(\int_I \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx \right) = \|f_h - f\|_1 \rightarrow 0$$

□

1.2 Свертка и аппроксимация функции

Определение 1.6. Пусть f, g — измеримы в \mathbb{R}^m , функция $f * g$ определяемая по формуле

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - t)g(t)dt$$

называется сверткой функций f, g .

Замечание. Покажем измеримость функции $f(x - t)g(t)$ в \mathbb{R}^{2m} . Т.к. $g(t)$ измерима в \mathbb{R}^{2m} , достаточно показать измеримость $f(x - t)$. Положим $E_a = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) < a\}$ и определим оператор $L : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, $L(x, t) = (x - t, t)$. Тогда $\{(x - t) : f(x - t) < a\} = \{(x, t) : x - t \in E_a\} = L^{-1}(E_a \times \mathbb{R}^m)$ — измеримо как образ измеримого при диффеоморфизме L^{-1}

Лемма 1.3. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, тогда $f * g$ определена почти всюду. Более того, $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Доказательство. Определим $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)| |g(t)| dt$. По теореме Тонелли:

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)| dx \right) |g(t)| dt = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| dy \right) |g(t)| dt = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Получаем:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x - t)g(t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^m} H(x) dx = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Тогда $|f(x - t)g(t)|$ конечна почти всюду $\Rightarrow (f * g)(x)$ определена почти всюду. □

Теорема 1.8. 1. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g \in L_q(\mathbb{R}^m), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $(f * g)$ существует, равномерно непрерывна на \mathbb{R}^m и $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

2. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, g измерима и ограничена в \mathbb{R}^m , то $(f * g)$ существует, равномерно непрерывна на \mathbb{R}^m и $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_\infty$, где $\|g\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^m} |g|$

Доказательство.

1.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)g(t)| dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

Тогда $f * g$ определена всюду на \mathbb{R}^m , и справедлива оценка из условия. Докажем равномерную непрерывность:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x - h) - (f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(x - h - t) - f(x - t))g(t) dt \right| = \\ &= |((f_h - f) * g)(x)| \leq \|f_h - f\|_p \|g\|_q \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Последнее стремление равномерное, т.е. не зависит от x , поэтому утверждение доказано

2.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)g(t)|dt \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

Равномерное стремление доказывается аналогично пункту 1.

□

Утверждение 1.1. Пусть $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^m)$, тогда:

1. $(f * g) = (g * f)$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$

Доказательство.

1.

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)dt = \left\{ \begin{array}{l} x-t=y \\ |J|=1 \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy = (g * f)$$

2. Следует из теоремы Фубини

□

Определение 1.7. Последовательность $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ интегрируемых на \mathbb{R}^m функций называется аппроксимацией единицей (δ -образным семейством), если

1. $K_n \geq 0 \forall n$
2. $\int_{\mathbb{R}^m} K_n dx = 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} K_n(x)dx \rightarrow 0$ для всех $\delta > 0$.

Пример. Рассмотрим $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$ с $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)dx = 1$, положим $K_n(x) = n^m \varphi(nx)$. Тогда:

$$\int_{|x| \geq \delta} = \int_{|x| \geq \delta} n^m \varphi(nx)dx = \left\{ \begin{array}{l} y = nx \\ |J| = n^m \end{array} \right\} = \int_{|y| \geq n\delta} \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi I_{\{|y| \geq n\delta\}} dy \rightarrow 0$$

Теорема 1.9. Пусть $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ — аппроксимация единицы и f — ограниченная измеримая функция на \mathbb{R}^n . Тогда справедливы утверждения:

1. Если f непрерывна в $x \in \mathbb{R}^m$, то $K_n * f(x) \rightarrow f(x)$.
2. Если f непрерывна в каждой точке компакта $K \subset \mathbb{R}^m$, то $K_n * f \rightrightarrows f$ на K .

Доказательство. Из пункта 2 определения K_n следует, что $f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)K_n(t)dt$, поэтому $K_n * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} (f(x-t) - f(x))K_n dt$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью f на K , найдем такое $\delta > 0$, что $\forall x \in K \forall t \in \mathbb{R}^m (|t| < \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2})$. Разобьем последний интеграл следующим образом:

$$K_n * f(x) - f(x) = \left(\int_{|t| < \delta} + \int_{|t| > \delta} \right) (f(x-t) - f(x))K_n(t)dt = I_1 + I_2$$

Имеем:

$$|I_1| \leq \int_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)| |K_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^m} K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_2| \leq \int_{|t|\geq\delta} (|f(x-t)| + |f(x)|) K_n(t) dt \leq 2C \int_{|t|\geq\delta} K_n(t) dt$$

Из пункта 3 определения K_n , найдем $N = N(\delta)$ такое, что $\forall n \geq N \left(2C \int_{|t|\geq\delta} K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \right)$, тогда при таких n выполнено $|K_n * f(x) - f(x)| < \varepsilon$, т.е. $K_n * f \rightharpoonup f$ на K .

