令和2年第2回数学1

2020年度　日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。適するものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\mathrm{A}}\sqrt{\boxed{\mathrm{B}}}}{\boxed{\mathrm{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\mathrm{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 1
（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a は正の定数とする。2 次関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフを平行移動する。移動後の放物線と x 軸との交点が $(-2a, 0)$, $(4a, 0)$ であるとき，この放物線の方程式 $y = f(x)$ について考える。

(1)　$f(x)$ は

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\left(x - \boxed{\text{C}}\,a\right)\left(x + \boxed{\text{D}}\,a\right)$$

と表せる。

(2)　$y = f(x)$ において，y の値が $10a^2$ 以下となる x の値の範囲は，不等式

$$x^2 - \boxed{\text{E}}\,ax - \boxed{\text{FG}}\,a^2 \leqq 0$$

を解いて，$-\boxed{\text{H}}\,a \leqq x \leqq \boxed{\text{I}}\,a$ である。

(3)　直線 $y = 10a$ が $y = f(x)$ のグラフによって切り取られる線分の長さを 10 とする。$\boxed{\text{J}}\sqrt{\boxed{\text{K}}\,a^2 + \boxed{\text{LM}}\,a} = 10$ であるから，a の値は $\dfrac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　10 段の階段がある。1 段のぼり (1 回に階段を 1 段のぼること)，または 2 段のぼり (1 回に階段を 2 段のぼること) のいずれかで階段をのぼるとし，1 段のぼりも 2 段のぼりも必ず 1 回はあることとする。

10 段の階段をのぼるとき，次の 2 つの場合について考えよう。

(1)　2 段のぼりが連続してもよい場合

(i)　例えば，2 段のぼりが 3 回ならば，1 段のぼりは $\boxed{\mathbf{P}}$ 回であり，のぼり方は $\boxed{\mathbf{QR}}$ 通りある。

(ii)　2 段のぼりが連続してもよい場合の階段ののぼり方は全部で $\boxed{\mathbf{ST}}$ 通りある。

(2)　2 段のぼりが連続しない場合

(i)　例えば，2 段のぼりが 2 回ならば，1 段のぼりは $\boxed{\mathbf{U}}$ 回であり，のぼり方は $\boxed{\mathbf{VW}}$ 通りある。

(ii)　2 段のぼりが連続しない場合の階段ののぼり方は全部で $\boxed{\mathbf{XY}}$ 通りある。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　m, n は $0 < m - n\sqrt{2} < 1$ を満たす正の整数とする。$(m + n\sqrt{2})^3$ の整数部分を a，小数部分を b とする。

(1)　a は奇数であり，かつ，$(m - n\sqrt{2})^3 = 1 - b$ であることを示そう。

p, q を整数とし，$(m + n\sqrt{2})^3 = p + q\sqrt{2}$ とおくと

$$p = m^3 + \boxed{\textsf{A}}\,mn^2, \quad q = \boxed{\textsf{B}}\,m^2n + \boxed{\textsf{C}}\,n^3$$

となり，$(m - n\sqrt{2})^3 = p - q\sqrt{2}$ である。

さらに，$(m - n\sqrt{2})^3$ の整数部分は $\boxed{\textsf{D}}$ である。よって，小数部分を c とおくと，次の 2 式

$$\begin{cases} p + q\sqrt{2} = a + b \\ p - q\sqrt{2} = c \end{cases}$$

が成り立つ。これより

$$\boxed{\textsf{E}}\,p - a = b + c$$

となる。

ここで，この左辺は整数であり，この右辺のとる値の範囲は $\boxed{\textsf{F}} < b + c < \boxed{\textsf{G}}$ であるから

$$b + c = \boxed{\textsf{H}}$$

である。

よって，$a = \boxed{\textsf{E}}\,p - \boxed{\textsf{H}}$ となり，a は奇数，かつ，$(m - n\sqrt{2})^3 = 1 - b$ が成り立つ。

