Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

БОЛЬШОЕ НАЗВАНИЕ КУРСА

V СЕМЕСТР

Лектор: *Иван Иванович Иванов*

h\nu

Автор: *Павел Дуров*
Репозиторий на Github

осень 2022

Содержание

1 Пространство Лебега

1.1 Пространства L_p

Определение 1.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что $f : E \to \mathbb{C}$ измерима (интегрируема) по Лебегу, если $\Re f, \Im f$ измеримы (интегрируемы) по Лебегу.

Определение 1.2. В случае интегрируемости положим $\int_E f = \int_E \Re f + i \int_E \Im f$. Полученный интеграл линеен и аддитивен по множествам

Замечание.

$$\left\| \int_E f \right\| \leqslant \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\int_E f = \left\| \int_E f \right\| e^{i\theta} \Rightarrow \int_E f e^{-i\theta} = \left\| \int_E f \right\| = \int_E \Re(e^{-i\theta} f) \leqslant \int_E |e^{i\theta} f| = \int_E |f|$$

□

Определение 1.3. Пусть $1 \leqslant p \leqslant < \infty$ и E измеримо. Определим:

$$L_p(E) = \{f : E \to \mathbb{C} | \int_E |f|^p < \infty\}$$

В таком случае положим $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Пусть $f, g \in L_p(E)$. Если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\lambda f \in L_p(E)$ и ввиду $|f+g|^p \leqslant (2\max\{|f|,|g|\})^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$ выполнено $f + g \in L_p$. Получили, что L_p является линейным пространством относительно $+, \lambda\cdot$.

Лемма 1.1. *Пусть $a, b \geqslant 0$. Если $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$*

Доказательство. Можно считать, что $ab > 0$. Ввиду выпуклости экспоненты, имеем:

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leqslant \frac{1}{p} e^x + \frac{1}{q} e^y$$

Положим $x = p \ln a, y = q \ln b$ и получаем желаемое. □

Теорема 1.1 (Гельдер). *Пусть $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если $f \in L_p(E), g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$*

Доказательство. Если $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. $\Rightarrow fg = 0$ п.в. $\Rightarrow$ утверждение доказано. Аналогично и для случая $\|g\|_q = 0$. В противном случае, получаем:

$$\|f\|_p \|g\|_q > 0$$

По предыдущей лемме, имеем:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_E |fg| \leqslant \frac{1}{p}\left(\int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right) = 1$$

□

Замечание. В неравенстве гельдера равенство имеет место тогда и только тогда, когда $|f|^p = c|g|^q$ п.в. на E для некоторого $c > 0$.

Теорема 1.2 (Минковский). *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Если* $f, g \in L_p(E)$, *то* $f + g \in L_p(E)$ *и* $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Доказательство. При $p = 1$ применим $|f + g| \leqslant |f| + |g|$. Далее при $p \geqslant 1$: Применим неравенство Гельдера для $p, q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\|f + g\|_p^p = \int_E |f + g|^p \leqslant \int_E |f||f + g|^{p-1} + \int_E |g||f + g|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \|f + g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

□

Замечание. Равенство в теореме Минковского выполняется тогда и только тогда, когда $f = cg$ п.в. для некоторой $c > 0$

Определение 1.4. На L_p введем отношение $\sim$. Будем говорить, что $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ п.в. на E.

Замечание. $\sim$ — отношение эквивалентности на L_p, согласованное с операциями сложения и умножения на скаляр. Факторпространство $L_p(E)/_\sim$ будем также обозначать $L_p(E)$

Следствие. Пространство L_p относительно нормы $\|\cdot\|_p$ является нормированным линейным пространством

Доказательство.

1. $\|f\|_p \geqslant 0, \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$
2. $\|\lambda f\|_p = \lambda\|f\|_p$
3. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

□

Задача. *Если* $\mu(E) < \infty, 1 \leqslant p < q < \infty$, *то* $L_q(E) \subsetneq L_p(E)$

Напоминание. Полное метрическое пространство — такое, что любая фундаментальная последовательность сходится

Теорема 1.3 (Рисса). *Пространство* L_p *банахово (т.е. является полным относительно метрики, порожденной* p*-нормой).*

Доказательство. Будет позднее □

Напоминание. Напомним, что $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Будем называть функции с компактным носителем финитными.

