Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Вадим Витальевич Редкозубов*

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

Пусть a_n, b_n — последовательности комплексных чисел $m \in \mathbb{N}$ и $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Тогда $a_k = A_k - A_{k-1}$ (если считать, что $A_0 = 0$) и $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k$. Следовательно, справедливо тождество (Преобразование Абеля) $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$

Лемма 0.1 (Абеля)**.** *Пусть a_n, b_n — последовательности, причем $\{b_n\}$ монотонна. Если $\left|\sum_{i=m}^{k} a_i\right| \leqslant M \forall k$, то $|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| \leqslant 2M(|b_n| + |b_m|)$*

Доказательство. Считаем, что $a_k = 0$ при $k < m$. Тогда $|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| = |A_n b_n - \sum_{k=m}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)| \leqslant |A_n||b_n| - \sum_{k=m}^{n} |A_k||b_{k+1} - b_k| \leqslant M(|b_n| + \left|\sum_{k=m}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)\right|)$. Т.к. $\{b_n\}$ монотонна, то $b_{k+1} - b_k$ одного знака $\forall k$, тогда

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|b_n| + |b_n - b_m|)$$

□

Замечание. Если $m = 1, \{b_n\}$ нестрого убывает и неотрицательна, $c \leqslant A_k \leqslant C$, то

$$cb_1 \leqslant \sum a_k b_k \leqslant C b_1$$

Лемма 0.2 (Абель)**.** *Пусть $f \in R[a,b], g$ — монотонна на $[a,b]$. Если $\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant M \forall x \in [a,b]$, то*

$$\left|\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right| \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|)$$

Доказательство. Пусть $T_n = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ — разбиение отрезка $[a,b]$ на n равных частей. Положим $\Delta_k g = g(x_k) - g(x_{k-1}), \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда $\alpha_n := \left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sigma_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t)dt - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt\right| =$
$= \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t)dt - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)||g(t) - g(\xi_k)|dt$. Т.к. g — монотонна, $\Delta_k g$ все одного знака и $|g(x) - g(\xi_k)| \leqslant |\Delta_k g|$. Тогда $\alpha_n \leqslant \sum_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)||\Delta_k g|dx$. Т.к. $f \in R[a,b] \Rightarrow \exists c(|f| \leqslant c)$

$$\sum_{k=1}^{n} c|\Delta_k g|(\underbrace{x_k - x_{k-1}}_{\frac{b-a}{n}}) = c\frac{b-a}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} \Delta_k g\right| = c\frac{b-a}{n}|g(x_n) - g(x_0)| = c\frac{b-a}{n}|g(b) - g(a)|$$

Таким образом, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant c\frac{b-a}{n}|g(b) - g(a)|$, но правая часть $\to 0$, поэтому $\alpha_n \to 0$. Тогда достаточно оценить σ_n. Применим лемму 1, где $b_k = g(\xi_k), a_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt$. Тогда b_n — монотонная последовательность.

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| = \left|\int_a^{x_k} f(t)dt\right| \leqslant M$$

Откуда получаем, что $|\sigma_n| \leqslant 2M(|b_1 + |b_n|) = 2M(|g(b)| + |g(a)|)$. Выбрав $\xi_1 = a, \xi_n = b$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)g(x)dx + \sigma_n - \sigma_n\right| \leqslant \alpha_n + \sigma_n \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|) + \underbrace{\alpha_n}_{\to 0}$$

$\square$

1 Несобственный интеграл

Определение 1.1. Функция f назывется локально интегрируемой по Риману, на промежутке I, если $\forall [a,c] \subset I (f \in R[a,c])$

Определение 1.2. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и f локально интегрируема на $[a,b]$. Предел $\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx$ называется несобственным интегралом f на $[a,b]$. Если предел существует и конечен, то $\int_a^b f(x)dx$ называют сходящимся, иначе — расходящимся.

Пусть $b \in \mathbb{R}$, f локально интегрируема на $[a,b)$ и ограничена, тогда $f \in R[a,b]$ (при любом доопределении в точке b) и по свойству непрерывности определенного интеграла с переменным пределом, несобственный интеграл сопадает с определенным

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-0} \int_a^x f(t)dt$, т.е. новая ситуация имеет место в случае $b = +\infty$ или $b \in \mathbb{R}$ и f неограничена на $[a,b)$. Ряд свойств определенного интеграла перносится на несобственный, т.к. можно применить предельныйм переход.

Утверждение 1.1 (Принцип локализации)**.** *Пусть f локально интегрируема на $[a,b)$. Тогда для любого $a^* \in (a,b)$ несобственный интеграл $\int_{a^*}^b f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, причем, в случае сходимости:*

$$\int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Заметим, что по аддитивности (нормального интеграла)

$$\int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Но т.к.

$$\lim_{c\to b} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

В предельном переходе получаем требуемое. $\square$

Утверждение 1.2 (Линейность)**.** *Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ сходятся и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то сходятся и несобственный интеграл*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Фигачим предельный переход $\square$

Утверждение 1.3 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть f локально интегрируема на $[a,b)$, F — первообразная на $[a,b)$, тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Фигачим предельный переход $\square$

Пример. Хотим узнать сходимость
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

В зависимости от α

$\alpha \neq 1$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha < 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty$$

Пример. Аналогично проверяется, что
$$\exists \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Причем сходится к $\frac{1}{1-\alpha}$

Утверждение 1.4 (Интегрирование по частям)**.** *Пусть f, g — дифференцируемы на $[a, b]$ и f', g' локально интегрируемы на $[a, b]$. Тогда*
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^{b-0} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Данную формулу нужно понимать так: существование двух конечных пределов из 3 влечет существование третьего и выполнения равенства

Доказательство. Используем предельный переход □

Утверждение 1.5 (Замена переменной)**.** *Пусть f непрерывна на $[a, b)$, $\varphi(x)$ — дифференцируема, φ строго монотонна на $[\alpha, \beta)$, причем φ' локально интегрируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Тогда:*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство. Определим функцию $F(c) = \int_a^c f(x)dx, \Phi(x) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. По формуле замены переменной в определнном интеграле:
$$F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma) \forall \gamma \in [\alpha, \beta)$$

. Пусть в $\overline{\mathbb{R}}$ существует $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда по свойству предела композиции существует
$$\lim_{\gamma \to b-0} \Phi(\gamma) = \lim_{c \to b-0} F(c) = I$$

так что
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I$$

□

В условиях предыдущего свойства φ обратима и $\varphi^{-1} \to \beta$ при $c \to b-0$. Поэтому по свойству предела композиции существование $\lim_{\gamma \to \beta - 0} \Phi(\gamma)$ влечет существование равного $\lim_{c \to b-0} F(c)$, т.е. существовование правой части влечет существование левой.

Определение 1.3. Примем следующее соглашение:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Задача.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$$

Решение. Видно, что это несобственный интеграл, т.к. функция не определена в 0. Докажем, что он сходится.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)dx = x\ln x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}(\ln\frac{\pi}{2} - 1)$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)dx$$

Сходится, т.к. сходится $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Теперь вычислим его значение.

$$I =_{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(2t))dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(t))dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))dt =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(t))dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(z))dz = \pi\ln 2 + 2I \Rightarrow I = \pi \ln 2$$

Теорема 1.1 (Коши). *Пусть f — локально интегрируема на $[a, b)$.*

$$\int_a^b f(x)dx \textit{ сходится } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists b_\varepsilon \in [a, b) \forall \xi, \eta \in (b_\varepsilon, b) \left(\left|\int_\xi^\eta f(x)dx\right| < \varepsilon\right)$$

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b)$, то $\int_\xi^\eta f(t)dt = F(\eta) - F(\xi)$. Следовательно, доказательство утверждения — переформулировка крититерия Коши существования предела F. □

Определение 1.4. Пусть f — локально интегрируема на $[a, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$. Если несобственный интеграл сходится, но не сходится абсолютно, то он называется условно сходящимся.

Следствие. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Доказательство.
$$\forall[\xi,\eta]\subset[a,b]\left(\left|\int_{\xi}^{\eta}f(x)dx\right|\leqslant\int_{\xi}^{\eta}|f(x)|dx\right)$$
Поэтому, если интеграл от $|f|$ по $[a,b]$ удовлетворяет условию Коши, то по условию Коши удовлетворяет и интеграл от f по $[a,b)$. □

Замечание. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$$

1.1 Несобственный интеграл от неотрицательной функции

Лемма 1.1. *Пусть f локально интегрируема и $f\geqslant 0$ на $[a,b)$. Тогда*
$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt \text{ определена на } [a,b)$$

Доказательство. Функция F неотрицательна и нестрого возрастает на $[a,b)$, т.к. $\forall x_1,x_2\in[a,b), x_1<x_2\Rightarrow F(x_2)-F(x_1)=\int_a^b f(t)dt\geqslant 0$. По теореме о пределе монотонной функции, существует
$$\lim_{x\to b-0}F(x)=\sup_{x\in[a,b)}F(x)$$
Следовательно, органиченность F на $[a,b)$ равносильна $\exists\lim_{x\to b-0}F(x)\in\mathbb{R}$, т.е. сходимость $\int_a^b f(x)dx$. □

Замечание. Несобственный интеграл от неотрицательной функции либо сходится, либо расходится к $+\infty$. Для сходимости достаточно установить органиченность некоторой последовательности $I_n=\int_a^b f(x)dx$, где $c_n\in[a,b), c_n\to b-0$. Это следует из того, что $\lim_{n\to\infty}I_n=\int_a^b f(x)dx$

Теорема 1.2 (Признак сравнения)**.** *Пусть f,g — локально интегрируемы на $[a,b)$ и $0\leqslant f\leqslant g$ на $[a,b)$.*

1. *Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то $\int_a^b g(x)dx$ — тоже*
2. *Если $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ — тоже*

Доказательство. 1.
$$\forall x\ in[a,b)0\leqslant\int_a^x f(t)dt\leqslant\int_a^x g(t)dt$$
Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то по Лемме 1, $\int_a^x g(t)dt$ определена на $[a,b)$, следовательно, ограничена $\int_a^x f(t)dt$ на $[a,b)$, что по Лемме 2 влечет сходимость $\int_a^b f(x)dx$.

2. Следует из контрпозиции первого

□

Следствие. Пусть f,g локально интегрируемы на $[a,b)$ и $f,g\geqslant 0$ на $[a,b)$. Если $f(x)=O_{x\to b-0}(g(x))$, то справедливы утверждения 1, 2 теоремы

Доказательство. В силу неотрицательности f, g и определения символа $O, \exists C > 0, a^* \in [a, b) \forall x \in [a^*, b) (f(x) \leqslant Cg(x))$. Если $\int_{a^*}^b g(x)dx$ сходится, то $\int_{a^*}^b Cg(x)dx$ — тоже. Тогда по Теореме 2, сходится и $\int_{a^*}^b f(x)dx$, а значит, $\int_a^b f(x)dx$ — тоже. □

Следствие. Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$ и $f, g > 0$ на $[a, b)$. Если $\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, то $\int_a^b f(x), \int_a^b g(x)$ сходятся или не сходятся одновременно.

Доказательство. В условиях теоремы 2 также $\exists \lim_{x\to b-0} \frac{g(x)}{f(x)} \in (0, +\infty)$. Тогда:

1. $f(x) = O_{x\to b-0}(g(x))$
2. $g(x) = O_{x\to b-0}(f(x))$

□

Пример.

$$\int_0^{+\infty} x^{2024} e^{-x^2} dx$$

Посчитаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2026}}{e^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1013}}{e^t}$$

Применим правило Лопиталя 1014 раз:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1013}}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{0}{e^t} = 0$$

$$x^{2024} e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \to +\infty$$

Но при этом

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ сходится}$$

Пример.

$$\int_{\to 0}^1 \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}$$

$$\operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \sim x, x \to +0$$

$$\int_{\to 0}^1 \frac{dx}{x} \text{ расходится}$$

1.2 Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Изучм вопросы сходимости несобственных интегралов от функций ни в какой функции точки b.

Лемма 1.2. *Пусть f, g — локально интегрируемы на $[a, b)$ и $\int_a^b g(x)dx$ — абсолютно сходится. Тогда несобственные интегралы*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$$

Либо одинаково расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Доказательство. Абсолютная сходимость влечет сходимость, поэтому $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Тогда по линейности

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f(x)+g(x))dx - \int_a^b g(x)dx$$

И заключаем, что интегралы $\int_a^b (f(x)+g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$ сходятся одновременно. При этом,

$$|f+g| \leqslant |f|+|g|, |f| \leqslant |f+g|+|g|$$

Тогда по критерию сравнения, получаем, что $\int_a^b |f(x)+g(x)|dx, \int_a^b |f(x)|dx$ сходятся одновременно, т.е. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx, \int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходятся одновременно. □

Теорема 1.3 (Признак Дирихле)**.** *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$, причем*

1. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *ограничена на* $[a, b)$
2. $g(x)$ — *монотонна*
3. $g \to 0$ *при* $x \to b-0$

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. Существует такая константа $M : |F| \leqslant M$. Тогда $\forall \xi \in [a, b)$ имеем $\left|\int_\xi^x f(t)g(t)dt\right| = |F(x)-F(\xi)| < 2M$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists b' \in [a, b) \forall x \in (b', b) \left(|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right)$. По лемме Абеля, для интервалов $\forall[\xi, \eta] \subset (b', b)$ выполнено $\left|\int_\xi^\eta f(x)g(x)dx\right| < 2\cdot 2M(|g(\xi)|+|g(\eta)|) < \varepsilon$. Далее применяем свойство Коши. □

Замечание. Условия 1, 2 выполнены если f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$, а g дифференцируема и g' сохраняет знак на $[a, b)$.

Пример. Исследуем сходимость и абсолютную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R} (k > 0)$$

Делаем замену $t = kx$ и получаем следующее:

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

1. $\alpha > 1$.
$$\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \text{ — сходится}$$
То есть $I(\alpha)$ сходится абсолютно

2. $\alpha \leqslant 0$. Проверим расходимость при помощи Коши.

$$\exists \varepsilon_0 = \forall \Delta > 1 \exists \xi = 2\pi n > \Delta, \eta = 2\pi n + \pi > \Delta$$

$$\left|\int_\xi^\eta \frac{\sin t}{t^\alpha} dt\right| = \int_\xi^\eta t^{-\alpha} \sin t dt \geqslant (2\pi n)^{-\alpha} \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin t dt = (2\pi n)^{-\alpha} \cdot 2 \geqslant 2$$

Тогда по критерию Коши, $I(\alpha)$ расходится.

3. $\alpha \in (0, 1]$.

$$f(x) = \sin t, g(t) = \frac{1}{t^\alpha}, F(t) = \int_1^t \sin s \ \ ds \text{ — ограничена на } 1, +\infty$$

Тогда $I(\alpha)$ сходится по признаку Дирихле. Теперь проверим абсолютную сходимость:

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\right) \geqslant 0$$

При этом $\int \frac{1}{x^\alpha}$ — расходится, а $\int \frac{\cos 2x}{x^\alpha}$ — сходится. Тогда их разность расходится. Тогда $I(\alpha)$ сходится при $\alpha > 0$ и абсолютно сходится при $\alpha > 1$

Теорема 1.4 (Признак Абеля)**.** *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$, причем*

1. *$\int_a^b f(x)dx$ сходится*
2. *g монотонна на $[a, b)$*
3. *g ограничена на $[a, b)$*

Тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

сходится.

Доказательство. Из монотонности и ограниченности следует, что $\exists \lim_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Поэтому $\int_a^b f(x)(g(x)-c)dx$ сходится, но тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)(g(x)-c)dx + c\int_a^b f(x)dx$ — сходится □

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} \sim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Так делать нельзя, т.к. свойство, котоыре мы использовали выше, рабоатет только для неотрициательных функций. Как правильно:

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x(\sqrt{x} - (\sqrt{x} - \sin x))}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sin x)}$$

$$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}})} \sim \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right) \geqslant 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)dx \text{ — расходится}$$

$$\boxed{\text{Короче говоря, принцип сравнения для знакопеременных функций не применим}}$$

Следствие (Из теоремы 4)**.** Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$ и g монотонна на $[a, b)$, $\lim_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx, \int_a^b f(x)dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Доказательство. Из сходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует сходимость $int_a^b f(x)g(x)dx$ по теореме 4. Т.к. $c \neq 0$, то $\exists a^* \in [a, b) \forall x \in [a^*, b)(g(x) \neq 0)$. Следовательно, $f = fg \cdot \frac{1}{g}$ на $[a, b)$. По теореме 4, сходимость $\int_{a^*}^b f(x)g(x)dx$ влечет $\int_{a^*}^b f(x)dx$, а значит, $\int_a^b f(x)dx$ сходится □

1.3 Несобственные интегралы с несколькими особенностями

Определение 1.5. Пусть $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, функция f определена на a, b за исключением, быть может, конечного числа точек.

1. Точка $c \in (a, b)$ называется особенностью f, если $\forall [\alpha, \beta] : c \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$ функция $f \notin R[\alpha, \beta]$.

2. Точка b называется особенностью f, если либо $b = +\infty$, либо $b \in \mathbb{R}$ и $f \not\in R[\alpha, b] \forall a < \alpha < b$

   Заметим, что такое определение работает для любого доопределения f в точке b.

Замечание. f не имеет особенностей на $(c, d) \to f$ локально интегрируема на $(, d)$.

Доказательство. Пусть $[u,v] \subset (a,b)$ Докажем, что $f \in R[u,v]$ По условию $\forall x \in [u,v] \exists [\alpha_x,\beta_x]$

$$\bigcup_{x \in [u,v]} (\alpha_x, \beta_x) \supset [u, v]$$

Тогда по лемме Гейне-Бореля есть конечное покрытие этого отрезка. Рассмотрим его. По аддитивности f интегрируема на некотором отрезке, содержащем $[u, v] \Rightarrow$ и на $[u, v]$ □

Определение 1.6. Пусть $c_1 < c_2 < \dots < c_{N-1}$ - все особенности функции f на (a, b), причем определим $c_0 = a, c_N = b$.

$\boxed{\xi_k \in (c_{k-1}, c_k), \text{ где } k \in \{1, 2, \dots, N\}}$

Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ называется совокупность интегралов $\int_{c_{k-1}}^{\xi_k} f(x)dx$ и $\int_{\xi_k}^{c_k} f(x)dx$

Таким образом, несобственный интеграл определен следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{c_{k-1}}^{\xi_k} f(x)dx + \int_{\xi_k}^{c_k} f(x)dx \right)$$

И имеет смысл, если каждый интеграл справа имеет смысл в $\overline{\mathbb{R}}$.

Задача. *Приведите пример непрерывной неотрицательной функции f на $[1, +\infty)$, т.ч. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но f не является бесконечно малой при $x \to +\infty$.*

Задача. *Пусть f равномерно непрерывна на $[1, +\infty)$ и $\int_a^b f(x)dx$ — сходится. Показать, что $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$*

2 Числовые Ряды

Определение 2.1. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел. Выражение $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots$ Называется числовым рядом с n-ым членом a_n. При этом сумма $\sum_{i=1}^{N} a_i = S_N$ называется N-ой частичной суммой, а $\lim_{N\to\infty} S_N$ называется суммой ряда. Тогда кратко пишут: $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Причем, если указанный предел конечен, то ряд называется сходящимся, иначе — расходящимся.

Пример (Геометрический ряд)**.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} z^n$$

1. $|z| < 1$. Заметим, что $1+z+\cdots+z^N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$. Тогда $\lim_{N\to\infty} z^{N+1} = 0$ и $\exists \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-z}$

2. $|z| \geqslant 1$. Заметим, что $z^N = S_N - S_{N-1} \to 0$. Но $z^N \not\to 0$, тогда этот ряд расходится. $\nexists \lim_{N\to\infty} S_N$.

Замечание. Геометрический ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$.

