

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
IV СЕМЕСТР

Лектор: *Жуковский Сергей Евгеньевич*



Автор: *Киселев Николай*  
*Репозиторий на Github*

осень 2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Продолжение автономных систем</b>	<b>2</b>
1.1	Линейные системы . . . . .	2
1.1.1	Вещественные собственные числа у матрицы . . . . .	2
	Случай $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0,  \lambda_1  <  \lambda_2 $ . . . . .	2
	Случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 < \lambda_2$ . . . . .	2
	Случай $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . . . . .	2
	Случай $\lambda_1 = \lambda_2$ . . . . .	2
	Случай одного собственного вектора с собственным числом $\lambda$ . . . . .	3
1.1.2	Комплекснозначные собственные числа у матрицы . . . . .	3
1.2	Нелинейные системы . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Устойчивость решений дифференциальных уравнений</b>	<b>4</b>
2.1	Примеры . . . . .	5
2.2	Теоремы Ляпунова об устойчивости . . . . .	6

# 1 Продолжение автономных систем

**Напоминание.** Мы рассматриваем автономные системы, т.е. вида  $x' = f(x)$ .

## 1.1 Линейные системы

Будем рассматривать уравнение в  $\mathbb{R}^2$ :

$$x' = Ax \quad (1.1)$$

Где  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  — матрица, причем  $\det A \neq 0$  (система простая)

### 1.1.1 Вещественные собственные числа у матрицы

Для начала рассмотрим случай наличия двух собственных векторов у матрицы  $A$ . Положим  $h_1, h_2$  — собственные векторы, тогда они ЛНЗ. Заметим, что тогда:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

Рассмотрим плоскость в базисе  $(h_1, h_2)$ . Пусть  $\xi_i$  —  $i$ -ая координатная функция решения. Тогда:

$$\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} = c_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1 t} = c_2 \left( \frac{\xi_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Таким образом, в координатах  $h_1, h_2$  и при  $t \rightarrow \infty$ , мы можем видеть следующую картинку (стрелки показывают движение решения при  $t \rightarrow \infty$ ):

**Случай**  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, |\lambda_1| < |\lambda_2|$  В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *устойчивым узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

**Случай**  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 < \lambda_2$  В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *неустойчивым узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

**Случай**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *седлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

**Случай**  $\lambda_1 = \lambda_2$  В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *диритическим узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Для случая, когда собственный вектор один:

**Случай одного собственного вектора с собственным числом  $\lambda$**  Тогда пусть  $h_1$  — собственный вектор,  $h_2$  — присоединенный к нему. Тогда:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} h_1 + c_2 e^{\lambda t} (h_1 t + h_2) = h_1 \underbrace{(c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} t)}_{\xi_1} + h_2 \underbrace{c_2 e^{\lambda t}}_{\xi_2}$$

Тогда имеем:

$$\xi_1 = \frac{c_1}{c_2} \xi_2 + \xi_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{c_2}$$

В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *дискритическим узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

### 1.1.2 Комплекснозначные собственные числа у матрицы

Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$ . Тогда  $h = h_1 \pm ih_2$  — собственные векторы, где  $h_1, h_2$  — ЛНЗ. Тогда:

$$x(t) = ce^{\lambda t} h + \bar{c} e^{\bar{\lambda} t} \bar{h}, c \in \mathbb{C}$$

Положим  $c = \frac{r}{2} e^{i\varphi}$ , тогда:

$$x(t) = \frac{r}{2} e^{\alpha t} (e^{i\varphi + i\beta t} (h_1 + ih_2) e^{-i\varphi - i\beta t} (h_1 - ih_2)) = re^{\alpha t} (\cos(\varphi + \beta t) h_1 - \sin(\varphi + \beta t) h_2)$$

Получаем:

$$\xi_1(t) = re^{\alpha t} \cos(\varphi + \beta t)$$

$$\xi_2(t) = re^{\alpha t} \sin(\varphi + \beta t)$$

Картинки в зависимости от ранзых  $\alpha, \beta$  будут следующие:

тут должны быть картинки

## 1.2 Нелинейные системы

Будем рассматривать уравнение

$$x' = f(x), f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, f \in C^2, \Omega — \text{открытое} \quad (1.2)$$