Лемма 1.2. *Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда $\exists$ простая финитная функция φ такая, что $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.*

Доказательство. Можно считать, что f вещественнозначная (иначе приближаем $\Re f, \Im f$) отдельно. Т.к. $|f - I_{B_k(0)}|^p \leqslant |f|^p$. Тогда по Теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $\|f - fI_{B_k(0)}\|_p \to 0, k \to \infty$. Заменяя функцию f на $fI_{B_k(0)}$ для достаточно большого k, заключаем, что она финитная. Пусть сначала $f \geqslant 0$. По теореме о приближении, найдется последовательность $\{\varphi_k\}$ — простых функций, т.ч. $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \ldots, \varphi_k \to f$. Т.к. $|f - \varphi_k|^p \leqslant |f|^p$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $f - \varphi_k \to 0, k \to \infty$, причем все φ_k финитны, т.к. $0 \leqslant \varphi_k \leqslant f$ на E. Пусть f теперь произвольного знака $\Rightarrow f = f^+ - f^-$. Тогда по доказанному найдутся простые финитные функции φ^+, φ^-, такие, что $\|f^+ - \varphi^+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \|f^- - \varphi^-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Тогда φ — простая финитная функция и по неравенству треугольника:

$$\|f - \varphi\|_p \leqslant \|f^+ - \varphi^+\| + \|f^- - \varphi^-\| < \varepsilon$$

□

Теорема 1.4. *Пусть $f \in L_p, \varepsilon > 0$. Тогда $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\|f - g\|_p < \varepsilon$*

Доказательство. По предыдущей лемме, любую функцию можно приблизить финитной простой функцией. Всякая простая функция есть линейная комбинация индикаторов. Из этого заключаем, что достаточно доказать теорему для случая $f = I_A$, где A — ограниченное измеримое множество. По свойству регулярности меры Лебега, $\exists G, H$ — открытые, такие, что $G \supset A, H \supset A^c$ и $\mu(G \backslash A) < \frac{\varepsilon}{2}, \mu(H \backslash A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $k = H^c$ — замкнутое и ограниченное (т.к. лежит в A), т.е. компакт, лежащий в A. $\mu(G \backslash A) \leqslant \mu(G \backslash A) + \mu(H \backslash A^c) < \varepsilon$. По теореме о гладком разбиении единицы, $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ с носителем в G, такая, что $0 \leqslant g \leqslant 1$ и $g|_K = 1$. Поэтому $\|I_A - g|_E\|_p^p = \int_E |I_A - g|^p \leqslant \int_{(G \cap E) \backslash K} |I_A - g|^p \leqslant \mu(G \setminus K) < \varepsilon$ □

Теорема 1.5 (Кантора). *Пусть $f : U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открыто. Тогда, если K — компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на нем, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in K \forall h \in \mathbb{R}^n (h < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x - h)| < \delta)$$

Доказательство. От противного. Тогда $\exists \{x_k\} \subset K \exists \{h_k\} \subset \mathbb{R}^m |f(x_k) - f(x_k - h_k)| \geqslant \varepsilon_0, h_k \to 0$. Т.к. K — компакт, то $\exists x_{n_k} \to x_0 \in K$ и $x_{n_k} + h_{n_k} \to x_0$. Тогда по непрерывности, $f(x_{n_k}) \to f(x_0), f(x_{n_k} - h_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k} - h_{n_k})| \to 0$ □

Определение 1.5. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^m$. Функция $f_h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}, f_h(x) = f(x - h)$ называется сдвигом функции f на h.

Замечание. Функции f, f_h одновременно лежат в $L_p(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_p = \|f_h\|_p$

Теорема 1.6 (Непрерывность сдвига). *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то $\|f_h - f\|_p \to 0$ при $h \to 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^m)$ (можно считать, что $g = 0$ вне $B_r(0)$), такая, что $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. По неравенству треугольника:

$$\|f_h - f\|_p \leqslant \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{2}{3}\varepsilon + \|g_h - g\|$$

Т.к. g непрерывна на $\overline{B_r(0)}$, то $\exists \delta \in (0, 1] \forall h \in \mathbb{R}^m (|h| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x - h)| < \frac{\varepsilon}{3M})$, где $M^p = \mu() B_{r+1}(0)$. Поэтому:

$$\|g_h - g\|_p^p = \int |g(x - h) - g(x)|^p dx \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^p \mu(B_{r+1}) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

Следовательно, при $|h| < \delta$, выполнено $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$ $\square$

Следствие (Непрерывность сдвига для периодических функций)**.** Пусть f — 2π-периодичная измеримая на $\mathbb{R}$ функция. Если $\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|^p dx < \infty$, то

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f(x - h) - f(x)|^p dx \to 0, h \to 0$$

Доказательство. Пусть $g = \begin{cases} f, x \in (-2\pi, 2\pi) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $g \in L_p(\mathbb{R})$. Также, при $x \in (-\pi, \pi)$ и $|h| < \pi$ имеем: $|g(x - h) - g(x)| = |f(x - h) - f(x)|$, а значит,

