

Rapport de projet scientifique

Modélisation et analyse d'un système de dépollution d'un lac

Étude mathématique d'un modèle couplé biomasse-polluant



Auteurs : ABI KAEDBEY Kareem, DACCACHE Roger, DUCH Alexis, PANGUEL Adrien

Encadrant : COMTE Myriam

Établissement : Polytech Sorbonne - MAIN3

Année universitaire : 2024–2025

Date de rendu : 30 avril

Introduction

Lors du processus industriel de dépollution d'un lac, on utilise de petits bioréacteurs que l'on connecte en circuit fermé au lac à dépolluer, avec un débit Q qui est contrôlé par l'utilisateur. À l'intérieur du bioréacteur de volume V_R se trouve un dépolluant appelé biomasse : cette biomasse se développe en dégradant simultanément le polluant présent dans l'eau. À la sortie du bioréacteur, on filtre la biomasse à l'aide d'un décanteur (afin de ne pas la rejeter dans le lac) et on renvoie l'eau ainsi nettoyée dans le lac, de volume V_L . Ce circuit est fermé. On note $y(t)$ (respectivement $z(t)$) la concentration au temps t de polluant dans le bioréacteur (respectivement dans le lac), et $x(t)$ celle de biomasse présente dans le bioréacteur. L'évolution de ces quantités est ainsi modélisée par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \mu x(t)y(t) - \frac{Q}{V_R}x(t), \\ y'(t) = -\mu x(t)y(t) + \frac{Q}{V_R}(z(t) - y(t)), \\ z'(t) = \frac{Q}{V_L}(y(t) - z(t)) \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est une constante qui définit la loi de croissance de la biomasse. Le système différentiel traduit la transformation du polluant en biomasse et les pompages en entrée/sortie du bioréacteur et du lac. On fait un changement de variable afin de se ramener au système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \mu x(t)y(t) - Qx(t), \\ y'(t) = -\mu x(t)y(t) + Q(z(t) - y(t)), \\ z'(t) = \varepsilon Q(y(t) - z(t)) \end{cases}$$

Nous étudierons ce système pour $\varepsilon = 0$ et pour $\varepsilon > 0$.

Table des matières

1. Cohérence du modèle
 - (a) Evolution des concentrations $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ dans le bioréacteur et dans le lac
 - (b) Homogénéité des grandeurs physiques
2. Contexte du problème
 - (a) Existence et unicité locale d'une solution
 - (b) Démarche
3. Choix de la méthode numérique
 - (a) Méthode d'Euler explicite
 - (b) Méthode d'Euler implicite
 - Méthode du point fixe
 - Méthode de Newton-Raphson
 - (c) Méthode de RK4 (Runge-Kutta d'ordre 4)
4. Analyse de stabilité linéaire en fonction de ϵ
 - (a) Matrice Jacobienne du système
 - (b) Recherche des points singuliers
 - (c) Analyse des points singuliers
 - (d) Validation par simulations numériques
5. Autre approche du système
 - (a) Justification mathématique du comportement lent-rapide
 - (b) Approximations numériques et simplifications
6. Approfondissement
 - (a) Discussion du débit Q
 - (b) Comparaison des méthodes numériques
 - (c) Application numérique (Lac Thaï en Chine)
7. Conclusion générale
8. Ouverture

1. Cohérence du modèle

Étudions l'évolution des 3 fonctions du temps $x(t)$, $y(t)$, et $z(t)$ qui adoptent des comportements différents selon les paramètres initialisés :

- concentration initiale de biomasse x_0 dans le bioréacteur
- concentration initiale de polluant y_0 dans le bioréacteur
- concentration initiale de polluant z_0 dans le lac
- loi de croissance de la biomasse $\mu > 0$
- débit volumique en entrée/sortie du bioréacteur Q
- volume d'eau du bioréacteur V_R
- volume d'eau du lac V_L
- le rapport des volumes d'eau $\epsilon = \frac{V_R}{V_L}$

(a) Evolution des concentrations $x(t)$, $y(t)$, et $z(t)$ dans le bioréacteur et le lac

Dans cette section, nous ferons un abus de langage en parlant de Q comme un débit. En réalité, nous avons choisi de simplifier un peu le modèle initial en posant $Q/V_R = Q$. Ainsi, Q est à présent plus une fréquence qu'un volume, mais pour simplifier l'analyse de la cohérence des grandeurs, nous parlerons de ce Q comme d'un débit.

Concentration $x(t)$ de biomasse dans le bioréacteur

a. $x'(t) = \mu x(t)y(t)$

Étant donné que la biomasse se développe en dégradant simultanément le polluant présent dans l'eau, sa concentration dans le bioréacteur augmente proportionnellement à celle du polluant présent dans le bioréacteur avec un taux de croissance μ .

b. $x'(t) = -Qx(t)$

En revanche, comme un certain volume d'eau est renvoyé dans le lac avec un débit Q , une partie de cette biomasse est perdue (et elle est filtrée avec un décanteur à la sortie).

Concentration $y(t)$ en polluant dans le bioréacteur

a. $y'(t) = -\mu x(t)y(t)$

Les polluants se dégradent en présence de biomasse, donc leur concentration dans le bioréacteur est inversement proportionnelle à celle de la biomasse dans le bioréacteur.

b. $y'(t) = Qz(t)$

De plus, comme il arrive à tout instant un volume d'eau à un débit Q , sa quantité augmente proportionnellement à ce volume entrant.

c. $y'(t) = -Qy(t)$

Une partie de l'eau est constamment évacuée avec un débit Q donc les polluants contenus dans cette eau sont aussi retirés de la concentration en polluant dans le bioréacteur.

Concentration $z(t)$ en polluant dans le lac

a. $z'(t) = \varepsilon Q y(t)$

Il arrive à tout instant du bioréacteur un volume d'eau à un débit Q , donc la concentration en polluant dans le lac augmente proportionnellement à ce volume entrant.

b. $z'(t) = -\varepsilon Q z(t)$

Une partie de l'eau du lac est constamment envoyée vers le bioréacteur avec un débit Q donc les polluants contenus dans cette eau sont aussi retirés de la concentration en polluant dans le lac.

(b) Homogénéité des grandeurs physiques

Grandeurs	Unités
$x(t), y(t), z(t)$	$M.L^{-3}$
$x'(t), y'(t), z'(t)$	$M.L^{-3}.T^{-1}$
Q	$L^3.T^{-1}$
μ	$L^3.M^{-1}.T^{-1}$
V_R, V_L	L^3
ϵ	sans unité

a. $x'(t)$:

- $\mu x(t)y(t)$ est en $M.L^{-3}.T^{-1}$
- $\frac{Q}{V_R}x(t)$ est en $M.L^{-3}.T^{-1}$

b. $y'(t)$:

- $-\mu x(t)y(t)$ est en $M.L^{-3}.T^{-1}$
- $\frac{Q}{V_R}(z(t) - y(t))$ est en $M.L^{-3}.T^{-1}$

c. $z'(t)$:

- $\frac{Q}{V_L}(y(t) - z(t))$ est en $M.L^{-3}.T^{-1}$

Le système est homogène.

2. Contexte du problème

Le système différentiel étudié modélise la dépollution d'un lac via un bioréacteur, sous la forme du problème de Cauchy suivant :

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^3,$$

avec

$$f(t, u) = \begin{pmatrix} \mu xy - Qx \\ -\mu xy + Q(z - y) \\ \varepsilon Q(y - z) \end{pmatrix}.$$

(a) Existence et unicité locale d'une solution

Le système admet une solution locale unique pour toute condition initiale $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Nous vérifions les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz :

1. **Régularité** : Le second membre défini par

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = \mu xy - Qx \\ f_2(x, y, z) = -\mu xy + Q(z - y) \\ f_3(x, y, z) = \varepsilon Q(y - z) \end{cases}$$

est polynomial donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 .

2. **Lipschitzianité locale** : Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z} \quad (i = 1, 2, 3)$$

sont continues (car polynomiales), donc les f_i sont localement lipschitziennes.

Le théorème garantit alors l'existence d'une solution maximale unique $(x(t), y(t), z(t))$ définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 .

(b) Démarche

Nous allons analyser le système en suivant 2 axes d'étude. D'abord, nous n'allons pas prendre en compte la différence de taille des échelles de temps. Nous allons juste trouver les points critiques du système pour les 2 cas $\epsilon = 0$ et $\epsilon > 0$, étudier leur stabilité et vérifier cela avec des simulations, puis nous distingueront l'échelle de temps du bioréacteur et celle du lac, qui sont bien différentes, pour analyser le problème d'un autre point de vue.

3. Choix de la méthode numérique

(a) Méthode d'Euler explicite

Euler explicite s'écrit :

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$$

La méthode converge si f est lipschitzienne sur un domaine contenant la trajectoire de la solution exacte. Comme la solution reste bornée sur un intervalle $[t_0, T]$, f est lipschitzienne sur un compact contenant cette trajectoire. Ainsi, la méthode d'Euler explicite est localement convergente pour un pas h suffisamment petit.

(b) Méthode d'Euler implicite

La méthode s'écrit :

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

Cette équation implicite nécessite une résolution numérique à chaque pas.

Méthode du point fixe

On définit l'application $\Phi(v) = u_n + hf(t_{n+1}, v)$. Si f est lipschitzienne locale et h est tel que $hL < 1$, alors Φ est contractante et la méthode du point fixe converge.

Méthode de Newton-Raphson

On résout $F(v) = v - u_n - hf(t_{n+1}, v) = 0$. Comme f est C^1 localement, et que la jacobienne de F est inversible près de la solution, Newton-Raphson converge localement si le point de départ est proche de la solution.

(c) Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

La méthode est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, u_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, u_n + hk_3) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

La méthode RK4 est d'ordre 4 et converge localement si $f \in C^1$, ce qui est le cas ici sur les compacts contenant la solution.

Conclusion

Bien que f ne soit pas globalement lipschitzienne, elle est localement lipschitzienne et de classe C^1 sur les compacts. Si la solution reste bornée sur un intervalle donné, alors les méthodes d'Euler explicite, d'Euler implicite (avec point fixe ou Newton-Raphson), et RK4 sont localement convergentes, à condition que le pas h soit suffisamment petit.

Afin de résoudre numériquement le système différentiel sur tout l'intervalle étudié, nous avons choisi d'utiliser la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)**.

Ce choix est motivé par plusieurs raisons :

- RK4 est une méthode **explicite**, ce qui évite la résolution d'une équation non linéaire à chaque pas de temps, contrairement à Euler implicite.
- RK4 offre une **meilleure précision** que la méthode d'Euler explicite, pour un **coût de calcul raisonnable**.
- La méthode est **localement convergente** sous les hypothèses satisfaites par notre problème (continuité et régularité locale de f).

Ainsi, l'ensemble des simulations numériques présentées dans ce travail a été réalisé avec la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4**.

