Конспекты по матанализу

Владимир Милосердов, Владимир Шабанов, Шумилов Пётр

4 октября 2015 г.

Оглавление

1 Предел последовательности **5**
1.1 Определение . . . 5
1.2 Теорема об единственности предела . . . 5
1.3 Т. об огр. сход. посл. . . . 6
1.4 Т. о пред. перех. в нерав. . . . 6
1.5 Т. о п/посл. сход. послед. . . . 7
1.6 Т. о влож. отрезках . . . 7
1.7 Т. Больцано . . . 7
1.8 Критерий Коши . . . 8
1.8.1 Фундаментальная последовательность . . . 8

2 Предел функции **11**
2.1 Определение по Гейне . . . 11
2.2 Определение по Коши . . . 11
2.3 Теорема о двух миллиционерах . . . 11
2.4 Док-во равенства определений . . . 12
2.4.1 От Гейне к Коши . . . 12
2.4.2 От Коши к Гейне . . . 12
2.5 Т. об един. предела функции . . . 12

Глава 1

Предел последовательности

1.1 Определение

Пусть имеется последовательность a_n. Тогда если начиная с некоторго элемента под индексом N каждый следующий элемент a_n, где $n > N$ будет входить в ε-окрестность некоторой точки A, то говорят, что последовательность имеет предел и он равен A.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (n \in \mathbb{N}), \ a_n \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(A)$

Пример *Возьмём* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$
Тут $A = 0$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
Подставим значения в определение:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (n \in \mathbb{N}), \ \tfrac{(-1)^n}{n} \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(0)$$

$\frac{(-1)^n}{n} \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(0) \equiv |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon$, *т.к. последовательность* a_n, *принадлежащая* ε*-окрестности в точке* $A = 0$ *тоже самое, когда расстояние между рассматриваемыми членами* a_n *и* $A = 0$ *меньше* ε.
Упростим: $|\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{(-1)^n}{n}| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.
1)Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow n > 2$. *Подставим в формулу наименьшее удовлетворяющее условию* $n > 2$ *число:* $|\frac{-1^3}{3} - 0| = \frac{1}{3}$. *Получается, что* $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ *и* $\forall n > 2 : |\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow$ *все условия из определения соблюдены.*

Определение *Последовательность –* ***сходящеяся****, если она имеет предел.*

Определение *Последовательность –* ***расходящеяся****, если у нее нет предела*

Определение *Последовательность называется* ***ограниченной****, если все её члены по модулю не превосходят некоторого числа.*

1.2 Теорема об единственности предела

Теорема *Если последовательность имеет предел, то он единственный.*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A_1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A_2 \end{cases} \implies \qquad A_1 = A_2$$

Пойдём от противного. Возьмем какие-либо непересекающиеся окрестности $U_\varepsilon(A_1)$ и $V_\varepsilon(A_2)$ точек A_1 и A_2 соответственно, $U_\varepsilon \cap V_\varepsilon = \varnothing$.
Согласно определению предела вне окрестности $U_\varepsilon(A_1)$, в частности в окрестности $V_\varepsilon(A_2)$, содержится лишь **конечное** число членов $\{x_n\}$. Однако точка A_2 также является ее пределом, и потому в ее окрестности $V_\varepsilon(A_2)$ должны находиться все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, а следовательно, **бесконечно** много ее членов. Получилось противоречие, значит $A_1 = A_2$, что и требовалось доказать.

1.3 Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема *Если последовательность сходится, то она является ограниченной.*

Пусть есть сходящаяся последовательность $a_n \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.
Возьмём $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N, |a_n - a| < 1$
Избавимся от модуля:

$$-1 < a_n - a < 1$$

$$a - 1 < a_n < a + 1$$

Исходя из верхнего неравентсва, если взять max из $|a_n|, |a-1|$ и $|a+1|$, причём $n \leq N$

$$A = max(|a_n|, n \leq N; |a-1|; |a+1|$$

то получится, что $|a_n| \leq A,\ \forall n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

1.4 Теорема о предельном переходе в неравенстве

Теорема *Пусть заданы две последовательности a_nи b_n. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, и начиная с некоторого номера $a_n \leq b_n$, то выполняется неравенство $a \leq b$.*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \\ \forall n > N, a_n \leq b_n \end{cases} \implies \qquad a \leq b$$

Докажем от противного. Пусть $a > b$, $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Скажем, что

$$\exists N_a : \forall n > N_a, |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists N_b : \forall n > N_b, |b_n - b| < \varepsilon$$

Возьмём максимальный номер $N = max(N_a, N_b)$ и тогда получится, что $\forall n > N$ верно:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$$

Мы знаем, что $a > b$, тогда из верхних неравенств вытекает, что $b_n < a_n$, а это противоречие, что и требовалось доказать.

