Конспекты по матанализу

Владимир Милосердов, Владимир Шабанов

1 октября 2015 г.

Оглавление

Глава 1

Введение в пределы

1.1 Предел последовательности

1.1.1 Определение по Гейне

Пусть имеется последовательность a_n. Тогда если начиная с некоторго элемента под индексом N каждый следующий элемент a_n, где $n > N$ будет входить в ε-окрестность некоторой точки A, то говорят, что последовательность имеет предел и он равен A.

$\forall\varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N : a_n \in \mathring{U}_\varepsilon(A)$
Примеры:
1. Пусть $a_n := n^2$, тогда
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

1.2 Предел функции

1.2.1 Определение по Гейне

Пределом функции $f(x)$ в точке a называется точка A, если для любой сходящейся в точке a последовательности x_n множество соответсвующих значений $y_n = f(x_n), n \neq 0$ стремится к A.

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to x_0} x_n = a$
$\lim\limits_{n\to a} f(x_n) = A$

1.2.2 Определение по Коши

Пределом функции $f(x)$ в точке a называется точка A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого аргуманта x такого, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 :\; \exists\delta > 0 :\; \forall x :\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon$

1.2.3 Доказательство эквивалентности определений по Коши и по Гейне

Доказем от противного. Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (по Гейне) и он не равен пределу по Коши.
Т.е. (из определения по Коши):
$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 : \ \exists x_\delta \in X \ |x_\delta - x_0| < \delta, \ |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$