Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ОСНОВЫ ВЕРОЯТНОСТИ И ТЕОРИИ МЕРЫ

III СЕМЕСТР

Лектор: *Дженджер*

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Введение **2**

1.1 Определения 2

1.2 Распределение случайных величин 3

1.2.1 Равномерное распределение 3

1.2.2 Распределение Бернулли 3

1.2.3 Биномиальное распределение 3

1.2.4 Геометрическое распределение 3

1.3 Математическое ожидание 4

2 Теория Меры **8**

2.1 Меры Жордана и Лебега 11

1 Введение

1.1 Определения

Определение 1.1. В рамках Основы Вероятности мы будем рассматривать (Ω, P), где Ω — элементарные события, а $P : 2^\Omega \to [0, 1]$, которые удовлетворяют следующими свойствами:

1. $|\Omega| \leqslant \mathbb{N}$, элементы Ω называются элементарными исходами
2. $\sum_{\omega \in 2^\Omega} P(\omega) = 1$

Определение 1.2. Событие — элемент 2^Ω, $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ — вероятность события A.

В дальнейшем будем сокращать $P(\{\omega\})$ как $P(\omega)$.

Замечание. P обладает следующими свойствами

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
4. $P\left(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$

Определение 1.3. Классическая модель — случай, когда все элементарные исходы равновероятны, т.е. $\forall \omega \in \Omega P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Определение 1.4. $P(A|B)$ — вероятность события A при улсовии, что произошло событие B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Определение 1.5. (Формула полной вероятности) Пусть $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^\infty B_i$. Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^\infty P(B_i)P(A|B_i)$.

Определение 1.6. (Формула Байеса)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Замечание.

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

Определение 1.7. События A, B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Определение 1.8. События $A_1, \dots$ называются независимыми в совокупности, если

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Определение 1.9. (Схема испытаний Бернулли) $\Omega = \{0, 1\}^n, P(1) = p, P(0) = 1 - p \Rightarrow P(\omega) = p^{\sum w_i}(1 - p)^{n - \sum w_i}$.

Определение 1.10. Отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина.

Соглашение. вместо $\xi(\omega)$ будем писать ω.

Пример. $P(\xi = \sqrt{2})$ вместо $P(\{\omega | \xi(\omega) = \sqrt{2}\})$

1.2 Распределение случайных величин

1.2.1 Равномерное распределение

$x \in Im\xi$	1	2	3	4	5	6
$P(\xi = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1.2.2 Распределение Бернулли

$\Omega = \{0,1\}, \xi(\omega) = \omega, P(\xi = 1) = p, P(\xi = 0) = 1 - p$. Пишут $\xi \sim Bern(p)$.

1.2.3 Биномиальное распределение

$\Omega = \{0,1\}^n, \xi(\omega) = \sum \omega_i$ (количество успехов). $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Пишут $\xi \sim Bin(n, p)$.

Замечание. Распределение Бернулли — частный случай Биномиального (при $n = 1$)

Теорема 1.1. *(Пуассона) Пусть $\xi_n \sim Bin(n, p_n)$ — случайные величины, такие, что $np_n \to \lambda > 0$. Тогда $P(\xi_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.*

Доказательство.

$$P(\xi_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Т.к. количество множителей фиксированно, переходим к пределу.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np_n)^k}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

Определение 1.11. Распределение, задаваемого формлуой $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ называется распределением Пуассона и пишется $Pois(\lambda)$

1.2.4 Геометрическое распределение

$$\Omega = \{0^k 1 | k \in \mathbb{N}\} P(\xi = k) = (1-p)^k p$$

По сути, $\xi(\omega)$ — количество нулей перед первой единицей.

1.3 Математическое ожидание

Определение 1.12. Пусть ξ — случайная величина. $\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)$

Замечание. Ряд должен сходиться абсолютно, т.к. элементы Ω можно суммировать в разном порядке.

Утверждение 1.1. $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$.

Доказательство.

$$\mathbb{E}((\alpha\xi+\beta\eta)) = \sum_{\omega\in\Omega}(\alpha\xi+\beta\eta)(\omega)|P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}(\alpha\xi(\omega)+\beta\eta(\omega))P(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega}\alpha\xi(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega}\beta\eta(\omega)P(\omega) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$$

□

Утверждение 1.2. $\xi \leqslant \eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$.

Утверждение 1.3. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant E|\xi|$.