1.5 Теорема о подпоследовательности сходящейся последовательности

Теорема *Если последовательность стремится к A, то любая её подпоследовательность тоже стремится к A.*
$\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = A \Rightarrow \forall a_{n_k} \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$

По определению предела найдётся такой номер, что все члены с бóльшими номерами принадлежат ε-окрестности. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon$
Тогда $\forall k > N:\ \forall n_k > N,\ |a_{n_k} - A| < \varepsilon$.
Значит a_{n_k} стремится к A по определению предела для последовательности, что и требовалось доказать.

1.6 Теорема Коши-Кантора о вложенных отрезках

Теорема *Для всякой системы бесконечного числа вложенных отрезков существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам системы.*
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = c$
Если длины отрезков стремятся к нулю, то такая точка ***единственна****.*

Обозначим за $\{a_n\}$ множество левых концов отрезков, а за $\{b_m\}$ – множество правых концов. Заметим, что $\forall n, m:\ \ a_n \le b_m$. Из *аксиомы непрерывности* заключаем существование точки c, лежащей между любыми двумя левым и правым концами:
$\forall n, m\ \exists\ c:\quad a_n \le c \le b_m$
В частности (когда $n = m$): $a_n \le c \le b_n$
Последнее выражение означает существование точки между концами самого маленького отрезка. Эта точка – объединение всей системы, что и требовалось доказать.

Докажем единственность этой точки при стремлении длин отрезков к нулю.
Пусть это не так и существуют точки $c_0,\ c_1,\ c_0 \ne c_1$. Тогда из рассуждений предыдущего доказательства следует:
(1) $\forall n:\ \ c_0,\ c_1 \in [a_n, b_n]$ и $|c_1 - c_0| \le b_n - a_n$. Т.к. длины отрезков стремятся к нулю:
(2) $\forall \varepsilon > 0:\ \exists N:\ \forall n > N:\ b_n - a_n < \varepsilon$ (по определению предела).
Но если взять $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_0|$, то из (1) и (2) получим противоречие: $|c_1 - c_0| < \frac{1}{2}|c_1 - c_0|$.
Таким образом точка c единственна в случае стремления длин отрезков к нулю, что и требовалось доказать.

1.7 Теорема Больцано — Вейерштрасса

Теорема *На любой ограниченной последовательности $x_n, n \in \mathbb{N}$ можно выделить сходящююся подпоследовательность $x_{n_k}, k \in \mathbb{N}$*

Если последовательность x_n ограниченна, то всё её бесконечное множество членов принадлежит некоторому промежутку, обозначим его – $[a_0, b_0]$. Разделим этот промежуток на два равных отрезка, тогда хотя бы один из них будет содержать бесконечное число членов последовательности x_n, обозначим этот отрезок, как $[a_1, b_1]$. Продолжая процесс получим последовательность вложенных отрезков.

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

В которой каждый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ является половиной отрезка $[a_k, b_k]$ и содержит бесконечное число членов последовательности x_n. Т.к. размер отрезка под номером k равен $S_k = \frac{|b_0 - a_0|}{2^k}$, то при $k \to +\infty$, $S_k \to 0$. А по лемме о вложенных отрезках, существует единственная точка ν, принадлежащая всем отрезкам. Тогда выберем подпоследовательность $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Новая последовательность x_{n_k} будет сходится к точке ν потому, что и ν, и x_{n_k} принадлежат отрезку $[a_k, b_k]$, размеры которого стремятся к 0 при $k \to +\infty$. Т.е. $|x_{n_k} - \nu| \leq |b_k - a_k| \to 0$. Таким образом, в ограниченной последовательности x_n мы выделили сходящююся подпоследовательность x_{n_k}.

1.8 Критерий Коши

1.8.1 Фундаментальная последовательность

Определение *Последовательность a_k называется фундаментальной или сходящейся в себе, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, k : |a_k - a_n| < \varepsilon$

Другими словами, если начиная с некоторго номера, расстояние между всеми членами последовательности меньше любого числа из $\mathbb{R}_+$.

Критерий Коши

Определение *Последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Т.е.* $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

Докажем, что если последовательность a_n имеет предел, то она сходится в себе. Пусть $A = lim_{n \to +\infty} a_n$, тогда из определения предела:

$$\forall \varepsilon > 0:\ \exists N:\ \forall n > N:\ |A - a_n| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Определим такое m, что $m > N$, тогда $|A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{cases} |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \implies |A - a_m| + |A - a_n| < \varepsilon$$

Применив неравенство треугольника, для последней части неравенства. Получим:

$$|a_m - a_n| \leq |A - a_m| + |A - a_n| < \varepsilon$$

Или:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

Что равносильно определению сходящейся в себе последовательности.

Докажем, что если последовательность a_n сходится в себе, то она имеет предел. Для этого докажем две Леммы.

