

# บทที่ 5

## ตัวแบบบแถวคอย

# ความสำคัญ

- สภาพการรอคอยเป็นเหตุการณ์ที่พบเห็นอยู่ในชีวิตประจำวันไม่ว่าจะเป็นหน่วยงานของรัฐบาลหรือเอกชน ตัวอย่าง เช่น
  - การจ่ายเงินตามร้านสรรพสินค้า
  - การนำรถเข้าเติมน้ำมันที่สถานีบริการ
  - การเข้าแถวเพื่อตรวจสอบเอกสารที่สนามบิน
  - การเข้าแถวรอรับการตรวจรักษาตามโรงพยาบาล
  - การชำระเงินบนทางด่วน
- โดยทั่วไปแล้วระบบแถวคอยประกอบไปด้วยผู้รับบริการและส่วนให้บริการ การเข้าแถวเพื่อรอรับบริการใด ๆ จะเกิดขึ้นเสมอเมื่อความต้องการบริการมีมากกว่าขีดความสามารถของผู้ให้บริการ
- การที่มีลูกค้า (ผู้รับบริการ) เข้าแถวรอรับบริการเป็นจำนวนมาก ลูกค้าจะเกิดความรู้สึกเบื่อหน่าย ไม่พอใจ และอาจออกจากแถวคอยไปก่อนที่จะได้รับบริการหรืออาจจะไม่กลับมาใช้บริการอีกในอนาคต เหตุการณ์เช่นนี้สามารถทำให้ธุรกิจขาดรายได้ และ/หรือสูญเสียลูกค้า ปัญหาของผู้บริหารการให้บริการก็คือ จะต้องจัดเตรียมการให้บริการอยู่ในระดับใดจึงจะพอเหมาะ

# ปัญหาแถวคอย (Queuing Theory)

- **A.K. Erlang (1910)** วิศวกรชาวเดนมาร์กเป็นผู้คิดทฤษฎีนี้ จากปัญหาการสนับสนุนปัจจัยการผลิตในการผลิตสินค้าของโรงงานอุตสาหกรรม
- เกิดขึ้นเนื่องจาก ความต้องการรับบริการไม่เท่ากับการให้บริการ หรือ อุปสงค์ในบริการมีมากกว่าอุปทานของบริการ
- ศัพท์ที่ควรทราบ
  - ลูกค้า (Customer) หรือ ผู้รับบริการ (Arrival)
  - หน่วยบริการ (Service Unit)
  - ระบบคิว (Queuing System)

# ลักษณะของปัญหาการรอคอย

แยกได้เป็น 2 ด้าน

## ➤ ด้านผู้ประกอบการ

- ผู้ประกอบการต้องการควบคุมต้นทุนการให้บริการสินค้าและบริการต่ำที่สุด
- ผู้ประกอบการมีข้อจำกัดด้านทรัพยากรในการให้บริการสินค้าและบริการ เช่น จำนวนแรงงานไม่เพียงพอ โต๊ะและเก้าอี้ไม่เพียงพอ
- ข้อจำกัดในการให้บริการสินค้าและบริการเกิดได้ทั้งตลอดช่วงระยะเวลาของการให้บริการและ/หรือ บางช่วงระยะเวลาการให้บริการ

## ➤ ด้านผู้บริโภค

- การให้บริการสินค้าและบริการที่ทำให้เกิดต้นทุนค่าเสียโอกาสแก่ผู้บริโภคมากขึ้น
- อรรถประโยชน์ที่จะได้จากสินค้าและบริการนั้นจะลดลงหรืออาจถูกบิดเบือนไป

# ตัวแบบแถวคอย (Queuing Model)

- คิวที่ยาวเกินไป จะทำให้ผู้ใช้บริการรอคอยนานจน เลิกรอคอยและออกจากระบบบริการไปก่อนที่จะได้ใช้ บริการ หรืออาจหันไปใช้บริการที่อื่นได้ในครั้งต่อไปซึ่ง จะทำให้หน่วยบริการขาดรายได้ที่ควรจะได้รับ
- การเพิ่มจำนวนของผู้ให้บริการ หรือหน่วยบริการ สามารถลดความยาวของคิวได้ แต่การเพิ่มผู้ให้บริการ จะเป็นการเพิ่มค่าใช้จ่ายของระบบ

# องค์ประกอบของระบบบริการ

องค์ประกอบของระบบบริการ มี **3** ส่วน

- 1) กลุ่มประชากรผู้รับบริการ (Customer)
- 2) แถวคอย (Queue)
- 3) ส่วนให้บริการ (Service Unit)

# องค์ประกอบของผู้รับบริการ (Customer)

องค์ประกอบของผู้รับบริการมีลักษณะดังนี้

1. **ขนาดของกลุ่มประชากรผู้รับบริการ :** ซึ่งอาจมีจำนวนไม่แน่นอน ไม่จำกัดจำนวน หรือจำกัดจำนวนก็ได้
2. **ลักษณะการมาถึง :** อาจมาครั้งละ 1 หน่วยหรือมาเป็นกลุ่มก็ได้
3. **อัตราการมารับบริการ :** จะเป็นตัวเลขแสดงจำนวนผู้เข้ารับบริการโดยเฉลี่ย เข้ามารับบริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา
4. **พฤติกรรมของผู้รับบริการ:** ในตัวแบบแถวคอยจะสมมติให้ผู้รับบริการรอคอยอยู่ในแถว จนกว่าจะได้รับบริการ

# ลักษณะของสภาพแวดล้อม

ลักษณะของสภาพแวดล้อมเกี่ยวข้องกับสิ่งต่อไปนี้

**1. สถานที่รอคอย :** ระบบแวดล้อมบางระบบผู้รับบริการจะรออยู่ในที่เดียวกัน แต่บางระบบแวดล้อมจะรออยู่ในที่ต่างกัน

**2. ขนาดของแวดล้อมที่เป็นไปได้ :**

**จำนวนจำกัด** ในระบบแวดล้อมบางระบบมีจำนวนผู้รับบริการได้ในจำนวนจำกัดทั้งนี้เพราะมีพื้นที่จำกัด เมื่อมีผู้รับบริการรอเต็มแล้วผู้รับบริการคนใหม่จะเข้าสู่ระบบแวดล้อมไม่ได้ ต้องออกจากระบบโดยที่ยังไม่ได้รับการบริการ หรือ กรณีการรอซ่อมเครื่องจักรในโรงงาน ซึ่งประชากรคือจำนวนของเครื่องจักรในโรงงานมีจำนวนจำกัด หรือ กรณีพนักงานรอใช้เครื่องถ่ายเอกสารซึ่งมีอยู่เพียงเครื่องเดียวและจำนวนพนักงานมีจำนวนตายตัว ดังนั้นขนาดของแวดล้อมจะมีขนาดจำกัด

**จำนวนไม่จำกัด** ในระบบแวดล้อมแบบนี้พบเห็นได้ทั่วไป กล่าวคือ ผู้เข้ารับบริการมีไม่จำกัดจำนวน เช่น คลินิกแพทย์ ธนาคาร ปั้มน้ำมัน ซูเปอร์มาร์เก็ต



# องค์ประกอบส่วนให้บริการ

องค์ประกอบส่วนให้บริการจะเกี่ยวข้องกับสิ่งต่อไปนี้

1. **ผู้ให้บริการในระบบแถวคอย** : ไม่จำเป็นต้องเป็นคน อาจเป็นเครื่องจักรก็ได้
2. **ระเบียบการให้บริการแถวคอย** : วิธีการจัดอันดับผู้รอรับบริการในแถวคอย เพื่อเข้ารับบริการที่นิยมใช้กันมาก คือ มาก่อน รับบริการก่อน (First Come-First Served)

## องค์ประกอบส่วนให้บริการ (ต่อ)

1. **การจัดวางผังระบบแถวคอย** : ระบบการให้บริการอาจแบ่งเป็นหลายขั้นตอน และแต่ละขั้นตอนอาจมีผู้ให้บริการหรือช่องให้บริการเพียงช่องเดียว หรือหลายช่องก็ได้
2. **เวลาให้บริการ (Service Time)** คือเวลาที่ใช้ในการบริการลูกค้าแต่ละราย
3. **อัตราการให้บริการ (Service Rate)** คือ จำนวนลูกค้าที่ให้บริการในหนึ่งหน่วยเวลา

