Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Жуковский Сергей Евгеньевич*

Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

осень 2025

Содержание

1 Продолжение автономных систем

Напоминание. Мы рассматриваем автономные системы, т.е. вида $x' = f(x)$.

1.1 Линейные системы

Будем рассматривать уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$x' = Ax \tag{1.1}$$

Где $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ — матрица, причем $\det A \neq 0$ (система простая)

1.1.1 Вещественные собственные числа у матрицы

Для начала рассмотрим случай наличия двух собственных векторов у матрицы A. Положим h_1, h_2 — собственные векторы, тогда они ЛНЗ. Заметим, что тогда:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

Рассмотрим плоскость в базисе (h_1, h_2). Пусть ξ_i — i-ая координатная функция решения. Тогда:

$$\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} = c_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\lambda_1 t} = c_2 \left(\frac{\xi_1}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Таким образом, в координатах h_1, h_2 и при $t \to \infty$, мы можем видеть следующую картинку (стрелки показывают движение решения при $t \to \infty$):

Случай $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, |\lambda_1| < |\lambda_2|$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *устойчиыьм узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 < \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *неустойчивым узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *седлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Случай $\lambda_1 = \lambda_2$ В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *дикритическим узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

Для случая, когда собственный вектор один:

Случай одного собственного вектора с собственным числом λ Тогда пусть h_1 — собственный вектор, h_2 — присоединенный к нему. Тогда:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} h_1 + c_2 e^{\lambda t}(h_1 t + h_2) = h_1 \underbrace{(c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} t)}_{\xi_1} + h_2 \underbrace{c_2 e^{\lambda t}}_{\xi_2}$$

Тогда имеем:

$$\xi_1 = \frac{c_1}{c_2}\xi_2 + \xi_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{c_2}$$

В таком случае поведение траектории в окрестности положения равновесия называется *дикритическим узлом*. Картинка в данном случае будет следующая:

тут должна быть картинка

1.1.2 Комплекснозначные собственные числа у матрицы

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$. Тогда $h = h_1 \pm i h_2$ — собственные векторы, где h_1, h_2 — ЛНЗ. Тогда:

$$x(t) = c e^{\lambda t} h + \overline{c} e^{\overline{\lambda} t} \overline{h}, c \in \mathbb{C}$$

Положим $c = \frac{r}{2} e^{i\varphi}$, тогда:

$$x(t) = \frac{r}{2} e^{\alpha t} \left(e^{i\varphi + i\beta t}(h_1 + i h_2) e^{-i\varphi - i\beta t}(h_1 - i h_2) \right) = r e^{\alpha t} (\cos(\varphi + \beta t) h_1 - \sin(\varphi + \beta t) h_2)$$

Получаем:

$$\xi_1(t) = r e^{\alpha t} \cos(\varphi + \beta t)$$
$$\xi_2(t) = r e^{\alpha t} \sin(\varphi + \beta t)$$

Картинки в зависимости от ранзых α, β будут следующие:

тут должны быть картинки

1.2 Нелинейные системы

Будем рассматривать уравнение

$$x' = f(x), f : \Omega \to \mathbb{R}^2, f \in C^2, \Omega \text{ — открытое} \tag{1.2}$$

Пусть $\tilde{x} \in \Omega$ таково, что $f(\tilde{x}) = 0$, т.е. $\tilde{x}$ — положение равновесия. Рассмотрим еще одно уравнение:

$$y' = f'(\tilde{x}) y, f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Теорема 1.1 (б/д). *Пусть* $\det f(\tilde{x}) \neq 0$, *(т.е. система (1.3) простая), причем* 0 *не является ее центром. Тогда* $\exists U$ *— окрестность* $\tilde{x}$, $\exists V$ *— окрестность* 0, $\exists \psi : U \to V$ *— гомеоморфизм, такие, что выполнены следующие условия:*

1. $\forall$ *траектории* $X \subset V$ *системы (1.2),* $\psi(X)$ *— тракетория системы (1.3)*
2. $\forall$ *траектории* $Y \subset U$ *системы (1.3),* $\psi^{-1}(Y)$ *— тракетория системы (1.2)*

Пример. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1|x| \\ x_2' = x_1 - x_2|x| \end{cases}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

И линеаризованная система имеет вид:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

Заметим, что тогда $\lambda \pm i$ и 0 — центр. Сделаем замену $x_1 = r\cos\varphi, x_1 = r\sin\varphi$, имеем:

$$\begin{cases} r'\cos\varphi - r(\sin\varphi)\varphi' = -r\sin\varphi - r^2\cos\varphi \\ r'\sin\varphi + r(\cos\varphi)\varphi' = r\cos\varphi - r^2\sin\varphi \end{cases}$$

$$\left\{ r' = -r^2 - r\varphi' = -r \Rightarrow \varphi' = 1 \right.$$

Получили, что $\varphi = \varphi_0 + t$ и

$$x(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\varphi_0 + t) \\ r(t)\sin(\varphi_0 + t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, картинка будет следующей:

тут должна быть картинка

Т.е. одна траектория получилась не замкнутой. Но тогда между ними не может существовать гомеоморфизма. Таким образом, условие, что 0 — не центр существенно.