

法律声明

□ 本课件包括演示文稿、示例、代码、题库、视频和声音等内容，小象学院和主讲老师拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意及内容，我们保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



EM算法



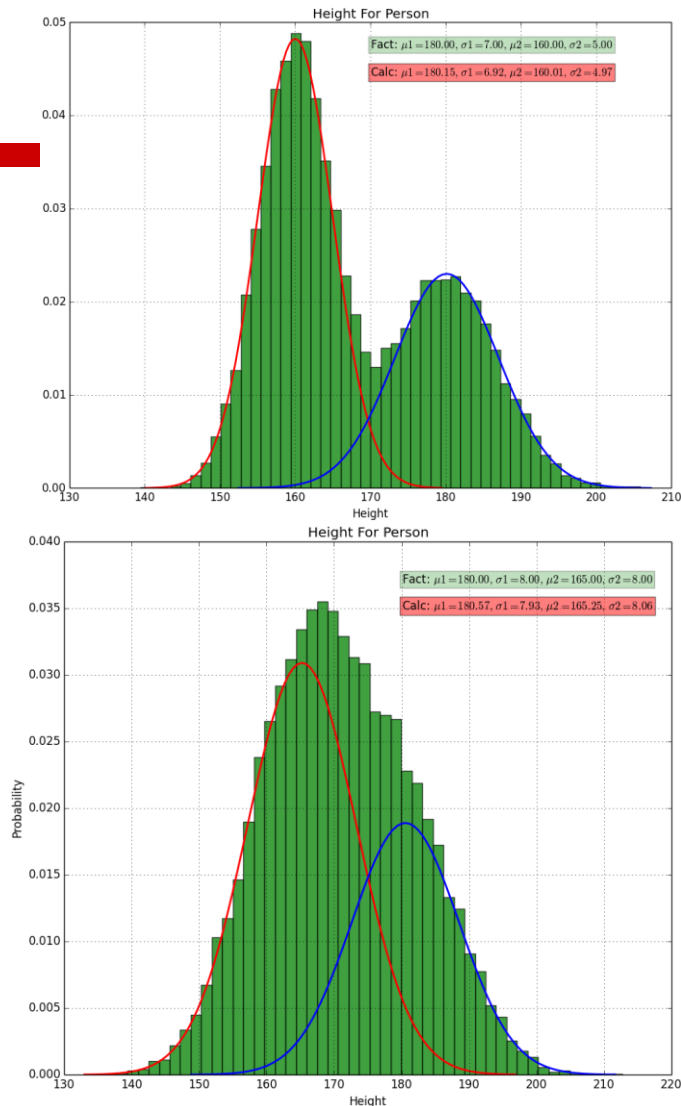
小象学院
ChinaHadoop.cn

邹博

主要内容

- 通过实例直观求解高斯混合模型GMM
 - 适合快速掌握GMM，及编程实现
- 通过最大似然估计详细推导EM算法
 - 适合理论层面的深入理解
 - 用坐标上升理解EM的过程
- 推导GMM的参数 ϕ 、 μ 、 σ
 - 复习多元高斯模型
 - 复习拉格朗日乘子法

EM Code



```
em3.py x
def calcEM(height):
    N = len(height)
    gp = 0.5 #girl probability
    bp = 0.5 #boy probability
    gmu,gsigma = min(height),1 #先验: 直接取最大和最小值
    bmu,bsigma = max(height),1
    ggamma = range(N)
    bgamma = range(N)
    cur = [gp, bp, gmu, gsigma, bmu, bsigma]
    now = []

    times = 0
    while times < 100:
        i = 0
        for x in height:
            ggamma[i] = gp * gauss(x, gmu, gsigma)
            bgamma[i] = bp * gauss(x, bmu, bsigma)
            s = ggamma[i] + bgamma[i]
            ggamma[i] /= s
            bgamma[i] /= s
            i += 1

        gn = sum(ggamma)
        gp = float(gn) / float(N)
        bn = sum(bgamma)
        bp = float(bn) / float(N)
        gmu = averageWeight(height, ggamma, gn)
        gsigma = varianceWeight(height, ggamma, gmu, gn)
        bmu = averageWeight(height, bgamma, bn)
        bsigma = varianceWeight(height, bgamma, bmu, bn)

        now = [gp, bp,gmu,gsigma,bmu,bsigma]
        if isSame(cur, now):
            break
        cur = now
        print "Times:\t", times
        print "Girl mean/gsigma:\t", gmu,gsigma
        print "Boy mean/bsigma:\t", bmu,bsigma
        print "Boy/Girl:\t", bn, gn, bn+gn
        print "\n\n"
        times += 1
    return now
```

复习：Jensen不等式：若f是凸函数

□ 基本Jensen不等式

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

□ 若 $\theta_1, \dots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1$

□ 则 $f(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k) \leq \theta_1 f(x_1) + \dots + \theta_k f(x_k)$