Пункт 1 следует из пункта 2, где в качестве компакта рассматривается точка. \square

Задача. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то $K_n * f(x) \rightarrow f$ в L_p .

В периодическом случае свертка определяется аналогично.

Определение 1.8. Пусть f, g — 2π -периодичны и измеримы на \mathbb{R} . Тогда:

$$f * g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Замечание. Все утверждения для свертки верны и в периодическом случае, если заменить \mathbb{R} на $[-\pi, \pi]$ и воспользоваться следующим утверждением:

Утверждение 1.2. Если f интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то интеграл $\int_a^{a+2\pi} f(t)dt$ не зависит от a .

Доказательство. Пусть $b \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall a \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{Z} : a + 2\pi k \in [b, b + 2\pi)$, тогда:

$$\int_a^{a+2\pi} = \int_{a+2\pi(k-1)}^{a+2\pi k} = \int_{a+2\pi(k-1)}^b + \int_b^{a+2\pi k} = \int_b^{a+2\pi k} + \int_{a+2\pi k}^{b+2\pi} = \int_b^{b+2\pi}$$

\square

Определение 1.9. Пусть $p \geq 1$, тогда определим $L_p(T) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} — 2\pi\text{-периодичная измеримая}, L_p(-\pi, \pi)\}$. Норма определяется аналогично:

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 1.10. $C(T) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} — 2\pi\text{-периодическая непрерывная функция}\}$ с $\|f\| = \sup_{[-\pi, \pi]} |f|$.

2 Тригонометрический ряд Фурье

Определение 2.1. Ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{2.1}$$

Называется тригонометрическим рядом с коэффициентами $a_k, b_k \in \mathbb{C}$.

По формулам Эйлера: $\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = -i \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right)$, поэтому частичные суммы можно переписать в виде:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

Где $c_{\pm k} = \frac{a_k \mp ib_k}{2}$, $\frac{a_0}{2} = c_0$.

Определение 2.2. Ряд:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (2.2)$$

Называется тригонометрическим рядом в комплексной форме, и его сумма считается как

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n c_k e^{ikx}$$

Лемма 2.1. Пусть $f \in L_1(-\pi, \pi)$ и тригонометрический ряд в форме (2.1) или (2.2) сходится почти всюду к f и существует $g \in L_1(-\pi, \pi)$, такая, что $|S_n(x)| \leq g \forall n$ для почти всех x . Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikx} dt$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$. По условию, $S_n(x) e^{-ikx} \rightarrow f(x) e^{-ikx}$ почти всюду. При этом, $|S_n(x) e^{-ikx}| \leq g$. Поэтому, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-ikx} dx = \begin{cases} 0, k \neq m \\ 2\pi, k = m \end{cases}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n e^{-ikx} dx = 2\pi c_k, n \geq |k|$$

Следовательно, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 2\pi c_k$ □

Определение 2.3. Пусть $f \in L_1(T)$. Числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikx} dt$$

Называются коэффициентами Фурье функции f , а ряд

$$S(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

Называется тригонометрическим рядом Фурье функции f

Замечание. По лемме Римана об осцилляции, $a_k(f), b_k(f) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $c_k(f) \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow 0$.

2.1 Поточечная сходимость рядов Фурье

Определение 2.4. $D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$ называется n -ым ядром Дирихле.

Замечание. Функция D_n непрерывна, 2π -периодическая, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \pi$.

Имеем:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-s)} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(x-s) ds = \\ &\frac{1}{\pi} D_n * f(x) = \frac{1}{\pi} f * D_n(x) \\ D_n(t) &= \frac{1}{2} e^{-nit} (1 + e^{it} + \dots + e^{2nit}) = \frac{1}{2} e^{-nit} \frac{e^{2(n+1)it} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})it} - e^{-(n+\frac{1}{2})it}}{2 \left(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}} \right)} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Лемма 2.2. Пусть $f \in L_1(T)$ и $0 < \delta < \pi$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt + \varepsilon_n(x), \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(x) = 0$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|t|<\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{f(x-t)}{t} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \end{aligned}$$

$h(t) = f(x-t)$ интегрируема на $(-\pi, \pi)$. Положим $g(t) = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$. По непрерывности, доопределим $g(0) = 0$ — то есть g непрерывна на $[-\pi, \pi]$ \Rightarrow ограничена. Аналогично, $\frac{f(x-t)}{t}$ интегрируема на $\pi \geq |t| \geq \delta$. Но тогда по лемма Римана об осцилляции, получаем желаемое. \square

Теорема 2.1. Пусть $f \in L_1(T), x \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = S \Leftrightarrow \exists \delta \in (0, \pi] : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x-t) - 2s}{t} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0 \quad (2.3)$$

Доказательство. Функция $t \mapsto \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}$ — четная, поэтому:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + o(1)$$

Заметим, что для $h \equiv 1, c_0(h) = 1, c_n(h) = 0 \Rightarrow S_n(h, x) = 1$. Поэтому:

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t} dt + o(1)$$

$$S_n(f, x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + o(1)$$

□

Среди признаков сходимости рядов выделим 2: признак Дини и признак Дирихле.