# ประเภทตัวแบบแถวคอย ที่น่าสนใจ

ประเภทที่ 1 คือ

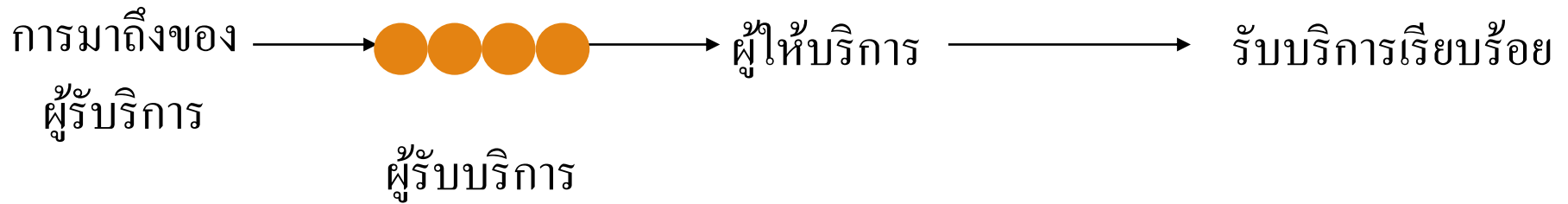
ตัวแบบแถวคอยแบบ

ช่องเดียว ขั้นตอนเดียว

เช่น ตู้เช็คยอดสมุดบัญชีเงินฝาก เครื่องล้างรถอัตโนมัติ



แถวคอย



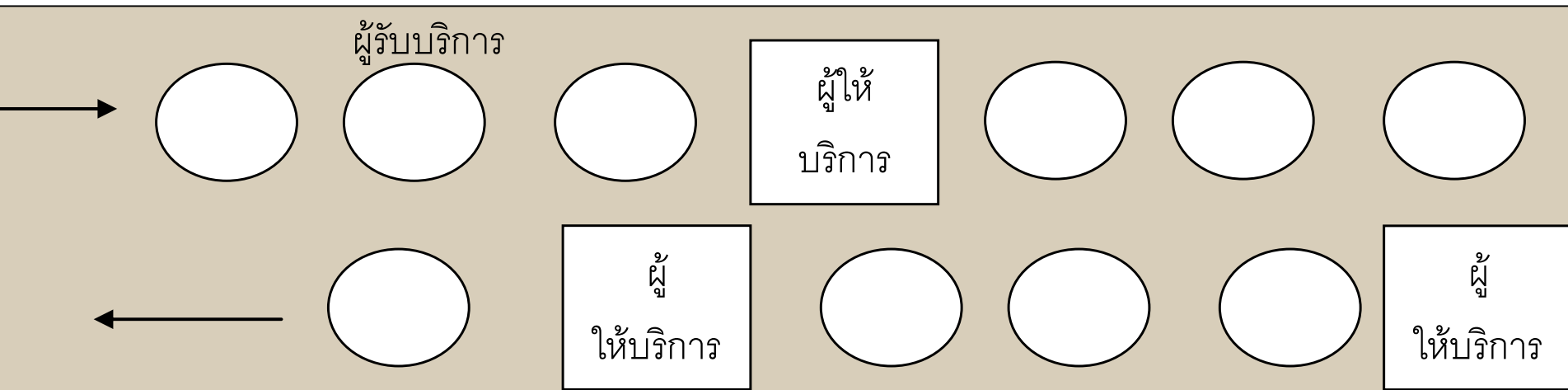
**แบบมีหนึ่งแถวคอยและมีช่องบริการเพียงช่องเดียว**  
**เป็นรูปแบบที่ง่ายและพบเห็นได้ทั่วไป**

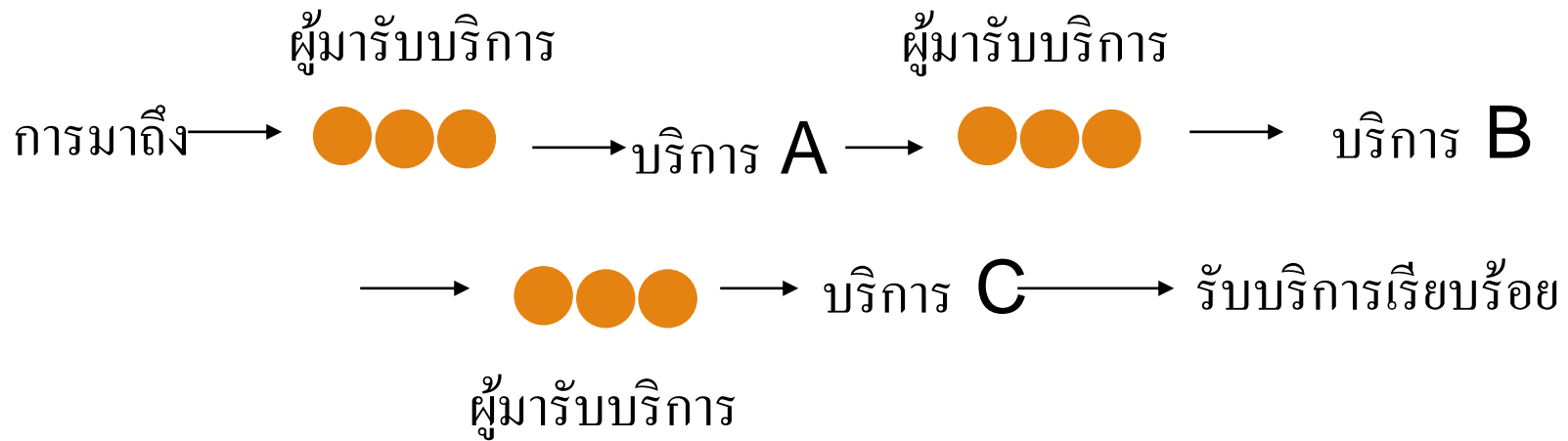
# ประเภทที่ 2 คือ

## ตัวแบบแถวคอยแบบ

### ช่องทางเดียว แต่หลายขั้นตอน

เช่น การไปรักษาที่คลินิกที่มีเจ้าหน้าที่ทะเบียนผู้ป่วย แพทย์ประจำ และเจ้าหน้าที่จ่ายยา เพียงอย่างละคน





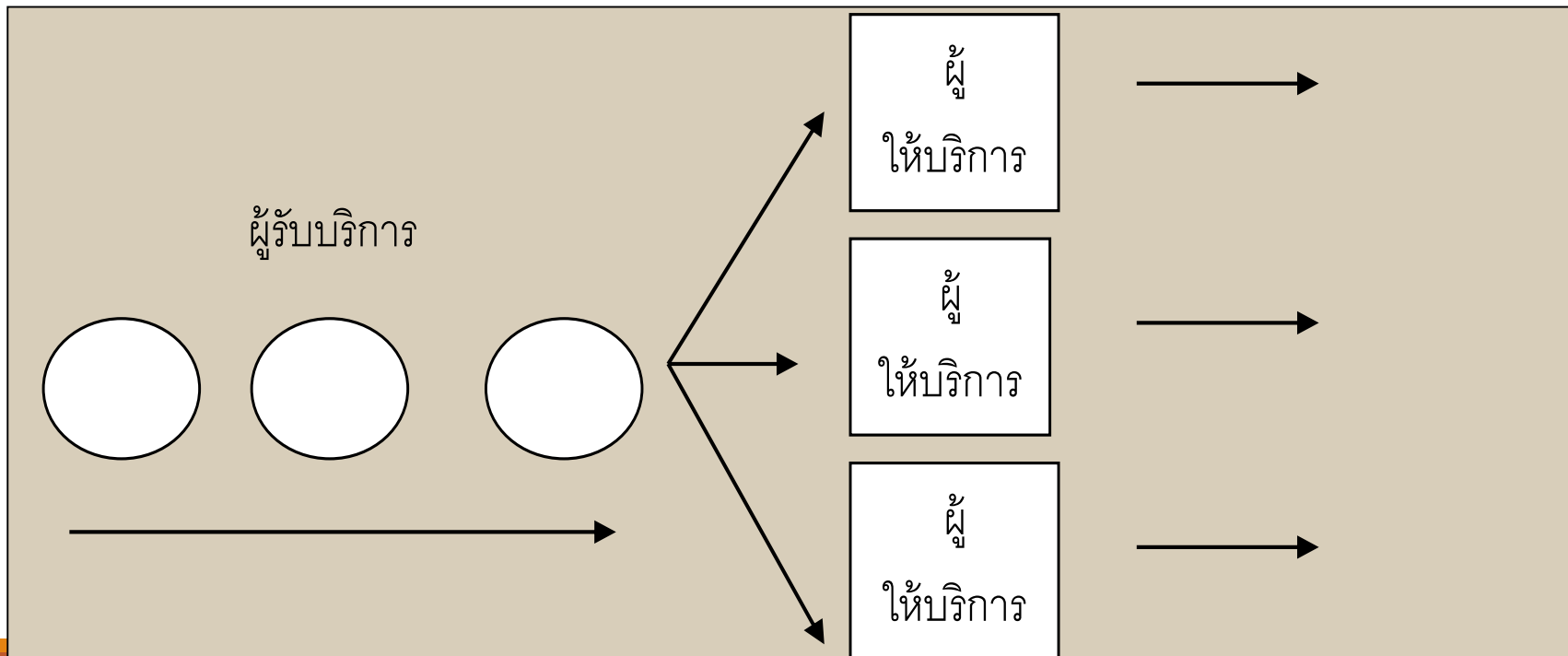
แบบหนึ่งแถวคอยหรือช่องทางเดียวแต่มีหลายขั้นตอน  
เป็นการจัดระบบแถวคอยที่การให้บริการมีหลายขั้นตอน  
และในแต่ละขั้นตอนมีช่องบริการเพียงช่องทางเดียว  
ผู้รับบริการต้องไปรับบริการให้ครบทุกขั้นตอน

