

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
IV СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*



Автор: *Киселев Николай*
Репозиторий на Github

весна 2025

Содержание

1	Пространство Лебега	2
1.1	Пространства L_p	2
1.2	Свертка и аппроксимация функции	6

1 Пространство Лебега

1.1 Пространства L_p

Определение 1.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ измерима (интегрируема) по Лебегу, если $\Re f, \Im f$ измеримы (интегрируемы) по Лебегу.

Определение 1.2. В случае интегрируемости положим $\int_E f = \int_E \Re f + i \int_E \Im f$. Полученный интеграл линеен и аддитивен по множествам

Замечание.

$$\left\| \int_E f \right\| \leq \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\int_E f = \left\| \int_E f \right\| e^{i\theta} \Rightarrow \int_E f e^{-i\theta} = \left\| \int_E f \right\| = \int_E \Re(e^{-i\theta} f) \leq \int_E |e^{-i\theta} f| = \int_E |f|$$

□

Определение 1.3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и E измеримо. Определим:

$$L_p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_E |f|^p < \infty\}$$

В таком случае положим $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Пусть $f, g \in L_p(E)$. Если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\lambda f \in L_p(E)$ и ввиду $|f + g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ выполнено $f + g \in L_p$. Получили, что L_p является линейным пространством относительно $+$, $\lambda \cdot$.

Лемма 1.1. Пусть $a, b \geq 0$. Если $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$

Доказательство. Можно считать, что $ab > 0$. Ввиду выпуклости экспоненты, имеем:

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p} e^x + \frac{1}{q} e^y$$

Положим $x = p \ln a$, $y = q \ln b$ и получаем желаемое. □

Теорема 1.1 (Гельдер). Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Доказательство. Если $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. $\Rightarrow fg = 0$ п.в. \Rightarrow утверждение доказано. Аналогично и для случая $\|g\|_q = 0$. В противном случае, получаем:

$$\|f\|_p \|g\|_q > 0$$

По предыдущей лемме, имеем:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_E |fg| \leq \frac{1}{p} \left(\int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \right) = 1$$

□

Замечание. В неравенстве Гельдера равенство имеет место тогда и только тогда, когда $|f|^p = c|g|^q$ п.в. на E для некоторого $c > 0$.

Теорема 1.2 (Минковский). Пусть $1 \leq p < \infty$. Если $f, g \in L_p(E)$, то $f + g \in L_p(E)$ и $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Доказательство. При $p = 1$ применим $|f + g| \leq |f| + |g|$. Далее при $p \geq 1$: Применим неравенство Гельдера для $p, q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_E |f + g|^p \leq \int_E |f| |f + g|^{p-1} + \int_E |g| |f + g|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p) \end{aligned}$$

□

Замечание. Равенство в теореме Минковского выполняется тогда и только тогда, когда $f = cg$ п.в. для некоторой $c > 0$

Определение 1.4. На L_p введем отношение \sim . Будем говорить, что $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ п.в. на E .

Замечание. \sim — отношение эквивалентности на L_p , согласованное с операциями сложения и умножения на скаляр. Факторпространство $L_p(E)/\sim$ будем также обозначать $L_p(E)$

Следствие. Пространство L_p относительно нормы $\|\cdot\|_p$ является нормированным линейным пространством

Доказательство.

1. $\|f\|_p \geq 0, \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$
2. $\|\lambda f\|_p = \lambda \|f\|_p$
3. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

□

Задача. Если $\mu(E) < \infty, 1 \leq p < q < \infty$, то $L_q(E) \subsetneq L_p(E)$

Напоминание. Полное метрическое пространство — такое, что любая фундаментальная последовательность сходится

Теорема 1.3 (Рисса). Пространство L_p банахово (т.е. является полным относительно метрики, порожденной p -нормой).

Доказательство. Будет позднее □

Напоминание. Напомним, что $\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Будем называть функции с компактным носителем финитными.

Лемма 1.2. Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда \exists простая финитная функция φ такая, что $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.

