数学 コース 1

（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース1 Course 1	コース2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a を実数とし，2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (2a-1)x + a$$

について考える。

(1)　$y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(\boxed{\mathsf{A}}\,a - \boxed{\mathsf{B}},\ -\boxed{\mathsf{C}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{D}}\,a - \boxed{\mathsf{E}}\right)$$

である。

(2)　$y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 2 点 A, B で交わるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}},\quad \boxed{\mathsf{H}} < a$$

である。

(3)　(2) の 2 点 A, B で，それらの x 座標がともに 0 以上 6 以下となる a の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{I}} < a \leqq \frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{LM}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　大きさの異なる 4 枚のカードがある。これらのカードに赤，黒，青，黄の色を塗る。ただし，どのカードにも 1 つの色のみを使い，また同じ色のカードが 2 枚以上あってもよいものとする。

(1)　全部で $\boxed{\text{NOP}}$ 通りの塗り方がある。

(2)　全部の色を使う塗り方は $\boxed{\text{QR}}$ 通りある。

(3)　2 枚は赤で，1 枚が黒，1 枚が青となるような塗り方は $\boxed{\text{ST}}$ 通りある。

(4)　3 つの色を使う塗り方は $\boxed{\text{UVW}}$ 通りある。

(5)　2 つの色を使う塗り方は $\boxed{\text{XY}}$ 通りある。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　$a^3 = 9 + \sqrt{80}$ を満たす正の数 a を求めよう。

$b^3 = 9 - \sqrt{80}$ を満たす正の数 b を追加して考える。

このとき

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = \boxed{\mathrm{AB}} & \cdots\cdots\cdots ① \\ ab = \boxed{\mathrm{C}} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。

まず，② を用いると ① は

$$(a+b)^3 - \boxed{\mathrm{D}}(a+b) = \boxed{\mathrm{AB}}$$

と変形できる。

ここで，$a+b=x$ とおくと

$$x^3 - \boxed{\mathrm{D}}x = \boxed{\mathrm{AB}}$$

となる。この式を変形して

$$x^3 - 27 = \boxed{\mathrm{D}}\left(x - \boxed{\mathrm{E}}\right)$$

を得る。これより

$$\left(x - \boxed{\mathrm{F}}\right)\left(x^2 + \boxed{\mathrm{G}}x + \boxed{\mathrm{H}}\right) = 0$$

となる。

よって，$x = \boxed{\mathrm{I}}$ となり

$$a + b = \boxed{\mathrm{I}} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

となる。

したがって，②, ③ と $a > b$ より

$$a = \frac{\boxed{\mathrm{J}} + \sqrt{\boxed{\mathrm{K}}}}{\boxed{\mathrm{L}}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

問 2　a を 0 でない定数とし

$$f(x) = x^2 + 2ax - 4a - 12$$
$$g(x) = ax^2 + 2x - 4a + 4$$

とする。

(1)　$f(x) = 0$ の解と $g(x) = 0$ の解が一致するとき，a は $\boxed{\text{MN}}$ である。また，そのとき，その解は $x = \boxed{\text{OP}}$ と $x = \boxed{\text{Q}}$ である。

(2)　$g(x) = 0$ が重解をもつのは $a = \dfrac{\boxed{\text{R}}}{\boxed{\text{S}}}$ のときであり，そのときの解は $x = \boxed{\text{TU}}$ である。

(3)　すべての x に対して，$f(x) < g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{V}} \leqq a < \boxed{\text{WX}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Y}}$, $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

n は 2 桁の自然数であり，n^3 を 66 で割ったときの余りは n であるという。このような n の個数と，このような n のうち素数であるものを求めよう。

条件より，n^3 を 66 で割ったときの商を p とすると

$$n^3 = \boxed{\mathrm{AB}}\,p + n \quad (0 < n \leqq \boxed{\mathrm{CD}})$$

と表せる。これを変形して

$$n(n-1)(n+1) = \boxed{\mathrm{AB}}\,p$$

を得る。

ここで，$n-1, n$ のどちらか一方は $\boxed{\mathrm{E}}$ の倍数，$n-1, n, n+1$ のうち 1 つは $\boxed{\mathrm{F}}$ の倍数であり，$\boxed{\mathrm{E}}$ と $\boxed{\mathrm{F}}$ は互いに素であるから，$n(n-1)(n+1)$ は $\boxed{\mathrm{G}}$ の倍数である。ただし，$1 < \boxed{\mathrm{E}} < \boxed{\mathrm{F}} < \boxed{\mathrm{G}}$ とする。よって，$n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが $\boxed{\mathrm{HI}}$ の倍数となる場合を考えればよい。