# ประเภทที่ 3 คือ

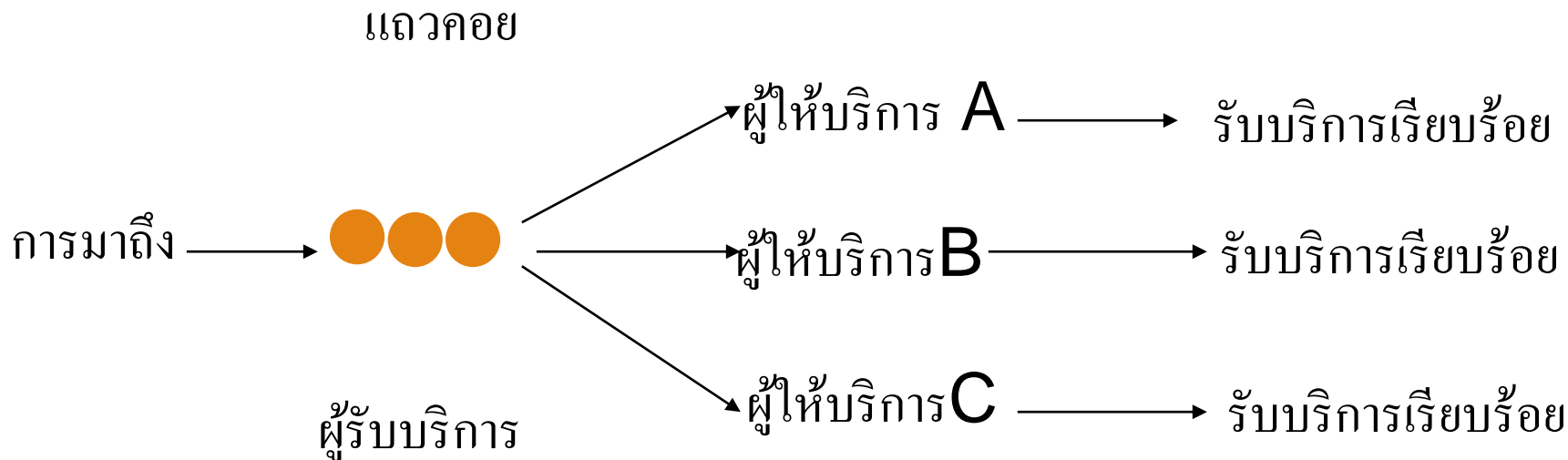
## ตัวแบบแถวคอยแบบ

### หลายช่องบริการ แต่ขั้นตอนเดียว

เช่น จุดจ่ายยาในโรงพยาบาล จุดให้บริการที่ไปรษณีย์ เคาน์เตอร์บริการธนาคาร







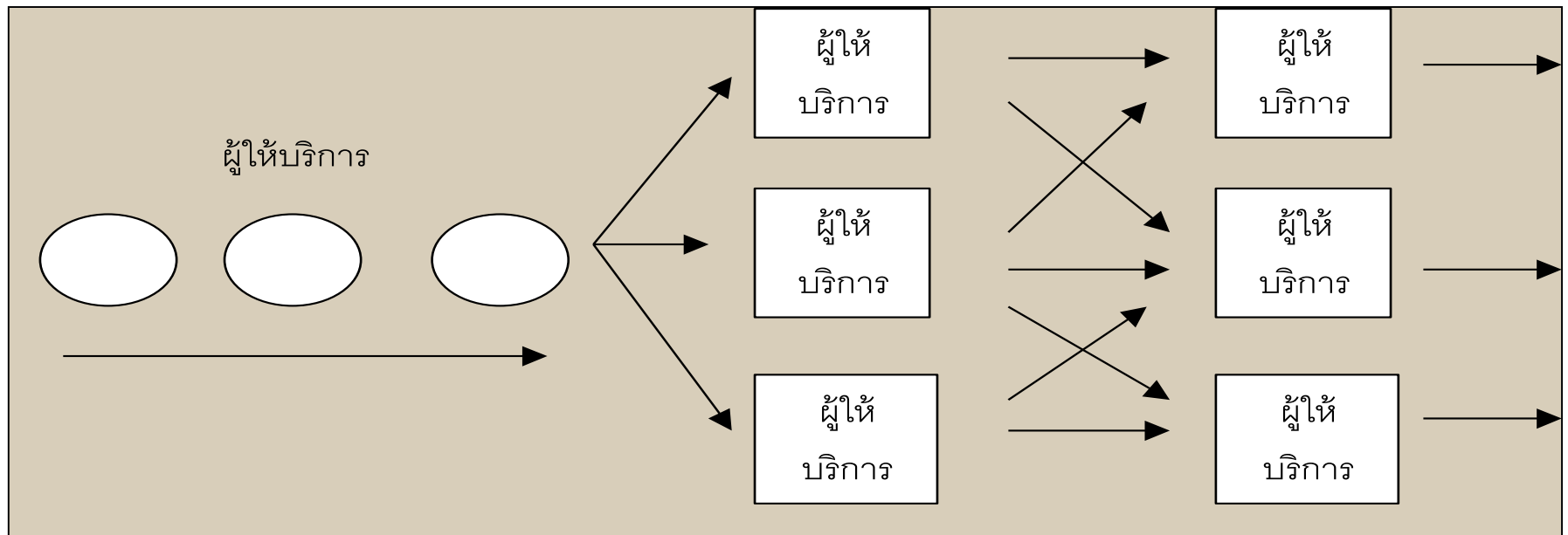
แบบมีหนึ่งแถวคอยแต่มีหลายช่องบริการหรือแบบขนาน  
ระบบนี้จัดให้ผู้บริการหรือให้ช่องบริการมากกว่าหนึ่งช่อง เมื่อ  
ผู้ให้บริการคนใดว่าง ก็ให้คนหัวแถวเข้ารับบริการได้