□ 若 $p(x) \geq 0$ on $S \subseteq \text{dom } f, \int_S p(x) dx = 1$

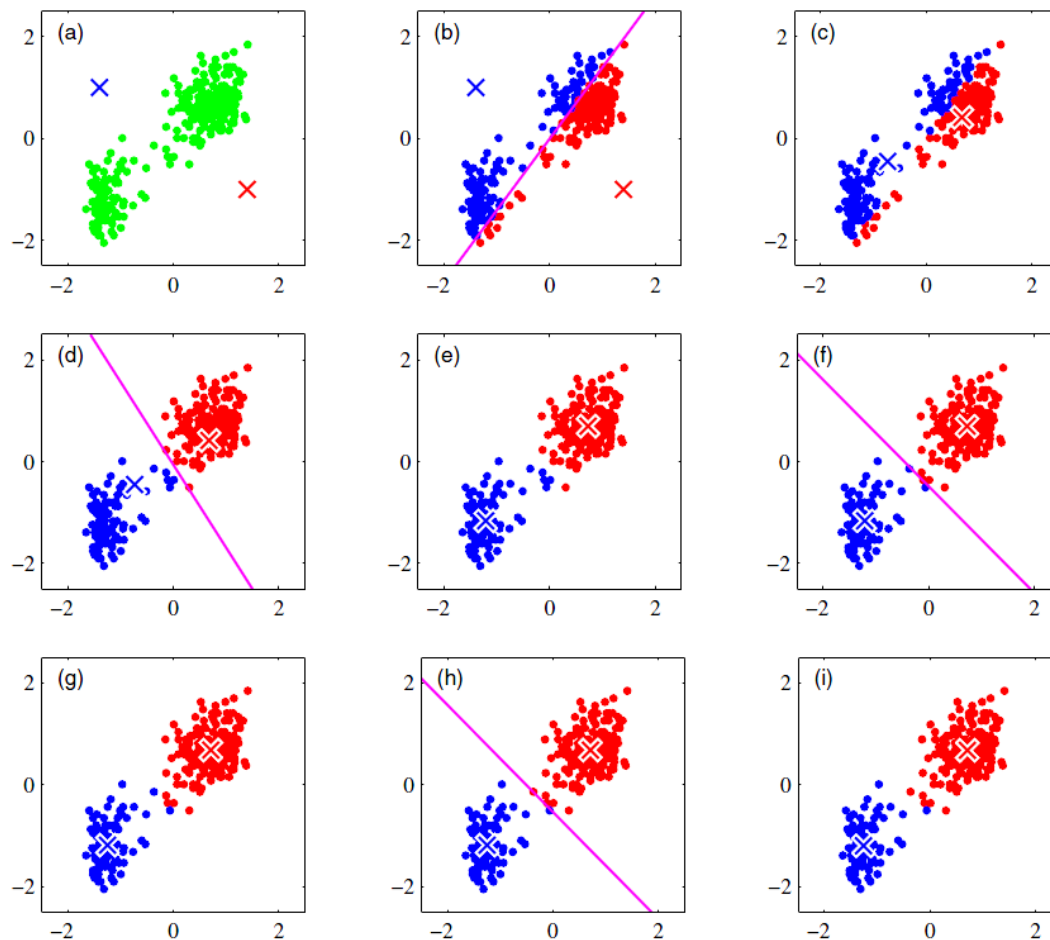
□ 则 $f\left(\int_S p(x)x dx\right) \leq \int_S f(x)p(x) dx$

$$f(\mathbf{E} x) \leq \mathbf{E} f(x)$$

引子：K-means算法

- K-means算法，也被称为k-平均或k-均值，是一种广泛使用的聚类算法，或者成为其他聚类算法的基础。
- 假定输入样本为 $S=X_1, X_2, \dots, X_m$ ，则算法步骤为：
 - 选择初始的k个簇中心 $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k$
 - 将样本 x_i 标记为距离簇中心最近的簇： $label_i = \arg \min_{1 \leq j \leq k} \|x_i - \mu_j\|$
 - 更新簇中心： $\mu_j = \frac{1}{|c_j|} \sum_{i \in c_j} x_i$
 - 重复最后两步，直到满足终止条件。
- 中止条件：迭代次数/簇中心变化率/最小平方误差MSE

K-means过程



思考

- 经典的K-means聚类方法，能够非常方便的将来标记的样本分成若干簇；
- 但无法给出某个样本属于该簇的后验概率。
- 其他方法可否处理未标记样本呢？

最大似然估计

□ 找出与样本的分布最接近的概率分布模型。

□ 简单的例子

■ 10次抛硬币的结果是：正正反正正正反反正正

□ 假设 p 是每次抛硬币结果为正的概率。则：

□ 得到这样的实验结果的概率是：

$$\begin{aligned} P &= pp(1-p)ppp(1-p)(1-p)pp \\ &= p^7(1-p)^3 \end{aligned}$$

■ 最优解是： $p=0.7$

二项分布的最大似然估计

- 投硬币试验中，进行N次独立试验，n次朝上，N-n次朝下。
- 假定朝上的概率为p，使用对数似然函数作为目标函数：

$$f(n | p) = \log(p^n (1-p)^{N-n}) \xrightarrow{\Delta} h(p)$$

$$\frac{\partial h(p)}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{N-n}{1-p} \xrightarrow{\Delta} 0 \Rightarrow p = \frac{n}{N}$$

进一步考察

- 若给定一组样本 $X_1, X_2 \dots X_n$, 已知它们来自于高斯分布 $N(\mu, \sigma)$, 试估计参数 μ, σ 。

按照MLE的过程分析

□ 高斯分布的概率密度函数：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

□ 将 X_i 的样本值 x_i 带入，得到：

$$L(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

化简对数似然函数

$$\begin{aligned}l(x) &= \log \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\&= \sum_i \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\&= \left(\sum_i \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) + \left(\sum_i -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \\&= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu)^2\end{aligned}$$

参数估计的结论

□ 目标函数
$$l(x) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu)^2$$

□ 将目标函数对参数 μ, σ 分别求偏导，很容易得到 μ, σ 的式子：

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_i x_i \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu)^2 \end{cases}$$

