

平成31
年第1
回数学
1

数 学 (80分)

【コース1(基本, Basic)・コース2(上級, Advanced)】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。適するものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に \boxed{A} , \boxed{BC} などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、 \boxed{A} , \boxed{BC} のように表しています。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ ， $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し， $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、下のようにマークしてください。

- (4) $\boxed{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－，Eを1とし、下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受 験 番 号			*				*					
名 前												

数学 コース 1

(基本コース)

(コース2は 15 ページからです)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース1」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: left; padding: 5px;"> コース 1 Course 1 </div> </div>	<div style="text-align: left; padding: 5px;"> コース 2 Course 2 </div>
●	○

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 次の文中の **A** ~ **K** には、下の選択肢 ① ~ ⑨の中から適するものを選びなさい。

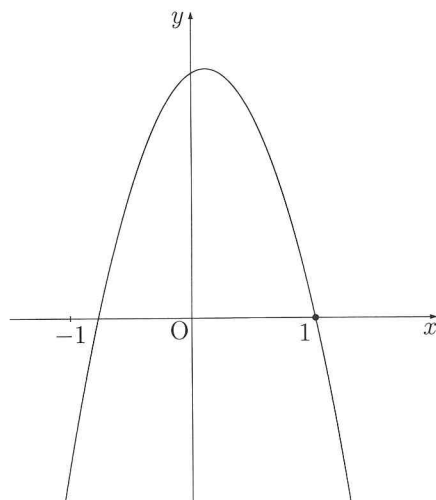
(1) グラフが右図のような 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

を考える。

このとき、 a, b, c は次の式を満たす。

- (i) a **A** 0, b **B** 0, c **C** 0
- (ii) $a + b + c$ **D** 0
- (iii) $a - b + c$ **E** 0
- (iv) $4a + 2b + c$ **F** 0
- (v) $b^2 - 4ac$ **G** 0



(2) a, b, c が (1) の (i), (ii) を満たすとき、 $a^2 - 8b - 8c$ の値が最小となるような場合を考えよう。

このとき、 $a =$ **H** であり、 $y = ax^2 + bx + c$ を b を用いて表すと

$$y = \text{H} x^2 + bx - b + \text{I}$$

となる。また、 b の値の範囲は **J** $< b <$ **K** である。

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 |
| ⑥ -2 | ⑦ -4 | ⑧ $>$ | ⑨ $=$ | ⑩ $<$ |

- 計算欄 (memo) -

数学-4

問 2 次のようなサイコロ X を投げる試行について考える。サイコロ X は、1 から 5 までの目が出る確率はすべて同じであるが、6 の目が出る確率は他の目の出る確率の 2 倍である。

- (1) サイコロ X を投げるとき、1 から 5 までの目が出る確率をそれぞれ p とすると、6 の目が出る確率は $\boxed{\text{L}}$ p である。全事象の確率は $\boxed{\text{M}}$ であるから、 $p = \frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$ である。

- (2) いま、サイコロ X を 2 回続けて投げる。「2 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を A 、「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を B とする。このとき、事象 A の起こる確率 $P(A)$ と事象 B の起こる確率 $P(B)$ は

$$P(A) = \frac{\boxed{\text{PQ}}}{\boxed{\text{RS}}}, \quad P(B) = \frac{\boxed{\text{TU}}}{\boxed{\text{VW}}}$$

である。したがって、 $\boxed{\text{X}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{X}}$ には、下の選択肢 ① ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

- ① $P(A)$ の方が $P(B)$ より低く、その差は $\frac{1}{36}$ 以上
- ② $P(A)$ の方が $P(B)$ より低く、その差は $\frac{1}{36}$ 未満
- ③ $P(A)$ と $P(B)$ は同じ
- ④ $P(A)$ の方が $P(B)$ より高く、その差は $\frac{1}{36}$ 以上
- ⑤ $P(A)$ の方が $P(B)$ より高く、その差は $\frac{1}{36}$ 未満

(問 2 は次ページに続く)

- (3) 次に、サイコロ X を 3 回続けて投げる。「3 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を C , 「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を D とするとき, 確率 $P(C)$ と確率 $P(D)$ を比べると である。ただし, には, 下の選択肢 ① ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