Доказательство. Можно считать, что f вещественнозначная (иначе приближаем $\Re f, \Im f$ отдельно). Т.к. $|f - I_{B_k(0)}|^p \leq |f|^p$. Тогда по Теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\|f - f I_{B_k(0)}\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Заменяя функцию f на $f I_{B_k(0)}$ для достаточно большого k , заключаем, что она финитная. Пусть сначала $f \geq 0$. По теореме о приближении, найдется последовательность $\{\varphi_k\}$ — простых функций, т.ч. $0 \leq \varphi_1 \leq \dots, \varphi_k \rightarrow f$. Т.к. $|f - \varphi_k|^p \leq |f|^p$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $f - \varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, причем все φ_k финитны, т.к. $0 \leq \varphi_k \leq f$ на E . Пусть f теперь произвольного знака $\Rightarrow f = f^+ - f^-$. Тогда по доказанному найдутся простые финитные функции φ^+, φ^- , такие, что $\|f^+ - \varphi^+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \|f^- - \varphi^-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Тогда φ — простая финитная функция и по неравенству треугольника:

$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f^+ - \varphi^+\|_p + \|f^- - \varphi^-\|_p < \varepsilon$$

□

Теорема 1.4. Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\|f - g\|_p < \varepsilon$

Доказательство. По предыдущей лемме, любую функцию можно приблизить финитной простой функцией. Всякая простая функция есть линейная комбинация индикаторов. Из этого заключаем, что достаточно доказать теорему для случая $f = I_A$, где A — ограниченное измеримое множество. По свойству регулярности меры Лебега, $\exists G, H$ — открытые, такие, что $G \supset A, H \supset A^c$ и $\mu(G \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}, \mu(H \setminus A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $K = H^c$ — замкнутое и ограниченное (т.к. лежит в A), т.е. компакт, лежащий в A . $\mu(G \setminus A) \leq \mu(G \setminus K) + \mu(H \setminus A^c) < \varepsilon$. По теореме о гладком разбиении единицы, $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ с носителем в G , такая, что $0 \leq g \leq 1$ и $g|_K = 1$. Поэтому $\|I_A - g\|_p^p = \int_E |I_A - g|^p \leq \int_{(G \cap E) \setminus K} |I_A - g|^p \leq \mu(G \setminus K) < \varepsilon$ □

Теорема 1.5 (Кантора). Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто. Тогда, если K — компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на нем, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in K \forall h \in \mathbb{R}^n (h < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x - h)| < \varepsilon)$$

Доказательство. От противного. Тогда $\exists \{x_k\} \subset K \exists \{h_k\} \subset \mathbb{R}^m |f(x_k) - f(x_k - h_k)| \geq \varepsilon_0, h_k \rightarrow 0$. Т.к. K — компакт, то $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ и $x_{n_k} + h_{n_k} \rightarrow x_0$. Тогда по непрерывности, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0), f(x_{n_k} - h_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k} - h_{n_k})| \rightarrow 0$ □

Определение 1.5. Пусть $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^m$. Функция $f_h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}, f_h(x) = f(x - h)$ называется сдвигом функции f на h .

Замечание. Функции f, f_h одновременно лежат в $L_p(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_p = \|f_h\|_p$

Теорема 1.6 (Непрерывность сдвига). Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то $\|f_h - f\|_p \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^m)$ (можно считать, что $g = 0$ вне $B_r(0)$), такая, что $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. По неравенству треугольника:

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_h - g\|_p$$

Т.к. g непрерывна на $\overline{B_r(0)}$, то $\exists \delta \in (0, 1] \forall h \in \mathbb{R}^m (|h| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x - h)| < \frac{\varepsilon}{3M})$, где $M^p = \mu(B_{r+1}(0))$. Поэтому:

$$\|g_h - g\|_p^p = \int |g(x - h) - g(x)|^p dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^p \mu(B_{r+1}) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

Следовательно, при $|h| < \delta$, выполнено $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$ □

Следствие (Непрерывность сдвига для периодических функций). Пусть f — 2π -периодичная измеримая на \mathbb{R} функция. Если $\int_{[-\pi, \pi]} |f(x)|^p dx < \infty$, то

$$\int_{[-\pi, \pi]} |f(x - h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Доказательство. Пусть $g = \begin{cases} f, x \in (-2\pi, 2\pi) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$. Тогда $g \in L_p(\mathbb{R})$. Также, при $x \in (-\pi, \pi)$ и $|h| < \pi$ имеем: $|g(x - h) - g(x)| = |f(x - h) - f(x)|$, а значит,

$$\int_{[-\pi, \pi]} |f(x - h) - f(x)|^p dx = \int_{[-\pi, \pi]} |g(x - h) - g(x)|^p dx \leq \|g_h - g\|_p \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