符合直观想象

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_i x_i \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu)^2 \end{cases}$$

- 上述结论和矩估计的结果是一致的，并且意义非常直观：样本的均值即高斯分布的均值，样本的伪方差即高斯分布的方差。
- 该结论将作为下面分析的基础。

问题：随机变量无法直接(完全)观察到

- 随机挑选10000位志愿者，测量他们的身高：
若样本中存在男性和女性，身高分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2)$ 的分布，试估计 $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ 。
- 给定一幅图像，将图像的前景背景分开
- 无监督分类：聚类/EM

从直观理解猜测GMM的参数估计

- 随机变量 X 是有 K 个高斯分布混合而成，取各个高斯分布的概率为 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_K$ ，第 i 个高斯分布的均值为 μ_i ，方差为 Σ_i 。若观测到随机变量 X 的一系列样本 x_1, x_2, \dots, x_n ，试估计参数 π , μ , Σ 。

建立目标函数

□ 对数似然函数

$$l_{\pi, \mu, \Sigma}(x) = \sum_{i=1}^N \log \left(\sum_{k=1}^K \pi_k N(x_i | \mu_k, \Sigma_k) \right)$$

目标函数

- 由于在对数函数里面又有加和，我们没法直接用求导解方程的办法直接求得最大值。为了解决这个问题，我们分成两步。

第一步：估算数据来自哪个组份

- 估计数据由每个组份生成的概率：对于每个样本 x_i ，它由第 k 个组份生成的概率为

$$\gamma(i, k) = \frac{\pi_k N(x_i | \mu_k, \Sigma_k)}{\sum_{j=1}^K \pi_j N(x_i | \mu_j, \Sigma_j)}$$

- 上式中的 μ 和 Σ 也是待估计的值，因此采样迭代法：在计算 $\gamma(i, k)$ 时假定 μ 和 Σ 已知；
 - 需要先验给定 μ 和 Σ 。
 - $\gamma(i, k)$ 亦可看成组份 k 在生成数据 x_i 时所做的贡献。

第二步：估计每个组份的参数

□ 对于所有的样本点，对于组份 k 而言，可看做生成了 $\{\gamma(i,k)x_i \mid i=1,2,\dots,N\}$ 这些点。组份 k 是一个标准的高斯分布，利用上面的结论：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{1}{n} \sum_i x_i \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu)^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N_k = \sum_{i=1}^N \gamma(i,k) \\ \mu_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^N \gamma(i,k)x_i \\ \Sigma_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^N \gamma(i,k)(x_i - \mu_k)(x_i - \mu_k)^T \\ \pi_k = \frac{N_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(i,k) \end{array} \right.$$

EM算法的提出

□ 假定有训练集

$$\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\}$$

□ 包含m个独立样本，希望从中找到该组数据的模型 $p(x,z)$ 的参数。

通过最大似然估计建立目标函数

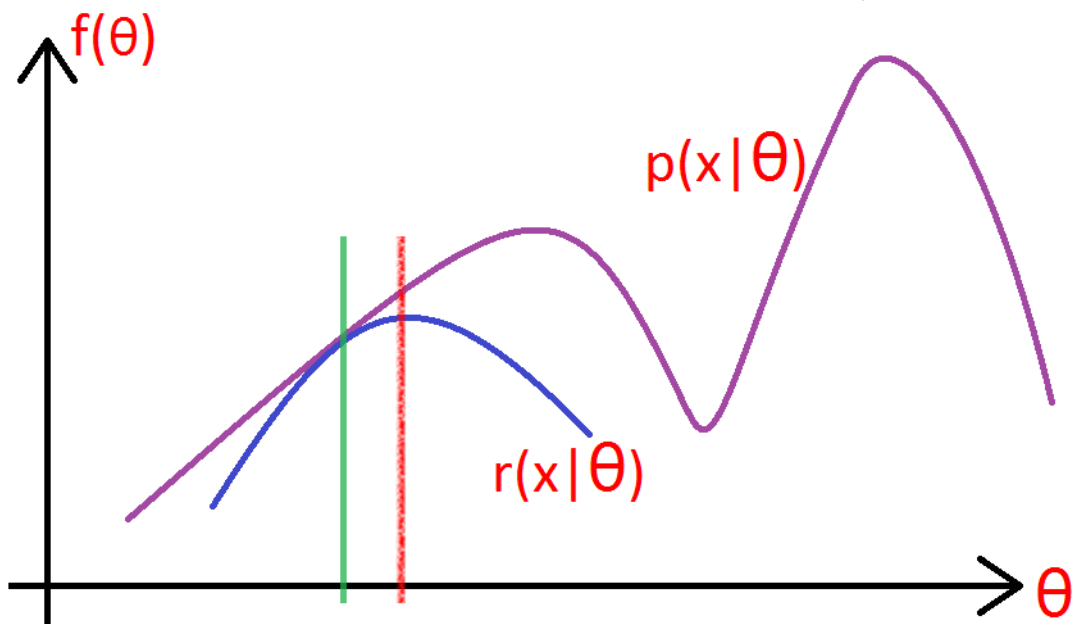
□ 取对数似然函数

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^m \log p(x; \theta) \\ &= \sum_{i=1}^m \log \sum_z p(x, z; \theta) \end{aligned}$$

问题的提出

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^m \log \sum_z p(x, z; \theta)$$