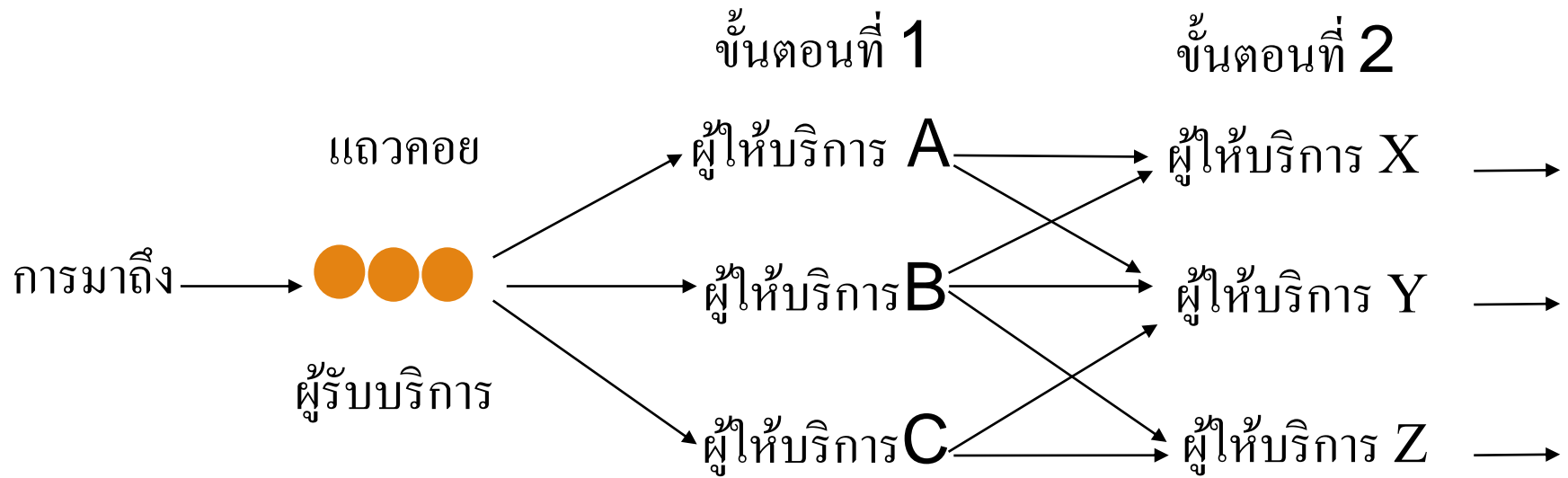
# ประเภทที่ 4 คือ

## ตัวแบบแถวคอยแบบ

หลายช่องบริการและหลายขั้นตอน

เช่น บริการล้างรถ บริการของร้านตัดผม





**แบบมีหนึ่งแถวคอยแต่มีหลายช่องบริการและหลายขั้นตอน**

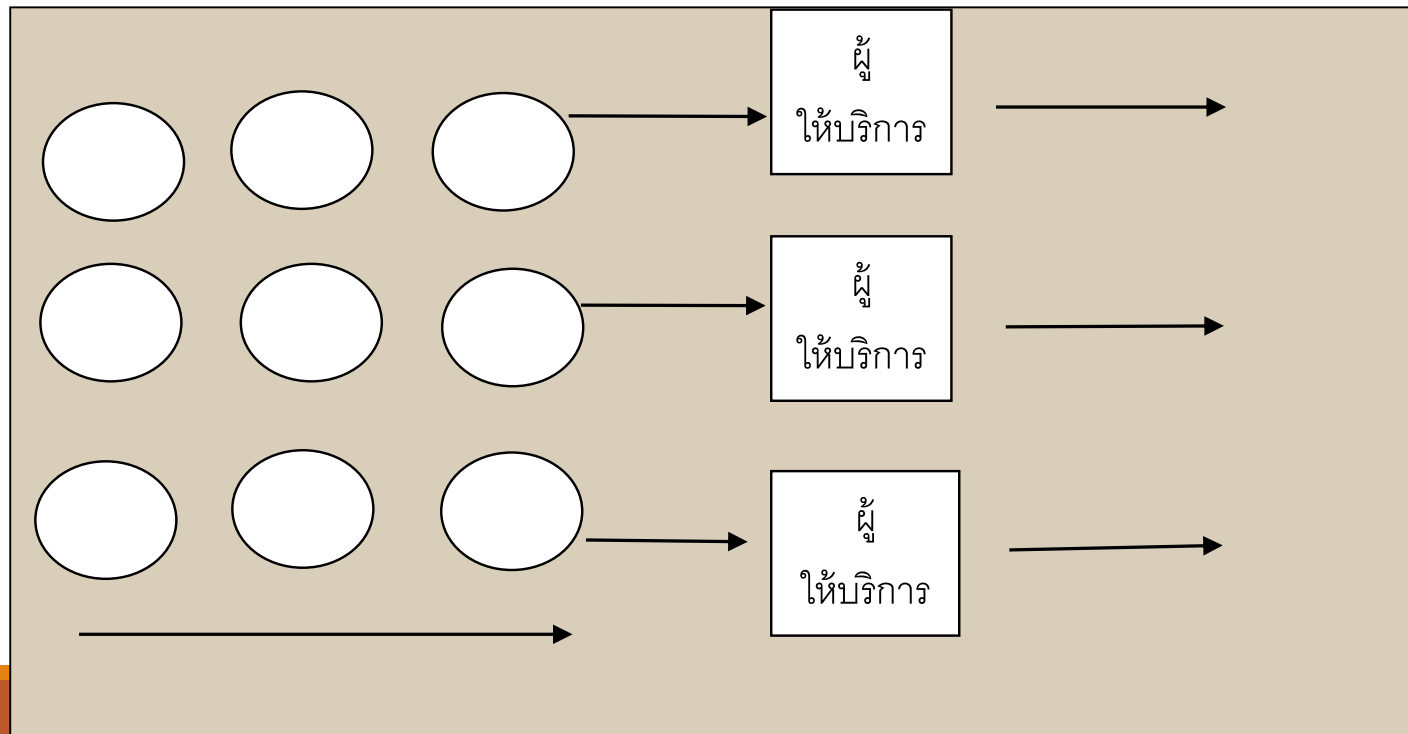
ระบบนี้จัดให้ผู้บริการหรือให้ช่องบริการมากกว่าหนึ่งช่อง เมื่อผู้ให้บริการคนใดว่างก็ให้คนหัวแถวเข้ารับบริการได้ แล้วขั้นตอนต่อไปใครว่างก็ไปรับบริการต่อได้

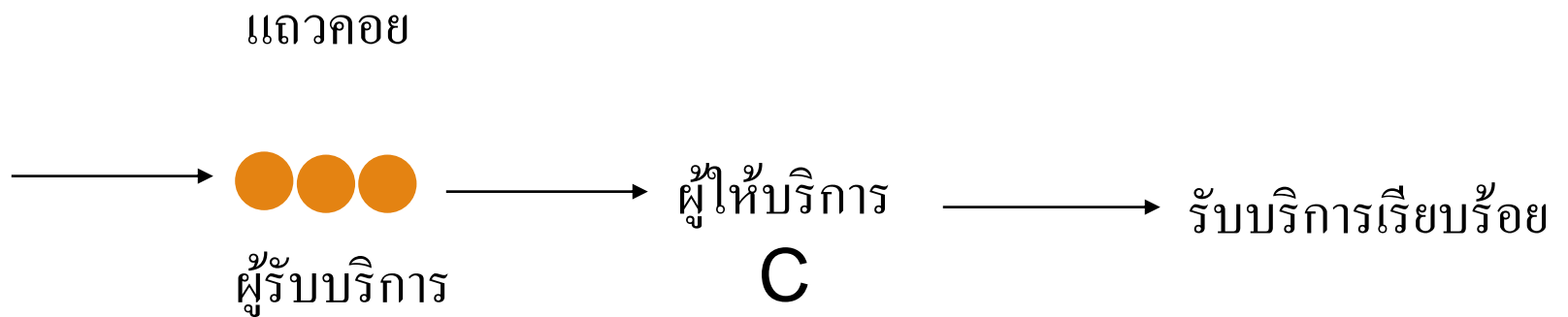
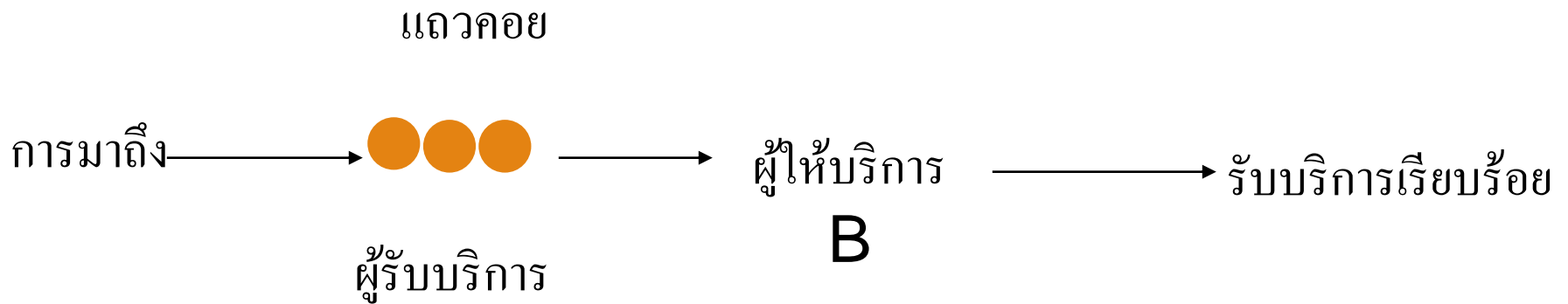
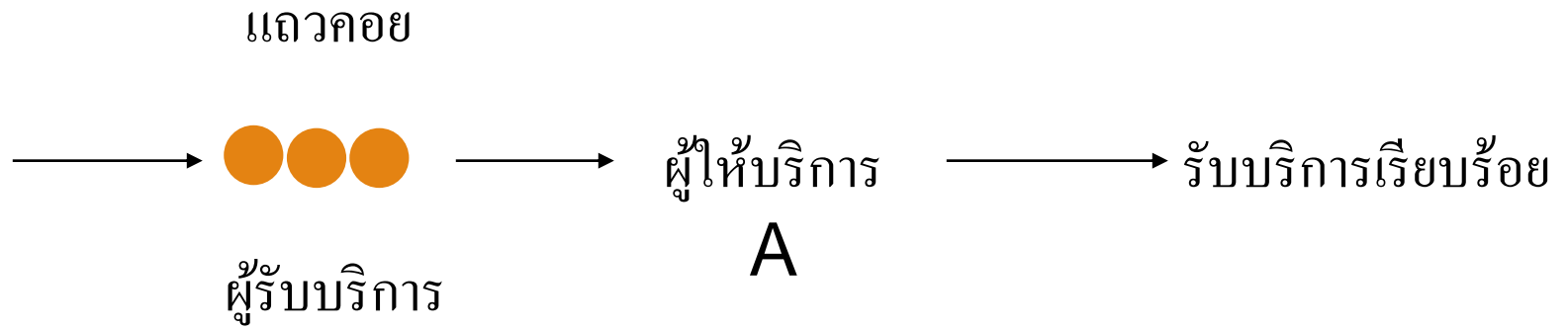
ประเภทที่ 5 คือ