4. Analyse de stabilité linéaire en fonction de ϵ

A. Pour $\epsilon = 0$

Pour déterminer la stabilité des points d'équilibre dans le cas $\epsilon = 0$, nous allons utiliser une **analyse de stabilité linéaire** (linéarisation autour des points fixes via la matrice jacobienne). Voici la démarche détaillée :

(a) Matrice Jacobienne du système

Notre système est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu xy - Qx \\ \dot{y} = -\mu xy + Q(z(t) - y) \\ \dot{z} = 0 \implies z(t) = z_0 \end{cases}$$

D'où notre système réduit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu xy - Qx = f(x, y) \\ \dot{y} = -\mu xy + Q(z_0 - y) = g(x, y) \end{cases}$$

La **matrice Jacobienne** J est définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu y - Q & \mu x \\ -\mu y & -\mu x - Q \end{pmatrix}$$

(b) Recherche des points d'équilibre

On cherche (x^*, y^*) tel que $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$:

$$\begin{cases} \mu x^* y^* - Q x^* = 0 \\ -\mu x^* y^* + Q(z_0 - y^*) = 0 \end{cases}$$

1. Première équation :

$$\mu x^* y^* - Q x^* = 0 \implies x^* (\mu y^* - Q) = 0$$

Donc soit $x^* = 0$, soit $y^* = \frac{Q}{\mu}$.

2. Cas 1 : $x^* = 0$

— La deuxième équation devient :

$$Q(z_0 - y^*) = 0 \implies y^* = z_0$$

— **Point d'équilibre** : $(0, z_0, z_0)$

3. Cas 2 : $y^* = \frac{Q}{\mu}$

— La deuxième équation devient :

$$\begin{aligned} -\mu x^* \left(\frac{Q}{\mu}\right) + Q\left(z_0 - \frac{Q}{\mu}\right) &= 0 \implies -Qx^* + Qz_0 - \frac{Q^2}{\mu} = 0 \\ \implies x^* &= z_0 - \frac{Q}{\mu} \end{aligned}$$

— **Point d'équilibre** : $(z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu}, z_0)$

Remarque : Ce point n'existe que si $z_0 > \frac{Q}{\mu}$ (sinon $x^* < 0$, ce qui n'est pas physique pour une concentration).

Conclusion pour $\epsilon = 0$

— **Point 1** : $(0, z_0, z_0)$.

— **Point 2** : $(z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu}, z_0)$ (si $z_0 > \frac{Q}{\mu}$).

(c) Analyse des points d'équilibre

Point 1 : $(x^*, y^*, z^*) = (0, z_0, z_0)$

Jacobienne évaluée en $(0, z_0, z_0)$:

$$J_{(0, z_0, z_0)} = \begin{pmatrix} \mu z_0 - Q & 0 \\ -\mu z_0 & -Q \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda Id) = \begin{vmatrix} \mu z_0 - Q - \lambda & 0 \\ -\mu z_0 & -Q - \lambda \end{vmatrix} = (\mu z_0 - Q - \lambda)(-Q - \lambda) = 0$$

Valeurs propres :

— $\lambda_1 = \mu z_0 - Q < 0$?

— $\lambda_2 = -Q < 0$

Stabilité :

— Si $\mu z_0 < Q$: $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **stable**.

— Si $\mu z_0 = Q$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **on ne sait pas** \rightarrow stable ? instable ? marginal ?

— Si $\mu z_0 > Q$: $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **pas stable** \rightarrow instable ? marginal ?

Point 2 : $(x^*, y^*, z^*) = (z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu}, z_0)$

(existe si $z_0 \geq \frac{Q}{\mu}$)

Jacobienne évaluée en $(z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$:

$$J_{(z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})} = \begin{pmatrix} 0 & \mu(z_0 - \frac{Q}{\mu}) \\ -Q & -\mu(z_0 - \frac{Q}{\mu}) - Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu z_0 - Q \\ -Q & -\mu z_0 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & \mu z_0 - Q \\ -Q & -\mu z_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \mu z_0 \lambda + Q(\mu z_0 - Q) = 0$$

$$\Delta = (\mu z_0)^2 - 4Q(\mu z_0 - Q) = (\mu z_0 - 2Q)^2 \geq 0$$

$$\lambda_{+-} = \frac{-\mu z_0 + -\sqrt{(\mu z_0 - 2Q)^2}}{2}$$

$$\lambda_{+-} = \frac{-\mu z_0 + -(\mu z_0 - 2Q)}{2}$$

Valeurs propres :

- $\lambda_1 = Q - \mu z_0 < 0 ?$
- $\lambda_2 = -Q < 0$

Stabilité :

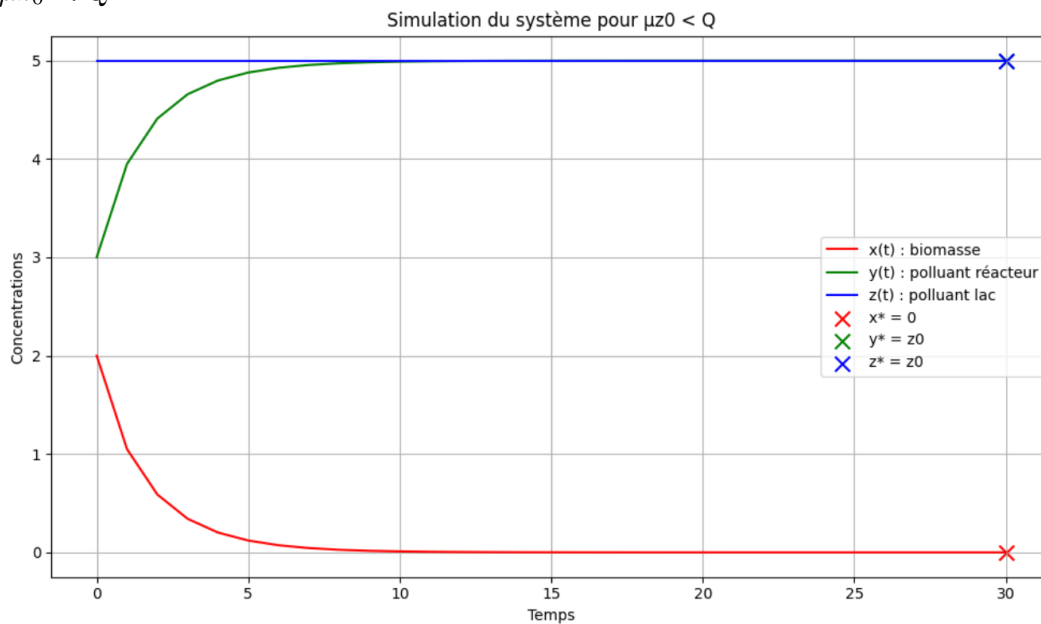
- Si $\mu z_0 > Q$: $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **stable**.
- Si $\mu z_0 = Q$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ **on ne sait pas** \rightarrow stable ? instable ? marginal ?
- Si $\mu z_0 < Q$: **Ce cas est écarté pour l'existence du point critique 2.**

(d) Validation par simulations numériques

Pour confirmer analytiquement nos hypothèses tirées du calcul à la main, nous allons simuler l'évolution de notre système pour différents paramètres. Cela nous permettra ainsi de vérifier le caractère stable, instable ou marginal des points critiques dont nous étions certains, et de déterminer pour les autres leur nature. Nous allons tracer les trajectoires près des points d'équilibre, et voir si toutes les trajectoires convergent vers le point (cas stable), si certaines s'en éloignent (cas instable) ou si rien de cela ne se passe (cas marginal).

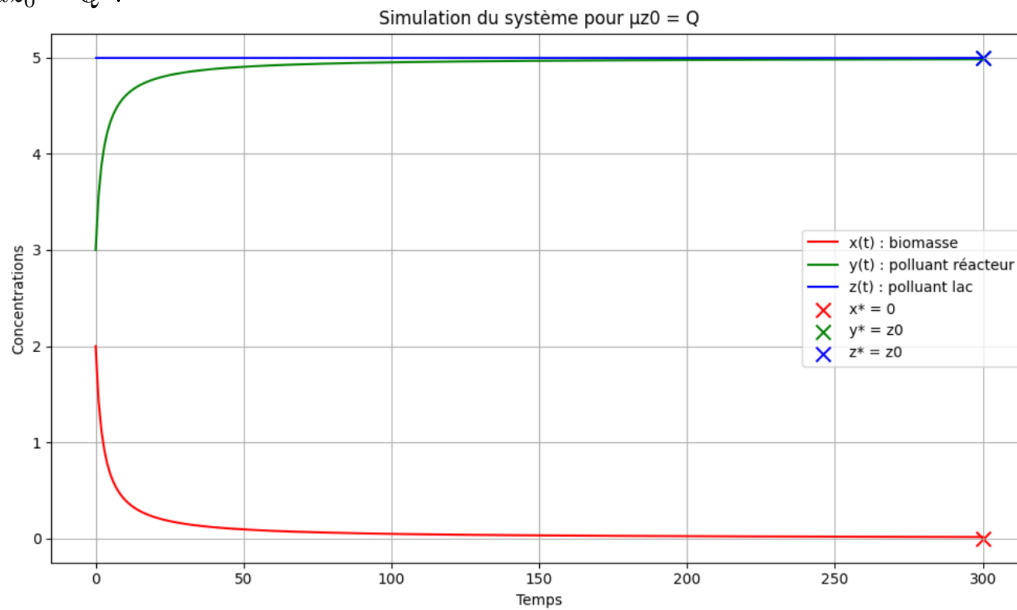
Point 1 : $(x^*, y^*, z^*) = (0, z_0, z_0)$

$\mu z_0 < Q$:



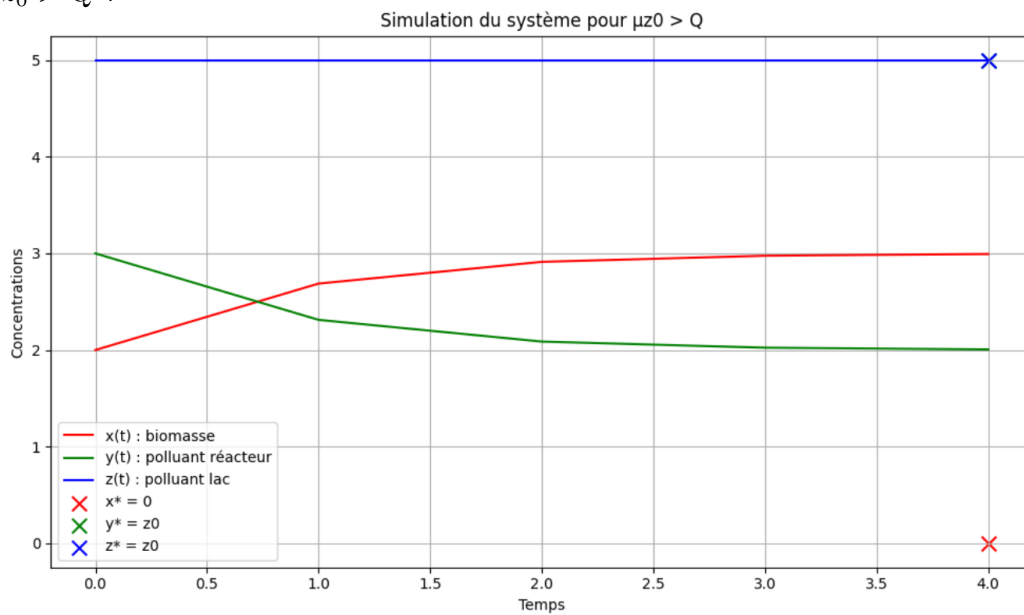
- **Observations :** Les trajectoires convergent toutes vers le point 1.
- **Interprétation :** La biomasse s'éteint $x \rightarrow 0$ et les concentrations en polluant se stabilisent à $y^* = z^* = z_0$, confirmant la stabilité analytique.