Доказательство.

$$\mathbb{E}|\xi| = \sum_{\omega\in\Omega}|\xi(\omega)|P(\omega)$$

Т.к. $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi| \Rightarrow -\mathbb{E}|\xi| \leqslant \mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}|\xi| \Rightarrow |\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$ □

Утверждение 1.4. $\xi = c \leqslant E\xi = c$.

Доказательство.

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega) = \mathbb{E}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}cP(\omega) = \mathbb{E}\xi = c\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega) = c$$

□

Утверждение 1.5. $\mathbb{E}\xi = \sum_{x\,\mathrm{Im}\,\xi} x\cdot P(\xi = x)$

Доказательство.

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega) = \sum_{x\in\mathrm{Im}\,\xi}\sum_{\omega:\xi(\omega)=x}xP(\omega) = \sum_{x\in\mathrm{Im}\,\xi}x\sum_{\omega:\xi(\omega)=x}P(\omega) = \sum_{x\in\mathrm{Im}\,\xi}xP(\xi=\omega)$$

□

Определение 1.13. ξ,η называются независимыми, если события $\{\xi = x_i\}$ и $\eta = x_j$ независимы

Определение 1.14. ξ_i называются независимыми в совокупности, если события $\{\xi_i = x_i\}$ независимы в совокупности.

Утверждение 1.6. *Пусть $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ — независимые в совокупности. Тогда*

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_2\ldots\xi_n = \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2\ldots\mathbb{E}\xi_n$$

Доказательство.

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_2\dots\xi_n = \sum x_1x_2\dots x_n P(\xi_1 = x_1 \cap \xi_2 = x_2 \cap \dots \cap \xi_n = x_n) =$$

$$= \sum x_1x_2\dots x_n P(\xi_1 = x_1)P(\xi_2 = x_2)\dots P(\xi_n = x_n) =$$

$$= \left(\sum_{x_1} x_1 P(\xi_1 = x_1)\right)\left(\sum_{x_2} x_2 P(\xi_2 = x_2)\right)\dots\left(\sum_{x_n} x_n P(\xi_n = x_n)\right)$$
$$= \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2\dots\mathbb{E}\xi_n$$

□

Определение 1.15. Пусть ξ — случайная величина. Дисперсия $\xi = \operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$

Утверждение 1.7. $\operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

Доказательство.

$$\operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2(\mathbb{E}\xi)^2 + (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

Утверждение 1.8. $\operatorname{Var}(c\xi) = c^2 \operatorname{Var}\xi$

Доказательство.

$$\operatorname{Var}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi - \mathbb{E}c\xi)^2 = c^2\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = c^2 \operatorname{Var}\xi$$

□

Утверждение 1.9. $\operatorname{Var}\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = c$ *с вероятностью* 1

Доказательство.

$$\operatorname{Var}\xi = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = 0 \Leftrightarrow (\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \Leftrightarrow \xi = c \text{ с вероятностью } 1$$

□

Определение 1.16. $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$.

Замечание. $cov(\xi, \eta) \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow$ величины растут либо в разных направлениях, либо в одном.

Утверждение 1.10. $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

Доказательство.

$$cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta - \eta\mathbb{E}\xi - \xi\mathbb{E}\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - (\mathbb{E}\eta\mathbb{E}\xi) - (\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta) + \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta =$$
$$= \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

□

Утверждение 1.11. $cov(\xi, \eta) = 0 \Leftarrow \xi, \eta$ *независимые.*

Замечание. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$

Замечание. $cov(\xi, \xi) = \operatorname{Var} \xi$

Замечание. $cov(\alpha\xi + \beta\eta, \mu) = \alpha cov(\xi, \mu) + \beta cov(\eta, \mu)$.

Утверждение 1.12. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ — случайные величины, причем $cov(\xi_i, \xi_j) = 0 \forall i \neq j$. Тогда*

$$\operatorname{Var}\left(\sum_i \xi_i\right) = \sum \operatorname{Var} \xi_i$$

Доказательство.

$$cov\left(\sum_i \xi_i, \sum_j \xi_j\right) = \sum_{i,j} cov(\xi_i, \xi_j) = \sum_i cov(\xi_i, \xi_i) + \underbrace{\sum_{i \neq j} cov(\xi_i, \xi_j)}_{0} = \sum_i \operatorname{Var} \xi_i$$

□

Определение 1.17. Коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{\operatorname{Var} \xi}\sqrt{\operatorname{Var} \eta}}$

Определение 1.18. Матрица ковариаций случайных величин $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ — матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} cov(\xi_1, \xi_1) & cov(\xi_2, \xi_1) & \dots & cov(\xi_n, \xi_1) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & cov(\xi_2, \xi_2) & \dots & cov(\xi_n, \xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_1, \xi_n) & cov(\xi_2, \xi_n) & \dots & cov(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix}$$

То есть $\Sigma_{i,j} = cov(\xi_i, \xi_j)$.