ตัวแบบแถวคอยแบบ

หลายช่องบริการและหลายแถวคอย

เช่น บริการจัดทำหนังสือเดินทาง





แบบมีหลายแถวคอยและมีหลายช่องบริการ

เป็นการจัดรูปแบบแถวคอยแบบขนานอีกรูปแบบหนึ่ง ที่มีผู้ให้บริการมากกว่าหนึ่งช่อง

# ตัวแบบพื้นฐานของระบบแถวคอย

การวัดผลการดำเนินงานของระบบแถวคอยมีค่าสถิติที่สำคัญ **2** ประเภท คือ

- ค่าสถิติที่เกี่ยวข้องกับผู้ใช้บริการ และ
- ค่าสถิติที่แสดงผลทั้งระบบ

# ค่าสถิติที่เกี่ยวข้องกับผู้ใช้บริการ

ค่าสถิติที่เกี่ยวข้องกับผู้ใช้บริการ มีดังนี้

**1. เวลารอคอย** หมายถึง ช่วงเวลาที่ใช้ไปเฉพาะการรอคอย

**2. เวลาในระบบ** หมายถึง ช่วงเวลาที่นับตั้งแต่เข้าสู่ระบบ จนกระทั่งได้รับบริการแล้วเสร็จ ออกไปจากระบบ

# ค่าสถิติที่เกี่ยวข้อง

ดังนั้น เวลาในระบบจะรวมเวลารอคอยและเวลาให้บริการด้วย



เวลาที่เกี่ยวข้องกับผู้ใช้บริการยิ่งต่ำยิ่งดี



วิเคราะห์

สูตรคำนวณ

อัตราการให้บริการ

# การเก็บข้อมูลการให้บริการ

1. อัตราการให้บริการ (**Service Rate**) คือ จำนวนลูกค้าที่ให้บริการในหนึ่งหน่วยเวลา เช่น วัน ชั่วโมง หรือ นาที และทำการบันทึกจำนวนลูกค้าที่ให้บริการในแต่ละหน่วยเวลาบริการ เช่น ในเวลา 20 ชม. สามารถให้บริการลูกค้าได้ 100 คน แสดงให้บริการลูกค้าได้ในอัตราเฉลี่ย ชม. ละ  $100/20 = 5$  คน เป็นต้น
2. เวลาในการให้บริการ (**Service Time**) คือ เวลาที่ใช้ในการบริการลูกค้าแต่ละราย เช่น จากการเก็บข้อมูลการให้บริการลูกค้า 500 ราย ใช้เวลารวม 750 นาที ดังนั้นเฉลี่ยลูกค้าแต่ละรายใช้เวลา  $750/500 = 1.5$  นาที เป็นต้น

## ประเภทที่ 1 คือ อัตราการให้บริการแบบคงที่

- อัตราการให้บริการแบบคงที่ คือ การให้บริการลูกค้าได้จำนวนเท่า ๆ กันในแต่ละช่วงเวลา
- ตัวอย่างเช่น วันละ 100 คน ชั่วโมงละ 15 เครื่อง หรือใช้เวลาในการปิดฝาขวดน้ำอัดลมแต่ละขวดใช้เวลา 1 วินาทีเท่ากัน
- ส่วนใหญ่จะเป็นการบริการของระบบอัตโนมัติต่าง ๆ หรือบริการที่มีลักษณะบริการเหมือนกัน ๆ กัน

ประเภทที่ 1 คือ

อัตราการให้บริการแบบคงที่

แทนสูตรด้วย

$$\mu \text{ (หน่วยเป็นคนต่อหน่วยเวลา)} = \text{จำนวนคน/หน่วยเวลา}$$

โดยที่ หน่วยที่ใช้คำนวณต้องเป็นคนต่อหน่วยเวลา เช่น  
คนต่อนาที หรือ คนต่อชั่วโมง

## ประเภทที่ 2 คือ อัตราการให้บริการแบบสุ่ม

- อัตราการให้บริการแบบสุ่ม คือ การให้บริการที่ลูกค้าแต่ละรายไม่เหมือนกันจึงใช้เวลาในการให้บริการไม่เท่ากัน มากน้อยตามความต้องการของลูกค้า
- ตัวอย่างเช่น ลูกค้าที่ใช้บริการฝากถอนเงินในธนาคาร การพบแพทย์ อุ้งซ่อมรถยนต์ การให้บริการโทรศัพท์ การให้บริการการเติมน้ำมัน การซ่อมเครื่องจักร การบริการตัดผม การคิดเงินของแคชเชียร์ในห้างสรรพสินค้า เป็นต้น
- ระบบแถวคอยส่วนใหญ่จะมีการให้บริการแบบสุ่ม ดังนั้นในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยจึงใช้ค่าเฉลี่ยของการให้บริการ หรือ  $\mu$

## ประเภทที่ 2-1 คือ

**อัตราการให้บริการแบบสุ่มแบบไม่สมบูรณ์** เป็นระยะเวลาคาดหวังลูกค้า ในตัวแบบนี้ สามารถคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่จะใช้เวลาในการบริการมากกว่าเวลา  $T$  หน่วยเวลา จากสูตร

$$P(\text{Service Time} > X) = e^{-\mu T} \quad \text{โดยที่ } X \geq 0$$

โดยที่  $\mu$  = อัตราการให้บริการ

$T$  = ระยะเวลาที่พิจารณา

$X$  = เวลาที่ลูกค้าคาดหวังหรือรอได้ โดยที่  $X = T$

$e$  = ค่าคงที่เอ็กซ์โปเนนเชียล = 2.7183

## ประเภทที่ 2-2 คือ

**อัตราการให้บริการแบบสุ่มแบบสมบูรณ์** ภายในระยะเวลาคาดหวังลูกค้า ในตัวแบบนี้ สามารถคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่จะใช้เวลาในการบริการมากกว่าเวลา  $T$  หน่วยเวลา จากสูตร

$$P(\text{Service Time} < X) = 1 - P(\text{Service Time} > X) = 1 - e^{-\mu T} \quad \text{โดยที่ } X \geq 0$$

โดยที่  $\mu$  = อัตราการให้บริการ

$T$  = ระยะเวลาที่พิจารณา

$X$  = เวลาที่ลูกค้าคาดหวังหรือรอได้ โดยที่  $X = T$

$e$  = ค่าคงที่เอ็กซ์โปเนนเชียล = 2.7183

# ตัวอย่าง การใช้ปั๊มของตัด

กำหนดให้

$$P_n(t) = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^{N-n}}{(N-n)!}, n = 1, 2, 3, \dots N$$