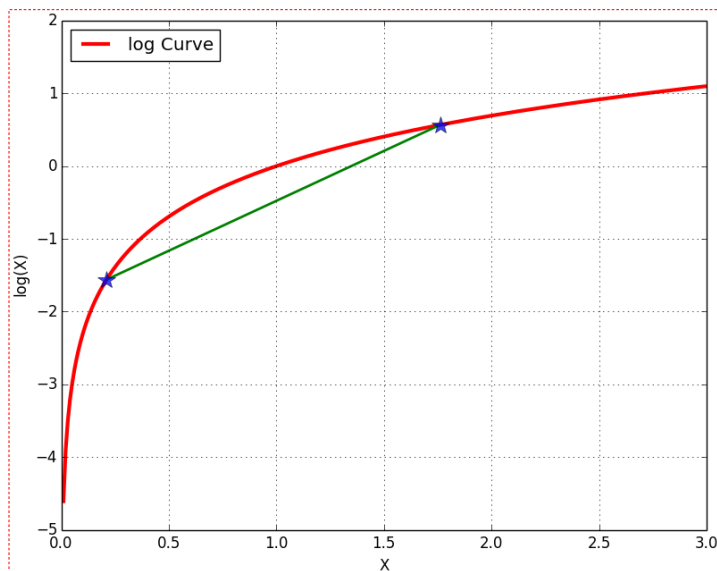
- z 是隐随机变量，不方便直接找到参数估计。
策略：计算 $l(\theta)$ 下界，求该下界的最大值；
重复该过程，直到收敛到局部最大值。



Jensen不等式

□ 令 Q_i 是 z 的某一个分布, $Q_i \geq 0$, 有:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^m \log \sum_z p(x, z; \theta) = \sum_{i=1}^m \log \sum_{z^{(i)}} p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)$$



$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m \log \sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{Q_i(z^{(i)})} \\ &\geq \sum_{i=1}^m \sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{Q_i(z^{(i)})} \end{aligned}$$

寻找尽量紧的下界

□ 为了使等号成立

$$\frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{Q_i(z^{(i)})} = c$$

进一步分析

$$Q_i(z^{(i)}) \propto p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta) \quad \sum_z Q_i(z^{(i)}) = 1$$

$$Q_i(z^{(i)}) = \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{\sum_z p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}$$

$$= \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{p(x^{(i)}; \theta)}$$

$$= p(z^{(i)} | x^{(i)}; \theta)$$

EM算法整体框架

Repeat until convergence {

(E-step) For each i , set

$$Q_i(z^{(i)}) := p(z^{(i)} | x^{(i)}; \theta).$$

(M-step) Set

$$\theta := \arg \max_{\theta} \sum_i \sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{Q_i(z^{(i)})}$$

}

坐标上升

Remark. If we define

$$J(Q, \theta) = \sum_i \sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{Q_i(z^{(i)})},$$

then we know $\ell(\theta) \geq J(Q, \theta)$ from our previous derivation. The EM can also be viewed as a coordinate ascent on J , in which the E-step maximizes it with respect to Q , and the M-step maximizes it with respect to θ .

从理论公式推导GMM

- 随机变量 X 是有 K 个高斯分布混合而成，取各个高斯分布的概率为 $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_K$ ，第 i 个高斯分布的均值为 μ_i ，方差为 Σ_i 。若观测到随机变量 X 的一系列样本 x_1, x_2, \dots, x_n ，试估计参数 φ ， μ ， Σ 。

E-step

$$w_j^{(i)} = Q_i(z^{(i)} = j) = P(z^{(i)} = j | x^{(i)}; \phi, \mu, \Sigma)$$

M-step

□ 将多项分布和高斯分布的参数带入：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \phi, \mu, \Sigma)}{Q_i(z^{(i)})} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k Q_i(z^{(i)} = j) \log \frac{p(x^{(i)} | z^{(i)} = j; \mu, \Sigma) p(z^{(i)} = j; \phi)}{Q_i(z^{(i)} = j)} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_j^{(i)} \log \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_j|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x^{(i)} - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x^{(i)} - \mu_j) \right) \cdot \phi_j}{w_j^{(i)}} \end{aligned}$$

对均值求偏导

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mu_l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_j^{(i)} \log \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_j|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x^{(i)} - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x^{(i)} - \mu_j) \right) \cdot \phi_j}{w_j^{(i)}} \\ &= -\nabla_{\mu_l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_j^{(i)} \frac{1}{2} (x^{(i)} - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x^{(i)} - \mu_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_l^{(i)} \nabla_{\mu_l} 2\mu_l^T \Sigma_l^{-1} x^{(i)} - \mu_l^T \Sigma_l^{-1} \mu_l \\ &= \sum_{i=1}^m w_l^{(i)} (\Sigma_l^{-1} x^{(i)} - \Sigma_l^{-1} \mu_l) \end{aligned}$$

高斯分布的均值

□ 令上式等于0，解的均值：

$$\mu_l := \frac{\sum_{i=1}^m w_l^{(i)} x^{(i)}}{\sum_{i=1}^m w_l^{(i)}}$$

高斯分布的方差：求偏导，等于0

$$\Sigma_j = \frac{\sum_{i=1}^m w_j^{(i)} (x^{(i)} - \mu_j)(x^{(i)} - \mu_j)^T}{\sum_{i=1}^m w_j^{(i)}}$$

多项分布的参数

□ 考察M-step的目标函数，对于 ϕ ，删除常数项

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_j^{(i)} \log \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_j|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x^{(i)} - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x^{(i)} - \mu_j) \right) \cdot \phi_j}{w_j^{(i)}}$$

