# 数学 コース 1
## （基本コース）

## （コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ◯ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

| 解答コース Course | |
|---|---|
| コース 1<br>Course 1 | コース 2<br>Course 2 |
| ● | ○ |

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

# I

問 1　$a, b$ は実数であり，$0 < b < 7$ とする。2 次関数

$$f(x) = x^2 - 6x + a$$

の $b \leqq x \leqq 7$ の範囲における最大値 $M$ と最小値 $m$ を考える。

$f(x)$ は

$$f(x) = \left(x - \boxed{\mathsf{A}}\right)^2 + a - \boxed{\mathsf{B}}$$

と表される。

(1)　次の文中の $\boxed{\mathsf{C}}$ ～ $\boxed{\mathsf{G}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

次の 2 つの場合に分けて，$M, m$ を求める。

(i)　$0 < b \leqq \boxed{\mathsf{C}}$ のとき

$$M = \boxed{\mathsf{D}}, \quad m = \boxed{\mathsf{E}}$$

である。

(ii)　$\boxed{\mathsf{C}} < b < 7$ のとき

$$M = \boxed{\mathsf{F}}, \quad m = \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

⓪　$0$　　①　$1$　　②　$2$　　③　$3$

④　$a-6$　　⑤　$a+7$　　⑥　$a+8$　　⑦　$a-9$

⑧　$b^2-6b+a$　　⑨　$b^2+6b+a$

(2)　$M = 13$, $m = 1$ となるような $a, b$ を求めると

$$a = \boxed{\mathsf{H}}, \quad b = \boxed{\mathsf{I}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ $x, y, z$ とし

$$x = y = z \quad \text{である事象を } A,$$

$$x + y + z = 6 \quad \text{である事象を } B,$$

$$x + y = z \quad \text{である事象を } C$$

とする。

(1)　事象 $A, B, C$ の起こる場合の数は，それぞれ

$A$ が $\boxed{\mathsf{J}}$，　$B$ が $\boxed{\mathsf{KL}}$，　$C$ が $\boxed{\mathsf{MN}}$

である。

(2)　事象 $A \cap B$，$B \cap C$，$C \cap A$ の起こる場合の数は，それぞれ

$A \cap B$ が $\boxed{\mathsf{O}}$，　$B \cap C$ が $\boxed{\mathsf{P}}$，　$C \cap A$ が $\boxed{\mathsf{Q}}$

である。

(3)　事象 $B \cup C$ の起こる確率 $P(B \cup C)$ は

$$P(B \cup C) = \frac{\boxed{\mathsf{RS}}}{\boxed{\mathsf{TUV}}}$$

である。

注）さいころ：dice

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

# II

問 1　$x$ の式

$$P = |x-1| + |x-2| + |x-a|$$

を考える。$P$ の値が $x = a$ のとき最小となるような実数 $a$ の値の範囲を求めよう。

まず，一般に不等式

$$|x-1| + |x-2| + |x-a| \geqq |x-1| + |x-2|$$

が成り立ち，等号が成り立つのは $x = a$ のときであることに注目する。

このとき

$$y = |x-1| + |x-2| \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

とおくと

$$y = \begin{cases} -\boxed{\mathbf{A}}\,x + \boxed{\mathbf{B}} & (x < \boxed{\mathbf{C}}) \\ \boxed{\mathbf{D}} & (\boxed{\mathbf{C}} \leqq x \leqq \boxed{\mathbf{E}}) \\ \boxed{\mathbf{F}}\,x - \boxed{\mathbf{G}} & (\boxed{\mathbf{E}} < x) \end{cases}$$

である。

① のグラフを考えると，$y$ の最小値は $\boxed{\mathbf{H}}$ であり，不等式 $\boxed{\mathbf{I}} \leqq x \leqq \boxed{\mathbf{J}}$ を満たすすべての $x$ において $y$ はこの値 $\boxed{\mathbf{H}}$ をとることが分かる。

よって，$\boxed{\mathbf{K}} \leqq a \leqq \boxed{\mathbf{L}}$ を満たすすべての $a$ に対して，$P$ の値は $x = a$ で最小となる。また，そのときの $P$ の値は $\boxed{\mathbf{M}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

