Конспекты по матанализу

Владимир Милосердов, Владимир Шабанов

2 октября 2015 г.

Оглавление

Глава 1

Введение в пределы

1.1 Предел последовательности

1.1.1 Определение

Пусть имеется последовательность a_n. Тогда если начиная с некоторго элемента под индексом N каждый следующий элемент a_n, где $n > N$ будет входить в ε-окрестность некоторой точки A, то говорят, что последовательность имеет предел и он равен A.
$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N : a_n \in \mathring{U}_\varepsilon(A)$

Определение *Последовательность – **сходящееся**, если она имеет предел.*

Определение *Последовательность – **расходящееся**, если у нее нет предела*

1.2 Предел функции

1.2.1 Определение по Гейне

Пределом функции $f(x)$ в точке a называется точка A, если для любой сходящейся в точке a последовательности x_n множество соответсвующих значений $y_n = f(x_n), n \neq 0$ стремится к A.

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n \to x_0} x_n = a$
$\lim\limits_{n \to a} f(x_n) = A$

1.2.2 Определение по Коши

Пределом функции $f(x)$ в точке a называется точка A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого аргуманта x такого, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

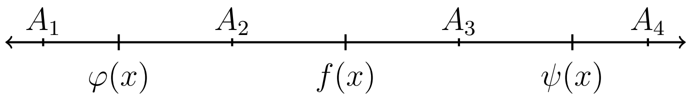
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 : \; \exists \delta > 0 : \; \forall x : \; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon$

1.2.3 Теорема о двух миллиционерах

Функция, "зажатая" между двумя функциями, имеющими одиннаковый предел имеет такой же предел.

$$\begin{cases} \varphi(x) \le f(x) \le \psi(x), \forall x \\ \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A \end{cases} \implies \lim_{x\to a} f(x) = A$$

Доказательство:
Прибавим к каждой части неравенства $\varphi(x) \le f(x) \le \psi$ по $-A$:
$\varphi(x) - A \le f(x) - A \le \psi(x) - A$. Из предыдущего неравенства и рисунка



очевидно, что для любых допустимых взаимных расположений точек $A,\ \varphi(x),\ \psi(x),\ f(x)$ верно следующее неравенство:
(1) $\quad |f(x) - A| \le \max(|\varphi(x) - A|,\ |\psi(x) - a|)$
Т.к. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует ε-окрестность U_a и
$\varphi(x) \in U_\varepsilon(a)$ и $\psi(x) \in U_\varepsilon(a)$. Т.е. $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ и $|\psi(x) - A| < \varepsilon$.
Тогда из (1) следует: $|f(x) - A| < \varepsilon$ из чего согласно определению предела по Коши следует, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, что и требовалось доказать.

1.2.4 Доказательство эквивалентности определений по Коши и по Гейне

От Гейне к Коши

Докажем от противного. Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (по Гейне) и он не равен пределу по Коши.
Т.е. (из определения по Коши):
$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0 :\ \exists x_\delta :\ 0 < |x_\delta - a| < \delta$ и $|f(x_\delta) - A| \ge \varepsilon$
Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, обозначим последовательность значений в точке δ через x_n.
Тогда имеем:
$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, где $0 \to 0$ и $\frac{1}{n} \to 0$. Из строгости неравенства следует $x_n \ne a$, а по теореме о трёх миллиционерах имеем:
$|x_n - a| \to 0 \Rightarrow x_n \to a$, поэтому из определения по Гейне $f(x_n) \to A$, но по построению (т.к. $|f(x_\delta) - A| \ge \varepsilon$) $f(x_n) \not\to A$

Получили противоречие, значит если функция имеет предел по Гейне, то его можно определить и по Коши.

От Коши к Гейне

Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Коши. Т.е.
$\forall \varepsilon > 0 :\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$

Выберем произвольную последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Т.к. x_n стремится к a, то для любого $\delta > 0$ найдется такой номер (обозначим его n_δ), начиная с которго $\forall n > n_\delta$ будет выполнятся неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, что по Коши равносильно $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$