$$\mu z_0 = Q :$$

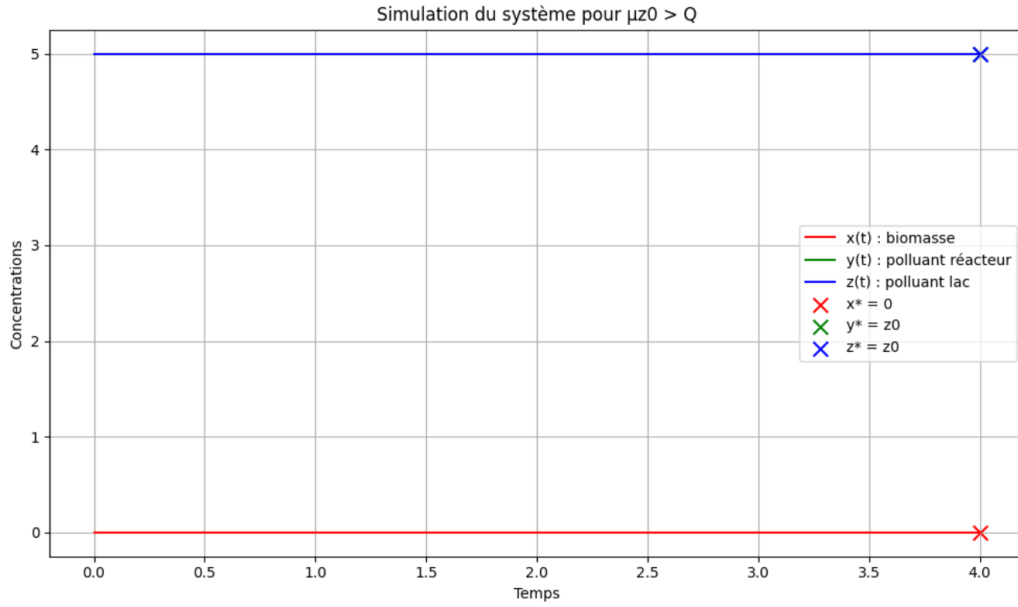


- **Observations** : Convergence plus lente vers le point 1.
- **Interprétation** : La condition critique $\mu z_0 = Q$ induit une dynamique marginalement stable, où le système met plus de temps à atteindre l'équilibre.

$$\mu z_0 > Q :$$



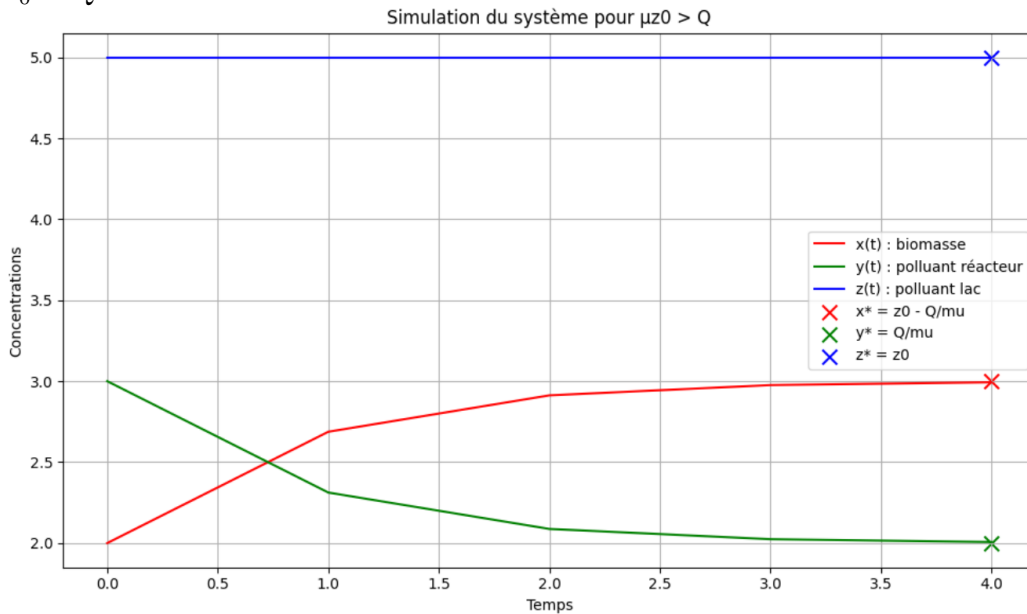
- **Observations** : Les trajectoires s'éloignent du point $(0, z_0, z_0)$.
- **Interprétation** : Ce point n'est pas stable.



- **Observations** : Les trajectoires restent sur le point $(0, z_0, z_0)$.
- **Interprétation** : La marginalité est démontrée, conduisant le système vers un autre équilibre (Point 2).

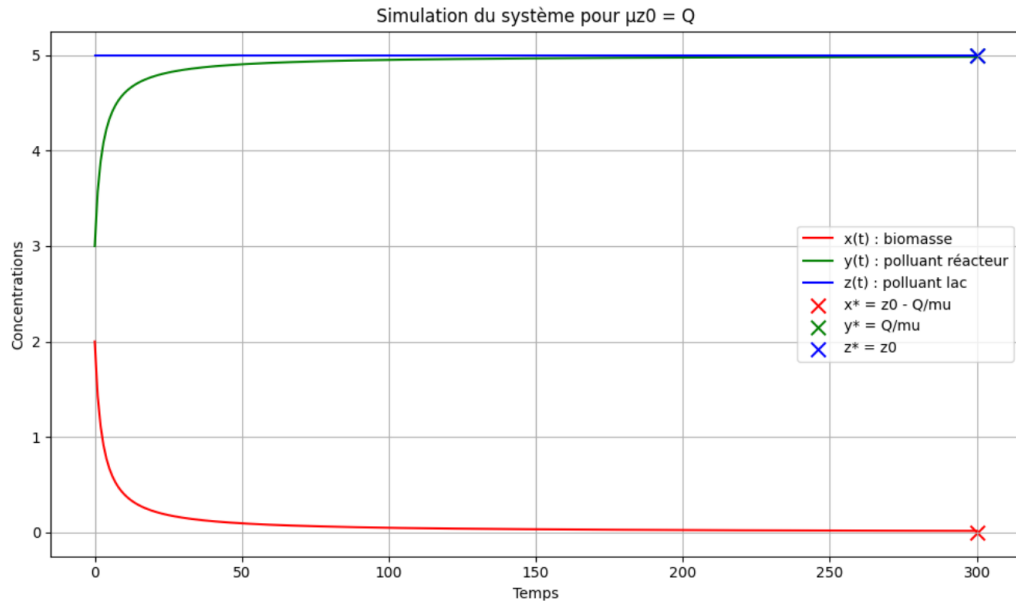
Point 2 : $(x^*, y^*, z^*) = (z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu}, z_0)$

$\mu z_0 > Q$:



- **Observations** : Convergence rapide vers le point critique 2.
- **Interprétation** : La biomasse persiste $x > 0$ et les polluants se stabilisent à $y^* = \frac{Q}{\mu}$, validant la stabilité.

$\mu z_0 = Q$:

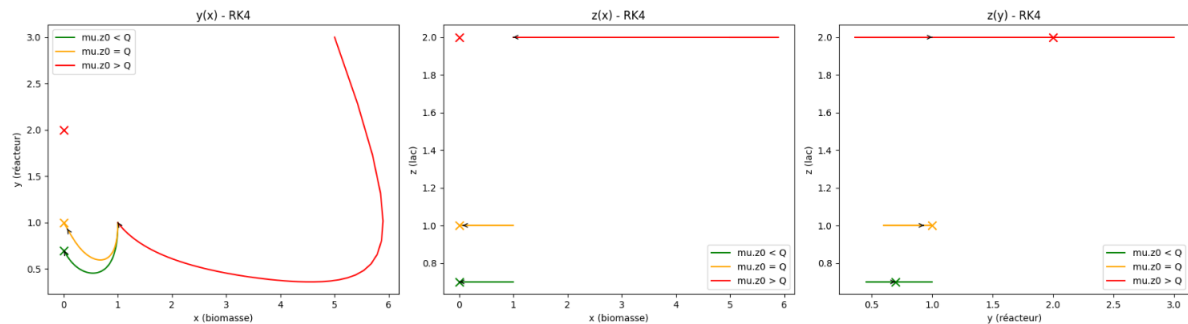


- **Observations** : Le point 2 coïncide avec le point 1, avec convergence directe.
- **Interprétation** : C'est une transition critique où les deux points d'équilibre 1 et 2 fusionnent.

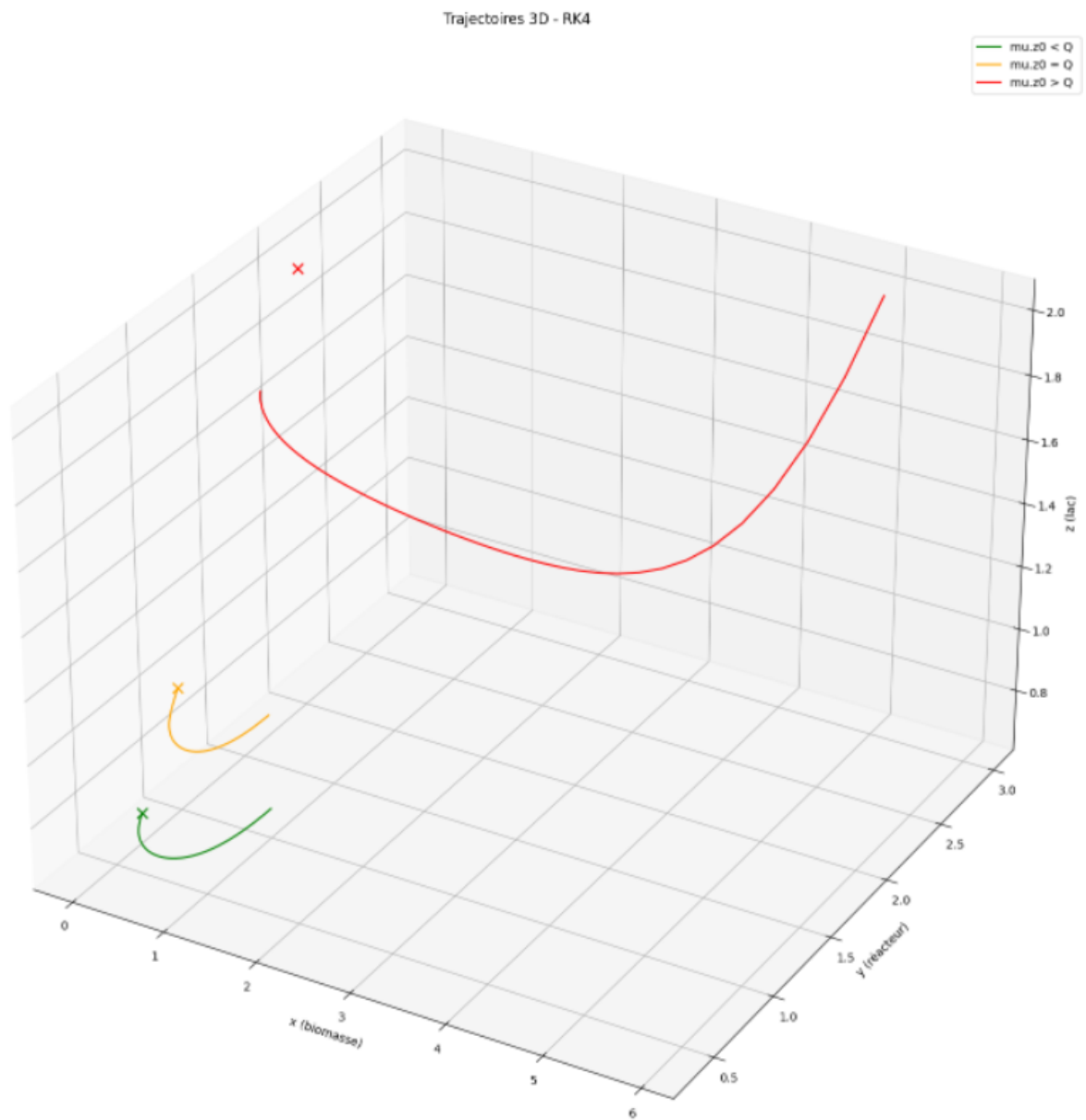
Résumé des conditions de stabilité

Point d'équilibre	Condition de stabilité	Stabilité
$(0, z_0, z_0)$	$\mu z_0 < Q$	Stable
$(0, z_0, z_0)$	$\mu z_0 = Q$	Stable
$(0, z_0, z_0)$	$\mu z_0 > Q$	Marginal
$(z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu}, z_0)$	$z_0 > \frac{Q}{\mu}$	Stable
$(z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu}, z_0)$	$z_0 = \frac{Q}{\mu}$	Stable

Par curiosité, on souhaite visualiser les portraits de phase afin de valider une deuxième fois nos résultats théoriques par des simulations : $y(t)$ en fonction de $x(t)$, $z(t)$ en fonction de $x(t)$, et $z(t)$ en fonction de $y(t)$, pour voir le comportement des concentrations en biomasse et en polluant dans le lac et le bioréacteur.