Лемма 2.1 (Телескопические ряды)**.** *Для числовой последовательности $\{s_n\}$ рассмотрим последовательность $a_n = s_n - s_{n+1}$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ сходится} \Leftrightarrow \{s_i\} \text{ сходится}$$

В этом случае,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s_1 - \lim_{N\to\infty} s_N$$

Доказательство.

$$S_n = (s_1 - s_2) + (s_2 - s_3) + \cdots + (s_n - s_{n+1}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = s_1 - \lim_{n\to\infty} s_n$$

□

Пример.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$$

$$a_i = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Т.к. $\frac{1}{i}$ —

Утверждение 2.1 (Локализация)**.** *Для любого $m \in \mathbb{N}$ ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=m+1}^{\infty} a_n$$

Сходятся или не сходятся одновременно, причем, если сходятся, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{m} a_n + \sum_{i=m+1}^{\infty} a_n$$

Доказательство. При $N > m$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N} = \sum_{i=1}^{m} a_n + \sum_{i=m+1}^{N} a_n$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=m+1}^{\infty} a_n$$

Сходятся или не сходятся одновременно. В случае сходимости достаточно применить предельный переход для доказательства равенства. □

Определение 2.2. Ряд $r_N = \sum_{i=N+1}^{\infty} a_n$ называется N-ым остатком ряда

Утверждение 2.2 (Линейность)**.** *Пусть ряды* $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Тогда сходится и ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$, *причем*

$$\lambda \sum_{i=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{i=1}^{\infty} b_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$$

Доказательство. Очевидно при предельном переходе □

Утверждение 2.3 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если* $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} = 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1}$. Тогда $S_n - S_{n-1} \to \sum_{i=1}^{\infty} a_n - \sum_{i=1}^{\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$ □

Обратное неверно:

Пример (Гармонический ряд)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Но тогда:

$$H_{2n} - H_n \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Противоречие, т.к. если ряд сходится, то начиная с какого то момента все H_n удалены друг от друга не более чем на $\varepsilon \forall \varepsilon > 0$.

Теорема 2.1 (Коши)**.** $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall m, n \geqslant N \left(\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon\right)$

Доказательство. Утверждение является переформулировкой критерия Коши для последовательности s_n. □

Определение 2.3. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то его называют абсолютно сходящимся, иначе — условно сходящимся.

Следствие. Абсолютная сходимость влечет условную сходимоть

Доказательство.
$$\forall n > m \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_n|$$

□

Следствие. $a_n \in \mathbb{C}, a_n = u_n + iv_n$. Тогда ряд сходится $\Leftrightarrow$ сходятся ряды вещественной и мнимой частей. При этом,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + i\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Пусть $a_n \in \mathbb{R}$ — последовательность вещественных чисел. Рассмотрим $f_a : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f_a(x) = a_n, n \leqslant x < n+1$

Лемма 2.2 (О равносходимости)**.** *Пусть $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда*
$$\sum_{i=1}^{n} \textit{ сходится } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f_a(x)dx \textit{ сходится}$$

Причем в случае сходимости, левая и правая части равны

Доказательство. Пусть интеграл сходится:
$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow s_n = \int_1^{n+1} f_a(x)dx$$

Пусть ряд сходится, s_n — его частичная сумма ($n = [x]$). Тогда:
$$\left|\int_1^x f_a(t)dt - S\right| \leqslant \left|\int_1^x f_a(t)dt - S_n\right| + |S_n - S| \leqslant \left|\int_1^x f_a(t)dt - \int_1^{n+1} f_a(t)dt\right| + |S_n - S| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n| + |S_n - S|$$

□

2.1 Ряды с неотрицательными членами

Лемма 2.3. *Пусть $a_n \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд a_n сходится тогда и только тогда, когда $\{S_n\}$ — ограничена.*

Доказательство. Т.к. $S_{n+1} = S_n + a_n \Rightarrow S_n$ нестрого возрастает. По теореме о монотонной последовательности, она сходится $\Leftrightarrow$ она ограничена. □

Теорема 2.2 (Признак сравнения)**.** *Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \forall n \in \mathbb{N}$*

1. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — тоже*
2. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — тоже*

Доказательство. По лемме о равносходимости данная теорема равносильна признаку сходимости для интегралов □

Следствие. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = O(b_n), n \to \infty$. Тогда справедливо заключение предыдущей теоремы

Следствие. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \sum_{i=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно

Теорема 2.3 (Интегральный признак). *Пусть f нестрого убывает и неотрицательна на $[1, +\infty)$. Тогда последовательность $u_n = f(1) + \dots + f(n) - \int_1^{n+1} f(t)dt$ сходится, в частности, $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, \int_1^{+\infty} f(t)dt$ сходятся или расходятся одновременно*

Доказательство. Докажем, что последовательность u_n нестрого убывает и ограничена снизу. В силу монотонности f имеем:

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

Тогда

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(x) - \int_k^{k+1} f(t)dt \right) + f(n) \geqslant f(n) \geqslant 0 \Rightarrow u_n \geqslant 0$$

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant 0$$

Следовательно, по теореме о пределе монотонной последовательности u_n — сходится. □

Пример. Исследуем на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. $\alpha \leqslant 0$ — расходится, т.к. его члены не бесконечно маленькие.

2. $\alpha > 0$, тогда $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ — неотрицательная монотонная функция. Но тогда по интегральному признаку, этот ряд сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \Leftrightarrow \alpha > 1$.

$\Rightarrow$ сходится при $\alpha > 1$.

Пример. Рассмотрим гармонический ряд, обозначим $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}, u_n = H_n - \int_1^n \frac{1}{x} dx = H_n - \ln n$. По интегральному признаку $\exists \lim_{n\to\infty} u_n = \gamma$ — константа Эйлера-Маскерони.

Теорема 2.4 (признак Коши). *Пусть $a_n \geqslant 0, q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

1. $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *— сходится*

2. $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *— расходится, причем $a_n \not\to 0$*

Доказательство.

1. Пусть $q_0 \in (q, 1)$. Выберем N так, что $\sup_{n \geqslant N} \sqrt[n]{a_n} \leqslant q_0$. Но тогда $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q_0 \Rightarrow a_n \leqslant q_0^n \Rightarrow$ по принципу локализации, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} q_0^n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Т.к. q — частичный предел, то $\exists \sqrt[n]{a_{n_k}} \to q \Rightarrow \exists k_0 : \forall k > k_0 \;\; a_{n_k} > 1$.

□

Теорема 2.5 (признак Даламбера). *Пусть* $a_n \geqslant 0, \overline{r} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \underline{r} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. $\overline{r} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *— сходится*

2. $\underline{r} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *— расходится, причем* $a_n \not\to 0$

Доказательство.

1. Пусть $r \in (\overline{r}, 1)$. Выберем N так, что $\sup_{n\geqslant N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r$, а значит $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r \forall n > N$. Но тогда $a_{n+m} \leqslant a_n r^m \forall n > N$. Но тогда, т.к. $\sum_{m=1}^{\infty} a_n r^m$ — сходится, то, по локализации, сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. Т.к. $\underline{r}$ — частичный предел, то $\exists \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \underline{r} \Rightarrow \exists k_0 : \forall k > k_0 \quad a_{n_k} \geqslant a_{n_{k_0}}$. Но тогда $a_n \neq\to 0$.

□

Замечание. Если в признаке Коши $q = 1$ или в признаке Даламбера $\underline{r} \leqslant 1, \overline{r} \geqslant 1$, то в общем случае нельзя определить тип сходимости a_n.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow q = 1, \overline{r} = 1, \underline{r} = 1 \text{ — расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow q = 1, \overline{r} = 1, \underline{r} = 1 \text{ — сходится}$$

Пример.

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$$

1. $$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2^{-1-(2k+1)}}{2^{-1-2k}} = \frac{1}{8}$$

2. $$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{2^{-1-2k}}{2^{-1-(2k-1)}} = \frac{1}{2}$$

Итого, признак Даламбера ничего нам не дал. Посмотрим на признак Коши:

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{-1+\frac{(-1)^n}{n}} \to \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n} \text{ — сходится}$$

Задача. *Доказать, что*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Теорема 2.6 (Признак Гаусса). *Пусть* $a_n \geqslant 0, \exists S > 1, A \in \mathbb{R}$, *ограниченная последовательность* α_n, *такие, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{\alpha_n}{n^s}$. *Тогда* $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ *— сходится только при* $A > 1$.

Доказательство. Покажем, что $\{n^A a_n\}$ сходится к положительному числу. Рассмотрим $v_n = \ln(n^A a_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, где $w_n = v_{n+1} - v_n$. Тогда $w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^A + \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = A\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(\frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ □

2.2 Числовые ряды с произвольными членами

Лемма 2.4. *Пусть b_n абсолютно сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ либо одновременно расходятся, либо сходятся условно, либо сходятся абсолютно.*

Доказательство. Аналогично доказательству для несобственных интегралов □

Теорема 2.7 (Признак Лейбница)**.** *Если α_n монотонна и $\alpha_n \to 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$ сходится и $|S_n - S| \leqslant |a_{n+1}|$*

Доказательство. Пусть α_n нестрого убывает, в частности, $\alpha_n \geqslant 0 \forall n$

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2} \geqslant 0 \Rightarrow \{S_{2n}\} \text{ — нестрого возрастает}$$

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} + \alpha_{2n+1} \leqslant 0 \Rightarrow \{S_{2n}\} \text{ — нестрого убывает}$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} \geqslant 0 \Rightarrow \forall n, m$$

$$S_{2n} \leqslant S_{2N} \leqslant S_{2N+1} \leqslant S_{2m+1}, N = \max\{n, m\}$$

Причем $\{S_{2n}\}, \{S_{2n+1}\}$ — ограничены $\Rightarrow S_{2n} \to S', S_{2n+1} \to S'', S_{2n+1} - S_{2n} = \alpha_n \to 0 \Rightarrow S' = S''$. Кроме того, $|S_n - S| \leqslant |S_n - S_{n+1}| = |a_{n+1}|$ □

Пример (Применение признака Лейбница)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ сходится при $\Leftrightarrow \alpha > 0$, причем сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$.

Теорема 2.8 (Признак Дирихле)**.** *Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$ такие, что*

1. $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *ограничена*
2. b_n *монотонна*
3. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Можно доказать переходом к интегралу □

Следствие (Признак Абеля)**.** Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$ такие, что

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. b_n монотонна
3. b_n ограничена

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. (Можно доказать переходом к интегралу)

$b_n \to c \in \mathbb{R}$. Но $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - c)$ сходится по признаку Дирихле. Но тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - c) + c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Но тогда последний интеграл тоже сходится. □

Следствие. Если $\{\alpha_n\}$ — монотонна и $\alpha_n \to 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx$ — сходятся, если $x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. $S_N = \sum_{n=1}^{N} e^{inx}$ — геометрическая прогрессия с коэффициентом $q = e^{ix}$. По формуле Эйлера, $S_N = A_N + iB_N$, где $A_N = \sum_{n=1}^{N} \cos nx, B_N = \sum_{n=1}^{N} \sin nx$. Имеем: $S_N = e^{ix}\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}$. Т.к. $|e^{ikx}| = 1$, то $|S_N| \leqslant \frac{2}{|1-e^{ix}|} = \frac{2}{|1-\cos x - i\sin x|} = \frac{2}{\sqrt{(1-\cos x)^2+(\sin x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-2\cos x+\cos^2 x+(\sin x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2-2\cos x}} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ □

Пример. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расходится, т.к. } b_n = a_n + \frac{1}{n}$$

Но $b_n \sim a_n\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

2.3 Группировки и перестановки

Пусть дана строго возрастающая последовательность $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Определение 2.4. Пусть дана строго возрастающая последовательность целых чисел $0 = n_1 < n_2 < \ldots$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ называется группировкой $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Лемма 2.5. *1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и любая группировка a_n сходится к той же сумме.*

2. Пусть $\exists L > 0 : n_k - n_{k-1} < L \forall k$. Если $a_n \to 0$ и группировка b_n — сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к той же сумме.

Доказательство. Пусть S_n — частичные суммы a_n, S_n^* — частичные суммы группировки.

1. Пусть $S_n \to S$. Т.к. S_n^* — подпослежовательность S_n, то она тоже сходится, причем их пределы совпадают.

2. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $K, M \in \mathbb{N}$ так, что $|S_k^* - S| = |S_{n_k} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \forall k \geqslant K, |a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L}, \forall n \geqslant M$. Положим $N = \max\{K, M + L\}$. Тогда для любого $n \geqslant N \exists k (n_k \leqslant n < n_{k+1})$, а значит, $S_n = S_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_n$. Поэтому $|S_n - S| \leqslant |S_{n_k} - S| + |a_{n_k+1}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + L\frac{2\varepsilon}{2L} = \varepsilon$.

□

Задача. *Пусть все $a_n \in \mathbb{R}$ и одного знака внутри группы. Доказать, что сходимость группировки влечет сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, причем к той же сумме.*

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, где $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, называется перестановкой. □

Теорема 2.9. *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно к той же сумме.*

Доказательство. Покажем, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ ограничены.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\max_{k \in 1,2,\ldots N} \varphi(k)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем m так, что $\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$. Выберем M так, что $\{1, 2, \ldots m\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(M)\}$. Положим $N = \max\{m, M\}$. Тогда $\forall n \geqslant N \quad \{1, 2, \ldots m\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(N)\}$, поэтому

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

□

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

$$S_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{2m} - 2\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2m}\right) = H_{2m} - H_m = \ln 2 + o(1)$$

Пример (Как не надо делать)**.**

$$S_{\Pi} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{2\,(\ln 2)}$$

Получилась фигня, т.к. ряд не сходился абсолютно. Для условно сходящихся рядов при перестановке может получиться что угодно

Лемма 2.6. *Пусть даны два расходящихся ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $b_k > 0, c_k < 0, \quad b_k, c_k \to 0$. Тогда для любого $L \in \mathbb{R}$ найдется $\sum_{n=1}^{\infty} d_k$ с суммой L, так что $\{d_k\}$ содержит все b_k, c_k, причем по одному разу.*

Доказательство. Идея: так как ряды расходятся, будем добавлять члены из них, чтобы переваливать через L туда-сюда.

Построим по индукции последовательность $D_i = (d_i, n_i, m_i)$ следующим образом (обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$):

$$D_0 = (0, 0, 0)$$

$$D_{i+1} = \begin{cases} (b_{n_i+1}, n_i + 1, m_i), & \text{если } S_i \leqslant L \\ (c_{m_i+1}, n_i, m_i + 1), & \text{если } S_i > L \end{cases}$$

Иными словами, будем брать b_i, если сумма на данный момент меньше, чем нам надо и c_i иначе. Заметим, что, так как $\sum_{i=1}^{\infty} b_i, \sum_{i=1}^{\infty} c_i$ расходятся, то неверно, что с какого-то момента $d_i = b_i$ или $d_i = c_i$. Также заметим, что если $n, m > 0$, то $|b_{n_i}| + |c_{m_i}| \geqslant |L - S_i|$, т.к. если $S_i \leqslant L$, то рассмотрим максимальный j :, такой, что $S_j > L, S_{j+1} \leqslant L$. Но тогда $S_j \leqslant S_i \leqslant L \Rightarrow |c_{m_j}| \geqslant |L - S_i|$, но $m_i = m_j$, т.к. j — максимальный, получили, что $|c_{m_i}| \geqslant |L - S_i|$. В другом случае аналогично получаем, что $|b_{n_i}| \geqslant |L - S_i|$. Но тогда $|b_{n_i}| + |c_{m_i}| \geqslant |L - S_i|$ и т.к. $|b_{n_i}| + |c_{m_i}| \to 0$, то и $|L - S_i| \to 0 \Rightarrow S_i \to L$. □

Теорема 2.10 (Римана). *Если действительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то для любого $L \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, что$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = L$*

Доказательство. Положим b_i — положительные члены a_i, c_i — отрицательные члены a_i. Заметим, что т.к. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = 0, \lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Проверим, что b_i, c_i расходятся. Действительно, пусть это не так, тогда один из них сходится. Но тогда, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (это следует из того, что если мы сложим некоторые частичные суммы b_i, c_i, то получим частичную сумму a_i), получаем, что они либо оба сходятся, либо асболюнто расходятся. Но a_i не сходится абсолютно, значит $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ — расходится, тогда один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — расходится, тогда они оба расходятся. Далее применяем предыдущую лемму и получаем требуемую перестановку. □

Теорема 2.11 (Коши). *Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся к числам A, B соответственно $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, \varphi(n) = (i_n, j_n)$ — биекция, то $\sum_{n=1} a_{i_n} b_{j_n}$ сходится абсолютно к AB*

Доказательство. Покажем, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{j_n}|$ ограничены.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{i_n} b_{j_n}| \leqslant \sum_{i=1}^{(\max_{i\leqslant n\leqslant N} i_n)} \sum_{j=1}^{(\max_{i\leqslant n\leqslant N} j_n)} |a_i b_j| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right)$$

Поэтому, эта шняга сходится. К чему? Ха-ха...

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1)^{(1)} & (1,2)^{(2)} & (1,3)^{(5)} & (1,4)^{(10)} & (1,5)^{(17)} & \dots \\
(2,1)^{(4)} & (2,2)^{(3)} & (2,3)^{(6)} & (2,4)^{(11)} & (2,5)^{(18)} & \dots \\
(3,1)^{(9)} & (3,2)^{(8)} & (3,3)^{(7)} & (3,4)^{(12)} & (3,5)^{(20)} & \dots \\
(4,1)^{(16)} & (4,2)^{(15)} & (4,3)^{(14)} & (4,4)^{(13)} & (4,5)^{(19)} & \dots \\
(5,1)^{(25)} & (5,2)^{(24)} & (5,3)^{(23)} & (5,4)^{(22)} & (5,5)^{(21)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

(красным помечен порядок обхода)

Заметим, что частичные суммы с индексом $n^2, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $S_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{N} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right) \left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right) \to AB$. Тогда и вся последовательность $\to AB$. □

Определение 2.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n, c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$ называется произведением по Коши рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то их произведение по Коши сходится абсолютно к их произведению сумм рядов

Теорема 2.12 (Мертенс). *Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то их произведеие Коши сходится к произведению их сумм*

Доказательство. B_N — N-ая частичная сумма, B — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда $B_N = B + \beta_N$, где $\beta_N \to 0$. Представим $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) + \dots + (a_1 b_N + \dots + b_1 a_N) = a_1 B_N + a_2 B_{N-1} + \dots + a_N B_1 = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot B + \gamma_N$$

Где $\gamma_N = a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_N\beta_1$. Т.к. $\sum_{k=1}^N a_k B \to AB$, то достаточно показать, что $\gamma_N \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\sum_{n=m+1}^N |a_n| < \varepsilon, |\beta_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant m$. Пусть $N \geqslant 2m$, тогда (положим $C = \sum |\beta_n|$):

$$|\gamma_N| = |a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_N\beta_1| \leqslant |a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_m\beta_{N-m+1}| + |a_{m+1}\beta_{N-m} + \dots + a_N\beta_1|$$

$$|a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_m\beta_{N-m+1}| + |a_{m+1}\beta_{N-m} + \dots + a_N\beta_1| \leqslant \sum_{k=1}^m |a_k|\varepsilon + C\sum_{k=m+1}^\infty |a_k| < \varepsilon\left(\sum_{k=1}^\infty |a_k| + C\right)$$

□

3 Ряд и Интеграл

$$g(b) = \sum_{k=0}^m \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{m!}\int_a^b (b-t)^m g^{(m+1)}(t)dt$$

Утверждение 3.1.

1. *Пусть $f \in C^1[1, +\infty]$ и $\int_1^\infty |f'(t)|dt$ сходится. Тогда $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ сходится одновременно с $\left\{\int_1^n f(t)dt\right\}$*
2. *Пусть $f \int C^2[1, +\infty)$, $\int_1^+ \infty |f''(t)|dt$ сходится. Тогда сходится ряд*

$$\left\{\int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n f(k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f'(k)\right\}$$

Доказательство. 1.

$$g(x) = \int_n^x f(t)dt$$

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n)\right| \leqslant \underbrace{\int_n^{n+1} |f'(t)|dt}_{\text{член сходящегося ряда}}$$

$\alpha_k = \int_k^{k+1} f(t)dt - f(k)$ — член сходящегося ряда.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = \int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n f(k) \text{ — сходится}$$

2.

$$\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2}\int_n^{n+1} (n+1-t)^2 f'(t)dt$$

$$\left|\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n) - \frac{1}{2}f'(n)\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}\int_n^{n+1} |f''(n)|dt}_{\text{Член сх. ряда}}$$

Но тогда

$$\int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f'(k)$$

Тоже сходится

□

Рассмотрим $f(t) = \ln t$.

$$\int_1^{n+1} \ln t dt = t\ln t|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dt = (n+1)\ln(n+1) - n$$

Следовательно, сходится последовательность

$$(n+1)\ln(n+1) - n - \sum_{k=1}^{n}\ln k - \frac{1}{2}\ln n = (n+1)\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \ln n! - \frac{1}{2}\ln n - n =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln n! - \ln e^n$$

Следовательно, сходится $\underbrace{\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + \ln n! + n\right\}}_{\ln\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}$

Поэтому, $\ln\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \to C > 0$ и $n! \sim C\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$. Найдем C, пользуясь формулой Валлиса

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Имеем

$$\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \sim \frac{2^{4n}}{n}\frac{C^4 n^{4n+2}e^{4n}}{e^{4n}C^2(2n)^{4n+1}} = \frac{C^2}{2} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

Но тогда

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n\to\infty$$

4 Функциональные последовательности и ряды

Пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (все утверждения тоже верны для $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 4.1. Говорят, что f_n поточечно сходится к f на E, если $\forall x \in E f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Пишут $f_n \to f$ на E, и f называют пределом функциональной последовательности f_n

Пример. $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \to f$, при $f(x) = \begin{cases} 0, x\in[0,1) \\ 1, x = 1\end{cases}$ Функция оказалась разрывна!

