# Конспекты по матанализу

Владимир Милосердов, Владимир Шабанов

3 октября 2015 г.

# Оглавление

# Глава 1

# Предел последовательности

## 1.1 Определение

Пусть имеется последовательность $a_n$. Тогда если начиная с некоторго элемента под индексом $N$ каждый следующий элемент $a_n$, где $n > N$ будет входить в $\varepsilon$-окрестность некоторой точки $A$, то говорят, что последовательность имеет предел и он равен $A$.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (n \in \mathbb{N}),\ a_n \in \mathring{U}_\varepsilon(A)$

**Пример** *Возьмём* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$
*Тут* $A = 0$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
*Подставим значения в определение:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (n \in \mathbb{N}),\ \frac{(-1)^n}{n} \in \mathring{U}_\varepsilon(0)$$

$\frac{(-1)^n}{n} \in \mathring{U}_\varepsilon(0) \equiv |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon$, *т.к. последовательность* $a_n$, *принадлежащая* $\varepsilon$*-окрестности в точке* $A = 0$ *тоже самое, что расстояние между рассматриваемыми членами* $a_n$ *и* $A = 0$ *меньше* $\varepsilon$.
*Упростим:* $|\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n}| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.
*1)Возьмём* $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow n > 2$. *Подставим в формулу наименьшее удовлетворяющее условию* $n > 2$ *число:* $|\frac{-1^3}{3} - 0| = \frac{1}{3}$. *Получается, что* $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ *и* $\forall n > 2 : |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow$ *все условия из определения соблюдены.*

**Определение** *Последовательность – **сходящееся**, если она имеет предел.*

**Определение** *Последовательность – **расходящееся**, если у нее нет предела*

**Определение** *Последовательность называется **ограниченной**, если все её члены по модулю не превосходят некоторого числа.*

## 1.2 Теорема о подпоследовательности сходящей последовательности

**Теорема** *Если последовательность стремится к* $A$, *то любая её подпоследовательность тоже стремится к* $A$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = A \Rightarrow \forall a_{n_k} \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$

По определению предела найдётся такой номер, что все члены с бóльшими номерами принадлежат $\varepsilon$-окрестности. $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon$
Тогда $\forall k > N : \ \forall n_k > N, \ |a_{n_k} - A| < \varepsilon$.
Значит $a_{n_k}$ стремится к $A$ по определению предела для последовательности, что и требовалось доказать.

## 1.3 Теорема Коши-Кантора о вложенных отрезках

**Теорема** *Для всякой системы бесконечного числа вложенных отрезков существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам системы.*
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = c$
*Если длины отрезков стремятся к нулю, то такая точка* ***единственна***.

Обозначим за $\{a_n\}$ множество левых концов отрезков, а за $\{b_m\}$ – множество правых концов. Заметим, что $\forall n, m : \ \ a_n \leq b_m$. Из *аксиомы непрерывности* заключаем существование точки $c$, лежащей между любыми двумя левым и правым концами:
$\forall n, m \ \exists \ c : \quad a_n \leq c \leq b_m$
В частности (когда $n = m$): $a_n \leq c \leq b_n$
Последнее выражение означает существование точки между концами самого маленького отрезка. Эта точка – объединение всей системы, что и требовалось доказать.

Докажем единственность этой точки при стремлении длин отрезков к нулю.
Пусть это не так и существуют точки $c_0, \ c_1, \ c_0 \neq c_1$. Тогда из рассуждений предыдущего доказательства следует:
(1) $\forall n : \ \ c_0, \ c_1 \in [a_n, b_n]$ и $|c_1 - c_0| \leq b_n - a_n$. Т.к. длины отрезков стремятся к нулю:
(2) $\forall \varepsilon > 0 : \ \exists N : \ \forall n > N : \ \ b_n - a_n < \varepsilon$ (по определению предела).
Но если взять $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_0|$, то из (1) и (2) получим противоречие: $|c_1 - c_0| < \frac{1}{2}|c_1 - c_0|$.
Таким образом точка $c$ единственна в случае стремления длин отрезков к нулю, что и требовалось доказать.