Voilà ce que ça donne en 3D :



On remarque sur ces simulations la stabilité et la marginalité des points critiques qu'on a considérés précédemment.

B. Pour $\epsilon > 0$

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre lorsque $\epsilon > 0$, nous allons suivre une démarche similaire à celle utilisée pour $\epsilon = 0$, en tenant compte de la perturbation introduite par ϵ .

(a) Matrice Jacobienne du système

Le système complet est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu xy - Qx = f(x, y) \\ \dot{y} = -\mu xy + Q(z - y) = g(x, y, z) \\ \dot{z} = \epsilon Q(y - z) = h(x, y, z) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne J du système s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu y - Q & \mu x & 0 \\ -\mu y & -\mu x - Q & Q \\ 0 & \epsilon Q & -\epsilon Q \end{pmatrix}$$

(b) Recherche des points d'équilibre

On cherche (x^*, y^*, z^*) tel que $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mu x^* y^* - Q x^* = 0 \\ -\mu x^* y^* + Q(z^* - y^*) = 0 \\ \epsilon Q(y^* - z^*) = 0 \implies y^* = z^* \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^* = 0 \text{ ou } y^* = \frac{Q}{\mu} \\ x^* = 0 \text{ ou } y^* = 0 \\ y^* = z^* \end{cases}$$

1. **Cas $x^* = 0$:** y^* est libre d'où le point singulier $(0, y^*, y^*)$, où y^* est arbitraire. C'est un premier cas intéressant à étudier.
2. **Cas $y^* = 0$:** Le point singulier est $(0, 0, 0)$. Ce cas n'est pas très intéressant à étudier car aucune des concentrations ne va varier au cours du temps et étudier la dépollution d'un lac dans ce cas est alors inutile.
3. **Cas $y^* = \frac{Q}{\mu}$:** Le point singulier est $(0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$. C'est un deuxième cas intéressant à étudier.

Conclusion pour $\epsilon > 0$

Tous les points d'équilibre sont de la forme :

- **Point 1 :** $(0, y^*, y^*)$.
- **Point 2 :** $(0, 0, 0)$.
- **Point 3 :** $(0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$.

(c) Analyse de stabilité des points d'équilibre

Point 1 : $(0, y^*, y^*)$

Jacobienne évaluée en $(x, y, z) = (0, y^*, y^*)$:

$$J_{(0, y^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \mu y^* - Q & 0 & 0 \\ -\mu y^* & -Q & Q \\ 0 & \epsilon Q & -\epsilon Q \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda Id) = (\mu y^* - Q - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -Q - \lambda & Q \\ \epsilon Q & -\epsilon Q - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant du bloc 2×2 :

$$\begin{aligned} \det &= (-Q - \lambda)(-\epsilon Q - \lambda) - Q \cdot \epsilon Q \\ &= \lambda^2 + (Q + \epsilon Q)\lambda + Q\epsilon Q - Q\epsilon Q \\ &= \lambda^2 + Q(1 + \epsilon)\lambda \end{aligned}$$

Donc :

$$\det(J - \lambda I) = (\mu y^* - Q - \lambda)(\lambda + Q(1 + \epsilon))\lambda$$

Valeurs propres :

- $\lambda_1 = \mu y^* - Q < 0$?
- $\lambda_2 = 0$
- $\lambda_3 = -Q(1 + \epsilon) < 0$

Stabilité :

- Si $\mu y^* < Q$: $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 < 0 \Rightarrow$ **on ne sait pas** \rightarrow stable ? instable ? marginal ?
- Si $\mu y^* = Q$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 < 0 \Rightarrow$ **on ne sait pas** \rightarrow stable ? instable ? marginal ?
- Si $\mu y^* > Q$: $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 < 0 \Rightarrow$ **pas stable** \rightarrow instable ? marginal ?

Point 2 : $(0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$

Jacobienne évaluée en $(x, y, z) = (0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$:

$$J_{(0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -Q & -Q & Q \\ 0 & \epsilon Q & -\epsilon Q \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -Q - \lambda & Q \\ \epsilon Q & -\epsilon Q - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant du bloc 2×2 :

$$\begin{aligned}
\det &= (-Q - \lambda)(-\epsilon Q - \lambda) - Q \cdot \epsilon Q \\
&= \lambda^2 + (Q + \epsilon Q)\lambda + Q\epsilon Q - Q\epsilon Q \\
&= \lambda^2 + Q(1 + \epsilon)\lambda
\end{aligned}$$

Donc :

$$\det(J - \lambda Id) = -\lambda(\lambda + Q(1 + \epsilon))\lambda$$

Valeurs propres :

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 0$
- $\lambda_3 = -Q(1 + \epsilon) < 0$

Stabilité :

- Si $\mu y^* = Q$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 < 0 \Rightarrow$ **on ne sait pas** \rightarrow stable ? instable ? marginal ?

(d) Validation par simulations numériques

Ici, on doit faire une première hypothèse ! Contrairement au cas $\epsilon = 0$, notre point y^* n'est pas facile à calculer car elle ne dépend pas des conditions initiales et des paramètres fixés. Pour l'estimer, nous allons supposer que le système conserve son énergie, c'est-à-dire que $x + y + z$ se conserve au cours du temps. Ainsi :

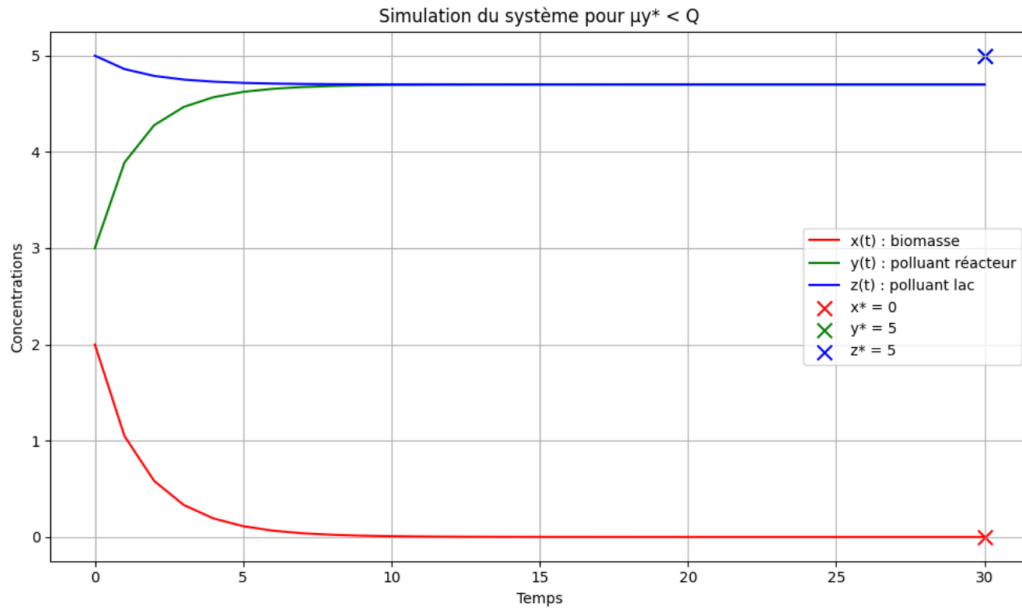
$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0$$

$$x + y + z = \text{constante} = x_0 + y_0 + z_0$$

On pourra donc effectuer une première simulation pour le cas 1 $\mu y^* < Q$ où on ignore si le point fixe $(0, y^*, y^*)$ est stable pour avoir une valeur plus précise de y^* . Nous pourrons ensuite effectuer les tests de stabilité et d'instabilité pour les cas $\mu y^* = Q$ et $\mu y^* < Q$ dont on cherche la nature stable, instable, ou marginale.

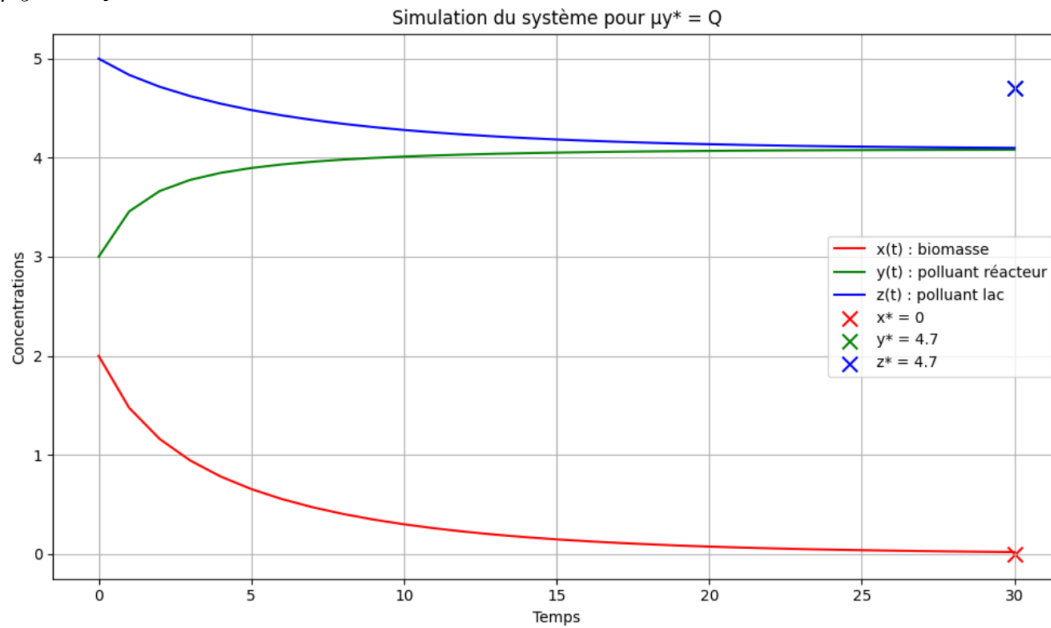
Point 1 : $(x^*, y^*, z^*) = (0, y^*, y^*)$