□ 得到

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_j^{(i)} \log \phi_j$$

拉格朗日乘子法

□ 由于多项分布的概率和为1，建立拉格朗日方程

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_j^{(i)} \log \phi_j + \beta \left(\sum_{j=1}^k \phi_j - 1 \right).$$

■ 求解的 ϕ_i 一定非负，不用考虑 $\phi_i \geq 0$ 这个条件

求偏导，等于0

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} \mathcal{L}(\phi) = \sum_{i=1}^m \frac{w_j^{(i)}}{\phi_j} + \beta$$

$$-\beta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_j^{(i)} = \sum_{i=1}^m 1 = m$$

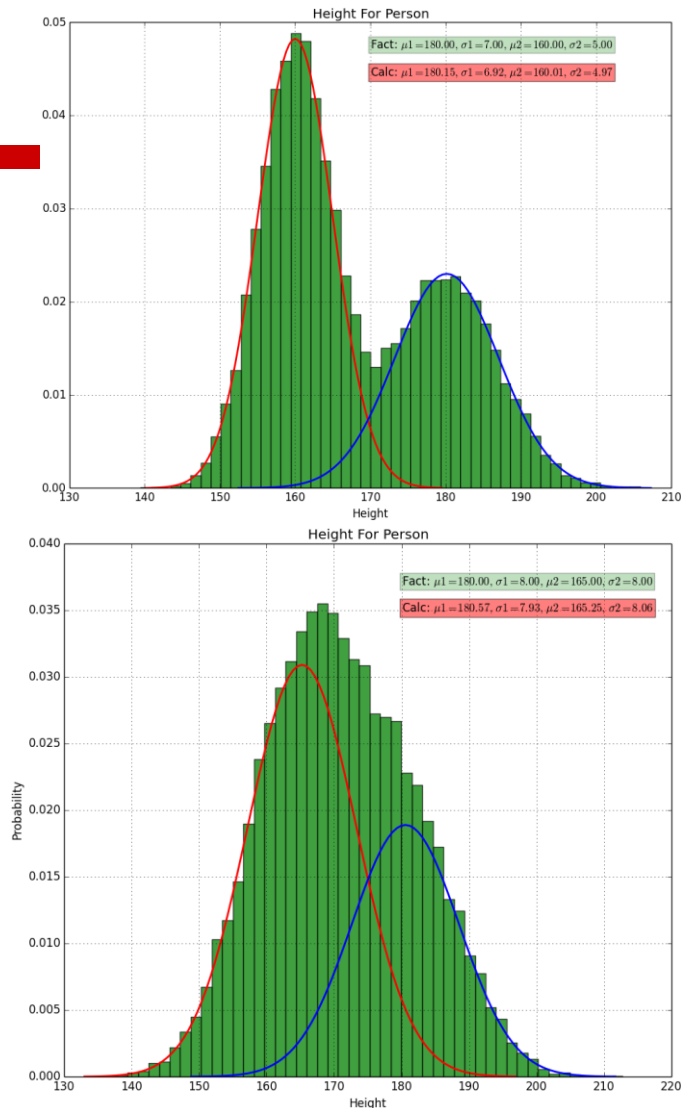
$$\phi_j := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_j^{(i)}$$

总结

- 对于所有的数据点，可以看作组份 k 生成了这些点。组份 k 是一个标准的高斯分布，利用上面的结论： $\{\gamma(i, k)x_i \mid i=1, 2, \dots, N\}$

$$\begin{cases} \mu_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^N \gamma(i, k)x_i \\ \Sigma_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^N \gamma(i, k)(x_i - \mu_k)(x_i - \mu_k)^T \\ \pi_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(i, k) \\ N_k = N \cdot \pi_k \end{cases}$$

EM Code



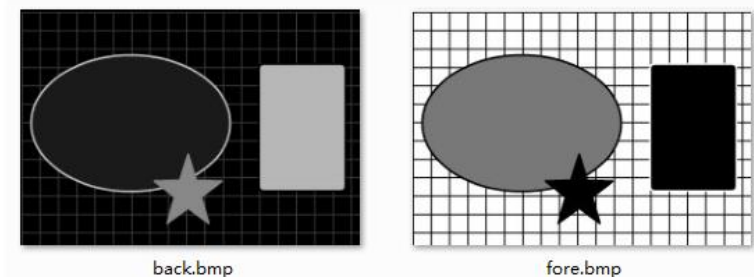
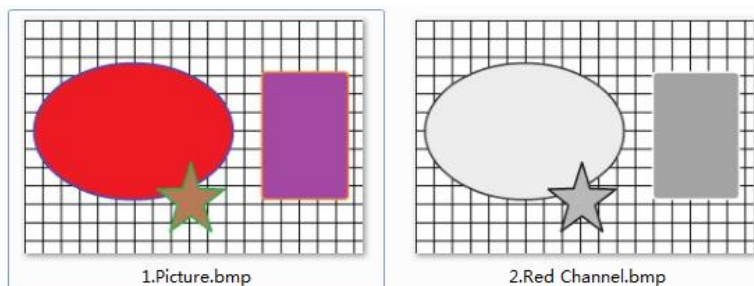
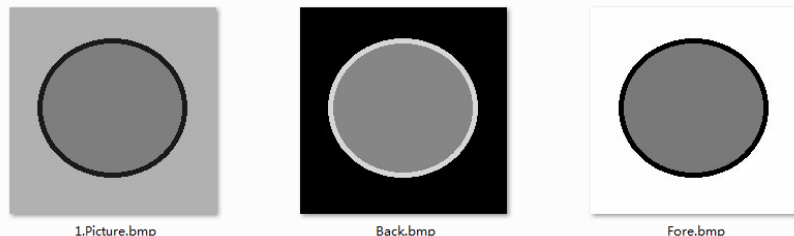
```
em3.py x
def calcEM(height):
    N = len(height)
    gp = 0.5 #girl probability
    bp = 0.5 #boy probability
    gmu,gsigma = min(height),1 #先验: 直接取最大和最小值
    bmu,bsigma = max(height),1
    ggamma = range(N)
    bgamma = range(N)
    cur = [gp, bp, gmu, gsigma, bmu, bsigma]
    now = []

    times = 0
    while times < 100:
        i = 0
        for x in height:
            ggamma[i] = gp * gauss(x, gmu, gsigma)
            bgamma[i] = bp * gauss(x, bmu, bsigma)
            s = ggamma[i] + bgamma[i]
            ggamma[i] /= s
            bgamma[i] /= s
            i += 1

        gn = sum(ggamma)
        gp = float(gn) / float(N)
        bn = sum(bgamma)
        bp = float(bn) / float(N)
        gmu = averageWeight(height, ggamma, gn)
        gsigma = varianceWeight(height, ggamma, gmu, gn)
        bmu = averageWeight(height, bgamma, bn)
        bsigma = varianceWeight(height, bgamma, bmu, bn)

        now = [gp, bp,gmu,gsigma,bmu,bsigma]
        if isSame(cur, now):
            break
        cur = now
        print "Times:\t", times
        print "Girl mean/gsigma:\t", gmu,gsigma
        print "Boy mean/bsigma:\t", bmu,bsigma
        print "Boy/Girl:\t", bn, gn, bn+gn
        print "\n\n"
        times += 1
    return now
```