โดยที่  $\mu$  = อัตราการให้บริการ  $t$  = เวลาที่กำหนด

$N$  = จำนวนประชากรทั้งหมด  $n$  = จำนวนประชากรที่สนใจ



# ตัวอย่าง

ร้านขายหนังสือผ่านทางเว็บไซต์ให้บริการขายหนังสือตลอด 24 ชั่วโมง มีหนังสือขายดี **Top Ten Programmer** ณ เวลาเริ่มต้นนำเข้ามามีหนังสือ 10 เล่ม ทางร้านพบว่าช่วงระยะเวลาว่างเวลาที่ร้านขายหนังสือได้แต่ละเล่มมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 3 ชั่วโมง จงหา

- ก. จำนวนหนังสือที่ขายได้ใน 1 วัน
- ข. โอกาสที่จะเหลือหนังสือ 6 เล่มใน 1 วัน หลังจากเริ่มขาย
- ค. โอกาสที่จะยังมีหนังสือเหลือ 10 เล่มในเวลา 6 ชม

## วิธีทำ

$$P_n(t) = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^{N-n}}{(N-n)!}, n = 1, 2, 3, \dots N$$

จาก จำนวนหนังสือที่ขายได้ใน 1 วัน =  $24/3 = 8$  เล่ม ดังนั้น  $\mu = 8$  เล่มต่อวัน

โอกาสที่จะเหลือหนังสือ 6 เล่ม ใน 1 วัน หาได้จาก

$$P_6(1) = \frac{(e^{-8} * 8^4)}{4!} = 0.0573$$

และเนื่องจาก  $\mu = 1/3$  เล่ม ต่อ 1 ชั่วโมง ดังนั้นโอกาสที่จะมีหนังสือเหลือ 10 เล่ม ในเวลา 6 ชั่วโมง เท่ากับ

$$P_{10}(6) = \frac{(e^{-2} * 2^0)}{0!} = 0.1353$$

$$P_n(t) = \frac{e^{\mu t} (\mu t)^{N-n}}{(N-n)!}, n = 1, 2, 3, \dots N$$

วิเคราะห์

สูตรคำนวณ

อัตราการรับบริการ

# อัตราการรับบริการ

- แบบคงที่ (Constant) ลูกค้าเข้ามารับบริการเป็นจำนวนเท่า ๆ กันในแต่ละช่วงเวลา เช่น วันละ 30 คน ชั่วโมงละ 5 เครื่อง หรือ ลูกค้าแต่ละรายมาห่างกันคนละ 5 นาที เป็นต้น ลักษณะเช่นนี้จะพบในสายการผลิตของโรงงานอุตสาหกรรมที่ใช้ระบบอัตโนมัติ เช่น โรงงานผลิตอาหารกระป๋อง
- แบบสุ่ม (Random) ลูกค้าเข้ามาในลักษณะที่ไม่แน่นอน ไม่สามารถทราบล่วงหน้า และการเข้ามาของลูกค้าแต่ละรายเป็นอิสระต่อกัน เช่น เครื่องจักรของโรงงานเกิดขัดข้อง และต้องใช้บริการฝ่ายช่าง ลูกค้าที่มาเบิกเงินที่เครื่องฝากถอนอัตโนมัติ ลูกค้าที่นำรถยนต์มาเติมน้ำมันที่สถานีบริการน้ำมัน เป็นต้น ซึ่งในบางเวลาอาจมีลูกค้าเข้ามามากมาย บางเวลาอาจมีน้อยราย หรืออาจไม่มีเลยก็ได้

## ประเภทที่ 1 คือ

อัตราการรับบริการแบบคงที่แทนสัญลักษณ์ด้วย

$\lambda$  (หน่วยเป็นคนหรือสิ่งของต่อหน่วยเวลา) = จำนวนคนหรือสิ่งของที่เข้ารับบริการต่อหน่วยเวลา

โดยที่ หน่วยที่ใช้คำนวณต้องเป็นคนต่อหน่วยเวลา เช่น คนต่อนาที หรือ คนต่อชั่วโมง

## ประเภทที่ 2 คือ

### อัตราการรับบริการแบบสุ่ม

ในตัวแบบนี้ สามารถคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่ลูกค้า  $X$  คนจะรอรับบริการ ณ เวลา  $T$  หน่วยเวลา จากสูตร

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!}$$

โดยที่  $X$  = จำนวนลูกค้าที่รอรับบริการในระบบที่เราสนใจ เช่น 1,2,3,4, ... ,  $n$

$T$  = ช่วงระยะเวลาที่สังเกตการณ์

$\lambda$  = อัตราการเข้ารับบริการของลูกค้า

$e$  = ค่าคงที่เอ็กซ์โปเนนเชียล = 2.7183

$n$  = จำนวนลูกค้าในระบบ โดยที่  $X = n$

$n!$  = Factorial  $N$  เช่น  $12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

และ  $0! = 1$  เสมอ

## ตัวอย่าง

ณ ร้านค้าปลีกแห่งหนึ่งพบว่าช่วงเวลาระหว่างการมาซื้อสินค้าของลูกค้า มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 15 นาที จงหา

- ก. จำนวนลูกค้าใน 1 เดือน (30 วัน)
- ข. โอกาสที่จะไม่มีลูกค้าเลยใน 1 ชั่วโมง
- ค. โอกาสที่จะมีลูกค้า 3 คนใน 2 ชั่วโมง

วิธีทำ จาก  $P_n(X) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!}$

ข้อมูลดังกล่าวจะได้ว่า อัตราการมาซื้อสินค้าเท่ากับ  $\lambda = \frac{60}{15} = 4$  คน ต่อชั่วโมง

ก. จำนวนลูกค้าใน 1 เดือน เท่ากับ  $\lambda t = 4 * (24 * 30) = 2880$  คน

ข. โอกาสที่จะไม่มีลูกค้าเลยใน 1 ชั่วโมงเท่ากับ

$$P_0(1) = \frac{e^{-4}(4)^0}{0!} = 0.0183$$

ค. จากอัตราการมาซื้อสินค้าเท่ากับ 4 คน ต่อชั่วโมง หรือเท่ากับ 8 คน ต่อ 2 ชั่วโมง

ดังนั้นโอกาสที่โอกาสที่จะมีลูกค้า 3 คนใน 2 ชั่วโมงเท่ากับ

$$P_3(2) = \frac{e^{-8}(8)^3}{3!} = 0.0286$$



# สูตรวิเคราะห์

## ตัวแบบ

### แถวคอยแต่ละแบบ

## ข้อสมมติฐานของตัวแบบพื้นฐานของระบบแถวคอย

1. จำนวนที่มาใช้บริการและการรอคอยมีจำนวนไม่จำกัด
2. มีช่องการให้บริการเพียงช่องเดียว
3. การกระจายของเวลามาใช้บริการเป็นแบบปัวส์ซอง

## ข้อสมมติฐาน (ต่อ)

4. การกระจายของเวลาให้บริการเป็นแบบเอ็กโพเนนเชียล
5. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบใครมาถึงก่อนได้รับบริการก่อน
6. อัตราการให้บริการ ( $\mu$ ) จะต้องสูงกว่าอัตราการมารับบริการ( $\lambda$ ) หรือ ( $\mu > \lambda$ )

# สัญลักษณ์ที่นำมาใช้ในระบบแถวคอย

$\lambda$  = อัตราการรับบริการ หมายถึง จำนวนลูกค้า โดยเฉลี่ยที่มารับบริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา เช่น จำนวนคน/ช.ม.

$\mu$  = อัตราการให้บริการ หมายถึง จำนวนลูกค้า โดยเฉลี่ยที่ได้รับบริการแล้วเสร็จ ต่อหนึ่งหน่วยเวลา เช่น จำนวนคน/ช.ม.