- ① $P(C)$ の方が $P(D)$ より低く, $P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍以上
- ② $P(C)$ の方が $P(D)$ より低く, $P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍未満
- ③ $P(C)$ と $P(D)$ は同じ
- ④ $P(C)$ の方が $P(D)$ より高く, $P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍以上
- ⑤ $P(C)$ の方が $P(D)$ より高く, $P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍未満

の問題はこれで終わりです。 の解答欄 はマークしないでください。

II

問 1 $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ とする。不等式

$$2 \left| x - \frac{a}{b} \right| + x < 10$$

を満たす整数 x を求めよう。

(1) $\frac{a}{b} = \boxed{\text{A}} + \sqrt{\boxed{\text{BC}}}$ である。したがって、 $\frac{a}{b}$ より小さい整数の中で、最大のものは $\boxed{\text{D}}$ である。

(2) 次の文中の $\boxed{\text{F}}$, $\boxed{\text{H}}$ には、下の選択肢 ① ~ ⑦の中から適するものを選び、 $\boxed{\text{E}}$, $\boxed{\text{G}}$ には、適する数を入れなさい。

x が整数のとき、不等式の左辺は、絶対値の記号を用いずに次のように表される。

$$\begin{cases} x \leq \boxed{\text{E}} \text{ ならば, } 2 \left| x - \frac{a}{b} \right| + x = \boxed{\text{F}} \\ x \geq \boxed{\text{G}} \text{ ならば, } 2 \left| x - \frac{a}{b} \right| + x = \boxed{\text{H}} \end{cases}$$

- ① $x - 6 - 2\sqrt{10}$ ② $x + 8 + 2\sqrt{15}$ ③ $-x + 8 + 2\sqrt{15}$ ④ $-x + 6 + 2\sqrt{10}$
 ⑤ $3x - 6 - 2\sqrt{10}$ ⑥ $3x - 8 - 2\sqrt{15}$ ⑦ $-3x + 8 + 2\sqrt{15}$ ⑧ $-3x + 6 + 2\sqrt{10}$

(3) 不等式 $2 \left| x - \frac{a}{b} \right| + x < 10$ を満たす整数 x は、 $\boxed{\text{I}}$ 以上 $\boxed{\text{J}}$ 以下の整数である。

注) 絶対値 : absolute value

- 計算欄 (memo) -

問 2 a を実数とし、 x に関する 2 次関数

$$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - a$$

$$g(x) = 4 - x^2$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 方程式 $f(x) = g(x)$ が異なる 2 つの解をもつような a の値の範囲は

$$- \boxed{\text{K}} < a < \boxed{\text{L}} \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{1}$$

である。

- (2) (1) のとき、放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は 2 点で交わる。これらの交点の y 座標がどちらも正となるような a の値の範囲を求めよう。

まず、 $h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。方程式 $f(x) = g(x)$ の解は、放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標であるから、 $h(x) = 0$ の 2 つの解が $-\boxed{\text{M}}$ と $\boxed{\text{N}}$ の間にあればよい。よって

$$h(-\boxed{\text{M}}) = a^2 - \boxed{\text{O}}a + \boxed{\text{P}} > 0 \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{2}$$

$$h(\boxed{\text{N}}) = a^2 + \boxed{\text{Q}}a + \boxed{\text{R}} > 0 \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{3}$$

である。また、放物線 $y = h(x)$ の軸の位置から

$$- \boxed{\text{S}} < a < \boxed{\text{T}} \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{4}$$

である。したがって、①, ②, ③, ④ より

$$- \boxed{\text{U}} < a < \boxed{\text{V}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

Ⅱ の問題はこれで終わります。Ⅱ の解答欄 W ～ Z はマークしないでください。

III

m, n を正の整数とし、有理数

$$r = \frac{m}{3} + \frac{n}{7}$$

を考える。 $r < \sqrt{2}$ を満たす r の中で、 $\sqrt{2}$ に最も近くなるような m, n を求めよう。

不等式

$$\boxed{A}m + \boxed{B}n < \boxed{CD}\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすような m, n の中で、 $\boxed{A}m + \boxed{B}n$ が $\boxed{CD}\sqrt{2}$ に最も近くなるものを見つけよう。