Распишем определение поточечной сходимост ипо по определению.

$$f_n \to f \text{ на } E \Leftrightarrow \forall x \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Определение 4.2. Говорят, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall x \forall n > N(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E, или $f_n \rightrightarrows_E f$

Замечание. Равномерная сходимость влечет поточечную

Замечание. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f определена на E однозначно

Лемма 4.1 (Супремум критерий)**.** $f_n \rightrightarrows_E f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, *где* $\rho_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$

Доказательство.

$$\forall x \in E(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon), \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Эти условия равносильны, поэтому лемма верна □

Задача. $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \{x\} \subset E \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$

Определение 4.3. Функциональная последовательность поточечно (равномерно) сходится на множестве E, если найдется такая определенная на E функция, к которой последовательность поточечно (равномерно) сходится

Пусть задан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n : E \to \mathbb{R}$

Определение 4.4. Говорят, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится на E, если $\forall x \in E$ $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))$ сходится. При этом, функция $S : E \to \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Определение 4.5. Функциональный ряд поточечно (равномерно) сходится на E, если последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ поточечно (равномерно) сходится на E

Утверждение 4.1. *Пусть* $g : E \rightrightarrows \mathbb{R}$ *ограничена*

1. *Если* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E*, то* $gf_n \rightrightarrows gf$ *на* E
2. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходится на* E*, то* $\sum_{n=1}^{\infty} gu_n$ *также равномерно сходится на* E*, причем*
$$\sum_{n=1}^{\infty} gu_n = g \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Доказательство.

1. Пусть $|g| \leqslant M$. Для любого $x \in E$ имеем
$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M|f_n(x) - f(x)|$$
$$\sup_{x\in E} |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$$

2. Очевидно

$\square$

Утверждение 4.2.

1. *Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, $g_n \rightrightarrows g$ на E, то $\lambda f_n + mug_n \rightrightarrows \lambda f + \mu g$ на E.*

2. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ равномерно сходится на E, и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n)$ равномерно сходится на E, причем $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n$*

Доказательство.

1. $f_n + g_n \rightrightarrows f$ на E.

$$\forall x \in E |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

$$\sup_{x\in E} |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in E} |g_n(x) - g(x)|$$

$\square$

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E, то $u_n \rightrightarrows 0$ на E

Доказательство. Если S_n — n-ая частичная сумма $sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то $u_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$ $\square$

Задача. *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E, $g : D \to E$, тогда $f_n \circ g \rightrightarrows f \circ g$ на D*

Теорема 4.1 (Критерий Коши). *$\{f_n\}$ равномерно сходится на E $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)(1)$*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E. Зафиксируем $\varepsilon > 0, n \geqslant N$. Тогда $\forall x \forall n, m \geqslant N |f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет (1). Тогда $\forall x \in E \{f_n(x)\}$ фундаментальна. Положим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N из условия (1). Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \forall x \in E \forall n \geqslant N$$

Это означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

$\square$

Следствие (Критерий Коши). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geqslant N \forall x \in E \left(\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| < \varepsilon\right)$

Следствие. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, все функции f_n непрерывны на $\overline{E}$. Если $\{f_n\}$ равномерно сходится на E, то $\{f_n\}$ равномерно сходится на $\overline{E}$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по Критерию Коши, $\exists N \forall n, m > N \forall x \in E(|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon)$. Пусть $y \in \overline{E} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset E : (x_k \to y)$. В неравенстве $|f_n(x_k) - f_m(x_k)| \leqslant \varepsilon$ переходим к прелельному переходу, получаем, что $|f_n(y) - f_m(y)| \leqslant \varepsilon$. Тогда $\{f_n\}$ равномерно сходится на $\overline{E}$ $\square$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ — сходится на $(1,\infty)$ неравеномерно.

Доказательство. Предположим противное. Но тогда, по следствию 2, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ равномерно сходтися на $[1,\infty)$, противоречие $\square$

Теорема 4.2 (О непрерывности предельной функции). *Пусть $E\subset\mathbb{R}$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, и все функции f_n непрерывны на E, то f — непрерывна на E*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Тогда $exists N\forall n\geqslant N\forall x\in E\left(|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Для любого $x\in E$

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(a)|+|f_N(a)-f(a)|\leqslant|f_N(x)-f_N(a)|+\frac{2\varepsilon}{3}$$

Т.к. f_N непрерывна в a, то $\exists\delta>0\forall x\in B_\delta(a)\cap E\left(|f_N(x)-f_N(a)|<\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Но тогда $\forall x\in B_\delta(a)\cap E(|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$. Значит f непрерывна в $\forall a\in E$. $\square$

Замечание. В условиях предыдущей теоремы, если a — предельная точка E, то $\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty}f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a}f_n(x)$

Следствие (О непрерывности суммы ряда). Если $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ равномерно сходится на E и все функции u_n непрерывны на E, то сумма ряда также непрерывна на E.

Пример. $f_n(x)=n^\alpha x^n, x\in[0,1], f_0\equiv 0$

$$\rho_n=\sup_{[0,1]}|f_n(x)|=n^\alpha\Rightarrow(f_n\rightrightarrows_{[0,1]}f_0\Leftrightarrow\alpha<0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n+1}=\int_0^1 f_0(x)dx=0\Leftrightarrow\alpha<1$$

Теорема 4.3 (Об интегрируемости предельной функции). *Если $f_n\rightrightarrows_{[a,b]}f, f_n\in R[a,b]\Rightarrow f\in R[a,b]$, причем $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$*

Доказательство. Докажем, что $f\in R[a,b]$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. По определению равномерной сходимости, $\exists N\forall n>N\forall x\in[a,b]\left(|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Оценим колебание f на $E\subset[a,b]$, то есть оценим $\omega(f,E)=\sup_{x,y\in E}|f(y)-f(x)|$. Т.к. $f=(f-f_N)+f_N\Rightarrow|f(y)-f(x)|\leqslant|f-f_N|(y)-|f-f_N|(x)|+|f_N(y)-f_N(x)|\Rightarrow\omega(f,E)\leqslant\omega(f-f_N,E)+\omega(f_N,E), \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. По критерию Дарбу, $\exists T$ — разбиение $[a,b]$, такое, что $\Omega_T(f_N)<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для разбиения T имеем $\Omega_T(f)\leqslant\sum\omega(f,E)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Но тогда $f\in R[a,b]$. При этом,

$$\left|\int_a^b f_n(x)fx-\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx<\varepsilon$$

$\square$

Следствие (О почленном интегрировании ряда). Если $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ равномерно сходится на $[a,b]$ и все $u_n\in R[a,b]$, то сумма ряда также $\in R[a,b]$

Доказательство.

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(x)dx\right)$$

$\square$

Замечание. В условиях предыдущей теоремы, $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Теорема 4.4 (О дифференцируемости предельной функции)**.** *Пусть I — некоторый промежуток и заданы функции $f_n : I \to \mathbb{R}$, такие, что:*

1. $f_n \to f$ *на* I
2. *Все* f_n *дифференцируемы на* I
3. $f_n' \rightrightarrows g$ *на* I

Тогда f дифференцируема на I, причем $f' = g$ на I.

Доказательство. Пусть $x \in I$. Рассмотрим $\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}, t \neq x \\ f_n'(x), t = x \end{cases}$ $\varphi_n \to \varphi$ на I, где $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, t \neq x \\ g(x), t = x \end{cases}$. Покажем, что сходимость равномерная. Действительно, при $t \neq x$

$$\varphi_n(t) - \varphi_m(t) = \frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(x) - f_m(x))}{t - x} = f_n'(c) - f_m'(c)$$

Для некоторой c, лежащей между t, x. Т.к. $\{f_n'\}$ равномерно сходится на I, то $\{f_n'\}$ удовлетворяет условию Коши. Тогда условию Коши удовлетворяет и $\{\varphi_n\}$. По критерию Коши, $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на I, все φ_n непрерывны в $x \Rightarrow \varphi$ непрерывна в точке x, т.е. $\lim_{t\to x}\varphi(t) = \varphi(x)$, или $f'(x) = g(x)$. □

Замечание. В условиях предыдущей теоремы, $\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$

Следствие (О почленном дифференцировании ряда)**.** Пусть I — невырожденный промежуток, и $u_n : I \to \mathbb{R}$, т.ч.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ почленно сходится на I
2. все u_n дифференцируемы на I
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на I

Тогда сумма ряда дифференцируема на I.

Доказательство.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

□

Замечание. В предыдущей теореме равномерную сходимость производных нельзя заменить равномерной сходимостью функций.

Пример. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} f_n(x) \to f(x) = |x|$. Предельная функция не дифференцируема в 0.

Теорема 4.5 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть задан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на E, и числовая последовательность $\{a_n\}$, причем*

1. *$\forall x \in E \forall n \in \mathbb{N}(|u_n(x)| \leqslant a_n)$*

2. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится*

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится равномерно и абсолютно на E

Доказательство. Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > m \geqslant N \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_n < \varepsilon\right)$. Тогда $\forall n > m \geqslant N$ и $\forall x \in E$:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |u_n(x)| < \sum_{k=m+1}^{n} a_n < \varepsilon$$

Таким образом, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ удовлетворяет условию Коши на E. Тогда эти ряды равномерно сходятся на E □

Замечание. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется мажорантным рядом для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Определение 4.6. Пусть задана $g_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. последовательность $\{a_n\}$ называется равномерно ограниченной на множестве E, если $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in E(|g_n(x)| \leqslant C)$

Теорема 4.6 (Признак Дирихле). *Пусть $a_n, b_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — такие функциональные последовательности, что*

1. *$A_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$ равномено ограничены на E*

2. *$\forall x \in E\{b_n(x)\}$ монотонна*

3. *$b_n \rightrightarrows 0$ на E*

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится равномерно на E

Доказательство. Так как $\{A_N\}$ равномерно ограничена $E \Rightarrow \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in E(|A_n(x)| \leqslant C)$. Тогда $\forall n, m(n > m)$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)\right| = |A_n(x) - A_m(x)| \leqslant 2C$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $b_n \rightrightarrows_E 0$, то $\exists N \forall n \geqslant N \forall x \in E \left(\left|b_n(x) < \frac{\varepsilon}{8C}\right|\right)$. Тогда по лемме Абеля, $\forall n > m \geqslant N \forall x \in E$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2 \cdot 2C\left(|b_n(x)| + |b_{m+1}(x)|\right) < \varepsilon$$

□

Следствие (Принцип Лейбница). Если для каждого $x \in E$ последовательность $\{\alpha_n(x)\}$ монотонна и $\alpha_n \rightrightarrows 0$ на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha_n$ равномерно сходится на E

Следствие. Пусть отрезок $I \not\ni 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Если $\forall x \in I\{\alpha_n(x)\}$ монотонна и $\alpha_n \rightrightarrows_I 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx$ равномерно сходится на I

Доказательство. Докажем, что $\left|\sum_{n=1}^N \sin nx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \forall x \in I$. Т.к. $\inf_I \left|\sin\frac{x}{2}\right| = c > 0 \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^N \sin nx\right| \leqslant \frac{1}{c}$. По принципу Дирихле заключаем, что $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \sin nx$ равномено сходится на I □

Теорема 4.7 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $a_n, b_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, *такие, что*

1. *Ряд* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *равномерно сходится на* E
2. $\forall x \in E\{b_n(x)\}$ *монотонна*
3. $\{b_n\}$ *равмномерно ограничена на* E

Тогда $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ *сходится равномерно на* E

Доказательство. Т.к. $\{b_n\}$ равномерно ограничена на $E \Rightarrow \exists C > 0 \forall n \forall x \in E(|b_n(x)| \leqslant C)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ на E, по Критерию Коши, $\exists N \forall n > m \geqslant N \forall x \in E \left(\left|\sum_{k=m+1}^n a_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{c}\right)$. По Лемме Абеля, $\forall x \in E \forall n > m \geqslant N$ имеем

$$\left|\sum_{k=m+1}^n a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{4C}\left(|b_{m+1}(x)| + |b_n(x)|\right) \leqslant \varepsilon$$

По Критерию Коши, ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ равномерно сходится на E. □

Пример. Исследуем сходимость и равномерную сходимость $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{x^\alpha}$ на $E_1 = (0, 2\pi), E_2 = [\delta, 2\pi - \delta], \delta \in (0, \pi)$

1. Исслудуем поточечную сходимость.
   (a) $\alpha > 0$. $\forall x \in E$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{x^\alpha}$ сходится по следствию из признака Дирихле
   (b) $\alpha \leqslant 0$. Покажем, что при $x \in E \setminus \{\pi\}$ ряд расходится по необходимому условию. Достаточно показать, что $\sin nx \not\to 0$. Действительно, $\sin nx \to 0 \Rightarrow \sin(n+1)x \to 0$. Но $\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx + \sin x \Rightarrow \cos nx \to 0$. Противоречие, т.к. $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$.

2. Исслудуем равномерную сходимость. На E_2 ряд равномерно сходится $forall \alpha > 0$.
   (a) $\alpha > 1$.
   $$\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$
   Следовательно, $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{x^\alpha}$ — равномерно сходится по признаку Вейерштрасса
   (b) $0 < \alpha \leqslant 1$. Покажем, что равмномерной сходимости нет. Рассмотрим $x_n = \frac{\pi}{4n}$. Рассмотрим $k \in [n, 2n] \Rightarrow kx_n \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда
   $$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx_n}{k^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{2n} \frac{\sin kx_n}{k^\alpha} > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n}{(2n)^\alpha} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
   Получили, что
   $$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \forall N \exists m = 2, n \geqslant N \exists x_n = \frac{\pi}{4n}\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx_n}{k^\alpha}\right| < \varepsilon$$

Теорема 4.8 (Признак Дини)**.** *Пусть $\{f_n\}$ поточечно сходтися к f на $[a,b]$, причем $\forall x \in [a,b], \{f_n(x) - f(x)\}$ нестрого убывает. Если f, f_n непрерывны на $[a,b]$, то $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$*

Доказательство. $\forall x \in [a,b] \forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon,x} \forall j \geqslant N (0 \leqslant f_j(x) - f(x) < \varepsilon)$. В силу непрерывности f, f_n имеем $\exists \delta_x \forall t \in B_{\delta_x}(x) \cap [a,b] (0 \leqslant f_i(t) - f(t) < \varepsilon)$.

$$\bigcup_{x\in[a,b]} B_{\delta_x}(x) \supset [a,b] \Rightarrow \text{По Лемме Гейне-Бореля} \Rightarrow \exists x_1, x_2 \dots x_n : [a,b] \subset \bigcup B_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

Положим $N = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{N_{x_i,\varepsilon}\}$. Тогда $\forall j \geqslant N \forall t \in [a,b] (0 \leqslant f_j(t) - f(t) < \varepsilon)$. Это означает что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ □

Замечание. $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$

Пример (Непрерывная нигде не дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)**.**

$$\varphi(x) = |x|, x \in [-1,1], \varphi(x) = \varphi(x \pm 2)$$

Заметим, что если (x,y) не содержит целых точек, то $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$. Построим функцию $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x) = \frac{1}{4^n}\varphi(4^n x) \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{4^n} \Rightarrow f_n \rightrightarrows_{\mathbb{R}} f$. Т.к. f_n непрерывна на $\mathbb{R} \Rightarrow f$ — тоже. Докажем, что f не дифференцируема ни в какой точке $\mathbb{R}$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Среди интервалов $\left(4^k a, 4^k a + \frac{1}{2}\right), \left(4^k a - \frac{1}{2}, 4^k a\right)$ хотя бы один не содержит целых точек. Поэтому, $\exists h_k = \pm\frac{1}{2}4^{-k}$ (h_k всегда одного знака), что на интервале с концами $4^k(a+h_k), 4^k a$ нет целых точек. Более того, интервалы с концами $4^n a, 4^n(a+h_k), n < k$ тоже не имеют целых точек, т.к. в противном случае можно домножить на 4^{k-n} и получим, что существует целая точка из $4^k(a+h_k), 4^k a$. Следовательно, $|\varphi(4^n(a+h_k)) - \varphi(4^n a)| = 4^n|h_k|, n \leqslant k$, $|\varphi(4^n(a+h_k)) - \varphi(4^n a)| = 0, n > k$, т.к. $4^n h_k$ будет целым, а наша функция 2-периодична. Тогда $|f_n(a+h_k) - f_n(a)| = \begin{cases} |h_k|, n \leqslant k \\ 0, n > k \end{cases}$ Поэтому $\frac{f(a+h_k)-f(a)}{h_k} = \sum_{n=1}^{k} \pm 1 = \left[\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right.$

5 Степеннные ряды

5.1 Радиус сходимости

Определение 5.1. Степенным рядом с центром в точке x_0 и коэффициентами a_n называется функциональный ряд следующего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

Где a_n, x_0, x — либо $\in \mathbb{R}$, либо $\in \mathbb{C}$

Теорема 5.1 (Коши-Адамара)**.** *Пусть $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ($\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0$)*

1. *Если $|x - x_0| < R$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ абсолютно сходится*

2. *Если* $|x - x_0| > R$, *то степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *расходится*

3. *Если* $r \in (0, R)$, *то степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *равномерно сходится на* $\overline{B_r(x_0)} = \{x : |x - x_0| \leqslant r\}$.

Доказательство. При $x \neq x_0$ имеем $q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0}{R}$.

1. $|x - x_0| > R \Rightarrow q < 1$ — тогда ряд абсолютно сходится по признаку Коши

2. $|x - x_0| > R \Rightarrow q > 1$ — тогда n-ый член не стремится к 0.

3. Пусть $rin(0, R)$. Но тогда по пункту 1, ряд сходится абсолютно в $x = x_0 + r$, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится, при этом $\forall x : |x - x_0| \leqslant r \Rightarrow |a_n(x - x_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$ — член сходищегося ряда. Поэтому ряд равномерно сходтися на $\overline{B_r(x_0)}$ по признаку Вейерштрасса.

□

Определение 5.2. Величина R из предыдущей теоремы называется радиусом сходимости ряда. Множество $B_R(x_0) = \{x : |x - x_0| < R\}$ называется интевалом сходимости (кругом сходимости для комплексного степенного ряда)

Следствие. Пусть $R \in [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям

1. Если $\forall x : |x - x_0| < R \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится

2. Если $\forall x : |x - x_0| > R \Rightarrow$ ряд расходится

Тогда R — радиус сходимости.

Доказательство. Предположим противное, тогда $R \leqslant R'$, где R' — радиус сходимости, т.к. $\forall x : |x - x_0| < R \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится. При этом $R \geqslant R'$, т.к. $\forall x : |x - x_0| > R \Rightarrow$ ряд расходится. Но тогда $R = R'$ □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$$

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{|x|^2}{e}$$

По признаку Даламбера, $\frac{|x|^2}{e} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{e} \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится $\frac{|x|^2}{e} > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{e} \Rightarrow$ ряд расходится $\Rightarrow \sqrt{e}$ — радиус сходимости

Теорема 5.2 (Абеля)**.** *Если степенной ряд имеет радиус сходимости* $R \in (0, +\infty)$ *и сходится в* $x = x_0 + R$, *то он равомерно сходится на* $[x_0, x_0 + R]$.