Пусть  $\tilde{x} \in \Omega$  таково, что  $f(\tilde{x}) = 0$ , т.е.  $\tilde{x}$  — положение равновесия. Рассмотрим еще одно уравнение:

$$y' = f'(\tilde{x})y, f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

**Теорема 1.1** (б/д). Пусть  $\det f'(\tilde{x}) \neq 0$ , (т.е. система (1.3) простая), причем 0 не является ее центром. Тогда  $\exists U$  — окрестность  $\tilde{x}$ ,  $\exists V$  — окрестность 0,  $\exists \psi: U \rightarrow V$  — гомеоморфизм, такие, что выполнены следующие условия:

1.  $\forall$  траектории  $X \subset V$  системы (1.2),  $\psi(X)$  — траектория системы (1.3)
2.  $\forall$  траектории  $Y \subset U$  системы (1.3),  $\psi^{-1}(Y)$  — траектория системы (1.2)

**Пример.** Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1|x| \\ x_2' = x_1 - x_2|x| \end{cases}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

И линеаризованная система имеет вид:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

Заметим, что тогда  $\lambda \pm i$  и  $0$  — центр. Сделаем замену  $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$ , имеем:

$$\begin{cases} r' \cos \varphi - r(\sin \varphi) \varphi' = -r \sin \varphi - r^2 \cos \varphi \\ r' \sin \varphi + r(\cos \varphi) \varphi' = r \cos \varphi - r^2 \sin \varphi \end{cases}$$

$$\{r' = -r^2 - r\varphi' = -r \Rightarrow \varphi' = 1\}$$

Получили, что  $\varphi = \varphi_0 + t$  и

$$x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos(\varphi_0 + t) \\ r(t) \sin(\varphi_0 + t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, картинка будет следующей:

тут должна быть картинка

Т.е. одна траектория получилась не замкнутой. Но тогда между ними не может существовать гомеоморфизма. Таким образом, условие, что  $0$  — не центр существенно.

## 2 Устойчивость решений дифференциальных уравнений

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  открыто,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^1$ . Будем рассматривать уравнение:

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

Пусть  $\varphi(\cdot, \xi)$  — непрерывное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

**Определение 2.1.** Решение  $\varphi(\cdot, \hat{\xi})$  называется устойчивым по Ляпунову, если

1.  $\exists r > 0 : \forall \xi \in O(\hat{\xi}, r) \varphi(\cdot, \xi)$  определена на  $[0, +\infty)$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \xi \in O(\hat{\xi}, \delta) \Rightarrow \varphi(t, \xi) \in O(\varphi(t, \hat{\xi}), \varepsilon) \forall t \in [0, +\infty)$

**Определение 2.2.** Решение  $\varphi(\cdot, \hat{\xi})$  называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и  $\exists d > 0 : \forall \xi \in O(\hat{\xi}, d) : |\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \hat{\xi})| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$

## 2.1 Примеры

### 1. Логистическое уравнение.

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right), \varphi(t, \xi) = \frac{k\xi e^{rt}}{k - \xi + \xi e^{rt}}$$

тут должна быть картинка

Тогда: при  $\hat{\xi} = k$ ,  $\varphi(\cdot, \hat{\xi})$  — асимптотически устойчиво, а при  $\hat{\xi} = 0$  оно не устойчиво по Ляпунову.

2.

$$x' = Ax, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Тогда в зависимости от картинки решение будет иметь разный характер устойчивости:

- ▷ Седло  $\Rightarrow$  не устойчиво по Ляпунову
- ▷ Центр  $\Rightarrow$  устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически
- ▷ Устойчивый узел  $\Rightarrow$  устойчиво асимптотически

**Теорема 2.1.** Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  — собственные числа матрицы  $A$ . Тогда:

1. Если  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \forall j$  то 0 асимптотически устойчив

2. Если

- ▷  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0 \forall j \Rightarrow 0$
- ▷  $\exists j : \operatorname{Re} \lambda_j = 0$
- ▷  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0 \Rightarrow$  все соответствующие жордановы клетки имеют размер 1.

то 0 устойчив по Ляпунову и не устойчив асимптотически.

3. Во всех остальных случаях 0 не устойчив по Ляпунову.