$Lq$  = จำนวนลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ย

$L$  = จำนวนลูกค้าที่อยู่ในระบบโดยเฉลี่ย

$Wq$  = เวลารอคอยที่อยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ย

$W$  = เวลารอคอยที่อยู่ในระบบโดยเฉลี่ย

# สัญลักษณ์และสูตรที่ใช้ในตัวแทนแถวคอย

$\lambda$ = อัตราการเข้ารับบริการ(คนต่อหน่วยเวลา)

$\mu$ = อัตราการให้บริการ (คนต่อหน่วยเวลา)

$\rho$ = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน

$\frac{1}{u}$  = เวลาโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการบริการลูกค้า 1 คน

$P_0$ = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$L$ = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ

$L_q$ = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบแถวคอย

$W$ = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนเสียไปในการรับบริการในระบบ

$W_q$ =เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนเสียไปในการรับบริการในระบบในการรออยู่ในแถวคอย

$P_n$ = ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า  $n$  คนในระบบ

# แบบจำลองการตัดสินใจ M/D/1

ลักษณะที่สำคัญ

- ประชากรของระบบมีจำนวนไม่จำกัด
- อัตราการมารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง
- เวลาการให้บริการเป็นแบบสม่ำเสมอหรือคงที่
- มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน
- ไม่มีจำกัดความยาวของแถวคอย
- มีหน่วยบริการเพียงหน่วยเดียวและเป็นการบริการชั้นตอนเดียว

โดยที่สมมติฐานการวิเคราะห์ตัวแบบแถวคอยประเภท M/D/1  
คือ  $\lambda < \mu$  เสมอ

## สูตร สำหรับตัวแบบ M/D/1

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$



## ตัวอย่าง การใช้ M/D/1

ผู้จัดการสถานีบริการอัดฉีดรถยนต์ ให้บริการโดยเครื่องอัตโนมัติ ด้วยวิธีให้ลูกค้าหยอดเหรียญเวลาในการให้บริการ คือ **10** นาที ต่อคัน ลูกค้าเข้ามาใช้บริการชั่วโมงละ **4** คัน ในลักษณะการแจกแจงแบบปัวซอง ไม่จำกัดจำนวน และความยาวของแถว

**ผู้จัดการต้องวิเคราะห์ระบบแถวคอย**

## วิธีทำ

อัตราการมารับบริการ ( $\lambda$ ) = 4 คำน/ช.ม.

อัตราการให้บริการ ( $\mu$ ) = 6 คำน/ช.ม.

## 1.จำนวนลูกค้าที่อยู่ในแถวคอย โดยเฉลี่ย ( $L_q$ )

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L_q = \frac{4^2}{2(6)(6 - 4)}$$

จำนวนลูกค้าที่อยู่ในแถวคอย โดยเฉลี่ย คือ **0.66** คัน

## 2. เวลาที่อยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ย ( $W_q$ )

$$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$W_q = \frac{4}{2 * 6 * (6 - 4)} = 0.167$$

$$W_q = 0.67 / 4 = 0.167$$

เวลาที่อยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ยคือ **10.02** นาที

### 3. เวลาที่อยู่ในระบบ (W) แถวคอย โดยเฉลี่ย

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W = 0.167 + \frac{1}{6}$$

เวลาที่อยู่ในระบบแถวคอย โดยเฉลี่ย คือ **19.98** นาที

1.จำนวนลูกค้าที่อยู่ในระบบแถวคอยโดยเฉลี่ย (L)

$$L = \lambda W$$

$$L = 4 * 0.33$$

จำนวนลูกค้าที่อยู่ในระบบแถวคอยโดยเฉลี่ย คือ **1.33** คัน

## 5.ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีลูกค้าอยู่ในระบบบริการ( $P_0$ )

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$p = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

6.ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าอยู่ในระบบ 1 คัน,2 คัน,3 คัน

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$P_1 = \frac{1}{3} * \left( \frac{4}{6} \right)^1 = 0.22$$

$$p = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$



6.ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าอยู่ในระบบ 1 คัน,2 คัน,3 คัน

$$P_2 = \frac{1}{3} * \left(\frac{4}{6}\right)^2 = 0.15$$

$$P_3 = \frac{1}{3} * \left(\frac{4}{6}\right)^3 = 0.10$$

7.ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าอยู่ในระบบ  
บริการมากกว่า 3 คน

$$P_n > 3 = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3$$

$$P_n > 3 = 1 - 0.33 - 0.22 - 0.15 - 0.10$$

ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าอยู่ในระบบมากกว่า 3 คนคือ 0.20

# แบบจำลองการตัดสินใจ M/M/1

ลักษณะที่สำคัญ

- ประชากรของระบบมีจำนวนไม่จำกัด
- อัตราการมารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง
- เวลาการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล
- มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน
- ไม่มีจำกัดความยาวของแถวคอย
- มีหน่วยบริการเพียงหน่วยเดียวและเป็นการบริการขั้นตอนเดียว

โดยที่สมมติฐานการวิเคราะห์ตัวแบบแถวคอยประเภท M/M/1  
คือ  $\lambda < \mu$  เสมอ

## สูตร สำหรับตัวแบบ M/M/1

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$w = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

# ตัวอย่าง M/M/1

ร้านถ่ายภาพเอกสารแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายภาพเอกสาร 1 เครื่อง ให้บริการลูกค้าตามลำดับ ก่อนหลัง ลูกค้าที่เข้ามาใช้บริการถ่ายภาพเอกสารจะเข้ารับบริการโดยสุ่มได้เท่ากับ 2 คนต่อนาที ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบปัวส์ซอง ทั้งพนักงานประจำเครื่องถ่ายภาพเอกสารสามารถให้บริการได้เฉลี่ย 4 คนต่อนาที จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยในการให้บริการของร้านถ่ายภาพเอกสารนี้

$\lambda = 2$  คนต่อนาที

$\mu = 4$  คนต่อนาที

$$L = \frac{2}{4-2} = 1 \quad \text{คน}$$

$$L_q = \frac{2^2}{4(4-2)} = \frac{4}{8} = 0.50 \quad \text{คน}$$

$$w = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2} = 0.50 \quad \text{นาที}$$

$$w_q = \frac{2}{4(4-2)} = \frac{2}{8} = 0.25 \quad \text{นาที}$$

$$p = \frac{2}{4} = 0.50$$

$$P_0 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = 0.50$$

$$P_n = 0.50 \left( \frac{2}{4} \right)^2 = \frac{2}{16} = 0.125$$

$$\therefore n = 2$$

# สรุปผล

- ระบบแถวคอยของร้านถ่ายเอกสารร้านนี้เฉลี่ยแล้วจะมีลูกค้า **1** คนอยู่ในระบบแถวคอย
- โดยที่ 0.50 คนจะรอรับบริการอยู่ในแถวคอยในขณะที่ 0.50 คนกำลังรับบริการอยู่
- ลูกค้าแต่ละคนที่มารับบริการถ่ายเอกสารโดยเฉลี่ยจะใช้เวลาคนละ 30 วินาที
- ใช้เวลารออยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ยคนละ 15 วินาที
- ความน่าจะเป็นที่เครื่องถ่ายเอกสารจะทำงานเท่ากับร้อยละ 50
- ความน่าจะเป็นที่เครื่องถ่ายเอกสารจะว่างเท่ากับร้อยละ 50



# แบบจำลองการตัดสินใจ M/M/s

## ลักษณะที่สำคัญ

- ประชากรของระบบมีจำนวนไม่จำกัด
- อัตราการมารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง
- เวลาการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล
- มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน
- ไม่มีจำกัดความยาวของแถวคอย
- มีหน่วยบริการมากกว่า 1 หน่วยบริการและเป็นการบริการชั้นตอนเดียว
- โดยที่สมมติฐานการวิเคราะห์ตัวแบบแถวคอยประเภท M/M/s คือ  $\lambda < s * \mu$  เสมอ

## สูตร สำหรับตัวแบบ M/M/S

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{u}\right)^s * P}{s!(1-p)^2}$$

$$w = w_q + \frac{1}{\mu}$$

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$p = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{u}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{u}\right)^s}{s!} * \frac{su}{su - \lambda}}$$

$$P_n = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!s^{n-s}} \quad \text{if } n \geq s$$

$$P_n = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \quad \text{if } n \leq s$$

# ตัวอย่าง

ธนาคารแห่งหนึ่งมีพนักงานรับจ่ายเงิน 5 คน ลูกค้าเข้ามาใช้บริการ มีการแจกแจงแบบปัวส์ซองในอัตราเฉลี่ย 24 คนต่อชม. ถ้าพนักงานแต่ละคนให้บริการลูกค้าได้ในอัตราเฉลี่ย 6 คนต่อชม. โดยมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง ในปัจจุบันธนาคารจัดระบบแถวคอยดังภาพ ให้วิเคราะห์ระบบบริการของพนักงานรับจ่ายเงิน