Доказательство. Сделаем замену $y = \frac{x - x_0}{R}$. Получим, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, с радиусом $R = 1$. Введем обозначения $A_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} a_k$, $A_{m,m} = 0$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ Тогда

$$S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = \sum_{k=m+1}^{n} (A_{k,m} - A_{k-1,ms}) x^k = \sum_{k=m+1} A_{k,m} x^k - \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m} x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m}(x^k - x^{k+1}) - A_{n,m}x^n$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \exists N \forall n > m \geqslant N \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$. Но тогда на $[0, 1]$

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |A_{k,m}|\,|x^k - x^{k+1}| + |A_{n,m}||x^n| < \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (x^k - x^{k+1}) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

$\square$

Задача. *Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — произведение по Коши a_n, b_n. Доказать, что $AB = C$, где $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$*

5.2 Операции с числовыми рядами

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \text{ радиус сходимости: } R_1$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n, \text{ радиус сходимости: } R_2$$

1. $\lambda f : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n(x - x_0)^n$
2. $f + g : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(a_n + b_n)(x - x_0)^n, R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$
3. $fg : \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k(x - x_0)^n\right), R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$ (произведение по Коши)
4. $f' : \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$

Замечание. Пусть $x : |x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$. Тогда $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ также абсолютно сходятся

Замечание. Пусть $R_1 \neq R_2$ R — радуис сходимости $f + g \Rightarrow R = \min\{R_1, R_2\}$

Замечание.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ радиус сходимости: } 1$$

$$g(x) = 1 - x, \text{ радиус сходимости: } +\infty$$

Тогда $f(x)g(x) = 1 + 0 + 0 + \cdots \Rightarrow$ радиус сходимости: $+\infty$

Ключевым здесь является факт, что степенной ряд можно почленно дифферецировать

Лемма 5.1. *Если степенной ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ имеет радиус сходмости R, то почленно продифференцированный ряд $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x - x_0)^{n-1}$ имеет тот же радиус сходимости*

Доказательство. Т.к. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то $\{\sqrt[n]{na_n}\}$ и $\sqrt[n]{a_n}$ имеют одинаковые множества частичных пределов $\Rightarrow$ у них совпадают верхние пределы $\Rightarrow$ по формуле Коши-Адамара, радиусы сходимости у рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^n$ одинаковые. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ сходятся в $x = x_0$, а при $x \neq x_0$ отличаются домножением на $x - x_0$. Тогда они тоже имеют одинаковые радиусы сходимости. $\square$

Теорема 5.3. *Если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ — ряд с радиусом $R > 0$, то f бесконечно дифференцируема на интервале сходимости, причем $f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}$ при $|x-x_0| < R$*

Первое доказательство. Пусть $0 < r < R$, тогда по почленно продифференцированный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ сходится абсолютно на $[x_0 - r, x_0 + r]$. Обозначим сумму этого ряда через g. Тогда $f' = g$ на $[x_0 - r, x_0 + r]$. Т.к. $r \in (0, R)$ — любое, то верно и равенство на $x_0 - R, x_0 + R$. $\square$

Второе доказательство. Заменой $w = x - x_0$ можно свести все к случаю, когда $x_0 = 0$. Пусть $t \in B_R(0)$. Покажем, что производящие функции $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в точке t равна $l = \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1}$. Зафиксируем $r : |t| < r < R$. При $x \neq t, |x| \leqslant r$. Рассмотрим $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} - l = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x^n - t^n}{x-t} - nt^{n-1}\right)$. Причем $\frac{x^n-t^n}{x-t} - nt^{n-1} = x^{n-1} + x^{n-2}t + \dots + xt^{n-2} + t^{n-1} - nt^{n-2} = (x^{n-1} - t^{n-1}) + t(x^{n-2} - t^{n-2}) + \dots + (x-t)t^{n-2} = (x-t)((x^{n-2} + x^{n-3}t + \dots + t^{n-2}) + t(\dots) + \dots + t^{n-2}) \leqslant r^{n-2}$ $\square$

Следствие (Теорема Единственности)**.** Если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ — сумма степенного ряда, то $a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$

Доказательство. $f^{(m)}(x_0) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(x_0-x_0)^{n-m} = m(m-1)\dots 1a_m \Rightarrow a_m = \frac{f^{(m)}}{m!}$ $\square$

Следствие. Сумма $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ имеет первообразную на $(x_0 - R, x_0 + R)$

Доказательство.

$$F(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

$\square$

6 Ряды Тейлора

Определение 6.1. Пусть функция f определена на интервале, содержащем точку x_0 и в точке x_0 имеет производные любого порядка, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется рядом Тейлора функции f в точке x_0. Если $x_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена

Пример (Бесконечно дифференцируемая функция, не являющаяся суммой своего ряда Тейлора)**.** $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$ $f^{(n)}(x) = 0$ при $x < 0$, $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$, при $x > 0$, где p_n — многочлен степени $2n$. Действительно,

$$f^{(n+1)}(x) = p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} + p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

Покажем, что $f^{(n)}(0) = 0$ по индукции по n

База: $n = 0$ очевидно.

Переход:

$$(f^{(n)})'_+(0) = \lim_{x\to+0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{tp_n(t)}{e^t} = 0$$

Лемма 6.1. *Пусть f бесконечно дифференцируема на некотором интервале, содержащем x_0. Если $\exists M, r > 0 : \forall k(|f(x)| \leqslant M^k k! \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r))$, то $\exists \delta \in (0, r] \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$*

Доказательство.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c(n, x))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}, c(n, x) \text{ лежит между } x, x_0$$

Можно выбрать $\delta : M\delta < 1$

$$|R_n(x)| \leqslant M^{n+1}|x - x_0|^{n+1} < (M\delta)^{n+1} \to 0$$

Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ □

Следствие. Если f бесконечно дифферецируема на интервале, содержащем точку x_0 и $(x_0 - r, x_0 + r)$ и $\exists M > 0 \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \forall k |f^{(k)}(x)| \leqslant M$, то $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_0)^k$

Следствие. Ряды Маклорена $e^x, \sin x, \cos x$ сходятся к этим функциям $\forall x \in \mathbb{R}$, т.е.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Доказательство. $(e^x)^{(k)} = e^x, (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), (\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right)$. Поэтому при $|x| \leqslant \delta : (e^x)^{(k)} \leqslant e^\delta, (\sin x)^{(k)} \leqslant 1, (\cos x)^{(k)} \leqslant 1$ □

Теорема 6.1. *Пусть $\alpha \neq \mathbb{N}_0, C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, C_\alpha^0 = 1$. Тогда $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, |x| < 1$*

Доказательство. $f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = C_\alpha^n$. Имеем при $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_\alpha^{n+1} x^{n+1}|}{|C_\alpha^n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - \alpha}{n + 1}|x| = |x|$$

По признаку Даламбера при $|x| < 1$ ряд абсолютно сходится, при $|x| > 1$ — абсолютно расходится. Тогда $R = 1$. Обозначим $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n$ и покажем, что $g \equiv f$ на $(-1, 1)$, т.е. $g(x)(1 + x)^{-\alpha} = 1 \forall x \in (-1, 1)$. Имеем

$$g(x)(1 + x)^{-\alpha} = (1 + x)^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} - \alpha(1 + x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n =$$

$$(1 + x)^{-\alpha-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n\right) =$$

$$(1+x)^{-\alpha-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{\alpha}^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha-n)C_{\alpha}^{n}\right)=0$$

Следовательно, $g(x)(1+x)^{-\alpha}$ постоянна на $(-1,1)$. $g(0)=1\Rightarrow g(x)(1+x)^{-\alpha}=1$ □

Замечание. Покажем, что биномиальный ряд при $\alpha>0$ сходится равномерно на $[-1,1]$.

Доказательство. Рвссмотрим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|C_{\alpha}^{n}|$. Для него $\left|\frac{C_{\alpha}^{n+1}}{C_{\alpha}^{n}}\right|=\frac{n-\alpha}{n+1}=1-\frac{\alpha+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Следовательно, по признаку Гаусса при $\alpha>0$, ряд схоодтся на $[-1,1]$. Но тогда $\forall x\in[-1,1]|C_{\alpha}^{n}x^n|\leqslant|C_{\alpha}^{n}|$ □

Пример. Рассмотрим $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ на $(-1,1)$. Тогда по следствию из теоремы $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}$. Т.к. ряд сходится при $x=1\Rightarrow$ равномерно сходится на $[0,1]$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\ln 2$.

Задача. *Разложить* arctg. *Получив разложение, найти сумму* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

7 Метрические пространства

7.1 Метрики и нормы

Определение 7.1. Пусть $X\neq\varnothing$ — произвольное множество. Функция $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ называется метрикой на X, если $\forall x,y,z\in X$ выполнено

1. $\rho(x,y)\geqslant 0, \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$

Определение 7.2. (X,ρ) — метрическое пространство.

Пример. Пусть X — произвольное непустое множество, $\rho(x,y)=\begin{cases}0, x=y\\ 1, x\neq y\end{cases}$. Тогда (X,ρ) — метрическое пространство.

Доказательство. Предоставляется читателю в качестве нетрудного упражнения. □

Определение 7.3. ρ из прошлого примера называется называется дискретной метрикой

Определение 7.4. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R},\mathbb{C}$. Функция $\|x\|: V\to\mathbb{R}$ называется нормой на V, если

1. $\|x\|\geqslant 0, \|x\|=0\Leftrightarrow x=0$
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$
3. $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

Определение 7.5. Пара $(V,\|x\|)$ называется нормированным линейным пространством

Лемма 7.1. *Всякое нормированное пространство является метрическим, для* $\rho(x,y)=\|x-y\|$

Доказательство.

1. $\|x-y\| \geqslant 0, \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $\|x-y\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\|$
3. $\|x-y\| + \|y-z\| \geqslant \|x-z\|$

□

Рассмотрим $X=\mathbb{R}^n$, $x=(x_1\dots x_n), y=(y_1,y_2\dots y_n)$.

Пример. $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$ — норма, $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k-y_k|^2}$ — метрика.

Пример. $\|x\| = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ — норма, $\rho(x,y) = (\sum_{k=1}^n |x_k-y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ — метрика.

Доказательство.

1. $\|x-y\| \geqslant 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — очев
2. $\|x-y\| = \|y-x\|$ — очев
3. Буквально неравество Минковского (см 1 семестр)

□

Пример. $\|x\| = \max\{x_i\}$ — метрика, $\rho(x,y) = \max\{x_i - y_i\}$

Определение 7.6. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $a\in X, r>0$. $B_r(a) = \{x \in X | \rho(x,a) < r\}$ называется открытым шаром в центре a и радиуса r

Определение 7.7. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $a\in X, r>0$. $\overline{B_r}(a) = \{x \in X | \rho(x,a) \leqslant r\}$ называется замкнутым шаром в центре a и радиуса r

Определение 7.8. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Множество E называется ограниченным, если $\exists a \in X, r \in \mathbb{R} : E \subset B_r(a)$

Определение 7.9. Пусть $\{x_n\} \subset X, a \in X$. Говорят, что x_n сходится к a, если $\rho(x_n,a)\to 0$. Пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Замечание.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (x_n \in B_\varepsilon(a))$$

Следствие. $x_n \to a, x_n \to b \Leftrightarrow a = b$

Доказательство. $0 \leqslant \rho(a,b) \leqslant \underbrace{\rho(a,x_n)}_{\to 0} + \underbrace{\rho(x_n,b)}_{\to 0}$ □

Следствие. $x_n \to a \Rightarrow \{x_n\}$ — ограничена (то есть $\{x_n\}$ ограничено как множество).

Доказательство. $\rho(x_n,a)\to 0 \Rightarrow \{\rho(x_n,a)\}$ ограничена $\Rightarrow \exists R \in \mathbb{R} : R > \sup\{\rho(x_n,a)\} \Rightarrow x_n \in B_R(a)$. □

Следствие. Пусть $\{x_n\},\{y_n\} : x_n \to a, y_n \to b$ — последовательности в нормированном линейном пространестве, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R} : \alpha_n \to \alpha$. Тогда

1. $x_n + y_n \to a + b$

2. $\alpha_n x_n \to \alpha a$

Доказательство.

1. $\|x_n + y_n - (a+b)\| \leqslant \underbrace{\|x_n - a\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n - b\|}_{\to 0}$

2. $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha a\| \leqslant \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\to 0} \|x_n\| + |\alpha| \underbrace{\|x_n - a\|}_{\to 0}$

□

7.2 Топология метрических пространств

Определение 7.10. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$.

1. $x \in int\ E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset E$. Множество $int\ E$ называются множеством внутренних точек

2. $x \in ext\ E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$. Множество $ext\ E$ называются множеством внешних точек

3. $x \in \delta E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing, B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing$. Множество δE называются множеством граничных точек

Определение 7.11.

1. $X = int\ E \sqcup ext\ E \sqcup \delta E$

2. $ext\ E = int\ (X \setminus E)$

Определение 7.12. Множество $G \subset X$ называется открытым, если все его точки являются внутренними ($G = int\ G$)

Определение 7.13. Множество $G \subset X$ называется открытым, если $X \setminus G$ открыто

Утверждение 7.1.

1. *Открытый шар $B_r(a)$ открыт*

2. *Замкнутый шар $\overline{B_r}(a)$ замкнут*

3. *$int\ E$ открыто*

Доказательство.

1. $x \in B_r(a)$. Положим $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Тогда если $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow \rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) \leqslant \varepsilon + \rho(x, a) \leqslant r \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.

2. $x \in X \setminus \overline{B_r}(a)$. $\varepsilon = \rho(x, a) - r \Rightarrow$ аналогично пункту 1), $X \setminus \overline{B_r}(a)$ — открыто, т.е. $\overline{B_r}(a)$ — замкнуто

3. $x \in int\ E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset int\ E$, т.к. $B_\varepsilon(x)$ — открыто.

$\square$

Лемма 7.2. *Объединение любого количества открытых множеств и пересечение конечного количества открытых множеств является открытым множеством*

Доказательство. Аналогично случаю для $\mathbb{R}$ $\square$

Определение 7.14. $\overset{\circ}{B}_r(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$

Определение 7.15. Точка $x \in X$ называется предельной множества E, если $\forall \varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$

Множество всех предельных точек принято обозначать через E'

Теорема 7.1 (Критерий замкнутости)**.** *Следующие утверждения равносильны:*

1. E *— замкнуто*
2. $E \supset \delta E$
3. $E \supset ext\ E$
4. $\forall \{x_n\} \subset E (x_n \to x \Rightarrow x \in E)$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $x \in X \setminus E \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$, т.е. x — внешняя точка E. Тогда $\delta E \subset E$

$2 \Rightarrow 3$: Пусть x — предельная точка тогда она либо внутренняя, и тогда $x \in E$, либо граничная, но $\delta E \subset E \Rightarrow x \in E$

$3 \Rightarrow 4$: Пусть $\{x_n\} \subset E, x_n \to x$. Тогда либо $\exists x_n = x$ и тогда $x \in E$, либо x — предельная точка, и она $\in E$.

$4 \Rightarrow 1$: Рассмотрим $x \in X \setminus E$. Пусть она не является внутренней для $X \setminus E$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \Rightarrow$ рассмотрим последовательность точек $x_n \in \exists B_\varepsilon(x) \cap E : x_n \to x$. Такая последовательность существует по Аксиоме Выбора ($\exists \varphi : 2^X \to X : \varphi(x) \subset X \Rightarrow x_n = \varphi\left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)$). Но тогда $x \in E$. Противоречие

$\square$

Определение 7.16. $\overline{E} = E \cup \delta E$ — замыкание множества E

Замечание.

1. $\overline{E} = X \setminus ext\ E$
2. $F \supset E$, причем F — замкнутое. Тогда $F \supset \overline{E}$

Доказательство.

1. $X = int\ E \cup ext\ E \cup \delta E$.
2. $X \setminus F \subset X \setminus E \Rightarrow X \setminus F \subset int\ (X \setminus E) \Rightarrow F \supset \overline{E}$.

$\square$

Замечание. $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E (x_n \to x)$

Определение 7.17. $x \in X$ называется точкой прикосновения E, если $\forall \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$

7.3 Подпространство метрического пространства

Определение 7.18. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\varnothing \neq E \subset X$. Тогда $\rho|_{E\times E}$ — метрика на E. Пара $(E, \rho|_{E\times E})$ называется подпространством (X,ρ), $\rho|_{E\times E}$ называется индуцированной метрикой на E

Определение 7.19. $B_r^E(x) = \{y \in E | \rho(x,y) < \varepsilon\}$

Замечание. $B_r^E(x) = B_r^X(x) \cap E$

Лемма 7.3. *U открыто в $E \Leftrightarrow \exists V \subset X : U = V \cap E$, причем V открыто*

Доказательство.

- $\Rightarrow$ $x \in U \Rightarrow \exists B_{\varepsilon_x}^E(x) \subset U$, т.е. $U = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^E(x)$. Положим $V = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^X(x)$ — открытое в X. Тогда $V \cap E = \bigcup_{x\in U}(B_{\varepsilon_x}^X(x) \cap E) = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^E(x) = U$
- $\Leftarrow$ $x \in U = V \cap E$, где V открыто в $X \Rightarrow \forall x \in V \exists B_\varepsilon^X(x) \subset V \Rightarrow B_\varepsilon^E(x) = B_\varepsilon^E(x) \cap E \subset V \cap E$.

□

Пример. $X = \mathbb{R}, E = (-1, 3]$.

1. $A = (1,3] = (1,4) \cap E$ — открыто в E (но не в X)
2. $B = (-1, 0)$ замкнута в E (но не в X)
3. $C = (0,1]$ — не замкнуто и не открыто

7.4 Компакты

Пусть (X,ρ) — метрические пространства, $K \subset X$ — подпространство.

Определение 7.20. Семейство $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где $G_\lambda \subset X$ называется покрытием K, если $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$

Определение 7.21. Если $\forall\lambda G_\lambda$ — открытое множество, то $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется открытым покрытием

Определение 7.22. K называется компактом в X, если $\forall$ открытого покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, существует конечное подпокрытие, т.е. $\exists m \in \mathbb{N}, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \in \Lambda : K \subset \bigcup G_{\lambda_i}$

Пример. Замкнутый брус $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ является компактом в $\mathbb{R}^n$

Доказательство. Пусть это не так. Поделим ребра изначального бруса пополам и рассмотрим брусья, которые получаются произведением отрезков, каждый из которых является половиной изначального отрезка соответственно. Один из таких брусьев не покрывается конечным числом G_λ, полученный брус назовем B^2 Разделим его на 2^n частей и будем продолжать процесс — получатся брусья $B^k \forall k$. Заметим, что $|b_n^k - a_n^k| \to 0$ при $k \to \infty$ (каждый отрезок делится пополам). Тогда последовательность отрезков $u_k = [a_n^k, b_n^k]$ будет стягивающейся. Тогда $\forall n \exists c_n : c_n \in [a_n^k, b_n^k]$. Тогда $\exists C \in \mathbb{R}^n : C = (c_1, c_2, \dots c_n) \in B^k \forall k$, при этом $\exists G_\lambda : C \in G_\lambda \Rightarrow \exists \varepsilon : B_\varepsilon(C) \subset G_\lambda$. Выберем k так, чтобы $\sum_{i=1}^n (b_i^k - a_i^k) < \varepsilon$. Так можно сделать, т.к. $[a_n^k, b_n^k]$ — стягивающаяся по k. Но тогда $\forall T \in B^k \quad \rho(T, C) \leqslant \sum_{i=1}^n (b_i^k - a_i^k) < \varepsilon \Rightarrow B^k \subset B_\varepsilon(C) \subset G_\lambda \Rightarrow$ противоречие, т.к. B^k не должно покрываться конечнм числом G_λ □

Замечание. K — компакт в $(X,\rho) \Leftrightarrow K$ компакт в (K,ρ).