(2)　$a = 197$ のとき，m, n を求めよう。

$a = 197$ であるから，$p = \boxed{\textsf{IJ}}$，すなわち $m^3 + \boxed{\textsf{A}}\,mn^2 = \boxed{\textsf{IJ}}$ となる。これを満たす正の整数 m, n は

$$m = \boxed{\textsf{K}}, \quad n = \boxed{\textsf{L}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　a は $a \geqq 0$ を満たす実数とし，関数 $f(x) = |x^2 - 2x|$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値 M を a を用いて表そう。さらに，a が $a \geqq 0$ の範囲で変わるとき，M の最小値を求めよう。

(1)　関数 $f(x)$ を絶対値の記号を用いないで表すと

$x \leqq \boxed{\mathsf{M}}$ または $x \geqq \boxed{\mathsf{N}}$ のとき，$f(x) = x^2 - 2x$

$\boxed{\mathsf{M}} < x < \boxed{\mathsf{N}}$ のとき，$f(x) = -x^2 + 2x$

である。

したがって，$f(x)$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値は

$0 \leqq a \leqq \boxed{\mathsf{O}}$ のとき，$M = \boxed{\mathsf{P}}$

$\boxed{\mathsf{O}} < a \leqq \dfrac{\boxed{\mathsf{Q}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{R}}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$ のとき，$M = -a^2 + \boxed{\mathsf{T}}\,a$

$a > \dfrac{\boxed{\mathsf{Q}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{R}}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$ のとき，$M = a^2 - \boxed{\mathsf{U}}$

である。

(2)　a が $a \geqq 0$ の範囲で変わるとき，M の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathsf{V}}}}{\boxed{\mathsf{W}}}$ である。

注）絶対値：absolute value

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{X}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

等式

$$14a + 9b = 147 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たす整数 a, b を考える。

(1)　等式 ① を満たす正の整数 a, b を求めよう。

$$14a = \boxed{\mathrm{A}}(\boxed{\mathrm{BC}} - \boxed{\mathrm{D}}b),\quad 9b = \boxed{\mathrm{E}}(\boxed{\mathrm{FG}} - \boxed{\mathrm{H}}a)$$

であるから，a は $\boxed{\mathrm{A}}$ の倍数であり，b は $\boxed{\mathrm{E}}$ の倍数である。

そこで，m, n を整数として $a = \boxed{\mathrm{A}}m$, $b = \boxed{\mathrm{E}}n$ とおくと，① より

$$\boxed{\mathrm{I}}m + \boxed{\mathrm{J}}n = \boxed{\mathrm{K}}$$

を得る。これを満たす正の整数 m, n は

$$m = \boxed{\mathrm{L}},\quad n = \boxed{\mathrm{M}}$$

であるから

$$a = \boxed{\mathrm{N}},\quad b = \boxed{\mathrm{O}}$$

である。

(2)　等式 ① の解 a, b で，$0 < a + b < 5$ を満たすものを求めよう。

$14 \times \boxed{\mathrm{N}} + 9 \times \boxed{\mathrm{O}} = 147$ であるから，この式と ① より

$$14(a - \boxed{\mathrm{N}}) = 9(\boxed{\mathrm{O}} - b)$$

を得る。ここで，14 と 9 は互いに素であるから，a, b は整数 k を用いて

$$a = \boxed{\mathrm{P}}k + \boxed{\mathrm{Q}},\quad b = -\boxed{\mathrm{RS}}k + \boxed{\mathrm{T}}$$

と表される。ここで，$0 < a + b < 5$ より，$k = \boxed{\mathrm{U}}$，すなわち

$$a = \boxed{\mathrm{VW}},\quad b = -\boxed{\mathrm{XY}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。 III の解答欄 **Z** はマークしないでください。