□

Теорема 1.7 (Римана об осцилляции). Пусть I — промежуток в \mathbb{R} , $f \in L_1(I)$. Тогда

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \pm\infty$$

В частности,

$$\int_I f(x) \cos x dx \rightarrow 0, \int_I f(x) \sin x dx \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \pm\infty$$

Доказательство. Рассмотрим случай $I = \mathbb{R}$. Сделаем в интеграле замену $x = t - \frac{\pi}{\lambda}$, тогда:

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)} dx = - \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda t} dx$$

Следовательно,

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_I f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int_I \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda x} dx \right)$$

Следовательно,

$$\left| \int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{1}{2} \left(\int_I \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx \right) = \|f_h - f\|_1 \rightarrow 0$$

□

1.2 Свертка и аппроксимация функции

Определение 1.6. Пусть f, g — измеримы в \mathbb{R}^m , функция $f * g$ определяемая по формуле

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - t)g(t)dt$$

называется сверткой функций f, g .

Замечание. Покажем измеримость функции $f(x - t)g(t)$ в \mathbb{R}^{2m} . Т.к. $g(t)$ измерима в \mathbb{R}^{2m} , достаточно показать измеримость $f(x - t)$. Положим $E_a = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) < a\}$ и определим оператор $L : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, $L(x, t) = (x - t, t)$. Тогда $\{(x - t) : f(x - t) < a\} = \{(x, t) : x - t \in E_a\} = L^{-1}(E_a \times \mathbb{R}^m)$ — измеримо как образ измеримого при диффеоморфизме L^{-1}

Лемма 1.3. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, тогда $f * g$ определена почти всюду. Более того, $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Доказательство. Определим $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)| |g(t)| dt$. По теореме Тонелли:

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)| dx \right) |g(t)| dt = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| dy \right) |g(t)| dt = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Получаем:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x - t)g(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}^m} H(x) dx = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Тогда $|f(x - t)g(t)|$ конечна почти всюду $\Rightarrow (f * g)(x)$ определена почти всюду. □

Теорема 1.8. 1. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g \in L_q(\mathbb{R}^m), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $(f * g)$ существует, равномерно непрерывна на \mathbb{R}^m и $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

2. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g$ измерима и ограничена в \mathbb{R}^m , то $(f * g)$ существует, равномерно непрерывна на \mathbb{R}^m и $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_\infty$, где $\|g\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^m} |g|$

Доказательство.

1.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)g(t)| dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

Тогда $f * g$ определена всюду на \mathbb{R}^m , и справедлива оценка из условия. Докажем равномерную непрерывность:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x - h) - (f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(x - h - t) - f(x - t))g(t) dt \right| = \\ &= |((f_h - f) * g)(x)| \leq \|f_h - f\|_p \|g\|_q \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Последнее стремление равномерное, т.е. не зависит от x , поэтому утверждение доказано

2.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)g(t)|dt \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

Равномерное стремление доказывается аналогично пункту 1.

□

Утверждение 1.1. Пусть $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^m)$, тогда:

1. $(f * g) = (g * f)$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$

Доказательство.

1.

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)dt = \left\{ \begin{array}{l} x-t=y \\ |J|=1 \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy = (g * f)$$

2. Следует из теоремы Фубини

□

Определение 1.7. Последовательность $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ интегрируемых на \mathbb{R}^m функций называется аппроксимацией единицы (δ -образным семейством), если

1. $K_n \geq 0 \forall n$
2. $\int_{\mathbb{R}^m} K_n dx = 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} K_n(x) dx \rightarrow 0$ для всех $\delta > 0$.

Пример. Рассмотрим $\varphi \in L_1(\mathbb{R}), \varphi \geq 0$ с $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx = 1$, положим $K_n(x) = n^m \varphi(nx)$. Тогда:

$$\int_{|x| \geq \delta} = \int_{|x| \geq \delta} n^m \varphi(nx) dx = \left\{ \begin{array}{l} y = nx \\ |J| = n^m \end{array} \right\} = \int_{|y| \geq n\delta} \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi I_{\{|y| \geq n\delta\}} dy \rightarrow 0$$