Доказательство. Следует из определения компактности и структуры подпространств $\square$

Лемма 7.4. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Если K — компакт, то K ограничено и замкнуто в X*

Доказательство. Пусть $a \in X$. Т.к $\{B_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие $K \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие, т.е. $\exists N : K \subset \{B_n(a)\}_{n\leqslant N}$. Но тогда $K \subset B_N(a)$. Теперь, пусть $a \in X \setminus K$. Рассмотрим $\{X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Это тоже покрытие K. Но тогда $\exists N : K \subset \{X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n\leqslant N}$. Но тогда $K \in X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{N}}(a) \Rightarrow \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a) \cap K = \varnothing$. $\square$

Лемма 7.5. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, K — компакт в X. Если $F \subset K$, F замкнуто в X, то F — компакт.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ для F. Тогда $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{X \setminus F\}$ — открытое покрытие K, т.к. $\bigcup G_\lambda \cup (X \setminus F) = X$. Поскольку K — компакт, то $K \subset \bigcup_{i\leqslant N} G_{\lambda_i} \cup (X \setminus F) \Rightarrow F \subset \bigcup_{i\leqslant N} G_{\lambda_i}$ $\square$

Лемма 7.6 (Лебега о покрытии)**.** *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$ — такое, что любая последовательность элементов из K имеет сходящуюся в K подпоследовательность. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — открытое покрытие K, тогда $\exists\varepsilon > 0 \forall x \in K \exists\lambda \in \Lambda(B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda)$*

Доказательство. От противного. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\exists x_n \in K \forall\lambda \in \Lambda \left(B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset G_\lambda\right)$. По условию, $\exists\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to x \in K$. $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \exists\lambda_0 \in \Lambda(x \in G_{\lambda_0}) \Rightarrow \exists\alpha > 0 B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$ Начиная с какого-то момента, $x_{n_k} \in B_{\frac{\alpha}{2}}(x), \frac{1}{n_k} < \frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим $z \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Тогда $\rho(z,x) \leqslant \rho(z,x_{n_k}) + \rho(x,x_{n_k}) < \alpha$, т.е. $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$. Получили противоречие, т.к. $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset G_{\lambda_0}$ $\square$

Теорема 7.2. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *K — компакт*
2. *Любая полследовательность элементов из K имеет сходящуюся в K подпоследовательность.*

Доказательство.

$(1) \Rightarrow (2)$ Предположим, что из последовательности $\{x_n\}$ нельзя выделить сходящуюся последовательность, т.е.

$$\forall a \in K \exists\delta_a > 0 \exists N_a \forall n \geqslant N_a(x_n \notin B_{\delta_a}(a))$$

Заметим, что $\{B_{\delta_a}(a)\}_{a\in K}$ — открытое покрытие K. Тогда $K = \bigcup_{i\leqslant N} B_{\delta_{a_i}}(a_i)$. Но тогда в каком-то из множеств $B_{\delta_{a_i}}(a_i)$ бесконечно много точек, противоречие, т.к. $\exists N_{a_i} \forall n \geqslant N_{a_i}(x_n \notin B_{\delta_{a_i}}(a_i)) \Rightarrow$ их должно быть конечно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть любая полследовательность элементов из K имеет сходящуюся в K. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\exists x_1, x_2 \dots x_n \subset K(K \subset \bigcup B_\varepsilon(x_i))$$

Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — открытое покрытие K по Лемме, $\exists\varepsilon > 0\forall x \in K\exists\lambda \in \Lambda(B_\varepsilon(x)) \subset G_\lambda$. Но тогда рассмотрим $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ такие, что $B_\varepsilon(x_i) \subset G_{\lambda_i} \Rightarrow K \subset \bigcup G_{\lambda_i}$

□

Следствие (Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$). $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт $\Leftrightarrow K$ замкнуто и ограничено

Доказательство.

$\Rightarrow$ Лемма

$\Leftarrow$ K ограничено $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n, r > 0 : K \subset B_r(x)$. Рассмотрим $B = [x_1 - r_1, x_1 + r_1] \times [x_2 - r_2, x_2 + r_2] \times \dots \times [x_n - r_n, x_n + r_n]$. B — компакт, $K \subset B$ — замкнуто, тогда K — компакт.

□

Следствие (Больцано-Вейерштрасса). Любая ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^n$ имеет сходящуюся подпоследовательность

Пример. $X = \mathbb{R}$ с дискретной метрикой, $K = [0, 1] \Rightarrow K$ ограничено и замкнуто. Однако, из отрытого покрытия $\{B_{\frac{1}{2}}(x), x \in K\}$ нельзя выбрать конечное подпокрытие, т.к. $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$

7.4.1 Полные метрические пространства

Пусть (X, ρ) — метрической пространство

Определение 7.23. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной в X, если $\forall\varepsilon > 0\exists N : \forall n, m(\rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$

Лемма 7.7. *Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a, \varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall n > N\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n > N\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon$ □

Замечание. Обратное утвеждение неверно

Пример. $X = (0, 1], \rho(x, y) = |x - y|$. Тогда $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ — фундаментальна, но не имеет предела в X.

Определение 7.24. Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная сходится к некоторой точке этого пространства

Лемма 7.8. *Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ полно.*

Доказательство. Пусть дана фундаментальная последовательность $\{x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots x_{nk})\} \subset \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$. Т.к. $\forall i = 1, 2, \dots n|x_{ik} - x_{im}| \leqslant \rho(x_k, x_m) \Rightarrow \{x_n\}$ тоже фундаментальна. Положим $a_i = \lim_{k\to\infty} x_{ik}, a = (a_1, a_2, \dots a_n)$. Заметим, что $\rho(a, x_n) = \sum_{i=1}^n |a_i - x_{in}|^2 \to 0 \Rightarrow x_n \to a$. □

Определение 7.25. Пусть $E \neq \varnothing$. Рассмотрим $B(E)$ — линейное пространство ограниченных функций $f : E \to \mathbb{R}$ (или Cm).

Замечание. $B(E)$ является нормированным пространством, относительно нормы $\|f\||_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$

Но тогда $f_n \to f$ в $B(E) \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E

Лемма 7.9. *Пространство $B(E)$ полное*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ фундаментальна в $B(E)$, и $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \forall n, m >\geqslant N(\sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$. По Критерию Коши равномерной сходимости, $\exists f : f_n \rightrightarrows f$ на E. Покажем, что f ограничена в определении равномерной сходимости. Положим $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N \forall x \in E(|f_n(x) - f(x)| < 1) \Rightarrow |f(x) < 1 + |f_n(x)||$ $\square$

Замечание. $C[a, b]$ полное относительно $(\|f\|_\infty)$

8 Непрерывные функции

8.1 Предел функции в точке

Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, a — предельная точка X, и задана функция $f : X \setminus \{a\} \to Y$.

Определение 8.1 (Коши)**.** Точка $b \in Y$ называется пределом функции f в a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X(0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon)$$

Определение 8.2 (Гейне)**.** Точка $b \in Y$ называется пределом функции f в a, если

$$\forall \{x_n\} \to\subset X \setminus \{a\}(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b)$$

Пишут $\lim_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$

Утверждение 8.1. $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} f(x) = c \Rightarrow b = c.$

Доказательство. Пусть $x_n \to a, x_n \neq a$. Тогда по определению Гейне, $f(x_n) \to b, f(x_n) \to c$. В силу единственности предела последовательности в (Y, ρ_Y), получаем, что $b = c$ $\square$

Рассмотрим $f : X \setminus \{a\} \Rightarrow \mathbb{R}^m$. Если $x \in X \setminus \{a\}$, то $f(x) = (y_1, \dots y_m) \Rightarrow f_i : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, f_i(x) = y_i$ (i-ая координата $f(x)$), $f = (f_1, f_2, \dots f_m)$

Лемма 8.1. *Пусть $f : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, \dots f_m)$. Тогда $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = b_i \forall i = 1, \dots m$*

Доказательство. Следует из $|y_i - b_i| \leqslant \rho_2(y, b) \leqslant \sum_{i=1}^m |y_i - b_i|$ $\square$

Пример. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \lim_{x\to 0, y\to 0} f(x, y) =^? 0$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0\right| \leqslant \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2})^3}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Утверждение 8.2. *Если a — предельная точка множества $E \subset X$ и $\lim_{x\to a} f(x) = b$, то $\lim_{x\to a}(f|_E)(x) = b$*

Доказательство. $E \ni x \to a, x_n \neq a \Rightarrow (f|_E)(x_n) = f(x_n) \to b \Rightarrow$ по Гейне $b = \lim_{x\to a}(f|_E)(x)$ □

Определение 8.3. $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1$. Если $\{a + tu | t \in (0, \Delta)\} \subset D \setminus \{a\}$ для некоторго $\Delta > 0$ и существует конечный предел $\lim_{t\to+0} f(a + tu)$, то этот предел называется пределом f в точке a по направлению u.

Следствие.

$$\left.\begin{array}{l} \exists b = \lim_{x\to a} f(x) \\ \{a + tu | t \in (0, \Delta)\} \subset D \setminus \{a\} \end{array}\right\} \Rightarrow b = \lim_{t\to+0} f(a + tu)$$

Пример.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} 1, y = x^2, x > 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, u = (\alpha, \beta), |u| = 1$$

$$\exists \delta > 0 \forall t \in (0, \delta) f(t\alpha, t\beta) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+0} f(t\alpha, t\beta) = 0$$

Утверждение 8.3. *Если $f, g : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = c$, то*

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = b + c$
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$

Доказательство. Возьмем $x_n \to a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to b, g(x_n) \to c$. Тогда по свойству пределов числовых последовательностей, $(f \pm g) \to b \pm c, (fg) \to bc$. Тогда по определению Гейне, получаем желаемое □

Утверждение 8.4 (Локальная ограниченность). *Если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$, то f ограничено в некоторой проколотой окрестности a, т.е. $\exists \delta > 0 f(\overset{\circ}{B}_\delta (a))$ ограничено*

Доказательство. Достаточно в определении Коши положить $\varepsilon = 1$ □

Замечание. Пусть $Z = X \times Y \Rightarrow \rho_Z((x, a), (y, b)) = \sqrt{\rho_X(x, y)^2 + \rho_Y(a, b)^2}$ — метрика на Z

Определение 8.4. Пусть X, Y — метрические пространства, x_0, y_0 — предельные точки X, Y соответственно и задана функция $f : (X \setminus \{x_0\}) \times (Y \setminus \{y_0\}) \to \mathbb{R}$. Пусть $\forall x \in X \setminus \{x_0\} \exists$ конечный $\lim_{y\to y_0} f(x, y)$. Предел $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$ называется повторным пределом функции f и обозначается $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y)$. Аналогично определяется $\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0}$.

Лемма 8.2. *Пусть задана $f : (X \setminus \{x_0\}) \times (Y \setminus \{y_0\}) \to \mathbb{R}$, такая, что*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b$
2. $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ *определена* $\varphi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x, y)$

Тогда $\exists \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) = b$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела

$$\exists\delta > 0\forall(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)|f(x,y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $(x,y) \in \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{\sqrt{2}}}(x_0)\times \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{\sqrt{2}}}(x_0) \subset \overset{\circ}{B}_\delta(x_0,y_0)$. Перейдем к пределу при $y \to y_0$ в $|f(x,y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Получим, что $|\varphi(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\ rax_0}\varphi(x) = b$ □

Теорема 8.1 (Критерий Коши)**.** *Пусть X, Y — метрические пространства, причем Y — полное, a — предельная точка X и задана функция $f : (X \setminus \{a\}) \to Y$. Доказать, что* $\exists\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x, x' \in X(x, x' \in \overset{\circ}{B}\ \delta(a) \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$

8.2 Непрерывные функции

Определение 8.5. Функция f непрерывна в $a \in X$, если

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x \in X(\rho_X(x,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

Определение 8.6. Функция f непрерывна на X, если она непрерывна $\forall x \in X$.

Пример. Коориднатная функция $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : p_i(x_1, x_1, \dots x_n) = x_i$ непрерывна.

Доказательство. Это следует из оценки $|x_i - a_i| \leqslant \rho_2(x,a)$ □

Пример. $A \subset X, d_A : X \to \mathbb{R}, d_A(x) = \inf_{a\in A}\rho(x,a)$ непрерывна.

Доказательство. Пусть $x, x_0 \in X \Rightarrow \forall a \in A$ имеем:

$$\rho(x_0,a) \geqslant \rho(x,a)+\rho(x,x_0) \geqslant d_A(x)-\rho(x,x_0) \Rightarrow d_A(x_0) \geqslant d_A(x)-\rho(x,x_0) \Rightarrow |d_A(x)-d_A(x_0)| \leqslant \rho(x,x_0)$$

□

Лемма 8.3. *Пусть $f : X \to Y$ и $a \in X$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *f — непрерывна в a*
2. *$\forall\{x_n\} \subset X(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$*
3. *a — изолированная точка X или a — предельная точка X и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Доказательство.

(1) ⇒ (2) Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ из определения непрерывности f в a. Пусть $x_n \to a$. Тогда $\exists N\forall n \geqslant N(\rho_X(x_n,a) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$. Следовательно, $f(x_n) \to f(a)$

(2) ⇒ (3) Если a — изолированная, то $\exists N : \forall n > N x_n = a$. Иначе, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ по Гейне

(3) ⇒ (2) Если a — изолированная точка X, то $\exists\delta > 0 :\in B_\delta(a) \cap X = \{a\}$. Тогда определение непрерывности выполнено. Если a — предельная точка X, то

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0(0 < \rho_X(x,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

Заметим, что $\rho_X(x,a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a) \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Но тогда

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0(\rho_X(x,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

.

□

Следствие. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в a тогда $f \pm g, fg : X \to \mathbb{R}$ также непрерывны в a.

Определение 8.7. Многочленом называется функция $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая, что

$$P(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots k_m} a_{k_1, k_2, \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

Пример. Любой многочлен непрерывен

Доказательство. Верно, т.к. он является линейной комбинацией мономов, каждый из которых является произведений непрерывных функций □

Теорема 8.2 (О непрерывности композиции)**.** *Пусть* $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z)$ *— метрические пространства. Если* $f : X \to Y, g : Y \to Z$ *— непрерывные функции, то* $g \circ f : X \to Z$ *— тоже непрерывная.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(a))$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в a. □

Теорема 8.3 (Критерий непрерывности)**.** $f : X \to Y$ *непрерывна на* $X \Leftrightarrow \forall V \subset Y$*, где* V *— открыто, верно* $f^{-1}(V)$ *открыто в* X*, где* $f^{-1}(U) = \{x | f(x) \in U\}$*.*

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Пусть $V \subset Y, V$ — открыто. Рассмотрим $f^{-1}(V), x \in f^{-1}(V)$, т.е. $f(x) \in V$, т.е. $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Т.к. f непрерывна в x, то $\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V \Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$.
- $\Leftarrow$ Пусть $x \in X, \varepsilon > 0$. Шар $B_\varepsilon(f(x))$ открыт в $Y \Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ открыто в X и содержит $x \Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ или $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Это означает, что f непрерывна в x.

□

Следствие. $f : X \to Y$ непрерывна $\Leftrightarrow \forall F \subset Y$, где F — замкнуто, $f^{-1}(F)$ замкнуто в X

Доказательство. $\forall F \subset Y : X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ □

Задача. *Приведите пример разрывной функции* f*, где* $\forall U \subset X : f(U)$ *открыто, где* U *— открыто.*

8.3 Непрерывные функции на компактах

Теорема 8.4. *Если* $f : K \to Y$ *непрерывна и* K *— компакт, то* $f(K)$ *— компакт в* Y

Доказательство. Рассмотрим $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — октрытое покрытие $f(K)$. Если $x \in K \Rightarrow f(x) \in f(K) \to f(x) \in G_{\lambda_0}$ для некоторого λ_0, или $x \in f^{-1}(G_{\lambda_0})$. Тогда $\{f^{-1}(G_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — открытое покрытие K. Тогда $\exists \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ — конечное подпокрытие K. Но тогда $y \in f(K) \Leftrightarrow y = f(x), x \in K$. Но $x \in f^{-1}(G_{\lambda_i}) \Rightarrow y = f(x) \in G_{\lambda_i}$ □

Теорема 8.5 (Вейерштрасса). *Если $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывна и K — компакт, то* $\exists x_m, x_M \in K : f(x_m) = \inf_{x \in K} f(x), f(x_M) = \sup_{x \in K} f(x)$

Доказательство. Положим $M = \sup_{x \in K} f(x)$. Заметим, что $f(K)$ — компакт в $R \Rightarrow f(K)$ — замкнутое и ограниченное множество. Имеем $f(K) \leqslant M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : M + \varepsilon \notin f(K)$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists x : M - \varepsilon < f(x)$ по определению sup $\Rightarrow M$ — граничная точка $\Rightarrow M \in f(K)$. Доказательство для inf аналогично □

Определение 8.8. Пусть V — метрическое пространство, $\|x\|, \|x\|_*$ — нормы на V. Данные нормы называются эквивалентными, если $\exists c_1, c_2 > 0 \forall x \in V (c_1\|x\| \leqslant \|x\|_* \leqslant c_2\|x\|)$

Следствие. На арифметическом n-мерном пространстве все нормы эквивалентны.

Доказательство. Достаточно показать, что произвольная норма эквивалентна Евклидовой.

Имеем: $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ — разложение по стандартному базису $\mathbb{R}^n$, тогда $\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\|$. По КБШ, можем записать неравенство:

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1} \|e_i\|^2\right)\left(\sum_{i=1} |x_i|^2\right) = \beta\|x\|_2$$

Тогда $\forall x, y \in \mathbb{R}^n |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \leqslant \beta\|x - y\|_2 \Rightarrow f = \|\cdot\|$ — непрерывна на $\mathbb{R}^n$ (относительно $\|\cdot\|_2$). Положим $S = \{x | \|x\|_2 = 1\}$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. По предыдущему следствию, $\exists \alpha = \inf_{x \in S} f(x) > 0$. Тогда $\forall x \neq 0 \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geqslant \alpha$ или $\|x\| \geqslant \alpha\|x\|_2$ (верно и для $x = 0$). Итого, получили $\alpha\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \beta\|x\|_2$ □

Задача. *Доказать, что все нормы над конечномерным пространством над $\mathbb{R}$ эквивалентны*

Определение 8.9. Функция $f : X \to Y$ называется равномерно непрерывной на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X (\rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$$

Теорема 8.6 (Кантор). *Если функция непрерывна $f : K \to Y$ непрерывна и K — компакт, то f равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности

$$\forall a \in K \exists \delta_a > 0 \forall x \in K (\rho_K(x, a) < \delta_a \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2})$$

Семейство $\left\{B_{\frac{\delta_a}{2}}(a)\right\}_{a \in K}$ образует открытое покрытие K. Т.к. K — компакт $\Rightarrow K \subset B_{\frac{\delta_{a_1}}{2}}(a_1) \cup B_{\frac{\delta_{a_2}}{2}}(a_2) \cup \cdots \cup B_{\frac{\delta_{a_m}}{2}}(a_m)$. Покажем, что $\delta = \min_{1 \leqslant i \leqslant m}\{\frac{\delta_{a_i}}{2}\}$ — искомое. Пусть $x, x' \in K$, с $\rho_K(x, x') < \delta$. $\exists i : x \in B_{\frac{\delta_{a_i}}{2}}(a_i) \Rightarrow$ т.к. $\rho_K(x', a) \leqslant \rho_K(x', x) + \rho_K(x, a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i}$, т.е. $x, x' \in B_{\delta_{a_i}}(a_i) \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) \leqslant \rho_Y(f(x), f(a)) + \rho_Y(f(a), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Определение 8.10. Пусть X, Y — метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если f — биекция, а f, f^{-1} непрерывны

Теорема 8.7. *Если $f : K \to Y$ — непрерывная биекция и K — компакт, то f — гомеоморфизм.*

Доказательство. По критерию непрерывности, $\forall F \subset K (f^{-1})^{-1}(F)$ замкнуто (т.к. $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$), если K — компакт $\Rightarrow f^{-1}$ непрерывна □

Определение 8.11. Метрическое пространство X называется несвязным, если $\exists U, V \subset X : X = U \cup V, U \cap V = \varnothing$, где U, V — непустые открытые множества

Определение 8.12. Множество $E \subset X$ называется несвязным, если E несвязно как подпространство X

Замечание. E несвязно $\Leftrightarrow \exists U, V \subset X$ — открытые, такие, что $E \subset U \cup V, E \cap U \neq \varnothing, E \cap V \neq \varnothing, U \cap V \cap E \neq \varnothing$

Задача. $\{E_i\}_{i \in I}$ *— семейство связных множеств,* $\bigcap_{i \in I} E_i \neq \varnothing \Rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i$ *связно*

Теорема 8.8. I *связно в* $\mathbb{R} \Leftrightarrow I$ *— промежуток*

Доказательство. $\Rightarrow$ Если I не является промежутком, то $\exists x, y \in I, z \in \mathbb{R} : x < z < y, z \notin I$. Рассмотрим $I \cap (-\infty, z), I \cap (z, +\infty)$. Получаем, что I несвязно

$\Leftarrow$ Предположим, что промежуток I несвязен. Тогда $\exists U, V \subset \mathbb{R} : I \subset U \cap V, I \cap U \neq \varnothing, I \cap V \neq \varnothing, U \cap V \cap I = \varnothing$. Пусть $x \in I \cap U, y \in I \cap V$. Рассмотрим $S = [x, y] \cap U$. $S \neq \varnothing$ и ограничено $\Rightarrow \exists c = \sup S$. В силу замкнутости $[x, y]$, имеем $c \in [x, y], [x, y] \subset I \subset U \cup V$. Следовательно, $c \in U$ или $c \in V$. Если $c \in U$, то $c \neq y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : [c, c+\varepsilon) \subset U \cap [x, y] \Rightarrow [c, c+\varepsilon) \subset S$. Если $c \in V$, то $c \neq x \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 (c - \varepsilon, c] \subset V \cap [x, y] \Rightarrow \left[c - \frac{\varepsilon}{2}, c\right] \not\subset S$

□

Теорема 8.9. *Если* $f : S \to Y$ *непрерывна и* S *связно, то* $f(S)$ *связно в* Y.