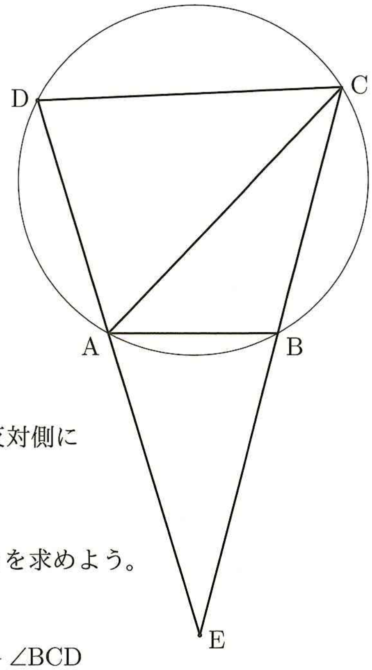
IV

3 辺の長さが

$$AB = 2,\quad BC = 3,\quad CA = 4$$

である三角形 ABC とその外接円 O を考える。

以下，三角形 PQR の面積は △PQR のように表す。



(1) $\cos\angle ABC = \dfrac{\boxed{AB}}{\boxed{C}}$ である。

(2) 円 O の周上に点 D を線分 AC に関して点 B と反対側に

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle BCD} = \frac{8}{15} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

であるようにとる。このとき，線分 AD, CD の長さを求めよう。

まず

$$\angle BAD = \boxed{DEF}^\circ - \angle BCD$$

であるから，$\sin\angle BAD = \sin\angle BCD$ である。よって，① より

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\boxed{G}}{\boxed{H}}$$

となる。そこで，正の数 k を用いて $AD = \boxed{G}\,k$，$CD = \boxed{H}\,k$ とおく。さらに

$$\angle ADC = \boxed{IJK}^\circ - \angle ABC$$

であるから，$\cos\angle ADC = \dfrac{\boxed{L}}{\boxed{M}}$ である。よって，$k = \dfrac{\boxed{N}}{\sqrt{\boxed{OP}}}$ を得る。したがって

$$AD = \frac{\boxed{QR}\sqrt{\boxed{OP}}}{\boxed{OP}},\quad CD = \frac{\boxed{ST}\sqrt{\boxed{OP}}}{\boxed{OP}}$$

である。

(3) 直線 DA と直線 CB の交点を E とすると

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle CDE} = \frac{\boxed{UV}}{\boxed{WXY}}$$

となる。

注） 外接円：circumscribed circle，周：perimeter

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉Mathematic

コース１　Course1			
問Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問１	ABCD	1442
		EFG	248
		HI	68
		JKLM	2940
		NO	59
	問２	P	4
		QR	35
		ST	87
		U	6
		VW	21
		XY	40
II	問１	A	6
		BC	32
		D	0
		E	2
		FG	02
		H	1
		IJ	99
		K	3
		L	2
	問２	MN	02
		O	1
		P	1
		QRS	132
		T	2
		U	1
		VW	32
III		ABCD	3493
		EFGH	7212
		IJK	237
		L	2
		M	1
		N	6
		O	7
		PQ	96
		RST	147
		U	2
		VW	24
		XY	21
IV		ABC	−14
		DEF	180
		GH	45
		IJK	180
		LM	14
		NOP	431
		QR	16
		ST	20
		UVWXY	31100

コース２　Course2			
問Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問１	ABCD	1442
		EFG	248
		HI	68
		JKLM	2940
		NO	59
	問２	P	4
		QR	35
		ST	87
		U	6
		VW	21
		XY	40
II	問１	A	1
		B	4
		C	9
		DEF	310
		GH	58
		I	1
		J	8
		K	9
		L	6
	問２	MN	16
		OP	33
		Q	2
		R	6
		STUV	1357
		W	4
		XY	−4
III		ABC	324
		DE	−1
		F	6
		GHI	324
		JKL	234
		M	2
		NOP	812
		QR	24
		ST	−1
		U	8
		VW	97
IV		ABCD	2121
		E	4
		FG	23
		HI	34
		J	4
		K	0
		LM	23
		N	1
		OP	34
		Q	0
		R	1
		ST	34
		UVW	209