**問 2**　自然数 $a, b$ の最大公約数は 3 とする。$a, b$ の最小公倍数を $\ell$ とおくとき

$$3a - 2b = \ell + 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

が成り立つような自然数 $a, b$ を求めよう。

$a = 3p,\ b = 3q$ とおくと，$p, q$ は互いに素であるから $\ell = \boxed{\mathsf{N}}\,pq$ である。
したがって，等式 ① は $p, q$ を用いて

$$pq - \boxed{\mathsf{O}}\,p + \boxed{\mathsf{P}}\,q + \boxed{\mathsf{Q}} = 0$$

と表される。これを変形して

$$\left(p + \boxed{\mathsf{R}}\right)\left(q - \boxed{\mathsf{S}}\right) = -\boxed{\mathsf{T}}$$

を得る。この等式を満たす整数 $p, q$ の組の中で $a, b$ の両方が自然数となるのは

$$p = \boxed{\mathsf{U}}, \quad q = \boxed{\mathsf{V}}$$

のときであり

$$a = \boxed{\mathsf{WX}}, \quad b = \boxed{\mathsf{Y}}$$

である。

---

注）最大公約数：greatest common divisor，最小公倍数：least common multiple，
互いに素：mutually prime (co-prime)

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

# III

次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{M}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

次の連立不等式を解いてみよう。ただし，$0 < a < 1$ とする。

$$\begin{cases} x^2 - 2x < 3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ ax^2 - ax - x + 1 > 0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

不等式 ① を解くと

$$\boxed{\text{A}} < x < \boxed{\text{B}}$$

である。

次に，不等式 ② を変形して

$$\left(ax - \boxed{\text{C}}\right)\left(x - \boxed{\text{D}}\right) > 0$$

を得る。よって，$0 < a < 1$ に注意すると，② の解は

$$x < \boxed{\text{E}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{F}} < x$$

である。

したがって，求める連立不等式の解は

$0 < a \leqq \boxed{\text{G}}$ のとき，$\boxed{\text{H}} < x < \boxed{\text{I}}$

$\boxed{\text{G}} < a < 1$ のとき，$\boxed{\text{J}} < x < \boxed{\text{K}}$ または $\boxed{\text{L}} < x < \boxed{\text{M}}$

である。ただし，$\boxed{\text{K}} < \boxed{\text{M}}$ とする。

⓪ $0$　① $1$　② $2$　③ $3$　④ $-1$

⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{a}$　⑧ $\dfrac{2}{a}$　⑨ $\dfrac{3}{a}$

- 計算欄 (memo) -

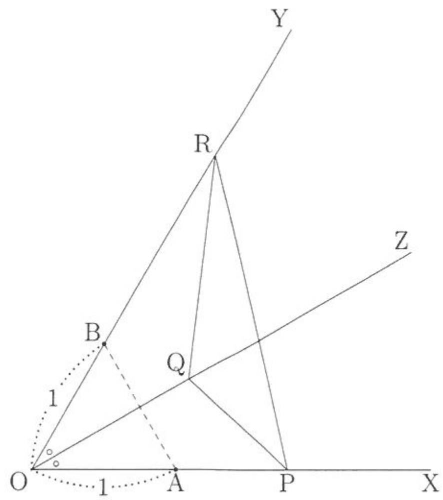
| |
|---|
| $\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{N}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。 |

# IV

右図において，$\angle XOY = 60^\circ$ であり，OZ は $\angle XOY$ を 2 等分する半直線とする。また，半直線 OX, OY 上の点 A, B は $OA = OB = 1$ を満たす。

いま，OX, OZ, OY 上の動点 P, Q, R は，それぞれ A, O, B から同時に出発して，毎秒 $1, \sqrt{3}, 2$ の速さで点 O から遠ざかるとする。

このとき，3 点 P, Q, R が一直線上に並ぶまでの時間を，三角形 PQR の面積を考えることによって求めよう。




まず，出発から $t$ 秒後の OP, OQ, OR の長さはそれぞれ

$$OP = t + \boxed{A},\quad OQ = \sqrt{\boxed{B}}\,t,\quad OR = \boxed{C}\,t + \boxed{D}$$