いま，$n \leqq \boxed{\mathrm{CD}}$ であるから，$n-1$ が $\boxed{\mathrm{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathrm{J}}$，n が $\boxed{\mathrm{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathrm{K}}$，$n+1$ が $\boxed{\mathrm{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathrm{L}}$ である。

よって，求める n の個数は $\boxed{\mathrm{MN}}$ であり，このうち，素数である n は小さい順に $\boxed{\mathrm{OP}}$，$\boxed{\mathrm{QR}}$，$\boxed{\mathrm{ST}}$ である。

注）2 桁の自然数：2-digit natural number，商：quotient，互いに素：mutually prime (co-prime)

- 計算欄 (memo) -

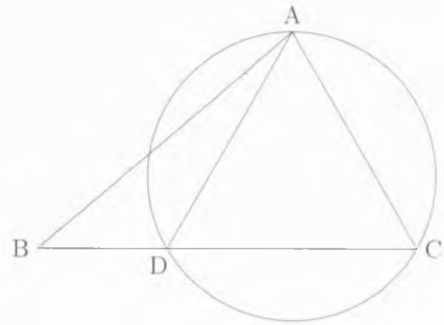
III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 $\boxed{\text{U}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

右図の三角形 ABC は

$$AB = 4,\quad AC = 3,\quad \angle B = 30^\circ$$

を満たしている。辺 BC 上に AC = AD となる点 D をとり，三角形 ACD の外接円 O を考える。



(1) $\sin B = \dfrac{\boxed{A}}{\boxed{B}}$ であるから，$\sin C = \dfrac{\boxed{C}}{\boxed{D}}$ である。

したがって，円 O の半径は $\dfrac{\boxed{E}}{\boxed{F}}$ である。

(2) $BC = \boxed{G}\sqrt{\boxed{H}} + \sqrt{\boxed{I}}$, $BD = \boxed{J}\sqrt{\boxed{K}} - \sqrt{\boxed{L}}$ である。

また，辺 AB と円 O の交点を E とおくと

$$BE = \frac{\boxed{M}}{\boxed{N}}$$

である。したがって，三角形 BDE, 三角形 ADE, 三角形 ACD の面積について

$$\triangle BDE : \triangle ADE = \boxed{O} : \boxed{P}$$

$$\triangle BDE : \triangle ACD = \boxed{Q}\left(\boxed{J}\sqrt{\boxed{K}} - \sqrt{\boxed{L}}\right) : \boxed{RS}\sqrt{\boxed{T}}$$

が成り立つ。

注） 外接円：circumscribed circle

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 **U** 〜 **Z** はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の V はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース **1**」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉 Mathematics

コース 1 Course 1			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	AB	42
		CDE	451
		FG	14
		H	1
		I	1
		JKLM	1511
	問 2	NOP	256
		QR	24
		ST	12
		UVW	144
		XY	84
II	問 1	AB	18
		C	1
		D	3
		E	3
		FGH	336
		I	3
		JKL	352
	問 2	MN	−1
		OP	−2
		Q	4
		RS	12
		TU	−2
		V	1
		WX	17
III		AB	66
		CD	65
		E	2
		F	3
		G	6
		HI	11
		J	5
		K	5
		L	6
		MN	16
		OP	11
		QR	23
		ST	43
IV		AB	12
		CD	23
		EF	94
		GHI	235
		JKL	235
		MN	74
		OP	79
		QRST	7325

コース 2 Course 2			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	AB	42
		CDE	451
		FG	14
		H	1
		I	1
		JKLM	1511
	問 2	NOP	256
		QR	24
		ST	12
		UVW	144
		XY	84
II	問 1	A	3
		BC	32
		D	0
		EF	21
		GHIJK	92117
		L	4
	問 2	MNOP	1460
		QRS	065
		T	0
		U	7
		VW	24
		X	2
III		ABC	214
		DE	12
		F	1
		GH	26
		IJ	81
		KLMN	2313
		OP	13
		QRST	5527
		U	2
		VWXY	2215
IV		A	4
		BCDEFGHI	13321332
		JKL	132
		MN	16
		OPQR	6357
		ST	96
		U	1