Утверждение 1.13. *Пусть Σ — матрица ковариаций. Тогда*

1. *Σ неотрицательно определена.*
2. *Σ не определена положительно тогда и только тогда, когда $\exists x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i \xi_i = c$ с вероятностью 1.*

Доказательство. 1.

$$\sum_{i,j} x_i \Sigma_{i,j} x_j = \sum_{i,j} x_i x_j cov(\xi_i, \xi_j) = cov\left(\sum_i x_i \xi_i, \sum_j x_j \xi_j\right) = \operatorname{Var}\left(\sum \xi_i x_i\right) = (*) \geqslant 0$$

2. Σ не определена положительно тогда и только тогда, когда $(*) = \operatorname{Var}\left(\sum \xi_i x_i\right) = 0 \Rightarrow \xi = c$ с вероятностью 1.

□

Утверждение 1.14 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.**

$$|cov(\xi, \eta)| \leqslant \sqrt{\operatorname{Var} \xi}\sqrt{\operatorname{Var} \eta}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу ковариаций для ξ, η — Σ. Т.к. она неотрицательно определена, то $|\Sigma| \geqslant 0$. Причем:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Var}\xi & cov(\xi,\xi) \\ cov(\eta,\xi) & \operatorname{Var}\eta \end{vmatrix} = \operatorname{Var}\xi \operatorname{Var}\eta - cov^2(\xi,\eta) \geqslant 0$$

. □

Утверждение 1.15 (Неравенство Маркова)**.** *Пусть* $\xi \geqslant 0, a > 0$. *Тогда:*

$$P(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{a}$$

Доказательство. Пусть $I_{\{\xi \in A\}}(\omega) = \begin{cases} 1, \xi(\omega) \in A \\ 0, \xi(\omega) \notin A \end{cases}$

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\xi I_{\{\xi \geqslant a\}} + \xi I_{\{\xi < a\}}) = \mathbb{E}\xi I_{\{\xi \geqslant a\}} + \mathbb{E}\xi I_{\{\xi < a\}} \geqslant \mathbb{E} a I_{\{\xi \geqslant a\}} = a\mathbb{E} I_{\{\xi \geqslant a\}} = aP(\xi \geqslant a)$$

$$\frac{\mathbb{E}\xi}{a} \geqslant P(\xi \geqslant a)$$

□

Утверждение 1.16 (Неравенство Чебышева)**.** *Пусть* $\xi, \mathbb{E}\xi < \infty, \operatorname{Var}\xi < \infty, a > 0$. *Тогда:*

$$P(\{|\xi - \mathbb{E}\xi| > a\}) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\xi}{a^2}$$

Доказательство.

$$P(\{|\xi - \mathbb{E}\xi| > a\}) = P(\{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 > a^2\}) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\xi}{a^2}$$

□

Теорема 1.2 (Закон Больших Чисел)**.** *Пусть* $\{\xi_i\}$ *— некоторые случайные величины, для которых выполнено:*

1. $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi_1 \forall n$
2. ξ_i *попарно некоррелированные*
3. $\forall n \operatorname{Var}\xi_n \leqslant C$.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall \varepsilon > 0 : P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n}\right|\right\} \to 0$$

Доказательство. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \underbrace{\mathbb{E}\frac{S_n}{n}}_{\mathbb{E}\xi_1}\right|\right\} > \varepsilon \leqslant \frac{\operatorname{Var}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{Var} S_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \operatorname{Var}\xi_k + \sum cov(\xi_i,\xi_j)}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0$$

□

Теорема 1.3 (Центральная предельная теорема (б/д))**.** *Пусть ξ_n — последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин с ограниченными математическими ожиданиями и дисперсиями. Тогда $\forall a, b \in [-\infty, +\infty], a < b$:*

$$P\left\{a \leqslant \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \leqslant b\right\} \to_{n\to\infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

2 Теория Меры

Определение 2.1. Пусть дано некоторое множество Ω. Множество $S \subset 2^\Omega$ называется полукольцом, если:

1. $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$
2. $A, B \in S \Rightarrow A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n A_k, A_k \in S$

Пример. Рассмотрим $\Omega = [0, 1)$. Тогда $S = \{[a, b) | [a, b) \subset \Omega\}$

Определение 2.2. Полуалгебра — такое полукольцо, что $\exists E \in S : \forall A \in S : A \subset E$.