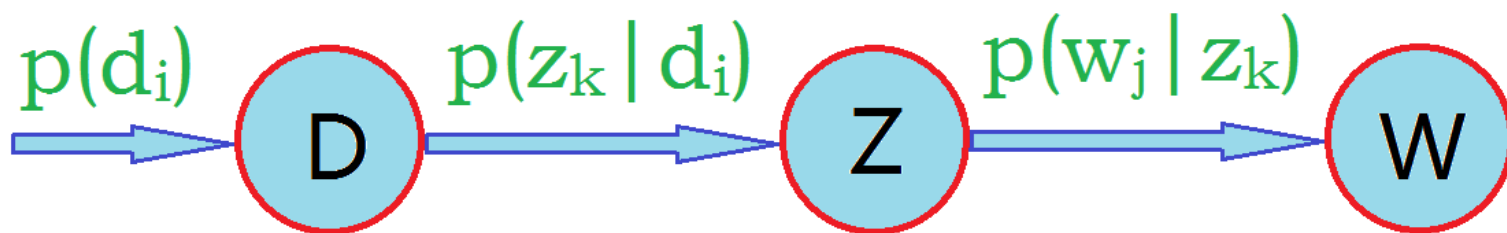

GMM与图像

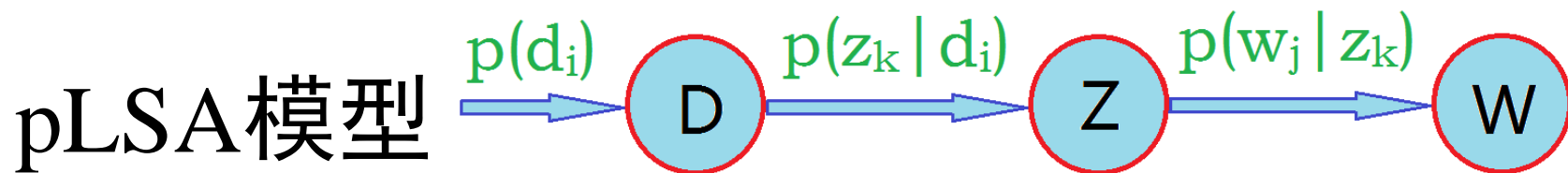


```
def composite(band, parameter):  
    c1 = parameter[0]  
    mu1 = parameter[2]  
    sigma1 = parameter[3]  
    c2 = parameter[1]  
    mu2 = parameter[4]  
    sigma2 = parameter[5]  
  
    p1 = []  
    p2 = []  
    for pixel in band:  
        p1.append(c1 * gauss(pixel, mu1, sigma1))  
        p2.append(c2 * gauss(pixel, mu2, sigma2))  
  
    scale(p1)  #灰度均衡  
    scale(p2)  
    return [p1, p2]  
  
if __name__ == "__main__":  
    im = Image.open('.\\Pic\\test.bmp')  
    print im.format, im.size, im.mode  
  
    im = im.split()[0]  #只处理第一个通道  
    nb = []  #处理后的新通道  
    data = list(im.getdata())  
    parameter = GMM(data)  
    t = composite(data, parameter)  
  
    im1 = Image.new('L', im.size)  
    im1.putdata(t[0])
```