Утверждение 2.1 (Признак Дини). *Пусть $f \in L_1(T), x \in \mathbb{R}$. Если для некоторого $S \in \mathbb{C} \exists \delta > 0$, такое, что выполнено*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2S|}{t} dt < \infty$$

Тогда ряд Фурье $S(f, x)$ сходится в x к S .

Доказательство. По условию подынтегральная функция лежит в $L_1(0, \delta)$. Следовательно, по лемме Римана об осцилляции выполнено (2.3). Далее утверждение следует из предыдущей теоремы. □

Следствие. Пусть $f \in L_1(T), x \in \mathbb{R}$. Если существуют $f(x \pm 0) \in \mathbb{R}$ и $\alpha_I = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x+t) + f(x \pm 0)}{t} \in \mathbb{R}$, то ряд Фурье $S(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Положим $S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$. Рассмотрим $\psi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t) - 2S}{t}, t > 0$. Тогда:

$$\psi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \alpha_+ - \alpha_-$$

Данная функция ограничена на $(0, \delta)$ □

Следствие. Пусть f — 2π -периодическая функция, такая, что $\forall x \in \mathbb{R} \exists f'_\pm(x) \in \mathbb{R}$ (в частности, f непрерывна). Тогда $S(f, x) = f(x)$.

Лемма 2.3 (Абеля). *Пусть $f \in L_1([a, b]), g$ монотонна на $[a, b]$. Если*

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M$$

Тогда:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq 2M(|g(b)| + |g(a)|)$$

Доказательство. См 2 семестр □

Утверждение 2.2 (Принцип Дирихле). Пусть $f \in L_1(T)$, $x \in \mathbb{R}$. Если f монотонна на $[x - \delta, x + \delta]$ при некотором $\delta > 0$, то $S(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Доказательство. Пусть f нестрого возрастает на $[x - \delta, x + \delta]$. Рассмотрим:

$$\int_0^\sigma \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt, \sigma \in (0, \delta)$$

Также, пусть $I(n) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \Rightarrow \exists M : |I(n)| \leq M$ на $[0, +\infty)$. Следовательно:

$$\left| \int_0^x \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) t}{t} dt \right| = \left| \int_0^{x(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq M$$

Т.к. монотонная функция имеет множество точек разрыва меры 0, и разрывы могут быть только первого рода, то заменим $f(x)$ на $f(x+0)$, т.к. интеграл от этого не изменится. По неравенству Абеля:

$$\left| \int_0^\sigma \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \right| \leq 2M |f(x+\sigma) - f(x+0)|$$

Заметим, что по теореме Римана об осцилляции,

$$\int_\sigma^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Получаем, что

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \rightarrow 0$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \rightarrow 0$$

Из чего по теореме следует утверждение. □

Лемма 2.4. Пусть $f \in L_1(T)$, $0 < \delta \leq \pi$. Тогда:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^\delta \frac{f(x-t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + \varepsilon_n(x), \varepsilon_n(x) \rightarrow 0 \text{ на } K \text{ — компакте}, K \subset \mathbb{R}$$

Лемма 2.5. Пусть $f, g \in L_1(T)$, причем g ограничена. Тогда

$$\varphi_n(x) = \int_{-\pi}^\pi f(x-t)g(t)e^{int} dt \rightarrow 0 \text{ на любом компакте } K \subset \mathbb{R}$$

Доказательство. $\varphi_n(x) \rightarrow 0 \forall x$ по лемме Римана об осцилляции. Предположим противное, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists \{n_k\} \exists \{x_k\} \subset K (\varphi_{n_k}(x_k)) \geq \varepsilon$$

У последовательности x_k имеется сходящаяся подпоследовательность, поэтому считаем,

Что $x_k \rightarrow x_0$.

$$\varepsilon \leq |\varphi_{n_k}(x_k)| \leq |\varphi_{n_k}(x_k) - \varphi_{n_k}(x_0)| + \underbrace{|\varphi_{n_k}(x_0)|}_{\rightarrow 0}$$

Рассмотрим первый модуль:

$$\begin{aligned} |\varphi_{n_k}(x_k) - \varphi_{n_k}(x_0)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_k - t) - f(x_0 - t))g(t)e^{in_k t} dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_k - t) - f(\underbrace{x_0 - t}_y)| \underbrace{|g(t)|}_{\leq C} dt \leq \\ &\leq C \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_k - x_0 + y) - f(y)| dy \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Получили противоречие с тем, что правая часть $\geq \varepsilon$. \square

Замечание. По ходу доказательства мы доказали, что семейство $\{\varphi_{n_k}\}$ — компактное множество в пространстве непрерывных функций.