Доказательство. Предположим, что $f(S)$ несвязно $\Rightarrow \exists U, V \subset Y$ — открытые, причем $f(S) \subset V \cup U, f(S) \cap U \neq \varnothing, f(S) \cap V \neq \varnothing, U \cap V \cap f(S) = \varnothing$. Но тогда $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = S$, причем данные множества открыты и непересекающиеся, получили противоречие, т.к. S связно. □

Пример. $E = \{(x, y, z) : e^{x^2+y^2} < 1 + z^2\}$

Доказательство. $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} - 1 - z^2$ — непрерывно в $\mathbb{R}^3$ □

Следствие (Теорема о промежуточных значениях)**.** Если $f : S \to \mathbb{R}$ непрерывна и S связно, то $u, v \in f(S), u < v \Rightarrow [u, v] \subset f(S)$

Определение 8.13. Метрическтое пространство X назывется линейно связным, если $\forall x, y \in X \exists \gamma : [0, 1] \to X$ — непрерывная, такая, что $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

Пример. $B_r(a)$ в любом нормированном метрическом пространстве всегда линейно связен

Доказательство. Пусть $x, y \in B_r(a)$. Рассмотрим $\gamma(t) = (1 - t)x + ty, t \in [0, 1]$. $\forall t \gamma(t) \in B_r(a)$, т.к. $\|\gamma(t) - a\| = \|(1 - t)(x - a) + t(y - a)\| \leqslant (1 - t)\|x - a\| < (1 - t)r + tr = r$ □

Теорема 8.10. *Любое линейно связное пространство связно*

Доказательство. Продположим, что линейно связное пространство X несвязно. Тогда $\exists U, V \subset X, X = U \cup V, U \cap V = \varnothing, x \in U, y \in V \Rightarrow \exists [0, 1] \to X : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Рассмотрим $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = [0, 1]$, противоречие, т.к. $[0, 1]$ — связное множество □

9 Линейные отображения евклидовых пространств

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$

Определение 9.1. Отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется линейным, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно, что $L(\alpha x + \beta y) + \alpha L(x) + \beta L(y)$

Замечание. Множество всех линейных отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ образует линейное пространство и обозначается $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Будем мыслить векторы из $\mathbb{R}^n$ как наборы координат. Тогда в стандартном базисе, вектор из $\mathbb{R}^n$ совпадает со своим набором координат. В связи с этим, будем писать (пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$):

$$L(x) = Ax$$

Где A — матрица линейного преобразования L. Положим $w_i = (a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in})$

$$|L(x)|^2 = \sum_{i=1}^m (w_i, x)^2 \leqslant \sum_{i=1}^m |w_i|^2 |x|^2 = |x|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \leqslant C|x|, C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

Определение 9.2. $\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|L(x)|}{|x|}$ — норма оператора L

Замечание. Из оценки выше, следует, что $\|L\| \in \mathbb{R}$, а из определения супремума, $|L(x)| \leqslant \|L\||x|$. Таким образом, $\|L\|$ — наименьшая константа из $\mathbb{R}_+$, такая, что $C|x| \geqslant |L(x)|$

Следствие. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — нормированное линейное пространство

Замечание. Заметим, что $\|L_1 \circ L_2\| \leqslant \|L_1\| \cdot \|L_2\|$

Доказательство.

$$|L_1(L_2(x))| \leqslant \|L_1\| \|L_2\| |x|$$

□

10 Частные производные

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, a \in U, U$ — открыто и задана функция $f : U \to \mathbb{R}$.

Определение 10.1. Частная производная функции f по переменной x_k в точке a называется

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t}$$

Где e_k — k-ый элемент стандартного базиса.

$$\text{Обозначения } \frac{\delta f}{\delta x_k}(a), \ f'_{x_k}(a), \ \delta f_k(a) \text{ — эквивалентны}$$

Замечание. По определению, $\frac{\delta f}{\delta x_k}(a) - g'(a_k)$, где $g(u) = f(a_1, \dots a_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots a_n)$.

Пример. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$, тогда при $x \neq 0$

$$\frac{1}{t}(|x + te_k| - |x|) = \frac{1}{t}\frac{|x + te_k|^2 - |x|^2}{|x + te_k| + |x|} = \frac{2x_k + t}{|x + te_k| + |x|} \to \frac{x_k}{|x|}$$

Следовательно, существует $f'(x), x \neq 0$. Отметим, что в 0 частной производной ни по какой переменной нет.

Теорема 10.1 (О приращении)**.** *Если частные производные функции f по всем переменным ограничены в $B_r(a)$, то $\forall h = (h_1, h_2, \dots h_n)$ с $|h| < r$ имеем место равенство*

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(c_k)h_k$$

Где $c_k = a + v_k$ с $|v_k| \leqslant |h_k|$

Доказательство. Обозначим $x_0 = a, \dots x_k = x_{k-1} + h_k e_k$. Рассмотрим $t \mapsto g_k(t) = f(x_{k-1} + te_k)$ на отрезке с концами $0, h_k$. Тогда $f(x_k) - f(x_{k+1}) = g_k(h_k) - g_k(0)$ и по теореме Лагранжа $g_k(h) - g_k(0) = g_k'(\xi_k)h_k$. Положим $c_k = x_{k-1} + \xi_k e_k$, тогда $f(x_k) - f(x_{k-1}) = \frac{\delta f}{\delta x_k}(c_k)h_k \Rightarrow$ $f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(c_k)h_k$ □

Следствие (Критерий постоянства функции)**.** Пусть функция f имеет в области G частные производные. Тогда f постоянна на $G \Leftrightarrow \frac{\delta f}{\delta x_1} = \dots = \frac{\delta f}{\delta x_n} = 0$ на G.

Доказательство.

$\Rightarrow$ по определнию

$\Leftarrow$ Предположим противное, тогда $\exists x, y \in G : f(x) \neq f(y)$

□

Определение 10.2. Пусть $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда производной функции f в точке a называется

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

$$\text{Обозначения } \frac{\delta f}{\delta v}(a),\ \ f_v'(a),\ \ \delta f_v(a) \text{ — эквивалентны}$$

10.1 Дифференцируемость функции в точке

Определение 10.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, a \in U, f : U \to \mathbb{R}^n, U$ — открыто. Тогда f называетя дифференцируемой в точке a, если $\exists A = (A_1, \dots A_n) \subset \mathbb{R}^n$, т.ч. $f(a + h) = f(a) + (A, h) + \alpha(h)|h|$ для некоторой $\alpha(h) \to 0$, при $h \to 0$

Определение 10.4. Линейная функция $h \mapsto (A, h)$ называется дифференциалом функции f в точке a и обозначается df_a

Замечание. Определение производной не определяет $\alpha(0)$. Будем считать, что $\alpha(0) = 0$ (т.е. α — непрерывна в 0). Также, определение производной можно переписать в виде:

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o_{h \to 0}(|h|)$$

Теорема 10.2. *Если f дифференцируема в a и $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то* $\exists \frac{\delta f}{\delta v}(a) = df_a(v)$

Доказательство. Рассмотрим $B_\delta(a) \subset U$. Положим $h = tv, |t| < \frac{\delta}{|v|}$.

$$f(a + tv) - f(a) = df_a(tv) + \alpha(tv)|tv|$$

По линейности $df_a(tv) = tdf_a(v)$, тогда $\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = df_a(v) \pm \alpha(tv)|v|$. В силу непрерывности $\alpha(tv) \to 0$ при $t \to 0 \Rightarrow \exists \frac{\delta f}{\delta v}(a) = df_a(v)$ □

Следствие. Дифференциал функции определен однозначно.

Следствие (Необходимое условие дифференцируемости)**.** Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a и имеет частные производные $\frac{\delta f}{\delta x_k}(a)$ по всем переменным. Кроме того

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(a) h_k \forall h \in \mathbb{R}^n, h = (h_1, h_2, \dots h_k)$$

Доказательство. Положим $h = x - a$, получаем $f(x) = f(a) + df_a(x-a) + o(|x-a|), x \to a$. Откуда $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ непрерывна в a. По теореме 2, $\exists \frac{\delta f}{\delta f_k}(a) = \frac{\delta f}{\delta e_k}(a) = df_a(e_k), k = 1, \dots n$. Кроме того:

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{k=1}^{n} h_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} h_k df_a(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(a) h_k$$

□

Координатная функция $p_k(x_1, \dots x_k) = x_k$ дифференцируема в каждой точке и ее дифференциал $dx_k, dx_k(h) = h_k$ не зависит от выбора точки. Функции $dx_1, \dots dx_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, двойственный к базису $e_1, \dots e_k$

Определение 10.5. Вектор $\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(a), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(a)\right)$ называется градиентом функции f в точке a и обозначается $grad\, f(a)$ или $\nabla f(a)$

Замечание. Если f дифференцирема в a, то $f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a), h) + o(|h|), h \to 0$

Лемма 10.1. *Если функция f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \neq 0$, то $\forall v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$ выполнено*

$$\left|\frac{\delta f}{\delta v}(a)\right| \leqslant |\nabla f(a)|$$

Доказательство. По теореме 2 $\frac{\delta f}{\delta v}(a) = df_a(v) = (\nabla f(a), v)$, тогда по КБШ: $\left|\frac{\delta f}{\delta v}(a)\right| \leqslant |\nabla f(a)||v| = |\nabla f(a)|$, причем равенство имеет место лишь в случае, когда $v \parallel \nabla f(a)$, то есть $v = \pm \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ □

Замечание. Т.к. $\frac{\delta f}{\delta v}(a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+tv)$

Определение 10.6. Плоскость $\Pi : y = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(a)(x_k - a_k)$ называется касательной плоскостью к графику f в точке a (f дифференцируема в точке a)

Теорема 10.3 (Достаточное условие дифференцируемости)**.** *Если f имеет в некоторой окрестности a частные производные и они непрерывны в a, то f дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Пусть частные производные определены в $B_r(a) \subset U$. Тогда $\forall (h_1, \dots h_k) : |h| < r\ \exists c_k = a_k + v_k$, где $|v_k| < |h|$, что

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(c_k) h_k$$

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(a) h_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\delta f}{\delta x_k}(c_k) - \frac{\delta f}{\delta x_k}(a) \right) h_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\delta f}{\delta x_k}(c_k) - \frac{\delta f}{\delta x_k}(a) \right) \frac{h_k}{|h|} |h| = \alpha(h)|h|$$

Поскольку $c_k \to a$, $\frac{\delta f}{\delta x_k}(c_k) \to \frac{\delta f}{\delta x_k}(a)$, то $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. (почему??) $\square$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, a \in U, f : U \to \mathbb{R}^m$.

Определение 10.7. Функция f называется дифференцируемой в точке a, если существует такое линейное отображение $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что $f(a+h) = f(a) = L_a(h) + \alpha(h)|h|, \alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Линейное отображение L_a называется дифференциалом f в точке a и обозначается df_a или $d_a f$.

Замечание. Будем говорить, что $\alpha(0) = 0$, т.е. α непрерывна в 0, тогда

$$f(a+h) = df_a(h) + o(|h|), h \to 0$$

Лемма 10.2. *Функция $f = (f_1, \dots f_n)$ дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ каждая функция f_i дифференцируема в точке a.*

Пример. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, тогда L дифференцирема в любой точке $a \in \mathbb{R}^n$ и $dL_a = L$

Доказательство. $L(a+h) - L(a) = L(h) + 0$ $\square$

Рассмотрим матрицу преобразования стандартных в стандартных базисах в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. Приходим к следующему определению:

Определение 10.8. Матрица $Df(a)$ размера $m \times n$ определяемая равенством $df_a(h) = Df(a)h$ называется матрицей Якоби функции f в точке a.

Замечание. По предыдущему утверждению, $df_a = (d_a f_1, d_a f_2 \dots d_a f_m)$ и $d_a f_i(e_j) = \frac{\delta f_1}{\delta x_j}(a)$, поэтому

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta f_i}{\delta x_1}(a) & \dots & \frac{\delta f_i}{\delta x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Определение 10.9. Пусть $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^m$, $a \in (\alpha, \beta)$. Если существует $\lim_{t \to 0} \frac{\gamma(a+t) - \gamma(a)}{t} \in \mathbb{R}^m$, то этот предел называется производной γ в точке a и обозначается $\gamma'(a)$

Имеем: $\gamma'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(a+t) - \gamma(a)}{t} \to \gamma(a+t) - \gamma(a) = \gamma'(a) + t\sigma(t)$, где $\sigma(t) = o(t), t \to 0$. Тогда γ дифференцируема в $a \Leftrightarrow \exists$ производная, причем $d\gamma_a(t) = t\gamma'(a)$.

10.2 Правила дифференцирования

Непосредственно из определения вытекает следующее наблюдение: Если $f, g : U \to \mathbb{R}^m$, где U — открыто в $\mathbb{R}^n$ дифференцируемы в точке a, λ — константа, то $f + g : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в a и $d(f+g)_a = df_a + dg_a, d(\lambda f)_a = \lambda df_a$

Теорема 10.4. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ — открыты. Если $f : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в a, $g : V \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в $f(a)$, то $g \circ f$ дифференцируема в a, то $d(g \circ f)_a = dg_a \circ df_a$.*

Доказательство. По определению дифференцируемости,

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h)|h|, \alpha(h) \to 0, h \to 0$$

.

$$g(b+u) = g(b) + dg_b(u) + \beta(u)|u|, \beta(u) \to 0, u \to 0$$

. Подставим вместо $u = \varkappa(h) = df_a(h) + \alpha(h)|h|$, получим

$$g(f(a+h)) = g(b + \varkappa(h)) = g(b) + dg_b(df_a(h) + \alpha(h)|h|) + \beta(\varkappa(h))|\varkappa(h)| =$$

$$= g(b) + dg_b(df_a(h)) + |h|dg_b(\alpha(h)) + \beta(\varkappa(h))|\varkappa(h)| = g(f(a)) + dg_b \circ df_a(h) + \gamma(h)|h|$$

Где $\gamma(h) = dg_b(\alpha(h)) + \beta(\varkappa(h))\frac{\varkappa(h)}{|h|}$. Покажем, что $\gamma(h)$ бесконечно мала при $h \to 0$. Функции $h \mapsto dg_b(\alpha(h)), h \mapsto \beta(\varkappa(h))$ непрерывна в нуле со значением 0.

$$\exists C > 0 \forall h |df_a(h)| \leqslant C|h| \Rightarrow \frac{|\varkappa(h)|}{|h|} \text{ ограничена}$$

□

Следствие. Для матрицы Якоби функции f, g справедливо равенство:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Рассотрим случай, когда $k = 1$.

$$\left(\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_1}(a), \dots \frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_n}(a)\right) = \left(\frac{\delta g}{\delta y_1}(a), \dots \frac{\delta g}{\delta y_n}(a)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(a) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1}(a) & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Тогда $\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_j}(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\delta g}{\delta x_i}(b) \cdot \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(a)$

Следствие. Если $f, g : U \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке a, то в точке a дифференцируемы и функции $fg, \frac{f}{g}, g \neq 0$, причем справедливы формулы $df(fg)_a = fdg_a + gdf_a, d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(a)df_a - f(a)dg_a}{g^2(a)}$

Доказательство. Рассмотрим $h : U \to \mathbb{R}^2, h(x) = (f(x), g(x))$ — дифференцируема в $a, dh_a = (df_a, dg_a)$. Рассмотрим $\varphi(x, y) = xy \Rightarrow d\varphi = ydx + xdy$. Функция $\varphi \circ h$ дифференцируема в a, получаем $df(fg)_a = fdg_a + gdf_a, d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(a)df_a - f(a)dg_a}{g^2(a)}$ □

Теорема 10.5 (Лагранжа о конечных приращениях). *Если* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *— открыто, и* f *дифференцируема в каждой точке. Обозначим* $[a, b] = \{(1-t)a+tb | t \in [0, 1]\}$. *Пусть* $[a, b] \subset U$. *Если* $\|df_c\| \leqslant M \forall c \in [a, b]$, *то* $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^m, g(t) = f(a+t(b-a))$. Тогда $g'(t) = df_{a+t(b-a)}(b-a) \Rightarrow |g'(t)| \leqslant \|df_{a+t(b-a)}\| \cdot |b-a| \leqslant M|b-a|$. Причем $f(b) - f(a) = g(1) - g(0)$. По теореме Лагранжа, $|g(1) - g(0)| \leqslant |g'(c)|, c \in (0, 1)$. $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$ □

Пусть $f : U \to \mathbb{R}, a \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто

Определение 10.10. Если частные производная $\frac{\delta^{k-1} f}{\delta x_{i_1} \delta x_{i_2} \dots \delta x_{i_{k-1}}}$ порядка $k - 1$ определена в окрестности точки a и имеет частную производную в точке a по переменной x_{i_k}, то

$$\frac{\delta^k f}{\delta x_{i_1} \delta x_{i_2} \dots \delta x_{i_k}} = \frac{\delta}{\delta x_{i_k}} \left(\frac{\delta^{k-1} f}{\delta x_{i_1} \delta x_{i_2} \dots \delta x_{i_{k-1}}} \right)$$

Называется частичной производной f k-ого порядка в точке a.

Теорема 10.6 (Шварц). *Если смешанное произведение* $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}, \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ *определены в некоторой окрестности* (x_0, y_0) *и непрерывны в самой точке, то* $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0, y_0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0, y_0)$

Доказательство.

$$\exists \delta > 0 \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \text{ ограничены в квадрате } \{(x, y) | |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$$

Рассмотрим функцию $\Delta(t) = f(x_0+t, y_0+t) - f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0+t) + f(x_0, y_0), |t| < \delta$ Применим к функции $\varphi(x) = f(x, y_0+t) - f(x, y_0)$. По теореме Лагранжа о среднем значении на отрезке с x_0+t, x_0 верно $\varphi'(x) = \frac{\delta f}{\delta x}(x, y_0+t) - \frac{\delta f}{\delta x}(x, y_0)$. $\exists \theta_1 = \theta_2(t) \in (0, 1)$ $\varphi(x_0+t) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 t)t$. Т.к. $\Delta(t) = \varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)$, то $\Delta(t) \frac{\delta f}{\delta x}(x_0 + \theta_1 t, y_0 + t) - \frac{\delta f}{\delta x}(x_0 + \theta_1 t, y_0)$. Применим к функции $\psi(y) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0 + \theta_1 t, y)$ теорему Лагранжа о среднем на отрезке с концами $y_0 + t, y_0$. $\varphi(y) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0 + \theta_1 t, y)$. $\exists \theta_2 = \theta_2(t) \in (0, 1) \psi(y_0 + t) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_2 t)t$. Т.к. $\Delta(t) = (\psi(y_0 + t) - \psi(y_0))t$, то $\frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0 + \theta_1 t, y_0 + \theta_2 t)$. $\Rightarrow \exists \lim_{t \to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0, y_0)$ □

Утверждение 10.1. *Если* $B, B_1, \dots B_k$ *— брусы и* $B \in \bigcup B_i \Rightarrow |B| \leqslant \sum |B_i|$

Утверждение 10.2. *Для любого бруса* B *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся* $B' \subset B \subset B^\circ$, *т.ч.* B' *— замкнутый,* B° *— открытый, и* $|B'| > |B| - \varepsilon, |B^\circ| < |B| + \varepsilon$.