## 1.4 Теорема Больцано — Вейерштрасса

**Теорема** *На любой ограниченной последовательности* $x_n, n \in \mathbb{N}$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность* $x_{n_k}, k \in \mathbb{N}$

Если последовательность $x_n$ ограниченна, то всё её бесконечное множество членов принадлежит некоторому промежутку, обозначим его – $[a_0, b_0]$. Разделим этот промежуток на два равных отрезка, тогда хотя бы один из них будет содержать бесконечное число членов последовательности $x_n$, обозначим этот отрезок, как $[a_1, b_1]$. Продолжая процесс получим последовательность вложенных отрезков.

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

В которой каждый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ является половиной отрезка $[a_k, b_k]$ и содержит бесконечное число членов последовательности $x_n$. Т.к. размер отрезка под номером $k$

равен $S_k = \frac{|b_0 - a_0|}{2^k}$, то при $k \to +\infty$, $S_k \to 0$. А по лемме о вложенных отрезках, существует единственная точка $\nu$, принадлежащая всем отрезкам. Тогда выберем подпоследовательность $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Новая последовательность $x_{n_k}$ будет сходится к точке $\nu$ потому, что и $\nu$, и $x_{n_k}$ принадлежат отрезку $[a_k, b_k]$, размеры которого стремятся к 0 при $k \to +\infty$. Т.е. $|x_{n_k} - \nu| \leq |b_k - a_k| \to 0$. Таким образом, в ограниченной последовательности $x_n$ мы выделили сходящююся подпоследовательность $x_{n_k}$.

# Глава 2

# Предел функции

## 2.1 Определение по Гейне

Пределом функции $f(x)$ в точке $a$ называется точка $A$, если для любой сходящейся в точке $a$ последовательности $x_n$ множество соответсвующих значений $y_n = f(x_n)$, при$n \neq 0$ стремится к $A$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n \to x_0} x_n = a$
$\lim\limits_{n \to a} f(x_n) = A$

## 2.2 Определение по Коши

Пределом функции $f(x)$ в точке $a$ называется точка $A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого аргуманта $x$ такого, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

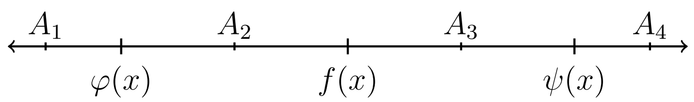
$$\lim_{x \to a} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

## 2.3 Теорема о двух миллиционерах

Функция, "зажатая" между двумя функциями, имеющими одиннаковый предел имеет такой же предел.

$$\begin{cases} \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \forall x \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A \\ \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A$$

Доказательство:
Прибавим к каждой части неравенства $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi$ по $-A$:
$\varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq \psi(x) - A$. Из предыдущего неравенства и рисунка




очевидно, что для любых допустимых взаимных расположений точек $A$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ верно следующее неравенство:
(1) $|f(x) - A| \leq \max(|\varphi(x) - A|,\ |\psi(x) - a|)$
Т.к. $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует $\varepsilon$-окрестность $U_a$ и
$\varphi(x) \in U_\varepsilon(a)$ и $\psi(x) \in U_\varepsilon(a)$. Т.е. $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ и $|\psi(x) - A| < \varepsilon$.
Тогда из (1) следует: $|f(x) - A| < \varepsilon$ из чего согласно определению предела по Коши следует, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, что и требовалось доказать.

## 2.4 Доказательство эквивалентности определений по Коши и по Гейне

### 2.4.1 От Гейне к Коши

Докажем от противного. Пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (по Гейне) и он не равен пределу по Коши.
Т.е. (из определения по Коши):
$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0 :\ \exists x_\delta :\ 0 < |x_\delta - a| < \delta$ и $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$
Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, обозначим последовательность значений в точке $\delta$ через $x_n$. Тогда имеем:
$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, где $0 \to 0$ и $\frac{1}{n} \to 0$. Из строгости неравенства следует $x_n \neq a$, а по теореме о трёх миллиционерах имеем:
$|x_n - a| \to 0 \Rightarrow x_n \to a$, поэтому из определения по Гейне $f(x_n) \to A$, но по построению (т.к. $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$) $f(x_n) \not\to A$

Получили противоречие, значит если функция имеет предел по Гейне, то его можно определить и по Коши.

### 2.4.2 От Коши к Гейне

Пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши. Т.е.
$\forall \varepsilon > 0 :\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$
Выберем произвольную последовательность $x_n$ такую, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Т.к. $x_n$ стремится к $a$, то для любого $\delta > 0$ найдется такой номер (обозначим его $n_\delta$), начиная с которго $\forall n > n_\delta$ будет выполнятся неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, что по Коши равносильно $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$