*Доказательство.* Нам известно, что:

$$x(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_m(t)e^{\lambda_m t} \quad (2.2)$$

Причем  $\deg P_j <$  размер наибольшей Жордановой клетки, соответствующей числу  $\lambda_j$ . Пусть  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$

1. Пусть  $X(t)$  — ФМР,  $X(0) = I$ . Пусть  $x(t)$  — один из столбцов ФМР. Тогда:

$$x(t) = \sum_{j=1}^m P_j(t)e^{\lambda_j t}(\cos(\beta_j t) + i \sin(\beta_j t)) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$$

Тогда

$$X(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty \Rightarrow \|X(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty \quad (2.3)$$

Получаем, что  $\exists \gamma > 0 : \|X(t)\| \leq \gamma \forall t \geq 0$ .

$$\varphi(t, \xi) = X(t)\xi, t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$$

$\forall \varepsilon > 0$  положим  $\delta = \frac{2\varepsilon}{\gamma}$ . Тогда при  $\xi \in O(0, \delta)$ , то  $|\varphi(t, \xi)| = |X(t)\xi| \leq \|X(t)\| \cdot |\xi| \leq \gamma \delta < \varepsilon$ . Таким образом, данное решение асимптотически устойчиво.

2. Из размера жордановых клеток и условия, что  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$  получаем, что каждый элемент матрицы  $X(t)$  ограничен  $\Rightarrow \exists \gamma > 0 : \|X(t)\| \leq \gamma$ . Тогда аналогично получаем, что 0 устойчиво по Ляпунову.

Докажем, что нет асимптотической устойчивости. Пусть  $\alpha_1 = \operatorname{Re} \lambda_1 = 0, h_1 \in C^n$  — собственный вектор. Тогда  $x(t) = e^{\lambda_1 t} h_1 = (\cos(\beta_1 t) + i \sin(\beta_1 t)) h_1$  — решение. Тогда решением также являются функции:  $x_k(t) = \frac{1}{k} \operatorname{Re} x(t), k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall d > 0 \exists k : x_k(0) = \frac{1}{k} \operatorname{Re}(x(0)) \in O(0, d)$ . Но  $x_k(t) \not\rightarrow 0$ , т.к.:

$$x_k(t) = \frac{1}{k} (\operatorname{Re} h_1 \cos(\beta_1 t) + \operatorname{Im} h_1 \sin(\beta_1 t))$$

3. Нетрудно проверить, что тогда  $\exists j : P_j(t) e^{\lambda_j t}$  не ограничено. Тогда:  $x(t) = P_j(t) e^{\lambda_j t}$  — решение. Но тогда  $x_k(t) = \frac{1}{k} \operatorname{Re} x(t), y_k(t) = \frac{1}{k} \operatorname{Im} x(t)$  — тоже решения. Но в таком случае, либо  $x_k$ , либо  $y_k$  не ограничены. Б.О.О.,  $x_k$  не ограничено. Положим  $\varepsilon = 1$ .  $\forall \delta > 0 \exists k : |x_k(0)| < \delta$ , но  $|x_k(t)|$  не ограничена при  $t \in [0, +\infty) \Rightarrow 0$  не является устойчивым по Ляпунову.

□

## 2.2 Теоремы Ляпунова об устойчивости

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — открытое,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^1, \hat{x} \in \Omega, f(\hat{x}) = 0$ .

$$x' = f(x) \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi \end{cases} \tag{2.5}$$

Пусть  $\varphi(\cdot, \xi)$  — непрерывное решение задачи Коши (2.5),  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  — открытое,  $v : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, v \in C^1$ .

**Определение 2.3.**  $\frac{dv}{dt}(x) = \langle v'(x), f(x) \rangle, x \in \tilde{\Omega}$  — производная в силу системы (2.4).

Если  $x(\cdot)$  — решение (2.4) и  $x(t) \in \tilde{\Omega} \forall t$ , то

$$\frac{d}{dt}(v(x(t))) \equiv \langle v'(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \equiv \langle v'(x(t)), f(x(t)) \rangle \equiv \frac{dv}{dt}(x(t)).$$

**Теорема 2.2** (Ляпунова об устойчивости). Пусть  $\exists$  окрестность  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  точки  $\hat{x}, \exists v \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$  такие, что:

1.  $v(\hat{x}) = 0, v(x) > 0 \forall x \neq \hat{x};$

$$2. \quad \frac{dv}{dt}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \tilde{\Omega}.$$

Тогда  $\hat{x}$  устойчиво по Ляпунову.