Доказательство. Если $B = \varnothing \Rightarrow B' = B^\circ = \varnothing$. Пусть $|B| > 0 \Rightarrow B = I_1 \times \dots \times I_n, \delta I_k = \{a_k, b_k\}$. Положим $B'_\delta = [a_1-\delta, b_1+\delta] \times \dots \times [a_n-\delta, b_n+\delta]$, $B'_\delta = [a_1+\delta, b_1-\delta] \times \dots \times [a_n+\delta, b_n-\delta]$. Заметим, что $|B'_\delta|, |B''_\delta| \to |B|$ при $\delta \to 0$. В этом случае B'_δ, B''_δ будут искомыми. Если же $|B| = 0$, то полоижм $B^\circ = \varnothing, B' = B'_\delta$ для некоторого δ. □

Лемма 10.3. *Каждое непустное открытое множество* $U \subset \mathbb{R}^n$ *представимо в виде счетного объединения попарно непересекающихся кубов.*

Доказательство. Рассмотрим сетку размера 1. Добавим все кубы, которые полностью лежат в нашем множестве. Рассморим решетку размера $\frac{1}{2}$, сделаем то же самое. Получили счетное объединение не более чем счетных множеств $\Rightarrow$ получили, что хотели.

Формально:

Куб $\left[\frac{k_1}{2^m}\right) \times \left[\frac{k_n}{2^m}\right)$ назовем двоичным кубом ранга m. Рассмотрим A_0 — множество кубов ранга 0, лежащих в U. Определим: A_m — множество кубов ранга m, лежащих в U, но не содержащихся в $A_0, \dots A_m$. Положим $A = \bigcup A_i$ — счетное множество кубов. Покажем, что $U = \bigcup_{Q \in A} Q$. Пусть $x \in U \Rightarrow \overline{B}_r(x) \subset U$. Найдем такое m, что $\frac{\sqrt{n}}{2^m} \leqslant r$. Тогда $Q_m(x) \subset \overline{B}_r(x)$. Положим $m_0 = \min\{m \in \mathbb{N}_0 : Q_m(x) \subset U\}$. Тогда $Q_m(x) \not\subset U, m < m_0, Q_{m_0}(x) \subset U \Rightarrow Q_{m_0}(x) \in A_{m_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{Q \in A} Q$ □

11 Алгебра Множеств

Определение 11.1. Семейство $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ называеся алгеброй, если выполнены следующие условия:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c = \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{A}$
3. $E_1, E_2, \dots E_k \in \mathcal{A}, E = \bigcup_{n=1}^k E_n \Rightarrow E \in \mathcal{A}$.

Определение 11.2. Алгебра $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ называеся σ-алгеброй, если выполнено:

$$E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A}, E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow E \in \mathcal{A}$$

Замечание. 1. $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{A}$

2. $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Если $\mathcal{A}_i$ — σ-алгербы ($i \in I$), то $\bigcap_{i \in I} A_i$ — σ-алгебра

Определение 11.3. Пусть $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$. Тогда $\sigma(\mathcal{F})$ — наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{F}$

Пример. $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \sigma(A) = \{\varnothing, \mathbb{R}^n, A, A^c\}$

Пример. $A = \{X | X$ — конечное объединение промежутков$\}$ — алегбра, но не σ-алгебра

Пример. Пусть $\mathcal{F}$ — все одноэлементные множества. Тогда $\sigma(\mathcal{F}) = \{A | A$ не более чем счетное $\vee$ A^c не более чем счетное$\}$

Определение 11.4. Борелевская σ-алгебра — $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества $\mathbb{R}^n$

Лемма 11.1. $C = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$. *Тогда* $\sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Доказательство. $\forall a \in \mathbb{R} [a, +\infty) \subset \sigma(C)$. $(a, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{k}, +\infty\right) \in \sigma(C) \Rightarrow (a, b) \in \sigma(C)$. Т.к. в $\mathbb{R}$ любое открытое множество представимо в виде счетного объединения открытых промежутков, то $\sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ □

11.1 Внешняя Мера

Определение 11.5. Внешней мерой Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \ \mid \ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\}$$

Где inf берется по всем счетным наборам брусьев

Теорема 11.1. *Для внешней меры выполнено:*

1. $E \subset F \Rightarrow \mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$
2. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$
3. *если R — брус, то $\mu^*(R) = |R|$*

Доказательство. 1. Любое покрытие F является покрытием $E \Rightarrow \mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$

2. Можно считать, что $\sum_{k=1}^{\infty} E_k < \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\forall E_k \exists \{B_{i_k}\}_{i=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} |B_{i_k}| < \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда $\{B_{i_k} : i, k \in \mathbb{N}\}$ образует покрытие $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Рассмотрим перестановку (i, k) "по квадратам" и соответствующую сумму обозначим $\sum_{(i,k)} B_{i_k}$.

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{(i,k)} B_{i_k} \leqslant \sum_{k=1} \sum_{i=1} |B_{i_k}| = \sum_{k=1} \left(\sum_{i=1} |B_{i_k}| \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon$$

Т.к. ε — любое, то $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

3. Т.к. $\{R\}$ — покрытие брусами R, то $\mu^*(R) \leqslant |R|$

   (a) R — замкнутый. Рассмотрим произвольное покрытие $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества R. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $B_k^\circ \supset B_k, |B_k^\circ| < |B_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$. $R \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^\circ \Rightarrow R \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_k^\circ \Rightarrow |R| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |B_k^\circ| \Rightarrow |R| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(|B_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| + \varepsilon \Rightarrow |R| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \Rightarrow |R| \leqslant \mu^*(R)$

   (b) R — не замкнутый. $\Rightarrow \exists R' \supset R : |R'| > |R| - \varepsilon$. Имеем $\mu^*(R) \geqslant \mu^*(R') = |R'| > |R| - \varepsilon$ Т.к. ε — произвольное, получаем, что $\mu^*(R) = |R|$

□

11.2 Мера Лебега

Построим σ-алгебру $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, включающую $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и функцию $\mu : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\mu(R) = |R|$, где $|R|$ — брус
2. $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow \mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$
3. $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mu(x + E) = \mu(E)$

11.3 Измеримые множества

Определение 11.6. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Лебегу, если $\forall A \subset \mathbb{R}^n \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

Замечание. При доказательстве измеримости достаточно проверять условие $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$, т.к. противоположное неравенство выполняется в силу полуаддитивности

Утверждение 11.1. *Если $\mu^*(E) = 0$, то E измеримо.*

Доказательство. $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E^c) + \underbrace{\mu^*(A \cap E)}_{=0}$ □

Утверждение 11.2. *Пусть $a \in \mathbb{R}, k = \{1, \dots n\}$. Покажем, что $H = H_{a,k} = \{(x_1, \dots x_k) | x_k > a\}$ измеримо*

Доказательство. Рассмотрим произвольное измеримое $A \subset \mathbb{R}^n$ и $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ — покрытие A брусами. Положим $B_i^1 = \{x \in B_i : x_k > a\}, B_i^2 = \{x \in B_i : x_k \leqslant a\}$. Тогда $\{B_i^1\}$ — покрытие $A \cap H$ брусами, $\{B_i^2\}$ — покрытие $A \cap H^c$ брусами, причем $|B_i| = |B_i^1| + |B_i^2|$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |B_i^1| + \sum_{i=1}^{\infty} |B_i^2| \geqslant \mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \cap H^c)$. Тогда в силу определения внешней меры, $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \cap H^c)$. □

Замечание. Аналогично устанавливается измеримость подпространств с другимим знаками неравенства

Теорема 11.2 (Каратиодори)**.** *Семейство $\mathcal{M}$ всех измеримых по Лебегу множеств является σ-алгеброй. Функция $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ является счетно аддитивной.*

Доказательство.

1. По определению измеримости, $\varnothing \in \mathcal{M}$. Также, $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{M}$.

2. что $E, F \in \mathcal{M} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{M}$. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, тогда $\mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c)$. Из измеримости E, получаем:

$$\mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c) =$$

$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F \cap E^c) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c) =$$

$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F \cap E^c) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A)$$

   По индукции доказывается, что конечное объединение измеримых множеств измеримо.

3. Пусть $E_k \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{N}, F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и E_k попарно непересекаются. Покажем, что $F \in \mathcal{M}$. Рассмотрим $A \subset \mathbb{R}^n$. Если $F_m = \bigcup_{k=1}^{m} E_k$, то $F_m \in \mathcal{M}$, поэтому

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_m) + \mu^*(A \cap F_m^c) \geqslant \mu^*(A \cap F_m) + \mu^*(A \cap F^c)$$

   Имеем $\mu^*(A \cap F_m) = \mu^*(A \cap F_m \cap E_m) + \mu^*(A \cap F_m \cap E_m^c) = \mu^*(A \cap E_m) + \mu^*(A \cap F_{m-1})$. Применим рассуждения к $A \cap F_{m-1}$, и в итоге получим $\mu^*(A \cap F_m) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A \cap E_k)$.

Тогда $\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c)$. Переходя в этом неравенстве пределу при $m \to \infty$, получим:

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c)$$

В силу счетной полуаддитивности внешней меры,

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c) \leqslant \mu^*(A)$$

Получили $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$. При этом, при $A = F$, получаем $\mu^*(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$.

4. Покажем, что $A_k \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{N}, A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Покажем, что $A \in M$. Определим $E_1 = A_1, E_k = A_k \setminus \bigcup_{i<k} E_k \in M$. Тогда $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k \in M$

□

Следствие. Всякий брус измерим

Следствие. Всякое борелевское множество измеримо, т.е. $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Определение 11.7. Функция $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ называется мерой лебега

Замечание. По Теореме Каратиодори, если $E_k \in \mathcal{M}, E_i \cap E_j = \varnothing \Rightarrow \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Теорема 11.3. *Пусть $A_k \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{N}$*

1. *Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots, A = A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$*
2. *Если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \mu(A) < \infty, A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$*

Доказательство.

1. Положим $B_1 = A_1, B_k = A_k \setminus A_{k-1} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)$$

2. Заметим, что $A_1 \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_k)$, поэтому $\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$

□

Упражнение. *Показать, что во втором пункте условие $\mu(A) < \infty$ существенно.*

Лемма 11.2. *Если $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то $\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset E$ — открытое, такое, что $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$*

Доказательство. Пусть E ограничено, в частности $\mu(E) < \infty$. Тогда $\exists\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие E брусами, что $\sum_{i=1}^{\infty}|B_i| < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall i \exists B_i^{\circ} \supset B_i$ — открытое, такое, что $|B_i^{\circ}| < |B_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Тогда

$$\mu(G) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|B_i^{\circ}| = \sum_{i=1}^{\infty}\left(|B_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}|B_i| + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) + \varepsilon$$

Тогда $\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) \Rightarrow \mu(G \setminus E) < \varepsilon$

В случае неограниченности E, представим $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n | k-1 \leqslant |x| < k\}$. Тогда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $E_k = E \cap A_k$. — ограничены. По доказанному $\forall k \exists G_k \supset E_k$ — открытое, так, что $\mu(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Положим $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ — открытое, содержащее E. $G \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus E_k)$. Тогда $\mu(G \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mu(G_k \setminus E_k) < \sum k = 1^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ □

Следствие. E измеримо в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists F \subset E$ — замкнутое в $\mathbb{R}^n$, такое, что $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$

Доказательство. По лемме, $\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset E^c : \mu(FG \setminus E^c) < \varepsilon$. Положим $F = G^c \Rightarrow F$ — открыто, причем $F \subset E$. Также $E \setminus F = G \setminus E^c \Rightarrow \mu(E \setminus F) = \mu(G \setminus E^c) < \varepsilon$ □

Теорема 11.4. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда следующие утвеждения эквивалентны:*

1. *E — измеримо*
2. *$\Omega \setminus Z$, где Ω — G_δ-множество и Z — множество меры нуль*
3. *$\Delta \cup Z$, где Δ — F_δ-множество и Z — множество меры нуль*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть E измеримо. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \exists G \supset E \Rightarrow \mu(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$. Положим $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Тогда Ω — G_δ-множество, $\Omega \supset E$ и $\mu(\Omega \setminus E) \leqslant \mu(G_k \setminus E) < \frac{1}{k} \Rightarrow Z = \Omega \setminus E, \mu(Z) = 0$

(2) $\Rightarrow$ (1) $E = \Omega \setminus Z$, где Ω — борелевское, Z — измеримо

(3) $\Rightarrow$ (1) доказывается аналогично

(1) $\Rightarrow$ (3) доказывается аналогично

□

Лемма 11.3. *Если $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $y \in \mathbb{R}^n$, то $E + y = \{x + y | x \in E\}$ измеримо и $\mu(E + y) = \mu(E)$*

Доказательство. Отметим, что B-брус $\Rightarrow B + y$ — брус с тем же объемом. Поэтому если $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow A + y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i + y)$ и по определению μ^* имеем: $\mu^*(A+y) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|B_i + y| = \sum_{i=1}^{\infty}|B_i| \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A)$. Противное неравенство следует из того, что $A = A + y - y$. Докажем, что наше множество "правильно разрезает любое другое". Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, тогда $\mu^*(A \cap (E + y)) + \mu^*(A \cap (E + y)^c) = \mu^*((A - y) \cap E) + \mu^*((A - y) \cap E^c) = (*)$. Т.к. E — измеримое множество, то $(*) = \mu^*(A - y) = \mu^*(A)$. Тогда $E + y$ измеримо □

Пример (Неизмеримое множество)**.** Рассмотрим отношение эквивалентности на $[0, 1]$, такое, что $x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Тогда $[0, 1] = \bigsqcup H_\alpha$, где H_α — классы эквивалентности. По аксиоме выбора, $\exists V : x \in V \Leftrightarrow \exists! \alpha (V \cap H_\alpha) = \{x\}$. Покажем, что V неизмеримо.

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{Q}\cap[-1,1]=\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизмеримое множество. Рассомтрим $V_n=V+r_n$. Тогда $V_i\cap V_j=\varnothing$, т.к. $x\in V_i\cap V_j\Rightarrow x=x_i+r_i=x_j+r_j\Rightarrow x_i-x_j\in\mathbb{Q}$. Положим $S=\bigsqcup_{i=0}^{\infty}V_i$. Покажем, что $[0,1]\subset S\subset[-1,2]$.

$[0,1]\subset S$. $\forall x\in[0,1]\exists v\in V, r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]: x=v+r\Rightarrow\forall x\in[0,1]\Rightarrow x\in S$.

$S\subset[-1,2]$. Т.к. $0\leqslant V\leqslant 1,\Rightarrow -1\leqslant S\leqslant 2$.

Пусть V измеримо, причем $\mu(V)=a$. Тогда $\mu(V_n)=a$ и из вложенностей, $1\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}a\leqslant 3$. Не существует a, для которых это выполнено. □

Доказательство. Всякое множество имеет неизмеримое подмножество □

12 Интеграл Лебега

12.1 Напоминание

Определение 12.1. Пусть $f: X\to Y, A\subset Y$. Тогда $f^{-1}(A)=\{x\in X|f(x)\in A\}$

Замечание. Пусть $f: X\to Y, A\subset Y$. Тогда:

1. $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(A_i)$
2. $f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$.

12.2 Измеримые функции

Далее $E\subset\mathbb{R}^n, f: E\to\overline{\mathbb{R}}$, E — измеримо.

Определение 12.2. f называется измеримой, если $f^{-1}([-\infty,a))$ измеримо $\forall a\in\mathbb{R}$.

Пример. Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$. Определим $I_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: I_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\notin A\end{cases}$ Тогда $I_A^{-1}([-\infty,a))=$
$\begin{cases}\varnothing, a\leqslant 00\\ A^c, 0<a\leqslant 1\\ \mathbb{R}^n, 1<a\end{cases}$. Тогда I_A измеримо $\Leftrightarrow A$ измеримо

Утверждение 12.1. *Если $f: E\to\mathbb{R}$ непрерывна, то f измерима.*

Доказательство. $f^{-1}((-\infty,a))$ — открыто в E по критерию непрерывности, т.е. $\exists G\subset\mathbb{R}$: $f^{-1}((-\infty,a))=E\cap G$, где G — открытое $\Rightarrow f$ — измеримо. □

Задача. *Показать, что если $f: E\to\mathbb{R}$ монотонна, то f измерима.*

Замечание. В определении измеримости можно брать промежутки $[-\infty,a]$, $[-\infty,a)$, $[a,+\infty]$, $(a,+\infty]$ получатся эквивалентные определения.

Доказательство. Следует из равенств:

$$\begin{gathered}\{x|f(x)\leqslant a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x|f(x)<a+\tfrac{1}{k}\right\}\\ \{x|f(x)>a\}=E\setminus\{x|f(x)\leqslant a\}\\ \{x|f(x)\geqslant a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x|f(x)<a+\tfrac{1}{k}\right\}\\ \{x|f(x)<a\}=E\setminus\{x|f(x)\geqslant a\}\end{gathered}$$

□

Лемма 12.1. *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримо, т.е. $\forall \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) f^{-1}(\Omega)$ измеримо, т.к. $\Leftrightarrow f^{-1}(-\infty), f^{-1}(+\infty)$ — измеримы.*

Доказательство.

$\Leftarrow$ $f^{-1}([-\infty, a)) = f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}([-\infty, a))$ — измеримо

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} = \{\Omega | f^{-1}(\Omega)$ измеримо$\}$ — σ-алгебра. $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}([-\infty, b)) \cap f^{-1}((a, +\infty])$. $\mathcal{F}$ содержит интервалы $\Rightarrow \mathcal{F}$ содержит все

□

Замечание. $B = \{x | f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x | f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\} \Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} f(x) + g(x), x \notin B \\ a, x \in B \end{cases}$

Теорема 12.1. *Если $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $f+g, \lambda g, fg$ измеримы*

Доказательство.

1. $f+g$: $(f+g)^{-1}(\pm\infty) = f^{-1}(\pm\infty) \cup g^{-1}(\pm\infty)$ — измеримо. Теперь рассмотрим $(f+g)^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in E | f(x) + g(x) < a\}$. Рассмотрим некоторую нумерацию $\mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ и воспользуемся $\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} (\alpha < r < \beta)$. Тогда $\{x \in E | f(x) < a - g(x)\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in E f(x) < r_k < a - g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E | f(x) < r_k\} \cap \{x \in E : g(x) < a - r_k\}$ — измеримо

2. λf. При $\lambda = 0$ очевидно, при других: $\{x \in E | \lambda f(x) < a\} = \begin{cases} \{x : f(x) < \frac{a}{\lambda}\}, \lambda > 0 \\ \{x : f(x) > \frac{a}{\lambda}\}, \lambda < 0 \end{cases}$

3. f^2: $x \in E | f^2(x) < a = \begin{cases} \{x : f(x) < \sqrt{a}\} \cap \{x : f(x) > -\sqrt{a}\}, a > 0 \\ \varnothing, a \leqslant 0 \end{cases}$

4. fg: $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$.

□

Определение 12.3. Пусть задана $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

1. $f^+ = \max\{f, 0\}$ — положительная часть функции

2. $f^- = \max\{-f, 0\}$ — отрицательная часть функции

Замечание. $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$

Следствие. Измеримость f эквивалентна одновременной измеримости f^-, f^+.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Зафиксируем $a \in \mathbb{R}$. Заметим, что $\{x \in E : f^+(x) < a\} = \begin{cases} \{x : f(x) < a\}, a \geqslant 0 \\ \varnothing, a < 0 \end{cases}$.

Поэтому $f^+(x)$ измерима, аналогично доказывается, что и $f^-(x)$ измерима

$\Leftarrow$ $f = f^+ - f^-$

□

Теорема 12.2. *Пусть $f_k, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

1. *Если $f_k \to f$ на E и f_k — измеримы, то и f — измерима*
2. *Если f_k измеримы, то $\inf f_k, \sup f_k$ — измеримы*

Доказательство.

1. $\forall a \in \mathbb{R}\{x \in E : f(x) < a\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \left\{x \in E : f_k(x) < a - \frac{1}{j}\right\}$. $f(x) < a \Rightarrow \exists j : f(x) < a - \frac{1}{j} \Rightarrow \exists j \exists m : f_k(x) < a - \frac{1}{j}$ при всех $k \geqslant m$. "$\subset$". Пусть x лежит в правой части, т.е. $\exists j, m \forall k \geqslant m (f_x(x) < a - \frac{1}{j})$, $k \to \infty \Rightarrow \exists j : f_k(x) < a - \frac{1}{j} < a$. "$\supset$"
2. $g = \inf f_k \Rightarrow \{x : g(x) < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f_k(x) < a\}$ — измеримо. $g(x) < a \Leftrightarrow \exists k (f_k(x) < a)$. $\sup f_k = -\inf(-f_k)$ — измеримо.