$\mu y^* < Q$:



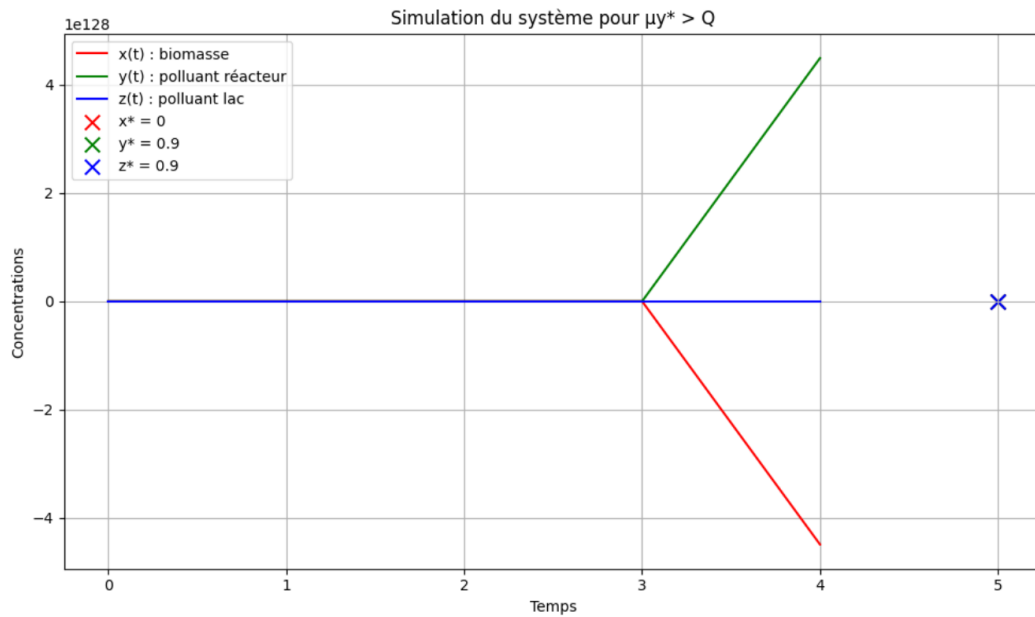
- **Observations** : Convergence vers le point 1 avec $y^* \approx (y_0 + z_0)/2 = 5$. On a une valeur plus précise de $y^* \approx 4.7$.
- **Interprétations** : La biomasse disparaît et les polluants s'homogénéisent $y^* = z^*$, comme attendu.

$\mu y^* = Q$:



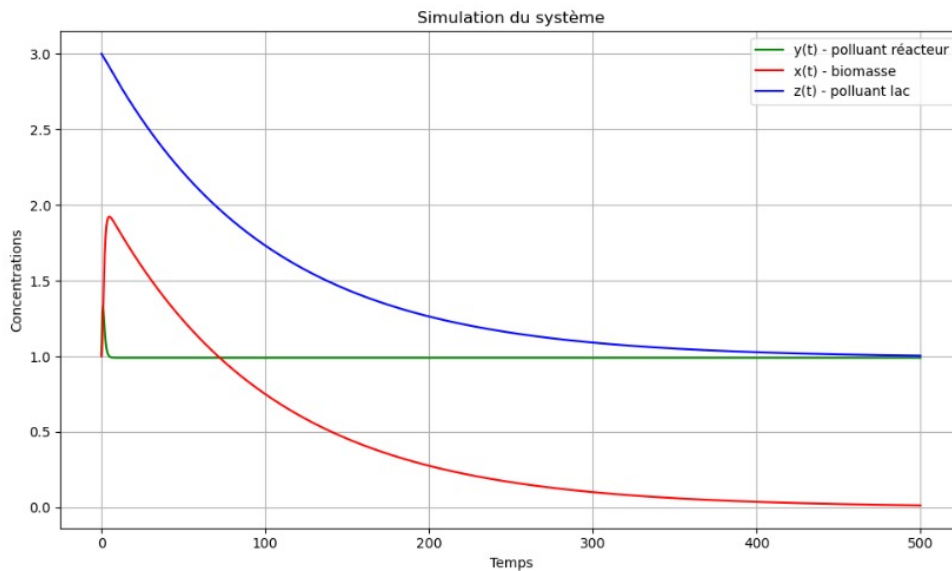
- **Observations** : Comme nous avons modifié les valeurs de Q et de μ , celle du point d'équilibre a également changé. On observe convergence vers ce point 1 où $y^* \approx 4.1$.
- **Interprétations** : Le point critique change, donc notre système montre une stabilité marginale sensible aux perturbations.

$\mu y^* > Q$:



- **Observations** : La solution diverge très vite.
- **Interprétations** : Le bioréacteur ne peut pas éliminer assez de polluant, entraînant une explosion de la biomasse. Le système est instable.

Point 2 : $(x^*, y^*, z^*) = (0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$



- **Observations** : Convergence vers le point 2.
- **Interprétations** : La biomasse disparaît et les polluants s'homogénéisent $y^* = z^*$, comme attendu.

Résumé des conditions de stabilité

Point d'équilibre	Condition de stabilité	Stabilité
$(0, y^*, y^*)$	$\mu y^* < Q$	Stable
$(0, y^*, y^*)$	$\mu y^* = Q$	Stable
$(0, y^*, y^*)$	$\mu y^* > Q$	Instable
$(0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$	Toujours	Stable

L'ajout du terme de couplage $\epsilon > 0$ introduit une dynamique lente entre y et z , mais ne modifie pas fondamentalement les conditions de stabilité déterminées par les paramètres μ , Q et z_0 . Il agit comme un ralentisseur d'ajustement entre la variable intermédiaire z et le compartiment y .

5. Autre approche du système

Maintenant, nous allons tenter une autre approche. On a vu qu'on ne peut pas connaître la valeur exacte du point critique $(0, y^*, y^*)$. De plus, on a constaté avec les simulations précédentes que les évolutions des concentrations pour celles dans le bioréacteur et celles dans le lac ne se passent pas à la même vitesse. Nous avons donc décidé de considérer deux échelles de temps distinctes : celle du bioréacteur (t), et celle du lac (T). Intéressons-nous à l'évolution de $x(t)$, $y(t)$, et de $z(t)$ à l'échelle du bioréacteur : c'est le cas où $\epsilon = 0$. Justifions d'abord le choix de cette seconde approche.

(a) Justification mathématique du comportement lent-rapide

Étape 1 : Borne uniforme

On montre que $(x_\epsilon, y_\epsilon, z_\epsilon)$ sont uniformément bornés indépendamment de ϵ .

— L'équation suivante montre que $\epsilon y_\epsilon + z_\epsilon$ est décroissante :

$$(\epsilon y_\epsilon + z_\epsilon)' = -\epsilon \mu x_\epsilon y_\epsilon \leq 0$$

Ainsi z_ϵ est borné par sa valeur initiale.

— De plus, l'équation suivante permet, en utilisant la borne sur z_ϵ , de borner $x_\epsilon + y_\epsilon$ par des arguments classiques sur les équations différentielles linéaires :

$$(x_\epsilon + y_\epsilon)' = Q(z_\epsilon - (x_\epsilon + y_\epsilon))$$

Ainsi, x_ϵ , y_ϵ et z_ϵ restent uniformément bornés sur tout intervalle $[0, T]$, indépendamment de ϵ .

Étape 2 : Application du théorème d'Ascoli-Arzelà

- Les fonctions $(x_\epsilon, y_\epsilon, z_\epsilon)$ sont uniformément bornées.
- Leurs dérivées sont elles aussi bornées, car ce sont des fonctions polynomiales de variables bornées.

Ainsi, par le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous-suite $(x_{\epsilon_n}, y_{\epsilon_n}, z_{\epsilon_n})$ qui converge uniformément vers une limite (x, y, z) sur tout compact $[0, T]$.

Étape 3 : Passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$

En passant à la limite dans le système :

- Comme $z'_\epsilon(t) = \epsilon Q(y_\epsilon(t) - z_\epsilon(t))$, on obtient $z'(t) = 0 \Rightarrow z(t)$ est constante sur l'échelle rapide.
- Les équations sur x_ϵ et y_ϵ passent à la limite directement, donnant

$$\begin{cases} x'(t) = \mu x(t)y(t) - Qx(t), \\ y'(t) = -\mu x(t)y(t) + Q(z - y(t)) \end{cases}$$

avec z considéré comme fixé.

Étape 4 : Adaptation dynamique de (x, y) à $z(t)$

Remarque importante : Même si $z(t)$ évolue lentement sur de grandes échelles de temps, (x, y) convergent *rapidement* vers l'équilibre associé à la valeur actuelle de $z(t)$. Ainsi, à chaque instant, (x, y) sont proches de leur équilibre correspondant au $z(t)$ **actuel**.

Ce phénomène est connu sous le nom d'*adiabatic following* dans la théorie des systèmes singulièrement perturbés. Au cours de l'analyse de notre système, nous ferons appel à cette méthode pour proposer une deuxième approche de notre problème.

Étape 5 : Évolution lente de $z(t)$

Sur une échelle de temps lente, en tenant compte de la réadaptation rapide de (x, y) , $z(t)$ évolue selon :

$$z'(t) = \varepsilon Q(y_\infty(z(t)) - z(t)),$$

avec $y_\infty(z)$ désignant l'équilibre rapide dépendant de z .

(b) Approximations numériques et simplifications

En pratique numérique, sur un petit intervalle de temps, on considère que $z(t)$ ne varie que très peu. Ainsi :

- $y_\infty(z(t))$ est considéré comme constant sur un pas de temps court.
- (x, y) sont calculés en supposant que z est figé pendant chaque pas.
- Cette approche repose sur la séparation des échelles entre l'ajustement rapide de (x, y) et la variation lente de z .

Cela permet d'utiliser des schémas numériques explicites efficaces (comme Runge-Kutta 4) sans avoir à recalculer continuellement les états d'équilibre à chaque instant infinitésimalement petit.

Conclusion

Le comportement lent-rapide du système est rigoureusement justifié par la séparation des échelles et la convergence rapide de (x, y) vers l'équilibre dépendant de z . La méthode de Runge-Kutta 4 permet une résolution efficace tout en respectant cette structure du problème.

Dans notre problème de Cauchy défini au début du contexte du problème, la fonction f n'est pas globalement lipschitzienne sur \mathbb{R}^3 , en raison des termes quadratiques xy . Toutefois, elle est continue et localement lipschitzienne, ce qui suffit pour garantir une solution unique locale par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le système devient donc sous cette condition le même que lors de notre première approche :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu xy - Qx = f(x, y) \\ \dot{y} = -\mu xy + Q(z_0 - y) = g(x, y) \end{cases}$$

On trouve les mêmes points critiques $(z_0 - \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu}, z_0)$, les mêmes valeurs propres, et donc les mêmes conditions de stabilité pour les deux points critiques. Les simulations

numériques sont les mêmes et confirment toujours les résultats de stabilité des points critiques.

Passons maintenant à l'analyse de $z(t)$, l'évolution de la concentration en biomasse de polluant dans le lac à une échelle de temps plus longue que celle du lac. On a donc $x(t) = x_\infty = z(t) - \frac{Q}{\mu}$ et $y(t) = y_\infty = \frac{Q}{\mu}$ d'où le système suivant :

$$\begin{cases} \mu x_\infty y_\infty - Q x_\infty = 0 \\ -\mu x_\infty y_\infty + Q(z(t) - y_\infty) = 0 \\ \epsilon Q(y_\infty - z(t)) = 0 \end{cases}$$

1. **Troisième équation :**

$$\epsilon Q(y_\infty - z(t)) = 0 \implies y_\infty = z(t) = \frac{Q}{\mu}$$

Donc $y_\infty = z(t)$.