Определение 2.3. Пусть дано некоторое множество Ω. Множество $R \subset 2^\Omega$ называется кольцом, если:

1. $A, B \in R \Rightarrow A \cap B \in R$
2. $A, B \in R \Rightarrow A \Delta B \in R$

Определение 2.4. Алгебра — кольцо, являющееся полуалгеброй

Утверждение 2.1. $\forall \mathcal{X} \subset 2^\Omega \exists$ *наименьшее по включению кольцо (алгебра) над x*

Доказательство. Положим $D = \{\text{кольца} \supset \mathcal{X}\}$. Рассмотрим $R = \bigcap_{d \in D} d$ — тоже кольцо (алгебра) над $\mathcal{X}$.

$$A, B \in R \Rightarrow \forall S \in D : A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S, A \Delta B \in S$$

□

Утверждение 2.2. *Пусть S — полукольцо. Тогда $\forall A, B_1, \ldots B_n \in S \exists m, A_1, \ldots A_m \in S$, такие, что*

$$A \setminus B_1 \setminus B_2 \setminus \cdots \setminus B_n = \bigsqcup_{k=1}^m A_k, A_k \in S, m \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Ведем индукцию по n

База: $n = 1$

Переход:

$$A \setminus B_1 \setminus B_2 \setminus \cdots \setminus B_n = \left(\bigsqcup_{k=1}^m A_k\right) \setminus B_n = \bigsqcup_{k=1}^m \underbrace{(A_k \setminus B_n)}_{\in S}$$

□

Утверждение 2.3. *Пусть S — полукольцо. Тогда $R(S) = \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k | n \in \mathbb{N}, A_k \in S\}$. Тогда $R(S)$ — минимальное кольцо, содержащее S.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}$ — наименьшее кольцо, содержащее S. Докажем, что $R(S) = \mathcal{R}$

$R(S) \subset \mathcal{R}$ — очевидно, т.к. любое кольцо включает в себя $R(S)$ как подсистему.

$R(S) \supset \mathcal{R}$ Рассмотрим

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \cap \bigsqcup_{s=1}^{m} B_s = \bigsqcup_{k \leqslant n, s \leqslant m} \underbrace{(A_k \cap B_s)}_{\in S}$$

Теперь рассмотрим

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \Delta \bigsqcup_{s=1}^{m} B_s = \bigsqcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus B_1 \setminus B_2 \setminus \dots \setminus B_m) \cup \bigsqcup_{s=1}^{m} (B_s \setminus A_1 \setminus A_2 \setminus \dots \setminus A_n)$$

□

Утверждение 2.4 (Об общих кирпичах). *$\forall A_1, A_2, \dots A_k \in S \exists B_1, \dots B_m$ — попарно непересекающиеся множества, такие, что $\forall i = 1, \dots n \exists \Gamma_i \subset \{1, 2, \dots m\} : A_i = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_i} B_\gamma$.*

Доказательство. Ведем индукцию по n

База: $n = 1$, берем $m = 1, B_1 = A$.

Переход: известно:

$$A_{n+1} \setminus B_1 \setminus \dots \setminus B_m = \bigsqcup_j D_j$$

Каждое из множеств $B_s \setminus A_{n+1}$ разобъем по определению, получим множества $B_{s,i}$. Итого искомые множества: $B_{s,i}, D_j, A_{n+1} \cap B_s$.

□

Определение 2.5. σ-алгебра — такая алгебра, которая замкнута относительно относительно $\bigcap^{\infty} A_i$

Определение 2.6. δ-алгебра — такая алгебра, которая замкнута относительно относительно $\bigcup^{\infty} A_i$

Замечание. σ-алгебра и δ-алгебра — это одно и то же

Определение 2.7. σ-кольцо — такое кольцо, которое замкнуто относительно относительно $\bigcap^{\infty} A_i$

Определение 2.8. δ-кольцо — такая кольцо, которое замкнуто относительно относительно $\bigcup^{\infty} A_i$

Замечание. σ-кольцо и δ-кольцо — это **НЕ** одно и то же, однако σ-кольцо всегда является δ-кольцом

Пример. Рассмотрим $X = \{A \subset \mathbb{N} | \ |A| < \infty\}$. Оно является δ-кольцом, но не σ (т.к. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{n\} = \mathbb{N} \notin X$).