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f(x - h) - f(x)|^p dx = \int_{[-\pi,\pi]} |g(x - h) - g(x)|^p dx \leqslant \|g_h - g\|_p \to 0, h \to 0$$

$\square$

Теорема 1.7 (Римана об осцилляции)**.** *Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$, $f \in L_1(I)$. Тогда*

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx \to 0, \lambda \to \pm\infty$$

В частности,

$$\int_I f(x) \cos x dx \to 0, \int_I f(x) \cos x dx \to 0, \lambda \to \pm\infty$$

Доказательство. Рассмотрим случай $I = \mathbb{R}$. Сделаем в интеграле замену $x = t - \frac{\pi}{\lambda}$, тогда:

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)} dx = -\int_I f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda t} dx$$

Следовательно,

$$\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{2}\left(\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_I f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_I \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) e^{i\lambda x} dx\right)$$

Следовательно,

$$\left|\int_I f(x) e^{i\lambda x} dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_I \left|f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| dx\right) = \|f_h - f\|_1 \to 0$$

□

1.2 Свертка и аппроксимация функции

Определение 1.6. Пусть f, g — измеримы в $\mathbb{R}^m$, функция $f * g$ определяемая по формуле

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)dt$$

называется сверткой функций f, g.

Замечание. Покажем измеримость функции $f(x-t)g(t)$ в $\mathbb{R}^{2m}$. Т.к. $g(t)$ измерима в $\mathbb{R}^{2m}$, достаточно показать измеримость $f(x-t)$. Положим $E_a = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) < a\}$ и определим оператор $L : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}, L(x,t) = (x-t, t)$. Тогда $\{(x-t) : f(x-t) < a\} = \{(x,t) : x - t \in E_a\} = L^{-1}(E_a \times \mathbb{R}^m)$ — измеримо как образ измеримого при диффеоморфизме L^{-1}

Лемма 1.3. *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, тогда $f * g$ определена почти всюду. Более того, $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$*

Доказательство. Определим $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)||g(t)|dt$. По теореме Тонелли:

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)|dx \right) |g(t)|dt = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|dy \right) |g(t)|dt = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Получаем:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t) \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} H(x)dx = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Тогда $|f(x-t)g(t)|$ конечна почти всюду $\Rightarrow (f * g)(x)$ определена почти всюду. □

Теорема 1.8. 1. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g \in L_q(\mathbb{R}^m), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $(f * g)$ существует, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$ и $|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$*

2. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m), g$ измерима и ограничена в $\mathbb{R}^m$, то $(f * g)$ существует, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$ и $|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_\infty$, где $\|g\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^m} |g|$*

Доказательство.

1. $$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)g(t)|dt \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)|^p dt \right) \frac{1}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(t)|^q dt \right) \frac{1}{q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

   Тогда $f * g$ определена всюду на $\mathbb{R}^m$, и справедлива оценка из условия. Докажем равномерную непрерывность:

   $$|(f * g)(x-h) - (f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(x-h-t) - f(x-t))g(t)dt \right| =$$

   $$= |((f_h - f) * g)(x)| \leqslant \|f_h - f\|_p \|g\|_q \to 0, h \to 0$$

   Последнее стремление равномерное, т.е. не зависит от x, поэтому утверждение доказано

2.
$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)g(t)|dt \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

Равномерное стремление доказывается аналогично пункту 1.

□

Утверждение 1.1. *Пусть* $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^m)$, *тогда:*

1. $(f * g) = (g * f)$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$

Доказательство.

1.
$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)g(t)dt = \left\{ \begin{array}{c} x - t = y \\ |J| = 1 \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy = (g * f)$$

2. Следует из теоремы Фубини

□

Определение 1.7. Последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрируемых на $\mathbb{R}^m$ функций называется аппроксимацией единицей (δ-образным семейством), если

1. $K_n \geqslant 0 \forall n$
2. $\int_{\mathbb{R}^m} K_n dx = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geqslant\delta} K_n(x)dx \to 0$ для всех $\delta > 0$.

Пример. Рассмотрим $\varphi \in L_1(\mathbb{R}), \varphi \geqslant 0$ с $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)dx = 1$, положим $K_n(x) = n^m \varphi(nx)$. Тогда:

$$\int_{|x|\geqslant\delta} = \int_{|x|\geqslant\delta} n^m \varphi(nx)dx = \left\{ \begin{array}{c} y = nx \\ |J| = n^m \end{array} \right\} = \int_{|y|\geqslant n\delta} \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi I_{\{|y|\geqslant n\delta\}} dy \to 0$$