Point d'équilibre : $(0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$

Ce système a comme unique point singulier $(0, \frac{Q}{\mu}, \frac{Q}{\mu})$. Les simulations ont été déjà faites plus haut, on a observé une stabilité du point singulier.

Voici l'expression de la fonction $z(t)$:

$$z'(t) = Q\epsilon(y_\infty - z(t)) \implies z(t) = C \exp(-Q\epsilon t) + y_\infty$$

Or en $t = 0$: $z(t) = z_0$

$$\text{D'où : } z(t) = (z_0 - \frac{Q}{\mu}) \exp(-Q\epsilon t) + y_\infty$$

Maintenant que nous connaissons l'expression de $z(t)$ la concentration en polluant dans le lac qu'on cherche à dépolluer, il convient de trouver les meilleurs paramètres pour dépolluer le lac le plus rapidement possible. Nous allons prendre plusieurs valeurs de débit Q entrée/sortie constant et déterminer le débit optimal.

6. Approfondissement

(a) Discussion du débit Q

Optimisation du temps de dépollution : débit constant

Nous considérons le modèle réduit sur $z(t)$:

$$z'(t) = \epsilon Q(\frac{Q}{\mu} - z(t))$$

La solution explicite de cette équation différentielle est donnée par :

$$z(t) = \frac{Q}{\mu} + (z_0 - \frac{Q}{\mu})e^{-\epsilon Q t}$$

où z_0 est la concentration initiale.

On cherche à déterminer le temps $T(Q)$ nécessaire pour atteindre un seuil z_1 :

$$z(T(Q)) = z_1.$$

En résolvant l'équation, on obtient :

$$T(Q) = -\frac{1}{\varepsilon Q} \ln\left(\frac{z_1 - \frac{Q}{\mu}}{z_0 - \frac{Q}{\mu}}\right).$$

Justification de l'existence d'un minimum

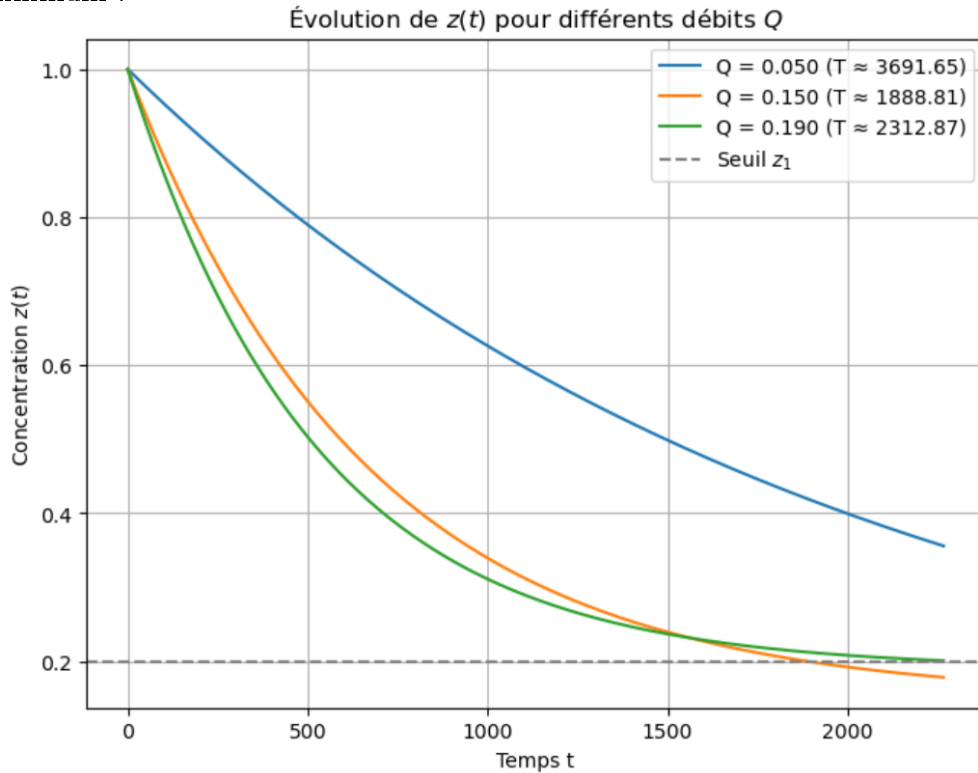
La fonction $T(Q)$ est bien définie pour $Q \in (0, \mu z_1)$. Sur cet intervalle :

- $T(Q)$ est continue
- $\lim_{Q \rightarrow 0^+} T(Q) = +\infty$
- $\lim_{Q \rightarrow \mu z_1^-} T(Q) = +\infty$

Ainsi, $T(Q)$ admet un minimum sur $(0, \mu z_1)$. Ce minimum est atteint pour une valeur optimale Q^* .

Méthode numérique

Nous utilisons une méthode de descente pour trouver numériquement Q^* qui minimise $T(Q)$, en utilisant `scipy.optimize.minimize_scalar` avec contrainte sur l'intervalle. On trouve numériquement $Q_{optimal} \approx 0.15$. La simulation assure bien l'existence et la valeur de ce minimum :



Optimisation du temps de dépollution : débit variable

Motivation

Rechercher un débit $Q(t)$ optimal revient à optimiser sur l'ensemble des fonctions admissibles $Q(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Cet ensemble est de dimension infinie, rendant l'optimisation directe impossible en pratique.

Pour contourner cette difficulté, nous adoptons une méthode de discrétisation :

- On découpe l'intervalle temporel en N sous-intervalles
- On considère que $Q(t)$ est **constant sur chaque sous-intervalle**
- La recherche porte donc sur N variables Q_i , au lieu d'une fonction continue

Méthodologie

1. On construit une suite de seuils intermédiaires décroissants :

$$z_0 > z_1 > z_2 > \dots > z_N = z_1 \quad (\text{valeurs imposées})$$

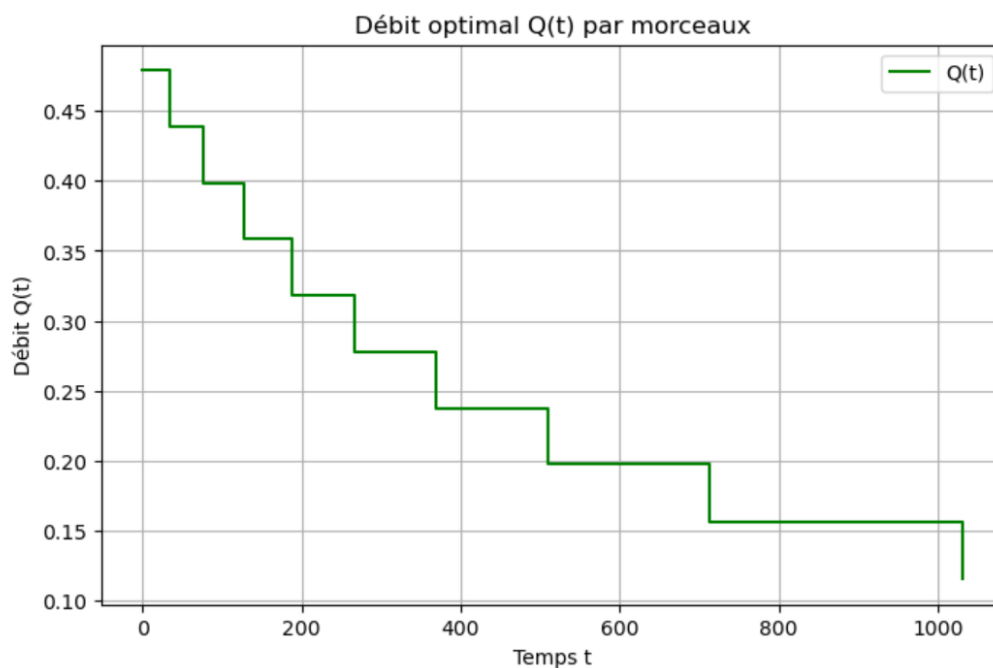
2. À chaque intervalle $[z_i, z_{i+1}]$, on cherche le débit constant Q_i qui minimise le temps pour atteindre z_{i+1} en partant de z_i .
3. Pour un débit constant Q , la solution reste de la forme :

$$z(t) = \frac{Q}{\mu} + (z_i - \frac{Q}{\mu})e^{-\varepsilon Q t}$$

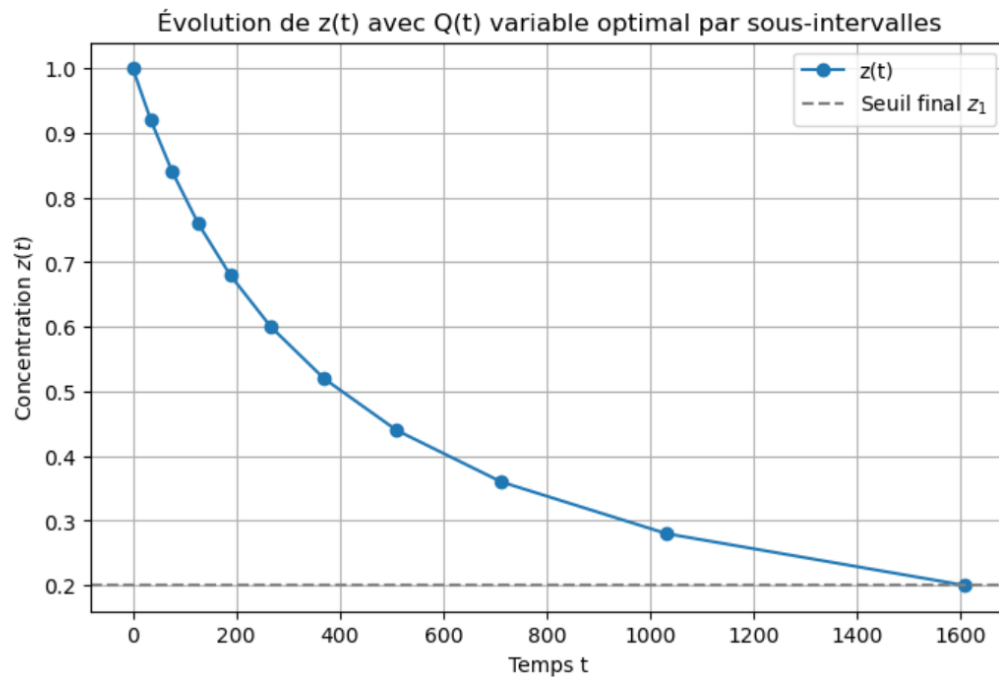
4. Le temps $T_i(Q)$ pour passer de z_i à z_{i+1} est donné par :

$$T_i(Q) = -\frac{1}{\varepsilon Q} \ln\left(\frac{z_{i+1} - \frac{Q}{\mu}}{z_i - \frac{Q}{\mu}}\right)$$