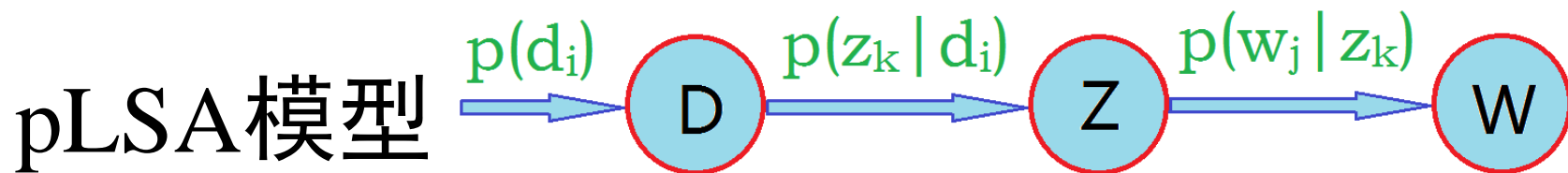
附：pLSA模型

- 基于概率统计的pLSA模型(probabilistic Latent Semantic Analysis, 概率隐语义分析), 增加了主题模型, 形成简单的贝叶斯网络, 可以使用EM算法学习模型参数。





- **D**代表文档，**Z**代表主题(隐含类别)，**W**代表单词；
 - $P(d_i)$ 表示文档 d_i 的出现概率，
 - $P(z_k | d_i)$ 表示文档 d_i 中主题 z_k 的出现概率，
 - $P(w_j | z_k)$ 表示给定主题 z_k 出现单词 w_j 的概率。
- 每个主题在所有词项上服从多项分布，每个文档在所有主题上服从多项分布。
- 整个文档的生成过程是这样的：
 - 以 $P(d_i)$ 的概率选中文档 d_i ；
 - 以 $P(z_k | d_i)$ 的概率选中主题 z_k ；
 - 以 $P(w_j | z_k)$ 的概率产生一个单词 w_j 。



□ 观察数据为 (d_i, w_j) 对，主题 z_k 是隐含变量。

□ (d_i, w_j) 的联合分布为

$$P(d_i, w_j) = P(w_j | d_i)P(d_i)$$

$$P(w_j | d_i) = \sum_{k=1}^K P(w_j | z_k)P(z_k | d_i)$$

□ 而 $P(w_j | z_k), P(z_k | d_i)$ 对应了两组多项分布，而计算每个文档的主题分布，就是该模型的任务目标。

最大似然估计： w_j 在 d_i 中出现的次数 $n(d_i, w_j)$

$$L = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M P(d_i, w_j) = \prod_i \prod_j P(d_i, w_j)^{n(d_i, w_j)}$$

$$l = \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(d_i, w_j)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(w_j | d_i) P(d_i)$$

$$P(d_i, w_j) = P(w_j | d_i) P(d_i)$$
$$P(w_j | d_i) = \sum_{k=1}^K P(w_j | z_k) P(z_k | d_i)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log \left(\sum_{k=1}^K P(w_j | z_k) P(z_k | d_i) \right) P(d_i)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log \left(\sum_{k=1}^K P(w_j | z_k) P(z_k | d_i) P(d_i) \right)$$

目标函数分析

- 观察数据为 (d_i, w_j) 对，主题 z_k 是隐含变量。
- 目标函数
$$l = \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log \left(\sum_{k=1}^K P(w_j | z_k) P(z_k | d_i) P(d_i) \right)$$
- 未知变量/自变量 $P(w_j | z_k), P(z_k | d_i)$
- 使用逐次逼近的办法：
 - 假定 $P(z_k | d_i)$ 、 $P(w_j | z_k)$ 已知，求隐含变量 z_k 的后验概率；
 - 在 (d_i, w_j, z_k) 已知的前提下，求关于参数 $P(z_k | d_i)$ 、 $P(w_j | z_k)$ 的似然函数期望的最大值，得到最优解 $P(z_k | d_i)$ 、 $P(w_j | z_k)$ ，带入上一步，从而循环迭代；
 - 即：EM算法。

求隐含变量主题 z_k 的后验概率

□ 假定 $P(z_k|d_i)$ 、 $P(w_j|z_k)$ 已知，求隐含变量 z_k 的后验概率；

$$P(z_k | d_i, w_j) = \frac{P(w_j | z_k)P(z_k | d_i)}{\sum_{l=1}^K P(w_j | z_l)P(z_l | d_i)}$$

□ 在 (d_i, w_j, z_k) 已知的前提下，求关于参数 $P(z_k|d_i)$ 、 $P(w_j|z_k)$ 的似然函数期望的最大值，得到最优解 $P(z_k|d_i)$ 、 $P(w_j|z_k)$ ，带入上一步，从而循环迭代；

分析似然函数期望

- 在 (d_i, w_j, z_k) 已知的前提下，求关于参数 $P(z_k|d_i)$ 、 $P(w_j|z_k)$ 的似然函数期望的最大值，得到最优解 $P(z_k|d_i)$ 、 $P(w_j|z_k)$ ，带入上一步，从而循环迭代；

关于参数 $P(z_k|d_i)P(w_j|z_k)$ 的似然函数期望

$$\begin{aligned}l &= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(d_i, w_j) \\&= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log (P(w_j | d_i) P(d_i)) \\&= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) (\log P(w_j | d_i) + \log P(d_i)) \\&= \left(\sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(w_j | d_i) \right) + \left(\sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(d_i) \right)\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}l_{new} &= \left(\sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(w_j | d_i) \right) \\E(l_{new}) &= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \sum_{k=1}^K P(z_k | d_i, w_j) \log P(w_j, z_k | d_i) \\&= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \sum_{k=1}^K P(z_k | d_i, w_j) \log P(w_j | z_k) P(z_k | d_i)\end{aligned}$$

完成目标函数的建立

- 关于参数 $P(z_k|d_i)$ 、 $P(w_j|z_k)$ 的函数 E ，并且，带有概率加和为1的约束条件：

$$E = \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \sum_{k=1}^K P(z_k | d_i, w_j) \log P(w_j | z_k) P(z_k | d_i)$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^M P(w_j | z_k) = 1 \\ \sum_{k=1}^K P(z_k | d_i) = 1 \end{cases}$$