ช่องบริการ 1

ช่องบริการ 2

ช่องบริการ 3

ช่องบริการ 4

ช่องบริการ 5

คน 1

คน 2

อัตราการมารับบริการ  $\lambda = 24$

อัตราการให้บริการ  $\mu = 6$

จำนวนหน่วยให้บริการ  $s = 5$

$$\rho = \frac{24}{5 * 6} = 0.80$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\left(\frac{24}{6}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{24}{6}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{24}{6}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{24}{6}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{24}{6}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{24}{6}\right)^5}{5!} * \frac{30}{30 - 24}} = 0.013$$

$$L_q = 0.013 \frac{\left(\frac{24}{6}\right)^5 (0.8)}{5!(1 - 0.8)^2} = 2.218$$

$$L = 2.218 + \frac{24}{6} = 6.218$$

$$W_q = \frac{2.218}{24} = 0.0924 \cong 5.50$$

$$W = 0.0924 + \frac{1}{6} = 0.2591 \cong 15.5$$

จากผลการคำนวณแสดงว่าการให้บริการของพนักงานรับจ่ายเงินของธนาคารแห่งนี้

- จะมีลูกค้าอยู่ในระบบโดยเฉลี่ยประมาณ 6 คน (6.218 คน)
- ทั้งนี้จะมีลูกค้า 2 คนรออยู่ในแถวคอย
- ลูกค้าแต่ละคนที่เข้ารับบริการที่พนักงานรับจ่ายเงินจะใช้เวลาทั้งสิ้นค่า 15.50 นาที
- โดยเสียเวลารออยู่ในแถวคอยเฉลี่ยคนละ 5.50 นาที

# ต้นทุนของระบบแถวคอย

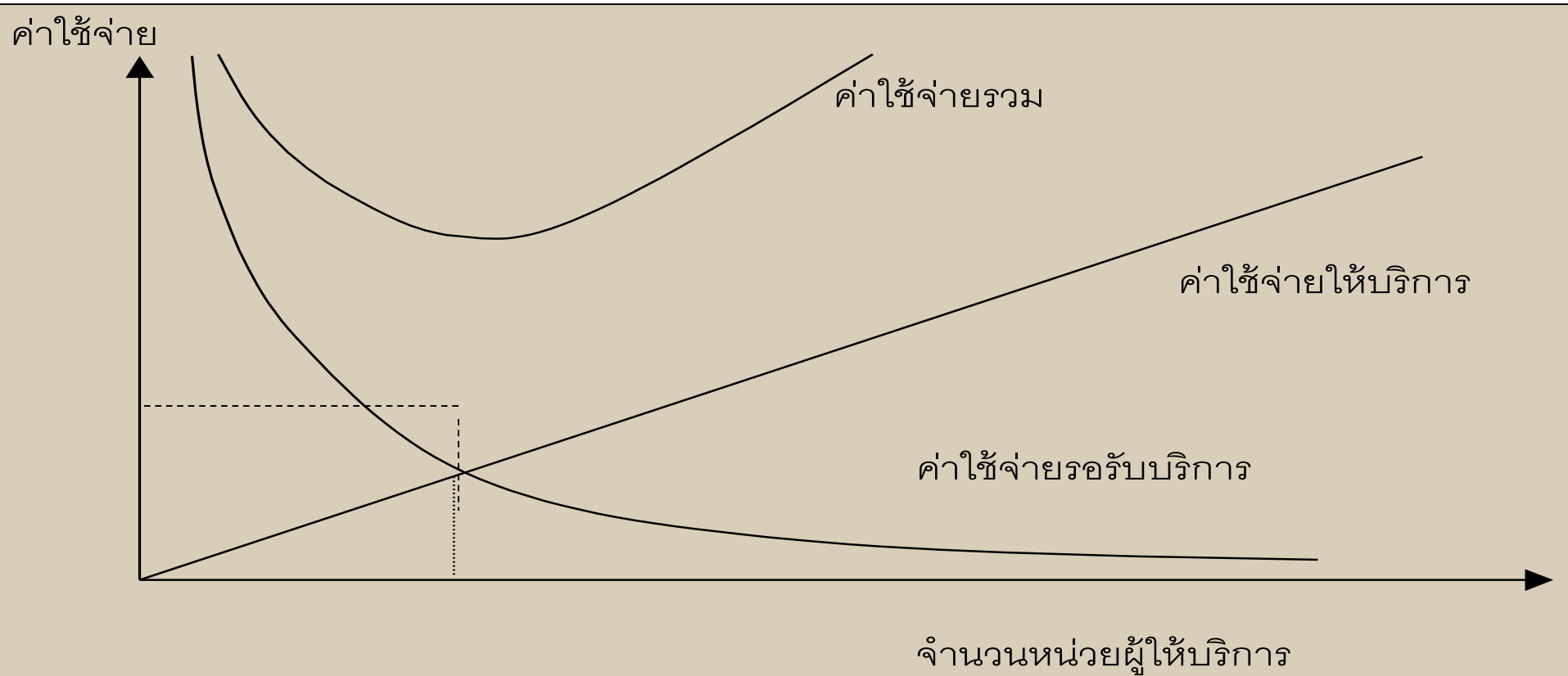
$$\text{ค่าใช้จ่ายรวมโดยเฉลี่ย} = \text{ค่าใช้จ่ายเฉลี่ยในการคอย} + \text{ค่าใช้จ่ายเฉลี่ยในการให้บริการ}$$

สูตรวิเคราะห์

ค่าใช้จ่ายโดยรวม

ตัวแบบแถวคอยแต่ละแบบ

## วิเคราะห์ค่าใช้จ่ายโดยรวมเฉลี่ย



สูตร ค่าใช้จ่ายโดยรวมเฉลี่ย = ค่าใช้จ่ายรวมให้บริการ + ค่าใช้จ่ายรวมลูกค้ารองรับบริการ



# วิเคราะห์ค่าใช้จ่ายโดยรวมเฉลี่ย

$$TC = (S \times C_s) + (L \times C_w) \quad \text{โดยที่}$$

$S$  = จำนวนหน่วยผู้ให้บริการ

$L$  = จำนวนคนโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบบริการ

มีหน่วยเป็น คนต่อนาที หรือ คนต่อชั่วโมง

$C_s$  = ค่าใช้จ่ายการให้บริการต่อหน่วยเวลาต่อหน่วยผู้ให้บริการ

มีหน่วยเป็น บาทต่อนาทีต่อจุดให้บริการ หรือ บาทต่อชั่วโมงต่อจุดให้บริการ

$C_w$  = ค่าใช้จ่ายรอรับบริการต่อหน่วยเวลาต่อลูกค้า

มีหน่วยเป็น บาทต่อนาทีต่อคน หรือ บาทต่อชั่วโมงต่อคน

## เปรียบเทียบทางเลือก

### ตัวแบบแถวคอย M/M/1

$S = 1$  ,  $C_s = 150$  บาทต่อชั่วโมง ,  $C_w = 100$  บาทต่อชั่วโมง ,  $L = 1.0$  คนต่อชั่วโมง

พิจารณาสูตร

$$\begin{aligned} TC &= (S \times C_s) + (L \times C_w) \\ &= (1 \times 150) + (1 \times 100) \\ &= 150 + 100 = 250 \text{ บาทต่อชั่วโมง} \end{aligned}$$

### ตัวแบบแถวคอย M/M/s

$S = 2$  ,  $C_s = 150$  บาทต่อชั่วโมง ,  $C_w = 100$  บาทต่อชั่วโมง ,  $L = 0.513$  คนต่อชั่วโมง

พิจารณาสูตร

$$\begin{aligned} TC &= (S \times C_s) + (L \times C_w) \\ &= (2 \times 150) + (0.513 \times 100) \\ &= 300 + 51.3 = 351.3 \text{ บาทต่อชั่วโมง} \end{aligned}$$

## สรุปเปรียบเทียบทางเลือก (ต่อ)

- ตัวแบบแถวคอย M/M/1 หรือ จ้างพนักงาน 1 คน เป็นผู้ให้บริการมีค่าใช้จ่ายโดยรวมเฉลี่ยเท่ากับ 250 บาทต่อชั่วโมง และ
- ตัวแบบแถวคอย M/M/2 หรือ จ้างพนักงาน 2 คน เป็นผู้ให้บริการมีค่าใช้จ่ายโดยรวมเฉลี่ยเท่ากับ 351 บาทต่อชั่วโมง
- เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบทางเลือกระหว่างการจ้างพนักงาน 1 คน กับ พนักงาน 2 คนแล้ว พบว่า การจ้างพนักงาน 1 คน หรือ การใช้งานตัวแบบแถวคอย M/M/1 มีค่าใช้จ่ายโดยรวมเฉลี่ยต่ำที่สุด จึงเป็นทางเลือกที่ดีที่สุดนั่นเอง