*Доказательство.* Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Б.О.О.  $B(\hat{x}, \varepsilon) \subset \tilde{\Omega}$ . Положим  $m = \min_{x \in S(\hat{x}, \varepsilon)} v(x) > 0$ . Так как  $v(\hat{x}) = 0$  и  $v$  непрерывна, то  $\exists \delta > 0$ :  $v(x) < m \quad \forall x \in B(\hat{x}, \delta)$ . Для любого  $\xi \in B(\hat{x}, \delta)$  покажем, что  $\varphi(t, \xi) \in B(\hat{x}, \varepsilon)$  для всех  $t \geq 0$ .

Предположим противное: пусть  $\exists T > 0$  такое, что  $\varphi(T, \xi) \notin B(\hat{x}, \varepsilon)$ . В силу непрерывности решения и того, что  $\varphi(0, \xi) = \xi \in B(\hat{x}, \delta) \subset B(\hat{x}, \varepsilon)$ , найдётся первый момент времени  $t_0 \in (0, T]$ , когда траектория выходит на границу шара, т.е.

$$|\varphi(t_0, \xi) - \hat{x}| = \varepsilon, \quad \text{и} \quad |\varphi(t, \xi) - \hat{x}| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, t_0).$$

Тогда  $\varphi(t_0, \xi) \in S(\hat{x}, \varepsilon)$ . По определению  $m$  имеем  $v(\varphi(t_0, \xi)) \geq m$ .

С другой стороны, из условия 2 теоремы ( $\frac{dv}{dt} \leq 0$ ) следует, что функция  $v(\varphi(t, \xi))$  не возрастает на  $[0, t_0]$ . Действительно,

$$\frac{d}{dt}v(\varphi(t, \xi)) = \frac{dv}{dt}(\varphi(t, \xi)) \leq 0.$$

Поэтому

$$v(\varphi(t_0, \xi)) \leq v(\varphi(0, \xi)) = v(\xi) < m,$$

так как  $\xi \in B(\hat{x}, \delta)$ . Получили противоречие:  $v(\varphi(t_0, \xi)) \geq m$  и  $v(\varphi(t_0, \xi)) < m$  одновременно.

Следовательно, наше предположение неверно, и  $\varphi(t, \xi) \in B(\hat{x}, \varepsilon)$  для всех  $t \geq 0$ . В частности, отсюда вытекает, что решение  $\varphi(\cdot, \xi)$  определено на  $[0, +\infty)$  (оно не может покинуть компакт  $B(\hat{x}, \varepsilon) \subset \tilde{\Omega}$ , где выполнены условия теоремы существования и единственности). Таким образом, мы нашли  $\delta > 0$  (то самое, из непрерывности  $v$ ) такое, что для любого  $\xi \in B(\hat{x}, \delta)$  выполнено  $\varphi(t, \xi) \in B(\hat{x}, \varepsilon) \subset O(\varphi(t, \hat{x}), \varepsilon)$  для всех  $t \geq 0$  (напомним, что  $\varphi(t, \hat{x}) = \hat{x}$  в силу  $f(\hat{x}) = 0$ ).

Это в точности означает устойчивость по Ляпунову положения равновесия  $\hat{x}$ .  $\square$

**Пример.** Рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(\Omega), \quad \tilde{x} \in \Omega, \quad f(\tilde{x}) = 0.$$

Пусть существует окрестность  $U \subset \Omega$  точки  $\tilde{x}$  такая, что для всех  $x \in U \setminus \{\tilde{x}\}$  выполнено

$$(x - \tilde{x})f(x) < 0.$$

Определим функцию  $v(x) = (x - \tilde{x})^2$ . Очевидно,

$$v(\tilde{x}) = 0, \quad v(x) > 0 \quad \forall x \neq \tilde{x}.$$

Её производная в силу системы равна

$$\frac{dv}{dt}(x) = 2(x - \tilde{x})f(x) < 0 \quad \forall x \in U \setminus \{\tilde{x}\}.$$

Таким образом,  $v$  удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, и  $\tilde{x}$  является асимптотически устойчивым положением равновесия.

**Теорема 2.3** (Ляпунова об асимптотической устойчивости). Пусть  $\exists$  окрестность  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  точки  $\tilde{x}$ ,  $\exists v \in C^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R})$  такие, что:

1.  $v(\tilde{x}) = 0, v(x) > 0 \forall x \neq \tilde{x}$ ;
2.  $\frac{dv}{dt}(x) < 0 \forall x \in \tilde{\Omega} \setminus \{\tilde{x}\}$ .