- 显然，这是只有等式约束的求极值问题，使用Lagrange乘子法解决。

目标函数的求解

□ Lagrange 函数为：

$$\begin{aligned} Lag = & \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \sum_{k=1}^K P(z_k | d_i, w_j) \log P(w_j | z_k) P(z_k | d_i) \\ & + \sum_{k=1}^K \tau_k \left(1 - \sum_{j=1}^M P(w_j | z_k) \right) + \sum_{i=1}^N \rho_i \left(1 - \sum_{k=1}^K P(z_k | d_i) \right) \end{aligned}$$

□ 求驻点：

$$\begin{aligned} \frac{\partial Lag}{\partial P(w_j | z_k)} &= \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)}{P(w_j | z_k)} - \tau_k \stackrel{\text{令}}{=} 0 \\ \frac{\partial Lag}{\partial P(z_k | d_i)} &= \frac{\sum_j n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)}{P(z_k | d_i)} - \rho_i \stackrel{\text{令}}{=} 0 \end{aligned}$$

分析第一个等式

$$\frac{\partial Lag}{\partial P(w_j | z_k)} = \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)}{P(w_j | z_k)} - \tau_k \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j) = \tau_k P(w_j | z_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^M \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j) = \sum_{m=1}^M \tau_k P(w_j | z_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^M \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j) = \tau_k \sum_{m=1}^M P(w_j | z_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^M \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j) = \tau_k$$

$$\xrightarrow{\text{将 } \tau_k \text{ 代回第二式}} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j) = \sum_{m=1}^M \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j) P(w_j | z_k)$$

$$\Rightarrow P(w_j | z_k) = \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)}{\sum_{m=1}^M \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)}$$

同理分析第二个等式

□ 求极值时的解——M-Step:

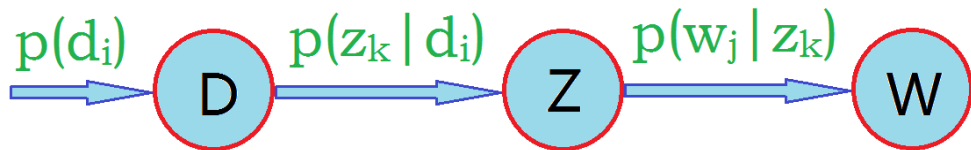
$$\begin{cases} P(w_j | z_k) = \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)}{\sum_{m=1}^M \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)} \\ P(z_k | d_i) = \frac{\sum_j n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)}{\sum_{k=1}^K \sum_j n(d_i, w_j) P(z_k | d_i, w_j)} \end{cases}$$

□ 别忘了E-step: $P(z_k | d_i, w_j) = \frac{P(w_j | z_k) P(z_k | d_i)}{\sum_{l=1}^K P(w_j | z_l) P(z_l | d_i)}$

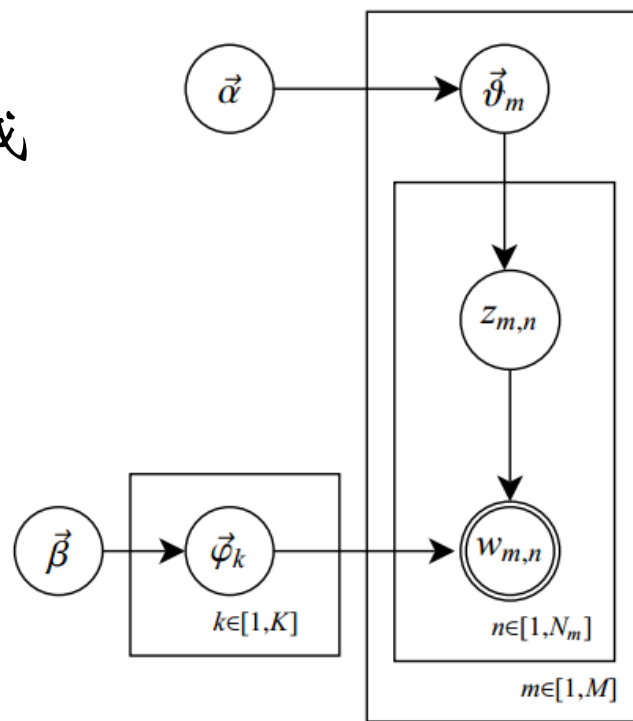
pLSA的总结

- pLSA应用于信息检索、过滤、自然语言处理等领域，pLSA考虑到词分布和主题分布，使用EM算法来学习参数。
- 虽然推导略显复杂，但最终公式简洁清晰，很符合直观理解，需用心琢磨；此外，推导过程使用了EM算法，也是学习EM算法的重要素材。

pLSA进一步思考



- 相对于“简单”的链状贝叶斯网络，可否给出“词”“主题”“文档”更细致的网络拓扑，形成更具一般性的模型？
- pLSA不需要先验信息即可完成自学习——这是它的优势。如果在特定的要求下，需要有先验知识的影响呢？
- 答：LDA模型；
 - 三层结构的贝叶斯模型
 - 需要超参数



参考文献

- Prof. Andrew Ng. *Machine Learning*. Stanford University

我们在这里

□ <http://wenda.ChinaHadoop.cn>

■ 视频/课程/社区

□ 微博

■ @ChinaHadoop

■ @邹博_机器学习

□ 微信公众号

■ 小象

■ 大数据分析挖掘



感谢大家！

恳请大家批评指正！