Фундаментальна $\Rightarrow$ ограниченна

Если последовательность a_n сходится в себе, то это по определению означает, что:

$$\forall \varepsilon : \exists N_1 : \forall n, m > N_1 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Зафиксируем такой номер m, тогда получается, что в ε окрестности точки a_m лежат все члены последовательности, начиная с номера N_1, ведь для любого $n > N_1$ спроведливо $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Последнее равенство эквивалентно определению ограниченной последовательности, или нет.

Предел ограниченной последовательности, равен пределу подпоследовательности

По теореме Больцано — Вейерштрасса если последовательность a_n ограниченна, то на ней можно выделить сходящююся подпоследовательность a_{n_k}. Обозначим предел последней $A = a_{n_k}$.

Глава 2

Предел функции

2.1 Определение по Гейне

Пределом функции $f(x)$ в точке a называется точка A, если для любой сходящейся в точке a последовательности x_n множество соответсвующих значений $y_n = f(x_n)$, при$n \neq 0$ стремится к A.

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n \to x_0} x_n = a$
$\lim\limits_{n \to a} f(x_n) = A$

2.2 Определение по Коши

Пределом функции $f(x)$ в точке a называется точка A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого аргуманта x такого, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

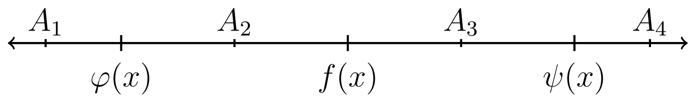
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 :\; \exists \delta > 0 :\; \forall x :\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon$

2.3 Теорема о двух миллиционерах

Функция, "зажатая" между двумя функциями, имеющими одиннаковый предел имеет такой же предел.

$$\begin{cases} \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \forall x \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A \\ \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$$

Доказательство:
Прибавим к каждой части неравенства $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi$ по $-A$:
$\varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq \psi(x) - A$. Из предыдущего неравенства и рисунка



очевидно, что для любых допустимых взаимных расположений точек A, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ верно следующее неравенство:
(1) $|f(x) - A| \leq \max(|\varphi(x) - A|,\ |\psi(x) - a|)$
Т.к. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A$, то $\forall\varepsilon > 0$ существует ε-окрестность U_a и
$\varphi(x) \in U_\varepsilon(a)$ и $\psi(x) \in U_\varepsilon(a)$. Т.е. $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ и $|\psi(x) - A| < \varepsilon$.
Тогда из (1) следует: $|f(x) - A| < \varepsilon$ из чего согласно определению предела по Коши следует, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, что и требовалось доказать.

2.4 Доказательство эквивалентности определений по Коши и по Гейне

2.4.1 От Гейне к Коши

Докажем от противного. Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (по Гейне) и он не равен пределу по Коши. Т.е. (из определения по Коши):
$\exists\varepsilon > 0 :\ \forall\delta > 0 :\ \exists x_\delta :\ 0 < |x_\delta - a| < \delta$ и $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$
Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, обозначим последовательность значений в точке δ через x_n. Тогда имеем:
$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, где $0 \to 0$ и $\frac{1}{n} \to 0$. Из строгости неравенства следует $x_n \neq a$, а по теореме о трёх миллиционерах имеем:
$|x_n - a| \to 0 \Rightarrow x_n \to a$, поэтому из определения по Гейне $f(x_n) \to A$, но по построению (т.к. $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$) $f(x_n) \not\to A$

Получили противоречие, значит если функция имеет предел по Гейне, то его можно определить и по Коши.

2.4.2 От Коши к Гейне

Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Коши. Т.е.
$\forall\varepsilon > 0 :\ \exists\delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$
Выберем произвольную последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Т.к. x_n стремится к a, то для любого $\delta > 0$ найдется такой номер (обозначим его n_δ), начиная с которго $\forall n > n_\delta$ будет выполнятся неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, что по Коши равносильно $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$

2.5 Теорема об единственности предела функции

Теорема $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1 \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2 \end{cases} \implies \quad A_1 = A_2$

Докажем от противного. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_2$
Тогда из определения предела по Коши имеем $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ и $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.
Пусть $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$. Имеем: $|f(x) - A_1| < \frac{\varepsilon_1}{2}$ и $|f(x) - A_2| < \frac{\varepsilon_1}{2}$.
Рассмотрим выражение $|A_2 - A_1|$. Прибавим и отнимем $f(x)$: $|A_2 - f(x) + f(x) - A_1|$.
Из свойств модуля следует: $|A_2 - f(x) + f(x) - A_1| \le |f(x) - A_1| + |f(x) - A_2|$
Получаем: $|A_2 - f(x) + f(x) - A_1| \le |f(x) - A_1| + |f(x) - A_2| < \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2}$, т.е. $|A_2 - A_1| < \varepsilon_1$.
Возьмём $\varepsilon_1 = |A_2 - A_1|$ и получим $|A_2 - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$. Противоречие. Значит предел функции единственный.