Тогда  $\tilde{x}$  асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* По теореме Ляпунова об устойчивости,  $\tilde{x}$  устойчиво  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : B(\tilde{x}, \varepsilon) \subset \tilde{\Omega}$  и  $\forall \xi \in B(\tilde{x}, \delta) \forall t \geq 0 \varphi(t, \xi) \in B(\tilde{x}, \varepsilon)$ .

Рассмотрим  $\xi \in B(\tilde{x}, \delta)$  и докажем, что  $\varphi(t, \xi) \rightarrow \tilde{x}$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Предположим противное: пусть  $\exists \eta > 0$  и последовательность  $\{t_j\} \rightarrow +\infty$  такие, что  $|\varphi(t_j, \xi) - \tilde{x}| \geq \eta$  для всех  $j$ . Б.О.О. можно считать  $\eta < \varepsilon$ .

Множество  $K = \{x \in \overline{B(\tilde{x}, \varepsilon)} : \eta \leq |x - \tilde{x}| \leq \varepsilon\}$  компактно и не содержит  $\tilde{x}$ . Функция  $v$  непрерывна и положительна на  $K$ , поэтому достигает минимума:

$$\mu = \min_{x \in K} v(x) > 0.$$

В частности,  $v(\varphi(t_j, \xi)) \geq \mu$  для всех  $j$ .

Так как  $\frac{dv}{dt}(x) < 0$  для всех  $x \in \tilde{\Omega} \setminus \{\tilde{x}\}$ , функция  $v(\varphi(t, \xi))$  строго убывает по  $t$ . Поскольку она ограничена снизу нулём, существует предел

$$l = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(\varphi(t, \xi)) \geq \mu > 0.$$

Рассмотрим множество  $\Omega_l = \{x \in \overline{B(\tilde{x}, \varepsilon)} : v(x) \geq l\}$ . Оно замкнуто, не содержит  $\tilde{x}$  (ибо  $v(\tilde{x}) = 0$ ), и компактно. На этом множестве  $\frac{dv}{dt}$  непрерывна и отрицательна, следовательно, достигает максимума (т.е. существует отрицательная верхняя грань):

$$-\alpha = \max_{x \in \Omega_l} \frac{dv}{dt}(x) < 0, \quad \alpha > 0.$$

Но тогда для всех  $t$ , поскольку  $\varphi(t, \xi) \in \Omega_l$  (ибо  $v(\varphi(t, \xi)) \geq l$ ), имеем

$$\frac{d}{dt}v(\varphi(t, \xi)) = \frac{dv}{dt}(\varphi(t, \xi)) \leq -\alpha.$$

Интегрируя от 0 до  $t$ , получаем

$$v(\varphi(t, \xi)) \leq v(\xi) - \alpha t.$$

При достаточно больших  $t$  правая часть становится отрицательной, что противоречит неотрицательности  $v$ .

Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, и  $\varphi(t, \xi) \rightarrow \tilde{x}$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Таким образом,  $\tilde{x}$  асимптотически устойчиво.  $\square$

**Пример.** Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 - x_1, \\ x'_2 = -x_1^3. \end{cases}$$

Единственное положение равновесия —  $\tilde{x} = (0, 0)$ . Определим функцию

$$v(x) = (x_2 - x_1)^2 + x_2^2.$$

Очевидно,  $v(0,0) = 0$  и  $v(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Вычислим производную в силу системы:

$$\frac{dv}{dt}(x) = 2(x_1 - x_2)(x_2 - x_1) + 2(2x_2 - x_1)(-x_1^3) = -2(x_1 - x_2)^2 - 4x_1^3x_2 + 2x_1^4.$$

Квадратичная часть  $-2(x_1 - x_2)^2$  неположительна и обращается в нуль лишь при  $x_1 = x_2$ . На этой прямой (подставим  $x_2 = x_1$ ):

$$\frac{dv}{dt}(x_1, x_1) = -2x_1^4 < 0 \quad (x_1 \neq 0).$$

Таким образом, в достаточно малой окрестности нуля  $\frac{dv}{dt}(x) < 0$  для всех  $x \neq 0$ . По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости  $\tilde{x}$  асимптотически устойчиво.