5. Pour chaque intervalle, on minimise $T_i(Q)$ numériquement pour trouver Q_i^* :

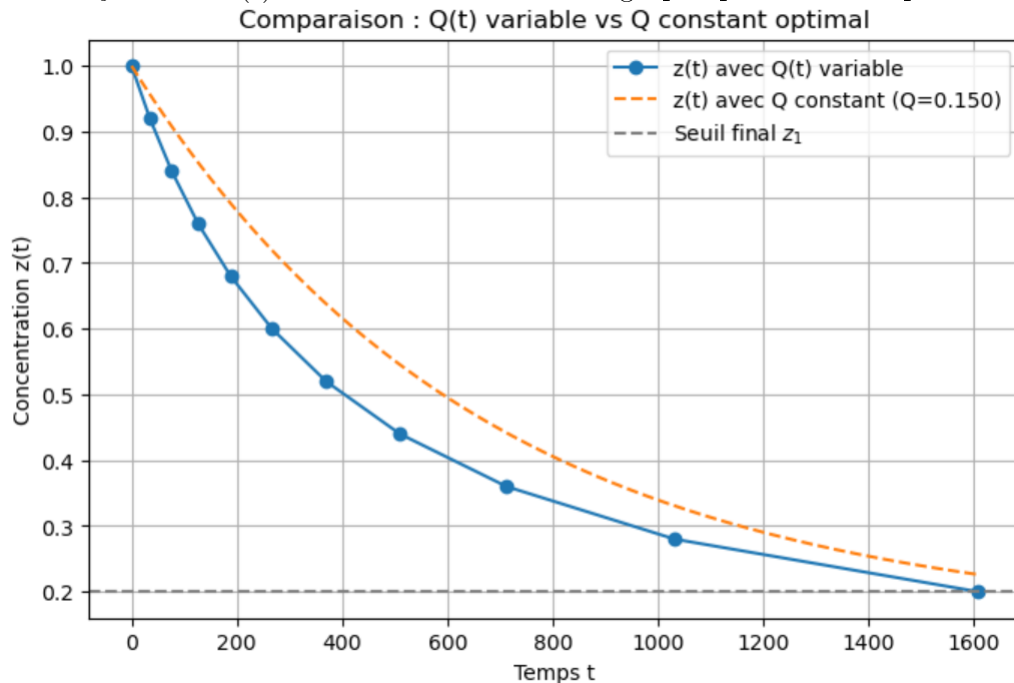


6. On reconstruit ensuite la trajectoire $(z(t), Q(t))$ morceau par morceau.



Comparaison avec la solution à débit constant

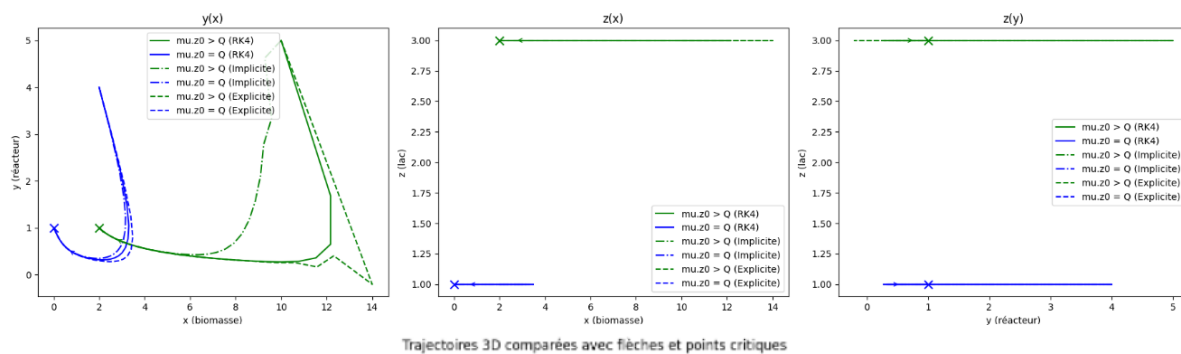
Enfin, pour évaluer l'efficacité de la méthode variable par morceaux, on compare la trajectoire obtenue avec celle correspondant à l'utilisation du débit constant optimal Q^* . Les deux trajectoires $z(t)$ sont tracées sur le même graphe pour une comparaison visuelle :



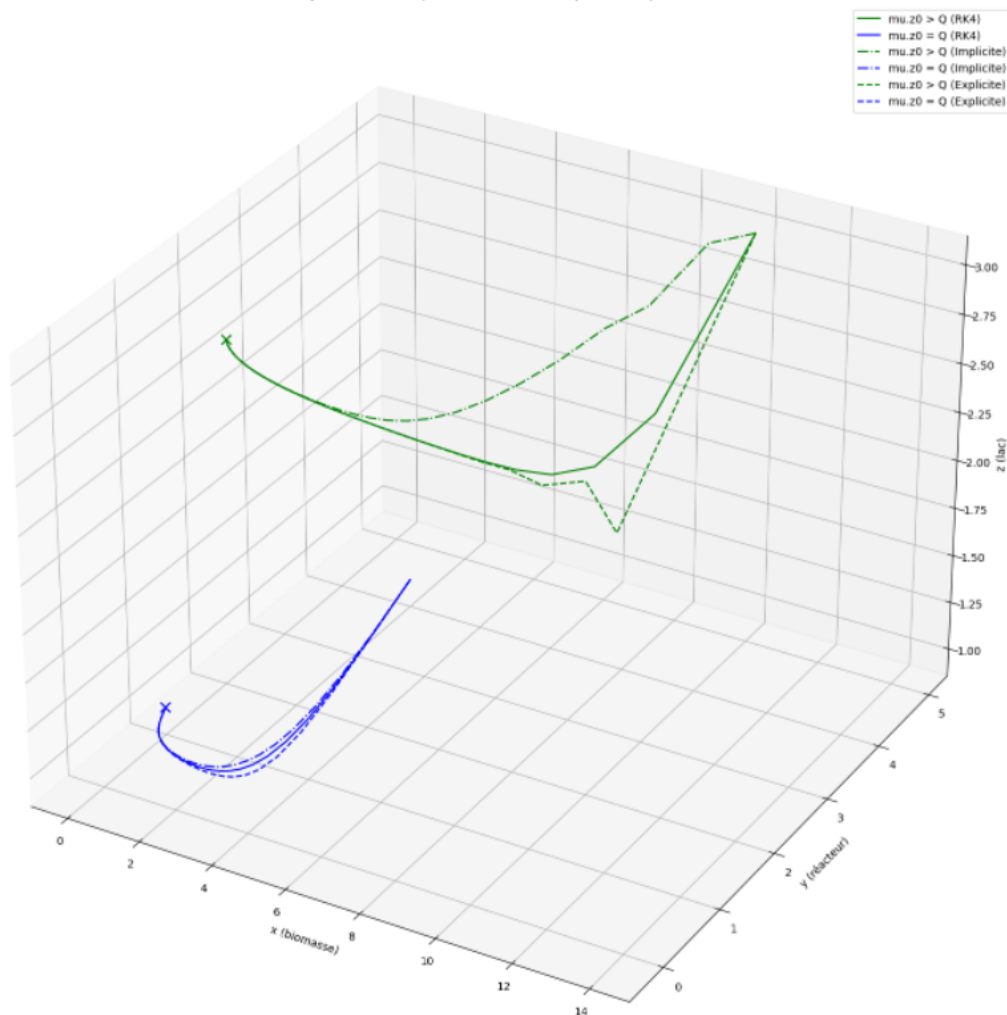
On tire de cette simulation que pour dépolluer plus rapidement notre lac, il convient de réajuster le débit Q à pas de temps régulier.

(b) Comparaison des méthodes numériques

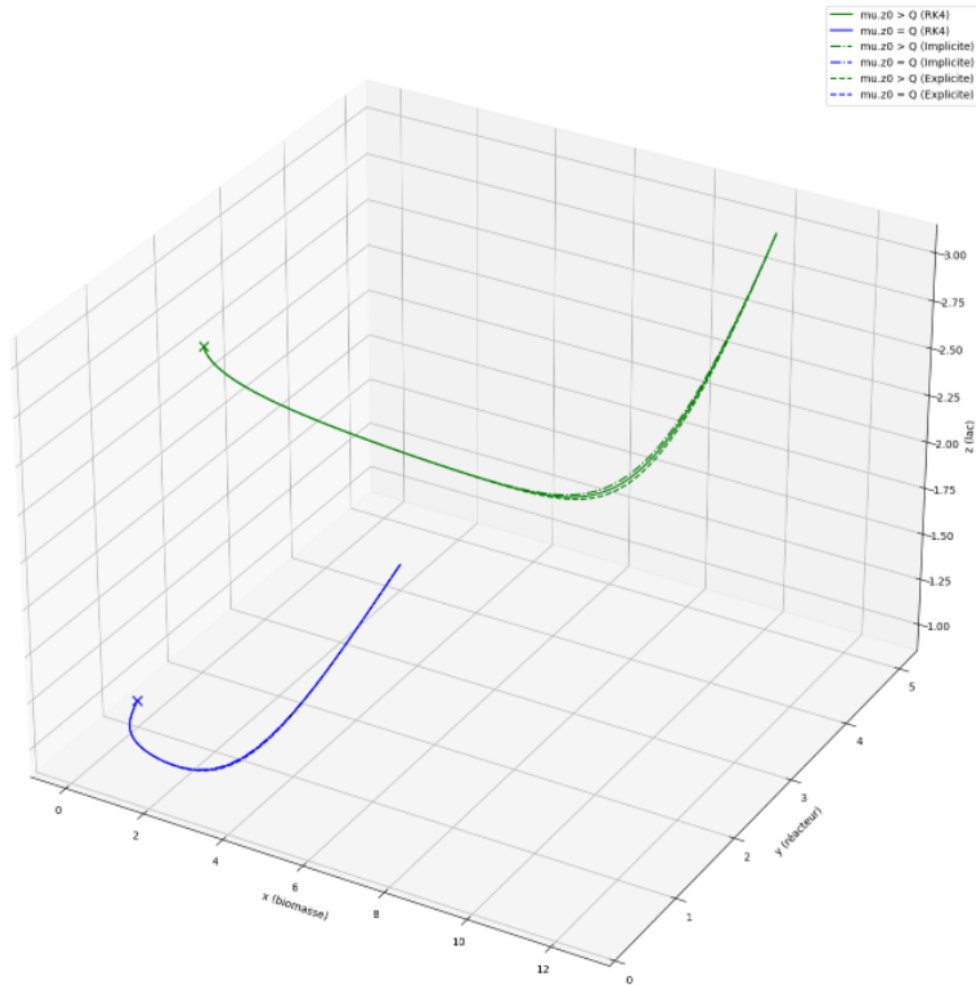
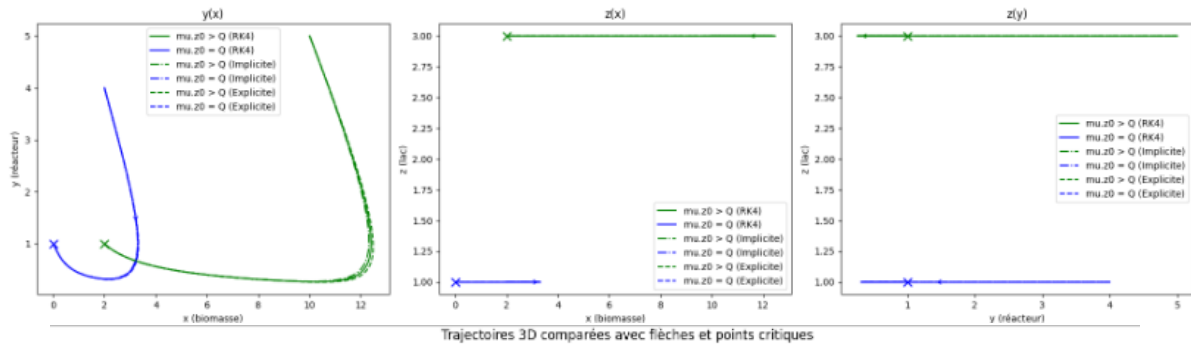
Pour pousser notre analyse un peu plus loin, on souhaite maintenant comparer la méthode de Runge-Kutta 4 avec d'autres méthodes numériques : Euler explicite et Euler implicite. Nous avons tracé les portraits de phase de $y(x(t))$, $z(y(t))$ et $z(x(t))$, ainsi qu'un modèle 3D pour une meilleur analyse de l'efficacité de chaque méthode.