と表される。このとき，三角形の面積はそれぞれ

$$\triangle OPQ = \frac{\sqrt{\boxed{E}}\,t\left(t + \boxed{F}\right)}{4}$$

$$\triangle ORQ = \frac{\sqrt{\boxed{G}}\,t\left(\boxed{H}\,t + \boxed{I}\right)}{4}$$

$$\triangle OPR = \frac{\sqrt{\boxed{J}}\left(t + \boxed{K}\right)\left(\boxed{L}\,t + \boxed{M}\right)}{4}$$

である。よって

$$\triangle PQR = \frac{\sqrt{\boxed{N}}}{4}\left|-t^2 + t + \boxed{O}\right|$$

である。したがって，3 点 P, Q, R が一直線上に並ぶのは

$$t^2 - t - \boxed{O} = \boxed{P}$$

が成り立つときと考えればよい。よって，求める時間は

$$t = \frac{\boxed{Q} + \sqrt{\boxed{R}}}{\boxed{S}}\ (秒)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{T}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉Mathematics

| コース1 Course 1 | | | |
|---|---|---|---|
| 問 Q. | | 解答番号 row | 正解 A. |
| Ⅰ | 問1 | AB | 39 |
| | | C | 3 |
| | | D | 5 |
| | | E | 7 |
| | | F | 5 |
| | | G | 8 |
| | | H | 6 |
| | | I | 5 |
| | 問2 | J | 6 |
| | | KL | 10 |
| | | MN | 15 |
| | | O | 1 |
| | | P | 2 |
| | | Q | 0 |
| | | RSTUV | 23216 |
| Ⅱ | 問1 | ABC | 231 |
| | | DE | 12 |
| | | FG | 23 |
| | | H | 1 |
| | | IJ | 12 |
| | | KL | 12 |
| | | M | 1 |
| | 問2 | N | 3 |
| | | OPQ | 321 |
| | | RST | 237 |
| | | U | 5 |
| | | V | 2 |
| | | WX | 15 |
| | | Y | 6 |
| Ⅲ | | AB | 43 |
| | | CD | 11 |
| | | EF | 17 |
| | | G | 6 |
| | | HI | 41 |
| | | JK | 41 |
| | | LM | 73 |
| Ⅳ | | A | 1 |
| | | B | 3 |
| | | CD | 21 |
| | | EF | 31 |
| | | GHI | 321 |
| | | JKLM | 3121 |
| | | NO | 31 |
| | | P | 0 |
| | | QRS | 152 |

| コース2 Course 2 | | | |
|---|---|---|---|
| 問 Q. | | 解答番号 row | 正解 A. |
| Ⅰ | 問1 | AB | 39 |
| | | C | 3 |
| | | D | 5 |
| | | E | 7 |
| | | F | 5 |
| | | G | 8 |
| | | H | 6 |
| | | I | 5 |
| | 問2 | J | 6 |
| | | KL | 10 |
| | | MN | 15 |
| | | O | 1 |
| | | P | 2 |
| | | Q | 0 |
| | | RSTUV | 23216 |
| Ⅱ | 問1 | ABC | 962 |
| | | DE | 13 |
| | | F | 1 |
| | | GH | 22 |
| | | I | 3 |
| | | JKL | 932 |
| | 問2 | MN | 44 |
| | | OP | 32 |
| | | QRSTU | 14357 |
| | | V | 4 |
| | | W | 3 |
| | | XY | 58 |
| Ⅲ | | ABCD | 4624 |
| | | EFGHI | 34124 |
| | | JKLMN | 34124 |
| | | O | 1 |
| | | PQ | −2 |
| | | R | 1 |
| | | S | 0 |
| | | T | 0 |
| | | U | 4 |
| | | V | 9 |
| Ⅳ | | AB | 41 |
| | | C | 4 |
| | | DEF | 642 |
| | | G | 4 |
| | | HI | 14 |
| | | JK | 74 |
| | | L | 8 |
| | | MN | 24 |