① の両辺を 2 乗して

$$(\boxed{A}m + \boxed{B}n)^2 < \boxed{EFG}$$

を得る。

ここで、 \boxed{EFG} より小さい最大の平方数は $\boxed{HIJ} = \boxed{KL}^2$ である。そこで、方程式

$$\boxed{A}m + \boxed{B}n = \boxed{KL}$$

を考える。この式を変形して

$$n = \frac{\boxed{MN} - \boxed{O}m}{\boxed{P}}$$

を得る。

ここで、 n は整数であるから、 $\boxed{MN} - \boxed{O}m$ は \boxed{Q} の倍数である。したがって、求める m, n は

$$m = \boxed{R}, \quad n = \boxed{S}$$

である。

注) 有理数 : rational number, 平方数 : square number

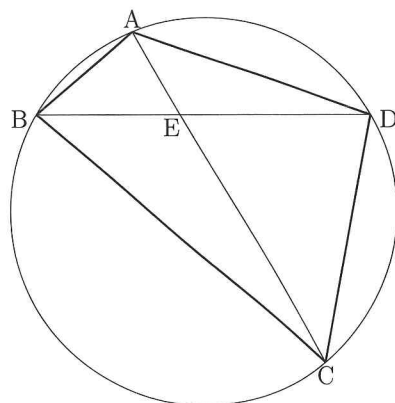
- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 T ～ Z はマークしないでください。

IV

半径 1 の円に内接する四角形 ABCD において、
 $AB : AD = 1 : 2$, $\angle BAD = 120^\circ$ とする。また、
 対角線 BD と対角線 AC の交点を E とするとき、
 $BE : ED = 3 : 4$ とする。

このとき、四角形 ABCD の面積を求めよう。



四角形 ABCD の面積を求めるために、三角形 ABD の面積 $\triangle ABD$ と三角形 BCD の面積 $\triangle BCD$ を求める。

まず、 $\triangle ABD$ を求める。

$$BD = \sqrt{\boxed{A}}, \quad AB = \frac{\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{D}}$$

であるから

$$\triangle ABD = \frac{\boxed{E} \sqrt{\boxed{F}}}{\boxed{GH}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

次に、 $\triangle BCD$ を求める。

$$\triangle ABC : \triangle ACD = \boxed{I} : \boxed{J}$$

であるから、 $BC : CD = \boxed{K} : \boxed{L}$ である。ただし、比は最も簡単な整数比で答えな

さい。したがって、 $BC = \frac{\boxed{M} \sqrt{\boxed{NO}}}{\boxed{P}}$ となり

$$\triangle BCD = \frac{\boxed{Q} \sqrt{\boxed{R}}}{\boxed{ST}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

である。

よって、① と ② より、四角形 ABCD の面積は $\frac{\boxed{U} \sqrt{\boxed{V}}}{\boxed{W}}$ である。

注) 内接する : be inscribed

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。**IV** の解答欄 **X** ~ **Z** はマークしないでください。

コース1の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の **V** はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース1」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉 Mathematic

コース1 Course1			
問Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	A	9
		B	7
		C	7
		D	8
		E	9
		F	9
		G	7
		H	6
		I	4
		J	0
		K	4
	問 2	L	2
		M	1
		NO	17
		PQRS	2549
		TUVW	2449
		X	4
		Y	1
II	問 1	ABC	415
		D	7
		E	7
		F	2
		G	8
		H	5
		I	6
		J	8
	問 2	KL	24
		MN	22
		OP	54
		QR	34
III	問 2	ST	44
		UV	21
		AB	73
		CD	21
		EFG	882
		HIJ	841
		KL	29
		MNOP	2973
		Q	3
		R	2
IV	問 2	S	5
		A	3
		BCD	217
		EFGH	3314
		IJ	34
		KL	32
		MNOP	3217
		QRST	9314
		UVW	637

コース2 Course2			
問Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	A	9
		B	7
		C	7
		D	8
		E	9
		F	9
		G	7
		H	6
		I	4
		J	0
		K	4
	問 2	L	2
		M	1
		NO	17
		PQRS	2549
		TUVW	2449
		X	4
II	問 2	Y	1
		A	6
		BCD	521
		EF	84
		GH	23
		IJ	76
		KL	43
		MNO	132
	問 1	P	1
		QR	23
		STU	132
		V	3
III	問 1	WXY	934
		AB	32
		CDE	434
		FGH	432
		IJ	33
		KLM	839
		N	0
		OP	56
		Q	0
		RS	46
IV	問 2	AB	11
		C	1
		D	0
		EF	22
		G	1
		HIJK	2211
		LMN	222
		OP	12
		QRSTUV	111222
		W	0