Определение 2.9. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевская σ-алгебра — минимальная по включению алгебра, содержащая все открытые множества

Определение 2.10. Пусть $\mathcal{X} \subset 2^\Omega$. Тогда $m : \mathcal{X} \to [0, +\infty)$ называется мерой, если она аддитивна, т.е.

$$A_1, A_2, \dots A_n \in X, A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow m(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Определение 2.11. Отображение $m : \mathcal{X} \to 2^\Omega$ называется субаддитивным, если

$$\forall A_1, A_2, \dots A_n, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Определение 2.12. Отображение $m : \mathcal{X} \to 2^\Omega$ называется супераддитивным, если

$$\forall A_1, A_2, \dots A_n \in X, A_i \cap A_j = \varnothing, A \supset \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow m(A) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Утверждение 2.5. *Пусть R — кольцо. Тогда m — мера на R тогда и только тогда, когда m субаддитивна и супераддитивна.*

Доказательство. Т.к. следствие $\Leftarrow$ очевидно, докажем только $\Rightarrow$.

Субаддивность меры: Пусть $A_1, A_2, \dots A_n \in R, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. По утверждению об общих кирпичах, $\exists B_i : B_i \cap B_j = \varnothing : A_i = \bigsqcup_{s\in\Gamma_i} B_s$. Тогда $m(A) = \sum_{i\in I} m(B_i) \leqslant \sum_i m(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

Супераддивность меры: Пусть $A_1, A_2, \dots A_n \in R, A \supset \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$. По утверждению об общих кирпичах, $\exists B_i : B_i \cap B_j = \varnothing : A_i = \bigsqcup_{s\in\Gamma_i} B_s$. Тогда $m(A) = \sum_{i\in I} m(B_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

□

Определение 2.13. Мера называется σ-аддитивной, если $\forall A_1, A_2, \dots$ верно:

$$m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Определение 2.14. Отображение $m : \mathcal{X} \to 2^\Omega$ называется σ-субаддитивным, если

$$\forall A_1, A_2, \dots, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Определение 2.15. Отображение $m : \mathcal{X} \to 2^\Omega$ называется σ-супераддитивным, если

$$\forall A_1, A_2, \dots \in X, A_i \cap A_j = \varnothing, A \supset \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow m(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Утверждение 2.6. *Мера $m : S \to [0, +\infty)$ является σ-аддитивной тогда и только тогда, когда она σ-субаддитивна.*

Доказательство.

- $\Leftarrow$ Следует из антисимметричности $\geqslant$.
- $\Rightarrow$ Докажем σ-субаддитивность для $A = \bigcup^{\infty} A_i, A, A_i \in S$. Заменим $A_i \to A_i \cap A$, тогда $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ не увеличится. Заменим $A_i \to A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j$. Тогда

□

Утверждение 2.7. *Пусть $m : S \to [0, +\infty)$ — мера. Тогда $\exists! \nu : R(S) \to [0, +\infty)$, такая, что $\nu|_S = m$. Более того, σ-аддитивность наследуется*

Доказательство.

$$R(S) = \left\{ \bigsqcap_{i=1}^{n} A_i | n \in \mathbb{N}, A_k \in S \right\}$$

Положим $\nu \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$$

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$$

□

2.1 Меры Жордана и Лебега

Определение 2.16. Пусть S — полуалгебра, $m : S \to [0, +\infty)$. Тогда внешняей мерой Жордана называется функция: $\mu_J^*(A) = \inf_{\bigcup^n A_k \supset A} \sum m(A_k), A_k \in S$.

Пример (Мера Жордана не σ-аддитивна)**.** Расмотрим $\mu_J^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$, однако, если рассматривать отрезки длины q^n для каждой точки с номером n, и устремить $q \to 0$, то получим, что $\sum q^n = 0$.

Приведем внешнюю меру, которая является σ-аддитивной на полуалгебре S.

Определение 2.17. Пусть S — полуалгебра, $m : S \to [0, +\infty)$. Тогда внешняей мерой Жордана называется функция: $\mu_J^*(A) = \inf_{\bigcup^i nftyA_k \supset A} \sum m(A_k), A_k \in S$.

Доказательство. Сужения □

Доказательство. □