Trajectoires 3D comparées avec flèches et points critiques



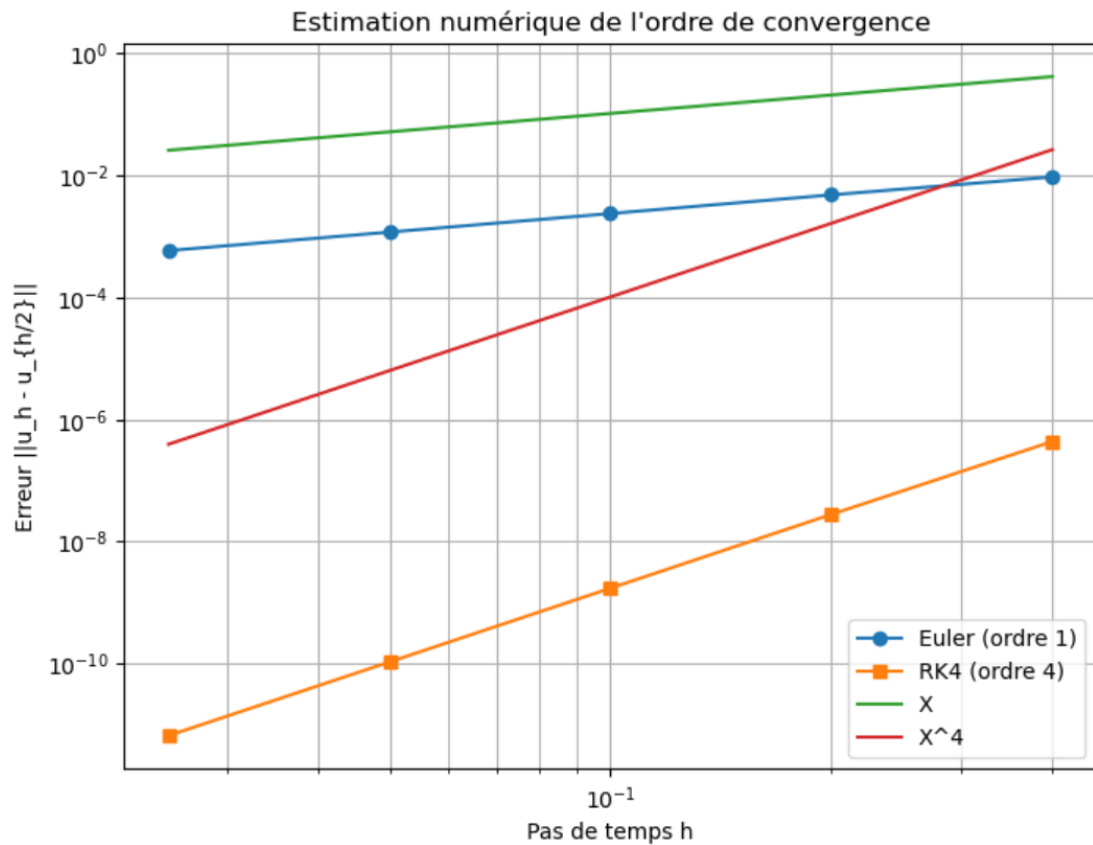
On constate que les 3 schéma numériques mènent au même résultat, mais ils évoluent différemment. Essayons d'augmenter le nombre de points :



On remarque que les méthodes d'Euler explicite et Euler implicite ont besoin d'un pas de temps plus petit pour converger vers la même solution que rk4 et avoir la même tendance globale.

(c) Ordre de convergence des méthodes numériques

Regardons de plus près leur ordre de convergence avec une simulation :

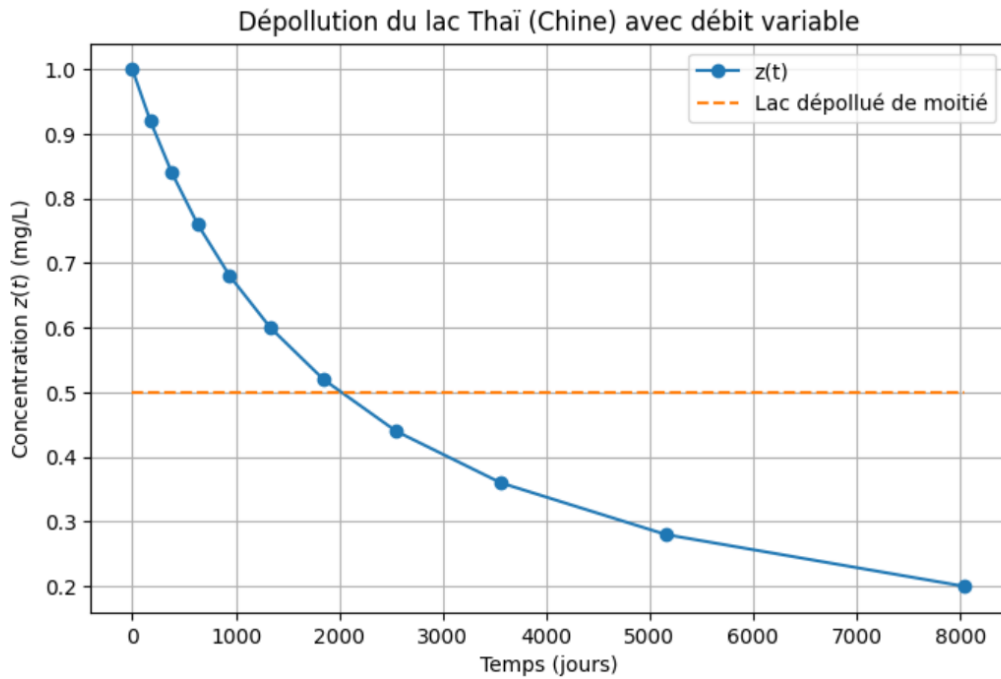


On a tracé une pente d'ordre 1 et une pente d'ordre 4 pour comparer les méthodes d'Euler et RK4. La méthode d'Euler, étant d'ordre 1, montre une erreur qui décroît linéairement avec le pas de temps h (la pente est proche de 1 en échelle log-log), confirmant sa convergence d'ordre 1. En revanche, la méthode RK4 présente une pente d'ordre 4, ce qui signifie que son erreur décroît beaucoup plus rapidement, comme $\mathcal{O}(h^4)$.

Cela illustre clairement la supériorité de RK4 en termes de précision et de vitesse de convergence par rapport à la méthode d'Euler, surtout pour des pas de temps petits. Ces résultats sont cohérents avec la théorie, car RK4 utilise plus d'évaluations de fonctions par pas pour atteindre un ordre plus élevé, réduisant ainsi l'erreur d'approximation plus efficacement.

(c) Application numérique (lac Thaï en Chine)

Nous allons simuler la dépollution du lac Thaï en Chine. Son taux de pollution $z_0 = 1.0 \text{ mg.L}^{-1}$. Sa superficie est de 2250 km^2 pour 2 m de profondeur, ce qui totalise un volume global $V_L = 4.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3$. Nous utiliserons un bioréacteur de volume $V_R = 4.5 \cdot 10^5 \text{ m}^3$ (profondeur : 50 m , longueur : 100 m , largeur : 90 m). Nous avons fait le choix d'utiliser une biomasse de loi de croissance $\mu = 20 \text{ mg.L}^{-1} \cdot \text{j}^{-1}$, et un débit $Q(t)$ sur lequel on peut agir au cours du temps, afin d'accélérer la dépollution du lac. Voici la simulation de la dépollution de ce lac avec ces paramètres :



La résultat est concluant. En effet, ce lac immense qui est observable depuis l’ISS sans appareil peut être dépollué grâce à notre méthode en un peu plus de 20 ans. De plus, il est dépollué à 50% au bout de 5 ans et demi seulement ! Cette performance inédite de notre bioréacteur ne peut que témoigner de l’efficacité de notre méthode de dépollution de lac, et de la justesse de notre modèle. Imaginez ce que cela donnerait sur de plus petits lacs ou sur des cours d’eau comme notre fleuve préféré : La Seine.

7. Conclusion générale

Ce projet a permis d’étudier la dynamique de dépollution d’un lac à travers une modélisation mathématique et l’utilisation de méthodes numériques. A partir du problème sous forme d’un système d’équations différentielles non linéaire, nous avons pu simuler l’évolution de la concentration en polluants dans différentes configurations de débits, constants ou variables. Pour résoudre ces équations, nous avons utilisé des schémas numériques adaptés, notamment des méthodes de rk4, d’Euler explicite et implicite, permettant de comparer la stabilité, la précision et l’efficacité de chaque approche.

Les simulations ont montré qu’un débit constant optimal permet une dépollution correcte, mais qu’une stratégie avec un débit variable en fonction du temps permet une convergence plus rapide vers un état sain du lac. Ces résultats mettent en lumière l’intérêt d’outils numériques pour optimiser les politiques environnementales. Ils soulignent également le potentiel de stratégies dynamiques, bien que plus complexes à concevoir et à contrôler, pour améliorer la gestion de systèmes écologiques.

8. Ouverture

Au cours de nos analyses, nous avons à plusieurs reprises remis notre modèle en question. Est-ce un bon modèle ? Permet-il vraiment de modéliser la dépollution d’un lac ? Quelles sont ses limites ? Est-il possible de l’étendre à plus grande échelle ? Est-ce une

solution durable ? Parmi toutes ces questions, nous avons listé les points qui mériteraient réflexion pour un approfondissement plus poussé et une précision du modèle numérique :

1. Approfondissement du modèle

- Etendre l'étude à des systèmes plus complexes, comme la prise en compte de plusieurs types de polluants ou l'impact des variations saisonnières sur la croissance de la biomasse.
- Explorer des modèles stochastiques pour intégrer les incertitudes liées aux paramètres environnementaux ou biologiques.

2. Optimisation et innovation technologique

- Développer des algorithmes de contrôle adaptatif pour ajuster le débit $Q(t)$ en temps réel, en combinant méthodes numériques et intelligence artificielle
- Concevoir des bioréacteurs plus efficaces, en collaboration avec des ingénieurs, pour des applications à grande échelle (lacs, rivières, zones industrielles)

3. Enjeux sociétaux et durabilité

- Évaluer l'impact économique et écologique de ces solutions pour une mise en œuvre réaliste et durable
- Sensibiliser les acteurs publics et privés à l'utilisation de tels modèles pour une gestion proactive des ressources en eau

Bibliographie

- Polycopié de cours : Stabilité des solutions et points singuliers
- Dépollution d'un bioréacteur, Inria (Institut national de recherche en sciences et technologies du numérique), 2011
- Modélisation Inria, Inria
- La modélisation des procédés biologiques de dépollution, Jérôme Harmand, Claude Lobry et Alain Rapaport, 22/05/2007