□

Определение 12.4. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}, Q(x)$ — формула на E. Говоярят, что $Q(x)$ верно для почти всех $x \in E \Leftrightarrow \mu\{x \in E : Q(x)$ ложно$\} = 0$

Лемма 12.2. *Пусть заданы функции $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}, f = g$ почти всюду на E. Тогда, если f измерима, то g — тоже.*

Доказательство. По условию, $\mu Z = 0, Z = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$. $\forall a \in \mathbb{R}\{x \in E : g(x) < a\} = (\{x \in E : f(x) < a\} \cap Z^c) \cup \underbrace{(\{x \in E : g(x) < a\} \cap Z)}_{\text{измеримо, т.к } \mu^*(\cdots)=0}$ — измеримо. □

Следствие. $f_k, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $f_k \to f$ почти всюду на E и f_k измеримо $\forall k \Rightarrow f$ — измеримо

Определение 12.5. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ простая, если φ — измерима, а $\varphi(\mathbb{R}^n)$ конечно.

Замечание. Любая линейная комбинация индикаторов является простой функцией

Утверждение 12.2. *Для всякой простой функции существует разбиение $\mathbb{R}^n$ конечным набором измеримых множеств, на каждом из которых φ постоянна (допустимое разбиение).*

Доказательство. $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{a_1, a_2, \dots a_m\} \Rightarrow \varphi^{-1}(\{a_i\})$ — измеримы, причем $\bigsqcup_{i=1}^{m} \varphi^{-1}(a_i) = \mathbb{R}^n$. Тогда $A_i = \varphi^{-1}(a_i)$ — измеримое и $\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i = \mathbb{R}^n$, $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i I_{A_i}$. □

Теорема 12.3. *Пусть $f : E \to [0, +\infty]$ измерима. Тогда $\exists \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, где φ — простые неотрицательные функции, что $\forall x \in E$*

1. *$\varphi_k(x)$ — неубывающая последовательность*
2. *$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$*

Доказательство. $\forall k \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots 2^k$ рассмотрим $E_{kj} = \left\{x \in E : \frac{i-1}{2^k} \leqslant f(x) \leqslant \frac{j}{2^k}\right\}, F_k = \{x \in E : f(x) \geqslant k\}$. Тогда эти множества попарно непересекаются, измеримы и в объединении дают $\mathbb{R}^n$. Положим $\varphi_k = \sum_{j=1}^{2^k k} \frac{j-1}{2^k} I_{E_{kj}} + k I_{F_k}$, тогда $\{\varphi_k\}$ — последовательность неотрицательных измеримых простых функций. Зафиксируем $x \in E$ и проверим условия:

1. Пусть $f(x) \geqslant k \Rightarrow \varphi_{k+1}(x) \geqslant k = \varphi_k(x)$. Пусть $f(x) < k \Rightarrow \exists j : \frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) \leqslant \frac{j}{2^k}$. Возможно 2 варианта

   (a) $\frac{2j-2}{2^{k+1}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2j-1}{2^{k+1}}$

   (b) $\frac{2j-1}{2^{k+1}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2j}{2^{k+1}}$

   В обоих случаях, $\varphi_{k+1} \geqslant \frac{2j-2}{2^{k+1}} = \frac{j-1}{2^k} = \varphi_k(x)/$.

Если $f(x) = +\infty$, то $\forall k \varphi_k(x) = k \Rightarrow \varphi_k(x) \to f(x)$ верно. Если $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists k = [f(x)] + 1, \exists j : \frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^k} \Rightarrow |f(x) - \varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^k} \Rightarrow \varphi_k(x) \to f(x)$ □

Замечание. Если дополнительно к условиям теоремы, f — ограничена, то $\varphi_k \rightrightarrows f$ на E.

Следствие. Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда f измерима $\Leftrightarrow \exists \{\varphi_k z\}$ — простые функций $\varphi_k \to f$

13 Интеграл Лебега

13.1 Интеграл Лебега для неотрицательных простых функций

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо.

Определение 13.1. Пусть φ — неотрицательная протая функция и $\{A_i\}_{i=1}^m$ — допустимое разбиение $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i I_{A_i}$. Интегралом от φ по E называется

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i \cap E)$$

13.2 Свойства интеграла Лебега для неотрицательных простых функций

Утверждение 13.1 (Монотонность). *Если* $\varphi \leqslant \psi \Rightarrow \int_E \varphi d\mu \leqslant \int_E \psi d\mu$

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^m, \{B_j\}_{j=1}^k$ — допустимые разбиения относительно φ, ψ. Тогда $C_{ij} = A_i \cap B_j$ образует допустимое разбиение и для φ, и для ψ. Т.к. $A_i = A_i \cap \mathbb{R}^n = A_i \cap \bigcup_{j=1}^k B_j = \bigcup_{j=1}^k C_{ij}$, то по свойству аддитивности меры, $\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^m a_i \mu \left(\bigcup_{j=1}^k (C_{ij} \cap E) \right) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_i \mu(C_{ij} \cap E)$. Аналогично получаем, что $\int_E \psi d\mu = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m b_j \mu(C_{ij} \cap E)$. Если $x \in C_{ij} \cap E$, то $a_i = \varphi(x) \leqslant \psi(x) = b_j \Rightarrow \int_E \varphi d\mu \leqslant \int_E \psi d\mu$ □

Замечание. Вместе с монотонностью интеграла, мы доказали корректность его определения

Доказательство. Для двух разных разбиений можем рассмотреть $\psi = \varphi$. Тогда получим, что $\int_E \varphi d\mu \leqslant \int_E \varphi d\mu$ для двух разных разбиений. Тогда определение интеграла корректно. □

Утверждение 13.2 (Аддитивность). $\int_E (\varphi + \psi) d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_E \psi d\mu$

Доказательство. Доказывается аналогично монотонности □

Утверждение 13.3 (Однородность). $\int_E \lambda \varphi d\mu = \lambda \int_E \varphi d\mu$

Доказательство. Доказывается аналогично аддитивности □

13.3 Интеграл Лебега для неотрицательных функций

Определение 13.2. Пусть $f : E \to [0, +\infty]$ — неотрицательная измеримая функция. Тогда интегралом Лебега f по множеству E называется

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E \varphi d\mu : 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi \text{ — простая}\right\}$$

Будем писать $(s)\int_E \varphi d\mu$, если мы будем использовать определение для простой функции

Замечание. Пусть f, φ — простые функции, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Тогда

$$(s)\int_E \varphi d\mu \leqslant (s)\int_E f d\mu \Rightarrow \sup\left\{\int_E \varphi d\mu\right\} = \int_E f d\mu \leqslant (s)\int_E f d\mu$$

Таким образом, мы доказали согласованность определений для простых функций и произвольных неотрицательных

13.4 Свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций

Утверждение 13.4 (Монотонность)**.** *Если* $f \leqslant g \Rightarrow \int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$

Доказательство. Заметим, что φ — простая и $0 \leqslant \varphi \leqslant f \Rightarrow 0 \leqslant \varphi \leqslant g \Rightarrow \int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$ □

Утверждение 13.5 (Однородность)**.** $\int_E \lambda\varphi d\mu = \lambda\int_E \varphi d\mu$

Доказательство. При $\lambda = 0$ верно. При $\lambda \neq 0$, заметим, что φ — простая и $0 \leqslant \varphi \leqslant f \Leftrightarrow 0 \leqslant \lambda\varphi \leqslant \lambda f$. Тогда $\int_E \lambda\varphi d\mu = \lambda\int_E \varphi d\mu$ □

Утверждение 13.6. $E_0 \subset E$ *— измеримо, тогда* $\int_{E_0} f d\mu = \int_E f I_{E_0} d\mu$

Доказательство. Для простых функций это верно. Пусть $0 \leqslant \varphi \leqslant f \Rightarrow \int_{E_0} \varphi d\mu = \int_E \varphi I_{E_0} d\mu \leqslant \int_E f I_{E_0} d\mu \Rightarrow \int_{E_0} f d\mu \leqslant \int_E f I_{E_0} d\mu$. Теперь, пусть $0 \leqslant \psi \leqslant f I_{E_0} \Rightarrow \psi = 0$ на $E \setminus E_0 \Rightarrow \psi = \psi I_{E_0}$ на E. Тогда $\int_{E_0} f d\mu \geqslant \int_E f I_{E_0} d\mu$. □

Утверждение 13.7. *Если* $E_0 \subset E$ *— измеримо, то*

$$\int_{E_0} f d\mu \leqslant \int_E f d\mu$$

Доказательство.

$$\int_{E_0} f d\mu = \int_E f I_{E_0} d\mu \leqslant \int_E f d\mu$$

□

Теорема 13.1 (Беппо Леви)**.** *Пусть* $f_k : E \to [0, +\infty]$ *— неотрицательные измеримые функции,* $f_r \to f$ *на* E*. Если* $\forall x \in E$ *выполнено* $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$*, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$$

Доказательство. Функция f измерима, как предел измеримых функций. При этом, $f_k \leqslant f_{k+1} \leqslant f$ на $E \Rightarrow \int_E f_k d\mu \leqslant \int_E f_{k+1} d\mu \leqslant \int_E f d\mu$. Тогда $\left\{\int_E f_k d\mu\right\}$ нестрого возрастает в$\overline{\mathbb{R}}$, поэтому $\exists \lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu \leqslant \int_E f d\mu$. Докажем противное неравенство. Достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} \int_E f_k d\mu \geqslant \int_E \varphi d\mu$ для любой простой функции $\varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Пусть φ — такая функция. Зафиксируем $t \in (0,1)$ и рассмотрим $E_k = \{x \in E : f_k(x) \geqslant t\varphi(x)\}$. Из возрастания f_k, получаем, что $E_k \subset E_{k+1}$. Покажем, что $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Если $x \in E$ и $\varphi(x) = 0$, то $x \in E_k \forall k$. Если $\varphi(x) > 0 \Rightarrow f(x) \geqslant \varphi(x) > t\varphi(x) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : f_m(x) \geqslant t\varphi(x) \Leftrightarrow x\ inE_m$. По построению имеем:

$$\int_E f_k d\mu \geqslant \int_{E_k} f_k d\mu \geqslant t \int_{E_k} \varphi d\mu \quad (*)$$

Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i I_{A_i}$, где $\{A_i\}$ — допустимое разбиение. Тогда по непрерывности меры

$$\int_{E_k} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_k \cap A_i) \to_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E \cap A_i) = \int_E \varphi d\mu$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu \geqslant t \int_E \varphi d\mu$$

При $t \to 1-0$, получаем обратное неравенство. □

Задача (Лемма Фату)**.** *Пусть $f_k : E \to [0,+\infty]$ — неотрицательные измеримые функции. Пусть $f_k \to f$. Докажите, что если $\exists C \geqslant 0 : \int_E f_k d\mu \leqslant C \Rightarrow \int_E f d\mu \leqslant C$*

Утверждение 13.8. *Если $f, g : E \to [0,+\infty]$, то $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$*

Доказательство. $\exists\{\varphi_k\}$ — неотрицательные простые функции, $0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots$, такие, что $\varphi_k \to f$ на E, $\exists\{\psi_k\}$ — неотрицательные простые функции, $0 \leqslant \psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant \ldots$, такие, что $\psi_k \to g$ на E. Тогда $\{\varphi_k + \psi_k\} : \varphi_k + \psi_k \to f + g$ на E. Тогда по теореме Беппо Леви и по свойству аддитивности:

$$\int_E (f+g) d\mu = \lim_{k\to\infty} (\varphi_k + \psi_k) = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k d\mu + \lim_{k\to\infty} \int_E \psi_k d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

□

Следствие (Теорема Леви для рядов)**.** Если $f_k : E \to [0,+\infty]$, то

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu$$

Доказательство. Сумма ряда — измеримая функция, как предел частичных сумм. По свойству линейности, имеем

$$\int_E \sum_{k=1}^{m} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k d\mu$$

Перейдем к пределу в этом равенстве.

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_E\sum_{k=1}^{m}f_k d\mu=\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f_k d\mu$$

Получили, что

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f_k d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k d\mu$$

$\square$

Теорема 13.2 (неравенство Чебышева)**.** *Если* $f : E \to [0, +\infty]$, *то* $\forall t \in (0, +\infty)$. $\mu(x \in E : f(x) \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t}\int_E f d\mu$.

Доказательство. Определим $E_t = \{x \in E : f(x) \geqslant t\}$ — измеримое подмножество E. Тогда:

$$\int_E f d\mu \geqslant \int_{E_t} f d\mu = \int_{E_t} t d\mu = t\mu(E_t)$$

$\square$

13.5 Интеграл Лебега от произвольной функции

Определение 13.3. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — измерима, тогда

$$\int_E f d\mu=\int_E f^+ d\mu-\int_E f^- d\mu$$

При условии, что хотя бы один из интегралов $\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu$ конечен

Определение 13.4. Функция f называется интегрируемой по Лебегу, если оба интеграла $\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu$ конечны

Замечание. Данное определение согласуется с определением в неотрицательном случае: $f^+ = f, f^- = 0 \int_E 0 d\mu = 0$

Замечание. Если функция f измерима на E, то интегрируемость f и $|f|$ эквивалентны на E

Доказательство.

$\Rightarrow$ Тогда $\int_E f d\mu < \infty$. Т.к. $|f| = f^+ + f^-$ на $E \Rightarrow \int_E |f| d\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu < \infty$

$\Leftarrow$ Пусть $|f|$ интегрируема на E. Тогда $0 \leqslant f^\pm \leqslant |f| \Rightarrow \int_E f^\pm d\mu \leqslant \infty$

$\square$

Замечание. Если f интегрируема на E, то

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f| d\mu$$

Доказательство.

$$\left|\int_E f d\mu\right| = \left|\int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu\right| \leqslant \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu$$

$\square$

Замечание. Если f интегрируема на E, то f конечно почти всюду

Доказательство. Определим $E_\infty = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$. Тогда $\forall t \in (0, \infty) \mu(x \in E : f(x) \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t}\int_E f d\mu \Rightarrow \mu(E_\infty) = 0$ □

Теорема 13.3 (Счетная аддитивность интеграла). *Пусть E_k измеримы, $E_i \cap E_j = \varnothing, E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Тогда, если f неотрицательная измеримая функция на E, или f интегрируема на E, то*

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E f_k d\mu$$

Доказательство. Докажем в первом случае. Т.к. E_k образуют разбиение E, то $I_E = \sum_{k=1}^\infty I_{E_k} \Rightarrow f = fI_E = \sum_{k=1}^\infty fI_k$ на E. Тогда по теореме Леви для рядов:

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E f I_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f d\mu$$

Второй случай следует из измеримости и неотрицательности функций $f^\pm$ □

Лемма 13.1. *Пусть E — измермо, $E_0 \subset E : \mu(E_0 \subset E) = 0$. Тогда $\int_E f d\mu = \int_{E_0} f d\mu$ существуют одновременно, и в случае существования, совпадают*

Доказательство. Отметим, что $f|_E, f|_{E_0}$ измеримы одновременно. Тогда по аддитивности интеграла

$$\int_E f^\pm d\mu = \int_E f^\pm d\mu + \int_{E \setminus E_0} f^\pm d\mu = \int_{E_0} f^\pm d\mu$$

Последний переход верен, т.к.

$$\forall g \exists \int_{E\setminus E_0} g d\mu = 0$$

□

Следствие. Если f интегрируема на E, $g = f$ почти всюду на E. Тогда g также интегрируема на E, причем $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$

Следствие (Признак интегрируемости). Если f измерима на E и $\exists g$ — интегрируемая на E, такая, что $|f| \leqslant g$ почти всюду на $E \Rightarrow f$ тоже интегрируема

Доказательство. Интегрируемость $|f|, f$ эквивалентны, поэтмоу докажем только интегрируемость $|f|$. По монотонности интеграла и лемме,

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus \{x : |f| > g\}} |f| d\mu \leqslant \int_{E \setminus \{x : |f| > g\}} g d\mu = \int_E g d\mu < \infty$$

□

Теорема 13.4. *Пусть $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ интегрируемы и λ — число. Тогда*

1. *Если $f \leqslant g$ на E, то $\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$*
2. $\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu$

3. $\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

Доказательство.

1. $f^+ \leqslant g^+, f^- \geqslant g^-$. Проинтегрируем эти неравенства, получаем:

$$\int_E f^+ d\mu \leqslant \int_E g^+ d\mu, \int_E g^- d\mu \leqslant \int_E f^- d\mu$$

Вычитая второй неравенство из первого,

$$\int_E f^+ d\mu - \int_E g^- d\mu \leqslant \int_E g^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

2. Для $\lambda \geqslant 0$. Тогда $(\lambda f)^{\pm} = \lambda f^{\pm}$. Тогда

$$\int_E \lambda f d\mu = \int_E (\lambda f)^+ d\mu - \int_E (\lambda f)^- d\mu = \int_E \lambda f^+ d\mu - \int_E \lambda f^- d\mu = \lambda \int_E f d\mu$$

Для $\lambda = -1$: $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$. Тогда

$$\int_E (-f) d\mu = \int_E f^- d\mu - \int_E f^+ d\mu = -\int_E f d\mu$$

Для $\lambda < 0 : \lambda = -|\lambda|$ и пользуемся утверждением выше.

3. Обозначим $h = f + g$. $\exists E_0 \subset E$, такое, что $\mu(E \setminus E_0) = 0$, f, g принимают на E_0 конечные значения. ($\Rightarrow h$) тоже будет на E_0 конечной. Имеем:

$$h^+ - h^- = h = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \Rightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\int_{E_0} h^+ d\mu + \int_{E_0} f^- d\mu + \int_{E_0} g^- d\mu = \int_{E_0} h^- d\mu + \int_{E_0} f^+ d\mu + \int_{E_0} g^+ d\mu =$$

Получили, что

$$\int_E h d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

Причем h интегрируема, т.к.

$$\int_E h^{\pm} d\mu < \infty \Rightarrow |h| \leqslant |f| + |g|$$

□

Теорема 13.5 (Лебега о мажорированной сходимости)**.** *Пусть* $f_k, f : E \to \mathbb{R}, f_k \to f$ *почтю всюду на* E*. Если* $\exists g$ *— интегрируемая на* E *и* $|f_k| \leqslant g$ *почти всюду на* E*, то*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$$

Доказательство. Будем считать, что $f_k \to f$ всюду на E, $|f_k| \leqslant g$ всюду на E, g — конечна на E. Так можно сделать, т.к. множествами меры 0 "можно пренебрегать". Переходя к пределу в неравенствах $|f_k| \leqslant g$ на E, получим $|f| \leqslant g$. Следовательно, все f_k, f интегрируемы на E. Определим $h_k = \sup_{m \geqslant k} |f_m - f| \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant h_{k+1}(x) \leqslant h_k(x) \forall x \in E$. h_k интегрируемы на E, т.к. $|h_k| \leqslant 2g$ на E. Применим теорему Леви к последовательности $\{2g - h_k\}$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (2g - h_k) d\mu = \lim_{n\to\infty} h_k(x) = \inf_k \sup_{m\geqslant k} |f_m(x) - f(x)| = \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$$

Следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \int_E h_k d\mu = 0$$

Т.к. $\int_E |f_k - f| d\mu \leqslant \int_E h_k d\mu, \left|\int_E f_k d\mu - \int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f_k - f| d\mu$ □

Теорема 13.6. *Пусть f ограничена на $[a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$, когда f непрерывна почти всюду на $[a, b]$. В этом случае, f интегрируема по Лебегу, причем*

$$\int_a^b f dx = \int_{[a,b]} f d\mu$$

Доказательство. Пусть T — разбиение $[a, b]$. Определим $\varphi_T = \sum_{i=1}^n m_i I_{[x_{i-1}, x_i)}, \psi_T = \sum_{i=1}^n M_i I_{[x_{i-1}, x_i)}$, где $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Имеем (s_T, S_T) — нижняя и верхние суммы Дарбу.

$$\int_{[a,b]} \varphi_T d\mu = s_T, \int_{[a,b]} \psi_T d\mu = S_T$$

Доказательство будет завершено на следующей лекции □